TULLIO LEVI-CIVITA

OPERE MATEMATICHE

Memorie e Note

PUBBLICATE
A CURA DELL'ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Volume terzo
1908 - 1916

NICOLA ZANICHELLI EDITORE
BOLOGNA 1957

OPERE MATEMATICHE DI TULLIO LEVI-CIVITA

COMITATO
PER L'EDIZIONE DELLE OPERE MATEMATICHE
DI TULLIO LEVI-CIVITA

FRANCESCO GIORDANI, *Presidente della Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali dell'Accademia Nazionale dei Lincei;*

UGO AMALDI;

GIULIO KRALL;

GIOVANNI LAMPARIELLO;

ENRICO PERSICO;

ANTONIO SIGNORINI;

ANGELO TONOLO.

TULLIO LEVI-CIVITA

OPERE MATEMATICHE

Memorie e Note

PUBBLICATE
A CURA DELL'ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Volume terzo
1908 - 1916

NICOLA ZANICHELLI EDITORE
BOLOGNA 1957

№ 309

Bologna - Monograf - X-1957

MEMORIE E NOTE

I.

SUI CAMPI ELETTROMAGNETICI PURI DOVUTI A MOTI PIANI PERMANENTI

« Atti Ist. Veneto », t. LXVII, parte II (1907-8), pp. 995-1010.

Fino a pochi anni or sono il fenomeno del movimento della elettricità era considerato soltanto sotto i due aspetti della conduzione (correnti galvaniche) e della convezione (trasporto in seno ad un nucleo coibente, come avviene ad es. per gli ioni elettrolitici).

Nello studio delle scariche nei gas rarefatti fu anzitutto esperita l'ipotesi convettiva, assimilandosi i raggi catodici ed affini ad un bombardamento di particelle *materiali* elettrizzate. Ma si dovette riconoscere che una tale ipotesi, senza essere in aperta contraddizione coi fatti osservati, implicava alcune conseguenze assai poco soddisfacenti circa la natura e le proprietà del materiale convettivo.

Fu allora avanzata, per opera specialmente dei signori ABRAHAM e KAUFMANN (1), una ipotesi che certamente non inceppa in analoghe obiezioni, poichè esclude a priori qualsiasi intervento di materia ponderabile, considerando il caso limite di un puro movimento di elettricità.

Il concetto è assai semplice, ma ne rimane in sulle prime complicata la rigorosa deduzione di previsioni concrete.

Infatti, una volta escluso l'involucro materiale, non è più lecito isolare una carica, risguardandola come un sistema con un numero finito di gradi di libertà (sei, o tre soltanto se si prescinde dalla rotazione). Conviene invece prender in considerazione un flusso continuo, i cui elementi si influenzano mutuamente.

Per evitare l'analisi del continuo e render possibile il conseguimento di risultati altrettanto precisi quanto quelli forniti dalla teoria convettiva, fu invocata un'ipotesi ausiliaria, perfettamente ragionevole in via d'approssimazione e d'assaggio, insostenibile come postulato rigoroso.

---

(1) Cfr. per notizie bibliografiche e più ampi ragguagli sull'argomento il mio rapporto *Sulla massa elettromagnetica*, « Nuovo Cimento », Ottobre 1907, pp. 3-36, oppure « Rivista di Scienza » (1907), vol. II, n. IV, pp. 387-412 [in queste « Opere »: vol. secondo, XXXV, pp. 587-613].

Alludo all'ipotesi che il moto delle cariche soddisfaccia a legami cinematici prestabiliti, in particolare che il moto di ogni carica seguiti ad essere rigido anche nell'ipotesi limite, in cui viene del tutto a mancare il nucleo coibente.

Ciò val quanto ammettere l'esistenza di forze molecolari, delle quali, non più che dei corrispondenti legami, si può dare giustificazione plausibile, almeno quando si mantengono le ordinarie premesse.

Se si vuol essere conseguenti, conviene rinunciare ad ogni intervento addizionale di forze vincolari, e discutere il movimento dell'elettricità, esprimendo che valgono le relazioni fondamentali dei campi elettromagnetici, ed inoltre che è nulla, per ciascuna carica elementare, la forza meccanica totale.

Ciò dà luogo ad un sistema differenziale (completo) il quale caratterizza i così detti *campi elettromagnetici puri.*

Ne ho dato un primo esempio [2], assegnando un tipo di soluzioni, che corrispondono ad un trasporto di elettricità per onde piane, e comprendono come caso particolare le ordinarie onde eteree, in cui il trasporto è nullo.

In una memoria, testè pubblicata, la Sig.na CAFFARATTI [3] ha determinato le soluzioni, che corrispondono a moti rigidi e stazionari.

Nel presente lavoro mi propongo di indicare un'altra categoria di soluzioni: tutte quelle che corrispondono a moti piani, aventi carattere stazionario.

Se si immagina dato l'ambiente, in cui deve svolgersi il moto, la questione si trova analiticamente ricondotta all'integrazione, per speciali condizioni ai limiti, dell'equazione

$$\Delta_2\varphi = \Phi'(\varphi)\,,$$

designando Φ' una funzione a priori indeterminata della sola φ.

Spero di poter prossimamente attestare in modo decisivo l'interesse dei campi elettromagnetici puri, traendone una spiegazione dei raggi catodici, esente da qualsiasi difficoltà.

1. - Richiamo delle equazioni fondamentali.

Si designino al solito con $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{E}$ ed $\boldsymbol{H}$ i tre vettori, che rappresentano la velocità del flusso di elettricità, la forza elettrica e la forza magnetica in un punto generico del campo elettromagnetico che si considera; con ϱ

---

(2) «Comptes Rendus», 19 Agosto 1907, pp. 417-420 [in queste «Opere»: vol. secondo, XXXIV, pp. 583-586].

(3) *Sui campi elettromagnetici puri*, «Nuovo Cimento», Maggio 1908, pp. 369-394.

la densità della distribuzione; con A la costante universale $1/c$ (c velocità della luce nell'etere).

Le equazioni di HERTZ sono allora, con notazioni vettoriali ben note,

$$\text{(I)} \qquad A\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = -\operatorname{rot}\boldsymbol{H} - 4\pi A\varrho\boldsymbol{v}\,,$$

$$\text{(II)} \qquad A\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} = \operatorname{rot}\boldsymbol{E}\,,$$

$$\text{(III)} \qquad \operatorname{div}\boldsymbol{E} = 4\pi\varrho\,,$$

$$\text{(IV)} \qquad \operatorname{div}\boldsymbol{H} = 0\,.$$

Esse presuppongono un sistema di riferimento *sinistrorso* (altrimenti bisognerebbe cambiare il segno al rot).

Ciò premesso, si ricordi che la legge elementare di LORENTZ (sintesi delle due leggi classiche di COULOMB e di BIOT e SAVART) esprime che l'unità di carica, posta in un punto generico di un campo elettromagnetico, subisce una forza meccanica $\boldsymbol{F}$, definita da

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{E} + A\boldsymbol{H}\wedge\boldsymbol{v}\,.$$

(Conformemente alle proposte dei sig.ri MARCOLONGO e BURALI-FORTI, uso il simbolo $\wedge$ per designare un prodotto vettoriale).

Il postulato fondamentale della meccanica esprime che, per un generico punto materiale,

$$\text{massa}\times\text{accelerazione} = \text{forza totale}\,.$$

Se si tratta di un campo elettromagnetico puro e se ne fissa un generico elemento di volume dS, deve porsi la massa eguale a zero, perchè si esclude l'intervento di materia ponderabile; d'altra parte, se si esclude anche ogni azione esterna, la forza totale (essendo ϱdS la carica elettrica) vale $\varrho dS\boldsymbol{F}$. Deve quindi sussistere in ogni punto del campo l'equazione

$$\varrho\{\boldsymbol{E} + A\boldsymbol{H}\wedge\boldsymbol{v}\} = 0\,.$$

Questa, assieme alle (I)–(IV), è caratteristica dei campi elettromagnetici puri *sotto il triplice aspetto materiale, cinematico e dinamico.*

Per maggior generalità, converrà limitarsi ad escludere l'intervento di masse ponderabili e di legami cinematici, e porre la questione in modo da poter, quando si voglia, tener conto anche di azioni esterne a un dato sistema di cariche.

Considereremo perciò un campo, *materialmente e cinematicamente puro*, il quale si trovi immerso in un campo elettromagnetico D, preventivamente assegnato, e non influenzabile, o almeno non sensibilmente influenzato dal campo puro. Supporremo in particolare che, nella regione, in cui ϱ (densità del campo puro) è diversa da zero, non risiedano masse elettriche spettanti a D.

In tal caso, dette $\boldsymbol{e}$ e $\boldsymbol{h}$ la forza elettrica e la forza magnetica del campo D, ove si eguagli a zero la forza meccanica *totale*, si ha ovviamente, in luogo della $\varrho\{\boldsymbol{E} + A\boldsymbol{H}\wedge\boldsymbol{v}\} = 0$, la equazione più generale

$$\text{(V)} \qquad \varrho\{(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{e}) + A(\boldsymbol{H} + \boldsymbol{h})\wedge\boldsymbol{v}\} = 0\,.$$

2. - Problema piano. Flusso stazionario.

Supponiamo in particolare che il moto dell'elettricità avvenga per piani paralleli con identico comportamento sopra ciascuno di essi, corrispondendosi i punti, che appartengono ad una medesima perpendicolare.

Assunto un piano qualunque del fascio per piano $z = 0$, l'aspetto cinematico del fenomeno risulta indipendente da z. Qualora anche le circostanze esterne, riassunte per ipotesi nei due vettori $\boldsymbol{e}$, $\boldsymbol{h}$, siano indipendenti da z, lo stesso dovrà evidentemente avvenire per il campo elettromagnetico puro, corrispondente al detto moto. Basterà quindi occuparsi dei punti del piano $z = 0$.

Se si suppone ulteriormente che il fenomeno abbia carattere di stazionarietà, sarà *tutto indipendente, non solo da z, ma anche da t.*

Teniamo conto di ciò, nonchè dell'ipotesi preliminare $v_z = 0$, ed esplicitiamo le (I)–(V).

Le raggrupperemo in due distinti sistemi (a) e (b) con questo criterio: attribuiremo al sistema (a) e segneremo (I_a), (II_a), ecc., tutte quelle equazioni, che *non* contengono le incognite E_z, H_x, H_y; attribuiremo al sistema (b) le equazioni rimanenti, segnandole (I_b), (II_b), ecc. Troviamo così, scrivendo semplicemente H e h, in luogo di H_z, h_z:

$$(a)\quad\left\{\begin{array}{ll}
(\mathrm{I}_a) & \left\{\begin{array}{l} 4\pi A\varrho v_x = -\dfrac{\partial H}{\partial y}\,, \\[2mm] 4\pi A\varrho v_y = \dfrac{\partial H}{\partial x}\,; \end{array}\right. \\[6mm]
(\mathrm{II}_a) & \dfrac{\partial E_y}{\partial x} - \dfrac{\partial E_x}{\partial y} = 0\,; \\[4mm]
(\mathrm{III}) & \dfrac{\partial E_x}{\partial x} + \dfrac{\partial E_y}{\partial y} = 4\pi\varrho\,; \\[4mm]
(\mathrm{V}_a) & \left\{\begin{array}{l} \varrho\{(E_x + e_x) - A(H + h)v_y\} = 0\,, \\ \varrho\{(E_y + e_y) + A(H + h)v_x\} = 0\,; \end{array}\right.
\end{array}\right.$$

$$
(b)\quad \begin{cases}
(\mathrm{I}_b) & \dfrac{\partial H_y}{\partial x} - \dfrac{\partial H_x}{\partial y} = 0\,; \\[2ex]
(\mathrm{II}_b) & \dfrac{\partial E_z}{\partial x} = \dfrac{\partial E_z}{\partial y} = 0\,; \\[2ex]
(\mathrm{IV}) & \dfrac{\partial H_x}{\partial x} + \dfrac{\partial H_y}{\partial y} = 0\,; \\[2ex]
(\mathrm{V}_b) & \varrho\{(E_z + e_z) + A[(H_x + h_x)v_y - (H_y + h_y)v_x]\} = 0\,.
\end{cases}
$$

3. - Specificazione dei caratteri qualitativi. Comportamento del campo esterno D nella regione del moto.

Designeremo con σ la regione del piano $z = 0$, in cui ϱ non è nullo (4), in cui cioè si trova effettivamente dell'elettricità (spettante al campo puro); con s il contorno di σ.

Supporremo che la funzione ϱ sia finita e continua entro σ, senza escludere che passi bruscamente al valore zero al di là del contorno.

Supporremo poi che le forze elettromagnetiche sieno continue tanto entro σ, quanto fuori, mantenendosi ovunque finite (anche sul contorno s). Questo implica continuità completa del campo anche attraverso s: per convincersene, basta applicare alle equazioni differenziali (I)–(IV) (in prossimità del contorno s) il noto ragionamento di Hertz, tenendo presente che ϱ non diventa mai infinita (la quale ipotesi esclude in particolare l'esistenza di distribuzioni superficiali su s, o meglio sul cilindro avente s per sezione retta).

Per fissare le idee, riterremo ancora che l'area σ sia semplicemente connessa e tutta situata a distanza finita; le considerazioni, che seguono, sussistono però, con ovvie modificazioni, anche per aree pluriconnesse od estendentisi indefinitamente.

Precisiamo ancora la natura delle funzioni, che definiscono il campo esterno D.

In primo luogo le forze elettromagnetiche $\boldsymbol{e}$, $\boldsymbol{h}$ sono legate esse pure dalle equazioni di Hertz (I)–(IV).

Entro σ la corrispondente densità è nulla; per ipotesi, si tratta sempre di un campo stazionario. Le (I)–(IV) si riducono così a

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{h} = \operatorname{rot} \boldsymbol{e} = 0\,,$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{h} = \operatorname{div} \boldsymbol{e} = 0\,,$$

(4) Più precisamente, in cui ϱ può al più annullarsi su linee isolate.

le quali esprimono notoriamente che $\boldsymbol{e}$ ed $\boldsymbol{h}$ derivano da due potenziali armonici (e del resto arbitrari), f_1, ν_1, a norma delle formule

$$e_x = \frac{\partial f_1}{\partial x}, \qquad e_y = \frac{\partial f_1}{\partial y}, \qquad e_z = \frac{\partial f_1}{\partial z};$$

$$h_x = \frac{\partial \nu_1}{\partial x}, \qquad h_y = \frac{\partial \nu_1}{\partial y}, \qquad h_z = h = \frac{\partial \nu_1}{\partial z}.$$

Tenendo conto della indipendenza del campo dalla variabile z, si riconosce ovviamente che e_z *ed* $h_z = h$ *sono costanti, mentre* e_x *ed* e_y, h_x *ed* h_y *possono considerarsi come derivate di due funzioni armoniche* f *e* ν *delle sole variabili* x *ed* y $(f = f_1 - e_z z,\ \nu = \nu_1 - hz)$.

4. - Integrazione del sistema (a).

Le (V_a) si trovano identicamente soddisfatte nei punti esterni a σ; mentre, entro σ, profittando delle (I_a) e dividendo per ϱ, ove si tenga conto che h è costante e che $e_x = \partial f/\partial x$, $e_y = \partial f/\partial y$, possono essere scritte

$$E_x + \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{8\pi\varrho}\frac{\partial}{\partial x}(H + h)^2,$$

$$E_y + \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{8\pi\varrho}\frac{\partial}{\partial y}(H + h)^2.$$

La (II_a) sta ad esprimere che E_x, E_y derivano da un potenziale $\psi(x, y)$. Con ciò le due equazioni precedenti si compendiano in

$$d(\psi + f) = \frac{1}{8\pi\varrho}d(H + h)^2, \tag{1}$$

mentre la (III) assume la forma

$$\Delta_2\psi = 4\pi\varrho. \tag{2}$$

Sarà in particolare

$$\Delta_2\psi = 0 \qquad \text{(nei punti esterni a } \sigma\text{)}, \tag{3}$$

dacchè, per ipotesi, fuori di σ, $\varrho = 0$.

Quanto alle (I_a), esse costituiscono, si può dire, la definizione di v_x,

v_y, finchè ϱ è diversa da zero, mentre, nei punti esterni a σ, porgono $H = \text{cost}$. Dacchè le masse elettriche, spettanti al campo puro, non si estendono indefinitamente, il campo stesso dovrà ritenersi nullo all'infinito; sarà per conseguenza

$$H = 0 \qquad \text{(nei punti esterni a } \sigma\text{)}, \tag{4}$$

nonchè sul contorno s, data la continuità.

Dalla (1), che è valida nell'interno di σ, deduciamo, avvicinandoci indefinitamente ad s, e prendendo i differenziali nella direzione di un elemento di contorno,

$$d\psi = - df \qquad \text{(lungo } s\text{)},$$

inquantochè $dH = 0$.

Per la continuità delle

$$E_x = \frac{\partial \psi}{\partial x}, \qquad E_y = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \qquad e_x = \frac{\partial f}{\partial x}, \qquad e_y = \frac{\partial f}{\partial y},$$

questa stessa condizione dovrà essere verificata anche avvicinandoci indefinitamente ad s dall'esterno.

La funzione ψ assume pertanto sul contorno valori del tipo $-f + \text{cost}$.

Nei punti esterni a σ, essa è armonica, in virtù della (3), e possiede, per ipotesi, derivate prime continue. Se poi si ammette, come è ragionevole, che a distanza infinitamente grande dalle masse agenti non possa essere localizzata una quantità infinita di energia, si deve pure ammettere — sarebbe facile il constatarlo — che $E_x = \partial\psi/\partial x$, $E_y = \partial\psi/\partial y$ si annullano all'infinito d'ordine superiore al primo.

Se ne conclude, con procedimento ben noto, che, a meno di una inessenziale costante additiva,

$$\psi = - f^*, \qquad \text{(nei punti esterni a } \sigma\text{)} \tag{5}$$

designando f^* quella funzione armonica e regolare del campo esterno a σ, che assume sul contorno i valori f.

Esaminiamo ora quel che accade nei punti interni.

Posto, per maggior comodo,

$$\psi + f = \varphi, \tag{6}$$

la (1) implica anzi tutto che H e ϱ siano funzioni della sola φ.

Infatti φ non è certo una costante (perchè, in virtù delle (6) e (2), $\Delta_2 \varphi = 4\pi\varrho \neq 0$); si possono quindi adottare per un momento come variabili indipendenti, in luogo di x, y, la stessa φ e un'altra combinazione indipendente qualsiasi $\varphi_1(x, y)$. Con ciò il differenziale $d(H+h)^2$ assume l'aspetto

$$\frac{\partial(H+h)^2}{\partial\varphi}\,d\varphi + \frac{\partial(H+h)^2}{\partial\varphi_1}\,d\varphi_1\,.$$

Portando nella (1) e tenendo conto che essa deve essere verificata per incrementi arbitrari di φ e di φ_1, si ricava in primo luogo

$$\frac{\partial(H+h)^2}{\partial\varphi_1} = 0\,,$$

ossia H funzione della sola φ.

Potremo quindi porre

$$\frac{1}{2}(H+h)^2 = \Phi(\varphi)\,, \tag{7}$$

e la (I) si ridurrà a

$$4\pi\varrho = \Phi'(\varphi)\,, \tag{8}$$

l'apice designando derivazione rispetto all'argomento φ.

H e ϱ sono così espresse per φ. Questa, in virtù delle (2), (6) ed (8), deve verificare la equazione indefinita

$$\Delta_2\varphi = \Phi'(\varphi) \qquad \text{(entro } \sigma\text{)}, \tag{9}$$

ed inoltre, data la (5) e la incondizionata continuità di E_x, E_y, le *due* condizioni ai limiti

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial(f-f^*)}{\partial x}\,, \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{\partial(f-f^*)}{\partial y} \qquad \text{(sul contorno } s\text{)}\,. \tag{10}$$

Giova rilevare che la funzione $\Phi'(\varphi)$ è a priori indeterminata.

Se così non fosse, ma si risguardasse Φ' come data, riuscirebbe in generale impossibile soddisfare alle (9) e (10), per esuberanza di condizioni ai limiti.

Per convincersene, basta pensare al caso di una distribuzione uniforme ($\Phi' =$ cost.). La (10) assegna sul contorno tanto la derivata tangenziale, quanto la derivata normale di φ. Viceversa è ben noto che una sola di queste condizioni, in concorso con $\Delta_2\varphi =$ cost., individua una funzione regolare (a meno di una costante additiva); nè c'è manifestamente ragione perchè l'altra condizione rimanga anch'essa soddisfatta.

Ne consegue che l'esistenza di un integrale φ della (9), per cui sieno verificate le condizioni ai limiti (10), è in generale subordinata ad un'opportuna scelta della funzione $\Phi'(\varphi)$.

Sarà *sempre* possibile, per un assegnato campo σ, disporre di $\Phi'(\varphi)$ in modo che esista un tale integrale?

È questa una questione di analisi, che io non intendo discutere nella presente nota.

Mi limiterò a mostrare (§ 5), per dare almeno un esempio di effettiva esistenza delle soluzioni in discorso, che la risposta è affermativa nel caso di un campo σ di forma circolare.

Completiamo la discussione del sistema (a) nell'ipotesi che esista realmente una φ dotata delle proprietà volute. Una tale φ si può intanto ritenere nulla sul contorno s (aggiungendo, se occorre, una opportuna costante e modificando in conformità la Φ'): è ciò che segue dalle (10), le quali danno

$$d\varphi = d(f - f^*) \qquad \text{(lungo il contorno } s\text{)}$$

e quindi, per essere sullo stesso contorno $f^* = f$, $d\varphi = 0$.

Si ha poi, riassumendo:

La integrazione del sistema (a) *si può far dipendere dal problema esterno di Dirichlet* (*determinazione della funzione* f^*) *e dalla integrazione dell'unica equazione indefinita* (9), *colla condizione qualitativa di regolare comportamento entro* σ, *e colle due condizioni ai limiti* (10), *le quali permettono in particolare di ritenere*

$$\varphi = 0 \qquad \text{(sul contorno } s\text{).} \tag{10'}$$

Le incognite del sistema (a), *nei punti interni a* σ, *sono tutte esprimibili mediante* φ (nonchè mediante f ed h, che sono dati della questione); *e precisamente le componenti* E_x, E_y *della forza elettrica come derivate di* $\varphi - f$; *la componente* H *della forza magnetica a norma della* (7), *specificando* Φ [perchè vi sia raccordo colla (4)] *come quell'integrale di* $\Phi'(\varphi)$, *che assume il valore* $\frac{1}{2}h^2$ *per* $\varphi = 0$; *la densità* ϱ *a norma della* (8); *infine le componenti* v_x, v_y *della velocità a norma delle* (I_a). *Si hanno così le formole risolutive*:

$$\left\{\begin{aligned}
&E_x = \frac{\partial(\varphi - f)}{\partial x}, \qquad E_y = \frac{\partial(\varphi - f)}{\partial y};\\
&\frac{1}{2}(H + h)^2 = \Phi(\varphi);\\
&\varrho = \frac{1}{4\pi}\Phi'(\varphi);\\
&v_x = \frac{-1}{4\pi A\varrho}\frac{\partial H}{\partial y} = \frac{-c}{H+h}\frac{\partial \varphi}{\partial y},\\
&v_y = +\frac{1}{4\pi A\varrho}\frac{\partial H}{\partial x} = +\frac{c}{H+h}\frac{\partial \varphi}{\partial x},
\end{aligned}\right. \tag{11}$$

valide nei punti interni a σ (contorno incluso).

All'esterno, dove per ipotesi non c'è elettricità ($\varrho = 0$), *si ha invece*

$$H = 0\,, \qquad E_x = -\frac{\partial f^*}{\partial x}\,, \qquad E_y = -\frac{\partial f^*}{\partial y}\,, \tag{12}$$

come segue immediatamente dalle (4) *e* (5).

Le ultime due equazioni (11) dànno

$$v_x\,dy - v_y\,dx = \frac{c}{H+h}\,d\varphi\,,$$

donde apparisce che le linee di flusso coincidono colle linee

$$\varphi = \text{cost.}$$

Il contorno s del campo σ ($\varphi = 0$) è dunque una particolare linea di flusso, come del resto era chiaro a priori.

Si noti ancora che avendosi, per definire H, l'equazione

$$\frac{1}{2}(H+h)^2 = \Phi(\varphi)\,,$$

è d'uopo che la funzione Φ non scenda mai al disotto di zero. È anzi da escludere anche il valore zero, se si vuol esser sicuri che le componenti v_x, v_y della velocità, le quali contengono a divisore $H+h$, si conservino esse pure finite e continue.

Siamo così condotti ad introdurre un'ultima restrizione qualitativa, ed è che $\Phi(\varphi)$ *si mantenga sempre positiva entro* σ.

5. – Campo di forma circolare.

Suppongasi in particolare che σ sia un cerchio di raggio R e che il campo elettrico esterno sia simmetrico rispetto al centro O. Ciò val quanto dire che il relativo potenziale f dipende da un solo argomento: la distanza r da O. Lo stesso ha luogo manifestamente per la funzione f^*, regolare all'esterno del cerchio, la quale coincide con f, per $r = R$.

In questo caso si può soddisfare in infiniti modi alle (9), (10) (e a tutte le volute condizioni qualitative) mediante funzioni φ, dipendenti anch'esse dalla sola r.

Per provarlo, cominciamo coll'osservare che, dipendendo tanto φ, quanto $f - f^*$ dalle coordinate x, y soltanto per tramite dell'argomento r, le due condizioni (10) si riducono ad una sola. Chiamando g il valore costante di $d(f - f^*)/dr$ per $r = R$, si può attribuirle la forma

$$\frac{d\varphi}{dr} = g\,, \qquad \text{per } r = R\,. \tag{10''}$$

Se poi si osserva che (attesa la dipendenza dalla sola r)

$$\Delta_2\varphi = \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d\varphi}{dr}\right) = \frac{d^2\varphi}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\varphi}{dr}$$

è senz'altro esprimibile per mezzo di una qualsiasi funzione di r, e in particolare quindi di φ, si riconosce che la condizione (9) è identicamente soddisfatta, purchè si chiami $\Phi'(\varphi)$ il valore di $\Delta_2\varphi$, espresso per φ.

Resta da precisare il comportamento qualitativo.

In primo luogo,

$$\varrho = \frac{1}{4\pi}\Delta_2\varphi = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{d^2\varphi}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\varphi}{dr}\right)$$

deve mantenersi generalmente diversa da zero e sempre finita, anche per $r = 0$; conviene dunque supporre che $d\varphi/dr$ si annulli almeno di prim'ordine per $r = 0$.

Inoltre, avendosi

$$\Phi = \frac{1}{2}h^2 + \int_0^\varphi \Phi'(\varphi)\,d\varphi = \frac{1}{2}h^2 + \int_0^\varphi \Delta_2\varphi\cdot d\varphi\,,$$

ove si assuma r per variabile di integrazione e si sostituisca a $\Delta_2\varphi$ il suo valore, potremo scrivere

$$\Phi = \frac{1}{2}h^2 + \int_R^r \left(\frac{d^2\varphi}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\varphi}{dr}\right)\frac{d\varphi}{dr}\,dr\,,$$

od anche, avendo riguardo alla (10''),

$$\Phi = \frac{1}{2}\left\{h^2 - g^2 + \left(\frac{d\varphi}{dr}\right)^2\right\} - \int_r^R \frac{1}{r}\left(\frac{d\varphi}{dr}\right)^2 dr\,,$$

talchè la condizione che Φ resti sempre positiva entro σ, dà luogo alla disuguaglianza

$$h^2 + \left(\frac{d\varphi}{dr}\right)^2 > g^2 + 2\int_r^R \frac{1}{r}\left(\frac{d\varphi}{dr}\right)^2 dr \qquad (0 \leqslant r \leqslant R)\,.$$

A questa si può sostituire una semplice disuguaglianza numerica, ove si osservi che il minimo valore del primo membro è h^2, mentre il massimo del secondo è

$$g^2 + 2\int_0^R \frac{1}{r}\left(\frac{d\varphi}{dr}\right)^2 dr\,,$$

e che questi valori sono entrambi assunti per $r = 0$.

È così necessario e sufficiente che si abbia

$$h^2 > g^2 + 2\int_0^R \frac{1}{r}\left(\frac{d\varphi}{dr}\right)^2 dr\,. \tag{13}$$

Viceversa si constata ovviamente che, scelta per $d\varphi/dr$ una qualunque funzione finita e continua assieme alla sua derivata prima nel tratto $(0, R)$, la quale si annulli di prim'ordine almeno per $r = 0$, assuma il valore g per $r = R$, non renda identicamente nulla l'espressione

$$\Delta_2\varphi = \frac{d^2\varphi}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\varphi}{dr}\,,$$

e soddisfaccia inoltre alla disuguaglianza (13), le (11) definiscono effettivamente funzioni finite e continue.

A titolo d'esempio, ove sia $h^2 > 2g^2 > 0$, si può prendere

$$\frac{d\varphi}{dr} = g\,\frac{r}{R}\,.$$

6. - Conseguenze del sistema (*b*).

Dobbiamo ancora tener conto del sistema (*b*). Esso porge anzi tutto

$$E_z = H_x = H_y = 0\;; \tag{14}$$

inoltre, avuto riguardo ai precedenti risultati, implica condizioni restrittive per il dato campo esterno. In modo preciso, si arriva alla conclusione che l'ipotesi preliminarmente assunta di un flusso per piani paralleli è legittima solo a patto che il campo esterno D verifichi le condizioni [analoghe alle (14)]

$$e_z = h_x = h_y = 0 \,. \tag{15}$$

DIMOSTRAZIONE. – Cominciamo dalle (II_b). Esse esprimono che E_z è costante, e quindi zero, dato che deve annullarsi all'infinito.

Pure costante è e_z (§ 3).

Le (I_b) e (IV) stanno a dire che H_x, H_y derivano da un potenziale armonico. Tenuto conto che H_x, H_y devono mantenersi finite e continue *in tutto lo spazio* e annullarsi all'infinito, ne segue $H_x = H_y = 0$.

Rimane da tener conto della (V_b). Sostituendovi per v_x, v_y i loro valori (11) e ricordando (§ 3) che h_x, h_y derivano da un potenziale armonico ν, essa può essere scritta

$$\frac{\partial \nu}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \nu}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial y} = e_z(H + h) = e_z\sqrt{2\Phi} \,. \tag{16}$$

Moltiplichiamone entrambi i membri per $d\sigma$ e integriamo, estendendo l'integrazione a tutto il campo σ.

L'integrale del primo membro equivale a

$$-\int_\sigma \varphi \Delta_2 \nu \, d\sigma - \int_s \varphi \frac{d\nu}{dn} ds \,,$$

designando n la normale in un punto generico del contorno s, vôlta verso l'interno del campo. I due integrali si annullano, per essere ν armonica, e $\varphi = 0$ sul contorno, a norma della (10′).

Ne viene

$$e_z \int_\sigma \sqrt{2\Phi}\, d\sigma = 0 ;$$

ma, come abbiamo rilevato alla fine del § 4, 2Φ è sempre > 0, talchè il radicale non può cambiar segno e l'$\int_\sigma \sqrt{2\Phi}\, d\sigma$ è certamente diverso da zero.

Deve pertanto annullarsi la costante e_z.

Con ciò la (16) si riduce a

$$\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial y}=0\,,$$

la quale sta ad esprimere che è nulla la derivata di v secondo la direzione normale ad una generica linea di flusso $\varphi = \text{cost.}$, in particolare secondo la normale al contorno s.

Siccome la v è armonica e regolare entro σ, la condizione $dv/dn = 0$ sul contorno implica che essa si riduca ad una costante, donde

$$h_x=\frac{\partial v}{\partial x}=0\,,\qquad h_y=\frac{\partial v}{\partial y}=0\,,\qquad \text{c. d. d.}$$

II.

GIUSEPPE PICCIATI

(Piombino, 30 novembre 1868 – Venezia, 11 marzo 1908)

« Nuovo Cimento », s. 5ª, vol. XV (1908),

pp. 363-368.

Quando seppi che spettava a me il mesto incarico di commemorare il caro Estinto dinanzi ai colleghi della Società di Fisica, chiesi alle Sue desolate sorelle se fosse da riferire qualche speciale episodio della intimità famigliare.

« La Sua esistenza fu tutta un episodio di amor figliale e fraterno » mi risposero commosse. « Perdemmo il padre diciassette anni or sono, e Giuseppe, che stava appunto allora per abbandonare la scuola, ed iniziare la lotta per la vita, votò alla famiglia tutto se stesso. Colla Sua serena fermezza, fu conforto e sostegno della madre adorata e divenne per noi un secondo padre ».

Basta questa notizia a lumeggiare interamente la figura morale del Nostro, e le difficoltà, attraverso cui si svolse la Sua produzione scientifica.

Laureatosi in fisica all'Università di Pisa nel 1890, ottenne in seguito a concorso, un posto di perfezionamento, quindi fu per due anni assistente di Statica grafica e di Meccanica razionale, sempre nell'Università di Pisa. Titolare di meccanica era allora il VOLTERRA, di cui PICCIATI fu scolare prediletto. Incoraggiato da lui alla ricerca originale, compose in questo periodo di tempo i primi lavori.

Particolarmente notevole è la dissertazione *Sull'equilibrio e sul moto infinitesimo delle superfici flessibili ed inestendibili*, presentata alla Facoltà di Scienze di Pisa per ottenere la laurea in fisica. In questa dissertazione sono ritrovati ed estesi i risultati di BELTRAMI, in base al principio di solidificazione, ed è poi fatta una bella applicazione alle piccole oscillazioni di un velo fluido, inizialmente sferico.

Le ricordate circostanze di famiglia consigliavano il PICCIATI ad entrare in carriera al più presto. Prese perciò parte nell'estate 1893 ad un concorso per professore di fisica nella Scuola dei Macchinisti di Venezia. Vinse il concorso, accettò la nomina, e si trasferì coi suoi a Venezia, facendosi subito apprezzare dagli allievi per la sobria limpidezza dell'insegnamento.

Le nuove occupazioni scolastiche appena Gli consentirono di completare uno studio già iniziato a Pisa, sulla trasformazione delle equazioni dinamiche, in alcuni casi particolari. L'argomento era allora di piena attualità, essendovi stata richiamata, colla posizione di un problema generale, l'attenzione dei matematici. Il contributo, recatovi dal Nostro, si raccomanda per spontaneità di pensiero e per semplicità di metodo.

Nel 1895 prese anche la laurea in matematica.

Volgevano però anni poco propizi a meditazioni astratte.

La fama delle Sue eminenti attitudini didattiche si era sparsa in Venezia, e giovani studenti d'ogni grado si rivolgevano a lui per lezioni private. L'esiguità dello stipendio non Gli consentiva di rinunciare a tale lucro, e così per molto tempo fu tratto a sacrificare alle esigenze economiche gran parte della Sua energia.

È già cosa mirabile che quel lungo e affannoso tirocinio non abbia in Lui sopraffatto ogni amore allo studio: il buon seme resisteva, pronto a nuovi e più robusti germogli in condizioni favorevoli. A prepararle porse occasione un concorso generale per le Scuole Normali, bandito nel 1896. In seguito a tale concorso, Egli fu nominato professore a Padova, pur conservando il posto alla Scuola dei Macchinisti. Per un anno ancora rimase assorbito dal duplice insegnamento in residenze diverse, ma, col Suo trasferimento alla Scuola Normale di Venezia, si iniziò un periodo di discreta tranquillità e di fecondo raccoglimento, nel quale seppe far posto agli studi personali, senza mai attenuare lo scrupoloso adempimento dei Suoi due uffici.

« Lavoro per divertirmi, da semplice dilettante », dicevami celiando. Ben si intende però come col Suo ingegno e colla Sua cultura, il dilettantismo non presentasse alcun inconveniente; poteva soltanto significare, e significò infatti, che nessuna preoccupazione di carriera Lo indusse mai a produrre o ad affrettare il compimento di intraprese ricerche.

Come autore riapparve al pubblico matematico nel 1901, con due note eleganti, inserite negli « Atti dell'Istituto Veneto ».

La Facoltà di Scienze di Padova, altamente apprezzando i Suoi titoli e la rara forza di volontà, attestata dalla felice e promettente ripresa, propose ed ottenne che Gli fosse conferita la libera docenza in Meccanica razionale.

Frattanto la Sua attenzione andava fissandosi sulle teorie dell'elettrodinamica e dell'elettromagnetismo.

Ne sorse un gruppo di ricerche organiche e cospicue, raccolte in nove memorie, tutte interessanti, alcune fondamentali per importanza e novità di studi. Vi si compie tra altro la rigorosa determinazione del campo elettromagnetico, dovuto ad una corrente elicoidale costante: argomento, cui il nome di Lui resta ormai saldamente connesso.

L'importanza pratica degli avvolgimenti a spirale aveva imposto da tempo la considerazione di tali campi, ma non si era mai oltrepassato il risultato approssimativo, che figura in tutti i trattati elementari e che si ottiene trascurando il passo dell'elica. Gli studi del PICCIATI somministrano termini correttivi abbastanza semplici, che possono ben presto essere richiesti dai bisogni di una tecnica più evoluta o da più affinate esperienze di laboratorio.

Appartiene ancora a questo ordine di ricerche il lavoro sulla resistenza dei solenoidi per correnti variabili. L'A. sperava dapprima di potersi riattaccare ai Suoi precedenti risultati, ma la schematizzazione matematica della complessa realtà richiese nuove risorse. Tratte dalle premesse tutte le conseguenze legittimamente consentite, Egli trova che nelle conclusioni finali da mettere a raffronto coll'esperienza rimane una grande arbitrarietà, che solo nuovi fatti o nuove ipotesi possono eliminare.

Il complemento fu poco dopo raggiunto dal sig. SOMMERFELD, che ha cordialmente riconosciuto tutta l'importanza delle idee e delle indagini del Nostro.

PICCIATI mi raccontò — mi si consenta una reminiscenza personale — che già aveva saggiata la via, percorsa poi magistralmente dal SOMMERFELD; in particolare aveva effettuata quella certa rappresentazione conforme, su cui poggiano le verificazioni numeriche per il caso di alte frequenze.

Ma alla catena logica mancava la plausibile sanzione (avvertita e formulata dal SOMMERFELD), ed Egli, con lodevole riserbo, si era astenuto dal far conoscere un tentativo, non ancor giunto a maturità.

Altro campo di studi, in cui, in breve volger di tempo, il PICCIATI segnò orma duratura, è l'idrodinamica razionale.

La teoria delle caratteristiche ed altri sussidi di alta analisi Gli permisero di veder chiaro in quei problemi di moto entro un fluido viscoso, che solo il genio di STOKES aveva osato affrontare con mezzi inadeguati, giungendo per virtù di intuizione a conclusioni brillanti ed esatte.

Le ricerche del PICCIATI sono altrettanto geniali, quanto profonde. Tutto è sistematicamente ricondotto — l'averlo riconosciuto non è piccolo merito — all'integrazione della equazione di propagazione del calore per speciali condizioni ai limiti.

Dato nitido assetto alla teoria generale, Egli si è rivolto ad un attraente problema concreto: la caduta di una sfera pesante in un liquido viscoso. Lo ha risolto, stabilendo in modo ingegnoso la convergenza del procedimento [1] e le espressioni asintotiche, previste da STOKES, su cui la teoria degli elettroni ha oggi nuovamente richiamata la attenzione dei fisici.

Così per naturale impulso di fervido ingegno e per ordinata, incessante attività, il PICCIATI si trovò, quasi a Sua insaputa, egregiamente preparato ad un concorso universitario. Vi partecipò nell'autunno 1907, quando venne bandito per la cattedra di Meccanica razionale nell'Università di Bologna.

Prescelto su valorosi competitori, assunse l'insegnamento nel gennaio di quest'anno, avendo già preparata e redatta per iscritto buona parte del corso. Nella scelta degli argomenti, nei limiti e nelle modalità della trattazione, spicca — ben lo posso affermare, dacchè dei Suoi fogli sono ora geloso custode — il fine senso di opportunità, che accompagnò ogni atto della Sua vita, e l'agile precisione, che è frutto di larga esperienza didattica.

Egli attendeva ansioso la presente primavera, nella quale la famiglia, rimasta provvisoriamente a Venezia, avrebbe dovuto ricongiungersi a Lui, prendendo stabile domicilio in Bologna. In quell'agognata tranquillità, Gli arridevano nuove ricerche e Gli si schiudevano sicure soddisfazioni e men sudati trionfi.

Improvviso assalto di morbo insanabile, che nulla lasciava sospettare, Lo rapì crudelmente in tre giorni.

La Sua morte, avvenuta in Venezia, l'11 marzo 1908 a soli 39 anni di età, destò generale e profonda impressione. Da tutti fu dolorosamente sentita la scomparsa di uno scienziato eminente nel pieno vigore di una vita operosa, fu sentita la pietà del Suo caso; ma in quanti Lo conobbero si definì in mille guise e si affermò possente un più intimo lutto, chè l'uomo sovrastava allo scienziato per elevatezza morale e per squisito sentire.

Col perfetto equilibrio del Suo temperamento, coll'onesta franchezza, coll'assennato ottimismo, che mai non si smentì, aveva cementato salde amicizie; sempre e dovunque diffusa intorno a sè schietta simpatia.

Sia pari al rimpianto l'efficacia dell'esempio, offerto dalla Sua vita purissima! (*).

---

[1] Il prof. BOGGIO fu indotto dal lavoro di PICCIATI ad una nuova e più semplice trattazione del problema, e riescì addirittura a integrare, mediante sole quadrature, l'equazione funzionale, che lo caratterizza.

(*) Segue l'« Elenco delle pubblicazioni di GIUSEPPE PICCIATI », [N.d.R.].

III.

SULL'ATTRAZIONE ESERCITATA DA UNA LINEA MATERIALE IN PUNTI PROSSIMI ALLA LINEA STESSA

« Rend. Acc. Lincei », s. 5ª, vol. $XVII_2$, (1908_2),

pp. 3-15.

Nella teoria del potenziale e nelle sue varie applicazioni ha essenziale importanza il comportamento dell'attrazione newtoniana nell'interno o nell'immediata prossimità dell'agente. La questione, esaurientemente trattata per le distribuzioni a tre e a due dimensioni, attende ancora una risposta sistematica per il caso di una linea materiale. La maggior parte degli autori si limita ad osservare che nè la funzione potenziale V, nè le sue derivate si mantengono in generale finite, quando il punto potenziale si avvicina indefinitamente alla linea. Ora è ben chiaro che interessa sapere qualche cosa di più, e precisamente in qual modo tali funzioni diventano infinite, ciò che è messo in evidenza dalle così dette espressioni asintotiche.

Nell'idrodinamica, lo studio dei filetti vorticosi rettilinei o circolari aveva imposto da tempo la considerazione di speciali espressioni asintotiche. Spetta però al sig. DA RIOS [1] il merito di aver per primo istituita una ricerca generale di questo tipo. Egli ha trovato (prescindo dall'interpretazione idrodinamica, per rilevare soltanto il contenuto analitico) espressioni asintotiche, valide per una linea qualunque, le quali competono a certe tre differenze formate con derivate di potenziali newtoniani (componenti del rotor di un potenziale vettore).

Il metodo del DA RIOS si potrebbe facilmente trasportare a casi analoghi; in particolare alle derivate di un potenziale di linea.

È tuttavia preferibile riprendere la ricerca *ab initio*, sostituendo all'indagine diretta delle tre componenti dell'attrazione quella di un

---

(1) *Sul moto di un liquido indefinito con un filetto vorticoso di forma qualunque*, « Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo », tomo XXII, 1906, pp. 117-135.

unico elemento: il relativo potenziale V. Con opportuna trasformazione vien fatto di distinguere nella funzione sotto il segno una parte principale ed un termine complementare, il contributo del quale si mantiene finito assieme alle sue prime derivate, anche quando il punto potenziato si avvicina indefinitamente alla linea potenziante.

Eseguendo la effettiva integrazione della parte principale, e riducendo, si ha una espressione asintotica $V^{(a)}$ del potenziale V, *atta alla derivazione*, tale cioè che non soltanto la differenza $V - V^{(a)}$, ma anche le derivate di $V - V^{(a)}$ si mantengono finite. Ciò val quanto dire che le derivate di $V^{(a)}$ forniscono senz'altro le cercate espressioni asintotiche delle componenti dell'attrazione ([2]).

Con questo procedimento si ha il vantaggio che tutto è sostanzialmente riassunto in una formula unica, l'eguaglianza asintotica $V = V^{(a)}$, da cui discendono come corollari immediati le particolarizzazioni e combinazioni, che interessano dal punto di vista idrodinamico od elettrodinamico.

Ho così ritrovato, a titolo di esempio, le espressioni asintotiche dovute al DA RIOS. Seguirà prossimamente un'applicazione ai campi elettromagnetici puri.

1. - Preliminari.

Sia L una linea materiale (aperta o chiusa); O un suo punto qualunque; λ un tratto *non nullo* di L, avente uno degli estremi in O; λ^* un analogo tratto in verso opposto a partire da O, coll'ovvia avvertenza che λ^* viene a mancare, qualora O sia un estremo di L.

Diciamo Λ ciò che resta di L, quando se ne tolgono i tratti λ e λ^* (il solo λ, se O è un estremo); dL un generico elemento della linea; μ la densità (lineare) spettante all'elemento; P il punto potenziato, esterno ad L, che faremo poi avvicinare indefinitamente al punto (arbitrariamente prescelto) O di L; r la distanza fra P e il generico elemento potenziante.

Il potenziale newtoniano dell'attrazione, esercitata dalla linea L su P, può manifestamente scindersi in tre (due, nel caso particolare, in cui O coincide con un estremo di L) addendi, che corrispondono ai tratti λ, λ^* e Λ (o, rispettivamente, λ e Λ).

([2]) Una espressione asintotica del potenziale V, valida per una linea materiale di forma qualunque, si trova nella *Théorie du potentiel newtonien* [Paris, Carré et Naud, 1899, p. 128] del sig. POINCARÉ. Va notato tuttavia che tale espressione non è atta alla derivazione, essendo ricavata in base alla sola condizione che resti finita la differenza fra essa e V. Non si può quindi pretendere che rimangano finite anche le derivate. Il confronto colla nostra $V^{(a)}$ mostra anzi che ciò in generale non accade.

Ponendo

(1) $$V_\lambda = \int_\lambda \frac{\mu\, dL}{r},$$

(2) $$V_{\lambda^*} = \begin{cases} \displaystyle\int_{\lambda^*} \frac{\mu\, dL}{r} & \text{(se } O \text{ è un punto intermedio)}, \\ 0 & \text{(se } O \text{ è un estremo)}, \end{cases}$$

(3) $$V_\Lambda = \int_\Lambda \frac{\mu\, dL}{r},$$

scriveremo in conformità

(4) $$V = V_\lambda + V_{\lambda^*} + V_\Lambda .$$

Occupiamoci ora del primo addendo.

2. - Specificazione delle ipotesi concernenti λ.

Supponiamo che il tratto di linea λ sia regolare; più generalmente, che le coordinate dei suoi punti siano esprimibili come funzioni dell'arco, finite assieme alle loro derivate prime, seconde e terze.

Detta s la lunghezza dell'arco, compreso fra l'estremo O e un punto generico di λ, l la lunghezza totale di λ, sarà $dL = ds$ e la (1) potrà scriversi

(1') $$V_\lambda = \int_0^l \frac{\mu(s)}{r}\, ds .$$

Supponiamo ancora che la densità $\mu(s)$ sia, in tutto l'intervallo $(0, l)$, funzione finita assieme alle sue derivate prima e seconda. Ciò permette di applicare ad essa lo sviluppo di MACLAURIN, arrestato al secondo termine, e porge

(5) $$\mu(s) = \mu_0 + \mu_0' s + \mu_1 s^2$$

essendo μ_0 e μ_0' i valori di μ e della sua derivata per $s = 0$, e μ_1 una funzione di s, anch'essa finita e continua.

Assumiamo una terna di riferimento coll'origine in O e cogli assi orientati come segue: asse x diretto secondo la tangente, nel senso della linea λ; asse y secondo la normale principale, nel senso della concavità (a piacere, ove fosse nulla la curvatura); asse z diretto in modo da rendere la terna trirettangola e, diciamo, sinistrorsa.

Indichiamo con ξ, η, ζ le coordinate di un punto generico di λ, e con c il valore della curvatura nel punto O.

Avremo, per $s = 0$,

$$\xi = 0, \qquad \eta = 0, \qquad \zeta = 0;$$

$$\frac{d\xi}{ds} = 1, \qquad \frac{d\eta}{ds} = 0, \qquad \frac{d\zeta}{ds} = 0;$$

$$\frac{d^2\xi}{ds^2} = 0, \qquad \frac{d^2\eta}{ds^2} = c, \qquad \frac{d^2\zeta}{ds^2} = 0,$$

con che lo sviluppo abbreviato di MACLAURIN, arrestato al terzo termine, porge, in tutto l'intervallo $(0, l)$

$$(6) \qquad \begin{cases} \xi = s + s^3\xi_1, \\ \eta = c\dfrac{s^2}{2} + s^3\eta_1, \\ \zeta = s^3\zeta_1, \end{cases}$$

ξ_1, η_1, ζ_1 rappresentando funzioni di s, finite e continue.

Introduciamo infine: le coordinate x, y, z del punto potenziato P; la sua distanza ε da O; l'inclinazione ϑ di OP sulla direzione positiva x della tangente; l'angolo φ (contato nel verso $y \to z$), che la proiezione di OP sul piano normale (ad L in O) forma colla direzione positiva y della normale principale.

Sarà evidentemente:

$$(7) \qquad x = \varepsilon\cos\vartheta, \qquad y = \varepsilon \operatorname{sen}\vartheta\cos\varphi, \qquad z = \varepsilon\operatorname{sen}\vartheta\operatorname{sen}\varphi;$$

dopo di che, avendo riguardo alle (6) e ponendo

$$(8) \qquad \begin{cases} s^2\xi_1^2 + 2\xi_1 + s^2\eta_1^2 + cs\eta_1 + \dfrac{c^2}{4} + s^2\zeta_1^2 = \sigma, \\ \qquad -2(\xi_1 x + \eta_1 y + \zeta_1 z) = S, \\ \qquad \sigma s + S = T, \end{cases}$$

risulta

$$(9)\qquad r^2 = (\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2 =$$
$$= s^2 - 2s\,\varepsilon \cos\vartheta + \varepsilon^2 + (-cy + Ts)s^2 .$$

Il nostro scopo è di indagare il comportamento di V_λ quando P si avvicina indefinitamente ad O, quando cioè si fa convergere a zero la distanza ε, pur seguitando — questo si intende bene — a ritenere P esterno alla linea e quindi $\varepsilon > 0$ (senza di che l'integrale (1′) sarebbe privo di significato).

Circa le modalità con cui P si avvicina ad O, non faremo ipotesi speciali, come sarebbe l'ammettere che ciò avvenga secondo un determinato cammino.

Ci basterà precisare una limitazione, che risiede nella natura delle cose, ed è la seguente: trattandosi di un punto P esterno alla linea, il suo avvicinamento ad O non può seguire in direzione tangenziale; noi ammetteremo che, al convergere di ε a zero, la direzione OP si mantenga, non soltanto distinta da x, ma addirittura esterna ad un cono rotondo, tracciato attorno ad x con apertura ϑ_0 *non nulla*. Con tale restrizione, sarà in ogni caso

$$\vartheta_0 < \vartheta < \pi - \vartheta_0$$

e per conseguenza

$$(10)\qquad \frac{1}{\operatorname{sen}\vartheta} < \frac{1}{\operatorname{sen}\vartheta_0},$$

essendo $1/\operatorname{sen}\vartheta_0$ una costante finita.

3. - La distanza ridotta Δ e i rapporti s/Δ, ε/Δ.

Fissiamo i primi tre termini dell'espressione (9) di r^2, e poniamo

$$(11)\qquad \Delta^2 = s^2 - 2s\varepsilon\cos\vartheta + \varepsilon^2 = (s - x)^2 + y^2 + z^2 .$$

Δ può così riguardarsi come ciò che diventa la distanza r, quando vi si pone $c = \xi_1 = \eta_1 = \zeta_1 = 0$, quando cioè, badando alle (6), si passa dalla curva λ alla sua tangente in O (asse delle ascisse). È ben naturale di chiamare Δ ***distanza ridotta*** (rispetto ad r), in quanto la si ottiene sostituendo ad un punto s della curva λ quel punto della sua tangente (in O), che è situato alla stessa distanza s (da O).

Ciò premesso, ricordiamo la nota identità

$$s^2 - 2s\varepsilon \cos \vartheta + \varepsilon^2 = (s - \varepsilon e^{i\vartheta})(s - \varepsilon e^{-i\vartheta})$$

e osserviamo che i due fattori $s - \varepsilon e^{i\vartheta}$, $s - \varepsilon e^{-i\vartheta}$ sono complessi coniugati, ed hanno quindi moduli eguali. D'altra parte il loro prodotto, che è poi il quadrato di questo modulo, vale Δ^2, a norma della (11). Ciascuno di essi ha dunque Δ per modulo. Siccome gli argomenti sono eguali e di segno opposto, potremo porre

$$\begin{aligned} s - \varepsilon e^{i\vartheta} &= \Delta e^{i\tau} \\ s - \varepsilon e^{-i\vartheta} &= \Delta e^{-i\tau}, \end{aligned}$$

con τ reale (al pari di s, ε, ϑ, ecc.).

Queste due equazioni, lineari in s ed ε, sono certo indipendenti, dacchè ϑ non può essere zero, nè π. La loro risoluzione porge

$$\left\{ \begin{aligned} s &= -\Delta \frac{\operatorname{sen}(\tau - \vartheta)}{\operatorname{sen}\vartheta}, \\ \varepsilon &= -\Delta \frac{\operatorname{sen}\tau}{\operatorname{sen}\vartheta}, \end{aligned} \right. \tag{12}$$

e quali, avuto riguardo alla disuguaglianza (10), mostrano che i rapporti s/Δ, ε/Δ si mantengono essenzialmente finiti, comunque varino (anche tendendo a zero) s ed ε. I valori assoluti di questi rapporti ammettono entrambi come limite superiore la costante $1/\operatorname{sen}\vartheta_0$.

4. - Nozione di ordine.

Sia N un polinomio omogeneo in x, y, z, s, a coefficienti costanti, od anche funzioni essi stessi dei quattro argomenti, da ritenersi finite per tutti i valori di s appartenenti all'arco λ e per un certo campo (x, y, z), cui supponiamo appartenga l'origine O.

Sia h il grado di N, k un altro intero qualsiasi, e si consideri una frazione del tipo

$$\frac{N}{\Delta^k}.$$

La differenza $h - k = n$ sarà detta *ordine* della frazione.

Ove si osservi che i rapporti

$$\frac{x}{\Delta} = \frac{\varepsilon}{\Delta}\cos\vartheta\,, \quad \frac{y}{\Delta} = \frac{\varepsilon}{\Delta}\operatorname{sen}\vartheta\cos\varphi\,, \quad \frac{z}{\Delta} = \frac{\varepsilon}{\Delta}\operatorname{sen}\vartheta\operatorname{sen}\varphi\,, \quad \frac{s}{\Delta}\,,$$

rimangono finiti [in virtù delle (12) e (10)] anche per $\varepsilon = s = 0$, si riconosce ovviamente che *ogni frazione d'ordine* $\geqslant 0$ *si conserva finita anche per* $x = y = z = s = 0$. Per un qualsiasi altro sistema di valori del campo considerato la cosa è di per sè evidente, data la natura di N e di Δ, e il fatto che Δ si annulla soltanto per $\varepsilon = s = 0$.

È importante notare che *la derivata* (rapporto ad x, y, z) *di una generica frazione d'ordine n può essere posta sotto la forma di una frazione d'ordine* $n-1$, purchè, beninteso, si supponga che i coefficienti del polinomio N sieno dotati di derivate finite rapporto ad x, y, z.

Immaginiamo infatti di derivare N/Δ^k, rapporto ad x per esempio. Quando si deriva il numeratore N, c'è da tener conto che x vi compare come argomento del polinomio, nonchè (eventualmente) pel tramite dei coefficienti.

Risulteranno perciò due termini, di cui il primo è un polinomio omogeneo di grado $h-1$, mentre l'altro rimane un polinomio omogeneo di grado h, l'uno e l'altro a coefficienti in generale variabili (funzioni finite di x, y, z, s). Ora si può, in molti modi, risguardare anche il secondo polinomio come omogeneo di grado $h-1$, anzichè h, bastando all'uopo staccare uno degli h fattori x, y, z, s di ciascun termine e attribuirlo al relativo coefficiente.

La derivazione del numeratore dà in definitiva

$$\frac{N_1}{\Delta^k}\,,$$

dove N_1 è un polinomio (come già N, a coefficienti in generale variabili) di grado $h-1$.

La derivazione del denominatore Δ^k porge, a norma della (11),

$$-\frac{kN}{\Delta^{k+1}}\,\frac{x-s}{\Delta}\,.$$

Si ha così complessivamente

$$\frac{N_1\Delta^2 - kN(x-s)}{\Delta^{k+2}}\,.$$

Dacchè Δ^2 è un polinomio omogeneo di secondo grado in x, y, z, s, al numeratore compete il grado $h+1$. La frazione è quindi d'ordine

$$h + 1 - (k + 2) = n - 1 , \qquad \text{c. d. d.}$$

Combinando le due proprietà di derivazione e di comportamento, si ha ancora:

Una funzione d'ordine $\geqslant 1$ *si mantiene finita, assieme alle sue derivate* (rapporto ad x, y, z), *anche per* $\varepsilon = s = 0$.

5. - Discriminazione dei termini d'ordine minimo contenuti in $1/r$ e in μ/r.

In base alle ipotesi del n. 2, c è una costante (curvatura di λ in O) e T una funzione di x, y, z, s, che possiede un limite superiore finito, ogni qualvolta la distanza di P da O non supera un limite prefissato, del resto qualunque, ε_0.

Supponendo ε_0 abbastanza piccolo e limitando, se occorre, la lunghezza l di λ, potremo ritenere

$$|-cy + Ts| < \operatorname{sen}^2 \vartheta_0 ,$$

per ogni $\varepsilon \leqslant \varepsilon_0$ e per ogni $s \leqslant l$.

Ove si ponga

$$q = \frac{(-cy + Ts)s^2}{\Delta^2} , \tag{13}$$

e si ricordi che il modulo di s/Δ non supera $1/\operatorname{sen} \vartheta_0$, si avrà pure la disuguaglianza

$$|q| < 1 .$$

Essa permette di scrivere

$$(1 + q)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2} q + q^2 f(q) , \tag{14}$$

designando f una funzione di q, olomorfa per $|q| < 1$.

Veniamo ormai al punto principale della discussione, che è lo studio di $1/r$.

Le (9), (11) e (13) dànno anzitutto

$$r^2 = \Delta^2 + (-cy + Ts)s^2 = \Delta^2(1 + q) .$$

Di qua, elevando entrambi i membri alla potenza $-1/2$ e badando alla (14), si ricava

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{\Delta}\left\{1-\frac{1}{2}q+q^2 f(q)\right\}.$$

Esplicitando $-q/2$ a norma della (13) e ponendo

$$G=-\frac{1}{2}\frac{Ts^3}{\Delta^3}+\frac{q^2 f(q)}{\Delta}, \tag{15}$$

risulta

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{\Delta}+\frac{1}{2}cy\frac{s^2}{\Delta^3}+G. \tag{16}$$

Per riconoscere il comportamento di G, conviene richiamarsi al numero precedente, e osservare quanto segue:

1) q è, a norma della (13), una frazione di prim'ordine: pure di prim'ordine è in conseguenza $q^2 f(q)/\Delta$;

2) per le (8), σ è funzione finita di s, S funzione lineare omogenea di x, y, z (con coefficienti che sono funzioni finite di s). Risultano quindi di prim'ordine $T=\sigma s+S$, nonchè $-Ts^3/(2\Delta^3)$.

Dopo ciò, il termine complementare G si presenta come somma di due frazioni di primo ordine. La derivabilità dei coefficienti rapporto ad x, y, z essendo evidentemente assicurata, si può asserire, per l'osservazione finale del numero precedente, che G si conserva finito, assieme alle sue derivate rapporto ad x, y, z, anche per $s=\varepsilon=0$.

La stessa proprietà compete naturalmente a μG, essendo μ la funzione di s (finita assieme alle sue due prime derivate), che rappresenta la densità.

Ove si ponga mente alla espressione (5) di $\mu(s)$, e si considerino i prodotti

$$\frac{s^2\mu_1}{\Delta}, \qquad \frac{\frac{1}{2}cys^3(\mu_0'+\mu_1 s)}{\Delta^3},$$

si vede subito che sono entrambi di primo ordine.

Ne viene, in base alle (15) e (16),

$$\frac{\mu}{r}=\alpha+A, \tag{17}$$

dove

$$\alpha=\frac{\mu_0}{\Delta}+\frac{1}{2}c\mu_0 y\frac{s^2}{\Delta^3}+\mu_0'\frac{s}{\Delta}, \tag{18}$$

e

$$A = \mu G + \frac{s^2\mu_1}{\Delta} + \frac{\frac{1}{2}cys^3(\mu_0' + \mu_1 s)}{\Delta^3}, \tag{19}$$

la funzione A mantenendosi finita assieme alle sue derivate (rapporto ad x, y, z) *anche per $\varepsilon = s = 0$.*

6. - Espressione asintotica di V_λ.

L'$\int_0^l \alpha\, ds$ si valuta coi procedimenti elementari del calcolo.

Anzi tutto, tenendo conto della definizione (11) di Δ^2,

$$\Delta^2 = s^2 - 2sx + \varepsilon^2 \qquad\qquad (x = \varepsilon \cos\vartheta),$$

potremo scrivere l'espressione (18) di α sotto la forma

$$\alpha = \frac{\mu_0}{\Delta} + \frac{1}{2}c\mu_0 y\, \frac{\Delta^2 + 2x(s-x) + \varepsilon^2(\cos^2\vartheta - \operatorname{sen}^2\vartheta)}{\Delta^3}$$

$$+ \mu_0' \frac{s-x}{\Delta} + \mu_0' \frac{x}{\Delta} = \left\{\mu_0\left(1 + \frac{1}{2}cy\right) + \mu_0' x\right\}\frac{1}{\Delta} + c\mu_0 xy \frac{s-x}{\Delta^3}$$

$$+ \frac{1}{2}c\mu_0 y(\cos^2\vartheta - \operatorname{sen}^2\vartheta)\frac{\varepsilon^2}{\Delta^3} + \mu_0'\frac{s-x}{\Delta}.$$

Siccome poi

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{d}{ds}\log(\Delta + s - x),$$

$$\frac{s-x}{\Delta^3} = -\frac{d}{ds}\frac{1}{\Delta},$$

$$\frac{\varepsilon^2}{\Delta^3} = \frac{1}{\operatorname{sen}^2\vartheta}\frac{d}{ds}\frac{s-x}{\Delta},$$

$$\frac{s-x}{\Delta} = \frac{d}{ds}\Delta,$$

così, integrando e limitando fra 0 e l, ove si chiami J_l il complesso dei termini, che si riferiscono al limite superiore l, e si avverta che, per

$s=0$, $\Delta=\varepsilon$, risulta subito

$$\int_0^l \alpha\,ds = -\left\{\mu_0\left(1+\frac{1}{2}cy\right)+\mu_0'x\right\}\log(\varepsilon-x)+c\mu_0\frac{xy}{\varepsilon}$$
$$+\frac{1}{2}c\mu_0 y\frac{\cos^2\vartheta-\operatorname{sen}^2\vartheta}{\operatorname{sen}^2\vartheta}\frac{x}{\varepsilon}-\mu_0'\varepsilon+J_l\,.$$

Si riconosce senza alcuna difficoltà, in base alle (7) e alla disuguaglianza fondamentale (10), che

$$-\left\{\frac{1}{2}c\mu_0 y+\mu_0'x\right\}\log\left(1-\frac{x}{\varepsilon}\right),$$

$$c\mu_0\frac{xy}{\varepsilon},$$

$$\frac{1}{2}c\mu_0 y\frac{\cos^2\vartheta-\operatorname{sen}^2\vartheta}{\operatorname{sen}^2\vartheta}\frac{x}{\varepsilon}=\frac{1}{2}c\mu_0 y\frac{x^2-y^2-z^2}{y^2+z^2}\frac{x}{\varepsilon},$$

$$-\mu_0'\varepsilon,$$

nonchè J_l si mantengono finiti, assieme alle loro derivate (rapporto ad x, y, z) anche per $x=y=z=0$. Potremo quindi scrivere, chiamando B l'insieme di questi termini,

$$\int_0^l \alpha\,ds = -\mu_0\log(\varepsilon-x)-\left\{\frac{1}{2}c\mu_0 y+\mu_0'x\right\}\log\varepsilon+B\,.$$

Dato il comportamento di A, siamo fatti certi che anche $\int_0^l A\,ds$ è funzione di x, y, z, che si mantiene finita, assieme alle sue derivate prime, nell'intorno dell'origine.

Se quindi si pone

(20) $$V_\lambda^{(a)}=-\mu_0\log(\varepsilon-x)-\{\tfrac{1}{2}c\mu_0 y+\mu_0'x\}\log\varepsilon\,,$$

(21) $$F_\lambda=B+\int_0^l A\,ds\,,$$

si avrà dalle (1') e (17)

(22) $$V_\lambda=V_\lambda^{(a)}+F_\lambda$$

con F_λ finita assieme alle sue prime derivate.

Il primo addendo $V_\lambda^{(a)}$ *costituisce pertanto una espressione asintotica di* V_λ *atta alla derivazione.*

7. - Espressione asintotica del potenziale V.

Riportiamoci al n. 1 e ricordiamo che, essendo L la linea potenziante ed O un suo punto qualunque, abbiamo immaginato di scindere L nei tratti λ, λ^* e Λ, mancando λ^* quando O è un estremo di L.

Ammetteremo, come è ben naturale, che la configurazione geometrica di L e la distribuzione delle masse posseggano i soliti requisiti, siano cioè rappresentabili mediante funzioni finite e *generalmente* derivabili quanto occorre. L'avverbio *generalmente* sta a significare che si esclude al più un numero finito di punti *angolosi*, nei quali può subire brusche variazioni qualcuno di questi elementi: direzione della tangente, curvatura, densità.

Ciò posto, tanto se O è un punto ordinario, quanto se è un punto angoloso (purchè soltanto non sia un estremo di L), si potranno certamente staccare da una parte e dall'altra di esso due archi λ e λ^*, dotati entrambi delle proprietà specificate al n. 2, e abbastanza brevi, perchè sia valida la disuguaglianza, di cui è parola in principio del n. 5.

Ne viene che i due addendi V_λ e V_{λ^*} della formula (4) posseggono ciascuno una espressione asintotica, a norma della (20).

Il terzo addendo V_Λ rimane regolare nell'intorno di O, perchè proviene da elementi situati a distanza finita da O. L'espressione asintotica $V^{(a)}$ di V si riduce dunque a $V_\lambda^{(a)} + V_{\lambda^*}^{(a)}$.

Qualora O sia un estremo, viene a mancare il tratto λ^* e rimane $V^{(a)} = V_\lambda^{(a)}$.

Esplicitiamo $V^{(a)}$, distinguendo all'uopo tre casi:

a) *O è un punto ordinario di L.*

Il triedro principale $Oxyz$, relativo all'arco λ, differisce dall'analogo triedro relativo all'arco λ^* soltanto per il fatto che sono diretti per verso opposto i due assi delle x, e anche quelli delle z, se i due triedri si ritengono congruenti (entrambi sinistrorsi per es.).

Affinchè le coordinate x, y, z di P, le quali appariscono nelle due espressioni di $V_\lambda^{(a)}$ e di $V_{\lambda^*}^{(a)}$, siano riportate al medesimo sistema coordinato, basterà, in una delle due, in quella di $V_{\lambda^*}^{(a)}$ per es., scambiare x e z in $-x$ e $-z$.

D'altra parte, trattandosi di un punto ordinario, le due costanti c e μ_0 sono le stesse tanto per $V_\lambda^{(a)}$ quanto per $V_{\lambda^*}^{(a)}$, mentre (essendo opposte le direzioni dei due archi λ e λ^*) il μ_0', relativo a $V_{\lambda^*}^{(a)}$, presenta un cambiamento di segno rispetto all'elemento analogo, relativo a $V_\lambda^{(a)}$. Ne risulta

$$V^{(a)} = -\mu_0 \log(\varepsilon^2 - x^2) - 2\{\tfrac{1}{2}c\mu_0 y + \mu_0' x\} \log \varepsilon \,, \tag{23}$$

dove — riassumo, per comodo di consultazione, il significato delle lettere — *le coordinate x, y, z si riferiscono al triedro principale della linea L nel punto O, coll'asse x diretto secondo la tangente* (in un senso arbitrario) *e l'asse y secondo la normale principale* (verso la concavità di L); *c è la curvatura nel punto O*; *μ_0 il valore della densità in questo punto*; *μ_0' il valore della derivata di μ* (rapporto all'arco, nel senso assunto come positivo sulla tangente); *infine $\varepsilon = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ è la distanza del punto potenziato P da O.*

b) O è un estremo di L.

Manca l'addendo $V_{\lambda^*}^{(a)}$ e si ha per $V^{(a)}$ l'espressione (20).

c) O è un punto angoloso.

In questo caso sono in generale diverse le orientazioni dei due triedri principali relativi a λ e a λ^*, nonchè i valori di c, μ_0 e μ_0'.

L'espressione asintotica si ha ancora esplicitando

$$V_\lambda^{(a)} + V_{\lambda^*}^{(a)} \,,$$

come nel caso *a*); ma la trasformazione di coordinate, necessaria per far apparire nei due addendi uno stesso sistema di riferimento, non dà luogo, in generale, a riduzioni significanti.

8. - Espressione asintotica della velocità indotta da un vortice lineare.

Ferme restando le notazioni finora adoperate, sia ω una funzione di s (finita assieme alle sue due prime derivate), e si ponga

$$\left\{\begin{aligned} P &= \frac{1}{2\pi}\int_L \omega \frac{d\xi}{ds}\frac{ds}{r} \,, \\ Q &= \frac{1}{2\pi}\int_L \omega \frac{d\eta}{ds}\frac{ds}{r} \,, \\ R &= \frac{1}{2\pi}\int_L \omega \frac{d\zeta}{ds}\frac{ds}{r} \,. \end{aligned}\right. \tag{24}$$

L'espressione asintotica di P in un punto ordinario O si ottiene senza altro dalla (23), sostituendo, al posto di μ, $\omega(d\xi/ds)$, e, per conseguenza,

$$\frac{d}{ds}\left(\omega\,\frac{d\xi}{ds}\right)=\omega\,\frac{d^2\xi}{ds^2}+\frac{d\omega}{ds}\,\frac{d\xi}{ds}\,,$$

al posto di μ'.

Analogamente per Q ed R. Nel punto O si ha, in virtù delle (6),

$$\frac{d\xi}{ds}=1\,,\quad \frac{d\eta}{ds}=0\,,\quad \frac{d\zeta}{ds}=0\,;$$

$$\frac{d^2\xi}{ds^2}=0\,,\quad \frac{d^2\eta}{ds^2}=c\,,\quad \frac{d^2\zeta}{ds^2}=0\,.$$

Se quindi si rappresentano con ω_0 e ω_0' i valori di ω e di $d\omega/ds$ in O, risulta subito che bisogna porre nella (23):

$$\text{per } P,\quad \mu_0=\frac{\omega_0}{2\pi}\quad \text{e}\quad \mu_0'=\frac{\omega_0'}{2\pi}\,,$$

$$\text{per } Q\,,\quad \mu_0=0\quad \text{e}\quad \mu_0'=\frac{c\omega_0}{2\pi}\,,$$

$$\text{per } R,\quad \mu_0=\mu_0'=0\,.$$

Ne conseguono le espressioni asintotiche

$$(25)\qquad \left\{\begin{aligned} P^{(a)}&=-\frac{\omega_0}{2\pi}\log(\varepsilon^2-x^2)-\frac{1}{\pi}\left\{\frac{1}{2}\,c\omega_0 y+\omega_0' x\right\}\log\varepsilon\,,\\ Q^{(a)}&=-\frac{1}{\pi}\,c\omega_0 x\log\varepsilon\,,\\ R^{(a)}&=0\,.\end{aligned}\right.$$

Il rotor del vettore (P, Q, R) ha per componenti

$$(26)\qquad \left\{\begin{aligned} u&=\frac{dR}{dy}-\frac{dQ}{dz}\,,\\ v&=\frac{dP}{dz}-\frac{dR}{dx}\,,\\ w&=\frac{dQ}{dx}-\frac{dP}{dy}\,.\end{aligned}\right.$$

Le loro espressioni asintotiche $u^{(a)}$, $v^{(a)}$, $w^{(a)}$ si hanno senz'altro, limitando nei secondi membri P, Q, R alle parti asintotiche (25).

A prescindere da termini che rimangono finiti anche per $\varepsilon = 0$, risulta

$$(27) \qquad \begin{cases} u^{(a)} = 0\,, \\[2ex] v^{(a)} = -\dfrac{\omega_0}{\pi}\,\dfrac{z}{\varepsilon^2 - x^2}\,, \\[2ex] w^{(a)} = -\dfrac{\omega_0}{2\pi}\,c\log\varepsilon + \dfrac{\omega_0}{\pi}\,\dfrac{y}{\varepsilon^2 - x^2}\,. \end{cases}$$

Le (26) definiscono in particolare ([3]) le componenti u, v, w della velocità provocata, in seno ad un liquido indefinito, da una linea vorticosa L, o meglio da un filetto vorticoso di sezione infinitesima avente L per direttrice e $2\bar{\omega}$ per momento: in questo caso $\bar{\omega}$ (semicircolazione) è a ritenersi una pura costante, e coincide quindi con ω_0.

Comunque, le espressioni asintotiche di tale velocità sono date dalle (27), come, per altra via, aveva già dimostrato il dott. DA RIOS.

([3]) Cfr. per es. P. APPELL, *Traité de mécanique rationnelle*, [Paris, Gauthier-Villars, 1903], t. III, p. 415.

IV.

SULL'ATTRAZIONE NEWTONIANA DI UN TUBO SOTTILE

Nota I.

« Rend. Acc. Lincei », s. 5ª, vol. $XVII_2$, (1908_2), pp. 413-426

L'attrazione Φ, esercitata da una linea materiale sopra un punto esterno P, tende notoriamente a diventare infinita quando P si avvicina indefinitamente alla linea. In una Nota recente [1] ho assegnata la espressione asintotica di una tale attrazione, sceverando (nelle derivate del corrispondente potenziale, e quindi nel vettore da esse definito) la parte singolare $\Phi^{(a)}$. Questa dipende soltanto dal comportamento *locale* della linea materiale, nell'intorno di quella posizione, cui si suppone vada indefinitamente avvicinandosi il punto P.

Dacchè la proprietà caratteristica di $\Phi^{(a)}$ è che la differenza

$$\Phi - \Phi^{(a)} = \Psi$$

rimanga finita (mentre $\Phi^{(a)}$ stesso si trova affetto da singolarità), è evidente che, per P abbastanza vicino alla linea, l'addendo $\Phi^{(a)}$ prepondera su Ψ; quest'ultimo può quindi essere trascurato di fronte a $\Phi^{(a)}$ con approssimazione tanto maggiore, quanto più è prossimo il punto potenziato alla linea potenziante.

Scopo del presente lavoro è di *passare dal caso ipotetico di una linea al caso concreto di un tubo* (*pieno*) T, di sezione abbastanza piccola, rispetto alla lunghezza, da essere, quanto all'andamento generale, assimilabile ad una semplice linea. Anche quanto all'attrazione, un tale tubo non differirà sensibilmente da una linea materiale, finchè si tratterà di punti posti *a debita distanza*. Ma, per punti situati in prossimità o addirittura nell'interno del tubo stesso, non sono più trascurabili le dimensioni trasversali rispetto alle distanze degli elementi potenzianti dal punto poten-

---

(1) Pag. 3-15 di questo stesso volume dei « Rendiconti » [in questo vol. delle « Opere »: III, pp. 19-33].

ziato, nè è quindi in alcun modo giustificata la identificazione suddetta.

Si riconosce anzi a prima vista una differenza profonda fra i due casi. Per la linea, l'attrazione diviene infinita; per il tubo (comunque lo si supponga sottile), tutto resta finito. Non c'è dunque da aspettarsi in questo secondo caso una espressione asintotica, desunta da una semplice separazione delle singolarità. Tuttavia, se si immagina decomposto il tubo in fibrille elementari, e si osserva che ciascuna di queste è effettivamente assimilabile ad una linea materiale, si può ragionare come segue:

L'ipotesi che il punto potenziato P sia interno o prossimo al tubo (supposto il tubo abbastanza sottile), implica che sia piccola la distanza di P da ogni fibrilla, così piccola in particolare perchè alla corrispondente attrazione su P sia con sufficiente approssimazione sostituibile la sua parte asintotica.

Ma allora, sommando questi contributi asintotici, si avrà una espressione dell'attrazione tanto più approssimata, quanto più è sottile il tubo; e questa espressione (al pari dei contributi, da cui risulta) godrà della proprietà fondamentale di dipendere soltanto da elementi *locali*, cioè dalle caratteristiche geometriche e materiali dell'agente in prossimità del punto P.

Ecco il risultato ultimo, cui si perviene svolgendo sistematicamente un tale ordine di idee:

Si fissi, entro il tubo T, una qualunque fra le infinite linee geometriche, atte a definire l'andamento generale del tubo: questa linea si chiamerà *mediana* o *direttrice*, e si designerà con C.

Sia P un punto generico di C; c la curvatura in questo punto; τ la sezione del tubo, praticata col piano normale a C, condotto per P.

Sieno ancora O e Q due punti di τ; $d\tau_0$, $d\tau$ due elementi della sezione ad essi circostanti; $\Delta = \overline{OQ}$; e si ponga

$$k = \frac{1}{\tau^2}\int_\tau d\tau \int_\tau d\tau_0 \log \frac{l}{\Delta}, \tag{I}$$

dove l è una costante inessenziale, che figura per ragione di omogeneità, ed è vincolata alla sola condizione qualitativa di essere abbastanza grande rispetto alla massima corda di τ. (In eventuali applicazioni numeriche converrà assumere l dello stesso ordine di grandezza della lunghezza del tubo).

La k, così definita, è, come si vede, un puro numero; essa viene a dipendere, per un dato tubo, soltanto dalla sezione normale τ, cui ci si riferisce, o, ciò che è lo stesso, dal punto P. Se si immagina di fissare la posizione di P sulla direttrice C mediante l'arco s di curva, contato a partire da un'origine arbitraria, la k si presenta come funzione di s.

Ciò posto, si prenda a considerare una porzioncina di tubo di spessore ds, compresa fra τ e un'altra sezione normale vicinissima. Rappresentando con $\nu\, ds$ la quantità di materia (²), situata fra queste due sezioni, ν sarà a dirsi la densità lineare in P del nostro tubo T.

Rappresenti poi $\boldsymbol{F} ds$ (in grandezza e direzione) la risultante delle attrazioni newtoniane, che la detta porzione elementare subisce da parte di tutto il tubo; con che il vettore finito $\boldsymbol{F}$ si trova riferito all'unità di lunghezza.

Dette F_t, F_n, F_b *le componenti di* $\boldsymbol{F}$ *secondo la tangente a* C (nel senso, in cui si contano gli archi s), *secondo la normale principale* (nel senso della concavità) *e secondo la binormale, ove si assuma la costante dell'attrazione eguale all'unità, si ha asintoticamente*

$$\text{(II)} \qquad F_t^{(a)} = \frac{d(\nu^2 k)}{ds}, \qquad F_n^{(a)} = \nu^2 kc, \qquad F_b^{(a)} = 0 .$$

L'appellativo « asintotico » va così inteso:

Il vettore $\boldsymbol{F}^{(a)}$, definito dalle (II), tende a differire tanto meno (in grandezza e direzione) dalla risultante $\boldsymbol{F}$, quanto più è sottile il tubo. In modo più preciso: le direzioni di $\boldsymbol{F}$ e di $\boldsymbol{F}^{(a)}$ tendono a coincidere; il rapporto $F^{(a)}/F$ delle rispettive lunghezze tende all'unità, al decrescere indefinito della sezione del tubo.

Mostrerò prossimamente come a queste considerazioni asintotiche si colleghi una *applicazione ai campi elettromagnetici puri*, che già ebbi ad annunciare nella precedente mia Nota.

1. - Tubi costituiti da linee di una data congruenza.

Sia data in una certa regione Γ dello spazio una congruenza di linee L, cioè una famiglia ∞^2 di curve, tale che per ogni punto ne passi una. Sieno genericamente u, v due parametri determinativi delle curve della famiglia (per es. le coordinate delle rispettive intersezioni con un piano fisso, o con un'altra superficie qualsiasi, che tagli ciascuna di esse in un sol punto); sia w un terzo parametro atto a fissare la posizione dei punti sopra le curve L (per es. la lunghezza dell'arco, contata a partire dall'anzidetta superficie unisecante).

Con tali ipotesi, rimangono univocamente definite le coordinate cartesiane x, y, z dei punti della regione Γ, in funzione di u, v, w. Scrive-

(²) Ci riferiamo qui, per comodità di linguaggio, al caso dell'attrazione di masse materiali. Nel corso della ricerca è però trattata la densità della distribuzione come una quantità, che può anche essere negativa. Ciò coll'ovvio intendimento di rendere senz'altro applicabili i risultati anche alle azioni elettriche, alla teoria dei vortici, ecc.

remo in conformità

$$(1) \qquad \begin{cases} x = x(u, v;\, w)\,, \\ y = y(u, v;\, w)\,, \\ z = z(u, v;\, w)\,, \end{cases}$$

e avremo in queste formule anche la rappresentazione parametrica d'una generica curva della congruenza: basterà naturalmente attribuire valori fissi ad u, v, facendo variare la sola w.

Supponiamo ulteriormente che i secondi membri delle (1) posseggano (sempre entro Γ) derivate finite dei primi quattro ordini, e che non si annulli il determinante funzionale

$$(2) \qquad D = \begin{vmatrix} \frac{dx}{du} & \frac{dy}{du} & \frac{dz}{du} \\ \frac{dx}{dv} & \frac{dy}{dv} & \frac{dz}{dv} \\ \frac{dx}{dw} & \frac{dy}{dw} & \frac{dz}{dw} \end{vmatrix}\,;$$

anzi, in modo più preciso, che sia diverso da zero il limite inferiore del suo valore assoluto.

Queste condizioni sono più che sufficienti per assicurare la continuità e la derivabilità per due volte successive (sia rispetto ad u, v, w, che rispetto ad x, y, z) delle caratteristiche geometrico-differenziali di primo e second'ordine, spettanti alle curve della congruenza. Saranno in particolare funzioni continue e derivabili due volte i coseni direttori α, β, γ della tangente, la curvatura c e i coseni direttori α_1, β_1, γ_1 della normale principale.

Ciò premesso, fissiamo una determinata fra le curve L e designamola con C, supponendo (come è evidentemente lecito senza pregiudizio della generalità) che essa corrisponda ai valori $u = 0$, $v = 0$ dei due parametri determinativi.

Consideriamo le curve L della congruenza vicine a C, e precisamente tutte quelle, che corrispondono a valori di u, v, situati in un certo intorno $\bar{\omega}$ di $u = v = 0$: esse riempiono complessivamente uno spazio filiforme, contenuto in Γ, che diremo *tubo* T, caratterizzato, quanto all'andamento generale, dalla sola linea C (come del resto da un'altra qualsiasi delle varie L, che lo costituiscono). Diremo che C è la *direttrice* del tubo, o, in particolare (se si tratta di un tubo chiuso), dell'anello T.

Quanto all'intorno $\bar{\omega}$ (da cui dipende la grossezza del tubo), converrà ritenerlo abbastanza piccolo perchè sussista costantemente una certa disuguaglianza, che sarà specificata qui appresso [n. 2, *b*)].

Interpreteremo le coppie di valori di u, v come punti di un piano rappresentativo Π; $\tilde{\omega}$ viene così a corrispondere ad una piccola area comprendente l'origine. Ogni punto di quest'area individua una curva L, e potrà dirsi *piede della curva*; il piede della direttrice C viene quindi a cadere nell'origine.

2. - Comportamento delle sezioni trasversali. Lemmi diversi.

Le (1), risguardandovi costante w, ci porgono la rappresentazione parametrica di una sezione trasversale σ del tubo; u, v possono naturalmente interpretarsi come coordinate curvilinee di tale superficie. Il relativo quadrato dell'elemento lineare sarà

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2\,,$$

ove si ponga secondo la consuetudine (con evidente significato della notazione)

$$E = \sum \left(\frac{dx}{du}\right)^2, \qquad F = \sum \frac{dx}{du}\,\frac{dx}{dv}, \qquad G = \sum \left(\frac{dx}{dv}\right)^2.$$

Posto pure

$$H = |\sqrt{EG - F^2}|\,, \tag{3}$$

si ha in

$$H^2 = \begin{vmatrix} E & F \\ F & G \end{vmatrix}$$

il quadrato, fatto per righe, della matrice

$$\begin{Vmatrix} \dfrac{dx}{du} & \dfrac{dy}{du} & \dfrac{dz}{du} \\[2ex] \dfrac{dx}{dv} & \dfrac{dy}{dv} & \dfrac{dz}{dv} \end{Vmatrix}. \tag{4}$$

Come tale, esso ha, in tutto il campo Γ, un limite inferiore certo diverso da zero: infatti, in caso contrario, sarebbe pur zero il limite inferiore del valore assoluto di D.

Per la stessa ragione è diverso da zero il limite inferiore del radicale

$$(5)\qquad h = \left|\sqrt{\left(\frac{dx}{dw}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dw}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dw}\right)^2}\right| .$$

Introduciamo l'angolo (non ottuso) ψ, che la normale alla sezione σ in un punto generico forma colla linea L passante per quel punto.

Dacchè i coseni direttori α, β, γ di L sono proporzionali a dx/dw, dy/dw, dz/dw, mentre quelli della normale a σ sono proporzionali ai minori della matrice (4), i coefficienti di proporzionalità essendo $\pm 1/h$, $\pm 1/H$ secondo il senso che si assume come positivo, si ha ovviamente

$$(6)\qquad \cos\psi = \frac{|D|}{Hh} ,$$

donde apparisce che anche il limite inferiore di $\cos\psi$ è diverso da zero: ciò val quanto dire che ψ non supera mai un certo angolo acuto.

A complemento di queste generalità, conviene rilevare quanto segue:

a) Sia ε la distanza fra due punti generici $Q(x, y, z)$ ed $O(x_0, y_0, z_0)$ di una medesima sezione trasversale σ ($w =$ cost). Dette u, v; u_0, v_0 le rispettive coordinate curvilinee, poniamo

$$(7)\qquad \chi = \left|\sqrt{(u - u_0)^2 + (v - v_0)^2}\right| ,$$

con che χ misura, nel piano rappresentativo Π, la distanza fra i piedi delle due curve L, passanti rispettivamente per Q e per O.

Nell'intorno $\tilde{\omega}$ del detto piano rappresentativo,

$$\varepsilon^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = \sum (x - x_0)^2$$

può considerarsi come funzione di u, v (nonchè di u_0, v_0), continua assieme alle sue prime derivate.

Posto per brevità

$$\Sigma(x - x_0)\frac{d^2x}{du^2} = E_1, \qquad \Sigma(x - x_0)\frac{d^2x}{du\,dv} = F_1, \qquad \Sigma(x - x_0)\frac{d^2x}{dv^2} = G_1,$$

avremo

$$\frac{d^2\varepsilon^2}{du^2} = 2\Sigma\left(\frac{dx}{du}\right)^2 + 2\Sigma(x - x_0)\frac{d^2x}{du^2} = 2(E + E_1) ,$$

e analogamente

$$\frac{d^2\varepsilon^2}{du\,dv} = 2(F + F_1), \qquad \frac{d^2\varepsilon^2}{dv^2} = 2(G + G_1) ,$$

E_1, F_1, G_1 convergendo manifestamente a zero, quando Q ed O tendono a coincidere.

Per $u = u_0$, $v = v_0$, ε^2 si annulla assieme alle sue derivate prime; applicando ad essa lo sviluppo abbreviato di TAYLOR (rispetto alle due variazioni u, v, a partire dai valori $u_0\, v_0$), potremo scrivere

$$\varepsilon^2 = (E + E_1)(u - u_0)^2 + 2(F + F_1)(u - u_0)(v - v_0) + (G + G_1)(v - v_0)^2 ,$$

i coefficienti riferendosi ad argomenti intermedî fra u e u_0, v e v_0.

Nell'intorno di ogni coincidenza della coppia Q, O ($u = u_0$, $v = v_0$), la precedente espressione di ε^2 costituisce una forma quadratica definita rispetto agli argomenti $u - u_0$, $v - v_0$ (in quanto i coefficienti differiscono tanto poco quanto si vuole da E, F, G, i quali appartengono ad una forma definita).

Pur definita è la forma χ^2. Il rapporto ε^2/χ^2 oscilla pertanto fra numeri finiti. Siccome d'altra parte, finchè la distanza ε rimane superiore ad un certo limite fisso, lo stesso segue di χ, così si può ritenere che, *per qualsiasi coppia Q, O, ε/χ resta compreso fra due costanti positive.*

b) Ipotesi complementare; *interpretazione geometrica.* – Il secondo membro della (6) dipende dalle nove derivate di x, y, z rapporto ad u, v, w. Immaginiamo che sei di queste, e precisamente

$$\frac{dx}{du}, \quad \frac{dy}{du}, \quad \frac{dz}{du},$$

$$\frac{dx}{dv}, \quad \frac{dy}{dv}, \quad \frac{dz}{dv},$$

si riferiscano ad un punto Q, cioè a certi valori u, v, w degli argomenti; e le rimanenti tre:

$$\frac{dx}{dw}, \quad \frac{dy}{dw}, \quad \frac{dz}{dw},$$

ad un altro punto O della stessa sezione, cioè a valori, in generale diversi, u_0, v_0 dei primi due parametri, e allo stesso valore di w.

Per mettere in evidenza questa accezione, scriveremo $D_{QO}/(H_Q h_O)$.

Dacchè, per $u = u_0$, $v = v_0$, e in particolare per $u = u_0 = 0$, $v = v_0 = 0$, l'espressione $D/(Hh)$ non si annulla, e si tratta di funzione continua, potremo asserire che esiste un intorno $\tilde{\omega}_1$ di $u = v = 0$, tale che, comunque si scelgano nell'intorno le coppie u, v; u_0, v_0, rimanga (sopra qualsiasi sezione, cioè per tutti i valori di w, che giova considerare) diverso da zero il limite inferiore di $|D_{QO}|/(H_Q h_O)$.

Ciò posto, introdurremo, accanto alle premesse del n. 1, l'ipotesi complementare seguente:

L'intorno $\tilde{\omega}$, che caratterizza il tubo T, è abbastanza piccolo da trovarsi tutto contenuto in $\tilde{\omega}_1$.

Dal punto di vista geometrico, seguitando a designare con $\cos\psi$ il rapporto $|D_{QO}|/(H_Q h_O)$, ψ può interpretarsi come l'angolo che la normale alla sezione in Q forma colla tangente alla linea L in O. Quest'angolo ψ, per qualsiasi coppia di punti Q ed O, appartenenti alla stessa sezione del tubo, rimane pertanto inferiore ad un angolo fisso, minore di $\pi/2$.

Qualora si tenga presente:

1) che le direzioni appartenenti al piano tangente (a σ in Q) formano colla detta tangente a L in O angoli necessariamente compresi fra $\pi/2 - \psi$ e $\pi/2 + \psi$, talchè i relativi coseni non possono superare $\operatorname{sen}\psi$, in valore assoluto;

2) che, se si congiungono due punti quali si vogliono di σ con un arco tracciato sulla stessa σ, una almeno delle tangenti nei punti intermedi dell'arco è parallela alla corda determinata dagli estremi;

si è condotti alla conclusione che il coseno dell'angolo, compreso fra una generica corda di σ e la tangente ad una curva L, spiccata da un punto, pure generico, della stessa sezione σ, non può mai superare, in valore assoluto, una certa costante, essenzialmente minore dell'unità.

c) *Funzioni semi-finite. Ordine di grandezza dei rispettivi integrali.* – Sia f una funzione dei due punti Q ed O e di quanti si vogliono altri punti parametrici P, R, ecc., variabili anch'essi sopra una medesima sezione σ. Consideriamo in particolare la dipendenza di f dalle coordinate u_0, v_0 del punto O, e supponiamo che (comunque varino i punti parametrici) essa possa al più diventare infinita di prim'ordine per O coincidente con $Q(u_0 = u,\ v_0 = v)$, mantenendosi finita e continua per ogni altra posizione di O.

In tale ipotesi, f potrà porsi sotto la forma

$$\frac{f_1}{\varepsilon},$$

essendo f_1 ovunque finita.

Se, collo stesso significato di f^*, f_1 può a sua volta presentarsi sotto la forma $\overline{PR}\cdot f^*$, con che

$$f = \frac{\overline{PR}}{\varepsilon} f^*, \tag{8}$$

diremo che f è *funzione semi-finita.*

Manifestamente le funzioni finite rientrano nella definizione come caso particolare: basta supporre $\overline{PR} = \varepsilon$.

La ragione del nome sta nella circostanza che, pur potendo f diventare infinita nel punto Q, il suo integrale

$$J = \int_{\tilde{\omega}} f \, du_0 \, dv_0 \,, \tag{9}$$

verifica una disuguaglianza dello stesso tipo di quelle che valgono per ogni funzione finita.

La constatazione è immediata. Immaginiamo infatti di assumere, nel piano rappresentativo Π delle u_0, v_0, un sistema di coordinate polari col polo nel punto (u, v) (piede della curva L passante per Q). Il raggio vettore di questo sistema di coordinate è la χ, definita dalla (7); chiamando ϑ l'anomalia, si ha, per l'elemento di campo $\tilde{\omega}$,

$$d\tilde{\omega} = \chi \, d\chi \, d\vartheta \,.$$

La precedente espressione di J, ove si assumano come variabili correnti di integrazione χ e ϑ, anzichè u_0 e v_0, e si abbia riguardo alla (8), potrà essere scritta

$$J = \int_{\tilde{\omega}} \overline{PR} f^* \frac{\chi}{\varepsilon} \, d\chi \, d\vartheta \,.$$

Notiamo che, per l'osservazione a), il rapporto χ/ε oscilla entro limiti finiti, e che lo stesso può dirsi del rapporto $\overline{PR}/\chi_1$, designando χ_1 la distanza (nel piano rappresentativo Π) fra i piedi delle due curve L, passanti rispettivamente per P e per R.

Se ne desume la possibilità di assegnare una costante positiva M tale che, per tutti i valori dei varî argomenti che interessa considerare,

$$\left| \overline{PR} f^* \frac{\chi}{\varepsilon} \right| < \frac{M}{2\pi} \chi_1 \,.$$

In base a tale disuguaglianza, chiamando δ la massima distanza di due punti del campo $\tilde{\omega}$ (con che in particolare $\chi_1 < \delta$), si ha subito l'annunciata limitazione

$$|J| < \frac{M}{2\pi} \delta \cdot \int_{\tilde{\omega}} d\chi \, d\vartheta < M\delta^2 \,. \tag{10}$$

Converremo di dire che *una quantità J, per cui vale una disuguaglianza come la* (10), *è* (almeno) *di secondo ordine rispetto a δ.*

d) Consideriamo la differenza $x - x_0$ come funzione delle coordinate curvilinee dei due punti Q ed O, cioè (coincidendo le loro terze coordinate) di u, v, w; u_0, v_0; e formiamone in particolare la derivata rispetto a w.

Questa derivata

$$\frac{d}{dw}(x - x_0) = \frac{dx}{dw} - \frac{dx_0}{dw},$$

si presenta come la differenza fra i valori assunti dalla funzione dx/dw nei due punti Q ed O. Per le ipotesi ammesse circa le funzioni (1), alla dx/dw è certamente applicabile il teorema dell'aumento finito, da cui segue che la differenza $dx/dw - dx_0/dw$ può porsi sotto la forma $\overline{OQ} \cdot f^* = \varepsilon \cdot f^*$, designando f^* una funzione finita e continua.

Lo stesso vale naturalmente per $y - y_0$, $z - z_0$.

Diremo in conformità che *le derivate*

$$\frac{d(x - x_0)}{dw}, \qquad \frac{d(y - y_0)}{dw}, \qquad \frac{d(z - z_0)}{dw},$$

contengono ε a fattore.

Si osservi ora che ε dipende da w pel tramite delle differenze $x - x_0$, $y - y_0$, $z - z_0$. Ove si designino per brevità con

$$\varepsilon_1 = \frac{x - x_0}{\varepsilon}, \qquad \varepsilon_2 = \frac{y - y_0}{\varepsilon}, \qquad \varepsilon_3 = \frac{z - z_0}{\varepsilon},$$

i coseni direttori di OQ, si ha

$$\frac{d \log \varepsilon}{dw} = \frac{1}{\varepsilon}\left\{\varepsilon_1 \frac{d(x - x_0)}{dw} + \varepsilon_2 \frac{d(y - y_0)}{dw} + \varepsilon_3 \frac{d(z - z_0)}{dw}\right\},$$

donde apparisce che $d \log \varepsilon / dw$ rimane finita, anche quando O tende a coincidere con Q.

Analoga conclusione vale per le derivate rapporto a w dei coseni ε_1, ε_2, ε_3. Basta pensare che una qualunque delle loro derivate rapporto ad $x - x_0$, $y - y_0$, $z - z_0$ rientra nel tipo $\mathfrak{E}/\varepsilon$ con $\mathfrak{E}$ polinomio di secondo grado nei coseni stessi. Una derivata rapporto a w si presenta così come somma di termini della forma $(\mathfrak{E}/\varepsilon)\, d(x - x_0)/dw$, e si conserva quindi finita.

e) Per le derivate rapporto ad u o a v (in quanto si riguardino u_0, v_0 come indipendenti da u, v), non è più vero che, in $d(x - x_0)/du = dx/du$ ed analoghe, comparisca ε a fattore. Si può quindi soltanto affermare che *le derivate di*

$$\log \varepsilon, \quad \varepsilon_1, \quad \varepsilon_2, \quad \varepsilon_3$$

rapporto ad u o a v divengono infinite di prim'ordine al più per O coincidente con Q.

f) Indichiamo con

$$g_1(P; x, y, z; x_0, y_0, z_0; \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$$

una funzione, che dipenda da x, y, z; x_0, y_0, z_0 direttamente e pel tramite degli argomenti ε_1, ε_2, ε_3, e dipenda inoltre dalle coordinate x_P, y_P, z_P di un punto parametrico P, che supporremo situato sulla stessa sezione σ, cui appartengono Q ed O.

Sia g_1 finita, assieme alle sue derivate prime e seconde, rapporto a tutti i 12 argomenti. Da ciò e dal lemma *d*) discende subito che anche dg_1/dw si mantiene finita.

In generale non si può dire altrettanto per dg_1/du e dg_1/dv. Si può però porre una qualunque delle tre derivate, che designeremo genericamente con $\mathcal{D}g_1$, sotto la forma

$$\mathcal{D}g_1 = \frac{g^*}{\varepsilon},$$

dove g^* è ancora finita e dotata di derivate finite, rispetto alle coordinate x_P, y_P, z_P del punto parametrico.

Per rendersene conto, date le ipotesi fatte sulla dipendenza di g_1 dai suoi 12 argomenti espliciti

$$x_P, y_P, z_P; \quad x, y, z; \quad x_0, y_0, z_0; \quad \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3,$$

basterà accertare che si presenta sotto la forma g^*/ε la derivata $\mathcal{D}$ di ciascuno dei detti argomenti.

Per i primi 9, la cosa risulta senz'altro dal fatto che le derivate di x, y, z rapporto ad u, v, w possono considerarsi (in base alle (1) e alle ipotesi fatte a loro riguardo) come altrettante funzioni finite, derivabili, ecc., delle coordinate x, y, z del punto di cui si tratta: moltiplicando e dividendo per ε, si attribuisce loro la forma g^*/ε coll'accennato comportamento di g^*.

Quanto ai coseni ε_1, ε_2, ε_3, s'è già osservato che una qualunque delle loro derivate rapporto ad $x - x_0$, $y - y_0$, $z - z_0$ rientra nel tipo $\mathcal{E}/\varepsilon$, con $\mathcal{E}$ polinomio di secondo grado nei coseni stessi. Sarà così ogni $\mathcal{D}\varepsilon_i$ $(i = 1, 2, 3)$ somma di termini del tipo $(\mathcal{E}/\varepsilon)\mathcal{D}(x - x_0)$. Come si vede il numeratore è finito (e nemmeno dipende dalle coordinate x_P, y_P, z_P del punto parametrico); in ogni modo anche $\mathcal{D}\varepsilon_i$ rientra nel tipo g^*/ε.

In modo analogo si riconosce che, se

$$g_2(P;\; x, y, z;\; x_0, y_0, z_0)$$

designa una funzione, la quale si comporta esattamente come g_1, salvo che non dipende dalle ε, e se si indica con l una costante, anche le derivate del prodotto

$$g_2 \log \frac{\varepsilon}{l},$$

sono riducibili alla forma

$$\frac{g^*}{\varepsilon}.$$

Se dunque si mette in particolare evidenza la dipendenza dal punto parametrico P e si pone

$$g(P) = g_1(P) + g_2(P) \log \frac{\varepsilon}{l},$$

si potrà ritenere

$$\mathcal{D}g(P) = \frac{\bar{g}(P)}{\varepsilon},$$

con $\bar{g}$ funzione ben determinata del tipo g^*, cioè finita e dotata di derivate finite rapporto ad x_P, y_P, z_P.

Attribuendo al punto parametrico P un'altra qualsiasi posizione R (della stessa sezione σ), avremo analogamente

$$\mathcal{D}g(R) = \frac{\bar{g}(R)}{\varepsilon},$$

donde per sottrazione

$$\mathcal{D}\{g(P) - g(R)\} = \frac{\bar{g}(P) - \bar{g}(R)}{\varepsilon}.$$

Se ne desume, invocando il teorema dell'aumento finito, e avendo riguardo a c) ([3]) che *le derivate d'ogni differenza del tipo* $g(P) - g(R)$ *sono funzioni semi-finite.*

g) Supponiamo che g_1, g_2, e quindi anche g, dipendano più generalmente da più, diciamo due, per fissar le idee, punti parametrici P e P', valendo beninteso rispetto ad entrambi e rispetto alle altre variabili il comportamento di cui sopra.

Scriveremo in tal caso $g(P, P')$.

Ove sieno R ed R' due posizioni qualisivogliano (sempre sulla stessa sezione σ) dei punti P e P', si può qui ancora agevolmente concludere che *le derivate* (rapporto ad u, v, w) *d'ogni differenza del tipo* $g(P, P') - g(R, R')$ *sono funzioni semi-finite.*

3. - Potenziale newtoniano di un tubo.

Sia $\varrho(x, y, z)$ una funzione dei punti del tubo T, finita, continua e derivabile almeno tre volte.

Siano Q e Q' due punti generici di T; x, y, z e x', y', z' le rispettive coordinate cartesiane; u, v, w e u', v', w' le coordinate curvilinee [definite, possiam dire, dalla risoluzione delle corrispondenti (1)]; $\overline{QQ'} = r$, $\varrho' = \varrho(x', y', z')$, $dT' = dx'\,dy'\,dz'$, e si ponga

$$U = \int_T \frac{\varrho'}{r}\, dT',$$

con che U è il potenziale in Q di una massa distribuita con densità ϱ entro il tubo T.

Per eseguire l'integrazione, si può immaginare scisso il tubo T (di sezione piccola, ma pur sempre finita) in tubetti infinitesimi, costituiti anch'essi, al pari di T, da linee L, e valutare prima il contributo di un tubetto generico, sommando poi questi contributi parziali.

Ove si adottino come variabili correnti di integrazione, in luogo delle x', y', z', e u', v', w', l'accennato criterio equivale ad eseguire una prima integrazione rispetto a w', lasciando fissi u', v', e ad integrare poi rispetto a questi due parametri, facendoli variare entro il campo di valori corrispondente a T, cioè (nel piano rappresentativo Π) entro $\tilde{\omega}$.

Potremo pertanto scrivere, in base alla formula di trasformazione

([3]) Si noti che è lecito invocare la proposizione c), perchè, come abbiamo esplicitamente avvertito, i punti parametrici P, R si ritengono situati sulla stessa sezione w = cost., cui appartengono Q ed O.

degli integrali tripli,

$$U = \int_{\tilde{\omega}} du'\,dv' \int_{L'} \frac{|D'|\,\varrho'}{r}\,dw', \tag{11}$$

dove D' è il valore di D in Q', e l'integrazione rispetto a w' va estesa (nel senso delle w' crescenti) a quel tratto L' della curva L, passante per Q', che appartiene al tubo T.

L'elemento d'arco dL' del tratto L' è dato, a norma delle (1) e (5), da

$$dL' = h'\,dw'\,,$$

rappresentando manifestamente h' il valore di h in Q'.

Posto per brevità

$$\mu = \frac{|D|}{h}\,\varrho\,, \tag{12}$$

(con che la funzione μ godrà delle stesse proprietà qualitative ammesse per ϱ e μ' indicherà il valore di μ nel punto Q'), ed inoltre

$$V = \int_{L'} \frac{\mu'}{r}\,dL'\,, \tag{13}$$

la precedente espressione di U diviene

$$U = \int_{\tilde{\omega}} du'\,dv'\,V\,. \tag{11'}$$

4. - Richiamo dell'espressione asintotica di un potenziale di linea.

Fissiamo la nostra attenzione sul potenziale di linea V, definito dalla (13).

Sia O un punto generico della linea potenziante L' (non angoloso, nè coincidente con un estremo se la linea è aperta); si ponga $\varepsilon = \overline{OQ}$, Q seguitando a designare il punto potenziato (e Q' il punto potenziante).

In una Nota recente ho dimostrato (4) che (sotto larghe condizioni concernenti la linea potenziante e la densità della distribuzione, le quali,

---

(4) Cfr. p. 13 di questo stesso volume dei « Rendiconti » [cioè p. 30 di questo volume delle « Opere »].

nel caso presente, si trovano tutte verificate) si può porre

$$V = V^{(a)} + W, \tag{14}$$

in cui il secondo addendo W si conserva finito assieme alle sue derivate (rapporto alle coordinate del punto potenziale Q) anche quando Q si avvicina indefinitamente ad O, mentre il primo vale

$$V^{(a)} = -\mu_0 \log(\varepsilon^2 - x^2) - \{\mu_0 c_0 y + 2\dot{\mu}_0 x\} \log \varepsilon .$$

In questa formula le coordinate x, y, z del punto potenziato Q si riferiscono al triedro principale della linea L' in O, coll'asse x diretto secondo la tangente (in un senso arbitrario) e l'asse y secondo la normale principale (verso la concavità di L'); c_0 è il valore della curvatura di L' nel punto O; μ_0 il valore della densità in questo punto; $\dot{\mu}_0$ il valore della derivata di μ rapporto all'arco della curva L (nel senso assunto come positivo sopra la tangente).

Si noti che, senza alterare il carattere asintotico di $V^{(a)}$, si può aggiungergli (togliendo contemporaneamente all'altro addendo W, che insieme forma V) una qualunque costante, anzi una qualunque funzione, che resti finita assieme alle sue derivate prime. Ci varremo di questa proprietà per rendere omogenei (di dimensione zero rispetto alle lunghezze) gli argomenti dei due logaritmi, che compariscono nella riportata espressione di $V^{(a)}$, sostituendo ad essa la seguente:

$$V^{(a)} = -\mu_0 \log \frac{\varepsilon^2 - x^2}{l^2} - \{\mu_0 c_0 y + 2\dot{\mu}_0 x\} \log \frac{\varepsilon}{l},$$

dove si intende con l una lunghezza costante (a priori indeterminata). Ci sarà comodo disporne a suo tempo in modo opportuno.

Occupiamoci intanto di attribuire a $V^{(a)}$ una forma indipendente dalla scelta degli assi coordinati. All'uopo basta pensare al significato geometrico delle coordinate x, y, che appariscono in $V^{(a)}$. Esse possono manifestamente riguardarsi come le componenti del vettore OQ secondo le direzioni (positive) della tangente e della normale principale della curva L' in O.

Se dunque si designano con t_0 ed n_0 tali componenti, si potrà scrivere sotto forma invariantiva

$$V^{(a)} = -\mu_0 \log \frac{\varepsilon^2 - t_0^2}{l^2} - \{\mu_0 c_0 n_0 + 2\dot{\mu}_0 t_0\} \log \frac{\varepsilon}{l}. \tag{15}$$

Non sarà male aggiungere l'osservazione seguente:

Ove si facciano intervenire le coordinate curvilinee u, v, w, l'elemento d'arco d'una generica curva L vale dw/h; d'altra parte μ, a norma della (12), può anche considerarsi come funzione di u, v, w; ne viene, riferendosi in particolare al punto O, e servendosi di notazione evidente,

$$\dot{\mu}_0 = \frac{1}{h_0}\left(\frac{d}{dw}\,\frac{|D|}{h}\,\varrho\right)_0 . \tag{12'}$$

NOTA II.

Ibidem, pp. 535-551.

5. - Scomposizione di V.

Prendiamo a considerare la sezione trasversale del tubo T praticata colla superficie $w =$ cost., che passa per il punto potenziato Q; sia O il punto in cui essa taglia la linea L' passante per un generico punto potenziante Q'.

Riattaccandoci alle notazioni del n. 2, diciamo σ questa sezione; x_0, y_0, z_0 le coordinate cartesiane di O; u_0, v_0 le sue coordinate curvilinee sopra σ.

Appartenendo, per definizione, O e Q' ad una medesima linea L, sarà

$$u_0 = u' , \qquad v_0 = v' ,$$

mentre, trovandosi O e Q sulla medesima sezione trasversale, w_0 coincide con w.

Se P designa l'intersezione di σ colla direttrice C, saranno (n. 1) $u = v = 0$, e sempre la stessa w, le coordinate curvilinee di questo punto.

Introduciamo ancora due punti R ed S di σ, caratterizzando cogli indici R ed S rispettivamente quanto ad essi si riferisce.

Così in particolare ϱ_S designerà il valore della densità ϱ in S; c_R la curvatura della linea L passante per R; α_R, β_R, γ_R i coseni direttori della tangente alla L nello stesso punto.

Indicheremo inoltre con

$$t_R = \alpha_R(x - x_0) + \beta_R(y - y_0) + \gamma_R(z - z_0)$$

la componente di OQ secondo la detta tangente, e con n_R la componente secondo la normale principale.

Anzitutto, per l'osservazione finale del n. 2, b), il rapporto t_R/ε (coseno dell'angolo compreso fra la corda OQ e la tangente alla L in R)

non supera mai, in valore assoluto, un numero fisso, minore dell'unità. Ne consegue che la funzione

$$\log\left(1-\frac{t_R^2}{\varepsilon^2}\right)=\log\{1-(\alpha_R\varepsilon_1+\beta_R\varepsilon_2+\gamma_R\varepsilon_3)^2\}$$

degli argomenti

$$\varepsilon_1=\frac{x-x_0}{\varepsilon}, \qquad \varepsilon_2=\frac{y-y_0}{\varepsilon}, \qquad \varepsilon_3=\frac{z-z_0}{\varepsilon},$$

e dei parametri α_R, β_R, γ_R, cioè, possiamo dire, del punto parametrico R, è finita e dotata di derivate d'ordine primo e secondo ([5]) rispetto alle ε e alle coordinate del punto parametrico R.

Nelle stesse condizioni si trovano manifestamente t_R ed n_R, salvo la sostituzione degli argomenti $x-x_0$, $y-y_0$, $z-z_0$ ai tre rapporti ε_1, ε_2, ε_3.

Dopo ciò, è subito visto che, ponendo [con notazione già usata al n. 2, *b*)]

$$(16)\qquad \left\{\begin{aligned} g_1(R,S)&=-\frac{|D_{OR}|}{h_R}\,\varrho_S\log\left(1-\frac{t_R^2}{\varepsilon^2}\right),\\ g_2(R,S)&=-\frac{|D_{OR}|}{h_R}\,\varrho_S(2+c_R n_R)-2\frac{1}{h_R}\frac{d}{dw}\left(\frac{|D_{OR}|}{n_R}\varrho_S\right)\cdot t_R, \end{aligned}\right.$$

le funzioni g_1 e g_2 godono delle proprietà contemplate al n.2 , *g*).

D'altra parte si verifica immediatamente, in base alle (12) e (12'), che il valore di $V^{(a)}$, definito dalla (15), non è altro che ciò che diventa

$$(17)\qquad g(R,S)=g_1(R,S)+g_2(R,S)\log\frac{\varepsilon}{l},$$

quando i due punti parametrici R, S vengono entrambi a coincidere con O (con che h_R si riduce ad h_0, D_{OR} al valore di D in O, ecc.).

Si può dunque scrivere

$$V^{(a)}=g(O,O),$$

od anche, aggiungendo e togliendo $g(P,S)$ (in cui al primo punto parametrico R è attribuita, come si vede, la speciale posizione P, mentre il

([5]) Date le ipotesi fatte originariamente sulle (1), si potrebbe anzi affermare l'esistenza delle derivate fino al terz'ordine. Ci limitiamo al secondo per enunciare una proprietà comune anche ad n_R.

secondo punto parametrico rimane indeterminato),

$$V^{(a)} = g(P, S) + \{g(O, O) - g(P, S)\}. \tag{15'}$$

Ove si ponga

$$\left\{\begin{aligned} V_1 &= -\frac{|D_{OP}|}{h_P}\varrho_S \log\frac{\varepsilon^2 - t_P^2}{l^2}, \\ V_2 &= -\left\{\frac{|D_{OP}|}{h_P}\varrho_S c_P n_P + 2\frac{1}{h_P}\frac{d}{dw}\left(\frac{|D_{OP}|}{h_P}\varrho_S\right)\cdot t_P\right\}\log\frac{\varepsilon}{l}, \\ V_3 &= g(O, O) - g(P, S), \\ V_4 &= W, \end{aligned}\right. \tag{18}$$

si ha subito dalle (16) e (17)

$$g(P, S) = V_1 + V_2,$$

quindi, per la (15'),

$$V^{(a)} = V_1 + V_2 + V_3,$$

e infine, risalendo alla (14),

$$V = V_1 + V_2 + V_3 + V_4. \tag{14'}$$

6. - Contributo recato da V_1 al potenziale U. Ordine di grandezza.

Nella (11') l'integrazione si riferisce alle coordinate curvilinee u', v', del punto potenziante Q'. Siccome queste coincidono colle u_0, v_0 del punto O, si può risguardare O come punto corrente di integrazione, e scrivere in conformità

$$U = \int_{\tilde{\omega}} du_0\, dv_0\, V. \tag{11''}$$

Rappresentando con U_i il contributo recato ad U da V_i, si ha manifestamente

$$U_i = \int_{\tilde{\omega}} du_0\, dv_0\, V_i. \qquad (i = 1, 2, 3, 4). \tag{19}$$

Occupiamoci in particolare di U_1. Mentre (u_0, v_0) descrive $\tilde{\omega}$, il punto O descrive la sezione σ; d'altra parte, in virtù della (3), l'elemento di superficie $d\sigma_0$, circostante ad O, vale

$$d\sigma_0 = H_0\, du_0\, dv_0\,,$$

dove si intende manifestamente con H_0 il valore di H in O.

Mettendo in evidenza il campo di integrazione σ, sostituendo per V_1 il suo valore (18), e notando [n. 3, b)] che

$$\frac{|D_{OP}|}{H_O h_P}\,,$$

rappresenta il coseno dell'angolo (acuto) ψ formato dalla direttrice C (cioè dalla tangente a C in P) colla normale a σ in O, la espressione (13) di U_1 diviene

$$U_1 = -\,\varrho_S \int_\sigma d\sigma_0 \cos\psi \log\frac{\varepsilon^2 - t_P^2}{l^2}\,.$$

ϱ_S figura fuori del segno di integrazione: ciò implica che il punto parametrico S sia scelto senza alcun legame colle variabili u_0, v_0 di integrazione (cioè colla posizione di O sulla sezione σ). D'ora innanzi riterremo S indipendente, non soltanto da u_0, v_0, ma anche dalle coordinate u, v del punto potenziato Q: precisamente come accade per il punto P.

Giova attribuire ad U_1 una forma più espressiva, facendo intervenire il piano normale alla direttrice C nel punto P.

Sia τ la proiezione ortogonale della sezione σ sul detto piano; siano O_0 e Q_0 quei due punti di τ, in cui si proiettano rispettivamente O e Q; $d\tau_0$ la proiezione di $d\sigma_0$.

Dacchè l'angolo diedro, formato dai piani dei due elementi $d\sigma$ e $d\tau_0$ è misurato da quello delle rispettive normali, sarà ovviamente

$$d\tau_0 = d\sigma_0 \cos\psi\,.$$

D'altra parte, essendo $|t_P|$ e

$$\overline{O_0 Q_0} = \varDelta$$

le proiezioni del segmento OQ secondo la tangente e secondo il piano normale a C in P, si ha ancora

$$\varepsilon^2 - t_P^2 = \overline{O_0Q_0}^2 = \Delta^2 .$$

Ne consegue

$$U_1 = \varrho_S \int_\tau d\tau_0 \log \frac{l^2}{\Delta^2} . \tag{20}$$

Facciamo qualche considerazione sull'ordine di grandezza della funzione U_1.

All'uopo, riprendiamo la espressione di U_1, che risulta dalle due prime formule (18) e (19). Badando all'identità

$$\log \frac{\varepsilon^2 - t_P^2}{l^2} = \log \left(1 - \frac{t_P^2}{\varepsilon^2}\right) + \log \frac{\varepsilon^2}{\chi^2} - \log \frac{l^2}{\chi^2} ,$$

e ponendo

$$U_1' = \varrho_S \int_{\tilde\omega} du_0 \, dv_0 \frac{|D_{OP}|}{h_P} \log \frac{l^2}{\chi^2} ,$$

$$U_1'' = - \varrho_S \int_{\tilde\omega} du_0 \, dv_0 \frac{|D_{OP}|}{h_P} \left\{ \log \left(1 - \frac{t_P^2}{\varepsilon^2}\right) + \log \frac{\varepsilon^2}{\chi^2} \right\} ,$$

avremo anzitutto

$$U_1 = U_1' + U_1'' . \tag{21}$$

Ora, intendendo χ definito dalla (7), il termine U_1'' è di secondo ordine in δ [ossia, n. 2, c), verifica una disuguaglianza tipo (10)], e ciò perchè [n. prec. e n. 2, a)] $\log (1 - t_P^2/\varepsilon^2)$ e $\log (\varepsilon^2/\chi^2)$ sono funzioni finite, ed è pur finito $1/h_P$, come è stato osservato in principio del n. 2. Sarà dunque, per un'opportuna costante M (indipendente dalle dimensioni trasversali del tubo)

$$| U_1'' | < M\delta^2 . \tag{22}$$

È giunto il momento di disporre della indeterminata positiva l. Ci limiteremo a prenderla $> \delta$. Con questo — si noti bene — scelto, per un caso concreto, un determinato valore numerico di l, si può star certi che la disuguaglianza seguita a sussistere, anche se si passa a tubi più sottili, si fa cioè rimpicciolire $\tilde\omega$ e con esso la massima corda δ.

Ciò posto, designamo con d il limite inferiore di $|D_{OP}|$, al variare di P su C e di O sulla corrispondente sezione σ (6), e notiamo che χ non può mai superare δ.

Dacchè $\log(l^2/\chi^2) \geqslant \log(l^2/\delta^2) > 0$, sussiste la disuguaglianza

$$|U_1'| > |\varrho_s| \frac{d}{h_P} \bar{\omega} \log \frac{l^2}{\delta^2}. \tag{23}$$

Immaginiamo ora che $\bar{\omega}$ converga a zero *uniformemente*, cioè in modo che resti compreso entro limiti finiti il rapporto $\bar{\omega}/\delta^2$ (come avviene in particolare quando il campo si restringe conservandosi simile alla sua configurazione iniziale). Sotto tale ipotesi si può dedurre dalla (23)

$$|U_1'| > M_1 |\varrho_s| \delta^2 \log \frac{l^2}{\delta^2}, \tag{23'}$$

essendo M_1 una quantità positiva (indipendente dalle dimensioni del campo $\bar{\omega}$).

Allora, supposto che non si annulli ϱ_s, il rapporto

$$\frac{|U_1''|}{|U_1'|} < \frac{M}{M_1 |\varrho_s| \log(l^2/\delta^2)},$$

converge a zero con δ; converge quindi a 1 il rapporto

$$\left|\frac{U_1' + U_1''}{U_1'}\right| = \frac{|U_1|}{|U_1'|}.$$

Scende di qua, in virtù della (23'), che, scelto a piacimento un $m < M_1$, sussiste la disuguaglianza

$$|U_1| > m |\varrho_s| \delta^2 \log \frac{l^2}{\delta^2}, \tag{24}$$

per ogni δ abbastanza piccolo.

La (24) ci mostra che U_1 è di un ordine di grandezza superiore a quello d'ogni quantità Ω, che soddisfaccia ad una limitazione del tipo (10).

Segue infatti, da

$$|\Omega| < M\delta^2$$

e dalla (24),

$$\frac{|\Omega|}{|U_1|} < \frac{M}{m|\varrho_s|} \frac{1}{\log(l^2/\delta^2)},$$

(6) Questo limite inferiore è certo diverso da zero [cfr. n. 2, b)].

donde apparisce che (ove si supponga diverso da zero il limite inferiore di $|\varrho_s|$) il rappporto $|\Omega/U_1|$ tende a divenire infinitamente piccolo assieme a δ, cioè quanto più va assottigliandosi il tubo T.

7. - Riferimento a speciali coordinate. Componenti trasversali dell'attrazione.

Per rendere più spedito il calcolo delle derivate del potenziale U, è conveniente particolarizzare come segue il significato dei parametri u, v, w:

Designando con s l'arco della direttrice C (contato a partire da un'origine arbitraria), assumeremo come superficie $w =$ cost. i varî piani normali a C, il valore di w per un piano determinato essendo la s del punto P, in cui esso piano incontra la curva.

Fissato poi uno (a priori qualunque) di questi piani normali, assumeremo come parametri u, v le relative coordinate cartesiane riferite alla coppia normale principale e binormale.

Il piano rappresentativo Π, l'intorno $\bar{\omega}$, i piedi delle L, ecc., vengono così ad assumere un significato concreto nel detto piano normale.

Supponiamo, per fissar le idee, che esso corrisponda al valore zero di w, e rileviamo alcune conseguenze delle (1), dovute alla speciale scelta dei parametri.

Introduciamo all'uopo, accanto agli assi di riferimento x, y, z, una terna cartesiana ausiliaria ξ, η, ζ (congruente alla prima), costituita dalla tangente (nel senso in cui si contano gli archi), normale principale (nel senso della concavità) e binormale (in tal senso da rendere le due terne congruenti) alla curva C nel punto P del detto piano normale $w = 0$.

Per un punto qualunque di questo piano, si ha, in base alla definizione di u, v, e della terna ausiliaria,

$$\xi = 0\,, \qquad \eta = u\,, \qquad \zeta = v\,.$$

D'altra parte, fra i due sistemi di assi x, y, z e ξ, η, ζ, intercedono le formule di trasformazione

$$\begin{cases} x = x_P + \alpha\xi + \alpha_1\eta + \alpha_2\zeta\,, \\ y = y_P + \beta\xi + \beta_1\eta + \beta_2\zeta\,, \\ z = z_P + \gamma\xi + \gamma_1\eta + \gamma_2\zeta\,, \end{cases}$$

in cui x_P, y_P, z_P rappresentano le coordinate di P; $\alpha = dx/dw$, $\beta = dy/dw$,

$\gamma = dz/dw$ i coseni direttori della tangente a C in P (rispetto alla terna generica x, y, z); α_1, β_1, γ_1 e α_2, β_2, γ_2 gli analoghi coseni direttori della normale principale e della binormale.

Nelle formule di trasformazione, per i punti del piano $w = 0$, va posto $\xi = 0$, $\eta = u$, $\zeta = v$; risulta quindi

$$\left\{\begin{aligned} x &= x_P + \alpha_1 u + \beta_2 v\,, \\ y &= y_P + \beta_1 u + \beta_2 v\,, \\ z &= z_P + \gamma_1 u + \gamma_2 v\,. \end{aligned}\right. \tag{25}$$

Queste espressioni devono naturalmente coincidere con quelle che si traggono dalle formule generali (1), quando (dopo aver scelto i parametri nel modo indicato) vi si faccia $w = 0$. Possiamo pertanto ravvisare nelle (25) la speciale forma che compete nel caso nostro alle (1), per il valore $w = 0$.

Ciò posto, torniamo al nostro potenziale U. Essendo Q il generico punto potenziato, consideriamo il piano normale a C, che lo contiene, e scegliamolo (per semplificare le formule) come sostegno dei parametri u, v, contando l'arco s di C, e quindi w, a partire da esso.

Le derivate di U, rapporto alle coordinate u, v di Q, porgono (coi loro valori relativi al punto Q, e quindi in particolare a $w = 0$) le componenti A_n e A_b dell'attrazione (subìta da Q) secondo le due direzioni della normale principale e della binormale alla direttrice (nella sua intersezione col piano normale passante per Q): com'è naturale, chiameremo complessivamente dU/du, dU/dv le *componenti trasversali* dell'attrazione.

Riportiamoci alle notazioni dei nn. precedenti, osservando in primo luogo che σ e τ sono ora la stessa cosa, e che il segmento

$$\overline{OQ} = \varepsilon = \Delta\,,$$

appartenendo al piano τ, riesce perpendicolare alla tangente a C in P, sicchè $t_P = 0$; inoltre, ove si ritenga $w = 0$, si ha, per la definizione dei parametri u e v,

$$\Delta^2 = (u - u_0)^2 + (v - v_0)^2\,,$$

$$n_P = u - u_0\,.$$

Nel punto P si ha in particolare

$$\frac{dx}{dw} = \alpha\,, \qquad \frac{dy}{dw} = \beta\,, \qquad \frac{dz}{dw} = \gamma\,,$$

sicchè

$$h_P = \left| \sqrt{\left(\frac{dx}{dw}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dw}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dw}\right)^2} \right| = 1;$$

le (25) porgono poi (per qualunque u, v)

$$\frac{dx}{du} = \alpha_1, \qquad \frac{dy}{du} = \beta_1, \qquad \frac{dz}{du} = \gamma_1,$$

$$\frac{dx}{dv} = \alpha_2, \qquad \frac{dy}{dv} = \beta_2, \qquad \frac{dz}{dv} = \gamma_2.$$

Se ne trae

$$D_{OP} = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} = 1.$$

Con ciò, la seconda delle (18), diviene, per $w = 0$,

$$V_2 = \varrho_S c_P (u - u_0) \log \frac{l}{\Delta},$$

e si ha per conseguenza dalla seconda delle (19) (tenendo conto che si può identificare τ con $\tilde{\omega}$, $d\tau_0$ con $du_0\, dv_0$)

$$U_2 = \varrho_S c_P \int_\tau (u - u_0) \log \frac{l}{\Delta} \cdot d\tau_0 . \tag{26}$$

Quando si deriva U_2 rispetto ad u (dacchè ϱ_S e c_P ne sono indipendenti), nascono due termini: il primo, proveniente dalla derivazione del fattore $u - u_0$, non è altro che

$$\frac{1}{2} c_P U_1 ,$$

come apparisce dalla (20); l'altro è

$$- \varrho_S c_P \int_\tau \frac{(u - u_0)^2}{\Delta^2} d\tau_0 .$$

A noi basta rilevare che la funzione sotto il segno si conserva ovunque finita, sicchè l'integrale riesce di second'ordine (almeno) rispetto a δ, esiste cioè una costante M (indipendente da δ), tale che il valore assoluto dell'integrale non supera $M\delta^2$.

Lo stesso può dirsi per dU_2/dv, nonchè per una derivata qualsiasi di U_3 e di U_4.

Quest'ultima affermazione si giustifica subito, badando alle espressioni (18) delle rispettive funzioni sotto il segno:

$$V_3 = g(O, O) - g(P, S)\,,$$
$$V_4 = W\,;$$

di queste, la prima possiede [n. 2, lemma g)] derivate semi-finite, mentre la seconda si mantiene senz'altro finita (e integrabile) assieme alle sue derivate.

Da tutto ciò si raccoglie che

$$(27)\qquad \begin{cases} A_n = \dfrac{dU}{du} = \sum\limits_1^4{}_i \dfrac{dU_i}{du} = \dfrac{dU_1}{du} + \dfrac{1}{2} c_P U_1 + \ldots\,, \\[2ex] A_b = \dfrac{dU}{dv} = \sum\limits_1^4{}_i \dfrac{dU_i}{dv} = \dfrac{dU_1}{dv} + \ldots\,, \end{cases}$$

gli addendi omessi essendo entrambi di secondo ordine almeno rispetto a δ.

8. - Componente longitudinale.

Per quanto abbiamo osservato nel n. precedente, dU_3/dw, dU_4/dw riescono senz'altro di second'ordine in δ; va notato che anche dU_2/dw gode della stessa proprietà: resta infatti finita la funzione sotto il segno dV_2/dw, come si riconosce badando alla sua espressione (18) e usufruendo delle considerazioni sub d) (n. 2).

Si ha quindi

$$(28)\qquad \frac{dU}{dw} = \frac{dU_1}{dw} + \ldots\,,$$

la parte omessa essendo di second'ordine, almeno, rispetto a δ.

Se si osserva che l'elemento di linea L (u = cost., v = cost.), passante per il punto potenziato Q, è dato da $h_Q dw$, si vede che

$$\frac{1}{h_Q} \frac{dU}{dw}\,,$$

misura la componente dell'attrazione nel senso della tangente alla linea L passante per Q.

Possiamo facilmente desumere la componente longitudinale A_t, cioè secondo la tangente alla direttrice C in P.

All'uopo, si nota anzi tutto che i coseni direttori α_Q, β_Q, γ_Q della linea L nel punto Q, possono porsi sotto la forma

$$\alpha + \overline{PQ}\,\alpha^* , \quad \beta + \overline{PQ}\,\beta^* , \quad \gamma + \overline{PQ}\,\gamma^* ,$$

α, β, γ riferendosi al punto P (e quindi alla direttrice C) e α^*, β^*, γ^* designando funzioni finite.

Del pari è a ritenersi

$$\frac{1}{h_Q} = \frac{1}{h_P} + \overline{PQ}\,h^* ,$$

con h^* finita, ossia, per essere $h_P = 1$,

$$\frac{1}{h_Q} = 1 + \overline{PQ}\,h^* .$$

Ciò posto, badiamo all'identità

$$\frac{1}{h_Q}\,\frac{dU}{dw} = \alpha_Q A_t + \beta_Q A_n + \gamma_Q A_b ,$$

e facciamo per un momento coincidere gli assi generici x, y, z colla terna principale ξ, η, ζ di C in P, con che $\alpha = 1$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$.

Potremo scrivere

$$A_t = \frac{dU}{dw} + \overline{PQ}\left\{h^* \frac{dU}{dw} - (\alpha^* A_t + \beta^* A_n + \gamma^* A_b)\right\} .$$

Dacchè

$$U = \int_{\tilde{\omega}} du_0\, dv_0\, V ,$$

e le derivate di V divengono infinite di prim'ordine al più (nel punto Q), si potrà assegnare [cfr. n. 2, c)] una costante M (indipendente da δ) tale che nessuna derivata di U superi $M\delta$.

Ad analoga limitazione soddisfano allora le componenti dell'attrazione, e per conseguenza il coefficiente di $\overline{PQ}$. Ma quest'ultimo non supera δ, sicchè si ha col consueto comportamento della parte omessa

$$A_t = \frac{dU}{dw} + \dots,$$

donde, ricordando la (28),

$$(28') \qquad A_t = \frac{dU_1}{dw} + \dots.$$

Data la convenzione fatta al n. precedente, la w del punto potenziato Q è nulla; a derivazione eseguita, andrà quindi posto $w = 0$.

9. - Risultante delle attrazioni subíte da una fetta infinitesima di tubo.

Consideriamo, accanto alla sezione generica τ di T, una sezione parallela τ', distante ds.

Essendo $du\,dv = d\tau$ l'elemento di sezione circostante al punto potenziato Q, $\varrho_Q du\,dv\,ds$ rappresenterà la massa della *fetta* infinitesima di tubo, compresa fra τ e τ'.

L'attrazione complessiva $\boldsymbol{F}ds$, subìta dalla fetta, ove si ometta il ds (ove cioè la si riporti all'unità di lunghezza) avrà per componenti

$$\begin{cases} F_t = \displaystyle\int_\tau \varrho_Q A_t\, du\, dv\,, \\ F_n = \displaystyle\int_\tau \varrho_Q A_n\, du\, dv\,, \\ F_b = \displaystyle\int_\tau \varrho_Q A_b\, du\, dv\,, \end{cases}$$

secondo la tangente, normale principale e binormale alla direttrice C in P.

Ricorriamo all'identità

$$\varrho_Q A_t = \varrho_S A_t + (\varrho_Q - \varrho_S) A_t$$

e alle due analoghe concernenti A_n e A_b, osservando che il secondo addendo, in causa del fattore $\varrho_Q - \varrho_S$, è di second'ordine almeno rispetto a δ.

Il corrispondente integrale, esteso a τ, risulta pertanto di quart'ordine (almeno), si mantiene cioè, all'assottigliarsi del tubo, costantemente inferiore in valore assoluto a $M\delta^4$ (con M costante positiva, indipendente da δ). Badando alle (27) e (28'), potremo dedurne

$$\begin{cases} F_t = \varrho_s \displaystyle\int_\tau \frac{dU_1}{dw}\, du\, dv + \ldots\,, \\ F_n + \varrho_s \displaystyle\int_\tau \frac{dU_1}{du}\, du\, dv + \frac{1}{2}\,\varrho_s c_P \int_\tau U_1\, du\, dv + \ldots\,, \\ F_b = \varrho_s \displaystyle\int_\tau \frac{dU_1}{dv}\, du\, dv + \ldots\,, \end{cases}$$

i termini omessi essendo di quart'ordine almeno rispetto a δ.

Per attribuire ai termini scritti una forma più espressiva, conviene porre

$$k = \frac{1}{\tau^2}\int_\tau d\tau \int_\tau d\tau_0 \log\frac{l}{\varDelta}\,, \tag{29}$$

e osservare che, una volta fissato P e con esso la sezione normale τ del tubo, k è una costante numerica ben determinata, mentre, se si risguarda P come un punto scorrente lungo la direttrice C, la stessa k è (al pari di τ) funzione dell'argomento s ($= w$, arco della curva C).

Formiamo $d(\varrho_s^2\tau^2 k)/ds$ e mostriamo che, a meno di termini di quart'ordine in δ, questa derivata coincide con F_t.

Va da sè che, trattandosi di derivare rispetto ad s, o, ciò che è lo stesso, rispetto a w, non è lecito porre preventivamente, nell'espressione (29) di k, $w = 0$ (e identificare senz'altro $\varDelta^2 = \overline{OQ}^2$ con $(u - u_0)^2 + (v - v_0)^2$, $d\tau$ con $du\, dv$, ecc.).

Giova invece attribuire a $\varrho_s^2\tau^2 k$ una forma, in cui apparisca esplicita la dipendenza da w, e sia fisso il campo di integrazione.

Ciò si ottiene facilmente, eseguendo a ritroso (così per l'integrazione, relativa al punto O, come per quella relativa a Q) la trasformazione indicata al n. 6.

La corrispondente espressione di

$$\varrho_s^2\tau^2 k = \varrho_s^2 \int_\tau d\tau \int_\tau d\tau_0 \log\frac{l}{\varDelta}\,,$$

può essere scritta

$$\int_{\tilde\omega} \varrho_s \frac{|D_{QP}|}{h_P}\, du\, dv \int_{\tilde\omega} \varrho_s \frac{|D_{OP}|}{h_P} \log\frac{l}{\varDelta}\, du_0\, dv_0 :$$

per $w = 0$ — quasi è superfluo il notarlo — i fattori $|D_{QP}|/h_P$, $|D_{OP}|/h_P$ si riducono all'unità.

Il coefficiente di $du\,dv\,du_0\,dv_0$ si presenta quale prodotto dei tre fattori

$$\varphi_1 = \varrho_s \frac{|D_{QP}|}{h_P}, \qquad \varphi_2 = \varrho_s \frac{|D_{OP}|}{h_P}, \qquad \varphi = \log \frac{l}{\Delta}.$$

La derivata del prodotto può scriversi

$$\varphi_1 \frac{d(\varphi_2\varphi)}{dw} + \varphi_2 \frac{d(\varphi_1\varphi)}{dw} + \varphi_1\varphi_2 \frac{d\varphi}{dw},$$

e, siccome

$$\frac{d\varphi}{dw} = \frac{d}{dw} \log \frac{l}{\Delta} = -\frac{d}{dw} \log \frac{\varepsilon}{l}$$

si conserva finita [n. 2, lemma d)], mentre φ_1 e φ_2 si ricavano l'uno dall'altro per scambio materiale dei due punti Q ed O, così risulta

$$\frac{d}{ds} (\varrho_s^2 \tau^2 k) = \int_{\tilde{\omega}} \varphi_1\, du\, dv\, \frac{d}{dw} \int_{\tilde{\omega}} 2\varphi_2\varphi\, du_0\, dv_0 + \ldots,$$

il termine omesso essendo almeno di quart'ordine in δ.

Riponendo per le φ i loro valori e tornando a mettere in evidenza la sezione τ come campo di integrazione, risulta

$$\frac{d}{ds} (\varrho_s^2 \tau^2 k) = \int_\tau \varrho_s\, d\tau\, \frac{d}{dw}\, \varrho_s \int_\tau \log \frac{l^2}{\Delta^2}\, d\tau_0 + \ldots,$$

che, confrontata colla (20), porge appunto l'annunciata relazione

$$F_t = \frac{d}{ds} (\varrho_s^2 \tau^2 k).$$

Più semplice riesce la riduzione di F_n e di F_b, potendosi porre nei secondi membri $w = 0$, anche prima di eseguire le derivazioni rapporto ad u e a v.

Per $w = 0$, si ha infatti

$$\Delta^2 = (u - u_0)^2 + (v - v_0)^2,$$

e le derivate

$$\frac{d}{du}\log\frac{l}{\Delta} = -\frac{u-u_0}{\Delta^2}, \qquad \frac{d}{dv}\log\frac{l}{\Delta} = -\frac{v-v_0}{\Delta},$$

mutano segno, quando si scambiano fra loro i punti O e Q.

Ne viene

$$\int_\tau d\tau \int_\tau d\tau_0 \frac{d}{du}\log\frac{l}{\Delta} = \int_\tau d\tau \int_\tau d\tau_0 \frac{d}{dv}\log\frac{l}{\Delta} = 0,$$

che, in virtù della (20), equivalgono a

$$\int_\tau du\, dv \frac{dU_1}{du} = \int_\tau du\, dv\, \frac{dU_1}{dv} = 0\,.$$

Con ciò, ove si osservi che, per le (20) e (29),

$$\frac{1}{2}\,\varrho_S \int_\tau du\, dv\, U_1$$

non è altro che $\varrho_S^2\tau^2 k$, le espressioni di F_n e di F_b assumono la forma

$$\begin{cases} F_n = \varrho_S^2\tau^2 k c_P + \dots\,, \\ F_b = 0 + \dots\,, \end{cases}$$

i termini omessi essendo di quart'ordine almeno rispetto a δ (massima distanza fra due punti della sezione τ).

10. - Riassunto. Considerazioni qualitative.

Riassumendo, si ha che *le componenti* (unitarie) F_t, F_n, F_b *dell'attrazione complessiva, esercitantesi sulla fetta considerata, hanno per espressioni asintotiche*

$$(30) \qquad F_t^{(a)} = \frac{d}{ds}(\varrho_S^2\tau^2 k), \qquad F_n^{(a)} = \varrho_S^2\tau^2 k c_P, \qquad F_b^{(a)} = 0\,,$$

essendo k definita dalla (29), c_P la curvatura della direttrice C del tubo nel punto P, e ϱ_S il valore della densità in un punto S, che può essere scelto con criterio arbitrario entro alla sezione τ del tubo, praticata col piano normale a C in P.

La giustificazione della qualifica « espressioni asintotiche » risiede nel fatto che, dei due vettori $\boldsymbol{F}^{(a)}$ di componenti

$$F_t^{(a)}, \quad F_n^{(a)}, \quad F_b^{(a)},$$

e $\boldsymbol{G}$ di componenti

$$F_t - F_t^{(a)}, \quad F_n - F_n^{(a)}, \quad F_b - F_b^{(a)},$$

i quali insieme costituiscono l'attrazione risultante $\boldsymbol{F}$, il secondo è infinitesimo rispetto al primo, è tale cioè che il rapporto delle lunghezze $G/F^{(a)}$ converge a zero assieme a δ.

Per rendercene conto in modo preciso, conviene osservare:

1) I termini omessi nelle espressioni di F_t, F_n, F_b, cioè le differenze $F_t - F_t^{(a)}$, $F_n - F_n^{(a)}$, $F_b - F_b^{(a)}$, sono di quart'ordine rispetto a δ, talchè la stessa proprietà compete alla lunghezza

$$G = \left|\sqrt{(F_t - F_t^{(a)})^2 + (F_n - F_n^{(a)})^2 + (F_b - F_b^{(a)})^2}\right| .$$

Si può quindi ritenere, col solito significato di $\boldsymbol{M}$,

$$G < M\delta^4 .$$

2) A norma della (20), U_1 conserva sempre il medesimo segno, quello di ϱ_S. Perciò $\varrho_S U_1$ è essenzialmente positivo (in quanto si esclude che ϱ_S si annulli), e, avendosi dalla disuguaglianza (24)

$$|\varrho_S U_1| > m\varrho_S^2 \delta^2 \log \frac{l^2}{\delta^2} ,$$

si può sopprimere nel primo membro il segno di valore assoluto. Così dall'identità

$$\varrho_S^2 \tau^2 k = \frac{1}{2} \varrho_S \int_\tau du\, dv\, U_1 ,$$

si ricava

$$\varrho_S^2 \tau^2 k > m\varrho_S^2 \delta^2 \log \frac{l}{\delta} \int_\tau du\, dv .$$

Se quindi si suppone che la sezione vada assottigliandosi *uniformemente* (nel senso dichiarato al n. 6), si potrà affermare l'esistenza di una costante positiva m_1 (indipendente da δ), tale che

$$\varrho_S^2 \tau^2 k > m_1 \delta^4 \log \frac{l}{\delta}\,.$$

Questa disuguaglianza, assieme alla

$$G < M\delta^4\,,$$

mette in evidenza il carattere asintotico di $\boldsymbol{F}^{(a)}$.

Si ha infatti, essendo la lunghezza $F^{(a)}$ del vettore superiore o per lo meno eguale alla sua componente $\varrho_S^2\tau^2 k c_p$,

$$\frac{G}{F^{(a)}} \leqslant \frac{G}{\varrho_S^2 \tau^2 k c_p} < \frac{M}{m_1 c_p \log (l/\delta)}\,.$$

Di qua apparisce che, ove si annulli la curvatura c_p, il rapporto delle due lunghezze converge effettivamente a zero con δ, c. d. d.

È appena necessario aggiungere che, attesa l'equipollenza

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}^{(a)} + \boldsymbol{G}\,,$$

dall'esser nullo il limite del rapporto $G/F^{(a)}$, segue che, al convergere di δ verso zero, $\boldsymbol{F}^{(a)}$ tende ad identificarsi con $\boldsymbol{F}$: le direzioni tendono cioè a coincidere, e il rapporto delle lunghezze tende all'unità.

Per riconoscere, in un caso concreto, se effettivamente si possa (coll'approssimazione che ci si prefigge di raggiungere) trascurare $\boldsymbol{G}$ di fronte ad $\boldsymbol{F}^{(a)}$, sarebbe necessario rendersi conto del valore numerico di

$$\frac{M}{m_1 c_p \log (l/\delta)}\,.$$

Siccome M può dipendere da l, converrebbe anzi tutto scegliere l (compatibilmente colla condizione $l > \delta$) in modo da rendere minima la frazione suddetta. Nella maggior parte dei casi basterà tuttavia un apprezzamento grossolano per un determinato valore di l. Questo valore si sceglierà col criterio seguente:

Per l'attrazione di un (sottile) toro omogeneo, avente per direttrice una circonferenza di raggio a, gli sviluppi, forniti dalla teoria degli integrali ellittici, mostrano (7) che il valore più conveniente di l è $8a$.

(7) Cfr. per es. F. TISSERAND, *Traité de mécanique céleste*, t. II, pp. 137-154.

Per una direttrice qualunque L, assimilandola, nell'intorno di un punto generico, P, al suo cerchio osculatore, si prenderà $l = 8/c_P$. Ove si voglia una stessa l per tutta la linea L, si potrà prendere otto volte il raggio medio di curvatura.

11. - Forme particolari delle espressioni asintotiche.

Meritano ancora esplicita menzione due aspetti particolari delle formule (30).

Essi si ottengono disponendo in modo opportuno del punto parametrico S.

In primo luogo, si può far coincidere S con P, dando così rilievo al comportamento della densità (cubica) ϱ lungo la direttrice.

Ma più interessante è un secondo criterio, con cui si mette in evidenza la densità lineare del nostro tubo T. Ecco in qual modo.

La massa della fetta, cui si riferisce l'attrazione risultante testè calcolata, vale

$$ds\int_\tau \varrho\, d\tau\,,$$

talchè

$$\nu = \int_\tau \varrho\, d\tau\,, \tag{31}$$

sarà a dirsi la densità lineare del tubo T (in P).

Ora, applicando all'integrale del secondo membro il primo teorema della media, si può scrivere, in sua vece, il prodotto della sezione τ per il valore (medio) assunto da ϱ in un certo punto interno alla sezione. Noi assumeremo per S un tale punto, e avremo così

$$\nu = \tau \varrho_S\,. \tag{32}$$

Portando nelle (30) questo speciale valore di ϱ_S si ottengono le formule

$$F_t^{(a)} = \frac{d}{ds}(\nu^2 k)\,, \qquad F_n^{(a)} = \nu^2 k c_P\,, \qquad F_b^{(a)} = 0\,, \tag{33}$$

già riferite nell'introduzione (v. Nota I) come mèta della presente ricerca.

V.

SULLE AZIONI MECCANICHE DOVUTE AD UN FLUSSO FILIFORME DI ELETTRICITÀ

« Rend. Acc. Lincei », s. 5ª, vol. $XVIII_1$ (1909_1),

pp. 41-50.

Consideriamo un flusso stazionario di elettricità nell'etere (o nell'aria, o più generalmente in un mezzo omogeneo impolarizzabile), e supponiamo che l'ambiente T, in cui si svolge questo flusso, abbia forma di tubo sottile (chiuso, od anche aperto; collegato per es. con una estremità ad un generatore e coll'altra ad un collettore).

Il campo elettromagnetico dovuto ad un tale flusso si valuta notoriamente nello stesso modo, secondo tutte le teorie, pre- o post-maxwelliane. E si è condotti ad esprimere una qualunque componente, sia della forza elettrica che della forza magnetica, mediante derivate di potenziali newtoniani estesi al tubo T.

Se il tubo è abbastanza sottile, e si tratta di punti interni, queste derivate sono sostituibili con valori asintotici (¹), tanto più approssimati, quanto più sono piccole le dimensioni trasversali rispetto alla lunghezza. Se ne traggono delle espressioni asintotiche per le forze elettromagnetiche in un generico punto Q, interno a T. Il vantaggio essenziale di queste espressioni è che tutto vi dipende esclusivamente da elementi locali (intendo, relativi all'intorno di Q), cioè: dall'andamento longitudinale del tubo (assimilato ad una linea geometrica) nell'immediata vicinanza di Q, dalla sezione (normale alla detta linea) condotta per Q, e dai caratteri del flusso attraverso alla sezione.

Note le forze elettromagnetiche e il comportamento del moto (densità elettrica e velocità) in Q, la legge di LORENTZ definisce la forza meccanica, che si esercita sopra il circostante elemento. Si può ovvia-

(¹) Cfr. le due Note *Sull'attrazione newtoniana di un tubo sottile*, in questi « Rendiconti », serie 5ª, vol. XVII (2° semestre 1908), pp. 413-426 e 535-551 [in questo vol.: IV, pp. 35-68], mente dedurne la risultante di tutte le forze, agenti sui varî elementi di una fetta infinitesima di tubo, compresa fra due sezioni vicinissime. Sfruttando sempre (e soltanto) la circostanza che è piccola la sezione del tubo di flusso, si arriva alla espressione asintotica (17) di questa risultante, che è il fine della presente ricerca.

Essa dà luogo ad una nuova teoria dei raggi catodici e delle radiazioni affini, teoria che mi sembra più soddisfacente di quelle elettroniche comunemente accettate, perchè rispetta automaticamente il principio (lorentziano) di relatività, ed è sopra tutto esente da ipotesi cinematiche complementari, non bene giustificate e forse non giustificabili (rigidità di ABRAHAM; contrazione lorentziana; contrazione senza variazione di volume; ecc.).

Avrò l'onore di intrattenerne prossimamente l'Accademia.

1. - Richiamo di espressioni asintotiche.

Sia T un tubo sottile tutto costituito da linee di una data congruenza. Dicasi L una linea generica della congruenza, C quella tra le L, che si assume come *direttrice* del tubo.

Sia ϱ la densità di una distribuzione newtoniana; U il corrispondente potenziale; P un punto qualunque della direttrice C; s l'arco, contato a partire da un'origine arbitraria; t la tangente a C in P, nel senso delle s crescenti; n la normale principale (nel senso della concavità); b la binormale (in tal senso, che il triedro t, n, b risulti *sinistrorso*); c_P la curvatura, sempre nel punto P; τ la sezione del tubo, normale a C, condotta per P; O e Q due punti di τ; $d\tau_0$ e $d\tau$ due elementi di sezione ad essi circostanti; $\Delta = \overline{OQ}$.

Riferiamo i punti di τ a due assi x, y, ordinatamente coincidenti con n e con b.

Dette x, y ed x_0, y_0 le coordinate di Q e di O, si avrà

$$\Delta = \left|\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}\right| .$$

Scelti a piacimento un punto S della sezione, indipendente da O e da Q, e una lunghezza costante l, che sia comparabile con quella del tubo [2] (e quindi grande rispetto alle dimensioni trasversali, cioè in

---

[2] Il valore più conveniente di l è otto volte il raggio per una direttrice circolare, o assimilabile ad un arco di cerchio nel tratto che si considera. Cfr. loc. cit., p. 550 [cioè, in questo vol., pp. 67-68].

particolare rispetto ad ogni Δ), si ponga

$$\psi = \int_\tau \log \frac{l}{\Delta}\, d\tau_0\,,$$

$$U_1 = 2\varrho_S \psi\,, \tag{2}$$

dove ϱ_S designa il valore della densità ϱ nel punto S.

La U_1, così definita, è manifestamente funzione delle coordinate x, y del punto Q, che compariscono in ψ pel tramite di Δ. Essa dipende inoltre, come è ben manifesto, dalla sezione τ, che si considera, e dalla scelta del punto S su questa sezione. Se si conviene che, al variare di P su C, e con esso della sezione normale τ, i corrispondenti punti Q e S scorrano sopra due curve L, la espressione di U_1 rimane univocamente individuata assieme a P, e può quindi anche considerarsi come una ben determinata funzione dell'arco s.

Ciò posto, sieno U_t, U_n, U_b le derivate del potenziale U secondo la tangente t in P, secondo la normale principale (n, o, ciò che è lo stesso, x), e secondo la binormale (b, o, ciò che è lo stesso, y).

Le formule (27) e (28′) della seconda delle citate Note (scambiandovi materialmente u, v, w in x, y, s) forniscono per U_t, U_n, U_b le espressioni asintotiche seguenti:

$$\left\{\begin{aligned} U_t &= \frac{dU_1}{ds} = 2\,\frac{d(\varrho_S\psi)}{ds}\,,\\ U_n &= \frac{dU_1}{dx} + \frac{1}{2}\,c_P U_1 = \varrho_S\left(2\,\frac{d\psi}{dx} + c_P\psi\right),\\ U_b &= \frac{dU_1}{dy} = 2\varrho_S\,\frac{d\psi}{dy}\,. \end{aligned}\right. \tag{3}$$

L'appellativo *asintotico* va così inteso:

I valori esatti di U_t, U_n, U_b differiscono dai secondi membri delle (3) per termini che sono dell'ordine della sezione del tubo, mentre i secondi membri stessi sono in generale di un ordine superiore. Più precisamente si può asserire che i termini omessi non superano $M\delta^2$, designando δ la massima corda di τ ed M una quantità positiva, che è costante per un dato tubo (cioè per una data congruenza di linee e per una data ϱ) e resta invariata anche se si suppone che il tubo vada indefinitamente assottigliandosi attorno alla direttrice C (loc. cit., pag. 540 [in questo vol., p. 56]). All'incontro (per ogni tubo abbastanza sottile) U_1 supera in valore assoluto $m|\varrho_S|\delta^2 \log(l^2/\delta^2)$, dove m è un coefficiente positivo, che si comporta come M.

2. - Rotor di un potenziale vettore.

Suppongasi che il tubo T sia sede di un campo vettoriale $\boldsymbol{i}$, diretto in ogni punto secondo la tangente alla linea L passante per quel punto (nel senso in cui si contano gli archi s della direttrice).

Indicando con α, β, γ i coseni direttori di tale tangente rispetto al triedro principale t, n, b di C in P, si ha, dalla definizione di $\boldsymbol{i}$,

$$i_t = i\alpha\,, \qquad i_n = i\beta\,, \qquad i_b = i\gamma\,. \tag{4}$$

Dacchè, in P, $\alpha = 1$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$, in un generico punto S della sezione τ, i valori di α, β, γ saranno ancora 1, 0, 0, a meno di termini di prim'ordine in δ.

D'altra parte (sempre in S e collo stesso ordine di approssimazione)

$$\frac{d\alpha}{ds}\,, \qquad \frac{d\beta}{ds}\,, \qquad \frac{d\gamma}{ds}\,,$$

coincidono colle derivate di α, β, γ rapporto all'arco della corrispondente L ([3]), e sono quindi espresse da $c\alpha_1$, $c\beta_1$, $c\gamma_1$, essendo c la curvatura e α_1, β_1, γ_1 i coseni direttori della normale principale alla L nel punto S. Siccome poi in P, $c = c_P$, $\alpha_1 = 0$, $\beta_1 = 1$, $\gamma_1 = 0$, così in definitiva è lecito ritenere, *a meno di termini di prim'ordine in* δ:

$$\left\{\begin{array}{lll} \alpha_S = 1\,, & \beta_S = 0\,, & \gamma_S = 0\,; \\ \left(\dfrac{d\alpha}{ds}\right)_S = 0\,, & \left(\dfrac{d\beta}{ds}\right)_S = c_P\,, & \left(\dfrac{d\gamma}{ds}\right)_S = 0\,. \end{array}\right. \tag{5}$$

Ciò premesso, consideriamo il potenziale vettore $\boldsymbol{j}$, cui dà luogo la distribuzione vettoriale.

Ad ognuna delle componenti j_t, j_n, j_b si può senz'altro applicare quanto è stato detto al n. 1 per un generico potenziale U: basterà soltanto sostituire la densità ϱ con i_t, i_n, i_b ordinatamente. Le espressioni

([3]) Cfr. per tutto ciò i dettagliati sviluppi della precedente ricerca (pp. 544-545) [in questo vol., pp. 60-62].

asintotiche delle nove derivate

$$\frac{dj_t}{ds} = j_{t|t}, \quad \frac{dj_t}{dx} = j_{t|n}, \quad \frac{dj_t}{dy} = j_{t|b},$$

$$\frac{dj_n}{ds} = j_{n|t}, \text{ ecc.},$$

saranno perciò fornite dalle (3), ponendovi materialmente, una prima volta

$$U = j_t \text{ e } \varrho_s = (i_t)_s = i_s \alpha_s, \qquad \text{poi} \qquad U = j_n \quad \text{e} \quad \varrho_s = (i_n)_s = i_s \beta_s,$$

infine

$$U = j_b \qquad \text{e} \qquad \varrho_s = (i_b)_s = i_s \gamma_s.$$

Ove si osservi che ψ e le sue derivate (pur non arrivando in generale al second'ordine, come si è ricordato alla fine del n. 1) sono di *prim'ordine* almeno rispetto a δ, potremo, *a meno di termini di second'ordine*, introdurre, per α_s, β_s, γ_s e loro derivate, i valori (5) e ottenere così:

$$(6) \qquad \left\{ \begin{aligned} & j_{t|t} = 2\frac{d(i_s \alpha_s \psi)}{ds} = 2\frac{d(i_s \psi)}{ds}, \qquad j_{t|n} = i_s \left(2\frac{d\psi}{dx} + c_p \psi\right), \\ & \qquad\qquad j_{t|b} = 2 i_s \frac{d\psi}{dy}; \\ & j_{n|t} = 2\frac{d(i_s \beta_s \psi)}{ds} = 2 i_s c_p \psi, \qquad i_{n|n} = 0, \quad j_{n|b} = 0; \\ & j_{b|t} = 0, \qquad\qquad j_{b|n} = 0, \quad j_{b|b} = 0. \end{aligned} \right.$$

In base a queste formule, ove si ponga

$$(7) \qquad \boldsymbol{H} = -\operatorname{rot} \boldsymbol{j},$$

si hanno, per le componenti di $\boldsymbol{H}$, le espressioni asintotiche

$$(8) \qquad \left\{ \begin{aligned} H_t &= -(j_{n|b} - j_{b|n}) = 0, \\ H_n &= -(j_{b|t} - j_{t|b}) = 2 i_s \frac{d\psi}{dy}, \\ H_b &= -(j_{t|n} - j_{n|t}) = i_s c_p \psi - 2 i_s \frac{d\psi}{dx}. \end{aligned} \right.$$

3. - Flusso stazionario di elettricità nel tubo e corrispondente campo elettromagnetico.

Sia T sede di un flusso di elettricità, avente le L per linee di corrente. Supposto il flusso stazionario, sarà tutto indipendente dal tempo e funzione soltanto del posto.

Ove ϱ e $\boldsymbol{v}$ rappresentino rispettivamente la densità e la velocità dell'elettricità in un punto generico, e A l'inversa della velocità della luce, il vettore

$$\boldsymbol{i} = A\varrho\boldsymbol{v} \tag{9}$$

misurerà la corrente (in unità elettromagnetiche).

Riferendosi per tutto il resto al sistema elettrostatico (costante di Coulomb eguale ad 1), la funzione U, di cui al n. 1, potrà risguardarsi come il potenziale scalare, il vettore $\boldsymbol{j}$, di cui al n. 2, come il potenziale vettore del nostro campo.

La forza elettrica $\boldsymbol{E}$, in un punto generico Q del campo, è il gradiente di U cambiato di segno: essa coincide quindi coll'attrazione newtoniana, dovuta a una massa di densità $-\varrho$.

A norma della legge di Biot e Savart (ove sia *sinistrorso* il triedro di riferimento, come lo è, per definizione, il nostro $\boldsymbol{t}$, $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{b}$), la forza magnetiva $\boldsymbol{H}$ è definita dalla (7); alle sue componenti competono pertanto le espressioni asintotiche (8).

La forza meccanica in Q (riferita all'unità di volume) consta, secondo Lorentz (nel caso presente, anche secondo le altre teorie), dei due contributi

$$\varrho\boldsymbol{E}$$

e

$$\boldsymbol{H}\wedge\boldsymbol{i} \quad (^4),$$

in cui la ϱ e i tre vettori $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{i}$ si riferiscono al punto Q.

Consideriamo la fetta di tubo compresa fra la sezione generica τ e una sezione vicinissima distante ds.

L'elemento di volume circostante a Q è espresso da $d\tau\cdot ds$. Ove si

(4) Conformemente alle proposte dei signori Marcolongo e Burali-Forti, « Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo », t. XXIV, 1907, uso il segno $\wedge$ per indicare un prodotto vettoriale.

ponga

$$\Phi_1 = \int_\tau \varrho E \, d\tau \,, \tag{10}$$

$$\Phi_2 = \int_\tau (H \wedge i) \, d\tau \,, \tag{11}$$

$(\Phi_1 + \Phi_2)\, ds$ rappresenta evidentemente la risultante delle forze meccaniche, che si esercitano sulla accennata fetta. Perciò

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$$

è la forza complessiva, riferita all'unità di lunghezza del tubo.

4. - Espressione asintotica di Φ_1.

Come abbiamo rilevato or ora, la forza elettrica E (in un punto generico Q) coincide coll'attrazione newtoniana (del tubo T, in Q), dovuta ad una distribuzione di densità $-\varrho$.

$-E$ è così l'attrazione, corrispondente alla densità ϱ, e $-\Phi_1 \cdot ds$ rappresenta di conseguenza la risultante delle attrazioni, subìte dalla fetta elementare considerata.

Dato questo significato, diviene superfluo il calcolo diretto di Φ_1. Basta riportarsi alla seconda delle Note, già più volte ricordate [formule (33)].

Pongasi in conformità

$$\nu = \int_\tau \varrho \, d\tau \,, \tag{12}$$

con che ν rappresenta la densità elettrica *lineare* (rapporto fra la carica della fetta e il suo spessore ds) in una posizione generica del tubo, individuata dalla sezione τ, o, se si vuole, dal punto P della direttrice.

Pongasi ancora

$$k = \frac{1}{\tau^2} \int_\tau \psi \, d\tau = \frac{1}{\tau^2} \int_\tau d\tau \int_{\tau_0} d\tau_0 \log \frac{l}{\Delta} \,, \tag{13}$$

con che k è un puro numero, dipendente esclusivamente dalla configurazione geometrica della sezione τ (le^{-k} rappresenta la media geometrica delle mutue distanze ; cfr. MAXWELL, *Collected papers*, vol. II, pag. 280).

Tanto ν, quanto k, hanno, come si vede, valori ben determinati, una volta fissata la sezione, ossia il punto P; possono quindi considerarsi funzioni dell'arco s della direttrice C.

Per mezzo di queste quantità, le tre componenti di $\mathbf{\Phi}_1$ si esprimono, *a meno di termini dell'ordine di* δ^4, sotto la forma seguente:

$$\Phi_{1|t} = -\frac{d}{ds}(\nu^2 k), \quad \Phi_{1|n} = -\nu^2 kc, \quad \Phi_{1|b} = 0, \tag{14}$$

dove, per brevità, ho scritto c in luogo di c_P.

5. - Espressione asintotica di $\mathbf{\Phi}_2$ e della forza risultante $\mathbf{\Phi} = \mathbf{\Phi}_1 + \mathbf{\Phi}_2$.

Nel secondo membro della (11), il vettore $\boldsymbol{i}$ si riferisce, al pari di $\boldsymbol{H}$, al punto (variabile) Q, rispetto al quale si integra. Si può però, a meno di termini dell'ordine di δ^4, sostituire $\boldsymbol{i}$ col vettore $\boldsymbol{i}_S$, relativo al punto fisso S.

Infatti la differenza $\boldsymbol{i} - \boldsymbol{i}_S$ è di prim'ordine rispetto a δ; d'altra parte $\boldsymbol{H}$ (che ha per componenti delle differenze di derivate di potenziali newtoniani) si comporta come l'attrazione, ed è quindi anch'essa di prim'ordine almeno.

Ne viene che il prodotto vettoriale

$$\boldsymbol{H} \wedge (\boldsymbol{i} - \boldsymbol{i}_S)$$

è almeno di second'ordine, e il relativo integrale

$$\int_\tau \{\boldsymbol{H} \wedge (\boldsymbol{i} - \boldsymbol{i}_S)\}\, d\tau\,,$$

di quarto.

Si ha dunque, a meno di termini dell'ordine di δ^4,

$$\mathbf{\Phi}_2 = \int_\tau (\boldsymbol{H} \wedge \boldsymbol{i}_S)\, d\tau\,. \tag{11'}$$

Colla stessa approssimazione, si possono adottare, per i coseni direttori α_S, β_S, γ_S di $\boldsymbol{i}_S$, i valori (5), e quindi, per le componenti, i valori

$$i_S\,, \quad 0\,, \quad 0\,.$$

Badando alle (8) ed esplicitando in conformità il prodotto vettoriale $\boldsymbol{H}\wedge\boldsymbol{i}_s$, la (11′) dà:

$$\begin{cases} \Phi_{2|t} = 0 \,, \\ \Phi_{2|n} = i_s^2 c_P \int_\tau \psi \, d\tau - 2 i_s^2 \int_\tau \frac{d\psi}{dx} \, d\tau \,, \\ \Phi_{2|b} = -\, 2 i_s^2 \int_\tau \frac{d\psi}{dy} \, d\tau \,. \end{cases}$$

Dacchè, in base alla (1),

$$\frac{d\psi}{dx} = -\int_\tau \frac{x - x_0}{\Delta^2} \, d\tau_0 , \qquad \frac{d\psi}{dy} = -\int_\tau \frac{y - y_0}{\Delta^2} \, d\tau_0 \,.$$

è chiaro che i due integrali quadrupli

$$\int_\tau \frac{d\psi}{dx} \, d\tau \,, \qquad \int_\tau \frac{d\psi}{dy} \, d\tau \,,$$

si annullano. Immaginiamo infatti di scambiarvi i due punti di integrazione O e Q. Da un lato, questo scambio materiale di notazione non altera i valori degli integrali; d'altra parte , il suo effetto formale è di mutare $x - x_0$, $y - y_0$ in $x_0 - x$, $y_0 - y$, cioè il segno, tutto il resto rimanendo invariato. Il valore numerico dei due integrali non può dunque essere lo zero, c. d. d.

Rimane con ciò, ove al terzo integrale $\int_\tau \psi \, d\tau$ si sostituisca il suo valore (13),

$$\Phi_{2|t} = 0 \,, \qquad \Phi_{2|n} = i_S^2 \tau^2 k c_P \,, \qquad \Phi_{2|b} = 0 \,.$$

S designa un punto, che può essere scelto arbitrariamente entro la sezione τ. Gioverà trar partito da questa arbitrarietà per attribuire a $\Phi_{2|n}$ una forma più espressiva.

Introduciamo all'uopo la *corrente totale* I che passa attraverso τ.

Questa I, data la stazionarietà, deve essere una costante caratteristica del flusso che si considera, indipendente quindi anche dalla posizione della sezione del tubo. Comunque, essa ha ovviamente per espressione

$$I = \int_\tau i \alpha \, d\tau \,.$$

Dacchè α differisce dall'unità per termini di prim'ordine in δ, si avrà, a meno di termini di quest'ordine,

$$I = \int_\tau i\, d\tau ,$$

e quindi, per il teorema della media, eguale a $i_S \tau$, indicando S un conveniente punto di τ.

Si può dunque scrivere, colla solita approssimazione, cioè a meno di termini di quart'ordine in δ,

$$\Phi_{2|t} = 0 , \qquad \Phi_{2|n} = I^2 kc , \qquad \Phi_{2|b} = 0 , \tag{15}$$

dove [come già nelle (14)] ho soppresso l'indice P della curvatura c, perchè, al pari di k e di ν, anche I è un elemento globale, e non c'è da mettere in evidenza alcun altro punto della sezione, oltre a P.

Nelle (14) figura la densità lineare ν. Può essere conveniente farvi apparire, in luogo di ν, un elemento puramente cinematico. Ecco in qual modo.

Ricorriamo alla (9) e osserviamo che, essendo

$$I = \int_\tau i\alpha\, d\tau = A \int_\tau \varrho v \alpha\, d\tau ,$$

si può, a meno di termini in δ, sostituire a ϱ il suo valore medio ν/τ, il che dà

$$I = \nu \cdot A \frac{1}{\tau} \int_\tau v\alpha\, d\tau .$$

Ora $(1/\tau)\int_\tau v\alpha\, d\tau$ è il valore medio della velocità del flusso attraverso la sezione τ.

Si ha dunque, a meno di termini in δ,

$$I = \nu\beta , \tag{16}$$

designandosi ora (⁵) *con* β *il rapporto* $A(1/\tau)\int_\tau v\alpha\, d\tau$ *fra la velocità media del flusso, attraverso* τ, *e la velocità della luce.*

(⁵) Al n. 2 era stato indicato con β un coseno direttore. Questo coseno non figura nelle formule finali. Si può pertanto, senza pericolo di ambiguità, riprendere la lettera β, attribuendole un diverso significato.

Ne viene che, colla solita approssimazione, cioè a meno di termini dell'ordine di δ^4, si può, nelle (14), sostituire alla densità ν il rapporto I/β.

Con ciò la forza meccanica risultante

$$\mathbf{\Phi} = \mathbf{\Phi}_1 + \mathbf{\Phi}_2$$

rimane asintoticamente definita sotto la forma seguente:

$$(17) \qquad \Phi_t = -I^2 \frac{d}{ds}\left(\frac{k}{\beta^2}\right), \qquad \Phi_n = -I^2 \frac{k}{\beta^2} c(1-\beta^2), \qquad \Phi_b = 0 .$$

Rammento, per comodo di consultazione, che t, n, b, c, s, τ hanno il significato dichiarato al n. 1 (essendosi soltanto soppresso l'indice P di c); k è definito dalla (13); I misura la corrente totale (in unità elettromagnetiche); infine β rappresenta il rapporto fra la velocità media del flusso attraverso τ e la velocità della luce.

Riservo ad una prossima Nota l'applicazione di queste formule al caso, in cui il tubo T è sede di un campo elettromagnetico puro.

VI.

TEORIA ASINTOTICA DELLE RADIAZIONI ELETTRICHE

« Rend. Acc. Lincei », s. 5ª, XVIII$_1$, (1909$_1$),

pp. 83-93.

L'immagine di un flusso di elettricità nei fili di un circuito voltaico (per es. telegrafico) è da tempo universalmente accettata. Più recente è la veduta che un analogo flusso possa sussistere anche in assenza del conduttore. Tale veduta è sorta dallo studio di quelle manifestazioni, conosciute sotto il nome di raggi catodici, che furono scoperte da HITTORF (1868) e illustrate da CROOKES colle sue brillanti esperienze.

Si credette dapprima (con SCHUSTER e J. J. THOMSON) di poter assimilare il fenomeno ad un microscopico bombardamento, ravvisando in un generico raggio la traiettoria di particelle *materiali* elettrizzate, incessantemente emesse dal catodo di un tubo di scarica. Ma questa spiegazione non parve esauriente, perchè inconciliabile colla concezione atomistica, così semplice e suggestiva, dei fenomeni elettrolitici.

Si fece allora strada l'ipotesi che si trattasse di un flusso di elettricità pura, scevra cioè da ossature materiali: e questo non soltanto per i raggi catodici, ma anche per altre forme di radiazioni successivamente scoperte, e in particolare per i così detti raggi β del radio.

Il sig. ABRAHAM, assoggettò al calcolo (per il primo, in modo completo) tale spiegazione, ammettendo:

a) le equazioni di MAXWELL-HERTZ e l'equazione elettromeccanica di LORENTZ;

b) il carattere granulare del flusso: vale a dire che il flusso sia costituito da tante cariche isolate, piccole, ma non prive di estensione (elettroni), susseguentisi incessantemente sulla traiettoria sensibile del raggio;

c) la *rigidità* di ciascuna carica: cioè l'ipotesi che i varî elementi (di elettricità), di cui consta un elettrone, si comportino nel moto come se fossero invariabilmente collegati.

Certe conseguenze quantitative della teoria di ABRAHAM, sottoposte da KAUFMANN a controllo sperimentale (1902), risultarono in buon accordo coi fatti osservati.

Furono successivamente proposte altre teorie, in cui, mantenendosi sempre i principî *a*) e *b*), vengono sostituite alla *c*) le ipotesi cinematiche seguenti:

c') ogni elettrone subisce una determinata contrazione nel senso del moto, conservando invariate le sue dimensioni trasversali (LORENTZ);

oppure

c'') la contrazione lorentziana è accompagnata da dilatazione trasversale in modo che il volume rimanga inalterato (BUCHERER e LANGEVIN);

o, più generalmente,

c''') fra la contrazione longitudinale e la dilatazione trasversale passa un legame prestabilito (POINCARÈ).

La ipotesi *c'*) di LORENTZ è l'unica che sia compatibile col principio di relatività (inteso in un senso alquanto più generale dell'ordinario, che è stato ben precisato da LORENTZ-EINSTEIN-MINKOWSKI).

Per decidere fra queste varie teorie, furono intraprese (specialmente da KAUFMANN) delicate esperienze. L'esito non è ben netto. Ma si può domandarsi se veramente si tratti di teorie abbastanza mature per un controllo differenziale. In prima approssimazione sono tutte egualmente accettabili, e infatti si trovano in sufficiente accordo coll'esperienza. Come rappresentazione definitiva, lasciano tutte a desiderare, perchè l'introduzione del legame cinematico sembra affatto gratuita e anche (quanto al suo contenuto intuitivo) affetta da intima contradizione: infatti da un lato si vuol escludere ogni intervento di materia e di forze, che non siano di origine elettromagnetica; mentre dall'altro lato (introducendo un legame cinematico) si viene implicitamente ad ammettere l'esistenza di forze vincolari, non contemplate dall'equazione elettromeccanica di LORENTZ.

In questa condizione di cose mi pare opportuno richiamare l'attenzione degli studiosi sopra una nuova teoria dei fenomeni in questione, la quale *prescinde da ogni postulato di tipo c*) e sfrutta unicamente, accanto alle equazioni fondamentali *a*) e all'intuizione del continuo [surrogato, pressochè indifferente (1) dell'ipotesi atomica *b*)], la circostanza, speri-

---

(1) Ecco come si può rendersene ragione:

L'esperienza, per quanto affinata, rivela soltanto i valori medî, relativi a un conveniente intervallo di spazio (e di tempo). È certo esagerato il supporre che si possano cogliere questi valori medî di micron in micron (10^{-4} cm).

D'altra parte le teorie elettroniche conducono ad attribuire agli elettroni dimensioni dell'ordine di 10^{-13} cm.

mentalmente ovvia, che ogni raggio sensibile ha dimensioni trasversali piccolissime rispetto alla sua lunghezza.

Ciò permette di assimilare il raggio ad un sottile tubo di flusso T, e di valutare per via asintotica (limitandosi cioè a quei termini, che divengono preponderanti quando la sezione converge a zero) la forza meccanica $\boldsymbol{\Phi}\,ds$, che si esercita sopra una fetta elementare di tubo di spessore ds (compresa fra due sezioni normali vicinissime).

Come $\boldsymbol{\Phi}$ sia legata all'andamento geometrico e cinematico del flusso ho mostrato in una precedente comunicazione. Qui applico il principio fondamentale dell'ordinaria meccanica (forza = massa$\times$accelerazione), e pongo di conseguenza eguale a zero la forza *totale*, che si esercita sulla fetta, dacchè, per ipotesi, è nulla la sua massa materiale.

Questa forza totale consta: della accennata $\boldsymbol{\Phi}\,ds$, dovuta all'*autocampo*, cioè al flusso delle cariche, che costituisce il raggio; e, in generale, di una forza *esterna* $\boldsymbol{F}\,ds$, dovuta a quell'eventuale campo elettromagnetico (indipendente dalla radiazione che si studia), in cui si supponga immerso il raggio. Ottengo così la equazione vettoriale

$$(\mathrm{I}) \qquad \boldsymbol{\Phi} + \boldsymbol{F} = 0\,,$$

che caratterizza asintoticamente ogni campo elettromagnetico puro, assimilabile ad un flusso di elettricità filiforme e stazionario.

La (I) equivale a tre equazioni differenziali ordinarie nella variabile indipendente s (arco del raggio elettrico). Essa ammette la seguente interpretazione:

La forma del raggio è quella che competerebbe ad un filo materiale, flessibile ed estendibile, il quale scorresse su se stesso colla velocità del flusso, massa, tensione e forza attiva in un generico elemento di filo essendo legate in modo semplice (cfr. n. 5) ai parametri elettrici e cinematici del corrispondente elemento di raggio.

Quanto alla verificazione sperimentale (nell'àmbito dei risultati finora bene accertati) la (I) vi si adatta con agilità anche maggiore delle teorie elettroniche (cfr. n. 6). Si aggiunga che il principio (lorentziano) di relatività è senz'altro rispettato, perchè $\boldsymbol{\Phi}$ ed $\boldsymbol{F}$ sono entrambe forze di pura origine elettromagnetica.

Riassumendo, la teoria asintotica, analiticamente espressa dalla equazione (I), può (fino a prova contraria) gareggiare in attendibilità sperimentale con una qualunque delle teorie elettroniche, e si raccomanda

---

Si tratterebbe quindi in ogni caso di una struttura granulare estremamente minuta rispetto al campo di osservazione.

In queste condizioni, dall'ipotesi atomica alla finzione matematica del continuo, non è a presumere divario sensibile quanto a conseguenze concrete.

in loro confronto per la sua semplicità concettuale, in quanto evita ogni introduzione di legami cinematici.

Questa teoria, in cui nulla più sussiste di arbitrario, va dunque considerata con favore in un decisivo appello all'esperienza.

1. - Premesse e notazioni.

Sia T un tubo di sezione abbastanza piccola (rispetto alla lunghezza) da essere assimilabile, quanto all'andamento generale, ad una semplice linea geometrica C (*direttrice*), che corra tutta nel suo interno.

Rappresentino:

P un punto generico di C; s la lunghezza dell'arco, contato a partire da un'origine arbitraria; c la curvatura di C nel punto P; t la direzione della tangente (nel senso delle s crescenti); n la direzione della normale principale (nel senso della concavità di C); b la direzione della binormale (in tal senso che il triedro t, n, b risulti *sinistrorso*); τ la sezione del tubo praticata con un piano normale a C in P; O e Q due punti qualunque di τ; $d\tau_0$ e $d\tau$ due elementi di sezione ad essi circostanti; Δ la distanza OQ; l una lunghezza *costante*, vincolata alla sola condizione di essere comparabile con quella del tubo (²).

Posto

$$k = \frac{1}{\tau^2}\int_\tau d\tau \int_{\tau_0} d\tau_0 \log\frac{l}{\Delta}, \tag{1}$$

sarà k un parametro di configurazione, cioè un puro numero, dipendente esclusivamente dalla forma della sezione τ. Una volta fissato il tubo, ad ogni posizione di P, lungo C, corrisponde un numero k: esso si presenta così come una determinata funzione di s.

Supponiamo che il tubo T sia sede di elettricità in movimento stazionario; più precisamente sia quel che si suol dire un tubo di flusso.

Diciamo I la corrente totale attraverso τ (quantità di elettricità nell'unità di tempo), nel senso delle s crescenti. Data la stazionarietà del fenomeno, questa I deve risultare indipendente dalla sezione, ed è quindi una costante, caratteristica del tubo di flusso (positiva o negativa secondochè passa, prevalentemente, nel senso fissato, elettricità positiva od elettricità negativa).

(²) Se la direttrice è un arco di cerchio, la migliore approssimazione numerica delle espressioni asintotiche si ha prendendo, per l, otto volte il raggio. Cfr. la Nota (seconda) *Sull'attrazione newtoniana di un tubo sottile*, in questi « Rendiconti », serie 5ª, vol. XVII, 1908, p. 550 [in questo vol., pp. 67-68]. In generale, è presumibile che convenga adottare come valore di l otto volte il raggio medio di curvatura.

Riterremo I misurato in unità elettromagnetiche, pur riferendoci, per gli altri elementi del campo elettromagnetico che avremo occasione di considerare, al sistema elettrostatico.

Sia ancora $\boldsymbol{B}$ un vettore coll'origine in P, diretto secondo la tangente a C (nel senso del flusso, cioè nel senso delle s crescenti) e avente per lunghezza il rapporto β fra la velocità (media) v del flusso attraverso τ e la velocità $1/A$ della luce. Questo vettore $\boldsymbol{B}$ sarà, in generale, funzione di s.

Se si osserva che la misura I_0 del flusso in unità elettrostatiche è legata ad I dalla formula

$$I = AI_0\,,$$

e che d'altra parte è, per definizione,

$$\beta = Av\,,$$

si vede che il rapporto

$$\frac{I}{\beta} = \frac{I_0}{v} = \nu\,, \tag{2}$$

rappresenta (in unità elettrostatiche) la densità (lineare) dell'elettricità.

Basta all'uopo fare il solito ragionamento elementare, trattando il flusso come uniforme attraverso l'intera sezione τ. Si può allora dire, considerando una sezione vicinissima, distante ds, che, per arrivarvi, a partire dalla τ, le cariche impiegano il tempuscolo ds/v. D'altra parte $I_0(ds/v)$ misura (in unità elettrostatiche) la quantità di elettricità, che passa attraverso τ, durante quel tempuscolo; alla fine del tempuscolo essa viene a trovarsi compresa in una detta elementare dT del tubo di flusso, di spessore ds, e ne costituisce la carica totale (dato che si considera esclusivamente un fenomeno di flusso e si prescinde quindi da distribuzioni statiche).

Essendo, per la (2), $I_0(ds/v) = \nu\, ds$, ν si presenta precisamente come il rapporto fra la carica della fetta dT e il relativo spessore ds.

2. - Forza meccanica dell'autocampo.

Il flusso considerato genera un campo elettromagnetico (anch'esso stazionario). Questo campo esercita delle azioni meccaniche sulle cariche, che si muovono nel tubo. Fissiamo in particolare le cariche che, in un istante generico, sono situate nella fetta elementare dT, e indichiamo con $\boldsymbol{\Phi}\, ds$ la risultante delle forze da queste subìte.

Al calcolo di $\boldsymbol{\Phi}$ è dedicata una Nota recente [3]; ne è ivi assegnata una espressione asintotica, cioè una espressione, che è tanto più approssimata quanto più è sottile il tubo.

Le componenti di $\boldsymbol{\Phi}$ secondo t, n, b risultano asintoticamente definite nel modo seguente:

$$\tag{3} \left\{ \begin{aligned} \Phi_t &= -I^2 \frac{d}{ds}\left(\frac{k}{\beta^2}\right), \\ \Phi_n &= -I^2 \frac{k}{\beta^2}\, c(1-\beta^2), \\ \Phi_b &= 0 . \end{aligned} \right.$$

Introducendo i due vettori unitarî $\boldsymbol{t}_1$ ed $\boldsymbol{n}_1$, diretti rispettivamente secondo t e secondo n, e ricordando la identità

$$\frac{d\boldsymbol{t}_1}{ds} = c\boldsymbol{n}_1 ,$$

si vede subito che le (3) possono compendiarsi in

$$\tag{5} \boldsymbol{\Phi} = -I^2 \frac{d(k/\beta^2)}{ds}\cdot \boldsymbol{t}_1 - I^2 \frac{k}{\beta^2}(1-\beta^2)\frac{d\boldsymbol{t}_1}{ds} .$$

3. - Forza meccanica di origine esterna.

Supponiamo, per maggior generalità, che, al campo elettromagnetico creato dal tubo di flusso, si sovrapponga un campo elettromagnetico esterno. Supponiamo anzi, in modo più preciso, che il tubo T si trovi immerso in un campo D, di origine esterna, non influenzabile, o almeno non sensibilmente influenzato, dal flusso che si studia.

Designeremo ordinatamente con $\boldsymbol{e}$ e $\boldsymbol{h}$ la forza elettrica e la forza magnetica di questo campo esterno D.

Data la sottigliezza del tubo T, nei casi che più interessano per le applicazioni, il campo D potrà comodamente trattarsi come uniforme entro una generica sezione τ (colle determinazioni di $\boldsymbol{e}$ e di $\boldsymbol{h}$, che spettano al punto P della direttrice).

Suppongasi inoltre [come sostanzialmente è stato fatto nella prece-

---

(3) *Sulle azioni meccaniche dovute ad un flusso filiforme di elettricità*, in questo volume dei « Rendiconti », p. 41 [in questo vol. delle « Opere »: V, pp. 69-79].

dente deduzione delle espressioni asintotiche, nonchè al n. 1 della presente nei riguardi della relazione (2)] che anche i caratteri cinematici del flusso sieno sensibilmente uniformi entro una sezione τ: o, sotto altra forma, che i termini dell'ordine delle dimensioni della sezione riescano trascurabili rispetto ad elementi, che (come il campo esterno e i caratteri globali del flusso) non dipendono dalle dimensioni trasversali.

Si può allora identificare la densità in un punto generico Q di una sezione τ al suo valore medio $\nu\, ds/\tau\, ds = \nu/\tau$, la velocità al vettore $\boldsymbol{v} = (1/A)\boldsymbol{B}$, diretto secondo la tangente alla direttrice e avente per lunghezza la velocità media v.

Ne viene, a norma della legge di LORENTZ, che la forza provocata dal campo esterno nell'intorno di Q (per unità di volume) può ritenersi definita — il triedro di riferimento essendo *sinistrorso* — dal vettore

$$\frac{\nu}{\tau}\{\boldsymbol{e} + \boldsymbol{h} \wedge \boldsymbol{B}\}\ (^4)\,. \tag{4}$$

Se si designa con $\boldsymbol{F} ds$ la risultante delle forze meccaniche, di origine elettromagnetica esterna, agenti sulla solita fetta dT, sarà evidentemente $\boldsymbol{F} ds/\tau\, ds$ la forza riportata all'unità di volume, e si avrà quindi, ricordando anche la (2),

$$\boldsymbol{F} = \nu\{\boldsymbol{e} + \boldsymbol{h} \wedge \boldsymbol{B}\} = \frac{I}{\beta}\{\boldsymbol{e} + \boldsymbol{h} \wedge \boldsymbol{B}\}\,. \tag{6}$$

Come si vede, nella espressione di $\boldsymbol{F}$, intervengono, non soltanto le forze elettromagnetiche esterne $\boldsymbol{e}$ ed $\boldsymbol{h}$, ma anche la velocità del flusso e l'andamento della direttrice del tubo (pel tramite del vettore $\boldsymbol{B}$).

Proiettando nelle direzioni t, n, b, ove si osservi che le componenti di $\boldsymbol{B}$ sono β, 0, 0, si ha dalla relazione vettoriale (6):

$$\left\{\begin{aligned} F_t &= \nu e_t = \frac{I}{\beta}\, e_t\,, \\ F_n &= \nu(e_n + h_b \cdot \beta) = \frac{I}{\beta}\, e_n + I h_b\,, \\ F_b &= \nu(e_b - h_n \cdot \beta) = \frac{I}{\beta}\, e_b - I h_n\,. \end{aligned}\right. \tag{7}$$

(4) Il simbolo $\wedge$ (proposto dai signori MARCOLONGO e BURALI-FORTI) sta a designare il prodotto vettoriale.

4. - Caso di un campo puro. Equazioni differenziali ordinarie, che lo caratterizzano asintoticamente.

Il campo elettromagnetico nei punti del tubo T è a dirsi *puro*, le quante volte:

1) il tubo stesso non sia sede di masse materiali;

2) si escluda qualsiasi legame cinematico (di cui del resto non si scorge alcuna ragionevole giustificazione) fra le cariche elettriche, che scorrono entro T.

In base a tali ipotesi, sono concepibili, entro un campo puro, soltanto forze meccaniche di origine elettromagnetica. E, siccome non vi sono masse materiali, la risultante di queste forze dovrà annullarsi in ogni punto, se si ammette che seguiti a sussistere il principio fondamentale della meccanica dei mezzi ponderabili (forza = massa $\times$ accelerazione). Sarà nulla per conseguenza anche la risultante di *tutte* le forze agenti sopra una generica fetta dT, risultante che, per quanto precede, è espressa da $(\boldsymbol{\Phi} + \boldsymbol{F})\,ds$.

Sussiste dunque, per ogni sezione del nostro tubo, o, ciò che è lo stesso, per ogni valore di s, la equazione vettoriale

$$\boldsymbol{\Phi} + \boldsymbol{F} = 0\,, \tag{I}$$

che, in virtù della (5), può essere scritta sotto la forma equivalente:

$$-I^2\frac{d(k/\beta^2)}{ds}\cdot\boldsymbol{t}_1 - I^2\frac{k}{\beta^2}(1-\beta^2)\frac{d\boldsymbol{t}_1}{ds} + \boldsymbol{F} = 0\,. \tag{8}$$

Essa caratterizza asintoticamente il fenomeno, legando il campo esterno (riassunto nel vettore $\boldsymbol{F}$) all'andamento geometrico e cinematico del tubo di flusso T.

Esplicitando la (I), a norma delle (3), si hanno le tre equazioni differenziali (intrinseche)

$$\left\{\begin{aligned} &-I^2\frac{d}{ds}\left(\frac{k}{\beta^2}\right) + F_t = 0\,,\\ &-I^2\frac{k}{\beta^2}c(1-\beta^2) + F_n = 0\,,\\ &\qquad\qquad\qquad F_b = 0\,. \end{aligned}\right. \tag{9}$$

Proiettando invece la (8) sopra tre assi ortogonali generici x, y, z, e badando che $\boldsymbol{t}_1$ ha per componenti dx/ds, dy/ds, dz/ds, si trae

$$(10)\qquad \begin{cases} -I^2 \dfrac{d(k/\beta^2)}{ds}\dfrac{dx}{ds} - I^2 \dfrac{k}{\beta^2}(1-\beta^2)\dfrac{d^2x}{ds^2} + F_x = 0\,, \\ -I^2 \dfrac{d(k/\beta^2)}{ds}\dfrac{dy}{ds} - I^2 \dfrac{k}{\beta^2}(1-\beta^2)\dfrac{d^2y}{ds^2} + F_y = 0\,, \\ -I^2 \dfrac{d(k/\beta^2)}{ds}\dfrac{dz}{ds} - I^2 \dfrac{k}{\beta^2}(1-\beta^2)\dfrac{d^2z}{ds^2} + F_z = 0\,. \end{cases}$$

In queste equazioni si presenta naturalmente come variabile indipendente l'arco s della direttrice C del tubo; intervengono poi (come elementi cogniti od incogniti, a norma delle circostanze) la configurazione geometrica di detta curva, cioè le funzioni $x(s)$, $y(s)$, $z(s)$; la costante I (flusso totale in unità elettromagnetiche); le due funzioni numeriche (cioè di dimensioni nulle) $k(s)$, $\beta(s)$; nonchè il campo esterno pel tramite delle F_x, F_y, F_z.

5. - Modello meccanico.

Le dimensioni di I (corrente nel sistema elettromagnetico) sono $m^{\frac{1}{2}}\, l^{\frac{1}{2}}\, t^{-1}$.

I^2 è dunque omogeneo ad una forza meccanica.

Ricordiamo che k e β sono numeri puri, e poniamo

$$(11)\qquad I^2 \frac{k}{\beta^2} = T' e^{-\frac{1}{2}\beta^2}, \qquad \boldsymbol{F} = -\boldsymbol{F}' e^{-\frac{1}{2}\beta^2}\,,$$

con che T' ha le dimensioni di una forza e $\boldsymbol{F}'$, al pari di $\boldsymbol{F}$, quelle di una forza per unità di lunghezza.

Sostituendo nella (8) e moltiplicando per $-e^{\frac{1}{2}\beta^2}$, si ottiene

$$(8')\qquad \left\{\frac{dT'}{ds} - T'\beta\frac{d\beta}{ds}\right\}\boldsymbol{t}_1 + T'(1-\beta^2)\frac{d\boldsymbol{t}_1}{ds} + \boldsymbol{F}' = 0\,.$$

D'altra parte, notando che, per definizione, $\beta = Av$ e $v\boldsymbol{t}_1 = \boldsymbol{v}$, si vede che è identicamente

$$T'\beta\frac{d\beta}{ds}\boldsymbol{t}_1 + T'\beta^2\frac{d\boldsymbol{t}_1}{ds} = A^2 T' v \frac{d\boldsymbol{v}}{ds}\,.$$

Con ciò, ove si ponga

$$\nu' = A^2 T' = A^2 I^2 \frac{k}{\beta^2} e^{\frac{1}{2}\beta^2}, \tag{12}$$

si può presentare la (8′), ossia in sostanza la (8), sotto la forma

$$\nu' \frac{d\boldsymbol{v}}{ds} \cdot v = \frac{d(T' \boldsymbol{t}_1)}{ds} + \boldsymbol{F}'. \tag{8″}$$

Questa equazione vettoriale è ovviamente interpretabile nella dinamica ordinaria come equazione del moto stazionario di un filo flessibile ed eventualmente estendibile, il quale scorra su se stesso per azione delle forze $\boldsymbol{F}'$.

La configurazione geometrica di un tale filo ipotetico coincide con quella del tubo (o, più precisamente, della direttrice C); la velocità di scorrimento $\boldsymbol{v}$ coincide colla velocità (media) del flusso; la tensione è rappresentata da T'; e la densità del filo, in un punto generico, da $\nu' = A^2 T'$: essa è dunque proporzionale alla tensione. Comunque, la massa di un elemento ds di filo vale $\nu' ds$. Pensando alla corrispondente fetta dT del tubo di flusso ed imitando (in modo evidente, per quanto meno espressivo) ciò che si fa nelle teorie elettroniche, si può dire che

$$\nu' ds = A^2 I^2 \frac{k}{\beta^2} e^{\frac{1}{2}\beta^2} ds,$$

costituisce la *massa elettromagnetica* della fetta.

Importa rilevare che, mentre nel fenomeno elettrico le due funzioni k e β di s sono a priori indipendenti, nel modello meccanico la equazione di continuità implicherebbe

$$\nu' v = \text{costante},$$

ossia, in base alla (12),

$$\frac{k}{\beta} e^{\frac{1}{2}\beta^2} = \text{costante}. \tag{13}$$

L'analogia è ancora troppo formale per giustificare l'ipotesi che questa condizione sia verificata anche nel fenomeno elettrico.

6. - Applicazione ai raggi catodici ed affini.

I raggi catodici e i raggi β del radio, secondo le vedute più generalmente accolte, sono dovuti a flusso di elettricità senza intervento di materia. L'aspetto del flusso in tali raggi è filiforme. Valgono pertanto le considerazioni fin qui svolte.

Le conseguenze sono effettivamente in accordo coi risultati sperimentali.

Illustrerò, a titolo di esempio, due fatti qualitativi ben noti:

1) In assenza di campo esterno, i raggi sono rettilinei.

2) Se si fa agire un campo magnetico uniforme, normalmente alla primitiva direzione dei raggi, questi si incurvano secondo traiettorie circolari normali al campo magnetico; di più, considerando un raggio come spiccato dal catodo (o dalla sostanza radioattiva), il senso di percorrenza appare *destrorso* (cioè opposto a quello delle sfere dell'orologio) rispetto alla direzione del campo magnetico.

La verificazione del primo enunciato è immediata. Dalla seconda delle (9) si ha infatti, per $F = 0$,

$$c(1-\beta^2) = 0\,,$$

donde $c = 0$, trattandosi di radiazioni, in cui (come preliminari esperienze hanno da tempo provato) la velocità è sempre inferiore a quella della luce, cioè $\beta < 1$.

Poniamoci ora nelle condizioni del secondo enunciato.

A regime stabilito, il pezzo di raggio, immerso nel campo magnetico, sarà assimilabile ad un arco di cerchio.

c è allora costante e b una direzione fissa, normale al piano del cerchio.

Va poi ritenuto $\boldsymbol{e} = 0$, e $\boldsymbol{h}$ diretta normalmente al detto piano

$$(h_t = h_n = 0)\,.$$

Scegliendo come direzione $\boldsymbol{t}$ quella del raggio (siccome nelle nostre formule il triedro t, n, b è sinistrorso), dovremo assumere h_b negativo, cioè eguale a $-h$, essendo h l'intensità costante del campo magnetico. Con ciò le (7) dànno

$$F_t = 0\,, \qquad F_n = -Ih\,, \qquad F_b = 0\,,$$

e le (9) si riducono di conseguenza a

$$\frac{k}{\beta^2} = \text{cost.}, \qquad I^2\frac{k}{\beta^2}c(1-\beta^2) + Ih = 0\,. \tag{14}$$

Esse dicono, eliminando k, che la velocità del flusso è costante (lungo l'arco di cerchio); la seconda mostra poi (avendosi, come sopra, $\beta < 1$) che la costante I deve essere essenzialmente negativa. Ciò rispecchia la circostanza, sperimentalmente dimostrata dal sig. PERRIN, che l'elettrizzazione dei raggi è negativa. Analogamente si rende conto della deviazione elettrica; ecc.

Io confido che la teoria asintotica possa trovare il suo « experimentum crucis ».

VII.

SULLA ESPRESSIONE ASINTOTICA DEI POTENZIALI RITARDATI

« Atti del IV Congresso intern. dei matematici, Roma, 1908 »,

vol. III, Roma, 1909, pp. 89-100.

1. - Richiamo della equazione di Doppler.

Sia P un punto mobile con data legge, rispetto ad un certo sistema di riferimento; O un punto fisso.
Dette

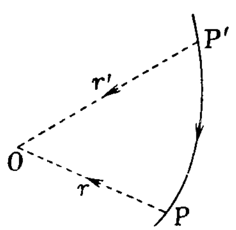
$$\left\{\begin{aligned} x &= x(t)\,, \\ y &= y(t)\,, \\ z &= z(t)\,, \end{aligned}\right. \tag{1}$$

le coordinate di P in un generico istante t; x_0, y_0, z_0 le coordinate di O, si designi al solito la distanza $\overline{OP}$ con

$$r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}\,. \tag{2}$$

Si supponga che da P emanino azioni di tipo newtoniano, propagantisi per onde sferiche con velocità costante c.

Si fissi un istante t, e sia in questo istante la posizione di P distinta da O, cioè $r > 0$.



Ammesso che la velocità v di P sia stata, prima dell'istante considerato, costantemente inferiore ad un limite fisso $< c$, esiste sulla traiettoria una ed una sola posizione *di utile emissione*; voglio dire una ed una sola posizione anteriore P', tale che, partendone un'azione nell'istante t', in cui vi transita il mobile, l'arrivo in O segue proprio all'istante t.

Tale univoca esistenza si dimostra subito dando forma analitica alla definizione dell'istante t' e della corrispondente posizione P'.

La proprietà caratteristica è che l'intervallo di tempo $t - t'$ risulti eguale a quello che si richiede per la propagazione con velocità c da P' fino in O.

Sarà pertanto

$$t' = t - \frac{r'}{c} . \tag{3}$$

designando r' la distanza $\overline{OP'}$.

D'altra parte la stessa r' non è altro che il valore per $t = t'$ della funzione $r(t)$, definita dalla (2).

Si ha così, per determinare r', la equazione implicita ben nota

$$r' = r\left(t - \frac{r'}{c}\right), \tag{D}$$

che si può a buon diritto chiamare *equazione di* Doppler.

Trovato r', la (3) dà il corrispondente istante t'.

Indichiamo con $\boldsymbol{v}$ (vettore) la velocità di P nell'istante t, con $\boldsymbol{v}'$ l'analoga velocità nell'istante t'.

Le componenti di $\boldsymbol{v}$ sono manifestamente $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$, il punto sovrapposto significando derivazione rapporto a t.

Dalla (2) si ha

$$\dot{r} = \frac{x - x_0}{r}\dot{x} + \frac{y - y_0}{r}\dot{y} + \frac{z - z_0}{r}\dot{z} ,$$

in cui il secondo membro può essere interpretato come la componente di $\boldsymbol{v}$ secondo la direzione $O \rightarrow P$. Adottando come direzione positiva del segmento r quella che corrisponde al segno di propagazione, cioè la $P \rightarrow O$, potremo scrivere

$$r = - v_r . \tag{4}$$

Ciò posto, consideriamo la differenza

$$r' - r\left(t - \frac{r'}{c}\right),$$

come funzione dell'argomento (positivo) r'.

Derivando rapporto a r', e badando alla (4) (riferita all'istante anteriore $t' = t - (r'/c)$), si ha

$$1 - \frac{v'_r}{c}.$$

Comunque vari r' (per valori positivi), questa espressione ha un limite inferiore > 0, in base all'ipotesi che la velocità v (e a fortiori una sua componente v_r) si mantenga, in ogni istante anteriore a t, al disotto di una quantità costante $< c$.

Segue da ciò che la differenza in questione va crescendo costantemente al crescere di r'.

Per $r' = 0$, essa ha il valore negativo $-r(t)$; si incontrerà dunque, facendo crescere r', uno ed un sol valore positivo, che la rende nulla.

Dacchè la (D) equivale all'annullarsi della differenza

$$r' - r\left(t - \frac{r'}{c}\right),$$

rimane provata l'univoca esistenza di una sua radice positiva r' (funzione del parametro t).

2. - Definizione (cinetica) di potenziale ritardato.

Un potenziale newtoniano ordinario si presenta sotto la forma

$$\frac{k}{r},$$

essendo k (per un dato punto potenziante) funzione determinata di t.

Supponiamo per un momento che il punto potenziante sia in quiete ed esprimiamo che la propagazione non è istantanea, ma si compie con velocità c.

All'uopo, basta manifestamente riportare la funzione k all'istante dell'emissione, che precede t di r/c. Ciò dà

$$\frac{k(t - r/c)}{r},$$

che può ben dirsi la forma statica di un potenziale ritardato. Essa si presenta nel modo il più diretto e spontaneo, quando si ha riguardo ad una posizione di emissione fissa.

Se il punto potenziante P si muove, interviene una duplice modificazione ([1]), rilevata dai sigg. LIÉNARD e WIECHERT. Anzitutto bisogna riferirsi alla posizione di utile emissione P'; inoltre va introdotto il fattore

$$\frac{dt'}{dt} = \frac{1}{1 - v'_r/c}.$$

Si ha così in generale (cioè comunque ([2]) si muova il punto potenziante P), per un potenziale ritardato f, la forma analitica seguente:

$$f = \frac{k(t - r'/c)}{r'(1 - v'_r/c)}. \tag{5}$$

Come si vede, la f dipende dalla posizione e dalla velocità del punto P, non nell'istante attuale t, ma in un certo istante anteriore t', a caratterizzare il quale interviene [a norma della (D)] la storia del mobile, cioè la natura delle funzioni $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ in un intervallo *finito* di tempo, precedente t.

3. - Casi limiti e relativi intorni. Condizioni cinematiche caratteristiche. Relazione del secondo caso limite colla quasi-stazionarietà di Abraham.

Vi sono due casi limiti, in cui il carattere funzionale della dipendenza di f dallo stato di moto del punto P, viene a sparire:

1) quando si ritorni all'ipotesi classica di una propagazione istantanea ($1/c = 0$); r' e t' coincidono allora naturalmente con r e t;

2) quando, pur essendo qualunque la velocità di propagazione, la posizione attuale del mobile tenda a confondersi con quella del punto

([1]) Cfr. per es. la nota *Sul campo elettromagnetico generato*, ecc. (Nuovo Cimento, Ser. V, T. VI, 1903, pagg. 153-162) [in queste «Opere»: vol. secondo, VIII *bis*, pp. 199-216]; oppure ABRAHAM, *Elektromagnetische Theorie der Strahlung* (Leipzig, Teubner, 1905, pp. 82-84).

([2]) Rispettando, beninteso, la restrizione qualitativa $v < c$.

potenziato O ($\lim r = 0$). È chiaro infatti che, ove sia nullo il cammino da percorrere, le cose vanno come se la propagazione fosse istantanea.

Per rendersene conto analiticamente, basta osservare la (D): il valore limite della radice r', al convergere di $r(t)$ a zero, è manifestamente $r' = 0$.

Particolarmente importante è il comportamento dei potenziali ritardati in prossimità di questi due casi limiti: cioè rispettivamente per c molto grande, o per r molto piccolo.

Interessa prima di tutto farsi un'idea del significato concreto delle qualifiche « grande » e « piccolo », in relazione ad altri elementi omogenei del fenomeno di cui si tratta.

Si è prossimi al primo caso limite ($1/c = 0$), quando la velocità v del mobile (in tutto l'intervallo di tempo, che occorre considerare) è molto piccola di fronte alla velocità di propagazione c.

Si è invece prossimi al secondo caso limite, quando è piccolo il rapporto numerico

$$\frac{ra}{c^2},$$

designando a l'accelerazione del mobile, anzi il limite superiore delle accelerazioni, che esso assume, durante l'intervallo di tempo considerato.

Si osservi che r/c non è altro che il tempo di propagazione da P, fino in O, e che di conseguenza $a(r/c)$ porge un limite superiore per la differenza di velocità del mobile fra l'istante dell'emissione e quello dell'arrivo in O.

La piccolezza del rapporto ra/c^2 è così suscettibile della interpretazione seguente:

la velocità v del mobile (anche senza essere di per sè piccola di fronte a c) subisce durante il tempo di propagazione (fino al punto potenziato O), variazioni, le quali restano sempre piccole di fronte a c.

Lo sviluppo dei potenziali ritardati, nell'intorno di $1/c = 0$ ([3]), e le espressioni approssimate, che ne conseguono, allorchè ci si limita a termini di dato ordine in v/c sono, si può dire, d'uso corrente. Nè io mi permetterò di spendervi parola, desiderando piuttosto di richiamare l'attenzione sull'altro caso limite e sui corrispondenti sviluppi, che dirò asintotici, visto che un potenziale f tende a crescere indefinitamente, quando r, e con esso r', converge a zero.

Prima però di esporre il lato matematico della questione, debbo far presente come essa si colleghi indirettamente colle ricerche del signor Abraham ([4]).

([3]) Si vegga per lo sviluppo completo la bella Nota del sig. Herglotz, *Ueber die Berechnung retardierter Potentiale* (Göttinger Nachrichten, 1904, pp. 549-556).

([4]) Cfr. in particolare i §§ 16-23 della citata sua opera.

È ben noto che, anteriormente a tali ricerche, l'unico criterio di riduzione (inteso a sostituire alle espressioni funzionali delle espressioni differenziali approssimate) fu di operare nell'intorno di $1/c = 0$, sfruttando la piccolezza del rapporto v/c.

Il sig. ABRAHAM seppe rinunciare a tale ipotesi restrittiva e riescì a trovare (non proprio per i potenziali, ma per gli elementi fisici, che ne dipendono) un nuovo criterio di riduzione, basato sopra una felice intuizione di analogia meccanica: quella dei fenomeni quasi-stazionari.

Dal punto di vista matematico, l'origine e la giustificazione di un tale procedimento risiede negli sviluppi asintotici. Renderò conto di ciò in un prossimo lavoro, dove farò vedere, illustrandone le conseguenze, come si precisino e si completino alcuni risultati di meccanica elettromagnetica.

Dovrò quindi limitarmi a brevi considerazioni di natura analitica.

4. - Risoluzione asintotica della equazione di Doppler.

Si tratta sostanzialmente di esplicitare la funzione $r'(t)$ definita dalla

$$\text{(D)} \qquad r' = r\left(t - \frac{r'}{c}\right),$$

in un intorno di $r(t) = 0$. Più precisamente si richiede di trovare uno sviluppo dell'incognità r', il quale metta in evidenza i termini di vario ordine rispetto ad $r(t)$, nell'ipotesi che, pur restando regolare il moto di P, la traiettoria tenda a passare per O. La regolarità del moto va intesa nel consueto significato cinematico: le funzioni $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, sono cioè a ritenersi finite, continue e derivabili quanto occorre.

La difficoltà della questione — se pur ve n'è una — risiede nel fatto che, quando la traiettoria tende a passare per O, la funzione (data) $r(t)$, la quale compare nel secondo membro della (D), non si comporta regolarmente, come fanno le coordinate cartesiane, ma ha già una derivata seconda, che non resta finita.

Per girare la difficoltà, conviene quadrare i due membri della (D) e studiare l'equazione

$$\text{(D}'\text{)} \qquad r'^2 - q\left(t - \frac{r'}{c}\right) = 0,$$

dove

$$(6) \qquad q(t) = r^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2$$

è funzione perfettamente regolare di t, assieme ad $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, e resta tale anche quando (facendo per es. variare dei parametri, che per lo scopo attuale non importa specificare) $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ tendono rispettivamente ad assumere (per un qualche valore di t) i valori x_0, y_0, z_0.

La (D′) possiede naturalmente, al pari della (D), una ed una sola radice positiva. Per riconoscerne il comportamento nel senso dichiarato, porremo

$$r' = \lambda r\,, \tag{7}$$

e applicheremo alla funzione $q(t-(\lambda r/c))$ lo sviluppo (abbreviato) di Taylor fino al terz'ordine (inclusivo).

La (D′) diviene con ciò

$$\lambda^2 r^2 - q + \frac{\lambda}{c}\dot{q}r - \frac{\lambda^2}{2c^2}\ddot{q}r^2 + \frac{\lambda^3}{6c^3}\dddot{q}r^3 + Qr^4 = 0\,,$$

dove, q, $\dot{q}$, $\ddot{q}$, $\dddot{q}$ si riferiscono al valore t dell'argomento, e il coefficiente Q è a ritenersi finito e continuo anche per r convergente a zero.

Si noti che la derivazione della (6) porge

$$\dot{q} = 2\sum(x-x_0)\dot{x} = -2rv_r\,, \tag{8}$$

il simbolo $\sum$ designando la somma del termine scritto e di quelli che si ottengono da esso, cambiando successivamente x in y ed z.

Per ulteriore derivazione si ha poi

$$\left\{\begin{aligned} \frac{1}{2}\ddot{q} &= \sum\dot{x}^2 + \sum(x-x_0)\ddot{x} = v^2 - ra_r\,, \\ \frac{1}{6}\dddot{q} &= \sum\dot{x}\ddot{x} + \frac{1}{3}\sum(x-x_0)\dddot{x} = va_v - \frac{1}{3}r\dot{a}_r\,, \end{aligned}\right. \tag{9}$$

dove a_v rappresenta la componente dell'accelerazione $\boldsymbol{a}$ di P nel senso del moto, $\dot{\boldsymbol{a}}$ il vettore derivato di $\boldsymbol{a}$, rapporto a t.

Se ora si divide per r^2 la equazione in λ, ricavata dalla (D′), e si ha riguardo alle (6), (8) e (9), ove si ponga per brevità

$$\frac{1}{c}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\beta}\,, \tag{10}$$

e di conseguenza

$$\frac{1}{c}\,v = \beta\,, \qquad \frac{1}{c}\,v_r = \beta_r;$$

nonchè

$$(1-\beta^2)\lambda^2 - 2\beta_r\lambda - 1 = \omega_0\,, \tag{11}$$

$$\frac{1}{c^2}\,(a_r\lambda^2 + \beta a_v\lambda^3) = \omega_1\,, \tag{12}$$

$$-\frac{1}{3}\,\frac{\lambda^3}{c^3}\,\dot{a}_r + Q = \Omega\,, \tag{13}$$

con che Ω resta finita, anche per r convergente a zero, risulta

$$\frac{r'^2 - q(t - r'/c)}{r^2} = \omega = \omega_0 + \omega_1 r + \Omega r^2 = 0\,. \tag{D''}$$

Prendendo sotto questa forma la equazione di definizione di λ, si è raggiunto lo scopo di esplicitare i termini di ordine zero e quelli di ordine 1 rispetto a r. È chiaro del resto che, protraendo abbastanza lo sviluppo di $q(t-(\lambda r/c))$, si potrebbero analogamente esplicitare i termini successivi del primo membro ω, fino ad un ordine comunque elevato.

Eguagliando a zero il termine ω_0, d'ordine zero, si ha

$$(1-\beta^2)\lambda^2 - 2\beta_r\lambda - 1 = 0\,,$$

equazione di secondo grado in λ, la quale, per essere $\beta = v/c < 1$, ammette due radici di segno opposto

$$\begin{cases} \lambda_1 = \dfrac{\beta_r + s}{1-\beta^2}\,, \\[2ex] \lambda_2 = \dfrac{\beta_r - s}{1-\beta^2}\,, \end{cases} \tag{14}$$

dove

$$s = \sqrt{1-\beta^2+\beta_r^2}\,, \tag{15}$$

intendendosi attribuito al radicale il suo valore aritmetico; λ_1 rappresenta così la radice positiva, e si ha identicamente

$$\omega_0 = (1-\beta^2)(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\,. \tag{11'}$$

Ciò premesso, trattiamo l'r, *in quanto compare esplicitamente in* ω (in quanto cioè segna l'ordine dei vari termini), come un parametro, in funzione del quale debba definirsi λ dalla (D''). Per l'equivalenza colla originaria (D), siamo a priori sicuri (in base alla posizione $r' = \lambda r$) che la (D'') ammette una ed una sola radice positiva.

Dacchè, per $r = 0$, essa è soddisfatta da $\lambda = \lambda_1$, e la derivata del primo membro

$$\left(\frac{\partial \omega}{\partial \lambda}\right)_{\substack{\lambda=\lambda_1 \\ r=0}} = (1-\beta^2)(\lambda_1 - \lambda_2) = 2s$$

non si annulla, si può trarne λ come funzione di r, per r abbastanza piccolo. È questa la soluzione, che a noi interessa. A meno di termini in r, si avrà manifestamente $\lambda = \lambda_1$.

Formando la

$$\frac{d\lambda}{dr} = -\frac{\partial \omega / \partial r}{\partial \omega / \partial \lambda},$$

e ponendovi $r = 0$, si otterrà il coefficiente del termine in r.

In generale, se nella (D'') si trovano esplicitati i termini fino ad un certo ordine n, si potrà, per derivazione successiva, trarne i corrispondenti termini della radice λ.

5. - Espressione asintotica di un potenziale ritardato.

Determinato per λ (e quindi per $r' = \lambda r$) uno sviluppo valido nell'intorno di $r = 0$, è subito risoluta l'analoga questione per un potenziale ritardato.

Ecco del resto come conviene procedere per abbreviare il calcolo.

Data l'espressione (6) di q, si ha

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial r'}\, q\left(t - \frac{r'}{c}\right) = r'\left(1 - \frac{v'_r}{c}\right),$$

quindi anche

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial r'}\left\{r'^2 - q\left(t - \frac{r'}{c}\right)\right\} = r'\left(1 - \frac{v'_r}{c}\right).$$

Sostituendo nel primo membro λr al posto di r', e badando alla posizione

$$\frac{r'^2 - q(t - r'/c)}{r^2} = \omega ,$$

potremo scrivere

$$\frac{1}{2} r \frac{\partial \omega}{\partial \lambda} = r' \left(1 - \frac{v'_r}{c}\right),$$

donde, ponendo ancora

(16) $$\mu = 2 \frac{k(t - \lambda r/c)}{\partial \omega / \partial \lambda},$$

e confrontando colla (5),

(5′) $$f = \frac{\mu}{r}.$$

Si intende che in μ va sostituito per λ il suo valore definito dalla (D″), cioè quella tale radice di $\omega = 0$, che si riduce a λ_1 per $r = 0$.

Al pari di λ, la funzione μ è suscettibile di uno sviluppo procedente per termini d'ordine sempre più elevato rispetto a r. Per quello d'ordine zero, si avrà in particolare dalla (16), ponendosi $r = 0$ e quindi $\lambda = \lambda_1$,

(17) $$\mu_0 = (\mu)_{r=0} = 2 \frac{k(t)}{(\partial \omega_0 / \partial \lambda)_{\lambda = \lambda_1}} = \frac{k}{s}.$$

Di qua risulta subito *l'espressione asintotica* di f:

(I) $$\frac{\mu_0}{r} = \frac{k}{r} \cdot \frac{1}{s} = \frac{k(t)}{r} \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2 + \beta_r^2}}.$$

È il caso di parlare di espressione asintotica perchè, mentre, al convergere di r a zero, tanto μ/r, quanto μ_0/r crescono indefinitamente, siamo sicuri che la differenza $(\mu - \mu_0)/r$ resta finita.

Più generalmente, si potrà chiamare asintotico anche lo sviluppo di f, che si ottiene esplicitando l'ordine dei vari termini rispetto ad r.

6. - Calcolo del secondo termine. Considerazioni riassuntive.

Valutiamo anche il termine in r, $\mu_1 r$, nello sviluppo di μ. Essendo, a meno di termini in r^2,

$$k\left(t - \frac{\lambda r}{c}\right) = k - \dot{k} \frac{\lambda}{c} r ,$$

(dove k e $\dot{k}$ si riferiscono all'istante attuale t), nonchè

$$\frac{\partial\omega}{\partial\lambda}=\frac{\partial\omega_0}{\partial\lambda}+\frac{\partial\omega_1}{\partial\lambda}r\,,$$

avremo colla stessa approssimazione

$$\mu=2\,\frac{k(t-\lambda r/c)}{\partial\omega/\partial\lambda}=\frac{2k}{\partial\omega_0/\partial\lambda}-2\left\{\frac{k(\partial\omega_1/\partial\lambda)}{(\partial\omega_0/\partial\lambda)^2}+\frac{\dot{k}\lambda/c}{\partial\omega_0/\partial\lambda}\right\}r\,.$$

Nel secondo addendo si può porre senz'altro $\lambda=\lambda_1$. Non così nel primo, dacchè vogliamo trascurare soltanto i termini in r^2.

Osserveremo perciò che dalla (D″) segue

$$\left(\frac{d\lambda}{dr}\right)_{r=0}=-\frac{\omega_1}{\partial\omega_0/\partial\lambda}\,,$$

e quindi ($\partial\omega_0/\partial\lambda$ dipendendo da r — in quanto parametro dell'ordine — solo pel tramite di λ)

$$\frac{1}{\partial\omega_0/\partial\lambda}=\frac{1}{(\partial\omega_0/\partial\lambda)_{\lambda=\lambda_1}}+\left\{\frac{(\partial^2\omega_0/\partial\lambda^2)\omega_1}{(\partial\omega_0/\partial\lambda)^3}\right\}_{\lambda=\lambda_1}r\,.$$

Il coefficiente di r nella espressione di μ è dunque

$$\mu_1=\frac{2k}{(\partial\omega_0/\partial\lambda)^3}\left\{\frac{\partial^2\omega_0}{\partial\lambda^2}\,\omega_1-\frac{\partial\omega_0}{\partial\lambda}\,\frac{\partial\omega_1}{\partial\lambda}\right\}-\frac{2\dot{k}}{\partial\omega_0/\partial\lambda}\,\frac{\lambda}{c}\,,$$

nella quale λ va dappertutto posto eguale a λ_1, e ω_0, ω_1 hanno i valori (11), (12).

Eseguendo materialmente il calcolo, si trova

$$\mu_1=-\frac{k}{2c^2s^3}\left\{a_r+\beta a_v\beta_r\,\frac{3(1-\beta^2)+2\beta_r^2}{(1-\beta^2)^2}\right\} -\dot{k}\,\frac{\beta a_v}{c^2(1-\beta^2)^2}-\frac{\dot{k}}{c(1-\beta^2)}\left(1+\frac{\beta_r}{s}\right),\tag{18}$$

dove, a norma della (15), s sta per il radicale

$$\sqrt{1-\beta^2+\beta_r^2}\,.$$

Usufruendo dello sviluppo $\mu_0 + \mu_1 r + \ldots$ di μ, si ha dalla (5')

$$f = \frac{\mu_0}{r} + \mu_1 + \ldots, \tag{II}$$

in cui μ_0 *e* μ_1 *hanno i valori* (17) *e* (18), *e i termini omessi convergono a zero con* r.

Si potrebbe naturalmente procedere nel calcolo dei termini successivi, d'ordine 1, 2, ..., rispetto ad r. Il loro carattere comune è di dipendere esclusivamente dallo stato di moto del punto nell'istante attuale t. Però, mentre in μ_0/r intervengono soltanto posizione e velocità, in μ_1 si presenta anche l'accelerazione; e, in generale, da un termine al successivo, il massimo ordine delle derivate, che vi compariscono, aumenta di una unità.

Di ciò è ben facile rendersi conto. Debbo però confessare che non sono riescito a trovare, per la struttura dei vari termini, o, ciò che è lo stesso, per lo sviluppo asintotico di f, una forma compendiosa ed espressiva, sul tipo di quella che la serie di LAGRANGE ([6]) fornisce per l'altro sviluppo (nell'intorno della propagazione istantanea).

Dal punto di vista delle applicazioni, interessano, si può dire, esclusivamente i due termini che abbiamo già esplicitato.

Infatti, per r abbastanza piccolo, essi preponderano sugli altri in modo che l'influenza di questi ultimi riesce quasi trascurabile. A dire il vero, lo stesso può affermarsi, quanto all'ordine di grandezza, per μ_0/r in confronto di μ_1, e parrebbe che si potesse addirittura limitarsi al termine asintotico.

Ciò sta indiscutibilmente per f, e anche per le sue derivate, finchè si considera un valore locale; ma per lo più, occorre piuttosto aver riguardo a certi valori medi, relativi a sistemi continui di punti.

Può allora accadere (e accade infatti) che intervengano dei compensi, per cui il contributo del primo termine μ_0/r risulti identicamente nullo.

Ecco perchè, di fronte alle applicazioni elettromagnetiche, viene ad acquistare speciale importanza anche il termine μ_1.

([6]) Cfr. HERGLOTZ, loc. cit.

VIII.

SULLA FORMA DELL'ANELLO DI SATURNO

« Atti Ist. Ven. », t. LXVIII,

pp. 557-583.

Per caratterizzare la forma geometrica di un anello A (tubo chiuso, sottile) vien fatto naturalmente di fissare:

1) la *direttrice* C, cioè una linea chiusa mediana, che segue l'andamento generale dell'anello;

2) le singole sezioni τ di A, praticate con piani normali alla direttrice C.

Se, come avviene per lo più, lo spessore dell'anello è uniforme, la C si può scegliere in modo che le τ riescano tutte eguali e intersechino la C stessa in punti omologhi.

Comunque, si può dire che il comportamento longitudinale dell'anello dipende esclusivamente dalla direttrice C, mentre quello trasversale dipende ad un tempo dalla C e dalle τ.

Nel caso dell'anello di Saturno, la forma e la costituzione materiale sono intimamente collegate colle forze d'attrazione, cui sottostanno i singoli elementi.

L'indagine di queste relazioni (teoria meccanica dell'anello di Saturno) fu oggetto di cospicue ricerche da LAPLACE in poi. Esse si sono esplicate in due principali indirizzi: *questioni di stabilità e di struttura* (anello solido, anello corpuscolare di MAXWELL, anello fluido); *comportamento trasversale dell'anello* supposto fluido (KOWALEVSKY, POINCARÉ).

Il comportamento longitudinale è rimasto finora fuori di discussione, figurando sempre tra le premesse l'ipotesi (ovviamente suggerita dalla diretta osservazione dell'anello, anzi dei molteplici anelli parziali, di che in realtà consta l'anello di Saturno) che si possa assumere come direttrice una circonferenza col centro nel centro di Saturno.

Per quanto sia ragionevole una tale premessa, non è fuor di luogo esaminare se essa sia suscettibile di generalizzazione. Quali sono cioè le curve C che potrebbero (al pari delle circonferenze suaccennate) fungere da direttrici di un anello, posto, quanto a sollecitazione dinamica, nelle condizioni dell'anello, o meglio di uno degli anelli, di Saturno.

È questo il compito della presente nota.

Colla sola limitazione che si tratti di un anello molto sottile (sia esso solido, liquido o disgregato, purchè sensibilmente assimilabile ad un corpo continuo), si riconosce che la forma della direttrice è definita da un sistema di equazioni analoghe a quelle dell'equilibrio di un filo flessibile ed inestendibile.

Una categoria di ∞^1 soluzioni si rende tosto manifesta: sono le soluzioni, che corrispondono all'ordinaria ipotesi di una direttrice circolare. Ma ve ne sono infinite altre a priori possibili, tra cui sono in particolare comprese ∞^3 (prescindendo da una inessenziale rotazione, ∞^2) curve piane. La determinazione di queste ultime è immediatamente ricondotta ad una quadratura iperellittica.

Le configurazioni vicine alle circolari (e queste soltanto) meritano interesse dal punto di vista astronomico, dato l'aspetto effettivamente presentato dall'anello di Saturno. Ne ho perciò assegnata l'equazione polare in termini finiti, trattando come una quantità di prim'ordine la variazione del raggio vettore. All'uopo non si richiede alcuna integrazione, giacchè opportune trasformazioni facilmente riportano a classici risultati concernenti le forze centrali.

Resterebbero da discutere le questioni di stabilità. Conto di occuparmene in altra occasione. Osservo per altro che già dalla considerazione statica delle soluzioni prossime a cerchi, scaturisce una disuguaglianza assai semplice (cfr. n. 10, enunciato finale), la quale può in certo senso interpretarsi come condizione di stabilità. Nel caso della natura (stimando le velocità dei due lembi dell'anello in base alle osservazioni spettroscopiche) sembra che detta condizione *non* si trovi verificata [1].

Abbiamo così una presunzione di più in favore dell'ipotesi che l'anello non sia continuo, nè assimilabile ad un continuo, ma risulti da uno sciame di meteoriti abbastanza spaziati, perchè sia quasi superfluo tener conto delle azioni reciproche.

1. - Comportamento meccanico.

L'anello di Saturno, o meglio ciascuno degli anelli parziali di che esso appare costituito, si risguarda concordemente come un sistema materiale A, soggetto:

(1) Debbo l'indicazione dei più recenti dati d'osservazione al prezioso interessamento del prof. LORENZONI, cui esprimo tutta la mia gratitudine.

all'attrazione mutua dei singoli elementi;
all'attrazione di Saturno.

Non si tien conto dell'attrazione degli altri anelli parziali, perchè, dati gli intervalli, che li separano, e l'esiguità delle masse, è da presumere che non si influenzino l'un l'altro in modo sensibile.

Si suppone che A ruoti uniformemente attorno ad un asse Sz passante per il centro di gravità S di Saturno.

Se quindi si associa ad Sz una coppia Sx, Sy invariabilmente collegata all'anello, questo si presenta come un sistema materiale in equilibrio relativo rispetto al triedro $Sxyz$.

Fissiamo la direttrice C dell'anello, e indichiamone con s l'arco, contato a partire da un'origine arbitraria.

Sia ds un elemento generico della direttrice, dA la porzione corrispondente dell'anello, cioè la fetta compresa fra le due sezioni normali alla direttrice negli estremi dell'archetto ds.

Supposto che lo spessore dell'anello sia abbastanza piccolo, ciascuna fetta elementare dA sarà assimilabile ad un punto materiale, e, per esprimere che esso si trova in equilibrio relativo, basterà porre eguale a zero la somma geometrica delle forze effettivamente applicate e della forza centrifuga.

Diciamo $\boldsymbol{\Phi} ds$ la risultante delle attrazioni newtoniane, che la fetta dA subisce da parte degli altri elementi dell'anello, $\boldsymbol{F} ds$ la risultante dell'attrazione di Saturno e della forza centrifuga.

La condizione di equilibrio si riassume nella equazione vettoriale

$$\boldsymbol{\Phi} + \boldsymbol{F} = 0\,, \tag{I}$$

la quale deve essere soddisfatta per ogni dA, o, ciò che è lo stesso, in ogni punto della direttrice C.

OSSERVAZIONE. – Scrivendo la (I), si tratta ciascun elemento dA come un punto libero, si prescinde cioè da eventuali forze vincolari, provenienti dalla rigidità, o, più generalmente, da collegamenti delle varie parti costitutive dell'anello.

Se legami vi sono, essi non possono che viemeglio assicurare la sussistenza dell'equilibrio.

Si può così ritenere che, *per un anello di spessore trascurabile, indipendentemente da qualsiasi ipotesi sulla sua costituzione materiale, l'equilibrio sussiste ogni qual volta sia soddisfatta la* (1).

Essa equivale, come vedremo tra un momento, a tre equazioni differenziali ordinarie nella variabile indipendente s, atte a definire la configurazione delle direttrici meccanicamente possibili.

2. - Espressione della mutua attrazione.

Sia P un punto qualunque della direttrice C di coordinate x, y, z; c la curvatura di C in P; T, N, B il triedro principale, convenendosi che la tangente T sia diretta nel senso delle s crescenti, la normale principale N verso la concavità di C, e la binormale B in modo che il triedro TNB riesca congruente a quello degli assi di riferimento $Sxyz$.

Indichiamo ancora con $\nu\, ds$ la massa di una fetta dA (di spessore elementare ds) contenente il punto P: ν rappresenta così la *densità lineare* dell'anello, ed è, al pari di c, funzione del punto P scorrente su C, o, se si vuole, dell'arco s.

Ciò premesso, teniamo presente l'ipotesi che è piccolo lo spessore dell'anello. Potremo profittarne per adottare come espressione dell'attrazione $\boldsymbol{\Phi}\, ds$, subita dalla fetta dA, la sola parte asintotica (rispetto a cui la parte residua tende a diventare tanto meno importante, quanto più l'anello è sottile).

Le componenti di $\boldsymbol{\Phi}$ sono asintoticamente definite da (²)

$$(1) \qquad \begin{cases} \Phi_T = f\,\dfrac{d(k\nu^2)}{ds}\,, \\[2mm] \Phi_N = fk\nu^2 c\,, \\[2mm] \Phi_B = 0\,, \end{cases}$$

designando f la costante dell'attrazione universale, e k un parametro di configurazione (puro numero), che dipende soltanto dal comportamento trasversale dell'anello, cioè dalla forma della sezione normale τ, condotta per P (³).

(²) Cfr. le Note *Sull'attrazione newtoniana di un tubo sottile*, « Rendiconti dei Lincei », vol. XVII, (2° semestre 1908), pp. 413-26 e 535-551 [in questo vol.: IV, pp. 35-68].

(³) Indicando con $d\tau$ e $d\tau_0$ due generici elementi della sezione τ, con Δ la loro distanza, con l una lunghezza, che può essere a priori qualunque, purchè di un ordine di grandezza comparabile colla dimensione longitudinale dell'anello, si ha

$$k = \frac{1}{\tau^2}\int_\tau d\tau \int_\tau d\tau_0 \log\frac{l}{\Delta}\,.$$

Nel caso di una direttrice circolare, il valore più opportuno di l (dal punto di vista della convenienza numerica delle espressioni asintotiche), è otto volte il raggio (medio) di curvatura della C. Cfr. loco citato, p. 550 [in questo vol., p. 67].

La k può in generale variare con s, ma è evidentemente costante, quando lo spessore dell'anello è uniforme. Ci limiteremo a questo caso, e *risguarderemo quindi k come una costante.*

Conviene notare che, a norma delle (1), il vettore $\mathbf{\Phi}$ si presenta quale somma di due vettori, aventi rispettivamente per linea d'azione la tangente T e la normale principale N. Perciò, ove si designino con $\mathbf{T}_1$ e $\mathbf{N}_1$ i due vettori unitari secondo queste direzioni, e si ricordi la identità

$$\frac{d\mathbf{T}_1}{ds} = c\mathbf{N}_1 ,$$

si possono compendiare le (1) nella relazione vettoriale

$$\mathbf{\Phi} = f\frac{d(k\nu^2)}{ds}\mathbf{T}_1 + fk\nu^2\frac{d\mathbf{T}_1}{ds} = f\frac{d(k\nu^2\mathbf{T}_1)}{ds} ,$$

od anche, attesa la costanza di k, nella

$$\mathbf{\Phi} = fk\frac{d(\nu^2\mathbf{T}_1)}{ds} . \tag{2}$$

Dacchè i coseni direttori di $\mathbf{T}_1$ (rispetto agli assi di riferimento $Sxyz$) sono dx/ds, dy/ds, dz/ds, se ne traggono, per le tre componenti cartesiane di $\mathbf{\Phi}$, le espressioni

$$\left\{\begin{aligned} \Phi_x &= fk\frac{d}{ds}\left(\nu^2\frac{dx}{ds}\right) , \\ \Phi_y &= fk\frac{d}{ds}\left(\nu^2\frac{dy}{ds}\right) , \\ \Phi_z &= fk\frac{d}{ds}\left(\nu^2\frac{dz}{ds}\right) . \end{aligned}\right. \tag{3}$$

3. - Espressioni delle forze esterne.

Se M designa la massa di Saturno, e r la distanza di P dall'origine S, il potenziale dell'attrazione esercitata da Saturno sull'unità di massa, posta nell'interno di P, vale

$$f\frac{M}{r} .$$

D'altra parte, indicando con ω la velocità angolare costante, con cui ruota il sistema attorno ad Sz, la forza centrifuga (pure riferita all'unità di massa) ha per potenziale

$$\frac{\omega^2}{2}(x^2+y^2)\,.$$

Complessivamente il potenziale unitario delle forze esterne, che sollecitano l'anello, ha per espressione

$$V = f\frac{M}{r} + \frac{\omega^2}{2}(x^2+y^2)\,. \tag{4}$$

Abbiamo indicato con $\boldsymbol{F}ds$ la risultante delle forze esterne agenti sopra una generica fetta dA. Dacchè la massa di dA è νs, $(1/\nu)\boldsymbol{F}$ si presenta come forza riferita all'unità di massa, e deriva così dal potenziale V soprascritto.

Le componenti di $\boldsymbol{F}$ secondo una direzione generica (sia T, N, B, o x, y, z) vengono pertanto fornite dal prodotto di ν per la derivata di V secondo quella direzione.

4. - Forma esplicita delle equazioni differenziali. Integrali primi.

Dalla (I), proiettando sugli assi x, y, z, si ha, in base alla (3),

$$\left\{\begin{aligned} &fk\frac{d}{ds}\left(\nu^2\frac{dx}{ds}\right)+\nu\frac{dV}{dx}=0\,,\\ &fk\frac{d}{ds}\left(\nu^2\frac{dy}{ds}\right)+\nu\frac{dV}{dy}=0\,,\\ &fk\frac{d}{ds}\left(\nu^2\frac{dz}{ds}\right)+\nu\frac{dV}{dz}=0\,. \end{aligned}\right. \tag{5}$$

Queste tre equazioni differenziali, relative alle quattro funzioni x, y, z, ν della variabile indipendente s, ove si tenga conto della identità geometrica

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2+\left(\frac{dy}{ds}\right)^2+\left(\frac{dz}{ds}\right)^2=1\,,$$

sono atte a definire la configurazione d'ogni direttrice C meccanicamente possibile, e la distribuzione longitudinale della massa del relativo anello (supposto di spessore uniforme). Naturalmente avranno effettivo interesse meccanico soltanto quelle soluzioni, cui corrispondono *curve chiuse.*

Fatta fin d'ora questa ovvia avvertenza, osserviamo la forma delle (5). Essa mostra (interpretandovi la quantità $fk\nu^2$ come una tensione) che la configurazione di C è quella che competerebbe ad un filo flessibile ed inestendibile, il quale si trovasse in equilibrio sotto l'azione delle stesse forze esterne applicate all'anello.

Dal punto di vista matematico, il problema è simile, ma non identico a quelli che si presentano abitualmente nella statica dei fili. Infatti, in tali problemi, si tratta quasi sempre di forze (conservative o semplicemente posizionali) *indipendenti dalla tensione.*

Nel caso presente si avrebbe invece una forza proporzionale a ν, il che è quanto dire alla radice quadrata della tensione.

Comunque, rimangono perfettamente applicabili alle (5) gli ordinari criteri di integrazione.

Così in primo luogo si riconosce che c'è una combinazione integrabile (analoga all'integrale delle forze vive).

La si ottiene nel modo più semplice, immaginando di proiettare la originaria (I) nella direzione tangenziale s, ciò che dà [per la prima delle (1)]

$$fk\frac{d\nu^2}{ds}+\nu\frac{dV}{ds}=0\,.$$

Dividendo per ν — dato il suo significato ν è da ritenersi diversa da zero — e integrando, risulta

$$2fk\nu+V=H\,, \tag{6}$$

dove ho rappresentato con H la costante di integrazione.

La (6) mette in evidenza che, in un sottile anello in equilibrio, la variazione della densità è eguale ed opposta a quella del potenziale: in particolare, per punti situati sopra una medesima superficie equipotenziale, i valori di ν coincidono, ossia la materia costitutiva dell'anello si trova egualmente costipata. Si può inferirne che, se una qualche causa perturbatrice fa cambiare posizione ad un generico elemento dell'anello, alterando il valore di V (e lasciando H invariata), a equilibrio ristabilito, dovrà essersi verificata una azione, in certo modo compensatrice, dovuta a spostamento di masse, per effetto della quale ν assuma il nuovo valore, impostogli dalla (6).

Un altro integrale (analogo a quello del momento delle quantità di moto rispetto all'asse di rotazione) si ricava dalla circostanza che le forze esterne incontrano tutte l'asse delle z, ciò che si traduce nella identità

$$x\frac{dV}{dy}-y\frac{dV}{dx}=0\,.$$

Per essa, le equazioni (5) danno

$$fk\left\{x\frac{d}{ds}\left(\nu^2\frac{dy}{ds}\right)-y\frac{d}{ds}\left(\nu^2\frac{dx}{ds}\right)\right\}=\frac{d}{ds}\left\{fk\nu^2\left(x\frac{dy}{ds}-y\frac{dx}{ds}\right)\right\}=0\,,$$

donde, chiamando A la costante di integrazione,

$$fk\nu^2\left(x\frac{dy}{ds}-y\frac{dx}{ds}\right)=A\,. \tag{7}$$

In generale, non mi sembra che il sistema (5) comporti altri integrali uniformi; è quindi improbabile che si possa conseguirne la soluzione completa in termini finiti.

C'è però un'ovvia relazione invariante, cioè $z=0$, in virtù della quale, data la forma (4) di V, la terza delle equazioni (5) rimane identicamente verificata.

Porre $z=0$ significa manifestamente limitarsi a quelle direttrici C, che appartengono al piano normale all'asse di rotazione passante per il centro di gravità di Saturno.

D'ora in poi ci occuperemo esclusivamente di questo problema piano.

5. - Direttrici piane. Semplificazione formale delle equazioni. Riduzione alle quadrature.

Per $z=0$, si ha $r=|\sqrt{x^2+y^2}|$, e quindi l'espressione (4) di V può essere scritta

$$V=f\frac{M}{r}+\frac{1}{2}\omega^2r^2\,. \tag{4'}$$

Nell'intento di semplificare l'aspetto delle formule, conviene introdurre quel particolare valore a della distanza r, per cui la forza centrifuga fa equilibrio all'attrazione di Saturno: lo stesso a può, se si vuole, interpretarsi come raggio dell'orbita circolare di un satellite (di massa trascurabile di fronte ad M), che avesse ω per moto medio.

La distanza a è manifestamente definita dalla condizione dV/dr (forza radiale) $= 0$, cioè da

$$\omega^2 a = \frac{fM}{a^2}, \tag{8}$$

che esprime appunto l'eguaglianza fra le due intensità della forza centrifuga e dell'attrazione.

Assumiamo a come unità di lunghezza, sostituendo corrispondentemente a x, y, s, r le quantità proporzionali

$$\xi = \frac{x}{a}, \quad \eta = \frac{y}{a}, \quad \sigma = \frac{s}{a}, \quad \varrho = \frac{r}{a}. \tag{9}$$

Ponendo

$$v = \frac{1}{\varrho} + \frac{1}{2}\varrho^2, \tag{10}$$

avremo anzi tutto, in virtù della (8),

$$V = \omega^2 a^2 v. \tag{4''}$$

Posto ancora

$$fk\nu = \omega^2 a^2 \psi \tag{11}$$

(con che ψ, al pari di ξ, η, σ, ϱ ha dimensioni nulle), ove si moltiplichino le due prime equazioni (5) per $fk\nu/(\omega^4 a^4)$, e vi si sostituiscano $x, y, s, fk\nu, V$ coi loro valori (9), (11) e (4''), risulta

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{d}{d\sigma}\left(\psi^2 \frac{d\xi}{d\sigma}\right) + \psi \frac{dv}{d\xi} = 0, \\ &\frac{d}{d\sigma}\left(\psi^2 \frac{d\eta}{d\sigma}\right) + \psi \frac{dv}{d\eta} = 0, \end{aligned}\right. \tag{12}$$

la funzione v essendo definita dalla (10) (con $\varrho = |\sqrt{\xi^2 + \eta^2}|$).

È questa la forma ridotta delle equazioni del problema piano ([4]).

([4]) Osservo per incidenza che anche il problema spaziale è suscettibile di analoga forma ridotta.

Basta aggiungere alle posizioni fatte $\zeta = z/a$, e ritenere più generalmente

$$\varrho = |\sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}|, \qquad v = \frac{1}{\varrho} + \frac{\omega^2}{2}(\zeta^2 + \eta^2).$$

Con ciò le (5) danno luogo ad un sistema, che comprende, oltre alle (12), una terza equazione di identica forma, relativa alla variabile ζ.

Potremo ancora interpretarvi ξ, η come coordinate dei punti delle cercate curve C, ϱ come la distanza da S, $d\sigma$ come l'elemento d'arco, ψ come la densità lineare: basta immaginare scelte in modo opportuno le unità di lunghezza e di massa. A norma delle (9), l'unità di lunghezza da adottarsi è la a, di cui già abbiamo visto il significato.

La (11) mostra poi che il fattore di proporzionalità fra ν e ψ è $\omega^2 a^2/fk$, cioè, per la (8), M/ka. Tale è dunque la nuova unità di densità lineare, il che è quanto dire che ψ è riferita all'unità di massa M/k, nonchè (come ξ, η, σ, ϱ) all'unità di lunghezza a.

Ciò premesso, veniamo all'integrazione delle (12), tenendo conto che i due integrali primi ammessi in generale dalle (5), seguitano naturalmente a sussistere anche nel piano.

Sia per diretta combinazione delle (12), sia per materiale sostituzione dei valori (9) e (11) nei primi membri delle (6) e (7), si trova

$$(13) \qquad \begin{cases} 2\psi + v = h\,, \\ \psi^2\left(\xi\dfrac{d\eta}{d\sigma} - \eta\dfrac{d\xi}{d\sigma}\right) = \lambda\,, \end{cases}$$

le costanti di integrazione h e λ essendo legate alle H e Λ, precedentemente introdotte, dalle relazioni

$$h = \frac{H}{\omega^2 a^2}\,, \qquad \lambda = \frac{fk\Lambda}{\omega^4 a^5}\,.$$

La circostanza che v dipende dalla sola ϱ consiglia a introdurre, in luogo delle coordinate cartesiane ξ, η, le coordinate polari ϱ e ϑ, con che la seconda delle (13) si semplifica, e si ha, numerando separatamente le due equazioni,

$$(14) \qquad 2\psi + v = h\,,$$

$$(15) \qquad \psi^2 \varrho^2 \frac{d\vartheta}{d\sigma} = \lambda\,.$$

Prescindendo dalle soluzioni radiali $\vartheta = \text{cost.}$, che non corrispondono certo a curve chiuse, *si può supporre che la costante λ sia diversa da zero, anzi positiva.*

In primo luogo infatti è da escludere il valore zero, poichè, in tale ipotesi, la (15) porterebbe l'identico annullarsi della densità ψ, ciò che non può evidentemente presentarsi, per un effettivo anello materiale.

Escluso poi il valore zero, è sempre lecito considerare la λ come una quantità positiva, convenendo di cominciar a contare gli archi (sopra una generica curva integrale) nel senso in cui crescono le anomalie.

Riterremo dunque $\lambda > 0$. Con ciò, in particolare, potremo senza riserva dividere i due membri della (15) per $d\vartheta/d\sigma$, ed avremo, elevando anche a quadrato,

$$\psi^4\varrho^4 = \lambda^2 \frac{d\sigma^2}{d\vartheta^2}.$$

Se si bada alla identità

$$d\sigma^2 = d\xi^2 + d\eta^2 = d\varrho^2 + \varrho^2 d\vartheta^2,$$

se ne trae

$$\lambda^2 \left(\frac{d\varrho}{d\vartheta}\right)^2 = \psi^4\varrho^4 - \lambda^2\varrho^2,$$

in cui ψ può ritenersi espresso per la sola ϱ, a norma delle (14) e (10). Si ha così

$$\lambda^2 \left(\frac{d\varrho}{d\vartheta}\right)^2 = \frac{1}{16}\left(h - \frac{1}{\varrho} - \frac{1}{2}\varrho^2\right)^4 \varrho^4 - \lambda^2\varrho^2 = \frac{1}{16}\left(1 - h\varrho + \frac{1}{2}\varrho^3\right)^4 - \lambda^2\varrho^2,$$

donde agevolmente apparisce che la quadratura necessaria per esprimere ϑ in termini di ϱ ha carattere iperellittico.

Non cercheremo di fare uno studio qualitativo delle curve, definite da questa equazione, e nemmeno di ricercare in generale le condizioni, cui devono soddisfare le costanti h e λ perchè le corrispondenti curve integrali riescano chiuse.

Limiteremo la ricerca alle soluzioni poco diverse dalle circolari. Prima però si rende opportuna qualche considerazione sulle soluzioni, che corrispondono esattamente a cerchi di centro S.

6. - Soluzioni circolari.
Loro comportamento eccezionale di fronte agli integrali primi.

Le soluzioni circolari sono evidentemente caratterizzate dalla circostanza che ϱ ha un valore costante ϱ_0.

Per riconoscere quali speciali relazioni intercedono fra le costanti di integrazione, e come dipende da ϱ_0 la densità ψ, sembra a prima vista sufficiente di porre $\varrho = \varrho_0$, $d\sigma = \varrho_0 d\sigma$ nei trovati integrali primi, in particolare nelle (14) e (15), ciò che dà:

$$
(16) \qquad \begin{cases} 2\psi_0 + v_0 = h\,, \\ \psi_0^2 \varrho_0 \qquad = \lambda\,, \end{cases}
$$

designando con v_0 e ψ_0 i valori di v e di ψ per $\varrho = \varrho_0$.

Esaminiamo in modo preciso come stanno le cose.

Le equazioni, che in ultima analisi devono rimanere soddisfatte, sono le due (12), del secondo ordine.

Noi abbiamo senza discussione sostituito alle (12) i loro integrali primi (13), o, ciò che è lo stesso, (14) e (15).

Essi ne sono necessaria conseguenza; quindi ogni soluzione dell'originario sistema (12) deve essere compresa fra quelle del sistema di prim'ordine (13).

Fino a qual punto è vera la reciproca? Si può veramente affermare che una soluzione del sistema di prim'ordine (13) è *eo ipso* integrale delle (12)?

L'indagine è assai semplice. Basta pensare che, assieme alle (13), sono soddisfatte le

$$
2\frac{d\psi}{d\sigma} + \frac{dv}{d\sigma} = 0\,,
$$

$$
\xi\frac{d}{d\sigma}\left(\psi^2\frac{d\eta}{d\sigma}\right) - \eta\frac{d}{d\sigma}\left(\psi^2\frac{d\xi}{d\sigma}\right) = 0\,,
$$

che se ne traggono per derivazione rapporto a σ.

Ora queste sono combinazioni lineari delle (12), e si ottengono moltiplicando le (12) stesse una prima volta per $d\xi/d\sigma$, $d\eta/d\sigma$; una seconda volta per $-\eta$, ξ, e sommando, in entrambi i casi, i risultati.

Le (12) si presentano così come una conseguenza necessaria delle (13), le quante volte (per la soluzione che si considera) sia (generalmente) diverso da zero il determinante

$$
\begin{vmatrix} \dfrac{d\xi}{d\sigma} & \dfrac{d\eta}{d\sigma} \\ -\eta & \xi \end{vmatrix} = \xi\frac{d\xi}{d\sigma} + \eta\frac{d\eta}{d\sigma} = \frac{1}{2}\frac{d\varrho^2}{d\sigma}\,.
$$

Un tale determinante si annulla identicamente per le soluzioni circolari, e per queste soltanto.

Ne consegue che il sistema di primo ordine (13) e l'originario sistema di secondo sono in realtà equivalenti (come abbiamo tacitamente ammesso nel n. precedente), a meno che non si tratti di soluzioni circolari.

Per tali soluzioni, è sempre necessario, ma non, senz'altro, sufficiente, il tener conto delle (13), o, se si preferisce, delle (14) e (15).

Esse danno luogo, come s'è visto, alle (16); ma, oltre a queste, possono aversi ulteriori condizioni, imposte dalle (12). Vediamo quali.

In primo luogo, *una* combinazione lineare delle (12) (se non due distinte, come nel caso generale) è già verificata, in quanto necessaria conseguenza degli integrali primi.

Basterà perciò aver riguardo ad una seconda combinazione, che (per $\varrho = \varrho_0$) resti indipendente dalle derivate degli integrali (14) e (15).

La più opportuna di queste combinazioni è quella che si ottiene eliminando, fra le (12), (14) e (15), la ψ e la σ, formando cioè la equazione differenziale di secondo ordine fra ϱ e ϑ, che definisce direttamente le curve integrali.

7. - Analogie dinamiche. Formula di Binet.

La equazione suddetta si può conseguire senza sviluppo materiali, riportandosi a risultati noti.

All'uopo, introduciamo per un momento una variabile ausiliaria t, il cui differenziale sia legato a $d\sigma$ dalla equazione

(17) $$dt = \frac{d\sigma}{\psi^2},$$

e designamo con apici le derivate rapporto a t.

Le equazioni (12) divengono

$$\begin{cases} \xi'' = -\psi^3 \dfrac{dv}{d\xi}, \\ \eta'' = -\psi^3 \dfrac{dv}{d\eta}, \end{cases}$$

mentre l'integrale (15) assume l'aspetto

(15-*bis*) $$\varrho^2 \vartheta' = \lambda,$$

rimanendo inalterato l'altro integrale

(14) $$2\psi + v = h.$$

Ove si ponga ancora

$$w = \frac{1}{2}\psi^4,$$

cioè, per la (14),

(18)
$$w = \frac{1}{2}\left(\frac{h-v}{2}\right)^4,$$

si è condotti alle equazioni

(12 *bis*)
$$\xi'' = \frac{dw}{d\xi}, \qquad \eta'' = \frac{dw}{d\eta},$$

che corrispondono evidentemente al moto di un punto materiale di massa 1, sollecitato da una forza centrale di potenziale w.

Per questo moto sussiste l'integrale (15-*bis*), cioè la legge delle aree, essendo λ la relativa costante.

La equazione differenziale delle traiettorie del moto, corrispondenti a un assegnato valore di λ, è notoriamente fornita dalla formula di BINET

(19)
$$\frac{dw}{d\varrho} = -\frac{\lambda^2}{\varrho^2}\left\{\frac{1}{\varrho} + \frac{d^2}{d\vartheta^2}\frac{1}{\varrho}\right\}.$$

Questa formula è il risultato della eliminazione di t fra le (12-*bis*) e la (15-*bis*). Avendo riguardo alle (17), (15-*bis*) e (18), la stessa formula (19) si presenta anche come proveniente dall'eliminazione di σ e di ψ fra le originarie (12), (14) e (15).

Essa implica in particolare, per le soluzioni circolari $\varrho = \varrho_0$, la relazione

(20)
$$\left(\frac{dw}{d\varrho}\right)_0 = -\frac{\lambda^2}{\varrho_0^3},$$

in cui, come già nelle (16), l'indice 0 sta a designare il valore assunto per $\varrho = \varrho_0$.

La relazione trovata è effettivamente distinta dalle (16). Essa può essere scritta, in virtù della (18) e della prima delle (16),

$$-\psi_0^3\left(\frac{dv}{d\varrho}\right)_0 = -\frac{\lambda^2}{\varrho_0^3},$$

donde, elevando a quadrato, badando alla seconda delle (16) e riducendo,

$$\lambda = \varrho_0^3 \left(\frac{dv}{d\varrho}\right)_0^2 . \tag{20'}$$

Ricordiamo (n. 5) che la costante λ è stata preventivamente supposta diversa da zero (ciò che consente di risguardarla senz'altro positiva).

L'espressione (20'), che le compete nel caso di soluzioni circolari, mostra che tali soluzioni sono ammissibili (in quanto la restrizione concernente λ si trova effettivamente verificata) a patto che il raggio ϱ_0 sia, come è ben naturale > 0, e non tale da annullare $dv/d\varrho = -1/\varrho^2 + \varrho$.

Rimane così escluso il valore $\varrho_0 = 1$, e risulta in definitiva che *sono possibili anelli circolari di raggio arbitrario, purchè soltanto diverso dall'unità. Questo valore eccezionale (per cui si annullerebbe λ e con essa la densità ψ) corrisponde* (n. 5) *all'orbita di un satellite, il quale ruotasse attorno a Saturno colla stessa velocità angolare degli anelli in questione.*

Portando nella seconda delle (16) il valore (20') di λ ed estraendo la radice quadrata, risulta

$$\psi_0 = \pm \varrho_0 \left(\frac{dv}{d\varrho}\right)_0 = \pm \left(\varrho_0^2 - \frac{1}{\varrho_0}\right) . \tag{21}$$

L'ambiguità del segno scompare, pensando che la densità ψ_0 è, per sua natura, quantità positiva. Si deve dunque prendere il segno superiore o l'inferiore, secondoche $\varrho_0 \gtrless 1$, secondochè cioè si tratta di un anello esterno od interno all'orbita lunare suaccennata.

Per essere completi, resta da esplicitare la dipendenza di h dal raggio ϱ_0, ciò che segue immediatamente dalla prima delle (16), in base alle (10) e (21). Si ha

$$h = \begin{cases} v_0 + 2\left(\varrho_0^2 - \dfrac{1}{\varrho_0}\right) = \dfrac{5}{2}\,\varrho_0^2 - \dfrac{1}{\varrho_0}\,, \\[2ex] v_0 - 2\left(\varrho_0^2 - \dfrac{1}{\varrho_0}\right) = 3\left(\dfrac{1}{\varrho_0} - \dfrac{1}{2}\,\varrho_0^2\right), \end{cases} \tag{22}$$

valendo l'espressione superiore per gli anelli esterni, e l'inferiore per gli interni.

8. - Le curve integrali e la equazione di Binet. Condizione complementare. Cambiamento di funzione.

Per quanto s'è visto nel n. precedente, ogni curva C definita dalle (12) e corrispondente ai valori h e λ delle costanti di integrazione, verifica la (19).

Sarà bene domandarsi se, reciprocamente, ogni curva $\varrho = \varrho(\vartheta)$, integrale della (19), è senz'altro una C.

Lasciando da parte le soluzioni circolari, già esaurientemente discusse, sappiamo (n. 6) che le equazioni (12) sono necessaria conseguenza dei loro integrali primi (14) e (15).

La curva $\varrho = \varrho(\vartheta)$ sarà pertanto una C allora soltanto che risultino verificate le (14) e (15).

Per discriminarlo, introduciamo l'arco σ della curva in questione a norma della

$$d\sigma^2 = d\varrho^2 + \varrho^2 d\vartheta^2 ,$$

ed una funzione ψ a norma della

$$2\psi + v = h , \tag{14}$$

(col valore di h, che già compare nella (19) per tramite di w).

Potremo asserire che si tratta effettivamente di una C se constateremo che anche la

$$\psi^2 \varrho^2 \frac{d\vartheta}{d\sigma} = \lambda , \tag{15}$$

risulta con ciò soddisfatta [la costante λ essendo quella stessa che interviene nella (19)].

Ora, moltiplicando entrambi i membri della (19) per $d\varrho/d\vartheta$, e risguardando tutto come funzione di ϑ pel tramite di ϱ, si ha

$$\frac{dw}{d\vartheta} = \frac{\lambda^2}{2} \frac{d}{d\vartheta} \left\{ \frac{1}{\varrho^2} + \left(\frac{d(1/\varrho)}{d\vartheta} \right)^2 \right\} .$$

Di qua, integrando e dividendo per λ^2, segue ulteriormente

$$\frac{1}{2\varrho^4} \left\{ \varrho^2 + \left(\frac{d\varrho}{d\vartheta} \right)^2 \right\} = \frac{1}{\lambda^2} w + \text{cost.},$$

od anche, introducendo l'arco $d\sigma$,

$$\frac{1}{2\varrho^4}\left(\frac{d\sigma}{d\vartheta}\right)^2 = \frac{1}{\lambda^2}\,w + \text{cost.}$$

Questa è una conseguenza necessaria della (19). Si verifica immediatamente che essa (combinata colla posizione (14), con cui si definisce ψ, e colla identità $w = \frac{1}{2}\psi^4$) dà luogo alla (15), allora e allora soltanto che si attribuisca alla costante di integrazione il valore zero.

Siamo così giunti alla conclusione che *le curve C possono ritenersi definite da tutti e soli gli integrali* $\varrho = \varrho(\vartheta)$ *della equazione di second'ordine* (19), *per cui si annulla la costante dell'integrale primo testè ricavato.*

Introducendo come funzione incognita, in luogo del raggio vettore ϱ, la sua inversa u, e risguardando in conformità w come funzione di u, a norma delle

$$w = \frac{1}{2}\left(\frac{h - v}{2}\right)^4, \tag{18}$$

e

$$v = \frac{1}{\varrho} + \frac{1}{2}\,\varrho^2 = u + \frac{1}{2u^2}, \tag{10'}$$

l'equazione (19) e quel suo integrale particolarizzato che occorre prendere in considerazione, divengono rispettivamente:

$$\frac{d^2u}{d\vartheta^2} + u = \frac{1}{\lambda^2}\,\frac{dw}{du}, \tag{19'}$$

$$\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{du}{d\vartheta}\right)^2 + u^2\right\} = \frac{1}{\lambda^2}\,w\,. \tag{23}$$

9. - Equazioni alle variazioni in prossimità di soluzioni circolari.

Sia $u = u_0$ ($u_0 \lesseqgtr 1$) una soluzione circolare generica: a norma delle (20′) e (22) le competono determinati valori di λ e di h.

Rappresentiamo con

$$u = u_0 + u_1(\vartheta)$$

una soluzione delle (19′) e (23) corrispondente a valori vicini $\lambda + \delta\lambda$, $h + \delta h$ delle due costanti.

Cerchiamo a quali condizioni deve soddisfare u_1 nell'ipotesi che essa si possa trattare come quantità di prim'ordine, al pari di $\delta\lambda$ e di δh.

Anzi tutto, se nel secondo membro della (19′) si introducono $u_0 + u_1$, $\lambda + \delta\lambda$, $h + \delta h$ in luogo di u, λ ed h, si ha (a meno di termini di secondo ordine)

$$\frac{1}{\lambda^2}\left(\frac{dw}{du}\right)_0 + \frac{1}{\lambda^2}\left(\frac{d^2w}{du^2}\right)_0 u_1 + \delta\,\frac{1}{\lambda^2}\left(\frac{dw}{du}\right)_0,$$

l'indice 0 significando che si deve porre $u = u_0$, e la variazione δ riferendosi agli incrementi $\delta\lambda$ e δh di λ e di h.

Il primo termine coincide con u_0 per l'ipotesi che $u = u_0$ è soluzione della (19′); il terzo termine è una costante ε (funzione lineare di $\delta\lambda$ e di δh, a coefficienti che, in definitiva, dipendono dalla sola u_0). Del pari costante, e in funzione della sola u_0, è il coefficiente del secondo termine $(1/\lambda^2)(d^2w/du^2)_0$.

Risulta di qua che (coll'approssimazione convenuta) $u_0 + u_1$ sarà integrale dell'equazione (19′), le quante volte u_1 verifichi l'equazione lineare a coefficienti costanti

$$\frac{d^2u_1}{d\vartheta^2} + u_1 = \frac{1}{\lambda^2}\left(\frac{d^2w}{du^2}\right)_0 u_1 + \varepsilon\,. \tag{24}$$

Affinchè però la equazione $u = u_0 + u_1(\vartheta)$ definisca effettivamente una curva integrale si richiede altresì il sussistere della (23). Questa, portandovi per u, λ ed h i loro valori $u_0 + u_1$, $\lambda + \delta\lambda$, $h + \delta h$, e trascurando i termini d'ordine superiore al primo, diviene

$$\frac{1}{2}\,u_0^2 + u_0 u_1 = \frac{1}{\lambda^2}\,w_0 + \frac{1}{\lambda^2}\left(\frac{dw}{du}\right)_0 u_1 + \delta\,\frac{1}{\lambda^2}\,w_0\,.$$

I due termini del primo membro si elidono coi primi due del secondo, perchè la (23) e la (19′) sono soddisfatte per $u = u_0$. Rimane pertanto

$$\delta\,\frac{1}{\lambda^2}\,w_0 = 0\,,$$

che costituisce una relazione fra gli incrementi $\delta\lambda$ e δh. Nella (24) gli stessi incrementi compariscono soltanto pel tramite di ε.

Questa circostanza consente di risguardare la ε, *che compare nella equazione* (24), *come una costante arbitraria*, in funzione della quale, e della u_0, gli incrementi $\delta\lambda$ e δh rimangono definiti dalle due equazioni lineari

$$(25)\qquad \begin{cases} \delta \dfrac{1}{\lambda^2} w_0 = 0\,, \\[2ex] \delta \dfrac{1}{\lambda^2}\left(\dfrac{dw}{du}\right)_0 = \varepsilon\,. \end{cases}$$

Tutte le condizioni caratteristiche sono in tal modo soddisfatte, e *si è ricondotti alla pura e semplice integrazione della equazione di secondo ordine* (24), *lineare, a coefficienti costanti.*

Tra questi figura $(1/\lambda^2)(d^2w/du^2)_0$, sicchè dobbiamo cominciare col procurarcene l'esplicita espressione in termini di u_0.

Notiamo all'uopo che, dalla (18), derivando logaritmicamente rapporto ad u, si ha

$$(18')\qquad \frac{1}{w}\frac{dw}{du} = -\frac{4}{h-v}\frac{dv}{du}\,.$$

Il primo membro può essere scritto

$$\frac{1}{(1/\lambda^2)w}\cdot\frac{1}{\lambda^2}\frac{dw}{du}\,,$$

e, per $u = u_0$ a norma delle (23) e (19′), si riduce a $2/u_0$. Abbiamo così in primo luogo

$$(26)\qquad -\left(\frac{2}{h-v}\frac{dv}{du}\right)_0 = \frac{1}{u_0}\,,$$

e quindi anche, in virtù della (10′),

$$(27)\qquad -\left(\frac{2}{h-v}\right)_0 = \frac{1}{u_0(1-1/u_0^3)}\,.$$

Dalla (18′) si trae per ulteriore derivazione

$$\frac{1}{w}\frac{d^2w}{du^2} - \frac{1}{w^2}\left(\frac{dw}{du}\right)^2 = -\frac{4}{(h-v)^2}\left(\frac{dv}{du}\right)^2 - \frac{4}{h-v}\frac{d^2v}{du^2}\,,$$

donde, avendo riguardo alla (18′) stessa e alla (10′),

$$\frac{1}{(1/\lambda^2)w}\cdot\frac{1}{\lambda^2}\frac{d^2w}{du^2} = \frac{12}{(h-v)^2}\left(\frac{dv}{du}\right)^2 - \frac{4}{h-v}\frac{d^2v}{d^2u} = 3\,\frac{4}{(h-v)^2}\left(\frac{dv}{du}\right)^2 - \frac{6}{u^4}\frac{2}{h-v}\,.$$

Facciamovi $u = u_0$, teniamo presente che $(1/\lambda^2)w_0$ si riduce a $\frac{1}{2}u_0^2$, in virtù della (23), e profittiamo delle (26) e (27).

Si ricava

$$\frac{1}{\lambda^2}\left(\frac{d^2w}{du^2}\right)_0 \frac{1}{\frac{1}{2}u_0^2} = \frac{3}{u_0^2} + \frac{6}{u_0^5(1-1/u_0^3)}\,,$$

ossia

$$\frac{1}{\lambda^2}\left(\frac{d^2w}{du^2}\right)_0 = \frac{3}{2} - \frac{3}{1-u_0^3}\,.$$

Poniamo per brevità

$$\alpha^2 = 1 - \frac{1}{\lambda^2}\left(\frac{d^2w}{du^2}\right)_0 = -\frac{1}{2} + \frac{3}{1-u_0^3}\,, \tag{28}$$

e introduciamo, in luogo della costante ε, una nuova costante (che a priori potrà, a pari titolo, risguardarsi arbitraria) legata ad ε dalla reazione

$$\varepsilon = \alpha^2 \varepsilon_1\,. \tag{29}$$

L'equazione (24) può così essere scritta

$$\frac{d^2u_1}{d\vartheta^2} + \alpha^2 u_1 = \alpha^2 \varepsilon_1\,,$$

od anche, chiamando Θ la differenza $u_1 - \varepsilon_1$,

$$\frac{d^2\Theta}{d\vartheta^2} + \alpha^2\Theta = 0\,. \tag{24'}$$

In definitiva, le curve integrali cercate hanno per equazione polare

$$\frac{1}{\varrho} = u = u_0 + u_1 = u_0 + \varepsilon_1 + \Theta\,,$$

dove ε_1 *è una costante (infinitesima) arbitraria, e* Θ *l'integrale generale della equazione (canonica)* (24').

10. - Anelli a direttrice pressochè circolare. Interpretazione della condizione di esistenza.

La costante α^2, definita dalla (28), può essere a priori positiva o negativa: essa è manifestamente negativa per $u_0 > 1$ (anelli interni), positiva per $u_0 < 1$ (anelli esterni).

Nel primo caso, ogni integrale (non identicamente nullo) della (24′) tende, come è ben noto, a crescere indefinitamente assieme a ϑ (in uno dei due versi, almeno).

Questo mostra che *nessuna curva integrale può conservarsi permanentemente* (cioè al variare indefinito dell'anomalia ϑ) *nelle vicinanze di un cerchio interno.*

Ne consegue che *gli anelli circolari interni non comportano* (all'infuori della serie ∞^1 da essi stessi costituita) *alcun'altra configurazione di equilibrio infinitamente vicina.*

Ben diverso è il comportamento degli anelli esterni. Si può in tal caso ritenere $\alpha > 0$, e attribuire all'integrale generale della (24′) la forma

$$\Theta = \varepsilon_2 \cos \alpha (\vartheta - \vartheta_0) ,$$

essendo ε_2 (> 0) e ϑ_0 le due costanti di integrazione.

Le soluzioni prossime ad un generico cerchio

$$u = u_0 = \frac{1}{\varrho_0} , \qquad (\varrho_0 > 1),$$

sono pertanto

$$u = u_0 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \cos \alpha (\vartheta - \vartheta_0) , \tag{30}$$

od anche, colla stessa approssimazione (ε_1 ed ε_2 dovendo entrambe considerarsi di prim'ordine)

$$\varrho = \varrho_0\{1 - \varrho_0\varepsilon_1 - \varrho_0\varepsilon_2 \cos \alpha (\vartheta - \vartheta_0)\} . \tag{30′}$$

Le curve corrispondenti sono in ogni caso contenute nella corona circolare di raggi $\varrho_0(1 - \varrho_0\varepsilon_1 \pm \varrho_0\varepsilon_2)$. *Condizione necessaria e sufficiente perchè si chiudano e siano algebriche è manifestamente la razionalità del numero*

$$\alpha = \sqrt{-\frac{1}{2} + \frac{3}{1 - u_0^3}} = \sqrt{\frac{5}{2} + \frac{3}{\varrho_0^3 - 1}} .$$

Come si vede, α può assumere tutti i valori $> \sqrt{5/2}$, mentre ϱ_0 percorre il tratto $(1, \infty)$.

È importante osservare che, in prossimità di qualsiasi numero reale > 1, esistono infiniti valori di ϱ_0, per cui α risulta razionale. Ciò autorizza a concludere che, *in vicinanza di qualsiasi anello circolare esterno, sono possibili* ∞^2 *configurazioni di equilibrio a direttrice algebrica* (poco diversa da un cerchio). Nella (30) compariscono veramente tre costanti arbitrarie: ε_1, ε_2 e ϑ_0, ma l'ultima è inessenziale rispetto alla configurazione, in quanto determina una semplice rotazione della curva attorno al polo.

Dalla (30) può ovviamente dedursi che, ogni qualvolta α ha un valore intero, si tratta di una curva di grado 2α.

Siccome α non può scendere al disotto di $\sqrt{5/2}$, rimane escluso il valore 1 (ellisse); tutti gli altri valori interi sono ammissibili (ciascuno, si intende, in un conveniente intorno). Il caso più semplice $\alpha = 2$ proviene da $\varrho_0 = \sqrt[3]{3}$. Ove si ponga per brevità, $1/\lambda^2 + \varepsilon_1 = \mu$, $\vartheta_0 = 0$, si ha la quartica

$$\frac{1}{\varrho} = \mu + \varepsilon_2 \cos 2\vartheta ,$$

che ammette i due assi coordinati per assi di simmetria.

Espressione della densità. – Lungo un anello circolare la densità è costante. Si ha precisamente (n. 7), per $\varrho = \varrho_0 > 1$, $\psi_0 = \varrho_0^2 - (1/\varrho_0)$, od anche, riprendendo la notazione

$$u = \frac{1}{\varrho}, \qquad u_0 = \frac{1}{\varrho_0},$$

$$\psi_0 = \frac{1}{u_0^2} - u_0 .$$

La ψ dipende in ogni caso da ϱ, a norma della equazione (14),

$$2\psi + v = h .$$

Dacchè, per $\varrho > 1$, v cresce con ϱ, si può, in tesi generale, affermare che, lungo una direttrice esterna qualsiasi, la densità diminuisce quando cresce la distanza da S, e viceversa.

Venendo alla determinazione quantitativa di ψ per soluzioni prossime ad $u = u_0$, teniamo conto che u va incrementato di u_1 e h di δh, sicchè si ha

$$\psi = \psi_0 - \frac{1}{2}\left(\frac{dv}{du}\right)_0 u_1 + \frac{1}{2}\,\delta h\,. \tag{31}$$

Per esprimere δh a mezzo di u_0, basta ricorrere alle (25). Notando che, per la (18),

$$w_0 = \frac{1}{2}\left(\frac{h-v}{2}\right)_0^4, \qquad \left(\frac{dw}{du}\right)_0 = -\left(\frac{h-v}{2}\right)_0^3\left(\frac{dv}{du}\right)_0,$$

e ponendo per brevità

$$\frac{1}{\lambda^2}\left(\frac{h-v}{2}\right)_0^3 = g_0\,,$$

si può scrivere

$$\delta\,\frac{1}{\lambda^2}\,w_0 = \frac{1}{2}\,\frac{h-v_0}{2}\,\delta g_0 + \frac{1}{4}\,g_0\delta h = \frac{1}{2}\,\psi_0\delta g_0 + \frac{1}{4}\,g_0\delta h\,,$$

$$\delta\,\frac{1}{\lambda^2}\left(\frac{dw}{du}\right)_0 = -\left(\frac{dv}{du}\right)_0\delta g_0\,.$$

Con ciò, eliminando δg_0, le (25) danno

$$\delta h = \frac{2\psi_0\varepsilon}{g_0(dv/du)_0}\,.$$

Ora $g_0(dv/du)_0$ non è altro che $(-1/\lambda^2)(dw/du)_0$ e vale quindi $-u_0$, a norma della (19'). Per la ricordata espressione di ψ_0 e per la (10'), si ha

$$-\frac{\psi_0}{u_0} = 1 - \frac{1}{u_0^3} = \left(\frac{dv}{du}\right)_0\,.$$

Così, avuto riguardo alle (29) e (30), la (31) diviene

$$\psi = \psi_0\left\{1 + \frac{-\varepsilon_1(2\alpha^2-1) + \varepsilon_2\cos\alpha\,(\vartheta-\vartheta_0)}{2u_0}\right\}. \tag{31'}$$

SIGNIFICATO MECCANICO DELLA DISUGUAGLIANZA $\varrho > 1$. – La circostanza che soltanto gli anelli esterni comportano configurazioni infinitamente vicine fa ritenere che, nel caso della natura, se effettivamente si tratta di anelli assimilabili a sistemi continui, debba pur essere soddisfatta la disuguaglianza $\varrho > 1$. Ciò val quanto dire (ricordando che la unità di lunghezza adottata è la a del n. 5) che la distanza media d dell'anello — o meglio di uno qualunque degli anelli elementari — di Saturno (espressa in unità generiche) è presumibilmente $> a$.

Introducendo per a il suo valore (8), la disuguaglianza può essere scritta

$$\omega^2 > \frac{fM}{d^3}. \tag{32}$$

Il secondo membro rappresenta il quadrato del moto medio di un satellite (di massa trascurabile di fronte ad M), il quale circolasse alla distanza d, o avesse più generalmente d per semiasse maggiore dell'orbita.

Se ne inferisce che, *nelle condizioni supposte, la velocità angolare di ciascun anello deve essere più grande di quella, che competerebbe ad un satellite posto alla stessa distanza da Saturno.*

IX.

SULLA COSTITUZIONE DELLE RADIAZIONI ELETTRICHE

Comunicazione presentata al Congresso di Padova della Società italiana di Fisica (Settembre 1909).

« Nuovo Cimento », s. 5ª, vol. XVIII, (1909), pp. 163-169.

Mi sia concesso di intrattenere per brevi istanti i Colleghi. Vorrei chiedere ai loro accorgimenti un responso sperimentale, destinato a orientare verso un assetto definitivo la teoria delle radiazioni elettriche.

* * *

Pensiamo, per fissar le idee, ai raggi catodici, ovvero ai raggi β del radio.

La veduta più generalmente accettata è che queste manifestazioni sieno dovute ad una specie di bombardamento di proiettilini di *pura* elettricità. Più precisamente le teorie elettroniche (ve ne ha varie, che avrò occazione di ricordare più innanzi) si accordano nell'ammettere che si tratti di cariche identiche, piccole, ma non prive di estensione, le quali si susseguono incessantemente sulla traiettoria sensibile del raggio, pur rimanendo abbastanza spaziate da non influenzarsi mutuamente (in modo sensibile). Quest'ultima ipotesi corrisponde, per dir così, ad un *regime balistico*.

Più generalmente, andrebbe contemplata l'eventualità che le cariche si succedano con una frequenza qualunque, sì che non sia lecito trascurare senz'altro le azioni reciproche. Ciò dà luogo a due casi limiti particolarmente notevoli: quello di una frequenza trascurabile, che è appunto il regime balistico suddetto; e quello, opposto, di una frequenza così grande da poter assimilare il fenomeno ad un flusso continuo (*regime idraulico*).

Potendo, sarebbe naturalmente desiderabile affrontare la questione in tutta la sua generalità, senza pregiudicarla con ipotesi speciali. Si dovrebbe quindi lasciare affatto indeterminata la frequenza delle cariche, dedurre teoricamente le leggi della deviabilità elettromagnetica del raggio, e far poi il confronto col materiale d'osservazione. Da tale confronto risulterebbe a posteriori il regime, che veramente risponde alle circostanze di fatto, e si riconoscerebbe in particolare se o meno si sia abbastanza vicini ad una delle due ipotesi limiti (regime balistico ovvero regime idraulico) da potersene servire come schematizzazione adeguata.

Disgraziatamente la teoria non sembra oggi in grado di rispondere a tale desiderato.

È già molto se (semplificando ulteriormente con opportuni criteri approssimativi) le riesce di fornire conclusioni concrete per i due casi estremi.

Al primo di essi (regime balistico, e quindi a tutte le teorie elettroniche) si collega la seguente circostanza, che importa fissare con attenzione:

Consideriamo un raggio, originariamente rettilineo, immerso in un campo esterno, per es. in un campo magnetico, normale alla direzione primitiva. Il raggio notoriamente devia.

Fino a che la successione delle cariche è abbastanza lenta da non dar luogo a sensibili azioni reciproche, ogni singola carica (elettrone) rimane deviata per conto proprio. Soltanto, siccome per ipotesi gli elettroni sono identici, se anche le condizioni iniziali sono identiche, gli elettroni stessi descriveranno tutti la medesima traiettoria, che costituirà l'aspetto sensibile del raggio deviato. Se invece le condizioni iniziali variano alquanto da elettrone a elettrone, si stabilirà un fascio di traiettorie, e corrispondentemente, in luogo di un unico raggio, un fascio di raggi deviati. Comunque, avendo per es. riguardo alla massima deviazione, si vede chiaramente che essa è un carattere individuale degli elettroni, o meglio di una parte degli elettroni (quelli dotati di minima velocità iniziale), emessi dalla sorgente. La deviazione non deve quindi mutare ove si alteri, *caeteris paribus*, il numero degli elettroni, che transitano nell'unità di tempo; beninteso, purchè questo numero non divenga così grande da infirmare il regime balistico.

In definitiva possiamo ritenere:

Secondo una qualsiasi delle teorie elettroniche, l'ampiezza delle deviazioni elettromagnetiche è indipendente dalla intensità i del flusso di elettroni, costituente il raggio elettrico, cioè dalla quantità i di elettricità che la sorgente (catodo, particella di radio, superficie metallica opportunamente eccitata, ecc.) *emette nell'unità di tempo.*

Questa proprietà cessa di sussistere quando la frequenza delle cariche diviene rilevante, sì che si rendano sensibili le azioni reciproche. Allora la deviazione dipende da i, in modo verosimilmente complicato: certo decrescente al crescere di i.

Nel caso limite del regime idraulico, si dimostra senza difficoltà che *l'ampiezza della deviazione è, a parità di circostanze, inversamente proporzionale all'intensità i del flusso.*

* * *

Da queste osservazioni emerge la possibilità di discriminare in modo comprensivo se effettivamente vige il regime balistico, come presuppongono tutte le teorie elettroniche: basta esaminare se la deviazione rimane o no sensibilmente la stessa al variare del *solo* elemento *i*.

Se si trovasse che c'è addirittura inversa proporzionalità (o che almeno ci si avvicina) si dovrebbe legittimamente inferirne che l'immagine del flusso continuo meglio risponde alla realtà che non le varie teorie elettroniche.

* * *

Così stando le cose, io faccio appello alla sagacità e al buon volere dei fisici, e chiedo loro di ideare ed effettuare una qualche esperienza, intesa a precisare la eventuale influenza di *i* sulla deviabilità delle radiazioni elettriche.

Difficoltà di esecuzione se ne incontreranno certo: ad es. quella di operare con radiazioni, che differiscano *soltanto* per una maggiore o minore intensità di emissione.

Forse potranno all'uopo sfruttarsi i diversi gradi di concentrazione di una stessa sostanza radioattiva. Ma non azzardo indicazioni, che potrebbero anche essere ingenuità dal punto di vista della realizzazione sperimentale.

* * *

Aggiungerò piuttosto qualche parola sul compito, che ancora incomberà alla teoria, a norma dell'esito dell'invocata esperienza.

In primo luogo confesso una preferenza soggettiva. Il desiderio mio sarebbe che le deviazioni elettromagnetiche si riscontrassero inversamente proporzionali all'intensità *i*. Varrebbe allora il regime idraulico, e, concettualmente, tutto sarebbe bene a posto. I fenomeni in questione troverebbero spontanea e adeguata rappresentazione in quello schema, che ho avuto occasione di stabilire recentemente e che ho denominato teoria asintotica delle radiazioni elettriche (1).

Non mi dissimulo però che la probabilità di un responso favorevole al regime idraulico è piuttosto piccola.

Il fine intuito di fisici eminenti li ha indotti ad ammettere senza

(1) Cfr. « Rendiconti dei Lincei », 1° semestre, 1909, pp. 83-93 [in questo vol.: VI, pp. 81-92].

discussione il regime balistico. LORENTZ mi disse un giorno che vi rinuncerebbe a malincuore. Il prof. CORBINO non deve pensarla in modo diverso. So anzi che egli ha affacciata una specie di pregiudiziale storica; ed è questa: Se veramente le deviazioni dipendessero da i in modo così spiccato, sarebbe ben strano che nessuno se ne fosse accorto finora.

Il dubbio è più che legittimo; nè io lo contesto; chiedo unicamente che si proceda colle debite garanzie.

Intesi su questo punto, vengo all'eventualità (diciamo pure più probabile, in omaggio agli autorevoli apprezzamenti testè riferiti) che un opportuno *experimentum crucis* assodi la effettiva validità del regime balistico. La teoria dovrà allora fare un esame di coscienza, e riconoscere che, se ha saputo mettere insieme molti e preziosi baraccamenti provvisori, non ha per ancor costruito il vero edificio. I baraccamenti — *sit venia verbo* — stanno qui a designare le varie teorie elettroniche; ed ecco perchè.

Ammesso il regime balistico, la questione da risolvere sarebbe:

« Seguire (entro un assegnato campo elettromagnetico, o in particolare, in assenza di ogni campo esterno) l'andamento di una generica carica (elettrone), cioè i caratteri salienti del moto di insieme (traiettoria, velocità, accelerazione) e le eventuali deformazioni della carica stessa (che non è lecito considerare puntiforme) ».

Le difficoltà analitiche di una tale questione, ove si affronti nella sua interezza, e il desiderio di arrivare rapidamente a conclusioni concrete hanno indotto ad adottare per ora speciali ipotesi semplificatrici. In queste ipotesi addizionali si differenziano le varie teorie elettroniche: di ABRAHAM, di LORENTZ, di BUCHERER-LANGEVIN e di POINCARÉ. Esse ammettono a priori uno speciale comportamento cinematico dei singoli elettroni: indeformabilità (ABRAHAM); contrazione nel senso del moto (LORENTZ); contrazione longitudinale come nella teoria di LORENTZ, accompagnata da dilatazione trasversale in modo che il volume rimanga inalterato (BUCHERER-LANGEVIN); contrazione longitudinale, legata in modo assegnato comunque alla dilatazione trasversale (POINCARÉ).

Coll'introduzione di siffatti legami rimane in ogni caso un numero finito di incognite, funzioni del solo tempo: i parametri del moto di insieme. La loro determinazione può farsi dipendere, mediante un ingegnoso artificio approssimativo ideato dall'ABRAHAM (*quasi-stazionarietà*), da un sistema di equazioni differenziali ordinarie.

L'artificio di ABRAHAM consente un grado di approssimazione, superiore di gran lunga a quello delle attuali esperienze.

Le ipotesi cinematiche hanno invece un grado di approssimazione che non si sa bene apprezzare là dove (nelle conseguenze quantitative) incomincia il divario dall'una all'altra, e che sopra tutto sembra raggiunto od anche superato dagli ultimi dispositivi.

Tali ipotesi sono tutte perfettamente ragionevoli a titolo d'assaggio, ed hanno avuto — non si può disconoscerlo — brillanti successi.

Ma quando, coi progressi delle misure sperimentali, divengono maggiori le esigenze di rigore nella rappresentazione matematica, sembra doveroso rinunciare all'ausilio di supposizioni più o meno arbitrarie, che possono compromettere ogni successiva illazione.

Conviene quindi non imporre a priori alcun comportamento cinematico alla carica mobile, ma desumerlo dalla natura del problema, che contiene effettivamente tutti gli elementi necessari per la sua risoluzione.

A ciò deve ormai mirare la teoria, o meglio dovrà imprescindibilmente mirare, tostochè rimanga assodata la validità del regime balistico.

Senza queste fasi intermedie, non sembra giustificato richiedere da affinate esperienze un controllo veramente decisivo. Forse, quando si possederà un plausibile criterio direttivo, basterà dare acconcia interpretazione a quelle recentemente istituite da KAUFMANN (2) e da BUCHERER (3). Per ora esse hanno indiscutibilmente precorso la indagine razionale; e così manca la chiave per apprezzarne la portata.

Le varie teorie elettroniche, basate su speciali ipotesi cinematiche (logicamente sovrabbondanti e perciò, a priori almeno, non rigorose) presentano *tutte quante*, secondo ogni probabilità, una approssimazione relativamente grossolana; nè sono quindi mature per esperienze differenziali, intese a stabilire la prevalenza di qualcuna di esse.

Conclusioni come questa:

« La teoria di ABRAHAM sembra meglio rispondere alle risultanze sperimentali, *quindi* è compromesso il principio di relatività (che si concilia soltanto colla teoria di LORENTZ) »;

oppure:

« L'esperienza conferma la teoria di LORENTZ, e *quindi* il principio di relatività, nonchè l'esistenza, nei singoli elettroni, di una forma intrinseca di energia, di origine non « elettromagnetica »,

mi sembrano contrarie ad ogni norma di critica coscienziosa.

Tali conclusioni implicano la tacita premessa che una o l'altra delle teorie elettroniche debba essere la vera. È invece verosimile, come ho detto or ora, che, tutte attendibili in prima approssimazione (le quante volte sia valido il regime balistico), siano poi tutte più o meno condannabili in una approssimazione ulteriore.

Val meglio pertanto non compromettersi con affermazioni frettolose, e attendere che la teoria abbia fornito le indicazioni indispensabili.

Se l'indagine matematica e, per essa, i suoi cultori vanno troppo a

---

(2) *Ueber die Konstitution des Elektrons*, « Annalen der Physik », B. 19, 1906, pp. 487-553.
(3) *Die experimentelle Bestätigung des Relativitätsprinzips*, ibidem, B. 28, 1909, pp. 513-536.

rilento, fate un po' udire la vostra voce, egregi Colleghi. Intanto, denunciatene pure l'insufficienza, ma non copritela di pietoso velo a scapito della logica.

D'altra parte, dovete equamente riconoscere che il miglior stimolo ad intraprendere pazienti a faticose ricerche è la fiducia che il resultato, una volta raggiunto, avrà effettivo interesse pratico. Se questa fiducia non c'è, il matematico malvolentieri rinuncia alla attrattiva di speculazioni concettualmente ed esteticamente più elevate.

* * *

Consentitemi dunque che, tornando al punto di partenza, io invochi quel tale *experimentum crucis* fra il regime balistico e l'idraulico, che dia agli studiosi tranquillante norma direttiva; o li consigli a cambiar rotta del tutto, se vigesse disgraziatamente un regime intermedio, non assimilabile, con approssimazione sufficiente, nè ad un tiro di artiglieria, nè ad un getto di pompa.

X.

VALENTINO CERRUTI (*)

« Rend. Acc. Lincei », ser. 5ª, vol. $XVIII_2$ (1909_2),

pp. 565-575.

Arduo è il ritrarre chi pur lascia di scritti e d'opere ricco retaggio, ove manchi il sussidio delle delicate sfumature, che soltanto una personale consuetudine può suggerire.

Compito siffatto mi impone oggi il noviziato accademico, dal quale fui designato a commemorare VALENTINO CERRUTI.

Riassumerò, come meglio mi è dato, quanto appresi frugando con pietosa reverenza nel suo archivio personale, rivolgendomi a chi ebbe con lui più stretti legami [1], cercando di penetrarne l'eletto pensiero attraverso le pubblicazioni scientifiche.

* * *

VALENTINO CERRUTI, terzogenito di Agostino e di Innocenza Maria, vide la luce il 14 febbraio 1850 a Crocemosso nell'industre circondario di Biella.

Il padre, valente capotecnico, cui non pochezza di mente ma scarsità di coltura aveva precluso il passaggio a più elevate mansioni, fidente nell'indole tenace della stirpe e nell'ingegno svegliato dei figliuoli, volle tutti avviarli agli studi superiori. Sacrificò sè, impose loro per dura necessità non lieta adolescenza, ma ebbe il conforto di vederli uscire con onore dall'aspro cimento.

(*) Commemorazione letta, davanti alla Classe di Sc. fis., mat. e nat. dell'Acc. Naz. dei Lincei, dal Socio T. LEVI-CIVITA nell'adunanza del 5 dicembre 1909.

(1) Adempio a ben gradito dovere esprimendo schietta riconoscenza alla sig.ª ADELE CERBONI CERRUTI, al sig. dott. GIOVANNI BATTISTA CERRUTI, moglie e fratello dell'illustre Compianto; ai sigg. prof. ALBERTO TONELLI, rettore dell'Università di Roma, prof. ROBERTO MARCOLONGO dell'Università di Napoli, prof. LUCIO SILLA, assistente di meccanica razionale alla Università di Roma, per il valido soccorso di dati, notizie e reminiscenze, onde mi furono squisitamente cortesi.

Valentino di iscrisse all'Università di Torino nell'autunno del 1868, avendo conseguito una borsa di studio del Collegio delle Provincie. Già si era fatto notare al Liceo come allievo eccezionale, ed aveva appena riportato il premio in una gara di latino, indetta fra i licenziati del suo corso.

L'attitudine ad assimilare rapidamente e a cogliere con sicurezza il lato essenziale delle più intricate questioni, che fu poi caratteristica preziosa della sua vita pubblica, si palesò con brillante inizio nel periodo universitario, facendogli riportare il massimo dei voti in ognuna delle disparate discipline su cui poggia la preparazione degli ingegneri civili, e consentendogli in pari tempo di attendere con entusiasmo solerte a studi di matematica e di meccanica, eccedenti di gran lunga i confini dei programmi scolastici.

Di questa sua operosità scientifica die' saggi, pubblicando ancora studente articoli nel giornale di BATTAGLINI su questioni di geometria analitica; e presentando, nel novembre 1873, come dissertazione di laurea una bella monografia sulla statica dei sistemi articolati.

Il 1873 fu davvero un anno memorabile per tale teoria. In un'altra tesi — che valse al suo autore il secondo posto nella graduatoria di quella sessione, il primo posto essendo stato assegnato al CERRUTI — ALBERTO CASTIGLIANO stabiliva con rigore quel duttile principio del minimo lavoro, che, come il Nostro ebbe più tardi ad osservare [2], trasporta alla tecnica le idee di GREEN sul potenziale di elasticità, sintetizzando e lumeggiando i vecchi espedienti e suggerendone altri più semplici o più comodi per la pratica.

Fra i due condiscepoli eminenti, ispirantisi entrambi alla tradizione di LAGRANGE, alle idee di MENABREA e di DORNA, dovè con tutta probabilità stabilirsi reciproco influsso e fecondo ricambio di pensiero. Certo furono essi legati da verace amicizia, non offuscata, anzi ravvivata dall'emulazione scolastica e da frequenti appassionate dispute sui più svariati argomenti.

Ottenuta la laurea, i due giovani, tendenti entrambi ad armonizzare gli studi speculativi colle loro applicazioni tecniche, cercarono collocamento nelle strade ferrate dell'Alta Italia.

Il CASTIGLIANO vi fu ammesso; il CERRUTI non fu ritenuto idoneo alla visita medica. Mentre, un po' scoraggiato, meditava di offrire l'opera sua ad altre amministrazioni o all'industria privata, venne a trarlo d'imbarazzo il CASTIGLIANO. Questi era stato raccomandato a QUINTINO SELLA

---

[2] Cfr. la Memoria *Sopra un teorema del sig. Menabrea*, negli Atti di questa Accademia, serie 2ª, vol. II, 1875, pp. 570-581.

come un giovane distinto, che avrebbe potuto egregiamente aiutare i suoi figli negli studi scientifici e tecnici. Tosto che seppe d'essere riuscito alle ferrovie, designò in sua vece l'amico, che fu bene accetto, ed accettò, trasferendosi pochi giorni appresso a Roma, assieme colla famiglia SELLA.

In tale sua decisione concorsero: l'urgenza di provvedere alle materiali esigenze della vita; il modo pronto, largo e soddisfacente che gliene era offerto; il fascino di Roma; e la fiducia che non gli sarebbe quivi mancata l'occasione di orientarsi secondo le sue legittime aspirazioni.

Seppe infatti, appena giunto, che il CREMONA aveva da poco iniziata una *instauratio ab imis* della Scuola d'Applicazione per gli Ingegneri. Senza por tempo in mezzo, si recò da lui, tutto solo, gli presentò la sua tesi di laurea e candidamente gli espose il desiderio di venire assunto quale assistente. Il CREMONA lo invitò a ritornare alcuni giorni dopo per prender nel frattempo conoscenza del lavoro stampato.

Quale fosse l'impressione riportata appare dalla nomina del CERRUTI ad assistente di idraulica, seguita con eccezionale sollecitudine il 15 dicembre 1873.

Entrato nel pubblico insegnamento, ritenne il Nostro senz'altro doveroso rinunciare all'impiego privato. QUINTINO SELLA che, pur in così breve tempo, aveva per lui concepita alta stima e viva simpatia, gli trovò bensì un successore, ma volle che continuasse a frequentare colla stessa assiduità la sua casa; e sempre l'ebbe in conto di amico carissimo. Di qua l'affetto devoto del CERRUTI verso il grande statista e l'amicizia di tutta la sua vita colla famiglia SELLA.

Nell'ottobre 1874 ebbe conferma biennale d'assistente con più late attribuzioni, e venne altresì incaricato dell'insegnamento di fisica tecnologica.

Mirabile ci appare la sua versatilità e la mole di lavoro fornito in questo periodo di tempo, in cui ha funzioni amministrative come segretario della Scuola, dirige le esercitazioni degli allievi nell'idraulica e nella topografia, prepara un corso di materia da poco introdotta nei nostri ordinamenti scolastici, e, giovanilmente baldanzoso, ne tien cattedra con piena efficacia; tutto ciò mentre la miglior parte di sè dedica a studi severi d'alta analisi, e ritrova frammezzo la sua vocazione decisa per la meccanica teorica, di cui forse il lavoro sui sistemi articolati ad altri, più che a lui stesso, aveva dato indizio e misura.

Il cosciente risveglio si manifestò con ricerche dinamiche sui piccoli moti dei sistemi materiali, ostacolati da resistenze di mezzo; e con uno studio approfondito sul viriale di CLAUSIUS, dal punto di vista geometrico e statico.

Resasi vacante la cattedra di meccanica razionale, il CERRUTI n'ebbe tosto la supplenza per unanime designazione della Facoltà, e, poco dopo, nell'ottobre 1877, fu nominato, in seguito a pubblico concorso, professore straordinario.

Raggiunta nobilmente la mèta, tutta rivolse la straordinaria energia alle ricerche originali; donde un triennio di intensa produzione scientifica, che ne affrettò la promozione ad ordinario (maggio 1881), e a cui possono riportarsi le sue concezioni più vigorose, se non le conclusioni più notevoli.

Mi si consenta di renderne conto.

A caratterizzare le piccole oscillazioni di un solido interamente libero son fatte intervenire con sagace iniziativa due sestuple di rette in corrispondenza univoca, che lasciano ricostruire in ogni caso l'andamento geometrico del moto: assi elicoidali permanenti esistono allora ed allora soltanto che vengono a coincidere coppie di rette corrispondenti delle due sestuple; di tali assi ve ne ha per conseguenza sei, al massimo, che possono in particolare ridursi ad assi di pura traslazione o di pura rotazione. Con quali forze ciò si raggiunga e come si assicuri la stabilità dell'equilibrio, l'autore investiga, opportunamente generalizzando i garbati spedienti di POINSOT.

Negli altri lavori, che pur vanno ascritti ai classici indirizzi della meccanica, troviamo anzitutto sotto forma geometricamente espressiva le condizioni, cui debbono soddisfare i vincoli e la sollecitazione dinamica, affinchè un sistema materiale qualsiasi possegga certa tipica combinazione integrabile, che comprende ed estende quelle delle quantità di moto e delle aree. Pel caso particolare di un punto libero, è necessario e basta che la forza appartenga ad un complesso lineare, il che consente ancora al mobile (pur che sia posto in condizioni iniziali convenienti) di descrivere una curva arbitrariamente prescelta. Con questa acuta osservazione rimangono estese allo spazio notissime proprietà del moto centrale.

Ma, anche senza alcuna ipotesi sulla natura della forza, si può utilmente mettere in relazione il moto con un qualsiasi complesso lineare ausiliario, coordinando ad ogni piano osculatore della traiettoria il suo polo rispetto al complesso, e il raggio polare, cioè la retta che congiunge il punto di contatto col polo.

Le due componenti tangenziale e radiale della forza sono suscettibili di espressioni monomie assai semplici e atte in particolare a fornire quei complementi della legge d'attrazione universale, che HALPHEN e DARBOUX avevano allora allora conseguiti.

L'analisi algebrica e la termodinamica sono pure rappresentate nelle pubblicazioni di questo triennio. Non mi soffermo per arrivare alla Memoria del 1880 *Sulle vibrazioni dei corpi elastici isotropi*, che, pur essendo imperfetta, lascia rifulgere la mente geniale dell'autore, per l'idea direttiva e per i procedimenti fecondi che vi si inaugurano.

L'idea direttiva è di trasportare il teorema di BETTI e sue conseguenze dal campo statico a quello dei fenomeni variabili col tempo.

Il CERRUTI riesce a procacciarsi gli integrali particolari dotati di singolarità caratteristiche nello spazio e nel tempo; e perviene alle formule risolutive. Disgraziatamente una svista di calcolo — un passaggio al limite sotto il segno, compiuto senza le debite precauzioni — gli fa omettere un termine e i suoi congeneri, inquinando tutti i risultati.

Fra questi, la formula (23) (pag. 377), stabilita quasi per incidenza, che avrebbe attribuito — due anni prima di KIRCHHOFF — espressione matematica al principio di HUYGHENS. Sarebbe bastato che, prima di far convergere a zero un certo parametro ε, fosse stata eseguita una ben ovvia integrazione rispetto al tempo! Il passaggio al limite diviene allora senz'altro legittimo, e dà luogo alla formula esatta oggimai celeberrima sotto il nome di KIRCHHOFF.

Lo scopo definitivo della Memoria era di arrivare ad esprimere gli elementi salienti del moto vibratorio di un solido elastico (dilatazione cubica, rotazione, spostamenti), mediante le forze di massa e i dati superficiali.

Le espressioni esatte vennero valutate più tardi, per vie diverse (3); e molto il Nostro si compiacque quando il SOMIGLIANA, avendole recentemente rintracciate con sua immaginosa ed agile calcolazione, rilevò in modo esplicito la virtuale priorità di lui (4), sottaciuta innanzi certo per riguardo di menzionare ad un tempo il suo errore. Non insanabile tuttavia, tale anzi da lasciar sostanzialmente sussistere il valore della scoperta!

Ma a render memorabile il lavoro, pur all'infuori delle assicurate se non suggellate conquiste, basta la circostanza che vi sono nettamente tracciati i canoni e i particolari accorgimenti di quel metodo, che condurrà ben presto l'autore ad affrontare con brillanti successi i più importanti problemi della statica elastica.

È questo l'indirizzo di studi che in Italia e fuori comprensivamente si designa coi nomi associati BETTI-CERRUTI. Vi dedicò il Nostro una serie di memorie in cui, data forma più semplice ai risultati di BETTI e ridotto il numero delle funzioni ausiliarie da assegnarsi preventiva-

(3) Cfr. O. TEDONE, *Sulle vibrazioni dei corpi solidi, omogenei ed isotropi*. « Memorie della R. Accademie delle Scienze di Torino », ser. 2ª, t. XLVII, 1897, pp. 181-258; A. L. H. LOVE, *The propagation of wave-motion in an isotropic elastic solid medium*, « Proceedings of the London Matematical Society », ser. 2ª, vol. I, 1904, pp. 291-344; C. SOMIGLIANA, *Sopra alcune formule fondamentali della dinamica dei mezzi isotropi*, « Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino », vol. XLI, 1906 (note 1 e 2), pp. 869-885 e 1070-1080; vol. XLII, 1907 (nota 3), pp. 765-779.

(4) Cfr. loco cit., nota 2, p. 1079.

mente, se ne fa applicazione sistematica ai suoli isotropi, agli strati, alle sfere, agli involucri sferici ([5]).

A chi sol consideri il suo acume, e l'ardore perseverante con cui traeva a compimento ogni sua cosa, si affaccia la domanda: come mai le soluzioni degli accennati problemi non si incalzarono a breve distanza, ma andarono lentamente susseguendosi sì da distribuirsi in ben tredici anni?

Può non esservi stata estranea taluna difficoltà di dettaglio, che abbia lungamente resistito ai penetranti suoi sforzi, ma la ragione principale appare senz'altro manifesta dalle vicende della sua vita.

* * *

Invero in quello stesso anno 1880, che segnò forse l'apogeo della sua virtù creatrice, ebbero inizio gli incarichi governativi, che, rapidamente crescendo di numero e di importanza e intrecciandosi con nomine elettive, dovettero inevitabilmente assorbire una gran parte della sua pur grandissima attività.

Fu anzi tutto collaboratore del CREMONA (dal luglio al dicembre 1880) nella riorganizzazione della Biblioteca Vittorio Emanuele. In tale ufficio si distinse per modo che, nell'aprile 1883, fu preposto come R. Commissario alla Biblioteca Alessandrina dal ministro COPPINO. Questi, che era stato rettore della Università di Torino mentre vi studiava il CERRUTI, e fin d'allora aveva preso a benvolerlo, gli affidò inchieste delicate che lo accrebbero nella sua stima e, nel novembre 1886, lo chiamò al Ministero colle funzioni, solitamente attribuite ad un parlamentare, di Segretario Generale.

Il provvedimento, nuovo e non più rinnovato nel dicastero della pubblica istruzione, suscitò commenti e censure al ministro, ed ebbe eco alla Camera, dove il COPPINO, nella tornata del 3 dicembre, così si difese: « Ho cercato chi, non potendo leggere io, leggesse per me; ho cercato chi, come non è alla scienza, così non fosse straniero alle cose dell'amministrazione e fosse capace di fare, con alto scopo del dovere, pari alla cortesia, quello che fu fatto in altri Ministeri, senza che se ne muovesse rimprovero ai ministri, e senza che si mettesse innanzi non una questione ma il dubbio di una questione. Altro non ho a dire dell'uomo. Quelli che lo conoscono, sanno ch'è chiaro e fermo il carattere come è valoroso l'ingegno ».

([5]) Un apprezzamento sintetico su questi lavori, in relazione al progresso e allo sviluppo della teoria matematica dell'elasticità, si può trovare nell'eccellente rapporto presentato al Congresso di Parma della Società italiana delle scienze dal prof. MARCOLONGO, che dell'Estinto fu scolaro, assistente e amico affezionato. (Cfr. « Nuovo Cimento », ser. 5ª, vol. XIV, 1907, pp. 371-410).

Rimase il Cerruti al Ministero fino al 14 aprile 1887. Nell'anno successivo fu eletto rettore; la fiducia dei colleghi lo volle mantenuto nella carica, ininterrottamente per un quadriennio, e poi, a distanza di tempo, per un triennio ancora. Nel governo dell'Università acquistò grandi benemerenze anche dal punto di vista amministrativo, iniziando equa ma energica rivendicazione di crediti trascurati o contesi.

Nel 1896 lo troviamo Presidente di una Commissione d'inchiesta al Collegio Ghislieri di Pavia; nel 1900 R. Commissario alla Scuola Veterinaria di Napoli; nel 1901 Presidente della Società degli Ingegneri e Architetti italiani.

Mandato due volte dalle Facoltà di Scienze al Consiglio Superiore della Pubblica Istruzione (per i quadrienni 1899-1902, 1905-1908), fu ciascuna volta immediatamente ascritto alla Giunta; dell'uno e dell'altra membro autorevolissimo per la sua grande esperienza di scuole e di regolamenti, per lo studio accurato delle più complesse questioni, che egli riusciva a sbrigare in modo sollecito, sobbarcandosi a lavoro intensivo con senso inusatamente rigido di dovere e sacrificio di ogni suo comodo personale.

Così egli, non alla scienza soltanto, ma ancora agli interessi palpitanti della vita nazionale molto aveva dato, quando con decreto 21 novembre 1901 fu nominato Senatore: giusto compenso ai suoi meriti e affidamento sicuro che ne sarebbero direttamente o indirettamente derivati nuovi e maggiori servigi alla pubblica cosa.

Alla previsione risposero le sapienti sue relazioni al Senato, tra cui quella sulla legge pel Politecnico di Torino (1903); la collaborazione attiva, quale egli intendeva e sapeva prestare, a Commissioni Reali di eccezionale importanza (riscatto delle ferrovie meridionali nel 1905; sistemazione del Tevere nel 1907); la presidenza della Commissione per le privative industriali (1908), cui apparteneva fin dal 1893; e ancora e sopra tutto la direzione della Scuola degli Ingegneri, cui fu chiamato il 1 luglio 1903 come successore di Luigi Cremona.

Pare che questi, morente, abbia espresso l'avviso che Valentino Cerruti sarebbe stato il naturale e degno continuatore dell'opera sua. Palese o tacito, tale fu certo il voto del Cremona, pietosamente raccolto dal Nostro che, favorendo con illuminate previdenze l'accelerato progredire della Scuola, aveva divisato innovazioni grandiose.

Ma troppo egli fidava nell'instancabile fibra. All'eccesso di lavoro, cui si sottopose per la legge dul Politecnico di Torino, si collega un primo deperimento. Una sciagurata influenza dello scorso inverno favorì il divampare di un grave processo morboso. Ben presto un cancro allo stomaco si rivelò ai medici, alla fida consorte, ai pochi famigliari con implacabile crudezza. Egli ebbe presagio, forse non coscienza della morte imminente;

certo tollerò il male con imperturbata serenità, e serenamente si spense il 20 agosto p. p.: amaro conforto per chi l'assistè con vigile amore, e spesso l'aveva udito affermare: « La morte per l'uomo giusto è il più bel giorno della vita! ».

* * *

Onori cospicui, tuttochè impari all'onere, ebbe — noi lo vedemmo — il CERRUTI dai pubblici uffici; ebbe altresì onorificenze cavalleresche e distinzioni accademiche. Fu uno dei XL della Società italiana; corrispondente dell'Istituto Lombardo; socio straniero dell'Accademia Leopoldino-Carolina di Halle, ecc. Alla nostra Accademia appartenne fin dal 1883; divenuto nel 1890 socio nazionale, fu eletto segretario per la classe di scienze fisiche, matematiche e naturali, e coprì questa carica fino al 1906.

Presso i conoscenti e presso il pubblico guadagnò di buon'ora larga estimazione per le qualità intrinseche di intelletto e di carattere, pei solidi e tangibili risultati dell'opera sua.

D'indole molto riflessiva e riservata fu dai più giudicato timido o ruvido; a chi per studi od affetti gli stava vicino apparve però sotto diverso e più vero aspetto.

Quando parlava di scienza, diveniva tosto espansivo, e impressionava spesso l'interlocutore per la profonda e minuziosa conoscenza di dottrine anche estranee alla cerchia abituale dei suoi studi.

A spingere lo sguardo entro la soglia di casa sua ci invita un pensiero dell'eletta signora, che gli fu compagna per oltre un ventennio: « Accade spesso — sta scritto in una lettera della signora — di rilevare nell'intimità di tutte l'ore piccinerie e difetti di educazione che in pubblico si sanno diligentemente dissimulare. Ma egli, come aveva un contegno corretto dinanzi al mondo, così era sempre nella famigliare convivenza, e in questa portava in più una gaiezza, una serenità che mai non si smentì ».

Ecco il migliore e più espressivo elogio delle virtù domestiche dell'Estinto!

Alla coltura scientifica accoppiava egli estesa erudizione e fine gusto letterario. Dei nostri poeti maggiori prediligeva il PETRARCA; e ben sovente ne recava in tasca il Canzoniere, quando, durante le vacanze, intraprendeva per svago lunghe passeggiate in campagna.

Degli autori latini fu conoscitore profondo, e non dei classici soltanto, ma anche dei Padri della Chiesa, che lesse e studiò con fervore di credente. A lui, filosofo naturale ed umanista, felicemente ricorse la nostra Accademia per inviare a Lord KELVIN, in occasione del suo giubileo, un indirizzo non indegno della tradizione lincea.

Le sue benemerenze nel campo bibliografico e storico sono in parte ben note.

Tali ad es. l'organizzazione della biblioteca della Scuola per gli ingegneri, cui egli seppe assicurare larghezza d'indirizzo e di mezzi; e l'interessamento spiegato per l'edizione nazionale galileiana, massime quando, fungendo da Segretario Generale al Ministero dell'Istruzione, mirabilmente secondava gli sforzi del FAVARO, e, nel volgere di pochi giorni, otteneva formale decreto per l'esecuzione del « nobilissimo disegno a benefizio degli studi e ad onore d'Italia » (6).

Men noto è forse che egli in questi ultimi tempi stava curando (7) una edizione critica delle « Produzioni matematiche » di GIULIO FAGNANI (opera poderosa di oltre 1000 pagine, in cui si contengono tra altro i noti teoremi sugli archi rettificabili di ellisse e di lemniscata); raccoglieva e intendeva pubblicare il carteggio dei matematici italiani vissuti fra il 1750 e il 1820; e infine, quasi a continuazione di tali ricerche erudite, risolveva, come gli antichi solevano, con diretti artifizi e sottoponeva a revisione critica svariate questioni di massimi e minimi.

Quanta parte convenga pubblicare di ciò che l'immatura fine ha troncato potrà decidersi dopo un esame accurato di tutte le sue carte.

Fin d'ora però sento d'interpretare il voto dell'Accademia chiedendo che siano ad essa affidati i manoscritti scientifici di VALENTINO CERRUTI. Qualche sua pagina potrà così fregiare i nostri Rendiconti! (*).

---

(6) Cfr. R. FAVARO, *La edizione nazionale delle opere di Galileo Galilei*, « Atti e Memorie della R. Accademia di Padova », nuova serie, vol. XXII, 1906, pag. 24.

(7) Assieme a due altri egregi cultori di storia delle matematiche: i professori G. LORIA e D. GAMBIOLI.

(*) Segue un « Elenco delle pubblicazioni Scientifiche di VALENTINO CERRUTI », che qui si omette. [*N. d. R.*].

XI.

SUL TEOREMA DI ESISTENZA DELLE FUNZIONI IMPLICITE

« Atti Ist. Veneto di Sc., lettere ed arti », t. $LXIX_2$ (1909-1910), pp. 291-302.

La risoluzione di equazioni implicite mediante approssimazioni successive può farsi risalire al metodo di falsa posizione dei geometri greci; certo da molto tempo (oserei dire fin da KEPLERO) viene correntemente praticata in questioni astronomiche, tra le quali merita speciale menzione la determinazione di orbite ellittiche in base a tre osservazioni.

In questi ultimi anni, per iniziativa di PICARD, il metodo delle successive approssimazioni ha assunto posto cospicuo anche nell'analisi pura. Ben ovvia è perciò la presunzione che esso si presti, tra altro, a dimostrare, con tutto il desiderabile rigore, il teorema di esistenza delle funzioni implicite, sotto le condizioni generalmente supposte nei corsi di calcolo.

Non mi consta tuttavia che una tale dimostrazione sia stata effettivamente esposta (1). Mi permetto quindi di svolgerla nella presente Nota, anche in considerazione dell'interesse didattico, e dei vantaggi che essa offre sul procedimento abituale.

Quest'ultimo infatti stabilisce bensì l'esistenza e le proprietà qualitative delle funzioni definite da equazioni implite, ma non ne dà un algoritmo costruttivo atto a calcolarne le espressioni esplicite. Invece il metodo delle approssimazioni successive costruisce e dimostra ad un tempo, presentando sotto forma generale e sistematica l'andamento delle

(1) (*Nota aggiunta durante la correzione delle bozze*). Un recentissimo scritto del sig. COTTON, *Sur les équations différentielles dépendant de paramètres arbitraires*, « Bulletin de la Société Math. de France », t. XXXVII, 1909, pp. 204-214, richiama un precedente lavoro del sig. GOURSAT, *Sur la théorie des fonctions implicites*, « Ibidem », t. XXXI, 1903, pp. 184-192, che mi era sfuggito e che contiene pressochè tutte le osservazioni qui presentate. Chiedo venia di essermene accorto troppo tardi.

operazioni, quali, anche praticamente, dovrebbero effettuarsi per arrivare alla valutazione numerica.

Può anche aggiungersi che la natura del metodo rende superflua qualcuna delle ipotesi ammesse ordinariamente.

1. - Preliminari. Specificazione delle ipotesi.

Sia

$$u_l(x_1, x_2, ..., x_m; y_1, y_2, ..., y_n) = 0 \qquad (l = 1, 2, ..., n)$$

un sistema di n equazioni destinate a definire altrettanti argomenti y in funzione di m variabili indipendenti x (m ed n designando interi positivi qualisivogliono).

Per semplificare la notazione, rappresenteremo con x (senza alcun indice), non solo (come si fa sempre) una qualunque delle m variabili $x_1, x_,. ,,, x_m$, ma anche (come si fa talvolta) il complesso da esse costituito; analogo significato avrà y rispetto a $y_1, y_2, ..., y_n$; e così per altre lettere, che ricorreranno più innanzi.

Con tale convenzione potremo scrivere le equazioni proposte sotto la forma abbreviata

$$u_l(x; y) = 0 \qquad (l = 1, 2, ..., n). \tag{1}$$

Supponiamo che le (1) sieno verificate, quando alle x e alle y si attribuiscono speciali valori numerici $x^{(0)}$, $y^{(0)}$. In tal caso si può addirittura supporre, sempre per semplicità di notazione, che i valori in questione siano nulli. Infatti, ove ciò non accadesse, basterebbe premettere un ovvio cambiamento di variabili, assumendo come variabili indipendenti le $x - x^{(0)}$, in luogo delle x; come funzioni incognite le $y - y^{(0)}$ in luogo delle y.

Adopereremo l'apice $^{(0)}$ per designare il valore assunto da una generica funzione delle x, y, in corrispondenza al valore zero di tutti gli argomenti.

Circa le funzioni u, faremo le ipotesi seguenti:

a) Esse sono finite e continue in un certo intorno Γ dei valori zero degli $m+n$ argomenti x, y. Intenderemo caratterizzato questo intorno mediante un numero positivo H e le $m+n$ disuguaglianze

$$|x| \leqslant H, \qquad |y| \leqslant H.$$

Sarà poi indifferente che le funzioni u si ritengano definite soltanto per valori reali ovvero anche per valori complessi delle x, y: vuol dire che, nel primo caso, vanno considerati i soli valori reali del campo $|x| \leqslant H$, $|y| \leqslant H$, e, nel secondo, più generalmente, tutti i valori del campo.

b) Esistono le n^2 derivate prime delle u rapporto alle y, finite e continue in Γ [2].

c) Il determinante funzionale

$$D = \begin{vmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial y_1} & \frac{\partial u_1}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial u_1}{\partial y_n} \\ \frac{\partial u_2}{\partial y_1} & \frac{\partial u_2}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial u_2}{\partial y_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial u_n}{\partial y_1} & \frac{\partial u_n}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial u_n}{\partial y_n} \end{vmatrix},$$

non si annulla per i valori zero delle x e delle y. Si ha cioè $D^{(0)} \neq 0$, e si può quindi considerare, accanto ad un generico elemento

$$\left(\frac{\partial u_l}{\partial y_j}\right)^{(0)}, \qquad (l, j = 1, 2, \dots, n),$$

di $D^{(0)}$ il suo elemento reciproco c_{lj} (complemento algebrico diviso per $D^{(0)}$): le c_{lj} — quasi è superfluo il notarlo — rappresentano (al pari di $D^{(0)}$ e dei suoi elementi) altrettante costanti.

2. - Trasformazione lineare delle equazioni proposte.

Per risolvere le equazioni (1) rapporto alle y, giova premettere un'ovvia trasformazione, che sarebbe esauriente nel caso elementare di un sistema lineare (nelle y) e che, in generale, rende manifesta la via alle successive approssimazioni.

---

(2) Di solito si ammette ancora l'esistenza e la continuità delle derivate delle u rapporto alle variabili indipendenti x. G. PEANO ha però modificata la dimostrazione di esistenza francandola da tali ipotesi. Cfr. per es., F. D'ARCAIS, *Corso di calcolo infinitesimale*, vol. I (seconda ediz., Padova: Draghi, 1899), p. 145.

Consideriamo all'uopo le n espressioni lineari nelle y

$$\sum_1^n {}_j \left(\frac{\partial u_l}{\partial y_j}\right)^{(0)} y_j \,,$$

e le differenze

$$v_l(x;\, y) = \sum_1^n {}_j \left(\frac{\partial u_l}{\partial y_j}\right)^{(0)} y_j - u_l(x;\, y)\,, \qquad (l = 1, 2, \dots, n), \tag{2}$$

alle quali manifestamente competono derivate nulle rapporto alle y, per $x = y = 0$.

Ora le n equazioni (1) equivalgono a

$$\sum_1^n {}_j \left(\frac{\partial u_l}{\partial y_j}\right)^{(0)} y_j = v_l(x;\, y)\,, \qquad (l = 1, 2, \dots, n),$$

od anche, badando all'ipotesi c) e risolvendo rapporto alle y (in quanto esplicitamente contenute nei primi membri) mediante la regola di CRAMER, a

$$y_i = \sum_1^n {}_l\, c_{li} v_l(x;\, y) \qquad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Scriveremo più concisamente

$$y_i = f_i(x;\, y) \qquad (i = 1, 2, \dots, n), \tag{1'}$$

tenendo presente che le n funzioni

$$f_i(x;\, y) = \sum_1^n {}_l\, c_{li} v_i(x;\, y)\,, \qquad (i = 1, 2, \dots, n), \tag{3}$$

posseggono, al pari delle v_l, derivate rapporto alle y, che si annullano tutte per $x = y = 0$.

3. - Algoritmo risolutivo.

Se le equazioni (1) fossero state lineari (rapporto alle y) il passaggio alle equivalenti (1′) le avrebbe senz'altro risolute, risultando le f_i indipendenti dalle y. In generale non sarà così; però la circostanza che le f_i ammettono, per $x = y = 0$, derivate nulle rispetto alle y, può enunciarsi in modo espressivo dicendo che le f_i stesse variano poco colle y, nell'immediata prossimità di $x = y = 0$. Ciò mostra che (almeno in un piccolo intorno dei valori $x = 0$) una prima approssimazione $y_i^{(1)}$ delle incognite funzioni y_i può ottenersi, trascurando addirittura la (lieve) variabilità delle f colle y, ponendo cioè

$$y_i^{(1)} = f_i(x;\, 0) \qquad (i = 1, 2, \dots, n), \tag{4}$$

con che in particolare $y_i^{(1)} = 0$, per $x = 0$.

Trovata una prima approssimazione, è naturale di cercarne una seconda $y_i^{(2)}$, introducendo nei secondi membri delle (1'), in luogo dei valori iniziali zero (con che era completamente trascurata la dipendenza delle f dagli argomenti y), le già conseguite prime approssimazioni $y^{(1)}$, ponendo cioè

$$y_i^{(2)} = f_i(x,\, y^{(1)}) \qquad (i = 1, 2, \dots, n),$$

con che anche le $y_i^{(2)}$ si annullano tutte per $x = 0$.

Di qua si passa ad una ulteriore approssimazione, e via dicendo. Dopo ν operazioni ($\nu = 1, 2, 3, \dots,$) si hanno delle espressioni approssimate $y_i^{(\nu)}$, che diremo d'ordine ν, nulle anch'esse per $x = 0$; se ne traggono quelle d'ordine successivo $\nu+1$, a norma delle formule generiche

$$y_i^{(\nu+1)} = f_i(x;\, y^{(\nu)}) \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \dots, n \\ \nu = 1, 2, 3, \dots \end{pmatrix}, \tag{5}$$

ed è ben chiaro che, per $x = 0$, si seguita ad avere $y_i^{(\nu+1)} = 0$.

Per la giustificazione del procedimento basterà accertare:

1) La effettiva costruibilità delle successive approssimazioni senza uscire dal campo Γ, in cui sono definite le f_i. Più precisamente che esiste almeno un campo γ di valori delle x, compreso in Γ (diciamo $|x| \leqslant h$, essendo $0 < h \leqslant H$) entro cui una generica $y^{(\nu)}$ si mantiene in modulo inferiore ad H: converrà anzi (cfr. n. 5) introdurre un certo numero $k \leqslant H$. Comunque, riescono con ciò legittime (in base all'ipotesi *a*) del n. 1) le posizioni (5), che definiscono le approssimazioni d'ordine immediatamente superiore $y_i^{(\nu+1)}$; e queste risultano funzioni delle x, continue in γ, se tali sono le $y^{(\nu)}$.

2) Che le approssimazioni successive $y_i^{(1)}, y_i^{(2)}, y_i^{(3)}, \dots$ di una stessa y_i convergono *uniformemente, entro* γ, verso una funzione continua φ_i delle x.

Invero, ove siano stabiliti questi due punti, si ha, per la continuità delle funzioni f_i in Γ,

$$\lim_{\nu = \infty} f_i(x;\, y^{(\nu)}) = f_i(x;\, \varphi)\ ,$$

e le (5) porgono di conseguenza, passando al limite per $\nu = \infty$,

$$\varphi_i = f_i(x, \varphi) \qquad (i = 1, 2, ..., n), \tag{6}$$

le quali ci mostrano che le funzioni φ_i verso cui convergono le successive approssimazioni delle y_i, rendono identicamente soddisfatte le equazioni (1'), ossia porgono l'espressione esplicita delle n funzioni delle x, che si trattava appunto di definire come soluzioni delle equazioni stesse.

La dimostrazione dei due punti suaccennati poggia su alcune disuguaglianze, che passo a dedurre.

4. - Disuguaglianze conseguenti dall'ammesso comportamento delle funzioni u (ipotesi a) e b)).

Le f, al pari delle u, sono, entro Γ, finite e continue, e dotate di derivate prime rapporto alle y, pure finite e continue.

Designamo con x, y; x, $y+\Delta y$ due generici sistemi di valori degli argomenti appartenenti entrambi al campo Γ, e poniamo

$$\eta_j = y_j + t\Delta y_j \qquad (j = 1, 2, ..., n), \tag{7}$$

con che, per $0 \leqslant t \leqslant 1$, anche le η appartengono a Γ. Potremo intanto scrivere

$$\frac{df(x;\eta)}{dt} = \sum_1^n{}_j \frac{\partial f}{\partial \eta_j} \Delta y_j ,$$

e quindi, integrando rispetto a t fra 0 e 1 e badando alle (7),

$$f(x; y + \Delta y) - f(x; y) = \int_0^1 dt \sum_1^n{}_j \frac{\partial f}{\partial y_j} \Delta y_j . \tag{8}$$

Ove si ricordi che il modulo di un integrale è inferiore o tutt'al più eguale all'integrale dei moduli e si indichi con L un limite superiore dei valori assoluti delle n^2 derivate prime $|\partial f_i/\partial y_i|$ nel campo che si considera, si ricavano tosto dalla (8) le n disuguaglianze [3]

$$|f_i(x; y + \Delta y) - f_i(x; y)| \leqslant L \sum_1^n{}_j |\Delta y_i| \qquad (i = 1, 2, ..., n). \tag{9}$$

---

[3] È appena necessario osservare che, nel campo reale, le stesse disuguaglianze si hanno subito dal così detto teorema dell'aumento finito (o del valore medio).

Ciò premesso, sfruttiamo la circostanza che le derivate delle f rapporto alle y sono funzioni continue, le quali si annullano tutte per $x = y = 0$.

Scelto a piacimento un numero positivo $\varepsilon < 1$, potremo in conformità coordinargli un altro numero positivo $k \leqslant H$, tale che, per $|x| \leqslant k$, $|y| \leqslant k$, ogni $\partial f_i / \partial y_i$ si conserva, in modulo, minore di ε / n.

E ancora, per essere le $f_i(x, 0)$ funzioni continue delle x, che si annullano per $x = 0$, siamo fatti certi che esse si mantengono inferiori, in modulo, a $k(1 - \varepsilon)$, per valori abbastanza piccoli delle $|x|$: diciamo per $|x|$ non superiore ad un conveniente numero h, che è sempre lecito rimpicciolire, sì da ridurlo (ove già non fosse) $\leqslant k$. Designeremo con γ l'intorno $|x| \leqslant h$.

In definitiva possiamo ritenere che *in un certo intorno* $|x| \leqslant h$, $|y| \leqslant k$ *dei valori zero degli* $m+n$ *argomenti* x, y, *tutto contenuto in* Γ, *sussistono le disuguaglianze*

$$\left| \frac{\partial f_i}{\partial y_j} \right| < \frac{\varepsilon}{n}, \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n), \tag{10}$$

$$|f_i(x; 0)| < k(1 + \varepsilon) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{11}$$

in cui ε *rappresenta una frazione propria.*

Tenendo conto delle (10), le (9), limitate a valori dell'intorno suddetto, possono essere scritte

$$|f_i(x; y + \Delta y) - f_i(x; y)| \leqslant \frac{\varepsilon}{n} \sum_{1}^{n}{}_j |\Delta y_j|, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{12}$$

5. - Dimostrazione di illimitata applicabilità delle successive approssimazioni.

Consideriamo un generico sistema di valori delle x, contenuti nel campo γ $(|x| \leqslant h)$. Le prime approssimazioni delle y

$$y_i^{(1)} = f_i(x; 0) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{4}$$

risultano, in modulo, $< k(1 - \varepsilon)$, a norma delle (11), e quindi a fortiori $< k$.

Per riconoscere il comportamento delle seconde approssimazioni $y_i^{(2)}$, consideriamo *le correzioni*

$$\delta_i^{(1)} = y_i^{(2)} - y_i^{(1)} = f_i(x; y^{(1)}) - f_i(x; 0) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{13}$$

che vanno apportate alle prime approssimazioni $y_i^{(1)}$ per conseguire le $y_i^{(2)}$.

Si ha dalle (12)

$$|\delta_i^{(1)}| \leqslant \frac{\varepsilon}{n} \sum_1^n {}_j |y_j^{(1)}|,$$

e per conseguenza, essendo ogni prima approssimazione $y_i^{(1)}$ inferiore a $k(1-\varepsilon)$ in valore assoluto,

$$|\delta_i^{(1)}| \leqslant \varepsilon k(1-\varepsilon) \qquad (i = 1, 2, ..., n). \tag{14}$$

Con ciò le (13) porgono

$$|y_i^{(2)}| = |y_i^{(1)} + \delta_i^{(1)}| \leqslant |y_i^{(1)}| + |\delta_i^{(1)}| \leqslant k(1-\varepsilon) + \varepsilon k(1-\varepsilon),$$

ossia

$$|y_i^{(2)}| \leqslant k(1-\varepsilon^2) \leqslant k \qquad (i = 1, 2, ..., n), \tag{15}$$

donde apparisce che anche le seconde approssimazioni non superano k in valore assoluto.

È facile ora provare induttivamente che, se si introducono le correzioni dei vari ordini

$$\delta_i^{(\nu)} = y_i^{(\nu+1)} - y_i^{(\nu)} \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2, ..., n \\ \nu = 1, 2, 3, ... \end{pmatrix}, \tag{16}$$

si ha, per un ν generico,

$$|\delta_i^{(\nu)}| \leqslant \varepsilon^\nu k(1-\varepsilon) \qquad (i = 1, 2, ..., n), \tag{17}$$

$$|y_i^{(\nu+1)}| \leqslant k(1-\varepsilon^{(\nu+1)}) \qquad (i = 1, 2, ..., n), \tag{18}$$

dalle quali ultime in particolare discende (per essere in ogni caso $1-\varepsilon^{\nu+1} < 1$) che si resta indefinitamente al disotto di k, in valore assoluto.

Invero le due disuguaglianze (17) e (18) valgono per $\nu = 1$, riducendosi allora alle (14) e (15), testè stabilite. Supposto poi che esse sussistano fino ad un certo ordine $\nu - 1$, si estendono al successivo ν, come segue:

Dalle (16) e (5) si ha

$$\delta_i^{(\nu)} = y_i^{(\nu+1)} - y_i^{(\nu)} = f_i(x; y^{(\nu)}) - f_i(x; y^{(\nu-1)}),$$

donde, prendendo i valori assoluti e badando alle (12),

$$|\delta_i^{(\nu)}| \leqslant \frac{\varepsilon}{n} \sum_1^n {}_j |y_j^{(\nu)} - y_j^{(\nu-1)}| .$$

Le differenze $y_i^{(\nu)} - y_j^{(\nu-1)}$ non sono altro che le correzioni $\delta_j^{(\nu-1)}$, per le quali supponiamo già constatate le disuguaglianze (17)

$$|\delta_j^{(\nu-1)}| \leqslant \varepsilon^{\nu-1} k(1-\varepsilon) .$$

Ne vengono le disuguaglianze analoghe

$$|\delta_j^{(\nu)}| \leqslant \varepsilon^{\nu} k(1-\varepsilon)$$

per le correzioni d'ordine ν.

D'altra parte le (16) danno

$$y_i^{(\nu+1)} = y_i^{(\nu)} + \delta_i^{(\nu)} ;$$

quindi, ritenute valide le (18) per $|y_i^{(\nu)}|$, e usando la limitazione testè conseguita per $|\delta_i^{(\nu)}|$, si ha

$$|y_i^{(\nu+1)}| \leqslant k(1-\varepsilon^{\nu}) + \varepsilon^{\nu} k(1-\varepsilon) = k(1-\varepsilon^{\nu+1}) , \qquad \text{c. d. d.}$$

Per uniformità di notazione, conviene risguardare lo zero (valore assunto da ogni y, per $x = 0$) come approssimazione d'ordine zero, $y_i^{(0)}$. Del pari conviene introdurre le correzioni d'ordine zero

$$\delta_i^{(0)} = y_i^{(1)} - y_i^{(0)} = f_i(x;\, 0) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

che coincidono colle $y_i^{(1)}$ e verificano le disuguaglianze

$$|\delta_i^{(0)}| = |y_i^{(1)}| \leqslant k(1-\varepsilon) .$$

Con ciò le (17) e le (18), di cui era stata provata la validità da $\nu = 1$ in avanti, rimangono estese anche al valore zero dell'ordine ν.

6. - Convergenza.

Le disuguaglianze (17) mostrano che, qualunque sia il sistema di valori delle x contenuti in γ (cioè in modulo non superiori ad h), che si prendono a considerare, le n serie

$$\sum_0^\infty {}_\nu \, \delta_i^{(\nu)} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

sono uniformemente convergenti, e, siccome i singoli termini sono funzioni continue delle x, nulle per $x = 0$, tali risultano anche le loro somme φ_i.

Ora, dalla stessa definizione delle varie correzioni δ [cioè dalle (19) e (16)], si ha manifestamente

$$y_i^{(\nu)} = \delta_i^{(0)} + \delta_i^{(1)} + \ldots + \delta_i^{(\nu-1)}$$

ossia $y_i^{(\nu)}$ è somma dei primi ν termini di una serie assolutamente e uniformemente convergente in γ. Ne consegue che si ha (uniformemente nel campo γ)

$$\lim y_i^{(\nu)} = \sum_{0}^{\infty}{}_{\nu}\, \delta_i^{(\nu)} = \varphi_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{20}$$

designando le φ funzioni delle variabili indipendenti x, finite e continue in γ, le quali si annullano per $x = 0$.

Così le funzioni implicite y_i, definite dalle (1), rimangono esplicitate quali somme di serie (assolutamente e uniformemente convergenti).

Dal punto di vista della rappresentazione analitica formale, è questo il risultato definitivo; più espressiva e più comoda per il calcolo effettivo è la determinazione sotto forma di limite delle approssimazioni successive.

7. - Univocità della risoluzione.

Mostriamo che, oltre delle φ_i, non può esistere un diverso sistema di funzioni

$$y_i = \psi_i(x_1, x_2, \ldots, x_m) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

annullantisi per $x = 0$, finite e continue nell'intorno di questi valori, le quali verifichino le stesse equazioni implicite (1').

All'uopo cominciamo coll'osservare che, annullandosi queste ipotetiche ψ_i per $x = 0$ ed essendo continue, esiste un certo intorno nel quale esse si mantengono in valore assoluto minori di quel numer positivo k, che figura nelle precedenti considerazioni.

Limitiamo, ove occorra, questo intorno in modo che sia tutto contenuto in γ, e diciamolo γ^*.

Si constaterà che in γ^* le funzioni ψ_i necessariamente coincidono colle φ_i.

Proviamoci infatti a supporre il contrario e formiamo le n differenze

$$\omega_i = \varphi_i - \psi_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

I valori assoluti, che loro competono in γ^*, ammetteranno (nell'ipotesi che si tende ad escludere) un limite superiore λ, *diverso da zero*. Di più, trattandosi di funzioni continue, potremo asserire che c'è un ben determinato sistema di valori x^* del campo γ^*, per i quali una almeno delle ω, quella d'indice l diciamo, assume precisamente un valore di modulo λ.

Ciò posto, sfruttiamo la circostanza che tanto le φ, quanto le ψ sono soluzioni delle (1'). Dovremo avere

$$\varphi_l = f_l(x; \varphi) , \qquad \psi_l = f_l(x; \psi) ,$$

donde, per differenza,

$$\omega_l = f_l(x; \varphi) - f_l(x, \psi) . \tag{21}$$

Attribuiamo alle x i valori x^*, chiamando φ^*, ψ^*, ω^* i valori corrispondentemente assunti dalle φ, ψ, ω, e osserviamo che tanto le φ^* quanto le ψ^* sono in modulo inferiori a k, sicchè alla differenza del secondo membro può applicarsi la disuguaglianza (21). Ciò dà

$$|f_l(x^*; \varphi^*) - f_l(x^*; \psi^*)| \leqslant \frac{\varepsilon}{n} \sum_1^n {}_j |\varphi_j^* - \psi_j^*| = \frac{\varepsilon}{n} \sum_1^n {}_j |\omega_j^*| .$$

Nessuna delle $|\omega|$ supera λ. Il secondo membro della (21) ha perciò un valore assoluto non superiore a $\varepsilon\lambda$ ($\varepsilon < 1$). Invece (per gli stessi valori x^* delle x) il primo membro è proprio eguale λ in valore assoluto. L'ipotesi $\lambda > 0$ porta, come si vede, a manifesta contraddizione.

Sarà dunque $\lambda = 0$, il che è quanto dire $\psi_i = \varphi_i$ ($i = 1, 2, \ldots, n$) in tutto il campo γ^*, c. d. d.

XII.

ÜBER LORENTZ - EINSTEINSCHE STARRE BEWEGUNGEN

(Auszug aus einem Briefe an Hrn. Prof. G. HERGLOTZ in Leipzig)

« Ann. der Physik », Bd. 32 (1910),

pp. 236-240.

. . . .

. . . .

Sie haben neulich (¹) diejenigen Bewegungen eines kontinuierlichen Punktsystems, welche nach den LORENTZ-EINSTEINschen Relativitätsprinzip als *starr* zu bezeichnen sind, vollständig charakterisiert, auf Grund einer (sozusagen vierdimensionalen (²)) Definition der (relativen) Starrheit, die man Hrn. MAX BORN verdankt (³).

Durch Ihre schöne Abhandlung veranlaßt, habe ich nun bemerkt, daß der Begriff der relativen Starrheit sich in viel anschaulicherer Weise einführen läßt. Man braucht nur, ohne den physikalischen Raum zu verlassen, die (scheinbare) Unveränderlichkeit des Systems für einen mitbewegten Beobachter direkt auszudrücken.

Diese leichtere Fassung des Sachverhältnisses kann selbstverständlich ihre eingehende Untersuchung in keiner Weise ersetzen; sie ermöglicht doch unmittelbar eine deutliche Einsicht in die Natur der relativ festen Verbindungen, und läßt schon am einfachsten Beispiel zweier diskreter Punkte die bedenklichen (d.h. den gewöhnlichen Anschauungen über die Beweglichkeit eines starren Körpers ganz widersprechenden) Folgen einsehen, welche die konsequente Weiterführung des Relativitätsprinzips mit sich bringen würde.

Zur Bestätigung dieser Behauptungen wird es angemessen sein, von der geometrischen Formulierung der LORENTZschen Kontraktion auszugehen.

(¹) G. HERGLOTZ, « Ann. d. Phys. », 31 (1910), pp. 393-415.
(²) Vgl. jedoch auch die « physikalische » Formulierung l. c. p. 397.
(³) M. BORN, « Ann. d. Phys. », 30 (1909), pp. 1-50.

Betrachten wir irgend einen Körper K in gleichförmiger Translationsbewegung. Sei $\boldsymbol{\beta}$ die konstante Geschwindigkeit der Bewegung (im vektoriellen Sinne), β ihr absoluter Betrag (die Lichtgeschwindigkeit gleich 1 und $\beta < 1$ fortan vorausgesetzt).

Nach der LORENTZschen Hypothese gilt, *für ruhende Beobachter*, dieses:

a) jede longitudinale (d.h. der Bewegung gleichgerichtete) Strecke von K findet sich verkürzt im Verhältnis $\sqrt{1-\beta^2}:1$;

b) jede transversale (d.h. zur Bewegungsrichtung normale) Strecke bleibt unverändert.

Wie verhält sich nun eine (immer dem K angehörende) Strecke $\boldsymbol{d}$, die weder normal noch parallel zur Bewegungsrichtung gestellt ist?

Es seien (von einem ruhenden Beobachter gemessen) d die Länge, und ϑ der Winkel zwischen $\boldsymbol{d}$ und $\boldsymbol{\beta}$. Es sei noch d_0 die natürliche Länge der Strecke, d.h. jene Länge, welche im Zustande der Ruhe (für einen ebenfalls ruhenden Beobachter) ihr zukommen würde, ϑ_0 die betreffende Neigung gegen $\boldsymbol{\beta}$.

Die longitudinale Komponente $d\cos\vartheta$ von $\boldsymbol{d}$ muß, nach *a*), kleiner als $d_0\cos\vartheta_0$ ausfallen, im Verhältnis $\sqrt{1-\beta^2}:1$, so daß

$$\frac{d\cos\vartheta}{\sqrt{1-\beta^2}} = d_0\cos\vartheta_0\,.$$

Die transversale Komponente $d\sin\vartheta$ ist dagegen gleich der natürlichen:

$$d\sin\vartheta = d_0\sin\vartheta_0\,.$$

Quadriert und addiert man die zwei Gleichungen, so ergibt sich

$$d^2\left(\frac{\cos^2\vartheta}{1-\beta^2} + \sin^2\vartheta\right) = d_0^2\,,$$

d. h.

$$(1)\qquad d^2\left\{1 + \frac{\beta^2\cos^2\vartheta}{1-\beta^2}\right\} = d_0^2\,,$$

worin das allgemeine Kontraktionsgesetz zu erblicken ist.

Dem Relativitätsprinzip zufolge wird diese, von einem ruhenden Bezugssystem aus, wahrgenommene Kontraktion, von einem mit K bewegten Beobachter, *nicht* bemerkt: ihm *scheint* jede Strecke $\boldsymbol{d}$ ganz unverändert.

Die Gleichung (1) gilt daher als notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß einer in translatorischer Bewegung mit der Geschwindigkeit $\boldsymbol{\beta}$ sich befindenden Strecke $\boldsymbol{d}$ die *scheinbare* Länge d_0 zukommt, selbstverständlich für einen mitbewegten Beobachter.

* * *

Dies festgestellt, betrachten wir, von einem ruhenden Bezugssystem $Oxyz$ aus, zwei (zunächst irgendwie) sich bewegende Puntke P_1, P_2.

Nennen wir x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2 ihre Koordinaten zur Zeit t; $\boldsymbol{\beta}_1$ und $\boldsymbol{\beta}_2$ ihre Geschwindigkeiten (als Vektoren, so daß β_1 und β_2 die absoluten Werte bezeichnen); ϑ_1 und ϑ_2 die Neigungen der Strecke P_1P_2 gegen $\boldsymbol{\beta}_1$ und $\boldsymbol{\beta}_2$, immer zur Zeit t.

Es fragt sich nun: Wie müssen die Bewegungen beider Punkte miteinander verbunden sein, damit die Strecke $\overline{P_1P_2}$ unveränderlich *erscheint* sowohl einem sich mit P_1, als einem zweiten sich mit P_2 bewegenden Beobachter? Es wird dabei naturgemäß vorausgesetzt, daß, für jeden dieser Beobachter, die scheinbaren Längen genau dieselben sind als ob es sich um eine gleichförmige Translation handeln würde, mit der Geschwindigkeit $\boldsymbol{\beta}_1$ bzw. $\boldsymbol{\beta}_2$ des entsprechenden Augenblickes.

Setzen wir zur Abkürzung

$$d^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2\,, \tag{2}$$

so wird, nach (1), das Quadrat der scheinbaren Länge der Strecke P_1P_2, von P_1 aus betrachtet,

$$d^2\left\{1 + \frac{\beta_1^2 \cos^2 \vartheta_1}{1 - \beta_1^2}\right\},$$

von P_2 aus,

$$d^2\left\{1 + \frac{\beta_2^2 \cos^2 \vartheta_2}{1 - \beta_2^2}\right\}.$$

Beide Ausdrücke müssen nach unserer Forderung einen, während der Bewegung, konstanten Wert behalten. Bezeichnen wir diesen (notwendig positiven) konstanten Wert mit d_1^2 bzw. d_2^2, so sehen wir, daß *die feste Verbindung von P_1 und P_2 sich mit den zwei Bedingungsgleichungen*

$$\left\{\begin{aligned} & d^2\left\{1 + \frac{\beta_1^2 \cos^2 \vartheta_1}{1 - \beta_1^2}\right\} = d_1^2\,, \\ & d^2\left\{1 + \frac{\beta_2^2 \cos^2 \vartheta_2}{1 - \beta_2^2}\right\} = d_2^2\,, \end{aligned}\right. \tag{3}$$

deckt.

Schon die Tatsache, daß die gewöhnliche Starrheit eine einzige Bedingungsgleichung ($d^2 =$ Konstante), die relative dagegen *zwei* solche verlangt, zeigt, daß beim elektromagnetischrelativen Weltbild fester Körper verloren gehen. So z.B. in der Ebene, wenn die Bewegung des einen von zwei Punkten vorgeschrieben ist, wird die des anderen (durch Anfangslage und Anfangsgeschwindigkeit) vollständig bestimmt usw.

* * *

Die Gleichungen (3) besagen noch nicht, daß die scheinbaren Längen der Strecke P_1P_2, von P_1 und von P_2 aus betrachtet, notwendig gleich ausfallen.

Wollen wir auf diese tief in der üblichen Anschauung liegende Symmetrie nich verzichten, so müssen wir von vornherein $d_1 = d_2$ setzen. Dies würde jedoch aus den Gleichungen (3) allein folgen, wenn wir es mit Bewegungen zu tun hätten, für welche in irgend einem Augenblick t_0 die beiden Punkte P_1 und P_2 gleichzeitig ruhen: es ist dann nämlich, für $t = t_0$, die natürliche Länge der Strecke P_1P_2, und die Gleichungen (3) reduzieren sich auf $d = d_1$, $d = d_2$.

* * *

Es liegt nun nahe, die relative Starrheit eines bewegten Kontinuums in ganz analoger Weise zu definieren.

Wir werden verlangen müssen, daß irgend zwei unendlich benachbarte Punkte P_1 und P_2 des Kontinuums sich so bewegen, daß ihre *scheinbare* elementare Entfernung einen konstanten Wert behält.

Der analytische Ausdruck dieser differentiellen Bedingung ist nichts anderes als die Gleichung (13) (p. 396) Ihrer Note, worin unter $d\sigma^2$ die quadratische Form (18) zu verstehen ist. So sieht man, was für ein begrifflicher Inhalt der von Hrn. M. Born aufgestellten vierdimensionalen Definition des relativstarren Körpers beizulegen ist.

Wie wir soeben auf Grund der Gleichungen (3) für das Beispiel zweier Punkte bemerkt haben, ist in der Definition der relativen Starrheit die Forderung der Symmetrie (Gleichheit zwischen den scheinbaren Längen einer Strecke von ihren beiden Enden aus betrachtet) nicht notwendig enthalten.

In physikalischer Hinsicht würde man eine solche Ergänzungshypothese kaum entbehren, sobald man die Möglichkeit etwaiger Beziehungen zwischen zwei mit denselben starren Körpern bewegten Beobachtern zuläßt. Bei einer solchen Hypothese würde man sogar dazu genötigt, auch die *räumliche Homogenität* des bewegten starren Körpers zu fordern: ich meine damit die Erhaltung, für mitbewegte Beobachter, aller geometrischen Tatsachen und Erfahrungen, welche (im Stande der Ruhe), wegen konstanten Krümmungsmasses des umgebenden Raumes, bestehen würden.

Wie dem auch sei, ist es jedenfalls nicht ohne Interesse zu bemerken, daß aus Ihrer Formel sich unschwer folgender Schluß ziehen läßt:

Die gleichförmigen Translationen sind die einzigen Bewegungen eines relativ-starren Körpers, bei welchen ausserdem die Homogenitätsbedingung erfüllt ist, d.h. bei welchen *alle* anschaulichen Merkmale der gewöhnlichen Starrheit noch vorhanden sind.

In den von Ihnen entdeckten allgemeineren Bewegungsformen ist zwar jede scheinbare Länge erhalten, die Homogenität dagegen verletzt.

. . . .

. . . .

Padua, den 7 März 1910.

XIII.

TRASFORMAZIONE DI UNA RELAZIONE FUNZIONALE DOVUTA AL DINI

NOTA I.

« Rend. Acc. Lincei », ser. 5ª, vol. XX_1 (1° sem. 1911_1), pp. 285-296.

Il prof. DINI ha stabilito una notevole relazione funzionale fra i valori che una funzione α, armonica e regolare entro un cerchio, assume sul contorno e quelli che vi assume la sua derivata normale.

Immaginando di passare, per trasformazione conforme, dal cerchio ad un generico campo S, la α (espressa nelle nuove variabili) si conserva armonica e regolare entro S, e la formula del DINI (per materiale sostituzione) diviene una relazione funzionale, fra α e la sua nuova derivata normale, valida sul contorno trasformato.

Se il modulo della trasformazione conforme rimane finito e diverso da zero, non solo entro il cerchio, ma anche sulla circonferenza limite, si può senz'altro asserire che la nuova relazione funzionale sussiste sotto le stesse ipotesi qualitative, che furono ben precisate dal DINI. Ma se — come per esempio accade quando il campo S si estende all'infinito — le formule di trasformazione sono affette da qualche singolarità sulla circonferenza limite, possono introdursi (circa il comportamento della funzione sul contorno trasformato) restrizioni affatto artificiali e tali da infirmare l'applicabilità del risultato a casi che (rispetto al contorno trasformato) sono da riguardarsi come normali.

Si richiede allora un po' di discussione per assicurare (a posteriori) alla relazione funzionale trasformata i suoi limiti, dirò così, naturali di validità.

Un esempio elementare, particolarmente interessante, si ha nel passaggio dal cerchio ad una striscia (porzione di piano compresa fra due rette parallele). La relazione funzionale corrispondente (o, più esattamente, certo suo corollario) consente di attribuire tutto il desiderabile rigore ad un brillante artificio analitico escogitato da Lord RAYLEIGH per cogliere i caratteri salienti dell'onda solitaria. Più generalmente essa consente di lumeggiare l'intera teoria delle onde di canale.

In vista di ciò, chiedo all'Accademia il permesso di intrattenermi alquanto diffusamente sopra l'anzidetta trasformazione, che pur non presenta alcuna novità concettuale.

La deduzione e discussione delle formule occuperà questa e una successiva Nota. In una terza Nota potrò finalmente passare alle applicazioni.

1. - Richiamo della formula del Dini.

Sia α una funzione armonica, regolare in un certo campo, finita e continua sul contorno di tale campo assieme alla sua derivata normale $d\alpha/dn$ (n designando la normale al contorno, vôlta verso l'interno del campo).

La conoscenza dei valori di $d\alpha/dn$ sul contorno determina notoriamente α, a meno di una costante additiva. L'espressione esplicita, nel caso di un campo circolare, fu assegnata dal prof. DINI già parecchi anni or sono [1] e può scriversi come segue:

$$\alpha_P = -\frac{1}{2\pi}\int_c \log \frac{R^2}{\overline{P_1P}\cdot\overline{P_1P'}} \left(\frac{d\alpha}{dn}\right)_1 dc_1 + \text{cost.}\,, \tag{1}$$

dove c rappresenta la circonferenza che limita il campo; R il suo raggio; al log va attribuita la determinazione reale; α_P sta a rappresentare il valore della α nel punto generico P (interno, o anche appartenente alla circonferenza c); P' è il coniugato armonico di P, rispetto a c; P_1 è un punto di c, rispetto al quale va eseguita l'integrazione, e si contrassegnano coll'indice 1 le determinazioni, che si riferiscono a P_1, della funzione $d\alpha/dn$ e dell'elemento d'arco dc.

Assumiamo, per semplicità, eguale ad 1 il raggio di c, e introduciamo un sistema cartesiano ξ, η coll'origine nel centro, nonchè le corrispondenti coordinate polari ϱ, σ.

Considerando, accanto alla funzione armonica $\alpha(\xi, \eta)$ (dei punti del nostro campo circolare), la sua associata $\beta(\xi, \eta)$, definita (anch'essa a meno di una costante additiva) da

$$d\beta = -\frac{\partial\alpha}{\partial\eta}\,d\xi + \frac{\partial\alpha}{\partial\xi}\,d\eta\,, \tag{2}$$

[1] *Sull'equazione* $\Delta^2 u = 0$, « Annali di Matematica », ser. 2ª, tomo V, 1871, pp. 305-345.

risulterà

$$\gamma = \alpha + i\beta \tag{3}$$

funzione della variabile complessa $\zeta = \xi + i\eta$, regolare per $|\zeta| < 1$, finita e continua assieme alla sua prima derivata sulla circonferenza c ($|\zeta| = 1$).

Se si tien conto che un elemento di c (nel senso delle σ crescenti) e un elemento dn di normale (o, ciò che è lo stesso, di raggio) vôlto verso il centro costituiscono una coppia congruente a quella degli assi coordinati ξ, η, le relazioni di monogeneità [compendiate nella (3)] dànno, in un punto generico di c:

$$\begin{cases} \dfrac{d\beta}{d\sigma} = -\dfrac{d\alpha}{dn}, \\[2mm] \dfrac{d\beta}{dn} = \dfrac{d\alpha}{d\sigma}. \end{cases} \tag{4}$$

Ciò posto, concentriamo l'attenzione sui valori di α, β, al contorno, pensandoli come funzioni di quell'unica variabile — l'anomalia — che fissa la posizione sul contorno stesso.

Riprendiamo la (1), supponendovi P sul contorno, con che P' viene a coincidere con P. Attribuendo la designazione generica σ all'anomalia di P e rappresentando con σ_1 quella di P_1, si ha, per ovvie considerazioni di geometria elementare (dacchè $R = 1$):

$$\overline{P_1P} \cdot \overline{P_1P'} = \overline{P_1P^2} = 4 \operatorname{sen}^2 \frac{\sigma_1 - \sigma}{2}.$$

La prima delle (4) dà

$$\left(\frac{d\alpha}{dn}\right)_1 = -\frac{d\beta(\sigma_1)}{d\sigma_1} = -\beta'(\sigma_1),$$

l'apice designando derivazione rispetto all'argomento indicato.

Si può quindi scrivere

$$\alpha(\sigma) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log \frac{1}{4 \operatorname{sen}^2[(\sigma_1 - \sigma)/2]}\, \beta'(\sigma_1)\, d\sigma_1 + \text{cost}. \tag{5}$$

La (1) vale naturalmente anche per la funzione associata β. Avuto riguardo alla seconda delle (4), se ne trae

$$\beta(\sigma) = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log \frac{1}{4 \operatorname{sen}^2[(\sigma_1 - \sigma)/2]}\, \alpha'(\sigma_1)\, d\sigma_1 + \text{cost}. \tag{6}$$

2. - Corollari.

Supponiamo in particolare che si tratti di una funzione $\gamma(\zeta)$, reale per ζ reale. La parte reale α assume allora valori eguali in punti simmetrici rispetto all'asse reale $\eta = 0$; la β assume invece valori opposti. Ciò si traduce, per i punti di c, nelle formule seguenti:

$$\begin{cases} \alpha(2\pi - \sigma) = \alpha(\sigma)\,, \\ \beta(2\pi - \sigma) = -\beta(\sigma)\,, \end{cases}$$

donde, per derivazione,

$$\begin{cases} \alpha'(2\pi - \sigma) = -\alpha'(\sigma)\,, \\ \beta'(2\pi - \sigma) = \beta'(\sigma)\,. \end{cases}$$

In virtù dell'ultima di queste relazioni, ove si scinda nella (5) l'intervallo di integrazione in due parti (da 0 a π, e da π a 2π), si cambi, nel secondo integrale, la variabile corrente di integrazione σ_1 in $2\pi - \sigma_1$, e si ponga

$$H(\sigma_1, \sigma) = \log \frac{1}{16\,\mathrm{sen}^2[(\sigma_1 - \sigma)/2]\,\mathrm{sen}^2[(\sigma_1 + \sigma)/2]}\,, \tag{7}$$

si può attribuire alla (5) la forma

$$\alpha(\sigma) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi H(\sigma_1, \sigma)\beta'(\sigma_1)\,d\sigma_1 + \mathrm{cost}\,. \tag{8}$$

Dacchè si ha identicamente

$$H(\sigma_1,\ 2\pi - \sigma) = H(\sigma_1, \sigma)\,,$$

rimane inclusa, nella espressione (8) di α, la condizione di simmetria al contorno $\alpha(2\pi - \sigma) = \alpha(\sigma)$.

In modo analogo, si ha dalla (6), ove si tenga conto di $\alpha'(2 - \sigma) = -\alpha'(\sigma)$ e si ponga

$$K(\sigma_1, \sigma) = \log \frac{\mathrm{sen}^2[(\sigma_1 + \sigma)/2]}{\mathrm{sen}^2[(\sigma_1 - \sigma)/2]}\,, \tag{9}$$

$$\beta(\sigma) = -\frac{1}{2\pi}\int_0^\pi K(\sigma_1, \sigma)\alpha'(\sigma_1)\,d\sigma_1 + \mathrm{cost}\,.$$

Essendo identicamente

$$K(\sigma_1,\ 2\pi - \sigma) = - K(\sigma_1,\ \sigma)\ ,$$

la proprietà emisimmetrica di β $[\beta(2\pi - \sigma) = - \beta(\sigma)]$ esige che la costante additiva sia nulla. Era ben prevedibile che la indeterminazione dovesse scomparire [a differenza di quel che accade nella (8)], considerando che l'assunta ipotesi (γ reale, e quindi $\beta = 0$ sull'asse reale) può lasciar sussistere la indeterminazione di una costante additiva in α, ma non in β.

Risulta pertanto

$$\beta(\sigma) = - \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} K(\sigma_1,\ \sigma)\alpha'(\sigma_1)\, d\sigma_1\ . \tag{10}$$

3. - Passaggio alla striscia.

Ove si ponga

$$f = \varphi + i\psi = \frac{2}{\pi}\log\frac{1+\zeta}{1-\zeta}\ , \qquad (\varphi \text{ e } \psi \text{ reali}), \tag{11}$$

e si fissi quella determinazione del logaritmo che si annulla con ζ, rimane definita una funzione $f(\zeta)$ della variabile complessa ζ uniforme e regolare entro il cerchio $|\zeta| < 1$, e reale sul diametro reale.

Per riconoscere comodamente la regione del piano complesso f, che viene a corrispondere, per la (11), al campo circolare $|\zeta| \leqslant 1$, introduciamo per un momento anche i due raggi vettori, che congiungono un punto generico ζ (del cerchio o della circonferenza) colle estremità $\zeta = -1$, $\zeta = 1$ del diametro reale. Diciamo ordinatamente ϱ_{-1}, ϱ le lunghezze di questi raggi vettori e ϑ_{-1}, ϑ_1 gli angoli acuti che essi formano coll'asse reale, contati positivamente pel semicerchio di ordinate positive, negativamente per l'altro.

ϱ_{-1}, ϑ_{-1} possono evidentemente interpretarsi quali coordinate polari (del punto ζ) rispetto al polo $\zeta = -1$ e alla direzione positiva (quella delle ascisse crescenti) del diametro reale come asse polare. Del pari ϱ_1, ϑ_1 rispetto al polo $\zeta = 1$ e alla direzione negativa del diametro suddetto: volendo cambiare direzione all'asse, in modo che l'anomalia riesca contata sempre nello stesso verso, le coordinate polari saranno ϱ_1, $\pi - \vartheta_1$.

Ora, $\zeta + 1$ e $\zeta - 1$ essendo le affisse di un punto generico ζ relative alle origini -1, 1 (e ad assi paralleli ai primitivi ξ, η), sussistono le identità

$$\zeta + 1 = \varrho_{-1} e^{i\vartheta_{-1}}$$

$$\zeta - 1 = \varrho_1 e^{i(\pi - \vartheta_1)},$$

la seconda delle quali può essere scritta

$$1 - \zeta = \varrho_1 e^{-i\vartheta_1}.$$

Prendendo i logaritmi dei due membri colla determinazione che si annulla nell'origine (e che rimane univocamente fissata per continuità entro o anche sopra la circonferenza $|\zeta| = 1$, fatta solo eccezione per i punti ± 1), si ha

$$\log(1 + \zeta) = \log \varrho_{-1} + i\vartheta_{-1},$$

$$\log(1 - \zeta) = \log \varrho_1 \ - i\vartheta_1,$$

dove a $\log \varrho_{-1}$, $\log \varrho_1$ vanno naturalmente attribuiti i loro valori reali.

Ne consegue

$$f = \varphi + i\psi = \frac{2}{\pi} \log \frac{\varrho_{-1}}{\varrho_1} + i \frac{2}{\pi} (\vartheta_{-1} + \vartheta_1). \tag{12}$$

Atteso il significato geometrico di ϑ_{-1}, ϑ_1, questa formula mostra nettamente che, al variare di ζ nel semicerchio di ordinate positive, ψ rimane compreso fra 0 e 1, assumendo il valore zero sul diametro e il valore 1 sulla semicirconferenza 1, i, -1. Variando invece ζ nel sottostante semicerchio, ψ varia fra 0 e -1, assumendo (come poteva asserirsi *a priori*, data la realità di f sull'asse reale) valori opposti in punti simmetrici.

Le varie circonferenze passanti per i punti -1, 1, o meglio gli archi di tali circonferenze interni a c (inclusovi il segmento rettilineo -1, 1, che ne è il caso limite) sono luoghi di punti, per cui

$$\psi = \frac{2}{\pi} (\vartheta_{-1} + \vartheta_1),$$

conserva valore costante. Mentre ζ percorre uno di questi archi, passando da -1 a 1, ϱ_{-1} cresce costantemente, a partire dal valore zero, e ϱ_1 decresce costantemente, convergendo verso zero.

Il rapporto ϱ_{-1}/ϱ_1 varia dunque, sempre crescendo, da 0 a ∞, sicchè

$$\varphi = \frac{2}{\pi} \log \frac{\varrho_{-1}}{\varrho_1},$$

varia, crescendo sempre anch'esso, da $-\infty$ a $+\infty$. Ciò val quanto dire che l'affissa f descrive (nel suo piano rappresentativo) una parallela all'asse delle ascisse, percorrendola tutta, in senso positivo.

Se ne conclude che la (11) fa corrispondere al campo circolare $|\zeta| \leqslant 1$ del piano ζ la striscia S del piano f compresa fra le due rette $\psi = \pm 1$, la corrispondenza risultando biunivoca fra i contorni.

Val la pena di rilevare che a valori puramente immaginari di ζ corrispondono analoghi valori di f. Ciò risulta per es. dall'osservare che, per ζ puramente immaginario, $1+\zeta$ e $1-\zeta$ riescono coniugati, sicchè il modulo del rapporto è 1, e la (11) dà $\varphi = 0$. Si può egualmente desumerlo dalla (12), notando che, sul diametro immaginario $-i$, i, si ha $\varrho_{-1} = \varrho_1$.

Consideriamo in particolare i punti ζ della semicirconferenza -1, i, 1, e riprendiamo la coordinata polare σ relativa al centro, facendola variare (in senso sempre decrescente) da π a 0. Il punto $\zeta = e^{i\sigma}$ descrive così la detta semicirconferenza da -1 a 1, e il corrispondente punto f la retta $\psi = 1$ da $-\infty$ a $+\infty$.

Essendo poi

$$\frac{1+\zeta}{1-\zeta} = \frac{1+e^{i\sigma}}{1-e^{i\sigma}} = \frac{e^{-i(\sigma/2)} + e^{i(\sigma/2)}}{e^{-i(\sigma/2)} - e^{i(\sigma/2)}} = i \cot\frac{\sigma}{2},$$

la (11) ci dà

$$\varphi = \frac{2}{\pi} \log \cot \frac{\sigma}{2}, \tag{13}$$

(si intende colla determinazione reale del logaritmo), e di conseguenza

$$\cot\frac{\sigma}{2} = e^{(\pi/2)\varphi}, \tag{13'}$$

le quali esplicitano la relazione biunivoca fra σ e φ, cioè fra i parametri definienti la posizione sul semicerchio -1, i, 1 e sulla retta $\psi = 1$ rispettivamente

4. - Trasformazione subordinata nelle precedenti equazioni funzionali.

Mercè la (11), ogni funzione $\gamma(f)$ della variabile complessa f, uniforme e regolare entro S, si può pure considerare come funzione uniforme e regolare di ζ per i valori corrispondenti, cioè entro il cerchio $|\zeta| \leqslant 1$.

Se $\gamma(f)$ è reale sull'asse reale $\psi = 0$ (bisettrice della striscia), lo sarà di conseguenza $\gamma(\zeta)$ sul diametro reale -1, 1 del cerchio.

Un po' di discussione esige però il comportamento al contorno.

Se (come è tassativo fare per certe applicazioni), circa il comportamento all'infinito di $\gamma(f)$ e di $d\gamma/df$, si ammette soltanto che si conservino entrambe finite sulle rette limiti $\psi = \pm 1$ di S, non ne segue che $\gamma(\zeta)$ rimanga continua, e sopra tutto che $d\gamma/d\zeta$ rimanga finita per i punti ± 1 della circonferenza c.

Infatti, per quanto abbiamo visto nel n. precedente, ove si fissi per esempio la retta $\psi = 1$ e la corrispondente semicirconferenza -1, i, 1, riportandovi i valori di $\gamma(\varphi + i)$, bisogna badare alla circostanza che gli estremi ± 1 della semicirconferenza corrispondono a $\varphi = \pm \infty$.

Se la $\gamma(\varphi + i)$, pur restando finita, non converge verso limiti determinati al crescere indefinito di φ, lo stesso avviene per $\gamma(\zeta)$ al tendere di ζ (sopra la semicirconferenza) verso uno dei due estremi: si ha dunque in generale una discontinuità di seconda specie.

E le cose vanno ancora peggio per $d\gamma/d\zeta$. Essendo, in virtù della (11),

$$\frac{d\gamma}{d\zeta} = \frac{d\gamma}{df}\frac{df}{d\zeta} = \frac{d\gamma}{df}\frac{4}{\pi}\frac{1}{1-\zeta^2}, \tag{14}$$

la $d\gamma/d\zeta$, e con essa α', β', diverranno in generale infinite nei punti $\zeta = \pm 1$.

Perciò una $\gamma(\zeta)$, proveniente nel modo testè indicato, da una $\gamma(f)$ regolare nella striscia, reale sull'asse reale, continua, assieme a $d\gamma/df$, anche sulle rette limiti, ma semplicemente finita all'infinito, non ottempera senz'altro alle condizioni qualitative (del DINI), sotto cui furono dedotte le relazioni funzionali del n. 2.

Introduciamo, in via provvisoria, le ipotesi complementari seguenti:

1) la funzione $\gamma(\varphi + i)$ converge verso valori limiti reali ben determinati per $\varphi = \pm \infty$ (con che $\lim \beta = 0$);

2) $d\gamma(\varphi + i)/d\varphi$ converge verso zero in tal guisa che $d\gamma/d\zeta$ resti finita e continua anche per $\zeta = \pm 1$, o, ciò che è lo stesso, resti finita e continua $d\gamma/d\sigma$ per $\sigma = 0$ e $\sigma = \pi$. Essendo, per la (13),

$$d\varphi = -\frac{2}{\pi}\frac{d\sigma}{\operatorname{sen}\sigma} = -\frac{1}{\pi}\left(e^{(\pi/2)\varphi} + e^{-(\pi/2)\varphi}\right)d\sigma,$$

quest'ultima condizione esige che $d\gamma/d\varphi$ si annulli esponenzialmente all'infinito, per modo che il prodotto

$$\left(e^{(\pi/2)\varphi} + e^{-(\pi/2)\varphi}\right)\frac{d\gamma(\varphi + i)}{d\varphi},$$

converga verso limiti determinati e finiti per $\varphi = \pm \infty$.

Con ciò i valori di α, β verificano, sulla circonferenza c, le condizioni del DINI, e sono di conseguenza legati dalle (8) e (10). Trasformiamole, sostituendovi alle anomalie σ e σ_1 dei punti del semicerchio -1, i, 1 le corrispondenti ascisse φ e φ_1 dei punti della retta $\psi = 1$.

Le formule di passaggio, cioè la (13)

$$\cot\frac{\sigma}{2} = e^{(\pi/2)\varphi}\,,$$

e l'analoga

$$\cot\frac{\sigma_1}{2} = e^{(\pi/2)\varphi_1}\,,$$

conferiscono ai nuclei $H(\sigma_1, \sigma), K(\sigma_1, \sigma)$, definiti da (7) e (9), le espressioni seguenti

$$H(\varphi_1, \varphi) = \log\left\{\frac{(1+e^{\pi\varphi_1})(1+e^{\pi\varphi})}{4(e^{\pi\varphi_1}-e^{\pi\varphi})}\right\}^2$$

$$= \log\left\{\frac{(e^{(\pi/2)\varphi_1}+e^{-(\pi/2)\varphi_1})(e^{(\pi/2)\varphi}+e^{-(\pi/2)\varphi})}{4\{e^{(\pi/2)(\varphi_1-\varphi)}-e^{(-\pi/2)(\varphi_1-\varphi)}\}}\right\}^2,$$

$$K(\varphi_1, \varphi) = \log\left\{\frac{e^{(\pi/2)\varphi_1}+e^{(\pi/2)\varphi}}{e^{(\pi/2)\varphi_1}-e^{(\pi/2)\varphi}}\right\}^2. \tag{9'}$$

In $H(\varphi_1, \varphi)$ conviene staccare l'addendo $\log(1/16)(e^{(\pi/2)\varphi}+e^{-(\pi/2)\varphi})^2$, che non dipende da φ_1, e scrivere in conformità

$$H(\varphi_1, \varphi) = \Lambda(\varphi_1, \varphi) + \log\left[\frac{1}{16}(e^{(\pi/2)\varphi}+e^{-(\pi/2)\varphi})^2\right], \tag{7'}$$

con

$$\Lambda(\varphi_1, \varphi) = \log\left\{\frac{e^{(\pi/2)\varphi_1}+e^{-(\pi/2)\varphi_1}}{e^{(\pi/2)(\varphi_1-\varphi)}-e^{(-\pi/2)(\varphi_1-\varphi)}}\right\}^2. \tag{15}$$

Se si nota che

$$\alpha'(\sigma_1)\,d\sigma_1 = d\alpha = \alpha'(\varphi_1)\,d\varphi_1\,,$$

e che, come abbiamo rilevato alla fine del n. 3, al verso -1, i, 1 del semicerchio, cioè al verso decrescente di σ da π a zero, fa riscontro il verso crescente $-\infty$, $+\infty$ di φ, la (10) assume l'aspetto

$$\beta(\varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} K(\varphi_1, \varphi)\alpha'(\varphi_1)\,d\varphi_1\,. \tag{I}$$

In modo analogo la (8) diviene

$$(8') \qquad \alpha(\varphi) = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} H(\varphi_1, \varphi)\beta'(\varphi_1)\, d\varphi_1 + \text{cost}\,.$$

Per la prima delle ipotesi complementari, pocanzi enunciate, la funzione $\beta(\varphi)$ deve tendere verso zero per $\varphi = \pm\infty$; ciò implica, esistendo ed essendo anzi continua la derivata,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \beta'(\varphi_1)\, d\varphi_1 = 0\,.$$

Ne segue, avuto riguardo alla espressione (7′) di H, che si può, nella (8′), ridurre H al primo addendo Λ, e ritenere accanto alla (1), l'equazione

$$(\text{II}) \qquad \alpha(\varphi) = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \Lambda(\varphi_1, \varphi)\beta'(\varphi_1)\, d\varphi_1 + \text{cost}\,.$$

La (I), immaginandovi per un momento sostituita ad α' la derivata normale di β, concerne, si può dire, le funzioni armoniche β *dispari* rispetto all'asse reale (tali cioè che assumono valori opposti in punti simmetrici rispetto a tale asse); la (II) (immaginandovi introdotta per β' la derivata normale di α) concerne invece le funzioni *pari* (simmetriche rispetto allo stesso asse). Appare così giustificato, e potrà talora essere comodo, di designare la (I) e la (II) colle qualifiche rispettive di *relazioni dispari* e *relazioni pari*.

5. - Comportamento dei nuclei $K(\varphi_1, \varphi)$, $\Lambda(\varphi_1, \varphi)$.

Occupiamoci dapprima di K.

Designando per brevità con s la differenza $(\pi/2)(\varphi_1 - \varphi)$, la (9′) ci dà

$$(16) \qquad K(\varphi_1, \varphi) = \log\left(\frac{1+e^{-s}}{1-e^{-s}}\right)^2 = \log\left(\frac{1+e^{s}}{1-e^{s}}\right)^2,$$

donde apparisce che K dipende soltanto dall'argomento s e ne è funzione pari. Esso ha manifestamente un infinito logaritmico per $s = 0$ $(\varphi_1 = \varphi)$, mentre si mantiene regolare per ogni altro valore reale di s;

è ovunque positivo, e decresce al decrescere di s in valore assoluto, annullandosi esponenzialmente per $s = \pm \infty$. Ciò risulta dall'osservare che, per $|s| > 0$, si ha dalla nota serie logaritmica

$$\log \left(\frac{1 + e^{-|s|}}{1 - e^{-|s|}}\right)^2 = 2\{\log (1 + e^{-|s|}) - \log (1 - e^{-|s|})\} \tag{17}$$

$$= 4 \left\{e^{-|s|} + \frac{e^{-3|s|}}{3} + \frac{e^{-5|s|}}{5} + \ldots\right\}.$$

Come si vede, i singoli termini sono positivi e sempre decrescenti al crescere di $|s|$; la funzione tende poi asintoticamente ad annullarsi come $e^{-|s|}$. Essa rimane quindi integrabile fra $-\infty$ e $+\infty$, anche molitplicata per una potenza qualsiasi di s.

Lo stesso può dirsi, riponendo per s il suo valore $(\pi/2)(\varphi_1 - \varphi)$, nei riguardi della variabile φ_1.

Ne consegue in particolare che, se $A(\varphi_1)$ designa una qualsiasi funzione di φ_1, finita e continua al finito, e finita (o anche dotata di singolarità polare comunque elevata) per $\varphi_1 = \pm \infty$, l'integrale

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K(\varphi_1, \varphi) A(\varphi_1)\, d\varphi_1 ,$$

rappresenta una funzione di φ, finita e continua anche all'∞.

Prendiamo in particolare $A(\varphi_1) = 1$. Avremo anzi tutto, adottando $s = (\pi/2)(\varphi_1 - \varphi)$ come variabile di integrazione al posto di φ_1, e tenendo presente la parità della K, considerata come funzione di s,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K(\varphi_1, \varphi)\, d\varphi_1 = \frac{2}{\pi^2} \int_0^{\infty} \log \left(\frac{1 + e^{-s}}{1 - e^{-s}}\right)^2 ds .$$

Al $\log [(1 + e^{-s})/(1 - e^{-s})]^2$ si può applicare lo sviluppo (17) e integrare termine a termine da un ε positivo, comunque piccolo, a ∞; dopo di che, attesa l'integrabilità della funzione e l'uniforme convergenza della serie degli integrali anche per $\varepsilon = 0$, si ha al limite

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K(\varphi_1, \varphi)\, d\varphi_1 = \frac{8}{\pi^2} \left\{1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots\right\} = \frac{8}{\pi^2}\, s_2' ,$$

designando s_2' la somma delle inverse dei quadrati dei numeri dispari. Ora la somma s_2 delle inverse dei quadrati di tutti i numeri naturali vale $\pi^2/6$ ([2]). D'altra parte s_2 consta di s_2' e dell'analoga somma relativa ai numeri pari, che vale $\frac{1}{4}s_2$. Se ne ricava

$$s_2' = \tfrac{3}{4}\, s_2 = \frac{\pi^2}{8}\,,$$

e di conseguenza

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} K(\varphi_1, \varphi)\, d\varphi_1 = 1\,, \tag{18}$$

per qualsiasi valore (reale) di φ.

Val la pena di rilevare che quest'ultima formula può essere considerata come quel caso particolare della relazione dispari (I), che si riferisce alla funzione $\gamma(f) = f = \varphi + i\psi$: si ha infatti, per tale funzione, $\alpha' = \beta = 1$ sulla retta $\psi = 1$. Si noti tuttavia che $\gamma(f) = f$ non è una di quelle funzioni, per cui la formula (I) può ritenersi senz'altro trasportabile dal cerchio, in base a quanto precede. In realtà lo è, come vedremo più innanzi. Intanto ho voluto, a titolo d'esempio, fare il calcolo diretto dell'integrale.

Passiamo alla funzione $\Lambda(\varphi_1, \varphi)$, e consideriamone il modo di variare con φ_1 in corrispondenza ad un valore (finito) generico di φ. Dalla (15) apparisce che Λ ha una singolarità logaritmica per $\varphi_1 = \varphi$, si mantiene regolare per ogni altro valore reale di φ_1, convergendo, per $\varphi_1 = \pm\infty$, verso i limiti $\pm\pi\varphi$ rispettivamente. Questo infirma la integrabilità della Λ (rispetto a φ_1) da $-\infty$ a $+\infty$.

Mostrerò in una prossima Nota come si possa allargare il campo di validità delle equazioni integrali (I), (II).

([2]) Cfr. per es. CESÀRO, *Corso di analisi algebrica*. Torino, Bocca, 1894, p. 481.

NOTA II.

Ibidem, pp. 381-391.

6. – Nella precedente Nota [1] abbiamo stabilito due equazioni integrali (I), (II) fra i valori al contorno di una funzione $\gamma(f)$ della variabile complessa f, regolare entro una striscia S e reale sull'asse reale (bisettrice della striscia). Vi siamo pervenuti per trasformazione di analoghe formule relative al cerchio, in base ad ipotesi addizionali piuttosto restrittive circa il comportamento della γ al contorno. È però facile, una volta acquisite le formule, il controllarle a posteriori. Avremo così il vantaggio di estenderne notevolmente i limiti di validità. E precisamente accerteremo che, *affinchè esista una funzione* $\gamma(f)$, *regolare entro la striscia, reale sull'asse reale e soddisfacente sul contorno* $\psi = 1$ *alla relazione dispari* (I), *basta la ipotesi seguente*:

a) $\alpha'(\beta)$ *è funzione* (dei punti della retta $\psi = 1$) *continua al finito, e dotata di limite superiore finito, anche al crescere indefinito dell'argomento.*

Per la relazione pari (II) *si ha invece come condizione sufficiente*:

b) $\beta'(\varphi)$ *è continua e integrabile da* $-\infty$ *a* $+\infty$, *essendo altresì*

$$\lim_{\varphi=\pm\infty} \beta = 0 ,$$

e quindi

$$\int_{-\infty}^{\infty} \beta'(\varphi)\, d\varphi = 0 .$$

In entrambi i casi, la $\gamma(f)$ rimane altresì *univocamente* determinata (a meno di una costante additiva reale), purchè si prendano in considerazione soltanto funzioni, per cui la β ammette un limite superiore finito in tutta la striscia (contorno incluso).

---

[1] Cfr. p. 285 e seg. (seduta del 5 Marzo) [in questo vol., pp. 163-174].

7. - Prolungamento analitico della K.

Consideriamo la funzione

$$K(\varphi_1, f - i) = \log \left\{ \frac{e^{(\pi/2)\varphi_1} + e^{\pi/2(f-i)}}{e^{(\pi/2)\varphi_1} - e^{\pi/2(f-i)}} \right\}^2 , \tag{19}$$

(che si ottiene materialmente dalla (9′) sostituendo $f - i$ a φ) per f variabile nella solita striscia S (compresa fra le rette $\psi = \pm 1$), e φ_1 parametro reale qualsiasi.

Prendiamo dapprima f sulla retta $\psi = 1$ che limita superiormente la striscia, e supponiamo, per fissare le idee, $\varphi > \varphi_1$. Scegliamo, in corrispondenza ad uno qualunque di tali valori ($\psi = 1$, $\varphi > \varphi_1$), quella determinazione reale $K(\varphi_1, \varphi)$, di cui abbiamo studiato il comportamento nella Nota precedente (n. 5). Ed esaminiamo quel che avviene quando si fa variare f *senza uscire dalla striscia e senza mai attraversare punti singolari*, attribuendo beninteso a $K(\varphi, f - i)$ la determinazione voluta dalla continuità.

Restando per un momento sulla retta $\psi = 1$, è chiaro che, fino a che $\varphi > \varphi_1$, la funzione definita dalla (19) seguiterà a coincidere colla $K(\varphi_1, \varphi)$ del n. 5. Ma non possiamo affermare che ciò accadrà pure per $\varphi < \varphi_1$, poichè c'è di mezzo una singolarità (logaritmica) per $\varphi = \varphi_1$. Evitiamola, addentrandoci intanto nella striscia, dove non saremo arrestati da alcuna singolarità: torneremo poi al contorno.

Posto, per brevità di scrittura,

$$\frac{\pi}{2}(\psi - 1) = \chi ,$$

(con che, *entro* la striscia, $0 < \chi < \pi$) e

$$\frac{\pi}{2}(\varphi_1 - \varphi) = s ,$$

la (19) assume l'aspetto

$$K(\varphi_1, f - i) = \log \left(\frac{1 + e^{-s+i\chi}}{1 - e^{-s+i\chi}} \right)^2 = \log \left(\frac{1 + e^{s-i\chi}}{1 - e^{s-i\chi}} \right)^2 . \tag{20}$$

Si vede che, per $0 < \chi < \pi$, la funzione di cui si deve prendere il logaritmo, non ha nè zeri, nè infiniti, qualunque sia il valore reale di s.

Considerazioni analoghe a quelle del n. 5 mostrano poi che la K si annulla esponenzialmente per $s = \pm\infty$.

Ne consegue che, *colla determinazione iniziale*

$$(21) \qquad K(\varphi, f-i) = K(\varphi_1, \varphi) \quad \text{per} \quad \psi = 1 \quad \text{e} \quad \varphi > \varphi_1 ,$$

da noi adottata, la (19) *definisce una funzione uniforme della variabile complessa f, regolare entro la striscia S, per qualsiasi valore reale del parametro φ_1, e integrabile, rispetto a φ_1, da $-\infty$ a $+\infty$. Questa funzione è puramente immaginaria sull'asse reale $\psi = 0$.* Infatti la (19), per $f = \varphi$ [o la (20) per $\chi = \pi/2$], mostrano che la frazione sotto il segno logaritmo ha modulo 1; la parte reale del logaritmo stesso è quindi nulla, indipendentemente dalla determinazione con cui lo si deve prendere. Per essere $K(\varphi_1, f-i)$ puramente immaginaria sull'asse reale $\psi = 0$, saranno coniugati i valori di iK in punti simmetrici rispetto allo stesso asse: in particolare, i valori limiti di iK, e quindi di K, su $\psi = -1$ potranno essere desunti per riflessione da quelli che gli competono per $\psi = 1$.

Siamo così ridotti, per esaurire la nostra discussione, a renderci conto del comportamento di K sulla rimanente parte $(\varphi < \varphi_1)$ della retta $\psi = 1$.

All'uopo notiamo che (f essendo l'affissa di un punto generico di S rispetto agli assi coordinati φ, ψ, cui ci siamo finora riferiti)

$$f^* = f - (\varphi_1 + i)$$

può interpretarsi come affissa (dello stesso punto) rispetto ad assi paralleli ai primitivi coll'origine nel punto $\varphi_1 + i$ (della retta limite $\psi = 1$). Rispetto a tale sistema i punti di S cadono tutti nel terzo e quarto quadrante: le anomalie loro, dedotte per continuità da una generica, potranno ritenersi comprese fra 0 e $-\pi$, ove si convenga di attribuire il valore zero dell'anomalia della semiretta $\psi = 1$, $\varphi > \varphi_1$. Questa ovvia osservazione si trasporta alla funzione

$$\log f^* = \log \{f - (\varphi_1 + i)\} ,$$

in cui il coefficiente di i è precisamente l'anomalia ϑ^* del punto considerato f^*, o, se si vuole, f, rispetto al sistema ausiliario. Adottata la determinazione reale $\log(\varphi - \varphi_1)$, per f^* reale e positivo ($\psi = 1$, $\varphi > \varphi_1$), si avrà, per f^* reale negativo ($\psi = 1$, $\varphi < \varphi_1$), $\vartheta^* = -\pi$, ossia

$$(22) \qquad \log f^* = \log(\varphi_1 - \varphi) - i\pi$$

[si intende, colla determinazione aritmetica di $\log(\varphi_1 - \varphi)$].

Se ora si pone

$$K^* = \log \left\{ f^* \frac{1 + e^{(\pi/2)f^*}}{1 - e^{(\pi/2)f^*}} \right\}^2, \tag{23}$$

si vede che si tratta di funzione regolare nell'intorno di $f^* = 0$, essendo

$$\lim \left\{ \frac{f^*}{1 - e^{(\pi/2)f^*}} \right\}^2 = \frac{4}{\pi^2},$$

nonchè di ogni altro valore (finito) di f^*. Fissata quindi pel logaritmo la determinazione reale in corrispondenza al valore zero di f^*, si potrà asserire che esso si mantiene reale per tutti i valori reali dell'argomento.

Immaginando di sostituire per f^* il suo valore $f - (\varphi_1 + i)$, la K^* si presenta come funzione di f regolare nell'intorno di $\varphi_1 + i$, e reale su tutta la retta $\psi = 1$.

Siccome si ha dalle (19) e (23)

$$K(\varphi_1, f - i) = K^* - 2 \log f^*, \tag{19'}$$

così si accerta in primo luogo che, colle specificazioni adottate per K^* e per $\log f^*$, il secondo membro rappresenta effettivamente quella determinazione di $K(\varphi_1, f - i)$ (cui ci siamo sempre riferiti) che è reale per $\psi = 1$ e $\varphi > \varphi_1$, conformemente alla (21).

Ove si supponga invece $\varphi < \varphi_1$, e si passi, dall'interno della striscia, alla retta limite $\psi = 1$, la (19'), avuto riguardo alla (22), ci dà senz'altro

$$\lim K(\varphi_1, f - i) = \lim K^* - 2 \log (\varphi_1 - \varphi) + 2\pi i.$$

Ora $\lim K^*$ seguita ad essere reale anche per f^* negativo, sicchè, data l'espressione (23) di K^*, la differenza

$$\lim K^* - 2 \log (\varphi_1 - \varphi)$$

non è altro che il nucleo reale $K(\varphi_1, \varphi)$ (definito dalla (7') per tutti i valori reali dei due argomenti).

Così in definitiva possiamo completare la (21), scrivendo

$$K(\varphi_1, f - i) = K(\varphi_1, \varphi) + 2\pi i \quad \text{per} \quad \psi = 1 \quad \text{e} \quad \varphi < \varphi_1. \tag{24}$$

8. - Verifica della relazione dispari.

Premesso tutto questo relativamente alla K, poniamo

$$\gamma(f) = \frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} K(\varphi_1, f - i) A(\varphi_1)\, d\varphi_1 , \tag{25}$$

indicando con $A(\varphi_1)$ una qualsiasi funzione della variabile reale φ_1, continua al finito e finita anche all'infinito [come sub a)].

Ne rimane ovviamente definita una funzione γ della variabile complessa f, reale sull'asse reale, e regolare *entro* S.

Osservando le (21) e (24), vediamo che la funzione $K(\varphi_1, f - i)$ non si mantiene integrabile rispetto a φ_1 (da $-\infty$ a $+\infty$) anche su $\psi = 1$, in causa del termine addizionale $2\pi i$, che figura nella (24). Si mantiene però integrabile la parte reale, che è il solito nucleo $K(\varphi_1, \varphi)$. Segue di qua che, scindendo nella (25) il reale dall'immaginario, e ponendo in conformità $\gamma = \alpha + i\beta$, si possono dedurre dalla (25) i valori al contorno della β. Basta passare al limite dall'interno della striscia, con che l'integrale del secondo membro si mantiene finito e continuo, porgendo

$$\beta(\varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} K(\varphi_1, \varphi) A(\varphi_1)\, d\varphi_1 . \tag{26}$$

Ne risulterà la (I), tostochè si accerti che i valori limiti di α', al convergere di f verso un punto generico φ_0 della retta $\psi = 1$, coincidono coi corrispondenti valori $A(\varphi_0)$.

Deriviamo all'uopo la (25) rispetto ad f, supponendo f *interno* ad S: tutto essendo in tal caso regolare, si possono applicare senza riserve gli algoritmi ordinari del calcolo, e scrivere (avuto riguardo alla monogeneità di K)

$$\frac{d\gamma}{df} = \frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial\varphi} K(\varphi_1, f - i) A(\varphi_1)\, d\varphi_1 .$$

Scindiamo l'intervallo di integrazione in tre parti: da $-\infty$ a $\varphi_0 - \varepsilon$, da $\varphi_0 - \varepsilon$ a $\varphi_0 + \varepsilon$ e da $\varphi_0 + \varepsilon$ a $+\infty$, essendo ε una quantità positiva arbitraria, che ci riserviamo di far rimpicciolire indefinitamente.

Poniamo in conformità

$$(27)\qquad \begin{cases} J_1 = \dfrac{i}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\varphi_0-\varepsilon} \frac{\partial K}{\partial \varphi}\, A(\varphi_1)\, d\varphi_1\,, \\[2ex] J_2 = \dfrac{i}{2\pi}\displaystyle\int_{\varphi_0+\varepsilon}^{\infty} \frac{\partial K}{\partial \varphi}\, A(\varphi_1)\, d\varphi_1\,, \end{cases}$$

profittando, per la parte residua

$$\frac{i}{2\pi}\int_{\varphi_0-\varepsilon}^{\varphi_0+\varepsilon} \frac{\partial K}{\partial \varphi}\, A(\varphi_1)\, d\varphi_1\,,$$

dell'espressione (19′) di K. Ponendo ancora

$$(28)\qquad J = J_1 + J_2 + \frac{i}{2\pi}\int_{\varphi_0-\varepsilon}^{\varphi_0+\varepsilon} \frac{\partial K^*}{\partial \varphi}\, A(\varphi_1)\, d\varphi_1\,,$$

avremo

$$(29)\qquad \frac{d\gamma}{df} = J - \frac{i}{\pi}\int_{\varphi_0-\varepsilon}^{\varphi_0+\varepsilon} \frac{\partial \log f^*}{\partial \varphi}\, A(\varphi_1)\, d\varphi_1\,.$$

Nell'intento di far tendere f al punto φ_0 della retta $\psi = 1$, notiamo:

1) che, per ogni valore di φ_1, compreso fra $-\infty$ e $\varphi_0 - \varepsilon$, oppure fra $\varphi_0 + \varepsilon$ e $+\infty$, $K(\varphi_1, f - i)$, ed anche $\partial K(\varphi_1, f - i)/\partial \varphi$ tendono *uniformemente* verso i loro valori limiti forniti dalle (21), (24) e rispettive derivate;

2) che, essendo K^* regolare nell'intorno di $f^* = 0$, anche $\partial K^*/\partial \varphi$ converge *uniformemente*, rispetto ad ogni φ_1 dell'intervallo $\varphi_0 - \varepsilon$, $\varphi_0 + \varepsilon$, verso il valore che gli compete per $f = \varphi_0 + i$, ossia per

$$f^* = \varphi_0 + i - (\varphi_1 + i) = \varphi_0 - \varphi_1\,.$$

Le (21), (24) e (23) mostrano d'altra parte che i valori limiti di $\partial K/\partial \varphi$ e di $\partial K^*/\partial \varphi$ sono puramente reali. Si ha così, rappresentando con $\Re J$ la parte reale di J,

$$(30)\qquad \lim \Re J = 0\,.$$

Notiamo altresì che $\log f^*$ dipende da φ pel tramite della differenza $\varphi - \varphi_1$, e che, ϑ^* essendo l'anomalia del punto generico f [relativa al sistema ausiliario coll'origine in $(\varphi_1, 1)$], la parte reale di $-i \log f^*$ vale precisamente ϑ^*.

Eguagliando le parti reali dei due membri della (29), e scrivendo $\alpha'(\varphi, \psi)$ in luogo di $\partial\alpha(\varphi, \psi)/\partial\varphi$, abbiamo

$$\alpha'(\varphi, \psi) = \Re J - \frac{1}{\pi}\int_{\varphi_0-\varepsilon}^{\varphi_0+\varepsilon} \frac{\partial\vartheta^*}{\partial\varphi_1} A(\varphi_1)\, d\varphi_1 ,$$

cui, aggiungendo e togliendo ad $A(\varphi_1)$ la costante $A(\varphi_0)$, e ponendo

$$J_3 = -\frac{1}{\pi}\int_{\varphi_0-\varepsilon}^{\varphi_0+\varepsilon} \frac{\partial\vartheta^*}{\partial\varphi_1} \{A(\varphi_1) - A(\varphi_0)\}\, d\varphi_1 , \tag{31}$$

attribuiremo la forma

$$\alpha'(\varphi, \psi) = \Re J + J_3 - \frac{1}{\pi} A(\varphi_0)[\vartheta^*]_{\varphi_1=\varphi_0-\varepsilon}^{\varphi_1=\varphi_0+\varepsilon} . \tag{32}$$

Ora, dato il significato di ϑ^*, finchè f si riferisce ad un punto interno alla striscia, quando φ_1, origine del sistema ausiliario, percorre la retta $\psi = 1$ (da $-\infty$ a $+\infty$), ϑ^* varia, sempre decrescendo, da 0 a $-\pi$. Se dunque si indica con δ il limite superiore di

$$|A(\varphi_1) - A(\varphi_0)| ,$$

per φ_1 compreso fra $\varphi_0 - \varepsilon$ e $\varphi_0 + \varepsilon$, si vede che $|J_3|$ non può superare δ, il quale, a sua volta, per la continuità della A, va a zero con ε.

Per f tendente a $\varphi_0 + i$ si ha manifestamente, qualunque sia la quantità positiva ε,

$$\lim [\vartheta^*]_{\varphi_1=\varphi_0-\varepsilon}^{\varphi_1=\varphi_0+\varepsilon} = -\pi ,$$

con che la (32), avuto riguardo alla (30), porge

$$\lim \alpha' = A(\varphi_0) + \lim J_3 .$$

Nè $\lim \alpha'$, nè $A(\varphi_0)$ dipendono da ε. Passando ulteriormente al limite per $\varepsilon = 0$, otteniamo infine

$$\lim \alpha' = A(\varphi_1) . \tag{33}$$

La (26) dà luogo pertanto alla (I), la quale rimane così provata in base all'unica condizione *a*).

In modo più preciso conviene dire:

Premesso:

1) che esiste al più una funzione armonica β, regolare entro S, dotata (contorno incluso) di limite superiore finito, la quale verifica le due condizioni

$$\frac{\partial\beta}{\partial\psi} = A \quad \text{per } \psi = 1,$$
$$\beta = 0 \quad \text{per } \psi = 0\ ;$$

2) che, in virtù della (33) e della identità $\partial\beta/\partial\psi = \alpha'$, una tale funzione è il coefficiente di i nella $\gamma(f)$ definita dalla (25);

rimane provato che l'ipotesi *a*) dà luogo ad una e (a meno di una costante additiva reale) una sola funzione $\gamma(f)$, regolare entro S, reale sull'asse reale, soddisfacente, in causa della (26), alla relazione dispari (I) e tale che rimane finito il termine superiore di β in S (contorno incluso).

9. - Prolungamento analitico della Λ. Verifica della relazione pari.

Con procedimento identico a quello tenuto per K, immaginiamo di introdurre, nella formula (15), che definisce $\Lambda(\varphi_1, \varphi)$, $f - i$ in luogo di φ e conveniamo di attribuire al logaritmo la determinazione reale per $\psi = 1$ e $\varphi > \varphi_1$.

Con tale specificazione, da

$$(34) \qquad \Lambda(\varphi_1, f - i) = \log\left\{\frac{e^{(\pi/2)\varphi_1} + e^{-(\pi/2)\varphi_1}}{e^{(\pi/2)[\varphi_1 - (f-i)]} - e^{(-\pi/2)[\varphi_1 - (f-i)]}}\right\}^2,$$

rimane definita (per qualsiasi valore reale di φ_1) una funzione di f regolare *entro* la striscia S, la quale, per $\varphi_1 = \pm\infty$, tende verso i limiti $\pm\pi/2(f - i)$. La parte immaginaria di Λ è *costante* sull'asse reale $\psi = 0$.

Sulla parte rimanente ($\varphi < \varphi_1$) della retta $\psi = 1$, i valori limiti di Λ (in quanto raggiunti dall'interno della striscia) non coincidono colla determinazione reale $\Lambda(\varphi_1, \varphi)$, ma, come già avveniva per K, presentano l'incremento costante $2\pi i$.

Ciò premesso, si parta da una generica funzione $B(\varphi_1)$, che verifichi le condizioni sub *b*) (con che il prodotto ΛB riesce integrabile rispetto a φ_1 da $-\infty$ a $+\infty$, essendo inoltre $\int_{-\infty}^{\infty} B(\varphi_1)\, d\varphi_1 = 0$), e si ponga

$$(35) \qquad \gamma(f) = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \Lambda(\varphi_1, f - i) B(\varphi_1)\, d\varphi_1 + \text{costante reale}\,.$$

Ripetendo pressochè integralmente le considerazioni del n. precedente, si riconosce che $\gamma(f) = \alpha + i\beta$ è funzione regolare in S, reale sull'asse reale, tale che, per $\psi = 1$,

$$(36) \qquad \alpha(\varphi) = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} A(\varphi_1, \varphi) B(\varphi_1)\, d\varphi_1 + \text{cost.}\,,$$

e ancora

$$(37) \qquad \beta(\varphi) = -\int_{\varphi}^{\infty} B(\varphi_1)\, d\varphi_1\,,$$

mentre i valori limiti di $\beta'(\varphi)$ (vogliamo dire di $\partial\beta/\partial\varphi$) coincidono con quelli dell'assegnata funzione $B(\varphi)$.

Nel discutere la relazione dispari, l'analoga circostanza concernente α', si dovette verificare direttamente, non derivando dall'ipotesi a) la congenza dell'integrale $\int_{-\infty}^{\infty} A(\varphi_1)\, d\varphi_1$ e non potendosi perciò trarre dalla (25) una relazione limite per α, analoga alla (37). La coincidenza di β' con B può quindi essere desunta addirittura dalla (37), la quale mostra altresì che

$$\lim_{\varphi_1 = +\infty} \beta(\varphi_1) = 0\,.$$

Sostituendo β' a B, la (36) si cambia materialmente nella (II), della quale (nel senso precisato alla fine del n. 8, che conviene, salvo ovvie varianti, anche al caso presente) rimane accertata la legittimità sotto la sola ipotesi b) ([2]), c. d. d.

([1]) Si sfruttano effettivamente tutte le condizioni enumerate in detta ipotesi: l'integrabilità della β', perchè si possa intendere, nella (35), sostituita β' alla generica B; l'identità $\int_{-\infty}^{\infty} \beta'(\varphi_1)\, d\varphi_1 = 0$ per poter asserire che la $\gamma(f)$, definita dalla (35) con $B = \beta'$, risulta reale sull'asse reale; l'identità $\lim_{\varphi_1 = +\infty} \beta(\varphi_1) = 0$, affinchè la stessa $\gamma(f)$ verifichi la (37). Le due condizioni

$$\int_{-\infty}^{\infty} \beta'(\varphi_1)\, d\varphi_1 = 0\,, \quad \lim_{\varphi = +\infty} \beta(\varphi_1) = 0\,,$$

equivalgono manifestamente alle due enunciate sub b) $\lim_{\varphi_1 = \pm\infty} \beta(\varphi_1) = 0$.

10. - La relazione inversa.

Poniamo

$$L(\varphi_1, \varphi) = \log \frac{1}{(1 - e^{-\pi|\varphi_1 - \varphi|})^2}, \tag{38}$$

$$M(\varphi_1, \varphi) = \begin{cases} 2 \log e^{(\pi/2)\varphi}(1 + e^{-\pi\varphi_1}) & \text{per } \varphi_1 > \varphi, \\ 2 \log e^{-(\pi/2)\varphi}(1 + e^{\pi\varphi_1}) & \text{per } \varphi_1 < \varphi, \end{cases} \tag{39}$$

con che $L(\varphi_1, \varphi)$ si annulla esponenzialmente per $\varphi_1 = \pm\infty$, e $M(\varphi_1, \varphi)$ resta continua anche per $\varphi_1 = \varphi$, mentre

$$\frac{\partial M}{\partial \varphi} = \begin{cases} \pi & \text{per } \varphi_1 > \varphi, \\ -\pi & \text{per } \varphi_1 < \varphi, \end{cases} \tag{40}$$

presenta una discontinuità.

Si verifica subito che la (15) equivale a

$$\Lambda(\varphi_1, \varphi) = L(\varphi_1, \varphi) + M(\varphi_1, \varphi)$$

e che la (II) può in conformità essere scritta

$$\alpha(\varphi) = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} L(\varphi_1, \varphi)\beta'(\varphi_1)\, d\varphi_1 - \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} M(\varphi_1, \varphi)\beta'(\varphi_1)\, d\varphi_1 + \text{cost.} \tag{41}$$

Introduciamo nei riguardi di $\beta'(\varphi)$ [che già supponiamo soddisfacente alla *b*)] l'ipotesi complementare seguente:

c) esiste la derivata $\beta''(\varphi)$, soddisfacente a sua volta alla *a*);

e profittiamone per la derivazione (rapporto a φ) dell'integrale

$$-\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} L(\varphi_1, \varphi)\beta'(\varphi_1)\, d\varphi_1 .$$

Assumendo per un momento $\varphi_2 = \varphi_1 - \varphi$ come variabile di integrazione e badando alla (38), esso può essere scritto

$$-\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \log \frac{1}{(1 + e^{-\pi|\varphi_2|})}\, \beta'(\varphi_2 + \varphi)\, d\varphi_2 .$$

Sotto questa forma, diviene perfettamente legittima la derivazione sotto il segno, in base alla c). Se, a derivazione eseguita, si riprende la variabile φ_1, risulta provata l'identità

$$(42)\qquad -\frac{1}{2\pi}\frac{d}{d\varphi}\int_{-\infty}^{\infty} L(\varphi_1,\varphi)\beta'(\varphi_1)\,d\varphi_1 = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} L(\varphi_1,\varphi)\beta''(\varphi_1)\,d\varphi_1 .$$

L'integrale

$$-\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} M(\varphi_1,\varphi)\beta'(\varphi_1)\,d\varphi_1 ,$$

può essere senz'altro derivato sotto il segno, data l'incondizionata integrabilità di β' fra $-\infty$ e $+\infty$, e l'espressione (40) della $\partial M/\partial\varphi$.

Dacchè si ha, per la b),

$$\lim_{\varphi_1=\pm\infty} \beta(\varphi_1) = 0 ,$$

risulta

$$(43)\qquad -\frac{1}{2\pi}\frac{d}{d\varphi}\int_{-\infty}^{\infty} M(\varphi_1,\varphi)\beta'(\varphi_1)\,d\varphi_1 = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\varphi}\beta'(\varphi_1)\,d\varphi - \frac{1}{2}\int_{\varphi}^{\varphi}\beta'(\varphi_1)\,d\varphi_1 = \beta(\varphi) .$$

Le (42) e (43) mostrano che il secondo membro della (41) rappresenta una funzione di φ, dotata di derivata finita e continua. Tale proprietà compete di conseguenza anche ad α, e *rimane così provata, sotto l'ipotesi addizionale c), questa conseguenza della relazione pari*:

$$(\mathrm{III})\qquad \alpha'(\varphi) = \beta(\varphi) - \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} L(\varphi_1,\varphi)\beta''(\varphi_1)\,d\varphi_1 .$$

Essa può manifestamente riguardarsi come risolvente della relazione dispari (I), poichè esprime esplicitamente α' mediante β e β''; le conviene pertanto la qualifica di *relazione inversa*, sotto cui mi propongo di richiamarla in una prossima comunicazione.

Giova fissare l'attenzione sopra la circostanza che la (I) e la (III) sono di necessità equivalenti, tostochè sussistono simultaneamente. Può però accadere che sussista sola la (I) [senza che sia lecito risolverla rispetto ad α' sotto la forma (III)], per essere verificata la a), ma non le condizioni più restrittive b) e c), che assicurano la validità della (III).

XIV.

SULLA ESPRESSIONE DEL RESTO IN UNA OPERAZIONE FUNZIONALE USATA DA LORD RAYLEIGH

« Rend. Acc. Lincei », ser. 5ª, vol. XX_1 (1911_1),

pp. 605-614.

1. – Pongasi, per una generica funzione V della variabile φ,

$$DV = \frac{dV}{d\varphi}, \qquad D^2V = \frac{d^2V}{d\varphi^2}, \text{ ecc.}\,.$$

Se $\mathfrak{p}(D)$ indica un polinomio in D (a coefficienti costanti)

$$c_0 + c_1D + c_2D^2 + \dots + c_nD^n,$$

la scrittura

$$\mathfrak{p}(D)V$$

sta manifestamente a rappresentare la somma

$$c_0 + c_1DV + c_2D^2V + \dots + c_nD^nV\,.$$

Consideriamo più generalmente una funzione $\mathfrak{p}(D)$ del simbolo D, la quale (trattandovi per un momento D come una effettiva variabile) sia regolare nell'intorno dell'origine, e quindi sviluppabile in una serie di potenze di D (a coefficienti costanti) del tipo $\sum_\nu{}_0^\infty c_\nu D^\nu$.

Qualora (in un certo campo) risulti assolutamente convergente la serie

$$\sum_{0}^{\infty}{}_\nu\, c_\nu D^\nu V\,,$$

è naturale di porre [1] (per quelle V e in quel campo in cui la convergenza sussiste)

$$\mathfrak{p}(D)V = \sum_{0}^{\infty}{}_{\nu}\, c_\nu D^\nu V \,.$$

Da tale definizione risulta ovviamente che, se $\mathfrak{p}_1(D)$ e $\mathfrak{p}_2(D)$ sono due operazioni della specie considerata, esse sono altresì permutabili e componibili coll'ordinaria regola di moltiplicazione, tostochè siano soddisfatte debite condizioni di convergenza. Si ha cioè, indicando con $\mathfrak{p}(D)$ il prodotto (nel senso ordinario) delle due funzioni $\mathfrak{p}_1(D)$, $\mathfrak{p}_2(D)$ (del simbolo D),

$$\mathfrak{p}_2(D)\{\mathfrak{p}_1(D)V\} = \mathfrak{p}_1(D)\{\mathfrak{p}_2(D)V\} = \mathfrak{p}(D)V \,.$$

2. – Prendiamo a considerare una funzione $\gamma(f)$ della variabile complessa $f = \varphi + i\psi$, reale sull'asse reale $\psi = 0$, e regolare nella striscia S compresa fra le rette $\psi = \pm 1$ (contorno incluso).

Detta $r(\varphi)$ la funzione reale, cui si riduce γ per $\psi = 0$, potremo dedurne $\gamma(\varphi + i)$ mediante la serie di TAYLOR.

Colle notazioni, testè richiamate, del calcolo funzionale, ciò si traduce nella formula

$$\gamma(\varphi + i) = e^{iD} r \,.$$

Scindendo il reale dall'immaginario, ove α e β designino rispettivamente la parte reale e il coefficiente di i in $\gamma(\varphi + i)$, se ne trae

$$\left\{\begin{aligned} \alpha(\varphi) &= \cos D\cdot r \,, \\ \beta(\varphi) &= \operatorname{sen} D\cdot r \,. \end{aligned}\right. \tag{1}$$

Ove si possano ulteriormente applicare le operazioni $\operatorname{tg} D$, $D \cot D$ (che rientrano entrambe nel tipo $\mathfrak{p}(D)$ del n. precedente), abbiamo dalla prima delle (1)

$$\operatorname{tg} D\cdot\alpha = \operatorname{tg} D \cos D\cdot r = \operatorname{sen} D\cdot r \,,$$

e dalla seconda

$$D \cot D\cdot\beta = D \cot D \operatorname{sen} D\cdot r = D \cos D\cdot r \,.$$

---

[1] Cfr. S. PINCHERLE e U. AMALDI, *Le operazioni distributive*, Bologna, Zanichelli, 1901, Cap. VI.

Avendo riguardo alle (1) stesse, vien fatto di eliminare r, e rimane

$$\begin{cases} \operatorname{tg} D \cdot \alpha = \beta\,, \\ D \cot D \cdot \beta = D\alpha\,, \end{cases}$$

che costituiscono, come si vede, due relazioni funzionali tra le funzioni associate α e β (dei punti della retta $\psi = 1$).

Giova mettere in evidenza che si tratta di due relazioni equivalenti, anzi più precisamente una inversa dell'altra, scrivendo α' in luogo di $D\alpha$ e $\operatorname{tg} D/D \cdot \alpha'$ in luogo di $\operatorname{tg} D \cdot \alpha$. Esse assumono così l'aspetto

$$\begin{cases} \beta = \dfrac{\operatorname{tg} D}{D} \cdot \alpha'\,, \\ \alpha' = D \cot D \cdot \beta\,. \end{cases} \tag{2}$$

Per $\operatorname{tg} D/D$ e $D \cot D$ si devono naturalmente intendere i loro sviluppi in serie di potenze di D, cioè [2]

$$\begin{aligned} D \cot D &= 1 - 2\frac{s_2}{\pi^2} D^2 - 2\frac{s_4}{\pi^4} D^4 - 2\frac{s_6}{\pi^6} D^6 - \ldots \\ &= 1 - 2\sum_{1}^{\infty}{}_{\nu} \frac{s_{2\nu}}{\pi^{2\nu}} D^{2\nu}\,, \end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned} \frac{\operatorname{tg} D}{D} = \frac{D \cot D - 2D \cot 2D}{D^2} &= 2\sum_{1}^{\infty}{}_{\nu} \frac{s_{2\nu}}{\pi^{2\nu}} (2^{2\nu} - 1) D^{2\nu-2} \\ &= 2\sum_{0}^{\infty}{}_{\nu} \frac{s_{2\nu+2}}{(\pi/2)^{2\nu+2}} \left(1 - \frac{1}{2^{2\nu+2}}\right) D^{2\nu}: \end{aligned} \tag{4}$$

$s_{2\nu}$ indica la somma delle inverse delle potenze (2ν)-esime dei numeri naturali; in particolare si ha

$$s_2 = \frac{\pi^2}{6} = 1{,}64\,\ldots,\ s_4 = \frac{\pi^4}{90} = 1{,}08\,\ldots,\ s_6 = \frac{\pi^6}{945} = 1{,}01\,\ldots,\ \ldots\,.$$

3. – La effettiva validità delle (2) [colle espressioni (3) e (4) delle operazioni funzionali $D \cot D$, $\operatorname{tg} D/D$] è vincolata ad ipotesi enormemente restrittive circa la natura della funzione γ. Basta pensare che,

---

[2] Cfr. per es. E. Cesàro, *Corso di analisi algebrica*, Torino, Bocca, 1894, pp. 481 e 283.

per potere applicare senza riserve ad una γ una operazione

$$\mathfrak{p}(D) = \sum_0^\infty {}_\nu\, c_\nu D^\nu ,$$

conviene introdurre limitazioni del tipo

$$|D^n\gamma| < M\varrho^n \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

con M numero finito indipendente da n, e ϱ inferiore al raggio di convergenza della serie $\sum_0^\infty {}_\nu\, c_\nu D^\nu$. Nel caso nostro bisognerebbe prendere $\varrho < \pi/2$, che è il più piccolo dei due raggi di convergenza spettanti alle serie (3), (4).

In quest'ordine di idee, val forse la pena di notare che, per la *trascendenti intere di genere zero*, si ha la limitazione (³)

$$|D^n\gamma| < M ,$$

corrispondente a $\varrho = 1$.

In base ad essa, le serie $D \cot D\cdot\gamma$, $\operatorname{tg} D/D\cdot\gamma$ convergono assolutamente in tutto il piano f, e ne rimangono rigorosamente dimostrate le (2). Ma la detta categoria di funzioni è press'a poco la sola per cui il risultato sussiste sotto forma di serie.

4. – È invece possibile, ricorrendo alla teoria delle funzioni armoniche e trasformando opportunamente una formula del DINI (⁴), attribuire alle relazioni fra α e β, sulla retta $\psi = 1$, due forme integrali assai più vantaggiose. E precisamente una prima forma, risoluta rispetto a β, che è applicabile in ogni caso (*relazione dispari*), e una seconda, risoluta rispetto ad α' (*relazione inversa*), che richiede (o, meglio, la cui dimostrazione ha richiesto) una ipotesi addizionale circa il comportamento all'infinito della β.

Le due relazioni sono (gli apici designando derivazioni rispetto agli

(³) Come risulta da un teorema generale di H. POINCARÉ. Veggasi ad es. E. BOREL, *Leçons sur les fonctions entières*, Paris, Gauthier-Villars, 1900, p. 56.

(⁴) Cfr. le Note: *Trasformazione di una relazione funzionale dovuta al Dini*, pp. 285-296, 381-391 di questi « Rendiconti » (sedute del 5 e 19 marzo u. s.) [in questo vol.: XIII, pp. 163-185].

argomenti indicati)

$$\beta(\varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} K(\varphi_1, \varphi)\alpha'(\varphi_1)\, d\varphi_1\,, \tag{5}$$

$$\alpha'(\varphi) = \beta(\varphi) - \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} L(\varphi_1, \varphi)\beta''(\varphi_1)\, d\varphi_1\,, \tag{6}$$

con

$$K(\varphi_1, \varphi) = \log\left(\frac{e^{(\pi/2)\varphi_1} + e^{(\pi/2)\varphi}}{e^{(\pi/2)\varphi_1} - e^{(\pi/2)\varphi}}\right)^2, \tag{7}$$

$$L(\varphi_1, \varphi) = \log\frac{1}{(1 - e^{-\pi|\varphi_1 - \varphi|})^2}\,. \tag{8}$$

La (5) può ben dirsi valida incondizionatamente, essendo certo soddisfatta [5], ogniqualvolta si sappia che α' è funzione (dei punti della retta $\psi = 1$) continua al finito e finita anche all'infinito.

La (6) è stata stabilita nell'ipotesi che $\beta(\varphi)$, oltre ad ammettere le prime due derivate (continue al finito), tenda ad annullarsi per $\varphi = \pm\infty$: quest'ultima è in sostanza la sola ipotesi restrittiva, potendosi tranquillamente ammettere — almeno nelle applicazioni che abbiamo in vista — che si tratti di funzioni derivabili quante volte occorre, e finite ovunque (anche all'infinito), assieme alle loro derivate.

5. – Scopo della presente Nota è di ricavare dalle richiamate relazioni integrali — (5) e (6) — degli sviluppi differenziali, che contengono rispettivamente quanti si vogliano termini della serie $\operatorname{tg} D/D\cdot\alpha'$, $D \cot D\cdot\beta$, più un resto. È chiaro che l'interesse risiede esclusivamente nell'espressione del resto. Essa ci mostrerà che le serie (2) (pur essendo quasi sempre divergenti, come abbiamo osservato poc'anzi) possono servire utilmente in calcoli approssimativi, quando si limitano a un numero conveniente di termini.

6. – Occupiamoci dapprima della *relazione inversa* (6), che fa riscontro alla seconda delle (2). Sotto questa forma essa fu già rilevata e (in via di approssimazione) genialmente sfruttata da Lord Rayleigh nelle sue ricerche sull'onda solitaria [6].

---

[5] Da una e una sola funzione $\gamma(f)$ regolare entro la striscia S, e tale che la sua parte immaginaria $i\beta$ si mantiene ovunque finita (*contorno incluso*) (cfr. p. 387, seduta del 19 marzo [in questo vol., p. 182]).

[6] *Scientific Papers*, vol. I, Cambridge University Press, 1899, pp. 256-261.

Introduciamo, al posto di φ_1, una nuova variabile di integrazione

$$s = \pi(\varphi_1 - \varphi)\,.$$

Per essere L funzione pari del solo argomento $\pi(\varphi_1 - \varphi)$, risulta subito

$$(6') \qquad \alpha'(\varphi) = \beta(\varphi) - \frac{1}{2\pi^2}\int_0^\infty L(s)\left\{\beta''\left(\varphi - \frac{s}{\pi}\right) + \beta''\left(\varphi + \frac{s}{\pi}\right)\right\} ds\,,$$

con

$$(8') \qquad L(s) = \log\frac{1}{(1-e^{-s})^2}\,.$$

Se si ricorre all'identità

$$(9) \qquad \beta(\varphi + h) = \beta(\varphi) + hD\beta + \frac{h^2}{2}D^2\beta + \ldots + \frac{h^{2n-1}}{(2n-1)!}D^{2n-1}\beta$$

$$+ \frac{h^{2n}}{(2n-1)!}\int_0^1 (1-t)^{2n-1}D^{2n}\beta(\varphi + ht)\cdot dt\,,$$

e la si applica alla funzione β'' facendovi $h = \pm s/\pi$, si ottiene

$$\beta''\left(\varphi - \frac{s}{\pi}\right) + \beta''\left(\varphi + \frac{s}{\pi}\right) = 2\sum_0^{n-1}{}_\nu \frac{1}{(2\nu)!}\frac{s^{2\nu}}{\pi^{2\nu}}D^{2\nu+2}\beta$$

$$+ \frac{1}{(2n-1)!}\frac{s^{2n}}{\pi^{2n}}\int_0^1 (1-t)^{2n-1}\left\{D^{2n+2}\beta\left(\varphi + \frac{st}{\pi}\right) + D^{2n+2}\beta\left(\varphi - \frac{st}{\pi}\right)\right\} dt\,.$$

Procuriamoci il valore degli integrali definiti

$$\int_0^\infty s^{2\nu}\log\frac{1}{1-e^{-s}}\cdot ds\,, \qquad (\nu \text{ intero positivo}),$$

che è del resto ben noto (7). Lo si calcola partendo dalla formula ele-

(7) Cfr. per es. CH. HERMITE, *Cours d'analyse*, p. 96 della terza edizione, Paris, Hermann, 1887.

mentare

$$\int_0^\infty s^{2\nu} e^{-s} ds = (2\nu)!\,,$$

o, meglio, da questo suo corollario:

$$\int_0^\infty s^{2\nu} e^{-ms} ds = \frac{(2\nu)!}{m^{2\nu+1}}\,,$$

in cui m designa un qualsiasi numero positivo. Si immagini infatti di integrare

$$s^{2\nu} \log \frac{1}{1-e^{-s}}$$

da un ε comunque piccolo a $+\infty$, sostituendo al logaritmo il suo sviluppo in serie di potenze di e^{-s}, e passando poi al limite per $\varepsilon = 0$. Si ha

$$(10) \qquad \int_0^\infty s^{2\nu} \log \frac{1}{1-e^{-s}} \cdot ds = \sum_1^\infty {}_m \frac{1}{m} \int_0^\infty s^{2\nu} e^{-ms} ds$$
$$= (2\nu)! \sum_1^\infty {}_m \frac{1}{m^{2\nu+2}} = (2\nu)!\, s_{2\nu+2}\,.$$

Ciò posto, portiamo l'espressione sopra scritta di

$$\beta''\left(\varphi - \frac{s}{\pi}\right) + \beta''\left(\varphi + \frac{s}{\pi}\right),$$

nel secondo membro della (6'). In virtù delle (10), risulta

$$(6'') \qquad \alpha'(\varphi) = \beta(\varphi) - 2\,\frac{s_2}{\pi^2}\,D^2\beta - 2\,\frac{s_4}{\pi^4}\,D^4\beta - \ldots - 2\,\frac{s_{2n}}{\pi^{2n}}\,D^{2n}\beta - R_{2n}\,,$$

il resto R_{2n} avendo l'espressione

$$(11) \qquad R_{2n} = \frac{1}{(2n-1)!}\,\frac{1}{\pi^{2n+2}}\,\cdot$$
$$\cdot \frac{1}{2}\int_0^\infty s^{2n} L(s)\,ds \int_0^1 (1-t)^{2n-1} \left\{ D^{2n+2}\beta\left(\varphi + \frac{st}{\pi}\right) + D^{2n+2}\beta\left(\varphi - \frac{st}{\pi}\right) dt\,.\right.$$

La coincidenza dei vari termini dello sviluppo trovato con quelli che sarebbero forniti dalla serie $D \cot D \cdot \beta$ è manifesta: basta confrontare colla (3). Rendiamoci conto dell'ordine di grandezza del resto.

Seguendo una notazione espressiva introdotta dal sig. SCHMIDT, indichiamo con $\overline{\beta}$ il limite superiore dei valori (assoluti) assunti da una generica funzione β nel campo che si considera (sopra la retta $\psi = 1$ nel caso attuale).

$L(s)$ mantenendosi positiva in tutto l'intervallo di integrazione, avremo dalla (11)

$$|R_{2n}| \leqslant \frac{1}{(2n-1)!} \frac{1}{\pi^{2n+2}} \overline{D^{2n+2}\beta} \int_0^\infty s^{2n} L(s)\, ds \int_0^1 (1-t)^{2n-1} dt .$$

L'integrale interno vale $1/2n$, quello rispetto ad s [a norma delle (8') e (10)] $2 \cdot (2n)!\, s_{2n+2}$. Si ha pertanto la limitazione

$$(12) \qquad |R_{2n}| \leqslant \frac{2}{\pi^{2n+2}} s_{2n+2} \overline{D^{2n+2}\beta} .$$

Dacchè le s_{2n+2} differiscono poco dall'unità (la massima s_2 è $\pi^2/6 = 1{,}64\ldots$), si può dire che l'ordine di grandezza di R_{2n} è dato dalla derivata $(2n+2)$-esima di β, divisa per la corrispondente potenza di π.

In particolare, per $n = 1$, l'errore che si commette sostituendo il secondo membro della (6) con $\beta = \beta''/3$ non può superare

$$2 \frac{s_4}{\pi^4} \overline{\beta^{(IV)}} = \frac{1}{45} \overline{\beta^{(IV)}} ,$$

cioè poco più di $^2/_{100}$ di $\overline{\beta^{(IV)}}$.

Per $n = 2$, il limite dell'analogo errore è

$$2 \frac{s_6}{\pi^6} \overline{\beta^{(VI)}} = \frac{2}{945} \overline{\beta^{(VI)}} .$$

7. – L'approssimazione di Lord RAYLEIGH si è sostanzialmente esplicata riducendo $D \cot D \cdot \beta$ a $\beta - \beta''/3$, con presumibile errore dell'ordine di grandezza della derivata quarta. Come questa sua intuizione fosse corretta è provato dalla precedente espressione del resto. Non sarebbe stato invece possibile valutare direttamente l'ammontare dei termini trascurati

$$2 \sum_{2}^{\infty} {}_\nu \frac{s_{2\nu}}{\pi^{2\nu}} D^{2\nu+2}\beta ,$$

(sostituendovi per β la speciale espressione assegnata da Lord RAYLEIGH come soluzione approssimata del problema idrodinamico), perchè la serie risulta divergente.

8. - Indichiamo, anche per la relazione dispari (5), lo sviluppo per derivate e la forma del resto.

Adottando come variabile di integrazione

$$s = \frac{\pi}{2}(\varphi_1 - \varphi),$$

e notando che $K(\varphi_1, \varphi)$, al pari di L, è funzione pari della sola differenza $\varphi_1 - \varphi$, la (5) stessa può essere scritta

$$(5') \qquad \beta(\varphi) = \frac{1}{\pi^2}\int_0^\infty K(s)\left\{\alpha'\left(\varphi - \frac{2}{\pi}s\right) + \alpha'\left(\varphi + \frac{2}{\pi}s\right)\right\} ds,$$

con

$$(7') \qquad K(s) = \log\left(\frac{1+e^{-s}}{1-e^{-s}}\right)^2.$$

Con procedimento analogo a quello tenuto per stabilire la (10), si ha

$$\int_0^\infty s^{2\nu}\log(1+e^{-s})\,ds = (2\nu)!\sum_1^\infty{}_m (-1)^{m+1}\frac{1}{m^{2\nu+2}}.$$

Ne deduciamo

$$\int_0^\infty s^{2\nu}K(s)\,ds = 2(2\nu)!\left\{\sum_1^\infty{}_m (-1)^{m+1}\frac{1}{m^{2\nu+2}} + \sum_1^\infty{}_m \frac{1}{m^{2\nu+2}}\right\} = 4(2\nu)!\sum{}'\frac{1}{m^{2\nu+2}},$$

$\sum'$ indicando una somma estesa ai soli numeri dispari. Se si introduce per un momento anche la somma complementare $\sum'' 1/m^{2\nu+2}$, estesa ai soli numeri pari, si hanno manifestamente le identità

$$\sum{}'\frac{1}{m^{2\nu+2}} + \sum{}''\frac{1}{m^{2\nu+2}} = s_{2\nu+2},$$

$$\sum{}''\frac{1}{m^{2\nu+2}} = \frac{1}{2^{2\nu+2}}s_{2\nu+2},$$

da cui

$$\sum{}' \frac{1}{m^{2\nu+2}} = \left\{1 - \frac{1}{2^{2\nu+2}}\right\} s_{2\nu+2} \, .$$

Risulta così

$$\int_0^\infty K(s) s^{2\nu} ds = 4(2\nu)! \left\{1 - \frac{1}{2^{2\nu+2}}\right\} s_{2\nu+2} \, . \tag{13}$$

Dalla (9), sostituendovi α' in luogo di β, e $\pm s/(\pi/2)$ in luogo di h, si ricava

$$\alpha'\left(\varphi - \frac{2}{\pi} s\right) + \alpha'\left(\varphi + \frac{2}{\pi} s\right) = 2 \sum_0^{n-1}{}_\nu \frac{1}{(2\nu)!} \frac{s^{2\nu}}{(\pi/2)^{2\nu}} D^{2\nu+1}\alpha$$

$$+ \frac{1}{(2n-1)!} \frac{s^{2n}}{(\pi/2)^{2n}} \int_0^1 (1-t)^{2n-1} \left\{D^{2n-1}\alpha\left(\varphi + \frac{2st}{\pi}\right) + D^{2n+1}\alpha\left(\varphi - \frac{2st}{\pi}\right)\right\} dt \, ,$$

con che la (5′), tenuto conto della (13), e posto

$$R_{2n}^* = \frac{1}{4(2n-1)!} \frac{1}{(\pi/2)^{2n+2}} \cdot \tag{14}$$

$$\cdot \int_0^\infty s^{2n} K(s)\, ds \int_0^1 (1-t)^{2n-1} \left\{D^{2n+1}\alpha\left(\varphi + \frac{2st}{\pi}\right)\right\} + D^{2n+1}\alpha\left(\varphi - \frac{2st}{\pi}\right)\right\} dt \, ,$$

assume la forma

$$\beta(\varphi) = 2 \sum_0^\infty{}_\nu \frac{s_{2\nu+2}}{(\pi/2)^{2\nu+2}} \left\{1 - \frac{1}{2^{2\nu+2}}\right\} D^{2\nu}\alpha' + R_{2n}^* \, . \tag{5″}$$

I primi n termini coincidono con quelli dello sviluppo di $\operatorname{tg} D/D \cdot \alpha'$, come apparisce dalla (4). Quanto al resto, per essere $K(s)$ essenzialmente positiva, si ha

$$|R_{2n}^*| \leqslant \frac{1}{2(2n-1)!} \frac{1}{(\pi/2)^{2n+2}} \overline{D^{2n+1}\alpha} \int_0^\infty s^{2n} K(s)\, ds \int_0^1 (1-t)^{2n-1} dt \, ,$$

donde, eseguendo le quadrature e badando alla (13),

$$|R_{2n}^*| \leqslant \frac{2}{(\pi/2)^{2n+2}}\, s_{2n+2} \left\{1 - \frac{1}{2^{2\nu+2}}\right\} \overline{D^{2n+1}\alpha}\,. \tag{15}$$

Siccome

$$s_{2n+2} \left\{1 - \frac{1}{2^{2n+2}}\right\},$$

tende ad 1 al crescere di n (differendone in ogni caso ben poco), si può dire che l'ordine di grandezza di R_{2n}^* è quello della derivata $(2n+1)$-esima di α divisa per la corrispondente potenza di $\pi/2$. La limitazione è un po' meno vantaggiosa di quella trovata per l'analogo resto della relazione inversa: in quel caso si hanno a denominatore potenze di π, in questo soltanto potenze di $\pi/2$.

Mostrerò in una prossima comunicazione come effettivamente si applichino le equazioni integrali (5), (6) alla teoria delle onde di canale, e in particolare all'onda solitaria, conducendo, per quest'ultima, ad una approssimazione maggiore di quella raggiunta da Lord RAYLEIGH e, con diverso procedimento, da BOUSSINESQ.

XV.

SUR LES ÉQUATIONS GÉNÉRALES DU MOUVEMENT D'UN CORPUSCULE DANS UN CHAMP MAGNÉTIQUE ET UN CHAMP ÉLECTRIQUE SUPERPOSÉS

extrait d'une lettre

de Mr. T. Levi-Civita à Mr. Carl Størmer

« Archiv for Mathematik og Naturvidenskab » B. XXXI. Nr. 12,

pp. 3-7.

Je saisis l'occasion pour vous faire part d'une petite remarque, qui m'a été suggérée par vos intéressantes recherches sur le mouvement des corpuscules (1).

Les équations qui régissent ce mouvement sont

$$(1) \qquad \begin{cases} m\ddot{x} = -\varepsilon \dfrac{\partial V}{\partial x} + \varepsilon(Y\dot{z} - Z\dot{y}), \\[2ex] m\ddot{y} = -\varepsilon \dfrac{\partial V}{dy} + \varepsilon(Z\dot{x} - X\dot{z}), \\[2ex] m\ddot{z} = -\varepsilon \dfrac{\partial V}{\partial z} + \varepsilon(X\dot{y} - Y\dot{x}), \end{cases}$$

où les points désignent des dérivées par rapport au temps t; m, ε des constantes; V, X, Y, Z des fonctions (uniformes) des coordonnés x, y, z, les trois dernières étant liées par l'identité

$$(2) \qquad \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = 0 .$$

(1) Voir « Comptes Rendus », 12 et 29 Septembre 1910.

Les équations (1) admettent l'intégrale des forces vives

$$T + \varepsilon V = h \qquad (h \text{ constante}), \tag{3}$$

ayant posé comme d'habitude

$$T = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) \,. \tag{4}$$

Vous vous êtes servi de l'intégrale des forces vives pour éliminer le temps t, ce qui vous a d'abord amené à faire ressortir les équations des trajectoires d'une formule intégrale analogue au principe de la moindre action. Vous en avez ensuite déduit un système de forme canonique (avec t pour variable indépendente) entièrement équivalent à (1), et équivalent à son tour à un autre système provenant de la variation d'une certaine intégrale.

Ce dernier résultat peut s'établir plus directement, en partant de la forme générale du principe de HAMILTON [2], laquelle s'applique même à des forces dépendant de la vitesse, et par consequent aussi aux équations (1).

Voilà le point sur lequel je désire attirer pour un moment votre attention bienveillante: les propositions, qui vous ont servi d'intermédiaire, en résultent comme corollaires bien connus.

Je désignerai par U' (suivant la notation de Kirchhoff) le travail virtuel. C'est ici le travail de la force totale sollicitant le corpuscule, pour un déplacement infiniment petit (tout à fait arbitraire) de composantes δx, δy, δz. Il vient d'après (1)

$$U' = -\,\varepsilon\delta V + \varepsilon\,\frac{\varDelta}{dt}\,, \tag{5}$$

où

$$\varDelta = \begin{vmatrix} X & Y & Z \\ dx & dy & dz \\ \delta x & \delta y & \delta z \end{vmatrix}, \tag{6}$$

est une forme bilinéaire par rapport à dx, dy, dz; δx, δy, δz, et δV représente la variation subie par V dans le déplacement virtuel envisagé.

---

[2] Voir par exemple P. APPELL, *Traité de mécanique rationnelle*, t. II, n. 483, pp. 422-423 de la deuxième édition (1904).

Le principe d'HAMILTON résume les équations du mouvement, pour un intervalle de temps quelconque (t_0, t_1), dans la formule

$$\int_{t_0}^{t_1} (U' + \delta T)\, dt = 0 , \tag{7}$$

où la signification de δT est évidente, et les déplacements virtuels sont seulement assujettis à s'annuler pour les instants t_0, t_1.

Ceci rappelé, il y a lieu de faire intervenir la condition (2) [exprimant que la divergence du champ magnétique extérieur est nulle]. Elle autorise (d'après un théorème de JACOBI) les positions

$$\left\{ \begin{aligned} X &= \frac{\partial C}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial z} , \\ Y &= \frac{\partial A}{\partial z} - \frac{\partial C}{\partial x} , \\ Z &= \frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y} , \end{aligned} \right. \tag{8}$$

A, B, C étant trois nouvelles fonctions (uniformes) du point (x, y, z) (³).

Posons encore

$$\begin{aligned} f_d &= A\, dx + B\, dy + C\, dz , \\ f_\delta &= A\, \delta x + B\, \delta y + C\, \delta z , \\ f &= A\dot{x} + B\dot{y} + C\dot{z} = \frac{f_d}{dt} . \end{aligned} \tag{9}$$

En tenant compte de (6), (8) [et de ce qu'on peut intervertir les opérateurs d et δ], on a identiquement

$$\Delta = df_\delta - \delta f_d = df_\delta - dt \cdot \delta f ,$$

d'où

$$U' = -\varepsilon\, \delta V + \varepsilon \frac{df}{dt_\delta} - \varepsilon\, \delta f = -\delta[\varepsilon(V + f)] + \frac{d}{dt} (\varepsilon f_\delta) .$$

(³) Voir par exemple P. APPELL, loco cit., t. III (deuxième édition 1909), pp. 20-24. Au point de vue de la théorie des champs de vecteurs, la conclusion indiquée revient évidemment à la suivante: La force magnétique (X, Y, Z) étant solénoïdale, il existe un vecteur (A, B, C) [fonction des points du champs] dont elle est le rot (*rotationnel* d'après M. M. BURALI-FORTI et MARCOLONGO; *curl* des anglais).

Introduisons cette valeur de U' dans l'expression (7) du principe de HAMILTON. Puisque f_δ s'annule aux limites t_0, t_1, il reste simplement

$$\int_{t_0}^{t_1} \{\delta T - \delta[\varepsilon(V + f)]\}\, dt = 0 ,$$

c'est-à-dire

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} L\, dt = 0 , \tag{7'}$$

ayant posé pour abréger

$$L = T - \varepsilon(V + f) = T - \varepsilon(V + A\dot{x} + B\dot{y} + C\dot{z}) . \tag{10}$$

On en tire les équations de LAGRANGE

$$\left\{ \begin{aligned} &\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 , \\ &\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial L}{\partial y} = 0 , \\ &\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} - \frac{\partial L}{\partial z} = 0 , \end{aligned} \right. \tag{1'}$$

parfaitement équivalentes aux (1) [qu'on pourrait retrouver en remontant de (1'), à travers (7') et (7)]. Voilà le dernier de vos théorèmes généraux.

Ces équations (1') admettent l'intégrale bien connue

$$\dot{x}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} + \dot{y}\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} + \dot{z}\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} - L = \text{const.} ,$$

qui revient à l'équation (3) des forces vives. A l'aide de cette équation on peut éliminer le temps de (7'): il en résulte la définition des trajectoires par une généralisation du principe de la moindre action. C'est votre premier résultat. Le second, c'est-à-dire la forme canonique des équations du mouvement, s'obtient immédiatement en appliquant aux équations de LAGRANGE (1') la transformation classique d'HAMILTON.

On doit poser

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} , \qquad q = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} , \qquad r = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} , \tag{11}$$

$$H = p\dot{x} + q\dot{y} + r - L\dot{z} , \tag{12}$$

après quoi H (exprimée moyennant les variables x, y, z; p, q, r) constitue la fonction caractéristique du système canonique cherché.

D'après (10), (4) et (9), les équations (11) s'écrivent

$$(11') \qquad p = m\dot{x} - \varepsilon A\,, \qquad q = m\dot{y} - \varepsilon B\,, \qquad r = m\dot{z} - \varepsilon C\,;$$

d'où

$$p\dot{x} + q\dot{y} + r\dot{z} = 2T - \varepsilon f\,,$$

et par conséquent

$$(12') \qquad H = T - \varepsilon V\,.$$

Il ne reste donc qu'à remplacer, dans T, les $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ par leurs valeurs tirées de (11'), pour avoir H sous sa forme définitive:

$$(12'') \qquad H = \frac{1}{2m}\{(p + \varepsilon A)^2 + (q + \varepsilon B)^2 + (r + \varepsilon C)^2\} - \varepsilon V\,.$$

. . . .

Agréez etc.

Padoue, le 18 Juin 1911.

XVI.

SUR LES ÉQUATIONS LINÉAIRES À COEFFICIENTS PÉRIODIQUES ET SUR LE MOYEN MOUVEMENT DU NŒUD LUNAIRE

« Ann. de l'Éc. Norm. Sup. », 3me s., t. 28,

pp. 325-376.

Préface.

La forme analytique des intégrales des équations linéaires à coefficients périodiques est bien connue.

S'il s'agit par exemple d'une équation du second ordre

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2p\frac{dx}{dt} + qx = 0\,, \tag{I}$$

dont les coefficients p et q sont réels et admettent la période 2π, on peut poser, dans le cas des exposants caractéristiques purement imaginaires,

$$x = \sum_{-\infty}^{\infty} \alpha_n \cos\left[(n + g)t + \beta_n\right]\,, \tag{II}$$

où les α_n, les β_n et g sont des constantes réelles, cette dernière restant toujours la même quelle que soit l'intégrale envisagée: g n'est qu'une des déterminations (différant entre elles par le signe et en outre par des nombres entiers arbitraires) qu'on peut attribuer au coefficient de $\pm 2\pi i$ dans les exposants caractéristiques.

Le terme général du développement s'annule pour

$$(n + g)t + \beta_n = \text{multiple impair de } \frac{\pi}{2}\,.$$

Il s'ensuit qu'au bout d'un temps t (c'est-à-dire en faisant parcourir à la variable un intervalle quelconque de longueur t), on rencontre, à une unité près, $|n+g|t/\pi$ racines, ce qu'on peut aussi exprimer en disant qu'il y a, en moyenne, $2|n+g|$ racines pour chaque période 2π.

Ceci posé, si parmi les coefficients α de la série il y en a un, soit par exemple a_j, qui l'emporte de beaucoup sur les autres (1), les choses se passeront évidemment, au point de vue qualitatif, comme si le terme

$$\alpha_j \cos [(j + g)t + \beta_j]$$

existait seul. On aura en particulier $2|j+g|$ comme nombre moyen de racines pour chaque période.

Si l'expression (II) de x ne contient pas un tel terme prépondérant, la loi de distribution des racines échappe en général à l'intuition.

On peut toutefois démontrer — quels que soient les exposants caractéristiques (réels ou complexes) de l'équation (I) — que, si la valeur moyenne de $q - p^2$ est positive, un intervalle quelconque t contient encore, *en moyenne* $|j+g|t/\pi$ racines, c'est-à-dire $2|j+g|$ à chaque période (j entier convenable, $\pm 2\pi i g$ partie imaginaire de la détermination choisie pour les exposants caractéristiques), et cela d'autant plus exactement que t sera plus grand.

Nous rencontrerons cette proposition comme corollaire du théorème suivant:

Considérons une solution quelconque Σ

$$x = x(t)\,, \qquad y = y(t)\,,$$

d'un système différentiel

$$\text{(III)} \qquad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = a_{11}x + a_{12}y\,, \\[2mm] \dfrac{dy}{dt} = a_{21}x + a_{22}y\,, \end{cases}$$

à coefficients périodiques, et le mouvement plan qu'elle définit.

(1) D'une façon plus précise, si la valeur absolue de α_j dépasse à elle seule la somme de la série $\sum|\alpha_n|$, étendue à toutes les valeurs positives et négatives de n, j excepté; et s'il subsiste en outre une inégalité analogue provenant de dx/dt, c'est-à-dire si

$$|(j+g)\alpha_j| > \sum|(n+g)\alpha_n|\,.$$

Soit ϑ l'anomalie du point mobile. *On peut toujours poser*

$$\text{(IV)} \qquad \vartheta = \omega t + \varepsilon(t) \,,$$

où $\varepsilon(t)$ reste fini même pour t indéfiniment croissant, et ω est une constante, égale, suivant les cas, à $j+g$ où à $j-g$ (j entier; g détermination choisie pour le coefficient de $\pm 2\pi i$ dans les exposants caractéristiques du système différentiel).

Notons, en passant, que *cet énoncé fournit une spécification non artificielle des exposants caractéristiques.* On l'obtient en convenant, une fois pour toutes, de fixer le signe et l'entier additif, qui restent *a priori* indéterminés dans ces exposants, par la condition que le coefficient de $\pm 2\pi i$ soit justement le coefficient ω de t dans l'expression (asymptotique) (IV) de l'anomalie ϑ.

La formule (IV) donne

$$\lim_{t=\infty} \frac{\vartheta}{t} = \omega \,,$$

montrant que le rapport entre l'espace angulaire décrit par le point mobile et le temps employé tend à différer autant moins de ω que l'intervalle grandit. La rotation autour de l'origine est donc asymptotiquement uniforme.

Il est bien naturel d'exprimer une telle circonstance en disant qu'il existe un *moyen mouvement asymptotique* pour le point mobile sur Σ, ou, si l'on veut, pour la solution Σ elle-même, ou, en remontant encore, pour tout système diffèrentiel (III) [2].

---

[2] Il convient de rattacher ce résultat à une question (se présentant dans la théorie ordinaire des inégalités séculaires) posée déjà par LAGRANGE:

Soit un mouvement plan défini par les équations:

$$x(t) = \sum_1^N {}_n \alpha_n \cos(g_n t + \beta_n) \,,$$

$$y(t) = \sum_1^N {}_n \alpha_n \sin(g_n t + \beta_n) \,,$$

où les sommes comprennent un nombre fini (d'ailleurs arbitraire) N de termes, les g, les α et les β sont des constantes réelles quelconques. Existe-il un moyen mouvement (asymptotique) pour l'anomalie ϑ?

La réponse est affirmative pour $N = 2$, ou bien (N étant quelconque) si une des $|\alpha|$ dépasse la somme de toutes les autres. [Comparez par exemple: CHARLIER, *Die Mechanik des Himmels*, Band I, Leipzig, Veit, 1902, pp. 354-356, 369-372]. Mais l'analyse du cas général paraît assez peu encourageante: c'est LAGRANGE, lui-même, qui l'avait fait remarquer. On s'en rend compte nettement d'après une intéressante recherche de M. BOHL [*Ueber ein in der Theorie der säkularen Störungen vorkommendes Problem* (« Journal für die reine und angewandte Mathematik », B. 135, La première partie de ma recherche (Chap. I et II) a eu pour bout principal la démonstration du théorème d'existence énoncé tout à l'heure. J'y suis parvenu par des considérations indirectes, très élémentaires d'ailleurs, sur les substitutions linéaires. Il convient toutefois de remarquer qu'il s'agit d'une propriété touchant exclusivement à l'anomalie ϑ, et par cela même incluse (d'une façon plus ou moins cachée) dans l'équation du première ordre

$$\text{(V)} \qquad \frac{d\vartheta}{dt} = a_{21} \cos^2 \vartheta + (a_{22} - a_{11}) \cos \vartheta \sin \vartheta - a_{12} \sin^2 \vartheta \,,$$

qui est une conséquence immédiate du système (III) et définit complètement ϑ en fonction de t.

A ce point de vue la question de l'existence du moyen mouvement se pose également pour toute équation

$$\text{(VI)} \qquad \frac{d\vartheta}{dt} = \Theta(t, \vartheta) \,,$$

où Θ est une fonction finie, continue et périodique, soit par rapport à t que par rapport à ϑ.

En désignant par ϑ_0 la valeur initiale de ϑ, par m et M la plus petite et la plus grande valeur de Θ, on tire de (VI)

$$mt \leqslant \vartheta - \vartheta_0 \leqslant Mt \,.$$

Le rapport ϑ/t reste par conséquent compris, lorsqu'on fait croître t indéfiniment, entre des limites finies (qu'il est permis de supposer, pour t assez grand, si proches que l'on veut, de m, M). Mais tend-il vers une limite bien déterminée? Je ne pense pas qu'il en soit ainsi, en général; cependant je ne saurais citer en ce moment aucun exemple à l'appui de mon impression. La limite existe non seulement pour les équations (V),

---

1908, pp. 189-283), où se trouve épuisé le cas de $N = 3$. Il s'ensuit que l'existence d'un moyen mouvement est liée *en général* à la nature arithmétique des coefficients.

Pour les solutions $x(t)$, $y(t)$ des systèmes (III), on n'est pas gêné par de telles distinctions. Cela tient, peut-on dire, à la circonstance particulière que les g_n de LAGRANGE ont ici des valeurs en progression arithmétique ($g_n = g + n$): dès lors le passage de la somme (d'un nombre fini N de termes) à une série n'augmente pas la difficulté.

On est ainsi amené à ajouter aux deux cas signalés par LAGRANGE ($N = 2$; présence d'un terme prépondérant) un troisième cas, assez particulier d'un côté (à cause de la liaison entre les g), très général de l'autre (les sommes pouvant même être remplacées par des séries), où l'existenee d'un moyen mouvement apparaît sous son jour naturel de caractère qualitatif.

mais aussi pour quelques autres formes de Θ [par exemple lorsqu'on peut, dans (VI), séparer les variables].

En revenant au présent Mémoire, je dois ajouter quelques mots sur l'application à la théorie de la Lune contenue dans le dernier Chapitre. On n'y trouvera la résolution d'aucun problème nouveau, mais plutôt un exposé didactique de prémises et développements assez connus, visant à établir en toute rigueur un résultat théorique qui remonte, peut-on dire, à NEWTON: l'existence d'un moyen mouvement (asymptotique) du nœud lunaire.

On le rattache ordinairement à une équation du second ordre telle que (I) (à exposants caractéristiques imaginaires). La nature de la question implique la présence d'un terme prépondérant dans le développement de l'intégrale qu'il y a lieu de considérer; d'où la conséquence légitime qu'il y a, en moyenne, un nombre bien déterminé de racines à chaque période. On tire d'ici la mesure du moyen mouvement du nœud, *en supposant toutefois d'avance que ce moyen mouvement existe.* Il en est bien ainsi en première approximation (lorsqu'on ne retient que les termes du premier ordre par rapport à un certain paramètre); mais on n'a nullement le droit d'en conclure sans discussion que cela est vrai exactement, d'autant plus que — on le sait bien — pour des équations non linéaires, la conclusion serait en défaut.

Cette petite lacune du raisonnement classique disparaît après coup par une transformation (classique elle-même, à quelques détails près) de la dite équation du second ordre. On n'a alors qu'à appliquer à la longitude du nœud le théorème général d'existence concernant les systèmes (III).

Qu'il me soit permit de signaler, en terminant, l'extension qu'on pourrait faire à l'espace (ou plus généralement à un nombre quelconque de variables) des questions discutées, pour deux variables, dans les Chapitres I et II.

CHAPITRE I.

QUELQUES REMARQUES SUR LES SUBSTITUTIONS LINÉAIRES À DEUX VARIABLES

1. - Généralités.

Considérons (dans le champ réel) la substitution linéaire S,

$$\left\{\begin{aligned} x &= a\xi + b\eta\,, \\ y &= c\xi + d\eta\,, \end{aligned}\right. \tag{1}$$

propre, c'est-à-dire telle que le déterminant des coefficients

$$D = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix},$$

ne s'annule pas.

Si l'on envisage x, y; ξ, η comme coordonnées cartésiennes de deux points P et Π d'un même plan, la substitution S s'interprète géométriquement comme une affinité (transformation homographique conservant la droite de l'infini) ayant son centre (point uni à distance finie) dans l'origine O.

A tout point Π distinct de O correspond, d'après (1), un point P, également distinct de O, et réciproquement.

Soit f l'angle dont il faut tourner autour de O, le sens positif étant $Ox \to Oy$, pour passer de $O\Pi$ à OP. Cet angle n'est déterminé (en fonction de x, y, ou, si l'on veut, de ξ, η, a, b, c, d) qu'à des multiples de 2π près, à moins qu'on ne fasse intervenir quelque convention ultérieure.

On convient bien souvent (même sans le dire explicitement, tant c'est naturel) de se rapporter à la plus petite des rotations amenant $O\Pi$ en OP (en lui attribuant le signe $+$ ou le signe $-$ suivant le sens), ce qui revient à supposer f compris entre $-\pi$ et π.

2. - Substitutions variables. Lemme sur l'uniformité.

Mais parfois il peut être avantageux d'adopter un critère différent. C'est ce qui arrive par exemple lorsqu'il y a lieu de faire varier, d'une façon continue, soit les coordonnées ξ, η, soit les coefficients a, b, c, d qui figurent dans les formules (1). Il est alors naturel d'exiger que la variation de f soit elle-même continue, et on est conduit à adopter la détermination de f provenant par continuité d'une détermination initiale f_0. A l'égard de celle-ci le choix reste arbitraire: on pourrait par exemple avoir recours à la spécification précédente en s'imposant les inégalités $-\pi < f_0 \leqslant \pi$, mais il suffira simplement de retenir que f_0 est une constante bien déterminée.

Pour que le critère de la continuité soit justifié sans discussions complémentaires, nous supposerons:

A. Qu'on ait toujours affaire à une véritable substitution, c'est-à-dire que, pendant la variation de a, b, c, d, le déterminant D ne s'annule pas.

B. Que le point Π, et par suite P, ne passent jamais à l'origine, l'angle $\widehat{\Pi O P}$ ayant ainsi toujours une signification géométrique.

Il va nous convenir de préciser davantage.

Envisageons nos éléments variables ξ, η, a, b, c, d, comme fonctions d'un certain nombre de paramètres réels: t et τ, pour fixer les idées; et supposons qu'elles remplissent A et B en restant continues et uniformes dans un certain domaine Γ (de valeurs des paramètres t et τ). Je dis que, *si le champ Γ est simplement connexe, $f(t, \tau)$, déduite par continuité d'une valeur initiale f_0* (correspondante à un point particulier quelconque t_0, τ_0 de Γ), *résulte elle-même une fonction uniforme.*

Pour le prouver, il suffit de constater l'identité des déterminations de f avec lesquelles on parvient à un point quelconque (t, τ) à partir de (t_0, τ_0), en suivant des chemins différents entièrement situés dans Γ.

Soient en effet f et f' les deux déterminations correspondant à deux quelconques L, L' des chemins susdits. Ils forment ensemble un cycle fermé, réductible par continuité à un poimt ou, si l'on veut, à une circulation infiniment petite sans sortir de Γ.

Or, si l'on décrit le cycle, en partant de (t, τ) avec la détermination f (et en parcourant d'abord L à reculons, puis L') on revient en (t, τ) avec la détermination f'. D'ailleurs la différence $f' - f$ ne peut être qu'un multiple entier de 2π; dans une déformation continue du cycle elle ne saurait subir des variations brusques; c'est donc une constante. Mais elle s'annule pour une circulation infiniment petite; on a, partant, $f' = f = 0$.

C. Q. F. D.

3. - Déplacement du point paramétrique dans une substitution à coefficients constants.

Cherchons d'abord, pour une substitution quelconque S, dans quelles conditions la rotation f est un multiple entier (ou nul) de π, ce qui équivaut à $\sin f = 0$.

Il faut et il suffit pour cela que deux points correspondants Π et P (distincts de l'origine, d'après B) se trouvent alignés avec l'origine, c'est-à-dire qu'on ait

$$x = \lambda\xi\,, \qquad y = \lambda\eta\,,$$

en désignant par λ un facteur de proportionalité, qui peut être d'ailleurs positif ou négatif. Dans le premier cas Π et P appartiennent à un même rayon vecteur issu de l'origine, et f est par conséquent un multiple *pair* de π; dans le second cas $O\Pi$ et OP sont opposés, et f est un multiple *impair* de π.

Quoi qu'il en soit, en posant, dans les (1), $x = \lambda\xi$, $y = \lambda\eta$, comme nous excluons que ξ, η s'annulent à la fois, on voit que λ doit vérifier l'équation du second degré

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix} = 0 .$$

La façon dont se comporte f comme fonction du point Π est bien différente selon que le déterminant

$$D = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix},$$

est positif ou négatif. Examinons séparément les deux éventualités.

$D > 0$. – Les deux racines de l'équation précédente peuvent être réelles ou imaginaires; lorsqu'elles sont réelles, elles ont un même signe.

Il s'ensuit que, en faisant varier Π dans tout le plan (à l'exclusion seulement du point O): ou bien on ne rencontre aucune valeur de f multiple de π (racines imaginaires); ou bien l'on rencontre des multiples pairs (racines positives); ou bien des multiples impairs (racines négatives); jamais de multiples pairs et impairs à la fois.

Ceci nous indique que l'oscillation de la fonction f du point Π (déduite par continuité d'une détermination initiale, arbitrairement choisie en correspondance d'une position particulière quelconque de Π) ne peut jamais atteindre 2π, de quelle façon qu'on déplace Π, même en le faisant tourner autour de l'origine.

En effet, si ladite oscillation était $\geqslant 2\pi$, l'ensemble des valeurs prises par f comprendrait à la fois des multiples pairs et des multiples impairs de π, ce que nous venons d'exclure.

Une conséquence immédiate est que la fonction dont il s'agit résulte nécessairement *uniforme*. En effet les autres déterminations, *a priori* possibles, différent par des multiples de 2π, et il n'est pas à craindre d'y parvenir en faisant décrire à Π des cycles fermés, dès que l'oscillation reste au-dessous de 2π.

Il est à peine nécessaire d'ajouter que ce cas d'uniformité ne rentre pas dans la remarque générale du numéro précédent, puisque le champ de variabilité de Π (qui correspond au Γ du numéro précédent, les coordonnées ξ, η jouant ici le rôle de t, τ), n'est plus simplement connexe à cause de l'exclusion de l'origine.

$D < 0$. – Envisageons d'abord le cas particulièrement simple d'une reflexion (sur l'axe des abscisses)

$$x = \xi , \qquad y = -\eta .$$

Partons, pour fixer les idées, d'un point Π situé sur l'axe des abscisses. Il coïncide alors avec son correspondant P, et l'on peut adopter la détermination initiale $f = 0$.

Faisons maintenant tourner Π, dans un sens quelconque, autour de l'origine; le point P tourne évidemment en sens opposé; par conséquent la valeur absolue de la rotation va toujours en augmentant. Après un tour complet, l'augmentation sera 4π (chacun des deux points ayant tourné de 2π).

On a donc affaire à une fonction *non uniforme* f de Π, qui croît (ou décroît suivant le sens) de 4π, lorsqu'on fait décrire à Π un cycle renfermant l'origine.

Nous allons prouver que cela arrive également pour une substitution quelconque S à déterminant négatif.

Il suffit d'invoquer la circonstance qu'on peut passer de S à la reflexion $x = \xi$, $y = -\eta$ (pour laquelle $D = -1$) en modifiant d'une façon continue les coefficients a, b, c, d sans que la condition $D \neq 0$ (A du numéro précédent) soit jamais en défaut.

Dès lors, soient, pour la substitution S qu'on prend à considérer, f et f' deux déterminations correspondantes à un même point Π et déduites l'une de l'autre en tournant *une seule fois* autour de l'origine.

La différence $f' - f$, qui ne peut être qu'un multiple entier de 2π, reste constante lorsqu'on fait varier les coefficients avec continuité; elle est -4π pour la reflexion (si l'on est passé de f à f' en tournant dans le sens direct $Ox \to Oy$); elle reste donc -4π pour toute substitution à déterminant négatif. C. Q. F. D.

4. - Déplacement du point paramétrique dans le cas général.

Nous nous proposons d'assigner une limite supérieure des oscillations de la fonction f lorsqu'on combine le déplacement de Π avec une variation quelconque des coefficients a, b, c, d.

On parviendra sans peine à se débarrasser de cette dernière influence, en se reconduisant au cas des coefficients constants envisagé tout à l'heure.

Supposons, pour plus de netteté, les a, b, c, d fonctions d'un seul paramètre t, et ξ, η indépendants de t.

Il convient de se représenter P comme un point mobile en fonction de t (temps) et dépendant en outre d'un point paramétrique Π.

Soit ϑ l'anomalie de P, en convenant, bien entendu, de lui attribuer la détermination qui se déduit par continuité d'une détermination initiale, d'ailleurs quelconque.

Déplaçons Π en Π^*, et soit P^* la position occupée, dans cette hypothèse, par le point mobile à l'instant t; ϑ^* l'anomalie correspondante, toujours déduite par continuité d'une détermination initiale (arbitraire). J'en disposerai, pour fixer les idées, de façon qu'on ait, à l'instant initial $t = t_0$,

$$-\pi < \vartheta^* - \vartheta \leqslant \pi .$$

Soient encore ξ^*, η^* les coordonnées de Π^*; x^*, y^* celles de P^*, liées à ξ^*, η^* par les relations (1), qui s'écrivent

$$\text{(1')} \qquad \begin{cases} x^* = a\xi^* + b\eta^* , \\ y^* = c\xi^* + d\eta^* . \end{cases}$$

Ceci posé, si Π et Π^* sont alignés avec l'origine, c'est-à-dire si leurs coordonnées sont proportionnelles, il en sera de même, à cause de (1) et (1′), pour P et P^* quel que soit t.

La différence $\vartheta^* - \vartheta$ se maintient alors constante, et par suite égale ou bien à zèro, ou bien à π, d'après la spécification adoptée pour la valeur initiale.

En dehors de ce cas particulier, le déterminant

$$\nu = \begin{vmatrix} \xi & \eta \\ \xi^* & \eta^* \end{vmatrix},$$

ne s'annule pas.

Les équations (1) et (1′) donnent d'ailleurs

$$\begin{vmatrix} x & y \\ x^* & y^* \end{vmatrix} = D\nu .$$

Le premier membre est identique à $rr^* \sin(\vartheta^* - \vartheta)$, en désignant par r, r^* les rayons vecteurs OP, OP^*.

Il s'ensuit

$$\sin(\vartheta^* - \vartheta) = \frac{D\nu}{rr^*},$$

où — c'est tout ce qu'il nous faut retenir — le second membre ne s'annule pas.

La différence $\vartheta^* - \vartheta$ étant initialement comprise entre $-\pi$ et 0, ou bien entre 0 et π (extrémités excluses, puisqu'il ne s'agit pas de points alignés), restera toujours dans le même intervalle, car autrement elle devrait traverser un zéro de $\sin(\vartheta^* - \vartheta)$.

On a partant $|\vartheta^* - \vartheta| < \pi$, d'où la limitation

$$|\vartheta^* - \vartheta| \leqslant \pi ,$$

embrassant aussi le cas de l'alignement.

Remarquons maintenant qu'en disposant d'une manière convenable des coordonnées ξ, η du point Π on peut attribuer à x, y des valeurs initiales arbitraires, c'est-à-dire une position initiale fixée d'avance au point mobile P. Nous sommes ainsi conduits à l'énoncé suivant:

Dans tout mouvement défini par une substitution (1) (à coefficients fonctions de t), le nombre de tours décrits, dans un temps donné, par le rayon vecteur du point mobile est indépendant de sa position initiale; d'une façon plus précise, la différence $\vartheta^* - \vartheta$ des anomalies (fixée initialement entre $-\pi$ et π) ne peut jamais dépasser un demi-tour.

Il est aisé d'en déduire une limitation pour l'oscillation que peut subir, avec t, la différence $f^* - f$ des rotations faisant passer respectivement de $O\Pi^*$ à OP^* et de $O\Pi$ à OP. L'une et l'autre, cela va sans dire, sont censées déduites, par variation continue de t, de leurs déterminations initiales f^*, f_0: à l'égard de cette dernière on ne fait aucune convention, mais f^* en reste fixée, par la loi de continuité, d'après le déplacement du point paramétrique (de Π e Π^*).

Tout d'abord, dans le cas de l'alignement, la dite différence $f^* - f$ garde, quel que soit t, sa valeur initiale $f^* - f_0$. Pour se rendre compte de la variation dans le cas général, il suffit de remarquer que les différences

$$\vartheta - f , \qquad \vartheta^* - f^*$$

sont des constantes, puisqu'elles représentent les anomalies des points paramétriques Π et Π^*, prises avec des déterminations convenables. L'identité

$$\vartheta^* - \vartheta = f^* - f + \text{const.}$$

montre alors que $f^* - f$ ne peut s'écarter de sa valeur initiale plus que π (à droite et à gauche), car autrement on traverserait quelque zéro de $\sin(\vartheta^* - \vartheta)$.

On en conclut

$$|f^* - f| \leqslant |f_0^* - f_0| + \pi ,$$

en tout cas et pour toute valeur de t.

Corollaire pour les substitutions à déterminant positif.

S'il s'agit d'une substitution à déterminant positif, la différence

$|f_0^* - f_0|$ reste au-dessous de 2π (numéro précédent), d'où

$$|f^* - f| \leqslant 3\pi .$$

L'oscillation de la fonction f (de t et du point paramétrique Π) ne peut donc dépasser 3π [de quelle façon qu'on fasse varier soit t, soit Π (3)].

5. - Substitutions périodiques et semi-périodiques. Indices. Moyen mouvement vrai et moyen mouvement asymptotique.

Une substitution (1), dont les coefficients a, b, c, d dépendent d'un paramétre t, sera dite *périodique*, si les fonctions a, b, c, d admettent toutes la même période T. On peut naturellement supposer $T > 0$, car, T étant une période, $-T$ l'est également.

Il y a avantage à considérer ensemble les substitutions périodiques et une classe un peu plus générale jouissant (au point de vue qui va nous intéresser) de propriétés identiques. Ce sont les substitutions *semi-périodiques*, définies par la condition que les coefficients a, b, c, d soient périodiques de seconde espèce, comme s'exprimait HERMITE, c'est-à-dire se reproduisant au bout d'une période à un facteur constant ϱ près (le même pour toutes les quatre fonctions).

Fixons partant notre attention sur une substitution semi-périodique quelconque, ce qui comprend aussi (pour $\varrho = 1$) le cas des substitutions périodiques.

En faisant croître t à partir d'une valeur quelconque, au bout d'une période T, les coordonnées x, y de P se trouvent multipliées par ϱ; le rayon vecteur OP acquiert par conséquent une direction égale ou opposée à sa direction initiale. Il a donc accompli, en tout cas, une rotation de $N\pi$, N étant un entier (positif, négatif ou nul).

Ce nombre N reste toujours le même, par raison de continuité, quelle que soit la valeur initiale de t, et aussi la position du point paramétrique Π.

On a partant dans N un élément caractéristique de la substitution: je l'appellerai *indice* de la substitution semi-périodique dont il s'agit.

Ceci posé, considérons (comme fonction de t) la rotation f, en adoptant — cela va sans dire — la détermination imposée par la continuité, à partir d'une certaine détermination initiale.

(3) On reconnaît aisément que f est une fonction uniforme de t, Π, c'est-à-dire des arguments t, ξ, η, le champ de variation étant le champ réel (ξ, η, t) tout entier, à l'exclusion de la droite $\xi = 0$, $\eta = 0$.

La propriété invariante de N se traduit dans l'équation fonctionnelle

$$f(t+T)-f(t)=N\pi\,,$$

subsistant pour toute valeur de t.

On en déduit immédiatement qu'en posant

$$f(t)=\frac{N\pi}{T}\,t+\sigma(t)\,, \tag{2}$$

le terme résiduel $\sigma(t)$ est une fonction périodique de t. C'est ce qu'on exprime parfois en disant que la fonction f possède le *moyen mouvement vrai* $N\pi/T$ (1). Nous le dirons même moyen mouvement de la substitution semi-périodique dont il s'agit. La raison en est manifeste si l'on pense au mouvement du point représentatif P autour de O.

En effet, dans le cas particulier où l'indice N est nul, ce moyen mouvement s'annule aussi, et $f(t)$ se réduit à une fonction périodique, ce qui veut dire que le rayon vecteur reprendra sa position initiale, ayant exactement tourné d'autant dans un sens que dans le sens opposé (moyen mouvement $=0$).

Pour $N\neq 0$, la différence $f-t\cdot N\pi/T$ des rotations accomplies par P et par un point fictif doué de la vitesse angulaire constante $N\pi/T$ (et coïncidant avec P pour $t=0$) reste toujours finie d'après (2), et on a

$$\lim_{t=\infty}\frac{f(t)-(N\pi/T)t}{(N\pi/T)t}=0\,.$$

Cette différence est par conséquent d'autant moins importante vis-à-vis de $t\cdot N\pi/T$ que les valeurs de t vont en croissant.

Chaque fois qu'une pareille circonstance se présente, il y a bien en quelque sorte un moyen mouvement.

Nous voici partant conduits à la définition suivante:

Si une fonction $f(t)$ peut être représentée sous la forme

$$f(t)=\omega t+\varepsilon(t)\,,$$

où $\varepsilon(t)$ reste finie, même pour t grandissant indéfiniment, on dira qu'elle admet le *moyen mouvement asymptotique* ω.

---

(1) Voir par exemple CHARLIER, *Die Mechanik des Himmels*, Leipzig, Veit, 1902-1907, B. II, p. 452.

On dira analoguement qu'une substitution à coefficients variables possède un moyen mouvement asymptotique s'il en est ainsi pour la rotation $f(t)$ (du point représentatif P, autour de O).

6. - Substitutions composées.

Prenons pour S le produit de deux substitutions linéaires Σ, Σ_1, définies respectivement par les formules

$$\left\{\begin{array}{l} x = \alpha\mathfrak{x} + \beta\mathfrak{y}\,, \\ y = \gamma\mathfrak{x} + \delta\mathfrak{y}\,; \end{array}\right. \tag{3}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \mathfrak{x} = \alpha_1\xi + \beta_1\eta\,, \\ \mathfrak{y} = \gamma_1\xi + \delta_1\eta\,. \end{array}\right. \tag{4}$$

On peut supposer, sans nuire à la généralité, que le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix},$$

de la substitution Σ soit positif. En effet, s'il était négatif, on n'aurait qu'à changer $\mathfrak{y}$ dans $-\mathfrak{y}$ pour renverser le signe de Δ (et en même temps du déterminant de Σ_1).

Les α, β, γ, δ; α_1, β_1, γ_1, δ_1 seront censés fonctions d'un paramètre t, finies, continues et vérifiant la condition A du n. 2. Il en sera alors de même pour les coefficients a, b, c, d de la substitution $S = \Sigma\Sigma_1$.

Les coordonnées ξ, η seront traitées ici comme des constantes (par rapport à t).

P, Π et f conservant toujours leur signification, appelons $\mathfrak{P}$ le point $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$; φ_1 la rotation amenant $O\Pi$ en $O\mathfrak{P}$; Φ la rotation amenant $O\mathfrak{P}$ en OP, déduites l'une et l'autre par continuité de certaines déterminations initiales (arbitraires). Ces rotations φ_1 et Φ sont évidemment, autant que f, des fonctions de t; la somme $\Phi+\varphi_1$ ne peut d'ailleurs différer de f que par des multiples de 2π. Si la différence initiale est $2n\pi$ (n entier), on aura, par raison de continuité,

$$f(t) = \Phi(t) + \varphi_1(t) + 2n\pi\,,$$

pour toutes les valeurs de t.

La rotation Φ figurant dans cette formule se rapporte à des $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ variables avec t d'après (3). Désignons par φ la rotation correspondant à la même substitution Σ, pour la même valeur de t, dans l'hypothèse toutefois que les $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ ne varient pas (gardant par exemple leurs valeurs initiales).

Le déterminant Δ de la substitution Σ étant par hypothèse positif, on est assuré (n. 4, corollaire final) que la différence $\Phi - \varphi$ ne peut jamais dépasser 3π en valeur absolue. Si donc on pose

$$\Psi = \Phi - \varphi + 2n\pi ,$$

la fonction Ψ restera toujours finie.

D'ailleurs la relation précédente peut s'écrire

$$f = \varphi + \varphi_1 + \Psi , \tag{5}$$

φ et φ_1 ayant une signification analogue pour Σ et Σ_1 respectivement.

Il s'ensuit que la loi de croissance de f pour les grandes valeurs de t est fixée par la somme

$$\varphi + \varphi_1 .$$

Voilà ramenée la substitution composée S à ses composantes Σ, Σ_1.

Remarque. – On a supposé dans ce qui précède que le déterminant Δ de Σ soit positif, ou, pour mieux dire, qu'on ait pris préalablement le soin de le rendre tel en changeant, au besoin, $\mathfrak{y}$ en $-\mathfrak{y}$.

On pourrait naturellement traiter d'une manière directe aussi le *cas du déterminant Δ négatif*. On serait conduit, après quelques réductions, au résultat bien simple qu'il suffit de remplacer, dans l'expression de f, la somme des rotations φ, φ_1 par leur différence.

La formule qui fait pendant à (5), *pour $\Delta < 0$, est donc*

$$f = \varphi - \varphi_1 + \Psi^* , \tag{5'}$$

Ψ^* représentant une quantité qui reste toujours finie.

7. - Cas particulier.

Si les substitutions Σ et Σ_1 sont périodiques ou semi-périodiques, on peut aller plus loin.

On peut alors poser (n. 4)

$$\varphi = \frac{N\pi}{T} + \sigma ,$$

$$\varphi_1 = \frac{N_1\pi}{T_1} + \sigma_1 ,$$

T, T_1 désignant les périodes de Σ, Σ_1; N, N_1 leurs indices; σ et σ_1 deux fonctions périodiques.

Supposons d'abord le déterminant de Σ positif.

L'expression de la rotation f (correspondante à la substitution composée $S = \Sigma \cdot \Sigma_1$) pourra s'écrire, d'après (5),

$$f = \frac{N\pi}{T} t + \frac{N_1\pi}{T_1} t + \varepsilon \,, \tag{6}$$

où

$$\varepsilon = \Psi + \sigma + \sigma_1$$

reste finie même si t grandit indéfiniment.

Dans le cas du déterminant négatif, on aurait d'une manière analogue

$$f = \frac{N\pi}{T} t - \frac{N_1\pi}{T} t + \varepsilon^* \,, \tag{6'}$$

où $\varepsilon^* = \Psi^* + \sigma - \sigma_1$ reste également finie en tout cas.

Les formules (6) et (6′) donnent lieu à l'énoncé suivant:

Toute substitution S, produit de deux substitutions semi-périodiques Σ, Σ_1, posséde un moyen mouvement asymptotique, qui est la somme ou la différence des moyens mouvements admis par les substitutions composantes: la somme si le déterminant de Σ est positif, la différence s'il est négatif.

Chapitre II.

SYSTÈMES DIFFÉRENTIELS LINÉAIRES À COEFFICIENTS PÉRIODIQUES

1. - Préliminaires. Expression classique de l'intégrale générale.

Nous nous occuperons des systèmes linéaires à deux inconnues:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= a_{11}x + a_{12}y \,, \\ \frac{dy}{dt} &= a_{21}x + a_{22}y \,, \end{aligned} \right. \tag{1}$$

les a étant des fonctions périodiques réelles de la variable indépendante t (finies et continues); la période sera désignée par T, en supposant $T > 0$, ainsi qu'il est toujours loisible et qu'il a été déjà convenu au Chapitre précédent (n. 5). Il sera en outre commode de se servir parfois de locutions cinématiques en interprétant la variable indépendante t comme temps et faisant correspondre à chaque solution (réelle) de (1) un point mobile P, ayant pour coordonnées à un instant quelconque t les valeurs $x(t)$, $y(t)$.

Toute propriété générale des systèmes linéaires s'applique naturellement à (1). Citons notamment la formule [5]

$$\frac{dD}{dt} = -(a_{11} + a_{22})D, \tag{2}$$

où D représente le déterminant

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix},$$

de deux solutions particulières quelconques

$$x = x_1(t), \qquad y = y_1(t);$$
$$x = x_2(t), \qquad y = y_2(t).$$

Elle nous assure que la condition d'indépendance ne peut jamais cesser d'être satisfaite, dès qu'elle l'est pour l'instant initial $t = t_0$.

Ceci rappelé, tenons compte de la périodicité des coefficients et citons encore quelques résultats bien connus [6].

La forme analytique des intégrales de (1) dépend essentiellement d'une certaine équation du second degré à coefficients numériques *réels* (ces coefficients pouvant être calculés en tout cas par approximations successives en opérant des quadratures superposées sur les fonctions a):

---

[5] Donnée explicitement par JACOBI, mais remontant dans la substance à LIOUVILLE, ou même, pour le second ordre, à ABEL (voir l'article de M. VESSIOT, dans l'édition française de l'« Encyclopédie des Sciences mathématiques », t. II, vol. 5, fasc. 1, p. 130).

[6] Voir, par exemple: FLOQUET, *Sur les équations différentielles linéaires à coefficients périodiques* (« Annales scientifiques de l'Ecole Normale supérieure », 2e série, t. XII, 1883, pp. 47-83). POINCARÉ, *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste*, Paris, Gauthier-Villars, 1892-1899, t. I, n. 30, pp. 64-68. CHARLIER, loc. cit., Band I, pp. 22-41. LIAPOUNOFF, *Problème général de la stabilité du mouvement* (« Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse », 2e série, t. IX, 1907, nos. 46-54, pp. 392-426).

les logarithmes (naturels) des racines ϱ_1, ϱ_2 de la dite équation sont ce qu'on appelle *les exposants caractéristiques du systéme différentiel.*

D'après les hypothèses faites à l'égard des a, ϱ_1, ϱ_2 résultent nécessairement finies et différentes de zéro, leur produit étant essentiellement *positif.*

Elle peuvent être d'ailleurs réelles ou bien complexes conjuguées.

Cas des racines réelles. – Si ϱ_1, ϱ_2 sont réelles (qu'elles soient distinctes ou coïncidentes), les équations (1) admettent (au moins) une solution *réelle* à multiplicateur, c'est-à-dire une solution

$$x = a(t)\,, \qquad y = c(t)\,,$$

telle que

$$a(t + T) = \varrho_1 a(t)\,, \qquad c(t + T) = \varrho_1 c(t)\,. \tag{3}$$

Soit alors

$$x = b(t)\,, \qquad y = d(t)\,,$$

une seconde solutions *réelle* quelconque, indépendante de (a, c), ce qui se traduit dans l'inégalité

$$D = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0\,.$$

L'intégrale générale de notre système pourra s'exprimer sour la forme

$$\begin{cases} x = a\xi + b\eta\,, \\ y = c\xi + d\eta\,, \end{cases} \tag{4}$$

en indiquant par ξ, η, les deux constantes d'intégration.

Les solutions réelles sont évidemment toutes et seulement celles qui correspondent à valeurs réelles de ξ, η.

Cas des racines imaginaires. – Dès que ϱ_1, ϱ_2 ne sont pas réelles, elles sont conjuguées (et distinctes).

En posant

$$\frac{1}{2\pi i} \log \varrho_1 = \frac{1}{2\pi i}\, k_1 = g + i\,\frac{h}{2\pi}\,, \qquad (g, h \text{ réels}), \tag{5}$$

g et, par conséquent, l'exposant caractéristique k_1 ne sont déterminés qu'à un nombre entier près. On pourrait par exemple adopter la détermination de g plus petite en valeur absolue. On aurait alors

$$0 < |g| < \tfrac{1}{2},$$

ou même

$$0 < g < \tfrac{1}{2}, \tag{6}$$

en convenant d'appeler ϱ_1 celle des deux racines pour laquelle le coefficient de i est positif (ce qui équivaut à $\sin 2\pi g > 0$).

Il vaut mieux toutefois ne pas introduire, à l'égard de g, une convention artificielle, qui pourrait devenir gênante. Ceci surtout pour le cas, où l'on a affaire à des systèmes différentiels dépendant de paramètres. On désire alors généralement de respecter la continuité; et il convient par conséquent d'adopter la détermination de g se déduisant par continuité d'une détermination initiale g_0 arbitrairement choisie [par exemple d'après (6)] en correspondance à un système particulier de valeurs des paramètres.

Ceci bien fixé, posons encore

$$\frac{k_2}{2\pi i} = -g + i\frac{h}{2\pi}, \tag{5'}$$

d'où (ϱ_2 étant conjuguée à ϱ_1)

$$e^{k_2} = \varrho_2\ ;$$

k_2 est donc le second exposant caractéristique (conjugué à k_1).

Venons désormais à l'intégrale générale. La théorie des équations à coefficients périodiques lui assigne le type suivant:

$$\begin{cases} x = C_1 u_1 e^{k_1 t/T} + C_2 u_2 e^{k_2 t/T}, \\ y = C_1 v_1 e^{k_1 t/T} + C_2 v_2 e^{k_2 t/T}, \end{cases} \tag{7}$$

où C_1, C_2 représentent les constantes d'intégration, et u_1, u_2; v_1, v_2 sont des fonctions périodiques (u_1 conjuguée à u_2, v_1 à v_2) ayant la même période T des coefficients $\boldsymbol{a}$: le déterminant

$$w = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix},$$

ne s'annule jamais.

Pour obtenir de (7) toutes les solutions réelles, il faut et il suffit d'attribuer aux constantes C_1 et C_2 des valeurs complexes conjuguées. On peut mettre en évidence la réalité en posant d'abord

$$(8)\qquad \begin{cases} e^{-ht/T}u_1 = \frac{1}{2}(\alpha - i\beta)\,, \\ e^{-ht/T}v_1 = \frac{1}{2}(\gamma - i\delta)\,, \end{cases}$$

ce qui introduit quatre fonctions α, β, γ, δ réelles et semi-périodiques.

En effet, si l'on change t en $t+T$, les premiers membres des (8) deviennent

$$e^{-h}e^{-ht/T}u_1 = \tfrac{1}{2}e^{-h}(\alpha - i\beta)\,,$$

$$e^{-h}e^{-ht/T}v_1 = \tfrac{1}{2}e^{-h}(\gamma - i\delta)\,,$$

d'où les identités

$$(9)\qquad \begin{cases} \alpha(t+T) = e^{-h}\alpha(t)\,, \\ \beta(t+T) = e^{-h}\beta(t)\,, \\ \gamma(t+T) = e^{-h}\gamma(t)\,, \\ \delta(t+T) = e^{-h}\delta(t)\,. \end{cases}$$

En changeant i en $-i$, on obtient de (8)

$$(8')\qquad \begin{cases} e^{-ht/T}u_2 = \frac{1}{2}(\alpha + i\beta)\,, \\ e^{-ht/T}v_2 = \frac{1}{2}(\gamma + i\delta)\,. \end{cases}$$

Posons ensuite

$$(10)\qquad C_1 = \xi + i\eta\,, \qquad C_2 = \xi - i\eta\,, \qquad (\xi,\ \eta \text{ réels}),$$

et aussi

$$\mathfrak{x} + i\mathfrak{y} = C_1 e^{(i2\pi/T)gt}\,,$$

c'est-à-dire

$$(11)\qquad \begin{cases} \mathfrak{x} = \xi\cos\dfrac{2\pi}{T}gt - \eta\sin\dfrac{2\pi}{T}gt\,, \\[2ex] \mathfrak{y} = \xi\sin\dfrac{2\pi}{T}gt + \eta\cos\dfrac{2\pi}{T}gt\,. \end{cases}$$

Explicitons maintenant les seconds membres des (7) en tenant compte des (5), (5′), (8), (8′), (10) et (11). Il vient bien simplement

$$(12) \qquad \begin{cases} x = \alpha\mathfrak{x} + \beta\mathfrak{y} \,, \\ y = \gamma\mathfrak{x} + \delta\mathfrak{y} \,, \end{cases}$$

qui, combiné avec (11), fournit l'expression cherchée de l'intégrale générale des (1) dans le champ réel: α, β, γ, δ désignent des fonctions semi-périodiques de multiplicateur e^{-h} [d'après (9)], dont le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} ,$$

lié à w [d'après (8) et (8′)] par la relation

$$2e^{-2ht/T}w = i\Delta \,,$$

ne s'annule jamais; ξ, η sont deux constantes arbitraires, et g une constante caractéristique du système différentiel donné. A la vérité g n'est déterminée qu'à un entier près, qu'on peut *a priori* fixer à son gré. Nous supposons néamoins qu'un tel choix a été effectivement fait, ce qui rend bien déterminé tout ce qui figure dans les expressions des intégrales.

Les formules (11) définissent évidemment une substitution périodique Σ_1 (n. 5 du Chapitre précédent), ayant pour période T/g. Elle correspond à une rotation uniforme de vitesse angulaire $2\pi g/T$. Cette vitesse angulaire ne diffère pas, naturellement, du moyen mouvement (vrai, et à fortiori) asymptoptique de la substitution.

Les formules (12) définissent à leur tour une substitution Σ, semi-périodique, d'après (9), de période T. Son indice N est pair, car le multiplicateur e^{-h} des coefficients de la substitution est positif (et le rayon vecteur du point (x, y) reprend par suite sa direction initiale au bout d'une période). Si donc l'on pose $N = 2j$, j sera, lui aussi, un entier, caractéristique des coefficients α, β, γ, δ de la substitution Σ, ou, en définitive, du système différentiel donné. Toute valeur entière de j est possible, suivant les cas. Pour l'assigner effectivement, il arrivera parfois que des remarques qualitatives suffisent; en concept, on doit s'appuyer sur la construction préalable des intégrales du système, ou (ce qui suffit, mais n'est pas beaucoup plus simple) sur la connaissance des rapports des fonctions α, β, γ, δ pendant la durée d'une période.

2. - Conséquences qualitatives. Moyen mouvement asymptotique.

La forme analytique des intégrales d'un système (1) a permis depuis longtemps de décider la question de la stabilité. Il s'agit, peut-on-dire, de l'allure asymptotique du rayon vecteur (correspondant au point représentatif P d'une solution particulière quelconque). On sait que, si les racines ϱ_1, ϱ_2 ont toutes les deux des modules différents de l'unité, il y a certainement instabilité, dans ce sens que, pour t indéfiniment croissant, le point représentatif P tend: ou bien à s'éloigner à l'infini, ou bien à tomber dans l'origine.

Si, les racines étant distinctes, $|\varrho_1| = |\varrho_2| = 1$, il y a stabilité, le rayon vecteur OP restant toujours compris entre deux limites finies et différentes de zéro.

Si $|\varrho_1| = 1$, tandis que $|\varrho_2| \neq 1$, il y a en général instabilité, tout en existant ∞^1 solutions stables; etc.

Ordinairement on s'arrête à la stabilité. On n'a pas eu l'occasion, à ce que je sais, de fixer aussi l'allure asymptotique de l'anomalie ϑ. Les considérations développées jusqu'ici vont nous permettre de le faire sans peine.

Il nous suffira d'invoquer cette circonstance; l'intégrale générale de (1) [formules (4) pour ϱ_1, ϱ_2 réels; ou bien (11) et (12) pour ϱ_1, ϱ_2 complexes] définit toujours une substitution linéaire à coefficients variables, faisant passer d'un point paramétrique fixe Π (de coordonnées ξ, η) au point représentatif P.

D'après cela, l'étude de l'anomalie ϑ revient à l'étude de la rotation f correspondante à ladite substitution: ϑ et f diffèrent en effet d'un angle fixe (l'anomalie de Π).

Premier cas (ϱ_1, ϱ_2 réels). - Pour $\eta = 0$ (point paramétrique Π sur l'axe des abscisses), l'intégrale générale (4) donne lieu à des solutions

$$x = \xi a(t) , \qquad y = \xi c(t) ,$$

semi-périodiques, d'après (3).

Au bout d'une période les coordonnées du point représentatif se trouvent multipliées par ϱ_1. L'indice N de la substitution sera donc pair ou impair suivant que ϱ_1 est positif ou négatif.

Quoi qu'il en soit, la rotation f vérifie, pour ces ∞^1 solutions, la relation fonctionnelle

$$f(t+T) - f(t) = N\pi ,$$

d'où

$$f(t) = \frac{N\pi}{T} t + \sigma(t) ,$$

$\sigma(t)$ désignant une fonction périodique.

Qu'arrive-t-il, en général, pour une solution quelconque correspondante à des valeurs non nulles de la seconde constante η?

On peut le prévoir tout de suite en remarquant que la variation des constantes ξ, η, ne diffère pas de ce que nous avons appelé (Chapitre précédent, n. 4) déplacement du point paramétrique. Or il a été démontré que, pour deux positions quelconques du point paramétrique, la différence des valeurs de f à un instant quelconque t ne peut s'écarter de la différence initiale par plus que π. Si donc on pose, pour une position quelconque de Π,

$$f = \frac{N\pi}{T} t + \varepsilon(t) ,$$

et l'on forme la différence avec la valeur

$$\frac{N\pi}{T} t + \sigma(t) ,$$

(qui convient à la rotation, pour Π appartenant à l'axe des abscisses), on a le droit d'affirmer que cette différence reste finie *quel que soit* t.

Il s'ensuit que $\varepsilon(t)$ reste fini, même pour t indéfiniment croissant, *d'où l'existence d'un moyen mouvement asymptotique* $\omega = N\pi/T$, *le même pour toutes les solutions du système donné.*

La détermination du nombre (entier) N résulte, si l'on veut, de cette circonstance elle-même. Mais il vaut mieux d'en donner une définition indépendante, exempte de tout passage à la limite. C'est justement ce que nous avons fait et qui fournit la règle suivante:

On se rapporte à une (quelconque) des solutions à multiplicateur (semi-périodiques). Le point représentatif correspondant accomplit, pendant une période, un nombre exact de demi-tour autour de l'origine. N n'est que ce nombre, pris avec le signe + ou avec le signe — suivant le sens de la rotation.

Il convient d'ajouter encore une remarque: ϱ_1, ϱ_2 étant réels et de même signe, les exposants caractéristiques — quelle détermination qu'on en choisisse — ont leurs parties imaginaires multiples entier de $i\pi$; plus précisément [d'après (5) et (5')], le nombre $2g$, qui leur correspond, ne peut être qu'un entier, pair lorsque ϱ_1, ϱ_2 sont positifs, impair lorsqu'ils sont négatifs.

Mais nous avons vu qu'il en est de même pour l'entier N; $N \pm 2g$ représente donc, en tout cas, un entier pair $2j$. *On peut,* par conséquent, *attribuer à son gré au moyen mouvement asymptotique* ω *une des deux expressions, ou bien*

$$\omega = \frac{2\pi}{T}(j + g),$$

ou bien

$$\omega = \frac{2\pi}{T}(j - g),$$

g étant le coefficient de $\pm 2\pi i$ dans la détermination choisie des exposants caractéristiques et j un entier convenable (tel que $2(j+g)$ ou respectivement $2(j-g)$ reproduisent N).

Second cas (ϱ_1, ϱ_2 complexes conjugués). – L'intégrale générale se présente (n. précédent) sous la forme de produit des deux substitutions Σ_1 et Σ (dans l'ordre $\Sigma\Sigma_1$). La première a pour moyen mouvement $2\pi g/T$, la seconde (son indice étant $2j$) $2\pi j/T$. On en déduit (n. 7 du Chapitre précédent) que le produit $\Sigma\Sigma_1$ et, par conséquent, *le point représentatif d'une solution quelconque de* (1) *possède un moyen mouvement asymptotique* ω *donné par la formule*

$$\omega = \frac{2\pi}{T}(j \pm g),$$

où l'on doit prendre le signe $+$ *ou le signe* $-$ *selon que le déterminant*

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix},$$

de Σ *a valeur positive ou négative.*

Résumé. – Bien que la nature des trajectoires d'un système (1) soit essentiellement différente suivant les cas, il y a toujours (pour le point représentatif d'une solution quelconque) un moyen mouvement asymptotique. On peut même le représenter en tout cas sous une forme unique

$$\omega = \frac{2\pi}{T}(j \pm g), \tag{13}$$

où g est la détermination adoptée pour le coefficient de $\pm 2\pi i$ dans les exposants caractéristiques du système. Le signe à lui prémettre dans (13) et l'entier j résultent univoquement déterminés, sauf dans le cas de $2g$ entier (ϱ_1, ϱ_2 réels); on peut alors choisir ce signe à son gré, les valeurs respectives de j s'en déduisant sans ambiguité.

Il peut être intéressant de remarquer que, si le système différentiel dépend de paramètres et si, en les faisant varier dans un domaine, où l'on ne rencontre pas des valeurs réelles de ϱ_1, ϱ_2, on convient d'adopter pour g la détermination déduite par continuité de la détermination initiale g_0, les deux autres éléments qui restent à fixer dans (13) (j et le signe) ne changent pas. En effet j est un nombre entier, et il ne saurait changer tant que tout reste continu; le signe est en tout cas celui du déterminant Δ qui ne s'annule jamais.

3. - Equation du premier ordre définissant directement l'anomalie.

En passant des x, y aux coordonnées polaires r, ϑ, on peut déduire des (1) une équation du premier ordre contenant uniquement l'anomalie ϑ.

En l'effet, si l'on pose

$$x = r\cos\vartheta\,, \qquad y = r\sin\vartheta\,,$$

$$Q = x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\,, \tag{14}$$

c'est-à-dire, en remplaçant dx/dt, dy/dt par leurs valeurs tirées des (1),

$$\begin{aligned} Q &= a_{21}x^2 + (a_{22} - a_{11})xy - a_{12}y^2 \\ &= r^2[a_{21}\cos^2\vartheta + (a_{22} - a_{11})\cos\vartheta\sin\vartheta - a_{12}\sin^2\vartheta]\,, \end{aligned} \tag{14'}$$

l'identité

$$x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = r^2\frac{d\vartheta}{dt}\,,$$

donne après coup

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \frac{Q}{r^2} = a_{21}\cos^2\vartheta + (a_{22} - a_{11})\cos\vartheta\sin\vartheta - a_{12}\sin^2\vartheta\,. \tag{15}$$

Le second membre est une fonction de t et de ϑ périodique par rapport aux deux arguments. Il est lié aux seconds membres du système linéaire (1) par la relation (14). Cette relation devient particulièrement expressive, lorsqu'il s'agit de systèmes (1) ayant forme canonique. On a dans ce cas

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial y}\,, \qquad \frac{dy}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x}\,,$$

H étant une forme quadratique en x, y (à coefficients périodiques par rapport à t).

Il s'en suit, d'après (14),

$$Q = x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = -\left(x\frac{\partial H}{\partial x} + y\frac{\partial H}{\partial y}\right) = -2H\,,$$

d'où l'équation en ϑ

$$\frac{d\vartheta}{dt} = -\frac{2H}{r^2}\,. \tag{15'}$$

Revenant au cas général, il y a lieu d'ajouter deux remarques:

1) (au point de vue formel). L'équation (15) devient une équation de Riccati, si l'on prend comme fonction inconnue $e^{2i\vartheta}$ à la place de ϑ;

2) (au point de vue de la méthode). On est tenté à penser que l'équation (15), où tout ce qui est inessentiel a disparu, prête bien à la discussion d'existence du moyen mouvement asymptotique.

A la vérité, il peut bien se faire qu'il en soit ainsi. Je dois pourtant avouer que c'est justement parce que mes tentatives dans cette direction avaient échouées que j'ai été conduit à tourner la difficulté à l'aide des considerations développées jusqu'ici.

4. - Racines des intégrales $x(t)$, $y(t)$.

Si le point représentatif P tourne autour de l'origine *toujours dans le même sens*, il coupe évidemment, deux fois pour chaque tour, les axes coordonnés. Dans ce cas on peut évaluer sans peine la densité des racines d'une équation

$$x(t) = 0\,,$$

ou bien

$$y(t) = 0\,,$$

où $x(t)$, $y(t)$ désignent des solutions quelconques des (1).

Considérons en effet un intervalle de temps de longueur arbitraire t. L'espace angulaire, décrit par P, diffère de ωt (ω étant le moyen mouvement asymptotique dont on vient d'établir l'existence en tout cas) par une quantité qui reste finie, lorsqu'on fait croître t indéfiniment. Le nombre des tours a par suite l'expression asymptotique $|\omega t/2\pi|$, et celui des racines $|\omega t/\pi|$. Les choses se passent donc en moyenne (on pourrait dire au point de vue statistique) comme si chaque période T comprendrait $|\omega T/\pi|$, c'est-à-dire, d'après (13), $2|j \pm g|$ racines [7].

Il y a une classe d'équation (1), pour lesquelles on est assuré d'avance que le mouvement angulaire de P ne change jamais de sens. Ce sont les équations, dont les coefficients a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} rendent définie (quelle que soit la valeur de t) la forme quadratique Q [voir équation (14')]. L'équation (15) impose en effet à ϑ de varier toujours dans le même sens, dès que Q ne s'annule pas.

5. - Équation unique du second ordre.

Soit l'équation

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2p\frac{dx}{dt} + qx = 0\,, \tag{16}$$

où l'on suppose p et q [comme les coefficients a des (1)] fonctions réelles de t, finies, continues et périodiques, T étant la période.

En introduisant l'auxiliaire $y = dx/dt$, on peut évidemment remplacer l'équation (16) par le système

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y\,, \\ \dfrac{dy}{dt} = -qx - 2py\,. \end{cases} \tag{16'}$$

La forme quadratique Q relative à ce système est

$$-(qx^2 + 2pxy + y^2)\,,$$

---

[7] Il est à peine nécessaire d'avertir que, même en ayant fixé d'avance la détermination de g (ce que nous supposons toujours), le nombre des racines pourrait être représenté en tout cas par $2|j+g|$, comme il a été annoncé dans l'introduction du présent Mémoire. En effet $2|j-g|$ peut s'écrire $2|j'+g|$, pourvu qu'on pose $j' = -j$ (après quoi j' désigne toujours un entier).

qui reste définie sous la condition

$$q - p^2 > 0 . \tag{17}$$

On pourra donc, dès qu'une telle inégalité se trouve satisfaite, appliquer aux solutions de l'équation (16) la conclusion précédente sur la distribution statistique des zéros.

Mais la condition (17) est assez restrictive (devant être remplie pour toute valeur de t). Il y a lieu de la remplacer par une simple inégalité numérique portant sur la valeur moyenne μ de la différence $q - p^2$, c'est-à-dire par

$$\mu = \frac{1}{T}\int_0^T (q - p^2)\, dt > 0 . \tag{18}$$

Pour nous en rendre compte, remarquons d'abord que, si l'on désigne par σ une fonction réelle de t, continue avec sa dérivée première et périodique, mais d'ailleurs quelconque, et si l'on pose

$$x_1 = e^{\int \sigma\, dt}\, x ,$$

$$p_1 = p + \sigma ,$$

$$q_1 = q + \frac{d\sigma}{dt} + \sigma^2 + 2p\sigma ,$$

x étant intégrale de (16), la fonction x_1 a les mêmes zéros que x et vérifie l'équation à coefficients périodiques, analogue à (16),

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} + 2p_1 \frac{dx_1}{dt} + q_1 x_1 = 0 .$$

L'inégalité

$$q_1 - p_1^2 > 0$$

est, d'après cela, également suffisante pour notre but. Elle s'écrit

$$\frac{d\sigma}{dt} + q - p^2 > 0 .$$

En tenant compte de (18), on peut facilement assigner une fonction *périodique* σ qui la rend satisfaite.

Prenons en effet

$$\frac{d\sigma}{dt} + q - p^2 = \mu\,.$$

D'après (18), on aura avant tout

$$\frac{d\sigma}{dt} + q - p^2 > 0\,.$$

σ résultera d'ailleurs périodique, puisque la différence des valeurs au bout d'une période se réduit à zéro.

On a en effet, en intégrant l'expression $\mu - (q - p^2)$ de $d\sigma/dt$ entre t et $t + T$,

$$\mu T - \int_t^{t+T} (q - p^2)\, dt\,,$$

ce qui s'annule à cause de la définition (18) de μ et de la périodicité de $q - p^2$, permettant de remplacer $\int_t^{t+T} \ldots$ par $\int_0^T \ldots$.

On a donc le théorème:

Si la valeur moyenne de $q - p^2$ est positive, toute solution de (16) *a ses zéros distribués quasi-uniformément, c'est-à-dire le nombre de zéros tombant dans un intervalle donné tend de plus en plus à devenir proportionnel à l'intervalle, lorsque celui-ci augmente indéfiniment.*

Chapitre III.

APPLICATION A LA LUNE

1. - Les équations cartésiennes du mouvement troublé en proximité des orbites planes. Cas de la Lune.

Prenons l'origine I des axes coordonnés dans le centre de gravité du corps central, les axes étant supposés de direction invariable.

Soient x, y, z les coordonnées d'un corps L soumis à l'attraction newtonienne du centre et à d'autres forces perturbatrices dérivant d'une fonction des forces $R(x, y, z, t)$ (rapportée à l'unité de masse, finie et continue avec ses dérivées des trois premiers ordres, pour les valeurs des arguments que nous aurons à considérer).

$\overline{OL} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ étant le rayon vecteur de L, M la masse du corps central, f la constante d'attraction, les équations du mouvement de L s'écrivent:

$$(1)\qquad \begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{fM}{\overline{OL}} + R\right), \\[2ex] \dfrac{d^2y}{dt^2} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{fM}{\overline{OL}} + R\right), \\[2ex] \dfrac{d^2z}{dt^2} = \dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{fM}{\overline{OL}} + R\right). \end{cases}$$

Supposons que $\partial R/\partial z$ s'annule pour $z = 0$, quels que soient x, y, t.

La dernière des équations (1) est alors vérifiée dès qu'on y pose $z = 0$, et le système admet les ∞^4 solutions planes, définies par les deux premières équations, où l'on ait préalablement fait $z = 0$.

En posant

$$(2)\qquad \begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2} = r\,, \\ R(x, y, 0, t) = U(x, y, t)\,, \end{cases}$$

ce système réduit en x, y peut s'écrire:

$$(3)\qquad \begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{fM}{r} + U\right), \\[2ex] \dfrac{d^2y}{dt^2} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{fM}{r} + U\right). \end{cases}$$

Il a une grande importance, puisqu'il s'applique non seulement aux solutions rigoureusement planes, mais aussi à celles qui s'en écartent peu.

Supposons plus précisément:

1) De n'envisager que des cas, où r (projection du rayon vecteur $\overline{OL}$ sur le plan $z = 0$), ne descend pas au-dessous d'une certaine limite, de façon à pouvoir considérer $1/r$ comme une quantité toujours finie;

2) z assez petit pour qu'on puisse négliger le carré du rapport z/r.

Sous cette hypothèse, les deux premières équations (1) peuvent encore être remplacées par le système (3) (comme pour $z = 0$).

En effet, la différence des seconds membres [des dites équations (1) et des correspondantes (3)] résulte du second ordre (par rapport à z) du moment que

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{fM}{\overline{OL}} + R\right),$$

s'annule identiquement (par rapport à x, y, t) pour $z = 0$.

Quant à la troisième équation (1), elle devient naturellement linéaire en z, dès qu'on néglige, comme ci-dessus, les termes d'ordre supérieur. Remplaçons en conformité

$$\frac{\partial(fM/\overline{OL})}{\partial z} = -\frac{fMz}{\overline{OL}^3},$$

par

$$-\frac{fM}{r^3}z,$$

$\partial R/\partial z$ par $(\partial^2 R/\partial z^2)_{z=0}z$, et posons, pour abrèger,

$$q(x, y, t) = \frac{fM}{r^3} - \left(\frac{\partial^2 R}{\partial z^2}\right)_{z=0}. \tag{4}$$

Il reste

$$\frac{d^2z}{dt^2} + qz = 0, \tag{5}$$

servant à déterminer z, après intégration du système (3).

Voici ramené l'étude du mouvement troublé à la résolution successive de deux problèmes distincts:

I. Intégration du système (3) en x, y.

II. Intégration de l'équation linéaire (5) en z, où le coefficient q est à regarder comme fonction connue de la variable indépendante t, en y introduisant pour x, y les expressions fournies par la première opération.

Cas où le corps central étant la Terre, la masse de L (*Lune*) est négligeable, et la perturbation provient d'un troisième corps S (*Soleil*). – On a affaire à un cas particulier du problème des trois corps, et il est loisible de supposer connu et képlérien le mouvement de S par rapport à O, dès qu'on néglige la masse de L.

Prenons le plan de l'orbite de S (écliptique) pour plan Oxy, et désignons per x', y', $z' = 0$ les coordonnées du Soleil, qui seront des fonctions périodiques de t ayant une certaine période T': le moyen mouvement est naturellement $n' = 2\pi/T'$.

Appelons encore M' la masse du Soleil,

$$r' = \sqrt{x'^2 + y'^2},$$

$$\Delta = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + z^2},$$

ses distances de O et de L.

Le mouvement absolu de L a lieu sous les deux attraction de O et de S. Cette dernière dérive de la fonction des forces

$$\frac{fM'}{\Delta}.$$

Pour le mouvement rapporté à O (et à des axes de direction invariable tels que Ox, Oy, Oz), on n'a qu'à retrancher le trinome ([8])

$$fM' \frac{xx' + yy' + zz'}{r'^3},$$

et on en tire l'expression classique de la fonction perturbatrice.

Notre R (z' étant ici constamment nul) s'écrit donc

$$R = fM' \left(\frac{1}{\Delta} - \frac{xx' + yy'}{r'^3}\right).$$

Soit

$$d = (\Delta)_{z=0} = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2},$$

la projection de $\overline{SL}$ sur le plan $z = 0$.

On aura

$$R(x, y, 0, t) = U = fM' \left(\frac{1}{d} - \frac{xx' + yy'}{r'^3}\right), \tag{6}$$

et

$$\left(\frac{\partial^2 R}{\partial z^2}\right)_{z=0} = fM' \left(\frac{\partial^2(1/\Delta)}{\partial z^2}\right)_{z=0} = -\frac{fM'}{d^3},$$

([8]) Voir par exemple TISSERAND, *Traité de Mécanique céleste*, Paris, Gauthier-Villars, 1889-1896, t. I, pp. 75-76.

d'où, d'après (4),

$$q = f\left(\frac{M}{r^3} + \frac{M'}{d^3}\right), \tag{7}$$

ce qui est une quantité essentiellement positive.

Il faut commencer par se procurer une solution du problème plan [équation (3) avec la valeur (6) de U], applicable au cas réel de la Lune.

Les seconds membres des (3), dès qu'on y remplace x', y' par leurs expressions en fonction de t deviennent des fonctions périodiques de t, mais ils dépendent encore de x, y d'une manière trop compliquée pour aborder le calcul des intégrales. On est ainsi conduit à le restreindre au cas particulier, où le mouvement képlérien de S se réduit à une rotation uniforme, en réservant, bien entendu, aux méthodes usuelles de la théorie des perturbations d'introduire ensuite les (faibles) corrections, qui se rendront nécessaires pour tenir compte des influences négligées: ici, par exemple, l'excentricité du Soleil.

Du système (3), simplifié moyennant ladite hypothèse sur le mouvement de S, on peut faire disparaître toute fonction explicite du temps. Il suffit de se rapporter à des axes $O\xi\eta$ (du plan $z = 0$) uniformément tournant avec S: leur vitesse angulaire s'identifie naturellement avec le moyen mouvement n' de S. Convenons, par exemple, de prendre la droite OS elle-même pour direction positive de l'axe des ξ, et la direction positive de l'autre axe tournée (par rapport à OS) de $\pi/2$ dans le sens de la rotation.

En appelant ξ, η les coordonnées de L par rapport aux nouveaux axes, on aura évidemment

$$\begin{cases} r = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}, \\ d = \sqrt{(\xi - r')^2 + \eta^2}, \\ U = fM'\left(\dfrac{1}{d} - \dfrac{\xi}{r'^2}\right), \end{cases} \tag{8}$$

r' étant ici constante. Entre r' et n' on a la relation bien connue

$$n'^2 = f\,\frac{M' + M}{r'^3},$$

ce qui peut être remplacé à fort peu près par

$$n'^2 = f\,\frac{M'}{r'^3},$$

en négligeant le rapport M/M' de la masse de la Terre à celle du Soleil. Rappelons encore l'identité $n' = 2\pi/T'$, ou T' désigne la période, c'est-à-dire la durée de la rotation du Soleil (an).

En introduisant dans le système (3) les coordonnées ξ, η, on tire de suite, à l'aide du théorème de Coriolis,

$$(3') \qquad \begin{cases} \dfrac{d^2\xi}{dt^2} - 2n'\dfrac{d\eta}{dt} - n'^2\xi = \dfrac{\partial}{\partial\xi}\left(\dfrac{fM}{r} + U\right), \\[2ex] \dfrac{d^2\eta}{dt^2} + 2n'\dfrac{d\xi}{dt} - n'^2\eta = \dfrac{\partial}{\partial\eta}\left(\dfrac{fM}{r} + U\right). \end{cases}$$

r et U ayant les expressions (8), le temps n'intervient plus explicitement. Ceci rend possible la recherche d'une solution périodique des (3), *ayant une période* **T** *fixée d'avance.* Il n'en serait pas de même pour le système originaire (3), où figurent des fonctions explicites de t ayant la période T': les solutions d'un tel système ne pourraient en général admettre autre période que T' (ou un multiple de T').

C'est justement en disposant de l'arbitrariété de **T** qu'on obtient une représentation satisfaisante des circonstances réelles par une solution périodique.

Remarquons, en effet, que (pour un observateur terrestre et par rapport à des repères de direction invariable) la durée de la révolution lunaire (révolution sidérale) est $T = 27^{\mathrm{j}}7^{\mathrm{h}}43^{\mathrm{m}}11^{\mathrm{s}},5$, qui n'est nullement un multiple de T' (an). Mais il existe une autre période non moins importante: celle des phases de la Lune, la lunaison ou mois lunaire, qui est la durée **T** de la révolution rapportée aux axes mobiles ξ, η (révolution synodique). On a

$$\mathbf{T} = 29^{\mathrm{j}}\,12^{\mathrm{h}}\,44^{\mathrm{m}}\,2^{\mathrm{s}},9\,.$$

Ces deux périodes T et **T** peuvent naturellement se déduire l'une de l'autre en tenant compte de la vitesse de rotation des deux systèmes d'axes auxquels elle se rapportent.

Pour rendre intuitive cette relation, il suffit de considérer, à côté du mouvement réel de la Lune, une rotation fictive (dans le plan $z = 0$), uniforme, et ayant (par rapport aux axes fixes Oxy) la même durée T de L, et, par suite, la vitesse angulaire absolue $n = 2\pi/T$. La durée de cette rotation, par rapport aux axes mobiles, sera évidemment **T**, comme pour la Lune.

D'ailleurs la vitesse angulaire relative, c'est-à-dire rapportée aux axes $O\xi\eta$ (qui tournent dans le même sens que L, avec la vitesse angulaire n'), n'est que $n - n'$. Il s'ensuit

$$\mathbf{T} = \frac{2\pi}{n - n'} = \frac{1}{1/T - 1/T'} = \frac{TT'}{T' - T}.$$

On doit à M. HILL [9] la découverte et la détermination effective d'une solution Σ

$$\xi = \xi(t), \qquad \eta = \eta(t)$$

des (3′), ayant cette période $\mathbf{T}$ et répondant, aussi pour le reste, d'une manière très satisfaisante aux données de l'observation: l'allure générale de Σ est naturellement bien proche à celle d'une orbite elliptique faiblement excentrique.

A la vérité, dans le calcul de Σ, on néglige encore la *parallaxe* (c'est-à-dire les termes qui seraient de l'ordre du rapport $\overline{OL}/\overline{OS}$).

En nous plaçant désormais dans ces conditions, nous pourrons simplifier davantage l'expression (8) de U et la réduire à

$$U = \frac{n'^2}{2}(2\xi^2 - \eta^2), \tag{9}$$

en tenant compte de ce qu'il est permis d'identifier

$$\frac{fM'}{d^3}, \qquad \frac{fM'}{r'^3} \quad \text{et} \quad n'^2.$$

L'expression (7) du coefficient q de l'équation définissant z se réduit en conformité à

$$q = \frac{fM}{r^3} + n'^2. \tag{10}$$

Quoi qu'il en soit, dès que, d'après (8), r et d ne dépendent que de ξ, η, il en est de même pour q. Si donc on y introduit les valeurs de ξ, η relatives à la solution périodique Σ, ce coefficient q devient lui-même une fonction périodique de période $\mathbf{T}$.

---

[9] Voir par exemple TISSERAND, loc. cit., t. III, Chap. XIV, ou bien POINCARÉ, *Leçons de Mécanique céleste*, t. II, Chap. XXV. Paris, Gauthier-Villars; 1905-1910.

2. - Passages aux nœuds.

Appliquons à l'équation (5) les conclusions du Chapitre précédent (n. 5), ce qui est légitime, l'inégalité $q - p^2 > 0$ étant ici satisfaite (puisque $p = 0$ et $q > 0$).

Il s'ensuit que *la distribution des racines de*

$$z(t) = 0 ,$$

c'est-à-dire la distribution dans le temps des passages de la Lune aux nœuds, est quasi uniforme.

Le nombre moyen des passages pendant une période (mois lunaire) est, d'après la formule générale,

$$2|j \pm g|.$$

Dans le cas actuel, on peut retenir $j = 0$ *et* g *assez voisin de* 1,0808.

Pour nous en rendre compte, considérons ce qui se passe dans le cas d'une orbite circulaire de faible inclinaison. Ce serait, peut-on dire, le cas du mouvement non troublé de la Lune, pourvu qu'on néglige aussi son excentricité et qu'on prenne, cela va sans dire, le rayon r de l'orbite circulaire correspondant à la période observée T (du mouvement absolu); r est alors lié au moyen mouvement $n = 2\pi/T$ par la relation

$$\frac{fM}{r^3} = n^2 ,$$

et l'équation (5) devient [q se réduisant, d'après (7), à la constante n^2]

$$\frac{d^2z}{dt^2} + n^2 z = 0 . \tag{5'}$$

Il est bien clair que, dans ce mouvement circulaire uniforme, on a exactement deux passages aux nœuds, c'est-à-dire deux racines de $z(t) = 0$, à chaque période T (révolution sidérale).

D'ailleurs, le nombre moyen des racines dans un intervalle quelconque est proportionnel à l'intervalle. On obtient ainsi, pour la période $\mathbf{T}$ (mois lunaire), le nombre

$$2\,\frac{\mathbf{T}}{T} = 2\,\frac{n}{n - n'} = 2g_0 ,$$

où g_0 a la valeur numérique 1,0808 (en prenant pour T et $\mathbf{T}$ les valeurs citées au n. 1).

On peut naturellement le confirmer en s'appuyant sur l'expression formelle de l'intégrale générale de (5′). Elle s'écrit

$$z = \alpha \sin (nt + \beta) ,$$

α et β désignant deux constantes arbitraires. Dans un intervalle de longueur t, le nombre des racines est, en moyenne, nt/y. Il en résulte bien, pour $t = \mathbf{T}$,

$$\frac{n\mathbf{T}}{\pi} = \frac{n}{\pi} \frac{2\pi}{n - n'} = 2 \frac{n}{n - n'} = 2g_0 .$$

Ceci posé, remarquons que, si la fonction $z(t)$ (se rapportant au mouvement troublé de la Lune) n'est pas rigoureusement périodique, elle s'écarte peu toutefois de l'allure générale envisagée tout à l'heure. Il s'ensuit en particulier que le nombre moyen de racines dans un intervalle t, c'est-à-dire $2|j \pm g)|$, doit différer très peu de la valeur $2g_0$ qu'on vient de calculer pour (5′).

D'autre part, l'altération des coefficients entre (5) et (5′) est petite; par conséquent, parmi les déterminations de g (différant entre elles par le signe et par des nombres entiers) qui se rapportent à l'équation (5), il en existe une peu différente de g_0. En choisissant celle-ci, il faut bien lui associer $j = 0$. C. Q. F. D.

3. - Les éléménts osculateurs obliques. Cas des petites inclinaisons.

Considérons, pour un moment, un mouvement quelconque du point L, rapporté aux axes fixes $Oxyz$. Soient, à un instant donné, x, y, z les coordonnées de la position occupée par L; $\dot{x} = dx/dt$, $\dot{y} = dy/dt$, $\dot{z} = dz/dt$, les composantes de la vitesse V (vecteur).

Dès qu'on suppose la position distincte de l'origine et la vitesse non nulle, il y a un plan bien déterminé χ passant par l'origine et contenant la vitesse. Ce vecteur définit, dans le plan χ, un sens de circulation autours de l'origine O. En circulant dans ce sens, on traverse en deux points l'intersection de χ avec le plan coordonné $z = 0$: une fois en passant de la région des z négatives à la région des z positives, et l'autre fois en revenant aux z négatives. La direction fixée sur ladite intersection par le premier point est ce qu'on appelle le *nœud ascendant.*

Il n'y a indétermination que dans le cas particulier où χ coïncide avec le plan $z = 0$.

L'***inclinaison*** φ de χ sur $z = 0$ (convenablement précisée) et (dans le cas général où $\varphi \neq 0$) ***la longitude*** θ ***du nœud ascendant*** (comptée à partir de Ox vers Oy) sont, classiquement, deux des six éléments osculateur relatifs à l'instant envisagé: M. Poincaré les appelle ***éléments obliques***. Le cas exceptionnel $\varphi = 0$ se présente évidemment alors et alors seulement que z et z' s'annulent à la fois.

Les formules qui relient φ et θ à l'état de mouvement de L (c'est-à-dire aux coordonnées x, y, z de sa position et aux composantes $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ de sa vitesse) s'établissent immédiatement en ayant recours au moment $\boldsymbol{G}$ de la vitesse par rapport à l'origine.

D'une part les composantes de ce moment sont (en supposant le système coordonné *dextrorsum*, comme il est d'usage en Astronomie)

$$-(y\dot{z} - z\dot{y}),$$
$$-(z\dot{x} - x\dot{z}),$$
$$-(x\dot{y} - y\dot{x}).$$

D'autre part, $\boldsymbol{G}$ étant perpendiculaire au plan χ et Oz au plan coordonné Oxy, l'angle formé par $\boldsymbol{G}$ avec Oz est égal à celui des deux plans, c'est-à-dire à φ; en outre (si φ n'est pas zéro, ce qui revient à $\boldsymbol{G}$ perpendiculaire à Oxy), la projection de $\boldsymbol{G}$ sur Oxy est perpendiculaire à la ligne des nœuds. Il s'ensuit, en ayant égard au sens du vecteur $\boldsymbol{G}$, que ses cosinus directeur sont:

$$-\sin\varphi \sin\theta,$$
$$\sin\varphi \cos\theta,$$
$$-\cos\varphi,$$

ce qui s'applique aussi au cas $\varphi = 0$.

En les multipliant par la valeur absolue G du moment, on a les composantes; d'où les relations

$$(11) \qquad \begin{cases} y\dot{z} - z\dot{y} = G \sin\varphi \sin\theta, \\ z\dot{x} - x\dot{z} = -G \sin\varphi \cos\theta, \\ x\dot{y} - y\dot{x} = G \cos\varphi. \end{cases}$$

Les deux premières, linéaires en z, $\dot{z}$, peuvent être résolues par rapport à ces deux quantités, pourvu que le déterminant

$$\begin{vmatrix} -\dot{y} & y \\ \dot{x} & -x \end{vmatrix} = x\dot{y} - y\dot{x} = G\cos\varphi$$

ne s'annule pas. On a, avec cette restriction, au lieu de (11), le système équivalent

$$\text{(11')} \qquad \begin{cases} z = \dfrac{1}{\cos\varphi}(-x\sin\varphi\sin\theta + y\sin\varphi\cos\theta)\,, \\ \dot{z} = \dfrac{1}{\cos\varphi}(-\dot{x}\sin\varphi\sin\theta + \dot{y}\sin\varphi\cos\theta)\,, \\ \qquad x\dot{y} - y\dot{x} = G\cos\varphi\,. \end{cases}$$

Cas des petites inclinaisons. – Fixons notre attention sur les mouvements pour qui l'inclinaison φ reste petite, de façon qu'on puisse négliger φ^2: c'est ce qui arrive dans les circonstances réelles du mouvement troublé de la Lune.

Les équations (11′), où il est encore permis de remplacer $\cos\varphi$ par l'unité, en les réduisant à

$$\text{(12)} \qquad \begin{cases} z = -x\sin\varphi\sin\theta + y\sin\varphi\cos\theta\,, \\ \dot{z} = -\dot{x}\sin\varphi\sin\theta + \dot{y}\sin\varphi\cos\theta\,, \\ G = x\dot{y} - y\dot{x}\,, \end{cases}$$

montrent que z et $\dot{z}$, ou plus précisément z/r, $\dot{z}/\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}$, résultent du même ordre de grandeur que φ.

On peut dès lors reprendre tout ce qu'on a dit au n. 1, et retenir, pour le cas de la Lune, que la projection du mouvement troublé sur le plan Oxy, et par conséquent les fonctions x, y, $\dot{x}$, $\dot{y}$, correspondent à la solution Γ de M. Hill, tandis que z, et avec elle $\dot{z}$, sont définies par l'équation (5).

Remarquons, en passant, que l'inclinaison φ ne traverse jamais la valeur zéro.

En effet, on ne peut avoir $\varphi = 0$ sans que z et $\dot{z}$ s'annulent à la fois, mais alors ils seraient identiquement nuls [10] et il en résultérait $\varphi = 0$, quel que soit t, ce qui n'est pas le cas.

[10] Puisque l'équation du second ordre (5) admet la seule solution $z = 0$, répondant aux conditions initiales $z = z' = 0$.

Introduisons l'anomalie v du point x, y (mobile sur Σ). On a évidemment

$$x = r\cos v\,, \qquad y = r\sin v\,,$$

d'où la première des équations (12) sous la forme

$$z = r\sin\varphi\sin(v - \theta)\,. \tag{13}$$

Cette anomalie v est comptée naturellement à partir de la direction invariable Ox. Comme Σ a été originairement caractérisée en se servant des axes tournants $O\xi\eta$ [d'après les équations (3')], il convient d'introduire encore l'*anomalie relative* $v^* = v - n't$, qu'on peut interpréter, en choisissant convenablement l'origine des temps, comme l'anomalie comptée à partir de $O\xi$. On introduira de même la *longitude relative du nœud* $\theta^* = \theta - n't$. L'expression de z s'écrit en conformité

$$z = r\sin\varphi\sin(v^* - \theta^*) = \sin\varphi(-\xi\sin\theta^* + \eta\cos\theta^*)\,. \tag{14}$$

Aussi les deux autres équations (12) peuvent être, pour ainsi dire, rapportées aux axes tournants. Il suffit d'invoquer pour cela la relation entre la vitesse absolue et la vitesse relative du point mobile sur Σ. La première a pour composantes $\dot{x}$, $\dot{y}$ (suivant Ox, Oy); la seconde $d\xi/dt$, $d\eta/dt$ (suivant $O\xi$, $O\eta$). En appelant V_ξ, V_η les composantes de la vitesse absolue $\boldsymbol{V}$ suivant les axes mobiles (qui tournent avec la vitesse angulaire n'), on a les formules bien connues de Cinématique

$$\left\{\begin{aligned} V_\xi &= \frac{d\xi}{dt} - n'\eta\,, \\ V_\eta &= \frac{d\eta}{dt} + n'\xi\,. \end{aligned}\right. \tag{15}$$

Si l'on remarque que $-\sin\theta$, $\cos\theta$; $-\sin\theta^*$, $\cos\theta^*$, sont les composantes d'un même vecteur $\boldsymbol{u}$ (de longueur 1) par rapport aux deux systèmes d'axes, on s'aperçoit de l'identité des deux binomes

$$-\dot{x}\sin\theta + \dot{y}\cos\theta$$

et

$$-V_\xi\sin\theta^* + V_\eta\cos\theta^*\,,$$

qui représentent l'un et l'autre le produit intérieur $\boldsymbol{V}\times\boldsymbol{u}$ (11).

---

(11) J'emploie les notations de MM. BURALI-FORTI et MARCOLONGO. Voir par exemple: *Eléments de calcul vectoriel*, traduits par M. S. LATTÈS (Paris, Hermann, 1910).

Il s'ensuit

$$\dot{z} = \sin\varphi(-V_\xi \sin\theta^* + V_\eta \cos\theta^*) , \tag{16}$$

où V_ξ, V_η sont définis par (15).

On a encore l'identité

$$x\dot{y} - y\dot{x} = \xi V_\eta - \eta V_\xi ,$$

puisque les deux membres représentent la composante (changée de signe) du vecteur $\boldsymbol{G}$ suivant Oz: la première calculée avec référence au trièdre $Oxyz$, la second avec référence au trièdre $O\xi\eta z$.

La dernière des équations (12) prend ainsi la forme

$$G = \xi V_\eta - \eta V_\xi . \tag{17}$$

4. - Manière habituelle de déduire le moyen mouvement du nœud. Complément qu'elle exige.

Voici l'essence du raisonnement par lequel on rattache ordinairement la constante caractéristique g de l'équation du second ordre (5) au moyen mouvement du nœud:

1) On remarque tout d'abord que, d'après la nature de la solution Σ, l'angle $v^* = v - n't$ augmente de 2π à chaque période $\mathbf{T}$, ce qui se traduit par l'équation

$$v - n't = \frac{2\pi}{\mathbf{T}} t + \sigma(t) ,$$

en désignant par $\sigma(t)$ une fonction périodique.

Si l'on a égard à la formule

$$\frac{2\pi}{\mathbf{T}} = n - n' ,$$

il reste plus simplement

$$v = nt + \sigma(t) .$$

2) On remarque ensuite que le double de la constante caractéristique g de l'équation (5) exprime justement le nombre moyen de racines de $z(t) = 0$ à chaque période.

Cette conclusion (voir la Préface du présent Mémoire) est bien justifiée par la circonstance que la série trigonométrique représentant $z(t)$ doit nécessairement contenir un terme prépondérant: celui qui subsisterait seul, lorsqu'on néglige les perturbations.

Nous venons de retrouver la même chose sous un autre jour.

3) *On admet que la longitude θ du nœud possède un moyen mouvement asymptotique*, ω, c'est-à-dire qu'on puisse poser

$$\theta = \omega t + \varepsilon(t) ,$$

la fonction ε restant finie, même quand t grandit indéfiniment.

4) On tire de (13) (r et φ ne s'annulant jamais) que les zéros de la fonction z coïncident avec ceux de $\sin(v - \theta)$, c'est-à-dire, en remplaçant v et θ par leurs valeurs, de

$$\sin[(n - \omega)t + \sigma - \varepsilon] .$$

D'après la nature de la question, θ varie très lentement vis-à-vis de v, qui, à son tour, diffère de nt par une quantité presque constante (constante en première approximation). On peut tranquillement retenir que l'argument du sinus croît toujours. Le nombre des racines est donc, en moyenne, pour un intervalle de longueur t,

$$\frac{n - \omega}{\pi} t ,$$

c'est-à-dire, en donnant à t la valeur $\mathbf{T} = 2\pi/(n - n)'$,

$$2 \frac{n - \omega}{n - n'} .$$

5) Egalant à $2g$, on tire la relation cherchée entre g et le moyen mouvements asymptotique ω du nœud:

$$g = \frac{n - \omega}{n - n'} ,$$

d'où

$$\omega = n - (n - n')g \quad (^{12}) . \tag{18}$$

([12]) Tisserand désigne notre g par h, et parvient à la relation (loc. cit., dernière ligne de la page 287)

$$h(n - n') = n - \text{mouvement moyen du nœud} .$$

C'est bien identique à (18).

La conclusion en est que le raisonnement classique a besoin d'être complété sur le point 3). Tel qu'il est, il prouve seulement ceci: Dès qu'un moyen mouvement asymptotique existe, il est nécessairement donné par la formule (18).

Il paraît par suite désirable de se débarrasser de toute restriction en prouvant au préalable l'effective existence d'un moyen mouvement ω du nœud. C'est ce qui réussit sans peine par une transformation convenable de l'équation (5). La quantité ω se trouvera ainsi définie d'une façon directe, préférable, en concept, à la voie détournée, qui fait intervenir les zéros de $z(t)$. Il est douteux toutefois, au point de vue numérique, s'il y aurait avantage à abandonner les méthodes de LINDSTEDT, ADAMS, HILL, POINCARÉ [13], qui conduisent à un calcul très satisfaisant de la constante caractéristique g de l'équation (5).

5. - Transformation canonique. Moyen mouvement du nœud. Déduction abrégée.

Commençons par substituer à l'équation (5) un système canonique binaire.

Il suffit pour cela d'associer à z, comme inconnue auxiliaire, sa dérivée première $\dot{z}$, et de prendre pour fonction caractéristique

$$F = \tfrac{1}{2}(\dot{z}^2 + qz^2)\,. \tag{19}$$

Le système

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial F}{\partial \dot{z}}\,, \qquad \frac{d\dot{z}}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial z}\,, \tag{20}$$

donne lieu évidemment à l'équation unique (5), lorsqu'on élimine $\dot{z}$.

Cherchons à opérer un changement de variables, qui, sans altérer la forme canonique, laisse directement apercevoir ce qui se passe pour la longitude du nœud.

Reprenons à ce but les équations (14) et (16). En posant

$$\begin{cases} X = -\sqrt{G}\sin\varphi\sin\theta^*\,, \\ Y = \sqrt{G}\sin\varphi\cos\theta^*\,, \end{cases} \tag{21}$$

[13] Voir, pour ne citer que des traités: TISSERAND, loc. cit., t. III, Chap. XVI; ADAMS. *Lectures on the lunar theory* (Cambridge, University Press, 1900), pp. 68-72; POINCARÉ, Ouvrages cités: *Leçons, etc.*, t. II, Chap. XXVI; *Les méthodes nouvelles, etc.*, t. II, Chap. XVII.

on peut les écrire

$$(22) \qquad \begin{cases} z = \dfrac{1}{\sqrt{G}}\,(\xi X + \eta Y)\,, \\ \dot{z} = \dfrac{1}{\sqrt{G}}\,(V_\xi X + V_\eta Y)\,. \end{cases}$$

Il en résulte, entre z, $\dot{z}$ et X, Y, qui seront nos nouvelles variables, une transformation linéaire, dont le déterminant se réduit à l'unité, d'après l'expression (17) de G. Ceci suffit à montrer que la transformation est canonique et que, par conséquent, le système (20), où l'on introduit X, Y à la place de z, $\dot{z}$, conserve la forme canonique. Comme toutefois les coefficients $\xi/\sqrt{G}$, $\eta/\sqrt{G}$, $V_\xi/\sqrt{G}$, $V_\eta/\sqrt{G}$ ne sont pas des constantes, mais des fonctions périodiques du temps (correspondant à la solution Σ de M. Hill), on doit s'attendre à une altération dans la fonction caractéristique. Appelons H celle qui conviendra au système transformé. Elle résulte de F (exprimée moyennant les nouvelles variables) et d'un terme additionnel W, qu'on va calculer d'après une règle connue. Voici de quelle manière:

Supposons que, dans les seconds membres des (22), on fasse varier X, Y de dX, dY et appelons δz, $\delta\dot{z}$ les incréments correspondants de z, $\dot{z}$. Supposons d'autre part qu'on fasse varier le temps t, qui y figure par l'intermédiaire des coefficients; et soient $d_t z$, $d_t\dot{z}$ les incréments dus à l'accroissement dt de t. Les différentielles totales seront évidemment

$$(23) \qquad \begin{cases} dz = \delta z + d_t z\,, \\ d\dot{z} = \delta\dot{z} + d_t\dot{z}\,. \end{cases}$$

En remarquant que δz, $\delta\dot{z}$ sont liés à dX, dY par la même transformation linéaire, à déterminant unité, qui lie X, Y à z, $\dot{z}$, on a d'abord

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} z & \dot{z} \\ \delta z & \delta\dot{z} \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} X & Y \\ dX & dY \end{vmatrix},$$

c'est-à-dire, d'après (23),

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} z & \dot{z} \\ dz & d\dot{z} \end{vmatrix} - \frac{1}{2}\begin{vmatrix} z & \dot{z} \\ d_t z & d_t\dot{z} \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} X & Y \\ dX & dY \end{vmatrix}.$$

En remplaçant $(z\,d\dot{z} - \dot{z}\,dz)/2$ par $z\,d\dot{z} - d(z\dot{z})/2$ et de même

$(X\,dY - Y\,dX)/2$ par $X\,dY - d(XY)/2$, on peut écrire

$$z\,d\dot{z} = X\,dX + W\,dt + d\Omega\,, \tag{24}$$

où l'on a posé, pour abréger,

$$W = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} z & \dot{z} \\ \dfrac{dz}{dt} & \dfrac{d\dot{z}}{dt} \end{vmatrix},$$

$$\Omega = \tfrac{1}{2}(z\dot{z} - XY)\,.$$

Il est bien entendu que la dérivation d/dt, appliquée à z, $\dot{z}$, se rapporte aux coefficients $\xi/\sqrt{G}$, $\eta/\sqrt{G}$, $V_\xi/\sqrt{G}$, $V_\eta/\sqrt{G}$, figurant dans les expressions (22). On peut même traiter $1/\sqrt{G}$ comme une constante, puisque le terme de W provenant de la dérivation de G s'annule identiquement. En tenant compte des valeurs (15) de V_ξ, V_η, c'est-à-dire de

$$\frac{d\xi}{dt} = V_\xi + n'\eta\,, \qquad \frac{d\eta}{dt} = V_\eta - n'\xi\,,$$

il vient

$$\frac{d_t z}{dt} = \frac{1}{\sqrt{G}}[(V_\xi + n'\eta)X + (V_\eta - n'\xi)Y] = \dot{z} + \frac{n'}{\sqrt{G}}(\eta X - \xi Y)\,.$$

Les équations (3′) donnent d'ailleurs

$$\frac{dV_\xi}{dt} = \quad n'V_\eta + \frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{fM}{r} + U\right),$$
$$\frac{dV_\eta}{dt} = -\,n'V_\xi + \frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{fM}{r} + U\right),$$

et par conséquent

$$\frac{d_t\dot{z}}{dt} = \frac{n'}{\sqrt{G}}(V_\eta X - V_\xi Y) + \frac{1}{\sqrt{G}}\left[X\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{fM}{r} + U\right) + Y\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{fM}{r} + U\right)\right].$$

Comme, avec les valeurs (22) de z, $\dot{z}$ et (17) de G, on a

$$\frac{1}{2}n'\left[\frac{1}{\sqrt{G}}(V_\eta X - V_\xi Y)z - \frac{1}{\sqrt{G}}(\eta X - \xi Y)\dot{z}\right] = \frac{1}{2}n'(X^2 + Y^2)\,,$$

l'expression de W prend la forme

$$(25) \qquad W = \frac{1}{2}\, n'(X^2 + Y^2) + \\ + \frac{1}{2}\, z \frac{1}{\sqrt{G}}\left[X \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{fM}{r} + U\right) + Y \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{fM}{r} + U\right)\right] - \frac{1}{2}\, z^2 .$$

Or l'identité différentielle (24), provenant de la transformation canonique envisagée, montre ([14]) que W est précisément le terme à ajouter à l'ancienne fonction caractéristique F pour passer à la fonction nouvelle $H(X, Y, t)$.

On tire, partant des (19), (25) et (22),

$$(26) \qquad H = F + W = \frac{1}{2}\, n'(X^2 + Y^2) + \\ + \frac{1}{2G}(\xi X + \eta Y)\left\{X\left[\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{fM}{r} + U\right) + q\xi\right] + \right. \\ \left. + Y\left[\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{fM}{r} + U\right) + q\eta\right]\right\},$$

et le système transformé, équivalent toujours à l'équation (5), prend la forme définitive

$$(20') \qquad \frac{dX}{dt} = \frac{\partial H}{\partial Y}, \qquad \frac{dY}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial X}.$$

Avec les valeurs (9) et (10) de U et de q (ordinairement adoptées en négligeant la parallaxe) on a simplement

$$\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{fM}{r} + U\right) + q\xi = 3n'^2\xi ,$$

$$\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{fM}{r} + U\right) + q\eta = 0 ,$$

et en conformité

$$(27) \qquad H = \frac{1}{2}\, n'(X^2 + Y^2) + \frac{3}{2}\frac{n'^2}{G}\,\xi X(\xi X + \eta Y) .$$

([14]) Comparez MORERA, *Sulla trasformazione delle equazioni differenziali di* HAMILTON (« Rendiconti della R. Accademia dei Lincei », 5^e série, t. XII, 1er semestre 1903, pp. 113-122); ou bien POINCARÉ, *Leçons, etc.*, t. I, n. 12, pp. 13-16.

Les nouvelles variables X, Y sont liées à φ et θ^* par les formules (21). Il s'ensuit que le point représentatif des intégrales du système canonique (20′) a pour anomalie $\theta^*+\pi/2$. Mais ce système est linéaire à coefficients périodiques. Il existe donc, d'après le Chapitre précédent, un moyen mouvement asymptotique, toujours le même, quelle que soit la solution envisagée. C'est comme dire qu'il en est ainsi pour θ^*, et par conséquent aussi pour $\theta = \theta^* + n't$. C. Q. F. D.

L'équation du premier ordre dans la seule θ^*, provenant du système canonique (20′) d'après les valeurs (21) de X, Y, est (n. 3 du Chapitre précédent)

$$\frac{d\theta^*}{dt} = -\frac{2H}{G\sin^2\varphi}\,.$$

Avec l'expression (27) de H, il vient

$$\frac{d\theta^*}{dt} = -n' + 3n'\frac{r^2n'}{G}\cos v^*\sin\theta^*\sin(v^*-\theta^*)\,, \tag{28}$$

où r, v^*, G sont des fonctions périodiques de t se rapportant à la solution Σ. En première approximation, c'est-à-dire en remplaçant la solution Σ par un cercle de moyen mouvement (absolu) n, on a

$$G = r^2n\,,$$

et en outre (en supposant que l'axe Ox passe par la position initiale du mobile)

$$v = nt\,,$$

d'où

$$v^* = (n-n')t\,.$$

Avec ces valeurs de G et de v^* l'équation (28) se réduit à une forme déjà connue par NEWTON, qui avait su en tirer le moyen mouvement du nœud à 2 pour 100 de sa valeur près ([15]).

DÉDUCTION ABRÉGÉE. – J'ai tenu à donner sous forme explicite le système en X, Y et l'équation (28), définissant directement θ^*.

Si l'on se contente de mettre à l'abri de toute objection la relation (18) entre le moyen mouvement ω du nœud et la g, on peut se tirer d'affaire en peu de mots, ayant égard aux formules de transformation (22) entre z, $\dot z$ et X, Y. Les coefficients sont des fonctions périodiques, ayant la

([15]) TISSERAND, loc. cit., pp. 42-43.

même période **T** des coefficients du système (20) en z, $\dot{z}$. Il s'ensuit que le système transformé en X, Y doit avoir les mêmes exposants caractéristiques. D'autre part le système (20) a à son tour les mêmes exposants caractéristiques de l'équation (5).

On peut donc prendre, même pour le système X, Y, $\pm 2\pi i g$ comme détermination de ces exposants.

C'est assez pour conclure en toute rigueur (n. 2 du Chapitre précédent) que le point représentatif X, Y, ou, ce qui revient au même d'après (21), l'angle θ^* admettent le moyen mouvement asymptotique $2\pi(j \pm g)/\mathbf{T}$, j étant un entier. La comparaison avec le mouvement non troublé montre immédiatement (cf. n. 2) qu'en entendant par g la détermination voisine de 1,0808, il faut attribuer à j la valeur 1 et adopter le signe —. Ce moyen mouvement est donc exprimé par

$$\frac{2\pi}{\mathbf{T}}(1-g) = (n-n')(1-g).$$

L'identité

$$\theta = \theta^* + n't$$

montre que θ possède aussi un moyen mouvement asymptotique, ω, somme du précédent avec n. On a donc

$$\omega = (n-n')(1-g) + n' = n - (n-n')g .$$

C'est bien la formule qu'il s'agissait d'établir.

XVII.

SULLO SPOSTAMENTO DELL'EQUILIBRIO

« Atti Ist. Ven. », s. 7ª, t. LXXI (1911-12), parte 2ª,

pp. 241-249.

Si devono a Lord RAYLEIGH (¹) risultati generali (la cui importanza si palesa anche in applicazioni termodinamiche (²)) sull'equilibrio dei sistemi materiali in prossimità di uno stato di minima energia interna. Questi risultati sono stati dedotti dal principio dei lavori virtuali con trasformazioni algebriche di immediata evidenza, nell'ipotesi che le espressioni analitiche dell'energia interna del sistema, dei suoi vincoli, e del campo di forza esterno sieno le più semplici possibili.

In generale, espressioni di questo tipo valgono, approssimativamente se non esattamente, entro un intorno abbastanza piccolo dello stato di minima energia (con approssimazione tanto maggiore quanto più piccolo è l'intorno considerato). Ciò posto, si potrebbe ragionevolmente aspettarsi che le conclusioni qualitative del RAYLEIGH seguitassero senz'altro a sussistere, in un intorno conveniente, per ragione di continuità. In realtà le cose non stanno a questo modo, ed è facile persuadersene con esempi elementari (cfr. n. 5 della presente nota). Ma è pur semplice esaurire la questione: basta impostarla fin da principio con generalità analitica e precisare la portata delle considerazioni di continuità.

Si riconosce così che l'influenza dei termini non contemplati nelle espressioni tipiche è addirittura nulla per quanto concerne l'energia interna; è praticamente poco importante nei riguardi del campo esterno; assume invece carattere essenziale ove provenga dai vincoli.

(¹) *General theorems relating to equilibrium and initial and steady motion*, « Philosophical Magazine », vol. XLIX, 1875, pp. 218-224; ovvero « Scientific papers », vol. I (Cambridge, University Press, 1899), pp. 232-237.

(²) Cfr. per es. P. DUHEM, *Traité d'énergétique*, t. I (Paris, Gauthier-Villars, 1911), cap. XI.

1. - Richiami di calcolo sul comportamento di una funzione Ω in prossimità di un minimo effettivo.

Indichino $x_1, x_2, ..., x_n$ variabili indipendenti, e si adotti il solito linguaggio iperspaziale, chiamando punto un insieme di valori attribuiti alle variabili, origine il punto $x_i = 0$ $(i = 1, 2, ..., n)$; ecc.

Sia $\Omega(x_1, x_2, ..., x_n)$ funzione finita e continua assieme alle sue derivate dei primi due ordini, almeno in un intorno dell'origine, al quale intendiamo limitate le nostre considerazioni.

Supponiamo che Ω ammetta nell'origine un minimo effettivo e che l'esistenza del minimo si riconosca dal differenziale secondo, ossia che risulti definita e positiva la forma quadratica A_0, che ha per coefficienti le derivate seconde della Ω nel punto di minimo $x_i = 0$.

Rappresentiamo con A la forma analoga, in cui i coefficienti si riferiscano ad altro generico punto x_i; e ricordiamo che l'essere definita è per una forma carattere qualitativo, assicurato da certe disuguaglianze fra i coefficienti. Se, per una certa determinazione di questi, le disuguaglianze sono verificate, esse seguiteranno ad esserlo, quando i coefficienti si facciano variare abbastanza poco.

Ne viene che la quadrica A si conserva definita in un conveniente intorno dell'origine.

2. - Considerazione di altra funzione U a gradiente lentamente variabile.

Si designi con $U(x_1, x_2, ..., x_n)$ una funzione qualsivoglia delle x, sottoposta alla sola condizione che le sue derivate seconde siano, in un intorno dell'origine, *abbastanza piccole* in valore assoluto. Si formi la quadrica B, che ha per coefficienti queste derivate seconde. Anche la forma $A - B$ risulterà, al pari di A, definita e positiva in un intorno non nullo dell'origine, che chiameremo I. Si intende che la condizione imposta alle derivate seconde di U, di essere in valore assoluto abbastanza piccole, andrebbe specificata nel senso di non superare certi limiti (dipendenti dalla Ω).

A noi basta ritenere la circostanza che, fissate una volta, sotto debite restrizioni, Ω ed U, l'intorno I esiste certamente.

Aggiungo, a giustificazione del titolo del presente n., che supporre piccole le derivate seconde di U equivale a supporre lentamente variabili le derivate prime, le quali complessivamente definiscono il gradiente della funzione.

3. - Problema statico e sua classica risoluzione in base al principio dei lavori virtuali.

Interpretiamo Ω come energia interna di un sistema materiale S, il cui stato sia definito dalle variabili $x_1, x_2, \dots, x_n$: l'ennupla $x_i = 0$ viene così a individuare lo stato di minima energia interna o *stato naturale* C_0.

Supponiamo che un tale sistema S si trovi soggetto a vincoli olonomi del tipo

$$f_k(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \qquad (k = 1, 2, \dots, l;\ l < n), \tag{1}$$

le f essendo funzioni indipendenti, finite e continue, assieme alle derivate prime e seconde, nell'intorno I.

Sia poi S sollecitato da forze esterne conservative di potenziale U, con che $\partial U/\partial x_i$ rappresenterà la componente delle forze esterne secondo la coordinata generale x_i. La considerazione di questa sollecitazione esterna rende espressiva l'ipotesi del n. precedente (concernente le derivate seconde di U), mostrandone il significato meccanico, che è il seguente: Il campo di forza, in cui si suppone immerso il sistema S, è *pressochè uniforme* (componenti $\partial U/\partial x_i$ lentamente variabili), almeno in prossimità dello stato naturale C_0.

Per caratterizzare l'equilibrio del sistema nelle indicate condizioni, basta naturalmente ricorrere al principio dei lavori virtuali, secondo cui il differenziale primo di $\Omega - U$,

$$\sum_1^n {}_i \frac{\partial(\Omega - U)}{\partial x_i} \delta x_i ,$$

deve annullarsi per ogni spostamento δx_i compatibile coi legami (1).

Introducendo i moltiplicatori di Lagrange, si hanno le n equazioni

$$\frac{\partial(\Omega - U)}{\partial x_i} + \sum_1^n {}_k \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial x_i} = 0 , \qquad (i = 1, 2, \dots, n) , \tag{2}$$

dalle quali (formandone sistema colle (1) ed eliminandone le ausiliarie λ) vanno ricavati i valori delle x_i. Queste definiscono la configurazione di equilibrio C, sempreché la risoluzione delle (1), (2) sia effettivamente possibile.

Supporremo che sia così, anzi che la configurazione C cada ancora nell'intorno I.

Ove si noti che, mancando i vincoli e il campo esterno, C si identifica collo stato C_0 di minima energia, e che d'altra parte si può (in generale anzi, attese le introdotte restrizioni, si deve) limitarsi ad un intorno convenientemente circoscritto di questo stato, appare perfettamente naturale di rappresentarsi l'equilibrio in C come un fenomeno di *spostamento dell'equilibrio* (da C_0 a C), lo spostamento essendo dovuto alla duplice circostanza che si impongono dei vincoli (olonomi) e si fanno agire delle forze conservative: senza escludere beninteso che, in casi particolari, intervenga una sola delle due influenze perturbatrici.

4. - Stabilità dell'equilibrio spostato. Caso di vincoli lineari.

Affinchè l'equilibrio in C [definito dalle (1), (2)] sia anche stabile, basta notoriamente che la funzione $\Omega - T$ abbia in C un minimo effettivo rispetto alle altre configurazioni consentite dai vincoli; e ciò è assicurato ove risulti essenzialmente positivo il differenziale secondo di $\Omega - U$, calcolato con riguardo alle (1).

Formiamolo materialmente, differenziando una seconda volta

$$\sum_1^n {}_i \frac{\partial(\Omega - U)}{\partial x_i} \delta x_i ,$$

e tenendo conto che non si può porre senz'altro $\delta^2 x_i = 0$, perché le x_i vanno trattate come variabili (non completamente indipendenti, ma) legate dalle (1).

Risulta ovviamente

$$\delta^2(\Omega - U) = A - B + \sum_1^n {}_i \frac{\partial(\Omega - U)}{\partial x_i} \delta^2 x_i ,$$

lá forma quadratica $A - B$ [nn. 1 e 2] avendo per argomenti gli incrementi δx_i, e per coefficienti le derivate seconde di $\Omega - U$ relative alla configurazione C.

Chiamiamo α il termine addizionale

$$\sum_1^n {}_i \frac{\partial(\Omega - U)}{\partial x_i} \delta^2 x_i ,$$

proveniente dai legami, e scriviamo in conformità

$$\delta^2(\Omega - U) = A - B + \alpha .$$

Immaginando eliminate, a mezzo delle l equazioni dei vincoli, altrettante x (o, più generalmente, espresse tutte le x a mezzo di $n - l = \nu$ parametri lagrangiani $q_1, q_2, ..., q_\nu$), A, B ed α divengono forme quadratiche di $n - l$ argomenti (le δx rimaste indipendenti, oppure gli incrementi arbitrari $\delta q_1, \delta q_2, ..., \delta q_\nu$).

Dacchè $A - B$, considerata come forma ennaria nelle δx, è essenzialmente positiva, tale rimane anche riducendo comunque il grado di libertà. Nulla invece può dirsi a priori pel termine addizionale α. Un'ovvia osservazione si presenta tuttavia, ed è che α si annulla ove sia ogni $\delta^2 x_i = 0$ $(i = 1, 2, ..., n)$. Ciò avviene in particolare se i vincoli (1) sono rappresentati da equazioni lineari (anche non omogenee) nelle x.

Infatti, quando le $f_k = 0$ $(k = 1, 2, ..., l)$ sono lineari, tali riescono anche le espressioni risolute di l delle x, in termini delle rimanenti $n - l$.

Attesa la linearità di queste espressioni, rispetto a variabili tutte indipendenti, i loro differenziali secondi sono identicamente nulli. Si annullano pertanto anche i differenziali secondi di quelle l variabili x, che si considerano funzioni delle altre; c. d. d.

Ne consegue la stabilità dell'equilibrio spostato, in ogni campo di forza quasi uniforme e di fronte a vincoli lineari.

5. - Esempio.

Il sistema S sia costituito da un unico punto materiale P, posto in un piano x, y, e dotato di energia (elastica, ad es.) di richiamo verso l'origine O delle coordinate, espressa da

$$\Omega = \frac{\mu}{2}(x^2 + y^2),$$

designando μ una costante positiva.

Le cose vanno manifestamente come se P fosse attratto da O con forza proporzionale alla distanza $\overline{OP}$.

In assenza di vincoli e d'altre forze, O è posizione d'equilibrio stabile.

Consideriamo uno spostamento dell'equilibrio, limitandoci per semplicità al caso in cui, senza far agire forze esterne ($U =$ cost.), si introduce un vincolo.

Si tratti dapprima di vincolo lineare. Sia cioè P costretto a rimanere sopra una retta. Il piede M della perpendicolare abbassata da O sulla retta costituisce evidentemente la nuova posizione di equilibrio. Siccome, di tutti i punti della retta, M è il più vicino ad O, la Ω assume ivi il valore minimo rispetto a tutte le posizioni consentite dai vincoli, e l'equilibrio è ancora stabile.

Passiamo al caso generale, in cui si costringa P a rimanere sopra una linea L diversa da una retta. L'equilibrio può benissimo divenire instabile.

Per rendercene conto in modo intuitivo, cominciamo col fissare a piacimento un punto M (distinto da O), e, detta γ la circonferenza di centro O passante per M, una curva L tangente a γ in M. Supponiamo — al solo scopo di abbreviare la discussione — che il raggio di curvatura di L in M sia diverso da $\overline{OM}$. Questo permette di affermare che, nell'immediata prossimità di M, la L sarà o tutta esterna, o tutta interna a γ.

Nella prima eventualità, l'equilibrio vincolato seguita manifestamente ad essere stabile (come nel caso della retta); è invece instabile nella seconda, e ciò anche rendendo infinitamente piccolo lo spostamento, scegliendo cioè M vicino quanto si voglia ad O.

Analoghe conclusioni possono, pur semplicemente, conseguirsi per via analitica, riattaccandosi al criterio generale richiamato nel n. precedente.

Immaginiamo che l'equazione del vincolo esprima y come funzione di x (regolare nell'intorno dell'origine) sotto la forma

$$y = a + bx + cx^2 + \dots, \tag{3}$$

a, b, c, ... designando altrettante costanti.

Se ne trae

$$\delta y = \{b + 2cx + \dots\}\,\delta x\,,$$

$$\delta^2 y = \{2c + \dots\}\,\delta x^2\,,$$

i termini omessi contenendo almeno x^2 a fattore nell'espressione di δy, e quindi almeno x nell'espressione di $\delta^2 y$.

La quadrica da prendersi in considerazione è quindi:

$$\delta^2\Omega = \mu\{\delta x^2 + \delta y^2\} + \mu y\,\delta^2 y = \{1 + b^2 + 2ac + \dots\}\,\delta x^2\,,$$

la parte non esplicitata contenendo x a fattore.

Ritenuto pertanto che lo spostamento dell'equilibrio sia abbastanza piccolo (ciò che si riverbera in particolare nell'ascissa x della nuova posizione di equilibrio), discriminante della stabilità è il segno del trinomio $1 + b^2 + 2ac$. Per un vincolo lineare, c è zero e si ha quindi stabilità qualunque sia il valore di a (nonchè quello di b). In generale invece, per quanto sia piccolo a, cioè per quanto la curva (3) passi vicino all'origine, si possono sempre attribuire a c valori tali che il trinomio suddetto risulti negativo; ecc.

6. - Il secondo teorema di Rayleigh.

Tornando ad un sistema S generico, supponiamo che i vincoli che gli sono imposti consistano nell'essere assegnate talune delle x, $x_1, x_2, \ldots, x_l$ per es.; ciò che si può esprimere dicendo che sono assegnati l degli spostamenti che fanno passare dalla configurazione naturale C_0 a quella che sarà la nuova configurazione di equilibrio. Si ha qui manifestamente un caso particolare di vincoli lineari (in generale non omogenei).

Supponiamo ancora che non agiscano forze esterne.

Potremo asserire (n. 4) che $\Omega - U$ e quindi (per essere U costante) *l'energia interna Ω ha, nella configurazione C, in cui per effetto dei vincoli si stabilisce l'equilibrio, un minimo, di fronte a tutte le altre configurazioni consentite dai vincoli stessi, cioè, nel caso attuale, dagli l spostamenti prescritti.*

7. - Il primo teorema.

Esso contempla sistemi la cui energia interna Ω abbia l'espressione tipica di forma quadratica nelle x (a coefficienti costanti), e i cui vincoli siano lineari ed *omogenei*; le forze esterne essendo inoltre costanti (campo rigorosamente uniforme), il che permette di supporre anche U funzione lineare ed *omogenea* delle x.

In questo caso le limitazioni qualitative (di cui ai nn. 1 e 2) sono senz'altro verificate per valori qualisivogliano delle x, ossia l'intorno I dell'origine comprende tutto lo spazio. Si ha poi dalle (2), moltiplicandole ordinatamente per x_i (si intende le x_i della configurazione C di equilibrio), sommando e avendo riguardo al teorema di EULERO sulle funzioni omogenee,

$$2\Omega - U + \sum_1^l {}_k \lambda_k f_k = 0 .$$

In virtù delle (1), rimane

$$2\Omega - U = 0 ,$$

o, se si vuole,

$$\Omega - U = -\Omega . \tag{4}$$

Quest'ultima relazione, verificata in C, lo sarebbe ad egual titolo in ogni altra configurazione $\overline{C}$, in cui si stabilisse l'equilibrio, aumentando i vincoli (purché sempre lineari ed omogenei), e lasciando inalterata la sollecitazione esterna.

D'altra parte (n. 4) la $\Omega - U$ ha in C un minimo di fronte a tutte le altre configurazioni consentite dai vincoli originari (1), e quindi, *a fortiori*, di fronte a tutte le $\overline{C}$. Ma in una qualsiasi $\overline{C}$ sussiste la (4). Il minimo di $\Omega - U$ (rispetto alle varie $\overline{C}$) si traduce quindi in un massimo di Ω, donde l'enunciato: Nelle supposte condizioni, *la configurazione di equilibrio spostato C rende massima l'energia interna Ω rispetto ai valori che essa energia assumerebbe in ogni nuovo stato di equilibrio $\overline{C}$ conseguente all'introduzione di ulteriori vincoli* (lineari ed omogenei).

XVIII.

SULLE ONDE DI CANALE

« Rend. Acc. Lincei », ser. 5ª, vol. XXI (1º sem. 1912),

pp. 3-14.

Fra le caratteristiche qualitative delle onde di canale spicca quella che fu per la prima volta segnalata da LEONARDO colle seguenti parole [1]: « L'impeto [cioè la propagazione della perturbazione superficiale] è molto più veloce che l'acque; poichè *molte sono le volte* che l'onda fugge il luogo della sua creazione e l'acqua non si muove dal sito. A simiglianza dell'onda fatta il maggio nelle biade dal corso dei venti, che si vede correre l'onda per le campagne,e le biade non si muovono dal loro sito ».

A prima vista si sarebbe tratti ad interpretare con più moderno linguaggio il passo citato, assumendo che: Nel moto ondoso le singole particelle fluide oscillano intorno a posizioni medie, fisse nello spazio, senza dar luogo a traslazione d'insieme.

In realtà questa condizione è rispecchiata nelle onde rotazionali di GERSTNER [2], nonchè nelle onde oscillatorie semplici di AIRY [3]. Ma già STOKES [4] ebbe a rilevare, studiando in seconda approssimazione le onde periodiche irrotazionali di tipo permanente, che esse sono di necessità accompagnate da un piccolo trasporto superficiale.

Lord RAYLEIGH provò poi, con una osservazione geometrica quanto mai suggestiva ed elegante, che, nel caso limite di una profondità infinita [5], il trasporto superficiale è una conseguenza inevitabile dell'assenza

---

(1) Cfr. *Raccolta d'autori italiani che trattano del moto dell'acqua*, t. X (Bologna, 1826), p. 320.

(2) Cfr. per es. APPELL, *Traité de mécanique rationnelle*, t. III (seconda edizione), pp. 494-501. ovvero LAMB, *Hydrodynamics* (terza edizione), pp. 395-398.

(3) Ibidem, pp. 472-473, o, rispettivamente, 347-353.

(4) « Math. and phys. papers », vol. I, pp. 198, 207.

(5) Questa restrizione non è espressamente enunciata nel celebre scritto del RAYLEIGH, *On waves* (« Scientific papers », vol. I, pp. 263-264), ma rimane implicita nell'ammettere che il flusso, a profondità sufficiente, sia sensibilmente uniforme. Con ciò infatti si vengono a considerare costanti, lungo una stessa orizzontale, tanto la funzione di corrente ψ quanto la sua derivata normale. Ora, se non si dovesse intendere « orizzontale infinitamente profonda », avremmo una

di rotazione molecolare, indipendente dalla condizione che la pressione sia costante sopra la superficie libera: si tratta perciò di cinematica (non di dinamica) del moto ondoso.

Comunque, rimane accertato che l'assoluta assenza di trasporto non può figurare fra i caratteri distintivi del moto ondoso. Ciò non contradice del resto all'originaria intuizione di LEONARDO, dato l'inciso « *molte sono le volte* », che sembra anzi consigliare meno restrittiva interpretazione. Essa si concreta come segue: Se c'è un trasporto globale di massa, questo va esclusivamente attribuito alle disuguaglianze superficiali; gli strati profondi non vi apportano alcun contributo. Di qua la designazione di onde superficiali, attribuita da alcuni autori alle onde di cui si tratta.

Nella presente Nota mi propongo in primo luogo di dar veste analitica precisa all'anzidetta caratteristica di massa, e di ricavarne poi, come conseguenza necessaria della irrotazionalità, una espressione del flusso totale, che lascia immediatamente scorgere le proposizioni di STOKES e di RAYLEIGH, e le estende, contemplando canali di profondità comunque assegnata e onde pur qualunque (anche non periodiche) di tipo permanente. Ne deduco altresì una relazione generale fra elementi di media: forza viva per unità di lunghezza, livello medio, velocità di propagazione, portata relativa (quale cioè apparisce ad un osservatore collegato col profilo superiore dell'onda).

1. - Preliminari.

In un canale a fondo orizzontale e pareti verticali si propaghino, parallelamente alle sponde, onde di tipo permanente con velocità costante c.

Il fenomeno si può studiare in due dimensioni, considerando un generico piano verticale parallelo alle sponde. Riterremo che tutto abbia carattere permanente rispetto ad assi Oxy animati dalla velocità stessa con cui avviene la propagazione [6].

Assumeremo l'asse Oy verticale verso l'alto, e l'asse Ox scorrente sul fondo, colla direzione positiva rivolta *in senso opposto* alla propagazione.

Rispetto a questi assi, il campo in cui si svolge il moto non varia

---

funzione ψ, la quale si mantiene costante, assieme alla sua derivata normale, sopra una retta ben determinata. Una tale funzione sarebbe di necessità lineare, e si tratterebbe di flusso uniforme, contro l'ipotesi che, almeno alla superficie libera, si riscontri un'effettiva perturbazione ondosa.

(6) Si potrebbe limitarsi ad ammettere che il solo profilo superiore (pelo libero) si sposta rigidamente, con velocità c. Basta questo perchè un moto irrotazionale di fluido incompressibile risulti di necessità permanente.

col tempo: esso sarà a ritenersi una striscia indefinita L (cfr. la fig. 1), limitata inferiormente dall'orizzontale $y = 0$ (*fondo*), superiormente da una *linea libera* l, la quale, senza scostarsi troppo da una stessa orizzontale, può *a priori* assumere andamento comunque sinuoso ed irregolare. Analiticamente, c'è da supporre soltanto che l'ordinata $y(x)$ di l (finita, continua e derivabile) rimanga compresa fra due limiti *positivi*, al variare di x fra $-\infty$ e $+\infty$. Va da sè che, se si tratta in particolare di onde periodiche, la funzione $y(x)$ ammette un periodo ben determinato λ (lunghezza d'onda).

Piano $z = x + iy$

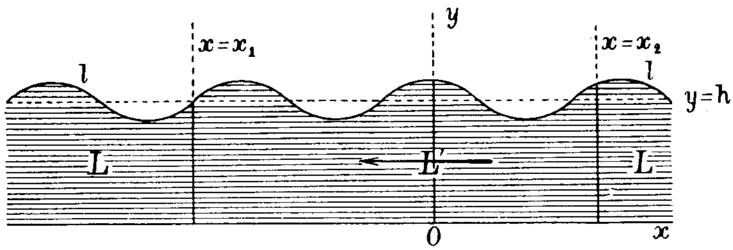


Fig. 1.

Indicheremo con u e v le componenti della velocità *relativa* delle particelle liquide, rispetto al sistema Oxy: esse sono a ritenersi funzioni delle coordinate x, y dei punti del campo (e non del tempo t, attesa la stazionarietà del moto rispetto ai detti assi), continue, e finite ovunque (anche all'infinito).

Trattandosi di moto irrotazionale di un liquido (fluido incompressibile) saranno differenziali esatti

$$d\varphi = u\,dx + v\,dy\,, \tag{1}$$

e

$$d\psi = -v\,dx + u\,dy\,. \tag{2}$$

Il campo L essendo semplicemente connesso, le due funzioni φ e ψ (potenziale di velocità e funzione di corrente) rimangono univocamente definite a meno di costanti additive, che fisseremo convenendo p. es. che sia $\varphi = \psi = 0$ nell'origine O.

Siccome tanto il fondo, quanto il pelo libero l costituiscono linee di flusso, sarà su entrambe $d\psi = 0$. La funzione ψ, che si annulla in O, ha dunque il valore zero su tutto l'asse delle ascisse, ed un valore, pure costante, che designerò con q, sulla linea l. Data la forma del campo L, ogni punto si può raggiungere dal fondo innalzandosi di un tratto finito (non superiore alla massima ordinata della linea libera). In base a ciò, segue immediatamente dalla (2) che ψ (nulla sul fondo) si mantiene finita, anche all'infinito. Non così φ: vedremo più innanzi quale sia il suo comportamento asintotico.

2. - Caratteristica cinematica.

Dacchè i nostri assi sono animati da traslazione uniforme con velocità, nel senso *negativo* dell'asse Oxy, saranno $u - c$, v le componenti della velocità assoluta di una particella generica.

Ora il carattere essenziale del moto ondoso è che, mentre il fenomeno ha l'apparenza di una traslazione con velocità c, il moto effettivo delle singole particelle fluide si riduce a piccole, o almeno non grandi, perturbazioni locali intorno a posizioni medie. Ciò val quanto dire che il rapporto

$$\beta = \frac{|\sqrt{(u-c)^2 + v^2}|}{c},$$

fra la velocità assoluta e la velocità di propagazione deve mantenersi piuttosto piccolo: dal punto di vista matematico basta ritenere $\beta < 1$, o, più precisamente, minore dell'unità il limite inferiore dei valori assunti da β in tutto il campo del moto.

Ne risulta in particolare che u deve essere dappertutto > 0. Pure positivo è quindi il valore di q, come risulta dalla (2), immaginando di integrare lungo una verticale, a partire dal fondo fino alla linea libera.

3. - Portata relativa e portata assoluta.

Prendendo la densità del liquido eguale ad 1, il flusso, *nel senso della propagazione* (cioè nella direzione negativa dell'asse Ox), attraverso un elemento dy di verticale (riferito all'unità di tempo e all'unità di larghezza del canale), vale manifestamente

$$-u\,dy,$$

se si considera la verticale collegata cogli assi Oxy; vale invece

$$(c - u)\,dy\,,$$

ove si tratti di una verticale fissa nello spazio.

Nel primo caso, la verticale stessa ha per equazione $x =$ costante; nel secondo $x = \xi + ct$ (dove ξ è una costante). Comunque, la portata totale si ha integrando, rispetto ad y, dal fondo fin sulla linea libera.

A norma della (2), lungo ogni verticale, $u\,dy = d\psi$, quindi la portata *relativa* è $-q$, e l'*assoluta*

$$Q = \int (c - u)\,dy = cy - q\,, \tag{3}$$

indicando y l'ordinata di l (in generale variabile col tempo) che corrisponde alla verticale fissa considerata. Se $y(x)$ è l'espressione dell'ordinata di l corrispondente all'ascissa generica x, nell'ultimo membro della (3), si deve intendere $y(\xi + ct)$.

4. - Caratteristica di massa: assenza di trasporto negli strati profondi.

Chiamiamo *profondo* un punto o un tratto di canale sempre immersi, situati cioè al disotto della minima ordinata della linea libera. Ove sia ε un generico elemento profondo di verticale *fissa*, la caratteristica di massa consiste in questo [7]:

La quantità d'acqua che passa attraverso ε (in un senso determinato), durante un tempo comunque lungo, rimane sempre finita.

Valutiamo in primo luogo la quantità d'acqua in questione. Ove la si designi con m (considerandola come positiva nel senso della propagazione), e sia (t_1, t_2) l'intervallo di tempo che si vuol considerare, si avrà manifestamente [8]

$$m = \varepsilon \int_{t_1}^{t_2} (c - u)\,dt\,.$$

---

[7] Mi riferisco ad elementi verticali per comodità di espressione. Nello stesso modo si comportano elementi comunque orientati. La conclusione finale concernente φ potrebbe essere stabilita considerando elementi di direzione arbitraria (purchè soltanto non orizzontali).

[8] Si noti che, nell'attribuire ad un elemento ε la portata $(c - u)\varepsilon\,dt$, per tutti i dt dell'intervallo di tempo considerato, si sfrutta l'ipotesi che l'elemento sia profondo. Infatti, ove esso restasse per qualche po' al disopra della linea libera, bisognerebbe, nei tempuscoli corrispondenti, sostituire zero a $(c - u)\varepsilon\,dt$.

La u sotto il segno si riferisce agli argomenti $x = \xi + ct$ e y, essendo ξ costante (ascissa dell'elemento ε contata a partire da un'origine fissa) e y pure costante (ordinata dello stesso elemento ε).

Introduciamo x al posto di t come variabile di integrazione, e rappresentiamo con x_1, x_2 i valori di x, che, a norma di $x = \xi + ct$, corrispondono rispettivamente a t_1, t_2. Tenuto conto che $u = \partial\varphi/\partial x$, si ha

$$m = \varepsilon\{c(x_2 - x_1) - [\varphi(x_2, y) - \varphi(x_1, y)]\} ,$$

e la circostanza che m deve rimanere finito, qualunque siano t_1, t_2 (e di conseguenza x_1, x_2), equivale, come tosto si riconosce, a quest'altra: La funzione

$$\Phi(x, y) = \varphi(x, y) - cx \tag{4}$$

si mantiene finita, anche al crescere indefinito di x, per tutti i valori di y inferiori alla minima ordinata della linea libera l. Quest'ultima restrizione si può togliere, ritenendo in definitiva *$\Phi(x, y)$ finita, anche all'infinito, in tutto il campo L del moto.* Per giustificarlo, basta pensare che, da un punto qualunque di L, si può raggiungere un punto profondo, scendendo verticalmente di un tratto finito (inferiore alla massima ordinata della linea libera). Il divario fra i valori di Φ in questi due punti non può superare il prodotto della differenza di livello per il limite superiore di

$$\left|\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right| = \left|\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right| = |v| ,$$

che è per ipotesi finito, c. d. d.

5. - Introduzione delle variabili complesse.

Segue dal n. 1, ed è del resto notorio, che, posto

$$\begin{cases} z = x + iy , \\ f = \varphi + i\psi , \\ w = u - iv , \end{cases} \tag{5}$$

f e w risultano funzioni della variabile complessa z, uniformi nella striscia L, sussistendo l'identità

$$\frac{df}{dz} = w . \tag{6}$$

Le premesse concernenti u, v assicurano che w è regolare in L e rimane ovunque (anche all'infinito) *finita e diversa da zero*. Quest'ultima circostanza segue dall'essere positivo il limite inferiore di u [n. 2].

Quanto ad f, il relativo comportamento risulta subito dall'osservare che ψ rimane finita [n. 1], mentre φ differisce da cx per una $\Phi(x, y)$ pure ovunque finita [n. prec.].

Ne segue (cosa pur nota, che già altra volta [9] ebbi occasione di richiamare con tutto dettaglio) che i valori presi da f in L riempiono, nel piano complesso $\varphi + i\psi$, la striscia S (fig. 2) compresa fra le rette $\psi = 0$, $\psi = q$, per modo che c'è corrispondenza biunivoca fra i due campi.

Piano $f = \varphi + i\psi$

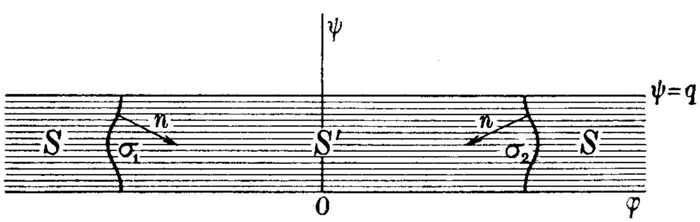


Fig. 2.

Mentre z percorre (nel senso delle x crescenti) il fondo, ovvero la linea libera l, f percorre (nel senso delle φ crescenti) l'asse reale $\psi = 0$, o rispettivamente la sua parallela $\psi = q$, essendo in particolare $f = 0$ per $z = 0$.

A punti all'infinito del campo L ($x = \pm\infty$) corrispondono punti pure all'infinito della striscia S (e dalla stessa banda, $\varphi = \pm\infty$).

Ove si ponga

$$\Psi = \psi - cy\,, \tag{7}$$

$$F = \Phi + i\Psi\,, \tag{8}$$

le (4) e (7) si possono compendiare in

$$f(z) = cz + F\,, \tag{9}$$

da cui apparisce che F è funzione della variabile complessa z, ovunque finita nel campo L, anche al crescere indefinito di z.

---

[9] *Sulle onde progressive di tipo permanente*, in questi « Rendiconti », vol. XVI (2° Sem. 1907), pp. 777-790 [in queste « Opere matematiche »: vol. secondo, XXXVI, pp. 615-629].

Derivando e badando alla (6), si ha

$$w - c = \frac{dF}{dz}.$$

Il numero complesso del primo membro rappresenta manifestamente la *velocità assoluta* (in senso vettoriale). Ricordando il significato di β, ne desumiamo

$$\beta = \frac{1}{c}\left|\frac{dF}{dz}\right|. \tag{10}$$

6. - Inversione.

Se si pensa che la forma del campo L non è *a priori* determinata, ma dipende dalla linea libera l, mentre il campo S si presenta, in ogni caso di moto ondoso, come una striscia rettilinea compresa fra l'asse reale $\psi = 0$ e la sua parallela $\psi = q$, appare vantaggioso di assumere come variabile indipendente la f, anzichè il posto z, risguardando invece la stessa z e, di conseguenza, la velocità w come funzioni di f entro S.

In questa accezione conviene immaginare anche F espressa per f (anzichè per z). La (9) si scrive in conformità

$$z = \frac{1}{c} f - \frac{1}{c} F(f), \tag{9'}$$

con che (dato che F si mantiene finita) si mette in evidenza il comportamento asintotico della funzione $z(f)$ (dei punti della striscia S).

Scindendo il reale dall'immaginario, la (9') dà:

$$\left\{\begin{aligned} x &= \frac{1}{c}\varphi - \frac{1}{c}\Phi(\varphi, \psi), \\ y &= \frac{1}{c}\psi - \frac{1}{c}\Psi(\varphi, \psi). \end{aligned}\right. \tag{9''}$$

7. - Flusso integrale durante un intervallo di tempo qualsiasi.

Inteso che si tratta di flusso assoluto, basterà integrare l'espressione (3) di Q fra i due istanti t_1, t_2 che limitano l'intervallo.

Colla stessa trasformazione impiegata al n. 4, si ha dalla (3)

$$\int_{t_1}^{t_2} Q\,dt = \frac{1}{c}\int_{x_1}^{x_2} (cy - q)\,dx,$$

donde una prima espressione del trasporto globale M (attraverso una verticale fissa)

$$M = \int_{x_1}^{x_2} y\,dx - \frac{q}{c}\,(x_2 - x_1)\,, \tag{11}$$

Dalla (3) stessa, ove si lasci indicata l'integrazione rispetto ad y, e si designi con L' quella porzione di L, che sta fra le ascisse x_1 ed x_2, con dL un generico elemento di campo, si ha pure

$$M = \int_{L'} \left(c - \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) dL\,. \tag{11'}$$

Poniamo mente alla corrispondenza biunivoca fra le due striscie L ed S; chiamiamo S' la porzione di quest'ultima, che fa riscontro ad L'; e notiamo che la (9) [ovvero l'inversa (9')] stabilisce una rappresentazione conforme fra i due campi. Il modulo della rappresentazione (rapporto fra un elemento $|dz|$ del piano z e il corrispondente elemento $|df|$ del piano f) è $|dz/df|$. Dette perciò dL e dS due areole corrispondenti dei due piani, si avrà

$$dL = \left|\frac{dz}{df}\right|^2 dS\,, \tag{12}$$

dove si può, a piacere, considerare z come funzione di f [definita dalla (9')], o viceversa.

D'altra parte, dall'identità

$$\frac{df}{dz} = \frac{1}{dz/df}\,,$$

eguagliando le parti reali, segue subito

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial x}{\partial \varphi}\,\frac{1}{|dz/df|^2}\,.$$

Con ciò la (11'), ove si adottino come variabili d'integrazione φ e ψ, in luogo di x, y, assume l'aspetto

$$M = \int_{S'} \left\{\left|\frac{dz}{df}\right|^2 - \frac{1}{c}\,\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right\} dS\,.$$

Le (9′) ed (8) [attesa la monogeneità di $F(\varphi + i\psi)$] dànno

$$\frac{dz}{df} = \frac{1}{c} - \frac{1}{c}\frac{dF}{df} = \frac{1}{c}\left(1 - \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi}\right) + \frac{i}{c}\frac{\partial \Psi}{\partial \varphi},$$

da cui

$$\left|\frac{dz}{df}\right|^2 = \frac{1}{c^2}\left(1 - 2\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi}\right) + \frac{1}{c^2}\left|\frac{dF}{df}\right|^2,$$

ovvero anche, considerando F funzione di f pel tramite di z e ricordando la (10),

$$\left|\frac{dz}{df}\right|^2 = \frac{1}{c^2}\left(1 - 2\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi}\right) + \beta^2\left|\frac{df}{dz}\right|^2.$$

Di qua, ove si noti che, per la prima delle (9″),

$$\frac{1}{c^2} - \frac{1}{c}\frac{\partial x}{\partial \varphi} = +\frac{1}{c^2}\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi},$$

si ricava

$$\left|\frac{dz}{df}\right|^2 - \frac{1}{c}\frac{\partial x}{\partial \varphi} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} + \beta^2\left|\frac{df}{dz}\right|^2.$$

La precedente espressione di M, ponendo

$$N = -\frac{1}{c^2}\int_{S'}\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi}\,dS, \tag{13}$$

e riprendendo nell'integrale residuo le variabili x, y, può in definitiva essere scritta

$$M = \int_{L'}\beta^2\,dL + N. \tag{14}$$

8. - Teorema (generalizzato) di Stokes-Rayleigh.

Verificheremo tra un momento che l'addendo N si mantiene sempre finito, anche al crescere indefinito della lunghezza del tratto L'.

Il primo addendo è invece essenzialmente positivo. Di qua l'interesse della trasformazione eseguita, la quale consente senz'altro di affermare che: *di regola — in particolare ogniqualvolta si tratti di onde periodiche — il trasporto globale M cresce indefinitamente con L', cioè coll'intervallo di tempo, durante il quale lo si considera.*

È questo il teorema (generalizzato) di STOKES-RAYLEIGH.

Resta da giustificare l'affermazione che N si mantiene finito.

Notiamo all'uopo che il campo S' del piano f (fig. 2) è limitato dalle due parallele $\psi = 0$, $\psi = q$, nonchè da due trasversali σ_1, σ_2, immagini delle verticali $x = x_1$, $x = x_2$ del piano z.

Detto complessivamente σ' l'intero contorno di S', $d\sigma'$ un suo elemento, n la direzione della normale volta verso l'interno di S', si ha, applicando il lemma di GREEN,

$$N = \frac{1}{c^2}\int_{\sigma'} \Phi \cos \widehat{(n\varphi)}\, d\sigma' \,.$$

Siccome, sulle parallele $\psi = 0$, $\psi = q$, $\cos (n\varphi)$ si annulla, così rimane

$$N = \frac{1}{c^2}\int_{\sigma_1+\sigma_2} \Phi \cos \widehat{(n\varphi)}\, d\sigma' \,.$$

L'elemento $d\sigma'$ di una delle due trasversali e l'elemento dy della verticale corrispondente stanno nel rapporto, essenzialmente finito, $|df/dz|$ (eguale alla velocità relativa $|w|$). Ovunque finita è del pari la funzione Φ [n. 4].

Detto pertanto P il prodotto della massima ordinata di l per il limite superiore del modulo di Φw in tutto il campo del moto, si ha subito (immaginando di riportare l'integrale testè scritto al piano z),

$$|N| \leqslant \frac{2P}{c^2} \,, \qquad \text{c. d. d.}$$

OSSERVAZIONE I. – In prima approssimazione, trattando cioè come una quantità di primo ordine il rapporto β (fra la velocità assoluta e la velocità di propagazione) e trascurando in conformità β^2, M si riduce ad N. Vi è incluso in particolare il noto risultato della teoria elementare di AIRY (in cui si trascura appunto β^2), che le onde oscillatorie semplici non dànno luogo a spostamenti globali di massa.

OSSERVAZIONE II. – L'espressione (14) di M mostra altresì che il trasporto superficiale deve avvertirsi non appena si spinga l'approssimazione fino a tener conto dei termini di second'ordine in β. Ciò è appunto accaduto a Stokes fino dal 1847.

9. - Relazione generale fra elementi globali.

Supponiamo che esista un *livello medio* (in senso asintotico), ossia che il valor medio dell'ordinata y

$$\frac{1}{x_2 - x_1}\int_{x_1}^{x_2} y\,dx ,$$

relativo ad un generico tratto di canale (x_1, x_2), ammetta un limite ben determinato h al crescere indefinito del tratto.

Notiamo che questa condizione è sempre soddisfatta quando si tratta di onde periodiche. In tal caso il livello medio asintotico coincide, come si verifica immediatamente, col valore medio relativo ad un'onda generica, cioè con

$$\frac{1}{\lambda}\int_0^{\lambda} y(x)\,dx ,$$

λ essendo la lunghezza d'onda.

Notiamo ancora che l'ipotesi di esistenza di un livello medio, esplicitamente enunciata per preoccupazione di rigore matematico, non costituisce dal punto di vista fisico restrizione alcuna, essendo implicita tra le caratteristiche intuitive del moto ondoso.

Ciò posto, eguagliamo le due espressioni (14) ed (11) di M. Moltiplicando da una parte e dall'altra per $\frac{1}{2}c^2/(x_2 - x_1)$, si ha subito

$$\frac{1}{x_2 - x_1}\,\frac{1}{2}\int_{L'} c^2\beta^2\,dL = \frac{1}{2}\,c^2\left\{\frac{1}{x_2 - x_1}\int_{x_1}^{x_2} y\,dx - \frac{q}{c}\right\} - \frac{1}{2}\,c^2\,\frac{N}{x_2 - x_1}\,.$$

Al crescere indefinito dell'intervallo $x_2 - x_1$, la quantità in parentesi converge verso $\frac{1}{2}c^2(h - q/c)$, mentre l'ultimo termine ha per limite zero.

Anche il primo membro converge dunque verso un limite ben determinato τ: e questo (ricordando che β^2c^2 rappresenta la velocità assoluta) dimostra che esiste un valore medio (in senso asintotico) dell'energia cinetica del moto ondoso per unità di lunghezza (e di larghezza) del canale. Di più sussiste la relazione notevole

$$\tau = \frac{1}{2} c^2 \left(h - \frac{q}{c}\right). \tag{15}$$

Nel caso di onde periodiche, τ si identifica naturalmente coll'energia cinetica di un'onda, divisa per la lunghezza d'onda.

XIX.

ESTENSIONE ED EVOLUZIONE DELLA FISICA MATEMATICA (NELL'ULTIMO CINQUANTENNIO, CON SPECIALE RIGUARDO AL CONTRIBUTO ITALIANO)

« Atti della Società italiana per il progresso delle Scienze »,
V Riunione, Roma, ottobre 1911, pp. 237-254.

La scoperta di nuovi fatti per via speculativa costituisce indubbiamente l'espressione più alta della filosofia naturale. Non ne mancano, anche in epoca recente, splendidi esempî. Tuttavia il còmpito d'ogni giorno, quello che, all'infuori di fortunate divinazioni di poche menti eccelse, normalmente le incombe, è alquanto più modesto.

Schematizzare una classe di fenomeni già sperimentalmente avvertiti sì da renderne possibile la rappresentazione matematica e con questa l'enunciato di leggi precise; più generalmente passare dal qualitativo al quantitativo: ecco i limiti, entro cui correntemente si svolge l'attività della filosofia naturale. Appena degni di attenzione per chi, come gli antichi filosofi, pretendesse in brevi linee « descriver fondo a tutto l'universo »; ben diversamente apprezzabili da chi abbia coscienza delle esigenze intellettuali e sociali della scienza moderna.

Il nostro illustre Presidente, nel discorso inaugurale del Congresso di Napoli, ebbe a dimostrare che la ricerca scientifica va considerata come una immensa organizzazione cooperativa. Orbene, si può aggiungere che tutte le delicate mansioni consultive ed amministrative della cooperativa nobilissima sono affidate alla filosofia naturale, economo perfetto, atto altresì a suggerire proficue iniziative.

L'adempimento dell'ufficio importa per lo più due momenti o stadî distinti. Nel primo, che può dirsi estensivo, si effettua la traduzione in linguaggio matematico di tutto quanto attiene ai fenomeni o problemi che si vogliono studiare, fissandone le conseguenze immediate; al secondo stadio, intensivo, è riservata la elaborazione logica del già raccolto materiale (costituito da principî generali, ipotesi speciali, equazioni, relazioni di disuguaglianza, ecc.).

Lo stadio estensivo ha per sè l'attrattiva della novità, precorrendo necessariamente l'altro, e, di regola, un interesse più generale.

Con tutto ciò lo stadio intensivo non può qualificarsi secondario.

Da un lato l'invenzione e l'affinamento dei metodi, che appartengono a questo stadio, rivelando l'intima ragione delle corrispondenze fra rappresentazione e realtà, rendono sempre più agevole la subordinazione di fatti nuovi a teorie identiche od analoghe; d'altro lato talune questioni tecniche (quali, ad es., la determinazione di coefficienti di riduzione), richiedendo trasformazioni e discussioni approfondite, possono venire soddisfacentemente affrontate solo in questa fase più evoluta.

* * *

Di questa e di quella avrei dovuto, per rispondere all'assunto impegno, tracciare dinanzi a voi una sommaria cronaca semisecolare, tanto più che le due fasi si compenetrano in guisa da non poter nettamente stabilire dove termina l'una e dove comincia l'altra.

Tuttavia, dopo qualche titubanza, mi risolsi a preferire la parte estensiva, limitando la seconda a quanto è direttamente connesso colla prima, ovvero concerne modificazioni e critica delle idee dominanti. Solo in tal guisa diveniva evitabile quel tecnicismo analitico, cui tutti ci inchiniamo come a prezioso fattore di progresso, ma che vogliamo giustamente bandito dalle nostre riunioni.

Ho detto che non senza contrasto pervenni a sacrificare la fase intensiva. E ben giustificata fu l'esitanza, chè vi si trova un contributo italiano di primissimo ordine. Il fissarne i fasti sarebbe stata patriottica cura, gradita al miope mio sguardo di specialista, cui dànno vertigini i troppo larghi orizzonti. Ma il dovere imperioso di non contravvenire al postulato fondamentale del nostro sodalizio mi fece sopportare il disagio, e mi avventurai con guide peritissime (alludo a idee generali già espresse dai più insigni cultori della filosofia naturale) per mal sicuri e sdrucciolevoli passi, donde in compenso si apre a chi ha buoni occhi un panorama meraviglioso.

Non v'aspettate ch'io ve ne sveli i nitidi rilievi, le mille sfumature, i poggi ubertosi, gli abissi indefiniti. Potrò soltanto segnalarvene i più marcati contorni e presentarvi alcune riflessioni sempliciste cui suggerisce un massiccio buon senso, anche se scompagnato, vorrei quasi dire in quanto scompagnato dall'alito vivificatore della fantasia.

* * *

Intorno al 1860 già erano stabiliti e universalmente accettati i due principî fondamentali della termodinamica.

Ma se il riconoscimento dei principî può riferirsi a più che cinquant'anni addietro, titolo non minore di gloria pel successivo periodo è l'aver dischiuso all'indagine razionale, per precipua virtù di quei principî, le accumulate ricchezze della chimica e i suoi nuovissimi acquisti e le universali manifestazioni del calorico raggiante.

La termodinamica generale o scienza dell'energia conduce a prevedere, precisate che siano le circostanze determinanti, il senso in cui dovranno necessariamente svolgersi le varie reazioni chimiche, nonchè le essenziali correlazioni fra esse e alcuni concomitanti fenomeni fisici.

Accanto ai fondatori della termodinamica primeggiano in questo indirizzo radicalmente estensivo GIBBS, VAN'T HOFF, ARRHENIUS, DUHEM, NERNST, OSTWALD, PLANCK.

Nel 1876 GIBBS dedusse pel primo, con impeccabile rigore matematico, le leggi che presiedono agli spostamenti degli equilibri chimici per variazione di temperatura, e poi, a proposito degli equilibri chimici fra sostanze eterogenee, la regola delle fasi. Risultati essenziali che, enunciati nel taciturno linguaggio dell'algebra senza o quasi senza esempi illustrativi, rimasero inavvertiti per una diecina d'anni finchè VAN DER WAALS e OSTWALD richiamarono sopra di essi l'attenzione dei chimici. Frattanto VAN'T HOFF pubblicava la sua « Dinamica chimica » che, indipendentemente dall'opera di GIBBS, coordinava agli stessi principî generali un tal complesso di fenomeni da imporsi immediatamente anche ai chimici. A lui si deve ancora la teoria delle soluzioni diluite, perfezionata da ARRHENIUS, e applicata da questi, da KOHLRAUSCH, WEBER, RÒITI, VOLTERRA, NERNST a problemi fondamentali di elettrochimica, dissodando un terreno ancor vergine ed iniziandone la coltivazione matematica.

* * *

Grandioso per potenza descrittiva, e per affascinante rigoglio di plastiche argomentazioni, appare l'apostolato di OSTWALD, che tutto (compresa la materia) vorrebbe ridurre a manifestazioni di energia. Apostolato indubbiamente benefico per aver agitate e diffuse idee generali di enorme portata; ancora nel limbo dal punto di vista quantitativo. È questo il terreno su cui dovrebbe ormai cimentarsi la scuola di OSTWALD per dissipare le diffidenze dei fisici matematici.

Da noi in Italia non c'è, nè, ch'io sappia, c'è stato alcun sintomo di feticismo energetico. Bensì sane e vigorose ispirazioni attinsero dall'energetica BETTI e VOLTERRA, considerando il primo l'entropia di un sistema newtoniano in moto stabile, ed il secondo trasportando un teorema di POYNTING al campo della gravitazione universale, donde la scoperta di leggi che regolano le correnti migratorie dell'energia meccanica.

* * *

Ricerche originali e esposizioni sistematiche strettamente termodinamiche pubblicarono ROBIN, DUHEM, PLANCK. A DUHEM, illuminato e indefesso propagandista delle nuove dottrine, spetta in particolare la concezione dominante di potenziale termodinamico e una legge generale che abbraccia tutti i casi di spostamento dell'equilibrio. Il nome di PLANCK si collega coll'energia raggiante e relativa analisi spettrale, raffinato strumento d'indagine, che varca le soglie dei laboratori e i confini stessi del nostro pianeta, e, realizzando d'un tratto le chimere della magìa, ci dà con pochi segni sicuro ragguaglio sulla costituzione chimica dei corpi celesti.

Sta alla base la legge di KIRCHHOFF che il rapporto fra potere emissivo e potere assorbente di una sostanza qualsivoglia non dipende dalla natura della sostanza, nè dell'ambiente. Le fanno degna corona la legge di STEFAN-BOLTZMANN sulla proporzionalità dell'energia irradiata alla quarta potenza della temperatura, la legge di spostamento di WIEN, dimostrata con pieno rigore dall'ABRAHAM, e quella di PLANCK sulla ripartizione fra le varie frequenze.

Questi risultati (almeno nel loro assetto definitivo) si ottengono associando a principî generali soltanto ipotesi, come si suol dire, fenomenologiche, relative cioè a fatti positivi effettivamente verificati o quanto meno suscettibili di diretta verificazione nell'ambito delle attuali esperienze. Alla fisica teorica non mancano tuttavia anche altri espedienti. Nulla vieta di ricorrere, ove giovi, a modelli o congetture puramente concettuali, cioè sfuggenti ai mezzi di osservazione, di cui si può disporre oggidì; basta che siano poi vagliate alla stregua dei fatti le loro conseguenze.

Le adottate ipotesi, pur non cessando di essere metafisiche nel senso etimologico della parola, acquistano valore tanto maggiore quanto più numerose e cospicue sono le previsioni esatte che ne derivano. Esempî típici, a prescindere dalle figurazioni strutturali della chimica, sono le ipotesi molecolari, iniziate da DANIELE BERNOULLI e da AVOGADRO, che, sotto gli auspici di MAXWELL e di BOLTZMANN, crearono la teoria cinetica dei gas; più generalmente l'impiego del calcolo delle probabilità nella forma meccanico-statica di GIBBS.

Ne è sorta una parte della termodinamica, speciale secondo la classificazione di CLAUSIUS, cui le recenti ricerche di EINSTEIN, PERRIN e CORBINO sul moto browniano conferiscono particolare interesse. Su ciò, in relazione a tutto il movimento verso l'atomismo, dovremo tornare più innanzi. Giova intanto rivolgere lo sguardo alle teorie elettromagnetiche. In esse e nell'energetica parmi si riscontrino i maggiori progressi compiuti dalla fisica matematica durante gli ultimi cinquant'anni.

* * *

Il punto di vista delle azioni a distanza, istantaneamente risentite in tutto lo spazio, aveva dato rappresentazione ed assetto sistematico ai fenomeni dell'elettromagnetismo, allorchè apparve nel 1873 il trattato di Clerk Maxwell. Questi, ispirandosi alle intuizioni di Faraday, ripudia ogni ipotesi basata su inafferrabili azioni a distanza, e immagina linee di forza, flussi, modelli meccanici svariati, pervenendo in tal guisa a disciplinare nuovamente tutti i fenomeni fino allora rivelati dall'esperienza.

Fra i modelli cui Maxwell ricorse spicca senza dubbio per geniale ardimento quello concernente le azioni ponderomotrici e induttive fra quanti si vogliono circuiti. Una giustificazione particolarmente espressiva ne fu data in seguito da Beltrami per brillante ravvicinamento della legge di Ohm al principio di d'Alembert.

Prima conseguenza della ricostruzione maxwelliana fu la seducente subordinazione dell'ottica all'elettromagnetismo, il riconoscimento cioè che i fenomeni luminosi possono essere anche più semplicemente spiegati attribuendoli a onde elettromagnetiche, anzichè a vibrazioni dell'ipotetico mezzo — etere — immaginato da Huygens e perfezionato da Fresnel, Cauchy, Green, che lo dotarono di proprietà elastiche analoghe a quelle dei corpi solidi e lo resero così capace di vibrare trasversalmente.

La teoria elettromagnetica dell'ottica porta da un lato ad identificare la velocità di propagazione delle azioni elettromagnetiche colla velocità della luce, rendendo così appariscente la loro trasmissione nel tempo attraverso il mezzo; d'altro lato essa mostra che le stesse equazioni reggono le oscillazioni di qualsiasi frequenza: sia che si tratti di pochi periodi per secondo, come ad esempio nei rocchetti di Ruhmkorff, sia che si raggiungano centinaia di trilioni come nelle oscillazioni le quali dànno l'impressione fisiologica della luce.

Di differente non c'è che l'ordine di grandezza, il divario essendo paragonabile a quello che corre fra un litro d'acqua e il mare Adriatico.

Come cisterne e laghi offrono esempi concreti di una graduale transizione di capacità, così divengono prevedibili, in base alla teoria di Maxwell, fenomeni intermedî, i cui estremi sono segnati da speciali attitudini dei nostri sensi (il formicolio di fronte alla scossa di un rocchetto; l'impressione sulla retina di fronte a frequenze elevatissime).

A dir vero, di fenomeni intermedî, in un ambito molto prossimo alle basse frequenze, era stata ottenuta, prima di Maxwell, una realizzazione sperimentale dal Feddersen nelle scariche oscillanti dei condensatori, a lor volta analiticamente previste da Lord Kelvin quattro anni avanti (1853).

Ma si trattava di alternanze di poche migliaia; ad arrivare ai trilioni delle vibrazioni luminose ci correva un bel po'.

Fu soltanto nel 1888 che HERTZ insegnò ad inserire, pressochè a mezzo cammino, le celebri oscillazioni che recano il suo nome, confermando in pari tempo che le perturbazioni elettromagnetiche si propagano effettivamente colla velocità della luce.

Non molto dopo potè RIGHI, spostandosi alquanto verso le alte frequenze, realizzare addirittura l'ottica delle oscillazioni elettriche, cui GARBASSO aggiunse la riproduzione di fenomeni dispersivi; e MARCONI, spostandosi in senso inverso, ci diede la telegrafia senza filo. Tosto ne sorsero importanti e difficili problemi teorici, approfonditi con singolare acume da POINCARÉ, ABRAHAM, PICCIATI, SOMMERFELD.

In HERTZ l'entusiasmo e la perseveranza cosciente del fisico furono destati e nutriti dal pensiero matematico. MAXWELL interponeva i modelli fra i fatti e le formule. HERTZ, sull'esempio di HEAVISIDE, ravvisò nei modelli un'armatura provvisoria, che, a edificio compiuto, ne deturpa le linee armoniose. Perciò, dopo aver assicurato colle sue immortali esperienze il trionfo dello schema maxwelliano, bandì tutti gli intermediarî, il cui intervento diveniva superfluo abolendo i modelli; e diede, in due memorie classiche, un'esposizione mirabilmente comprensiva di ciò che resta: che è proprio tutto e soltanto quello che può essere sottoposto all'esperienza.

Indirizzo, come si vede, rigidamente fenomenologico; portato, nella trattazione di HERTZ, a quegli eccelsi fastigi che aveva raggiunto lo stile deduttivo nei più celebrati scritti di FOURIER e di AMPÈRE.

* * *

In ogni mezzo che sia sede di fenomeni elettromagnetici si destano degli sforzi meccanici. Il fissarne l'espressione era logicamente imposto all'interprete delle idee di FARADAY, era anzi l'estrinsecazione specifica del punto di vista delle azioni mediate. Di qua gli sforzi maxwelliani legati in modo suggestivamente semplice allo stato elettrico e magnetico del posto cimentato. Dacchè anche la luce è un fenomeno elettromagnetico, ne conseguiva in particolare l'esistenza di una pressione delle radiazioni luminose.

Alla medesima conclusione pervenne ADOLFO BARTOLI, qualche anno più tardi (1876), ma per via più diretta e indipendente dal complesso di ipotesi, che involge la teoria elettromagnetica: per semplice applicazione dei principî termodinamici ad uno speciale ciclo da lui ideato. Così è che l'azione meccanica della luce a buon diritto si designa col duplice nome MAXWELL-BARTOLI.

Lo stesso BARTOLI aveva anche cercato di verificarne sperimentalmente l'esistenza, benchè si trattasse (come, concordemente con MAXWELL, aveva calcolato) di un effetto assai tenue: appena un quarto di millimetro sopra un metro quadrato di superficie, esposta, nelle più favorevoli condizioni, alla luce del sole. Le influenze termiche, ben altrimenti cospicue, rendevano l'esperimento particolarmente difficile, e BARTOLI dovè rinunciarvi. Vi pervenne nel 1900 il russo LEBEDEFF, essendosi nel frattempo (così modestamente dichiara questo autore) sviluppate le risorse della tecnica in modo insperato.

* * *

Agli sforzi maxwelliani si collegano notevoli ricerche di BELTRAMI, di PADOVA e di SOMIGLIANA.

Qual'è l'intima natura del mezzo in cui si destano questi sforzi, si chiede il BELTRAMI? È esso dotato della elasticità dei corpi solidi, al pari di quello su cui s'era adagiata l'ottica prima della teoria elettromagnetica?

La risposta è negativa. Se quindi si vuol farsi una idea della struttura di questo mezzo, bisogna uscire dal modello dell'ordinaria elasticità.

PADOVA vi sostituì un tipo rotazionale, già esperito, sotto altro punto di vista, da MAC CULLAGH e KELVIN.

Il SOMIGLIANA pensò invece che, non la struttura elastica del mezzo, ma l'espressione maxwelliana degli sforzi poteva essere modificata. Ed ha mostrato che questo punto di vista è perfettamente legittimo, assegnando la legge secondo cui dovrebbero in conformità distribuirsi gli sforzi.

Dacchè siamo in tema di conciliazioni concettuali, consentitemi di aggiungere che, come il collega SOMIGLIANA ha rimesso a galla l'etere elastico, così ho fatto io per le azioni a distanza della elettrodinamica classica conciliandole colle equazioni di MAXWELL-HERTZ.

Basta l'ipotesi che le varie azioni elementari, anzichè essere istantanee, si propaghino con velocità costante.

* * *

L'accenno personale mi è monito d'aver varcato il segno, indulgendo a preferenze spiegabili, ma quasi sempre inopportune.

A ristabilire, se non le ormai violate proporzioni, almeno l'economia del tempo, sarò costretto a ricusare anche un semplice sguardo alle relazioni e reciproche influenze fra la fisica matematica e l'astronomia, la geodesia, la balistica, l'elettrotecnica.

Dolorosa rinuncia, che ci contende di tributare debito omaggio alla memoria venerata di VIRGINIO SCHIAPPARELLI, di GALILEO FERRARIS, di FRANCESCO SIACCI. Rievocatine, non foss'altro, i nomi gloriosi, ci troviamo risospinti verso la teoria matematica dell'elasticità: dico risospinti, perchè ad essa, non meno che all'elettromagnetismo, debbono ascriversi le già riferite indagini di BELTRAMI e di SOMIGLIANA sugli sforzi maxwelliani.

* * *

Nell'indirizzo applicativo degli studi di elasticità si impone in primo luogo l'opera di CASTIGLIANO. Il suo principio del minimo lavoro, che si riattacca a GREEN e a MENABREA, abbraccia in sintesi feconda tutta la tecnica dei sistemi elastici. Esso consente di contemplare in ciascun tipo di questioni soltanto quegli elementi che le esigenze pratiche impongono, segnando il giusto mezzo fra un empirismo ignorante e una irraggiungibile o illusoria esattezza teorica. In analogo indirizzo hanno poi lavorato SIACCI e DONATI, mentre CANEVAZZI, GUIDI, PANETTI hanno contemplato diverse o nuove esigenze dell'ingegneria.

Pur connessa alla tecnica è la semplice e preziosa indicazione fornita da BELTRAMI circa le condizioni di resistenza e il massimo cimento dei corpi elastici.

Le ricerche sulle possibili simmetrie e sul comportamento elastico dei varî cristalli (promosse da VOIGT in base ad una classificazione geometrica di SCHÖNFLIES) ebbero tra noi cultori in SOMIGLIANA e nel compianto SELLA.

Ultima, in ordine di data, viene la scoperta dovuta al VOLTERRA delle distorsioni elastiche, fenomeni di deformazione dei corpi molteplicemente connessi (quali anelli o cilindri cavi), che non hanno riscontro nei solidi massicci. Solo un sottile spirito geometrico poteva intuire quest'intimo divario e penetrarne le inaspettate particolarità, che trovarono poi piena conferma in belle esperienze di ROLLA, di CORBINO, di TRABACCHI.

Sul contributo intensivo ho finora sorvolato. Ma sarebbe colpa non ricordare, pur di sfuggita, il celebre teorema di reciprocità di BETTI; il metodo di CERRUTI e l'opera successiva di MARCOLONGO che, anche come trattatista, ha reso agli studiosi servigi eminenti; le fondamentali formule di SOMIGLIANA, scoperte e sfruttate dapprima nel caso dell'equilibrio e poi estese con calcolo sapiente al moto dei mezzi isotropi; le investigazioni di BELTRAMI sulle onde piane, e di MAGGI sulla propagazione perturbata della luce « attirata — sono sue parole — per la via più diretta e più semplice nel dominio della teoria dell'elasticità »; il corso di elasticità del CESÀRO e la monografia dell'ALMANSI sul problema di SAINT-VENANT, due gemme per artistica elaborazione e per efficacia didattica; i risultati così geniali nella loro semplicità di MORERA e dello stesso ALMANSI; gli eleganti perfezionamenti di BOGGIO; gli studî di DANIELE sulle superficie flessibili, di BISCONCINI sulle vibrazioni stazionarie, e di LAURA sulle vibrazioni smorzate; le deformazioni tipiche di GEBBIA; i problemi alterni, quasi ad un tempo e per diverse vie discussi da SOMIGLIANA, MARCOLONGO, ORLANDO; i coni caratteristici di VOLTERRA e la loro feconda applicazione ai problemi dinamici; le ricerche profonde di LAURICELLA, di RICCI, di TEDONE; e quelle, iniziate da BELTRAMI, sul principio di HUYGENS, cui è degno epilogo una recente memoria del BURGATTI.

Magnifico complesso di lavori, che ha arditamente concepito e in breve tempo maturato una completa teoria d'integrazione delle equazioni dell'elasticità. Vero monumento nazionale ispirato alle più pure idealità della scienza!

* * *

Di sforzi collettivi, a questi comparabili per importanza, e per mòle, c'è forse in Italia un solo precedente, tanto più memorabile in quanto si riporta a quella prima metà del secolo scorso, che fu per le nostre sorti ben triste periodo.

Nei diciassette poderosi volumi della « Raccolta e nuova raccolta d'autori italiani che trattano del moto dell'acqua » (IV edizione, Bologna, 1821-1845) si trova d'ogni lato aggredita l'immane questione di assidere l'idraulica su base scientifica.

Quanto si sia progrediti nel cinquantennio con internazionale solidarietà e quanto *ferveat opus* tuttora dicono, con laconismo evidente, i nomi eletti di DOMENICO TURAZZA, GUSTAV ZEUNER, JOSEPH BOUSSINESQ, OSBORNE REYNOLDS.

Nell'idrodinamica pura, la teoria del suono, dopo aver ricevuto da HELMHOLTZ impulso diretto e indiretto, assurse ad una grande generalità per merito di Lord RAYLEIGH. Egli trasportò ai sistemi vibranti di qualsiasi natura i metodi creati da LAGRANGE per i sistemi olonomi; e il successo fu pari alla grandiosità della estensione, derivandone anche in altri campi della fisica conseguenze di eccezionale interesse.

Le ricerche acustiche di HELMHOLTZ richiamano alla mente le belle conferenze di BLASERNA, e, in altro campo, al nome di RAYLEIGH si associa quello di RÒITI per le benemerenze da entrambi acquisite colla determinazione dell'ohm.

Ma torniamo all'idrodinamica. Nel cinquantennio furono per la prima volta sottoposti al calcolo: l'onda solitaria (BOUSSINESQ e RAYLEIGH), i getti liquidi e i moti con scia (HELMHOLTZ, KIRCHHOFF, LEVI-CIVITA, CISOTTI), le sesse (CHRISTAL, VOLTERRA, SOMIGLIANA, VERCELLI), la propagazione delle discontinuità (HUGONIOT, HADAMARD); nonchè quelle singolari pulsazioni e oscillazioni, ideate da BJERKNES, che generano apparenti azioni a distanza di tipo newtoniano. Furono inoltre da PICCIATI e da BOGGIO aggiunti complementi essenziali alle ricerche di STOKES sui fluidi viscosi.

LIAPOUNOFF, POINCARÈ e DARWIN hanno assegnato nuove forme di equilibrio delle masse fluide ruotanti: scoperte a doppio titolo notabili, per le superate difficoltà matematiche e per l'interesse generale di fronte ai problemi cosmogenetici.

I moti vorticosi, stante la fondamentale proprietà, rilevata da HELMHOLTZ, che ogni filetto vorticoso ha esistenza perenne, assunsero una importanza speculativa che non si può passare sotto silenzio. Mentre BELTRAMI vi consacrò una serie di memorie che costituiscono oggi ancora la più elegante e completa esposizione di quella dottrina, e DE MARCHI, ispirandosi a BELTRAMI, se ne valse con profitto nello studio della circolazione generale dell'atmosfera, Lord KELVIN vi costruì addirittura un modello dell'intrinseca costituzione del mondo, mirando a togliere il dualismo materia-etere. Se l'etere si assimila ad un fluido perfetto, la ordinaria materia potrebbe non essere altro che etere atteggiato a vortice: l'invariabilità della massa costituirebbe l'aspetto tangibile del teorema di HELMHOLTZ.

L'analogia non è superficiale. Basta ad assicurarlo il nome di KELVIN. Ma possiamo candidamente domandarci: È proprio uno schema soddisfacente questo che riduce la materia ad un aspetto dell'etere, e viceversa spiega l'etere come fluido ponderabile, cioè come ordinaria materia?

Difficoltà analoghe si incontrano — sia detto per incidenza — quando si cerca di ridurre il concetto di materia a quello di elettricità.

La unificazione delle idee primordiali è certo per sè seducente, ma deve farsi accettare per illazione spontanea, senza lacune nè aggiramenti viziosi.

Intanto evitiamo l'annuncio pomposo di riduzioni incomplete, che non rispecchia gli austeri costumi della nostra scienza.

* * *

Ben più mature sono le discussioni sui principî della meccanica, la vecchia meccanica dei corpi ponderabili, che, se non spiega proprio tutto come un dì si pretese, regola pur sempre il corso degli astri, la costruzione degli edifici e dei meccanismi, il moto dell'acqua e dell'aria, la propulsione dei veicoli di ogni specie.

Nella meccanica compariscono, come ognun sa, accanto alle nozioni generiche di spazio, tempo e moto, quelle speficiche di forza, di massa, di legame.

Non tutte le percezioni dei nostri sensi, cui queste nozioni sono in ultima analisi subordinate, hanno eguale grado di precisione. Quelle visive sono indubbiamente assai meglio determinate delle muscolari. Ciò indusse HERTZ ad eliminare sistematicamente dalla meccanica l'idea di forza, notando che si può sempre sostituirvi, o pensarvi sostituito, agli effetti del riposo e del moto di un dato corpo, un opportuno collegamento con altri corpi. Per ragioni analoghe il MACH sostituì alla nozione di massa quella di coppia isolata, e il nostro MAGGI riprese con originali vedute tale criterio evitando anche l'astrazione del punto materiale, e con essa un innocente e comodo, ma innegabile raggiro descrittivo. È consuetudine infatti, da NEWTON in poi, di fissare dapprima l'attenzione su corpi di dimensioni abbastanza piccole perchè (quanto alla posizione occupata) si possano assimilare a semplici punti geometrici; si introduce così un ente ideale, caso limite e rappresentante approssimativo di corpi concreti, il punto materiale; si seguita per un bel po' a ragionare sopra di esso, salvo a ricomporre più tardi i corpi concreti mediante un nuovo passaggio al limite. Con linguaggio matematico si può dire che si differenzia prima per integrare poi: procedimento manifestamente artificioso.

La trattazione del MAGGI affronta fin da principio i corpi estesi, e formula, per essi direttamente, le leggi fondamentali del moto.

Moto o quiete sono — ricordiamocene bene — nozioni relative. È questione di mutamento o non mutamento di posizione di un corpo rispetto ad un altro. I principî della meccanica implicano quindi la specificazione (espressa o sottintesa) di un sistema di riferimento. Le stelle più lontane (così dette stelle fisse) o, in prima approssimazione, la terra costituiscono, per evidenti ragioni di opportunità, il riferimento tradizionale, chiamato per convenzione *fisso*, come, pure per convenzione nominale, si chiama *assoluto* il moto di un corpo ad esso riferito.

Si può naturalmente sostituirvi un diverso riferimento, un altro corpo qualsiasi C, ma perdendo assai in semplicità e a patto di conoscere preventivamente la legge con cui C si sposta rispetto al riferimento ordinario, cioè il suo moto assoluto. Fin qui tutti i libri di testo; ma ENRIQUES e GIORGI hanno recentemente rilevato che è possibile sostituire al dato « moto assoluto di C » una serie di esperienze intrinseche, una specie di esplorazione di campo, analoga a quella che si istituisce per la gravità nei vari punti della superficie terrestre; soltanto un po' più complessa.

Così — primo ENRIQUES, limitatamente alle leggi della statica, poco di poi GIORGI con tutta generalità — sono pervenuti ad eliminare l'assoluto, dando ai postulati meccanici forma non meno semplice dell'ordinaria.

* * *

Codesto è evidente riformismo. Ma c'è anche in meccanica la tendenza rivoluzionaria. Tale apparisce agli ortodossi seguaci di NEWTON e di LAGRANGE quella che, in nome del principio di relatività LORENTZ-EINSTEIN, è condotta a fondere i concetti di spazio e di tempo e a negare l'invariabilità della massa.

Si renderebbe in conseguenza necessaria una ricostruzione *ab imis* di tutta la filosofia naturale.

Attendiamo per giudicare.

Basta intanto riconoscere l'importanza dell'attuale movimento relativista e l'influsso innovatore che esso va suscitando.

Già entrati nel dominio della storia sono invece i risultati positivi da cui sorse il principio, cioè, con sintesi espressiva, l'opera compiuta da LORENTZ fra il 1895 e il 1904 nel campo dei fenomeni magnetoelettrici e luminosi.

* * *

Secondo LORENTZ, continuano a valere le equazioni di MAXWELL-HERTZ nell'etere (così designando una generica porzione di spazio priva di materia ponderabile). Entro un corpo ponderabile l'elettricità si ripartisce in cariche minutissime (elettroni), i quali, secondo la natura del corpo, possono: o muoversi liberamente attraverso gli interstizî (caso dei corpi conduttori); o costituire ioni attaccandosi ad atomi o gruppi atomici di materia (caso degli elettroliti); ovvero accoppiarsi con elettroni carichi di opposta elettricità e costituire aggregati, vaganti solidalmente nel mezzo (dielettrici), vaganti, mentre uno ruota attorno all'altro (corpi magnetizzabili). La materia si presenta, volta a volta o ad un tempo, quale ostacolo, supporto, veicolo al moto degli elettroni, comunque inerte nel senso volgare della parola.

Complemento essenziale di queste ipotesi sulla esistenza e sul comportamento degli elettroni si è che tanto essi quanto le particelle materiali che ne influenzano il moto, vanno risguardati così numerosi ed impercettibili che, in ogni porzione di spazio accessibile ad esperienze sia elettromagnetiche che ottiche, si possano cogliere appena degli effetti globali.

Veramente importante è dunque, per ciò che attiene ai mezzi ponderabili, soltanto la valutazione dei varî effetti globali.

Le accennate premesse consentono di farlo e portano ad un complesso di relazioni non molto dissimili da quelle di MAXWELL-HERTZ, il divario essendo però sufficiente a spiegare assai bene una serie di fenomeni, specialmente ottici, di fronte a cui era rimasta impotente la teoria di MAXWELL-HERTZ: in prima linea la rotazione magnetica del piano di polarizzazione, già da tempo scoperta da FARADAY, e il parziale trascinamento delle onde, che FIZEAU aveva sperimentalmente accertato fin dal 1851 (in accordo con una formula di FRESNEL); poi i più complessi fenomeni di dispersione. Al qual proposito la teoria diede bella prova nel precisare, precorrendo talora l'esperienza, le influenze magneto-elettriche sulle linee spettrali, osservate per la prima volta da ZEEMAN, e, in variate condizioni, da RIGHI, MACALUSO e CORBINO.

Lo stesso insieme di fenomeni trova soddisfacente rappresentazione anche in uno schema ideato dal LARMOR nello stesso torno di tempo.

Il LARMOR è nichilista o piuttosto, se si potesse dire, panteterista. Elettricità e materia non sono per lui che nuclei eterei analiticamente specificati da singolarità del campo e dotati di doppia specie di energia. Un raffronto analogico con quel che avviene da un lato nell'etere maxwelliano (senza singolarità), dall'altro nei vortici dei fluidi perfetti rende plausibili le adottate misure di queste energie; dopo di che, senza ulteriormente analizzare il complesso meccanismo del sistema, l'incognito svolgimento degli eventi rimane univocamente definito dal principio della azione stazionaria.

Questa mi pare la più ardita applicazione che sia mai stata fatta del metodo di ignorazione delle coordinate, così caro agli Inglesi. È il caso di dire: ignorazione ha vinto ignoranza.

Lo spirito del metodo di ignorazione nella teoria di LARMOR, il passaggio ai valori medî nella teoria di LORENTZ permette di trascurare fin da principio taluni caratteri del moto individuale dei singoli elettroni, che divengono essenziali quando si debba tener dietro a un elettrone isolato.

Le scariche nei gas rarefatti (tanto studiate anche in Italia da BATTELLI e dalla sua scuola) e le radiazioni scoperte nel cinquantennio [dai raggi catodici di HITTORF (1869) a quelli magnetici di RIGHI (1908)] indussero SCHUSTER, J. J. THOMSON e altri con loro a esaminare più accuratamente la questione.

A dire il vero gli elettroni comparvero in questo ordine di fenomeni dopo discreta elaborazione.

Si discusse in principio se le radiazioni avessero carattere ondulatorio o si dovessero al bombardamento di tenuissime particelle materiali elettrizzate. Prevalsa quest'ultima veduta, si cercò e si ebbe la prova sperimentale dell'elettrizzazione delle particelle (PERRIN). Viceversa la esistenza di un nucleo materiale, su cui non si sarebbe pensato di sollevare dubbi od obiezioni, dava luogo a conseguenze ben poco soddisfacenti. Sorse così l'idea di prescindere dalla materia, e fu fondata, per merito di ABRAHAM, la dinamica degli elettroni.

Per comprendere come tutto questo abbia avviato al principio di relatività, è d'uopo rilevare che, di fronte ai segnalati successi di cui s'è fatta menzione, persisteva un enigma: il risultato negativo dell'esperienza di MICHELSON e MORLEY, istituita per discriminare se la propagazione di luce emanante da una sorgente terrestre sia o no influenzata dal moto della terra. Le formule di LORENTZ lasciavano presumere un effetto sensibile, che avrebbe dovuto rivelarsi, coll'adottato dispositivo, mediante uno spostamento di frange d'interferenza.

Non se n'ebbe traccia, essendo d'altra parte fuor di discussione il valore e l'accuratezza degli sperimentatori.

Il LORENTZ ideò allora una spiegazione ingegnosa, introducendo la nozione di tempo locale e quella sua famosa contrazione che, per essere piccolissima, accomodava la difficoltà senza disturbare negli altri casi. Ciò aveva tutta l'aria di uno sgambetto: sgambetto di genio, ma sempre *coup de pouce*, come ebbe a qualificarlo POINCARÈ.

È bastato però che EINSTEIN spostasse alquanto la interpretazione per trarre dall'artificio una concezione filosofica profonda: il principio di relatività, intrinsecamente inattaccabile, per quanto metta a soqquadro le nostre abituali intuizioni.

Lussureggianti sviluppi del principio si devono a MINKOWSKI e a SOMMERFELD, che ebbero in MARCOLONGO un precursore sagace.

* * *

L'elettromagnetismo contemporaneo, anche nel rudimentale abbozzo che ho saputo presentarvene, lascia scorgere largo ricorso ad ipotesi atomistiche.

Antiche quanto la speculazione filosofica, esse hanno assunto per la prima volta forma quantitativamente precisa nella teoria cinetica dei gas.

Però, fino a pochi anni or sono, la maggioranza dei fisici teorici rimaneva — e non si saprebbe darle torto — piuttosto fredda di fronte all'atomismo.

Si riconosceva volentieri la bellezza dell'idea, l'eleganza della trattazione matematica, la stimolante varietà di relazioni, per tal modo scoperte, che lasciano stimare il numero delle ipotetiche molecole, le loro dimensioni, la loro forma, la loro mobilità. Ma si obbiettava d'altra parte che, eliminando, fra queste relazioni, tutti gli elementi inaccessibili a controllo sperimentale, nulla rimaneva che non potesse egualmente, anzi per via più spedita, essere ricavato dai principî generali, senza premesse trascendenti la diretta esperienza. Con tale convinzione si preferiva per esempio di assumere addirittura come empirica l'equazione di stato di VAN DER WAALS, benchè essa sia stata inizialmente suggerita all'illustre scopritore, e possa esser dedotta, da considerazioni molecolari.

Una relazione, anche più precisa, restava, a dir vero (più precisa perchè non vi compariscono dei coefficienti, come nell'equazione di VAN DER WAALS): quella concernente il rapporto fra i due calori specifici a pressione e a volume costante: ma non si accordava coi risultati d'osservazione. Ammessa nei gas una costituzione molecolare tipicamente semplice, il valore numerico del rapporto suddetto dovrebbe essere cinque terzi, ossia 1.66..., mentre per l'idrogeno e per gli altri gas più comuni, si trova 1.40....

Tanto più appariva perciò giustificata la riserva della maggioranza.

Oggidì l'atteggiamento è diverso.

In primo luogo, per cominciare dall'obiezione specifica, il valore teorico cinque terzi è stato riscontrato nei nuovi gas dell'atmosfera, argo, elio, cripto, ecc., il che collima egregiamente colla veduta che essi abbiano schema strutturale anche più semplice dell'idrogeno.

Ma il mutamento dell'opinione pubblica si determinò soprattutto nel seguire passo passo il moderno sviluppo dell'elettromagnetismo.

Con HERTZ l'indirizzo fenomenologico aveva raggiunto l'apogeo. Però, come già notammo, alcuni fatti erano stati di proposito lasciati fuori del quadro, e non trascurabili discrepanze circa l'influenza dei mezzi ponderabili vennero successivamente in luce. A modificare la teoria, guardando bene in faccia a tutte le vecchie e nuove dffiicoltà, si accinsero animosi i campioni delle due scuole: fenomenologica ed atomistica. Ora avvenne che le equazioni del campo, quelle appunto che la prima scuola si arrabattava a desumere da dirette indicazioni sperimentali, senza passare attraverso finzioni ausiliarie, proprio solo in tal guisa poterono essere felicemente rintracciate: per orientarsi attraverso la disperante molteplicità delle possibili dipendenze causali, convenne invocare il sussidio del microcosmo molecolare.

A questa incontestata vittoria dell'atomismo, altre se ne aggiunsero in breve volger di tempo, e l'ipotesi di una struttura granulare cominciò a far capolino in quella stessa energetica, i cui procedimenti furono a lungo contrapposti a quelli della teoria cinetica come atti a surrogarla in ogni contingenza positiva. D'altra parte il favore dei chimici alla concezione atomistica era *a priori* assicurato.

Ma v'è di più. Non si tratta soltanto di successi di un modello e di conseguente atteggiamento concettuale: come già espose magistralmente il CIAMICIAN nella allocuzione presidenziale da principio mentovata, si sta per avere la prova della realtà molecolare. PERRIN ha preparato emulsioni a grani microscopici, rendendone simultaneamente osservabili l'agitazione browniana e i fenomeni d'insieme voluti dalla teoria cinetica.

Se ancora non sono stati visti gli atomi, se ne possiede qui un ingrandimento al 10000 (anzi un po' meno), che funziona perfettamente. Altrettanto dicasi del modello offerto dalle soluzioni colloidali a granuli ultramicroscopici. Ogni ulteriore riduzione delle dimensioni aumenta manifestamente la precisione del congegno. L'induzione si impone agli spiriti più prudenti e consente di annoverare la costituzione molecolare dei corpi fra le verità che l'esperienza ha raggiunto o è sul punto di raggiungere. Momento solenne pel metodo sperimentale, questa « pacifica filosofia sicura » che ha finalmente risolta una controversia millennaria, non soffocata dall'anatema dell'*ignorabimus*.

* * *

All'esultanza legittima non può tuttavia disgiungersi nei cultori della fisica matematica un senso di rammarico.

Dato infatti che l'immagine atomistica corrisponda a realtà, gli esempî recenti dell'elettromagnetismo divengono indizio assai significante di una necessaria evoluzione dei metodi di indagine, e non certo nel senso di una maggiore semplicità. C'è da temere che, per avanzare nella conoscenza delle leggi della natura, non basti più, come per l'addietro, interrogare l'elemento fisicamente omogeneo (ossia abbastanza piccolo perchè, entro esso, le caratteristiche del fenomeno si possano trattare come costanti), ma si renda indispensabile scendere a più dettagliata analisi, avendo riguardo al comportamento molecolare. Se così stanno le cose, aumentando la varietà e la complessità dei fenomeni da discutere, le equazioni indefinite saranno ormai da cercarsi, non per deduzione diretta da ipotesi semplici concernenti un volumulo fisicamente omogeneo, ma piuttosto come relazioni statistiche, provenienti da miriadi di eventualità disparate, e rese in definitiva maneggevoli mercè la legge dei grandi numeri.

* * *

La preoccupazione dei teorici, di trovarsi in avvenire alle prese con rilevanti difficoltà, si aggrava quando si pensa a certe manifestazioni di tipo ereditario, di cui l'isteresi magnetica è l'esempio più cospicuo.

Non solo lo spazio, ma il tempo eziandio accenna a dare delle noie. In molti casi non si riesce a spiegare il presente, non tenendo conto anche di influenze remote: non si può limitarsi ad associare all'istante attuale l'istante immediatamente anteriore, ciò che dà le equazioni differenziali delle varie teorie dinamiche; ma conviene far intervenire addirittura tutto il passato.

Un mordace fisico francese, Enrico Bouasse (che ha tra l'altro compiuto importanti ricerche sperimentali sull'isteresi elastica, seguendo il nostro Cantone) trae da queste nuove complicazioni argomento per apostrofare i matematici:

« Potrebbero aiutarci — egli scrive— ma si guarderanno bene dal farlo, trattandosi di questioni difficili, poco rimuneratrici in risultati ».

I matematici sono già vendicati da VOLTERRA che seppe, non è guari, sviscerare l'arduo problema lumeggiandolo coi più squisiti accorgimenti dell'analisi.

Comunque, resta in generale l'impressione che l'evoluzione della fisica matematica verso l'atomismo e verso le influenze ereditarie non sia favorevole ai rapidi progressi.

Ma, se è vero che, come affermano i biologi della scuola lamarckista, la funzione crea l'organo, anche lo spunto di pessimismo si dilegua per far posto al roseo pronostico che la fisica matematica non tarderà ad arricchirsi di nuovi e più agili algoritmi.

XX.

SULLA CONTINUAZIONE ANALITICA

« Atti Acc. di Scienze, lettere ed arti di Padova », vol. XXVIII (1912), pp. 61-63.

Il principio della riflessione analitica, dovuto a SCHWARZ (1), si suol stabilire (2) ricorrendo a qualcuna delle rappresentazioni formali, ammesse dalle funzioni di variabili complessa, ovvero dalle funzioni armoniche. Il principio stesso si può però ricavare anche più semplicemente come immediato corollario di una proposizione generale del compianto MORERA (3). Mi permetto di comunicare all'Accademia questa mia osservazione, sorta da una lezione introduttiva alla teoria delle onde di canale.

1. – Designino: A un'area piana; l una linea di A, che la separi in due regioni A' ed A''; z l'affissa di un punto generico di A.

Siano w' e w'' due funzioni della variabile complessa z, rispettivamente definite in A' e in A'', e regolari nei punti interni.

Si sappia altresì che w' e w'' rimangono finite e si riattaccano con continuità lungo l.

Dico che, in queste condizioni, si ha vera e propria continuazione analitica, cioè che, ponendo

$$(1) \qquad \begin{cases} w = w', \text{ entro } A' \text{ (e su } l); \\ w = w'', \text{ entro } A'' \text{ (e su } l), \end{cases}$$

la w risulta funzione regolare di z in tutto il campo A.

---

(1) « Ges. Abhandlungen », B. II, p. 65.

(2) Veggasi ad es. oltre alla memoria originale di SCHWARZ:

DARBOUX, *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, t. I, pp. 174-175.

PICARD, *Traité d'analyse*, t. II (seconda edizione), p. 299.

OSGOOD, *Lehrbuch der Funktionentheorie*, B. I, pp. 580-581.

(3) *Un teorema fondamentale nella teoria delle funzioni di variabile complessa*, « Rend. del R. Istituto Lombardo », ser. II, vol. XIX, 1886, pp. 304-307; oppure: OSGOOD, loc. cit., pp. 256-257.

Per la dimostrazione mi varrò del teorema di MORERA, a norma del quale basta provare che si annulla l'integrale

$$\int w(z)\, dz ,$$

esteso ad una qualsiasi linea chiusa s del campo.

Ora, se il campo σ racchiuso da s è tutto contenuto in una delle due regioni, A' ovvero A'', l'annullarsi di $\int_s w\, dz$ è conseguenza necessaria della regolarità di w' entro A', o rispettivamente di w'' entro A''. Se invece una parte σ' di σ giace in A' e la parte rimanente σ'' in A'', conviene designare con s' ed s'' le corrispondenti porzioni del contorno s, con λ la porzione di l, che giace entro σ, e notare che il contorno completo di σ' è costituito da $s'+\lambda$, mentre quello di σ'' risulta da s'' e dalla stessa λ.

Dopo ciò, attesa la (1) e la continuità di w anche attraverso λ, è lecito scrivere

$$\int_s w\, dz = \int_{s'+\lambda} w'\, dz + \int_{s''+\lambda} w''\, dz ,$$

i due integrali addizionali estesi a λ avendo somma nulla, sempreché, ben si intende, ciascuno dei due cammini chiusi $s'+\lambda$, $s''+\lambda$ si supponga percorso nel senso originariamente assunto su s.

Dacchè w' è regolare e rimane finita anche su l, si annulla il primo integrale del secondo membro. Per analoga ragione si annulla il secondo. Si conclude pertanto

$$\int_s w\, dz = 0 ,$$

qualunque sia la linea chiusa s di A, c. d. d.

2. – Supponiamo in particolare che l sia un segmento rettilineo e che sia data soltanto la regione A', tutta da una banda di l, nonchè una funzione w', che assume su l valori reali.

Prendiamo come A'' la regione simmetrica di A' rispetto ad l, e definiamo una funzione w'' dei punti di A'', deducendola per riflessione da w', convenendo cioè che a punti simmetrici rispetto ad l corrispondano valori coniugati.

La funzione così definita è manifestamente monogena e regolare in A'' e si riattacca con continuità a w' nei punti di l.

Questo basta, per quanto precede, ad assicurare che w' e w'' costituiscono un'unica funzione analitica: ecco il risultato di SCHWARZ, che ha trovato in più campi applicazioni cospicue.

XXI.

SULLA GRAVITAZIONE DI UN TUBO SOTTILE CON APPLICAZIONE ALL'ANELLO DI SATURNO

« Rend. Circ. Mat. di Palermo », t. XXXII (1° sem. 1912),

pp. 354-374.

Mi occupai alcuni anni or sono ([1]) dell'attrazione newtoniana di un tubo sottile, ed assegnai (sfruttando in modo essenziale la piccolezza delle dimensioni trasversali di fronte alla lunghezza del tubo) la risultante delle attrazioni che una fetta elementare subisce da parte di tutte le altre. L'espressione di questa risultante è notevolmente semplice, e dipende esclusivamente dall'andamento generale del tubo nell'immediata prossimità della fetta considerata. Il calcolo diretto con cui vi pervenni è per altro abbastanza laborioso, e si appoggia sopra una *preliminare indagine asintotica dell'attrazione esercitata da una linea materiale in punti vicinissimi ad essa* ([2]). Data la semplicità del risultato, era da aspettarsi che lo si potesse pur stabilire per via più spedita. Una tale via è effettivamente offerta dalla considerazione dell'autopotenziale newtoniano Ω del tubo. Tostochè lo si valuti con riguardo all'esiguità dello spessore (e per ciò basta invocare nozioni elementari di teoria del potenziale), la corrispondente variazione $\delta\Omega$ porta a caratterizzare, col minimo sforzo concettuale e formale, l'accennata attrazione sopra una fetta elementare. Nel medesimo tempo si rileva che, accanto a queste forze di massa, si destano, per effetto della mutua attrazione, degli sforzi superficiali sopra il contorno del tubo; più precisamente sforzi normali, la cui intensità dipende dalla forma geometrica delle sezioni trasversali.

Di ciò la prima parte della presente Memoria (nn. 1-6). La seconda ne è, si può dire, il naturale corollario nell'ambito della statica.

([1]) T. Levi-Civita, *Sull'attrazione newtoniana di un tubo sottile*, « Rendiconti della R. Accademia dei Lincei », vol. XVII, 2° semestre 1908, pp. 413-426, 535-551 [in questo vol.: IV, pp. 35-68].

([2]) T. Levi-Civita, *Sull'attrazione esercitata da una linea materiale in punti prossimi alla linea stessa*, « Rendiconti della R. Accademia dei Lincei », vol. XVII, 2° semestre 1908, pp. 3-15 [in questo vol.: III, pp. 19-33].

E invero, approfondito lo studio del $\delta\Omega$, basta ricorrere al principio dei lavori virtuali, e si ha quanto occorre per impostare nella forma più conveniente una ben determinata categoria di problemi d'equilibrio: quella in cui da un lato si deve tener conto dell'influenza gravitazionale della materia costituente il tubo, ma d'altra parte si può ritenere trascurabile lo spessore rispetto allo sviluppo longitudinale. Si formano così (nn. 7-9) le esplicite equazioni di condizione, nelle diverse ipotesi che possono farsi circa lo stato di aggregazione (corpuscolare, liquido, gasoso).

L'esempio più cospicuo di questo tipo di problemi è notoriamente offerto dall'equilibrio relativo dell'anello di Saturno. Nelle classiche ricerche di LAPLACE, di MAXWELL, della sig.ra KOWALEWSKY, di POINCARÈ figura sempre tra le premesse la ipotesi (ovviamente suggerita dalla diretta osservazione del fenomeno) che si possa assumere come *direttrice* (linea mediana che segna l'andamento generale dell'anello) una circonferenza col centro nel baricentro di Saturno. Ora si può domandarsi se esistono altre configurazioni meccanicamente possibili, quali cioè sieno le curve, che potrebbero, al pari delle dette circonferenze, fungere da direttrici di un anello posto, quanto a sollecitazione dinamica, nelle stesse condizioni dell'anello di Saturno.

Ho mostrato in un precedente lavoro ([3]) che, ove si assimili una fetta generica dell'anello ad un semplice punto materiale, la questione può ricondursi all'integrazione di un sistema di equazioni differenziali ordinarie, analoghe a quelle che reggono l'equilibrio di un filo flessibile ed inestendibile; di un tale sistema si mettono con tutta facilità in evidenza, accanto alle soluzioni circolari, ∞^2 altre, corrispondenti a direttrici piane.

Applico qui all'anello di Saturno i più completi risultati di cui sopra è parola, concernenti la statica dei tubi sottili. Ne consegue in primo luogo che, nel caso di un anello corpuscolare, l'assimilazione di ogni fetta ad un punto materiale è senz'altro esauriente.

Contemplando successivamente il caso degli anelli fluidi, si riconosce che al sistema differenziale, il quale si presenta da solo nell'ipotesi corpuscolare, va associata un'ulteriore condizione, che opportunamente si denomina trasversale, e significa costanza della pressione al contorno. Essa fa dipendere la forma delle sezioni dalla preventiva risoluzione di un problema dello stesso tipo di quello proposto: ridotto però da tre a due dimensioni, e sottratto ad ogni azione di forze esterne. Circa tale problema piano noterò che se ne possiede una soluzione evidente (il cerchio), mentre non fu, per quanto mi consta, provato che sia la

([3]) T. LEVI-CIVITA, *Sulla forma dell'anello di Saturno*, « Atti del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti », tomo LXVIII, (1908-1909), parte II, pp. 557-583 [in questo vol.: VIII, pp. 105-128].

sola ([4]). Comunque, per i fluidi *omogenei*, e così pure per i *gas perfetti*, si è condotti (combinando le condizioni longitudinali e trasversali) alla conclusione seguente: L'unica forma ammissibile per la direttrice è la circolare; quella appunto e soltanto quella che si presenta in natura.

1. - Generalità.

Sia $\mathfrak{T}$ un tubo sottile, e si indichi con C la sua direttrice, cioè una qualunque fra le infinite linee geometriche atte a definirne l'andamento generale.

Designino ancora: P un punto generico di C; τ la sezione del tubo praticata con un piano normale a C in P; P' un punto che ci riserviamo di far variare entro τ; $d\tau'$ un elemento di τ circostante a P'.

Alla decomposizione della sezione τ in elementi $d\tau'$ si può far corrispondere una decomposizione del tubo $\mathfrak{T}$ in tubetti elementari, immaginando spiccate dai singoli punti P' delle linee C' di andamento analogo alla C.

Supposto che $\mathfrak{T}$ sia riempito di materia distribuita con densità ϱ (funzione continua e derivabile dei punti di $\mathfrak{T}$), ove si intenda con r la distanza di un punto generico del tubo da P,

$$d\tau' \int_{C'} \frac{\varrho\, dC'}{r}$$

rappresenta manifestamente il valore nel punto P del potenziale newtoniano del tubo elementare proveniente dall'areola $d\tau'$.

Sommando tutti questi contributi, si ha il potenziale U_P dell'intero tubo (nello stesso punto P) sotto la forma

$$U_P = \int_{\tau} d\tau' \int_{C'} \frac{\varrho\, dC'}{r} . \tag{1}$$

2. - Semplificazioni consentite dalla sottigliezza del tubo. Espressioni del potenziale nei punti interni.

Se il tubo è molto sottile, il punto prefissato P risulta vicinissimo ad ognuna delle linee C'.

([4]) La questione è analoga a quella che si presenta, in tre dimensioni, per la sfera. Veggasi in proposito: A. LIAPOUNOFF, *Sul corpo di massimo potenziale delle forze di attrazione* (in russo), Si ricordi d'altra parte che il potenziale newtoniano

$$V=\int_{C'}\frac{\varrho\, dC'}{r}$$

di una linea attraente C' diventa (logaritmicamente) infinito, quando il punto potenziato P tende a C'.

La relativa espressione asintotica è ([5])

$$V^{(a)}=\varrho_{P'}\log\frac{l^2}{\overline{PP'}^2},$$

essendo $\varrho_{P'}$ il valore della densità ϱ in P' e l una lunghezza (costante) che figura per ragione di omogeneità e che ci riserviamo [cfr. n. seguente] di fissare nel modo numericamente più opportuno.

L'essenziale è che all'integrale V si può approssimativamente sostituire $V^{(a)}$ con errore relativo tanto meno sensibile quanto più è piccola la massima dimensione di τ, cioè sottile il tubo.

Con ciò la (1) diviene

$$U_P=\int_\tau \varrho_{P'}\log\frac{l^2}{\overline{PP'}^2}\cdot d\tau' .$$

Ma si può semplificare ulteriormente notando che, per la sottigliezza del tubo, le cose vanno come se la densità fosse costante e sostituita dal suo valore medio. Più precisamente, si trarrà partito dall'ipotesi che la

---

« Communications de la Société Mathématique de Kharkow », t. II, (1886), pp. 63-73; H. POINCARÉ, *Figures d'equilibre d'une masse fluide* (Paris, Naud, 1902), p. 15.

Circa i veli fluidi piani va segnalata (per quanto abbia soprattutto di mira il caso di veli fluidi *ruotanti*) un'interessante ricerca del sig. J. H. JEANS, *On the Equilibrium of Rotating Liquid Cilinders*, « Philosophical Transactions », (A), vol. CC, (1903), pp. 67-104. Cfr. altresì: F. INSOLERA, *Figure ellittiche di equilibrio di un velo piano liquido ruotante*, « Questi Rendiconti », tomo XVIII, (1904), pp. 16-44.

([5]) Cfr. BETTI, *Teorica delle forze newtoniane* (Pisa, Nistri, 1879), pp. 20-22. Il segmento che BETTI designa con t sarebbe nel caso presente $\overline{PP'}$ sen φ, chiamando φ l'angolo che la tangente a C' in P' forma col piano τ. Per ipotesi, le C' hanno andamento poco diverso dalla C, che è ortogonale a τ. Ne consegue che sen φ differisce poco dall'unità, e la conclusione di BETTI « resta finita la differenza $V-\varrho_{P'}\log 1/t^2$ [per quanto P sia prossimo a P'] » equivale a « resta finita la differenza $V-V^{(a)}$ ». Quest'ultima infatti può scriversi

$$\left(V-\varrho_{P'}\log\frac{1}{t^2}\right)-\varrho_{P'}\log\left[l^2\,\mathrm{sen}^2\varphi\right],$$

e il termine addizionale si mantiene evidentemente finito (è anzi una costante rispetto a P).

funzione ϱ sia derivabile, in questo modo: Si fisserà dapprima, a piacimento, un limite superiore per le derivate della ϱ, e si considereranno poi tubi abbastanza sottili; al disotto di un certo spessore saranno certamente valide così la riportata espressione di U_P come la sostituzione di $\varrho_{P'}$ col suo valore medio.

Pongasi all'uopo

$$(2) \qquad \nu = \int_\tau \varrho_{P'}\, d\tau',$$

con che ν/τ — valor medio di ϱ entro τ — sarà il valore assunto da ϱ in un qualche punto O del campo τ. La differenza $\varrho_{P'} - \nu/\tau$, attesa la derivabilità di ϱ, può (applicando lo sviluppo di TAYLOR) presentarsi sotto la forma $\overline{OP'} \cdot f$, dove f ha un limite superiore ben determinato.

La presenza del fattore $\overline{OP'}$ nell'integrale

$$\int_\tau \overline{OP'}\, f \log \frac{l^2}{\overline{PP'}^2}\, d\tau',$$

lo rende trascurabile di fronte a

$$\frac{\nu}{\tau} \int_\tau \log \frac{l^2}{\overline{PP'}^2}\, d\tau',$$

tostochè (ritenuto ν diverso da zero) τ sia abbastanza piccolo.

Si può dunque attribuire ad U_P l'espressione

$$U_P = \frac{\nu}{\tau} \int_\tau \log \frac{l^2}{\overline{PP'}^2}\, d\tau'.$$

In questa formula P rappresenta quel punto particolare della sezione τ, che appartiene alla direttrice C. È chiaro per altro che, ove si prendesse, sulla stessa sezione τ, un punto qualsiasi Q, si potrebbe calcolare la parte preponderante del potenziale in Q, ripetendo per Q considerazioni del tutto analoghe a quelle svolte per P. E si troverebbe (ν rimanendo invariato al pari di τ)

$$(3) \qquad U_Q = \frac{\nu}{\tau} \int_\tau \log \frac{l^2}{\overline{QP'}^2}\, d\tau',$$

con pari approssimazione (tanto maggiore quanto più il tubo è sottile).

Ecco l'espressione ridotta, che volevamo stabilire, applicabile — si noti bene — ad ogni punto interno al nostro tubo. Basta infatti pensare che, facendo scorrere P lungo la direttrice C, ogni prefissato punto Q viene a trovarsi sopra una ben determinata sezione normale τ.

Ove si immagini di individuare P, e con esso la corrispondente τ, mediante l'arco s di C (contato a partire da un'origine arbitraria), il potenziale U_Q dei punti del tubo si può anche considerare come funzione di s e della posizione occupata da Q entro τ.

3. - Autopotenziale. Valutazione per fette. Determinazione più conveniente della costante di omogeneità.

L'autopotenziale newtoniano Ω (o energia potenziale cambiata di segno) del nostro tubo $\mathfrak{T}$ è, per sua definizione,

$$\Omega = \frac{1}{2}\int_{\mathfrak{T}} \varrho U \, d\mathfrak{T} . \tag{4}$$

Per eseguire l'integrazione, gioverà adottare una decomposizione del campo diversa da quella di cui ci siamo serviti al n. 1. Dividemmo allora il tubo longitudinalmente, in tubetti elementari, aventi tutti l'andamento generale della direttrice C. È adesso indicata una decomposizione trasversale, in fette elementari di spessore ds: la fetta generica si troverà compresa fra la sezione τ normale a C in P, e l'analoga relativa al punto vicinissimo $s+ds$ (di C). Il contributo, recato da una tale fetta all'integrale della funzione ϱU, sarà manifestamente

$$ds \int_{\tau} \varrho_Q U_Q \, d\tau ,$$

dove, come poc'anzi, è ancora lecito (con errore che tende a zero assieme alla sezione del tubo) sostituire a ϱ_Q il valore medio ν/τ. Posto

$$k = \frac{1}{\tau^2}\int_{\tau} d\tau \int_{\tau} d\tau' \log \frac{l}{QP'} , \tag{5}$$

risulta in conformità della (3)

$$ds \int_{\tau} \varrho_Q U_Q \, d\tau = 2\nu^2 k \, ds .$$

Riconosciamo in k un puro numero, parametro di configurazione trasversale, che dipende esclusivamente dalla forma geometrica (e dalle dimensioni, ove si tenga fisso l) della sezione τ: esso va naturalmente considerato, al pari di τ e di ν, come funzione del solo argomento s.

Per completare il calcolo di Ω, basta oramai, a norma della (4), integrare rispetto ad s lungo la direttrice C, e dividere per 2. Si ha dunque

$$(4') \qquad \Omega = \int_C \nu^2 k \, ds \, .$$

Conviene aggiungere che, attesa la definizione (2) di ν,

$$(6) \qquad dm = \nu \, ds$$

rappresenta la massa della corrispondente fetta di tubo, sicchè la stessa ν si interpreta come *densità lineare* del tubo (assimilato ad una linea matériale C).

Scelta di l. – Nel caso in cui la direttrice del tubo sia una circonferenza di raggio R, gli sviluppi, forniti dalla teoria degli integrali ellittici, dànno come termine preponderante di Ω (6)

$$2\pi R \nu^2 \frac{1}{\tau^2} \int_\tau d\tau \int_\tau d\tau' \log \frac{8R}{\overline{QP'}} \, .$$

Il confronto colle (4') e (5) mostra che bisognerebbe prendervi $l = 8R$. Ciò lascia presumere che, per una direttrice di forma qualunque (assimilandola ad una circonferenza nell'intorno di un suo punto generico), si raggiunga la migliore approssimazione assumendo l eguale ad otto volte il raggio medio di curvatura.

4. - Deformazioni infinitesime. Comportamento longitudinale. La caratteristica trasversale δk.

Supponiamo di far subire al nostro tubo $\mathfrak{T}$ (e per esso alle fette elementari, che lo costituiscono) una deformazione infinitesima. Con ciò rimarranno in generale alterate sia la direttrice, sia le sezioni trasversali. La corrispondenza fra i punti delle due direttrici, prima e dopo la defor-

(6) Cfr. per es.: TISSERAND, *Traité de Mécanique céleste*, t. II (Paris, Gauthier-Villars, 1891), p. 159.

mazione, si intenderà stabilita in modo che rimanga inalterata la massa di ciascuna fetta elementare compresa fra due sezioni trasversali vicinissime.

Diremo δP lo spostamento infinitesimo da attribuirsi al punto generico P di C per passare al punto corrispondente nella nuova configurazione; δds l'alterazione che subisce in conformità l'elemento lineare ds della direttrice; δk l'incremento del parametro k (dovuto ad eventuale cambiamento di forma, o di dimensioni, della sezione trasversale); $\delta \nu$ l'incremento della densità ν. Quest'ultimo è però esprimibile mediante δds, in quanto, per ipotesi, si rispetta l'invariabilità della massa dm di ciascuna fetta, ciò che, in virtù della (6), dà luogo alla relazione

$$\delta(dm) = \delta(\nu ds) = 0 . \tag{7}$$

Il δds è a sua volta esprimibile per mezzo del vettore δP (e di elementi spettanti all'originaria direttrice C). Detto infatti $\boldsymbol{t}$ il vettore unitario tangente a C in P (nel verso delle s crescenti) e dP il vettore elementare, che rappresenta in grandezza, direzione e senso l'elemento ds di direttrice, si ha ovviamente [7]

$$ds = \boldsymbol{t} \times dP ,$$

da cui

$$\delta ds = \delta\boldsymbol{t} \times dP + \boldsymbol{t} \times \delta dP .$$

Il primo termine del secondo membro è nullo, perchè $\delta\boldsymbol{t}$ è perpendicolare a $\boldsymbol{t}$ e quindi a dP (come risulta dall'identità $\boldsymbol{t}\times\boldsymbol{t} = 1$). Nel secondo addendo si possono invertire i simboli d e δ, e rimane

$$\delta ds = \boldsymbol{t} \times d\delta P . \tag{8}$$

In definitiva, per quanto concerne l'alterazione longitudinale del tubo, tutto va, in base alle (7) ed (8), come se si trattasse di una linea materiale di densità ν: conclusione evidente a priori.

Della deformazione trasversale (alterazione delle sezioni normali alla direttrice) c'è da tener conto in quanto influisce sul parametro k. La dipendenza è funzionale, a norma della definizione (5) di k. Si può però esprimere δk mediante una formula che fa intervenire soltanto gli spostamenti al contorno σ della sezione τ.

---

[7] Mi valgo delle notazioni vettoriali di BURALI-FORTI e MARCOLONGO. Cfr. i loro *Elementi di calcolo vettoriale* (Bologna, Zanichelli, 1909); e traduzione francese di S. LATTÈS (Paris, Hermann, 1910).

All'uopo giova immaginare che il divario fra la sezione primitiva e la sezione deformata venga caratterizzato mediante gli spostamenti normali δn che fanno passare da σ alla nuova configurazione (senza inessenziali spostamenti rigidi, convenendo per es. di mettere a raffronto le due aree dopo averne fatto coincidere il baricentro e gli assi principali d'inerzia). I δn si intenderanno contati positivamente verso l'*interno* di τ. Con ciò sarà intanto

$$\delta\tau = -\int_\sigma \delta n\, d\sigma\,. \tag{9}$$

D'altra parte, ove si introduca il *potenziale logaritmico*

$$\lambda_Q = \int_\tau \log \frac{l}{\overline{QP'}}\, d\tau'$$

dell'area τ (supposta omogenea) in un suo punto generico Q, si ha manifestamente

$$k = \frac{1}{\tau^2}\int_\tau \lambda_Q\, d\tau\,. \tag{5'}$$

La variazione di

$$\int_\tau \lambda_Q\, d\tau\,,$$

(quando si passa alla sezione deformata) consta di un duplice contributo: quello dovuto all'alterazione del campo di integrazione (λ_Q rimanendo invariato); e quello che proviene dall'alterazione del potenziale logaritmico λ_Q.

Il primo si calcola subito, perchè l'alterazione del campo è rappresentata dalle areole $d\sigma\,|\delta n|$ contigue al contorno, che si devono *aggiungere* quando δn è *negativo* (cioè rivolto verso l'esterno), e togliere nel caso opposto. Ciascuna areola contribuisce quindi alla variazione dell'integrale per $-\lambda\, d\sigma\, \delta n$, il valore di λ potendosi addirittura riferire al contorno (e precisamente al $d\sigma$ di cui si tratta). Si ha così il primo contributo

$$-\int_\sigma \lambda \delta n\, d\sigma\,.$$

Se ora si osserva:

1) che in

$$\int_\tau \lambda_Q d\tau = \int_\tau d\tau \int_\tau \log \frac{l}{\overline{QP'}} d\tau' ,$$

i due punti Q e P' entrano in modo simmetrico,

2) che il termine, testè calcolato, va attribuito all'alterazione del campo di integrazione concernente il punto Q, mentre quello da calcolarsi è in sostanza l'analogo, salvo lo scambio di Q in P',

risulta senz'altro che la cercata variazione di

$$\int_\tau \lambda_Q d\tau ,$$

è il doppio di

$$-\int_\sigma \lambda \delta n \, d\sigma .$$

Ne consegue, badando alle (5′) e (9),

$$\delta k = \frac{2}{\tau^2} \int_\sigma (k\tau - \lambda) \delta n \, d\sigma . \tag{10}$$

Giova rilevare che, se il potenziale logaritmico λ è costante su tutto il contorno σ, la (10) può essere scritta

$$\delta k = -\frac{2}{\tau^2} (k\tau - \lambda) \, \delta\tau ,$$

donde apparisce che, in tal caso, la variazione di k è semplicemente proporzionale alla complessiva variazione di area.

Sezione circolare. – La costanza di λ al contorno si verifica in particolare per i campi circolari. È infatti evidente che il potenziale logaritmico di un cerchio omogeneo può dipendere soltanto dalla distanza dal centro, ed è quindi costante sulla circonferenza contorno. Del resto si trova subito, per ogni punto Q interno al cerchio, l'espressione semplicissima

$$\lambda_Q = -\frac{1}{2} \pi r^2 + \frac{1}{2} \pi a^2 + \pi a^2 \log \frac{l}{a} = \tau \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{r}{a} \right)^2 + \frac{1}{2} + \log \frac{l}{a} \right] ,$$

rappresentando r la distanza di Q dal centro e a il raggio del cerchio τ. In ogni punto esterno si ha poi

$$\lambda_Q = \tau \log \frac{l}{r},$$

come se tutta la massa fosse raccolta nel centro. Il valore (comune) al contorno è

$$\lambda = \tau \log \frac{l}{a} = \frac{1}{2} \tau \log \frac{\pi l^2}{\tau}.$$

Dalla precedente espressione di λ nei punti interni si trae immediatamente, a norma della (5′),

$$k = \frac{1}{4} + \log \frac{l}{a} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \log \frac{\pi l^2}{\tau}; \tag{11}$$

risulta quindi

$$k\tau - \lambda = \frac{1}{4} \tau. \tag{12}$$

5. - Variazione dell'autopotenziale.

È ben noto il significato meccanico dell'autopotenziale Ω. Esso rappresenta il lavoro complessivo, che dovrebbe compiere l'attrazione mutua delle masse del sistema, per passare dall'infinito (da posizioni delle masse così discoste tra loro che riescano insensibili le azioni a distanza) sino alla configurazione attuale. Ne consegue — ed è questo l'essenziale — che, facendo passare (in modo qualunque) il sistema da una configurazione ad un'altra, la corrispondente variazione di Ω misura il lavoro che viene compiuto in tale passaggio dalle forze di attrazione.

Così in particolare, di fronte alle variazioni infinitesime testè specificate, la corrispondente variazione $\delta\Omega$ fornisce il lavoro elementare, complessivamente effettuato durante lo spostamento, dalle attrazioni mutue delle particelle elementari del nostro tubo.

Ritenuta per Ω l'espressione (4′), la valutazione di $\delta\Omega$ si fa con tutta facilità in base alle (7) ed (8). In primo luogo, dacchè, per la (7) $\nu ds = dm$ ha variazione nulla, conviene sostituire dm/ds a ν, e scrivere

$$\Omega = \int_c dm^2 \frac{k}{ds},$$

dopo di che si ha, per materiale differenziazione,

$$\delta\Omega = -\int_C \left(\frac{dm}{ds}\right)^2 k\delta\, ds + \int_C \frac{dm^2}{ds}\, \delta k\,.$$

Riposto per dm il suo valore νds, si introduca per δds l'espressione (8), e si eseguisca, nel primo integrale, un'integrazione per parti.

Ove siano P_1 e P_2 i due estremi di C (coincidenti, qualora si tratti di una linea chiusa) e si ponga, con evidente significato delle notazioni,

$$\varepsilon = -[\nu^2 k\boldsymbol{t} \times \delta P]_{P_1}^{P_2}\,, \tag{13}$$

nonchè

$$\delta_1\Omega = \int_C \left[\frac{d(\nu^2 k\boldsymbol{t})}{ds} \times \delta P\right] ds\,, \tag{14}$$

$$\delta_2\Omega = \int_C \nu^2 \delta k\, ds\,, \tag{15}$$

risulta

$$\delta\Omega = \delta_1\Omega + \delta_2\Omega + \varepsilon\,. \tag{16}$$

Il termine ε è manifestamente nullo ogniqualvolta si tratta di tubo chiuso.

Quanto a $\delta_2\Omega$, badando alla (10), e ponendo per brevità

$$p = 2\,\frac{\nu^2}{\tau^2}\,(k\tau - \lambda)\,, \tag{17}$$

si può anche attribuirgli la forma

$$\delta_2\Omega = \int_C ds \int_\sigma p\delta n\, d\sigma\,. \tag{15'}$$

6. - Interpretazione dei vari termini. Attrazione del tubo sopra una generica sua fetta. Forze terminali e superficiali.

L'espressione (16) di $\delta\Omega$ porta a conseguenze notevoli.

Si può valersene in primo luogo per assegnare la risultante delle attrazioni che una fetta generica di tubo di spessore ds subisce da parte delle altre.

Supponiamo all'uopo, fissata una tale fetta e con essa il corrispondente punto P della direttrice, di deformare il tubo solo nell'immediata prossimità di P, facendo subire alla fetta circostante una traslazione arbitraria δP. Con ciò non si altera la forma di alcuna sezione, sicchè si annulla ogni δk, e quindi $\delta_2\Omega = 0$; ε è pur zero, ritenuto che si tratti di fetta intermedia; e $\delta_1\Omega$ si riduce sensibilmente al solo contributo proveniente dalla fetta considerata. Rimane pertanto, a norma della (14),

$$\frac{d(\nu^2 k\boldsymbol{t})}{ds}\, ds \times \delta P\,.$$

D'altra parte, dalla definizione di autopotenziale segue che nel caso presente $\delta\Omega$ misura il lavoro effettuato, nella traslazione elementare δP della fetta considerata, da tutte le attrazioni newtoniane che la sollecitano. Sarà pertanto

$$\delta\Omega = \boldsymbol{\Phi}\, ds \times \delta P\,,$$

ove si rappresenti con $\boldsymbol{\Phi} ds$ la risultante delle suddette attrazioni (o, se si vuole, di quelle che la fetta subisce da parte del rimanente tubo, non portandovi le azioni interne alcun contributo).

Eguagliando le due espressioni di $\delta\Omega$, si ha

$$\boldsymbol{\Phi}\, ds \times \delta P = \frac{d(\nu^2 k\boldsymbol{t})}{ds}\, ds \times \delta P\,,$$

la quale, dovendo sussistere per ogni δP, porge

$$\boldsymbol{\Phi} = \frac{d(\nu^2 k\boldsymbol{t})}{ds}\,. \tag{18}$$

Se si ricorda che

$$\frac{d\boldsymbol{t}}{ds} = c\boldsymbol{n}\,,$$

designando c la curvatura della direttrice e $\boldsymbol{n}$ un vettore unitario diretto secondo la normale principale (nel verso della concavità), si ha dalla (18), eseguendo la derivazione

$$\boldsymbol{\Phi} = \frac{d(\nu^2 k)}{ds}\boldsymbol{t} + \nu^2 kc\boldsymbol{n}\,,$$

donde apparisce che le tre componenti di $\boldsymbol{\Phi}$ secondo la tangente a C

(nel senso in cui si contano gli archi), secondo la normale principale (nel senso della concavità), e secondo la binormale sono ordinatamente

$$\frac{d(\nu^2 k)}{ds}, \quad \nu^2 kc, \quad 0 .$$

È questo il risultato che avevo stabilito qualche anno fa [8] con più faticosa analisi. Come indicai allora, se si assume un sistema cartesiano di riferimento $Oxyz$, e si rappresentano con dx/ds, dy/ds, dz/ds i coseni direttori della tangente alla direttrice C, si hanno dalla (18) le tre componenti Φ_x, Φ_y, Φ_z di Φ sotto la forma

$$\Phi_x = \frac{d}{ds}\left(\nu^2 k \frac{dx}{ds}\right), \qquad \Phi_y = \frac{d}{ds}\left(\nu^2 k \frac{dy}{ds}\right), \qquad \Phi_z = \frac{d}{ds}\left(\nu^2 k \frac{dz}{ds}\right).$$

Forze terminali. – Tornando alla (16), possiamo ancora ricavarne la risultante delle attrazioni che si esercitano sopra una (eventuale) sezione terminale del tubo. Si tratti per es. di quella che corrisponde a P_1. Con considerazioni analoghe a quelle istituite or ora, attribuendo cioè una traslazione δP soltanto alla fetta d'estremità (circostante a P_1), e badando alla espressione (13) di ε, risulta ovviamente

$$\nu^2 k \mathbf{t}$$

come determinante di tale forza. Essa è tangenziale e rivolta verso l'interno del tubo: non poteva essere altrimenti quanto al senso, poichè si tratta di azioni attrattive sopra una sezione terminale.

Pressioni superficiali. – L'espressione (15′) di $\delta_2 \Omega$ mostra che, di fronte ad una alterazione di forma del tubo $\mathfrak{T}$, le cose vanno come se il lavoro dell'attrazione si riducesse al contributo

$$p \, ds \, d\sigma \cdot \delta n$$

per ogni elemento $ds\,d\sigma$ della superficie laterale di $\mathfrak{T}$.

Dacchè δn rappresenta lo spostamento normale dell'elemento (contato positivamente verso l'interno del tubo) il contributo in questione è identico a quello che competerebbe ad uno sforzo *normale* di intensità $|p|$ e avente carattere di pressione o di trazione secondochè p è positivo o negativo.

Siccome l'effetto generale dell'attrazione deve tendere a ravvicinare

(8) Loco cit. (1).

gli elementi, e quindi in particolare a contrarre le sezioni trasversali, così di regola dovrà riscontrarsi $p > 0$ (senza poter però escludere — specie per contorni non convessi — che p, in qualche particolare punto, assuma valori negativi). Per i tubi a sezione circolare si ha, dalle (17) e (12),

$$p = \frac{1}{2} \frac{\nu^2}{\tau}, \tag{17'}$$

valore manifestamente costante sul contorno di ciascuna sezione, costante addirittura su tutta la superficie terminale se sono uniformi lo spessore e la densità lineare (τ e ν indipendenti da s).

7. - Ipotesi corpuscolare. Considerazione dei soli effetti globali. Espressione ridotta del $\delta\Omega$.

Immaginiamo un tubo costituito da una filza di corpuscoli rigidi, supponendo che un tratto di tubo, piccolo rispetto alla sua lunghezza, contenga ancora molti corpuscoli. Rimarrà sensibilmente valida l'espressione (4') di Ω, per quanto essa sia stata stabilita nell'ipotesi di una distribuzione continua. Dovremo soltanto ragionare così: Intendendo per ν^* e k^* dei valori medi relativi ad un tratto generico ΔC di direttrice (piccolo rispetto a C, ma tale da infilzare molti corpuscoli), sarà con sufficiente approssimazione

$$\Omega = \sum \nu^{*2} k^* \Delta C, \tag{19}$$

la somma essendo estesa a tutti i ΔC e potendo assimilarsi ad un $\int_C$ nei riguardi della funzione $\nu^{*2}k^*$.

Di qui, procedendo come al n. 5, e ponendo

$$\delta_1\Phi = \sum \left[\frac{d(\nu^{*2}k^*\boldsymbol{t}^*)}{ds} \times \delta P\right] \Delta C,$$

($\boldsymbol{t}^*$ determinazione media di $\boldsymbol{t}$ in ΔC),

$$\delta_2\Omega = \sum \nu^{*2}\, \delta k^* \Delta C,$$

$$\varepsilon = -(\nu^{*2}k^*\boldsymbol{t}^* \times \delta P)_{P_1}^{P_2},$$

si ricava

$$\delta\Omega = \delta_1\Omega + \delta_2\Omega + \varepsilon.$$

In $\delta_1\Omega$ compare la derivata rapporto all'arco s dell'andamento dei *valori medi* del prodotto ν^2k. *Con questa avvertenza*, potremo del resto riprendere per $\delta_1\Omega$ la sua espressione generale (14).

Quanto a $\delta_2\Omega$, potremo addirittura sostituirvi [colla stessa approssimazione entro cui vale la (19)] l'originario integrale (15)

$$\int_C \nu^2 \delta k \, ds ,$$

tornando ad interpretare ν *e* k *come valori locali* (9).

Ciò premesso, specifichiamo (come è nella natura delle cose e come, coll'adottata dicitura, ne abbiamo già mostrato l'intendimento) la direttrice C in modo che attraversi ciascun corpuscolo della filza: ν e k avranno così i valori che competono alle sezioni di questi corpuscoli negli archetti di C che si trovano nel loro interno; il valore zero negli archi che vanno da un corpuscolo ad un altro.

Importa rilevare che, attesa la supposta rigidità dei corpuscoli, si rispetta certamente il criterio di invariabilità della massa d'ogni singola fetta (n. 4), attenendosi alla convenzione seguente: Quando il sistema subisce una generica deformazione (infinitesima), gli si attribuirà come nuova direttrice una curva passante per gli stessi punti materiali, avente quindi, rispetto a ciascun corpuscolo, situazione identica prima e dopo dello spostamento.

È perfettamente legittimo — si noti bene — il rappresentarsi in questo o in quel modo gli spostamenti virtuali, purchè non si pregiudichi la piena indipendenza e mobilità di ciascun corpuscolo. La nostra particolare convenzione si presenta pertanto come una semplice ipotesi inessenziale, che giova a semplificare la discussione. Essa implica infatti che, in ogni spostamento virtuale del sistema, rimangano invariate (internamente a ciascun corpuscolo, cioè dovunque sia ν diversa da zero) le singole sezioni trasversali. Ne consegue

$$\nu^2 \delta k = 0 ,$$

da cui

$$\delta_2\Omega = 0 .$$

In definitiva *le cose vanno come se ciascuna fetta costituisse un sistema indeformabile, i valori di* ν *e di* k, *che compariscono in* $\delta_1\Omega$ *dovendosi ritenere medie, relative a tratti di tubo comprendenti molti corpuscoli.*

---

(9) Ciò non sarebbe egualmente lecito nella espressione del $\delta_1\Omega$, perchè c'è di mezzo la derivazione rispetto all'arco s.

8. - Equilibrio di un tubo sollecitato da assegnate forze esterne (conservative).

Supposto il tubo abbastanza sottile perchè sieno applicabili le considerazioni istituite finora, potremo pur trattare il campo esterno come uniforme entro ogni sezione trasversale.

Perciò, ove si indichi con $\boldsymbol{F}$ la forza del campo in un generico punto P della direttrice (riferita, giusta le consuetudini, all'unità di massa), ogni fetta si troverà sollecitata dalla forza

$$\nu \boldsymbol{F}\, ds \, .$$

In un generico spostamento virtuale del tubo si avrà, accanto al lavoro $\delta\Omega$ dell'attrazione, il lavoro

$$\delta L = \int_c \{\nu \boldsymbol{F} \times \delta P\}\, ds \, , \tag{20}$$

delle forze esterne.

Questa formula esige un breve commento. Se ogni fetta subisse uno spostamento δP conservando la sua individualità materiale, il lavoro elementare sarebbe manifestamente

$$\nu \boldsymbol{F}\, ds \times \delta P \, ,$$

donde la (20). In realtà, per il modo con cui abbiamo convenuto a n. 4 di stabilire la corrispondenza fra le due configurazioni del tubo prima e dopo lo spostamento, un generico δP non può in generale identificarsi collo spostamento della particella che si trovava inizialmente in P. Con tutto ciò la (20) seguita a valere, ma è d'uopo giustificarla facendo il calcolo del lavoro globale δL per altra via. E precisamente sfruttando l'ipotesi che il campo esterno sia conservativo. In base a tale ipotesi, ove sia f la funzione delle forze del campo, con che

$$\boldsymbol{F} = \operatorname{grad} f \, ,$$

il lavoro in questione rimane espresso da

$$\delta \int_c \nu f \, ds \, ,$$

il simbolo di variazione δ riferendosi appunto alla deformazione del tubo.

Ora si ha, passando da P a $P + \delta P$,

$$\delta f = \operatorname{grad} f \times \delta P = \boldsymbol{F} \times \delta P \, ,$$

nonchè (n. 4)

$$\delta(\nu\, ds) = 0 \, .$$

Risulta quindi

$$\delta \int_c \nu f \, ds = \int_c \{\nu \boldsymbol{F} \times \delta P\} \, ds \, , \qquad \text{c. d. d.}$$

Per impostare la questione statica (pur nell'ambito strettamente meccanico) con tutta generalità, conviene ancora tener conto dell'eventualità che il tubo possegga una qualche altra forma (per es. elastica) di energia posizionale. Indicando con Π il relativo potenziale (l'energia suddetta cambiata di segno), avremo, dal principio dei lavori virtuali, la condizione di equilibrio

$$\delta\Omega + \delta L + \delta\Pi = 0 \, , \tag{21}$$

per ogni spostamento consentito dai vincoli.

Per ricavarne le equazioni esplicite, è d'uopo aver riguardo all'intima costituzione del sistema. Considereremo successivamente tre strutture tipiche: corpuscolare, liquida, gasosa.

9. - Condizioni esplicite rispondenti ai vari stati di aggregazione di un anello (tubo chiuso).

Anello corpuscolare. – Per quanto abbiamo visto al n. 7, $\delta\Omega$ si riduce al termine $\delta_1\Omega$; ε va a zero perchè si tratta di tubo chiuso. Non c'è da tener conto di variazioni di energia interna, dato che si considerano corpuscoli *rigidi*. Rimane pertanto

$$\delta_1\Omega + \delta L = 0 \, ,$$

la quale deve sussistere per ogni spostamento virtuale.

Siccome i δP sono completamente arbitrari, ne risulta, in base alle (14) e (20),

$$\frac{d(\nu^2 k \boldsymbol{t})}{ds} + \nu \boldsymbol{F} = 0 \, , \tag{I}$$

dove [cfr. n. 7], $\boldsymbol{v}$, k e $\boldsymbol{t}$ rappresentano (nè potrebbe essere altrimenti data la struttura corpuscolare) elementi di media relativi a tratti di anello, brevi rispetto alla lunghezza totale, ma pur comprendenti un gran numero di corpuscoli.

Intesi sul preciso significato delle lettere, basta fissare la conclusione che la condizione necessaria e sufficiente per l'equilibrio è in questo caso rappresentata dall'unica equazione vettoriale (I).

Anello liquido. – Neppur qui c'è da tener conto di energia interna, supposto naturalmente che liquido stia a significare fluido incomprimibile. $\delta\Omega$ conterrà però tutti e due i termini $\delta_1\Omega$, $\delta_2\Omega$, e si dovrà esprimere che è

$$\delta_1\Omega + \delta_2\Omega + \delta L = 0 \tag{21'}$$

per ogni spostamento consentito dai vincoli.

Quali restrizioni derivano agli spostamenti (e per essi alle caratteristiche δP, δn) dall'incompressibilità della materia costitutiva del tubo? Assai poche in verità. Ricordiamo infatti, riportandoci alle considerazioni cinematiche del n. 4, che ogni fetta è bensì delimitata in modo da possedere un'eguale massa dm prima e dopo lo spostamento, ma non si pretende affatto che le particelle materiali incluse nella fetta rimangano le stesse: la deformazione è stata definita senza preoccuparsi delle migrazioni individuali delle singole particelle. Ne consegue che, malgrado la loro incompressibilità, rimangono arbitrari i δP e i δn d'ogni sezione individualmente considerata. C'è soltanto il vincolo globale che sia nulla la variazione complessiva di volume, che sia cioè

$$\int_C \delta\tau\, ds = -\int_C ds \int_\sigma \delta n\, d\sigma = 0 \,. \tag{22}$$

La (21′) deve dunque sussistere per tutti e soli gli spostamenti che rispettano la (22).

Col solito metodo dei moltiplicatori di LAGRANGE, si passa all'incondizionato annullarsi di

$$\delta_1\Omega + \delta_2\Omega + \delta L - p_0 \int_C ds \int_\sigma \delta n\, ds = 0 \,, \tag{23}$$

designando p_0 una costante a priori indeterminata.

Avuto riguardo alle (14), (15′) e (20), si trova immediatamente

$$\frac{d(v^2 k \boldsymbol{t})}{ds} + v\boldsymbol{F} = 0 \,, \qquad \text{(per ogni fetta)}, \tag{I}$$

$$p = p_0 \qquad \text{(per ogni elemento di contorno)}. \tag{II}$$

La (I) è identica a quella che abbiamo trovato or ora per l'anello corpuscolare (salvo che bisognava in quel caso riferirla ad elementi di media). Qui c'è in più la condizione (II).

Attesa l'espressione (17) di p, in cui intervengono i valori al contorno del potenziale logaritmico λ (di una sezione generica τ), la (II) ha manifesto carattere funzionale. Comunque, il problema statico rimane decomposto in due altri: uno *longitudinale*, concernente cioè l'andamento della direttrice, caratterizzato dall'equazione vettoriale (I); l'altro *trasversale*, che involge la forma delle sezioni τ e la densità lineare ν, e trova la sua formulazione analitica nella (II). Quest'ultima può essere considerata a sè, indipendentemente dalla (I), ma non viceversa [comparendo nella (I) le ν e k, che debbono pensarsi legate dalla (II)].

Conviene perciò far precedere lo studio del problema trasversale, onde tenerne debito conto quando si discute la (I) per ricavarne le possibili forme di anelli liquidi.

Anello gasoso. – Il criterio, in base al quale vanno fissate le condizioni di equilibrio, è alquanto diverso da quello valido nell'ipotesi dell'incompressibilità. Le equazioni cui in definitiva si perviene sono però le stesse. Per rendersene conto, basta pensare che una massa gasosa (a differenza di una massa liquida) non è sottoposta ad alcun vincolo cinematico, ma viceversa possiede un'energia interna $-\Pi$, che dipende dal suo volume. Il $\delta\Pi$ si può manifestamente rappresentare sotto la forma

$$-p_0 \times \text{variazione di volume},$$

indicando p_0 un coefficiente che dipende dallo stato di equilibrio del sistema (ed è quindi una costante rispetto ad s e a σ).

Ritenuto questo, avremo dalla (21)

$$\delta\Omega + \delta L - p_0 \int_C ds \int_\sigma \delta n \, d\sigma = 0 ,$$

dove $\delta\Omega = \delta_1\Omega + \delta_2\Omega$ come già per l'anello liquido.

Questa equazione è identica alla (23); e identica è l'accezione in cui deve rendersi esplicita. Essa deve infatti sussistere (non essendovi nel caso presente vincoli cinematici) per qualsiasi determinazione degli spostamenti δP, δn.

Nessuna differenza vi è dunque, dal punto di vista analitico, fra le condizioni statiche concernenti un anello liquido e quelle che si riferiscono ad un anello gasoso, c. d. d.

10. - Il problema trasversale nel caso di anelli fluidi.

In base alla (II), p deve: sia essere costante sul contorno σ di una sezione generica, sia conservare il medesimo valore quando si passa da una sezione all'altra, il che è quanto dire essere indipendente da s.

Se si pensa che ν, τ e k sono costanti per una data sezione, e quindi, se pur possono in tesi generale dipendere da s, non variano sopra il contorno σ della sezione, il primo fatto, a norma della (17), si traduce nella *costanza del potenziale logaritmico λ di una sezione generica sopra il relativo contorno*. Questa condizione è caratteristica per l'equilibrio di un velo liquido omogeneo, le cui particelle si attraggano in ragione inversa della semplice distanza.

Il problema trasversale è dunque dello stesso tipo di quello originariamente proposto (equilibrio di una massa fluida); ma si trova ridotto da tre a due dimensioni, e presenta (nell'ambito della nostra approssimazione) la duplice semplificazione che non vi hanno influenza le forzé esterne e che il velo va trattato senz'altro come omogeneo. Fra le possibili configurazioni di equilibrio vi ha il cerchio, come è ben noto e come del resto già verificammo al n. 4.

La questione se esistono altre forme, e, in caso affermativo, quali, attende ancora una risposta [10].

11. - Il problema longitudinale.

Fissata per la sezione generica τ una delle forme possibili (la circolare almeno lo è), le tre quantità τ, k, λ sono a ritenersi funzioni ben determinate una dell'altra. Per il cerchio si ha ad es. [formule (11) e (12)]

$$k = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \log \frac{\pi l^2}{\tau}, \qquad k\tau - \lambda = \frac{1}{4} \tau .$$

Pure funzione di s, ma a priori indipendente da queste, è la densità lineare ν.

Quel che ci resta da sfruttare della equazione (II), cioè la costanza di p lungo la direttrice, si esplicita, badando alla (17), in

$$\text{(II}')\qquad 2 \frac{\nu^2}{\tau^2} (k\tau - \lambda) = p_0 ,$$

[10] Cfr. la nota [4].

e può in definitiva considerarsi come una relazione in termini finiti fra ν e k

$$(\mathrm{II}'') \qquad F(\nu, k) = 0 .$$

Il problema longitudinale è così ricondotto al sistema (I), (II″).

La (I), proiettando sui tre assi di un triedro cartesiano $Oxyz$, dà luogo a tre equazioni differenziali ordinarie del secondo ordine, che involgono le 5 funzioni (incognite) x, y, z, ν, k di s. Queste sono altresì legate dall'equazione (II″) (in termini finiti) e dall'identità geometrica

$$(24) \qquad \boldsymbol{t}^2 = \left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2 = 1 .$$

Il problema longitudinale è dunque nettamente determinato e ricondotto alle equazioni differenziali ordinarie. Il tipo è del tutto analogo a quello che si presenta nella statica dei fili flessibili ed inestendibili.

12. - Fluidi omogenei e gas perfetti. Condizione di compatibilità. Sua trasformazione in base a noti criteri di geometria differenziale.

Per i fluidi omogenei, la densità (cubica) $\varrho = \nu/\tau$ è costante. Per i gas che seguono la legge di Boyle, essa è a ritenersi proporzionale alla pressione p; siccome questa, in virtù della (II), è costante al contorno, lo stesso segue di ν/τ.

Riconosciamo così che, in entrambi i casi, ν/τ non dipende da s, talchè la (II′) si riduce a

$$k\tau - \lambda = \mathrm{cost} .$$

Abbiamo già osservato che (per una data configurazione delle sezioni trasversali) k e λ sono funzioni di τ; d'altra parte si vede subito che, facendo variare le dimensioni di τ (senza alterarne la forma) $k\tau - \lambda$ non può rimanere invariato. La precedente relazione non può dunque essere in nessun caso una identità. Ne consegue che (le quante volte siasi fissata una tra le possibili forme per le sezioni trasversali) τ, k e λ sono tutte e tre costanti (cioè indipendenti da s). Necessariamente lo è allora anche ν, e *il problema si riduce a soddisfare alle* (I) *e* (24) *con* k *e* ν *costanti.*

Le funzioni incognite essendo soltanto tre (le coordinate x, y, z) e quattro le equazioni, dovranno verificarsi certe condizioni di compatibilità. Non sempre esistono pertanto curve C, che possano essere direttrici di un anello fluido omogeneo sottoposto a sollecitazione prefissata.

Esaminiamo la questione un po' più da vicino. Designando [come già al n. 8] con f il potenziale della forza esterna, la (I) si scrive (dacchè k e ν sono costanti)

$$\frac{d\boldsymbol{t}}{ds} = \operatorname{grad} \frac{f}{k\nu} . \tag{25}$$

È questa l'equazione vettoriale dell'equilibrio di un filo flessibile e inestendibile, sollecitato da una forza di potenziale $-f/k\nu$, per il quale si presenti la circostanza particolare che la tensione ha il valore 1.

Da questa interpretazione [o, ciò che è lo stesso, dall'equazione (25), moltiplicandone scalarmente i due membri per $\boldsymbol{t}$] segue che ogni soluzione della (25), cioè ogni possibile C, deve svolgersi interamente sopra una superficie equipotenziale

$$f = \text{cost} .$$

E deve essere geodetica di questa superficie. Ciò risulta subito dal fatto che la normale alla superficie (in quanto linea d'azione della forza $\boldsymbol{F} = \operatorname{grad}(f/k\nu)$) è contenuta nel piano osculatore.

Se si proietta la (25) sulla normale (verso la concavità di C), e si indica con c la curvatura della C, si ha

$$c = \frac{1}{k\nu} \left|\sqrt{\Delta f}\right| , \tag{26}$$

essendo

$$\Delta f = (\operatorname{grad} f)^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2 .$$

La questione è ricondotta a trovare (se esistono) quelle geodetiche delle superficie $f = \text{cost.}$, la cui curvatura verifica la (26).

Siamo nell'ambito della teoria degli integrali (o relazioni invarianti) delle linee geodetiche, e sarebbe necessario riportarsi a questa teoria, ove si volesse istituire una discussione approfondita.

Mi limiterò a segnalare alcune soluzioni particolari di immediata evidenza.

In primo luogo, ove le superficie equipotenziali siano parallele (Δf costante sopra ogni superficie della famiglia), la (26) sta a dire semplicemente che le curve cercate devono essere circoli (oltrechè, ben si intende, geodetiche): ogni geodetica circolare può dunque essere una C.

Ancora, se le superficie equipotenziali sono rotonde, la (26) è senz'altro soddisfatta sopra ogni parallelo (disponendo opportunamente della costante kv). Basta pertanto che questo sia una geodetica (ciò che ha luogo per l'equatore e, in generale, per ogni massimo o minimo del raggio) perchè costituisca una direttrice possibile.

13. - Applicazione all'anello di Saturno.

Si suppone notoriamente che l'anello si trovi soggetto all'attrazione di Saturno (oltre che alla propria), e sia animato da rotazione uniforme attorno ad un asse Sz passante per il centro di gravità S di Saturno.

Si tratta pertanto di equilibrio relativo rispetto ad assi $Sxyz$ ruotanti colla stessa velocità angolare dell'anello. Rispetto a questi assi, tutto va come se si trattasse di equilibrio assoluto, purchè si tenga conto della forza centrifuga. L'espressione di f è quindi, immaginando scelte le unità in modo conveniente ([11]), e designando con r la distanza di un generico punto (xyz) dall'origine S,

$$f = \frac{1}{r} + \frac{1}{2}(x^2 + y^2)\,. \tag{27}$$

Ipotesi corpuscolare. – Per caratterizzare le curve C, che potrebbero fungere da direttrici di un anello posto, quanto a sollecitazione dinamica, nelle condizioni dell'anello di Saturno, c'è in questo caso [n. 9] da tener conto della sola (I) [associata all'identità geometrica (24)].

Le equazioni essendo complessivamente quattro fra le cinque funzioni x, y, z, v, k della s, è ancora lecito aggiungere una condizione a piacimento: per es. fissare preventivamente la funzione $k(s)$. Si può in particolare supporre l'anello di spessore uniforme, cioè k costante. È questo il punto di vista adottato nella mia precedente ricerca sulla forma dell'anello di Saturno ([12]). Ho ivi tra altro rilevata l'esistenza di ∞^2 direttrici equatoriali, determinabili mediante quadrature, e ho fatto uno studio più approfondito di quelle prossime alla forma circolare ([13]).

Massa fluida omogenea (ovvero costituita da gas perfetto). – Dall'osservazione finale del n. prec. scende tosto che tutte le circonferenze di

---

([11]) Cfr. loco cit. ([8]), p. 566.

([12]) Rinvio come sopra.

([13]) Veggasi altresì: A. VITERBI, *Su una classe speciale di forme dell'anello di Saturno*, « Atti del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti », tomo LXIX (1909-1910), parte II, pp. 1129-1149; *Sulle direttrici piane dell'anello di Saturno* [Ibid., tomo LXX (1910-1911), parte II, pp. 1311-1333].

centro S, situate nel piano equatoriale Sxy, sono direttrici possibili. Ciò era evidente a priori dal momento che le ricerche classiche di LAPLACE, di POINCARÈ e della KOWALEWSKI avevano accertata l'esistenza di soluzioni a direttrice circolare anche prescindendo dall'ipotesi semplificativa di una sezione piccolissima.

Sono possibili (per un anello *fluido, omogeneo, ovvero costituito da gas perfetto*) altre forme di direttrici?

La risposta è negativa. Si riconosce infatti per via diretta (con qualche sviluppo di calcolo, che non sto a riportare per disteso, perchè si tratta di una materiale constatazione di incompatibilità) che, per le superficie equipotenziali definite dalla (27), l'equazione (26) non può venire soddisfatta altro che da paralleli geodetici. Di questi, su ogni superficie (27), ve n'è uno soltanto: il relativo equatore [14].

---

[14] Si noti che le superficie in questione ammettono effettivamente un equatore (intersezione col piano $z = 0$) soltanto per valori abbastanza grandi di f ($\geqslant \frac{8}{9}$). Sulle altre superficie della famiglia non esistono paralleli geodetici.

XXII.

SIR J. LARMOR'S MECHANICAL MODEL OF THE PRESSURE OF RADIATION

(From a letter of Prof. T. Levi-Civita to Prof. Sir J. Larmor)
« Atti V Congr. Int. dei Matematici », Cambridge, vol. 1,

pp. 217-220.

I have perused your beautiful lecture « On the dynamics of radiation » which I was fortunate to hear in Cambridge. Will you allow me to present in a little more general aspect your idea leading to a mechanical model of the pressure of waves? I shall refer myself, as you do, to a vibrating string.

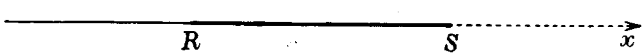
1. - Specification of the assumptions. Flow of energy. Pressure on moving end.

The small transverse oscillations of a stretched cord in absence of bodily forces, whatever the initial and boundary conditions may be, follow the equation

$$\varrho \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = T \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}, \tag{1}$$

where $\eta(x, t)$ is the displacement, and ϱ and T are constants of well-known signification. As usual I shall write c^2 for T/ϱ, c thus designating the velocity of propagation of transverse waves along the string.

Let us suppose that the undulations η extend only to a finite (variable) portion



of our string: from a moving end (reflector) R, at which $x = vt$, to a fixed S, at which $x = b$ (v, b positive constants).

The condition of (perfect) reflexion at R shall be further introduced. Independently from it, we may specify in usual way the energetic point of view.

The density of energy, both kinetic and potential (at any place x, between R and S, and time t) is

$$e = \tfrac{1}{2}\varrho\dot{\eta}^2 + \tfrac{1}{2}T\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2 = \tfrac{1}{2}\varrho\left\{\dot{\eta}^2 + c^2\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2\right\}, \tag{2}$$

where the dot stands for $\partial/\partial t$. Especially, in front of the reflector, it becomes

$$e_R = [e]_{x=vt}\,. \tag{3}$$

The energy stored in the whole extent of the disturbed string at the time t amounts therefore to

$$E = \int_{vt}^{b} e\,dx\,, \tag{4}$$

from which we easily get an expression of dE/dt convenient for our aim. It is in fact

$$\frac{dE}{dt} = -\,e_R v + \int_{vt}^{b}\frac{\partial e}{\partial t}\,dx\,.$$

But, by (2),

$$\frac{\partial e}{\partial t} = \varrho\left\{\dot{\eta}\,\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2} + \frac{\partial\eta}{\partial x}\,\frac{\partial\dot{\eta}}{\partial x}\right\}.$$

Since, by partial integration,

$$\int_{vt}^{b}\frac{\partial\eta}{\partial x}\,\frac{\partial\dot{\eta}}{\partial x}\,dx = \left[\frac{\partial\eta}{\partial x}\,\dot{\eta}\right]_{vt}^{b} - \int_{vt}^{b}\dot{\eta}\,\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}\,dx\,,$$

and $\dot{\eta}$ vanishes at the fixed end $S\,(x = b)$, it remains

$$\int_{vt}^{b}\frac{\partial e}{\partial t}\,dx = \varrho\int_{vt}^{b}\dot{\eta}\left\{\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2} - c^2\,\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}\right\}dx - \varrho c^2\left[\frac{\partial\eta}{\partial x}\,\dot{\eta}\right]_{x=vt}.$$

On account of the fundamental equation (1), this reduces to the last term, and gives

$$\frac{dE}{dt} = - e_R v - \varrho c^2 \left[\frac{\partial \eta}{\partial x} \dot{\eta}\right]_{x=vt} .$$

Putting

$$(5) \qquad f_R = - \varrho c \left[\frac{\partial \eta}{\partial x} \dot{\eta}\right]_{x=vt} ,$$

the formula may be written

$$(6) \qquad \frac{dE}{dt} = - e_R v + f_R c ,$$

or also

$$(6') \qquad \frac{dE}{dt} = P v ,$$

where

$$(7) \qquad P = - e_R + f_R \cdot \frac{c}{v} .$$

The formulae (6) and (6′) are capable of expressive interpretations.

Let us firstly pay attention to the formula (6), supposing $v = 0$ (R fixed). It means that the exchanges of energy between RS and the outside take place as if a flow f_R (directed inward if positive) passed through R with the wave-velocity c. We recognize obviously the one-dimensional form of the Poynting-Volterra's investigations.

In the general case where v is not zero, the wave-flow f_R must be increased by the convection-flow $- e_R$, travelling with the velocity v, that is - we may say - convected by the moving end R.

To get the interpretation of the (equivalent) formula (6′), we have only to recall the principle of conservation of energy in its pure mechanical form. It states that dE/dt, for any material system (the string in our case) must be equal to the time-rate of doing work of all external forces. At the present no external forces act on the system, except, at the ends of the disturbed portion, arising from the connections: with the reflector at R, with some fixed body at S. But the last does not do work because S is at rest.

Hence, in the equation (6′), P means the force exerted *on* the considered system by the reflector, the positive sense being of course that of the increasing x. Reversing the positive sense and availing ourselves of the principle of reaction, we may also regard P *as the pressure supported by the advancing reflector* (traction if P should result negative).

2. - Adiabatic arrangement.

The formula (6) and its consequences have been deduced on the hypothesis that the cord is fixed at S, so that $(\partial\eta/\partial x)\dot{\eta}$ vanishes for $x = b$. If it be not so, we have in the second member of (6) a further term $-cf_S$, where

$$-f_S = \varrho c \left[\frac{\partial\eta}{\partial x}\dot{\eta}\right]_{x=b}.$$

This would introduce a flow of energy across S, to be considered together with the flow across R; the preceding argument would therefore be altered.

There is however an obvious arrangement for which the formula equally hold: it consists in admitting a proper supply of energy at S, just as it is required to compensate the flow $-cf_S$. The connection at S, between RS and the outside, may then be called adiabatic. We shall henceforth adopt this assumption, getting thus free from the more restrictive one of a fixed end.

3. - Decomposition of the disturbance in two wave-trains. Perfect reflexion.

If the solution η of (1) is a function (any whatever) of $x+ct$, we have the case of waves advancing to the reflector R. Then $c(\partial\eta/\partial x) = \dot{\eta}$, and f_R becomes identical with $-e_R = \varrho\dot{\eta}^2$, giving to (6) the form

$$\frac{dE}{dt} = -e_R(c+v):$$

the flow of energy occurs as if the waves were carrying their energy with the (absolute) velocity c, i.e. $c+v$ relative to the reflector.

For a train $\eta(x-ct)$ (reflected from R), we find in analogous way the flow $e_R(c-v)$.

Now any solution of (1) has the form

$$\eta = \eta_1(x+ct) + \eta_2(x-ct) \tag{8}$$

η_1, η_2 being arbitrary functions of their respective arguments. We get, accordingly,

$$\dot{\eta} = \dot{\eta}_1 + \dot{\eta}_2,$$

$$c\frac{\partial\eta}{\partial x} = c\left(\frac{\partial\eta_1}{\partial x} + \frac{\partial\eta_2}{\partial x}\right) = \dot{\eta}_1 - \dot{\eta}_2;$$

therefore, from (2),

$$e = \varrho(\dot{\eta}_1^2 + \dot{\eta}_2^2) \tag{2'}$$

and, from (5)

$$f_R = \varrho[\dot{\eta}_2^2 - \dot{\eta}_1^2]_{x=vt} . \tag{5'}$$

With these values the expression (6) of dE/dt may be written

$$\frac{dE}{dt} = \varrho\dot{\eta}_2^2(c - v) - \varrho\dot{\eta}_1^2(c + v) . \tag{6''}$$

Thus the gain of energy appears caused by flows (relative to R) of the energies carried by the two opposite wave-trains. It is your favourite point of view.

Now we proceed to the condition of perfect reflexion at R. You properly conceive the reflector to be realised by a plate with a hole through which the cord passes. As the plate advances along the cord, it sweeps the waves in front, restoring behind of it the resting straight configuration of the cord. Under these circumstances, the condition at R is obviously that the total displacement shall be annulled, that is

$$\eta_1 + \eta_2 = 0 \qquad \text{for} \qquad x = vt . \tag{9}$$

Having thus achieved the general premisses, a mathematical observation may find place, viz., that it would not be difficult to determine functions η_1, η_2 of their respective arguments $x+ct$, $x-ct$, satisfying rigorously to the nodal condition $\eta_1+\eta_2 = 0$ as well for $x = vt$ as for $x = b$. But I propose only to apply the above to your particular solution.

4. - Case of simple wave-trains. Mean pressure.

You assume

$$\begin{cases} \eta_1 = \dfrac{A_1}{m_1 c} \sin m_1(x + ct) , \\[2ex] \eta_2 = -\dfrac{A_2}{m_2 c} \sin m_2(x - ct) , \end{cases} \tag{10}$$

and consequently

$$\begin{cases} \dot{\eta}_1 = A_1 \cos m_1(x + ct) \\[1ex] \dot{\eta}_2 = A_2 \cos m_2(x - ct) \end{cases} \tag{11}$$

A_1, m_1, A_2, m_2 being constants to be disposed with regard to (9).
It requires

$$(12) \qquad A_2(c-v) = -A(c+v)$$

$$(13) \qquad m_2(c-v) = \pm m_1(c+v) \,.$$

With the determination (10) of $\dot{\eta}_1$, $\dot{\eta}_2$, the expression (2′) of e becomes a sum of two periodic functions of x, and of t. Its average value $\bar{e}$, with respect to x as well to t, is

$$(14) \qquad \bar{e} = \tfrac{1}{2}(A_1^2 + A_2^2) \,.$$

The same value belongs to the time average of $e_B = (e)_{x-vt}$. On the other hand, averaging the expression (5′) of f_B, we have

$$(15) \qquad \bar{f}_B = \tfrac{1}{2}\varrho(A_1^2 - A_2^2) \,.$$

But, by (12),

$$A_2^2 = \frac{(c+v)^2}{(c-v)^2} A_1^2;$$

hence, from (14),

$$\bar{e} = \varrho \frac{c^2+v^2}{(c-v)^2} A_1^2 \,,$$

and, from (15),

$$\bar{f}_B = -2\varrho \frac{cv}{(c-v)^2} A_1^2 = -\frac{2cv}{c^2+v^2} \bar{e} \,.$$

We finally arrive at the pressure P defined by (7). Its mean value (e_B being identical with e) becomes

$$\bar{P} = -\bar{e} - \frac{c}{v} \bar{f}_B = \frac{c^2-v^2}{c^2+v^2} \bar{e} \,,$$

which is your result.

University of Padua, Oct. 9.

XXIII.

SUR LES SYSTÈMES LINÉAIRES, A DEUX INCONNUES, ADMETTANT UNE INTÉGRALE QUADRATIQUE

« Annaes da Acad. Polytechnica do Porto », t. VII (1912),

pp. 193-206.

1. - Indications préliminaires. Résumé du mémoire.

Soit à intégrer le système différentiel

$$(1) \qquad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = a_{11}x + a_{12}y\,, \\[2ex] \dfrac{dy}{dt} = a_{21}x + a_{22}y\,, \end{cases}$$

où les coefficients a désignent des fonctions quelconques de la variable indépendante t (finies et continues pour toutes les valeurs de t qu'il y a lieu d'envisager).

Supposons qu'on en connaisse une intégrale quadratique

$$(2) \qquad f(x, y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = \text{const.}\,,$$

A, B, C étant également des fonctions de t (qui se comportent comme les a).

Il est bien clair qu'on pourrait profiter de l'intégrale pour éliminer une des inconnues: ceci baisse l'ordre d'une unité, et il reste une équation unique du premier ordre (non plus linéaire, en général). On constate toutefois que la réduction est plus profonde, puisque le problème se ramène aux quadratures [1]. Voilà le résultat que je vais établir. En

[1] Cette remarque se rattache évidemment aux recherches de M. M. E. Picard et E. Vessiot. La déduction directe réussit toutefois immédiate, tandis que, pour s'en tenir aux théories ra-

considérant plus de près le champ réel, j'en tirerai un corollaire se rapportant à la stabilité de la solution particulière $x = 0$, $y = 0$ [du système donné (1)]. Il est bien connu que, si la forme f est définie, la dite solution est stable ([2]). Le cas d'une forme indéfinie ne se laisse pas trancher, d'après les théories générales, par la simple inspection des données. Ainsi par exemple, si les coefficients a sont périodiques, l'application des méthodes (désormais) usuelles exigerait le calcul préalable des exposants caractéristiques, lesquels — on le sait bien — dépendent des coefficients d'une manière fonctionnelle très compliquée.

Ici toutefois — voici le corollaire — le critère de stabilité est fourni par une certaine valeur moyenne se déduisant directement des données de la question (les coefficients a de (1) et A, B, C de l'intégrale quadratique). C'est une conséquence immédiate de l'intégrabilité par quadratures. Quoi qu'il en soit le critère dont il s'agit peut rendre des services dans l'étude des mouvements stationnaire. M.lle C. SILVESTRI vient d'en donner un exemple intéressant ([3]) se rapportant au cas de M.me KOWALEWSKY.

2. - Carré parfait.

Si le discriminant

$$D = AC - B^2 \tag{3}$$

de la forme f s'annule quelque soit t, la forme f elle même est un carré parfait. On connaît par conséquent une intégrale *linéaire*, $\sqrt{f} =$ const., du système (1) et son intégration s'achève par quadratures. En effet, dès qu'on remplace une des inconnues, soit y, par sa valeur tirée de $\sqrt{f} =$ const., dx/dt devient égale à une fonction linéaire de x.

---

tionnelles d'intégration, il faudrait des passages, simples en concept, mais ne conduisant pas rapidement au calcul effectif. On raisonnerait comme il suit: Pisu'il existe une intégrale quadratique, le groupe des transformations du système (1) sera à deux paramètres *au plus*. C'est assez pour que le système (1) — de même qu'une équation unique du second ordre — puisse s'intégrer par quadratures. Voir notamment E. PICARD, *Traité d'analyse*, t. III (seconde édition), chap. XVII, nn. 28-29, pp. 576-581.

On reconnaîtra également que les considérations complémentaires des nn. 7-9 se rattachent à la transformation des équations différentielles linéaires et à leurs invariants, mais sortent du cadre spécialement envisagé par L. BRIOSCHI, G. H. HALPHEN, etc., et, tout récemment, par M. WILCZYNSKI.

([2]) Voir par exemple: A. LIAPOUNOFF, *Problème général de la stabilité du mouvement*, « Annales de la Faculté des sciences de Toulouse », 2e série, t. IX, 1907, p. 259. Il suffit d'ailleurs, ainsi que le fait remarquer cet auteur, d'appliquer à l'intégrale $f =$ const. le raisonnement classique de DIRICHLET pour démontrer le théorème de LAGRANGE sur la stabilité de l'équilibre.

([3]) Dans sa thèse, dont un extrait vient de paraître dans les « Rendiconti della R. Accademia dei Lincei » (vol. XXI, 1912 et XXII, 1913).

3. - Cas général d'une intégrale irréductible.

Supposons maintenant que D ne soit pas identiquement nul, et plaçons-nous dans un domaine (de la variable indépendente t), où $D \neq 0$. On peut poser

$$f = u \cdot v ,$$

les deux facteurs u et v étant linéaires en x, y, réels ou imaginaires suivant les cas, mais certainement distincts (à cause de l'inégalité $D \neq 0$). Nous indiquerons bientôt comment il convient de préciser la définition des u, v. En attendant il nous suffit de remarquer que ce sont deux combinaisons linéaires distinctes de x, y, et qu'il y a lieu de les prendre comme fonctions inconnues dans le système (1), à la place de x, y.

Le système transformé en u, v reste évidemment linéaire, et s'écrira

$$\text{(4)} \qquad \begin{cases} \dfrac{du}{dt} = b_{11}u + b_{12}v , \\ \dfrac{dv}{dt} = b_{21}u + b_{22}v , \end{cases}$$

les b étant des fonctions de t, qui dépendent à la fois des a et des coefficients de la substitution linéaire reliant u, v à x, y.

Ceci posé, tout se réduit à exprimer que le système (4) admet l'intégrale bilinéaire [transformée de (2)]

$$uv = \text{const.}$$

La condition nécessaire et suffisante est que $d(uv)/dt$ soit nulle pour toute solution de (4), ce qui exige qu'on ait (identiquement en u, v)

$$u(b_{21}u + b_{22}v) + v(b_{11}u + b_{12}v) = 0 ,$$

d'où

$$b_{21} = 0 , \quad b_{12} = 0 , \quad b_{11} + b_{22} = 0 .$$

Le système transformé en u, v acquiert donc nécessairement la forme réduite

$$\text{(5)} \qquad \frac{du}{dt} = \tau u , \quad \frac{dv}{dt} = -\tau v ,$$

en désignant par τ la valeur commune de b_{11}, $-b_{22}$.

Il en résulte tout de suite que l'intégration s'achève par une quadrature. On a en effet

$$(5') \qquad u = u_0 e^{\int \varkappa dt}, \qquad v = v_0 e^{\int \varkappa dt},$$

u_0, v_0 étant des constantes.

4. - Critère élémentaire pour expliciter le changement des inconnues: il y a lieu de s'en servir dès que A (ou C) ne s'annule pas.

Pour décomposer f en deux facteurs linéaires, on peut employer la méthode élémentaire suivante.

Si A et C ne s'annulent à la fois, soit par exemple $A \neq 0$. On considère alors l'équation du second degré

$$(6) \qquad z^2 + 2\frac{B}{A}z + \frac{C}{A} = 0,$$

D on en appelle z_1, z_2 les deux racines (nécessairement distinctes, d'après et $\neq 0$). L'identité

$$f = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = A(x - z_1 y)(x - z_2 y)$$

montre qu'en posant

$$(7) \qquad \begin{cases} u = \sqrt{A}\,(x - z_1 y), \\ v = \sqrt{A}\,(x - z_2 y), \end{cases}$$

on a justement

$$f = u \cdot v.$$

Dérivons logarithmiquement les (7) en désignant, pour abréger l'écriture, d/dt par un point superposé.

Il vient

$$\frac{\dot u}{u} = \frac{1}{2}\frac{\dot A}{A} + \frac{\dot x - z_1 \dot y - \dot z_1 y}{x - z_1 y},$$

$$\frac{\dot v}{v} = \frac{1}{2}\frac{\dot A}{A} + \frac{\dot x - z_2 \dot y - \dot z_2 y}{x - z_2 y},$$

d'où, d'après (1),

$$\frac{\dot{u}}{u} = \frac{1}{2}\frac{\dot{A}}{A} + \frac{(a_{11} - z_1 a_{21})x - (-a_{12} + z_1 a_{22} + \dot{z}_1)y}{x - z_1 y},$$

$$\frac{\dot{v}}{v} = \frac{1}{2}\frac{\dot{A}}{A} + \frac{(a_{11} - z_1 a_{21})x - (-a_{12} + z_2 a_{22} + \dot{z}_2)y}{x - z_2 y}.$$

Comme u, v doivent satisfaire à (5), les premiers membres se réduisent à τ, $-\tau$ respectivement, et après cela (toute dérivée étant disparue) on a affaire à des identités par rapport à x, y. On en tire les relations

$$(8)\qquad \begin{cases} \tau = \dfrac{1}{2}\dfrac{\dot{A}}{A} + a_{11} - z_1 a_{21}, \\ z_1(a_{11} - z_1 a_{21}) = -a_{12} + z_1 a_{22} + \dot{z}_1, \\ -\tau = \dfrac{1}{2}\dfrac{\dot{A}}{A} + a_{11} - z_2 a_{21}, \\ z_2(a_{11} - z_2 a_{21}) = -a_{12} + z_2 a_{22} + \dot{z}_2. \end{cases}$$

En retranchant la troisième de la première, il vient

$$2\tau = (z_2 - z_1)a_{21},$$

et par suite, en se rappelant que z_1, z_2 sont les racines de (6),

$$(9)\qquad \tau = \frac{\sqrt{-D}}{A}\, a_{21}:$$

le radical n'est déterminé — cela va sans dire — qu'au signe près; il doit bien en être ainsi, puisque rien ne distingue en concept u de v. On remarquera d'ailleurs qu'il existe, à côté de (9), une infinité d'autres déterminations possible de τ. Cela tient à ce que le couple u, v n'est pas univoquement défini par la condition $f = uv$. Tout couple qui la remplit peut être remplacé par λu, v/λ étant une fonction quelconque de t, assujettie à la seule condition de ne pas s'annuler. La valeur (9) de τ devient en conformité

$$\frac{\sqrt{-D}}{A}\, a_{21} + \frac{\dot{\lambda}}{\lambda}.$$

Il faut se souvenir en tout cas qu'on a supposé dès le début $A \neq 0$, ce qui est loisible — avons nous dit — chaque fois qu'un au moins des carrés des inconnues figure effectivement dans f. Il serait aisé d'assigner une expression de τ, tenant lieu de (9), pour le cas exceptionnel où A et C s'annuleraient à la fois. Mais cela n'a pas d'intérêt pour notre but. Nous devrons compléter la discussion dans une autre direction. En attendant il suffit de retenir: *Pour* $A \neq 0$, *on peut bien attribuer à* τ *la valeur* (9).

5. - Spécifications se rapportant au champ réel. Cas des coefficients périodiques. Condition de stabilité.

Tout ce qui précède ne tient pas compte de conditions de réalité, et s'applique également dans le domaine complexe.

Je supposerai désormais que les coefficients de (1) et de son intégrale f soient des fonctions réelles pour t réel; et je ferai varier t seulement dans ce champ (de $-\infty$ à $+\infty$) ayant en vue l'étude qualitative des solutions $x(t)$, $y(t)$ de (1).

Laissons de côté, ainsi que nous l'avons déjà convenu [n. 3], le cas, où le discriminant D de f pourrait s'annuler parfois pour t réel. On aura alors partout, ou bien $D > 0$ (forme définie), ou bien $D < 0$ (forme indéfinie) ([4]).

Quoi qu'il en soit, dès que $A \neq 0$, les considérations du n. précédent s'appliquent.

Supposons en particulier que les données ($a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$; A, B, C) soient des fonctions périodiques de t, et qu'on ait $A \neq 0$ (pendant une période entière et par suite) pour toute valeur réelle de t. Les racines z_1, z_2 de (6) résultent alors elle-mêmes des fonctions périodiques, *toujours distinctes et finies.*

Comme la résolution des (7) donne

$$(7') \qquad \begin{cases} x = \dfrac{z_2 u - z_1 v}{\sqrt{A}(z_2 - z_1)}, \\[2ex] y = \dfrac{u - v}{\sqrt{A}(z_2 - z_1)}, \end{cases}$$

([4]) Dans les applications il arrive presque toujours que les intégrales quadratiques gardent le caractère de forme définie, ou bien indéfinie, quel que soit t. L'éventualité exclusе que D puisse s'annuler a donc moins d'intérêt.

on voit que x, y sont des combinaisons de u, v à coefficients périodiques finis. D'ailleurs (7') fournit l'expression de l'intégrale générale des (1), les deux constantes d'intégration étant incluses dans u, v, d'après (5').

On en tire de suite que, pour la stabilité de la solution particulière $x = 0$, $y = 0$, il faut et il suffit que

$$u = u_0 e^{\int \tau dt}, \qquad v = v_0 e^{-\int \tau dt}$$

restent comprises entre des limites finies, même pour t grandissant indéfiniment, ce qui équivaut à la condition: partie réelle de $\int \tau dt$ finie, quel que soit l'intervalle d'intégration (t_1, t_2). Or τ est une fonction périodique [définie par (9)]. Si T désigne la période

$$\frac{1}{T}\int_t^{t+T} \tau \, dt ,$$

est une constante (valeur moyenne de τ). La condition ci-dessus revient partant à ce que la valeur moyenne de la partie réelle de τ soit nulle ([5]) (absence de terme séculaire dans le développement en série de FOURIER).

On a de la sorte le théorème suivant: *Condition nécessaire et suffisante pour la stabilité (lorsque le coefficients sont périodiques et l'on a toujours $D \neq 0$, $A \neq 0$) c'est que s'annule la valeur moyenne de la partie réelle de*

$$\frac{\sqrt{-D}}{A} a_{21} .$$

Il est à peine nécessaire d'ajouter que, si le coefficient C ne traverse jamais la valeur zéro, on pourrait envisager d'une manière analogue la valeur moyenne de la partie réelle de

$$\frac{\sqrt{-D}}{C} a_{12} .$$

6. - Circonstances où il reste à compléter la discussion. La forme f n'y peut être qu'indéfinie.

Les considérations qui précèdent épuisent le cas où la forme f serait définie ($D > 0$). En effet ni A, ni C peuvent s'annuler dès que $D = AC - B^2$

([5]) C'est classique. D'ailleurs on s'en rend compte immédiatement en partageant l'intervalle d'intégration (t_1, t_2) en portions de longueur T, plus un résidu de longueur moindre que T.

doit rester toujours positif. Pour la même raison

$$\frac{\sqrt{-D}}{A}\,a_{21}\,,$$

est une quantité imaginaire pure. Sa partie réelle est donc nulle, et la condition de stabilité en reste nécessairement satisfaite. On devait bien s'y attendre, d'après une remarque générale remontant à DIRICHLET (comparez n. 1, en note), qui s'applique à tout système différentiel possédant une intégrale définie.

Ceci posé, il nous reste à discuter l'éventualité (se rapportant nécessairement à une forme f indéfinie) que soit A, soit C s'annulent pour quelque valeur de t.

Il va nous convenir de traiter en général, par un procédé différent, le cas d'une forme indéfinie, en développant des formules qui sont valables sous cette hypothèse, sans reserves ultérieures. Comme toutefois ces formules seront un peu moins simples que celles du n. 4, il y aura peut-être avantage à profiter de celles-là autant que possible, ayant recours à celles-ci seulement lorsqu'il arrive que A et C traversent tous les deux quelque zéro.

Je m'appuyerai, dans le but indiqué, sur une réduction intermédiaire de f à la forme canonique.

On sait que, si ϱ_1, ϱ_2 désignent les racines (toujours réelles) de l'équation

$$\begin{vmatrix} A-\varrho & B \\ B & C-\varrho \end{vmatrix} = 0\,, \tag{10}$$

il existe une (et en général une seule) substitution orthogonale

$$\begin{cases} \xi = x\cos\delta + y\sin\delta\,, \\ \eta = -x\sin\delta + y\cos\delta\,, \end{cases} \tag{11}$$

moyennant laquelle on a

$$f = \varrho_1\xi^2 + \varrho_2\eta^2\,.$$

Le produit des racines, $\varrho_1\varrho_2 = D$, reste toujours < 0. Il est par tant permis de poser $\varrho_1 = \mu^2$, $\varrho_2 = -\nu^2$, μ et ν étant positives. La forme canonique de f est donc

$$f = \mu^2\xi^2 - \nu^2\eta^2\,, \tag{12}$$

dont la décomposition en deux facteurs,

$$(13)\qquad \begin{cases} u = \mu\xi + \nu\eta\,, \\ v = \mu\xi - \nu\eta\,, \end{cases}$$

ne soulève plus de difficultés. Il importe de remarquer que μ, ν et δ sont, en même temps que les données, des fonctions continues et périodiques de t.

Ceci posé, fixons pour un instant notre attention sur quelques propriétés des transformations orthogonales, telles que (11), appliquées aux systèmes différentiels (1). Il nous sera ensuite bien aisé de former l'expression explicite de τ (dérivée logarithmique de u) en fonction des coefficients $a_{11}, \ldots, C$.

7. - Propriétés invariantes des systèmes (1) vis-à-vis des transformations orthogonales.

Toute substitution orthogonale (11) transforme naturellement le système différentiel (1) dans un système du même type en ξ, η:

$$(14)\qquad \begin{cases} \dfrac{d\xi}{dt} = \alpha_{11}\xi + \alpha_{12}\eta\,, \\[2mm] \dfrac{d\eta}{dt} = \alpha_{21}\xi + \alpha_{22}\eta\,. \end{cases}$$

On pourrait former directement [en dérivant les (11), en remplaçant, dans les seconds membres, dx/dt, dy/dt par les valeurs (1), et substituant enfin, d'après (11), $\xi\cos\delta - \eta\sin\delta$ au lieu de x, $\xi\sin\delta + \eta\cos\delta$ au lieu de y] les expressions des α en fonction des a, de δ et de $\dot{\delta} = d\delta/dt$. Mais il vaut mieux d'éviter tout développement formel par les remarques suivantes:

Puisque la transformation (11) est orthogonale, x^2+y^2 en est un invariant. Il en est de même par conséquent de

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(x^2 + y^2) = x\dot{x} + y\dot{y} = a_{11}x^2 + (a_{12} + a_{21})xy + a_{22}y^2 = F(x, y)\,.$$

On a donc l'identité

$$F = a_{11}x^2 + (a_{12} + a_{21})xy + a_{22}y^2 = \alpha_{11}\xi^2 + (\alpha_{12} + \alpha_{21})\xi\eta + \alpha_{22}\eta^2\,,$$

ce qui revient à dire que

$$a_{11}\,, \qquad \frac{a_{12}+a_{21}}{2}\,, \qquad a_{22}\,,$$

se transforment, à la suite de (11), comme les coefficients d'une même forme quadratique F.

Il en résulte en particulier — soit dit en passant — que les expressions

$$a_{11}+a_{22}\,,$$
$$a_{11}a_{22}-\tfrac{1}{4}(a_{12}+a_{21})^2$$

(invariant linéaire et discriminant de la forme susdite) ne changent pas, par effet d'une substitution orthogonale (11), tout en y supposant δ fonction quelconque de t.

Pour compléter la loi de transformation des quatre coefficients du système différentiel [les a de (1), qui se changent dans les α de (14)], il faut se procurer une quatrième relation entre les a et les α (distincte de celles qui proviennent de l'invariance de F). On y parvient très commodement en réfléchissant que la transformation (11) équivaut à une rotation de δ autour de l'origine (dans le sens positif $Ox \to Oy$), amenant le point (ξ, η) en (x, y). Si donc on désigne par r, φ les coordonnées polaires (rayon vecteur et anomalie) du point (ξ, η), celles de (x, y) seront r, $\varphi+\delta$.

Or, des formules

$$\xi = r\cos\varphi\,, \qquad \eta = r\sin\varphi$$

on tire l'identité bien connue

$$\dot{\xi}\eta - \eta\dot{\xi} = r^2\dot{\varphi}\,.$$

On a de même

$$x\dot{y} - y\dot{x} = r^2(\dot{\varphi}+\dot{\delta})\,,$$

d'où

$$x\dot{y} - y\dot{x} = \xi\dot{\eta} - \eta\dot{\xi} + r^2\dot{\delta} = \xi\dot{\eta} - \eta\dot{\xi} + \dot{\delta}(\xi^2+\eta^2)\,.$$

En y remplaçant $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{\xi}$, $\dot{\eta}$ par leurs valeurs (1) et (14), il vient

$$(15) \quad a_{21}x^2 + (a_{22}-a_{11})xy - a_{12}y^2 = (\alpha_{21}+\dot{\delta})\xi^2 + (\alpha_{22}-\alpha_{11})\xi\eta - (\alpha_{12}-\dot{\delta})\eta^2\,.$$

Ce doit être une identité d'après (11). Comme la somme des coefficients des carrés est un invariant, on en déduit

$$a_{21} - a_{12} = \alpha_{21} - \alpha_{12} + 2\dot{\delta}\,,$$

qui est justement la quatrième relation explicitée. Pour notre but il suffit d'associer à (15) la forme intégrale f. Si l'on designe par $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ ses coefficients après la transformation (11), on a l'identité

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = \mathcal{A}\xi^2 + 2\mathcal{B}\xi\eta + \mathcal{C}\eta^2\,, \tag{16}$$

d'où l'invariant linéaire

$$l = A + C = \mathcal{A} + \mathcal{C}\,; \tag{17}$$

l'invariant quadratique (discriminant)

$$D = AC - B^2 = \mathcal{A}\mathcal{C} - \mathcal{B}^2\,; \tag{18}$$

et l'invariant bilinéaire simultané du système (15), (16) ([6])

$$\begin{aligned} j &= a_{21}C - a_{12}A - (a_{22} - a_{11})B = \\ &= (\alpha_{21} + \dot{\delta})\mathcal{C} - (\alpha_{12} - \dot{\delta})\mathcal{A} - (\alpha_{22} - \alpha_{11})\mathcal{B}\,. \end{aligned} \tag{19}$$

S'il s'agit en particulier de la transformation réduisant f à sa forme canonique (12), on aura

$$l = \mu^2 - \nu^2\,, \tag{17'}$$

$$D = -\mu^2\nu^2\,, \tag{18'}$$

$$j = -(\alpha_{21} + \dot{\delta})\nu^2 - (\alpha_{12} - \dot{\delta})\mu^2\,. \tag{19'}$$

8. - Expression de $\dot{\delta}$ pour la transformation qui réalise la réduction de f à la forme canonique.

L'angle δ est soumis à la condition

$$-(A - C)\sin 2\delta + 2B\cos 2\delta = 0\,,$$

([6]) Voir par exemple CLEBSCH-LINDEMANN, *Leçons sur la géométrie* (traduction française par Benoist), Paris, Gauthier-Villars, 1879, t. I, p. 267.

comme il résulte immédiatement de ce que, en introduisant dans

$$f = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$$

les valeurs des x, y tirés des (11), le terme rectangle en $\xi\eta$ doit disparaître.

En dérivant par rapport à t, on tire

$$-\{\dot{A} - \dot{C} + 4B\dot{\delta}\} \sin 2\delta + 2\{\dot{B} - (A - C)\dot{\delta}\} \cos 2\delta = 0 .$$

Comme $\sin 2\delta$, $\cos 2\delta$ ne peuvent pas s'annuler à la fois, le déterminant

$$\begin{vmatrix} A - C & B \\ \dot{A} - \dot{C} + 4B\dot{\delta} & \dot{B} - (A - C\dot{\delta}) \end{vmatrix}$$

doit être nul. Il s'en suit

$$\Delta\dot{\delta} = (A - C)\dot{B} - (\dot{A} - \dot{C})B ,$$

ayant posé pour abréger

$$\Delta = (A - C)^2 + 4B^2 . \tag{20}$$

Puisqu'on a affaire à une forme indéfinie ($AC - B^2 < 0$), Δ ne saurait s'annuler. On peut donc diviser sans réserves par Δ, et conclure

$$\dot{\delta} = \frac{(A - C)\dot{B} - (\dot{A} - \dot{C})B}{\Delta} . \tag{21}$$

9. - Calcul de τ.

La dérivation des (13), en tenant compte des (14), donne

$$\begin{aligned} \dot{u} &= \dot{\mu}\xi + \dot{\nu}\eta + \mu(\alpha_{11}\xi + \alpha_{12}\eta) + \nu(\alpha_{21}\xi + \alpha_{22}\eta) , \\ \dot{v} &= \dot{\mu}\xi - \dot{\nu}\eta + \mu(\alpha_{11}\xi + \alpha_{12}\eta) - \nu(\alpha_{21} + \xi\alpha_{22}\eta) . \end{aligned}$$

Si on y remplace ξ, η par leurs valeurs $(u+v)/2\mu$, $(u-v)/2\nu$, tirés des (13), il vient

$$\dot u = \frac{1}{2}\left\{\frac{\dot\mu}{\mu} + \frac{\dot\nu}{\nu} + \alpha_{11} + \alpha_{22} + \alpha_{12}\frac{\mu}{\nu} + \alpha_{21}\frac{\nu}{\mu}\right\} u +$$

$$+ \frac{1}{2}\left\{\frac{\dot\mu}{\mu} - \frac{\dot\nu}{\nu} + \alpha_{11} - \alpha_{22} - \alpha_{12}\frac{\mu}{\nu} + \alpha_{21}\frac{\nu}{\mu}\right\} v ,$$

$$\dot v = \frac{1}{2}\left\{\frac{\dot\mu}{\mu} - \frac{\dot\nu}{\nu} + \alpha_{11} - \alpha_{22} + \alpha_{12}\frac{\mu}{\nu} - \alpha_{21}\frac{\nu}{\mu}\right\} u +$$

$$+ \frac{1}{2}\left\{\frac{\dot\mu}{\mu} + \frac{\dot\nu}{\nu} + \alpha_{11} + \alpha_{22} - \alpha_{12}\frac{\mu}{\nu} - \alpha_{21}\frac{\nu}{\mu}\right\} v .$$

Mais on sait d'autre part (n. 3) que les second membres doivent se réduire à τu, $-\tau u$ respectivement. On a donc

$$\left\{\begin{aligned}
\tau &= \frac{1}{2}\left\{\frac{\dot\mu}{\mu} + \frac{\dot\nu}{\nu} + \alpha_{11} + \alpha_{22} + \alpha_{12}\frac{\mu}{\nu} + \alpha_{21}\frac{\nu}{\mu}\right\} ,\\
0 &= \frac{1}{2}\left\{\frac{\dot\mu}{\mu} - \frac{\dot\nu}{\nu} + \alpha_{11} - \alpha_{22} - \alpha_{12}\frac{\mu}{\nu} + \alpha_{21}\frac{\nu}{\mu}\right\} ,\\
0 &= \frac{1}{2}\left\{\frac{\dot\mu}{\mu} - \frac{\dot\nu}{\nu} + \alpha_{11} - \alpha_{22} + \alpha_{12}\frac{\mu}{\nu} - \alpha_{21}\frac{\nu}{\mu}\right\} ,\\
-\tau &= \frac{1}{2}\left\{\frac{\dot\mu}{\mu} + \frac{\dot\nu}{\nu} + \alpha_{11} + \alpha_{22} - \alpha_{12}\frac{\mu}{\nu} - \alpha_{21}\frac{\nu}{\mu}\right\} .
\end{aligned}\right.$$

En retranchant de la première de ces identités la quatrième, on tire

$$2\tau = \alpha_{12}\frac{\mu}{\nu} + \alpha_{21}\frac{\nu}{\mu} ,$$

d'où

$$\tau = \frac{1}{2\mu\nu}\{\alpha_{12}\mu^2 + \alpha_{21}\nu^2\} ,$$

ou bien encore

$$\tau = \frac{1}{2\mu\nu}\{[(\alpha_{12} - \dot\delta)\mu^2 + (\alpha_{21} + \dot\delta)\nu^2] + \dot\delta(\mu^2 - \nu^2)\} .$$

Le dénominateur peut s'écrire $2\sqrt{-D}$, d'après (18'); la quantité entre les crochets s'identifie avec $-j$, d'après (19'); enfin le coefficient de $\dot{\delta}$ n'est que l, d'après (17'). On a par conséquent

$$\tau = \frac{-j + l\dot{\delta}}{2\sqrt{-D}} . \tag{23}$$

C'est la formule cherchée exprimant τ en fonction explicite des données. On n'a qu'à y remplacer D, j, l, $\dot{\delta}$ par leus valeurs (3) [ou (18)], (19), (17), (21), c'est-à-dire:

$$\begin{aligned} -D &= B^2 - AC , \\ -j &= a_{12}A - a_{21}C + (a_{22} - a_{11})B , \\ l &= A + C , \\ \dot{\delta} &= \frac{(A - C)\dot{B} - (\dot{A} - \dot{C})B}{\Delta} , \end{aligned}$$

le dénominateur Δ désignant $(A - C)^2 + 4B^2$, d'après (20). J'ai transcrit pour qu'on ait sous les yeux le résultat définitif. Il consent bien d'épuiser sans trop de peine les discussions de stabilité, quoique il soit encore plus simple de s'en tenir à l'expression (9) de τ, si tant est que A ou C ne traversent jamais la valeur zéro.

XXIV.

NUOVO SISTEMA CANONICO DI ELEMENTI ELLITTICI

« Ann. di Mat. », ser. 3ª, t. XX (1913),

pp. 1-17.

Introduzione.

Il metodo della variazione delle costanti arbitrarie, dovuto a LAGRANGE (¹), trova notoriamente le sue più cospicue applicazioni in meccanica celeste. Per lo studio del moto perturbato — di un punto P soggetto all'attrazione preponderante di un centro O — appare quasi sempre vantaggioso, secondo la teoria svolta sistematicamente dallo stesso LAGRANGE (²), di sostituire ai sei elementi cartesiani, determinativi dello stato di moto di P riferito ad O (coordinate x, y, z della posizione, componenti p_x, p_y, p_z della quantità di moto), altrettante loro combinazioni che sarebbero (una al più eccettuata) costanti nel moto non perturbato. E precisamente sei parametri dell'ipotetica orbita ellittica, modernamente chiamata *intermediaria*, che sarebbe descritta da P, qualora, cessando ogni influenza perturbatrice, esso si muovesse, a partire dallo stato di moto $\begin{pmatrix} p_x & p_y & p_z \\ x & y & z \end{pmatrix}$, sotto la esclusiva attrazione del corpo centrale.

Questi parametri (elementi ellittici) devono naturalmente individuare in modo diretto ed espressivo la forma e le dimensioni dell'orbita ellittica intermediaria, la sua posizione (rispetto agli assi di riferimento), la legge di percorrenza; ma la scelta comporta ancora molta arbitrarietà, sicchè conviene lasciarsi guidare da criteri di semplicità e di convenienza.

(¹) *Recherches sur les suites récurrentes dont les termes varient de plusieurs manières différentes, ou sur l'intégration des équations linéaires aux différences finies et partielles...*, « Oeuvres », t. IV, pp. 151-254. Cfr. le pp. 159-163.

(²) *Théorie des variantions séculaires des éléments des planètes* e *Théorie des variations périodiques...*, ibidem, t. V, pp. 125-344, 345-489; *Mémoire sur la théorie des variations des éléments des planètes*, t. VI, pp. 713-768.

I sei elementi tradizionali degli astronomi sono: a (semiasse maggiore), e (eccentricità), i (inclinazione), θ (longitudine del nodo ascendente), $\theta+g$ (longitudine del perielio), l (anomalia media).

Nelle ricerche teoriche interessa che le formule di passaggio dalle $\begin{pmatrix} p_x & p_y & p_z \\ x & y & z \end{pmatrix}$ alle nuove variabili rientrino nel tipo canonico, donde l'introduzione, effettuata per la prima volta da JACOBI, di sestuple canoniche. Fissiamo l'attenzione sulla seguente, dovuta a DELAUNAY [3],

$$\text{(I)}\quad \begin{cases} L=\beta\sqrt{a}, \quad G=\beta\sqrt{a(1-e^2)}, \quad \Theta=\beta\sqrt{a(1-e^2)}\cos i & (\beta \text{ costante che dipende dalle masse di } P \text{ e di } O) \\ l, \qquad g, \qquad \theta, \end{cases}$$

da cui, con passaggi elementari, se ne desumono altre, per certi rispetti preferibili, segnalate da POINCARÉ, e divenute ormai d'uso corrente col nome complessivo di variabili kepleriane [4].

In tutti questi sistemi, il parametro che fissa la posizione sull'orbita è: o proprio l'anomalia media l [come in (I)], ovvero l aumentata di angoli che nel moto ellittico sono costanti. Ne risulta una discreta complicazione nell'espressione della funzione perturbatrice; questa sarebbe notevolmente più semplice se, al posto dell'anomalia media l, si usasse l'anomalia eccentrica u. Si può anzi dire che gli sviluppi in serie trigonometrica di l si discutono teoricamente e si formano praticamente trasformando (con procedimenti più o meno laboriosi) gli analoghi sviluppi relativi alla u [5]. Con tutto ciò non si adotta in definitiva la u, ma ci si attiene alla l, perchè da un lato questo argomento è il più indicato in quasi tutti i calcoli di prima approssimazione (rispetto alle masse perturbatrici); e d'altro lato consente di conservare la forma canonica, il che giova sotto il duplice aspetto teorico e pratico, e non sarebbe raggiungibile (senza inconvenienti maggiori), effettuando un puro cambiamento di variabili sulla sestupla $\begin{pmatrix} L & G & \Theta \\ l & g & \theta \end{pmatrix}$.

Ma *se si premette una lieve modificazione nella definizione dell'orbita ellittica intermediaria, si è senz'altro condotti* — come apparirà dal presente scritto — *ad un nuovo sistema canonico di elementi ellittici, che è*

---

[3] Cfr. L. CHARLIER, *Die Mechanik des Himmels*, B. I, p. 252.

[4] H. POINCARÉ, *Leçons de mécanique céleste*, t. I, pp. 4-13; ovvero CHARLIER, loco citato, pp. 292-294.

[5] Veggasi per es. il t. II (pp. 4-13 e Cap. XV) delle citate *Leçons*... di POINCARÉ; oppure i nn. 31, 32, 43, 44 del concettoso articolo del sig. H. v. ZEIPEL, *Entwickelung der Störungsfunktion*, « Enc. der Math. Wiss. », VI, 2, 13.

sostanzialmente del tipo (I), *salvo la sostituzione della anomalia eccentrica* u *in luogo dell'anomalia media* l.

La modificazione in parola non è più profonda (anzi ha proprio lo stesso ordine di grandezza) di quelle rispettivamente introdotte da JACOBI e da POINCARÉ nel problema dei tre corpi. Come si sa, JACOBI ha sostituito, per uno dei tre corpi, alla attrazione del corpo centrale O, quella di un fittizio baricentro (di O e del terzo corpo), inoltre alle masse reali masse fittizie (poco diverse); POINCARÉ ha invece mantenuto il vero corpo centrale, ma ha sostituito, per uno qualunque degli altri due, la quantità di moto relativa colla quantità di moto assoluta, modificando anch'egli le masse.

La nostra alterazione porterà esclusivamente sul coefficiente d'attrazione, cioè, possiamo dire, sulla massa del corpo centrale. Ecco in qual modo.

Consideriamo, per fissare le idee, il moto relativo di un punto P rispetto ad O, nell'ipotesi che P sia soggetto all'attrazione di O e a forze perturbatrici qualisivogliono derivanti da un potenziale (funzione delle forze cambiata di segno) μF_1: μ è un parametro numerico che serve a fissare l'ordine di grandezza. Sia r la distanza $\overline{OP}$, m la massa di P, k_0 l'attrazione newtoniana di O su P, all'unità di distanza. Le equazioni del moto di P sono canoniche rispetto alla sestupla $\begin{pmatrix} p_x & p_y & p_z \\ x & y & z \end{pmatrix}$ e ammettono per funzione caratteristica

$$\text{(II)} \qquad F = T - \frac{k_0}{r} + \mu F_1\,,$$

T rappresentando la forza viva del mobile, ossia $(p_x^2+p_y^2+p_z^2)/(2m)$.

Secondo la definizione abituale, l'orbita intermediaria relativa ad un generico istante t — nel caso attuale senz'altro *osculatrice* — è quella che sarebbe descritta da P, sotto l'attrazione k_0/r^2 di O, a partire dallo stato di moto $\begin{pmatrix} p_x & p_y & p_z \\ x & y & z \end{pmatrix}$ realmente posseduto da P nel detto istante. Ciò presuppone naturalmente che si tratti di moto abbastanza poco diverso dall'ellittico perchè in particolare la differenza $T - k_0/r = h$ (energia del moto non perturbato) sia sempre negativa. Al variare di t, varia alquanto l'orbita osculatrice, e con essa la relativa energia h.

Noi procederemo invece come segue. Sia h_0 il valore di $T - k_0/r$ nell'istante iniziale $t = t_0$. Per un altro istante qualsiasi t, definiamo k mediante la posizione

$$\text{(III)} \qquad T - \frac{k}{r} = h_0\,.$$

Una tale k risulterà variabile coll'istante considerato, ma la sua differenza da k_0 sarà dell'ordine di μ. (Per $\mu = 0$ si ha infatti $h = h_0$, e quindi $k = k_0$, qualunque sia t).

Ciò premesso, nulla vieta di assumere come ellisse osculatrice, in un generico istante, quella che compete al reale stato di moto $\begin{pmatrix} p_x & p_y & p_z \\ x & y & z \end{pmatrix}$ di questo istante, nell'ipotesi però che la costante di attrazione del corpo centrale sia k, anzichè k_0.

Come si vede, mentre di solito (quando si mantiene alla costante di attrazione del centro O il suo valore reale k_0) ci si lascia guidare da un'immagine che conserva esattamente la forza centrale (ma non l'energia h del movimento ellittico tangente), colla nostra definizione si attribuisce bensì al coefficiente k dell'attrazione newtoniana di O un valore che varia alquanto dall'una all'altra delle ellissi osculatrici, ma viceversa si tiene costante per tutte il valore di h_0: c'è quindi conservazione dell'energia (spettante ai vari moti tangenti). Per ciò queste orbite osculatrici e i relativi elementi ellittici possono opportunamente qualificarsi *isoenergetici*, a differenza degli ordinari che sono *isodinamici*.

Circa l'espressione trasformata che assumerà la funzione caratteristica F, quando vi si introducano i nuovi elementi, osserveremo che, seguendo identicamente dalla (III)

$$T - \frac{k_0}{r} = h_0 + \frac{k - k_0}{r},$$

la (II) porge

$$F = h_0 + \frac{k - k_0}{r} + \mu F_1 . \tag{IV}$$

Le cose vanno dunque come se alla funzione perturbatrice μF_1 si aggiungesse un termine complementare (che corrisponde a forza emanante dal centro) $(k - k_0)/r$: la k dipende (come si rileverà qui appresso) esclusivamente dall'asse maggiore dell'orbita osculatrice.

1. - Richiami concernenti il moto non perturbato e la relativa equazione di Jacobi.

Le equazioni del moto di un punto P, attratto dall'origine O in ragione inversa del quadrato della distanza, sono, con manifesto significato dei simboli,

$$(1) \qquad \begin{cases} m\ddot{x} + \dfrac{kx}{r^3} = 0 \,, \\ m\ddot{y} + \dfrac{ky}{r^3} = 0 \,, \\ m\ddot{z} + \dfrac{kz}{r^3} = 0 \,. \end{cases}$$

Introdotte le componenti

$$(2) \qquad p_x = m\dot{x} \,, \qquad p_y = m\dot{y} \,, \qquad p_z = m\dot{z}$$

della quantità di moto di P, e la sua forza viva

$$(3) \qquad T = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) \,,$$

e posto

$$(4) \qquad H = T - \frac{k}{r} \,,$$

le (1), (2) equivalgono notoriamente al sistema canonico

$$(5) \qquad \begin{cases} \dot{p}_x = -\dfrac{\partial H}{\partial x} \,, & \dot{p}_y = -\dfrac{\partial H}{\partial y} \,, & \dot{p}_z = -\dfrac{\partial H}{\partial z} \,, \\ \dot{x} = \dfrac{\partial H}{\partial p_x} \,, & \dot{y} = \dfrac{\partial H}{\partial p_y} \,, & \dot{z} = \dfrac{\partial H}{\partial p_z} \,, \end{cases}$$

avendosi in ogni caso l'integrale delle forze vive

$$(6) \qquad H = h \,.$$

Riterremo negativa la costante h, con che classicamente si tratta di traiettorie ellittiche e moto kepleriano.

Se nella (6) si risguardano le p come simboli delle derivate di un'incognita funzione $W(x, y, z)$ a mezzo delle formule

$$(7) \qquad p_x = \frac{\partial W}{\partial x} \,, \qquad p_y = \frac{\partial W}{\partial y} \,, \qquad p_z = \frac{\partial W}{\partial z} \,,$$

si ha la corrispondente equazione di JACOBI. Ciascun suo integrale completo dà luogo ad una rappresentazione dell'integrale generale del sistema (5), ossia (nel caso $h < 0$, cui esclusivamente ci riferiamo) degli ∞^6 moti ellittici, dovuti all'attrazione di O.

Prendiamo per es. l'integrale completo (con due costanti G e θ, oltre alla h) considerato da POINCARÉ nelle sue *Leçons de mécanique céleste* (6).

Esso è

$$W = \int_{r_0}^{r} R\,dr + G\zeta\,, \tag{8}$$

col seguente significato di r_0, R e ζ:

1) r_0 vi rappresenta la minima distanza di P da O, ossia (dacchè si tratta di orbite ellittiche col fuoco in O) $a(1-e)$, essendo a il semiasse maggiore ed e l'eccentricità.

2)

$$R^2 = m\left(2h + \frac{2k}{r} - \frac{G^2}{r^2}\right), \tag{9}$$

con che R contiene il solo argomento variabile r, dipendendo inoltre da h e k, costanti intrinseche della (6), e dalla costante di integrazione G. Le due radici della equazione $r^2R^2 = 0$ (di secondo grado in r) corrispondono alla massima e minima distanza $a(1+e)$, $a(1-e)$ del mobile dall'origine, donde le relazioni (fra radici e coefficienti)

$$\begin{cases} 2a = -\dfrac{k}{h}\,, \\[2ex] a^2(1-e^2) = -\dfrac{G^2}{2h}\,. \end{cases} \tag{10}$$

3) ζ designa l'angolo del raggio vettore OP colla linea dei nodi (intersezione, debitamente precisata quanto al verso, del piano dell'orbita col piano di riferimento Oxy). Come costanti di integrazione nell'espressione (8) di W si risguardano la già menzionata G e la longitudine θ (*a priori* qualunque) della linea dei nodi, che compare pel tramite di ζ. Si ha infatti, essendo $\cos\theta$, $\sin\theta$, 0 i coseni direttori di tale linea, e x/r, y/r, z/r quelli di OP,

$$\cos\zeta = \frac{x\cos\theta + y\sin\theta}{r}\,.$$

---

(6) T. I, pp. 66-69.

Del resto non ci interessa la forma esplicita della funzione $\zeta(x, y, z, \theta)$: basterà tener presente che essa dà luogo alla relazione

(11) $$\frac{\partial \zeta}{\partial \theta} = -\cos i \, ,$$

i designando l'inclinazione (del piano dell'ellisse sul piano Oxy).

Le equazioni in termini finiti delle traiettorie si ottengono ponendo

(12) $$\frac{\partial W}{\partial G} = g \, , \qquad \frac{\partial W}{\partial \theta} = -\Theta \, ,$$

con g e Θ nuove costanti arbitrarie.

Il loro significato risulta: per la seconda, dalla (11), che dà:

$$\frac{\partial W}{\partial \theta} = \frac{\partial \zeta}{\partial \theta} = -\cos i \, ,$$

e quindi

(13) $$\Theta = G \cos i \; ;$$

per la prima, riferendosi alla posizione perielia $r = r_0$, con che $R = 0$ e

$$\frac{\partial W}{\partial G} = \frac{\partial}{\partial G} \int_{r_0}^{r} R \, dr + \zeta \, ,$$

si riduce a ζ: g rappresenta pertanto il valore di ζ quando il mobile transita pel perielio, ossia è l'angolo nodo-perielio.

Tutto ciò è puro riassunto di indispensabili premesse. Solo ora comincerò a staccarmi dal procedimento consueto, nell'intento di associare alle (12) un'equazione diversa dalla

$$\frac{\partial W}{\partial h} = t - t_0 \, ,$$

che, da Jacobi in poi, si fa sempre intervenire per completare la definizione del moto.

2. - La derivata di W rispetto al parametro k. Introduzione di un nuovo parametro U.

Dalle (8) e (9) segue ovviamente

$$\frac{\partial W}{\partial k} = m\int_{r_0}^{r} \frac{dr}{rR}.$$

L'integrale del secondo membro si calcola nel miglior modo sostituendo alla variabile di integrazione r (che non è monotona, ove si segua il moto ellittico del punto P, ma oscilla continuamente fra la distanza perielia e l'afelia) la anomalia eccentrica u, che è sempre crescente e legata ad r dalla nota relazione

$$r = a(1 - e\cos u)\,. \tag{15}$$

Si ha con ciò, portando nella espressione (9) di R^2 i valori di k e di G^2 definiti dalle (10),

$$r^2R^2 = -2hm\{-r^2 + 2ar - a^2(1-e^2)\} = -2hma^2e^2 \operatorname{sen}^2 u\,;$$

dopo di che, ove si noti che u è multiplo intero di 2π per $r = r_0$ (e può quindi ritenersi nullo quando r parte per la prima volta dal valore r_0), la (14) si riduce semplicemente a

$$\frac{\partial W}{\partial k} = \sqrt{\frac{m}{-2h}}\,u\,, \tag{14'}$$

dovendosi attribuire al radicale il suo valore aritmetico.

Questa equazione, desunta per materiale derivazione dalla espressione (8) di W, sussiste identicamente in quanto, come abbiam fatto nel corso del calcolo, si tenga conto della (15). Qualora si conservi a W la sua originaria accezione di funzione di x, y, z (pel tramite di r e di ζ), e dei parametri h, k, G, θ, la (14') diviene di necessità equivalente alla (15) stessa; o meglio ne costituisce la risolvente rispetto ad u, a ed e dovendosi intendere combinazioni di h, k, G definite dalle (10).

È opportuna una ulteriore trasformazione moltiplicativa, che sostituisca al parametro k il nuovo parametro

$$U = k\sqrt{\frac{m}{-2h}}\,. \tag{16}$$

Si può in conformità risguardare W come funzione dei sei argomenti

$$x, y, z; \quad U, G, \theta :$$

a dir vero in W interviene altresì il parametro h, ma non lo metto in evidenza, perchè l'ho trattato finora, e lo tratterò anche in seguito, come una assoluta costante, a differenza di G, θ e k — diciamo ormai U — che mi riservo di considerare come variabili, che anzi ho già implicitamente fatto variare, introducendo le derivate parziali di W. Con tale avvertenza si ha dalle (14′) e (16)

$$\frac{\partial W}{\partial U} = u . \tag{17}$$

3. - Risoluzione del sistema (14), (17) rapporto ad x, y, z.

Il fatto che W è integrale completo assicura notoriamente la risolubilità, rapporto ad x, y, z, del sistema costituito dalle due equazioni (14) delle traiettorie e da una terza equazione, che (in quanto si abbia riguardo al moto ellittico) contenga effettivamente il tempo. Tale è per certo la (17), tostochè vi si risguardi l'anomalia eccentrica u come quella tal funzione di t, che caratterizza il moto ellittico a norma della equazione di KEPLER. Così rimane provato che le (14), (17) sono atte a definire x, y, z in funzione, possiamo dire, della sestupla

$$\begin{pmatrix} U & G & \Theta \\ u & g & \theta \end{pmatrix}.$$

Quanto alle formule esplicite, sarebbe inutile ricavarle più o meno laboriosamente dalle (14), (17): esse devono di necessità coincidere colle espressioni integrali spettanti alle x, y, z nel moto ellittico, in funzione dei suddetti sei argomenti. Basta dunque nelle formule classiche, in cui intervengono abitualmente a, e, i, g, θ, u, ritenere a, e ed i sostituiti mediante U, G, Θ a norma delle (10), (16) e (13), che possono complessivamente scriversi (eliminando k)

$$\left\{\begin{aligned} U &= \sqrt{-2hm}\,a , \\ G &= \sqrt{-2hm}\,a\sqrt{1-e^2} = U\sqrt{1-e^2} , \\ \Theta &= \sqrt{-2hm}\,a\sqrt{1-e^2}\cos i = G\cos i . \end{aligned}\right. \tag{18}$$

Come si vede, U è proporzionale all'asse maggiore, G all'asse minore, il fattore di proporzionalità $\sqrt{-2hm}$ dovendo trattarsi — ripetiamolo — come una costante assoluta.

Introducendo, per comodo di scrittura, le coordinate ausiliarie del mobile $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, e X, Y relative ad assi (sempre di origine O) situati nel piano dell'orbita e rispettivamente orientati: 1) secondo la linea dei nodi e sua perpendicolare; 2) secondo gli assi dell'ellisse, si hanno le note formule elementari:

$$(19)\qquad \begin{cases} x = \cos\theta\,\mathfrak{x} - \cos i \sin\theta\,\mathfrak{y} = \cos\theta\,\mathfrak{x} - \dfrac{\Theta}{G}\sin\theta\,\mathfrak{y}\,, \\[2ex] y = \sin\theta\,\mathfrak{x} + \cos i \cos\theta\,\mathfrak{y} = \sin\theta\,\mathfrak{x} + \dfrac{\Theta}{G}\cos\theta\,\mathfrak{y}\,, \\[2ex] z = \qquad\qquad \sin i\,\mathfrak{y} = \sqrt{1 - \dfrac{\Theta^2}{G^2}}\,\mathfrak{y}\,; \end{cases}$$

$$(20)\qquad \begin{cases} \mathfrak{x} = \cos g\,X - \sin g\,Y, & \mathfrak{y} = \sin g\,X + \cos g\,Y; \\ X = a(\cos u - e), & Y = a\sqrt{1-e^2}\sin u\,, \end{cases}$$

le ultime delle quali, attese le (18), assumono l'aspetto

$$(21)\qquad X = \frac{1}{\sqrt{-2hm}}\left\{U\cos u - \sqrt{U^2 - G^2}\right\}, \qquad Y = \frac{1}{\sqrt{-2hm}}\,G\sin u\,.$$

Ove si immagini di portare successivamente nelle (19) le (20) e (21), si ottengono le risolventi delle (14), (17) sotto la forma voluta

$$(22)\qquad \begin{cases} x = x(U, G, \Theta;\ u, g, \theta;\ h)\,, \\ y = y(U, G, \Theta;\ u, g, \theta;\ h)\,, \\ z = z(U, G, \Theta;\ u, g, \theta;\ h)\,. \end{cases}$$

Se ne trae, per le componenti della quantità di moto (dei movimenti kepleriani definiti da queste equazioni),

$$p_x = m\dot{x} = m\frac{\partial x}{\partial u}\dot{u}\,, \qquad p_y = m\frac{\partial y}{\partial u}\dot{u}\,, \qquad p_z = m\frac{\partial z}{\partial u}\dot{u}\,,$$

u dovendo desumersi dall'equazione di KEPLER

$$u - e\sin u = nt + \text{cost.}\,,$$

in cui il moto medio n vale $\sqrt{k/ma^3}$, ossia, per la prima delle (10),

$$\frac{1}{a}\sqrt{\frac{-2h}{m}}.$$

Si ha così, badando anche alla (15),

$$\dot{u} = \frac{n}{1 - e\cos u} = \frac{1}{r}\sqrt{\frac{-2h}{m}},$$

e in conformità

$$(23) \qquad \begin{cases} p_x = \dfrac{\sqrt{-2hm}}{r}\dfrac{\partial x}{\partial u}, \\[2ex] p_y = \dfrac{\sqrt{-2hm}}{r}\dfrac{\partial y}{\partial u}, \\[2ex] p_z = \dfrac{\sqrt{-2hm}}{r}\dfrac{\partial z}{\partial u}. \end{cases}$$

Queste costituiscono evidentemente anche le espressioni integrali di p_x, p_y, p_z, considerate come incognite ausiliarie delle equazioni del moto [sotto la forma canonica (5)], sempreché vi si risguardino: h, G, Θ, g, θ come cinque costanti arbitrarie di integrazione (la sesta essendo inclusa in u), k come fisso, ma *suscettibile di valore qualsiasi*, anzi sostituito da $U = k\sqrt{m/(-2h)}$ a norma della (16). Ora le stesse espressioni integrali di p_x, p_y, p_z devono trarsi dalle (7) (attesa la circostanza che W è integrale completo), in quanto vi si intendano per x, y, z le relative espressioni integrali (22) (colla accezione ora detta delle lettere $h, G, \Theta, g, \theta, u, U$). Le (7) equivalgono pertanto alle (23) (previa la sostituzione delle x, y, z), qualunque siano i valori dei *sette* argomenti U, G, Θ, u, g, θ, h.

Badando alla già rilevata circostanza che le (22) non sono altro che le risolventi delle (14), (17), si conclude che le (22), (23) equivalgono complessivamente alle (14), (17), (7).

4. - Constatazione della canonicità.

Le (22), (23) definiscono sotto forma esplicita una trasformazione della sestupla

$$\begin{pmatrix} p_x & p_y & p_z \\ x & y & z \end{pmatrix},$$

nella

$$\begin{pmatrix} U & G & \Theta \\ u & g & \theta \end{pmatrix},$$

dipendente da un parametro h. Dico che (qualunque sia il valore attribuito ad h) la trasformazione è canonica, le nuove variabili coniugate essendo U, u; G, g; Θ, θ.

All'uopo basta sfruttare la circostanza che le (14), (17), (7), e con esse la relazione differenziale

$$\begin{aligned} dW &= \frac{\partial W}{\partial x} dx + \frac{\partial W}{\partial y} dy + \frac{\partial W}{\partial z} dz + \frac{\partial W}{\partial U} dU + \frac{\partial W}{\partial G} dG + \frac{\partial W}{\partial \theta} d\theta \\ &= p_x dx + p_y dy + p_z dz + u\, dU + g\, dG - \Theta\, d\theta \,, \end{aligned}$$

sono necessaria conseguenza delle formule di trasformazione (22), (23). Ne consegue ulteriormente, togliendo da una parte e dall'altra $d(Uu+Gg)$,

$$d(W - Uu - Gg) = (p_x dx + p_y dy + p_z dz) - (U du + G dg + \Theta d\theta)\,.$$

La differenza dei due trinomi

$$p_x dx + p_y dy + p_z dz \qquad \text{e} \qquad U du + G dg + \Theta d\theta$$

è dunque un differenziale esatto, c. d. d.

5. - Confronto fra i nuovi elementi e quelli di Delaunay. Conseguente espressione del momento delle quantità di moto. Identità di comportamento di fronte alle trasformazioni di Poincaré.

La trasformazione canonica abitualmente adottata fa passare dalla sestupla cartesiana alla

$$(D) \quad \begin{cases} L = \sqrt{km}\sqrt{a} & G = L\sqrt{1-e^2} & \Theta = G\cos i\,, \\ l \text{ (anomalia media)} & g & \theta\,, \end{cases}$$

in cui k (attrazione di O all'unità di distanza) va trattata come un parametro costante. Per questo fatto, la sestupla di Delaunay può dirsi *isodinamica* (come già si accennò nell'Introduzione), e contrassegnarsi con (D). In modo analogo sarà a dirsi *isoenergetica*, e si indicherà con (E), la nostra sestupla

$$(E) \qquad \begin{cases} U = \sqrt{-2hm}\,a & G = U\sqrt{1-e^2} \qquad \Theta = G\cos i\,, \\ u \text{ (anomalia eccentrica)} & g \qquad\qquad\qquad\;\; \theta\,, \end{cases}$$

nella quale si tratta come costante l'energia h.

Gli elementi g e θ hanno identico significato in (D) ed in (E). Il divario essenziale consiste nell'intervento dell'anomalia media in (D), e della eccentrica in (E). Ma vi sono altre differenze secondarie. La variabile coniugata all'anomalia dipende bensì, in entrambi i casi, dal solo asse maggiore dell'orbita osculatrice: però, *mentre L è proporzionale a $\sqrt{a}$, U è addirittura proporzionale ad a.* La coniugata di g, designata in ambedue le sestuple con G, *è proporzionale al parametro dell'orbita in (D), al semiasse minore in (E).*

Importa notare che, se si tratta di una stessa orbita, la prima delle (10) dà fra le due quantità h e k la relazione

$$2a = -\frac{k}{h}\,,$$

talchè

$$\sqrt{km}\,a = \sqrt{-2hm}\,a\,.$$

Coincidono quindi [in base alle tabelle (D) ed (E)] i valori numerici di L e di U; per conseguenza anche G ha un medesimo valore nei due casi, e così Θ. *Ne discende ulteriormente che G conserva la sua abituale interpretazione di momento risultante delle quantità di moto; seguitano perciò a sussistere, anche per gli elementi (E), le note formule*

$$(24) \qquad \begin{cases} yp_z - zp_y = G\sin i\sin\theta\,, \\ zp_x - xp_z = -G\sin i\cos\theta\,, \\ xp_y - yp_x = G\cos i\,, \end{cases}$$

in cui i si deve intendere eliminato a mezzo della $\Theta = G\cos i$.

È appena necessario aggiungere che, applicando alla sestupla (E) le trasformazioni canoniche indicate da POINCARÉ per la (D), si raggiunge analogamente l'intento di introdurre variabili appropriate alle piccole eccentricità ed inclinazioni. Si hanno così successivamente le sestuple

$$(25)\qquad \begin{cases} U & \varrho_1 = U - G & \varrho_2 = G - \Theta\,, \\ \omega = u + g + \theta & \omega_1 = -(g+\theta) & \omega_2 = -\theta\,, \end{cases}$$

$$(26)\qquad \begin{cases} U & \xi_1 = \sqrt{2\varrho_1}\cos\omega_1 & \xi_2 = \sqrt{2\varrho_2}\cos\omega_2\,, \\ \omega & \eta_1 = \sqrt{2\varrho_1}\sin\omega_1 & \eta_2 = \sqrt{2\varrho_2}\sin\omega_2\,, \end{cases}$$

con evidente significato degli angoli ω, ω_1, ω_2.

6. - Introduzione dei nuovi elementi nel problema dei tre corpi.

Sieno O, P, P' i tre corpi (O corpo centrale di massa preponderante); m_0, m, m' le rispettive masse; x, y, z; x', y', z' le coordinate di P e di P', riferite ad assi di orientazione fissa coll'origine in O; f la costante di attrazione universale; $r = \overline{OP}$, $r' = \overline{OP'}$, $\Delta = \overline{PP'}$ le tre distanze; p_x, p_y, p_z le componenti della quantità di moto *assoluta* di P; p'_x, p'_y, p'_z le componenti della analoga quantità di moto di P'.

Posto

$$(27)\qquad \begin{cases} H_0 = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{m} + \dfrac{1}{m_0}\right)(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) - f\dfrac{m_0 m}{r}\,, \\ H'_0 = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{m'} + \dfrac{1}{m_0}\right)(p_x'^2 + p_y'^2 + p_z'^2) - f\dfrac{m_0 m'}{r'}\,, \\ F_0 = H_0 + H'_0\,, \\ \mu F_1 = \dfrac{1}{m_0}(p_x p'_x + p_y p'_y + p_z p'_z) - f\dfrac{mm'}{\Delta}\,, \end{cases}$$

le equazioni del moto relativo, sotto la forma canonica di POINCARÉ, ammettono per funzione caratteristica

$$(28)\qquad F = F_0 + \mu F_1\,,$$

essendo variabili coniugate le coordinate di ciascuno dei due corpi P e P' e le corrispondenti componenti delle loro quantità di moto; μF_1 costituisce la funzione perturbatrice, e più precisamente il termine $-fmm'/\Delta$ ne è la parte principale, il trinomio $(p_x p'_x + p_y p'_y + p_z p'_z)/m_0$ il termine complementare.

A ciascuna delle due sestuple

$$\begin{pmatrix} p_x & p_y & p_z \\ x & y & z \end{pmatrix}, \tag{29}$$

$$\begin{pmatrix} p'_x & p'_y & p'_z \\ x' & y' & z' \end{pmatrix}, \tag{30}$$

conviene sostituire degli elementi ellittici, definiti in base ad ipotetici moti non perturbati.

L'abituale criterio isodinamico porta a valersi di due sistemi canonici ausiliari aventi rispettivamente H_0 e H'_0 per funzioni caratteristiche.

Noi faremo invece corrispondere ad ogni istante due funzioni poco diverse dalle H_0, H'_0 relative allo stesso istante, cioè

$$\begin{cases} H = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{m} + \dfrac{1}{m_0}\right)(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) - \dfrac{k}{r}, \\ H' = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{m'} + \dfrac{1}{m_0}\right)(p_x'^2 + p_y'^2 + p_z'^2) - \dfrac{k'}{r'}, \end{cases} \tag{31}$$

modificando (lievemente) i coefficienti di $1/r$, $1/r'$ in confronto dei valori fm_0m, fm_0m' che loro competono in H_0, H'_0. Questi coefficienti k e k' li intenderemo fissati in guisa che H e H' si conservino, nel moto reale di P, P', costantemente eguali ai loro valori iniziali h_0, h'_0.

Ciò posto, riportandoci ai precedenti paragrafi, potremo coordinare al sistema canonico di funzione caratteristica H una trasformazione canonica, che fa passare dalla sestupla (29) ad una sestupla

$$\begin{pmatrix} U & G & \Theta \\ u & g & \theta \end{pmatrix},$$

di elementi ellittici (E), corrispondenti all'orbita intermediaria che sarebbe descritta dal punto P, a partire dal suo reale stato di moto dell'istante t, qualora cessasse ogni perturbazione. In questo moto ipotetico [come risulta dal confronto dell'espressione (31) di H colle (3), (4)]:

1) funge da massa di P

$$\frac{1}{1/m + 1/m_0} = \frac{m}{1 + m/m_0},$$

(poco diversa dalla massa reale m per essere piccolo il rapporto m/m_0);

2) il vettore (p_x, p_y, p_z), che concorre a definirlo (e che è, nel moto

reale di P, la quantità di moto assoluta dell'istante cui si riferiscono gli elementi) si interpreta come quantità di moto relativa, talchè l'orbita intermediaria non riesce esattamente osculatrice;

3) (e qui risiede la differenza in confronto della definizione ordinaria) l'attrazione del centro O ha un coefficiente k (poco diverso da fm_0m), scelto in guisa che risulti $H = h_0$.

Analogamente per P'.

Ove si badi alla (16) e si noti che [a norma delle (27) e (31)]

$$H_0 - H = \frac{k - fm_0 m}{r},$$

si vede che la sostituzione degli elementi ellittici isoenergetici in H_0 la riduce a

$$h_0 + \frac{\sqrt{(-2h_0/m)}\, U - fm_0 m}{r}.$$

Del pari, designando gli elementi di P' con lettere accentate, H_0 si riduce a

$$h'_0 + \frac{\sqrt{(-2h'_0/m')}\, U' - fm_0 m'}{r}.$$

Insomma, designando con C, α, α', β, β' costanti positive, che dipendono soltanto dalle masse e dalle condizioni iniziali, si ha

$$F_0 = -C + \frac{\alpha U - \beta}{r} + \frac{\alpha' U' - \beta'}{r'},$$

coll'avvertenza che r ed r' si devono ritenere espresse per mezzo di U, G, u, o rispettivamente U', G', u', a norma delle (15) e (18).

Resta la funzione perturbatrice μF_1. È appunto nei suoi riguardi che si fa palese il vantaggio dei nuovi elementi, i quali comprendono l'anomalia eccentrica u, al posto della media, e consentono così sia di attribuire a μF_1 espressione esplicita (mentre di solito c'è di mezzo l'equazione di KEPLER), sia più agevoli sviluppi in serie. Ciò è troppo noto perchè occorra illustrarlo. Terminerò osservando che, anche coi nuovi elementi, dei due gruppi di formule di trasformazione destinati ad introdurli [(22) e (23)], viene in uso soltanto il primo per la parte principale $-f(mm/\Delta)$, soltanto il secondo per il termine complementare

$$\frac{1}{m_0}(p_x p'_x + p_y p'_y + p_z p'_z).$$

XXV.

SULLA TRASFORMAZIONE DELLE EQUAZIONI LINEARI A DERIVATE PARZIALI DEL SECONDO ORDINE

« Atti Ist. Ven. di sc., lett. ed arti », t. LXXII, Parte seconda (1913), pp. 1331-1357.

Sia data un'equazione del tipo

$$E(u) = \sum_{1}^{n}{}_{rs} A^{(rs)} \frac{\partial^2 u}{\partial x_r \partial x_s} + \sum_{1}^{n}{}_{r} B_r \frac{\partial u}{\partial x_r} = 0 ,$$

i coefficienti $A^{(rs)}$, B_r essendo funzioni qualisivogliono delle variabili indipendenti $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (finite, continue e derivabili quanto occorre nel campo che si considera).

Quali sono gli invarianti dell'equazione di fronte a tutte le trasformazioni delle variabili indipendenti? O, sotto altra forma, come si discute l'equivalenza di due equazioni del tipo indicato? come si riconosce cioè se e in qual modo sia possibile sostituire alle x nuove variabili x', atte a far passare dalla $E(u) = 0$ ad altra analoga equazione

$$E'(u) = \sum_{1}^{n}{}_{rs} A'^{(rs)} \frac{\partial^2 u}{\partial x'_r \partial x'_s} + \sum_{1}^{n}{}_{r} B'_r \frac{\partial u}{\partial x'_r} = 0 ,$$

in cui $A'^{(rs)}$, B'_r designano funzioni comunque assegnate delle x'?

Il sig. COTTON, in una fondamentale Memoria [1], ha trattato, con profondità pari all'eleganza, il problema più generale dell'equivalenza di due equazioni $E(u) = 0$, $E'(u') = 0$ (contenenti eventualmente anche termini lineari in u e in u'), quando si combina il cambiamento delle varia-

---

[1] *Sur les invariants différentiels de quelques équations linéaires aux dérivées partielles du second ordre*, « Annales de l'École Normale Supérieure », t. XVII, 1900, pp. 211-244.

bili indipendenti con una trasformazione moltiplicativa della funzione: $u' = \lambda u$. Concettualmente, basta imporre la restrizione $\lambda = 1$ (attribuendo il valore zero ai coefficienti di u e di u') per riportarsi al caso nostro. Ma non sarebbe comodo il discuterlo per questa via, prendendo le mosse dai risultati del COTTON e procedendo alla determinazione dei caratteri invariantivi addizionali, cui dà luogo la condizione $\lambda = 1$.

Val meglio riprendere la questione *ex novo*, e fissare globalmente gli invarianti, considerando fin da principio il vincolo che la funzione u non si trasforma.

I metodi di RICCI sono naturalmente indicati in questo genere di ricerche; essi guidano lo studioso con operazioni già sistematizzate, di esecuzione, per così dire, automatica. Ne ho quindi profittato nella presente Nota, congiungendovi piccoli accorgimenti, intesi a renderne più spedita l'applicazione a esempi concreti.

Per un numero qualunque n di variabili indipendenti, mi sono limitato a indicazioni generali circa il modo di far rientrare la questione nello stretto ambito del calcolo differenziale assoluto, riconducendola alla determinazione di tutti gli invarianti spettanti ad un ds^2 con invarianti e sistemi covarianti associati.

Per $n = 2$, ho anche indagato i tipi, col seguente risultato:

Ogni equazione $E(u) = 0$ (non parabolica), nel caso generale in cui non si annulla un certo invariante J (funzione semplice dei coefficienti $A^{(rs)}$, B_r), può — univocamente e senza preventivi cambiamenti di variabili — essere posta sotto la forma

$$\Delta_2 u + \frac{du}{d\sigma} = 0 \,,$$

il parametro differenziale Δ_2 riferendosi ad un opportuno

$$ds^2 = \sum_{rs}^{2}{}_{1} a_{rs}\, dx_r\, dx_s \,,$$

e $d\sigma$ rappresentando, in ogni punto (x_1, x_2) uno speciale elemento ds. Ciò è come dire che le $E(u) = 0$ binarie (e non paraboliche) si classificano, per $J \neq 0$, alla stregua dei ds^2 con assegnata congruenza di linee (in quanto, beninteso, non si faccia questione di realità; altrimenti si richiederebbero distinzioni ulteriori).

Per $J = 0$ si hanno tre tipi distinti [cfr. § 6]. Uno di questi si classifica come i ds^2, cui sieno associati due invarianti j_1, j_2 (funzioni soltanto del posto). Gli altri due tipi non contengono più alcun modulo e sono rispettivamente caratterizzati dalla riducibilità alla forma

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} = 0 ,$$

ovvero alla

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + u\right) = 0 .$$

1. - Forma invariantiva di una espressione $e(u)$.

Ove sia

$$(1) \qquad \varphi = \sum_1^n{}_{rs}\, a_{rs}\, dx_r\, dx_s$$

una forma differenziale quadratica irriducibile, e si designino al solito: con a il determinante delle a_{rs} (per ipotesi diverso da zero), con $a^{(rs)}$ gli elementi reciproci dei coefficienti a_{rs} (complementi algebrici divisi per a), si ha notoriamente come espressione del parametro differenziale secondo, relativo alla forma φ, di una generica funzione $u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ (²):

$$(2) \qquad \Delta_2^{(\varphi)} u = \frac{1}{\sqrt{a}} \sum_1^n{}_s \frac{\partial}{\partial x_s}\left[\sqrt{a} \sum_1^n{}_r\, a^{(rs)} \frac{\partial u}{\partial x_r}\right]$$
$$= \sum_1^n{}_{rs}\, a^{(rs)} \frac{\partial^2 u}{\partial x_r\, \partial x_s} + \sum_1^n{}_r \frac{\partial u}{\partial x_r} \cdot \frac{1}{\sqrt{a}} \sum_1^n{}_s \frac{\partial}{\partial x_r}(\sqrt{a}\, a^{(rs)}) .$$

Dopo ciò è chiaro che, data a priori una generica espressione

$$(3) \qquad e(u) = \sum_1^n{}_{rs}\, a^{(rs)} \frac{\partial^2 u}{\partial x_r\, \partial x_s} + \sum_1^n{}_r\, b_r \frac{\partial u}{\partial x_r} ,$$

($a^{(rs)}$ e b_r funzioni assegnate delle x) *non parabolica*, tale cioè che sia diverso da zero il determinante a dei coefficienti delle derivate seconde,

---

(²) Cfr. per es. BIANCHI, *Lezioni di geometria differenziale*, vol. I, cap. II. Le premesse di questo paragrafo si trovano del resto in extenso nella citata memoria del sig. COTTON. Per le nozioni di calcolo differenziale assoluto che invocherò in appresso, rimando al riassunto: *Méthodes de calcul différentiel absolu et leurs applications*, fattone dall'autore, prof. RICCI, e da me, nel volume 54 (1900) dei Mathematische Annalen [in queste «Opere»: vol. primo, XXXII, pp. 479-559].

basta porre

$$(4)\qquad l^{(r)} = b_r - \frac{1}{\sqrt{a}} \sum_1^n{}_s \frac{\partial}{\partial x_s} (\sqrt{a}\, a^{(rs)}) , \qquad (r = 1, 2, ..., n),$$

$$(5)\qquad lu = \sum_1^n{}_r\, l^{(r)} \frac{\partial u}{\partial x_r} ,$$

perchè si abbia identicamente

$$(6)\qquad e(u) = \Delta_2^{(\varphi)} u + lu .$$

Come si vede, la forma differenziale quadratica φ e l'operatore lu rimangono univocamente individuati da $e(u)$. Diremo, col sig. COTTON, che essi sono *annessi* a detta espressione.

Importa rilevare — ed è ciò che costituisce la superiorità della (6) sulla (3) — che, in seguito ad una qualsiasi trasformazione puntuale (con cui si sostituiscano alle x nuove variabili x'), la $e(u)$ conserva sempre il medesimo aspetto, bastando semplicemente intendere riferiti (per materiale sostituzione) alle nuove variabili la forma quadratica φ e l'operatore lu.

L'espressione

$$(7)\qquad j = \sum_1^n{}_{rs}\, a_{rs} l^{(r)} l^{(s)}$$

è manifestamente *invariante di fronte a qualsiasi cambiamento di variabili indipendenti.*

2. - L'espressione $\varrho E(u) = e(u)$ e l'equazione $E(u) = 0$.

Consideriamo, accanto ad $e(u)$, un'analoga espressione

$$E(u) = \sum_1^n{}_{rs}\, A^{(rs)} \frac{\partial^2 u}{\partial x_r \partial x_s} + \sum_1^n{}_r\, B_r \frac{\partial u}{\partial x_r} ,$$

la quale non ne differisca che per un fattore ϱ, funzione delle x, non nulla nel campo che si considera, ma del resto arbitraria. Da

$$e(u) = \varrho E(u)$$

segue evidentemente

$$a^{(rs)} = \varrho A^{(rs)} , \qquad b_r = \varrho B_r \qquad (r, s = 1, 2, ..., n),$$

e, per conseguenza, designando con $1/A$ il determinante delle $A^{(rs)}$, con A_{rs} i rispettivi elementi reciproci, con

$$\Phi = \sum_{1}^{n}{}_{rs} A_{rs}\, dx_r\, dx_s$$

la forma quadratica annessa ad $E(u)$

$$a = \varrho^{-n} A\,, \qquad a_{rs} = \frac{1}{\varrho} A_{rs}\,, \qquad (r, s = 1, 2, \ldots, n),$$

donde

$$\varphi = \frac{1}{\varrho}\, \Phi\,. \tag{8}$$

È facile riconoscere quale relazione corra fra $\Delta_2^{(\varphi)}u$ e $\Delta_2^{(\Phi)}u$. All'uopo basta, per es., partirsi dalla (2), sostituendovi, nel secondo membro, $\varrho A^{(rs)}$ in luogo di $a^{(rs)}$, $\varrho^{-n}A$ per a. Risulta senz'altro

$$\begin{aligned}
\Delta_2^{(\varphi)}u = {} & \varrho \sum_{1}^{n}{}_{rs} A^{(rs)} \frac{\partial^2 u}{\partial x_r\, \partial x_s} \\
& + \sum_{1}^{n}{}_{r} \frac{\partial u}{\partial x_r} \cdot \frac{\varrho^{-n/2}}{\sqrt{A}} \sum_{1}^{n}{}_{s} \frac{\partial}{\partial x_s} [\varrho^{1-(n/2)} \sqrt{A} A^{(rs)}] \\
= {} & \varrho \sum_{1}^{n}{}_{rs} A^{(rs)} \frac{\partial^2 x}{\partial x_r\, \partial x_s} + \varrho \sum_{1}^{n}{}_{r} \frac{\partial u}{\partial x_r} \cdot \frac{1}{\sqrt{A}} \sum_{1}^{n}{}_{s} \frac{\partial}{\partial x_s} (\sqrt{A} A^{(rs)}) \\
& - \left(\frac{n}{2} - 1\right) \sum_{1}^{n}{}_{rs} A^{(rs)} \frac{\partial u}{\partial x_r} \frac{\partial \varrho}{\partial x_s}\,.
\end{aligned}$$

I primi due termini costituiscono insieme $\varrho\Delta_2^{(\Phi)}u$. Per dar forma comprensiva anche all'ultimo addendo, si ricorda l'espressione del parametro differenziale misto $\nabla^{(\Phi)}(u, v)$ di due generiche funzioni u, v (relativo alla forma Φ) che è

$$\sum_{1}^{n}{}_{rs} A^{(rs)} \frac{\partial u}{\partial x_r} \frac{\partial v}{\partial x_s}\,.$$

Ne consegue ovviamente

$$\Delta_2^{(\varphi)}u = \varrho \Delta_2^{(\Phi)}u - \left(\frac{n}{2} - 1\right) \nabla^{(\Phi)}(u, \varrho)\,. \tag{9}$$

D'altra parte, indicando con

$$Lu = \sum_1^n {}_r L^{(r)} \frac{\partial u}{\partial x_r},$$

l'operatore lineare annesso ad $E(u)$, si ha dal precedente paragrafo

$$E(u) = \Delta_2^{(\Phi)} u + Lu,$$

e quindi

$$e(u) = \varrho E(u) = \varrho \Delta_2^{(\Phi)} u + \varrho Lu,$$

che, confrontata colla (6), dà luogo all'identità

$$\Delta_2^{(\Phi)} u + lu = \varrho \Delta_2^{(\Phi)} u + \varrho Lu.$$

In virtù della (9), se ne ricava

$$lu = \varrho Lu + \left(\frac{n}{2} - 1\right) \nabla^{(\Phi)}(u, \varrho), \tag{10}$$

la quale, eguagliando i coefficienti delle stesse derivate di u nei due membri, porge

$$l^{(r)} = \varrho L^{(r)} + \left(\frac{n}{2} - 1\right) \varrho^{(r)}, \qquad (r = 1, 2, \ldots, n): \tag{11}$$

le

$$\varrho^{(r)} = \sum_1^n {}_s A^{(rs)} \frac{\partial \varrho}{\partial x_s},$$

indicano, ben si intende, derivate contravarianti della ϱ.

Introduciamo, accanto al sistema contravariante $L^{(r)}$, il suo reciproco rispetto a Φ,

$$L_r = \sum_1^n {}_s A_{rs} L^{(s)},$$

e analogamente, accanto a $l^{(r)}$, il suo reciproco rispetto a φ,

$$l_r = \sum_1^n {}_s a_{rs} l^{(s)} = \frac{1}{\varrho} \sum_1^n {}_s A_{rs} l^{(s)}.$$

Dalle (11) (moltiplicando per $a_{rs} = (1/\varrho)A_{rs}$, sommando rispetto all'indice r e cambiando poi s in r) si traggono le equivalenti

$$(11') \qquad l_r = L_r + \left(\frac{n}{2} - 1\right)\frac{1}{\varrho}\,\varrho_r\,, \qquad (r = 1, 2, \ldots, n),$$

dove, per uniformità, sono indicate con ϱ_r le derivate $\partial\varrho/\partial x_r$.

Ciò posto, rivolgiamo la nostra attenzione all'equazione

$$E(u) = 0\,.$$

Prendendone il primo membro come accidentalmente si presenta, i coefficienti $A^{(rs)}$, B_r hanno certe determinazioni; ma si possono moltiplicare tutti per ϱ senza alterare l'*equazione*. Proponiamoci di fissare questo fattore a priori arbitrario con criterio invariantivo di fronte a trasformazioni qualisivogliono delle variabili indipendenti, per modo che ne rimanga individuata una *espressione*

$$e(u) = \varrho E(u)\,.$$

È chiaro che basta all'uopo ricorrere ad una qualunque funzione I dei coefficienti $A^{(rs)}$, B_r [o, se si vuole, delle loro combinazioni $A^{(rs)}$, $L^{(r)}$], la quale sia invariante di fronte ai cambiamenti di variabili, ma non contemporaneamente di fronte alla moltiplicazione per ϱ degli stessi coefficienti $A^{(rs)}$, B_r. Sfruttando la presenza di ϱ nell'espressione trasformata, sarà in generale possibile attribuire ad I un particolare valore numerico, per es. 1. Più precisamente se, almeno in un certo campo, ciò può farsi in un modo solo, cioè se la ϱ, nel detto campo, rimane definita senza ambiguità, si sarà raggiunto l'intento di far corrispondere ad ogni assegnata equazione $E(u) = 0$, una ben determinata *espressione canonica del primo membro*, $e(u) = \varrho E(u)$, caratterizzata dalla speciale proprietà che il relativo invariante I ha il valore numerico 1. *Rimangono surbodinatamente individuati il* $ds^2 = \varphi$, *e l'operatore* lu, annessi alla $e(u)$, *che si potranno pur dire annessi alla equazione* $E(u) = 0$.

A questo punto l'indagine è a ritenersi sostanzialmente esaurita, poichè la caratterizzazione invariantiva delle equazioni $E(u) = 0$ e la teoria delle loro trasformazioni rimangono ricondotte al problema specifico del calcolo differenziale assoluto « studio invariantivo di sistemi associati ad un ds^2 » ([3]).

([3]) L'interpretazione di φ come quadrato dell'elemento lineare di una varietà implica, nel campo reale, che si tratti di una forma quadratica positiva. In realtà noi abbiamo semplicemente

Esse si trovano del resto già discusse nei nn. 4-8 del citato lavoro del sig. COTTON. Ne farò qui una discussione alquanto più approfondita per $n = 2$; per n qualunque mi limiterò ad esplicitare la scelta dell'invariante I e la corrispondente espressione di φ.

3. - Equazioni binarie. Il tipo generale a invariante J non nullo.

Per le equazioni $E(u) = 0$ con due sole variabili indipendenti ($n = 2$) si presenta, in virtù delle (11'), la particolare circostanza che il sistema covariante L_r è indipendente da ϱ ($l_r = L_r$). Le (11) poi si riducono a

$$l^{(r)} = \varrho L^{(r)} \qquad (r = 1, 2).$$

Dacchè alla definizione (7) di j si può attribuire la forma

$$(7') \qquad j = \sum_1^2{}_r\, l_r l^{(r)},$$

designando con

$$J = \sum_1^2{}_r\, L_r L^{(r)}$$

l'analogo invariante di $E(u)$, avremo

$$(12) \qquad j = \varrho J .$$

Il caso generale sarà $J \neq 0$, carattere qualitativo che manifestamente si conserva, in forza della (12), quando la $E(u)$ si moltiplica per un generico ϱ.

Ritenuto $J \neq 0$, si potrà prendere

$$\varrho = \frac{1}{J},$$

supposto — e, data l'indole della ricerca, va tenuta ferma questa sola restrizione — che si tratti di forme irriducibili. Ma questo basta ad assicurare che (ove non si distingua il reale dal complesso) le formule e i risultati analitici del testo rimangono perfettamente validi in ogni caso. Possono soltanto — quando φ non è definita positiva — venir meno le concrete rappresentazioni geometriche. Il linguaggio adottato deve allora risguardarsi come un'estensione convenzionale, che serve ad evitare distinzioni inessenziali per lo scopo cui si mira.

e risguardare come *forma canonica della equazione* $E(u) = 0$ la

$$\frac{1}{J} E(u) = e(u) = \Delta_2^{(\varphi)} u + \sum_1^2{}_r\, l^{(r)} \frac{\partial u}{\partial x_r} = 0 ,$$

in cui $j = \sum_1^2{}_r\, l_r l^{(r)} = 1$, *in cui cioè le* $l^{(r)}$ *costituiscono il sistema coordinato contravariante di una congruenza* $[C]$ *di curve* C (tracciate sopra una superficie di elemento lineare $ds = \sqrt{\varphi}$). Detto σ l'arco di una C, la $e(u)$ può manifestamente essere scritta

$$e(u) = \Delta_2^{(\varphi)} u + \frac{du}{d\sigma} . \tag{13}$$

Gli invarianti della originaria equazione $E(u) = 0$ *sono pertanto tutti e soli quelli del* $ds^2 = \varphi$ *cui sia associata la congruenza* $[C]$. Tra questi figurano quindi le caratteristiche della congruenza, in particolare (fissandosi su quelle di prim'ordine rispetto al sistema $l^{(r)}$) le curvature geodetiche γ_1, γ_2, spettanti alle C e alle loro traiettorie ortogonali $\overline{C}$.

4. - Calcolo effettivo delle curvature.

Ove si designino con $\bar{l}^{(r)}$, $\bar{l}_r$ $(r = 1, 2)$ i due sistemi coordinati, rispettivamente contravariante e covariante, delle curve C, si hanno, per γ_1, γ_2 le espressioni di Ricci [4]:

$$\left\{\begin{aligned} \gamma_1 &= \sum_1^2{}_{rs}\, l_{rs} \bar{l}^{(r)} l^{(s)} = - \sum_1^2{}_{rs}\, \bar{l}_{rs} l^{(r)} l^{(s)} , \\ \gamma_2 &= \sum_1^2{}_{rs}\, \bar{l}_{rs} l^{(r)} \bar{l}^{(s)} = - \sum_1^2{}_{rs}\, l_{rs} \bar{l}^{(r)} \bar{l}^{(s)} . \end{aligned}\right. \tag{14}$$

Esse non sono sempre opportune per la effettiva valutazione delle γ, esigendo la preventiva formazione delle derivate covarianti l_{rs} (o $\bar{l}_{rs}$).

Il calcolo riesce più comodo ricorrendo alle relazioni fra le derivate intrinseche. Si sa infatti che le derivate di una generica funzione u ri-

---

(4) Colla notazione a tre indici, che conviene ai coefficienti di rotazione in uno spazio a un numero qualunque di dimensioni [cfr. *Méthodes* ecc., Cap. II, § 1], si ha $\gamma_1 = \gamma_{121}$; $\gamma_2 = \gamma_{212}$.

spetto agli archi delle curve C, $\overline{C}$, ossia gli operatori

$$(15)\qquad \begin{cases} lu = \dfrac{du}{d\sigma} = \sum_1^2{}_r\, l^{(r)} \dfrac{\partial u}{\partial x_r}, \\ \bar{l}u = \dfrac{du}{d\bar\sigma} = \sum_1^2{}_r\, \bar{l}^{(r)} \dfrac{\partial u}{\partial x_r}, \end{cases}$$

sono legati dalla relazione ([5])

$$(16)\qquad (l, \bar{l})u = \frac{d}{d\sigma}\frac{d}{d\bar\sigma}u - \frac{d}{d\bar\sigma}\frac{d}{d\sigma}u$$

$$= -\gamma_1 \frac{du}{d\sigma} + \gamma_2 \frac{du}{d\bar\sigma} = -\gamma_1 lu + \gamma_2 \bar{l}u\,.$$

Di qua la regola:

Data un'equazione $E(u) = 0$, e preso come capita il suo primo membro, lo si riduce alla forma $\Delta_2^{(\Phi)}u + Lu$. Direttamente date sono quindi le $A^{(rs)}$, B_r; immediatamente desumibili da esse le A_{rs}, il relativo determinante A, e le $L^{(r)}$, mercè le (4) $(r, s = 1, 2)$.

Si valuta in conformità

$$(17)\qquad J = \sum_1^2{}_{rs}\, A_{rs} L^{(r)} L^{(s)},$$

e si possono subito definire le

$$(18)\qquad l^{(r)} = \frac{L^{(r)}}{J}\,.$$

Per procurarsi le $\bar{l}^{(r)}$ delle traiettorie ortogonali $\overline{C}$, si ricorda che esse sono definite da

$$\bar{l}^{(r)} = -\sum_1^2{}_p\, \varepsilon^{(rp)} l_p = -\sum_1^2{}_p\, \varepsilon^{(rp)} L_p = -\sum_1^2{}_{pq}\, \varepsilon^{(rp)} A_{pq} L^{(q)},$$

le $\varepsilon^{(rs)}$ riferendosi alla forma φ di coefficienti JA_{rs}, con che

$$\varepsilon^{(11)} = 0, \qquad \varepsilon^{(22)} = 0, \qquad \varepsilon^{(12)} = -\varepsilon^{(21)} = \frac{1}{J\sqrt{A}}\,.$$

([5]) *Méthodes* ecc., Cap. II, § 2.

Ne consegue, facendo successivamente $r=1$, $r=2$:

$$(19)\qquad \begin{cases} \bar{l}^{(1)} = -\dfrac{1}{J\sqrt{A}} \sum_{1}^{2}{}_q A_{2q} L^{(q)} , \\ \bar{l}^{(2)} = \dfrac{1}{J\sqrt{A}} \sum_{1}^{2}{}_q A_{iq} L^{(q)} . \end{cases}$$

Rimangono così esplicitati [formule (18) e (19)] i coefficienti di entrambi gli operatori lu, $\bar{l}u$. Se ne forma la parentesi di POISSON $(l,\bar{l})u$, presentandola come combinazione lineare degli stessi lu, $\bar{l}u$. Il confronto col secondo membro della (16) fornisce le espressioni cercate di γ_1, γ_2.

ESEMPIO I. – Consideriamo l'equazione

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \alpha \frac{\partial u}{\partial x} + \beta \frac{\partial u}{\partial y} = 0 ,$$

di tipo ellittico, colla parte di second'ordine già ridotta alla forma di LAPLACE, e $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$. Avremo

$$A^{(11)} = A^{(22)} = 1, \qquad A^{(12)} = 0, \qquad \frac{1}{A} = 1;$$

$$A_{11} = A_{22} = 1 , \qquad A_{12} = 0 , \qquad A = 1 ;$$

$$B_1 = \alpha , \qquad B_2 = \beta ;$$

inoltre, dacchè in generale [formule (4)] $L^{(r)} = B_r$, ogniqualvolta le A sono costanti, dovremo prendere

$$L^{(1)} = \alpha , \qquad L^{(2)} = \beta .$$

Ne viene

$$J = \alpha^2 + \beta^2 \neq 0 ,$$

$$l^{(1)} = \frac{\alpha}{\alpha^2 + \beta^2} , \qquad l^{(2)} = \frac{\beta}{\alpha^2 + \beta^2} ,$$

con che le (19) danno

$$\bar{l}^{(1)} = -\frac{\beta}{\alpha^2 + \beta^2} , \qquad \bar{l}^{(2)} = \frac{\alpha}{\alpha^2 + \beta^2} ;$$

e le (15):

$$\begin{cases} lu = \dfrac{1}{\alpha^2+\beta^2}\left(\ \ \alpha\dfrac{\partial u}{\partial x}+\beta\dfrac{\partial u}{\partial y}\right), \\ \bar{l}u = \dfrac{1}{\alpha^2+\beta^2}\left(-\beta\dfrac{\partial u}{\partial x}+\alpha\dfrac{\partial u}{\partial \beta}\right). \end{cases}$$

Posto per brevità

$$\frac{1}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}=\tau\,,\qquad \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}=\cos\vartheta\,,\qquad \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}=\sin\vartheta\,,$$

$$\begin{cases} \ \ \ \cos\vartheta\dfrac{\partial u}{\partial x}+\sin\vartheta\dfrac{\partial u}{\partial y}=\Theta u\,, \\ -\sin\vartheta\dfrac{\partial u}{\partial x}+\cos\vartheta\dfrac{\partial u}{\partial y}=\bar{\Theta}u\,, \end{cases}$$

si ha

$$\begin{cases} lu=\tau\Theta u\,, \\ \bar{l}u=\tau\bar{\Theta}u\,, \end{cases}$$

e siccome

$$\begin{aligned} (\Theta,\bar{\Theta})u &= \Theta\bar{\Theta}u-\bar{\Theta}\Theta u \\ &= \frac{\partial u}{\partial x}\left\{-\Theta\sin\vartheta-\bar{\Theta}\cos\vartheta\right\}+\frac{\partial u}{\partial y}\left\{\Theta\cos\vartheta-\bar{\Theta}\sin\vartheta\right\} \\ &= -\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial\vartheta}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial\vartheta}{\partial y}=-\{\Theta\vartheta\cdot\Theta u+\bar{\Theta}\vartheta\cdot\bar{\Theta}u\}\,, \end{aligned}$$

così risulta:

$$\begin{aligned} (l,\bar{l})u &= (\tau\Theta,\tau\bar{\Theta})u=\tau^2(\Theta,\bar{\Theta})u+\tau\Theta\tau\cdot\bar{\Theta}u-\tau\bar{\Theta}\tau\cdot\Theta u \\ &= -\tau^2\{\Theta\vartheta\cdot\Theta u+\bar{\Theta}\vartheta\cdot\bar{\Theta}u\}+\tau\Theta\tau\cdot\bar{\Theta}u-\tau\bar{\Theta}\tau\cdot\Theta u\,. \end{aligned}$$

Riponendo nell'ultimo membro gli operatori l, $\bar{l}$ al posto di Θ, $\bar{\Theta}$, otteniamo

$$(l,\bar{l})u=-\{l\vartheta+\bar{l}\log\tau\}\,lu+\{-\bar{l}\vartheta+l\log\tau\}\bar{l}u\,,$$

e per conseguenza, in base alla (16),

$$\begin{cases} \gamma_1= \ \ \ l\vartheta+\bar{l}\log\tau\,, \\ \gamma_2=-\bar{l}\vartheta+l\log\tau\,, \end{cases}$$

dove, ricordiamolo,

$$\tau = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}, \qquad \vartheta = \operatorname{arctg} \frac{\beta}{\alpha}.$$

Nella varietà rappresentativa di elemento lineare

$$\varphi = J\Phi = (\alpha^2 + \beta^2)(dx^2 + dy^2)$$

ϑ si interpreta come l'angolo che, in un punto generico (x, y), la curva C forma colla linea coordinata x $(y = \text{cost})$ passante pel punto.

Esempio II. – Equazione di tipo iperbolico riferita alle caratteristiche:

$$2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \alpha\frac{\partial u}{\partial x} + \beta\frac{\partial u}{\partial y} = 0, \qquad (\alpha \text{ e } \beta \text{ entrambi diversi da zero}).$$

Si ha manifestamente

$$A^{(11)} = A^{(22)} = 0, \qquad A^{(12)} = 1, \qquad \frac{1}{A} = -1;$$

$$A_{11} = A_{22} = 0, \qquad A_{12} = 1, \qquad A = -1;$$

$$B_1 = \alpha, \qquad B_2 = \beta;$$

da cui, essendo qui ancora costanti le A, e quindi $L^{(r)} = B_r$:

$$L^{(1)} = \alpha, \qquad L^{(2)} = \beta.$$

Con ciò

$$J = 2\alpha\beta \neq 0,$$

e le (18), (19) porgono

$$l^{(1)} = \frac{1}{2\beta}, \qquad l^{(2)} = \frac{1}{2\alpha};$$

$$\bar{l}^{(1)} = \frac{i}{2\beta}, \qquad \bar{l}^{(2)} = -\frac{i}{2\alpha}.$$

Le (15) si scrivono in conformità

$$\begin{cases} lu = \dfrac{1}{2\beta}\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{1}{2\alpha}\dfrac{\partial u}{\partial y}, \\ \bar{l}u = \dfrac{i}{2\beta}\dfrac{\partial u}{\partial x} - \dfrac{i}{2\alpha}\dfrac{\partial u}{\partial y}, \end{cases}$$

le quali equivalgono a

$$\begin{cases} (l - i\bar{l})u = \dfrac{1}{\beta}\dfrac{\partial u}{\partial x}, \\ (l + i\bar{l})u = \dfrac{1}{\alpha}\dfrac{\partial u}{\partial y}. \end{cases}$$

Formiamone la parentesi di POISSON. Si ha dai primi membri

$$(l - i\bar{l},\, l + i\bar{l})u = i(l, \bar{l})u - i(\bar{l}, l)u = 2i(l, \bar{l})u\ ;$$

dai secondi

$$\frac{1}{\beta}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\alpha}\frac{\partial u}{\partial y}\right) - \frac{1}{\alpha}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\beta}\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{1}{\alpha\beta}\left\{\frac{\partial\beta}{\partial y}\cdot\frac{1}{\beta}\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial\alpha}{\partial x}\cdot\frac{1}{\alpha}\frac{\partial u}{\partial y}\right\},$$

talchè

$$(l, \bar{l})u = \frac{1}{2i\alpha\beta}\left\{\frac{\partial\beta}{\partial y}\cdot\frac{1}{\beta}\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial\alpha}{\partial x}\cdot\frac{1}{\alpha}\frac{\partial u}{\partial y}\right\}.$$

Sostituendo a $(1/\beta)\partial u/\partial x$, $(1/\alpha)\partial u/\partial x$ le precedenti espressioni $(l - i\bar{l})u$, $(l + i\bar{l})u$, si ha in definitiva

$$(l, \bar{l})u = \frac{1}{2i\alpha\beta}\left\{\left(\frac{\partial\beta}{\partial y} - \frac{\partial\alpha}{\partial x}\right)lu - i\left(\frac{\partial\beta}{\partial y} + \frac{\partial\alpha}{\partial x}\right)\bar{l}u\right\}.$$

Il secondo membro, a norma della (16), deve coincidere con

$$-\gamma_1 lu + \gamma_2 \bar{l}u\ .$$

Sarà pertanto

$$\begin{cases} \gamma_1 = \dfrac{1}{2i\alpha\beta}\left(\dfrac{\partial\alpha}{\partial x} - \dfrac{\partial\beta}{\partial y}\right), \\ \gamma_2 = -\dfrac{1}{2\alpha\beta}\left(\dfrac{\partial\alpha}{\partial x} + \dfrac{\partial\beta}{\partial y}\right). \end{cases}$$

Anche più semplici si presentano in questo caso le combinazioni $\gamma_1 + i\gamma_2$, $\gamma_1 - i\gamma_2$ (invarianti al pari di γ_1, γ_2, e atte quindi a sostituirli, ove ciò faccia comodo). Si ha infatti

$$\begin{cases} \gamma_1 + i\gamma_2 = \dfrac{1}{i\alpha\beta}\dfrac{\partial\alpha}{\partial x}, \\ \gamma_1 - i\gamma_2 = -\dfrac{1}{i\alpha\beta}\dfrac{\partial\beta}{\partial y}. \end{cases}$$

5. - Equivalenza di due equazioni di tipo generale.

Data, assieme ad $E(u) = 0$, una seconda equazione

$$E'(u) = 0\ ,$$

riferita ad altre variabili qualisivogliono x'_1, x'_2, importa riconoscere se o meno esista una qualche trasformazione puntuale che realizzi il passaggio dall'una all'altra. In tal caso, e in tal caso soltanto, le due equazioni si dicono equivalenti.

Dalle considerazioni del § 3 scende immediatamente che, ove si abbia equivalenza, le formule di trasformazione fra le x e le x' devono rendere identicamente

$$\left\{\begin{array}{l} \gamma_1(x_1, x_2) = \gamma'_1(x'_1, x'_2)\ , \\ \gamma_2(x_1, x_2) = \gamma'_2(x'_1, x'_2)\ , \end{array}\right. \tag{20}$$

con manifesto significato delle lettere accentate.

Se queste equazioni (20) sono incompatibili, rimane acquisita la irriducibilità delle due equazioni. Quando c'è compatibilità, possono darsi tre casi: le (20) definiscono una effettiva trasformazione fra le x e le x'; esse si riducono ad una relazione unica fra le dette due coppie di variabili; oppure addirittura ad identità (le γ_1, γ_2, γ'_1, γ'_2 avendo valori costanti, rispettivamente eguali).

Nel primo caso basterebbe verificare materialmente se la trasformazione definita dalle (20) realizza o no il passaggio da $E(u)=0$ ad $E'(u)=0$. Nel secondo e terzo caso bisogna prendere in considerazione altre relazioni invariantive (per es. quella tra le curvature totali dei due ds^2). Potrà spesso convenire il farlo alla spicciolata, lasciandosi guidare da criteri particolari; per questo segnatamente che, constatata una qualsiasi incompatibilità, la discussione rimane esaurita.

In via teorica sarà bene ritenere che, *trovate due relazioni fra invarianti* [del tipo (20)]

$$\xi_r(x_1, x_2) = \xi'_r(x'_1, x'_2) \qquad (r = 1, 2), \tag{21}$$

le quali definiscano una effettiva trasformazione di variabili, se ne possono immediatamente associare altre quattro [6], *la cui compatibilità è condizione*

---

[6] La proposizione è analoga a quella che si incontra nella teoria dell'applicabilità di due superficie. Le equazioni da associare sono ivi in numero di *tre*. Cfr. per es. BIANCHI, loco cit., Cap. VII, § 99.

necessaria e sufficiente per l'equivalenza delle equazioni assegnate. Basta all'uopo eguagliare ai corrispondenti accentati i quattro invarianti

$$\frac{d\xi_1}{d\sigma}, \quad \frac{d\xi_2}{d\sigma}, \quad \frac{d\xi_1}{d\bar{\sigma}}, \quad \frac{d\xi_2}{d\bar{\sigma}}. \tag{22}$$

Che si tratti di condizione necessaria è chiaro senz'altro, poichè tutti gli elementi intrinseci debbono risultare identici, in virtù delle (21). Per riconoscere la sufficienza, si ragiona come segue:

1) Il sistema coordinato contravariante di una congruenza $[C]$ (rispetto a coordinate generiche x_1, x_2) è costituito dalle derivate $dx_r/d\sigma$ delle x_r secondo l'arco delle C; e analogamente si ha $\bar{l}^{(r)} = dx_r/d\bar{\sigma}$.

2) Quando in particolare si adottano ξ_1, ξ_2 quali variabili indipendenti, gli elementi dei sistemi contravarianti delle C e delle $\bar{C}$ sono precisamente le quattro derivate (22).

3) Riferendo alle speciali variabili ξ_1, ξ_2 le identità (valide per coordinate qualisivogliono)

$$a^{(rs)} = l^{(r)}l^{(s)} + \bar{l}^{(r)}\bar{l}^{(s)} \qquad (r, s = 1, 2),$$

la precedente osservazione [sub 2)] ci dice che gli elementi reciproci $a^{(rs)}$, e quindi i coefficienti della forma φ annessa ad $E(u) = 0$, sono combinazioni delle (22).

Ciò posto, dall'eguaglianza degli invarianti (22) ai corrispondenti accentati, risulterà senz'altro quella dei coefficienti delle due forme φ, φ', annesse rispettivamente ad $E(u) = 0$, $E'(u) = 0$, in quanto si riferiscano alle variabili $\xi_r = \xi'_r$.

La stessa eguaglianza implicherà inoltre coincidenza dei sistemi contravarianti $l^{(r)}$, $l'^{(r)}$, c. d. d.

Un'ultima osservazione. Oltre alle eventualità considerate [incompatibilità, univoca determinazione di una trasformazione di variabili mercè due equazioni di tipo (20)], può darsi che il confronto delle curvature (geodetiche e totali) e quello delle loro derivate, pur essendo esente da contraddizioni, non basti a definire una trasformazione fra le x e x'. Si dovrà allora concludere che è possibile in infiniti modi passare da $E(u) = 0$ ad $E'(u) = 0$. La discussione è del tutto conforme a quella che interviene quando si tratta dell'applicabilità di due superficie, presentandosi qui ancora la circostanza che possono al più introdursi tre costanti arbitrarie.

6. - I tre tipi speciali a invariante J nullo.

Se

$$J = \sum_{1}^{2}{}_{rs} A_{rs} L^{(r)} L^{(s)} = 0 ,$$

distingueremo le due eventualità (evidentemente invariantive rispetto ai cambiamenti di variabili):

S) si ha addirittura $L^{(1)} = L^{(2)} = 0$;

T) non è identicamente nullo il sistema contravariante $L^{(r)}$ $(r=1, 2)$.

Il sottocaso S) è subito esaurito. In $E(u)$ rimane soltanto il primo termine $\Delta_2^{(\Phi)} u = 0$. Si ha così un'equazione di BELTRAMI che, riferita alle caratteristiche, si riduce alla forma

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \, \partial y} = 0 .$$

Due qualisivogliono equazioni S) sono quindi sempre equivalenti; ben si intende, nell'ambito di tutte le trasformazioni puntuali (reali o complesse). Invece, nel campo reale, operando solo trasformazioni reali, bisognerebbe contemplare anche l'ipotesi delle caratteristiche immaginarie, cui corrisponde l'altra forma ridotta

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 .$$

E veniamo al tipo T).

Esso corrisponde manifestamente, nell'adottata interpretazione geometrica, al caso in cui la congruenza $[C]$, definita dalle equazioni differenziali

$$\frac{dx_1}{L^{(1)}} = \frac{dx_2}{L^{(2)}} ,$$

consta di linee di lunghezza nulla (in causa di $J = 0$). Dacchè J è identicamente nullo, non possiamo valercene per dar forma canonica alla equazione. Conviene ricorrere a qualche altro invariante. D'ordine zero, rispetto al sistema L_r, c'è il solo J. Siamo pertanto condotti a passare al prim'ordine, prendendo in considerazione, accanto al sistema L_r, anche il suo derivato covariante L_{rs}, e un qualche invariante del sistema così esteso. Giova fissarsi sul seguente:

(22)
$$\Omega = \frac{1}{2}\sum_{1}^{2}{}_{rs}\,\varepsilon^{(rs)}L_{rs} = \frac{L_{12}-L_{21}}{2\sqrt{A}} = \frac{\dfrac{\partial L_1}{\partial x_2}-\dfrac{\partial L_2}{\partial x_1}}{2\sqrt{A}},$$

il cui annullarsi esprime che

$$L_1\,dx_1 + L_2\,dx_2$$

costituisce un differenziale esatto

Supponiamo dapprima $\Omega \neq 0$, e cerchiamo come esso si altera, quando $E(u)$ si moltiplica per ϱ. In conformità alla notazione adoperata nei precedenti §§, chiameremo ω il nuovo Ω. Dacchè si ha (§ 3) $l_r = L_r$, mentre, per la (8), $\varphi = (1/\varrho)\Phi$ e quindi $\sqrt{a} = (1/\varrho)\sqrt{A}$, l'ultima delle espressioni (22) di Ω, applicata ad ω, dà

$$\omega = \frac{\dfrac{\partial l_1}{\partial x_2}-\dfrac{\partial l_2}{\partial x_1}}{2\sqrt{a}} = \varrho\,\frac{\dfrac{\partial L_1}{\partial x_2}-\dfrac{\partial L_2}{\partial x_1}}{2\sqrt{A}} = \varrho\Omega\,.$$

ω è quindi legato ad Ω, come già j ad J. Si può pertanto — e noi converremo di attenerci a questo criterio — assumere come forma canonica $e(u)$ del primo membro di $E(u) = 0$ quella che risulta dalla moltiplicazione per $1/\Omega$. Il corrispondente invariante ω ha così il valore 1.

Riferiamoci ormai ad $e(u) = (1/\Omega)E(u)$, e designiamo con l_{rs} le derivate covarianti delle l_r $(=L_r)$, rispetto all'annessa forma $\varphi = (1/\varrho)\Phi = \Omega\Phi$. In virtù dell'identità

$$j = \sum_{1}^{2}{}_r\, l_r l^{(r)} = 0\,,$$

e sue derivate,

$$\sum_{1}^{2}{}_r\, l_{rs} l^{(r)} = 0 \qquad (s = 1, 2),$$

potremo attribuire alle l_{rs} la forma

(23)
$$l_{rs} = l_r m_s\,,$$

essendo m_1, m_2 elementi di un sistema covariante semplice.

Avremo, badando alla (22),

(22′)
$$\frac{1}{2\sqrt{a}}\begin{vmatrix} l_1 m_1 \\ l_2 m_2 \end{vmatrix} = \frac{l_{12}-l_{21}}{2\sqrt{a}} = \omega = 1\,.$$

Complessivamente i due sistemi semplici l_r, m_r $(r = 1, 2)$, associati alla forma φ, posseggono quattro invarianti (razionali) indipendenti, cioè, per es.,

$$(24) \qquad \begin{cases} j = \sum_1^2 {}_r\, l_r l^{(r)} = \sum_1^2 {}_{rs}\, a^{(rs)} l_r l_s \,, \\ j_1 = \sum_1^2 {}_r\, l_r m^{(r)} = \sum_1^2 {}_{rs}\, a^{(rs)} l_r m_s \,, \\ j_2 = \sum_1^2 {}_r\, m_r m^{(r)} = \sum_1^2 {}_{rs}\, a^{(rs)} m_r m_s \,, \\ \omega = \dfrac{1}{2\sqrt{a}} \begin{vmatrix} l_1 m_1 \\ l_2 m_2 \end{vmatrix} . \end{cases}$$

Viceversa questi quattro invarianti (in concorso coi coefficienti a_{rs} della forma φ) definiscono (in termini finiti) gli elementi l_r, m_r dei due sistemi; e in particolare l'operatore

$$lu = \sum_1^2 {}_r\, l^{(r)} \frac{\partial u}{\partial x_r} .$$

Ne desumiamo che *gli invarianti di una equazione* $E(u) = 0$ *di tipo* T) *sono, per* $\Omega \neq 0$, *tutti e soli quelli che spettano al sistema delle due funzioni* j_1, j_2 (non occorre considerare j ed ω che si riducono a costanti) *associate alla forma differenziale* $\varphi = \Omega\Phi$.

Ciò ritenuto, per decidere dell'equivalenza di due equazioni $E(u) = 0$, $E'(u) = 0$, entrambe di tipo T), si imposterà la discussione prendendo in esame le due equazioni

$$j_1 = j_1' \,, \qquad j_2 = j_2' \,,$$

con manifesto significato di j_1', j_2'.

Se esse danno luogo a incompatibilità, l'equivalenza rimane esclusa; se definiscono una effettiva trasformazione fra le variabili x_1, x_2 e le x_1', x_2', condizione necessaria e sufficiente di equivalenza è quella dei rispettivi ds^2; ecc.

Rimane da considerare il *caso particolare in cui* (non solo J, ma anche) $\Omega = 0$.

Si riconosce facilmente che ogni equazione siffatta è riducibile alla forma

$$\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{\partial u}{\partial y} + u\right\} = 0 \,,$$

ed è quindi sempre equivalente ad ogni altra equazione dello stesso tipo T) a invariante $\Omega = 0$.

Immaginiamo infatti di riferire la assegnata $E(u) = 0$ alle caratteristiche. Essa potrà scriversi

$$(25) \qquad 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \alpha\frac{\partial u}{\partial x} + \beta\frac{\partial u}{\partial y} = 0\,,$$

avendosi così [come già a § 4, Esempio II]

$$A_{11} = A_{22} = 0\,, \qquad A_{12} = 1\,, \qquad A = -1\,;$$
$$L^{(1)} = \alpha\,, \qquad L^{(2)} = \beta\,.$$

La condizione

$$J = \sum_{1}^{2}{}_{rs} A_{rs} L^{(r)} L^{(s)} = 2\alpha\beta = 0$$

implica che si annullino α o β, non però entrambi, perchè altrimenti si ricadrebbe nel tipo S).

Potremo supporre (scambiando all'occorrenza x con y) che sia precisamente $\alpha \neq 0$, $\beta = 0$. Gli elementi del sistema covariante L_r sono in conformità

$$L_1 = \sum_{1}^{2}{}_{r} A_{1r} L^{(r)} = 0\,, \qquad L_2 = \sum_{1}^{2}{}_{r} A_{2r} L^{(r)} = \alpha\,.$$

L'annullarsi di Ω sta ad esprimere, come già abbiamo rilevato, che

$$L_1\, dx_1 + L_2\, dx_2\,,$$

cioè, nel caso presente, $\alpha\, dy$, è un differenziale esatto. α dipende quindi dalla sola y, sicchè diviene possibile sostituire ad y una sua funzione y^*, definita da

$$dy^* = \frac{\alpha}{2}\, dy\,.$$

Con questa sostituzione, la (25), tenuto conto che $\beta = 0$, diviene

$$\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{\partial u}{\partial y^*} + u\right\} = 0\,,$$

che è precisamente l'annunciata forma ridotta.

7. - Equazioni con n variabili indipendenti.

Per $n > 2$, la moltiplicazione di una $E(u)$ per ϱ, non assoggetta più l'invariante

$$J = \sum_1^n {}_r \, L_r L^{(r)}$$

a semplice moltiplicazione per ϱ.

Si ha invece dalle (11) e (11)', badando alle identità

$$\left\{ \begin{aligned} &\sum_1^n {}_r \, L_r \varrho^{(r)} = \sum_1^n {}_r \, L^{(r)} \varrho_r = \sum_1^n {}_r \, L^{(r)} \frac{\partial \varrho}{\partial x_r}, \\ &\sum_1^n {}_r \, \varrho_r \varrho^{(r)} = \sum_1^n {}_{rs} \, A^{(rs)} \frac{\partial \varrho}{\partial x_r} \frac{\partial \varrho}{\partial x_s} = \Delta^{(\Phi)} \varrho, \end{aligned} \right.$$

la relazione

$$j = \varrho J + (n-2) \sum_1^n {}_r \, L^r \frac{\partial \varrho}{\partial x_r} + \frac{\left(\frac{n}{2} - 1\right)^2}{\varrho} \Delta^{(\Phi)} \varrho . \tag{26}$$

Come si vede, ϱ interviene assieme alle sue derivate prime; anzi queste, per $n > 2$, intervengono certo essenzialmente, non potendo mai sparire l'ultimo termine (attesa l'irriducibilità di Φ). In vista di ciò, per $n > 2$, sarebbe possibile, senza alcuna eccezione ([7]), valersi del moltiplicatore ϱ in guisa da rendere $j = 1$. Ma il moltiplicatore stesso non ne risulterebbe univocamente determinato, dovendo soltanto verificare una equazione a derivate parziali del primo ordine [la (26), in cui si faccia $j = 1$].

Conviene pertanto, secondo il criterio esposto alla fine del § 2, prendere in considerazione qualche altro invariante (di fronte ai cambiamenti di variabili), il quale, quando la $E(u)$ si moltiplica per ϱ, subisca — se possibile — appena una trasformazione moltiplicativa.

A ciò si è condotti con tutta facilità, associando al sistema L_r il suo derivato covariante L_{rs} $(r, s = 1, 2, ..., n)$ (rispetto alla forma Φ). Basta anzi aver riguardo ad una sua parte soltanto, cioè al sistema emisimmetrico

$$G_{rs} = - G_{sr} = L_{rs} - L_{sr} . \tag{27}$$

Ove si tenga presente che le *differenze* delle derivate covarianti

([7]) Nel caso di $n = 2$, si presentava l'eccezione $J = 0$.

$L_{rs} - L_{sr}$ coincidono colle differenze delle analoghe derivate ordinarie

$$\frac{\partial L_r}{\partial x_s} - \frac{\partial L_s}{\partial x_r},$$

si vede subito che le G_{rs} si identificano coi coefficienti del *covariante bilineare* $\varkappa$ della forma pfaffiana $\sum_r{}_1^n L_r dx_r$:

$$\varkappa = \delta\left(\sum_r{}_1^n L_r dx_r\right) - d\left(\sum_r{}_1^n L_r dx_r\right).$$

Risultando dalle (11')

$$\sum_r{}_1^n l_r dx_r = \sum_r{}_1^n L_r dx_r + \left(\frac{n}{2} - 1\right) d \log \varrho, \tag{28}$$

le due forme $\sum_r{}_1^n l_r dx_r$, $\sum_r{}_1^n L_r dx_r$ differiscono per un differenziale esatto. Esse hanno quindi identico covariante bilineare, talchè

$$g_{rs} = G_{rs}, \tag{29}$$

le g_{rs} essendo formate colle derivate delle l_r, come le G_{rs} con quelle delle L_r.

Consideriamo dapprima il *caso particolare in cui si annulla identicamente il covariante* $\varkappa$ (circostanza, per quanto abbiamo rilevato, invariante anche di fronte alla moltiplicazione di $E(u)$ per ϱ). Sotto questa ipotesi $\sum_r{}_1^n L_r dx_r$ è il differenziale totale di una funzione V, e si può scegliere ϱ in guisa che $\varrho E(u)$ si riduca al solo termine $\Delta_2^{(\varphi)} u$. Basta infatti, badando alla (28), rendere nullo il suo secondo membro

$$dV + \left(\frac{n}{2} - 1\right) d \log \varrho,$$

ciò che individua ϱ a meno di un fattore costante. Tutte le l_r vanno allora a zero; con esse le $l^{(r)}$, e quindi lu. Ridotta l'equazione alla forma $\Delta_2^{(\varphi)} u = 0$ (per quanto φ si trovi individuato a meno di un fattore *costante*), la classificazione si fa come per i ds^2 a n variabili.

Caso generale ($\varkappa$ non identicamente nullo).

Il sistema delle due forme

$$\Phi = \sum_{rs}{}_1^n A_{rs} dx_r dx_s, \qquad \varkappa = \sum_{rs}{}_1^n G_{rs} dx_r dx_s,$$

quadratica la prima, bilineare alterna la seconda, possiede n invarianti razionali (di fronte alle trasformazioni di variabili), definiti per es. come i coefficienti $J_1, J_2, ..., J_n$ della nota equazione

$$(30)\qquad \frac{1}{A}\begin{vmatrix} \omega A_{11} & \omega A_{12}-G_{12} & \dots & \omega A_{1n}-G_{1n} \\ \omega A_{21}-G_{21} & \omega A_{22} & \dots & \omega A_{2n}-G_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \omega A_{n1}-G_{n1} & \omega A_{n2}-G_{n2} & \dots & \omega A_{nn} \end{vmatrix}$$
$$= \omega^n + J_1\omega^{n-1} + J_2\omega^{n-2} + \dots + J_{n-1}\omega + J_n = 0 .$$

Si vede subito che le J d'indice dispari si annullano identicamente, in causa dell'emisimmetria delle G_{rs}. Non così, almeno in generale, quelle d'indice pari ([8]).

Comunque, quando $E(u)$ si moltiplica per ϱ, tutti gli invarianti J, come tosto risulta dalla (30), attese le identità

$$a_{rs} = \frac{1}{\varrho} A_{rs}, \qquad a = \frac{1}{\varrho^n} A, \qquad g_{rs} = G_{rs}, \qquad (r, s = 1, 2, \dots, n),$$

subiscono alterazioni puramente moltiplicative. In modo preciso si ha, per $\nu = 1, 2, \dots, n/2$ ovvero $(n-1)/2$ secondochè n è pari o dispari,

$$j_{2\nu} = \varrho^{2\nu} J_{2\nu},$$

le $j_{2\nu}$ riferendosi naturalmente ad $e(u)$.

Supposto $J_{2\nu} \neq 0$, si può assumere $\varrho = 1/\sqrt[2\nu]{J_{2\nu}}$, ossia

$$e(u) = \frac{1}{\sqrt[2\nu]{J_{2\nu}}} E(u),$$

come forma canonica del primo membro dell'equazione. Essa rimane caratterizzata dalla circostanza che il corrispondente invariante $j_{2\nu}$ ha il valore 1.

Qualora si annullassero tutte le J (nel qual caso l'equazione (30) ha tutte le radici nulle) bisognerebbe esperire altri invarianti, per es. quelli intrinseci della forma Φ (prendendo in considerazione il sistema di RIEMANN a quattro indici, formato colle A_{rs} e loro derivate prime e seconde), ovvero quelli provenienti dall'associazione a Φ e $\varkappa$ del sistema G_{rst}, derivato covariante delle G_{rs}, rapporto a Φ, ecc. Ma una classificazione completa, come quella istituita per $n = 2$, sembra richiedere discussioni laboriose.

([8]) Nel campo reale [quando cioè sono reali i coefficienti di $E(u)$], si può anzi affermare che J_2 è certo diversa da zero, ogniqualvolta sia definita la forma Φ.

XXVI.

SULLE FUNZIONI CHE AMMETTONO UNA FORMULA D'ADDIZIONE DEL TIPO $f(x+y) = \sum_1^n {}_i X_i(x) Y_i(y)$.

« Rend. Acc. Lincei », ser. 5ª, vol. $XXII_2$ (1913_2),

pp. 181-183.

1. – L'esponenziale $e^{\omega x}$ (ω costante arbitraria), le funzioni trigonometriche $\cos \omega x$, $\sin \omega x$, i polinomî $P(x)$ offrono altrettanti esempî di funzioni $f(x)$, che verificano un teorema di addizione della forma

$$(1) \qquad f(x+y) = \sum_i^n {}_i X_i(x) Y_i(y) .$$

Basta manifestamente assumere

$$n = 1 , \qquad X_1 = e^{\omega x} , \qquad Y_1 = e^{\omega y}$$

per l'esponenziale;

$$n = 2 , \quad X_1 = \cos \omega x , \quad Y_1 = \cos \omega y , \quad X_2 = \sin \omega x , \quad Y_2 = - \sin \omega y$$

per cos ωx;

$$n = \text{grado di } P(x) \text{ aumentato di una unità ...; ecc.}$$

In generale, però, una funzione $f(x)$ (uniforme e regolare in un certo campo, al quale intendiamo riferirci) non soddisfa ad alcuna equazione funzionale (1), in cui n rappresenti un intero finito. Si può soltanto (e in infiniti modi, per es. mercè la serie di TAYLOR) farla rientrare nel caso limite $n = \infty$. Ritenuta la circostanza essenziale che il secondo membro della (1) consti di un numero finito di termini, vien fatto naturalmente di domandarsi: Quali sono *tutte* le funzioni uniformi $f(x)$ per cui vale un teorema di addizione (1)? La risposta è che le somme di un numero finito di termini del tipo $P(x)e^{\omega x}$ (le P designando polinomî, e le ω costanti reali o complesse) esauriscono tutti i casi possibili: conclusione puramente negativa, in quanto non collega alla (1) alcuna nuova trascendente, annoverabile tuttavia fra le proprietà caratteristiche. Mi permetto pertanto di farne oggetto di brevissima comunicazione.

2. – Cominciamo coll'osservare che le funzioni $X_i(x)$ (e analogamente le Y_i) si possono supporre linearmente indipendenti. Infatti, qualora alcune tra esse fossero combinazioni lineari delle rimanenti, si potrebbero sostituire con queste combinazioni. Il secondo membro della (1) manterrebbe allora la stessa forma, salvo un più piccolo valore di n.

Riterremo, in conformità, che siano diversi da zero i due wronskiani:

$$A = \begin{vmatrix} X_1 & X_2 & \dots & X_n \\ X_1' & X_2' & \dots & X_n' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ X_1^{(n-1)} & X_2^{(n-1)} & \dots & X_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

delle X, e B delle Y.

3. – *Conseguenze della* (1). *Condizione necessaria per la funzione* f. – Deriviamo la (1) una prima volta rispetto ad x, una seconda volta rispetto ad y. Dall'eguaglianza dei primi membri segue

$$\sum_1^n {}_i X_i' Y_i = \sum_1^n {}_i X_i Y_i' . \tag{2}$$

Derivando successivamente, rispetto ad y, $n-1$ volte, e formando sistema colla (2), si hanno n equazioni lineari nelle X', risolubili rispetto alle X' stesse, in forza di $B \neq 0$. Le espressioni risolute sono del tipo

$$X_i' = \sum_1^n {}_j \eta_{ij} X_j \qquad (i = 1, 2, \dots, n),$$

le η designando funzioni della y.

Dacchè la (1) e, con essa, le derivate e loro combinazioni, devono sussistere per valori qualisivogliano di x, y (appartenenti ad un certo campo), potremo in particolare attribuire ad y, nelle espressioni testè ricavate per le X_i', un valore fisso y_0 (del campo). I coefficienti $\eta_{ij}(y_0)$ divengono, così, altrettante costanti a_{ij}, sicchè intanto *le* X_i *sono necessariamente soluzioni di un sistema*

$$X_i' = \sum_j{}_1^n a_{ij}X_j \qquad (i = 1, 2, ..., n), \tag{3}$$

lineare, a coefficienti costanti.

Notiamo, per incidenza, che analoga proprietà spetta alle Y_i. Ove si designino con b_{ij} i coefficienti del corrispondente sistema, si trae dalla (2) [attesa l'indipendenza così delle $X_i(x)$, come delle $Y_i(y)$] $b_{ij} = a_{ji}$ $(i, j = 1, 2, ..., n)$. *Le* Y_i *sono quindi soluzioni del sistema aggiunto a* (3).

Ma il risultato relativo alle X_i basta da solo allo scopo essenziale di caratterizzare le funzioni f cui compete un teorema di addizione della forma (1). La (1) stessa implica infatti (ponendovi, come sopra, $y = y_0$) che f sia combinazione lineare a coefficienti costanti di $X_1, X_2, ..., X_n$. Lo stesso può dirsi, in virtù delle (3), delle derivate successive di f rapposto ad x: $f', f'', ..., f^{(n)}$. L'eliminazione delle X dà luogo ad una *equazione in* f, *lineare, omogenea, a coefficienti costanti* (d'ordine, al più, eguale ad n). Questa è dunque *condizione necessaria.*

4. – Ma è anche *sufficiente.* Infatti, ogni integrale $f(x)$ d'una tale equazione è somma di un numero finito di termini del tipo $P(x)e^{\omega x}$ (P polinomio in x, ω costante).

$f(x + y)$ è quindi esprimibile sotto la forma (1), c. d. d.

XXVII.

THÉORÈME DE TORRICELLI ET DÉBUT DE L'ÉCOULEMENT

« Comptes Rendus de l'Acad. des Sciences de Paris », t. CLVII (1913), pp. 481-484.

1. – La vitesse d'écoulement d'un liquide pesant par un (petit) orifice s'exprime, moyennant le théorème de TORRICELLI, sous la forme

$$v^2 = 2gh \, , \tag{1}$$

h étant le niveau de l'orifice au-dessous de la surface libre du liquide.

Depuis BERNOULLI, la démonstration qu'on en donne classiquement en Hydrodynamique [1] envisage le cas du régime permanent. Il n'est pas à ma connaissance qu'on ait signalé la validité de (1) aussi pour le début du mouvement, c'est-à-dire à l'instant où l'écoulement commence par la brusque ouverture d'un orifice dans la paroi d'un récipient contenant du liquide en repos. Je vais l'établir d'une manière bien élémentaire, en invoquant uniquement le théorème des forces vives. On constatera de la sorte (n. 3) que, quelle que soit l'étendue de l'orifice Ω, la formule (1) définit *rigoureusement* la vitesse initiale pour chaque élément $d\Omega$ (h se rapportant, bien entendu, à l'élément correspondant).

2. – Cette remarque fournit un renseignement, sans doute intéressant au point de vue pratique, mais encore très particulier sur l'état des vitesses prises par les particules liquides, immédiatement après l'ouverture de l'orifice. La question se pose de déterminer complètement ces vitesses initiales. Nous reconnaîtrons sans peine (n. 4) qu'analytiquement tout revient à un problème harmonique mixte pour l'intérieur du vase, la condition à l'orifice étant précisément la valeur torricellienne de v.

---

[1] Voir le Traité de M. P. APPELL, 2e édition, t. III, p. 371.

3. – Soient donc $d\Omega$ un élément de l'orifice, et v la valeur absolue de la vitesse avec la quelle se commence l'écoulement à travers $d\Omega$. v_n désignera la composante de cette vitesse suivant la normale extérieure à $d\Omega$.

Après un temps infiniment petit dt, il se sera écoulé, à travers $d\Omega$, une quantité élémentaire de liquide

$$dm = \mu \, d\Omega \, v_n \, dt \, ,$$

en représentant la densité par μ.

Cette masse dm, qui était au repos avant l'ouverture, acquiert partant, pendant le temps très court dt, la force vive

$$\tfrac{1}{2} \, dm v^2 \, . \tag{2}$$

Au moment même de l'ouverture, dm se trouvait à l'intérieur du vase, affectant une forme prismatique (aux infiniment petits d'ordre supérieur près). Il nous suffit d'ailleurs de retenir que sa surface terminale était nécessairement constituée par $d\Omega$, soumise à la pression atmosphérique p_0, et par une portion complémentaire $d\Omega_1$, sur laquelle agissait la pression

$$p_1 = p_0 + \mu g h \, ,$$

correspondant au régime hydrostatique du récipient.

La résultante de ces pressions équivaut clairement à une force

$$(p_1 - p_0) \, d\Omega = \mu \, gh \, d\Omega \, ,$$

dirigée normalement à $d\Omega$ (vers l'extérieur). Vis-à-vis d'elle, le poids de l'élément dm,

$$g \, dm = \mu g \, d\Omega \cdot v_n \, dt \, ,$$

peut être négligé. Le travail, accompli pendant dt par toutes les forces agissantes sur dm, est par suite

$$\mu gh \, d\Omega \cdot v_n \, dt = dm \cdot gh \, . \tag{3}$$

Le théorème des forces vives exprime l'égalité entre (2) et (3), d'où la formule (1). C. q. f. d.

4. – On a ainsi la valeur absolue de la vitesse initiale dans un point quelconque de l'orifice. Il reste à déterminer sa direction, et, plus généralement, toute la distribution des vitesses initiales à l'intérieur du vase. On s'appuie pour cela sur la circonstance que la production instantanée ([2]) des vitesses, dans les conditions supposées, est un phénomène conservatif. Il n'exige en effet que la brusque ouverture d'un orifice, parfaitement réalisable (du moins en théorie), sans dépense d'énergie. Dès lors, les vitesses initiales communiquées au liquide doivent admettre un potentiel φ, fonction harmonique (à cause de l'incompressibilité) et régulière à l'intérieur du vase.

Les conditions à la frontière sont:

a) $d\varphi/dn = 0$ sur les parois du vase (n indiquant évidemment la direction normale;

b) $(\partial\varphi/\partial x)^2 + (\partial\varphi/\partial y)^2 + (\partial\varphi/\partial z)^2 = 2gh$ en tout point de Ω, d'après ce qu'on vient de dire;

c) $\varphi = 0$ sur la surface libre supérieure du liquide. On se rend compte de cette dernière condition en ayant égard à l'interprétation de $\mu\varphi$. C'est, comme on sait ([3]), la pression de percussion due à la discontinuité φ du potentiel des vitesses. Or toute surface libre est constamment soumise à la pression atmosphérique; elle ne peut, par conséquent, ressentir aucune pression de percussion; d'où $\varphi = 0$.

5. – Il ne sera peut-être pas inutile d'avertir que la même condition (pression exactement égale à la pression atmosphérique) ne subsiste pas à l'orifice *pendant l'ouverture*, mais seulement *immédiatement aprés*, dès que s'est établi le régime des vitesses initiales correspondant au potentiel φ. La justification intuitive de cette distinction apparaît aisément pourvu qu'on fasse attention aux circonstances réelles du phénomène envisagé. Nous sommes passé à la limite, en considérant comme instantanés l'ouverture de l'orifice et l'etablissement des vitesses initiales. En fait, ils ont une durée très courte, mais finie, et dans ce bref délai il se produit quelque chose d'extrêmement compliqué, qui ne laisse pas apercevoir, même schématiquement, l'allure de la pression sur Ω, tandis qu'au niveau supérieur du liquide, dans le vase, c'est évidemment la pression atmosphérique qui règne toujours. Il est au contraire facile, comme on l'a vu, de fixer, justement pour les points de Ω, la valeur

---

([2]) C'est évidemment une abstraction mathématique que de regarder comme instantanée l'acquisition des vitesses par les différentes particules fluides. En réalité, l'ébranlement se propage, à partir de l'orifice, d'autant plus rapidement que le fluide est plus élastique, la vitesse de propagation devenant infinie pour un fluide rigoureusement incompressible. Nous admettons bien qu'il soit ainsi. Mais, même pour un gaz, il serait tout à fait légitime (tant qu'on vise la mécanique, relativement grossière, de l'écoulement) d'assimiler à un mouvement impulsif (rentrant dans la théorie ordinaire des percussions) ce qui se passe dans la masse gazeuse au moment de l'ouverture de l'orifice.

([3]) Voir par exemple LAMB, *Hydrodynamics* (Cambridge, 1906), p. 11.

absolue de la vitesse initiale de sortie; d'où, *a posteriori*, la conclusion que l'effet dynamique à l'orifice se résume dans une pression de percussion $\mu\varphi$. Cette pression (φ étant la valeur que prend, sur Ω, la fonction harmonique caractérisée par a, b, c) dépend toutefois fonctionnellement des données: forme du vase et de l'orifice.

6. – S'il s'agit d'un orifice rectangulaire allongé, percé dans le fond du vase (auquel cas l'écoulement se fait sensiblement par plans verticaux), le problème harmonique mixte peut être résolu par des formules expressives, ainsi que l'a montré Betti dès 1850 (4). Il faut remarquer toutefois que Betti rapportait sa recherche à l'écoulement permanent. On sait bien aujourd'hui, d'après Kirchhoff et Rayleigh, que la mise en équation en est différente. La pénétrante analyse de Betti ne garde pas moins un intérêt physique, puisqu'elle convient au régime des vitesses, qui suit immédiatement l'ouverture d'un orifice.

(4) *Sopra la determinazione analitica dell'efflusso dei liquidi per una piccolissima apertura*, « Annali di Scienze matematiche e fisiche » (di Tortolini) t. I, pp. 425-443 (Roma, 1850); ou bien t. I de ses *Opere matematiche* (Milano, 1903), pp. 3-16.

XXVIII.

SFORZO DI REGIME E SFORZO D'AVVIAMENTO PER VEICOLI TRAINATI

« Atti Ist. Veneto di Sc., lett. ed arti », t. LXXIII (1914),

pp. 931-946.

La resistenza offerta da un veicolo al traino su strada pianeggiante viene di solito valutata [1] come somma di due contributi indipendenti: uno dovuto all'attrito volvente, che si oppone al rotolamento delle ruote sul suolo; l'altro dovuto all'attrito radente, che incontrano i mozzi, girando attorno ai rispettivi assi (rigidamente connessi col telaio del veicolo).

In realtà i due attriti sono concomitanti, e non è a priori lecito prenderli in considerazione separatamente, sommando poi le corrispondenti resistenze passive, ma non c'è alcuna difficoltà a tener debito conto delle due circostanze ad un tempo, sì da fissarne le mutue perturbazioni, e l'ambito in cui queste sono trascurabili. Basta (adottando, ben si intende, le schematizzazioni abituali) una discussione elementare di forze complanari in equilibrio: relativo od assoluto, secondochè si tratta di caratterizzare lo sforzo di regime o quello d'avviamento.

Il risultato della discussione qui appresso istituita è di confermare, come ben prevedibile, le note conclusioni qualitative circa il vantaggio degli assi sottili e delle grandi ruote; e di giustificare altresì, nei riguardi quantitativi, il criterio semplicista della sovrapposizione, anche per strade in pendenza, constatando che, quanto al valore dello sforzo, il divario è, pei bisogni della pratica, effettivamente trascurabile.

Non del pari prevedibili col semplice buon senso sono le due circostanze seguenti, che pur emergeranno dalla nostra discussione:

---

[1] Cfr. per es. CAVALLI, *Elementi di meccanica applicata alle macchine*, Napoli, Trani, 1908, pp. 91-93; od anche KECK, *Vorträge über Mechanik*, Erster Teil, IV edizione curata da L. HOTOPP, Hannover, Helwing, 1913, pp. 299-300.

1) Quando la ruota gira uniformemente, l'appoggio dell'asse sul mozzo è spostato dalla posizione più bassa *non sempre* all'indietro, come la trattazione ordinaria lascia supporre ([2]), ma talora anche in avanti, e ciò secondo lo stato della strada. Per strade buone (conformemente al caso limite di un attrito volvente addirittura trascurabile) si ha spostamento indietro; ma, su strade cattive, pur nell'ambito dei casi concreti, può l'attrito volvente divenire così forte da provocare uno spostamento dell'appoggio in avanti. In modo preciso, detti r e ϱ i raggi della ruota e del suo mozzo, φ l'angolo d'attrito radente (dinamico) fra mozzo e asse, h il parametro d'attrito volvente della ruota sul piano stradale, si ha spostamento posteriore o anteriore secondochè

$$(r - \varrho)\operatorname{tg}\varphi \gtrless h\,.$$

2) Sulle strade buone, cioè per $(r - \varrho)\operatorname{tg}\varphi > h$, lo sforzo d'avviamento è superiore (per lo più notevolmente superiore) allo sforzo di regime; sulle strade cattive $[(r - \varrho)\operatorname{tg}\varphi < h]$ coincide sensibilmente con esso.

1. - Preliminari.

Sia $r = \overline{OA}$ il raggio di una ruota di vettura, $\varrho = \overline{OB}$ quello del suo mozzo, supponendosi che nel mozzo sia inserito l'asse cilindrico comune anche alla ruota gemella, rigidamente collegato col telaio della vettura.

Sia φ l'angolo di attrito *dinamico* fra asse e mozzo (il vano essendo, come di consueto, ben lubrificato).

Suppongasi che il moto della vettura sia traslatorio uniforme su strada orizzontale, e che sulla ruota graviti una determinata porzione p del peso della vettura, trasmesso al mozzo dall'asse che vi si appoggia.

La ruota si può risguardare come un solido in moto roto-traslatorio uniforme, così che dovranno trovarsi in equilibrio *relativo* le varie forze ad essa applicate, inclusavi, ben si intende, la forza centrifuga.

Semprechè il peso proprio della ruota sia piccolo di fronte a p, sarà lecito prescinderne; e non ci sarà bisogno di considerare le forze centrifughe dei singoli elementi materiali della ruota, perchè (ammesso, ben si intende, che la ruota sia centrata) queste sono due a due eguali e direttamente opposte.

([2]) Veggasi ad es. (per citare soltanto un recente trattato di autorevole cultore di meccanica teorica) LAMB: *Statics*, Cambridge, University Press, 1912, p. 65.

In definitiva, si fanno, almeno sensibilmente, equilibrio le sollecitazioni che la ruota subisce da parte del suolo e da parte dell'asse della vettura. Queste sollecitazioni comprendono forza e momento (attrito volvente). Potremo tuttavia trascurare, per l'appoggio dell'asse sul mozzo, l'attrito volvente di fronte al radente.

2. - Specificazione della sollecitazione.

Le azioni da considerare sono quindi:

a) La reazione $\boldsymbol{R}_1$ del suolo, applicata nel punto di contatto A, non necessariamente normale al suolo (verticale), ma comunque contenuta nel piano della ruota.

b) L'attrito di rotolamento fra ruota e suolo, rappresentato da un momento perpendicolare al piano della ruota. Esso si esplica in senso opposto al rotolamento con intensità hp, h essendo il relativo parametro.

c) Lo sforzo $\boldsymbol{R}_2$ trasmesso dall'asse al mozzo della ruota, contenuto esso pure nel piano della ruota. La componente verticale di $\boldsymbol{R}_2$ si riduce, per ipotesi, al peso p. La componente orizzontale, che indicheremo con τ, rappresenta lo *sforzo di trazione*, sotto cui la ruota, nelle condizioni supposte, gira uniformemente, vincendo le resistenze passive. Per rendersene conto, basta pensare che, in virtù del principio di reazione, $-\boldsymbol{R}_2$ è la forza cui sottostà l'asse, solidale colla vettura. D'altra parte tutta la resistenza al moto progressivo della vettura proviene dagli appoggi degli assi sulle ruote. Perciò la componente orizzontale di $-\boldsymbol{R}_2$ è il contributo di resistenza spettante alla nostra ruota (su cui gravita il peso p). Tale componente è quindi opposta al moto, e la sua intensità, che è poi τ, misura lo sforzo di trazione.

Va in pari tempo fissata la circostanza che, avendo $\boldsymbol{R}_2$ componente orizzontale nel senso del moto, la sua *linea d'azione* si trova necessariamente *spostata dalla verticale* pure *nel senso del moto*.

Quale è il punto d'applicazione di $\boldsymbol{R}_2$? In generale non sarà B, punto più basso del mozzo, come accadrebbe se la ruota non girasse.

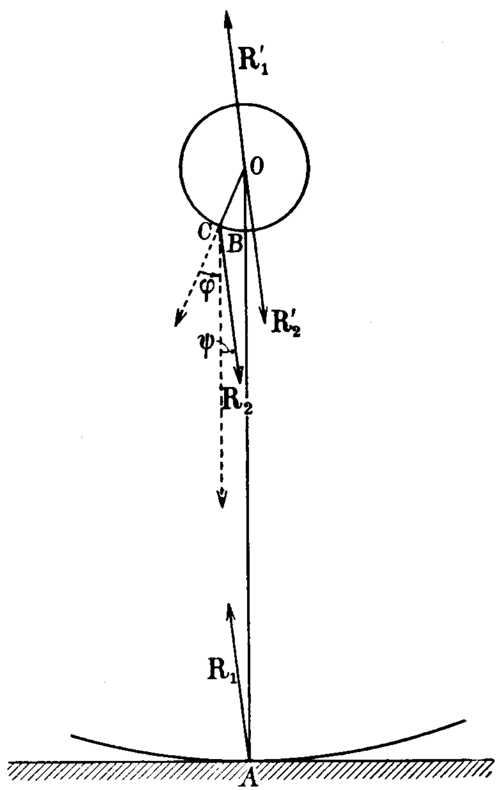
In causa della rotazione, si esplica fra asse e mozzo l'attrito *dinamico*, e questo implica che la reazione cada sopra una generatrice del cono d'attrito. L'appoggio dell'asse deve quindi aver luogo in tale punto C del mozzo che $\boldsymbol{R}_2$ formi un angolo φ con OC. Anzi, siccome per poco che si aumenti τ (cioè che si inclini ulteriormente $\boldsymbol{R}_2$ nel senso del moto della vettura) si deve senz'altro uscire dal cono d'attrito, così è chiaro che, per raggiungere la direzione di $\boldsymbol{R}_2$ a partire da OC, bisogna ruotare di φ, *nel senso del moto della vettura.*

Ben si intende poi che C, pur potendo essere spostato da B, nell'uno o nell'altro senso, secondo i casi (cfr. le fig. 1 e 2), ***deve necessariamente cadere al disotto di*** O: altrimenti $\boldsymbol{R}_2$ (che ha, per ipotesi, componente verticale discendente eguale a p) non sarebbe rivolta verso l'***interno*** del mozzo (come si conviene ad una reazione d'appoggio).

3. - Prima condizione statica. L'obliquità ψ.

Tutto ciò premesso, siamo in grado di esprimere che la sollecitazione piana *a*), *b*), *c*), testè specificata, ottempera alle condizioni di equilibrio.

CASO ORDINARIO



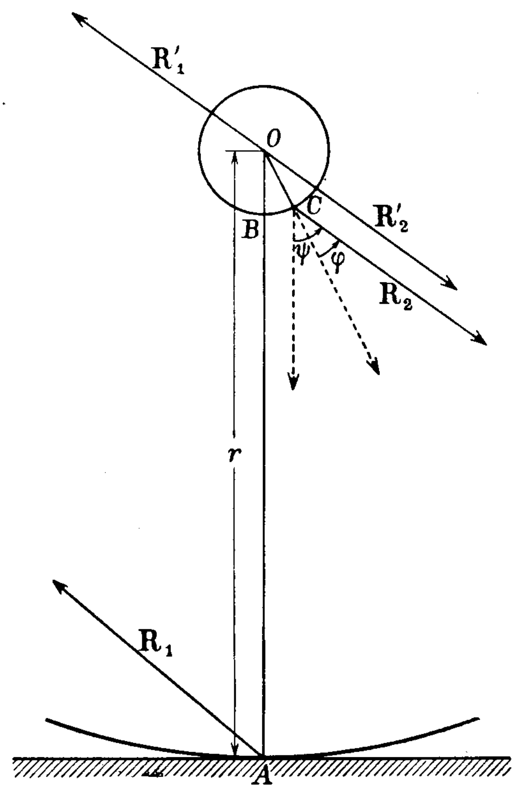
Direzione del moto della vettura →

Fig. 1.

Badiamo in primo luogo all'annullarsi della risultante. Dacchè, oltre alla coppia d'attrito di rotolamento, le sole forze agenti sono $\boldsymbol{R}_1$, $\boldsymbol{R}_2$, queste devono a lor volta costituire una coppia. Per l'equilibrio, tutto si ridurrà ad esprimere che i momenti delle due coppie sono eguali ed opposti. Quella d'attrito è, per sua natura, resistente, di momento hp; dovrà pertanto l'altra essere motrice collo stesso valore assoluto del momento.

Il momento della coppia $(\boldsymbol{R}_1, \boldsymbol{R}_2)$ dipende in modo semplice dai dati costruttivi e dalla inclinazione sulla verticale (dei due vettori costituenti la coppia). In modo preciso, introdurremo l'obliquità ψ come l'angolo, di cui si deve ruotare attorno a C (fig. 1 e 2) nel verso del moto della vettura, per passare dalla verticale discendente ad $\boldsymbol{R}_2$. *Quest'angolo* ψ *sarà*

CASO DI FORTISSIMO ATTRITO VOLVENTE



Direzione del moto della vettura →

Fig. 2.

in ogni caso compreso fra 0 *e* $\pi/2$, essendo positive le due componenti di $\boldsymbol{R}_2$: p secondo la verticale discendente, e τ orizzontale nel verso del moto [n. 2, *c*]. Naturalmente si ha

$$\tau = p \operatorname{tg} \psi , \tag{1}$$

$$R_2 = \frac{p}{\cos \psi} , \tag{2}$$

R_2 designando la lunghezza del vettore $\boldsymbol{R}_2$.

4. - Seconda condizione statica.

Per procurarsi speditamente il momento in questione [della coppia $(\boldsymbol{R}_1, \boldsymbol{R}_2)$], conviene immaginare applicati in O due vettori eguali ed opposti: $\boldsymbol{R}_1'$ equipollente ad $\boldsymbol{R}_1$, ed $\boldsymbol{R}_2'$ equipollente ad $\boldsymbol{R}_2$. Esso momento si presenta allora come differenza di due: spettante l'uno alla coppia $(\boldsymbol{R}_1, \boldsymbol{R}_2')$ che è (cfr. le fig. 1 e 2) motrice in ogni caso; l'altro alla coppia $(\boldsymbol{R}_2, \boldsymbol{R}_1')$ che è invece sempre resistente. La lunghezza comune di tutti i quattro vettori è $p/\cos \varphi$, a norma della (2).

Dacchè i punti d'applicazione A ed O dei due vettori della prima coppia distano di r, e i vettori sono inclinati di ψ sulla verticale OA, sarà manifestamente $\overline{OA} \sin \psi = r \sin \psi$ il braccio, e quindi

$$pr \operatorname{tg} \psi$$

il relativo momento.

Per la coppia resistente $(\boldsymbol{R}_2, \boldsymbol{R}_1')$, si ha analogamente $\overline{OC} = \varrho$ come distanza dei punti d'applicazione, e $\varrho \sin \varphi$ per braccio, dacchè [n. 2, *c*)] $\boldsymbol{R}_2$ è inclinato di φ su OC. L'espressione del momento è dunque

$$-\frac{p}{\cos \psi} \varrho \sin \varphi ,$$

donde, per la coppia $(\boldsymbol{R}_1, \boldsymbol{R}_2)$,

$$p \left\{ r \operatorname{tg} \psi - \varrho \frac{\sin \varphi}{\cos \psi} \right\} .$$

Eguagliando ad hp, si ha

$$r \operatorname{tg} \psi - \varrho \frac{\sin \varphi}{\cos \psi} = h , \tag{3}$$

e tutto si trova ricondotto a discutere questa equazione che contiene la sola incognita ψ (obliquità delle reazioni) e serve a determinarla. Lo sforzo di trazione ne discende poi subito a norma della (1).

5. - Studio qualitativo della equazione in ψ.

La (3) si trasforma ovviamente in una equazione di secondo grado rispetto a $\operatorname{tg} \psi$. Giova tuttavia premettere una discussione qualitativa della (3) stessa. Ritenuto, come è in pratica, r (molto) maggiore di ϱ, risulterà in primo luogo l'esistenza di una, e una sola, radice ψ, compresa (come si sa che deve accadere [n. 3]) nell'intervallo $0, \pi/2$; e appariranno [n. 8] le proprietà di questa radice praticamente importanti, atte altresì a togliere l'ambiguità del doppio segno nella formula risolutiva della equazione di secondo grado in $\operatorname{tg} \psi$, cui infine ricorreremo [n. 9] per il calcolo effettivo.

Consideriamo all'uopo il primo membro della (3)

$$\Psi(\psi) = r \operatorname{tg} \psi - \varrho \frac{\sin \varphi}{\cos \psi},$$

come una funzione dell'argomento ψ. Essa è manifestamente finita e continua per ψ compreso fra 0 e $\pi/2$ (estremo superiore escluso).

La sua derivata è

$$\frac{1}{\cos^2 \psi} \{r - \varrho \sin \varphi \sin \psi\},$$

quantità sempre positiva, dacchè supponiamo $r > \varrho$. La funzione $\Psi(\psi)$ è dunque crescente nell'intervallo. Per $\psi = 0$, essa si riduce a $-\varrho \sin \varphi$, ed è quindi negativa; è invece positiva e grande a piacere per ψ abbastanza prossimo a $\pi/2$, come si rende manifesto, immaginando di scrivere $\Psi(\psi)$ sotto la forma

$$\frac{r \sin \psi - \varrho \sin \varphi}{\cos \psi}.$$

Ne consegue che, al variare di ψ da 0 fino a $\pi/2$, $\Psi(\psi)$ attraversa certo una volta, e una volta soltanto, qualsiasi valore positivo: in particolare il valore h, che figura nel secondo membro della (3). Questa equazione ammette pertanto una ed una sola radice ψ, compresa fra 0 e $\pi/2$.

6. - Spostamento dell'appoggio.

Vale la pena di rilevare che tale radice è più piccola o più grande di φ, secondochè

$$\Psi(\varphi) = (r - \varrho) \operatorname{tg} \varphi$$

supera o no h. Questa circostanza corrisponde al fatto geometrico che il punto d'appoggio C dell'asse sul mozzo si trovi spostato all'indietro oppure in avanti. Per rendersene conto, basta ricordare [nn. 3 e 2, c] che ψ e φ rappresentano rispettivamente l'inclinazione di $\boldsymbol{R}_2$ sulla verticale discendente e su OC, l'una e l'altra contate positivamente quando si ruota verso $\boldsymbol{R}_2$ nel senso del moto. Ne consegue che $\psi - \varphi$ rappresenta l'inclinazione di OC sulla verticale discendente, in senso algebrico, risultando negativa quando OC è spostato, rispetto alla verticale stessa, cioè rispetto ad OB, in senso contrario al moto [fig. 1), positiva, quando OC è spostato in avanti [fig. 2].

7. - Alcuni dati numerici.

Nei casi concreti, che si presentano in pratica, è possibile tanto una disuguaglianza, quanto l'opposta.

Si può infatti ritenere: il raggio r della ruota compreso fra 50 cm e 1 m; $\varrho \leqslant 5$ cm; $\operatorname{tg} \varphi$ compreso fra 0,07 e 0,15, essendo ben lubrificata la camera del mozzo, in cui è inserito l'asse; finalmente h compreso fra mm 10 e mm 70, secondo lo stato della strada, coll'avvertenza però che, per andare al di là dei 30 mm, bisogna che si tratti di strada molto deperita, oppure senza massicciata e fangosa (ovvero inghiaiata).

Il minimo valore di $(r - \varrho) \operatorname{tg} \varphi$ è in conformità

$$(50 - 5) \times 0{,}07 = 3{,}15 \text{ cm},$$

ossia 31,5 mm, quindi superiore al parametro h d'attrito volvente per una strada in buono stato. Ma, per forti valori di h (da 50 a 70 mm), si ha $(r - \varrho) \times 0{,}07 < h$, anche se le ruote sono di dimensioni considerevoli (per es. $r = 70$ cm).

8. - Modo di variare dello sforzo di trazione τ.

Dividiamo i due membri della (3) per r, e poniamo per brevità

$$
(4) \qquad \begin{cases} \dfrac{\varrho \sin \varphi}{r} = \varepsilon , \\[2ex] \dfrac{h}{r} = k , \end{cases}
$$

con che *tanto* ε, *quanto* k *riescono dei numeri puri*, (parecchio) *inferiori all'unità*. L'equazione definiente ψ assume così l'aspetto

$$
(3') \qquad f(\psi, \varepsilon, k) = \operatorname{tg} \psi - \frac{\varepsilon}{\cos \psi} - k = 0 .
$$

Consideriamovi ψ come funzione dei due parametri ε e k. Le sue derivate rapporto a questi parametri rimangono definite da

$$
\frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon} = - \frac{\dfrac{\partial f}{\partial \varepsilon}}{\dfrac{\partial f}{\partial \psi}} , \qquad \frac{\partial \psi}{\partial k} = - \frac{\dfrac{\partial f}{\partial k}}{\dfrac{\partial f}{\partial \psi}} .
$$

Siccome i numeratori

$$
\frac{\partial f}{\partial \varepsilon} = - \frac{1}{\cos \psi} , \qquad \frac{\partial f}{\partial k} = -1 ,
$$

sono negativi per tutti i possibili valori di ψ (compreso fra 0 e $\pi/2$), mentre il denominatore

$$
\frac{\partial f}{\partial \psi} = \frac{1}{\cos^2 \psi} (1 - \varepsilon \sin \psi) ,
$$

è positivo, così si ha sempre

$$
\frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon} > 0 , \qquad \frac{\partial \psi}{\partial k} > 0 .
$$

Rimane pertanto provato che la ψ definita dalla (3), e con essa $\operatorname{tg} \psi$, *è funzione crescente dei due argomenti*

$$\varepsilon = \frac{\varrho \sin \varphi}{r}, \qquad k = \frac{h}{r}.$$

Se si ricorda [formula (1)] che lo sforzo di trazione τ è espresso da $p \operatorname{tg} \psi$, si riconosce senz'altro il senso in cui varia l'entità dello sforzo al variare dei dati costruttivi e dell'attrito volvente h. E si è condotti alle conclusioni seguenti, ben note, se pur non rigorosamente acquisite, in base alla trattazione ordinaria:

Lo sforzo di trazione è tanto più piccolo quanto più sono piccoli il parametro h (che figura a fattore in k) e il raggio del mozzo ϱ (che figura in ε); quanto migliore è la lubrificazione, cioè piccolo φ (ε essendo proporzionale a $\sin \varphi$); infine (dacchè sia ε che k sono inversamente proporzionali ad r) quanto più grande è il raggio r della ruota.

9. - Espressione esplicita di τ.

Veniamo finalmente alla determinazione quantitativa di $\operatorname{tg} \psi$. Si ha dalla (3′)

$$\operatorname{tg} \psi - k = \frac{\varepsilon}{\cos \psi},$$

donde, elevando a quadrato,

$$(1 - \varepsilon^2) \operatorname{tg}^2 \psi - 2k \operatorname{tg} \psi - (\varepsilon^2 - k^2) = 0 \,;$$

e, risolvendo,

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{k \pm \varepsilon\sqrt{1 + k^2 - \varepsilon^2}}{1 - \varepsilon^2}.$$

Di queste due radici, quella che compete anche alla (3′), e quindi all'originaria (3), deve, come s'è visto al n. precedente, crescere con ε. Ciò esige che si attribuisca al radicale il segno $+$, e dà in definitiva

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{k + \varepsilon\sqrt{1 + k^2 - \varepsilon^2}}{1 - \varepsilon^2}, \tag{5}$$

dove — ricordiamolo — ε e k hanno i valori (4).

10. - Approssimazione adottata ordinariamente.

Già si è rilevato che ε e k riescono in pratica piuttosto piccoli: pochi centesimi coi dati del n. 7. Se ne possono quindi, con approssimazione largamente sufficiente, trascurare i quadrati. La (5) diviene in conformità

$$\text{tg}\,\psi = k + \varepsilon\,; \tag{5'}$$

e lo sforzo di trazione

$$\tau = p\,\text{tg}\,\psi = pk + p\varepsilon\,. \tag{1'}$$

Esso si presenta quindi come somma di due addendi: il primo pk è quello stesso che si avrebbe, se intervenisse da sola la resistenza dell'attrito volvente; il secondo $p\varepsilon$ quello che si avrebbe, se intervenisse da solo l'attrito radente fra mozzo e asse.

Per lo più si ammette a priori che i due effetti si sommino, e si stabilisce la (1'), valutando separatamente:

1) $pk = p(h/r)$, in base alla legge fondamentale dell'attrito di rotolamento, ammettendo che lo sforzo di trazione sia sensibilmente applicato all'altezza dell'asse.

2) $p\varepsilon = p\varrho \sin\varphi/r$ colla considerazione seguente:

Suppongasi la nostra ruota sottoposta unicamente alle due reazioni $\boldsymbol{R}_1$, $\boldsymbol{R}_2$ [di cui al n. 2, *a*) e *c*)], ritenendosi nullo l'attrito volvente del suolo.

Per l'equilibrio, esse dovranno essere eguali e direttamente opposte, avendo per comune linea d'azione la congiungente dei rispettivi punti d'applicazione A e C.

Badiamo in particolare alla $\boldsymbol{R}_2$. Dacchè essa [n. 2, *c*)] deve possedere componente positiva nel senso del moto, ed è diretta secondo CA, bisognerà che C sia (rispetto alla direzione del moto) più indietro di A. Siamo quindi, come è naturale (essendo nullo l'attrito volvente), nel primo dei due casi indicati al n. 6.

Se poi si ricorda il significato di ψ [n. 3], si vede subito [cfr. la fig. 3] che ψ è pure l'angolo in A della AC (linea d'azione di $\boldsymbol{R}_1$) colla verticale ascendente AO.

D'altra parte (per il fatto che $\boldsymbol{R}_2$ appartiene ad una generatrice del cono d'attrito in C) l'angolo esterno del triangolo OAC, in C, è φ. Si ha quindi dal triangolo suddetto

$$\frac{\sin\psi}{\sin\varphi} = \frac{\varrho}{r}\,.$$

Di qua apparisce che ψ è sempre (molto) più piccolo di φ. Supposto φ già tale che si possa trascurare φ^2, assimilando $\cos\varphi$ all'unità, lo stesso

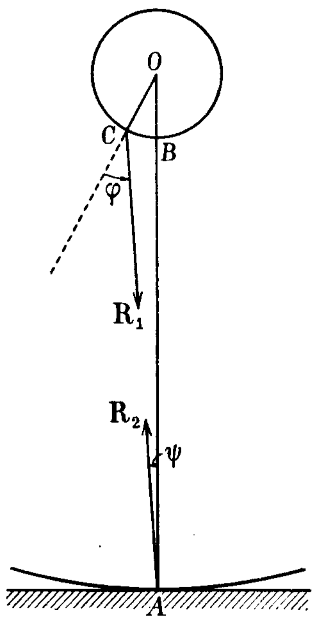


Fig. 3.

varrà *a fortiori* per ψ, e si potrà quindi nella precedente relazione, sostituire $\operatorname{tg}\psi$ a $\sin\psi$, donde

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{\varrho \sin\varphi}{r}\,.$$

Ne consegue lo sforzo di trazione $p \operatorname{tg}\psi$ sotto la forma $p\varrho \sin\varphi/r$, c. d. d.

11. - Sforzo d'avviamento. Raffronto collo sforzo di regime.

Se, in luogo del moto rototraslatorio di regime, si considera la fase incipiente, si vede subito che il minimo sforzo di trazione τ_0, capace di determinare il movimento, è, sulle strade buone, assai maggiore di τ. Valutiamo all'uopo τ_0, identificando per semplicità l'attrito di primo distacco fra ruota e mozzo a quello dinamico. Dacchè si parte dalla quiete, l'appoggio ha luogo in B; d'altra parte, affinchè possa cominciare lo scorrimento del mozzo rispetto all'asse, è d'uopo che la reazione d'appoggio $\boldsymbol{R}_2$ abbia una componente tangenziale eguale almeno a $p \operatorname{tg} \varphi$. Ne consegue $\tau_0 \geqslant p \operatorname{tg} \varphi$. Il momento di $\boldsymbol{R}_2$ (o, ciò che è lo stesso, della sua componente tangenziale) rispetto ad A vale

$$\tau_0(r - \varrho)\,.$$

Se $(r - \varrho) \operatorname{tg} \varphi$ supera h (*strade buone*, cfr. n. 7), basta una trazione appena appena superiore a $p \operatorname{tg} \varphi$ per rendere possibile il rotolamento. Si può pertanto ritenere lo sforzo d'avviamento misurato da $p \operatorname{tg} \varphi$, che è [n. 6] superiore a $p \operatorname{tg} \psi$, sforzo di regime.

Nell'altro caso, cioè per $h > (r - \varrho) \operatorname{tg} \varphi$, una trazione di intensità leggermente superiore a $p \operatorname{tg} \varphi$ (facendo uscire $\boldsymbol{R}_2$ dal cono d'attrito in B) rende bensì impossibile l'equilibrio, ma la perturbazione si esplica soltanto in un piccolo scorrimento dell'asse entro il mozzo, per cui l'appoggio si sposta in avanti, diciamo da B in C [cfr. la fig. 2], senza che si inizi ancora il rotolamento.

Affinchè la ruota cominci effettivamente a girare, bisogna che sia superato il momento hp d'attrito volvente. Si riconosce ovviamente che la trazione limite all'uopo necessaria viene a coincidere con quella di regime (in questo caso maggiore di $p \operatorname{tg} \varphi$). Si tratta infatti di esprimere che l'equilibrio *assoluto* è sul punto di essere turbato, l'appoggio essendo in C, $\boldsymbol{R}_2$ sul relativo cono d'attrito, ecc.; in questa condizione di cose rimangono applicabili le considerazioni dei nn. precedenti, non essendovi divario dall'assoluto al relativo, dacchè [n. 1] non ha influenza la forza centrifuga, e si risguarda sensibilmente lo stesso nei due casi il valore numerico del coefficiente d'attrito.

12. - Strade in pendenza.

È assai facile riconoscere come si modificano i risultati per strade inclinate sull'orizzonte di un angolo i, nell'ipotesi che seguiti ad essere verticale il piano della ruota (la sua traccia segnando la linea di massima pendenza sul piano stradale).

Basta pensare che le condizioni di equilibrio, di cui ai nn. precedenti, sussistono inalterate purchè si attribuisca a p e a τ il significato di componenti *normale* (verso il basso) e *parallela* alla strada, componenti che divengono rispettivamente verticale e orizzontale, per $i = 0$.

D'altra parte, detta p^* la porzione di peso della vettura che si scarica sulla ruota considerata (con che p^* rappresenta ora ciò che era p nei nn. precedenti), dovremo ovviamente identificare p^* colla componente verticale di $\boldsymbol{R}_2$, la quale è

$$p \cos i \mp \tau \sin i\,,$$

come si vede subito, sommando il contributo della componente p (normale alla strada verso il basso) con quello della componente τ parallela alla strada nel senso del moto). Il segno superiore vale per il moto ascendente, il segno inferiore per il moto discendente.

Sostituendo a τ il suo valore (1), avremo

$$p^* = p(\cos i \mp \operatorname{tg} \psi \sin i)\,,$$

che consente di esprimere p per p^* sotto la forma

$$p = \frac{p^*}{\cos i \mp \operatorname{tg} \psi \sin i}\,. \tag{6}$$

Quanto allo sforzo di regime, esso non è senz'altro τ, come sulla strada pianeggiante, ma τ diminuito della componente del peso p^* nella direzione del moto. Designando con τ^* tale sforzo, sarà manifestamente

$$\tau^* = \tau \pm p^* \sin i\,,$$

dovendosi prendere qui ancora il segno superiore nel moto ascendente, il segno inferiore in quello discendente.

In virtù delle (1), (6), l'espressione di τ^* si scrive

$$\tau^* = p^* \left\{\frac{\operatorname{tg} \psi}{\cos i \mp \operatorname{tg} \psi \sin i} \pm \sin i\right\}, \tag{7}$$

che è la cercata espressione dello sforzo di trazione, in funzione del peso p^* sopportato dalla ruota e degli altri dati della questione (l'inclinazione i, e quelli inclusi in ψ).

L'inclinazione i è quasi sempre abbastanza piccola da poterla trattare come quantità di primo ordine. Ma anche $\operatorname{tg} \psi$ [n. 10] si può considerare di prim'ordine. Così stando le cose, il denominatore nel primo termine della (7) si identifica coll'unità, e lo sforzo di regime si presenta come somma di due termini: $p^* \operatorname{tg} \psi$ e $\pm p^* \sin i$. Il primo è quello stesso che si avrebbe su strada pianeggiante; il secondo è eguale in valore assoluto alla componente del peso secondo la strada, e si aggiunge al primo nelle salite, mentre lo attenua nelle discese.

Ciò si enuncia di solito senza alcuna preventiva discussione, risguardando senz'altro applicabile il criterio di sovrapposizione degli effetti. Quanto s'è detto or ora serve insieme a giustificarlo razionalmente e a fissarne i limiti di validità.

XXIX.

DEDUZIONE RIGOROSA DI UNA RELAZIONE FONDAMENTALE NELLA TEORIA DEL CALORE RAGGIANTE

« Rend. Acc. Lincei », ser. 5ª, vol. $XXIII_1$ (1914_1), pp. 12-21.

Alludo alla relazione

$$\varepsilon = K\alpha\,, \tag{I}$$

valida in ogni punto M di un generico mezzo isotropo in equilibrio di irraggiamento: ε vi rappresenta il coefficiente di emissione in M (riferito all'unità di volume irraggiante, talchè $4\pi\varepsilon$ è la quantità di energia irraggiata tutt'intorno nell'unità di tempo); α il coefficiente di assorbimento, pure in M (per unità di lunghezza); K l'intensità specifica, e quindi πK il potere emissivo (riferito all'unità di superficie) spettante ad uno qualunque degli ∞^2 elementi superficiali uscenti da M. Si intende che ε, α, K vanno presi tutti e tre per radiazioni di una stessa frequenza; ovvero tutti e tre per l'intero spettro; più generalmente, del resto, va ritenuto che ci atteniamo al PLANCK (¹) per definizioni e postulati (²).

Il procedimento (³), attraente per geometrica semplicità, di cui si è valso l'illustre Autore per stabilire la (I), si appoggia sopra un'ipotesi addizionale, intuitivamente plausibile, ma concettualmente complessa ed esuberante. Ecco di che si tratta. Si fissa in primo luogo un generico elemento di volume S circostante a M, e una superficie sferica Σ col centro in S, di raggio abbastanza grande perchè, rispetto ad esso, si possano trattare come infinitesime le dimensioni di S. Si valuta poi l'energia

(¹) *Theorie der Wärmestrahlung*, cap. I, 2ª ediz., Leipzig, Barth, 1913.

(²) Il PLANCK considera soltanto mezzi omogenei. Anche la nostra deduzione della (I) sarà svolta in questa ipotesi. Ma ciò non lede la generalità, perchè l'estensione a mezzi eterogenei (isotropi) apparisce poi ovvia. Cfr. il n. 8 del presente scritto.

(³) Op. cit., §§ 24-26.

assorbita da S nell'unità di tempo, risguardandola irraggiata da Σ, *ed ammettendo inoltre che essa giunga in S senza attenuazione, nè rinforzo.* Ciò si giustifica in base all'ipotesi addizionale suaccennata, che può enunciarsi così: in condizioni di equilibrio termodinamico, ogni pennello elementare di raggi, nel passaggio da Σ ad S, tanto perde per assorbimento (ed eventuale dispersione) quanto acquista per emissione (e dispersione). Debbo tale schiarimento alla personale cortesia del prof. PLANCK e gliene attesto il mio grato animo, venendo ormai allo scopo della presente Nota. Esso è di ricavare la relazione (1) ([4]), mediante una dimostrazione *matematica* ([5]) che eviti la ipotesi speciale di PLANCK, sfruttando unicamente (accanto alle premesse generali) la stazionarietà dell'irraggiamento globale di una (qualsiasi) porzione S del mezzo. Vi si perviene nel modo più naturale, esprimendo, a mezzo degli integrali, che direttamente traducono i postulati fisici, la eguaglianza fra l'energia emessa e quella assorbita da S nell'unità di tempo. La (I) ne discende per materiale trasformazione di integrali.

Di questa trasformazione mi occuperò in primo luogo (nn. 1-5), stabilendo anzi una formula alquanto più generale, che mi sembra specifica per la teoria matematica dell'irraggiamento.

1. - Notazioni.

Sia S un campo a tre dimensioni, σ il relativo contorno. Rappresentino: P e P' due punti qualisivogliano di S, o, in particolare, di σ; x, y, z e x', y', z' le rispettive coordinate; $r = |\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}|$ la distanza $\overline{PP'}$; dS e dS' due elementi di campo contenenti P o, rispettivamente, P'. Qualora in particolare P e P' cadano sul contorno, designeranno: $d\sigma$, $d\sigma'$ due elementi di superficie ad essi circostanti; n, n' le relative normali vòlte verso l'interno del campo; (α, β, γ), $(\alpha', \beta', \gamma')$ i loro coseni direttori; $\widehat{nr}$ l'angolo in P, formato da n con r, o, più pre-

---

([4]) A dir vero, l'intervento di K non è indispensabile per arrivare alla legge di KIRCHHOFF. Ciò risulta dalle belle ricerche di HILBERT (cfr. *Begründüng der elementaren Strahlungstheorie*, « Nachr. der K. Ges. der Wiss. zu Göttingen », 1912, Heft 7). Ma non scompare per questo l'importanza fisica della nozione di potere emissivo, e l'interesse di fissarne l'espressione in termini di ε e di α.

([5]) Tale non può ritenersi la considerazione che si legge nell'articolo del WIEN, *Theorie der Strahlung* (« Enc. der Math. Wiss. », V, 3, 2, p. 288). Essa contempla infatti un semispazio indefinito. E, per passare alla (I), nella sua accezione generale, bisogna ancora ammettere che, in un punto qualunque di un mezzo isotropo in equilibrio di irraggiamento, le cose vanno come nel caso tipico di un semispazio limitato da un piano indefinito. Ora ciò non mi sembra, nemmeno fisicamente, evidente, dato che il risultato relativo al caso tipico non scende da comportamento locale, ma è desunto per essenziale contributo di tutto il semispazio.

cisamente col vettore $P' - P$ (che va da P a P'); $\widehat{n'r}$ l'angolo in P' di n' con $P - P'$.

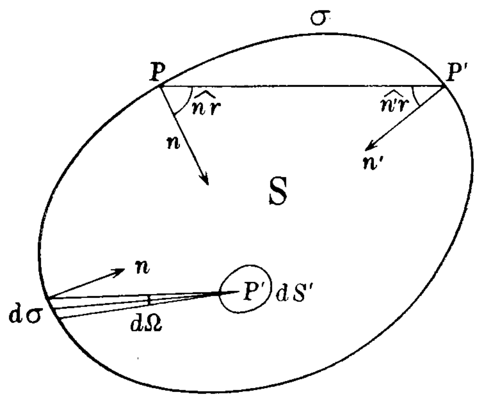


Fig. 1.

Sarà manifestamente (il simbolo Σ rappresentando la somma dei termini che si ottengono da quello scritto per sostituzione circolare delle terne di lettere x, y, z; x', y', z'; α, β, γ; α', β', γ')

$$(1)\qquad \begin{cases} \dfrac{dr}{dn} = \Sigma \dfrac{\partial r}{\partial x}\,\alpha = \Sigma \dfrac{x - x'}{r}\,\alpha = -\cos \widehat{nr}\,, \\[2ex] \dfrac{dr}{dn'} = \Sigma \dfrac{\partial r}{\partial x'}\,\alpha' = \Sigma \dfrac{x' - x}{r}\,\alpha' = -\cos \widehat{n'r}\,. \end{cases}$$

2. - Una trasformazione di integrali.

Si consideri un integrale (quadruplo) del tipo

$$(2)\qquad I = \int_\sigma d\sigma \int_\sigma d\sigma' \cos \widehat{nr} \cos \widehat{n'r} \cdot r \frac{d\varphi}{dr}\,,$$

in cui φ designa una funzione del solo argomento r, uniforme e continua insieme con le due prime derivate.

In virtù delle (1), la funzione integranda può essere scritta

$$\frac{d\varphi}{dn} \Sigma(x' - x)\alpha'\,,$$

talchè, posto, per brevità,

$$J = \int_\sigma d\sigma' \Sigma(x' - x) \frac{d\varphi}{dn} \alpha' ,$$

la (2) equivale a

$$(2') \qquad I = \int_\sigma J \, d\sigma .$$

L'integrale J, colla ordinaria formula di Green, si trasforma in

$$-\int_S dS' \Sigma \frac{\partial}{\partial x'} \left\{ (x' - x) \frac{d\varphi}{dn} \right\} .$$

Eseguendo la derivazione e badando all'indipendenza dei due operatori $\partial/\partial x'$ e $d/dn = \Sigma\alpha(\partial/\partial x)$, si ha

$$J = -3 \int_S \frac{d\varphi}{dn} dS' - \int_S dS' \Sigma(x' - x) \frac{d}{dn} \frac{\partial \varphi}{\partial x'} .$$

Notiamo ora che, per essere

$$\frac{d}{dn} (x' - x) = -\alpha ,$$

sussiste l'identità

$$\Sigma(x' - x) \frac{d}{dn} \frac{\partial \varphi}{\partial x'} = \frac{d}{dn} \Sigma(x' - x) \frac{\partial \varphi}{\partial x'} + \Sigma\alpha \frac{\partial \varphi}{\partial x'} ,$$

e teniamo d'altra parte presente che, dipendendo φ dalle coordinate esclusivamente pel tramite di r, si ha

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x'} = \frac{d\varphi}{dr} \frac{\partial r}{\partial x'} = \frac{d\varphi}{dr} \frac{x' - x}{r} ,$$

nonchè

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x'} = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} .$$

Con ciò, l'identità diviene

$$\Sigma(x'-x)\frac{d}{dn}\frac{\partial\varphi}{\partial x'}=\frac{d}{dn}\Sigma\frac{(x'-x)^2}{r}\frac{d\varphi}{dr}-\Sigma\alpha\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{d}{dn}\left(r\frac{d\varphi}{dr}\right)-\frac{d\varphi}{dn}\,;$$

e, sostituendo nella precedente espressione di J, si ricava

$$J=-\int_S dS'\frac{d}{dn}\left(2\varphi+r\frac{d\varphi}{dr}\right).$$

La (2′) porge infine, invertendo le integrazioni,

$$I=-\int_S dS'\int_\sigma d\sigma\frac{d}{dn}\left(2\varphi+r\frac{d\varphi}{dr}\right). \tag{2''}$$

La formula di trasformazione, che volevamo stabilire, risulta dall'eguagliare i secondi membri di (2) e (2″). Essa è quindi:

$$\int_\sigma d\sigma\int_\sigma d\sigma'\cos\widehat{nr}\cos\widehat{n'r}\cdot r\frac{d\varphi}{dr}=-\int_S dS'\int_\sigma d\sigma\frac{d}{dn}\left(2\varphi+r\frac{d\varphi}{dr}\right). \tag{3}$$

3. - Corollarii.

Nel primo membro della (3) la funzione integranda dipende, in modo simmetrico, da due punti P e P' del contorno. Si può facilmente attribuire anche al secondo membro una forma simmetrica, rispetto alle coppie P, P' del campo. Basta applicare all'integrale esteso a σ la formula classica di Green che lo trasforma in integrale di spazio. E si ha (invertendo ancora le integrazioni, per uniformità col primo membro):

$$\int_\sigma d\sigma\int_\sigma d\sigma'\cos\widehat{nr}\cos\widehat{n'r}\cdot r\frac{d\varphi}{dr}=\int_S dS\int_S dS'\Delta_2\left(2\varphi+r\frac{d\varphi}{dr}\right), \tag{4}$$

dove Δ_2 designa l'operatore di Laplace rispetto alle coordinate x, y, z del punto P. Si avverta, però, che, trattandosi di una funzione del solo argomento r, l'operatore Δ_2 si riduce notoriamente a

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d}{dr}\right).$$

Per lo scopo che abbiamo in vista, giova riprendere la (3) e presentarla sotto aspetto lievemente modificato, ponendo

$$r\frac{d\varphi}{dr} = f\,,$$

ed eseguendo, nel secondo membro, la derivazione rispetto ad n.

Dacchè, per una funzione della sola r, è

$$\frac{d}{dn} = \frac{dr}{dn}\frac{d}{dr} = -\cos\widehat{nr}\,\frac{d}{dr}\,,$$

si ha

$$-\frac{d}{dn}\left(2\varphi + r\frac{d\varphi}{dr}\right) = \cos\widehat{nr}\left\{2\frac{d\varphi}{dr} + \frac{d}{dr}\left(r\frac{d\varphi}{dr}\right)\right\},$$

ossia, sostituendo f a φ,

$$-\frac{d}{dn}\left(2\varphi + r\frac{d\varphi}{dr}\right) = \cos\widehat{nr}\left(\frac{2}{r}f + \frac{df}{dr}\right).$$

La (3) equivale pertanto a

$$\int_\sigma d\sigma\int_\sigma d\sigma'\cos\widehat{nr}\cos\widehat{n'r}\cdot f(r) = \int_S dS'\int_\sigma d\sigma\cos\widehat{nr}\cdot\left(\frac{2}{r}f + \frac{df}{dr}\right), \tag{5}$$

dove f può ritenersi funzione arbitraria di r, continua insieme con la sua derivata prima: ciò in virtù di $f = r(d\varphi/dr)$, e delle ipotesi fatte su φ [n. 2].

Veramente, con tali ipotesi, la $f = r(d\varphi/dr)$ imporrebbe ulteriormente a f la condizione di annullarsi (di prim'ordine almeno) per $r = 0$. Ma si vede subito che ciò è inessenziale, appoggiandosi sulla seguente:

4. - Osservazione.

La formula (3) seguita a sussistere, anche se φ diviene infinita d'ordine non superiore al primo, per $r = 0$. Rimane infatti legittimo tutto ciò che si è detto, quando φ si intendeva finita.

Seguita quindi a sussistere anche la (5), con una f, sia semplicemente finita per $r = 0$ (il che corrisponde ad un infinito logaritmico della φ), sia infinita di prim'ordine (il che corrisponde ad analoga singolarità di φ).

Quanto alla (4), se l'ordine di infinito di φ, per $r = 0$, è inferiore ad 1, essa è ancora legittima. Ma se φ diviene infinita di prim'ordine, la trasformazione di

$$\int_\sigma d\sigma \frac{d}{dn}\left(2\varphi + r\frac{d\varphi}{dr}\right),$$

in integrale di volume richiede che si consideri a parte il termine polare C/r (C costante). Ciò reca in definitiva al secondo membro della (4) un termine addizionale $4\pi CS$ (S volume del campo designato colla stessa lettera).

5. - Casi particolari notevoli.

Per quanto abbiamo ora osservato, si può prendere, nella (3), $\varphi = -1/r$. Il primo membro, allora, è

$$\int_\sigma d\sigma \int_\sigma d\sigma' \frac{\cos\widehat{\boldsymbol{nr}}\cos\widehat{\boldsymbol{n'r}}}{r},$$

e il secondo

$$\int_S dS' \int_\sigma d\sigma \frac{d\dfrac{1}{r}}{dn}.$$

Dacchè r vi rappresenta la distanza fra un punto P di σ e un generico punto P' interno alla superficie, l'integrale

$$\int_\sigma d\sigma \frac{d\dfrac{1}{r}}{dn},$$

vale 4π. Si ricava, pertanto,

$$\frac{1}{4\pi}\int_\sigma d\sigma \int_\sigma d\sigma' \frac{\cos\widehat{\boldsymbol{nr}}\cos\widehat{\boldsymbol{n'r}}}{r},$$

come *espressione del volume limitato da una generica superficie chiusa* σ.

Pongasi, nella (5),

$$f = \frac{1 - e^{-\alpha r}}{r^2},$$

con α costante. Ciò è ancora legittimo, dacchè f ha un infinito di primo ordine per $r = 0$, rimanendo, del resto, ovunque regolare.

Avremo l'identità

$$\int_\sigma d\sigma \int_\sigma d\sigma' \frac{\cos \widehat{nr} \cos \widehat{n'r}}{r^2} (1 - e^{-\alpha r}) = \alpha \int_S dS' \int_\sigma d\sigma \frac{\cos \widehat{nr}}{r^2} e^{-\alpha r}, \tag{6}$$

che tra un momento ci renderà segnalato servigio.

6. - Applicazione al regime stazionario del calore raggiante in un mezzo omogeneo isotropo.

Sia S una porzione di tale mezzo, limitata da un contorno *convesso* σ; ε il coefficiente di emissione, che sarà da ritenersi costante, trattandosi di mezzo omogeneo in regime stazionario.

Riportandoci, per le notazioni, al n. 1, fissiamo un qualsiasi punto P' di S e un circostante elemento dS' [cfr. la fig. 1]. Sia poi $d\Omega$ l'ampiezza (angolo solido misurato sulla sfera di raggio 1) di un generico cono elementare spiccato da P'; $d\sigma$ l'elemento del contorno σ (unico, dacchè il contorno si suppone convesso) segato da detto cono elementare. Manifestamente,

$$d\Omega = d\sigma \frac{\cos \widehat{nr}}{r^2};$$

e la quantità di energia, inviata nell'unità di tempo da dS', entro il cono elementare $d\Omega$, vale

$$\varepsilon \, dS' \, d\Omega .$$

Questa energia esce dal campo attraverso $d\sigma$: ma non integralmente, in causa dell'assorbimento. Se α è il relativo coefficiente per unità di lunghezza, dato che il cammino percorso è rappresentato da r, $e^{-\alpha r}$ sarà la frazione di $\varepsilon \, dS' \, d\Omega$ che va fuori del campo.

Di tutta l'energia emanata da dS' secondo le varie direzioni (nell'unità di tempo), ne esce da S (pure nell'unità di tempo)

$$\varepsilon\, dS' \int\limits_{\text{esteso alla sup. sferica di raggio 1}} e^{-\alpha r}\, d\Omega = \varepsilon\, dS' \int\limits_{\sigma} d\sigma \frac{\cos \widehat{nr}}{r^2} e^{-\alpha r} .$$

In totale, sommando cioè i contributi di tutti i dS', la perdita di energia, subìta S nell'unità di tempo, ammonterà a

$$E = \varepsilon \int\limits_S dS' \int\limits_\sigma d\sigma \frac{\cos \widehat{nr}}{r^2} e^{-\alpha r} . \tag{7}$$

In condizioni di regime (equilibrio termodinamico), a questa perdita deve far riscontro un'eguale somministrazione dall'esterno, per flusso attraverso gli elementi di contorno.

Se K rappresenta l'intensità specifica, ogni $d\sigma$ irradia verso $d\sigma'$, nell'unità di tempo, la quantità di energia

$$K\, d\sigma\, d\sigma' \frac{\cos \widehat{nr} \cos \widehat{n'r}}{r^2} \text{ [6]} .$$

Di questa, però, soltanto la frazione $1 - e^{-\alpha r}$ rimane entro il campo.

Complessivamente, per effetto dei mutui scambî, si ha come espressione — da eguagliarsi ad E — dell'acquisto di energia:

$$E = K \int\limits_\sigma d\sigma \int\limits_\sigma d\sigma' \frac{\cos \widehat{nr} \cos \widehat{n'r}}{r^2} (1 - e^{-\alpha r}) . \tag{8}$$

In virtù della (6), si può invece scrivere

$$E = K\alpha \int\limits_S dS' \int\limits_\sigma d\sigma \frac{\cos \widehat{nr}}{r^2} e^{-\alpha r} , \tag{8'}$$

e il materiale confronto di (7) e (8′) porge

$$\varepsilon = K\alpha , \qquad \text{c. d. d.} \tag{I}$$

---

[6] PLANCK, loc. cit., § 20.

7. - Validità delle formule (7) ed (8) anche per campi non convessi.

Le espressioni (7) ed (8) dell'energia sottratta, o rispettivamente comunicata ad S, nell'unità di tempo, sono state dedotte nell'ipotesi che il campo sia limitato da un contorno convesso. Tale limitazione è però inessenziale. Per rendersene conto, basta seguire passo passo il procedimento del n°. precedente, tenendo debito conto delle modificazioni richieste dalla maggiore generalità del contorno.

Riferiamoci, per fissare le idee, al calcolo dell'energia sottratta, cominciando coll'osservare che un cono elementare di vertice P' può incontrare il contorno σ più volte, sempre però un numero *dispari*, per es. (cfr. la fig. 2) nelle areole 1, 2, 3.

I relativi $(d\sigma \cos\widehat{nr})/r^2$ sono eguali in valore assoluto, ma alternativamente positivi e negativi (positivi nelle areole di egresso, come 1 e 3; negativi in quelle di ingresso, come 2). La misura dell'angolo solido $d\Omega$ è espressa, in ogni caso, da

$$\frac{d\sigma\,|\cos\widehat{nr}|}{r^2}\;;$$

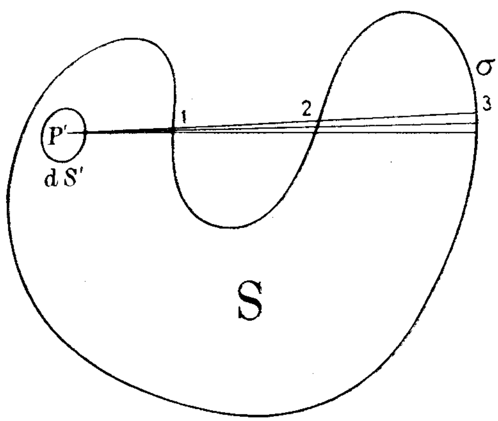


Fig. 2.

si può quindi attribuirle anche la forma

$$d\Omega = \mathbf{S}\,\frac{d\sigma\cos\widehat{nr}}{r^2}\,,$$

la somma essendo estesa a tutte le areole superficiali incontrate dal cono elementare. Ed è facile riconoscere, sommando i contributi (alternativamente positivi e negativi) provenienti dalle singole areole, che l'energia sfuggente da S nell'unità di tempo, attraverso il detto cono, vale

$$\varepsilon\, dS' \int \frac{d\sigma \cos \widehat{nr}}{r^2} e^{-\alpha r} .$$

L'integrazione, estesa ai varî coni elementari e ai varî dS', riporta poi subito alla (7); ecc.

8. - Mezzi eterogenei (isotropi).

Il carattere puramente locale della (I) ne lascia presumere la validità anche per mezzi eterogenei a comportamento isotropo. Lo si constata agevolmente, supponendo ε, α, K funzioni continue del posto; e così pure la velocità c con cui si propaga l'energia; tale di più la c che i raggi, che ne rimangono definiti in base al principio di FERMAT, ammettano tangenti variabili con continuità.

Con ciò, infatti, fissato un generico punto M del mezzo, è lecito di delimitare attorno ad M un campo S così piccolo che l'emissione, la propagazione e l'assorbimento dell'energia differiscano tanto poco quanto si vuole da quello che avverrebbe in un ipotetico mezzo omogeneo nel quale ε, α, K, c avessero dovunque le determinazioni ε_M, α_M, K_M, c_M, che ad esse spettano in M. Più precisamente si può dimostrare che l'energia perduta, per emissione, da S nell'unità di tempo, si presenta in definitiva sotto la forma

$$S(\varepsilon_M + \delta) ,$$

δ convergendo a zero con S (si intenda colla massima dimensione di S); quella acquistata, per assorbimento, sotto la forma,

$$S(K_M \alpha_M + \delta^*) ,$$

δ^* convergendo pure a zero colla massima dimensione di S. Eguagliando, dividendo per S, e passando poi al limite, si conclude giusta l'asserto.

XXX.

SUL REGIME VARIABILE DEL CALORE RAGGIANTE [1]

NOTA I.

PREMESSE E RISULTATI.

« Rend. Acc. Lincei », ser. 5^a, vol. $XXIII_2$ (1914_2),

pp. 371-379.

Le ricerche sull'irraggiamento termico, coltivate con segnalato successo in questi ultimi tempi, contemplano, per quanto è a mia conoscenza, quasi esclusivamente i fenomeni stazionarî; più precisamente, anzi, il caso tipico di campi a temperatura costante. Pressochè inesplorato è il periodo variabile, quale ad esempio si ha, a partire da arbitrarie condizioni iniziali, entro una cavità il cui contorno sia mantenuto a temperatura costante (prima che tale temperatura, e con essa l'equilibrio termodinamico, si stabilisca ovunque nell'interno della cavità). E nemmeno si trova discusso lo stato stazionario finale di una cavità, il cui contorno sia mantenuto ad una temperatura, invariabile col tempo, ma diversa da punto a punto. Specie di questioni ben note dalla teoria classica della conducibilità del calore.

Per ciò che attiene al calore raggiante, fuor dell'àmbito stazionario, sono stati considerati soltanto gli scambî di energia e di entropia fra radiazioni e oscillatori ideali di una stessa frequenza [2]. Qui si avrà invece di mira l'aspetto globale del fenomeno (prescindendo dalla ripartizione spettrale), e principalmente la legge secondo cui varia (nello spazio e nel tempo) la temperatura T (e, per essa, una sua funzione $K =$ costante $\times T^4$), quando si tratta di irraggiamento puro, non complicato da altre influenze.

---

(1) Pervenuta all'Accademia il 28 ottobre 1914.

(2) Cfr. PLANCK, *Vorlesungen über die Theorie der Wärmestrahlung* [(seconda edizione), Leipzig, Barth, 1914], pp. 180-204.

1. - Generalità e definizioni.

Conviene rifarsi dalle nozioni fondamentali della teoria dell'irraggiamento, a fine di rendersi ben conto delle modificazioni atte a renderle applicabili anche al regime variabile.

Premesso che intendiamo prendere in considerazione un mezzo omogeneo e isotropo ([3]), e rappresentarci, secondo il solito, l'energia raggiante come un'entità emanante da ogni particella materiale del mezzo e viaggiante su traiettorie rettilinee, in tutte le direzioni, con *velocità costante* c, si rende agevolmente manifesto che nulla è da modificare nell'ordinaria definizione di *coefficiente di emissione* ε in un generico punto M del mezzo. Si tratta infatti di una caratteristica sostanziale dell'elemento dS del mezzo circostante ad M, ed è ragionevole ammettere che, a parità di condizioni per dS, sia indifferente, nei riguardi dell'emissione, che regni o no equilibrio termodinamico; ossia che ε dipenda esclusivamente (oltre che dalla natura del mezzo) dalla temperatura T in M. In conformità, designando $d\Omega$ l'apertura (misurata sulla sfera di raggio 1) di un cono elementare spiccato da M,

$$\varepsilon\, dS\, d\Omega\, dt$$

misurerà la quantità di energia inviata da dS, durante il tempuscolo dt, entro il cono elementare $d\Omega$. La $\varepsilon(T)$ risulterà, in generale, funzione del posto e del tempo pel tramite di T.

Coefficiente d'assorbimento α (in M, per unità di lunghezza). Sussiste inalterata la definizione ordinaria, coll'avvertenza che α, al pari di ε, dipenderà in generale da M e da t pel tramite della temperatura.

Densità dell'energia $u(M, t)$, in un dato posto M e ad un dato istante t.

Si fissa un generico campo S circostante ad M, e si prende in considerazione l'energia U, che, all'istante t, si trova entro S (viaggiante in tutte le possibili direzioni, con velocità c). Si definisce u come il limite del rapporto

$$\frac{U}{S},$$

per S tendente comunque a zero, attorno al punto M.

([3]) L'estensione a mezzi eterogenei (di risultati *locali* conseguiti nell'ipotesi dell'omogeneità) si fa comodamente col criterio indicato al § 8 della Nota *Deduzione rigorosa di una relazione fondamentale nella teoria del calore raggiante,* in questi Rendiconti, ser. 5ª, vol. XXIII (1° sem. 1914), pp. 12-21 [in questo vol.: XXIX, pp. 403-413].

Applicando tale criterio alle relazioni che saranno qui stabilite per un mezzo omogeneo, si riconoscerebbe che rimangono valide anche se (ferma restando l'ipotesi dell'isotropia) le caratteristiche del mezzo variano (con continuità) da punto a punto, senza dipendere unicamente dalla temperatura.

Dalle varie premesse della teoria scenderà, come vedremo, non solo l'esistenza, ma anche l'espressione, notevolmente semplice, di un tale limite.

Intensità specifica dell'irraggiamento attraverso un generico elemento superficiale $d\sigma$.

Detta n la normale all'elemento (in un verso determinato), e $d\Omega$ l'ampiezza di un cono elementare di direzioni circostanti ad n, H rimane definito dall'assumere il prodotto

$$H\, d\sigma\, d\Omega\, dt$$

come misura della quantità di energia che, durante il tempuscolo dt, passa attraverso $d\sigma$ in direzione sensibilmente normale, cioè contenuta entro il pennello $d\Omega$. L'analoga quantità di energia secondo un pennello obliquo, pur di ampiezza $d\Omega$, si porrà sotto la forma

$$G\, d\sigma\, d\Omega\, dt\,.$$

Se g designa la direzione del pennello, sarà, per la *legge di* LAMBERT,

$$G = H \cos \widehat{ng}\,, \tag{1}$$

l'H *riferendosi alla direzione* g.

2. - Ipotesi fondamentale circa l'intensità specifica H.

In regime stazionario a temperatura costante, tutte le direzioni si equivalgono, e si è naturalmente tratti ad ammettere che l'intensità specifica sia la stessa per ognuno degli ∞^2 elementi superficiali spiccati da un medesimo punto M: si ha allora, colla notazione di PLANCK, $H = K$, K essendo funzione soltanto di T e della natura del mezzo; anzi (per le leggi di STEFAN e di KIRCHHOFF),

$$c^2 K = \tau T^4\,, \tag{2}$$

con τ costante universale, indipendente dal mezzo considerato.

Si vede subito che, quando la temperatura varia da punto a punto, l'intensità specifica H non può più ritenersi indipendente dall'orientazione del $d\sigma$. Infatti ciò implicherebbe, in particolare, eguaglianza di irraggiamento in versi opposti, e quindi flusso complessivo nullo; mentre, in un ambiente a temperatura variabile, c'è (anche soltanto per irraggiamento) trasporto di energia dalle regioni più calde verso le regioni meno calde.

Il modello classico della propagazione del calore nei corpi conduttori suggerisce spontaneamente l'ipotesi da saggiare, quando T varia col posto: ed è che l'intensità H in un punto generico M consti, oltre che dell'addendo K, anche di un secondo termine, $-\chi(dT/dn)$, proporzionale al gradiente di T in direzione perpendicolare all'elemento superficiale considerato. Porremo, in conformità

$$H = K - \chi \frac{dT}{dn}.$$

Nell'invocato modello dei fenomeni di conduzione (entro un mezzo omogeneo ed isotropo), il fattore di proporzionalità χ può ritenersi (con larga approssimazione) costante. Noi supporremo, più generalmente, che χ sia, al pari di K, funzione positiva di T; comunque, è lecito assumerlo sotto la forma

$$3k \frac{dK}{dT},$$

intendendo anche con k una funzione positiva di T. La precedente espressione di H può, così, essere scritta

$$H = K - 3k \frac{dK}{dn}. \tag{3}$$

3. - Espressione del flusso.

Si chiama, notoriamente, flusso attraverso $d\sigma$, nel senso assunto come positivo sulla normale n, la quantità di energia $R_1 \, d\sigma \, dt$ che, durante il tempuscolo dt, attraversa $d\sigma$ nel verso positivo, diminuita della quantità di energia $R_2 \, d\sigma \, dt$ che contemporaneamente passa in verso opposto. Valutiamo intanto R_1.

Trattandosi di energia raggiante in tutte le direzioni, conviene considerare tutti i coni elementari $d\Omega$ le cui generatrici g formano, con n, un angolo acuto. Per ciascun $d\Omega$, il contributo di energia è, a norma della (1),

$$H \cos \widehat{ng} \, d\sigma \, d\Omega \, dt,$$

l'H riferendosi alla direzione g.

Integrando a tutto l'emisfero Ω_1, in cui $\cos\widehat{ng} > 0$, si avrà, per definizione, $R_1\, d\sigma\, dt$. Ne consegue, avuto riguardo alla (3),

$$R_1 = \int_{\Omega_1}\left(K - 3k\,\frac{dK}{dg}\right)\cos\widehat{ng}\, d\Omega\,. \tag{4}$$

Il differenziale $d\Omega$ è l'area di un elemento della sfera di raggio 1, circostante alla direzione g; il prodotto $\cos\widehat{ng}\,d\Omega$ ne misura la proiezione sul piano diametrale che limita Ω_1 (perpendicolare ad n); e $\int_{\Omega_1}\cos\widehat{ng}\,d\Omega$ non è altro che l'area π del corrispondente cerchio massimo.

K e k sono funzioni del posto e del tempo, indipendenti da g.

D'altra parte, riferendoci per un momento ad assi cartesiani $Oxyz$, di cui l'asse delle z coincida con n, e indicando con γ_1, γ_2, γ_3 i coseni direttori di g, si ha

$$\frac{dK}{dg} = \frac{\partial K}{\partial x}\gamma_1 + \frac{\partial K}{\partial y}\gamma_2 + \frac{dK}{dn}\gamma_3\,,$$

e quindi, dalla (4),

$$R_1 = \pi K - 3k\,\frac{\partial K}{\partial x}\int_{\Omega_1}\gamma_1\gamma_3\, d\Omega - 3k\,\frac{\partial K}{\partial y}\int_{\Omega_1}\gamma_2\gamma_3\, d\Omega - 3k\,\frac{dK}{dn}\int_{\Omega_1}\gamma_3^2\, d\Omega\,. \tag{4'}$$

I primi due integrali del secondo membro sono nulli per ragione di simmetria. Infatti, considerando accanto a g la sua simmetrica rispetto ad n (nel piano n, g), rimane associato ad ogni $d\Omega$ un altro $d\Omega$ congruente; e il loro contributo complessivo è nullo, perchè γ_1, γ_2 vi hanno segni opposti, mentre γ_3 si conserva inalterato.

Il terzo integrale $\int_{\Omega_1}\gamma_2^2\,d\Omega$, si valuta subito in base alle considerazioni seguenti: Per l'equivalenza di ogni direzione rispetto all'intera superficie sferica Ω, sono eguali tra loro i tre integrali

$$\int_{\Omega}\gamma_1^2\, d\Omega\,, \qquad \int_{\Omega}\gamma_2^2\, d\Omega\,, \qquad \int_{\Omega}\gamma_3^2\, d\Omega\,.$$

Ognuno di essi vale quindi un terzo della somma, che è 4π. Ma (γ_3 cambiando soltanto di segno, quando si sostituisce ad una direzione la sua opposta)

$$\int_{\Omega}\gamma_3^2\, d\Omega = 2\int_{\Omega_1}\gamma_3^2\, d\Omega\,,$$

da cui

$$\int_{\Omega_1} \gamma_3^2 \, d\Omega = \frac{2\pi}{3} .$$

Risulta così, dalla (4′),

$$R_1 = \pi K - 2\pi k \frac{dK}{dn} .$$

L'espressione di R_2 ne scende senza calcolo, per semplice sostituzione della direzione n coll'opposta (e quindi di dn con $-dn$). Con ciò

$$R_2 = \pi K + 2\pi k \frac{dK}{dn} ;$$

e si ricava, in definitiva, pel flusso unitario nella direzione n, l'espressione

$$\mathfrak{F}_n = R_1 - R_2 = -4\pi k \frac{dK}{dn} . \tag{5}$$

Essa mette in evidenza che, per i varî $d\sigma$ spiccati da un medesimo punto, i flussi nei sensi delle rispettive normali n altro non sono che le componenti, secondo n, del vettore

$$\boldsymbol{F} = -4\pi k \operatorname{grad} K . \tag{5′}$$

Questo ancora è da dirsi *flusso* (in senso vettoriale).

4. - Considerazioni critiche.

La legittimità della posizione (3), logicamente ineccepibile, esige qualche commento dal punto di vista fisico.

Per T costante (nell'intorno del generico posto considerato), lo è anche K, in virtù della (2); e si è ricondotti alla legge di STEFAN.

Quando la temperatura varia col posto, il termine addizionale, è, in generale, diverso da zero. Circa il suo ordine di grandezza, già si può dire qualche cosa, in base al materiale d'osservazione attualmente posseduto: e precisamente che, nei limiti di temperatura entro cui fu controllata la legge di STEFAN, e fino a gradienti abbastanza rilevanti (diciamo di qualche centinaio di gradi per centimetro), *l'addendo* — $3k(dK/dn)$ *non può superare tre o quattro centesimi di* K.

Ciò risulta dalle stesse esperienze fondamentali di LUMMER-PASCHEN [4] e di KURLBAUM [5], istituite allo scopo di verificare la legge di STEFAN. In realtà, col dispositivo adottato in queste esperienze, non si misura (eseguite che sieno le necessarie riduzioni) l'H entro un ambiente a temperatura costante, ma sibbene la differenza di due H, che spettano ad elementi superficiali (paralleli), mantenuti a due diverse (anche molto diverse) temperature T e Θ, e irraggianti mutuamente attraverso l'aria: sicchè dall'uno all'altro c'è un gradiente di temperatura, certo, non nullo (e, probabilmente, assai irregolare, in causa dei moti convettivi dell'aria ambiente).

Ciò non ostante, le misurate differenze fra i due H si riscontrarono sensibilmente proporzionali a $T^4 - \Theta^4$, con un errore medio del 4% [6].

Questi dati di fatto potrebbero interpretarsi (nel suddetto ordine di approssimazione) come conferma della validità della legge di STEFAN, anche entro un mezzo a temperatura variabile da punto a punto.

Ma l'illazione non sarebbe ragionevole, implicando essa, come già si è accennato, flusso complessivo rigorosamente nullo. Conviene pertanto ammettere la presenza, in H, di un termine addizionale, dipendente dalla non uniformità della temperatura, e abbastanza piccolo da non togliere alle ricordate esperienze classiche valore probativo rispetto alla legge di STEFAN. Il successo delle esperienze stesse appare, così, dovuto (come tante altre volte accadde nella scienza) all'essersi trascurate (con sicura, anche se non cosciente, intuizione) influenze che, per altro rispetto (scambio globale di energia, nel caso presente), possono diventare essenziali.

Dalla necessità di un termine addizionale nella espressione di H, non segue senz'altro — ben si capisce — che esso abbia proprio la forma da noi adottata. Tuttavia, le ragioni di analogia e di semplicità, che ci hanno guidato, giustificano il tentativo di costruzione teorica e l'appello all'esperienza in un campo che, almeno nel caso limite dell'equilibrio termodinamico, si è rivelato tanto fecondo.

---

[4] « Ann. der Phys. », B. 63, 1897, pp. 395-410.

[5] Ibidem, B. 65, 1898, pp. 746-760.

[6] Cfr. la tabella II (p. 408) della citata Memoria di LUMMER-PASCHEN. Nella colonna VIII sono riportati gli scostamenti percentuali (fra valore osservato e valore teorico) di 13 esperienze:

$$-8;\quad -6;\quad -1{,}6;\quad -3{,}1;\quad 5{,}1;\quad 0{,}2;\quad -1{,}7;\quad 5{,}6;\quad 5;\quad 0{,}7;\quad 0{,}4;\quad 3;\quad 1{,}9\,.$$

Il corrispondente errore medio $\sqrt{(1/13)\sum\chi^2}$ (χ scostamento) vale $\sqrt{16{,}21}$ cioè poco più del 4%.

5. - Indicazione dei risultati.

Per ipotesi, qualunque sia il regime, ε, α e K hanno, in un generico punto M, valori dipendenti soltanto dalla temperatura T in M: gli stessi, quindi, che si avrebbero in regime stazionario con temperatura ovunque eguale a quella di M. Sèguita perciò a sussistere la nota relazione

$$\varepsilon = K\alpha \quad (6)$$ [7].

Altra fondamentale relazione dell'irraggiamento, in condizioni di equilibrio termodinamico, è quella che esprime la densità di energia u, in termini di K e di c, sotto la forma

$$u = \frac{4\pi K}{c} . \quad (7)$$

Orbene, in una prossima Nota dimostrerò che la validità della (7) è incondizionata, qualunque sia il regime. Fin da ora però è utile rilevare che il risultato è in parte intuitivo, e in parte no.

In verità, da un lato la stessa definizione di u (§ 1),

$$u = \lim_{S=0} \frac{U}{S} ,$$

lascia presumere che, continue essendo le caratteristiche del fenomeno, al convergere di S a zero attorno ad un punto determinato M, le cose andranno come se le dette caratteristiche fossero addirittura costanti coi valori che loro competono in M. In questo senso non c'è da aspettarsi divario, quando si passa, da T costante, ad un regime qualunque.

Viceversa, la non uniformità della temperatura richiede (§ 2) che si modifichi l'espressione della intensità specifica con un termine dipendente dal gradiente di T (secondo la direzione di cui si tratta). Questo termine (riportato al suo valore efficace in M) potrebbe *a priori* influire sul valore limite di U/S; nè vien fatto di rendersene conto per via intuitiva.

Perciò, tradurremo in formule le definizioni: e la (7) ne risulterà, con gli abituali procedimenti del calcolo, in modo generale e rigoroso.

---

[7] Una prima dimostrazione *matematica* di tale relazione fu da me data nella Nota *Deduzione rigorosa ecc.*, citata al § 1. Una seconda dimostrazione scenderà come corollario dal § 15 del presente scritto: più precisamente, tale paragrafo figurerà nella Nota *Sul regime variabile del calore raggiante: Dimostrazioni*, che sarà comunicata all'Accademia nella prossima seduta.

Lo scopo essenziale della ricerca è di stabilire l'*equazione indefinita dell'irraggiamento variabile.* Essa viene fornita, nel modo concettualmente più diretto, dal principio di conservazione dell'energia (si intende, sotto la forma specifica di energia raggiante). Bisogna, naturalmente, tener debito conto degli acquisti di energia raggiante provenienti dall'emissione, e delle perdite prodotte dall'assorbimento; e quest'ultimo computo è (come quello di U) piuttosto laborioso.

Nella già annunciata seconda Nota mostreremo che le due cause antagoniste si compensano esattamente, in virtù della (6), tal quale come in regime stazionario (sotto temperatura costante). Ammesso che sia il detto compenso, il principio di conservazione porge ovviamente, come nella teoria di FOURIER (salvo che ivi si parla di calore, e qui di energia raggiante),

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\operatorname{div} \boldsymbol{F}, \tag{I}$$

u ed $\boldsymbol{F}$ dipendendo da K, a norma delle (7) e (5′).

Esplicitando e dividendo per 4π, si ha

$$\frac{1}{c}\frac{\partial K}{\partial t} + \operatorname{div}(k \operatorname{grad} K) = 0\,, \tag{I′}$$

dove k rappresenta una funzione (che le nostre ipotesi lasciano indeterminata) della temperatura T, o, ciò che è lo stesso, della incognita principale K.

Per k costante, si ritrova la classica equazione di propagazione del calore; in generale si è condotti ad una equazione non lineare che, con la notazione dei parametri differenziali, si scrive

$$\frac{1}{c}\frac{\partial K}{\partial t} + \nabla(k, K) + k\Delta_2 K = 0\,.$$

NOTA II.

DIMOSTRAZIONI

Ibidem, pp. 453-464.

6. - Impostazione del calcolo della energia totale U.

Specificando, diciamo: Energia totale, la quale si trova ad un dato istante t entro un generico campo S nel mezzo, ben si intende allo stato di energia raggiante, cioè viaggiante in tutte le possibili direzioni con velocità c.

Il calcolo si imposta come segue:

Tutta l'energia in questione

o è penetrata in S passando attraverso un qualche elemento $d\sigma$ del contorno;

ovvero è stata emessa da un qualche elemento dS del campo.

Nell'uno e nell'altro caso essa uscirà poi dal campo attraverso un qualche elemento $d\sigma'$. La si prenderà in considerazione tutta quanta, senza duplicati, associando in tutti i modi possibili gli elementi *di partenza* ($d\sigma$ ovvero dS) coi $d\sigma'$ *di uscita, coll'avvertenza che il frapposto cammino sia tutto interno al campo.* Se il contorno σ di S è convesso, quest'ultima condizione si trova automaticamente soddisfatta; in generale vi si ottempera, limitandosi a considerare, sopra ogni raggio spiccato ed un elemento di partenza, il punto in cui, *per la prima volta,* esso esca dal campo.

Esaminiamo separatamente i due contributi: V dei varì $d\sigma$, e W dei varî dS.

7. - Espressione dell'addendo V.

Fissiamo una coppia $d\sigma$, $d\sigma'$, e occupiamoci dell'energia che, avendo attraversato $d\sigma$, si trova in viaggio, all'istante t, fra $d\sigma$ e $d\sigma'$. Si tratta, in tal caso, di energia inviata da $d\sigma$ entro il cono elementare che proietta

$d\sigma'$ da $d\sigma$ (ossia, a meno di infinitesimi d'ordine superiore, da un punto qualunque di $d\sigma$).

Dicansi: P e P' due punti rispettivamente appartenenti a $d\sigma$, $d\sigma'$; x, y, z e x', y', z' le loro coordinate; r la loro distanza; n, n' le normali al contorno in P, P'; Q un punto generico del segmento PP'; s la distanza $\overline{PQ}$; $\widehat{nr}$ l'angolo, in P, di n col raggio vettore che va da P a P'; $\widehat{n'r}$ l'angolo, in P', di n' col raggio vettore che va da P' a P, *necessariamente acuti*, dacchè si suppone che $d\sigma$ sia un elemento di partenza e $d\sigma'$ un elemento di uscita; $d\Omega$ l'ampiezza del cono elementare che proietta $d\sigma'$ da P, ossia

$$d\Omega = \frac{d\sigma' \cos \widehat{n'r}}{r^2}.$$

Nella porzione di questo cono, la cui distanza dal vertice P è compresa fra s e $s+ds$, sarà contenuta, all'istante t, energia partita da σ con debita anticipazione, e precisamente, c essendo la velocità, fra gli istanti $t-s/c$ e $t-(s+ds)/c$, il che implica « durante il tempuscolo ds/c ».

Attesa la definizione di G (§ 1), la detta energia ammonterà, *in partenza*, a

$$G \, d\sigma \, d\Omega \frac{ds}{c},$$

dove G si riferisce a $d\sigma$, alla direzione che va da P a P', e all'istante $t-s/c$. *In arrivo* (dopo essere stata sottoposta all'azione assorbente del mezzo per un tratto di lunghezza s), a una frazione f di quanto era in partenza, ossia a

$$fG \, d\sigma \, d\Omega \frac{ds}{c}.$$

La funzione f vale $e^{-\alpha s}$ nel caso tipico del regime stazionario a temperatura costante. In generale (α potendo variare col posto e col tempo) l'espressione di f è più complicata. A noi basta tuttavia ritenere che si tràtta di una funzione continua, positiva per sua natura e $\leqslant 1$, la quale si riduce all'unità per $s=0$.

Sommando rispetto ai varî ds, cioè integrando l'espressione precedente rispetto ad s fra 0 ed r, si ha, in base alla (1),

$$\frac{1}{c} \, d\sigma \, d\Omega \cos \widehat{nr} \int_0^r H\left(t-\frac{s}{c}\right) f \, ds,$$

in H essendosi preso in evidenza l'istante, e sottointendendosi che si tratta del punto P e della direzione $P \rightarrow P'$ (vogliamo dire di un elemento superficiale, spiccato da P normalmente ad r, con referenza al passaggio d'energia verso P').

L'integrale

$$\int_0^r H\left(t - \frac{s}{c}\right) f\, ds\,,$$

considerato come funzione del suo limite superiore r, può, collo sviluppo di TAYLOR arrestato al secondo termine, essere posto sotto la forma

$$r(H + r\Phi)\,,$$

dove H si riferisce all'istante t (nonchè, ben si intende, al punto P e alla direzione $P \rightarrow P'$), e *Φ ha un limite superiore finito* (tale ritenendosi quello di $\partial H/\partial t$ al variare comunque di P, P' e di t, nel campo e nell'intervallo di tempo che si considerano).

Il contributo elementare della coppia $d\sigma$, $d\sigma'$, sostituito per $d\Omega$ il suo valore $d\sigma' \cos \widehat{n'r}/r^2$, assume così l'espressione

$$\frac{1}{c}\, d\sigma\, d\sigma'\, \frac{\cos \widehat{nr} \cos \widehat{n'r}}{r} \{H + r\Phi\}\,. \tag{8}$$

La direzione $P \rightarrow P'$ ha per coseni direttori

$$\frac{x' - x}{r}\,, \qquad \frac{y' - y}{r}\,, \qquad \frac{z' - z}{r}\,.$$

Sarà quindi, in base alla (3),

$$H = K - k \sum \frac{\partial K}{\partial x} \frac{x' - x}{r}\,,$$

il simbolo $\sum$ indicando la somma del termine scritto cogli altri due che si ottengono da esso per sostituzione delle lettere x, x', con y, y' e z, z'. Le funzioni K, k, $\partial K/\partial x$, $\partial K/\partial y$, $\partial K/\partial z$, che compariscono nel secondo membro, si riferiscono, naturalmente, al punto P. Giova introdurre un punto M, scelto a piacimento entro S e fisso al variare di P. Si ha identicamente,

$$H = \mathfrak{H} + \eta \tag{9}$$

con

$$(10) \qquad \mathfrak{H} = K_M - \sum \frac{x'-x}{r}\left(k\frac{\partial K}{\partial x}\right)_M,$$

e

$$\eta = (K_P - K_M) - \sum \frac{x'-x}{r}\left\{\left(k\frac{\partial K}{\partial x}\right)_P - \left(k\frac{\partial K}{\partial x}\right)_M\right\},$$

l'indice (M o P) essendo apposto ad una funzione dei punti di S per specificare il punto in cui va preso il valore della funzione.

Ritenuta la funzione K finita e continua, insieme con le sue derivate di spazio prime e seconde, e altresì la $k(K)$ insieme con la sua derivata prima rapporto all'argomento K, si può manifestamente, mercè applicazione dello sviluppo di TAYLOR arrestato dopo il primo termine, attribuire ad η la forma

$$\eta = \overline{PM}\cdot\varphi,$$

φ designando, come già Φ, una funzione che ha limite superiore finito, qualunque siano P, P' e t.

Ove si introduca la massima corda l del campo S, e si noti che i rapporti $\overline{PM}/l$, r/l sono entrambi $\leqslant 1$, si può ancora porre

$$(11) \qquad r\Phi + \eta = l\left(\frac{r}{l}\Phi + \frac{\overline{PM}}{l}\varphi\right) = l\Phi^*,$$

Φ^* comportandosi come Φ e φ quanto al limite superiore. Ed è importante rilevare la circostanza seguente: Per un dato S, sia $\frac{1}{2}\Lambda$ il maggiore dei limiti superiori di $|\Phi|$, $|\varphi|$, al variare di P, P' e t. Quando, in luogo di S, si considera una sua parte comunque piccola, $|\Phi|$ e $|\varphi|$ rimangono *a fortiori* $\leqslant \frac{1}{2}\Lambda$. Ne consegue, badando a

$$\Phi^* = \frac{r}{l}\Phi + \frac{\overline{PM}}{l}\varphi,$$

che *il limite superiore di* $|\Phi^*|$ *è* $\leqslant \Lambda$, *e ciò comunque si faccia convergere* S *a zero attorno ad* M.

Ritorniamo ormai al contributo elementare (8). Mercè le (9) e (11), potremo scriverlo

$$(8') \qquad \frac{1}{c}\,d\sigma\,d\sigma'\,\frac{\cos\widehat{nr}\cos\widehat{n'r}}{r}\{\mathfrak{H} + l\Phi^*\},$$

$\mathfrak{H}$ essendo data dalla (10).

V è, per sua definizione, la somma di tutti questi contributi elementari. Supponiamo per un momento, tanto per fissare le idee, che σ sia una superficie convessa. In tal caso, ad ogni $d\sigma'$, considerato come elemento di uscita, vanno associati *tutti* i possibili $d\sigma$, come s'è osservato nel precedente §. L'espressione di V è, allora,

$$V = \int_\sigma d\sigma' \int_\sigma d\sigma \frac{\cos \widehat{nr} \cos \widehat{n'r}}{r} \{\mathfrak{H} + l\Phi\} .$$

In generale, ad ogni $d\sigma'$ va associata soltanto una parte dei $d\sigma$: quelli, per cui il segmento PP' è tutto interno al campo. Chiamando σ^* quella porzione di σ (dipendente dalla posizione di P'), che è luogo dei punti in cui i raggi spiccati da P' incontrano *per la prima volta* il contorno, l'espressione di V, valida in ogni caso, sarà

$$V = \int_\sigma d\sigma' \int_{\sigma^*} d\sigma \frac{\cos \widehat{nr} \cos \widehat{n'r}}{r} \{\mathfrak{H} + l\Phi\} , \tag{12}$$

la quale differisce dalla precedente soltanto perchè l'integrazione interna è estesa a σ^*, anzichè a tutta σ (coincidendo, naturalmente, σ^* con σ, nel caso dei contorni convessi).

8. - Lemmi.

Prima di procedere, importa rilevare che vi sono due tipi molto semplici di integrali quadrupli, per cui è indifferente estendere l'integrazione interna a σ^* ovvero a tutto σ. Essi sono

$$J = \int_\sigma d\sigma' \int_\sigma d\sigma \frac{\cos \widehat{nr} \cos \widehat{n'r}}{r} ,$$

e

$$J_x = \int_\sigma d\sigma' \int_\sigma d\sigma \frac{\cos \widehat{nr} \cos \widehat{n'r}}{r} (x' - x) ,$$

coi due analoghi J_y, J_z.

La dimostrazione si fa come al § 7 della già citata mia Nota *Deduzione rigorosa* ecc. (1).

(1) In questi Rendiconti, ser. 5ª, vol. XXIII (1° sem. 9114), pp. 12-21 [cfr. questo volume: XXIX, pp. 403-413].

Dalla stessa Nota (§ 4) si ha ancora

$J = 4\pi S$ (S volume del campo, designato colla stessa lettera).

Infine si riconosce ovviamente che $J_x = 0$. Infatti, scambiamo fra loro $d\sigma$ e $d\sigma'$. Da un lato, ciò non influisce sul valore dell'integrale. D'altro lato, ove si inverta eziandio l'ordine delle integrazioni, tutto rimane inalterato nella espressione formale di J_x, tranne il binomio $x' - x$ che cambia segno. Ne risulta $J_x = -J_x$, e quindi $J_x = 0$. Nulli del pari sono, naturalmente, gli integrali J_y ed J_z.

9. - Comportamento limite di V.

Tenuto presente tutto ciò, e posto

$$I = \int_\sigma d\sigma' \int_{\sigma^*} d\sigma \frac{\cos\widehat{nr}\cos\widehat{n'r}}{r}\, \Phi^*,$$

ove, in base alla (10), si espliciti $\mathfrak{H}$, la precedente espressione di V diviene

$$V = 4\pi S \cdot K_M + lI\,. \tag{13}$$

Ricordiamo che, per ognuno dei contributi elementari costituenti V, $\cos\widehat{nr}$, $\cos\widehat{n'r}$ sono di necessità positivi; tali essi sono quindi anche in I. Dacchè $|\Phi^*|$ non supera una certa costante Λ, dalla definizione di I scende la limitazione

$$|I| \leqslant \Lambda \int_\sigma d\sigma' \int_{\sigma^*} d\sigma \frac{\cos\widehat{nr}\cos\widehat{n'r}}{r}\,.$$

Nell'integrale del secondo membro è ormai lecito sostituire σ a σ^*.

L'integrale stesso non differisce pertanto da $J = 4\pi S$. Ne deduciamo

$$\left|\frac{I}{S}\right| \leqslant 4\pi\Lambda\,.$$

Quando si fa rimpicciolire indefinitamente S attorno ad M, la massima corda l converge a zero, mentre, come abbiamo osservato, si può mantenere la stessa costante Λ come limite superiore di $|\Phi^*|$. Perciò

$l(I/S)$ converge a zero, e la (13), dividendo per S e passando al limite, porge

$$\lim_{S=0} \frac{V}{S} = 4\pi K_M , \tag{13'}$$

10. - L'addendo W.

Dobbiamo ora considerare i contributi dei varî coni elementari che, avendo per vertice un generico elemento dS del campo, proiettano un $d\sigma'$ del contorno, restando tutti interni al campo (condizione, quest'ultima, soddisfatta per qualsiasi coppia dS, $d\sigma'$, quando il contorno è convesso).

Specifichiamo (a meno di infinitesimi) con P la sede di dS, con P' quella di $d\sigma'$; e indichiamo, al solito, con r la distanza $\overline{PP'}$, con $d\Omega$ l'apertura del cono elementare, che proietta $d\sigma'$ da P.

Si tratta di esprimere l'energia che, essendo stata emessa da dS con conveniente anticipazione, si trova, all'istante t, viaggiante entro il cono suaccennato. Con considerazioni del tutto analoghe a quelle svolte nel § 7 a proposito di V, si ottiene

$$\frac{1}{c}\, dS\, d\Omega \int_0^r \varepsilon\left(t - \frac{s}{c}\right) f\, ds ,$$

$\varepsilon(t - s/c)$ designando il coefficiente di emissione in P all'istante $t - s/c$, e f una frazione propria dipendente dall'assorbimento.

Applichiamo all'integrale il primo teorema della media. Potremo scrivere, in sua vece,

$$r\, \overline{\varepsilon f} ,$$

dove $\overline{\varepsilon f}$ è valore intermedio fra quelli assunti da $\varepsilon(t - s/c)\cdot f$ nell'intervallo di integrazione.

Introducendo qui ancora la massima corda l di S, si ha in definitiva il contributo proveniente da una coppia dS, $d\sigma'$, sotto la forma

$$\frac{1}{c} dS\, d\Omega\, l\, \overline{\varepsilon f}\, \frac{r}{l} .$$

Ove si pensi che, per esaurire tutti i $d\sigma'$ associabili a un generico dS, bisogna integrare all'intera sfera unitaria Ω, ne deduciamo immediatamente

$$W = \frac{l}{c}\int_S dS \int_\Omega \overline{\varepsilon f} \cdot \frac{r}{l}\, d\Omega\,.$$

Detto λ il limite superiore dei valori di ε per tutti i punti del campo, e per tutto l'intervallo di tempo, che si vogliono considerare, sarà manifestamente $\overline{\varepsilon f}(r/l) \leqslant \lambda$ (dacchè f e r/l sono entrambe $\leqslant 1$). Quindi, tutto essendo positivo,

$$W \leqslant \frac{l}{c}\,\lambda \int_S dS \int_\Omega d\Omega\,.$$

L'integrale interno vale 4π, talchè risulta

$$W \leqslant \frac{l}{c}\,\lambda \cdot 4\pi S\,;$$

e di conseguenza, al convergere di S a zero attorno al solito punto M,

$$\lim_{S=0} \frac{W}{S} = 0\,. \tag{14}$$

11. - Densità dell'energia u. Dimostrazione della (7).

Abbiamo posto

$$U = V + W\,.$$

La densità di energia u in un punto M è, per sua definizione, il limite del rapporto U/S, quando S converge a zero attorno ad M. Avendo separatamente dalle (13') e (14) i limiti di V/S e di W/S, siamo senz'altro in grado di concludere

$$u_M = \lim_{S=0} \frac{U}{S} = 4\pi K_M\,, \qquad \text{c. d. d.}$$

12. - Energia raggiante $E\,dt$, creata per emissione entro S nel tempuscolo dt.

Ogni dS ne emette complessivamente, tutt'all'intorno, $4\pi \cdot \varepsilon\, dS \cdot dt$. Ciò val quanto dire che, se $E\,dt$ rappresenta tutta l'emissione di un campo finito S, durante dt, quando il campo si fa convergere a zero attorno ad un punto determinato M,

$$\lim_{S=0} \frac{E}{S} = 4\pi\varepsilon_M . \tag{15}$$

13. - Energia raggiante $A\,dt$, annientata per assorbimento entro S nel tempuscolo dt.

Il comportamento di A è più riposto che non quello di E, dacchè l'assorbimento si opera lungo il percorso d'ogni singolo raggio, su cui viaggia dell'energia. Conviene quindi aver riguardo a tutti i possibili raggi, distinguendoli, come già a § 6, in due categorie, a norma della loro origine. Questa può cadere in un $d\sigma$ del contorno, attraverso cui l'energia raggiante penetra nel campo S; ovvero in un dS, da cui viene emessa. L'estremo del raggio cadrà, in ogni caso, in un $d\sigma'$ del contorno, il primo che si incontra a partire dall'origine: colla quale specificazione (superflua per contorni convessi) si è sicuri di considerare tutti i raggi interni al campo, e ciascuno una volta sola, scindendoli in varietà elementari ∞^4, o rispettivamente ∞^5, aventi gli estremi nei varî $d\sigma$, $d\sigma'$, oppure nei varî dS, $d\sigma'$.

Valuteremo separatamente i contributi all'assorbimento $B\,dt$ e $C\,dt$ delle due specie di raggi.

Calcolo di B. – Consideriamo la varietà elementare ∞^5 di raggi che hanno origine in $d\sigma$, e escono attraverso $d\sigma'$, riprendendo le notazioni del § 7. Ognuno di questi raggi è, a meno di infinitesimi, confondibile col segmento PP'. L'energia emessa da $d\sigma$, durante il tempuscolo dt, vale

$$G\,d\sigma\,d\Omega\,dt \;;$$

di cui, alla distanza s da P, arriva soltanto una frazione f, dipendente dall'assorbimento lungo il tratto $\overline{PQ} = s$, ed eguale ad 1 per $s = 0$.

In virtù della legge sperimentale dell'assorbimento, l'ulteriore assorbimento nel tratto compreso fra s e $s + ds$ è dato da

$$fG\,d\sigma\,d\Omega\,dt \cdot \alpha\,ds ,$$

essendo α il coefficiente d'assorbimento in Q nell'istante che si considera. Esplicitando G (come a § 7) e sommando gli assorbimenti dei singoli elementi ds, si ha

$$d\sigma\,d\Omega\,dt \cos\widehat{nr} \int_0^r H\left(t - \frac{s}{c}\right) f\alpha\,ds ,$$

ovvero (sempre come a § 7)

$$(16)\qquad dt\,d\sigma\,d\sigma'\,\frac{\cos\widehat{nr}\cos\widehat{n'r}}{r}\,\{H\alpha + r\Psi\}\,,$$

in cui $H\alpha$ si riferisce al punto P e all'istante t, e Ψ designa una funzione dotata di limite superiore finito.

In luogo di $H\alpha$, si può scrivere

$$\mathfrak{H}\alpha_M + \zeta\,,$$

essendo $\mathfrak{H}$ definita dalla (10) e

$$\zeta = (\alpha_P K_P - \alpha_M K_M) - \sum \frac{x'-x}{r}\left\{\left(\alpha k\,\frac{\partial K}{\partial x}\right)_P - \left(\alpha k\,\frac{\partial K}{\partial x}\right)_M\right\}.$$

Ma a ζ (ammesso che il coefficiente d'assorbimento α sia esso pure finito e continuo insieme con le sue derivate prime) è lecito attribuire la forma

$$\overline{PM}\psi\,,$$

ψ restando finita anche quando S converge a zero attorno ad M.

Posto ancora

$$\frac{r}{l}\Psi + \frac{\overline{PM}}{l}\,\psi = \Psi^*\,,$$

(con che — l designando, al solito, la massima corda del campo — anche Ψ^* rimane finita), si ha

$$H\alpha + r\Psi = \mathfrak{H}\alpha_M + l\Psi^*\,.$$

Fatta la corrispondente sostituzione nella (16), si possono senz'altro sommare i contributi elementari, integrando debitamente rispetto a $d\sigma$ e a $d\sigma'$. Come si è detto a proposito di V, l'integrazione interna rispetto a $d\sigma$ va estesa non a tutto σ, ma a σ^*.

Il risultato è ciò che abbiamo comprensivamente chiamato $B\,dt$. Sopprimendo il dt, si ha la cercata espressione di B:

$$(17)\qquad B = \alpha_M\int_\sigma d\sigma'\int_{\sigma^*} d\sigma\,\frac{\cos\widehat{nr}\cos\widehat{n'r}}{r}\,\{\mathfrak{H} + l\Psi^*\}\,.$$

Di qua, tenuto conto dei lemmi del § 8, scende subito, come al § 9,

$$\lim_{S=0} \frac{B}{S} = 4\pi K_M \alpha_M . \tag{17'}$$

Calcolo di C. – Con procedimento analogo a quello usato per B, si ha il contributo elementare, proveniente da una coppia dS, $d\sigma'$, sotto la forma

$$dS\, d\Omega\, dt \int_0^r \varepsilon \left(t - \frac{s}{c}\right) f\alpha\, ds ,$$

essendo manifesto il significato delle notazioni (cfr. § 10).

$C\, dt$ non è che la somma di tutti questi contributi; perciò

$$C = \int_S dS \int_\Omega d\Omega \int_0^r \varepsilon \left(t - \frac{s}{c}\right) f\alpha\, ds .$$

Operando come a § 10, si applica all'integrale interno (rispetto ad s) il teorema della media, ecc. Si constata, così, che, quando S converge a zero attorno ad M,

$$\lim_{S=0} \frac{C}{S} = 0 . \tag{18}$$

Comportamento al limite di $A = B + C$. – Dalle (17′) e (18) si ha immediatamente

$$\lim_{S=0} \frac{A}{S} = 4\pi K_M \alpha_M . \tag{19}$$

14. - Bilancio dell'energia raggiante.

La quantità totale di energia raggiante U, esistente, in un dato istante t, entro S, può esprimersi, mediante la densità u, sotto la forma

$$U = \int_S u\, dS .$$

La sua variazione durante un tempuscolo dt è, conseguentemente,

$$\dot{U}\,dt = dt\int_S \frac{\partial u}{\partial t}\,dS\,. \tag{20}$$

Al limite, per S convergente a zero attorno ad M, dalla (20) si ha

$$\lim_{S=0}\frac{\dot{U}}{S} = \frac{\partial u_M}{\partial t}\,. \tag{20'}$$

Ciò premesso, osserviamo che la natura del fenomeno, a cui va attribuita la variazione di U, consente di calcolare la stessa variazione in un altro modo. E precisamente, dacchè si tratta di irraggiamento puro, sfruttando la circostanza (che variazioni di energia entro S possono prodursi per le seguenti tre cause (e per queste soltanto):

1) per emissione, con che si crea energia raggiante, e si ha (§ 12), in capo al tempuscolo dt, una variazione positiva $E\,dt$;

2) per assorbimento, con che si distrugge energia raggiante, e si ha (§ 13), in capo allo stesso tempuscolo, una variazione negativa $-A\,dt$;

3) per flusso (dall'esterno) attraverso il contorno σ, con che si ha (§ 3) la variazione

$$dt\int_\sigma \mathfrak{F}_n\,d\sigma = -\,dt\int_S \operatorname{div}\boldsymbol{F}\,dS\,,$$

la quale *a priori* può essere positiva o negativa.

La variazione totale ammonta, pertanto, a

$$dt\left\{E - A - \int_S \operatorname{div}\boldsymbol{F}\,dS\right\}.$$

Eguagliando a $U\,dt$, si ricava, sotto forma globale, valida per qualsiasi porzione S del mezzo irradiante, la equazione fondamentale dell'irraggiamento puro

$$\dot{U} = E - A - \int_S \operatorname{div}\boldsymbol{F}\,dS\,. \tag{21}$$

15. - Equazione indefinita dell'irraggiamento.

Dalla (21) si passa ovviamente ad una equivalente condizione locale, dividendo per S, e facendo convergere S a zero attorno ad un generico suo punto $\boldsymbol{M}$.

In base alle (20′), (15) e (19), risulta (sopprimendo l'indice $\boldsymbol{M}$, ormai superfluo, perchè tutto si riferisce ad uno stesso punto del mezzo)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 4\pi\varepsilon - 4\pi K\alpha - \operatorname{div} \boldsymbol{F}\,, \tag{22}$$

valida in ogni punto e in ogni istante, qualunque sia il regime.

Se si ritorna al caso particolare della stazionarietà sotto temperatura costante, u è costante ed $\boldsymbol{F}$ nullo, e rimane

$$\varepsilon = K\alpha\,,$$

cioè la (6). Si ha quindi, in quanto precede, una nuova dimostrazione di questa fondamentale relazione della teoria del calore raggiante in condizione di equilibrio termodinamico.

Torniamo al caso generale e ricordiamo, dal § 1, che è ragionevole ammettere che ε, α, K, sotto qualunque regime, dipendano soltanto dalla temperatura e seguitino, per conseguenza, a verificare la (6).

La (22) si riduce, così, alla forma definitiva

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\operatorname{div} \boldsymbol{F}\,, \tag{I}$$

già annunciata nella Nota precedente. Converrà ricercarne ed illustrarne taluna conseguenza suscettibile di controllo sperimentale.

XXXI.

SULLA RIDUZIONE DEL PROBLEMA DEI TRE CORPI

« Atti Ist. Veneto di Sc., lett. ed arti », t. LXXIV (1914-15),

pp. 907-939.

La esplicita riduzione del problema dei tre corpi al minimo ordíne differenziale risale notoriamente a LAGRANGE (¹). Essa appare oggidì concettualmente ovvia in base alla teoria di LIE (²) degli integrali dei sistemi canonici. Si può infatti, prendendo le mosse dalle equazioni cartesiane del moto assoluto dei tre corpi, assumerle senz'altro sotto forma canonica. E si ha un sistema con 9 gradi di libertà, ossia del 18° ordine, il quale ammette i tre integrali delle quantità di moto e i tre delle aree, oltre all'integrale delle forze vive.

Valendosi dei primi tre, si passa ad un sistema, pure canonico e a funzione caratteristica indipendente dal tempo t, con sei gradi di libertà, rimanendo altresì conservata la forma degli integrali delle aree. Questi danno luogo (mercè opportuna specificazione delle direzioni di riferimento) a due relazioni invarianti *in involuzione*, donde un ulteriore abbassamento di due gradi di libertà, conseguendosi così un sistema d'ottavo ordine, ben si intende sempre canonico e di funzione caratteristica H indipendente dal tempo t. È questo il risultato che più ci interessa. La riduzione definitiva ad un sistema di sesto ordine si raggiunge poi, quando si voglia, valendosi dell'integrale $H =$ cost. ed eliminando t.

Lo sfruttamento dei vari integrali per gli indicati abbassamenti d'ordine fu operato da JACOBI (³), il quale ha anche compiuta la esplicita riduzione delle equazioni differenziali fino al settimo ordine (cioè la massima, salvo l'eliminazione di t), con condotta di calcolo che, nella prima

---

(¹) *Essai sur le problème des trois corps*, « Oeuvres », t. VI, pp. 229-331.

(²) Veggasi ad es. GOURSAT, *Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre*, Paris, Hermann, 1891, cap. VIII.

(³) *Sur l'élimination des noeuds dans le problème des trois corps*, Werke, B. IV, pp. 297-314.

parte, è sostanzialmente canonica, e, soltanto nella seconda (nel trar partito dagli integrali delle aree), è ormai superata.

Coll'impostazione comprensiva dianzi accennata, c'è ancora da costruire effettivamente la H. Vi si perviene rapidamente riferendosi a variabili kepleriane (4), ma c'è allora l'inconveniente che l'espressione esplicita di H si complica di molto, richiedendo laboriosi sviluppi in serie, come si sa dalla teoria della funzione perturbatrice. Più conforme alla natura della questione è l'attenersi, come già LAGRANGE e JACOBI, ad elementi che caratterizzino in modo diretto la configurazione e lo stato di moto dei tre corpi.

A ciò risponde, con un penetrante artificio formale, la classica ricerca del BRUNS (5); e, in modo più espressivo, direi anzi definitivo per ciò che concerne il risultante sistema ridotto, il trattato del WHITTAKER (6). Non completamente luminosa è invece la deduzione di quest'ultimo autore, in quanto si appoggia, come quella del BRUNS, ad uno speciale spediente analitico (la scelta di una opportuna trasformazione di contatto), sulla cui origine non si dà ragguaglio alcuno, e che d'altra parte richiede qualche sviluppo materiale di calcolo.

Mi è parso perciò desiderabile un ulteriore perfezionamento di metodo, inteso a rendere spontanei e perspicui anche i passaggi intermedi. Lo ho concretato nelle lezioni di Meccanica superiore, testè tenute all'Università di Padova, e mi permetto di farne oggetto della presente comunicazione.

Si vedrà che giova introdurre fin da principio convenienti coordinate lagrangiane del sistema: due angoli per individuare il piano dei tre corpi rispetto al piano invariabile (baricentrale), e sei coordinate cartesiane per individuare i tre corpi nel loro piano. Sfruttando dapprima gli integrali delle aree, ottengo, attraverso interpretazioni istruttive, un sistema ridotto a sei gradi di libertà, assai opportuno per il confronto col caso piano (dello stesso problema dei tre corpi).

La forma di WHITTAKER con quattro gradi di libertà ne discende immediatamente, in base agli integrali delle quantità di moto, colla solita trasformazione canonica che trasporta l'origine degli assi in uno dei tre corpi.

Il procedimento in discorso ha altresì il vantaggio di fornire sotto forma elegante le equazioni supplementari: quelle cioè da cui dipende,

(4) H. POINCARÉ, *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste*, t. I, Paris, Gauthier-Villars, 1892, pp. 38-44; ovvero CHARLIER, *Die Mechanik des Himmels*, B. I, Leipzig, Veit, 1902, pp. 279-286.

(5) *Ueber die Integrale des Vielkörper-Problems*, « Acta Math. », t. XI, 1887, pp. 60-64. Il BRUNS presenta sotto forma esplicita, anzi razionale, anche la riduzione al sesto ordine, però con intervento di un parametro complesso.

(6) *Analytical Dynamics*, Cambridge, University Press, 1904, pp. 331-335.

una volta risolto il sistema ridotto, la determinazione dei parametri eliminati, segnatamente l'inclinazione e la longitudine del nodo del piano dei tre corpi rispetto al piano invariabile.

Quando in particolare si tratta di una soluzione periodica del sistema ridotto, rimane bene caratterizzato il legame fra gli elementi geometrici della soluzione periodica e il moto medio del nodo. Ne discende un elegante corollario concernente le soluzioni prossime ai triangoli equilateri di LAGRANGE, uniformemente ruotanti. E precisamente: *L'intersezione del piano dei tre corpi col piano invariabile ruota* (in generale non uniformemente) *con moto medio pari al doppio della velocità angolare di ciascuno dei tre corpi* (nel loro piano).

1. - Distacco del problema piano dal caso generale. Assi di riferimento. Coordinate lagrangiane.

Siano P_0, P_1, P_2 i tre corpi che si attraggono secondo la legge di NEWTON; O il loro baricentro, che si può supporre fisso.

Se il moto dei tre corpi si svolge sempre in un medesimo piano, il problema si riduce subito a due gradi di libertà (considerando il moto relativo di P_1, P_2 rispetto a P_0), e c'è da tener conto ulteriormente dell'integrale delle aree relativo a questo piano. La massima riduzione si effettua con calcolo ovvio: per es. introducendo coordinate polari (⁷).

Lasciamo da parte il problema piano, e consideriamo il caso generale, in cui i tre corpi *non* stanno sempre in un medesimo piano.

Sia $\boldsymbol{K}$ il momento risultante delle quantità di moto rispetto ad O.

Questo vettore, notoriamente costante, va senz'altro ritenuto *diverso da zero*. Infatti, ove si annullasse, le quantità di moto dei tre punti (di cui già la risultante è nulla per la fissità del baricentro) costituirebbero un sistema equilibrato, quindi (trattandosi di tre vettori) necessariamente contenuto in un piano: il moto si svolgerebbe allora nel piano che contiene le tre velocità iniziali, contro l'ipotesi.

Ciò posto, dacchè $\boldsymbol{K}$ non è nullo e quindi gli compete una ben determinata direzione fissa, potremo associargli il *piano invariabile* perpendicolare a $\boldsymbol{K}$ in O, e considerare come fisso il triedro $O\xi\eta\zeta$ definito come segue: $O\zeta$ diretto come $\boldsymbol{K}$; $O\xi$ e $O\eta$ direzioni *fisse* del piano invariabile.

Supporremo, come si suole in meccanica razionale, che il triedro $O\xi\eta\zeta$

(⁷) ROUTH, *A treatise on the dynamics of a system of rigid bodies*, Part. I, London, Macmillan, 1897, §§ 424-425. Cfr. altresì: CHARLIER, *Ueber das reducirte Drei-Korper-Problem*, « Meddelanden från Lunds Observatorium », n. 6, Förhandl. af K. Sv. Vet-Akad., 1899; e WHITTAKER, loco cit., pp. 339-341.

sia *sinistrorso*, ossia che, per passare da $O\xi$ ad $O\eta$, si debba ruotare di $\pi/2$ nel senso orario (rispetto ad $O\zeta$).

Avendo escluso che i tre corpi rimangano sempre nel medesimo piano, siamo autorizzati a riferirci ad un intervallo di tempo in cui il piano dei tre corpi è distinto dal piano invariabile, e quindi lo interseca (in ogni istante t dell'intervallo) secondo una ben determinata retta — linea dei nodi — ed ha sopra di esso una inclinazione non nulla. Precisiamo questi elementi.

Si consideri in primo luogo la perpendicolare Oz al piano dei tre corpi, in tale verso da formare con $\boldsymbol{K}$, ossia $O\zeta$, un angolo acuto ϑ: ecco la misura della inclinazione sul piano invariabile.

Si scelga poi sulla linea dei nodi quel verso Ox, rispetto a cui la rotazione da $O\zeta$ ad Oz (attraverso l'angolo acuto) apparisca sinistrorsa.

Longitudine del nodo si dirà l'anomalia ψ di Ox nel piano invariabile, cioè l'angolo ψ, di cui bisogna ruotare, a partire da $O\xi$, nel verso positivo $\xi \to \eta$, per raggiungere Ox: ecco il secondo elemento determinativo della posizione del piano dei tre corpi rispetto al riferimento fisso. Seguendo una espressiva denominazione di POINCARÉ, i due parametri ϑ e ψ si diranno complessivamente *variabili oblique*.

Molto importante per noi sarà il riferimento mobile costituito: dagli assi Oz, Ox testè specificati, e da un terzo asse Oy (del piano dei tre corpi) diretto perpendicolarmente ad entrambi in modo che il triedro $Oxyz$ risulti sinistrorso.

Le variabili oblique ϑ e ψ permettono ovviamente di individuare la posizione relativa dei due triedri. Le formule esplicite di trasformazione (caso particolare delle euleriane, corrispondenti al valore zero dell'angolo φ) si possono tosto conseguire, immaginando di passare dall'uno all'altro dei due triedri — diciamo dal fisso al mobile — con due rotazioni successive (sempre sinistrorse): di ψ attorno ad $O\zeta$ e poi di ϑ attorno ad Ox. Lascio di trascriverle perchè in ciò che segue non mi accadrà di servirmene: basterà aver presente la precisa definizione geometrica degli angoli ϑ e ψ.

È chiaro comunque che anche la posizione assoluta dei tre corpi P_0, P_1, P_2 risulterà pienamente determinata col concorso di ϑ e ψ, tostochè si assegnino le sei coordinate x_ν, y_ν $(\nu = 0, 1, 2)$ che li individuano, nel loro piano, rispetto alla coppia mobile Oxy.

Coordinate lagrangiane del sistema sono quindi le otto seguenti

$$\begin{aligned} &\vartheta\,, \quad \psi\,; \\ &x_\nu\,, \quad y_\nu \qquad\qquad (\nu = 0, 1, 2). \end{aligned}$$

Va notato che, essendo per ipotesi l'origine O situata nel baricentro, le x_ν, y_ν sono necessariamente legate dalle due relazioni lineari

$$(1)\qquad \begin{cases} \sum_0^2{}_\nu\, m_\nu x_\nu = 0\,, \\ \sum_0^2{}_\nu\, m_\nu y_\nu = 0\,, \end{cases}$$

m_0, m_1, m_2 designando le masse di P_0, P_1, P_2.

Di ciò terremo conto a suo tempo.

Ma è anche perfettamente legittimo trattare, finchè fa comodo, O come un punto fisso qualsiasi, e in conformità le x_ν, y_ν quali parametri indipendenti.

2. - Elementi geometrico-materiali del triangolo dei tre corpi.

Designeremo con τ il doppio dell'area del triangolo $P_0P_1P_2$, cioè il valore assoluto del determinante

$$\begin{vmatrix} x_0 & y_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix},$$

e potremo, senza scapito della generalità, ritenere τ *non nullo* nell'intervallo di tempo considerato. Questo perchè, essendo escluso (§ precedente) che il moto avvenga costantemente in un piano, rimane escluso in particolare che i tre corpi si trovino sempre allineati [8]: è dunque lecito riferirsi ad un intervallo di tempo, in cui essi costituiscono un effettivo triangolo.

Introdurremo poi: la massa totale del sistema

$$m = m_0 + m_1 + m_2\,;$$

i momenti di inerzia

$$I_x = \sum_0^2{}_\nu\, m_\nu y_\nu^2\,, \qquad I_y = \sum_0^2{}_\nu\, m_\nu x_\nu^2\,,$$

---

[8] Infatti l'allineamento non può aver luogo sopra una retta *fissa*, perchè allora ogni piano fisso per la retta conterrebbe sempre i tre corpi. Se poi la retta varia, il piano (baricentrale) determinato dalle posizioni che le spettano in due istanti infinitamente vicini t e $t + dt$ viene a contenere così i tre corpi come le loro velocità all'istante t: e si è ancora ricondotti ad un moto piano. (Postilla autografa dell'Autore. [*N. d. R.*]).

rispetto ai due assi Ox, Oy; il corrispondente prodotto d'inerzia

$$J = \sum_0^2{}_\nu\, m_\nu x_\nu y_\nu\,,$$

e infine il determinante

$$D = \begin{vmatrix} I_x & J \\ J & I_y \end{vmatrix}.$$

Fra τ, D e le masse sussiste la relazione identica

(2) $$m_0 m_1 m_2 \tau^2 = mD\,.$$

Per dimostrarla, partiamoci dal determinante

$$\pm\,\tau = \begin{vmatrix} x_0 & y_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix},$$

e moltiplichiamone la prima riga per m_0, la seconda per m_1, la terza per m_2, con che si ha

$$\pm\, m_0 m_1 m_2 \tau = \begin{vmatrix} m_0 x_0 & m_0 y_0 & m_0 \\ m_1 x_1 & m_1 y_1 & m_1 \\ m_2 x_2 & m_2 y_2 & m_2 \end{vmatrix}.$$

Eseguendo il prodotto dei due determinanti per colonne, ove si badi alle precedenti definizioni di I_x, I_y, J, m e alle (1), risulta

$$m_0 m_1 m_2 \tau^2 = \begin{vmatrix} I_x & J & 0 \\ J & I_y & 0 \\ 0 & 0 & m \end{vmatrix},$$

ossia appunto la (2).

Da essa discende in particolare che, sotto le nostre ipotesi, è sempre

$$D > 0\,.$$

3. - Vettori fondamentali.
Velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$ del triedro mobile rispetto al triedro fisso.

Premettiamo che, rispetto agli assi mobili $Oxyz$, la perpendicolare $O\zeta$ al piano invariabile (e con essa il vettore $\boldsymbol{K}$) ha i coseni direttori

$$0, \quad \sin\vartheta, \quad \cos\vartheta .$$

Infatti $O\zeta$ è perpendicolare ad Ox, e si ha (§ 1) che, per passare da $O\zeta$ ad Oz, si deve ruotare di ϑ nel verso positivo $y \rightarrow z$.

Se si indica con $\boldsymbol{\varkappa}$ il vettore unitario (fisso) parallelo ad $O\zeta$, e si introducono i soliti vettori unitari, $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ relativi al triedro $Oxzy$, si avrà naturalmente

$$\boldsymbol{\varkappa} = \sin\vartheta\,\boldsymbol{j} + \cos\vartheta\,\boldsymbol{k} . \tag{3}$$

Ciò posto, consideriamo il passaggio da un generico istante t all'istante consecutivo $t+dt$. Il piano dei tre corpi cambierà in generale di orientazione rispetto al riferimento fisso: ψ si incrementerà di $d\psi$, ϑ di $d\vartheta$. Ciò val quanto dire che il nostro triedro mobile $Oxyz$ ruota di $d\psi$ attorno ad $O\zeta$ e di $d\vartheta$ attorno ad Ox. La prima rotazione elementare è così rappresentata, in grandezza, direzione e senso, dal vettore infinitesimo

$$d\psi\cdot\boldsymbol{\varkappa} ,$$

la seconda dal vettore

$$d\vartheta\cdot\boldsymbol{i} .$$

Dividendo per dt, si ha l'espressione della velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$ del triedro $Oxyz$ sotto la forma

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\psi}\boldsymbol{\varkappa} + \dot{\vartheta}\boldsymbol{i} : \tag{4}$$

il punto sovrapposto designa, ben si intende, derivazione rispetto a t.

4. - Velocità.

Diremo $\boldsymbol{v}_\nu^{(a)}$ il vettore che rappresenta la velocità di P_ν nel moto assoluto, cioè riferito al triedro fisso $O\xi\eta\zeta$; $\boldsymbol{v}_\nu$ la corrispondente velocità relativa, cioè riferita al triedro $Oxyz$. Quest'ultima concerne chiaramente un moto piano: di P_ν nel piano dei tre corpi, riferito agli assi Oxy. Essendo x_ν, y_ν le coordinate di P_ν, le componenti di $\boldsymbol{v}_\nu$ sono $\dot{x}_\nu$, $\dot{y}_\nu$, e si ha

$$\boldsymbol{v}_\nu = \dot{x}_\nu \boldsymbol{i} + \dot{y}_\nu \boldsymbol{j} \qquad (\nu = 0, 1, 2). \tag{5}$$

Per passare da $\boldsymbol{v}_\nu$ a $\boldsymbol{v}_\nu^{(a)}$, basta aggiungere la velocità di trascinamento, cioè quella che rimane subordinata in P_ν dal moto del triedro Oxy. A norma della formula fondamentale della cinematica dei sistemi rigidi, essa vale

$$\boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{\rho}_\nu ,$$

dove si è posto per brevità

$$\boldsymbol{\rho}_\nu = P_\nu - O = x_\nu \boldsymbol{i} + y_\nu \boldsymbol{j} .$$

Avendosi dalla (3)

$$\boldsymbol{\varkappa} \wedge \boldsymbol{i} = -\sin\vartheta\, \boldsymbol{k} + \cos\vartheta\, \boldsymbol{j} ,$$

$$\boldsymbol{\varkappa} \wedge \boldsymbol{j} = -\cos\vartheta\, \boldsymbol{i} ,$$

ove si tenga conto della espressione (4) di $\boldsymbol{\omega}$ e se ne eseguisca materialmente il prodotto vettoriale per $x_\nu \boldsymbol{i} + y_\nu \boldsymbol{j}$, si trova subito

$$\boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{\rho}_\nu = -\dot{\psi}\cos\vartheta\, y_\nu \boldsymbol{i} + \dot{\psi}\cos\vartheta\, x_\nu \boldsymbol{j} + (\dot{\vartheta} y_\nu - \dot{\psi}\sin\vartheta\, x_\nu)\boldsymbol{k} \qquad (\nu = 0, 1, 2) . \tag{6}$$

Ne consegue

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_\nu^{(a)} &= \boldsymbol{v}_\nu + \boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{\rho}_\nu = \\ &= (\dot{x}_\nu - \dot{\psi}\cos\vartheta\, y_\nu)\boldsymbol{i} + (\dot{y}_\nu + \dot{\psi}\cos\vartheta\, x_\nu)\boldsymbol{j} + (\dot{\vartheta} y_\nu - \dot{\psi}\sin\vartheta\, x_\nu)\boldsymbol{k} , \end{aligned} \tag{7}$$

i primi due addendi porgendo le componenti nel piano dei tre corpi, e il terzo la componente perpendicolare a questo piano.

5. - Forza viva e potenziale.

La forza viva totale del sistema è, per sua definizione,

$$T = \tfrac{1}{2} \sum_0^2{}_\nu\, m_\nu \boldsymbol{v}_\nu^{(a)} \times \boldsymbol{v}_\nu^{(a)}$$

$$= \tfrac{1}{2} \sum_0^2{}_\nu\, m_\nu \{(\dot{x}_\nu - \dot{\psi}\cos\vartheta\, y_\nu)^2 + (\dot{y}_\nu + \dot{\psi}\cos\vartheta\, x_\nu)^2 + (\dot{\vartheta} y_\nu - \dot{\psi}\sin\vartheta\, x_\nu)^2\} .$$

Conviene scinderla in due addendi che corrispondono rispettivamente al moto nel piano e perpendicolarmente al piano dei tre corpi.

All'uopo si pone

$$\mathfrak{T} = \frac{1}{2} \sum_{0}^{2}{}_{\nu}\, m_\nu \{ (\dot{x}_\nu - \dot{\psi} \cos\vartheta\, y_\nu)^2 + (\dot{y}_\nu + \dot{\psi} \cos\vartheta\, x_\nu)^2 \} , \tag{8}$$

$$\mathfrak{f} = \frac{1}{2} \sum_{0}^{2}{}_{\nu}\, m_\nu \{ (\dot{\vartheta} y_\nu - \dot{\psi} \sin\vartheta\, x_\nu)^2 \} , \tag{9}$$

con che

$$T = \mathfrak{T} + \mathfrak{f} . \tag{10}$$

Trattandosi di punti che si attraggono mutuamente secondo la legge di NEWTON, la funzione delle forze U ha, come si sa, l'espressione

$$U = \mathrm{f} \left\{ \frac{m_0 m_1}{\overline{P_0 P_1}} + \frac{m_0 m_2}{\overline{P_0 P_2}} + \frac{m_1 m_2}{\overline{P_1 P_2}} \right\} , \tag{11}$$

dove f designa la costante d'attrazione.

Ben si intende che le mutue distanze, e con esse la U, dipendono esclusivamente da x_ν, y_ν (anzi dalle loro differenze), senza intervento di ϑ, ψ.

6. - Momenti cinetici. Funzione caratteristica.

Per procurarsi le equazioni del moto sotto la forma hamiltoniana, si introducono le variabili coniugate a x_ν, y_ν, ϑ, ψ, i così detti momenti cinetici, ordinatamente definiti dalle posizioni:

$$p_\nu = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_\nu} , \qquad q_\nu = \frac{\partial T}{\partial \dot{y}_\nu} \qquad (\nu = 0, 1, 2) , \tag{12}$$

$$\Theta = \frac{\partial T}{\partial \dot{\vartheta}} , \qquad \Psi = \frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}} , \tag{13}$$

e si eliminano a loro mezzo le componenti di velocità $\dot{x}_\nu$, $\dot{y}_\nu$, $\dot{\vartheta}$, $\dot{\psi}$ dall'espressione dell'energia totale

$$H = T - U . \tag{14}$$

Cominciamo coll'esplicitare le (12). Dei due addendi $\mathfrak{T}$ ed f, che costituiscono T, soltanto il primo dipende dalle $\dot{x}_\nu$, $\dot{y}_\nu$.

Si ha così, in base alla (8),

$$(12') \qquad \begin{cases} p_\nu = m_\nu(\dot{x}_\nu - \dot{\psi}\cos\vartheta\, y_\nu)\,, \\ q_\nu = m_\nu(\dot{y}_\nu + \dot{\psi}\cos\vartheta\, x_\nu)\,, \end{cases} \qquad (\nu = 0, 1, 2),$$

donde immediatamente

$$(15) \qquad \mathfrak{T} = \frac{1}{2}\sum_0^2{}_\nu \frac{1}{m_\nu}(p_\nu^2 + q_\nu^2)\,.$$

Dalle (12′) e (7) appare manifesto il significato delle p_ν, q_ν: esse sono le componenti della quantità di moto *assoluta* di P_ν secondo la linea dei nodi e la sua perpendicolare nel piano dei tre corpi.

E veniamo alle (13). Dacchè $\mathfrak{T}$ non dipende da $\dot{\vartheta}$, la (10) dà intanto

$$\Theta = \frac{\partial f}{\partial \dot{\vartheta}}\,, \qquad \Psi = \frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial \dot{\psi}} + \frac{\partial f}{\partial \dot{\psi}}\,.$$

Le due derivate di f, in base alle posizioni del § 2, si esplicitano tosto sotto la forma

$$(16) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial \dot{\vartheta}} = \qquad I_x\dot{\vartheta} - J\dot{\psi}\sin\vartheta\,, \\ \dfrac{\partial f}{\partial \dot{\psi}} = \sin\vartheta(-J\dot{\vartheta} + I_y\dot{\psi}\sin\vartheta)\,, \end{cases}$$

mentre dalle (8) e (12′) si ha

$$\frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial \dot{\psi}} = \cos\vartheta \sum_0^2{}_\nu (x_\nu q_\nu - y_\nu p_\nu) = \cos\vartheta\, \mathfrak{M}\,,$$

dove

$$(17) \qquad \mathfrak{M} = \sum_0^2{}_\nu (x_\nu q_\nu - y_\nu p_\nu)\,,$$

rappresenta visibilmente il momento risultante della quantità di moto del sistema rispetto alla perpendicolare Oz al piano dei tre corpi.

Le espressioni di Θ e Ψ possono con ciò essere scritte

$$(13') \qquad \frac{\partial f}{\partial \dot{\vartheta}} = \Theta\,, \qquad \frac{\partial f}{\partial \dot{\psi}} = \Psi - \mathfrak{M}\cos\vartheta\,,$$

e queste sono certo risolubili rispetto a $\dot{\vartheta}$, $\dot{\psi}$, perchè, a norma delle (16), il determinante dei relativi coefficienti è

$$\begin{vmatrix} I_x & -J \sin \vartheta \\ -J \sin \vartheta & I_y \sin^2 \vartheta \end{vmatrix} = \sin^2 \vartheta \cdot D ,$$

essenzialmente positivo, tali dovendosi ritenere $\sin \vartheta$ (§ 1) e D (§ 2).

L'espressione canonica di f si avrebbe senz'altro, portandovi materialmente i valori così conseguiti di $\dot{\vartheta}$, $\dot{\psi}$. Non avremo bisogno di esplicitarla, ma gioverà, per maggiore chiarezza, distinguerla da $f(\dot{\vartheta}, \dot{\psi})$, chiamando F il risultato della sostituzione, ponendo cioè

$$f(\dot{\vartheta}, \dot{\psi}) = F(\Theta, \Psi) . \tag{18}$$

Si intende che la F potrà inoltre dipendere, a calcoli eseguiti, dalle altre variabili canoniche, x_ν, y_ν, p_ν, q_ν, ϑ: *non però da* ψ, poichè questo parametro non compare in f, nè nelle (13′).

Posto

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{T} - U ,$$

ossia, per la (15),

$$\mathfrak{H} = \frac{1}{2} \sum_0^2{}_\nu \frac{1}{m_\nu} (p_\nu^2 + q_\nu^2) - U , \tag{19}$$

dalle (14), (10) e (18) si ha

$$H = \mathfrak{H} + F , \tag{14'}$$

che costituisce la voluta espressione della funzione caratteristica nelle 16 *variabili canoniche*:

$$x_\nu , \quad y_\nu , \quad \vartheta , \quad \psi$$

e loro coniugate

$$p_\nu , \quad q_\nu , \quad \Theta , \quad \Psi \qquad\qquad (\nu = 0, 1, 2).$$

7. - Equazioni del moto.

Giova tener distinte quelle che si riferiscono alle variabili oblique ϑ, ψ e relativi momenti cinetici Θ, Ψ. Le scinderemo perciò nei due gruppi seguenti:

$$(20)\qquad \left\{\begin{aligned} \dot{x}_\nu &= \frac{\partial H}{\partial p_\nu}, & \dot{y}_\nu &= \frac{\partial H}{\partial q_\nu}, \\ \dot{p}_\nu &= -\frac{\partial H}{\partial x_\nu}, & \dot{q}_\nu &= -\frac{\partial H}{\partial y_\nu}; \end{aligned}\right. \qquad (\nu = 0, 1, 2),$$

e

$$(21)\qquad \left\{\begin{aligned} \dot{\vartheta} &= \frac{\partial F}{\partial \Theta}, & \dot{\psi} &= \frac{\partial F}{\partial \Psi}, \\ \dot{\Theta} &= -\frac{\partial F}{\partial \vartheta}, & \dot{\Psi} &= -\frac{\partial F}{\partial \psi}. \end{aligned}\right.$$

Nei secondi membri delle (21) si è ridotto $H = \mathfrak{H} + F$ al suo secondo addendo F, perchè, a norma della (18), $\mathfrak{H}$ dipende soltanto dalle x_ν, y_ν, p_ν, q_ν, e non porta quindi contributo alcuno a quei secondi membri.

8. - Calcolo diretto del momento risultante K delle quantità di moto.

Si ha per definizione

$$\boldsymbol{K} = \sum_0^2{}_\nu\, \boldsymbol{\rho}_\nu \wedge m_\nu \boldsymbol{v}_\nu^{(a)},$$

con

$$\boldsymbol{\rho}_\nu = P_\nu - O = x_\nu \boldsymbol{i} + y_\nu \boldsymbol{j}$$

e $\boldsymbol{v}_\nu^{(a)}$ data dalla (7).

In virtù delle (12′), si può scrivere più semplicemente

$$m_\nu \boldsymbol{v}_\nu^{(a)} = p_\nu \boldsymbol{i} + q_\nu \boldsymbol{j} + m_\nu(\dot{\vartheta} y_\nu - \dot{\psi} \sin\vartheta\, x_\nu)\boldsymbol{k},$$

dopo di che la materiale esecuzione del prodotto vettoriale porge

$$\boldsymbol{K} = \boldsymbol{i} \sum_0^2{}_\nu\, m_\nu y_\nu(\dot{\vartheta} y_\nu - \dot{\psi} \sin\vartheta\, x_\nu) \\ + \boldsymbol{j} \sum_0^2{}_\nu\, m_\nu x_\nu(-\dot{\vartheta} y_\nu + \dot{\psi} \sin\vartheta\, x_\nu) + \boldsymbol{k} \sum_0^2{}_\nu\, (x_\nu q_\nu - y_\nu p_\nu),$$

ossia, avuto riguardo alle posizioni del § 2 e alla (17),

$$(22)\qquad \boldsymbol{K} = (I_x \dot{\vartheta} - J\dot{\psi} \sin\vartheta)\boldsymbol{i} + (-J\dot{\vartheta} + I_y \dot{\psi} \sin\vartheta)\boldsymbol{j} + \mathfrak{M}\boldsymbol{k}.$$

9. - Relazioni provenienti dalla specificazione del sistema di riferimento.

Già abbiamo notato a § 1 che, per aver assunto il baricentro come origine degli assi di riferimento $Oxyz$, i parametri x_ν, y_ν sono di necessità legati in ogni istante dalle equazioni (1).

Altre relazioni conseguono dal modo con cui lo stesso triedro (mobile) si trova, per sua definizione, orientato rispetto al vettore (costante) $\boldsymbol{K}$. Sappiamo infatti dal § 3 che $\boldsymbol{K}$ ha per coseni direttori

$$0\,, \quad \sin\vartheta\,, \quad \cos\vartheta\,,$$

e quindi, per componenti,

$$0\,, \quad K\sin\vartheta\,, \quad K\cos\vartheta\,,$$

K designando la lunghezza costante del suddetto vettore.

Confrontando colla (22), se ne traggono le annunciate relazioni

$$\tag{23} \begin{cases} I_x\dot{\vartheta} - J\,\dot{\psi}\sin\vartheta = 0\,, \\ -J\,\dot{\vartheta} + I_y\,\dot{\psi}\sin\vartheta = K\sin\vartheta\,, \end{cases}$$

$$\tag{24} \mathfrak{M} = K\cos\vartheta\,,$$

l'ultima delle quali non è che la traduzione formale del significato di $\mathfrak{M}$, già rilevato a § 6.

Nelle (23) si possono sostituire a $\dot{\vartheta}$, $\dot{\psi}$ i corrispondenti momenti cinetici Θ, Ψ. In virtù delle (16) e (13′), si ha immediatamente

$$\Theta = 0\,, \qquad \Psi = \mathfrak{M}\cos\vartheta + K\sin^2\vartheta\,,$$

l'ultima delle quali, badando alla (24), si riduce a $\Psi = K$, e mostra quindi che Ψ si mantiene costante al pari di Θ. Complessivamente, le (23), (24), in variabili canoniche, si scrivono

$$\tag{23'} \Theta = 0\,, \qquad \Psi = K\,,$$

$$\tag{24} \mathfrak{M} = K\cos\vartheta\,,$$

K essendo costante ed $\mathfrak{M}$ definito dalla (17).

Sono queste equazioni in termini finiti rispetto alle dette variabili, le quali, per quanto precede, risultano di necessità soddisfatte durante tutto il movimento.

Si tratta pertanto di relazioni, per loro natura, compatibili col sistema differenziale (20), (21), ossia, come si suol dire, di *relazioni invarianti* di tale sistema. Tenendone conto, ossia sfruttando la circostanza che, durante il moto Θ e Ψ conservano valore costante, si deduce dalle due ultime (21) che deve pur aversi, per qualunque t,

$$\frac{\partial F}{\partial \vartheta} = 0\,, \qquad \frac{\partial F}{\partial \psi} = 0\,. \tag{25}$$

La seconda delle (25) ci era già nota, anzi sapevamo di più (§ 6), che si ha in essa (non soltanto una relazione invariante, ma proprio) una identità, poichè F non dipende da ψ.

Come corollario delle varie relazioni invarianti, possiamo ricavare ancora tre formule notevoli, che esprimono rispettivamente $\dot{\psi}$, $\dot{\vartheta}$, ed F.

Le prime due si traggono dalle (23), eliminando successivamente ϑ e ψ, e ricordando (§§ 1, 2) che si può dividere senza riserve sia per D che per $\sin\vartheta$. Si ha così

$$\dot{\psi} = \frac{K}{D} I_x\,, \tag{26}$$

$$\dot{\vartheta} = \frac{K}{D} J \sin\vartheta\,. \tag{27}$$

Quanto a F, giova riportarsi alla (18) e tener conto che f è omogenea di secondo grado in $\dot{\vartheta}$, $\dot{\psi}$, talchè

$$F = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{\vartheta}}\,\dot{\vartheta} + \frac{\partial f}{\partial \dot{\psi}}\,\dot{\psi}\right),$$

donde, per le (13′),

$$F = \tfrac{1}{2}\{\Theta\dot{\vartheta} + (\Psi - \mathfrak{M}\cos\vartheta)\dot{\psi}\}\,.$$

In virtù delle (23′) e (26), il secondo membro si riduce a

$$F = \frac{1}{2}\,\frac{K - \mathfrak{M}\cos\vartheta}{D}\,KI_x\,.$$

Sostituendo ancora $\mathfrak{M}$ per $K\cos\vartheta$ a norma della (24), si ha infine per F una espressione $\mathfrak{F}$, *che dipende soltanto dalle* x_ν, y_ν, p_ν, q_ν, ossia

$$\frac{1}{2}\frac{I_x}{D}(K^2 - \mathfrak{M}^2) = \mathfrak{F}\,.$$

10. - Riduzione del sistema differenziale dovuta agli integrali delle aree.

A § 7 abbiamo scritte le equazioni differenziali del moto, scindendo le (20), che definiscono le derivate delle variabili

$$\begin{matrix} x_\nu\,, & y_\nu\,, \\ p_\nu\,, & q_\nu\,, \end{matrix} \qquad (\nu = 0, 1, 2),$$

dalle ultime quattro equazioni (21), che definiscono invece

$$\dot{\vartheta},\quad \dot{\psi},\quad \dot{\Theta},\quad \dot{\Psi}\,.$$

La scissione è a priori soltanto formale, costituendo in realtà i due gruppi un sistema simultaneo. In particolare, essendo, per le (14′) e (19),

$$H = \mathfrak{H} + F = \frac{1}{2}\sum_0^2{}_\nu \frac{1}{m_\nu}(p_\nu^2 + q_\nu^2) - U + F\,,$$

i secondi membri delle (20) possono ancora contenere ϑ, ψ, Θ, Ψ pel tramite di F. Ma si perviene agevolmente ad eliminarli mercè i risultati del § precedente. Vedremo anzi che è addirittura lecito sostituire senz'altro, nella funzione caratteristica H, al posto di F, la sua espressione

$$\mathfrak{F} = \frac{1}{2}\frac{I_x}{D}(K^2 - \mathfrak{M}^2)\,.$$

Prendiamo all'uopo in considerazione una generica $\partial\mathfrak{F}/\partial\alpha$, α designando uno qualunque degli argomenti x_ν, y_ν, p_ν, q_ν $(\nu = 0, 1, 2)$; e poniamo mente alla circostanza che, per costruzione, $\mathfrak{F}$ si può immaginare proveniente da F, sostituendovi, al posto di Θ, Ψ, ϑ (la ψ, come sappiamo, non compare mai esplicitamente), le loro espressioni fornite dalle (23′) e (24).

Si ha quindi

$$\frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial\alpha} = \frac{\partial F}{\partial\alpha} + \frac{\partial F}{\partial\Theta}\frac{\partial\Theta}{\partial\alpha} + \frac{\partial F}{\partial\Psi}\frac{\partial\Psi}{\partial\alpha} + \frac{\partial F}{\partial\vartheta}\frac{\partial\vartheta}{\partial\alpha}\,.$$

Ma per le (23′) stesse, Θ e Ψ sono costanti, talchè

$$\frac{\partial\Theta}{\partial\alpha}=0\,,\qquad \frac{\partial\Psi}{\partial\alpha}=0\,;$$

d'altra parte, per le (26), che pure sono verificate qualunque sia t, $\partial F/\partial\vartheta=0$. Rimane in conformità

$$\frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial\alpha}=\frac{\partial F}{\partial\alpha}\,,$$

e con ciò *le* (20) *si possono risguardare quale sistema canonico nelle sole variabili* x_ν, y_ν *e relative coniugate* p_ν, q_ν, *che ha per funzione caratteristica*

$$H=\mathfrak{H}+\mathfrak{F}=\frac{1}{2}\sum_0^2{}_\nu\frac{1}{m_\nu}(p_\nu^2+q_\nu^2)-U+\frac{1}{2}\frac{I_x}{D}(K^2-\mathfrak{M}^2)\,, \tag{28}$$

U ed $\mathfrak{M}$ essendo rispettivamente definite dalle (11) e (17).

11. - Confronto col problema dei tre corpi nel piano.

Il problema piano dei tre corpi, riferito ad assi *fissi* $O\xi\eta$, ha manifestamente per funzione caratteristica

$$\Lambda=\frac{1}{2}\sum_0^2{}_\nu\frac{1}{m_\nu}(\pi_\nu^2+\chi_\nu^2)-U\,,$$

π_ν e χ_ν rappresentando le componenti secondo gli assi ξ, η della quantità di moto del corpo P_ν.

Rispetto ad assi mobili Oxy, ruotanti con velocità angolare n, comunque variabile in funzione di t, nel senso positivo $\xi\to\eta$ (sinistrorso secondo le convenzioni del § 1), le equazioni del moto sono ancora suscettibili di forma canonica, colla funzione caratteristica [9]

$$H_1=\Lambda-n\mathfrak{M}\,,$$

---

[9] Per rendersene conto, si immagini di designare con φ un angolo funzione qualsivoglia di t, e si ponga

$$\xi_\nu+i\eta_\nu=e^{i\varphi}(x_\nu+iy_\nu)\,,\qquad \pi_\nu+i\chi_\nu=e^{i\varphi}(p_\nu+iq_\nu)\,,$$
$$(\nu=0,1,2\,;\quad i=\sqrt{-1})\,.$$

Separando il reale dall'immaginario, si ha complessivamente una trasformazione canonica

A intendendosi espresso nelle variabili trasformate x_ν, y_ν e loro coniugate p_ν, q_ν, ossia

$$A = \frac{1}{2} \sum_0^2{}_\nu \frac{1}{m_\nu} (p_\nu^2 + q_\nu^2) - U\,,$$

e $\mathfrak{M}$ avendo il valore (17).

Per confrontare colle equazioni ridotte del caso generale [(20), colla espressione (28) di H], basta supporre che la velocità angolare n coincida colla $\dot{\psi}$ dei §§ precedenti. Ben si intende che, nelle derivazioni parziali di H_1 rapporto a x_ν, y_ν, p_ν, q_ν, le quali figurano nelle equazioni canoniche, $n = \dot{\psi}$ va trattata come se fosse costante (funzione della sola t); mentre, a derivazioni eseguite, le si deve attribuire l'espressione (26).

Con tale avvertenza si può dire che il divario fra i due sistemi differenziali, entrambi canonici (quello ridotto spettante al caso generale e quello corrispondente al problema piano), rimane messo in evidenza dalla differenza delle rispettive funzioni caratteristiche (la H definita dalla (28) e la H_1 testè indicata), ossia da

$$H - H_1 = \frac{1}{2} \frac{I_x}{D} (K^2 - \mathfrak{M}^2) + n\mathfrak{M}\,.$$

---

fra le variabili

$$\begin{matrix} \xi_\nu\,, & \eta_\nu\,, \\ \pi_\nu\,, & \chi_\nu\,, \end{matrix}$$

e le

$$\begin{matrix} x_\nu\,, & y_\nu\,, \\ p_\nu\,, & q_\nu\,, \end{matrix}$$

la quale corrisponde a far ruotare di ψ gli assi di riferimento.

Indicando con n la velocità angolare $\dot{\psi}$, si ha ovviamente:

$$d\xi_\nu + i\,d\eta_\nu = e^{i\psi}(dx_\nu + i\,dy_\nu) + in\,e^{i\psi}(x_\nu + iy_\nu)\,dt\,,$$

e quindi

$$\sum_0^2{}_\nu (\pi_\nu - i\chi_\nu)(d\xi_\nu + i\,d\eta_\nu) = \sum_0^2{}_\nu (p_\nu - iq_\nu)(dx_\nu + i\,dy_\nu) + in\,dt \sum_0^2{}_\nu (p_\nu - iq_\nu)(x_\nu + iy_\nu)\,,$$

da cui, eguagliando le parti reali,

$$\sum_0^2{}_\nu (\pi_\nu d\xi_\nu + \chi_\nu d\eta_\nu) = \sum_0^2{}_\nu (p_\nu dx_\nu + q_\nu dy_\nu) + n\mathfrak{M}\,dt\,.$$

Questa identità assicura (cfr. per es. MORERA, *Sulla trasformazione delle equazioni differenziali di Hamilton*, « Rendiconti dei Lincei », ser. 5ª, vol. XII, 1° semestre 1903, pp. 118-119) che, nelle nuove variabili x_ν, y_ν, p_ν, q_ν, le equazioni sono ancora canoniche, la funzione caratteristica essendo quella di prima diminuita di $n\mathfrak{M}$, c. d. d.

Rappresentiamo, come nel precedente §, con α uno qualunque degli argomenti x_ν, y_ν, p_ν, q_ν. Le differenze fra i secondi membri delle equazioni omologhe dei due sistemi saranno del tipo

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}(H - H_1) = \frac{1}{2}(K^2 - \mathfrak{M}^2)\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{I_x}{D}\right) - \frac{I_x}{D}\mathfrak{M}\frac{\partial\mathfrak{M}}{\partial\alpha} + n\frac{\partial\mathfrak{M}}{\partial\alpha}$$

$$= (K - \mathfrak{M})\left\{\frac{1}{2}(K + \mathfrak{M})\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{I_x}{D}\right) + \frac{I_x}{D}\frac{\partial\mathfrak{M}}{\partial\alpha}\right\}.$$

Esse contengono a fattore $K - \mathfrak{M}$, cioè, per la (24),

$$K(1 - \cos\vartheta) ;$$

quindi si annullano tutte per $\vartheta = 0$, vale a dire quando il problema generale degenera nel caso piano. L'identità delle relative equazioni differenziali, concettualmente evidente, rimane così materialmente confermata sulle formule. Non si dimentichi tuttavia che, nella trattazione del caso generale, avevamo espressamente escluso (§ 1) il caso $\vartheta = 0$, talchè a rigore, solo per via di limite, è lecito porre dove che sia $\vartheta = 0$.

Interessante, per quanto nota e agevolmente deducibile anche dalle ordinarie equazioni cartesiane, è la conclusione pratica che ne consegue: *Il problema generale dei tre corpi, ridotto al loro piano, coincide col problema piano, ogni qualvolta i tre corpi si scostano abbastanza poco da un piano fisso, per modo che si possa trattare l'inclinazione ϑ come una quantità di primo ordine, assimilandosi in conformità* $\cos\vartheta$ *all'unità.*

12. - Verificazioni formali.

Va da sè che le (1), le quali esprimono che l'origine cade nel baricentro, debbono riuscire compatibili anche col sistema ridotto, di cui a § 10; e, insieme ad esse, pure le

$$\sum_0^2{}_\nu\, p_\nu = 0\,, \qquad \sum_0^2{}_\nu\, q_\nu = 0\,, \tag{29}$$

le quali esprimono che si annulla la risultante delle quantità di moto, ovvero la velocità del baricentro.

È facile procurarsene conferma formale, constatando che le (1), (29) costituiscono effettivamente un sistema di relazioni invarianti di fronte alle (20), ossia che le derivate dei primi membri, calcolate in base alle

(20), si annullano, in virtù delle (1), (29) stesse. Tali derivate sono infatti

$$\sum_0^2{}_\nu\, m_\nu \frac{\partial H}{\partial p_\nu}, \qquad \sum_0^2{}_\nu\, m_\nu \frac{\partial H}{\partial q_\nu};$$

$$-\sum_0^2{}_\nu \frac{\partial H}{\partial x_\nu}, \qquad -\sum_0^2{}_\nu \frac{\partial H}{\partial y_\nu}.$$

Dacchè si ha, a norma delle (28) e (17),

$$\frac{\partial H}{\partial p_\nu} = \frac{1}{m_\nu} p_\nu + \frac{I_x}{D} \mathfrak{M} y_\nu, \qquad \frac{\partial H}{\partial q_\nu} = \frac{1}{m_\nu} q_\nu - \frac{I_x}{D} \mathfrak{M} x_\nu,$$

le prime due divengono

$$\sum_0^2{}_\nu\, p_\nu + \frac{I_x}{D} \mathfrak{M} \sum_0^2{}_\nu\, m_\nu y_\nu, \qquad \sum_0^2{}_\nu\, q_\nu - \frac{I_x}{D} \mathfrak{M} \sum_0^2{}_\nu\, m_\nu x_\nu,$$

che vanno manifestamente a zero, in forza delle (1), (29). Quanto alle ultime due, malgrado i numerosi termini di cui constano $\partial H/\partial x_\nu$, $\partial H/\partial y_\nu$ (provenienti dalla derivazione di U, I_z, D, $\mathfrak{M}$), il loro annullarsi risulta dal fatto che, come si riconosce a vista,

$$\sum_0^2{}_\nu \frac{\partial U}{\partial x_\nu}, \qquad \sum_0^2{}_\nu \frac{\partial U}{\partial y_\nu}, \qquad \sum_0^2{}_\nu \frac{\partial I_x}{\partial x_\nu},$$

sono identicamente nulle, mentre

$$\sum_0^2{}_\nu \frac{\partial I_x}{\partial y_\nu}, \qquad \sum_0^2{}_\nu \frac{\partial D}{\partial x_\nu}, \qquad \sum_0^2{}_\nu \frac{\partial D}{\partial y_\nu},$$

vanno a zero per le (1); e

$$\sum_0^2{}_\nu \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial x_\nu}, \qquad \sum_0^2{}_\nu \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial y_\nu},$$

vanno a zero per le (29)

13. - Definitiva riduzione a mezzo degli integrali delle quantità di moto.

Un ulteriore abbassamento di due gradi di libertà è recato dagli integrali delle quantità di moto. Lo si effettua nel modo migliore ricorrendo alla trasformazione canonica di Poincaré ([10]).

([10]) *Leçons de mécanique céleste*, t. I, Paris, Gauthier-Villars, 1905, n. 26. Va rilevato del resto

Essa consiste nel sostituire alle variabili x, p; y, q del sistema (20) nuove variabili x', p'; y', q' mediante le posizioni

$$(30) \qquad \begin{cases} x_1' = x_1 - x_0 , & x_2' = x_2 - x_0 , \quad x_0' = x_0 , \\ p_1' = p_1 , & p_2' = p_2 , \quad p_0' = p_0 + p_1 + p_2 ; \end{cases}$$

ed analoghe per le y, q:

$$(31) \qquad \begin{cases} y_1' = y_1 - y_0 , & y_2' = y_2 - y_0 , \quad y_0' = y_0 , \\ q_1' = q_1 , & q_2' = q_2 , \quad q_0' = q_0 + q_1 + q_2 . \end{cases}$$

Con ciò x_1', y_1'; x_2', y_2' rappresentano manifestamente le coordinate relative di P_1, P_2 rispetto a P_0 (cioè rispetto ad assi paralleli ad Ox, Oy coll'origine in P_0), mentre p_1', q_1'; p_2', q_2' conservano il significato di componenti della quantità di moto assoluta dei due punti P_1, P_2; inoltre sussistono le identità

$$\sum_0^2 {}_\nu\, x_\nu' q_\nu' = \sum_0^2 {}_\nu\, x_\nu q_\nu , \qquad \sum_0^2 {}_\nu\, y_\nu' p_\nu' = \sum_0^2 {}_\nu\, y_\nu p_\nu ;$$

le (1) divengono

$$(1') \qquad x_0' = -\frac{m_1 x_1' + m_2 x_2'}{m} , \qquad y_0' = -\frac{m_1 y_1' + m_2 y_2'}{m} ,$$

$$(m = m_0 + m_1 + m_2) ,$$

e le relazioni (29) assumono la forma particolarmente semplice

$$(29') \qquad p_0' = 0 , \qquad q_0' = 0 .$$

Nella espressione (28) della funzione caratteristica H si devono introdurre le variabili accentate, a norma delle (30), (31), e il sistema differenziale trasformato conserverà la forma canonica, talchè in particolare le derivate rapporto a t di p_0', q_0' saranno $-\partial H/\partial x_0'$, $-\partial H/\partial y_0'$: le (29')

che anche la originaria trasformazione di Jacobi (di cui ai nn. 27-31 dell'opera testè citata) condurrebbe con pari semplicità allo scopo. Essa ha però l'inconveniente che, nelle nuove coordinate (che sono combinazioni lineari delle primitive a coefficienti dipendenti dalle masse), la U perde la sua forma tipica.

implicano pertanto

$$\frac{\partial H}{\partial x_0'} = 0, \qquad \frac{\partial H}{\partial y_0'} = 0, \tag{32}$$

valide per qualunque t, al pari delle (1′), (29′).

Prima di procedere, conviene prepararsi l'espressione H' di H, non solo riferita alle nuove variabili, ma altresì ridotta a mezzo delle (1′), (29′), con che vi rimangono esclusivamente x_ν', y_ν'; p_ν', q_ν' ($\nu=1, 2$), ossia coordinate (relative a P_0) e quantità di moto assolute dei *due* corpi P_1 e P_2.

Badando anzi tutto al primo termine della (28)

$$\frac{1}{2}\sum_0^2{}_\nu \frac{1}{m_\nu}(p_\nu^2 + q_\nu^2),$$

si ha, come di solito, colla sola riduzione proveniente da $p_0' = 0$, $q_0' = 0$:

$$\frac{1}{2}\sum_0^2{}_\nu \frac{1}{m_\nu}(p_\nu^2 + q_\nu^2) = \frac{1}{2}\sum_1^2{}_\nu \frac{1}{m_\nu}(p_\nu'^2 + q_\nu'^2) + \frac{1}{2m_0}\{(p_1' + p_2')^2 + (q_1' + q_2')^2\}.$$

Nello stesso modo si ha

$$\mathfrak{M} = \sum_1^2{}_\nu (x_\nu' q_\nu' - y_\nu' p_\nu'). \tag{33}$$

U e D, a norma delle (11) e (2), dipendono esclusivamente (oltre che dai valori costanti delle masse) dalla configurazione del triangolo dei tre corpi: esse sono quindi direttamente esprimibili mediante le coordinate relative, con formule elementari (anche più semplici delle corrispondenti in coordinate assolute) che è superfluo trascrivere.

Resta I_x. La sua espressione ridotta si ricava comodamente dal significato di momento d'inerzia baricentrale, tenendo presente che le coordinate relative del baricentro O (di P_0, P_1, P_2) sono

$$\frac{m_1 x_1' + m_2 x_2'}{m}, \qquad \frac{m_1 y_1' + m_2 y_2'}{m}.$$

Infatti, essendo

$$\sum_1^2{}_\nu m_\nu y_\nu'^2$$

il momento d'inerzia del sistema rispetto al nuovo asse delle x, si ha senz'altro dal teorema di HUYGENS

$$(34)\qquad I_x = \sum_1^2{}_\nu\, m_\nu y_\nu'^2 - \frac{1}{m}(m_1 y_1' + m_2 y_2')^2 .$$

Risulta pertanto

$$(35)\qquad H' = \frac{1}{2}\sum_1^2{}_\nu \frac{1}{m_\nu}(p_\nu'^2 + q_\nu'^2)$$

$$+ \frac{1}{2m_0}\{(p_1' + p_2')^2 + (q_1' + q_2')^2\} - U + \frac{I_x}{D}(K^2 - \mathfrak{M}^2),$$

dove U, D, $\mathfrak{M}$, I_x hanno semplici significati geometrico-materiali, che si desumono, per U e D, dalle (11) e (2), e che, per $\mathfrak{M}$ ed I_x, dati formalmente dalle (33) e (34), sono — ripetiamolo per essere completi — rispettivamente:

$\mathfrak{M}$ momento risultante delle quantità di moto del sistema rispetto alla perpendicolare al piano dei tre corpi (l'ubicazione di detta perpendicolare è indifferente, poichè si annulla la risultante delle quantità di moto);

I_x momento di inerzia del sistema rispetto alla linea (baricentrale) dei nodi.

La H' gode della proprietà che le sue derivate parziali rispetto ad uno qualunque degli otto argomenti x_ν', y_ν', p_ν', q_ν', $(\nu = 1, 2)$, da cui dipende, coincidono, durante tutto il movimento, colle corrispondenti derivate della H. Per dimostrarlo, basta pensare alla genesi di H'. Essa proviene, per sua definizione, da H ponendovi $p_0' = 0$, $q_0' = 0$, e sostituendovi per x_0', y_0' i valori (1'). Si ha quindi, indicando (come già a § 10) con α una qualunque delle otto variabili suaccennate,

$$\frac{\partial H'}{\partial\alpha} = \frac{\partial H}{\partial\alpha} + \frac{\partial H}{\partial x_0'}\frac{\partial x_0'}{\partial\alpha} + \frac{\partial H}{\partial y_0'}\frac{\partial y_0'}{\partial\alpha},$$

da cui, per le (32),

$$\frac{\partial H'}{\partial\alpha} = \frac{\partial H}{\partial\alpha}, \qquad \text{c. d. d.}$$

Ciò posto, consideriamo le equazioni del sistema [trasformato di (20)], che si riferiscono alle variabili

$$\begin{matrix} x_\nu', & y_\nu', \\ p_\nu', & q_\nu' \end{matrix} \qquad (\nu = 1, 2).$$

Per quanto precede, nei loro secondi membri, si può ovunque porre H' in luogo di H, e si ha in definitiva il sistema ridotto di WHITTAKER

$$\left\{\begin{array}{ll} \dot{x}'_\nu = \dfrac{\partial H'}{\partial p'_\nu}, & \dot{y}'_\nu = \dfrac{\partial H'}{\partial q'_\nu}, \\ \dot{p}'_\nu = -\dfrac{\partial H'}{\partial x'_\nu}, & \dot{q}'_\nu = -\dfrac{\partial H'}{\partial y'_\nu}. \end{array}\right. \tag{36}$$

14. - Equazioni supplementari per ϑ e ψ. Retrogradazione della linea dei nodi.

Si supponga risoluto il problema ridotto di funzione caratteristica H', con che, per le (30) e (31), rimangono individuate anche le coordinate baricentrali x_ν, y_ν ($\nu = 0, 1, 2$). Più precisamente si supponga di conoscere quella soluzione particolare Σ del sistema ridotto, che conviene a date condizioni iniziali.

Conoscere Σ equivale naturalmente a conoscere il moto relativo dei tre corpi nel loro piano, con la specificazione che tale conoscenza deve, per la stessa genesi, essere riferita ad assi *aventi le solite direzioni variabili* Ox, Oy (Ox secondo la linea dei nodi, ecc.).

In queste condizioni, la determinazione delle variabili oblique ϑ e ψ esige ancora soltanto una quadratura. Più precisamente l'inclinazione ϑ è data dalla equazione in termini finiti (24), ossia, potendosi senza riserva dividere per K (§ 1), da

$$\cos\vartheta = \frac{\mathfrak{M}}{K}.$$

Della longitudine del nodo risulta invece conosciuta, a norma della (26), la derivata

$$\dot{\psi} = \frac{K}{D} I_x,$$

donde ψ con una quadratura. L'espressione di $\dot{\psi}$ mette in luce il notevole fatto qualitativo che tale derivata è essenzialmente positiva, talchè *la linea dei nodi ruota sempre nel medesimo verso, positivo rispetto ai nostri assi sinistrorsi, attorno al momento risultante* **K**. *Se, come usano gli astronomi, si adottassero assi destrorsi, varrebbe la conclusione che la linea dei nodi va incessantemente retrogradando.*

Un po' meno semplice riesce il calcolo di ψ, qualora del sistema ridotto si supponga ancora conosciuta una soluzione Σ, però con referenza ad assi fissi $O\xi\eta$, anzichè paralleli ad Ox, Oy.

In tal caso tutti gli elementi intrinseci della configurazione dei tre corpi, in particolare per es. l'area τ del loro triangolo e con essa [formula (2)] il determinante D, risultano funzioni note di t. Del pari i momenti di inerzia I_ξ, I_η rispetto agli assi $O\xi$, $O\eta$, e così il relativo prodotto di inerzia λ: non altrettanto può dirsi invece di I_x, che dipende dall'orientazione tuttora incognita ψ dell'asse Ox rispetto al riferimento fisso. Tuttavia, avendosi dalla teoria dei momenti di inerzia,

$$I_x = I_\xi \cos^2 \psi + I_\eta \sin^2 \psi - 2\lambda \cos \psi \sin \psi \,,$$

la (26) diviene

$$\dot{\psi} = \frac{K}{D} (I_\xi \cos^2 \psi + I_\eta \sin^2 \psi - 2\lambda \cos \psi \sin \psi) \,, \tag{37}$$

dove tutti i coefficienti sono a risguardarsi funzioni note di t. La determinazione di ψ si trova pertanto ricondotta alla integrazione della equazione di prim'ordine (37).

15. - Si toglie una inessenziale restrizione circa l'intervallo di tempo, cui è lecito riferirsi.

Importa rilevare che, *fino a che il moto dei tre corpi segue con regolarità, il sistema ridotto* (36) *cui siamo in definitiva pervenuti, e così il precedente sistema* (20), *e le relazioni invarianti* (24) *e* (26), *definienti* ϑ *e* ψ, *rimangono validi per qualunque* t, non ostante l'originaria restrizione del § 1, a norma della quale tutte le nostre deduzioni dovevano intendersi limitate ad un intervallo di tempo, in cui il piano dei tre corpi non coincide mai col piano invariabile.

Si osservi infatti che, se t_1 è un istante (necessariamente isolato per le premesse dello stesso § 1) in cui si presenta la eventualità suaccennata:

1) le (36), (20), (24), (26) devono essere verificate sia per $t < t_1$, che per $t > t_1$;

2) esse non presentano per $t = t_1$, cioè per il fatto che si annulla l'inclinazione, alcuna singolarità:

3) le due soluzioni del problema piano, valide rispettivamente prima e dopo dell'istante t_1, debbono riattaccarsi con continuità; così i due valori di ψ e di ϑ (quest'ultimo attraverso lo zero).

Tanto basta ad assicurare che, per ognuno dei sistemi in questione, si tratta necessariamente della continuazione analitica di una stessa soluzione, c. d. d.

16. - Moto medio di ψ in corrispondenza ad una soluzione periodica del sistema ridotto.

L'osservazione del precedente § rende legittima l'applicazione delle nostre equazioni anche ad eventuali indagini di comportamento asintotico.

Occupiamoci in particolare della funzione $\psi(t)$, nell'ipotesi che sia periodica la soluzione Σ del sistema ridotto, che si suppone conosciuta.

Se si tratta di periodicità rispetto agli assi Oxy (se cioè sono le coordinate x_ν, y_ν funzioni periodiche di t), allora anche ψ risulta, per la (26), funzione periodica di t. Si può anzi aggiungere, pensando allo sviluppo di questa funzione in serie di FOURIER, che certamente vi figurerà un termine secolare μ (indipendente da t), poichè la funzione si mantiene sempre positiva, e quindi ha un valore medio μ diverso da zero. In tal caso la ψ possiede un *effettivo moto medio* μ.

Qualora invece la periodicità di Σ sia relativa agli assi $O\xi\eta$, allora risultano funzioni periodiche di t i coefficienti della (37). Non esiste più in generale moto medio effettivo, ma si ha sempre un *moto medio asintotico*, cioè un limite determinato μ per il rapporto ψ/t al crescere indefinito di t [11].

Analoga conclusione si ha, se la periodicità di Σ si riferisce più generalmente ad assi OXY ruotanti (rispetto agli assi fissi $O\xi\eta$) con velocità angolare Ω *costante, ovvero avente lo stesso periodo della* Σ. Ecco come lo si constata.

Sia χ l'anomalia della linea dei nodi Ox rispetto agli assi OXY, e quindi $\dot\chi$ la sua velocità angolare. Si ha manifestamente

$$\dot\chi = \dot\psi - \Omega\,, \tag{38}$$

ossia, per la (26),

$$\dot\chi = -\Omega + \frac{K}{D} I_x\,.$$

Esprimendo I_x per mezzo dei momenti e prodotto d'inerzia A, B, p

---

(11) Cfr. la mia memoria *Sur les équations linéaires à coefficients périodiques et sur le moyen mouvement du noeud lunaire*, « Annales de l'École Normale Supérieure », 3e série, t. 28, 1911, pp. 325-376 [in questo vol.: XVI, pp. 205-252].

relativi alla coppia OX, OY, risulta

$$\dot{\chi} = -\Omega + \frac{K}{D}(A \cos^2 \chi + B \sin^2 \chi - 2p \cos \chi \sin \chi),$$

od anche

$$(39) \qquad \dot{\chi} = \left(\frac{K}{D}A - \Omega\right)\cos^2 \chi + \left(\frac{K}{D}B - \Omega\right)\sin^2 \chi - 2\frac{K}{D}p \cos \chi \sin \chi,$$

che ha proprio lo stesso tipo della (37), dovendovisi risguardare A, B, p, Ω, e quindi tutti e tre i coefficienti di $\cos^2 \chi$, $\sin^2 \chi$, $\cos \chi \sin \chi$, funzioni periodiche di t. La χ ammette pertanto un moto medio asintotico $q = \lim_{t=0} \chi/t$. Detto $\overline{\Omega}$ il valor medio della funzione periodica Ω, si ha dalla (38) (integrando, dividendo per t e facendo poi crescere t indefinitamente)

$$(40) \qquad \mu = q + \overline{\Omega}.$$

Il calcolo effettivo di μ è semplicissimo nel caso elementare in cui sono costanti Ω, A, B, p, e con essi i coefficienti della (39). Si può desumerlo da acconcia interpretazione geometrico-cinematica nel modo che segue:

Indicata con

$$Q = \tfrac{1}{2}(a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy)$$

una generica forma quadratica *definita, a coefficienti costanti,* si consideri il sistema canonico

$$(41) \qquad \dot{x} = -\frac{\partial Q}{\partial y}, \qquad \dot{y} = \frac{\partial Q}{\partial x},$$

e si noti:

1) che $Q = \text{cost.}$ è un integrale del sistema;

2) che dalle equazioni (41) segue

$$(42) \qquad x\dot{y} - y\dot{x} = x\frac{\partial Q}{\partial x} + y\frac{\partial Q}{\partial y} = 2Q;$$

3) che, interpretando x, y come coordinate cartesiane di un punto mobile e designando con ϱ e χ le corrispondenti coordinate polari, la

(42) equivale a

$$\dot{\chi} = \frac{2Q}{\varrho^2} = a_{11}\cos^2\chi + a_{22}\sin^2\chi + 2a_{12}\cos\chi\sin\chi\,;$$

4) che il moto del punto (x, y) definito dalle (41) avviene sopra un ellisse $Q = \text{cost.}$ con velocità areolare

$$\tfrac{1}{2}(x\dot{y} - y\dot{x}) = Q = \text{cost}\,.$$

Il tempo impiegato a descrivere l'intera ellisse vale in conformità

$$\text{(42')}\qquad \frac{\text{Area dell'ellisse}}{Q} = \frac{1}{Q}\pi\cdot\frac{1}{\begin{vmatrix}\dfrac{a_{11}}{2Q} & \dfrac{a_{12}}{2Q}\\[2ex] \dfrac{a_{21}}{2Q} & \dfrac{a_{22}}{2Q}\end{vmatrix}^{\frac{1}{2}}} = \frac{2\pi}{\sqrt{a}}\,,$$

dove si designa al solito con a il determinante $a_{11}a_{22} - a_{12}^2$, e il radicale si intende preso in valore assoluto.

Ne viene che l'anomalia χ, la quale a norma della (42') varia sempre nello stesso senso, aumenta o diminuisce di 2π, ogniqualvolta t aumenta di $2\pi/\sqrt{a}$. Questo assicura che il limite del rapporto χ/t non può differire da $\pm\sqrt{a}$, valendo naturalmente il segno $+$ quando χ cresce sempre, ossia quando è positiva la forma definita Q, e il segno $-$ nel caso opposto. Si ha dunque, con tale avvertenza circa il doppio segno, il moto medio $q = \pm\sqrt{a}$.

Questa conclusione si applica alla (39) nel caso di A, B, p, Ω costanti, semprechè la forma del secondo membro riesca definita, semprechè cioè, prendendo

$$a_{11} = \frac{K}{D}A - \Omega\,,\qquad a_{22} = \frac{K}{D}B - \Omega\,,\qquad a_{12} = -\frac{K}{D}p\,,$$

e notando che D può anche presentarsi sotto la forma $AB - p^2$, risulti

$$\text{(43)}\qquad a = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = \frac{K}{D}\{K - (A + B)\Omega\} + \Omega^2 > 0\,.$$

La espressione (40) del moto medio (assoluto) diviene in tal caso

$$\text{(40')}\qquad \mu = \pm\sqrt{a} + \Omega\,,$$

dove si deve prendere il segno superiore o l'inferiore, secondochè la forma in questione è positiva o negativa.

17. - Caso in cui i tre corpi si scostano poco da un piano fisso. Moto medio del nodo per le soluzioni prossime alle triangolari di Lagrange.

Le considerazioni che precedono possono in particolare applicarsi al caso in cui i tre corpi si scostano poco da un piano fisso. Prossimo a questo è allora necessariamente anche il piano invariabile, sicchè si può supporre senz'altro che i tre corpi si scostino poco dal piano invariabile, precisando l'ipotesi nel senso che l'inclinazione ϑ possa trattarsi (per qualunque t) come quantità di prim'ordine, trascurandosi tutto ciò che è, rispetto a ϑ, d'ordine superiore al primo.

In tale condizione (cfr. § 11) riesce trascurabile il divario fra il moto dei tre corpi nel loro piano e quello delle loro proiezioni sul piano invariabile, sicchè il problema ridotto si confonde col problema piano.

Si confondono pure $\cos\vartheta$ coll'unità, $\mathfrak{M}$ con K, di guisachè la

$$\cos\vartheta = \frac{\mathfrak{M}}{K},$$

non è più atta ad individuare ϑ, ma diviene una pura identità.

Comunque, *si può trar partito da ogni soluzione nota Σ del problema piano (dei tre corpi) per desumerne ∞^1 soluzioni non piane* ($\vartheta \neq 0$), richiedendosi all'uopo al più una equazione di Riccati ([12]) per la determinazione di ψ, e una quadratura per la ϑ. Quest'ultima deve infatti (dal momento che la (24), in prima approssimazione, costituisce una semplice identità) ricavarsi dalla (27), ossia (colla stessa approssimazione) da

$$\dot{\vartheta} = \frac{K}{D} J\vartheta ,$$

la quale porge

$$\vartheta = e^{\int (K/D) J\, dt},$$

introducendo una costante moltiplicativa (arbitraria purchè infinitesima). Un'altra costante è, a dir vero, introdotta nell'espressione di ψ dall'in-

---

([12]) Tale è infatti la (37), come tosto si riconosce assumendo per funzione incognita $e^{i\psi}$; e lo è pure la (39). Quando poi la Σ fosse conosciuta addirittura con referenza agli assi Oxy, allora, a norma della (26), basta una quadratura, come dal § 14.

tegrazione dell'equazione che serve a definirla [(26), (37) o (39), a norma dei casi], ma si tratta di una costante inessenziale, che corrisponde ad un semplice mutamento di orientazione della coppia fissa $O\xi\eta$ nel piano invariabile. Ecco perchè è giustificata l'affermazione che ogni soluzione piana Σ dà luogo a ∞^1 soluzioni non piane.

Quando la Σ è periodica, valgono naturalmente le considerazioni del precedente §, e si ritrova così il risultato già noto [13] che tutte le ∞^1 soluzioni ad essa subordinate posseggono uno stesso moto medio asintotico μ del nodo.

Diamo un esempio di effettiva determinazione di μ, assumendo quale Σ una delle soluzioni triangolari di LAGRANGE.

Più precisamente riferiamoci al caso tipico in cui i tre corpi costituiscono un triangolo equilatero di grandezza costante, che ruota uniformemente attorno al baricentro O. La velocità angolare Ω è data, come si sa [14], da

$$\Omega^2 = \frac{f m}{\varDelta^3},$$

($\varDelta$ lato del triangolo; $m = m_0+m_1+m_2$; f costante di attrazione). Attesa la definizione di momento, essa è necessariamente sinistrorsa rispetto al momento risultante $\boldsymbol{K}$ delle quantità di moto; quindi (§ 1) positiva rispetto ai nostri assi di riferimento. Prendiamo in particolare assi OXY solidali col triangolo. Essi ruoteranno colla detta velocità angolare *costante* Ω, risultando pure *costanti* i relativi momenti e prodotto d'inerzia A, B, p delle tre masse. Detta ϱ_ν la distanza baricentrale della massa P_ν $(\nu = 0, 1, 2)$, sarà manifestamente

$$K = Q \sum_0^2{}_\nu\, m_\nu \varrho_\nu^2 = (A + B)\Omega\ .$$

La (43) diviene in conformità

$$a = \Omega^2 \tag{43'}$$

([13]) Cfr. L. TREVISANI, *Sul moto medio dei nodi nel problema dei tre corpi*, in questi Atti, t. LXXI, 1912, pp. 1089-1137. A titolo d'esempio è ivi determinato il valore numerico di μ per le soluzioni prossime alle rettilinee di LAGRANGE. Si noti che un tal caso non si potrebbe trattare colle più comprensive formule della presente memoria, le quali poggiano sull'ipotesi preliminare che i tre corpi costituiscano un effettivo triangolo.

([14]) LAPLACE, *Oeuvres*, t. IV, p. 311. Altra deduzione, pure semplicissima, delle soluzioni in questione si trova nella memoria *Sur la recherche des solutions particulières des systèmes différentiels et sur les mouvements stationnaires*, « Prac matematyczno-fizycznych », t. XVII (Varsavia, 1906), p. 32 [in queste « Opere »: vol. secondo, XXVII, pp. 465-502].

con che, a risultando positivo, si trovano soddisfatte tutte le condizioni, di cui al precedente §, per l'applicabilità della formula (40')

$$\mu = \pm \sqrt{a} + \Omega .$$

Va preso il segno superiore perchè la forma di coefficienti

$$a_{11} = \frac{K}{D} A - \Omega, \qquad a_{22} = \frac{K}{D} B - \Omega, \qquad a_{12} = -\frac{K}{D} p ,$$

definita in virtù della (43'), è positiva.

Ciò risulta dall'osservare che

$$a_{11} + a_{22} = \frac{K(A + B)}{D} - 2\Omega$$

$$= \frac{\Omega}{D} \{(A + B)^2 - 2D\} = \frac{\Omega}{D} (A^2 + B^2 + 2p^2) > 0 .$$

Si ha quindi dalla (43')

$$\mu = 2\Omega ,$$

ossia: *il moto medio della linea dei nodi è doppio della velocità angolare con cui ruota il triangolo dei tre corpi.*

XXXII.

UNA PROPRIETÀ DI SIMMETRIA DELLE TRAIETTORIE DINAMICHE SPICCATE DA DUE PUNTI

« Rend. Acc. Lincei », ser. 5ª, vol. XXIV_1 (1915_1),

pp. 666-674.

Il sig. R. Straubel rilevò, pochi anni or sono, una notevole relazione di reciprocità, concernente i pennelli elementari di raggi emessi da due centri luminosi di un mezzo qualsiasi (¹) (comunque eterogeneo, ma isotropo). Questa relazione dà luogo a interessanti applicazioni fotometriche e diottriche, indicate dallo stesso Straubel, e ricorre nei fondamenti della teoria dell'irraggiamento, secondo il metodo integrale di Hilbert (²).

Mi propongo di far vedere, sfruttando in generale le caratteristiche dell'azione hamiltoniana (³), che il risultato in questione rientra come caso particolare in una proprietà di simmetria dei fasci conservativi di traiettorie dinamiche, il che è quanto dire delle geodetiche di un arbitrario ds^2. Nella relativa metrica la proposizione generale appare anche più semplice dei suoi corollari ottici. Ne illustrerò uno a titolo d'esempio, ricavando sotto forma esplicita l'estensione della formula di Straubel ai mezzi anisotropi.

(¹) *Ueber einen allgemeinen Satz der geometrischen Optik und einige Anwendungen*, « Phys. Zeitschrift », IV, 1903, pp. 114-117. Il sig. A. Gleichen ne ha dato poco dopo [ibidem, 226-227] una dimostrazione di carattere elementare, considerando un numero finito di mezzi omogenei, e valutando l'influenza delle successive rifrazioni.

(²) *Begründung der elementaren Strahlungstheorie*, « Nachr. der Kgl. Ges. der Wiss. zu Göttingen », 1912, pp. 1-17; riprodotto in « Phys. Zeitschrift », XIII, 1912, pp. 1056-1064; e in « Jahresbericht der Deutschen Math. Vereinigung », XXII, 1913, pp. 1-20.

(³) Nella forma che meglio si presta alle applicazioni ottiche, quale emerge ad es. dal *Treatise on natural philosophy* di Kelvin e Tait, part. I [Cambridge, University Press, 1896], pp. 347-358. A p. 358, sotto il titolo *Application to common optics*, si trova accennato con espressivo commento un caso particolare del teorema di Straubel.

1. - Generalità. Enunciato del teorema.

Sia O un punto di una varietà V_n a n dimensioni, definita metricamente dal quadrato del suo elemento lineare

$$ds^2 = \sum_{1}^{n}{}_{ik}\, a_{ik}\, dx_i\, dx_k\,. \tag{1}$$

Consideriamo una geodetica G passante per O e un circostante pennello elementare (di geodetiche, spiccate tutte da O). Sia l la lunghezza dell'arco contato, su ogni geodetica del pennello, a partire da O. Le ipersuperficie (ipersfere geodetiche di centro O e raggio l) $l = \text{cost.}$ tagliano ortogonalmente ([4]) il pennello in campi $d\omega$ ad $n-1$ dimensioni. Fissiamo una di queste ipersfere di raggio generico l, e sia O' il punto di G che ad essa appartiene.

Il rapporto

$$d\Omega_l = \frac{d\omega}{l^{n-1}}\,,$$

si può considerare come ampiezza angolare del pennello, misurata alla distanza l. Negli spazi euclidei, $d\Omega_l$ è indipendente da l ($=$ per es. al $d\omega$ dell'ipersfera di raggio 1) e si può identificare coll'angolo solido del pennello nel suo vertice O, cioè con

$$d\Omega = \lim_{l=0} \frac{d\omega}{l^{n-1}}\,.$$

In uno spazio di natura qualunque, $d\Omega_l$ varia, in generale, con l, e così il rapporto

$$\frac{d\Omega_l}{d\Omega} = J(O, O')\,,$$

che misura manifestamente l'*ingrandimento* (angolare) in O' d'un pennello elementare di geodetiche, spiccate da O verso O'.

Ciò posto, si consideri invece un pennello spiccato da O' verso O, e il relativo ingrandimento angolare, in O, $J(O', O)$. L'annunciata rela-

([4]) Cfr., per es., BIANCHI, *Lezioni di geometria differenziale*, vol. I [Pisa, Spoerri, 1902], pp. 336-338.

zione di simmetria è espressa dalla formula

$$J(O, O') = J(O', O).$$

2. - Distanza geodetica.

La *distanza geodetica* $W(P, P')$ va risguardata come una funzione simmetrica dei due punti P, P', regolare, finchè questi rimangono distinti, entro una regione convenientemente limitata della varietà V_n. Essa coincide notoriamente coll'azione hamiltoniana di un sistema libero da forze, la cui energia cinetica abbia per espressione $\frac{1}{2}ds^2/dt^2$ e si conservi $=\frac{1}{2}$ durante tutto il moto. Giova rammentarne, per quanto verrà in uso qui appresso, il comportamento differenziale caratteristico.

Fissiamo, all'uopo, una geodetica generica, indicando con $\dot{x}_i$ le derivate delle coordinate x_i rispetto all'arco della stessa geodetica, e introduciamo le *coniugate* o *momenti cinetici*

$$p_i = \sum_{1}^{n}{}_k\, a_{ik}\dot{x}_k\,, \tag{2}$$

atte, al pari delle $\dot{x}_i$, a caratterizzare la direzione della geodetica in un suo punto qualsiasi ([5]). L'identità

$$\sum_{1}^{n}{}_{ik}\, a_{ik}\dot{x}_i\dot{x}_k = 1\,, \tag{3}$$

cui, per loro definizione, soddisfano le $\dot{x}_i$, implica tra le p la relazione quadratica reciproca

$$\sum_{1}^{n}{}_{ik}\, a^{(ik)}p_ip_k = 1 \tag{3'}$$

($a^{(ik)}$ complementi algebrici delle a_{ik} nel determinante da esse costituito, divisi per il determinante stesso).

Riferiamoci in particolare alla geodetica congiungente P con P'. Siano x_i, x'_i le coordinate di questi due punti; p_i, p'_i i valori che in essi assumono i momenti, convenendo che essi corrispondano, in entrambi i casi, alla direzione della geodetica che è rivolta *verso l'esterno dell'arco* PP'.

Per arbitrari spostamenti infinitesimi di questi due punti, cioè per

([5]) È manifesto che le p_i non differiscono dalle λ_i di RICCI, cioè dal sistema coordinato covariante della geodetica in questione.

arbitrari incrementi dx_i, dx'_i delle loro coordinate, sussiste l'identità

$$(4)\qquad dW = \sum_1^n{}_i\, p_i\, dx_i + \sum_1^n{}_i\, p'_i\, dx'_i \quad (^6)$$

la quale mostra che le p_i, p'_i coincidono ordinatamente con $\partial W/\partial x_i$, $\partial W/\partial x'_i$.

3. - Piccoli intorni di variabilità per P e P'. Specificazioni del sistema di riferimento.

Immaginiamo, ormai, che P rimanga nell'immediata prossimità di un assegnato punto O, e P' in prossimità di un altro punto O' distinto da O.

Siano $x_i^{(0)}$ e $x_i'^{(0)}$ le coordinate di O e di O', e si ponga

$$(5)\qquad \begin{cases} x_i = x_i^{(0)} + \xi_i\,, \\ x'_i = x_i'^{(0)} + \xi'_i\,. \end{cases}$$

Si designi poi con G la geodetica passante per O, O', e si noti che (previa opportuna trasformazione delle coordinate generali x_i) è sempre lecito ritenere:

a) che, nei due punti O, O', i valori numerici dei coefficienti a_{ik} del quadrato dell'elemento lineare, e con essi i loro reciproci $a^{(ik)}$, si riducono ad ε_{ik} (cioè zero per $i \neq k$, e 1 per $i = k$);

b) che le x_i $(i = 1, 2, ..., n-1)$ relative alla G sono nulle in O ed in O', avendosi ulteriormente [in causa della (3), che si riduce a $\sum_1^n{}_i\, \dot{x}_i^2 = 1$] $\dot{x}_n^2 = 1$, o addirittura (fissando convenientemente i versi) $\dot{x}_n = 1$.

Dalle (2), e da a) e b) segue che i momenti della G in O ed O' valgono rispettivamente

$$(6)\qquad \begin{cases} p_i = 0\,, & p'_i = 0 \qquad (i = 1, 2, ..., n-1), \\ p_n = 1\,, & p'_n = 1\,. \end{cases}$$

(6) Non si dimentichi la convenzione fatta circa i versi positivi in P e in P'. Di solito si presenta la (4) sotto la forma (emisimmetrica rispetto ai due punti P, P')

$$dW = \sum_1^n{}_i\, p'_i\, dx'_i - \sum_1^n{}_i\, p_i\, dx_i\,,$$

ma allora si intende che le p e le p' si riferiscano ad uno stesso verso di percorrenza (da P verso P').

Avuto riguardo alle (4) e (5), lo sviluppo di $W(P, P')$ nell'intorno di O, O' (fino al secondo ordine inclusivo) si presenta sotto la forma

$$(7) \qquad W(P, P') = l + \xi_n + \xi'_n + \Xi_2 + \Xi'_2 + \sum_{ik}^{n}{}_{1} \frac{\partial^2 W}{\partial x_i \partial x'_k} \xi_i \xi'_k ,$$

dove l sta per la distanza geodetica $W(O, O')$, e Ξ_2, Ξ'_2 designano forme quadratiche degli argomenti ξ e ξ' rispettivamente; ben si intende che i coefficienti $\partial^2 W/\partial x_i \partial x'_k$ della forma bilineare vanno (come le altre derivate di W) riferiti alla coppia O, O'.

Per derivazione rispetto a $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ (o, ciò che è lo stesso, $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-1}$), si ha, in base alla (7) (e a meno di termini d'ordine superiore al primo),

$$(8) \qquad p_i = \Xi_1 + \sum_{k}^{n}{}_{1} \frac{\partial^2 W}{\partial x_i \partial x'_k} \xi'_k , \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1),$$

e, in modo analogo,

$$(9) \qquad p'_i = \Xi'_1 + \sum_{k}^{n}{}_{1} \frac{\partial^2 W}{\partial x'_i \partial x_k} \xi_k , \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1),$$

con ovvio significato di Ξ_1, Ξ'_1 (forme lineari, delle ξ la prima, delle ξ' la seconda).

Dacchè, in O e in O', $a^{(ik)} = \varepsilon_{ik}$, la (3') porge $\sum_{i}^{n}{}_{1} p_i^2 = 1$, $\sum_{i}^{n}{}_{1} p_i'^2 = 1$. Perciò, a meno di termini di second'ordine, p_n e p'_n seguitano ad avere il valore 1 (che ad essi spetta, sulla G, in O, e rispettivamente, in O').

4. - Pennello elementare di centro O. Ampiezza angolare misurata in prossimità di O', e all'origine.

Per le geodetiche (prossime a G) spiccate da O, le ξ vanno poste eguali a zero. La $W(O, P')$, limitata ai termini di primo ordine, si riduce a

$$l + \xi'_n ,$$

e, nello stesso ordine di approssimazione, l'ipersfera geodetica di centro O

$$W(O, P') = l$$

si confonde coll'iperpiano passante per O'

$$\xi'_n = 0 .$$

Sia $d\omega$ un campo elementare di questo iperpiano circostante ad O', e si consideri il pennello di geodetiche che proiettano $d\omega$ da O.

L'ampiezza angolare di questo pennello, misurata alla distanza l, vale manifestamente

$$d\Omega_l = \frac{d\omega}{l^{n-1}} .$$

In partenza (intendo dire nel vertice O), queste geodetiche hanno dei momenti p_i $(i = 1, 2, \dots n-1)$, definiti dalle (8), in cui si sieno poste le ξ e la ξ'_n eguali a zero: ossia

$$p_i = \sum_1^{n-1}{}_k \frac{\partial^2 W}{\partial x_i \, \partial x'_k} \xi'_k , \qquad (i = 1, 2, \dots, n-1);$$

mentre, sempre a meno di termini del secondo ordine (nelle ξ'), $p_n = 1$.

D'altra parte, a norma delle (2), ed a), le p_i coincidono in O colle $\dot{x}_i$. Ne consegue che, sopra una generica geodetica del pennello, alla distanza elementare λ da O, le coordinate x_i si trovano incrementate di $p_i\lambda$. Si ha così, confrontando colle (5),

$$\xi_i = \lambda \sum_1^{n-1}{}_k \frac{\partial^2 W}{\partial x_i \, \partial x'_k} \xi'_k , \tag{10}$$

$$\xi_n = \lambda . \tag{11}$$

Quest'ultima mostra che l'ipersfera di centro O e raggio λ si confonde, nell'intorno considerato, coll'iperpiano $\xi_n = \lambda$. La (10) stabilisce così una corrispondenza omografica fra i due iperpiani $\xi'_n = 0$ e $\xi_n = \lambda$, corrispondendosi le intersezioni con una medesima geodetica del pennello. Fra due elementi omologhi $d\omega$ e $d\omega_\lambda$ di questi due iperpiani passa, a norma della (10), la relazione

$$d\omega_\lambda = \lambda^{n-1} |\Delta| \, d\omega , \tag{12}$$

rappresentando Δ il determinante dei coefficienti $\partial^2 W / \partial x_i \, \partial x'_k$ (certo diverso da zero entro il campo di regolarità, cui si suppone di riferirsi).

Angolo solido all'origine del nostro pennello (proiettante $d\omega$ da O)

è manifestamente il rapporto

$$d\Omega = \frac{d\omega_\lambda}{\lambda^{n-1}},$$

che si confonde, nell'adottato ordine di approssimazione, con $\lim_{l=0} d\omega_l / l^{n-1}$.

5. - Ingrandimento in O'. Teorema di reciprocità.

Ingrandimento in O' del nostro pennello di centro O sarà da dirsi il rapporto $J(O, O')$ delle due ampiezze angolari $d\Omega_l$ e $d\Omega$, ossia

$$J(O, O') = \frac{d\Omega_l}{d\Omega} = \frac{d\omega}{l^{n-1}} : \frac{d\omega_\lambda}{\lambda^{n-1}}.$$

La (12) ce ne fornisce l'espressione

$$J(O, O') = \frac{1}{l^{n-1}|\Delta|}.$$

Se si nota che $W(O, O')$ è, per sua definizione, simmetrica rispetto ai due punti da cui dipende, e che simmetriche sono altresì le particolarizzazioni di coordinate a) e b), di cui ci siamo valsi per semplificare le formule, senz'altro risulta che il determinante Δ rimane invariato, al pari di $l = W(O, O')$, quando si scambino O ed O'. Di qua la relazione

$$J(O, O') = J(O', O),$$

che esprime, si può dire, la reversibilità dei pennelli geodetici rispetto all'ingrandimento angolare.

6. - Applicazione ottica ai mezzi anisotropi.

In un punto generico P di un mezzo birifrangente, siano (per la specie di raggi che si dovranno considerare) n_1, n_2, n_3 gli indici di rifrazione nelle direzioni degli assi ottici x, y, z. In base al principio di FERMAT, i raggi luminosi entro un mezzo siffatto coincidono colle geodetiche del

$$ds^2 = n_1^2 dx^2 + n_2^2 dy^2 + n_3^2 dz^2 . \tag{13}$$

Sia S la varietà a tre dimensioni caratterizzata metricamente da un tale ds^2, e S^* lo spazio ordinario, sede del fenomeno ottico. Queste due varietà, definite entrambe metricamente, sono poste in corrispondenza biunivoca dalla varietà analitica (x, y, z).

Detta ds^* la distanza elementare euclidea fra due punti vicinissimi (x, y, z) e $(x+dx, y+dy, z+dz)$, e

$$\alpha = \frac{dx}{ds^*}, \qquad \beta = \frac{dy}{ds^*}, \qquad \gamma = \frac{dz}{ds^*},$$

i coseni direttori dell'arco che li congiunge, dalla (13) si ha

$$\frac{ds}{ds^*} = \sqrt{n_1^2\alpha^2 + n_2^2\beta^2 + n_3^2\gamma^2}, \tag{14}$$

il radicale andando preso in valore assoluto.

Consideriamo ancora un intorno a tre dimensioni di (x, y, z), e i relativi elementi di volume dS e dS^*, nella metrica (13) e nell'ordinaria. Avremo

$$\frac{dS}{dS^*} = n_1 n_2 n_3 . \tag{15}$$

Consideriamo infine l'elemento superficiale normale alla direzione (α, β, γ), cui compete la misura euclidea $d\sigma^* = dS^*/ds^*$. Sarà $d\sigma = dS/ds$ la sua misura nella metrica (13), con che le (14) e (15) dànno

$$\frac{d\sigma}{d\sigma^*} = \frac{n_1 n_2 n_3}{\sqrt{n_1^2\alpha^2 + n_2^2\beta^2 + n_3^2\gamma^2}} . \tag{16}$$

Mediante queste formule possiamo riportare allo spazio euclideo del mezzo ambiente le ampiezze angolari $d\Omega$ e $d\Omega_l$, definite al n. 4, con referenza ad un generico ds^2 e alle sue geodetiche [nel caso attuale, il ds^2 (13) a tre dimensioni, e i raggi luminosi].

Occupiamoci dapprima dell'angolo solido all'origine

$$d\Omega = \frac{d\omega_\lambda}{\lambda^2} .$$

La misura di quest'angolo, nello spazio fisico, è, con manifesto significato dei simboli,

$$d\Omega^* = \frac{d\omega_\lambda^*}{\lambda^{*2}}.$$

Per divisione, si ha

$$\frac{d\Omega}{d\Omega^*} = \frac{d\omega_\lambda}{d\omega_\lambda^*}\left(\frac{\lambda^*}{\lambda}\right)^2,$$

donde, tenendo presente che λ, λ^* vanno trattate come misure di uno stesso arco elementare, e applicando le (14) e (16),

$$d\Omega = d\Omega^* \frac{n_1 n_2 n_3}{(n_1^2\alpha^2 + n_2^2\beta^2 + n_3^2\gamma^2)^{\frac{3}{2}}}. \tag{17}$$

Va da sè che, in quest'ultima formula, i valori di n_1, n_2, n_3 si riferiscono al punto O; quelli di α, β, γ pure ad O e alla direzione del raggio che va a passare per O'.

In prossimità di O', abbiamo, nella varietà S, un'ampiezza angolare misurata da

$$d\Omega_l = \frac{d\omega}{l^2}.$$

L'ampiezza euclidea dello stesso pennello vale

$$d\Omega_l^* = \frac{d\omega^*}{\overline{OO'}^2},$$

designandosi manifestamente con $\overline{OO'}$ la distanza dei due punti in senso ordinario. La (16) dà

$$d\Omega_l = d\Omega_l^* \frac{\overline{OO'}^2}{l^2} \frac{n_1' n_2' n_3'}{\sqrt{n_1'^2\alpha'^2 + n_2'^2\beta'^2 + n_3'^2\gamma'^2}}, \tag{18}$$

le quantità accentate riferendosi ad O' e alla direzione del raggio che va a passare per O.

Ciò posto, indichiamo con

$$J^*(O, O') = \frac{d\Omega_l^*}{d\Omega^*},$$

l'ingrandimento angolare (inteso nell'ordinario senso euclideo) che si verifica per il nostro pennello di raggi, nel passare dall'origine O fino in O'. Dalle (18) e (17) si ricava

$$\frac{l^2}{\overline{OO'}^2} J(O, O') = J^*(O, O') \frac{n'_1 n'_2 n'_3}{n_1 n_2 n_3} \frac{(n_1^2 \alpha^2 + n_2^2 \beta^2 + n_3^2 \gamma^2)^{\frac{3}{2}}}{(n_1'^2 \alpha'^2 + n_2'^2 \beta'^2 + n_3'^2 \gamma'^2)^{\frac{1}{2}}} .$$

Il primo membro è funzione simmetrica dei punti O, O'. Lo è quindi anche il secondo. Esprimendo materialmente questa circostanza, si ricava l'estensione della formula di STRAUBEL ai mezzi anisotropi.

Per $n_1 = n_2 = n_3 = n$, si ritrova naturalmente la relazione già data da questo autore. Colle nostre notazioni essa assume l'aspetto

$$J^*(O, O') n'^2 = J^*(O', O) n^2 ,$$

da cui apparisce che gli ingrandimenti angolari di due pennelli, diremo così, affacciati stanno fra loro nel rapporto inverso dei quadrati degli indici di rifrazione nei rispettivi centri.

XXXIII.

SULLA REGOLARIZZAZIONE DEL PROBLEMA PIANO DEI TRE CORPI (¹).

« Rend. Acc. Lincei », ser. 5ª, vol. XXIV$_2$ (1915$_2$), pp. 61-75.

Le equazioni del problema dei tre corpi (per fissar le idee, sotto forma canonica, in cui sieno assunte come funzioni incognite del tempo t le coordinate e le componenti delle quantità di moto) costituiscono notoriamente un sistema differenziale regolare finchè le posizioni dei tre corpi sono distinte.

Il comportamento del moto in prossimità di un urto fu in questi ultimi tempi oggetto di importanti ricerche, le quali culminano, si può dire, nella scoperta, dovuta al sig. SUNDMAN (²), che (nel caso generale, in cui il momento risultante delle quantità di moto è diverso da zero) il moto è prolungabile analiticamente anche al di là di un urto, non ostante la singolarità delle equazioni differenziali. Questo risultato rivela il carattere inessenziale (dal punto di vista matematico) della detta singolarità, e induce a domandarsi se non sia possibile di farla scomparire con mezzi diretti: intendo rimanendo nell'ambito dei sistemi dinamici, con opportuni cambiamenti di variabile indipendente e di funzioni incognite.

Nel caso particolare del problema ristretto, mostrai, alcuni anni or sono (³), come l'intorno d'uno dei due corpi di massa finita si possa regolarizzare con una trasformazione affatto elementare (e atta a conservare la forma canonica).

Qualche ulteriore accorgimento — di cui la presente Nota — consente addirittura la regolarizzazione completa per il problema piano dei

---

(¹) Pervenuta all'Accademia il 13 luglio 1915.

(²) *Mémoire sur le problème des trois corps*, « Acta Mathematica », tomo 36, 1912, pp. 105-179.

(³) *Sur la résolution qualitative du problème restreint des trois corps*, « Acta Mathematica », tomo 30, 1906, pp. 306-327 [in queste « Opere »: vol. secondo, XXIII, pp. 419-439].

tre corpi. In modo preciso si constaterà che si possono scegliere i parametri determinativi dello stato di moto e la variabile indipendente, per guisa che le equazioni differenziali del problema offrano comportamnto regolare anche per posizioni coincidenti di due dei tre corpi (rimanendo esclusa l'eventualità di una collisione generale, tostochè si supponga che non si annulli la costante delle aree): beninteso, senza perdere la forma canonica, nè la regolarità per ogni altro stato di moto.

La restrizione che si tratti di moto piano sembra concettualmente irrilevante, e si è tratti a presumere che analoga regolarizzazione possa raggiungersi anche per il problema generale. Ho incontrato finora qualche difficoltà nella costruzione delle trasformazioni regolarizzanti; ma non dispero di superarla con studio ulteriore.

1. - Formule di Lagrange e di R. Ball.

Siano P_ν $(\nu = 0, 1, 2)$ i tre corpi, m_ν le loro masse, O il baricentro. Introduciamo i tre vettori

$$\boldsymbol{R}_\nu = P_\nu - O \qquad (\nu = 0, 1, 2)$$

e le loro differenze (corrispondenti ai tre lati del triangolo $P_0P_1P_2$)

$$(1) \qquad \begin{cases} \boldsymbol{r}_0 = P_2 - P_1 = \boldsymbol{R}_2 - \boldsymbol{R}_1 \,, \\ \boldsymbol{r}_1 = P_0 - P_2 = \boldsymbol{R}_0 - \boldsymbol{R}_2 \,, \\ \boldsymbol{r}_2 = P_1 - P_0 = \boldsymbol{R}_1 - \boldsymbol{R}_0 \,, \end{cases}$$

convenendo di designarne le lunghezze con R_0, R_1, R_2, o rispettivamente r_0, r_1, r_2.

Sia poi P un punto generico, e si ponga

$$\boldsymbol{d}_\nu = P_\nu - P \,, \qquad \boldsymbol{d} = O - P \,,$$

intendendo altresì che d_ν e d rappresentino le lunghezze di questi vettori (distanze di P da P_ν e dal baricentro O).

Si ha ovviamente

$$\boldsymbol{d}_\nu = P_\nu - P = (P_\nu - O) + (O - P) = \boldsymbol{R}_\nu + \boldsymbol{d} \,,$$

da cui, formando $\sum_0^2{}_\nu \, m_\nu \boldsymbol{d}_\nu \times \boldsymbol{d}_\nu$, e tenendo conto che, per essere O il baricentro,

$$\sum_0^2{}_\nu\, m_\nu \boldsymbol{R}_\nu = 0\,, \tag{2}$$

si ricava la formula di LAGRANGE

$$\sum_0^2{}_\nu\, m_\nu d_\nu^2 = \sum_0^2{}_\nu\, m_\nu R_\nu^2 + md^2$$

(m designa la massa complessiva $m_0 + m_1 + m_2$ dei tre punti P_ν).

Facciamo coincidere P, successivamente, con P_0, P_1, P_2, scrivendo per brevità J in luogo di $\sum_0^2{}_\nu\, m_\nu R_\nu^2$ (momento d'inerzia polare rispetto al baricentro). Avremo

$$\begin{cases} m_1 r_2^2 + m_2 r_1^2 = J + mR_0^2\,, \\ m_2 r_0^2 + m_0 r_2^2 = J + mR_1^2\,, \\ m_0 r_1^2 + m_1 r_0^2 = J + mR_2^2\,. \end{cases}$$

Moltiplichiamo queste equazioni ordinatamente per m_0/m, m_1/m, m_2/m, e sommiamo, ponendo

$$m_0^* = \frac{m_1 m_2}{m}\,, \qquad m_1^* = \frac{m_2 m_0}{m}\,, \qquad m_2^* = \frac{m_0 m_1}{m}\,. \tag{3}$$

Ne scende la relazione notevole

$$J = \sum_0^2{}_\nu\, m_\nu R_\nu^2 = \sum_0^2{}_\nu\, m_\nu^* r_\nu^2\,. \tag{4}$$

In modo sostanzialmente identico si stabilisce una espressione, dovuta a R. BALL ([4]), della forza viva dei tre corpi.

Si consideri infatti il loro moto riferito al baricentro O, o, più esattamente, ad un sistema di assi di direzione invariabile coll'origine in O. I vettori $\boldsymbol{R}_\nu$ sono in tal caso funzioni del tempo t; e la velocità di P_ν rimarrà definita da $\dot{\boldsymbol{R}}_\nu$, il punto sovrapposto designando derivazione rispetto a t.

Dalla derivazione delle (1), (2) segue che i vettori $\dot{\boldsymbol{R}}_\nu$ (velocità *asso-*

([4]) Cfr. E. J. ROUTH, *Treatise on the dynamics of a system of rigid bodies* (elementary part), 6ª ediz. [London, Macmillan, 1897], § 424.

lute dei punti P_ν) e $\dot{r}_\nu$ (velocità *relative*: specificamente, $\dot{r}_0$ velocità di P_2 rispetto a P_1, ecc.) sono legati dalle stesse relazioni (lineari) intercedenti fra R_ν e r_ν. Ciò basta ad assicurare che la forza viva del sistema dei tre corpi

$$T = \tfrac{1}{2} \sum_0^2{}_\nu \, m_\nu V_\nu^2 \qquad (V_\nu \text{ lunghezza del vettore } \dot{\boldsymbol{R}}_\nu), \tag{5}$$

alla quale, nelle considerazioni precedenti, fa riscontro $\frac{1}{2}J$, può anche esprimersi sotto la forma

$$T = \tfrac{1}{2} \sum_0^2{}_\nu \, m_\nu^* v_\nu^2 \qquad (v_\nu \text{ lunghezza del vettore } \dot{\boldsymbol{r}}_\nu). \tag{6}$$

2. - Funzione lagrangiana in coordinate assolute. Legame baricentrale. Trasformazione in coordinate relative a legame geometrico.

Ritenuto che i tre corpi si attraggano secondo la legge di Newton, si ha la funzione delle forze

$$U = f\left(\frac{m_1 m_2}{r_0} + \frac{m_2 m_0}{r_1} + \frac{m_0 m_1}{r_2}\right) = fm \sum_0^2{}_\nu \frac{m_\nu^*}{r_\nu}, \tag{7}$$

f designando la costante d'attrazione universale.

Parametri atti a fissare la posizione dei tre corpi sono per es. le loro coordinate assolute (baricentrali) X_ν, Y_ν, Z_ν (componenti dei vettori $\boldsymbol{R}_\nu$). A mezzo loro e delle loro derivate $\dot{X}_\nu$, $\dot{Y}_\nu$, $\dot{Z}_\nu$, si possono ovviamente esprimere U e T, e quindi

$$L = T + U. \tag{8}$$

In questa accezione L costituisce la funzione lagrangiana del problema, e dà luogo, quando si voglia, alle equazioni esplicite del moto, di secondo ordine nelle nove coordinate assolute X_ν, Y_ν, Z_ν, *trattate a priori come indipendenti*. In realtà esse sono legate dalla (2), ossia dalle tre equazioni che se ne ottengono proiettando sugli assi, ed è anche perfettamente legittimo il tenerne conto preventivamente, riducendo la L mediante la (2), con che essa viene a dipendere da sei (anzichè da nove) parametri e loro derivate prime. Tali sei parametri possono, ben si intende, essere scelti a piacere, sotto l'unica condizione che le espressioni risultanti per le X_ν, Y_ν, Z_ν (o, se si vuole, per i vettori $\boldsymbol{R}_\nu$) verifichino la (2).

Per lo scopo che ci proponiamo, è essenziale l'osservazione seguente:

Ai tre vettori $\boldsymbol{R}_\nu$, legati dalla (2), corrispondono *biunivocamente* i tre vettori $\boldsymbol{r}_\nu$ definiti dalle (1) e in conformità sottoposti al vincolo

$$\boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{r}_2 = 0 . \tag{9}$$

Per constatarlo [dacchè già le (1) dànno le $\boldsymbol{r}$ in funzione lineare delle $\boldsymbol{R}$], basta mostrare che le (1) e (2) sono risolubili rapporto alle $\boldsymbol{R}$. All'uopo, fissiamone una, per es. $\boldsymbol{R}_0$, e mettiamo in evidenza nella (2) il termine $m\boldsymbol{R}_0$ $(m = m_0 + m_1 + m_2)$. Avremo

$$m\boldsymbol{R}_0 + m_1(\boldsymbol{R}_1 - \boldsymbol{R}_0) + m_2\boldsymbol{R}_2 - \boldsymbol{R}_0 = 0 .$$

Questa, in base alle (1), fornisce senz'altro la voluta espressione di $\boldsymbol{R}_0$. Complessivamente si ha

$$\left\{\begin{aligned} \boldsymbol{R}_0 &= \frac{m_2}{m}\boldsymbol{r}_1 - \frac{m_1}{m}\boldsymbol{r}_2 , \\ \boldsymbol{R}_1 &= \frac{m_0}{m}\boldsymbol{r}_2 - \frac{m_2}{m}\boldsymbol{r}_0 , \\ \boldsymbol{R}_2 &= \frac{m_1}{m}\boldsymbol{r}_0 - \frac{m_0}{m}\boldsymbol{r}_1 , \end{aligned}\right. \tag{10}$$

c. d. d.

Ciò posto, è chiaro che l'espressione di L, ridotta a sei gradi di libertà, si può raggiungere indifferentemente:

sia, nel modo poc'anzi accennato, partendo dalla L stessa in coordinate assolute (le componenti X_ν, Y_ν, Z_ν delle $\boldsymbol{R}_\nu$) e loro derivate, e introducendo sei parametri indipendenti in modo che rimanga identicamente verificato il legame baricentrale (2);

sia anche, trasformando dapprima L in coordinate relative (le componenti x_ν, y_ν, z_ν dei vettori $\boldsymbol{r}_\nu$) e loro derivate, e riducendo poi a sei parametri in base alla (9).

Ci atterremo, da ora innanzi, a quest'ultimo criterio.

3. - Cambiamento della variabile indipendente. Trasformazione di Darboux.

Un sistema lagrangiano a vincoli indipendenti dal tempo, proveniente da una funzione del tipo

$$L = T + U ,$$

ammette notoriamente l'integrale delle forze vive

$$T - U = E \qquad (E \text{ costante}), \tag{11}$$

e, in quanto si risguardi attribuito un valore fisso all'energia totale E, può essere compendiato nel principio della minima azione. Esso equivale cioè alla stazionarietà (surbodinata ai vincoli) di un integrale A (azione) indipendente dalla variabile t. Si sa che

$$A = \int \sqrt{2(U + E)\, ds} ,$$

dove

$$ds^2 = 2T\, dt^2 , \tag{12}$$

ossia, in base alla (6),

$$ds^2 = \sum_{0}^{2}{}_{\nu}\, m_\nu^*(dx_\nu^2 + dy_\nu^2 + dz_\nu^2) . \tag{13}$$

In luogo del tempo t, si immagini di assumere come variabile indipendente un'ausiliaria τ, legata a t dalla formula

$$d\tau = U\, dt . \tag{14}$$

Finchè si considerano posizioni dei tre corpi distinte (e a distanza finita), U rimane sempre finita e positiva. La sostituzione è quindi legittima; ed è concettualmente indifferente risguardare t o τ come variabile indipendente. Viceversa, per riconoscere il comportamento del sistema nell'immediata prossimità dei detti stati eccezionali, la variabile τ è più opportuna di t.

Poniamo ancora

$$d\sigma^2 = U\,ds^2\,, \tag{15}$$

$$\boldsymbol{T} = \frac{T}{U}\,, \tag{16}$$

con che, in base alle (14) e (12), $2\boldsymbol{T}\,d\tau^2$ non è altro che

$$2\,\frac{T}{U}\,U^2\,dt^2 = U\,ds^2\,.$$

Ne consegue, in base alle (15) e (13),

$$\boldsymbol{T} = \frac{1}{2}\,\frac{d\sigma^2}{d\tau^2} = \frac{U}{2}\sum_0^2{}_\nu\, m_\nu^*(x_\nu'^2 + y_\nu'^2 + z_\nu'^2)\,, \tag{17}$$

designandosi con apici le derivazioni rispetto a τ.

L'integrale A può in conformità essere scritto

$$A = \int\sqrt{2\left(1+\frac{E}{U}\right)}\cdot\sqrt{U}\,ds = \int\sqrt{2\left(1+\frac{E}{U}\right)}\,d\sigma\,, \tag{18}$$

e la (11)

$$\boldsymbol{T} - \frac{E}{U} = 1\,. \tag{19}$$

La stazionarietà di A sotto i vincoli (9) e (11) equivale, come s'è detto, alle equazioni differenziali del problema dei tre corpi. Attese le (17), (18), (19), *le cose vanno manifestamente come se, τ fungendo da tempo, si trattasse di un sistema dinamico sottoposto agli stessi vincoli* (9), *avente per forza viva $\boldsymbol{T}$, per potenziale E/U e per costante delle forze vive l'unità.* Si riconosce in questo enunciato una *trasformazione di Darboux* ([5]), aggiuntavi la specificazione del tempo.

La funzione lagrangiana del problema così trasformato è

$$\Lambda = \boldsymbol{T} + \frac{E}{U}\,, \tag{20}$$

con $\boldsymbol{T}$ dato dalla (17), e U, come sempre, dalla (7).

([5]) Cfr. per es. APPELL, *Traité de mécanique rationnelle*, t. II, 2ª ediz. [Paris, Gauthier-Villars, 1911], p. 479.

4. - Problema piano. Trasformazione anticritica.

Quanto precede vale naturalmente anche nell'ipotesi che il moto segua sempre in un medesimo piano. Soltanto, ove si assuma tale piano per piano coordinato $z = 0$, si possono in più ritenere nulle le tre z_ν, e il problema si presenta con quattro gradi di libertà, avendosi sei coordinate, le x_ν, y_ν (componenti dei vettori $\boldsymbol{r}_\nu$), legate dalla solita (9), che equivale alle

$$\sum_0^2{}_\nu\, x_\nu = 0\,, \qquad \sum_0^2{}_\nu\, y_\nu = 0\,. \tag{21}$$

Rispetto a queste coordinate, le mutue distanze r_ν (e, di riverbero, U e $\boldsymbol{T}$) sono affette da singolarità *critiche* in corrispondenza alle coppie di valori

$$x_0 = y_0 = 0\;; \qquad x_1 = y_1 = 0\;; \qquad x_2 = y_2 = 0\,.$$

Questo comportamento critico si fa scomparire mediante le trasformazioni quadratiche compendiate nella formula

$$x_\nu + iy_\nu = (\xi_\nu + i\eta_\nu)^2\,, \qquad (\nu = 0, 1, 2;\; i = \sqrt{-1})\,, \tag{22}$$

che equivale alle

$$x_\nu = \xi_\nu^2 - \eta_\nu^2\,, \qquad y_\nu = 2\xi_\nu\eta_\nu \qquad (\nu = 0, 1, 2). \tag{22'}$$

Infatti, detto ϱ_ν il modulo di $\xi_\nu + i\eta_\nu$, si ha, dalla (22),

$$r_\nu = \varrho_\nu^2 = \xi_\nu^2 + \eta_\nu^2\,.$$

L'espressione (7) di U diviene, in conformità,

$$U = fm \sum_0^2{}_\nu \frac{m_\nu^*}{\varrho_\nu^2}\,, \tag{23}$$

che è, come si vede, razionale nelle nuove variabili, ξ_ν, η_ν.

Le equazioni (21) dei vincoli assumono l'aspetto

$$\sum_0^2{}_\nu\, \xi_\nu^2 - \sum_0^2{}_\nu\, \eta_\nu^2 = 0\,, \qquad \sum_0^2{}_\nu\, \xi_\nu\eta_\nu = 0\,. \tag{24}$$

Deriviamo la (22) rispetto a τ, e prendiamo i moduli. Avremo

$$x_\nu'^2 + y_\nu'^2 = 4\varrho_\nu^2(\xi_\nu'^2 + \eta_\nu'^2) ,$$

con che la (17), fattovi $z_\nu = 0$, porge

$$T = 2U \sum_{0}^{2}{}_\nu\, m_\nu^* \varrho_\nu^2(\xi_\nu'^2 + \eta_\nu'^2) . \tag{25}$$

5. - Introduzione di parametri indipendenti. Complementi qualitativi.

Siano q_h ($h = 0, 1, 2, 3$) coordinate lagrangiane rispetto ai legami (24) per il sistema dinamico di cui stiamo occupandoci [avente la (25) per forza viva e la (23) per funzione delle forze]. Ciò significa che si può porre

$$\xi_\nu = \xi_\nu(q_0, q_1, q_2, q_3) , \qquad \eta_\nu = \eta_\nu(q_0, q_1, q_2, q_3) \qquad (\nu = 0, 1, 2), \tag{26}$$

rimanendo identicamente soddisfatte le (24).

Specifichiamo il comportamento qualitativo delle risolventi parametriche (26), mostrando che, mediante scelta opportuna delle q, è lecito risguardare le ξ_ν, η_ν quali funzioni regolari delle q stesse, in corrispondenza a tutte le possibili configurazioni del sistema (reali, a distanza finita), fatta solo eccezione per la sestupla $\xi_\nu = \eta_\nu = 0$ ($\nu = 0, 1, 2$), caratteristica di una coincidenza di tutti e tre i corpi.

All'uopo, basta assicurarsi che le (24) sono effettivamente risolubili rispetto a due delle sei variabili che vi compariscono, nell'intorno di ogni sistema di valori (finiti, e non tutti nulli) che le verifichino. Questo, a sua volta, risulta dalla considerazione della matrice jacobiana dei loro primi membri

$$\xi_0^2 + \xi_1^2 + \xi_2^2 - \eta_0^2 - \eta_1^2 - \eta_2^2 , \qquad \xi_0\eta_0 + \xi_1\eta_1 + \xi_2\eta_2$$

rispetto ai sei argomenti $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \eta_0, \eta_1, \eta_2$. Tale matrice è

$$\left\| \begin{matrix} 2\xi_0 & 2\xi_1 & 2\xi_2 & -2\eta_0 & -2\eta_1 & -2\eta_2 \\ \eta_0 & \eta_1 & \eta_2 & \xi_0 & \xi_1 & \xi_2 \end{matrix} \right\| .$$

Il suo quadrato vale

$$\left| \begin{matrix} 4(\varrho_0^2 + \varrho_1^2 + \varrho_2^2) & 0 \\ 0 & \varrho_0^2 + \varrho_1^2 + \varrho_2^2 \end{matrix} \right| = 4(\varrho_0^2 + \varrho_1^2 + \varrho_2^2)^2 ,$$

e può quindi annullarsi (nel campo reale) solo a patto che si annullino tutte le ϱ, ossia tutte le ξ e tutte le η, c. d. d.

Alla stessa conclusione si perviene combinando le due osservazioni seguenti:

1) In coordinate relative x_ν, y_ν, i vincoli avevano la forma lineare (21)

$$\sum_0^2{}_\nu\, x_\nu = 0\,, \qquad \sum_0^2{}_\nu\, y_\nu = 0\,,$$

ed erano quindi risolubili, univocamente e senza eccezione, rispetto a due delle sei variabili: una x_ν ed una y_ν (in funzione delle altre quattro).

2) Dacchè escludiamo che tutte le sei variabili ξ, η si annullino, una almeno delle tre equazioni (22) è risolubile (senza introduzione di singolarità critiche) rapporto a $\xi_\nu + i\eta_\nu$. Due delle ξ_ν, η_ν sono pertanto esprimibili regolarmente mediante le corrispondenti x_ν, y_ν; quindi, per la osservazione precedente, mediante le rimanenti quattro x, y; ossia infine, attese le (22), mediante le rimanenti quattro ξ, η: e ciò dimostra l'asserto.

Se ne inferisce in particolare che, se una delle ϱ, diciamo ϱ_0, si annulla, possono fungere da parametri q: ξ_0, η_0, ξ_1, η_1 (ovvero ξ_0, η_0, ξ_2, η_2). Infatti le altre due ϱ sono allora diverse da zero [6], e le (24), il cui determinante funzionale rispetto a ξ_ν, η_ν vale $2\varrho_\nu^2$, si possono pensare risolute rispetto a ξ_2, η_2, rimanendo indipendenti ξ_0, η_0, ξ_1, η_1 (come anche rispetto a ξ_1, η_1, rimanendo allora indipendenti le altre quattro).

Giova aggiungere che *la funzione delle forze* $1/U$, *anzi addirittura i tre rapporti* $1/(\varrho_0^2 U)$ $(\nu = 0, 1, 2)$ *si mantengono regolari*, non soltanto quando tutte le mutue distanze sono finite e diverse da zero, ma, *anche nell'intorno di un generico urto binario* (una delle ϱ nulla e le altre due diverse da zero). Sia infatti, come sopra, ϱ_0^2 quella delle distanze che si vuol considerare nell'intorno del valore zero; ϱ_1^2 e ϱ_2^2 hanno allora limite inferiore > 0. Dalle (23) si ha

$$\frac{1}{U} = \frac{1}{fm\left\{\dfrac{m_0^*}{\varrho_0^2} + \dfrac{m_1^*}{\varrho_1^2} + \dfrac{m_2^*}{\varrho_2^2}\right\}} = \frac{\varrho_0^2}{fm\left\{m_0^* + m_1^*\,\dfrac{\varrho_0^2}{\varrho_1^2} + m_2^*\,\dfrac{\varrho_0^2}{\varrho_2^2}\right\}}\,,$$

donde apparisce che $1/(\varrho_0^2 U)$, e *a fortiori* $1/U$, si comporta regolarmente anche per $\xi_0 = \eta_0 = 0$.

---

[6] In quanto, qualora due ϱ (ossia due lati del triangolo dei tre corpi) si annullassero, dovrebbe di necessità annullarsi anche la terza, il che abbiamo escluso.

6. - Forma canonica. Funzione caratteristica.

Introdotte (colle specificazioni qualitative di cui al precedente §) le coordinate lagrangiane q_h $(h = 0, 1, 2, 3)$, le equazioni del moto si potrebbero senz'altro desumere dalla funzione lagrangiana Λ, avendo cura di esprimerla mediante le q_h e le $q'_h = dq_h/d\tau$, a norma delle (26).

Per lo scopo che ci proponiamo, non è indicata la forma lagrangiana (che risulterebbe ancora affètta da singolarità, quando le posizioni dei tre corpi non sono tutte distinte). Ma conviene ricorrere alla forma canonica, associando alle q_h le ausiliarie (coniugate)

$$p_h = \frac{\partial \Lambda}{\partial q'_h} = \frac{\partial \boldsymbol{T}}{\partial q'_h}.$$

Detta

$$2\Theta = \sum_{hk}^{3}{}_{0}\, a^{(hk)} p_h p_k \tag{27}$$

la forma quadratica (degli argomenti p) reciproca alla $2\boldsymbol{T}$ (degli argomenti q'), la funzione caratteristica del sistema canonico proveniente dalla $\Lambda = \boldsymbol{T} + E/U$ è, classicamente,

$$H = \Theta - \frac{E}{U}, \tag{28}$$

l'integrale delle forze vive (19) assumendo la forma

$$H = 1. \tag{29}$$

Tutto ciò vale in particolare ove si assumano quali parametri q quattro delle coordinate relative x_ν, y_ν, per es. x_0, y_0, x_1, y_1. Una tale scelta, che si presenta spontanea ed è infatti conforme all'uso comune, ha però l'inconveniente già rilevato, di lasciar sussistere singolarità critiche nella U. Non sarà tuttavia inutile di esplicitare intanto la Θ in coordinate x_0, y_0, x_1, y_1 e relative coniugate p_{x_0}, p_{y_0}, p_{x_1}, p_{y_1}: ce ne varremo tra poco per rendere più spedito il passaggio alla forma definitiva.

Dacchè, a norma dei vincoli (21),

$$x_2 = -(x_0 + x_1), \qquad y_2 = -(y_0 + y_1),$$

la T rimane definita da

$$2T = U\{(m_0^* + m_2^*)(x_0'^2 + y_0'^2) + (m_2^* + m_1^*)(x_1'^2 + y_1'^2) + 2m_2^*(x_0'x_1' + y_0'y_1')\}\,,$$

se ne desume agevolmente, ricordando le (3), la forma reciproca

$$(30)\qquad 2\Theta = \frac{1}{U}\{a(p_{x_0}^2 + p_{y_0}^2) + b(p_{x_1}^2 + p_{y_1}^2) - 2c(p_{x_0}p_{x_1} + p_{y_0}p_{y_1})\}\,,$$

in cui si è posto, per brevità,

$$(31)\qquad a = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\,,\qquad b = \frac{1}{m_0} + \frac{1}{m_2}\,,\qquad c = \frac{1}{m_2}\,.$$

7. - Osservazioni intese a facilitare la trasformazione della Θ.

Quando si eseguisce una generica trasformazione sui parametri indipendenti q, passando a nuove variabili χ, le coniugate p si trasformano notoriamente come le derivate di una medesima funzione φ. Di qui una regola per ottenere comprensivamente i coefficienti — diciamo $\alpha^{(jl)}$ — della espressione trasformata di Θ. Si parte dal parametro differenziale

$$\Delta\varphi = \sum_0^3{}_{hk}\, a^{(hk)} \frac{\partial\varphi}{\partial q_h}\frac{\partial\varphi}{\partial q_k}\,,$$

relativo alle variabili q, e, in esso, si sostituiscono materialmente, al posto delle $\partial\varphi/\partial q_h$, i loro valori

$$\sum_0^3{}_j \frac{\partial\varphi}{\partial\chi_j}\frac{\partial\chi_j}{\partial q_h}\,,$$

in termini delle nuove derivate; e così per le $\partial\varphi/\partial q_k$. Nella espressione risultante del parametro si leggono senz'altro i coefficienti ricercati.

Stabiliamo ancora un paio di identità, che ci saranno utili tra un momento.

Una trasformazione binaria del tipo (22) compendiata in

$$x + iy = (\xi + i\eta)^2\,,$$

ove si sostituiscano provvisoriamente alle x, y; ξ, η le combinazioni complesse

$$\text{(32)} \qquad \begin{cases} z = x + iy, & \bar{z} = x - iy, \\ \zeta = \xi + i\eta, & \bar{\zeta} = \xi - i\eta, \end{cases}$$

equivale a

$$z = \zeta^2, \qquad \bar{z} = \bar{\zeta}^2,$$

e si presenta così a variabili separate.

Ne segue

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z} = \frac{1}{2\zeta}\frac{\partial\varphi}{\partial\zeta}, \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial\bar{z}} = \frac{1}{2\bar{\zeta}}\frac{\partial\varphi}{\partial\bar{\zeta}}.$$

D'altra parte, in virtù delle (32),

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial\varphi}{\partial z} + \frac{\partial\varphi}{\partial\bar{z}}, \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = i\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z} - \frac{\partial\varphi}{\partial\bar{z}}\right),$$

e quindi

$$\text{(33)} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial\varphi}{\partial x} + i\dfrac{\partial\varphi}{\partial y} = 2\dfrac{\partial\varphi}{\partial\bar{z}}, \\[2mm] \dfrac{\partial\varphi}{\partial x} - i\dfrac{\partial\varphi}{\partial y} = 2\dfrac{\partial\varphi}{\partial z}, \end{cases}$$

colle analoghe relative alle lettere ξ, η, ζ, $\bar{\zeta}$.

Ne ricaviamo, in primo luogo,

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 = 4\frac{\partial\varphi}{\partial\bar{z}}\frac{\partial\varphi}{\partial z} = \frac{1}{\zeta\bar{\zeta}}\frac{\partial\varphi}{\partial\bar{\zeta}}\frac{\partial\varphi}{\partial\zeta} = \frac{1}{4\zeta\bar{\zeta}}\left\{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\right)^2\right\},$$

donde, attribuendo alle varie lettere un indice ν ($\nu = 0, 1$) e ponendo mente alla identità $\zeta_\nu\bar{\zeta}_\nu = \varrho_\nu^2$,

$$\text{(34)} \qquad \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_\nu}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y_\nu}\right)^2 = \frac{1}{4\varrho_\nu^2}\left\{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\xi_\nu}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\eta_\nu}\right)^2\right\}.$$

Prendiamo poi le due formule

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z_0} = \frac{1}{2\zeta_0}\frac{\partial\varphi}{\partial\zeta_0}, \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial\bar{z}_1} = \frac{1}{2\bar{\zeta}_1}\frac{\partial\varphi}{\partial\bar{\zeta}_1},$$

e moltiplichiamole membro a membro. Avremo

$$4\,\frac{\partial\varphi}{\partial z_0}\,\frac{\partial\varphi}{\partial \bar z_1}=\frac{1}{\zeta_0\bar\zeta_1}\,\frac{\partial\varphi}{\partial\zeta_0}\,\frac{\partial\varphi}{\partial\bar\zeta_1},$$

che, per le (33) ed analoghe, può essere scritta

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_0}-i\,\frac{\partial\varphi}{\partial y_0}\right)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}+i\,\frac{\partial\varphi}{\partial y_1}\right)=\frac{1}{4\zeta_0\bar\zeta_1}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\xi_0}-i\,\frac{\partial\varphi}{\partial\eta_0}\right)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\xi_1}+i\,\frac{\partial\varphi}{\partial\eta_1}\right).$$

Ove, nel secondo membro, si moltiplichi sopra e sotto per $\bar\zeta_0\zeta_1$ e si tenga conto una volta ancora delle identità $\zeta_\nu\bar\zeta_\nu=\varrho_\nu^2$, si ha, eguagliando le parti reali,

$$(35)\qquad \frac{\partial\varphi}{\partial x_0}\,\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}+\frac{\partial\varphi}{\partial y_0}\,\frac{\partial\varphi}{\partial y_1}=$$
$$=\frac{1}{4\varrho_0^2\varrho_1^2}\left\{(\xi_0\xi_1+\eta_0\eta_1)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\xi_0}\,\frac{\partial\varphi}{\partial\xi_1}+\frac{\partial\varphi}{\partial\eta_0}\,\frac{\partial\varphi}{\partial\eta_1}\right)-\right.$$
$$\left.-(\xi_0\eta_1-\eta_0\xi_1)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\xi_0}\,\frac{\partial\varphi}{\partial\eta_1}-\frac{\partial\varphi}{\partial\eta_0}\,\frac{\partial\varphi}{\partial\xi_1}\right)\right\}.$$

8. - Espressione esplicita di Θ in coordinate ξ_0, η_0, ξ_1, η_1.

Immaginiamo ormai di assumere quali parametri indipendenti ξ_0, η_0, ξ_1, η_1.

Per formare l'espressione di Θ relativa a tali parametri, la via più spiccia è di prendere le mosse dalla (30), e di trasformarla, secondo i criterii esposti nel precedente §, a norma delle (22) (corrispondenti ai valori 0 ed 1 dell'indice ν). Alla (30) fa riscontro

$$\Delta\varphi'=\frac{1}{U}\left\{a\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_0}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y_0}\right)^2\right]+b\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y_1}\right)^2\right]-2c\left[\frac{\partial\varphi}{\partial x_0}\,\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}+\frac{\partial\varphi}{\partial y_0}\,\frac{\partial\varphi}{\partial y_1}\right]\right\},$$

la cui trasformazione è immediata in base alle (34) e (35).

Sostituendo addirittura nel $\Delta\varphi$ così trasformato, al posto delle derivate, i simboli p_{ξ_0}, p_{η_0}, p_{ξ_1}, p_{η_1} delle variabili coniugate, si ha la cercata espressione di Θ:

$$(36)\qquad 2\Theta=\frac{1}{4U}\left\{\frac{a}{\varrho_0^2}\,(p_{\xi_0}^2+p_{\eta_0}^2)+\frac{b}{\varrho_1^2}\,(p_{\xi_1}^2+p_{\eta_1}^2)\right.$$
$$\left.-\frac{2c}{\varrho_0^2\varrho_1^2}\,[(\xi_0\xi_1+\eta_0\eta_1)(p_{\xi_0}p_{\xi_1}+p_{\eta_0}p_{\eta_1})-(\xi_0\eta_1-\eta_0\xi_1)(p_{\xi_0}p_{\eta_1}-p_{\eta_0}p_{\xi_1})]\right\}.$$

9. - Regolarità.

Già abbiamo rilevato, alla fine del § 5, che $1/U$ e $1/(\varrho_2^2 U)$ sono olomorfe anche nell'intorno di un generico urto binario.

La (36) mostra che lo stesso avviene di Θ.

Ne consegue che *il sistema canonico di funzione caratteristica*

$$H = \Theta - \frac{E}{U}, \quad [\Theta \text{ essendo data dalla (36)}],$$

nelle quattro coppie di argomenti coniugati

$$\begin{array}{cccc} \xi_0 & \eta_0 & \xi_1 & \eta_1 \\ p_{\xi_0} & p_{\eta_0} & p_{\xi_1} & p_{\eta_1} \end{array}$$

ha comportamento perfettamente regolare dovunque le ξ_0, η_0, ξ_1, η_1 *possono fungere da coordinate lagrangiane*: in particolare per es. (cfr. § 5) nell'intorno di un urto fra P_2 e P_1 ($\varrho_0 = 0$), ovvero fra P_2 e P_0 ($\varrho_1 = 0$). Più generalmente, del resto, si può dire: fatta solo eccezione per $\varrho_2 = 0$ (urti P_0, P_1).

Ben si intende che un tale comportamento ha carattere invariantivo di fronte alle trasformazioni biunivoche e regolari dei quattro parametri lagrangiani. In modo preciso, qualora alle suddette ξ_0, η_0, ξ_1, η_1 si sostituisca una quaderna qualsiasi q_0, q_1, q_2, q_3, legata ad esse da formule di trasformazione biunivoche e regolari in un certo campo, la funzione H, e con essa il sistema canonico trasformato, rimane regolare in quel campo.

È chiaro, d'altra parte, che, come i parametri ξ_0, η_0, ξ_1, η_1 sono legittimi e regolarizzanti dovunque tranne che per $\varrho_2 = 0$, così lo sarebbero i parametri ξ_0, η_0, ξ_2, η_2, colla sola esclusione di $\varrho_1 = 0$ (urti P_0, P_2).

10. - Considerazioni riassuntive.

Ammesso che il momento risultante delle quantità di moto sia diverso da zero, è esclusa — teorema di SUNDMAN (7), conosciuto già da WEIERSTRASS (8) — l'eventualità di una collisione generale.

(7) *Recherches sur le problème des trois corps*, « Acta Societatis Fennicae », vol. XXXIV, 1907, § 12.

(8) Veggasi in proposito, G. MITTAG-LEFFLER, *Zur Biographie von Weierstrass*, « Acta Mathematica », tomo 35, 1911, p. 30.

Così stando le cose, ricordiamo, dal § precedente, che H è regolarizzabile nell'intorno di ogni urto binario, assumendo quali parametri indipendenti ξ_0, η_0, ξ_1, η_1, ovvero ξ_0, η_0, ξ_2, η_2. Combiniamo tale risultato col carattere invariantivo della regolarità (di fronte a cambiamenti qualsivogliano, purchè anch'essi regolari, dei parametri); e appoggiamoci sulla circostanza, già rilevata al § 5, che, rispetto ai vincoli (24), è possibile l'introduzione di parametri lagrangiani più simmetrici delle quaderne $(\xi_0, \eta_0, \xi_1, \eta_1)$, $(\xi_0, \eta_0, \xi_2, \eta_2)$ [nonchè dell'analoga ξ_1, η_1, ξ_2, η_2] ed esenti dalla eccezione che ciascuna di queste presenta, atti quindi a conferire alle risolventi (25) carattere regolare proprio incondizionato (rimanendo nel caso presente fuor di questione l'annullarsi di tutte le ϱ).

Fatta pertanto una scelta concreta di parametri q_0, q_1, q_2, q_3, *aventi il requisito suddetto, il sistema differenziale da cui dipende il problema piano dei tre corpi rimane regolarizzato completamente* (cioè nell'intorno di qualsiasi tratto — *urti binari compresi* — effettivamente raggiungibile durante il corso del moto), *nella forma canonica di cui a* § 6.

In questo sistema: la variabile indipendente è τ, legata al tempo t dalla posizione (14)

$$d\tau = U\,dt\ ;$$

le funzioni incognite sono le q e le p. Le prime, q_0, q_1, q_2, q_3, rappresentano coordinate lagrangiane rispetto ai vincoli (24)

$$\sum_0^2{}_\nu\, \xi_\nu^2 = \sum_0^2{}_\nu\, \eta_\nu^2\,, \qquad \sum_0^2{}_\nu\, \xi_\nu \eta_\nu = 0\,,$$

le ξ_ν, η_ν essendo a lor volta coordinate anticritiche del sistema dei tre corpi, definite, in funzione delle componenti x_ν, y_ν delle tre mutue distanze, dalle posizioni (22)

$$x_\nu + iy_\nu = (\xi_\nu + i\eta_\nu)^2\,.$$

Le coniugate p sono funzioni lineari delle $dq/d\tau$, le quali concettualmente non hanno interesse, una volta riconosciuto il comportamento regolare delle q, e quindi delle loro derivate, in termini di τ.

Per la stessa definizione delle q, le ξ, η ne sono funzioni regolari. Attese le (22), siamo senz'altro condotti a concludere che, come le q, così anche le coordinate relative x_ν, y_ν sono funzioni ovunque regolari (anche nell'eventualità di urti) del parametro τ: si ritrova così (per il problema piano, e con inessenziale diversità di variabile indipendente) il risultato di SUNDMAN.

Dalla relazione $d\tau = U dt$ scende ovviamente, in base alla (23), che τ, nell'intorno di un urto verificantesi all'istante t_1, è sviluppabile per potenze di $(t - t_1)^{\frac{1}{3}}$, ecc.

Riservo ad una prossima comunicazione la introduzione effettiva di convenienti q e la deduzione delle corrispondenti equazioni del moto, sotto una forma simmetrica, in tutto analoga, dal punto di vista analitico, a quella che si presenta nei problemi classici della dinamica dei solidi.

XXXIV.

FORMA MISTA DI EQUAZIONI DEL MOTO CHE CONVIENE AD UNA PARTICOLARE CATEGORIA DI SISTEMI MECCANICI [1].

« Rend. Acc. Lincei », ser. 5ª, vol. $XXIV_2$ (1915_2), pp. 235-248.

Nel dar forma esplicita alla regolarizzazione del problema piano dei tre corpi, secondo il criterio esposto in una Nota precedente [2], ho riconosciuto l'opportunità di ricorrere ad un tipo misto di equazioni del moto, che può essere vantaggiosamente usato anche in altri casi. Questa circostanza e, sopra tutto, il desiderio di rendere più agile la Nota che dedicherò prossimamente alla esplicita regolarizzazione suddetta, mi consigliano di stabilire a parte alcune formule preparatorie e la conseguente deduzione delle equazioni miste. Tutto si riduce, come agevolmente si capisce, a combinazione appropriata dei procedimenti abituali; non priva tuttavia di qualche eleganza, e resa qua e là più spedita da concetti e notazioni di calcolo vettoriale.

1. - Richiamo d'una considerazione cinematica dovuta a Kirchhoff [3].

Sia C un corpo rigido girevole attorno ad un punto O. Si designino con $O\xi\eta\zeta$ gli assi cui viene riferita l'orientazione di C; con Ox_ν $(\nu=1, 2, 3)$ tre assi mobili solidali col corpo (costituenti al solito un triedro trirettangolo congruente ad $O\xi\eta\zeta$); con $\boldsymbol{\omega}$ la velocità angolare (di C rispetto agli assi $O\xi\eta\zeta$).

Sia $\boldsymbol{f}$ un generico vettore *fisso* (rispetto al riferimento $O\xi\eta\zeta$). Al variare del tempo t, varia (in causa del moto di C) l'orientazione del vettore $\boldsymbol{f}$, rispetto agli assi $Ox_1x_2x_3$. Designeremo indifferentemente con $d\boldsymbol{f}/dt$, ov-

---

(1) Pervenuta all'Accademia il 19 agosto 1915.

(2) *Sulla regolarizzazione del problema piano dei tre corpi*, in questo stesso volume dei Rendiconti, pp. 61-75 [in questo vol.: XXXIII, pp. 477-493].

(3) Cfr. *Vorlesungen über mathematische Physik*, B. I, « Mechanik », lezione V, § 3.

vero con $\dot{\boldsymbol{f}}$, la derivata di $\boldsymbol{f}$, presa in tale accezione. Essa dovrebbe chiamarsi *relativa* attribuendo invece la qualifica *assolute* alle derivate prese con referenza agli assi fissi $O\xi\eta\zeta$. *Nei paragrafi seguenti considereremo esclusivamente derivate della prima specie.*

Designando qui, per un momento, con $d^{(a)}/dt$ le derivate assolute, si ha manifestamente

$$\frac{d^{(a)}\boldsymbol{f}}{dt} = 0 .$$

Giova poi rammentare che, per un vettore $\boldsymbol{m}$ comunque variabile, sussiste la relazione generale

$$\frac{d^{(a)}\boldsymbol{m}}{dt} = \frac{d\boldsymbol{m}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{m} .$$

Per $\boldsymbol{m}$ del tipo $\boldsymbol{f}$ (fisso rispetto agli assi $O\xi\eta\zeta$), se ne ricava

$$\frac{d\boldsymbol{f}}{dt} = \boldsymbol{f} \wedge \boldsymbol{\omega} . \tag{2}$$

Ciò premesso, immaginiamo, ad ogni istante t, attribuito a C un arbitrario spostamento infinitesimo, a partire dalla posizione che ad esso compete nel moto considerato. La successione delle posizioni, in tal guisa modificate, dà luogo al così detto moto variato.

Sia $\boldsymbol{\epsilon}$ (vettore) la rotazione elementare atta a realizzare lo spostamento attribuito a C nell'istante t. Un generico vettore $\boldsymbol{f}$ (fisso) subirà in conseguenza, rispetto al triedro mobile $Ox_1x_2x_3$, una variazione $\delta\boldsymbol{f}$ definita da,

$$\delta\boldsymbol{f} = \boldsymbol{f} \wedge \boldsymbol{\epsilon} . \tag{3}$$

Nel passaggio dal moto originario al moto variato, anche la velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$ subirà un certo incremento $\delta\boldsymbol{\omega}$, che si calcola subito in base alla stessa definizione di velocità angolare. Infatti, nel moto originario, la rotazione elementare, con cui C passa, dalla posizione che gli compete nell'istante t alla posizione dell'istante $t+dt$, è espressa da $\boldsymbol{\omega}\,dt$. Nel moto variato, fra le due orientazioni di C relative agli istanti t e $t+dt$, intercede un divario ulteriore di $d\boldsymbol{\epsilon}$: un tale incremento (verificantesi nel tempuscolo dt) va riferito agli assi fissi e si precisa quindi sotto la forma $(d^{(a)}\boldsymbol{\epsilon}/dt)\,dt$. Il suo rapporto a dt fornisce la cercata espressione di $\delta\boldsymbol{\omega}$. Ne consegue, in base alla (1),

$$\delta\boldsymbol{\omega} = \frac{d\boldsymbol{\epsilon}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{\epsilon} . \tag{4}$$

2. - Definizione di una particolare categoria di sistemi olonomi.

Sia S un sistema olonomo a vincoli indipendenti dal tempo, dotato di $n+3$ gradi di libertà, specificati come segue. La configurazione del sistema è univocamente individuata da n parametri lagrangiani q_h $(h = 1, 2, \ldots, n)$, in concorso coll'orientazione di un corpo rigido C liberamente girevole, il che importa tre ulteriori gradi di libertà.

La dipendenza dall'orientazione di C può, se si vuole, pensarsi direttamente realizzata a mezzo di tre parametri (per es., i tre angoli di EULERO), o, indirettamente, pel tramite di elementi geometrici sovrabbondanti, quali coseni direttori o vettori unitarî: ad es., i tre vettori fondamentali $\boldsymbol{u}_\nu$ $(\nu = 1, 2, 3)$ corrispondenti agli assi del triedro $Ox_1x_2x_3$ solidale con C; od anche — ed è questo il criterio cui ci atterremo — pel tramite degli altri tre vettori fondamentali $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\gamma}$, che individuano il triedro fisso $O\xi\eta\zeta$ rispetto al corpo C.

Le componenti α_ν β_ν, γ_ν $(\nu = 1, 2, 3)$ di tali vettori si identificano naturalmente coi nove coseni direttori. Le formule (di POISSON)

$$(2') \qquad \frac{d\boldsymbol{\alpha}}{dt} = \boldsymbol{\alpha} \wedge \boldsymbol{\omega}\,, \qquad \frac{d\boldsymbol{\beta}}{dt} = \boldsymbol{\beta} \wedge \boldsymbol{\omega}\,, \qquad \frac{d\boldsymbol{\gamma}}{dt} = \boldsymbol{\gamma} \wedge \boldsymbol{\omega}\,,$$

appariscono in conformità casi particolari della (2), e assicurano che le velocità dei punti del sistema S possono in definitiva risguardarsi quali funzioni lineari ed omogenee delle derivate $\dot{q}$ dei parametri q, e del vettore $\boldsymbol{\omega}$, o, se si vuole, delle sue tre componenti ω_ν secondo gli assi $Ox_1x_2x_3$.

La forza viva T di S si presenta, così, quale forma quadratica degli $n+3$ argomenti $\dot{q}_h$, ω_ν, i coefficienti potendo dipendere (in modo qualunque) dalle q_h e dall'orietazione di C: diciamo dalle q_h e dai vettori $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\gamma}$.

Nell'ipotesi che il sistema S sia sollecitato da forze conservative, la relativa funzione delle forze U potrà egualmente risguardarsi dipendente dalle q_h e da $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\gamma}$.

La funzione lagrangiana

$$L = T + U$$

sarà così funzione di tali argomenti e delle $n+3$ caratteristiche cinetiche $\dot{q}_h$, ω_ν, che compariscono quadraticamente in T.

3. - Spostamenti virtuali. Moto variato. Ipotesi complementare sulla dipendenza di L dall'orientazione di C. Espressione del δL.

Uno spostamento virtuale di S, ad un generico istante t, può ritenersi individuato dagli incrementi δq_h dei parametri q_h, in concorso (cfr. § 1) con una rotazione elementare $\boldsymbol{\epsilon}$, questa e quelli affatto arbitrarî.

Subordinatamente avremo, a norma della (3),

$$(3') \qquad \delta\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}\wedge\boldsymbol{\epsilon}\,, \qquad \delta\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta}\wedge\boldsymbol{\epsilon}\,, \qquad \delta\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\gamma}\wedge\boldsymbol{\epsilon}\,,$$

e $\delta\boldsymbol{\omega}$ definito dalla (4).

È inoltre chiaro che δL sarà necessariamente funzione lineare ed omogenea delle δq_h, $\delta\dot{q}_h$ e dei due vettori $\boldsymbol{\epsilon}$, $\delta\boldsymbol{\omega}$, o, se si vuole, delle loro componenti ε_ν, $\delta\omega_\nu$ secondo gli assi $Ox_1x_2x_3$.

Dacchè δq_h, $\delta\dot{q}_h$, $\delta\omega_\nu$ sono variazioni di quantità q_h, $\dot{q}_h$, ω_ν, che effettivamente appariscono in L, i relativi coefficienti in δL coincidono colle derivate parziali $\partial L/\partial q_h$, $\partial L/\partial\dot{q}_h$, $\partial L/\partial\omega_\nu$; mentre i coefficienti e_ν delle ε_ν non sono direttamente esprimibili quali derivate di L, ma si desumono dall'incremento parziale che L subisce facendo variare l'orientazione C, ossia attribuendo gli incrementi (3′) ai vettori $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\gamma}$. Avremo, comunque,

$$\delta L = \sum_1^n{}_h\left(\frac{\partial L}{\partial q_h}\,\delta q_h + \frac{\partial L}{\partial\dot{q}_h}\,\delta\dot{q}_h\right) + \sum_1^3{}_\nu\left(\frac{\partial L}{\partial\omega_\nu}\,\delta\omega_\nu + e_\nu\varepsilon_\nu\right).$$

Per lo scopo che abbiamo in vista, giova fissare l'attenzione sul caso in cui L dipende dall'orientazione di C pel tramite d'uno solo dei tre vettori $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\gamma}$. *In conformità, ammetteremo da ora innanzi che L dipenda esclusivamente da* $\boldsymbol{\gamma}$.

In tale ipotesi la variazione parziale

$$\partial L = \sum_1^3{}_\nu\, e_\nu\varepsilon_\nu\,,$$

dovuta alla rotazione elementare $\boldsymbol{\epsilon}$, si riduce manifestamente a

$$\partial L = \sum_1^3{}_\nu\,\frac{\partial L}{\partial\gamma_\nu}\,\partial\gamma_\nu\ (^4)\,,$$

le $\delta\gamma_\nu$ essendo definite dalle (3′).

---

(4) Va notato che, dall'essere ben determinata la dipendenza di L dal vettore $\boldsymbol{\gamma}$, non risulta

Introducendo il vettore $\mathbf{\Gamma}$, che ha per componenti

$$\Gamma_\nu = \frac{\partial L}{\partial \gamma_\nu}, \qquad (\nu = 1, 2, 3), \tag{5}$$

rispetto agli assi $Ox_1x_2x_3$, si può scrivere

$$\partial L = \mathbf{\Gamma} \times \delta\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{\Gamma} \times (\boldsymbol{\gamma} \wedge \boldsymbol{\epsilon}) = \boldsymbol{\epsilon} \times (\mathbf{\Gamma} \wedge \boldsymbol{\gamma}) .$$

Le e_ν del caso generale si identificano pertanto, nell'adottata ipotesi, colle componenti del prodotto vettoriale

$$\mathbf{\Gamma} \wedge \boldsymbol{\gamma} \quad [5].$$

Introducendo un secondo vettore $\mathbf{\Omega}$, definito dalle componenti

$$\Omega_\nu = \frac{\partial L}{\partial \omega_\nu} = \frac{\partial T}{\partial \omega_\nu}, \qquad (\nu = 1, 2, 3), \tag{6}$$

si attribuisce alla variazione totale δL della funzione lagrangiana l'espressione

$$\delta L = \sum_1^n{}_h \left(\frac{\partial L}{\partial q_h}\,\delta q_h + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h}\,\delta \dot{q}_h\right) + \mathbf{\Omega} \times \boldsymbol{\delta\omega} + (\mathbf{\Gamma} \wedge \boldsymbol{\gamma}) \times \boldsymbol{\epsilon} .$$

Avuto riguardo alla (4), ove si ponga

$$\mathfrak{M} = \mathbf{\Omega} \wedge \boldsymbol{\omega} + \mathbf{\Gamma} \wedge \boldsymbol{\gamma} , \tag{7}$$

---

egualmente determinata l'espressione analitica di L in termini di $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$, e ciò in causa dell'identità $\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1$, la quale consente di attribuire all'espressione analitica suddetta infiniti aspetti formalmente distinti. Ciò non pertanto si arriva poi sempre, come è naturale, allo stesso valore di ∂L. Infatti due diverse espressioni L' ed L'' possono differire soltanto pel fatto che l'unità vi è talora sostituita dal trinomio $u = \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2$. Siccome $\partial u = 0$ [per la terza delle (3')], così la differenza

$$\left(\frac{\partial L'}{\partial u} - \frac{\partial L''}{\partial u}\right)\partial u ,$$

è pur nulla, c. d. d.

[5] L'osservazione (testè fatta in nota) circa l'indeterminazione dell'espressione formale di L si riverbera nel fatto che il vettore $\mathbf{\Gamma}$, avente per componenti le (5), dipende esso stesso dalla forma che si attribuisce alla L. Però l'indeterminazione si riduce (nelle componenti) a termini addizionali della forma $(\partial L/\partial u)(\partial u/\partial \gamma_\nu) = 2(\partial L/\partial u)\gamma_\nu$, ossia, vettorialmente, ad un vettore parallelo a $\boldsymbol{\gamma}$. Nel prodotto vettoriale $\mathbf{\Gamma} \wedge \boldsymbol{\gamma}$, questo non reca contributo alcuno. È quindi indifferente, nei riguardi del δL, l'espressione di L, in base a cui viene introdotto il vettore $\mathbf{\Gamma}$.

si è condotti alla forma tipica

$$(8)\qquad \delta L = \sum_1^n{}_h \left(\frac{\partial L}{\partial q_h}\,\delta q_h + \frac{\partial L}{\partial \dot q_h}\,\delta \dot q_h\right) + \mathfrak{M}\times\boldsymbol{\epsilon} + \boldsymbol{\Omega}\times\dot{\boldsymbol{\epsilon}}\,,$$

in cui sono messi in evidenza i coefficienti delle singole caratteristiche δq_h, $\boldsymbol{\epsilon}$ e loro derivate $\delta\dot q_h$, $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}$.

4. - Equazioni del moto in forma euleriano-lagrangiana.

La materiale applicazione alla (8) della regola formale, in cui si traduce il principio di Hamilton (6), dà luogo alle seguenti equazioni del moto:

$$(9)\qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_h} - \frac{\partial L}{\partial q_h} = 0\,, \qquad (h = 1, 2, \ldots, n),$$

$$(10)\qquad \frac{d}{dt}\boldsymbol{\Omega} = \mathfrak{M}\,,$$

la derivata vettoriale dovendo essere presa — ben si intende — nella stessa accezione sotto cui si presenta quella di $\boldsymbol{\epsilon}$, cioè (§ 1) con referenza agli assi $Ox_1x_2x_3$.

La (10) equivale perciò alle

$$\frac{d\Omega_\nu}{dt} = \mathcal{M}_\nu\,. \qquad (\nu = 1, 2, 3).$$

Si possono ulteriormente esplicitare le $\mathcal{M}_\nu$ in base alla (7). Ove si convenga di risguardare coincidenti due valori dell'indice ν congrui rispetto al modulo 3, si ha tosto

$$\mathcal{M}_\nu = (\Omega_{\nu+1}\omega_{\nu+2} - \Omega_{\nu+2}\omega_{\nu+1}) + (\Gamma_{\nu+1}\gamma_{\nu+2} - \Gamma_{\nu+2}\gamma_{\nu+1}) \qquad (\nu = 1, 2, 3).$$

È appena necessario aggiungere che il sistema (9), (10) va completato colla terza delle formule di Poisson [terza delle (2')], cioè

$$(11)\qquad \frac{d\boldsymbol{\gamma}}{dt} = \boldsymbol{\gamma}\wedge\boldsymbol{\omega}\,,$$

(6) Cfr. per es. Kirchhoff, loc. cit., lezione III, § 3.

rimanendo, così, complessivamente definite le derivate seconde delle q_h e prime delle ω_ν, γ_ν in funzione delle q_h, $\dot{q}_h$, ω_ν, γ_ν.

5. - Esempio.

Un'illustrazione ovvia di quanto precede è offerta da un solido pesante, liberamente girevole attorno ad un suo punto O, il quale punto si suppone costretto a percorrere una retta verticale (mediante vincolo privo d'attrito).

Si ha un sistema materiale S con quattro gradi di libertà, la cui posizione può pensarsi individuata dalla quota verticale q di O rispetto ad un sistema di assi fissi $\Omega\xi\eta\zeta$, con $\Omega\zeta$ verticale verso il basso, nonchè dall'orientazione (rispetto agli assi suddetti) di una terna solidale $Ox_1x_2x_3$, che riterremo costituita dagli assi principali d'inerzia relativi al punto O.

Essendo γ_1, γ_2, γ_3 i coseni direttori della verticale rispetto agli assi mobili, le componenti della velocità di O secondo tali assi valgono ordinatamente $\dot{q}\gamma_1$, $\dot{q}\gamma_2$, $\dot{q}\gamma_3$.

Il corpo ipotetico C, considerato precedentemente, è senz'altro identificabile collo stesso solido S: ci troviamo quindi nelle condizioni indicate al § 2.

Dalla ben nota espressione generale della forza viva di un solido in funzione delle sei caratteristiche (notando che, nel caso presente, ove si assuma O come centro di riduzione, esse sono $\dot{q}\gamma_1$, $\dot{q}\gamma_2$, $\dot{q}\gamma_3$, ω_1, ω_2, ω_3), si ha tosto

$$T = \tfrac{1}{2}m\dot{q}^2 + \tfrac{1}{2}\sum_{1}^{3}{}_\nu A_\nu\omega_\nu^2 + M\dot{q}\Delta\,,$$

dove M è la massa del solido, A_ν il suo momento d'inerzia attorno all'asse Ox_ν, e

$$\Delta = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \end{vmatrix}\,,$$

c_1, c_2, c_3 designando le coordinate del baricentro G rispetto agli assi solidali.

Rappresenteremo con $\boldsymbol{d}$ il vettore $G - O$ di componenti c_1, c_2, c_3. La quota verticale di G vale manifestamente

$$q + \sum_{1}^{3}{}_\nu c_\nu\gamma_\nu\;;$$

perciò, detto P il peso del corpo, la funzione delle forze rimane espressa da

$$U = P(q + \sum_1^3 {}_\nu\, c_\nu \gamma_\nu) .$$

Ne consegue

$$L = T + U = \frac{1}{2} M \dot{q}^2 + \frac{1}{2} \sum_1^3 {}_\nu\, A_\nu \omega_\nu^2 + M\dot{q}\Delta + P\left(q + \sum_1^3 {}_\nu\, c_\nu \gamma_\nu\right) .$$

Come si vede, L dipende da q, $\dot{q}$, ω_ν, γ_ν $(\nu = 1, 2, 3)$, oltre che dalle costanti M, A_ν, c_ν, P: si trova quindi soddisfatta l'ipotesi complementare del § 3.

Le (5) dànno

$$\Gamma_\nu = Pc_\nu + M\dot{q}\frac{\partial \Delta}{\partial \gamma_\nu} = Pc_\nu + M\dot{q}(\omega_{\nu+1} c_{\nu+2} - \omega_{\nu+2} c_{\nu+1}) ,$$

donde apparisce che il vettore $\mathbf{\Gamma}$ non è altro che

$$\boldsymbol{P d} + \boldsymbol{M \dot{q} \omega} \wedge \boldsymbol{d} .$$

Siccome $\boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{d}$ rappresenta la velocità relativa $\boldsymbol{w}$ del baricentro G rispetto ad un sistema di assi paralleli agli assi fissi coll'origine in O, si può anche scrivere, più semplicemente,

$$\mathbf{\Gamma} = \boldsymbol{P d} + \boldsymbol{M \dot{q} w} .$$

Si sa, dalla teoria dei sistemi rigidi, che le derivate parziali della forza viva rapporto alle caratteristiche ω_ν coincidono colle componenti del momento delle quantità di moto rispetto al centro di riduzione: il punto O, nel caso nostro. Perciò il vettore $\mathbf{\Omega}$, definito dalle (6), si identifica qui col momento risultante delle quantità di moto del sistema rispetto ad O.

Posto, per brevità,

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{M \dot{q} w} \wedge \boldsymbol{\gamma} ,$$

la (7) diviene

$$\mathfrak{M} = \mathbf{\Omega} \wedge \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{d} \wedge \boldsymbol{P\gamma} + \boldsymbol{M} .$$

Il secondo addendo è manifestamente il momento del peso $\boldsymbol{P\gamma}$, applicato in G, rispetto al punto O. Basta quindi scrivere la (10) sotto la forma

$$\frac{d\mathbf{\Omega}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{\Omega} = \boldsymbol{d} \wedge \boldsymbol{P\gamma} + \boldsymbol{M} , \tag{10'}$$

per riconoscervi compendiate le equazioni di EULERO (che varrebbero se O fosse fisso) col termine addizionale $\boldsymbol{M}$: in esso si rispecchia l'influenza della mobilità di O sul moto di rotazione del corpo.

Le equazioni di tipo lagrangiano [(9) dello schema generale] si riducono presentemente ad una sola: ed è

$$M \frac{d}{dt}(\dot{q} + \Delta) - P = 0 .$$

Scrivendola

$$\ddot{q} = \frac{P}{M} - \frac{d\Delta}{dt}, \tag{9'}$$

ravvisiamo nel termine $-d\Delta/dt$ l'accelerazione perturbatrice (rispetto a quella normale della gravità $P/M = g$), che si riscontra nella caduta di O, per effetto della rotazione del solido. Mediante le (10') e (11), si possono eliminare da $d\Delta/dt$ le derivate delle ω_ν, γ_ν, rimanendo così caratterizzata la perturbazione mediante lo stato di moto del sistema.

6. - Osservazione d'indole generale concernente la interpretabilità di qualche componente di Ω come momento delle quantità di moto di S.

Nel § 1 abbiamo supposto, astrattamente, che la posizione del sistema materiale S dipenda, in modo univoco, da certi parametri q e dalla orientazione di un corpo (fittizio) C, senza però fare alcuna ulteriore ipotesi sulle modalità di quest'ultima corrispondenza.

Può in particolare accadere che la corrispondenza fra la posizione di S (per valori generici attribuiti alle q) e l'orientazione di C abbia qualche aspetto prossimo all'identità: sia tale, per es., che ad una rotazione elementare di C attorno ad un asse determinato — diciamo Ox_3 per fissare le idee — corrisponda una identica rotazione d'insieme del sistema S.

In tal caso, ove si consideri il passaggio del sistema S dalla posizione che gli compete nell'istante t a quella che va ad occupare nell'istante $t + dt$, è chiaro che la velocità $\boldsymbol{v}$ di un generico punto P del sistema si può scindere in due addendi, uno dei quali è il contributo che si avrebbe qualora C ruotasse esclusivamente attorno all'asse Ox_3, rimanendo inalterate le q, mentre il secondo, $\boldsymbol{v}^*$, è dovuto a variazione delle q e rotazione attorno ad un asse perpendicolare ad Ox_3.

Il primo addendo, detto $\boldsymbol{u}_3$ il vettore unitario corrispondente all'asse Ox_3, vale

$$\omega_3 \boldsymbol{u}_3 \wedge (P - O) .$$

Si ha, in conformità,

$$\boldsymbol{v} = \omega_3 \boldsymbol{u}_3 \wedge (P - O) + \boldsymbol{v}^* ,$$

dove — ed è questa la circostanza essenziale — $\boldsymbol{v}^*$ non dipende da ω_3, ma soltanto dalle altre due componenti ω_1, ω_2 di $\boldsymbol{\omega}$ (oltre che dalle $\dot{q}$ e dalla posizione del sistema).

Ne consegue

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial \omega_3} = \boldsymbol{u}_3 \wedge (P - O) .$$

Ciò posto, ove sia m la massa dell'elemento circostante a P, si ha, per definizione,

$$T = \tfrac{1}{2} \sum m\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{v} ,$$

il sommatorio intendendosi esteso a tutti gli elementi materiali del sistema.

Deriviamo T rapporto ad ω_3, ricordando da un lato la (6) e dall'altro l'espressione testè ricavata per $\partial \boldsymbol{v}/\partial \omega_3$. Si ha tosto

$$\Omega_3 = \sum [m\boldsymbol{v} \times \{\boldsymbol{u}_3 \wedge (P - O)\}] = \boldsymbol{u}_3 \times \sum [(P - O) \wedge m\boldsymbol{v}] .$$

Il coefficiente di $\boldsymbol{u}_3$ nel prodotto scalare testè scritto si presenta come il momento risultante $\boldsymbol{K}$ delle quantità di moto del sistema S rispetto al punto O. Si ha quindi

$$\Omega_3 = K_3 ,$$

rappresentandosi ovviamente con K_ν $(\nu = 1, 2, 3)$ le componenti del vettore $\boldsymbol{K}$ secondo gli assi $Ox_1x_2x_3$.

Di qua il teorema: Ogniqualvolta una rotazione elementare dell'ipotetico corpo rigido C, attorno ad un asse qualsiasi passante per O, corrisponde ad una identica rotazione d'insieme del sistema S, la componente del vettore $\boldsymbol{\Omega}$ rispetto all'asse di rotazione coincide col momento risultante, rispetto allo stesso asse, delle quantità di moto di S.

In quest'enunciato è detto *asse qualsiasi passante per O*, mentre la dimostrazione formale testè esposta contempla l'asse coordinato Ox_3 (solidale con C). È chiaro tuttavia:

1) che, se si tratta di un altro asse qualsiasi, supposto pure solidale col corpo, basta assumerlo (come è certo lecito, non essendosi fatta alcuna speciale ipotesi sulla terna $Ox_1x_2x_3$) quale asse Ox_3 per accertare che la conclusione sussiste;

2) che, se anche l'asse in questione è concepito variabile col tempo rispetto a C (per es. fisso rispetto agli assi $O\xi\eta\zeta$), basta aver riguardo alla posizione da esso occupata nel corpo nell'istante generico che si considera. Infatti la precedente dimostrazione fa intervenire *soltanto* la distribuzione delle velocità ad un dato istante: è quindi inessenziale l'ipotesi che sia solidale con C l'asse attorno a cui C ed S ammettono rotazioni elementari identiche, c. d. d.

Va da sè che se, per tre direzioni indipendenti, vale l'eguaglianza delle componenti di $\mathbf{\Omega}$ e di K, si ha addirittura

$$\mathbf{\Omega} = \mathbf{K} :$$

tale è il caso dell'esempio riferito al § 5.

7. - Modificazione della funzione lagrangiana.

L'ipotesi, introdotta fin dal principio, che il sistema S possegga $n+3$ gradi di libertà, implica che la forma quadratica T negli $n+3$ argomenti $\dot{q}_h$, ω_ν sia irriducibile.

Ne viene che le $n+3$ derivate parziali $\partial T/\partial \dot{q}_h$, $\partial T/\partial \omega_\nu$, considerate quali funzioni lineari ed omogenee nelle $\dot{q}_h$, ω_ν, riescono indipendenti. Perciò le equazioni

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h} = p_h , \qquad (h = 1, 2, ..., n), \tag{12}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \omega_\nu} = \Omega_\nu , \qquad (\nu = 1, 2, 3), \tag{6}$$

sono complessivamente atte a definire le $n+3$ quantità $\dot{q}_h$, ω_ν in funzione lineare dei secondi membri p_h, Ω_ν, i coefficienti dipendendo in modo qualunque dalla configurazione del sistema, ossia (§ 3) dalle q_h e dalle γ_ν.

Poniamo (con ovvia estensione del procedimento di HAMILTON)

$$H = \sum_1^n{}_h\, p_h\dot{q}_h + \sum_1^3{}_\nu\, \Omega_\nu\omega_\nu - L , \tag{13}$$

ciò che, in base alle (12) e (6) (per essere T omogenea di secondo grado negli argomenti $\dot{q}_h$, ω_ν, ed $L = T + U$), equivale a

$$H = T - U . \tag{13'}$$

Risguardiamo tale H quale funzione degli argomenti p_h, Ω_ν, q_h, γ_ν, immaginandovi sostituite le $\dot{q}_h$, ω_ν, che figurano nella formula di definizione, mediante le loro espressioni desunte dalle (12), (6).

Avremo da un lato

$$\delta H = \sum_1^n{}_h \left(\frac{\partial H}{\partial p_h}\,\delta p_h + \frac{\partial H}{\partial q_h}\,\delta q_h\right) + \sum_1^3{}_\nu \left(\frac{\partial H}{\partial \Omega_\nu}\,\delta\Omega_\nu + \frac{\partial H}{\partial \gamma_\nu}\,\delta\gamma_\nu\right).$$

D'altro lato la materiale differenziazione della (13), tenute sempre presenti le (12) e (6) [sotto la forma $p_h = \partial L/\partial \dot{q}_h$, $\Omega_\nu = \partial L/\partial \omega_\nu$], dà

$$\delta H = \sum_1^n{}_h \left(\dot{q}_h \delta p_h - \frac{\partial L}{\partial q_h}\,\delta q_h\right) + \sum_1^3{}_\nu \left(\omega_\nu \delta\Omega_\nu - \frac{\partial L}{\partial \gamma_\nu}\,\delta\gamma_\nu\right).$$

Il confronto delle due espressioni di δH, dacchè gli incrementi δp_h, δq_h, $\delta\Omega_\nu$, $\delta\gamma_\nu$ si possono assumere ad arbitrio (⁷), fornisce le relazioni

$$(14)\qquad \dot{q}_h = \frac{\partial H}{\partial p_h},$$

$$(15)\qquad \frac{\partial L}{\partial q_h} = -\frac{\partial H}{\partial q_h}, \qquad (h = 1, 2, \ldots, n);$$

$$(16)\qquad \omega_\nu = \frac{\partial H}{\partial \Omega_\nu},$$

$$(17)\qquad \frac{\partial L}{\partial \gamma_\nu} = -\frac{\partial H}{\partial \gamma_\nu}, \qquad (\nu = 1, 2, 3),$$

che possono naturalmente considerarsi come altrettante identità, in virtù delle (12) e (6). Più particolarmente le (14) e (16) si identificano colle risolventi delle stesse (12) e (6) rapporto alle $\dot{q}_h$, ω_ν; le (15) e (17) esprimono (in modo comprensivo, a mezzo della funzione H) il risultato della sostituzione delle $\dot{q}_h$, ω_ν tratte dalle (12) e (6) in $\partial L/\partial q_h$, $\partial L/\partial \gamma_\nu$.

8. - Forma canonico-euleriana delle equazioni del moto.

La funzione hamiltoniana H, costruita nel modo ora detto, basta da sola a dedurre le equazioni del moto di S sotto l'aspetto di sistema di

---

(⁷) A dir vero, le γ_ν designano coseni direttori e sono quindi legate dalla relazione $\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1$. Nulla vieta però di risguardare *provvisoriamente*, nella definizione (13) di H e nelle (6) e (12), le tre γ come indipendenti, e con ciò i loro incrementi come arbitrarî. Le (14), (15), (16) e (17) risultano, così, necessarie conseguenze delle (6) e (12), qualunque siano le γ (nonchè le q, p, Ω): in particolare, quindi, se si torna ad attribuire alle γ il loro effettivo significato di coseni direttori.

prim'ordine nei $2n+6$ argomenti

$$p_h, \quad q_h, \quad \Omega_\nu, \quad \gamma_\nu,$$

esprimendo altresì le Γ_ν, ω_ν quali combinazioni in termini finiti degli argomenti indicati.

Lo si constata ovviamente, trasformando le (9) e (10) mercè le (14), ..., (17).

Anzi tutto la definizione (5) delle Γ_ν, in virtù delle (17), si scrive

$$(18) \qquad \Gamma_\nu = -\frac{\partial H}{\partial \gamma_\nu}. \qquad (\nu = 1, 2, 3).$$

Si intende, poi, che tali Γ_ν e le Ω_ν si ritengono ancora compendiate nei due vettori $\mathbf{\Gamma}$ ed $\mathbf{\Omega}$; mentre le

$$(16) \qquad \omega_\nu = \frac{\partial H}{\partial \Omega_\nu}, \qquad (\nu = 1, 2, 3),$$

individuano il vettore $\boldsymbol{\omega}$. Con ciò seguita a valere la definizione (7) di $\mathfrak{M}$,

$$(7) \qquad \mathfrak{M} = \mathbf{\Omega} \wedge \boldsymbol{\omega} + \mathbf{\Gamma} \wedge \boldsymbol{\gamma},$$

e il gruppo (euleriano)

$$(10) \qquad \frac{d}{dt}\mathbf{\Omega} = \mathfrak{M},$$

non richiede ulteriore modificazione formale.

Il gruppo (lagrangiano) (9) diviene invece, attese le (15) e la definizione (12) delle p_h (che equivale a $p_h = \partial L/\partial \dot{q}_h$),

$$(19) \qquad \frac{dp_h}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_h}, \qquad (h = 1, 2, ..., n),$$

cui vanno associate le

$$(14) \qquad \frac{dq_h}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_h}, \qquad (h = 1, 2, ..., n),$$

e la formula (vettoriale) di POISSON

$$(11) \qquad \frac{d\boldsymbol{\gamma}}{dt} = \boldsymbol{\gamma} \wedge \boldsymbol{\omega}.$$

Complessivamente, il sistema

$$(\mathrm{I})\quad\begin{cases}(\mathrm{I}_a) & \dfrac{dp_h}{dt}=-\dfrac{\partial H}{\partial q_h}, \quad \dfrac{dq_h}{dt}=\dfrac{\partial H}{\partial p_h}, \quad (h=1,2,\dots,n),\\[2mm] (\mathrm{I}_b) & \dfrac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt}=\mathfrak{M},\\[2mm] (\mathrm{I}_c) & \dfrac{d\boldsymbol{\gamma}}{dt}=\boldsymbol{\gamma}\wedge\boldsymbol{\omega},\end{cases}$$

costituito, come si vede, dalle (19), (14), (10) ed (11), definisce le derivate dei $2n+6$ argomenti p_h, q_h, Ω_ν, γ_ν in funzione degli argomenti stessi. Le (18), (16) e (7) assicurano che i secondi membri si esprimono esclusivamente per mezzo della H.

9. - Integrali di tipo generale posseduti dal sistema (I).

La (I_c) implica $\boldsymbol{\gamma}\times\boldsymbol{\gamma}=\gamma_1^2+\gamma_2^2+\gamma_3^2=\text{cost.}$, il che è già sottointeso (colla specificazione che la costante abbia il valore 1) nell'interpretazione delle γ_ν quali coseni direttori. A prescindere da questa identità geometrica, due sono gli integrali effettivi ammessi in ogni caso dal sistema (I): l'integrale delle forze vive che, a norma della (13'), assume la forma:

$$H=\text{cost.}\,; \tag{20}$$

e l'integrale

$$\Omega\times\boldsymbol{\gamma}=\text{cost}\,. \tag{21}$$

Il primo membro è la componente Ω_ζ di $\boldsymbol{\Omega}$ secondo l'asse fisso $O\zeta$. Ogniqualvolta sono applicabili le considerazioni del § 6, si tratta del corrispondente integrale del momento delle quantità di moto (o delle aree).

Ecco la verificazione diretta dell'esistenza dei due integrali. Si ha in primo luogo

$$\frac{dH}{dt}=\sum_1^n{}_\nu\left(\frac{\partial H}{\partial p_h}\frac{dp_h}{dt}+\frac{\partial H}{\partial q_h}\frac{dq_h}{dt}\right)+\sum_1^3{}_\nu\left(\frac{\partial H}{\partial\Omega_\nu}\frac{d\Omega_\nu}{dt}+\frac{\partial H}{\partial\gamma_\nu}\frac{d\gamma_\nu}{dt}\right).$$

Il primo sommatorio è nullo, in conseguenza delle (I_a); il secondo, attese le (16) e (18), si scrive

$$\sum_1^3{}_\nu \left(\omega_\nu \frac{d\Omega_\nu}{dt} - \Gamma_\nu \frac{d\gamma_\nu}{dt}\right) = \frac{d\mathbf{\Omega}}{dt} \times \omega - \frac{d\boldsymbol{\gamma}}{dt} \times \mathbf{\Gamma} .$$

Sostituendo per $d\mathbf{\Omega}/dt$ e $d\boldsymbol{\gamma}/dt$ le loro espressioni (I_b), (I_c), risulta

$$\frac{dH}{dt} = \mathfrak{M} \times \boldsymbol{\omega} - (\boldsymbol{\gamma} \wedge \boldsymbol{\omega}) \times \mathbf{\Gamma} .$$

Il secondo membro è identicamente nullo, in virtù della (7); e quindi $dH/dt = 0$.

Quanto al prodotto scalare $\mathbf{\Omega} \times \boldsymbol{\gamma}$, la sua derivata è

$$\frac{d\mathbf{\Omega}}{dt} \times \boldsymbol{\gamma} + \mathbf{\Omega} \times \frac{d\boldsymbol{\gamma}}{dt} ,$$

ossia, per le (I_b) e (I_c),

$$\mathfrak{M} \times \boldsymbol{\gamma} + \mathbf{\Omega} \times (\boldsymbol{\gamma} \wedge \boldsymbol{\omega}) ,$$

che va pure a zero in forza della (7), c. d. d.

XXXV.

SUL PROBLEMA PIANO DEI TRE CORPI.

NOTA I (1).

CARATTERISTICHE CINETICHE DEL SISTEMA REGOLARIZZANTE; FORZA VIVA E QUADRICA RECIPROCA.

« Rend. Acc. Lincei », ser. 5ª, vol. $XXIV_2$ (1915_2), pp. 422-433.

In una Nota recente (2) ho fatto subire al problema piano dei tre corpi una trasformazione dinamica, mostrando, in base ad essa, la *possibilità* di una regolarizzazione completa (per tutto il corso del moto, anche se eventualmente intervengono urti) mediante scelta opportuna di coordinate lagrangiane.

Mi accingo ora a tradurre in atto l'accennata possibilità. Col permesso dell'Accademia, dedicherò alla questione tre Note: la presente, e due altre che immediatamente seguiranno.

Premesso uno studio sulla struttura cinematica del sistema trasformato e rilevato che esso rientra in una categoria di sistemi olonomi cui si applicano utilmente le equazioni miste canonico-euleriane (3), deduco nella prima Nota una forma reciproca della forza viva, che domina tutto lo svolgimento ulteriore. Il calcolo all'uopo necessario è condotto in modo da poter seguire senza sforzo i passaggi successivi, evitando la materiale risoluzione di equazioni lineari, che sarebbe richiesta dalla teoria generale.

Nella seconda Nota si esplicitano le equazioni regolarizzate: dapprima sotto la forma mista, testè ricordata; poi anche sotto forma canonica

---

(1) Pervenuta all'Accademia il 30 settembre 1915.

(2) *Sulla regolarizzazione del problema piano dei tre corpi*, in questo stesso volume dei Rendiconti, pp. 61-75 [in questo stesso vol. delle « Opere »: XXXIII, pp. 477-493]. Tale Nota richiamerò qui appresso colla citazione abbreviata R).

(3) *Forma mista di equazioni del moto, che conviene ad una particolare categoria di sistemi meccanici*, ibidem, pp. 235-248 [in questo stesso vol. delle « Opere »: XXXIV, pp. 495-509]. Abbrevierò anche la citazione di quest'ultima Nota, designandola semplicemente con M).

pura, e ciò con referenza a tre diverse quaderne di coordinate lagrangiane. Ciascuna determina in modo geometricamente espressivo la configurazione dei tre corpi, ed ha una specifica ragion d'essere. La prima quaderna si presenta più ovvia per immediata analogia coi procedimenti classicamente in uso nella dinamica dei solidi; la seconda risponde in modo spontaneo al bisogno di simmetria, la quale simmetria — sia detto per incidenza — non è invece raggiungibile nel caso dei solidi, senza pregiudizio della agilità (si pensi ai parametri di RODRIGUES); infine la terza quaderna, che chiamo *asteroidica*, appare indicata allorchè, nell'impostazione astronomica o meccanica del problema, uno dei tre corpi si trova, per qualche motivo, distinto dagli altri due, i quali seguitano a comportarsi in modo simmetrico.

Un caso limite assai importante è offerto dal problema ristretto. Mi è parso perciò non inutile di occuparmene *ex professo* nella terza Nota. Essa si inizia richiamandone la trattazione abituale e sviluppando (sotto veste canonica) una trasformazione in coordinate ellittiche, già sfruttata dal THIELE a scopo pratico (per la valutazione numerica di certe soluzioni periodiche). Riprendendo poi le equazioni regolarizzate del problema piano in coordinate ellittiche, vi si pone (colle debite cautele) una delle masse eguali allo zero, si rileva la scindibilità del sistema differenziale in due e la conseguente riduzione a due gradi di libertà, e si istituiscono infine raffronti di controllo per assodare la coincidenza delle formule, che così si ottengono, con quelle ricavate per via diretta.

La ricerca è, come si vede, quasi interamente formale; ma non va dimenticato che, in simili questioni, i progressi formali sono stati spesso fecondi.

1. - Vincoli e funzione lagrangiana del problema trasfomato.

Ho dimostrato in R) che le equazioni differenziali, da cui dipende il problema piano dei tre corpi, equivalgono (a meno di un cambiamento di variabile indipendente) alle equazioni del moto di un altro sistema olonomo S definito come segue:

Da parametri determinativi della posizione di S fungono sei quantità

$$\xi_\nu \quad , \quad \eta_\nu \qquad\qquad (\nu = 1, 0, 2)$$

legate dalle due equazioni vincolari

$$(1) \qquad \sum_0^2{}_\nu\, \xi_\nu^2 = \sum_0^2{}_\nu\, \eta_\nu^2 \quad , \quad \sum_0^2{}_\nu\, \xi_\nu \eta_\nu = 0\,.$$

Il significato di tali parametri è riportato all'originario problema piano dei tre corpi mediante le relazioni

$$x_\nu + iy_\nu = (\xi_\nu + i\eta_\nu)^2 \qquad (i = \sqrt{-1};\ \nu = 0, 1, 2),$$

in cui x_ν, y_ν rappresentano le proiezioni dei lati del triangolo dei tre corpi $P_0P_1P_2$ sopra un sistema di assi di direzione invariabile; in modo preciso, x_ν, y_ν sono le componenti del vettore $P_{\nu+2} - P_{\nu+1}$, coll'intesa evidente di risguardare identici gli indici congrui rispetto al modulo 3.

Forza viva. Designando con apici le derivazioni rispetto alla variabile indipendente τ, si ha, quale espressione della forza viva,

$$T = 2U \sum_\nu m_\nu^* (\xi_\nu'^2 + \eta_\nu'^2)\,, \tag{2}$$

dove, posto

$$\varrho_\nu^2 = \xi_\nu^2 + \eta_\nu^2 = \sqrt{x_\nu^2 + y_\nu^2} = \overline{P_{\nu+1}P_{\nu+2}}\,, \tag{3}$$

le costanti m_ν^* sono definite, in termini delle masse m_ν dei tre corpi, dalle posizioni

$$m_\nu^* = \frac{m_{\nu+1}m_{\nu+2}}{m}\,, \qquad (m = m_0 + m_1 + m_2); \tag{4}$$

e

$$U = f \sum_0^2 \frac{m_{\nu+1}m_{\nu+2}}{\varrho_\nu^2} = fm \sum_0^2 \frac{m_\nu^*}{\varrho_\nu^2}\,, \qquad (f \text{ costante d'attrazione}), \tag{5}$$

è la funzione delle forze dell'originario problema.

Per il problema trasformato, di cui ora si tratta, si ha invece quale

Funzione delle forze

$$\frac{E}{U}\,,$$

E essendo una costante (l'energia totale del problema primitivo); quale

Energia totale $T - E/U$, lo speciale valore 1; quale

Funzione lagrangiana

$$\Lambda = T + \frac{E}{U}\,, \tag{6}$$

T ed U avendo le espressioni (2) e (5).

2. - Cinematica del sistema S.

Nella prima delle equazioni vincolari (1),

$$\sum_0^2{}_\nu\, \xi_\nu^2 = \sum_0^2{}_\nu\, \eta_\nu^2 ,$$

il valore comune dei due membri va ritenuto diverso da zero. Infatti esso potrebbe annullarsi solo a patto che si annullassero tutte le ξ e tutte le η: il che è quanto dire, riferendosi agli originari tre corpi, nel caso della loro coincidenza in un medesimo punto (collisione generale). Ora questa è senza altro esclusa, per tutto il corso del moto, tostochè si suppone diversa da zero la costante delle aree (teorema di SUNDMAN) [4]. Sotto tale ipotesi, si può anzi affermare qualche cosa di più: cioè che il limite inferiore del trinomio

$$\sum_0^2{}_\nu\, m_\nu^* \varrho_\nu^2$$

(momento di inerzia polare dei tre corpi rispetto al loro baricentro) [5] è > 0. Ne consegue, in base alle (3), che è pure > 0 il limite inferiore del valore comune q^2 dei due trinomii

$$\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 \quad , \quad \eta_1^2 + \eta_2^2 + \eta_3^2 .$$

Risguarderemo q come una prima coordinata lagrangiana del sistema S. Il significato geometrico risulta subito dalla definizione. Si ha infatti, in virtù delle (3),

$$2q^2 = \sum_0^2{}_\nu\, \varrho_\nu^2 ,$$

donde apparisce che *q^2 è il semiperimetro del triangolo dei tre corpi.*

Posto

$$\xi_\nu = q\alpha_\nu , \qquad \eta_\nu = q\beta_\nu \qquad (\nu = 0, 1, 2), \tag{7}$$

---

[4] Cfr. R), § 10.
[5] Ibidem, § 1.

la definizione di q e le (1) dànno

$$\sum_0^2{}_\nu\, \alpha_\nu^2 = 1\,, \qquad \sum_0^2{}_\nu\, \beta_\nu^2 = 1\,, \qquad \sum_0^2{}_\nu\, \alpha_\nu \beta_\nu = 0\,, \tag{8}$$

le quali consentono di interpretare α_ν e β_ν quali coseni direttori, rispetto ad un generico sistema cartesiano ortogonale $Ox_0x_1x_2$, di due semirette perpendicolari: indicheremo con $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ i rispettivi vettori unitari (le cui componenti sono appunto tali coseni α_ν, β_ν).

Per rendere espressiva l'interpretazione, conviene introdurre anche il vettore unitario

$$\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\alpha} \wedge \boldsymbol{\beta}\,, \tag{9}$$

che individua, assieme coi primi due, un triedro trirettangolo congruente ad $Ox_0x_1x_2$. A norma della (9), i coseni direttori γ_ν (componenti del vettore $\boldsymbol{\gamma}$) valgono naturalmente

$$\gamma_\nu = \alpha_{\nu+1}\beta_{\nu+2} - \alpha_{\nu+2}\beta_{\nu+1} \qquad (\nu = 0, 1, 2). \tag{9'}$$

Pensiamo $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\gamma}$ quali vettori fondamentali del sistema di assi fissi $Oxyz$, cui viene riferito il moto piano dei tre corpi, supponendo per maggior semplicità, gli assi Ox, Oy situati nel piano del moto, e quindi Oz perpendicolare a questo piano. In tale accezione, α_ν, β_ν, γ_ν si interpretano come coseni direttori dell'asse Ox_ν rispetto al triedro (fisso) $Oxyz$; e rimane complessivamente definita (rispetto al detto triedro) l'orientazione della terna $Ox_0x_1x_2$, o, se si vuole, di un generico corpo rigido C solidale con essa.

Ne consegue che ad ogni sestupla ξ_ν, η_ν verificante le (1) fanno riscontro un ben determinato valore (positivo) di q e un'orientazione dell'ipotetico corpo C; e, reciprocamente, da q e dall'orientazione di C si risale tosto, mediante le (7), alle ξ_ν, η_ν. Si può pertanto concludere che la configurazione del sistema S corrisponde biunivocamente all'insieme: parametro positivo q, orientazione di C.

3. - Comportamento cinetico.

La circostanza testè rilevata assicura che il sistema S rientra nella categoria di cui ci siamo diffusamente occupati nella Nota M) colla mira specifica di farne applicazione al problema attuale. Giova anzitutto richiamarsi ad essa per le formule (di POISSON)

$$\boldsymbol{\alpha}' = \boldsymbol{\alpha} \wedge \boldsymbol{\omega}, \quad \boldsymbol{\beta}' = \boldsymbol{\beta} \wedge \boldsymbol{\omega}, \quad \boldsymbol{\gamma}' = \boldsymbol{\gamma} \wedge \boldsymbol{\omega}, \tag{10}$$

in cui, fungendo τ da tempo, il vettore $\boldsymbol{\omega}$ rappresenta la velocità angolare (dell'ipotetico corpo C rispetto agli assi fissi $Oxyz$).

Si ha poi, dalle (7) e (3) dei paragrafi precedenti,

$$\varrho_\nu^2 = q^2(\alpha_\nu^2 + \beta_\nu^2)$$

ossia, badando all'identità $\alpha_\nu^2 + \beta_\nu^2 + \gamma_\nu^2 = 1$,

$$\varrho_\nu^2 = q^2(1 - \gamma_\nu^2) \qquad (\nu = 0, 1, 2), \tag{11}$$

donde apparisce che le mutue distanze, e di conseguenza la funzione delle forze E/U, si esprimono esclusivamente per q e per le γ_ν.

Passiamo alla forza viva T definita dalla (2). In base alle derivate delle (7),

$$\xi'_\nu = q'\alpha_\nu + q\alpha'_\nu, \qquad \eta'_\nu = q'\beta_\nu + q\beta'_\nu, \tag{12}$$

e alle (10), essa diviene ovviamente una forma quadratica dei quattro argomenti q' e ω_1, ω_2, ω_3 (componenti del vettore $\boldsymbol{\omega}$ secondo gli assi $Ox_0x_1x_2$). È facile constatare che i coefficienti si possono esprimere esclusivamente per la q e per le γ_ν (rendendoli esenti dagli altri coseni α_ν, β_ν). Intanto, a norma delle (2), (5) e (11), basta accertarlo per ognuno dei binomi $\xi_\nu'^2 + \eta_\nu'^2$. A tal uopo conviene esplicitare le componenti delle (10),

$$\left\{ \begin{aligned} \alpha'_\nu &= \alpha_{\nu+1}\omega_{\nu+2} - \alpha_{\nu+2}\omega_{\nu+1}, \\ \beta'_\nu &= \beta_{\nu+1}\omega_{\nu+2} - \beta_{\nu+2}\omega_{\nu+1}, \\ \gamma'_\nu &= \gamma_{\nu+1}\omega_{\nu+2} - \gamma_{\nu+2}\omega_{\nu+1}, \end{aligned} \right. \tag{10'}$$

e dedurne, quadrando e sommando le prime due, e tenendo presenti le relazioni di ortogonalità,

$$\alpha_\nu'^2 + \beta_\nu'^2 = (1 - \gamma_{\nu+1}^2)\omega_{\nu+2}^2 + (1 - \gamma_{\nu+2}^2)\omega_{\nu+1}^2 + 2\gamma_{\nu+1}\gamma_{\nu+2}\omega_{\nu+1}\omega_{\nu+2}.$$

Dopo ciò, l'asserto risulta tosto dalle (12), le quali, badando alle identità

$$\alpha_\nu^2 + \beta_\nu^2 = 1 - \gamma_\nu^2,$$
$$\alpha_\nu\alpha'_\nu + \beta_\nu\beta'_\nu = -\gamma_\nu\gamma'_\nu = -\gamma_\nu(\gamma_{\nu+1}\omega_{\nu+2} - \gamma_{\nu+2}\omega_{\nu+1}),$$

porgono

$$(13)\qquad \xi_\nu'^2 + \eta_\nu'^2 = q'^2(\alpha_\nu^2 + \beta_\nu^2) + 2qq'(\alpha_\nu\alpha_\nu' + \beta_\nu\beta_\nu') + q^2(\alpha_\nu'^2 + \beta_\nu'^2)$$
$$= q'^2(1 - \gamma_\nu^2) - 2qq'\gamma_\nu(\gamma_{\nu+1}\omega_{\nu+2} - \gamma_{\nu+2}\omega_{\nu+1})$$
$$+ q^2\{(1 - \gamma_{\nu+1}^2)\omega_{\nu+2}^2 + (1 - \gamma_{\nu+2}^2)\omega_{\nu+1}^2 + 2\gamma_{\nu+1}\gamma_{\nu+2}\omega_{\nu+1}\omega_{\nu+2}\}\,.$$

Ne desumiamo che anche la funzione lagrangiana (6) del problema trasformato,

$$\Lambda = T + \frac{E}{U},$$

dipende, oltre che da q' e dalle ω_ν, esclusivamente da q e dalle γ_ν. Si trova con ciò soddisfatta anche l'ipotesi complementare, di cui al § 3 della Nota M). Possiamo quindi valerci delle regole ivi stabilite per la costruzione delle equazioni del moto.

Rivolgeremo il nostro calcolo a quella delle due forme miste che abbiamo chiamata canonico-euleriana, perchè, a differenza dell'altra (euleriano-lagrangiana), si presenterà automaticamente regolarizzata anche nell'intorno di eventuali urti binarî.

4. - Coniugate. Equazioni lineari da risolvere per passare alla quadrica reciproca.

Secondo la regola esposta al § 7 della Nota M), testè ricordata, partendo dalla T $(q', \omega_\nu;\ q, \gamma_\nu)$, si debbono introdurre gli argomenti p, Ω_ν (coniugati a q, ω_ν) a norma delle equazioni

$$(14)\qquad p = \frac{\partial T}{\partial q'}\,, \qquad \Omega_\nu = \frac{\partial T}{\partial \omega_\nu}\,,$$

e valersene per eliminare q' e le ω_ν dalla stessa $T(q', \omega_\nu;\ q, \gamma_\nu)$. Indicando con $\Theta(p, \Omega_\nu;\ q, \gamma_\nu)$ la forma in tal guisa ottenuta (2Θ è la quadrica reciproca di $2T$), si ha senz'altro dalla (6) la funzione lagrangiana modificata (o hamiltoniana)

$$(15)\qquad H = \Theta - \frac{E}{U}\,.$$

La diretta risoluzione delle (14) e la successiva eliminazione delle

q', ω_ν da T richiederebbe tuttavia sviluppi non brevi, nè istruttivi, attesa la espressione abbastanza complicata di $T(q', \omega_\nu; q, \gamma_\nu)$ risultante dalle (2) e (13). Si arriva allo scopo in modo elegante e perspicuo, esprimendo mediante vettori ausiliari così le equazioni dei vincoli come T e le (14), ed eliminando poi comprensivamente gli elementi ausiliari con algoritmo vettoriale accomodato alle circostanze del caso.

5. - Introduzione di vettori ausiliarî. L'omografia vettoriale (dilatazione) $\mathfrak{D}$.

La sestupla ξ_ν, η_ν si compendia opportunamente in due vettori $\boldsymbol{\xi}$, $\boldsymbol{\eta}$, aventi rispettivamente le ξ_ν, η_ν per componenti secondo gli assi $Ox_0x_1x_2$.

Le derivate di questi vettori rapporto a τ,

$$\boldsymbol{\xi}', \boldsymbol{\eta}',$$

hanno in conformità, per componenti, ξ'_ν, η'_ν.

Mercè l'introduzione di questi vettori, si può attribuire alle equazioni (1) dei vincoli la forma

$$\boldsymbol{\xi}\times\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\eta}\times\boldsymbol{\eta}=0, \qquad \boldsymbol{\xi}\times\boldsymbol{\eta}=0,$$

con che le loro derivate rapporto a τ si scrivono

$$\boldsymbol{\xi}'\times\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\eta}'\times\boldsymbol{\eta}=0, \quad \boldsymbol{\xi}'\times\boldsymbol{\eta}+\boldsymbol{\eta}'\times\boldsymbol{\xi}=0. \tag{16}$$

Anche alle (12) si attribuisce ovviamente forma vettoriale: basta notare che, in base alle (7) e (10), i loro secondi membri si identificano colle componenti dei due vettori

$$\frac{q'}{q}\boldsymbol{\xi}+\boldsymbol{\xi}\wedge\boldsymbol{\omega}, \qquad \frac{q'}{q}\boldsymbol{\eta}+\boldsymbol{\eta}\wedge\boldsymbol{\omega},$$

talchè esse equivalgono a

$$\boldsymbol{\xi}'=\frac{q'}{q}\boldsymbol{\xi}+\boldsymbol{\xi}\wedge\boldsymbol{\omega}, \qquad \boldsymbol{\eta}'=\frac{q'}{q}\boldsymbol{\eta}+\boldsymbol{\eta}\wedge\boldsymbol{\omega}. \tag{17}$$

Conviene ancora definire due altri vettori $\boldsymbol{\Xi}$, $\boldsymbol{H}$ aventi rispettivamente per componenti (sempre secondo gli assi $Ox_0x_1x_2$)

$$
(18) \qquad \begin{cases} \Xi_\nu = \dfrac{\partial T}{\partial \xi'_\nu} = 4\,U m^*_\nu \varrho^2_\nu \xi'_\nu\,, \\[2ex] H_\nu = \dfrac{\partial T}{\partial \eta'_\nu} = 4\,U m^*_\nu \varrho^2_\nu \eta'_\nu\,. \end{cases}
$$

Queste espressioni di Ξ_ν, H_ν mostrano che i due vettori $\boldsymbol{\Xi}$, $\boldsymbol{H}$ risultano dall'applicare a $\boldsymbol{\xi}'$, $\boldsymbol{\eta}'$ una stessa omografia vettoriale, anzi una stessa dilatazione ([6]) avente per direzioni unite quelle degli assi Ox_ν.

Designeremo con $\mathfrak{D}$ l'omografia inversa, cioè la dilatazione

$$
(19) \qquad \mathfrak{D} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{4\,U m^*_\nu \varrho^2_\nu}\, \boldsymbol{u}_\nu \\ \boldsymbol{u}_\nu \end{pmatrix}, \qquad (\nu = 0, 1, 2),
$$

che opera sui vettori fondamentali $\boldsymbol{u}_\nu$ del triedro (unito) $Ox_0x_1x_2$, riducendone le lunghezze nel rapporto di 1 a $1/(4\,U m^*_\nu \varrho^2_\nu)$. Potremo così compendiare le (18) (o meglio le loro risolventi rapporto a ξ'_ν, η'_ν) nelle due relazioni vettoriali

$$
(20) \qquad \boldsymbol{\xi}' = \mathfrak{D}\boldsymbol{\Xi}\,, \qquad \boldsymbol{\eta}' = \mathfrak{D}\boldsymbol{H}\,.
$$

Dacchè l'espressione (2) della forza viva è omogenea di secondo grado rispetto alle ξ'_ν, η'_ν, si ha dal teorema di EULERO

$$
2T = \sum_0^2{}_\nu \left(\frac{\partial T}{\partial \xi'_\nu}\,\xi'_\nu + \frac{\partial T}{\partial \eta'_\nu}\,\eta'_\nu\right).
$$

Nel secondo membro riconosciamo i due prodotti scalari $\boldsymbol{\Xi}\times\boldsymbol{\xi}'$, $\boldsymbol{H}\times\boldsymbol{\eta}'$ Risulta quindi, in virtù delle (20),

$$
(21) \qquad 2T = \boldsymbol{\Xi}\times\mathfrak{D}\boldsymbol{\Xi} + \boldsymbol{H}\times\mathfrak{D}\boldsymbol{H}\,.
$$

Per la costruzione delle equazioni del moto nella divisata forma canonico-euleriana, è mestieri far intervenire, a norma delle (14) del paragrafo precedente, lo scalare

$$
p = \frac{\partial T}{\partial q'}\,,
$$

([6]) Cfr. BURALI-FORTI e MARCOLONGO, *Transformations linéaires* (Pavia, Mattei, 1912), pp. 20-22.

e il vettore $\mathbf{\Omega}$ avente per componenti

$$\Omega_\nu = \frac{\partial T}{\partial \omega_\nu}.$$

Occupiamoci di esprimere p ed $\mathbf{\Omega}$ in forma appropriata. All'uopo giova premettere che, se T dipende da un parametro generico μ, pel tramite delle ξ'_ν, η'_ν, si ha, derivando,

$$\frac{\partial T}{\partial \mu} = \sum_0^2{}_\nu \left(\frac{\partial T}{\partial \xi'_\nu} \frac{\partial \xi'_\nu}{\partial \mu} + \frac{\partial T}{\partial \eta'_\nu} \frac{\partial \eta'_\nu}{\partial \mu} \right),$$

ciò che, attesa la definizione dei vettori $\mathbf{\Xi}$, $\boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{\xi}'$, $\boldsymbol{\eta}'$, equivale a

$$\frac{\partial T}{\partial \mu} = \mathbf{\Xi} \times \frac{\partial \boldsymbol{\xi}'}{\partial \mu} + \boldsymbol{H} \times \frac{\partial \boldsymbol{\eta}'}{\partial \mu}.$$

Se ne ricava in primo luogo, ponendo $\mu = q'$ e badando alle (17),

$$p = \frac{\partial T}{\partial q'} = \frac{1}{q} (\mathbf{\Xi} \times \boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{H} \times \boldsymbol{\eta}). \tag{22}$$

Se poi si nota che il vattore $\boldsymbol{\omega}$ si può esprimere, per mezzo delle componenti ω_ν e dei vettori fondamentali $\boldsymbol{u}_\nu$, sotto la forma

$$\sum_0^2{}_\nu \, \omega_\nu \boldsymbol{u}_\nu,$$

si ha, dalle (17),

$$\frac{\partial \boldsymbol{\xi}'}{\partial \omega_\nu} = \boldsymbol{\xi} \wedge \boldsymbol{u}_\nu, \qquad \frac{\partial \boldsymbol{\eta}'}{\partial \omega_\nu} = \boldsymbol{\eta} \wedge \boldsymbol{u}_\nu,$$

con che

$$\frac{\partial T}{\partial \omega_\nu} = \mathbf{\Xi} \times (\boldsymbol{\xi} \wedge \boldsymbol{u}_\nu) + \boldsymbol{H} \times (\boldsymbol{\eta} \wedge \boldsymbol{u}_\nu) = \boldsymbol{u}_\nu \times (\mathbf{\Xi} \wedge \boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{H} \wedge \boldsymbol{\eta}).$$

Il terzo membro è manifestamente la componente secondo Ox_ν del vettore

$$\mathbf{\Xi} \wedge \boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{H} \wedge \boldsymbol{\eta}.$$

Il primo membro è, per definizione, l'analoga componente del vettore $\boldsymbol{\Omega}$. Ne consegue la espressione di $\boldsymbol{\Omega}$ sotto la voluta veste vettoriale:

$$\boldsymbol{\Omega} = \Xi \wedge \boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{H} \wedge \boldsymbol{\eta} \,. \tag{23}$$

6. - Passaggio alla forma reciproca 2Θ mediante eliminazioni vettoriali.

Le definizioni (22), (23) di p ed $\boldsymbol{\Omega}$, e le (16), poste, in virtù delle (20), sotto la forma equivalente

$$\mathfrak{D}\Xi \times \boldsymbol{\xi} - \mathfrak{D}\boldsymbol{H} \times \boldsymbol{\eta} = 0 \,, \qquad \mathfrak{D}\Xi \times \boldsymbol{\eta} + \mathfrak{D}\boldsymbol{H} \times \boldsymbol{\xi} = 0 \,, \tag{24}$$

costituiscono in sostanza un sistema di sei equazioni lineari (non omogenee) nei due vettori Ξ, $\boldsymbol{H}$. Esse consentono quindi (in quanto siano indipendenti, come infatti sono) di ricavarne le sei componenti in funzione lineare dei vari termini noti (che si riducono a p ed $\boldsymbol{\Omega}$), a coefficienti che possono *a priori* dipendere da $\boldsymbol{\xi}$, $\boldsymbol{\eta}$ e dall'omografia $\mathfrak{D}$, ossia, complessivamente, da q, $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\gamma}$. Portando queste espressioni dei due vettori Ξ, $\boldsymbol{H}$ nella (21), la T diviene una forma quadratica nelle p, Ω_ν (esente dai primitivi argomenti q', ω_ν); e si ha la Θ cercata la quale si presenta altresì esente dalle α_ν, β_ν (ha cioè i coefficienti che dipendono soltanto da q e dalle γ_ν): circostanza questa senz'altro prevedibile in base all'analoga proprietà della T, già rilevata al § 3.

Anzichè eseguire per via diretta la risoluzione delle (22), (23), (24), e successiva sostituzione nella (21), conviene trasformare la (21) stessa a mezzo delle altre equazioni.

Dopo alquanti passaggi, tutti immediati sotto il duplice punto di vista concettuale e formale, l'eliminazione di Ξ, $\boldsymbol{H}$ si troverà automaticamente compiuta.

Prepariamoci anzi tutto l'espressione esplicita di

$$W = \boldsymbol{\xi} \times \mathfrak{D}\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\eta} \times \mathfrak{D}\boldsymbol{\eta} \,. \tag{25}$$

Dacchè, a norma della (19), le componenti di $\mathfrak{D}\boldsymbol{\xi}$, $\mathfrak{D}\boldsymbol{\eta}$ sono ordinatamente $(1/4\,Um_\nu^*\varrho_\nu^2)\xi_\nu$, $(1/4\,Um_\nu^*\varrho_\nu^2)/\eta_\nu$, si ha subito, badando alle (3) e (4),

$$W = \sum_0^2{}_\nu \frac{1}{4\,Um_\nu^*} = \frac{m^2}{4\,Um_0m_1m_2} \,. \tag{26}$$

Ciò premesso, riprendiamo l'espressione (21) di T, e scriviamola. sfruttando le (24), sotto la forma equivalente

$$2WT = (\Xi \times \mathfrak{D}\Xi + \boldsymbol{H} \times \mathfrak{D}\boldsymbol{H})(\xi \times \mathfrak{D}\xi + \eta \times \mathfrak{D}\eta)$$
$$- (\mathfrak{D}\Xi \times \xi - \mathfrak{D}\boldsymbol{H} \times \eta)^2 - (\mathfrak{D}\Xi \times \eta + \mathfrak{D}\boldsymbol{H} \times \xi)^2 .$$

Sviluppando materialmente il prodotto e i due quadrati del secondo membro, ove inoltre si aggiunga (ad esso secondo membro) il binomio, identicamente nullo per la proprietà caratteristica delle dilatazioni, $2(\Xi \times \mathfrak{D}\boldsymbol{H})(\xi \times \mathfrak{D}\eta) - 2(\Xi \times \mathfrak{D}\boldsymbol{H})(\mathfrak{D}\xi \times \eta)$, si dà a $2WT$ la forma di somma dei sei termini seguenti:

$$\begin{aligned}
t_1 &= (\Xi \times \mathfrak{D}\Xi)(\xi \times \mathfrak{D}\xi) - (\mathfrak{D}\Xi \times \xi)^2 ,\\
t_2 &= (\boldsymbol{H} \times \mathfrak{D}\boldsymbol{H})(\eta \times \mathfrak{D}\eta) - (\mathfrak{D}\boldsymbol{H} \times \eta)^2 ,\\
t_3 &= (\Xi \times \mathfrak{D}\Xi)(\eta \times \mathfrak{D}\eta) - (\mathfrak{D}\Xi \times \eta)^2 ,\\
t_4 &= (\boldsymbol{H} \times \mathfrak{D}\boldsymbol{H})(\xi \times \mathfrak{D}\xi) - (\mathfrak{D}\boldsymbol{H} \times \xi)^2 ,\\
t_5 &= 2\{(\Xi \times \mathfrak{D}\xi)(\eta \times \mathfrak{D}\boldsymbol{H}) - (\Xi \times \mathfrak{D}\boldsymbol{H})(\mathfrak{D}\xi \times \eta)\} ,\\
t_6 &= 2\{(\Xi \times \mathfrak{D}\boldsymbol{H})(\xi \times \mathfrak{D}\eta) - (\Xi \times \mathfrak{D}\eta)(\mathfrak{D}\boldsymbol{H} \times \xi)\} .
\end{aligned}$$

Ciascuno di questi può essere trasformato usando l'identità

$$(\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B})(\boldsymbol{C} \times \boldsymbol{D}) - (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{D})(\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{A} \wedge \boldsymbol{C}) \times (\boldsymbol{B} \wedge \boldsymbol{D})$$

valida qualunque siano i quattro vettori $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{D}$.

In primo luogo, per

$$\boldsymbol{A} = \Xi , \quad \boldsymbol{B} = \mathfrak{D}\Xi , \quad \boldsymbol{C} = \xi , \quad \boldsymbol{D} = \mathfrak{D}\xi ,$$

viene

$$t_1 = (\Xi \wedge \xi) \times (\mathfrak{D}\Xi \times \mathfrak{D}\xi) ,$$

da cui, cambiando Ξ, ξ in $\boldsymbol{H}$, η,

$$t_2 = (\boldsymbol{H} \wedge \eta) \times (\mathfrak{D}\boldsymbol{H} \times \mathfrak{D}\eta) .$$

Assumendo poi

$$\boldsymbol{A} = \Xi , \quad \boldsymbol{B} = \mathfrak{D}\Xi , \quad \boldsymbol{C} = \eta , \quad \boldsymbol{D} = \mathfrak{D}\eta$$

si ha

$$t_3 = (\Xi \wedge \eta) \times (\mathfrak{D}\Xi \wedge \mathfrak{D}\eta) ,$$

la quale, colla sostituzione di $\boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{\xi}$, a $\boldsymbol{\Xi}$, $\boldsymbol{\eta}$, porge

$$t_4 = (\boldsymbol{H}\wedge\boldsymbol{\xi})\times(\mathfrak{D}\boldsymbol{H}\wedge\mathfrak{D}\boldsymbol{\xi}) .$$

Infine, per

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{\Xi}\,, \qquad \boldsymbol{B} = \mathfrak{D}\boldsymbol{\xi}\,, \qquad \boldsymbol{C} = \boldsymbol{\eta}\,, \qquad \boldsymbol{D} = \mathfrak{D}\boldsymbol{H}\,;$$

e

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{\Xi}\,, \qquad \boldsymbol{B} = \mathfrak{D}\boldsymbol{H}\,, \qquad \boldsymbol{C} = \boldsymbol{\xi}\,, \qquad \boldsymbol{D} = \mathfrak{D}\boldsymbol{\eta}\,,$$

risulta rispettivamente

$$t_5 = 2(\boldsymbol{\Xi}\wedge\boldsymbol{\eta})\times(\mathfrak{D}\boldsymbol{\xi}\wedge\mathfrak{D}\boldsymbol{H}) = -\,2(\boldsymbol{\Xi}\wedge\boldsymbol{\eta})\times(\mathfrak{D}\boldsymbol{H}\wedge\mathfrak{D}\boldsymbol{\xi})\,,$$
$$t_6 = 2(\boldsymbol{\Xi}\wedge\boldsymbol{\xi})\times(\mathfrak{D}\boldsymbol{H}\wedge\mathfrak{D}\boldsymbol{\eta})\,.$$

In ognuno dei termini t_j $(j = 1, \ldots, 6)$ così trasformati, figura un prodotto vettoriale del tipo

$$\mathfrak{D}\boldsymbol{A}\wedge\mathfrak{D}\boldsymbol{B}\,.$$

Dalla teoria delle omografie vettoriali si sa (7) che un tale prodotto dipende da $\boldsymbol{A}$ e da $\boldsymbol{B}$ esclusivamente pel tramite del loro prodotto vettoriale. E precisamente si ha

$$\mathfrak{D}\boldsymbol{A}\wedge\mathfrak{D}\boldsymbol{B} = R\mathfrak{D}(\boldsymbol{A}\wedge\boldsymbol{B})\,,$$

l'operatore R applicato alla dilatazione $\mathfrak{D}$ producendo, a norma della (19), la dilatazione

$$(27) \qquad \left(\frac{1}{16\,U m^*_{\nu+1} m^*_{\nu+2} \varrho^2_{\nu+1}\varrho^2_{\nu+2}}\,\frac{\boldsymbol{u}_\nu}{\boldsymbol{u}_\nu}\right). \qquad (\nu = 0, 1, 2)\,.$$

Applichiamo questa formula ai vari t_j, introducendo per brevità il simbolo operativo

$$\mathfrak{E} = \frac{1}{W}\,R\mathfrak{D}\,,$$

l quale, in virtù delle (4), (26) e (27), si scrive

$$(28) \qquad \mathfrak{E} = \frac{1}{4U}\left(\frac{1}{m_\nu \varrho^2_{\nu+1}\varrho^2_{\nu+2}}\,\frac{\boldsymbol{u}_\nu}{\boldsymbol{u}_\nu}\right), \qquad (\nu = 0, 1, 2)\,.$$

(7) BURALI-FORTI e MARCOLONGO, op. cit., pp. 38-39.

Otteniamo

$$\frac{1}{W}t_1 = (\Xi \wedge \boldsymbol{\xi}) \times \mathfrak{S}(\Xi \wedge \boldsymbol{\xi}) ,$$

$$\frac{1}{W}t_2 = (\boldsymbol{H} \wedge \boldsymbol{\eta}) \times \mathfrak{S}(\boldsymbol{H} \wedge \boldsymbol{\eta}) ,$$

$$\frac{1}{W}t_3 = (\Xi \wedge \boldsymbol{\eta}) \times \mathfrak{S}(\Xi \wedge \boldsymbol{\eta}) ,$$

$$\frac{1}{W}t_4 = (\boldsymbol{H} \wedge \boldsymbol{\xi}) \times \mathfrak{S}(\boldsymbol{H} \wedge \boldsymbol{\xi}) ,$$

$$\frac{1}{W}t_5 = -2(\Xi \wedge \boldsymbol{\eta}) \times \mathfrak{S}(\boldsymbol{H} \wedge \boldsymbol{\xi}) ,$$

$$\frac{1}{W}t_6 = \quad 2(\Xi \wedge \boldsymbol{\xi}) \times \mathfrak{S}(\boldsymbol{H} \wedge \boldsymbol{\eta}) .$$

Ora, in quanto $\mathfrak{S}$ è essa stessa una dilatazione, si ha ovviamente

$$\frac{1}{W}(t_1 + t_2 + t_6) = (\Xi \wedge \boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{H} \wedge \boldsymbol{\eta}) \times \mathfrak{S}(\Xi \wedge \boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{H} \wedge \boldsymbol{\eta}) ,$$

$$\frac{1}{W}(t_3 + t_4 + t_5) = (\Xi \wedge \boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{H} \wedge \boldsymbol{\xi}) \times \mathfrak{S}(\Xi \wedge \boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{H} \wedge \boldsymbol{\xi}) ,$$

le quali, badando alla (23) e ponendo

$$\boldsymbol{X} = \Xi \wedge \boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{H} \wedge \boldsymbol{\xi} , \tag{29}$$

si scrivono più semplicemente

$$\frac{1}{W}(t_1 + t_2 + t_6) = \boldsymbol{\Omega} \times \mathfrak{S}\boldsymbol{\Omega} ,$$

$$\frac{1}{W}(t_3 + t_4 + t_5) = \boldsymbol{X} \times \mathfrak{S}\boldsymbol{X} .$$

La somma delle t_j non è altro che $2WT$; si ha quindi

$$2T = \boldsymbol{\Omega} \times \mathfrak{S}\boldsymbol{\Omega} + \boldsymbol{X} \times \mathfrak{S}\boldsymbol{X} .$$

È questa, come passiamo ad accertare, la voluta espressione 2Θ di $2T$, tosto esplicitabile come forma quadratica degli argomenti p, Ω_ν. E in verità essa è visibilmente funzione quadratica dei due vettori $\mathbf{\Omega}$, $\boldsymbol{X}$, a coefficienti che, a norma della (28), dipendono soltanto dalle ϱ, ossia, per le (11), da q e dalle γ_ν: l'asserto sarà quindi provato se constateremo che $\boldsymbol{X}$ è funzione lineare ed omogenea di p, e delle Ω_ν, con analoghi coefficienti.

All'uopo, partiamoci dall'osservazione che, attesa l'ortogonalità di $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\gamma}$, si ha dalle (7):

$$\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\eta} \wedge \boldsymbol{\gamma} \quad , \quad \boldsymbol{\eta} = -\boldsymbol{\xi} \wedge \boldsymbol{\gamma} ;$$

con che la (29) può essere scritta

$$\boldsymbol{X} = -\,\Xi \wedge (\boldsymbol{\xi} \wedge \boldsymbol{\gamma}) - \boldsymbol{H} \wedge (\boldsymbol{\eta} \wedge \boldsymbol{\gamma}) .$$

D'altra parte, l'identità

$$\Xi \wedge (\boldsymbol{\xi} \wedge \boldsymbol{\gamma}) + \boldsymbol{\xi} \wedge (\boldsymbol{\gamma} \wedge \Xi) + \boldsymbol{\gamma} \wedge (\Xi \wedge \boldsymbol{\xi}) = 0 ,$$

ove si noti che, per l'ortogonalità fra $\boldsymbol{\xi}$ e $\boldsymbol{\gamma}$, il termine medio si riduce a $(\Xi \times \boldsymbol{\xi})\boldsymbol{\gamma}$, porge

$$-\,\Xi \wedge (\boldsymbol{\xi} \wedge \boldsymbol{\gamma}) = (\Xi \times \boldsymbol{\xi})\boldsymbol{\gamma} + \boldsymbol{\gamma} \wedge (\Xi \wedge \boldsymbol{\xi}) .$$

Poniamovi $\boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{\eta}$ al posto di Ξ, $\boldsymbol{\xi}$, e sommiamo, tenendo conto delle (22) e (23). Risulta

$$\boldsymbol{X} = pq\boldsymbol{\gamma} + \boldsymbol{\gamma} \wedge \mathbf{\Omega} , \tag{30}$$

e rimane in definitiva acquisita per la forma reciproca l'annunciata espressione

$$2\Theta = \mathbf{\Omega} \times \mathfrak{E}\mathbf{\Omega} + \boldsymbol{X} \times \mathfrak{E}\boldsymbol{X} , \tag{31}$$

la dilatazione $\mathfrak{E}$ e il vettore $\boldsymbol{X}$ essendo rispettivamente definiti dalle (28) e (30).

NOTA II (1).

FORME ESPLICITE (MISTA E CANONICHE) DELLE EQUAZIONI REGOLARIZZATE.

Ibidem, vol. XXIV$_2$ (1915$_2$),

pp. 485-501.

7. - Regolarità.

Le equazioni canonico-euleriane del moto di S dipendono esclusivamente [cfr. § 8 della Nota M), pag. 506 di questo volume] dalla funzione

$$H = \Theta - \frac{E}{U}, \tag{15}$$

col valore di Θ esplicitato nel § precedente.

Siamo *a priori* assicurati (2) che il sistema differenziale ha comportamento regolare *anche* nell'intorno di un eventuale urto binario (una delle ϱ nulla, e le altre due diverse da zero). Ne abbiamo conferma diretta nella *regolarità della H per tutti i valori finiti degli argomenti* p, Ω_ν, q, γ_ν, questi ultimi essendo coseni direttori, ossia legati dalla relazione $\gamma_1^2+\gamma_2^2+ +\gamma_3^2 = 1$. Invero, le (11) mostrano intanto che, per $q > 0$, come (§ 2) va sempre ritenuto, può annullarsi una sola delle ϱ (in corrispondenza al valore ± 1 della γ affetta dallo stesso indice). Con ciò i rapporti $1/U$, $1/\varrho_\nu^2 U$, nonchè $1/\varrho_{\nu+1}^2\varrho_{\nu+2}^2 U$ $(\nu = 0, 1, 2)$, si comportano regolarmente, anche in prossimità di urti binarî; e, in virtù delle (28), (31), (15), lo stesso segue per H, c. d. d.

8. - Digressione su due vettori desumibili dalla funzione H.

Studiamo un po' i due vettori $\boldsymbol{\omega}$, $\boldsymbol{\Gamma}$, le cui componenti (secondo gli assi $Ox_0x_1x_2$) sono

$$\omega_\nu = \frac{\partial H}{\partial \Omega_\nu}, \qquad \Gamma_\nu = -\frac{\partial H}{\partial \gamma_\nu}.$$

---

(1) Pervenuta all'Accademia il 30 settembre 1915.

(2) R), p. 491 [di questo volume].

Sappiamo già [M, § 8] che $\boldsymbol{\omega}$ è la velocità angolare, quello stesso vettore che ripetutamente figura nei §§ antecedenti; si tratta di renderne espressiva anche la dipendenza formale dagli elementi costitutivi della funzione H.

All'uopo premettiamo che, per essere identicamente

$$\boldsymbol{\Omega} = \sum_{0}^{2}{}_{\nu}\, \Omega_\nu \boldsymbol{u}_\nu ,$$

si ha, dalla (30),

$$\frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial \Omega_\nu} = \boldsymbol{\gamma} \wedge \boldsymbol{u}_\nu ;$$

quindi, in quanto $\mathfrak{E}$ è una dilatazione,

$$\frac{\partial H}{\partial \Omega_\nu} = \boldsymbol{u}_\nu \times \mathfrak{E}\boldsymbol{\Omega} + (\boldsymbol{\gamma} \wedge \boldsymbol{u}_\nu) \times \mathfrak{E}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{u}_\nu \times (\mathfrak{E}\boldsymbol{\Omega} + \mathfrak{E}\boldsymbol{X} \wedge \boldsymbol{\gamma}) .$$

Il primo membro è, per definizione, la componente di $\boldsymbol{\omega}$ secondo Ox_ν; l'ultimo membro si presenta come l'omologa componente del vettore $\mathfrak{E}\boldsymbol{\Omega} + \mathfrak{E}\boldsymbol{X} \wedge \boldsymbol{\gamma}$. Perciò

$$\boldsymbol{\omega} = \mathfrak{E}\boldsymbol{\Omega} + \mathfrak{E}\boldsymbol{X} \wedge \boldsymbol{\gamma} . \tag{32}$$

In modo analogo segue, dalla (30),

$$\frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial \gamma_\nu} = pq\boldsymbol{u}_\nu + \boldsymbol{u}_\nu \wedge \boldsymbol{\Omega} ,$$

talchè, per le (15) e (31),

$$\Gamma_\nu = -\frac{\partial H}{\partial \gamma_\nu} = -pq\boldsymbol{u}_\nu \times \mathfrak{E}\boldsymbol{X} - (\boldsymbol{u}_\nu \wedge \boldsymbol{\Omega}) \times \mathfrak{E}\boldsymbol{X} + \Gamma_\nu^* ,$$

l'ultimo addendo rappresentando il contributo proveniente: sia dal termine $-E/U$ (energia potenziale), sia dal fatto che anche l'operatore $\mathfrak{E}$ dipende dalle γ_ν.

I primi due addendi equivalgono complessivamente a

$$-\boldsymbol{u}_\nu \times (pq\mathfrak{E}\boldsymbol{X} + \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathfrak{E}\boldsymbol{X}) ,$$

ossia alle componenti Ψ_ν del vettore

$$\boldsymbol{\Psi} = pq\mathfrak{E}X + \boldsymbol{\Omega}\wedge\mathfrak{E}\boldsymbol{X}, \tag{33}$$

preso con segno cambiato.

Quanto a Γ_ν^*, si vede subito:

1) che l'energia potenziale dà luogo al contributo $-\partial/\partial\gamma_\nu(E/U)$;

2) che, per tener conto dell'intervento delle γ_ν in $\mathfrak{E}$, giova porre

$$g = \frac{1}{8U\varrho_0^2\varrho_1^2\varrho_2^2}, \tag{34}$$

e scrivere Θ per disteso sotto la forma

$$\Theta = g\sum_0^2 \frac{1}{m_\nu}\varrho_\nu^2(\Omega_\nu^2 + X_\nu^2), \tag{31'}$$

con che la derivazione dei coefficienti rapporto a γ_ν, tenute presenti le (11), porge

$$\frac{\partial \log g}{\partial\gamma_\nu}\Theta - \frac{2}{m_\nu}q^2\gamma_\nu(\Omega_\nu^2 + X_\nu^2).$$

Ne viene

$$\Gamma_\nu^* = -\frac{\partial}{\partial\gamma_\nu}\frac{E}{U} + \frac{\partial \log g}{\partial\gamma_\nu}\Theta - \frac{2}{m_\nu}q^2\gamma_\nu(\Omega_\nu^2 + X_\nu^2), \tag{35}$$

e quindi

$$\Gamma_\nu = \Psi_\nu + \Gamma_\nu^*, \tag{36}$$

essendo Ψ_ν le componenti del vettore (33) e le Γ_ν^* definite dalla (35).

9. - Equazioni canonico-euleriane.

Ecco ormai le equazioni del moto quali risultano dalla formula generale (I) [M), pag. 508 di questo volume]:

$$(\mathrm{I})\quad\left\{\begin{array}{ll}(\mathrm{I}_a) & \dfrac{dp}{d\tau} = -\dfrac{\partial H}{\partial q}, \qquad \dfrac{dq}{d\tau} = \dfrac{\partial H}{\partial p}; \\[2ex] (\mathrm{I}_b) & \dfrac{d\boldsymbol{\Omega}}{d\tau} = \mathfrak{M}; \\[2ex] (\mathrm{I}_c) & \dfrac{d\boldsymbol{\gamma}}{d\tau} = \boldsymbol{\gamma}\wedge\boldsymbol{\omega};\end{array}\right.$$

$\mathfrak{M}$ sta per

$$\mathbf{\Omega} \wedge \boldsymbol{\omega} + \mathbf{\Gamma} \wedge \boldsymbol{\gamma} ,$$

$\boldsymbol{\omega}$ e $\mathbf{\Gamma}$ avendo le determinazioni specificate nel precedente §.

Una conseguenza delle (I), che va rilevata, è l'espressione della derivata del vettore ausiliario $\boldsymbol{X}$.

Si ha in primo luogo dalla (30), applicando materialmente le (I),

$$\frac{d\boldsymbol{X}}{d\tau} = - \frac{\partial H}{\partial q} q\boldsymbol{\gamma} + \frac{\partial H}{\partial p} p\boldsymbol{\gamma} + pq(\boldsymbol{\gamma} \wedge \boldsymbol{\omega}) + (\boldsymbol{\gamma} \wedge \boldsymbol{\omega}) \wedge \mathbf{\Omega} + \boldsymbol{\gamma} \wedge \mathfrak{M} .$$

Sostituendo poi per $\mathfrak{M}$ la sua espressione e badando alle due identità

$$\mathbf{\Omega} \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{\gamma}) + \boldsymbol{\omega} \wedge (\boldsymbol{\gamma} \wedge \mathbf{\Omega}) + \boldsymbol{\gamma} \wedge (\mathbf{\Omega} \wedge \boldsymbol{\omega}) = 0 ,$$

$$\boldsymbol{\gamma} \wedge (\mathbf{\Gamma} \wedge \boldsymbol{\gamma}) = \mathbf{\Gamma} - (\mathbf{\Gamma} \times \boldsymbol{\gamma})\boldsymbol{\gamma} ,$$

nonchè, ancora una volta, alla (30), si trova subito

$$\frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial \tau} = \left(p \frac{\partial H}{\partial p} - q \frac{\partial H}{\partial q}\right)\boldsymbol{\gamma} + \boldsymbol{X} \wedge \boldsymbol{\omega} + \mathbf{\Gamma} - (\mathbf{\Gamma} \times \boldsymbol{\gamma})\boldsymbol{\gamma} . \tag{37}$$

10. - Interpretazione dell'integrale $\mathbf{\Omega} \times \boldsymbol{\gamma} = \text{cost.}$

Sappiamo [M), § 10] che le equazioni (I) (oltre a comportare l'identità geometrica $\gamma_0^2 + \gamma_1^2 + \gamma_2^2 = 1$) ammettono i due integrali:

$$H = \text{cost.} ,$$

che assume (§ 1) la specificazione

$$H = 1 ,$$

e

$$\mathbf{\Omega} \times \boldsymbol{\gamma} = \text{cost.} .$$

Nella citata Nota M), abbiamo anche assegnato, dipendentemente dalla effettiva costituzione del sistema S quale aggregato di punti materiali, una condizione sotto cui l'integrale suddetto si interpreta quale integrale del momento delle quantità di moto rispetto all'asse (fisso) Oz (delle aree rispetto al piano Oxy). Nel caso presente non possiamo riportarci a condizioni di questo tipo, dacchè S è definito solo astrattamente (§ 1) per mezzo della forza viva e della funzione delle forze: esso proviene, per trasformazione di Darboux, dal sistema di tre punti materiali P_ν ($\nu = 0, 1, 2$), che si attraggono secondo la legge di Newton e si muovono in un piano fisso.

Per l'interpretazione di $\mathbf{\Omega} \times \boldsymbol{\gamma}$, conviene quindi far capo al problema originario. All'uopo, riprendiamo anzitutto la definizione (14) delle Ω_ν, ed esplicitiamo il prodotto scalare $\mathbf{\Omega} \times \boldsymbol{\gamma}$. Avremo

$$\mathbf{\Omega} \times \boldsymbol{\gamma} = \sum_0^2{}_\nu \frac{\partial T}{\partial \omega_\nu} \gamma_\nu .$$

Le derivate parziali $\partial T / \partial \omega_\nu$ vanno calcolate in base alle (2), (12), (10′) e (7). Le (12), (10′) e (7) dànno

$$\xi'_\nu \;\; = \xi_\nu \;\; q' + \xi_{\nu+1}\omega_{\nu+2} - \xi_{\nu+2}\omega_{\nu+1} ,$$

da cui

$$\xi'_{\nu+1} = \xi_{\nu+1} q' + \xi_{\nu+2}\omega_\nu \;\; - \xi_\nu \;\; \omega_{\nu+2} ,$$

$$\xi'_{\nu+2} = \xi_{\nu+2} q' + \xi_\nu \;\; \omega_{\nu+2} - \xi_{\nu+2}\omega_{\nu+1} ,$$

colle analoghe per η'_ν, $\eta'_{\nu+1}$, $\eta'_{\nu+2}$.

Siccome T, a norma della (2), dipende da ω_ν pel tramite delle ξ', η', si ricava immediatamente

$$\frac{\partial T}{\partial \omega_\nu} = \frac{\partial T}{\partial \xi'_{\nu+1}} \xi_{\nu+2} - \frac{\partial T}{\partial \xi'_{\nu+2}} \xi_{\nu+1} + \frac{\partial T}{\partial \eta'_{\nu+1}} \eta_{\nu+2} - \frac{\partial T}{\partial \eta'_{\nu+2}} \eta_{\nu+1} .$$

Sostituiamo in $\sum_0^2{}_\nu (\partial T / \partial \omega_\nu) \gamma_\nu$ e riportiamo in ciascun termine del sommatorio le derivate di T all'indice ν: per es., nel primo termine

$$\sum_0^2{}_\nu \frac{\partial T}{\partial \xi'_{\nu+1}} \xi_{\nu+2} \gamma_\nu ,$$

scambiamo ν in $\nu+2$, con che (tenuto conto che $\nu+3$ e $\nu+4$ si identificano rispettivamente con ν e $\nu+1$, e che all'indice ν basta far assumere tre valori consecutivi qualisivogliano) esso diviene

$$\sum_0^2{}_\nu \frac{\partial T}{\partial \xi'_\nu} \xi_{\nu+1} \gamma_{\nu+2} .$$

Procedendo nello stesso modo anche per gli altri tre termini, risulta

$$\boldsymbol{\Gamma}\times\boldsymbol{\gamma} = \sum_0^2{}_\nu \frac{\partial T}{\partial \omega_\nu}\gamma_\nu$$

$$= \sum_0^2{}_\nu \left[\frac{\partial T}{\partial \xi'_\nu}(\xi_{\nu+1}\gamma_{\nu+2} - \xi_{\nu+2}\gamma_{\nu+1}) + \frac{\partial T}{\partial \eta'_\nu}(\eta_{\nu+1}\gamma_{\nu+2} - \eta_{\nu+2}\gamma_{\nu+1})\right].$$

Mercè le identità

$$\xi_\nu = \eta_{\nu+1}\gamma_{\nu+2} - \eta_{\nu+2}\gamma_{\nu+1}\,,$$

$$\eta_\nu = -(\xi_{\nu+1}\gamma_{\nu+2} - \xi_{\nu+2}\gamma_{\nu+1})$$

[che conseguono dalle (7) e dalla ortogonalità dei vettori $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\gamma}$] si ha infine

$$\boldsymbol{\Gamma}\times\boldsymbol{\gamma} = \sum_0^2{}_\nu \left(\xi_\nu \frac{\partial T}{\partial \eta'_\nu} - \eta_\nu \frac{\partial T}{\partial \xi'_\nu}\right).$$

Trasformiamo ulteriormente il secondo membro, facendovi apparire, al posto delle ξ_ν, η_ν, e loro derivate, le componenti x_ν, y_ν dei lati del triangolo dei tre corpi, colle derivate relative. Già abbiamo ricordato, al § 1, che si ha

$$x_\nu + iy_\nu = (\xi_\nu + i\eta_\nu)^2\,,$$

da cui, derivando rapporto a τ,

$$x'_\nu + iy'_\nu = 2(\xi_\nu + i\eta_\nu)(\xi'_\nu + i\eta'_\nu)\;;$$

e, moltiplicando membro a membro per

$$x_\nu - iy_\nu = (\xi_\nu - i\eta_\nu)^2\,,$$

si ricava, in base alla definizione (3) di ϱ_ν^2,

$$(x_\nu - iy_\nu)(x'_\nu + iy'_\nu) = 2\varrho_\nu^2(\xi_\nu - i\eta_\nu)(\xi'_\nu + i\eta'_\nu)\,.$$

L'eguaglianza dei coefficienti di i nei due membri porge

$$x_\nu y'_\nu - y_\nu x'_\nu = 2\varrho_\nu^2(\xi_\nu\eta'_\nu - \eta'_\nu\xi'_\nu)\,.$$

Siccome la variabile τ del problema trasformato è legata al tempo t

del problema originario dei tre corpi dalla relazione differenziale

$$dt = \frac{d\tau}{U},$$

così, moltiplicando l'identità testè stabilità per $m_\nu^* U$, e designando con un punto sovrapposto le derivate rispetto a t, otteniamo

$$m_\nu^*(x_\nu \dot{y}_\nu - y_\nu \dot{x}_\nu) = 2\,U m_\nu^* \varrho_\nu^2 (\xi_\nu \eta'_\nu - \eta_\nu \xi'_\nu),$$

che, in causa della (2), può essere scritta

$$m_\nu^*(x_\nu \dot{y}_\nu - y_\nu \dot{x}_\nu) = \frac{1}{2}\left(\xi_\nu \frac{\partial T}{\partial \eta'_\nu} - \eta_\nu \frac{\partial T}{\partial \xi'_\nu}\right).$$

La precedente espressione di $\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\gamma}$ assume così l'aspetto

$$\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\gamma} = 2 \sum_0^2 m^*(x_\nu \dot{y}_\nu - y_\nu \dot{x}_\nu).$$

Il sommatorio del secondo membro si può manifestamente risguardare come componente secondo l'asse Oz, perpendicolare al piano dei tre corpi, del vettore

$$\boldsymbol{K} = \sum_0^2{}_\nu\, \boldsymbol{r}_\nu \wedge m_\nu^* \dot{\boldsymbol{r}}_\nu,$$

essendo

$$\boldsymbol{r}_\nu = P_{\nu+2} - P_{\nu+1} \qquad (\nu = 0, 1, 2).$$

Ora è facile stabilire, in generale (qualunque sia il moto, anche non piano, dei tre corpi), che il vettore $\boldsymbol{K}$ suddetto si identifica col momento risultante delle quantità di moto: nè occorre specificare il polo, poichè ritenendosi fisso il baricentro dei tre corpi, è nulla la risultante delle loro quantità di moto.

Per la dimostrazione, basta sfruttare le relazioni che intercedono fra i vettori $\boldsymbol{r}_\nu$, rappresentativi dei lati del triangolo $P_0P_1P_2$, e i raggi vettori

$$P_\nu - O = \boldsymbol{R}_\nu,$$

che riterremo *baricentrali*, immaginando assunta nel baricentro l'origine O degli assi fissi di riferimento.

Si ha anzitutto

$$\boldsymbol{r}_\nu = \boldsymbol{R}_{\nu+2} - \boldsymbol{R}_{\nu+1} ;$$

quindi, sostituendo in $\boldsymbol{K}$,

$$\boldsymbol{K} = \sum_0^2{}_\nu \boldsymbol{R}_{\nu+2} \wedge m_\nu^* \dot{\boldsymbol{r}}_\nu - \sum_0^2{}_\nu \boldsymbol{R}_{\nu+1} \wedge m_\nu^* \dot{\boldsymbol{r}}_\nu .$$

Cambiando, nella prima sommatoria, ν in $\nu+1$, e, nella seconda, ν in $\nu+2$ (in modo da riportare in entrambe il vettore $\boldsymbol{R}$ all'indice ν), si ottiene

$$\boldsymbol{K} = \sum_0^2{}_\nu \boldsymbol{R}_\nu \wedge (m_{\nu+1}^* \dot{\boldsymbol{r}}_{\nu+1} - m_{\nu+2}^* \dot{\boldsymbol{r}}_{\nu+2}) .$$

Ciò posto, si ricordi [R), § 3] che

$$m_\nu \boldsymbol{R}_\nu = m_{\nu+1}^* \boldsymbol{r}_{\nu+1} - m_{\nu+2}^* \boldsymbol{r}_{\nu+2}$$

e si derivi rapporto a t. La sostituzione in $\boldsymbol{K}$ porge

$$\boldsymbol{K} = \sum_0^2{}_\nu \boldsymbol{R}_\nu \wedge m_\nu \dot{\boldsymbol{R}}_\nu ,$$

che è appunto il momento risultante delle quantità di moto dei tre punti P_ν rispetto ad O, c. d. d.

Concludiamo che

$$\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\gamma} = 2K_z = \text{cost.}$$

non è altro che l'integrale delle aree dell'originario problema piano dei tre corpi.

11. - Angoli di Eulero. Interpretazione intrinseca.

Dacchè (§ 2) le configurazioni di S sono in corrispondenza biunivoca coll'insieme (q, orientazione del corpo C), possiamo assumere a coordinate lagrangiane del sistema la stessa q e i tre angoli di EULERO ϑ, φ, ψ, che individuano l'orientazione della terna $Ox_0x_1x_2$ solidale con C.

Dalle note espressioni dei coseni direttori, avvertendo che (per la convenzione fatta di riguardare equivalenti gli indici congrui fra loro rispetto al modulo 3) l'indice zero corrisponde a quello abitualmente designato con 3, si ha

$$(38) \qquad \gamma_1 = \sin\vartheta \sin\varphi\,, \qquad \gamma_2 = \sin\vartheta\cos\varphi\,, \qquad \gamma_0 = \cos\vartheta\,;$$

inoltre

$$\alpha_0 = \sin\vartheta\sin\psi\,, \qquad \beta_0 = -\sin\vartheta\cos\psi\,,$$

le quali, complessivamente, dànno luogo ad una interpretazione dei parametri ϑ, φ, ψ in relazione diretta col triangolo dei tre corpi.

Per quanto concerne ϑ e ψ, vi si perviene, ricordando (§ 1) che le componenti x_0, y_0 del vettore $P_2 - P_1$ sono legate alle corrispondenti ξ_0, η_0 dalle equazioni

$$x_0 = \xi_0^2 - \eta_0^2\,, \qquad y_0 = 2\xi_0\eta_0\,,$$

le quali, per le (7) e per le espressioni surriferite di α_0, β_0, si scrivono

$$x_0 = -q^2\sin^2\vartheta\cos 2\psi\,, \qquad y_0 = -q^2\sin^2\vartheta\sin 2\psi\,.$$

Da queste apparisce che $\sin^2\vartheta = (\sqrt{x_0^2+y_0^2})/q^2$ *si identifica col rapporto fra il lato* $\overline{P_1P_2}$ *e il semiperimetro* q^2 (cfr. § 2) *del triangolo dei tre corpi, mentre* 2ψ *misura l'inclinazione dello stesso lato, più precisamente del vettore* $P_1 - P_2$, *sull'asse delle ascisse*: si intende che si tratta di inclinazione contata, al pari delle anomalie, positivamente nel senso $Ox \rightarrow Oy$,

Il significato dell'angolo φ risulta poi ovviamente dalle (11) e (38). Si ha infatti dalle (11)

$$\gamma_\nu^2 = \frac{q^2 - \varrho_\nu^2}{q^2}\,, \qquad (\nu = 0, 1, 2),$$

donde in particolare

$$\frac{\gamma_1^2}{\gamma_2^2} = \frac{q^2 - \varrho_1^2}{q^2 - \varrho_2^2}\,.$$

Se ne desume, badando alle (38), che $\operatorname{tg}^2\varphi$ *fornisce il rapporto fra gli eccessi del semiperimetro* q^2 *sui due lati* $\overline{P_0P_2}$, $\overline{P_0P_1}$.

12. - Prima forma canonica pura.

Le equazioni del moto del sistema S si possono naturalmente presentare anche nella tipica forma hamiltoniana, assumendo come funzioni incognite [anzichè le q, γ_ν, p, Ω_ν delle (I)] quattro coordinate lagrangiane e le loro coniugate.

Assumeremo per coordinate q, ϑ, φ, ψ, ricordando, poichè ne avremo bisogno tra un momento, le classiche espressioni delle componenti della velocità angolare in funzione degli angoli di EULERO e loro derivate prime. Esse sono

$$(39) \qquad \begin{cases} \omega_1 = \quad \vartheta' \cos\varphi + \psi'\gamma_1 , \\ \omega_2 = -\vartheta' \sin\varphi + \psi'\gamma_2 , \\ \omega_0 = \qquad\qquad\quad \psi'\gamma_0 + \varphi' , \end{cases}$$

le γ avendo, ben si intende, i valori (38).

Per introdurre le coniugate

$$p\,, \quad p_\vartheta\,, \quad p_\varphi\,, \quad p_\psi$$

dei quattro parametri

$$q\,, \quad \vartheta\,, \quad \varphi\,, \quad \psi\,,$$

conviene immaginare la forza viva T espressa mediante i parametri e loro derivate q', ϑ', φ', ψ'; dopo di che

$$p = \frac{\partial T}{\partial q'}\,, \qquad p_\vartheta = \frac{\partial T}{\partial \vartheta'}\,, \qquad p_\varphi = \frac{\partial T}{\partial \varphi'}\,, \qquad p_\psi = \frac{\partial T}{\partial \psi'}\,.$$

Una tale espressione di T si può risguardare proveniente dalla $T(q, \gamma_\nu; q', \omega_\nu)$ del § 4, intendendovi le γ_ν, ω_ν sostituite dai loro valori (38), (39). Dacchè in queste formule non c'è traccia di q', si vede, intanto, che la coniugata di q coincide colla p dei §§ antecedenti [definita dalla prima delle (14)].

Si ha poi

$$p_\vartheta = \sum_0^2{}_\nu \frac{\partial T}{\partial \omega_\nu} \frac{\partial \omega_\nu}{\partial \vartheta'}\,, \quad \text{ecc.},$$

ossia, esplicitando in base alle (38) e ricordando la definizione (14) delle Ω_ν,

$$(40) \qquad \begin{cases} p_\vartheta = \cos\varphi\, \Omega_1 - \sin\varphi\, \Omega_2\,, \\ p_\varphi = \Omega_0\,, \\ p_\psi = \gamma_0\Omega_0 + \gamma_1\Omega_1 + \gamma_2\Omega_2 = \mathbf{\Omega} \times \boldsymbol{\gamma}\,, \end{cases}$$

le quali, risolute rapporto ad Ω_1, Ω_2, Ω_0, ove si ponga per brevità

$$\tilde{\omega} = \frac{p_\psi - p_\varphi \cos\vartheta}{\sin\vartheta}, \tag{41}$$

dànno

$$\begin{cases} \Omega_1 = \quad p_\vartheta \cos\varphi + \tilde{\omega}\sin\varphi, \\ \Omega_2 = - p_\vartheta \sin\varphi + \tilde{\omega}\cos\varphi, \\ \Omega_0 = \quad p_\varphi . \end{cases} \tag{42}$$

Si ha ormai tutto quanto occorre per formare la funzione caratteristica H del sistema hamiltoniano negli otto argomenti

$$\begin{gathered} q, \quad \vartheta, \quad \varphi, \quad \psi, \\ p, \quad p_\vartheta, \quad p_\varphi, \quad p_\psi . \end{gathered}$$

Essa è notoriamente l'energia totale $T - E/U$, o, se si vuole,

$$H = \Theta - \frac{E}{U}, \tag{15}$$

in cui si abbia cura di fare apparire esclusivamente gli otto argomenti suindicati.

Ponendo mente all'espressione (31) di Θ [e considerando, ben si intende, le ϱ_ν come date dalle (11), e le γ_ν dalle (38)], l'unica operazione che resti da fare è la sostituzione, in H, delle Ω_ν mediante le (42): va da sè che il vettore $\mathbf{X}$ deve preventivamente ritenersi espresso per $\mathbf{\Omega}$, a norma della (30).

Se si nota che nè l'espressione di H, da cui si parte, nè le (38), nè le (42) contengono esplicitamente ψ, si può anche affermare *a priori* che l'espressione finale di H sarà esente da ψ. Questa è dunque, come dicono gli inglesi, una coordinata ignorabile, e, dall'essere $\partial H/\partial\psi = 0$, segue che il sistema canonico di funzione caratteristica H ammette l'integrale

$$p_\psi = \text{cost}.$$

In virtù della terza delle (40), questo integrale non è che la nuova forma assunta dall'integrale delle aree

$$\mathbf{\Omega} \times \boldsymbol{\gamma} = 2K_z = \text{cost}.$$

Vale la pena di notare che, in questo modo, può ritenersi automaticamente compiuta anche la riduzione del problema piano dei tre corpi a tre soli gradi di libertà, sfruttando i suoi tre integrali cardinali delle quantità di moto e delle aree. Infatti, nel problema trasformato, già si trova eseguita la riduzione corrispondente ai due integrali delle quantità di moto. L'ulteriore abbassamento di un grado di libertà (da quattro a tre, cioè dall'ottavo al sesto ordine) si ha considerando, in H, la p_ψ come una costante arbitraria e limitando in conformità il sistema canonico di funzione caratteristica H alle tre coppie di variabili coniugate,

$$\begin{matrix} q, & \vartheta, & \varphi, \\ p, & p_\vartheta, & p_\varphi. \end{matrix}$$

Ulteriore conseguenza delle formule precedenti, di cui trarremo partito più avanti, è un'espressione vettoriale del binomio $p_\vartheta d\vartheta + p_\varphi d\varphi$. Per ricavarla, partiamoci dal prodotto

$$\boldsymbol{\gamma} \wedge \boldsymbol{\Omega} \times d\boldsymbol{\gamma},$$

ossia dal determinante

$$\begin{vmatrix} \gamma_0 & \gamma_1 & \gamma_2 \\ \Omega_0 & \Omega_1 & \Omega_2 \\ d\gamma_0 & d\gamma_1 & d\gamma_2 \end{vmatrix}.$$

Sostituendovi i differenziali delle $\boldsymbol{\gamma}_\nu$ coi loro valori derivanti dalle (38), si ha

$$d\vartheta \begin{vmatrix} \gamma_0 & \gamma_1 & \gamma_2 \\ \Omega_0 & \Omega_1 & \Omega_2 \\ -\sin\vartheta & \cos\vartheta \sin\varphi & \cos\vartheta\cos\varphi \end{vmatrix} + d\varphi \begin{vmatrix} \gamma_0 & \gamma_1 & \gamma_2 \\ \Omega_0 & \Omega_1 & \Omega_2 \\ 0 & \gamma_2 & -\gamma_1 \end{vmatrix},$$

da cui, sviluppando i due determinanti (secondo gli elementi della seconda riga) e badando alle (38), viene

$$(\Omega_1 \cos\varphi - \Omega_2 \sin\varphi)\, d\vartheta + \{\Omega_0(1-\gamma_0^2) - \Omega_1\gamma_0\gamma_1 - \Omega_2\gamma_0\gamma_2\}\, d\varphi .$$

Ne risulta, in virtù delle (40),

$$\boldsymbol{\gamma} \wedge \boldsymbol{\Omega} \times d\boldsymbol{\gamma} = p_\vartheta d\vartheta + p_\varphi d\varphi - \gamma_0 p_\psi d\varphi .$$

Isoliamo il binomio $p_\vartheta d\vartheta + p_\varphi d\varphi$, e notiamo che il $d\varphi$, fornito dalle (38),

$$d\varphi = \frac{\gamma_2 d\gamma_1 - \gamma_1 d\gamma_2}{1 - \gamma_0^2},$$

si può presentare sotto la forma

$$\frac{1}{1-\gamma_0^2}\begin{vmatrix} \gamma_0 & \gamma_1 & \gamma_2 \\ 1 & 0 & 0 \\ d\gamma_0 & d\gamma_1 & d\gamma_2 \end{vmatrix}.$$

Dacchè 1, 0, 0 sono le componenti del vettore unitario $\boldsymbol{u}_0$, il determinante si identifica col prodotto

$$\boldsymbol{\gamma} \wedge \boldsymbol{u}_0 \times d\boldsymbol{\gamma},$$

e si ha infine

$$p_\vartheta d\vartheta + p_\varphi d\varphi = \boldsymbol{\gamma} \wedge \boldsymbol{\Omega}^* \times d\boldsymbol{\gamma}, \tag{43}$$

essendosi posto per brevità

$$\boldsymbol{\Omega}^* = \boldsymbol{\Omega} + \frac{\gamma_0}{1-\gamma_0^2} p_\varphi \boldsymbol{u}_0 . \tag{44}$$

13. - Osservazione elementare di calcolo vettoriale.

Suppongasi che un vettore (incognito) $\boldsymbol{R}$ verifichi le due equazioni

$$\begin{cases} \boldsymbol{\gamma} \wedge \boldsymbol{R} = \boldsymbol{A}, \\ \boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{R} = a, \end{cases} \tag{45}$$

essendo assegnati i vettori $\boldsymbol{\gamma}$ ed $\boldsymbol{A}$, e lo scalare a: si intende che $\boldsymbol{\gamma}$ ed $\boldsymbol{A}$ debbono ottemperare alla condizione

$$\boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{A} = 0, \tag{46}$$

necessaria perchè possa sussistere la prima delle (45).

Vogliamo mostrare che, ritenuto $\gamma^2 = 1$, risulta univocamente

$$\boldsymbol{R} = a\boldsymbol{\gamma} + \boldsymbol{A} \wedge \boldsymbol{\gamma} . \tag{47}$$

All'uopo basta rilevare:

1) che l'espressione (47) di $\boldsymbol{R}$ soddisfa effettivamente alle (45);

2) che non possono esistere altre soluzioni $\boldsymbol{R}^*$ distinte dalla (47).

La prima verificazione è immediata, purchè si tenga conto, nel formare $\boldsymbol{\gamma} \wedge \boldsymbol{R}$, che si ha identicamente

$$\boldsymbol{\gamma} \wedge (\boldsymbol{A} \wedge \boldsymbol{\gamma}) = \boldsymbol{A} - (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{\gamma})\boldsymbol{\gamma},$$

e che l'ultimo termine è nullo, in virtù della (46).

Quanto all'unicità della soluzione, essa risulta dalla circostanza che la differenza $\boldsymbol{R} - \boldsymbol{R}^*$, ove non fosse nulla, dovrebbe essere ad un tempo parallela e perpendicolare al vettore $\boldsymbol{\gamma}$, per ipotesi $\neq 0$; parallela, perchè avrebbe nullo il prodotto vettoriale per $\boldsymbol{\gamma}$; perpendicolare, perchè avrebbe nullo anche il prodotto scalare, c. d. d.

14. - Coordinate simmetriche. Seconda forma canonica.

La relazione delle posizioni di S coll'orientazione di un corpo rigido ci ha portati naturalmente ad assumere i tre angoli di Eulero ϑ, φ, ψ come altrettante coordinate lagrangiane del nostro sistema, la quaderna essendo completata da q. Questi parametri, pur avendo (§ 9) una stretta relazione col triangolo dei tre corpi, difettano di simmetria.

Si rimedia a questo inconveniente, conservando ψ e associandogli la terna

$$\zeta_0 = q\gamma_0, \qquad \zeta_1 = q\gamma_1, \qquad \zeta_2 = q\gamma_2, \tag{48}$$

che, in base alle (38), risulta manifestamente costituita da combinazioni indipendenti di q, ϑ, φ.

Ove si risguardino le ζ_ν quali componenti (secondo gli assi mobili $Ox_0x_1x_2$) del vettore

$$\boldsymbol{\zeta} = q\boldsymbol{\gamma}, \tag{48'}$$

si può dire che ψ e $\boldsymbol{\zeta}$ (angolo e vettore completamente indipendenti) determinano in modo univoco la configurazione di S.

Le ζ_ν, in base alla loro definizione e alle (11), sono legate al triangolo dei tre corpi dalle relazioni semplicissime

$$\zeta_\nu^2 = q^2\gamma_\nu^2 = q^2 - q^2(1 - \gamma_\nu^2) = q^2 - \varrho_\nu^2 = q^2 - r_\nu \qquad (\nu = 0, 1, 2); \tag{49}$$

esse rappresentano dunque, coi loro quadrati, i tre eccessi del semiperimetro sui lati.

Dalle (49), sommando, si trae

$$q^2 = \sum_0^2{}_\nu \zeta_\nu^2 ,$$

con che

$$(49') \qquad r_\nu = \varrho_\nu^2 = q^2 - \zeta_\nu^2 = \zeta_{\nu+1}^2 + \zeta_{\nu+2}^2 .$$

Si è già osservato che le nuove coordinate ζ_ν sono combinazioni di q, ϑ, φ, esenti da ψ. Perciò, anche nel nuovo sistema, la coniugata p_ψ di ψ è quella di prima. Per assegnare le coniugate Z_ν delle nuove variabili ζ_ν, giova appoggiarsi sulla circostanza che la trasformazione fra le due sestuple $(q, \vartheta, \varphi; p, p_\vartheta, p_\varphi)$, (ζ_ν, Z_ν) deve risultare canonica e quindi verificare la condizione caratteristica

$$\sum_0^2{}_\nu Z_\nu d\zeta_\nu = p\,dq + p_\vartheta d\vartheta + p_\varphi d\varphi .$$

Il secondo membro, badando all'identità $\boldsymbol{\gamma}\times\boldsymbol{\gamma} = 1$ e alle (48') e (43), si scrive

$$\frac{1}{q}\,(pq\boldsymbol{\gamma}\times\boldsymbol{\gamma}\,dq + \boldsymbol{\gamma}\wedge\boldsymbol{\Omega}^*\times q\,d\boldsymbol{\gamma}) .$$

In entrambi i termini si può mettere in evidenza il fattore $d\boldsymbol{\zeta}$. Infatti, a norma della (48'),

$$d\boldsymbol{\zeta} = q\,d\boldsymbol{\gamma} + \boldsymbol{\gamma}\,dq ;$$

e quindi

$$\boldsymbol{\gamma}\times d\boldsymbol{\zeta} = \boldsymbol{\gamma}\times\boldsymbol{\gamma}\,dq ,$$

in virtù dell'identità $\boldsymbol{\gamma}\times d\boldsymbol{\gamma} = 0$; mentre, per la perpendicolarità fra $\boldsymbol{\gamma}\wedge\boldsymbol{\Omega}^*$ e $\boldsymbol{\gamma}$, segue

$$\boldsymbol{\gamma}\wedge\boldsymbol{\Omega}^*\times d\boldsymbol{\zeta} = \boldsymbol{\gamma}\wedge\boldsymbol{\Omega}^*\times q\,d\boldsymbol{\gamma} .$$

Ne consegue

$$\sum_0^2{}_\nu Z_\nu d\zeta_\nu = \frac{1}{q}\,(pq\boldsymbol{\gamma} + \boldsymbol{\gamma}\wedge\boldsymbol{\Omega}^*)\times d\boldsymbol{\zeta} .$$

Eguagliando i coefficienti dei singoli $d\zeta_\nu$ nei due membri, si ricava la *espressione cercata delle* Z_ν: *esse si identificano con le componenti del vettore*

$$\frac{1}{q}(pq\boldsymbol{\gamma} + \boldsymbol{\gamma} \wedge \boldsymbol{\Omega}^*) .$$

Compendiando a loro volta le Z_ν in un vettore $\boldsymbol{Z}$, si ha

$$\boldsymbol{Z} = \frac{1}{q}(pq\boldsymbol{\gamma} + \boldsymbol{\gamma} \wedge \boldsymbol{\Omega}^*) . \tag{50}$$

Non è questa ancora la forma che giova, per introdurre nella quadrica Θ gli argomenti $\boldsymbol{Z}$, p_ψ. Ma vi si arriva subito, ricordando le (30) e (44), che dànno

$$\boldsymbol{Z} = \frac{1}{q}\left(\boldsymbol{X} + \frac{\gamma_0 p_\varphi}{1-\gamma_0^2}\boldsymbol{\gamma} \wedge \boldsymbol{u}_0\right),$$

ossia

$$\boldsymbol{X} = q\boldsymbol{Z} - \frac{\gamma_0 p_\varphi}{1-\gamma_0^2}\boldsymbol{\gamma} \wedge \boldsymbol{u}_0 . \tag{51}$$

Coll'intesa che q e le γ_ν si risguardino funzioni delle ζ_ν a norma delle (48) [o (48′)], la (51) ci porge l'espressione di $\boldsymbol{X}$ nelle variabili trasformate. Resta da procurarsi l'analoga espressione di $\boldsymbol{\Omega}$, dopodichè la trasformazione di Θ potrà ritenersi compiuta, in base alla (31).

Per ricavare $\boldsymbol{\Omega}$ nella forma desiderata, basta associare l'equazione (50) all'ultima delle (40),

$$\boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\Omega} = p_\psi .$$

Assumendo provvisoriamente come incognita $\boldsymbol{\Omega}^* = \boldsymbol{\Omega} + (\gamma_0 p_\psi/1-\gamma_0^2)\boldsymbol{u}_0$, le dette due equazioni si possono scrivere

$$\begin{cases} \boldsymbol{\gamma} \wedge \boldsymbol{\Omega}^* = q\boldsymbol{Z} - pq\boldsymbol{\gamma} , \\ \boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\Omega}^* = p_\varphi + \dfrac{\gamma_0^2 p_\varphi}{1-\gamma_0^2} = \dfrac{1}{1-\gamma_0^2}\, p_\varphi . \end{cases}$$

Per la formula (47) del § precedente, ne ricaviamo

$$\boldsymbol{\Omega}^* = \frac{p_\varphi}{1-\gamma_0^2}\boldsymbol{\gamma} + q\boldsymbol{Z} \wedge \boldsymbol{\gamma} ,$$

da cui, riponendo per $\mathbf{\Omega}^*$ il suo valore (44) e sostituendo, nel primo addendo, per $\boldsymbol{\gamma}$, il trinomio $\gamma_0\boldsymbol{u}_0 + \gamma_1\boldsymbol{u}_1 + \gamma_2\boldsymbol{u}_2$, risulta

$$\mathbf{\Omega} = q\boldsymbol{Z} \wedge \boldsymbol{\gamma} + \frac{p_\psi}{1-\gamma_0^2}(\gamma_1\boldsymbol{u}_1 + \gamma_2\boldsymbol{u}_2)\,. \tag{52}$$

15. - Coordinate asteroidiche. Terza forma canonica.

Per passare utilmente al caso limite in cui una delle masse — diciamo m_0 — è trascurabile di fronte alle altre due, conviene abbandonare la simmetria rispetto a tutti i tre corpi, pur conservandola rispetto ai due di massa finita P_1, P_2. Appare all'uopo indicata una piccola modificazione della quaderna ζ_ν, ψ, consistente nel sostituire a ζ_1, ζ_2 le combinazioni ϱ, φ definite da

$$\zeta_1 = \varrho \sin\varphi\,, \qquad \zeta_2 = \varrho\cos\varphi\,, \tag{53}$$

senza toccare nè ζ_0, nè ψ.

Il significato geometrico delle nuove variabili ϱ, φ segue senz'altro dalle (48) e (49'). *L'angolo φ è ancora quello che figura nella terna euleriana* [essendo, per le (53) e (38), $\sin\varphi$, $\cos\varphi$ proporzionali a γ_1, γ_2, con fattore di proporzionalità positivo]; *e $\varrho^2 = \zeta_1^2 + \zeta_2^2$ si identifica col lato* $\varrho_0^2 = r_0 = \overline{P_1P_2}$.

Quanto alle coordinate non trasformate, va da sè che la ψ è ancora uno degli argomenti euleriani, 2ψ rappresentando (§ 9) l'inclinazione del lato P_2P_1 (nel verso da P_2 a P_1), mentre (§ 14) $\zeta_0 = \sqrt{q^2 - r_0}$.

Chiameremo *asteroidica* la quaderna ζ_0, ϱ, φ, ψ.

Importa notare che, dalla prima delle (48), si ha

$$\zeta_0 = q\gamma_0 = q\cos\vartheta\,,$$

e dalla prima delle (49)

$$\zeta_0^2 = q^2 - \varrho_0^2 = q^2 - \varrho^2\,,$$

donde, senza ambiguità, dacchè $\sin\vartheta > 0$,

$$\varrho = q\sin\vartheta\,.$$

Ne consegue che la quaderna asteroidica differisce (non soltanto dalla simmetrica, ma anche) dalla prima quaderna di coordinate lagrangiane q, ϑ, φ, ψ per una semplice trasformazione binaria, e precisamente per la sostituzione della coppia

$$q\,, \quad \vartheta$$

con

$$\zeta_0 = q\cos\vartheta\,, \qquad \varrho = q\sin\vartheta\,.$$

Dacchè φ rimane inalterata e non interviene nelle nuove combinazioni ζ_0, ϱ, rimarrà pure inalterata la coniugata p_φ: questa si identifica pertanto con Ω_0, a norma della terza delle (42). Del resto, considerando insieme le coniugate p_ϱ, p_φ, le possiamo esprimere in termini delle variabili simmetriche ζ_1, ζ_2 e loro coniugate Z_1, Z_2, desumendole dalla condizione differenziale di canonicità (della trasformazione fra ζ_1, ζ_2, Z_1, Z_2 e ϱ, φ, p_ϱ, p_φ)

$$p_\varrho d\varrho + p_\varphi d\varphi = Z_1 d\zeta_1 + Z_2 d\zeta_2\,.$$

Introducendo per $d\zeta_1$, $d\zeta_2$ i valori forniti dalle (53) ed eguagliando i coefficienti di $d\varrho$, $d\varphi$ nei due membri, risulta

$$\text{(54)} \qquad \begin{cases} p_\varrho = \sin\varphi\, Z_1 + \cos\varphi\, Z_2\,, \\ p_\varphi = \varrho(\cos\varphi\, Z_1 - \sin\varphi\, Z_2)\,, \end{cases}$$

da cui

$$\text{(54')} \qquad \begin{cases} Z_1 = \sin\varphi\, p_\varrho + \dfrac{\cos\varphi}{\varrho}\, p_\varphi\,, \\[2ex] Z_2 = \cos\varphi\, p_\varrho - \dfrac{\sin\varphi}{\varrho}\, p_\varphi\,. \end{cases}$$

Queste ultime formule, unitamente alle (53), esprimono in definitiva le due coppie coniugate $\begin{pmatrix}\zeta_1 & \zeta_2\\ Z_1 & Z_2\end{pmatrix}$ del sistema simmetrico, mediante le due del sistema asteroidico $\begin{pmatrix}\varrho & \varphi\\ p_\varrho & p_\varphi\end{pmatrix}$. Ove si trasformino per loro mezzo le (51), (52), sottointendendo ulteriormente che

$$\text{(55)} \qquad \begin{cases} q = \sqrt{\zeta_0^2 + \varrho^2} \text{ (col valore aritmetico del radicale)}\,, \\ \gamma_0 = \dfrac{\zeta_0}{q}\,, \qquad \gamma_1 = \dfrac{\varrho}{q}\sin\varphi\,, \qquad \gamma_2 = \dfrac{\varrho}{q}\cos\varphi\,, \end{cases}$$

si è in grado di fare il calcolo effettivo della Θ, e quindi della funzione caratteristica H nelle nuove variabili.

Per aver in pronto tutti gli elementi del calcolo, trascriviamo qui appresso le espressioni di $\mathbf{X}$ e di $\mathbf{\Omega}$ derivanti dalle (51), (52):

$$(56)\qquad \begin{cases} X_0 = qZ_0\,, \\ X_1 = \quad q\sin\varphi\, p_\varrho + \dfrac{q}{\varrho}\cos\varphi\, p_\varphi - \dfrac{\zeta_0}{\varrho}\cos\varphi\, p_\psi\,, \\ X_2 = \quad q\cos\varphi\, p_\varrho - \dfrac{q}{\varrho}\sin\varphi\, p_\varphi + \dfrac{\zeta_0}{\varrho}\sin\varphi\, p_\psi\,; \end{cases}$$

$$(57)\qquad \begin{cases} \Omega_0 = \qquad p_\varphi \\ \Omega_1 = -\varrho\cos\varphi\, Z_0 + \zeta_0\cos\varphi\, p_\varrho - \dfrac{\zeta_0}{\varrho}\sin\varphi\, p_\varphi + \dfrac{q}{\varrho}\sin\varphi\, p_\psi\,, \\ \Omega_2 = \quad \varrho\sin\varphi\, Z_0 - \zeta_0\sin\varphi\, p_\varrho - \dfrac{\zeta_0}{\varrho}\cos\varphi\, p_\varphi + \dfrac{q}{\varrho}\cos\varphi\, p_\psi\,. \end{cases}$$

Intesi che q va considerato come abbreviazione di $\sqrt{\zeta_0^2+\varrho^2}$, nei secondi membri compariscono, come si richiede per la sostituzione in H, soltanto coordinate asteroidiche e coniugate relative.

NOTA III (1).

CASO LIMITE IN CUI UNA DELLE MASSE È INFINITESIMA.

Ibidem, vol. XXIV$_2$ (1915$_2$),

pp. 553-569.

16. - Richiami concernenti il problema ristretto e le sue trasformazioni in coordinate isoterme.

Facciamo una breve digressione sul problema ristretto nella sua impostazione abituale, al fine di agevolare il confronto colle formule, che dedurremo poi per il problema regolarizzato, nel caso limite di m_0 infinitesimo.

Rammentiamo in conformità che, quando la massa di P_0 è trascurabile, P_1 e P_2 possono ruotare uniformemente attorno al loro comune centro di gravità O con velocità angolare n, legata alle masse e alla distanza $\overline{P_1P_2} = \varrho^2$ dalla nota relazione

$$n^2 = \frac{f(m_1 + m_2)}{\varrho^6} \qquad (f \text{ costante d'attrazione}).$$

In questa ipotesi, si tratta di determinare il moto della massa infinitesima P_0, attratta dai due centri mobili P_1, P_2 secondo la legge di NEWTON. La corrispondente funzione delle forze $U^{(1)}$, riferita all'unità di massa (essendo colle nostre notazioni, $\overline{P_0P_1} = \varrho_2^2$, $\overline{P_0P_2} = \varrho_1^2$), vale

$$U^{(1)} = f\left(\frac{m_1}{\varrho_2^2} + \frac{m_2}{\varrho_1^2}\right). \tag{58}$$

Detta $\boldsymbol{a}$ l'accelerazione assoluta di P_0, si ha, dalla legge fondamentale della meccanica,

$$\boldsymbol{a} = \operatorname{grad} U^{(1)}.$$

(1) Pervenuta all'Accademia il 30 settembre 1915.

Riferiamo il moto ad un sistema di assi Oxy uniformemente ruotanti assieme coi corpi P_1, P_2, coll'origine nel baricentro O (punto fisso), e orientati in guisa che il verso di rotazione $x \to y$ coincida con quello dei due corpi.

Per il teorema di Coriolis, le componenti dell'accelerazione $\boldsymbol{a}$ rispetto a questi assi hanno le espressioni

$$a_x = \ddot{x} - 2n\dot{y} - n^2 x ,$$

$$a_y = \ddot{y} + 2n\dot{x} - n^2 y ,$$

designando evidentemente x, y le coordinate del corpo P_0, e il punto sovrapposto derivazione rispetto al tempo t.

Le equazioni cartesiane del moto di P_0 sono pertanto

$$\begin{cases} \ddot{x} - 2n\dot{y} - n^2 x = \dfrac{\partial U^{(1)}}{\partial x} , \\[2mm] \ddot{y} + 2n\dot{x} - n^2 y = \dfrac{\partial U^{(1)}}{\partial y} , \end{cases}$$

cui si attribuisce notoriamente forma canonica, introducendo le ausiliarie (componenti della velocità assoluta di P_0)

$$p_x = \dot{x} - ny , \qquad p_y = \dot{y} + nx .$$

Si ha infatti, da queste stesse posizioni,

$$\dot{x} = p_x + ny , \qquad \dot{y} = p_y - nx ,$$

mentre, col tenerne conto, le precedenti equazioni del moto si possono scrivere

$$\frac{dp_x}{dt} = \frac{\partial U^{(1)}}{\partial x} + np_y , \qquad \frac{dp_y}{dt} = \frac{\partial U^{(1)}}{dy} - np_x .$$

I secondi membri sono ordinatamente le derivate rapporto a p_x, p_y, e le derivate rapporto ad x, y cambiate di segno della funzione

$$F = \tfrac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2) - n(xp_y - yp_x) - U^{(1)} .$$

Perciò le quattro equazioni costituiscono complessivamente un sistema canonico di funzione caratteristica F, essendo coniugate x, p_x; y, p_y.

Supposto, per fissare le idee, che l'asse Ox sia diretto verso P_1, le ascisse di P_1, P_2 sono rispettivamente

$$\frac{m_2}{m_1+m_2}\varrho^2\,, \qquad -\frac{m_1}{m_1+m_2}\varrho^2\,;$$

l'ascissa del loro punto medio M è quindi espressa da

$$l=\frac{1}{2}\frac{m_2-m_1}{m_1+m_2}\varrho^2\,. \tag{59}$$

Trasportando l'origine da O in M (sempre coll'asse delle x diretto verso P_1), l'ordinata y e le componenti p_x, p_y della velocità assoluta rimangono inalterate, mentre l'ascissa x va posta eguale a $x+l$. Con questa sostituzione, la precedente espressione di F diviene

$$F=\tfrac{1}{2}(p_x^2+p_y^2)-n(xp_y-yp_x)-nlp_y-U^{(1)}\,. \tag{60}$$

Ecco la funzione caratteristica del problema ristretto, riferito ad assi mobili *coll'origine nel punto medio delle masse finite.*

Si può assegnare in modo semplice una trasformazione *canonica*, mediante cui si sostituiscono alle coordinate cartesiane x, y (e loro coniugate p_x, p_y) coordinate isoterme qualisivogliano u, v (con convenienti p_u, p_v).

Sia infatti

$$x+iy=f(u+iv)\,, \tag{61}$$

con f funzione regolare arbitraria dell'argomento $u+iv$, il legame complesso che compendia le formule di trasformazione fra le coordinate cartesiane x, y e le coordinate curvilinee u, v: si intende che, per la biunivocità della trasformazione, va ritenuta diversa da zero (nel campo di valori che si considerano) la derivata $f'(u+iv)$, con che si può invertire la (61), ricavandone $u+iv$ quale funzione di $x+iy$.

Fra i differenziali delle due coppie di variabili sussiste la relazione

$$dx+i\,dy=f'(u+iv)\,(du+i\,dv)\,, \tag{62}$$

e quindi, anche, cambiando i in $-i$,

$$dx-i\,dy=f'(u-iv)\,(du-i\,dv)\,. \tag{62'}$$

Se ora si pone

$$p_x + ip_y = \frac{1}{f'(u - iv)}(p_u + ip_v), \tag{63}$$

con che rimangono manifestamente definite le due quantità reali p_u, p_v in funzione lineare di p_x, p_y, si ha complessivamente nelle (61) e (63) una trasformazione fra le due quaderne (x, y, p_x, p_y), (u, v, p_u, p_v), la quale risulta canonica perchè dà luogo all'identità

$$p_x dx + p_y dy = p_u du + p_v dv .$$

La verificazione è immediata, bastando moltiplicare membro a membro la (63) e la (62'), il che dà

$$(p_x + ip_y)(dx - i\,dy) = (p_u + ip_v)(du - i\,dv) .$$

L'eguaglianza delle parti reali si traduce appunto nella relazione caratteristica della canonicità.

Rileviamo ancora una conseguenza delle (61), (63), che si ottiene moltiplicandole membro a membro, ed è

$$\begin{aligned}(p_x + ip_y)(x - iy) &= \frac{f(u - iv)}{f'(u - iv)}(p_u + ip_v) \\ &= \frac{f(u - iv)f'(u + iv)}{|f'|^2}(p_u + ip_v) .\end{aligned} \tag{64}$$

17. - Applicazione alle coordinate ellittiche.

Assumiamo in particolare

$$x + iy = \tfrac{1}{2}\varrho^2 \cosh(u + iv), \tag{65}$$

le x, y essendo le coordinate cartesiane coll'origine in M, di cui al § precedente. Con ciò le u, v rappresentano notoriamente coordinate ellittiche, le linee $u =$ cost. essendo ellissi e le $v =$ cost. iperboli omofocali: i fuochi comuni cadono nei due punti $\pm\frac{1}{2}\varrho^2$ dell'asse delle ascisse, cioè, nel caso nostro, in P_1, P_2.

Le espressioni delle distanze focali $\overline{P_0P_2}$, $\overline{P_0P_1}$, che, secondo le notazioni dei §§ precedenti, vanno ordinatamente designate con ϱ_1^2, ϱ_2^2, si ottengono tosto dalla (65), aggiungendo ad entrambi i membri $\pm\frac{1}{2}\varrho^2$, e prendendo i moduli. Si trova così

(66) $$\varrho_1^2 = \varrho^2 \left|\cosh \tfrac{1}{2}(u + iv)\right|^2 , \qquad \varrho_2^2 = \varrho^2 \left|\sinh \tfrac{1}{2}(u + iv)\right|^2 .$$

Si ha poi, considerando la (65), e scrivendo brevemente f, f' per $f(u + iv)$, $f'(u + iv)$:

$$f = \tfrac{1}{2}\varrho^2 \cosh (u + iv) ,$$

$$f' = \tfrac{1}{2}\varrho^2 \sinh (u + iv) ,$$

$$|f'|^2 = \tfrac{1}{4}\varrho^4 |\sinh (u + iv|^2 = \varrho^4 \left|\sinh \tfrac{1}{2}(u + iv)\right|^2 \left|\cosh \tfrac{1}{2}(u + iv)\right|^2 ,$$

e quindi, badando alle (66),

(67) $$|f'|^2 = \varrho_1^2 \varrho_2^2 .$$

Con questa determinazione di $|f'|^2$, la (63), eguagliando il quadrato dei moduli dei due membri, porge

(68) $$p_x^2 + p_y^2 = \frac{1}{\varrho_1^2\varrho_2^2} (p_u^2 + p_v^2) .$$

Ove si noti che, per $f = \frac{1}{2}\varrho^2 \cosh (u + iv)$, si ha ulteriormente

$$\begin{aligned} f(u - iv)f'(u + iv) &= \tfrac{1}{4}\varrho^4 \cosh (u - iv) \sinh (u + iv) \\ &= \tfrac{1}{8}\varrho^4 (\sinh 2u + i \sin 2v) , \end{aligned}$$

dalla (64), eguagliando i coefficienti di i, ricaviamo

$$xp_y - yp_x = \frac{1}{8} \frac{\varrho^4}{\varrho_1^2\varrho_2^2} (\sin 2v \cdot p_u + \sinh 2u \cdot p_v) .$$

Infine dalla (63), scritta

$$p_x + ip_y = \frac{f'(u + iv)}{|f'|^2} (p_u + ip_v) ,$$

segue

$$p_y = \frac{1}{2} \frac{\varrho^2}{\varrho_1^2\varrho_2^2} (\cosh u \sin v \cdot p_u + \sinh u \cos v \cdot p_v) .$$

Ne deduciamo, badando alla (59),

$$n(xp_y - yp_x) + nlp_y$$
$$= \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} n \left\{ \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right)(xp_y - yp_x) + \left(\frac{1}{m_1} - \frac{1}{m_2} \right) \frac{1}{2} \varrho^2 p_y \right\}$$
$$= \frac{1}{4} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} n \frac{\varrho^4}{\varrho_1^2 \varrho_2^2} \left[\sin v \left\{ \frac{1}{m_1} (\cosh u + \cos v) - \frac{1}{m_2} (\cosh u - \cos v) \right\} p_u \right.$$
$$\left. + \sinh u \left\{ \frac{1}{m_1} (\cosh u + \cos v) + \frac{1}{m_2} (\cosh u - \cos v) \right\} p_v \right].$$

Quest'ultima relazione, ove si noti che, per le (66), è

$$(66') \quad \left\{ \begin{aligned} \varrho_1^2 &= \varrho^2 \left| \cosh \frac{u}{2} \cos \frac{v}{2} - i \sinh \frac{u}{2} \sin \frac{v}{2} \right|^2 \\ &= \varrho^2 \left(\cosh^2 \frac{u}{2} \cos^2 \frac{v}{2} + \sinh^2 \frac{u}{2} \sin^2 \frac{v}{2} \right) \\ &= \varrho^2 \left(\cosh^2 \frac{u}{2} - \sin^2 \frac{v}{2} \right) = \frac{1}{2} \varrho^2 (\cosh u + \cos v) , \\ \varrho_2^2 &= \varrho^2 \left| \sinh \frac{u}{2} \cos \frac{v}{2} + i \cosh \frac{u}{2} \sin \frac{v}{2} \right|^2 \\ &= \varrho^2 \left(\sinh^2 \frac{u}{2} \cos^2 \frac{v}{2} + \cosh^2 \frac{u}{2} \sin^2 \frac{v}{2} \right) \\ &= \varrho^2 \left(\cosh^2 \frac{u}{2} - \cos^2 \frac{v}{2} \right) = \frac{1}{2} \varrho^2 (\cosh u - \cos v) , \end{aligned} \right.$$

si scrive più semplicemente

$$(69) \quad n(xp_y - yp_x) + nlp_y$$
$$= \frac{1}{2} n \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \frac{\varrho^2}{\varrho_1^2 \varrho_2^2} \left\{ \sin v \left(\frac{\varrho_1^2}{m_1} - \frac{\varrho_2^2}{m_2} \right) p_u + \sinh u \left(\frac{\varrho_1^2}{m_1} + \frac{\varrho_2^2}{m_2} \right) p_v \right\}.$$

Le formole (68) e (69) conducono immediatamente all'espressione trasformata della funzione caratteristica:

$$(70) \quad F = \frac{1}{2 \varrho_1^2 \varrho_2^2} \left[p_u^2 + p_v^2 - n \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \varrho^2 \left\{ \sin v \left(\frac{\varrho_1^2}{m_1} - \frac{\varrho_2^2}{m_2} \right) p_u + \right. \right.$$
$$\left. \left. + \sinh u \left(\frac{\varrho_1^2}{m_1} + \frac{\varrho_2^2}{m_2} \right) p_v \right\} \right] - U^{(1)} ,$$

in cui $U^{(1)}$ è sempre definita dalla (58), coll'intesa evidente che ϱ_1^2, ϱ_2^2 si devono risguardare ovunque sostituiti coi loro valori (66′) in funzione di u, v.

Il sistema canonico corrispondente,

$$(71)\qquad \begin{cases} \dfrac{du}{dt} = \dfrac{\partial F}{\partial p_u}, & \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{\partial F}{\partial p_v}; \\[2ex] \dfrac{dp_u}{dt} = -\dfrac{\partial F}{\partial u}, & \dfrac{dp_v}{dt} = -\dfrac{\partial F}{\partial v}, \end{cases}$$

ammette l'integrale

$$(72)\qquad F = C\,,$$

C essendo la così detta costante di JACOBI.

18. - La regolarizzazione di N. Thiele.

Immaginiamo attribuito a C un valore ben determinato, e poniamo

$$(73)\qquad F^* = \varrho_1^2\varrho_2^2(F - C)\,.$$

Si ha identicamente

$$\frac{\partial F^*}{\partial u} = \varrho_1^2\varrho_2^2\,\frac{\partial F}{\partial u} + (F - C)\,\frac{\partial(\varrho_1^2\varrho_2^2)}{\partial u}\,.$$

In quanto si tratti di soluzioni del sistema (71), che si riferiscono all'assunto valore di C, il secondo termine del secondo membro si annulla, e rimane

$$\frac{\partial F^*}{\partial u} = \varrho_1^2\varrho_2^2\,\frac{\partial F}{\partial u};$$

analogamente per le altre derivate parziali rapporto a v, p_u, p_v.

Da questo risulta subito che, ove nelle (71) si sostituisca al tempo t una variabile indipendente ausiliaria t^*, definita mediante la posizione

$$(74)\qquad dt = \varrho_1^2\varrho_2^2\,dt^*\,,$$

si è condotti ad un nuovo sistema canonico di funzione caratteristica F^*:

$$(71') \qquad \begin{cases} \dfrac{du}{dt^*} = \dfrac{\partial F^*}{\partial p_u}, & \dfrac{dv}{dt^*} = \dfrac{\partial F^*}{\partial p_v}; \\ \dfrac{dp_u}{dt^*} = -\dfrac{\partial F^*}{\partial u}, & \dfrac{dp_v}{dt^*} = -\dfrac{\partial F^*}{\partial v}, \end{cases}$$

equivalente a (71), *nell'àmbito delle* ∞^3 *soluzioni che corrispondono ad uno stesso valore*: C *di* F, *e zero di* F^*. *Quest'ultimo sistema presenta sul primo il vantaggio di essere completamente regolarizzato.* Infatti, attesa l'espressione (70) di F, e l'espressione (58) di $U^{(1)}$, nella nuova funzione caratteristica F^*, viene a scomparire il denominatore $\varrho_1^2\varrho_2^2$, talchè la F^* stessa si presenta come polinomio di secondo grado in p_u, p_v, i cui coefficienti, esplicitati a norma delle (66'), sono tutti trascendenti intere in u, v.

La regolarizzazione del problema ristretto, così conseguita, non differisce sostanzialmente da quella, già effettuata da N. THIELE [2], delle equazioni di secondo ordine in u, v. Si ritrovano infatti immediatamente le equazioni del THIELE, eliminando p_u, p_v dalle (71'): d'altra parte era pur stato notato che le equazioni regolarizzate di THIELE sono suscettibili di forma canonica, coll'introduzione di opportune ausiliarie p_u, p_v [3]. Nulla dunque di nuovo in questi nostri sviluppi concernenti il problema ristretto: essi hanno soltanto lo scopo di facilitare il confronto con le formule che ora ci accingiamo a dedurre come caso limite della nostra trattazione generale concernente il problema piano.

19. - Ritorno al problema regolarizzato per m_0 infinitesima. Ordine di grandezza di varii elementi. Approssimazione dei primi due ordini.

Supponiamo m_0 trascurabile di fronte ad m_1, m_2, tutto rimanendo del resto finito: intendiamo con ciò che, assieme con m_1, m_2, anche le coordinate del sistema regolarizzato e loro derivate vanno trattate come quantità finite.

In tale ipotesi, ove si riprenda per un momento l'espressione (2) di T,

---

(2) *Recherches numériques concernant des solutions périodiques d'un cas spécial du problème des trois corps* (troisième Mémoire), « Astronomische Nachrich. », B. CXXXVIII, 1895, pp. 1-10.

(3) Cfr. la prefazione della bella Memoria del sig. BIRKHOFF, *The restricted problem of the three bodies*, testè apparsa nei « Rendiconti del Circolo matematico di Palermo », t. XXXIX, pp. 265-334. In questa Memoria è anche assegnata (§ 5) una nuova trasformazione regolarizzante, puramente algebrica.

e si noti che, in base alla (4), m_1^*, m_2^* contengono m_0 a fattore, appare ovviamente, dalle (18), che lo stesso accade per le componenti dei due vettori $\mathbf{\Xi}$, $\boldsymbol{H}$ secondo gli assi Ox_1, Ox_2.

Ne viene, badando alle (23), (29), che, dei vettori $\mathbf{\Omega}$ e $\boldsymbol{X}$, sono invece le componenti Ω_0, X_0 affètte dal fattore m_0.

Ciò posto, si noti che dalla definizione (5) di U, scrivendo, come a § 15 (e seguenti), ϱ per ϱ_0, e ponendo per brevità

$$U^{(0)} = f\,\frac{m_1 m_2}{\varrho^2}\,, \tag{75}$$

si ha

$$U = U^{(0)} + m_0 U^{(1)}\,,$$

coll'espressione di $U^{(1)}$, già introdotta a § 16,

$$U^{(1)} = f\left(\frac{m_1}{\varrho_2^2} + \frac{m_2}{\varrho_1^2}\right). \tag{58}$$

Ne viene, a meno di termini di secondo ordine, in m_0,

$$\frac{1}{U} = \frac{1}{U^{(0)}}\left(1 - m_0\,\frac{U^{(1)}}{U^{(0)}}\right). \tag{76}$$

Esaminiamo ora l'ordine di grandezza dei vari termini costituenti Θ, raggruppandoli nel modo seguente:

$$\frac{1}{8\,U m_0 \varrho_1^2 \varrho_2^2}\,(\Omega_0^2 + X_0^2) = m_0 A\,, \tag{77}$$

$$\frac{1}{8\,U\varrho^2}\left\{\frac{1}{m_1\varrho_2^2}\,(\Omega_1^2 + X_1^2) + \frac{1}{m_2\varrho_1^2}\,(\Omega_2^2 + X_2^2)\right\} = B\,, \tag{78}$$

(si intende che scriviamo dappertutto ϱ al posto di ϱ_0).

A suo tempo terremo conto che

$$\Theta = m_0 A + B\,; \tag{79}$$

occupiamoci intanto separatamente di A e di B.

Dacchè Ω_0 e X_0 sono, come s'è detto, di prim'ordine in m_0, lo è del pari $(1/8\,U m_0 \varrho_1^2 \varrho_2^2)(\Omega_0^2 + X_0^2)$, ed è quindi giustificato di assumerlo sotto la forma $m_0 A$. A meno di termini di secondo ordine in m_0, si può naturalmente, nel denominatore dello stesso $m_0 A$, sostituire $U^{(0)}$ ad U.

Riferiamoci ormai a coordinate asteroidiche, badando alle prime delle (56), (57):

$$X_0 = qZ_0\,, \qquad \Omega_0 = p_\varphi\,.$$

Si metta in evidenza il fattore m_0, ponendo

$$Z_0 = m_0 Z_0^*\,, \qquad p_\varphi = m_0 p_\varphi^*\,. \tag{80}$$

Si ha

$$A = \frac{1}{8U\varrho_1^2\varrho_2^2}(q^2 Z_0^{*2} + p_\varphi^{*2})\,. \tag{77'}$$

Ponendo ancora

$$\left\{\begin{aligned}
\Omega_1^{(0)} &= \zeta_0 \cos\varphi\, p_\varrho + \frac{q}{\varrho}\sin\varphi\, p_\psi\,, & \Omega_1^{(1)} &= -\left(\varrho\cos\varphi\, Z_0^* + \frac{\zeta_0}{\varrho}\sin\varphi\, p_\varphi^*\right),\\
X_1^{(0)} &= q\sin\varphi\, p_\varrho - \frac{\zeta_0}{\varrho}\cos\varphi\, p_\psi\,, & X_1^{(1)} &= \frac{q}{\varrho}\cos\varphi\, p_\varphi^*\,,\\
\Omega_2^{(0)} &= -\zeta_0\sin\varphi\, p_\varrho + \frac{q}{\varrho}\cos\varphi\, p_\psi\,, & \Omega_2^{(1)} &= \varrho\sin\varphi\, Z_0^* - \frac{\zeta_0}{\varrho}\cos\varphi\, p_\varphi^*\,,\\
X_2^{(0)} &= q\cos\varphi\, p_\varrho + \frac{\zeta_0}{\varrho}\sin\varphi\, p_\psi\,, & X_2^{(1)} &= -\frac{q}{\varrho}\sin\varphi\, p_\varphi^*\,,
\end{aligned}\right. \tag{81}$$

si compendiano i vari termini delle rimanenti (56), (57), secondochè contengono o no m_0 a fattore, sotto la forma

$$\left\{\begin{aligned}
\Omega_1 &= \Omega_1^{(0)} + m_0\Omega_1^{(1)}\,, & X_1 &= X_1^{(0)} + m_0 X_1^{(1)}\,,\\
\Omega_2 &= \Omega_2^{(0)} + m_0\Omega_2^{(1)}\,, & X_2 &= X_2^{(0)} + m_0 X_2^{(1)}\,.
\end{aligned}\right.$$

Ove si introducano, per brevità di scrittura, le ulteriori combinazioni

$$\left\{\begin{aligned}
\lambda_1 &= \Omega_1^{(0)}\Omega_1^{(1)} + X_1^{(0)}X_1^{(1)}\,,\\
\lambda_2 &= \Omega_2^{(0)}\Omega_2^{(1)} + X_2^{(0)}X_2^{(1)}\,,
\end{aligned}\right. \tag{82}$$

e si abbia riguardo alle (81), risulta subito, a meno di termini di secondo ordine in m_0,

$$\Omega_1^2 + X_1^2 = (\zeta_0^2\cos^2\varphi + q^2\sin^2\varphi)\left(p_\varrho^2 + \frac{1}{\varrho^2}p_\psi^2\right) + 2m_0\lambda_1\,,$$

$$\Omega_2^2 + X_2^2 = (\zeta_0^2\sin^2\varphi + q^2\cos^2\varphi)\left(p_\varrho^2 + \frac{1}{\varrho^2}p_\psi^2\right) + 2m_0\lambda_2\,.$$

Mediante le (55) i due binomii $\zeta_0^2 \cos^2\varphi + q^2 \sin^2\varphi$, $\zeta_0^2 \sin^2\varphi + q^2 \cos^2\varphi$ divengono $\zeta_0^2 + q^2\gamma_1^2$, $\zeta_0^2 + q^2\gamma_2^2$, i quali, in virtù delle (48) e (48′), si identificano colle due distanze ϱ_2^2, ϱ_1^2. Possiamo quindi scrivere semplicemente

$$(83) \qquad \begin{cases} \Omega_1^2 + X_1^2 = \varrho_2^2\left(p_\varrho^2 + \dfrac{1}{\varrho^2}\, p_\varphi^2\right) + 2m_0\lambda_1\,, \\[2ex] \Omega_2^2 + X_2^2 = \varrho_1^2\left(p_\varrho^2 + \dfrac{1}{\varrho^2}\, p_\varphi^2\right) + 2m_0\lambda_2\,. \end{cases}$$

È facile adesso far apparire anche in B i termini affètti dal fattore m_0.

Basta combinare la definizione (78) di B colle (76) e (83), e porre

$$(84) \qquad \begin{cases} \Theta^{(0)} = \dfrac{1}{8\,U^{(0)}\varrho^2}\left(\dfrac{1}{m_1} + \dfrac{1}{m_2}\right)\left(p_\varrho^2 + \dfrac{1}{\varrho^2}\, p_\varphi^2\right), \\[2ex] \Theta^{(1)} = A + \dfrac{1}{4\,U^{(0)}\varrho^2}\left(\dfrac{\lambda_1}{m_1\varrho_2^2} + \dfrac{\lambda_2}{m_2\varrho_1^2}\right), \end{cases}$$

per desumerne

$$(78') \qquad B = \Theta^{(0)} + m_0(\Theta^{(1)} - A) - m_0\Theta^{(0)}\frac{U^{(1)}}{U^{(0)}}\,.$$

La (79) porge in conformità

$$(79') \qquad \Theta = \Theta^{(0)} + m_0\left(\Theta^{(1)} - \Theta^{(0)}\frac{U^{(1)}}{U^{(0)}}\right),$$

e la funzione caratteristica H del problema regolarizzato

$$H = \Theta - \frac{E}{U}\,,$$

diviene

$$(85) \qquad H = H^{(0)} + m_0 H^{(1)}\,,$$

con

$$(86) \qquad H^{(0)} = \Theta^{(0)} - \frac{E}{U^{(0)}} = \frac{1}{8\,U^{(0)}\varrho^2}\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)\left(p_\varrho^2 + \frac{1}{\varrho^2}\, p_\varphi^2\right) - \frac{E}{U^{(0)}}\,,$$

$$(87) \qquad H^{(1)} = \Theta^{(1)} - \left(\Theta^{(0)} - \frac{E}{U^{(0)}}\right)\frac{U^{(1)}}{U^{(0)}}\,.$$

20. - Conseguente riduzione del sistema canonico che definisce il movimento.

La (86), tenuta presente la (74), mostra che $H^{(0)}$ *non* dipende da alcuno dei quattro argumenti

$$\zeta_0 , \quad \varphi , \quad Z_0^* , \quad p_\varphi^*$$

(e nemmeno da ψ). Ciò premesso, si formi il sistema canonico di funzione caratteristica $H = H^{(0)} + m_0 H^{(1)}$ nelle due quaderne coniugate

$$\begin{array}{llll} \varrho , & \psi , & \zeta_0 , & \varphi , \\ p_\varrho , & p_\psi , & Z_0 = m_0 Z_0^* , & p_\varphi = m_0 p_\varphi^* . \end{array}$$

In primo luogo, a meno di termini affètti dal fattore m_0, si ha

$$(88) \qquad \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{d\varrho}{d\tau} = \dfrac{\partial H^{(0)}}{\partial p_\varrho} , & \dfrac{d\psi}{d\tau} = \dfrac{\partial H^{(0)}}{\partial p_\psi} , \\ \dfrac{dp_\varrho}{d\tau} = - \dfrac{\partial H^{(0)}}{\partial \varrho} , & \dfrac{dp_\psi}{d\tau} = - \dfrac{\partial H^{(0)}}{\partial \psi} = 0 , \end{array} \right.$$

le quali valgono da sole ad individuare le prime quattro incognite

$$\begin{array}{ll} \varrho , & \psi , \\ p_\varrho , & p_\psi , \end{array}$$

si intende, a meno di termini che si annullano con m_0. In questo stesso ordine di approssimazione va ritenuto (§ 1)

$$H^{(0)} = 1 ,$$

per tutte le soluzioni del sistema (88) che convengono al problema dei tre corpi, nel caso limite, di cui ora si tratta.

Le rimanenti equazioni, relative alla quaderna

$$\begin{array}{ll} \zeta_0 & , \quad \varphi , \\ Z_0 = m_0 Z_0^* & , \quad p_\varphi = m_0 p_\varphi^* , \end{array}$$

per l'indipendenza di $H^{(0)}$ da questi argomenti, si riducono a

$$\begin{cases} \dfrac{d\zeta_0}{d\tau} = m_0 \dfrac{\partial H^{(1)}}{\partial(m_0 Z_0^*)}, & \dfrac{d\varphi}{d\tau} = m_0 \dfrac{\partial H^{(1)}}{\partial(m_0 p_\varphi^*)}, \\ m_0 \dfrac{dZ_0^*}{d\tau} = - m_0 \dfrac{\partial H^{(1)}}{\partial \zeta_0}, & m_0 \dfrac{dp_\varphi^*}{d\tau} = - m_0 \dfrac{\partial H^{(1)}}{\partial \varphi} \quad , \end{cases}$$

ossia, più semplicemente, a

$$\text{(89)} \qquad \begin{cases} \dfrac{d\zeta_0}{d\tau} = \dfrac{\partial H^{(1)}}{\partial Z_0^*}, & \dfrac{d\varphi}{d\tau} = \dfrac{\partial H^{(1)}}{\partial p_\varphi^*}, \\ \dfrac{dZ_0^*}{d\tau} = - \dfrac{\partial H^{(1)}}{\partial \zeta_0}, & \dfrac{\partial p_\varphi^*}{\partial \tau} = - \dfrac{\partial H^{(1)}}{\partial \varphi}, \end{cases}$$

costituendo evidentemente un secondo sistema canonico nelle due coppie di coniugate

$$\begin{matrix} \zeta_0, & \varphi \;, \\ Z_0^*, & p_\varphi^* . \end{matrix}$$

Le variabili della prima quaderna ϱ, ψ, p_ϱ, p_ψ, che (ad eccezione di ψ) ancora figurano in $H^{(1)}$, vanno ormai risguardate come funzioni di τ, corrispondenti ad una ben determinata soluzione del sistema (88): questa può essere, *a priori*, qualunque, coll'unica restrizione che i valori iniziali rendano $H^{(0)} = 1$.

Concludendo, in questo caso limite, il sistema differenziale, da cui dipende la determinazione delle otto incognite, si scinde in due sistemi distinti. È chiaro senz'altro (in quanto si pensi all'originario problema dei tre corpi, per m_0 trascurabile di fronte alle altre due masse) che, dei due sistemi (88), (89), il primo deve corrispondere al problema dei due corpi, individuando per mezzo di ϱ e di ψ (lunghezza e orientazione del segmento P_2P_1) il moto delle due masse finite m_1, m_2; mentre il secondo definisce successivamente il moto della massa infinitesima nel piano e sotto l'attrazione delle altre due.

Aggiungeremo qui appresso qualche sviluppo di controllo; in particolare ritroveremo le formole del § 17, nell'ipotesi caratteristica del problema ristretto che il moto di m_1, m_2 si riduca ad una rotazione uniforme [cioè che si tratti di una soluzione del sistema (88) nella quale ϱ si mantiene costante].

21. - Verificazioni e raffronti.

a) *Masse finite.* – Constatiamo materialmente che il moto non perturbato dei due corpi P_1, P_2 di masse finite (m_1, m_2) dà luogo alle equazioni (88).

Immaginiamo assunte come coordinate lagrangiane del sistema costituito dai due corpi la loro distanza ϱ^2 e l'inclinazione del vettore $P_1 - P_2$ sopra una retta fissa (del piano del moto): sappiamo (§ 11) che tale anomalia non è altro che 2ψ. Dacchè le distanze di P_1, P_2 dal loro baricentro O valgono rispettivamente

$$\frac{m_2}{m_1+m_2}\,\varrho^2, \qquad \frac{m_1}{m_1+m_2}\,\varrho^2,$$

possiamo risguardare

$$\frac{m_2}{m_1+m_2}\,\varrho^2, \qquad 2\psi,$$

come coordinate polari di P_1, e

$$\frac{m_1}{m_1+m_2}\,\varrho^2, \qquad 2\psi+\pi,$$

come coordinate polari di P_2.

La loro forza viva complessiva è data, in conformità, da

$$T = \frac{1}{2}\,m_1\left\{\left(\frac{m_2}{m_1+m_2}\right)^2(4\varrho^2\dot{\varrho}^2 + 4\varrho^4\dot{\psi}^2)\right\}$$
$$+\frac{1}{2}\,m_2\left\{\left(\frac{m_1}{m_1+m_2}\right)^2(4\varrho^2\dot{\varrho}^2 + 4\varrho^4\dot{\psi}^2)\right\} = 2\,\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}\,\varrho^2(\dot{\varrho}^2+\varrho^2\dot{\psi}^2),$$

il punto sovrapposto designando derivazione rispetto a t.

La funzione delle forze

$$f\,\frac{m_1m_2}{\varrho^2},$$

si identifica manifestamente coll'$U^{(0)}$ del § 19.

Ove si fissi il valore dell'energia totale E, e si sostituisca al tempo t

una variabile ausiliaria τ definita dalla relazione differenziale

$$d\tau = U^{(0)} dt\,,$$

il problema in questione equivale (trasformazione di DARBOUX) ([4]) ad altro problema dinamico, avente per forza viva

$$\mathcal{T} = \frac{1}{U^{(0)}}\, T = 2\,U^{(0)} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\, \varrho^2(\varrho'^2 + \varrho^2 \psi'^2)\,,$$

$$\left(\varrho' = \frac{d\varrho}{d\tau} = \frac{1}{U^{(0)}}\,\dot{\varrho}\,, \qquad \psi' = \frac{d\psi}{d\tau} = \frac{1}{U^{(0)}}\,\dot{\psi}\right);$$

per funzione delle forze,

$$\frac{E}{U^{(0)}}\,;$$

e per costante delle forze vive l'unità.

Introducendo le coniugate

$$p_\varrho = \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \varrho'}\,, \qquad p_\psi = \frac{\partial \mathcal{T}}{d\psi'}\,,$$

ed esprimendo $\mathcal{T}$ a loro mezzo, si ha

$$\frac{1}{8\,U^{(0)}\varrho^2}\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)\left(p_\varrho^2 + \frac{1}{\varrho^2}\, p_\psi^2\right),$$

che coincide con $\Theta^{(0)}$ per la prima delle (84).

La funzione caratteristica del sistema canonico (in ϱ, ψ e loro coniugate), corrispondente al problema regolarizzato dei due corpi, è così

$$H^{(0)} = \Theta^{(0)} - \frac{E}{U^{(0)}} = \frac{1}{8\,U^{(0)}\varrho^2}\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)\left(p_\varrho^2 + \frac{1}{\varrho^2}\, p_\psi^2\right) - \frac{E}{U^{(0)}}\,,$$

ossia proprio la $H^{(0)}$ del sistema (88), c. d. d.

Una soluzione particolare del sistema (88), si ha ovviamente, supponendo ϱ costante (scelta ad arbitrio), $p_\varrho = 0$. In tal caso, il valore, pure

([4]) R), p. 483 [di questo volume].

costante, di p_ψ, dovrà ritenersi legato a ϱ dalla condizione che risulti $H^{(0)} = 1$. Indipendentemente da questa sua determinazione, p_ψ è legato alla velocità angolare n del moto delle due masse, in base alla definizione di n e alla seconda delle (8). Si ha infatti

$$n = 2\frac{d\psi}{dt} = 2U^{(0)}\frac{d\psi}{d\tau}:$$

ossia, sostituendo a $d\psi/d\tau$ il suo valore

$$\frac{\partial H^{(0)}}{\partial p_\psi} = \frac{1}{4U^{(0)}\varrho^4}\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)p_\psi\,,$$

$$n = \frac{1}{2\varrho^4}\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)p_\psi\,. \tag{90}$$

A questa si poteva anche pervenire, ricordando (§ 12) che p_ψ rappresenta in ogni caso il doppio del momento delle quantità di moto dei tre corpi (rispetto ad Oz).

Per $m_0 = 0$, e P_1, P_2 animati da moto circolare con velocità angolare n (attorno ad Oz), si hanno le velocità

$$\frac{m_2}{m_1 + m_2}\varrho^2 n\,, \qquad \frac{m_1}{m_1 + m_2}\varrho^2 n\,,$$

e quindi i momenti di quantità di moto

$$m_1\left(\frac{m_2}{m_1 + m_2}\right)^2\varrho^4 n\,, \qquad m_2\left(\frac{m_1}{m_1 + m_2}\right)^2\varrho^4 n\,.$$

Sommando ed eguagliando a $\frac{1}{2}p_\psi$, si è appunto ricondotti alla (90).

Ricordiamo ancora che, nel moto circolare uniforme compatibile colla legge di NEWTON, l'energia totale è metà dell'energia potenziale. Dobbiamo dunque avere

$$E = -\tfrac{1}{2}U^{(0)}\,. \tag{91}$$

Per ricavare questa formula in base al sistema (88), basta combinare le due condizioni

$$\frac{\partial H^{(0)}}{\partial \varrho} = 0\,, \qquad H^{(0)} = 1\,.$$

La prima, tenendo conto che $p_\varrho = 0$ e che $U^{(2)} = f(m_1 m_2/\varrho^2)$, si scrive

$$-\frac{1}{4fm_1m_2\varrho^3}\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}\right)p_\varphi^2 - 2\frac{E}{fm_1m_2}\varrho = -\frac{2}{\varrho}\left(H^{(0)}+\frac{2E}{U^{(0)}}\right) = 0\,,$$

e questa, per $H^{(0)} = 1$, dà appunto la (91).

Sempre per le soluzioni circolari che stiamo considerando, da

$$H^{(0)} = \Theta^{(0)} - \frac{E}{U^{(0)}} = 1\,,$$

come corollario della (91), si ha

(92) $$\Theta^{(0)} = \tfrac{1}{2}\,.$$

b) ***Massa infinitesima.*** – Passiamo ormai al sistema (89), ritenendovi ϱ e p_φ costanti, e $p_\varrho = 0$ (ψ non vi comparisce, e non c'è quindi da occuparsene).

Vogliamo constatare sulle formule l'equivalenza, concettualmente evidente, di tale sistema col sistema (71) del § 17.

All'uopo cominciamo col fissare le relazioni che intercedono fra le funzioni incognite dei due sistemi: ne trasformeremo poi uno, in modo che compariscano in entrambi le stesse incognite.

Nel sistema (71) figurano le coordinate ellittiche u, v; in (89) abbiamo invece ζ_0, φ. Il legame fra queste due coppie si assegna agevolmente, eguagliando le espressioni (in u e v da un lato, ζ_0 e φ dall'altro) delle due distanze ϱ_1^2, ϱ_2^2 (di P_0 da P_2 e da P_1 rispettivamente).

Dalle (66') si ha

$$\left\{\begin{aligned} \varrho_1^2 &= \varrho^2\left(\cosh^2\frac{u}{2} - \sin^2\frac{v}{2}\right),\\ \varrho_2^2 &= \varrho^2\left(\cosh^2\frac{u}{2} - \cos^2\frac{v}{2}\right),\end{aligned}\right.$$

mentre le (11), e (55) porgono

$$\left\{\begin{aligned} \varrho_1^2 &= q^2(1-\gamma_1^2) = \zeta_0^2 + \varrho^2 - \varrho^2\sin^2\varphi\,,\\ \varrho_2^2 &= q^2(1-\gamma_2^2) = \zeta_0^2 + \varrho^2 - \varrho^2\cos^2\varphi\,.\end{aligned}\right.$$

Dal loro confronto si trae

$$\zeta_0^2 + \varrho^2 = \varrho^2\cosh^2\frac{u}{2}\,,\qquad \sin^2\varphi = \sin^2\frac{v}{2}\,,\qquad \cos^2\varphi = \cos^2\frac{v}{2}\,,$$

le quali equivalgono a

$$\zeta_0 = \pm \varrho \sinh \frac{u}{2}, \qquad v = \pm 2\varphi + \text{multiplo arbitrario di } 2\pi .$$

Assumeremo

$$\zeta_0 = \varrho \sinh \frac{u}{2}, \qquad \varphi = \frac{1}{2} v , \tag{93}$$

risguardando queste formule come parte di una trasformazione *canonica* fra le due quaderne $\begin{pmatrix} \zeta_0 , & \varphi \\ Z_0^* , & p_\varphi^* \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} u , & v \\ p_u , & p_v \end{pmatrix}$.

La condizione di canonicità

$$Z_0^* \, d\zeta_0 + p_\varphi^* \, d\varphi = p_u \, du + p_v \, dv$$

porge immediatamente, in base alle (93), le altre due relazioni che completano la trasformazione, e sono (eguagliando i coefficienti di du, dv nei due membri)

$$\frac{1}{2} \varrho \cosh \frac{u}{2} Z_0^* = p_u , \qquad \frac{1}{2} p_\varphi^* = p_v .$$

Dacchè, per la prima delle (93), $\varrho \cosh (u/2)$ vale $|\sqrt{\zeta_0^2 + \varrho^2}|$, che è poi q, a norma della prima delle (55) scriveremo più semplicemente

$$q Z_0^* = 2 p_u , \qquad p_\varphi^* = 2 p_v , \tag{94}$$

e trasformeremo il sistema (89) mercè le (93), (94).

Abbiamo anzitutto dalla (77′), in virtù delle (94),

$$A = \frac{1}{2 U^{(0)} \varrho_1^2 \varrho_2^2} (p_u^2 + p_v^2) . \tag{95}$$

Le (81) poi, badando che vi si deve anche porre $p_\varrho = 0$, divengono

$$\left\{\begin{aligned}
\Omega_1^{(0)} &= \frac{q}{\varrho} \sin \frac{v}{2} \, p_\psi , & \Omega_1^{(1)} &= -2 \left(\frac{\varrho}{q} \cos \frac{v}{2} \, p_u + \sinh \frac{u}{2} \sin \frac{v}{2} \, p_v \right) , \\
X_1^{(0)} &= - \sinh \frac{u}{2} \cos \frac{v}{2} \, p_\psi , & X_1^{(1)} &= 2 \frac{q}{\varrho} \cos \frac{v}{2} \, p_v , \\
\Omega_2^{(0)} &= \frac{q}{\varrho} \cos \frac{v}{2} \, p_\psi , & \Omega_2^{(1)} &= 2 \left(\frac{\varrho}{q} \sin \frac{v}{2} \, p_u - \sinh \frac{u}{2} \cos \frac{v}{2} \, p_v \right) , \\
X_2^{(0)} &= \sinh \frac{u}{2} \sin \frac{v}{2} \, p_\psi , & X_2^{(1)} &= -2 \frac{q}{\varrho} \sin \frac{v}{2} \, p_v ,
\end{aligned}\right.$$

e così le (82) dànno

$$\lambda_1 = -\, p_\psi \left(\sin v\, p_u + 2\,\frac{q}{\varrho}\sinh\frac{u}{2}\, p_v\right) = -\, p_\psi(\sin v\, p_u + \sinh u\, p_v)\,,$$

$$\lambda_2 = \quad p_\psi \left(\sin v\, p_u - 2\,\frac{q}{\varrho}\sinh\frac{u}{2}\, p_v\right) = \quad p_\psi(\sin v\, p_u - \sinh u\, p_v)\,.$$

Si ha in conformità, dalla seconda delle (84),

$$\Theta^{(1)} = A - \frac{p_\psi}{4\,U^{(0)}\varrho_1^2\varrho_2^2\varrho^2}\left\{\sin v\left(\frac{\varrho_1^2}{m_1} - \frac{\varrho_2^2}{m_2}\right) p_u + \sinh u\left(\frac{\varrho_1^2}{m_1} + \frac{\varrho_2^2}{m_2}\right) p_v\right\};$$

e questa, ponendovi per A l'espressione (95), e per p_ψ il suo valore

$$2n\,\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\,\varrho^4\,,$$

desunto dalla (90), diviene

$$\Theta^{(1)} = \frac{1}{U^{(0)}}\,\frac{1}{2\varrho_1^2\varrho_2^2}\left[p_u^2 + p_v^2 - n\,\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\,\varrho^2\left\{\sin v\left(\frac{\varrho_1^2}{m_1} - \frac{\varrho_2^2}{m_2}\right) p_u + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \sinh u\left(\frac{\varrho_1^2}{m_1} + \frac{\varrho_2^2}{m_2}\right) p_v\right\}\right]. \tag{96}$$

D'altra parte, l'espressione (87) di $H^{(1)}$, ove si abbiano presenti le (91) e (92), si riduce immediatamente a

$$H^{(1)} = \Theta^{(1)} - \frac{U^{(1)}}{U^{(0)}}\,.$$

In virtù della (96), il confronto colla (70) porge

$$H^{(1)} = \frac{1}{U^{(0)}}\,F\,.$$

Dacchè, nelle equazioni (89), ϱ e con essa $U^{(0)}$ va trattata come costante, è chiaro che basta, nelle (89) stesse, sostituire $U^{(0)}dt$ a $d\tau$ per ritrovare materialmente il sistema (71) di funzione caratteristica F.

Così è raggiunta anche la prova formale che le equazioni del problema regolarizzato in coordinate asteroidiche (nel caso limite $m_0 = 0$, e sotto l'ipotesi particolare che si mantenga costante la distanza ϱ^2 delle altre due masse) dànno luogo alle consuete equazioni canoniche (71) del problema ristretto in coordinate ellittiche.

OSSERVAZIONE. – Può a primo aspetto parere incongruente che dalle equazioni generali *regolarizzate* scendano per $m_0 = 0$ le (71) che *non* lo sono, ma richiedono all'uopo una trasformazione ulteriore (§ 17).

La spiegazione si ha tosto ricordando che l'algoritmo generale di regolarizzazione si appoggia essenzialmente sulla circostanza che le masse siano, tutte e tre, > 0 (5). Nulla si può dunque pretendere *a priori* per il caso limite $m_0 = 0$. *A posteriori* risulta che, dei due sistemi parziali (88) e (89) definienti il moto in questo caso limite, il primo rimane regolarizzato (problema dei due corpi), ma non così il secondo (problema ristretto). Tanto più, perciò, appariscono interessanti le regolarizzazioni autonome di questo ultimo problema già segnalate da THIELE e da BIRKHOFF.

---

(5) Infatti, soltanto sotto tale ipotesi è legittima la conclusione [R), p. 491 di questo volume; e § 7 del presente scritto] che $(1/U)(1/\varrho_\nu^2 U)$ ($\nu = 0, 1, 2,$), ecc. si comportano regolarmente anche in prossimità di un eventuale urto binario.

XXXVI.

SULLA INTRODUZIONE DI VINCOLI OLONOMI NELLE EQUAZIONI DINAMICHE DI HAMILTON

« Atti Ist. Ven. », ser. 7ª, t. LXXV (1915-16), parte 2ª, pp. 387-395.

È dato un sistema olonomo S soggetto a forza conservative, e si introducono ulteriori legami olonomi, costituendo un sistema maggiormente vincolato, che diremo S'. La costruzione delle equazioni del moto di S' è immediata, se si suppone assegnata la funzione lagrangiana L dell'originario sistema S: basta notoriamente ridurre la L a norma dei vincoli addizionali, per trarne la funzione lagrangiana L' di S'. Ma se — come spesso accade in dinamica analitica — si parte dalle equazioni del moto di S sotto forma canonica, se si suppone cioè che, fra i dati della questione, figuri propriamente la funzione hamiltoniana H (anzichè la L), e si vuol arrivare all'analoga funzione H' conseguente all'introduzione dei nuovi vincoli, non si trova, per quanto è a mia conoscenza, negli scritti che trattano questa materia, un procedimento altrettanto semplice e diretto che individui H', in funzione di H e delle equazioni dei vincoli.

Naturalmente i precetti classici consentono di procurarsi, quando si voglia, la H' nel modo seguente: Si passa da H ad L, cioè dall'assegnata funzione hamiltoniana alla lagrangiana di S; in questa si introducono i vincoli, cioè si forma L'; finalmente si ripassa da L' alla corrispondente funzione hamiltoniana H'. È chiaro tuttavia che la questione non è così risolta nel modo concettualmente più semplice, nè algoritmicamente più opportuno. Ed è pur chiaro che vale la pena di esplicitare il risultato evitando i giri viziosi.

Tale è lo scopo della presente breve comunicazione.

1. - Indichino x_i ed y_i $(i = 1, 2, ..., N)$ coordinate lagrangiane e momenti cinetici di un sistema olonomo S con N gradi di libertà; $H(x|y|t)$ [1]

[1] La notazione comprensiva $H(x|y|t)$ sta ovviamente per $H(x_1; x_2; ..., x_N | y_1; y_2; ..., y_N | t)$.

l'energia totale del sistema (in cui t non figura esplicitamente, se i legami imposti al sistema sono indipendenti dal tempo). La H è notoriamente un polinomio di secondo grado nelle y, la cui parte quadratica H_2 costituisce una forma definita positiva.

Le equazioni del moto, cioè il sistema canonico di funzione caratteristica H:

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial y_i}, \qquad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_i}, \qquad (i = 1, 2, ..., N),$$

possono essere compendiate nella relazione differenziale

$$\text{(I)} \qquad \sum_1^N{}_i (dx_i\, \delta y_i - dy_i\, \delta x_i) = dt\, \delta H ,$$

in cui si risguardino arbitrari gli incrementi δx_i, δy_i e si intenda con δH il differenziale da essi subordinato in H (senza far variare t).

2. – Ciò posto, si immagini di introdurre nuovi vincoli olonomi, che riducano il grado di libertà del sistema da N a $n < N$. Siano $q_1, q_2, ..., q_n$ coordinate lagrangiane del sistema S' che così si determina, e

$$\text{(1)} \qquad x_i = x_i(q\,|\,t) \qquad (i = 1, 2, ..., N)$$

le equazioni parametriche dei vincoli. L'ipotesi che le q rappresentano effettive coordinate lagrangiane si rispecchia formalmente nel fatto che è proprio n la caratteristica della matrice funzionale costituita dalle Nn derivate parziali

$$\frac{\partial x_i}{\partial q_h}, \qquad (i = 1, 2, ..., N;\; h = 1, 2, ..., n).$$

Le equazioni del moto di S' risultano dall'esprimere che la (I) è verificata, compatibilmente coi vincoli (1) imposti alle x_i, per incrementi *affatto arbitrari* delle y_i. È questo un immediato corollario del principio dei lavori virtuali, purchè gli si faccia preventivamente subire la perspicua trasformazione al tipo hamiltoniano dovuta a MORERA ([2]).

Applichiamolo al caso nostro, immaginando di introdurre in entrambi i membri, al posto delle x_i, le loro espressioni (1), con che H diviene funzione delle q, oltre che delle y e di t.

([2]) *Sulle equazioni dinamiche di Hamilton*, « Atti della R. Accademia delle scienze di Torino », vol. XXXIV, 1904, pp. 3-16.

Dovremo naturalmente ritenere gli incrementi δx_i (in numero di N) indotti da un numero minore n di arbitrarie δq_h, a norma della formula

$$\delta x_i = \sum_1^n {}_h \frac{\partial x_i}{\partial q_h} \delta q_h , \qquad (i = 1, 2, ..., N); \tag{2}$$

del pari sarà

$$dx_i = \sum_1^n {}_h \frac{\partial x_i}{\partial q_h} dq_h + \frac{\partial x_i}{\partial t} dt \qquad (i = 1, 2, ..., N). \tag{3}$$

Nel secondo membro della (I) figurerà in definitiva il differenziale

$$\delta H = \sum_1^n {}_h \frac{\partial H}{\partial q_h} \delta q_h + \sum_1^N {}_i \frac{\partial H}{\partial y_i} \delta y_i .$$

Con ciò la (I) stessa, ove si eguaglino i coefficienti d'ogni δq_h e δy_i nei due membri, porge

$$\begin{cases} \sum_1^N {}_i \dot{y}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_h} = - \frac{\partial H}{\partial q_h}, & (h = 1, 2, ..., n), \quad (4) \\ \sum_1^n {}_h \frac{\partial x_i}{\partial q_h} \dot{q}_h + \frac{\partial x_i}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial y_i}, & (i = 1, 2, ..., N), \quad (5) \end{cases}$$

il punto sovrapposto designando ovviamente derivazione rispetto a t.

Queste $n+N$ equazioni definiscono complessivamente le derivate delle altrettante funzioni y e q [3], individuando così il moto di S': non però ancora sotto la voluta forma canonica d'ordine $2n$. Avviamoci a conseguirla.

3. – All'uopo giova riprendere l'equazione comprensiva (I), e trasformarne intanto il primo membro mercè l'introduzione delle n ausiliarie

$$p_h = \sum_1^N {}_i y_i \frac{\partial x_i}{\partial q_h}, \qquad (h = 1, 2, ..., n), \tag{6}$$

e conseguenti incrementi

$$\delta p_h = \sum_1^N {}_i \delta y_i \frac{\partial x_i}{\partial q_h} + \sum_1^N {}_i y_i \delta \left(\frac{\partial x_i}{\partial q_h}\right),$$

$$dp_h = \sum_1^n {}_i dy_i \frac{\partial x_i}{\partial q_h} + \sum_1^N {}_i y_i d \left(\frac{\partial x_i}{\partial q_h}\right).$$

---

[3] L'effettiva risolubilità del sistema lineare (4), (5) rapporto alle $\dot{y}$, $\dot{q}$ risulta ovviamente dal fatto che il determinante dei coefficienti si identifica col quadrato della matrice funzionale delle $\partial x_i/\partial q_h$: quadrato certo non nullo, dacchè, come è stato rilevato nel testo, la caratteristica della matrice è n.

Ove in

$$\varDelta = \sum_1^N {}_i (dx_i dy_i - dy_i dx_i)$$

si sostituiscano, al posto di dx_i e δx_i, le loro espressioni (3) e (2) si ha tosto

$$\varDelta = \sum_1^n {}_h (dq_h \delta p_h - dp_h \delta q_h) + dt \sum_1^N {}_i \frac{\partial x_i}{\partial t} \delta y_i$$
$$- \sum_1^N {}_i y_i \sum_1^N {}_h \left\{ dq_h \delta \left(\frac{\partial x_i}{\partial q_h}\right) - \delta q_h d \left(\frac{\partial x_i}{\partial q_h}\right)\right\}.$$

Notiamo poi che

$$\sum_1^n {}_h dq_h \delta \left(\frac{\delta x_i}{\partial q_h}\right),$$

può essere scritto (attesa l'indipendenza degli incrementi δ dai d)

$$\delta \left(\sum_1^n {}_h \frac{\partial x_i}{\partial q_h} dq_h\right),$$

ossia, per la (3),

$$\delta \left(dx_i - \frac{\partial x_i}{\partial t} dt\right) = \delta dx_i - dt\, \delta \left(\frac{\partial x_i}{\partial t}\right).$$

Analogamente si ha, in base alla (2),

$$\sum_1^n {}_h \delta q_h d \left(\frac{\partial x_i}{\partial q_h}\right) = d \left(\sum_1^n {}_h \frac{\partial x_i}{\partial q_h} \delta q_h\right) = d\, \delta x_i = \delta\, d x_i .$$

Il primo membro della (I), ossia $\varDelta$, torna così ad assumere una forma compendiosa, risultando

$$\varDelta = \sum_1^n {}_h (dq_h \delta p_h - \delta q_h dp_h) + dt\, \delta \left(\sum_1^N {}_i y_i \frac{\partial x_i}{\partial t}\right).$$

Pongasi

$$H' = H - \sum_1^N {}_i y_i \frac{\partial x_i}{\partial t}, \tag{7}$$

con che manifestamente H' non differisce da H ogni qualvolta i vincoli addizionali (1) sono indipendenti dal tempo.

La (I), cioè

$$\Delta = dt\,\delta H\,,$$

diviene

$$\text{(II)} \qquad \sum_1^n{}_h (dq_h\,\delta p_h - dp_h\,\delta q_h) = dt\,\delta H'\,.$$

5. – A norma delle (6), le p_ν sono n combinazioni lineari delle y, certo indipendenti, dacchè (n. 2) la matrice dei coefficienti $\partial x_i/\partial q_h$ ha per caratteristica n. È dunque lecito trattare le δp_h quali combinazioni indipendenti delle δy; siccome poi queste sono a loro volta indipendenti dalle δq, si possono in definitiva risguardare arbitrari ed indipendenti tutti i $2n$ incrementi δp_h, δq_h. Perciò, se si riesce ad esprimere anche il secondo membro della (II) mediante le sole δp_h, δq_h, dovranno risultare eguali i singoli coefficienti nei due membri. L'eguaglianza va intesa nel senso di necessaria conseguenza della stessa (II) e delle posizioni (6); o, se si vuole, della originaria (I) e delle (6); o infine delle (6) e delle equazioni (del moto) (4), (5) equivalenti alla (I).

D'altra parte va rilevato che, formando sistema delle (5) e (6) (le quali costituiscono complessivamente $N+n$ equazioni *lineari* nelle N funzioni y e nelle n derivate $\dot q$), si può immaginare di ricavarne così le y, come le $\dot q$, espresse per le p, q, t [4].

Portando questi valori delle y nella H' e ritenendovi, ben si intende, anche le x sostituite coi secondi membri delle (1), la stessa H' diviene una funzione delle sole p, q, t; e la (II) dà luogo al sistema canonico

$$\text{(8)} \qquad \frac{dp_h}{dt} = -\frac{\partial H'}{\partial q_h}\,, \qquad \frac{dq_h}{dt} = \frac{\partial H'}{\partial p_h} \qquad (h = 1, 2, \ldots, n)\,.$$

Esso si presenta — abbiamo notato or ora — quale necessaria conseguenza delle equazioni del moto e delle posizioni (6). Reciprocamente — e questo è l'essenziale — le (8) costituiscono da sole un sistema d'ordine $2n$ nelle q e nelle ausiliarie p, atto a determinarle. Ne rimane in pari tempo determinato il moto del sistema S', essendo le x fornite dalle (1), e le y dalla eliminazione delle $\dot q$ fra le (5) e (6), od anche (per la conseguita conoscenza delle $\dot q$) da N equazioni indipendenti, scelte a piacere fra le (5) e (6).

Riassumendo, si ha la seguente regola.

---

[4] La univoca risolubilità sarà provata al n. 7.

6. – REGOLA per introdurre (conformemente al principio dei lavori virtuali) in un sistema canonico, di funzione caratteristica $H(x|y|t)$,

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial y_i}, \qquad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_i}, \qquad (i = 1, 2, ..., N),$$

ulteriori vincoli olonomi

(1) $$x_i = x_i(q_1, q_2, ..., q_n | t),$$

in modo da presentare il risultato sotto forma pure canonica.

Si riducono, a norma dei vincoli, le equazioni che definiscono le dx_i/dt, scrivendole

$$\sum_1^n{}_h \frac{\partial x_i}{\partial q_h} \dot{q}_h + \frac{\partial x_i}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial y_i}, \qquad (i = 1, 2, ..., N),$$

e si pone

$$p_h = \sum_1^N{}_i\, y_i \frac{\partial x_i}{\partial q_h}. \qquad (h = 1, 2, ..., n).$$

Da queste $N+n$ relazioni si eliminano le $\dot{q}$, ricavandone le y in funzione delle p, q, t.

Mercè le (1) *e le espressioni ricavate per le y, si forma*

$$H'(p|q|t) = H - \sum_1^N{}_i\, y_i \frac{\partial x_i}{\partial t},$$

e si ha così la funzione caratteristica del sistema ridotto ad n gradi di libertà, per effetto dei vincoli addizionali (1).

7. – *Constatazione di risolubilità* delle $N+n$ equazioni (5), (6) rapporto alle y, $\dot{q}$.

Ricordiamo (n. 1) che H è funzione di secondo grado nelle y, la cui parte quadratica H_2 costituisce una forma definita. Indicandone con $a^{(ij)}$ i coefficienti, sarà manifestamente

$$\frac{\partial H_2}{\partial y_i} = \sum_1^N{}_j\, a^{(ij)} y_j, \qquad (i = 1, 2, ..., N),$$

e questa forma lineare differirà da $\partial H/\partial y_i$ per termini indipendenti dalle y.

Con ciò le (5) assumono l'aspetto

$$(5') \qquad \sum_1^N {}_j\, a^{(ij)} y_j = \sum_1^n {}_h \frac{\partial x_i}{\partial q_h} \dot{q}_h + \alpha^{(i)}, \qquad (i = 1, 2, ..., N),$$

raccogliendosi in $\alpha^{(i)}$ tutto ciò che, nella i-esima equazione (5), non dipende dalle incognite y, $\dot{q}$.

Introduciamo i coefficienti

$$a_{il} \qquad (i, l = 1, 2, ..., N)$$

della forma reciproca ad H_2, che sarà essa pure definita positiva, e in particolare avrà un discriminante a (determinante delle a_{il}) certo diverso da zero.

Indichiamo per brevità con α_l le somme

$$\sum_1^N {}_i\, a_{il} \alpha^{(i)} \qquad (l = 1, 2, ..., N),$$

che rappresentano ancora termini noti rispetto alle nostre incognite y, $\dot{q}$, e moltiplichiamo le (5′) per a_{il}, sommando rispetto all'indice i da 1 ad N.

Si ricava ovviamente (cambiando nel risultato l in i, i in j e h in k)

$$(5'') \qquad y_i = \sum_1^n {}_k\, \dot{q}_k \sum_1^N {}_j\, a_{ij} \frac{\partial x_j}{\partial q_k} + \alpha_i, \qquad (i = 1, 2, ..., N),$$

le quali equazioni sono ancora equivalenti alle (5). Ma, sotto questa forma, riesce assai facile combinarle colle (6), in modo da ricavarne le $\dot{q}$; dopo di che le stesse (5″) determinano le y.

Per esplicitare le $\dot{q}$, introduciamo nella (6) le espressioni (5″) delle y_i. Ponendo

$$(9) \qquad a'_{hk} = \sum_1^N {}_{ij}\, a_{ij} \frac{\partial x_i}{\partial q_h} \frac{\partial x_j}{\partial q_k}, \qquad (h, k = 1, 2, ..., n),$$

avremo

$$(6') \qquad \sum_1^n {}_k\, a'_{hk} \dot{q}_k = p_h - \sum_1^N {}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_h} \alpha_i, \qquad (h = 1, 2, ..., n),$$

e basterà evidentemente assicurarsi che non si annulla il determinante dei coefficienti a'_{hk}. Ora, dalla stessa definizione (9) delle a'_{hk}, apparisce che il loro determinante è prodotto di a per il quadrato della solita matrice funzione dei vincoli (1): l'uno e l'altro diversi da zero; c. d. d.

XXXVII.

SOPRA DUE TRASFORMAZIONI CANONICHE DESUNTE DAL MOTO PARABOLICO

« Rend. Acc. Lincei », ser. 5ª, vol. XXV_1 (1916_1),

pp. 446-458.

La regolarizzazione (con conservazione della forma canonica) del problema piano dei tre corpi dipende sostanzialmente dalla trasformazione quadratica

$$x + iy = (\xi + i\eta)^2 \qquad\qquad (i = \sqrt{-1}).$$

Ne ho fatto uno studio sistematico in più Note recenti (1), nella prima delle quali esprimevo la fiducia di poter assoggettare anche il problema spaziale ad una regolarizzazione altrettanto esauriente. A ciò induce da un lato la considerazione che la permanenza dei tre corpi in uno stesso piano non conferisce alcun carattere specifico al comportamento analitico del sistema nell'immediata prossimità di un urto binario; dall'altro il fatto che (pur con l'intervento di ausiliarie ingombranti) una regolarizzazione è già stata raggiunta dal SUNDMAN (2) con piena generalità.

In questa fiducia, dopo aver infruttuosamente saggiato parecchie trasformazioni di coordinate, pensai di ricorrere ad uno spediente di calcolo alquanto più penetrante, cioè ad una trasformazione canonica di contatto (anzichè semplicemente puntuale), la quale abbia carattere regolarizzante per il problema elementare dei due corpi.

Scopo principale della presente Nota è la deduzione di questa trasformazione dai moti centrali di tipo parabolico e l'analisi delle sue eleganti proprietà geometrico-cinematiche.

---

(1) In questi Rendiconti, vol. $XXIV_2$ (1915_2), pp. 61-75, 235-248, 421-433, 485-501, 553-569 [in questo vol. delle «Opere»: XXXIII, pp. 477-493; XXXIV, pp. 495-509: XXXV, pp. 511-564.

(2) Nel suo celebrato *Mémoire sur le problème des trois corps*, « Acta Mathematica », tomo 36, 1912, pp. 105-179.

Mostrerò prossimamente come essa conduca alla desiderata regolarizzazione canonica del problema dei tre corpi. Qui ne ho tratto occasione per far conoscere una seconda trasformazione canonica, che introduce *elementi osculatori parabolici* riattaccandosi ad un'altra mia ricerca ([3]).

1. - Richiami concernenti il metodo di integrazione di Jacobi.

Sia dato un generico sistema canonico

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_i}, \qquad \frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad (i = 1, 2, ..., n), \tag{1}$$

a funzione caratteristica $H(p_1, p_2, ..., p_n; x_1, x_2, ..., x_n)$ indipendente da t.

Si formi l'equazione di HAMILTON-JACOBI

$$H = \text{cost.} = h, \tag{2}$$

ritenendo nel primo membro ogni

$$p_i = \frac{\partial W}{\partial x_i} \qquad (i = 1, 2, ..., n).$$

La definizione classica di integrale completo della (2) fa intervenire specificamente h ed altre $n-1$ costanti arbitrarie $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{n-1}$. In forma più simmetrica, seguendo POINCARÉ ([4]), si può chiamare integrale completo ogni funzione

$$W(x_1, x_2, ..., x_n; \xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$$

delle x_i e di n costanti ξ_i, la quale:

1) verifichi la (2), ossia, sostituita in H, la riduca ad una funzione $\mathcal{H}(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$ delle sole ξ_i (e quindi costante);

2) contenga le n costanti essenzialmente, ossia non annulli (nel campo di valori che si considera) il determinante hessiano

$$\left\| \frac{\partial^2 W}{\partial x_i \partial \xi_j} \right\|. \qquad (i, j = 1, 2, ..., n).$$

([3]) *Nuovo sistema canonico di elementi ellittici*, « Annali di Matematica », serie III, tomo 20, 1913 (dedicato alla memoria di LAGRANGE) [in questo vol. delle «Opere»: XXIV, pp. 341-356].

([4]) *Leçons de mécanique céleste*, tomo I, Paris, Gauthier-Villars, 1905, n. 10.

Mercè una tale W, le equazioni

$$(3)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial W}{\partial \xi_i} = -\,\tilde{\omega}_i\,, \\ \dfrac{\partial W}{\partial x_i} = p_i\,, \end{cases} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

definiscono complessivamente l'integrale generale del sistema (1), porgendo le x_i e le p_i in funzione dei $2n$ argomenti ξ_i e $\tilde{\omega}_i$: i primi sono da risguardarsi costanti di integrazione; i secondi funzioni lineari di t, e precisamente

$$\tilde{\omega}_i = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \xi_i}\, t + \eta_i\,,$$

le η_i designando altre n costanti arbitrarie.

2. - Moto centrale parabolico. Trasformazione di Darboux-Sundman.

Per il moto di un punto P (di massa 1), attratto da un centro fisso secondo la legge di Newton, si ha la funzione caratteristica (energia totale)

$$(4)\qquad H = \frac{1}{2}\,(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) - \frac{k}{r}\,,$$

dove k è la costante d'attrazione ed $r = \sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}$ rappresenta la distanza dal centro, le variabili coniugate $\begin{pmatrix} x_1, & x_2, & x_3 \\ p_1\,, & p_2\,, & p_3 \end{pmatrix}$ designando rispettivamente coordinate cartesiane e componenti di velocità del punto mobile. La natura della traiettoria dipende notoriamente dal valore (costante per ogni determinato movimento) dell'energia totale H. Il moto parabolico corrisponde al valore zero. Fissiamo questa determinazione, e consideriamo il sistema differenziale che si ottiene da (1) [per $n = 3$, con la espressione (4) di H] cambiando la variabile indipendente a norma della posizione

$$(5)\qquad dt = r\,du\,.$$

Avremo

$$\frac{dp_i}{du} = -\,r\,\frac{\partial H}{\partial x_i}\,, \qquad \frac{dx_i}{du} = r\,\frac{\partial H}{\partial p_i} \qquad (i = 1, 2, 3)\,.$$

Per le soluzioni paraboliche, in corrispondenza a cui $H = 0$, i secondi membri possono essere scritti $- \partial(rH)/\partial x_i$, $\partial(rH)/\partial p_i$. Le soluzioni stesse appartengono perciò anche al sistema canonico

$$\frac{dp_i}{du} = -\frac{\partial(rH)}{\partial x_i}, \qquad \frac{dx_i}{du} = \frac{\partial(rH)}{\partial p_i} \qquad (i = 1, 2, 3), \tag{6}$$

che differisce dall'originario per la duplice alterazione della variabile indipendente e della funzione caratteristica. Tale trasformazione — in verità non recondita e già da me usata [5] per la regolarizzazione del problema ristretto — vorrei chiamarla di DARBOUX-SUNDMAN, poichè collega la sostituzione a t del parametro u di SUNDMAN con una proprietà delle traiettorie conservative dovuta a DARBOUX.

Tutte le soluzioni del sistema (6) si possono rappresentare (con le modalità richiamate al n. 1) mediante un integrale completo di

$$rH = \tfrac{1}{2}r(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) - k = \text{cost}.$$

Di queste soluzioni hanno per noi interesse le ∞^5, comuni con l'originario sistema canonico, per le quali $H = 0$.

Ciò posto, ove si conglobi k nella costante del secondo membro, ci si trova condotti ad assegnare un integrale completo $W(x_1, x_2, x_3; \xi_1, \xi_2, \xi_3)$ della equazione

$$\tfrac{1}{2}r(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) = \text{cost.} = \mathcal{H}(\xi_1, \xi_2, \xi_3). \tag{7}$$

Nelle espressioni finali delle x_i, p_i, le costanti ξ_1, ξ_2, ξ_3 dovranno ritenersi vincolate dalla relazione

$$\mathcal{H}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = k, \tag{8}$$

con che si verifica la condizione $H = 0$ caratteristica delle ∞^6 soluzioni paraboliche.

3. - Costruzione di un integrale completo omogeneo di grado $\frac{1}{2}$.

In coordinate polari r, w (colatitudine), φ (longitudine), la (7) si scrive

$$\frac{r}{2}\left\{\left(\frac{\partial W}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial W}{\partial w}\right)^2 + \frac{1}{r^2 \sin^2 w}\left(\frac{\partial W}{\partial \varphi}\right)^2\right\} = \text{cost}. \tag{7'}$$

---

[5] *Sur la résolution qualitative du problème restreint des trois corps*, « Acta Mathematica », tomo 30, 1906, pp. 306-327, [in queste «Opere»: vol. secondo, XXIII, pp. 419-439].

Essa ammette, come si riconosce immediatamente, integrali particolari indipendenti da φ, della forma

$$W = \sqrt{r}\, f(w)\,.$$

Infatti, sostituendo in (7′), risulta

$$\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{4} f^2 + \left(\frac{df}{dw}\right)^2\right\} = \text{cost.}\,,$$

cui si soddisfa prendendo per es.

$$f = 2\sqrt{\xi}\,\sin \tfrac{1}{2}w\,,$$

con ξ costante positiva arbitraria. Il primo membro della (7′) si riduce in conformità a $\frac{1}{2}\xi$.

Si è così trovato un integrale

$$W = 2\sqrt{\xi r}\,\sin \tfrac{1}{2}w\,, \tag{9}$$

che dipende materialmente da una sola costante, ma che si può agevolmente interpretare come dotato di maggiore generalità. Basta riflettere che (nessuna supposizione essendo stata fatta circa l'orientazione degli assi) è lecito considerare come arbitraria la direzione dell'asse polare Ox_3, cioè della semiretta a partire dalla quale è contata la colatitudine w. In questa accezione, ove si ritorni a coordinate cartesiane generiche, e si designino con λ_1, λ_2, λ_3 i coseni direttori della semiretta suaccennata, sarà

$$\cos w = \frac{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3}{r}\,,$$

e W conterrà, oltre a ξ, anche i coseni λ, ossia complessivamente tre costanti indipendenti. Per rendercene conto in modo preciso, immaginiamo il vettore di lunghezza ξ e di coseni direttori λ_1, λ_2, λ_3, ed esprimiamo W per mezzo delle componenti

$$\xi_i = \xi \lambda_i \qquad (i = 1, 2, 3)$$

di questo vettore, continuando tuttavia per brevità a scrivere ξ in luogo di $\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2}$.

La (9) dà

$$W = \sqrt{2\xi r}\sqrt{1 - \cos w} = \sqrt{2}\sqrt{\xi r - \sum_{1}^{3}{}_i\, \xi_i x_i}\,, \tag{9'}$$

che costituisce pertanto un integrale della (7) contenente le tre costanti ξ_1, ξ_2, ξ_3 in modo essenziale.

Non mi soffermo a giustificare quest'ultima affermazione, poichè essa apparirà manifesta dallo svolgimento e dal risultato finale del calcolo. Mi limito a rilevare che, a norma della (9'), W si mantiene regolare e diversa da zero, a meno che non si annullino insieme tutte le x_i $(r = 0)$, ovvero tutte le ξ_i $(\xi = 0)$, o infine tutte le differenze $x_i - \xi_i$ $(\cos w = 1)$. Ricordo, poi, che la sostituzione di (9) in (7') dava per risultato $\frac{1}{2}\xi$, e ne desumo che, per l'integrale completo (9') testè conseguito,

$$\mathcal{H}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \tfrac{1}{2}\xi\,, \tag{10}$$

donde, badando alla (8),

$$\xi = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2} = 2k\,. \tag{8'}$$

Tale è dunque la relazione, da cui dovranno ritenersi legate al coefficiente d'attrazione le tre costanti d'integrazione ξ_1, ξ_2, ξ_3 nelle soluzioni paraboliche che ci interessano.

4. - Significato delle costanti ξ_i e dei parametri $\tilde{\omega}_i$.

Le equazioni che definiscono il movimento sono, in base alle (3) e alla (9'),

$$-\frac{\partial W}{\partial \xi_i} = \frac{r}{W}\left(\frac{x_i}{r} - \frac{\xi_i}{\xi}\right) = \tilde{\omega}_i\,, \tag{11}$$

$$\frac{\partial W}{\partial x_i} = \frac{\xi}{W}\left(\frac{x_i}{r} - \frac{\xi_i}{\xi}\right) = p_i\,, \tag{12}$$

$$(i = 1, 2, 3).$$

Prima di risolvere rispetto alle x_i e alle p_i, non sarà male rilevare il significato geometrico-cinematico delle ξ_i, $\tilde{\omega}_i$, appoggiandosi sul fatto noto [e altresì — ben si intende — implicito nelle stesse (11) e (12)] che il movimento è centrale ed ha luogo sopra una traiettoria parabolica col fuoco nell'origine delle coordinate.

La circostanza che il moto è centrale implica l'esistenza degli integrali delle aree, che si compendiano nella relazione vettoriale

$$\boldsymbol{r} \wedge \boldsymbol{v} = \boldsymbol{c}\,, \tag{13}$$

designando $\boldsymbol{r}$ il raggio vettore focale (di componenti ξ_1, ξ_2, ξ_3); $\boldsymbol{v}$ la velocità, ossia il vettore di componenti p_1, p_2, p_3; $\boldsymbol{c}$ un vettore costante (momento focale della velocità). Per brevità, introduciamo ancora il vettore costante $\boldsymbol{\xi}$ definito dalle componenti ξ_1, ξ_2, ξ_3, nonchè il vettore (variabile) $\tilde{\boldsymbol{\omega}}$ definito dalle componenti $\tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_2, \tilde{\omega}_3$.

Già risulta dalla (8′) che il vettore $\boldsymbol{\xi}$ ha lunghezza (certo non nulla) $2k$; resta da renderci conto della direzione, servendoci all'uopo delle (11) e (12). In forma vettoriale esse si scrivono

$$\tilde{\boldsymbol{\omega}} = \frac{1}{W}\left(\boldsymbol{r} - \frac{r}{\xi}\boldsymbol{\xi}\right), \tag{11′}$$

$$\boldsymbol{v} = \frac{1}{W}\left(\frac{\xi}{r}\boldsymbol{r} - \boldsymbol{\xi}\right), \tag{12′}$$

e consentono di riconoscere che, *al pari di* $\boldsymbol{\xi}$, *è costante anche il vettore* $\boldsymbol{\xi} \wedge \tilde{\boldsymbol{\omega}}$. All'uopo, moltiplichiamo vettorialmente la (11′) per $\boldsymbol{\xi}$ e la (12′) per $\boldsymbol{r}$. Viene

$$\boldsymbol{\xi} \wedge \tilde{\boldsymbol{\omega}} = -\frac{1}{W}\boldsymbol{r} \wedge \boldsymbol{\xi}\,,$$

$$\boldsymbol{r} \wedge \boldsymbol{v} = -\frac{1}{W}\boldsymbol{r} \wedge \boldsymbol{\xi}\,,$$

donde, per la (13),

$$\boldsymbol{\xi} \wedge \tilde{\boldsymbol{\omega}} = \boldsymbol{c}\,, \tag{14}$$

c. d. d.

Ricaviamo dalle (11′) anche l'espressione del prodotto scalare $\tilde{\boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{\xi}$ e di $\tilde{\boldsymbol{\omega}}^2$, che scriveremo $\tilde{\omega}^2$, attribuendo, per analogia con ξ, la designazione $\tilde{\omega}$ alla lunghezza $\sqrt{\tilde{\omega}_1^2 + \tilde{\omega}_2^2 + \tilde{\omega}_3^2}$ del vettore $\tilde{\boldsymbol{\omega}}$.

Si ha

$$\tilde{\boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{\xi} = \frac{1}{W}(\boldsymbol{\xi} \times \boldsymbol{r} - \xi r)\,,$$

$$\tilde{\omega}^2 = \frac{2r}{\xi W^2}(\xi r - \boldsymbol{\xi} \times \boldsymbol{r})\,,$$

le quali, badando che, per la (9′), è

$$\tag{9''} \tfrac{1}{2}W^2 = \xi r - \boldsymbol{\xi} \times \boldsymbol{r} ,$$

porgono

$$\tag{15} -\tilde{\boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{\xi} = \tfrac{1}{2} W ,$$

$$\tag{16} \tilde{\omega}^2 = \frac{r}{\xi} .$$

Noto per incidenza che la (15) si esplicita in

$$-\sum_1^3{}_i\, \tilde{\omega}_i \xi_i = \sum_1^3{}_i \frac{\partial W}{\partial \xi_i} \xi_i = \frac{1}{2} W ,$$

e si sarebbe potuta desumere dalla semplice osservazione che W è omogenea di grado $\frac{1}{2}$ rispetto alle ξ (come anche rispetto alle x).

Con ovvia combinazione delle (9″), (15) e (16), si ha

$$\tilde{\omega}^2 \xi^2 - (\tilde{\boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{\xi})^2 = \xi r - \frac{1}{2} (\xi r - \boldsymbol{\xi} \times \boldsymbol{r}) = \frac{1}{2} \xi \left(r + \frac{1}{\xi} \boldsymbol{\xi} \times \boldsymbol{r} \right) .$$

Il primo membro si identifica manifestamente col quadrato del vettore $\boldsymbol{\xi} \wedge \tilde{\boldsymbol{\omega}}$; cioè, in virtù della (14), con la costante $\boldsymbol{c}^2$.

Ricordando che w rappresenta l'angolo formato dai due vettori $\boldsymbol{r}$ e $\boldsymbol{\xi}$, si attribuisce al terzo membro la forma $\frac{1}{2}\xi r(1 + \cos w)$, e se ne ricava l'equazione

$$\tag{17} r(1 + \cos w) = \frac{2}{\xi} \boldsymbol{c}^2 .$$

Questa contiene i soli argomenti variabili r e w, e definisce quindi la traiettoria del moto, dal momento che, in virtù della (13), si tratta di una curva tutta situata nel piano

$$\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{r} = 0 .$$

Il confronto con la forma tipica della equazione polare della parabola mostra che w è l'angolo formato dal raggio vettore $\boldsymbol{r}$ con l'asse rivolto dalla banda della direttrice; inoltre che la costante del secondo membro,

$$\frac{2}{\xi}\mathbf{c}^2 = \frac{2}{\xi}(\boldsymbol{\xi}\wedge\tilde{\boldsymbol{\omega}})^2 = \frac{2}{\xi}\begin{vmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \\ \tilde{\omega}_1 & \tilde{\omega}_2 & \tilde{\omega}_3 \end{vmatrix}^2,$$

rappresenta il parametro.

In definitiva: *Il vettore costante* (ξ_1, ξ_2, ξ_3) *di lunghezza* $2k$ *ha la direzione dell'asse della parabola nel verso che va dal fuoco alla direttrice.*

Quanto ai parametri $\tilde{\omega}_1$, $\tilde{\omega}_2$, $\tilde{\omega}_3$, compendiati nel vettore $\tilde{\boldsymbol{\omega}}$, l'interpretazione risulta immediata dalle (11') e (12'), il cui confronto porge

$$\tilde{\boldsymbol{\omega}} = \frac{1}{\xi} r\boldsymbol{v} = \frac{1}{2k} r\boldsymbol{v}\,. \tag{18}$$

5. - Forma risoluta della trasformazione canonica fra le due sestuple x_i, p_i; ξ_i, $\tilde{\omega}_i$.

Dalle (11), (12) segue l'identità

$$\sum_1^3{}_i\, p_i dx_i - \sum_1^3{}_i\, \tilde{\omega}_i d\xi_i = dW;$$

perciò le formule stesse definiscono una trasformazione canonica fra le primitive variabili x_i, p_i e gli argomenti ξ_i, $\tilde{\omega}_i$, purchè soltanto si possano effettivamente risolvere rispetto alle une e agli altri.

Le (11), isolando x_i, e scrivendo Y in luogo di $-\frac{1}{2}W$, porgono

$$x_i = \frac{r}{\xi}\,\xi_i - 2Y\tilde{\omega}_i\,.$$

Ma già abbiamo ricavato nel numero precedente [sostanzialmente come combinazione delle stesse (11), (12)] le espressioni di r e di W in termini delle ξ_i e $\tilde{\omega}_i$: esse sono offerte dalle (15), (16), la prima delle quali diviene $\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\xi} = Y$.

Abbandonando la notazione vettoriale, ma conservando le abbreviazioni

$$(a) \qquad r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}, \quad \xi = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2}, \quad \tilde{\omega} = \sqrt{\tilde{\omega}_1^2 + \tilde{\omega}_2^2 + \tilde{\omega}_3^2},$$

$$Y = \sum_1^3{}_i\, \tilde{\omega}_i \xi_i$$

(coi valori aritmetici dei radicali), si ha il primo gruppo delle cercate formule risolute

$$\text{(I)} \qquad x_i = \tilde{\omega}^2 \xi_i - 2Y\tilde{\omega}_i \qquad (i = 1, 2, 3),$$

cui giova associare l'espressione (16) di r, che ne è del resto una necessaria conseguenza e che riscrivo per raccogliere le varie formule da tener presenti in vista dell'applicazione, annunciata nell'introduzione (alla regolarizzazione del problema dei tre corpi),

$$(b) \qquad r = \xi \tilde{\omega}^2 .$$

Le formule esprimenti le p_i risultano dal confronto delle (11) con le (12), confronto che già si è tradotto nella (18). Da questa, sostituendo per r il suo valore (b), si trae

$$p_i = \frac{\tilde{\omega}_i}{\tilde{\omega}^2} \qquad (i = 1, 2, 3) .$$

Senza eseguire la detta sostituzione, si avrebbe

$$(c) \qquad r p_i = \xi \tilde{\omega}_i$$

da cui [o dalle (II)], tenuto conto di (b), scende

$$(d) \qquad r(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) = \xi ,$$

che giova fissare per la ragione testè indicata a proposito della (b).

6. - Inversione. Comportamento analitico.

La trasformazione (I), (II) si inverte senza alcun calcolo. Basta notare che l'espressione (9') di W dipende in modo simmetrico dalle x_i e dalle ξ_i, talchè anche le formule (11), (12) risultano simmetriche rispetto alle due sestuple (x_i, p_i), $(\xi_i, -\tilde{\omega}_i)$.

Perciò, *ove si scambino materialmente, nelle* (I), (II) *le* x_i, p_i *con le corrispondenti* ξ_i, $-\tilde{\omega}_i$, *se ne traggono le espressioni delle nuove in termini delle antiche variabili. Giova aggiungere che, data la forma delle stesse* (I), (II), *si perviene al medesimo risultato scambiando addirittura gli elementi corrispondenti delle due sestuple* (x_i, p_i), $(\xi_i, \tilde{\omega}_i)$.

Questa osservazione, congiunta con la circostanza che i secondi membri delle (I) sono polinomi (di terzo grado), e quelli delle (II) funzioni razionali col denominatore $\tilde{\omega}^2$, consente di affermare che *la nostra trasformazione è birazionale e regolare per tutti i valori finiti degli argomenti, che non annullano il trinomio* $\tilde{\omega}_1^2+\tilde{\omega}_2^2+\tilde{\omega}_3^2$ *o, rispettivamente,* $p_1^2+p_2^2+p_3^2$.

Rispetto alla trasformazione diretta (I), (II), meritano particolare menzione le sestuple Γ costituite da valori tutti nulli delle $\tilde{\omega}_i$, ma non tutti nulli delle ξ_i, talchè $\xi > 0$. Si tratta manifestamente di sestuple (non regolari, per quanto si è testè osservato) le quali si trovano immerse nel campo di olomorfismo senza interromperne la continuità; esse formano infatti una varietà a sole tre dimensioni, mentre lo spazio ambiente ne ha sei.

Supponiamo di far variare la sestupla ξ_i, $\tilde{\omega}_i$ in detto spazio, avvicinandoci ad una Γ lungo una linea (regolare) L, per modo che, tendendo le $\tilde{\omega}_i$ a zero, i rapporti $\tilde{\omega}_i/\tilde{\omega}$ ammettano limiti ben determinati γ_i, soddisfacenti necessariamente alla condizione

$$\gamma_1^2+\gamma_2^2+\gamma_3^2=1\,.$$

Le (I), (b), (c) mostrano che *le coordinate* x_i, *il raggio vettore* r *e i prodotti* rp_i *rimangono, anche nell'intorno di una generica* Γ, *funzioni regolari delle* ξ_i, $\tilde{\omega}_i$, *che si annullano in* Γ; non così le p_i, le quali in generale tendono a diventare infinite.

Quando, lungo L, ci si avvicina indefinitamente a Γ, si ha dalle (I) e (b) [tenuto conto, si intende, delle posizioni (a)]

$$\lim\frac{x_i}{r}=\frac{\xi_i}{\xi}-2\gamma_i\sum_1^3{}_j\frac{1}{\xi}\,\xi_j\gamma_j\,; \tag{19}$$

e dalle (II) e (b),

$$\lim\sqrt{r}\,p_i=\sqrt{\xi}\,\gamma_i\,. \tag{20}$$

Se, in particolare, ogni γ_i coincide con $\pm\,\xi_i/\xi$, come avviene [in base alla (14), per $c=0$] quando il moto parabolico degenera in rettilineo, risulta

$$\lim\frac{x_i}{v}=-\frac{\xi_i}{\xi}\,. \tag{19'}$$

OSSERVAZIONE. – Nei riguardi delle coordinate x_i la nostra trasformazione canonica (I), (II) non è puntuale, poichè nei secondi membri delle (I) appariscono variabili trasformate di entrambe le serie (ξ_i e $\tilde{\omega}_i$). Si tratta quindi di una trasformazione di contatto. Intrinsecamente, per altro, essa rientra nel tipo delle trasformazioni puntuali estese (nel senso di LIE). Infatti le (II) rappresentano una inversione per raggi vettori reciproci fra le p_i e le $\tilde{\omega}_i$, e le (I) ne rimangono subordinate dalla condizione di canonicità.

7. - Moto parabolico tangente ad un movimento generico. Interpretazione delle variabili trasformate ξ_i, $\tilde{\omega}_i$.

Dal n. 4 risulta agevolmente quale significato si possa attribuire alle variabili $(\xi_i, \tilde{\omega}_i)$, quando le (x_i, p_i) si considerano come coordinate e componenti di velocità di un punto mobile con legge qualsiasi.

Basta considerare un ipotetico moto parabolico (*moto tangente*) dello stesso punto, dovuto ad attrazione newtoniana verso l'origine delle coordinate, per cui:

1) il coefficiente d'attrazione abbia il valore

$$k = \tfrac{1}{2}r(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2)\,,$$

corrispondente alla sestupla (x_i, p_i) che si prende in considerazione;

2) la parabola traiettoria passi per il punto (x_1, x_2, x_3), toccandovi il vettore (p_1, p_2, p_3).

Le nuove variabili ξ_i, $\tilde{\omega}_i$ sono espressivamente collegate a tale moto tangente: ξ_1, ξ_2, ξ_3 definiscono un vettore di lunghezza $2k$ che ha la direzione dell'asse della parabola (vòlto dal fuoco alla direttrice); $\dfrac{1}{\xi}\begin{Vmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \\ \tilde{\omega}_1 & \tilde{\omega}_2 & \tilde{\omega}_3 \end{Vmatrix}^2$ ne è il semiparametro; ecc.

Quando eventualmente, nel corso del moto, le ξ_i, $\tilde{\omega}_i$ convergono verso una delle sestuple Γ di cui al n. prec. ($\tilde{\omega}_i = 0$, $\xi > 0$), la parabola osculatrice tende a schiacciarsi indefinitamente, convergendo a zero il relativo parametro; l'orientazione dell'asse ha però un limite ben determinato. Il mobile tende ad avvicinarsi all'origine secondo una direzione pur determinata [cfr. formula (19)]. Se, in particolare,

$$\lim \frac{\tilde{\omega}_i}{\omega} = \pm \frac{\xi_i}{\xi}\,, \qquad (i = 1, 2, 3)\,,$$

l'avvicinamento suddetto segue nella direzione dell'asse [formula (19')].

8. - Integrale completo a variabili separate. Elementi parabolici.

Accanto alle (I), (II) è degna di interesse un'altra trasformazione canonica la quale collega le x_i, p_i ad elementi osculatori parabolici, assai affini agli ordinari elementi ellittici. Vi si perviene nel modo più rapido, partendo da un integrale completo della (7') del tipo classico

$$W = R + Gw \,, \tag{21}$$

con G costante ed R funzione della sola r. Si può assumere

$$R = \int_q^r dr \sqrt{\frac{Z^2}{4r} - \frac{G^2}{r^2}} \,, \tag{22}$$

dove

$$\tfrac{1}{8} Z^2 = k \tag{23}$$

è la costante del secondo membro di (7'), e

$$q = \frac{4G^2}{Z^2} \tag{24}$$

designa il valore di r (unico nel campo finito) che annulla il radicale. Riferendosi, con ragionamento classico, al modo di variare del raggio vettore lungo l'orbita (parabolica nel caso presente), si constata che q rappresenta la minima distanza del mobile dal fuoco, ossia il semiparametro.

Come retta fissa, a partire dalla quale è contato l'angolo w, intenderemo assunta, seguendo POINCARÉ [6], la linea dei nodi (intersezione, debitamente precisata quanto al verso, del piano della parabola col piano Ox_1x_2); con che, detta al solito θ la longitudine del nodo, si ha

$$\begin{gathered} \cos w = \frac{x}{r} \cos\theta + \frac{y}{r} \sin\theta \,, \\ \frac{\partial w}{\partial \theta} = - \cos I \,, \end{gathered} \tag{25}$$

I designando l'inclinazione (del piano della parabola sul piano Ox_1x_2).

---

[6] Loc. cit., pp. 48-51.

Dopo ciò, W viene a contenere le tre costanti Z, G, θ caratterizzabili come segue:

Z dipende esclusivamente dal coefficiente di attrazione, a norma della (23);

$G = \frac{1}{2}Z\sqrt{q}$ individua (subordinatamente a Z) il semiparametro q della parabola;

θ rappresenta la longitudine del nodo.

Le (3), adattate alla nostra W in cui Z, G, θ fungono da ξ_i, ove si scriva $-\zeta$, $-g$, Θ al posto di $\tilde{\omega}_1$, $\tilde{\omega}_2$, $\tilde{\omega}_3$ dànno

$$(26)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial W}{\partial Z} = \zeta\,, \quad \dfrac{\partial W}{\partial G} = g\,, \quad \dfrac{\partial W}{\partial \theta} = -\Theta\,, \\ \dfrac{\partial W}{\partial x_i} = p_i\,, \quad (i = 1, 2, 3)\,. \end{cases}$$

In base alle (21), (22), (24) e (25), il primo gruppo si scrive

$$\frac{\partial W}{\partial Z} = \sqrt{r-q} = \zeta\,, \qquad \frac{\partial W}{\partial G} = \frac{\partial R}{\partial G} + w = g\,, \qquad \frac{\partial W}{\partial \theta} = -G\cos I = -\Theta\,,$$

e consente di rilevare il significato degli altri tre parametri ζ, g, Θ.

Per nota proprietà della parabola:

$\zeta^2 = r - q$ rappresenta l'ascissa della generica posizione del mobile, contata lungo l'asse a partire dal vertice;

dalla seconda equazione, applicata al vertice, segue che

g rappresenta l'angolo che la direzione dell'asse (vôlta dal fuoco verso il vertice) forma con la linea dei nodi;

Infine la terza equazione mostra che:

$\Theta = G\cos I$ individua l'inclinazione.

Le (26) implicano

$$\textstyle\sum_i p_i\,dx_i - (Z\,d\zeta + G\,dg + \Theta\,d\theta) = d(W - Z\zeta - Gg)\,,$$

definendo perciò una trasformazione canonica fra la sestupla p_i, x_i e le due terne coniugate

$$(\mathrm{P})\qquad \begin{pmatrix} Z\,, & G\,, & \Theta \\ \zeta\,, & g\,, & \theta \end{pmatrix}.$$

Le espressioni esplicite delle x_i, p_i in termini della nuova sestupla (P) si stabiliscono subito, sia per materiale risoluzione delle (26), sia anche più semplicemente (come si suol fare nel caso degli elementi ellittici) ricorrendo a formule elementari di trasformazione di coordinate e sfruttando il significato dei sei parametri.

Tralascio ogni sviluppo, limitandomi ad avvertire che questa trasformazione fra le x_i, p_i e le (P) *non* ha le prerogative regolarizzanti della (I), (II) nell'intorno dell'origine ($x_i = 0$, cui fanno riscontro valori nulli di ζ, G e Θ).

Terminerò osservando che la sestupla canonica (P) si può risguardare come un caso limite (corrispondente al valore zero dell'energia) di quegli elementi ellittici che ho denominato *isoenergetici* (7) e che, sotto alcuni rapporti, sono preferibili agli ordinari elementi *isodinamici*, in quanto vi comparisce direttamente (per individuare la fase del moto tangente) la anomalia eccentrica, anzichè la media. Analoghi servigi possono rendere gli elementi (P) nello studio delle perturbazioni cometarie.

---

(7) Nella già citata Memoria del tomo XX degli « Annali di Matematica » [in questo volume: XXIV, pp. 341-356]. Cfr. altresì H. ANDOYER, *Sur l'anomalie excentrique et l'anomalie vraie comme éléments canoniques d'après MM. T. Levi-Civita et G.-W. Hill*, in « Bulletin Astronomique », tome XXX, 1913, pp. 425-429; *Sur les problèmes fondamentaux de la mécanique céleste*, ibidem, tome XXXII, 1915, pp. 5-18.

XXXVIII.

SUR LA RÉGULARISATION DU PROBLÈME DES TROIS CORPS

« Comptes Rendus de l'Acad. des Sc. de Paris », t. CLXII (1916), pp. 1-4.

Les équations différentielles du problème des trois corps, dans une quelconque de leurs formes classiques, présentent des singularités au voisinage d'un choc. J'ai montré, il y a déjà quelques années (1), que, dans le cas particulier du problème restreint, on peut faire disparaître toute singularité par un changement tout à fait élémentaire de paramètres, et cela sans altérer la forme canonique des équations.

M. Sundman a découvert ensuite (2) une régularisation du problème général, d'où la conclusion, mémorable au point de vue de l'analyse, que toute solution (quelles que soient les données initiales) peut être représentée par des développements en série toujours convergents. Cependant le but a pu être atteint seulement d'une manière indirecte, par l'introduction d'un nombre assez grand d'auxiliaires et en sortant du cadre des équations de la Dynamique: circonstance assez gênante, puisqu'il n'est plus permis (du moins sans discussions préalables) d'appliquer au système régularisé ni les résultats théoriques, ni les méthodes de calcul de la Mécanique analytique.

Pour le problème plan je suis parvenu tout récemment (3) à une véritable régularisation dynamique, en généralisant (avec traitement symétrique des trois corps) la transformation employée pour le problème restreint).

Le problème dans l'espace a longtemps résisté à mes efforts, tant que j'essayais de l'aborder par de semblables changements de coordon-

---

(1) « Acta mathematica », t. 30, 1906, pp. 305-327 [in queste «Opere»: vol. secondo, XXIII, pp. 419-439].

(2) Ibidem, t. 36, 1912, pp. 105-179.

(3) « Rendiconti dei Lincei », t. 24 (2° semestre 1915), pp. 61-75, 235-248, 421-433, 485-501, 553-569, [in questo vol.: XXXIII, pp. 477-493; XXXIV, pp. 495-509; XXXV, pp. 511-564].

nées. Les transformations canoniques usuelles, se rattachant au mouvement elliptique, ne régularisent pas non plus. Mais on peut en trouver d'analogues: une notamment bien simple, suggérée par le mouvement parabolique, rendant tout holomorphe au voisinage d'un choc binaire. C'est ce que je vais exposer ici, si l'Académie veut bien le permettre.

1. – Soient O, P, P' les trois corps; m_0, m, m' leurs masses; x_i, x'_i $(i = 1, 2, 3)$ les coordonnées de P et de P' par rapport à O (c'est-à-dire par rapport à trois axes rectangulaires d'orientation fixe ayant l'origine en O); p_i, p'_i les composantes de la quantité de mouvement *absolue* de P et de P' respectivement; r, r', Δ les trois distances $\overline{OP}$, $\overline{OP'}$, $\overline{PP'}$; f la constante de l'attraction; $\mathfrak{D}$ la fonction des forces; $\mathfrak{T}$ l'énergie cinétique du système. On a

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} \mathfrak{D} &= f\left(\frac{m_0 m}{r} + \frac{m_0 m'}{r'} + \frac{mm'}{\Delta}\right), \\ \mathfrak{T} &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{m_0}\right)(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{m'} + \frac{1}{m_0}\right)(p_1'^2 + p_2'^2 + p_3'^2) \\ &\quad + \frac{1}{m_0}(p_1 p_1' + p_2 p_2' + p_3 p_3')\,. \end{aligned}\right.$$

Les équations du mouvement relatif sous la forme canonique de POINCARÉ dérivent de la fonction caractéristique

$$(2)\qquad H = \mathfrak{T} - \mathfrak{D}\,.$$

Elles s'écrivent par conséquent

$$(3)\qquad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_i}, \quad \frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}; \quad \frac{dp'_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x'_i}, \quad \frac{dx'_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p'_i}, \quad (i = 1, 2, 3),$$

et donnent lieu à l'intégrale (des forces vives)

$$(4)\qquad H = \mathfrak{E} \qquad (\mathfrak{E} = \text{const.}).$$

2. – Envisageons les mouvements pour lesquels la constante $\mathfrak{E}$ a une valeur fixée d'avance, et posons avec M. SUNDMAN

$$(5)\qquad dt = r\,du\,.$$

Les ∞^{11} solutions du système (3) satisfaisant à la condition $H = \mathfrak{E}$ vérifient également le système

$$\frac{dp_i}{du} = -\frac{\partial H^*}{\partial x_i}, \quad \frac{dx_i}{du} = \frac{\partial H^*}{\partial p_i}; \quad \frac{dp'_i}{du} = -\frac{\partial H^*}{\partial x'_i}, \quad \frac{dx'_i}{du} = \frac{\partial H^*}{\partial p'_i}, \tag{6}$$

$$(i = 1, 2, 3),$$

où

$$H^* = r(H - \mathfrak{E}). \tag{7}$$

Elles correspondent à la valeur zéro de H^*.

3. – Le dernier pas en vue de la régularisation consiste à remplacer les x_i, p_i par six combinaisons canoniques ξ_i, $\tilde{\omega}_i$ moyennant la transformation suivante (4):

$$x_i = \tilde{\omega}^2 \xi_i - 2U\tilde{\omega}_i, \qquad p_i = \frac{\tilde{\omega}_i}{\tilde{\omega}^2}, \qquad (i = 1, 2, 3), \tag{8}$$

où

$$\tilde{\omega}^2 = \tilde{\omega}_1^2 + \tilde{\omega}_2^2 + \tilde{\omega}_3^2, \qquad U = \tilde{\omega}_1\xi_1 + \tilde{\omega}_2\xi_2 + \tilde{\omega}_3\xi_3.$$

C'est une transformation canonique, puisqu'elle entraîne

$$\sum_1^3 {}_i\, p_i\, dx_i - \sum_1^3 {}_i\, \tilde{\omega}_i\, d\xi_i = -2\, dU.$$

Elle entraîne aussi

$$\left\{\begin{array}{ll} r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} = \xi\tilde{\omega}^2, & (\xi = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2}), \\ rp_i = \xi\tilde{\omega}_i, & (i = 1, 2, 3), \\ r(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) = \xi. & \end{array}\right. \tag{9}$$

4. – Ceci posé, plaçons-nous au voisinage d'un choc entre P et O, dans l'hypothèse où le moment résultant des quantités de mouvement du système ne s'annule pas. On est assuré, d'après M. SUNDMAN, que P'

(4) On y est conduit tout naturellement en intégrant par la méthode de JACOBI les équations du mouvement parabolique (d'un point soumis à l'attraction newtonienne d'un centre fixe, dans le cas particulier où s'annule la constante des forces vives). Voir, pour cette déduction et pour les propriétés géométriques de ladite transformation, une Note actuellement sous presse aux « Rendiconti dei Lincei » [in questo vol.: XXXVII, pp. 573-587].

reste à une distance finie soit de O que de P, la vitesse de P' restant finie. La vitesse de P croît au contraire indéfiniment, lorsqu'on s'approche d'un choc, de façon toutefois que le produit $r(p_1^2+p_2^2+p_3^2)$ tende vers une limite positive (dépendant exclusivement des masses).

Pour notre but suffit d'ailleurs la remarque, découlant immédiatement des formules (8) et (9), que, par rapport aux nouvelles variables ξ_i, $\tilde{\omega}_i$, *un choc est caractérisé par des valeurs nulles de* $\tilde{\omega}_i$, *non toutes nulles à la fois des* ξ_i: bien entendu, on doit y associer des valeurs finies quelconques des x_i', p_i' soumises à la seule restriction $r' > 0$ (ce qui implique, à cause de $r = 0$, $\Delta = r' > 0$). *Les formules* (8) *et* (9) *montrent au surplus que, dans le domaine d'un tel système de valeurs, les ancienne coordonnées* x_i, *ainsi que* r, rp_i, $r(p_1^2+p_2^2+p_3^2)$ *sont des fonctions holomorphes des arguments* ξ_i, $\tilde{\omega}_i$. *On en déduit immédiatement, ayant égard à* (1), (2) *et* (7), *qu'il en est de même pour la fonction caractéristique* H^*; c. q. f. d.

5. – Considérons en particulier (parmi les termes qui figurent dans H^*) le produit

$$r\mathfrak{D} = f\left(m_0 m + m_0 m' \frac{r}{r'} + m m' \frac{r}{\Delta}\right).$$

Par rapport aux nouvelles variables, c'est évidemment une fonction holomorphe au voisinage d'un choc P, O, qui ne s'annule pas pour $r = 0$.

Il s'ensuit que le paramètre τ, défini par la relation différentielle

$$d\tau = \mathfrak{D}\,dt = r\mathfrak{D}\,du\,, \tag{10}$$

peut rendre les mêmes services que u, dans le domaine susdit, avec l'avantage, évident à cause de sa structure symétrique, de s'appliquer également aux autres chocs éventuels: partout ailleurs, cela va sans dire, la substitution de τ à t comme variable indépendante est parfaitement légitime, puisque $\mathfrak{D}$ demeure fini et > 0.

Par une telle substitution, la fonction caractéristique H^* du système différentiel (6) devient

$$F = \frac{1}{r\mathfrak{D}} H^* = \frac{1}{\mathfrak{D}} (H - \mathfrak{E})\,. \tag{11}$$

C'est une fonction régulière des variables primitives x_i, p_i, x_i', p_i', tant que les positions des trois corps sont distinctes; au voisinage d'un choc binaire, des transformations canoniques analogues à (8) suffisent à rétablir la régularité.

On peut évidemment (d'une infinité de manières) choisir 12 paramètres canoniques

$$y_h\,,\quad q_h \qquad\qquad (h = 1, 2, ..., 6)$$

définissant l'état de mouvement des trois corps, doués de la propriété que $F(y_h, q_h)$ se comporte régulièrement *toujours* (chocs éventuels compris), c'est-à-dire quelles que soient les valeurs de ces paramètres qu'on peut effectivement atteindre pendant le cours du mouvement (à partir d'un état quelconque).

Il resterait à indiquer un choix approprié de tels paramètres. Je me borne à signaler la question. Pour le problème plan, la question analogue a été traitée avec tous les développements qu'elle comporte dans les Notes citées au début.

INDICE