

TULLIO LEVI-CIVITA



# OPERE MATEMATICHE

Memorie e Note

PUBBLICATE

A CURA DELL'ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Volume secondo  
1901 - 1907

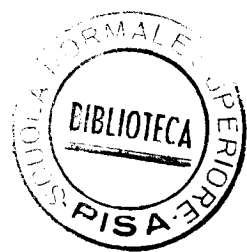


NICOLA ZANICHELLI EDITORE

BOLOGNA 1956



OPERE MATEMATICHE  
DI TULLIO LEVI-CIVITA



COMITATO  
PER L'EDIZIONE DELLE OPERE MATEMATICHE  
DI TULLIO LEVI-CIVITA

FRANCESCO GIORDANI, *Presidente della Classe di Scienze Fisiche,  
Matematiche e Naturali dell'Accademia Nazionale dei Lincei;*

UGO AMALDI;

GIULIO KRALL;

GIOVANNI LAMPARIELLO;

ENRICO PERSICO;

ANTONIO SIGNORINI;

ANGELO TONOLO.

TULLIO LEVI-CIVITA

# OPERE MATEMATICHE

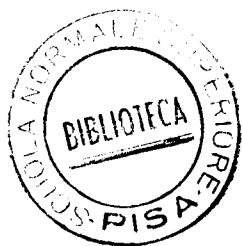
Memorie e Note

PUBBLICATE

A CURA DELL'ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Volume secondo

1901 - 1907



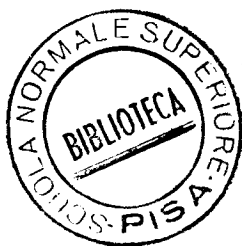
NICOLA ZANICHELLI EDITORE

BOLOGNA 1956

L'EDITORE ADEMPIUTI I DOVERI  
ESERCITERÀ I DIRITTI SANCITI DALLE LEGGI

453

# MEMORIE E NOTE







## I.

# SOPRA ALCUNI CRITERI DI INSTABILITÀ <sup>(1)</sup>

« Ann. di Mat. », serie 3<sup>a</sup>, t. V (1901), pp. 221-308.

### Introduzione.

Le prime ricerche sistematiche sulla stabilità si devono a LAGRANGE, il quale nella *Mécanique analytique* espose il metodo delle piccole oscillazioni.

Spetta a DIRICHLET il merito di aver introdotto in questo genere di considerazioni il rigore matematico, mostrando come le condizioni, richieste per la stabilità dall'accennato procedimento, sono effettivamente sufficienti, allorchè si tratta di equilibrio sotto l'azione di forze conservative. Se tali condizioni sieno anche necessarie, e più generalmente fin dove arrivi nelle questioni di stabilità la portata del metodo, rimase a lungo inesplorato. Ma, quando le applicazioni andarono moltiplicandosi, la critica del principio si impose.

L'occasione fu offerta al sig. POINCARÉ dai suoi classici studi sulle curve definite da equazioni differenziali. Nel discutere i caratteri qualitativi delle curve integrali, egli ebbe in particolare ad occuparsi della loro stabilità. Con ciò si trovarono confermati, per i sistemi di secondo e terzo ordine, i criteri di instabilità offerti dal metodo delle piccole oscillazioni.

Poco dopo se ne ebbe conferma, anche per il caso generale, grazie ai lavori del sig. LIAPOUNOFF <sup>(2)</sup>.

---

(<sup>1</sup>) I risultati del presente lavoro si trovano riassunti in tre Note, presentate all'Accademia di Francia (cfr. « Comptes Rendus », 9, 16 e 23 Luglio 1900). [In queste « Opere » ved.: volume primo; XXVIII, p. 461; XXIX, p. 465; XXX, p. 469; N. d. R.].

(<sup>2</sup>) Cfr. in particolare « Journal de Mathématique », 1897.

Il sig. LIAPOUNOFF dedicò al problema generale della stabilità del movimento varie memorie, nonchè un intero volume, scritto disgraziatamente in lingua russa. Per quanto mi fu dato rilevare dalle brevi relazioni dell'« Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik », P.A. distingue la stabilità passata dalla futura e ottiene in quest'ordine di idee risultati di grande interesse. Rimangono fuor della cerchia dei casi discussi quelli, che io ho qui incominciato a studiare, e che, rispetto alle piccole oscillazioni, sarebbero a dirsi stabili, sì nel passato che nel futuro.

Le stesse ricerche di POINCARÉ mostrarono invece la insufficienza dell'ordinario criterio di stabilità. Ne risultò chiaramente, già nel caso più semplice dei sistemi

$$(S) \quad \frac{dx}{dt} = X, \quad \frac{dy}{dt} = Y,$$

che non contengono  $t$  esplicitamente, come, mentre *la instabilità è carattere puramente qualitativo* (che condizioni di disequaglianza bastano ad assicurare), *la stabilità è insieme carattere quantitativo*, che richiede cioè condizioni vincolanti la natura delle funzioni  $X, Y$ . L'instabilità — dice POINCARÉ — è la regola, la stabilità soltanto eccezione.

Tuttavia, se si suppone  $X = \partial U / \partial y$ ,  $Y = -\partial U / \partial x$ , la condizione quantitativa è di per sé soddisfatta e i due caratteri di stabilità e di instabilità sono entrambi contraddistinti da condizioni qualitative. Lo stesso avviene (teoremi di DIRICHLET e di LIAPOUNOFF) per l'equilibrio dei sistemi materiali, soggetti a forze conservative.

Sarà ancora così quando dall'equilibrio si passa al movimento?

Quella certa fiducia nella regolarità dei fenomeni naturali, che è nello spirito della meccanica analitica, ci rende inclini a pensarlo.

E vi siamo confortati dagli esempi tutti, integrati finora (in particolare i moti permanenti), nei quali le cose stanno come nel caso dell'equilibrio.

Suggestiva è del pari una proprietà dei sistemi canonici, secondo cui essi godono necessariamente di una certa forma di stabilità, la stabilità alla POISSON (\*).

All'incontro ragioni di analogia matematica (in base specialmente alle circostanze, segnalate dallo stesso sig. POINCARÉ per i sistemi (S), allorché i secondi membri dipendono da  $t$ ) fanno piuttosto ritenere il contrario.

Comunque, la questione riman dubbia a priori; potrebbe anzi apparire probabile che, nei problemi di meccanica celeste, la stabilità assumesse un carattere meno eccezionale di quel che le compete in astratto.

L'esempio concreto, che sarà qui esposto, toglie, a mio credere, ogni speranza in proposito.

Ma, prima di venire a questo esempio, discorriamo brevemente delle considerazioni, che vi conducono e del metodo generale, che io propongo per trattare le questioni di stabilità.

Sia un sistema differenziale

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i \quad (i = 1, 2, \dots, m),$$

(\*) POINCARÉ, *Mécanique céleste*, Tom. III, Cap. XXVI.

dove le  $X_i$  sono funzioni periodiche di  $t$ ;  $\Sigma$  una sua soluzione periodica.

Si dimostra (Cap. III, § 1) che la  $\Sigma$  è sempre stabile od instabile assieme ad una certa trasformazione puntuale  $\Gamma$ :

$$x_i^{(1)} = f_i(x_1, x_2, \dots, x_m) \quad (i = 1, 2, \dots, m)$$

biunivoca e regolare nell'intorno dell'origine  $O$ , e per cui  $O$  è un punto unito. (Stabile è a dirsi una trasformazione puntuale  $\Gamma$ , quando, partendo da un punto qualunque  $P(x_1, x_2, \dots, x_m)$ , abbastanza vicino ad  $O$ , le iterazioni — positive o negative — di  $\Sigma$  non fanno mai uscire da un intorno prefissato di  $O$ , comunque piccolo).

Tutto si trova in tal modo ricondotto allo studio delle trasformazioni puntuali  $\Gamma$ . Ho considerato dapprima il caso generale, in cui non tutti i moltiplicatori (\*) della  $\Gamma$  sono in valore assoluto eguali ad uno. Si riconosce facilmente che c'è instabilità. Questo risultato corrisponde al teorema di LIAPOUNOFF per i sistemi differenziali e fornisce una nuova dimostrazione del detto teorema.

Il caso, in cui tutti i moltiplicatori hanno modulo eguale ad uno, corrisponde alla stabilità nella prima approssimazione, ed è quello appunto, in cui doveva cimentarsi l'efficacia del metodo.

Trattandosi di un primo tentativo, mi son limitato al caso di  $m = 2$ .

Le trasformazioni da discutere si riducono all'uno o all'altro dei due tipi seguenti:

$$(B) \quad \begin{cases} x_1 = x + \dots, \\ y_1 = y + x + \dots, \end{cases}$$

$$(C) \quad \begin{cases} x_1 = x \cos \vartheta - y \sin \vartheta + \dots, \\ y_1 = x \sin \vartheta + y \cos \vartheta + \dots, \end{cases}$$

i termini omissi essendo di dimensione superiore alla prima, rapporto ad  $x, y$ .

Ho assegnato un criterio generale di instabilità per il tipo (B); per il (C), che è il più importante, solo introducendo la restrizione che l'angolo  $\vartheta$  sia commensurabile con  $2\pi$ .

Comunque, tali criteri di instabilità non sono privi di conseguenze, nei riguardi dei sistemi differenziali.

Essi permettono di constatare la instabilità di certe categorie di soluzioni periodiche, che alla prima approssimazione appaiono stabili.

(\*) Chiamo brevemente moltiplicatori le radici della equazione caratteristica spettante alla sostituzione lineare, che si ottiene da  $\Gamma$ , limitando le  $f_i$  alle loro parti di prim'ordine.

Questo trova a sua volta applicazione nel problema ristretto dei tre corpi. Ho potuto così dimostrare che le soluzioni periodiche, prossime a movimenti circolari uniformi, sono instabili. A vero dire la dimostrazione non abbraccia tutte assolutamente le soluzioni periodiche in discorso: quel che risulta da essa in modo indubbio si è che nel piano dei tre corpi esistono infinite zone di instabilità.

È pur significativo che venga fatto di accertare la instabilità proprio in un caso, per il quale tutto sembrerebbe giustificare, dal punto di vista astronomico, la presunzione opposta.

Bisogna concluderne che la stabilità naturale va intesa in un senso meno restrittivo (\*). Tale è precisamente il concetto, che informa le più recenti indagini del sig. POINCARÉ (\*\*).

Dal punto di vista matematico, la questione della stabilità non è con ciò chiusa e nemmeno sprovvista ormai di interesse.

Sembrami infatti sotto ogni rapporto desiderabile che sia messo in evidenza il carattere generalmente instabile delle  $\Gamma$ , anche quando tutti i moltiplicatori sono in modulo eguali all'unità. Cominciando dal caso più semplice, si tratterà di discutere le trasformazioni (C), per  $\vartheta$  qualunque. Si incontreranno probabilmente delle difficoltà, ma lo studio non pare addirittura inaccessibile, ond'è mio proposito di provarmici quanto prima.

Ben altrimenti difficile è la questione, che si presenta come fine ultimo di questo campo di ricerche, la questione cioè di assegnare le condizioni restrittive, che caratterizzano la assoluta stabilità. Non è però il caso di preoccuparsene troppo, dacchè, come abbiám visto, ciò non ha essenziale importanza per la meccanica celeste.

(\*) E ciò senza uscire dall'ambito della meccanica pura. Se poi si considera il movimento dei corpi celesti nei suoi rapporti cogli altri fenomeni fisici, non basta modificare il concetto di stabilità, ma si rende addirittura inattendibile l'ipotesi di una qualsiasi forma di stabilità.

A questa conclusione arrivano, per vie diverse, Lord KELVIN e POINCARÉ. Cfr. W. THOMSON, *On the Maxwell-Boltzmann Doctrine regarding Distribution of Energy*, « Proceeding of the Royal Society of London », vol. L, 1891, pag. 85.

POINCARÉ, *Sur la stabilité du système solaire*, « Annuaire du Bureau des Longitudes », 1898.

(\*\*) *Mécanique céleste*, loc. cit.

A questo proposito è fondamentale una osservazione del sig. BOHLIN. Cfr. *Ueber die Bedeutung des Princips der lebendigen Kraft für die Frage von der Stabilität dynamischer Systeme*, « Acta Mathematica », tom. X, 1887.

## CAPITOLO I.

## NOZIONE DI STABILITÀ PER LE TRASFORMAZIONI PUNTUALI

## 1. - Definizioni ed esempi.

Prendiamo a considerare una generica trasformazione reale

$$(1) \quad x_i^{(1)} = f_i(x_1, x_2, \dots, x_m) \quad (i = 1, 2, \dots, m)$$

in  $m$  variabili, dove le  $f_i$  sono a ritenersi funzioni analitiche (<sup>7</sup>), regolari nell'intorno del punto  $x_i = 0$ , o, come diremo brevemente dall'origine  $O$ . Supporremo che le  $f_i$  si annullino in  $O$  e di più che il loro determinante funzionale si mantenga in un certo intorno di  $O$  diverso da zero.

La trasformazione (1) è allora biunivoca e continua, almeno in un certo campo  $C$ , comprendente l'origine, al quale intenderemo costantemente di riferirci.

Interpretando le  $x_i$  e le  $x_i^{(1)}$  come coordinate di due punti  $P$  e  $P_1$  di uno stesso spazio rappresentativo, le (1) definiscono una corrispondenza  $\Gamma$  (biunivoca e regolare in  $C$ ), per cui si passò da  $P$  a  $P_1$ .

Scriveremo brevemente

$$(2) \quad P_1 = \Gamma P.$$

La trasformazione inversa  $\Gamma^{-1}$  rimane definita dalle formule

$$(1') \quad x_i^{(-1)} = \bar{f}_i(x_1, x_2, \dots, x_m) \quad (i = 1, 2, \dots, m),$$

che si traggono risolvendo le (1) rapporto alle  $x_i$  (e sostituendo  $x_i^{(-1)}$  ad  $x_i$ ,  $x_i$  ad  $x_i^{(1)}$ ). Le (1') si compendiano in

$$(2') \quad P_{-1} = \Gamma^{-1}P,$$

$P_{-1}$  designando il punto di coordinate  $x_i^{(-1)}$ .

Come da  $P$  si passa a  $P_1$ , così, se  $P_1$  è contenuto in  $C$ , applicando nuovamente la trasformazione  $\Gamma$ , potremo passare a un nuovo punto  $P_2$ ; se questo è in  $C$ , a  $P_3$ , e così di seguito. Convenendo di usare indiffe-

(<sup>7</sup>) Nel presente lavoro ho supposto dappertutto di aver a fare con funzioni analitiche; basterebbero per altro — lo si riconoscerà ovviamente — condizioni assai meno restrittive.

rentemente  $P$  o  $P_0$ ,  $x_i$  od  $x_i^{(0)}$ , e ponendo in generale

$$P_n = \Gamma P_{n-1} \quad (n = 1, 2, \dots),$$

avremo, per definire le coordinate  $x_i^{(n)}$  di  $P_n$ , il sistema ricorrente

$$(3) \quad x_i^{(n)} = f_i(x_1^{(n-1)}, x_2^{(n-1)}, \dots, x_m^{(n-1)}) \quad \left( \begin{array}{l} i = 1, 2, \dots, m \\ n = 1, 2, \dots \end{array} \right).$$

In modo analogo le potenze negative della corrispondenza  $\Gamma$  conducono successivamente ai punti  $P_{-1}, P_{-2}, \dots$ , le cui coordinate si hanno prendendo le iterazioni della (1')

$$(3') \quad x_i^{(-n)} = \bar{f}_i(x_1^{(-n+1)}, x_2^{(-n+1)}, \dots, x_m^{(-n+1)}) \quad \left( \begin{array}{l} i = 1, 2, \dots, m \\ n = 1, 2, \dots \end{array} \right).$$

La  $\Gamma$  e le sue potenze, positive e negative, ammettono l'origine  $O$  come punto unito. Se dunque  $P$  cade in  $O$ , anche ogni  $P_n$  coincide con  $O$ . La continuità di queste trasformazioni ci assicura che, per ogni assegnato  $n$ , si può prendere  $P$  abbastanza vicino ad  $O$ , affinché  $P_1, P_{-1}, P_2, P_{-2}, \dots, P_n, P_{-n}$  risultino pure vicini ad  $O$ , quanto ci piace.

Che cosa avviene quando  $n$  non è fisso, ma può crescere indefinitamente?

Non è più lecito ragionare nello stesso modo e conviene contemplare le due ipotesi possibili, cioè:

Scelto un numero  $\varepsilon$  positivo, arbitrariamente piccolo,

1) ne esiste un altro  $\eta > 0$ , così fatto che, per tutti i punti  $P$ , le cui coordinate  $x_i$  sono in valore assoluto minori di  $\eta$ , risulta

$$(4) \quad |x_i^{(n)}| < \varepsilon, \quad (i = 1, 2, \dots, m)$$

qualunque sia il numero intero  $n$  positivo o negativo.

2) non esiste un numero  $\eta$ , dotato della detta proprietà, e quindi, non per tutti i punti  $P$ , abbastanza vicini all'origine, risultano soddisfatte le (4).

Nel primo caso la trasformazione (1) si dirà *stabile*, nel secondo *instabile*. Possiamo anche dire sotto forma più comoda:

Vi ha stabilità, ogniqualevolta, assegnato un intorno, comunque piccolo  $E$  dell'origine, ne esiste un secondo  $H$  tale che, per tutti i punti  $P$  di  $H$ , ogni  $P_n$  rimane in  $E$ . Vi ha invece instabilità, ogniqualevolta,

per quanto piccolo si prenda  $H$ , c'è sempre qualche punto  $P$  di  $H$ , per cui un  $P_n$  almeno non è contenuto in  $E$ .

È appena necessario osservare che i concetti di stabilità e di instabilità sono indipendenti dalle coordinate di riferimento. Se si fa un generico cambiamento di coordinate (di tipo (1)), sostituendo alle  $x_i$  nuove variabili  $y_i$ , la trasformazione, relativa alle  $y$ , è, insieme colla (1), stabile od instabile. Ciò è del resto messo direttamente in evidenza dalle ultime definizioni, che sono, anche nella forma, indipendenti dal sistema di riferimento.

Indichiamo qualche esempio.

a) Una sostituzione ortogonale

$$x_i^{(1)} = \sum_1^m \alpha_{ij} x_j \quad (i = 1, 2, \dots, m)$$

è stabile, poichè ogni  $P_n$  dista (\*) dall'origine come  $P$ .

b) Una trasformazione omografica (reale, si intende)

$$x_i^{(1)} = \omega_i x_i \quad (i = 1, 2, \dots, m)$$

è necessariamente instabile, a meno che non sia involutoria ( $\omega_i = \pm 1$ ), o in particolare identica. Basta infatti che vi sia una delle  $\omega$  diversa da  $\pm 1$ ,  $\omega_1$  per es., perchè  $x_1^{(n)} = \omega_1^n x_1$ , oppure  $x_1^{(-n)} = (1/\omega_1^n) x_1$  crescano indefinitamente con  $n$  (per quanto si prenda il punto  $P$  vicino all'origine, colla sola avvertenza che la sua coordinata  $x_1$  non sia nulla).

c) La trasformazione in due variabili

$$\begin{aligned} x_1 &= x - y(x^2 + y^2), \\ y_1 &= y + x(x^2 + y^2) \end{aligned}$$

è instabile, pur essendo stabile la parte di prim'ordine, che si riduce all'identità. Per riconoscerlo, designiamo con  $r$  la distanza di  $P$  dall'origine, e in generale con  $r_n$  quella di  $P_n$ . Avremo manifestamente

$$\begin{aligned} r_1^2 &= r^2(1 + r^4), \\ r_n^2 &= r_{n-1}^2(1 + r_{n-1}^4), \quad (n = 2, 3, \dots), \end{aligned}$$

---

(\*) Chiamiamo, secondo la consuetudine, distanza di due punti  $x_i, y_i$  di una varietà astratta la funzione  $\left| \sqrt{\sum_1^m (x_i - y_i)^2} \right|$ .

donde apparisce che, per  $r > 0$ , le  $r_n$  costituiscono una successione positiva sempre crescente. Esiste quindi un limite, finito od infinito. Un limite finito  $l$  è da escludere, poichè questo  $l (> 0)$  dovrebbe verificare l'equazione

$$l^2 = l^2(1 + l^4),$$

il che è impossibile. Ne viene che  $r_n$  cresce indefinitamente con  $n$ , comunque si prenda piccolo  $r$ , purchè diverso da zero. La trasformazione è per conseguenza instabile.

d) Dalla formula di addizione delle funzioni ellittiche si può trarre un elegante esempio di trasformazione stabile.

Riferiamoci alle notazioni di WEIERSTRASS e ricordiamo che, quando gli invarianti  $g_2, g_3$  sono reali e il discriminante  $\Delta = g_2^3 - 27g_3^2$  è positivo, la curva

$$(5) \quad \eta^2 = 4\xi^3 - g_2\xi - g_3 = 4(\xi - e_1)(\xi - e_2)(\xi - e_3)$$

consta di un ramo infinito e di un ovale (fig. 1), entrambi simmetri-

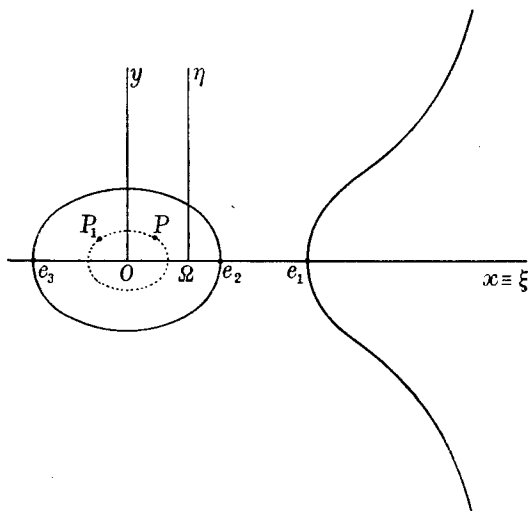


Fig. 1.

camente disposti rispetto all'asse delle ascisse. L'ovale taglia quest'ultimo nei due punti  $\xi = e_2, \xi = e_3$ .

Attribuiamo a  $g_2$  un valore positivo fisso, riservandoci di far variare  $g_3$ .



L'ovale, definito dalla equazione (5), che possiamo scrivere (\*)

$$\eta^2 = 4 \left( \xi + \sqrt{\frac{g_2}{12}} \right)^2 \left( \xi - 2 \sqrt{\frac{g_2}{12}} \right) + \sqrt{\frac{g_2^3}{27}} - g_3,$$

si riduce, per  $g_3 = \sqrt{g_2^3/27}$ , al punto  $O$  di coordinate  $\xi = -\sqrt{g_2/12}$ ,  $\eta = 0$ . Facendo decrescere  $g_3$ , a partire dal detto valore, avremo una serie di ovali, che si inviluppano mutuamente e tali che ne passa uno per ogni punto appartenente a un certo intorno di  $O$ . Collochiamo l'origine in questo punto, sostituendo alle coordinate  $\xi, \eta$ ,

$$(6) \quad \begin{cases} x = \xi + \sqrt{\frac{g_2}{12}}, \\ y = \eta. \end{cases}$$

La famiglia degli ovali è allora rappresentata dalla equazione

$$(5') \quad y^2 + \sqrt{12g_2}x^2 - 4x^3 = \sqrt{\frac{g_2^3}{27}} - g_3.$$

Sia  $P(x, y)$  un punto generico nell'intorno dell'origine e immaginiamo  $g_3$  definito dalla (5'). In virtù delle (6) e (5'), avremo le identità

$$(7) \quad \begin{cases} x = pu + \sqrt{\frac{g_2}{12}}, \\ y = p'u. \end{cases}$$

Ciò premesso, ricorriamo alle formule di addizione

$$p(u+v) = \frac{1}{4} \left\{ \frac{p'v - p'u}{pv - pu} \right\}^2 - pu - pv,$$

$$p'(u+v) = \frac{pup'v - pvp'u - p(u+v)\{p'v - p'u\}}{pv - pu},$$

e portiamovi per  $pu, p'u$  i valori (7), per  $pv, p'v$  una coppia arbitraria, i cui elementi sieno legati dalla relazione

$$\overline{p'v}^2 = 4\overline{pv}^3 - g_3pv - g_3,$$

(\*) I radicali si intenderanno tutti presi positivamente.

dove, bene inteso,  $g_3$  ha il valore (5'). Così operando, si passa dal punto  $P$  ad un nuovo punto  $P_1$  di coordinate

$$(8) \quad \begin{cases} x_1 = p(u + v) + \sqrt{\frac{g_3}{12}}, \\ y_1 = p'(u + v), \end{cases}$$

che soddisfanno, come le  $x, y$ , alla equazione (5'). Il punto  $P_1$  apparterrà ancora all'ovale, passante per  $P$ , se, come noi vogliamo supporre, l'argomento  $v$  si sceglie reale. (Infatti  $u + v$  risulta allora, come  $u$ , del tipo  $\omega_3 +$  una quantità reale.)

In queste condizioni la trasformazione, per cui si passa da  $x, y$  ad  $x_1, y_1$ , è stabile, poichè le sue iterazioni (positive o negative) non fanno mai uscire dall'ovale della famiglia (5'), passante per  $P$ . Assegnato quindi un intorno arbitrariamente piccolo  $E$  dell'origine, si ha il corrispondente  $H$  della definizione generale di stabilità, nell'area racchiusa da un qualsiasi ovale (5'), tutto contenuto in  $E$ .

Possiamo costruire esplicitamente le formule di trasformazione, eseguendo le indicate sostituzioni.

Diamo a  $pv$  un valore costante  $a - \sqrt{g_2/12} > e_1$ . Siccome, per  $g_3 = \sqrt{g_2^3/27}$ , è  $e_1 = 2\sqrt{g_2/12}$ , ed  $e_1$  decresce con  $g_3$ , così basterà supporre  $a > 3\sqrt{g_2/12}$ , ossia  $4a > \sqrt{12g_2}$ , per essere certi che  $pv$  supera  $e_1$ . La equazione

$$\overline{p'v^2} = 4\overline{pv^3} - g_2pv - g_3$$

diventa

$$\overline{p'v^2} = (4a - \sqrt{12g_2})a^2 + y^2 + \sqrt{12g_2}x^2 - 4x^3,$$

donde, per essere  $4a - \sqrt{12g_2} > 0$ ,

$$\pm p'v = a\sqrt{4a - \sqrt{12g_2}} \left\{ 1 + \frac{y^2 + \sqrt{12g_2}x^2 - 4x^3}{a^2(4a - \sqrt{12g_2})} \right\}^{1/2},$$

che è una funzione regolare di  $x, y$  nell'intorno dell'origine.

Adottiamo per es. il segno  $+$  (il che vuol dire  $v$  compreso fra 0 ed  $\omega_1$ ) e facciamo per brevità

$$(9) \quad \begin{cases} f = a\sqrt{4a - \sqrt{12g_2}} \left\{ 1 + \frac{y^2 + \sqrt{12g_2}x^2 - 4x^3}{a^2(4a - \sqrt{12g_2})} \right\}^{1/2} \\ = a\sqrt{4a - \sqrt{12g_2}} \left\{ 1 + \frac{1}{2} \frac{y^2 + \sqrt{12g_2}x^2}{a^2(4a - \sqrt{12g_2})} + \dots \right\}. \end{cases}$$

Avuto riguardo alle (7), (8) e alle

$$pv = a - \sqrt{\frac{g_2}{12}},$$

$$p'v = f,$$

le formule di addizione si scriveranno

$$(10) \quad \begin{cases} x_1 = \frac{1}{4} \left\{ \frac{f-y}{a-x} \right\}^2 - x - a + 3 \sqrt{\frac{g_2}{12}}, \\ y_1 = \frac{\left[ \frac{1}{4} \left\{ \frac{f-y}{a-x} \right\}^2 - x - a + 3 \sqrt{\frac{g_2}{12}} \right] (y-f) + xf - ay}{a-x}. \end{cases}$$

I secondi membri risultano effettivamente funzioni olomorfe di  $x, y$  (per valori abbastanza piccoli di queste variabili) e si annullano in  $O$ .

È forse superfluo aggiungere che si potrebbe verificare con calcolo diretto che la trasformazione (10) lascia invariante ogni curva della famiglia (5'), constatando che dalle (10) segue identicamente

$$y_1^3 + \sqrt{12g_2}x_1^2 - 4x_1^3 = y^3 + \sqrt{12g_2}x^2 - 4x^3,$$

donde la stabilità della trasformazione.

## 2. - Instabilità delle trasformazioni,

**che ammettono almeno un moltiplicatore di modulo diverso da uno.**

La trasformazione (1), mettendone in evidenza i termini di primo ordine, può essere scritta

$$x_i^{(1)} = c_{i1}x_1 + c_{i2}x_2 + \dots + c_{im}x_m + f'_i(x_1, x_2, \dots, x_m) \quad (i = 1, 2, \dots, m)$$

dove le  $f'_i$  cominciano con termini di secondo grado nelle  $x_i$ .

*Moltiplicatori* della trasformazione si chiameranno le radici della equazione

$$D(\omega) = \begin{vmatrix} c_{11} - \omega & c_{12} & \dots & c_{1m} \\ c_{21} & c_{22} - \omega & \dots & c_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mm} - \omega \end{vmatrix} = 0.$$



che appartengono al campo  $C$  (di regolarità delle (1)), si abbia

$$|f'_i| \leq MR^2 \quad (i = 1, 2, \dots, m).$$

Scegliendo poi  $M$  abbastanza grande, risulterà altresì

$$|c_{ij}| < M \quad (i = 1, 2, \dots, m; j < i).$$

Eseguiamo il cambiamento di variabili definito dalle formule

$$\begin{aligned} y_i &= \lambda^{i-1} x_i, \\ y_i^{(1)} &= \lambda^{i-1} x_i^{(1)}, \end{aligned}$$

dove  $\lambda$  rappresenta un numero positivo  $< 1$ , del cui valore ci riserviamo di disporre più innanzi.

Ponendo per brevità

$$\begin{aligned} L_1 &= 0, \\ L_2 &= c_{21} y_1, \\ L_3 &= c_{31} \lambda y_1 + c_{32} y_2, \\ &\dots \\ &\dots \\ L_m &= c_{m1} \lambda^{m-2} y_1 + c_{m2} \lambda^{m-3} y_2 + \dots + c_{mm-1} y_{m-1} \end{aligned}$$

e designando con  $f''_i$  ciò che diviene la funzione  $f'_i$ , quando si sostituiscono le  $y$  alle  $x$ , le (11) assumono l'aspetto

$$(12) \quad y_i^{(1)} = \omega_i y_i + \lambda L_i + \lambda^{i-1} f''_i \quad (i = 1, 2, \dots, m).$$

Se si rappresenta con  $r^2$  la somma dei quadrati delle  $y$ , si ha chiaramente, in virtù delle formule di trasformazione,

$$R^2 \leq \frac{1}{\lambda^{2m-2}} r^2;$$

osservando le  $|f'_i| \leq MR^2$ , si traggono le disuguaglianze

$$(13) \quad |f''_i| \leq \frac{M}{\lambda^{2m-2}} r^2 \quad (i = 1, 2, \dots, m),$$

per tutti i valori delle  $y$  appartenenti al campo  $C$ .

Dalle  $|c_{ij}| < M$ ,  $|y_i| < r$  segue inoltre

$$|L_1| = 0 \leq \frac{Mr}{1-\lambda},$$

$$|L_2| \leq |c_{21}| |y_1| \leq Mr \leq \frac{Mr}{1-\lambda},$$

$$|L_3| \leq \lambda |c_{31}| |y_1| + |c_{32}| |y_2| \leq Mr(\lambda + 1) \leq Mr \frac{Mr}{1-\lambda},$$

.....

$$\begin{aligned} |L_m| &\leq \lambda^{m-2} |c_{m1}| |y_1| + \lambda^{m-3} |c_{m2}| |y_2| + \dots + |c_{mm-1}| |y_{m-1}| \leq \\ &\leq Mr(\lambda^{m-2} + \lambda^{m-3} + \dots + 1) \leq \frac{Mr}{1-\lambda}, \end{aligned}$$

le quali si riassumono in

$$(14) \quad |L_i| \leq \frac{Mr}{1-\lambda} \quad (i = 1, 2, \dots, m).$$

Ciò posto, distribuiamo le variabili  $y_i$  in due gruppi, attribuendo al primo gruppo  $y_1$  e tutte quelle  $y$  (se ve n'ha) d'indice  $i > 1$ , per cui la  $\omega_i$  corrispondente fosse, in valore assoluto, eguale ad  $\omega_1$ . Avendosi per es.

$$|\omega_1| = |\omega_2| = \dots = |\omega_\mu| > |\omega_{\mu+1}|,$$

apparterranno al primo gruppo

$$y_1, y_2, \dots, y_\mu;$$

al secondo

$$y_{\mu+1}, y_{\mu+2}, \dots, y_m.$$

Poniamo

$$\varrho^2 = y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_\mu^2.$$

Dico che, per  $r$  abbastanza piccolo, se le  $y$  sono tali che

$$\frac{\varrho^2}{r^2} > \frac{1}{2},$$

risulta ancora, in seguito alla trasformazione (12),

$$\frac{\varrho_1^2}{r_1^2} > \frac{1}{2},$$

il significato di  $r_1$ ,  $\varrho_1$  (e in generale di  $r_n$ ,  $\varrho_n$ ) essendo manifesto.

Le (12) porgono

$$\varrho_1^2 = \omega_1^2 \varrho^2 + \lambda \sum_1^{\mu} (2\omega_i y_i L_i + \lambda L_i^2) + \sum_1^{\mu} (\lambda^{2i-2} f_i''^2 + 2\omega_i y_i \lambda^{i-1} f_i'' + 2\lambda^i L_i f_i''),$$

$$r_1^2 = \omega_1^2 \varrho^2 + \sum_{\mu+1}^m \omega_i^2 y_i^2 + \lambda \sum_1^m (2\omega_i y_i L_i + \lambda L_i^2) + \\ + \sum_1^m (\lambda^{2i-2} f_i''^2 + 2\omega_i y_i \lambda^{i-1} f_i'' + 2\lambda^i L_i f_i'').$$

Avendo riguardo alle (13) e (14), otteniamo agevolmente

$$\left| \sum_1^m (2\omega_i y_i L_i + \lambda L_i^2) \right| \leq m \left\{ \frac{2|\omega_1| M}{1-\lambda} + \frac{M^2 \lambda}{(1-\lambda)^2} \right\} r^2, \\ \left| \sum_1^m (\lambda^{2i-2} f_i''^2 + 2\omega_i y_i \lambda^{i-1} f_i'' + 2\lambda^i L_i f_i'') \right| \leq \\ \leq m \left\{ \frac{M^2}{\lambda^{4m-4}} r + 2|\omega_1| \frac{M}{\lambda^{2m-2}} + \frac{2M^2}{\lambda^{2m-2}(1-\lambda)} \right\} r^3.$$

Siccome, supponendo  $\lambda < 1/2$  ed  $r < 1$ , si ha ( $m$  essendo almeno uguale ad 1)

$$\frac{1}{1-\lambda} < 2, \quad \frac{\lambda}{1-\lambda} < 1, \quad r\lambda^3 < \frac{1}{8}, \quad 2\lambda^{2m+1} < \frac{1}{4}, \quad \frac{2\lambda^{2m+1}}{1-\lambda} < \frac{1}{2}, \\ \frac{2|\omega_1| M}{1-\lambda} + \frac{M^2 \lambda}{(1-\lambda)^2} < 4|\omega_1| M + 2M^2, \\ \frac{M^2}{\lambda^{4m-4}} r + 2|\omega_1| \frac{M}{\lambda^{2m-2}} + \frac{2M^2}{\lambda^{2m-2}(1-\lambda)} = \\ = \frac{1}{\lambda^{4m-1}} \left\{ M^2 r \lambda^3 + 2|\omega_1| M \lambda^{2m+1} + 2M^2 \frac{\lambda^{2m+1}}{1-\lambda} \right\} < \\ < \frac{1}{\lambda^{4m-1}} \left\{ \frac{1}{4} |\omega_1| M + \frac{5}{8} M^2 \right\} < \frac{1}{\lambda^{4m-1}} \{ 4|\omega_1| M + 2M^2 \},$$

così, designando con  $\omega_1^2 N$  la costante (indipendente da  $\lambda$ )  $m\{4|\omega_1| M + 2M^2\}$ , potremo ritenere

$$\left| \sum_1^m (2\omega_i y_i L_i + \lambda L_i^2) \right| \leq \omega_1^2 N r^2,$$

$$\left| \sum_1^m (\lambda^{2i-2} f_i''^2 + 2\omega_i y_i \lambda^{i-1} f_i'' + 2\lambda^i L_i f_i'') \right| \leq \frac{\omega_1^2 N r^3}{\lambda^{4m-1}}.$$

Lo stesso procedimento mostra che si ha a fortiori

$$\left| \sum_1^\mu (2\omega_i y_i L_i + \lambda L_i^2) \right| \leq \omega_i^2 N r^2,$$

$$\left| \sum_1^\mu (\lambda^{2i-2} f_i''^2 + 2\omega_i y_i \lambda^{i-1} f_i'' + 2\lambda^i L_i f_i'') \right| \leq \frac{\omega_1^2 N r^3}{\lambda^{4m-1}}.$$

Ne deduciamo

$$\frac{\varrho_1^2}{r_1^2} \geq \frac{\omega_1^2 \varrho^2 - \omega_1^2 N \lambda \left(1 + \frac{r}{\lambda^{4m}}\right) r^2}{\omega_1^2 \varrho^2 + \sum_{\mu+1}^m \omega_i^2 y_i^2 + \omega_1^2 N \lambda \left(1 + \frac{r}{\lambda^{4m}}\right) r^2}.$$

Ma, dall'essere  $\omega_{\mu+1}^2 \geq \omega_{\mu+2}^2 \geq \dots \geq \omega_m^2$ , ricordando la ipotesi  $\varrho^2/r^2 > 1/2$ , si trae evidentemente

$$\sum_{\mu+1}^m \omega_i^2 y_i^2 \leq \omega_{\mu+1}^2 (y_{\mu+1}^2 + y_{\mu+2}^2 + \dots + y_m^2) = \omega_{\mu+1}^2 (r^2 - \varrho^2) \leq \omega_{\mu+1}^2 \varrho^2,$$

e perciò, dividendo per  $\omega_1^2 r^2$  sopra e sotto,

$$\frac{\varrho_1^2}{r_1^2} \geq \frac{\frac{\varrho^2}{r^2} - N \lambda \left(1 + \frac{r}{\lambda^{4m}}\right)}{(2 - \sigma) \frac{\varrho^2}{r^2} + N \lambda \left(1 + \frac{r}{\lambda^{4m}}\right)},$$

dove, per brevità, si è scritto  $\sigma$  al posto di  $1 - \omega_{\mu+1}^2/\omega_1^2$ , che è, teniamolo presente, una frazione propria essenzialmente maggiore di zero <sup>(11)</sup>.

Attribuiamo a  $\lambda$  un valore determinato inferiore ad  $1/2$ , a  $\sigma/12N$ ,

<sup>(11)</sup> Questa osservazione, e quindi il successivo ragionamento, cadrebbero in difetto, qualora, per essere ogni  $|\omega_i|$  eguale ad  $|\omega_1|$ , venissero a mancare le variabili del secondo gruppo. Ma in tal caso  $\varrho$  coincide con  $r$  e quindi senz'altro  $\varrho_1^2/r_1^2 = 1 > 1/2$ .



e tale che

$$\omega_1^2(1 - 2N\lambda) = \tau$$

risulti maggiore dell'unità (la qual cosa, per essere  $\omega_1^2 > 1$ , è certo possibile, purchè si prenda  $\lambda$  abbastanza piccolo).

Supposto  $r < \lambda^{4m}$ , sarà soddisfatta la disuguaglianza

$$N\lambda \left(1 + \frac{r}{\lambda^{4m}}\right) < \frac{\sigma}{12} \cdot 2 < \frac{\sigma}{3} \frac{\varrho^2}{r^2},$$

talchè

$$\frac{\varrho_1^2}{r_1^2} > \frac{\frac{\varrho^2}{r^2} \left(1 - \frac{\sigma}{3}\right)}{\frac{\varrho^2}{r^2} 2 \left(1 - \frac{\sigma}{3}\right)} > \frac{1}{2},$$

c. d. d.

Appoggiandosi sopra questo lemma, si dimostra subito la instabilità della nostra trasformazione.

Dalla espressione di  $\varrho_1^2$  e dalle precedenti disuguaglianze segue

$$\varrho_1^2 \geq \omega_1^2 \varrho^2 - \omega_1^2 r^2 N \lambda \left(1 + \frac{r}{\lambda^{4m}}\right).$$

Dacchè  $r^2 < 2\varrho^2$  e la differenza  $\omega_1^2(1 - 2N\lambda)$  s'è chiamata  $\tau (> 1)$ , avremo ancora

$$\varrho_1^2 \geq \tau \varrho^2 - \frac{\sqrt{8} N \omega_1^2}{\lambda^{4m-1}} \varrho^3.$$

Delimitiamo un intorno E dell'origine, contenuto, si intende, in C, per cui sia ad un tempo

$$\begin{aligned} r &< 1, \\ r &< \lambda^{4m}, \\ r &< \frac{\lambda^{4m-1}}{\sqrt{8} N \omega_1^2} (\tau - \tau'), \end{aligned}$$

$\tau'$  designando un numero positivo minore di  $\tau$ , ma maggiore dell'unità.

Se, si parte da un punto  $P$  di E, tale che  $\varrho^2/r^2 > 1/2$ , ma del resto vicino ad  $O$  quanto si vuole, la iterazione della (11) fa necessariamente

uscire da E. Si ha infatti

$$\varrho_1^2 \geq \varrho^2 \left( \tau - \frac{\sqrt{8N\omega_1^2 \varrho}}{\lambda^{4m-1}} \right) \geq \varrho^2 \left( \tau - \frac{\sqrt{8N\omega_1^2 r}}{\lambda^{4m-1}} \right),$$

ma  $\tau - (\sqrt{8N\omega_1^2 r}/\lambda^{4m-1}) > \tau'$ , dunque (il segno di eguaglianza rimanendo escluso, perchè si suppone  $r$ , e quindi  $\varrho$ ,  $> 0$ )

$$\varrho_1^2 > \tau' \varrho^2.$$

Qualora ogni  $P_n$  appartenesse ad E, sarebbe altresì, per il lemma testè dimostrato,

$$\varrho_n^2 > \tau' \varrho_{n-1}^2, \quad (n = 2, 3, \dots),$$

donde

$$\varrho_n^2 > \tau'^n \varrho^2,$$

e quindi  $\varrho_n$  crescerebbe indefinitamente con  $n$ , il che implica contraddizione.

*Moltiplicatori qualunque.* — Partiamoci ancora dalle formole (11), operando però in guisa da far sparire gli elementi immaginari.

Per ipotesi, le (11) stesse provengono da una trasformazione (1) essenzialmente reale; i moltiplicatori  $\omega$  complessi sono dunque due a due coniugati. Li supporremo ordinati in guisa che, pur essendo rispettate le disuguaglianze

$$|\omega_1| \geq |\omega_2| \geq \dots \geq |\omega_m|,$$

due moltiplicatori coniugati occupino posti contigui. Essendo  $\omega_q, \omega_{q+1}$  una tal coppia di moltiplicatori coniugati,  $|\omega_q|$  il modulo,  $\vartheta_q$  l'argomento di  $\omega_q$ , avremo

$$\begin{aligned} \omega_q &= |\omega_q| (\cos \vartheta_q + i \sin \vartheta_q), \\ \omega_{q+1} &= |\omega_q| (\cos \vartheta_q - i \sin \vartheta_q). \end{aligned}$$

Al campo reale della trasformazione (1) originariamente proposta corrispondono, nella (11), valori complessi coniugati per ogni coppia di variabili  $x_q, x_{q+1}$  (e così  $x_q^{(1)}, x_{q+1}^{(1)}$ ); valori reali per le altre variabili  $x_p, x_p^{(1)}$  (12).

(12) È facile rendersene conto, pensando alle relazioni tra le radici della equazione caratteristica  $D(\omega) = 0$  e i sistemi di variabili, atti ad attribuire alla (1) la forma (11).

Se dunque si pone

$$\begin{aligned}x_q &= \xi_q + i\xi_{q+1}, \\x_{q+1} &= \xi_q - i\xi_{q+1},\end{aligned}$$

per ogni coppia di indici  $q, q + 1$ , riferentisi a moltiplicatori complessi,

$$x_p = \xi_p,$$

per ogni valore dell'indice  $p$  spettante ad un moltiplicatore reale; ed analogamente

$$\begin{aligned}x_q^{(1)} &= \xi_q^{(1)} + i\xi_{q+1}^{(1)}, \\x_{q+1}^{(1)} &= \xi_q^{(1)} - i\xi_{q+1}^{(1)}, \\x_p^{(1)} &= \xi_p^{(1)},\end{aligned}$$

la trasformazione (11) fra le  $x_i$  e le  $x_i^{(1)}$  darà luogo ad una trasformazione essenzialmente reale fra le  $\xi_i$  e le  $\xi_i^{(1)}$  definita da formule dei tipi seguenti

$$(11') \quad \left\{ \begin{array}{l} (11'_a) \quad \xi_p^{(1)} = \bar{c}_{p1}\xi_1 + \bar{c}_{p2}\xi_2 + \dots + \omega_p\xi_p + \bar{f}_p, \\ (11'_b) \quad \left\{ \begin{array}{l} \xi_q^{(1)} = \bar{c}_{q1}\xi_1 + \bar{c}_{q2}\xi_2 + \dots + \bar{c}_{q,q-1}\xi_{q-1} + \\ \quad + |\omega_q|(\xi_q \cos \vartheta_q - \xi_{q+1} \sin \vartheta_q) + \bar{f}_q, \\ \xi_{q+1}^{(1)} = \bar{c}_{q+1,1}\xi_1 + \bar{c}_{q+1,2}\xi_2 + \dots + \bar{c}_{q+1,q-1}\xi_{q-1} + \\ \quad + |\omega_q|(\xi_q \sin \vartheta_q + \xi_{q+1} \cos \vartheta_q) + \bar{f}_{q+1} \quad (13), \end{array} \right. \end{array} \right.$$

designando le  $\bar{c}$  costanti reali e le  $\bar{f}$  funzioni pure reali delle  $\xi$ , di secondo ordine almeno nelle  $\xi$  stesse.

Questa trasformazione (11') equivale evidentemente (a meno di un cambiamento lineare reale di variabili) alla primitiva (1). Per dimostrarne la instabilità, basterà porre

$$\eta_p = \lambda^{p-1}\xi_p; \quad \eta_q = \lambda^q\xi_q; \quad \eta_{q+1} = \lambda^q\xi_{q+1}$$

(e corrispondentemente

$$\eta_p^{(1)} = \lambda^{p-1}\xi_p^{(1)}; \quad \eta_q^{(1)} = \lambda^q\xi_q^{(1)}; \quad \eta_{q+1}^{(1)} = \lambda^q\xi_{q+1}^{(1)},$$

(13) Le (11'\_b) seguono da:

$$x_q^{(1)} = c_{q1}x_1 + c_{q2}x_2 + \dots + \omega_q x_q + f'_q,$$

separando la parte reale dalla immaginaria.

procedendo poi in modo perfettamente analogo a quello tenuto nel caso dei moltiplicatori tutti reali.

Rimane così dimostrata la proposizione generale: *Le trasformazioni puntuali sono certamente instabili, allorchè non tutti i moltiplicatori hanno moduli eguali all'unità.*

Vedremo tra poco che anche quest'ultima circostanza è ben lungi dall'assicurare la stabilità.

## CAPITOLO II.

### TRASFORMAZIONI BINARIE A MOLTIPLICATORI EGUALI ALL'UNITÀ

#### 1. - Tipi non contemplati nel precedente capitolo di trasformazioni a due variabili.

Suppongasi  $m = 2$ . I due moltiplicatori  $\omega_1, \omega_2$  hanno entrambi modulo eguale all'unità nei seguenti casi:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \pm 1, & \omega_2 &= \mp 1, \\ \omega_1 &= \pm 1, & \omega_2 &= \pm 1, \\ \omega_1 &= e^{i\vartheta}, & \omega_2 &= e^{-i\vartheta}, \end{aligned}$$

designando  $\vartheta$  un argomento reale.

Nel primo caso le formule corrispondenti alle (11) del precedente capitolo

$$\begin{aligned} x_1^{(1)} &= \omega_1 x_1 + f_1'(x_1, x_2), \\ x_2^{(1)} &= c_{21} x_1 + \omega_2 x_2 + f_2'(x_1, x_2), \end{aligned}$$

iterate una volta, danno

$$\begin{aligned} x_1^{(2)} &= \omega_1 x_1^{(1)} + f_1'(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}) = x_1 + f(x_1, x_2), \\ x_2^{(2)} &= c_{21} x_1^{(1)} + \omega_2 x_2^{(1)} + f_2'(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}) = c_{21}(\omega_1 + \omega_2)x_1 + x_2 + g(x_1, x_2) = \\ &= x_2 + g(x_1, x_2), \end{aligned}$$

$f$  e  $g$  essendo, si intende, d'ordine superiore al primo. Questa trasforma-

zione a moltiplicatori unità, ponendo per maggior comodo  $x, y$  in luogo di  $x_1, x_2$ ;  $x_1, y_1$  in luogo di  $x_1^{(2)}, x_2^{(2)}$ , si scriverà

$$(A) \quad \begin{cases} x_1 = x + f(x, y), \\ y_1 = y + g(x, y). \end{cases}$$

Alle stesse formule si perviene nel secondo caso, quando  $c_{21} = 0$ . Ma se  $c_{21} \geq 0$ , allora ponendo

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{x}{c_{21}(\omega_1 + \omega_2)}, & x_2 &= y; \\ x_1^{(2)} &= \frac{x_1}{c_{21}(\omega_1 + \omega_2)}, & x_2^{(2)} &= y_1, \end{aligned}$$

si è invece condotti al tipo

$$(B) \quad \begin{cases} x_1 = x + f(x, y), \\ y_1 = y + x + g(x, y). \end{cases}$$

Nel caso dei moltiplicatori complessi le (11') del precedente capitolo, con semplice scambio di notazioni, danno

$$(C) \quad \begin{cases} x_1 = x \cos \vartheta - y \sin \vartheta + f(x, y), \\ y_1 = x \sin \vartheta + y \cos \vartheta + g(x, y). \end{cases}$$

La (A) vi rientra come caso particolare, per  $\vartheta = 0$ . Giova tuttavia considerarla a parte, perchè essa si può trattare con procedimenti, che non mi è finora riuscito di estendere alla (C).

Vien qui a proposito di osservare che, oltre al caso  $\vartheta = 0$ , anche per ogni valore di  $\vartheta$  commensurabile con  $2\pi$ , lo studio della stabilità della (C) si riconduce all'identica questione per una trasformazione di tipo (A). Supposto infatti  $\vartheta = 2h\pi/k$  ( $h$  e  $k$  numeri interi primi tra loro) e detta  $\Gamma$  la corrispondente trasformazione (C), si riconosce immediatamente che la potenza  $\Gamma^k$  di  $\Gamma$  rientra nel tipo (A). Ora  $\Gamma$  e  $\Gamma^k$  sono insieme stabili od instabili.

**2. - Forma ridotta del tipo (A). Caratteri invariantivi.  
Interpretazione proiettiva.**

Le trasformazioni

$$(A) \quad \begin{cases} x_1 = x + f(x, y), \\ y_1 = y + g(x, y), \end{cases}$$

conservano evidentemente il medesimo aspetto comunque si cambino le variabili.

Consideriamo in particolare le sostituzioni lineari

$$(1) \quad \begin{cases} \xi = \alpha x + \beta y, \\ \eta = \gamma x + \delta y, \end{cases}$$

$$(2) \quad \begin{cases} \xi_1 = \alpha x_1 + \beta y_1, \\ \eta_1 = \gamma x_1 + \delta y_1, \end{cases}$$

e serviamocene per far assumere una forma opportuna alle parti di secondo grado  $\varphi$  e  $\psi$  di  $f$  e  $g$ .

Posto

$$D = \alpha\delta - \beta\gamma,$$

la risoluzione delle (1) e (2) porge

$$(1') \quad \begin{cases} Dx = \delta\xi - \beta\eta, \\ Dy = -\gamma\xi + \alpha\eta, \end{cases}$$

$$(2') \quad \begin{cases} Dx_1 = \delta\xi_1 - \beta\eta_1, \\ Dy_1 = -\gamma\xi_1 + \alpha\eta_1, \end{cases}$$

e la (A) nelle nuove variabili si scriverà

$$\xi_1 = \xi + \frac{\alpha}{D^2}\varphi(\delta\xi - \beta\eta, -\gamma\xi + \alpha\eta) + \frac{\beta}{D^2}\psi(\delta\xi - \beta\eta, -\gamma\xi + \alpha\eta) + \dots,$$

$$\eta_1 = \eta + \frac{\gamma}{D^2}\varphi(\delta\xi - \beta\eta, -\gamma\xi + \alpha\eta) + \frac{\delta}{D^2}\psi(\delta\xi - \beta\eta, -\gamma\xi + \alpha\eta) + \dots,$$

i termini omissi essendo di dimensione superiore alla seconda.

Disponiamo dei coefficienti  $\gamma$ ,  $\delta$  in modo che la parte di secondo grado nella espressione di  $\eta_1$

$$\frac{\gamma}{D^2} \varphi(\delta\xi - \beta\eta, -\gamma\xi + \alpha\eta) + \frac{\delta}{D^2} \psi(\delta\xi - \beta\eta, -\gamma\xi + \alpha\eta)$$

contenga  $\eta$  a fattore. Basterà rendere nullo il coefficiente di  $\xi^2$ , ossia

$$(3) \quad \gamma\varphi(\delta, -\gamma) + \delta\psi(\delta, -\gamma) = 0.$$

Questa relazione ci fornisce per il rapporto  $\gamma/\delta$  almeno un valore reale. Designiamolo con  $\gamma'/\delta'$  e poniamo

$$\gamma = \lambda\gamma',$$

$$\delta = \lambda\delta',$$

lasciando per un momento indeterminato il moltiplicatore  $\lambda$  (non nullo). Prendiamo ancora

$$\alpha = \lambda\alpha',$$

$$\beta = \lambda\beta',$$

dove  $\alpha'$  e  $\beta'$  sono arbitrari colla sola condizione che il determinante

$$D' = \alpha'\delta' - \beta'\gamma'$$

sia diverso da zero.

La nostra trasformazione diverrà, se riscriviamo  $x, y; x_1, y_1$  al posto di  $\xi, \eta; \xi_1, \eta_1$ ,

$$(A') \quad \begin{cases} x_1 = x + \frac{1}{\lambda} (a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2) + \dots, \\ y_1 = y + \frac{y}{\lambda} (2b_{12}x + b_{22}y) + \dots, \end{cases}$$

dove le  $a$  e le  $b$  hanno valori numerici perfettamente determinati. La (A') è a risguardarsi come una *forma ridotta* della nostra trasformazione.

In generale  $a_{11}$  sarà diverso da zero. Si può allora prendere  $\lambda = a_{11}$  e, col porre

$$\frac{2a_{12}}{a_{11}} = a, \quad \frac{a_{22}}{a_{11}} = b, \quad \frac{2b_{12}}{a_{11}} = c, \quad \frac{b_{22}}{a_{11}} = d,$$

la (A') assume l'aspetto

$$(A') \quad \begin{cases} x_1 = x + x^2 + y(ax + by) + \dots, \\ y_1 = y + y(cx + dy) + \dots \end{cases}$$

A questo tipo è riducibile ogni trasformazione (A), per cui le due forme quadratiche  $\varphi$  e  $\psi$  (parti di secondo grado in  $f$  e  $g$ ) non hanno fattori comuni (14). Per convincersene basta osservare che non può in tale ipotesi annullarsi l' $a_{11}$  della corrispondente ridotta (A'), poichè allora le due combinazioni  $(\alpha\varphi + \beta\psi)/D^2$ ,  $(\gamma\varphi + \delta\psi)/D^2$ , che compaiono (salvo la notazione) in (A'), ammetterebbero un fattore comune, e lo stesso dovrebbe aver luogo per  $\varphi$  e  $\psi$ .

Rispetto alle possibili riduzioni di una generica trasformazione (A), è bene rilevare che le proprietà proiettive del sistema delle due forme binarie  $\varphi$  e  $\psi$  (o, se si vuole, della involuzione quadratica  $\psi - \mu\varphi = 0$ ) hanno carattere invariante di fronte a qualsiasi cambiamento di variabili biunivoco nell'intorno dell'origine.

Infatti, per le sostituzioni lineari, ciò risulta dalla osservazione fatta che  $\varphi$  e  $\psi$  vengono rimpiazzate dalle due forme  $(\alpha\varphi + \beta\psi)/D^2$ ,  $(\gamma\varphi + \delta\psi)/D^2$ , che appartengono pure alla involuzione  $\psi - \mu\varphi = 0$ ; per cambiamenti

$$\begin{aligned} \xi &= x + \mathfrak{P}(x, y), \\ \eta &= y + \mathfrak{D}(x, y), \end{aligned}$$

(con  $\mathfrak{P}$  e  $\mathfrak{D}$  di second'ordine almeno), la cosa è pure evidente, poichè le parti di secondo grado  $\varphi$  e  $\psi$  rimangono addirittura inalterate. Ora ogni altro cambiamento di variabili si ottiene componendone due di questi. L'asserto è dunque provato.

Possiamo fare un passo più innanzi in quest'ordine di idee, notando che gli invarianti (in senso geometrico) del sistema delle due involuzioni proiettive

$$\begin{aligned} (I_1) \quad & y - \mu x = 0, \\ (I_2) \quad & \psi - \mu\varphi = 0, \end{aligned}$$

sono tutti invarianti assoluti della trasformazione (A).

Ciò risulta dal fatto che, quando si cambiano le variabili, le parti di primo e quelle di secondo ordine subiscono, a meno del fattore  $1/D^2$ , la stessa sostituzione lineare.

(14) Per la discussione del paragrafo seguente non si avrebbe alcun sostanziale vantaggio particolarizzando ulteriormente la scelta delle variabili.



Tra gli infiniti elementi della involuzione ( $I_1$ ) ve ne ha tre, che coincidono con uno dei due della coppia corrispondente ( $I_2$ ); essi corrispondono alle radici della forma cubica

$$x\psi - y\varphi = 0,$$

e i rispettivi parametri  $\mu = y/x$  rimangono definiti dalla equazione

$$(3') \quad \psi(1, \mu) - \mu\varphi(1, \mu) = 0,$$

che è la (3), in cui si sia posto  $-\gamma/\delta = \mu$ .

Cambiare variabili in (A) significa, rispetto alle nostre involuzioni proiettive ( $I_1$ ), ( $I_2$ ), cambiare i punti fondamentali. Quando si mutan questi, mutano in generale i parametri degli elementi uniti, dunque la equazione (3'), o, ciò che è lo stesso, la (3), non è di per se stessa invariante. (Così per es. la particolarità della forma ridotta (A') consiste, possiamo dire, in ciò che la corrispondente equazione (3') ammette la radice  $\mu = 0$ .) *Rimangono però invarianti, qualunque sieno le variabili (reali), nelle quali si presenta una trasformazione (A), i caratteri di molteplicità e di realtà delle radici delle corrispondenti (3')*; in quanto esprimono proprietà proiettive degli elementi uniti. Lo stesso è a dirsi evidentemente per la equazione (3) nel rapporto  $-\gamma/\delta = \mu$ .

### 3. - Instabilità del caso generale.

Ogni trasformazione (A), per cui le parti di secondo ordine sono prive di fattori comuni, è riducibile, come abbiamo visto alla forma

$$(A-) \quad \begin{cases} x_1 = x + x^2 + y(ax + by) + U(x, y), \\ y_1 = y + y(cx + dy) + V(x, y), \end{cases}$$

raccogliendosi in  $U$  e  $V$  i termini di ordine superiore al secondo. Si noti che deve ritenersi

$$(4) \quad d^2 - c(ad - bc) \geq 0,$$

altrimenti le due forme  $x^2 + y(ax + by)$ ,  $y(cx + dy)$  ammetterebbero il fattore comune  $cx + dy$ .

*Vogliamo dimostrare che queste trasformazioni sono necessariamente instabili.*

È opportuno distinguere tre casi:  $c < 1$ ,  $c > 1$ ,  $c = 1$ .

1) ( $c < 1$ ).

Se  $V(x, y)$  non è divisibile per  $y$ , sia  $\gamma x^p$  ( $p > 2$ ) il termine di dimensione minima, che non contiene  $y$  a fattore.

È lecito supporre  $y > 0$ , poichè si è sempre ricondotti a questo caso, scambiando all'occorrenza  $y$  e  $y_1$  in  $-y$ ,  $-y_1$  (ciò, che non altera il coefficiente  $c$ ).

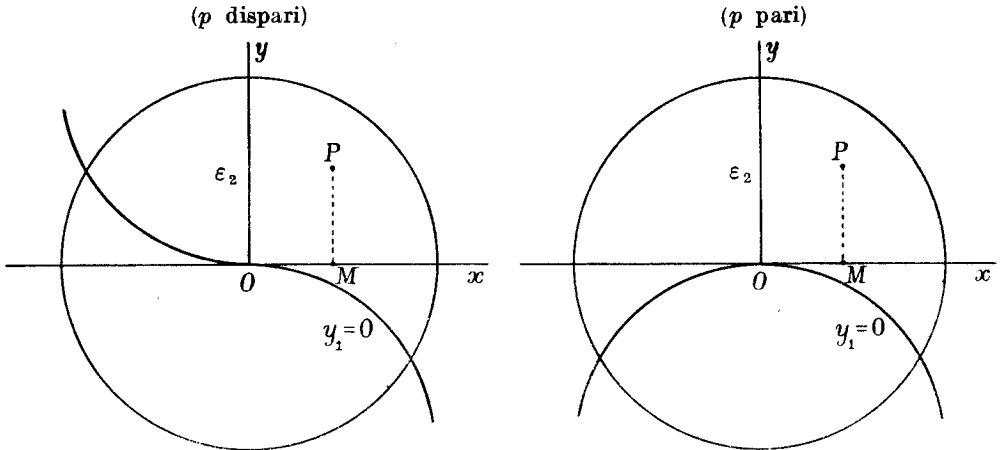


Fig. 2.

La curva (fig. 2)

$$y_1 = y(1 + cx + dy) + V(x, y) = 0,$$

che è tangente nell'origine all'asse delle ascisse, rimane per  $x$  positivo e abbastanza piccolo, al disotto di quest'asse.

Infatti le derivate della funzione  $y$  di  $x$  (definita dalla precedente equazione), d'ordine inferiore a  $p$ , si annullano in  $O$  e la derivata  $p^{\text{esima}}$  vale  $-p! \gamma$ ; lo sviluppo dell'ordinata dei punti della curva in funzione dell'ascissa comincia quindi col termine  $-\gamma x^p$ .

La  $y$  è dunque negativa, per  $x$  positivo e non superiore a un certo limite  $\varepsilon_1$ . In modo analogo, dacchè lo sviluppo di  $V(x, 0)$  comincia col termine  $\gamma x^p$ , sarà  $V(x, 0) \geq 0$  per  $x \geq 0$  e  $\leq$  ad un certo  $\varepsilon_2$ , che posso sempre supporre  $\leq \varepsilon_1$ .

Per tutti i punti, appartenenti al primo quadrante di un cerchio di centro  $O$  e raggio  $\varepsilon_2$ , risulta necessariamente

$$(5) \quad y_1 > 0.$$

(Qualora infatti in un punto  $P$  del quadrante fosse  $y_1 < 0$ , la perpendicolare  $PM$ , abbassata da  $P$  sull'asse delle ascisse, dovrebbe incontrare la curva  $y_1 = 0$ . Questo è impossibile, poichè nel quadrante non vi sono punti della curva.)

Se poi  $V(x, y) = yV'(x, y)$  (con  $V'(x, y)$  funzione regolare di secondo ordine almeno in  $x, y$ ), il coefficiente di  $y$  in  $y_1$ , cioè  $1 + cx + dy + V'(x, y)$ , è essenzialmente positivo per  $x, y$  abbastanza piccoli, e la (5) risulta, come sopra, soddisfatta per tutti i punti del primo quadrante di un cerchio di raggio conveniente, che designeremo ancora con  $\varepsilon_2$ .

Poniamo

$$y = xz.$$

Le due funzioni  $U(x, z), V(x, z)$ , espresse per  $x$  e  $z$ , conterranno  $x^2$  a fattore e si potrà scrivere

$$U(x, y) = x^2 U_1(x, z),$$

$$V(x, y) = x^2 V_1(x, z),$$

$U_1$  e  $V_1$  mantenendosi finite per  $x, z$  abbastanza piccoli, inferiori per es. in valore assoluto ad  $\varepsilon_3 \leq \varepsilon_2$  e  $\operatorname{tg} \alpha_1$  rispettivamente.

Intenderemo questi limiti fissati in modo che risulti ulteriormente

$$|az + bz^2 + xU_1(x, z)| < \frac{1}{2},$$

il che implica

$$|y(ax + by) + U(x, y)| \leq \frac{1}{2} x^2,$$

e per conseguenza

$$(6) \quad x_1 \geq x + \frac{1}{2} x^2,$$

per tutti i punti del settore (terminato inferiormente all'asse delle ascisse) di raggio  $\varepsilon_3$  e ampiezza  $\alpha_1$ .

Dividendo membro a membro le  $(A'_1)$ , si ha

$$\begin{aligned} \frac{y_1}{x_1} &= \frac{y(1 + cx + dy) + V(x, y)}{x + x^2 + y(ax + by) + U(x, y)} = \frac{z(1 + cx + dxz) + x^2 V_1(x, z)}{1 + x + xz(a + bz) + x^2 U_1(x, z)} = \\ &= \{ z(1 + cx + dxz) + x^2 V_1(x, z) \} \{ 1 + x(1 + az + bz^2) + x^2 U_1(x, z) \}^{-1}, \end{aligned}$$

donde evidentemente (per  $x$  inferiore in valore assoluto ad un nuovo limite  $\varepsilon_4 < \varepsilon_3$ )

$$(7) \quad \frac{y_1}{x_1} = z - (1-c)xz + \{(d-a)z - bz^2\}xz + x^2W(x, z)$$

con  $W(x, z)$  funzione finita nel settore  $(\varepsilon_4, \alpha_1)$ . (Il significato di questa notazione è ovvio).

Dacchè  $c < 1$ , la differenza  $1 - c$  ha valore essenzialmente positivo, e basterà prendere  $z$  abbastanza piccolo perchè risulti

$$(8) \quad (d-a)z - bz^2 < \frac{1-c}{2}.$$

Designo con  $\alpha$ , che ho cura di scegliere non superiore ad  $\alpha_1$ , un arco tale che, per  $0 \leq z < \operatorname{tg} \alpha$ , la (8) rimanga soddisfatta.

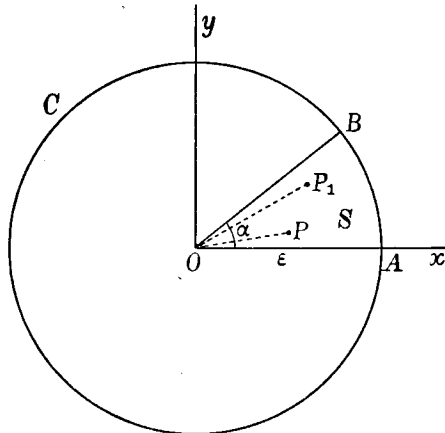


Fig. 3.

Detto  $M$  un numero positivo, maggiore di uno qualunque dei valori assunti da  $W(x, z)$  in  $(\varepsilon_4, \alpha)$ , prendo infine un numero positivo  $\varepsilon$ , inferiore ad un tempo ad  $\varepsilon_4$ , a  $(1-c) \operatorname{tg} \alpha / 2M$  e a  $2/(1-c)$ , e considero il settore  $(\varepsilon, \alpha)$ , che designerò con  $S$  (fig. 3).

Per ogni punto  $P$  di  $S$  varranno evidentemente le (5), (6), (7), (8),

$$(9) \quad xW < \frac{1-c}{2} \operatorname{tg} \alpha,$$

e

$$(10) \quad 1 - \frac{1-c}{2} x > 0.$$

Dalla (7), considerando che  $x$  e  $z$  sono in  $S$  positivi (o nulli) e avendo riguardo alle (8), (9), si trae

$$\frac{y_1}{x_1} \leq z - (1-c)xz + \frac{1-c}{2}xz + x \frac{1-c}{2} \operatorname{tg} \alpha,$$

che può anche essere scritta

$$\frac{y_1}{x_1} \leq \operatorname{tg} \alpha - \left(1 - \frac{1-c}{2} x\right) (\operatorname{tg} \alpha - z).$$

In causa della (10), ne viene

$$(11) \quad \frac{y_1}{x_1} \leq \operatorname{tg} \alpha.$$

Siccome, per le (5) e (6), sappiamo già che il punto  $P_1(x_1, y_1)$  appartiene al primo quadrante, la (11) ci mostra che esso è interno all'angolo al centro  $\widehat{AOB}$  del settore  $S$ . Il settore gode dunque della proprietà che, applicando ai suoi punti la trasformazione  $(A'_1)$ , non si esce mai attraverso ai lati; o si rimane entro  $S$ , o si va addirittura fuori del cerchio  $C$ , cui il settore stesso appartiene.

Ciò posto, è assai facile dimostrare la instabilità della trasformazione  $(A'_1)$  (per il caso  $c < 1$ , qui contemplato).

Infatti, se vi fosse stabilità, prendendo  $P$  in  $S$  abbastanza vicino all'origine, dovrebbero tutti i  $P_n$  rimanere indefinitamente entro  $C$ , e quindi in  $S$ . Assieme alla (6), sarebbero allora soddisfatte le disuguaglianze

$$x_n \geq x_{n-1} + \frac{1}{2} x_{n-1}^2 \quad (n = 2, 3, \dots);$$

la successione (mai decrescente)  $x_n$  ammetterebbe un limite finito  $l (> 0)$ , per  $P$  diverso da  $O$ , e si arriverebbe alla contraddizione

$$l \geq l + \frac{1}{2} l^2.$$

2) ( $c > 1$ ).

Dalla risoluzione delle ( $A'_1$ ), raccogliendo in  $\bar{U}$  e  $\bar{V}$  i termini d'ordine superiore al secondo e cambiando anche la designazione delle variabili, otteniamo

$$(12) \quad \begin{cases} x_{-1} = x - x^2 - y(ax + by) + \bar{U}(x, y), \\ y_{-1} = y - y(cx + dy) + \bar{V}(x, y), \end{cases}$$

le quali ci definiscono la trasformazione inversa (<sup>15</sup>).

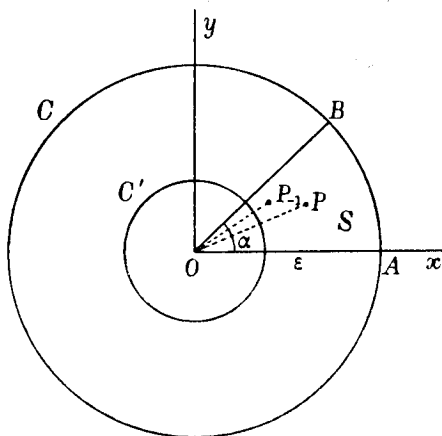


Fig. 4.

Possiamo, come nel caso precedente, scambiando al bisogno  $y$  e  $y_{-1}$  in  $-y$ ,  $-y_{-1}$  (ciò, che non altera  $c$ ) ritenere

$$(5') \quad y_{-1} \geq 0,$$

per tutti i punti appartenenti al primo quadrante di un cerchio di centro  $O$  e raggio abbastanza piccolo.

Ragionando nello stesso modo, potremo definire un nuovo settore  $S$  (fig. 4) di raggio  $\varepsilon$  e apertura  $\alpha$  abbastanza piccoli, perchè si abbia ad

(<sup>15</sup>) A giustificazione di queste formule, si noti in generale che, se si hanno i due gruppi equivalenti:

$$\begin{cases} x_1 = x + \mathfrak{P}(x, y), \\ y_1 = y + \mathfrak{Q}(x, y), \end{cases} \quad \begin{cases} x = x_1 + \bar{\mathfrak{P}}(x_1, y_1), \\ y = y_1 + \bar{\mathfrak{Q}}(x_1, y_1), \end{cases}$$

(con  $\mathfrak{P}$ ,  $\mathfrak{Q}$  e quindi  $\bar{\mathfrak{P}}$ ,  $\bar{\mathfrak{Q}}$  di grado superiore al primo in  $x, y$ ), le parti di secondo ordine  $\mathfrak{P}_1$ ,

un tempo per tutti i suoi punti

$$x < \frac{2}{3},$$

$$| -y(ax + by) + \bar{U}(x, y) | < \frac{1}{2} x^2,$$

$$(7') \quad \frac{y_{-1}}{x_{-1}} = z - (c-1)zx + \{(a-d)z + bz^2\}xz + x^2 \bar{W}(x, z)$$

( $\bar{W}(x, z)$  designando una funzione finita),

$$(8') \quad (a-d)z + bz^2 < \frac{c-1}{2},$$

$$(9') \quad x \bar{W} < \frac{c-1}{2} \operatorname{tg} \alpha,$$

$$(10') \quad 1 - \frac{c-1}{2} x > 0.$$

Avendo riguardo alle prime due di queste disuguaglianze, la prima delle (12) mostra che

$$(6') \quad x_{-1} \leq x - \frac{1}{2} x^2 \leq x,$$

$$(13) \quad x_{-1} \geq x - \frac{3}{2} x^2 \geq 0.$$

La (7') ci dà subito, tenendo conto delle (8') e (9'),

$$\frac{y_{-1}}{x_{-1}} \leq \operatorname{tg} \alpha - \left(1 - \frac{c-1}{2} x\right) (\operatorname{tg} \alpha - z),$$

donde, per la (10'),

$$(11') \quad \frac{y_{-1}}{x_{-1}} \leq \operatorname{tg} \alpha.$$

$\Omega_1$ :  $\bar{\mathfrak{P}}_1, \bar{\Omega}_1$  sono legate dalle relazioni:

$$\begin{aligned} \bar{\mathfrak{P}}_1(x, y) &= -\mathfrak{P}_1(x, y), \\ \bar{\Omega}_1(x, y) &= -\Omega_1(x, y). \end{aligned}$$

Infatti le formule del secondo gruppo devono cambiarsi in identità, quando si sostituiscono nel secondo membro  $x + \mathfrak{P}(x, y), y + \Omega(x, y)$  al posto di  $x_1, y_1$ . Ne viene:

$$\begin{aligned} x &\equiv x + \mathfrak{P}(x, y) + \bar{\mathfrak{P}}(x + \mathfrak{P}(x, y), y + \Omega(x, y)), \\ y &\equiv y + \Omega(x, y) + \bar{\Omega}(x + \mathfrak{P}(x, y), y + \Omega(x, y)), \end{aligned}$$

e il confronto dei termini quadratici fornisce in particolare le relazioni indicate.

Ogni punto  $P$  di  $S$  si cambia, per effetto della trasformazione, in un punto  $P_{-1}$ , che appartiene ancora ad  $S$ . Infatti, per le (5') e (13), il punto  $P_{-1}$  è situato nel primo quadrante; sotto tale condizione, la (11') implica che il punto sia interno all'angolo  $\widehat{AOB}$ . Ma, per la (6'), esso cade a sinistra della parallela all'asse delle ordinate, condotta per  $P$ ; dunque  $P_{-1}$  è ancora in  $S$ .

Lo stesso sarà a dirsi dei punti  $P_{-2}, P_{-3}, \dots$ , che si ottengono successivamente per iterazione della (12).

Avremo in generale, per  $n = 2, 3, \dots$ ,

$$x_{-n} \geq 0,$$

$$x_{-n} \leq x_{-n+1} - \frac{1}{2} x_{-n+1}^2 \leq x_{-n+1},$$

donde apparisce che le  $x_{-n}$  costituiscono una successione positiva mai crescente. Esiste pertanto un limite  $l$  finito; ma esso deve soddisfare alla disuguaglianza

$$l \leq l - \frac{1}{2} l^2,$$

dunque  $l = 0$ .

Siccome poi

$$\frac{y_{-n}}{x_{-n}} \leq \operatorname{tg} \alpha,$$

anche le ordinate convergono a zero, e i punti  $P_{-1}, P_{-2}, P_{-3}, \dots$  si avvicinano indefinitamente all'origine.

Sia  $C'$  un qualunque cerchio fisso di centro  $O$  e raggio  $< \varepsilon$ ,  $P$  un punto di  $S$  compreso fra  $C$  e  $C'$ .

Per quanto s'è detto, i punti  $P_{-n}$  convergono ad  $O$ . La trasformazione proposta ( $A'_1$ ), ripetuta  $n$  volte, fa passare da  $P_{-n}$  a  $P$ . In altri termini, per iterazione di ( $A'_1$ ), si finisce necessariamente coll'uscire da  $C'$  qualunque sia il punto della successione  $P_{-1}, P_{-2}, P_{-3}, \dots$ , da cui si parte. Ma di questi punti ve n'ha vicini all'origine quanto si vuole. L'instabilità è dunque manifesta.

3) ( $c = 1$ ).

L'equazione (3') diviene in questo caso

$$(d - a)\mu^2 - b\mu^3 = 0$$

ed ammette per conseguenza  $\mu = 0$  come radice doppia.



La terza radice  $(\bar{d} - a)/b$  è dunque reale e diversa da zero, a meno che non sia  $\bar{d} = a$ , nel qual caso la equazione (3') ammette tre radici coincidenti.

Prescindiamo per un momento da questa eventualità ed eseguiamo una sostituzione lineare di variabili (1), (2), prendendo per  $-\gamma/\delta$  il valore  $\mu$  non nullo.

Procedendo come a § 1, veniamo a determinare una seconda ridotta reale della  $(A'_1)$ , per la quale  $\eta = \gamma x + \delta y = 0$  è l'elemento unito *semplice* delle due involuzioni proiettive  $(I_1), (I_2)$ .

Il nuovo coefficiente  $c$  risulta allora  $\geq 1$  (perchè il valore  $c = 1$  implica una radice multipla della (3'), cioè un elemento unito *multiplo* della accennata corrispondenza). Possiamo quindi riportarci, per la dimostrazione della instabilità, ad uno dei due casi precedentemente discussi.

Rimane da vedere ciò che avviene per  $\bar{d} = a$ . La  $(A'_1)$  è in questo caso

$$\begin{aligned}x_1 &= x + x(x + ay) + by^2 + U(x, y), \\y_1 &= y + y(x + ay) + V(x, y).\end{aligned}$$

In causa della (4),  $b \geq 0$  (senza di che le parti di secondo grado ammetterebbero il fattore comune  $x + ay$ ).

Se  $b > 0$ , la dimostrazione della instabilità si fa in modo analogo a quello tenuto per  $c < 1$ .

Osservato che lo scambio di  $y, y_1$  in  $-y, -y_1$  non altera il valore di  $b$ , si vede subito potersi assegnare un settore  $S$  (limitato, si intende, inferiormente dall'asse  $x$ ) di raggio  $\varepsilon$  e ampiezza  $\alpha$  abbastanza piccoli, perchè si abbia in ogni suo punto

$$(5'') \quad y_1 \geq 0,$$

$$(6'') \quad x_1 \geq x + \frac{1}{2}x^2,$$

$$(7'') \quad \frac{y_1}{x_1} = z - bxz^3 + x^2W(x, z),$$

$$(9'') \quad xW < b \operatorname{tg}^3 \alpha,$$

$$(10'') \quad 1 - 3bx \operatorname{tg}^3 \alpha > 0.$$

La (7''), confrontata colla (9''), dà luogo alla disuguaglianza

$$\frac{y_1}{x_1} \leq z - bxz^3 + bx \operatorname{tg}^3 \alpha,$$

la quale può anche scriversi

$$\frac{y_1}{x_1} \leq \operatorname{tg} \alpha - (\operatorname{tg} \alpha - z) \{1 - bx(\operatorname{tg}^2 \alpha + z \operatorname{tg} \alpha + z^2)\}.$$

Siccome evidentemente

$$z \leq \operatorname{tg} \alpha, \\ 1 - bx(\operatorname{tg}^2 \alpha + z \operatorname{tg} \alpha + z^2) \geq 1 - 3bx \operatorname{tg}^2 \alpha,$$

e quest'ultima, per la (10''), è una quantità positiva, così ne concludiamo

$$(11'') \quad \frac{y_1}{x_1} \leq \operatorname{tg} \alpha;$$

dopodichè la dimostrazione si completa come sub 1).

Se  $b < 0$ , si procede in sostanza come sub 2), delimitando un settore  $S$ , in cui

$$(5''') \quad y_{-1} \geq 0,$$

$$(6''') \quad x_{-1} \leq x - \frac{1}{2}x^2 \leq x,$$

$$(13') \quad x_{-1} \geq x - \frac{3}{2}x^2 \geq 0,$$

$$(7''') \quad \frac{y_{-1}}{x_{-1}} = z + bxz^3 + x^2W(x, z),$$

$$(9''') \quad xW < -b \operatorname{tg}^3 \alpha,$$

$$(10''') \quad 1 + 3bx \operatorname{tg}^2 \alpha > 0;$$

e per conseguenza

$$\frac{y_{-1}}{x_{-1}} \leq \operatorname{tg} \alpha.$$

A questo punto si ripetono identicamente le considerazioni del caso indicato.

**4. - Proprietà delle trasformazioni (B).  
Caso generale. Instabilità.**

Sia la trasformazione

$$(B) \quad \begin{cases} x_1 = x + f(x, y), \\ y_1 = y + x + g(x, y); \end{cases}$$

$\varphi = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2$  l'insieme dei termini di secondo grado in  $f(x, y)$ .

Mi propongo di far vedere che il coefficiente  $a_{22}$  è un invariante della (B), di fronte a un generico cambiamento di variabili

$$(14) \quad \begin{cases} \xi = x + \mathfrak{P}(x, y), \\ \eta = y + \mathfrak{Q}(x, y), \end{cases}$$

$$(15) \quad \begin{cases} \xi_1 = x_1 + \mathfrak{P}(x_1, y_1), \\ \eta_1 = y_1 + \mathfrak{Q}(x_1, y_1), \end{cases}$$

regolare nell'intorno dell'origine e per il quale la parte di prim'ordine si riduce all'identità. (Sono questi d'altronde gli unici cambiamenti che importi considerare, possedendo già la parte lineare di (B) forma canonica).

Le (14) e (15), risolte rapporto alle antiche variabili, danno

$$(14') \quad \begin{cases} x = \xi + \bar{\mathfrak{P}}(\xi, \eta), \\ y = \eta + \bar{\mathfrak{Q}}(\xi, \eta), \end{cases}$$

$$(15') \quad \begin{cases} x_1 = \xi_1 + \bar{\mathfrak{P}}(\xi_1, \eta_1), \\ y_1 = \eta_1 + \bar{\mathfrak{Q}}(\xi_1, \eta_1), \end{cases}$$

le parti di second'ordine  $\bar{\mathfrak{P}}_2, \bar{\mathfrak{Q}}_2$  essendo legate a  $\mathfrak{P}_2, \mathfrak{Q}_2$  (cfr. la nota a pag. 30) dalle relazioni

$$(16) \quad \begin{cases} \bar{\mathfrak{P}}_2(x, y) = -\mathfrak{P}_2(x, y), \\ \bar{\mathfrak{Q}}_2(x, y) = -\mathfrak{Q}_2(x, y). \end{cases}$$

Per avere la forma delle (B), relativamente alle nuove variabili, partiamoci dalle (15), sostituendo successivamente nei secondi membri i valori (B) e (14').

Otteniamo dopo la prima operazione

$$(17) \quad \begin{cases} \xi_1 = x + f(x, y) + \mathfrak{P}\{x + f(x, y), y + x + g(x, y)\}, \\ \eta_1 = y + x + g(x, y) + \mathfrak{Q}\{x + f(x, y), y + x + g(x, y)\}. \end{cases}$$

Dalle (14') e (16) segue evidentemente

$$\begin{aligned} x &= \xi - \mathfrak{P}_2(\xi, \eta) + \dots \\ f(x, y) &= \varphi(\xi, \eta) + \dots, \\ \mathfrak{P}\{x + f(x, y), y + x + g(x, y)\} &= \mathfrak{P}_2(\xi, \eta + \xi) + \dots, \end{aligned}$$

i termini omissi essendo di terz'ordine almeno in  $\xi, \eta$ .

Con ciò la prima delle (17) porge

$$\xi_1 = \xi - \mathfrak{P}_2(\xi, \eta) + \varphi(\xi, \eta) + \mathfrak{P}_2(\xi, \eta + \xi) + \dots$$

Siccome la differenza  $\mathfrak{P}_2(\xi, \eta + \xi) - \mathfrak{P}_2(\xi, \eta)$  non contiene termine in  $\eta^2$ , così il coefficiente di  $\eta^2$  è ancora  $a_{22}$ . C. d. d.

Disponendo opportunamente delle due funzioni indeterminate  $\mathfrak{P}$  e  $\mathfrak{Q}$  (di ordine non inferiore al secondo), che compaiono nelle (14), (15), possiamo attribuire alla trasformazione (B) una forma più semplice. Prendiamo per ciò

$$\begin{aligned} \mathfrak{P}(x, y) &= g(x, y), \\ \mathfrak{Q}(x, y) &= 0. \end{aligned}$$

Le (17), avuto riguardo alle (14), danno

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \xi + f'(\xi, \eta), \\ \eta_1 &= \eta + \xi, \end{aligned}$$

dove  $f'(\xi, \eta)$  non è che

$$-g(x, y) + f(x, y) + g\{x + f(x, y), y + x + g(x, y)\},$$

espressa per  $\xi, \eta$ .

Ogni trasformazione (B) è dunque suscettibile di una forma ridotta

$$(B') \quad \begin{cases} x_1 = x + f(x, y), \\ y_1 = y + x, \end{cases}$$

per la quale la funzione  $g$  della seconda formula è identicamente nulla.

Usufruendo di questo tipo, *potremo facilmente accertare l'instabilità della (B), almeno per il caso generale, in cui il coefficiente  $a_{22}$  (del quale si è testè riconosciuto il carattere invariante) sia diverso da zero.*

In primo luogo è lecito supporre  $a_{22} > 0$ , poichè l'ipotesi opposta si riconduce a questa cambiando il segno delle variabili  $x, y$  (e conseguentemente  $x_1, y_1$ ).

Ciò posto (veggasi il precedente paragrafo), si potrà tracciare un cerchio  $C$ , col centro nell'origine, di raggio  $\varepsilon$  abbastanza piccolo perchè, in ogni punto del primo quadrante  $Q$  di  $C$ , risulti

$$x_1 = x + f(x, y) \geq 0,$$

essendo inoltre

$$f(0, y) > 0,$$

per  $y > 0$  e  $\leq \varepsilon$ .

Evidentemente la (B') fa corrispondere ai punti di  $Q$  punti del primo quadrante.

Proviamoci a supporre che vi sia stabilità. Partendo dai punti  $P$  di  $Q$ , abbastanza vicini all'origine, tutti i  $P_n$  rimangono indefinitamente entro  $Q$ . Avendosi in generale

$$\begin{aligned} x_n &= x_{n-1} + f(x_{n-1}, y_{n-1}), \\ y_n &= y_{n-1} + x_{n-1}, \end{aligned} \quad (n = 2, 3, \dots),$$

e le  $x_n$  essendo positive (purchè soltanto si intenda la posizione iniziale  $P$  diversa da  $O$ ), ogni  $y_n$  risulta  $> y_{n-1}$ . Siccome nessuna  $y$  supera  $\varepsilon$ , la successione  $y_n$  ammette un limite  $l < \varepsilon$  e  $> 0$ .

Dalla

$$y_n = y_{n-1} + x_{n-1}$$

segue, passando al limite,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0.$$

Con ciò la

$$x_n = x_{n-1} + f(x_{n-1}, y_{n-1}),$$

passando pure al limite, porge

$$f(0, l) = 0,$$

dove  $l$  non è zero, nè supera  $\varepsilon$ .

Ma questo contraddice alla definizione del cerchio  $C$ . È dunque inammissibile l'ipotesi della stabilità; e ciò dimostra l'asserto.

### 5. - Considerazioni relative al caso d'eccezione.

#### Sottocasi possibili.

Venendo al caso escluso  $a_{22} = 0$ , sia per la forma ridotta (B'),  $\gamma y^p$  il termine (indipendente da  $x$ ) di dimensione minima contenuto in  $f(x, y)$ . Se  $p$  è pari, o se,  $p$  essendo dispari,  $\gamma > 0$ , lo stesso ragionamento, che ci ha servito testè, prova la instabilità della trasformazione.

Per  $p$  dispari e  $\gamma$  negativo, la cosa non è così semplice. Le difficoltà, che si incontrano nella discussione, sono analoghe a quelle, che presenta il tipo (C), ond'io ho qui lasciato d'occuparmene, riservandomi di farne insieme lo studio in altra occasione. Tali difficoltà provengono, a mio credere, essenzialmente dal fatto che non si può — come or ora e come s'è visto esser possibile pel tipo (A) — delimitare un conveniente angolo col vertice in  $O$ , tale che, per ogni suo punto  $P$  abbastanza vicino ad  $O$ , il corrispondente  $P_1$  rimanga ancora compreso in quell'angolo.

Ma torniamo alla classificazione delle trasformazioni (B).

Tra le eventualità possibili c'è anche la ipotesi, non contemplata finora ( $p = \infty$ , si potrebbe dire), che la funzione  $f(x, y)$  contenga  $x$  a fattore:

$$f(x, y) = x f_1(x, y).$$

Qui è di nuovo assai facile constatare la instabilità.

Se  $f_1(0, y)$  non si annulla identicamente, sia  $\gamma y^p$  il termine di dimensione minima. Giova mostrare in primo luogo che è sempre lecito supporre  $\gamma > 0$ , cambiando eventualmente segno alle variabili o ricorrendo alla trasformazione inversa.

Sia infatti proposta una trasformazione, per cui  $\gamma < 0$ . Per  $p$  dispari, basta cambiare ordinatamente  $x, y; x_1, y_1$  in  $-\xi, -\eta; -\xi_1, -\eta_1$  e ci si trova ricondotti al caso del coefficiente positivo.

Se invece  $p$  è pari, allora si prende a considerare la trasformazione inversa.

Essendo

$$(18) \quad \begin{cases} x_1 = x\{1 + f_1(x, y)\}, \\ y_1 = y + x, \end{cases}$$

la (B') proposta, la inversa si potrà rappresentare mediante le formole

$$(19) \quad \begin{cases} x = x_1\{1 + \bar{f}_1(x_1, y_1)\}, \\ y = y_1 - x = y_1 - x_1\{1 + \bar{f}_1(x_1, y_1)\}, \end{cases}$$

dove  $\bar{f}_1$  è, al pari di  $f_1$ , una funzione regolare (nulla nell'origine).

Importa determinare il termine di grado minimo in  $\bar{f}_1(0, y_1)$ .

A questo scopo, immaginiamo di portare i valori (19) nella prima delle (18), togliendo il fattore comune  $x_1$  e ponendo poi  $x_1 = 0$ . Se si bada che  $y_1$  coincide allora con  $y$ , avremo la identità

$$1 = \{1 + \bar{f}_1(0, y_1)\} \{1 + f_1(0, y_1)\},$$

dove risulta che il termine di grado minimo in  $\bar{f}_1(0, y_1)$  (eguale ed opposto all'analogo di  $f_1$ ) è  $-\gamma y_1^p$ .

Ma la (19) non ha ancora la forma (B'). Per ricondurvela, eseguiamo il cambiamento di variabili

$$(20) \quad \begin{cases} \xi = x_1 \{1 + \bar{f}_1(x_1, y_1)\} = x, \\ \eta = -y_1, \end{cases}$$

e corrispondentemente

$$(21) \quad \begin{cases} \xi_1 = x \{1 + \bar{f}_1(x, y)\} \\ \eta_1 = -y. \end{cases}$$

La trasformazione fra  $\xi, \eta; \xi_1, \eta_1$  vien definita dalle formule

$$(19') \quad \begin{cases} \xi_1 = \xi \{1 + \bar{f}_1(x, y)\}, \\ \eta_1 = -y = -y_1 + x = \eta + \xi, \end{cases}$$

dovendosi beninteso  $f_1(x, y)$  ritenere espresso per  $\xi, \eta$ .

La prima delle (20) (riferendosi ad un intorno abbastanza piccolo dell'origine) mostra che, per  $\xi = 0$ , anche  $x_1 = 0$ . Per la prima delle (19) e prima delle (21) anche  $x, \xi_1$  si annullano. Ma allora  $y = y_1 = -\eta$ . I termini indipendenti da  $\xi$  in  $f_1(x, y)$  si otterranno semplicemente col porre  $x = 0, y = -\eta$ ;  $p$  essendo pari, il termine di grado minimo sarà in particolare  $-\gamma \eta^p$ .

La (19'), che è stabile od instabile assieme alla (18), ha dunque il coefficiente positivo  $-\gamma$ .

Ritenuto ormai nella (18)  $\gamma > 0$ , oppure  $f_1(0, y) \equiv 0$ , scriviamo la funzione  $f_1(x, y)$  sotto la forma

$$f_1(x, y) = x f_2(x, y) + f_1(0, y).$$

Potremo in ogni caso asserire che  $f_1(0, y)$  non è negativo per  $y$  positivo e abbastanza piccolo. Scegliamo, come è possibile in infiniti modi,

un cerchio  $C$  col centro nell'origine, nel cui primo quadrante  $Q$  sia ad un tempo

$$\begin{aligned} |f_2(x, y)| &< M, \\ f_1(0, y) &\geq 0, \\ x &< \frac{1}{M}, \end{aligned}$$

$M$  designando un conveniente numero positivo.

Per i punti di  $Q$  si ha evidentemente

$$x_1 = x + x^2 f_2(x, y) + x f_1(0, y) \geq x(1 - Mx) \geq 0.$$

Poniamo

$$x'_1 = x(1 - Mx)$$

e in generale

$$x'_n = x'_{n-1}(1 - Mx'_{n-1}) \quad (n = 2, 3, \dots).$$

A partire da un  $x$  positivo e  $< 1/M$ ,  $x'_1$  è pure positivo e più piccolo di  $x$ . La successione  $x'_n$  è dunque indefinitamente decrescente e converge verso un limite  $\geq 0$ .

Questo limite soddisfa all'equazione

$$l = l(1 - Ml),$$

ond'è identicamente nullo.

Giova osservare che, pur convergendo le  $x'_n$  a zero, la serie a termini positivi  $\sum_1^{\infty} x'_n$  è divergente.

Infatti, moltiplicando membro a membro le equazioni

$$x'_n = x'_{n-1}(1 - Mx'_{n-1})$$

da  $n = 2$  fino ad  $n = m$ , si trae

$$x'_m = x'_1 \prod_1^{m-1} (1 - Mx'_n),$$

e, qualora la serie  $\sum_1^{\infty} x'_n$  convergesse, lo stesso seguirebbe, come si sa, per il prodotto infinito  $\prod_1^{\infty} (1 - Mx'_n)$  (che avrebbe quindi valore diverso



da zero). Ma allora sarebbe altresì

$$\lim_{m \rightarrow \infty} x'_m = x'_1 \prod_1^{\infty} (1 - Mx'_n)$$

e quindi il primo membro diverso da zero, il che non è.

Confrontiamo ora gli elementi della successione  $x'_n$  con quelli, che si generano per iterazione della (18).

La posizione iniziale essendo in  $Q$ , e  $x$  non nullo, si ha, per quanto abbiám visto (rimanendo inoltre esclusa l'eguaglianza),

$$x_1 > x'_1.$$

L'ordinata  $y_1 = y + x$  è pure positiva, talchè anche  $P_1$  appartiene al primo quadrante. Lo stesso è a dirsi di  $P_2$ , se  $P_1$  non è già fuori di  $C$ ; ecc.

Si rimane dunque in  $Q$ , o si esce da  $C$ .

Finchè si è in  $Q$ ,

$$x_n \geq x_{n-1}(1 - Mx_{n-1});$$

supponendo  $x_{n-1} > x'_{n-1}$ , siccome il secondo membro della precedente disuguaglianza cresce o decresce con  $x_{n-1}$ , segue a fortiori

$$x_n > x'_{n-1}(1 - Mx'_{n-1}) > x'_n.$$

Stando così le cose, la ripetuta applicazione della (18) fa necessariamente uscire da  $C$ , per quanto si prenda vicina all'origine la posizione iniziale (purchè in  $Q$  e  $x > 0$ ).

Infatti, dacchè

$$y_n = y_{n-1} + x_{n-1} \quad (n = 2, 3, \dots),$$

si ha anche

$$y_m = y_1 + \sum_1^{m-1} x_n \quad (m = 2, 3, \dots).$$

Qualora non si uscisse da  $C$ , ogni  $x_n$  risulterebbe superiore ad  $x'_n$  e per conseguenza

$$y_m > y_1 + \sum_1^{m-1} x'_n$$

crescerebbe indefinitamente con  $m$ , il che implica contraddizione.

Si ha dunque instabilità.

## CAPITOLO III.

LA QUESTIONE DELLA STABILITÀ  
DELLE SOLUZIONI PERIODICHE

## 1. - Posizione del problema dal punto di vista della precedente teoria.

Sia un sistema differenziale

$$(1) \quad \frac{dx_i}{dt} = X_i(x_1, x_2, \dots, x_m; t) \quad (i = 1, 2, \dots, m),$$

dove le  $X_i$  si intendono funzioni reali, regolari rapporto alle  $x_i$  nel campo, che si avrà a considerare, e periodiche rispetto a  $t$  di periodo  $T$ .

Sia

$$x_i = \varphi_i(t) \quad (i = 1, 2, \dots, m),$$

una soluzione particolare del sistema (1) periodica (collo stesso periodo  $T$ ).

È sempre lecito, senza pregiudizio della generalità, supporre che le  $\varphi_i$  sieno identicamente nulle, cioè che la soluzione particolare, di cui si tratta, si riduca a

$$(2) \quad x_i = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m).$$

Basta a tal uopo immaginare effettuato un cambiamento di variabili

$$y_i = x_i - \varphi_i(t),$$

con che non si altera la natura del sistema differenziale (1).

Riferiamoci pertanto alla forma (2), osservando prima di tutto che i secondi membri  $X_i$  delle (1), si annullano per qualunque valore di  $t$ , quando tutte le  $x_i$  si pongono eguali a zero. È una conseguenza immediata della ipotesi che  $x_i = 0$  soddisfa il sistema.

La soluzione  $x_i = 0$  sarà a dirsi *stabile* (con ovvio linguaggio cinematico; interpretando cioè le (1) come le equazioni di definizione del movimento di un punto nello spazio  $x_1, x_2, \dots, x_m$ ) allora e solo allora che, per ogni intorno comunque piccolo  $E$  dell'origine, ne esiste un secondo  $H$  tale che, prendendo in  $H$  la posizione iniziale del mobile, questo rimane in  $E$ , per qualunque valore positivo o negativo di  $t$ .

Vi è *instabilità* nel caso opposto, ossia se non esiste un  $H$  dotato della anzidetta proprietà; o in altri termini se, vicino quanto si vuole all'origine, esiste sempre qualche posizione iniziale  $P_0$ , a partire dalla quale il mobile si trova, in un istante almeno, fuori di  $E$ .

Premesse queste definizioni, è facile mostrare che una soluzione periodica è sempre stabile od instabile assieme ad una certa trasformazione  $\Gamma$ .

Prendiamo a considerare l'integrale generale del sistema (1)

$$(3) \quad x_i = F_i(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_m^{(0)}; t) \quad (i = 1, 2, \dots, m),$$

i valori iniziali  $x_i^{(0)}$  riferendosi per es. all'istante  $t = 0$ . Le  $F_i$  si riducono identicamente ad  $x_i^{(0)}$ , per  $t = 0$ , e si annullano nell'origine qualunque sia  $t$ .

Una nota proposizione ci assicura poi che esse sono funzioni regolari delle  $x_i^{(0)}$ , in un intorno abbastanza piccolo dell'origine, per qualsiasi valore reale finito di  $t$  (16). (Il difficile è stabilire ciò che accade, quanto  $t$  cresce indefinitamente.)

In causa della periodicità dei secondi membri delle (1), le  $F_i$  posseggono ancora una importante proprietà funzionale.

Dicansi  $x_i^{(n)}$  ( $n = \pm 1, \pm 2, \dots$ ) i valori degli integrali  $x_i$  per  $t = nT$ .

Accanto alle formule (3) (che definiscono gli integrali mediante i loro valori per  $t = 0$ ), possiamo costruirne altre, che definiscano gli stessi integrali, ma in base ai loro valori per  $t = nT$ . Per stabilire queste nuove formule, basta osservare che, ponendo  $\tau = t - nT$ , il sistema (1), per la periodicità delle  $X_i$ , diviene

$$\frac{dx_i}{d\tau} = X_i(x_1, x_2, \dots, x_m; \tau) \quad (i = 1, 2, \dots, m),$$

il quale coincide collo stesso (1), salvo lo scambio materiale di  $t$  in  $\tau$ .

Ora, in virtù delle (3), gli integrali di questo sistema, che, per  $\tau = 0$ , assumono i valori  $x_i^{(n)}$ , sono definiti da

$$x_i = F_i(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots, x_m^{(n)}; \tau) = F_i(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots, x_m^{(n)}; t - nT).$$

Il confronto colle (3) stesse porge le annunziate equazioni funzionali

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} F_i(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_m^{(0)}; t) = F_i(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots, x_m^{(n)}; t - nT) \\ \left( \begin{array}{l} i = 1, 2, \dots, m; \\ n = \pm 1, \pm 2, \dots \end{array} \right), \end{array} \right.$$

(16) H. POINCARÉ, *Mécanique céleste*, tom. I, n. 27; oppure:

O. NICCOLETTI, *Sugli integrali delle equazioni differenziali ordinarie, considerati come funzioni dei loro valori iniziali*, « Rendiconti del Lincei », 15 dicembre 1895;

E. PICARD, *Traité d'analyse*, tom. III, Cap. VIII, pag. 157-162.

essendo bene inteso

$$x_i^{(n)} = F_i(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_m^{(0)}; nT).$$

Designiamo in particolare con  $f_i(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_m^{(0)})$  le espressioni delle funzioni  $F_i$  per  $t = T$ , e facciamo nelle ultime formule  $n = 1$ .

Avremo

$$(5) \quad x_i^{(1)} = f_i(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_m^{(0)}) \quad (i = 1, 2, \dots, m).$$

D'altronde la (4) ci dà, per qualsiasi valore di  $n$ ,

$$F_i(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots, x_m^{(n)}; t - nT) = F_i(x_1^{(n-1)}, x_2^{(n-1)}, \dots, x_m^{(n-1)}; t - (n-1)T),$$

e, ponendo  $t = nT$ ,

$$(6) \quad x_i^{(n)} = f_i(x_1^{(n-1)}, x_2^{(n-1)}, \dots, x_m^{(n-1)}) \quad \left( \begin{array}{l} i = 1, 2, \dots, m; \\ n = \pm 1, \pm 2, \dots \end{array} \right).$$

Le (5) e (6) mostrano che le posizioni  $P_n$ , occupate dal mobile per  $t = nT$ , si ottengono dalla posizione iniziale  $P_0$  per iterazione della trasformazione (5).

È chiaro che, ogniquale volta la (5) è instabile, lo stesso avviene per la soluzione periodica (2). Se la trasformazione è stabile, lo è del pari la (2), ma una qualche spiegazione si rende necessaria.

E per verità dalla stabilità della (5) segue bensì che, per  $t = nT$ , il mobile (anche al crescere indefinito di  $n$ ) rimane in  $E$ , ma nulla si sa a priori della traiettoria, compresa fra due  $P_n$  consecutivi. Ad eliminare il dubbio, si osservi in primo luogo che, dato un intorno comunque piccolo  $E$  dell'origine, e un qualsiasi intervallo *finito* di valori di  $t$  (in particolare l'intervallo  $0, T$ ), si può sempre assegnare un intorno  $E'$ , tale che, per  $P_0$  in  $E'$ ,  $P$  non esce da  $E$ , finché  $t$  rimane nell'intervallo. È questa una conseguenza immediata di quanto s'è osservato circa i secondi membri delle (3).

Ciò posto, si prenda a considerare, facendo appello alla supposta stabilità della (5), quell'intorno  $H$ , che corrisponde ad  $E'$  (secondo la definizione di stabilità). Dico che lo stesso  $H$ , rispetto all' $E$  arbitrariamente prescelto, si trova nella condizione voluta per la stabilità della nostra soluzione periodica.

Infatti qualsiasi posizione iniziale, situata in  $H$ , dà intanto luogo a punti  $P_n$  di  $E'$  (e quindi di  $E$ ). Sia poi  $P$  una generica posizione del mobile corrispondente ad un istante  $t$  compreso fra  $nT$  e  $(n+1)T$ .

Per le (3) e (4), le coordinate  $x_i$  di  $P$  si possono rappresentare me-

diante le funzioni

$$F_i(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots, x_m^{(n)}; t - nT);$$

gli argomenti  $x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots, x_m^{(n)}$  sono compresi in  $E'$ ,  $t - nT$  fra 0 e  $T$ ; il punto  $P$  è dunque in  $E$ . C.d.d.

Dacchè una soluzione periodica (2) è sempre stabile od instabile assieme alla (5), si può dire, fino ad un certo punto, che la questione della stabilità delle soluzioni periodiche si riduce a quella delle trasformazioni puntuali. Quand'anche però quest'ultima fosse completamente risolta, rimarrebbe, rispetto al primo problema, un ulteriore passo da compiere. Mettere in relazione, quanto possibile diretta, i criteri di stabilità o di instabilità, relativi alla (5), coi dati del problema, cioè coi secondi membri  $X_i$  delle equazioni differenziali proposte.

È questo l'oggetto dei paragrafi seguenti, dove si faranno appunto valere i caratteri di instabilità delle trasformazioni puntuali, finora acquisiti.

## 2. - Il teorema di Liapounoff.

I secondi membri  $X_i$  delle equazioni (1) si annullano nell'origine, qualunque sia  $t$ ; potremo dunque porre

$$X_i = \sum_1^m a_{ij} x_j + \dots,$$

dove le  $a$  sono funzioni periodiche di  $t$  e i termini omissi d'ordine superiore al primo rapporto alle  $x$ . Le equazioni lineari, a coefficienti periodici,

$$(7) \quad \frac{dx_i}{dt} = \sum_1^m a_{ij} x_j \quad (i = 1, 2, \dots, m),$$

(che si ottengono dalle (1) arrestandone i secondi membri alle parti di primo ordine), si dicono, col sig. POINCARÉ, *equazioni alle variazioni del sistema* (1), rispetto alla soluzione periodica considerata.

Sia  $\xi_{i,j}(t)$  un generico sistema fondamentale di integrali delle (7). Per essere queste a coefficienti periodici, anche le  $\xi_{i,j}(t + T)$  costituiscono un nuovo sistema fondamentale, ed esiste per conseguenza una sostituzione lineare a coefficienti costanti, atta a far passare dalle  $\xi_{i,j}(t)$  alle  $\xi_{i,j}(t + T)$ . Questa sostituzione lineare ammette sempre  $m$  moltiplicatori (reali o complessi, distinti o coincidenti, ma finiti e non nulli), che potremo rappresentare con  $e^{\alpha_1 T}$ ,  $e^{\alpha_2 T}$ , ...,  $e^{\alpha_m T}$ .

Se si suppone in particolare che il sistema fondamentale  $\xi_{i,j}(t)$  sia costituito dagli integrali principali, relativi al punto  $t = 0$  ( $\xi_{i,j}(0) = 0$ , per  $i \geq j$ ;  $\xi_{i,i}(0) = 1$ ), i coefficienti  $c_j$  della sostituzione

$$\xi_{i,j}(t + T) = \sum_1^m c_{ji} \xi_{i,j}(t)$$

valgono  $\xi_{i,j}(T)$  (come si vede facendo  $t = 0$ ) e le  $e^{\alpha T}$  rimangono definite quali radici della equazione

$$E(\omega) = \begin{vmatrix} \xi_{1,1}(T) - \omega & \xi_{1,2}(T) & \dots & \xi_{1,m}(T) \\ \xi_{2,1}(T) & \xi_{2,2}(T) - \omega & \dots & \xi_{2,m}(T) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \xi_{m,1}(T) & \xi_{m,2}(T) & \dots & \xi_{m,m}(T) - \omega \end{vmatrix} = 0.$$

Dalle cose dette segue, come si sa, la esistenza di un sistema fondamentale di soluzioni della forma

$$x_i = e^{\alpha_i t} \sigma_{i,j}(t) \quad (i, j = 1, 2, \dots, m),$$

dove le  $\sigma$  sono funzioni di  $t$  in generale periodiche (o alla peggio, nel caso che le  $\alpha$  non sieno tutte distinte, del tipo  $\tau_0 t^\mu + \tau_1 t^{\mu-1} + \dots + \tau_\mu$ , colle  $\tau$  periodiche e  $\mu < m$ ).

Le costanti  $\alpha$  si chiamano gli *esponenti caratteristici* della data soluzione periodica. Nel caso particolare, in cui i coefficienti  $a_{i,j}$  delle (7) si riducono a costanti, gli esponenti caratteristici  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  sono, come è ben noto, le radici della equazione

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \omega & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} - \omega & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm} - \omega \end{vmatrix} = 0;$$

in generale la dipendenza loro dai coefficienti  $a_{i,j}$  del sistema (7) è più complicata. Comunque essi rimangono individuati dai termini di primo ordine delle (1).

Si prova facilmente che  $e^{\alpha_1 T}, e^{\alpha_2 T}, \dots, e^{\alpha_m T}$  sono i *moltiplicatori della trasformazione* (5).

Partiamoci infatti dalla espressione (3) dell'integral generale, ricordando che i secondi membri sono sviluppabili in serie di potenze delle  $x_i^{(0)}$  e si annullano per  $x_i^{(0)} = 0$ .

Designiamo con

$$\xi_i = \sum_1^m \xi_{i,j}(t)x_j^{(0)}$$

le parti di prim'ordine, e sostituiamo nelle equazioni differenziali (1), eguagliando le parti di prim'ordine. Si vede così che le  $\xi_i$  soddisfanno alle equazioni alle variazioni; devono anzi essere separatamente integrali i singoli coefficienti  $\xi_{i,j}(t)$  d'ogni  $x_j^{(0)}$ ; talchè il loro insieme (per essere  $x_i^{(0)}$  i valori iniziali degli integrali  $x_i$ ) costituisce precisamente il sistema degli integrali principali delle (7), relativo a  $t = 0$ . Ora, per definizione,

$$x_i^{(1)} = f_i(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_m^{(0)}) = F_i(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_m^{(0)}; T) = \sum_1^m \xi_{i,j}(T)x_j^{(0)} + \dots ;$$

dunque i moltiplicatori della (5) non sono altro che le radici della equazione

$$E(\omega) = 0, \quad \text{c.d.d.}$$

Nel Capitolo I abbiamo dimostrato il teorema:

Una trasformazione puntuale è instabile, se uno almeno dei moltiplicatori ha modulo diverso dall'unità.

Dacchè la soluzione periodica (2) è stabile od instabile assieme alla (5) e d'altra parte i moltiplicatori  $e^{\alpha_j T}$  di quest'ultima sono in modulo eguali all'unità allora e solo allora che gli esponenti caratteristici  $\alpha_j$  sono puramente immaginari, otteniamo la importante proposizione dovuta al sig. LIAPOUNOFF (17):

Una soluzione periodica è instabile, se uno almeno dei suoi esponenti caratteristici possiede parte reale non nulla.

(17) Cfr. *Sur l'instabilité de l'équilibre dans certains cas où la fonction des forces n'est pas maximum*, « Journal de Mathématiques », 1897; che è la Memoria, già citata nell'Introduzione. Il teorema è quivi dimostrato per il caso particolare, in cui le  $X_i$  sieno indipendenti da  $t$ . L'A. però ha stabilito la proposizione in generale in un lavoro anteriormente pubblicato (in lingua russa): *Il problema generale della stabilità del movimento*, Kharkow, 1892.

**3. - Sistemi di secondo ordine.  
Caratteri di instabilità in due casi particolari.**

Supponiamo nelle (1)  $m = 2$  e di più le  $X$ , prive di termini di primo ordine. Il sistema si potrà scrivere

$$(a) \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = X_2 + \dots, \\ \frac{dy}{dt} = Y_2 + \dots, \end{cases}$$

dove  $X_2(x, y)$ ,  $Y_2(x, y)$  sono forme quadratiche in  $x, y$ , a coefficienti periodici rispetto alla variabile  $t$  e i termini omissi di dimensione superiore alla seconda. I valori medi

$$[X_2] = \frac{\int_0^T X_2 dt}{T}, \quad [Y_2] = \frac{\int_0^T Y_2 dt}{T},$$

costituiscono due nuove forme a coefficienti costanti.

*Se  $[X_2]$ ,  $[Y_2]$  sono prive di fattori comuni, la soluzione periodica  $x = 0$ ,  $y = 0$  è instabile.*

Designino  $x_0, y_0$  i valori iniziali di  $x, y$ . Come abbiamo ricordato al § 1, le espressioni di  $x, y$  sono della forma

$$(3') \quad \begin{cases} x = \sum_1^{\infty} P_i, \\ y = \sum_1^{\infty} Q_i, \end{cases}$$

con  $P_i, Q_i$  i polinomi in  $x_0, y_0$  (a coefficienti funzioni di  $t$ ) di grado designato dall'indice.

Portiamo queste espressioni nelle (a) ed eguagliamo i termini dei primi due gradi.

Avremo chiaramente

$$\begin{aligned} \frac{dP_1}{dt} &= 0, & \frac{dQ_1}{dt} &= 0; \\ \frac{dP_2}{dt} &= X_2(P_1, Q_1), & \frac{dQ_2}{dt} &= Y_2(P_1, Q_1). \end{aligned}$$



Dacchè  $x, y$  devono ridursi, per  $t = 0$ , ad  $x_0, y_0$ , così saranno appunto  $x_0, y_0$  i valori iniziali di  $P_1, Q_1$ , mentre ogni altro  $P_i, Q_i$  si annulla.

Ne viene

$$P_1 = x_0, \quad Q_1 = y_0,$$

$$P_2 = \int_0^t X_2 dt, \quad Q_2 = \int_0^t Y_2 dt.$$

Per  $t = T$ , dicendo  $x_1, y_1$  i corrispondenti valori di  $x, y$ , le (3') danno

$$x_1 = x_0 + T \cdot [X_2(x_0, y_0)] + \dots,$$

$$y_1 = y_0 + T \cdot [Y_2(x_0, y_0)] + \dots,$$

la quale trasformazione fa riscontro alla (5) del caso generale.

Per ipotesi, le due forme  $T \cdot [X_2(x_0, y_0)], T \cdot [Y_2(x_0, y_0)]$  non ammettono fattori comuni.

La trasformazione è instabile (cfr. § 3 del cap. precedente); lo è dunque la nostra soluzione periodica.

Consideriamo ora il sistema

$$(b) \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = X_2 + \dots, \\ \frac{dy}{dt} = x + Y_2 + \dots. \end{cases}$$

Procedendo come sopra, si ha senz'altro

$$\frac{dP_1}{dt} = 0, \quad \frac{dQ_1}{dt} = P_1;$$

$$\frac{dP_2}{dt} = X_2(P_1, Q_1);$$

da cui

$$P_1 = x_0, \quad Q_1 = tx_0 + y_0;$$

$$P_2 = \int_0^t X_2(x_0, tx_0 + y_0) dt,$$

e, per  $t = T$ ,

$$x_1 = x_0 + (P_2)_{t=T} + \dots,$$

$$y_1 = y_0 + Tx_0 + \dots,$$

i termini omissi essendo rispettivamente di terzo e di secondo ordine almeno.

¶ Sappiamo dal capitolo precedente (§ 4) che una trasformazione di questo tipo è certamente instabile, se il coefficiente di  $y_0^2$  nell'espressione di  $x_1$  non si annulla. Il termine in  $y_0^2$  proviene ora da  $(P_2)_{t=T}$  e il suo coefficiente non è altro (a prescindere dal fattore  $T$ ) che il valore medio del coefficiente di  $y^2$  in  $X_2(x, y)$ .

Possiamo dunque concludere:

*La soluzione  $x = 0, y = 0$  di un sistema (b) è instabile, se non si annulla il valor medio del coefficiente di  $y^2$  in  $X_2(x, y)$ .*

#### 4. - Casi riducibili all'uno o all'altro dei due anzidetti.

Sia in generale un sistema

$$(1') \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = X = X_1 + X_2 + \dots, \\ \frac{dy}{dt} = Y = Y_1 + Y_2 + \dots, \end{cases}$$

colla soluzione  $x = 0, y = 0$ .

Per il teorema di LIAPOUNOFF, la soluzione è instabile, se degli esponenti caratteristici  $\alpha_1, \alpha_2$  uno almeno ha parte reale diversa da zero. Rimane l'ipotesi opposta di esponenti entrambi puramente immaginari (e coniugati, trattandosi sempre in queste ricerche di equazioni reali), cioè  $\alpha_1 = -\alpha_2 = i\alpha$  ( $\alpha$  quantità reale). Che anche a questo caso abbiano di regola a corrispondere soluzioni instabili, non mi par dubbio. Però non mi è ora possibile dimostrarlo se non ammettendo che  $\alpha$  sia commensurabile con  $2\pi/T$ .

Sotto tale restrizione il sistema (1') equivale ad un sistema (a), ovvero ad un sistema (b), ed è quindi in generale instabile.

Innanzitutto, per la supposta commensurabilità, potremo mettere  $\alpha$  sotto la forma  $2h\pi/kT$ , dove  $h$  e  $k$  designano interi primi tra loro.

Se  $\alpha$  non è nullo, le equazioni alle variazioni

$$(7') \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = X_1(x, y), \\ \frac{dy}{dt} = Y_1(x, y), \end{cases}$$

ammettono due soluzioni indipendenti  $u_1, v_1; u_2, v_2$  della forma

$$\begin{aligned} u_1 &= e^{i\alpha t}(\sigma_1 + i\sigma_2), & v_1 &= e^{i\alpha t}(\tau_1 + i\tau_2); \\ u_2 &= e^{-i\alpha t}(\sigma_1 - i\sigma_2), & v_2 &= e^{-i\alpha t}(\tau_1 - i\tau_2), \end{aligned}$$

periodiche entrambe col periodo  $kT$ . (Infatti, quando  $t$  aumenta di  $kT$ , non solo le  $\sigma$  e  $\tau$ , che ammettono già il periodo  $T$ , ma anche gli esponenziali riprendono il medesimo valore).

Poniamo

$$c_{11} = \frac{u_1 + u_2}{2} = \sigma_1 \cos \alpha t - \sigma_2 \sin \alpha t,$$

$$c_{21} = \frac{v_1 + v_2}{2} = \tau_1 \cos \alpha t - \tau_2 \sin \alpha t;$$

$$c_{12} = \frac{u_1 - u_2}{2i} = \sigma_1 \sin \alpha t + \sigma_2 \cos \alpha t,$$

$$c_{22} = \frac{v_1 - v_2}{2i} = \tau_1 \sin \alpha t + \tau_2 \cos \alpha t,$$

con che  $c_{11}, c_{21}; c_{12}, c_{22}$  costituiscono un nuovo sistema fondamentale di soluzioni delle (7').

Si operi sul sistema proposto il cambiamento di variabili

$$(8) \quad \begin{cases} x = c_{11}\xi + c_{12}\sigma, \\ y = c_{21}\xi + c_{22}\sigma. \end{cases}$$

La materiale sostituzione di questi valori in (1') dà, tenendo conto della linearità di  $X_1, Y_1$ ,

$$\begin{aligned} c_{11} \frac{d\xi}{dt} + c_{12} \frac{d\eta}{dt} + \left\{ \xi \frac{dc_{11}}{dt} + \eta \frac{dc_{12}}{dt} \right\} = \\ = \{ \xi X_1(c_{11}, c_{21}) + \eta Y_1(c_{12}, c_{22}) \} + X_2 + \dots, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_{21} \frac{d\xi}{dt} + c_{22} \frac{d\eta}{dt} + \left\{ \xi \frac{dc_{21}}{dt} + \eta \frac{dc_{22}}{dt} \right\} = \\ = \{ \xi X_1(c_{11}, c_{21}) + \eta Y_1(c_{12}, c_{22}) \} + Y_2 + \dots; \end{aligned}$$

$X_2, Y_2$ , e così i termini successivi, conservano nelle nuove variabili  $\xi, \eta$  lo stesso grado e rimangono funzioni periodiche di  $t$  (col periodo  $kT$ ).

Le quantità in parentesi nei due membri si elidono, poichè, per definizione,  $c_{11}$ ,  $c_{21}$ ;  $c_{12}$ ,  $c_{22}$  verificano le (7').

Risolvendo rispetto a  $d\xi/dt$ ,  $d\eta/dt$ , si è evidentemente ricondotti alla forma (a).

Si noti che il determinante

$$D = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix}$$

non può annullarsi per alcun valore finito di  $t$ . Esso soddisfa infatti, come è ben noto e come del resto si verifica immediatamente, alla equazione

$$\frac{dD}{dt} = D \left( \frac{\partial X_1}{\partial x} + \frac{\partial Y_1}{\partial y} \right);$$

il coefficiente  $\partial X_1/\partial x + \partial X_1/\partial y$  è funzione regolare di  $t$  sopra l'asse reale e perciò  $D$  non può annullarsi in un punto senza annullarsi identicamente. Questo poi è escluso dall'essere le  $c$  soluzioni indipendenti delle (7').

A legittimare la trasformazione (8), conviene ancora osservare che essa non altera la stabilità o la instabilità di una soluzione  $x(t)$ ,  $y(t)$ . Infatti i coefficienti  $c$  della (8), e così  $D$ , sono funzioni periodiche; finite quindi e l'ultima diversa da zero, anche al crescere indefinito di  $t$ .

Se mai  $\alpha$  è nullo, le (7') non posseggono più in generale due soluzioni indipendenti della forma considerata, ma si ha invece un sistema fondamentale del tipo

$$\begin{aligned} u_1 &= \sigma_1, & v_1 &= \sigma_2; \\ u_2 &= \tau_1 t, & v_2 &= \tau_2 t, \end{aligned}$$

le  $\sigma$  e  $\tau$  essendo, bene inteso, funzioni periodiche reali.

Fatte le posizioni

$$\begin{aligned} c_{11} &= \sigma_1, & c_{21} &= \sigma_2; \\ c_{12} &= \tau_1, & c_{22} &= \tau_2, \end{aligned}$$

si noti che, mentre  $c_{11}$ ,  $c_{21}$  costituiscono, come nel caso precedente, una soluzione delle (7'),  $c_{12}$ ,  $c_{22}$  verificano invece le equazioni

$$\begin{aligned} \frac{dc_{12}}{dt} &= X_1(c_{12}, c_{22}) - c_{11}, \\ \frac{dc_{22}}{dt} &= Y_1(c_{12}, c_{22}) - c_{21}. \end{aligned}$$

La sostituzione (8) cangia allora, come si vede subito, il sistema (1') in uno di tipo (b).

*Equazioni, che non contengono t esplicitamente.* — Se i secondi membri  $X, Y$  delle (1') non contengono  $t$  esplicitamente, le considerazioni precedenti sono applicabili senza alcuna restrizione circa il valore di  $\alpha$ . Infatti, nel caso attuale, qualunque numero può essere risguardato come periodo  $T$  di  $X, Y$ ; in particolare si può supporre  $T$  tale che  $\alpha$  e  $2\pi/T$  sieno commensurabili.

Le (8) si riducono a

$$(8') \quad \begin{cases} x = \xi \cos \alpha t - \sigma \sin \alpha t, \\ y = \xi \sin \alpha t + \sigma \cos \alpha t. \end{cases}$$

Supposto  $\alpha$  non nullo, nel sistema trasformato a mezzo delle (8'), la variabile  $t$  entra soltanto per tramite degli argomenti  $\cos \alpha t, \sin \alpha t$ , talchè il periodo vale  $2\pi/\alpha$ . Se poi  $\alpha$  è nullo, la (8') si riduce all'identità e il sistema proposto cade già esso nel tipo (a), ovvero nel (b).

Nel primo caso la (8') conduce bensì al tipo (a), ma si incappa necessariamente — come è facile riconoscere — nella circostanza eccezionale che il valor medio delle parti di secondo grado è nullo (nè si può quindi applicare il nostro criterio di instabilità).

Si noti del resto che, per questo caso, la questione della stabilità è già stata brillantemente trattata dal sig. POINCARÉ nelle già ricordate classiche ricerche: *Sur les courbes définies par des équations différentielles* (18).

Per quanto concerne il secondo caso, i nostri due criteri possono effettivamente riescire; ma nulla sostanzialmente offrono di nuovo, potendo senza difficoltà venir desunti da un'importante Memoria del sig. BENDIXSON (19), dove è fatto in modo esauriente lo studio del comportamento delle curve integrali nei casi non contemplati dal sig. POINCARÉ.

Riassumendo, per le equazioni, che non contengono  $t$  esplicitamente, nulla ci vien fatto di aggiungere ai risultati dei sigg. POINCARÉ e BENDIXSON, che si addentrano nello studio delle proprietà delle soluzioni ben oltre la semplice discussione della loro stabilità.

(18) « Journal de Mathématique », 1881, 1882, 1885, 1886. Cfr. in particolare le pagine 172-196 della terza Memoria.

(19) *Sur les courbes définies par des équations différentielles*, « Acta Mathematica », tom. 24, 1900. Seguiamo per es. la discussione, che l'A. ci presenta a pag. 74, dei sistemi della forma (22) (il nostro tipo (b)). Risulta da essa che, se un certo  $\psi(0, 0)$  non si annulla, vi hanno caratteristiche passanti per l'origine con tangenti determinate, e quindi necessariamente instabilità. Ora  $\psi(0, 0)$  non è altro (colle nostre notazioni) che il coefficiente di  $y^2$  nell' $X$  del sistema (b). Ecco ritrovato il nostro criterio di instabilità.

## 5. - Equazioni canoniche.

Il sig. POINCARÉ ha notato <sup>(20)</sup> che ogni soluzione periodica di un sistema canonico

$$(9) \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial q_i}, \quad \frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial F}{\partial p_i} \quad (i = 1, 2),$$

(in cui  $F$  non dipende da  $t$ ) si può, scegliendo opportunamente le variabili, supporre definita dalle equazioni

$$(10) \quad p_1 = p_2 = q_2 = 0, \quad q_1 = \chi(t),$$

dove  $q_1$  varia sempre nel medesimo senso e aumenta di  $2\pi$ , mentre  $t$  cresce di  $T$ .

La funzione  $F$  è a ritenersi, rispetto a  $q_1$ , periodica di periodo  $2\pi$ , e regolare, rispetto alle altre variabili, nell'intorno del valore zero.

Dacchè le equazioni (9) sono soddisfatte dai valori (10), le tre derivate  $\partial F/\partial q_1$ ,  $\partial F/\partial q_2$ ,  $\partial F/\partial p_2$  debbono annullarsi per  $p_1 = p_2 = q_2 = 0$ ,  $q_1 = \chi(t)$ , qualunque sia il valore di  $t$ . Questo equivale a dire che  $\partial F/\partial q_1$ ,  $\partial F/\partial q_2$ ,  $\partial F/\partial p_2$  si annullano, indipendentemente dal valore di  $q_1$ , per  $p_1 = p_2 = q_2 = 0$ . Invece  $\partial F/\partial p_1$  non si annulla per alcun valore di  $q_1$  ( $p_1$ ,  $p_2$ ,  $q_2$  essendo abbastanza piccoli). Infatti, quando  $p_1$ ,  $p_2$  e  $q_2$  si pongono tutti eguali a zero,  $\partial F/\partial p_1 = dq_1/dt$  e  $q_1$  varia per ipotesi sempre nello stesso senso.

Stando così le cose, lo sviluppo di  $F$  in serie di potenze di  $p_1$ ,  $p_2$ ,  $q_2$  mancherà dei termini lineari in  $p_2$ ,  $q_2$  e sarà quindi della forma

$$C + a_1 p_1 + \frac{1}{2} (a_{11} p_1^2 + 2a_{12} p_1 q_2 + a_{22} q_2^2) + \dots,$$

i termini omissi essendo di terz'ordine almeno (rispetto agli argomenti  $p_1$ ,  $p_2$ ,  $q_2$ ), ovvero anche di secondo, ma con  $p_1$  a fattore. I coefficienti  $a_1$ ,  $a_{11}$ , ecc. sono funzioni periodiche di  $q_1$ ;  $C$  è una pura costante, poichè  $dC/dq_1$  non è altro che  $\partial F/\partial q_1$ , in cui si faccia  $p_1 = p_2 = q_2 = 0$ , e deve quindi annullarsi.

Per valori abbastanza piccoli di  $p_1$ ,  $p_2$ ,  $q_2$ ,  $\partial F/\partial p_1$  non si annulla,

(<sup>21</sup>) *Mécanique céleste*, tom. II, n. 208.

come abbiamo testè osservato. Questo ci permette di eliminare  $t$  dal sistema proposto, assumendo  $q_1$  come variabile indipendente.

Avremo le equazioni

$$(11) \quad \frac{dp_1}{dq_1} = - \frac{\frac{\partial F}{\partial q_1}}{\frac{\partial F}{\partial p_1}},$$

$$(12) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{dp_2}{dq_1} = - \frac{\frac{\partial F}{\partial q_2}}{\frac{\partial F}{\partial p_1}}, \\ \frac{dq_2}{dq_1} = \frac{\frac{\partial F}{\partial p_2}}{\frac{\partial F}{\partial p_1}}, \end{array} \right.$$

le quali definiscono, come si suol dire, le traiettorie del sistema (9).

Ciò che interessa dal punto di vista della stabilità è per lo più il comportamento delle traiettorie.

Ad ogni soluzione periodica del sistema (9) fa riscontro un'orbita chiusa <sup>(21)</sup>. L'importante è di sapere se il moto perturbato avviene indefinitamente in prossimità di quest'orbita, ovvero se ne scosta di una quantità finita, per quanto poco si varino le condizioni iniziali.

Interesserà in generale assai meno di sapere se anche le posizioni, corrispondenti ad un medesimo istante, sull'orbita primitiva e sulla perturbata, seguitano a rimanere vicinissime, o se si avranno alla lunga delle differenze finite tra le fasi dei due movimenti. D'altronde non c'è ragione di porre la seconda questione se non dopo risolta la prima e constatata la stabilità dell'orbita.

Queste osservazioni mostrano come alla indagine della stabilità di una soluzione periodica (10) si sia naturalmente condotti a sostituire la ricerca analoga, relativa alla soluzione

$$(10') \quad p_1 = p_2 = q_2 = 0$$

del sistema più semplice (11), (12).

<sup>(21)</sup> Dal punto di vista astratto basta per ciò interpretare  $p_1, p_2, q_2$  come coordinate generiche,  $q_1$  come coordinata ciclica di uno spazio a quattro dimensioni. Quando però il sistema canonico (9) proviene da un problema di meccanica celeste, si ha effettivamente un'orbita, nel senso astronomico della parola, i cui elementi determinativi sono forniti dalle espressioni di  $p_1, p_2, q_2$  in termini di  $q_1$ .

La instabilità (se non la stabilità) della (10') trae seco necessariamente quella della soluzione proposta.

Ciò posto, rivolgiamoci al sistema (11), (12). Esso ammette l'integrale

$$F = \text{cost.}$$

Potremo sostituire questa equazione in termini finiti alla (11). Il valore della costante, che corrisponde alla soluzione (10') è evidentemente  $C$ . Ci limiteremo a considerare quelle soluzioni del sistema, per cui

$$F = C.$$

Sotto l'aspetto dinamico questa limitazione corrisponde alle perturbazioni conservative.

Si noterà che, accertata la instabilità quando il valore della costante si suppone fisso, essa rimane provata in generale; ma, quanto alla stabilità, la cosa andrebbe diversamente, potendo benissimo avvenire che una stabilità conservativa non sia più tale rispetto all'intero sistema (11), (12).

Eliminiamo  $p_1$  dalle nostre equazioni, ricavandone il valore in funzione di  $q_1, p_2, q_2$ , dalla equazione  $F = C$ , ossia da

$$(13) \quad a_1 p_1 + \frac{1}{2} (a_{11} p_2^2 + 2a_{12} p_2 q_2 + a_{22} q_2^2) + \dots = 0.$$

Questa equazione è soddisfatta per  $p_1 = p_2 = q_2 = 0$  e si può risolvere rapporto a  $p_1$ , perchè  $(\partial F / \partial p_1)_{p_1=p_2=q_2=0}$ , cioè  $a_1$ , non si annulla, comunque vari  $q_1$ . Siccome  $(\partial F / \partial p_2)_{p_1=p_2=q_2=0}$ ,  $(\partial F / \partial q_2)_{p_1=p_2=q_2=0}$  sono nulli, così lo sviluppo di  $p_1$  comincerà da termini di secondo grado in  $p_2, q_2$ . Designiamone l'insieme con  $K$  e determiniamo  $K$ , portando nella (13), per  $p_1$ , una espressione del tipo

$$p_1 = K + H$$

(con  $H$  almeno di terz'ordine in  $p_2, q_2$ ).

Ricordiamo che i termini non scritti nella (13), o erano di terzo grado per lo meno in  $p_2, q_2$ , oppure, essendo complessivamente di secondo almeno in  $p_1, p_2, q_2$ , contenevano  $p_1$  a fattore. Dopo la sostituzione di  $K + H$  a  $p_1$ , quei termini acquistano tutti una dimensione superiore alla seconda in  $p_2, q_2$ . La parte di secondo grado nel primo membro della (13)



è dunque

$$a_1 K + \frac{1}{2} (a_{11} p_2^2 + 2a_{12} p_2 q_2 + a_{22} q_2^2),$$

e, dovendo essa annullarsi identicamente, risulta

$$K = -\frac{1}{2} \frac{a_{11} p_2^2 + 2a_{12} p_2 q_2 + a_{22} q_2^2}{a_1}.$$

Ritenendo  $p_1$  definito dalla equazione  $F = C$  (ossia  $p_1 = K + H$ ), abbiamo

$$\frac{\partial p_1}{\partial p_2} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial p_2}}{\frac{\partial F}{\partial p_1}}, \quad \frac{\partial p_1}{\partial q_2} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial q_2}}{\frac{\partial F}{\partial p_1}},$$

e le (12), libere ormai da  $p_1$ , diverranno

$$(14) \quad \frac{dp_2}{dq_1} = \frac{\partial(K + H)}{\partial q_2}, \quad \frac{dq_2}{dq_1} = -\frac{\partial(K + H)}{\partial p_2}.$$

I secondi membri sono funzioni periodiche di  $q_1$ , che si annullano per  $p_2 = q_2 = 0$ ; i termini, provenienti da  $H$ , sono di secondo ordine, almeno, rapporto a  $p_2, q_2$ .

Ecco un sistema analogo all'(1') del precedente paragrafo.

Vediamo di adattare ad esso il criterio di instabilità, che abbiamo ivi indicato. In primo luogo gli esponenti caratteristici  $\beta_1, \beta_2$  della soluzione  $p_2 = q_2 = 0$  (supposti privi di parte reale, e quindi della forma  $\pm \beta \sqrt{-1}$ ) dovranno corrispondere ad un valore di  $\beta$  razionale (commensurabile con  $2\pi/T$ , il  $T$  del caso generale essendo qui  $2\pi$ ).

Se si richiama la proprietà delle soluzioni periodiche dei sistemi canonici (9) di ammettere due esponenti caratteristici nulli e due altri  $\alpha$  e  $-\alpha$  eguali e di segno opposto<sup>(22)</sup>, e si osserva che  $\beta_1(2\pi/T), \beta_2(2\pi/T)$  sono in ogni caso esponenti caratteristici della (10)<sup>(23)</sup>, riconosciamo

<sup>(22)</sup> POINCARÉ, *Mécanique céleste*, tom. I, nn. 69, 70.

<sup>(23)</sup> Infatti le equazioni alle variazioni delle (10), osservando la espressione di  $F$ , si possono scrivere:

$$\frac{dp_1}{dt} = -\frac{da_1}{dq_1} p_1, \quad \frac{dq_1}{dt} = a_1;$$

$$\frac{dp_2}{dt} = a_1 \frac{\partial K}{\partial q_2}, \quad \frac{dq_2}{dt} = -a_1 \frac{\partial K}{\partial p_2}.$$

intanto che il criterio di instabilità si trasporterà a quelle soluzioni periodiche (10), per cui  $\alpha/\sqrt{-1}$  è commensurabile col *moto medio*  $2\pi/T$ . (Si dice in generale *moto medio*, per una soluzione periodica (10), l'aumento, che subirebbe nell'unità di tempo la coordinata ciclica  $q_1$ , qualora essa variasse in modo uniforme.)

Proseguendo poi come a § 3, si dovrà immaginare eseguita sulle variabili  $p_2, q_2$  una sostituzione lineare

$$(8'') \quad \begin{cases} p_2 = c_{11}x + c_{12}y, \\ q_2 = c_{21}x + c_{22}y, \end{cases}$$

i cui coefficienti (supposto  $\alpha$  non nullo e quindi i due esponenti caratteristici distinti) sono gli integrali delle equazioni alle variazioni.

Per la circostanza particolare che le equazioni (14), e così le loro equazioni alle variazioni

$$(7'') \quad \frac{dp_2}{dq_1} = \frac{\partial K}{\partial q_2}, \quad \frac{dq_2}{dq_1} = -\frac{\partial K}{\partial p_2},$$

sono canoniche, il cambiamento di variabili (8'') dà luogo al sistema (24)

$$(14') \quad \frac{dx}{dq_1} = \frac{\partial H}{\partial y}, \quad \frac{dy}{dq_1} = -\frac{\partial H}{\partial x},$$

La prima serve a definire  $p_1$ ; eliminando  $t$  dal secondo gruppo, a mezzo della seconda, troviamo le equazioni alle variazioni del sistema (14):

$$\frac{dp_2}{dq_1} = \frac{\partial K}{\partial q_2}, \quad \frac{dq_2}{dq_1} = -\frac{\partial K}{\partial p_2}.$$

Reciprocamente si passa da queste alle due anzidette, sostituendo a  $q_1$  una variabile  $t$ , definita da  $dq_1/dt = \alpha_1$ . Con questo cambiamento di variabili gli esponenti  $\beta_1, \beta_2$  (cfr. POINCARÉ, loco cit., n. 70) vengono moltiplicati per  $2\pi/T$ . Dunque  $\beta_1(2\pi/T), \beta_2(2\pi/T)$  sono esponenti caratteristici delle equazioni alle variazioni del dato sistema canonico.

(24) Immaginiamo infatti, come è sempre lecito, scelte le costanti di integrazione in modo che il valore iniziale di

$$D = c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21}$$

sia eguale all'unità. Avendo, per la forma canonica delle (7''),  $dD/dt = 0$ , sarà  $D = 1$  per qualsiasi valore di  $t$ . Ne consegue, in virtù delle (8''),

$$\begin{aligned} c_{11} &= \frac{\partial p_2}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial q_2}, & c_{12} &= \frac{\partial p_2}{\partial y} = -\frac{\partial x}{\partial q_2}, \\ c_{21} &= \frac{\partial q_2}{\partial x} = -\frac{\partial y}{\partial p_2}, & c_{22} &= \frac{\partial q_2}{\partial y} = \frac{\partial x}{\partial p_2}; \end{aligned}$$

valgono dunque le relazioni di JACOBI e quindi  $x, y$  sono costanti canoniche. Donde senz'altro le (14'). (Cfr. per es. TISSERAND, *Mécanique céleste*, tom. I, n. 59.) Del resto nel caso presente

che è ancora canonico e rientra nel tipo (a). Si intende che la funzione  $H$  è qui a ritenersi espressa per le  $x, y$  a mezzo delle (8").

Sia  $H_3$  la forma costituita dai termini di terzo grado e  $[H_3]$  il suo valor medio (rapporto a  $q_1$ ). A norma del § 3, condizione sufficiente per l'instabilità della (14') si è che le due forme  $\partial[H_3]/\partial x, \partial[H_3]/\partial y$  non ammettano fattori comuni, o, ciò che è lo stesso, che la  $[H_3]$  sia priva di fattori multipli. Concludiamo pertanto:

*Le soluzioni periodiche (10), per cui  $\alpha/\sqrt{-1} (\geq 0)$  è commensurabile col moto medio, sono instabili, purchè soltanto sia priva di fattori multipli una forma cubica  $[H_3]$  (il cui calcolo dipende, nel modo detto, dai coefficienti della funzione caratteristica  $F$  fino al terzo ordine al più).*

Si vedrebbe in modo analogo (cfr. pag. 52) che, se  $\alpha = 0$ , la condizione, che assicura l'instabilità, è ancora la medesima, oppure  $\partial^2[H_3]/\partial y^2 \geq 0$ .

C'è da avvertire che le  $c$  sono in quest'ultimo caso definite in modo alquanto diverso, le altre lettere conservando però lo stesso significato. Il sistema, cui si perviene da ultimo, non è più il (14'), sibbene

$$\frac{dx}{dq_1} = \frac{\partial H}{\partial y}, \quad \frac{dy}{dq_1} = x - \frac{\partial H}{\partial x},$$

che non ha forma canonica.

## 6. - Osservazione generale concernente la stabilità delle soluzioni periodiche, che dipendono da un parametro.

Torniamo per un momento sulla definizione di stabilità di una soluzione periodica. In quella data a § 1, ci siamo riferiti, per maggior comodo,

la verifica diretta è immediata. Basta notare che la sostituzione (8') in (14) dà

$$c_{11} \frac{dx}{dq_1} + c_{12} \frac{dy}{dq_1} = \frac{\partial H}{\partial q_1},$$

$$c_{21} \frac{dx}{dq_1} + c_{22} \frac{dy}{dq_1} = -\frac{\partial H}{\partial p_2},$$

e queste, risolte, divengono

$$\frac{dx}{dq_1} = \frac{\partial H}{\partial q_2} c_{22} + \frac{\partial H}{\partial p_2} c_{12} = \frac{\partial H}{\partial y},$$

$$\frac{dy}{dq_1} = -\frac{\partial H}{\partial q_2} c_{21} - \frac{\partial H}{\partial p_2} c_{11} = -\frac{\partial H}{\partial x},$$

c. d. d.

ad un sistema particolare di variabili. Volendo ora attribuirle una forma valida per qualunque sistema di variabili, basterà evidentemente (col solito linguaggio cinematico) enunciarla come segue:

Sia  $\Pi_0$  la posizione iniziale del mobile, corrispondente ad una soluzione periodica  $\Sigma$ ,  $\Pi_t$  la posizione nell'istante  $t$ ;  $P_0$  e  $P_t$  abbiano analogo significato per una soluzione generica  $S$ .

La soluzione  $\Sigma$  sarà a dirsi stabile se, scelto un numero positivo  $\varepsilon$  arbitrariamente piccolo, ne esiste un secondo  $\eta$ , tale che la distanza  $\overline{P_t\Pi_t}$ , si mantiene, per qualsiasi valore di  $t$ , inferiore ad  $\varepsilon$ , ogniquale volta la posizione iniziale  $P_0$  dista da  $\Pi_0$  meno di  $\eta$ .

La  $\Sigma$  è instabile nel caso opposto, vale a dire se, fissato  $\varepsilon$  abbastanza piccolo, tra le posizioni iniziali  $P_0$  corrispondenti alle  $S$ , ve n'ha di vicine quanto si vuole a  $P_0$ , per cui la distanza  $\overline{P_t\Pi_t}$  finisce col diventare, per qualche valore di  $t$ ,  $\geq \varepsilon$ .

Intesi su ciò, prendiamo a considerare un generico sistema differenziale (1) e supponiamo che il sistema ammetta una serie  $\infty^1$  di soluzioni periodiche  $\Sigma$ , dipendenti da un parametro  $\mu$ ; i valori iniziali  $x_i^{(0)}$ , corrispondenti a queste soluzioni, essendo funzioni continue del parametro  $\mu$  (per es. in un intorno  $C$  di  $\mu = 0$ ).

Si fissi in un modo qualunque un insieme di valori  $\mu'$  del parametro  $\mu$ , tale che l'insieme derivato comprenda tutti i punti dell'intervallo  $C$  (per es. l'insieme costituito dai punti razionali di  $C$ ). Si ha il teorema:

*Le soluzioni  $\Sigma_{\mu}$  sono stabili od instabili assieme alle  $\Sigma_{\mu'}$  (supposto che, per tutti i valori  $\mu'$  dell'insieme, quest'ultime si comportino nello stesso modo).*

Sieno per es. le soluzioni  $\Sigma_{\mu'}$  tutte stabili. Si tratta di far vedere che una generica  $\Sigma_{\mu_0}$  (dove  $\mu_0$  appartiene a  $C$ ) è pure stabile.

In primo luogo si può trovare una  $\Sigma_{\mu'}$  vicina a  $\Sigma_{\mu_0}$  quanto ci piace. Precisiamo questa asserzione. Dicasi  $\Pi_0$  la posizione iniziale corrispondente a  $\Sigma_{\mu_0}$  e  $\Pi'_0$  le posizioni iniziali, corrispondenti alle  $\Sigma_{\mu'}$ . L'ipotesi fatta circa l'insieme  $\mu'$  ci assicura che, in ogni intorno comunque piccolo di  $\Pi_0$ , cadono punti  $\Pi'_0$ ; ora è sempre possibile, scegliendo la distanza iniziale  $\overline{\Pi'_0\Pi_0}$  abbastanza piccola, fare in modo che  $\overline{\Pi'_t\Pi_t}$  si mantenga inferiore ad un limite prefissato  $\eta$ , per un intervallo finito di tempo; il periodo  $T$  per es. Immaginiamo  $\Pi'_0$  (ossia  $\mu'$ ) fissato in tal guisa. Le due soluzioni  $\Sigma_{\mu_0}$ ,  $\Sigma_{\mu'}$  essendo entrambe periodiche (collo stesso periodo  $T$ ), potremo concludere

$$(15) \quad \overline{\Pi'_t\Pi_t} < \eta,$$

per qualsiasi valore di  $t$ .

Dacchè la soluzione  $\Sigma_{\mu'}$  è stabile, scelto arbitrariamente  $2\varepsilon/3$ , avremo

$$(16) \quad \overline{P_t \Pi_t} < \frac{2}{3} \varepsilon,$$

per ogni  $S$ , la cui posizione iniziale  $P_0$  dista da  $\Pi'_0$  meno di un certo limite, che rappresenterò con  $2\eta$  (e che evidentemente non supera  $2\varepsilon/3$ ). Dalla (15) (dove si intende scelto per  $\eta$  questo valore) e dalla (16) segue agevolmente la dimostrazione della proprietà enunciata. Infatti, dato  $\varepsilon$ , prendiamo  $\eta$  nel modo testè detto e consideriamo un generico  $P_0$ , per cui

$$\overline{P_0 \Pi_0} < \eta.$$

La (15), per  $t = 0$ , dà

$$\overline{\Pi'_0 \Pi_0} < \eta,$$

quindi

$$\overline{P_0 \Pi'_0} < 2\eta,$$

con che la (16) rimane soddisfatta per ogni valore di  $t$ .

Confrontando colla (15) e tenendo presente che  $\eta \leq \varepsilon/3$ , si ricava

$$\overline{P_t \Pi_t} < \varepsilon,$$

che è la condizione di stabilità della  $\Sigma_{\mu_0}$ .

Nel caso invece, in cui le  $\Sigma_{\mu'}$  sono instabili, si trova, vicino quanto si vuole a  $\Pi'_0$ , un qualche  $P_0$ , per cui  $\overline{P_t \Pi'_t}$  finisce coll'assumere, in un istante almeno, un valore fisso;  $2\varepsilon$  per es.

D'altra parte  $\overline{\Pi_t \Pi'_t}$  si può ritenere (scelto opportunamente  $\mu'$ ) piccolo a piacere, per qualsiasi valore di  $t$ . Esistono dunque posizioni  $P_0$ , per le quali  $\overline{P_t \Pi'_t}$  raggiunge valori, vicini a  $2\varepsilon$ , pure quanto si vuole; in particolare quindi superiori ad  $\varepsilon$ .

Il teorema è così completamente dimostrato.

È chiaro che una proprietà analoga sussiste per due o più parametri.

Così per es., se un sistema ammette una duplice infinità di soluzioni periodiche  $\Sigma_{\mu\nu}$ , corrispondenti ai valori  $\mu, \xi$  di un certo campo  $C$ , e si ha in  $C$  un insieme di punti  $(\mu', \xi')$ , il cui derivato sia denso in  $C$  (comprenda cioè tutti i punti di  $C$ ), le  $\Sigma_{\mu\nu}$  sono stabili od instabili assieme alle  $\Sigma_{\mu'\nu'}$ ; ecc.

## CAPITOLO IV.

## APPLICAZIONE AL PROBLEMA DEI TRE CORPI

1. - Equazioni del problema ristretto <sup>(25)</sup>.

Si suol chiamare *ristretto* quel caso particolare del problema dei tre corpi (punti materiali, che si attraggono secondo la legge di NEWTON), in cui il movimento è piano, uno dei corpi ha massa trascurabile e gli altri due descrivono orbite circolari attorno al comune centro di gravità.

Sieno  $S, J, P$  (Sole, Giove, Pianeta) i tre corpi;  $1 - \mu, \mu, 0$  le rispettive masse.

Si suppone, come s'è detto, che il moto kepleriano (non perturbato, per essere nulla la massa di  $P$ ) dei due corpi  $S, J$  sia il più semplice possibile, cioè che essi si muovano di moto circolare uniforme attorno al loro centro di gravità  $O$ : la distanza  $SJ$  rimane allora costante.

Per semplificare, conviene assumere  $SJ$  come unità di lunghezza e disporre dell'unità di tempo in modo che la costante  $f$  di GAUSS si riduca all'unità.

Riesce così eguale ad 1 la velocità angolare costante, con cui la retta  $SJ$  ruota attorno ad  $O$  <sup>(26)</sup>.

Riferiamoci ad un sistema di assi mobili  $\xi, \eta$ , coll'origine in  $O$  e l'asse  $\xi$  coincidente con  $SJ$ , la direzione positiva essendo per es.  $OJ$  (fig. 5).

Le coordinate  $\xi, \eta$  di  $S$  sono  $-\mu, 0$ ; quelle di  $J, 1 - \mu, 0$ . Designremo con  $r, \Delta$  le distanze  $\overline{PS}, \overline{PJ}$ , con  $v$  l'angolo  $\overline{PSJ}$  (contato nel verso  $\xi \rightarrow \eta$ ).

La forza, che sollecita  $P$ , deriva dal potenziale

$$\frac{1 - \mu}{r} + \frac{\mu}{\Delta},$$

<sup>(25)</sup> Cfr. H. POINCARÉ, *Mécanique céleste*, tom. I, n. 9.

<sup>(26)</sup> Infatti questa velocità angolare (o moto medio) compete altresì al moto relativo di  $J$  rispetto ad  $S$ . Ora, fra il moto medio  $n$ , la somma delle masse  $m_1 + m_2$  di due corpi l'asse maggiore  $a$  dell'orbita e la costante  $f$ , si ha la relazione fondamentale

$$n = \sqrt{\frac{f(m_1 + m_2)}{a^3}}.$$

Essendosi qui assunti  $m_1 + m_2, SJ$  cioè  $a$ , ed  $f$  eguali all'unità, risulta  $n = 1$ , giusta l'asserto.

e le equazioni del movimento sono

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} - \frac{d\eta}{dt} - \xi = \frac{\partial}{\partial\xi} \left( \frac{1-\mu}{r} + \frac{\mu}{\Delta} \right),$$

$$\frac{d^2\eta}{dt^2} + \frac{d\xi}{dt} - \eta = \frac{\partial}{\partial\eta} \left( \frac{1-\mu}{r} + \frac{\mu}{\Delta} \right).$$

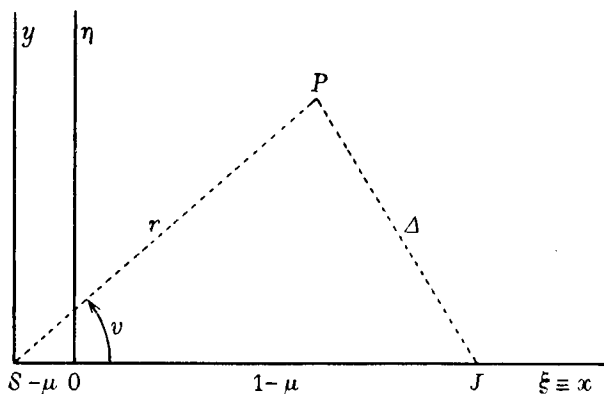


Fig. 5.

Passando dagli assi  $\xi, \eta$  ad un sistema parallelo  $x, y$  coll'origine in  $S$ , si ha

$$\xi = x - \mu, \quad \eta = y,$$

e per conseguenza

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} - \frac{dy}{dt} - x = -\mu + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1-\mu}{r} + \frac{\mu}{\Delta} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{r} + \mu \frac{\partial U}{\partial x}, \\ \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dx}{dt} - y = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1-\mu}{r} + \frac{\mu}{\Delta} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{r} + \mu \frac{\partial U}{\partial y}, \end{cases}$$

essendosi posto

$$(2) \quad U = \frac{1}{\Delta} - \frac{1}{r} - x = \frac{1}{\Delta} - \frac{1}{r} - r \cos v.$$

Consideriamo per un momento il moto non perturbato del corpo  $P$ , quello cioè, che corrisponderebbe a  $\mu = 0$ . Esso è evidentemente kepleriano e può essere definito (rispetto a un sistema eliocentrico di direzione invariabile) dai suoi elementi ellittici  $a$  (semiasse maggiore),  $e$  (eccentricità),  $\zeta$  (anomalia media),  $\omega'$  (longitudine del perielio). Il moto relativo rispetto ai nostri assi  $x, y$  possiede ancora gli elementi  $a, e, \zeta$ ; solo la longitudine del perielio non è più  $\omega'$ , ma  $\omega = \omega' - t$ , dacchè l'asse  $x$  ha esso stesso la longitudine  $t$ .

Le espressioni di  $x, y$ , in funzione di questi elementi ellittici *relativi*  $a, e, \zeta, \omega$ , sono senz'altro quelle ben note, relative alle coordinate eliocentriche; la loro sostituzione in  $U$  dà luogo ai classici sviluppi della funzione perturbatrice.

Teniamo presente questo e notiamo d'altra parte che il moto eliocentrico, definito dalle (1), è dovuto al potenziale  $1/r + \mu U$ .

Ponendo

$$x_1 = \sqrt{a}, \quad x_2 = \sqrt{a(1-e^2)}, \quad y_1 = \zeta, \quad y_2' = \omega',$$

le equazioni (1) equivalgono, come si sa, al sistema canonico

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= -\frac{\partial F'}{\partial y_1}, & \frac{dy_1'}{dt} &= \frac{\partial F'}{\partial x_1}, \\ \frac{dx_2}{dt} &= -\frac{\partial F'}{\partial y_2}, & \frac{dy_2'}{dt} &= \frac{\partial F'}{\partial x_2}, \end{aligned}$$

il quale ha per funzione caratteristica (quella corrispondente al moto non perturbato, che è la costante delle forze vive  $-1/2x_1^2$ , più la energia potenziale delle forze perturbatrici  $-\mu U$ ; dunque)

$$F' = -\frac{1}{2x_1^2} - \mu U.$$

Introduciamo, al posto di  $y_2'$ , la variabile  $y_2 = \omega = y_2' - t$ . Le equazioni rimangono canoniche, purchè si sostituisca ad  $F'$

$$F = -\frac{1}{2x_1^2} - x_2 - \mu U.$$

Per quanto s'è osservato, quest'ultima funzione dipende soltanto dagli argomenti  $x_1, x_2, y_1, y_2$  (non esplicitamente da  $t$ ).



Dovendo in seguito considerare valori dell'eccentricità vicini a zero, la scelta delle variabili precedenti non è opportuna, perchè la funzione  $F$  cessa di essere olomorfa, quando  $x_1 = x_2$ .

Si gira la difficoltà, adottando le variabili

$$\begin{aligned} p_1 &= x_1, & q_1 &= y_1 + y_2; \\ p_2 &= \sqrt{2(x_1 - x_2)} \cos y_2, & q_2 &= -\sqrt{2(x_1 - x_2)} \sin y_2, \end{aligned}$$

colla quale sostituzione non si altera la forma canonica, mentre  $F$  diviene funzione regolare dei nuovi argomenti.

Avremo in definitiva le equazioni

$$(1') \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial q_i}, \quad \frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial F}{\partial p_i} \quad (i = 1, 2),$$

dove

$$F = -\frac{1}{2p_1^2} - p_1 + \frac{1}{2}(p_2^2 + q_2^2) - \mu U,$$

la funzione  $U$ , definita dalla (2), dovendosi, bene inteso, ritenere espressa per le  $p_i, q_i$ .

L'effettivo calcolo di questa espressione (della quale ci occorreranno più innanzi i primi termini) si farà ricorrendo ai noti sviluppi di  $1/r, r \cos v, 1/\Delta$  in funzione degli argomenti  $a, e, \zeta, \omega$ , e passando poi alle nostre variabili mediante le relazioni

$$(4) \quad \begin{cases} p_1 = \sqrt{a}, & q_1 = \omega + \zeta, \\ p_2 = \eta \cos \omega, & q_2 = -\eta \sin \omega, \end{cases}$$

$$(5) \quad \eta = \{2(\sqrt{a} - \sqrt{a(1-e^2)})\}^{1/2},$$

che si raccolgono immediatamente da quanto precede. (I radicali, non occorre dirlo, si intendono presi in valore assoluto.)

Si noti che  $\eta$  è funzione regolare di  $e$  nell'intorno di  $e = 0$  e si annulla con  $e$ . Infatti

$$\eta = \{2(\sqrt{a} - \sqrt{a(1-e^2)})\}^{1/2} = a^{1/4} \{2[1 - (1-e^2)^{1/2}]\}^{1/2} = a^{1/4} e \left(1 + \frac{e^2}{8} + \dots\right).$$

Si può anche dire che  $\eta$  è la radice positiva dell'equazione

$$(5') \quad \frac{\eta^4}{4a} - \frac{\eta^2}{\sqrt{a}} + e^2 = 0,$$

che si annulla con  $e$ .

## 2. - Soluzioni periodiche prossime ad un movimento circolare uniforme.

Per  $\mu = 0$ , l'integral generale delle (1') è

$$\begin{aligned} p_1 &= p_1^0, & q_1 &= (n-1)t + q_1^0, & (n &= (p_1^0)^{-3/2}), \\ p_2 &= p_2^0 \cos t - q_2^0 \sin t, & q_2 &= p_2^0 \sin t + q_2^0 \cos t. \end{aligned}$$

Le  $\infty^4$  soluzioni, in esso contenute, corrispondono ai movimenti kepleriani di  $P$  (nel piano dell'orbita di Giove). È appena necessario osservare che, essendo  $q_1 = \omega + \zeta$  la longitudine media rispetto ad  $SJ$ ,  $n-1$  rappresenta il moto medio relativo, talchè  $n = (p_1^0)^{-3/2}$  designa, come d'abitudine, il moto medio assoluto.

Consideriamo in particolare le  $\infty^1$  soluzioni

$$(6) \quad p_1 = \sqrt{R}, \quad q_1 = (n-1)t, \quad p_2 = q_2 = 0$$

che si ottengono prendendo  $p_2^0 = 0$ ,  $q_2^0 = 0$ ,  $q_1^0 = 0$  (la qual ultima condizione affatto inessenziale equivale a scegliere l'epoca di una congiunzione per origine del tempo), e scrivendo  $\sqrt{R}$  per  $p_1^0$ .

Le (6), che sono evidentemente soluzioni periodiche di periodo  $2\pi/(n-1)$ , definiscono movimenti circolari uniformi. Basta notare che, dall'annullarsi di  $p_2$ ,  $q_2$ , segue  $e = 0$ , e quindi l'ellisse kepleriana di semiasse maggiore  $(p_1^0)^2$  si riduce al cerchio di raggio  $R$ .

Dalla superiore espressione dell'integrale generale segue immediatamente che i due esponenti caratteristici non nulli di una generica (6) sono  $\pm \sqrt{-1}$ .

Per  $\mu$  positivo e abbastanza piccolo, il sistema (1') possiede soluzioni periodiche  $\Sigma_\mu$ , vicine ad una qualsiasi (6), almeno se  $1/(n-1)$  non è un numero intero.

Rappresentiamo infatti con

$$\begin{aligned} p_i &= \varphi_i(t; p_1^0, p_2^0, q_1^0, q_2^0; \mu), \\ q_i &= \psi_i(t; p_1^0, p_2^0, q_1^0, q_2^0; \mu). \end{aligned} \quad (i = 1, 2),$$

l'integral generale del sistema (1') e notiamo che le soluzioni periodiche di periodo  $2\pi/(n-1) + \tau$  sono caratterizzate dalle equazioni

$$\begin{aligned}\varphi_1\left(\frac{2\pi}{n-1} + \tau; p_1^0, p_2^0, q_1^0, q_2^0; \mu\right) - p_1^0 &= 0, \\ \psi_1\left(\frac{2\pi}{n-1} + \tau; p_1^0, p_2^0, q_1^0, q_2^0; \mu\right) - q_1^0 - 2\pi &= 0, \\ \varphi_2\left(\frac{2\pi}{n-1} + \tau; p_1^0, p_2^0, q_1^0, q_2^0; \mu\right) - p_2^0 &= 0, \\ \psi_2\left(\frac{2\pi}{n-1} + \tau; p_1^0, p_2^0, q_1^0, q_2^0; \mu\right) - q_2^0 &= 0.\end{aligned}$$

I primi membri delle due ultime equazioni si riducono, per  $\mu = \tau = 0$ , a

$$\begin{aligned}p_2^0\left(\cos\frac{2\pi}{n-1} - 1\right) - q_2^0\operatorname{sen}\frac{2\pi}{n-1}, \\ p_2^0\operatorname{sen}\frac{2\pi}{n-1} + q_2^0\left(\cos\frac{2\pi}{n-1} - 1\right);\end{aligned}$$

quindi il loro determinante funzionale, rispetto alle variabili  $p_2^0, q_2^0$ , vale

$$2\left(1 - \cos\frac{2\pi}{n-1}\right) = 4\operatorname{sen}^2\frac{\pi}{n-1} > 0,$$

dacchè si esclude che  $1/(n-1)$  sia un numero intero.

Codesto determinante funzionale, che è funzione continua del parametro, rimane diverso da zero per  $\mu$  abbastanza piccolo, talchè le dette equazioni si possono risolvere rapporto a  $p_2^0, q_2^0$ .

Portiamo le espressioni, che così si ottengono per  $p_2^0, q_2^0$  (in funzione di  $p_1^0, q_1^0, \tau, \mu$ ), nella seconda equazione

$$\psi_1 - q_1^0 - 2\pi = 0.$$

Potremo risolvere rispetto a  $\tau$ , poichè non si annulla la derivata del primo membro dell'equazione rapporto a questa variabile (per  $\mu = 0$ ,  $\partial\psi_1/\partial\tau = n-1$ ).

Delle equazioni di condizione rimane oramai soltanto la prima,

$$\varphi_1 - p_1^0 = 0,$$

e questa, coi valori trovati per  $p_2^0, q_2^0, \tau$ , risulterà identicamente soddisfatta.

Infatti il sistema (1') ammette l'integrale

$$F = -C$$

(la  $C$  si suol chiamare costante di JACOBI) e la equazione  $F = -C$  si può risolvere rapporto a  $p_1$ , per  $\mu$  abbastanza piccolo (cfr. § 5 del capitolo antecedente).

Siam così fatti certi che  $p_1$  riprende il valore iniziale, ogniquale volta ciò accade per le altre tre variabili  $p_2, q_2, q_1$  (quest'ultima a meno di un multiplo di  $2\pi$ ). La condizione  $\varphi_1 - p^0 = 0$  è dunque una conseguenza delle altre, giusta l'asserto.

Questa discussione ci apprende non soltanto che esistono per il sistema (1') soluzioni periodiche  $\Sigma_\mu$  vicine ad ogni (6) (ritenuto  $1/(n-1)$  non intero); ma più precisamente che ve n'ha  $\infty^2$  (27), essendo lecito scegliere arbitrariamente i valori iniziali di  $q_1^0, p_1^0$  (quest'ultimo in prossimità a  $\sqrt{R}$ ), cioè, potremmo anche dire, il momento di una congiunzione e la costante di JACOBI. (Il valore di tale costante per una soluzione (6) è evidentemente  $1/2R + \sqrt{R}$ ).

Se si suppone  $R < 1$ , alle  $\Sigma_\mu$  vicine competono orbite chiuse, interne al cerchio di raggio 1 (orbita di Giove); si tratterà quindi, con linguaggio astronomico, di un pianeta inferiore; per  $R > 1$ , si avranno evidentemente pianeti superiori.

Abbiamo osservato più sopra che gli esponenti caratteristici (non nulli) d'una generica (6) sono  $\pm\sqrt{-1}$ ; quelli d'una  $\Sigma_\mu$ , per i piccoli valori di  $\mu$ , saranno vicini a  $\pm\sqrt{-1}$  ed essi pure, si intende, puramente immaginari, perchè devono essere ad un tempo coniugati e di segno opposto. Riconosciamo di qua che, tenendo conto soltanto della prima approssimazione, le soluzioni  $\Sigma_\mu$  appaiono stabili. Però, appoggiandoci ai precedenti capitoli, ci verrà fatto di dimostrare con tutto rigore che una parte almeno di esse è certamente instabile.

### 3. - Instabilità di queste soluzioni.

Atribuiamo nelle (6) al raggio  $R$  un valore della forma  $(1 + 3/h)^{-2/3}$ ,  $h$  designando un intero, positivo o negativo, primo con 3 (e diverso da  $-1, -2$ , per modo che  $1 + 3/h > 0$ ).

(27) Cfr. H. POINCARÉ, *Mécanique céleste*, tom. I, n. 43. L'A. si riferisce alle variabili  $x_i, y_i$  del paragrafo precedente. Siccome le (6) corrispondono a valori  $x_i, y_i$ , per i quali la  $F$  delle equazioni differenziali (1') non è regolare, così non sarebbe stato a priori giustificato richiamarsi senz'altro al risultato del sig. POINCARÉ.

Sarà

$$n = R^{-3/2} = 1 + \frac{3}{h},$$

e quindi

$$(7) \quad \frac{1}{n-1} = \frac{h}{3}.$$

Intesi che  $R$  abbia un siffatto valore, prendiamo in esame le soluzioni periodiche, vicine alla corrispondente (6). Dal paragrafo precedente siamo fatti certi della loro esistenza, poichè  $1/(n-1)$  non è intero. Ponendo

$$p_1^0 = \sqrt{R} + \nu = \left(1 + \frac{3}{h}\right)^{-1/3} + \nu,$$

possiamo anzi ritenere che ad ogni coppia arbitrariamente prefissata di valori di  $\mu$  e  $\nu$  (purchè abbastanza piccoli) e ad ogni  $h$  corrisponda una soluzione periodica  $\Sigma_{\mu\nu}^h$  del sistema (1'). (Dico una, e non  $\infty^1$ , convenendo di prescindere dall'arbitrarietà di  $q_1^0$ , coll'assumere per es.  $q_1^0 = 0$ .)

Le traiettorie del sistema (1') sono definite (§ 5 del capitolo precedente) dalle equazioni

$$(8) \quad \frac{dp_2}{dq_1} = \frac{\partial H}{\partial q_2}, \quad \frac{dq_2}{dq_1} = -\frac{\partial H}{\partial p_2},$$

dove  $H$  designa la espressione di  $p_1$  in funzione di  $p_2, q_2, q_1$ , che si ottiene risolvendo la equazione

$$F = -C.$$

Ad ogni soluzione periodica  $\Sigma_{\mu\nu}^h$  del sistema (1') fa riscontro una soluzione, pure periodica,  $\Omega_{\mu\nu}^h$  delle (8).

Per provare la instabilità delle  $\Sigma_{\mu\nu}^h$ , ci basterà accertare quella delle  $\Omega_{\mu\nu}^h$ , rispetto alle traiettorie, cui compete lo stesso valore

$$\frac{1}{2(\sqrt{R} + \nu)^2} + \sqrt{R} + \nu,$$

di  $C$ . È necessario perciò studiare la funzione  $H$ . Essa viene, come s'è

detto, definita da

$$F + C = -\frac{1}{2p_1^2} p_1 + \frac{1}{2} (p_2^2 + q_2^2) - \mu U + \frac{1}{2(\sqrt{R} + \nu)^2} + \sqrt{R} + \nu = 0,$$

ed è precisamente quella radice  $p_1$ , che si riduce a  $\sqrt{R}$  per  $\mu = \nu = p_2 = q_2 = 0$ .

Si riconosce senza difficoltà che, quando  $\mu = 0$ , l'espressione di  $p_1$  si può presentare sotto la forma

$$\sqrt{R} + \nu \mathfrak{P}_1(\nu) - \frac{1}{2} \frac{1}{n-1} \{1 + \nu \mathfrak{P}_2(\nu)\} \eta^2 + \eta^4 \mathfrak{Q}(\eta^2, \nu),$$

dove, a norma delle (4),  $\eta^2$  sta per  $p_2^2 + q_2^2$ ,  $n$  ha il valore costante (7), e  $\mathfrak{P}_1$ ,  $\mathfrak{P}_2$ ,  $\mathfrak{Q}$  designano serie di potenze degli argomenti indicati.

Immaginiamo di sviluppare  $H$  per potenze ascendenti di  $\mu$  e poniamo

$$H = H^{(0)} + \mu H^{(1)} + \dots$$

Avremo chiaramente

$$H^{(0)} = (p_1)_{\mu=0} = \sqrt{R} + \nu \mathfrak{P}_1(\nu) - \frac{1}{2} \frac{1}{n-1} \{1 + \nu \mathfrak{P}_2(\nu)\} \eta^2 + \eta^4 \mathfrak{Q}(\eta^2, \nu),$$

$$H^{(1)} = - \left[ \begin{array}{c} \frac{\partial F}{\partial \mu} \\ \frac{\partial F}{\partial p_1} \end{array} \right]_{\mu=0} = \left\{ \frac{U}{p_1^2 - 1} \right\}_{p_1 = H^{(0)}}.$$

Per  $\mu = \nu = 0$ , l'espressione di  $H$

$$\sqrt{R} - \frac{1}{2} \frac{1}{n-1} (p_2^2 + q_2^2) + \dots$$

mostra che gli esponenti caratteristici dell'orbita circolare  $\Omega_{00}^A$  sono  $\pm \sqrt{-1}/(n-1)$ . (Questo del resto potevasi prevedere, ricordando in generale che, se  $T$  e  $\pm \alpha$  sono periodo ed esponenti caratteristici di una soluzione periodica del sistema (1'),  $\pm \alpha T/2\pi$  sono gli esponenti caratteristici per la corrispondente soluzione del sistema (8)).

Ciò posto, la trasformazione (corrispondente alla (8) del paragrafo antecedente), atta a far passare dal sistema (8) ad uno di tipo (a), è

(per  $\mu = \nu = 0$ )

$$(9) \quad \begin{cases} p_2 = x \cos \frac{q_1}{n-1} - y \sin \frac{q_1}{n-1} = x \cos \frac{hq_1}{3} - y \sin \frac{hq_1}{3}, \\ q_2 = x \sin \frac{q_1}{n-1} + y \cos \frac{q_1}{n-1} = x \sin \frac{hq_1}{3} + y \cos \frac{hq_1}{3}. \end{cases}$$

In generale essa si potrà rappresentare con

$$(10) \quad \begin{cases} p_2 = x \left\{ \cos \frac{hq_1}{3} + c_{11} \right\} - y \left\{ \sin \frac{hq_1}{3} - c_{12} \right\} + \mu\varphi, \\ q_2 = x \left\{ \sin \frac{hq_1}{3} + c_{21} \right\} + y \left\{ \cos \frac{hq_1}{3} + c_{22} \right\} + \mu\psi, \end{cases}$$

le  $c$  essendo funzioni di  $q_1$ , che si annullano per  $\mu = \nu = 0$ ;  $\mu\varphi$ ,  $\mu\psi$  le espressioni di  $p_2$ ,  $q_2$  nella soluzione periodica  $\Omega_{\mu\nu}^h$ .

Immaginiamo di attribuire ai parametri  $\mu$ ,  $\nu$  dei valori  $\mu'$ ,  $\nu'$ , pei quali gli esponenti caratteristici della  $\Omega_{\mu\nu}^h$  sieno della forma  $k'\sqrt{-1}/k$ , con  $k'$  e  $k$  numeri interi.

L'insieme, costituito da questi valori  $\mu'$ ,  $\nu'$ , è tale — notiamolo bene — che il suo derivato contiene tutti i valori reali abbastanza piccoli di  $\mu$  e  $\nu$ .

Conveniamo, per maggior chiarezza, di designare con  $\mathfrak{S}$  il risultato della sostituzione (10) in  $H$ ; con  $\mathfrak{S}^{(0)}$ ,  $\mathfrak{S}^{(1)}$  ecc. i coefficienti dello sviluppo di  $\mathfrak{S}$  in serie di potenze di  $\mu$ ; infine con  $\mathfrak{S}_3^{(0)}$ ,  $\mathfrak{S}_3^{(1)}$ ,  $\mathfrak{S}_3^{(2)}$ , ... l'insieme dei termini di  $\mathfrak{S}$ ,  $\mathfrak{S}^{(0)}$ ,  $\mathfrak{S}^{(1)}$ , ... di terzo grado rapporto ad  $x$ ,  $y$ .

A tenore del precedente capitolo, una  $\Sigma_{\mu\nu}^h$  sarà instabile se il valor medio di  $\mathfrak{S}_3$  non ha fattori multipli. Questo valor medio si riferisce evidentemente alla variabile  $q_1$ , di cui  $\mathfrak{S}$  è, al pari di  $H$ , funzione periodica. Il periodo non è però in generale  $2\pi$ , come nella  $H$ , sibbene soltanto  $2k\pi$ . Lo sarà  $6k\pi$  <sup>(28)</sup> a più forte ragione e a noi basterà verificare che non ha fattori multipli la forma

$$\frac{1}{6k\pi} \int_0^{6k\pi} \mathfrak{S}_3 dq_1.$$

Si ha

$$\mathfrak{S}_3 = \mathfrak{S}_3^{(0)} + \mu\mathfrak{S}_3^{(1)} + \dots,$$

ma  $\mathfrak{S}_3^{(0)}$  è identicamente nullo.

<sup>(28)</sup> Si è triplicato il periodo, per poter senz'altro riguardare funzioni periodiche anche  $\sin q_1/3$ ,  $\cos q_1/3$ ; la quale circostanza, come vedremo nel seguente paragrafo, semplifica alquanto i calcoli.

Infatti i termini indipendenti da  $\mu$  in  $\mathfrak{S}$  provengono da  $H^{(0)}$  mercè la sostituzione (10), in cui, bene inteso, si ponga  $\mu = 0$ , sostituzione, che risulta con ciò lineare ed omogenea. Ora  $H^{(0)}$  è funzione soltanto di  $\eta^2 = p_2^2 + q_2^2$ . Quindi  $\mathfrak{S}^{(0)}$  non contiene termini di grado dispari in  $x, y$ , e in particolare  $\mathfrak{S}_3^{(0)} = 0$ .

La funzione  $\mathfrak{S}_3^{(1)}$  è a sua volta sviluppabile in serie di potenze di  $\nu$ . Sia  $\mathfrak{S}_3^{(1)}$  il termine indipendente da  $\nu$ . Per  $\mu$  e  $\nu$  abbastanza piccoli, la condizione che sia privo di fattori multipli il valor medio di  $\mathfrak{S}_3$  si troverà evidentemente verificata, qualora ciò accada per il valor medio di  $\mathfrak{S}_3^{(1)}$ .

Dimosteremo nel paragrafo seguente che

$$[\mathfrak{S}_3^{(1)}] = \Theta \cdot (x^3 - 3xy^2),$$

dove  $\Theta$  è una funzione della sola  $R$ , che non si annulla per i valori di  $R$ , che qui si considerano.

La forma cubica

$$x^3 - 3xy^2 = x(x + \sqrt{3}y)(x - \sqrt{3}y)$$

non possiede evidentemente fattori multipli; di qua risulta la instabilità delle soluzioni  $\Sigma_{\mu', \nu'}^h$  (purchè soltanto  $\mu', \nu'$  sieno abbastanza piccoli).

L'insieme  $(\mu', \nu')$  è tale, come s'è osservato, che il suo derivato comprende tutti i valori reali (appartenenti ad un certo intorno di  $\mu = 0, \nu = 0$ ); dunque:

*Per  $\mu$  e  $\nu$  abbastanza piccoli, ogni soluzione periodica  $\Sigma_{\mu, \nu}^h$  è necessariamente instabile.*

Si pone ora la questione: Queste  $\Sigma_{\mu, \nu}^h$  di accertata instabilità esauriscono tutte le soluzioni periodiche prossime a movimenti circolari uniformi, o ne rimangono escluse, e quali?

Dal paragrafo antecedente risulta che (a prescindere dalla inessenziale arbitrarietà di  $q_1^0$ , e supponendo che il parametro  $\mu$  abbia un valore fisso abbastanza piccolo) vi hanno  $\infty^1$  di tali soluzioni, le quali rimangono univocamente determinate dal valore  $p_1^0$  della variabile  $p_1$ .

Per rispondere alla domanda, testè formulata, basta evidentemente esaminare quale sia l'insieme dei valori di  $p_1^0$ , che corrispondono alle nostre  $\Sigma_{\mu, \nu}^h$ . Per una generica di esse, si ha

$$p_1^0 = \left(1 + \frac{3}{h}\right)^{-1/3} + \nu.$$

Se non vi fosse la limitazione del  $\nu$  abbastanza piccolo, fissato ad arbitrio un valore di  $h$  (primo con 3, e non  $-1$ , nè  $-2$ ), se ne trarrebbe, facendo



variare  $\nu$ , l'intera categoria delle soluzioni periodiche prossime a movimenti circolari uniformi. In fatto però la nostra dimostrazione implica che  $\nu$  non superi (in valore assoluto) un certo limite, variabile in generale con  $h$ , che rappresenterò con  $\delta_h$ . A rigore dunque rimane provata la instabilità di quelle soluzioni periodiche soltanto, il cui  $p_1^0$  cade entro un qualche intervallo

$$\left(1 + \frac{3}{h}\right)^{-1/3} - \delta_h, \quad \left(1 + \frac{3}{h}\right)^{-1/3} + \delta_h.$$

Il massimo di  $(1 + 3/h)^{-1/3}$  si ha per  $h = -4$ , il minimo per  $h = 1$ ; al crescere indefinito di  $h$ , per valori positivi o negativi, i punti  $(1 + 3/h)^{-1/3}$  convergono, dalla sinistra o dalla destra, al valore 1.

Riferendoci al caso limite  $\mu = 0$ , le orbite circolari, per cui  $p_1^0$  si trova compreso nei detti intervalli, ricoprono tante piccole corone  $Z_n$  di raggio medio  $(1 + 3/h)^{-2/3}$  e di ampiezza

$$\delta'_h = \left\{ \left(1 + \frac{3}{h}\right)^{-1/3} + \delta_h \right\}^2 - \left\{ \left(1 + \frac{3}{h}\right)^{-1/3} - \delta_h \right\}^2.$$

Per quanto precede, noi siamo in grado di affermare che sono instabili le soluzioni periodiche vicine ad ognuna di queste <sup>(29)</sup> circonferenze.

In definitiva vien messa in luce *la esistenza di zone di instabilità, le quali si addensano intorno all'orbita di Giove.*

È ben probabile che le soluzioni periodiche del nostro problema sieno tutte instabili, o, in altri termini, che la regione di instabilità occupi l'intero piano. Ma le considerazioni, istituite finora, non ci autorizzano ad affermarlo. Nemmeno possiamo trarne alcun ragguaglio sull'ampiezza degl'intervalli  $\delta_h$ . Questo solo si sa, che sono diversi da zero.

<sup>(29)</sup> Possiamo caratterizzarle, dicendo che il loro moto medio è vicino ad un numero della forma  $1 + 3/h$ . A questo proposito cade in acconcio la seguente osservazione.

Nella Nota *Sur le problème restreint des trois corps* (« Comptes Rendus », 23 luglio 1900 [in queste « Opere »: vol. primo, XXX, p. 469]) le soluzioni periodiche, di cui si può rigorosamente provare la instabilità, sono designate come *vicine alle orbite circolari aventi per moto medio un numero della forma  $1 + 3/h$* . Se si bada alla circostanza che queste soluzioni vicine dipendono, oltre che da  $\mu$ , dall'altro parametro  $p_1^0$ , apparisce chiaramente che le soluzioni periodiche *vicine ad un dato cerchio* (riducentisi cioè ad esso per variazione continua dei parametri) possono dirsi con egual ragione *vicine ad ogni altro cerchio di una zona abbastanza piccola attorno al primo*.

I due modi di dire sono dunque equivalenti. Quello qui adottato mi pare preferibile, perchè i valori  $1 + 3/h$  non vengono (sia pure nell'enunciato soltanto) ad assumere posizione particolare rispetto ai valori contigui. Che un carattere aritmetico non abbia relazioni essenziali con proprietà d'indole qualitativa è cosa del resto ben naturale. E se il successo della presente ricerca sembra dovuto a certa ipotesi di commensurabilità, ciò dipende puramente dall'artificio dimostrativo, cui sono ricorso, in mancanza di metodi più diretti ed efficaci.

*Esempi.* — Dalle tabelle del sig. J. MASCART <sup>(30)</sup> si rileva che i tre asteroidi 167 Urda, 243 Ida, 396 posseggono un moto medio vicino a due volte e mezzo quello di Giove, mentre tanto le eccentricità, quanto le inclinazioni sono assai piccole.

Per ognuno di questi pianeti, si potranno scegliere  $\mu$  e  $\nu$  in modo che la corrispondente soluzione periodica  $\Sigma_{\mu\nu}^2$  abbia carattere di *orbita intermediaria*.

La accertata instabilità delle  $\Sigma_{\mu\nu}^2$  fa presumere quella del movimento reale dei pianeti.

Anche il pianeta 188 Menippo ha un moto medio assai vicino a  $5/2$ , ma la sua eccentricità e la sua inclinazione sono forse un po' troppo forti, perchè le precedenti considerazioni si possano ritenere senz'altro applicabili.

#### 4. - Sviluppo del calcolo, su cui riposa la precedente dimostrazione.

Avviamoci a calcolare effettivamente il valor medio  $[\mathfrak{S}'_3^{(1)}]$ .

In primo luogo è da osservare che i termini di  $\mathfrak{S}'_3^{(1)}$  sono di duplice provenienza: da  $H^{(0)}$  e da  $H^{(1)}$ .

Chiamiamo  $M$  la somma dei primi,  $N$  quella dei secondi e poniamo in conformità

$$\mathfrak{S}'_3^{(1)} = M + N.$$

*Calcolo di [M].* — Pongasi nelle (10)  $\nu = 0$ .

Le  $c_{11}, c_{12}, \dots$ , quando si fa  $\nu = 0$ , contengono  $\mu$  a fattore. Diciamo  $\bar{c}_{11}, \bar{c}_{12}, \dots$  i coefficienti della prima potenza di  $\mu$ ; del pari designiamo con  $\bar{\varphi}$  e  $\bar{\psi}$  i termini indipendenti da  $\mu$  e  $\nu$ , in  $\varphi, \psi$ .

Avremo, mettendo in evidenza soltanto i termini indipendenti da  $\mu$  e quelli di primo grado in  $\mu$ ,

$$p_2 = x \cos \frac{hq_1}{3} - y \sin \frac{hq_1}{3} + \mu \{ \bar{c}_{11}x + \bar{c}_{12}y \} + \mu \bar{\varphi} + \dots,$$

$$q_2 = x \sin \frac{hq_1}{3} + y \cos \frac{hq_1}{3} + \mu \{ \bar{c}_{21}x + \bar{c}_{22}y \} + \mu \bar{\psi} + \dots,$$

<sup>(30)</sup> *Les orbites des petites planètes rapportées à l'orbite de Jupiter*, « Bulletin Astronomique », tom. XVI, 1899.

e di qua, quadrando e sommando,

$$(11) \quad \eta^2 = x^2 + y^2 + 2\mu\chi + \\ + 2\mu \left\{ \cos \frac{hq_1}{3} (x\bar{\varphi} + y\bar{\psi}) + \operatorname{sen} \frac{hq_1}{3} (x\bar{\psi} - y\bar{\varphi}) \right\} + \dots,$$

dove  $\chi$  è una forma di secondo grado in  $x, y$ .

Dacchè

$$(12) \quad (p_1)_{\mu=\nu=0} = H^{(0)} = \sqrt{R} - \frac{1}{2} \frac{1}{n-1} \eta^2 + \eta^4 \Omega(\eta^2, 0)$$

è l'espressione di  $H^{(0)}$  per  $\nu = 0$ , quando si eseguisce la sostituzione (10) e si immagina di sviluppare per potenze di  $\mu$ , il coefficiente della prima potenza di  $\mu$  vale, in virtù della (11),

$$\left( \frac{dH^{(0)}}{d\eta^2} \right)_{\eta^2=x^2+y^2} \cdot 2 \left\{ \chi + \cos \frac{hq_1}{3} (x\bar{\varphi} + y\bar{\psi}) + \operatorname{sen} \frac{hq_1}{3} (x\bar{\psi} - y\bar{\varphi}) \right\}.$$

Il primo fattore contiene soltanto potenze pari di  $x, y$ . I termini di terzo grado del prodotto provengono tutti dal moltiplicare la parte quadratica del primo fattore per la parte lineare del secondo. Risulta così

$$M = 4\Omega(0, 0)(x^2 + y^2) \left\{ \cos \frac{hq_1}{3} (x\bar{\varphi} + y\bar{\psi}) + \operatorname{sen} \frac{hq_1}{3} (x\bar{\psi} - y\bar{\varphi}) \right\}.$$

Se si tien presente che  $\bar{\varphi}$  e  $\bar{\psi}$  sono funzioni periodiche di  $q_1$ , di periodo  $2\pi$ , si vede subito che lo sviluppo di  $M$  in serie trigonometrica dell'argomento  $q_1/3$  non contiene termine indipendente da  $q_1/3$  <sup>(31)</sup> e quindi

$$[M] = \frac{1}{6k\pi} \int_0^{6k\pi} M dq_1 = 0.$$

*Calcolo di [N].* — Per definizione,  $N$  è l'insieme dei termini di terzo grado, che provengono da  $H^{(0)}$ , quando vi si faccia  $\nu = 0$ , e si eseguisca la sostituzione (9).

(31) Infatti, essendo un termine generico dello sviluppo di  $\bar{\varphi}, \bar{\psi}$  della forma  $\frac{\operatorname{sen}}{\cos} m q_1$  (con  $m$  intero), i prodotti  $\frac{\operatorname{sen} \frac{hq_1}{3}}{\cos 3} \frac{\operatorname{sen}}{\cos} m q_1$  dan luogo a somme di seni e coseni degli argomenti  $(m \pm \pm h/3)q_1$ ; e  $h/3$  non è mai eguale ad un numero intero.

$H^\omega$  dipende dalla funzione perturbatrice  $U$ , di cui noi non possiamo ancora la espressione in coordinate  $p_1, p_2, q_1, q_2$ , ma soltanto (e questo diciamo pensando alla (2) e agli sviluppi classici, che richiameremo ben presto) per mezzo degli elementi ellittici,  $a, e, \omega, \zeta$ .

Quali sono, in base alle (4), (5), (9), (12), i valori di  $a, e, \omega, \zeta$  da introdursi in  $U$ , per averne la espressione in termini di  $x, y, q_1$ ?

In primo luogo le (9) danno

$$p_1^2 + q_2^2 = \eta^2 = x^2 + y^2,$$

quindi, per essere  $\sqrt{a} = p_1$ , basterà porre, in  $p_1, \mu = \nu = 0$ , con che risulta, in virtù della (12),

$$(12') \quad \sqrt{a} = \sqrt{R} - \frac{1}{2} \frac{1}{n-1} \eta^2 + \eta^2 \mathfrak{D}(\eta^2, 0).$$

La (5'), che può essere scritta

$$e^2 = \frac{\eta^2}{\sqrt{a}} \left\{ 1 - \frac{\eta^2}{4\sqrt{a}} \right\},$$

ove si sostituisca per  $\sqrt{a}$  questo valore, porge

$$(13) \quad e = R^{-1/4} \eta \{1 + \eta^2 \mathfrak{P}(\eta^2)\},$$

$\mathfrak{P}$  designando al solito una serie di potenze.

Per il nostro scopo non occorrono separatamente le espressioni di  $\omega$  e  $\zeta$ , ma bastano quelle della somma  $\omega + \zeta$ , che non è altro che  $q_1$ , e delle combinazioni

$$e^m \cos m\zeta, \quad e^m \sin m\zeta,$$

dove  $m$  designa un intero positivo.

Partiamoci dalla identità

$$e^m(\cos m\zeta + i \sin m\zeta) = (eE^{i\zeta})^m$$

(per evitare ambiguità, si designa con  $E$  la base dei logaritmi naturali), e scriviamo nel secondo membro  $q_1 - \omega$  al posto di  $\zeta$ , sostituendo per  $e$  il valore (13). Verrà

$$e^m(\cos m\zeta + i \sin m\zeta) = R^{-(m/4)} \{1 + \eta^2 \mathfrak{P}(\eta^2)\}^m E^{imq_1} (\eta E^{-i\omega})^m.$$

In virtù delle (4) e (9),

$$\eta E^{-i\omega} = p_2 + iq_2 = (x + iy)E^{ihq_1/3};$$

per conseguenza

$$(14) \quad e^m \cos m\zeta + ie^m \operatorname{sen} m\zeta = R^{-(m/4)} \{1 + \eta^2 \mathfrak{P}(\eta^2)\}^m \cdot \left\{ \cos m \left(1 + \frac{h}{3}\right) q_1 + i \operatorname{sen} m \left(1 + \frac{h}{3}\right) q_1 \right\} (x + iy)^m,$$

da cui si traggono le relazioni cercate, scindendo il reale dall'immaginario.

Ciò posto, prendiamo a considerare la funzione perturbatrice, incominciando dal termine principale

$$\frac{1}{\Delta} = \{1 + r^2 - 2r \cos v\}^{-1/2}.$$

Supponendo  $r$  diverso da 1, si ha lo sviluppo <sup>(32)</sup>

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{1}{2} \sum_{-\infty}^{\infty} A_j^{(0)}(r) \cos jv,$$

in cui

$$A_j^{(0)}(r) = A_{j,i}^{(0)}(r).$$

Ponendo

$$r = a(1 + X),$$

$$v = q_1 + Y,$$

$$(15) \quad A_j^{(p)}(a) = \frac{a^p}{p!} \frac{d^p A_j^{(0)}(a)}{da^p} \quad \left( \begin{array}{l} j = 0, \pm 1, \dots \\ p = 0, 1, \dots \end{array} \right),$$

troviamo subito

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta} &= \frac{1}{2} \sum_p \sum_j A_j^{(p)}(a) X^p \cos j(q_1 + Y) = \\ &= \frac{1}{2} \sum_p \sum_j A_j^{(p)}(a) \{ \cos j q_1 X^p \cos j Y - \operatorname{sen} j q_1 X^p \operatorname{sen} j Y \}, \\ &\quad - \frac{1}{r} = - \frac{1}{a} \frac{1}{1 + X}, \\ &\quad - r \cos v = - a(1 + X)(\cos q_1 \cos Y - \operatorname{sen} q_1 \operatorname{sen} Y). \end{aligned}$$

<sup>(32)</sup> Circa le proprietà di queste funzioni  $A_j^{(0)}$ , cfr. F. TISSERAND, *Mécanique céleste*, tom. I. cap. XVII.

Si sa bene che, nelle espressioni di  $X^p \cos jY$ ,  $X^p \sin jY$ ,  $1/(1+X)$ , per  $e$  e  $\zeta$ , un termine generico è del tipo

$$ce^{m'} \frac{\cos}{\sin} m\zeta,$$

dove  $c$  è un coefficiente numerico,  $m' = |m| +$  un numero pari positivo (\*\*).  
Dacchè

$$H^{(1)} = \frac{\frac{1}{\Delta} - \frac{1}{r} - r \cos v}{a^{-3/2} - 1},$$

e, in virtù della (12') e della (7),

$$\frac{1}{a^{-3/2} - 1} = \frac{1}{E^{-3/2} - 1} + \eta^2 \mathfrak{D}_1(\eta^2) = \frac{h}{3} + \eta^2 \mathfrak{D}_1(\eta^2)$$

(con  $\mathfrak{D}_1$  serie di potenze), le sostituzioni (12'), (13), (14) in  $H^{(1)}$  potranno dar luogo a termini di terzo grado in  $x$ ,  $y$ , solo quando si eseguiscano sopra termini di primo o terzo grado, rispetto ad  $e$ , i quali vanno cercati nelle combinazioni

$$\begin{array}{ll} e \cos \zeta, & e \sin \zeta; \\ e^3 \cos \zeta, & e^3 \sin \zeta; \\ e^3 \cos 3\zeta, & e^3 \sin 3\zeta. \end{array}$$

Dai primi due gruppi, come appare dalle (13) e (14), possono bensì provenire termini di terzo grado in  $x$ ,  $y$ ; ma questi necessariamente contengono  $\eta^2 = x^2 + y^2$  a fattore, e il loro valor medio risulta identicamente nullo. (Per la stessa ragione, per cui s'è trovato  $[M] = 0$ .)

Rimangono i termini in  $e^3 \cos 3\zeta$ ,  $e^3 \sin 3\zeta$ . Vediamo come entrano in  $U$ , esaminando dapprima l'addendo  $1/r$ . Lo sviluppo di questa funzione, e così di  $(1/r)/(a^{-2/3} - 1)$ , contiene soltanto termini della forma: funzione di  $a \times e^{m'} \times \cos m\zeta$ .

Per  $m = 3$ , il cambiamento di variabili (12'), (13), (14) dà evidentemente luogo ad espressioni di valor medio nullo.

Lo stesso non avviene per gli altri due addendi di  $U$ ; ci è d'uopo analizzarne la struttura alquanto più addentro.

(\*\*) Ibidem, tom. I, n. 93.

Dagli *Annales de l'Observatoire de Paris*, Tom. I, 1855, pagg. 346-347, desumiamo che

$$\cos jY = \frac{5}{4} j^3 e^3 \cos 3\zeta + \dots,$$

$$\operatorname{sen} jY = \frac{26j + 8j^3}{24} e^3 \operatorname{sen} 3\zeta + \dots,$$

$$X \cos jY = -\frac{3 + 4j^2}{8} e^3 \cos 3\zeta + \dots,$$

$$X \operatorname{sen} jY = -\frac{9}{8} j e^3 \operatorname{sen} 3\zeta + \dots,$$

$$X^2 \cos jY = \frac{1}{2} e^3 \cos 3\zeta + \dots, \quad (j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots),$$

$$X^2 \operatorname{sen} jY = \frac{1}{2} j e^3 \operatorname{sen} 3\zeta + \dots,$$

$$X^3 \cos jY = -\frac{1}{4} e^3 \cos 3\zeta + \dots,$$

$$X^p \cos jY = \dots \dots \dots (p > 3),$$

$$X^p \operatorname{sen} jY = \dots \dots \dots (p > 2),$$

essendosi messi in evidenza soltanto i termini della forma  $e^3 \cos 3\zeta$ ,  $e^3 \operatorname{sen} 3\zeta$ .

Usufruento di queste formule, quelle, che esprimono  $1/\Delta$ ,  $-r \cos v$ , danno

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta} = & \frac{1}{2} e^3 \cos 3\zeta \sum_{-\infty}^{\infty} \cos jq_1 \left\{ \frac{5}{4} j^3 A_j^{(0)}(a) - \right. \\ & \left. - \frac{3 + 4j^2}{8} A_j^{(0)}(a) + \frac{1}{2} A_j^{(2)}(a) - \frac{1}{4} A_j^{(8)}(a) \right\} \\ - \frac{1}{2} e^3 \operatorname{sen} 3\zeta \sum_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sen} jq_1 & \left\{ \frac{26j + 8j^3}{24} A_j^{(0)}(a) - \right. \\ & \left. - \frac{9}{8} j A_j^{(1)}(a) + \frac{1}{2} j A_j^{(2)}(a) \right\} + \dots, \\ -r \cos v = & -\frac{3}{8} a e^3 \cos 3\zeta \cos q_1 + \frac{7}{24} a e^3 \operatorname{sen} 3\zeta \operatorname{sen} q_1 + \dots, \end{aligned}$$

i termini omessi non potendo recare contributo alcuno al nostro [N].

Dalle (12') e (14) segue che dobbiamo porre

$$(12'') \quad a = R,$$

$$(14') \quad \begin{cases} e^3 \cos 3\zeta = R^{-3/4} \{ (x^3 - 3xy^2) \cos (3+h)q_1 - \\ \quad \quad \quad - (3yx^2 - y^3) \operatorname{sen} (3+h)q_1 \}, \\ e^3 \operatorname{sen} 3\zeta = R^{-3/4} \{ (x^3 - 3xy^2) \operatorname{sen} (3+h)q_1 + \\ \quad \quad \quad + (3yx^2 - y^3) \cos (3+h)q_1 \}. \end{cases}$$

$[N]$  si presenta pertanto come il valore medio di  $(1/\Delta - r \cos v)/(a^{-3/2} - 1)$ , dove beninteso  $1/\Delta$ ,  $-r \cos v$  si riducono alla parte testè scritta, mentre  $a$ ,  $e^3 \cos 3\zeta$ ,  $e^3 \operatorname{sen} 3\zeta$  hanno i valori (12''), (14').

Dopo ciò troviamo immediatamente

$$\begin{aligned} [N] = & \frac{R^{-3/4}}{2(n-1)} \left\{ \left[ \frac{5}{4}s^2 - \frac{26s+8s^3}{24} \right] A_s^{(0)}(R) + \right. \\ & + \left. \left[ -\frac{3+4s^2}{8} + \frac{9}{8}s \right] A_s^{(1)}(R) + \left[ \frac{1}{2} - \frac{1}{2}s \right] A_s^{(2)}(R) - \frac{1}{4} A_s^{(3)}(R) + B_s \right\} (x^3 - 3xy^2), \end{aligned}$$

dove  $s$  sta per  $3+h$  e  $B_s$  è nullo, se  $s$  non è eguale a  $\pm 1$ , mentre

$$B_1 = \left( -\frac{3}{8} + \frac{7}{24} \right) R = -\frac{1}{12} R,$$

$$B_{-1} = \left( -\frac{3}{8} - \frac{7}{24} \right) R = -\frac{2}{3} R.$$

*Espressione di  $[\mathfrak{S}_3^{(1)}]$ .* - Ponendo per brevità

$$c_4 = \frac{5}{4}s^2 - \frac{26s+8s^3}{24}, \quad c_1 = -\frac{3+4s^2}{8} + \frac{9}{8}s,$$

$$c_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}s, \quad c^3 = -\frac{1}{4};$$

$$\Theta(R) = \frac{R^{-3/4}}{2(n-1)} \{ c_0 A_s^{(0)}(R) + c_1 A_s^{(1)}(R) + c_2 A_s^{(2)}(R) + c_3 A_s^{(3)}(R) + B_s \},$$

si ha in definitiva

$$[\mathfrak{S}_3^{(1)}] = \Theta(R) \cdot (x^3 - 3xy^2).$$

*Studio della funzione  $\Theta$ .* - Si tratta di dimostrare che la funzione  $\Theta$



di  $R$  non si annulla, quando  $R$  ha un valore del tipo

$$\left(1 + \frac{3}{h}\right)^{-2/3} = \left(\frac{s}{s-3}\right)^{-2/3},$$

dove  $s$  è, come  $h$ , un numero intero primo con 3, positivo o negativo. (Sono soltanto da escludersi i valori  $s = 1$ ,  $s = 2$ , corrispondenti a  $h = -1$ ,  $h = -2$ , per cui risulterebbe  $n = s/(s-3) < 0$ ).

Cominciamo coll'osservare che, per definizione,  $A_s^{(0)}(R)$  ( $s > 0$ ) è il coefficiente di  $\cos sv$  nello sviluppo in serie trigonometrica di  $1/\sqrt{1+R^2-2R \cos v}$ .

La identità

$$\frac{1}{\sqrt{1+R^2-2 \cos v}} = \frac{1}{R} \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{R}\right)^2-2 \frac{1}{R} \cos v}},$$

eguagliando i coefficienti di  $\cos sv$  nei due membri, porge

$$A_s^{(0)}(R) = \frac{1}{R} A_s^{(0)}\left(\frac{1}{R}\right),$$

o, ponendo per brevità

$$\frac{1}{R} = \varrho,$$

$$A_s^{(0)}(R) = \varrho A_s^{(0)}(\varrho),$$

con che i valori delle  $A_s^{(p)}(R)$ , per  $R > 1$ , sono espressi mediante quelli delle stesse funzioni, per valori dell'argomento minori dell'unità.

Si ha dalle (15) la formula ricorrente

$$\begin{aligned} A_s^{(p)}(R) &= \frac{R^p}{p!} \frac{d^p A_s^{(0)}}{dR^p} = \frac{R}{p} \frac{d}{dR} \left\{ \frac{R^{p-1}}{(p-1)!} \frac{d^{p-1} A_s^{(0)}}{dR^{p-1}} \right\} = \frac{p-1}{p} \frac{R^{p-1}}{(p-1)!} \frac{d^{p-1} A_s^{(0)}}{dR^{p-1}} \\ &= -\frac{1}{p} \left\{ \varrho \frac{d}{d\varrho} (A_s^{(p-1)}(R)) + (p-1) A_s^{(p-1)}(R) \right\}, \end{aligned}$$

che permette di esprimere ogni  $A_s^{(p)}(R)$  per funzioni dell'argomento  $\varrho$ , quando ciò si sappia fare per  $A_s^{(p-1)}(R)$ .

Ponendo in questa formula  $p = 1$ , abbiamo

$$A_s^{(1)}(R) = -\varrho \frac{d}{d\varrho} \{\varrho A_s^{(0)}(\varrho)\} = -\varrho \{A_s^{(1)}(\varrho) + A_s^{(0)}(\varrho)\};$$

in generale si trova

$$(16) \quad A_s^{(p)}(R) = (-1)^p \varrho \left\{ A_s^{(p)}(\varrho) + p A_s^{(p-1)}(\varrho) + \frac{p(p-1)}{2} A_s^{(p-2)}(\varrho) + \dots + A_s^{(0)}(\varrho) \right\},$$

come si può ovviamente verificare.

Per  $R < 1$ , la funzione  $A_s^{(0)}(R)$  ammette lo sviluppo convergente <sup>(34)</sup>

$$(17) \quad \frac{1}{2} A_s^{(0)}(R) = \frac{1 \cdot 3 \dots (2s-1)}{2 \cdot 4 \dots 2s} R_s \left\{ 1 + \frac{1}{2} \frac{2s+1}{2s+2} R^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{(2s+1)(2s+3)}{(2s+2)(2s+4)} R^4 + \dots \right\} \quad (s = 1, 2, \dots).$$

I coefficienti essendo tutti positivi,  $A_s^{(0)}(R)$  ha pure valore positivo, finchè  $R$  non supera l'unità; in causa delle (15), lo stesso ha luogo per ogni  $A_s^{(p)}(R)$ .

Ciò premesso, consideriamo i valori di  $s$ , per cui risulta

$$R = \left( \frac{s}{s-3} \right)^{-2/3} < 1.$$

Dovrà essere  $s$  positivo, e quindi (rimanendo esclusi i multipli di 3 e i valori 1 e 2) almeno eguale a 4.

I coefficienti  $c_0, c_1, c_2, c_3$  della precedente espressione di  $\Theta$  sono tutti negativi, per  $s \geq 4$ , quindi, essendo le  $A_s^{(p)}(R)$  positive,  $n > 1$  e  $B_s = 0$ , anche  $\Theta(R) < 0$ .

Supponiamo adesso  $R > 1$  e quindi  $s$  negativo.

Sostituendo in  $\Theta(R)$ , per le  $A_s^{(p)}(R)$  ( $p = 0, 1, 2, 3$ ), i valori (16),

<sup>(34)</sup> Cfr. F. TISSERAND, loc. cit., tom. I, pag. 272.

Si tratta della funzione ivi designata con  $b^{(i)}(x)$ . Ponendovi  $x = R$ ,  $i = s$ , si ha la (17).

otteniamo

$$\Theta(R) = \frac{\varrho^{7/4}}{2(n-1)} \left\{ c'_0 A_s^{(0)}(\varrho) + c'_1 A_s^{(1)}(\varrho) + c'_2 A_s^{(2)}(\varrho) + c'_3 A_s^{(3)}(\varrho) + \frac{1}{\varrho} B_s \right\},$$

dove si è posto

$$c'_0 = c_0 - c_1 + c_2 - c_3 = \frac{9}{8} - \frac{65}{24}s + \frac{7}{4}s^2 - \frac{1}{3}s^3,$$

$$c'_1 = -c_1 + 2c_2 - 3c_3 = \frac{17}{8} - \frac{17}{8}s + \frac{1}{2}s^2,$$

$$c'_2 = c_2 - 3c_3 = \frac{5}{4} - \frac{1}{2}s,$$

$$c'_3 = -c_3 = \frac{1}{4}.$$

Questi coefficienti sono tutti positivi, per  $s < 0$ ; positive sono pure, a tenore delle (15) e (17), le  $A_s^{(p)}(\varrho) = A_{-s}^{(p)}(\varrho)$ ;  $B_s$  è nullo, se  $s < -1$ . Anche ora dunque risulta  $\Theta(R)$  negativo, essendo  $n < 1$ .

Rimane il valore  $s = -1$ . Si ha

$$\varrho = \left( \frac{-1}{-4} \right)^{2/3} = 4^{-2/3},$$

donde

$$\frac{1}{\varrho^3} = 16;$$

$$c'_0 = \frac{71}{21}, \quad c'_1 = \frac{19}{4}, \quad c'_2 = \frac{7}{4}, \quad c'_3 = \frac{1}{4};$$

$$\frac{1}{\varrho} B_{-1} = -\frac{2}{3} \frac{1}{\varrho^3} \varrho = -\frac{32}{3} \varrho.$$

Con ciò la espressione di  $\Theta(R)$  diviene

$$\Theta(R) = \frac{\varrho^{7/4}}{2(n-1)} \left\{ \frac{71}{12} A_1^{(0)}(\varrho) + \frac{19}{4} A_1^{(1)}(\varrho) + \frac{7}{4} A_1^{(2)}(\varrho) + \frac{1}{4} A_1^{(3)}(\varrho) - \frac{32}{3} \varrho \right\}.$$

Si rileva dalla (17) che il coefficiente di  $\varrho$  in  $A_1^{(0)}(\varrho)$  è 1; in causa

della relazione

$$A_s^{(1)}(\varrho) = \varrho \frac{dA_s^{(0)}(\varrho)}{d\varrho},$$

è pure eguale all'unità il coefficiente di  $\varrho$  in  $A_s^{(1)}(\varrho)$ .

Ne deduciamo

$$\frac{71}{12} A_1^{(0)}(\varrho) + \frac{19}{4} A_1^{(1)}(\varrho) > \left( \frac{71}{12} + \frac{19}{4} \right) \varrho = \frac{32}{3} \varrho,$$

talchè la quantità in parentesi nell'espressione di  $\Theta(R)$  è maggiore di

$$\frac{7}{4} A_1^{(2)}(\varrho) + \frac{1}{4} A_1^{(3)}(\varrho),$$

e quindi positiva;  $\Theta(R)$  risulta, come sopra,  $< 0$ .

Riassumendo, possiamo concludere: La funzione  $\Theta(R)$  è costantemente negativa per valori dell'argomento della forma considerata.

*Padova, Ottobre 1900.*

## SOMMARIO

|  |         |
|--|---------|
| Introduzione . . . . .   | pag. 1  |
| <b>CAPITOLO I. — Nozione di stabilità per le trasformazioni puntuali.</b>  |         |
| § 1. Definizioni ed esempi . . . . .   | pag. 5  |
| § 2. Instabilità delle trasformazioni, che ammettono almeno un moltiplicatore di modulo diverso da uno . . . . . | » 11    |
| <b>CAPITOLO II. — Trasformazioni binarie a moltiplicatori eguali all'unità.</b>                                  |         |
| § 1. Tipi non contemplati nel precedente capitolo di trasformazioni a due variabili . . . . .                    | pag. 20 |
| § 2. Forma ridotta dal tipo (A). — Caratteri invariantivi. — Interpretazione proiettiva . . . . .                | » 22    |
| § 3. Instabilità del caso generale . . . . .   | » 25    |
| § 4. Proprietà delle trasformazioni (B). — Caso generale. — Instabilità . . . . .                                | » 35    |
| § 5. Considerazioni relative al caso d'eccezione. — Sottocasi possibili . . . . .                                | » 38    |

**CAPITOLO III. — La questione della stabilità delle soluzioni periodiche.**

|      |   |         |
|------|---|---------|
| § 1. | Posizione del problema dal punto di vista della precedente teoria   | pag. 42 |
| § 2. | Il teorema di LIAPOUNOFF. . . . .   | » 45    |
| § 3. | Sistemi di secondo ordine. — Caratteri di instabilità in due casi<br>particolari . . . . .                            | » 48    |
| § 4. | Casi riducibili all'uno o all'altro dei due anzidetti . . . . .   | » 50    |
| § 5. | Equazioni canoniche . . . . .   | » 54    |
| § 6. | Osservazione generale concernente la stabilità delle soluzioni<br>periodiche, che dipendono da un parametro . . . . . | » 59    |

**CAPITOLO IV. — Applicazione al problema dei tre corpi.**

|      |   |         |
|------|---|---------|
| § 1. | Equazioni del problema ristretto . . . . .                        | pag. 62 |
| § 2. | Soluzioni periodiche prossime ad un movimento circolare uniforme  | » 66    |
| § 3. | Instabilità di queste soluzioni . . . . .                         | » 68    |
| § 4. | Sviluppo del calcolo, su cui riposa la precedente dimostrazione . | » 74    |



## II.

# SULLA DETERMINAZIONE DI SOLUZIONI PARTICOLARI DI UN SISTEMA CANONICO QUANDO SE NE CONOSCE QUALCHE INTEGRALE O RELAZIONE INVARIANTE

### NOTA I

« Rend. Acc. Lincei », s. 5<sup>a</sup>, vol. X (1<sup>o</sup> sem. 1901),  
pp. 3-9 (\*).

Nel trattato di dinamica del sig. ROUTH <sup>(1)</sup> sono esposte alcune conseguenze della così detta *ignorazione di coordinate*.

Si suppone che la forza viva  $T$  di un sistema olonomo a legami indipendenti dal tempo, e così il potenziale  $U$  delle forze attive, non dipendano esplicitamente da alcune coordinate:  $x_1, x_2, \dots, x_m$ , p. es., essendo genericamente  $n$  il grado di libertà del sistema e  $x_1, x_2, \dots, x_m, x_{m+1}, \dots, x_n$  le sue coordinate lagrangiane. Le equazioni del moto ammettono allora gli  $m$  integrali lineari (rispetto alle componenti della velocità)

$$\frac{\partial T}{\partial x_r'} = \text{cost.} \quad (r = 1, 2, \dots, m),$$

e rimangono soddisfatte, attribuendo alle  $x_r'$  ( $r = 1, 2, \dots, m$ ) valori costanti arbitrari, e alle  $x_i$  ( $i = m + 1, \dots, n$ ) valori pure costanti, definiti dalle equazioni

$$\frac{\partial(T - U)}{\partial x_i} = 0 \quad (i = m + 1, \dots, n),$$

dove beninteso si sieno posti per le  $x_r'$  i valori scelti, e zero per le  $x_i'$ .

Si fa così corrispondere al sistema degli integrali  $\partial T / \partial x_r' = \text{cost.}$ , una classe  $\infty^{2m}$  di soluzioni particolari, assai notevoli, perchè rappre-

(\*) Presentata dal Corrispondente G. RICCI nella seduta del 6 gennaio 1901.

(<sup>1</sup>) Advanced Part, §§ 98-100.

sentano moti stazionari del sistema, per i quali la questione della stabilità si decide, come nel caso dell'equilibrio, mediante la semplice ispezione dell'integrale delle forze vive  $T - U = \text{cost.}$

Mostra infatti il sig. ROUTH come, eliminando le  $x'_r$  dalla espressione della forza viva, a mezzo degli integrali  $\partial T / \partial x'_r = u_r$ , questa assume la forma  $T + F$ , dove  $T$  è una forma quadratica nelle rimanenti  $x'$ , e  $F$  una funzione delle sole  $x$ .

Le equazioni del moto conservano la forma lagrangiana, non direttamente rispetto alla espressione ridotta  $T + F$  della forza viva, ma alla

$$T + F - \sum_1^m u_r x'_r$$

(dove pure sono da ritenersi eliminate le  $x'_r$  a mezzo degli integrali).

Comunque, per gli accennati moti stazionari, si annullano evidentemente tutte le derivate della funzione  $T + F - U$ , rapporto alle  $2(n - m)$  variabili  $x_i, x'_i$ . Ritenuto pertanto che le costanti  $u_r$  abbiano valori fissi, le condizioni *quantitative* perchè  $T + F - U$  ammetta un minimo risultano soddisfatte, ed è giustificato assumere la esistenza effettiva di questo minimo come criterio di stabilità — di fronte alla classe dei movimenti, per cui le  $u_r$  conservano gli stessi valori — appoggiandosi sopra il teorema di DIRICHLET. (Il teorema di LIAPOUNOFF mostrerebbe poi facilmente che in ogni altro caso c'è instabilità.)

L'interesse di queste considerazioni mi ha indotto a ricercare se esse non fossero per avventura estensibili ai casi, in cui un sistema dinamico ammette degli integrali primi di forma qualsiasi.

La generalizzazione si presenta spontanea quando le equazioni del moto si assumono sotto forma canonica. Si dimostra infatti (e ciò per qualsiasi sistema canonico) che, *ad ogni insieme di  $m$  relazioni invarianti (o in particolare integrali) in involuzione, corrisponde — purchè sia soddisfatta un'ovvia condizione di indipendenza, di cui a § 2 — una classe di  $\infty^m$  almeno (nel caso degli integrali  $\infty^{2m}$ ) soluzioni, la cui determinazione dipende dalla integrazione di un sistema d'ordine  $m - 1$ , al più.*

Complemento essenziale del teorema si è che *le soluzioni, cui si perviene in tal guisa, hanno sempre comportamento stazionario, ed è quindi applicabile il criterio energetico di stabilità.*

Data la grande scarsezza di movimenti stabili, nel senso rigoroso della parola <sup>(2)</sup>, giova prendere atto di ogni contributo alla loro determi-

(<sup>2</sup>) Si può anzi considerare questa assoluta stabilità come un carattere affatto eccezionale. La stabilità naturale va presa in un senso molto più lato. Cfr. in proposito la prefazione alla Memoria *Sopra alcuni criteri di instabilità*, presentemente in corso di stampa negli « Annali di matematica » (ser. III, t. V); [in questo vol.: I, pp. 1-85].



nazione effettiva. Rispetto all'attuale, mi si consenta di rilevare che esso abbraccia tutti gli esempi di moti stabili finora conosciuti.

### I. - Generalità.

Sia un sistema canonico

$$(C) \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_i}, \quad \frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

la cui funzione caratteristica  $H$  non dipende  $t$ .

Siano poi

$$(A) \quad F_r(p_1, p_2, \dots, p_n; x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \quad (r=1, 2, \dots, m),$$

$m$  relazioni invarianti di fronte al sistema (C), pure indipendenti da  $t$ , risolubili rispetto ad altrettante  $p$ , ed in involuzione tra di loro.

In forma risolta le rappresenterò con

$$(A_1) \quad p_r = f_r(p_{m+1}, \dots, p_n; x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (r=1, 2, \dots, m).$$

Se  $H$  è ciò che diviene  $H$ , quando  $p_1, p_2, \dots, p_m$  si sostituiscono coi loro valori  $(A_1)$  e si pone

$$(B) \quad \frac{\partial H}{\partial p_i} = 0, \quad \frac{\partial H}{\partial x_i} = 0 \quad (i = m + 1, \dots, n),$$

anche il sistema complessivo delle (A) e delle (B) è invariante rispetto a (C).

Per dimostrarlo, cominciamo col tradurre in formule le nostre ipotesi. Esse sono:

1) Le relazioni (A), o, ciò che è lo stesso, le  $(A_1)$  costituiscono un sistema invariante. Questo vuol dire che, derivando le  $(A_1)$  rispetto a  $t$ , e tenendo conto delle (C) e delle stesse  $(A_1)$ , risultano altrettante identità.

Sarà dunque da ritenersi

$$-\frac{\partial H}{\partial x_r} = \frac{df_r}{dt} = -\sum_{m+1}^n \frac{\partial f_r}{\partial p_s} \frac{\partial H}{\partial x_s} + \sum_1^m \frac{\partial f_r}{\partial x_s} \frac{\partial H}{\partial p_s},$$

in quanto, eseguite le derivazioni, si sostituisca, per ogni  $p_s$  ( $s = 1, 2, \dots, m$ ) la corrispondente  $f_s$ .

Convenendo, per brevità, di porre, per due generiche funzioni  $V, W$ ,

$$\{V, W\} = \sum_{m+1}^n \left( \frac{\partial V}{\partial p_s} \frac{\partial W}{\partial x_s} - \frac{\partial V}{\partial x_s} \frac{\partial W}{\partial p_s} \right),$$

potremo scrivere

$$(1) \quad \frac{\partial H}{\partial x_r} + \{H, f_r\} + \sum_1^m \frac{\partial H}{\partial p_s} \frac{\partial f_r}{\partial x_s} = 0 \quad (r = 1, 2, \dots, m).$$

2) Le relazioni (A), e per conseguenza le (A<sub>1</sub>), sono involutorie. Avuto riguardo alla notazione testè introdotta, queste condizioni si esprimono con

$$(2) \quad \frac{\partial f_r}{\partial x_s} - \frac{\partial f_s}{\partial x_r} + \{f_r, f_s\} \equiv 0 \quad (r, s = 1, 2, \dots, m).$$

Ho adoperato il simbolo  $\equiv$  per mettere in evidenza che l'eguaglianza sta identicamente rispetto a tutte le lettere che compariscono nel primo membro. Non c'è infatti alcuna  $p_s$  ( $s = 1, 2, \dots, m$ ) che si debba intendere eliminata a mezzo delle (A<sub>1</sub>).

3)  $H$  proviene da  $H$ , ponendovi  $p_s = f_s$ . Ne conseguono le eguaglianze

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial H}{\partial p_i} = \frac{\partial H}{\partial p_i} - \sum_1^m \frac{\partial H}{\partial p_s} \frac{\partial f_s}{\partial p_i}, \\ \frac{\partial H}{\partial x_i} = \frac{\partial H}{\partial x_i} - \sum_1^m \frac{\partial H}{\partial p_s} \frac{\partial f_s}{\partial x_i}, \end{array} \right. \quad (i = m + 1, \dots, n),$$

$$(4) \quad \frac{\partial H}{\partial x_r} = \frac{\partial H}{\partial x_r} - \sum_1^m \frac{\partial H}{\partial p_s} \frac{\partial f_s}{\partial x_r} \quad (r = 1, 2, \dots, m).$$

Dalle (3) risulta subito

$$\{H, f_r\} = \{H, f_r\} + \sum_1^m \frac{\partial H}{\partial p_s} \{f_r, f_s\},$$

che, sommate membro a membro colle (4), danno

$$\frac{\partial H}{\partial x_r} + \{H, f_r\} = \frac{\partial H}{\partial x_r} + \{H, f_r\} + \sum_1^m \frac{\partial H}{\partial p_s} \left[ -\frac{\partial f_s}{\partial x_r} + \{f_r, f_s\} \right].$$

Portando nelle (1) questo valore di  $\frac{\partial H}{\partial x_r} + \{H, f_r\}$  e avendo riguardo alle (2), si ottiene

$$(5) \quad \frac{\partial H}{\partial x_r} + \{H, f_r\} \equiv 0 \quad (r = 1, 2, \dots, m),$$

in cui, come già nelle (2), è lecito adoperare il segno di identità, perchè mancano le  $p_s$ .

Ciò posto, si tratta di verificare che  $(d/dt)(\partial\mathbf{H}/\partial p_i)$ ,  $(d/dt)(\partial\mathbf{H}/\partial x_i)$  risultano effettivamente nulle, in virtù delle (A), (B), (1), ..., (5).

Si ha in primo luogo

$$(6) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial p_i} = \left\{ \mathbf{H}, \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial p_i} \right\} + \sum_1^m \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial p_i \partial x_r} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial p_r}, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial x_i} = \left\{ \mathbf{H}, \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial x_i} \right\} + \sum_1^m \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial x_i \partial x_r} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial p_r}, \end{cases}$$

$$(i = m + 1, \dots, n);$$

mentre la derivazione delle (5), rapporto ad una generica  $p_i$  ed  $x_i$ , porge

$$(7) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial p_i \partial x_r} + \left\{ \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial p_i}, f_r \right\} + \left\{ \mathbf{H}, \frac{\partial f_r}{\partial p_i} \right\} = 0, \\ \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial x_i \partial x_r} + \left\{ \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial x_i}, f_r \right\} + \left\{ \mathbf{H}, \frac{\partial f_r}{\partial x_i} \right\} = 0, \end{cases}$$

$$(r = 1, 2, \dots, m; i = m + 1, \dots, n).$$

Col tener conto delle (B), le (3) si riducono a

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial p_i} = - \sum_1^m \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial p_r} \frac{\partial f_r}{\partial p_i},$$

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial x_i} = - \sum_1^m \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial p_r} \frac{\partial f_r}{\partial x_i},$$

e, usufruendo di queste espressioni, le  $(d/dt)(\partial\mathbf{H}/\partial p_i)$ ,  $(d/dt)(\partial\mathbf{H}/\partial x_i)$  assumono l'aspetto

$$(6') \quad \begin{cases} \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial p_i} = \sum_1^m \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial p_r} \left[ \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial p_i \partial x_r} + \left\{ \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial p_i}, f_r \right\} \right], \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial x_i} = \sum_1^m \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial p_r} \left[ \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial x_i \partial x_r} + \left\{ \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial x_i}, f_r \right\} \right], \end{cases}$$

$$(i = m + 1, \dots, n).$$

Per le stesse (B), le  $\{\mathbf{H}, \partial f_r / \partial p_i\}$ ,  $\{\mathbf{H}, \partial f_r / \partial x_i\}$  si annullano, talchè le

precedenti equazioni (7) divengono

$$(7') \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial x_r} + \left\{ \frac{\partial H}{\partial p_i}, f_r \right\} = 0, \\ \frac{\partial^2 H}{\partial x_i \partial x_r} + \left\{ \frac{\partial H}{\partial x_i}, f_r \right\} = 0, \end{cases}$$

Sono dunque nulli i secondi membri delle (6').

*c.d.d.*

*Osservazione.* — Nel teorema è evidentemente implicita la condizione che le equazioni (B) sieno compatibili, cioè che esistano effettivamente dei valori  $x_i^{(0)}$ ,  $p_i^{(0)}$  delle  $x$ ,  $p$ , per cui esse riescono soddisfatte (\*). E per verità il passaggio formale dalle (6) e (7) alle (6') e (7') — in che riposa la dimostrazione del teorema — è lecito, solo in quanto, esistendo soluzioni  $x_i^{(0)}$ ,  $p_i^{(0)}$ , si possa riferirsi a uno di questi sistemi di valori. È poi bene inteso che le funzioni tutte, qui considerate, si suppongono regolari, almeno in un certo intorno degli accennati valori  $x_i^{(0)}$ ,  $p_i^{(0)}$ .

## 2. - Soluzioni particolari.

La proposizione, or ora dimostrata, permette di trovare con molta facilità alcune soluzioni particolari del proposto sistema (C).

Supponiamo le (B) tutte indipendenti e risolubili rispetto alle  $p_{m+1}, \dots, p_n; x_{m+1}, \dots, x_n$  (ciò, che implica tra altro che le (A) sieno distinte da  $H = \text{cost.}$ , nel qual caso la  $H$  si riduce ad una costante e le (B) ad altrettante identità). Dalle (B) ed (A) potremo ricavare le  $2n - m$  variabili  $p, x_{m+1}, \dots, x_n$ , in funzione delle rimanenti  $m, x_1, x_2, \dots, x_m$ .

Per il carattere invariante delle (A) e (B), facendo queste sostituzioni nel sistema differenziale (C), devono rimanere in tutto  $m$  equazioni indipendenti (quelle, che esprimono  $dx_1/dt, dx_2/dt, \dots, dx_m/dt$  in funzione delle stesse  $x$ ), le altre risultando identicamente soddisfatte. Ogni soluzione di questo sistema ridotto (C<sub>1</sub>) fornisce senz'altro una soluzione di (C). Basta aggiungergli le rimanenti variabili, definite dalle (A), (B).

Rispetto all'integrazione di (C<sub>1</sub>), si osserverà che essa è al più una operazione d'ordine  $m - 1$ , poichè il sistema ammette l'integrale  $H = \text{cost.}$  [o più precisamente quello, che se ne ottiene, esprimendo la  $H$  per le sole  $x_1, x_2, \dots, x_m$ , a mezzo delle (A) e (B)]. Altre semplificazioni inter-

(\*) Ciò accadrà in generale, poichè si tratta di  $2(n - m)$  equazioni tra  $2(n - m) + m$  variabili. Quando poi le (B) ammettono soluzioni comuni, lo stesso può dirsi senz'altro del sistema complessivo (A<sub>1</sub>), (B), poichè le (A<sub>1</sub>) si presentano risolte rispetto a variabili, che non entrano nelle (B).

vengono quando si conoscono integrali del sistema primitivo (C), indipendenti dalle (A) e (B); per ogni integrale, si abbassa ovviamente di una unità l'ordine del sistema da integrare.

Integrandolo, si hanno, come s'è detto,  $\infty^m$  soluzioni  $\Sigma$  del sistema canonico (C). Quando in particolare le (A) sono, tutte o in parte, veri integrali (anzichè essere semplici relazioni invarianti) e quindi le  $F$  corrispondenti contengono una costante additiva, la classe delle  $\Sigma$  dipende da un numero maggiore di costanti arbitrarie: se ne hanno dunque  $2m$ , allorchè ognuna delle (A) è un integrale.

Ma non giova insistere su queste generalità.

Riservo ad una prossima comunicazione lo studio di una importante proprietà (4), comune a tutte le soluzioni che scaturiscono dall'indicato procedimento.

---

(4) Si è appunto in vista di ciò che ho supposto le (B) risolubili rapporto alle  $p_i, x_i$  ( $i = m + 1, \dots, n$ ). Le osservazioni precedenti — con le debite modificazioni — rimangono applicabili anche prescindendo da questa ipotesi.

NOTA II

« Rend. Acc. Lincei », s. 5<sup>a</sup>, vol. X (1° sem. 1901),  
pp. 35-41 (\*).

3. - Comportamento stazionario delle soluzioni  $\Sigma$ .

Per maggior comodo, userò d'ora innanzi linguaggio dinamico, interpretando le (C) come equazioni del moto di un sistema, la cui energia totale sia rappresentata dalla funzione  $H$ .

Mi propongo di stabilire che le soluzioni  $\Sigma$  corrispondono a moti stazionari del sistema.

Per dimostrarlo, prenderò le mosse dalla circostanza che le  $m$  funzioni

$$P_r = p_r - f_r \quad (r = 1, 2, \dots, m)$$

sono in involuzione, talchè ne esistono altre  $n - m$  indipendenti  $P_i = F_i$  ( $i = m + 1, \dots, n$ ), che costituiscono assieme ad esse un'ennupla involutoria (\*). Esiste allora eziandio una funzione  $S$  dei  $2n$  argomenti  $x$  e  $P$ , tale che le equazioni

$$(8) \quad p_k = \frac{\partial S}{\partial x_k} \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

definiscono precisamente le  $n$  funzioni  $P_r = p_r - f_r$ ,  $P_i = F_i$  delle  $x$  e delle  $p$  (\*).

Ponendo poi

$$(9) \quad X_k = \frac{\partial S}{\partial P_k} \quad (k = 1, 2, \dots, n),$$

(\*) Presentata dal Corrispondente G. RICCI nella seduta del 20 gennaio 1901.

(\*) Cfr. per es. GOURSAT, *Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre*, § 61.

(\*) Ibidem, § 111; od anche LIE-ENGEL, *Theorie der Transformationsgruppen*, B. II, pag. 123.

La funzione, qui chiamata  $S$ , corrisponde alla  $\Omega + \sum_{k=1}^n P_k X_k$  dei citati autori.

si ha nelle (8), (9) una trasformazione fra le due coppie di serie di variabili  $x, p; X, P$ , che, per una nota proposizione di JACOBI, conserva i sistemi canonici.

Le (C) si cambiano pertanto in

$$(C') \quad \frac{dP_i}{dt} = -\frac{\partial H'}{\partial X_i}, \quad \frac{dX_i}{dt} = \frac{\partial H'}{\partial P_i},$$

designandosi per maggior chiarezza con  $H'$  la espressione di  $H$  nelle nuove variabili  $X, P$ .

Le (A<sub>1</sub>) assumono la forma più semplice

$$(A'_1) \quad P_r = 0 \quad (r = 1, 2, \dots, m)$$

Riferendoci ormai a queste variabili  $X, P$ , poniamo, secondo il procedimento indicato a § 1,  $P_r = 0$  in  $H'$ , e poi, detto  $H'$  il risultato di questa sostituzione,

$$(B') \quad \frac{\partial H'}{\partial P_i} = 0, \quad \frac{\partial H'}{\partial X_i} = 0 \quad (i = m + 1, \dots, n).$$

Le (5), applicate al caso presente, ci dicono che  $H'$  è indipendente da  $X_1, X_2, \dots, X_m$ . Ne viene che le funzioni  $X_i, P_i$  ( $i = m + 1, \dots, n$ ), definite dalle (B') (\*), si riducono a pure costanti.

Ciò posto, ricordiamo che, secondo il sig. ROUTH, un determinato movimento si dice stazionario o permanente, quando è possibile scegliere delle variabili  $X, P$  in modo che (essendo, rispetto a queste variabili,

$$P_i = \varphi_i(t), \quad X_i = \psi_i(t) \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

le equazioni che definiscono il movimento) la espressione della energia  $H'$  rimane indipendente da  $t$ , in seguito alla trasformazione lineare

$$(10) \quad P_i = \varphi_i(t) + \pi_i, \quad X_i = \psi_i(t) + \xi_i \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

(\*) Le (B') sono effettivamente atte a definire le  $X_i, P_i$ , poichè non è nullo il determinante funzionale dei loro primi membri rapporto a queste variabili. Qualora infatti ciò fosse, lo stesso dovrebbe accadere per il determinante funzionale dei primi membri delle (B) rapporto alle  $p_i, x_i$  (come segue immediatamente dal teorema di moltiplicazione dei determinanti, tenendo conto delle (B') e delle  $\partial H'/\partial X_i \equiv 0, \dots, \partial H'/\partial X_m \equiv 0$ ). Ora, in principio del § 2, noi abbiamo precisamente introdotta l'ipotesi che il detto determinante sia diverso da zero, supponendo le (B) risolvibili rapporto alle  $p_i, x_i$  ( $i = m + 1, \dots, n$ ).

Supponendo di circoscrivere la classe dei movimenti del dato sistema, col considerare soltanto quelli che soddisfanno alle relazioni invarianti  $(A'_1)$ , vien naturale di estendere la definizione di *stazionarietà*, al modo stesso che ciò si suol fare per la *stabilità*. *Stazionari in senso relativo sono dunque a dirsi quei movimenti, per cui la condizione, testè dichiarata, rimane soddisfatta, in virtù delle relazioni invarianti.*

Data la forma speciale delle  $(A'_1)$ , la caratteristica della stazionarietà relativa si può manifestamente enunciare come segue:

La funzione  $H'$  deve conservarsi indipendente da  $t$ , anche dopo la sostituzione

$$(11) \quad \begin{cases} P_i = \varphi_i(t) + \pi_i & (i = m + 1, \dots, n) \\ X_i = \psi_i(t) + \xi_i & (i = 1, 2, \dots, n) \end{cases}$$

È chiaro adesso che le nostre soluzioni  $\Sigma$  corrispondono tutte a moti permanenti.

Infatti, adottando le variabili  $X$  e  $P$ , le funzioni  $\varphi_i(t)$ ,  $\psi_i(t)$  ( $i = m + 1, \dots, n$ ) sono, per ogni  $\Sigma$ , delle costanti  $\alpha_i$ ,  $\beta_i$ , come abbiám visto. Da  $t$  dipenderanno in generale  $X_1, X_2, \dots, X_m$ , le quali però non entrano in  $H'$ . Eseguire la sostituzione (11) in  $H'$  equivale dunque a scambiarsi  $P_i, X_i$  ( $i = m + 1, \dots, n$ ) in  $\alpha_i + \pi_i, \beta_i + \xi_i$ , operazione che evidentemente non introduce  $t$ .

Merita di essere notato che, quando le (A) sono veri e propri integrali, vi ha stazionarietà, anche in senso assoluto.

Infatti, in questo caso, le funzioni  $F_r + \text{cost.}$  sono in involuzione (mentre in generale si può soltanto asserire che le parentesi  $(F_r, F_s)$  si annullano, *tenendo conto delle*  $(A_1)$ ); e tutte le considerazioni, istituite finora, stanno, anche prendendo inizialmente  $P_r = F_r + \pi_r$  (dove le  $\pi_r$  sono costanti indeterminate), anzichè  $P_r = p_r - f_r$ . L'unica differenza consisterà in questo che si avranno, al posto delle  $(A'_1)$ , le

$$(A') \quad P_r = \pi_r \quad (r = 1, 2, \dots, m).$$

e, al posto di

$$H' = (H')_{P_1 = \dots = P_m = 0},$$

una

$$\bar{H}' = (H')_{P_1 = \pi_1, \dots, P_m = \pi_m}.$$

Del resto, potremo, come sopra, asserire che, per una qualunque soluzione  $\Sigma$ , la sostituzione (11) non introduce il tempo in  $H'$ . Ora ciò equivale



a dire che la sostituzione (10), corrispondente ad una  $\Sigma$  (e per cui quindi si ha  $\varphi_1(t) = \varphi_2(t) = \dots = \varphi_m(t) = 0$ ) non introduce  $t$  in  $H'$ .

Di qua si conclude la assoluta stazionarietà di tutti i movimenti, definiti dalle  $\Sigma$ .

#### 4. - Criterio energetico di stabilità.

Consideriamo, come sopra, la categoria dei movimenti del proposto sistema conciliabili colle (A'). Le equazioni, che definiscono  $P_i$ ,  $X_i$  ( $i = m + 1, \dots, n$ ) in termini del tempo, si otterranno senz'altro dalle (C'), ponendo nei secondi membri  $P_1 = P_2 = \dots = P_m = 0$ . Avremo così le equazioni

$$\frac{dP_i}{dt} = -\frac{\partial H'}{\partial X_i}, \quad \frac{dX_i}{dt} = \frac{\partial H'}{\partial P_i} \quad (i = m + 1, \dots, n).$$

Per i teoremi ben noti di DIRICHLET e di LIAPOUNOFF, la soluzione particolare  $P_i = \alpha_i$ ,  $X_i = \beta_i$  di queste equazioni è stabile allora e solo allora che la funzione  $H'$  possiede, per i detti valori  $\alpha_i$ ,  $\beta_i$ , un minimo effettivo; ossia allora e solo allora che la forma quadratica  $d^2H'$  è definita. Ecco dunque la condizione necessaria e sufficiente per la stabilità *relativa* di una generica  $\Sigma$ . Tale condizione presenta però l'inconveniente di essere espressa in variabili  $X$ ,  $P$ . È affatto indifferente adottare queste o quelle variabili, per dimostrare delle proprietà; anzi è preferibile riferirsi a quelle, per cui la dimostrazione si fa nel modo più semplice. Ma, se si devono fare dei calcoli, le trasformazioni disturbano; ed è indispensabile di evitarle, quando, come nel caso presente, si tratta di un cambiamento di variabili, la cui effettiva determinazione dipende da una questione eventualmente più elevata di quella che si studia.

Per la costruzione delle soluzioni  $\Sigma$  abbiamo una regola generale, che si applica a qualsiasi sistema di variabili (e che richiede al più una operazione differenziale d'ordine  $m - 1$ ). Anche la questione della stabilità deve potersi decidere senza la trasformazione (8), (9) (che implica in generale  $n - m$  operazioni successive degli ordini  $2(n - m)$ ,  $2(n - m - 1)$ , ...,  $2$ , rispettivamente).

Osserviamo a tale scopo che, sostituendo in  $H'$  le  $P_i$ ,  $X_i$  ( $i = m + 1, \dots, n$ ) coi loro valori (8), (9), e ritenendo in questi le  $p_1, p_2, \dots, p_m$  definite dalle (A<sub>1</sub>), si deve ritrovare la funzione  $H$ . Si avrà dunque

$$d^2H = d^2H',$$

e le derivate seconde di  $H$  si esprimeranno in funzione delle derivate seconde di  $H'$  mediante formule che (per essere nulle tutte le derivate prime di  $H'$ , per i valori considerati  $P_i = \alpha_i$ ,  $X_i = \beta_i$ ) hanno carattere covariante. Ne viene che la forma quadratica  $d^2H$  (nelle  $2(n-m) + m$  variabili  $dp_{m+1}, \dots, dp_m; dx_1, dx_2, \dots, dx_n$ ) è riducibile, poichè appunto con una opportuna trasformazione lineare (i cui coefficienti saranno in generale funzioni di  $x_1, x_2, \dots, x_m$ ) si cambia in  $d^2H'$ .

Constatata così la riducibilità della forma  $d^2H$  (\*), supponiamo (il che non implica integrazioni, ma solo un'opportuna sostituzione lineare) di trasformarla effettivamente in una forma quadratica  $Q$  a  $2(n-m)$  argomenti. Questa  $Q$  sarà equivalente a  $d^2H'$  e quindi il criterio di stabilità si potrà direttamente desumere dalla forma  $Q$ . Concludiamo pertanto: *Le  $\Sigma$  sono stabili allora e solo allora che  $Q$  (forma ridotta di  $d^2H$ ) è una quadrica definita.*

### 5. - Esempi.

a) Consideriamo il moto di un corpo rigido pesante, fissato per un punto  $\Omega$ . Nel caso generale, quando cioè i tre momenti principali di inerzia, relativi ad  $\Omega$ , sono distinti e il baricentro  $O$  comunque situato nel corpo, si ha il solo integrale delle aree per i piani orizzontali

$$G_3 = \text{cost.}$$

Da questo integrale si traggono, nel modo suesposto,  $\infty^2$  moti stazionari. Un calcolo semplicissimo mostra che corrispondono alle rotazioni uniformi del corpo attorno alla verticale di  $\Omega$ , che coincide nel corpo con una (\*) delle sei direzioni definite, per ogni valore della velocità angolare  $\omega$ , dalle equazioni  $-(B-C)\omega^2\gamma_2\gamma_3 = P(y_0\gamma_3 - z_0\gamma_2)$ ,  $-(C-A)\omega^2\gamma_3\gamma_1 =$

(\*) Ciò si poteva del resto desumere direttamente dalle (5). Derivandole e tenendo conto delle (B), si hanno le (7') e le

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x_r \partial x_s} + \left\{ \frac{\partial H}{\partial x_s}, I_r \right\} = 0 \quad (r, s = 1, 2, \dots, m).$$

Date queste relazioni lineari ed omogenee fra i coefficienti della forma  $d^2H$ , la caratteristica del suo discriminante non può superare  $2(n-m)$ .

(\*) Queste sei direzioni sono tutte reali, per valori abbastanza grandi di  $\omega$ . In ogni caso due almeno sono reali. Esse appartengono tutte al cono quadrico  $(B-C)x_0\gamma_2\gamma_3 + (C-A)y_0\gamma_3\gamma_1 + (A-B)z_0\gamma_1\gamma_2 = 0$ . Cfr. in proposito: STAUDE, *Ueber permanente Rotationsaxen*, « Crelle's Journal », B. 113, 1894.

$= P(z_0\gamma_1 - x_0\gamma_3), - (A - B)\omega^2\gamma_1\gamma_2 = P(x_0\gamma_2 - y_0\gamma_1)$ , in cui è manifesto il significato delle lettere.

Per il caso di LAGRANGE e POISSON (ellissoide di inerzia di rivoluzione attorno alla  $\Omega O$ ), c'è un secondo integrale ( $r = \text{cost.}$ , colle notazioni abituali) in involuzione col primo. Dobbiamo dunque aspettarci  $\infty^4$  moti permanenti. Ed infatti siamo condotti alle così dette *precessioni regolari*, troppo bene studiate <sup>(10)</sup>, perchè valga la pena di soffermarvisi un solo istante.

Se si suppone che non agiscano forze (o più generalmente che sia nullo il loro momento risultante rispetto ad  $\Omega$ ), si hanno i tre integrali delle aree

$$G_1 = \text{cost.}, \quad G_2 = \text{cost.}, \quad G_3 = \text{cost.}.$$

Essi non sono in involuzione, come è ben noto, ma ognuna delle tre coppie

$$G_1 = \text{cost.}, \quad G_1^2 + G_2^2 + G_3^2 = \text{cost.};$$

$$G_2 = \text{cost.}, \quad G_1^2 + G_2^2 + G_3^2 = \text{cost.};$$

$$G_3 = \text{cost.}, \quad G_1^2 + G_2^2 + G_3^2 = \text{cost.}$$

è involutoria, e le devono far riscontro  $\infty^4$  moti stazionari. Queste tre classi di movimenti non sono altro che le rotazioni attorno ai tre assi di inerzia. La verifica diretta non presenterebbe alcuna difficoltà. Limitiamoci ad osservare che le accennate rotazioni dipendono bene da 4 costanti; due per fissare la posizione nello spazio dell'asse di inerzia, attorno a cui la rotazione si compie, e le altre due per fissare la posizione e la velocità iniziale del corpo rispetto allo stesso asse.

b) Nel problema piano dei tre corpi, supposto fisso il baricentro, le equazioni, che definiscono il moto relativo di due di essi,  $P_1$  e  $P_2$ , rispetto al terzo,  $P_3$ , si possono presentare in forma canonica con quattro gradi di libertà, le due serie di variabili coniugate essendo costituite dalle coordinate relative  $x_i, y_i$  ( $i = 1, 2$ ) di  $P_1$  e  $P_2$  (rispetto a  $P_3$ ) e dalle componenti  $p_i, q_i$  ( $i = 1, 2$ ) delle loro quantità di moto assolute <sup>(11)</sup>.

<sup>(10)</sup> Cfr. in particolare la *Theorie des Kreisels* dei sigg. KLEIN e SOMMERFELD; cap. I, § 6; III, § 6.

<sup>(11)</sup> Cfr. POINCARÉ, *Sur une forme nouvelle des équations du problème des trois corps*, « Acta Mathematica », t. 21, 1897.

Si ha l'integrale delle aree

$$\sum_1^2 (x_i q_i - y_i p_i) = \text{cost.}$$

Quali sono i movimenti stazionari che corrispondono a questo integrale?

Si trova un risultato ben noto, talchè stimo superfluo riportare il calcolo per disteso. I tre corpi costituiscono un triangolo equilatero di grandezza costante e ruotano uniformemente attorno al comune centro di gravità. È il caso più semplice delle soluzioni particolari scoperte da LAPLACE <sup>(12)</sup>.

c) Il moto di un solido non soggetto a forze, in un fluido incompressibile, indefinito, comporta, qualunque sia la forma del corpo e la distribuzione delle masse, i sei integrali fondamentali, che esprimono la conservazione del moto del baricentro e del momento risultante delle quantità di moto:

$$F_1 = \text{cost.}, \quad F_2 = \text{cost.}, \quad F_3 = \text{cost.};$$

$$G_1 = \text{cost.}, \quad G_2 = \text{cost.}, \quad G_3 = \text{cost.}$$

Le sei funzioni  $F_i, G_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) costituiscono un gruppo, il quale comprende un sottogruppo involutorio di quattro elementi al più, per es.

$$F_1, F_2, F_3, F_4 = \sum_1^3 F_i G_i.$$

Agli integrali

$$F_1 = \text{cost.}, \quad F_2 = \text{cost.}, \quad F_3 = \text{cost.}, \quad F_4 = \text{cost.},$$

dovrà pertanto far riscontro una classe  $\infty^8$  di moti permanenti del corpo.

Sono questi i moti elicoidali, studiati dal sig. CRAIG <sup>(13)</sup>, partendo dalle equazioni di KIRCHHOFF e proponendosi di assegnare la più generale soluzione, compatibile colla ipotesi che le caratteristiche  $u, v, w; p, q, r$  del moto rigido sieno tutte costanti. Lascio anche qui di trascrivere il calcolo, limitandomi ad avvertire che esso si fa in modo semplice e non privo di eleganza, se fin da principio si scelgono gli assi in modo opportuno. E precisamente, dacchè sono costanti la risultante e il momento risultante delle quantità di moto, giova far coincidere uno degli assi coordinati coll'asse centrale di questo sistema di vettori.

<sup>(12)</sup> *Mécanique céleste*, libro X, cap. VI.

<sup>(13)</sup> *The motion of a solid in a fluid*, « American Journal », vol. II, 1879.

### III.

## SUI MOTI STAZIONARI DEI SISTEMI OLONOMI

« Rend. Acc. Lincei », s. 5<sup>a</sup>, vol. X (1° sem. 1901),  
pp. 137-143 (\*).

La regola per la determinazione di moti stazionari dei sistemi olonomi (a legami indipendenti dal tempo e soggetti a forze conservative), che ho avuto l'onore di comunicare a codesta Accademia poche settimane or sono (<sup>1</sup>), è enunciata nella ipotesi che le variabili di riferimento sieno canoniche. La stessa regola vale però in generale, comunque si scelgano le variabili. È questo un risultato pressochè ovvio, che mi permetto tuttavia di formulare esplicitamente, perchè può far comodo nelle applicazioni particolari. Pensiamo per es. alla dinamica dei sistemi rigidi. Si sa bene quanto più perspicue riescono le formule, allorchè si usano direttamente le caratteristiche  $u, v, w; p, q, r$  e i coseni direttori. La osservazione accennata permette di profittarne anche per lo studio dei moti stazionari. Ne darò prossimamente un esempio, esaminando il caso trattato dalla signora KOVALEVSKY.

Prima di abbandonare il campo generale, mi sembra a proposito un po' di critica del concetto di stazionarietà.

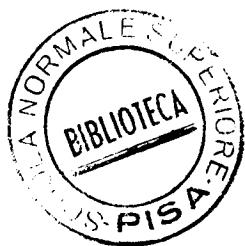
Se si piglia la definizione del sig. ROUTH (<sup>2</sup>) nel suo aspetto puramente formale, si arriva subito alla conclusione (§ 6) che qualsiasi soluzione particolare delle equazioni del moto si può riguardare come stazionaria, purchè soltanto si fissino le variabili in modo opportuno.

Dovremo inferirne che la nozione di stazionarietà è destituita di ogni fondamento reale? La intuizione fisica ce lo vieta assolutamente. Essa ci mostra che certe forme di movimento, per es. le traslazioni e rotazioni uniformi di un solido, hanno peculiari caratteri di semplicità e di rego-

(\*) Presentata dal Socio V. CERRUTI nella seduta del 3 marzo 1901.

(<sup>1</sup>) Sedute del 6 e 20 gennaio u. s. [in questo vol.: II, pp. 87-100].

(<sup>2</sup>) *Treatise on the dynamics of a system of rigid bodies*, « Advanced Part », § 111. Questa definizione trovasi riportata nella seconda delle Note citate, a pag. 95.



larità, che le distinguono in modo netto da altri moti, possibili nelle stesse condizioni. D'altra parte gli esempi tutti addotti dal sig. ROUTH (e così quelli della Nota precedente) fanno fede che, in certi casi almeno, la sua definizione discrimina veramente i moti stazionari (nel senso fisico della parola) da quelli che non lo sono. Quale è la circostanza, che interviene in tali casi ad assicurare la validità di un criterio per se stesso insignificante?

Questa semplicemente che gli integrali, o relazioni invarianti, (A), generatrici, per dir così, delle soluzioni stazionarie, senza essere soggette ad alcuna condizione quantitativa, sono però sempre *uniformi*, nel senso di POINCARÉ.

Cerchiamo di rendercene conto, richiamandoci al contenuto sperimentale del concetto di stazionarietà. Come ha rilevato il sig. ROUTH, la proprietà fisica che caratterizza il comportamento stazionario di un determinato movimento  $\Sigma$ , è la seguente:

Modificando egualmente le condizioni del moto in due istanti qualsivogliono  $t'$ ,  $t''$ , i moti perturbati che ne conseguono,  $\Sigma'$ ,  $\Sigma''$  diciamo, presentano tali relazioni da potersi, sotto un certo rapporto, considerare come equivalenti (\*).

Un tale enunciato si può in verità ricavare come conseguenza logica della semplice definizione formale, ma bisogna essenzialmente avvertire che le relazioni, di cui si tratta, hanno interesse solo allorché corrispondono a circostanze fisicamente afferrabili. Ora *una condizione analitica non uniforme* (nel senso predetto, e quindi  $\infty$ -forme) *non ha alcun valore fisico*, perchè, mentre essa dovrebbe vincolare i valori di un qualche parametro angolare (di un azimut per es.), non dà luogo invece ad alcuna restrizione apparente, in quanto viene soddisfatta da valori del parametro costituenti un insieme condensato rispetto a tutti i valori possibili.

*Sarà pertanto necessario che le relazioni fra due generici moti perturbati  $\Sigma'$ ,  $\Sigma''$ , le quali contraddistinguono la stazionarietà, sieno uniformi; e così dovrà intendersi completata la definizione del sig. ROUTH.*

Tra queste relazioni sono evidentemente comprese quelle espresse dalle (A) (dagli integrali cioè o equazioni invarianti generatrici della soluzione  $\Sigma$ , che si considera). D'altra parte, si potrebbe riconoscere senza difficoltà che le relazioni tutte fra  $\Sigma'$  e  $\Sigma''$  riescono uniformi, quando ciò avviene per le (A). La condizione che le (A) sieno uniformi è dunque insieme necessaria e sufficiente.

Ciò posto, possiamo domandarci quale sia la portata della regola

(\*) Nel caso tipico della ignorazione di talune coordinate, l'andamento dei due moti  $\Sigma'$ ,  $\Sigma''$  è identico, per quanto concerne le velocità tutte e le coordinate *patesi*. In istanti corrispondenti  $t' + t$ ,  $t'' + t$ , possono differire, dall'uno all'altro di essi, soltanto i valori delle coordinate *ignorate*.

costruttiva, di cui sopra. Meno grande di quello, che la sua generalità formale potrebbe lasciar supporre. Infatti, volendo conseguire moti assolutamente (\*) stazionari, bisognerà partire da integrali *uniformi*; e i problemi più importanti della meccanica posseggono i soli integrali classici, dotati di tale proprietà (\*\*).

Di qua si ricava per es. il seguente enunciato negativo: Il problema degli  $n$  corpi non comporta altre forme di moti assolutamente stazionari, oltre le soluzioni particolari di LAPLACE, in cui gli  $n$  corpi ruotano uniformemente, mantenendo una configurazione (piana o rettilinea) invariabile.

1. - Richiamerò, per maggior chiarezza, il procedimento esposto nella prima delle Note citate.

Sia  $H(p_1, p_2, \dots, p_n; x_1, x_2, \dots, x_n)$  la energia totale di un sistema olonomo, a legami indipendenti dal tempo e soggetto a forze conservative;  $p_i, x_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) designando variabili canoniche.

Siano

$$(A) \quad F_r = 0 \quad (r = 1, 2, \dots, m),$$

$m$  relazioni invarianti (ovvero integrali, nel qual caso le costanti si intendono incluse nelle  $F$ ) pel moto del sistema, indipendenti dal tempo, in involuzione, e risolubili rispetto ad altrettante  $p$ ;  $p_1, p_2, \dots, p_m$  per es.

Rappresentando con  $H$  ciò che diviene  $H$ , quando ogni  $p_s$  ( $s=1, 2, \dots, m$ ) si sostituisce col suo valore (A), per definire le soluzioni particolari  $\Sigma$  si deve porre

$$(B) \quad \frac{\partial H}{\partial p_i} = 0, \quad \frac{\partial H}{\partial x_i} = 0 \quad (i = m + 1, \dots, n);$$

e queste equazioni invarianti traggono le

$$\frac{\partial H}{\partial x_r} = 0 \quad (r = 1, 2, \dots, m)$$

come necessaria conseguenza.

Si ha pertanto, sopra ogni  $\Sigma$ ,  $dH = 0$ .

2. - Ciò posto, si immagini di sostituire alle variabili  $p, x$  un sistema qualunque di  $2n$  parametri  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{2n}$ , atti a definire lo stato di moto del sistema, almeno in un intorno  $\Gamma$  di un qualche insieme di valori  $p_i^{(0)}, x_i^{(0)}$

(\*) POINCARÉ, *Mécanique céleste*, t. I, cap. V.

(\*\*) Del pari, per moti stazionari in senso relativo, converrà ricorrere a relazioni invarianti pure uniformi.

delle  $p, x$ , soddisfacenti alle (A), (B). Intendendo di riferirsi a un tale intorno  $\Gamma$ , si potrà asserire:

1) Le (A), espresse per le  $\varepsilon$ , sono atte a definirne  $m, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_m$ , poniamo, in funzione delle rimanenti.

2) Tenendo conto delle (A), si ha una trasformazione biunivoca fra i due sistemi di  $2(n - m) + m$  variabili  $p_{m+1}, \dots, p_n; x_1, x_2, \dots, x_n$  e  $\varepsilon_{m+1}, \dots, \varepsilon_{2n}$ .

3) La funzione  $H^*$  ( $\varepsilon_{m+1}, \dots, \varepsilon_{2n}$ ), che si ottiene dalle energia totale  $H^*$  (espressa per le  $\varepsilon$ ), sostituendo  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_m$  coi valori definiti dalle (A), coincide con  $H$ , cioè ne differisce soltanto per la trasformazione suddetta.

Appare di qua che la equazione

$$(B^*) \quad dH^* = 0$$

equivale a  $dH = 0$ , ossia alle (B), e può quindi servire (assieme alle (A), espresse per le  $\varepsilon$ ) a caratterizzare le soluzioni particolari  $\Sigma$ , direttamente in variabili  $\varepsilon$ .

3. - Nella Nota del 20 gennaio ho mostrato come il criterio di stabilità delle  $\Sigma$  si desuma dalla forma quadratica  $d^2H$ . Essa è certamente riducibile ad una forma  $Q$  in  $2(n - m)$  argomenti: secondochè questa  $Q$  è o no definita, le  $\Sigma$  sono stabili od instabili. A vero dire, ho ivi considerato soltanto il caso generale, in cui le (B) si suppongono univocamente risolubili rispetto alle  $p_i, x_i$  ( $i = m + 1, \dots, n$ ), e quindi la forma  $Q$  non è ulteriormente riducibile. L'enunciato criterio di stabilità vale però in ogni caso (\*) (semprechè, bene inteso, le (B) sieno compatibili e si abbiano quindi effettivamente soluzioni  $\Sigma$ ). Lo si dimostra senza difficoltà, riprendendo per un momento le variabili  $P, X$ , adoperate in quella occasione, e la corrispondente espressione  $H'$  di  $H$ .

Infatti dire che le (B) (pur essendo compatibili) non sono risolubili rispetto alle  $p_i, x_i$  equivale a dire che le equazioni

$$(B') \quad \frac{\partial H'}{\partial P_i} = 0, \quad \frac{\partial H'}{\partial X_i} = 0 \quad (i = m + 1, \dots, n),$$

non sono indipendenti (pur ammettendo soluzioni comuni). Ne viene che il determinante funzionale delle (B') si annulla per i valori che verificano le equazioni stesse.

(\*) Rimangono soltanto escluse le soluzioni multiple, corrispondenti (con ovvio linguaggio geometrico) a punti non ordinari della varietà definita dalle (B). Per questi casi singolari, non basta evidentemente la forma  $d^2H$  a decidere la questione della stabilità, ma bisognerebbe ricorrere ai differenziali d'ordine superiore.



Ma questo determinante funzionale è il discriminante della forma  $d^2H'$ ; e il suo annullarsi esclude che la forma stessa sia definita. Le soluzioni  $\Sigma$  sono dunque tutte instabili.

Ora la quadrica  $d^2H$  equivale pur sempre alla  $d^2H'$ , e si potrà perciò in questo caso far dipendere da meno di  $2(n-m)$  argomenti. In altri termini le forme ridotte  $Q$  (a  $2(n-m)$  argomenti) della  $d^2H$  sono a lor volta riducibili e quindi non definite. c.d.d.

4. — Dalle ipotesi del § 2 segue immediatamente che la quadrica  $d^2H^*$  equivale alla  $d^2H$  (si passa dall'una all'altra mediante la trasformazione, di cui sub 2), estesa ai differenziali dei due sistemi di variabili). Ne viene che  $d^2H^*$  è riducibile e ogni sua ridotta  $Q^*$  (in  $2(n-m)$  argomenti) serve, al pari di  $Q$ , a decidere la questione della stabilità.

I coefficienti della forma  $d^2H^*$  dipenderanno in generale da alcune delle variabili  $\varepsilon_{m+1}, \dots, \varepsilon_{2n}$  (quelle — e ve ne ha  $m$  almeno — che non rimangono vincolate dalle (B\*)). Possiamo per altro star certi che i caratteri algebrici della forma  $d^2H^*$ , e quindi anche d'una sua ridotta  $Q^*$ , non dipendono dai valori particolari attribuiti a queste  $\varepsilon$ .

Due sono infatti i casi possibili: o le (B\*) si possono risolvere rispetto a  $2(n-m)$  delle  $\varepsilon$ ; o il numero delle (B\*) indipendenti è più piccolo di  $2(n-m)$ . Si vede subito, ritornando anche una volta alle variabili  $P, X$ , che ci troveremo nell'uno o nell'altro dei due casi, secondochè le (B') sono o meno indipendenti. Nella prima ipotesi, ogni  $Q^*$  equivale sempre, qualunque sieno i valori delle  $m\varepsilon$ , che possono apparire nei coefficienti, alla medesima quadrica  $d^2H'$ , a coefficienti costanti. Nella seconda ipotesi, ogni  $Q^*$  è riducibile, indipendentemente dai valori delle  $\varepsilon$ .

5. — Riassumendo, abbiamo la regola seguente:

*La costruzione delle soluzioni particolari  $\Sigma$  si può effettuare direttamente, rispetto a qualsivogliano parametri  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{2n}$ , atti a definire lo stato di moto del sistema.*

*Si eliminano dapprima, a mezzo degli  $m$  integrali o relazioni invarianti conosciute (supposte, bene inteso, in involuzione), altrettante variabili  $\varepsilon$  dalla espressione della energia totale  $H^*$ .*

*Detto poi  $H^*$  il risultato della eliminazione, si pone*

$$(B^*) \quad dH^* = 0,$$

*il che porta altre relazioni invarianti (in numero di  $2(n-m)$  al più) tra le  $\varepsilon$ .*

*Tenendo conto di tutte queste relazioni, si riducono le equazioni del movimento, e si completa, in base ad esse, la determinazione delle  $\Sigma$ .*

*Non è però necessaria alcuna integrazione per decidere se le  $\Sigma$  stesse*

sono o non sono stabili. Basta ricorrere alla forma  $d^2H^*$ , intendendo nei coefficienti le  $\varepsilon$  legate dalle (B\*), e attribuendo a quelle, che restano indipendenti, valori numerici arbitrari. Questa forma è certamente riducibile ad una  $Q^*$  con  $2(n - m)$  argomenti al più. L'essere, o meno,  $Q^*$  forma definita, in  $2(n - m)$  argomenti, non dipende dai valori attribuiti alle  $\varepsilon$ , e costituisce appunto il criterio di stabilità, o rispettivamente di instabilità, per le soluzioni  $\Sigma$ .

6. - È sempre lecito, immaginando scelte le variabili in modo opportuno, di supporre che una assegnata soluzione particolare  $\Sigma$  di un generico sistema canonico

$$(C) \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_i}, \quad \frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

sia definita dalle equazioni

$$p_1 = 0, \quad x_1 = \varphi(t); \quad p_i = x_i = 0 \quad (i = 2, \dots, n),$$

essendo per es.  $x_1 = 0$  per  $t = 0$ , e tutto intendendosi regolare in un intorno, comunque piccolo del resto, dei valori  $p_i = x_i = 0$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ).

Si avrà, sopra  $\Sigma$ ,  $\partial H / \partial x_1 = \partial H / \partial x_i = \partial H / \partial p_i = 0$  ( $i = 2, \dots, n$ ),  $\partial H / \partial p_1 \geq 0$ .

Posto  $p_i = \partial W / \partial x_i$ , la disuguaglianza  $\partial H / \partial p_1 \geq 0$  ci assicura che esiste un integrale  $W$  della equazione  $H = P_1$ , regolare nell'intorno considerato, il quale, per  $x_1 = 0$ , si riduce a  $x_2 P_2 + \dots + x_n P_n$ , le  $P$  avendo ufficio di costanti. Le equazioni

$$(1) \quad p_i = \frac{\partial W}{\partial x_i}, \quad X_k = \frac{\partial W}{\partial P_k} \quad (i, k = 1, 2, \dots, n),$$

definiscono una trasformazione fra le due coppie di serie di variabili  $p, x$ ;  $P, X$ , biunivoca nel detto intorno, perchè il determinante  $\|\partial^2 W / \partial x_i \partial P_k\|$  si riduce, per  $p_i = x_i = 0$ , a  $1 / (\partial H / \partial p_1)$ , ed è quindi diverso da zero.

D'altra parte le stesse (1) rappresentano, in base al metodo di integrazione di JACOBI, quando vi si faccia  $X_1 = t - t_0$ , l'integrale generale del sistema (C); le  $P, t_0, X_2, X_3, \dots, X_n$  sono allora le costanti di integrazione.

Ciò posto, eseguendo la trasformazione (1), le equazioni del moto divengono

$$\frac{dH}{dt} = \frac{dP_1}{dt} = 0, \quad \frac{dX_1}{dt} = 1; \quad \frac{dP_i}{dt} = \frac{dX_i}{dt} = 0 \quad (i = 2, 3, \dots, n).$$

Ogni loro soluzione si potrebbe evidentemente dire stazionaria, prendendo alla lettera la definizione del sig. ROUTH. In particolare dunque la soluzione  $\Sigma$ , donde abbiamo preso le mosse.

SUI MOTI STAZIONARI DI UN CORPO RIGIDO  
NEL CASO DELLA KOWALEVSKY

NOTA I

« Rend. Acc. Lincei », s. 5<sup>a</sup>, vol. X (1° sem. 1901),  
pp. 338-346 (\*).

I. - Generalità

Le equazioni di EULERO, che reggono il movimento di un solido pesante fissato per un punto  $\Omega$ , sono, colle notazioni abituali,

$$\left\{ \begin{array}{l} A \frac{dp}{dt} = (B - C)qr + P(y_0\gamma_3 - z_0\gamma_2), \\ B \frac{dq}{dt} = (C - A)rp + P(z_0\gamma_1 - x_0\gamma_3), \\ C \frac{dr}{dt} = (A - B)pq + P(x_0\gamma_2 - y_0\gamma_1), \end{array} \right.$$

(l'asse fisso  $\zeta$  intendendosi verticale e diretto verso il basso).

Nel caso integrato dalla KOWALEVSKY,  $A = B = 2C$ ; inoltre  $z_0 = 0$ , cioè il baricentro  $O$  è situato nel piano equatoriale dell'ellissoide di inerzia. Essendo indifferente la scelta della coppia  $x, y$  in questo piano, si può supporre il semiasse positivo delle  $x$  diretto secondo la  $\Omega O$ , talchè  $y_0 = 0$ ,  $x_0 > 0$  (e non  $x_0 = 0$ , intendendo così di escludere il caso di EULERO, in cui  $O$  coincide con  $\Omega$ ).

Rappresenterò con  $s^2$  la frazione essenzialmente positiva  $Px_0/C$ . Questa costante  $s$  ha le dimensioni  $[Px_0]^{1/2}/[C] = [ml^2t^{-2}]^{1/2}/[ml^2]^{1/2} = [t^{-1}]$  e risulta quindi omogenea a  $p, q, r$ .

Aggiungendo alle equazioni precedenti le formule di POISSON, relative ai tre coseni  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ , si ha in definitiva il sistema differenziale

$$(K) \quad \left\{ \begin{array}{l} 2 \frac{dp}{dt} = qr, \quad 2 \frac{dq}{dt} = -rp - s^2\gamma_3, \quad \frac{dr}{dt} = s^2\gamma_2; \\ \frac{d\gamma_1}{dt} = \gamma_2r - \gamma_3q, \quad \frac{d\gamma_2}{dt} = \gamma_3p - \gamma_1r, \quad \frac{d\gamma_3}{dt} = \gamma_1q - \gamma_2p. \end{array} \right.$$

(\*) Presentata dal Corrispondente G. RICCI nella seduta del 5 maggio 1901.

La forza viva del corpo vale  $\frac{1}{2} (Ap^2 + Bq^2 + Cr^2) = C(p^2 + q^2 + \frac{1}{2} r^2)$ , il potenziale, dovuto alla gravità,  $Px_0\gamma_1 = Cs^2\gamma_1$ .

La energia totale  $H$  è dunque espressa (sopprimendo il fattore costante  $C$ , che si può del resto sempre supporre eguale ad 1 con opportuna scelta dell'unità di massa) da

$$H = p^2 + q^2 + \frac{1}{2}r^2 - s^2\gamma_1.$$

Le (K) ammettono, oltre all'integrale delle forze vive  $H = \text{cost.}$  e all'identità geometrica  $\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1$ , i due integrali algebrici

$$(A) \quad \begin{cases} (1) & 2(\gamma_1 p + \gamma_2 q) + \gamma_3 r = \lambda s, \\ (2) & \{(p + iq)^2 + s^2(\gamma_1 + i\gamma_2)\} \{(p - iq)^2 + s^2(\gamma_1 - i\gamma_2)\} = \\ & = (s^2\gamma_1 + p^2 - q^2)^2 + (s^2\gamma_2 + 2pq)^2 = \mu^4 s^4 \quad (i = \sqrt{-1}), \end{cases}$$

nei secondi membri dei quali sono posti in evidenza i fattori di omogeneità  $s, s^4$ , affinché le costanti  $\lambda$  e  $\mu$  si presentino come puri numeri. (È poi lecito, nel secondo membro della (2), scrivere  $\mu^4$ , pur intendendo  $\mu$  reale, poichè la forma del primo membro mostra che si tratta di quantità  $\geq 0$ ).

La (1) è chiaramente l'integrale delle aree per i piani orizzontali; la (2) l'integrale scoperto dalla KOWALEVSKY. Essi sono tra loro in involuzione, in quanto, adottando per es. come variabili canoniche gli angoli  $\vartheta, f, \varphi$  di KIRCHHOFF e le loro coniugate  $p_\vartheta, p_f, p_\varphi$ , la (1) diviene  $p_\varphi = \text{cost.}$ , come è ben noto, mentre  $p, q, r; \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ , e per conseguenza anche il primo membro della (2), rimangono indipendenti dall'angolo di precessione  $\varphi$ .

## 2. - Soluzioni particolari del sistema (K), per cui $r = 0$ .

Supponendo  $r = 0$ , la  $dr/dt = s^2\gamma_2$  mostra che anche  $\gamma_2$  è identicamente nulla; inoltre, da  $2dp/dt = qr$ , segue  $p = \text{cost.}$  La equazione  $d\gamma_2/dt = \gamma_3 p - \gamma_1 r$  si riduce a  $\gamma_3 p = 0$ , il che porta  $\gamma_3 = 0$ , ovvero  $p = 0$ . Nel primo caso, dovrà essere  $\gamma_1 = \pm 1$ , e quindi, in causa della  $d\gamma_3/dt = \gamma_1 q - \gamma_2 p$ ,  $q = 0$ , con che le (K) rimangono tutte soddisfatte. Si tratta evidentemente ( $q = r = 0, p = \text{cost.}$ ) di rotazioni uniformi attorno all'asse baricentrico  $\Omega O$ , diretto verticalmente ( $\gamma_1 = \pm 1$ ).

Se invece  $p = 0$ , le (K) divengono

$$r = \gamma_2 = p = 0; \quad 2 \frac{dq}{dt} = -s^2\gamma_3, \quad \frac{d\gamma_1}{dt} = -\gamma_3 q, \quad \frac{d\gamma_3}{dt} = \gamma_1 q.$$

Le soluzioni che ne rimangono definite corrispondono, per essere  $r=p=0$ , a rotazioni attorno all'asse  $y$ , necessariamente fisso anche nello spazio e orizzontale ( $\gamma_3 = 0$ ).

È chiaro che il corpo si comporta in tale movimento come un pendolo composto. Possiamo del resto verificarlo sulle nostre equazioni. Le ultime tre, ponendovi  $\gamma_1 = \cos u$ ,  $\gamma_3 = \sin u$ , con che  $u$  rappresenta la deviazione dalla verticale dell'asse baricentrico (contata positivamente in verso opportuno), si riassumono nella equazione tipica del moto pendolare

$$2 \frac{d^2 u}{dt^2} = -s^2 \sin u.$$

### 3. - Moti stazionari e loro distinzione in tre categorie.

Il nostro problema possiede  $\infty^4$  soluzioni stazionarie  $\Sigma$ , che corrispondono ai due integrali (A) e si caratterizzano <sup>(1)</sup> eliminando da  $H$  due variabili a mezzo delle (A) e ponendo eguale a zero il differenziale  $dH$  dell'espressione ridotta  $H$  di  $H$ .

Tra queste  $\Sigma$  sono evidentemente comprese le due sottoclassi di  $\infty^3$  soluzioni, che corrispondono a ciascuno dei due integrali (1) e (2), isolatamente considerati. Infatti porre eguale a zero il differenziale di  $H$ , dopo aver tenuto conto della sola (1), ovvero della sola (2), implica pur sempre  $dH = 0$ .

Giova tuttavia, come apparirà dallo studio del caso generale, considerare a parte tali soluzioni. Comincerò pertanto da esse.

### 4. - Moti stazionari, che provengono dall'integrale delle aree.

Data la forma semplicissima che assume l'integrale delle aree (1) in variabili canoniche  $\vartheta, f, \varphi$ ;  $p_\vartheta, p_f, p_\varphi$ , ci sarà comodo usufruirne.

In generale si ha

$$(3) \quad \gamma_1 = \sin \vartheta \cos f, \quad \gamma_2 = \sin \vartheta \sin f, \quad \gamma_3 = \cos \vartheta,$$

$$(4) \quad \begin{cases} Ap = \sin f p_\vartheta + \cos f \frac{\cos \vartheta}{\sin \vartheta} p_f + \frac{\cos f}{\sin \vartheta} p_\varphi, \\ Bq = -\cos f p_\vartheta + \sin f \frac{\cos \vartheta}{\sin \vartheta} p_f + \frac{\sin f}{\sin \vartheta} p_\varphi, \\ Cr = -p_f, \end{cases}$$

<sup>(1)</sup> Il lettore voglia riferirsi alla regola enunciata nella Nota: *Sui moti stazionari dei sistemi olonomi*, § 5, in questi « Rendiconti », 3 marzo 1901, fasc. 5°; [in questo vol.: III, pp. 101-106].

donde

$$Ap\gamma_1 + Bq\gamma_2 + Cr\gamma_3 = p_\varphi,$$

e, dovendosi ora porre  $A = B = 2$ ,  $C = 1$ ,

$$H = p^2 + q^2 + \frac{1}{2}r^2 - s^2\gamma_1 = \\ = \frac{1}{4}\left(p_\varphi^2 + \frac{\cos^2 \vartheta}{\sin^2 \vartheta} p_r^2 + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} p_\varphi^2 + 2 \frac{\cos \vartheta}{\sin^2 \vartheta} p_r p_\varphi\right) + \frac{1}{2} p_r^2 - s^2 \sin \vartheta \cos f,$$

$$(1') \quad p_\varphi = s\lambda.$$

Portiamo in  $H$  il valore (1'), e sostituiamo in pari tempo a  $p_r$  una variabile  $\varepsilon$ , definita come segue:

$$(5) \quad \varepsilon = \frac{(1 + \sin^2 \vartheta)p_r + s\lambda \cos \vartheta}{\sin \vartheta \sqrt{1 + \sin^2 \vartheta}}.$$

La  $H$  diventa una funzione di  $p_\varphi$ ,  $\varepsilon$ ,  $\vartheta$ ,  $f$  e precisamente

$$H = \frac{1}{4}(p_\varphi^2 + \varepsilon^2) + \frac{1}{2}s^2\left(\frac{\lambda^2}{1 + \sin^2 \vartheta} - 2 \sin \vartheta \cos f\right).$$

È bene osservare che il cambiamento di variabili (3), (4), (5) può essere eseguito senza timore di lasciar sfuggire alcuna soluzione particolare. Infatti la trasformazione, definita dalle (3), (4), (5), è biunivoca e regolare per tutti i valori finiti delle variabili, eccettuato soltanto il valore  $\sin \vartheta = 0$ , cioè  $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$ . Ora il sistema (K) non ammette alcuna soluzione particolare, per la quale possano annullarsi ad un tempo (qualunque sia  $t$ )  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  (\*).

Secondo la regola generale, le soluzioni stazionarie, di cui andiamo in cerca, debbono soddisfare alla equazione  $dH = 0$ , cioè

$$\frac{\partial H}{\partial p_\varphi} = \frac{1}{2}p_\varphi = 0, \quad \frac{\partial H}{\partial \varepsilon} = \frac{1}{2}\varepsilon = 0, \\ \frac{\partial H}{\partial \vartheta} = 0, \quad \frac{\partial H}{\partial f} = s^2 \sin \vartheta \sin f = 0.$$

(\*) Supponendo  $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$  (e quindi  $\gamma_3 = \pm 1$ , dalle  $d\gamma_1/dt = \gamma_2 r - \gamma_3 q$ ,  $d\gamma_2/dt = \gamma_3 p - \gamma_1 r$ , risulta  $q = 0$ ,  $p = 0$ , nè può quindi essere soddisfatta la  $2dq/dt = -rp - s^2\gamma_3$ , che è pure una delle equazioni (K).

Ne deduciamo (dovendosi escludere, come s'è detto or ora, che  $\sin \vartheta$  si annulli per tutti i valori di  $t$ )

$$p_\vartheta = 0, \quad \varepsilon = 0, \quad \sin f = 0,$$

mentre  $\vartheta$  soddisferà alla equazione  $\partial H / \partial \vartheta = 0$ , ossia (ponendovi oramai  $\cos f = \pm 1$ ) alla

$$(6) \quad \left( \frac{\lambda^2 \sin \vartheta}{(1 + \sin^2 \vartheta)^2} \pm 1 \right) \cos \vartheta = 0.$$

Si vede che  $p_\vartheta$ ,  $\varepsilon$ ,  $f$ ,  $\vartheta$  assumono tutti valori costanti; costante rimane pure  $p_r$ , in virtù della (5), e, per conseguenza  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$ ,  $\gamma_3$ ;  $p$ ,  $q$ ,  $r$ . Si tratta dunque di *rotazioni uniformi*.

Da  $p_\vartheta = 0$ ,  $\sin f = 0$  segue che  $\gamma_2$  e  $q$  si annullano, cioè che l'asse  $y$  è orizzontale ( $\gamma_2 = 0$ ) e che l'asse di rotazione appartiene al piano meridiano contenente il baricentro ( $q = 0$ ). Combinando queste due circostanze, risulta che l'asse di rotazione è, rispetto allo spazio, necessariamente orientato secondo la verticale; lo si può del resto anche desumere dalla formola  $\gamma_3 p - \gamma_1 r = 0$ , che è diretta conseguenza di  $\gamma_2 = 0$ .

Per fissare la posizione dell'asse di rotazione nel corpo, bisogna ricorrere alla (6), distinguendo le due eventualità

$$(6_a) \quad \cos \vartheta = 0,$$

$$(6_b) \quad \frac{\lambda^2 \sin \vartheta}{(1 + \sin^2 \vartheta)^2} = \mp 1.$$

a) Se si annulla  $\cos \vartheta$ , cioè  $\gamma_3$ , la (5), facendovi  $\varepsilon = 0$ , porge  $p_r = 0$ ; quindi anche  $r = 0$  e siamo ricondotti alle rotazioni intorno all'asse baricentrico. I valori costanti degli argomenti  $p_\vartheta$ ,  $\varepsilon$ ,  $\vartheta$ , ed  $f$ , da cui dipende  $H$ , sono in questo caso  $0$ ,  $0$ ,  $\pi/2$ , e  $0$  ovvero  $\pi$ , secondochè  $\cos f = \pm 1$ , secondochè cioè il baricentro  $O$  cade al disotto o al disopra del punto di sospensione  $\Omega$ . Risguardando come variabili indipendenti  $p_\vartheta$ ,  $\varepsilon$  e  $\gamma_3 = \cos \vartheta$ ,  $\varepsilon' = \sin f$ , dovremo di conformità porre in  $H$

$$\sin \vartheta = |1 - \gamma_3^2|^{1/2}, \quad \cos f = \pm |1 - \varepsilon'^2|^{1/2}.$$

Formiamo la  $d^2 H$  relativa ai valori  $p_\vartheta = 0$ ,  $\varepsilon = 0$ ,  $\varepsilon' = 0$ , o, ciò che torna lo stesso, sviluppiamo  $H$  in serie di Mac-Laurin, lasciando i termini d'ordine superiore al secondo. Avremo

$$H = \frac{1}{2} s^2 \left( \frac{\lambda^2}{2} \mp 2 \right) + \frac{1}{4} \left\{ p_\vartheta^2 + \varepsilon^2 + \left( \frac{\lambda^2}{2} \mp 2 \right) s^2 \gamma_3^2 \pm 2 s^2 \varepsilon'^2 \right\} + \dots$$

I termini in parentesi costituiscono una forma definita, quando si adottano i segni superiori, e in questo caso soltanto ( $O$  sotto  $\Omega$ ). È la ben nota condizione di stabilità.

b) Se  $\vartheta$  soddisfa alla (6<sub>b</sub>), siccome l'angolo  $\vartheta$  è, per sua definizione, compreso fra 0 e  $\pi$  e quindi  $\sin \vartheta > 0$ , deve intanto anche il secondo membro essere positivo, talchè  $f = \pi$  (e non  $f = 0$ ). Ciò posto, già lo sviluppo di  $H$  in funzione degli argomenti  $p_\vartheta$ ,  $\varepsilon$ ,  $\varepsilon' = \sin f$  (trattando  $\vartheta$  come un parametro) mostra che c'è instabilità. Si ha infatti, a meno di termini d'ordine superiore al secondo in  $\varepsilon'$ ,

$$H = \frac{1}{2}s^2 \left( \frac{\lambda^2}{1 + \sin^2 \vartheta} + 2 \sin \vartheta \right) + \frac{1}{4}(p_\vartheta^2 + \varepsilon^2) - \frac{1}{2}s^2 \sin \vartheta \cdot \varepsilon',$$

e la parte di secondo ordine non è una quadrica definita.

### 5. - Moti stazionari, che provengono dall'integrale della Kowalevsky.

Introducendo una variabile ausiliaria  $\varepsilon$ , si può evidentemente sostituire alla (2) il sistema equivalente

$$(2') \quad s^2 \gamma_1 = \mu^2 s^2 \cos \varepsilon - p^2 + q^2,$$

$$(2'') \quad s^2 \gamma_2 = \mu^2 s^2 \sin \varepsilon - 2pq.$$

Ci converrà, in questa ricerca, riguardare come parametri indipendenti, atti a fissare lo stato di moto del sistema (oltre l'angolo di precessione  $\varphi$ , che non interviene esplicitamente nelle formule)  $p$ ,  $q$ ,  $r$ ,  $\gamma_1$  ed  $\varepsilon$ , rimanendo  $\gamma_2$  definita dalla (2''), e, si intende,  $\gamma_3$  dalla identità  $\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1$ . Rispetto a queste variabili (la cui sostituzione alle primitive è senza riserve legittima, data la forma lineare delle (2'') si rapporto a  $\gamma_2$  che a  $\sin \varepsilon$ ) l'integrale (2) della KOWALEVSKY è sostituito dalla (2'). Per trovare i moti stazionari corrispondenti, cominceremo coll'eliminare  $\gamma_1$  da  $H$  a mezzo della (2'), ciò che porge

$$H = 2p^2 + \frac{1}{2}r^2 - \mu^2 s^2 \cos \varepsilon.$$

Ponendo eguale a zero il differenziale di questa funzione  $H$ , si ha

$$p = 0, \quad r = 0, \quad \sin \varepsilon = 0.$$

Dacchè si annullano insieme  $p$  ed  $r$ , si tratta di rotazioni attorno all'asse  $y$ , le quali avvengono (§ 2) come se il detto asse fosse tenuto fisso in posizione orizzontale.



Per la stabilità si richiede che  $d^2H$  equivalga ad una quadrica definita in quattro argomenti ( $2(n - m)$ , dice la regola). La funzione  $H$  dipende da tre variabili soltanto,  $p, r, \varepsilon$ ;  $d^2H$  equivale per conseguenza ad una forma irriducibile con tre argomenti al più. Dovremmo dedurne che c'è instabilità.

Effettivamente non si può concludere in modo diverso, se si vuol proprio aver riguardo alla completa <sup>(3)</sup> stabilità. Giova tuttavia osservare in generale che quando, come nel caso presente, si tratta di una funzione  $H$ , che dipende da meno di  $2(n - m)$  parametri, quelli che mancano assumono sostanzialmente il carattere di coordinate ignorate. Ha allora interesse, per i corrispondenti moti stazionari, la questione della stabilità, anche se, o meglio anzi, in quanto la si restringa ai soli parametri da cui  $H$  effettivamente dipende.

Ciò posto, nell'esempio attuale, saranno da considerare i soli parametri  $p, r, \varepsilon$ .

Come si rileva immediatamente dalla espressione di  $H$ , si ha stabilità od instabilità secondochè  $\varepsilon$  ha il valore 0, oppure ha il valore  $\pi$  (nel caso generale, in cui la costante  $\mu$  non è zero) <sup>(4)</sup>.

Per interpretare questo risultato, ricorriamo alla (2'), la quale, per le soluzioni in questione, si riduce a

$$s^2\gamma_1 = \pm \mu^2 s^2 + q^2.$$

Supponendo  $\varepsilon = 0$ , bisogna prendere nel secondo membro il segno +, e allora  $\gamma_1$  rimane costantemente positivo: se invece  $\varepsilon = \pi$ , allora  $\gamma_1$  assume anche valori negativi. Infatti, ponendo, come a § 2,  $\gamma_1 = \cos u$ , la (2') diviene

$$\left(\frac{du}{dt}\right)^2 = s^2(\mu^2 + \cos u).$$

Qualora  $\cos u$  rimanesse costantemente positivo, non potrebbe  $u$  variare sempre nello stesso senso e dovrebbe quindi annullarsi  $du/dt$ , ossia  $\mu^2 + \cos u$ , il che implica contraddizione.

In definitiva dunque queste rotazioni attorno ad un asse orizzontale riescono stabili od instabili, secondochè il baricentro  $O$  rimane o non rimane costantemente al disotto dell'asse di rotazione.

<sup>(3)</sup> Per quanto, si intende bene *relativa* (agli integrali, o relazioni invarianti generatrici).

<sup>(4)</sup> Per  $\mu = 0$ , anche il parametro  $\varepsilon$  sparisce dall'espressione di  $H$ , la quale si riduce a  $2p^2 + r^2/2$ . Dovendosi aver riguardo a questi soli parametri, le corrispondenti soluzioni sono stabili.

**6. - Relazioni invarianti,  
che caratterizzano gli  $\infty^4$  moti stazionari  $\Sigma$  del caso generale.**

Dobbiamo eliminare da  $H$  due variabili a mezzo delle (A). In primo luogo ci è lecito ritenere  $\gamma_3$  non identicamente nulla, poichè, per  $\gamma_3 = 0$ , la (1) non contiene  $r$  (la (2) ne è sempre indipendente), e quindi, rimanendo escluso che sia  $r$  tra quei parametri che si eliminano da  $H$  a mezzo delle (A), si dovrebbe avere, per le conseguenti soluzioni stazionarie,  $\partial H/\partial r = \partial H/\partial r = r = 0$ ; e si ricadrebbe quindi, rammentando il § 2, in uno dei due casi già considerati.

Ciò posto, adoteremo come variabili indipendenti  $p, q, \varepsilon$  (e il solito angolo di precessione  $\varphi$ ) intendendo di eliminare, da  $H$ ,  $\gamma_1$  a mezzo della (2'), ed  $r$  a mezzo della (1), il che appunto può farsi per essere  $\gamma_3$  non identicamente nulla. Va da sè che, nella (1) stessa,  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  sono da ritenersi definite dalle (2'), (2'') e  $\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1$ .

Avremo così

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \gamma_1}{\partial p} = -\frac{2}{s^2} p, \quad \frac{\partial \gamma_1}{\partial q} = \frac{2}{s^2} q, \quad \frac{\partial \gamma_1}{\partial \varepsilon} = -\mu^2 \operatorname{sen} \varepsilon = -\frac{1}{s^2} (s^2 \gamma_2 + 2pq), \\ \frac{\partial \gamma_2}{\partial p} = -\frac{2}{s^2} q, \quad \frac{\partial \gamma_2}{\partial q} = -\frac{2}{s^2} p, \quad \frac{\partial \gamma_2}{\partial \varepsilon} = \mu^2 \cos \varepsilon = \frac{1}{s^2} (s^2 \gamma_1 + p^2 - q^2), \\ \frac{\partial \gamma_3}{\partial p} = -\frac{1}{\gamma_3} \left( \gamma_1 \frac{\partial \gamma_1}{\partial p} + \gamma_2 \frac{\partial \gamma_2}{\partial p} \right) = \frac{2}{s^2 \gamma_3} (\gamma_1 p + \gamma_2 q), \\ \frac{\partial \gamma_3}{\partial q} = -\frac{1}{\gamma_3} \left( \gamma_1 \frac{\partial \gamma_1}{\partial q} + \gamma_2 \frac{\partial \gamma_2}{\partial q} \right) = -\frac{2}{s^2 \gamma_3} (\gamma_1 q - \gamma_2 p), \\ \frac{\partial \gamma_3}{\partial \varepsilon} = -\frac{1}{\gamma_3} \left( \gamma_1 \frac{\partial \gamma_1}{\partial \varepsilon} + \gamma_2 \frac{\partial \gamma_2}{\partial \varepsilon} \right) = \frac{2\mu^2}{\gamma_3} (\gamma_1 \operatorname{sen} \varepsilon - \gamma_2 \cos \varepsilon) = \\ = \frac{1}{s^2 \gamma_3} \{ 2\gamma_1 pq - \gamma_2 (p^2 - q^2) \}. \end{array} \right.$$

D'altra parte, a norma della (1),

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dr}{dp} = \frac{\partial r}{\partial p} + \frac{\partial r}{\partial \gamma_1} \frac{\partial \gamma_1}{\partial p} + \frac{\partial r}{\partial \gamma_2} \frac{\partial \gamma_2}{\partial p} + \frac{\partial r}{\partial \gamma_3} \frac{\partial \gamma_3}{\partial p}, \\ \frac{dr}{dq} = \frac{\partial r}{\partial q} + \frac{\partial r}{\partial \gamma_1} \frac{\partial \gamma_1}{\partial q} + \frac{\partial r}{\partial \gamma_2} \frac{\partial \gamma_2}{\partial q} + \frac{\partial r}{\partial \gamma_3} \frac{\partial \gamma_3}{\partial q}, \\ \frac{dr}{d\varepsilon} = \frac{\partial r}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial r}{\partial \gamma_1} \frac{\partial \gamma_1}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial r}{\partial \gamma_2} \frac{\partial \gamma_2}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial r}{\partial \gamma_3} \frac{\partial \gamma_3}{\partial \varepsilon}, \end{array} \right.$$

dalle quali, essendo

$$\frac{\partial r}{\partial p} = -\frac{2\gamma_1}{\gamma_3}, \quad \frac{\partial r}{\partial q} = -\frac{2\gamma_2}{\gamma_3}, \quad \frac{\partial r}{\partial \varepsilon} = 0, \quad \frac{\partial r}{\partial \gamma_1} = -\frac{2p}{\gamma_3}, \quad \frac{\partial r}{\partial \gamma_2} = -\frac{2q}{\gamma_3}, \quad \frac{\partial r}{\partial \gamma_3} = -\frac{r}{\gamma_3},$$

segue immediatamente

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{dr}{dp} = \frac{2}{s^2\gamma_3^2} \{ -s^2\gamma_1\gamma_3 + 2\gamma_3(p^2 + q^2) - r(\gamma_1p + \gamma_2q) \}, \\ \frac{dr}{dq} = \frac{2}{s^2\gamma_3^2} \{ -s^2\gamma_2\gamma_3 + r(\gamma_1q - \gamma_2p) \}, \\ \frac{dr}{d\varepsilon} = \frac{2}{s^2\gamma_3^2} \{ -s^2\gamma_3(\gamma_1q - \gamma_2p) + \gamma_3q(p^2 + q^2) - \\ - \gamma_1pqr + \frac{1}{2}\gamma_2(p^2 - q^2)r \}. \end{array} \right.$$

Siamo ora in grado di calcolare le derivate di  $\mathbf{H}(p, q, \varepsilon)$ . Infatti, sostituendo nella  $\mathbf{H}$ , a  $s^2\gamma_1$ , il suo valore (2') e seguitando a ritenere  $r$  definita dalla (1), si può scrivere

$$\mathbf{H} = 2p^2 + \frac{1}{2}r^2 - \mu^2s^2 \cos \varepsilon,$$

donde

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d\mathbf{H}}{dp} = \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial p} + \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial r} \frac{dr}{dp} = 4p + \frac{2r}{s^2\gamma_3^2} \{ -s^2\gamma_1\gamma_3 + 2\gamma_3(p^2 + q^2) - r(\gamma_1p + \gamma_2q) \}, \\ \frac{d\mathbf{H}}{dq} = \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial r} \frac{dr}{dq} = \frac{2r}{s^2\gamma_3^2} \{ -s^2\gamma_2\gamma_3 + r(\gamma_1q - \gamma_2p) \}, \\ \frac{d\mathbf{H}}{d\varepsilon} = \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial r} \frac{dr}{d\varepsilon} = \mu^2s^2 \operatorname{sen} \varepsilon + r \frac{dr}{d\varepsilon} = s^2\gamma_2 + 2pq + r \frac{dr}{d\varepsilon}, \end{array} \right.$$

ed è facile verificare che sussiste la identità

$$(10) \quad \frac{d\mathbf{H}}{d\varepsilon} = \frac{1}{2} \left\{ q \frac{d\mathbf{H}}{dp} - \left( p + \frac{s^2\gamma_3}{r} \right) \frac{d\mathbf{H}}{dq} \right\}.$$

Le soluzioni stazionarie sono contraddistinte dalle condizioni

$$\frac{d\mathbf{H}}{dp} = 0, \quad \frac{d\mathbf{H}}{dq} = 0, \quad \frac{d\mathbf{H}}{d\varepsilon} = 0,$$

le quali, in causa della (10), si riducono alle prime due (numero appunto conforme alla regola).

Dacchè, come già abbiamo notato, è da escludersi che si annulli  $r$ , la  $dH/dq = 0$  equivale a

$$-s^2\gamma_2\gamma_3 + r(\gamma_1q - \gamma_2p) = 0.$$

Questa equazione ha un significato semplicissimo. Essendo per le (K)

$$\frac{dr}{dt} = s^2\gamma_2, \quad \frac{d\gamma_3}{dt} = \gamma_1q - \gamma_2p,$$

essa esprime che  $\gamma_3(dr/dt) - r(d\gamma_3/dt) = 0$ , ossia che fra  $r$  e  $\gamma_3$  passa, durante tutto il movimento un rapporto costante, *non nullo, nè infinito*, perchè nè  $r$ , nè  $\gamma_3$  sono identicamente nulli. Potremo pertanto ritenere

$$(11) \quad vr = s\gamma_3,$$

designando con  $v$  una costante finita e diversa da zero.

Con questa osservazione il nostro sistema

$$\frac{dH}{dp} = 0, \quad \frac{dH}{dq} = 0$$

diventa

$$(12) \quad \begin{cases} (2vp - s\gamma_1)(p + vs) + (2vq - s\gamma_2)q = 0, \\ -\gamma_2(p + vs) + \gamma_1q = 0. \end{cases}$$

Le soluzioni stazionarie corrispondenti hanno caratteri diversi, secondochè per esse il determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2vp - s\gamma_1 & 2vq - s\gamma_2 \\ -\gamma_2 & \gamma_1 \end{vmatrix} = 2v(\gamma_1p + \gamma_2q) - s(\gamma_1^2 + \gamma_2^2)$$

è, o no, diverso da zero.

## NOTA II

« Rend. Acc. Lincei », s. 5<sup>a</sup>, vol. X (1° sem. 1901),  
pp. 429-434 (\*).

### 7. - Soluzioni, per cui $\Delta$ non si annulla identicamente (1).

#### Rappresentazione geometrica del movimento. Condizioni di stabilità.

Per  $\Delta \geq 0$ , le (12) equivalgono a

$$(12_a) \quad p = -vs, \quad q = 0.$$

Essendo inoltre

$$(11) \quad vr = s\gamma_3,$$

si ottiene dalle (K) il sistema ridotto

$$(K_a) \quad \frac{d\gamma_1}{dt} = \frac{s}{v} \gamma_2 \gamma_3, \quad \frac{d\gamma_2}{dt} = -\frac{s}{v} \gamma_1 \gamma_3 - vs\gamma_3, \quad \frac{d\gamma_3}{dt} = vs\gamma_2,$$

il quale ammette, oltre al solito  $\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1$ , un secondo integrale

$$\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + 2v^2\gamma_3 = \text{cost.}$$

ed è quindi integrabile per funzioni ellittiche.

(\*) Presentata dal Corrispondente G. RICCI nella seduta del 1° giugno 1901.

(\*) Queste  $\infty^4$  soluzioni sono già state segnalate dal sig. S. STEKLOFF. Egli ha in pari tempo osservato che esse convergono anche a solidi con una distribuzione di massa alquanto più generale di quella supposta dalla KOWALEVSKY. Cfr. 1<sup>o</sup> Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik, 1895, pag. 838. Rimane naturalmente estraneo al punto di vista dell'A. quel che risulta invece dal nostro, e cioè:

1) il comportamento stazionario, che le soluzioni in parola hanno nel caso della KOWALEVSKY, e non in generale negli altri. (Faranno probabilmente eccezione i casi del sig. R. LIOUVILLE, in cui le equazioni del movimento ammettono, oltre l'integrale delle aree e quello delle forze vive, un ulteriore integrale algebrico. Quanto agli altri casi, manca un corrispondente integrale uniforme ed esistono quindi soltanto le  $\infty^3$  soluzioni stazionarie, che provengono dall'integrale delle aree);

2) le condizioni di stabilità.

Si può osservare che quest'ultimo integrale non è altro che quello della KOWALEVSKY, ridotto a mezzo delle (12<sub>a</sub>), cioè

$$(2_a) \quad (\gamma_1 + v^2)^2 + \gamma_2^2 = \mu^4.$$

La equazione  $q = 0$  mostra che il cono di polodia si riduce al piano meridiano baricentrico.

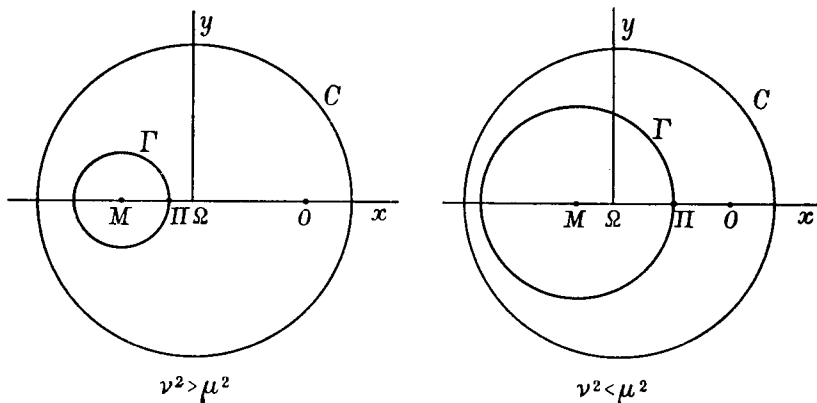


Fig. 1. ( $\mu^2 + v^2 < 1$ )

La verticale di  $\Omega$  descrive, rispetto al corpo, un cono di quart'ordine  $V$ , che si ottiene proiettando da  $\Omega$  la intersezione del cilindro circolare retto

$$(x + v^2)^2 + y^2 = \mu^4$$

colla sfera

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

Per riconoscerlo, basta notare che  $\gamma_1, \gamma_2$  sono le coordinate  $x, y$  di quel punto della verticale, che si trova alla distanza 1 da  $\Omega$ , e aver riguardo alla (2<sub>a</sub>).

Ciascuna falda di  $V$  (per es. quella corrispondente alla direzione positiva della verticale) consta di due nappe distinte oppure di una nappa unica, secondochè il cerchio  $\Gamma$ , di centro  $M(-v^2, 0)$ , e raggio  $\mu^2$ ,

$$(x + v^2)^2 + y^2 = \mu^4$$

rimane o no tutto interno (\*) al cerchio  $C$  di centro  $\Omega$  e raggio 1, secon-

(\*) Dobbiamo evidentemente escludere che il cerchio  $\Gamma$  rimanga tutto al difuori di  $C$ , poichè la (2<sub>a</sub>) non sarebbe in tal caso soddisfatta da alcun sistema di valori di  $\gamma_1, \gamma_2$  inferiori all'unità.

dochè cioè  $\mu^2 + \nu^2 < 1$ , ovvero  $\mu^2 + \nu^2 > 1$  (figg. 1 e 2). Nel caso intermedio  $\mu^2 + \nu^2 = 1$  ( $\Gamma$  tangente a  $C$ ) le due nappe si saldano, e il cono ha l'asse baricentrico per generatrice doppia.

La successione delle posizioni occupate dal corpo (se non la legge, con cui esse vengono percorse al variare del tempo) rimane individuata in modo assai semplice. Basta portare l'una dopo l'altra le generatrici

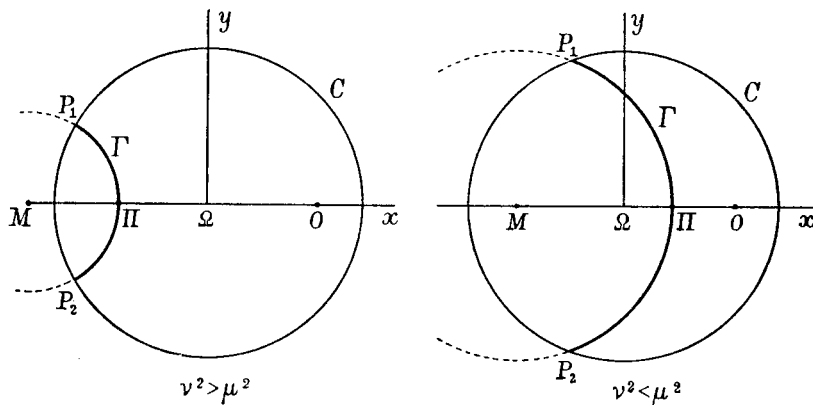


Fig. 2. ( $\mu^2 + \nu^2 > 1$ )

di  $V$  in posizione verticale mediante rotazioni elementari attorno a rette del piano meridiano baricentrico (cono di polodia). A partire da una data posizione di  $V$ , la rotazione elementare deve dunque avvenire intorno alla intersezione del detto piano meridiano col piano normale a  $V$ , condotto per la generatrice verticale.

Lo studio completo dei caratteri del movimento, e in particolare la determinazione dei nove coseni direttori in funzione ellittica del tempo ci porterebbe troppo in lungo. Mi limiterò ad una indicazione, circa il modo di variare di  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ , che si desume immediatamente dalle  $(K_a)$ .

Sia  $P_t$  il punto della circonferenza  $\Gamma$ , che, in un generico istante  $t$ , rappresenta (colle sue coordinate  $x, y$ ) i valori di  $\gamma_1, \gamma_2$ . Il quadrato della velocità, con cui  $P_t$  descrive la curva  $\Gamma$  è dato da

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = \left(\frac{d\gamma_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\gamma_2}{dt}\right)^2 = \frac{s^2}{\nu^2} \{ \gamma_2^2 + (\gamma_1 + \nu^2)^2 \} \gamma_3^2,$$

ossia, in causa della  $(2_a)$ , da  $(s^2 \mu^4 / \nu^2) \gamma_3^2$ . Esso non si annulla, se non con  $\gamma_3$ , cioè nei punti in cui  $\Gamma$  incontra  $C$ .

Quando  $\Gamma$  è tutta interna a  $C$  (fig. 1), il moto non può cambiare di senso;  $P_t$  descrive dunque periodicamente l'intera circonferenza.

Se invece  $\Gamma$  non resta tutta entro  $C$ , allora le intersezioni  $P_1$  e  $P_2$  (fig. 2) sono effettivamente punti di regresso per il movimento di  $P_1$ , il quale risulta per conseguenza oscillatorio e periodico.

Di qua segue tra altro che  $P_1$  raggiunge in qualsiasi eventualità la posizione  $\Pi$  (punto di  $\Gamma$  più vicino ad  $\Omega$ ); si ha cioè, per qualche valore di  $t$ ,  $\gamma_1 = \mu^2 - \nu^2$ ,  $\gamma_2 = 0$ , quindi, a tenore delle (2'), (2'') e (12<sub>a</sub>),  $\varepsilon = 0$ .

Occupiamoci ora delle condizioni di stabilità.

In primo luogo, ponendo

$$a_{11} = \frac{d^2 H}{dp^2}, \quad a_{12} = a_{21} = \frac{d^2 H}{dp dq}, \quad a_{22} = \frac{d^2 H}{dq^2};$$

$$Q = \sum_1^2 a_{rs} u_r u_s$$

(dove le  $u$  designano due indeterminate generiche), si ha in  $Q$  una forma ridotta di  $d^2 H$ , per valori delle variabili che verificano le equazioni

$$\frac{dH}{dp} = 0, \quad \frac{dH}{dq} = 0 \quad (?).$$

Il calcolo delle  $a$  si può fare speditamente mettendo in evidenza nelle espressioni (9) di  $dH/dp$ ,  $dH/dq$  i fattori  $rp + s^2 \gamma_3$ ,  $q$  (che, per le (11) e (12<sub>a</sub>) hanno valore nullo).

Con questo criterio le (9) si scrivono

$$\frac{dH}{dp} = \frac{2}{s^2 \gamma_3^2} \{ (2\gamma_3 p - \gamma_1 r)(rp + s^2 \gamma_3) + (2\gamma_3 q - \gamma_2 r)q \},$$

$$\frac{dH}{dq} = \frac{2r}{s^2 \gamma_3^2} \{ -\gamma_2 (rp + s^2 \gamma_3) + \gamma_1 r q \}.$$

(?) Quando infatti sussiste una equazione, come la (10), del tipo

$$\frac{dH}{d\varepsilon} = c_1 \frac{dH}{dp} + c_2 \frac{dH}{dq}$$

(dove le  $c$  designano funzioni regolari per i valori considerati), derivando rapporto a  $p$  e a  $q$  e tenendo conto delle  $dH/dp = 0$ ,  $dH/dq = 0$ , si deduce

$$\frac{d^2 H}{d\varepsilon dp} = a_{11} c_1 + a_{12} c_2, \quad \frac{d^2 H}{d\varepsilon dq} = a_{21} c_1 + a_{22} c_2;$$

derivando invece rapporto ad  $\varepsilon$ ,

$$\frac{d^3 H}{d\varepsilon^2} = c_1 \frac{d^3 H}{d\varepsilon dp} + c_2 \frac{d^3 H}{d\varepsilon dq} = a_{11} c_1^2 + 2a_{12} c_1 c_2 + a_{22} c_2^2.$$

La  $d^3 H$  può così essere scritta

$$a_{11}(dp + c_1 d\varepsilon)^2 + 2a_{12}(dp + c_1 d\varepsilon)(dq + c_2 d\varepsilon) + a_{22}(dq + c_2 d\varepsilon)^2$$

e coincide precisamente, salvo la designazione delle indeterminate, colla forma binaria  $Q$ .



Dobbiamo derivare queste formule, rapporto a  $p$  e a  $q$ , attribuendo alle lettere (a derivazione eseguita) i valori che loro competono sopra le nostre soluzioni stazionarie.

Ne viene che i coefficienti di  $rp + s^2\gamma_3$  e di  $q$  si possono trattare come costanti aventi addirittura i valori corrispondenti alle (11) e (12<sub>a</sub>); anzi, siccome (conformemente alla regola generale più volte ricordata) i caratteri algebrici della forma  $Q$  sono sempre gli stessi, qualunque sia il valore di  $\varepsilon$  (\*), sarà opportuno, per maggiore semplicità, di riferirsi al valore  $\varepsilon = 0$ , che compete al punto *II* e per cui quindi si deve porre

$$\gamma_1 = \mu^2 - \nu^2, \quad \gamma_2 = 0.$$

Con ciò le superiori espressioni di  $dH/dp$ ,  $dH/dq$  divengono

$$\begin{aligned} \frac{dH}{dp} &= -\frac{2}{\nu s \gamma_3} (\mu^2 + \nu^2)(rp + s^2\gamma_3), \\ \frac{dH}{dq} &= \frac{2}{\nu^2} (\mu^2 - \nu^2)q. \end{aligned}$$

Dalle (7) e (8), introducendovi i valori attuali, abbiamo

$$\begin{aligned} \frac{\partial \gamma_3}{\partial p} &= -\frac{2\nu}{s\gamma_3} (\mu^2 - \nu^2), \quad \frac{\partial \gamma_3}{\partial q} = 0, \\ \frac{dr}{dp} &= \frac{4}{\gamma_3} \nu^2, \quad \frac{dr}{dq} = 0: \end{aligned}$$

quindi

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{d^2H}{dp^2} = -\frac{2}{\nu^2 \gamma_3^2} (\mu^2 + \nu^2)(1 - \mu^4 - 3\nu^4), \\ a_{12} &= \frac{d^2H}{dp dq} = 0, \\ a_{22} &= \frac{d^2H}{dq^2} = \frac{2}{\nu^2} (\mu^2 - \nu^2). \end{aligned}$$

(\*) Bisogna soltanto accertare che si tratta di un valore del parametro effettivamente assunto lungo la particolare soluzione che si considera. Non si può infatti escludere a priori che l'insieme di tutti i valori del parametro rimanga distinto in più intervalli discreti, corrispondenti a soluzioni diverse, e quindi eventualmente a diversi caratteri della forma  $Q$ . Nel caso attuale si tratta proprio di un valore del parametro effettivamente raggiunto, per quanto abbiamo osservato più innanzi.

Ne concludiamo (limitandoci al caso generale, in cui il discriminante della forma  $Q$  non si annulla) (\*) che la condizione di stabilità è espressa dalla disuguaglianza

$$(13) \quad (v^2 - \mu^2)(1 - \mu^4 - 3v^4) > 0.$$

Se  $1 - \mu^4 - 3v^4 > 0$ , la (13) si riduce a  $v^2 > \mu^2$ . Vi ha dunque stabilità allorchè  $\Omega$  resta fuori di  $\Gamma$ .

L'opposto avviene per  $1 - \mu^4 - 3v^4 < 0$ . La condizione di stabilità è allora che  $\Omega$  cada entro  $\Gamma$ .

---

(\*) Il discriminante di  $Q$  si annulla per  $v^4 - \mu^4 = 0$ , ovvero  $1 - \mu^4 - 3v^4 = 0$ . Per decidere se le corrispondenti soluzioni sono o no stabili, bisognerebbe prendere in esame i differenziali di  $H$  d'ordine superiore al secondo, ciò che qui omettiamo per brevità. Si noti che si tratta necessariamente in tali casi di soluzioni multiple (delle equazioni invarianti caratteristiche). Potremmo anche dire, con ovvia estensione di un appellativo introdotto dal sig. POINCARÉ (« Acta Mathematica », t. VII, 1885), *soluzioni di biforcazione*. La condizione (13) è appunto conforme al *principio dello scambio delle stabilità*.

NOTA III

« Rend. Acc. Lincei », s. 5<sup>a</sup>, vol. X, (1<sup>o</sup> sem. 1901),  
pp. 461-466 (\*).

**8. - Studio delle soluzioni, per cui si annulla il determinante  $\Delta$ .**

Alla prima delle (12) si può sostituire  $\Delta = 0$ , onde abbiamo il sistema

$$(12_b) \quad \begin{cases} \gamma_1 p + \gamma_2 q = \frac{s}{2v} (\gamma_1^2 + \gamma_2^2), \\ -\gamma_2 p + \gamma_1 q = vs\gamma_2, \end{cases}$$

a mezzo del quale e della (11), conviene ridurre le (K). Si raggiunge lo scopo nel modo più comodo ricorrendo alle variabili  $\vartheta$ ,  $f$ ,  $\varphi$  e sostituendo prima di tutto, nelle (12<sub>b</sub>) e (11), a  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$ ,  $\gamma_3$  i loro valori, con che si ha

$$(12'_b) \quad \begin{cases} p \cos f + q \sin f = \frac{s}{2v} \sin \vartheta, \\ -p \sin f + q \cos f = vs \sin f, \end{cases}$$

$$(11') \quad vr = s \cos \vartheta.$$

Tenendo conto di queste equazioni, le note formule

$$\begin{aligned} p &= \sin f \frac{d\vartheta}{dt} + \sin \vartheta \cos f \frac{d\varphi}{dt}, \\ q &= -\cos f \frac{d\vartheta}{dt} + \sin \vartheta \sin f \frac{d\varphi}{dt}, \\ r &= \cos \vartheta \frac{d\varphi}{dt} - \frac{df}{dt}, \end{aligned}$$

---

(\*) Presentata dal Corrispondente G. RICCI nella seduta del 16 giugno 1901.

(le quali non soltanto equivalgono alle tre ultime (K), ma servono altresì a definire l'angolo di precessione  $\varphi$ ) danno

$$(14) \quad \frac{d\varphi}{dt} = \frac{s}{2\nu},$$

$$(K_b) \quad \frac{d\vartheta}{dt} = -\nu s \operatorname{sen} f, \quad \frac{df}{dt} = -\frac{s}{2\nu} \cos \vartheta.$$

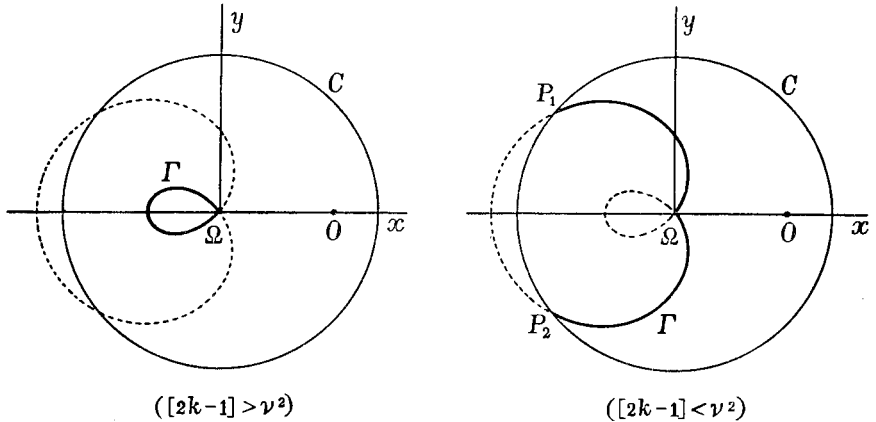


Fig. 3. ( $|k| < \nu^2$ )

La (14) ci dice intanto che l'angolo di precessione  $\varphi$  varia proporzionalmente al tempo; le (K<sub>b</sub>) ammettono poi l'integrale

$$(15) \quad \operatorname{sen} \vartheta + 2\nu^2 \cos f = 2k$$

( $k$  designando una costante), donde subito risulta che le funzioni trigonometriche di  $\vartheta$  e di  $f$  sono funzioni ellittiche del tempo.

Anche ora possiamo assegnare il luogo delle direzioni occupate dalla verticale rispetto al corpo. In coordinate  $\vartheta$  ed  $f$  l'insieme di queste direzioni rimane definito dalla (15). Ciò è quanto dire che il cono  $V$ , descritto dalla verticale, si ottiene proiettando da  $\Omega$  la curva sferica (15). Consideriamo la proiezione ortogonale di questa curva sul piano equatoriale. Essa ha evidentemente per equazione polare ciò che diventa la (15), ponendovi  $\varrho = \operatorname{sen} \vartheta$ , ossia

$$(16) \quad \varrho + 2\nu^2 \cos f = 2k,$$

la quale rappresenta una *lumaca di Pascal* (quartica bicircolare). Come è

ben noto, possiamo generarla portando sopra ogni raggio vettore, da una parte e dall'altra delle sue intersezioni colla circonferenza

$$(x + v^2)^2 + y^2 = v^4,$$

un segmento di lunghezza costante  $2|k|$ .

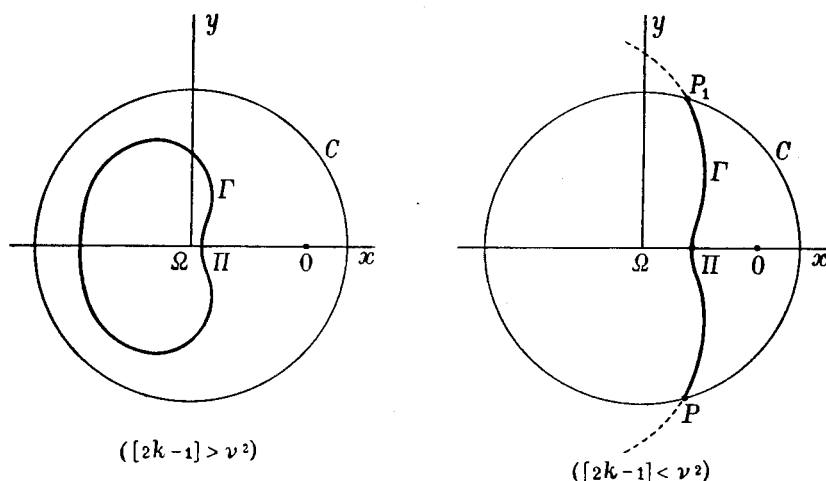


Fig. 4. ( $k > v^2$ ).

Per  $|k| < v^2$  (fig. 3), la lumaca consta di due capi, intrecciantisi nell'origine  $\Omega$ . Sopra uno soltanto di questi capi, che dirò  $\Gamma$ , è effettivamente verificata la (16), mentre per l'altro si ha

$$\rho + 2v^2 \cos f = -2k.$$

Se è  $|k| > v^2$  (fig. 4) (nel qual caso si può addirittura supporre  $k > v^2$ , dacchè la (16) deve rappresentare una curva reale) la lumaca consta di un'unica linea chiusa  $\Gamma$  comprendente nel suo interno l'origine  $\Omega$ . Per  $k = v^2$  si ha la cardioide, linea chiusa con cuspidi in  $\Omega$ .

I coseni direttori  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  della verticale sono rappresentati, in un generico istante  $t$ , dalle coordinate cartesiane  $x, y$  di un punto  $P_t$  di  $\Gamma$  (interno evidentemente al cerchio  $C$  di raggio 1); così le coordinate polari dello stesso  $P_t$  sono  $\text{sen } \vartheta$  ed  $f$ .

Possiamo facilmente acquistare un'idea del modo con cui  $P_t$  descrive  $\Gamma$ . In primo luogo la seconda delle (K<sub>s</sub>) mostra che  $df/dt$  si annulla soltanto per  $\cos \vartheta = 0$ . Ne viene che il moto di  $P_t$  seguita sempre nello stesso senso, a meno che non si annulli  $\cos \vartheta$ , a meno cioè che non si tratti di un punto di intersezione di  $\Gamma$  con  $C$ . Ciò posto, il punto  $P_t$  descriverà l'intera curva  $\Gamma$  di moto progressivo periodico, se  $\Gamma$  è tutta

interna a  $C$ ; ne descriverà invece con moto oscillatorio l'arco compreso entro  $C$ , se  $\Gamma$  e  $C$  si tagliano.

La discriminante di questi due casi si ha subito dalla (16), ponendovi  $g = 1$ . Se  $|2k - 1| > 2\nu^2$  non esistono soluzioni reali, ossia  $\Gamma$  non incontra  $C$ ; se invece  $|2k - 1| < 2\nu^2$ , si hanno per  $f$  due valori reali, eguali ed opposti, e quindi le due curve si tagliano in due punti  $P_1, P_2$  simmetricamente situati rispetto all'asse  $x$ .

Dalle cose dette risulta subito che, quando la curva  $\Gamma$  passa per  $\Omega$  ( $|k| \leq \nu^2$ ), il punto  $P_t$  attraversa effettivamente questa posizione (ad eguali intervalli di tempo); vi son quindi valori di  $t$  per cui si annullano insieme  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$ . Quando invece  $\Omega$  è interno a  $\Gamma$  ( $k > \nu^2$ ), una posizione certamente occupata da  $P_t$  è quella del punto  $II$  di  $\Gamma$  più vicino ad  $\Omega$ . Si ha, in  $II$ ,  $f = 0$  e si annulla quindi  $\gamma_2$ , mentre  $\gamma_1 > 0$ . La seconda delle (12<sub>b</sub>) mostra poi che è anche  $q = 0$ .

Per la rappresentazione geometrica del movimento si può, come nel precedente paragrafo, ricorrere al cono  $V$ . È questo nel caso attuale un cono dell'ottavo ordine, poichè, come abbiamo detto, lo si ottiene proiettando da  $\Omega$  l'intersezione colla sfera di raggio 1 del cilindro retto, che ha per traccia la curva di quart'ordine  $\Gamma$ . Il movimento del corpo avviene in modo che le generatrici di  $V$  coincidono successivamente colla verticale. L'asse istantaneo di rotazione si ha, come nel caso precedente, intersecando il cono di polodia col piano normale a  $V$ , condotto per la generatrice verticale. Però il cono di polodia non si riduce qui ad un piano, ma è di sedicesimo ordine, come facilmente si ricava dalle (12<sub>b</sub>) e (11'), tenendo conto della (15).

*Condizioni di stabilità.* - Supponendo dapprima  $|k| \leq \nu^2$ , potremo riferirci ai valori  $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$ , cioè  $\vartheta = 0$ ,  $\gamma_3 = \pm 1$ , cui corrisponde, per la (15),  $\cos f = k/\nu^2$  e, per le (12<sub>b</sub>),  $p = -\nu s \sin^2 f$ ,  $q = \nu s \sin f \cos f$ . Le (7) e (8) danno per questi valori

$$\frac{\partial \gamma_3}{\partial p} = \frac{\partial \gamma_3}{\partial q} = 0; \quad \frac{dr}{dp} = \frac{4}{s^2 \gamma_3} (p^2 + q^2), \quad \frac{dr}{dq} = 0,$$

con che la derivazione delle (9) porge

$$a_{11} = \frac{d^2 H}{dp^2} = 4 + \frac{16}{s^4} (p^2 + q^2)^2 + \frac{2r}{s^2 \gamma_3} \left\{ 6\gamma_3 p + \frac{2r}{s^2} (p^2 + q^2) \right\} = \\ = 4 \{ 1 + (4\nu^4 - 2) \sin^2 f \},$$

$$a_{12} = \frac{d^2 H}{dp dq} = \frac{4qr}{s^2 \gamma_3} = \pm 4 \sin f \cos f = \pm 4 \sqrt{1 - \frac{k^2}{\nu^4}} \cdot \frac{k}{\nu^2},$$

$$a_{22} = \frac{d^2 H}{dq^2} = \frac{2r}{s^2 \gamma_3} \left\{ 2\gamma_3 p + \frac{2r}{s^2} (p^2 + q^2) \right\} = 0.$$

L'annullarsi di  $a_{22}$ , senza che in generale <sup>(10)</sup> si annulli il discriminante  $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = -16(1 - k^2/\nu^4)k^2/\nu^4$ , mette in evidenza l'instabilità di questa classe di movimenti.

Per l'altro caso,  $k > \nu^2$ , ci riferiremo ai valori che corrispondono al punto II, cioè

$$\gamma_1 > 0, \quad \gamma_2 = 0; \quad p = \frac{s}{2\nu} \gamma_1, \quad q = 0.$$

Abbiamo allora dalle (7) ed (8)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \gamma_1}{\partial p} &= -\frac{1}{\nu s} \gamma_1, & \frac{\partial \gamma_1}{\partial q} &= 0; & \frac{\partial \gamma_2}{\partial p} &= 0, & \frac{\partial \gamma_2}{\partial q} &= -\frac{1}{\nu s} \gamma_1; \\ \frac{\partial \gamma_3}{\partial p} &= \frac{1}{\nu s \gamma_3} \gamma_1^2, & \frac{\partial \gamma_3}{\partial q} &= 0; & \frac{dr}{dp} &= -\frac{2\gamma_1}{\gamma_3}, & \frac{dr}{dq} &= 0, \end{aligned}$$

e per conseguenza

$$\frac{d}{dp} (2\gamma_3 p - \gamma_1 r) = \frac{\gamma_1 + 2\nu^2}{\nu^2 \gamma_3}, \quad \frac{d}{dq} (2\gamma_3 p - \gamma_1 r) = 0.$$

La espressione (7) di  $dH/dp$  (prescindendo dai termini in  $\gamma_2 q$ ,  $q^2$ , che, anche derivati, hanno valore zero) si può porre sotto la forma

$$\frac{2}{s^2 \gamma_3^2} (rp + s^2 \gamma_3) (2\gamma_3 p - \gamma_1 r).$$

Per i valori, cui ci riferiamo, l'ultimo fattore si annulla. Avremo pertanto

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{2}{s^2 \gamma_3^2} (rp + s^2 \gamma_3) \frac{d}{dp} (2\gamma_3 p - \gamma_1 r) = \frac{(\gamma_1 + 2\nu^2)^2}{\nu^4 \gamma_3^2}, \\ a_{12} &= \frac{2}{s^2 \gamma_3^2} (rp + s^2 \gamma_3) \frac{d}{dq} (2\gamma_3 p - \gamma_1 r) = 0. \end{aligned}$$

Essendo ancora, per la (7),

$$\frac{dH}{dq} = \frac{2r}{s^2 \gamma_3^2} \{ -s^2 \gamma_2 \gamma_3 + r(\gamma_1 q - \gamma_2 p) \}$$

<sup>(10)</sup> Rimangono esclusi i due casi  $k=0$  (cerchio) e  $k=\nu^2$  (cardioide), per i quali sarebbe d'uopo ricorrere ai differenziali d'ordine superiore.

ed annullandosi  $\gamma_2$  e  $q$ , potremo ritenere

$$\frac{d^2\mathbf{H}}{dq dp} = \frac{2r}{s^2\gamma_3^2} \left\{ -s^2\gamma_3 \frac{\partial\gamma_2}{\partial p} - rp \frac{\partial\gamma_2}{\partial p} \right\}$$

$$\frac{d^2\mathbf{H}}{dq^2} = \frac{2r}{s^2\gamma_3^2} \left\{ -s^2\gamma_3 \frac{\partial\gamma_2}{\partial q} + r \left( \gamma_1 - p \frac{\partial\gamma_2}{\partial q} \right) \right\},$$

la prima delle quali torna evidentemente a dirci che  $a_{12}$  è zero e la seconda porge

$$a_{22} = \frac{\gamma_1}{v^4} (\gamma_1 + 2v^2).$$

Tanto  $a_{11}$  che  $a_{22}$  risultano positivi (dacchè  $\gamma_1 > 0$ ). Le soluzioni di questo tipo sono dunque stabili.

### 9. - Riassunto.

I movimenti stazionari, che competono ad un corpo rigido pesante, fissato per un suo punto  $\Omega$ , nel caso della KOWALEVSKY, sono:

1) Rotazioni attorno alla verticale diretta nel corpo

a) secondo l'asse baricentrico  $\Omega O$ . La condizione di stabilità è che il baricentro  $O$  cada al disotto del punto di sospensione  $\Omega$ ;

b) secondo un'altra retta del piano meridiano baricentrico (piano che contiene  $O$  e l'asse di simmetria dell'ellissoide di inerzia). Queste rotazioni sono essenzialmente instabili.

2) Rotazioni attorno ad un asse orizzontale, coincidente nel corpo coll'asse  $y$  (asse equatoriale perpendicolare al baricentrico). Il movimento avviene come se l'asse  $y$  fosse tenuto fisso, cioè colle leggi del pendolo composto, e può quindi essere rotatorio progressivo od oscillatorio. Vi ha stabilità solo in quest'ultimo caso, purchè inoltre la deviazione massima dalla verticale dell'asse baricentrico non superi i  $90^\circ$ .

3) Movimenti, nei quali il luogo delle posizioni occupate (rispetto al corpo) da un punto qualunque della verticale, si proietta sul piano equatoriale

a) secondo un cerchio col centro sul prolungamento dell'asse baricentrico  $\Omega O$ . Considerando in particolare quel punto della verticale, che è situato alla distanza 1 da  $\Omega$ , dicasi  $\mu^2$  il raggio del cerchio corrispondente,  $v^2$  la distanza del centro da  $\Omega$ ; la condizione di stabilità è

$$(v^2 - \mu^2)(1 - \mu^4 - 3v^4) > 0;$$

b) secondo una lumaca di PASCAL col polo in  $\Omega$ ; si ha stabilità allora e allora soltanto che la curva non passa per  $\Omega$  (quando cioè  $\Omega$  è, rispetto alla curva, un punto coniugato, e non un punto doppio reale).



V.

SULLA RESISTENZA DEI MEZZI FLUIDI

« Rend. Acc. Lincei », s. 5<sup>a</sup>, fasc. 1<sup>o</sup>, vol. X (1901<sub>2</sub>),  
pp. 3-9.

.....  
.....  
.....

(<sup>1</sup>) A me pare che la legge di NEWTON (resistenza proporzionale al quadrato della velocità  $v$ ), relativa ai fluidi incompressibili, si possa ricavare teoricamente, senza uscire dalla idrodinamica pura.

Per i fluidi compressibili, come ad es. l'aria, la cosa si complica un pochino. Tuttavia, finchè una certa serie converge, ciò che sembra ben plausibile per  $v$  inferiore ad un certo limite (forse 279<sup>m</sup> al secondo, se si riguarda il movimento del fluido come un processo isotermico) (<sup>2</sup>), la legge della resistenza si presenta sotto l'aspetto

$$R = \rho v^2 \left\{ a_0 + a_1 \frac{v^2}{c} + \dots \right\},$$

essendo  $\rho$  la densità del mezzo (opportunamente precisata), le  $a$  costanti, che dipendono soltanto dalla forma del corpo, e  $c$  la costante della legge di BOYLE (quindi  $1/c$  una quantità molto piccola), talchè, per valori moderati di  $v$ , potranno bastare il primo, o al più i primi due termini della serie.

Risultati questi perfettamente conformi all'esperienza (<sup>3</sup>).

(\*) Presentata dal Socio F. SIACCI.

(<sup>1</sup>) Estratto di una lettera al senatore prof. F. SIACCI.

(<sup>2</sup>) Considerazioni dello stesso tipo si potrebbero istituire, riguardandolo invece come adiabatico. Tale del resto andrebbe ritenuto nel caso di grandi velocità. Come probabile velocità limite (per la convergenza dello sviluppo di  $R$ ) si presenta allora quella del suono. Lascierò qui di occuparmene, per non complicare con formole poco istruttive un semplice abbozzo, quale il presente.

(<sup>3</sup>) Cfr. per es. NAZZANI, *Idraulica pratica*, vol. I, pag. 302; LORIA, *Le strade ferrate*, vol. II, cap. I.

Il difficile rimane sempre, anche sotto questo punto di vista, di riconoscere il comportamento della resistenza per  $v$  molto grande (o, se si vuole, la espressione asintotica di  $R$ , al crescere indefinito di  $v$ ). Ciò spiega in certo modo l'origine delle gravi difficoltà, che si incontrano nella balistica, e che Ella ha così luminosamente discusse.

Ecco come io giustifico le mie asserzioni.

Considero, per maggior semplicità, un corpo  $S$  animato di velocità traslatoria uniforme  $v$ , e immerso in un fluido indefinito non sollecitato da forze.

Per effetto del moto di  $S$ , il fluido pure entra in movimento. Con quale legge?

Come è ben noto, l'ipotesi di un movimento *continuo in tutto lo spazio esterno ad  $S$*  conduce a conseguenze affatto inattendibili circa la resistenza del fluido. La risultante delle pressioni, esercitate dal fluido su  $S$ , riesce identicamente nulla; ossia un corpo in moto traslatorio uniforme non incontra alcuna resistenza di mezzo.

Di solito si attribuisce questo risultato, così apertamente in contraddizione coll'esperienza, all'ipotesi teorica che si tratti di fluidi ideali. I fluidi naturali sono viscosi, si dice; nessuna meraviglia dunque che essi si comportino in modo diverso. Ogni difficoltà logica vien così tolta di mezzo. Ma resta pur sempre assai strano che, mentre in moltissime altre questioni la ipotesi della perfetta fluidità risponde con discreta approssimazione alle condizioni di fatto, in questo solo caso se ne tragga una deduzione affatto contraria all'esperienza. Ciò fa pensare che, proprio in questo caso, la posizione analitica del problema introduca qualche elemento, apparentemente innocuo, ma ben più lontano dalla realtà che non sia il carattere di fluido perfetto. Tale è, a mio avviso, l'ipotesi della continuità del movimento del fluido in tutto lo spazio esterno al corpo. Sostituendo questa ipotesi con altra, più conforme all'esperienza quotidiana (delle colonne fluide, che i corpi in movimento un po' rapido si tirano dietro), e del resto perfettamente analoga a quella ammessa nella teoria delle vene fluenti, si pone assai bene in evidenza il fenomeno della resistenza del mezzo, indipendentemente dalla viscosità. Oserei anzi affermare che, per velocità superiori ad un certo limite, l'influenza della viscosità si può ritenere affatto trascurabile.

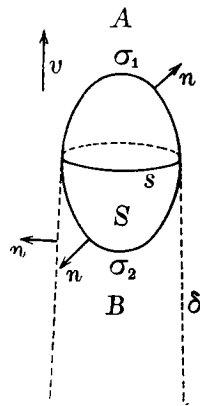
I. - Introduco pertanto le seguenti ipotesi:

1) *Il movimento del fluido, prodotto dal corpo  $S$  (stazionario rispetto allo stesso  $S$ ), presenta dietro il mobile una superficie di discontinuità  $\delta$  estendentesi fino all'infinito a partire da una certa curva  $s$  del contorno  $\sigma$  di  $S$ .*

2) *Le molecole fluide, appartenenti alla regione posteriore  $B$ , si comportano come se fossero rigidamente collegate con  $S$ .*

3) Il moto del fluido nella regione  $A$  è irrotazionale; e soddisfa alle solite condizioni all'infinito (in quanto naturalmente vi si tenda senza uscire da  $A$ ).

Diciamo  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$  le due regioni (anteriore e posteriore) della superficie  $\sigma$  del corpo, separate da  $s$ . Gli assi di riferimento  $x, y, z$  si suppongano rigidamente collegati ad  $S$ , coll'asse  $z$  diretto come la velocità. Sia  $\gamma$  il coseno dell'angolo, che la normale esterna  $n$ , in un punto generico di  $\sigma_1, \sigma_2$  o di  $\delta$ , forma coll'asse  $z$  (chiamando esterna, rispetto a  $\delta$ , la direzione rivolta verso  $A$ );  $v\varphi$  il potenziale di velocità relativo ai punti di  $A$ .



2. - Considero dapprima il caso di un fluido incompressibile di densità costante  $\rho$ , e allora  $\varphi$  deve soddisfare in  $A$  alla equazione indefinita

$$(1) \quad \Delta_2 \varphi = 0 \quad (4),$$

sul contorno  $\sigma_1 + \delta$  alla

$$(2) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial n} = \gamma,$$

nonchè alle condizioni all'infinito.

Dicendo  $p_A$  e  $p_B$  (quest'ultima evidentemente costante) le pressioni in un punto generico di  $A$  e di  $B$ , si ha sopra  $\delta$

$$p_A = p_B.$$

Dacchè in tutto lo spazio  $A$  la pressione è definita in termini di  $\varphi$  dalla relazione

$$\frac{1}{\rho} p_A = C - \frac{v^2}{2} (\Delta_1 \varphi)^2 + v^2 \frac{\partial \varphi}{\partial z} \quad (5),$$

(4) Abbrevio al solito in  $\Delta_2 \varphi$  e  $(\Delta_1 \varphi)^2$  i trinomi

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \quad \text{e} \quad \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2$$

rispettivamente.

(5) Rispetto ad assi fissi  $\xi, \eta, \zeta$ , si avrebbe

$$\frac{1}{\rho} p_A = C - \frac{v^2}{2} \left\{ \left( \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta} \right)^2 \right\} - v \frac{\partial \varphi}{\partial t},$$

immaginando naturalmente il potenziale  $\varphi$  espresso per  $\xi, \eta, \zeta, t$ . Ora si può supporre che  $\varphi(\xi, \eta, \zeta; t)$  provenga dalla espressione qui considerata  $\varphi(x, y, z)$ , ponendovi  $x = \xi, y = \eta, z = \zeta - vt$ . Si ha in tal caso

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta} = \frac{\partial \varphi}{\partial z}; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t} = -v \frac{\partial \varphi}{\partial z},$$

donde la formula sopra scritta.

dove  $C$  è una costante, e che nei punti di  $A$  situati a distanza infinita le derivate di  $\varphi$  si annullano, si ha

$$C = \frac{1}{\rho} p_A^\infty.$$

Considerando in particolare un punto infinitamente distante sopra  $\delta$ , ne deduciamo

$$C = \frac{1}{\rho} p_B,$$

con che la espressione della pressione in un punto qualunque della regione  $A$  diviene

$$(3) \quad p_A = p_B + \rho v^2 \frac{1}{2} \left\{ 2 \frac{\partial \varphi}{\partial z} - (\Delta_1 \varphi)^2 \right\}.$$

Nei punti di  $\delta$  si ha conseguentemente

$$(4) \quad (\Delta_1 \varphi)^2 - 2 \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0,$$

e così in definitiva la incognita funzione  $\varphi$  deve soddisfare alle equazioni (1), (2), (4). Se  $\delta$  fosse data a priori, le (1), (2) (tenuto conto delle condizioni all'infinito) basterebbero a determinare la  $\varphi$ . Ma  $\delta$  non è data, e si tratta appunto di determinarla in modo da rendere simultaneamente soddisfatte le (1), (2), (4). Dal punto di vista del rigore matematico incapiamo qui in una questione di esistenza, che cogli attuali mezzi analitici non si saprebbe discutere. Fisicamente la questione di esistenza viene sostituita, e risolta in senso affermativo, dalle ipotesi sopra dichiarate.

Ciò posto, l'essenziale per noi si è di osservare che la definizione di  $\varphi$ , in base alle (1), (2), (4), dipende unicamente dalla forma del corpo  $S$ , e non dalla velocità  $v$ , nè dalla densità  $\rho$  del mezzo.

Di qua segue immediatamente la legge di NEWTON. Infatti la resistenza totale  $R$ , incontrata dal corpo nel suo movimento, è data da

$$R = \int_{\sigma} p \gamma d\sigma = \int_{\sigma_1} p_A \gamma d\sigma_1 + \int_{\sigma_2} p_B \gamma d\sigma_2.$$

Ma,  $p_B$  essendo costante e  $\sigma_1 + \sigma_2$  costituendo una superficie chiusa,

$$\int_{\sigma_2} p_B \gamma d\sigma_2 = - \int_{\sigma_1} p_B \gamma d\sigma_1;$$

quindi, posto per  $p_A$  il suo valore (3),

$$(5) \quad R = \rho v^2 \int_{\sigma_1} \frac{1}{2} \left\{ 2 \frac{\partial \varphi}{\partial z} - (\Delta_1 \varphi)^2 \right\} \gamma d\sigma_1,$$

e ciò dimostra l'asserto.

Prendendo  $f = \varphi - z$ , si ha in  $vf$  il potenziale di velocità di una corrente (di velocità limite  $v$  nel senso delle  $z$  negative) interrotta dal corpo  $S$ . La forza, che è necessario vincere perchè  $S$  non sia trasportato dalla corrente, è ancora espressa dalla (5), ossia, introducendovi  $f$  al posto di  $\varphi$ , da

$$R = \rho v^2 \int_{\sigma_1} \frac{1}{2} \{ 1 - (\Delta_1 f)^2 \} \gamma d\sigma_1.$$

Questa formula è un'ovvia estensione, al caso di tre dimensioni, di quella stabilita da Lord RAYLEIGH per la pressione, che si esercita sopra l'unità di lunghezza di una lamina infinitamente lunga a orli paralleli (\*).

3. - Venendo ora al caso di fluidi elastici, avremo, supposta la validità della legge di BOYLE,

$$p = c\rho \quad (c \text{ costante}),$$

$$P = \int \frac{d\rho}{\rho} = c \log \rho.$$

La equazione di continuità assume l'aspetto

$$\frac{d \log \rho}{dt} + v \Delta_2 \varphi = 0,$$

ossia anche

$$\frac{1}{c} \frac{dP}{dt} + v \Delta_2 \varphi = 0;$$

mentre le equazioni di EULERO si riassumono in

$$P = C + v^2 \frac{1}{2} \left\{ 2 \frac{\partial \varphi}{\partial z} - (\Delta_1 \varphi)^2 \right\}.$$

(\*) Cfr. per es. KIRCHHOFF, *Vorlesungen über mathematische Physik*, B. I, pag. 307.

Eliminando  $P$  fra queste due equazioni e ponendo

$$\frac{v^2}{c} = \lambda,$$

$$\frac{1}{v} \frac{d}{dt} \frac{1}{2} \left\{ 2 \frac{\partial \varphi}{\partial z} - (\Delta_1 \varphi)^2 \right\} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ 2 \frac{\partial \varphi}{\partial z} - (\Delta_1 \varphi)^2 \right\} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} \left\{ 2 \frac{\partial \varphi}{\partial z} - (\Delta_1 \varphi)^2 \right\} + \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial z} - 1 \right\} \frac{\partial}{\partial z} \left\{ 2 \frac{\partial \varphi}{\partial z} - (\Delta_1 \varphi)^2 \right\} \right] = \Theta \varphi,$$

si ha

$$(1 \text{ bis}) \quad \Delta_2 \varphi + \lambda \Theta \varphi = 0.$$

Un ragionamento identico al precedente mostra che

$$C = P_B = c \log p_B;$$

quindi

$$(3 \text{ bis}) \quad p_A - p_B = p_B \left[ e^{\frac{v^2}{c} \frac{1}{2} \left\{ 2 \frac{\partial \varphi}{\partial z} - (\Delta_1 \varphi)^2 \right\}} - 1 \right],$$

$$(5 \text{ bis}) \quad R = p_B \int_{\sigma_1} \left[ e^{\frac{v^2}{c} \frac{1}{2} \left\{ 2 \frac{\partial \varphi}{\partial z} - (\Delta_1 \varphi)^2 \right\}} - 1 \right] \gamma d\sigma_1.$$

Le condizioni determinative di  $\varphi$  sono ora la equazione indefinita (1<sup>bis</sup>) colle (2), (4) e condizioni all'infinito.

Per  $\lambda$  abbastanza piccolo (\*), è presumibile che la espressione analitica di  $\varphi$  si possa sviluppare in serie di potenze di  $\lambda$

$$\varphi_0 + \lambda \varphi_1 + \dots;$$

lo stesso avviene allora per  $e^{\lambda \frac{1}{2} \left\{ 2 \frac{\partial \varphi}{\partial z} - (\Delta_1 \varphi)^2 \right\}}$ ; quindi per  $R$ . Il primo termine dello sviluppo di  $R$  è

$$p_B \frac{v^2}{c} \int_{\sigma_1} \frac{1}{2} \left\{ 2 \frac{\partial \varphi_0}{\partial z} - (\Delta_1 \varphi_0)^2 \right\} \gamma d\sigma_1 = \varrho_B v^2 \int_{\sigma_1} \frac{1}{2} \left\{ 2 \frac{\partial \varphi_0}{\partial z} - (\Delta_1 \varphi_0)^2 \right\} \gamma d\sigma_1,$$

che corrisponde alla resistenza di un fluido incompressibile, avente dappertutto la densità costante della regione  $B$ .

(\*) Se si tratta dell'aria, si ha in unità [C.G.S.]  $c = (1,013/1,293) \cdot 10^9$ ; quindi, qualora basti per la convergenza dello sviluppo che sia  $\lambda < 1$ , il limite per  $v$ , in metri, si trova essere  $v = 279$  m.

Badando che  $\lambda = v^2/c$ , risulta in definitiva

$$R = \rho_B v^2 \left\{ a_0 + a_1 \frac{v^2}{c} + \dots \right\},$$

dove i coefficienti  $a$  dipendono esclusivamente dalla forma del corpo  $S$ .

4. - *Osservazione.* La circostanza che, supponendo il movimento del fluido ovunque continuo, la resistenza incontrata da  $S$  riesce identicamente nulla si suol rendere intuitiva per via energetica, ragionando come segue.

Dacchè si tratta di un fluido perfetto, la forza viva, posseduta da  $S$  in un generico istante, non può cambiarsi in altra forma di energia (termica o chimica per es.); per il carattere stazionario (rispetto ad  $S$ ) del movimento del fluido, determinato dall'uniforme traslazione di  $S$ , non vi può essere trasmissione di forza viva da  $S$  al fluido. Dunque l'energia cinetica di  $S$  rimane inalterata, il che equivale appunto ad una resistenza nulla.

Molto opportunamente il sig. FÖPPL, nelle sue *Vorlesungen über technische Mechanik* (\*), aggiunge a questo proposito che non può nemmeno sorgere il dubbio che si stabilisca un flusso (stazionario rispetto ad  $S$ ) di energia accumulantesi all'infinito, dato il comportamento all'infinito del potenziale di velocità, quando appunto lo si determina in base alle ipotesi consuete.

Colle nostre ipotesi il comportamento è diverso, poichè concorre all'infinito anche la superficie  $\delta$ . Il flusso non è più identicamente nullo, e questo spiega la sottrazione di forza viva, che un fluido, anche perfetto, determina colla sua resistenza nei corpi in movimento. La energia, sottratta ad  $S$ , non si distrugge naturalmente, nè si trasforma, ma soltanto si trasporta all'infinito e vi si accumula; in teoria. Quel che avviene nella realtà si è una dispersione per la massa fluida di energia cinetica, assorbita dalle varie resistenze passive. Tale dispersione ha però rispetto al movimento di  $S$  (che qui costituisce la parte essenziale del fenomeno) gli stessi effetti del trasporto a distanza infinita contemplato dalla teoria.

. . . . .  
 . . . . .

(\*) B. IV, pag. 367.





VI.

SULLA FORMA DELLO SVILUPPO  
DELLA FUNZIONE PERTURBATRICE

« Atti Ist. Veneto di Sc., lett. ed arti », t. LX (1901).  
pp. 653-661.

I caratteri analitici, che competono allo sviluppo della funzione perturbatrice, si sogliono ricavare a posteriori, dopo aver effettivamente eseguito, o almeno indicato nelle sue linee generali, il calcolo, che conduce alla valutazione dei coefficienti <sup>(1)</sup>.

Se ci si accontenta di riconoscere le proprietà qualitative dello sviluppo, si può — cosa facilmente prevedibile — evitare ogni calcolo, raggiungendo assai presto lo scopo.

Ho seguito questo criterio nelle lezioni di Meccanica superiore, tenute quest'anno nella R. Università di Padova. Lo svolgimento non mi sembra del tutto privo di interesse dal punto di vista didattico, ond'io mi permetto di farne oggetto della presente comunicazione.

1. — Poniamo

$$(1) \quad e \cos \tilde{\omega} = \xi, \quad e \sin \tilde{\omega} = \eta,$$

$$\begin{cases} \zeta = \lambda - \tilde{\omega}, \\ u = \zeta + \delta = \lambda - \tilde{\omega} + \delta, \end{cases}$$

dove si designa al solito con  $e$  la *eccentricità*, con  $\tilde{\omega}$  la *longitudine del perielio*, con  $\zeta$  la *anomalia media*, con  $u$  la *anomalia eccentrica*;  $\lambda$  rappresenta allora la *longitudine media*.

La equazione di KEPLER

$$u - e \sin u = \zeta,$$

---

<sup>(1)</sup> Cfr. per es. TISSERAND, *Mécanique céleste*, t. I, cap. XVIII.

sostituendovi per  $\zeta$  ed  $u$  i valori testè scritti e usufruendo delle (1), assume l'aspetto

$$\delta - \xi \operatorname{sen}(\lambda + \delta) + \eta \operatorname{cos}(\lambda + \delta) = 0.$$

Questa equazione è atta a definire la  $\delta = u - \zeta = e \operatorname{sen} u$  come funzione dei tre argomenti  $\lambda$ ,  $\xi$ ,  $\eta$  (periodica rispetto a  $\lambda$ ). Infatti la derivata del suo primo membro, rapporto a  $\delta$ , è eguale all'unità per  $\xi = \eta = 0$ . Si ha poi

$$e \operatorname{cos} u = \xi \operatorname{cos}(\lambda + \delta) + \eta \operatorname{sen}(\lambda + \delta),$$

talchè  $u - \zeta$ ,  $e \operatorname{sen} u$ ,  $e \operatorname{cos} u$  si presentano tutte come funzioni dei tre argomenti  $\lambda$ ,  $\xi$ ,  $\eta$ , regolari nell'intorno del valore zero di  $\xi$ ,  $\eta$ , e periodiche rispetto a  $\lambda$  (di periodo  $2\pi$ ).

Lo stesso può affermarsi per le funzioni trigonometriche

$$\operatorname{sen}(w - u), \quad \operatorname{cos}(w - u),$$

rappresentando  $w$  la *anomalia vera*.

Infatti, dalle formule

$$\operatorname{cos} w = \frac{\operatorname{cos} u - e}{1 - e \operatorname{cos} u},$$

$$\operatorname{sen} w = \frac{\sqrt{1 - e^2} \operatorname{sen} u}{1 - e \operatorname{cos} u},$$

si trae

$$\operatorname{sen}(w - u) = \frac{e \operatorname{sen} u - (1 - \sqrt{1 - e^2}) \operatorname{sen} u \operatorname{cos} u}{1 - e \operatorname{cos} u},$$

$$\operatorname{cos}(w - u) = \frac{1 - e \operatorname{cos} u - (1 - \sqrt{1 - e^2}) \operatorname{sen}^2 u}{1 - e \operatorname{cos} u}.$$

Il denominatore  $1 - e \operatorname{cos} u$  non si annulla nell'intorno considerato, poichè, per  $\xi = \eta = 0$ , anche  $e = 0$ , e quindi esso si riduce all'unità. D'altra parte la differenza  $1 - \sqrt{1 - e^2}$  è una funzione regolare di  $e^2$  (per  $|e^2| < 1$ ), che contiene  $e^2$  a fattore. Più precisamente si può porre

$$1 - \sqrt{1 - e^2} = \frac{1}{2} e^2 \{1 + e^2 P(e^2)\},$$

designando  $P$  una funzione regolare del suo argomento, nell'intorno del valore zero.

Dacchè, per le (1),

$$e^2 = \xi^2 + \eta^2,$$

la  $P$  risulta anche funzione regolare di  $\xi, \eta$ , nell'intorno di  $\xi = \eta = 0$ .

Le precedenti espressioni di  $\text{sen}(w-u)$ ,  $\text{cos}(w-u)$  divengono

$$\text{sen}(w-u) = \frac{e \text{sen } u}{1 - \text{cos } u} \left\{ 1 - \frac{1}{2} e \text{cos } u [1 + (\xi^2 + \eta^2)P] \right\},$$

$$\text{cos}(w-u) = 1 - \frac{1}{2} \frac{e^2 \text{sen}^2 u}{1 - e \text{cos } u} [1 + (\xi^2 + \eta^2)P],$$

con che, per quanto s'è osservato circa  $e \text{sen } u$ ,  $e \text{cos } u$ , rimane giustificato l'asserto.

Se si bada che il raggio vettore  $r$ , la longitudine vera  $v$  e i coseni direttori  $\alpha, \beta, \gamma$  del raggio vettore sono definiti dalle equazioni

$$r = a(1 - \text{cos } u);$$

$$v = w + \tilde{\omega} = w + \lambda - \zeta = (w-u) + (u-\zeta) + \lambda;$$

$$\alpha = \text{cos}(v-\vartheta) \text{cos } \vartheta - \text{sen}(v-\vartheta) \text{sen } \vartheta \text{cos } \varphi,$$

$$\beta = \text{cos}(v-\vartheta) \text{sen } \vartheta + \text{sen}(v-\vartheta) \text{cos } \vartheta \text{cos } \varphi,$$

$$\gamma = \text{sen}(v-\vartheta) \text{sen } \varphi,$$

risulta anche:

$r, \text{sen } v, \text{cos } v, \alpha, \beta, \gamma$  sono tutte funzioni periodiche di  $\lambda$ , regolari rispetto a  $\xi, \eta$  nell'intorno di  $\xi = 0, \eta = 0$ . Vi appaiono inoltre gli elementi  $a$  (*semiasse maggiore*),  $\vartheta$  (*longitudine del nodo*),  $\varphi$  (*inclinazione*).

Come, a mezzo delle (1), abbiamo sostituito ai due elementi  $e, \tilde{\omega}$  le combinazioni  $\xi, \eta$ , che si annullano con  $e$ , così sarà ora opportuno introdurre al posto di  $\vartheta$  e  $\sigma$  due altri argomenti

$$(2) \quad p = \text{sen} \frac{1}{2} \varphi \text{cos } \vartheta, \quad q = \text{sen} \frac{1}{2} \varphi \text{sen } \vartheta,$$

che si annullano entrambi per  $\varphi = 0$ .

Si noti che

$$\text{cos} \frac{1}{2} \varphi = \sqrt{1 - \text{sen}^2 \frac{1}{2} \varphi} = \{1 - (p^2 + q^2)\}^{1/2}$$

riesce funzione regolare di questi nuovi argomenti nell'intorno del valore zero. Così pure  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ , dacchè

$$\begin{aligned}\alpha &= \cos(v - \vartheta) \cos \vartheta - \sin(v - \vartheta) \sin \vartheta + \sin(v - \vartheta) \sin \vartheta (1 - \cos \varphi) \\ &= \cos v + 2q(p \sin v - q \cos v),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\beta &= \cos(v - \vartheta) \sin \vartheta + \sin(v - \vartheta) \cos \vartheta - \sin(v - \vartheta) \cos \vartheta (1 - \cos \varphi) \\ &= \sin v - 2p(p \sin v - q \cos v),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\gamma &= \sin(v - \vartheta) \sin \varphi = 2 \cos \frac{1}{2} \varphi (p \sin v - q \cos v) = \\ &= 2\{1 - (p^2 + q^2)\}^{1/2} (p \sin v - q \cos v).\end{aligned}$$

In definitiva è lecito ritenere:

*Le coordinate eliocentriche  $x$ ,  $y$ ,  $z$  (eguali rispettivamente ad  $r\alpha$ ,  $r\beta$ ,  $r\gamma$ ), considerate come funzioni dei sei argomenti  $\lambda$ ,  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $p$ ,  $q$ ,  $a$  sono periodiche rapporto a  $\lambda$  e regolari nell'intorno di  $\xi = \eta = p = q = 0$ ; dipendono da  $a$ , in quanto lo contengono semplicemente a fattore.*

**2.** - Se si considera un generico altro corpo  $P'$ , contraddistinguendo con apici le lettere, che ad esso si riferiscono, potremo dire altrettanto di  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$  rispetto agli argomenti  $\lambda'$ ,  $\xi'$ ,  $\eta'$ ,  $p'$ ,  $q'$ ,  $a'$ , e quindi della funzione

$$\Delta^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2,$$

rispetto agli uni e agli altri, colla sola differenza, nei riguardi di  $a$  e di  $a'$ , che risulta omogenea di secondo grado.

Per  $a \geq a'$  (supponendo beninteso che  $a$  ed  $a'$  abbiano valori reali), la funzione  $\Delta^2$  non si annulla, quando vi si fa

$$\xi = \eta = p = q = \xi' = \eta' = p' = q' = 0.$$

Infatti, per le (1), (2), ciò equivale a supporre nulle le eccentricità e le inclinazioni;  $\Delta^2$  rappresenta allora il quadrato della distanza di due punti  $P$ ,  $P'$  appartenenti a circonferenze concentriche, situate in un medesimo piano e di differente raggio; nè può quindi annullarsi.

Abbiamo di conseguenza:

*L'inversa della distanza,  $1/\Delta$ , è una funzione dei dodici argomenti*

$$\begin{aligned}\lambda, \quad \xi, \quad \eta, \quad p, \quad q, \quad a, \\ \lambda', \quad \xi', \quad \eta', \quad p', \quad q', \quad a',\end{aligned}$$

periodica rispetto a  $\lambda$ ,  $\lambda'$  e regolare in un certo intorno dei valori

$$\xi = \eta = p = q = \xi' = \eta' = p' = q' = 0,$$

qualunque sieno  $a$  ed  $a'$  (purchè si intende reali e non coincidenti), rispetto ai quali essa è inoltre omogenea di grado  $-1$ .

Sarà dunque  $1/\Delta$  sviluppabile in serie trigonometrica di  $\lambda$  e  $\lambda'$  e in serie di potenze degli otto argomenti  $\xi, \eta, \dots, q'$ , per valori abbastanza piccoli di questi argomenti. È evidente, che, sostituendo agli argomenti  $\xi, \eta, \dots, q'$ ,

$$\begin{aligned} \bar{\xi} &= \xi + i\eta, & \bar{\eta} &= \xi - i\eta, \\ \bar{p} &= p + iq, & \bar{q} &= p - iq, \text{ ecc.} \end{aligned} \quad (i = \sqrt{-1}),$$

la funzione  $1/\Delta$  conserva i medesimi caratteri. Più generalmente ciò avviene per qualsiasi trasformazione, che faccia passare, dagli otto argomenti  $\xi, \eta, \dots, q'$ , ad altri otto annullantisi tutti per  $\xi = \eta = \dots = q = 0$ , e sia biunivoca e regolare nell'intorno di questi valori. La osservazione è importante perchè si applica tra l'altro alle combinazioni

$$\begin{aligned} \beta^{1/2} a^{1/4} \{1 + (\xi^2 + \eta^2)P\}^{1/2} \xi, & \quad -\beta^{1/2} a^{1/4} \{1 + (\xi^2 + \eta^2)P\}^{1/2} \eta, \\ 2\beta^{1/2} a^{1/4} \{1 - (\xi^2 + \eta^2)\}^{1/4} p, & \quad 2\beta^{1/2} a^{1/4} \{1 - (\xi^2 + \eta^2)\}^{1/4} q, \end{aligned}$$

che costituiscono, assieme a  $\sqrt{a}$ ,  $\lambda$  una sestupla canonica <sup>(2)</sup>; ( $\beta$  rappresenta una costante, che dipende soltanto dalle masse, e  $P$  la funzione, così designata al n. 1).

**3.** - Partiamoci dallo sviluppo di  $1/\Delta$  relativo alle variabili  $\bar{\xi}, \bar{\eta}, \dots, \bar{q}'$ , cioè

$$(3) \quad \frac{1}{\Delta} = \sum_0^{\infty} A \bar{\xi}^m \bar{\eta}^n \bar{p}^\mu \bar{q}^\nu \bar{\xi}'^{m'} \bar{\eta}'^{n'} \bar{p}'^{\mu'} \bar{q}'^{\nu'},$$

in cui i coefficienti  $A$  dipendono ancora da  $\lambda, \lambda', a, a'$ , essendo periodici rispetto a  $\lambda, \lambda'$ , omogenei di grado  $-1$  rispetto ad  $a, a'$ .

Riponendo per  $\bar{\xi}, \bar{\eta}, \dots, \bar{q}'$  i valori

$$eE^{i\bar{\omega}}, eE^{-i\bar{\omega}}, \dots, \text{sen } \frac{1}{2} \varphi' E^{-i\theta'} \quad (3),$$

(<sup>1</sup>) Cfr. per. es. POINCARÉ, *Mécanique céleste*, t. I, n. 12.

(<sup>2</sup>) Per evitare ambiguità, designiamo con  $E$  la base dei logaritmi naturali.

che loro spettano, a tenore delle (1), (2), si ha

$$\frac{1}{\Delta} = \sum_{\substack{m, n, \dots, \nu \\ 0}}^{\infty} \left\{ A e^{m+n} e'^{m'+n'} \left( \text{sen } \frac{1}{2} \varphi \right)^{\mu+\nu} \left( \text{sen } \frac{1}{2} \varphi' \right)^{\mu'+\nu'} \times \right. \\ \left. \times E^{i\{(m-n)\tilde{\omega} + (m'-n')\tilde{\omega}' + (\mu-\nu)\vartheta + (\mu'-\nu')\vartheta'\}} \right\}.$$

In un termine generico l'esponente  $m+n$  di  $e$  è evidentemente eguale, per  $m > n$ , a  $|m-n| + 2n$ ; per  $m < n$ , a  $|m-n| + 2m$ . Esso supera, dunque il valore assoluto del coefficiente  $m-n$  di  $\tilde{\omega}$  per un numero pari, positivo o nullo. Lo stesso per gli esponenti di  $e'$ ,  $\text{sen } \frac{1}{2}\varphi$ ,  $\text{sen } \frac{1}{2}\varphi'$ , rispetto ai coefficienti di  $\tilde{\omega}'$ ,  $\vartheta$ ,  $\vartheta'$ .

Immaginando anche i coefficienti  $A$  sviluppati in serie trigonometrica degli argomenti  $\lambda$  e  $\lambda'$ , si riconosce immediatamente che un termine qualunque dello sviluppo di  $1/\Delta$  rientra nel tipo

$$\frac{B}{a'} e^{\mathbf{K}e' \mathbf{K}'} \left( \text{sen } \frac{1}{2} \varphi \right)^{\mathbf{J}} \left( \text{sen } \frac{1}{2} \varphi' \right)^{\mathbf{J}'} \frac{\cos}{\text{sen}} \{ h\lambda + h'\lambda' + k\tilde{\omega} + k'\tilde{\omega}' + j\vartheta + j'\vartheta' \},$$

dove  $B$  dipende soltanto dal rapporto  $a/a'$ ;  $\mathbf{K}$ ,  $\mathbf{K}'$ , ...,  $\mathbf{J}$  sono numeri interi, e si ha  $\mathbf{K} = |k| +$  un numero pari, positivo o nullo, colle altre analoghe per  $\mathbf{K}'$ ,  $\mathbf{J}$ ,  $\mathbf{J}'$ .

Dacchè tutti gli sviluppi considerati sono assolutamente convergenti, è lecito operare come con le somme. In particolare per es. si potranno pensare raggruppati tutti i termini del medesimo ordine (\*), ovvero tutti quelli, cui compete un medesimo fattore trigonometrico.

Adottiamo questo secondo criterio e poniamo per brevità

$$h\lambda + h'\lambda' + k\tilde{\omega} + k'\tilde{\omega}' + j\vartheta + j'\vartheta' = D.$$

Lo sviluppo di  $1/\Delta$  si presenta sotto la forma

$$\frac{1}{\Delta} = \sum (C \cos D + I' \text{sen } D),$$

ma si può inoltre mostrare che ogni coefficiente  $I'$  è identicamente nullo.

Infatti lo scambio simultaneo di  $\lambda$ ,  $\lambda'$ ,  $\tilde{\omega}$ ,  $\tilde{\omega}'$ ,  $\vartheta$ ,  $\vartheta'$  in  $-\lambda$ ,  $-\lambda'$ ,  $-\tilde{\omega}$ ,  $-\tilde{\omega}'$ ,  $-\vartheta$ ,  $-\vartheta'$ , (e quindi di ogni  $D$  in  $-D$ ) non altera  $1/\Delta$  (\*), talchè

(\*) Per ordine di un termine si intende la somma  $\mathbf{K} + \mathbf{K}' + \mathbf{J} + \mathbf{J}'$ .

(\*) Basta osservare che la distanza  $PP'$  non cambia, se si fanno ruotare di  $180^\circ$  gli assi  $y$ ,  $z$  attorno all'asse  $x$  (si invertono cioè sopra entrambi le direzioni positive); e nemmeno, se si conviene di contare in senso opposto gli angoli nei piani delle due orbite, definite, rispetto al primitivo sistema, dai valori  $\alpha$ ,  $e$ , ...,  $\vartheta'$ , che si considerano. Con queste varianti  $\lambda$ ,  $\tilde{\omega}$ ,  $\vartheta$ ;  $\lambda'$ ,  $\tilde{\omega}'$ ,  $\vartheta'$ , si cambiano rispettivamente in  $-\lambda$ ,  $-\tilde{\omega}$ ,  $-\vartheta$ ;  $-\lambda'$ ,  $-\tilde{\omega}'$ ,  $-\vartheta'$ , tutto il resto rimanendo invariato.

deve essere identicamente

$$\sum (C \cos D + F \sin D) = \sum (C \cos D - F \sin D),$$

donde appunto  $F = 0$ .

Ancora nella

$$(4) \quad \frac{1}{\Delta} = \sum C \cos D$$

compariscono soltanto termini, per cui la somma

$$s = h + h' + k + k' + j + j'$$

si annulla. Per dimostrarlo, esprimiamo che  $1/\Delta$  non dipende dalla orientazione della coppia coordinata  $x, y$  nel proprio piano. Quando la si fa ruotare di un angolo arbitrario  $\chi$ , gli argomenti  $\lambda, \tilde{\omega}, \vartheta, \lambda', \tilde{\omega}', \vartheta'$  (ed essi soltanto) aumentano di  $-\chi$ ; deve perciò essere identicamente

$$\frac{1}{\Delta} = \sum C \cos D = \sum C \cos (D - s\chi) = \sum C (\cos D \cos s\chi + \sin D \sin s\chi),$$

donde

$$C \cos s\chi = C, \quad C \sin s\chi = 0.$$

Per quei termini, che compariscono effettivamente nello sviluppo,  $C$  non è nullo, talchè deve annullarsi  $s\chi$ , per qualunque  $\chi$ , ossia appunto  $s = 0$ , giusta l'asserto.

Lo sviluppo (3), da cui siamo partiti, vale per valori abbastanza piccoli di  $|\bar{\xi}|, |\bar{\eta}|, \dots, |\bar{q}'|$ . In causa delle (1), (2), questa condizione rimane soddisfatta (per qualsiasi valore reale di  $\tilde{\omega}, \vartheta, \tilde{\omega}', \vartheta'$ ) purchè sieno abbastanza piccoli

$$|e|, \quad |e'|, \quad \left| \sin \frac{1}{2} \varphi \right|, \quad \left| \sin \frac{1}{2} \varphi' \right|.$$

Ne viene: *Lo sviluppo (4) della funzione  $1/\Delta$  è certamente valido (cioè convergente assolutamente e uniformemente) per valori abbastanza piccoli delle eccentricità e delle inclinazioni. In ogni termine l'argomento  $D$  ha la forma*

$$h\lambda + h'\lambda' + k\tilde{\omega} + k'\tilde{\omega}' + j\vartheta + j'\vartheta',$$

dove i numeri interi  $h, h', \dots, j'$  verificano la relazione

$$h + h' + \dots + j' = 0;$$

il coefficiente  $C$  possiede il fattore

$$e^{|k|} e'^{|k'|} \left( \operatorname{sen} \frac{1}{2} \varphi \right)^{|j|} \left( \operatorname{sen} \frac{1}{2} \varphi' \right)^{|j'|} ;$$

risulta cioè dal prodotto di questo fattore per una funzione di  $e$ ,  $e'$ ,  $\operatorname{sen} \frac{1}{2} \varphi$ ,  $\operatorname{sen} \frac{1}{2} \varphi'$ ;  $a$ ,  $a'$ , regolare per valori abbastanza piccoli dei primi quattro argomenti, omogenea di grado  $-1$  in  $a$ ,  $a'$ .

4. — Rammentando la composizione della funzione perturbatrice nel problema generale degli  $n$  corpi, e come la parte complementare di essa possa risguardarsi proveniente, per duplice derivazione rispetto ad argomenti di tipo  $\lambda$ , da trinomi della forma  $xx' + yy' + zz'$  (\*), possiamo infine concludere:

*Tutte le forme di sviluppo, qui indicate, sono senz'altro valide per la funzione perturbatrice, dovendosi soltanto considerare tante serie di sei argomenti, quanti sono i corpi del sistema oltre il centrale.*

---

(\*) POINCARÉ, *Sur une forme nouvelle des équations du problème des trois corps*, « Bulletin Astronomique », t. XIV, 1897; oppure « Acta Mathematica », t. 12, 1897.



## VII.

### SUL MASSIMO CIMENTO DINAMICO NEI SISTEMI ELASTICI

« Nuovo Cimento », s. 5<sup>a</sup>, vol. II (settembre 1901).  
pp. 188-196.

Il BELTRAMI ha insegnato <sup>(1)</sup> che « vera misura del cemento, a cui è messa in ogni punto di un corpo elastico la coesione molecolare, è il valore, che assume in quel punto la energia potenziale unitaria delle forze elastiche ». La condizione di coesione, o di stabilità che dir si voglia, è che l'energia elastica suddetta si mantenga in ciascun punto del corpo inferiore ad un certo limite.

In pratica si potrà spesso accontentarsi di un criterio, approssimato, desunto dal valor medio, e ritenere sufficiente che non oltrepassi un certo limite <sup>(2)</sup> il complessivo ammontare  $P$  dell'energia elastica del sistema considerato <sup>(3)</sup>.

Ciò posto, qualora il sistema si trovi in movimento sotto l'azione di date forze, la  $P$  sarà in generale variabile, e, per lo scopo accennato, occorrerà aver riguardo al suo limite superiore  $P_a$ .

Mi propongo di far vedere che questo limite superiore ammette una espressione assai comoda e affatto generale in funzione di due soli elementi,  $P_s$  ed  $E$ , essendo  $P_s$  il valore di  $P$  corrispondente allo stato di equilibrio sotto l'azione delle stesse forze, ed  $E$  la energia totale dello stato iniziale. Si ha precisamente

$$P_a = 2P_s + E + 2\sqrt{P_s(P_s + E)}.$$

<sup>(1)</sup> *Sulle condizioni di resistenza dei corpi elastici*, « Rend. del R. Istituto Lombardo », serie 2, vol. 18, 1885.

<sup>(2)</sup> Se si tratta, come avviene per lo più, di corpi omogenei (massicci, od anche di forma prismatoidica allungata), questo limite non sarà altro che il prodotto del limite specifico, considerato da BELTRAMI, per il volume del corpo e per un opportuno coefficiente dipendente dai rapporti delle dimensioni.

<sup>(3)</sup> È ciò che il CASTIGLIANO (*Théorie de l'équilibre des systèmes élastiques*, Torino, 1879) chiama lavoro di deformazione, del quale elemento, come appunto osserva BELTRAMI al luogo citato, egli aveva riconosciuta tutta l'importanza, mostrando il vantaggio di usarne sistematicamente anche nelle applicazioni tecniche.

Il calcolo semplicissimo, con cui si perviene a questa relazione, mostra in pari tempo che gli spostamenti e le tensioni, che si destano nei singoli punti del sistema nello stato di massima sollecitazione dinamica ( $P=P_d$ ), stanno agli elementi analoghi della sollecitazione statica nel rapporto di  $1 + \sqrt{1 + E/P_s}$  all'unità. In particolare, per  $E = 0$ , spostamenti e tensioni sono doppi, per  $E = 3P_s$ , tripli, ecc. (4).

Osservazioni di questo genere non sono certo nuove. Basta pensare al noto esempio di un filo, che, sotto l'azione di un dato peso tensore, repentinamente applicato, a partire dalla quiete, subisce, prima che si stabilisca l'equilibrio, un allungamento massimo doppio del definitivo. È pur noto che conclusioni analoghe stanno in generale, come si può per es. ricavare dalla teoria delle soluzioni fondamentali (5).

Qui si vede come tali circostanze effettivamente si collegano allo stato di massima coazione elastica, raggiungibile per date forze e date condizioni iniziali.

I. - Le equazioni indefinite del moto elastico, colle notazioni consuete, sono

$$(1) \quad \begin{cases} \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \rho X - \left\{ \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} \right\}, \\ \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \rho Y - \left\{ \frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z} \right\}, \\ \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \rho Z - \left\{ \frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z} \right\}, \end{cases}$$

dovendosi in esse ritenere le componenti degli sforzi  $X_x$ ,  $X_y$ , ecc. derivate dal potenziale  $\Pi$  delle forze elastiche rapporto alle corrispondenti componenti di deformazione  $x_x$ ,  $x_y$ , ecc.

Si deve poi avere sul contorno  $\sigma$  dello spazio  $S$  occupato dal corpo, che si considera:

$$(2) \quad \begin{cases} X_x \alpha + X_y \beta + X_z \gamma = L, \\ Y_x \alpha + Y_y \beta + Y_z \gamma = M, \\ Z_x \alpha + Z_y \beta + Z_z \gamma = N, \end{cases}$$

il significato delle lettere essendo qui pure manifesto.

(4) Per i sistemi con un sol grado di libertà queste considerazioni sono già state istituite dal Prof. GUIDI nella Nota *Sopra un problema di elasticità*, « Atti della R. Accademia di Torino », vol. 34, 1898.

(5) Cfr. LOVE, *Treatise on the mathematical theory of elasticity*, Cambridge, 1892-93; vol. 1, art. 81.

Rappresenteremo con

$$P = - \int_s \Pi dS$$

l'energia elastica totale, posseduta dal corpo in un generico istante  $t$ , con

$$T = \frac{1}{2} \int_s \left\{ \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right\} dS$$

la sua forza viva, con

$$U = \int_s \rho \{ Xu + Yv + Zw \} dS + \int_\sigma \{ Lu + Mv + Nw \} d\sigma$$

il lavoro compiuto dalle forze esterne nel passaggio del corpo dalla configurazione naturale ( $u = v = w = 0$ ) a quella relativa all'istante considerato. Con  $P_0$ ,  $T_0$ ,  $U_0$  intenderemo i valori delle stesse quantità nell'istante iniziale  $t_0$ .

Moltiplichiamo ordinatamente le (1) per  $(\partial u/\partial t) dt dS$ ,  $(\partial v/\partial t) dt dS$ ,  $(\partial w/\partial t) dt dS$ , sommiamo ed integriamo, estendendo l'integrazione a tutto  $S$  e a un intervallo generico  $t_0$ ,  $t$ . Tenendo conto delle (2), si trova con trasformazioni ben note

$$(T + P) - (T_0 + P_0) = \int_{t_0}^t dt \int_s \rho \left\{ X \frac{\partial u}{\partial t} + Y \frac{\partial v}{\partial t} + Z \frac{\partial w}{\partial t} \right\} dS \\ + \int_{t_0}^t dt \int_\sigma \left\{ L \frac{\partial u}{\partial t} + M \frac{\partial v}{\partial t} + N \frac{\partial w}{\partial t} \right\} d\sigma.$$

Se, come noi vogliamo supporre, le forze di massa e le pressioni superficiali non dipendono dal tempo, il secondo membro vale  $U - U_0$ , onde, ponendo

$$E = T_0 + P_0 - U_0,$$

la precedente equazione diviene

$$(3) \quad T + P - U = E.$$

È la forma, che conviene nel caso attuale al principio di conservazione della energia (energia cinetica + energia elastica + energia potenziale = cost.).

Considerando come date le forze esterne, proponiamoci di trovare il limite superiore dei valori assunti da  $P$ , mentre il sistema oscilla, conformemente alle equazioni (1), (2), a partire da un dato stato iniziale o, più generalmente, da uno stato di data energia totale.

Sia  $P_a$  questo limite, che supporremo naturalmente finito, intendendo di contemplare soltanto sistemi di spostamenti  $u, v, w$  finiti, continui e derivabili quanto occorre (come deve appunto accadere entro i limiti di elasticità).

Sia ancora  $P'$  il limite superiore di  $P$ , quando, prescindendo dalla circostanza che le funzioni  $u, v, w$  debbono in realtà soddisfare al sistema (1), (2), si tien conto soltanto della (3).

Si avrà manifestamente

$$P_a \leq P'.$$

Occupiamoci intanto della determinazione di  $P'$ . Basterà applicare i principi fondamentali del calcolo delle variazioni, trattandosi di rendere massimo l'integrale definito  $P$ , compatibilmente colla (3).

Dovremo cominciare col rendere nulla la variazione di

$$P + \lambda(T + P - U),$$

in cui  $\lambda$  designa una costante a priori indeterminata, da fissarsi in seguito in modo da soddisfare alla (3). Da

$$\delta P + \lambda \delta(T + P - U) = 0$$

discende ovviamente

$$(4) \quad \lambda \frac{\partial u}{\partial t} = 0, \quad \lambda \frac{\partial v}{\partial t} = 0, \quad \lambda \frac{\partial w}{\partial t} = 0;$$

$$(5) \quad (1 + \lambda)\delta P - \lambda\delta U = 0.$$

Escludendo per un momento che le forze esterne sieno identicamente nulle, possiamo ritenere  $1 + \lambda$  diverso da zero (in quanto, per  $1 + \lambda = 0$ , la (5) implica  $\delta U = 0$ , ossia appunto l'identico annullarsi di  $X, Y, Z; L, M, N$ ). Posto quindi

$$\mu = \frac{\lambda}{1 + \lambda},$$

la (5) equivale a

$$(5') \quad \int_s \delta \Pi dS + \mu \delta U = 0,$$

che è, in base al principio dei lavori virtuali, la equazione simbolica dell'equilibrio elastico sotto l'azione di forze di massa e pressioni superficiali, che stanno alle date  $X, Y, Z; L, M, N$  nel rapporto di  $\mu$  ad 1. I corrispondenti spostamenti  $u', v', w'$  rimangono per conseguenza definiti da

$$(5'') \quad \begin{cases} u' = \mu u_s, \\ v' = \mu v_s, \\ w' = \mu w_s, \end{cases}$$

essendo chiaramente  $u_s, v_s, w_s$ , gli spostamenti, che competono alla configurazione di equilibrio sotto l'azione delle forze date;  $u_s, v_s, w_s$ , e quindi  $u', v', w'$ , non dipendono da  $t$ . Le (4) riescono così identicamente soddisfatte e resta da determinare  $\mu$  in base alla (3).

La sostituzione dei valori (5'') in  $T, P$  ed  $U$ , porge, con evidente significato dei simboli,

$$T' = 0, \quad P' = \mu^2 P_s, \quad U' = \mu U_s.$$

Ma  $U_s = 2P_s$  (come tosto risulta dalla equazione simbolica dell'equilibrio, introducendovi  $u_s, v_s, w_s$  quale sistema di spostamenti virtuali). La (3) diventa pertanto

$$(\mu^2 - 2\mu)P_s = E.$$

$P_s$  non è zero. (Infatti dovrebbero annullarsi in tal caso le singole componenti di deformazione e quindi, a norma delle equazioni di equilibrio, anche  $X, Y, Z; L, M, N$ , il che, per momento, si esclude.)

La equazione, che definisce  $\mu$ , può dunque essere scritta

$$\mu^2 - 2\mu - \frac{E}{P_s} = 0.$$

Le radici

$$\mu = 1 \pm \sqrt{1 + \frac{E}{P_s}}$$

sono sempre reali, poichè, il valore minimo dell'energia totale spettando allo stato di equilibrio, si ha necessariamente

$$E \geq P_s - U_s = -P_s.$$

Per  $E = -P_s$ , il sistema non può che rimanere in equilibrio nella configurazione iniziale; in questo caso estremo  $\mu = 1$ ;  $P'$ , e così pure  $P_a$ , coincidono con  $P_s$ .

Ritenuto  $E > -P_s$ , la radice  $1 + \sqrt{1 + E/P_s}$  è maggiore dell'unità. Per questo valore di  $\mu$  si ha effettivamente il massimo cercato. Per constatarlo, ricorriamo secondo la regola, alla variazione seconda di

$$P + \lambda(T + P - U).$$

Essa può essere scritta (esprimendo  $\lambda$  per  $\mu$  e notando che  $\delta^2 U = 0$ )

$$\frac{1}{1 - \mu} \{ \delta^2 P + \mu \delta^2 T \},$$

quantità essenzialmente negativa, il che assicura l'esistenza del massimo.

Siccome all'altra radice  $1 - \sqrt{1 + E/P_s}$  corrisponde un minimo, oppure nè massimo, nè minimo (secondochè  $E$  è  $\leq$ , oppure  $> 0$ ), rimane provato che il massimo valore  $P$ , raggiungibile da  $P$  conciliabilmente colla (3), è dovuto agli spostamenti (5''), la costante  $\mu$  avendo il valore  $1 + \sqrt{1 + E/P_s}$ .

Ne viene

$$P' = \mu^2 P_s = 2P_s + E + 2\sqrt{P_s(P_s + E)}.$$

Nello stabilire questa equazione abbiamo lasciato da parte il caso che tutte le forze esterne sieno nulle, e l'altro che  $E$  sia eguale a  $-P_s$ . Abbiamo già notato che, per  $E = -P_s$ ,  $\mu = 1$ ,  $P' = P_s$ . È ciò che risulta dalla formola generale facendovi  $\mu = 1$ . Quanto al caso, in cui non agiscono forze, e in cui quindi  $U = P_s = 0$ , si ha dalla (3)

$$T + P = E,$$

donde apparisce che il massimo valore  $P'$ , che possa assumere  $P$ , è  $E$ . In ogni caso dunque

$$P' = 2P_s + E + 2\sqrt{P_s(P_s + E)}.$$

È facile riconoscere che la funzione  $P$  raggiunge effettivamente il suo limite superiore  $P'$ , anche tenendo conto del sistema differenziale (1), (2) [e non, come finora, della sola (3)]. Basta fissare le condizioni iniziali in modo opportuno. E precisamente, se le forze esterne non sono nulle, supporre per es. che il sistema si trovi, per  $t = t_0$ , nella configurazione (5'') senza velocità iniziale.

Se poi le forze si annullano, scelto ad arbitrio un sistema di spostamenti (non rigidi)  $\bar{u}$ ,  $\bar{v}$ ,  $\bar{w}$  e detto  $P$  il corrispondente valore dell'energia

elastica (valore necessariamente  $> 0$ , per l'ipotesi che deformazione vi sia), si prenda inizialmente

$$u = \sqrt{\frac{E}{P}} \bar{u}, \quad v = \sqrt{\frac{E}{P}} \bar{v}, \quad w = \sqrt{\frac{E}{P}} \bar{w};$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial t} = 0.$$

Il valore dell'energia elastica è precisamente il suo massimo  $E$ . Di qua, ricordando il significato di  $P_a$ , discende

$$P_a = P'.$$

In definitiva possiamo concludere:

*Il massimo valore  $P_a$ , che può essere assunto dall'energia elastica di un corpo, nel suo movimento sotto l'azione di forze date e per un valore pur dato dell'energia totale  $E$  (invariabile di fronte al movimento e quindi riferibile per es. allo stato iniziale), è*

$$(I) \quad P_a = 2P_s + E + 2\sqrt{P_s(P_s + E)}.$$

*Gli spostamenti  $u'$ ,  $v'$ ,  $w'$ , per cui risulta  $P = P_a$  (stato di massima sollecitazione dinamica), sono in generale univocamente determinati e proporzionali agli spostamenti  $u_s$ ,  $v_s$ ,  $w_s$  della sollecitazione statica, avendosi a tenore delle (5''),*

$$(II) \quad \begin{cases} u' = \left\{ 1 + \sqrt{1 + \frac{E}{P_s}} \right\} u_s, \\ v' = \left\{ 1 + \sqrt{1 + \frac{E}{P_s}} \right\} v_s, \\ w' = \left\{ 1 + \sqrt{1 + \frac{E}{P_s}} \right\} w_s. \end{cases}$$

*Rimane escluso soltanto il caso, in cui non agiscono forze esterne (e quindi  $u_s = v_s = w_s = P_s = 0$ ), esistendo allora infiniti sistemi di spostamenti, che fanno assumere a  $P$  il suo massimo valore  $E$ .*

È appena necessario aggiungere che tutto ciò sussiste anche se il movimento elastico, che si considera, è dovuto (oltrechè all'azione di date forze continue) ad impulsi iniziali. Basta tenerne conto nel valutare  $E$ , il che si sa fare, in base alla teoria del moto impulsivo.

2. - Prendiamo due semplici esempi, quelli, che ordinariamente si adducono per mettere a raffronto effetti statici ed effetti dinamici.

Supponiamo in primo luogo che il sistema parta senza velocità iniziale dallo stato naturale sotto l'azione di forze comunque assegnate. Si avrà  $E = 0$ ,  $P_d = 4P_s$ , e gli spostamenti dello stato di massima sollecitazione doppi di quelli spettanti alla configurazione di equilibrio. È il caso del filo, cui repentinamente viene applicato il peso. In generale però è d'uopo osservare che lo stato di massima sollecitazione può anche non essere raggiunto colle poste condizioni iniziali.

Immaginiamo ora un sistema in equilibrio sotto l'azione di forze date e invertiamo bruscamente il senso di ognuna, destando così un movimento del sistema. Calcoliamo il valore di  $E$ , che corrisponde a queste condizioni, e il relativo  $P_d$ .

Si ha, tenendo conto che la configurazione iniziale è, per ipotesi, configurazione di equilibrio rispetto alle forze motrici invertite,

$$U_0 = -2P_0, \quad P_s = P_0;$$

da cui

$$E = 3P_s, \quad P_d = 9P_s.$$

Nello stato di massima sollecitazione gli spostamenti sono tripli di quegli statici.

Così per es. la deviazione massima dell'ago di un galvanometro a torsione, quando si inverte bruscamente il senso della corrente, è tripla della deviazione definitiva. (Qui lo stato di massima sollecitazione viene effettivamente raggiunto, ma, come sopra, ciò non si può affermare in generale).



## VIII.

# SUR LE CHAMP ÉLECTROMAGNÉTIQUE ENGENDRÉ PAR LA TRANSLATION UNIFORME D'UNE CHARGE ÉLECTRIQUE PARALLÈLEMENT À UN PLAN CONDUCTEUR INDÉFINI

« Annales de la Faculté des Sc. de Toulouse », s. 2-, t. IV (1902),  
pp. 5-44.

### Préface.

Dans une Conférence <sup>(1)</sup> tenue en septembre dernier, M. RIGHI a renseigné la Société italienne de Physique sur la question, si discutée aujourd'hui, de la production d'un champ magnétique par la convection électrique.

Après avoir rappelé les différentes expériences (depuis celles de ROWLAND jusqu'aux dernières de M. CRÉMIEU et de M. ADAMS), il les a analysées avec sa critique pénétrante, en signalant les points faibles et ceux qui restent simplement douteux.

Parmi ceux-ci l'éminent physicien compte les perturbations du champ magnétique provenant du conducteur, que l'on emploie généralement dans ces expériences pour mettre l'aiguille aimantée à l'abri des actions électrostatiques.

Il est évident, dit-il, qu'un diaphragme métallique de conductivité finie n'arrête pas les actions magnétiques, mais il exerce sans doute une influence et l'on n'a pas le droit de la négliger. Malheureusement nous ne sommes pas en mesure d'apprécier cette influence, comme il serait nécessaire pour une bonne discussion des résultats expérimentaux.

Ceux qui cultivent la Physique mathématique pourraient fournir à cet égard des indications assez précises en déterminant, ne fût-ce autre chose, le champ électromagnétique engendré par une charge électrique qui se meut avec une vitesse constante sur une droite parallèle à un plan conducteur indéfini.

Peu après sa conférence M. RIGHI a bien voulu attirer mon attention sur cette recherche. Voilà l'origine du présent Mémoire.

---

(1) Voir « Nuovo Cimento », 5<sup>e</sup> série, t. II; octobre 1901.

On y trouvera une solution rigoureuse du problème énoncé et une solution approchée, qui, tout en différant de la première par des quantités absolument insignifiantes au point de vue pratique, se prête mieux à l'étude soit qualitative, soit quantitative du champ.

On est conduit aux résultats suivants:

Soient  $a$  le rapport entre la vitesse de convection et celle de la lumière;  $30k$  la résistance ohmique de l'unité de surface du plan conducteur (exprimée en ohms);  $h = 2\pi a/k$ ; de façon que, dans les conditions expérimentales ordinaires,  $a$  et  $k$  sont des nombres très petits (de l'ordre de  $10^{-6}$  dans l'exemple cité au n. 18), pendant que  $h$  est généralement fini.

Au delà de l'écran conducteur, les forces électrique et magnétique dérivent l'une et l'autre d'un potentiel (aux termes en  $a^2$  près).

La force électrique est négligeable; la force magnétique est à peu près égale au produit par  $1/(1 + \sqrt{1 + h^2})$  de celle qui s'exercerait si le plan conducteur n'existait pas (*voir*, pour plus d'exactitude, le n. 18). Elle est donc réduite au moins de la moitié et pourrait être interceptée, à l'instar de la force électrique, seulement pour une conductivité infinie ( $k = 0$ ,  $h = \infty$ ).

C'est justement ce que prévoyait M. RIGHI.

Quelques mots encore sur la position analytique du problème.

Les équations de HERTZ à elles seules ne suffiraient pas, tout en tenant compte des conditions (de continuité, régularité, etc.) qui sont imposées aux composantes des forces électromagnétiques.

Une discussion facile montre en effet que, pour rendre la question déterminée, il faut se donner (parmi les conditions dites *aux limites*) deux relations qui devront être vérifiées sur le plan conducteur et qui traduiront précisément cette qualité. Nous ne pourrons y parvenir sans sortir de la théorie hertzienne pure.

En effet, ce qui caractérise un conducteur est sans contredit la loi de OHM. Mais, au point de vue de HERTZ, on n'a là que la définition du courant (de ses deux composantes dans notre cas), et il n'en résulte naturellement aucune relation nouvelle entre les composantes des forces électromagnétiques.

Il faut donc avoir recours à quelque autre hypothèse.

Or l'expérience ne nous donne à cet égard aucun renseignement; bien au contraire, il s'agit en quelque sorte de la devancer.

D'autre part, on n'entrevoit même pas, parmi les éléments de la théorie de HERTZ, deux relations qui puissent paraître justifiées *a priori*.

D'après cela, j'ai été conduit à m'appuyer sur une théorie un peu plus restreinte que celle de HERTZ, où l'on a affaire non pas précisément aux équations différentielles de HERTZ, mais à un certain système de leurs intégrales.

C'est ce qui arrive dans la théorie originale de MAXWELL, dans celles de M. LORENTZ et de M. LARMOR <sup>(2)</sup>, qui, d'ailleurs, n'en diffèrent pas, tant qu'il s'agit, comme à présent, de milieux isotropes en repos.

C'est ce qui arrive aussi dans la théorie de HELMHOLTZ, dès qu'on lui ajoute simplement l'hypothèse que les actions à distance se propagent avec une vitesse finie (voir Chap. I).

On a bien, dans le cadre de ces théories, tout ce qu'il faut pour que notre question et d'autres analogues deviennent parfaitement déterminées.

J'ai préféré la dernière (celle de HELMHOLTZ modifiée) parce que les principes sont peut-être plus simples, et à mon avis très suggestifs.

Ce ne serait pas une raison suffisante. Mais on peut démontrer qu'on serait conduit à la même solution aussi en partant des intégrales de MAXWELL. Je me borne à signaler cette conclusion, qui se rattache à la remarque suivante, d'ordre plus général:

Les deux théories intégrales ne sont pas identiques. Elles s'accordent naturellement dans le domaine différentiel, mais elles s'accordent encore sur quelques détails importants non envisagés par la théorie de HERTZ.

On a besoin de ces compléments pour toutes les questions qui appartiennent au même type du problème simple étudié ici. Parmi ces questions, il y en a une notamment (celle de l'influence d'un écran conducteur sur le champ magnétique d'un courant *variable*) où l'on peut s'attendre à ce que les résultats obtenus par la théorie seront accessibles sans peine au contrôle de l'expérience (pendant que dans le cas actuel on se trouve presque à la limite des quantités appréciables par l'observation).

Je me propose de revenir prochainement sur ce point.

## CHAPITRE I.

### RAPPEL DE QUELQUES NOTIONS D'ÉLECTRODYNAMIQUE

I. — J'ai démontré autrefois <sup>(3)</sup> qu'on peut retrouver les traits essentiels de la théorie de MAXWELL même en partant des lois classiques. Il suffit de les compléter par l'hypothèse que les actions à distance se propagent avec une vitesse finie.

(<sup>2</sup>) Elles sont résumées dans la seconde édition du Traité classique de M. POINCARÉ: *Electricité et Optique*. Voici les citations des Ouvrages des deux savants contenant l'exposé de leurs théories: LORENTZ, *Versuch einer Theorie der elektrischen und optischen Erscheinungen in bewegten Körpern*, Leyde, 1895; LARMOR, *Aether and matter*, Cambridge, 1900.

(<sup>3</sup>) *Sulla riducibilità delle equazioni elettrodinamiche di Helmholtz alla forma hertziana*, « Nuovo Cimento », août 1897. [In queste Opere, vol. primo: XVI, pp. 291-303].

La théorie de HELMHOLTZ conduit alors aux équations de HERTZ. Voici, en peu de mots, cette déduction.

## 2. - Généralités.

Envisageons un milieu homogène  $S$ , indéfini et en repos, siège de phénomènes électrodynamiques.

Soient, pour un point quelconque  $P(x, y, z)$ , et dans un instant quelconque  $t$ ,  $e(x, y, z, t)$  la densité électrique;  $u(x, y, z, t)$ ,  $v(x, y, z, t)$ ,  $w(x, y, z, t)$  les composantes du courant rapportées à l'unité de volume:  $e dS$  représente alors la quantité d'électricité contenue dans le volume  $dS$  à l'instant  $t$ ;  $u dy dz dt$  est la quantité d'électricité qui traverse, pendant le temps  $dt$  successif à  $t$ , l'aire  $dy dz$  normale à l'axe des  $x$ ; de même  $v dz dx dt$  est la quantité d'électricité, etc..

Je suppose  $e$ ,  $u$ ,  $v$ ,  $w$  finies et continues avec toutes les dérivées des deux premiers ordres. Je suppose, en outre, que ces fonctions s'annulent à l'infini, de façon que les intégrales

$$\int_s \frac{e}{r} dS, \quad \int_s \frac{u}{r} dS, \quad \dots,$$

étendues à tout l'espace  $S$ , aient un sens (pour toute valeur de  $t$ ),  $r$  étant la distance du point variable d'intégration à un point fixe quelconque.

## 3. - Principes de conservation de l'électricité.

Entre  $e$ ,  $u$ ,  $v$ ,  $w$  on a l'équation de continuité, qui s'écrit

$$(1) \quad \frac{de}{dt} + \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} = 0.$$

Il va sans dire que  $e dS$ ,  $u dy dz dt$ ,  $v dz dx dt$ ,  $w dx dy dt$  (qui sont toutes des quantités d'électricité) doivent être mesurées de la même façon, en unités électrostatiques par exemple. A ce système se rapporteront alors les valeurs numériques de  $e$ ,  $u$ ,  $v$ ,  $w$ .

## 4. - Loi de Coulomb. Potentiel électrostatique retardé.

Conformément à la loi de COULOMB, le potentiel électrostatique (en supposant pour simplifier la constante diélectrique, ou pouvoir in-

ducteur spécifique de notre milieu, égale à l'unité) est

$$\int_S \frac{e(x', y', z', t)}{r} dS,$$

où l'on désigne par  $x', y', z'$  les variables d'intégration, par  $x, y, z$  les coordonnées du point quelconque  $P$ , auquel se rapporte le potentiel, par  $r$  la distance de  $P$  au point  $P'(x', y', z')$ .

Je pose,  $A$  étant une constante, l'inverse de la vitesse de la lumière dans  $S$ ,

$$(2) \quad \begin{aligned} \bar{e} &= e(x', y', z', t - Ar), \\ F &= \int_S \frac{\bar{e}}{r} dS. \end{aligned}$$

On appelle  $F$  *potentiel électrostatique retardé*. Chaque élément  $(\bar{e}/r) dS$  de  $F$  est, on peut dire, le potentiel d'une action partie de  $P'$  avec une anticipation  $Ar$  sur l'instant auquel on l'envisage au point  $P$ .

Par conséquent, en prenant  $F$ , au lieu de  $\int_S (e/r) dS$ , comme potentiel électrostatique, tout se passe comme si les actions élémentaires, envisagées par la loi de COULOMB, se propageaient en ligne droite de leurs origines à  $P$  avec la vitesse de la lumière.

### 5. - Potentiel vecteur retardé. Loi de Biot et Savart. Force magnétique.

Le vecteur dont les composantes suivant les axes coordonnés sont

$$(3) \quad U = A \int_S \frac{\bar{u}}{r} dS, \quad V = A \int_S \frac{\bar{v}}{r} dS, \quad W = A \int_S \frac{\bar{w}}{r} dS$$

sera notre *potentiel vecteur*. Il diffère du potentiel vecteur ordinaire par la substitution de

$$\begin{aligned} \bar{u} &= u(x', y', z', t - Ar), \\ \bar{v} &= v(x', y', z', t - Ar), \\ \bar{w} &= w(x', y', z', t - Ar), \end{aligned}$$

à  $u(x', y', z', t)$ ,  $v(x', y', z', t)$ ,  $w(x', y', z', t)$ : ce qui correspond, comme tout à l'heure, à une propagation par ondes sphériques avec la vitesse  $1/A$ .

La force magnétique du champ, d'après la loi élémentaire de BIOT et SAVART (dite parfois aussi *loi de LAPLACE*), est définie comme le tourbillon (*curl* des Anglais) du potentiel vecteur, changé toutefois de sens si les axes sont orientés comme dans la fig. 1, ce que nous voulons supposer.

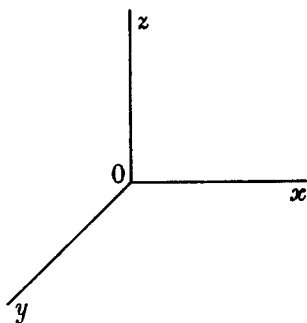


Fig. 1.

Dès lors, en combinant la loi de BIOT et SAVART avec notre hypothèse sur la vitesse de propagation, on a, pour les composantes  $L$ ,  $M$ ,  $N$  de la force magnétique, les expressions suivantes :

$$(I) \quad \left\{ \begin{array}{l} L = \frac{dV}{dz} - \frac{dW}{dy}, \\ M = \frac{dW}{dx} - \frac{dU}{dz}, \\ N = \frac{dU}{dy} - \frac{dV}{dx}. \end{array} \right.$$

#### 6. - Loi d'induction de F. Neumann. Force électrique.

Les dérivées de  $-AU$ ,  $-AV$ ,  $-AW$ , par rapport à  $t$ , donnent les composantes de la force électromotrice d'induction: c'est la loi potentielle de F. NEUMANN, où l'on a seulement remplacé le potentiel vecteur ordinaire par le potentiel retardé.

Lorsqu'il n'y a pas de forces électromotrices extérieures (d'origine chimique, thermoélectrique, etc.) la force électrique totale ( $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ ) est la somme de la composante électrostatique et de celle provenant de l'induction.

On a donc

$$(II) \quad \left\{ \begin{array}{l} X = -\frac{dF}{dx} - A \frac{dU}{dt} , \\ Y = -\frac{dF}{dy} - A \frac{dV}{dt} , \\ Z = -\frac{dF}{dz} - A \frac{dW}{dt} . \end{array} \right.$$

7. - Propriétés des fonctions  $F, U, V, W$ .

Tout potentiel retardé

$$F = \int_s \frac{\bar{e}}{r} dS$$

satisfait à l'équation

$$\square F \equiv \Delta_2 F - A^2 \frac{d^2 F}{dt^2} = -4\pi e .$$

C'est l'analogie de l'équation de POISSON, et l'on peut la vérifier de la même façon (\*).

Nous avons ainsi

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \square F = -4\pi e , \\ \square U = -4\pi Au , \\ \square V = -4\pi Av , \\ \square W = -4\pi Aw . \end{array} \right.$$

De plus les fonctions  $F, U, V, W$  sont liées entre elles par la relation

$$(5) \quad A \frac{dF}{dt} + \frac{dU}{dx} + \frac{dV}{dy} + \frac{dW}{dz} = 0 .$$

Pour le démontrer, je remarque d'abord qu'on peut écrire, avec la notation des dérivées partielles,

$$\frac{d\bar{u}}{dx'} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial x'} - A \frac{d\bar{u}}{dt} \frac{dr}{dx'} .$$

(\*) Voir, par exemple, VOLTERRA, *Sul principio di Huygens*, « Nuovo Cimento », 3<sup>e</sup> série, t. XXXI, XXXII, XXXIII, 1892-1893), ou bien encore POINCARÉ, *Oscillations électriques*, n. 40.

Or

$$\frac{dU}{dx} = A \int_s \left( \bar{u} \frac{d}{dx} \frac{1}{r} + \frac{d\bar{u}}{dx} \frac{1}{r} \right) dS,$$

d'où, puisque  $\bar{u}$  dépend de  $x$  uniquement par l'intermédiaire de l'argument  $t - Ar$ , et que d'ailleurs  $dr/dx = -dr/dx'$ ,

$$\frac{dU}{dx} = -A \int_s \bar{u} \frac{d}{dx'} \frac{1}{r} dS + A \int_s A \frac{d\bar{u}}{dt} \frac{dr}{dx'} \frac{1}{r} dS.$$

Transformons la première intégrale par la formule de GREEN. L'intégration étant étendue à tout l'espace, il vient

$$\frac{dU}{dx} = A \int_s \left( \frac{d\bar{u}}{dx'} + A \frac{d\bar{u}}{dt} \frac{dr}{dx'} \right) \frac{1}{r} dS,$$

ou bien, à cause de l'identité, rappelée ci-dessus,

$$\frac{dU}{dx} = A \int_s \frac{\partial \bar{u}}{\partial x'} \frac{1}{r} dS.$$

De même

$$\frac{dV}{dy} = A \int_s \frac{\partial \bar{v}}{\partial y'} \frac{1}{r} dS,$$

$$\frac{dW}{dz} = A \int_s \frac{\partial \bar{w}}{\partial z'} \frac{1}{r} dS,$$

et en ajoutant

$$\frac{dU}{dx} + \frac{dV}{dy} + \frac{dW}{dz} = A \int_s \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial x'} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y'} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z'} \right) \frac{1}{r} dS.$$

L'équation de continuité (1), appliquée aux fonctions  $\bar{e}$ ,  $\bar{u}$ ,  $\bar{v}$ ,  $w$ , devient évidemment

$$\frac{d\bar{e}}{dt} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial x'} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y'} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z'} = 0;$$



le second membre de l'équation qui précède est donc égal à

$$-A \int_s \frac{d\bar{e}}{dt} \frac{1}{r} dS,$$

c'est-à-dire à  $-A(dF/dt)$ .

*c. q. f. d.*

### 8. - Vérification des équations de Hertz.

En éliminant la fonction  $F$  des équations (II), et ayant égard aux équations (I), il vient tout de suite

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} A \frac{dL}{dt} = \frac{dZ}{dy} - \frac{dY}{dz}, \\ A \frac{dM}{dt} = \frac{dX}{dz} - \frac{dZ}{dx}, \\ A \frac{dN}{dt} = \frac{dY}{dx} - \frac{dX}{dy}. \end{array} \right.$$

*C'est le premier groupe des équations de HERTZ.*

Dérivons maintenant la première des équations (II) par rapport à  $t$ ; multiplions par  $A$ , en remplaçant  $-A^2(d^2U/dt^2)$  par sa valeur  $-\Delta_2 U - 4\pi A u$ . Nous obtenons

$$A \frac{dX}{dt} = -A \frac{d^2 F}{dt dx} - \Delta_2 U - 4\pi A u.$$

Les deux dernières équations (I) donnent, d'ailleurs,

$$\frac{dM}{dz} - \frac{dN}{dy} = \frac{d}{dx} \left( \frac{dU}{dx} + \frac{dV}{dy} + \frac{dW}{dz} \right) - \Delta_2 U.$$

En tenant compte de (5), et en retranchant de la précédente, il reste simplement

$$(7) \quad A \frac{dX}{dt} = \frac{dM}{dz} - \frac{dN}{dy} - 4\pi A u.$$

Les deux équations

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} A \frac{dY}{dt} = \frac{dN}{dx} - \frac{dL}{dz} - 4\pi A v, \\ A \frac{dZ}{dt} = \frac{dL}{dy} - \frac{dM}{dx} - 4\pi A w \end{array} \right.$$

s'établissent de la même manière, et l'on a ainsi retrouvé le second groupe de HERTZ.

Les équations (I) donnent encore

$$(8) \quad \frac{dL}{dx} + \frac{dM}{dy} + \frac{dN}{dz} = 0,$$

pendant que les équations (II), en ayant égard à (5) et à la relation

$$\Delta_2 F - A^2 \frac{d^2 F}{dt^2} = -4\pi e,$$

donnent

$$(9) \quad \frac{dX}{dx} + \frac{dY}{dy} + \frac{dZ}{dz} = 4\pi e.$$

### 9. - Charges et courants de surface.

#### Discontinuités qui en dérivent dans les forces électromagnétiques.

En nous plaçant au point de vue des actions à distance, qui nous a conduit aux équations (I), (II), il est presque évident que ces dernières s'étendent au cas où il y aurait, sur quelque surface  $\sigma$  du milieu indéfini  $S$ , des distributions à deux dimensions de charges et de courants. Il suffit d'ajouter aux expressions des potentiels  $F$ ,  $U$ ,  $V$ ,  $W$  les intégrales doubles correspondant à ces distributions.

On n'a rien à modifier aux équations (4), (5), ..., (9) pour les points *non* situés sur les surfaces  $\sigma$ ; mais on doit prendre garde aux discontinuités que l'on rencontrera en les traversant.

Il importe surtout de reconnaître celles qui se produisent dans les composantes des forces électrique et magnétique. On les détermine aisément (en fonction des charges et des courants de surface) à l'aide des formules bien connues, se rapportant aux dérivées premières des potentiels de surface, formules qui sont valables même pour les potentiels retardés <sup>(6)</sup>.

On peut encore montrer que (charges et courants de surface satisfaisant, bien entendu, au principe de la conservation de l'électricité) les discontinuités qui se produisent dans les forces électromagnétiques ne diffèrent pas de celles que l'on mettrait au jour en suivant la voie indiquée par HERTZ.

(6) VOLTERRA, loco citato, t. XXXI.

Du reste, au point de vue physique, une telle démonstration ne serait pas nécessaire; l'identité apparaît d'elle-même.

Pour nous en rendre compte, voyons en quoi consiste ce principe de HERTZ. Nous envisagerons, pour plus de netteté, le cas d'une portion de surface  $\sigma$  parallèle au plan  $z = 0$ .

Ce qui arrive pour des distributions superficielles, situées sur  $\sigma$ , doit être cherché par un passage à la limite, en considérant d'abord une couche  $\tau$  d'épaisseur  $g$  limitée d'un côté par  $\sigma$ , et exprimant ensuite que les équations indéfinies (6), (7), (8), (9) continuent à subsister dans  $\tau$ , lorsqu'on suppose que  $e$ ,  $u$ ,  $v$  grandissent indéfiniment, pendant que  $g$  décroît, de manière toutefois que les limites de  $ge$ ,  $gu$ ,  $gv$  restent finies.

Ce même passage à la limite introduit, dans les équations (I), (II), les termes correspondant aux distributions de surface sur  $\sigma$ .

Dès que l'on a affaire à la même cause, les effets (dans notre cas, es discontinuités des forces électromagnétiques à travers  $\sigma$ ) doivent être es mêmes quelle que soit la voie que l'on choisit pour les évaluer.

### 10. - Remarque.

On peut présenter les considérations qui précèdent sous une forme valable pour tout milieu isotrope, même s'il est polarisable, c'est-à-dire s'il est doué d'un pouvoir inducteur spécifique et d'une perméabilité magnétique quelconque.

C'est ce que j'ai fait dans le Mémoire du « Nuovo Cimento » cité plus haut.

## CHAPITRE II.

### TRANSFORMATION DES POTENTIELS RETARDÉS

#### 11. - Transformation directe des potentiels dans le cas où le mouvement des charges se réduit à une translation.

Dès que l'on a affaire à un mouvement de translation, tout système  $\Omega\xi\eta\zeta$ , qui est animé, par rapport aux axes fixes  $Oxyz$ , de la même translation, doit rester invariablement lié aux charges. La densité  $e$  de leur distribution est donc une fonction de  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$ , indépendante de  $t$ .

Complétons la définition des axes mobiles en choisissant, par exemple,  $Oxyz$  comme position initiale (pour  $t = 0$ ) du trièdre  $\Omega\xi\eta\zeta$ . On a alors, entre les coordonnées  $x$ ,  $y$ ,  $z$ ;  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  d'une même particule électrisée par

rapport aux deux systèmes, les relations

$$(1) \quad \begin{cases} x = \xi + \varphi, \\ y = \eta + \psi, \\ z = \zeta + \chi, \end{cases}$$

les  $\varphi$ ,  $\psi$ ,  $\chi$  étant des fonctions données du temps  $t$ , qui se réduisent à 0, pour  $t = 0$ .

Dans un instant quelconque  $t$  la vitesse des charges électriques est, pour tout point du champ,  $(d\varphi/dt, d\psi/dt, d\chi/dt)$ .

Or la quantité d'électricité qui traverse dans le temps  $dt$  l'aire élémentaire  $dy dz$  (c'est-à-dire la charge d'un parallélépipède ayant  $dy dz$  pour base et  $(d\varphi/dt) dt$  pour hauteur) est exprimée par  $e(d\varphi/dt) dy dz dt$ .

Comme  $u dy dz dt$  représente par définition la même quantité, il s'ensuit que

$$(2) \quad \begin{cases} u = e \frac{d\varphi}{dt}, \\ v = e \frac{d\psi}{dt}, \\ w = e \frac{d\chi}{dt}. \end{cases}$$

Occupons-nous d'abord du potentiel électrostatique

$$F = \int_s \frac{\bar{e}}{r} dS.$$

La densité  $e$  ne dépend que de  $\xi, \eta, \zeta$ , c'est-à-dire, d'après (1), de  $x - \varphi, y - \psi, z - \chi$ ; on a donc l'identité

$$(3) \quad e(x, y, z, t) = e(x - \varphi, y - \psi, z - \chi);$$

d'où

$$\bar{e} = e(x' - \bar{\varphi}, y' - \bar{\psi}, z' - \bar{\chi}),$$

en convenant de désigner, pour une fonction quelconque, le changement de  $t$  en  $t - Ar$ , par un trait superposé.

Posons

$$(4) \quad \begin{cases} x_1 - \varphi = x' - \bar{\varphi}, \\ y_1 - \psi = y' - \bar{\psi}, \\ z_1 - \chi = z' - \bar{\chi}, \end{cases}$$

et appelons  $D$  le déterminant fonctionnel de  $x_1, y_1, z_1$  par rapport à  $x', y', z'$ .  
Ayant

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dx'} &= 1 - A \frac{d\bar{\varphi}}{dx'} = 1 - A \frac{d\bar{\varphi}}{dt} \frac{x - x'}{r}, \\ \frac{dx_1}{dy'} &= -A \frac{d\bar{\varphi}}{dt} \frac{y - y'}{r}, \\ \frac{dx_1}{dz'} &= -A \frac{d\bar{\varphi}}{dt} \frac{z - z'}{r}, \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

on trouve tout de suite

$$(5) \quad D = 1 - A \left( \frac{d\bar{\varphi}}{dt} \frac{x - x'}{r} + \frac{d\bar{\psi}}{dt} \frac{y - y'}{r} + \frac{d\bar{\chi}}{dt} \frac{z - z'}{r} \right).$$

En adoptant, dans  $F$ ,  $x_1, y_1, z_1$  au lieu de  $x', y', z'$ , pour variables d'intégration (\*), il vient, d'après (3),

$$(6) \quad F = \int_s \frac{e(x_1 - \varphi, y_1 - \psi, z_1 - \chi)}{r|D|} dS = \int_s \frac{e(x_1, y_1, z_1, t)}{r|D|} dS.$$

Tout se passe donc *comme si* chaque charge élémentaire agissait avec le potentiel  $1/(r|D|)$ .

D'une façon plus précise cette expression transformée de  $F$  correspond à la loi élémentaire suivante:

La charge, qui occupe dans un instant quelconque  $t$  une position quelconque  $P_1(x_1, y_1, z_1)$ , agit sur le point envisagé  $P(x, y, z)$  avec le potentiel (rapporté à l'unité de charge)  $1/(r|D|)$ , où  $r$  représente la distance de  $P$ , non pas à  $P_1$ , mais à un certain point  $P'(x', y', z')$ , qui dépend de  $P$  et de  $P_1$  d'après (4);  $D$  étant défini par l'équation (5).

Il est aisé d'apercevoir la signification géométrique du point  $P'$ .

(\*) La transformation est légitime, toutes les fois que  $D$  ne s'annule pas, ce qui arrive notamment lorsque la vitesse de translation ne dépasse pas celle de la lumière (voir plus loin).

La comparaison de (1) et(4) montre, en effet, que  $P'$  est la position occupée à l'instant  $t - Ar$  par la charge qui occupe à l'instant  $t$  la position  $P_1$  (fig. 2).

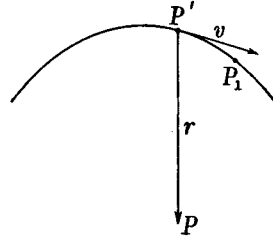


Fig. 2.

C'est justement la position de la dite charge, d'où une action, se propageant avec la vitesse  $1/A$ , atteint  $P$  à l'instant  $t$ .

$v$  étant la vitesse de la charge en  $P'$ , c'est-à-dire à l'instant  $t - Ar$ , les composantes de  $v$  ne sont autre chose que  $d\bar{\varphi}/dt$ ,  $d\bar{\psi}/dt$ ,  $d\bar{\chi}/dt$ . On a donc

$$(5') \quad D = 1 - Av \cos(\widehat{v\bar{r}}),$$

la direction positive de  $r$  allant de  $P'$  à  $P$ .

On voit bien que  $D$  reste toujours positif [ce qui garantit la légitimité de la transformation (4) et l'univocité de la correspondance entre les points  $P_1$  et  $P'$ ] si, comme nous le supposons désormais,

$$Av < 1,$$

c'est-à-dire si la vitesse des charges reste inférieure à celle de la lumière.

Le potentiel électrostatique élémentaire se présente donc sous la forme

$$\frac{1}{r[1 - Av \cos(\widehat{v\bar{r}})]}.$$

Ce résultat est dû à M. WIECHERT (\*).

Pour le potentiel vecteur on est évidemment conduit à des conclusions analogues.

À cause de (2), les expressions transformées de  $U$ ,  $V$ ,  $W$  se tirent de  $F$  en y remplaçant  $e$  par  $Au = Ae(d\varphi/dt)$ ,  $Av = Ae(d\psi/dt)$ ,  $Aw = Ae(d\chi/dt)$ .

(\*) *Elektrodynamische Elementargesetze*, « Archives Néerlandaises », 2<sup>e</sup> série, t. V (Volume jubilaire en l'honneur de M. LORENTZ), 1900.

Il sera plus commode, dans ce qui va suivre, de se rapporter aux axes mobiles. Les coordonnées des points  $P, P_1, P'$  seront alors naturellement désignées par  $\xi, \eta, \zeta; \xi_1, \eta_1, \zeta_1; \xi', \eta', \zeta'$ , et les expressions des potentiels (où il convient, bien entendu, d'introduire, même comme variables d'intégration, les coordonnées  $\xi_1, \eta_1, \zeta_1$  au lieu de  $x_1, y_1, z_1$ ) s'écrivent

$$(6) \quad \left\{ \begin{aligned} F &= \int_s \frac{e(\xi_1, \eta_1, \zeta_1)}{r [1 - Av \cos(\widehat{vr})]} dS; \\ U &= \int_s \frac{Au(\xi_1, \eta_1, \zeta_1)}{r [1 - Av \cos(\widehat{vr})]} dS, \\ V &= \int_s \frac{Av(\xi_1, \eta_1, \zeta_1)}{r [(1 - Av \cos(\widehat{vr}))]} dS, \\ W &= \int_s \frac{Aw(\xi_1, \eta_1, \zeta_1)}{r [1 - Av \cos(\widehat{vr})]} dS, \end{aligned} \right.$$

$r$  et  $v$  ayant la signification définie tout à l'heure.

Ces formules, nous le verrons bientôt, sont valables pour un mouvement quelconque des charges. Ici les trois dernières se réduisent simplement à

$$U = A \frac{d\varphi}{dt} F, \quad V = A \frac{d\psi}{dt} F, \quad W = A \frac{d\chi}{dt} F.$$

### 12. - Cas d'une charge unique.

Supposons que la fonction  $e(\xi, \eta, \zeta)$  soit généralement nulle, en dehors d'un très petit espace  $\tau$  entourant le point  $\Omega$ .

On peut évidemment faire cette hypothèse sans renoncer à la condition (nécessaire pour la validité des considérations du premier Chapitre) que les dérivées premières et secondes de  $e$  soient partout finies et continues (\*).

Il suffit d'imaginer une fonction quelconque, douée de cette propriété pour les points de  $\tau$ , qui s'annule sur le contour avec ses dérivées des

(\*) A la vérité, on peut se tirer d'affaire avec des conditions moins restrictives; mais il ne vaut pas la peine d'y insister.

deux premiers ordres. Il est pourtant permis de supposer en outre

$$\int_{\tau} e dS = m,$$

$m$  étant une constante donnée.

Ceci posé, le cas d'une charge unique  $m$ , placée à l'origine  $\Omega$  des axes mobiles, se déduit sans peine comme cas limite du numéro précédent, en faisant décroître indéfiniment l'espace  $\tau$ .

Les potentiels retardés se réduisent alors aux produits de  $m$ ,  $Am(d\varphi/dt)$ ,  $Am(d\psi/dt)$ ,  $Am(d\chi/dt)$  par

$$\frac{1}{r[1 - Av \cos(\widehat{vr})]}.$$

Le passage à la limite, dont nous nous sommes servi pour y arriver, permet évidemment d'affirmer (ce qu'on pourrait aussi vérifier directement) que ces potentiels élémentaires satisfont bien aux équations différentielles (4) et (5) du Chapitre précédent, ou plutôt (comme nous nous rapportons ici aux axes mobiles) à leurs transformées en coordonnées  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$ .

Il va sans dire que la distance  $r$  et la vitesse  $v$  se rapportent, non pas à la position actuelle  $\Omega$  de la charge  $m$ , mais à la position antérieure, dont les coordonnées  $\xi'$ ,  $\eta'$ ,  $\zeta'$  sont définies, en fonction de  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$ ,  $t$ , par

$$(7) \quad \begin{cases} \xi' = \varphi(t - Ar) - \varphi(t), \\ \eta' = \psi(t - Ar) - \psi(t), \\ \zeta' = \chi(t - Ar) - \chi(t) \end{cases}$$

$$[r = \sqrt{(\xi - \xi')^2 + (\eta - \eta')^2 + (\zeta - \zeta')^2}].$$

C'est ce qui résulte de l'équation (4), lorsqu'on y met en évidence les coordonnées  $\xi$ ,  $\eta$ , ..., en tenant compte de ce que (le point  $P_1$  étant ici représenté par  $\Omega$ )

$$\xi_1 = \eta_1 = \zeta_1 = 0.$$

Pour arriver aux expressions définitives des potentiels, il faut éliminer les coordonnées auxiliaires  $\xi'$ ,  $\eta'$ ,  $\zeta'$  de  $1/(rD)$ . Voici comment on peut disposer le calcul.



Tout d'abord on tire, des équations (7),

$$\begin{aligned}
 (8) \quad r^2 &= (\xi - \xi')^2 + (\eta - \eta')^2 + (\zeta - \zeta')^2 \\
 &= [\xi + \varphi(t) - \varphi(t - Ar)]^2 \\
 &\quad + [\eta + \psi(t) - \psi(t - Ar)]^2 \\
 &\quad + [\zeta + \chi(t) - \chi(t - Ar)]^2,
 \end{aligned}$$

équation qui définit directement  $r$  en fonction de  $\xi, \eta, \zeta, t$ .

En la dérivant par rapport à  $A$ , il vient

$$r \frac{dr}{dA} = \left[ (\xi - \xi') \frac{d\bar{\varphi}}{dt} + (\eta - \eta') \frac{d\bar{\psi}}{dt} + (\zeta - \zeta') \frac{d\bar{\chi}}{dt} \right] \left( r + A \frac{dr}{dA} \right).$$

Mais, d'après (5),

$$(5 \text{ bis}) \quad rD = r - A \left[ \frac{d\bar{\varphi}}{dt} (\xi - \xi') + \frac{d\bar{\psi}}{dt} (\eta - \eta') + \frac{d\bar{\chi}}{dt} (\zeta - \zeta') \right];$$

d'où

$$\begin{aligned}
 rD &= r - \frac{Ar \frac{dr}{dA}}{r + A \frac{dr}{dA}} = \frac{r^2}{r + A \frac{dr}{dA}}, \\
 \frac{1}{rD} &= \frac{1}{r} - A \frac{d \frac{1}{r}}{dA}.
 \end{aligned}$$

*Remarque.* — Comme les fonctions  $\varphi(t), \psi(t), \chi(t)$ , qui définissent le mouvement de  $\Omega$ , sont censées être quelconques, ce qu'on vient de dire permet de construire en tout cas le champ électromagnétique dû à un mouvement d'une charge unique.

### 13. - Cas général d'une distribution et d'un mouvement quelconques. Analogies hydrodynamiques.

S'il s'agit d'un nombre quelconque de charges, on n'a qu'à faire la somme des potentiels élémentaires pour obtenir les expressions de  $F, U, V, W$ .

Dans le cas d'une distribution continue  $m$ ,  $m(d\varphi/dt)$ ,  $m(d\psi/dt)$ ,  $m(d\chi/dt)$  ne sont autres que

$$e dS, \quad e \frac{d\varphi}{dt} dS = u dS, \quad e \frac{d\psi}{dt} dS = v dS, \quad e \frac{d\chi}{dt} dS = w dS,$$

et l'on retrouve, par suite, les formules (6), qui restent ainsi démontrées en général, tandis qu'auparavant nous les avons établies seulement pour les mouvements de translation des charges.

Il ne serait pas difficile d'obtenir, même dans le cas général, la transformation des potentiels retardés par un calcul direct, mais il est inutile de s'y arrêter.

Je préfère faire remarquer qu'on peut concevoir l'action d'un champ donné (sur un point  $P$  et dans un instant  $t$ ) répartie entre les points du champ d'une infinité de manières. On peut notamment:

1) Attribuer à chaque point du champ la charge qui s'y trouvait à l'instant  $t$ .

On a de la sorte les expressions primitives des potentiels retardés, tels qu'ils ont été définis au début du Chapitre précédent.

2) Attribuer à toute charge la position qu'elle occupait à l'instant  $t$ .

C'est ce qu'on fait dans les expressions transformées (6).

Dans la forme originale les actions sont en quelque sorte réparties suivant les point de vue d'EULER.

Les expressions transformées correspondent, au contraire, au point de vue de LAGRANGE.

#### 14. - Charge unique en mouvement de translation uniforme.

Si  $c$  désigne la vitesse constante de translation, on a

$$\varphi(t) = ct, \quad \psi(t) = 0, \quad \chi(t) = 0,$$

en supposant l'axe  $\xi$  dirigé suivant la translation.

Les équations (7) et (8) se réduisent à

$$(7') \quad \xi' = -ar, \quad \eta' = 0, \quad \zeta' = 0,$$

$$(8') \quad r^2 = (\xi + ar)^2 + \eta^2 + \zeta^2,$$

où

$$(9) \quad a = Ac$$

est une constante numérique plus petite que l'unité.

L'expression (5 bis) de  $rD$  devient

$$rD = r - a(\xi + ar) = (1 - a^2)r - a\xi.$$

Or, en multipliant par  $(1 - a^2)$ , on tire de (8')

$$[(1 - a^2)r - a\xi]^2 = \xi^2 + (1 - a^2)(\eta^2 + \zeta^2),$$

ce qui donne

$$rD = \xi^2 + (1 - a^2)(\eta^2 + \zeta^2).$$

Les potentiels élémentaires sont donc

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} F = \frac{m}{\sqrt{\xi^2 + (1 - a^2)(\eta^2 + \zeta^2)}}; \\ U = aF, \quad V = 0, \quad W = 0. \end{array} \right.$$

Les formules de transformation (1) étant à présent

$$x = \xi + ct, \quad y = \eta, \quad z = \zeta,$$

les opérations différentielles

$$\frac{d}{dx}, \quad \frac{d}{dy}, \quad \frac{d}{dz}, \quad A \frac{d}{dt}$$

seront exprimées dans nos variables  $\xi, \eta, \zeta, t$  par

$$\frac{d}{d\xi}, \quad \frac{d}{d\eta}, \quad \frac{d}{d\zeta}, \quad A \frac{d}{dt} - a \frac{d}{d\xi},$$

d'où, pour toute fonction  $f$  des seules variables  $\xi, \eta, \zeta$ ,

$$\square f = \frac{d^2 f}{dx^2} + \frac{d^2 f}{dy^2} + \frac{d^2 f}{dz^2} - A^2 \frac{d^2 f}{dt^2} = (1 - a^2) \frac{d^2 f}{d\xi^2} + \frac{d^2 f}{d\eta^2} + \frac{d^2 f}{d\zeta^2}.$$

On voit bien que

$$\square F = \square U = 0,$$

$$A \frac{dF}{dt} + \frac{dU}{dx} = \frac{d}{d\xi} (U - aF) = 0.$$

C'est la vérification directe des équations (4) et (5) du Chapitre précédent.

Les expressions explicites des forces électromagnétiques du champ dérivent de (I) et (II), en y substituant les valeurs (10). Je n'y insiste pas davantage, car un tel champ a déjà été très bien étudié (\*).

### CHAPITRE III.

## RÉSOLUTION DU PROBLÈME PROPOSÉ

### 15. - Données et mise en équation.

Un conducteur placé dans un champ électrostatique s'électrise par influence. Un phénomène analogue doit évidemment se présenter lorsque le champ varie avec le temps. Seulement la distribution induite sera en général variable et il se produira des courants.

En tout cas, la présence d'un conducteur dans un champ donné entraîne des modifications du champ.

Selon notre point de vue la question de déterminer ces modifications revient au calcul des termes additionnels que la présence du conducteur introduit dans les expressions des potentiels retardés. En d'autres termes, il s'agit d'assigner les potentiels retardés correspondant à la distribution et aux courants induits sur le conducteur.

Sans envisager ici le problème général, arrivons tout de suite au cas particulier qui forme l'objet de notre recherche.

Une charge donnée  $m$  se meut alors avec une vitesse constante  $c$  parallèlement à un plan conducteur indéfini  $\sigma$ , le milieu ambiant étant l'éther (fig. 3).

Choisissons un système d'axes mobiles  $\Omega\xi\eta\zeta$ , invariablement liés à  $m$ , ayant  $\sigma$  pour plan  $\zeta = 0$ , et  $m$  sur le demi-axe positif des  $\zeta$ . Les coordonnées de  $m$  sont alors  $0, 0, d > 0$ ,  $d$  étant la distance constante de  $m$  à  $\sigma$ .

S'il n'y avait pas de plan conducteur, les potentiels du champ seraient donnés par les formules (10) du Chapitre précédent en y changeant seulement  $\zeta$  en  $\zeta - d$ .

Mais le mouvement de  $m$  donne naissance à une distribution induite (variable) sur le plan conducteur et il lui correspond un potentiel électro-

(\*) HEAVISIDE, *Electrical papers*, vol. II: RIGHI, *Sui campi elettromagnetici e particolarmente su quelli creati da cariche elettriche e da poli magnetici in movimento*, « Nuovo Cimento », 5<sup>a</sup> serie, t. II, agosto 1901.

statique  $F_1$  et un potentiel vecteur  $U_1, V_1$  ( $W_1$  est évidemment nul, car le mouvement de l'électricité a lieu sur le plan  $\zeta = 0$ ).

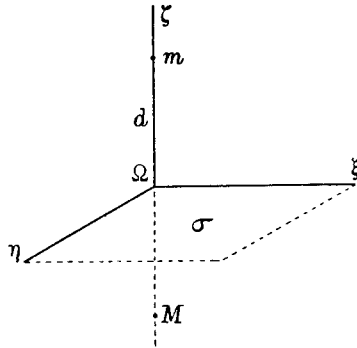


Fig. 3.

Les potentiels du champ, modifié par la présence du plan conducteur, se présentent donc sous la forme

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} F = \frac{m}{\Delta} + F_1, \\ U = \frac{ma}{\Delta} + U_1, \quad V = V_1, \quad W = 0, \end{array} \right.$$

en ayant posé pour abrégé

$$(2) \quad \Delta^2 = \xi^2 + (1 - a^2)[\eta^2 + (\zeta - d)^2].$$

Examinons maintenant à quelles conditions doivent satisfaire les inconnues  $F_1, U_1, V_1$  comme fonctions des variables  $\xi, \eta, \zeta, t$ .

Tout d'abord, eu égard au fait que le phénomène est stationnaire par rapport aux axes  $\Omega\xi\eta\zeta$ , ces fonctions ne dépendront pas explicitement du temps  $t$ .

Elles sont toutes des potentiels retardés (correspondant à des distributions de surface sur le plan  $\zeta = 0$ ); donc, d'après le numéro précédent, des solutions de l'équation

$$(3) \quad \square f \equiv (1 - a^2) \frac{d^2 f}{d\xi^2} + \frac{d^2 f}{d\eta^2} + \frac{d^2 f}{d\zeta^2} = 0;$$

elles satisfont à l'équation (5) du Chapitre I, qui devient à présent

$$(4) \quad a \frac{dF_1}{d\xi} = \frac{dU_1}{d\xi} + \frac{dV_1}{d\eta};$$

elles se comportent partout, même à l'infini et à la traversée du plan conducteur, comme des potentiels ordinaires <sup>(10)</sup>. Leurs expressions analytiques (sous forme d'intégrales doubles étendues au plan  $\zeta = 0$ ) ne changent pas lorsqu'on change le signe de  $\zeta$ . Elles ont donc même valeur dans les points symétriques par rapport au plan  $\zeta = 0$ ; elles sont en somme des fonctions de l'argument  $|\zeta|$ .

Les conditions caractéristiques, relatives au plan  $\zeta = 0$ , peuvent alors être présentées sous la forme

$$(5) \quad -\frac{1}{2\pi} \frac{dF_1}{d|\zeta|} = e_1, \quad -\frac{1}{2\pi} \frac{dU_1}{d|\zeta|} = Au_1, \quad -\frac{1}{2\pi} \frac{dV_1}{d|\zeta|} = Av_1,$$

$e_1, u_1, v_1$  étant la densité de la distribution et les composantes du courant induit.

Ce sont de nouvelles inconnues dont, pour le moment, on sait à peine qu'elles doivent vérifier l'équation de continuité.

Il n'y a pas lieu d'en tenir compte, car c'est une conséquence de (4). En effet, la dite équation  $(de_1/dt + du_1/dx + dv_1/dy = 0$ , par rapport aux axes fixes) s'écrit

$$a \frac{de_1}{d\xi} = A \left( \frac{du_1}{d\xi} + \frac{dv_1}{d\eta} \right),$$

et cela résulte bien de (5) en ayant égard à (4).

Les équations (5) ne servent donc, peut-on dire, qu'à définir  $e_1, u_1, v_1$ .

Les prémisses générales du Chapitre I ne nous donnant pas d'autres renseignements sur les fonctions  $F_1, U_1, V_1$ , on n'en a pas assez pour les déterminer.

On devait s'y attendre, car jusqu'à présent nous avons traité le plan conducteur simplement comme un siège d'électricité en mouvement.

Or ce qui caractérise les conducteurs est bien quelque chose de plus précis: *c'est la loi de OHM*.

Pour les surfaces conductrices (isotropes) elle exprime que le courant est proportionnel à la composante tangentielle de la force électrique, et a la même direction.

Nous devons donc poser

$$(6) \quad X = Aku_1, \quad Y = Akv_1,$$

(<sup>10</sup>) On pourrait même dire, en se rapportant aux variables  $\xi/\sqrt{1-a^2}, \eta, \zeta$ , que les fonctions  $F_1, U_1, V_1$  sont des potentiels ordinaires de distributions ayant pour siège le plan  $\zeta = 0$ . C'est ce qui résulterait directement de leurs expressions transformées. C'est d'ailleurs ce qui résulte de (3), d'après la façon dont se comportent les dites fonctions.

$k$  étant une constante, puisque nous supposons bien que le plan conducteur  $\sigma$  est homogène.

Quelle est la signification physique de cette constante  $k$ ?

Ayant choisi (n. 3) le système d'unités électrostatiques,  $Ak$  n'est autre chose que la résistance de l'unité de surface de notre plan conducteur, mesurée en unités électrostatiques. Or, si  $R_e, R_m, R_o$  sont les trois nombres qui mesurent une même résistance, respectivement en unités électrostatiques, en unités électromagnétiques et en ohms, on a <sup>(11)</sup>

$$R_e = A^2 R_m, \quad R_m = 10^9 R_o.$$

Il s'ensuit

$$k = A 10^9 R_o,$$

d'où, puisque  $1/A = 3 \cdot 10^{10}$ ,

$$k = \frac{1}{30} R_o.$$

*La constante  $k$  est donc un trentième de la résistance de l'unité de surface du plan conducteur exprimée en ohms.*

Il est à peine nécessaire d'ajouter que, une fois trouvées  $F_1, U_1, V_1$ , on a, d'après (1) et les formules (I), (II) du Chapitre I, les potentiels du champ.

Il faut, bien entendu, remplacer dans (I), (II) les symboles opératifs

$$\frac{d}{dx}, \frac{d}{dy}, \frac{d}{dz}, A \frac{d}{dt}$$

par les équivalents

$$\frac{d}{d\xi}, \frac{d}{d\eta}, \frac{d}{d\zeta}, -a \frac{d}{d\xi}.$$

On a ainsi

$$(III) \quad \left\{ \begin{array}{l} L = L_1, \\ M = -ma \frac{d}{d\zeta} \frac{1}{\Delta} + M_1, \\ N = ma \frac{d}{d\eta} \frac{1}{\Delta} + N_1; \end{array} \right.$$

<sup>(11)</sup> Voir, par exemple, MASCART et JOUBERT, *Leçons, etc.*, t. I, pp. 671-675.

$$(IV) \quad \left\{ \begin{array}{l} X = -m(1-a^2) \frac{d}{d\xi} \frac{1}{\Delta} + X_1, \\ Y = -m \frac{d}{d\eta} \frac{1}{\Delta} + Y_1, \\ Z = -m \frac{d}{d\zeta} \frac{1}{\Delta} + Z_1; \end{array} \right.$$

où

$$(V) \quad \left\{ \begin{array}{l} L_1 = \frac{dV_1}{d\zeta}, \\ M_1 = -\frac{dU_1}{d\zeta}, \\ N_1 = \frac{dU_1}{d\eta} - \frac{dV_1}{d\xi}; \end{array} \right.$$

$$(VI) \quad \left\{ \begin{array}{l} X_1 = -\frac{dF_1}{d\xi} + a \frac{dU_1}{d\xi}, \\ Y_1 = -\frac{dF_1}{d\eta} + a \frac{dV_1}{d\xi}, \\ Z_1 = -\frac{dF_1}{d\zeta}, \end{array} \right.$$

représentent évidemment les composantes des forces électromagnétiques du champ provenant de la distribution et des courants induits sur le plan  $\sigma$ . Les premiers termes, dans (III) et (IV), définissent, au contraire, le champ qui serait produit par le mouvement de  $m$ , s'il n'y avait pas de plan conducteur.

Nous avons désormais tout ce qu'il nous faut pour aborder la résolution mathématique de notre question. En effet, nous allons montrer que, en tenant compte des conditions qualitatives rappelées ci-dessus, les équations (4) et (6) suffisent bien à déterminer  $F_1$ ,  $U_1$ ,  $V_1$ .

### 16. - Expressions analytiques des potentiels retardés.

Explicitons d'abord les équations (6) en y exprimant tout en fonction de nos inconnues  $F_1$ ,  $U_1$ ,  $V_1$ .



On a, d'après (IV) et (VI),

$$X = -m(1-a^2) \frac{d \frac{1}{\Delta}}{d\xi} - \frac{dF_1}{d\xi} + a \frac{dU_1}{d\xi},$$

$$Y = -m \frac{d \frac{1}{\Delta}}{d\eta} - \frac{dF_1}{d\eta} + a \frac{dV_1}{d\xi},$$

et, par suite, en remplaçant  $Au_1, Av_1$  par leurs valeurs (5),

$$(6') \quad \begin{cases} \frac{k}{2\pi} \frac{dU_1}{d|\zeta|} - \frac{dF_1}{d\xi} + a \frac{dU_1}{d\xi} = m(1-a^2) \frac{d \frac{1}{\Delta}}{d\xi}, \\ \frac{k}{2\pi} \frac{dV_1}{d|\zeta|} - \frac{dF_1}{d\eta} + a \frac{dV_1}{d\xi} = m \frac{d \frac{1}{\Delta}}{d\eta}. \end{cases}$$

Ces deux relations sont satisfaites en tout point du plan  $\zeta = 0$ . Il est aisé d'en déduire deux autres valables en tout point de l'espace.

Remarquons pour cela que, d'après les propriétés dont doivent jouir  $F_1, U_1, V_1$ , les premiers membres des (6') sont deux fonctions de  $\xi, \eta, |\zeta|$ , holomorphes pour toutes les valeurs réelles de  $\xi, \eta$  et pour  $|\zeta| > 0$ , se réduisant respectivement à

$$m(1-a^2) \frac{d \frac{1}{\Delta}}{d\xi}, \quad m \frac{d \frac{1}{\Delta}}{d\eta}$$

pour  $|\zeta| = 0$ , et vérifiant l'équation

$$\square f = 0.$$

Les fonctions

$$m(1-a^2) \frac{d \frac{1}{\Delta}}{d\xi}, \quad m \frac{d \frac{1}{\Delta}}{d\eta},$$

elles-mêmes satisfont à toutes ces conditions, pourvu seulement qu'on y remplace  $\zeta$  par  $-|\zeta|$  (autrement elles auraient des singularités au point  $m$ ).

Comme il n'en peut pas exister d'autres, on voit bien qu'en posant

$$(7) \quad \nabla^2 = \xi^2 + (1 - a^2)[\eta^2 + (|\zeta| + d)^2]$$

on tire des (6') les équations

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{k}{2\pi} \frac{dU_1}{d|\zeta|} - \frac{dF_1}{d\xi} + a \frac{dU_1}{d\xi} = m(1 - a^2) \frac{d\frac{1}{\nabla}}{d\xi}, \\ \frac{k}{2\pi} \frac{dV_1}{d|\zeta|} - \frac{dF_1}{d\eta} + a \frac{dV_1}{d\xi} = m \frac{d\frac{1}{\nabla}}{d\eta}, \end{array} \right.$$

vérifiées en tout point de l'espace.

Il s'agit maintenant d'intégrer le système formé des équations du premier ordre (8), de

$$(4) \quad a \frac{dF_1}{d\xi} = \frac{dU_1}{d\xi} + \frac{dV_1}{d\eta},$$

et des équations du second ordre

$$(9) \quad \square F_1 = 0, \quad \square U_1 = 0, \quad \square V_1 = 0, \\ \left[ \square = (1 - a^2) \frac{d^2}{d\xi^2} + \frac{d^2}{d\eta^2} + \frac{d^2}{d\zeta^2} \right],$$

qui sont bien compatibles, par des fonctions de  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $|\zeta|$ , holomorphes dans le domaine indiqué tout à l'heure, et s'annulant pour  $|\zeta| = \infty$ , comme il convient à des potentiels de distributions situées sur le plan  $\zeta = 0$ .

Les conditions aux limites (6') sont alors nécessairement satisfaites.

*Détermination de  $F_1$ .* - En dérivant la première des équations (8) par rapport à  $\xi$ , la seconde par rapport à  $\eta$ , et ayant égard à (4), il vient

$$\frac{ak}{2\pi} \frac{d^2 F_1}{d|\zeta| d\xi} - \frac{d^2 F_1}{d\xi^2} - \frac{d^2 F_1}{d\eta^2} + a^2 \frac{d^2 F_1}{d\xi^2} = m \left[ (1 - a^2) \frac{d^2 \frac{1}{\nabla}}{d\xi^2} + \frac{d^2 \frac{1}{\nabla}}{d\eta^2} \right],$$

d'où, à cause de

$$\square F_1 = 0, \quad \square \frac{1}{\nabla} = 0,$$

$$\frac{ak}{2\pi} \frac{d^2 F_1}{d|\zeta| d\xi} + \frac{d^2 F_1}{d|\zeta|^2} = -m \frac{d \frac{1}{\nabla}}{d|\zeta|^2}.$$

En intégrant, par rapport à  $|\zeta|$ , depuis une valeur quelconque jusqu'à l'infini, on obtient

$$(10) \quad \frac{ak}{2\pi} \frac{dF_1}{d\xi} + \frac{dF_1}{d|\zeta|} = -m \frac{d \frac{1}{\nabla}}{d|\zeta|},$$

car les deux membres s'annulent pour  $|\zeta| = \infty$ .

Dans cette équation mettons en évidence  $F_1 + m/\nabla$  comme fonction inconnue. Elle s'écrit alors

$$(10') \quad \frac{ak}{2\pi} \frac{d}{d\xi} \left( F_1 + \frac{m}{\nabla} \right) + \frac{d}{d|\zeta|} \left( F_1 + \frac{m}{\nabla} \right) = m \frac{ak}{2\pi} \frac{d \frac{1}{\nabla}}{d\xi},$$

et il est aisé d'en obtenir une solution par l'artifice suivant.

Posons

$$(11) \quad \tau^2 = \left( \xi + \frac{ak}{2\pi} \mu \right)^2 + (1 - a^2) [\eta^2 + (|\zeta| + d + \mu)^2],$$

$\mu$  étant une indéterminée.

On a évidemment

$$\left( \frac{1}{\tau} \right)_{\mu=0} = \frac{1}{\nabla}, \quad \left( \frac{1}{\tau} \right)_{\mu=\infty} = 0,$$

$$\square \frac{1}{\tau} = 0,$$

et en outre ( $\tau$  dépendant de  $\mu$  par l'intermédiaire des arguments  $\xi + (ak/2\pi)\mu$ ,  $|\zeta| + d + \mu$ )

$$\frac{d \frac{1}{\tau}}{d\mu} = \frac{ak}{2\pi} \frac{d \frac{1}{\tau}}{d\xi} + \frac{d \frac{1}{\tau}}{d|\zeta|}.$$

D'après cela, la fonction

$$(12) \quad F_1 + \frac{m}{\nabla} = -m \frac{ak}{2\pi} \int_0^\infty \frac{d\frac{1}{\tau}}{d\xi} d\mu \quad (1^a)$$

satisfait bien à l'équation (10'). Mais elle satisfait encore à

$$\square \left( F_1 + \frac{m}{\nabla} \right) = 0,$$

s'annule à l'infini et se comporte régulièrement pour toutes les valeurs réelles de  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$ , ayant seulement une discontinuité normale pour  $\zeta = 0$  (qui provient de l'argument  $|\zeta|$ ). Il en est de même pour  $F_1$ , dont on a ainsi achevé la recherche.

En effet, comme  $F_1$  doit satisfaire à (10), son expression ne pourrait différer de (12) que par une fonction arbitraire de  $\xi + (ak/2\pi)|\zeta|$ . Mais, d'après les autres conditions qui sont imposées à  $F_1$ , cette fonction de  $\xi + (ak/2\pi)|\zeta|$  devrait satisfaire à l'équation  $\square f = 0$  et s'annuler à l'infini. Dès lors, elle est identiquement nulle, ce qui démontre l'unicité de la solution fournie par (12).

*Détermination de  $V_1$ .* - La seconde des équations (8) peut être écrite

$$(8_b) \quad a \frac{dV_1}{d\xi} + \frac{k}{2\pi} \frac{dV_1}{d|\zeta|} = \frac{d}{d\eta} \left( F_1 + \frac{m}{\nabla} \right).$$

Posons ( $\nu$  étant une nouvelle indéterminée)

$$(13) \quad \mathcal{C}^2 = \left( \xi + \frac{ak}{2\pi} \mu + a\nu \right)^2 + (1 - a^2) \left[ \eta^2 + \left( |\zeta| + d + \mu + \frac{k}{2\pi} \nu \right)^2 \right],$$

d'où

$$\begin{aligned} \left( \frac{1}{\mathcal{C}} \right)_{\nu=\infty} &= \frac{1}{\tau}, & \left( \frac{1}{\mathcal{C}} \right)_{\nu=-\infty} &= 0, \\ \square \frac{1}{\mathcal{C}} &= 0, & \frac{d\frac{1}{\mathcal{C}}}{d\nu} &= a \frac{d\frac{1}{\mathcal{C}}}{d\xi} + \frac{k}{2\pi} \frac{d\frac{1}{\mathcal{C}}}{d|\zeta|}. \end{aligned}$$

(1<sup>a</sup>) Il est à peine nécessaire de faire remarquer que la fonction sous le signe  $d(1/\tau)/d\xi$  reste finie et continue pour toute valeur de  $\mu \geq 0$  et devient infiniment petite du second ordre pour  $\mu = \infty$ . Dès lors, l'intégrale de  $d(1/\tau)/d\xi$  entre 0 et  $\infty$  a un sens; elle est même une fonction régulière des arguments  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $|\zeta|$  dans tout le champ réel (c'est-à-dire pour toutes les valeurs réelles de  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$ ); elle peut être dérivée sous le signe, etc.

Ayant égard à (12), on reconnaît sans peine que

$$(14) \quad V_1 = m \frac{ak}{2\pi} \int_0^\infty d\mu \int_0^\infty \frac{d^2 \frac{1}{\mathcal{C}}}{d\xi d\eta} d\nu$$

est une solution de (8<sub>v</sub>).

On s'assure, comme tout à l'heure, que cette expression de  $V_1$  satisfait bien à toutes les autres conditions, et c'est la seule pour laquelle il en soit ainsi.

Une remarque s'impose toutefois à l'égard de l'intégrale double

$$\int_0^\infty d\mu \int_0^\infty \frac{d^2 \frac{1}{\mathcal{C}}}{d\xi d\eta} d\nu.$$

Tant qu'on n'a pas à la fois  $a = k = 0$ , la fonction sous le signe

$$\frac{d^2 \frac{1}{\mathcal{C}}}{d\xi d\eta}$$

devient infiniment petite du troisième ordre, lorsque le point représentatif  $(\mu, \nu)$  s'éloigne à l'infini d'une façon quelconque dans le premier quadrant. L'intégration est alors légitime et  $V_1$  est bien une fonction régulière de  $\xi, \eta, |\zeta|$ .

Mais il ne serait pas permis de supposer à la fois  $a = k = 0$ , puisque alors  $\mathcal{C}$  ne dépendrait plus de  $\nu$ , et l'intégrale

$$\int_0^\infty \frac{d^2 \frac{1}{\mathcal{C}}}{d\xi d\eta} d\nu$$

n'aurait pas de sens.

Cherchons donc directement ce qui se passe pour  $V_1$  (et pour  $U_1$ ) lorsque  $a = k = 0$ .

Ce n'est pas difficile, puisque, pour  $a = 0$ , quel que soit d'ailleurs  $k$ , on est reconduit au problème statique.

Il s'agit alors de l'influence d'une charge électrique  $m(0, 0, d)$  sur le plan conducteur  $\zeta = 0$ :  $U_1$  et  $V_1$  sont évidemment nuls, et il est bien connu que le potentiel électrostatique de la distribution induite se réduit à

$$F_1 = - \frac{m}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2 + (|\zeta| + d)^2}}.$$

C'est bien ce qui résulte des (15), (14) et (12) en y faisant  $a = 0$ . Mais en surplus, nous pouvons maintenant affirmer, à l'égard de  $U_1$  et  $V_1$ , qu'ils s'annulent pour  $a = 0$ , même si  $k$  est aussi  $= 0$ , tandis que cette conclusion n'aurait pas été légitime d'après les formules (14) et (15), puisqu'elles n'ont plus de sens pour  $a = k = 0$ .

*Détermination de  $U_1$ .* — Attendu la forme de  $V_1$ , l'équation (4), c'est-à-dire

$$\frac{d(U_1 - aF_1)}{d\xi} + \frac{dV_1}{d\eta} = 0,$$

nous donne après coup

$$(15) \quad U_1 - aF_1 = -m \frac{ak}{2\pi} \int_0^\infty d\mu \int_0^\infty \frac{d^2 \frac{1}{\mathcal{C}}}{d\eta^2} d\nu,$$

fonction régulière, etc.

Il nous reste à vérifier la première des équations (8), qu'on peut écrire

$$(8_a) \quad a \frac{d}{d\xi} (U_1 - aF_1) + \frac{k}{2\pi} \frac{d}{d|\xi|} (U_1 - aF_1) - \\ - (1 - a^2) \frac{d}{d\xi} \left( F_1 + \frac{m}{\nabla} \right) + \frac{ak}{2\pi} \frac{d}{d|\xi|} \left( F_1 + \frac{m}{\nabla} \right) = m \frac{ak}{2\pi} \frac{d \frac{1}{\nabla}}{d|\xi|}.$$

Son premier membre, en y introduisant pour  $U_1 - aF_1$ ,  $F_1 + m/\nabla$  leurs valeurs (15), (12), devient

$$-m \frac{ak}{2\pi} \left[ \int_0^\infty d\mu \int_0^\infty \frac{d^2}{d\eta^2} \left( a \frac{d \frac{1}{\mathcal{C}}}{d\xi} + \frac{k}{2\pi} \frac{d \frac{1}{\mathcal{C}}}{d|\xi|} \right) d\nu - \right. \\ \left. - (1 - a^2) \int_0^\infty \frac{d^2 \frac{1}{\tau}}{d\xi^2} d\mu + \frac{ak}{2\pi} \int_0^\infty \frac{d^2 \frac{1}{\tau}}{d|\xi| d\xi} d\nu \right].$$

Mais à cause des identités

$$a \frac{d \frac{1}{\mathcal{C}}}{d\xi} + \frac{k}{2\pi} \frac{d \frac{1}{\mathcal{C}}}{d|\xi|} = \frac{d \frac{1}{\mathcal{C}}}{d\nu}, \\ \left( \frac{1}{\mathcal{C}} \right)_{\nu=0} = \frac{1}{\tau}, \quad \left( \frac{1}{\mathcal{C}} \right)_{\nu=\infty} = 0,$$

l'intégrale double se réduit à

$$- \int_0^\infty \frac{d^2 \frac{1}{\tau}}{d\eta^2} d\mu,$$

dont la somme avec

$$- (1 - a^2) \int_0^\infty \frac{d^2 \frac{1}{\tau}}{d\xi^2} d\mu$$

peut être remplacée (à cause de  $\square(1/\tau) = 0$ ) par

$$\int_0^\infty \frac{d^2 \frac{1}{\tau}}{d|\zeta|^2} d\mu.$$

Le premier membre de (8<sub>a</sub>) n'est donc autre chose que

$$- m \frac{ak}{2\pi} \int_0^\infty \frac{d}{d|\zeta|} \left( \frac{ak}{2\pi} \frac{d \frac{1}{\tau}}{d\xi} + \frac{d \frac{1}{\tau}}{d|\zeta|} \right) d\mu.$$

Comme on a

$$\frac{ak}{2\pi} \frac{d \frac{1}{\tau}}{d\xi} + \frac{d \frac{1}{\tau}}{d|\zeta|} = \frac{d \frac{1}{\tau}}{d\mu},$$

$$\left( \frac{1}{\tau} \right)_{\mu=0} = \frac{1}{\nabla}, \quad \left( \frac{1}{\tau} \right)_{\mu=\infty} = 0,$$

il reste bien

$$m \frac{ak}{2\pi} \frac{d \frac{1}{\nabla}}{d|\zeta|}. \quad c. q. f. d.$$

*Remarque.* — Les quadratures indiquées dans les formules qui donnent  $F_1$ ,  $U_1$ ,  $V_1$  peuvent toutes être effectuées à l'aide des transcendents élémentaires.

Ainsi, par exemple, en posant

$$\zeta_1 = \frac{\frac{ak}{2\pi} \xi + (1 - a^2)(|\zeta| + d)}{1 - a^2 - \frac{a^2 k^2}{4\pi^2}},$$

on obtient

$$\int_0^{\infty} \frac{d\frac{1}{\tau}}{d\xi} d\mu = \frac{\xi - \frac{ak}{2\pi} \zeta_1}{\sqrt{1 - a^2 - \frac{a^2 k^2}{4\pi^2}}} \frac{1}{\nabla \left( \nabla + \sqrt{1 - a^2 - \frac{a^2 k^2}{4\pi^2}} \zeta_1 \right)},$$

d'où

$$(12 \text{ bis}) \quad F_1 + \frac{m}{\nabla} = -m \frac{ak}{2\pi} \frac{\xi - \frac{ak}{2\pi} \zeta_1}{\sqrt{1 - a^2 - \frac{a^2 k^2}{4\pi^2}}} \frac{1}{\nabla \left( \nabla + \sqrt{1 - a^2 - \frac{a^2 k^2}{4\pi^2}} \zeta_1 \right)}.$$

C'est une expression assez peu instructive, dont, d'ailleurs, on n'aura pas besoin dans la suite.

Les expressions de  $U_1$  et de  $V_1$  sont encore plus compliquées. Je ne les transcris pas, parce que je n'aurai pas non plus occasion de m'en servir.

### 17. - Étude des fonctions $F_1$ , $U_1$ , $V_1$ pour les petites valeurs du paramètre $a$ .

L'expression (12) de  $F_1$  est valable pour toutes les valeurs (réelles) de  $a$  et de  $k$ , l'intégrale

$$\int_0^{\infty} \frac{d\frac{1}{\tau}}{d\xi} d\mu$$

étant une fonction régulière de  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $|\zeta|$ , même pour  $a = k = 0$ . Montrons que, comme fonction de ces paramètres aussi, elle est holomorphe dans le domaine de  $a = k = 0$ .

On pourrait le déduire de (12 bis). Ce serait une vérification *a posteriori* exigeant le calcul préalable de l'intégrale; il vaut peut-être mieux s'en rendre compte directement comme il suit.

Partons de l'identité

$$\int_0^{\infty} \frac{d\frac{1}{\tau}}{d\xi} d\mu = \int_0^1 \frac{d\frac{1}{\tau}}{d\xi} d\mu + \int_1^{\infty} \frac{d\frac{1}{\tau}}{d\xi} d\mu,$$



changeons, dans la seconde intégrale,  $\mu$  en  $1/\mu$ , et posons

$$\tau_1^2 = \left( \mu\xi + \frac{ak}{2\pi} \right)^2 + (1 - a^2)[\mu^2\eta^2 + (1 + \mu|\zeta| + \mu d)^2].$$

Il vient

$$\int_0^\infty \frac{d\frac{1}{\tau}}{d\xi} d\mu = - \int_0^1 \left( \frac{\xi + \frac{ak}{2\pi}\mu}{\tau^3} + \frac{\mu\xi + \frac{ak}{2\pi}}{\tau_1^3} \right) d\mu.$$

Dans le second membre, la fonction sous le signe est bien une fonction holomorphe de  $a$  et de  $k$ , au voisinage de  $a = k = 0$ , pour toutes les valeurs de  $\mu$  comprises dans l'intervalle d'intégration. (En effet, ni  $\tau$ , ni  $\tau_1$  ne s'annulent dans cet intervalle, lorsqu'on y fait  $a = k = 0$ .)

Cela suffit pour nous assurer qu'il en est de même de l'intégrale

$$\int_0^\infty \frac{d\frac{1}{\tau}}{d\xi} d\mu.$$

$F_1$  se comporte donc régulièrement pour les petites valeurs des paramètres  $a$  et  $k$ .

Elle est, par conséquent, développable suivant les puissances de  $a$  et de  $k$ .

Occupons-nous particulièrement du développement suivant les puissances de  $a$ .

Les expressions de  $\tau$  et  $\tau_1$  montrent que, en envisageant  $a$  comme une variable complexe de module non supérieur à l'unité (quelles que soient les valeurs réelles de  $\xi, \eta, \zeta$ , réelles et non négatives de  $k, \mu$ ), les modules de  $\tau^2, \tau_1^2$  ne peuvent pas descendre au-dessous de

$$\begin{aligned} [\eta^2 + (|\zeta| + d + \mu)^2] (1 - |a|^2), \\ [\mu^2\eta^2 + (1 + \mu|\zeta| + \mu d)^2] (1 - |a|^2), \end{aligned}$$

dès qu'on suppose

$$\frac{k}{2\pi} > 1.$$

Donc ni  $\tau$  ni  $\tau_1$  ne s'annulent tant que

$$|a| = < 1,$$

et l'on en conclut:

$F_1$  est une fonction de  $a$ , certainement holomorphe l'intérieur de la circonférence  $|a|=1$ . Son développement en série de puissances de  $a$  est donc toujours convergent ( $a$  étant ici  $<1$ ), pourvu seulement que l'on ait

$$(16) \quad \frac{k}{2\pi} < 1.$$

Les fonctions  $U_1$  et  $V_1$  ne sont pas holomorphes pour  $a = k = 0$ . La recherche des singularités dont elles sont affectées pour ce couple de valeurs nous entraînerait trop loin.

Les remarques suivantes suffisent pour notre but.

Tout d'abord, dès qu'on suppose  $k > 0$ ,  $U_1$  et  $V_1$  sont des fonctions holomorphes de  $a$ , au voisinage de  $a = 0$ .

On le démontre sans peine en changeant, dans les intégrales doubles à l'aide desquelles s'expriment  $U_1$  et  $V_1$ ,  $\nu$  en  $2\pi\nu/k$  (ce qui implique justement que  $k$  soit différent de zéro), et en vérifiant ensuite que les fonctions sous le signe restent holomorphes au voisinage de  $a = 0$ , dans tout le champ d'intégration. Il va sans dire que, le champ étant infini, la vérification doit être conduite avec les précautions nécessaires, conformément à ce qu'on vient de faire pour l'intégrale simple exprimant  $F_1$ .

Cela nous assure que  $U_1$  et  $V_1$  sont développables suivant les puissances de  $a$ , pour  $a$  assez petit. Mais si l'on cherche, comme ci-dessus, à fixer une limite inférieure pour la validité du développement, on est conduit à la condition restrictive

$$|a| < \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{k}{2\pi} + \frac{2\pi}{k}\right)^2}}.$$

Les développements de  $U_1$  et  $V_1$  suivant les puissances de  $a$  ne convergent donc (ou du moins on n'a pas le droit d'affirmer qu'il en est ainsi) que sous la condition

$$(17) \quad a < \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{k}{2\pi} + \frac{2\pi}{k}\right)^2}}.$$

Pour les valeurs numériques de  $a$  et de  $k$ , qu'on peut présumer dans les conditions expérimentales ordinaires (voir le numéro suivant), l'inégalité (16) est toujours satisfaite; mais il n'en est pas de même pour la (17), et l'on devrait par suite renoncer à développer  $U_1$  et  $V_1$  suivant les puissances de  $a$ .

On peut tourner la difficulté en modifiant un peu la forme du développement.

Posons

$$(18) \quad h = \frac{2\pi a}{k},$$

$$(19) \quad \mathcal{C}'^2 = \left( \xi + \frac{ak}{2\pi} \mu + h\nu \right)^2 + (1 - a^2)[\eta^2 + (|\zeta| + d + \mu + \nu)^2].$$

Les expressions (14) et (15) de  $V_1$  et de  $U_1 - aF_1$ , après le changement de  $\nu$  en  $(2\pi/k)\nu$ , peuvent être écrites

$$(14') \quad V_1 = ma \int_0^\infty d\mu \int_0^\infty d^2 \frac{1}{\mathcal{C}'} d\nu,$$

$$(15') \quad U_1 - aF_1 = -ma \int_0^\infty d\mu \int_0^\infty d^2 \frac{1}{d\eta^2} d\nu.$$

Pour toutes les valeurs réelles de  $\xi, \eta, \zeta$ , réelles et non négatives des paramètres  $h$  et  $k$ , la fonction  $\mathcal{C}'^2$  (de la variable complexe  $a$ ) ne s'annule pour aucune valeur de  $a$ , à l'intérieur de la circonférence  $|a|=1$ ; en supposant, bien entendu, que l'inégalité (16) soit satisfaite. On le vérifie aisément d'après l'expression (19) de  $\mathcal{C}'^2$ .

Il en résulte cette circonstance importante:

*Les développements des intégrales doubles*

$$\int_0^\infty d\mu \int_0^\infty d^2 \frac{1}{d\eta d\xi} d\nu, \quad \int_0^\infty d\mu \int_0^\infty d^2 \frac{1}{d\eta^2} d\nu,$$

*suivant les puissances de  $a$ , lorsqu'on y traite  $h$  comme un paramètre (pouvant prendre, d'ailleurs, une valeur quelconque) sont convergents, pour  $|a| < 1$ , sous la seule condition (16), qui garantit également la validité du développement de  $F_1$ .*

**18. - Expressions approchées lorsqu'on néglige les termes en  $a^2$ .  
Caractères généraux du champ.**

Au point de vue des applications physiques, on peut traiter  $a$  et  $k$  comme des quantités très petites.

Pour nous rendre compte de l'ordre de grandeur, supposons, par exemple, que la vitesse de la charge mobile soit de 300<sup>m</sup> par seconde (ce qui est déjà assez exagéré); il vient alors

$$a = \frac{300 \cdot 10^3}{3 \cdot 10^{10}} = 10^{-6}.$$

Supposons que le plan conducteur  $\sigma$  soit une plaque de cuivre de l'épaisseur d'un millimètre.

Si  $g$  est l'épaisseur de la plaque,  $r$  sa résistance spécifique (exprimée en ohms), on aura, d'après le n. 15,

$$k = \frac{1}{30} R_0 = \frac{1}{30} \frac{r}{g}.$$

A présent

$$r = 16 \cdot 10^{-7},$$

à peu près, et

$$g = 10^{-1};$$

il en résulte donc que l'on a à peu près

$$k = \frac{1}{2} 10^{-6},$$

$$d = \frac{2\pi a}{k} = 4\pi.$$

La condition

$$(16) \quad \frac{k}{2\pi} < 1$$

est bien vérifiée (et le sera toujours, de quelque façon que l'on modifie les conditions expérimentales). L'inégalité (17) ne l'est pas (mais on pourrait y satisfaire, soit en remplaçant le cuivre par un métal plus résistant, soit en supposant la plaque plus mince).

Pour avoir des expressions approchées, valables en tout cas (et plus que suffisantes dans la pratique non seulement pour l'analyse qualitative, mais aussi pour la discussion numérique du champ), il convient de développer suivant les puissances de  $a$ , en ayant soin, bien entendu, de traiter les intégrales doubles (14') et (15') comme il a été indiqué au numéro précédent.

*On pourra bien se contenter des termes du premier ordre en  $a$ , car les termes d'ordre supérieur sont absolument négligeables.*

En effet, dès que le rayon de convergence des développements dont il s'agit est l'unité, on est assuré que la somme des termes d'ordre supérieur au premier ne dépasse pas, pour  $|a| < 1/n$ ,

$$\frac{\mathcal{M}n^2|a|^2}{1-n|a|},$$

où  $n > 1$  et où  $\mathcal{M}$  est le module maximum des valeurs que la fonction correspondant à la série prend sur la circonférence  $|a| = 1/n$ .

Par cette voie il serait aisé de vérifier en toute rigueur que, pour les trois fonctions

$$a \int_0^\infty \frac{d}{d\xi} \frac{1}{\tau} d\mu, \quad a \int_0^\infty d\mu \int_0^\infty \frac{d^2}{d\xi d\eta} \frac{1}{\mathcal{C}'} dv, \quad a \int_0^\infty d\mu \int_0^\infty \frac{d^2}{d\eta^2} \frac{1}{\mathcal{C}'} dv,$$

les restes (après les termes en  $a$ ) ont des valeurs numériques tout à fait négligeables, même si la vitesse de convection atteignait quelques kilomètres par seconde.

Cela posé, arrivons à l'évaluation effective des expressions approchées.

On a, tout d'abord, en négligeant  $a^2$ ,

$$(7') \quad \nabla^2 = \xi^2 + \eta^2 + (|\zeta| + d)^2.$$

Comme, d'autre part, les seconds membres des formules (12), (14') et (15') contiennent  $a$  en facteur, on peut poser  $a = 0$  dans les fonctions  $\tau$  et  $\mathcal{C}'$ . Les expressions de ces fonctions se réduisent alors à

$$(11') \quad \tau^2 = \xi^2 + \eta^2 + (|\zeta| + d + \mu)^2,$$

$$(19') \quad \mathcal{C}'^2 = (\xi + h\nu)^2 + \eta^2 + (|\zeta| + d + \mu + \nu)^2.$$

Il en résulte

$$\int_0^\infty \frac{d}{d\xi} \frac{1}{\tau} d\mu = -\frac{\xi}{\nabla(\nabla + |\zeta| + d)},$$

d'où, en posant pour abrégier,

$$(20) \quad f = \frac{1}{\nabla(\nabla + |\zeta| + d)},$$

$$(12') \quad F_1 = -\frac{m}{\nabla} + m \frac{ak}{2\pi} \xi f.$$

D'après (V), pour former les composantes de la force magnétique, on a besoin de  $dV_1/d\xi$ ,  $dU_1/d\xi$ ,  $dU_1/d\eta - dV_1/d\xi$ , pendant que, d'après (VI), les termes en  $U_1$  et  $V_1$ , dans les composantes de la force électrique, résultent du second ordre et doivent par conséquent être négligés. Il convient ainsi d'évaluer directement

$$\frac{dV_1}{d|\xi|}, \quad \frac{dU_1}{d|\xi|}, \quad \frac{dU_1}{d\eta} - \frac{dV_1}{d\xi},$$

au lieu de  $U_1$  et  $V_1$ .

On peut écrire, d'après (14'),

$$\frac{d|\xi|}{dV_1} = ma \frac{d}{d\xi} \int_0^\infty dv \frac{d}{d\eta} \int_0^\infty \frac{d}{d|\xi|} \frac{1}{\mathcal{C}'} d\mu;$$

mais, en tenant compte de ce que

$$\frac{d}{d\mu} \frac{1}{\mathcal{C}'} = \frac{d}{d|\xi|} \frac{1}{\mathcal{C}'}, \quad \left( \frac{1}{\mathcal{C}'} \right)_{\mu=\infty} = 0,$$

l'intégrale intérieure se réduit à

$$-\left( \frac{1}{\mathcal{C}'} \right)_{\mu=0},$$

et, par suite,  $dV_1/d|\xi|$  à

$$- ma \frac{d}{d\xi} \int_0^\infty \frac{d}{d\eta} \left( \frac{1}{\mathcal{C}'} \right)_{\mu=0} dv.$$

Le calcul de l'intégrale donne

$$\int_0^\infty \frac{d}{d\eta} \left( \frac{1}{\mathcal{C}'} \right)_{\mu=0} dv = -\eta\varphi,$$

en ayant posé

$$(21) \quad \varphi = \frac{1}{\nabla(\sqrt{1+h^2\nabla+h\xi+|\xi|+d})}.$$

Il vient donc

$$(14'') \quad \frac{dV_1}{d|\zeta|} = ma \frac{d(\eta\varphi)}{d\xi}.$$

On trouve de même

$$\frac{d}{d|\zeta|} (U_1 - aF_1) = -ma \frac{d(\eta\varphi)}{d\eta},$$

d'où, en négligeant dans  $aF_1$  les termes du second ordre,

$$(15'') \quad \frac{dU_1}{d|\zeta|} = -ma \left[ \frac{d}{d|\zeta|} \frac{1}{\nabla} + \frac{d(\eta\varphi)}{d\eta} \right].$$

Quant à  $dU_1/d\eta - dV_1/d\xi$ , les formules (14') et (15'), en remarquant que

$$\frac{d^2 \frac{1}{\mathfrak{C}'}}{d\xi^2} + \frac{d^2 \frac{1}{\mathfrak{C}'}}{d\eta^2} = -\frac{d^2 \frac{1}{\mathfrak{C}'}}{d|\zeta|^2},$$

donnent

$$\frac{dU_1}{d\eta} - \frac{dV_1}{d\xi} = ma \frac{d}{d|\zeta|} \int_0^\infty dv \frac{d}{d\eta} \int_0^\infty \frac{d \frac{1}{\mathfrak{C}'}}{d|\zeta|} d\mu + a \frac{dF_1}{d\eta},$$

et il reste, comme ci-dessus,

$$\frac{dU_1}{d\eta} - \frac{dV_1}{d\xi} = ma \left[ -\frac{d}{d\eta} \frac{1}{\nabla} + \frac{d(\eta\varphi)}{d|\zeta|} \right].$$

On a évidemment

$$\frac{dU_1}{d\zeta} = \pm \frac{dU_1}{d|\zeta|}, \quad \frac{dV_1}{d\zeta} = \pm \frac{dV_1}{d|\zeta|},$$

selon que  $\zeta \geq 0$ .

Les composantes de la force magnétique provenant du plan conducteur  $\sigma$  sont donc, d'après (V),

$$(V') \quad \begin{cases} L_1 = ma \frac{d(\eta\varphi)}{d\xi}, \\ M_1 = ma \left[ \frac{d\frac{1}{\nabla}}{d|\zeta|} + \frac{d(\eta\varphi)}{d\eta} \right], \\ N_1 = ma \left[ -\frac{d\frac{1}{\nabla}}{d\eta} + \frac{d(\eta\varphi)}{d|\zeta|} \right], \end{cases}$$

pour  $\zeta > 0$ , et

$$(V'') \quad \begin{cases} L_1 = -ma \frac{d(\eta\varphi)}{d\xi}, \\ M_1 = -ma \left[ \frac{d\frac{1}{\nabla}}{d|\zeta|} + \frac{d(\eta\varphi)}{d\eta} \right], \\ N_1 = -ma \left[ -\frac{d\frac{1}{\nabla}}{d\eta} + \frac{d(\eta\varphi)}{d|\zeta|} \right], \end{cases}$$

pour  $\zeta < 0$ .

La force électrique dérive du potentiel

$$(VI') \quad F_1 = -\frac{m}{\nabla} + m \frac{ak}{2\pi} \xi f.$$

*Voilà les modifications du champ dues à l'influence du plan conducteur  $\sigma$ .*

Considérons d'un peu plus près ce qui se passe pour  $\zeta < 0$ , c'est-à-dire au delà de l'écran conducteur  $\sigma$ , par rapport à la charge mobile.

On a alors

$$\nabla = \Delta = \overline{Pm},$$

et, comme on doit négliger  $a^2$ , les formules (III) deviennent

$$(III') \quad \begin{cases} L = -ma \frac{d(\eta\varphi)}{d\xi}, \\ M = -ma \frac{d(\eta\varphi)}{d\eta}, \\ N = ma \frac{d(\eta\varphi)}{d|\zeta|} = -ma \frac{d(\eta\varphi)}{d\zeta}. \end{cases}$$



Il s'ensuit que (aux termes en  $a^2$  près) la force magnétique totale au delà de l'écran conducteur dérive du potentiel

$$m\alpha\eta\varphi.$$

La force électrique totale dérive également d'un potentiel; ce potentiel est

$$m \frac{ak}{2\pi} \xi f.$$

C'est une expression à peu près du second ordre, par rapport à  $a$ , vu que  $k$  a même ordre de grandeur que  $a$ . La force électrique est par suite négligeable. Le plan conducteur, qui est un diaphragme parfait pour les actions électrostatiques, l'est ici encore, aux termes du second ordre près.

La force magnétique est modifiée par l'interposition du conducteur; l'ordre reste toutefois le même.

Détaillons ce qui se passe aux points immédiatement au-dessous de la charge mobile, c'est-à-dire aux points  $M(0, 0, \zeta < 0)$ , situés sur le prolongement de la perpendiculaire  $m\Omega$ , abaissée de  $m$  au plan conducteur  $\sigma$ .

On a pour ces points  $M$

$$f = \frac{1}{2(|\zeta| + d)^2} = \frac{1}{2(\zeta - d)^2} = \frac{1}{2} \frac{1}{Mm^2},$$

$$\varphi = \frac{1}{1 + \sqrt{1 + h^2}} \frac{1}{Mm^2},$$

et les composantes des forces électrique et magnétique sont, par suite,

$$\begin{aligned} -m \frac{ak}{4\pi} \frac{1}{Mm^2}, & \quad 0, & \quad 0, \\ 0, & \quad -\frac{ma}{1 + \sqrt{1 + h^2}} \frac{1}{Mm^2} & \quad 0. \end{aligned}$$

Remarquons que, lorsque le plan conducteur n'existe pas, les composantes de la force magnétique sont

$$-ma \frac{d}{d\zeta}, \quad ma \frac{d}{d\eta},$$

et elles se réduisent, pour les points  $M$ , à

$$0, \quad -ma \frac{1}{Mm^2}, \quad 0.$$

On en conclut:

*La force électrique (négligeable, d'ailleurs, comme il a été observé), aux points  $M$ , est inversement proportionnelle au carré de la distance  $\overline{Mm}$  et directement opposée à la convection.*

*La force magnétique est aussi inversement proportionnelle au carré de la distance  $\overline{Mm}$ , et est dirigée selon la règle d'Ampère par rapport à la trajectoire de la charge mobile. Elle est à celle qui agirait au même point  $M$ , s'il n'y avait pas de plan conducteur, dans le rapport de  $1/(1 + \sqrt{1 + h^2})$  à 1 ( $h = 2\pi a/k$  étant ordinairement un nombre fini).*

L'interposition du conducteur réduit donc la force magnétique de la moitié au moins, mais la réduction est d'autant plus grande que la résistance  $k$  de la plaque conductrice s'affaiblit.

Au cas limite d'une conductivité infinie ( $k = 0$ ,  $h = \infty$ ), la force magnétique, de même que la force électrique, s'annulerait partout au delà du plan. Celui-ci serait alors un écran parfait pour toute action électromagnétique.

### 19. - Cas d'une charge se déplaçant avec la vitesse de la lumière.

Les expressions générales de  $F_1$ ,  $U_1$ ,  $V_1$ , assignées au n. 16, sont valables pour toute valeur de  $a < 1$ . Comme elles admettent des limites bien déterminées pour  $a = 1$ , elles restent applicables même dans ce cas.

Les équations (7), (11) et (13) donnent, pour  $a = 1$ ,

$$\nabla = |\zeta|, \quad \tau = \left| \xi + \frac{ak}{2\pi} \mu \right|, \quad \mathcal{C} = \left| \xi + \frac{ak}{2\pi} \mu + av \right|,$$

de façon que

$$\frac{ak}{2\pi} \frac{d\frac{1}{\tau}}{d\xi} = \frac{d\frac{1}{\tau}}{d\mu}, \quad \frac{d\frac{1}{\mathcal{C}}}{d\eta} = 0.$$

Il vient alors, d'après (12), (14), (14),

$$F_1 = U_1 = V_1 = 0,$$

c'est-à-dire:

Dans le cas limite où la vitesse de convection serait égale à celle de la lumière, la présence du plan conducteur ne modifie aucunement le champ électromagnétique.

**20. - Remarque.**

Le champ électromagnétique, dû à un système quelconque de courants constants, n'est pas altéré par la présence d'un plan conducteur (ou plus généralement d'un système quelconque de conducteurs).

C'est un fait d'expérience bien connu, qu'on doit naturellement retrouver par nos formules.

Envisageons le cas du plan indéfini et rapportons-nous cette fois aux axes fixes  $x, y, z$ .

Soient  $F', U', V', W'$  les potentiels correspondant au système donné de courants. Comme les courants sont constants, ces fonctions ne dépendent pas de  $t$ .

Soient, d'autre part,  $F_1, U_1, V_1$  ( $W_1 = 0$ ), les potentiels inconnus correspondant à la distribution et aux courants induits sur le plan. Évidemment ils ne dépendront pas non plus de  $t$  et seront, par suite, des fonctions harmoniques.

On doit les déterminer d'après les équations [(5) du Chapitre I, (6) de ce Chapitre]

$$\frac{dU}{dx} + \frac{dV}{dy} + \frac{dW}{dz} = 0, \quad X = A k u_1, \quad Y = A k v_1.$$

En tenant compte du fait que  $F = F' + F_1, U = U' + U_1, \dots$ , que  $u_1 = - (1/2\pi)(dU_1/d|z|), v_1 = - (1/2\pi)(dV_1/d|z|)$ , que  $U', V', W'$  satisfont aussi à la première équation, et en remplaçant  $X, Y$  par leurs valeurs (II), il vient

$$\frac{dU_1}{dx} + \frac{dV_1}{dy} = 0; \quad \frac{d}{dx}(F' + F_1) = A \frac{k}{2\pi} \frac{dU_1}{d|z|}, \quad \frac{d}{dy}(F' + F_1) = A \frac{k}{2\pi} \frac{dV_1}{d|z|},$$

les deux dernières équations devant être vérifiées seulement pour  $z = 0$ .

On satisfait bien, et d'une façon unique, à toutes les conditions imposées à  $F_1, U_1, V_1$ , en prenant

$$U_1 = V_1 = 0,$$

et en déterminant la fonction harmonique  $F_1$ , qui prend sur le plan  $z = 0$  la valeur  $-F'$  et se comporte régulièrement dans tous les autres points de l'espace.

Le conducteur n'exerce donc aucune perturbation magnétique sur le champ des courants donnés, puisque son potentiel vecteur s'annule.

L'influence sur la force électrique s'évalue comme en électrostatique. Il devait bien en être ainsi, du moment qu'il s'agit d'un régime permanent.



VIII bis.

SUL CAMPO ELETTROMAGNETICO GENERATO  
DALLA TRASLAZIONE UNIFORME DI UNA CARICA  
ELETTRICA PARALLELAMENTE AD UN PIANO  
CONDUTTORE INDEFINITO (\*)

« Nuovo Cimento », s. 5<sup>a</sup>, vol. VI (1903),  
pp. 442-455.

**Prefazione.**

Le recenti esperienze dei Sig.ri CRÉMIEU e PENDER sulla convezione elettrica <sup>(1)</sup> hanno messo fuor di discussione la concomitante esistenza di un campo magnetico dell'ordine di grandezza previsto dalla teoria.

Come è ben noto, esperienze di tal fatta furono eseguite dal ROWLAND fin dal 1876, e già quelle eransi ritenute decisive, tanto più che, almeno qualitativamente, apparvero confermate dai risultati, ottenuti più tardi dallo stesso ROWLAND e da altri (HIMSTEDT, RÖNTGEN, HUTCHINSON).

Tuttavia nel 1900 il Sig. CRÉMIEU mise in dubbio la reale esistenza dell'accennato fenomeno, non avendo, in ripetute esperienze, potuto constatare alcun sensibile effetto di deviazione magnetica.

Le pubblicazioni del Sig. CRÉMIEU fecero naturalmente convergere l'attenzione dei fisici sopra questo punto, che è fondamentale per la concezione maxwelliana dell'elettromagnetismo.

Nell'autunno del 1901, quando più viva era la controversia e già numerosi i lavori in argomento, il Prof. RIGHI ne intrattenne la Società fisica italiana <sup>(2)</sup>, descrivendo le esperienze fino allora eseguite e mettendone in evidenza con mirabile limpidezza e acume critico i punti deboli o dubbi. Fra questi ultimi egli annoverò i possibili effetti di un artificio, cui tutti, o quasi tutti, gli sperimentatori erano ricorsi, senza discuterne in alcun modo la portata.

---

(\*) I primi due Capitoli di questa Memoria e il primo paragrafo del terzo non sono che la traduzione pressochè letterale delle corrispondenti parti della Memoria precedente. Si è perciò ritenuto di dover qui pubblicare soltanto la Prefazione (che, pur non differendo sostanzialmente da quella della Memoria VIII, contiene qualche maggiore precisazione) e i nn. 16-21, che costituiscono un effettivo complemento a codesta Memoria. [N.d.R.].

<sup>(1)</sup> « Journal de Physique », settembre 1903.

<sup>(2)</sup> « Nuovo Cimento », ottobre 1901.

Si tratta dell'impiego di uno schermo conduttore per sottrarre l'ago magnetico all'azione elettrica delle masse in convezione.

È chiaro — così osservava il Prof. RIGHI — che un diaframma metallico di conducibilità finita non può arrestare le azioni magnetiche, ma esso esercita senza dubbio una qualche influenza, che non si ha il diritto di trascurare. Disgraziatamente non siamo in grado di apprezzare questa influenza, come sarebbe necessario per una discussione rigorosa dei risultati sperimentali. I cultori della fisica matematica, potrebbero provvedere a questa mancanza, dandoci, non foss'altro, il campo elettromagnetico, prodotto, al di là di un piano conduttore indefinito, da una carica, che si muove con velocità costante sopra una retta parallela al piano.

L'appello del Prof. RIGHI mi invogliò a studiare il problema, e potei poco dopo comunicargliene la soluzione, dei cui risultati egli si è valso per confermare e completare le sue considerazioni critiche <sup>(3)</sup>. La mia ricerca è stata già esposta in extenso negli « Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse » (ser. III, t. IV, 1902), ma il cortese invito della Direzione di questo giornale mi induce a pubblicarne ora una redazione italiana.

I due primi capitoli non differiscono, si può dire, dalla precedente redazione se non per la lingua; nel terzo capitolo ho invece introdotta qualche semplificazione, sacrificando la integrazione rigorosa delle equazioni differenziali e ricavando direttamente le espressioni approssimate, che sole hanno interesse fisico e meglio si prestano alla interpretazione dei risultati.

In tesi generale è preferibile, per poter fissare in modo preciso il grado di approssimazione, integrare rigorosamente prima e semplificare poi, avendo riguardo all'ordine di grandezza dei dati della questione. Però, introducendo le approssimazioni addirittura nelle equazioni differenziali, si ha il vantaggio di arrivare più speditamente al risultato finale. Io non ho esitato ad adottare ora questo secondo procedimento, perchè, mentre si riduce notevolmente l'apparato analitico, riesce affatto evidente (per l'estrema piccolezza del parametro, di cui si trascurano le potenze superiori alla prima) che l'errore commesso non può essere che piccolissimo.

Basta aggiungere, in linea di rigore, che la materiale verifica di tale circostanza può essere fatta procedendo nel primo modo, e trovasi effettivamente indicata nel lavoro francese.

Ciò premesso, ecco i caratteri salienti del risultato ottenuto:

Sia  $a$  il rapporto fra la velocità di convezione e quella della luce;

(<sup>3</sup>) « Nuovo Cimento », gennaio 1902.

$30k$  la resistenza ohmica dell'unità di superficie del piano conduttore (espressa in ohm);  $h = 2\pi a/k$ , talchè, nelle condizioni sperimentali ordinarie,  $a$  e  $k$  sono numeri assai piccoli (dell'ordine di  $10^{-6}$  nell'esempio citato al n. 17), mentre  $h$  è generalmente finito.

Al di là dello schermo conduttore la forza elettrica è trascurabile; la forza magnetica deriva da un potenziale (a meno di termini di secondo ordine in  $a$ ) ed è press'a poco  $1/(1 + \sqrt{1 + h^2})$  di quella che agirebbe, se non ci fosse lo schermo (cfr. per un enunciato più preciso il n. 19). Essa vien dunque ridotta della metà almeno, ma non potrebbe essere totalmente intercettata, al pari di quanto avviene per la forza elettrica, se non per una conduttività infinita ( $k = 0$ ,  $h = \infty$ ). È precisamente quello, che aveva intuito il Prof. RIGHI.

Ancora poche parole circa la posizione analitica del problema.

Come equazioni fondamentali del campo elettromagnetico ho assunto quelle, che io chiamo di HELMHOLTZ-HERTZ, le quali sono identiche nella forma alle originarie di HELMHOLTZ e ne differiscono nella sostanza soltanto per ciò che ai potenziali ordinari (traducanti la ipotesi di una propagazione istantanea delle azioni a distanza) si intendono sostituiti dei potenziali ritardati (traducanti cioè la ipotesi di una propagazione con velocità eguale a quella della luce).

Queste equazioni costituiscono un particolare sistema di integrali delle ben note equazioni differenziali di HERTZ.

Il loro interesse è principalmente filosofico, poichè ne rimane collegato in modo esauriente il punto di vista classico delle azioni a distanza colla elettrodinamica maxwelliana. Ma non è trascurabile d'altra parte il loro valore, dirò così pratico, prestandosi esse a risolvere molti problemi in modo più comodo e diretto che non sia offerto dalla teoria hertziana pura. E questo è ben naturale, poichè, prendendo le mosse da un sistema integrale, anzichè dalle equazioni differenziali, si risparmia una parte di lavoro.

Io avevo anche creduto <sup>(4)</sup> che (per essere meno ampia e quindi più determinata) la teoria di HELMHOLTZ-HERTZ presentasse un sostanziale vantaggio sull'altra, fornendo essa soltanto, in qualche caso concreto (e precisamente nei problemi di induzione <sup>(5)</sup>), come l'attuale) le condizioni complementari, necessarie per individuare, fra le soluzioni delle equazioni differenziali di HERTZ, quella corrispondente ad un dato problema.

<sup>(4)</sup> Cfr. per es. « Nuovo Cimento », giugno 1902, pag. 454.

<sup>(5)</sup> In cui cioè si tratta di valutare le modificazioni, apportate ad un assegnato campo elettromagnetico dalla presenza di corpi conduttori.

Un più attento esame mi ha invece mostrato (\*) che, anche dalla teoria hertziana pura, cioè direttamente dalle equazioni differenziali, si trae, con un semplice passaggio al limite, tutto quello, che occorre per rendere univocamente determinati i problemi di induzione.

Resta pur sempre che l'uso dei potenziali ritardati conferisce perspicuità, speditezza ed eleganza agli sviluppi matematici.

.....

### CAPITOLO III.

#### RISOLUZIONE DEL PROBLEMA PROPOSTO

.....

#### 16 (\*). - Forma definitiva del sistema differenziale, da cui dipende la determinazione di $F_1$ , $U_1$ , $V_1$ .

Cominciamo coll'esplicitare le (6), esprimendovi tutto in funzione delle nostre incognite  $F_1$ ,  $U_1$ ,  $V_1$ .

Dalle (IV) e (VI) si ha

$$X = -m(1-a^2) \frac{d}{d\xi} \frac{1}{\Delta} - \frac{dF_1}{d\xi} + a \frac{dU_1}{d\xi},$$

$$Y = -m \frac{d}{d\eta} \frac{1}{\Delta} - \frac{dF_1}{d\xi} + a \frac{dV_1}{d\xi};$$

sostituendo anche  $Au_1$ ,  $Av_1$  a mezzo dei loro valori (5), le (6) si possono scrivere

$$(6') \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{k}{2\pi} \frac{dU_1}{d|\xi|} - \frac{dF_1}{d\xi} + a \frac{dU_1}{d\xi} = m(1-a^2) \frac{d}{d\xi} \frac{1}{\Delta}, \\ \frac{k}{2\pi} \frac{dU_1}{d|\xi|} - \frac{dF_1}{d\eta} + a \frac{dV_1}{d\xi} = m \frac{d}{d\eta} \frac{1}{\Delta}. \end{array} \right.$$

(\*) « Rendiconti dei Lincei », 3 agosto 1902. [In questo vol.: X, pp. 245-252].

(\*) Il seguito si riattacca direttamente al n. 15 della Memoria precedente (p. 176). [N.d.R.].



Queste due relazioni sono verificate soltanto per  $|\zeta|=0$ ; ma non è difficile ricavarne due altre valide per qualunque  $|\zeta|$ , il che è quanto dire in ogni punto dello spazio.

Osserviamo perciò che, date le proprietà, di cui devono godere  $F_1$ ,  $U_1$ ,  $V_1$ , i primi membri delle (6') sono due funzioni di  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $|\zeta|$  regolari per tutti i valori reali di  $\xi$ ,  $\eta$  e positivi di  $|\zeta|$ , nulle per  $|\zeta|=\infty$ , le quali coincidono ordinatamente con

$$m(1-a^2)\frac{d\frac{1}{\Delta}}{d\xi}, \quad m\frac{d\frac{1}{\Delta}}{d\eta}$$

per  $|\zeta|=0$ , e soddisfanno all'equazione indefinita

$$\square f = 0.$$

A tutte queste condizioni soddisfanno anche i secondi membri, purchè soltanto vi si sostituisca  $\zeta$  con  $-|\zeta|$  (sostituzione necessaria per togliere le singolarità nel punto  $m$ ). Ma (come si vede subito, pensando che la conclusione sta per le funzioni armoniche) non possono esistere due soluzioni *distinte* della equazione  $\square f = 0$ , regolari ecc., e coincidenti per  $|\zeta|=0$ . Ne viene che, ponendo

$$(7) \quad \nabla^2 = (\Delta^2)_{\zeta=-|\zeta|} = \xi^2 + (1-a^2)[\eta^2 + (|\zeta| + d)^2],$$

le (6') danno luogo alle equazioni

$$(8) \quad \begin{cases} \frac{k}{2\pi} \frac{dU_1}{d|\zeta|} - \frac{dF_1}{d\xi} + a \frac{dU_1}{d\xi} = m(1-a^2) \frac{d\frac{1}{\Delta}}{d\xi}, \\ \frac{k}{2\pi} \frac{dV_1}{d|\zeta|} - \frac{dF_1}{d\eta} + a \frac{dV_1}{d\xi} = m \frac{d\frac{1}{\Delta}}{d\eta}, \end{cases}$$

verificate in ogni punto dello spazio.

Il problema analitico, che si tratta di risolvere, consiste dunque nella integrazione del sistema, costituito

- a) dalle equazioni di primo ordine (4) ed (8);
- b) dalle equazioni di secondo ordine

$$(9) \quad \square F_1 = 0, \quad \square U_1 = 0, \quad \square V_1 = 0,$$

mediante funzioni di  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $|\zeta|$ , regolari per ogni valore reale di  $\xi$ ,  $\eta$  e positivo di  $|\zeta|$ , e annullantisi per  $|\zeta| = \infty$ , come si conviene a potenziali di distribuzioni situate sul piano  $\zeta = 0$ .

Si può constatare senza alcuna difficoltà che le equazioni (4), (8) e (9), che qui trascrivo per comodo del lettore,

$$\left. \begin{aligned}
 (4) \quad & \frac{dF_1}{d\xi} = \frac{dU_1}{d\xi} + \frac{dV_1}{d\eta}, \\
 (8) \quad & \left\{ \begin{aligned}
 \frac{k}{2\pi} \frac{dU_1}{d|\zeta|} - \frac{dF_1}{d\xi} + a \frac{dU_1}{d\xi} &= m(1-a^2) \frac{d}{d\xi} \frac{1}{\nabla}, \\
 \frac{k}{2\pi} \frac{dV_1}{d|\zeta|} - \frac{dF_1}{d\eta} + a \frac{dV_1}{d\xi} &= m \frac{d}{d\eta} \frac{1}{\nabla};
 \end{aligned} \right. \\
 (9) \quad & \square F_1 = 0, \quad \square U_1 = 0, \quad \square V_1 = 0 \\
 & \left( \square \equiv (1-a^2) \frac{d^2}{d\xi^2} + \frac{d^2}{d\eta^2} + \frac{d^2}{d|\zeta|^2} \right),
 \end{aligned} \right\}$$

sono effettivamente compatibili (costituiscono cioè un sistema completo) e che, tenuto conto delle condizioni qualitative, testè dichiarate, determinano univocamente le funzioni incognite.

Ma è anche più semplice richiamarsi addirittura al n. 16 della redazione francese del presente lavoro. Si trova ivi effettuata, in modo completo e rigoroso, la integrazione del nostro sistema; e da essa segue in particolare che esiste una sola terna di funzioni, soddisfacenti a tutti i requisiti voluti.

Ora mi accingo a ricavare dal sistema differenziale soltanto le espressioni approximate di  $F_1$ ,  $U_1$ ,  $V_1$ , che meglio si prestano agli scopi fisici.

### 17. - Integrazione approssimata.

Nelle ordinarie condizioni sperimentali,  $a$  e  $k$  si possono ritenere assai piccole.

Per renderci conto dell'ordine di grandezza, supponiamo per es. che la velocità della carica mobile sia di 300 metri al secondo (il che è già esagerato). Si ha allora

$$a = Ac = \frac{300 \cdot 10^2}{3 \cdot 10^{10}} = 10^{-6}.$$

Supponiamo ancora che il piano conduttore  $\sigma$  sia una lastra di rame dello spessore di un millimetro.

In generale, se  $g$  è lo spessore e  $\rho$  la resistenza specifica di una lamina (espressa in ohm), si ha (n. 15)

$$k = \frac{1}{30} R_0 = \frac{1}{30} \frac{\rho}{g}.$$

Per il rame,  $\rho = 16 \cdot 10^{-7}$ , a un dipresso. Dacchè  $g = 10^{-1}$ , risulterà

$$k = \frac{1}{2} 10^{-6}$$

all'incirca.

Apparisce di qua che, in questo e in casi analoghi, la costante  $k$  è dello stesso ordine di grandezza di  $a$ , per cui, posto

$$k = \frac{2\pi a}{h},$$

la  $h$  è a risguardarsi finita ( $4\pi$  nell'esempio accennato).

Inoltre, visto che l'ordine di grandezza di  $a$  è  $10^{-6}$ , anzi verosimilmente più piccolo, riesciranno affatto insensibili i termini affetti dal fattore  $a^2$ , e si caratterizzerà quindi con ogni desiderabile approssimazione la natura del campo, immaginando  $F_1$ ,  $U_1$ ,  $V_1$  sviluppati secondo le potenze di  $a$  e limitandosi a valutare i primi due termini (di grado zero ed uno in  $a$ ).

A tal uopo, notiamo anzi tutto che, per  $a = 0$ , si ha il problema statico dell'influenza del piano conduttore  $\zeta = 0$  sul campo di una carica immobile  $m$ .

$U_1$  e  $V_1$  sono allora evidentemente nulli e  $F_1/m$  non è che la funzione di GREEN, relativa al piano  $\zeta = 0$  e al punto parametrico  $m(0, 0, d)$ . Ora si sa bene che questa funzione di GREEN è  $-1/r_1$ , dove

$$r_1 = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + (|\zeta| + d)^2}$$

rappresenta la distanza del punto potenziato  $P(\xi, \eta, \zeta)$  da  $m$ , o dall'immagine di  $m$ , secondoche  $P$  ed  $m$  sono o no separati dal piano  $\zeta = 0$ .

Potremo così porre

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} F_1 = -\frac{m}{r_1} + aF_1^{(1)} + a^2F_1^{(2)} + \mathbf{3}, \\ U_1 = ap + \mathbf{2}, \\ V_1 = aq + \mathbf{2}, \end{array} \right.$$

rappresentando con  $F_1^{(1)}$ ,  $F_1^{(2)}$ ,  $p$ ,  $q$  funzioni da determinarsi delle variabili  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $|\zeta|$  (indipendenti da  $a$ ) e con **2** e **3** delle espressioni, almeno, di secondo o rispettivamente di terzo ordine, rapporto ad  $a$ .

Abbiamo poi dalla (7)

$$\frac{1}{\nabla} = (\nabla^2)^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2 + (|\zeta| + d)^2}} \left\{ 1 - a^2 \frac{\eta^2 + (|\zeta| + d)^2}{\xi^2 + \eta^2 + (|\zeta| + d)^2} \right\}^{-1/2}$$

$$= \frac{1}{r_1} + \frac{1}{2} a^2 \frac{\eta^2 + (|\zeta| + d)^2}{r_1^3} + \mathbf{4} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{2} a^2 \frac{d \left( \frac{\xi}{r_1} \right)}{d\xi} + \mathbf{4},$$

con ovvio significato del simbolo **4**.

Portiamo queste espressioni nelle (4) ed (8), scrivendo  $a/h$  al posto di  $k/2\pi$  ed ordinando per le potenze di  $a$ . Otterremo:

$$(4') \quad a \left\{ \frac{d}{d\xi} \frac{m}{r_1} + \frac{dp}{d\xi} + \frac{dq}{d\eta} \right\} + \mathbf{2} = 0,$$

$$(8') \quad \left\{ \begin{aligned} -a \frac{dF_1^{(1)}}{d\xi} + a^2 \left\{ \frac{dp}{d\xi} + \frac{1}{h} \frac{dp}{d|\zeta|} - \frac{dF_1^{(2)}}{d\xi} - \frac{1}{2} m \frac{d^2}{d\xi^2} \left( \frac{\xi}{r_1} \right) + \right. \\ \left. + m \frac{d}{d\xi} \left( \frac{1}{r_1} \right) \right\} + \mathbf{3} = 0, \\ -a \frac{dF_1^{(1)}}{d\eta} + a^2 \left\{ \frac{dq}{d\xi} + \frac{1}{h} \frac{dq}{d|\zeta|} - \frac{dF_1^{(2)}}{d\eta} - \frac{1}{2} m \frac{d^2}{d\xi d\eta} \left( \frac{\xi}{r_1} \right) \right\} + \mathbf{3} = 0. \end{aligned} \right.$$

Trattiamo analogamente le (9), designando al solito con  $\Delta_2$  l'operatore di LAPLACE  $d^2/d\xi^2 + d^2/d\eta^2 + d^2/d|\zeta|^2$  e tenendo presente che  $\Delta_2(1/r_1) = 0$ . Verrà:

$$(9') \quad \left\{ \begin{aligned} a\Delta_2 F_1^{(1)} + a^2 \left\{ \Delta_2 F_1^{(2)} + m \frac{d^2}{d\xi^2} \left( \frac{1}{r_1} \right) \right\} + \mathbf{3} = 0, \\ a\Delta_2 p + \mathbf{2} = 0, \\ a\Delta_2 q + \mathbf{2} = 0. \end{aligned} \right.$$

In queste equazioni devono separatamente annullarsi i coefficienti delle varie potenze di  $a$ .

Abbiamo intanto, considerando i coefficienti di  $a$  nelle (8') e nella prima delle (9'),

$$\frac{dF_1^{(1)}}{d\xi} = 0, \quad \frac{dF_1^{(1)}}{d\eta} = 0, \quad \Delta_2 F_1^{(1)} = 0,$$

da cui segue

$$(11) \quad F_1^{(1)} = 0.$$

Infatti, per le prime due,  $F_1^{(1)}$  è funzione della sola  $|\zeta|$ . In causa di  $\Delta_2 F_1^{(1)} = 0$ , che si riduce a  $d^2 F_1^{(1)} / d|\zeta|^2 = 0$ , non può dipenderne che linearmente. Ma [come ogni altro dei coefficienti degli sviluppi (10)]  $F_1^{(1)}$  deve annullarsi per  $|\zeta| = \infty$ , e ciò si concilia colla linearità in  $|\zeta|$ , solo in quanto sia  $F_1^{(1)}$  identicamente nulla.

Le altre condizioni, che discendono dalle (4'), (8'), (9'), posto per brevità

$$f = F_1^{(2)} + \frac{1}{2} m \frac{d}{d\xi} \left( \frac{\xi}{r_1} \right),$$

si scriveranno:

$$(12) \quad \frac{d}{d\xi} \left( p + \frac{m}{r_1} \right) + \frac{dq}{d\eta} = 0,$$

$$(13) \quad \begin{cases} \frac{d}{d\xi} \left( p + \frac{m}{r_1} \right) + \frac{1}{h} \frac{dp}{d|\zeta|} = \frac{df}{d\xi}, \\ \frac{dq}{d\xi} + \frac{1}{h} \frac{dq}{d|\zeta|} = \frac{df}{d\eta}, \end{cases}$$

$$(14) \quad \Delta_2 f = 0 \text{ (')}, \quad \Delta_2 p = 0, \quad \Delta_2 q = 0.$$

(') È ciò, che diventa la equazione

$$\Delta_2 F_1^{(2)} + m \frac{d^2}{d\xi^2} \left( \frac{1}{r_1} \right) = 0,$$

quando per  $F_1^{(2)}$  si pone  $f - \frac{1}{2} m (d/d\xi)(\xi/r_1)$ , come si vede subito notando che

$$\Delta_1 \frac{1}{r_1} = 0, \quad \Delta_1 \frac{\xi}{r_1} = 2 \frac{d}{d\xi} \left( \frac{1}{r_1} \right).$$

Eliminando  $f$  fra le (13), si ottiene

$$\frac{d^2}{d\xi d\eta} \left( p + \frac{m}{r_1} \right) - \frac{d^2 q}{d\xi^2} + \frac{1}{h} \frac{d}{d|\zeta|} \left( \frac{dp}{d\eta} - \frac{dq}{d\xi} \right) = 0,$$

mentre la (12), derivata rispetto ad  $\eta$ , dà

$$\frac{d^2}{d\xi d\eta} \left( p + \frac{m}{r_1} \right) + \frac{d^2 q}{d\eta^2} = 0,$$

che, sottratta dalla precedente, ove si tenga conto di  $\Delta_2 q = 0$ , permette di presentare il risultato dell'eliminazione di  $f$  sotto la forma

$$\frac{d}{d|\zeta|} \left\{ \frac{dq}{d|\zeta|} + \frac{1}{h} \left( \frac{dp}{d\eta} - \frac{dq}{d\xi} \right) \right\} = 0,$$

ossia, integrando rispetto a  $|\zeta|$  fra un valore generico e l'infinito (la quantità in parentesi deve al solito annullarsi per  $|\zeta| = \infty$ ), sotto la forma

$$(15) \quad \frac{dq}{d|\zeta|} + \frac{1}{h} \left( \frac{dp}{d\eta} - \frac{dq}{d\xi} \right) = 0.$$

*Determinazione di  $dq/d|\zeta|$ .* - Fra le (12) e (15) si può ancora ovviamente eliminare  $p$ .

Avuto riguardo a  $\Delta_2 q = 0$ , si trova la equazione

$$h \frac{d^2 q}{d\xi d|\zeta|} + \frac{d^2 q}{d|\zeta|^2} = \frac{d^2}{d\xi d\eta} \left( \frac{m}{r_1} \right),$$

la quale, posto

$$\frac{dq}{d|\zeta|} = \psi,$$

si scrive più semplicemente

$$h \frac{d\psi}{d\xi} + \frac{d\psi}{d|\zeta|} = \frac{d^2}{d\xi d\eta} \left( \frac{m}{r_1} \right)$$

e serve a determinare univocamente  $\psi$ , dato che  $\psi$ , al pari di  $q$ , deve annullarsi per  $|\zeta| = \infty$ .

La integrazione si fa nel modo più comodo, sostituendo alle variabili indipendenti  $\xi$ ,  $|\zeta|$  due loro combinazioni lineari  $\xi_1$ ,  $\zeta_1$  definite dalle formule

$$\begin{cases} \xi = \xi_1 + h\zeta_1, \\ |\zeta| = \zeta_1, \end{cases}$$

con che i simboli operativi

$$\frac{d}{d\xi_1}, \quad \frac{d}{d\zeta_1}$$

equivalgono rispettivamente a

$$\frac{d}{d\xi}, \quad h \frac{d}{d\xi} + \frac{d}{d|\zeta|},$$

e la equazione in  $\psi$  si riduce a

$$\frac{d\psi}{d\zeta_1} = \frac{d^2}{d\xi_1 d\eta} \left( \frac{m}{r_1} \right) = - \frac{d}{d\xi_1} \left( \frac{m\eta}{r_1^3} \right).$$

Notiamo che, al crescere indefinito di  $\zeta_1$ , anche  $|\zeta|$  diventa infinita e perciò  $\psi$  deve convergere a zero.

Ciò posto, integrando, rispetto a  $\zeta_1$ , da un valore (positivo) generico fino all'infinito, e, osservando che, nel secondo membro,  $\xi_1$  ed  $\eta$  sono variabili indipendenti da  $\zeta_1$ , risulta

$$\psi = \frac{d}{d\xi_1} \left\{ m\eta \int_{\zeta_1}^{\infty} \frac{d\zeta_1}{r_1^3} \right\}.$$

L'integrale interno si calcola senza difficoltà e si trova

$$\int_{\zeta_1}^{\infty} \frac{d\zeta_1}{r_1^3} = \frac{1}{r_1 \{ \sqrt{1 + h^2 r_1} + h\xi_1 + (1 + h^2)\zeta_1 + d \}},$$

essendo, in variabili  $\xi_1$ ,  $\zeta_1$ ,

$$r_1^2 = (\xi_1 + h\zeta_1)^2 + \eta^2 + (\zeta_1 + d)^2.$$

Ripassiamo alle variabili  $\xi$ ,  $|\zeta|$  e designiamo con

$$(16) \quad \varphi = \frac{1}{r_1 \{ \sqrt{1 + h^2 r_1} + h\xi + |\zeta| + d \}}$$

l'integrale testè calcolato, espresso in queste variabili. Dacchè  $\psi$  sta per  $dq/d|\zeta|$ , risulta in definitiva

$$(17) \quad \frac{dq}{d|\zeta|} = \frac{d}{d\xi} (m\eta\varphi).$$

Avuto riguardo alla espressione (16) di  $\varphi$ , si verifica subito che il secondo membro della (17) è (come appunto dev'essere) funzione regolare di  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $|\zeta|$ , per ogni valore reale di  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $> 0$  di  $|\zeta|$ , e diventa infinitesimo al crescere indefinito di  $|\zeta|$ .

Quanto all'armonicità, si può, senza calcoli, constatarla come segue: Il precedente integrale

$$\int_{\zeta_1}^{\infty} \frac{d\lambda}{r_1^3}$$

(dove, per evitare ambiguità, ho designato con  $\lambda$  la variabile corrente di integrazione) sostituendo, a  $\lambda$ ,  $\mu = \lambda - \zeta_1$ , può essere scritto

$$\int_0^{\infty} \frac{d\mu}{\{(\xi_1 + h\zeta_1 + h\mu)^2 + \eta^2 + (\zeta_1 + d + \mu)^2\}^{3/2}},$$

ossia, riponendo  $\xi$  per  $\xi_1 + h\zeta_1$ ,  $|\zeta|$  per  $\zeta_1$ ,

$$\int_0^{\infty} \frac{d\mu}{\{(\xi + h\mu)^2 + \eta^2 + (|\zeta| + d + \mu)^2\}^{3/2}},$$

che è una nuova espressione di  $\varphi$ .

Ne viene

$$\eta\varphi = \int_0^{\infty} \frac{\eta d\mu}{\{(\xi + h\mu)^2 + \eta^2 + (|\zeta| + d + \mu)^2\}^{3/2}} = - \int_0^{\infty} d\mu \frac{d}{d\eta} \left\{ \frac{1}{\sqrt{(\xi + h\mu)^2 + \eta^2 + (|\zeta| + d + \mu)^2}} \right\}.$$

Ora

$$\frac{1}{\sqrt{(\xi + h\mu)^2 + \eta^2 + (|\zeta| + d + \mu)^2}}$$



è funzione armonica di  $\xi, \eta, |\zeta|$  (inversa della distanza dal punto, fisso rispetto a  $\xi, \eta, |\zeta|, -h\mu, 0, -d - \mu$ ).

D'altra parte l'operatore  $\Delta_2$  si può portare sotto il segno integrale (i limiti essendo costanti) ed invertire colla derivazione rispetto ad  $\eta$ ; dunque

$$\Delta_2(\eta\varphi) = 0. \qquad \text{c.d.d.}$$

Osserviamo ancora, poichè ci servirà tra un momento, che

$$(18) \qquad h \frac{d(\eta\varphi)}{d\xi} + \frac{d(\eta\varphi)}{d|\zeta|} = \frac{d}{d\eta} \left( \frac{1}{r_1} \right).$$

Anche questo si può verificare senza sviluppi materiali, prendendo le mosse dalla circostanza che la funzione

$$\frac{1}{\sqrt{(\xi + h\mu)^2 + \eta^2 + (|\zeta| + d + \mu)^2}}$$

— dirò  $\vartheta$  per brevità — dipende da  $\mu$  pel tramite degli argomenti  $\xi + h\mu, |\zeta| + d + \mu$ , talchè si ha identicamente

$$h \frac{d\vartheta}{d\xi} + \frac{d\vartheta}{d|\zeta|} = \frac{d\vartheta}{d\mu}.$$

Con ciò al primo membro della (18) (sempre per essere le operazioni di derivazione, rapporto a  $\xi$  e a  $|\zeta|$ , invertibili coll'integrazione rispetto a  $\mu$ ) si può attribuire l'aspetto

$$- \int_0^\infty d\mu \frac{d^2\vartheta}{d\mu d\eta} = \left[ \frac{d\vartheta}{d\eta} \right]_0^\infty.$$

Ora  $\vartheta$  si annulla per  $\mu = \infty$  e si riduce ad  $1/r_1$  per  $\mu = 0$ . Rimane così  $(d/d\eta)(1/r_1)$ , il che prova la (18).

*Determinazione di  $dp/d|\zeta|$ .* — Riprendiamo la (12) e deriviamola rispetto a  $|\zeta|$ , sostituendo per  $dq/d|\zeta|$  il suo valore (17). Si ha

$$\frac{d^2}{d\xi d|\zeta|} \left( p + \frac{m}{r_1} \right) = - \frac{d^2}{d\xi d\eta} (m\eta\varphi),$$

donde, integrando rapporto a  $\xi$ ,

$$\frac{d}{d|\zeta|} \left( p + \frac{m}{r_1} \right) = - \frac{d}{d\eta} (m\eta\varphi) + \chi$$

con  $\chi$  funzione (necessariamente armonica e nulla per  $|\zeta| = \infty$ , poichè lo sono ad un tempo  $p + m/r_1$  ed  $\eta\varphi$ ) delle sole  $\eta$ ,  $|\zeta|$ .

Per determinare  $\chi$ , basta tener conto della (15) e derivarla rispetto a  $|\zeta|$ . Si trova così

$$\frac{d^2}{d\eta d|\zeta|} \left( p + \frac{m}{r_1} \right) = \frac{d^2}{d\eta d|\zeta|} \left( \frac{m}{r_1} \right) - h \frac{d^2 q}{d|\zeta|^2} + \frac{d^2 q}{d\xi d|\zeta|},$$

e sostituendo, per  $(d/d|\zeta|)(p + m/r_1)$ ,  $-(d/d\eta)(m\eta\varphi) + \chi$ , per  $dq/d|\zeta|$  il suo valore (17), risulta, in causa di  $\Delta_2(m\eta\varphi) = 0$ ,

$$\frac{d\chi}{d\eta} = \frac{d^2}{d\eta d|\zeta|} \left( \frac{m}{r_1} \right) - h \frac{d^2}{d|\zeta| d\xi} (m\eta\varphi) - \frac{d^2}{d|\zeta|^2} (m\eta\varphi).$$

Il secondo membro si annulla, in virtù della (18). La  $\chi$  è dunque funzione della sola  $|\zeta|$ ; ma, in causa della precedente relazione,

$$\frac{d}{d|\zeta|} \left( p + \frac{m}{r_1} \right) = - \frac{d}{d\eta} (m\eta\varphi) + \chi,$$

essa, come si è detto, è armonica e nulla per  $|\zeta| = \infty$ . Ne viene che  $\chi$  è identicamente zero, e per conseguenza

$$(19) \quad \frac{dp}{d|\zeta|} = - \frac{d}{d|\zeta|} \left( \frac{m}{r_1} \right) - \frac{d}{d\eta} (m\eta\varphi).$$

### 18. - Espressioni delle forze elettromagnetiche.

Abbiamo ormai quanto occorre per formare (entro i limiti di approssimazione convenuti) le espressioni delle forze elettromagnetiche.

*Forza magnetica.* - Si consideri in primo luogo la forza magnetica proveniente dalle correnti indotte sul piano conduttore  $\zeta = 0$ .

Avendosi, a meno di termini d'ordine superiore al primo,

$$U_1 = ap, \quad V_1 = aq,$$

le (V) danno

$$(V') \quad \left\{ \begin{array}{l} L_1 = a \frac{dq}{d\xi}, \\ M_1 = -a \frac{dp}{d\xi}, \\ N_1 = a \left\{ \frac{dp}{d\eta} - \frac{dq}{d\xi} \right\}. \end{array} \right.$$

Ora  $d|\zeta| = \pm d\xi$  secondochè  $\zeta \geq 0$  (secondochè carica e punto potenziato sono o no dalla stessa banda del piano conduttore).

Abbiamo perciò dalle (17), (19) e (15)

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dq}{d\xi} = \pm \frac{d}{d\xi}(m\eta\varphi), \\ \frac{dp}{d\xi} = -\frac{d}{d\xi}\left(\frac{m}{r_1}\right) \mp \frac{d}{d\eta}(m\eta\varphi), \\ \frac{dp}{d\eta} - \frac{dq}{d\xi} = -h \frac{d}{d\xi}(m\eta\varphi), \end{array} \right.$$

i segni superiori riferendosi ai punti  $\zeta > 0$ . Ricordando la (18), si può anche attribuire a  $dp/d\eta - dq/d\xi$  il valore

$$-\frac{d}{d\eta}\left(\frac{m}{r_1}\right) \pm \frac{d}{d\xi}(m\eta\varphi).$$

In definitiva, portando questi valori nelle (V'), e le risultanti espressioni di  $L_1$ ,  $M_1$ ,  $N_1$  nelle (III), ove si tenga presente che, trascurando  $a^2$ ,  $\Delta$  coincide con  $r$  (distanza della carica dal punto potenziato) si conclude:

$$(III') \quad \left\{ \begin{array}{l} L = \pm ma \frac{d}{d\xi}(\eta\varphi), \\ M = ma \left\{ -\frac{d}{d\xi}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1}\right) \pm \frac{d}{d\eta}(\eta\varphi) \right\}, \\ N = ma \left\{ \frac{d}{d\eta}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1}\right) \pm \frac{d}{d\xi}(\eta\varphi) \right\}, \end{array} \right.$$

dove, ripetiamolo, vanno presi i segni superiori dalla parte della carica ( $\zeta > 0$ ), gli inferiori dalla parte opposta.

*Forza elettrica.* - Passiamo ora alla forza elettrica.

Le (11) e (10) mostrano intanto che  $aU_1$  e  $aV_1$  sono di secondo ordine, e che  $F_1$  differisce da  $-m/r_1$  pure per termini di second'ordine.

Si ha così dalle (VI), coll'approssimazione richiesta,

$$\left\{ \begin{array}{l} X_1 = \frac{d}{d\xi} \left( \frac{m}{r_1} \right), \\ Y_1 = \frac{d}{d\eta} \left( \frac{m}{r_1} \right), \\ Z_1 = \frac{d}{d\zeta} \left( \frac{m}{r_1} \right), \end{array} \right.$$

e, per conseguenza, dalle (IV),

$$\left\{ \begin{array}{l} X = -m \frac{d}{d\xi} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{r_1} \right), \\ Y = -m \frac{d}{d\eta} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{r_1} \right), \\ Z = -m \frac{d}{d\zeta} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{r_1} \right). \end{array} \right.$$

La forza elettrica deriva dunque dal potenziale.

$$(VI') \quad m \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{r_1} \right).$$

### 19. - Caratteri salienti del campo.

La (VI') mostra che, in un istante generico, l'influenza dello schermo sul campo elettrico della nostra carica mobile  $m$  si valuta come in elettrostatica (come cioè si trattasse di una carica immobile, nella posizione, che essa occupa nell'istante considerato). In particolare, nei punti  $\zeta < 0$ , cioè al di là del piano conduttore,  $r_1 = r$ , e quindi la forza elettrica è nulla.

Il conduttore costituisce adunque un diaframma perfetto delle azioni elettriche, dovute a cariche in convezione. E ciò giustifica l'uso di una lastra metallica, nelle esperienze di convezione, per proteggere da per-

turbazioni elettriche gli apparati, destinati a rivelare e a misurare il campo magnetico.

Nel caso nostro esso è definito dalle (III'), ma, come si vede, per le applicazioni, importa soprattutto esaminarne il comportamento al di là del piano conduttore, e confrontarlo con quello, che si avrebbe se il piano conduttore non ci fosse, mettendo così in evidenza le modificazioni quantitative dovute allo schermo.

Per  $\zeta < 0$ , le (III') danno

$$(III'') \quad \begin{cases} L = -ma \frac{d(\eta\varphi)}{d\xi}, \\ M = -ma \frac{d(\eta\varphi)}{d\eta}, \\ N = -ma \frac{d(\eta\varphi)}{d\zeta}, \end{cases}$$

ossia (sempre, si intende bene, a meno di termini in  $a^2$ ) la forza magnetica al di là dello schermo deriva dal potenziale

$$m\eta\varphi,$$

essendo, per la (16) (in cui si deve ora porre  $r_1 = r$ ,  $|\zeta| = -\zeta$ )

$$\varphi = \frac{1}{r\{\sqrt{1 + h^2r} + h\xi - \zeta + d\}}.$$

Quando non c'è lo schermo, si ha invece dalle (III) ponendo  $\Delta = r$ ,  $L_1 = M_1 = N_1 = 0$ )

$$(III''') \quad \begin{cases} L = 0 \\ M = -ma \frac{d}{d\zeta} \left( \frac{1}{r} \right), \\ N = ma \frac{d}{d\eta} \left( \frac{1}{r} \right). \end{cases}$$

Il confronto di queste colle (III'') mostra che la forza magnetica è modificata dall'interposizione del conduttore. L'ordine di grandezza rimane però il medesimo (quello di  $a$ ).

Per farci un'idea della variazione di intensità, consideriamo in particolare i punti immediatamente al disotto della carica mobile (v. la

figura a pag. 173), cioè i punti  $Q(0, 0, \zeta < 0)$  situati sul prolungamento della  $m\Omega$ .

Avendosi, per questi punti  $Q$ ,  $\eta = 0$ , sarà intanto [formule (III'') e (III''')] ]

$$L = N = 0,$$

siavi o no il piano conduttore.

Inoltre

$$d - \zeta = r, \quad \varphi = \frac{1}{1 + \sqrt{1 + h^2}} \frac{1}{r^2},$$

e quindi, quando c'è lo schermo,

$$M = -ma \frac{d(\eta\varphi)}{d\eta} = -ma\varphi = -\frac{ma}{1 + \sqrt{1 + h^2}} \frac{1}{r^2};$$

mentre, per il campo naturale,

$$M = -ma \frac{d}{d\zeta} \left( \frac{1}{r} \right) = ma \frac{\zeta - d}{r^3} = -ma \frac{1}{r^2}.$$

*La forza magnetica nei punti  $Q$  è dunque (siavi o no conduttore) inversamente proporzionale al quadrato della distanza  $Qm$ , ed è diretta (per essere  $L = N = 0$ ,  $M < 0$ ) conformemente alla regola di Ampère rispetto alla traiettoria della carica mobile. La interposizione del conduttore riduce l'intensità nel rapporto di 1 a*

$$\frac{1}{1 + \sqrt{1 + h^2}} \quad \left( h = \frac{2\pi a}{k} \right).$$

La riduzione è dunque di una metà almeno ( $h = 0$ ) ed è tanto maggiore, quanto più piccola è la resistenza dello schermo.

Nel caso limite di una conduttività infinita ( $k = 0$ ,  $h = \infty$ ), la forza magnetica sarebbe addirittura zero, al di là del piano conduttore, come lo è la forza elettrica. Il conduttore sarebbe allora uno schermo elettromagnetico perfetto.

## 20. - Caso di una carica, che si muove colla stessa velocità della luce.

Quantunque non sieno qui state riportate le espressioni rigorose dei potenziali ritardati  $F_1$ ,  $U_1$ ,  $V_1$ , valide per qualsiasi valore di  $a < 1$ , parmi valga la pena di accennare (rimandando per la dimostrazione alla

memoria francese) che, se nelle dette espressioni, si fa convergere  $a$  verso 1, si trova al limite

$$F_1 = U_1 = V_1 = 0 \text{ (}^{\circ}\text{)},$$

cioè a dire:

*Nel caso limite di una velocità di convezione eguale a quella della luce, la presenza del piano conduttore non modifica affatto il campo elettromagnetico.*

## 21. - Osservazione.

Il campo magnetico, dovuto ad un sistema qualunque di correnti costanti, non è alterato dalla presenza di un piano conduttore (o più generalmente di conduttori di natura qualsiasi).

È questo un fatto sperimentale ben noto, che si deve naturalmente poter ritrovare in base alle nostre formule.

Limitiamoci per semplicità a considerare il caso del piano indefinito, e torniamo a riferirci agli assi fissi  $x, y, z$ .

Sieno  $F', U', V', W'$  i potenziali ritardati, corrispondenti al sistema dato di correnti. Queste funzioni saranno indipendenti da  $t$ , dacchè supponiamo le correnti costanti.

Sieno d'altra parte  $F_1, U_1, V_1$  ( $W_1 = 0$ ) i potenziali incogniti, corrispondenti alla distribuzione e alle correnti indotte sul piano  $z = 0$ . Evidentemente saranno anch'essi indipendenti da  $t$  e quindi, in causa delle (9), funzioni armoniche.

Per determinare queste funzioni armoniche si hanno le equazioni [(5) del capitolo I, e (6) di questo capitolo]:

$$A \frac{dF}{dt} + \frac{dU}{dx} + \frac{dV}{dy} + \frac{dW}{dz} = 0, \quad X = Aku_1, \quad Y = Akv_1.$$

Tenendo conto che  $F = F' + F_1$ ,  $U = U' + U_1$ , ecc., che  $u_1 = -(1/2\pi)(dU_1/d|z|)$ ,  $v_1 = -(1/2\pi)(dV_1/d|z|)$ , che tutto è indipendente da  $t$ , che  $F', U', V', W'$  già soddisfanno alla prima equazione, e sostituendo  $X, Y$  coi loro valori (II), le tre equazioni si trasformano in

$$\frac{dU_1}{dx} + \frac{dV_1}{dy} = 0, \quad \frac{d}{dx}(F' + F_1) = \frac{Ak}{2\pi} \frac{dU_1}{d|z|}, \quad \frac{d}{dy}(F' + F_1) = \frac{Ak}{2\pi} \frac{dV_1}{d|z|},$$

(<sup>o</sup>) Si può anche (quantunque con minor rigore) rendersi conto di questo risultato, supponendo addirittura  $a = 1$  nel sistema differenziale (4), (8), (9) (pag. 202). Quando si abbia riguardo alle solite condizioni, se ne trae necessariamente  $F_1 = U_1 = V_1 = 0$ .

di cui, beninteso, le ultime due devono essere verificate soltanto per  $z = 0$ .

Le solite considerazioni mostrano che l'unico modo di soddisfare a queste condizioni con funzioni  $U_1$ ,  $V_1$ ,  $F_1$ , armoniche, regolari, e nulle all'infinito, è di prendere

$$U_1 = V_1 = 0,$$

e, per  $F_1$ , la funzione armonica, che, sul piano  $z = 0$ , coincide con  $-F'$ , comportandosi regolarmente in tutti gli altri punti dello spazio.

Il conduttore non esercita dunque alcuna perturbazione magnetica sul campo, dovuto a correnti costanti.

L'influenza sulla forza elettrica si valuta come in elettrostatica, risultato facilmente prevedibile, poichè si tratta di un regime permanente e quindi la distribuzione dell'elettricità è sempre la stessa, come se le cariche fossero immobili.



## IX.

# INFLUENZA DI UNO SCHERMO CONDUTTORE SUL CAMPO ELETTRO-MAGNETICO DI UNA COR- RENTE ALTERNATIVA PARALLELA ALLO SCHERMO

### NOTA I.

« Rend. Acc. Lincei », s. 5<sup>a</sup>, vol. XI (1<sup>o</sup> sem. 1902),  
pp. 163-170 (\*).

Nel discutere <sup>(1)</sup> le recenti esperienze sulla convezione elettrica, il prof. RIGHI lamentava la mancanza di indicazioni precise sugli effetti prodotti dalla presenza di un conduttore in un campo variabile. Egli mi ha allora cortesemente sollecitato a studiare dal punto di vista analitico un caso semplice, che corrisponde schematicamente ad alcuno dei dispositivi usati nelle ricordate esperienze, il caso cioè di una carica elettrica, che si muove di moto uniforme parallelamente a un piano conduttore indefinito.

I risultati, cui sono pervenuto <sup>(2)</sup>, hanno servito al ch. autore <sup>(3)</sup> per completare quantitativamente alcune intuizioni, che egli aveva soltanto annunciato come probabili e che il calcolo ha in tutto giustificato.

La ricerca non è dunque stata inutile. Ma essa si riferisce pur sempre a fenomeni, pressochè al limite delle quantità osservabili e per cui si richiedono in ogni caso esperienze assai delicate. Mi sono quindi proposto di studiare qualche altra questione, dello stesso tipo, ma più facilmente accessibile al controllo sperimentale.

Si presta bene il caso di una corrente alternativa (di quelle ordinarie, adoperate nell'industria), supposta sinusoidale, rettilinea, indefinita e parallela a uno schermo conduttore.

La ricerca, che ho istituita a questo scopo, sarà, se l'Accademia lo consente, esposta in tre Note.

In questa prima potrò appena (dopo alcune indispensabili premesse)

(\*) Presentata dal Socio VITO VOLTERRA nella seduta del 16 febbraio 1902.

(<sup>1</sup>) « Nuovo Cimento », ottobre 1901; comunicazione fatta alla Società di Fisica.

(<sup>2</sup>) In una Memoria, che trovasi presentemente in corso di stampa negli « Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse », ser. III, t. IV [in questo vol.: VIII, pp. 163-195].

(<sup>3</sup>) « Rendiconto della Reale Accademia di Bologna », gennaio 1902.

assegnare il campo elettromagnetico di una corrente rettilinea di intensità variabile e porre il problema analitico delle modificazioni, prodotte da una lastra conduttrice parallela alla corrente.

Nella seconda Nota risolverò il problema rigorosamente; e nella terza trasformerò e semplificherò con opportune approssimazioni la soluzione ottenuta, in modo da renderne trasparente il significato fisico.

Ecco un saggio del risultato definitivo.

Sia  $n$  la frequenza della corrente;  $R$  la resistenza (espressa in unità elettromagnetiche assolute) dell'unità di superficie della lastra conduttrice;  $d$  e  $\Delta$  le distanze della lastra e di un punto qualunque del campo dalla corrente;  $1/q = R/4\pi^2 n$ .

Supponiamo di considerare correnti industriali abbastanza frequenti, e lastre abbastanza conduttrici e discoste dalla corrente perchè  $2/qd < 1/10$  (\*).

Si ha allora con sufficiente approssimazione (tanto maggiore quanto più piccolo è  $2/qd$ , ossia — caeteris paribus — quanto più grande è la frequenza), per i punti che si trovano, rispetto allo schermo conduttore, da banda opposta della corrente:

1) La fase della forza magnetica differisce di  $\pi/2$  da quella, che agirebbe qualora fosse rimosso lo schermo conduttore.

2) La sua intensità massima, in un punto generico, sta a quella, che competerebbe allo stesso punto, se non ci fosse il conduttore, nel rapporto  $1/q\Delta$ . Nei punti del piano perpendicolare allo schermo passante per la corrente la forza magnetica è sempre parallela allo schermo e normale alla corrente.

Al crescere della frequenza, e quindi di  $q$ , (in causa dell'accennato fattore di riduzione  $1/q\Delta \leq 1/qd$ ) lo schermo conduttore tende a intercettare la forza magnetica.

3) La forza elettrica è trascurabile.

Una verifica sperimentale sarebbe, a mio avviso, particolarmente interessante perchè nei risultati teorici sono implicate ipotesi non ancora messe alla prova dall'esperienza.

Infatti, in questo genere di problemi, non basta la teoria hertziana pura, ma occorre aggiungervi qualche cosa.

È ciò che si fa ricorrendo per es. a una delle teorie integrali di MAXWELL o di HELMHOLTZ (completata quest'ultima dall'ipotesi che i potenziali si propagano colla velocità della luce).

(\*) Per una lastra di rame, dello spessore di 1 millimetro, distante un metro dallo schermo, e una frequenza eguale a 100, si ha a un dipresso:

$$R = 16\,000, \quad 4\pi^2 dn = 400\,000, \quad \frac{2}{qd} = \frac{2R}{4\pi^2 dn} = 0,08.$$

Esse bastano e conducono agli stessi risultati <sup>(5)</sup>.

Si tratterebbe dunque di controllare un campo, comune bensì a entrambe le teorie integrali, ma non in pari tempo contenuto nel sistema differenziale di HERTZ (\*).

### I. - Preliminari.

In un dielettrico indefinito, isotropo, impolarizzabile <sup>(6)</sup> e in quiete, la cui omogeneità sia interrotta soltanto da alcune sedi  $\Sigma$  (isolate, a una o a due dimensioni) di cariche e di correnti elettriche, si ha

$$(I) \quad \left\{ \begin{array}{l} L = \frac{dV}{dz} - \frac{dW}{dy}, \\ M = \frac{dW}{dx} - \frac{dU}{dz}, \\ N = \frac{dU}{dy} - \frac{dV}{dx}; \end{array} \right.$$

$$(II) \quad \left\{ \begin{array}{l} X = -\frac{dF}{dx} - A \frac{dU}{dt}, \\ Y = -\frac{dF}{dy} - A \frac{dV}{dt}, \\ Z = -\frac{dF}{dz} - A \frac{dW}{dt}, \end{array} \right.$$

dove  $L, M, N; X, Y, Z$  designano al solito le componenti delle forze magnetica ed elettrica (valutate in unità elettrostatiche) rispetto ad un sistema di assi fissi orientati come in figura;  $A$  l'inversa della velocità della luce;  $F$  e  $(U, V, W)$  i potenziali elettrico e vettore, *ritardati* (cioè propagantisi con velocità  $1/A$ ).

Nella loro qualità di potenziali ritardati,  $F,$

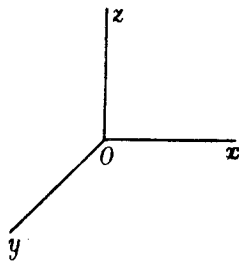


Fig. I.

<sup>(5)</sup> Per vero dire, io mi son qui (e nella precedente Memoria) attenuto esclusivamente alla teoria di HELMHOLTZ. Ho però verificato che la teoria di MAXWELL porterebbe ad espressioni identiche per le forze elettromagnetiche.

Questo risultato sta in generale per un campo e per un conduttore qualunque. Mi si passi per ora l'asserzione, che mi propongo di giustificare quanto prima.

<sup>(6)</sup> Di cui cioè si suppongono eguali all'unità le costanti di dielettricità e di magnetismo (potere induttore specifico e permeabilità magnetica).

(\*) Vedasi in questo vol.: X, pp. 245-252. [N.d.R.].

$U, V, W$  soddisfanno alle equazioni

$$(III) \quad \square F = 0, \quad \square U = 0, \quad \square V = 0, \quad \square W = 0$$

$$\left( \square \equiv \Delta_2 - A^2 \frac{d^2}{dt^2} \right),$$

e si comportano nei punti delle  $\Sigma'$  come potenziali ordinari delle distribuzioni corrispondenti. A priori queste possono essere qualunque, purchè soltanto (oltre a ovvie condizioni di continuità, di derivabilità, ecc.) sia soddisfatto il principio di conservazione dell'elettricità. Tra i potenziali ne consegue la relazione

$$(IV) \quad A \frac{dF}{dt} + \frac{dU}{dx} + \frac{dV}{dy} + \frac{dW}{dz} = 0,$$

che equivale d'altronde completamente all'accennato principio.

In virtù delle (III), (IV), le espressioni (I), (II) delle forze elettromagnetiche verificano identicamente le equazioni di HERTZ (<sup>7</sup>).

È questa in sostanza la teoria conciliata di HELMHOLTZ-HERTZ.

## 2. - Campo elettromagnetico dovuto al tratto di corrente compreso fra un generatore e un collettore.

Sia in  $O_1$  il generatore, in  $O_2$  il collettore. Supponiamo che la corrente si trasmetta da  $O_1$  ad  $O_2$  lungo un filo rettilineo (assimilabile al segmento  $O_1O_2$ ). Sieno  $y = 0, z = d$  le equazioni della retta  $O_1O_2$ ;  $-l_1, 0, d$ ;  $l_2, 0, d$  le coordinate di  $O_1$  e di  $O_2$  ( $d, l_1, l_2 > 0$ );  $x, y, z$  le coordinate del punto potenziato  $P$ ;  $x', 0, d$  quelle di un generico punto (potenziante)  $P'$  del segmento  $O_1O_2$ ;  $u(t)$  l'intensità della corrente in un punto determinato del filo,  $x' = 0$  per es., misurata in unità elettrostatiche (talchè  $Au(t)$  ne è la misura in unità elettromagnetiche).

Limitandoci per semplicità al caso di una propagazione senza smor-

(<sup>7</sup>) Per la dimostrazione veggasi la Nota: *Sulla riducibilità ecc.*, «Nuovo Cimento», agosto 1897 [in queste «Opere»: vol. primo, XVI, pp. 291-303] o, in forma semplificata (per mezzi impolarizzabili come quello, di cui qui si tratta), il primo capitolo della citata Memoria degli Annali di Tolosa.

In entrambi questi lavori la dimostrazione è data per distribuzioni continue (a tre dimensioni) di cariche e di correnti, ma, per le ragioni esposte al n. 9 della Memoria stessa, vi è implicita l'estensione a distribuzioni di qualsiasi natura, senza bisogno di verifiche dirette (sul tipo di quella, che — per le distribuzioni a due dimensioni — trovasi inserita nella Nota del «Nuovo Cimento»).

zamento con velocità eguale a quella della luce (\*), l'analogia intensità in un altro punto qualunque  $P'$  sarà  $u(t - Ax')$ .

Designiamo ancora con  $e(x', t)$  la densità (lineare) della distribuzione elettrica nei punti  $P'$  interni al segmento  $O_1O_2$ , con  $E_1(t)$ ,  $E_2(t)$  le cariche isolate degli estremi  $O_1$ ,  $O_2$ .

La conservazione dell'elettricità esige che sia, come tosto si riconosce,

$$\frac{de}{dt} + \frac{du}{dx'} = 0;$$

$$\frac{dE_1}{dt} = -u(t + Al_1), \quad \frac{dE_2}{dt} = u(t - Al_2).$$

Da  $de/dt + du/dx' = 0$  segue  $e = Au +$  una funzione arbitraria di  $x'$ , che, senza pregiudizio della generalità, si può supporre eguale a zero. (In caso diverso non c'è che da aggiungere alla forza elettrica la componente dovuta a questa distribuzione *statica*).

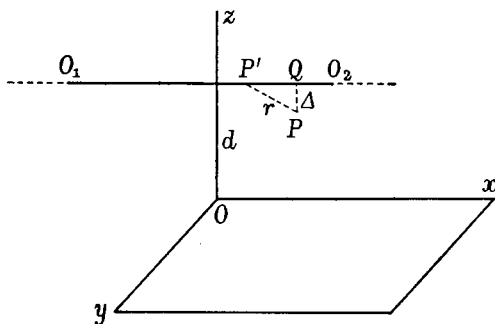


Fig. 2.

Ciò posto, i potenziali ritardati, relativi a un generico punto potenziato  $P$ , hanno le espressioni seguenti:

$$U = A \int_{-l_1}^{l_2} \frac{u(t - Ax' - Ar)}{r} dx', \quad V = 0, \quad W = 0;$$

$$F = U + \frac{\bar{E}_1}{r_1} + \frac{\bar{E}_2}{r_2},$$

(\*) Questa ipotesi è molto opportuna per semplificare i calcoli, ma è chiaro che qualunque legge di propagazione, per cui l'intensità variasse pochissimo con  $x'$ , condurrebbe sensibilmente agli stessi risultati, finché si tratta di fenomeni svolgentisi in un campo ristretto (rispetto alla velocità della luce).

$r, r_1, r_2$  designando le distanze  $\overline{PP'}, \overline{PO_1}, \overline{PO_2}$ ;  $\overline{E_1}, \overline{E_2}$  ciò che divengono  $E_1, E_2$  quando si cambia  $t$  in  $t - Ar_1, t - Ar_2$  rispettivamente.

### 3. - Caso limite di un filo rettilineo indefinito.

Per passare al limite, conviene aggiungere, circa la funzione  $u$ , la condizione suppletoria che abbia un senso l'integrale

$$\int \frac{u(t - Ax - A\lambda) - u(t - Ax)}{\lambda} d\lambda$$

esteso fino all'infinito da un limite inferiore qualunque ( $>$ , o anche  $= 0$ , poichè la funzione sotto il segno resta finita anche per  $\lambda = 0$ ).

Consideriamo per un momento ancora il caso di un tratto finito.

Sia  $\Delta$  la distanza di  $P$  dal filo, talchè

$$r^2 = (x' - x)^2 + \Delta^2, \quad r_1^2 = (l_1 + x)^2 + \Delta^2, \quad r_2^2 = (l_2 - x)^2 + \Delta^2.$$

Ponendo

$$\lambda = r + x' - x,$$

$$\lambda_1 = r_1 + l_1 - x = \frac{\Delta^2}{r_1 + l_1 + x}, \quad \lambda_1' = r_1 + l_1 + x,$$

$$\lambda_2 = r_2 + l_2 - x,$$

$$A = \frac{u(t - Ax - A\lambda) - u(t - Ax)}{\lambda},$$

e assumendo come variabile di integrazione  $\lambda$  al posto di  $x'$ , potremo scrivere:

$$U = A \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} A d\lambda + Au(t - Ax) \log(\lambda_1' \lambda_2) + 2Au(t - Ax) \log \frac{1}{\Delta}.$$

A norma delle (I), (II), l'aggiunta ad  $U$  di una funzione  $f$  del solo argomento  $t - Ax$  non reca alcun contributo alla forza magnetica, mentre incrementa di  $-A(df/dt)$  la componente  $X$  della forza elettrica. Se si aggiunge anche ad  $F$  la stessa funzione  $f$ , il campo rimane evidentemente inalterato.

È dunque indifferente riguardare come potenziali ritardati del tratto di corrente  $O_1O_2$ ,  $U$  ed  $F$ , ovvero per es.

$$\begin{aligned}
 U' &= U - A \int_0^{\infty} A d\lambda - Au(t - Ax) \log(l_1 l_2) \\
 &= A \left\{ - \int_0^{\lambda_1} A d\lambda - \int_{\lambda_2}^{\infty} A d\lambda + u(t - Ax) \log \frac{\lambda_1}{l_1} \frac{\lambda_2}{l_2} \right\} + 2Au(t - Ax) \log \frac{1}{\Delta}, \\
 F' &= U' + \frac{\bar{E}_1}{r_1} + \frac{\bar{E}_2}{r_2}.
 \end{aligned}$$

Queste espressioni presentano sulle prime il vantaggio di ammettere limiti finiti, quando sorgente e collettore tendono all'infinito.

Infatti, per  $l_1, l_2$  convergenti comunque all'infinito,  $\lambda_1$  tende a zero,  $\lambda_1', \lambda_2, r_1, r_2$  all'infinito,  $\lambda_1'/l_1, \lambda_2/l_2$  all'unità, mentre (per l'ipotesi fatta circa la funzione  $u$ )  $\bar{E}_1, \bar{E}_2$  restano finiti.

È chiaro allora che la quantità in parentesi nell'espressione di  $U'$  ha per limite zero, e così  $\bar{E}_1/r_1 + \bar{E}_2/r_2$ .

I potenziali del campo sono pertanto

$$(1) \quad \begin{cases} U' = 2Au(t - Ax) \log \frac{1}{\Delta}, & V' = 0, & W' = 0; \\ & F' = U', \end{cases}$$

e le componenti delle forze magnetica ed elettrica, posto per brevità  $Au(t - Ax) = I$ ,

$$(2) \quad \begin{cases} 0, & 2I \frac{z-d}{\Delta^2}, & -2I \frac{u}{\Delta^2}; \\ 0, & 2I \frac{y}{\Delta^2}, & 2I \frac{z-d}{\Delta^2}. \end{cases}$$

Allo stesso risultato si arriva, con ovvie modificazioni, se si suppone che sia integrabile (da un limite inferiore  $> 0$ ) fino all' $\infty$  la funzione

$$A' = \frac{u(t - Ax - A\lambda)}{\lambda},$$

anzichè la  $A$ .

La condizione (integrabilità della funzione  $A$ , ovvero della funzione  $A'$ , in un intervallo estendentesi fino all'infinito), sotto cui sono state

dimostrate queste formole, è in particolare soddisfatta per correnti costanti  $I = I_0$  (si ha allora  $A = 0$ ), e per correnti sinusoidali

$$I = I_0 \text{ sen } \{2\pi n(t - Ax) + \alpha\} \quad (I_0, n, \alpha \text{ costanti}),$$

essendo allora integrabile fino all' $\infty$  la funzione  $A'$ .

In generale, se si bada che  $I$  altro non è che l'intensità (in misura elettromagnetica) della corrente nel punto  $Q$  (piede della perpendicolare abbassata dal punto potenziato  $P$  sulla corrente), si può concludere:

Le forze elettromagnetiche, dovute a una corrente rettilinea indefinita, comunque variabile, sono, in un generico punto  $P$  del campo, quelle stesse, che proverrebbero da una corrente costante di intensità eguale a quella, che è relativa al punto  $Q$  e all'istante considerato (\*).

#### 4. - Generalità sul modo di valutare l'influenza di uno schermo conduttore.

Per tener conto degli effetti, prodotti dalla presenza di un conduttore sopra un campo elettromagnetico assegnato, basta evidentemente aggiungere ai potenziali del campo i contributi provenienti dalle distribuzioni (di cariche e di correnti), che si destano per induzione sul conduttore.

Designino  $F'$ ,  $U'$ ,  $V'$ ,  $W'$  i potenziali del campo dato [i quali devono naturalmente soddisfare alle equazioni (III) e (IV)],  $F_1$ ,  $U_1$ ,  $V_1$ ,  $W_1$  quelli (a priori incogniti), che provengono dalle distribuzioni indotte.

Per determinare  $F_1$ ,  $U_1$ ,  $V_1$ ,  $W_1$  — oltre a ovvie condizioni, iniziali o qualitative, di continuità, di regolarità, di comportamento all'infinito, ecc., che per brevità lascio di specificare — abbiamo:

a) le equazioni (III) e (IV), relative, possiamo dire, alla quaderna  $F_1$ ,  $U_1$ ,  $V_1$ ,  $W_1$ ;

b) le equazioni, che esprimono la legge di OHM per la superficie conduttrice.

Supponiamo addirittura che quest'ultima sia il piano conduttore  $z=0$ .

Sia  $R$  la resistenza dell'unità di superficie, espressa in unità elettromagnetiche (e quindi  $A^2R$  la misura della stessa resistenza in unità elettrostatiche). Sieno  $u_1$  e  $v_1$  le componenti delle correnti indotte ( $w_1$  e quindi  $W_1$  sono evidentemente nulli).

Le equazioni in questione (relative, si intende bene, al piano  $z = 0$ ) si scriveranno:

$$X = A^2 R u_1, \quad Y = A^2 R v_1.$$

(\*) Cfr. POINCARÉ, *Les oscillations électriques*, pag. 144.



Le espressioni di  $X$ ,  $Y$  sono a ricavarsi dalle (II), tenendo conto che

$$F = F' + F_1, \quad U = U' + U_1, \quad V = V' + V_1, \quad W = W'.$$

Dacchè  $U_1$  e  $V_1$  si comportano come ordinari potenziali di densità  $Au_1$ ,  $Av_1$ , si avrà dalla nota formola, che caratterizza le discontinuità delle derivate normali,

$$Au_1 = -\frac{1}{2\pi} \frac{dU}{d|z|}, \quad Av_1 = -\frac{1}{2\pi} \frac{dV_1}{d|z|},$$

designando con  $|z|$  il valore assoluto di  $z$  e convenendo d'ora innanzi di riguardare  $F_1$ ,  $U_1$ ,  $V_1$  come funzioni di  $|z|$ , anzichè di  $z$ , ciò che è evidentemente giustificato dalla necessaria simmetria di queste funzioni rispetto al piano  $z = 0$ .

Le precedenti equazioni divengono così:

$$(V) \quad \begin{cases} \frac{d(F' + F_1)}{dx} + A \frac{d(U' + U_1)}{dt} = \frac{AR}{2\pi} \frac{dU_1}{d|z|}, \\ \frac{d(F' + F_1)}{dy} + A \frac{d(V' + V_1)}{dt} = \frac{AR}{2\pi} \frac{dV_1}{d|z|}. \end{cases}$$

Sarebbe facile dimostrare che, tenendo conto di tutto,  $F_1$ ,  $U_1$ ,  $V_1$  rimangono univocamente determinati.

Ma non è ora il momento di occuparsi di teoria generale. Per il problema, che dobbiamo risolvere, l'accennata univoca esistenza risulterà a posteriori dalla effettiva determinazione delle incognite.

NOTA II.

« Rend. Acc. Lincei », s. 5<sup>a</sup>, vol. XI (1<sup>o</sup> sem. 1902),  
pp. 191-198 (\*).

**5. - Caso del campo dovuto ad una corrente sinusoidale parallela allo schermo.**

Prendiamo nelle (1) della Nota precedente

$$Au(t - Ax) = I_0 e^{i(\omega - \frac{\pi}{2})},$$

dove

$$i = \sqrt{-1}, \quad \omega = 2\pi n(t - Ax) + \alpha,$$

$I_0$ ,  $n$  ed  $\alpha$  designano costanti reali. Con questa espressione di  $u$  le parti reali dei secondi membri delle (1) forniscono i potenziali dovuti a una ordinaria corrente sinusoidale di intensità massima  $I_0$  e di frequenza  $n$ .

Proponiamoci di determinare (i potenziali indotti sul piano  $z = 0$ )  $F_1$ ,  $U_1$ ,  $V_1$  nel caso che i potenziali inducenti corrispondano al valore complesso  $I_0 e^{i(\omega - \pi/2)}$ , sieno cioè

$$(1') \quad \begin{cases} U' = 2I_0 e^{i(\omega - \frac{\pi}{2})} \log \frac{1}{\Delta}, & V' = 0, & W' = 0; \\ F' = U' \end{cases}$$

Trovati  $F_1$ ,  $U_1$ ,  $V_1$ , basterà prenderne la parte reale per avere i potenziali indotti sul piano  $z = 0$  dalla suddetta corrente sinusoidale, parallela al piano e distante  $d$  da esso.

È chiaro anzitutto che, stabilito una volta il regime, le espressioni di  $F_1$ ,  $U_1$ ,  $V_1$  dovranno essere della forma

$$(3) \quad F_1 = 2I_0 e^{i(\omega - \frac{\pi}{2})} F_2, \quad U_1 = 2I_0 e^{i(\omega - \frac{\pi}{2})} U_2, \quad V_1 = 2I_0 e^{i(\omega - \frac{\pi}{2})} V_2,$$

con  $F_2$ ,  $U_2$ ,  $V_2$  funzioni soltanto di  $y$ ,  $|z|$ .

(\*) Presentata dal Socio VITO VOLTERRA nella seduta del 2 marzo 1902.

Ciò posto, le (III) e (IV) danno

$$(4) \quad \frac{d^2 F_2}{dy^2} + \frac{d^2 F_2}{d|z|^2} = 0, \quad \frac{d^2 U_2}{dy^2} + \frac{d^2 U_2}{d|z|^2} = 0, \quad \frac{d^2 V_2}{dy^2} + \frac{d^2 V_2}{d|z|^2} = 0,$$

$$(5) \quad 2\pi n A i (F_2 - U_2) + \frac{dV_2}{dy} = 0,$$

mentre le equazioni ai limiti (V) divengono

$$2\pi n A i (F_2 - U_2) + \frac{AR}{2\pi} \frac{dU_2}{d|z|} = 0,$$

$$\frac{dF_2}{dy} + 2\pi n A i V_2 - \frac{AR}{2\pi} \frac{dV_2}{d|z|} = -\frac{d \log \frac{1}{\Delta}}{dy}.$$

Le tre funzioni [armoniche, in causa delle (4)]  $F_2$ ,  $U_2$ ,  $V_2$  dovranno inoltre comportarsi regolarmente per tutti i valori reali di  $y$  e positivi di  $|z|$ , e annullarsi (assieme alle loro derivate) al crescere indefinito di  $|z|$ . Queste stesse proprietà competono di conseguenza alle due combinazioni

$$2\pi n A i (F_2 - U_2) + \frac{AR}{2\pi} \frac{dU_2}{d|z|},$$

$$\frac{dF_2}{dy} + 2\pi n A i V_2 - \frac{AR}{2\pi} \frac{dV_2}{d|z|},$$

di cui le equazioni ai limiti, scritte or ora, forniscono inoltre i valori per  $z = 0$ :

$$0 \quad \text{e} \quad -\frac{d \log \frac{1}{\Delta}}{dy}.$$

Poniamo

$$(6) \quad \nabla^2 = y^2 + (|z| + d)^2 \quad (\nabla = \Delta \quad \text{per } z \leq 0),$$

e osserviamo che le due funzioni  $0$  e  $-(d \log 1/\nabla)/dy$ , sono manifestamente armoniche, regolari per tutti i valori reali di  $y$  e positivi di  $|z|$ ,

e nulle per  $|z| = \infty$ . Siccome non vi possono essere due funzioni armoniche, che prendono gli stessi valori per  $z = 0$ , si mantengono regolari in ogni altro punto, e si annullano per  $|z| = \infty$ , così dobbiamo concludere che si ha identicamente (e non soltanto per  $z = 0$ )

$$(7) \quad \begin{cases} 2\pi n A i (F_2 - U_2) + \frac{AR}{2\pi} \frac{dU_2}{d|z|} = 0, \\ \frac{d}{dy} \left( F_2 + \log \frac{1}{\nabla} \right) + 2\pi n A i V_2 - \frac{AR}{2\pi} \frac{dV_2}{d|z|} = 0. \end{cases}$$

Il nostro compito consiste dunque nell'integrare il sistema (completo, come tosto si riconosce) (4), (5), (7) mediante funzioni  $F_2$ ,  $U_2$ ,  $V_2$  di  $y$ ,  $|z|$ , regolari per tutti i valori reali di  $y$ , positivi di  $|z|$ , e nulle per  $|z| = \infty$ .

### 6. - Calcolo di $F_2$ .

Moltiplichiamo la prima delle (7) per  $2\pi n A i$ , deriviamo la seconda rispetto ad  $y$  e sommiamo. Verrà, tenendo conto della (5),

$$\frac{d^2}{dy^2} \left( F_2 + \log \frac{1}{\nabla} \right) + A^2 n R i \frac{dF_2}{d|z|} = 0,$$

od anche, siccome  $F_2 + \log 1/\Delta$  è funzione armonica,

$$\frac{d^2}{d|z|^2} \left( F_2 + \log \frac{1}{\nabla} \right) - A^2 n R i \frac{dF_2}{d|z|} = 0.$$

Integrando rispetto a  $|z|$  fra un valore generico e  $\infty$ , risulta

$$\frac{d}{d|z|} \left( F_2 + \log \frac{1}{\nabla} \right) - A^2 n R i F_2 = 0.$$

Facciamo, per brevità di scrittura, le posizioni

$$(8) \quad p = 2\pi n A, \quad q = \frac{4\pi^2 n}{R}, \quad B = A^2 n R = \frac{p^2}{q}.$$

Le equazioni (5), (7) e quelle, cui siamo testè pervenuti, potranno

essere scritte:

$$(5') \quad \frac{dV_2}{dy} = pi(U_2 - F_2),$$

$$(7') \quad \begin{cases} \frac{d}{d|z|} (U_2 - F_2) - qi(U_2 - F_2) = -\frac{dF_2}{d|z|}, \\ \frac{d}{dy} \left( F_2 + \log \frac{1}{\nabla} \right) - \frac{p}{q} \left( \frac{dV_2}{d|z|} \right) - qiV_2 = 0, \end{cases}$$

$$(9) \quad \frac{dF_2}{d|z|} - BiF_2 = -\frac{d \log \frac{1}{\nabla}}{d|z|}.$$

Un integrale particolare della (9) è, come si verifica subito,

$$(10) \quad F_2 = -i \int_0^\infty e^{-B\lambda} \frac{d \log \frac{1}{\tau}}{d|z|} d\lambda,$$

in cui

$$(11) \quad \tau^2 = y^2 + (|z| + d - i\lambda)^2$$

e si suppone  $B > 0$ .

La funzione sotto il segno nel secondo membro della (10) è allora effettivamente integrabile fra 0 e  $\infty$  (qualunque sieno i valori reali di  $y$  e di  $z$ ).

L'integrale  $F_2$  risulta poi funzione armonica di  $y$ ,  $|z|$ , nulla per  $|z| = \infty$ , regolare per tutti i valori reali di  $y$  e positivi di  $|z|$ , poichè

$$\frac{d \log \frac{1}{\tau}}{d|z|} = -\frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{|z| + d + i(y - \lambda)} + \frac{1}{|z| + d - i(y + \lambda)} \right\}$$

gode di tali proprietà in tutto l'intervallo di integrazione.

*La funzione cercata  $F_2$  rimane definita dalla (10).*

Infatti, in causa della (9), essa potrebbe differirne soltanto per un integrale armonico della equazione

$$\frac{dF_2}{d|z|} - BiF_2 = 0,$$

nullo per  $|z| = \infty$ . Ma un tale integrale è identicamente nullo.

Giova ancora osservare che, mediante una integrazione per parti, si può attribuire all'espressione di  $F_2$  la forma

$$(10') \quad F_2 + \log \frac{1}{\nabla} = B \int_0^{\infty} e^{-B\lambda} \log \frac{1}{\tau} d\lambda.$$

### 7. - Caratteri analitici della funzione $F_2$ .

Per riconoscere la natura della funzione definita dall'integrale (10), prendiamo le mosse dalla formula

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-\lambda}}{\lambda + \xi} d\lambda = e^{\xi} \int_{\xi}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{d\lambda}{\lambda} = -e^{\xi} \text{Li} e^{-\xi},$$

che è, si può dire, la definizione della funzione Li (logaritmo integrale) per valori reali e positivi dell'argomento  $\xi$ .

Dalla formula di EULERO (1)

$$(11) \quad \text{Li} e^{-\xi} = C + \log \xi + \sum_m^{\infty} (-1)^m \frac{\xi^m}{m \cdot m!}$$

(dove  $C$  è la nota costante 0,577... e pel logaritmo si intende fissata la determinazione reale) la funzione  $\text{Li} e^{-\xi}$  rimane definita in tutto il piano complesso. Supponendolo tagliato lungo il semiasse reale negativo, la  $\text{Li} e^{-\xi}$  risulta funzione uniforme colla sola singolarità logaritmica  $\xi = 0$ .

Nello stesso campo (cioè in tutto il piano ad esclusione del semiasse reale negativo) è pure

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-\lambda}}{\lambda + \xi} d\lambda$$

funzione analitica regolare di  $\xi$ .

Le due funzioni

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-\lambda}}{\lambda + \xi} d\lambda, -e^{\xi} \text{Li} e^{-\xi}$$

(1) Cfr. per es. KRONECKER, *Vorlesungen über Mathematik*, B. I, pag. 213.

coincidono per  $\xi$  reale e positivo. Si ha dunque, per qualsiasi valore di  $\xi$ ,

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-\lambda} d\lambda}{\lambda + \xi} = -e^{\xi} \text{Li } e^{-\xi},$$

dovendosi nel secondo membro intendere, come s'è detto, quella particolare determinazione della funzione multiforme  $\text{Li}$ , che, senza attraversare il taglio, risulta reale, per  $\xi$  reale e positivo.

Ciò posto, la espressione (10) di  $F_2$ , scambiando  $\lambda$  in  $\lambda/B$  e moltiplicando sopra e sotto per  $i$ , può essere scritta

$$\begin{aligned} F_2 &= -\frac{1}{2} \left[ \int_0^{\infty} \frac{e^{-\lambda} d\lambda}{\lambda - B\{y - i(|z| + d)\}} + \int_0^{\infty} \frac{e^{-\lambda} d\lambda}{\lambda + B\{y + i(|z| + d)\}} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[ e^{-B(y - i(|z| + d))} \text{Li } e^{B(y - i(|z| + d))} + e^{B(y + i(|z| + d))} \text{Li } e^{-B(y + i(|z| + d))} \right]. \end{aligned}$$

Valendosi dello sviluppo (11), si caratterizza immediatamente il comportamento della funzione  $F_2$  nell'intorno del valore 0 del parametro  $B$ . Si ha infatti

$$(10'') \quad F_2 = C + \log B - i \frac{\pi}{2} + \log \nabla + B\{Y_1 \log B + Y_2\},$$

$Y_1$  e  $Y_2$  designando funzioni regolari nell'intorno di  $B = 0$ .

Ne viene che, per  $B = 0$ , le derivate, rapporto a  $y$ ,  $|z|$ , di  $F_2$  coincidono colle derivate di  $\log \nabla$ .

### 8. - Calcolo di $U_2$ e di $V_2$ .

Ritenuto  $q > 0$ , si verifica, come sopra, che

$$(12) \quad U_2 - F_2 = -i \int_0^{\infty} e^{-q\mu} \frac{dF_2(y, |z| - i\mu)}{d|z|} d\mu$$

soddisfa alla prima delle (7') e a tutte le altre condizioni richieste, ed è l'unica funzione, che si trova in questo caso.

Collo stesso criterio si costruisce l'integrale particolare

$$(13) \quad V_2 = -pi \int_0^{\infty} \{U_2(y + \nu, |z|) - F_2(y + \nu, |z|)\} d\nu = -pi \int_y^{\infty} (U_2 - F_2) dy$$

delle (5'), che è funzione armonica ecc., e fornisce in somma il cercato valore di  $V_2$ .

Di tutte le condizioni, imposte alle nostre incognite, rimane soltanto da controllare la seconda delle (7'). Si riconosce senza difficoltà che coi valori (10'), (12) e (13) essa rimane identicamente soddisfatta.

### 9. - Semplificazione delle espressioni trovate.

La frequenza  $n$ , finchè si tratta di correnti alternate industriali, è compresa fra 20 e 200; per scariche oscillanti, correnti di TESLA, ecc., può giungere sino a valori dell'ordine di  $10^6$ , ma in ogni caso  $B = A^2 n R$  è una quantità molto piccola (\*).

Si possono quindi trascurare senza scrupolo i termini dell'ordine di  $B$ , ed anche di  $B \log B$ . La (10'') dà allora (prescindendo, come è lecito, dalla costante  $C + \log B - i(\pi/2)$ )

$$(14) \quad F_2 + \log \frac{1}{\nabla} = 0.$$

Ciò si sarebbe potuto ricavare dalla (9) facendovi  $B = 0$ , ma non si sarebbe avuto in tal modo esatta nozione dell'approssimazione risultante.

La formula (10'') mostra che l'errore, da cui possono essere affette  $F_2$  e le sue derivate rispetto ad  $y$ ,  $|z|$ , è dell'ordine di  $B \log B$ .

Nemmeno questo sarebbe sufficiente, volendo procedere con assoluto rigore. Bisognerebbe ancora assegnare un limite superiore dell'errore possibile nelle componenti delle forze elettromagnetiche.

Non è del resto difficile il farlo, partendo dalla considerazione delle derivate della (10').

Si arriva alla conclusione prevista che gli errori sono effettivamente trascurabili.

Ritenuto ormai  $F_2 = -\log 1/\nabla$ , la (12), ricordando la espressione (11) di  $\tau$ , si riduce a

$$(15) \quad U_2 - F_2 = i \int_0^\infty e^{-\alpha \lambda} \frac{d \log \frac{1}{\tau}}{d|z|} d\lambda.$$

(\*) Prendiamo pure  $n = 10^7$  e per  $R$  il valore, che corrisponde a una lastra di argenta dello spessore di un decimillimetro, cioè a un dipresso

$$R = 20\,000 \times 100 = 2 \cdot 10^6.$$

Sarà pur sempre

$$B = \frac{2 \cdot 10^{13}}{9 \cdot 10^{16}} = \frac{2}{9} 10^{-3}.$$



Scindiamo il reale dall'immaginario. Si ha

$$U_2 - F_2 = -\frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{-\alpha \lambda} \frac{d \log \frac{\tau_1}{\tau_2}}{dy} d\lambda - i \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{-\alpha \lambda} \frac{d \log (\tau_1 \tau_2)}{d|z|} d\lambda,$$

dove

$$\tau_1^2 = (y - \lambda)^2 + (|z| + d)^2, \quad \tau_2^2 = (y + \lambda)^2 + (|z| + d)^2.$$

Si osservi che

$$-\int_0^{\infty} \frac{d \log \frac{\tau_1}{\tau_2}}{dy} dy = \log \frac{\tau_1}{\tau_2},$$

$$-\int_0^{\infty} \frac{d \log (\tau_1 \tau_2)}{d|z|} dy = \operatorname{arctg} \frac{y - \lambda}{|z| + d} + \operatorname{arctg} \frac{y + \lambda}{|z| + d} - \pi.$$

La (13) porge quindi

$$V_2 = \frac{1}{2} p \int_0^{\infty} e^{-\alpha \lambda} \left\{ \operatorname{arctg} \frac{y - \lambda}{|z| + d} + \operatorname{arctg} \frac{y + \lambda}{|z| + d} - \pi \right\} d\lambda - i \frac{1}{2} p \int_0^{\infty} e^{-\alpha \lambda} \log \frac{\tau_1}{\tau_2} d\lambda.$$

Le espressioni definitive dei potenziali indotti, con approssimazione valida in ogni caso, sono dunque, a tenore delle (3) (avvertendo che dobbiamo conservare nei secondi membri soltanto la parte reale):

$$(16) \left\{ \begin{array}{l} F_1 = -2I_0 \operatorname{sen} \omega \log \frac{1}{\sqrt{V}}, \\ U_1 - F_1 = -2I_0 \operatorname{sen} \omega \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{-\alpha \lambda} \frac{d \log \frac{\tau_1}{\tau_2}}{dy} d\lambda \\ \qquad \qquad \qquad - 2I_0 \cos \omega \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{-\alpha \lambda} \frac{d \log (\tau_1 \tau_2)}{d|z|} d\lambda, \\ V_1 = 2I_0 \operatorname{sen} \omega \frac{1}{2} p \int_0^{\infty} e^{-\alpha \lambda} \left\{ \operatorname{arctg} \frac{y - \lambda}{|z| + d} + \operatorname{arctg} \frac{y + \lambda}{|z| + d} - \pi \right\} d\lambda \\ \qquad \qquad \qquad - 2I_0 \cos \omega \frac{1}{2} p \int_0^{\infty} e^{-\alpha \lambda} \log \frac{\tau_1}{\tau_2} d\lambda, \end{array} \right.$$

dove, ricordiamolo,

$$\begin{aligned}\omega &= 2\pi n(t - Ax) + \alpha, \\ \nabla^2 &= y^2 + (|z| + d)^2, \\ \tau_1^2 &= (y - \lambda)^2 + (|z| + d)^2, \\ \tau_2^2 &= (y + \lambda)^2 + (|z| + d)^2,\end{aligned}$$

mentre le costanti  $p$  e  $q$  sono definite dalla (8).

Il campo elettromagnetico, che, in assenza di schermo conduttore, è caratterizzato dai potenziali — parte reale delle (1') —

$$(17) \quad F' = 2I_0 \operatorname{sen} \omega \log \frac{1}{\Delta}; \quad U' = 2I_0 \operatorname{sen} \omega \log \frac{1}{\Delta}, \quad V' = 0, \quad W' = 0,$$

lo è invece, tenendo conto dello schermo, da

$$(18) \quad F = 2I_0 \operatorname{sen} \omega \left\{ \log \frac{1}{\Delta} - \log \frac{1}{\nabla} \right\};$$

$$U = F + (U_1 - F_1), \quad V = V_1, \quad W = 0,$$

dove bisogna sostituire per  $U_1 - F_1$  e  $V_1$  i loro valori (16).

Le componenti delle forze elettromagnetiche si hanno introducendo nelle (I), (II) i potenziali (18). Ma le espressioni, che ne risultano, non sono ancora abbastanza comode per il calcolo numerico, nè soprattutto per acquistare un'idea dell'andamento del fenomeno e fornire indicazioni ad eventuali sperimentatori.

Mostrerò in una terza Nota come a ciò si pervenga mediante uno sviluppo asintotico degli integrali, che compariscono nelle espressioni trovate.

NOTA III.

« Rend. Acc. Lincei », s. 5<sup>a</sup>, vol. XI, (1<sup>o</sup> sem. 1902),  
pp. 228-337. (\*)

10. - Sviluppi asintotici.

Riprendiamo l'espressione (15) di  $U_2 - F_2$ .

Il secondo membro, considerato come funzione del parametro  $q$ , ha, per  $q = \infty$ , un punto singolare essenziale. Infatti esso differisce dall'espressione rigorosa (10) di  $F_2$  soltanto per lo scambio di  $B$  in  $q$ ; ed  $F_2$ , quale funzione di  $B$ , ha effettivamente una singolarità essenziale in  $B = \infty$ , come risulta dalla (10'') (1).

Non sarà dunque possibile sviluppare  $U_2 - F_2$  in serie di potenze di  $1/q$ , convergente nell'intorno di  $1/q = 0$ .

Però, limitandosi ai valori reali e positivi di  $1/q$ , si può stabilire la validità dello sviluppo di TAYLOR fino a un ordine qualsiasi e fissare il limite superiore di ciascun resto.

Ecco in qual modo.

Cambiando  $\lambda$  in  $\lambda/q$ , la (15) si può scrivere:

$$q(U_2 - F_2) = -\frac{i}{2} \int_0^\infty e^{-\lambda} \left\{ \frac{1}{|z| + d + i\left(y - \frac{\lambda}{q}\right)} + \frac{1}{|z| + d - i\left(y + \frac{\lambda}{q}\right)} \right\} d\lambda.$$

(\*) Presentata dal Socio VITO VOLTERRA nella seduta del 16 marzo 1902.

(1) In quanto, se  $B = \infty$  non fosse una singolarità essenziale di  $F_2$ , ciò accadrebbe in particolare per i valori 0, 0, 1 di  $y, z, d$ , ossia per la funzione

$$e^{iB} \text{Li} e^{-iB} = e^{iB} \log B + e^{iB} \left\{ C - i\frac{\pi}{2} + \sum_m \frac{(-i)^m B^m}{m \cdot m!} \right\},$$

il che evidentemente non è, poichè tanto il coefficiente di  $\log B$ , quanto il secondo addendo, sviluppati per potenze di  $B$ , contengono un numero infinito di termini.

Sotto questa forma apparisce chiaramente che il secondo membro rimane finito e determinato, anche quando  $1/q$  converge a zero (si intende, per valori reali).

Infatti il modulo della funzione sotto il segno è, per qualsiasi valore di  $\lambda$ ,

$$\leq 2 \frac{|z| + d}{(|z| + d)^2 + y^2} e^{-\lambda},$$

funzione evidentemente integrabile nell'intervallo  $0, \infty$ .

Si può anzi asserire che la funzione  $U_2 - F_2$  ammette derivate di qualunque ordine, rispetto all'argomento  $1/q$ , anche nel punto  $1/q = 0$ .

Infatti:

$$(19) \quad \frac{d^m q (U_2 - F_2)}{d \left(\frac{1}{q}\right)^m} =$$

$$= -\frac{i^{m+1}}{2} m! \int_0^\infty e^{-\lambda} \lambda^m \left\{ \frac{1}{\left[|z| + d + i\left(y - \frac{\lambda}{q}\right)\right]^{m+1}} + \frac{1}{\left[|z| + d - i\left(y + \frac{\lambda}{q}\right)\right]^{m+1}} \right\} d\lambda$$

$$(m = 0, 1, 2, \dots),$$

e il modulo della funzione sotto il segno non supera mai

$$\frac{2}{(|z| + d)^{m+1}} e^{-\lambda} \lambda^m.$$

L'integrale è dunque una funzione di  $1/q$ , finita e continua per ogni valore reale di  $1/q$  ( $1/q = 0$ , incluso).

Per  $1/q = 0$ , risulta in particolare

$$\frac{d^m q (U_2 - F_2)}{d \left(\frac{1}{q}\right)^m} = -\frac{i^{m+1}}{2} (m!)^2 \left\{ \frac{1}{(|z| + d + iy)^{m+1}} + \frac{1}{(|z| + d - iy)^{m+1}} \right\},$$

od anche, avendo riguardo alle identità

$$\frac{d \log \frac{1}{\nabla}}{d|z|} = -\frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{|z| + d + iy} + \frac{1}{|z| + d - iy} \right\}.$$

$$\frac{d^{m+1} \log \frac{1}{\nabla}}{d|z|^{m+1}} = \frac{(-1)^{m+1}}{2} m! \left\{ \frac{1}{(|z| + d + iy)^{m+1}} + \frac{1}{(|z| + d - iy)^{m+1}} \right\},$$

$$\frac{d^m q (U_2 - F_2)}{d \left(\frac{1}{q}\right)^m} = -(-i)^{m+1} m! \frac{d^{m+1} \log \frac{1}{\nabla}}{d|z|^{m+1}}.$$

In questa condizione di cose è chiaro che si può applicare alla funzione  $q(U_2 - F_2)$  la formula di TAYLOR per l'intervallo  $0, 1/q$ , fino a un ordine qualunque  $m$ , e scrivere di conformità

$$(20) \quad U_2 - F_2 = - \sum_1^m \frac{(-i)^s}{q^s} \frac{d^s \log \frac{1}{\nabla}}{d|z|^s} + R_m,$$

dove, usando per il resto la forma di LAGRANGE, si può ritenere per la (19),

$$R_m = - \frac{i^{m+1}}{2q^{m+1}} \int_0^\infty e^{-\lambda} \lambda^m \left\{ \frac{1}{\left[ |z| + d + i \left( y - \frac{\lambda}{q_1} \right) \right]^{m+1}} + \frac{1}{\left[ |z| + d - i \left( y + \frac{\lambda}{q_1} \right) \right]^{m+1}} \right\} d\lambda$$

con  $1/q_1 > 0$ .

La (20) e questa espressione di  $R_m$  valgono anche per  $m = 0$ , dovendosi soltanto nella (20) porre zero al posto della sommatoria.

Per qualsiasi valore di  $y$  (reale, si intende) il modulo della quantità in parentesi nell'espressione di  $R_m$  è sempre inferiore a  $2/(|z| + d)^{m+1}$ , talchè

$$(21) \quad R_m < \frac{m!}{q^{m+1}(|z| + d)^{m+1}} \quad (2).$$

In modo perfettamente analogo, considerando le derivate di  $q(U_1 - F_2)$  rapporto a  $y$  e rapporto a  $|z|$ , si ha

$$(22) \quad \begin{cases} \frac{d(U_2 - F_2)}{dy} = - \sum_1^m \frac{(-i)^s}{q^s} \frac{d^{s+1} \log \frac{1}{\nabla}}{d|z|^s dy} + R'_m, \\ \frac{d(U_2 - F_2)}{d|z|} = - \sum_1^m \frac{(-i)^s}{q^s} \frac{d^{s+1} \log \frac{1}{\nabla}}{d|z|^{s+1}} + R''_m \end{cases}$$

con

$$(23) \quad R'_m, R''_m < \frac{(m+1)!}{q^{m+1}(|z| + d)^{m+2}}.$$

(\*) Si può osservare che, ammettendo a priori la possibilità di uno sviluppo di  $U_2 - F_2$  per potenze di  $1/q$ , la forma dello sviluppo risulta subito dalla prima equazione (7') (nel secondo membro della quale si intende posto  $-(d \log 1/\Delta)/d|z|$  in luogo di  $dF_2/d|z|$ ). Però questo modo di procedere, oltre a non essere rigoroso, non permette di apprezzare l'entità del resto.

L'equazione differenziale (5'):

$$\frac{dV_2}{dy} = pi(U_2 - F_2),$$

notando che  $|U_2 - F_2|$  è in ogni caso  $< 1/qd$  e ricordando dalle (8) che  $p^2/q = B$ , ci dà

$$\left| \frac{dV_2}{dy} \right| < \frac{B}{pd}.$$

Immaginiamo di sviluppare colla formola di TAYLOR, arrestata dopo il primo termine, le funzioni  $qV_2$  e  $q(dV_2/d|z|)$ , definite dalla (13) e sua derivata rapporto a  $|z|$ .

Troveremo dopo ovvie riduzioni

$$V_2 = \frac{B}{p} \left\{ \operatorname{arctg} \frac{y}{|z| + d} - \frac{\pi}{2} + R'' \right\},$$

$$\frac{dV_2}{d|z|} = \frac{B}{p} \left\{ \frac{d \log \frac{1}{\Delta}}{dy} + R^{iv} \right\}$$

con

$$R'' > \frac{1}{qd}, \quad R^{iv} < \frac{1}{qd^2}.$$

Osservando che, per nessun valore reale di  $y, z$ ,  $|(d \log 1/\Delta)/dy|$  può superare  $d/2$  risulta ancora

$$|V_2| < \frac{B}{p} \left( \pi + \frac{1}{qd} \right),$$

$$\left| \frac{dV_2}{d|z|} \right| < \frac{B}{p} \left( \frac{1}{2d} + \frac{1}{qd^2} \right).$$

Noi dobbiamo naturalmente riguardare  $1/d, 1/qd$  come quantità finite (nei casi pratici anzi molto minori dell'unità; cfr. il § seguente).

Per quanto s'è detto al principio del § 9, siamo ormai autorizzati a porre

$$(24) \quad V_2 = 0.$$

**II. - Limite superiori degli errori, da cui possono essere affette le forze elettromagnetiche del campo, quando si usano gli sviluppi asintotici.**

A meno di termini contenenti  $B$  a fattore e senza riserve trascurabili si ha, come abbbiam visto,

$$(14) \quad F_2 + \log \frac{1}{\nabla} = 0,$$

$$(24) \quad V_2 = 0.$$

Quale errore può insinuarsi nelle componenti delle forze elettromagnetiche, se, per  $U_2 - F_2$  e sue derivate, si introducono gli sviluppi asintotici fino a un ordine determinato, omettendo i resti?

Per riconoscerlo, osserviamo in primo luogo che, essendo, per le (3),  $U_1 - F_1$  eguale alla parte reale di

$$2I_0 e^{i(\omega - \frac{\pi}{2})} (U_2 - F_2),$$

si ha

$$A \left| \frac{d(U_1 - F_1)}{dt} \right| \leq 2I_0 \cdot 2\pi n A \cdot |U_2 - F_2|,$$

$$\left| \frac{d(U_2 - F_2)}{dy} \right| \leq 2I_0 \left| \frac{d(U_2 - F_2)}{dy} \right|,$$

$$\left| \frac{d(U_1 - F_1)}{dz} \right| \leq 2I_0 \left| \frac{d(U_2 - F_2)}{d|z|} \right|.$$

Ora, a tenore delle (I), (II) e

$$(18') \quad F = 2I_0 \operatorname{sen} \omega \left( \log \frac{1}{\Delta} - \log \frac{1}{\nabla} \right); \quad U = F + (U_1 - F_1), \quad V = 0, \quad W = 0$$

(sono le (18), in cui s'è tenuto conto che  $V_1 = 0$ ), le componenti della forza elettrica dipendono da  $U_1 - F_1$  solo per la presenza del termine  $A \cdot d(U_1 - F_1)/dt$ ; le componenti della forza magnetica solo per i termini  $d(U_1 - F_1)/dt$ ,  $d(U_1 - F_1)/dz$ .

Dopo ciò, le (21) e (23) mostrano che, quando si introducono, per  $U_2 - F_2$  e sue derivate, gli sviluppi (20) e (22), fino al termine  $m^{\text{esimo}}$ ,

il resto non può superare

$$2I_0 \cdot 2\pi n A \cdot \frac{m!}{q^{m+1}(|z| + d)^{m+1}}$$

nella componente  $X$  (l'unica delle componenti della forza elettrica, che dipende da  $U_1 - F_1$ ), nè

$$2I_0 \frac{(m+1)!}{q^{m+1}(|z| + d)^{m+2}}$$

in una componente magnetica.

Per avere un'idea dell'errore relativo, in una componente e in un punto generico, conviene considerare il rapporto fra l'errore assoluto e l'intensità (massima), che compete nello stesso punto alla corrispondente forza, quando manca lo schermo conduttore.

Le (2), in cui dobbiamo intendere, per  $I$ ,  $I_0 \sin \omega$ , ci dicono subito che, tanto per la forza magnetica, quanto per la elettrica, tale massima intensità vale

$$\frac{2I_0}{\Delta}$$

L'errore relativo non supera dunque

$$2\pi n A \frac{m! \Delta}{q^{m+1}(|z| + d)^{m+1}}$$

per la forza elettrica, nè

$$\frac{(m+1)! \Delta}{q^{m+1}(|z| + d)^{m+2}}$$

per la magnetica.

Limitandosi, come è per noi sufficiente, a considerare punti in prossimità del piano mediano (piano normale allo schermo passante per la corrente), possiamo per es. supporre

$$y^2 < 3(|z| + d)^2.$$

Si ha allora a fortiori:

*Arrestando lo sviluppo asintotico al termine  $m^{\text{esimo}}$ , la frazione trascurata di forza elettrica non può superare*

$$(25) \quad 2\pi n A \frac{2 \cdot m!}{q^{m+1} d^m};$$



e la frazione trascurata di forza magnetica

$$(26) \quad \frac{2(m+1)!}{q^{m+1} d^{m+1}}.$$

Facendo nella (25)  $m = 0$  e ricordando dalla (8) che  $q = 4\pi^2 n/R$ , risulta come errore relativo

$$\frac{AR}{\pi},$$

frazione insignificante anche nel caso di resistenze considerevoli. (Prendendo, come a § 9, una lastra di argentana di un decimillimetro, si ha all'incirca  $AR/\pi = 0,00002$ ).

Concludiamo dunque, che, per quanto concerne la forza elettrica, è lecito ritenere senza errore sensibile

$$U_2 - F_2 = 0.$$

Affinchè l'uso degli sviluppi asintotici di  $d(U_2 - F_2)/dy$ ,  $d(U_2 - F_2)/d|z|$  nelle componenti della forza magnetica risponda allo scopo, è necessario che, per qualche valore di  $m$ , la (26) sia una piccola frazione dell'unità; per es. dell'ordine di  $1/10$ , se si tratta di ricerche puramente qualitative; più piccola (a norma dell'esattezza richiesta), se si tratta di ricerche quantitative.

Se esiste un valore di  $m$  che conviene, ad esso — e non oltre — vanno arrestati gli sviluppi.

Affinchè in particolare si possa prendere  $m = 1$  con errore non superiore all'un per cento, basterà, per la (26), che sia

$$\frac{4}{q^2 d^2} \leq \frac{1}{100},$$

cioè

$$(27) \quad \frac{2}{qd} \leq \frac{1}{10},$$

o finalmente, in via approssimativa,

$$(27') \quad \frac{R}{nd} \leq 2.$$

Questa condizione è soddisfatta da lastre di rame dello spessore di un millimetro ( $R = 16\,000$ ), distanti un metro dalla corrente ( $d = 100$ ), purchè la frequenza sia almeno 80.

Fissati  $R$  e  $d$ , l'errore possibile  $4/q^2 d^2$  varia con  $n$  in ragione inversa dei quadrati. Così ad es., per  $n = 200$ , esso è inferiore a  $(80/200)^2/100$ , cioè al 0,16 per cento; mentre, per  $n = 60$ , si può contare soltanto sopra una esattezza del  $(80/60)^2/100$ , cioè all'incirca del 2 per cento.

## 12. - Espressioni approssimate. Interpretazione fisica.

Bene intesi sui limiti dell'approssimazione corrispondente ad  $m = 1$ , adottiamo come valore di  $U_2 - F_2$ , da introdursi nelle componenti della forza magnetica, il primo termine  $(i/q)(d \log 1/\Delta)/d|z|$  dello sviluppo asintotico (20) (\*).

Per essere  $U_1 - F_1$  la parte reale di

$$2 I_0 e^{i(\omega - \frac{\pi}{2})} (U_2 - F_2),$$

avremo

$$U_1 - F_1 = \frac{2I_0}{q} \cos \omega \frac{d \log \frac{1}{\nabla}}{d|z|}.$$

mentre, come s'è visto, è lecito ritenere  $U_2 - F_2$ , e di conseguenza,  $U_1 - F_1 = 0$ , nel valutare le componenti della forza elettrica.

Ciò posto, le (18'), introdotte nelle (I), (II), danno, per le componenti delle forze magnetica ed elettrica,

$$(28) \quad \left\{ \begin{array}{l} L = 0, \\ M = -2I_0 \frac{d}{dz} \left\{ \operatorname{sen} \omega \left( \log \frac{1}{\Delta} - \log \frac{1}{\nabla} \right) + \frac{\cos \omega}{q} \frac{d \log \frac{1}{\nabla}}{d|z|} \right\}, \\ N = 2I_0 \frac{d}{dy} \left\{ \operatorname{sen} \omega \left( \log \frac{1}{\Delta} - \log \frac{1}{\nabla} \right) + \frac{\cos \omega}{q} \frac{d \log \frac{1}{\nabla}}{d|z|} \right\}; \end{array} \right.$$

(\*) Che è derivabile termine a termine, come mostrano direttamente le (22).

$$(29) \quad \begin{cases} X = 0, \\ Y = -2I_0 \operatorname{sen} \omega \frac{d}{dy} \left\{ \log \frac{1}{\Delta} - \log \frac{1}{\nabla} \right\}, \\ Z = -2I_0 \operatorname{sen} \omega \frac{d}{dz} \left\{ \log \frac{1}{\Delta} - \log \frac{1}{\nabla} \right\}, \end{cases}$$

$$(\omega = 2\pi n(t - Ax) + \alpha).$$

Considerando in particolare i punti al di là dello schermo rispetto alla corrente ( $z < 0$ ), si ha

$$\nabla = \Delta,$$

e

$$-\frac{d}{dz} = \frac{d}{d|z|}.$$

Le (28), (29), eseguendo le derivazioni, divengono

$$(28') \quad \begin{cases} L = 0, \\ M = \frac{2I_0}{q} \cos \omega \frac{(|z| + d)^2 - y^2}{\Delta^4}, \\ N = \frac{2I_0}{q} \cos \omega \frac{2(|z| + d)y}{\Delta^4}; \end{cases}$$

$$(29') \quad X = Y = Z = 0.$$

La forza elettrica è dunque sensibilmente intercettata dallo schermo, come (rigorosamente) ha luogo in elettrostatica.

Quanto alla forza magnetica, per acquistare un'idea adeguata della modificazione prodotta dal conduttore, giova confrontarla colla

$$(30) \quad \begin{cases} L' = 0, \\ M' = -2I_0 \operatorname{sen} \omega \frac{|z| + d}{\Delta}, \\ N' = -2I_0 \operatorname{sen} \omega \frac{y}{\Delta}, \end{cases}$$

che, a norma delle (2), agisce negli stessi punti ( $z < 0$ ), quando manca lo schermo.

Sieno

$$H_0 = \frac{2I_0}{q} \frac{1}{\Delta^4} \sqrt{\{(|z| + d)^2 - y^2\}^2 + 4(|z| + d)^2 y^2} = \frac{2I_0}{q} \frac{1}{\Delta^2},$$

$$H'_0 = 2I_0 \frac{1}{\Delta},$$

le rispettive intensità massime.

Si ha

$$(31) \quad \frac{H_c}{H'_0} = \frac{1}{q\Delta}.$$

*Lo schermo riduce dunque la intensità massima della forza magnetica (nei punti al di là) alla frazione  $1/q\Delta$  di quella che si avrebbe in sua assenza.*

Dacchè  $\Delta$  non può discendere in questi punti al di sotto di  $d$ , siamo dalle osservazioni numeriche del precedente § autorizzati a concludere che, nel caso di correnti alternative industriali (entro i limiti di validità dell'approssimazione qui adottata), la presenza dello schermo riduce la forza magnetica a pochi centesimi del suo valore, per dir così, naturale; la intercetta sensibilmente per più alte frequenze (\*).

Indichiamo con  $\vartheta$  l'angolo che la linea d'azione della forza magnetica naturale fa coll'asse  $y$ . Le (30) e (28') mostrano subito che, nel campo magnetico modificato dalla presenza del conduttore, l'analogo angolo (contato, a partire dall'asse  $y$ , nello stesso senso) vale  $2\vartheta$ .

Nei punti del piano mediano ( $y = 0$ ,  $\vartheta = 0$ )  $N$ , e così  $N'$ , si annullano. La forza è dunque in questi punti (esista o no lo schermo) normale al piano mediano stesso.

La forza magnetica naturale (30) ha in un generico istante  $t$ , l'intensità  $|\sin \omega| H'_0$ ; quella modificata dal piano conduttore  $|\cos \omega| H_0$ . Ai massimi dell'una corrispondono dunque i minimi dell'altra, e reciprocamente; ossia *le due fasi sono a una distanza di un quarto di periodo.*

Si osservi da ultimo che, finchè si tratta di correnti alternative industriali, si può identificare la fase  $\omega$  con  $2\pi nt + \alpha$ , poichè allora  $2\pi nAx$  non ha certo valore apprezzabile nel campo di osservazione (entro cui si suppongono naturalmente gli assi di riferimento).

(\*) Carattere questo ben noto. Cfr. POINCARÉ, *Les oscillations électriques*, pag. 58.

## LA TEORIA ELETTRODINAMICA DI HERTZ DI FRONTE AI FENOMENI DI INDUZIONE (\*)

« Rend. Acc. Lincei », s. 5<sup>a</sup>, vol. XI, (2<sup>o</sup> sem., 1902),  
pp. 75-81.

Nel risolvere due particolari questioni di induzione elettrodinamica in base alla teoria (integrale) di HELMHOLTZ-HERTZ, ho incidentalmente asserito (1) che alla teoria hertziana pura manca qualche elemento (due condizioni ai limiti) perchè quelle questioni, e così il problema generale dell'induzione elettrodinamica, risultino matematicamente determinati.

Mi affretto a dichiarare che una tale affermazione è inesatta.

Un più maturo esame mi ha infatti mostrato che le condizioni in superficie scaturiscono ovviamente da un passaggio al limite, che è nello spirito della teoria di HERTZ.

Nella presente Nota metto in chiaro questo punto, desumendone la univoca determinazione del problema generale dell'induzione elettrodinamica entro l'ambito della teoria hertziana pura.

Ne consegue l'identità delle teorie integrali di HELMHOLTZ-HERTZ e di MAXWELL di fronte ai fenomeni di induzione: l'una e l'altra si accordano infatti nel campo abbracciato dalle equazioni differenziali di HERTZ.

Che le teorie di HELMHOLTZ-HERTZ e di MAXWELL conducessero ai medesimi risultati, per quanto concerne l'accennata classe di problemi, avevo già avvertito a proposito delle due particolari questioni da me discusse; ma io supponevo allora che si trattasse di un campo, comune bensì alle due teorie integrali, ma non in pari tempo contenuto nelle equazioni differenziali di HERTZ. È invece proprio questa la ragion vera della coincidenza.

---

(\*) Presentata dal Corrispondente G. RICCI.

(1) *Sur le champ électromagnétique etc.*, « Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse », ser. III, t. IV, 1902, pag. 6-7 [in questo vol., pp. 154-155]; *Influenza di uno schermo conduttore, ecc.*, in questi « Rendiconti », Nota I del 16 febbraio u. s., pag. 164-165; [in questo vol., pp. 218-219]; nonché « Nuovo Cimento », fascicolo di giugno, § 7 della notizia ivi inserita.

A rigore si potrebbe dunque fare a meno delle teorie integrali, anche per quanto attiene ai fenomeni di induzione. Ma non è, a mio credere, opportuno, relegarle senz'altro tra i ferrivecchi, poichè nelle applicazioni particolari (e le due sopra ricordate ne sono esempio), si può spesso valersene con notevole vantaggio per semplificare la trattazione matematica.

### 1. - Comportamento delle forze elettromagnetiche. nell'attraversare una superficie conduttrice.

Sia  $\tau$  uno strato conduttore di spessore finito  $2h$ , limitato da due piani paralleli  $z = -h$ ,  $z = h$ ; siano  $Q_1$  e  $Q_2$  due punti di questi piani, situati sopra una medesima perpendicolare ad entrambi.

Designino, colle solite notazioni,  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ ;  $L$ ,  $M$ ,  $N$  le componenti delle forze elettrica e magnetica in un generico punto  $Q$  dello strato conduttore  $\tau$ ;  $X_1, \dots, N_1$ ;  $X_2, \dots, N_2$  i loro valori limiti in  $Q_1$  e  $Q_2$  rispettivamente (supposto, beninteso, che  $Q$  vi tenda senza uscire da  $\tau$ ).

Ritenuto che  $\tau$  sia un conduttore isotropo, e dette  $\varepsilon$ ,  $\mu$ ,  $\lambda$  le sue costanti caratteristiche, saranno soddisfatte entro  $\tau$  le equazioni fondamentali di HERTZ

$$\left\{ \begin{array}{l} A\mu \frac{dL}{dt} = \frac{dZ}{dy} - \frac{dY}{dz}, \\ A\mu \frac{dM}{dt} = \frac{dX}{dz} - \frac{dZ}{dx}, \\ A\mu \frac{dN}{dt} = \frac{dY}{dx} - \frac{dX}{dy}; \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} A\varepsilon \frac{dX}{dt} = \frac{dM}{dz} - \frac{dN}{dy} - 4\pi\lambda AX, \\ A\varepsilon \frac{dY}{dt} = \frac{dN}{dx} - \frac{dL}{dz} - 4\pi\lambda AY, \\ A\varepsilon \frac{dZ}{dt} = \frac{dL}{dy} - \frac{dM}{dx} - 4\pi\lambda AZ, \end{array} \right.$$

dove, come di consueto, si rappresenta con  $A$  la inversa della velocità della luce nell'etere.

Dalle prime due di ciascun gruppo, integrando rispetto a  $z$  fra  $-h$

e  $h$ , si ottiene

$$(1) \quad \begin{cases} X_2 - X_1 = \dots, \\ Y_2 - Y_1 = \dots; \\ \left. \begin{aligned} L_2 - L_1 &= -4\pi A \int_{-h}^h \lambda Y dz + \dots, \\ M_2 - M_1 &= 4\pi A \int_{-h}^h \lambda X dx + \dots, \end{aligned} \right\}$$

nelle quali i termini omissi convergono a zero con  $h$ , semprechè, come è nella natura delle cose, si ritengano le forze elettromagnetiche e loro derivate prime finite entro  $\tau$ , e dotate di limite superiore finito, anche al decrescere indefinito dello spessore  $h$ .

Il caso limite di una superficie (piana) conduttrice si ha dal nostro strato  $\tau$ , supponendo che, al decrescere indefinito di  $h$ , sia finito e diverso da zero il limite dell'integrale  $\int_{-h}^h \lambda dz$ . Designando questo limite con  $1/A^2 R$ ,  $A^2 R$  starà a rappresentare la resistenza unitaria della superficie, espressa in unità elettrostatiche, e quindi  $R$  la stessa resistenza unitaria, valutata in unità elettromagnetiche.

Per definizione,  $X_1$  e  $Y_1$  sono i valori limiti in  $Q_1$  delle componenti tangenziali della forza elettrica, quando si tende a  $Q_1$  da  $\tau$ ; ma, attesa la continuità delle componenti tangenziali, nel passaggio, anche brusco, fra due generici mezzi <sup>(2)</sup>, è lecito altresì riguardare  $X_1$ ,  $Y_1$  come i valori limiti in  $Q_1$ , quando vi si tende dall'esterno dello strato. Lo stesso per  $L_1$ ,  $M_1$ , e per  $X_2$ ,  $Y_2$ ;  $L_2$ ,  $M_2$  rispetto a  $Q_2$ .

Ciò posto, passando al limite per  $h = 0$ , ricaviamo dalle (1):

$$X_1 = X_2, \quad Y_1 = Y_2,$$

le quali esprimono che:

*Le componenti tangenziali della forza elettrica rimangono continue anche attraverso superficie conduttrici.*

Ho enunciato addirittura la proposizione per una superficie qualunque, poichè la generalizzazione dal caso del piano si fa con procedimento ovvio e ben noto.

(\*) HERTZ, *Ueber die Grundgleichungen der elektrodynamik für ruhende Körper*, « Ges. Werke », B. II, p. 221; ovvero, in traduzione italiana, « Nuovo Cimento », terza serie, t. XXVIII, 1890, pag. 204-205.

Designando con  $X$ ,  $Y$  i valori comuni di  $X_1$ ,  $X_2$ ;  $Y_1$ ,  $Y_2$ , le (2), al limite, danno:

$$\begin{cases} L_2 - L_1 = -\frac{4\pi}{AR} Y, \\ M_2 - M_1 = \frac{4\pi}{AR} X, \end{cases}$$

le quali esprimono che *la forza magnetica tangenziale subisce una brusca variazione, definita da un vettore proporzionale alla forza elettrica e diretto normalmente ad essa.*

Importa osservare che, dalla direzione della forza elettrica a quella del vettore rappresentante la discontinuità, si ruota attorno all'asse  $z$  nel verso (negativo)  $yx$ .

Dopo ciò si passa senza difficoltà al caso di una superficie conduttrice qualsiasi.

Detti infatti  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  i coseni direttori della normale in un suo punto generico  $Q$ ;  $X^{(x)}$ ,  $Y^{(x)}$ ,  $Z^{(x)}$  le componenti della forza elettrica tangenziale in  $Q$  (che, per quanto s'è visto, hanno in  $Q$  valore limite determinato, da qualunque parte vi si tenda);  $\Lambda$ ,  $M$ ,  $N$  gli incrementi bruschi, che subiscono le componenti della forza magnetica tangenziale, quando si attraversa la superficie nella direzione positiva della normale, la relazione geometrica, testè sostanzialmente enunciata, fra i due vettori ( $X^{(x)}$ ,  $Y^{(x)}$ ,  $Z^{(x)}$ ), ( $\Lambda$ ,  $M$ ,  $N$ ), si esprime mediante le formole:

$$\begin{cases} \Lambda = \frac{4\pi}{AR} (\beta Z^{(x)} - \gamma Y^{(x)}), \\ M = \frac{4\pi}{AR} (\gamma X^{(x)} - \alpha Z^{(x)}), \\ N = \frac{4\pi}{AR} (\alpha Y^{(x)} - \beta X^{(x)}). \end{cases}$$

Sarebbe facile caratterizzare anche il comportamento delle componenti normali. Lascio però di farlo, perchè, come vedremo, non è necessario, per lo scopo nostro, fissarlo a priori: esso rimane all'incontro necessariamente determinato dagli altri dati del problema.



## 2. - Posizione del problema generale della induzione elettrodinamica. Sua univocità.

Consideriamo un campo elettromagnetico, definito in un dato intervallo di tempo  $t_0, t_1$ .

Sieno  $X', Y', Z'$  le componenti della forza elettrica;  $L', M', N'$  le componenti della forza magnetica.

Supposto, per fissar le idee, che la sede del campo sia un dielettrico indefinito  $S$ , impolarizzabile e in quiete,  $X', \dots, N'$  saranno soluzioni del sistema

$$(I) \quad \left\{ \begin{array}{l} A \frac{dL}{dt} = \frac{dZ}{dy} - \frac{dY}{dz}, \\ A \frac{dM}{dt} = \frac{dX}{dz} - \frac{dZ}{dx}, \\ A \frac{dN}{dt} = \frac{dY}{dx} - \frac{dX}{dy}; \end{array} \right.$$

$$(II) \quad \left\{ \begin{array}{l} A \frac{dX}{dt} = \frac{dM}{dz} - \frac{dN}{dy}, \\ A \frac{dY}{dt} = \frac{dN}{dx} - \frac{dL}{dz}, \\ A \frac{dZ}{dt} = \frac{dL}{dy} - \frac{dM}{dx}, \end{array} \right.$$

le quali potranno del resto presentare singolarità (fisse o variabili con  $t$ , isolate, a una, a due, o anche a tre dimensioni), che non interessa di specificare.

Se si introducono nel campo dei conduttori, il campo rimane evidentemente modificato.

Supponiamo si tratti di una superficie, o, più in generale, di un sistema di superficie conduttrici,  $\sigma$ , non comprendenti alcun posto singolare delle  $X', \dots, N'$ . Indichiamo con  $X, Y, Z; L, M, N$  le componenti delle forze elettromagnetiche del campo così modificato.

Mi propongo di far vedere che, noti i valori di  $X, \dots, N$  in un istante  $t_0$ , la teoria di HERTZ basta a determinarli per ogni altro valore di  $t$  (dell'intervallo, entro cui si riguarda assegnato il campo induttore  $X', \dots, N'$ ).

A questo scopo osservo anzitutto che le differenze

$$\begin{aligned} X_1 &= X - X', & Y_1 &= Y - Y', & Z_1 &= Z - Z'; \\ L_1 &= L - L', & M_1 &= M - M', & N_1 &= N - N' \end{aligned}$$

(componenti delle forze elettromagnetiche dovute all'induzione) debbono essere, per natura loro, soluzioni delle (I), (II), regolari <sup>(\*)</sup> in ogni punto dello spazio, non appartenenti alle  $\sigma$ , e nulle all'infinito come  $1/r$  almeno ( $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ ).

In un generico punto  $Q$  di  $\sigma$ , le  $X', \dots, N'$  si comportano, per ipotesi, regolarmente; le  $X, \dots, N$  debbono presentare i caratteri, rilevati nel precedente paragrafo.

Potremo dunque ritenere, per le differenze  $X_1, \dots, N_1$ :

a) Le componenti  $X^{(x)}, Y^{(x)}, Z^{(x)}$  della forza elettrica tangenziale (di origine induttiva) rimangono continue anche attraverso le  $\sigma$ .

b) Le componenti della forza magnetica tangenziale (indotta) subiscono, quando si attraversano le  $\sigma$  nel senso della normale positiva, le discontinuità:

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathbf{A}_1 &= \frac{4\pi}{AR} (\beta Z^{(x)} - \gamma Y^{(x)}) = \frac{4\pi}{AR} (\beta Z_1^{(x)} - \gamma Y_1^{(x)}) + c_1, \\ \mathbf{M}_1 &= \frac{4\pi}{AR} (\gamma X'^{(x)} - \alpha Z^{(x)}) = \frac{4\pi}{AR} (\gamma X_1'^{(x)} - \alpha Z_1^{(x)}) + c_2, \\ \mathbf{N}_1 &= \frac{4\pi}{AR} (\alpha Y^{(x)} - \beta X^{(x)}) = \frac{4\pi}{AR} (\alpha Y_1^{(x)} - \beta X_1^{(x)}) + c_3, \end{aligned} \right.$$

designandosi ordinatamente con  $c_1, c_2, c_3$  le quantità cognite (funzioni regolari dei punti di  $\sigma$ )

$$\frac{4\pi}{AR} (\beta Z'^{(x)} - \gamma Y'^{(x)}),$$

$$\frac{4\pi}{AR} (\gamma X'^{(x)} - \alpha Z'^{(x)}),$$

$$\frac{4\pi}{AR} (\alpha Y'^{(x)} - \beta X'^{(x)}).$$

La direzione positiva  $\alpha, \beta, \gamma$  della normale si intende scelta con criterio arbitrario in un punto di ciascuno dei pezzi, di cui si compone il

(\*) Si chiama qui regolare una funzione di  $x, y, z, t$  finita e continua assieme alle sue derivate prime e seconde.

sistema  $\sigma$  (in un punto solo, nel caso tipico di un'unica superficie): essa resta allora fissata per continuità in ogni altro punto  $Q$ .

Ancora, si osserva che, se  $X_1^+, \dots, N_1^+$  rappresentano i valori limiti delle componenti  $X_1, \dots, N_1$ , quando si tende a  $Q$  dalla regione positiva (quella verso cui è rivolta la direzione positiva della normale);  $X_1^-, \dots, N_1^-$  gli analoghi valori limiti, quando si tende a  $Q$  dalla regione negativa, sussiste l'identità

$$\begin{vmatrix} X_1^+ & Y_1^+ & Z_1^+ \\ L_1^+ & M_1^+ & N_1^+ \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} X_1^- & Y_1^- & Z_1^- \\ L_1^- & M_1^- & N_1^- \\ -\alpha & -\beta & -\gamma \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X_1^{(n)} & Y_1^{(n)} & Z_1^{(n)} \\ \Lambda_1 & M_1 & N_1 \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix}.$$

Per verificarlo, basta tener presente che le differenze  $X_1^+ - X_1^{(n)}$ ,  $Y_1^+ - Y_1^{(n)}$ ,  $Z_1^+ - Z_1^{(n)}$ , e le tre analoghe  $X_1^- - X_1^{(n)}$ , ecc., sono proporzionali ad  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ , talchè è lecito, nei due determinanti nel primo membro sostituire  $X_1^{(n)}$ ,  $Y_1^{(n)}$ ,  $Z_1^{(n)}$  agli elementi della prima riga; sommando allora i due determinanti, trattando nello stesso modo le componenti della forza magnetica e ricordando il significato di  $\Lambda_1$ ,  $M_1$ ,  $N_1$ , risulta appunto il secondo membro.

Ciò posto, ricaviamo per le nostre componenti  $X_1, \dots, N_1$  la formula di POYNTING: moltiplichiamo cioè le (I), (II) (scrittovi  $X_1$  per  $X$ , ecc.) ordinatamente per  $X_1/4\pi A$ ,  $Y_1/4\pi A$ , ...,  $N_1/4\pi A$ , e sommiamo, integrando a tutto il campo  $S$ . Con ovvie integrazioni per parti, in cui bisogna naturalmente aver riguardo alle superficie di discontinuità  $\sigma$ , posto per brevità

$$(4) \quad \Omega = \int_S \left\{ \frac{1}{8\pi} (X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2) + \frac{1}{8\pi} (L_1^2 + M_1^2 + N_1^2) \right\} dS,$$

si ottiene

$$\begin{aligned} \frac{d\Omega}{dt} &= - \frac{1}{4\pi A} \int_{\sigma} \left( \begin{vmatrix} X_1^+ & Y_1^+ & Z_1^+ \\ L_1^+ & M_1^+ & N_1^+ \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} X_1^- & Y_1^- & Z_1^- \\ L_1^- & M_1^- & N_1^- \\ -\alpha & -\beta & -\gamma \end{vmatrix} \right) d\sigma = \\ &= - \frac{1}{4\pi A} \int_{\sigma} \begin{vmatrix} X_1^{(n)} & Y_1^{(n)} & Z_1^{(n)} \\ \Lambda_1 & M_1 & N_1 \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} d\sigma. \end{aligned}$$

Integrando ancora fra  $t_0$  e  $t$  e designando con  $\Omega_0$  il valore di  $\Omega$  per  $t = t_0$ , risulta

$$(5) \quad \Omega - \Omega_0 + \frac{1}{4\pi A} \int_{t_0}^t dt \int_{\sigma} \begin{vmatrix} X_1^{(r)} & Y_1^{(r)} & Z_1^{(r)} \\ \Lambda_1 & M_1 & N_1 \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} d\sigma = 0.$$

Appoggiandosi a questa identità, è facile riconoscere che non possono esistere due distinti sistemi di integrali delle (I), (II), regolari in tutto lo spazio (escluse al più le  $\sigma$ ), nulli (come  $1/r$  almeno) all'infinito, soddisfacenti sopra le  $\sigma$  alle due condizioni  $a)$ ,  $b)$ , e coincidenti per  $t = t_0$ : in altri termini, che le differenze di due sistemi siffatti si annullano identicamente.

Infatti queste differenze costituiscono un sistema integrale delle (I), (II), che si comporta come gli altri fuori delle  $\sigma$ , soddisfa sopra le  $\sigma$  alla  $a)$  e alle (3), dove si ponga  $c_1 = c_2 = c_v = 0$ ; infine si annulla per  $t = t_0$ .

La (5) assume allora l'aspetto

$$\Omega + \frac{1}{A^2 R} \int_{t_0}^t dt \int_{\sigma} (\Lambda_1^2 + M_1^2 + N_1^2) d\sigma = 0.$$

Siccome tutti gli elementi di integrale sono positivi, questa relazione esige che sia zero separatamente ciascun elemento, il che implica l'identico annullarsi delle sei differenze. C.d.d.

## XI.

### SULLA CINETOSTATICA

« Atti Acc. Padova », vol. XVIII, Dispensa III (1902),  
pp. 1-8.

Ha spesso interesse dal punto di vista tecnico la determinazione delle reazioni, che, per effetto di dati legami, si esercitano sopra un sistema materiale in quiete, o più generalmente in dato stato di movimento. Le reazioni misurano infatti — cambiate solo di senso — i cimenti (statici o dinamici) cui sottostanno i congegni materiali realizzanti i vincoli; ed un esatto apprezzamento dei cimenti massimi è indispensabile per stabilire e discutere le condizioni, sotto cui un dato congegno può rispondere al suo ufficio senza pericolo di guasti.

In questo intento si svolse recentemente una trattazione teorica (*cinetostatica*) <sup>(1)</sup>, i cui fondamenti sono impliciti nei canoni della meccanica pura e si possono anzi riattaccare nel modo il più diretto al classico principio dei lavori virtuali.

Tuttavia, nella letteratura scolastica, si suol tacerne o accennarvi appena di sfuggita (a proposito dei moltiplicatori di LAGRANGE).

Ciò mi induce a pubblicare (con piccole modificazioni, e omettendo per brevità gli esempi) quanto ebbi a dire sull'argomento nel corso di meccanica razionale della R. Università di Padova.

#### I. - Generalità.

Designino  $x, y, z$  le coordinate di un punto generico  $P$  di un sistema materiale comunque vincolato;  $m$  la massa;  $X, Y, Z$  le componenti della

---

<sup>(1)</sup> Cfr. principalmente: K. HEUN, *Die kinetischen Probleme der wissenschaftlichen Technik*, « Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung » IX, 2, 1901, §§ 18, 19; *Ueber Hertzsche Mechanik*, « Sitzungsberichte der Berliner Math. Ges. », I, 1, 1902.

forza attiva ( $F$ ) applicata in  $P$ ;  $\mathcal{E}$ ,  $H$ ,  $Z$  le componenti della reazione ( $\Phi$ ) dovuta ai legami.

Sarà ( $F$ ) + ( $\Phi$ ) la forza totale, che sollecita  $P$ , e per conseguenza (supposti fissi gli assi)

$$\begin{aligned} mx'' &= X + \mathcal{E}, \\ my'' &= Y + H, \\ mz'' &= Z + Z. \end{aligned}$$

Si vede che le reazioni dovute ai legami rimangono univocamente determinate, in ogni punto e in ogni istante, quando sono noti il movimento e le forze attive.

Sieno

$$(1) \quad \sum (A_h \delta x + B_h \delta y + C_h \delta z) = 0 \quad (h = 1, 2, \dots, \mu)$$

le equazioni (indipendenti) che caratterizzano gli spostamenti virtuali del sistema. (Naturalmente tanti sono i vincoli — olonomi oppure anolonomi — indipendenti, quante le equazioni (1):  $\mu$  nel caso nostro).

In base al principio dei lavori virtuali, alle  $\mathcal{E}$ ,  $H$ ,  $Z$ , si può, e in un sol modo, attribuire la forma

$$(2) \quad \begin{cases} \mathcal{E} = \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \dots + \lambda_\mu A_\mu, \\ H = \lambda_1 B_1 + \lambda_2 B_2 + \dots + \lambda_\mu B_\mu, \\ Z = \lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2 + \dots + \lambda_\mu C_\mu, \end{cases}$$

con che rimane messo in evidenza il contributo recato alle reazioni da ciascuno dei legami del sistema.

Fissiamone alcuni, gli ultimi  $\mu - \nu$  per es., e prendiamo a considerare la reazione in  $P$ , ad essi dovuta, di componenti

$$(3) \quad \begin{cases} \mathcal{X} = \lambda_{\nu+1} A_{\nu+1} + \dots + \lambda_\mu A_\mu, \\ \mathcal{Y} = \lambda_{\nu+1} B_{\nu+1} + \dots + \lambda_\mu B_\mu, \\ \mathcal{Z} = \lambda_{\nu+1} C_{\nu+1} + \dots + \lambda_\mu C_\mu. \end{cases}$$

Sieno  $\delta x$ ,  $\delta y$ ,  $\delta z$  le componenti di uno spostamento del nostro sistema conciliabile coi primi  $\nu$  legami (ed eventualmente non coi rimanenti  $\mu - \nu$ ).

Le  $\delta x$ ,  $\delta y$ ,  $\delta z$  soddisfacendo, per loro definizione, alle equazioni

$$\sum (A_h \delta x + B_h \delta y + C_h \delta z) = 0 \quad (h = 1, 2, \dots, \nu),$$

le (2) e (3) danno ovviamente

$$\sum (\mathcal{E} \delta x + H \delta y + Z \delta z) = \sum (\mathcal{X} \delta x + \mathcal{Y} \delta y + \mathcal{Z} \delta z).$$

Sostituiamo nel primo membro, al posto di  $\mathcal{E}$ ,  $H$ ,  $Z$ , i loro valori  $-(X - mx'')$ ,  $-(Y - my'')$ ,  $-(Z - mz'')$ , e ne ricaveremo la relazione simbolica

$$(4) \quad \begin{aligned} \sum (\mathcal{X} \delta x + \mathcal{Y} \delta y + \mathcal{Z} \delta z) = \\ = - \sum \{ (X - mx'') \delta x + (Y - my'') \delta y + (Z - mz'') \delta z \}, \end{aligned}$$

la quale costituisce un punto di partenza assai comodo per la effettiva determinazione delle reazioni, nella forma che meglio conviene ai casi singoli.

## 2. - Osservazione concernente i così detti sistemi staticamente indeterminati.

Dalle cose dette risulta che, per ogni vincolo, sono univocamente determinate le reazioni corrispondenti. Ma, si noti bene, ciò presuppone essenzialmente che le equazioni (1), e quindi i vincoli del sistema considerato, sieno tra loro indipendenti.

Dal punto di vista analitico si può sempre ricondursi a questo caso, sopprimendo senz'altro quelle tra le equazioni dei legami, che fossero sovrabbondanti.

Nella realtà fisica le cose vanno diversamente: si incontrano spesso vincoli sovrabbondanti (esempio classico, quello di un corpo che si appoggia sopra un piano per più di tre punti) e il sopprimerne alcuno con criterio arbitrario, in modo da ricondursi a un sistema staticamente determinato, non risponde in generale alle condizioni di fatto.

Come è ben noto, la questione si può risolvere in modo soddisfacente, solo uscendo dall'ambito dei vincoli rigidi e ricorrendo alla teoria dell'elasticità<sup>(\*)</sup>.

## 3. - Cinetostatica dei sistemi rigidi.

Particolarmente importante per le applicazioni tecniche è il calcolo delle reazioni, che si esercitano in una generica porzione rigida  $C$  di un dato sistema  $S$  (in un pezzo di macchina per es.) in causa dei vincoli

(\*) Cfr. in particolare: A. CASTIGLIANO, *Théorie des systèmes élastiques*, Torino, 1879 capitoli I, II; F. SIACCI, *Sulle tensioni in un sistema elastico articolato*, « Rendiconti della R. Accademia dei Lincei », ser. 5ª, vol. III, 1894.

materiali (appoggi, attacchi, incastri, assi, perni), che stabiliscono il collegamento di  $C$  colle altre parti del sistema.

In questo genere di questioni non è di solito necessario individuare la distribuzione delle reazioni nei singoli punti della porzione considerata  $C$  (il che in generale incappa nelle difficoltà accennate al precedente paragrafo), ma basta conoscerne l'effetto complessivo, che è, come nella statica, caratterizzato dalla risultante ( $\mathfrak{R}$ ) e dal momento risultante ( $\mathfrak{M}$ ), rispetto a un generico centro di riduzione.

Sceghieremo per semplicità l'origine  $O$  del sistema coordinato  $x, y, z$ .

Ecco come si può procedere per determinare i due vettori ( $\mathfrak{R}$ ) ed ( $\mathfrak{M}$ ).

Supponiamo che il primo membro della (4) contempra le reazioni dovute ai soli vincoli del pezzo  $C$ , rimossi i quali,  $C$  si comporterebbe con un solido libero. In questa condizione di cose la (4) stessa sussiste certamente per tutti gli spostamenti che lasciano fermi i punti  $P$  di  $S$ , non appartenenti a  $C$ , e operano rigidamente sui punti di  $C$ .

Supponendo  $\delta x, \delta y, \delta z$  scelti a questo modo, la (4) si presenta come l'equazione simbolica del moto del corpo rigido  $C$ , soggetto alle forze attive e a quelle tali reazioni, di cui vogliamo appunto valutare la risultante ( $\mathfrak{R}$ ) e il momento risultante ( $\mathfrak{M}$ ).

Ne conseguono, come è ben noto, le sei equazioni

$$(5) \quad \mathfrak{R}_x = \frac{dH_x}{dt} - R_x, \text{ ecc.};$$

$$(6) \quad \mathfrak{M}_x = \frac{dG_x}{dt} - M_x, \text{ ecc.};$$

dove designiamo con ( $H$ ) e ( $G$ ) la risultante e il momento risultante delle quantità di moto dei punti del corpo  $C$ , rispetto all'origine  $O$ ; con ( $R$ ) ed ( $M$ ) la risultante e il momento risultante delle forze attive.

È chiaro che le (5) e (6) si possono rispettivamente compendiare nelle relazioni vettoriali

$$(5') \quad (\mathfrak{R}) = \frac{d(H)}{dt} - (R),$$

$$(6') \quad (\mathfrak{M}) = \frac{d(G)}{dt} - (M).$$

Per l'effettivo calcolo delle componenti dei due vettori ( $\mathfrak{R}$ ) e ( $\mathfrak{M}$ ) può essere spesso conveniente di riferirsi ad assi solidali col corpo  $C$ . Non valgono allora le (5), (6), che presuppongono gli assi fissi; le espres-



sioni delle componenti si ricavano però agevolmente (con artificio spesso usato) dalle (5'), (6'), che sono indipendenti dal sistema di riferimento.

Immaginiamo a questo scopo, accanto agli assi  $Oxyz$ , che vogliamo ora ritenere rigidamente collegati con  $C$ , un secondo sistema  $\xi, \eta, \zeta$  di direzione invariabile, ma coll'origine nello stesso punto, in generale mobile,  $O$ .

Sia  $Q$  l'estremo del vettore  $(H)$ , supposto applicato in  $O$ . Le coordinate di  $Q$ , rispetto ai nostri due sistemi di assi, altro non sono se non le componenti di  $(H)$ .

Rispetto agli assi  $\xi, \eta, \zeta$ , che hanno direzione invariabile, le componenti del vettore  $d(H)/dt$  sono, per definizione,

$$\frac{dH_\xi}{dt}, \quad \frac{dH_\eta}{dt}, \quad \frac{dH_\zeta}{dt}.$$

Il vettore  $d(H)/dt$  si può dunque interpretare come la velocità di  $Q$  rispetto agli assi  $O\xi\eta\zeta$ .

Ciò posto, per il teorema di CORIOLIS, le componenti dello stesso vettore  $d(H)/dt$ , rispetto agli assi  $Oxyz$  solidali con  $C$ , saranno

$$\frac{dH_x}{dt} - rH_y + qH_z, \quad \frac{dH_y}{dt} - pH_z + rH_x, \quad \frac{dH_z}{dt} - qH_x + pH_y,$$

rappresentandosi al solito con  $p, q, r$  le componenti della velocità angolare del triedro  $Oxyz$ .

Analoghe espressioni valgono naturalmente per le componenti di  $d(G)/dt$ .

Dopo ciò le (5') e (6'), proiettando sugli assi  $x, y, z$ , danno le formule cercate:

$$(5'') \quad \mathfrak{N}_x = \frac{dH_x}{dt} - rH_y + qH_z - R_x, \quad \text{ecc.}$$

$$(6'') \quad \mathfrak{M}_x = \frac{dG_x}{dt} - rG_y + qG_z - M_x, \quad \text{ecc.}$$





diatement, d'après votre remarque, en prenant pour  $\psi$  l'expression bien connue de la densité de l'électricité en équilibre sur une surface du second ordre.

Quant aux cônes et aux cylindres, ils ne sont pas des surfaces (S), en général, mais seulement sous une certaine condition (même très restrictive). Je n'ai pas poussé le calcul assez loin pour interpréter géométriquement cette condition.

Voici comment je justifie mes assertions.

Soient  $x, y, z; x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z$  les coordonnées de  $A$  et de  $B$ ;  $\psi, X, Y, Z; \psi + \Delta\psi, X + \Delta X, Y + \Delta Y, Z + \Delta Z$  les valeurs de la fonction  $\psi$  et des cosinus directeurs de la normale en  $A$  et en  $B$ .

En désignant par  $\Sigma$  une somme de termes semblables en  $x, y, z$ , nous avons

$$\cos \alpha = \frac{1}{AB} \sum X \Delta x, \quad \cos \beta = -\frac{1}{AB} \sum (X + \Delta X) \Delta x,$$

et l'équation (W) peut s'écrire

$$(1') \quad \psi \sum (2X + \Delta X) \Delta x + \Delta\psi \sum X \Delta x = 0.$$

Supposons que l'on ait tracé sur la surface une courbe quelconque joignant les points  $A$  et  $B$ . Sois  $s$  un paramètre quelconque qui fixe la position des points sur la courbe;  $s$  étant justement la valeur de ce paramètre au point  $B$ , 0 sa valeur en  $A$ .

En appliquant aux fonctions  $x, X$  et  $\psi$  le développement de MACLAURIN, il vient

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta x = \frac{dx}{ds} s + \frac{1}{2} \frac{d^2x}{ds^2} s^2 + \frac{1}{3!} \frac{d^3x}{ds^3} s^3 + \dots, \\ \Delta X = \frac{dX}{ds} s + \frac{1}{2} \frac{d^2X}{ds^2} s^2 + \dots, \\ \Delta\psi = \frac{d\psi}{ds} s + \frac{1}{2} \frac{d^2\psi}{ds^2} s^2 + \dots. \end{array} \right.$$

Si nous introduisons ces développements dans (1'), les coefficients de  $s$  et de  $s^2$  s'annulent, car on a bien

$$\sum X \frac{dx}{ds} = 0,$$

et par suite

$$(2) \quad \sum \frac{dX}{ds} \frac{dx}{ds} = - \sum X \frac{d^2x}{ds^2}.$$

En exprimant que le coefficient de  $s^3$  doit aussi s'annuler, on trouve

$$\psi \left\{ \frac{1}{3} \sum X \frac{d^3x}{ds^3} + \frac{1}{2} \sum \frac{dX}{ds} \frac{d^2x}{ds^2} + \frac{1}{2} \sum \frac{d^2X}{ds^2} \frac{dx}{ds} \right\} + \frac{1}{2} \frac{d\psi}{ds} \sum X \frac{d^2x}{ds^2} = 0,$$

d'où, en remplaçant  $\sum X(d^3x/ds^3)$  par sa valeur, tirée de (2), à savoir

$$-2 \sum \frac{dX}{ds} \frac{d^2x}{ds^2} - \sum \frac{d^2X}{ds^2} \frac{dx}{ds},$$

nous avons

$$(3) \quad \sum \left( \frac{dX}{ds} \frac{d^2x}{ds^2} - \frac{d^2X}{ds^2} \right) = 3 \frac{d \log \psi}{ds} \sum X \frac{d^2x}{ds^2}.$$

Cette relation doit être satisfaite en tout point et pour toute courbe d'une surface (S).

Supposons en particulier que la courbe soit une asymptotique. On aura, d'après la définition de ces courbes,

$$(4) \quad \sum \frac{dX}{ds} \frac{dx}{ds} = 0,$$

ou bien, à cause de (2),

$$(4') \quad \sum X \frac{d^2x}{ds^2} = 0.$$

Le second membre de (3) s'annule donc pour toute asymptotique. D'ailleurs on a encore pour ces courbes

$$\sum \frac{d^2X}{ds^2} \frac{dx}{ds} + \sum \frac{dX}{ds} \frac{d^2x}{ds^2} = 0;$$

l'égalité (3) se réduit par suite à

$$(5) \quad \sum \frac{dX}{ds} \frac{d^2x}{ds^2} = 0.$$

Supposons d'abord que la surface (réelle) envisagée ne soit ni développable, ni sphérique.

Il n'est pas possible dans ce cas que les deux formes quadratiques binaires, relatives à notre surface,  $\sum dx^2$ ,  $\sum dX dx$ , aient des facteurs communs (\*). Les asymptotiques ne sont donc pas (même lorsqu'elles sont imaginaires) des lignes de longueur nulle.

D'après cela, il est loisible, pour une asymptotique quelconque (qu'elle soit réelle ou imaginaire), de supposer le paramètre  $s$  choisi de sorte que l'on ait

$$\sum \left( \frac{dx}{ds} \right)^2 = 1,$$

et par suite

$$\sum \frac{dx}{ds} \frac{d^2x}{ds^2} = 0.$$

On a alors à la fois, d'après (4') et (5),

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum \frac{dx}{ds} \frac{d^2x}{ds^2} = 0, \\ \sum X \frac{d^2x}{ds^2} = 0, \\ \sum \frac{dX}{ds} \frac{d^2x}{ds^2} = 0. \end{array} \right.$$

En tenant compte de ce que

$$\sum X^2 = 1, \quad \sum \left( \frac{dx}{ds} \right)^2 = 1;$$

$$\sum X \frac{dX}{ds} = 0, \quad \sum \frac{dX}{ds} \frac{dx}{ds} = 0, \quad \sum \frac{dx}{ds} X = 0,$$

on trouve immédiatement que le carré du déterminant des coefficients du système (6) a pour valeur

$$\frac{\sum dX^2}{ds^2},$$

(\*) En effet, les deux formes étant réelles et la première ayant ses deux facteurs imaginaires conjugués, la seconde devrait les admettre tous deux. Elle serait alors proportionnelle à la première, ce qui arrive seulement pour le plan et pour la sphère. Voyez par exemple L. BIANCHI, *Lezioni di Geometria differenziale*, chap. IV, pag. 92; [2<sup>e</sup> édit.; vol. I, p. 121].

expression qui ne s'annule ni en général, ni pour les asymptotiques. En effet, comme il ne s'agit pas d'une surface développable,  $\sum dX^2$  est une forme définie et elle ne peut pas avoir de facteurs communs avec  $\sum dX dx$  (\*), à moins que la surface ne fut une sphère, ce que nous avons également exclu.

Les équations (6) exigent par conséquent que l'on ait, pour toute asymptotique de la surface,

$$\frac{d^2x}{ds^2} = 0, \quad \frac{d^2y}{ds^2} = 0, \quad \frac{d^2z}{ds^2} = 0.$$

Les asymptotiques sont donc des droites. Mais, la surface n'étant pas développable, elle contient un double système d'asymptotiques. Donc elle est doublement réglée, c'est-à-dire une quadrique.

La sphère étant elle-même une quadrique, il n'y a pas, en dehors des quadriques, de surfaces (S) non développables.

Venons maintenant au cas où l'on aurait affaire à une surface (S) développable.

Permettez que je commence par établir quelques formules, auxquelles il me faudra avoir recours dans un moment.

Je rappelle d'abord que, pour toute surface réglée, les coordonnées  $x, y, z$  peuvent être définies en fonction de deux paramètres  $u, v$  par les trois équations

$$(7) \quad \begin{cases} x = \alpha_1 u + a_1, \\ y = \beta_1 u + b_1, \\ z = \gamma_1 u + c_1, \end{cases}$$

où  $\alpha_1, a_1, \dots, c_1$  désignent des fonctions de la seule variable  $v$ .

La surface étant réelle, il est encore loisible (par un choix convenable des paramètres  $u$  et  $v$ ) de supposer

$$(8) \quad \sum \alpha_1^2 = 1, \quad \sum a_1'^2 = 1, \quad \sum \alpha_1 a_1' = 0.$$

(\*) C'est ce qui résulte de l'identité

$$\sum dX^2 = K \sum dx^2 + H \sum dX dx,$$

où  $K$  et  $H$  désignent respectivement la courbure totale et la courbure moyenne de la surface (BIANCHI, loco citato, pag. 116: [2<sup>e</sup> édit., vol. I, p. 149]).

En effet tout facteur commun aux deux formes  $\sum dX^2, \equiv dX dx$  appartiendrait aussi (des que  $K \geq 0$ ) à la forme  $\sum dx^2$ , tandis que, comme on vient de remarquer,  $\sum dx^2, \sum dX dx$  n'ont pas de facteurs communs.

Le signe  $\sum$  représente toujours une somme de termes semblables en  $\alpha, \beta, \gamma; a, b, c;$  ou, comme tout à l'heure, en  $x, y, z; X, Y, Z$ . Les accents dénotent des dérivations par rapport à  $v$ .

Il est bien clair que les génératrices rectilignes de la surface (7) correspondent aux lignes  $v = \text{const.}$

Les cosinus directeurs  $X, Y, Z$  de la normale sont définis par les équations

$$\sum X^2 = 1, \quad \sum X\alpha_1 = 0, \quad \sum X(\alpha_1' u + a_1') = 0.$$

Dire qu'une surface est développable, c'est dire que le plan tangent reste le même tout le long d'une même génératrice, ou, si l'on veut, que  $X, Y, Z$  ne dépendent pas de  $u$ . Il faut pour cela (et il suffit) que, en entendant désormais par  $X, Y, Z$  des fonctions de  $v$  seulement, on ait à la fois

$$(9) \quad \sum X^2 = 1, \quad \sum X\alpha_1 = 0, \quad \sum Xa_1' = 0;$$

$$(10) \quad \sum X\alpha_1' = 0.$$

Posons pour plus de symétrie

$$(11) \quad \begin{cases} a_1' = \beta_2, & b_1' = \beta_2, & c_1' = \gamma_2, \\ X = \alpha_3, & Y = \beta_3, & Z = \gamma_3. \end{cases}$$

Les équations (8) et (9) expriment simplement que

$$\begin{aligned} &\alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \alpha_3; \\ &\beta_1, \quad \beta_2, \quad \beta_3; \\ &\gamma_1, \quad \gamma_2, \quad \gamma_3 \end{aligned}$$

sont les cosinus directeurs d'un trièdre trirectangle. Leurs dérivées par rapport à  $v$  pourront donc s'exprimer toutes au moyen de trois fonctions auxiliaires  $p, q, r$ , par les formules classiques de POISSON.

L'équation (10) n'est autre chose que  $q = 0$ . On a de la sorte

$$(12) \quad \alpha_1' = \alpha_2 r, \quad \alpha_2' = \alpha_3 p - \alpha_1 r, \quad \alpha_3' = -\alpha_2 p$$

avec les autres semblables en  $\beta$  et  $\gamma$ .



Ceci posé, la différentiation des (7) nous donne

$$\begin{aligned} dx &= \alpha_1 du + \alpha_2(ru + 1)dv, \text{ etc.;} \\ d^2x &= [2\alpha_2 r du + \{(\alpha_3 p - \alpha_1 r)(ru + 1) + \alpha_2 r' u\} dv] dv, \text{ etc.} \end{aligned}$$

On trouve de même, d'après les conventions (11),

$$\begin{aligned} dX &= -\alpha_2 p dv, \text{ etc.;} \\ d^2X &= -\{(\alpha_3 p - \alpha_1 r)p' + \alpha_2 p'\} dv^2, \text{ etc.} \end{aligned}$$

d'où, à cause des relations d'orthogonalité,

$$\begin{aligned} \sum X d^2x &= p(ru + 1) dv^2, \\ \sum dX d^2x &= -\{2pr du + pr' u dv\} dv^2, \\ \sum d^4X dx &= \{pr du + p'(ru + 1) dv\} dv^2. \end{aligned}$$

Après ces remarques préliminaires, nous allons reprendre l'équation (3). Comme elle doit être vérifiée pour toute ligne de la surface, elle équivaut à

$$\sum (dX d^2x - d^2X dx) = 3d \log \psi \sum X d^2x.$$

Les formules qu'on vient d'écrire montrent que, pour les surfaces développables, cette condition se réduit à

$$\begin{aligned} (13) \quad d \log \psi &= -\frac{r}{ru + 1} du - \frac{1}{3} \left\{ \frac{r'u}{ru + 1} + \frac{p'}{p} \right\} dv \\ &= -\frac{1}{3} d \log p(ru + 1) - \frac{2}{3} \frac{r}{ru + 1} du. \end{aligned}$$

Elle exige que le second membre soit une différentielle exacte et par suite que  $r$  soit une constante.

Il est aisé d'en apercevoir la signification géométrique.

En effet, ou bien  $r = 0$ .

La première des (12) avec ses analogues exprime alors que

$$\alpha'_1 = \beta'_1 = \gamma'_1 = 0,$$

c'est-à-dire, d'après (7), que les génératrices rectilignes de notre surface sont toutes parallèles.

La surface est alors un cylindre.

Ou bien  $r \geq 0$ .

La comparaison des relations

$$\alpha'_1 = \alpha_2 r, \quad \beta'_1 = \beta_2 r, \quad \gamma'_1 = \gamma_2 r,$$

avec

$$a'_1 = \alpha_2, \quad b'_1 = \beta_2, \quad c'_1 = \gamma_2,$$

donne

$$a_1 = \frac{\alpha'_1}{r}, \quad b_1 = \frac{\beta'_1}{r}, \quad c_1 = \frac{\gamma'_1}{r}.$$

d'où ( $x_0, y_0, z_0$  étant des constantes)

$$a_1 = \frac{\alpha_1}{r} + x_0, \quad b_1 = \frac{\beta_1}{r} + y_0, \quad c_1 = \frac{\gamma_1}{r} + z_0.$$

Les (7) définissent dans ce cas un cône ayant son sommet au point  $x_0, y_0, z_0$ .

Il résulte de là que les surfaces (S) développables ne peuvent être que des cônes ou des cylindres. Ici toutefois la réciproque n'est plus vraie en général, mais seulement dans le cas, évidemment très particulier, où la fonction  $\psi$ , définie par l'équation (13), coïnciderait avec la densité de l'électricité en équilibre.

Je pense avec vous qu'ici encore on ne trouverait que des surfaces du second degré.

.....

*Padoue, le 29 Avril 1902.*

XIII.

SUR LES FONCTIONS DE GENRE INFINI (1)

« Bull. des Sc. math. », s. 2<sup>e</sup>, t. XXV (1902),  
pp. 333-335.

J'avais lu, il y a déjà quelques semaines, votre Note *Sur les fonctions de genre infini* (2). Ayant eu occasion d'y réfléchir un peu, je me suis aperçu que vos remarques, très simples d'ailleurs, peuvent être présentées d'une façon plus élémentaire encore.

Si vous le permettez, je vous entretiendrai quelques minutes à ce sujet.

Soient  $r_1, r_2, \dots, r_n, r_{n+1}, \dots$  les modules (rangés par ordre croissant) des zéros d'une transcendante entière  $f(z)$  (se réduisant à l'unité pour  $z = 0$ );  $r = |z|$ , et  $\vartheta(r)$  le nombre des zéros de  $f(z)$ , dont le module est plus petit que  $r$ .

On a par définition

$$\begin{aligned} \vartheta(s) &= 1 && \text{pour } r_1 < s \leq r_2, \\ \vartheta(s) &= 2 && \text{pour } r_2 < s \leq r_3, \\ &\dots\dots && \dots\dots\dots, \\ \vartheta(s) &= n-1 && \text{pour } r_{n-1} < s \leq r_n, \\ \vartheta(s) &= n && \text{pour } r_n < s \leq r_{n+1}. \end{aligned}$$

D'après cela, en supposant  $r_n < r \leq r_{n+1}$ , il vient de suite

$$\int_{r_1}^r \frac{\vartheta(s)}{s} ds = \sum_1^{n-1} k \log \frac{r_{k+1}}{r_k} + n \log \frac{r}{r_n} = \log \frac{r^n}{r_1 r_2 \dots r_n}.$$

(1) Extrait d'une Lettre de M. LEVI-CIVITA (à Padoue) à M. BOREL (à Paris).

(2) « Comptes rendus », juin 1902.

Or, d'après le théorème de M. JENSEN, le second membre ne peut dépasser  $\log M(r)$ ; par conséquent,

$$(1) \quad \log M(r) \geq \int_{r_1}^r \frac{\vartheta(s)}{s} ds.$$

Au point de vue asymptotique, on peut naturellement remplacer  $\vartheta$  par toute autre fonction  $\chi(s)$  telle que

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\vartheta(s)}{\chi(s)} \leq 1.$$

Si je ne me trompe pas, il n'y a, *a priori*, aucune raison pour préférer votre fonction

$$\frac{\vartheta_1}{r} = \frac{1}{r} \int_{r_1}^r \vartheta(s) ds \quad \text{à} \quad \int_{r_1}^r \frac{\vartheta(s)}{s} ds,$$

et l'on peut se contenter de l'inégalité (1), qui est valable en tout cas.

Au reste, en remarquant l'identité

$$\frac{1}{s} = \frac{1}{r} \left( 1 + \frac{r-s}{s} \right)$$

et en posant

$$\varepsilon(r) = \int_{r_1}^r \frac{\vartheta(s)}{s} (r-s) ds,$$

il vient

$$\log M(r) \geq \frac{1}{r} (\vartheta_1 + \varepsilon),$$

où, par la règle de l'HOSPITAL,

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\varepsilon}{\vartheta_1} = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\int_{r_1}^r \frac{\vartheta(s)}{s} ds}{\vartheta(r)}.$$

Il suffit donc que

$$\int_{r_1}^r \frac{\vartheta(s)}{s} ds$$

croisse moins vite que  $\vartheta(r)$  (ce qui arrive notamment lorsque la croissance de  $\vartheta(r)$  rentre dans le type exponentiel) pour que l'on ait votre inégalité asymptotique

$$\log M(r) > \frac{\vartheta_1}{r}.$$

23 juillet 1902.



XIV.

SUR LES TRAJECTOIRES SINGULIÈRES  
DU PROBLÈME RESTREINT DES TROIS CORPS

« Comptes Rendus de l'Acad. des Sciences de Paris », t. CXXXV (1903),  
pp. 82-84.

Soient  $J, S$ , des masses respectives  $\mu, \nu = 1 - \mu$ , les deux corps tournant uniformément (avec une vitesse angulaire égale à l'unité) autour de leur centre de gravité commun. Soit  $P$  le troisième corps de masse négligeable.

Si l'on pose (en prenant  $\overline{SJ}$  pour unité de longueur)

$$r = \overline{SP}, \quad \vartheta = \widehat{JSP}, \quad \Delta = \overline{JP} = |\sqrt{1 + r^2 - 2r \cos \vartheta}|,$$

$$V = \frac{1}{\Delta} - r \cos \vartheta, \quad F = \frac{1}{2} \left\{ R^2 + r^2 \left( \frac{\Theta}{r^2} - 1 \right)^2 \right\} - \frac{1}{2} r^2 - \frac{\nu}{r} - \mu V,$$

les équations du mouvement s'écrivent, sous forme canonique, pour ainsi dire, polaire,

$$(I) \quad \frac{dr}{dt} = \frac{\partial F}{\partial R}, \quad \frac{d\vartheta}{dt} = \frac{\partial F}{\partial \Theta}, \quad \frac{dR}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial r}, \quad \frac{d\Theta}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial \vartheta}.$$

La signification des variables conjuguées  $R, \Theta$  se tire des équations elles-mêmes. En effet, les deux premières  $dr/dt = R, d\vartheta/dt = \Theta/r^2 - 1$  nous apprennent que  $R$  n'est que la *dérivée du rayon vecteur*,

$$\Theta = r^2(d\vartheta/dt + 1)$$

le *double de la vitesse aréolaire (absolue)*.

D'après une proposition bien connue, précisée par M. PAINLEVÉ, dans le problème des trois corps, le mouvement se poursuit régulièrement tant qu'il n'y a pas de choc. Il s'ensuit, pour le problème restreint, que

toute singularité du mouvement peut provenir seulement de ce que,  $t$  tendant vers une valeur finie  $t_1$ ,  $\lim_{t \rightarrow t_1} r = 0$  ou bien  $\lim_{t \rightarrow t_1} \Delta = 0$ . (Évidemment les deux circonstances ne peuvent pas se présenter à la fois). Comme les deux corps  $S$ ,  $J$  jouent un rôle symétrique (dans la question, sinon dans la notation) il suffira d'étudier le premier cas.

Proposons-nous donc de caractériser les trajectoires  $\Sigma$  (réelles, cela va sans dire) du système (I), sur lesquelles on a, pour une certaine valeur, d'ailleurs quelconque  $t_1$ ,

$$(1) \quad \lim_{t \rightarrow t_1} r = 0.$$

Fixons une quelconque de ces  $\Sigma$ .

Le mouvement étant régulier avant l'instant  $t_1$ ,  $r$  ne s'annule pas pour  $t < t_1$ ; ce n'est pas non plus une constante, d'après (1). Il existe donc des valeurs de  $t$ , aussi près que l'on veut de  $t_1$ , pour lesquelles  $dr/dt = R$  est  $\geq 0$ .

Ceci posé, considérons le système différentiel réduit qui définit les trajectoires et qu'on tire de (I) en éliminant  $dt$  et en tenant compte de l'intégrale de JACOBI  $F = -C$ , savoir

$$R^2 = r^2 + \frac{2v}{r} + 2\mu V - r^2 \left( \frac{\Theta}{r^2} - 1 \right)^2 - 2C.$$

$R$  étant ainsi défini en fonction de  $r$ ,  $\vartheta$ ,  $\Theta$ , les équations des trajectoires sont

$$(II) \quad \frac{d\vartheta}{dr} = -\frac{\partial R}{\partial \Theta}, \quad \frac{d\Theta}{dr} = \frac{\partial R}{\partial \vartheta}.$$

Les  $\Sigma$  cherchées doivent être naturellement des solutions de (II). Pour les séparer des autres solutions, il va nous suffire de retenir la circonstance suivante:

Il y a sur toute  $\Sigma$  des valeurs de  $r$ , si près que l'on veut de zéro, pour lesquelles  $\vartheta$  et  $\Theta$  sont des fonctions holomorphes de  $r$ .

C'est ce qui résulte immédiatement de (1) et de la remarque faite tout à l'heure que  $dr/dt$  ne s'annule pas identiquement.

Posons

$$\varrho = |\sqrt{r}|, \quad \vartheta' = \frac{\Theta}{\varrho^4} - 1;$$

$$\varrho^2 W = \frac{\partial V}{\partial \vartheta} = \varrho^2 \sin \vartheta \left( 1 - \frac{1}{\Delta^2} \right), \quad \varrho P = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \varrho} [\varrho^2 (-2C + 2\mu V + \varrho^4)];$$

$$H = -\varrho R = \pm \sqrt{2v - \varrho^6 \vartheta'^2 + \varrho^2 (-2C + 2\mu V + \varrho^4)},$$



avec quoi  $V, W, P$  résultent des fonctions de  $\varrho$  et de  $\vartheta$ , régulières, pour toute valeur réelle de  $\vartheta$ , dans le domaine de  $\varrho = 0$ ;  $H$  (une fois fixé son signe) une fonction de  $\varrho$ , de  $\vartheta$  et de  $\vartheta'$ , régulière au voisinage de  $\varrho = 0$  pour toute valeur réelle de  $\vartheta$  et de  $\vartheta'$ . Cette nouvelle fonction inconnue  $\vartheta'$  n'est évidemment autre chose que la vitesse angulaire relative  $d\vartheta/dt$ , comme il suit immédiatement de la relation  $d\vartheta/dt = \Theta/r^2 - 1 = \Theta/\varrho^4 - 1$ .

Le système (II) devient ainsi

$$(\Sigma) \quad \frac{d\vartheta}{d\varrho} = -2\varrho^2 \frac{\vartheta'}{H}, \quad \varrho \frac{d\vartheta'}{d\varrho} = -4(\vartheta' + 1) - 2\mu\varrho \frac{W}{H},$$

d'où l'on tire

$$(2) \quad \varrho H \frac{dH}{d\varrho} = \varrho H \left( \frac{\partial H}{\partial \varrho} + \frac{\partial H}{\partial \vartheta} \frac{d\vartheta}{d\varrho} + \frac{\partial H}{\partial \vartheta'} \frac{d\vartheta'}{d\varrho} \right) = (\varrho^3 \vartheta')^2 + \varrho^2 (P + 4\varrho \cdot \varrho^3 \vartheta').$$

La forme analytique du système  $(\Sigma)$  (régulier dans le domaine de  $\varrho = 0$ , ce point seulement excepté) permet aisément de conclure que, sur toute trajectoire  $\Sigma$ ,  $\vartheta$  et  $\vartheta'$  sont nécessairement des fonctions holomorphes de  $\varrho$ , tant que  $\varrho$  est  $> 0$  (et assez petit). Pour  $\varrho$  convergent à zéro, on ne sait rien *a priori*, sinon que  $\varrho^3 \vartheta'$  reste fini (ce qui est indispensable pour la réalité de  $H$ ). Mais on démontre successivement:

1) D'après (2): la limite inférieure de  $H$ , lorsque  $\varrho$  tend vers zéro, n'est pas nulle.

2) D'après la seconde des  $(\Sigma)$ :

$$\lim_{\varrho=0} \vartheta' = -1,$$

et, par suite,

$$\lim_{\varrho=0} H = \pm \sqrt{2\nu}.$$

3) D'après la méthode des limites: le système  $(\Sigma)$  admet  $\infty^1$  intégrales  $\vartheta(\varrho)$ ,  $\vartheta'(\varrho)$ , holomorphes dans le domaine  $\varrho = 0$  et se réduisant respectivement, pour  $\varrho = 0$ :  $\vartheta$  à une valeur arbitraire  $\vartheta_0$ ,  $\vartheta'$  à  $-1$ .

4) Par une généralisation facile d'un théorème de BRIOT et BOUQUET: il n'existe pas d'autres intégrales de  $(\Sigma)$  satisfaisant à la condition (3) (où il est sous-entendu que  $\varrho$  tend vers zéro le long de l'axe réel).

5) D'après l'équation  $dt = dr/R = -2\rho^2(d\rho/H)$ : en prenant pour  $H$  la détermination positive, les intégrales holomorphes susdites définissent effectivement des trajectoires  $\Sigma$  (prendre pour  $H$  la détermination négative reviendrait évidemment à changer  $t$  en  $-t$ ).

En définitive, *les trajectoires singulières du problème restreint des trois corps, le long desquelles  $P$  et  $S$  se choquent au bout d'un temps fini, correspondent aux  $\infty^1$  intégrales de  $(\Sigma)$  holomorphes pour  $\rho = 0$  et à celles-ci seulement.*

12 Janvier 1903

CONDITION DU CHOC  
DANS LE PROBLÈME RESTREINT DES TROIS CORPS

« Comptes Rendus de l'Acad. des Sciences de Paris », t. CXXXV (1903),  
pp. 221-223.

Soit, comme dans ma Communication précédente (12 janvier 1903),

$$\varrho = |\sqrt{\widehat{SP}}|, \quad \vartheta = J\widehat{SP}, \quad \vartheta' = \frac{d\vartheta}{dt};$$

$$\left\{ \begin{aligned} \Delta = \overline{JP} &= |\sqrt{1 + \varrho^4 - 2\varrho^2 \cos \vartheta}|, & V &= \frac{1}{\Delta} - \varrho^2 \cos \vartheta, & W &= \sin \vartheta \left(1 - \frac{1}{\Delta^2}\right), \\ H &= \pm \sqrt{2\nu - \varrho^6 \vartheta'^2 + \varrho^2(-2C + 2\mu V + \varrho^4)} \end{aligned} \right.$$

( $\mu$  masse de  $J$ ,  $\nu = 1 - \mu$  masse de  $S$ ,  $C$  constante de JACOBI).

Les trajectoires, sur lesquelles  $P$  et  $S$  se choquent au bout d'un temps fini, correspondent aux  $\infty^1$  intégrales du système

$$(\Sigma) \quad \frac{d\vartheta}{d\varrho} = -2\varrho^2 \frac{\vartheta'}{H}, \quad \varrho \frac{\partial \vartheta'}{\partial \varrho} = -4(\vartheta' + 1) - 2\mu\varrho \frac{W}{H},$$

holomorphes pour  $\varrho = 0$  (et à ces intégrales seulement). En appelant  $\vartheta_0$  la valeur arbitraire  $\vartheta(0)$  et en remarquant que  $\vartheta'(0)$  doit nécessairement se réduire à  $-1$ , on aura, pour ces intégrales, des expressions de la forme

$$(1) \quad \vartheta = \vartheta_0 + \varrho\alpha(\varrho, \vartheta_0), \quad \vartheta' + 1 = \varrho\beta(\varrho, \vartheta_0),$$

$\alpha$  et  $\beta$  étant des séries des puissances en  $\varrho$ .

Pour qu'un choc intervienne, il faut et il suffit — peut-on dire d'après ce qui précède — que le mouvement ait lieu sur une des trajectoires (1):

il faut donc et il suffit que  $\varrho, \vartheta, \vartheta'$  vérifient à tout instant l'équation qu'on tire des (1) en y éliminant  $\vartheta_0$ . Voilà la relation invariante caractéristique du choc. C'est bien une relation unique, comme le présumait M. PAINLEVÉ (voir ses *Leçons de Stockholm*, p. 586). Étudions-la d'un peu plus près.

Tout d'abord, la première des (1) permet de tirer  $\vartheta_0$  en fonction holomorphe de  $\varrho$  et de  $\vartheta$ . En introduisant cette valeur dans la seconde, il vient

$$(2) \quad \vartheta' + 1 = \varrho f(\varrho, \vartheta),$$

où  $f$  est une fonction holomorphe de  $\varrho$ , dans le domaine  $\varrho = 0$ , pour toute valeur réelle de  $\vartheta$ .

Dès que (2) est une relation invariante [par rapport au mouvement et *a fortiori* par rapport au système ( $\Sigma$ )], en la dérivant par rapport à  $\varrho$  et en tenant compte des ( $\Sigma$ ) et d'elle-même, on doit aboutir à une identité. Nous en concluons que la fonction  $f(\varrho, \vartheta)$  satisfait à l'équation

$$(3) \quad 5f + \varrho \frac{\partial f}{\partial \varrho} = -2\mu \frac{W}{H} - \frac{2}{H} \varrho^3 (1 - \varrho f) \frac{\partial f}{\partial \vartheta},$$

où il est sous-entendu que, dans l'expression de  $H$ , on a remplacé  $\vartheta'$  par  $\varrho f - 1$ .

La méthode des limites montre aussitôt que l'équation (3) admet une intégrale et une seule développable en série de puissances de  $\varrho$ .

Si l'on pose  $f = \sum_0^{\infty} f_n \varrho^n$ , les  $f_n$  peuvent être calculés de proche en proche en identifiant, dans les deux membres de (3), les coefficients des mêmes puissances de  $\varrho$ .

Cette intégrale holomorphe de (3) est évidemment d'après l'origine de l'équation) la fonction  $f$  de la relation invariante (2). On a de la sorte un moyen commode pour la déterminer. On en fait, en outre, ressortir une importante propriété, qui ne résultait pas encore de (2).

C'est que  $f$  est une fonction périodique de  $\vartheta$ . La condition du choc est donc uniforme, au sens de M. POINCARÉ; elle est même algébrique par rapport aux vitesses <sup>(1)</sup>.

Pour  $\mu = 0$ , on tire immédiatement, de (3),  $f = 0$ , et la condition du choc ( $\vartheta' + 1 = 0$ ) exprime que la vitesse angulaire (absolue) de  $P$

<sup>(1)</sup> On sait que M. PAINLEVÉ a démontré (« Comptes rendus », 29 décembre 1897) qu'il ne peut pas en être ainsi dès que trois masses au moins ne sont pas nulles. Le problème restreint échappe donc à la démonstration de M. PAINLEVÉ et, en effet, il se comporte d'une façon exceptionnelle à ce point de vue.

par rapport à  $S$  est nulle ou, si l'on veut, que la vitesse de  $P$  est dirigée suivant la droite  $PS$ . On pouvait le prévoir, puisque, pour  $\mu = 0$ , on retombe sur le problème (plan) des deux corps.

Pour  $\mu$  quelconque, le calcul des premiers termes donne

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} f = \mu \varrho^2 & \left[ \frac{6}{7} \frac{1}{\sqrt{2\nu}} \sin 2\vartheta + \frac{1}{3} \frac{1}{\sqrt{2\nu}} \sin \vartheta \left( 5 \cos^2 \vartheta - \frac{C - \mu}{\nu} \cos \vartheta - 1 \right) \right] \varrho^2 \\ & - \frac{3}{35} \frac{\mu}{\nu} \cos 2\vartheta \varrho^3 + \dots \end{aligned} \right\},$$

le radical  $\sqrt{2\nu}$  devant être pris avec le signe  $+$  ou avec le signe  $-$ , selon qu'il s'agit de chocs futurs ou passés.

On a de la sorte une expression approchée de  $f$ , valable, pour  $\varrho$  assez petit, quel que soit  $\vartheta$ . (Il fallait arriver jusqu'au troisième terme non nul, puisque les coefficients des deux premiers s'annulent à la fois sur la droite  $SJ$ ).

Au point de vue théorique, la détermination de  $f$  est achevée. D'après (3), on sait construire la série qui la représente au voisinage de  $S$ ; dès lors, le prolongement analytique de la série définit  $f$  dans tout le plan des trois corps. Mais il serait intéressant de préciser le champ de validité du développement (4), et plus généralement d'établir comment se comporte la fonction  $f$  et comment on peut la calculer pour des valeurs quelconques de  $\varrho$ .

Il est à peine nécessaire d'ajouter que (d'après le rôle symétrique de  $S$ ,  $J$ ), il suffit de changer dans (2) la signification des lettres pour en tirer la condition d'un choc  $P$ ,  $J$ .

Une question extrêmement importante se pose maintenant.

Nous pouvons affirmer, d'après ce qui précède, que, si à l'instant initial la condition (2) et l'autre analogue, relative à un choc  $P$ ,  $J$ , ne sont pas satisfaites, elles ne le seront jamais, et il n'y aura pas de choc. Par d'autres mots, deux inégalités, telles que  $\vartheta' + 1 - \varrho f \geq 0$ , assurent la continuation indéfinie du mouvement. Toutefois les corps célestes ne sont pas des points matériels et il est loisible de les traiter ainsi, pourvu seulement que leurs distances ne descendent pas au-dessous d'une certaine limite. Il faut donc (pour pouvoir appliquer à un exemple naturel la conclusion que le mouvement se poursuivra régulièrement en tout temps) savoir d'avance (pour la solution théorique correspondante) non seulement qu'il n'y aura pas de choc, mais bien encore que les distances  $PS$ ,  $PJ$  ne descendront jamais au-dessous d'un  $\varepsilon$  donné. Quelles en sont les conditions? Deux inégalités de la forme  $|\vartheta' + 1 - \varrho f| > \eta$ , où  $\eta$  dépend de  $\varepsilon$ , seraient-elles suffisantes? Je n'en puis encore rien dire.

26 janvier 1903.



TRAIETTORIE SINGOLARI ED URTI  
NEL PROBLEMA RISTRETTO DEI TRE CORPI <sup>(1)</sup>

« Ann. di Mat. », s. 3<sup>a</sup>, t. IX (1903),  
pp. 1-32.

Nel problema dei tre corpi (punti materiali, che si attraggono secondo la legge di NEWTON) le forze, e per conseguenza le equazioni differenziali del moto, hanno comportamento analitico regolare finchè le posizioni dei tre punti sono distinte. Di qui si intuisce che unica causa di regolarità pel movimento può essere il fatto che due dei tre corpi (o tutti tre) tendono a coincidere.

Più precisamente il sig. PAINLEVÉ ha dimostrato <sup>(2)</sup> che, a partire da un istante  $t_0$  (e da condizioni iniziali qualsivogliono), possono sorgere, e sorgono effettivamente, singolarità, solo quando una almeno delle mutue distanze tende a zero al convergere di  $t$  verso un valore (finito)  $t_1$ .

In forma più espressiva si può dire evidentemente: Il moto prosegue regolare a meno che non intervengono urti entro un tempo finito.

Quali sono le condizioni iniziali singolari, a partire dalle quali si va incontro ad un urto? Ecco la questione, che sarà qui risolta per il problema ristretto. Si tratta, come è ben noto, del moto piano di una massa infinitesima  $P$ , attratta da due masse finite  $S, J$  uniformemente ruotanti.

Considerando, per fissar le idee, gli urti  $P, S$  (lo stesso naturalmente si applica agli urti  $P, J$ ) *riconosceremo che una sola relazione uniforme  $u = 0$  è caratteristica dell'urto e la costruiremo effettivamente.*

In un intorno conveniente di  $S$  il primo membro  $u$  della relazione invariante predetta si presenta con duplice determinazione, di cui una corrisponde agli urti passati (eiezioni), l'altra agli urti futuri (collisioni).

<sup>(1)</sup> I risultati della presente ricerca — meno quello dell'ultimo paragrafo — sono stati esposti in due Note dei « Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris » (12 e 26 gennaio 1903), [in questo vol.: XIV, XV pp. 271-277].

<sup>(2)</sup> *Leçons etc., professées à Stockholm*, presso A. Hermann, Paris, 1897, pag. 583.

Quanto alla condizione generica di un urto ( $P, S$ ; o  $P, J$ ; passato o futuro) essa si ottiene evidentemente eguagliando a zero un prodotto di due fattori:  $u$  e l'analogo  $u'$ , relativo agli urti  $P, J$ .

Per natura loro, le relazioni  $u = 0$ ,  $u' = 0$ ,  $uu' = 0$  (le quali esprimono che è avvenuto o avverrà un certo urto) sono invarianti, cioè a dire, se sono soddisfatte inizialmente, seguitano ad esserlo; se non lo sono in un istante generico, non lo saranno (né lo furono) mai. In particolare la disuguaglianza

$$uu' \geq 0$$

assicura la indefinita, regolare prosecuzione del movimento.

Il risultato è esauriente dal punto di vista matematico, ma non si presta ancora ad applicazioni concrete. Infatti i corpi celesti si possono legittimamente assimilare a punti materiali soltanto a patto che le loro dimensioni sieno trascurabili rispetto alle distanze, a patto cioè (per date dimensioni e dato grado di approssimazione) che queste distanze non discendano al disotto di un certo limite  $\varepsilon$ . Bisogna dunque non oltrepassare questo limite perchè le conclusioni matematiche sieno accettabili. E in ispecie, per poter affermare che non c'è pericolo di urti a partire da un dato stato di moto, bisognerebbe saper riconoscere (per la soluzione teorica corrispondente) non soltanto che le mutue distanze non convergono a zero (ciò, che — almeno per il problema ristretto — siamo ormai in grado di fare) ma ancora che esse restano superiori ad un  $\varepsilon$  assegnato.

Non è chi non veda la capitale importanza della questione; ma altro è porla, altro risolverla, sia pure per il solo problema ristretto. Nulla posso ancor dirne e chiudo quindi la digressione.

Rientrando nel tema del presente scritto, farò notare che esso può anche, e più generalmente, riguardarsi come uno studio delle traiettorie singolari: intendo quelle traiettorie, che escono da uno dei due centri di attrazione — fissiamo  $S$  — o vi terminano (traiettorie di eiezione o traiettorie di collisione).

Io ho appunto cominciato (dopo le indispensabili generalità dei §§ 1-2) collo stabilire alcuni caratteri analitici di queste traiettorie singolari. Ne ho tratta la condizione dell'urto, e da essa, ritornando alle traiettorie, una applicazione di indole qualitativa.

Ecco di che si tratta.

Quando la massa del secondo centro  $J$  è nulla (problema dei due corpi) le traiettorie singolari sono rette ed è ben noto che, su queste traiettorie, il mobile si allontana indefinitamente o ritorna in  $S$ , secondo il valore ( $\geq 0$ ) della costante delle forze vive.



Il comportamento deve essere analogo (salvo le complicazioni provenienti dalla presenza del punto singolare  $J$ ) anche quando la massa  $\mu$  di  $J$  non è più nulla.

In modo rigoroso ho potuto però dimostrare soltanto il teorema seguente:

Per valori della costante  $C$  di JACOBI maggiori dell'unità e per  $\mu$  abbastanza piccolo, le traiettorie singolari, che escono da  $S$ , si rinchiodano tutte in  $S$ , dopo un percorso finito.

### 1. - Equazione del moto. Forma canonica polare.

Uno dei tre corpi,  $P$ , ha massa trascurabile e non influisce quindi sul moto degli altri due  $S$ ,  $J$ . Questo moto è il più semplice compatibile colla legge di NEWTON:  $S$ ,  $J$  ruotano cioè uniformemente attorno al loro comune centro di gravità  $O$ .

Il moto di  $P$  avviene nel piano, che contiene le due orbite circolari di  $S$  e di  $J$ .

Tutto si riduce così ad un problema con due gradi di libertà: moto piano di un punto  $P$ , sollecitato dall'attrazione newtoniana dei due centri variabili  $S$ ,  $J$ .

Sieno  $\nu = 1 - \mu$ ,  $\mu$  le masse di  $S$  e di  $J$ , con che si suppone scelta per unità di massa la somma delle masse dei due corpi.

Convengasi ancora di assumere la distanza costante  $\overline{SJ}$  per unità di lunghezza e l'unità di tempo in modo che la velocità angolare della retta  $SJ$  riesca eguale ad 1.

Con queste unità anche la costante di attrazione universale (costante di GAUSS) risulta eguale ad 1, e il potenziale (unitario)  $U$  delle forze agenti su  $P$  è

$$\frac{\nu}{\overline{SP}} + \frac{\mu}{\overline{JP}}.$$

Posto

$$\overline{SP} = r, \quad \overline{JP} = \Delta, \quad \widehat{JSP} = \vartheta$$

(ove  $\vartheta$  si intenderà contato nel senso della rotazione), avremo ovviamente

$$(1) \quad \Delta = |\sqrt{1 + r^2 - 2r \cos \vartheta}|,$$

$$(2) \quad U = \frac{\nu}{r} + \frac{\mu}{\Delta}.$$

Rispetto ad un sistema d'assi uniformemente ruotanti  $\xi, \eta$  coll'origine in  $O$  e la direzione positiva dell'asse  $\xi$  verso  $J$ , le coordinate di  $S$  sono  $-\mu, 0$ ; quelle di  $J$ :  $\nu, 0$ .

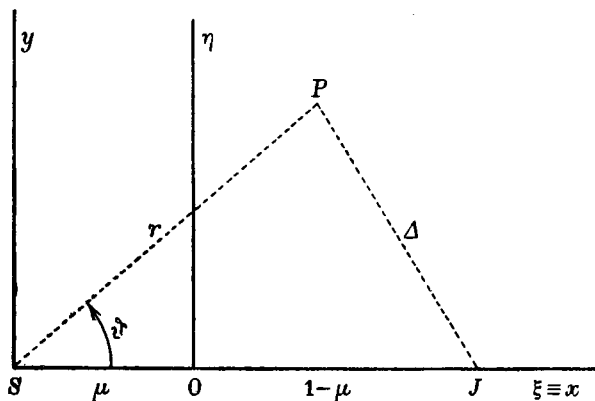


Fig. 1.

Suppongasi il verso  $\xi\eta$  coincidente con quello della rotazione. Avremo allora dal teorema di CORIOLIS come componenti della accelerazione assoluta (di un generico punto  $P$  di coordinate  $\xi, \eta$ )

$$\begin{aligned}\xi'' - 2\eta' - \xi, \\ \eta'' + 2\xi' - \eta.\end{aligned}$$

Le equazioni del moto risultano dall'eguagliare la accelerazione alla forza unitaria: saranno dunque nel caso presente:

$$\begin{cases} \xi'' - 2\eta' - \xi = \frac{\partial U}{\partial \xi}, \\ \eta'' + 2\xi' - \eta = \frac{\partial U}{\partial \eta}. \end{cases}$$

Riferiamole ad un sistema di assi  $x, y$  paralleli a  $\xi, \eta$ , coll'origine nel punto  $S (-\mu, 0)$ ; poniamo cioè

$$\xi = x - \mu, \quad \eta = y.$$

Esse divengono

$$\begin{cases} x'' - 2y' - x = \frac{\partial U}{\partial x} - \mu = \frac{\partial}{\partial x} (U - \mu x), \\ y'' + 2x' - y = \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (U - \mu x). \end{cases}$$

Per definizione  $r$  e  $\vartheta$  non sono che coordinate polari, corrispondenti alle cartesiane  $x$ ,  $y$ . Si ha quindi

$$x = r \cos \vartheta,$$

$$y = r \sin \vartheta,$$

da cui, derivando,

$$\frac{\partial x}{\partial r} = \cos \vartheta = \frac{x}{r}, \quad \frac{\partial x}{\partial \vartheta} = -r \sin \vartheta = -y,$$

$$\frac{\partial y}{\partial r} = \sin \vartheta = \frac{y}{r}, \quad \frac{\partial y}{\partial \vartheta} = r \cos \vartheta = x.$$

Moltiplichiamo le superiori equazioni ordinatamente per  $x/r$ ,  $y/r$ ;  $-y$ ,  $x$ , e sommiamo. Verrà

$$\begin{cases} \frac{x''x + y''y}{r} - \frac{2}{r}(xy' - yx') - r = \frac{\partial}{\partial r}(U - \mu r \cos \vartheta), \\ xy'' - yx'' + 2(xx' + yy') = \frac{\partial}{\partial \vartheta}(U - \mu r \cos \vartheta). \end{cases}$$

Ora

$$xy' - yx' = r^2\vartheta', \quad xx' + yy' = rr',$$

e inoltre

$$\frac{x''x + y''y}{r} = r'' - r\vartheta'^2, \quad xy'' - yx'' = \frac{d}{dt}(r^2\vartheta').$$

Abbiamo così le equazioni del moto in coordinate polari:

$$r'' - r\vartheta'^2 - 2r\vartheta' - r = \frac{\partial}{\partial r}(U - \mu r \cos \vartheta),$$

$$\frac{d}{dt}(r^2\vartheta') + 2rr' = \frac{\partial}{\partial \vartheta}(U - \mu r \cos \vartheta).$$

È facile attribuir loro forma canonica. Pongasi infatti

$$(3) \quad r' = R, \quad \vartheta' = \frac{\Theta}{r^2} - 1,$$

con che

$$\Theta = r^2(\vartheta' + 1),$$

e le nostre equazioni diverranno

$$(4) \quad \begin{cases} \frac{dR}{dt} = \frac{\partial}{\partial r} (U - \mu r \cos \vartheta) + \frac{\Theta^2}{r^3} = \frac{\partial}{\partial r} \left\{ U - \mu r \cos \vartheta - \frac{1}{2} r^2 \left( \frac{\Theta}{r^2} - 1 \right)^2 + \frac{1}{2} r^2 \right\}, \\ \frac{d\Theta}{dt} = \frac{\partial}{\partial \vartheta} (U - \mu r \cos \vartheta) = \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left\{ U - \mu r \cos \vartheta - \frac{1}{2} r^2 \left( \frac{\Theta}{r^2} - 1 \right)^2 + \frac{1}{2} r^2 \right\}. \end{cases}$$

Complessivamente le (3) e (4) si possono scrivere

$$(I) \quad \begin{cases} \frac{dr}{dt} = \frac{\partial F}{\partial R}, & \frac{d\vartheta}{dt} = \frac{\partial F}{\partial \Theta}; \\ \frac{dR}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial r}, & \frac{d\Theta}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial \vartheta}, \end{cases}$$

dove  $F$  sta per

$$\frac{1}{2} \left\{ R^2 + r^2 \left( \frac{\Theta}{r^2} - 1 \right)^2 \right\} - U + \mu r \cos \vartheta - \frac{1}{2} r^2.$$

Se si sostituisce ad  $U$  il suo valore (2) e si raccolgono invece i due termini in  $\mu$  col porre

$$(5) \quad V = \frac{1}{A} - r \cos \vartheta,$$

la espressione di  $F$  assume l'aspetto

$$(6) \quad F = \frac{1}{2} \left\{ R^2 + r^2 \left( \frac{\Theta}{r^2} - 1 \right)^2 \right\} - \frac{v}{r} - \mu V - \frac{1}{2} r^2.$$

Il significato cinematico delle variabili coniugate  $R$ ,  $\Theta$  risulta dalle (3), o, se si vuole, dalle stesse equazioni canoniche:  $R = r'$  non è che la derivata del raggio vettore,  $\Theta = r^2(\vartheta' + 1)$  il doppio della velocità areolare (assoluta). Infatti  $\vartheta'$  è la velocità angolare di  $P$ , relativa all'asse  $SJ$ ; questo ruota con velocità angolare costante  $= 1$ ;  $\vartheta' + 1$  è dunque la velocità angolare assoluta e, per conseguenza,  $\frac{1}{2}r^2(\vartheta' + 1)$  la velocità areolare, pure assoluta.

**2. - Integrale di Jacobi.**

**Conseguenze, che esso permette di ricavare dall'ipotesi  $\lim_{t \rightarrow t_1} r = 0$ .**

Le (I) ammettono l'integrale

$$F = - C,$$

dove, secondo la consuetudine, la costante del secondo membro è designata con  $-C$  ( $C$  costante di JACOBI).

Ponendo per brevità

$$(7) \quad \begin{cases} \sigma = r^2 \left( \frac{\Theta}{r^2} - 1 \right), \\ \mathfrak{P} = -2C + 2\mu V + r^2, \end{cases}$$

la equazione  $F = -C$  può essere scritta

$$(8) \quad \sigma^2 + rR^2 = 2\nu + r\mathfrak{P}.$$

$\mathfrak{P}$  è una funzione, che resta finita per  $r = 0$ . Si ha infatti dalla (4),  $V = 1$ , per  $r = 0$ , donde  $\mathfrak{P} = -2(C - \mu)$ .

La (8) mostra quindi che, per  $r$  abbastanza piccolo, la somma  $\sigma^2 + rR^2$  non può differir molto da  $2\nu$ . Ne segue in particolare, considerando  $r$ ,  $R$ ,  $\Theta$ , e quindi anche  $r$ ,  $R$ ,  $\sigma$  come funzioni di  $t$  definite dalle (I):

a) *Se anche, al convergere di  $t$  verso un valore  $t_1$ ,  $r$  tende a zero,  $\sigma$  e  $\sqrt{r}R$  restano finite.*

Dico di più che:

b) *Per  $t$  abbastanza vicino a  $t_1$ ,  $R = dr/dt$  si mantiene costantemente diversa da zero;  $r$  converge quindi a zero, decrescendo.*

In primo luogo, si ha dalla (6)

$$\frac{\partial F}{\partial r} = r \left( \frac{\Theta}{r^2} - 1 \right)^2 - \frac{2}{r} \left( \frac{\Theta}{r^2} - 1 \right) \Theta + \frac{\nu}{r^2} - \mu \frac{\partial V}{\partial r} - r,$$

ossia, per le (7) ed (8)

$$- \frac{\partial F}{\partial r} = \frac{1}{r^2} \{ \nu - rR^2 + r\mathfrak{Q} \},$$

dove

$$\mathfrak{Q} = 2\sqrt{r}\sigma + \mu r \frac{\partial V}{\partial r} + r^2 + \mathfrak{P}$$

resta finita, quando  $r$  converge a zero.

Scriviamo le due equazioni

$$\frac{dR}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial r}, \quad \frac{dr}{dt} = \frac{\partial F}{\partial R} = R$$

sotto la forma:

$$r \frac{dR}{dt} = \frac{1}{r} \{ \nu - rR^2 + r\Omega \},$$

$$R \frac{dr}{dt} = \frac{1}{r} rR^2$$

e sommiamole. Si ottiene

$$\frac{d(rR)}{dt} = \frac{\nu}{r} + \Omega.$$

Per  $r$  abbastanza piccolo, il primo termine del secondo membro prepondera su  $\Omega$ . Supposto dunque  $\lim_{t \rightarrow t_1} r = 0$ ,  $d(rR)/dt$  conserva il medesimo segno (positivo) per  $t$  abbastanza vicino a  $t_1$ . La funzione  $rR$  varia così, da un certo punto in poi, nel medesimo senso, mentre  $t$  converge a  $t_1$ , e può perciò attraversare una volta al più il valore zero.

Seguitando  $t$  ad avvicinarsi a  $t_1$ , il prodotto  $rR$  non si annulla più.

Non si possono quindi annullare nè  $r$ , nè  $R = dr/dt$ . c.d.d.

Convien dimostrare ancora un terzo lemma, cioè:

c) Per  $t$  abbastanza vicino a  $t_1$ , il limite inferiore dei valori di  $rR^2$  non è nullo.

Moltiplicando le due equazioni

$$\frac{dR}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial r}, \quad 2rR = 2r \frac{dr}{dt},$$

e aggiungendo  $R^2(dr/dt)$  a entrambi i membri del prodotto, si trae:

$$\frac{d(rR^2)}{dt} = \frac{2}{r} \left\{ \nu - \frac{1}{2} rR^2 + r\Omega \right\} \frac{dr}{dt}.$$

Proviamoci a supporre che il limite inferiore dei valori (essenzialmente  $\geq 0$ ) assunti da  $rR^2$  sia zero. Esisterebbero dei valori  $\bar{t}$  di  $t$ , vicini a  $t_1$ , quanto si vuole, in cui  $rR^2$  sarebbe prossimo a zero, pure quanto si vuole, in particolare per es.  $< \frac{1}{2}\nu$ . Prendiamo  $t$  abbastanza vicino a  $t_1$  (e quindi  $r$  a zero) perchè inoltre il valore assoluto di  $r\Omega$  non superi  $\nu/4$ .

Avremo

$$\nu - \frac{1}{2} rR^2 + r\Omega > \frac{1}{2} \nu,$$

e il secondo membro della precedente equazione avrà il segno di  $dr/dt$ . Perciò, nel punto  $\bar{t}$ , la funzione  $rR^2$  sarà, al pari di  $r$ , decrescente (nel senso  $\bar{t}$ ,  $t_1$ ).

Ora, diminuendo  $rR^2$ , la disuguaglianza

$$\nu - \frac{1}{2} rR^2 + r\Omega > \frac{1}{2} \nu$$

resta a fortiori soddisfatta.  $rR^2$  seguita dunque a decrescere quando  $t$  si avvicina indefinitamente a  $t_1$ .

Così l'ipotesi che il limite inferiore sia zero, implicherebbe addirittura

$$\lim_{t=t_1} rR^2 = 0.$$

Ma questo è assurdo.

Infatti,  $dr$  essendo negativo e, ripetiamolo,

$$\nu - \frac{1}{2} rR^2 + r\Omega > \frac{1}{2} \nu,$$

l'equazione

$$\frac{d(rR^2)}{dt} = \frac{2}{r} \left\{ \nu - \frac{1}{2} rR^2 + r\Omega \right\} \frac{dr}{dt}$$

dà luogo alla disuguaglianza

$$-d(rR^2) > -\nu d \log r,$$

che, integrata fra  $\bar{t}$  e  $t$ , ove si designino con  $\bar{r}$ ,  $\bar{R}$  i valori delle funzioni  $r$ ,  $R$ , relativi al valore  $\bar{t}$  di  $t$ , porge

$$\bar{r}\bar{R}^2 - rR^2 > \nu \log \frac{\bar{r}}{r}.$$

L'impossibilità è manifesta, poichè, al convergere di  $t$  verso  $t_1$ , il primo membro resta finito, mentre il secondo cresce indefinitamente.

### 3. - Generalità sulle traiettorie singolari $\Sigma$ , lungo le quali interviene un urto $P, S$ .

Per il teorema di PAINLEVÉ, ricordato nell'introduzione, il movimento, nel problema dei tre corpi, prosegue regolare, a meno che una delle tre distanze non tenda a zero, al convergere di  $t$  verso un valore finito  $t_1$ .

Nel caso nostro, essendo costante la distanza  $\overline{SJ}$ , due soltanto sono le ipotesi possibili (ed escludentisi a vicenda):  $P$  tende ad  $S$ ; ovvero  $P$  tende a  $J$ . Potremo limitarci a contemplarne una e supporre per es.

$$(9) \quad \lim_{t \rightarrow t_1} r = 0.$$

Nulla infatti distingue fra di loro i due corpi  $S, J$  nell'enunciato del problema ristretto; la notazione soltanto è asimmetrica, essendo appunto conveniente, per discutere gli urti  $P, S$ , assumere  $S$  come origine delle coordinate. Per quegli altri, basterebbe attribuire alle lettere il significato, che risulta dallo scambio di  $S$  con  $J$ .

Ciò posto, sia  $\Sigma$  una generica delle traiettorie singolari, su cui interviene un urto  $P, S$ , su cui cioè si verifica la (9). Per il lemma b) del precedente paragrafo, da un certo  $t$  in poi,  $dr/dt$  si conserva diversa da zero: d'altra parte nell'intervallo  $\bar{t}, t_1$ , quest'ultimo valore al più escluso,  $r$ , e così le altre variabili  $R, \vartheta, \Theta$ , sono funzioni regolari di  $t$ . Se ne deduce che  $t$ , e per conseguenza  $R, \vartheta, \Theta$ , possono essere considerate funzioni di  $r$ , regolari per  $r$  abbastanza piccolo ( $\epsilon > 0$ ). Le equazioni differenziali, che le definiscono, sono, in virtù delle (I),

$$(I') \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{dt}{dr} = \frac{1}{\frac{\partial F}{\partial R}}, \quad \frac{dR}{dr} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial r}}{\frac{\partial F}{\partial R}}; \\ \frac{d\vartheta}{dr} = \frac{\frac{\partial F}{\partial \Theta}}{\frac{\partial F}{\partial R}}, \quad \frac{d\Theta}{dr} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial \vartheta}}{\frac{\partial F}{\partial R}}. \end{array} \right.$$

Prescindendo dalla prima, rimane eliminato  $t$ ; ma si può prescindere anche dalla seconda, sostituendole la relazione in termini finiti  $F = -C$ , che è atta a fornire  $R$  in funzione di  $r, \vartheta, \Theta$  e porge precisamente

$$(10) \quad R = \sqrt{\frac{2\nu}{r} - 2C + 2\mu V - r^2 \left( \frac{\Theta}{r^2} - 1 \right)^2} + r^2.$$



Ritenuta per  $R$  questa espressione, le due rimanenti equazioni di-  
vengono

$$(II) \quad \frac{d\vartheta}{dr} = -\frac{\partial R}{\partial \Theta}, \quad \frac{d\Theta}{dr} = \frac{\partial R}{\partial \vartheta}.$$

Tale è il sistema ridotto, cui debbono soddisfare le funzioni  $\vartheta(r)$ ,  $\Theta(r)$  corrispondenti a una generica  $\Sigma$ .

Si avverta che anche per un'altra traiettoria qualsiasi (su cui soltanto non sia  $dr/dt$  identicamente nulla e quindi  $r$  costante <sup>(3)</sup>) sono verificate le (II). Quel che di più si può asserire per le  $\Sigma$  e che, come vedremo, basta a caratterizzarle è la circostanza seguente:  $\vartheta$  e  $\Theta$  sono soluzioni del sistema (II) regolari nell'intorno del valore  $r = 0$  (questo valore al più escluso).

#### 4. - Trasformazione delle equazioni, che definiscono le traiettorie.

Comportamento del sistema trasformato nel punto  $\varrho = 0$ .

Poniamo

$$(11) \quad \varrho = |\sqrt{r}|, \quad \vartheta' = \frac{\Theta}{r^2} - 1 = \frac{\Theta}{\varrho^4} - 1; \quad H = -\varrho R,$$

con che la espressione esplicita di  $H$  in variabili  $\varrho$ ,  $\vartheta$ ,  $\vartheta'$  è, a norma della (10) e mettendo in evidenza il doppio segno del radicale,

$$(12) \quad H = -\varrho R = \pm \sqrt{2\nu - 2C\varrho^2 + 2\mu\varrho^2V - \varrho^6\vartheta'^2} + \varrho^6.$$

Si noti poi, confrontando colle (3), che la nuova variabile  $\vartheta'$  non è che  $d\vartheta/dt$  (velocità angolare relativa).

Avremo ovviamente

$$dr = 2\varrho d\varrho, \quad \partial\Theta = \varrho^4 \partial\vartheta',$$

e perciò il sistema (II) assume intanto l'aspetto

$$\frac{d\vartheta}{d\varrho} = \frac{2}{\varrho^4} \frac{\partial H}{\partial \vartheta'}, \quad \frac{d\Theta}{d\varrho} = -2 \frac{\partial H}{\partial \vartheta}.$$

<sup>(3)</sup> Si riconosce facilmente che, in questo caso, deve rimanere costante anche  $\vartheta$ , talchè  $P$  serba la posizione invariata rispetto agli altri due corpi  $S$ ,  $J$ . Si tratta dunque delle soluzioni particolari di LAPLACE (relative al problema ristretto).

Essendo poi

$$\frac{d\vartheta'}{d\rho} = \frac{1}{\rho^4} \frac{d\Theta}{d\rho} - \frac{4}{\rho^5} \Theta = \frac{1}{\rho^4} \frac{d\Theta}{d\rho} - \frac{4}{\rho} (\vartheta' + 1),$$

il sistema trasformato in  $\rho, \vartheta, \vartheta'$  così si presenta:

$$\begin{aligned} \frac{d\vartheta}{d\rho} &= \frac{2}{\rho^4} \frac{\partial H}{\partial \vartheta'} = -2\rho^2 \frac{\vartheta'}{H}, \\ \rho \frac{d\vartheta'}{d\rho} &= -4(\vartheta' + 1) - \frac{2}{\rho^3} \frac{\partial H}{\partial \vartheta} = -4(\vartheta' + 1) - \frac{2\mu}{\rho H} \frac{\partial V}{\partial \vartheta}. \end{aligned}$$

Teniamo conto del valore (5) di  $V$ , cioè

$$V = \frac{1}{\Delta} - r \cos \vartheta,$$

e notiamo che, derivando e scrivendo  $\rho^2$  per  $r$ , risulta

$$\frac{\partial V}{\partial \vartheta} = \rho^2 \operatorname{sen} \vartheta \left(1 - \frac{1}{\Delta_3}\right).$$

Posto quindi per brevità

$$(13) \quad W = \operatorname{sen} \vartheta \left(1 - \frac{1}{\Delta_3}\right),$$

avremo in definitiva

$$(\Sigma) \quad \begin{cases} \frac{d\vartheta}{d\rho} = -2\rho^2 \frac{\vartheta'}{H}, \\ \rho \frac{d\vartheta'}{d\rho} = -4(\vartheta' + 1) - 2\mu\rho \frac{W}{H}. \end{cases}$$

Badando alle espressioni analitiche (12), (13) di  $H$  e di  $W$ , si constata immediatamente che, per valori finiti qualsivogliono di  $\vartheta$  e di  $\vartheta'$  e per  $\rho$  abbastanza piccolo, i secondi membri delle  $(\Sigma)$  sono funzioni regolari. La singolarità del sistema, relativa al valor zero della variabile indipendente  $\rho$ , proviene così esclusivamente dal fattore  $\rho$ , che compare nel primo membro della seconda equazione.

*Esistenza di integrali olomorfi.* - Se  $\vartheta(\rho), \vartheta'(\rho)$  è una soluzione olomorfa delle  $(\Sigma)$ ,  $\vartheta'(\rho)$  deve necessariamente ridursi a  $-1$  per  $\rho = 0$ . Basta, per accertarsene, porre  $\rho = 0$  nella seconda delle  $(\Sigma)$ .

Osservato questo, affermo che:

TEOR. I. - Il sistema  $(\Sigma)$  ammette  $\infty^1$  integrali olomorfi  $\vartheta(\varrho)$ ,  $\vartheta'(\varrho)$ , riducentisi, per  $\varrho = 0$ ,  $\vartheta$  a un valore arbitrario  $\vartheta_0$ ,  $\vartheta'$  a  $-1$ .

La dimostrazione si fa agevolmente, ricorrendo al calcolo dei limiti di CAUCHY.

In primo luogo  $-2\varrho^2\vartheta'/H$ ,  $-2\mu W/H$  possono ritenersi funzioni dei tre argomenti  $\varrho$ ,  $\vartheta - \vartheta_0$ ,  $\vartheta' + 1$ , regolari nell'intorno del valore zero di ciascuno di essi. Sotto questo aspetto, esse vengono inoltre a dipendere dalla costante  $\vartheta_0$  e si presentano — importa notarlo — come funzioni periodiche di detta  $\vartheta_0$ .

Dopo ciò si esaurisce in un momento la parte formale della dimostrazione, verificando che il sistema  $(\Sigma)$  è effettivamente atto a fornire, mediante successive derivazioni, i valori, per  $\varrho = 0$ , delle derivate delle funzioni  $\vartheta(\varrho)$ ,  $\vartheta'(\varrho)$ , supposte olomorfe. Con questi valori, che riescono evidentemente periodici, rispetto a  $\vartheta_0$ , si possono costruire le serie di TAYLOR, definienti gli integrali  $\vartheta(\varrho)$ ,  $\vartheta'(\varrho)$ .

Resta da provarne la convergenza.

Pongasi

$$|\vartheta - \vartheta_0| = \tau_1, \quad |\vartheta' + 1| = \tau_2$$

e si indichino con  $\mathfrak{M}_1(\varrho, \tau_1, \tau_2)$ ,  $\mathfrak{M}_2(\varrho, \tau_1, \tau_2)$  due funzioni maggioranti di  $-2\vartheta'/H$ ,  $-2\mu W/H$  rispettivamente.

Basta confrontare il sistema  $(\Sigma)$ , scritto per maggior chiarezza sotto la forma

$$(\Sigma') \quad \begin{cases} \frac{d(\vartheta - \vartheta_0)}{d\varrho} = -2\varrho^2 \frac{\vartheta'}{H}, \\ \varrho \frac{d(\vartheta' + 1)}{d\varrho} + 4(\vartheta' + 1) = -2\mu\varrho \frac{W}{H}, \end{cases}$$

con

$$(14) \quad \begin{cases} \frac{d\tau_1}{d\varrho} = \varrho^2 \mathfrak{M}_1, \\ \varrho \frac{d\tau_2}{d\varrho} + 4\tau_2 = \varrho \mathfrak{M}_2, \end{cases}$$

per riconoscere che quest'ultimo è un sistema maggiorante.

Tutto si riduce così a far vedere che il sistema (14) ammette una soluzione  $\tau_1(\varrho)$ ,  $\tau_2(\varrho)$ , olomorfa e annullantesi per  $\varrho = 0$ .

Si considerino a tale scopo i valori delle derivate di  $\tau_1$ ,  $\tau_2$ , per  $\varrho = 0$ .

Essi vengono successivamente determinati dalle equazioni

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d^n \tau_1}{d\rho^n} = \frac{d^n(\rho^2 \mathfrak{M}_1)}{d\rho^n}, \\ (n+4) \frac{d^n \tau_2}{d\rho^n} = n \frac{d^n \mathfrak{M}_2}{d\rho^n} \end{array} \right. \quad (n = 1, 2, \dots),$$

che si ricavano derivando le (14) — la prima  $n - 1$  volte, la seconda  $n -$  e facendo poi  $\rho = 0$ .

Maggioranti delle (15) sono evidentemente le equazioni

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^n \tau_1}{d\rho^n} = \frac{d^n(\rho^2 \mathfrak{M}_1)}{d\rho^n}, \\ \frac{d^n \tau_2}{d\rho^n} = \frac{d^n \mathfrak{M}_2}{d\rho^n}. \end{array} \right.$$

Ma queste corrispondono al sistema

$$\frac{d\tau_1}{d\rho} = \rho^2 \mathfrak{M}_1, \quad \frac{d\tau_2}{d\rho} = \mathfrak{M}_2,$$

il quale si comporta regolarmente per  $\rho = 0$  e rientra quindi nel teorema generale di esistenza, conosciuto sotto il nome di teorema di BRIOT e BOUQUET.

*Non esistenza di altri integrali.* - Le espressioni degli  $\infty^1$  integrali olomorfi di  $(\Sigma)$  sono evidentemente della forma

$$(16) \quad \left\{ \begin{array}{l} \vartheta - \vartheta_0 = \rho \alpha(\rho, \vartheta_0), \\ \vartheta' + 1 = \rho \beta(\rho, \vartheta_0), \end{array} \right.$$

dove  $\alpha$  e  $\beta$  designano funzioni di  $\rho$  e di  $\vartheta_0$ , periodiche rispetto a  $\vartheta_0$  e regolari per  $\rho$  abbastanza piccolo.

Effettuiamo un cambiamento di variabili, nel sistema differenziale  $(\Sigma)$ , sostituendo alle funzioni incognite  $\vartheta$  e  $\vartheta'$  due nuove funzioni  $\vartheta_0, u$ , legate a  $\vartheta, \vartheta'$  dalle formole

$$(17) \quad \left\{ \begin{array}{l} \vartheta - \vartheta_0 = \rho \alpha(\rho, \vartheta_0), \\ \vartheta' + 1 = \rho \beta(\rho, \vartheta_0) + u. \end{array} \right.$$

Queste definiscono un'effettiva trasformazione fra le due coppie  $\vartheta, \vartheta'$ ;  $\vartheta_0, u$ , regolare nell'intorno di  $\rho = 0$ , poichè il determinante funzionale  $\begin{pmatrix} \vartheta & \vartheta' \\ \vartheta_0 & u \end{pmatrix}$  si riduce all'unità per  $\rho = 0$ .

La risoluzione, rispetto a  $\vartheta_0$ , della prima equazione ci dà

$$(18) \quad \vartheta_0 = \vartheta + \varrho \bar{\alpha}(\varrho, \vartheta),$$

con  $\bar{\alpha}$  funzione regolare per  $\varrho$  abbastanza piccolo e periodica rispetto a  $\vartheta$ . Quest'ultima asserzione richiede una parola di commento:

Dal confronto della (18) colla prima delle (17) si ricava

$$\bar{\alpha}(\varrho, \vartheta) = -\alpha(\varrho, \vartheta_0),$$

l'eguaglianza cambiandosi in identità se nei due membri si immagina tutto espresso per  $\varrho, \vartheta$ , ovvero per  $\varrho, \vartheta_0$ . Ciò posto, si osservi che, quando  $\vartheta_0$  si incrementa di  $2\pi$ , anche  $\vartheta_0 + \varrho\alpha$ , cioè  $\vartheta$ , subisce un eguale incremento,  $\alpha$  essendo funzione periodica.

Ne viene

$$\bar{\alpha}(\varrho, \vartheta) = -\alpha(\varrho, \vartheta_0) = -\alpha(\varrho, \vartheta_0 + 2\pi) = \bar{\alpha}(\varrho, \vartheta + 2\pi),$$

che mette appunto in evidenza la periodicità di  $\bar{\alpha}$ .

Portando nella seconda delle (17) il valore (18) di  $\vartheta_0$  e chiamando  $f(\varrho, \vartheta)$  la espressione, che ne risulta per  $\beta$ , si ottiene

$$(19) \quad u = \vartheta' + 1 - \varrho f(\varrho, \vartheta),$$

dove  $f$  si comporta evidentemente come  $\alpha$ , è cioè funzione regolare di  $\varrho$ , per  $\varrho$  abbastanza piccolo, e periodica rispetto a  $\vartheta$ .

Il sistema trasformato in  $\vartheta_0, u$  si costruisce, derivando le (18), (19), il che dà

$$\begin{aligned} \frac{d\vartheta_0}{d\varrho} &= \frac{d\vartheta}{d\varrho} + \frac{\partial(\varrho \bar{\alpha})}{\partial \varrho} + \varrho \frac{\partial \bar{\alpha}}{\partial \vartheta} \frac{d\vartheta}{d\varrho}, \\ \frac{du}{d\varrho} &= \frac{d\vartheta'}{d\varrho} - \frac{\partial(\varrho f)}{\partial \varrho} - \varrho \frac{\partial f}{\partial \vartheta} \frac{d\vartheta}{d\varrho}, \end{aligned}$$

sostituendo per  $d\vartheta/d\varrho, d\vartheta'/d\varrho$  i loro valori, forniti dalle ( $\Sigma$ ) e immaginando poi espressi  $\vartheta, \vartheta'$  per  $\vartheta_0, u_0$ , a norma delle (17). Si vede subito che il risultato è del tipo

$$\begin{cases} \frac{d\vartheta_0}{d\varrho} = \bar{a}, \\ \varrho \frac{du}{d\varrho} = -4u + \varrho \bar{b}, \end{cases}$$

con  $\bar{a}$  e  $\bar{b}$  funzioni periodiche di  $\vartheta_0$ , regolari per qualsiasi valore finito di  $u$  e per  $\varrho$  abbastanza piccolo.

In virtù delle (16) e (17), queste equazioni devono ammettere gli  $\infty^1$  integrali particolari

$$\vartheta_0 = \text{cost.}, \quad u = 0,$$

e ciò esige che i secondi membri si annullino (per qualsiasi valore di  $\varrho$  e di  $\vartheta_0$ ), quando vi si fa  $u = 0$ .

Il sistema trasformato in  $\vartheta_0$ ,  $u$  può quindi essere scritto

$$(\Sigma'') \quad \begin{cases} \frac{d\vartheta_0}{d\varrho} = au, \\ \varrho \frac{du}{d\varrho} = (-4 + \varrho b)u, \end{cases}$$

$a$  e  $b$  designando ancora funzioni di  $\varrho$ ,  $u$ ,  $\vartheta_0$ , regolari per qualunque valore finito di  $u$ , purchè  $\varrho$  sia abbastanza piccolo, e periodiche rispetto a  $\vartheta_0$ .

È ora assai facile, imitando un ragionamento di BRIOT e BOUQUET (\*), dimostrare il

TEOR. II. - *Oltre alle soluzioni olomorfe, il sistema ( $\Sigma$ ) non ne ammette alcun'altra (reale), tale che, per  $\varrho$  convergente a zero (lungo l'asse reale, naturalmente), si abbia*

$$(20) \quad \lim_{\varrho \rightarrow 0} \vartheta'(\varrho) = -1.$$

Sia  $\vartheta(\varrho)$ ,  $\vartheta'(\varrho)$  una soluzione (reale), regolare per  $\varrho > 0$  e abbastanza piccolo. Quanto al comportamento per  $\varrho$  convergente a zero, si faccia soltanto l'ipotesi (20).

Mediante le (18), (19), la  $\vartheta(\varrho)$ ,  $\vartheta'(\varrho)$  dà luogo ad una soluzione  $\vartheta_0(\varrho)$ ,  $u(\varrho)$  delle ( $\Sigma''$ ), regolare per  $\varrho > 0$  e tale che

$$(20') \quad \lim_{\varrho \rightarrow 0} u(\varrho) = 0.$$

Gli integrali olomorfi delle ( $\Sigma$ ) corrispondono, come già abbiamo notato, alle  $\infty^1$  soluzioni delle ( $\Sigma''$ ), per cui la funzione  $u(\varrho)$  si annulla identicamente (e  $\vartheta_0 = \text{cost.}$ ).

Ad escludere la esistenza di altri integrali (reali) delle ( $\Sigma$ ), soddisfacenti alla (20), basterà constatare che le ( $\Sigma''$ ) non possono ammettere alcuna soluzione (reale), per cui  $u(\varrho)$  verifichi la (20') senza essere identicamente nulla.

Sia, se possibile,  $u(\varrho)$ ,  $\vartheta_0(\varrho)$  una tale soluzione:  $\varrho_0$  un valore di  $\varrho$ , in cui  $u(\varrho_0) = u_0$  non si annulla.

(\* Cfr. per es. PICARD, *Traité d'analyse*, tom. III, pag. 27.

$u$  non cresce indefinitamente, anzi converge a zero con  $\varrho$ . Si può dunque scegliere  $\varrho_0$  abbastanza piccolo, perchè, per tutti i valori  $\varrho$ ,  $u(\varrho)$ ,  $\vartheta_0(\varrho)$ , relativi all'intervallo  $(\varrho_0, 0)$ , estremi inclusi (\*), la funzione

$$b(\varrho, u(\varrho), \vartheta_0(\varrho))$$

resti finita e quindi (data la sua regolarità per  $\varrho > 0$ ) integrabile.

Ciò posto, indichiamo con  $v$  la funzione

$$\log(\varrho^4 u),$$

con  $v_0$  il valore finito  $\log(\varrho_0^4 u_0)$ , che essa assume per  $\varrho = \varrho_0$ .

Sarà, in virtù della (20'),

$$\lim_{\varrho \rightarrow 0} v = -\infty.$$

D'altra parte la seconda delle ( $\mathcal{L}''$ ), dividendone entrambi i membri per  $\varrho\mu$ , diviene

$$\frac{d \log u}{d\varrho} = -\frac{4}{\varrho} + b,$$

ossia

$$\frac{dv}{d\varrho} = b.$$

Integrando fra  $\varrho_0$  e  $\varrho$  si ha

$$v = v_0 + \int_{\varrho_0}^{\varrho} b d\varrho,$$

e questa eguaglianza è assurda, poichè, al convergere di  $\varrho$  a zero, il primo membro ha per limite  $-\infty$ , mentre il secondo resta finito. *c.d.d.*

## 5. - Determinazione delle $\Sigma$ . Traiettorie di collisione e traiettorie di eiezione. Relazione di simmetria.

Abbiamo visto a § 3 che, sopra una generica  $\Sigma$ , le variabili  $\vartheta$  e  $\Theta$  sono funzioni di  $r$ , regolari per  $r$  abbastanza piccolo ( $\epsilon > 0$ ): abbiamo

---

(\*) È vero che non si sa niente del comportamento di  $\vartheta_0(\varrho)$  al convergere di  $\varrho$  a zero, ma come s'è avvertito,  $b$  è funzione periodica dell'argomento  $\vartheta_0$ , e questo varia nel campo reale. La legittimità della conclusione è così manifesta.

visto inoltre (lemmi a) e c) del § 2) che la funzione

$$\sigma = r^{\frac{1}{2}} \left( \frac{\Theta}{r^2} - 1 \right)$$

resta finita e che il limite inferiore del prodotto  $rR^2$  rimane superiore a zero, anche quando  $r$  decresce indefinitamente.

Avendo riguardo alle (11), (12), se ne ricava:

1) Una generica  $\Sigma$  corrisponde a soluzioni  $\vartheta(\varrho)$ ,  $\vartheta'(\varrho)$  del sistema ( $\Sigma$ ), regolari per  $\varrho$  abbastanza piccolo ( $\varepsilon > 0$ ).

2) Al convergere di  $\varrho$  verso zero, la funzione  $\sigma = \varrho^3 \vartheta'$  resta finita e  $|\varrho R| = |H|$  non discende al disotto di un limite positivo assegnabile.

Ciò posto, ricordiamo che  $W$  è funzione di  $\varrho$ ,  $\vartheta$ , regolare per  $\varrho$  abbastanza piccolo e periodica rispetto a  $\vartheta$ . Concluderemo ovviamente (pur non sapendo come si comportano  $\vartheta(\varrho)$ ,  $\vartheta'(\varrho)$  al convergere di  $\varrho$  verso 0) che, sopra una generica  $\Sigma$ ,  $W/H$  è funzione di  $\varrho$ , finita e integrabile da un certo valore  $\varrho_0$  a zero.

Designando con  $M$  un'opportuna costante, potremo ritenere

$$\left| 2\mu \frac{W}{H} \right| < M.$$

Moltiplichiamo ora la seconda delle ( $\Sigma$ ) per  $\varrho^2$ . Se ne trae

$$\frac{d}{d\varrho} \{ \varrho^4 (\vartheta' + 1) \} = - 2\mu \varrho^4 \frac{W}{H},$$

donde, integrando fra  $\varrho_0$  e 0, ove si tenga presente che  $\varrho^3 \vartheta'$  resta finito e quindi  $\lim_{\varrho=0} \varrho^4 \vartheta' = 0$ ,

$$\varrho_0^4 \{ \vartheta'(\varrho_0) + 1 \} = - \int_0^{\varrho_0} 2\mu \varrho^4 \frac{W}{H} d\varrho.$$

Questa equazione può essere scritta

$$\vartheta'(\varrho_0) + 1 = - \int_0^{\varrho_0} 2\mu \left( \frac{\varrho}{\varrho_0} \right)^4 \frac{W}{H} d\varrho,$$

con che la funzione sotto il segno resta ancora minore di  $M$  in valore assoluto ( $\varrho/\varrho_0$  è infatti  $< 1$  in tutto l'intervallo di integrazione). L'integrale del secondo membro converge perciò a zero con  $\varrho_0$  e quindi

$$\lim_{\varrho_0=0} \vartheta'(\varrho_0) = - 1.$$

Per le soluzioni  $\Sigma$  è dunque soddisfatta la condizione (20).



Se ne conclude, in base al secondo teorema del precedente paragrafo, che le  $\Sigma$  sono comprese fra gli  $\infty^1$  integrali del sistema ( $\Sigma$ ), olomorfi per  $\rho = 0$ .

Reciprocamente ciascun integrale olomorfo definisce una  $\Sigma$ .

Basterà provare che il movimento, corrispondente ad uno qualunque dei detti integrali, avviene in modo che, al convergere di  $t$  verso un valore finito  $t_1$ , la  $r$ , o, ciò che è lo stesso, la  $\rho$  converge a zero. Ricordiamo a tale scopo che, integrato il sistema ridotto (II), la legge del moto si ha dalla equazione [prima delle (I')]

$$\frac{dt}{dr} = \frac{1}{\frac{\partial F}{\partial r}} = \frac{1}{R}.$$

Ciò è quanto dire, in virtù delle (11), (12), che, per ogni soluzione del sistema ( $\Sigma$ ),

$$dt = -2\rho^2 \frac{d\rho}{H}.$$

La funzione  $1/H$  resta finita al convergere di  $\rho$  a zero, anzi

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{1}{H} = \pm \frac{1}{\sqrt{2\nu}},$$

secondochè nella (12) si attribuisce al radicale il segno  $-$  o il segno  $+$ .

$t$  converge dunque (crescendo o decrescendo secondo il segno adottato per il radicale) verso un valore finito, diciamo  $t_1$ , al convergere di  $\rho$  a zero.

In definitiva:

*Le traiettorie singolari  $\Sigma$ , lungo le quali interviene un urto  $P$ ,  $S$ , entro un tempo finito, corrispondono a tutte e sole le soluzioni del sistema ( $\Sigma$ ), olomorfe per  $\rho = 0$ .*

*Se, nel sistema ( $\Sigma$ ) stesso, si prende positivamente il radicale  $H$ , queste soluzioni olomorfe corrispondono ad urti futuri (traiettorie di collisione), se il radicale si prende negativamente, ad urti passati (traiettorie di eiezione).*

Il sistema ( $\Sigma$ ) possiede una notevole proprietà analitica. Esso rimane invariato se si scambiano contemporaneamente  $\vartheta$  in  $-\vartheta$  e  $H$  in  $-H$ . La verifica è immediata, ove si osservi che  $\Delta$ ,  $V$  e, per conseguenza,  $H$  sono funzioni pari di  $\vartheta$ ,  $W$  invece funzione dispari.

In virtù di tale proprietà, si ha manifestamente: *La simmetrica (rispetto alla retta  $SJ$ ) di una traiettoria di collisione è traiettoria di eiezione e reciprocamente.*

### 6. - Discussione delle traiettorie singolari per $\mu = 0$ .

Particolare interesse presentano le traiettorie singolari chiuse, le quali, per così dire, nascono e muoiono in  $S$ .

Ci occuperemo in questo paragrafo del caso elementare  $\mu = 0$ .

Così acqueriremo un'idea della natura della questione, procurandoci in pari tempo un fondamento prezioso, per affrontare a suo tempo il caso generale.

Per  $\mu = 0$  (quando cioè la massa di  $J$  è nulla e quindi non influisce sul moto della coppia  $S, P$ ), si è ricondotti al problema piano dei due corpi, anzi, siccome anche la massa di  $P$  è, per ipotesi, trascurabile, addirittura al moto di  $P$  attratto da un centro  $S$  fisso (o, ciò che è lo stesso, in modo rettilineo uniforme).

Le traiettorie singolari sono evidentemente le rette uscenti da  $P$ .

L'integrale delle forze vive (relativo al moto rettilineo di un punto attratto dall'origine in ragione inversa dei quadrati delle distanze)

$$(21) \quad \frac{1}{2} x'^2 = \frac{1}{x} + h$$

mostra, come si vede subito e come del resto è ben noto, che, se l'energia totale  $h$  è positiva, il moto non cambia senso: si va, o dal centro di forza all'infinito, o viceversa. Se invece l'energia totale  $h$  è negativa, il mobile non descrive tutta la retta, ma il solo segmento  $0, -1/h$ . Si tratta perciò di eiezione, seguita da collisione.

Le traiettorie singolari chiuse sono dunque i segmenti rettilinei con un estremo in  $S$  (contati due volte).

Questo, si intende bene, concerne il moto assoluto, riferito cioè ad un sistema di assi di direzione invariabile.

I caratteri del moto relativo, rispetto ad un sistema di assi ruotanti con  $SJ$ , o, ciò che è sostanzialmente la stessa cosa, rispetto alle nostre variabili  $\varrho, \vartheta$ , si ricavano, nel modo più comodo, dalle ( $\Sigma$ ).

La seconda di esse, fattovi  $\mu = 0$ , dà (come unico integrale olomorfo nell'intorno di  $\varrho = 0$ )

$$\vartheta' = -1.$$

La espressione (12) di  $H$ , ponendovi  $\mu = 0$  e quindi  $\nu = 1, \vartheta' = -1$ , si riduce a

$$\pm \sqrt{2 - 2C\varrho^2}$$

e la prima delle ( $\Sigma$ ) corrispondentemente a

$$(22) \quad \frac{d\vartheta}{d\rho} = \pm \frac{2\rho^2}{\sqrt{2 - 2C\rho^2}}.$$

La espressione (6) di  $F$  mette in evidenza che, per  $\mu = 0$ ,  $\nu = 1$ ,  $\vartheta' = -1$ , la costante  $C$  di JACOBI non è che la  $-h$  del moto assoluto rappresentato dalla (21). *Le traiettorie (relative) chiuse sono dunque definite dalla equazione differenziale (22), in cui si intenda  $C$  costante positiva.*

Quanto alle posizioni, effettivamente occupate dal mobile, sopra queste curve, è chiaro, per la natura del moto assoluto corrispondente, che si avranno tutte facendo crescere  $\rho$  da 0 a  $1/|\sqrt{C}|$  e di là decrescere fino a zero. Nel periodo, in cui  $\rho$  cresce (eiezione) si deve prendere il radicale  $H$  negativamente e quindi nella (22) il segno  $-$ , nel secondo periodo invece (collisione) il segno  $+$ , conformemente alla regola enunciata in fine del precedente paragrafo.

Riconosciamo di qua che il  $d\vartheta$  è sempre negativo (\*). Detto perciò  $\vartheta_0$  il valore iniziale di  $\vartheta$  (direzione della tangente in  $S$  all'arco di eiezione), il raggio vettore descriverà l'intera curva ruotando sempre nello stesso senso (negativo), a partire dall'azimut  $\vartheta_0$ , attorno ad  $S$ . L'azimut d'arrivo (direzione della tangente all'arco di collisione) sarà  $\vartheta_0 - 2\Omega$  — una certa costante  $2\Omega$ , che valuteremo tra un momento.

Ciò ritenuto, passiamo alla integrazione effettiva della (22).

Convieni porre

$$(23) \quad \rho = \frac{1}{\sqrt{C}} \operatorname{sen} \frac{w}{2},$$

con che

$$\pm \sqrt{2 - 2C\rho^2} = \sqrt{2} \cos \frac{w}{2},$$

$$d\rho = \frac{1}{2\sqrt{C}} \cos \frac{w}{2} dw$$

(intendendo i radicali presi in valore aritmetico).

Per far crescere  $\rho$  da 0 a  $1/\sqrt{C}$  e poi decrescere fino a zero, basta far variare  $w$  da 0 a  $2\pi$ .

Da 0 a  $\pi$ ,  $\cos(w/2)$  è positivo; negativo invece fra  $\pi$  e  $2\pi$ . Si attribuisce perciò al radicale il debito segno sostituendolo con  $-\sqrt{2} \cos(w/2)$ .

(\*) Cosa a priori evidente, poichè la traiettoria assoluta è rettilinea e qui la si considera rispetto ad assi ruotanti nel senso positivo (delle  $\vartheta$  crescenti).

La (22), così trasformata, diviene

$$-(2C)^{\sharp} d\vartheta = 2 \operatorname{sen}^2 \frac{w}{2} dw = (1 - \cos w) dw,$$

e, integrata, dà

$$(22') \quad w - \operatorname{sen} w = -\zeta,$$

ove ho posto per brevità

$$(24) \quad \zeta = (2C)^{\sharp}(\vartheta - \vartheta_0).$$

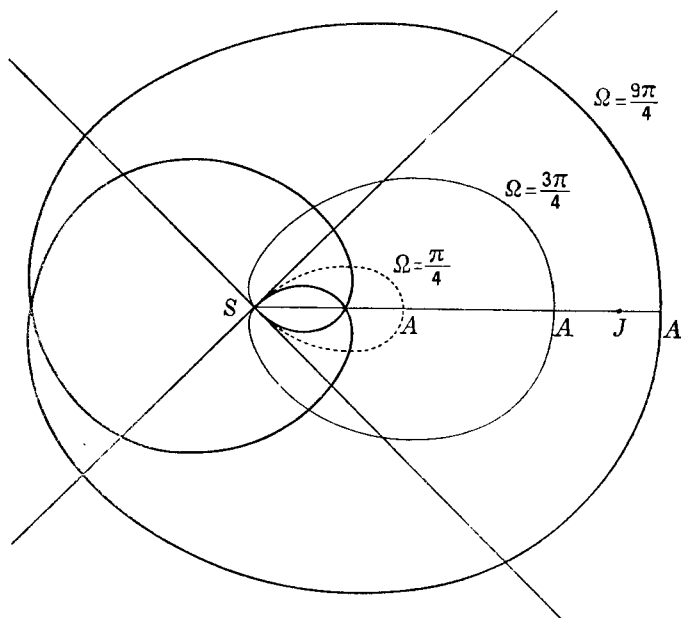


Fig. 2.

La (22') mostra che, mentre  $w$  varia da 0 a  $2\pi$ , mentre cioè si descrive l'intera traiettoria,  $\zeta$  si incrementa di  $-2\pi$ , quindi, a norma della (24),  $\vartheta$  di  $-2\pi/(2C)^{\sharp}$ . L'angolo  $2\Omega$  delle due tangenti in  $S$  è dunque

$$(25) \quad 2\Omega = \frac{2\pi}{(2C)^{\sharp}}.$$

Si vede immediatamente che la curva è simmetrica rispetto alle bisettrice  $SA$  di quest'angolo (retta d'azimut  $\vartheta_0 - \Omega$ ), ossia che a valori di  $\vartheta$

aventi per somma  $2\vartheta_0 - 2\Omega$  corrispondono eguali valori di  $\varrho$ . E, per verità, se due valori di  $\vartheta$  hanno per somma  $2\vartheta_0 - 2\Theta$ , i valori corrispondenti di  $\zeta$  hanno per somma  $2\pi$ . Ma valori di  $\zeta$  aventi per somma  $2\pi$  determinano, a norma della (22'), valori di  $w$  aventi pure per somma  $2\pi$ , quindi valori supplementari di  $w/2$ ; dunque, per la (23), valori eguali di  $\varrho$ , giusta l'asserto.

La (22') è caso limite della equazione di KEPLER. Essa ammette una sola radice reale  $w$ , che si riduce a zero per  $\zeta = 0$ . Ogni funzione trigonometrica di questa radice, in particolare  $\cos w$ , si può sviluppare in serie trigonometrica dell'argomento  $\zeta$ .

Lo sviluppo di  $\cos w$  si ha subito, particolarizzando formule note (\*), ed è

$$\cos w = -\frac{1}{2} + \sum_1^{\infty} \frac{2}{n} s_n \cos n\zeta,$$

con

$$s_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin \varphi \sin n(\varphi - \sin \varphi) d\varphi.$$

Dalla (23), elevando al quadrato, si ha infine l'equazione polare delle traiettorie in questione

$$(22'') \quad r = \frac{1}{C} \sin^2 \frac{w}{2} = \frac{1}{2C} (1 - \cos w) = \frac{1}{2C} \left\{ \frac{3}{2} - \sum_1^{\infty} \frac{2}{n} s_n \cos n\zeta \right\}.$$

Il loro comportamento qualitativo dipende dal valore di  $\Omega$  (veggasi la fig. 2, dove la bisettrice  $SA$  è presa nella direzione  $SJ$ , particolarizzazione, che non ha alcuna influenza sulla forma delle curve). Se  $\Omega$  non supera  $\pi$ , esse si chiudono semplicemente in  $S$ ; se  $\Omega$  supera  $\pi$ , esse si chiudono dopo tanti avvolgimenti attorno ad  $S$ , quant'è la parte intera del quoziente  $\Omega/\pi$ .

Il valore di  $\Omega$  dipende da quello adottato per  $C$ , o, se si vuole, per la distanza afelia  $\overline{SA} = 1/C$ , a norma della (25). Essa esprime (terza legge di KEPLER applicata alle nostre traiettorie) che i quadrati delle ampiezze angolari  $2\Omega$  stanno fra loro come i cubi delle distanze afelie.

Si noti da ultimo, osservando la (23), che, per  $C > 1$ , la distanza  $\overline{SP} = \varrho^2$  rimane costantemente inferiore all'unità, talchè in particolare nessuna traiettoria va allora a passare per il punto  $J$ .

(\*) Cfr. TISSERAND, *Mécanique céleste*, tom. I, cap. XIII.

### 7. - Relazione invariante caratteristica dell'urto.

A quale condizione debbono soddisfare in un generico istante gli elementi determinativi del moto (posizione e velocità di  $P$ ) perchè, a partire da essi, intervenga un urto entro un tempo finito?

La posizione e la velocità di  $P$  sono individuate dai valori di  $\varrho$ ,  $\vartheta$ ,  $\vartheta'$  e dalla costante  $C$  di JACOBI, che sostituisce, o, se si vuole anche, costituisce il quarto parametro.

Si tratterà, lasciando di mettere in evidenza la costante  $C$ , di riconoscere a quale condizione debbono soddisfare  $\varrho$ ,  $\vartheta$ ,  $\vartheta'$  per appartenere ad una delle traiettorie singolari, lungo le quali interviene un urto  $P$ ,  $S$ , per appartenere cioè ad una  $\Sigma$ .

Tutto si riduce dunque ad esprimere che  $\varrho$ ,  $\vartheta$ ,  $\vartheta'$  sono valori assunti lungo una  $\Sigma$ , ossia, per quanto s'è visto a § 5, valori, che rientrano nell'insieme definito dalle (16).

Così stando le cose, la condizione cercata si ha subito eliminando  $\vartheta_0$  tra le (16).

Di questa eliminazione ci siamo già implicitamente occupati a § 4. Ed ecco come.

La (19) è — si può dire — il risultato della eliminazione di  $\vartheta_0$  fra le (17). Le (16) si ottengono dalle (17) ponendovi  $u = 0$ . Non c'è che da porre  $u = 0$  nella (19), perchè essa ci rappresenti il risultato della eliminazione di  $\vartheta_0$  fra le (16).

*La relazione caratteristica dell'urto è dunque*

$$(III) \quad \vartheta' + 1 = \varrho f(\varrho, \vartheta).$$

La  $f$  si comporta regolarmente per  $\varrho$  abbastanza piccolo ed è funzione periodica di  $\vartheta$ . Appunto per questa periodicità rapporto al parametro angolare  $\vartheta$ , la (III) è *uniforme nel senso di POINCARÉ*.

Resta la effettiva determinazione della funzione  $f(\varrho, \vartheta)$ . Il procedimento, che ci ha condotti a definire la (III) come risultato della eliminazione di  $\vartheta_0$  fra le (16), potrebbe a rigore applicarsi anche per il calcolo quantitativo.

Infatti il teorema di esistenza (Teor. I del § 4) insegna a costruire (come serie di potenze di  $\varrho$ ) le funzioni  $\alpha$  e  $\beta$ , e l'eliminazione di  $\vartheta_0$  è pure un'operazione effettuabile, secondo i principi della teoria delle serie di potenze, e permetterebbe di calcolare uno dopo l'altro i coefficienti dello sviluppo di  $f$  in serie di potenze di  $\varrho$ .

Questo scopo si può però raggiungere in modo più spedito, come si esporrà nel seguente paragrafo.

*Osservazione.* - Interpretando altrimenti le lettere (cfr. § 3), la (III) può anche riguardarsi come condizione caratteristica di un urto  $P, J$ . Consideriamola in questa accezione, immaginiamo di esprimervi tutto per le nostre variabili  $\varrho, \vartheta, \vartheta'$ , e rappresentiamola brevemente con

$$u' = 0.$$

Rappresentiamo poi la (III) (come sostanzialmente abbiamo già avuto occasione di fare a § 4) con

$$u = 0.$$

Evidentemente

$$(IV) \quad u u' = 0$$

è la condizione generica di un urto, passato o futuro, di  $P$  con uno degli altri due corpi.

La disuguaglianza

$$u u' \geq 0,$$

assicura dunque la prosecuzione indefinita (passata e futura) del movimento di  $P$ .

### 8. - Calcolo della funzione $f$ .

La relazione (III) è invariante pel suo significato: essa abbraccia tutte e sole le  $\Sigma$ ; è quindi una varietà (dello spazio analitico  $\varrho, \vartheta, \vartheta'$ ) costituita interamente da traiettorie del sistema differenziale ( $\Sigma$ ).

Ne viene che la (III) seguita ad essere soddisfatta, quando ci si sposta lungo le  $\Sigma$ , cioè, con linguaggio analitico, quando la si deriva rispetto a  $\varrho$ , tenendo conto delle ( $\Sigma$ ) (e di essa stessa naturalmente).

Avremo così

$$\frac{d\vartheta'}{d\varrho} = \frac{\partial(\varrho f)}{\partial\varrho} + \varrho \frac{\partial f}{\partial\vartheta} \frac{d\vartheta}{d\varrho},$$

ossia

$$\frac{1}{\varrho} \left\{ -4(\vartheta' + 1) - 2\mu\varrho \frac{W}{H} \right\} = \frac{\partial(\varrho f)}{\partial\varrho} - 2\varrho^3 \frac{\partial f}{\partial\vartheta} \frac{\vartheta'}{H},$$

la quale deve sussistere identicamente, quando si introduca dappertutto, al posto di  $\vartheta'$ , il suo valore (III):  $-(1 - \varrho f)$ .

Posto, per maggior chiarezza,

$$(26) \quad \mathfrak{S} = (H)_{\vartheta = - (1 - \varrho f)} = \pm \sqrt{2\nu - 2C\varrho^2 + 2\mu\varrho^2 V - \varrho^6(1 - \varrho f)^2 + \varrho^6},$$

il risultato della indicata sostituzione si potrà presentare sotto la forma

$$(27) \quad 5f + \varrho \frac{\partial f}{\partial \varrho} = -2\mu \frac{W}{\mathfrak{S}} - \frac{2}{\mathfrak{S}} \varrho^2 (1 - \varrho f) \frac{\partial f}{\partial \vartheta}.$$

La cercata funzione  $f$  è dunque un integrale di questa equazione a derivate parziali, la quale si presta nel modo migliore alla determinazione effettiva. Basta tener presente la sviluppabilità di  $f$  in serie di potenze di  $\varrho$  e porre di conformità

$$(28) \quad f = \sum_0^{\infty} f_m \varrho^m.$$

La (27) permette di calcolare successivamente i coefficienti  $f_m$  dello sviluppo. Per accertarlo, si noti che, nel secondo membro, la  $f$  compare pel tramite dei prodotti  $\varrho f$ ,  $\varrho(\partial f/\partial \vartheta)$ , di modo che, se si deriva  $n$  volte e si pone poi  $\varrho = 0$ , il secondo membro dipende soltanto da  $f_0, f_1, \dots, f_{n-1}$  (e loro derivate rispetto a  $\vartheta$ ).

Nel primo membro viene invece

$$\frac{\partial^n}{\partial \varrho^n} \left( 5f + \varrho \frac{\partial f}{\partial \varrho} \right) = \frac{\partial^n}{\partial \varrho^n} \sum_0^{\infty} (5 + m) f_m \varrho^m,$$

donde, per  $\varrho = 0$ ,

$$n! (5 + n) f_n.$$

Così rimane univocamente determinato  $f_n$  in funzione dei coefficienti, che lo precedono. In particolare la (27) stessa dà, per  $\varrho = 0$ ,

$$5 f_0 = -2\mu \left( \frac{W}{\mathfrak{S}} \right)_{\varrho=0} = 0,$$

come risulta subito dalle (13) e (26). Tutte le  $f_n$  si potranno dunque valutare, l'una dopo l'altra, nel modo indicato, o, ciò che è lo stesso, introducendo per  $f$  lo sviluppo (28) ed eguagliando nei due membri della (27) i coefficienti delle stesse potenze di  $\varrho$ .

Per  $\mu = 0$ , si ha in particolare

$$f = 0.$$

Infatti questo valore verifica la (27) (fattovi  $\mu = 0$ ), ed è il solo, perchè (come abbiamo visto in generale, qualunque sia  $\mu$ ) i coefficienti dello sviluppo (28) sono univocamente determinati.

La condizione (III) dell'urto si riduce allora a

$$\vartheta' + 1 = 0,$$



risultato ovviamente prevedibile, il quale esprime che la velocità angolare (assoluta) di  $P$ , rispetto ad  $S$ , è nulla, ossia che la velocità di  $P$  è diretta secondo la retta  $PS$ .

Tornando al caso generale di  $\mu$  qualunque, facciamo il calcolo dei primi termini dello sviluppo (28).

Anzitutto, da

$$\Delta^2 = 1 - 2r \cos \vartheta + r^2 = 1 - 2\varrho^2 \cos \vartheta + \varrho^4,$$

si trae

$$\Delta^{-1} = 1 + \varrho^2 \cos \vartheta + 4,$$

$$\Delta^{-3} = 1 + 3\varrho^2 \cos \vartheta + \frac{3}{2}(-1 + 5 \cos^2 \vartheta)\varrho^4 + 6,$$

designando genericamente con  $\mathbf{k}$  una espressione d'ordine  $k$  in  $\varrho$ .

Si ha poi

$$V = \frac{1}{\Delta} - \varrho^2 \cos \vartheta = 1 + 4,$$

$$W = \sin \vartheta \left(1 - \frac{1}{\Delta^3}\right) = -\frac{3}{2} \varrho^2 \sin \vartheta \{2 \cos \vartheta + (-1 + 5 \cos^2 \vartheta)\varrho^2 + 4\},$$

$$\frac{1}{\mathfrak{S}} = \pm \frac{1}{\sqrt{2\nu}} \left\{1 + \frac{C - \mu}{2\nu} \varrho^2 + 4\right\},$$

$$-2\mu \frac{W}{\mathfrak{S}} = \pm \frac{3\mu}{\sqrt{2\nu}} \varrho^2 \sin \vartheta \left\{2 \cos \vartheta + \left(-1 + \frac{C - \mu}{\nu} \cos \vartheta + 5 \cos^2 \vartheta\right)\varrho^2 + 4\right\}.$$

Di qua apparisce che il secondo membro della (27) contiene  $\varrho^2$  a fattore. Devono dunque annullarsi  $f_0$  ed  $f_1$ , e conviene, per il calcolo dei coefficienti successivi, prendere  $f$  sotto la forma

$$(28') \quad f = \varrho^2 \psi = \varrho^2 \sum_0^{\infty} \psi_m \varrho^m,$$

donde

$$5f + \varrho \frac{\partial f}{\partial \varrho} = \varrho^2 \left(7\psi + \varrho \frac{\partial \psi}{\partial \varrho}\right) = \varrho^2 \sum_0^{\infty} (m+7) \psi_m \varrho^m.$$

Portiamo per  $f$  la espressione (28') anche nel secondo membro della (27); sopprimiamo da una parte e dall'altra il fattore  $\varrho^2$  e scriviamo

sviluppatamente. Risulta

$$\begin{aligned}
 & 7\psi_0 + 8\psi_1\varrho + 9\psi_2\varrho^2 + 10\psi_3\varrho^3 + 4 \\
 = & \pm \frac{3\mu}{\sqrt{2\nu}} \operatorname{sen} \vartheta \left\{ 2 \cos \vartheta + \left( -1 + \frac{C-\mu}{\nu} \cos \vartheta + 5 \cos^2 \vartheta \right) \varrho^2 + 4 \right\} \\
 & \mp \frac{2}{\sqrt{2\nu}} \varrho^3 \frac{\partial \psi_0}{\partial \vartheta} + 4,
 \end{aligned}$$

e il confronto dei coefficienti delle potenze di  $\varrho$ , fino alla terza, porge

$$\begin{aligned}
 \psi_0 &= \pm \frac{3}{7} \frac{\mu}{\sqrt{2\nu}} \operatorname{sen} 2\vartheta, \\
 \psi_1 &= 0, \\
 \psi_2 &= \pm \frac{1}{3} \frac{\mu}{\sqrt{2\nu}} \operatorname{sen} \vartheta \left( -1 + \frac{C-\mu}{\nu} \cos \vartheta + 5 \cos^2 \vartheta \right), \\
 \psi_3 &= \mp \frac{1}{5} \frac{1}{\sqrt{2\nu}} \frac{\partial \psi_0}{\partial \vartheta} = -\frac{3}{35} \frac{\mu}{\nu} \cos 2\vartheta.
 \end{aligned}$$

La espressione di  $f$ , fino al quint'ordine è dunque

$$(29) \left\{ \begin{aligned}
 f &= \pm \frac{\mu}{\sqrt{2\nu}} \varrho^2 \left\{ \frac{3}{7} \operatorname{sen} 2\vartheta + \frac{1}{3} \operatorname{sen} \vartheta \left( -1 + \frac{C-\mu}{\nu} \cos \vartheta + 5 \cos^2 \vartheta \right) \varrho^2 \right. \\
 &\quad \left. \mp \frac{3}{35} \frac{2}{\sqrt{2\nu}} \cos 2\vartheta \varrho^3 + \dots \right\},
 \end{aligned} \right.$$

dove (ricordando la regola del § 5 e intendendo per  $\sqrt{2\nu}$  il valore aritmetico del radicale) *dovremo prendere i segni superiori, se si tratta di urti futuri, gli inferiori, se si tratta di urti passati.*

I termini effettivamente calcolati nella (23) bastano a fornire una espressione approssimata di  $f$ , valida, per  $\varrho$  abbastanza piccolo, qualunque sia  $\vartheta$ . Essi permettono in particolare di seguire l'andamento delle curve

$$f = \text{cost.}$$

in un intorno abbastanza piccolo di  $S$ .

Si noti che, per  $\vartheta = 0$ , il primo coefficiente, che non si annulla, è precisamente quello di  $\varrho^5$ . Tutti i termini calcolati sono dunque necessari per la rappresentazione approssimata (per poter asserire che, di fronte

ad essi, i successivi sono trascurabili in un intorno abbastanza piccolo di  $\varrho = 0$ , qualunque sia  $\vartheta$ ).

La determinazione di  $f$  è esauriente per  $\varrho$  abbastanza piccolo. A definire la funzione in tutto il suo campo di esistenza, basta teoricamente il prolungamento analitico. Ma sarebbe desiderabile di precisare il campo di validità dello sviluppo (28); e più generalmente di riconoscere i caratteri della funzione  $f$  e il modo di calcolarla effettivamente per qualunque valore di  $\varrho$ . Rispetto alla prima questione, non sarà forse superfluo osservare che, applicando il metodo dei limiti alla equazione (27), si può facilmente assegnare un valore di  $\varrho$  (se non il vero raggio di convergenza), al disotto del quale lo sviluppo (28) di  $f$  è certo convergente.

### 9. - Traiettorie singolari chiuse per i piccoli valori di $\mu$ .

Nel caso speciale  $\mu = 0$  (§ 6) le traiettorie singolari, corrispondenti a valori positivi della costante  $C$  di JACOBI, sono tutte curve chiuse.

Quale sarà il comportamento delle analoghe  $\Sigma$  per  $\mu$  qualunque? Si può dimostrare che, almeno per  $\mu$  abbastanza piccolo e  $C > 1$ , la proprietà seguita a sussistere.

A questo scopo, riprendiamo per un momento a considerare il sistema differenziale ( $\Sigma$ ), riguardandovi la costante  $\mu$  come un parametro (e  $\nu = 1 - \mu$ ).

Lo stesso metodo dei limiti, che ha servito a stabilire il teorema di esistenza, mostra (\*) che gli  $\infty^1$  integrali olomorfi  $\vartheta(\varrho)$ ,  $\vartheta'(\varrho)$  sono, in un certo intorno  $E$  di  $\varrho = 0$ , funzioni regolari di  $\mu$ , per  $\mu < 1$ , e in particolare per  $\mu$  abbastanza piccolo.

Ciò ritenuto, conveniamo di designare con  $\bar{\Sigma}_\mu$  una qualunque delle  $\infty^1 \Sigma$ , che corrispondono a un dato valore di  $\mu$  e a un valore, pur dato e maggiore dell'unità, della costante  $C$  di JACOBI.

Fissiamo una generica  $\bar{\Sigma}_0$  e la  $\bar{\Sigma}_\mu$  uscente da  $S$  sotto lo stesso angolo  $\vartheta_0$ .

Sia  $E'$  un generico intorno di  $S$ , interno ad  $E$ .

La  $\bar{\Sigma}_0$ , essendo chiusa, rientra manifestamente in  $E'$  (e quindi in  $E$ ), dopo un certo percorso finito [e non nullo, perchè ogni  $\bar{\Sigma}_0$  contiene anche un punto,  $\varrho = 1/|\sqrt{C}|$ , in cui  $H$  si annulla e che non può quindi appartenere al campo  $E$  di regolarità del sistema differenziale ( $\Sigma$ )].

Dico che anche  $\bar{\Sigma}_\mu$  rientra in  $E$ , dopo un percorso finito, purchè  $\mu$  differisca abbastanza poco dallo zero.

La giustificazione di tale asserto non va cercata nelle equazioni ( $\Sigma$ ),

(\*) Cfr. POINCARÉ, *Mécanique céleste*, tom. I, nn. 23-26.

il cui comportamento, fuori di  $E$ , non è sempre regolare (il denominatore  $H$  può benissimo annullarsi), ma nelle equazioni originarie (I), in cui  $t$  è la variabile indipendente. Da quando  $\bar{\Sigma}_0$  esce a quando rientra in  $E'$  passa un tempo finito; in questo intervallo la  $\bar{\Sigma}_0$  resta sempre a distanza finita, non solo da  $S$ , ma anche, per essere  $C > 1$  (cfr. § 6), dall'altro punto singolare  $J$ . Si può dunque essere certi, per un teorema fondamentale del sig. POINCARÉ (\*), che, se il parametro  $\mu$  è abbastanza piccolo,  $\bar{\Sigma}_\mu$  si mantiene vicina a  $\bar{\Sigma}_0$  tanto quanto si vuole; così vicina in particolare che, quando  $\bar{\Sigma}_0$  rientra in  $E'$ , la posizione sincrona di  $\bar{\Sigma}_\mu$  appartenga ad  $E$ .

Adesso è facile constatare che  $\bar{\Sigma}_\mu$  va proprio a terminare in  $S$ .

Immaginiamo infatti di partirci da  $S$  e di seguire  $\bar{\Sigma}_\mu$  nel suo percorso. In partenza, si ha a fare con una traiettoria di eiezione. Sopra di essa, sarà di conseguenza soddisfatta la (III), il radicale  $\sqrt{2v}$  dello sviluppo di  $f$  [come l' $H$  delle ( $\Sigma$ )] andando preso negativamente.

La (III), o meglio la sua continuazione analitica, seguita ad essere soddisfatta lungo tutta la curva.

Quale può essere la continuazione analitica della (III), quando  $\bar{\Sigma}_\mu$  rientra in  $E$ ?

La circostanza che la funzione  $f$  verifica la (27) mostra che in  $E$  sono possibili per  $f$ , e quindi per la (III), due sole determinazioni, corrispondenti al doppio segno del radicale. Nell'uscire da  $E$  il radicale andava preso negativamente; nel rientrare lo si dovrà invece prendere positivamente, poichè questo accade sopra la traiettoria vicinissima  $\bar{\Sigma}_0$ .

La  $\bar{\Sigma}_\mu$  rientra dunque in  $E$  coi caratteri di traiettoria di collisione.  
*c.d.d.*

Parmi ben probabile che, al di là di un certo valore della costante di JACOBI, le  $\Sigma$  seguitino ad essere curve chiuse, per qualunque valore di  $\mu$  (e non soltanto per  $\mu$  abbastanza piccolo). Non sono però riusciti a dimostrarlo rigorosamente.

(\*) Loco citato, n. 27.

XVII.

SUR LA SINGULARITÉ DONT SONT AFFECTÉES,  
POUR UNE VITESSE NULLE, LES ÉQUATIONS DU  
MOUVEMENT D'UN POINT MATÉRIEL FROTTANT  
SUR UNE SURFACE

« Archiv der Math. und Physik », III R., V Bd. (1903),  
pp. 28-37.

1. - Remarques préliminaires.

Lacune que la rigueur mathématique impose de combler.

Soit

$$(1) \quad \varphi(x, y, z) = 0$$

l'équation de la surface  $S$  (que je suppose fixe pour simplifier) sur laquelle est assujéti à rester un point matériel  $P$  sollicité par une force donnée ( $F$ ).

Soient:

$X, Y, Z$  les composantes de ( $F$ ) suivant les axes coordonnés;

$F_t$  et  $F_n$  les valeurs absolues de ses composantes tangentielle et normale dans un point quelconque de la surface  $S$ ;

$\alpha, \beta, \gamma$  les cosinus directeurs de la normale à  $S$ , ayant choisi comme direction positive celle pour laquelle

$$X\alpha + Y\beta + Z\gamma = F_n.$$

Prenons comme unité de masse la masse de  $P$ : dès qu'on suppose sa vitesse différente de zéro, les équations du mouvement seront

$$(2) \quad \begin{cases} x'' = X + N\alpha - f|N|\frac{x'}{v}, \\ y'' = Y + N\beta - f|N|\frac{y'}{v}, \\ z'' = Z + N\gamma - f|N|\frac{z'}{v}. \end{cases}$$

Il est à peine nécessaire de dire que  $f$  désigne le coefficient de frottement et  $N$  la réaction normale (inconnue auxiliaire, que le système (1), (2) lui-même sert à déterminer).

Si l'on a  $v = 0$ , la loi empirique du frottement au repos apprend à distinguer deux cas: ou bien, dans la position envisagée  $M$ , la composante tangentielle  $F_T$  de la force active ne dépasse pas  $fF_n$ ; ou bien

$$F_T > fF_n.$$

Dans le premier cas le point matériel reste en équilibre, et il s'ensuit la définition du frottement comme une force exactement opposée à la composante tangentielle de la force active ( $F$ ).

Dans le second cas le point commence à glisser. Après un temps infiniment petit  $dt$  sa vitesse n'est plus nulle et les équations (2) s'appliquent.

L'expérience nous fait ainsi prévoir ce fait analytique:

Il existe, sous la condition

$$F_T > fF_n,$$

une solution du système différentiel (1), (2) déterminée par la condition initiale que le mobile sort d'un point donné de la surface avec une vitesse nulle.

Voilà une question d'existence, dont il ne semble pas qu'on se soit préoccupé jusqu'ici au point de vue mathématique. Il s'agit, bien entendu, d'un cas, qui ne rentre pas dans le théorème général de BRIOT et BOUQUET, puisque le système (2) ne se comporte pas régulièrement pour  $v = 0$ .

Il faut donc examiner la chose de plus près.

C'est ce que je vais faire en transformant d'abord le système différentiel (1), (2). Après cela un petit artifice me permettra de démontrer très simplement, par la méthode classique des limites, l'existence des intégrales dans les dites conditions initiales.

Je n'ai pas profité des résultats récemment acquis dans l'étude des singularités des équations différentielles <sup>(1)</sup>, parce que, une fois transformé le système (1), (2), la démonstration directe est presque immédiate. On pourrait s'en passer en appliquant au système (III) (auquel on sera enfin conduit) une remarque de M. PICARD <sup>(2)</sup>.

## 2. - Transformation des équations du mouvement.

Je suppose (ce qui est essentiel pour la démonstration du numéro suivant) que la surface  $S$  et la loi de la force active soient analytiques.

<sup>(1)</sup> Voir notamment E. PICARD, *Traité d'Analyse* [Gauthier-Villars, Paris, 1901], t. III, chap. I, II.

<sup>(2)</sup> L.c.; pag. 22, remarque finale.

Je suppose en outre (pour plus de netteté) que la force ( $F$ ) ne dépende pas de la vitesse du mobile.

Soit  $M$  un point régulier pour  $S$  et pour le champ de force. La composante tangentielle de ( $F$ ) enveloppe sur  $S$  une congruence de lignes (régulières au voisinage de  $M$ ), que j'appellerai lignes 1.

Désignons par  $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$  les cosinus des angles que les tangentes à ces lignes (dans la direction de la force) forment avec les axes coordonnés; par  $s_1$  l'arc (compté dans le même sens); par  $r_1$  le rayon (absolu) de courbure.

Envisageons encore, sur la surface  $S$ , les trajectoires orthogonales 2 des lignes 1 et appelons  $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2; s_2; r_2$  les éléments qui correspondent à  $\alpha_1, \dots, r_1$  (la direction positive étant d'ailleurs fixée arbitrairement).

Comme les cosinus directeurs de la normale principale à 1 sont

$$r_1 \frac{d\alpha_1}{ds_1}, \quad r_1 \frac{d\beta_1}{ds_1}, \quad r_1 \frac{d\gamma_1}{ds_1},$$

on voit que la courbure géodésique  $g_1$  de 1 (projection sur la ligne 2 de la courbure absolue  $1/r_1$ , dirigée suivant la normale principale) est donnée par la somme

$$\alpha_2 \frac{d\alpha_1}{ds_1} + \beta_2 \frac{d\beta_1}{ds_1} + \gamma_2 \frac{d\gamma_1}{ds_1};$$

d'une façon plus concise

$$(3) \quad g_1 = \sum \alpha_2 \frac{d\alpha_1}{ds_1},$$

le symbole  $\sum$  indiquant une somme de termes semblables en  $\alpha, \beta, \gamma$ .

De même

$$(4) \quad g_2 = \sum \alpha_1 \frac{d\alpha_2}{ds_2}$$

représente la courbure géodésique des lignes 2.

Ceci posé, reprenons les équations (2). Pour toute solution régulière (réelle), les coordonnées  $x, y, z$  pourront être censées fonctions de  $t$  par l'intermédiaire de l'arc  $s$  de la trajectoire. En convenant de prendre pour direction positive de  $s$  celle du mouvement, on aura

$$\frac{ds}{dt} = v \geq 0.$$





ayant posé, pour abrégé,

$$P = \cos \vartheta \sum \alpha \frac{d\alpha_1}{ds} + \sin \vartheta \sum \alpha \frac{d\alpha_2}{ds}.$$

D'après (5) et en profitant de l'identité

$$\sum \alpha \frac{d\alpha_2}{ds_1} = \sum \alpha \frac{d\alpha_1}{ds_2},$$

on peut écrire

$$(7) \quad P = \cos^2 \vartheta \sum \alpha \frac{d\alpha_1}{ds_1} + \sin^2 \vartheta \sum \alpha \frac{d\alpha_2}{ds_2} + 2 \cos \vartheta \sin \vartheta \sum \alpha \frac{d\alpha_1}{ds_2},$$

où chacune des trois sommes possède une interprétation géométrique bien simple (courbure normale de la ligne 1, courbure normale de la ligne 2, valeur commune, au signe près, de la torsion géodésique). Mais cela n'a pas d'importance pour notre but.

Achevons la transformation des (2') en les multipliant une première fois par

$$\alpha_1 \cos \vartheta + \alpha_2 \sin \vartheta, \quad \beta_1 \cos \vartheta + \beta_2 \sin \vartheta, \quad \gamma_1 \cos \vartheta + \gamma_2 \sin \vartheta,$$

une seconde fois par

$$-\alpha_1 \sin \vartheta + \alpha_2 \cos \vartheta, \quad -\beta_1 \sin \vartheta + \beta_2 \cos \vartheta, \quad -\gamma_1 \sin \vartheta + \gamma_2 \cos \vartheta,$$

et en les ajoutant chaque fois.

Si l'on a égard aux relations

$$\sum \alpha_1^2 = 1, \quad \sum \alpha_2^2 = 1, \quad \sum \alpha_1 \alpha_2 = 0$$

et à leurs conséquences

$$\sum \alpha_1 \frac{d\alpha_1}{ds} = 0, \quad \sum \alpha_2 \frac{d\alpha_2}{ds} = 0, \quad \sum \left( \alpha_1 \frac{d\alpha_2}{ds} + \alpha_2 \frac{d\alpha_1}{ds} \right) = 0,$$

on trouve de suite

$$\frac{dv}{dt} = F_r \cos \vartheta - f F_n, \quad v^2 \left( \frac{d\vartheta}{ds} + \sum \alpha_2 \frac{d\alpha_1}{ds} \right) = -F_r \sin \vartheta.$$

Or

$$v \frac{d\vartheta}{ds} = \frac{d\vartheta}{dt},$$

tandis que, d'après (5),

$$\sum \alpha_2 \frac{d\alpha_1}{ds} = \cos \vartheta \sum \alpha_2 \frac{d\alpha_1}{ds_1} + \sin \vartheta \sum \alpha_2 \frac{d\alpha_1}{ds_2},$$

ou, en remarquant que

$$\begin{aligned} \sum \alpha_2 \frac{d\alpha_1}{ds_1} &= g_1, & \sum \alpha_2 \frac{d\alpha_1}{ds_2} &= - \sum \alpha_1 \frac{d\alpha_2}{ds_2} = -g_2, \\ \sum \alpha_2 \frac{d\alpha_1}{ds} &= g_1 \cos \vartheta - g_2 \sin \vartheta. \end{aligned}$$

Il résulte ainsi

$$(8) \quad \begin{cases} \frac{dv}{dt} = F_T \cos \vartheta - f|N|, \\ v \frac{d\vartheta}{dt} = -v^2(g_1 \cos \vartheta - g_2 \sin \vartheta) - F_T \sin \vartheta. \end{cases}$$

Pour aller plus loin, imaginons de rapporter la surface  $S$  à un système de coordonnées curvilignes  $q_1, q_2$ , ayant les 1, 2 pour lignes coordonnées (et croissant, sur ces lignes, dans le sens positif).

L'expression du carré de l'élément linéaire sera de la forme

$$H_1^2 dq_1^2 + H_2^2 dq_2^2,$$

$H_1$  et  $H_2$  étant des fonctions de  $q_1, q_2$ , positives et régulières en tout point régulier  $M$  de la surface.

Il en est de même, quant à la régularité, pour les coefficients  $b_{rs}$  de la seconde forme fondamentale

$$\sum_{r,s} b_{rs} dq_r dq_s,$$

qui n'est autre que la forme

$$\alpha d^2x + \beta d^2y + \gamma d^2z,$$

exprimée par les  $q$ .

On a évidemment

$$\begin{aligned} ds_1 &= H_1 dq_1, & ds_2 &= H_2 dq_2; \\ \alpha_1 &= \frac{1}{H_1} \frac{dx}{dq_1}, & \beta_1 &= \frac{1}{H_1} \frac{dy}{dq_1}, & \gamma_1 &= \frac{1}{H_1} \frac{dz}{dq_1}; \\ \alpha_2 &= \frac{1}{H_2} \frac{dx}{dq_2}, & \beta_2 &= \frac{1}{H_2} \frac{dy}{dq_2}, & \gamma_2 &= \frac{1}{H_2} \frac{dz}{dq_2}; \end{aligned}$$

et l'on vérifie sans peine, d'après (3), (4) et (7) (en tenant compte des expressions bien connues des coefficients des deux formes fondamentales) que

$$(9) \quad \begin{cases} g_1 = -\frac{1}{H_1 H_2} \frac{dH_1}{dq_2}, & g_2 = -\frac{1}{H_1 H_2} \frac{dH_2}{dq_1}, \\ P = \frac{b_{11} \cos^2 \vartheta}{H_1^2} + \frac{b_{22} \sin^2 \vartheta}{H_2^2} + \frac{2b_{12} \sin \vartheta \cos \vartheta}{H_1 H_2}. \end{cases}$$

Je signale en passant ces formules, auxquelles il faudrait avoir recours dans les applications concrètes. Ce qu'il nous faut retenir ici, c'est que  $g_1, g_2, b$ , ainsi que  $F_r, F_n, f$  sont des fonctions holomorphes de  $q_1, q_2$  en tout point régulier  $M(q_1^0, q_2^0)$ .

Pour  $v = 0$ , l'équation (6) donne

$$N = -F_n.$$

$F_n$  étant positif, on voit que, pour  $v$  assez petit, l'on a

$$|N| = F_n - v^2 P.$$

La forme définitive des équations du mouvement s'obtient en associant aux (8) celles qui définissent les dérivées de  $q_1$  et  $q_2$ .

Or on a

$$\frac{dq_1}{dt} = v \frac{dq_1}{ds},$$

et par suite, d'après (5),

$$\frac{dq_1}{dt} = v \left( \cos \vartheta \frac{dq_1}{ds_1} + \sin \vartheta \frac{dq_1}{ds_2} \right) = v \frac{\cos \vartheta}{H_1}.$$

D'une façon analogue

$$\frac{dq_2}{dt} = v \frac{\sin \vartheta}{H_2}.$$

On est ainsi conduit au système du quatrième ordre

$$(I) \quad \begin{cases} \frac{dq_1}{dt} = v \frac{\cos \vartheta}{H_1}, & \frac{dq_2}{dt} = v \frac{\sin \vartheta}{H_2}, \\ \frac{dv}{dt} = F_r \cos \vartheta - f(F_n - v^2 P), \\ v \frac{d\vartheta}{dt} = -v^2(g_1 \cos \vartheta - g_2 \sin \vartheta) - F_r \sin \vartheta, \end{cases}$$

les fonctions inconnues étant  $q_1, q_2, v$  et  $\vartheta$ .

Au voisinage des valeurs  $q_1^0, q_2^0$  (quels que soient d'ailleurs  $v$  et  $\vartheta$ ) tout est régulier dans les seconds membres.  $F_r, F_r - fF_n$  sont essentiellement positifs.

**3. - Existence d'une solution holomorphe  
correspondante aux valeurs initiales  $q_1 = q_1^0, q_2 = q_2^0, v = 0$ .**

En prenant les équations du mouvement sous la forme (I), notre tâche revient évidemment à démontrer l'existence d'une solution holomorphe correspondante aux valeurs initiales  $q_1 = q_1^0, q_2 = q_2^0, v = 0$ , celle de  $\vartheta$  n'étant pas donnée à priori.

La dernière des équations (I) montre d'abord que, si une telle solution existe, la valeur initiale de  $\vartheta$  doit annuler  $\sin \vartheta$ ; d'où  $\vartheta = 0$ , ou  $\vartheta = \pi$ .

La seconde hypothèse est à rejeter, puisqu'elle donnerait, pour l'instant initial,

$$\frac{dv}{dt} = -F_r - fF_n;$$

$v$  irait donc en décroissant, ce qui est impossible, parce que sa valeur initiale est nulle.

On a donc initialement  $\vartheta = 0$ , ce qui était à prévoir, le mouvement devant bien commencer dans la direction de la force.

En éliminant  $dt$  et en posant, pour abrégier,

$$D = F_r \cos \vartheta - f(F_n - v^2 P),$$

on tire de (I)

$$(II) \quad \begin{aligned} \frac{dq_1}{dv} &= v \frac{\cos \vartheta}{H_1 D}, & \frac{dq_2}{dv} &= v \frac{\sin \vartheta}{H_2 D}, \\ v \frac{d\vartheta}{dv} &= -v^2 \frac{g_1 \cos \vartheta - g_2 \sin \vartheta}{D} - \frac{F_r}{D} \sin \vartheta. \end{aligned}$$

On remarquera que les seconds membres sont des fonctions holomorphes des arguments  $q_1, q_2, \vartheta, v$  au voisinage des valeurs  $q_1^0, q_2^0, 0, 0$ , puisque  $D$  ne s'annule par pour ce système de valeurs ( $D = F_r - fF_n$ ).

Il est bien clair après cela qu'on peut se borner à démontrer l'existence de trois intégrales holomorphes  $q_1, q_2, \vartheta$  de (II), se réduisant respectivement à  $q_1^0, q_2^0, 0$  pour  $v = 0$ .

En développant  $-F_r \sin \vartheta / D$  suivant les puissances de  $q_1 - q_1^0$ ,  $q_2 - q_2^0$ ,  $\vartheta$  et en appelant  $c$  la valeur essentiellement positive du rapport

$$\frac{F_r}{F_r - fF_n}$$

au point  $M(q_1^0, q_2^0)$ , on peut écrire

$$-\frac{F_r}{D} \sin \vartheta = -c\vartheta + \dots,$$

les termes omis étant du second ordre au moins.

Posons maintenant

$$(10) \quad q_1 = q_1^0 + v\tau_1, \quad q_2 = q_2^0 + v\tau_2, \quad \vartheta = v\tau$$

et remarquons que les seconds membres de (II), qui sont des fonctions régulières de  $q_1, q_2, \vartheta, v$  dans le domaine des valeurs  $q_1 = q_1^0, q_2 = q_2^0, \vartheta = 0, v = 0$ , deviennent, d'après la substitution (10), des fonctions régulières de  $\tau_1, \tau_2, \tau, v$  pour la valeur zéro de tous ces arguments. Les termes du second ordre, par rapport aux arguments primitifs, obtiennent le facteur  $v^2$  lorsqu'on les exprime par les nouvelles variables.

Après cela on reconnaît sans peine que la substitution (10) permet de présenter le système (II) sous la forme

$$(III) \quad v \frac{d\tau_1}{dv} + \tau_1 = v\mathfrak{P}_1, \quad v \frac{d\tau_2}{dv} + \tau_2 = v\mathfrak{P}_2, \quad v \frac{d\tau}{dv} + (c + 1)\tau = v\mathfrak{P},$$

$\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \mathfrak{P}$  désignant des fonctions de  $\tau_1, \tau_2, \tau, v$  régulières pour des valeurs assez petites de ces variables.

Démontrer l'existence des intégrales holomorphes de (II), qui se réduisent à  $q_1^0, q_2^0, 0$  pour  $v = 0$ , équivaut évidemment à démontrer l'existence d'un système d'intégrales de (III) holomorphe pour  $v = 0$ .

Les valeurs initiales de  $\tau_1, \tau_2, \tau$ , qui ne restent pas déterminées par la transformation (10), le sont par les équations (III) elles-mêmes, qui donnent, pour  $v = 0$ ,

$$\tau_1 = \tau_2 = \tau = 0.$$

En les dérivant, par rapport à  $v, n$  fois et en posant ensuite  $v = 0$ , on obtient

$$(11) \quad (n + 1) \frac{d^n \tau_1}{dv^n} = \dots, \quad (n + 1) \frac{d^n \tau_2}{dv^n} = \dots, \quad (n + 1 + c) \frac{d^n \tau}{dv^n} = \dots,$$

les seconds membres ne dépendant que de  $\tau_1$ ,  $\tau_2$ ,  $\tau$  et de leurs dérivées jusqu'à l'ordre  $n - 1$  au plus.

Le système détermine donc les valeurs des fonctions inconnues (supposées holomorphes) et de toutes leurs dérivées, pour  $v = 0$ .

Tout se réduit désormais à vérifier la convergence des séries de TAYLOR construites avec ces valeurs.

Appliquons le calcul des limites et comparons notre système (III) avec le système

$$(IV) \quad v \frac{d\tau_1}{dv} + \tau_1 = v\mathfrak{M}_1, \quad v \frac{d\tau_2}{dv} + \tau_2 = v\mathfrak{M}_2, \quad v \frac{d\tau}{dv} + (c + 1)\tau = v\mathfrak{M},$$

qui en résulte en remplaçant dans les seconds membres  $\mathfrak{P}_1$ ,  $\mathfrak{P}_2$ ,  $\mathfrak{P}$  par des *fonctions majorantes*  $\mathfrak{M}_1$ ,  $\mathfrak{M}_2$ ,  $\mathfrak{M}$ .

Les dérivées successives des intégrales de (IV) (supposées holomorphes et nulles pour  $v = 0$ ) sont déterminées par des systèmes

$$(12) \quad (n + 1) \frac{d^n \tau_1}{dv^n} = \dots, \quad (n + 1) \frac{d^n \tau_2}{dv^n} = \dots, \quad (n + 1 + c) \frac{d^n \tau}{dv^n} = \dots,$$

de même forme que (11), les seconds membres étant toutefois remplacés par des expressions majorantes.

Les dérivées successives, calculées ainsi, sont donc essentiellement positives et supérieures en valeur absolue à celles qui s'obtiennent de (11) pour le système proposé.

La constante  $c$  étant positive, on augmente encore cette valeur si, pour  $n > 0$ , on remplace les premiers membres de (12) par

$$n \frac{d^n \tau_1}{dv^n}, \quad n \frac{d^n \tau_2}{dv^n}, \quad n \frac{d^n \tau}{dv^n},$$

en gardant, pour  $n = 0$ , les conditions  $\tau_1 = \tau_2 = \tau = 0$ .

Les valeurs, ainsi modifiées, correspondent au système

$$v \frac{d\tau_1}{dv} = v\mathfrak{M}_1, \quad v \frac{d\tau_2}{dv} = v\mathfrak{M}_2, \quad v \frac{d\tau}{dv} = v\mathfrak{M},$$

c'est-à-dire au système

$$(V) \quad \frac{d\tau_1}{dv} = \mathfrak{M}_1, \quad \frac{d\tau_2}{dv} = \mathfrak{M}_2, \quad \frac{d\tau}{dv} = \mathfrak{M},$$

qui n'a plus de singularités pour  $v = 0$ .

Or le théorème classique de BRIOT et BOUQUET nous assure de la convergence des séries intégrales de (V), sous les conditions initiales

$$\tau_1 = \tau_2 = \tau = 0$$

pour  $v = 0$ .

On peut donc affirmer la convergence (pour  $v$  assez petit) des séries de TAYLOR donnant les intégrales du système (III).

L'existence des intégrales holomorphes  $x(t)$ ,  $y(t)$ ,  $z(t)$  du système primitif (1), (2) (sous la condition que le mobile sorte initialement d'une position régulière  $M$  avec une vitesse nulle) est ainsi démontrée. Évidemment ce système intégral holomorphe est unique.

*Remarque.* - La démonstration s'étend d'elle-même au cas où la force ( $F$ ) dépendrait de la vitesse (ses composantes restant holomorphes pour  $v = 0$ ).

En effet, on est encore conduit à un système de la forme (III).

Si la surface  $S$  varie avec le temps, il faut modifier la mise en équation, et en outre on ne peut plus éliminer  $t$  (ce qui arrive aussi lorsque la force dépend de  $t$ ).

Il suffit toutefois de considérer comme variable indépendante la vitesse relative du point par rapport aux éléments matériels de la surface  $S$  pour que la démonstration puisse être achevée, substantiellement, comme ci-dessus.

*Padoue, le 5 Septembre 1902.*





XVIII.

SOPRA LA EQUAZIONE DI KEPLER (\*)

« Rend. Acc. Lincei », s. 5ª, vol. XIII (1º Sem. 1904),  
pp. 260-268.

I. — Per  $e$  abbastanza piccolo, la equazione di KEPLER

$$u - e \operatorname{sen} u = \zeta$$

definisce univocamente la  $u$  come funzione regolare della  $e$  e del parametro  $\zeta$ . Infatti la derivata del primo membro, rispetto ad  $u$ ,  $1 - e \cos u$ , non si annulla per  $e = 0$ .

Lo sviluppo classico di  $u$  per potenze di  $e$ , fornito dalla serie di LAGRANGE è

$$u = \zeta + \sum_1^{\infty} \frac{e^n}{n} \frac{d^{n-1} \operatorname{sen}^n \zeta}{d\zeta^{n-1}}.$$

Il raggio di convergenza di questo sviluppo dipende in generale da  $\zeta$ . Quando  $\zeta$  varia comunque sopra l'asse reale, esso ha un limite inferiore  $e_1$ , notato già da LAPLACE e stabilito con procedimenti rigorosi dal signor ROUCHÉ<sup>(1)</sup>. Questo limite  $e_1 = 0,6627$  risulta definito da

$$\frac{2l}{E^l + E^{-l}},$$

dove  $l$  è la radice (unica positiva) della equazione

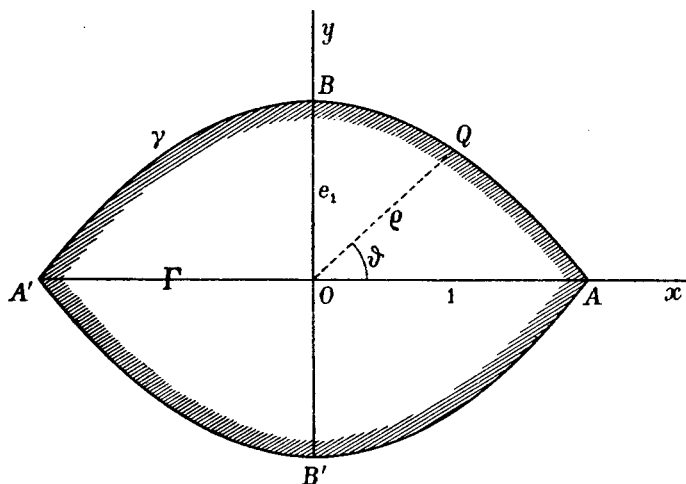
$$f(l) = -l(E^l - E^{-l}) + E^l + E^{-l} = 0.$$

(\*) Presentata dal Socio V. VOLTERRA nella seduta del 6 marzo 1904.

(1) *Sur la série de Lagrange*, « Journal de l'École Polytechnique », 39<sup>e</sup> Cahier, 1862. Cfr. HERMITE, *Cours d'analyse*, 19<sup>e</sup> Leçon; oppure TISSERAND, *Mécanique céleste*, t. I, chap. XVI.

(Per evitare ambiguità colla  $e$  si designa con  $E$  la base dei logaritmi neperiani).

Ciò posto, è chiaro che la serie sopra riportata resta convergente, per tutti i valori reali di  $\zeta$ , solo sotto la condizione  $|e| < e_1$ . Ma, pur variando comunque  $\zeta$  nel campo reale, la funzione  $u(e, \zeta)$ , definita dalla (I), è regolare rispetto ad  $e$  in un campo  $\Gamma$  (veggasi la figura) maggiore del cerchio  $|e| = e_1$  e comprendente in particolare tutti i punti del segmento  $(0, 1)$ .



La ricerca — abbastanza elementare per verità — dei limiti di questo campo conduce naturalmente ad una rappresentazione analitica della funzione  $u$ , valida per tutti i punti del campo stesso. In modo preciso si ha il seguente semplicissimo risultato:

La funzione  $u$  di  $e$ , definita dalla equazione di KEPLER è sviluppabile (per qualunque valore reale di  $\zeta$ ) in serie di potenze dell'argomento

$$\eta = \frac{eE^{\sqrt{1-e^2}}}{1 + \sqrt{1-e^2}}$$

(intendo pel radicale la determinazione, che si riduce all'unità per  $e = 0$ ).

La serie converge entro il cerchio  $|\eta| = 1$ , cui corrisponde, nel piano della variabile complessa  $e$ , l'intero campo di regolarità  $\Gamma$  della funzione  $u$ .

Come si vede, l'argomento  $\eta$  si annulla per  $e = 0$  e cresce, per valori reali, da 0 ad 1, assieme ad  $e$ . Gli sviluppi precedenti per potenze di  $\eta$  presentano perciò, oltre al vantaggio della incondizionata validità per qualsiasi orbita ellittica, la stessa convenienza numerica degli sviluppi abituali, precedenti per potenze di  $e$ .

2. - Il ramo della funzione  $u$  di  $e$ , definito senza ambiguità dalla (I), nell'intorno dell'origine  $O$ , resta certamente uniforme e regolare finchè non si annulla

$$1 - e \cos u .$$

Ne viene che, procedendo da  $O$ , nel piano  $e$ , lungo una linea qualsiasi, la regolarità di  $u$  può cessare, e cessa effettivamente (i corrispondenti valori di  $e$  essendo per la  $u$  punti critici di indice 2) solo quando sussistono insieme le due equazioni

$$(1) \quad u - e \operatorname{sen} u = \zeta ,$$

$$(2) \quad 1 - e \cos u = 0 .$$

Supponiamo  $\zeta$  reale e vediamo quali condizioni se ne traggono per i valori di  $e$ , che le rendono soddisfatte.

Incominciamo col porre

$$e = \rho E^{i\vartheta} , \quad u = \omega + i\tau ,$$

essendo  $\rho$  il modulo di  $e$ ,  $\omega$  la parte reale di  $u$ , ecc.

La sostituzione nelle (1), (2) dà

$$\omega + i\tau + \frac{1}{2} i\rho \{E^{-\tau+i(\vartheta+\omega)} - E^{\tau+i(\vartheta-\omega)}\} = \zeta ,$$

$$\frac{1}{2} \rho \{E^{-\tau+i(\vartheta+\omega)} + E^{\tau+i(\vartheta-\omega)}\} = 1 ,$$

e, scindendovi il reale dall'immaginario,

$$\begin{cases} \omega + \frac{1}{2} \rho \{-E^{-\tau} \operatorname{sen}(\vartheta + \omega) + E^{\tau} \operatorname{sen}(\vartheta - \omega)\} = \zeta ; \\ \tau + \frac{1}{2} \rho \{E^{-\tau} \cos(\vartheta + \omega) - E^{\tau} \cos(\vartheta - \omega)\} = 0 , \\ \frac{1}{2} \rho \{E^{-\tau} \cos(\vartheta + \omega) + E^{\tau} \cos(\vartheta - \omega)\} = 1 , \\ \frac{1}{2} \rho \{E^{-\tau} \operatorname{sen}(\vartheta + \omega) + E^{\tau} \operatorname{sen}(\vartheta - \omega)\} = 0 . \end{cases}$$

A noi interessa di riconoscere quali valori di  $\rho$  e di  $\vartheta$  rendono soddisfatto il sistema, variando comunque  $\zeta$ . La prima equazione serve, si può dire, unicamente a definire  $\zeta$ . Da essa possiamo perciò prescindere. Nelle altre tre è intanto a ritenersi  $\rho > 0$ , poichè già sappiamo che, per  $\rho = 0$  (il che implica  $e = 0$ ), il ramo considerato è regolare e quindi le equazioni non possono essere soddisfatte. Ciò apparisce del resto direttamente dalla seconda di esse, il cui primo membro, per  $\rho = 0$ , e  $\tau$  finito,

si annulla, mentre dovrebbe essere eguale all'unità. Ritenendo dunque  $\rho > 0$ , le suddette tre equazioni potranno essere scritte

$$(3) \quad \begin{cases} \cos(\vartheta + \omega) = E^{\tau} \frac{1 - \tau}{\rho}, \\ \cos(\vartheta - \omega) = E^{-\tau} \frac{1 + \tau}{\rho}; \end{cases}$$

$$(4) \quad E^{-\tau} \operatorname{sen}(\vartheta + \omega) + E^{\tau} \operatorname{sen}(\vartheta - \omega) = 0.$$

Si tratta di caratterizzare l'insieme  $\gamma$  (sarà, come vedremo, una curva) costituito dai punti  $Q(\rho, \vartheta)$  del piano  $e$ , per i quali risultano soddisfatte le (3), (4), essendo  $\tau$  ed  $\omega$  quantità (reali, s'intende) a priori indeterminate.

In primo luogo è lecito limitarsi a valori positivi di  $\tau$ . Infatti il sistema (3), (4) si trasforma in se stesso, quando si cambiano  $\tau$  ed  $\omega$  in  $-\tau, -\omega$ , senza toccare  $\rho$  e  $\vartheta$ ; e questo equivale a dire che l'insieme dei punti  $Q$ , corrispondenti a valori positivi di  $\tau$ , non differisce dall'insieme corrispondente a valori negativi. L'uno e l'altro coincidono dunque con  $\gamma$ .

Si noti ancora che il sistema (3), (4) non cambia, quando, lasciando inalterati  $\rho$  e  $\tau$ , si cambiano  $\vartheta$  ed  $\omega$ :

$$1) \text{ in } -\vartheta, -\omega;$$

$$2) \text{ in } \pi - \vartheta, \pi - \omega.$$

Ne viene che, assieme ad ogni punto  $(\rho, \vartheta)$ , appartengono a  $\gamma$  anche il punto simmetrico rispetto all'asse reale  $x$ ,  $(\rho, -\vartheta)$ , e il punto simmetrico rispetto all'asse immaginario  $y$ ,  $(\rho, \pi - \vartheta)$ .

Basterà perciò considerare i punti  $Q$  situati nel primo quadrante, e ripeterli per riflessione negli altri tre quadranti.

**3.** - E veniamo alla discussione del sistema (3), (4), in cui si intenda  $\tau \geq 0$ , nonchè  $\vartheta$  compreso fra  $0$  e  $\pi/2$ .

Dalle (3) si ha

$$\operatorname{sen}^2(\vartheta + \omega) = 1 - \cos^2(\vartheta + \omega) = 1 - E^{2\tau} \frac{(1 + \tau)^2}{\rho^2},$$

$$\operatorname{sen}^2(\vartheta - \omega) = 1 - \cos^2(\vartheta - \omega) = 1 - E^{-2\tau} \frac{(1 + \tau)^2}{\rho^2},$$

mentre la (4) porge

$$E^{2\tau} \operatorname{sen}^2(\vartheta - \omega) = E^{-2\tau} \operatorname{sen}^2(\vartheta + \omega),$$

e, portandovi per  $\operatorname{sen}^2(\vartheta - \omega)$ ,  $\operatorname{sen}^2(\vartheta + \omega)$  i loro valori, risulta

$$(5) \quad \frac{1}{\rho^2} = \frac{E^{2\tau} - E^{-2\tau}}{4\tau} = 1 + \frac{2}{3}\tau^2 + \frac{2}{15}\tau^4 + \dots$$

Questa equazione determina univocamente un valore positivo  $\rho$  in funzione di  $\tau$ . Ma non ad ogni valore di  $\tau$  corrisponde una soluzione del nostro sistema. Bisogna che, portando nelle (3) la espressione (5) di  $\rho$ , i secondi membri non superino l'unità in valore assoluto. Bisogna dunque che

$$E^{2\tau}(1-\tau)^2 \frac{E^{2\tau} - E^{-2\tau}}{4\tau} \leq 1, \quad E^{-2\tau}(1+\tau)^2 \frac{E^{2\tau} - E^{-2\tau}}{4\tau} < 1,$$

le quali, posto per brevità

$$(6) \quad N = \frac{(1+\tau)^2 E^{-2\tau} - (1-\tau)^2 E^{2\tau}}{4\tau},$$

equivalgono all'unica disuguaglianza  $N > 0$ , cioè anche a

$$(7) \quad (1+\tau)E^{-\tau} - |1-\tau|E^{\tau} \geq 0.$$

Per  $\tau \leq 1$ , si ha  $|1-\tau| = 1-\tau$  e la (8) è senz'altro soddisfatta. Infatti il primo membro si annulla per  $\tau = 0$ , e cresce poi con  $\tau$ , perchè la derivata

$$\tau(E^{\tau} - E^{-\tau})$$

è sempre positiva.

Se invece  $\tau \geq 1$ ,  $|1-\tau| = \tau-1$ , e la (7), ponendo ancora

$$f(\tau) = -\tau(E^{\tau} - E^{-\tau}) + (E^{\tau} + E^{-\tau}),$$

si scriverà,

$$(7') \quad f(\tau) \geq 0.$$

La derivata

$$f'(\tau) = -\tau(E^{\tau} + E^{-\tau})$$

è negativa per  $\tau$  positivo, la  $f$  va dunque decrescendo. Essa è positiva per  $\tau = 1$ , negativa per  $\tau = 2$ ; si annulla quindi per un valore intermedio  $l$ . Perciò la (7') riesce soddisfatta fra 1 e  $l$ , ma cessa di esserlo oltre  $l$ , in quanto la  $f$ , seguitando a decrescere, diventa e si mantiene negativa.

La equazione  $f(l) = 0$  è quella stessa, che si incontra cercando il minimo raggio di convergenza (per  $\zeta$  reale) dello sviluppo di  $u$  in serie di potenze di  $e$ . Il valore numerico della radice  $l$  è 1,9967 (\*).

(\*) Questo numero va corretto in 1,19967. (V. ROUCHÉ, loc. cit. (1), pag. 212). [N. d. R.]

Messo in chiaro che sono da considerare soltanto valori di  $\tau$ , compresi fra 0 ed  $l$ , mostriamo reciprocamente che ad ognuno di essi corrisponde uno ed un sol punto  $Q$  del primo quadrante.

Il modulo  $\varrho$  è, come si è visto, determinato senza ambiguità dalla (5). Quanto all'argomento  $\vartheta$ , abbiamo le (3) e le

$$\text{sen } (\vartheta + \omega) = \pm E^{\tau} \sqrt{N}, \quad \text{sen } (\vartheta - \omega) = \pm E^{-\tau} \sqrt{N},$$

che ne sono necessaria conseguenza in virtù delle (5), (6). Portando questi valori nella (4) si riconosce che i radicali vanno presi con segno opposto, e con ciò la (4) stessa rimane identicamente soddisfatta.

Essendo poi

$$\cos 2\vartheta = \cos (\vartheta + \omega) \cos (\vartheta - \omega) - \text{sen } (\vartheta + \omega) \text{sen } (\vartheta - \omega),$$

ricaviamo in definitiva

$$(8) \quad \cos 2\vartheta = \frac{1 - \tau^2}{\varrho^2} + N = -\tau \frac{E^{2\tau} - E^{-2\tau}}{2} + \frac{E^{2\tau} + E^{-2\tau}}{2} = 1 - \frac{2}{3} \tau^4 + \dots,$$

la quale determina univocamente un angolo  $2\vartheta$  non maggiore di due retti, e quindi uno ed un solo angolo  $\vartheta$  del primo quadrante.

Le considerazioni precedenti ci assicurano che, al variare di  $\tau$  fra zero ed  $l$ , il secondo membro della (8) rimane compreso fra  $-1$  e  $+1$ . Se ne ha la riprova, notando:

- 1) che, per  $\tau = 0$ ,  $\cos 2\vartheta = 1$ .
- 2) che  $\cos 2\vartheta$  decresce con  $\tau$ .

Infatti, essendo

$$\frac{d \cos 2\vartheta}{d\tau} = -\tau(E^{2\tau} + E^{-2\tau}) + \frac{E^{2\tau} - E^{-2\tau}}{2},$$

$$\frac{d^2 \cos 2\vartheta}{d\tau^2} = -2\tau(E^{2\tau} - E^{-2\tau}) \quad (< 0, \text{ per } \tau > 0),$$

la funzione  $d \cos 2\vartheta / d\tau$  è decrescente, e, siccome, per  $\tau = 0$ , si annulla, così, per valori positivi di  $\tau$ , essa è negativa, e quindi  $\cos 2\vartheta$  decresce.

- 3) che, per  $\tau = l$ ,  $\cos 2\vartheta = -1$ .

Ciò risulta dall'essere  $l$  radice dell'equazione  $f(l) = 0$ , donde

$$l(E^l - E^{-l}) = E^l + E^{-l}.$$

Posta infatti la espressione di  $\cos 2\vartheta$  sotto la forma

$$\frac{1}{2} \{ -\tau(E^{\tau} - E^{-\tau})(E^{\tau} + E^{-\tau}) + E^{2\tau} + E^{-2\tau} \},$$

quando vi si fa  $\tau = l$ , e si sostituisce  $l(E^l - E^{-l})$  col suo valore  $E^l + E^{-l}$ , rimane effettivamente

$$\cos 2\vartheta = \frac{1}{2} \{-(E^l + E^{-l})^2 + E^{2l} + E^{-2l}\} = -1.$$

Da queste osservazioni emerge che, al variare di  $\tau$  da 0 ad  $l$ , l'anomalia  $\vartheta$  varia, costantemente crescendo, da 0 a  $\pi/2$ .

Il raggio vettore  $\rho$  va invece costantemente decrescendo (il suo inverso  $1/\rho$  costantemente crescendo), poichè si ha dalla (5)

$$(9) \quad \frac{d}{d\tau} \frac{1}{\rho^2} = \frac{1}{4\tau^2} \{2\tau(E^{2\tau} + E^{-2\tau}) - (E^{2\tau} - E^{-2\tau})\} = -\frac{1}{2\tau^2} \frac{d \cos 2\vartheta}{d\tau},$$

e il secondo membro è costantemente positivo, per quanto è stato ora osservato. Il minimo di  $\rho$  è dunque raggiunto per  $\tau = l$  e quindi  $\vartheta = \pi/2$ . Tale minimo valore viene definito, a norma della (5), da

$$\frac{1}{\rho^2} = \frac{E^{2l} - E^{-2}}{4l} = \frac{l(E^l - E^{-l})(E^l + E^{-l})}{4l^2},$$

la quale, usufruendo qui ancora la  $f(l) = 0$ , porge

$$\rho = \frac{2l}{E^l + E^{-l}},$$

che è la espressione nota del minimo raggio di convergenza  $e_1$ , ricordata al n. 1.

Riassumendo, possiamo concludere:

*I punti Q del primo quadrante corrispondono univocamente ai valori di  $\tau$  dell'intervallo (0, l), a norma delle equazioni (5), (8), e costituiscono in conseguenza un arco di curva analitica AB. Quest'arco incomincia ( $\tau = 0$ ) nel punto A dell'asse reale x, distante 1 dall'origine, e termina ( $\tau = l$ ) nel punto B dell'asse y, situato alla (minima) distanza  $e_1 = 0,6627$ .*

*Fra A e B il raggio vettore varia costantemente decrescendo (\*).*

Cerchiamo ancora l'angolo  $\alpha$ , che la tangente alla curva in un punto generico Q forma colla direzione positiva dell'asse x.

Si ha  $\text{tg } \alpha = dy/dx$ ; quindi, dalle  $x = \rho \cos \vartheta$ ,  $y = \rho \sin \vartheta$ ,

$$\text{tg } \alpha = \frac{\sin \vartheta d\rho + \rho \cos \vartheta d\vartheta}{\cos \vartheta d\rho - \rho \sin \vartheta d\vartheta}.$$

(\*) Il caso  $\tau=0$  richiede in verità una trattazione autonoma, ma estremamente facile, che porta ad aggiungere alla figura del testo le due semirette dell'asse reale  $(-\infty, -1)$ ,  $(1, +\infty)$ .

Moltiplichiamo sopra e sotto per  $-2 \operatorname{sen} 2\vartheta/\varrho^3$ , potremo scrivere

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} 2\vartheta \operatorname{sen} \vartheta \frac{d \frac{1}{\varrho^2}}{d\tau} + \frac{\cos \vartheta}{\varrho^2} \frac{d \cos 2\vartheta}{d\tau}}{\operatorname{sen} 2\vartheta \cos \vartheta \frac{d \frac{1}{\varrho^2}}{d\tau} - \frac{\operatorname{sen} \vartheta}{\varrho^2} \frac{d \cos 2\vartheta}{d\tau}},$$

che, avuto riguardo alla (9), si riduce a

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\cos \vartheta \left( \frac{\operatorname{sen}^2 \vartheta}{\tau^2} - \frac{1}{\varrho^2} \right)}{\cos^2 \vartheta \frac{\operatorname{sen} \vartheta}{\tau^2} + \frac{\operatorname{sen} \vartheta}{\varrho^2}}.$$

Escluso per un momento il valore zero di  $\tau$ , e quindi anche di  $\vartheta$ , il denominatore è manifestamente finito e  $> 0$ ; il numeratore è pure finito e si annulla con  $\cos \vartheta$ . Ne viene  $\operatorname{tg} \alpha = 0$ , per  $\vartheta = \pi/2$ .

Al convergere di  $\tau$  a zero, si ha

$$\varrho = 1, \quad \lim_{\tau=0} \frac{\operatorname{sen} \vartheta}{\tau^2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad (^2),$$

e per conseguenza  $\operatorname{tg} \alpha = -\sqrt{3}$ .

La tangente in  $A$  (nel verso  $AB$ ) è dunque inclinata sulla direzione positiva dell'asse  $x$  di  $120^\circ$ , cioè sulla  $AO$  di  $60^\circ$ . La tangente in  $B$  è invece parallela all'asse  $x$ .

Se ora si riflette l'arco di curva  $AB$  negli altri tre quadranti, si ottiene (cfr. la figura) una curva chiusa  $\gamma$ , che ha in  $A$  e nel suo simmetrico  $A'$  due punti angolosi di apertura  $120^\circ$ , mentre c'è perfetto raccordo in  $B$  e  $B'$ .

La curva  $\gamma$  costituisce il contorno completo del campo di regolarità  $\Gamma$  della nostra funzione  $u$ , poichè ogni punto  $Q$  di  $\gamma$  è effettivamente singolare per qualche valore reale del parametro  $\zeta$ . Risulta infatti dalle precedenti considerazioni che ad ogni  $Q$  corrispondono due valori eguali ed opposti di  $\tau$  e di  $\omega$ , per i quali coesistono le (1) (3) (con  $\zeta$  reale). I primi sono univocamente determinati, i secondi a meno di multipli di  $2\pi$ .

(<sup>2</sup>) Questo risulta subito dalla (8), in quanto

$$\operatorname{sen}^2 \vartheta = \frac{1 - \cos 2\vartheta}{2} = \frac{1}{3} \tau^4 + \dots$$



La (1) stessa poi (essendo  $u = \omega + i\tau$ ) coordina ad ogni punto  $Q$  due valori reali di  $\zeta$ , eguali ed opposti (e i loro congrui rispetto a  $2\pi$ ).

4. - La funzione  $u$  di  $e$  (ritenuto  $\zeta$  comunque variabile nel campo reale) è regolare entro  $\Gamma$ , e non oltre. Secondo i principî della teoria delle funzioni, la naturale espressione analitica di  $u$  in  $\Gamma$  è quella di una serie di potenze del parametro  $\eta(e)$ , che realizza la rappresentazione conforme di  $\Gamma$  sopra un cerchio di raggio 1.

Nel caso presente la determinazione di  $\eta$  è pressochè immediata.

Ricordiamo infatti che in ogni punto  $Q$  del contorno  $\gamma$  di  $\Gamma$  valgono ad un tempo le (1), (2). Dalla (2) si ha

$$e \operatorname{sen} u = \sqrt{e^2 - 1} = i \sqrt{1 - e^2},$$

con che la (1) può essere scritta

$$u = \zeta + i \sqrt{1 - e^2},$$

e la (2) stessa

$$E^{iu} = \frac{e}{1 + \sqrt{1 - e^2}}.$$

Sostituendovi per  $u$  il suo valore  $\zeta + i \sqrt{1 - e^2}$ , se ne ricava

$$E^{i\zeta} = \frac{eE^{\sqrt{1 - e^2}}}{1 + \sqrt{1 - e^2}},$$

la quale viene dunque soddisfatta da valori reali di  $\zeta$  in ogni punto  $Q$ , e ciò per entrambe le determinazioni del radicale  $\sqrt{1 - e^2}$  (\*).

Ne viene che, sul contorno  $\gamma$ , la funzione  $eE^{\sqrt{1 - e^2}}/(1 + \sqrt{1 - e^2})$  (anzi ciascuna delle due determinazioni, che la funzione comporta) ha modulo eguale all'unità.

D'altra parte, se immaginiamo di tagliare il piano  $e$  dai punti 1 e  $-1$  fino a  $+\infty$  e  $-\infty$  rispettivamente, e di fissare per il radicale  $\sqrt{1 - e^2}$  la determinazione  $= 1$ , per  $e = 0$ , la

$$\eta = \frac{eE^{\sqrt{1 - e^2}}}{1 + \sqrt{1 - e^2}}$$

(\*) In quanto, come è stato osservato alla fine del numero precedente, ad ogni punto  $Q$  convergono valori eguali ed opposti di  $u$  e di  $\zeta$ ; quindi, per la equazione testè incontrata  $u = \zeta + i \sqrt{1 - e^2}$ , anche valori eguali ed opposti del radicale.

costituisce un ramo uniforme di funzione della variabile complessa  $e$ , regolare nel piano così tagliato, e in particolare entro  $\Gamma$ . Sopra  $\gamma$  è  $|\eta| = 1$ . La derivata di  $\eta$  rapporto ad  $e$

$$\frac{\sqrt{1-e^2} E^{\sqrt{1-e^2}}}{1 + \sqrt{1-e^2}}$$

non si annulla entro  $\Gamma$  (le sue radici sono evidentemente solo  $\pm 1$ ).

Per queste tre proprietà la  $\eta$  effettua la rappresentazione conforme del campo  $\Gamma$  sopra un cerchio di raggio 1.

Val forse la pena di rilevare che, per essere la funzione  $\eta$  olomorfa anche nei punti  $B$  e  $B'$  ( $\pm ie_1$ ) del contorno  $\gamma$ , si ha in questi punti non solo raccordo grafico (ciò che già sapevamo), ma vera e propria continuazione analitica.

SOPRA UN PROBLEMA DI ELETTROSTATICA  
CHE INTERESSA LA COSTRUZIONE DEI CAVI (\*)

« Rend. Acc. Lincei », s. 5<sup>a</sup>, vol. XII (1° sem. 1904),  
pp. 375-382.

Il sig. ing. E. JONA della Ditta Pirelli e C. mi ha favorito alcuni suoi appunti estremamente interessanti sulla rigidità dielettrica dei cavi per trasporto di energia ad alta tensione, sollecitandomi a sottoporre al calcolo una questione concreta, il cui studio sperimentale sembra presentare gravi difficoltà e non dà (o almeno non ha dato finora) indicazioni abbastanza sicure da poter servire utilmente di norma costruttiva.

Ho potuto rispondere al desiderato espressomi dall'ing. JONA, e mi propongo di esporre in modo particolareggiato la ricerca, che ho all'uopo istituita, in una Memoria di prossima pubblicazione (\*\*). Frattanto mi permetto di comunicare alla Accademia i termini precisi della questione e il risultato, cui sono pervenuto.

Un cavo consta essenzialmente:

di un conduttore centrale (formato da un filo unico a sezione circolare, o più spesso da una corda di tali fili), per cui passa la corrente;

di un rivestimento isolante;

di una guaina conduttrice (a sezione circolare) da riguardarsi in comunicazione col suolo.

Quando il conduttore centrale è percorso da corrente, si genera in tutto lo spazio ambiente un campo elettromagnetico. Se anche la corrente è alternativa, entro i limiti delle frequenze industriali, si può con tutta tranquillità parlare di potenziale e ritenere valide per una generica sezione del cavo le leggi elettrostatiche (<sup>1</sup>).

(\*) Presentata dal Socio V. VOLTERRA nella seduta del 10 aprile 1904.

(\*\*) In questo vol.: XX, pp. 339-394 [N.d.R.].

(<sup>1</sup>) La ricerca in esteso mi porgerà pure occasione di presentare alcune semplici osservazioni su questo punto, e più generalmente, sul collegamento fra la elettrodinamica teorica e certi principi correnti di elettrotecnica.

La sezione del rivestimento isolante si presenta (cfr. la figura) come una corona  $\sigma$ , limitata esternamente da un cerchio  $C$  (sezione della guaina cilindrica conduttrice) ed internamente da un contorno  $T$  (circolare nel caso di un filo unico) frastagliato, ad archi di cerchio tangenti, nel caso generale di una corda.

Il potenziale (logaritmico)  $W$  è zero in  $C$  ed ha in tutti i punti di  $T$  uno stesso valore (variabile col tempo)  $\delta$ , che può raggiungere massimi (positivi e negativi) molto elevati. Nel frapposto coibente  $\sigma$  c'è una caduta del potenziale  $W$  da  $\delta$  a zero.

Questa caduta di potenziale pone a cimento la rigidità dielettrica di  $\sigma$ , tanto che, se  $\delta$  oltrepassa un certo limite, avviene una scarica distruttiva e il dielettrico rimane perforato, ciò, che naturalmente è necessario evitare.

In modo preciso si può ritenere che la misura del cimento specifico, cui sottostà il dielettrico  $\sigma$  in un suo punto generico  $P$  sia data dal gradiente del potenziale  $W$ , che è poi il valore del  $\Delta_1 W$  in quel punto (\*).

Per gli scopi costruttivi interessa conoscere il massimo cimento specifico, che viene raggiunto in qualche punto del dielettrico  $\sigma$ . È chiaro che questo elemento è, al pari di  $W$ , proporzionale a  $\delta$ , mentre l'altro fattore  $G$  dipende soltanto dalla natura geometrica del campo  $\sigma$ .

Basta dunque occuparsi della (costante di configurazione)  $G$ , massimo cimento specifico (si può dire) per unità di differenza di potenziale.

Converremo di assumere la definizione di  $G$  sotto la forma seguente:

*$G$  è il valore massimo del  $\Delta_1$  della funzione  $V$ , armonica e regolare entro  $\sigma$ , che prende il valore zero su  $T$  e uno su  $C$ .*

Nel caso semplice di un filo unico,  $\sigma$  è una corona circolare e si ha immediatamente

$$V = \frac{\log \frac{\rho}{r}}{\log \frac{R}{r}},$$

designandosi con  $R$ ,  $r$  i raggi esterno ed interno della corona e con  $\rho$  il raggio vettore del punto generico  $P$ .

(\*) Sia infatti  $W_p$  il valore del potenziale nel punto considerato  $P$ ,  $W = W_p$  la linea equipotenziale passante per  $P$ ,  $W = W_p + dW_p$  la linea equipotenziale infinitamente vicina,  $dn$  la lunghezza della perpendicolare, abbassata da  $P$  sulla detta linea infinitamente vicina. Il gradiente (differenza elementare di potenziale divisa per l'elemento di distanza) è la naturale misura del cimento specifico. Esso viene quindi espresso da  $d\varphi/dn$ , che coincide, come è ben noto, col  $\Delta_2 W$  (in coordinate cartesiane  $|\sqrt{(dW/dx)^2 + (dW/dy)^2}|$ ).

Ne viene

$$\Delta_1 V = \frac{dV}{dq} = -\frac{1}{e \log \frac{R}{e}}$$

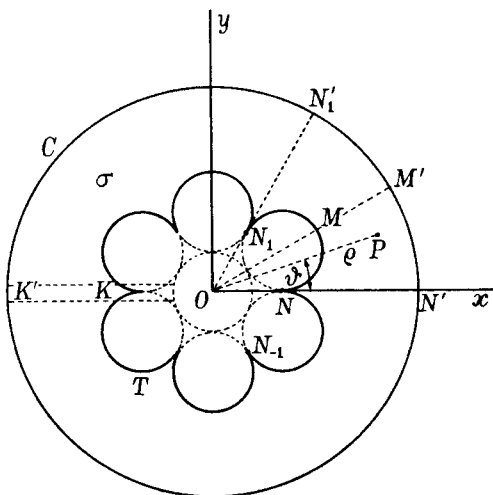
Il valore massimo di  $\Delta_1 V$  ha luogo, come si vede, nei punti del conduttore interno ( $q = r$ ). La  $G$  di una corona circolare, che rappresentemo con  $G_1$ , è dunque definita da

$$G_1 = -\frac{1}{r \log \frac{R}{r}}$$

Dato  $R$ , per rendere minimo  $G_1$ , bisogna prendere  $r = R/e = R/2,72$ , ed il valore minimo di  $G_1$  è

$$g_1 = \frac{1}{r}$$

In questa condizione ( $r = R/e$ ) — nota l'ing. JONA — si ha la massima sicurezza contro la perforazione, e ad essa giova avvicinarsi compatibilmente colle esigenze della pratica (\*). Ma nella pratica il conduttore interno non è generalmente circolare; è quasi sempre formato con una corda a 7, 19, 37, ... fili circolari.



(\*) Date le eterogeneità inevitabili del dielettrico, non si può fare a meno — mi ha detto l'ing. JONA — di dargli uno spessore più grande di quello, che corrisponde alla massima sicurezza teorica.

Si tratta di stabilire che cosa diventa in questi casi la espressione di  $G$ . Noi converremo di individuare il profilo del conduttore interno  $T$  per mezzo del raggio nodale  $r = ON$  e del numero  $m$  ( $m = 6$  in figura) degli archi di cerchio tangenti, che lo costituiscono:  $m$  è dunque non il numero totale dei fili della corda, ma di quelli soltanto, che appartengono all'ultima stratificazione; 6, 12, 18, ... nei citati esempi di corde a 7, 19, 37, ... fili.

Prima di indicare il risultato quantitativo della ricerca analitica, notiamo che il semplice buon senso (sorretto, se si vuole, da nozioni fondamentali di teoria del potenziale) permette di prevedere l'andamento del gradiente entro un generico campo  $\sigma$ .

Anzi tutto i valori estremi del gradiente debbono cadere sul contorno del campo (su  $C$ , o su  $T$ ): questo perchè  $\log \Delta_1 V$  è, al pari di  $V$ , una funzione armonica. Nel caso della corona circolare cadono, come si è visto, su  $T$ . Si capisce senz'altro che lo stesso deve avvenire in generale.

D'altra parte nei nodi (che sono cuspidi colla convessità rivolta verso il campo  $\sigma$ , in cui  $V$  è regolare)  $dV/dn$ , cioè  $\Delta_1 V$ , si annulla (\*). Il valore massimo  $G$  sarà perciò da cercarsi nei ventri (punti medi degli archi di cerchio costituenti  $T$ ): cosa ben naturale, quando si pensi che i ventri sono i punti più vicini a  $C$ , a partire dai quali quindi la variazione del potenziale è più rapida.

Ecco ciò che dà lo studio matematico della questione:

1) la determinazione di  $V$  si riconduce (adattando opportunamente un classico procedimento di SCHWARZ) alla integrazione di una ordinaria equazione differenziale del secondo ordine a coefficienti doppiamente periodici; da essa facilmente si desume l'accennato comportamento del gradiente;

2) la integrazione della detta equazione (che si può effettuare per approssimazioni successive usufruendo di certo parametro  $q$ ) porge per  $V$  e  $\Delta_1 V$  degli sviluppi uniformemente convergenti in tutto  $\sigma$ , donde senz'altro la cercata espressione di  $G$  (valore del  $\Delta_1 V$  in un ventre di  $T$ );

3) l'errore, che si commette, arrestando questi sviluppi al loro primo termine, è, nella peggiore ipotesi, dell'ordine di  $16(r/R)^m$  (rispetto all'unità), affatto trascurabile dunque, se, come avviene sempre nei cavi  $r/R$  è inferiore ad  $\frac{1}{2}$  e si suppone  $m \geq 12$ .

(Del resto, anche per  $m = 6$ , si ha una esattezza sufficiente, poichè in pratica  $r/R$  è parecchio più piccolo di  $\frac{1}{2}$ ).

(\*) Cfr. per es. RIEMANN-WEBER, *Die partiellen Differentialgleichungen der mathematischen Physik*, Bd. I, p. 342-343.

Ritenute queste condizioni di fatto, si ha con ogni desiderabile approssimazione

$$(I) \quad G = G_1 \frac{e^{-\mu}}{1 - \mu r G_1} F^2 \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1 + \frac{1}{m}, \frac{1}{2} \right),$$

dove  $F$  è simbolo della serie ipergeometrica di GAUSS;

$$\mu = \frac{4}{m} \log 2 + 4 \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{s_{2\nu+1}}{2\nu+1} \frac{2^{2\nu}-1}{m^{2\nu+1}},$$

$s_3 = 1,2020$ ,  $s_5 = 1,0369$ , ... designando le somme delle inverse delle potenze terze, quinte, ecc. dei numeri interi, e  $G_1 = 1/(r \log R/r)$  è, si può dire, il  $G$ , che competerebbe ad un cavo unifilare avente per raggio interno il raggio nodale  $r$  della corda.

Alla (I) si può anche attribuire un aspetto, che è meno semplice, ma che si presta più direttamente ai raffronti che interessano i costruttori, mettendovi in evidenza, in luogo del raggio nodale  $r$ , il raggio  $r'$  di un conduttore circolare di egual sezione. Si riconosce senza difficoltà che tale sezione (area interna a  $T$ , cioè  $m$  volte il triangolo mistilineo  $ONN_1$ ) vale

$$m \left\{ r^2 \operatorname{tg} \frac{\pi}{m} + \pi \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{m} \right) r^2 \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{m} \right\}.$$

Ne risulta

$$r' = r e^{\varepsilon},$$

avendo posto, per brevità di scrittura

$$e^{2\varepsilon} = m \left\{ \frac{1}{\pi} \operatorname{tg} \frac{\pi}{m} + \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{m} \right) \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{m} \right\}.$$

Designiamo con

$$G' = \frac{1}{r' \log \frac{R}{r'}}$$

il massimo cimento (unitario), che compete al cavo unifilare, che ha il conduttore interno di egual sezione, ed eliminiamo dalla (I) il raggio nodale  $r$ , sostituendovi  $r' e^{-\varepsilon}$ . Si ottiene

$$(I^{b1a}) \quad G = G' e^{\varepsilon - \mu} \frac{\log \frac{R}{r'}}{\log \frac{R}{r'} - \mu + \varepsilon} F^2 \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1 + \frac{1}{m}, \frac{1}{2} \right),$$

che ha forse più valore pratico della equivalente (I).

Riprendendo la (I) stessa, notiamo che, dato  $m$ ,  $F^2$  e  $\mu$  hanno valori numerici determinati. Supponendo assegnato anche  $R$ , si può — come l'ing. JONA per il cavo a filo unico — cercare in qual modo bisogna prendere  $r$  affinché  $G$ , e per esso il fattore  $G_1/(1 - \mu r G_1)$ , risulti minimo. Ricordando che la espressione di  $G_1$  è  $1/(r \log R/r)$ , si trova immediatamente come condizione di minimo

$$\log \frac{R}{r} = 1 + \mu,$$

ossia  $r G_1 = 1/(1 + \mu)$ , con che il predetto fattore  $G_1/(1 - \mu r G_1)$  si riduce a  $1/r$ .

Dalla espressione sopra riportata di  $\mu$  apparisce che, almeno per  $m \geq 12$ , la somma della serie è assolutamente insignificante, talchè si può identificare  $\mu$  con  $4 \log 2/m$ . Se ne ha questo risultato pratico:

*Per un cavo a  $m$  fili* (con che, non lo si dimentichi, voglio dire che sono  $m$  i fili dell'ultima stratificazione, cioè quelli in contatto col dielettrico) *il rapporto di massima sicurezza fra il raggio nodale  $r$  e quello  $R$  del conduttore esterno è*

$$\frac{r}{R} = \frac{1}{e^{24/m}}.$$

Si noti che questo rapporto è sempre minore di  $1/e$ , e quindi perfettamente entro il campo di validità delle approssimazioni, in base alle quali è stata scritta la condizione di minimo cimento.

Al crescere indefinito di  $m$  si ritrova il rapporto dell'ing. JONA  $r/R = 1/e$ , come è naturale perchè gli innumerevoli piccolissimi archetti, che costituiscono il contorno  $T$ , quando  $m$  tende all' $\infty$ , sono come denti infinitesimi di una circonferenza di raggio  $r$  e non possono perciò avere che influenza locale.

Occupiamoci in particolare dei cavi di massima sicurezza, per cui, come si è detto,  $G_1/(1 - \mu r G_1) = 1/r$ . Il corrispondente valore di  $G$ , che chiameremo  $g$ , è

$$g = \frac{1}{r} e^{-\mu F^2} \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1 + \frac{1}{m}, \frac{1}{2} \right),$$

mentre, per un cavo unifilare avente per raggio del conduttore interno il raggio nodale  $r$ , ed egualmente di massima sicurezza, si ha

$$g_1 = \frac{1}{r}.$$

Il rapporto  $g/g_1$ , maggiore dell'unità (da  $m = 12$  in poi), misura, si



può dire, l'aumento di pericolo, che presenta un cavo multifilare di massima sicurezza di fronte all'analogo unifilare. In altri termini:

*Se un cavo unifilare di massima sicurezza può resistere ad una data tensione elettrica, per un cavo multifilare, pure di massima sicurezza e di raggio nodale  $r$  eguale a quello dell'unico filo, la più alta tensione compatibile resta ridotta nel rapporto*

$$\frac{g_1}{g} = \frac{e^\mu}{F^2 \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1 + \frac{1}{m}, \frac{1}{2} \right)}.$$

Questo rapporto, decresce con  $m$  e tende per  $m = \infty$  verso il valore limite

$$\frac{1}{F^2 \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2} \right)}.$$

Ora

$$F \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2} \right) = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = 1,18,$$

quindi

$$\frac{g_1}{g_\infty} = \frac{1}{(1,18)^2} = 0,72.$$

Per  $m = 12$ , si ha

$$F \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1 + \frac{1}{12}, \frac{1}{2} \right) = 1,16.$$

$$e^\mu = \sqrt[3]{2},$$

da cui

$$\frac{g_1}{g_{12}} = 0,93.$$

*Agendo per così dire in favore della stabilità, si può, per qualunque  $m$  ritenere come coefficiente di riduzione il valore costante 0,72.*

Ma è bene avere presente che la riduzione è tanto meno sensibile quanto minore è il numero dei fili.



SOPRA UN PROBLEMA DI ELETTROSTATICA  
CHE SI È PRESENTATO  
NELLA COSTRUZIONE DEI CAVI

« Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo », t. XX (1905).  
pp. 173-228,

L'uso, ormai frequente nell'industria, di correnti alternative a tensioni altissime ha messo in prima linea la questione della rigidità dielettrica dei cavi.

Di questa questione ebbe ad occuparsi con alta competenza il sig. ing. EMANUELE JONA della Ditta PIRELLI e C. (1). Egli fu in particolare condotto a proporsi un quesito specifico di non lieve importanza per i fabbricanti, ma difficile a decidersi per via sperimentale. Pensò allora di ricorrere allo strumento matematico ed incitò me ad esperirne il maneggio.

Io ho accolto assai volentieri l'invito cortese ed ho potuto rispondere in modo preciso, fornendo i coefficienti numerici desiderati quale norma costruttiva. Si tratta di conclusioni, che, come ho ora accennato, male si prestano ad un diretto controllo sperimentale. Ma, fra le formule, in cui quelle conclusioni sono implicitamente contenute, ve n'è una suscettibile di comoda verifica. La verifica è stata eseguita dallo stesso ing. JONA, e riuscì quanto mai soddisfacente (cfr. § 12).

Dei risultati, cui sono pervenuto, ho già dato notizia lo scorso anno (2); essi si ritrovano, più ampiamente illustrati e commentati, nella interessante comunicazione fatta dall'ing. JONA al Congresso di St. Louis (3).

La presente Memoria contiene la esposizione dettagliata di tutta la ricerca. Chi per altro cercasse qui ancora soltanto la posizione del problema e i risultati potrà limitarsi a leggere i §§ 1, 13 e 15.

(1) *Limitazioni necessarie, ecc.*, « Atti della Associazione Elettrotecnica Italiana », vol. VIII, 1904, pag. 195-220.

(2) « Rendiconti del « Lincei », 24 aprile 1904 [in questo vol.: XIX, p. 331-337].

(3) *Insulating materials in high tension cables*, « Electrical Congress of St. Louis », Section E.

### I. - Considerazioni preliminari e cenno del metodo di risoluzione.

Un cavo consta essenzialmente:

- di un conduttore centrale (formato da un filo unico a sezione circolare, o più spesso da una corda di tali fili), per cui passa la corrente;
- di un rivestimento isolante;
- di una guaina conduttrice (a sezione circolare) da riguardarsi in comunicazione col suolo.

Quando il conduttore centrale è percorso da corrente, si genera in tutto lo spazio ambiente un campo elettromagnetico. Se anche la corrente è alternativa, entro i limiti delle frequenze industriali, si può con tutta tranquillità parlare di potenziale e ritenere valide per una generica sezione del cavo le leggi elettrostatiche (\*).

La sezione del rivestimento isolante si presenta (cfr. la fig. 1) come una corona  $\sigma$ , limitata esternamente da un cerchio  $C$  (sezione della guaina cilindrica conduttrice) ed internamente da un contorno  $T$  (circolare nel caso di un filo unico) frastagliato, ad archi di cerchio tangenti nel caso generale di una corda.

Il potenziale (logaritmico)  $W$  è zero in  $C$  ed ha, in tutti i punti di  $T$ , uno stesso valore (variabile col tempo)  $\delta$ , che può raggiungere massimi (positivi e negativi) molto elevati. Nel frapposto coibente  $\sigma$  c'è una caduta del potenziale  $W$  da  $\delta$  a zero.

Questa caduta di potenziale pone a cimento la rigidità dielettrica di  $\sigma$ , tanto che, se  $\delta$  oltrepassa un certo limite, avviene una scarica distruttiva, e il dielettrico rimane perforato, ciò che naturalmente è necessario evitare.

In modo preciso, si può ritenere che la misura del cimento specifico, cui sottostà il dielettrico  $\sigma$  in un suo punto generico  $P$ , sia data dal gradiente del potenziale  $W$ , che è poi il valore del  $\Delta_1 W$  in quel punto (\*\*).

Per gli scopi costruttivi interessa conoscere il massimo cimento specifico, che viene raggiunto in qualche punto del dielettrico  $\sigma$ . È chiaro che questo elemento è, al pari di  $W$ , proporzionale a  $\delta$ , mentre l'altro

(\*) Nella citata mia Nota dello scorso anno avevo espresso il proposito di profittare della trattazione in estenso per discutere e precisare anche questo punto. Ma mi avveggo che dovrei diffondermi soverchiamente e perciò rimetto la cosa ad altra occasione.

(\*\*) Sia infatti  $W_P$  il valore del potenziale nel punto considerato  $P$ ;  $W = W_P$  la linea equipotenziale passante per  $P$ ,  $W = W_P + dW_P$  la linea equipotenziale infinitamente vicina;  $dn$  la lunghezza della perpendicolare, abbassata da  $P$  sulla detta linea infinitamente vicina. Il gradiente (differenza elementare di potenziale divisa per l'elemento di distanza) è la naturale misura del cimento specifico. Esso viene quindi espresso da  $dW/dn$ , che coincide, come è ben noto, col  $\Delta_1 W$  [in coordinate cartesiane  $|\sqrt{(dW/dx)^2 + (dW/dy)^2}|$ ].

fattore, che chiameremo  $G$ , dipende soltanto dalla natura geometrica del campo  $\sigma$ .

Basta dunque occuparsi di questa costante di configurazione  $G$ , massimo cimento specifico (si può dire) per unità di differenza di potenziale.

Converremo di assumere la definizione di  $G$  sotto la forma seguente:

$G$  è il valore massimo del  $\Delta_1$  della funzione  $V$ , armonica e regolare entro  $\sigma$ , che prende il valore zero su  $T$  e uno su  $C$ .

Nel caso semplice di un filo unico,  $\sigma$  è una corona circolare e si ha immediatamente

$$V = \frac{\log \frac{\rho}{r}}{\log \frac{R}{r}},$$

designando  $R$ ,  $r$  i raggi esterno ed interno della corona, e  $\rho$  il raggio vettore del punto generico  $P$ .

Ne viene

$$\Delta_1 V = \frac{dV}{d\rho} = \frac{1}{\rho \log \frac{R}{r}}.$$

Il valore massimo di  $\Delta_1 V$  ha luogo, come si vede, nei punti del conduttore interno ( $\rho = r$ ). La  $G$  di una corona circolare, che rappresenteremo con  $G_1$ , è dunque definita da

$$G_1 = \frac{1}{r \log \frac{R}{r}}.$$

Dato  $R$ , per rendere minimo  $G_1$ , bisogna prendere  $r = R/e = R/2,72\dots$ , ed il valore minimo  $g_1$  di  $G_1$  è

$$g_1 = \frac{1}{r}.$$

Nella pratica il conduttore interno non è generalmente circolare; esso è quasi sempre costituito da una corda a 7, 19, 37, ... fili circolari.

Si tratta pertanto di stabilire che cosa diventa in questi casi la espressione di  $G$ .

Noi converremo di individuare il profilo del conduttore interno  $T$

per mezzo del raggio nodale  $r = ON$  e del numero  $m$  ( $m = 6$  nella fig. 1) degli archi di cerchio tangenti, che lo costituiscono:  $m$  è dunque non il numero totale dei fili della corda, ma di quelli soltanto, che appartengono all'ultima stratificazione: 6, 12, 18 nei citati esempi di corde a 7, 19, 37 fili.

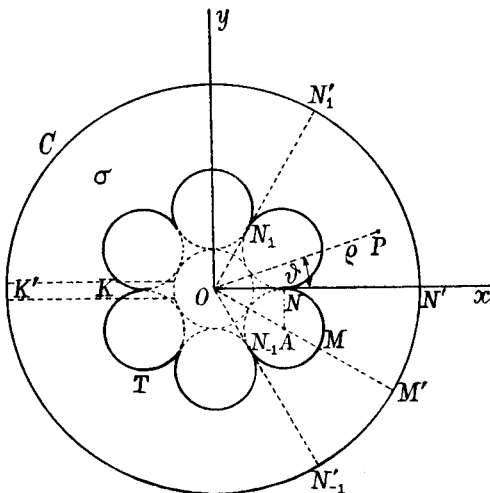


Fig. 1.

Prima di intraprendere la ricerca analitica notiamo che il semplice buon senso (sorretto, se si vuole, da nozioni fondamentali di teoria del potenziale) permette di prevedere l'andamento del gradiente entro un generico campo  $\sigma$ .

Anzi tutto i valori estremi del gradiente debbono cadere sul contorno del campo (su  $C$  o su  $T$ ): questo perchè  $\log \Delta_1 V$  è, al pari di  $V$ , una funzione armonica. Nel caso della corona circolare cadono, come si è visto, su  $T$ . Si capisce senz'altro che lo stesso deve avvenire in generale.

D'altra parte, nei nodi (che sono cuspidi colla convessità rivolta verso l'interno del campo  $\sigma$ , in cui  $V$  è regolare)  $dV/dn$ , cioè  $\Delta_1 V$ , si annulla (\*). Il valore massimo di  $G$  sarà perciò da cercarsi nei ventri (punti medi degli archi di cerchio costituenti  $T$ ): cosa ben naturale quando si pensi che i ventri sono i punti di  $T$  più vicini a  $C$ , a partire dai quali quindi la variazione del potenziale è più rapida.

(\*) Cfr. per es. RIEMANN-WEBER, *Die partiellen Differentialgleichungen der mathematischen Physik*, Bd. I, pp. 342-343.

Ciò premesso, indichiamo le linee generali del procedimento, che sarà svolto nei §§ seguenti:

1) la determinazione di  $V$  si riconduce (adattando opportunamente un classico procedimento di SCHWARZ) alla integrazione di una ordinaria equazione differenziale del secondo ordine a coefficienti doppiamente periodici; da essa rigorosamente discende l'accennato comportamento del gradiente;

2) la integrazione della detta equazione (che si può effettuare per approssimazioni successive usufruendo di certi parametri  $\lambda$  e  $\zeta$ ) porge per  $V$  e per  $\Delta_1 V$  degli sviluppi uniformemente convergenti in tutto  $\sigma$ , donde in particolare la espressione rigorosa di  $G$ ;

3) per passare alla valutazione effettiva, si arrestano questi sviluppi al loro primo termine, ciò che pur assicura ogni desiderabile approssimazione. L'errore, che si commette, risulta infatti, *nella peggiore ipotesi*, dell'ordine di  $16 (r/R)^m$  (rispetto all'unità), affatto trascurabile dunque, se, come avviene sempre nei cavi,  $r/R$  è molto  $< \frac{1}{2}$  ed  $m \geq 6$ ;

4) esegesi e discussione numerica delle formule finali.

## 2. - La funzione armonica $V$ e la sua associata $U$ .

Sia  $O$  il centro di  $C$ , che si suppone naturalmente centro di simmetria anche per la spezzata  $T$ .

Riferiamoci ad un sistema di assi coll'origine in  $O$  e coll'asse  $x$  (anzi colla direzione positiva dell'asse  $x$ ) passante per uno dei nodi. Sia questo  $N$  (fig. 1) e siano  $N_1, N_{-1}$  il primo e l'ultimo nodo, che si incontrano a partire da  $N$  procedendo sul contorno  $T$  nel verso  $xy$ ; sia  $M$  l'ultimo ventre, cioè il punto medio dell'arco  $NN_{-1}$ .

Sieno infine  $N', N'_1, N'_{-1}, M'$  i punti del contorno  $C$  corrispondenti a  $N, N_1, N_{-1}, M$ , cioè le intersezioni di  $C$  coi raggi  $ON, ON_1, ON_{-1}, OM$  rispettivamente.

Consideriamo, accanto alle coordinate cartesiane  $x, y$  di un generico punto  $P$  di  $\sigma$ , anche le polari  $\varrho$  e  $\vartheta$ , e risguardiamo il potenziale  $V$ , che si annulla su  $T$  e prende il valore 1 su  $C$ , come funzione di  $\varrho$  e di  $\vartheta$ .

Dacchè, per ipotesi, il campo  $\sigma$ , e con esso le condizioni del problema, si trasformano in sè per ogni rotazione di ampiezza  $2\pi/m$ , avremo identicamente

$$(1) \quad V\left(\varrho, \vartheta - \frac{2\pi}{m}\right) = V(\varrho, \vartheta).$$

Del pari, tutto essendo simmetrico rispetto all'asse polare, sarà

$$(2) \quad V(\varrho, -\vartheta) = V(\varrho, \vartheta).$$

I perfezionamenti moderni della teoria del potenziale ci permettono di asserire con tutto rigore che la  $V$  è una funzione analitica, regolare entro  $\sigma$  e sui contorni, esclusi al più i nodi, e che lo stesso può dirsi della sua associata  $U$ , definita (a meno di una costante additiva) dalle equazioni

$$(3) \quad \varrho \frac{dU}{d\varrho} = \frac{dV}{d\vartheta}, \quad \frac{dU}{d\vartheta} = -\varrho \frac{dV}{d\varrho}.$$

La  $U$  stessa rimane inoltre, al pari di  $V$ , finita e continua anche nei nodi (la cuspidè essendo rivolta verso l'esterno del campo  $\sigma$ ) (\*).

Si noti che, essendo il campo  $\sigma$  doppiamente connesso, la funzione  $U$  può non essere uniforme (ed effettivamente non lo è, come tosto apparirà), ma lo diventa non appena si renda il campo semplicemente connesso.

Immaginiamo di averlo fatto, praticando per es. il taglio  $KK'$  lungo il semiasse negativo delle  $x$ , e fissiamo la costante additiva col prendere  $U=0$  in  $N$  [cioè  $U(r, 0) = 0$ ].

Tenendo conto delle (1), (2), le (3) mostrano che  $U(\varrho, \vartheta - 2\pi/m)$ , —  $U(\varrho, -\vartheta)$  hanno le medesime derivate di  $U(\varrho, \vartheta)$ , talchè

$$U\left(\varrho, \vartheta - \frac{2\pi}{m}\right) = U(\varrho, \vartheta) + \text{cost.}, \\ U(\varrho, -\vartheta) = -U(\varrho, \vartheta) + \text{cost.}$$

La costante della seconda equazione è nulla, come si riconosce facendovi  $\varrho = r$ ,  $\vartheta = 0$ .

Chiamando l'altra  $2\omega$ , le proprietà della  $U$ , che fanno riscontro alle (1), (2), risultano espresse da

$$(1') \quad U\left(\varrho, \vartheta - \frac{2\pi}{m}\right) = U(\varrho, \vartheta) + 2\omega,$$

$$(2') \quad U(\varrho, -\vartheta) = -U(\varrho, \vartheta).$$

La (2') dà in particolare  $U(\varrho, 0) = 0$ , e con ciò la (1'), pure per  $\vartheta = 0$ , dà  $U(\varrho, -2\pi/m) = 2\omega$ .

Facendo invece, nelle (1'), (2'),  $\vartheta = \pi/m$ , si ricava

$$U\left(\varrho, -\frac{\pi}{m}\right) = \omega.$$

La  $U$  è dunque zero lungo tutto il segmento  $NN'$  ed ha i valori costanti  $\omega$ ,  $2\omega$  in tutti i punti dei segmenti  $MM'$ ,  $N_{-1}N'_{-1}$  rispettivamente.

(\*) Cfr. in particolare KORN, *Lehrbuch der Potentialtheorie*, Bd. II, pp. 211-233.



La applicazione ripetuta della (1'), a partire dai valori 0 e  $\pi/m$  di  $\vartheta$ , mostra che, anche su ogni altro raggio, sia nodale che ventrale, la  $U$  ha valori costanti, i quali variano da un raggio al successivo di  $\omega$  nel verso negativo e di  $-\omega$  nel positivo: così sui due bordi del taglio  $KK'$  risulta  $U = \pm m\omega$ .

Prendiamo adesso a considerare una generica linea equipotenziale  $V = \text{cost.}$ , la costante essendo, si intende, compresa fra i valori estremi 0 ed 1, che  $V$  prende sui contorni. Un ragionamento ben noto, basato sull'armonicità di  $V$ , permette di asserire che la  $V = \text{cost.}$  è una linea chiusa, priva di nodi, riducibile per deformazione continua a  $C$  (senza uscire da  $\sigma$ ). Sia  $ds$  un elemento d'arco della  $V = \text{cost.}$  (nel verso positivo  $xy$ ),  $dn$  un elemento della direzione ortogonale volta verso il contorno  $C$ . Si ha dalle (3)

$$\frac{dU}{ds} = - \frac{dV}{dn}.$$

Ora  $dV/dn$  ha sempre il medesimo segno, perchè il suo annullarsi implicherebbe  $\Delta_1 V = 0$ , e ciò può accadere appena nei nodi. Siccome, passando da  $T$  a  $C$ ,  $V$  cresce da zero ad 1, così dovrà essere  $dV/dn$  positiva. Dunque  $dU/ds$  è costantemente negativa, e ciò vale anche sui due contorni, eccettuati eventualmente i nodi.

Ne consegue che la  $U$  va sempre decrescendo quando si procede nel verso  $xy$  sopra una qualsiasi linea equipotenziale,  $C$  e  $T$  comprese.

In particolare poi

$$\omega > 0.$$

### 3. - Inversione.

Si ponga

$$z = x + iy = \rho e^{i\vartheta},$$

$$u = U + iV.$$

La  $u$  risulterà funzione della variabile complessa  $z$ , uniforme e regolare in tutto il campo  $\sigma$  (reso semplicemente connesso col taglio  $KK'$ ) e sui due contorni, esclusi al più i nodi (dove però si conserva finita e continua).

Al contorno di  $\sigma$  (costituito da  $T$ ,  $C$  e dai due bordi del taglio  $KK'$ ) corrisponde univocamente nel piano  $u$  (fig. 2) il rettangolo  $\Re$  compreso fra l'asse reale  $V = 0$ , la sua parallela  $V = 1$  e le due parallele all'asse immaginario  $U = m\omega$ ,  $U = -m\omega$ .

In ogni altro punto di  $\sigma$ , la  $u$  assume valori interni al rettangolo e la corrispondenza è biunivoca entro i due campi e sui rispettivi contorni. Ciò risulta analiticamente dal fatto che (esclusi soltanto i nodi)  $|du/dz| = \Delta_1 V$  è regolare e diverso da zero; e che anche nei nodi  $U$  e  $V$  restano finite e continue.

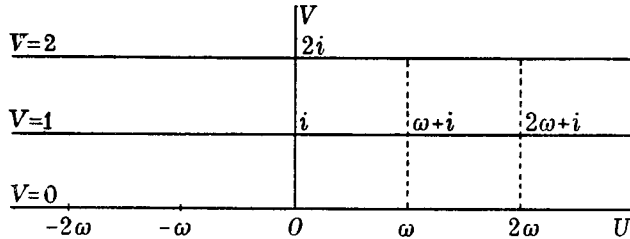


Fig. 2.

Siamo così autorizzati a ritenere reciprocamente  $z$  funzione uniforme di  $u$ , regolare entro il rettangolo  $\mathfrak{R}$  e sul contorno, con eventuale esclusione dei soli punti  $u = 0, u = \pm 2\omega, \dots$  dell'asse reale, cui corrispondono i valori nodali di  $z$  (cioè i punti  $N, N_{-1}, N_1, \dots$ ).

Ai tratti  $(0, 1)$  dell'asse immaginario  $U = 0$  e delle sue parallele  $U = \pm \omega, U = \pm 2\omega, \dots$  corrispondono la  $NN'$  e gli altri raggi (alternativamente) ventrali e nodali di  $\sigma$  da una parte e dall'altra di  $NN'$ . I sensi — fissiamolo bene — sono opposti, cioè al verso positivo dell'asse  $U$  corrisponde il negativo di  $\vartheta$  e reciprocamente.

Le (1), (1') si possono evidentemente compendiare in

$$\begin{aligned} u(z e^{-2\pi i/m}) &= U\left(\varrho, \vartheta - \frac{m}{2\pi}\right) + iV\left(\varrho, \vartheta - \frac{2\varrho}{m}\right) \\ &= U(\varrho, \vartheta) + 2\omega + iV(\varrho, \vartheta) = u(z) + 2\omega, \end{aligned}$$

il che è quanto dire

$$(4) \quad z(u + 2\omega) = e^{-2\pi i/m} z(u).$$

Questa equazione funzionale permette, se si vuole, di considerare  $z$  come una funzione uniforme di  $u$  in tutta la striscia  $V = 0, V = 1$  con singolarità soltanto nell'origine e nei punti dell'asse reale congrui alla origine secondo  $2\omega$ .

Un'altra proprietà della  $z$  si trae dalle (2), (2'). Così come stanno, esse esprimono che ai punti di  $\sigma$  simmetrici rispetto all'asse reale, cioè

a valori coniugati di  $z$ , corrispondono punti  $u$  simmetrici rispetto all'asse immaginario  $U=0$ . Per tradurre in formule, consideriamo in particolare (nel piano  $u$ ) un generico punto  $U+i$  della retta  $V=1$ , e il suo simmetrico (rispetto all'asse  $V$ )  $-U+i$ . I corrispondenti valori coniugati di  $z$ , appartenendo a  $C$ , avranno entrambi il modulo  $R$ , e sarà per conseguenza

$$z(U+i)z(-U+i) = R^2,$$

la quale equazione risulta con ciò stabilita per i valori reali di  $U$ . Ma siccome  $z$  è funzione analitica, la relazione stessa vale in tutto il campo di esistenza della funzione e può quindi essere scritta.

$$(5) \quad z(u+i)z(-u+i) = R^2.$$

#### 4. - Criterio di Schwarz. Equazione differenziale di terz'ordine per la $z(u)$ e sua risolvente di secondo.

Il sig. SCHWARZ nella sua celebre Memoria, *Über einige Abbildungsaufgaben* <sup>(6)</sup>, ha stabiliti alcuni principî, da cui, per lo scopo nostro, ricaveremo quanto segue:

1) Se  $z$  è funzione della variabile complessa  $u$ , uniforme e regolare in un certo campo, e, mentre la  $u$  varia sopra una retta parallela all'asse reale o all'asse immaginario, la  $z$  varia (nel suo piano) sopra un arco di cerchio, la espressione differenziale (derivata schwarziana)

$$\{z, u\} = \frac{d^2}{du^2} \log \frac{dz}{du} - \frac{1}{2} \left( \frac{d}{du} \log \frac{dz}{du} \right)^2$$

ha, nei punti della detta retta, valori reali.

2) Se a due segmenti per diritto, concorrenti in un punto  $u = u_0$ , corrispondono nel piano  $z$  due archi di cerchio tangenti (più precisamente incontrantisi sotto angolo nullo, non di  $180^\circ$ ), e  $z$  è regolare nell'intorno di  $u = u_0$ , o nella parte di questo intorno, che appartiene al campo, la  $\{z, u\}$  ammette nell'intorno di  $u_0$  uno sviluppo della forma

$$\{z, u\} = \frac{1}{2} \frac{1}{(u - u_0)^2} + \frac{c}{u - u_0} + \text{funzione di } u,$$

regolare per  $u = u_0$ ,  $c$  designando una costante.

(\*) « Journal für die reine und angewandte Mathematik », Bd. 70, 1869, ovvero: *Gesammelte Abhandlungen*, Bd. II, pag. 65. Cfr. anche DARBOUX, *Leçons sur la théorie des surfaces*, t. I, cap. IV.

Ciò premesso, esaminiamo il comportamento analitico della derivata schwarziana  $\{z, u\}$  della funzione  $z$  precedentemente considerata.

Essa è anzi tutto, al pari di  $z$ , funzione regolare nella striscia  $V=0$ ,  $V=1$ , eccettuati i soli punti  $u=0$ ,  $u=\pm 2\omega$ , ... dell'asse reale; e soddisfa, in virtù della (4), alla relazione di periodicità

$$(6) \quad \{z, u + 2\omega\} = \{z, u\} .$$

Il primo principio ci assicura che, nei tratti  $0, 2\omega$  dell'asse reale e della sua parallela  $V=1$  (cui corrispondono nel piano  $z$  gli archi di cerchio  $NN_{-1}$ ,  $N'N'_{-1}$ ),  $\{z, u\}$  è reale. Data la sua periodicità, essa è quindi reale su tutte le due rette  $V=0$ ,  $V=1$ .

Applichiamo ora alla retta  $V=1$  il principio della riflessione analitica, pure dovuto al sig. SCWHARZ.

La  $\{z, u\}$  (definita finora nella striscia  $V=0$ ,  $V=1$ ) è, a norma di tale principio, prolungabile analiticamente al disopra della  $V=1$ , e prende, in punti simmetrici, rispetto a questa retta, valori coniugati. In particolare si presentano coniugati i valori  $\{z, U\}$ ,  $\{z, U+2i\}$ , assunti nei punti dell'asse reale e loro simmetrici, appartenenti alla  $V=2$ . Ma  $\{z, U\}$  è reale, e per conseguenza risulta addirittura

$$\{z, U+2i\} = \{z, U\} ,$$

la quale, sussistendo per i valori reali di  $U$ , vale al solito in tutto il campo di esistenza, e può quindi essere scritta

$$(7) \quad \{z, u + 2i\} = \{z, u\} .$$

Le (6), (7) esprimono che la  $\{z, u\}$  è funzione doppiamente periodica di  $u$ , coi periodi fondamentali  $2\omega$ ,  $2i$ , reale il primo, puramente immaginario il secondo.

Nel rettangolo fondamentale  $(0, 2\omega, 2\omega + 2i, 2i)$  questa  $\{z, u\}$  ha il solo punto singolare  $u=0$ . Siccome ai due segmenti  $0, 2\omega$ ;  $0, -2\omega$  dell'asse reale  $V=0$  corrispondono nel piano  $z$  gli archi di cerchio  $NN_{-1}$ ,  $NN_1$ , e questi si incontrano precisamente sotto angolo nullo, così il secondo dei ricordati principi mostra che  $\{z, u\}$  ha nell'origine un polo di secondo ordine, la parte meromorfa dello sviluppo essendo

$$\frac{1}{2} \frac{1}{u^2} + \frac{c}{u} .$$

Per un noto teorema sulle funzioni doppiamente periodiche, la somma dei residui, relativi al parallelogrammo fondamentale, è nulla. Sarà dunque  $c=0$ .

Basta adesso introdurre la  $p$  di WEIERSTRASS (relativa, si intende, ai periodi  $2\omega$ ,  $2i$  della  $\{z, u\}$ ) e formare la differenza

$$\{z, u\} - \frac{1}{2} pu$$

per riconoscere che si tratta di una funzione doppiamente periodica senza singolarità alcuna, e quindi di una pura costante (reale, perchè sull'asse reale sono reali tanto  $\{z, u\}$  quanto  $pu$ ). Designandola con  $2B$ , si conclude in definitiva che la nostra funzione  $z(u)$  soddisfa alla equazione *schwarziana*

$$\{z, u\} = \frac{1}{2} pu + 2B$$

e si può quindi considerare (\*) come quoziente di due integrali della equazione differenziale di secondo ordine (a coefficienti doppiamente periodici)

$$(E) \quad \frac{d^2f}{du^2} + \left(\frac{1}{4} pu + B\right) f = 0.$$

### 5. - Proprietà caratteristiche degli integrali particolari della risolvente (E), a mezzo dei quali si esprime la $z$ .

Il coefficiente  $\frac{1}{4} pu + B$  della (E) dipende da due costanti, di cui le precedenti considerazioni non forniscono il valore: la  $\omega$  (che si sa soltanto essere positiva) e la  $B$ . Per vedere in base a quali condizioni esse vanno determinate, cominciamo col caratterizzare i due integrali particolari della (E), il cui rapporto è  $z$ .

Designiamoli con  $R\psi$  e  $\varphi$ , e notiamo subito che, siccome  $z$  non è una costante,  $\psi$  e  $\varphi$  saranno necessariamente due integrali indipendenti della (E). Di più, mancando nella (E) il termine in  $df/du$ , il wronskiano

$$\begin{vmatrix} \varphi & \frac{d\varphi}{du} \\ \psi & \frac{d\psi}{du} \end{vmatrix}$$

sarà, per il teorema di LIOUVILLE, una costante non nulla. Potremo ritenerla eguale ad 1, poichè non si influisce su  $z$ , moltiplicando  $\psi$  e  $\varphi$  per una stessa costante. Sarà così

$$(8) \quad \varphi \frac{d\psi}{du} - \psi \frac{d\varphi}{du} = 1.$$

(\*) Cfr. DARBOUX, loco cit., pag. 185.

Dalla

$$z = R \frac{\psi}{\varphi}$$

si trae, derivando,

$$(9) \quad \frac{dz}{du} = \frac{R}{\varphi^2},$$

donde intanto apparisce che, siccome  $dz/du$  è, per natura sua, univocamente determinato, altrettanto deve accadere di  $\varphi$  (a meno del segno); lo stesso vale allora per  $\psi = z\varphi/R$ . Ma la (9) ci permette di andare più innanzi.

Nella striscia  $V=0$ ,  $V=1$ ,  $dz/du$  è, come  $z$ , uniforme e regolare, fatta eccezione per i soli punti  $0$ ,  $\pm 2\omega$ , ... dell'asse reale. Con questa stessa eccezione sarà dunque pur *regolare e diversa da zero* la  $\varphi$ ; e regolare per conseguenza anche la  $\psi$ .

Portiamo per  $z$  la sua espressione  $R(\psi/\varphi)$  nella (5), con che essa si può scrivere

$$\frac{\psi(-u+i)}{\varphi(-u+i)} = \frac{\varphi(u+i)}{\psi(u+i)}.$$

Se si deriva, badando alla (8), risulta subito

$$\varphi^2(-u+i) = \psi^2(u+i),$$

donde

$$\varphi(-u+i) = \pm \psi(u+i),$$

valendo il medesimo segno in tutta la striscia, perchè, come si è osservato,  $\varphi$  non si annulla nell'interno.

Per fissare il segno, facciamo  $u=0$ . Al punto  $i$  del piano  $u$  corrisponde nel piano  $z$  il punto  $N'(z=R)$ ; deve dunque essere  $\psi(i)/\varphi(i) = 1$ , e valere quindi in tutta la striscia il segno superiore, ossia

$$(10) \quad \varphi(-u+i) = \psi(u+i).$$

Dalle (4) e (9) segue ovviamente

$$\varphi^2(u+2\omega) = e^{2\pi i/m} \varphi^2(u),$$

e quindi

$$\varphi(u+2\omega) = \pm e^{\pi i/m} \varphi(u)$$

colla stessa avvertenza circa il doppio segno.

L'ambiguità si toglie subito, attribuendo ad  $u$  il valore  $-\omega + 1$  e notando che, in virtù della (10),  $\varphi(-\omega + i) = \psi(\omega + i)$ , talchè si ha

$$\varphi(\omega + i) = \pm e^{\pi i/m} \psi(\omega + i).$$

Ora al punto  $\omega + i$  del piano  $u$  corrisponde, nel piano  $z$ , il punto  $M'(z = R e^{-\pi i/m})$ ; dunque

$$\frac{\psi(\omega + i)}{\varphi(\omega + i)} = e^{-\pi i/m},$$

e questo esige che si adotti anche qui il segno superiore, scrivendo di conformità

$$(11) \quad \varphi(u + 2\omega) = e^{\pi i/m} \varphi(u).$$

Per l'altro integrale  $\psi = z\varphi/R$  si ha immediatamente dalle (4) e (11) .

$$(12) \quad \psi(u + 2\omega) = e^{-\pi i/m} \psi(u).$$

Aggiungendo alle (10), (11) la condizione di corrispondenza fra i punti  $0, i$  del piano  $u$  ed  $N, N'$  ( $z = 0, z = R$ ) del piano  $z$ , cioè

$$(13) \quad \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\psi(u)}{\varphi(u)} = \frac{r}{R}, \quad \frac{\psi(i)}{\varphi(i)} = 1,$$

si ha quanto importa ritenere per la effettiva determinazione della funzione  $z(u)$ . Nella prima delle (13) è conveniente scrivere  $\lim_{u \rightarrow 0}$ , trattandosi di un punto singolare della equazione (E), nel quale — si noti bene — ogni integrale assume il valore zero: questo perchè gli esponenti caratteristici della (E), relativi al punto  $u = 0$  hanno entrambi il valore  $\frac{1}{2}$ , e quindi un generico integrale, nelle vicinanze del detto punto, è della forma

$$u^{1/2}(\mathfrak{F}_1 + \mathfrak{F}_2 \log u)$$

con  $\mathfrak{F}_1$  e  $\mathfrak{F}_2$  funzioni olomorfe.

Della esistenza (univoca, a meno di un comune cambiamento di segno) di due integrali  $\varphi$  e  $\psi$  della (E) soddisfacenti (per valori pure univocamente determinati dei parametri  $\omega$  e  $B$ ) alle (8), (11), (12) e (13) siamo assicurati dalla natura del procedimento, cioè (badando alla sostanza) dal principio di DIRICHLET, che, per aree del tipo  $\sigma$ , non dà ormai luogo a difficoltà alcuna.

**6. - Considerazioni qualitative sugli integrali principali della (E) relativi ai punti  $u = i$ ,  $u = \omega$ .**

La funzione  $\wp u$ , avendo per periodi  $2\omega$  e  $2i$ , assume valori reali anche sulla retta  $V=1$ , cioè per  $u$  della forma  $U+i$ . Si ha in particolare, colle solite notazioni weierstrassiane,

$$\wp i = e_3, \quad \wp(i + \omega) = e_2.$$

Per ogni altro valore reale di  $U$ ,  $\wp(i + U)$  rimane compresa fra  $e_2$  ed  $e_3$ , ed è funzione pari della variabile  $U$  di periodo  $2\omega$ .

Risguardiamo, nella equazione (E),  $U$  come variabile indipendente, con che essa si può scrivere

$$\frac{d^2 f}{dU^2} = \left[ \frac{1}{4} \wp(i + U) + B \right] f,$$

e prendiamo a considerare i due integrali principali  $f_1(U)$ ,  $f_2(U)$  relativi al punto  $U=0$ .

L'integrale  $f_1(U)$ , corrispondente alle condizioni iniziali

$$f_1(0) = 0, \quad f_1'(0) = 1,$$

risulterà ovviamente funzione dispari di  $U$ ; l'altro integrale  $f_2(U)$ , per cui

$$f_2(0) = 1, \quad f_2'(0) = 0,$$

risulterà invece pari.

I due integrali  $\varphi$  e  $\psi$  sono naturalmente esprimibili come combinazioni lineari di  $f_1$ ,  $f_2$ ; talchè si può considerare  $z = R(\psi/\varphi)$  come funzione lineare fratta del rapporto

$$t = \frac{f_1}{f_2}.$$

Al variare di  $U$  da  $-m\omega$  ad  $m\omega$ ,  $z$  percorre la circonferenza  $C$ , partendo dal punto  $K'$  e ritornandovi dopo un giro completo percorso sempre nello stesso senso ( $yx$ ).

Il rapporto

$$t = \frac{f_1}{f_2}$$

non può così assumere due volte uno stesso valore, tranne che per  $U = \pm m\omega$ . Ora  $f_1$ ,  $f_2$  restano entrambi finiti e non vanno contempora-



neamente a zero (perchè in tal caso si annullerebbe anche  $\varphi$ , mentre si è riconosciuto nel precedente § che ciò può aver luogo appena nei nodi).

Se ne conclude che, nell'intervallo  $\pm m\omega$ ,  $f_1$  ha l'unica radice  $U=0$ ,  $f_2$  le radici  $\pm m\omega$ , e queste soltanto.

Infatti, qualora  $f_1$  si annullasse per altri valori di  $U$ , anche  $t$  riprenderebbe il valore zero, ciò che è appunto da escludere. Quanto a  $f_2$ , se essa non fosse zero per  $U = \pm m\omega$ ,  $t$  assumerebbe in questi punti valori finiti di segno opposto, e ciò darebbe necessariamente luogo a valori distinti di  $z$ . Che la stessa  $f_2$  abbia queste due sole radici segue, come per  $f_1$ , dalla univocità della corrispondenza.

Ciò posto, è facile constatare che deve sussistere la disuguaglianza

$$\frac{1}{4} e_2 + B > 0.$$

Proviamoci infatti a supporre che sia invece

$$\frac{1}{4} e_2 + B \leq 0.$$

Sarebbe a fortiori

$$\frac{1}{4} p(i + U) + B \leq 0$$

per tutti i valori reali di  $U$ . D'altra parte, in virtù della (E),

$$f_2''(U) = - \left[ \frac{1}{4} p(i + U) + B \right] f_2(U),$$

e, siccome, per quanto s'è detto or ora, e per essere  $f_2(0) = 1$ ,  $f_2 > 0$  in tutto l'intervallo  $\pm m\omega$  (estremi esclusi), così, in questo stesso intervallo,

$$f_2''(U) \geq 0.$$

La funzione  $f_2'(U)$  dovrebbe quindi crescere, o almeno non decrescere, al variare di  $U$  da 0 ad  $m\omega$ . Ma essa si annulla per  $U=0$  e non è una costante [perchè, in tale ipotesi, si annullerebbe identicamente  $f_2''(U)$ , cioè addirittura  $f_2(U)$ , in causa della (E)]; sarebbe dunque  $f_2'(U) \geq 0$ . La funzione  $f_2$ , che è già 1 per  $U=0$  non potrebbe allora decrescere, e questo è assurdo, perchè essa deve invece scendere a zero per  $U = m\omega$ .

Siamo adesso in grado di approfondire il modo di comportarsi della (E) lungo l'asse reale, il che è ancora preparazione necessaria per il seguente §, dove si tratterà del gradiente.

Posto per maggior comodo

$$v = u - \omega,$$

la (E) assumerà l'aspetto

$$\frac{d^2 f}{dv^2} + \left[ \frac{1}{4} p(v - \omega) + B \right] f = 0,$$

e, restando  $p(v - \omega)$  funzione pari anche dell'argomento  $v$ , i suoi integrali principali, relativi al punto  $v = 0$ , saranno uno pari, e l'altro dispari. Designeremo il primo con  $f_2(v)$ , il secondo con  $f_1(v)$ .

Come poc'anzi,  $z = R(\psi/\varphi)$  si potrà riguardare funzione lineare fratta del rapporto

$$\frac{f_2(v)}{f_1(v)}.$$

Tenendo presente che al segmento  $0, 2\omega$  dell'asse reale nel piano  $u$ , cioè al tratto di valori  $-\omega, \omega$  dell'argomento  $v$ , corrisponde nel piano  $z$  l'arco di cerchio  $NN_{-1}$ , che la corrispondenza è univoca, e che  $f_1(v), f_2(v)$  si annullano insieme soltanto nei nodi ( $v = \pm \omega$ ) <sup>(10)</sup>, si riconosce, con considerazioni del tutto analoghe a quelle usate per  $f_1, f_2$ , che:

Nell'intervallo  $-\omega, \omega$  (estremi esclusi)  $f_2(v)$  non si annulla mai,  $f_1(v)$  una volta sola (per  $v = 0$ );  $f_2$ , che è 1 per  $v = 0$ , resta così sempre positiva;  $f_1$ , che per  $v = 0$  si annulla ed ha derivata prima positiva [ $f_1'(0) = 1$ ], deve invece essere negativa fra  $-\omega$  e 0, positiva fra 0 ed  $\omega$ .

Ricordando che  $pu$ , lungo l'asse reale, non va mai al disotto di  $e_1 (> e_2)$ , la precedente disuguaglianza

$$\frac{1}{4} e_2 + B \geq 0$$

implica a fortiori, per qualsiasi valore reale di  $v$ ,

$$\frac{1}{4} p(\omega - v) + B > 0.$$

Dacchè la funzione  $f_2(v)$  è sempre positiva fra  $-\omega$  ed  $\omega$ ,

$$f_2''(v) = - \left[ \frac{1}{4} p(\omega - v) + B \right] f_2(v)$$

è invece negativa, quindi  $f_2'$  decrescente; ma essa  $f_2'$  si annulla per  $v = 0$  e deve quindi risultare positiva nel tratto  $-\omega, 0$ ; negativa nel successivo  $0, \omega$ .

<sup>(10)</sup> Tutti gli integrali della (E) si annullano nei nodi. Lo abbiamo esplicitamente osservato alla fine del precedente paragrafo, riferendoci al punto  $u = 0$ . Lo stesso naturalmente vale per gli altri nodi, che sono congrui a zero rispetto al periodo  $2\omega$ .

Una parola ancora sui due rapporti

$$\frac{f_1(v)}{f_2(v)}, \quad \frac{f_1'(v)}{f_2'(v)}.$$

Nell'intervallo  $0, \omega$  (nei punti interni al quale si mantengono entrambi finiti), essi sono crescenti.

Infatti, essendo il wronskiano

$$f_2(v)f_1'(v) - f_1(v)f_2'(v)$$

identicamente eguale all'unità, la derivata del primo rapporto si riduce a

$$\frac{1}{f_2^2},$$

quella del secondo, in causa della (E), a

$$\frac{\frac{1}{4}[\rho(\omega - v) + B]}{f_2^2},$$

l'una e l'altra quantità essenzialmente positive.

Fra  $0$  ed  $\omega$  sarà per conseguenza crescente anche il prodotto

$$(14) \quad \tilde{\omega}(v) = \frac{f_1(v)f_1'(v)}{f_2(v)f_2'(v)}.$$

Per  $v = 0$ , il secondo membro si presenta sotto forma indeterminata, ma  $\tilde{\omega}$  resta finita e continua, ed è precisamente

$$(14') \quad \tilde{\omega}(0) = \frac{1}{\frac{1}{4}e_1 + B},$$

come si vede subito, tenendo presente che  $f_2(0) = f_1'(0) = 1$ , e trattando la frazione  $f_1(v)/f_2'(v)$  colla regola del L'HÔPITAL.

## 7. - Estensione del campo $\sigma$ per riflessione circolare.

### Comportamento del gradiente.

La funzione  $z(u)$  realizza, come si è visto a § 3, la rappresentazione conforme del campo  $\sigma$  (reso semplicemente connesso col taglio  $KK'$ ) sopra il rettangolo  $\Re$  ( $V = 0, V = 1; U = \pm m\omega$ ) del piano  $u$ .

Al lato  $V=1$  del rettangolo corrisponde la circonferenza  $C$  (contorno esterno di  $\sigma$ ).

Consideriamo il rettangolo  $\mathfrak{R}^0$ , simmetrico di  $\mathfrak{R}$ , rispetto alla retta  $V=1$  (che ha quindi per lati le rette  $V=1$ ,  $V=2$ ,  $U=\pm m\omega$ ).

La funzione  $z(u)$  è prolungabile analiticamente entro  $\mathfrak{R}^0$  e vi resta uniforme, come si desume dalla

$$(5) \quad z(u+i) = \frac{R^2}{z(-u+i)},$$

immaginando di attribuire a  $-u+1$  tutti i valori compresi in  $\mathfrak{R}$  (con che quelli di  $u+i$  esauriscono  $\mathfrak{R}^0$ ).

Se si nota che  $R^2/z$  è l'affissa del punto riflesso-coniugato di  $z$  rispetto all'asse  $x$  e al cerchio  $C$ , si desume dalla (5) che, al variare di  $u$  entro  $\mathfrak{R}^0$ ,  $z(u)$  varia conformemente in un campo  $\sigma^0$ , il quale non è altro che l'immagine (thomsoniana) di  $\sigma$  rispetto a  $C$ .

In particolare, ai punti della retta  $V=2$  corrisponde un contorno  $T^0$ , immagine di  $T$ , che risulta evidentemente costituito da  $m$  archi di cerchio tangenti ed esterni a  $C$ . Cambiando nella (5)  $u$  in  $-u+i$  e derivando, si ha

$$(5') \quad \frac{d}{du} z(2i-u) = -\frac{R^2}{z^2} \frac{dz}{dU}.$$

Ciò posto, osserviamo che, per la monogeneità della relazione fra  $u$  e  $z$ , sussistono le identità

$$\frac{du}{dz} = \frac{dU}{dx} + i \frac{dV}{dx} = \frac{dV}{dy} + i \frac{dV}{dx},$$

e, quindi, prendendo i moduli,

$$\left| \frac{du}{dz} \right| = \Delta_1 V,$$

identità già invocata a pag. 346.

Fin dal § 1 si è avvertito che, per l'armonicità di  $\log \Delta_1 V$ , il massimo valore del gradiente cade certamente sul contorno del campo  $\sigma$ : su  $T$  o su  $C$ . Allora s'è anche aggiunto che ragioni di analogia e di simmetria indicavano i ventri di  $T$  come sedi di questi valori massimi.

È il momento di giustificare tali asserzioni.

Mostriamo in primo luogo che si può prescindere da  $C$ .

Giova all'uopo l'estensione al campo  $\sigma^0$  della relazione funzionale fra  $u$  e  $z$ , offerta dalla (5).

Essa permette in particolare di riconoscere che il potenziale  $V$ , fisicamente definito nel campo  $\sigma$ , è analiticamente prolungabile anche nell'immagine  $\sigma^0$ , e prende il valore costante  $V=2$  sul contorno esterno  $T^0$ . Come in  $\sigma$ , così in  $\sigma^0$  (e sulla linea di separazione  $C$ )  $V$  è una funzione armonica e regolare, potendo fare eccezione i soli nodi di  $T$  e le loro immagini rispetto a  $C$ . Nelle stesse condizioni si trova la funzione  $\log \Delta_1 V$ . Perciò i valori estremi di  $\Delta_1 V$ , relativi all'intero campo  $\sigma$ ,  $\sigma^0$ , coincidono coi valori estremi, relativi al contorno, il quale consta delle due spezzate  $T$  e  $T^0$ . Il valore minimo (corrispondente ad uno qualunque dei nodi di  $T$  o di  $T^0$ ) è lo zero <sup>(1)</sup>.

Consideriamo d'altra parte i valori del gradiente in due punti (riflesso-coniugati)  $Q$  e  $Q^0$  di  $T$  e  $T^0$  rispettivamente (cui corrispondono nel piano  $u$  due punti  $U$  e  $2i-U$ , simmetrici rispetto alla retta  $V=1$ ).

Scrivendo per brevità  $\Delta$ , al posto di  $\Delta_1 V$ , ponendo cioè

$$(15) \quad \Delta = \Delta_1 V = \frac{du}{dz} = \frac{1}{\frac{dz}{du}},$$

ricaviamo dalla (5')

$$\Delta_{Q^0} = \frac{|z|^2}{R^2} \Delta_Q.$$

Siccome la  $|z|$  di un punto generico  $Q$  di  $T$  è sempre  $< R$ , così i massimi del gradiente in  $T$  prevalgono necessariamente su quelli relativi a  $T^0$ .

*Rimane con ciò dimostrato che, per tutto il campo  $\sigma$ ,  $\sigma^0$ , e quindi a fortiori per il solo  $\sigma$ , i valori estremi del gradiente  $\Delta$  si trovano sopra  $T$ .*

Resta da confermare che, conformemente alla presunzione intuitiva, i massimi cadono proprio nei ventri.

Si noti intanto che, come la funzione potenziale  $V$ , così il  $\Delta_1 V$  rimane inalterato per rotazioni di  $2\pi/m$ , talchè basta studiarne il comportamento sopra uno degli archi di cerchio, che costituiscono il contorno  $T$ :  $NMN_{-1}$  per esempio.

D'altra parte c'è pure simmetria rispetto ad ogni raggio ventrale; e perciò in punti  $Q$ ,  $\bar{Q}$  di  $\sigma$ , simmetrici rispetto al raggio ventrale  $MM'$ ,  $V$  e  $\Delta_1 V$  prendono valori identici.

In virtù delle (3), si ha, per la funzione associata  $U$ ,

$$U_{\bar{Q}} = -U_Q + \text{cost.}$$

<sup>(1)</sup> Ciò risulta da proprietà generali, come già si è avvertito a § 1. Si può del resto verificarlo direttamente, ricorrendo alla (9). Essa mostra infatti che  $du/dz$  si annulla con  $\varphi$ ; e nei nodi si ha appunto  $\varphi = 0$ .

La costante ha il valore  $2\omega$ , come si vede facendo coincidere  $Q$  con  $N$  e quindi  $\bar{Q}$  con  $N_{-1}$  (oppure entrambi con  $M$ ). Si può dunque scrivere

$$U_Q - \omega = -(U_{\bar{Q}} - \omega),$$

la quale non è del resto che un'ovvia combinazione delle (1'), (2'). Essa sta a dire, se si vuole, che a punti  $U - \omega, V; -(U - \omega), V$  del piano  $u$ , simmetrici rispetto alla retta  $U = \omega$ , corrispondono, nel piano  $z$ , punti  $Q, \bar{Q}$  simmetrici rispetto al raggio ventrale  $MM'$ .

Ne viene che il gradiente  $\Delta$ , in quanto si risguardi, come è evidentemente lecito, funzione delle due variabili  $U_1 = U - \omega, V$ , soddisfa alla relazione

$$\Delta(U_1, V) = \Delta(-U_1, V).$$

Siccome, per le (15) e (9),

$$(15') \quad \Delta = \frac{|\varphi^2|}{R},$$

risulteranno in particolare eguali — importa ritenerlo — i valori di  $|\varphi^2|$  corrispondenti a valori reali ed opposti dell'argomento  $u - \omega$ .

Ciò premesso, riprendiamo per un momento i due integrali  $f_1(v), f_2(v)$  ( $v = u - \omega = U_1 + iV$ ) del § antecedente.

$\varphi$ , che è combinazione lineare di  $f_1, f_2$ , non può essere proporzionale ad  $f_1$ , perchè  $f_1$ , a differenza di  $\varphi$ , si annulla per  $v = 0$ , cioè in  $M$ . Sarà dunque essenzialmente diverso da zero, nella espressione di  $\varphi$ , il coefficiente  $k$  di  $f_2$ , e si potrà quindi porre la espressione stessa sotto la forma

$$(16) \quad \varphi = k[f_2(v) + ihf_1(v)],$$

con  $h$  e  $k$  costanti.

Per  $v$  reale e compreso fra i due valori singolari  $-\omega, \omega$ ,  $f_1$  ed  $f_2$  sono reali. Dette  $\bar{h}$  e  $\bar{k}$  le costanti coniugate ad  $h$  e  $k$ , avremo

$$|\varphi(v)|^2 = k\bar{k}[f_2^2 + h\bar{h}f_1^2 + i(h - \bar{h})f_2f_1],$$

da cui, cambiando  $v$  in  $-v$  e tenendo presente che  $|\varphi|^2$  deve con ciò rimanere inalterato, risulta subito  $\bar{h} = h$ , il che è quanto dire  $h$  costante reale.

Per determinare  $k$  e riconoscere in pari tempo che  $h > 0$ , conviene ricorrere alla circostanza che, variando  $v$  da  $-\omega$  ad  $\omega$ ,  $z = R(\psi/\varphi)$  percorre l'arco di cerchio  $NMN_{-1}$ . Sia  $A$  il centro del cerchio (fig. 1),  $a = \overline{AN}$  il suo raggio,  $b = \overline{OA}$  la distanza del centro del cerchio dall'origine.

La considerazione del triangolo  $OAN$ , rettangolo in  $N$ , porge ovviamente

$$(17) \quad a = r \operatorname{tg} \frac{\pi}{m}, \quad b = \frac{r}{\cos \frac{\pi}{m}}.$$

Essendo  $b e^{-\pi i/m}$  l'affissa del centro  $A$ ,

$$\frac{z - b e^{-\pi i/m}}{a} = e^{-\pi i/m} \frac{\frac{R}{a} e^{\pi i/m} \psi - \frac{b}{a} \varphi}{\varphi}$$

deve risultare unimodulare per i punti dell'arco suddetto.

Ora

$$\frac{R}{a} e^{\pi i/m} \psi - \frac{b}{a} \varphi$$

si può porre eguale a

$$k(k_2 f_2 + k_1 f_1),$$

designando  $k_1, k_2$  due nuove opportune costanti.

Per  $v = 0$  ( $u = \omega$ ),  $(z - b e^{-\pi i/m})/a$  si riduce a  $e^{-\pi i/m}$ , la frazione

$$\frac{\frac{R}{a} e^{\pi i/m} \psi - \frac{b}{a} \varphi}{\varphi}$$

a

$$k_2 e^{-\pi i/m},$$

dunque intanto  $k_2 = 1$ .

Bisogna così che  $f_2 + k_1 f_1$  abbia lo stesso modulo di  $\varphi = f_2 + i h f_1$ , e ciò per qualunque valore di  $v$  compreso fra  $-\omega$  ed  $\omega$ ; se ne inferisce, cambiando  $v$  in  $-v$ , che devono essere insieme eguali i moduli di

$$f_2(v) \pm i h f_1(v),$$

e di

$$f_2(v) \pm k_1 f_1(v),$$

da cui subito

$$k_1 = \pm i h.$$

Non può valere il segno superiore, perchè in tal caso  $(z - b e^{-\pi i/m})/a$ , e quindi  $z$ , risulterebbe costante; dunque

$$k_1 = -i\hbar$$

e rimane con ciò provata la identità

$$z - b e^{-\pi i/m} = a e^{-\pi i/m} \frac{f_2 - i\hbar f_1}{f_2 + i\hbar f_1}.$$

Avuto riguardo alle

$$(16) \quad \varphi = k(f_2 + i\hbar f_1)$$

e

$$z = R \frac{\psi}{\varphi},$$

se ne trae

$$(16') \quad \psi - \frac{b}{R} e^{-\pi i/m} \varphi = \frac{a}{R} k e^{-\pi i/m} (f_2 - i\hbar f_1);$$

dalle (16) e (16') si ha in particolare per  $u = \omega$ , cioè  $v = 0$ ,

$$(18) \quad \varphi(\omega) = k, \quad \psi(\omega) = \frac{b}{R} (a + b) e^{-\pi i/m}.$$

Tenendo conto che  $v = u - \omega$  e che i due wronskiani

$$\varphi \frac{d\psi}{du} - \psi \frac{d\varphi}{du},$$

$$f_2(v) f_1'(v) - f_1(v) f_2'(v)$$

sono entrambi eguali ad 1, si ha ancora dalle (16), (16')

$$1 = -\frac{2i\hbar a}{R} k^2 e^{-\pi i/m},$$

ossia

$$(19) \quad k^2 = i \frac{R}{2a\hbar} e^{\pi i/m}.$$

A norma di questa eguaglianza e delle precedenti (18), la equazione

$$\frac{dz}{du} = \frac{R}{\varphi^2},$$



facendovi  $u = \omega$ ,  $du = idV$ , dà

$$\frac{dz}{dV} = 2ah e^{-\pi i/m}.$$

Ora, lungo il raggio ventrale  $MM'$ ,  $z$  ha l'argomento costante  $-\pi/m$ , talchè  $ze^{\pi i/m}$  si presenta, lungo il detto raggio, come funzione di  $V$  positiva e crescente. Sarà quindi  $d(ze^{\pi i/m})/dV$ , e in particolare  $2ah$ , una quantità positiva.

Insomma

$$h > 0$$

giusta l'asserto.

Le (15'), (16) e (19) dànno

$$\Delta(U_1, 0) = \frac{f_2^2(v) + h^2 f_1^2(v)}{2ah} \quad (v = U_1),$$

donde

$$\frac{d\Delta}{dU_1} = \frac{1}{ah} (f_2 f_2' + h^2 f_1 f_1'),$$

la quale, ricordando la posizione (14) nel § precedente,

$$\tilde{\omega} = \frac{f_1 f_1'}{f_2 f_2'},$$

può anche essere scritta

$$\frac{d\Delta}{dU_1} = \frac{1}{ah} f_2 f_2' \{1 + h^2 \tilde{\omega}\}.$$

Sotto questa forma sarà facile riconoscere che  $d\Delta/dU_1$ , la quale si annulla per  $U_1 = 0$ , resta poi costantemente negativa fino ad  $U_1 = \omega$ .

Esaminiamo perciò come si comportano i singoli fattori fra  $U_1 = 0$  e  $U_1 = \omega$ :

$1/ah$  è una costante positiva;

$f_2$  è sempre positiva;

$f_2'$  è sempre negativa;

quanto al binomio  $1 + h^2 \tilde{\omega}$ , esso è intanto crescente, tale essendo  $\tilde{\omega}$ .  
Se dunque già

$$1 + h^2 \tilde{\omega}(0) \geq 0,$$

risulterà senz'altro  $d\Delta/dU_1 < 0$  ( $0 < U_1 < \omega$ ).

La constatazione della disuguaglianza

$$1 + h^2 \tilde{\omega}(0) \geq 0,$$

può farsi nel modo seguente.

Anzitutto, essendo  $f_2(v)$  funzione pari,  $f_1(v)$  funzione dispari di  $v$ , per  $v$  puramente immaginario, cioè  $u$  della forma  $\omega + iV$ ,  $f_2(v)$  e  $if_1(v)$  riescono reali.

La (16) ci assicura così che

$$\frac{\varphi(\omega + iV)}{k} = f_2(iV) + ihf_1(iV)$$

è una funzione reale di  $V$ , la quale per  $V=0$  si riduce all'unità, mentre la sua derivata rispetto a  $V$  ha per valore  $-h$ . Facendo variare  $V$  da 0 a 2 (con che  $z$  procede lungo il raggio  $MM'$  traversando  $C$ , fino ad arrivare sul contorno  $T^0$  immagine di  $T$ ),  $\varphi$  non si annulla;  $\varphi/k$  (che è 1 per  $V=0$ ) resta perciò costantemente positiva, e la sua derivata logaritmica

$$(20) \quad \chi(V) = i \frac{\varphi'(\omega + iV)}{\varphi(\omega + iV)},$$

che ha il valore  $-h$  per  $V=0$ , ci si presenta nell'intervallo  $(0, 2)$  come funzione reale e regolare di  $V$ .

Derivando ancora rapporto a  $V$ , si ha

$$\frac{d\chi}{dV} = -\frac{\varphi''}{\varphi} + \left(\frac{\varphi'}{\varphi}\right)^2,$$

ossia, per le (E) e (20),

$$(21) \quad \frac{d\chi}{dV} = \frac{1}{4} \psi(\omega + iV) + B - \chi^2.$$

S'è già notato che  $\chi(0) = -h$ . Le proprietà caratteristiche di  $\varphi$  e  $\psi$ , espresse dalle (8), (10), (11), permettono di valutare anche  $\chi(2)$ . Poniamo a tale scopo  $u + i$  al posto di  $u$  nella (8) e scriviamola sotto la forma

$$\frac{\psi'(u + i)}{\psi(u + i)} - \frac{\varphi'(u + i)}{\varphi(u + i)} = \frac{1}{\varphi(u + i)\psi(u + i)}.$$

Si ha, per le (10), (11),

$$\frac{\psi'(u + i)}{\psi(u + i)} = -\frac{\varphi'(-u + i)}{\varphi(-u + i)} = -\frac{\varphi'(2\omega - u + i)}{\varphi(2\omega - u + i)},$$

e così, dalla precedente relazione, moltiplicando per  $-i$ , segue

$$i \frac{\varphi'(2\omega - u + i)}{\varphi(2\omega - u + i)} + i \frac{\varphi'(u + i)}{\varphi(u + i)} = \frac{-i}{\varphi(u + i)\psi(u + i)}.$$

Facendovi  $u = -i + \omega$  e avendo riguardo alla (20) e alla  $\chi(0) = -h$ , se ne ricava

$$\chi(2) = h - \frac{i}{\varphi(\omega)\psi(\omega)},$$

donde, per le (18) e (19),

$$\chi(2) = h - \frac{2ha}{a + b}.$$

Siccome, per le (17),

$$\frac{a}{a + b} = \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi}{m}}{\operatorname{tg} \frac{\pi}{m} + \frac{1}{\cos \frac{\pi}{m}}} = \frac{\operatorname{sen} \frac{\pi}{m}}{1 + \operatorname{sen} \frac{\pi}{m}},$$

così viene in definitiva

$$\chi(2) = h \frac{1 - \operatorname{sen} \frac{\pi}{m}}{1 + \operatorname{sen} \frac{\pi}{m}} > 0.$$

Quel che importa fissare è che, quando  $V$  varia da 0 a 2, la funzione  $\chi(V)$  passa dal valore negativo  $-h$  ad un valore positivo;  $d\chi/dV$  deve perciò essere positiva, almeno in una qualche porzione dell'intervallo.

L'equazione (21) porta a concludere che, già per  $V=0$ ,  $d\chi/dV \geq 0$

Proviamoci infatti a supporre il contrario. Siccome nell'intervallo 0, 2 vi sono certo dei punti, in cui  $d\chi/dV$  è positiva, così, facendo crescere  $V$  da 0 a 2, si incontrerebbe un primo valore  $V_0$ , in cui  $d\chi/dV = 0$ , essendo, da 0 a  $V_0$ ,  $d\chi/dV$  negativa.

Questo è assurdo, perchè, dall'essere  $d\chi/dV$  negativa fra 0 e  $V_0$ , risulterebbe  $\chi(V_0) < \chi(0) = -h$ , e quindi

$$-\chi^2(V_0) < -h^2.$$

D'altra parte

$$\rho(\omega + iV_0) \leq e_1$$

(perchè la  $p$  di argomento  $\omega + iV$  resta compresa fra  $e_1$  ed  $e_2$ ), e ne verrebbe, attesa la (21),

$$\left(\frac{d\chi}{dV}\right)_{V=V_0} = \frac{1}{4} p(\omega + iV_0) + B - \chi^2(V_0) < \frac{1}{4} e_1 + B - h^2,$$

ossia, siccome, per la (21) stessa, si ha

$$\frac{1}{4} e_1 + B - h^2 = \left(\frac{d\chi}{dV}\right)_{V=0},$$

dovrebbe risultare  $(d\chi/dV)_{V=V_0}$  negativa, anzichè nulla.

La disuguaglianza, così constatata,

$$\left(\frac{d\chi}{dV}\right)_{V=0} \geq 0,$$

cioè

$$\frac{1}{4} e_1 + B - h^2 \geq 0,$$

per la (14) del § precedente, porge appunto

$$1 + h^2 \tilde{\omega} \geq 0$$

c. d. d.

Così finalmente rimane dimostrato che il gradiente  $\Delta$ , funzione pari di  $U_1$ , va proprio sempre decrescendo da 0 a  $\pm \omega$ , cioè, riferendosi all'intero contorno  $T$ , da ciascun ventre fino ai nodi.

Data la forma del campo, non si saprebbe concepire un andamento diverso, ma è anche spiegabile che la dimostrazione matematica abbia richiesto l'intervento di tanti elementi qualitativi, trattandosi di una proprietà, che non è locale, ma dipende (come funzione di linea) dall'intero contorno.

### 8. - Trasformazione della equazione (E).

#### Criterio di integrazione per approssimazioni successive.

Dalla teoria delle funzioni ellittiche si ha <sup>(12)</sup>

$$pu + \frac{\eta}{\omega} = \left(\frac{\pi}{2\omega^2}\right)^2 \frac{1}{\operatorname{sen}^2 \frac{\pi u}{2\omega}} - 2 \left(\frac{\pi}{\omega}\right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nq^{2n}}{1 - q^{2n}} \cos n \frac{\pi u}{\omega}$$

col consueto significato di  $\eta$  e di  $q$ :  $\eta$  semiperiodo di seconda specie,

<sup>(12)</sup> HALPHEN, *Traité des fonctions elliptiques*, vol. I, pag. 426.

$q = e^{-i\pi\omega'/\omega}$ . Nel caso presente, essendo  $\omega' = i$ , si deve ritenere in particolare

$$(22) \quad q = e^{-\pi/\omega},$$

e la precedente espressione di  $pu$  valida in tutta la striscia compresa fra le due parallele all'asse reale  $V = \pm 2$ .

Ponendo

$$(23) \quad -2 \sum_1^{\infty} \frac{nq^{2n}}{1-q^{2n}} \cos n \frac{\pi u}{\omega} = Q$$

e sostituendo al parametro  $B$  un'analogia indeterminata  $\gamma$ , legata a  $B$  dalla relazione

$$\left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^2 (1-\gamma)^2 = B - \frac{1}{4} \frac{\eta}{\omega},$$

la equazione (E) diviene

$$(E') \quad \frac{d^2 f}{du^2} + \left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^2 \left[ \frac{1}{4 \operatorname{sen}^2 \frac{\pi u}{2\omega}} + (1-\gamma)^2 + 2Q \right] f = 0.$$

Essendo  $\omega$  essenzialmente positivo, la  $q$ , definita dalla (22), risulta in ogni caso positiva e  $< 1$ . La (23) mostra allora che, mentre  $u$  varia sopra l'asse reale,

$$|Q| \leq 2 \sum_1^{\infty} \frac{nq^{2n}}{1-q^{2n}} < \frac{2}{1-q^2} \sum_1^{\infty} nq^{2n} = \frac{2q^2}{(1-q^2)^3}.$$

Più in generale, se si fa variare  $u$  entro la striscia  $V = 0$ ,  $V = 1$ , varranno le disuguaglianze

$$\left| \cos n \frac{\pi u}{\omega} \right| \leq \frac{e^{n\pi/\omega} + e^{-n\pi/\omega}}{2},$$

donde, in virtù delle (22) e (23),

$$q^n \left| \cos n \frac{\pi u}{\omega} \right| \leq \frac{1+q^{2n}}{2},$$

$$|Q| \leq \sum_1^{\infty} nq^n \frac{1+q^{2n}}{1-q^{2n}} < \frac{1+q^2}{1-q^2} \sum_1^{\infty} nq^n = q \frac{1+q^2}{(1-q^2)(1-q)^2}.$$

Ritenuto questo quanto al valore numerico di  $Q$ , immaginiamo di generalizzare la equazione (E') riguardandovi  $q$ , non come l'esponenziale (22), ma come un parametro indipendente  $\sqrt{\lambda}$ . La  $Q$  si presenta allora come una funzione olomorfa di  $u$  e di  $\lambda$

$$Q(u, \lambda) = -2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\lambda^n}{1-\lambda^n} \cos n \frac{\pi u}{\omega},$$

che si annulla per  $\lambda = 0$ .

Per la integrazione della equazione generalizzata

$$(E_{\lambda}) \quad \frac{d^2 f}{du^2} + \left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^2 \left[ \frac{1}{4 \operatorname{sen}^2 \frac{\pi u}{2\omega}} + (1-\gamma)^2 + Q(u, \lambda) \right] f = 0$$

e conseguente determinazione di  $\varphi$ ,  $\psi$ ,  $\omega$  e  $\gamma$  in base alle (8), (11), (12) e (13), si può procedere per approssimazioni successive a partire dal valore  $\lambda = 0$ .

Occupiamoci intanto della prima approssimazione.

**9. - Riducibilità, per  $\lambda = 0$ , alla equazione ipergeometrica di Gauss. Corrispondenti espressioni di  $\varphi$ ,  $\psi$  e  $z$ . Determinazione delle costanti.**

Per  $\lambda = 0$  si ha identicamente

$$Q(u, \lambda) = 0,$$

e la equazione (E<sub>λ</sub>), cambiandovi ad un tempo la variabile indipendente  $u$  in  $\xi$  e la funzione incognita  $f$  in  $\tau$ , a norma delle formule

$$(24) \quad e^{i\pi u/\omega} = \xi,$$

$$(25) \quad f = \xi^{(\gamma-1)/2} (1-\xi)^{1/2} \tau,$$

diviene

$$(G) \quad \xi(1-\xi) \frac{d^2 \tau}{d\xi^2} + [\gamma - (1+\gamma)\xi] \frac{d\tau}{d\xi} - \left(\frac{\gamma}{2} - \frac{1}{4}\right) \tau = 0.$$

Basta ora confrontare colla equazione ipergeometrica

$$\xi(1-\xi) \frac{d^2 \tau}{d\xi^2} + [\gamma - (\alpha + \beta + 1)\xi] \frac{d\tau}{d\xi} - \alpha\beta\tau = 0$$

per riconoscere che siamo di fronte al caso particolare, in cui

$$(26) \quad \alpha = \frac{1}{2}, \quad \beta = \gamma - \frac{1}{2},$$

ovvero

$$\alpha = \gamma - \frac{1}{2}, \quad \beta = \frac{1}{2} :$$

terremo, per fissar le idee, i valori (26).

Ricordiamo <sup>(13)</sup> che, per  $1 - \gamma$  non intero, all'integrale generale della equazione ipergeometrica si può attribuire la forma:

$$c_1 \xi^{1-\gamma} F(\beta + 1 - \gamma, \alpha + 1 - \gamma, 2 - \gamma, \xi) + c_2 F(\alpha, \beta, \gamma, \xi)$$

designando col solito simboli  $F(\alpha, \beta, \gamma, \xi)$  la serie di GAUSS

$$1 + \frac{\alpha \cdot \beta}{1 \cdot \gamma} \xi + \frac{\alpha(\alpha + 1)}{1 \cdot 2} \frac{\beta(\beta + 1)}{\gamma(\gamma + 1)} \xi^2 + \dots,$$

e con  $c_1, c_2$  due costanti arbitrarie. Se ne trae, per la nostra equazione

$$(G) \quad \tau = c_1 \xi^{1-\gamma} F\left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + (1-\gamma), 2-\gamma, \xi\right] + c_2 F\left(\frac{1}{2}, \gamma - \frac{1}{2}, \gamma, \xi\right),$$

e, sostituendo nella (26), ove si scriva, per maggior simmetria,  $2\delta$  al posto di  $1 - \gamma$ ,

$$f = (1 - \xi)^{1/2} \left[ c_1 \xi^\delta F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + 2\delta, 1 + 2\delta, \xi\right) + c_2 \xi^{-\delta} F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} - 2\delta, 1 - 2\delta, \xi\right) \right].$$

Per trar partito di questo risultato, conviene riattaccarsi alle cose precedenti e in particolare al § 5.

Osserviamo anzi tutto che, in virtù della (24), quando si fissa per  $u$  un valore qualunque e lo si fa aumentare di  $2\omega$ , la  $\xi$  riprende il valore iniziale.

Se in particolare si parte da un valore  $u$ , compreso nella striscia  $V=0, V=1$ , e si passa al valore  $u + 2\omega$  senza uscire dalla striscia e senza toccare l'asse reale, nel piano della variabile  $\xi$ , si descrive attorno all'origine un cammino chiuso, contenuto entro la circonferenza di raggio 1. Questo perchè, se  $V > 0$ , la parte reale di  $i(\pi u/\omega)$  è negativa, e quindi  $|\xi| < 1$ ; la parte immaginaria, cioè l'argomento di  $\xi$ , aumenta appunto di  $2\pi$  mentre  $u$  aumenta di  $2\omega$ .

<sup>(13)</sup> Cfr. per es. SCHLESINGER, *Handbuch der Theorie der linearen Differentialgleichungen*, Bd. I, pag. 255.

Ciò posto, ricordiamo che gli integrali  $\varphi$  e  $\psi$  della equazione (E), considerati come funzioni di  $u$ , debbono tra altro essere uniformi nella striscia  $V=0$ ,  $V=1$  e verificare le equazioni funzionali (11), (12).

Quando si risguardino funzioni di  $\xi$ , pel tramite della (24), non si potranno più ritenere uniformi; le (11) e (12) ne mettono al contrario in evidenza la polidromia.

Fissiamo per es. la funzione  $\varphi$ .

La corrispondente equazione (11), riportata al piano  $\xi$ , mostra che la  $\varphi$  resta moltiplicata per  $e^{\pi i/m}$  quando si descrive un cammino chiuso, entro il cerchio  $|\xi|=1$ , girando una volta attorno all'origine nel senso positivo, facendo cioè aumentare di  $2\pi$  l'argomento di  $\xi$ .

Del pari la  $\psi$  resta moltiplicata per  $e^{-\pi i/m}$ .

Cerchiamo di determinare due integrali indipendenti  $\varphi$  e  $\psi$  della equazione (G) [che è poi la (E <sub>$\lambda$</sub> ), per il valore zero del parametro  $\lambda$ ] dotati di queste proprietà.

Intanto, essi debbono rientrare nella precedente espressione di  $f$ , o in quella (affetta da termine logaritmico), che corrisponderebbe all'ipotesi  $1-\gamma=2\delta$  numero intero. Questa seconda eventualità è da rigettare senz'altro, perchè uno almeno dei due integrali  $\varphi$ ,  $\psi$  conterrebbe un termine in  $\log \xi$  e non potrebbe quindi subire, come ovviamente si riconosce, una sostituzione puramente moltiplicativa, girando attorno all'origine.

$\varphi$  e  $\psi$  vanno dunque cercate nell'ambito della precedente espressione di  $f$ , per opportuna determinazione delle costanti  $c_1$ ,  $c_2$  e del parametro  $\delta = (1-\gamma)/2$ .

La (11), notando che  $(1-\xi)^{\pm 1}$ ,  $F(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \pm 2\delta, 1 \pm 2\delta, \xi)$  sono funzioni monodrome di  $\xi$  entro il cerchio  $|\xi|=1$ , dà luogo alla relazione

$$c_1(e^{2\pi\delta i} - e^{\pi i/m})F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + 2\delta, 1 + 2\delta, \xi\right) + c_2(e^{-2\pi\delta i} - e^{\pi i/m})F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} - 2\delta, 1 - 2\delta, \xi\right) = 0.$$

Le due serie ipergeometriche sono certo indipendenti (non potendo essere  $2\delta$  numero intero e quindi nemmeno zero), e ciò esige che sia separatamente

$$c_1(e^{2\pi\delta i} - e^{\pi i/m}) = 0,$$

$$c_2(e^{-2\pi\delta i} - e^{\pi i/m}) = 0.$$

Siccome non possono annullarsi insieme  $c_1$  e  $c_2$ , perchè ne discenderebbe  $\varphi = 0$ , supporremo

$$c_1 \neq 0,$$



con che la prima equazione equivale a

$$\delta = \frac{1}{2m} + j \quad (j \text{ numero intero});$$

la seconda porge allora  $c_2 = 0$ , e ne risulta (ritenuto per  $\delta$  il valore  $1/(2m) + j$ )

$$\varphi = c_1(1 - \xi)^{1/2} \xi^\delta F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + 2\delta, 1 + 2\delta, \xi\right),$$

cui egualmente si giunge, salvo uno scambio materiale nella notazione, supponendo  $c_2 \neq 0$ .

In modo perfettamente analogo si trova

$$\psi = c_2(1 - \xi)^{1/2} \xi^{-\delta} F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} - 2\delta, 1 - 2\delta, \xi\right),$$

restando ancora arbitrarie le due costanti  $c_1$  e  $c_2$ .

Fino ad ora è rimasto indeterminato il numero intero  $j$ , ma è facile vedere, riprendendo per un momento la variabile  $u$ , che deve essere  $j = 0$ . Noi vogliamo infatti che  $\psi$  e  $\varphi$  si comportino come quei due integrali della (E), per mezzo dei quali si esprime la funzione  $z$ , a norma della formula

$$z = R \frac{\psi}{\varphi}.$$

Si esige in particolare che l'argomento di  $z$  si incrementi di  $-2\pi/m$  (variando sempre nel medesimo senso) quando  $u$ , sopra una parallela all'asse reale, percorre un segmento di ampiezza  $2\omega$ . Ora, cogli attuali  $\psi$  e  $\varphi$ ,  $z$  si presenta sotto la forma  $e^{-2\pi i \delta u/\omega} \times$  funzione di  $u$ , uniforme e periodica.

Bisogna dunque che si attribuisca ad  $j$  il valore zero, giusta l'asserto.

Completiamo la determinazione delle costanti, trattando  $\varphi$  e  $\psi$ , come se fossero gli integrali della (E).

Avremo, designando con  $c$  il rapporto  $c_2/c_1$ ,

$$(28) \quad \begin{cases} \varphi = c_1(1 - \xi)^{1/2} \xi^{1/2m} F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{m}, 1 + \frac{1}{m}, \xi\right), \\ \psi = cc_1(1 - \xi)^{1/2} \xi^{-1/2m} F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} - \frac{1}{m}, 1 - \frac{1}{m}, \xi\right), \\ z = R \frac{\psi}{\varphi} = cR \xi^{-1/m} \frac{F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} - \frac{1}{m}, 1 - \frac{1}{m}, \xi\right)}{F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{m}, 1 + \frac{1}{m}, \xi\right)}, \end{cases}$$

e il nostro compito sarà di calcolare, in base alle (8) e (13), le tre costanti  $c$ ,  $c_1$  ed  $\omega$ , che compariscono nei secondi membri (la  $\omega$  pel tramite di  $\xi = e^{i\pi u/\omega}$ ).

La (8) dà

$$(29) \quad \varphi \frac{d\psi}{du} - \psi \frac{d\varphi}{du} = i \frac{\pi}{\omega} \xi \left( \varphi \frac{d\psi}{d\xi} - \psi \frac{d\varphi}{d\xi} \right) = 1,$$

donde in particolare

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \xi \left( \varphi \frac{d\psi}{d\xi} - \psi \frac{d\varphi}{d\xi} \right) = -i \frac{\omega}{\pi}.$$

Ma, dalle (28), badando che  $(1 - \xi)^{1/2}$  e le  $F$  sono regolari e si riducono all'unità per  $\xi = 0$ , si ha subito

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \xi \left( \varphi \frac{d\psi}{d\xi} - \psi \frac{d\varphi}{d\xi} \right) = -\frac{cc_1^2}{m}.$$

La (29) si riduce così a

$$(29') \quad c_1^2 = i \frac{m\omega}{\pi c}.$$

Esprimiamo adesso che sono soddisfatte le (13).

Verrà ovviamente, badando che  $\xi = e^{i\pi u/\omega}$  e che all'incognita  $\omega$  si può sostituire  $q = e^{-\pi/\omega}$ ,

$$c = q^{1/m} \frac{F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{m}, 1 + \frac{1}{m}, q\right)}{F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} - \frac{1}{m}, 1 - \frac{1}{m}, q\right)},$$

$$\lim_{\xi \rightarrow 1} c \frac{F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} - \frac{1}{m}, 1 - \frac{1}{m}, \xi\right)}{F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{m}, 1 + \frac{1}{m}, \xi\right)} = \frac{r}{R},$$

le quali equivalgono a

$$(30) \quad q^{1/m} \frac{F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{m}, 1 + \frac{1}{m}, q\right)}{F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} - \frac{1}{m}, 1 - \frac{1}{m}, q\right)} = \frac{r}{R} e^\mu,$$

$$(31) \quad c = \frac{r}{R} e^\mu,$$

ove si intende posto

$$(32) \quad e^{\mu} = \lim_{\xi \rightarrow 1} \frac{F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{m}, 1 + \frac{1}{m}, \xi\right)}{F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} - \frac{1}{m}, 1 - \frac{1}{m}, \xi\right)}.$$

Per assegnare il valore del limite indicato nel secondo membro, conviene richiamare dalla teoria della funzione ipergeometrica la identità

$$F(\alpha, \beta, \alpha + \beta - \gamma + 1, 1 - \xi) \\ = C_1 \xi^{1-\gamma} F(\beta - \gamma + 1, \alpha - \gamma + 1, 2 - \gamma, \xi) + C_2 F(\alpha, \beta, \gamma, \xi),$$

in cui (designandosi al solito con  $\Gamma$  la funzione euleriana di seconda specie)

$$C_1 = \frac{\Gamma(\alpha + \beta - \gamma + 1) \Gamma(\gamma - 1)}{\Gamma(\alpha) \Gamma(\beta)},$$

$$C_2 = \frac{\Gamma(\alpha + \beta - \gamma + 1) \Gamma(1 - \gamma)}{\Gamma(\beta - \gamma + 1) \Gamma(\alpha - \gamma + 1)}.$$

La identità vale per  $|\xi| < 1$  e per qualunque terna di parametri  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ , purchè soltanto  $1 - \gamma$  non sia intero,  $\alpha + \beta - \gamma + 1$  non sia zero, nè intero negativo <sup>(14)</sup>, condizioni queste evidentemente verificate dai nostri parametri  $\alpha = \frac{1}{2}$ ,  $\beta = \frac{1}{2} - 1/m$ ,  $\gamma = 1 - 1/m$ . Essi dànno in particolare, notando che  $\Gamma(1) = 1$ ,

$$C_1 = \frac{\Gamma\left(-\frac{1}{m}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{m}\right)}, \quad C_2 = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{m}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{m}\right)},$$

$$F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} - \frac{1}{m}, 1, 1 - \xi\right) = C_1 \xi^{1/m} F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{m}, 1 + \frac{1}{m}, \xi\right) \\ + C_2 F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} - \frac{1}{m}, 1 - \frac{1}{m}, \xi\right).$$

Le due funzioni

$$\xi^{1/m} F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{m}, 1 + \frac{1}{m}, \xi\right), \\ F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} - \frac{1}{m}, 1 - \frac{1}{m}, \xi\right),$$

(14) SCHELESINGER, loc. cit., pp. 481-482.

sono integrali indipendenti della equazione ipergeometrica per i detti valori di  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ . I due esponenti caratteristici, relativi al punto singolare  $\xi = 1$ , cioè 0 e  $\gamma - \alpha - \beta$  vengono, per questi valori, a coincidere.

Ne viene che uno almeno dei due integrali

$$\xi^{1/m} F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{m}, 1 + \frac{1}{m}, \xi\right),$$

$$F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} - \frac{1}{m}, 1 - \frac{1}{m}, \xi\right),$$

crece indefinitamente (in valore assoluto) quando  $\xi$  converge verso 1. (Essi possono infatti riguardarsi come combinazioni lineari indipendenti dei due integrali canonici, relativi al punto singolare  $\xi = 1$ : uno regolare, e l'altro della forma  $\mathfrak{F}_1 + \mathfrak{F}_2 \log(\xi - 1)$ , con  $\mathfrak{F}_1$ ,  $\mathfrak{F}_2$  regolari e  $\mathfrak{F}_2$  non nullo, per  $\xi = 1$ ).

Supponiamo di conformità che sia per es.

$$\lim_{\xi \rightarrow 1} \left| F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} - \frac{1}{m}, 1 - \frac{1}{m}, \xi\right) \right| = \infty,$$

e riprendiamo la formula precedente, immaginando di dividere da una parte e dall'altra per

$$F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} - \frac{1}{m}, 1 - \frac{1}{m}, \xi\right)$$

e di far poi convergere  $\xi$  verso 1 lungo l'asse reale (o più generalmente dall'interno del cerchio  $|\xi| = 1$ ).

Il limite del primo membro è zero e ne risulta quindi

$$\lim_{\xi \rightarrow 1} \frac{F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{m}, 1 + \frac{1}{m}, \xi\right)}{F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} - \frac{1}{m}, 1 - \frac{1}{m}, \xi\right)}$$

$$= -\frac{C_2}{C_1} = -\frac{\Gamma\left(\frac{1}{m}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{m}\right)}{\Gamma\left(-\frac{1}{m}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{m}\right)}.$$

Alla stessa relazione (invertiti soltanto i termini di ciascuna frazione) si arriva, appoggiandosi sull'ipotesi che cresca indefinitamente l'altro integrale

$$\xi^{1/m} F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{m}, 1 + \frac{1}{m}, \xi\right).$$

La (32) assume così l'aspetto

$$e^{\mu} = - \frac{\Gamma\left(\frac{1}{m}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{m}\right)}{\Gamma\left(-\frac{1}{m}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{m}\right)}.$$

Ma conviene trasformarla ancora, ricorrendo a note proprietà della funzione  $\Gamma$ .

Ricordiamo le formule

$$\begin{aligned} \Gamma(x+1) &= x \Gamma(x), \\ \Gamma(x) \Gamma\left(x + \frac{1}{2}\right) &= \sqrt{\pi} 2^{1-2x} \Gamma(2x), \end{aligned}$$

e sostituiamo nella prima  $\pm 1/m$ , nella seconda  $\frac{1}{2} \pm 1/m$ , al posto di  $x$ , portando i valori di  $\Gamma(\pm 1/m)$ ,  $\Gamma(\frac{1}{2} \pm 1/m)$ , che così si ricavano, nella espressione di  $e^{\mu}$ . Si ottiene

$$e^{\mu} = 2^{4/m} \frac{\Gamma\left(1 - \frac{2}{m}\right) \Gamma^2\left(1 + \frac{1}{m}\right)}{\Gamma\left(1 + \frac{1}{m}\right) \Gamma^2\left(1 - \frac{1}{m}\right)},$$

donde

$$(32') \quad \mu = \frac{4}{m} \log 2 + \log \frac{\Gamma\left(1 - \frac{2}{m}\right)}{\Gamma\left(1 + \frac{2}{m}\right)} - 2 \log \frac{\Gamma\left(1 - \frac{1}{m}\right)}{\Gamma\left(1 + \frac{1}{m}\right)},$$

formula convenientissima per calcolare comodamente  $\mu$ , usando le tavole della funzione  $\log \Gamma$  <sup>(15)</sup>.

Ci dovremo anche servire dello sviluppo di  $\mu$  per potenze di  $1/m$ . Per assegnarlo, partiamoci dalla nota serie

$$\log \Gamma(1+x) = -Cx + \frac{s_2 x^2}{2} - \frac{s_3 x^3}{3} + \dots,$$

dove  $C$  rappresenta la costante di MASCHERONI, e  $s_2, s_3, \dots$  le somme delle inverse dei quadrati, cubi, ... dei numeri naturali.

<sup>(15)</sup> Cfr. per es. LEGENDRE, *Exercices de Calcul intégral*, Paris, 1811, t. I, pp. 502-506.

Se ne trae

$$\log \frac{\Gamma\left(1 - \frac{2}{m}\right)}{\Gamma\left(1 + \frac{2}{m}\right)} = 2 \left[ C \frac{2}{m} + \sum_1^{\infty} \frac{s_{2\nu+1}}{2\nu+1} \left(\frac{2}{m}\right)^{2\nu+1} \right],$$

$$2 \log \frac{\Gamma\left(1 - \frac{1}{m}\right)}{\Gamma\left(1 + \frac{1}{m}\right)} = 4 \left[ C \frac{1}{m} + \sum_1^{\infty} \frac{s_{2\nu+1}}{2\nu+1} \left(\frac{1}{m}\right)^{2\nu+1} \right],$$

e quindi in definitiva

$$(32'') \quad \mu = \frac{4}{m} \log 2 + 4 \sum_1^{\infty} \frac{s_{2\nu+1}}{2\nu+1} \frac{2^{2\nu} - 1}{m^{2\nu+1}}$$

( $s_3 = 1,2020 \dots$ ,  $s_5 = 1,0369 \dots$ , ...).

Ottenuto così il valore numerico di  $\mu$ , si ha direttamente quello di  $c$  dalla (31), mentre resta ancora da ricavare  $q$  dalla equazione implicita (30).

Essa ammette una ed una sola radice compresa fra zero e

$$(33) \quad \zeta = \left(\frac{r}{R}\right)^m e^{m\mu}.$$

Per dimostrarlo, cominciamo col ricordare dalle (28) e (31) che il primo membro della equazione (30) altro non è che

$$\frac{r}{R} e^{\mu} \frac{\varphi(q)}{\psi(q)}.$$

Ora il rapporto  $\varphi(q)/\psi(q)$ , che, per

$$0 < q < 1,$$

si presenta come funzione reale, regolare di  $q$ , va sempre crescendo con  $q$ , perchè la sua derivata, che, a norma della (29), vale

$$-\frac{1}{i \frac{\pi}{\omega} q \psi^2},$$

resta sempre positiva, come mostrano ovviamente le (28), (29') e (31).

Notiamo d'altra parte che, nel suddetto intervallo  $0 < q < 1$ , il rap-

porto delle due serie ipergeometriche

$$\frac{F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{m}, 1 + \frac{1}{m}, q\right)}{F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} - \frac{1}{m}, 1 - \frac{1}{m}, q\right)}$$

è sempre superiore all'unità <sup>(16)</sup>, mentre ha il valore 1 per  $q = 0$ .

Da questa osservazione si raccoglie che il primo membro della (30)

$$q^{1/m} \frac{F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{m}, 1 + \frac{1}{m}, q\right)}{F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} - \frac{1}{m}, 1 - \frac{1}{m}, q\right)}$$

è zero per  $q = 0$ ; varia poi sempre crescendo, ed assume per  $q = \zeta$  un valore già superiore a  $\zeta^{1/m} = (r/R)e^{\mu}$ , cioè al secondo membro.

Il valore di  $q$ , definito dalla (30), è dunque minore di  $\zeta$ . La sua espressione esplicita può essere posta sotto forma di serie procedente per le potenze di  $\zeta$ , come si riconosce subito, scrivendo la (30) sotto la forma

$$q \frac{F^m\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{m}, 1 + \frac{1}{m}, q\right)}{F^m\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} - \frac{1}{m}, 1 - \frac{1}{m}, q\right)} = \zeta.$$

Il primo membro è con ciò diventato una funzione regolare di  $q$ , che si annulla per  $q = 0$  ed ha la derivata eguale all'unità, il che basta ad assicurare la sviluppabilità in serie di  $\zeta$  della radice  $q$ . Più precisamente, immaginando di esplicitare le serie ipergeometriche, si ha

$$q \left[ 1 + \frac{q}{2m \left(1 - \frac{1}{m^2}\right)} + \dots \right] = \zeta,$$

(<sup>16</sup>) Si tratta infatti di due serie a termini positivi, tali che il termine generale del numeratore supera il corrispondente del denominatore: questo poi segue direttamente dal loro confronto, purchè soltanto si tenga conto che, per qualsiasi numero positivo  $j$ , sussiste la disuguaglianza

$$\frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{m} + j}{1 + \frac{1}{m} + j} > \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{m} + j}{1 - \frac{1}{m} + j}.$$

donde

$$(30') \quad q = \zeta \left[ 1 - \frac{\zeta}{2m \left( 1 - \frac{1}{m^2} \right)} + \dots \right],$$

i termini omissi entro parentesi essendo d'ordine superiore al primo in  $q$  e  $\zeta$  rispettivamente.

Ne viene, in virtù della (33),

$$(30'') \quad \left\{ \begin{aligned} \omega &= -\frac{\pi}{\log q} = -\frac{\pi}{\log \zeta - \frac{\zeta}{2m \left( 1 - \frac{1}{m^2} \right)} + \dots} \\ &= \frac{\frac{\pi}{m}}{\log R - \log r - \mu + \frac{\zeta}{2 \left( 1 - \frac{1}{m^2} \right)} + \dots} \end{aligned} \right.$$

### 10. - Ritorno alla equazione (E<sub>1</sub>). Soluzione rigorosa del problema.

La equazione (E<sub>1</sub>) è lineare, a coefficienti periodici (di periodo  $2\omega$ ) e contiene i due parametri  $\lambda$  e  $\gamma$ .

Combinando i risultati di POINCARÉ sulle equazioni differenziali, che dipendono da parametri, con considerazioni note della teoria delle equazioni lineari, si arriva facilmente a stabilire che:

1) Esistono due integrali di (E<sub>1</sub>)  $f_1, f_2$  periodici di seconda specie a moltiplicatori reciproci, tali cioè che si ha

$$\begin{aligned} f_1(u + 2\omega) &= e^\eta f_1(u), \\ f_2(u + 2\omega) &= e^{-\eta} f_2(u), \end{aligned}$$

con  $\eta$  indipendente da  $u$ .

2)  $f_1, f_2$  e così  $\eta$  sono sviluppabili in serie di potenze di  $\lambda$  (convergenti per  $|\lambda| < e^{-2\pi/\omega}$ , comunque vari  $u$  nella striscia  $V=0, V=1$ ). Essi dipendono poi da  $\gamma$  in modo regolare (per qualsiasi valore finito di questo parametro).

Ciò posto, è ben chiaro che, per soddisfare alle (11), (12), (13), e (8), basta porre

$$\varphi = c_1 f_1, \quad \psi = c_1 c f_2 \quad (c_1, c \text{ costanti})$$





donde

$$(30') \quad q = \zeta \left[ 1 - \frac{\zeta}{2m \left( 1 - \frac{1}{m^2} \right)} + \dots \right],$$

i termini omissi entro parentesi essendo d'ordine superiore al primo in  $q$  e  $\zeta$  rispettivamente.

Ne viene, in virtù della (33),

$$(30'') \quad \left\{ \begin{aligned} \omega &= -\frac{\pi}{\log q} = -\frac{\pi}{\log \zeta - \frac{\zeta}{2m \left( 1 - \frac{1}{m^2} \right)} + \dots} \\ &= \frac{\frac{\pi}{m}}{\log R - \log r - \mu + \frac{\zeta}{2 \left( 1 - \frac{1}{m^2} \right)} + \dots} \end{aligned} \right.$$

### 10. - Ritorno alla equazione $(E_\lambda)$ . Soluzione rigorosa del problema.

La equazione  $(E_\lambda)$  è lineare, a coefficienti periodici (di periodo  $2\omega$ ) e contiene i due parametri  $\lambda$  e  $\gamma$ .

Combinando i risultati di POINCARÉ sulle equazioni differenziali, che dipendono da parametri, con considerazioni note della teoria delle equazioni lineari, si arriva facilmente a stabilire che:

1) Esistono due integrali di  $(E_\lambda)$   $f_1, f_2$  periodici di seconda specie a moltiplicatori reciproci, tali cioè che si ha

$$\begin{aligned} f_1(u + 2\omega) &= e^\eta f_1(u), \\ f_2(u + 2\omega) &= e^{-\eta} f_2(u), \end{aligned}$$

con  $\eta$  indipendente da  $u$ .

2)  $f_1, f_2$  e così  $\eta$  sono sviluppabili in serie di potenze di  $\lambda$  (convergenti per  $|\lambda| < e^{-2\eta/\omega}$ , comunque vari  $u$  nella striscia  $V=0, V=1$ ). Essi dipendono poi da  $\gamma$  in modo regolare (per qualsiasi valore finito di questo parametro).

Ciò posto, è ben chiaro che, per soddisfare alle (11), (12), (13), e (8), basta porre

$$\varphi = c_1 f_1, \quad \psi = c_1 c f_2 \quad (c_1, c \text{ costanti})$$

e determinare anzitutto  $\gamma$  mediante la condizione

$$\eta(\gamma, \lambda) = \frac{\pi i}{m} \quad (17).$$

Si avrà poi dalle (13)

$$c = \frac{r}{R} \lim_{u \rightarrow 0} \frac{f_1(u)}{f_2(u)},$$

nonchè

$$\frac{f_1(i)}{f_2(i)} = \frac{r}{R} \lim_{u \rightarrow 0} \frac{f_1(u)}{f_2(u)},$$

la quale ultima serve alla determinazione di  $\omega$ ; si ricaverà infine anche il valore di  $\gamma$ , esprimendo che il wronskiano di  $\varphi$ ,  $\psi$  è eguale all'unità.

Si ottengono in tal modo espressioni di  $\gamma$ ,  $c$ ,  $\omega$  e  $c_1^2$  sviluppabili in serie di potenze di  $\lambda$ , almeno per  $\lambda$  abbastanza piccolo.

Ometto la dimostrazione, che non ha diretto interesse per il nostro problema. In esso infatti si deve, in virtù della (22), ritenere

$$\lambda = q^2 = e^{-2\pi/\omega}.$$

Convieni dunque fare questa sostituzione già nelle precedenti equazioni, ricavandone così direttamente i valori numerici di  $\gamma$ ,  $c$ ,  $\omega$  e  $c_1^2$ . Sulla possibilità della univoca determinazione di questi valori non occorre spender parola: ne è garante, come già abbiamo avuto occasione di osservare a § 5, la natura della questione, il che è quanto dire, dal punto di vista matematico, il principio di DIRICHLET.

## 11. - Soluzione approssimata, che si ottiene trascurando $\zeta^2$ , o addirittura $\zeta$ . Presumibile entità numerica dell'errore.

Facciamo il confronto fra la soluzione rigorosa, testè tratteggiata, e quella del § 9, che corrisponde alla posizione ipotetica  $\lambda = 0$ .

Richiamiamo dal detto § la circostanza che, per  $\lambda = 0$ , tutti gli elementi incogniti si presentano sviluppati in serie di potenze della costante

$$\zeta = \left(\frac{r}{R}\right)^m e^{m\mu}.$$

(17) È facile riconoscere che  $\eta$  dipende da  $\gamma$  e da  $\lambda$ , e non da  $\omega$ , notando che  $\omega$  si può far sparire dalla equazione (E<sub>1</sub>) mediante il cambiamento di variabile  $v = \pi u/2\omega$ .

Quando  $\lambda$  è  $> 0$ , e abbastanza piccolo, avremo più generalmente, secondo le conclusioni testè accennate, sviluppi precedenti per  $\zeta$  e per  $\lambda$ .

In particolare  $q(\lambda, \zeta)$  si potrà considerare come funzione di  $\lambda$ , dipendente dal parametro  $\zeta$ , regolare per  $\lambda = 0$  e riducentesi alla espressione (30').

Ma deve sussistere la relazione

$$\lambda = q^2,$$

e questa, interpretata come equazione implicita in  $\lambda$ , mostra che  $\lambda$  è di secondo ordine in  $\zeta$ .

Se dunque si conviene di trascurare i termini in

$$\zeta^2 = \left(\frac{r}{R}\right)^{2m} e^{2m\mu},$$

si potrà riportarsi senz'altro alla prima approssimazione e ritenere inoltre, al posto delle (30) e (30''), le espressioni seguenti di  $q$  e di  $\omega$ :

$$q = \zeta = \left(\frac{r}{R}\right)^m e^{m\mu},$$

$$\omega = \frac{\frac{\pi}{m}}{\log R - \log r - \mu + \frac{\zeta}{2\left(1 - \frac{1}{m^2}\right)}}.$$

Il valore numerico di  $\zeta$  risulta in pratica assai piccolo, perchè  $r/R$  è molto minore di  $\frac{1}{2}$ ,  $m \geq 6$ , e, in virtù della espressione (32'') di  $\mu$ ,  $e^{m\mu}$  supera di poco (da  $m = 12$  in poi)  $e^{4 \log 2} = 16$ . [Nel caso più sfavorevole  $m = 6$ , si ha  $e^{m\mu} = 18,285 \dots$ , e, supponendo  $r/R \leq \frac{1}{4}$ , riesce già  $(r/R)^m e^{m\mu} < 0,005$ ].

L'errore, cui si va incontro, trascurando  $\zeta^2$ , è naturalmente di questo ordine. A rigore, bisognerebbe fissarne un limite superiore numerico. Con criterio certo meno preciso, ma pur espressivo, ci limiteremo, ad osservare quanto segue:

La nostra prima approssimazione ( $\lambda = 0$ ) <sup>(18)</sup> riposa, si può dire, sopra un'unica semplificazione, quella di sopprimere nella equazione (E') il termine  $Q$ ; tutto il resto si mantiene esatto.

<sup>(18)</sup> Considerata, si intende bene, per sè stessa, indipendentemente dalle aggiunte del presente paragrafo.

A calcoli fatti si riscontra che  $|Q|$  è effettivamente piccolo, minore in tutti i casi di

$$q \frac{1 + q^2}{(1 - q^2)(1 - q)^2},$$

per quanto s'è visto a § 8, e quindi, per essere (§ 9)  $q < \zeta$ , minore, a più forte ragione, di

$$\frac{\zeta(1 + \zeta^2)}{(1 - \zeta^2)(1 - \zeta)^2} < 2\zeta \quad \left( \text{per } \zeta < \frac{1}{4} \right).$$

Ciò giustifica a posteriori l'attendibilità del procedimento approssimativo, risultante dal porre  $\lambda = 0$ , e conduce in pari tempo a risguardare lo stesso  $|Q|$ , od anche addirittura  $2\zeta$ , come misura dell'errore.

Sotto questo punto di vista, si può specificare maggiormente, usufruendo la limitazione

$$|Q| < \frac{2q^2}{(1 - q^2)^2},$$

trovata per i valori reali di  $u$ .

Corrispondendo questi valori ai punti del contorno interno  $T$ , si ha ivi un errore non superiore a  $2q^2/(1 - q^2)^3$ , cioè a  $2\zeta^2/(1 - \zeta^2)^3$ . Minore esattezza si può presumere mano mano che si procede verso il contorno esterno  $C$ , ma l'errore resta sempre al disotto di  $2\zeta$ .

Se — e questo sarà appunto il caso nostro — non si aspira a rendere proprio di secondo ordine il massimo errore in  $T$ , ma ci si accontenta di una approssimazione uniforme in tutto il campo, risguardando numericamente trascurabile il  $2\zeta = 2(r/R)^m e^{m\mu}$ , si dovranno ritenere in definitiva le formule del § 8, con  $q$  assimilabile a zero ed

$$(35) \quad \omega = \frac{\frac{\pi}{m}}{\log R - \log r - \mu}.$$

## 12. - Capacità. Gradiente massimo.

### Diagramma della tensione lungo un raggio ventrale.

*Capacità.* — Il cavo (almeno finchè se ne consideri una porzione di lunghezza moderata) si può ovviamente assimilare ad un condensatore cilindrico, le cui armature sono rispettivamente: quella interna, di sezione retta  $T$ , al potenziale zero, e l'altra esterna, di sezione retta  $C$ , al potenziale 1.

La densità superficiale della carica in un punto generico di una delle due armature,  $T$  o  $C$ , è

$$\frac{1}{4\pi} \frac{dV}{dn},$$

$n$  designando la normale volta all'esterno di  $\sigma$ .

La carica, per unità di lunghezza del cavo, sarà così espressa da

$$\frac{1}{4\pi} \int_T \frac{dV}{dn} dT \quad \text{ovvero} \quad \frac{1}{4\pi} \int_C \frac{dV}{dn} dC,$$

secondo che si tratta dell'armatura interna o dell'esterna.

Data l'armonicità di  $V$  entro  $\sigma$ , la somma dei due integrali è nulla, e quindi le due cariche risultano eguali e di segno opposto. La positiva sta sull'armatura esterna (dove il potenziale è maggiore) ed ha per valore (§ 2)

$$\frac{1}{4\pi} \int_C \frac{dV}{dn} dC = -\frac{1}{4\pi} \int_C \frac{dU}{ds} dC = \frac{2m\omega}{4\pi}.$$

Siccome, fra le due armature, la differenza di potenziale è 1, così (attribuendo per comodità il valore uno al potere induttore specifico del dielettrico frapposto) lo stesso numero  $2m\omega/4\pi$  rappresenterà anche la capacità<sup>(19)</sup> del cavo (carica positiva per unità di lunghezza, divisa per differenza di potenziale). Designandola con  $C$ , avremo dalla (35)

$$(36) \quad C = \frac{2m\omega}{4\pi} = \frac{1}{2(\log R - \log r - \mu)}.$$

Al limite, per  $m = \infty$ ,  $\mu$  converge a zero, come apparisce dalla (32''), e risulta

$$C = \frac{1}{2 \log \frac{R}{r}},$$

che coincide, colla espressione della capacità di un cavo unifilare di raggi  $R, r$ . Ciò è ben naturale, perchè gli innumerevoli piccolissimi archetti, che costituiscono il contorno  $T$ , quando  $m$  tende all'infinito, sono come denti infinitesimi di una circonferenza di raggio  $r$ , e non possono perciò avere che influenza locale.

(19) Cfr. BRILLOUIN, *Propagation de l'électricité*, (Paris, 1904), nn. 124-127, dove la nozione di capacità di un cavo è precisata sotto ipotesi alquanto più generali.

*Espressione del gradiente massimo.* — La (15'), portandovi per  $\varphi$  il suo valore (28), dà come espressione generica del gradiente

$$\Delta = \frac{|c_1|^2}{R} \left| (1 - \xi)\xi^{1/m} F^2 \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{m}, 1 + \frac{1}{m}, \xi \right) \right|,$$

dove, si intende bene, alla  $u$ , che compare nel secondo membro per tramite dell'argomento  $\xi = e^{im\omega}$ , si deve attribuire il valore, che corrisponde al punto  $z$  del campo, cui il gradiente si riferisce.

Dalle (29'), (31) e (35) si ha

$$\frac{|c_1|^2}{R} = \frac{m\omega}{\pi cR} = \frac{e^{-\mu}}{r(\log R - \log r - \mu)}.$$

Ricordando poi la proprietà della funzione ipergeometrica, espressa dalla formula (20),

$$F(\alpha, \beta, \gamma, \xi) = (1 - \xi)^{-\alpha} F\left(\alpha, \gamma - \beta, \gamma, \frac{\xi}{\xi - 1}\right),$$

si vede che

$$(1 - \xi)^{1/2} F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{m}, 1 + \frac{1}{m}, \xi\right)$$

è sostituibile con

$$F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1 + \frac{1}{m}, \frac{\xi}{\xi - 1}\right).$$

Si può quindi scrivere indifferentemente

$$(37) \quad \Delta = \frac{e^{-\mu}}{r(\log R - \log r - \mu)} \left| (1 - \xi)\xi^{1/m} F^2 \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{m}, 1 + \frac{1}{m}, \xi \right) \right|,$$

ovvero

$$(37') \quad \Delta = \frac{e^{-\mu}}{r(\log R - \log r - \mu)} \left| \xi^{1/m} F^2 \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1 + \frac{1}{m}, \frac{\xi}{\xi - 1} \right) \right|.$$

Il valore massimo  $G$  di  $\Delta$  cade, come sappiamo, nei ventri. Si ha in questi punti (a meno di un multiplo intero di  $2\omega$ )  $u = \omega$ , e quindi

$$\xi = e^{i\pi} = -1, \quad \frac{\xi}{\xi - 1} = \frac{1}{2},$$

(\*\*) SCHLESINGER, loc. cit., pag. 265-267.

e in definitiva, dalla (37'),

$$(38) \quad G = \frac{e^{-\mu}}{r(\log R - \log r - \mu)} F^2\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1 + \frac{1}{m}, \frac{1}{2}\right),$$

formula convenientissima per il calcolo numerico, data l'espressione (32'), od anche (32''), di  $\mu$  e la rapida convergenza della serie ipergeometrica, il cui quarto elemento è  $\frac{1}{2}$ .

Dalla (37) si sarebbe invece ricavata una espressione di  $G$  di nessun valore pratico, figurandovi la serie

$$F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{m}, 1 + \frac{1}{m}, -1\right),$$

che è convergente sì, ma assai lentamente.

Se si osserva che

$$F^2\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1 + \frac{1}{m}, \frac{1}{2}\right),$$

e così  $-\mu$ , sono funzioni sempre crescenti di  $m$ , mentre

$$\frac{e^{-\mu}}{\log R - \log r - \mu}$$

è, a sua volta, funzione crescente di  $-\mu$  <sup>(21)</sup> si rileva dalla (38) che, per dati  $R$  ed  $r$ , il cimento  $G$  va continuamente crescendo col numero dei fili. Se poi vi si mette in evidenza il cimento

$$G_1 = \frac{1}{r \log \frac{R}{r}},$$

che competerebbe ad un cavo unifilare di raggi  $R$ ,  $r$ , si riconosce subito

(21) Infatti

$$-\frac{d}{d\mu} \frac{e^{-\mu}}{\log R - \log r - \mu} = \frac{e^{-\mu}}{(\log R - \log r - \mu)^2} (\log R - \log r - \mu - 1),$$

e la quantità  $\log R - \log r - \mu - 1$  è sempre positiva per i cavi, che si adoperano nell'industria (cfr. il paragrafo seguente, pag. 385).



che, al crescere indefinito di  $m$  [avendosi  $\mu = 0$ ,  $F(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}) = 1,180$  <sup>(22)</sup>] rimane

$$G = 1,393 \cdot G_1.$$

Questo risultato merita un po' di commento.

Abbiamo già osservato che, quando  $m$  aumenta, la sezione della corda presenta l'aspetto di una circonferenza tutta contornata da piccoli denti. I *valori medi* non possono allora differire gran che da quelli, che competono ad una corona circolare di raggi  $R$ ,  $r$ , e debbono avere per limite questi stessi valori quando  $m$  cresce indefinitamente. È ciò che vale ad es. per la capacità, come s'è visto or ora. Ma non si può dire altrettanto dei *valori locali*, in particolare del gradiente massimo  $G$ .

Si può anzi rendersi intuitivamente ragione del fatto che  $G$  aumenta con  $m$ , e non tende, per  $m = \infty$ , a  $G_1$ , ma ad un valore superiore.

Per questo basta appunto ammettere che debbano invece tendere a coincidere i valori medi.

Infatti, per un cavo unifilare di raggi  $R$ ,  $r$ , il valore medio del gradiente sul contorno interno è lo stesso  $G_1$ . Ammesso che, per un cavo multifilare di raggio esterno  $R$  e di raggio nodale  $r$ , si abbia su  $T$  sempre il medesimo valore medio  $G_1$ , è chiaro che, quando, caeteris paribus,  $m$  aumenta, deve pur aumentare  $G$ , per compensare il maggior numero di zeri (gradienti nodali), che concorrono a formare la media.

*Diagramma della tensione.* — Sopra il raggio ventrale  $MM'$  si ha  $z = \rho e^{-\pi i m}$ ,  $u = \omega + iV$  e quindi  $\xi = e^{i\pi u/\omega} = -e^{-\pi V/\omega}$ , con  $V$  variabile fra zero ed uno.

Ricordando la espressione (35) di  $\omega$  e la posizione (33)

$$\zeta = \left(\frac{r}{R}\right)^m e^{m\mu},$$

(22) Senza fare il calcolo diretto, si può riportare il valore di  $F(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2})$  a quello dell'integrale (di STIRLING)

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = 1,311\dots$$

Si ha infatti (cfr. per es. HALPHEN, *Traité des fonctions elliptiques*, t. I, pag. 349 e 64):

$$F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}\right) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{1}{2} \operatorname{sen}^2 \varphi}} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = 1,180\dots$$

si può anche scrivere

$$\xi = -e^{-\pi r/\omega} = -\zeta^v,$$

donde

$$|\xi|^{-1/m} = \left(\frac{r}{R}\right)^{-v} e^{-\mu v},$$

$$\frac{\xi}{\xi-1} = \frac{\zeta^v}{1+\zeta^v}.$$

Ora la terza delle (28), applicando sopra e sotto la identità testè ricordata

$$F(\alpha, \beta, \gamma, \xi) = (1-\xi)^{-\alpha} F\left(\alpha, \gamma-\beta, \gamma, \frac{\xi}{\xi-1}\right),$$

e sostituendo per  $c$  il suo valore (31), dà

$$z = r e^{\mu \xi^{-1/m}} \frac{F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1 - \frac{1}{m}, \frac{\xi}{\xi-1}\right)}{F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1 + \frac{1}{m}, \frac{\xi}{\xi-1}\right)}.$$

Per i punti della  $MM'$  (e così di ogni altro raggio ventrale) se ne ricava, prendendo i moduli,

$$(39) \quad \varrho = r \left(\frac{R}{r}\right)^v e^{\mu(1-v)} \frac{F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1 - \frac{1}{m}, s\right)}{F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1 + \frac{1}{m}, s\right)} \quad (23),$$

dove  $s$  sta in luogo di

$$\frac{\xi}{\xi-1} = \frac{\zeta^v}{1+\zeta^v},$$

Questa espressione esplicita del raggio vettore in termini del potenziale permette di costruire comodamente la curva

$$\varrho = \varrho(V),$$

che dà appunto il diagramma della tensione lungo un raggio ventrale.

---

(\*\*) Per  $V = 1$ ,  $s = \xi/(1+\xi)$  è trascurabile nell'ambito della convenuta approssimazione, talchè il rapporto delle due serie ipergeometriche, che compare nella (39), può essere sostituito col'unità. Risulta così  $\varrho = R$ , per  $V = 1$ , come dev'essere (si intende, entro i limiti di approssimazione, che ci siamo imposti ab initio).

L'ing. JONA (24) ha fatto la verifica sperimentale della (39), misurando direttamente alcuni valori del potenziale in un modello di cavo, corrispondente ai valori

$$m = 6, \quad R = 18^{mm}, \quad r = 3^{mm}.$$

L'accordo fra la curva sperimentale e la teorica fu perfetto.

Non sarà forse fuor di luogo l'osservare che, mentre questi esperimenti servono di utile controllo alla ricerca matematica, non avrebbero però potuto sostituirsi ad essa per la valutazione del cemento massimo, che precisamente importava.

Infatti il cemento lungo un raggio ventrale è caratterizzato da  $dV/d\rho$ , cioè dall'inclinazione sull'asse  $\rho$  della curva  $\rho = \rho(V)$ . Ora, pur immaginando tracciata sperimentalmente con esattezza la curva, rimane sempre troppo incerto l'andamento delle sue tangenti (specie in una estremità) perchè sia possibile ricavarne qualche conseguenza quantitativa.

### 13. - Cavi di massima sicurezza.

#### Cavi cordati e cavi unifilari di egual sezione.

Il massimo gradiente  $G$  definito dalla (38) misura (§ 1) il massimo cemento specifico (unitario), cui, per un dato cavo, cioè per dati  $m$ ,  $R$ ,  $r$ , si trova esposta la rigidità dielettrica del materiale isolante.

Se si suppongono dati soltanto  $m$  ed  $R$ , si può — come l'ing. JONA per il cavo a filo unico — cercare in qual modo va preso  $r$  affinchè  $G$  risulti minimo e quindi massima la sicurezza.

Si vede subito che la condizione di minimo è

$$\log \frac{R}{r} - \mu = 1,$$

ossia

$$\frac{r}{R} = \frac{1}{e^{1+\mu}}.$$

Al crescere indefinito di  $m$ , si ritrova, come è naturale (si ricordi la osservazione fatta a proposito della capacità), il rapporto dell'ing. JONA

$$\frac{r}{R} = \frac{1}{e}.$$

(24) Cfr. le pag. 41-43 della citata sua Comunicazione al Congresso di St. Louis.

Nelle condizioni di massima sicurezza  $G$  ha il valore

$$\begin{aligned} g &= \frac{e^{-\mu}}{r} F^2 \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1 + \frac{1}{m}, \frac{1}{2} \right) \\ &= \frac{e}{R} F^2 \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1 + \frac{1}{m}, \frac{1}{2} \right). \end{aligned}$$

Per un cavo unifilare, che abbia la stessa sezione *totale*, cioè lo stesso  $R$ , si ha analogamente

$$g_1 = \frac{1}{r} = \frac{e}{R},$$

da cui

$$\frac{g}{g_1} = F^2 \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1 + \frac{1}{m}, \frac{1}{2} \right).$$

Questo rapporto, essenzialmente maggiore dell'unità, misura, si può dire, l'aumento di pericolo, che presenta un cavo cordato di massima sicurezza, di fronte all'analogo, unifilare.

Non è il caso di passare ai numeri, perchè, nella pratica, attese le inevitabili impurità del dielettrico, conviene dargli uno spessore piuttosto considerevole, maggiore certo di quello, che corrisponderebbe alla massima sicurezza.

È quindi opportuno che noi riprendiamo la formula (38) per fare piuttosto il raffronto fra un generico cavo cordato ed uno unifilare, avente la stessa sezione totale (lo stesso  $R$ ) e la stessa sezione interna utile, cioè la stessa resistenza ohmica.

Chiamiamo  $r'$  il raggio di quest'unico filo. La sezione  $\pi r'^2$  dovrà essere eguale alla somma delle sezioni dei fili costituenti la corda.

Per  $m = 6, 12, 18, \dots$ , il numero totale  $n$  dei fili è rispettivamente 7, 19, 37, ..., ciò che si può compendiare nella formula (empirica, non sussistendo per  $m > 6$  una configurazione di cerchi tutti tangenti, analoga a quella della fig. 1)

$$n = 1 + \frac{m(m+6)}{12}.$$

Il raggio  $a$  di un singolo filo è legato al raggio nodale  $r$  dalla prima delle (17)

$$a = r \operatorname{tg} \frac{\pi}{m}.$$

La sezione conduttrice della corda è dunque, in funzione di  $r$  e di  $m$ ,

$$n\pi r^2 \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{m} = \pi r^2 \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{m} \left[ 1 + \frac{m(m+6)}{12} \right].$$

Ponendo

$$(39) \quad e^s = \operatorname{tg} \frac{\pi}{m} \left[ 1 + \frac{m(m+6)}{12} \right]^{1/2},$$

risulta

$$(40) \quad r' = r e^s.$$

Si ha d'altra parte che il cemento  $G'$  pel cavo circolare di raggi  $R$ ,  $r'$  è

$$G' = \frac{1}{r' \log \frac{R}{r'}}.$$

Mettiamo adesso in evidenza nella (38) il fattore  $G'$ ,  $r'$  al posto di  $r$ , e i logaritmi a base 10, in luogo dei naturali. Avremo

$$(41) \quad G = G' \cdot \nu \cdot \frac{\log_{10} \frac{R}{r'}}{\log_{10} \frac{R}{r'} - M(\mu - \varepsilon)},$$

dove  $M = 0,434 \dots$  designa al solito il modulo dei logaritmi volgari, e si è posto per brevità

$$(42) \quad \nu = \frac{F^2 \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1 + \frac{1}{m}, \frac{1}{2} \right)}{e^{\mu - \varepsilon}}.$$

Per illustrare la (41), giova premettere alcune considerazioni sulle funzioni di  $m$ , che vi compariscono.

#### 14. - Comportamento numerico di $\mu$ , $\mu - \varepsilon$ e $\nu$ in funzione di $m$ .

La (32'') mostra anzi tutto che la funzione  $\mu$  decresce costantemente e va a zero al crescere indefinito di  $m$ .

La funzione  $\varepsilon$  è pure sempre decrescente e converge verso  $-\frac{1}{2} \log (12/\pi^2)$  al crescere indefinito di  $m$ . Per constatarlo, immaginiamo di sostituire nella (39)  $x$  al posto di  $1/m$  e di prendere i logaritmi dei due membri.

Potremo scrivere

$$\varepsilon = \log \frac{\operatorname{tg} \pi x}{x} + \frac{1}{2} \log \left( x^2 + \frac{1}{2} x + \frac{1}{12} \right).$$

Finchè  $x$  è compreso fra zero e  $\frac{1}{2}$ , la funzione  $\log (\operatorname{tg} \pi x/x)$  cresce con  $x$ : in questo intervallo infatti la derivata prima

$$\frac{\pi}{\operatorname{tg} \pi x \cos^2 \pi x} - \frac{1}{x} = \frac{2\pi x - \operatorname{sen} 2\pi x}{x \operatorname{sen} 2\pi x}$$

si mantiene positiva.

Il secondo addendo è poi evidentemente crescente per tutti i valori positivi di  $x$ . Essendo  $x = 1/m$ , ne risulta che  $\varepsilon$  va decrescendo al crescere di  $m$ , da  $m = 2$  in avanti. Quando poi  $m$  cresce indefinitamente, cioè  $x$  tende a zero, la precedente espressione di  $\varepsilon$  si riduce a

$$\log \pi - \frac{1}{2} \log 12 = -\frac{1}{2} \log \frac{12}{\pi^2},$$

giusta l'asserto.

Sarà opportuno prendere in esame anche la derivata della  $\varepsilon$

$$\frac{d\varepsilon}{dx} = \frac{2\pi}{\operatorname{sen} 2\pi x} - \frac{1}{x} + \frac{x + \frac{1}{4}}{x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{12}}.$$

In questo intento cominciamo coll'osservare che, per  $y$  positivo e inferiore a un certo limite, diciamo  $< 2$ , per fissare le idee, sussistono le disuguaglianze

$$y - \operatorname{sen} y \geq \frac{1}{6} y^2 \operatorname{sen} y,$$

$$y - \operatorname{sen} y \leq \frac{1}{6} y^3,$$

come si verifica senza alcuna difficoltà, usufruendo lo sviluppo di  $\operatorname{sen} y$ .

Se ne ricava, ponendo anche  $2\pi x$  al posto di  $y$ ,

$$\frac{2\pi}{\operatorname{sen} 2\pi x} - \frac{1}{x} \geq \frac{2}{3} \pi^2 x,$$

$$\frac{2\pi}{\operatorname{sen} 2\pi x} - \frac{1}{x} \leq \frac{2}{3} \pi^2 x \cdot \frac{2\pi x}{\operatorname{sen} 2\pi x},$$

che si possono ritenere valide per ogni  $x < 1/6$  (ossia  $m \geq 6$ ), in quanto allora  $y = 2\pi x$  resta certo  $< 2$ .

Essendo identicamente

$$\begin{aligned} \frac{x + \frac{1}{4}}{x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{12}} &= 3(1 - 2x) + \frac{6x^3}{x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{12}} \\ &= 3(1 - 2x) + 72x^3 - 72x^4 \frac{x + \frac{1}{2}}{x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{12}}, \end{aligned}$$

stanno, per ogni  $x \geq 0$ , le due disuguaglianze

$$\begin{aligned} \frac{x + \frac{1}{4}}{x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{12}} &\geq 3(1 - 2x), \\ \frac{x + \frac{1}{4}}{x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{12}} &\leq 3(1 - 2x) + 72x^3. \end{aligned}$$

Sommandole ordinatamente colle precedenti, se ne trae, per

$$0 \leq x \leq \frac{1}{6},$$

$$\frac{d\varepsilon}{dx} \geq 3 + \left(\frac{2}{3}\pi^2 - 6\right)x \geq 3.$$

$$\frac{d\varepsilon}{dx} \leq 3 + \left[\frac{2}{3}\pi^2 \frac{2\pi x}{\text{sen } 2\pi x} - 6\right]x + 72x^3.$$

In quest'ultima disequaglianza la funzione, che compare al secondo membro, cresce con  $x$  (per  $x < \frac{1}{2}$ ).

Limitandosi in particolare all'intervallo  $0, 1/18$  ( $m \geq 18$ ), si potrà ritenere

$$\frac{d\varepsilon}{dx} \leq 3,052,$$

essendo appunto 3,052 il valore assunto dal secondo membro per  $x = 1/18$ .

Si può adesso mostrare che la differenza  $\mu - \varepsilon$ , o, ciò che è lo stesso,  $M(\mu - \varepsilon)$  va crescendo con  $m$ .

All'uopo ricaviamo dalla (32'')

$$\begin{aligned} M \frac{d\mu}{dx} &= 4 \log_{10} 2 + 4M \sum_1^{\infty} s_{2^v+1} (2^{2^v} - 1) x^{2^v} \\ &< 4 \log_{10} 2 + 4M \sum_1^{\infty} s_{2^v+1} (2x)^{2^v} \\ &< 4 \log_{10} 2 + \frac{4Ms_3}{1 - (2/m)^2} \left(\frac{2}{m}\right)^2, \end{aligned}$$

che, per  $m \geq 12$ , dà

$$M \frac{d\mu}{dx} < 4 \log_{10} 2 + \frac{4Ms_3}{1 - \frac{1}{36}} \cdot \frac{1}{36} = 1,264 \dots$$

Ma si ha insieme

$$\frac{d\varepsilon}{dx} \geq 3,$$

onde risulta

$$M \left( \frac{d\mu}{dx} - \frac{d\varepsilon}{dx} \right) < 1,264 \dots - 3M = -0,012 \dots$$

e rimane accertato che, da  $m = 12$  in avanti, la funzione  $M(\mu - \varepsilon)$  va crescendo. Il calcolo diretto mostra poi che non fa eccezione nemmeno il primo valore di  $m$ , praticamente possibile, essendo, per  $m = 6$ ,

$$M(\mu - \varepsilon) = 0,028 \dots < 0,034 \dots,$$

il quale ultimo è il valore corrispondente ad  $m = 12$  (cfr. la tabella a pagina 392).

Giova indicare anche un limite inferiore per la differenza  $d\mu/dx - d\varepsilon/dx$ . Dalla precedente espressione di  $d\mu/dx$  si ha ovviamente, per ogni  $x$  positivo,

$$\frac{d\mu}{dx} > 4 \log 2 = 2,772 \dots$$

Abbiamo poi visto che, per  $x \leq 1/18$ ,  $d\varepsilon/dx$  non supera il valore 3,052.

Si può così affermare che (da  $m = 18$  in avanti)

$$\frac{d}{dx} (\mu - \varepsilon) \geq -0,28.$$



Occupiamoci da ultimo della funzione  $v$ .

Ritenuto sempre  $x = 1/m$  come variabile indipendente, abbiamo dalla (42), derivando logicamente,

$$(42') \quad -\frac{1}{v} \frac{dv}{dx} = -\frac{2}{F} \frac{dF}{dx} + \frac{d}{dx} (\mu - \varepsilon)$$

$$\left[ F = F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1+x, \frac{1}{2}\right) \right. \\ \left. = 1 + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{1 \cdot (1+x)} \frac{1}{2} + \frac{\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2}\right)^2}{1 \cdot 2 \cdot (1+x)(2+x)} \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \dots \right]$$

—  $2(dF/dx)$  consta di termini tutti positivi decrescenti al crescere di  $x$ .

La somma dei primi tre termini, per  $x = 1/18$ , si trova essere 0,352...

Si può quindi ritenere, per  $m \geq 18$ ,

$$-2 \frac{dF}{dx} > 0,352.$$

D'altra parte il massimo valore numerico di  $F$  si ha per  $x = 0$ , ed è (cfr. pag. 383)

$$F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}\right) = 1,180.$$

Sussiste perciò la disuguaglianza

$$-\frac{2}{F} \frac{dF}{dx} > \frac{0,352}{1,180} > 0,299,$$

che, associata alla precedente

$$\frac{d}{dx} (\mu - \varepsilon) \geq -0,28,$$

permette di concludere che il secondo membro della (42') è certo positivo a partire da  $m = 18$ .

Il coefficiente  $v$  va dunque costantemente crescendo con  $m$ . L'affermazione sta anche tenendo conto dei valori finora esclusi  $m = 6$  ed  $m = 12$ , come si rileva dalla seguente tabella:

**Valori di**

| $m$      | $M(\mu - \varepsilon)$ | $F^2(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1 + 1/m, \frac{1}{2})$ | $\nu = F^2/e^{\mu - \varepsilon}$ |
|----------|------------------------|---|-----------------------------------|
| 6        | 0,028                  | 1,321   | 1,238                             |
| 12       | 0,034                  | 1,354   | 1,251                             |
| 18       | 0,037                  | 1,366   | 1,255                             |
| 30       | 0,039                  | 1,376   | 1,258                             |
| $\infty$ | 0,042                  | 1,393   | 1,263                             |

**15. - Conclusioni.**

Premettiamo una osservazione sui cavi unifilari. Dalla espressione del massimo cimento

$$G' = \frac{1}{r' \log \frac{R}{r'}}$$

risulta subito che, nell'ambito delle applicazioni industriali, per cui si ha sempre  $\log R/r' > 1$ ,  $G'$  diminuisce quando si aumenta la sezione di uno o di entrambi i conduttori.

Si ha infatti

$$\frac{dG'}{dR} = -G'^2 \frac{r'}{R},$$

$$\frac{dG'}{dr} = -G'^2 \left( \log \frac{R}{r'} - 1 \right),$$

che risultano l'una e l'altra  $< 0$ .

Analogamente pei cavi cordati.

Scriviamo infatti la (41) sotto la forma

$$G = \frac{\nu}{r' \left[ \log \frac{R}{r'} - (\mu - \varepsilon) \right]}$$

e formiamo le derivate

$$\frac{dG}{dR} = -\frac{r'}{\nu R} G^2,$$

$$\frac{dG}{dr} = -\frac{1}{\nu} G^2 \left[ \log \frac{R}{r'} - (\mu - \varepsilon) - 1 \right].$$

La prima è sempre negativa; la seconda lo è del pari se

$$\log \frac{R}{r'} - (\mu - \varepsilon) > 1,$$

cioè, a norma della (40), se

$$\log \frac{R}{r} - \mu > 1.$$

Ora questa disequaglianza esprime semplicemente che lo spessore del dielettrico è maggiore di quello, che corrisponde alla massima sicurezza; condizione sempre verificata in pratica (§ 13). Si può dunque concludere che, *per cavi cordati di uno stesso numero di fili (nei limiti delle dimensioni industriali), il cemento diminuisce quando si aumentano le sezioni dei conduttori: sia che si allontanano la guaina esterna o si ingrandisca la corda, prendendo più grossi i fili elementari, che la costituiscono.*

Resta da esaminare come varia  $G$  al variare dell'argomento  $m$ .

Dacchè tanto  $\nu$ , quanto  $\mu - \varepsilon$  (§ 14) sono quantità positive, che crescono col numero dei fili, la

$$(41) \quad G = G' \cdot \nu \cdot \frac{\log_{10} \frac{R}{r'}}{\log_{10} \frac{R}{r'} - M(\mu - \varepsilon)}$$

mostra che, *a parità di sezione (totale ed utile, cioè per dati  $R$  ed  $r'$ ) il cemento va sempre aumentando col numero dei fili.*

L'ing. JONA ha cercato di verificare, almeno qualitativamente anche la (41), cimentando fino alla rottura più serie di cavi cordati cogli stessi  $R$ ,  $r'$  e diverso  $m$ . Egli ha riconosciuto che, fino ad un certo numero di fili, la tensione di rottura accenna effettivamente ad abbassarsi quando  $m$  aumenta, conformemente alle previsioni matematiche; però, se  $m$  è molto grande, si torna a trovare una rigidità dielettrica di poco inferiore a quella di un unico filo circolare.

Ci si rende facilmente ragione di questo fenomeno, riflettendo al già accennato (§ 12) comportamento del gradiente lungo il contorno della corda.

Coll'aumentare di  $m$ , ventri e nodi si approssimano; ma d'altra parte le particelle materiali del dielettrico circostante non sono punti geometrici. Ne viene che, da un certo  $m$  in poi, quelle prossime alla corda si troveranno in realtà sottoposte ad un cemento medio fra il ventrale e il nodale. Ecco perchè si tende a ricondursi al  $G'$  dei cavi unifilari.

Comunque è lecito avere piena fiducia nella (41), perchè questo caso limite, se pur viene praticamente raggiunto, può soltanto importare una diminuzione di pericolo, su quella prevista dalla formula.

Ciò posto, osserviamo che i due coefficienti dipendenti da  $m$ , che compariscono nella (41),  $\nu$  ed  $M(\mu - \epsilon)$  variano ben poco: il primo, da 1,238 per  $m = 6$  a 1,263 per  $m = \infty$ ; il secondo, da 0,028 per  $m = 6$ , a 0,042 per  $m = \infty$  (cfr. la tabella a pag. 392).

Agendo in favore della sicurezza (e senza troppo largheggiare) possiamo attribuire a questi coefficienti i valori massimi. Avremo così come *definitiva formula pratica per la valutazione del massimo cimento in un cavo cordato a un numero qualunque di fili*

$$(41') \quad G = 1,263 G' \frac{\log_{10} \frac{R}{r'}}{\log_{10} \frac{R}{r'} - 0,042}$$

Il rapporto  $G/G'$  misura l'aumento di cimento, cui dà luogo un conduttore cordato in confronto di un filo rotondo della stessa sezione.

Nel caso più favorevole, supponendo grandissimo lo spessore del dielettrico

$$\left( \frac{R}{r'} = \infty \quad \text{e quindi} \quad \frac{\log \frac{R}{r'}}{\log \frac{R}{r'} - 0,042} = 1 \right),$$

si ha già  $G/G' = 1,263$ . La formula più esatta (41), attribuendo anche ad  $m$  il valore più favorevole 6, darebbe il valore poco diverso  $G/G' = 1,238$ . Praticamente si ha insomma, pur nella migliore ipotesi, una perdita di tensione del 25% circa.

Appare perciò consigliabile, quando si tratti di cavi per tensioni molto elevate, di rendere rotonda la corda conduttrice, coprendola con un tubo di piombo.

L'ing. JONA lo aveva intuito, e la casa PIRELLI già soleva prendere questa precauzione. Sarebbe stato per altro desiderabile, e anche vantaggioso dal punto di vista economico, di poterne fare a meno, senza dovere in pari tempo ridurre la tensione.

La presenta ricerca ha mostrato che ciò non è possibile, giustificando così con criterio scientifico e permettendo in pari tempo di apprezzare in cifre la convenienza della piombatura.

Padova, 27 Aprile 1905.

SULLA INTEGRAZIONE  
DELLA EQUAZIONE DI HAMILTON-JACOBI  
PER SEPARAZIONE DI VARIABILI

« Math. Ann. », Bd. LIX (1904),  
pp. 383-397.

(Estratto da una lettera al Sig. Prof. P. STACKEL, a Kiel).

In questi giorni ho avuto occasione di rivedere le Sue belle ricerche <sup>(1)</sup> sulla integrazione della equazione di HAMILTON-JACOBI

$$H(p_1, p_2, \dots, p_n; x_1, x_2, \dots, x_n) = h$$

( $p_1 = \partial W / \partial x_1$ ,  $p_2 = \partial W / \partial x_2$ , ...;  $h$  costante arbitraria) per separazione di variabili.

Ho notato che si possono facilmente assegnare (sotto forma esplicita di equazioni a derivate parziali rapporto agli argomenti  $p$  ed  $x$ ) le condizioni necessarie e sufficienti, cui deve soddisfare una  $H$  affinchè la equazione

$$H = h$$

ammetta un integrale completo della forma

$$\sum_1^n W_i$$

( $W_i$  funzione della sola  $x_i$ ).

Da queste condizioni scaturiscono alcune conseguenze di indole generale, che mi sembrano abbastanza interessanti, per quanto il dedurre da esse la completa risoluzione del problema appaia ancora laborioso, e non vi sia nemmeno — oserei affermare — grande speranza di trovare tipi essenzialmente nuovi, oltre quelli da Lei scoperti.

Comunque penso di non farle cosa sgradita comunicandole quel poco, che io ho fatto in argomento, e come si possa tra altro ricavarne una

---

<sup>(1)</sup> *Habilitationschrift*, Halle, 1891; od anche: « Math. Ann. », Bd. XLII, pp. 546-549.

discussione elegante per il caso di due variabili, già trattato dal Prof. MORRERA <sup>(2)</sup> e da Lei <sup>(3)</sup> in modo esauriente, ma forse non altrettanto semplice.

Ecco dunque le mie osservazioni.

1. - La ipotesi che  $W$  sia della forma  $\sum_1^n W_i$ , equivale a

$$(1) \quad \frac{\partial p_i}{\partial x_j} = 0 \quad (i \geq j) \quad (4).$$

D'altra parte, derivando la equazione  $H = h$  rispetto ad una generica  $x_i$  e notando che  $H$  dipende da  $x_i$  direttamente, e pel tramite delle  $p$ , si ha

$$\frac{\partial H}{\partial x_j} + \sum_1^n \frac{\partial H}{\partial p_j} \frac{\partial p_j}{\partial x_i} = 0,$$

e, per conseguenza, avuto riguardo alle (1),

$$\frac{\partial H}{\partial x_i} + \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial p_i}{\partial x_i} = 0.$$

Ora, nei casi, che veramente corrispondono ad una equazione di HAMILTON-JACOBI, nessuna  $\partial H / \partial p_i$  può essere identicamente nulla, e perciò queste equazioni equivalgono a

$$(2) \quad \frac{\partial p_i}{\partial x_i} = - \frac{\frac{\partial H}{\partial x_i}}{\frac{\partial H}{\partial p_i}}.$$

Le (1) e (2) definiscono così tutte le derivate delle  $p$ . Perchè poi effettivamente esistano delle funzioni  $p$ , aventi quelle derivate (e allora, in virtù delle (1), esiste anche la  $W$ ), dovranno essere soddisfatte le condizioni di integrabilità, le quali, come tosto apparisce, si riducono a

$$\frac{d}{dx_j} \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial H}{\partial x_i} \\ \frac{\partial H}{\partial p_i} \end{array} \right\} = 0 \quad (i \geq j),$$

<sup>(2)</sup> «Atti della R. Accademia di Torino», vol. XVI, 1881.

<sup>(3)</sup> «Math. Ann.», Bd. XXXV.

<sup>(4)</sup> Si intende che agli indici  $i, j$ , e così a quelli, che compariranno in seguito, si devono attribuire tutti i valori da 1 ad  $n$ , compatibili colle eventuali restrizioni, esplicitamente dichiarate

ossia, sviluppando il simbolo operativo  $d/dx_i$  in  $\partial/\partial x_i + (\partial p_i/\partial x_i)(\partial/\partial p_i)$ , e tenendo conto delle (2), a

$$(3) \quad \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial p_j} \frac{\partial^2 H}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial H}{\partial x_i} \frac{\partial H}{\partial x_j} \frac{\partial^2 H}{\partial x_i \partial p_j} - \frac{\partial H}{\partial x_i} \frac{\partial H}{\partial p_j} \frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial x_j} + \frac{\partial H}{\partial x_i} \frac{\partial H}{\partial x_j} \frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial p_j} = 0 \quad (i \geq j).$$

Essendo definite tutte le derivate delle  $p$ , rimangono arbitrari al più i loro valori iniziali. Questi valori iniziali debbono effettivamente restare arbitrari quando si tratti, come noi supponiamo, di un integrale completo  $W$  della equazione di HAMILTON-JACOBI (in cui — non lo si dimentichi — la costante  $h$  del secondo membro è a priori arbitraria e deve intendersi determinata in base ai valori iniziali).

Siccome poi, per la completa arbitrarietà dei valori iniziali delle  $p$ , è necessario e basta che le condizioni di integrabilità (3) sieno soddisfatte *identicamente*, rispetto a tutte le  $2n$  lettere  $p$  ed  $x$ , possiamo senz'altro concludere:

La equazione di HAMILTON-JACOBI

$$H = h$$

(dove è sottinteso che  $H$  contiene esplicitamente *tutte* le  $p$ ) è integrabile per separazione di variabili allora, e allora soltanto, che la funzione caratteristica  $H$  soddisfa alle  $n(n-1)/2$  equazioni di second'ordine (3).

2. — Supponiamo che  $H$  corrisponda ad un problema dinamico a legami indipendenti dal tempo e sia, colle solite notazioni,

$$(4) \quad T = \frac{1}{2} \sum_{r,s}^n a_{rs} x'_r x'_s$$

la forza viva del sistema,  $U$  il potenziale delle forze attive.

Essendo  $a^{(rs)}$  i coefficienti della forma reciproca a  $T$ , ove si ponga

$$(5) \quad K = \frac{1}{2} \sum_{r,s}^n a^{(rs)} p_r p_s,$$

avremo

$$(6) \quad H = K - U;$$

inoltre, come è ben noto,

$$(7) \quad x'_i = \frac{\partial K}{\partial p_i},$$

$$(8) \quad \frac{\partial K}{\partial x_i} = -\frac{\partial T}{\partial x_i},$$

nel primo membro delle (8) riguardandosi le  $x$  e le  $p$ , nel secondo le  $x$  e le  $x'$  come variabili indipendenti.

Ciò posto, introduciamo per  $H$  il suo valore  $K - U$  nei primi membri delle (3), e notiamo che essi con ciò comprendono una parte di quarto grado nelle  $p$ , una di secondo, e una di grado zero.

Dacchè si tratta di identità, i coefficienti di questi polinomi devono tutti annullarsi. Limitandoci per ora ad esprimere che si annullano separatamente i termini di diverso grado, le (3) si scindono nei tre gruppi:

$$(I) \quad \frac{\partial K}{\partial p_i} \frac{\partial K}{\partial p_j} \frac{\partial^2 K}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial K}{\partial p_i} \frac{\partial K}{\partial x_j} \frac{\partial^2 K}{\partial x_i \partial p_j} - \frac{\partial K}{\partial x_i} \frac{\partial K}{\partial p_j} \frac{\partial^2 K}{\partial p_i \partial x_j} + \frac{\partial K}{\partial x_i} \frac{\partial K}{\partial x_j} \frac{\partial^2 K}{\partial p_i \partial p_j} = 0,$$

$$(II) \quad \frac{\partial K}{\partial p_i} \frac{\partial K}{\partial p_j} \frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial K}{\partial p_i} \frac{\partial^2 K}{\partial x_i \partial p_j} \frac{\partial U}{\partial x_j} - \frac{\partial K}{\partial p_j} \frac{\partial^2 K}{\partial x_j \partial p_i} \frac{\partial U}{\partial x_i} + \frac{\partial^2 K}{\partial p_i \partial p_j} \left\{ \frac{\partial K}{\partial x_i} \frac{\partial U}{\partial x_j} + \frac{\partial K}{\partial x_j} \frac{\partial U}{\partial x_i} \right\} = 0,$$

$$(III) \quad \frac{\partial^2 K}{\partial p_i \partial p_j} \frac{\partial U}{\partial x_i} \frac{\partial U}{\partial x_j} = a^{(ij)} \frac{\partial U}{\partial x_i} \frac{\partial U}{\partial x_j} = 0 \quad (i \geq j).$$

Le (I) differiscono dalle (3) soltanto perchè vi compare  $K$  invece di  $H$ . Di qua la proposizione:

*Se un problema dinamico di funzione caratteristica  $H = K - U$  è integrabile per separazione di variabili, la stessa proprietà compete alla equazione  $K = h$ , che ne definisce le geodetiche.*

Le (II) e (III) costituiscono condizioni addizionali (involgenti ad un tempo la  $K$  e la  $U$ ), sotto cui la separazione di variabili seguita ad essere possibile anche per forze non nulle. Le (III) in particolare risultano identicamente soddisfatte nei casi da Lei studiati.

**3.** - L'osservazione, testè fatta, mostra che, per classificare i problemi dinamici, che comportano separazione di variabili, conviene:



1) caratterizzare quei sistemi materiali, o, se si vuole, quei  $ds^2 = \sum_{r,s}^n a_{rs} dx_r dx_s$ , per cui la forma  $K$  verifica le (I).

2) esaminare, per ciascuno di quei sistemi, quali forze possono essergli applicate, a norma delle (II), (III). Questa seconda parte riuscirebbe certo agevole, quando fosse risolta la prima, tanto più che si potrebbe usufruire il notevole risultato, concernente la espressione analitica del potenziale  $U$ , da Lei stabilito (\*) senza alcuna ipotesi preventiva sulla natura del sistema.

Limitiamoci dunque, come è naturale, al caso delle geodetiche.

Le condizioni esplicite nei coefficienti  $a^{(rs)}$  di  $K$  si avrebbero dalle (I), sviluppando materialmente ed eguagliando a zero i singoli coefficienti. Ma si può indicare un criterio atto a semplificare i calcoli.

4. - Fissiamo un generico indice  $i$  e poniamo

$$\sigma_{ij} = - \frac{\partial K}{\partial p_j} \frac{\partial^2 K}{\partial p_i \partial x_j} + a^{(ij)} \frac{\partial K}{\partial x_j}.$$

Badando che  $\partial^2 K / \partial p_i \partial p_j$  non è che  $a^{(ij)}$ , si vede che le  $n-1$  equazioni (I) relative al fissato indice  $i$  (e agli  $n-1$   $j$  diversi da  $i$ ) si possono scrivere

$$\frac{\partial K}{\partial p_i} \left\{ \frac{\partial K}{\partial p_j} \frac{\partial^2 K}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial K}{\partial x_j} \frac{\partial^2 K}{\partial x_i \partial p_j} \right\} + \frac{\partial K}{\partial x_i} \sigma_{ij} = 0.$$

Ora  $\partial K / \partial p_i$  è una forma omogenea di primo grado nelle  $p$ ,  $\partial K / \partial x_i$  e  $\sigma_{ij}$  lo sono di secondo. O l'una o l'altra di esse deve essere divisibile per  $\partial K / \partial p_i$ .

Per esplicitare le condizioni di divisibilità, giova immaginare introdotte, al posto delle  $p$ , le  $x'$ , che, a norma delle (7), sono loro combinazioni lineari. Si ha precisamente  $\partial K / \partial p_i = x'_i$ , e, per le (8),

$$\frac{\partial K}{\partial x_i} = - \frac{\partial T}{\partial x_i} = - \frac{1}{2} \sum_{r,s}^n \frac{\partial a_{rs}}{\partial x_i} x'_r x'_s.$$

Ne viene che le condizioni di divisibilità di  $\partial K / \partial x_i$  per  $\partial K / \partial p_i$  sono

$$(9) \quad \frac{\partial a_{rs}}{\partial x_i} = 0 \quad (r, s \geq i).$$

Esprimendo anche le  $\sigma_{ij}$  per le  $x'$ , si ha

$$\sigma_{ij} = x'_j \sum_1^n a^{(i1)} \frac{\partial^2 T}{\partial x'_1 \partial x_j} - a^{(ij)} \frac{\partial T}{\partial x_j},$$

(\*) *Habilitationschrift*, p. 8; «*Math. Ann.*», Bd. XLII, p. 548.

donde come condizioni di divisibilità per  $x'_i$ :

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} a^{(i)} \frac{\partial a_{rs}}{\partial x_j} = 0, \\ \sum_1^n a^{(i)} \frac{\partial a_{ri}}{\partial x_j} - a^{(i)} \frac{\partial a_{rj}}{\partial x_i} = 0, \quad (j, r, s \geq i; r, s \geq j). \\ \sum_1^n a^{(i)} \frac{\partial a_{ji}}{\partial x_j} - \frac{1}{2} a^{(i)} \frac{\partial a_{jj}}{\partial x_i} = 0. \end{array} \right.$$

Per ogni valore di  $i$  sono soddisfatte le (9), ovvero le (10). Queste ultime danno luogo a loro volta a sottocasi distinti secondo le ipotesi, che si fanno sulle ortogonalità (sull'annullarsi o meno delle varie  $a^{(i)}$ ).

Tenendo conto delle (9), o rispettivamente delle (10), per tutti i valori di  $i$ , i primi membri delle (I) risultano divisibili per  $(\partial K/\partial p_i)(\partial K/\partial p_j)$  e si riducono così a polinomi di secondo grado nelle  $p$  (o, se si vuole nelle  $x'$ ). Esprimendo che i singoli coefficienti si annullano, si traggono le ulteriori condizioni, che sono di secondo ordine nelle  $a$ .

Malgrado queste relative semplificazioni, se non si trova qualche artificio sintetico, bisognerebbe passare in rassegna tutte le eventualità a priori possibili, supponendo, per un certo numero di valori di  $i$ , soddisfatte le (9), e, per i rimanenti valori, le (10), coi sottocasi accennati.

Per  $n = 2$  si va in fondo bene, come era facilmente prevedibile, dati i precedenti. Ma già per  $n = 3$  bisognerebbe sobbarcarsi ad una discussione minuta, che io non ho cercato di approfondire.

Per  $n$  qualunque, quando si prestabilisca il caso, anzi addirittura il sottocaso (ne ho provato qualcuno a titolo di esperimento), i calcoli sono semplici; ma debbo pur aggiungere che in questi esperimenti io non ho incontrato alcun tipo veramente interessante.

5. - Come esempio prenderò il caso, in cui tutte le  $\partial K/\partial x_i$  sono divisibili per le corrispondenti  $\partial K/\partial p_i$ .

Introducendo le  $a_{ij,r}$  (simboli di CHRISTOFFEL di prima specie) definite da

$$(11) \quad 2a_{ij,r} = \frac{\partial a_{ri}}{\partial x_j} + \frac{\partial a_{rj}}{\partial x_i} - \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_r},$$

risulta subito dalle (9)

$$(9') \quad a_{ij,r} = 0 \quad (i \geq j).$$

Infatti, se nessuno dei due indici  $i$  ed  $j$  è eguale ad  $r$ , si annullano tutti i termini del secondo membro delle (11); se invece è per es.  $j = r$ , e quindi  $i \geq r$ , allora  $\partial a_{ri}/\partial x_i$  si elide con  $\partial a_{ij}/\partial x_r$  e resta  $\partial a_{rj}/\partial x_i$ , che è zero in virtù delle (9).

Come le (9') sono conseguenza delle (9), così reciprocamente lo sono le (9) delle (9'). Si ha infatti per identità

$$\frac{\partial a_{rs}}{\partial x_i} = a_{ri,s} + a_{si,r},$$

quindi le (9') danno  $\partial a_{rs}/\partial x_i = 0$ , ogniqualvolta sia  $i$  diverso così da  $r$  che da  $s$ .

Ricordando ancora che i simboli di CHRISTOFFEL di seconda specie sono definiti da

$$(12) \quad \left\{ \begin{matrix} i & j \\ & s \end{matrix} \right\} = \sum_1^n a^{(rs)} a_{ij,r},$$

si vede che le (9') sotto nuova forma equivalente possono essere scritte

$$(9'') \quad \left\{ \begin{matrix} i & j \\ & s \end{matrix} \right\} = 0 \quad (i \geq j).$$

Ciò premesso, osserviamo che i rapporti

$$\frac{\partial K}{\partial x_i} : \frac{\partial K}{\partial p_i}, \quad \text{cioè} \quad - \frac{\partial T}{\partial x_i} : x'_i$$

si riducono, in virtù delle (9), a

$$\frac{1}{2} \frac{\partial a_{ii}}{\partial x_i} x'_i - \sum_1^n \frac{\partial a_{ir}}{\partial x_i} x'_r.$$

Siccome, sempre per le (9), è  $\partial a_{ii}/\partial x_r = 0$  per  $r \geq i$ , così queste espressioni si possono anche presentare sotto la forma

$$- \sum_1^n \left( \frac{\partial a_{ir}}{\partial x_i} - \frac{1}{2} \frac{\partial a_{ii}}{\partial x_r} \right) x'_r,$$

ossia, per le (11),

$$- \sum_1^n a_{ii,r} x'_r.$$

Riponendo per le  $x'$  i loro valori (7), e avendo riguardo alle (12), si

ha infine

$$-\frac{\frac{\partial K}{\partial x_i}}{\frac{\partial K}{\partial p_i}} = \sum_s^1 \left\{ \begin{matrix} i & i \\ & s \end{matrix} \right\} p_s.$$

Le (2) sono nel caso presente ( $H = K$ )

$$\frac{\partial p_i}{\partial x_i} = -\frac{\frac{\partial K}{\partial x_i}}{\frac{\partial K}{\partial p_i}},$$

e così il sistema, che deve essere completo, consta delle

$$\frac{\partial p_i}{\partial x_j} = 0 \quad (i \geq j),$$

e delle

$$(13) \quad \frac{\partial p_i}{\partial x_i} = \sum_s^n \left\{ \begin{matrix} i & i \\ & s \end{matrix} \right\} p_s.$$

Giunti a questo punto, non è il caso di ricorrere alle formule generali (I). Le condizioni da associare alle (9) sono chiaramente

$$\frac{d}{dx_j} \sum_s^n \left\{ \begin{matrix} i & i \\ & s \end{matrix} \right\} p_s = 0 \quad (i \geq j),$$

che, sviluppate, a norma delle (1), (13), divengono

$$\sum_s^n \left[ \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \begin{matrix} i & i \\ & s \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} i & i \\ j & \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} j & j \\ & s \end{matrix} \right\} \right] p_s = 0 \quad (i \geq j),$$

e, dovendo stare identicamente, porgono

$$(14) \quad \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \begin{matrix} i & i \\ & s \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} i & i \\ j & \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} j & j \\ & s \end{matrix} \right\} = 0 \quad (i \geq j).$$

Si tratta ormai di individuare la  $K$  o, ciò che è lo stesso, il corrispondente  $ds^2$ , a mezzo delle (9<sup>n</sup>) e (14).

L'integrazione di queste equazioni si può effettuare senza calcoli in base a noti principi di geometria differenziale.

In primo luogo, per definizione dei simboli di RIEMANN, si ha

$$a_{r,s,t} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \begin{matrix} r & i \\ & s \end{matrix} \right\} - \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ \begin{matrix} r & j \\ & s \end{matrix} \right\} + \sum_l^n \left[ \left\{ \begin{matrix} r & i \\ & l \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} l & j \\ & s \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} r & j \\ & l \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} l & i \\ & s \end{matrix} \right\} \right].$$

Distinguiamo i quattro casi:

- a)  $r \geq i, r \geq j$ ;  
 b)  $r = i \geq j$ ;  
 c)  $r = j \geq i$ ;  
 d)  $r = i = j$ .

Ogni simbolo  $a_{rs,ij}$  rientra manifestamente in una delle quattro categorie. Quelli della categoria a) sono nulli, in virtù delle (9").

Per la b), si ha

$$\left\{ \begin{matrix} r & j \\ s & \end{matrix} \right\} = 0, \quad \left\{ \begin{matrix} r & j \\ l & \end{matrix} \right\} = 0, \quad \text{nonchè} \quad \left\{ \begin{matrix} l & j \\ s & \end{matrix} \right\} = 0 \quad (l \geq j)$$

dalle (9") stesse. Rimane quindi

$$a_{is,ij} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \begin{matrix} i & i \\ s & \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} i & i \\ j & \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} j & j \\ s & \end{matrix} \right\},$$

che è zero in virtù delle (14).

Nello stesso modo si riconosce l'annullarsi dei simboli della categoria c). Quelli della d) sono poi identicamente nulli.

Si ha dunque

$$(14') \quad a_{rs,ij} = 0,$$

per tutti i valori dei quattro indici  $r, s, i, j$ .

Reciprocamente — importa rilevarlo — dalle (14'), tenendo conto delle (9"), si ripassa alle (14).

*In definitiva dunque possiamo riguardare come equazioni di condizione per il nostro  $ds^2$  le*

$$(14') \quad a_{rs,ij} = 0$$

$$(9'') \quad \left\{ \begin{matrix} i & j \\ s & \end{matrix} \right\} = 0 \quad (i \geq j).$$

*Le prime ci dicono che si tratta di una varietà euclidea.*

Restano da caratterizzare le superficie coordinate  $x_i = \text{cost}$ .

Si raggiunge lo scopo nel modo migliore, cercando le espressioni delle coordinate cartesiane  $y$  in funzione delle  $x$ .

Le coordinate cartesiane debbono in ogni caso (considerate come

funzioni di coordinate qualsivogliono  $x$ ) soddisfare alle equazioni di RICCI (?)

$$y_{r|is} = 0,$$

ossia, sostituendo alle derivate covarianti  $y_{r|is}$ , le loro espressioni effettive, alle

$$(15) \quad \frac{\partial^2 y_r}{\partial x_i \partial x_j} - \sum_1^n \left\{ \begin{matrix} i & j \\ & s \end{matrix} \right\} \frac{\partial y_r}{\partial x_s} = 0.$$

Nel caso presente, valendo le (9''), se ne trae in particolare

$$(16) \quad \frac{\partial^2 y_r}{\partial x_i \partial x_j} = 0 \quad (i \geq j),$$

le quali si integrano a vista, porgendo

$$(16') \quad y_r = \sum_1^n X_i^{(r)}(x_i),$$

dove le  $X_i^{(r)}(x_i)$  sono funzioni arbitrarie dell'indicato argomento, vincolate soltanto dalla restrizione che sia diverso da zero il determinante delle loro derivate prime (restrizione necessaria perchè le (16') definiscano una trasformazione non degenera fra le  $y$  e le  $x$ ).

Questi valori (16') delle  $y$  verificano effettivamente tutte le condizioni richieste, perchè, portati nel

$$ds^2 = \sum_1^n dy_r^2,$$

danno luogo ad una espressione del  $ds^2$  stesso in variabili  $x$ , soddisfacente alle (14') e (9').

Per le (14') (che caratterizzano la trasformabilità al tipo euclideo  $\sum_1^n dy_r^2$ ), la cosa è evidente. Per le (9''), ciò risulta dal confronto delle (16) colle (15).

Osservando le (16'), siamo adesso in grado di caratterizzare assai semplicemente le varietà  $x_i = \text{cost.}$ , dicendo che sono *ipersuperficie* (per  $n = 2, 3$ , curve o rispettivamente superficie) di *traslazione*.

(?) *Lezioni sulla teoria delle superficie*, [Padova, 1898, presso Drucker], cap. V.

6. - *Discussione completa per  $n = 2$ .*

I casi da distinguere sono:

1°) I due rapporti

$$\frac{\frac{\partial K}{\partial x_1}}{\frac{\partial K}{\partial p_1}}, \quad \frac{\frac{\partial K}{\partial x_2}}{\frac{\partial K}{\partial p_2}}$$

sono entrambi interi (rispetto alle  $p$ , si intende).

2°) Uno solo di essi è intero.

3°) Nessuno dei due è intero.

1° caso. — Per quanto s'è visto in generale, questo caso corrisponde a  $ds^2$  piani, riferiti a linee di traslazione. Con opportuna scelta dei parametri delle linee coordinate, si ha subito il Suo terzo tipo (\*)

$$ds^2 = dx_1^2 + 2 \cos(X_1 + X_2) dx_1 dx_2 + dx_2^2,$$

dove  $X_1$  è funzione arbitraria di  $x_1$ ,  $X_2$  di  $x_2$ .

2° caso. — Sia

$$(17) \quad \tau = \frac{\frac{\partial K}{\partial x_2}}{\frac{\partial K}{\partial p_2}}$$

il rapporto intero, dovendosi qui naturalmente escludere che lo sia anche l'altro  $(\partial K/\partial x_1)/(\partial K/\partial p_1)$ .

Le (I) constano di una sola equazione, che possiamo scrivere, dividendo per  $(\partial K/\partial p_2)^2$ ,

$$\frac{\partial K}{\partial p_1} \frac{\partial \tau}{\partial x_1} - \frac{\partial K}{\partial x_1} \frac{\partial \tau}{\partial p_1} = 0.$$

Di qua apparisce che il prodotto  $(\partial K/\partial x_1)(\partial \tau/\partial p_1)$  è divisibile per  $\partial K/\partial p_1$ . Non lo è il primo fattore, lo sarà dunque  $\partial \tau/\partial p_1$ . Ma, essendo  $\tau$  funzione lineare delle  $p$ ,  $\partial \tau/\partial p_1$  dipende dalle sole  $x$  e può perciò essere divisibile per la funzione lineare  $\partial K/\partial p_1$  solo a patto di annullarsi identicamente. Così la precedente equazione si scinde nelle due

$$\frac{\partial \tau}{\partial p_1} = 0, \quad \frac{\partial \tau}{\partial x_1} = 0,$$

(\*) « Math. Ann. », Bd. XXXV, p. 94.

e la  $\tau$  si riduce quindi al prodotto di  $p_2$  per una funzione della sola  $x_2$ . Designandola, come è sempre permesso, con  $d \log X_2/dx_2$ , e ponendo

$$(18) \quad F = X_2 p_2,$$

si può evidentemente attribuire a  $\tau$  la espressione

$$\tau = \frac{\frac{\partial f}{\partial x_2}}{\frac{\partial f}{\partial p_2}},$$

con che la (17) assume la forma

$$(17') \quad \frac{\partial K}{\partial p_2} \frac{\partial f}{\partial x_2} - \frac{\partial K}{\partial x_2} \frac{\partial f}{\partial p_2} = 0.$$

Siccome  $f$  è, al pari di  $\tau$ , indipendente da  $x_1$  e da  $p_1$ , il primo membro della (17') si può considerare come la parentesi di POISSON  $(K, f)$ . L'annullarsi di tale parentesi esprime, come Ella mi insegna, che le geodetiche di  $K$  ammettono l'integrale

$$f = \text{cost.}$$

L'esistenza di un integrale lineare, anzi della forma  $X_2 p_2 = \text{cost.}$ , per le linee geodetiche permette di asserire che *la varietà corrispondente è applicabile sopra una superficie di rivoluzione, di cui le linee coordinate  $x_1 = \text{cost.}$  rappresentano i paralleli.*

È il Suo tipo (II").

3° caso. — Valgono le (10) del n. 4 per  $i=1, 2$ . Non essendovi più di due indici distinti, mancano i due primi gruppi, e il terzo, in cui si ponga successivamente  $i = 1, j = 2$ ;  $i = 2, j = 1$ , dà

$$(19) \quad \begin{cases} a^{(11)} \frac{\partial a_{12}}{\partial x_2} + \frac{1}{2} a^{(12)} \frac{\partial a_{22}}{\partial x_2} = 0, \\ \frac{1}{2} a^{(12)} \frac{\partial a_{11}}{\partial x_1} + a^{(22)} \frac{\partial a_{12}}{\partial x_1} = 0. \end{cases}$$

Se le coordinate sono ortogonali,  $a_{12}$ , e quindi  $a^{(12)}$ , si annullano, e le (19) rimangono identicamente soddisfatte.

Si ha allora, scrivendo  $e^\alpha$  per  $a^{(11)}$ ,  $e^\beta$  per  $a^{(22)}$ ,

$$K = \frac{1}{2} (e^\alpha p_1^2 + e^\beta p_2^2),$$



con che

$$\frac{\partial^2 K}{\partial p_1 \partial p_2} = 0,$$

$$\frac{\frac{\partial^2 K}{\partial p_1 \partial x_2}}{\frac{\partial K}{\partial p_1}} = \frac{\partial \alpha}{\partial x_2},$$

$$\frac{\frac{\partial^2 K}{\partial x_1 \partial p_2}}{\frac{\partial K}{\partial p_2}} = \frac{\partial \beta}{\partial x_1},$$

ed esplicitando in conformità la (I),

$$(20) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial \beta}{\partial x_1} \frac{\partial \alpha}{\partial x_2} = 0, \\ \frac{\partial^2 \beta}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial \beta}{\partial x_1} \frac{\partial \alpha}{\partial x_2} = 0. \end{cases}$$

Dalle (20) segue in particolare

$$\frac{\partial^2(\alpha - \beta)}{\partial x_1 \partial x_2} = 0,$$

che, integrata, porge

$$\alpha - \beta = X_1 - X_2,$$

designandosi al solito con  $X_1, X_2$  funzioni arbitrarie degli argomenti  $x_1, x_2$  rispettivamente.

Posto

$$-\log \lambda = \alpha - X_1 = \beta - X_2,$$

le (20) si riducono a

$$(20') \quad \frac{\partial^2 \lambda}{\partial x_1 \partial x_2} = 0,$$

e si ha per  $K$  la espressione

$$\frac{1}{2} \frac{X_1 p_1^2 + X_2 p_2^2}{U - V},$$

ovviamente riducibile a

$$\frac{1}{2} \frac{p_1^2 + p_2^2}{U - V},$$

dove  $U$  è funzione soltanto di  $x_1$ ,  $V$  di  $x_2$ .

Il  $ds^2$  corrispondente ha la forma di LIOUVILLE

$$(U - V)(dx_1^2 + dx_2^2).$$

Si noti che, dati i criteri seguiti nella nostra classificazione,  $U$  e  $V$  debbono ritenersi effettive funzioni di  $x_1$ ,  $x_2$ . Qualora infatti l'una o l'altra di esse si riducesse ad una costante,  $\partial K/\partial x_1$  o  $\partial K/\partial x_2$  risulterebbero divisibili per  $\partial K/\partial p_1$  o  $\partial K/\partial p_2$  rispettivamente e si ricadrebbe in uno dei due casi precedenti. Anche in questi del resto, come già fu osservato dal Prof. MORERA e da Lei, il  $ds^2$  è riducibile alla forma di LIOUVILLE: solo che una delle due funzioni  $U$ ,  $V$  (2° caso), o tutte e due (1° caso) risultano costanti.

Con ciò sono esauriti i tipi da Lei enumerati, ed effettivamente non ne esiste alcun altro. Resta però da completare la discussione, perchè non è a priori evidente che le linee coordinate debbano essere ortogonali.

Proviamoci dunque a supporre  $a_{12} \geq 0$  e mostriamo che non è allora possibile ottemperare a tutte le volute condizioni.

In primo luogo le (19), sostituendovi gli elementi reciproci  $a^{(11)}$ ,  $a^{(12)}$ ,  $a^{(22)}$  coi loro valori  $a_{22}/a$ ,  $-a_{12}/a$ ,  $a_{11}/a$  ( $a = a_{11}a_{22} - a_{12}^2$ ), e tenendo presente che  $a_{12}$  non si annulla, possono essere scritte

$$\frac{\partial}{\partial x_2} \frac{a_{22}}{a_{12}^2} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{a_{11}}{a_{12}^2} = 0,$$

donde col solito significato di  $X_1$ ,  $X_2$ ,

$$a_{22} = a_{12}^2 X_1, \quad a_{11} = a_{12}^2 X_2.$$

Si avrebbe dunque un  $ds^2$  della forma

$$a_{12}^2 X_1 X_2 \left\{ \frac{dx_1^2}{X_1} + \frac{2}{a_{12} \sqrt{X_1 X_2}} \frac{dx_1}{\sqrt{X_1}} \frac{dx_2}{\sqrt{X_2}} + \frac{dx_2^2}{X_2} \right\},$$

o, più semplicemente, scambiando  $x_1$ ,  $x_2$  in  $\int dx_1/\sqrt{X_1}$ ,  $\int dx_2/\sqrt{X_2}$  (nel campo reale,  $X_1$ ,  $X_2$  non possono annullarsi e quindi la trasformazione è certamente lecita) e scrivendo  $1/\lambda$  per  $a_{12}\sqrt{X_1 X_2}$ ,

$$ds^2 = \frac{1}{\lambda^2} \{ dx_1^2 + 2\lambda dx_1 dx_2 + dx_2^2 \}.$$

Ne viene

$$K = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{1 - \lambda^2} - 1 \right) \{ p_1^2 - 2\lambda p_1 p_2 + p_2^2 \},$$

con che  $K$  dipende dalle variabili  $x_1, x_2$  solo pel tramite dell'argomento  $\lambda$ , e per conseguenza

$$\begin{aligned} \frac{\partial K}{\partial x_1} &= \frac{\partial K}{\partial \lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial x_1}, & \frac{\partial K}{\partial x_2} &= \frac{\partial K}{\partial \lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial x_2}, \\ \frac{\partial^2 K}{\partial x_1 \partial x_2} &= \frac{\partial K}{\partial \lambda} \frac{\partial^2 \lambda}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 K}{\partial \lambda^2} \frac{\partial \lambda}{\partial x_1} \frac{\partial \lambda}{\partial x_2}. \end{aligned}$$

Le derivate prime di  $\lambda$  non possono annullarsi identicamente, poichè in tal caso risulterebbero nulle (e quindi divisibili per le corrispondenti  $\partial K/\partial p$ )  $\partial K/\partial x_1$  o  $\partial K/\partial x_2$ .

Ciò posto, immaginiamo di sostituire, nella equazione fondamentale

$$\frac{\partial K}{\partial p_1} \frac{\partial K}{\partial p_2} \frac{\partial^2 K}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial K}{\partial p_1} \frac{\partial K}{\partial x_2} \frac{\partial^2 K}{\partial x_1 \partial p_2} - \frac{\partial K}{\partial x_1} \frac{\partial K}{\partial p_2} \frac{\partial^2 K}{\partial p_1 \partial x_2} + \frac{\partial K}{\partial x_1} \frac{\partial K}{\partial x_2} \frac{\partial^2 K}{\partial p_1 \partial p_2} = 0,$$

i valori testè scritti di  $\partial K/\partial x_1, \partial K/\partial x_2, \partial^2 K/\partial x_1 \partial x_2$ , isolando nel primo membro il termine

$$\frac{\partial K}{\partial p_1} \frac{\partial K}{\partial p_2} \frac{\partial^2 K}{\partial \lambda^2} \frac{\partial \lambda}{\partial x_1} \frac{\partial \lambda}{\partial x_2}.$$

Tutti gli altri termini contengono il fattore  $\partial K/\partial \lambda$ , che si può raccogliere, attribuendo così alla precedente equazione (la quale deve sussistere identicamente rispetto alle  $p$  e alle  $x$ ) la forma

$$\frac{\partial K}{\partial p_1} \frac{\partial K}{\partial p_2} \frac{\partial^2 K}{\partial \lambda^2} \frac{\partial \lambda}{\partial x_1} \frac{\partial \lambda}{\partial x_2} = \frac{\partial K}{\partial \lambda} \Omega,$$

con  $\Omega$  espressione quadratica nelle  $p$ .

Una tale identità implica in particolare che il secondo membro sia divisibile per  $(\partial K/\partial p_1)(\partial K/\partial p_2)$ . Nessuno di questi due fattori divide  $\partial K/\partial \lambda$  (poichè dovrebbe allora dividere anche  $\partial K/\partial x_1, \partial K/\partial x_2$ ). Sarà dunque  $\Omega$  divisibile per  $(\partial K/\partial p_1)(\partial K/\partial p_2)$  e si potrà ricavarne:

$$(21) \quad \frac{\partial^2 K}{\partial \lambda^2} \frac{\partial \lambda}{\partial x_1} \frac{\partial \lambda}{\partial x_2} = \frac{\partial K}{\partial \lambda} \times \text{funzione delle sole } x.$$

Ora

$$\frac{\partial K}{\partial \lambda} = \frac{\lambda}{(1-\lambda^2)^2} \{p_1^2 - 2\lambda p_1 p_2 + p_2^2\} - \left( \frac{1}{1-\lambda^2} - 1 \right) p_1 p_2,$$

ossia, posto

$$A = \frac{\lambda}{(1-\lambda^2)^2}, \quad B = \frac{\lambda^2(\lambda^2-3)}{(1-\lambda^2)^2},$$

$$\frac{\partial K}{\partial \lambda} = A(p_1^2 + p_2^2) + B p_1 p_2,$$

quindi

$$\frac{\partial^2 K}{\partial \lambda^2} = \frac{dA}{d\lambda} (p_1^2 + p_2^2) + \frac{dB}{d\lambda} p_1 p_2,$$

e il determinante

$$\begin{vmatrix} A & B \\ \frac{dA}{d\lambda} & \frac{dB}{d\lambda} \end{vmatrix}$$

non è identicamente zero, perchè in questa ipotesi il rapporto  $B/A = \lambda(\lambda^2-3)$  dovrebbe risultare indipendente da  $\lambda$ , ciò che non è.

$\partial K/\partial \lambda$  e  $\partial^2 K/\partial \lambda^2$  sono pertanto due forme lineari indipendenti negli argomenti  $p_1^2 + p_2^2$ ,  $p_1 p_2$ .

Supponiamo fissati dei valori di  $x_1$ ,  $x_2$  e quindi di  $\lambda$  coll'unica restrizione che

$$\begin{vmatrix} A & B \\ \frac{dA}{d\lambda} & \frac{dB}{d\lambda} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{\partial \lambda}{\partial x_1} & \frac{\partial \lambda}{\partial x_2} \end{vmatrix} \geq 0,$$

è rimanga regolare la funzione delle  $x$ , che compare nel secondo membro della (21).

Si può allora, e in infiniti modi, attribuire agli argomenti  $p_1^2 + p_2^2$ ,  $p_1 p_2$ , cioè in definitiva alle  $p$ , valori per cui  $\partial K/\partial \lambda$ , e con essa il secondo membro della (21), si annullano, mentre non si annulla  $\partial^2 K/\partial \lambda^2$ , e nemmeno quindi il prodotto  $(\partial^2 K/\partial \lambda^2)(\partial \lambda/\partial x_1)(\partial \lambda/\partial x_2)$ , che costituisce il primo membro della (21) stessa. Ma questa equazione dovrebbe essere soddisfatta per qualunque scelta dei valori iniziali.

La ipotesi  $a_{12} \geq 0$  è dunque da escludere, come dovevasi dimostrare.

Padova, 3 Febbraio 1904.

XXII.

SUR LA RÉOLUTION QUALITATIVE  
DU PROBLÈME RESTREINT DES TROIS CORPS

Verhandl. des III Intern. Math. - Kongresses, Heidelberg, 1904.

pp. 402-408.

Je vais résumer, en causant et commentant en peu, le contenu d'un mémoire, qui paraîtra prochainement sous ce même titre dans les « Acta Mathematica » de M. MITTAG-LEFFLER (\*).

\* \* \*

Dans le problème des trois corps (points matériels  $S, J, P$ , qui s'attirent suivant la loi de NEWTON) les forces et par conséquent les équations différentielles du mouvement se comportent d'une façon analytique régulière, tant que les positions des trois points sont distinctes.

D'après cela il est presque évident qu'il ne peut y avoir autre raison de singularité pour le mouvement en dehors de la circonstance que deux des trois corps (ou tous les trois) se rapprochent indéfiniment.

Plus précisément M. PAINLEVÉ (1) a démontré que, à partir des conditions initiales données, des singularités peuvent se présenter alors seulement qu'une au moins des distances mutuelles tend vers zéro pour  $t$  convergent vers une valeur finie  $t_1$ .

Quoi qu'il en soit, les résultats récents de M. MITTAG-LEFFLER sur la représentation des branches uniformes des fonctions analytiques permettent d'affirmer que:

Dans le problème des trois corps, les coordonnées sont exprimables, *en tout cas et pendant toute la durée du mouvement*, par des séries jouissant des propriétés fondamentales des séries de TAYLOR.

Soit en effet  $x$  une quelconque de ces coordonnées. D'après la conclusion de M. PAINLEVÉ, rappelée tout-à-l'heure, la fonction  $x(t)$  reste

(\*) In questo vol.: XXIII, pp. 419-439 [N.d.R.].

(1) Voir ses *Leçons etc., professées à Stockholm* chez A. Hermann, Paris, 1897, p. 583.

régulière pour toutes les valeurs de  $t$  qu'il y a lieu de considérer: savoir, de l'instant initial  $t_0$  jusqu'à l'infini dans le cas général, où il n'y a pas de choc au bout d'un temps fini; de  $t_0$  à  $t_1$  (ce dernier instant exclu), lorsque le choc intervient. Dans les deux cas, les intervalles de l'axe réel  $(t_0, \infty)$ ,  $(t_0, t_1)$  sont intérieurs à l'étoile de M. MITTAG-LEFFLER se rapportant au point  $t_0$ . Les équations du mouvement fournissent d'ailleurs, en fonction des données initiales, les dérivées successives de la fonction  $x(t)$  au centre  $t_0$  de l'étoile. Il suffit donc de construire, en se servant de ces valeurs, un des développements indiqués par M. MITTAG-LEFFLER pour en tirer une expression de  $x(t)$  embrassant toute la durée du mouvement.

On peut dire que le problème est résolu. Mais (tout en restant dans le terrain théorique, où l'on fait abstraction de la complexité des moyens employés) ce n'est pas une résolution complète. Elle est, pour ainsi dire, aridement quantitative, et ne nous laisse pas apercevoir la nature du mouvement.

A ce point de vue se pose d'abord la question de la prévision des chocs: conditions à remplir par les circonstances initiales pour que deux des trois corps ou tous les trois se choquent au bout d'un temps fini.

La première partie de cette question, dont je m'étais occupé pour le cas particulier du problème restreint <sup>(2)</sup>, vient d'être brillamment discutée par M. BISCONCINI dans un mémoire, qui va paraître dans les « Acta Mathematica ». La seconde attend encore une réponse.

Mais, lors même qu'on en posséderait une, il ne serait pas encore permis de tirer des conséquences astronomiques.

En effet les corps célestes ne sont pas des points matériels, et il est loisible de les traiter ainsi pourvu seulement que leurs dimensions soient négligeables par rapport aux distances, c'est-à-dire (dimensions et degré d'approximation étant donnés) pourvu que leurs distances ne descendent pas au dessous d'une certaine limite  $\varepsilon$ . A cette condition seulement les conclusions mathématiques seront acceptables.

En l'espèce, pour pouvoir affirmer qu'à partir d'un état initial donné le mouvement se poursuivra régulièrement quel que soit  $t$ , il faudra être certain que les distances mutuelles restent supérieures à l' $\varepsilon$  susdit.

Reconnaître d'avance sur les données initiales quand il en est bien ainsi, voilà le but essentiel du côté qualitatif de notre problème.

J'ai réussi à faire un petit pas pour le cas particulier du problème restreint.

<sup>(2)</sup> *Traiettorie singolari ed urti nel problema ristretto dei tre corpi*, « Annali di Matematica », ser. II, t. IX, 1903 [in questo vol.: XVI, pp. 279-308].

\* \* \*

Il est à peine nécessaire de rappeler que ce cas particulier est caractérisé par les conditions suivantes:

la masse de  $P$  est négligeable et n'exerce par conséquent aucune influence sur le mouvement des deux autres corps  $S$  et  $J$ ;

ce mouvement (qui, d'après la première hypothèse, doit correspondre à une solution du problème des deux corps) est le plus simple possible, savoir  $S$  et  $J$  tournent uniformément autour de leur centre de gravité  $O$ ; le corps  $P$  se meut (initialement et par suite à tout instant) dans le plan, qui contient les deux orbites circulaires de  $S$  et de  $J$ .

On est ramené de la sorte à un problème avec deux degrés de liberté: Mouvement plan d'un point  $P$  soumis à l'attraction newtonienne des deux centres (mobiles)  $S$  et  $J$ .

Pour rendre la notation aussi simple que possible il convient d'adopter:

la distance constante  $\overline{SJ}$  comme unité de longueur;

la somme des masses des deux corps  $S$  et  $J$  comme unité de masse:  $\mu$  étant alors la masse de  $J$ , celle de  $S$  sera  $\nu = 1 - \mu$ ;

l'unité de temps de façon que la vitesse de la rotation de la droite  $SJ$  autour de  $O$  soit 1.

Dans ces conditions la constante de gravitation universelle a la valeur 1, et le potentiel des forces agissantes sur l'unité de masse de  $P$  est

$$\frac{\nu}{r} + \frac{\mu}{\Delta},$$

en désignant par  $r$  la distance  $\overline{PS}$ , par  $\Delta$  la distance  $\overline{PJ}$ .

Rapportons la position de  $P$  à des axes mobiles  $x, y$ , ayant l'origine en  $S$ , et  $SJ$  pour direction positive de  $x$ .

Soient d'autre part  $p$  et  $q$  les composantes de la vitesse héliocentrique de  $P$ , c'est-à-dire de la vitesse rapportée à un système de direction invariable (ce qui n'est pas  $x, y$ ), ayant l'origine en  $S$ .

On reconnaît aisément — je ne vous entretiendrai pas avec des passages tout-à-fait élémentaires — que les équations du mouvement de  $P$  peuvent être présentées sous la forme canonique suivante:

$$(I) \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{\partial F}{\partial p}, & \frac{dy}{dt} = \frac{\partial F}{\partial q}; \\ \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial x}, & \frac{dq}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial y}, \end{cases}$$

pourvu qu'on pose :

$$F = \frac{1}{2} \{(p + y)^2 + (q - x)^2\} - \left\{ \frac{\nu}{r} + \frac{1}{2} r^2 + \mu \left( \frac{1}{A} - x \right) \right\}.$$

Comme  $F$  ne contient pas  $t$ , le système (I) admet l'intégrale évidente (dite de JACOBI)  $F = \text{const.}$ , que j'écrirai

$$(1) \quad F = -C;$$

par cette même indépendance de  $t$ , la méthode d'intégration de JACOBI, appliquée au système (I), conduit à envisager (1) comme une équation aux dérivées partielles du premier ordre par rapport à une fonction inconnue  $W$  d'après les positions

$$(2) \quad p = \frac{\partial W}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial W}{\partial y}.$$

Ceci bien posé, rattachons-nous aux remarques précédentes, d'après lesquelles le mouvement se poursuit régulièrement tant que les distances ne tendent pas vers zéro.

Dans le cas actuel,  $\overline{SJ}$  restant constante, il y a lieu de se préoccuper seulement de la circonstance que  $P$  se rapproche indéfiniment d'un de ces deux points. Il suffit d'ailleurs d'en envisager un,  $S$  par exemple, puisque le rôle de l'autre est absolument identique et les conclusions seraient par suite les mêmes.

Je me suis pourtant proposé l'étude des trajectoires du système (c'est-à-dire des courbes décrites par le point  $P$ , rapportées aux axes  $x, y$ ) dans une région suffisamment petite entourant le centre  $S$ .

Les équations (I) présentent des singularités en  $S$ , qui proviennent du terme  $\nu/r$  de  $F$  (et de ce terme seulement).

Il en est de même de l'équations de HAMILTON-JACOBI

$$F = -C,$$

envisagée comme équation aux dérivées partielles en  $W$ . Mais elle peut être régularisée (ce qui réussit d'ailleurs même pour le système différentiel (I)). J'entends par là qu'on peut, par un changement convenable de variables indépendantes, faire disparaître la singularité.

Il suffit d'avoir recours à la transformation (conforme)

$$(3) \quad x + iy = (\xi + i\eta)^2$$

pour que, après avoir chassé d'une part et d'autre le dénominateur

$$\rho^2 = \xi^2 + \eta^2 = r,$$



l'équation (1) prenne la forme (parfaitement régulière au point  $\xi=\eta=0$ )

$$(1') \quad \frac{1}{8} \left[ \left( \frac{\partial W}{\partial \xi} + 2\rho^2 \eta \right)^2 + \left( \frac{\partial W}{\partial \eta} - 2\rho^2 \xi \right)^2 \right] = \nu - C\rho^2 + \frac{1}{2} \rho^6 + \mu \rho^2 \left( \frac{1}{A} - x \right).$$

Par la même transformation les formules (2) deviennent

$$(2') \quad \begin{cases} p = \frac{1}{2\rho^2} \left( \xi \frac{\partial W}{\partial \xi} - \eta \frac{\partial W}{\partial \eta} \right), \\ q = \frac{1}{2\rho^2} \left( \eta \frac{\partial W}{\partial \xi} + \xi \frac{\partial W}{\partial \eta} \right). \end{cases}$$

La régularité de (1') est la clef de voûte de ce qui va suivre.

On comprend en effet qu'il n'y a désormais plus de difficulté à établir l'existence d'une, et même d'une infinité d'intégrales de (1'), *holomorphes au point S, et complètes*, c'est-à-dire contenant, outre C, une seconde constante essentielle  $\alpha$ .

L'intégrale, que j'ai considérée, a la forme

$$W = \sqrt{8\nu} (\xi \cos \alpha + \eta \sin \alpha) + \dots,$$

les termes non écrits étant d'ordre supérieure au premier par rapport à  $\xi, \eta$ .

En glissant sur les détails de démonstration, j'arrive au résultat principal:

C'est que l'équation (formée d'après la méthode de JACOBI)

$$(II) \quad \frac{\partial W}{\partial \alpha} = \beta,$$

où  $\beta$  désigne une nouvelle constante, est apte à représenter (sous forme évidemment holomorphe) *tous* les arcs A de trajectoires possibles au voisinage de S. D'une façon plus précise, on peut délimiter autour de S un certain domaine D (dépendant de la constante C), tel que, si P pénètre dans D, son mouvement a lieu nécessairement sur une des courbes (II).

La nature analytique de W permet de tirer, presque en corollaires, les conclusions suivantes:

Aucun des arcs A ne peut se rapprocher indéfiniment de S sans le rejoindre jamais; c'est-à-dire tout arc A ne passant pas exactement au point S en reste à une distance finie. La moindre distance  $\delta$  du point S à un arc A peut être exprimée en fonction (uniforme à l'intérieur de D) d'un quelconque des états de mouvement de P sur l'arc. *Ou bien  $\delta = 0$ ; c'est la condition du choc. Ou bien  $\delta > 0$ . On peut affirmer que, sur*

l'arc  $A$ , le mouvement se poursuit régulièrement. Si en surplus  $\partial > \varepsilon$ , il sera permis d'attribuer un sens physique au résultat mathématique.

Rien n'autorise toutefois des prévisions à longue échéance ( $\partial > \varepsilon$ , ni même  $\partial > 0$ , quel que soit  $t$ ). C'est une remarque essentielle, que je dois à l'obligeance de M. PHRAGMÉN. On conçoit en effet qu'on puisse bien, en suivant une trajectoire déterminée, sortir de  $D$  le long d'un arc  $A$  et y rentrer le long d'un arc différent  $A'$ , et ainsi de suite, avec des nouveaux  $\partial$  ayant même zéro pour limite inférieure. Il arrive sans doute — et on peut le constater déjà dans les cas élémentaire, où la masse  $\mu$  de  $J$  serait nulle — qu'une trajectoire pénètre successivement dans  $D$  par une série indéfinie de arcs  $A$ , qui, tout en étant en continuation analytique, se présentent à l'intérieur de  $D$  comme des éléments distincts. Quant à la limite inférieure des  $\partial$ , je n'en puis rien dire. Tous mes efforts dans cette direction ont complètement échoués.

Il n'en reste pas moins un résultat positif se rapportant à la région  $D$ : Si  $\partial > \varepsilon$  il n'y a rien à craindre *actuellement* du voisinage de  $S$ . Seuls des rapprochements *nouveaux* (c'est-à-dire précédés par des sorties de  $D$ ) pourraient devenir dangereux.

\* \* \*

Il m'importe de prévenir une objection.

Je vais d'abord la suggérer par les remarques suivantes:

Toutes les trajectoires d'un certain domaine  $D$  autour de  $S$  (subordonné à la valeur de  $C$ ) peuvent être représentées — avons-nous dit — sous la forme

$$(II) \quad \frac{\partial W}{\partial \alpha} = \beta,$$

le premier membre dépendant de  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $C$ ,  $\alpha$ .

Les composantes  $p$ ,  $q$  de la vitesse du mobile au point quelconque  $\xi$ ,  $\eta$  d'une de ces trajectoires sont données par les formules (2').

Imaginons de tirer de ces formules  $C$  et  $\alpha$  en fonction de  $p$ ,  $q$  ( $\xi$  et  $\eta$ ), et faisons la substitution dans  $\partial W/\partial \alpha$ ; de même exprimons-y  $\xi$ ,  $\eta$  à l'aide de  $x$ ,  $y$ .

On obtient en définitive une véritable intégrale des équations différentielles du mouvement

$$f(x, y, p, q) = \beta.$$

On démontre sans peine qu'une telle intégrale ne coïncide point avec

$F = \text{const.}$ , et est bien *uniforme* (et holomorphe) au voisinage d'un quelconque des états de mouvement  $(x, y, p, q)$  possibles à l'intérieur de  $D$  (le point  $S$  étant seulement excepté) (\*).

Voici maintenant l'objection à laquelle je faisais allusion :

L'existence d'une intégrale uniforme, autre que  $F = \text{const.}$ , est en contradiction avec un résultat bien connu de M. POINCARÉ.

A la vérité la contradiction n'existe pas, et on le met au jour bien simplement en ayant égard aux limites de validité du théorème de M. POINCARÉ. On y établit la non-existence d'intégrales uniformes *par rapport aux variables képlériennes*, ce qui implique l'uniformité au voisinage de tous les états de mouvement  $(x, y, p, q)$ , qui appartiennent à une même orbite osculatrice (elliptique).

On ne peut pas exclure d'après ce théorème l'existence d'intégrales uniformes pour quelque portion de l'orbite seulement, ni non plus au voisinage de quelque état non-elliptique.

Notre intégrale

$$f = \beta,$$

qui est uniforme dans le domaine  $D$ , se trouve précisément dans l'une ou dans l'autre de ces conditions.

\* \* \*

J'ai sans doute abusé de votre bienveillante attention et je m'empresse à prendre congé en exprimant une présomption personnelle.

Je pense qu'il doit bien réussir (et par des moyens simples, comme on vient d'en avoir exemple) de *régulariser* l'équation de HAMILTON-JACOBI, même pour le problème général des trois corps.

On y puisera peut-être une confiance bienfaisante pour des nouveaux efforts tendant à perfectionner de plus en plus les méthodes d'approximation quantitative.

---

(\*) On veut dire par là que, pour un quelconque de ces états, soit  $(x_0, y_0, p_0, q_0)$ , il existe un domaine non nul (de l'espace analytique  $x, y, p, q$  autour des valeurs  $x_0, y_0, p_0, q_0$ ) tel que, lorsqu'on se donne dans ce domaine trois des quantités  $x, y, p, q$ , la quatrième reste déterminée sans ambiguïté par la relation  $f = \beta$ .



SUR LA RÉOLUTION QUALITATIVE  
DU PROBLÈME RESTREINT DES TROIS CORPS

« Acta math. », t. 30 (1906), pp. 305-327.

Dans le problème des trois corps (points matériels, qui s'attirent suivant la loi de NEWTON) les forces et par conséquent les équations différentielles du mouvement se comportent d'une façon analytique régulière tant que les positions des trois points restent distinctes.

D'après cela il est presque évident qu'il ne peut y avoir autre raison de singularité pour le mouvement en dehors de la circonstance que deux des trois corps (ou tous les trois) se rapprochent indéfiniment.

Plus précisément M. PAINLEVÉ <sup>(1)</sup> a démontré qu'à partir de conditions initiales données des singularités peuvent se présenter alors seulement qu'une au moins des distances mutuelles tend vers zéro pour  $t$  convergent vers une valeur finie  $t_1$ .

Quoi qu'il en soit, les résultats récents de M. MITTAG-LEFFLER sur les représentations des branches monogènes des fonctions analytiques permettent d'affirmer que:

Dans le problème des trois corps les coordonnées sont exprimables *en tout cas et pendant toute la durée du mouvement* par des séries jouissant des propriétés fondamentales des séries de TAYLOR.

Soit en effet  $x$  une quelconque de ces coordonnées. D'après la conclusion de M. PAINLEVÉ, rappelée tout à l'heure, la fonction  $x(t)$  reste régulière pour toutes les valeurs de  $t$ , qu'il y a lieu de considérer: savoir de l'instant initial  $t_0$  jusqu'à l'infini dans le cas général où il n'y a pas de choc au bout d'un temps fini; de  $t_0$  à  $t_1$  (ce dernier instant exclu) lorsque le choc intervient.

Dans les deux cas les intervalles de l'axe réel  $(t_0, \infty)$ ,  $(t_0, t_1)$  sont intérieurs à l'étoile de M. MITTAG-LEFFLER se rapportant au point  $t_0$ . Les équations du mouvement fournissent d'ailleurs, en fonction des données

---

<sup>(1)</sup> Voir ses *Leçons etc., professées à Stockholm*, chez A. Hermann, Paris, 1897, p. 583.

initiales, les dérivées successives de la fonction  $x(t)$  au centre  $t_0$  de l'étoile. Il suffit donc de construire, en se servant de ces valeurs, un des développements indiqués par M. MITTAG-LEFFLER pour en tirer une expression de  $x(t)$ , embrassant toute la durée du mouvement.

On peut dire que le problème est résolu. Mais (tout en restant dans le terrain théorique, où l'on fait abstraction de la complexité des moyens employés) ce n'est pas une résolution complète. Elle est, pour ainsi dire, aridement quantitative et ne nous laisse pas apercevoir la nature du mouvement.

A ce point de vue se pose d'abord la question de la prévision des chocs: conditions à être remplies par les circonstances initiales pour que deux des trois corps, ou tous les trois, se choquent au bout d'un temps fini.

La première partie de cette question, dont je m'étais occupé pour le cas particulier du problème restreint <sup>(2)</sup>, vient d'être brillamment discutée par M. BISCONEINI <sup>(3)</sup>.

La seconde attend encore une réponse. Mais, lors même qu'on en posséderait une, il ne serait pas encore permis de tirer des conséquences astronomiques. En effet les corps célestes ne sont pas des points matériels et il est loisible de les traiter ainsi pourvu seulement que leurs dimensions soient négligeables par rapport aux distances, c'est-à-dire (dimensions et degré d'approximation étant donnés) pourvu que leurs distances ne descendent pas au dessous d'une certaine limite  $\varepsilon$ . A cette condition seulement les résultats mathématiques seront acceptables.

En l'espèce, pour pouvoir affirmer qu'à partir d'un état initial donné, le mouvement se poursuivra régulièrement, il faudra être certain que les distances restent supérieures à l' $\varepsilon$  susdit.

Reconnaître d'avance sur les données initiales quand il en est ainsi, voilà le but essentiel de l'analyse qualitatif de notre problème.

J'ai réussi à faire un petit pas pour le cas particulier du problème restreint. Voici d'une façon précise le contenu de ma recherche.

Rappelons d'abord qu'il s'agit dans le problème restreint du mouvement plan d'un corps  $P$  (de masse négligeable) attiré par deux autres  $S$ ,  $J$  tournant uniformément autour de leur centre de gravité.

La distance  $\overline{SJ}$  restant constante, on doit se préoccuper seulement de  $\overline{PS}$ ,  $\overline{PJ}$ , et il suffit d'en envisager une,  $\overline{PS}$  par exemple, puisque les mêmes considérations s'appliquent évidemment à l'autre.

Cela étant, je me suis proposé l'étude des trajectoires du système

<sup>(2)</sup> *Traiettorie singolari ed urti nel problema ristretto dei tre corpi*, « Annali di Matematica », ser. III, t. 9, 1903 (in questo vol.: XVI, pp. 279-308).

<sup>(3)</sup> *Sur le problème des trois corps etc.*, dans ce même volume des « Acta ».

(courbes décrites par le point  $P$ ) dans une région suffisamment petite  $D$  entourant le centre  $S$ .

Les équations différentielles du mouvement présentent, comme il est évident d'après la nature newtonienne de la force, des singularités au point  $S$ . Mais on peut les régulariser (le sens de ce mot n'a pas besoin d'explications) par une transformation convenable. On peut notamment, en ayant recours à l'équation de HAMILTON-JACOBI, caractériser d'une façon très nette les trajectoires de la région  $D$ . On en tire sans peine une représentation sous forme holomorphe de tous les arcs de trajectoire  $A$ , possibles à l'intérieur de  $D$ . Aucun de ces arcs ne peut se rapprocher indéfiniment de  $S$  sans le rejoindre jamais, c'est-à-dire tout arc  $A$ , ne passant pas exactement au point  $S$ , en reste à une distance finie. La moindre distance  $\delta$  du point  $S$  à l'arc  $A$  peut être exprimée en fonction (uniforme à l'intérieur de  $D$ ) d'un quelconque des états de mouvement de  $P$  sur  $A$ .

Ou bien  $\delta = 0$ ; c'est la condition du choc. Ou bien  $\delta > 0$ . On peut affirmer que sur l'arc  $A$  le mouvement se poursuit régulièrement. Si au surplus  $\delta > \varepsilon$ , il sera permis d'attribuer un sens physique au résultat mathématique.

Rien n'autorise toutefois des prévisions à longue échéance ( $\delta > \varepsilon$ , ni même  $\delta > 0$  quel que soit  $t$ ).

C'est là une remarque essentielle, que je dois à l'obligeance de M. PHRAGMÉN.

On conçoit en effet qu'on puisse, en suivant une trajectoire déterminée, sortir de  $D$  le long d'un arc  $A$ , et y rentrer le long d'un arc différent  $A'$ , et ainsi de suite, avec des nouveaux  $\delta$ , ayant même zéro pour limite inférieure.

Il arrive sans doute — l'exemple étant offert (§ 8) déjà par le cas élémentaire, où la masse de  $J$  serait nulle — qu'une trajectoire pénètre dans  $D$  une infinité de fois par une série d'arcs  $A$ , qui, tout en étant en continuation analytique, se présentent à l'intérieur de  $D$  comme des éléments distincts.

Sur la limite inférieure des  $\delta$  je ne puis rien dire: tous mes efforts dans cette direction ont complètement échoué.

L'analyse de ce qui se passe au voisinage de  $S$  ne suffit donc pas à épuiser la question tout en fournissant des renseignements dignes d'intérêt.

Pour résumer sous forme expressive on peut énoncer la conclusion suivante:

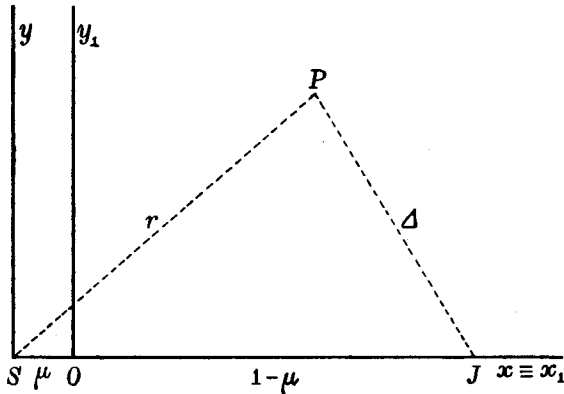
Si  $\delta > \varepsilon$  il n'y a rien à craindre pour le moment du voisinage de  $S$ . Seuls des rapprochements *nouveaux* (c'est-à-dire précédés par des sorties de  $D$ ) pourraient devenir dangereux.

Qu'il me soit permis de saisir l'occasion pour adresser tous mes remer-

ciements à MM. MITTAG-LEFFLER et PHRAGMÉN, qui ont honoré ma recherche de leur intérêt bienveillant.

### 1. - Equations du mouvement. Forme canonique usuelle.

Soit  $P$  celui des trois corps, dont la masse est négligeable et n'exerce par conséquent aucune influence sur le mouvement des deux autres  $S, J$ . Ce mouvement est alors képlérien. On suppose qu'il soit le plus simple possible, c'est-à-dire que les deux corps  $S$  et  $J$  tournent uniformément autour de leur centre de gravité commun  $O$ . On suppose encore que le corps  $P$  se meut dans le plan, qui contient les deux orbites circulaires de  $S$  et de  $J$ .



On est ramené de la sorte à un problème avec deux degrés de liberté : mouvement plan d'un point  $P$ , sollicité par l'attraction newtonienne de deux centres variables  $S$  et  $J$ .

Convenons de prendre comme unité de masse la somme des masses des deux corps  $S$  et  $J$ ; si  $\mu$  désigne la masse de  $J$ ,  $\nu = 1 - \mu$  sera alors celle de  $S$ .

Convenons encore de prendre la distance constante  $\overline{SJ}$  pour unité de distance et de fixer l'unité de temps de façon que la vitesse angulaire de la droite  $SJ$  soit égale à l'unité. Dès lors la constante de la gravitation universelle résulte, elle aussi, égale à l'unité, et le potentiel des forces agissantes sur l'unité de masse de  $P$  est

$$\frac{\nu}{r} + \frac{\mu}{\Delta},$$

en désignant par  $r$  et  $\Delta$  les distances  $\overline{PS}$  et  $\overline{PJ}$ .



Rapportons-nous pour un moment à deux axes mobiles  $Ox_1, Oy_1$  ayant  $OJ$  comme direction positive de l'axe  $x_1$ , et, comme direction positive de l'axe  $y_1$ , celle qu'on obtient de  $OJ$  en tournant de  $\pi/2$  dans le sens de la rotation de la droite  $SJ$ .

Comme  $O$  est le centre de gravité de  $S$  et de  $J$  et  $\overline{SJ} = 1$ , les coordonnées de  $S$  sont:  $-\mu, 0$ ; celles de  $J$ :  $1 - \mu, 0$ .

Ceci posé, d'après le théorème de CORIOLIS, les composantes de l'accélération absolue d'un point mobile quelconque  $P$  (ayant  $x_1(t), y_1(t)$  pour coordonnées par rapport à nos axes) seront

$$\begin{aligned}x_1'' - 2y_1' - x_1, \\ y_1'' + 2x_1' - y_1,\end{aligned}$$

les accents indiquant des dérivations par rapport au temps  $t$ .

Les équations du mouvement s'obtiennent en égalant l'accélération à la force, qui agit sur l'unité de masse.

Elles sont donc ici:

$$\begin{aligned}x_1'' - 2y_1' - x_1 &= \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{v}{r} + \frac{\mu}{\Delta} \right), \\ y_1'' + 2x_1' - y_1 &= \frac{\partial}{\partial y_1} \left( \frac{v}{r} + \frac{\mu}{\Delta} \right).\end{aligned}$$

Passons maintenant de  $x_1, y_1$  à un système d'axes parallèles  $x, y$ , ayant pour origine le point  $S$ .

Les formules de transformation

$$x_1 = x - \mu, \quad y_1 = y$$

donnent

$$(1) \quad \begin{cases} x'' - 2y' - x = -\mu + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{v}{r} + \frac{\mu}{\Delta} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{v}{r} + \mu V \right), \\ y'' + 2x' - y = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{v}{r} + \frac{\mu}{\Delta} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{v}{r} + \mu V \right), \end{cases}$$

ayant posé pour abrégé

$$V = \frac{1}{\Delta} - x.$$

Je pose encore

$$(2) \quad \begin{aligned}x' &= p + y, \\ y' &= q - x,\end{aligned}$$

et je puis alors écrire les équations (1) sous la forme:

$$(3) \quad \begin{cases} \frac{dp}{dt} = q + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{v}{r} + \mu V \right), \\ \frac{dq}{dt} = -p + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{v}{r} + \mu V \right). \end{cases}$$

Les deux équations du second ordre (1) se trouvent ainsi remplacées par le système équivalent d'équations du premier ordre (2), (3) aux quatre fonctions inconnues  $x, y, p, q$ .

C'est un système canonique, dont la fonction caractéristique est

$$(4) \quad F = \frac{1}{2} \{ (p + y)^2 + (q - x)^2 \} - \left\{ \frac{v}{r} + \frac{1}{2} r^2 + \mu V \right\},$$

et les variables conjuguées  $x, p; y, q$ .

On constate en effet immédiatement que les équations (2) et (3) sont bien identiques aux suivantes:

$$(I) \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{\partial F}{\partial p}, & \frac{dy}{dt} = \frac{\partial F}{\partial q}; \\ \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial x}, & \frac{dq}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial y}. \end{cases}$$

Il convient de remarquer:

1) que les auxiliaires  $p$  et  $q$ , définies par (2), ne sont que les composantes de la vitesse absolue du mobile (plus précisément de la vitesse de  $P$  par rapport à un système de direction invariable ayant l'origine en  $S$ );

2) que les équations (I) admettent l'intégrale (dite de JACOBI)

$$F = -C.$$

En désignant par  $v$  la grandeur de la vitesse relative (aux composantes  $x', y'$ ), la dite intégrale s'écrit, d'après (4) et (2),

$$(5) \quad \frac{1}{2} v^2 - \left\{ \frac{v}{r} + \frac{1}{2} r^2 + \mu V \right\} = -C.$$

## 2. - Autre forme canonique. Régularisation au point $S$ .

Une transformation du système (I), qui donne lieu à des conséquences remarquables, s'obtient en posant

$$(6) \quad x + iy = (\xi + i\eta)^2,$$

$$(7) \quad p - iq = \frac{\tilde{\omega} - i\chi}{2(\xi + i\eta)} \quad (i = \sqrt{-1}),$$

où il est sous-entendu qu'on doit séparément évaluer dans les deux membres les coefficients de  $i$  et les termes qui en sont indépendants.

Les deux séries conjuguées  $x, y; p, q$  sont de la sorte liées aux deux nouvelles séries  $\xi, \eta; \tilde{\omega}, \chi$  par une transformation de contact. Il suit en effet de (6)

$$dx + i dy = 2(\xi + i\xi)(d\xi + i d\eta),$$

d'où, en multipliant membre à membre avec l'équation (7),

$$(p - iq)(dx + i dy) = (\tilde{\omega} - i\chi)(d\xi + i d\eta),$$

ce qui donne en particulier

$$p dx + q dy = \tilde{\omega} d\xi + \chi d\eta.$$

En posant

$$(8) \quad \varrho^2 = \xi^2 + \eta^2$$

et en tenant compte que  $r$  n'est autre que  $|\sqrt{x^2 + y^2}|$ , on obtient aisément de (6) et (7)

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{l} r = \varrho^2, \\ p^2 + q^2 = \frac{\tilde{\omega}^2 + \chi^2}{4\varrho^2}, \\ xp + yq = \frac{1}{2}(\xi\tilde{\omega} + \eta\chi), \\ xp - yq = \frac{1}{2}(\eta\tilde{\omega} - \xi\chi). \end{array} \right.$$

Appliquons maintenant le changement de variables (6) et (7) au système différentiel (I).

D'après l'identité

$$p dx + q dy = \tilde{\omega} d\xi + \chi d\eta,$$

le système transformé en  $\xi, \eta, \omega, \chi$  sera encore canonique avec la même fonction caractéristique  $F$ , qu'on doit seulement exprimer par les nouvelles variables.

Nous aurons donc

$$(I') \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d\xi}{dt} = \frac{\partial F}{\partial \tilde{\omega}}, \quad \frac{d\eta}{dt} = \frac{\partial F}{\partial \chi}; \\ \frac{d\tilde{\omega}}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial \xi}, \quad \frac{d\chi}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial \eta}. \end{array} \right.$$

Quant à  $F$ , les (4) et (9) donnent après coup

$$(4') \quad F = \frac{1}{8\rho^2} \{(\tilde{\omega} + 2\rho^2\eta)^2 + (\chi - 2\rho^2\xi)^2\} - \left\{ \frac{\nu}{\rho^2} + \frac{1}{2}\rho^4 + \mu V \right\},$$

$V=1/\Delta - x$  étant une fonction régulière tant que  $\overline{PS} < 1$ , c'est-à-dire, d'après (6), tant que  $\xi^2 + \eta^2 < 1$ . Pour notre but il suffit d'ailleurs de retenir que c'est une fonction holomorphe pour  $|\xi|$ ,  $|\eta|$  assez petits.

Il ne me paraît pas sans intérêt de faire remarquer (tout en n'ayant pas à m'en servir dans ce qui va suivre) que le système (I') peut être régularisé au point  $S$ .

Voici de quelle façon.

Introduisons une variable auxiliaire  $\tau$  d'après la position

$$d\tau = \frac{dt}{\rho^2}.$$

Tant que le mouvement se poursuit régulièrement  $\rho^2 = r$  n'est pas nul (ni infini). Il y a donc correspondance biunivoque entre  $t$  et  $\tau$ , et on peut bien considérer cette dernière, au lieu de  $t$ , comme variable indépendante. Faisons ce changement dans les équations différentielles (I'). On n'a qu'à y remplacer  $dt$  per  $\rho^2 d\tau$ , ce qui donne:

$$\begin{aligned} \frac{d\xi}{d\tau} &= \rho^2 \frac{\partial F}{\partial \tilde{\omega}}, & \frac{d\eta}{d\tau} &= \rho^2 \frac{\partial F}{\partial \chi}; \\ \frac{d\tilde{\omega}}{d\tau} &= -\rho^2 \frac{\partial F}{\partial \xi}, & \frac{d\chi}{d\tau} &= -\rho^2 \frac{\partial F}{\partial \eta}. \end{aligned}$$

Comme  $\rho^2 = \xi^2 + \eta^2$ , et  $F$  a, pour toute solution de (I'), une valeur constante  $-C$ , on peut écrire:

$$\rho^2 \frac{\partial F}{\partial \xi} = \frac{\partial(\rho^2 F)}{\partial \xi} - 2\xi F = \frac{\partial(\rho^2 F)}{\partial \xi} + 2C\xi = \frac{\partial}{\partial \xi}[\rho^2(F + C)].$$

De même

$$\rho^2 \frac{\partial F}{\partial \eta} = \frac{\partial}{\partial \eta}[\rho^2(F + C)].$$

Il suffit donc de poser

$$H = \rho^2(F + C) = \frac{1}{8} \{(\tilde{\omega} + 2\rho^2\eta)^2 + (\chi - 2\rho^2\xi)^2\} - \left\{ \nu - C\rho^2 + \frac{1}{2}\rho^4 + \mu\rho^2 V \right\}$$

pour pouvoir présenter le système précédent sous la forme

$$(I'') \quad \begin{cases} \frac{d\xi}{d\tau} = \frac{\partial H}{\partial \tilde{\omega}}, & \frac{d\eta}{d\tau} = \frac{\partial H}{\partial \chi}; \\ \frac{d\tilde{\omega}}{d\tau} = -\frac{\partial H}{\partial \xi}, & \frac{d\chi}{d\tau} = -\frac{\partial H}{\partial \eta}, \end{cases}$$

qui est encore canonique et parfaitement régulier au point  $S$ .

Toute solution de (I') [ou de (I)] donne lieu à une solution de (I''), pour laquelle  $H = 0$ , et réciproquement (la constante  $C$  ayant même valeur dans les deux cas).

### 3. - Equation de Hamilton-Jacobi. Dédution d'une intégrale complète $W$ .

L'équation de HAMILTON-JACCOBI, relative au système (I'), s'obtient de suite en égalant la fonction caractéristique (4') à une constante et en y entendant

$$\tilde{\omega} = \frac{\partial W}{\partial \xi}, \quad \chi = \frac{\partial W}{\partial \eta}.$$

Je désignerai la constante par  $-C$ , et je pourrai écrire, en chassant le dénominateur  $\varrho^2$ ,

$$(10) \quad \frac{1}{8} \left\{ \left( \frac{\partial W}{\partial \xi} + 2\varrho^2\eta \right)^2 + \left( \frac{\partial W}{\partial \eta} - 2\varrho^2\xi \right)^2 \right\} = \nu - C\varrho^2 + \frac{1}{2}\varrho^6 + \mu\varrho^2V.$$

L'équation analogue pour le système complètement régularisé (I'') serait

$$H = \text{const.},$$

ce qui revient encore à (10) lorsqu'on donne à la constante du second membre la valeur zéro.

Ceci remarqué en passant, faisons subir aux variables indépendantes  $\xi, \eta$  une substitution orthogonale

$$\xi + i\eta = e^{i\alpha}(\xi_1 + i\eta_1) \quad (\alpha \text{ constante réelle}).$$

Les binômes

$$\begin{aligned} & \xi^2 + \eta^2, \\ & \left( \frac{\partial W}{\partial \xi} \right)^2 + \left( \frac{\partial W}{\partial \eta} \right)^2, \\ & \eta \frac{\partial W}{\partial \xi} - \xi \frac{\partial W}{\partial \eta} \end{aligned}$$

sont des invariants et on peut écrire de suite comme transformée de l'équation précédente

$$(10') \quad \frac{1}{8} \left\{ \left( \frac{\partial W}{\partial \xi_1} + 2\varrho^2 \eta_1 \right)^2 + \left( \frac{\partial W}{\partial \eta_1} - 2\varrho^2 \xi_1 \right)^2 \right\} = \nu - C\varrho^2 + \frac{1}{2} \varrho^6 + \mu\varrho^2 V_1,$$

où  $V_1$  est ce que devient  $V$  en y remplaçant  $\xi, \eta$  par  $\xi_1 \cos \alpha - \eta_1 \sin \alpha, \xi_1 \sin \alpha + \eta_1 \cos \alpha$ .  $V_1$  est donc une fonction de  $\xi_1, \eta_1, \alpha$ , périodique par rapport à  $\alpha$  et régulière tant que  $|\xi_1|, |\eta_1|$  demeurent assez petits.

L'équation (10'), quadratique par rapport à  $\partial W / \partial \xi_1$ , a deux racines, se réduisant respectivement à  $\pm \sqrt{8\nu}$  pour la valeur zéro des trois autres arguments  $\xi_1, \eta_1, \partial W / \partial \eta_1$ .

Le théorème général d'existence relatif aux équations aux dérivées partielles du premier ordre, nous permet ainsi d'affirmer qu'il existe deux intégrales de (10'), holomorphes au voisinage de  $\xi_1 = \eta_1 = 0$  et se réduisant à zéro pour  $\xi_1 = 0$ . Leurs développements en série de puissances de  $\xi_1, \eta_1$  peuvent être calculés de proche en proche, en partant de l'une ou de l'autre des deux expressions de  $\partial W / \partial \xi_1$  fournies par (10').

Fixons par exemple celle, pour qui le radical  $\sqrt{8\nu}$  a sa valeur arithmétique.

L'intégrale correspondante a nécessairement la forme

$$W = \sqrt{8\nu} \xi_1 (1 + \mathfrak{P}_1),$$

où  $\mathfrak{P}_1$  est une série de puissances de  $\xi_1, \eta_1$ , qui s'annule pour  $\xi_1 = \eta_1 = 0$ .

Comme les coefficients de l'équation (10') sont des fonctions périodiques du paramètre  $\alpha$ , il en sera de même des coefficients de  $W$  et par suite de  $W$  elle-même.

Le champ de convergence de  $\mathfrak{P}_1$ , autour du couple  $\xi_1 = \eta_1 = 0$ , peut dépendre en particulier de la constante  $C$  et du paramètre  $\alpha$ . Mais  $\alpha$  ne dérange pas. On est assuré en effet par les remarques, qui précèdent, que, une fois fixée la valeur de  $C$ , on peut lui faire correspondre un domaine de l'espace complexe  $\xi_1, \eta_1$ , autour du couple  $\xi_1 = \eta_1 = 0$ , où la fonction  $W$  reste régulière quelle que soit la valeur (réelle) de  $\alpha$ .

Abandonnons désormais les variables auxiliaires  $\xi_1, \eta_1$ , en reprenant nos variables  $\xi, \eta$ .

La fonction  $W$ , qu'on vient de définir, prend l'aspect

$$(11) \quad W = \sqrt{8\nu} (\xi \cos \alpha + \eta \sin \alpha) \{1 + \mathfrak{P}(\xi, \eta, \alpha)\},$$

où  $\mathfrak{P}$  est une fonction périodique de  $\alpha$ , qui s'annule pour  $\xi = \eta = 0$  et reste régulière dans un certain domaine des  $\xi, \eta$ , qu'on peut supposer indépendant de  $\alpha$  (mais non de  $C$ ).

4. - Sur une équation implicite dépendante de  $W$ .

On tire de (11)

$$\frac{\partial W}{\partial \xi} = \sqrt{8\nu} \cos \alpha + \dots, \quad \frac{\partial W}{\partial \eta} = \sqrt{8\nu} \sin \alpha + \dots,$$

$$\frac{\partial W}{\partial \xi} + i \frac{\partial W}{\partial \eta} = \sqrt{8\nu} e^{i\alpha} + \dots,$$

les termes non écrits contenant  $\xi$  ou  $\eta$  en facteur.

Introduisons, pour abrégier l'écriture, l'expression (5) de la vitesse relative  $v$ , c'est-à-dire, en y remplaçant  $r$  par  $\varrho^2$ ,

$$(5') \quad \varrho v = |\sqrt{2\nu - 2C\varrho^2 + \varrho^6 + 2\mu\varrho^2 V}|,$$

et posons

$$\frac{\frac{\partial W}{\partial \xi} + i \frac{\partial W}{\partial \eta} - 2i\varrho^2(\xi + i\eta)}{2\varrho v} = e^{i\alpha}(1 + \Omega).$$

La fonction  $\Omega(\xi, \eta, \alpha)$  jouira — on le constate de suite — des mêmes propriétés que  $\mathfrak{F}$ , sauf bien entendu que ce n'est plus une fonction réelle.

Ceci posé, envisageons l'équation

$$(12) \quad \frac{\frac{\partial W}{\partial \xi} + i \frac{\partial W}{\partial \eta} - 2i\varrho^2(\xi + i\eta)}{2\varrho v} = k,$$

en y entendant par  $k$  un nombre de module égal à l'unité, et en y considérant:  $\xi, \eta$  comme des paramètres ayant des valeurs données  $\xi_0, \eta_0$ ;  $\alpha$  comme inconnue.

Le premier membre, c'est-à-dire  $e^{i\alpha}(1 + \Omega)$ , est une fonction périodique de  $\alpha$ , régulière pour  $|\xi_0|, |\eta_0|$  assez petits.

On peut dire également, en remplaçant  $\alpha$  par

$$\gamma = e^{i\alpha},$$

que le premier membre de l'équation (12) est une fonction uniforme de  $\gamma$ ,

$$\psi(\gamma, \xi_0, \eta_0),$$

holomorphe pour tous les points du cercle  $|\gamma| = 1$ , tant que  $|\xi_0|$ ,  $|\eta_0|$  sont assez petits.

A cause de (10) et de (5'), on a l'identité

$$\frac{\frac{\partial W}{\partial \xi} + i \frac{\partial W}{\partial \eta} - 2i\rho^2(\xi + i\eta)}{2\rho v} = \frac{2\rho v}{\frac{\partial W}{\partial \xi} - i \frac{\partial W}{\partial \eta} + 2i\rho^2(\xi - i\eta)}.$$

L'équation (12) entraîne donc la suivante:

$$(12') \quad \frac{\frac{\partial W}{\partial \xi} - i \frac{\partial W}{\partial \eta} + 2i\rho^2(\xi - i\eta)}{2\rho v} = \frac{1}{k},$$

ce qu'on peut aussi énoncer en disant que l'équation (12) se transforme en elle même lorsqu'on y change  $i$  en  $-i$ , et  $k$  en  $1/k$  (sans toucher aux autres quantités).

Mettons en évidence comme inconnue  $\gamma$ , au lieu de  $\alpha$ , et appelons  $\bar{\psi}$  ce que devient la fonction  $\psi$  lorsqu'on change  $i$  en  $-i$  en laissant toute lettre inaltérée.

Les équations

$$(12\text{-bis}) \quad \psi(\gamma, \xi_0, \eta_0) = k,$$

$$(12'\text{-bis}) \quad \bar{\psi}\left(\frac{1}{\gamma}, \xi_0, \eta_0\right) = \frac{1}{k}$$

ne seront pas distinctes, d'après ce qu'on vient de dire: toute valeur de  $\gamma$  satisfaisant à la première vérifie par là même aussi la seconde.

Attribuons en particulier la valeur zéro aux paramètres  $\xi_0$ ,  $\eta_0$ . Il reste, au premier membre de (12),  $e^{i\alpha}$ . L'équation (12 bis) se réduit donc à

$$\gamma = k.$$

Or  $\partial\psi/\partial\gamma$  ne s'annule pas pour  $\xi_0 = \eta_0 = 0$  (c'est l'unité).

Il existe partant un domaine autour du point  $\xi = \eta = 0$ , dans lequel l'équation (12 bis) définit univoquement une racine  $\gamma_1$ . Je dis qu'elle a l'unité pour module.

Je remarque pour cela qu'elle satisfait aussi à l'équation (12' bis), et par suite même à celle qu'on en déduit en remplaçant toute quantité par sa conjuguée.

Comme  $\xi_0$ ,  $\eta_0$  et les autres constantes  $C$ ,  $\mu$ ,  $\nu$  sont essentiellement



réelles, la dite opération consiste dans la substitution de  $\psi$  à  $\bar{\psi}$ ,  $1/\bar{\gamma}_1$  et  $1/\bar{k}$  à  $1/\gamma_1$  et  $1/k$ .

Le module de  $k$  étant l'unité,  $1/\bar{k} = k$ , et l'on aura en définitive, à côté de

$$\psi(\gamma_1, \xi_0, \eta_0) = k,$$

aussi

$$\psi\left(\frac{1}{\bar{\gamma}_1}, \xi_0, \eta_0\right) = k.$$

Il en résulte que  $1/\bar{\gamma}_1$  est racine de (12 bis) en même temps que  $\gamma_1$ .

Mais dans un certain domaine des  $\xi, \eta$ , il n'y a qu'une seule racine:  $\gamma_1$  et  $1/\bar{\gamma}_1$  sont donc identiques, ce qui démontre bien que la racine de l'équation (12 bis) reste unimodulaire dans ce domaine.

Je le désignerai par  $D$ , en faisant ici encore remarquer qu'on peut le considérer comme fixe dès qu'on ne fait pas varier  $C$ . Tant que  $\xi, \eta$  appartiennent à ce domaine on peut satisfaire à l'équation (12) par un angle réel  $\alpha = (1/i) \log \gamma_1$ , et un seulement, puisqu'on ne doit naturellement considérer comme distincts ceux qui en diffèrent par des multiples entiers de  $2\pi$ .

### 5. - Solutions particulières. Choix des paramètres.

Revenons aux équations du mouvement en coordonnées cartésiennes  $x, y$ .

Une solution particulière quelconque reste déterminée d'une façon unique pourvu qu'on se donne l'état de mouvement (position et vitesse) correspondant à un instant quelconque  $t_0$  (\*).

Les quatre éléments déterminatifs des états de mouvement, appartenant à une même solution, sont toutefois liés à tout instant par la relation intégrale  $F = -C$ , et on pourra, pour fixer une solution particulière, se donner la valeur de la constante  $C$ , et trois des quatre quantités définissant la position  $P_0$  et la vitesse à l'instant  $t_0$ .

En premier lieu, par exemple, les valeurs  $\xi_0, \eta_0$  de  $\xi, \eta$  se rapportant à  $P_0$ . La connaissance de  $P_0$  et de  $C$  définit sans ambiguïté la valeur absolue  $v$  de la vitesse moyennant (5').

(\*) Cela suppose naturellement que tout soit régulier et par suite que la position du mobile dans l'état envisagé ne soit ni  $S$  ni  $J$ .

Comme quatrième élément déterminatif il y a lieu de prendre la direction de la vitesse (\*).

$\varphi$  désignant l'angle, que la dite direction fait avec la direction positive de l'axe des abscisses,

$$(13) \quad k = e^{i\varphi} \frac{\xi_0 - i\eta_0}{\rho_0} \quad (\rho_0 = |\sqrt{\xi_0^2 + \eta_0^2}|)$$

sera notre quatrième paramètre.

Pour fixer une trajectoire il suffit naturellement de se donner  $C$ ,  $\xi_0$ ,  $\eta_0$ ,  $k$  en se passant de l'instant particulier  $t_0$  auquel correspondent ces quatre valeurs. Mais le phénomène est réversible, ce qui se déduit analytiquement de la circonstance que les équations (I) ne changent pas lorsqu'on y change  $t$  en  $-t$  en renversant en même temps les signes de  $x'$ ,  $y'$ .

Renverser le sens de la vitesse équivaut à changer  $\varphi$  dans  $\varphi + \pi$  et par conséquent (la position restant la même)  $k$  dans  $-k$ .

Il s'en suit qu'aux deux états de mouvement

$$\begin{aligned} C, \quad \xi_0, \quad \eta_0, \quad k; \\ C, \quad \xi_0, \quad \eta_0, \quad -k \end{aligned}$$

correspondent les deux sens opposés d'une même trajectoire.

Il convient encore d'indiquer quelle est l'expression de  $k$  en fonction des variables conjuguées  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\tilde{\omega}$ ,  $\chi$  (je supprime l'indice 0 pour abrégier l'écriture).

Partons pour cela de l'identité

$$x' + iy' = ve^{i\varphi}.$$

On en tire

$$k = \frac{x' + iy'}{v} \frac{\xi - i\eta}{\rho}.$$

Transformons le second membre en profitant des (2), (6), (7), et il viendra

$$(14) \quad k = \frac{\tilde{\omega} + i\chi - 2i\rho^2(\xi + i\eta)}{2\rho v}.$$

(\*) Je n'aurais pas à considérer le cas  $v = 0$ , et je puis partant parler de direction.

### 6. - Intégrales canonique. Leur validité effective au voisinage de $S$ .

Soit  $\beta$  une constante et envisageons les équations classiques de la méthode d'intégration de JACOBI

$$(II) \quad \frac{\partial W}{\partial \alpha} = \beta,$$

$$(III) \quad \frac{\partial W}{\partial \xi} = \tilde{\omega}, \quad \frac{\partial W}{\partial \eta} = \chi,$$

$W$  étant l'intégrale complète, définie au § 3.

Supposons qu'elles soient satisfaites par des valeurs particulières  $\xi_0, \eta_0, \tilde{\omega}_0, \chi_0$  de  $\xi, \eta, \tilde{\omega}, \chi$ .

Il est bien connu que les intégrales  $\xi, \eta, \tilde{\omega}, \chi$  de (I'), définies par les valeurs initiales  $\xi_0, \eta_0, \tilde{\omega}_0, \chi_0$  continuent à vérifier ces équations tant que le mouvement reste régulier.

Ceci rappelé, désignons par  $A$  un arc quelconque de trajectoire tout intérieur au domaine  $D$ .

On a le théorème suivant:

Quel que soit  $A$ , on peut toujours fixer les constantes  $\alpha$  et  $\beta$  de façon que les équations (II), (III) soient remplies en tout point de  $A$ .

D'après ce qui précède, il nous suffit de le constater pour un point seulement, soit  $P_0(\xi_0, \eta_0)$ , qu'on supposera, bien entendu, distinct de  $S$ .

La vitesse est sans doute  $> 0$  (\*), et on peut compléter la définition de la trajectoire en associant à  $C, \xi_0, \eta_0$  le quatrième paramètre  $k$  du paragraphe précédent.

Les valeurs de  $\tilde{\omega}, \chi$ , qui correspondent à la quaterne  $C, \xi_0, \eta_0, k$  sont les solutions des deux équations  $F = -C$  et (14),  $v$  étant défini par (5') en fonction de  $C, \xi_0, \eta_0$ .

La première équation  $F = -C$  peut s'écrire, à cause de (4') et de (5'),

$$\frac{1}{4} \{(\tilde{\omega} + 2\rho^2\eta)^2 + (\chi - 2\rho^2\xi)^2\} = \rho^2 v^2,$$

qui, combinée avec (14), donne lieu au système linéaire:

$$(14) \quad \frac{\tilde{\omega} + i\chi - 2i\rho^2(\xi + i\eta)}{2\rho v} = k,$$

$$(15) \quad \frac{\tilde{\omega} - i\chi + 2i\rho^2(\xi - i\eta)}{2\rho v} = \frac{1}{\bar{k}}.$$

(\*) En effet, parmi les conditions, qui doivent être satisfaites dans le domaine  $D$ , il y a la suivante:  $\rho v$  c'est-à-dire  $|\sqrt{2v - 2C\rho^2 + \rho^6 + 2\rho^2 V}|$  reste uniforme;  $v$  ne peut donc pas s'annuler à l'intérieur de  $D$ .

Considérons d'autre part la fonction  $W$  et supposons d'attribuer à  $\alpha$  la valeur  $\alpha_1$ , racine de l'équation (12), où l'on suppose bien entendu que  $C, \xi_0, \eta_0, k$  soient ceux qui appartiennent au point envisagé de notre  $A$ .

Les dérivées  $\partial W/\partial \xi, \partial W/\partial \eta$  vérifient de la sorte (pour  $\xi = \xi_0, \eta = \eta_0$ ) l'équation (12) et par là même (comme on l'a remarqué au § 4) aussi l'équation (12'). La comparaison de ces deux équations (12), (12') avec le système (14), (15) donne immédiatement (pour l'état de mouvement  $C, \xi_0, \eta_0, k$ )

$$\frac{\partial W}{\partial \xi} = \tilde{\omega}, \quad \frac{\partial W}{\partial \eta} = \chi.$$

Les équations (III) sont donc remplies au point  $P_0$  de  $A$ , dès qu'on donne à  $\alpha$  la valeur  $\alpha_1$ . Il en est de même de (II), pourvu qu'on prend  $\beta$  égal à la valeur du premier membre. *c. q. f. d.*

*Remarque.* - Rien n'empêche de suivre une trajectoire aussi hors de  $D$ , tant que le mouvement reste régulier. On peut encore affirmer que les équations (II), (III) resteront vérifiées, en entendant par  $W$  la continuation analytique, obtenue en suivant la trajectoire, de la détermination valable dans  $D$  (et uniforme dans ce domaine). Mais cela ne nous aide pas grande chose, puisqu'il nous est inconnu comment se comporte  $W$  hors de  $D$ .

En particulier si une trajectoire rentre dans  $D$  après en être sortie, la continuation de  $W$ , correspondante à la rentrée, soit  $W_1$ , tout en étant toujours une intégrale de (9), peut fort bien différer de la détermination  $\sqrt{8v}(\xi \cos \alpha + \eta \sin \alpha) + \dots$ : celle-ci était en effet caractérisée par une condition initiale, qui n'est pas invariante vis-à-vis d'une continuation analytique.

On peut ajouter que cette circonstance gênante de la non-uniformité de  $W$  n'est pas seulement à craindre, mais se présente en réalité. Voici un exemple bien simple.

Supposons que la masse  $\mu$  du centre  $J$  soit nulle.  $P$  n'est alors soumis qu'à l'attraction de  $S$ , et l'on est reconduit au problème élémentaire du mouvement d'un point  $P$ , attiré suivant la loi de NEWTON par un centre  $S$ , qu'on peut considérer fixe.

Par rapport à des axes fixes le mouvement de  $P$  est képlérien et admet les deux intégrales des forces vives et des aires. Celle de JACOBI n'en est qu'une combinaison linéaire, et,  $h, c, C$  désignant respectivement les constantes des forces vives, des aires et de JACOBI, on trouve

$$C = -h + c.$$

Si  $h$  est négative, la trajectoire (absolue) de  $P$  est une ellipse; son axe  $a$  et son paramètre  $p$  sont exprimés par les formules

$$a = -\frac{1}{h}, \quad p = c^2.$$

Par rapport aux axes mobiles  $x, y$ , qui tournent uniformément, tout se passe comme si (les axes étant fixes) l'ellipse tournait autour du foyer  $S$ , dans le sens opposé, pendant que  $P$  la parcourt d'un mouvement képlérien.

Laissons de côté les valeurs particulières de  $h$ , pour qui le moyen mouvement serait commensurable avec la vitesse de la rotation (fictive) de l'ellipse, c'est-à-dire rationnel, puisque cette vitesse a la valeur  $-1$ .

Un petit raisonnement, bien souvent employé dans des cas analogues, permet alors de conclure que la trajectoire relative de  $P$  remplit entièrement (\*) la couronne circulaire définie par les distances aphélie et périhélie de l'orbite absolue.

Il suffit donc que le domaine  $D$  (correspondant à une valeur donnée quelconque de la constante  $C$ ) renferme à son intérieur quelque point d'une de ces trajectoires (provenant des orbites elliptiques) pour qu'il doive nécessairement contenir une infinité d'arcs  $A$  appartenant tous à cette même trajectoire.

Pour constater qu'il en est bien ainsi, donnons à  $C$  une valeur positive, d'ailleurs quelconque, et rappelons l'identité  $C = -h + c$ .

On y satisfait en prenant par exemple  $c$  très petit, et par conséquent  $-h$  très voisin à  $C$ , avec la précaution que  $(-2h)^{1/2}$  ne soit pas rationnel.

L'orbite absolue est alors une ellipse de moyen mouvement  $(-2h)^{1/2}$  irrationnel et de paramètre  $p = c^2$  très petit.

Rien n'empêche évidemment de supposer  $c$  assez petit pour que la région périhélie tombe bien à l'intérieur de  $D$ .

## 7. - Conséquences de la représentation holomorphe des trajectoires à l'intérieur de $D$ . Conditions de choc et de sureté mécanique.

### Portée relative de ces conditions.

**THÉORÈME.** Si un arc  $A$  se rapproche indéfiniment de  $S$ , il y passe. D'après le paragraphe précédent l'équation (II) sera vérifiée en tout point de  $A$  pour des valeurs convenables des constantes  $\alpha$  et  $\beta$ . Par hypo-

(\*) Plus précisément la courbe est condensée dans la couronne, c'est-à-dire qu'il y a des points de la courbe si près que l'on veut de tout point fixé d'avance à l'intérieur (ou sur le contour) de la couronne.

thèse l'arc possède des points si près de  $S$  que l'on veut. Dans ces points la fonction

$$\frac{\partial W}{\partial \alpha} = \sqrt{8\nu}(-\xi \sin \alpha + \eta \cos \alpha) + \dots$$

prend des valeurs, qu'on peut rendre plus petites que toute quantité assignée d'avance. Mais  $\partial W/\partial \alpha$  a, tout le long de  $A$ , la valeur constante  $\beta$ . On doit en conclure  $\beta = 0$ , ce qui démontre bien que  $A$  passe par  $S$ .

Si, pour un  $A$  quelconque,  $\beta \geq 0$ , la courbe ne peut pas se rapprocher indéfiniment de  $S$ . C'est une conséquence évidente du résultat obtenu tout à l'heure. Mais il y a plus.

Le minimum  $\delta$  des distances des points de  $A$  à  $S$  est une fonction de  $C$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$ , périodique par rapport à  $\alpha$  et s'annulant avec  $\beta$ . On en conclut, d'après le paragraphe précédent, que ce  $\delta$  est une fonction uniforme des circonstances initiales. Soient en effet  $C$ ,  $\xi_0$ ,  $\eta_0$ ,  $k$  les quatre paramètres définissant l'état initial  $C_0$  (le point  $\xi_0$ ,  $\eta_0$  étant toujours supposé à l'intérieur de  $D$ ).

Considérons d'autre part la fonction  $\delta(C, \alpha, \beta)$ . On doit y remplacer  $\alpha$  par la racine  $\alpha_1$  de l'équation (12) et  $\beta$  par sa valeur

$$\left(\frac{\partial W}{\partial \alpha}\right)_{\xi=\xi_0, \eta=\eta_0, \alpha=\alpha_1}$$

$\delta$  devient ainsi une fonction uniforme de  $C$ ,  $\xi_0$ ,  $\eta_0$ ,  $k$ ; mais on peut encore substituer à  $C$  et à  $k$  leurs valeurs  $F$  et (14), et on aura de la sorte une fonction uniforme des paramètres canoniques  $\xi_0$ ,  $\eta_0$ ,  $\tilde{\omega}_0$ ,  $\chi_0$  de l'état  $E_0$ .

Occupons-nous maintenant des courbes

$$\frac{\partial W}{\partial \alpha} = 0,$$

qui passent simplement par le point  $S$ .

Aux conditions, imposées à  $D$  au § 4, imaginons ajoutée, comme il est évidemment permis, encore la suivante:

$D$  doit être assez petit pour que la courbe

$$\frac{\partial W}{\partial \alpha} = 0$$

n'ait à l'intérieur de  $D$  que l'unique branche régulière passant par  $S$ ; et cela quelle que soit la valeur (réelle) de  $\alpha$ .

On est alors assuré que la longueur de l'arc de la dite courbe, compris entre  $P_0$  et  $S$ , est finie.

D'ailleurs, dans le domaine  $D$ ,  $qv$  est toujours  $> 0$  et diffère autant moins de  $|\sqrt{2v}|$  qu'il s'agit de points plus près de  $S$ .

Le mouvement ne peut donc pas changer de sens sur l'arc  $\widehat{P_0S}$ ; de plus la vitesse croît indéfiniment lorsqu'on s'approche de  $S$ . Le temps nécessaire au mobile pour parcourir cet arc  $\widehat{P_0S}$  reste partant fini et tend même vers zéro plus rapidement que l'arc lui même.

On pourrait préciser cette remarque en ayant recours à la dernière intégrale canonique

$$\frac{\partial W}{\partial C} = t + \text{const.};$$

mais nous n'avons pas à discuter les lois du mouvement.

Il nous suffit de rappeler que sur toute trajectoire le mouvement est possible dans les deux sens, pour pouvoir conclure de ce qui précède:

Chacun des arcs  $\partial W/\partial \alpha = 0$  est à la fois trajectoire de collision et trajectoire d'éjection;  $\beta = 0$  (ou, si l'on veut,  $\delta = 0$ ) est donc la condition caractéristique d'un choc  $P, S$ .

Ainsi qu'il a été remarqué plus généralement à propos de la fonction  $\delta(C, \alpha, \beta)$ , on peut exprimer  $\beta$  en fonction uniforme des circonstances initiales, c'est-à-dire de  $C, \xi_0, \eta_0, k$ , ou bien encore de la quaterne canonique  $\xi_0, \eta_0, \tilde{\omega}_0, \chi_0$ . Il serait aisé de calculer autant de termes que l'on veut du développement (convergent à l'intérieur de  $D$ ) de  $\beta(C, \xi_0, \eta_0, k)$  en série de puissances de  $\xi_0, \eta_0$ .

J'omets le calcul en renvoyant à mon mémoire « Traiettorie singolari etc. » cité dans l'introduction, où j'ai explicité la condition du choc sous une forme un peu différente.

Les données étant encore  $C, \xi_0, \eta_0, k$ , on peut se proposer de reconnaître si le choc, caractérisé par la condition  $\beta = 0$ , est passé ou futur.

Voyons pour cela ce qui se passe au voisinage immédiat du point  $S$ . Toute  $A$  est une courbe régulière ayant en  $S$  une tangente bien déterminée. Si l'on a affaire à un choc passé, le rayon vecteur  $SP$  a du être dirigé, à l'instant de l'éjection, précisément comme la tangente à  $A$  dans le sens du mouvement. On a donc alors à la limite  $\varphi = \vartheta$ , en désignant par  $\vartheta$  l'anomalie du rayon vecteur, et, comme au § 5, par  $\varphi$  l'inclinaison de la vitesse sur la direction positive de l'axe des abscisses.

Si l'on a affaire à un choc futur, la relation limite sera au contraire  $\varphi = \vartheta + \pi$ .

Ceci posé, comme les états, qu'on considère, correspondent à des positions très voisines de  $S$ , il est bien évident que, la relation  $\beta = 0$  étant satisfaite,  $\varphi$  doit différer très peu ou bien de  $\vartheta$ , ou bien de  $\vartheta + \pi$ . Dans le premier cas il s'agit d'une éjection, dans le second d'une collision.

Au point de vue physique l'absence de choc ne suffit pas à garantir la régularité du mouvement: pour qu'il soit légitime de le retenir conforme aux prévisions du calcul, il faut que les corps ne se rapprochent pas au delà d'un certain  $\varepsilon$ .

Lorsque le mobile est à l'intérieur de  $D$  on peut encore décider, par la connaissance de l'état de mouvement à un instant quelconque, s'il en sera ainsi ( $\delta > \varepsilon$ ). Toutefois ni cette condition de sûreté, ni l'autre moins restrictive, qui exclut simplement le choc, embrassent toute la durée du mouvement.

Elles sont bien valables tant que le mobile reste en  $D$ ; mais si le mobile y rentre après en être sorti, elles ne permettent a priori aucune prévision. Cela tient à ce que l'on rentre dans  $D$  avec une détermination inconnue  $W_1$  de  $W$ , pouvant donner lieu à un nouveau arc  $\partial W_1/\partial\alpha = \beta$ .

Quoi qu'il en soit, il reste toujours un résultat positif se rapportant à la région  $D$ : Si  $\delta > \varepsilon$ , il n'y a rien à craindre pour le moment du voisinage de  $S$ . Seuls des rapprochements nouveaux (c'est-à-dire précédés par des sorties de  $D$ ) pourraient devenir dangereux.

### 8. - Remarque.

Tout arc de trajectoire intérieur à  $D$  satisfait effectivement aux équations

$$\frac{\partial W}{\partial \alpha} = \beta$$

et (III).

Comme il a déjà été substantiellement remarqué, en éliminant  $\alpha$  et  $C$  de  $\partial W/\partial\alpha$  on obtient une fonction uniforme  $f$  de  $\xi, \eta, \tilde{\omega}, \chi$ .

On a donc pour tout arc  $A$

$$f(\xi, \eta, \tilde{\omega}, \chi) = \beta.$$

La fonction  $f$  est distincte de  $F$ , puisque, en se rapportant par exemple aux variables  $C, \xi, \eta, k$ , on a  $F = -C$ , tandis que

$$\begin{aligned} f &= \sqrt{8\nu}(-\xi \sin \alpha + \eta \cos \alpha) + \dots \\ &= \sqrt{8\nu} \left( -\xi \frac{k - \frac{1}{k}}{2i} + \eta \frac{k + \frac{1}{k}}{2} \right) + \dots \end{aligned}$$

n'est pas une fonction de la seule  $C$ .



Voilà une intégrale autre que  $F = \text{const.}$  uniforme pour quelque système de valeurs de  $\xi, \eta, \tilde{\omega}, \chi$  et par suite aussi des variables cartésiennes  $x, y, x', y'$ , qui en sont des fonctions algébriques.

A première vue la conclusion est choquante, puisqu'elle paraît en contradiction avec le théorème bien connu de M. POINCARÉ, qui exclut l'existence d'intégrales uniformes en dehors de  $F = \text{const.}$

Il n'en est rien toutefois, et on peut s'en convaincre aisément en ayant égard aux limites de validité des deux résultats.

Celui de M. POINCARÉ établit la non-existence d'intégrales uniformes par rapport aux variables képlériennes, ce qui implique l'uniformité au voisinage de *tous* les états de mouvements  $x, y, x', y'$ , qui appartiennent à une même orbite osculatrice (elliptique).

On ne peut pas exclure, d'après cette proposition, l'existence d'intégrales uniformes, pour quelque portion de l'orbite seulement, ni non plus au voisinage des états de mouvement, qui ne seraient elliptiques du tout.

Notre intégrale  $f = \beta$ , qui est uniforme dans le domaine  $D$ , se trouve précisément dans l'une ou dans l'autre de ces conditions.

*Padoue, septembre 1904.*



SULLA RICERCA DI SOLUZIONI PARTICOLARI  
DEI SISTEMI DIFFERENZIALI

« Rend. Acc. Lincei », s. 5<sup>a</sup>, vol. XIV (1<sup>o</sup> sem. 1905),  
pp. 203-209 (\*).

Alcuni anni or sono ebbi ad indicare <sup>(1)</sup> una regola costruttiva di soluzioni particolari dei sistemi canonici, in base alla conoscenza di loro integrali o relazioni invarianti.

Mi propongo ora di far vedere, generalizzando e semplificando insieme, che risultati analoghi sussistono per i sistemi differenziali di forma qualunque.

All'uopo mi basterà precisare analiticamente quest'unica osservazione, quasi immediata dal punto di vista geometrico:

Nello spazio rappresentativo delle curve integrali di un generico sistema differenziale si prenda a considerare una qualunque varietà  $V$  invariante, cioè formata da curve integrali.

La sottovarietà  $W$ , luogo dei punti doppi di  $V$ , risulta — ecco l'osservazione — invariante essa pure.

Nota  $V$ , si ha senz'altro  $W$ , e la conoscenza di una tale varietà più ristretta facilita ovviamente la determinazione di quelle soluzioni particolari (curve integrali), che ne sono le generatrici.

Per il caso speciale dei sistemi canonici, si viene così ad aggiungere qualche cosa alla regola ricordata da principio; tra altro se ne abbraccia una estensione, già ottenuta dal prof. BURGATTI <sup>(2)</sup> per via interamente diversa.

1. — Sia un generico sistema differenziale

$$(S) \quad \frac{dx_i}{dt} = X_i(x_1, x_2, \dots, x_n; t) \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

(\*) Presentata dal Socio V. VOLTERRA nella seduta del 19 febbraio 1905.

<sup>(1)</sup> In questi « Rendiconti », ser. 5<sup>a</sup>, vol. X, 6 gennaio 1901 [in questo vol.: II, pp. 87-93].

<sup>(2)</sup> In questi « Rendiconti », ser. 5<sup>a</sup>, vol. XI, 20 aprile 1902.

colle  $X_i$  — quasi è superfluo avvertirlo — funzioni uniformi e regolari dei loro argomenti nel campo, che si considera.

Conveniamo di designare con  $\delta x_i$  degli incrementi infinitesimi delle  $x_i$ , compatibili colle equazioni differenziali (S), atti cioè a far passare da una soluzione delle (S) ad altra soluzione infinitamente vicina.

Questi  $\delta x_i$ , che chiameremo per brevità *spostamenti virtuali*, sono per loro definizione, integrali delle così dette equazioni alle variazioni (\*)

$$(1) \quad \frac{d\delta x_i}{dt} = \delta X_i = \sum_1^n \frac{\partial X_i}{\partial x_j} \delta x_j,$$

in cui naturalmente le  $x$  sono a ritenersi definite dalle (S). Essi godono della proprietà caratteristica di essere invertibili colla operazione  $d/dt$ . Le (1) esprimono infatti che  $d\delta x_i/dt = \delta(dx_i/dt)$ . Ne viene più generalmente, per qualsiasi funzione  $f(x_1, x_2, \dots, x_n; t)$ ,

$$\frac{d}{dt} \delta f = \delta \frac{df}{dt},$$

la derivazione rispetto a  $t$  dovendo essere fatta in base alle (S), (1). Così in particolare  $df/dt$  sta per

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_1^n X_i \frac{\partial f}{\partial x_i}.$$

Ad ogni soluzione  $x_i(t)$  delle (S) fa riscontro un sistema  $\infty^n$  di spostamenti virtuali, potendosi riguardare arbitrari quelli che si riferiscono ad un (particolare, ma del resto qualunque) valore di  $t$ : è ciò che risulta dall'essere le  $\delta x_i$  integrali delle (1).

2. — Ciò premesso, sia

$$(A) \quad H(x_1, x_2, \dots, x_n; t) = 0$$

una relazione invariante di fronte al sistema (S), o addirittura un integrale, immaginando in questo caso la costante inclusa in  $H$ . Si suppone bene inteso che  $H$  sia uniforme e regolare, e la (A) risolvibile univocamente rispetto ad una (almeno) delle  $x$ .

Mi propongo di stabilire il seguente teorema:

a) *Si aggiungano alla (A) le equazioni in termini finiti derivanti dal porre*

$$(B) \quad \delta H = 0$$

(\*) Cfr. POINCARÉ, *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste*, t. I, nn. 53-54.

per tutti gli spostamenti virtuali, cioè le

$$(B_1) \quad \frac{\partial H}{\partial x_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Se le (A), (B<sub>1</sub>) sono compatibili (se cioè — per un valore qualunque di  $t$  — esistono delle  $x$ , atte a renderle soddisfatte), esse costituiscono necessariamente un sistema invariante di fronte ad (S).

*Dimostrazione.* - In primo luogo la ipotesi che (A) sia invariante si traduce in formule mediante una identità del tipo

$$(2) \quad \frac{dH}{dt} = \mu H,$$

con  $\mu$  funzione regolare (\*).

Si ha d'altra parte, pure per identità (rispetto a tutte le lettere  $t$ ,  $x_i$ ,  $\delta x_i$ )

$$\frac{d}{dt} \delta H = \delta \frac{dH}{dt}.$$

Sostituiamovi, al posto di  $\delta H$ , la sua espressione esplicita  $\sum_1^n (\partial H / \partial x_i) \delta x_i$ , al posto di  $dH/dt$ , il valore (2). Otterremo

$$(3) \quad \sum_1^n \frac{d}{dt} \frac{\partial H}{\partial x_i} \cdot \delta x_i = - \sum_1^n \frac{\partial H}{\partial x_i} \frac{d\delta x_i}{dt} + H \delta \mu + \mu \sum_1^n \frac{\partial H}{\partial x_i} \delta x_i.$$

Quando si tien conto delle (A), (B<sub>1</sub>) (\*\*), il secondo membro si annulla e resta

$$\sum_1^n \frac{d}{dt} \frac{\partial H}{\partial x_i} \cdot \delta x_i = 0,$$

(\*) Si tratta infatti d'esprimere che  $dH/dt$  si annulla, se non identicamente, almeno in virtù di  $H=0$ . Ora basta immaginare assunta  $H$  come variabile al posto di una delle  $x$ , e pensare allo sviluppo della  $dH/dt$  in serie di potenze della  $H$ , per concludere che deve mancarvi il termine indipendente da  $H$ , il che equivale appunto al sussistere della (2). Va notato tuttavia che poggiando il ragionamento sulla sostituzione della  $H$  ad una delle  $x$ , rimangono esclusi quei valori, in cui ogni  $\partial H / \partial x_i$  si annulla, valori che a noi particolarmente interessano. Effettivamente non si può senz'altro asserire (come logica conseguenza della supposta invarianza) che la  $\mu$  debba, anche per essi, comportarsi in modo regolare. Ma noi, per semplicità, converremo di limitarci a questo caso.

(\*\*) Tener conto delle (A), (B<sub>1</sub>) significa in sostanza riferirsi a valori delle  $x_i$ , i quali rendano simultaneamente soddisfatte le (A), (B<sub>1</sub>), per un generico valore di  $t$ . Ecco come interviene la condizione di compatibilità, espressa nell'enunciato del teorema.

la quale, dovendo sussistere per tutti gli spostamenti virtuali, si scinde nelle

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial H}{\partial x_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Le derivate dei primi membri delle  $(B_1)$  vanno dunque a zero, in virtù della  $(A)$  e delle  $(B_1)$  stesse. c. d. d.

Importa aggiungere che:

*a')* Se la  $(A)$  è un vero integrale,  $dH/dt$  è identicamente nulla, e le equazioni  $(B_1)$  costituiscono un sistema invariante di per sè sole.

Lo si desume dalla (3), tenendo conto che si ha in questo caso  $\mu = 0$ .

*Osservazione.* - Le equazioni  $(A)$ ,  $(B_1)$  sono in numero di  $n + 1$ , mentre le  $x_i$  sono appena  $n$ . La loro compatibilità appare così come una circostanza puramente eccezionale. Non però nel caso *a')*. Allora basta evidentemente occuparsi delle  $(B_1)$ , il cui numero non supera quello delle  $x_i$ ; la  $(A)$  risulta di necessità soddisfatta per opportuna determinazione della costante arbitraria.

### 3. - Consideriamo più generalmente un sistema

$$(I) \quad H = 0, \quad F_1 = 0, \quad F_2 = 0, \quad \dots, \quad F_m = 0$$

di  $m + 1$  equazioni complessivamente invarianti di fronte ad  $(S)$ ;  $H, F_1, F_2, \dots, F_m$  essendo uniformi, regolari ed indipendenti. Lo sono allora in particolare le  $F$ , sicchè potremo, senza pregiudizio della generalità, immaginarle sostituite ad altrettante  $x$ ; ad  $x_1, x_2, \dots, x_m$  per es.

Il sistema  $(S)$ , nelle variabili

$$F_1, \quad F_2, \quad \dots, \quad F_m, \quad x_{m+1}, \quad \dots, \quad x_n,$$

assumerà l'aspetto

$$(S') \quad \begin{cases} \frac{dF_r}{dt} = \mathcal{E}_r & (r = 1, 2, \dots, m), \\ \frac{dx_j}{dt} = \mathcal{E}_j & (j = m + 1, \dots, n), \end{cases}$$

le  $\mathcal{E}$  comportandosi rispetto alle nuove variabili come le  $X$  rispetto alle primitive.

L'ipotesi che le  $(I)$  costituiscono un sistema invariante implica che  $dH/dt, dF_1/dt, dF_2/dt, \dots, dF_m/dt$  si annullino in virtù delle  $(I)$  stesse,

cioè che sussistano identità della forma

$$(4) \quad \frac{dH}{dt} = MH + \sum_1^m M_r F_r,$$

$$(5) \quad \frac{dF_r}{dt} = N_r H + \sum_1^m N_{rs} F_s \quad (r = 1, 2, \dots, m),$$

colle  $M$  ed  $N$  funzioni regolari (\*).

Ciò posto, designiamo con  $\bar{f}$  ciò che diventa una generica funzione  $f(x_1, x_2, \dots, x_n; t)$  quando la si riduce a mezzo delle

$$F_1 = 0, \quad F_2 = 0, \quad \dots, \quad F_m = 0,$$

quando cioè, se  $f$  si riguarda espressa nelle variabili trasformate, si pongono le prime  $m$  eguali a zero.

La (4) permette di asserire che

$$\bar{H} = 0$$

è una relazione invariante di fronte al sistema ridotto

$$(\bar{S}) \quad \frac{dx_j}{dt} = \bar{E}_j \quad (j = m + 1, \dots, n).$$

Partiamoci infatti dalla espressione di  $dH/dt$ , valutata in base ad (S), o, ciò che è lo stesso, in base ad (S'). Essa è

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} + \sum_1^m \frac{\partial H}{\partial F_r} \frac{dF_r}{dt} + \sum_{m+1}^n \frac{\partial H}{\partial x_j} E_j.$$

Ponendovi  $F_r = 0$  ( $r = 1, 2, \dots, m$ ) e tenendo conto delle (4), (5), si ricava

$$\frac{\partial \bar{H}}{\partial t} + \sum_{m+1}^n \frac{\partial \bar{H}}{\partial x_j} \bar{E}_j = \bar{H} \left\{ \bar{M} - \sum_1^m \frac{\partial \bar{H}}{\partial F_r} \bar{N}_r \right\}.$$

Il primo membro non è che la derivata di  $\bar{H}$  rispetto a  $t$ , calcolata in base alle  $(\bar{S})$ ; nel secondo c'è  $\bar{H}$  a fattore.

L'asserto è così dimostrato.

(\*) Per giustificarlo, non c'è che da riportarsi alla nota (†) estendendo quelle osservazioni in modo ovvio.

Per il teorema a), il sistema costituito da

$$\bar{H} = 0, \quad \delta\bar{H} = 0,$$

cioè, esplicitando, da

$$\bar{H} = 0, \quad \frac{\partial\bar{H}}{\partial x_j} = 0 \quad (j = m + 1, \dots, n),$$

è invariante di fronte ad ( $\bar{S}$ ).

Questa conclusione si può anche interpretare, dicendo:

b)  $\bar{E}$  invariante di fronte ad (S) (purchè, si intende, vi sia compatibilità) il sistema costituito dalle (I) e dalle equazioni in termini finiti esprimenti che

$$(C) \quad \delta H = 0,$$

per tutti gli spostamenti conciliabili con  $F_1 = 0, F_2 = 0, \dots, F_m = 0$ .

*Dimostrazione.* - Immaginando sempre di adottare come variabili  $F_1, F_2, \dots, F_m, x_{m+1}, \dots, x_n$ , è chiaro intanto che le equazioni

$$(C_1) \quad \frac{\partial H}{\partial x_j} = 0 \quad (j = m + 1, \dots, n),$$

provenienti dall'annullarsi condizionato di  $\delta H$ , coincidono, per  $F_1 = F_2 = \dots = F_m = 0$ , colle

$$\frac{\partial\bar{H}}{\partial x_j} = 0.$$

Posto, per brevità di scrittura,

$$H_j = \frac{\partial H}{\partial x_j}$$

(con che  $\bar{H}_j = \partial\bar{H}/\partial x_j$ ), avremo le identità

$$\frac{dH_j}{dt} = \sum_1^m \frac{\partial H_j}{\partial F_r} \frac{dF_r}{dt} + \left\{ \frac{\partial H_j}{\partial t} + \sum_{m+1}^n \frac{\partial H_j}{\partial x_i} E_i \right\},$$

dove  $d/dt$  è calcolato in base ad (S') e può quindi anche intendersi riferito al sistema equivalente (S).

Per

$$F_1 = 0, \quad F_2 = 0 \quad \dots, \quad F_m = 0,$$



la quantità in parentesi si presenta come la derivata  $d\bar{H}_j/dt$  di  $\bar{H}_j$ , calcolata con referenza ad  $(\bar{S})$ . Ora, se si tien conto anche di

$$H = 0, \quad H_j = 0 \quad (j = m + 1, \dots, n)$$

(il che è quanto dire, sussistendo già le  $F_1 = F_2 = \dots = F_m = 0$ , delle  $\bar{H} = 0, \bar{H}_j = 0$ ),  $d\bar{H}_j/dt$  si annulla, perchè, come abbiamo osservato, le equazioni  $\bar{H} = 0, \bar{H}_j = 0$  sono invarianti di fronte ad  $(\bar{S})$ .

D'altra parte il primo sommatorio

$$\sum_1^m \frac{\partial H_j}{\partial F_r} \frac{dF_r}{dt}$$

va pure a zero in virtù delle (5), tostochè siano soddisfatte le (I).

In definitiva dunque ogni  $d\bar{H}_j/dt$  si annulla, quando si tenga conto delle (I),  $(C_1)$ . c. d. d.

Come al numero precedente, se ne trae un corollario:

*b')* Se alcune delle (I) — in numero di  $k$ , diciamo — sono veri integrali, è di per sè invariante il sistema costituito dalla equazione  $\delta H = 0$  (condizionata come sopra) e dalle  $m + 1 - k$  rimanenti (I).

Le equazioni, che debbono essere compatibili, sono allora in numero di  $n + 1 - k$ , cioè le dette  $m + 1 - k$ , più le  $n - m$ , che provengono da  $\delta H = 0$ .

**4. - Soluzioni particolari (stazionarie).** Riferiamoci all'enunciato *b')* in cui possono ritenersi compresi il teorema *b)* ( $k = 0$ ), il teorema *a)* ( $m = 0, k = 0$ ), e il suo corollario *a')* ( $m = 0, k = 1$ ).

Le  $n + 1 - k$  equazioni, per ipotesi compatibili, equivarranno a  $n + 1 - k - k'$  distinte ( $k' \geq 0$ ). Si potranno supporre risolte rispetto ad altrettante  $x$ , e, riducendo in conformità il sistema (S), si avrà, per definire le rimanenti, un sistema di ordine  $k + k' - 1$ . Di questo però si conoscono già  $k$  integrali [provenienti coll'accennata riduzione da quelli, che, per ipotesi, figurano tra le (I)]. In definitiva resterà così da integrare un sistema d'ordine  $k' - 1$ ; integrato che sia, esso fornisce  $\infty^{k+k'-1}$  soluzioni del sistema (S) proposto.

È ben giustificato chiamarle stazionarie, rispetto alla funzione  $H$ , che interviene nella loro definizione, in quanto, per tali soluzioni, si ha (colla debita relatività)  $\delta H = 0$ :  $H$  assume dunque un valore massimo, o minimo, o più esattamente stazionario, in paragone di quelli che (per uno stesso valore di  $t$ ) gli competono sopra un'altra qualsiasi soluzione infinitamente vicina, appartenente anch'essa alla varietà  $F_1 = F_2 = \dots = F_m = 0$ .

5. - *Caso dei sistemi canonici.* Se si suppone che il sistema (S) abbia forma canonica, che le funzioni  $F$  sieno in involuzione e indipendenti da  $t$ , e che  $H$ , pure indipendente da  $t$ , coincida, a meno di una costante additiva arbitraria, colla funzione caratteristica del sistema canonico, si è ricondotti alla proposizione, che ho avuto l'onore di comunicare all'Accademia nel 1901.

Se poi nelle enunciate condizioni addizionali, si scambia  $H$  con una delle  $F$  e  $t$  con una delle variabili canoniche, si ritrova il risultato del prof. BURGATTI.

Questi casi presentano però particolare interesse, non solo per le applicazioni meccaniche, che ne conseguono, ma anche per il grado di generalità delle soluzioni corrispondenti. Si dimostra infatti in entrambi i casi che  $k'$  è di necessità  $\geq m$ ; mentre, per un (S) qualunque, non si hanno analoghe limitazioni.

SULLE FUNZIONI  
DI DUE O PIÙ VARIABILI COMPLESSE (\*)

« Rend. Acc. Lincei », s. 5<sup>a</sup>, vol. XIV<sub>2</sub> (1905<sub>2</sub>),  
pp. 492-499.

Sia  $w = u + iv$  ( $u$  e  $v$  reali) funzione di una variabile complessa  $z = x + iy$ .

Applicando alle relazioni di monogeneità

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

il teorema di esistenza (e usufruendo della solita rappresentazione piana dei valori reali di  $x, y$ ), si è condotti al risultato ben noto:

Se, sopra un arco di curva  $\Sigma$  (analitico e regolare), si danno ad arbitrio due funzioni  $p, q$  (reali, analitiche e regolari), rimane univocamente determinata una funzione  $w(z)$ , che prende sopra  $\Sigma$  i valori  $p + iq$ , e si comporta regolarmente in un certo campo  $C$  del piano  $x, y$ , che comprende  $\Sigma$  nel suo interno.

Questo modo di caratterizzare una funzione  $w(z)$ , in base ai teoremi di esistenza di CAUCHY, è suscettibile di facile estensione alle funzioni di due, e, più generalmente, di quante si vogliono variabili complesse.

Limitiamoci intanto al caso di due variabili

$$z = x + iy, \quad z' = x' + iy',$$

e ricorriamo, come d'abitudine, a linguaggio geometrico, considerando uno spazio  $S_4$  rappresentativo dei valori delle quattro variabili reali  $x, y, x', y'$ .

Chiamiamo — come si sia condotti a tale definizione apparirà qui appresso — superficie caratteristica di  $S_4$  ogni varietà a due dimensioni, che risulti dal porre fra  $z$  e  $z'$  un vincolo analitico (il che implica due relazioni reali fra le coordinate  $x, y, x', y'$ ). Chiamiamo poi genericamente  $\Sigma_2$  una varietà reale a due dimensioni.

---

(\*) Presentata nella seduta del 19 novembre 1905.

Sussiste la proposizione seguente:

*Se, sopra una  $\Sigma_2$  non caratteristica di  $S_4$  (analitica e regolare) si danno ad arbitrio due funzioni (reali, analitiche e regolari)  $p$  e  $q$ , rimane univocamente determinata una funzione  $w(z, z')$ , che prende in  $\Sigma_2$  i valori  $p + iq$  e si comporta regolarmente in un certo campo  $C$  di  $S_4$  (a quattro dimensioni), che contiene la  $\Sigma_2$ .*

Come corollario discende che una funzione  $w(z, z')$ , la quale si annulla sopra una  $\Sigma_2$  non caratteristica, è identicamente  $= 0$ . Si noti che la restrizione non caratteristica è essenziale, come apparisce da ovvi casi particolari. Prendiamo per es.  $w = z' \cdot P$ , con  $P$  polinomio in  $z, z'$ . La funzione  $w$  si annulla allora per  $z' = 0$ , cioè in tutto il piano caratteristico  $x = 0, y' = 0$ , eppure non è identicamente nulla.

Per il caso di un numero qualunque di variabili veggasi il n. 4.

### I. - Dimostrazione del teorema di esistenza in un caso particolare.

Le relazioni di monogenità per una funzione

$$w(z, z') = u(x, y; x', y') + iv(x, y; x', y')$$

delle due variabili complesse  $z = x + iy, z' = x' + iy'$  sono

$$(1) \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}; \quad \frac{\partial u}{\partial x'} = \frac{\partial v}{\partial y'}, \quad \frac{\partial v}{\partial x'} = -\frac{\partial u}{\partial y'},$$

le quali ci presentano le quattro derivate di  $u, v$  rapporto ad  $x, x'$  espresse mediante le altre quattro, relative alla coppia  $y, y'$ .

È chiaro che, derivando successivamente le (1), si riesce ad esprimere una derivata d'ordine qualunque di  $u, v$ , in cui le  $x, x'$  appariscano una o più volte come variabili di derivazione, mediante una derivata dello stesso ordine, relativa alla sola coppia  $y, y'$ .

Ciò posto, applichiamo il solito procedimento di CAUCHY, immaginando che, di due presunte funzioni (regolari)  $u, v$  soddisfacenti alle (1), sieno dati (ad arbitrio, tranne la condizione di regolarità) i valori  $p(y, y'), q(y, y')$ , presi per  $x = x' = 0$ . Per questi stessi valori rimangono senz'altro definite, a norma della osservazione fatta, anche tutte le derivate, e si possono per conseguenza costruire gli sviluppi formali di TAYLOR. Tutto si riduce a provarne la convergenza, il che è pure pressochè immediato.

Riferiamoci infatti ad un generico sistema di valori di regolarità per  $p$  e  $q$ , valori, che senza pregiudizio della generalità, potremo sup-

porre essere  $y = 0, y' = 0$ . Potremo del pari assegnare due costanti positive  $M$  ed  $r$ , tali che

$$\omega = \frac{M}{1 - \frac{y + y'}{r}}$$

riesca maggiorante così di  $p$ , come di  $q$ .

Se si formano le equazioni

$$(2) \quad \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y}, \quad \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial y}; \quad \frac{\partial U}{\partial x'} = \frac{\partial V}{\partial y'}, \quad \frac{\partial V}{\partial x'} = \frac{\partial U}{\partial y'}$$

e si immagina di fare il calcolo delle derivate successive di  $U$  e  $V$ , in base alle condizioni iniziali:  $U = V = \omega$  per  $x = x' = 0$ , si vede subito che gli sviluppi formali di  $U, V$  riescono maggioranti di quelli costruiti per  $u$  e  $v$ .

Ora questi sviluppi di  $U, V$  convergono (per  $|x|, |x'|, |y|, |y'| < r/4$ ), perchè le funzioni  $U, V$ , soddisfacenti al sistema ausiliario (2) e alle accennate condizioni iniziali, sono entrambe eguali a

$$\frac{M}{1 - \frac{x + x' + y + y'}{r}}$$

Convergono dunque a fortiori gli sviluppi di  $u, v$ .

*c. d. d.*

## 2. - Caso generale.

Cerchiamo se e fino a qual punto si può estendere il teorema di esistenza al caso, in cui la varietà, sulla quale si suppongono dati i valori di  $u, v$ , sia una qualunque  $\Sigma_2$ , anzichè il piano  $x = x' = 0$ . Ricorreremo per ciò, come si fa costantemente in circostanze analoghe, al cambiamento di variabili.

Se

$$(3) \quad \begin{cases} \varrho_1(x, y, x', y') = 0, \\ \varrho_2(x, y, x', y') = 0, \end{cases}$$

sono due equazioni definienti  $\Sigma_2$ , e  $\varrho_3, \varrho_4$  due generiche funzioni di  $x, y, x', y'$ , costituenti assieme a  $\varrho_1, \varrho_2$  una quaterna indipendente, potremo pensare le  $u, v$  funzioni di  $x, y, x', y'$  pel tramite delle  $\varrho$ , e attribuire

per conseguenza alle equazioni (1) la forma:

$$(1') \quad \begin{cases} \sum_1^4 \left\{ \frac{\partial u}{\partial \rho_i} \frac{\partial \rho_i}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial \rho_i} \frac{\partial \rho_i}{\partial y} \right\} = 0, \\ \sum_1^4 \left\{ \frac{\partial u}{\partial \rho_i} \frac{\partial \rho_i}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial \rho_i} \frac{\partial \rho_i}{\partial x} \right\} = 0, \\ \sum_1^4 \left\{ \frac{\partial u}{\partial \rho_i} \frac{\partial \rho_i}{\partial x'} - \frac{\partial v}{\partial \rho_i} \frac{\partial \rho_i}{\partial y'} \right\} = 0, \\ \sum_1^4 \left\{ \frac{\partial u}{\partial \rho_i} \frac{\partial \rho_i}{\partial y'} + \frac{\partial v}{\partial \rho_i} \frac{\partial \rho_i}{\partial x'} \right\} = 0. \end{cases}$$

Condizione necessaria e sufficiente affinchè queste quattro equazioni si possano risolvere rispetto alle quattro derivate

$$\frac{\partial u}{\partial \rho_1}, \quad \frac{\partial v}{\partial \rho_1}, \quad \frac{\partial u}{\partial \rho_2}, \quad \frac{\partial v}{\partial \rho_2}$$

è che il determinante dei loro coefficienti, cioè il determinante

$$D = \begin{vmatrix} \frac{\partial \rho_1}{\partial x} & -\frac{\partial \rho_1}{\partial y} & \frac{\partial \rho_2}{\partial x} & -\frac{\partial \rho_2}{\partial y} \\ \frac{\partial \rho_1}{\partial y} & \frac{\partial \rho_1}{\partial x} & \frac{\partial \rho_2}{\partial y} & \frac{\partial \rho_2}{\partial x} \\ \frac{\partial \rho_1}{\partial x'} & -\frac{\partial \rho_1}{\partial y'} & \frac{\partial \rho_2}{\partial x'} & -\frac{\partial \rho_2}{\partial y'} \\ \frac{\partial \rho_1}{\partial y'} & \frac{\partial \rho_1}{\partial x'} & \frac{\partial \rho_2}{\partial y'} & \frac{\partial \rho_2}{\partial x'} \end{vmatrix}$$

sia diverso da zero.

Supponiamo questa condizione soddisfatta nell'intorno di un punto generico di  $\Sigma_2$ .

Il sistema (1') si può allora presentare sotto l'aspetto

$$(1'') \quad \frac{\partial u}{\partial \rho_1} = H_1, \quad \frac{\partial v}{\partial \rho_1} = K_1, \quad \frac{\partial u}{\partial \rho_2} = H_2, \quad \frac{\partial v}{\partial \rho_2} = K_2,$$

dove  $H_1, K_1, H_2, K_2$  sono funzioni lineari ed omogenee delle quattro derivate di  $u, v$  rapporto a  $\rho_3, \rho_4$ , i coefficienti dipendendo (in modo analitico e regolare) dalle  $\rho$  (in generale da tutte quattro).

Sarebbe assai facile, modificando opportunamente la dimostrazione del n. 1, riconoscere per via diretta l'univoca esistenza di integrali delle (1''),

riducentisi sopra  $\Sigma_2$  a due assegnate funzioni regolari  $p, q$  (delle variabili  $\varrho_3, \varrho_4$ ). Ma è anche più comodo riportarsi senz'altro ai risultati generali del sig. RIQUIER, che stabiliscono il teorema di esistenza per qualsiasi sistema autonomo passivo: il sistema (1'') vi rientra infatti come caso particolarissimo (1).

Una funzione  $w(z, z')$  rimane pertanto univocamente determinata dai valori  $p + iq$ , presi sopra una qualunque superficie  $\Sigma_2$ , per cui non sia  $D = 0$ .

### 3. - Superficie caratteristiche.

Chiameremo, come è naturale, *caratteristiche* quelle eccezionali varietà (reali) a due dimensioni, per le quali il determinante  $D$  si annulla.

Cerchiamo di interpretare questa condizione differenziale.

Giova all'uopo renderla più semplice, immaginando di sostituire alle equazioni (3), da cui si prende le mosse per formare  $D$ , due equazioni equivalenti in forma risolta. Senza ledere la generalità è lecito assumerle sotto la forma

$$(4) \quad \begin{cases} x' - \varphi(x, y) = 0, \\ y' - \psi(x, y) = 0. \end{cases}$$

Infatti, le (3) sono certo atte a definire due delle quattro variabili  $x, y, x', y'$  in funzione delle altre due.

Se la coppia definita non è  $(x', y')$ , sarà

$$(x, y);$$

ovvero

$$(x, x'), \quad (y, y'), \quad (x, y'), \quad (y, x').$$

Il primo caso si riconduce subito alla forma (4) scambiando fra loro le due variabili  $z, z'$ .

Degli altri quattro basta considerare il primo, poichè i successivi si

(1) Veggasi CH. RIQUIER, *Sur une question fondamentale de calcul intégral*, « Acta Mathematica », t. 23, 1900.

Nel nostro caso basta per es. attribuire alle funzioni e alle variabili le quote seguenti:

|               | $u$ | $v$ | $\varrho_1$ | $\varrho_2$ | $\varrho_3$ | $\varrho_4$ |
|---------------|-----|-----|-------------|-------------|-------------|-------------|
| Prima quota   | 0   | 0   | 0           | 0           | 0           | 0           |
| Seconda quota | 0   | 0   | 1           | 1           | 0           | 0           |

riducono ad esso immaginando di cambiarvi ordinatamente  $z, z'$  in:  $iz, iz'; z, iz'; iz, z'$ . In questo caso, esclusa che sia la risolubilità tanto rispetto ad  $x', y'$ , quanto rispetto ad  $x, y$ , le equazioni definienti  $x, x'$  non possono essere se non del tipo

$$(5) \quad \begin{cases} x - Y = 0, \\ x' - Y' = 0, \end{cases}$$

con  $Y$  funzione della sola  $y$ ,  $Y'$  funzione della sola  $y'$ . Ma allora, posto

$$\varrho_1 = x - Y, \quad \varrho_2 = x' - Y',$$

risulta

$$D = \left[ 1 + \left( \frac{dY}{dy} \right)^2 \right] \left[ 1 + \left( \frac{dY'}{dy'} \right)^2 \right],$$

quantità essenzialmente positiva.

Nessuna superficie (5) può dunque essere caratteristica, ed è perciò giustificato di attenersi esclusivamente alla (4).

Prendendo poi

$$\begin{aligned} \varrho_1 &= x' - \psi(x, y), \\ \varrho_2 &= y' - \psi(x, y), \end{aligned}$$

si ha

$$D = \begin{vmatrix} -\frac{\partial\varphi}{\partial x} & \frac{\partial\varphi}{\partial y} & -\frac{\partial\psi}{\partial x} & \frac{\partial\psi}{\partial y} \\ -\frac{\partial\varphi}{\partial y} & -\frac{\partial\varphi}{\partial x} & -\frac{\partial\psi}{\partial y} & -\frac{\partial\psi}{\partial x} \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Aggiungendo alla prima colonna la quarta, e alla seconda la terza cambiata di segno, il determinante  $D$  si riduce al prodotto dell'unità per

$$\begin{vmatrix} -\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial y} & \frac{\partial\varphi}{\partial y} + \frac{\partial\psi}{\partial x} \\ -\frac{\partial\varphi}{\partial y} - \frac{\partial\psi}{\partial x} & -\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial y} \end{vmatrix} = \left( \frac{\partial\varphi}{\partial x} - \frac{\partial\psi}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y} \right)^2$$



e può quindi annullarsi (nel campo reale) allora e solo allora che si abbia ad un tempo

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}.$$

Queste equazioni esprimono che  $\varphi + i\psi$  è funzione della variabile complessa  $z$ . Designandola con  $f(z)$ , le (4) si possono compendiare in

$$z' = f(z),$$

che porge così, riguardandovi  $f$  come arbitraria e  $z$  scambiabile con  $z'$  (cioè, che del resto dà in più solo i piani  $z = \text{cost.}$ ) la rappresentazione in termini finiti delle superficie caratteristiche.

È facile precisare il comportamento di una superficie caratteristica di fronte alle condizioni di esistenza di una  $w(z, z')$ .

Anzitutto, immaginando preventivamente effettuato un cambiamento delle due variabili (complesse) indipendenti  $z, z'$  (in  $z, z' = f(z)$ ), è sempre lecito supporre che la caratteristica in questione sia il piano  $z' = 0$ . I valori

$$w(z, 0) = p + iq,$$

che vi prende una generica funzione  $w(z, z')$ , non sono arbitrari (come — a prescindere dalle condizioni di analiticità e regolarità — accade per le altre superficie), ma vincolati dalla condizione che  $p + iq$  risulti una funzione  $Z$  della variabile complessa  $z$ .

Soddisfatta questa condizione, esistono infinite funzioni  $w$ , che si riducono a  $Z$  per  $z' = 0$ . È ciò che apparisce dalla formula

$$w = Z + z' \cdot w_1,$$

dove si può intendere per  $w_1$  una funzione arbitraria delle due variabili  $z, z'$  (regolare nel campo che si considera).

La univoca determinazione di  $w$  è così ricondotta a quella di  $w_1$ , ecc.

#### 4. - Funzioni di $n$ variabili.

Per una funzione  $w = u + iv$  delle  $n$  variabili complesse

$$z_1 = x_1 + iy_1, \quad z_2 = x_2 + iy_2, \quad \dots, \quad z_n = x_n + iy_n,$$

si hanno le  $2n$  relazioni di monogeneità

$$\frac{\partial u}{\partial x_\nu} = \frac{\partial v}{\partial y_\nu}, \quad \frac{\partial v}{\partial x_\nu} = -\frac{\partial u}{\partial y_\nu} \quad (\nu = 1, 2, \dots, n),$$



### 5. - Osservazione.

Nella teoria delle funzioni di una variabile complessa le questioni di esistenza si possono porre sotto due diversi punti di vista; quello di CAUCHY e quello pur classico di RIEMANN-DIRICHLET, secondo cui, fissato a priori un campo  $C$ , si tratta di individuare una  $w(z)$ , *regolare* entro  $C$ , mediante condizioni relative al contorno  $\gamma$  di  $C$ .

Se si cerca di estendere il punto di vista di RIEMANN-DIRICHLET alle funzioni di più variabili — diciamo di due per fissare le idee — si è condotti all'enunciato seguente:

Dato un campo  $C$  di  $S_4$ , riconoscere se e quali dati, relativi al contorno (a tre dimensioni)  $\gamma$ , o a porzioni di questo contorno, sono atti a definire una e una sola funzione  $w(z, z')$ , *regolare* entro  $C$ .

Rispetto a questi dati di contorno va notato che non può soccorrere l'analogia con quanto accade per le funzioni di una sola variabile.

Sarebbe infatti esuberante il supporre assegnata la parte reale  $u$  (o la immaginaria  $v$ ) in tutti i punti di  $\gamma$ , poichè non esisterebbe in generale alcuna corrispondente  $w$  <sup>(\*)</sup>; sarebbe ancora esuberante (l'ho verificato su casi particolari) il darsi  $u$  in tutti i punti di una superficie chiusa situata in  $\gamma$ . Sarebbe invece troppo poco il darsi  $u$  solo sopra una linea, perchè rimane allora molta indeterminazione.

Si intravede di qua la difficoltà della questione, e si resta anzi dubbiosi se sia ragionevole il porla.

Nulla infatti assicura che debba necessariamente esistere, per un assegnato campo  $C$ , una qualche porzione di contorno *indipendente da  $w$* , capace di essere luogo di convenienti condizioni determinative.

(\*) Cfr. H. POINCARÉ, *Sur les fonctions de deux variables*, « Acta Mathematica », t. 2, 1883.



## SULLA CONTRAZIONE DELLE VENE LIQUIDE

« Atti Ist. Veneto », t. LXIV (1904-905), Parte 2<sup>a</sup>,

pp. 1465-72.

Il fenomeno della contrazione delle vene liquide è stato oggetto di studi sperimentali, che, almeno per i bisogni della idraulica, possono dirsi esaurienti.

Non altrettanto progredito è lo studio teorico, pur trattandosi di una questione, in cui sono perfettamente applicabili le ordinarie equazioni e condizioni ai limiti della idrodinamica pura.

Manca infatti persino il teorema di esistenza e nemmeno si è in grado di affrontare, con procedimenti approssimativi, le determinazioni quantitative (<sup>1</sup>). Solo si arriva a riconoscere che, nel caso ordinario di fori non rigurgitati, il coefficiente di contrazione è sempre  $> \frac{1}{2}$ , mentre si riduce sensibilmente ad  $\frac{1}{2}$  per gli orifici provvisti di imboccatura cilindrica interna (tubo di BORDA).

Se ne trovano in molti trattati (<sup>2</sup>) giustificazioni semplicissime, basate sul teorema delle quantità di moto, ma il punto di vista è sempre particolare e vi si trascura qualche cosa fin da principio.

Si può invece — ecco il contenuto della presente Nota — stabilire in modo altrettanto semplice una formola rigorosa e generale, da cui discendono come immediate conseguenze pratiche le due sopra ricordate, e inoltre la seguente, che forse non è stata ancora avvertita: *È possibile far discendere il coefficiente di contrazione di una vena liquida al disotto*

---

(<sup>1</sup>) Fanno naturalmente eccezione le classiche ricerche di STOKES e di HELMHOLTZ sui movimenti in due dimensioni, che danno la teoria completa dei veli fluidi uscenti da fenditure indefinite (praticamente abbastanza lunghe). Nulla però autorizza — nè la intuizione fisica, nè il raffronto delle equazioni di condizione — a ravvisare in quei risultati una attendibile approssimazione per il caso dell'efflusso da un foro a contorno chiuso, senza dimensioni preponderanti, di forma per es. quadrata o circolare.

(<sup>2</sup>) Cfr. per es. LAMB, *Hydrodynamics*, Cambridge, 1895, pag. 27; POINCARÉ, *Cinématique et mécanismes*, Paris, 1899, pag. 339-343; nonché i due articoli di LOVE nell' *Encyklopädie*, ecc. (Bd. IV, 15, 10 e 16, 1 f.).

di  $\frac{1}{2}$ , e ciò coll'applicare all'orifizio una imboccatura interna divergente (cfr. fig. 3).

Ho comunicata quest'ultima osservazione al Collega prof. TURAZZA, il quale mi ha cortesemente promesso di istituirne quanto prima la verifica sperimentale.

### 1. - Un corollario del lemma di Green.

Sia  $\sigma$  una superficie chiusa (o più semplicemente un sistema di tali superficie);  $S$  lo spazio interno a  $\sigma$ ;  $n$  la normale a  $\sigma$  in un punto generico, vólta verso l'interno;  $\alpha, \beta, \gamma$  i coseni direttori di  $n$ ;  $\varphi(x, y, z)$  una funzione uniforme, armonica e regolare entro  $S$  (contorno incluso):

$$(1) \quad V^2 = \left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dz}\right)^2.$$

Dalla identità

$$\frac{1}{2} \frac{dV^2}{dz} = \frac{d\varphi}{dx} \frac{d^2\varphi}{dx dz} + \frac{d\varphi}{dy} \frac{d^2\varphi}{dy dz} + \frac{d\varphi}{dz} \frac{d^2\varphi}{dz^2},$$

moltiplicando per  $dS$  ed integrando, si ha

$$\frac{1}{2} \int_s \frac{dV^2}{dz} dS = \int_s \left\{ \frac{d\varphi}{dx} \frac{d^2\varphi}{dx dz} + \frac{d\varphi}{dy} \frac{d^2\varphi}{dy dz} + \frac{d\varphi}{dz} \frac{d^2\varphi}{dz^2} \right\} dS.$$

Il primo membro, colla solita trasformazione di GREEN, equivale a

$$-\frac{1}{2} \int_{\sigma} V^2 \gamma \sigma;$$

analogamente il secondo (tenuto conto che  $\varphi$  è armonica) a

$$-\int_{\sigma} \frac{d\varphi}{dn} \frac{d\varphi}{dz} d\sigma.$$

Ne risulta

$$(2) \quad \int_{\sigma} \frac{d\varphi}{dn} \frac{d\varphi}{dz} d\sigma = \frac{1}{2} \int_{\sigma} V^2 \gamma d\sigma,$$

in cui evidentemente si può intendere con  $z$  una direzione generica, con  $\gamma$  il coseno dell'angolo che questa direzione forma colla normale  $n$ .

## 2. - Specificazione dei caratteri del moto.

Un liquido (fluido incompressibile) fluisca attraverso un orifizio, limitato da un contorno piano  $\pi$ : diciamo  $\Omega$  questo orifizio, ossia, per essere esatti, la porzione del piano di  $\pi$ , interna allo stesso  $\pi$ .

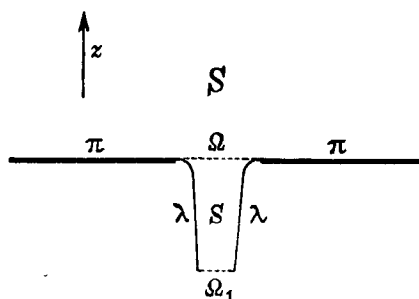


Fig. 1.

Consideriamo un efflusso, che presenti i caratteri qualitativi delle ordinarie vene d'acqua (o d'altro liquido pesante).

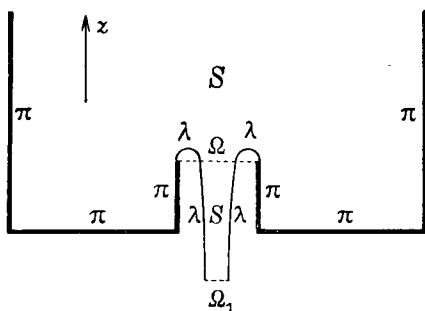


Fig. 2.

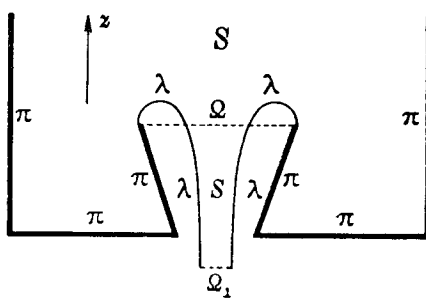


Fig. 3.

In modo preciso supponiamo che si formi oltre  $\Omega$  — possiamo dire, come gli idraulici, a valle di  $\Omega$  — una superficie libera tubolare, dotata (eventualmente a distanza infinita) di una *sezione contratta*  $\Omega_1$ , parallela ad  $\Omega$ , attraversata da tutti i filetti fluidi normalmente e colla stessa velocità  $V_0$ .

Sia  $\lambda$  (cfr. le figure) la porzione di superficie della vena, compresa fra l'orifizio  $\Omega$  e la sezione contratta  $\Omega_1$ ;  $S$  l'intero spazio occupato dalla

massa fluida (a monte della sezione contratta  $\Omega_1$ );  $\Omega_1 + \lambda + \pi$  il contorno completo di questo spazio <sup>(3)</sup>.

Ammetteremo che in tutto  $S$  il moto del fluido sia permanente ed irrotazionale; più precisamente, detto  $\varphi(x, y, z)$  il corrispondente potenziale di velocità, lo riterremo funzione uniforme, armonica, regolare e tale che nei punti all' $\infty$ , appartenenti ad  $S$ , le derivate si annullino d'ordine superiore al primo.

Prenderemo per semplicità l'asse  $z$  normale al piano dell'orifizio colla direzione positiva a monte.

Infine designeremo secondo il solito con  $p$  la pressione, con  $\rho$  la densità, con  $P \int dp/\rho$  ( $= p/\rho$  pei liquidi omogenei), con  $V$  il valore assoluto della velocità, legato evidentemente a  $\varphi$  dalla (1).

### 3. - Caso in cui non agiscono forze.

Tutto ciò ritenuto, se sul liquido non agiscono forze di massa, le equazioni indefinite del moto si riassumono nell'unica

$$(3) \quad \frac{1}{2}V^2 - P = \text{cost.}$$

Da essa in particolare risulta che, sulla superficie libera  $\lambda$ ,  $V$  conserva un valore costante, che è poi il  $V_0$  relativo alla sezione contratta  $\Omega_1$ , dato che il contorno di  $\Omega_1$  giace su  $\lambda$ .

Applichiamo la formula (2) alla superficie chiusa  $\Omega_1 + \lambda + \pi$ . La superficie libera  $\lambda$  è tutta costituita da linee di corrente;  $\pi$  da eventuali pareti rigide, superficie libere e porzioni di sfera di raggio  $\infty$ , dalle quali ultime si può prescindere (come si vede subito, badando che, per ipotesi,  $V$  vi si annulla d'ordine superiore al primo). Comunque in  $\pi + \lambda$  si ha sempre  $d\varphi/dn = 0$ .

In  $\Omega_1$  la direzione  $n$  coincide con  $z$ , e siccome  $d\varphi/dz = -V_0$ , il primo membro della (2) si riduce semplicemente a

$$V_0^2 \Omega_1.$$

Il secondo membro, per essere  $V = V_0$  tanto sopra  $\lambda$ , quanto sopra  $\Omega_1$ , può essere scritto

$$\frac{1}{2} V_0^2 \int_{\Omega_1 + \lambda} \gamma d\sigma + \frac{1}{2} \int_{\pi} V^2 \gamma d\pi,$$

<sup>(3)</sup> Non è escluso che  $S$  si estenda in un qualche senso fino all'infinito: in tal caso  $\pi$  si deve al solito intendere completato con una sfera di raggio grandissimo. Giova notare che un movimento rigorosamente stazionario (con portata non nulla attraverso l'orifizio) è possibile solo a patto che il campo  $S$  non sia finito.



e così abbiamo

$$V_0^2 \Omega_1 = \frac{1}{2} V_0^2 \int_{\Omega_1 + \lambda} \gamma d\sigma + \frac{1}{2} \int_{\pi} V^2 \gamma d\pi.$$

Ora  $\Omega_1 + \lambda + \Omega$  è ancora una superficie chiusa (eventualmente intrecciata, come si vede nelle figg. 2 e 3), e per conseguenza

$$\int_{\Omega_1 + \lambda} \gamma d\sigma = - \int_{\pi} \gamma d\sigma = \Omega,$$

perchè, nei punti di  $\Omega$ , la normale volta all'interno della superficie  $\Omega_1 + \lambda + \Omega$  coincide colla direzione negativa dell'asse  $z$  e quindi  $\gamma = -1$ .

In definitiva risulta, dividendo per  $\Omega V_0^2$  da una parte e dall'altra,

$$(4) \quad \frac{\Omega_1}{\Omega} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\Omega} \int_{\pi} \left(\frac{V}{V_0}\right)^2 \gamma d\pi.$$

Questa formula mostra che il coefficiente di contrazione  $\Omega_1/\Omega$  è maggiore di  $\frac{1}{2}$  ogniquale volta l'  $\int_{\pi} (V/V_0)^2 \gamma d\pi$  risulta positivo, il che dipende esclusivamente da  $\gamma$ , ossia dalla forma geometrica del contorno della massa fluida a monte dell'orifizio.

Se questo è praticato in un suolo piano indefinito (fig. 1), si ha  $\gamma = 1$ , e la (4) diviene

$$\frac{\Omega_1}{\Omega} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\Omega} \int_{\pi} \left(\frac{V}{V_0}\right)^2 d\pi,$$

dalla quale relazione (nella ipotesi di un orifizio circolare) il sig. WIERN (\*) seppe ingegnosamente ricavare le due disuguaglianze

$$\frac{\Omega_1}{\Omega} > 0,53$$

e

$$\frac{\Omega_1}{\Omega} < 0,71.$$

(\*) Cfr. il suo *Lehrbuch der Hydrodynamik*, Leipzig, 1900, pag. 110-115.

#### 4. - Osservazione relativa al caso, in cui agiscono forze conservative.

Detto  $U$  il potenziale (unitario) si ha, in luogo della (3), l'equazione

$$\frac{1}{2}V^2 - P = U + \text{cost.}$$

Basta evidentemente che si possano trascurare, di fronte a  $\frac{1}{2}V_0^2$ , le variazioni di  $U$  sopra la superficie  $\lambda$ , perchè nei punti di questa valga ancora la (3) e tutto stia come nel numero precedente.

Nelle circostanze ordinarie, in cui  $U$  designa il potenziale della gravità  $-gz$ , la condizione in parola è naturalmente verificata. Si ha infatti  $\frac{1}{2}V_0^2 = gh$  ( $h$  carico sull'orifizio), mentre fra  $\Omega$  e  $\Omega_1$  si hanno differenze di livello assai piccole di fronte ad  $h$ . Per conseguenza, detta  $\delta$  la massima di queste differenze di livello, sarà a ritenersi trascurabile  $\delta/h$ . Ora la massima variazione di  $U$  in  $\lambda$  non è che  $g\delta$  ed il suo rapporto a  $\frac{1}{2}V_0^2$  è appunto la quantità trascurabile  $\delta/h$ .

#### 5. - Conseguenze pratiche.

Se si nota che, nello spazio  $S$ , a breve distanza dall'orifizio, il fluido è sensibilmente in quiete, si vede che il segno dell'integrale  $\int_{\pi} (V/V_0)^2 \gamma d\pi$  può ritenersi individuato da quello di  $\gamma$  in prossimità dell'orifizio. Di qua le conclusioni pratiche ben note:

$\Omega_1/\Omega > \frac{1}{2}$  ogniqualvolta si tratti d'orifici scolpiti in pareti piane ( $\gamma = 1$ ), o convesse, o più generalmente tali che sia  $\gamma > 0$ .

Se c'è una imboccatura interna cilindrica (fig. 2), sopra di essa  $\gamma = 0$ ; l'integrale è sensibilmente nullo, e si ha il caso di BORDA  $\Omega_1/\Omega = \frac{1}{2}$ .

Ma si può anche rendere  $\Omega_1/\Omega < \frac{1}{2}$ . Basta supporre l'orifizio munito di un imbuto interno divergente (fig. 3), con che la normale  $n$  all'imbuto volta verso  $S$  forma con  $z$  un angolo ottuso ( $\gamma < 0$ ).

In una eventuale verifica sperimentale bisognerà aver cura che la divergenza dell'imbuto non sia troppo forte. E ciò per evitare che la vena (dopo essersi formata, zampillando dall'orlo superiore dell'imbuto) incontri la parete interna, nel qual caso non ci troveremmo più nelle condizioni supposte di avere fra  $\Omega$  ed  $\Omega_1$  una effettiva superficie libera.

SUR LA RECHERCHE  
DES SOLUTIONS PARTICULIÈRES  
DES SYSTÈMES DIFFÉRENTIELS  
ET SUR LES MOUVEMENTS STATIONNAIRES

« Prac matematyczno - fizycznych », t. XVII (1906),  
pp. 1-40.

**Préface.**

Une invitation cordiale de M. DICKSTEIN me donne occasion d'exposer, sous forme simplifiée et complétée, des recherches, qui ont formé objet de plusieurs notes, parues dans les « Rendiconti dei Lincei » (1901 et 1905) (\*).

Le point de départ de ces notes avait été une généralisation de la méthode, dite *ignoration of coordinates* par les auteurs anglais, généralisation prêtant elle-même à d'intéressantes applications dynamiques.

J'ai reconnu plus récemment qu'il ne s'agit point de propriétés, appartenant exclusivement aux équations de la dynamique, mais de conséquences d'un principe général embrassant tout système différentiel ordinaire.

Je ferai ici jouer au principe son rôle naturel au commencement de la recherche. C'est un principe assez élémentaire, qui devient intuitif, si on le présente sous forme géométrique.

Imaginons en effet les solutions d'un système différentiel quelconque représentées par des courbes d'un espace à un nombre convenable de dimensions.

Appelons, suivant l'usage, *invariante* toute variété (de n'importe quel nombre de dimensions) formée par un assemblage de courbes intégrales.

Il est bien clair que la partie commune à deux variétés invariantes est encore une variété invariante. Il en est de même en particulier pour les éventuelles intersections d'une variété  $V$  avec elle même, c'est-à-dire pour la sous-variété  $W$ , lieu des points doubles de  $V$ .

La connaissance d'une variété invariante  $V$  entraîne celle de  $W$ . (On n'a à effectuer, pour définir  $W$ , que des opérations algébriques).  $W$  est en général bien plus restreinte que  $V$ , et la détermination des courbes

---

(\*) In questo vol.: II, pp. 87-93; XXIV, pp. 441-448. [N.d.R.]

intégrales, qui en sont les génératrices, dépend par conséquent d'opérations analytiques beaucoup moins élevées.

Voilà la remarque évidente, qui se traduit dans une règle commode pour la construction des solutions particulières des systèmes différentiels.

Dans le présent mémoire, je développerai d'abord cette règle (Chap. I), en déduisant comme corollaires (Chap. II) les résultats plus précis qu'on peut établir pour les systèmes canoniques. Je passerai ensuite aux applications (Chap. III), et j'ajouterai enfin (Chap. IV) quelques réflexions critiques pour faire ressortir aussi le côté qualitatif de la question et prévenir des possibles malentendus.

Si l'on veut se former une idée plus précise de chaque chapitre, on n'a qu'à jeter un coup d'œil sur la table des matières.

## CHAPITRE I.

### CONSIDÉRATIONS GÉNÉRALES, S'APPLIQUANT À TOUT SYSTÈME DIFFÉRENTIEL

#### I. - Préliminaires.

Soit

$$(S) \quad \frac{dx_i}{dt} = X_i(x_1, x_2, \dots, x_n, t) \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

un système différentiel quelconque, les  $X_i$  étant censées fonctions uniformes et holomorphes de leurs arguments dans le domaine auquel se rapportent nos considérations.

Convenons d'appeler *déplacements virtuels* et de désigner par  $\delta x_i$ , des accroissements infiniment petits des  $x_i$ , compatibles avec les équations différentielles (S), c'est-à-dire tels que les  $x_i + \delta x_i$  satisfont à (S), dès qu'il en est ainsi pour les  $x_i$ .

On tire de cette définition

$$(1) \quad \frac{d\delta x_i}{dt} = \delta X_i = \sum_1^n \frac{\partial X_i}{\partial x_j} \delta x_j,$$

où l'on doit naturellement entendre par  $x_i$  une solution de (S).

Les (1) sont, d'après M. POINCARÉ, les équations aux variations du système donné (S). On peut évidemment les écrire

$$\frac{d\delta x_i}{dt} = \delta \frac{dx_i}{dt},$$

ce qui met au jour la propriété caractéristique des déplacements virtuels d'être permutable avec l'opération  $d/dt$ .

Il s'ensuit plus généralement, pour une fonction quelconque  $f(x_1, x_2, \dots, x_n, t)$

$$\frac{d}{dt} \delta f = \delta \frac{df}{dt},$$

où la dérivation par rapport à  $t$  doit se faire, cela va sans dire, d'après (S) et (1); notamment l'écriture  $df/dt$  remplace

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} X_i.$$

A toute solution  $x_i(t)$  des équations (S) on peut subordonner un système  $\infty^n$  de déplacements virtuels, restant arbitraires ceux qui se rapportent à une valeur (particulière, mais d'ailleurs quelconque) de  $t$ . C'est ce qui résulte du fait que les  $\delta x_i$  sont les intégrales des équations (1).

## 2. - Étude d'un cas simple.

Ceci posé, soit

$$(2) \quad H(x_1, x_2, \dots, x_n, t) = 0$$

une relation invariante par rapport au système (S), ce qui veut dire, comme on sait, que  $dH/dt$  s'annule: ou bien identiquement, auquel cas on aurait affaire à une véritable intégrale (la constante étant incluse dans  $H$ ); ou bien, en vertu de la relation elle-même. On suppose naturellement qu'il s'agit d'une relation uniforme, c'est-à-dire qu'on puisse en tirer une au moins des  $x$  comme fonction uniforme des autres et de  $t$  dans le champ envisagé. Je vais établir le théorème suivant:

a) Posons

$$(3) \quad \delta H = 0$$

pour tous les déplacements virtuels, c'est-à-dire

$$(3') \quad \frac{\partial H}{\partial x_i} = 0, \quad (i=1, 2, \dots, n).$$

Si le système (2), (3) [sous forme explicite (2), (3')] est compatible, il est nécessairement invariant vis-à-vis de (S).

*Démonstration.* — L'hypothèse que la relation (2) est invariante se traduit dans une identité de la forme

$$(4) \quad \frac{dH}{dt} = \mu H,$$

$\mu$  étant une fonction holomorphe <sup>(1)</sup>.

On a aussi (quels que soient  $t, x_i, \delta x_i$ )

$$\frac{d}{dt} \delta H = \delta \frac{dH}{dt}.$$

Remplaçons-y, au lieu de  $\delta H$ , sa valeur

$$\sum_1^n \frac{\partial H}{\partial x_i} \delta x_i,$$

et  $\mu H$  au lieu de  $dH/dt$ ; il vient

$$(5) \quad \sum_1^n \frac{d}{dt} \frac{\partial H}{\partial x_i} \cdot \delta x_i = - \sum_1^n \frac{\partial H}{\partial x_i} \frac{d \delta x_i}{dt} + H \delta \mu + \mu \sum_1^n \frac{\partial H}{\partial x_i} \delta x_i.$$

Lorsqu'on tient compte des (2) et (3') <sup>(2)</sup>, le second membre s'annule, et il reste

$$\sum_1^n \frac{d}{dt} \frac{\partial H}{\partial x_i} \cdot \delta x_i = 0.$$

La relation devant subsister pour tout déplacement virtuel, il s'ensuit

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial H}{\partial x_i} = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

*c. q. f. d.*

<sup>(1)</sup> Pour le constater, considérons pour un moment  $H$  comme variable indépendante à la place d'une des  $x$  (ce qui est évidemment permis, d'après la résolubilité de  $H = 0$ ), et pensons au développement de  $dH/dt$  en série de puissances de  $H$ . Comme  $dH/dt$  doit s'annuler avec  $H$ , il n'y aura pas dans le développement le terme indépendant de  $H$ , ce qui justifie bien la formule (4).

A la vérité cette dernière conclusion pourrait être en défaut pour les valeurs particulières des  $x$ , qui annulent à la fois toutes les  $\partial H/\partial x_i$ , valeurs essentielles pour notre recherche. Nous conviendrons cependant, pour éviter toute difficulté, de nous borner aux cas, où  $\mu$  reste holomorphe même pour les dites valeurs.

<sup>(2)</sup> Ceci revient à se rapporter à des valeurs des  $x$ , qui vérifient à la fois les (2), (3') pour une valeur quelconque de  $t$ . C'est justement ici qu'intervient la condition de compatibilité, mentionnée dans l'énoncé du théorème.

Il convient d'ajouter:

*a')* Si (2) est une véritable intégrale,  $dH/dt$  s'annule identiquement, et les équations (3') sont invariantes à elles seules.

C'est ce qui résulte de (5), dès que  $\mu = 0$ .

*Remarque.* - Les  $x_i$  sont au nombre de  $n$ , tandis que les équations (2), (3') sont au nombre de  $n + 1$ . Leur compatibilité apparaît de la sorte comme une circonstance exceptionnelle. Mais il n'en est pas ainsi dans le cas *a')*. On n'a alors à envisager que les équations (3'), qui sont au nombre de  $n$  comme les  $x_i$ ; la (2) se trouve nécessairement satisfaite par un choix convenable de la constante arbitraire.

### 3. - Extension du résultat.

Considérons plus généralement  $m + 1$  équations

$$(I) \quad H = 0, \quad F_1 = 0, \quad F_2 = 0, \quad \dots, \quad F_m = 0,$$

formant un système invariant vis-à-vis de (S). On suppose, bien entendu, que  $H, F_1, F_2, \dots, F_m$  soient uniformes, holomorphes et indépendantes dans le domaine envisagé. Dans cette hypothèse on peut, sans nuire à la généralité, se servir de  $F_1, F_2, \dots, F_m$  comme variables indépendantes à la place de  $m$  des  $x$ : de  $x_1, x_2, \dots, x_m$  par exemple.

Avec ces nouvelles variables

$$F_1, F_2, \dots, F_m, \quad x_{m+1}, \dots, x_n,$$

le système (S) prend la forme

$$(S') \quad \begin{cases} \frac{dF_r}{dt} = \mathcal{E}_r, & (r = 1, 2, \dots, m), \\ \frac{dx_j}{dt} = \mathcal{E}_j, & (j = m + 1, \dots, n), \end{cases}$$

où les  $\mathcal{E}(F_1, F_2, \dots, F_m, x_{m+1}, \dots, x_n, t)$  se comportent analytiquement par rapport à leurs arguments comme les  $X$  (par rapport aux anciennes variables).

L'invariance des (I) implique que les  $dH/dt, dF_1/dt, \dots, dF_m/dt$  s'annulent en vertu des équations (I) elles mêmes, ce qui se traduit par des

identités de la forme suivante:

$$(6) \quad \frac{dH}{dt} = MH + \sum_1^m M_r F_r,$$

$$(7) \quad \frac{dF_r}{dt} = N_r H + \sum_1^m N_{rs} F_s \quad (r = 1, 2, \dots, m),$$

où l'on doit entendre par  $M$ ,  $M_r$ ,  $N_r$ ,  $N_{rs}$  des fonctions holomorphes (\*).

Ceci posé, convenons de représenter par  $\bar{f}$  ce qui devient une fonction quelconque  $f(x_1, x_2, \dots, x_n, t)$ , lorsqu'on la réduit au moyen des relations

$$F_1 = 0, \quad F_2 = 0, \quad \dots, \quad F_m = 0,$$

c'est-à-dire, en ayant égard à l'expression de  $f$  per rapport aux nouvelles variables, lorsqu'on donne la valeur 0 aux  $m$  premières.

L'identité (6) permet d'affirmer que

$$\bar{H} = 0,$$

est une relation invariante par rapport au système réduit

$$(\bar{S}) \quad \frac{dx_j}{dt} = \bar{E}_j \quad (j = m + 1, \dots, n).$$

En effet, explicitons d'abord l'expression de  $dH/dt$ , rapportée au système (S), ou, ce qui revient au même, au système (S'). Elle est

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} + \sum_1^m \frac{\partial H}{\partial F_r} \frac{dF_r}{dt} + \sum_{m+1}^n \frac{\partial H}{\partial x_j} E_j.$$

En y faisant

$$F_r = 0, \quad (r = 1, 2, \dots, m),$$

et en tenant compte des (6), (7), on en tire:

$$\frac{\partial \bar{H}}{\partial t} + \sum_{m+1}^n \frac{\partial \bar{H}}{\partial x_j} \bar{E}_j = \bar{H} \left\{ \bar{M} - \sum_1^m \left( \frac{\partial \bar{H}}{\partial F_r} \right) \bar{N}_r \right\}.$$

Le premier membre n'est que la dérivée de  $\bar{H}$  par rapport à  $t$ , calculée d'après ( $\bar{S}$ ); le second membre contient  $\bar{H}$  en facteur.

C'est justement ce qu'il s'agissait de constater.

Appliquons maintenant le théorème a).

(\*) Pour la justification, voir la note de page 468. On n'a qu'à généraliser d'une façon bien évidente.



Il nous dit que le système

$$\bar{H} = 0, \quad \delta\bar{H} = 0,$$

c'est-à-dire, sous forme explicite,

$$\begin{aligned} \bar{H} &= 0, \\ \frac{\partial \bar{H}}{\partial x_j} &= 0, \end{aligned} \quad (j = m + 1, \dots, n),$$

est invariant vis-à-vis de  $(\bar{S})$ .

On peut interpréter différemment cette conclusion en revenant à (S). Voici l'énoncé qu'on en tire:

*b) Associons au système (I) les équations en termes finis provenant de la condition:*

$$(II) \quad \delta H = 0$$

(pour tout déplacement compatible avec  $F_1 = 0, F_2 = 0, \dots, F_m = 0$ ).

*Le système, qui en résulte (dès qu'il n'implique pas de contradiction), est encore invariant vis-à-vis de (S).*

*Démonstration.* — Gardons toujours les variables  $F_1, F_2, \dots, F_m, x_{m+1}, \dots, x_n$ . Tout d'abord il est bien clair que les équations

$$\frac{\partial H}{\partial x_j} = 0, \quad (j = m + 1, \dots, n),$$

provenant de (II), peuvent s'écrire:

$$\frac{\partial \bar{H}}{\partial x_j} = 0, \quad (j = m + 1, \dots, n),$$

puisqu'on doit tenir compte de

$$F_1 = F_2 = \dots = F_m = 0.$$

Posons, pour abrégier l'écriture:

$$H_j = \frac{\partial H}{\partial x_j},$$

d'où

$$\bar{H}_j = \frac{\partial \bar{H}}{\partial x_j}.$$

On a les identités :

$$\frac{dH_j}{dt} = \sum_1^m \frac{\partial H_j}{\partial F_r} \frac{dF_r}{dt} + \left\{ \frac{\partial H_j}{\partial t} + \sum_{m+1}^n \frac{\partial H_j}{\partial x_i} \Xi_i \right\},$$

où la dérivation  $d/dt$  a été explicitée d'après le système (S'), équivalent à (S), à un changement de variables près.

Pour  $F_1 = F_2 = \dots = F_m = 0$ , la quantité entre parenthèses se présente comme la dérivée  $d\bar{H}_j/dt$  de  $\bar{H}_j$ , calculée d'après ( $\bar{S}$ ). Or, si l'on tient compte aussi de

$$\begin{aligned} H &= 0, \\ H_j &= 0, \quad (j = m + 1, \dots, n), \end{aligned}$$

lesquelles, à cause de  $F_1 = F_2 = \dots = F_m = 0$ , se réduisent à

$$\begin{aligned} \bar{H} &= 0, \\ \bar{H}_j &= 0, \quad (j = m + 1, \dots, n), \end{aligned}$$

on reconnaît que

$$\frac{d\bar{H}_j}{dt} = 0.$$

C'est ce qui résulte de l'invariance de

$$\begin{aligned} \bar{H} &= 0, \\ \bar{H}_j &= 0, \quad (j = m + 1, \dots, n), \end{aligned}$$

vis-à-vis de ( $\bar{S}$ ).

D'autre part le premier terme

$$\sum_1^m \frac{\partial H_j}{\partial F_r} \frac{\partial F_r}{dt}$$

s'annule aussi, en vertu des (7), dès que les équations (I) sont vérifiées.

En définitive toute  $dH_j/dt$  s'annule d'après (I) et (II). *C. q. f. d.*

Comme au numéro précédent, on en tire un corollaire :

*b') Si, parmi les (I), il y a des véritables intégrales — au nombre de  $k$ , par exemple — le système, comprenant les autres  $m - k$  équations (I) et les (II), est invariant à lui seul.*

La condition de compatibilité porte dans ce cas sur  $n + 1 - k$  équations, au lieu que sur  $n + 1$ , comme il arrive en général.

#### 4. - Solutions particulières stationnaires. Justification de cet appellatif.

Rapportons nous au dernier énoncé  $b'$ ), qui embrasse évidemment les trois autres: le théorème  $b$ ) pour  $k = 0$ ; le théorème  $a$ ) pour  $m = k = 0$ ; et son corollaire  $a'$ ) pour  $m = 0, k = 1$ .

Les  $n + 1 - k$  équations (par hypothèse, compatibles) pourront ne pas être toutes indépendantes. Supposons qu'il y en ait  $n + 1 - k - k'$  distinctes ( $k' \geq 0$ ).

On peut imaginer d'en tirer autant des  $x$ . Après cela, en réduisant en conformité le système (S), on trouve, pour définir les autres  $x$ , un système différentiel d'ordre  $k + k' - 1$ . Mais on connaît déjà  $k$  intégrales de ce système restreint [celles, qui proviennent, moyennant la réduction indiquée, des intégrales, figurant par hypothèse parmi les (I)]. Il ne reste partant qu'à effectuer une opération d'ordre  $k' - 1$  pour obtenir  $\infty^{k+k'-1}$  solutions du système donné (S).

Il est bien naturel de les appeler *stationnaires* par rapport à la fonction  $H$ , qui intervient dans leur définition, puisque, pour une quelconque d'entre elles, on a  $\delta H = 0$ . La valeur de  $H$  est donc maximum ou minimum, ou plus exactement *stationnaire* parmi celles, qu'elle prend (pour une même valeur de  $t$ ) sur une quelconque des autres solutions de (S), également situées sur la variété  $F_1 = F_2 = \dots = F_m = 0$ .

#### 5. - Remarque sur la construction effective des solutions stationnaires.

D'après le numéro précédent, un système invariant (I) étant donné, on doit avant tout expliciter les équations provenant de

$$(II) \quad \delta H = 0$$

(pour tout déplacement compatible avec  $F_1 = F_2 = \dots = F_m = 0$ ).

Au point de vue purement théorique, il nous a été commode de regarder préalablement les  $F$  comme variables indépendantes et d'explicitier les (II) sous la forme

$$\frac{\partial H}{\partial x_j} = 0, \quad (j = m + 1 \dots, n).$$

Ce n'est pas en général la meilleure façon de procéder dans les cas concrets. Il convient au contraire (comme dans la théorie des maxima et minima relatifs) d'avoir recours aux multiplicateurs de LAGRANGE.

On est ainsi conduit à remplacer (II) par la condition équivalente

$$\delta H + \sum_1^m \lambda_r \delta F_r = 0$$

(pour tout déplacement virtuel), c'est-à-dire

$$(III) \quad \frac{\partial H}{\partial x_i} + \sum_1^m \lambda_r \frac{\partial F_r}{\partial x_i} = 0, \quad (i=1, 2, \dots, n),$$

où les  $\lambda_r$  désignent des indéterminées.

Leur élimination des (III) donnerait des relations entre les  $x$  (et  $t$ ), qui, en système avec (I), reviennent aux (I), (II) du numéro 3.

On peut donc considérer les équations (III) comme résultant de deux groupes, dont l'un (III)<sub>1</sub>, composé de  $m$  équations, définit les multiplicateurs  $\lambda$ , tandis que l'autre (III)<sub>2</sub>, pris ensemble avec (I), équivaut aux (II).

D'après cela il est bien clair que, en dérivant ces équations (III), on n'obtient en substance rien de nouveau, à cause de leur invariance.

Appelons ( $\Lambda$ ) l'ensemble des  $m$  équations définissant les dérivées des paramètres  $\lambda$ . Ce qu'on vient de dire peut être énoncé sous la forme suivante:

Les équations (I), (III) sont invariantes par rapport au système différentiel (I), ( $\Lambda$ ).

En effet la dérivation des (I), (III), faite d'après (S), ( $\Lambda$ ), ne conduit à aucune relation (entre les  $x$ , les  $\lambda$  et  $t$ ) distincte de (I), (III).

Ceci posé, imaginons de réduire notre nouveau système (S), ( $\Lambda$ ) moyennant les équations (I), (III).

Pour se rendre compte du résultat, il suffit ici encore de penser les (III) comme résultant des deux groupes (III)<sub>1</sub>, (III)<sub>2</sub>.

Quant aux  $x$ , tout se passe évidemment comme si l'on réduisait le système donné (S) moyennant les relations (I), (III)<sub>2</sub>, c'est-à-dire (I), (II). Il ne reste, après cela, que les relations (III)<sub>1</sub> définissant les  $\lambda$ . Les ( $\Lambda$ ) en sont, par construction, une pure conséquence et deviennent partant des identités lorsqu'on les réduit au moyen des équations (III)<sub>1</sub> elles-mêmes.

En résumant, sous forme de règle, il convient de retenir:

1) La recherche des solutions stationnaires peut se faire en éliminant d'abord les  $\lambda$  des (III) et en réduisant en conformité le système différentiel (S).

2) Il n'est pas nécessaire toutefois d'éliminer d'avance les  $\lambda$ . Au contraire, il est en général plus commode de commencer par dériver les (III), ce qui fournit les  $d\lambda/dt$  [le système, qu'on a appelé ( $\Lambda$ )], et pas

d'autres relations en termes finis. On déterminera ensuite les solutions particulières du système (S), ( $\Lambda$ ) (d'ordre  $n + m$ ), qui satisfont aux relations invariantes (I), (II). On aura de la sorte, en se débarrassant enfin des  $\lambda$ , les expressions des  $x$ , qui appartiennent aux solutions stationnaires cherchées.

## 6. - Stabilité.

Une solution stationnaire  $\Sigma_0$  d'un système différentiel (S) étant donnée, envisageons une seconde solution  $\Sigma$ , appartenant, comme  $\Sigma_0$ , à la variété

$$F_1 = 0, \quad F_2 = 0, \quad \dots, \quad F_m = 0,$$

et d'ailleurs quelconque.

Appelons  $\Delta x_i$  les différences des valeurs prises par les  $x_i$  sur  $\Sigma$  et sur  $\Sigma_0$  respectivement, pour une même valeur de  $t$ .

Nous dirons que  $\Sigma_0$  est une solution *stable* si, pour tout nombre positif  $\varepsilon$ , si petit qu'il soit, on peut assigner un autre nombre positif  $\eta$ , tel qu'on ait (pour une valeur réelle quelconque de  $t$ )

$$(8) \quad |\Delta x_i| < \varepsilon \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

dès qu'on prend pour  $\Sigma$  des valeurs initiales satisfaisant aux conditions

$$(9) \quad |\Delta x_i| < \eta \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

S'il n'en est pas ainsi, c'est-à-dire s'il existe un nombre fini  $\varepsilon$ , tel que, parmi les  $\Sigma$  satisfaisant initialement aux inégalités (9), il en ait une au moins sur laquelle, pour quelque valeur de  $t$ , les (8) ne sont pas toutes remplies (et cela si petit qu'on prenne  $\eta$ ), la solution  $\Sigma_0$  sera dite *instable*.

Il importe de remarquer que, si  $H = \text{const.}$  est une intégrale du système (S), la stabilité (au sens relatif, qu'on vient de préciser) est un caractère qualitatif (\*).

Il suffit en effet que  $\delta^2 H$  (calculée avec la même relativité que  $\delta H$ ) soit, tout le long de  $\Sigma_0$ , une forme quadratique définie, par rapport aux  $n - m$  différentielles, qui restent indépendantes sur la variété  $F_1 = F_2 = \dots = F_m = 0$ , pour qu'on puisse appliquer le raisonnement

(\*) Tandis qu'en général elle est une circonstance tout à fait exceptionnelle.

On peut consulter à ce propos, outre les recherches classiques de M. POINCARÉ sur les courbes définies par des équations différentielles:

T. LEVI-CIVITA, *Sopra alcuni criteri di instabilità*, « Annali di Matematica », ser. 3, t. V, 1901 [in questo vol.: I, pp. 1-84].

R. CIGALA, *Sopra un criterio di instabilità*, ibidem, t. XI, 1904.

classique de DIRICHLET et en déduire la stabilité de la solution, dont il s'agit.

Lorsque  $\delta^2 H$  n'est pas définie, la considération de l'intégrale  $H = \text{const.}$  ne donne, à elle seule, aucun renseignement. Il faudrait alors s'adresser au système (S) et avoir recours à la méthode de M. LIAPOUNOFF (\*).

## CHAPITRE II.

### SYSTÈMES CANONIQUES - MOUVEMENTS STATIONNAIRES MOUVEMENTS À LA ROUTH

#### 1. - Compléments relatifs aux systèmes de forme canonique (\*).

Prenons en particulier, pour (S), un système de forme canonique

$$(1) \quad \frac{dp_i}{dt} = - \frac{\partial H}{\partial x_i}, \quad \frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

la fonction caractéristique  $H$  étant indépendante de  $t$ .

Supposons en outre d'envisager un système invariant

$$(2) \quad F_1 = 0, \quad F_2 = 0, \quad \dots, \quad F_m = 0 \quad (m < n)$$

de relations *en involution*, également indépendantes de  $t$  (et distinctes de  $H = \text{const.}$ ).

Comme  $H = \text{const.}$  est une intégrale de (1), on peut l'associer aux (2), et, en posant

$$(3) \quad \delta H = 0$$

[pour tout déplacement compatible avec (2)], on est assuré, d'après les résultats du chapitre précédent, que le système simultané (2), (3) est invariant vis-à-vis de (1).

Les hypothèses particulières, faites à l'égard de (1), (2) (forme canonique, indépendance de  $t$ , involution) permettent d'ajouter que *la condition (3) ne peut donner lieu à plus que  $2(n - m)$  relations distinctes entre les  $p$  et les  $x$ , tandis qu'en général elle en donnerait  $2n - m$ .*

(\*) Sur l'instabilité de l'équilibre dans certain cas, où la fonction des forces n'est pas un maximum, « Journal de mathématiques pures et appliquées », 5<sup>e</sup> série, t. III, 1897.

(\*) Les conclusions se rapportant aux systèmes canoniques ont été retrouvées et généralisées par M. BURGATTI, d'après un point de vue entièrement différent. Voyez sa note dans les « Rendiconti dei Lincei » du 20 avril 1902.

*Première démonstration.* — On le prouve très simplement en s'appuyant sur la nature de la condition (3), qui est invariante vis-à-vis de tout changement de variables (biuniforme et régulier). On y peut donc envisager comme variables, à la place des  $x, p$ ,  $2n$  leurs combinaisons indépendantes quelconques.

Pour les fixer d'une façon convenable, on part de la remarque suivante:

Dire que les relations (2) sont en involution signifie simplement que les parenthèses de POISSON

$$(F_r, F_s) \quad (r, s = 1, 2, \dots, m)$$

s'annulent, en vertu des (2) elles-mêmes. Mais il est toujours loisible d'attribuer aux équations (2) une forme équivalente

$$(2') \quad \varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = 0, \quad \dots, \quad \varphi_m = 0,$$

telle qu'on ait *identiquement*

$$(\varphi_r, \varphi_s) = 0, \quad (r, s = 1, 2, \dots, m).$$

Ceci posé, on prendra d'abord pour variables  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m$  et  $n - m$  autres fonctions indépendantes

$$\varphi_j \quad (j = m + 1, \dots, n)$$

en involution entre elles et avec les premières, ce qui est bien possible, et dans une infinité de manières.

Il est encore possible d'associer à ces fonctions  $\varphi$ ,  $n$  conjuguées

$$\psi_i \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

(déterminées à une constante près) telles que la transformation entre les  $p_i, x_i$ , et les  $\varphi_i, \psi_i$  soit de contact (\*).

Le système (1), à la suite d'une telle transformation, reste canonique avec la même fonction caractéristique  $H$  (exprimée, bien entendu, par les  $\varphi, \psi$ ).

Ayant alors

$$(1') \quad \frac{d\varphi_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \psi_i}, \quad \frac{d\psi_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \varphi_i}, \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

l'invariance des (2) [plus précisément, celle des équivalentes (2')] se traduit

(\*) Voir, pour toutes ces assertions, l'ouvrage de M. GOURSAT, *Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre*, ou le second volume de la *Theorie der Transformationsgruppen* par LIE-ENGEL.

dans ce fait analytique que

$$\frac{\partial H}{\partial \psi_1}, \quad \frac{\partial H}{\partial \psi_2}, \quad \dots, \quad \frac{\partial H}{\partial \psi_m}$$

s'annulent toutes en vertu des (2').

Ceci posé, il est bien clair que la condition (3) n'entraîne plus que  $2(n - m)$  relations entre  $\varphi_{m+1}, \varphi_{m+2}, \dots, \varphi_n; \psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n$ , savoir

$$\frac{\partial \bar{H}}{\partial \varphi_j} = \frac{\partial \bar{H}}{\partial \psi_j} = 0, \quad (j = m + 1, \dots, n)$$

le trait superposé indiquant qu'on a posé  $\varphi_1 = \varphi_2 = \dots = \varphi_m = 0$ , c'est-à-dire qu'on tient compte des (2). C. q. d. f.

*Seconde démonstration.* — Je vais indiquer aussi une démonstration directe, qui n'exige aucun emprunt à la théorie des transformations de contact. J'ajouterai toutefois — pour éviter une petite discussion — la restriction non essentielle que les  $m$  relations données (2) (indépendantes par hypothèse) soient résolubles par rapport à  $m$  des  $p$ :  $p_1, p_2, \dots, p_m$  par exemple.

On peut alors prendre les (2) sous forme résolue, en les supposant préalablement remplacées par

$$(2'') \quad p_r = f_r(p_{m+1}, p_{m+2}, \dots, p_n; x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (r = 1, 2, \dots, m).$$

Les différences  $p_r - f_r$  sont encore en involution, d'après un lemme bien connu (\*), dès qu'il en était ainsi des  $F$ .

Posons, pour deux fonctions quelconques  $U, V$ ,

$$\{U, V\} = \sum_{m+1}^n \left( \frac{\partial U}{\partial p_j} \frac{\partial V}{\partial x_j} - \frac{\partial U}{\partial x_j} \frac{\partial V}{\partial p_j} \right).$$

Les conditions

$$(p_r - f_r, p_s - f_s) = 0$$

se réduisent à

$$(4) \quad \frac{\partial f_r}{\partial x_s} - \frac{df_s}{dx_r} + \{f_r, f_s\} \equiv 0, \quad (r, s = 1, 2, \dots, m).$$

J'ai employé le signe  $\equiv$  pour mettre en évidence qu'il s'agit d'une identité:

(\*) GOURSAT, loc. cit., § 62. Ce n'est qu'une forme particulière des (2').



il n'y a plus en effet à tenir compte des (2''), puisqu'il n'y a pas de  $p_r$  ( $r = 1, 2, \dots, m$ ) dans les premiers membres des (4).

Il nous faut exprimer aussi que les relations (2') sont invariantes.

En formant, d'après (1),  $dp_r/dt$ ,  $df_r/dt$ , on est conduit aux égalités

$$(5) \quad \frac{\partial H}{\partial x_r} + \{H, f_r\} + \sum_1^m \frac{\partial H}{\partial p_s} \frac{\partial f_r}{\partial x_s} = 0, \quad (r = 1, 2, \dots, m),$$

qui doivent subsister en conséquence des (2'').

Appelons ici encore  $\bar{H}$  ce qui devient  $H$  lorsqu'on tient compte des relations invariantes données, c'est-à-dire, en ayant égard à la forme résolue (2''), lorsqu'on y remplace chaque  $p_r$  par  $f_r$ .

Les dérivées de cette fonction  $\bar{H}(p_{m+1}, \dots, p_n; x_1, x_2, \dots, x_n)$  sont évidemment liées à celles de  $H$  par les formules

$$(6) \quad \begin{cases} \frac{\partial \bar{H}}{\partial p_j} = \frac{\partial H}{\partial p_j} + \sum_1^m \frac{\partial H}{\partial p_s} \frac{\partial f_s}{\partial p_j}, \\ \frac{\partial \bar{H}}{\partial x_j} = \frac{\partial H}{\partial x_j} + \sum_1^m \frac{\partial H}{\partial p_s} \frac{\partial f_s}{\partial x_j}, \end{cases} \quad (j = m + 1, \dots, n),$$

$$(7) \quad \frac{\partial \bar{H}}{\partial x_r} = \frac{\partial H}{\partial x_r} + \sum_1^m \frac{\partial H}{\partial p_s} \frac{\partial f_s}{\partial x_r}, \quad (r = 1, 2, \dots, m).$$

Les (6) donnent immédiatement

$$\{\bar{H}, f_r\} = \{H, f_r\} - \sum_1^m \frac{\partial H}{\partial p_s} \{f_r, f_s\},$$

d'où, en ajoutant aux (7):

$$\frac{\partial \bar{H}}{\partial x_r} + \{\bar{H}, f_r\} = \frac{\partial H}{\partial x_r} + \{H, f_r\} + \sum_1^m \frac{\partial H}{\partial p_s} \left[ \frac{\partial f_s}{\partial x_r} - \{f_r, f_s\} \right].$$

D'après (4) et (5), il reste (identiquement, tout  $p_r$  ayant disparu)

$$(8) \quad \frac{\partial \bar{H}}{\partial x_r} + \{\bar{H}, f_r\} = 0, \quad (r = 1, 2, \dots, m).$$

Ceci posé, remarquons que la condition (3) équivaut évidemment à

$$\delta \bar{H} = 0$$

(sans aucune liaison, désormais) c'est-à-dire, sous forme explicite, aux équations

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \bar{H}}{\partial p_j} = 0, \quad \frac{\partial \bar{H}}{\partial x_j} = 0, \quad (j = m + 1, m + 2, \dots, n); \\ \frac{\partial \bar{H}}{\partial x_r} = 0, \quad (r = 1, 2, \dots, m). \end{array} \right.$$

Les  $m$  dernières sont bien une conséquence des autres  $2(n - m)$ , d'après (8). C. q. f. d.

## 2. - Rappel des recherches de M. Routh.

Considérons un système matériel holonome, à liaisons indépendantes du temps; appelons  $x_1, x_2, \dots, x_n$  les paramètres indépendantes fixant la position du système, et supposons, avec M. ROUTH, que la force vive  $T$  (fonction quadratique des  $x'_i = dx_i/dt$ , dont les coefficients sont en général des fonctions des  $x$ ) soit indépendante de quelques unes des  $x$ : de  $x_1, x_2, \dots, x_m$  par exemple.

Si le potentiel  $U$  des forces appliquées est également indépendant de  $x_1, x_2, \dots, x_m$ , les équations du mouvement admettent  $\infty^{2m}$  solutions particulières très simples, pour lesquelles  $x_1, x_2, \dots, x_m$  (les coordonnées *ignorées*, selon l'expression des anglais) sont des fonctions linéaires du temps, tandis que les autres coordonnées  $x_{m+1}, \dots, x_n$  demeurent constantes. On le met au jour très simplement en introduisant les *moments cinétiques*  $p_i$  (ou variables conjuguées aux  $x_i$ ) d'après les positions

$$(9) \quad p_i = \frac{\partial T}{\partial x'_i}, \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

et en se rapportant à la forme canonique des équations du mouvement. La fonction caractéristique n'est autre chose que l'énergie totale

$$H = T - U,$$

en y supposant, bien entendu, remplacées les  $x'$  par leurs expressions, en fonction des  $p$  et des  $x$ , tirées des (9).

$T$  et  $U$  étant par hypothèse indépendantes de  $x_r$  ( $r = 1, 2, \dots, m$ ), il en sera de même de  $H$ , et les équations du mouvement pourront être

partagées en trois groupes, comme il suit :

$$(10) \quad \frac{dp_r}{dt} = 0, \quad (r = 1, 2, \dots, m);$$

$$(11) \quad \frac{dp_j}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_j}, \quad \frac{dx_j}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_j}, \quad (j = m + 1, m + 2, \dots, n);$$

$$(12) \quad \frac{dx_r}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial p_r}, \quad (r = 1, 2, \dots, m).$$

Le premier est immédiatement intégrable et donne

$$p_r = p_r^0 \quad (p_r^0 \text{ constante arbitraire});$$

le second, en y posant  $p_r = p_r^0$ , vient à dépendre seulement des inconnues  $p_j, x_j$ ; c'est donc un système d'ordre  $2(n - m)$ , apte à les déterminer. Dès qu'on l'ait intégré, la détermination des  $x_r$ , d'après (12), se fait par quadratures.

Ceci en général.

Mais il est bien clair qu'on a une solution particulière des (11), en prenant pour  $p_j, x_j$  des valeurs constantes vérifiant les  $2(n - m)$  équations

$$(13) \quad \frac{\partial H}{\partial x_j} = 0, \quad \frac{\partial H}{\partial p_j} = 0 \quad (j = m + 1, \dots, n)$$

(si tant est qu'elles soient compatibles). Il s'en suivra des valeurs également constantes pour les seconds membres des (12), d'où, pour les  $x_r$ , des fonctions linéaires de  $t$ .

Voilà les solutions annoncées, qui, en définitive, dépendent bien de  $2m$  constantes arbitraires: les  $p_r^0$  et les valeurs initiales des  $x_r$ .

D'après (13), on a, pour ces solutions particulières:

$$\delta H = 0,$$

compatiblement avec les conditions

$$p_r = p_r^0, \quad (r = 1, 2, \dots, m).$$

A cause de cette propriété de l'énergie totale, M. ROUTH a appelé *stationnaires* les mouvements correspondants.

### 3. - Mouvements stationnaires en général. Mouvements à la Routh.

On aperçoit bien nettement dans ce qu'on vient de dire l'origine des recherches plus générales, dont il est question dans le présent mémoire.

Tout d'abord, en se plaçant avec M. ROUTH au point de vue, pour ainsi dire, énergétique, on se trouve amené à généraliser ses considérations sur les systèmes holonomes, rappelées tout à l'heure. Il suffit pour cela de remplacer l'hypothèse des coordonnées ignorées, c'est-à-dire de l'existence d'intégrales de la forme particulière  $p_r = p_r^0$ , par les conditions (2).

Mais il y a lieu de profiter des intégrales connues, pour la recherche de solutions particulières, sans rendre stationnaire l'énergie totale, et même sans qu'il s'agisse de systèmes de forme canonique.

C'est ce que montrent les résultats du chapitre I.

D'après cela, je conviendrai (en étendant la définition de M. ROUTH) d'appeler *stationnaire tout mouvement d'un système matériel, qui soit représenté par une solution stationnaire* (au sens analytique abstrait envisagé jusqu'ici).

Comme définition il n'y a naturellement rien à objecter, mais on pourrait craindre de perdre en intérêt mécanique ce qu'on gagne en extension, dès que l'énergie ne demeure plus stationnaire.

Il n'en est rien, comme on le verra au dernier chapitre par l'examen critique des circonstances, qui ont principale influence sur le degré de simplicité d'un mouvement.

Il serait toutefois déraisonnable de méconnaître l'importance toute spéciale du cas de M. ROUTH et de sa première généralisation: soit pour leurs applications nombreuses; soit pour le plus grand nombre de constantes, dont dépendent les mouvements correspondants (voir le § suivant); soit enfin pour la forme particulière des conditions de stabilité.

Je propose partant d'appeler cette catégorie de mouvements stationnaires *mouvements à la ROUTH*.

En définitive ils sont caractérisés par les hypothèses suivantes:

1) Il s'agit de systèmes holonomes, à liaisons indépendantes du temps, soumis à des forces, dérivant d'un potentiel. Les équations du mouvement ont alors la forme canonique (1),  $H$  étant l'énergie totale.

2) Le système de relations invariantes

$$(2) \quad F_1 = 0, \quad F_2 = 0, \quad \dots, \quad F_m = 0,$$

d'où l'on part pour rendre  $H$  stationnaire, est en involution, et lui aussi, indépendant de  $t$ .

D'après la remarque du § 1, on est assuré que la condition (3) (tant qu'il y a compatibilité) conduit à un ensemble de  $\infty^m$ , au moins, mouvements à la ROUTH.

L'arbitrariété augmente naturellement lorsque quelques-unes des (2) sont des véritables intégrales. Au cas plus favorable (et d'ailleurs plus

important), où elles seraient toutes des intégrales, on aura précisément  $\infty^{2m}$  de tels mouvements.

*Remarque.* — Théoriquement on peut toujours par une transformation de contact se réduire au cas typique de M. ROUTH, où les premiers membres des relations invariantes données jouent le rôle de coordonnées ignorées. C'est ce qu'on a fait dans la première démonstration du § 1. Il ne faut pas en conclure toutefois que notre règle, se rapportant à un système quelconque de paramètres (canoniques ou non), soit dépourvue d'intérêt.

En effet le côté essentiel de nos considérations réside précisément dans la possibilité d'assigner certaines classes de solutions par des moyens simples (plus simples que l'intégration complète du système donné): en somme, par l'intégration d'un système réduit d'ordre  $m-1$  (au lieu que  $2n$ ).

Or la transformation de contact (qui reconduirait à la forme linéaire de M. ROUTH) dépend en général d'opérations analytiques d'ordre bien plus élevé que  $m-1$ . Elle n'est donc pas admissible comme instrument de calcul, bien qu'il soit parfaitement légitime et même convenable de s'en servir comme instrument de démonstration.

En ligne pratique il y a lieu d'ajouter une autre remarque:

Certains problèmes de dynamique comportant de variables, pour ainsi dire, naturelles (telles que les composantes de la rotation  $p, q, r$ , et les cosinus directeurs de la verticale  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ , pour un solide pesant mobile autour d'un point fixe;  $u, v, w, p, q, r$  pour un solide au sein d'un liquide; etc.). Dans ces cas, même si l'on connaîtrait d'avance une transformation conduisant aux variables  $\varphi_i, \psi_i$  du § 1, il y a avantage à l'éviter sous le double aspect de la simplicité des calculs et de la spontanéité des interprétations.

#### 4. - Règle de Dirichlet-Liapounoff.

Pour les mouvements à la ROUTH il y a lieu de poser la question de la stabilité sous la forme plus restreinte que voici (\*):

Rapportons-nous aux variables  $\varphi_i, \psi_i$  du § 1 (première démonstration).

Sur la variété invariante

$$(2') \quad \varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = 0, \quad \dots, \quad \varphi_m = 0$$

(\*) C'est justement la forme adoptée par M. ROUTH. On arriverait d'ailleurs aux mêmes conclusions en acceptant la définition proposée récemment par M. M. KLEIN et SOMMERFELD dans leur *Théorie des Kreisels*, chap. V, § 6.

on a aussi

$$\frac{\partial H}{\partial \varphi_1} = \frac{\partial H}{\partial \varphi_2} = \dots = \frac{\partial H}{\partial \varphi_m} = 0,$$

de façon que  $H$  ne dépend plus que des  $2(n - m)$  arguments  $\varphi_j, \psi_j$  ( $j = m + 1, \dots, n$ ).

Il est alors naturel de ne se préoccuper pas de  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m$ , qui jouent le rôle de coordonnées ignorées et de poser la question de la stabilité seulement à l'égard des autres  $2(n - m)$  paramètres  $\varphi_j, \psi_j$  <sup>(10)</sup>.

La simple inspection de  $\delta^2 \bar{H}$  (dans le cas général, où elle est irréductible comme forme quadratique des différentielles  $\delta \varphi_j, \delta \psi_j$ ) permet de décider sans ambiguïté si la solution, dont il s'agit, est stable ou instable.

On a en effet la règle de DIRICHLET-LIAPOUNOFF:

*Pour la stabilité il faut et il suffit que  $\delta^2 \bar{H}$  soit une forme définie.*

C'est sans doute une forme de stabilité, où les variables  $\varphi_i, \psi_i$ , auxquelles nous nous rapportons, jouent un rôle particulier. On peut toutefois reconnaître si cette stabilité existe ou n'existe pas, sans qu'il soit nécessaire une transformation préalable de variables, pour passer des  $x_i, p_i$  primitives aux  $\varphi_i, \psi_i$ . Il suffit pour cela de remarquer que, tout changement de variables entraînant une substitution linéaire entre leurs différentielles, la caractéristique de la forme quadratique  $\delta^2 H$  n'en reste pas altérée. Si l'on suppose donc de se rapporter à l'expression de  $\delta^2 H$  en variables quelconques, on n'aura qu'à vérifier:

1) si la caractéristique est précisément  $2(n - m)$ , auquel cas on pourra, dans une infinité de manières (par des opérations algébriques élémentaires réelles), réduire  $\delta^2 H$  à une forme équivalente  $Q$  ne dépendant plus que de  $2(n - m)$  arguments;

2) si la forme réduite  $Q$  est ou n'est pas définie.

C'est ce qui arrivera aussi pour  $\delta^2 H$  par rapport aux variables  $\delta \varphi_j, \delta \psi_j$ . En effet les formes réduites  $Q$  sont toutes équivalentes dans le domaine réel, c'est à dire transformables l'une dans l'autre par une substitution linéaire, réelle. Elles sont donc en particulier, toutes à la fois, définies ou indéfinies. Evidemment l'expression de  $\delta^2 H$  au moyen des  $\delta \varphi_j, \delta \psi_j$ , n'est autre qu'une réduite particulière.

<sup>(10)</sup> En fixant — il est presque inutile de le dire — à l'égard de  $\Delta \varphi_j, \Delta \psi_j$ , les mêmes conditions, indiquées pour les  $\Delta x_i$  dans la définition du chapitre précédent, § 6.

## CHAPITRE III.

## EXEMPLES DE MOUVEMENTS À LA ROUTH

## 1. - Corps solide suspendu par un de ses points.

a) *Solide pesant dans le cas général.* - On a, avec les notations usuelles,

$$H = \frac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2) + P(\gamma_1 x_0 + \gamma_2 y_0 + \gamma_3 z_0),$$

et l'on connaît (en dehors de l'intégrale des forces vives  $H = \text{const.}$  et de l'identité géométrique  $\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1$ ) la seule intégrale des aires pour les plans horizontaux

$$(1) \quad Ap\gamma_1 + Bq\gamma_2 + Cr\gamma_3 = \text{const.}$$

Appelons, pour abrégé,  $G_3$  son premier membre (moment des quantités de mouvement par rapport à la verticale ascendante du point fixe  $\Omega$ ).

Dans un mouvement à la ROUTH on doit avoir  $\delta H = 0$ , pour tout système d'accroissements de  $p, q, r, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$  satisfaisant à la condition  $G_3 = \text{const.}$ , et naturellement aussi à  $\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1$ .

Posons donc

$$\delta H - \omega \delta G_3 - \lambda(\gamma_1 \delta \gamma_1 + \gamma_2 \delta \gamma_2 + \gamma_3 \delta \gamma_3) = 0,$$

$\omega$  et  $\lambda$  étant les multiplicateurs, à priori indéterminés.

Il vient sous forme explicite

$$(2) \quad p = \omega \gamma_1, \quad q = \omega \gamma_2, \quad r = \omega \gamma_3;$$

$$(3) \quad Px_0 - \omega Ap - \lambda \gamma_1 = 0, \quad Py_0 - \omega Bq - \lambda \gamma_2 = 0, \quad Pz_0 - \omega Cr - \lambda \gamma_3 = 0.$$

En réduisant, d'après (2), les formules de POISSON

$$\frac{d\gamma_1}{dt} = \gamma_2 r - \gamma_3 q, \quad \frac{d\gamma_2}{dt} = \gamma_3 p - \gamma_1 r, \quad \frac{d\gamma_3}{dt} = \gamma_1 q - \gamma_2 p,$$

on reconnaît avant tout que  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$  sont des constantes. Cela signifie que la verticale du point de suspension  $\Omega$  occupe une position fixe par rapport au corps. Les mouvements en question se réduisent donc à des

rotations autour de la verticale de  $\Omega$ ; et à des rotations uniformes, puisque, d'après (1) et (2),

$$\omega(A\gamma_1^2 + B\gamma_2^2 + C\gamma_3^2) = \text{const.},$$

et par suite l'auxiliaire  $\omega$  ( $|\omega|$  est évidemment la vitesse angulaire) reste constante.

Ces rotations uniformes sont bien connues. Elles ont été étudiées par M. STAUDE <sup>(11)</sup>. Pour retrouver ses conclusions, on n'a qu'à discuter les équations (3). En y remplaçant  $p, q, r$  par leurs valeurs (2), elles s'écrivent

$$(3') \quad (\lambda + \omega^2 A)\gamma_1 = Px_0, \quad (\lambda + \omega^2 B)\gamma_2 = Py_0, \quad (\lambda + \omega^2 C)\gamma_3 = Pz_0,$$

d'où, en éliminant  $\lambda$  et  $\omega^2$ ,

$$\begin{vmatrix} \gamma_1, & A\gamma_1, & x_0 \\ \gamma_2, & B\gamma_2, & y_0 \\ \gamma_3, & C\gamma_3, & z_0 \end{vmatrix} = 0.$$

C'est l'équation d'un cône quadrique de sommet  $\Omega$ , lieu (dans le corps) des possibles axes permanents de rotation.

Ce cône passe par les arêtes du trièdre des coordonnées (c'est-à-dire par les axes principaux d'inertie, relatifs au sommet), puisque le déterminant s'annule lorsqu'on y remplace  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$  par 1, 0, 0; 0, 1, 0; 0, 0, 1.

Réciproquement — on le vérifie sans peine — toute génératrice de ce cône, dès qu'on la suppose dirigée verticalement, est bien un axe permanent de rotation. Il lui correspond une vitesse angulaire, qui résulte en général déterminée univoquement, d'après les équations (3').

La discussion des cas particuliers (dégénération du cône, indétermination de  $\omega$ , etc.), qui peuvent se présenter pour des distributions spéciales de la masse du corps (c'est-à-dire pour des valeurs nulles de quelques-unes des quantités  $B - C, C - A, A - B, x_0, y_0, z_0$ ) nous entraînerait trop loin. Il vaut mieux de s'en rapporter au mémoire cité de M. STAUDE.

Il resterait toutefois à former les conditions de stabilité, dont M. STAUDE ne s'est pas occupé. Je ne m'en occuperai pas non plus, en me contentant de signaler la question, qui n'exige d'ailleurs que quelque développement matériel de calcul.

<sup>(11)</sup> *Ueber permanente Rotationsachsen*, « Journal für die reine und angewandte Mathematik », B. 113, 1894.



b) *Cas de LAGRANGE.* — On a

$$A = B,$$

$$x_0 = y_0 = 0, \quad (z_0 > 0)$$

et les expressions de  $H$  et de  $G_3$  deviennent respectivement

$$H = \frac{1}{2}\{A(p^2 + q^2) + Cr^2\} + Pz_0\gamma_3,$$

$$G_3 = A(p\gamma_1 + q\gamma_2) + Cr\gamma_3.$$

Il existe dans ce cas la troisième intégrale

$$r = r_0 \quad (r_0 \text{ constante}),$$

qui est bien en involution avec

$$G_3 = \text{const.} \quad (12).$$

On doit s'attendre, d'après le chapitre précédent, à  $\infty^4$  mouvements à la ROUTH. Il est aisé de les caractériser. Écrivons la condition de stationnariété sous la forme

$$\delta H - \omega \delta G_3 - A\lambda(\gamma_1 \delta\gamma_1 + \gamma_2 \delta\gamma_2 + \gamma_3 \delta\gamma_3) = 0$$

( $\omega$ ,  $\lambda$  indéterminées), en y considérant  $\delta r = 0$ , à cause de l'intégrale  $r = r_0$ . Elle donne

$$\begin{cases} p = \omega\gamma_1, \\ q = \omega\gamma_2; \\ \omega p + \lambda\gamma_1 = 0, \\ \omega q + \lambda\gamma_2 = 0; \\ C\omega r_0 + A\lambda\gamma_3 = Pz_0. \end{cases}$$

Le second groupe, en y remplaçant  $p$  et  $q$  par leurs valeurs  $\omega\gamma_1$ ,  $\omega\gamma_2$ , devient

$$(\omega^2 + \lambda)\gamma_1 = 0, \quad (\omega^2 + \lambda)\gamma_2 = 0,$$

(12) On a en effet, en supposant d'adopter comme variables canoniques les angles d'EULER  $\theta$ ,  $\varphi$ ,  $\psi$  et leurs conjuguées  $p_\theta$ ,  $p_\varphi$ ,  $p_\psi$ :

$$G_3 = p_\psi, \quad Cr = p_\varphi,$$

d'où  $(G_3, r) = 0$ .

d'où, ou bien

$$1^{\circ} \quad \gamma_1 = \gamma_2 = 0 ;$$

ou bien

$$2^{\circ} \quad \lambda = -\omega^2 .$$

Dans le premier cas les cosinus directeurs de la verticale restent constants ( $\gamma_1 = 0$ ,  $\gamma_2 = 0$ ,  $\gamma_3 = -1$ ) et le mouvement se réduit à une rotations uniforme (les composantes de la vitesse angulaire étant  $p = 0$ ,  $q = 0$ ,  $r = r_0$ ) autour de l'axe de symétrie de l'ellipsoïde d'inertie, dirigé verticalement.

C'est ce qui arrive (rigoureusement en théorie, très prochainement en pratique) pour une toupie, lorsqu'on prend soin que l'axe soit dirigé verticalement au moment de la mise en marche (*toupie dormante*).

Dans le second cas, il reste, en se débarrassant de  $\lambda$ ,

$$(4) \quad \begin{cases} p = \omega\gamma_1, \\ q = \omega\gamma_2, \\ C\omega r_0 = A\omega^2\gamma_3 + Pz_0. \end{cases}$$

Ces valeurs, introduites dans l'intégrale des aires, donnent

$$A\omega^2 - G_3\omega + Pz_0\gamma_3 = 0 .$$

En multipliant par  $A\omega^2$  et remplaçant  $A\omega^2\gamma_3$  par sa valeur  $C\omega r_0 - Pz_0$ , il vient

$$(5) \quad A^2\omega^4 - AG_3\omega^3 + Pz_0 C r_0 \omega - P^2 z_0^2 = 0 ,$$

ce qui montre que l'auxiliaire  $\omega$  est une constante *non nulle* <sup>(13)</sup>.

Il s'en suit, d'après la troisième des (4), que  $\gamma_3$  aussi est une constante: *l'axe de symétrie du corps* (plus généralement de son ellipsoïde d'inertie) *décrit donc un cône circulaire autour de la verticale*.

Mais on peut aller plus avant et reconnaître complètement la nature du mouvement, d'après les équations (4).

En les écrivant

$$\begin{aligned} p &= \omega\gamma_1 + 0, \\ q &= \omega\gamma_2 + 0, \\ r_0 &= \omega\gamma_3 + \left( \frac{A-C}{C} \omega\gamma_3 + \frac{Pz_0}{C\omega} \right), \end{aligned}$$

<sup>(13)</sup> En effet le terme tout connu  $-P^2 z_0^2$  est négatif. L'équation (5) n'a donc aucune racine nulle; d'ailleurs elle admet toujours deux racines réelles au moins.

on met en évidence que la rotation instantanée du corps est la résultante de deux composantes constantes: l'une autour de la verticale (ascendante), mesurée (en valeur et signe) par  $\omega$ ; l'autre autour de l'axe de symétrie, mesurée par

$$\frac{A - C}{C} \omega \gamma_3 + \frac{Pz_0}{C\omega} = r_0 - \omega \gamma_3.$$

Il s'agit donc de *précessions régulières*. Leur ensemble dépend bien de quatre constantes:  $r_0$  et  $G_3$  (ou, si l'on veut,  $\omega \geq 0$  et  $\gamma_3$ ); la valeur initiale de  $\gamma_1$  (ou de  $\gamma_2$ , ou même, si l'on veut, de l'angle d'EULER  $\varphi$ ); enfin la valeur initiale de l'angle de précession  $\psi$ , lié aux variables  $p, q, r, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$  par la relation

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{G_3 - Cr_0\gamma_3}{A(1 - \gamma_3^2)},$$

qui se réduit à

$$\frac{d\psi}{dt} = \omega.$$

Pour voir s'il y a stabilité, les variables  $p, q, \dots, \gamma_3$ , si commodes pour l'étude du mouvement, ne sont pas les plus indiquées. On arrive plus rapidement au but, en ayant recours, avec M. M. KLEIN et SOMMERFELD<sup>(14)</sup>, aux angles d'EULER  $\vartheta, \varphi, \psi$  et à leurs dérivées.

Le résultat très simple est le suivant:

Les précessions régulières sont toujours stables. Les rotations autour de l'axe de symétrie, dirigé verticalement, le sont aussi, si le centre de gravité tombe au dessous du point fixe; dans le cas contraire (où rentre en particulier la toupie dormante) il y a stabilité alors et alors seulement que la vitesse angulaire  $r_0$ , autour de l'axe de symétrie, est assez grande, c'est-à-dire

$$\frac{C^2}{A} r_0^2 > 4Pz_0.$$

c) *Cas d'EULER*. -  $A, B, C$  étant quelconque, le moment des forces appliquées, par rapport au point fixe  $\Omega$ , est nul. L'énergie est alors purement cinétique, et l'on a

$$H = \frac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2).$$

<sup>(14)</sup> *Theorie des Kreisels*, chap. V, § 7, page 354 et suivantes.

Le moment résultant  $G$  des quantités de mouvement, par rapport à  $\Omega$ , reste constant (en valeur et direction).

La constance de la valeur absolue donne lieu à l'intégrale

$$G^2 = A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2 = \text{const.}$$

Cherchons d'abord les mouvements à la ROUTH auxquels elle donne lieu, et posons en conformité

$$\delta H - \frac{1}{2}\lambda \delta G^2 = 0,$$

en désignant le multiplicateur par  $-\frac{1}{2}\lambda$ .

Il s'en suit, en développant,

$$(1 - A\lambda)p = 0, \quad (1 - B\lambda)q = 0, \quad (1 - C\lambda)r = 0.$$

Dans le cas général, où  $A$ ,  $B$ ,  $C$  sont distincts, ces équations exigent évidemment que deux des composantes  $p$ ,  $q$ ,  $r$  soient nulles.

La troisième est alors nécessairement constante, d'après  $H = \text{const.}$  (ou  $G = \text{const.}$ ), et d'ailleurs arbitraire. Les mouvements en question sont donc (toutes et seules) les rotations uniformes autour des axes principaux d'inertie. Fixons le troisième, par exemple, et éliminons  $r$  de  $H$ , en le tirant de

$$G^2 = A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2.$$

Il vient

$$H = \frac{1}{2C} \{A(C - A)p^2 + B(C - B)q^2 + G^2\},$$

d'où ( $p$  et  $q$  ayant la valeur zéro pour les rotations autour du troisième axe)

$$\delta^2 H = \frac{1}{C} \{A(C - A) \delta p^2 + B(C - B) \delta q^2\}.$$

C'est une forme définie, pourvu que  $C - A$  et  $C - B$  aient même signe. On en tire la conclusion bien connue:

Les rotations autour du grand et du petit axe de l'ellipsoïde d'inertie sont stables; celles, qui correspondent à l'axe moyen, sont instables.

Examinons maintenant plus de près s'il y a d'autre profit à tirer des intégrales, admises par le problème, qui nous occupe.

Comme on l'a déjà remarqué, le moment  $G$  est constant, non seulement en valeur, mais en direction aussi. En le projetant sur les trois axes fixes  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  (qu'on peut d'ailleurs choisir arbitrairement) on obtient

les trois intégrales (des aires):

$$G_1 = Ap\alpha_1 + Bq\alpha_2 + Cr\alpha_3 = \text{const.},$$

$$G_2 = Ap\beta_1 + Bq\beta_2 + Cr\beta_3 = \text{const.},$$

$$G_3 = Ap\gamma_1 + Bq\gamma_2 + Cr\gamma_3 = \text{const.},$$

$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \gamma_3$  désignant comme d'habitude les cosinus directeurs de  $\xi, \eta, \zeta$  par rapport aux axes principaux d'inertie.

Il est bien connu que les expressions canoniques de  $G_1, G_2, G_3$  ne sont point en involution entre elles, mais qu'il en est ainsi pour le couple formé avec

$$G_1^2 + G_2^2 + G_3^2 = G^2$$

et une quelconque des  $G_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ).

Au couple

$$G^2 = \text{const.}, \quad G_3 = \text{const.},$$

on peut faire correspondre, d'après la position

$$\delta H - \omega \delta G_3 - \frac{1}{2} \lambda \delta G^2 - \mu(\gamma_1 \delta \gamma_1 + \gamma_2 \delta \gamma_2 + \gamma_3 \delta \gamma_3) = 0$$

( $\omega, \lambda$  et  $\mu$  indéterminées),  $\infty^4$  mouvements à la ROUTH: lesquels?

Il suffit d'expliciter, pour reconnaître qu'on est justement reconduit aux rotations envisagées tout à l'heure. En surplus l'intervention des variables  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$  donne lieu aux conséquences suivantes:

1) L'axe de rotation est dirigé dans l'espace suivant la droite  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$  (axe fixe des  $\zeta$ ). Comme il peut être choisi arbitrairement, ceci revient à dire que la direction dans l'espace de l'axe de rotation peut être fixée d'avance d'une façon quelconque.

Il s'en suit que l'ensemble des rotations envisagées dépend bien de 4 constantes: deux pour fixer l'orientation dans l'espace de l'axe de rotation (qui est un de trois axes d'inertie); et deux pour fixer la valeur constante de la vitesse angulaire et la position initiale du corps autour de l'axe.

2) Le critère de stabilité (telle qu'on doit l'entendre pour un mouvement à la ROUTH, d'après la définition du chap. préc. § 4) est bien celui qu'on a tiré tout à l'heure, en tenant compte seulement de  $G^2 = \text{const.}$

C'est évident, dès qu'on pense que  $G_3$  dépend aussi de la direction  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ , tandis que  $H$  et  $G$  contiennent seulement  $p, q, r$ .

L'expression trouvée pour  $\delta^2 H$  est déjà une forme réduite  $Q$  (à  $2(3-2) = 2$  arguments); il est donc inutile de la transformer davantage en se servant de  $G_3 = \text{const.}$

Faisons remarquer, en terminant, qu'il n'y a pas d'autre manière (essentiellement distincte de celle qu'on vient de discuter) de combiner les intégrales des aires pour en tirer des mouvements à la ROUTH.

## 2. - Problème plan des trois corps.

Soient  $P_0, P_1, P_2$  les trois corps;  $m_0, m_1, m_2$  leurs masses;  $x_1, y_1; x_2, y_2$  les coordonnées de  $P_1, P_2$  par rapport à  $P_0$  (plus précisément par rapport à un système d'axes de direction invariable, ayant l'origine en  $P_0$ );  $p_1, q_1; p_2, q_2$  les composantes (par rapport aux mêmes axes) des quantités de mouvement *absolu* de  $P_1, P_2$ .

Convenons de désigner par

$$r_1, r_2, \Delta,$$

les trois distances

$$\overline{P_0P_1} = \sqrt{x_1^2 + y_1^2},$$

$$\overline{P_0P_2} = \sqrt{x_2^2 + y_2^2},$$

$$\overline{P_1P_2} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2},$$

et supposons (comme il est toujours permis sans altérer les équations différentielles du mouvement) que le centre de gravité du système  $P_0, P_1, P_2$  reste immobile.

La somme des quantités de mouvement des trois points  $P_0, P_1, P_2$  est alors nulle, et il en résulte que

$$-(p_1 + p_2), \quad -(q_1 + q_2)$$

sont les composantes de la quantité de mouvement de  $P_0$ .

On a ainsi, pour les vitesses absolues de  $P_0, P_1, P_2$ , les composantes

$$-\frac{1}{m_0}(p_1 + p_2), \quad -\frac{1}{m_0}(q_1 + q_2);$$

$$\frac{p_1}{m_1}, \quad \frac{q_1}{m_1};$$

$$\frac{p_2}{m_2}, \quad \frac{q_2}{m_2},$$

d'où l'expression suivante de l'énergie cinétique du système:

$$T = \frac{1}{2m_0} \{(p_1 + p_2)^2 + (q_1 + q_2)^2\} + \frac{1}{2} \sum_i \frac{1}{m_i} (p_i^2 + q_i^2).$$

Il s'en suit encore que les composantes  $dx_i/dt$ ,  $dy_i/dt$  de la vitesse relative de  $P_i$  ( $i = 1, 2$ ), par rapport à  $P_0$ , ont les expressions :

$$(6) \quad \begin{cases} \frac{dx_i}{dt} = \frac{p_i}{m_i} + \frac{1}{m_0}(p_1 + p_2), \\ \frac{dy_i}{dt} = \frac{q_i}{m_i} + \frac{1}{m_0}(q_1 + q_2). \end{cases} \quad (i = 1, 2)$$

On a d'autre part le potentiel newtonien

$$(7) \quad U = f \left\{ \frac{m_0 m_1}{r_1} + \frac{m_0 m_2}{r_2} + \frac{m_1 m_2}{\Delta} \right\}$$

( $f$  constante de l'attraction universelle). L'énergie totale  $H$  du système est donc

$$(8) \quad H = T - U = \frac{1}{2m_0} \{ (p_1 + p_2)^2 + (q_1 + q_2)^2 \} + \frac{1}{2} \sum_1^2 \frac{1}{m_i} (p_i^2 + q_i^2) - U.$$

On sait que les équations du mouvement peuvent être présentées sous forme canonique avec quatre degrés de liberté,  $H$  pour fonction caractéristique,

$$\begin{aligned} x_1, & \quad y_1, & \quad x_2, & \quad y_2, \\ p_1, & \quad q_1, & \quad p_2, & \quad q_2, \end{aligned}$$

comme couples de variables conjuguées<sup>(15)</sup>. Mais nous n'aurons pas à expliciter les équations différentielles. Il va nous suffire de remarquer qu'elles admettent, en dehors de  $H = \text{const.}$ , l'intégrale des aires, relative au plan du mouvement (qui est d'ailleurs la seule intégrale connue). Cette intégrale, en supposant de prendre comme pole fixe la position occupée par  $P_0$  à l'instant envisagé, s'écrit

$$(9) \quad G = \sum_1^2 (x_i q_i - y_i p_i) = \text{const.}$$

Nous sommes maintenant en mesure d'étudier très simplement les  $\infty^2$  mouvements à la ROUTH de notre système, provenant de

$$\delta H - \omega \delta G = 0$$

<sup>(15)</sup> POINCARÉ, *Sur une forme nouvelle des équations du problème des trois corps*, « Acta Mathematica », t. 21, 1897; ou bien *Leçons de mécanique céleste*, t. 1, Paris, 1905, n. 26.

( $\omega$  multiplicateur indéterminé), ce qui se traduit, d'après (8) et (9) dans les huit équations:

$$(10) \quad \begin{cases} \frac{p_i}{m_i} + \frac{1}{m_0} (p_1 + p_2) = -\omega y_i, \\ \frac{q_i}{m_i} + \frac{1}{m_0} (q_1 + q_2) = \omega x_i; \end{cases} \quad (i=1, 2)$$

$$(11) \quad \begin{cases} \frac{\partial U}{\partial x_i} + \omega q_i = 0, \\ \frac{\partial U}{\partial y_i} - \omega p_i = 0. \end{cases} \quad (i=1, 2)$$

En tenant compte des (6), les équations (10) se réduisent simplement à

$$(10') \quad \begin{cases} \frac{dx_i}{dt} = -\omega y_i, \\ \frac{dy_i}{dt} = \omega x_i. \end{cases} \quad (i=1, 2)$$

L'interprétation cinématique de ces formules est bien évidente:

Les deux points  $P_1, P_2$  tournent autour de  $P_0$  avec la même vitesse angulaire  $\omega$ .

Il s'en suit en particulier que les trois distances  $r_1, r_2, \Delta$ , c'est-à-dire la configuration des trois corps demeure invariable pendant le mouvement. Pour la déterminer, on n'a qu'à tenir compte des (11).

En remplaçant, dans les équations (10),  $\omega p_i, \omega q_i$  par leurs valeurs, tirées des (11), il vient

$$(11a) \quad \frac{\partial U}{\partial x_i} + \frac{m_i}{m_0} \left( \frac{\partial U}{\partial x_1} + \frac{\partial U}{\partial x_2} \right) + m_i \omega^2 x_i = 0, \quad (i=1, 2),$$

$$(11b) \quad \frac{\partial U}{\partial y_i} + \frac{m_i}{m_0} \left( \frac{\partial U}{\partial y_1} + \frac{\partial U}{\partial y_2} \right) + m_i \omega^2 y_i = 0, \quad (i=1, 2),$$

les (11 b) se déduisant des (11 a) par le changement matériel de  $x$  en  $y$ .

Sous forme développée, en tenant compte de l'expression (7) de  $U$ , j'écrirai les (11 a), comme il suit:

$$(12) \quad \begin{cases} \left[ f \left( \frac{m_0 + m_1}{r_1^3} + \frac{m_2}{\Delta^3} \right) - \omega^2 \right] x_1 + f m_2 \left[ \frac{1}{r_2^3} - \frac{1}{\Delta^3} \right] x_2 = 0, \\ f m_1 \left[ \frac{1}{r_1^3} - \frac{1}{\Delta^3} \right] x_1 + \left[ f \left( \frac{m_0 + m_1}{r_2^3} + \frac{m_1}{\Delta^3} \right) - \omega^2 \right] x_2 = 0, \end{cases}$$



en les envisageant comme deux équations linéaires en  $x_1, x_2$ , qui, à cause des (11 b), doivent d'ailleurs être vérifiées aussi par  $y_1, y_2$ .

On est ainsi conduit à distinguer deux cas :

1) Les deux systèmes de solutions  $x_1, x_2; y_1, y_2$  sont distincts, c'est-à-dire le déterminant  $x_1y_2 - x_2y_1$ , ou, si l'on veut, l'aire du triangle  $P_0P_1P_2$ , ne s'annule pas.

2) Les deux solutions coïncident (ce qui veut dire:  $P_0, P_1, P_2$  en ligne droite).

*Premier cas.* — Les équations (12), admettant par hypothèse deux solutions *distinctes*, leurs quatre coefficients doivent être tous identiquement nuls.

Ceci donne d'abord

$$\frac{1}{r_1^3} = \frac{1}{\Delta^3}, \quad \frac{1}{r_2^3} = \frac{1}{\Delta^3},$$

c'est-à-dire

$$r_1 = r_2 = \Delta,$$

après quoi les deux autres conditions se réduisent simplement à

$$(13) \quad \omega^2 = \frac{fM}{\Delta^3} \quad (M = m_0 + m_1 + m_2).$$

On en conclut que le triangle  $P_0P_1P_2$  (invariable, comme on l'avait déjà remarqué) est équilatéral et que la vitesse angulaire  $\omega$  est une constante, liée à la longueur  $\Delta$  du côté du triangle par la relation (13).

Ces solutions dépendent bien de deux constantes arbitraires: la dimension  $\Delta$  du triangle équilatéral (qui détermine moyennant (13) la vitesse de rotation; ou vice-versa); et l'orientation initiale du triangle par rapport à une direction fixe.

Il est à peine nécessaire d'ajouter que, le centre de gravité des trois corps  $P_0, P_1, P_2$  ayant été supposé fixe, leur mouvement absolu est une rotation uniforme de vitesse angulaire  $\omega$  autour de ce point.

*Second cas.* — Prenons l'axe des  $x$  dirigé suivant la droite, où se trouvent (à l'instant envisagé) les trois corps  $P_0, P_1, P_2$ . On a alors  $y_1 = y_2 = 0$ , et il n'y a plus à se préoccuper des  $y$ .

Voyons ce qu'il arrive des  $x$ . On peut supposer, sans nuire évidemment à la généralité de la discussion, que  $P_0$  soit situé entre  $P_1$  et  $P_2$  et que  $P_0P_1$  soit la direction positive de l'axe des  $x$ .

On aura

$$r_1 = x_1, \quad r_2 = -x_2, \quad \Delta = x_1 - x_2 = r_1 + r_2,$$

et les équations (12) s'écriront:

$$(12') \quad \begin{cases} r_1 \omega^2 = f \left[ \frac{m_0 + m_1}{r_1^2} + \frac{m_2}{(r_1 + r_2)^2} - \frac{m_2}{r_2^2} \right], \\ r_2 \omega^2 = f \left[ \frac{m_0 + m_2}{r_2^2} + \frac{m_1}{(r_1 + r_2)^2} - \frac{m_1}{r_1^2} \right], \end{cases}$$

d'où, en éliminant  $\omega^2$  et en chassant les dénominateurs,

$$\begin{vmatrix} r_1 & (m_0 + m_1)r_2^2(r_1 + r_2)^2 + m_2r_1^2r_2^2 - m_2r_1^2(r_1 + r_2)^2 \\ r_2 & (m_0 + m_2)r_1^2(r_1 + r_2)^2 + m_1r_1^2r_2^2 - m_1r_2^2(r_1 + r_2)^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Le premier membre est homogène de cinquième degré en  $r_1, r_2$ . En divisant par  $r^5$ , en posant

$$\frac{r_2}{r_1} = A,$$

et en réduisant, on obtient l'équation de LAGRANGE

$$(14') \quad (m_0 + m_1)A^5 + (2m_0 + 3m_1)A^4 + (m_0 + 3m_1)A^3 - (m_0 + 3m_2)A^2 - (2m_0 + 3m_2)A - (m_0 + m_2) = 0,$$

qui admet une racine positive et une seule, comme le montrent les signes des coefficients.

Le rapport des distances étant ainsi déterminé, les deux équations (12') donnent nécessairement pour  $\omega^2$  une même valeur. En les additionnant on obtient cette valeur sous la forme symétrique

$$\omega^2(r_1 + r_2) = f \left\{ \frac{m_0}{r_1^2} + \frac{m_0}{r_2^2} + \frac{m_1 + m_2}{(r_1 + r_2)^2} \right\},$$

qui met en évidence la réalité de  $\omega$ .

Ici encore on a en définitive  $\infty^2$  solutions, demeurant arbitraires une des distances et l'orientation initiale de la droite  $P_2P_0P_1$ .

*Stabilité.* — Sans insister davantage, je me bornerai à rappeler les résultats, dus, comme on sait, à LIOUVILLE<sup>(16)</sup> et à M. ROUTH<sup>(17)</sup>.

Le second cas (corps alignés) est toujours instable.

Le premier (triangle équilatéral) peut être stable ou instable suivant

<sup>(16)</sup> Extrait d'un mémoire sur un cas particulier du problème des trois corps, « Journal de Mathématiques pures et appliquées », t. VII, 1842.

<sup>(17)</sup> On Laplace's three particles, « Proceedings of the London Mathematical Society », vol. VI, 1875.

le rapport des masses; la condition de stabilité étant

$$M^2 > 27(m_0m_1 + m_0m_2 + m_1m_2).$$

Elle est bien satisfaite lorsqu'une des masses (soit  $m_0$ ) est prépondérante sur les deux autres (étant par exemple,  $m_1/m_0, m_2/m_0 < 1/54$ ).

Si au contraire les trois masses diffèrent peu, il y a assurément instabilité.

### 3. - Reinseignements bibliographiques.

On trouve d'autres exemples de mouvements à la ROUTH dans les ouvrages de cet auteur et notamment dans l'*Advanced Part* de son *Traité de dynamique* (cinquième édition, London : Mac millan, 1905; traduction allemande, Leipzig: Teubner, 1898).

À signaler encore:

T. LEVI-CIVITA: *Sui moti stazionari di un corpo rigido nel caso della Kowalevsky*. « Rendiconti dei Lincei », 5 Mai, 1 et 16 Juin 1901 (\*).

G. PICCIATI: *Sui moti stazionari di sistemi olonomi, soggetti a forze conservative in casi particolari*. « Atti dell'Istituto Veneto », T. LXI, 1902.

A. VITERBI: *Sui moti stazionari spontanei di un solido immerso in un liquido indefinito*. « Ibidem », T. LXII, 1903.

## CHAPITRE IV.

### REMARQUES CRITIQUES

#### 1. - Exemple élémentaire.

Soit  $P$  un point matériel, mobile dans le plan sous l'action d'une force dérivant d'un potentiel.

Les petites oscillations du point, autour d'une position d'équilibre stable, peuvent être définies (après un choix convenable des axes des coordonnées) par les équations caractéristiques des mouvements harmoniques

$$\begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} + \omega_1^2 x = 0, \\ \frac{d^2y}{dt^2} + \omega_2^2 y = 0, \end{cases}$$

(\*) In questo vol.: IV, pp. 107-128. [N.d.R.].

$\omega_1$  et  $\omega_2$  étant deux constantes (réelles), qui dépendent de la nature de la force.

Les intégrales de ces équations sont

$$(1) \quad \begin{cases} x = A \cos(\omega_1 t + \alpha), \\ y = B \cos(\omega_2 t + \beta), \end{cases}$$

avec les quatre constantes  $A$ ,  $\alpha$ ,  $B$ ,  $\beta$ , qui doivent être déterminées par les conditions initiales.

Supposons qu'on ait fixées d'une façon quelconque, et considérons la correspondante trajectoire du mouvement, c'est-à-dire la courbe  $C$  représentée paramétriquement par les (1).

Elle reste toujours à l'intérieur du rectangle formé par les droites  $x = \pm A$ ,  $y = \pm B$ ; mais sa nature est essentiellement différente selon que  $\omega_1$  et  $\omega_2$  sont ou ne sont pas commensurables entre eux.

Dans le premier cas la courbe  $C$  est fermée et algébrique.

Lorsque au contraire le rapport  $\omega_1/\omega_2$  est irrationnel, la courbe est transcendente et passe aussi près que l'on veut d'un point quelconque intérieur au rectangle<sup>(18)</sup>. Pratiquement elle remplit le rectangle.

On voit ainsi que, pour  $\omega_1/\omega_2$  nombre rationnel, l'élimination de  $t$  entre les (1) donne lieu à une liaison, qu'on peut voir (je veux dire mettre en évidence par quelque moyen expérimental), entre les positions, qui seront successivement occupées par le mobile.

Dans le second cas il n'y a plus de relation physiquement saisissable. Au point de vue pratique les choses se passent comme s'il n'existait aucune relation.

## 2. - Relations uniformes en général.

Des conclusions analogues s'appliquent aux mouvements des systèmes, dont la position et (par conséquent) la distribution des vitesses dépendent d'un nombre fini de paramètres: soient  $x_1, x_2, \dots, x_n$ .

Supposons ces paramètres accessibles à l'expérience (d'une façon d'ailleurs quelconque), et envisageons les équations finies d'un mouvement du système:

$$(2) \quad x_i = \varphi_i(t), \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

<sup>(18)</sup> Voyez par exemple APPELL, *Traité de Mécanique rationnelle*, t. I, page 488 (de la seconde édition).

les  $\varphi_i$  étant bien entendu des fonctions uniformes et régulières pendant la durée de ce mouvement.

L'exemple, indiqué tout à l'heure, montre qu'en général l'élimination de  $t$  ne donnera pas lieu à  $n - 1$  relations effectives (c'est-à-dire vérifiables en dehors de l'analyse mathématique), mais seulement à un certain nombre, qui peut même être nul.

Pour donner à cette remarque une forme précise, il suffit d'avoir recours à une notion, acquise à la science depuis GAUSS et JACOBI, mais beaucoup mieux appréciée à la suite des recherches mémorables de M. POINCARÉ sur le problème des trois corps. Je fais allusion à la notion de *relations uniformes* <sup>(19)</sup>, et je vais la rappeler.

Soit généralement un système de  $m \leq n$  relations

$$(3) \quad F_r(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \quad (r = 1, 2, \dots, m)$$

entre  $x_1, x_2, \dots, x_n$ .

Supposons qu'elles soient vérifiées par des valeurs particulières  $x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0$  des  $x$ ; en langage géométrique plus compréhensif, au point  $P_0$ .

On dit que le système (3) est uniforme au voisinage de  $P_0$ , s'il existe un domaine  $D$  autour de ce point, jouissant de la propriété suivante:

Dès qu'on se donne arbitrairement les valeurs de  $n - m$  des  $x$  (avec la seule condition qu'elles appartiennent au domaine  $D$ ) les valeurs des autres  $m$  restent déterminées par les équations (3) *d'une façon unique*.

D'après cette définition, les remarques précédentes reviennent à dire que, parmi les relations entre les  $x$ , provenant des (3), il y a lieu de considérer tout particulièrement celles qui peuvent former un système uniforme. Supposons qu'il y en ait  $m (\leq n - 1)$  indépendantes, et pas davantage.

Ce nombre  $m$  mesure, à un certain sens, le degré de netteté du mouvement. Le mouvement réussit d'autant mieux caractérisé que  $m$  s'approche de  $n - 1$ .

Quant aux autres  $n - m - 1$  relations indépendantes, fournies par l'élimination de  $t$ , elles échappent complètement à l'intuition, soit géométrique, soit mécanique.

<sup>(19)</sup> JACOBI les appelait analytiques. On peut voir à ce propos une intéressante note historique de M. SCHLESINGER, *Ueber den Begriff der analytischen Funktion bei Jacobi*, « Bibliotheca Mathematica », Bd. VI, 1905.

### 3. - Systèmes mécaniques usuels.

#### Raison de l'intérêt de leurs mouvements stationnaires.

Les paramètres, dont on sert ordinairement pour fixer l'état de mouvement (position et vitesse) d'un système matériel sont des longueurs et des angles.

Désignons en général par  $l$  un paramètre quelconque de la première sorte, par  $\lambda$  un paramètre quelconque de la seconde. Les nombres  $l$  sont naturellement déterminés d'une façon unique pour un état de mouvement donné; les  $\lambda$  le sont au contraire à moins de multiples entiers de  $2\pi$ .

Il arrive presque toujours, dans les problèmes naturels, qu'on peut s'arranger de façon que la force vive et plus généralement les intégrales (ou relations invariantes) connues dépendent *algébriquement* des  $l$ , et des fonctions trigonométriques des  $\lambda$ . Les premiers membres se présentent alors comme fonctions algébriques des  $l$  et des  $e^{i\lambda}$ , et il est bien clair (d'après le Chap. I) que toute condition de stationnariété résulte elle-même algébriques dans les  $l$ ,  $e^{i\lambda}$ .

Les solutions stationnaires vérifient partant un système de relations *uniformes* <sup>(20)</sup> entre les paramètres physiquement accessibles,  $l$  et grandeurs géométriques <sup>(21)</sup> des angles  $\lambda$ ; tandis que, en général, pour les autres solutions du problème, il n'existe pas de relations uniformes ou il en existe un nombre moindre.

C'est ici la véritable origine de l'intérêt, présenté par les mouvements stationnaires, qu'on rencontre dans les applications concrètes. Ils possèdent des caractères de simplicité et de netteté, qui les mettent en évidence parmi les autres mouvements possibles et les rendent aussi précieux comme points de repère pour aborder l'étude du cas général.

Nous avons ainsi analysé au point de vue qualitatif la nature des mouvements stationnaires. On peut se demander s'il n'y a rien de quantitatif contribuant à les distinguer. A première vue on serait tenté à le croire en ayant égard aux opérations analytiques, d'où ils ressortent. Mais il est aisé de se convaincre qu'il n'en est rien.

On vérifie en effet sans peine, pour un système différentiel quelconque, que toute solution, donnée d'avance, peut être considérée comme stationnaire (suivant la définition du Chap. I), dès qu'on ait effectué un

<sup>(20)</sup> A des systèmes de valeurs exceptionnelles près (points multiples) au voisinage desquelles on a un nombre fini de branches. Ceci n'infirme d'ailleurs pas les considérations, qui suivent dans le texte.

<sup>(21)</sup> Je dis *grandeurs géométriques*, parce que les nombres  $\lambda$  présentent au contraire l'indétermination de multiples entiers de  $2\pi$ .

changement de variables convenable (régulier et biunivoque au voisinage de quelque système de valeurs, appartenant à la solution donnée).

Il y a même plus.

Plaçons nous dans le cas typique de M. ROUTH, où l'on a affaire à un système canonique

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_i}, \quad \frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

$H$  étant indépendant de  $t$ .

Un mouvement quelconque, défini par ce système, peut acquérir tous les caractères *formels* d'un mouvement à la ROUTH. Il suffit pour cela d'avoir recours à une transformation convenable <sup>(22)</sup>.

---

(22) Voyez ma note *Sui moti stazionari dei sistemi oloноми*, «Rendiconti dei Lincei», 17 avril 1901 [in questo vol.: III, pp. 101-106].

*Padoue, septembre 1905.*

## TABLE DES MATIÈRES

Préface . . . . . page 465-466

**CHAPITRE I. — Considérations générales s'appliquant à tout système différentiel.**

|  |              |
|--|--------------|
| § 1. Préliminaires . . . . .   | page 466-467 |
| § 2. Étude d'un cas simple . . . . .   | » 467-469    |
| § 3. Extension du résultat . . . . .   | » 469-472    |
| § 4. Solutions particulières stationnaires. — Justification de<br>cet appellatif . . . . . | » 473        |
| § 5. Remarque sur la construction effective des solutions station-<br>naires . . . . .     | » 473-475    |
| § 6. Stabilité . . . . .   | » 475-476    |

**CHAPITRE II. — Systèmes canoniques — Mouvements stationnaires  
Mouvements à la Routh.**

|  |              |
|--|--------------|
| § 1. Compléments relatifs aux systèmes de forme canonique . . . . .            | page 476-480 |
| § 2. Rappel des recherches de M. ROUTH . . . . .                               | » 480-481    |
| § 3. Mouvements stationnaires en général. — Mouvements à la<br>ROUTH . . . . . | » 481-483    |
| § 4. Règle de DIRICHLET-LIAPOUNOFF . . . . .                                   | » 483-484    |

**CHAPITRE III. — Exemples de mouvements à la Routh.**

|   |              |
|---|--------------|
| § 1. Corps solide suspendu par un de ses points . . . . . | page 485-492 |
| a) Solide pesant dans le cas général . . . . .            | » 485-486    |
| b) Cas de LAGRANGE . . . . .                              | » 487-489    |
| c) Cas d'EULER . . . . .                                  | » 489-492    |
| § 2. Problème plan des trois corps . . . . .              | » 492-497    |
| § 3. Renseignements bibliographiques . . . . .            | » 497        |

**CHAPITRE IV. — Remarques critiques.**

|  |              |
|--|--------------|
| § 1. Exemple élémentaire . . . . .   | page 497-498 |
| § 2. Relations uniformes en général . . . . .  | » 498-499    |
| § 3. Systèmes mécaniques usuels. — Raison de l'intérêt de leurs<br>mouvements stationnaires. . . . . | » 500-501    |



THE MIXED TRANSFORMATION  
OF LAGRANGE'S EQUATIONS

« Nature », vol. 74 (1906),  
pp. 488-489.

Returning to Padua after a month's absence, I read in « Nature » of August 2 (p. 317) a letter by Mr. A. B. BASSET on « The Mixed Transformation of LAGRANGE'S Equations ».

The letter begins: « I should fancy from the review by "G.H.B." in "Nature" of Juli 19 (p. 265) that the papers of Prof. LEVI-CIVITA relate largely to the *mixed* transformation of LAGRANGE'S equations, the complete theory ("Proc. Camb. Phil. So", vol. VI, p. 117; "Hydrodynamics", vol. I, p. 171) of which was first given by myself so far back as 1887 »; it is then shown that the *mixed* form of LAGRANGE'S equations may be obtained in the most simple way through an elegant artifice of elimination.

The words here quoted give the impression that my papers deal principally with the announced theory, and that they may be little more than the reproduction of some previous papers by Mr. BASSET. I wish, however, the readers of « Nature » to know — and Mr. BASSET will be the first to recognise the fact — that the case is quite different. The papers in question (as it appears from the general title, « Sur la recherche de solutions particulières des systèmes différentiels et sur les mouvements stationnaires » (\*) and as it seems to me to result also from the review by « G.H.B. ») are essentially dedicated to the *effective research* of particular solutions of dynamical equations. Not a word is said of transformations, *mixed* forms, etc., and ignorance of coordinates is mentioned only in the preface, because this was ROUTH'S point of view in defining and studying the stationary motions.

*University of Padua, August 1929.*

---

(\*) In questo vol.: XXVII, pp. 465-502 [N.d.R.].



SULLA PENETRAZIONE DEI PROIETTILI  
NEI MEZZI SOLIDI

« Atti Ist. Ven. di Sc., Lett. ed Arti », t. LXV (1905-1906),  
pp. 1149-1158.

Il sig. co. CALVI, Tenente Colonnello di Artiglieria, richiamò un giorno la mia attenzione sopra una circostanza, apparentemente paradossale, che egli aveva avuto occasione di rilevare nelle esperienze di tiro.

Si tratta del fatto seguente:

Suppongasì di sparare contro un mezzo solido (terrapieno, muro, strato di legname, ecc.) a diverse distanze.

Di mano in mano che il tiro si avvicina al bersaglio, la velocità  $V$ , con cui il proiettile vi arriva, va evidentemente crescendo. Sembraerebbe a prima vista che, *caeteris paribus*, anche l'entità della penetrazione  $X$  dovesse seguitare a crescere. Ma non è sempre così. In molti casi pratici <sup>(1)</sup> si incontra una determinata distanza, e quindi un certo valore di  $V$ , per cui la penetrazione è massima.

Secondo la ordinaria teoria <sup>(2)</sup>, la penetrazione totale  $X$  si esprime in termini di  $V$ , mediante una formula del tipo

$$(I) \quad X = h \log(1 + \beta V^2)$$

( $h$  e  $\beta$  costanti positive).

La funzione  $\log(1 + \beta V^2)$  cresce costantemente con  $V$ , e la (I) non rende quindi ragione dell'accennato fenomeno.

La spiegazione dovrebbe risiedere — così mi diceva il CALVI — nella deformazione, che il proiettile subisce, colpendo il bersaglio. Quanto maggiore è  $V$ , tanto più rilevante è lo schiacciamento del proiettile e di conseguenza l'ampiezza del foro, che esso deve praticare per farsi strada nel mezzo. Si ha così un aumento di resistenza, e non c'è più

---

<sup>(1)</sup> Assai istruttiva è la tabella, data dal sig. CRANZ, a pag. 238 del suo articolo *Ballistik*, « Enc. der math. Wiss. », Bd. IV, 2, Heft 2.

<sup>(2)</sup> Cfr. F. SIACCI, *Balística*, (seconda edizione), Torino, Casanova, 1888, capo XIII.

ripugnanza ad ammettere che la penetrazione possa eventualmente diminuire, malgrado una maggior forza viva iniziale.

Il calcolo conferma questa presunzione e conduce ad una forma assai semplice della legge, che lega  $X$  a  $V$ .

Tale forma è

$$(1) \quad X = \frac{h \log(1 + \beta V^2)}{1 + kV},$$

dove  $h$ ,  $k$ ,  $\beta$  sono coefficienti positivi, che dipendono dalla natura del proiettile e del mezzo.

Il secondo membro si annulla tanto per  $V=0$ , quanto per  $V=\infty$ .

La  $X$  ammette dunque un massimo (e uno soltanto, come è specificato al n. 2) al crescere di  $V$ .

Se  $k$  è abbastanza piccolo perchè  $kV$  riesca trascurabile di fronte all'unità, si ritrova la ordinaria formula (I).

L'influenza di  $kV$  diviene in ogni modo sensibile (e magari anche preponderante) per valori assai grandi di  $V$ , quali possono essere raggiunti dai proiettili moderni per distanze di tiro inferiori alle normali.

Complessivamente mi pare che la nuova formula (1), per il suo comportamento qualitativo e per l'agilità conferitale dai suoi tre coefficienti, possa dare agli artiglieri serio affidamento di rappresentare in modo soddisfacente i risultati di tutte le esperienze di tiro.

**I.** — Sia  $m$  la massa del proiettile,  $V$  la velocità, con cui esso colpisce (normalmente) il mezzo solido.

Nei rispetti del proiettile quest'urto implica un impulso, per effetto del quale la velocità  $V$  discende quasi istantaneamente ad un valore  $V' < V$ .

È naturale l'ammettere che, malgrado la susseguente penetrazione, in questo stadio preliminare valga la ordinaria legge dell'urto sotto la forma

$$V' = eV,$$

dove si designa con  $e$  una frazione propria (coefficiente di restituzione), che dipende dalla natura ed eventualmente dalla forma dei corpi, che vengono a contatto, ma non da  $V$ .

L'impulso, di intensità  $m(V - V') = m(1 - e)V$ , subito dal proiettile, determina in esso una deformazione impulsiva, che (almeno fino ad un certo limite) sarà legittimamente valutabile trattando il proiettile stesso come un solido elastico.

A caratterizzare questa deformazione concorrono naturalmente la forma del proiettile e la natura del materiale, da cui esso è costituito. In ogni caso però (di ciò al n. 3) le sei componenti di deformazione riescono tutte proporzionali all'intensità dell'impulso  $m(1 - e)V$ , e quindi a  $V$ , i coefficienti dipendendo esclusivamente dal proiettile (forma e moduli di elasticità). Proporzionali a  $V$  riescono così anche le dilatazioni superficiali: quella in particolare, che si riferisce alla massima sezione trasversale del proiettile.

Se  $S$  è l'area di tale sezione allo stato naturale,  $S'$  quella modificata dall'urto, si avrà

$$S' = S(1 + kV),$$

con  $k$  coefficiente numerico (positivo) indipendente da  $V$ .

Ciò posto, applichiamo la ordinaria teoria della penetrazione al moto del proiettile nel mezzo. Si può far astrazione dalla gravità e ritenere il moto rettilineo sotto l'azione di una forza resistente, che consta di due termini, ambedue proporzionali alla sezione del proiettile ( $S'$  nel caso nostro): il primo costante <sup>(3)</sup>, il secondo proporzionale al quadrato della velocità  $v$ , posseduta dal proiettile, nell'istante generico, che si considera.

Colle notazioni di SIACCI, la espressione di questa resistenza è

$$S'ix(1 + \beta v^2)$$

( $i$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  coefficienti positivi, dipendenti: il primo dalla forma del proiettile, gli altri due dalla natura del mezzo).

Sostituiamovi per  $S'$  il suo valore  $S(1 + kV)$  e poniamo

$$\frac{Si\alpha}{m} = \frac{e^2}{2h\beta},$$

dove  $e$  designa, come già nella  $V' = eV$ , il coefficiente di restituzione.

Scrivendo anche  $\beta/e^2$ , anzichè  $\beta$ , la resistenza  $\rho$ , riferita all'unità di massa, si può presentare sotto la forma

$$\rho = - \frac{e^2}{2h\beta} (1 + kV) \left( 1 + \frac{\beta}{e^2} v^2 \right).$$

(\*) Secondo A. H. RESAL (*Sur la pénétration d'un projectile dans les semi-fluides et les solides*, « Comptes Rendus », t. CXXX, 25 gennaio 1895), questo primo termine dovrebbe invece ritenersi proporzionale alla velocità. Ciò non recherebbe alcuna modificazione *qualitativa* alle considerazioni della presente Nota.

Detta  $x$  la penetrazione corrispondente ad un istante generico  $t$ , avremo

$$v = \frac{dx}{dt},$$

che, associata alla equazione del movimento

$$\frac{dv}{dt} = \varrho,$$

porge

$$v \frac{dv}{dx} = \varrho.$$

Separando le variabili ed integrando da  $x = 0$  (cioè dall'inizio della penetrazione, cui corrisponde la velocità  $V' = eV$ ) fino ad un  $x$  generico, risulta

$$x = \frac{h}{1 + kV} \log \frac{1 + \beta V^2}{1 + \frac{\beta}{e^2} v^2}.$$

Per  $v = 0$  si ha la penetrazione totale  $X$  sotto la forma annunciata:

$$(1) \quad X = h \frac{\log(1 + \beta V^2)}{1 + kV}.$$

2. - Dalla (1), ove si ponga per brevità

$$(2) \quad f(V) = 2\beta \frac{V(1 + kV)}{1 + \beta V^2} - k \log(1 + \beta V^2),$$

segue

$$(3) \quad \frac{dX}{dV} = \frac{h}{(1 + kV)^2} f(V).$$

Formiamo anche la derivata  $f'(V)$ . Essa è

$$f'(V) = 2\beta \frac{1 + kV}{1 + \beta V^2} - 4\beta^2 \frac{V^2(1 + kV)}{(1 + \beta V^2)^2} = 2\beta \frac{1 + kV}{(1 + \beta V^2)^2} (1 - \beta V^2),$$

che ammette evidentemente la sola radice positiva  $V = 1/\sqrt{\beta}$ . Per valori di  $V < 1/\sqrt{\beta}$ ,  $f'(V)$  è positiva, e quindi  $f(V)$  crescente; oltrepassata la radice  $1/\sqrt{\beta}$ ,  $f'(V)$  diviene e resta negativa, ossia  $f(V)$  va decrescendo.

Dalla (2) si ha  $f(0) = 0$ . Perciò  $f(V)$ , che va crescendo con  $V$  fino a  $V = 1/\sqrt{\beta}$ , rimane certo positiva in questo intervallo. Da  $V = 1/\sqrt{\beta}$  in avanti,  $f(V)$  decresce costantemente, e siccome, al convergere di  $V$  verso  $\infty$ , tende verso  $-\infty$ , così passerà una volta (ed una volta soltanto) per il valore zero.

Ciò posto, riprendiamo la (3) e osserviamo che il segno di  $dX/dV$  è quello di  $f(V)$ . Si è senz'altro condotti alla conclusione che la funzione  $X$  cresce con  $V$ , da  $V = 0$  fino ad un certo valore  $V_1$  ( $> 1/\sqrt{\beta}$ ), definito da  $f(V_1) = 0$ ; raggiunge ivi un massimo, e poi decresce costantemente al crescere ulteriore di  $V$ .

Per la costante  $\beta$  (malgrado la modificazione introdotta nel definirla) potremo adottare i valori tabulati dal SIACCI (\*). In tale ipotesi  $1/\sqrt{\beta}$  varia da un minimo di  $1000/\sqrt{200}$  (per le ghiaie) ad un massimo di  $1000/\sqrt{15}$  (per le murature), cioè all'ingrosso da 70 a 250 metri/secondo.

La velocità critica  $V_1$ , per un generico mezzo, sta certo (molto) al disopra del limite corrispondente. Il valore numerico dipende naturalmente anche da  $k$ , a norma della equazione

$$f(V_1) = 0.$$

Scrivendola sotto la forma

$$\frac{2}{V_1} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{\beta V_1^2}\right) \left\{ \log \beta V_1^2 + \log \left(1 + \frac{1}{\beta V_1^2}\right) \right\} - 2} = k,$$

si vede che, per  $k = 0$  (teoria ordinaria), si ha la radice  $V_1 = \infty$ . Per i piccoli valori di  $k$  (i quali appunto ci interessano)  $V_1$  sarà ancora grande, e potremo trascurare  $1/(\beta V_1^2)$  di fronte all'unità. Con ciò la equazione che definisce  $V_1$ , rimane asintoticamente semplificata in

$$\frac{2}{V_1} \frac{1}{\log \beta V_1^2 - 2} = k.$$

Questa formula si può riguardare come definizione pratica della costante  $k$ , desunta dalla misura diretta della velocità critica  $V_1$ .

**3.** - Occupiamoci ora di giustificare quanto abbiamo da principio asserito circa la deformazione impulsiva, che il proiettile subisce colpendo il mezzo.

(\*) Loco citato, tabella IX.

Cominciamo col richiamare le equazioni indefinite delle deformazioni elastiche impulsive.

Designino:

$\rho$  la densità in un punto generico  $P$  di un solido elastico  $\tau$ ;

$\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z$  le componenti della brusca variazione di velocità, subita da  $P$ ;

$X_x, X_y, \dots, Z_z$  le componenti degli sforzi (impulsivi), che si destano nell'intorno di  $P$ .

In assenza di impulsi di massa, direttamente applicati, in ogni punto di  $\tau$  debbono sussistere le equazioni:

$$(5) \quad \begin{cases} \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} = \rho \Delta_x, \\ \frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z} = \rho \Delta_y, \\ \frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z} = \rho \Delta_z. \end{cases}$$

Nel caso del proiettile, immaginandolo, come a n. 1, dotato nell'istante dell'urto di velocità traslatoria  $V$  (normale alla superficie terminale del mezzo) e supponendo l'asse  $x$  parallelo a questa velocità, avremo

$$(6) \quad \begin{cases} \Delta_x = -(1 - e)V, \\ \Delta_y = 0, \\ \Delta_z = 0. \end{cases}$$

Chiamiamo  $\sigma$  la superficie terminale del proiettile;  $\alpha, \beta, \gamma$  i coseni direttori della normale volta verso l'interno;  $L, M, N$  le componenti degli sforzi (impulsivi) superficiali.

Varranno, come d'ordinario, le relazioni

$$(7) \quad \begin{cases} L = X_x \alpha + X_y \beta + X_z \gamma, \\ M = Y_x \alpha + Y_y \beta + Y_z \gamma, \\ N = Z_x \alpha + Z_y \beta + Z_z \gamma. \end{cases}$$

Ciò premesso, sia  $Q$  il punto di  $\sigma$ , che per il primo viene a contatto col mezzo.

La reazione del mezzo al primo urto può essere assimilata ad un unico impulso applicato in  $Q$ , eguale alla risultante dei vettori  $(\Delta_x d\tau$ ,



$\Delta_x d\tau$ ,  $\Delta_z d\tau$ ), e quindi di intensità  $m(1-e)V$  e diretto verso l'interno di  $\tau$  (nel senso delle  $x$  decrescenti).

In realtà tale reazione non sarà localizzata in  $Q$ , ma distribuita in un piccolo intorno di questo punto: la sostituzione con un vettore unico non avrà però sensibile influenza sulla deformazione delle parti di  $\tau$ , abbastanza discoste da  $Q$ . Siccome il nostro scopo è di caratterizzare la massima dilatazione trasversale, la quale (date le solite forme di proiettili sferici od oblungi) è certo fuori dell'influenza locale, potremo tranquillamente permetterci la accennata sostituzione.

Siamo così in definitiva condotti a formulare il problema analitico seguente:

Assegnare la deformazione elastica soddisfacente

- a) entro  $\tau$ , alle equazioni (5) coi valori (6) dei secondi membri;
- b) in tutti i punti di  $\sigma$ , eccettuato soltanto  $Q$ , alle equazioni

$$(8) \quad L = 0, \quad M = 0, \quad N = 0,$$

le quali esprimono che la reazione (impulsiva) del mezzo si scarica tutta in  $Q$ .

È appena necessario avvertire che, nelle (5) e (7) e, per conseguenza, nelle (8), le  $X_x, X_y, \dots, Z_x$  debbono intendersi esplicitate in funzione delle tre incognite principali  $u, v, w$  (componenti dello spostamento elastico),

Se si aggiunge la condizione che  $u, v, w$  si mantengano regolari entro  $\tau$  e sopra  $\sigma$ , salvo, si intende, il punto  $Q$ , si ha quanto basta per la loro univoca determinazione. Si può infatti agevolmente ricondursi al solito tipo dei problemi di equilibrio elastico con date forze di massa e dati sforzi superficiali.

Per riconoscerlo in modo preciso, giova ricorrere all'artificio seguente:

Sia  $\Sigma$  il piano tangente a  $\sigma$  in  $Q$ ,  $T$  quello dei due semispazi, limitati da  $\Sigma$ , che contiene  $\tau$ . Si immagini per un momento  $T$  quale un ipotetico suolo elastico dello stesso materiale di  $\tau$ .

Si sa assegnare <sup>(5)</sup> la deformazione, che sarebbe destata nei vari punti di  $T$  da una pressione di intensità  $m(1-e)V$ , applicata in  $Q$ , normalmente a  $\Sigma$ .

Per una tale deformazione, sieno  $u_1, v_1, w_1$  le componenti degli spostamenti;  $L_1, M_1, N_1$  le componenti degli sforzi sopportati dagli elementi superficiali di  $\sigma$ , i quali sono tutti interni (o almeno non esterni) al suolo  $T$ . Queste  $L_1, M_1, N_1$  — notiamolo bene — sono finite e continue in ogni

(<sup>5</sup>) Cfr. per es. E. CESÀRO, *Introduzione alla teoria matematica della elasticità*, Torino, Bocca, 1894, pag. 126.

punto di  $\sigma$ , escluso il punto  $Q$ , in cui però rimangono finite (ritenendosi finita la curvatura di  $\sigma$  in  $Q$ ).

Usufruiamo delle funzioni ausiliarie  $u_1, v_1, w_1$ , ponendo per ogni punto di  $\tau$ ,

$$u = u_1 + u_2, \quad v = v_1 + v_2, \quad w = w_1 + w_2;$$

e diciamo  $L_2, M_2, N_2$  gli sforzi in  $\sigma$ , corrispondenti alle nuove incognite  $u_2, v_2, w_2$ . Si constata immediatamente che esse debbono ancora soddisfare alle equazioni indefinite (5) coi valori (6) dei secondi membri, e, in superficie, alle

$$L_2 = -L_1, \quad M_2 = -M_1, \quad N_2 = -N_1.$$

Queste condizioni analitiche in  $u_2, v_2, w_2$  sono precisamente quelle che corrispondono all'equilibrio elastico del corpo  $\tau$  sotto l'azione delle forze di massa (8) e degli sforzi superficiali  $-L_1, -M_1, -N_1$ . Le une e gli altri soddisfano complessivamente alle condizioni di equilibrio proprie di un sistema rigido. La univoca esistenza di  $u_2, v_2, w_2$  e quindi anche di  $u, v, w$ , rimane con ciò giustificata (\*).

Della effettiva loro determinazione non è il caso di occuparsi. Importa soltanto accertare che  $u, v, w$  si presentano sotto la forma

$$(9) \quad V\bar{u}, \quad V\bar{v}, \quad V\bar{w}$$

con  $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$  indipendenti da  $V$ .

La dimostrazione è ovvia.

Basta infatti riprendere le equazioni (5), (8) e notare, che, essendo esse lineari in  $u, v, w$  e loro derivate, quando si sostituiscono ad  $u, v, w$  i prodotti (9), i primi membri rimangono moltiplicati per  $V$ , conservando del resto, nelle  $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$  la stessa forma che avevano nelle  $u, v, w$ . Non c'è che da togliere il fattore  $V$ , perchè, data la forma delle (6), di  $V$  stesso non rimanga più traccia nè nei primi, nè nei secondi membri. *C.d.d.*

Assieme ad  $u, v, w$ , anche le loro derivate e per conseguenza le sei componenti di deformazione  $x_x, x_y, \dots, z_z$ , risultano del prodotto di  $V$  per funzioni  $\bar{x}_x, \bar{x}_y, \dots, \bar{z}_z$  indipendenti da  $V$  (componenti di deformazione relative agli spostamenti  $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ ).

(\*) Veramente la teoria matematica dell'elasticità non è ancora in grado di fornire una dimostrazione, assolutamente completa e rigorosa, del teorema di esistenza, nelle condizioni accennate.

Le recenti ricerche del sigg. G. LAURICELLA, E. COSSERAT e KORN mostrano però che vi si è così vicini che un tale risultato si può quasi ritenere acquisito.

Gli elementi superficiali normali all'asse  $x$ , subiscono una dilatazione (unitaria) misurata da  $y_v + z_v$ . In particolare, se  $S$  è la massima sezione trasversale del proiettile allo stato naturale, la dilatazione totale, che essa subisce, viene espressa da

$$\int_S (y_v + z_v) dS = V \int_S (\bar{y}_v + \bar{z}_v) dS.$$

Con ciò il nostro coefficiente  $k$  risulta teoricamente definito dalla formula

$$k = \frac{1}{S} \int_S (\bar{y}_v + \bar{z}_v) dS.$$



ÜBER EINE TECHNISCHE AUFGABE,  
DIE IN BEZIEHUNG  
ZUR KONFORMEN ABBILDUNG STEHT

« Verh. der Ges. Deutscher Naturforscher », 77 Versamm. zu Meran,  
Leipzig 1906; pp. 20-21.

Ich möchte ein paar Minuten Ihre Aufmerksamkeit in Anspruch nehmen, um ein spezielles Problem zu erwähnen, welches in enger Beziehung mit dem Vortrage des Herrn KOEBE steht.

Das Problem ist aus einer technischen Frage entstanden, die ich zuerst kurz anführen will.

Die Hauptleitung irgendeiner elektrischen Einrichtung sei durch einen (unendlich langen) Kreiszyylinder (im Schnitte einen Kreis)  $K_1$  schematisch dargestellt.

Es sei dann  $K_n$  ein zweiter Kreiszyylinder mit paralleler Axe und gleichen Querschnitte, in Verbindung mit der Erde (Blitzableiter).

Wenn die Potenzialdifferenz zwischen  $K_1$  und  $K_n$  eine gewisse Grenze überschreitet, so kommen Kurzschlüsse zustande, die gefährlich sein können und so viel wie möglich zu vermeiden sind.

Zu diesem Zwecke pflegt man nach Herrn WURTZ (es ist dies, der Hauptsache nach, der sog. Wurtzsche Ableiter) zwischen  $K_1$  und  $K_n$  mehrere isolierte Leiter (schematisch wieder unendlich lange Kreiszyylinder) wie Orgelpfeifen einzuschalten. Im Schnitte wird man gleiche und equidistanten Kreise erhalten, deren Zentra  $O_1, O_2, \dots, O_n$  auf derselben Geraden liegen, so dass  $\overline{O_1O_2} = \overline{O_2O_3} = \dots = \overline{O_{n-1}O_n}$ .

Erfahrungsgemäss hat sich ein solches Verfahren als nützlich erwiesen. Man hat indessen bemerkt (ohne imstande zu sein, sich die Sache begreiflich zu machen), dass manchmal noch Funken zwischen  $K_1$  und  $K_n$  überspringen, während dies für die folgenden Leiter nicht mehr geschieht.

Es wäre nun wünschenswert, auch diese partiellen Kurzschlüsse zu verhindern.

Es liegt nahe zu vermuten dass sich dies erreichen lässt, indem man die Hilfsleiter in passender Weise verschiebt, so dass z.B. die Intervalle

nicht mehr alle gleich sind, sondern zwischen den ersten etwas grösser als zwischen den letzten ausfallen.

Ist eine solche Vermutung berechtigt? Und noch präziser, welches sind überhaupt die günstigsten Lagen der Hilfsleiter, damit die obere Grenze des Potentialgefälles und folglich die Gefahr ein Minimum wird?

Um dies theoretisch zu entscheiden, darf man vorläufig den rein elektrostatische Vorgang als massgebend betrachten. Es tritt somit folgende Aufgabe der logarithmischen Potentialtheorie auf:

Es seien in einer Ebene  $n$  gleiche, sich nicht schneidende Kreise  $K_1, K_2, \dots, K_n$  gegeben, deren Mittelpunkte  $O_1, O_2, \dots, O_n$  auf einer Geraden liegen, wobei wir sie uns jedoch nicht äquidistant zu denken haben.

Nennen wir  $E$  das (mehrfach zusammenhängende) Gebiet ausserhalb  $K_1, K_2, \dots, K_n$ .

Es handelt sich um die Bestimmung einer logarithmischen Potentialfunktion  $V$ , welche sich in  $E$  (den unendlich fernen Punkt eingeschlossen) regulär verhält und auf den begrenzenden Kreisen  $K_i$  Konstante Werte  $k_i$  annimmt.

Dabei sollen nur  $k_1$  und  $k_n$ , die sich auf den ersten und letzten Kreis beziehen, vorgeschrieben sein.

Auf den übrigen Kreisen (den isolierten Hilfsleitern) sind die Konstanten Potentialwerte  $k_i$  a priori unbestimmt; man weiss dagegen, dass die Gesamtmasse Null ist, d.h. die  $n - 2$  Bedingungen gelten

$$(1) \quad \int_{x_i} \frac{\partial V}{\partial n_i} dK_i = 0 \quad (i = 2, 3, \dots, n - 1),$$

wo  $n$  die Normalrichtung bedeutet.

Dieses Problem lässt sich leicht nach RIEMANN auf eine Abbildungsaufgabe zurückführen, und zwar auf eine solche mehrfach zusammenhängender, von Kreisbogen begrenzter Gebiete.

Man hat nur neben  $V$  die sogenannte assoziierte Funktion  $U$  in Betracht zu ziehen (d.h. die — mehrdeutige — Funktion  $U$ , welche durch die Gleichungen

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y}, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\partial V}{\partial x}$$

bis auf eine Konstante definiert wird) und die Korrespondenz zwischen den beiden Ebenen:

$$z = x + iy$$

(die Ebene der Kreise  $K_1, K_2, \dots, K_n$ ) und,

$$z' = e^{i(\sigma + i\tau)}$$

ins Auge zu fassen.

Das Resultat ist folgendes:

Dem Bereiche  $E$  entspricht *eindeutig* in der  $z'$ -Ebene ein Kreisring  $E'$ , so dass

1) Die zwei äusseren Kreise der Reihenfolge und die begrenzenden Kreise des Ringes  $K'_1$  und  $K'_n$  als Bild haben.

2) Die übrigen Kreise  $K_i$  ( $i = 2, \dots, n - 1$ ) dagegen in kreisförmige, mit  $K'_1$  und  $K'_2$  konzentrische Querschnitte  $A_i B_i$  ausarten, und zwar in folgendem Sinne: Wenn  $z$  einmal  $K_i$  durchläuft, so durchläuft  $z'$  die beiden Ufer des betreffenden Querschnittes und kehrt mit  $z$  in die ursprüngliche Lage zurück.

3) Alle die genannten Querschnitte haben eines ihrer beiden Enden auf demselben Radiusvektor. Die Lagen der  $A_i$  auf diesem Radius (welche den Potentialabfall veranschaulichen) und die Bogenlänge  $A_i B_i$  hängen dagegen von den Entfernungen der  $K_i$  in der  $z$ -Ebene ab.

Die Lösung dieser Abbildungsaufgabe in einer für die gedachte Anwendung geeigneten Form zu finden, wird vielleicht noch einige Schwierigkeiten darbieten.

Jedenfalls schien es mir nicht ohne Interesse, ihre Bedeutung für praktische Zwecke hier gleich hervorzuheben.

Es sei mir noch gestattet hinzuzufügen, dass ich auf die elektrotechnische Frage durch meinen Kollegen Professor LORI aufmerksam gemacht wurde. Er hat sich seinerseits vorgenommen, die Sache experimentell zu studieren.





## SCIE E LEGGI DI RESISTENZA

« Rend. Circolo mat. di Palermo », t. XXIII, (1907),  
pp. 1-37.

Un corpo, animato da traslazione uniforme, il quale si trovi immerso in un liquido (perfetto e non sollecitato da forze) incontra una resistenza diretta rigorosamente nulla, qualora si ammetta che sia ovunque continuo il moto subordinato, entro la massa fluida, dalla traslazione del solido.

Questo risultato teorico, in patente contraddizione coll'esperienza quotidiana, è noto sotto il nome di paradosso di D'ALEMBERT (<sup>1</sup>).

Per lungo tempo lo si attribuì all'ipotesi, preliminarmente ammessa dalla teoria, che si tratti di liquidi perfetti e di pareti rigide prive di attrito, mentre i fluidi naturali sono tutti dotati di un certo grado di viscosità, e i solidi offrono resistenza d'attrito allo scorrimento delle particelle fluide. Ma, se si cerca di precisare l'influenza di questi elementi, si riconosce senza difficoltà che essi possono contribuire solo per una parte (in generale non molto importante) al valore totale della resistenza, quale risulta dalle misure dirette.

Le esperienze antiche e moderne si accordano infatti nella constatazione (<sup>2</sup>) che la resistenza varia sensibilmente in ragione del quadrato della velocità (<sup>3</sup>).

Ora, se la parte preponderante della resistenza diretta provenisse dalla viscosità del liquido, la resistenza stessa dovrebbe risultare (almeno

(<sup>1</sup>) Una constatazione del paradosso, semplicissima e di carattere affatto generale, si può vedere nella recente nota del sig. CISOTTI, *Sul paradosso di d'Alembert*, « Atti del R. Istituto Veneto », t. LXV, 1906, pp. 1291-1295.

(<sup>2</sup>) Cfr. W. H. WHITE, *Manuale di architettura navale* (traduz. italiana), Roma, Forzani, 1884, pag. 463. Per maggiori dettagli: POLLARD et DUDEBOUT, *Théorie du navire*, Paris, Gauthier-Villars, 1892, t. III, pp. 347-438.

(<sup>3</sup>) Oltre un certo limite di velocità, interviene in modo notevole (per le navi e per i modelli galleggianti, cui principalmente si riferisce il materiale d'osservazione) l'influenza delle perturbazioni superficiali. Si formano cioè le *onde di resistenza*, designate appunto con tale qualifica perchè provocano un aumento non trascurabile della resistenza diretta. La parte, dovuta ad esse, può rappresentare, secondo il FROUDE, fin la metà del totale, raggiungendosi però questo massimo solo in condizioni speciali, che possono dirsi di risonanza.

in via approssimativa) proporzionale alla velocità (4); se provenisse dall'attrito fra liquido e solido, dovrebbe, per piccole velocità (pochi metri al secondo) essere quasi indipendente dalla velocità (5).

La resistenza diretta è dunque essenzialmente distinta così dalla viscosità come dall'attrito, che sono a risguardarsi fenomeni dissipativi secondari; essa deve potersi spiegare anche prescindendo da tali fenomeni, di cui soltanto bisognerà tener conto nelle applicazioni concrete, calcolando o almeno valutando approssimativamente i corrispondenti termini correttivi.

In definitiva, la spiegazione del paradosso di D'ALEMBERT deve essere possibile senza esorbitare dall'idrodinamica razionale: conclusione tanto più soddisfacente, quando si pensi che la teoria dei fluidi perfetti ha corrisposto finora — nei limiti di approssimazione, che erano a priori presumibili — alle circostanze di fatto, sicchè sarebbe assai strano che, nello stesso ordine di questioni, intervenisse inopinatamente e dominasse qualche fenomeno, che sfugge allo schema dei meccanismi ordinari.

Come effettivamente si possa, nell'ambito della meccanica pura, rimuovere il paradosso di D'ALEMBERT fu indicato da STOKES e da HELMHOLTZ.

Il principio è quanto mai semplice e consiste nel rinunciare all'ipotesi, apparentemente indifferente, della incondizionata continuità di moto del fluido, sostituendola coll'ipotesi della *scia*.

Si ammette cioè che il corpo mobile *C* trascini dietro sè una colonna liquida, indefinita, solidale con esso (*scia*).

Nello spazio occupato dal liquido si hanno così due regioni distinte (la regione anteriore *A* e la scia *B*, come si vede nelle figg. 1 e 2, p. 525), separate da una superficie di discontinuità.

Lo studio dei moti discontinui presenta gravi difficoltà analitiche, e finora potè essere fatto in modo completo solo per casi particolarissimi. Ma, ad attestarne l'importanza, basta la conclusione di carattere generale che, ammessa la scia, la resistenza diretta varia, a parità di condizioni, precisamente come il quadrato della velocità (6).

(4) La proporzionalità sussiste rigorosamente nel caso schematico di una parete piana; cfr. LAMB, *Hydrodynamics* (terza edizione), Cambridge University Press, 1906, cap. XIX, art. 318.

(5) Veggasi la nota sulla resistenza d'attrito in appendice alla presente memoria. Importa notare che i più autorevoli trattatisti di architettura navale affermano ad un tempo che la resistenza diretta è dovuta per massima parte all'attrito, e che, entro limiti assai lati, essa può ritenersi proporzionale al quadrato della velocità.

La contraddizione con quanto si afferma nel testo è soltanto apparente, e proviene dal fatto che quegli autori raccolgono sotto la denominazione generica di attrito anche altri fenomeni dissipativi, in particolare la formazione di discontinuità.

(6) Cfr. la Nota *Sulla resistenza dei mezzi fluidi*, « Rendiconti della R. Accademia dei Lincei », s. V, vol. X, 2° sem. 1901, pp. 3-9 [in questo vol.: V, pp. 129-135].

Sorge così spontaneo il desiderio di approfondire le ricerche in questo indirizzo per riconoscere anche le leggi, secondo cui la resistenza dipende dalla forma del corpo, che si muove.

Data la difficoltà della questione, conviene limitarla a due dimensioni, ciò che consente il valido sussidio della rappresentazione complessa.

Anche semplificando così, non manca l'interesse pratico.

È chiaro infatti che, nel caso di una nave in acqua tranquilla, il movimento comunicato alle particelle fluide si svolgerà sensibilmente in piani orizzontali, almeno per le sezioni non troppo vicine alla chiglia, nè al piano di galleggiamento.

Ci si trova così ricondotti ad un problema piano, il profilo rigido, mobile nel proprio piano, essendo una generica sezione orizzontale della nave.

I tipi di profili, per cui è stata determinata la legge di resistenza sono i seguenti: un segmento perpendicolare od obliquo alla direzione della traslazione (HELMHOLTZ); due segmenti di eguale lunghezza comprendenti un angolo  $2\alpha$  (BOBYLEFF), caso particolarmente interessante perchè rispecchia la forma rudimentale di una prora; i profili costituiti da un numero qualunque di tratti rettilinei (questione risolta per vie differenti da JOUKOWSKY, MICHELL e LOVE (?)).

Un progresso considerevole può essere raggiunto, riprendendo la questione *ab initio* e analizzandone un po' intimamente la natura matematica.

*Si riesce infatti ad assegnare l'integrale generale dei moti irrotazionali, dotati di scia.*

A ciò è dedicato il presente lavoro.

Con opportune trasformazioni si mettono anzi tutto in evidenza le singolarità caratteristiche. Si può allora, coi metodi della teoria delle funzioni, riconoscere la forma analitica e dare le espressioni effettive degli elementi del moto.

Queste espressioni constano di due parti: la prima, affetta da due parametri  $\alpha$ ,  $\delta$  (\*) (che si riducono ad uno nel caso, in cui vi sia una linea di simmetria) corrisponde alla singolarità caratteristica; nella seconda tutto è regolare, e il grado di arbitrarietà è quello di una funzione analitica  $\Omega$  (più precisamente di una serie di TAYLOR convergente entro e sopra una circonferenza di raggio 1).

Il valore della resistenza diretta (fornito con procedimento elegante

(\*) Cfr. l'articolo di LOVE, *Hydrodynamik*, II, nella «Enc. der math. Wiss.», IV, 2, 1, pag. 99.

(\*)  $\alpha + \delta$  e  $\alpha - \delta$  rappresentano le inclinazioni sulla direzione del moto delle due tangenti al profilo mobile, nel punto angoloso di prora.

dalla teoria dei residui di CAUCHY) dipende soltanto dal primo dei coefficienti della serie  $\Omega$  (e dai due parametri  $\alpha$  e  $\delta$ ).

Per  $\Omega = 0$  si ritrovano nel modo più naturale e spontaneo i profili angolari di BOBYLEFF. Facendo variare  $\Omega$ , si ottengono tutti i possibili profili colle relative resistenze.

Sorge così un doppio ordine di questioni, di cui spero potermi prossimamente occupare:

1) un problema di indole esclusivamente matematica, cioè la ricerca della funzione  $\Omega$  corrispondente ad un profilo preventivamente assegnato.

La  $\Omega$  rimane caratterizzata (§ 13 del presente lavoro) da una relazione fra la parte reale e il coefficiente dell'immaginario, che deve essere soddisfatta al contorno del cerchio di regolarità. È un problema funzionale di tipo più elevato degli ordinari.

2) un problema tecnico di concreta applicazione alle navi. Si tratta cioè di tener conto delle esigenze pratiche, limitando la discussione a forme semplici di  $\Omega$ , e determinando le costanti, che rimangono disponibili, in modo da desumerne i profili più convenienti: questione, cui manca attualmente qualsiasi base scientifica.

In attesa di poter effettivamente portare in questo campo le conseguenze del nostro studio, sì che il controllo sperimentale valga indirettamente a saggiare anche le premesse, è conveniente di dare una giustificazione diretta delle premesse stesse, mediante un'analisi critica delle circostanze di fatto.

Anzitutto che la traslazione di un solido in un liquido provochi discontinuità si può ritenere assolutamente provato dalle esperienze di MAREY<sup>(9)</sup> e di AHLBORN<sup>(10)</sup>.

La natura della discontinuità è però più complessa di quella postulata dalla teoria. La regione  $B$  infatti non risulta in realtà occupata da fluido solidale col corpo  $C$ , nè tanto meno si estende indefinitamente. In essa intervengono (le fotografie delle citate esperienze lo lasciano scorgere in modo manifesto) movimenti vorticosi e turbolenti, che vanno gradatamente attenuandosi (per viscosità ed altre eventuali azioni dissipatrici) quanto più ci si allontana dal corpo  $C$ , cosicchè, ad una certa distanza, lo stato di moto del fluido non presenta più traccia di discontinuità, anzi cessa addirittura ogni sensibile influenza del moto del solido, le particelle appearing immobili.

<sup>(9)</sup> *Le mouvement des liquides, étudié dans la chronophotographie*, « Comptes Rendus », t. CXVI, pp. 913-923 (séance du 1<sup>er</sup> mai 1893); con osservazioni complementari nella Nota: *Changement de direction*, etc., ibidem, t. CXXXII, pp. 1291-1205 (séance du 3 juin 1901).

<sup>(10)</sup> *Ueber den Mechanismus des hydrodynamischen Widerstandes*, Hamburg, Friederichsen, 1902, (estratto dal vol. XVII delle « Abhandlungen aus dem Gebiete der Naturwissenschaften », edite dal Naturwissenschaftlicher Verein di Amburgo).

Malgrado ciò, l'ipotesi schematica della scia deve assai verosimilmente condurre ad una esatta valutazione della resistenza diretta. Ed ecco perchè.

Sia  $\pi$  la porzione del contorno  $\gamma$  del corpo  $C$  (i due tratti  $\pi_1, \pi_2$  delle figg. 1 e 2, p. 525), che confina colla regione anteriore  $A$ , la rimanente porzione confinando invece con  $B$ .

Ciò premesso, si ponga mente alle circostanze seguenti:

a) Conseguenza teorica dell'ipotesi della scia è (cfr. il § 8 del presente lavoro) che la resistenza dipende esclusivamente dallo stato di moto delle particelle fluide in  $\pi$ .

b) Due distinte regioni  $A$  e  $B$  esistono, come abbiamo or ora accennato, anche nella realtà fisica. La  $B$  differisce profondamente dalla ipotetica scia, solidale col corpo. La regione anteriore  $A$  presenta invece in prossimità delle pareti rigide un andamento regolare, conforme alla previsione teorica <sup>(11)</sup>.

D'altra parte si riconosce per via intuitiva <sup>(12)</sup> che gli elementi determinativi della resistenza diretta risiedono tutti nello stato del fluido, il quale si trova in contatto col corpo nella zona anteriore ai fenomeni dissipativi.

Ciò è quanto dire che la resistenza dipende soltanto dallo stato di moto in  $\pi$ .

<sup>(11)</sup> Cfr. in particolare AHLBORN, loc. citato, pag. 13.

<sup>(12)</sup> All'uopo convien ragionare così:

La superficie di discontinuità  $\lambda$  (rappresentata in  $\lambda_1, \lambda_2$  nelle figure 1 e 2), che si riattacca alla zona  $\pi$  del contorno del corpo e che, per un certo tratto, si estende nettamente a poppavia, non è altro che una superficie vorticoso. In coda ad essa si staccano anelli vorticosi e vortici elementari, che si insinuano in  $B$  e vanno di continuo degradando (cioè trasformandosi in calore).

Attesa la stazionarietà del fenomeno, nuovi anelli vorticosi debbono di continuo emanare da  $\pi$  e scendere, per così dire, lungo  $\lambda$  in sostituzione di quelli, che si staccano in coda. Alla formazione di questi vortici concorrono, come è manifesto, solo particelle fluide previamente in contatto con  $\pi$ , e vi concorrono secondo una legge, che dipende dal regime di moto in  $\pi$ , e da esso soltanto.

Giustificiamo quest'ultimo punto.

La produzione di vortici è, come tutti gli altri fenomeni concomitanti alla traslazione di  $C$ , caratterizzata dalla velocità di traslazione e dalla forma geometrica del contorno; però la parte di questo a poppavia di  $\pi$  non può avere sensibile influenza, semprechè, come noi vogliamo supporre, si tratti di corpi non molto lunghi. Infatti, quando le dimensioni longitudinali sono moderate, la detta parte a poppavia di  $\pi$  si trova inserita entro  $\lambda$ , prima della zona, in cui avviene (per viscosità) il distacco degli anelli vorticosi. L'inserito corpo rigido, discosto dalla superficie  $\lambda$ , può evidentemente influire ben poco su questo distacco.

Ciò posto, la resistenza da valutare eguaglia l'energia, che deve essere somministrata al corpo nell'unità di tempo per sopperire alle influenze passive, cioè (prescindendosi dagli attriti) per compensare l'anzidetta produzione di vortici. Questa dipende esclusivamente dal regime di moto in  $\pi$ ; lo stesso vale dunque per la resistenza diretta. C. d. d.

Anche nel caso teorico della scia indefinita si potrebbe manifestamente (in luogo di riportarsi alle formule del § 8) istituire un'analogia considerazione energetica. Basterebbe aver presente che, ammessa la scia indefinita, gli anelli vorticosi, costituenti la superficie di discontinuità, non se ne staccano, ma migrano fino all'infinito e vi accumulano energia.

Dacchè teoria e pratica convengono nel risultato che la resistenza è individuata dallo stato di moto in  $\pi$ , il quale stato di moto è sensibilmente lo stesso nei due casi, scende legittima la conclusione che il valore della resistenza fornito dal calcolo è a presumersi assai prossimo al valore reale, malgrado le sostanziali differenze, che possono intercedere sotto altri rapporti fra la rappresentazione teorica e le circostanze di fatto.

Queste riflessioni giustificano preventivamente l'indagine matematica, che stiamo per imprendere, e incoraggiano a ulteriori deduzioni d'indole pratica.

### 1. - Posizione del problema.

#### Ipotesi surroganti la incondizionata continuità.

Sia  $C$  una porzione di piano animata di traslazione uniforme nel suo stesso piano;  $\gamma$  il contorno di  $C$  (profilo rigido).

Si assuma la direzione della traslazione come direzione *negativa* di un asse  $x$  rigidamente connesso con  $C$ .

Sia poi  $O$  il punto — che supponiamo unico — di  $\gamma$  più avanzato nel senso del moto: lo diremo *prora* e lo sceglieremo per origine delle coordinate. Immagineremo ancora di prendere per velocità unitaria quella di traslazione.

Risguardiamo  $C$  immerso in un liquido (fluido incompressibile), indefinito e non sollecitato da forze, e supponiamo che rimanga subordinato nel liquido un moto con scia.

In modo preciso introduciamo le ipotesi seguenti (cfr. figg. 1 e 2).

1) Una colonna fluida  $B$  (scia) estendentesi indefinitamente dietro  $C$  si muove come se fosse solidale col corpo (cioè immobile rispetto agli assi  $xy$ ).

2) Il campo  $B, C$  costituisce un tutto connesso, *comprendente il semiasse delle  $x$  positive*, separato dal rimanente piano (regione  $A$ ) mediante un'unica linea  $s$ , che passa per  $O$ , e, da una parte e dall'altra, si estende indefinitamente.

*La linea  $s$  è dotata in ogni punto di tangente, variabile ovunque con continuità, tranne in  $O$ , che può essere un punto angoloso. Essa segue per due certi tratti  $\pi_1$  e  $\pi_2$  (da una parte e dall'altra di  $O$ ) il profilo rigido  $\gamma$ ; poi se ne stacca, segnando, nei due tratti indefiniti  $\lambda_1, \lambda_2$  il confine fra  $A$  e la scia  $B$ .*

*In  $\pi$  — così designeremo l'insieme dei due archi  $\pi_1$  e  $\pi_2$  — anche la curvatura è finita e continua (eccezion fatta, si intende, quanto alla continuità, per l'eventuale punto angoloso di prora).*

*Osservazione.* - L'ipotesi circa l'andamento di  $s$  sembra perfettamente giustificata nel caso di contorni  $\gamma$  convessi (con o senza punto angoloso di prora) quali quelli, che ricordano la sezione di una nave; semprechè inoltre essi sieno orientati rispetto al moto in modo da rimanere attraversati dal semiasse delle  $x$  positive.

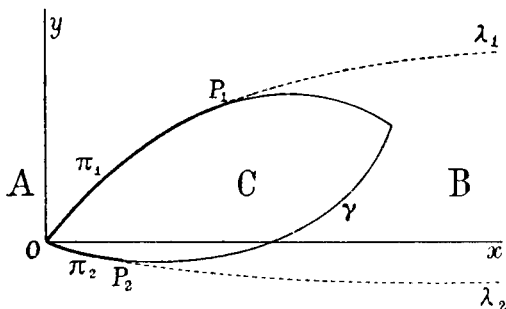


Fig. 1.

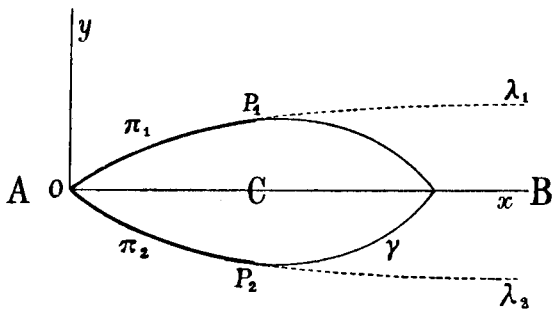


Fig. 2.

Per contorni non convessi (di cui qui non intendiamo occuparci) si dovrebbe ricorrere ad altre ipotesi con scie complesse, come nella fig. 3: le due linee  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$ , continuazione di  $\pi_1$ ,  $\pi_2$ , non sono più interamente libere, ma interrotte da uno o più tratti finiti (uno in figura) appartenenti ancora a  $\gamma$ .

D'altra parte, se il contorno  $\gamma$ , pur essendo convesso, restasse tutto da una parte del semiasse delle  $x$  positive, la  $s$ , a partire da  $O$ , seguirebbe il profilo  $\gamma$  soltanto in un senso, mentre nell'altro uscirebbe addirittura come linea libera.

3) Nella regione  $A$ , il liquido è animato da movimento *stazionario*, rispetto al corpo  $C$ , cioè rispetto ai nostri assi di riferimento  $xy$ , *continuo* (nel senso che le componenti della velocità sono a ritenersi finite e continue) e *irrotazionale*.

4) L'influenza del moto di  $C$  sulle particelle fluide appartenenti ad  $A$  è tanto meno sensibile quanto più ci si discosta da  $C$ .

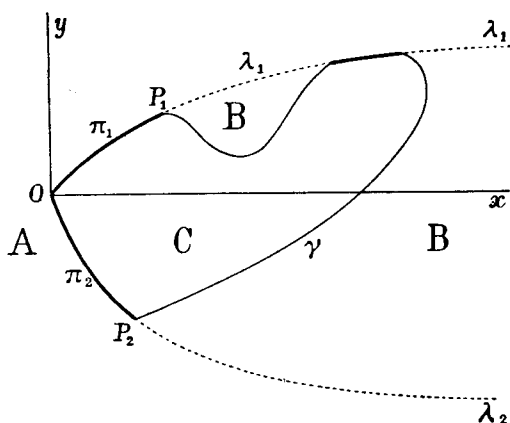


Fig. 3.

In altri termini la velocità, comunicata da  $C$  alle particelle liquide, tende a zero quando ci si allontana indefinitamente da  $C$ . Dicendo, per un punto generico  $P$  di  $A$ ,  $u_P$ ,  $v_P$  le componenti della velocità, *relativa* a  $C$ , e quindi  $u_P - 1$ ,  $v_P$  quelle della velocità assoluta, dovremo ritenere

$$(1) \quad \lim_{OP \rightarrow \infty} u_P = 1, \quad \lim_{\infty \rightarrow OP} v_P = 0.$$

5) Per raffigurarsi intuitivamente l'andamento del moto (relativo) delle particelle di  $A$  rispetto al corpo  $C$ , giova ricorrere al notissimo artificio di imprimere a tutto il sistema ( $A$ ,  $B$ ,  $C$ ) una traslazione uniforme, con che evidentemente non si altera nè lo stato dinamico, nè il moto relativo delle sue parti. Immaginando in particolare impressa una traslazione di velocità 1 nel senso delle  $x$  positive, il corpo  $C$  e la scia  $B$  con esso son ridotti alla quiete, le particelle di  $A$  a grande distanza da  $C$  scorrono con velocità limite 1 nel senso delle  $x$  positive, e l'aspetto del fenomeno è quello di una corrente modificata dalla presenza di un solido immobile  $C$ .

La modificazione si presenta schematicamente così:

Un solo filetto fluido, quello che colpisce il corpo a monte (nella prora  $O$ ), rimane momentaneamente arrestato in  $O$ ; ivi si bipartisce e prosegue scorrendo lungo  $\pi_1$  e  $\pi_2$ . Gli altri filetti vengono più o meno deviati, nessuno subisce arresti.



Questo equivale a dire che il valore assoluto  $V = |\sqrt{u^2 + v^2}|$  della velocità relativa delle particelle fluide è nullo in  $O$ , e  $> 0$  in ogni altro punto di  $A$ .

Ciò premesso, veniamo alla parte deduttiva.

## 2. - Potenziale di velocità e funzione associata.

Il movimento del fluido in  $A$  essendo per ipotesi irrotazionale, avremo un potenziale di velocità  $\varphi(x, y)$  tale che

$$(2) \quad d\varphi = u dx + v dy .$$

Questa equazione differenziale definisce  $\varphi$ , a meno di una costante additiva, come funzione dei punti  $P$  di  $A$ , *uniforme* (perchè  $A$  è semplicemente connesso), *finita e continua* in ogni punto  $P$  a distanza finita, perchè tali sono  $u$  e  $v$ . Quando  $P$  si allontana indefinitamente (in direzione non parallela all'asse  $y$ , in modo cioè che la coordinata  $x$  vada indefinitamente crescendo),  $\varphi$  cresce indefinitamente, in virtù delle (1).

Per fissare la costante additiva, converremo che sia  $\varphi = 0$  in  $O$ .

Attesa l'incompressibilità del fluido ( $\partial u/\partial x + \partial v/\partial y = 0$ ), sarà  $\varphi$  *funzione armonica*, ed esisterà quindi una funzione associata  $\psi(x, y)$  (funzione di corrente) *uniforme, finita e continua al finito*, tale che

$$(3) \quad d\psi = -v dx + u dy .$$

Di qua apparisce che, quando si tenda all' $\infty$  (questa volta in direzione non parallela all'asse  $x$ , sì che  $y$  tenda all' $\infty$ )  $\psi$  cresce indefinitamente.

Anche per  $\psi$  la costante additiva si intenderà presa in modo che la funzione si annulli nel punto  $O$ .

Consideriamo il piano del moto come rappresentativo di una variabile complessa  $z = x + iy$ , e poniamo

$$(4) \quad \begin{cases} w = u - iv , \\ f = \varphi + i\psi . \end{cases}$$

In virtù delle (2) e (3),  $w$  ed  $f$  risultano, come è notissimo, funzioni della variabile complessa  $z$ , e si ha

$$(5) \quad \frac{df}{dz} = w .$$

Per quanto si è osservato circa  $\varphi$  e  $\psi$ , si potrà asserire che la fun-

zione  $f$  si comporta regolarmente entro  $A$ , tranne per  $z = \infty$ , corrispondentemente a cui

$$(6) \quad \lim_{z \rightarrow \infty} |f| = \infty.$$

La  $w$  è invece regolare in  $A$ , punto all'infinito compreso.

### 3. - Condizioni ai limiti. Pressione.

Il contorno di una massa fluida, dotata di moto permanente, è sempre costituito da linee di flusso. Nel caso nostro lo sarà l'intero contorno  $s$  di  $A$ , si avrà cioè in ogni punto di  $s$  velocità puramente tangenziale (componente normale nulla).

Designando con  $dx/ds$ ,  $dy/ds$  i coseni direttori di  $s$  in un punto generico, l'annullarsi della componente normale si esprime mediante la relazione

$$-v \frac{dx}{ds} + u \frac{dy}{ds} = 0,$$

ossia, in virtù della (3),

$$\frac{d\psi}{ds} = 0,$$

od ancora, per essere  $\psi = 0$  in  $O$ ,

$$(7) \quad \psi = 0 \quad \text{in ogni punto di } s.$$

Dobbiamo inoltre tener conto della circostanza che parte di  $s$  (i due archi  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$ ) sono *liberi*, separano cioè la massa fluida, di cui si considera il movimento, da altro fluido (la scia  $B$ ), il che implica continuità nei valori della pressione (malgrado vi sia discontinuità nel moto). Vediamo cosa si può dire delle pressioni in  $A$  e in  $B$  rispettivamente.

Per entrambe va notato che non occorre riferirsi al moto assoluto, ma è lecito contemplare quello relativo, rispetto a  $C$ , poichè i due moti differiscono per una traslazione uniforme, che non ha influenza su alcun elemento dinamico, nè in particolare sulla pressione.

In  $A$  si ha, per ipotesi, moto irrotazionale e permanente in assenza di forze.

Le equazioni idrodinamiche si compendiano perciò in una relazione integrale fra la pressione  $p$  e la velocità  $V$ . Attribuendo per semplicità il valore 1 alla densità del liquido, tale relazione è:

$$p = -\frac{1}{2}V^2 + \text{costante}.$$

Nella scia  $B$  le particelle liquide sono in quiete (relativamente a  $C$ ): ivi regna pertanto una pressione costante  $p_0$ .

L'eguaglianza delle pressioni lungo le due linee libere  $\lambda_1, \lambda_2$  porge

$$p_0 = -\frac{1}{2}V^2 + \text{costante},$$

cioè la velocità  $V$  è essa stessa costante su queste linee. Siccome  $\lambda_1, \lambda_2$  (§ 1, II) si estendono indefinitamente, e, in ogni punto di  $A$  a distanza infinita, si ha  $V=1$  (§ 1, IV), così

$$(8) \quad V=1 \quad \text{sopra } \lambda_1 \text{ e } \lambda_2.$$

Dalla relazione  $p_0 = -\frac{1}{2}V^2 + \text{costante}$  scende poi che la costante ha il valore  $p_0 + \frac{1}{2}$  e che quindi, in ogni punto di  $A$ ,

$$p = p_0 + \frac{1}{2}(1 - V^2).$$

Le (7) e (8) esauriscono evidentemente le condizioni ai limiti concernenti il campo  $A$ .

#### 4. - Corrispondenza fra i due piani complessi $z = x + iy, f = \varphi + i\psi$ .

Rappresentiamo in un piano complesso  $f = \varphi + i\psi$  i valori, che assume la funzione  $f(z)$  al variare di  $z$  entro  $A$ .

Quando  $z$  si trova sul contorno  $s$ ,  $f$  è reale in causa della (7).

Più precisamente al punto  $O$  ( $z = 0$ ) corrisponde  $f = 0$ . Procedendo poi da  $O$  su  $s$  in uno qualunque dei due sensi (percorrendo cioè  $\pi_1, \lambda_1$  ovvero  $\pi_2, \lambda_2$ )  $f$  assume valori positivi, costantemente crescenti, e tende all' $\infty$  con  $z$ .

Per giustificare l'asserto, conviene ricordare (§ 1, V) che  $V > 0$  in ogni punto di  $A$ , e in particolare di  $s$ , diverso da  $O$ . Ora, sopra  $s$ , in quanto linea di flusso, si ha

$$\frac{dx}{ds} = \frac{u}{V}, \quad \frac{dy}{ds} = \frac{v}{V},$$

intendendosi assunta come direzione, cui si riferiscono gli incrementi  $dx, dy$ , quella del flusso e riguardandosi  $ds$  come essenzialmente positivo (elemento di cammino).

Ne viene

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{\partial\varphi}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial\varphi}{\partial y} \frac{dy}{ds} = V > 0.$$

$\varphi$ , che è nullo in  $O$ , va dunque sempre crescendo quando si procede nel senso del flusso, sia su  $\pi_1, \lambda_1$  che su  $\pi_2, \lambda_2$ .

Siccome poi, su  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ ,  $V=1$ , così, quando ci si allontana indefinitamente sull'uno o sull'altro dei due rami,  $\varphi$  cresce oltre ogni limite.

In sostanza, tanto a  $\pi_1, \lambda_1$ , quanto a  $\pi_2, \lambda_2$  corrispondono ordinatamente tutti i valori reali e positivi di  $f$ : c'è quindi corrispondenza (1, 2) fra l'intera linea  $s$  del piano  $z$  e il semiasse positivo delle  $\varphi$  nel piano  $f$ .

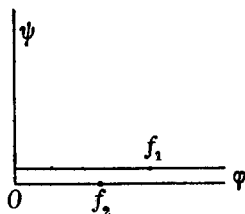


Fig. 4.

La corrispondenza si rende ovviamente biunivoca immaginando di praticare, nel piano  $f$ , un taglio lungo il semiasse positivo delle  $\varphi$  (fig. 4).

Con ciò l'asse stesso rimane sdoppiato, e, per la biunivocità della corrispondenza, basta per es. convenire che il bordo superiore del taglio (quello rivolto verso il semipiano  $\psi > 0$ ) rappresenti i valori presi sul ramo  $\pi_1, \lambda_1$ , il bordo inferiore quelli presi sull'altro ramo.

Al punto  $P_1$  (figg. 1 e 2), in cui si raccordano  $\pi_1$  e  $\lambda_1$  corrisponderà un certo punto  $f_1$  (fig. 4) del bordo superiore; all'altro punto di raccordo  $P_2$ , un certo punto  $f_2$  del bordo inferiore.

I due bordi del taglio costituiscono complessivamente, nel piano  $f$ , una linea indefinita (identica, dal punto di vista dell'analysis situs, alla linea  $s$  del piano  $z$ ).

Riconosciuto il comportamento al contorno, associamovi la circostanza fondamentale che  $f(z)$  si mantiene regolare al variare di  $z$  in  $A$  per valori finiti, mentre al punto  $z = \infty$ , in virtù della (6), corrisponde per  $f$  pure il punto all'infinito.

Abbiamo quanto basta per poter legittimamente concludere <sup>(13)</sup> che la relazione funzionale

$$f = f(z)$$

stabilisce una corrispondenza biunivoca senza eccezione fra il campo  $A$  e il piano  $f$  (tagliato).

<sup>(13)</sup> Cfr. per es. l'articolo del sig. OSGOOD nella « Enc. der Math. Wiss. », II, 2, 1, n. 18.

Perciò, considerando reciprocamente  $z$  come funzione dell'argomento  $f$ , il campo, in cui si deve far variare  $f$ , è l'intero piano; quando lo si intenda tagliato secondo il semiasse positivo delle  $\varphi$ , la funzione  $z$  vi è *uniforme, regolare* in ogni punto fuori del taglio e a distanza finita, mentre  $\lim_{f \rightarrow \infty} |z| = \infty$ .

### 5. - La funzione $w(f)$ e il suo logaritmo $-i\omega$ .

$w = u - iv$  è funzione di  $z$  uniforme e regolare in  $A$ , punto all'infinito compreso, dove, in virtù delle (1),  $w = 1$ .

Immaginando  $z$  espressa per  $f$ , la  $w$  si potrà considerare come funzione di  $f$ , finita e continua in tutto il piano tagliato (bordi del taglio compresi), olomorfa ovunque (bordi del taglio eventualmente esclusi).

La (8), riportata alla variabile indipendente  $f$ , esprime che

$$(8') \quad |w| = 1$$

sul bordo superiore del taglio, per  $\varphi > f_1$ , sul bordo inferiore, per  $\varphi > f_2$ :

Siccome, eccezion fatta per il solo punto  $f = 0$  (la prora  $O$  del piano  $z$ ),  $V = |w| > 0$  (§ 1, V), così, ponendo

$$(9) \quad w = e^{-i\omega}$$

e convenendo che, per  $f = \infty$  ( $w = 1$ ), sia  $\omega = 0$ , rimane definita una funzione  $\omega$ , uniforme nel piano tagliato, finita e continua anche sui bordi del taglio, tranne che per  $f = 0$ , avvicinandosi al qual punto  $i\omega$  tende verso  $+\infty$ .

Alla (8') fa riscontro per la  $\omega$  la proprietà di assumere valori reali.

### 6. - Introduzione di una variabile ausiliaria $\zeta$ .

Vogliamo effettuare un cambiamento di variabile, che sostituisca al piano tagliato  $f$  un campo di variabilità più comodo, e precisamente un *semicerchio*, il cui contorno corrisponda al taglio per modo che quella porzione dei due bordi, in cui  $\omega$  è reale, si trasformi nel diametro.

Per raggiungere lo scopo, poniamo anzitutto

$$(10) \quad f = F^2,$$

e consideriamo il semipiano (complesso)  $F$  di ordinata positiva.

La (10) lo riferisce biunivocamente al piano tagliato  $f$  in modo che all'asse reale di  $F$  corrispondono i due bordi del taglio (convenuto che

al semiasse positivo corrisponda il bordo superiore e quindi al negativo l'inferiore).

Ai punti  $f_1, f_2$  fanno allora riscontro

$$\begin{aligned} F_1 &= \sqrt{f_1}, \\ -F_2 &= -\sqrt{f_2}, \end{aligned}$$

i radicali intendendosi presi positivamente.

Colla trasformazione lineare

$$F = \frac{1}{2}(F_1 + F_2)Z + \frac{1}{2}(F_1 - F_2)$$

si portano i punti  $F_1$  e  $-F_2$  nei punti  $+1$  e  $-1$  del piano  $Z$ .

L'origine  $F = 0$  si porta nel punto

$$Z = -\frac{F_1 - F_2}{F_1 + F_2}$$

dell'asse reale.

Per essere  $F_1$  e  $F_2$  entrambi positivi e non nulli, esiste uno ed un solo arco  $\sigma_0$ , tale che

$$\cos \sigma_0 = \frac{F_1 - F_2}{F_1 + F_2} \quad (0 < \sigma_0 < \pi).$$

Ponendo

$$\frac{1}{2}(F_1 + F_2) = a \quad (14),$$

la formula di passaggio fra  $F$  e  $Z$  assume l'aspetto

$$(11) \quad F = a(Z + \cos \sigma_0) \quad (0 < \sigma_0 < \pi).$$

Colla ulteriore trasformazione

$$(12) \quad Z = -\frac{1}{2}\left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right)$$

il campo di variabilità del piano  $\zeta = \xi + i\eta$  risulta quello desiderato.

Consideriamo infatti (fig. 5) la semicirconferenza  $1, i, -1$ , e il relativo diametro (segmento  $-1, 1$  dell'asse reale).

---

(14) Questa costante (positiva)  $a$  si potrebbe senz'altro assumere eguale all'unità, come già si è fatto per la velocità di traslazione (§ 1) e per la densità del fluido (§ 3). Preferiamo tuttavia di lasciarla indeterminata, non essendovi a priori, fra i dati della questione, un terzo elemento, naturalmente designato a fungere da unità.

Immaginiamo di far percorrere a  $\zeta$  l'arco  $1, i, -1$ ; detta  $\sigma$  l'anomalia di  $\zeta$ , avremo, lungo quest'arco,  $\zeta = e^{i\sigma}$  con  $\sigma$  variabile da  $0$  a  $\pi$ ; quindi in virtù della (12),  $Z = -\cos \sigma$ . Alla semicirconferenza vien dunque a corrispondere (biunivocamente), nel piano  $Z$ , il tratto  $-1, 1$  dell'asse reale. Al diametro ( $\zeta$  reale e variabile da  $-1$  ad  $1$ ) corrispondono, sempre biunivocamente, le porzioni rimanenti; più precisamente, andando  $\zeta$  da  $1$  al centro,  $Z$  descrive il segmento  $-1, -\infty$ ; andando  $\zeta$  da  $-1$  al centro,  $Z$  va da  $1$  a  $+\infty$ . Avvicinandosi comunque  $\zeta$  all'origine,  $|Z| = \frac{1}{2}|\zeta + 1/\zeta|$  tende all' $\infty$ .

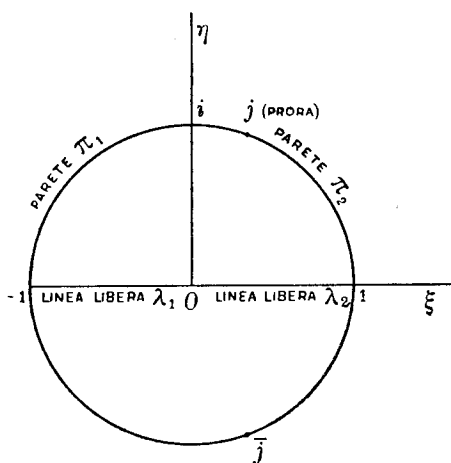


Fig. 5.

Per  $\zeta$  interno al semicerchio  $|\zeta| \leq 1, \eta > 0$ , cioè della forma  $\rho e^{i\sigma}$  (con  $\rho < 1$  e  $0 < \sigma < \pi$ ), il coefficiente di  $i$  in  $Z$ ,  $-\frac{1}{2}(\rho - 1/\rho) \sin \sigma$ , è positivo.

Da tutto ciò si raccoglie che c'è corrispondenza biunivoca fra l'accennato semicerchio e il semipiano  $Z$  di ordinata positiva (contorni inclusi).

Combinando le (10), (11) e (12), si passa da  $f$  a  $\zeta$ .

Ogni funzione di  $f$ , regolare nel piano tagliato, si può così considerare funzione di  $\zeta$ , regolare entro il semicerchio. In particolare la funzione  $\omega$ , legata a  $w$  dalla (9) del precedente §.

Per il modo, con cui abbiamo scelto la variabile ausiliaria  $\zeta$ ,  $\omega(\zeta)$  risulta nulla per  $\zeta = 0$  ( $f = \infty$ ), reale su tutto il diametro  $-1, 1$ , e vi è finita e continua, tale essendo il comportamento di  $\omega(f)$  sui due bordi del taglio, da  $f_1$ , rispettivamente da  $f_2$ , in avanti.

In questa condizione di cose, il noto principio di SCHWARZ <sup>(15)</sup> ci assicura che  $\omega(\zeta)$  è continuabile per riflessione analitica nel sottostante semicerchio; essa è quindi regolare in tutto il cerchio  $|\zeta| < 1$ .

Sulla semicirconferenza  $1, i, -1$  sarà ancora  $\omega$  finita e continua, fatta eccezione per quel solo punto  $\zeta = j$ , che corrisponde a  $f = 0$ . Questo punto, in virtù delle (10), (11) e (12), è definito da

$$(13) \quad \cos \sigma_0 = \frac{1}{2} \left( j + \frac{1}{j} \right) \quad (0 < \sigma_0 < \pi),$$

il che è quanto dire

$$(13') \quad j = e^{i\sigma_0}.$$

Sull'altra semicirconferenza  $1, -i, -1$  vale analogo comportamento, cioè quello, che risulta per riflessione.

## 7. - Espressione degli elementi geometrici e cinematici mediante $\zeta$ ed $\omega(\zeta)$ .

Ragioni di convenienza analitica (che appariranno più nettamente in appresso) ci hanno consigliato di sostituire le variabili naturalmente offerte dall'indole della questione (la velocità  $w$  come funzione del posto  $z$ ) mediante due altre  $\omega$  e  $\zeta$ .

Per conservare il sussidio della intuizione, è opportuno fissare che, nella corrispondenza fra il semicerchio  $|\zeta| \leq 1, \eta \geq 0$  del piano  $\zeta$  (fig. 5) e il campo  $A$  sede del moto (figg. 1 o 2):

*il punto  $j$  rappresenta la prora  $O$ ;*

*gli archi di circonferenza  $j, 1$  e  $j, -1$  rappresentano i due tratti di parete rigida  $\pi_2$  e  $\pi_1$ , rispettivamente;*

*i punti  $1$  e  $-1$  i raccordi  $P_2$  e  $P_1$  del profilo rigido colle linee libere  $\lambda_2$  e  $\lambda_1$ ;*

*l'origine ( $\zeta = 0$ ) il punto all'infinito di  $A$ ; i raggi  $(1, 0)$ ,  $(-1, 0)$  le linee libere  $\lambda_2, \lambda_1$ .*

*Immagine delle linee di flusso.* - Una generica linea di flusso è caratterizzata dalla equazione

$$\psi(x, y) = \text{cost.}$$

È facile assegnare la rappresentazione di queste linee nel piano  $\zeta$ . All'uopo basta evidentemente usufruire le formule di trasformazione (10), (11), (12).

<sup>(15)</sup> Cfr. per es. DARBOUX, *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, Paris, Gauthier-Villars, vol. I, 1887, pp. 174-175.



Per effettuare il calcolo in modo spiccio, conviene (anzichè scindere il reale dall'immaginario) introdurre le quantità  $\bar{f}$ ,  $\bar{F}$ ,  $\bar{Z}$ ,  $\bar{\zeta}$  complesse coniugate a  $f$ ,  $F$ ,  $Z$ ,  $\zeta$ , e notare che valgono anche per esse le formule di passaggio (10), (11), (12).

Essendo  $f = \varphi + i\psi$  e quindi  $\psi = (f - \bar{f})/(2i)$ , la equazione da trasformare è

$$\frac{f - \bar{f}}{2i} = \text{cost.}$$

Indichiamo con  $a^2b/2$  la costante reale del secondo membro [dove si intende con  $a$  quello stesso parametro, che compare nella (11)], ed avremo, sostituendo ad  $f$  ed  $\bar{f}$  i valori che successivamente risultano dalla (10) ed (11),

$$\frac{(Z + \cos \sigma_0)^2 - (\bar{Z} + \cos \sigma_0)^2}{i} = b,$$

ossia

$$[Z + \bar{Z} + 2 \cos \sigma_0] \frac{Z - \bar{Z}}{i} = b.$$

Di qua, mediante la (12), ove si sostituiscono a  $\zeta$ ,  $\bar{\zeta}$  i loro valori e si riduca a forma intera, si ottiene:

$$[\xi(\xi^2 + \eta^2 + 1) - 2 \cos \sigma_0(\xi^2 + \eta^2)](\xi^2 + \eta^2 - 1)\eta = b(\xi^2 + \eta^2)^2,$$

che è appunto l'equazione in coordinate cartesiane  $\xi$ ,  $\eta$  delle immagini delle linee di flusso.

Come si vede, queste immagini sono sestiche. Di esse, naturalmente, ha interesse soltanto la porzione interna al nostro semicerchio  $|\zeta| \leq 1$ ,  $\eta \geq 0$ . Il contorno del semicerchio è, come sappiamo, immagine delle linee di flusso  $\pi_1$ ,  $\lambda_1$ ,  $\pi_2$ ,  $\lambda_2$ , che corrispondono al valore zero di  $\psi$  (e quindi di  $b$ ). Se ne ha conferma nell'equazione testè esplicitata, la quale, per  $b = 0$ , si spezza in

$$\xi^2 + \eta^2 = 1,$$

$$\eta = 0,$$

$$\xi(\xi^2 + \eta^2 + 1) - 2 \cos \sigma_0(\xi^2 + \eta^2) = 0.$$

Quest'ultima è una cubica, che passa per l'origine e per il punto  $j$  ( $\xi = \cos \sigma_0$ ,  $\eta = \sin \sigma_0$ ); essa è l'immagine di quella tale linea di flusso a proravia del corpo  $C$  (§ 1, V), che, arrivando in  $O$ , si bipartisce e va a costituire l'intero contorno  $s$  di  $A$ .

*Velocità e posizione corrispondenti a un  $\zeta$  generico. — La (9)*

$$w = u - iv = e^{-i\omega}$$

definisce senza ambiguità la velocità in funzione di  $\zeta$ . Ponendo

$$(14) \quad \omega = \vartheta + i\tau \quad (\vartheta, \tau \text{ reali})$$

si ha

$$(15) \quad |w| = V = |e^{-i\omega}| = e^{\tau},$$

nonchè

$$\frac{u + iv}{V} = e^{i\vartheta},$$

dalla quale apparisce che la parte reale di  $\omega$  è l'anomalia del vettore  $u + iv$ , cioè la inclinazione della velocità sulla direzione diametralmente opposta alla traslazione; in forma più precisa, l'angolo (contato positivamente nel verso  $x \rightarrow y$ , negativamente nel verso opposto) che la velocità (nel punto  $P$  di  $A$ , che corrisponde al considerato valore generico della variabile ausiliaria  $\zeta$ ) forma colla direzione positiva dell'asse  $x$ .

Per essere completi, è bene giustificare l'asserto che  $\vartheta$  va contato positivamente in un verso e negativamente nell'opposto (e non per es. di seguito in uno stesso verso da 0 a  $2\pi$ ).

Ricordiamo perciò che, fra le infinite determinazioni di cui  $\omega$  è suscettibile in base alla (9) (determinazioni, che differiscono l'una dall'altra per multipli interi di  $2\pi$ ), abbiamo convenuto di scegliere quella, che si annulla nel punto all'infinito del piano del moto ( $\zeta = 0$ ), rimanendo allora definito per continuità un ramo *uniforme* in tutto il campo  $A$  (il semicerchio  $|\zeta| \leq 1$ ,  $\eta \geq 0$  del piano  $\zeta$ ).

Come  $\omega$ , si annulla naturalmente la sua parte reale  $\vartheta$ .

Dobbiamo dunque ritenere che  $\vartheta$ , inclinazione del flusso sulla direzione positiva dell'asse  $x$ , è sempre nulla (non, eventualmente,  $2\pi$ ) in ogni punto di  $A$  a distanza infinitamente grande dall'origine.

Negli altri punti  $P$  di  $A$  va attribuito all'angolo  $\vartheta$  quel valore (certo univocamente determinato per l'uniformità di  $\omega$ ), che si ottiene dallo zero, procedendo per continuità entro  $A$ .

Le ipotesi, da noi ammesse (§ 1, II), mostrano ovviamente che, fra i valori assunti da  $\vartheta$ , ve ne saranno in ogni caso tanto di positivi quanto di negativi. Quando sia segnata graficamente la direzione della velocità in un punto  $P$  di  $A$ , si può ritenere come regola pratica — risparmiandosi di fare la deduzione per continuità — che  $\vartheta$  va contato fra

$-\pi$  e  $\pi$ , positivamente nel verso  $x \rightarrow y$ , a partire dalla direzione positiva dell'asse  $x$ .

Occupiamoci ora del posto  $P$  da coordinare ad un  $\zeta$  assegnato. Esso rimane definito dalla (5)

$$dz = \frac{df}{w} = e^{i\omega} df,$$

tenendo conto che  $z = 0$  per  $f = 0$ .

Dalle (10), (11) e (12) si ha

$$\begin{aligned} df &= 2F dF, \\ dF &= a dZ, \\ dZ &= -\frac{1}{2} \left( \zeta - \frac{1}{\zeta} \right) \frac{d\zeta}{\zeta}, \end{aligned}$$

e da queste, esprimendo anche  $2F$  per  $\zeta$ ,

$$(16) \quad df = \frac{1}{2} a^2 \left( \zeta + \frac{1}{\zeta} - 2 \cos \sigma_0 \right) \left( \zeta - \frac{1}{\zeta} \right) \frac{d\zeta}{\zeta}.$$

Siccome si corrispondono  $z = 0$ ,  $f = 0$ ,  $\zeta = j$ , così la espressione finita di  $z$  si scriverà

$$(17) \quad z = \int_j^\zeta e^{i\omega} df,$$

intendendo  $df$  dato dalla (16) e l'integrale da  $j$  a  $\zeta$  preso lungo un cammino qualunque del piano  $\zeta$ , che non esca dal solito semicerchio.

*Elemento d'arco.* - L'espressione dell'elemento lineare del piano  $z$ , cioè di  $|dz| = |\sqrt{dx^2 + dy^2}|$  in termini di  $\zeta$  è

$$(18) \quad |dz| = |e^{i\omega}| |df| = e^{-\tau} |df|,$$

come risulta dalla (15).

*Curvatura di una linea di flusso.* - L'angolo di contingenza lungo una linea di flusso è  $d\vartheta$ ; usufruendo la (18) per l'elemento d'arco, ricaviamo la formula notevole

$$c = e^\tau \frac{d\vartheta}{|df|},$$

in cui  $|c|$  designa la curvatura.

Sulle linee libere, dove  $V = e^\tau = 1$ , si ha in particolare

$$c = \frac{d\vartheta}{|df|}.$$

*Rappresentazione dei tratti di parete  $\pi_1$  e  $\pi_2$ .* - Immaginando di prendere l'integrale (17) lungo la semicirconferenza 1,  $j, -1$ , l'affissa  $z$  andrà descrivendo  $\pi$ , e precisamente  $\pi_2$  o  $\pi_1$  secondochè da  $j$  si va verso 1 o verso  $-1$ . Basterà poi separare nell'espressione di  $z$  la parte reale dall'immaginaria per avere l'espressione parametrica delle coordinate  $x, y$ .

Se si nota che, sull'accennata semicirconferenza,  $\zeta = e^{i\sigma}$  (con  $\sigma$  reale e compreso fra 0 e  $\pi$ ), la (16) porge

$$(16') \quad df = -2a^2(\cos \sigma - \cos \sigma_0) \operatorname{sen} \sigma d\sigma,$$

e quindi

$$(17') \quad z = -2a^2 \int_{\sigma_0}^{\sigma} e^{i\omega} (\cos \sigma - \cos \sigma_0) \operatorname{sen} \sigma d\sigma = 2a^2 \int_{\sigma}^{\sigma_0} e^{i\omega} (\cos \sigma - \cos \sigma_0) \operatorname{sen} \sigma d\sigma.$$

Se ne trae, per essere  $\omega = \vartheta + i\tau$ ,

$$x = 2a^2 \int_{\sigma}^{\sigma_0} e^{-\tau} \cos \vartheta (\cos \sigma - \cos \sigma_0) \operatorname{sen} \sigma d\sigma,$$

$$y = 2a^2 \int_{\sigma}^{\sigma_0} e^{-\tau} \operatorname{sen} \vartheta (\cos \sigma - \cos \sigma_0) \operatorname{sen} \sigma d\sigma,$$

dove tutto è reale.

L'arco elementare  $d\omega$ , a norma delle (18) e (16'), ha per espressione

$$d\pi = 2a^2 e^{-\tau} |\cos \sigma - \cos \sigma_0| \operatorname{sen} \sigma |d\sigma|,$$

e la curvatura (dacchè si tratta di archi appartenenti a linee di flusso)

$$(19) \quad c = \frac{d\vartheta}{d\omega} = \frac{e^\tau}{2a^2 |\cos \sigma - \cos \sigma_0| \operatorname{sen} \sigma} \frac{d\vartheta}{|d\sigma|}.$$

Siccome  $\cos \sigma - \cos \sigma_0$  è positivo o negativo secondochè  $\sigma \lesseqgtr \sigma_0$ , e  $d\sigma$  è positivo o negativo secondochè  $\sigma$  va crescendo o decrescendo, così

$$(20) \quad \pi = 2a^2 \int_{\sigma}^{\sigma_0} e^{-\tau} (\cos \sigma - \cos \sigma_0) \operatorname{sen} \sigma d\sigma$$

rappresenterà, tanto per  $\pi_1$ , quanto per  $\pi_2$ , la lunghezza dell'arco compreso fra la prora e un punto generico.

*Rappresentazione delle linee libere.* — Per far descrivere a  $z$  le linee libere, bisogna che  $\zeta$  percorra l'asse reale; allora anche  $df$  ed  $\omega$  sono reali.

Mandando per es.  $\zeta$  da  $-1$  a zero, descriveremo  $\lambda_1$  dal punto di raccordo  $P_1$  fino all'infinito.

Se  $z_1 = x_1 + iy_1$  designa l'affissa di  $P_1$ , avremo, per un generico punto  $z$  di  $\lambda_1$ , dalle (17) e (16),

$$(17'') \quad z = z_1 + \int_{-1}^{\zeta} e^{i\omega} df = z_1 + \frac{1}{2}a^2 \int_{-1}^{\zeta} e^{i\omega} \left( \zeta + \frac{1}{\zeta} - 2 \cos \sigma_0 \right) \left( \zeta - \frac{1}{\zeta} \right) \frac{d\zeta}{\zeta}.$$

La funzione sotto il segno tende, come si vede, a diventare infinita (di terz'ordine) al convergere di  $\zeta$  verso zero.

Per separare il reale dall'immaginario, basta evidentemente tener conto che  $z_1 = x_1 + iy_1$  e che  $e^{i\omega} = \cos \omega + i \sin \omega$ , poichè  $\omega$  e  $\zeta$  sono reali.

L'elemento d'arco

$$d\lambda = |e^{i\omega}| |df|$$

si riduce a

$$d\lambda = |df|.$$

Ora (§ 4), mentre  $z$  percorre la linea libera  $\lambda_1$  dal raccordo  $P_1$  in avanti,  $f$  cresce costantemente da  $f_1$  in avanti. Si può dunque sopprimere il segno di valore assoluto e si ha, per integrazione, che la lunghezza dell'arco  $\lambda_1$  (contato da  $P_1$  fino a un punto generico) non è altro che  $f - f_1$ , ossia, per la (10),  $F^2 - F_1^2$ .

La (11),

$$F = a(Z + \cos \sigma_0),$$

badando che  $F_1$  è il valore di  $F$  cui corrisponde  $Z = 1$ , porge

$$F_1 = a(1 + \cos \sigma_0)$$

e quindi

$$\lambda_1 = F^2 - F_1^2 = a^2 [Z^2 - 1 + 2 \cos \sigma_0 (Z - 1)].$$

Ne viene, in virtù della (12),

$$\lambda_1 = \frac{1}{4}a^2 \left( \frac{1}{\zeta} - \zeta \right)^2 - a^2 \cos \sigma_0 \left( \frac{1}{\zeta} + \zeta + 2 \right)$$

con  $\zeta$  compreso fra  $-1$  e zero.

Si vedrebbe analogamente che, sull'altra linea libera, l'arco  $\lambda_2$ , contato dal raccordo  $P_2$  fino a un punto generico, vale

$$\lambda_2 = \frac{1}{4} a^2 \left( \frac{1}{\zeta} - \zeta \right)^2 - a^2 \cos \sigma_0 \left( \frac{1}{\zeta} + \zeta - 2 \right),$$

$\zeta$  essendo compreso fra 1 e zero.

### 8. - Resistenza diretta e azioni deviatrici.

Designi  $d\gamma$  un elemento del contorno  $\gamma$  di  $C$ ,  $n$  la normale a  $d\gamma$  volta verso l'interno di  $C$ .

L'azione dinamica, che il liquido esercita sopra un solido immerso, è caratterizzata dalla risultante e dal momento risultante delle pressioni subite dagli elementi di contorno.

Nel caso presente, in cui si tratta di un sistema piano, basterà considerare le due componenti

$$R_x = \int_{\gamma} p \cos (nx) d\gamma,$$

$$R_y = \int_{\gamma} p \cos (ny) d\gamma$$

della risultante, e il momento

$$M = \int_{\gamma} p [x \cos (ny) - y \cos (nx)] d\gamma,$$

che tende a provocare rotazione attorno alla normale al piano (nel verso  $x \rightarrow y$  o nell'opposto, secondochè esso è positivo o negativo).

$R_x$  misura evidentemente la resistenza diretta;  $R_y$  ed  $M$  rappresentano azioni deviatrici.

Per valutare queste tre quantità, ricordiamo anzitutto (§ 3) che in ogni punto di  $A$  si ha

$$p = p_0 + \frac{1}{2}(1 - V^2),$$

mentre, in ogni punto della scia  $B$ ,  $p$  si riduce al valore costante  $p_0$ .

Ora il contorno  $\gamma$  confina con  $A$  lungo  $\pi$  (il complesso dei due tratti

$\pi_1$  e  $\pi_2$ ), con  $B$  nella parte rimanente. Si ha quindi

$$R_x = p_0 \int_{\gamma} \cos(nx) d\gamma + \frac{1}{2} \int_{\pi} (1 - V^2) \cos(nx) d\omega$$

e analogamente per  $R_y$  e per  $M$ .

I primi addendi sono identicamente nulli, e rimane

$$(21) \quad \begin{cases} R_x = \frac{1}{2} \int_{\pi} (1 - V^2) \cos(nx) d\pi, \\ R_y = \frac{1}{2} \int_{\pi} (1 - V^2) \cos(ny) d\pi; \end{cases}$$

$$(22) \quad M = \frac{1}{2} \int_{\pi} (1 - V^2) [x \cos(ny) - y \cos(nx)] d\pi,$$

le quali mostrano che *la resistenza dipende esclusivamente dallo stato di moto in  $\pi$* .

Osserviamo che, immaginando di percorrere  $\pi$  sempre nello stesso senso, da  $P_2$  per  $O$  fino in  $P_1$ , si ha (tanto su  $\pi_2$ , quanto su  $\pi_1$ )

$$\begin{aligned} \cos(nx) d\pi &= dy, \\ \cos(ny) d\pi &= -dx, \end{aligned}$$

essendo  $dx$ ,  $dy$  le componenti dell'arco elementare  $d\pi$ .

Alla (22) daremo così l'aspetto

$$(22') \quad M = -\frac{1}{2} \int_{\pi} (1 - V^2) (x dx + y dy)$$

e non ce ne occuperemo ulteriormente.

Rivolgendoci alle (21), osserviamo anzitutto che, posto

$$\mathbf{R} = R_x + iR_y,$$

esse si possono compendiare in

$$\mathbf{R} = \frac{1}{2i} \int (1 - V^2) dz,$$

l'integrale curvilineo del secondo membro estendendosi al cammino  $P_2OP_1$ .

In virtù delle (5) e (9), esso si trasforma in

$$\frac{1}{2i} \int (1 - e^{2\tau}) e^{i\omega} df,$$

il quale, inteso per  $df$  il valore (16), va preso nel piano  $\zeta$  lungo la semicirconferenza  $1, j, -1$ . Avremo pertanto

$$\mathbf{R} = \frac{1}{2i} \int_{(1, j, -1)} e^{i\omega} df - \frac{1}{2i} \int_{(1, j, -1)} e^{2\tau + i\omega} df.$$

Ora è da notare che,  $\omega$  essendo reale sull'asse reale, in punti coniugati  $\zeta$  e  $\bar{\zeta}$ , la parte reale  $\vartheta$  assume valori eguali, il coefficiente dell'immaginario  $\tau$  valori eguali e di segno opposto. In formule:

$$\vartheta_{\zeta} = \vartheta_{\bar{\zeta}}, \quad \tau_{\zeta} = -\tau_{\bar{\zeta}}.$$

Ne viene

$$2\tau_{\zeta} + i\omega_{\zeta} = \tau_{\zeta} + i\vartheta_{\zeta} = -\tau_{\bar{\zeta}} + i\vartheta_{\bar{\zeta}} = i\omega_{\bar{\zeta}},$$

e, siccome sulla circonferenza  $|\zeta| = 1$ ,  $\bar{\zeta}$  non è altro che  $1/\zeta$ , così potremo ritenere, sopprimendo l'indice  $\zeta$ ,

$$2\tau + i\omega = i\omega \left( \frac{1}{\zeta} \right).$$

D'altra parte l'espressione (16) di  $df$  non muta per lo scambio di  $\zeta$  in  $1/\zeta$ .

Perciò l'integrale

$$\int_{(1, j, -1)} e^{2\tau + i\omega} df = \int_{(1, j, -1)} e^{i\omega(1/\zeta)} df,$$

che compare nella espressione di  $\mathbf{R}$ , cambiandovi  $\zeta$  in  $1/\zeta$ , si trasforma in

$$\int e^{i\omega(\zeta)} df,$$

esteso alla linea corrispondente, che è la semicirconferenza  $1, \bar{j}, -1$  (percorsa nell'ordine scritto).

Si ottiene così per  $\mathbf{R}$  l'espressione notevole

$$(21') \quad \mathbf{R} = \pi \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} e^{i\omega} df,$$

l'integrale essendo esteso all'intera circonferenza in senso diretto ( $x \rightarrow y$ ).

Avuto riguardo alla (16) e alla circostanza che le funzioni

$$e^{i\omega}, \quad \frac{1}{2} a^2 \left( \zeta + \frac{1}{\zeta} - 2 \cos \sigma_0 \right) \left( \zeta - \frac{1}{\zeta} \right) \frac{1}{\zeta}$$



si mantengono regolari entro il cerchio  $|\zeta| < 1$ , fatta eccezione dell'origine per la seconda di esse, siamo condotti all'enunciato seguente:

La resistenza totale  $\mathbf{R} = R_x + iR_y$  è rappresentata (in senso vettoriale) dal prodotto di  $\pi$  per il residuo della funzione

$$\frac{1}{2} a^2 e^{i\omega} \left( \zeta + \frac{1}{\zeta} - 2 \cos \sigma_0 \right) \left( \zeta - \frac{1}{\zeta} \right) \frac{1}{\zeta}$$

relativo al polo  $\zeta = 0$ . La resistenza diretta  $R_x$  non è che la parte reale di tale prodotto.

Il residuo si valuta con tutta facilità.

Basta osservare che le derivate successive di  $e^{i\omega}$  rapporto a  $\zeta$  sono:

$$\begin{aligned} & i\omega' e^{i\omega}, \\ & (i\omega'' - \omega'^2) e^{i\omega}, \\ & \dots \end{aligned}$$

sicchè, ricordando che  $\omega(0) = 0$ , si ha come sviluppo di  $e^{i\omega}$  nell'intorno dell'origine:

$$e^{i\omega} = 1 + \zeta \cdot i\omega'(0) + \frac{\zeta^2}{2} [i\omega''(0) - \omega'^2(0)] + \dots$$

Dopo ciò si vede subito che il coefficiente di  $1/\zeta$ , nello sviluppo di

$$e^{i\omega} \left( \zeta + \frac{1}{\zeta} - 2 \cos \sigma_0 \right) \left( \zeta - \frac{1}{\zeta} \right) \frac{1}{\zeta} = e^{i\omega} \left( \zeta - \frac{1}{\zeta^3} - 2 \cos \sigma_0 + 2 \cos \sigma_0 \frac{1}{\zeta^2} \right),$$

è dato da

$$-\frac{1}{2} (i\omega''(0) - \omega'^2(0)) + 2 \cos \sigma_0 \cdot i\omega'(0) = \frac{1}{2} \omega'^2(0) + i [2 \cos \sigma_0 \cdot \omega'(0) - \frac{1}{2} \omega''(0)].$$

In definitiva risulta

$$(21'') \quad \mathbf{R} = R_x + iR_y = \frac{\pi a^2}{4} \omega'^2(0) + i \frac{\pi a^2}{2} [2 \cos \sigma_0 \cdot \omega'(0) - \frac{1}{2} \omega''(0)].$$

## 9. - Comportamento di $\omega(\zeta)$ per $\zeta = j$ (prora).

Avendosi nel punto di prora ( $\zeta = j$ )  $V = e^r = 0$ , la funzione  $\omega = \vartheta + i\tau$  non può conservarsi finita, come abbiamo già osservato a § 5.

Il modo, con cui essa diventa infinita, non è accessibile all'intuizione diretta, ma lo è invece l'andamento della parte reale, il che basta, come ora mostreremo, a caratterizzare la natura della singolarità.

Sia  $2\alpha$  l'angolo delle due tangenti in  $O$  a  $\pi_1, \pi_2$  ( $2\alpha \leq \pi$ , il valore  $\pi$  corrispondendo al caso, in cui la prora  $O$  è un punto ordinario, non angoloso).

Sia  $\delta + \alpha$  l'angolo, che la tangente a  $\pi_1$ , nel senso del flusso, si

intende, forma colla direzione positiva dell'asse  $x$ ; l'angolo dell'analogha tangente a  $\pi_2$  sarà allora  $\delta - \alpha$  ( $\delta$  è evidentemente zero, quando si tratta di profili simmetrici e simmetricamente orientati rispetto alla direzione del moto).

Si noti (§ 1) che  $\delta + \alpha$  e  $\delta - \alpha$  devono ritenersi non superiori a  $\pi/2$  in valore assoluto, e di segno contrario: non superiori a  $\pi/2$  perchè si è supposto che la prora sia il punto più avanzato nel senso del moto; di segno contrario perchè si è supposto che la direzione positiva dell'asse  $x$  attraversi  $C$ , sia cioè compresa fra  $\pi_1$  e  $\pi_2$ .

Tenendo presente il significato di  $\vartheta$ , abbiamo senz'altro (§ 1, II)

$$(23) \quad \begin{cases} \lim \vartheta = \delta - \alpha, & \text{avvicinandosi a } j \text{ lungo l'arco } \widehat{1, j}, \\ \lim \vartheta = \delta + \alpha, & \text{avvicinandosi a } j \text{ lungo l'arco } \widehat{-1, j}, \end{cases}$$

mentre in ogni altro punto della semicirconferenza  $\vartheta$  è a riguardarsi funzione continua, e dotata di derivata pure continua (conseguenza questa dell'ipotesi che sia finita e continua la curvatura degli archi  $\pi_1$  e  $\alpha_2$ ). Essa è inoltre (come parte reale della  $\omega$ , regolare per  $|\zeta| < 1$  e reale sull'asse reale) armonica entro il cerchio  $|\zeta| < 1$ , e simmetrica rispetto all'asse reale ( $\vartheta_\zeta = \vartheta_{\bar{\zeta}}$ ).

La simmetria implica una discontinuità nel punto  $\bar{j} = 1/j$ , e precisamente:

$$(23') \quad \begin{cases} \lim \vartheta = \delta - \alpha, & \text{avvicinandosi a } \bar{j} \text{ lungo l'arco } \widehat{1, \bar{j}}, \\ \lim \vartheta = \delta + \alpha, & \text{avvicinandosi a } \bar{j} \text{ lungo l'arco } \widehat{-1, \bar{j}}, \end{cases}$$

mentre, in ogni altro punto della semicirconferenza  $1, j, -1, \vartheta$  resta continua assieme alla sua derivata.

Sia  $\vartheta_0$  una particolare funzione armonica, soddisfacente a tutte queste condizioni qualitative;  $\tau_0$  la sua associata (la costante additiva intendendosi presa in modo che  $\tau_0$  si annulli nell'origine);

$$\omega_0 = \vartheta_0 + i\tau_0$$

la corrispondente funzione della variabile complessa  $\zeta$ .

Le relazioni

$$\frac{\partial \vartheta_0}{\partial \xi} = \frac{\partial \tau_0}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial \vartheta_0}{\partial \eta} = -\frac{\partial \tau_0}{\partial \xi},$$

tenendo conto che  $\vartheta_0$  è funzione pari di  $\eta$ , danno

$$\tau_0(\xi, -\eta) = -\tau_0(\xi, \eta) + \text{cost.},$$

e, siccome  $\tau_0$  si annulla per  $\xi = \eta = 0$ , così essa risulta funzione dispari di  $\eta$ , e quindi  $\omega_0$  reale sull'asse reale.

Posto

$$\Theta = \vartheta_0 - \vartheta,$$

la differenza  $\Theta$  si mantiene evidentemente *continua su tutta la circonferenza*  $|\zeta| = 1$ , e vi ammette derivata pure continua (ad eventuale esclusione dei soli punti  $j, \bar{j}$ , dove può essere discontinua); inoltre essa si annulla per  $\zeta = j$ , e per  $\zeta = \bar{j}$ .

In questa condizione di cose, la  $\Theta$  dà luogo ad un'associata  $T$ , funzione dispari di  $\eta$ , continua anch'essa senza restrizione su  $|\zeta| = 1$ , e si ha in definitiva

$$(24) \quad \omega = \omega_0 - \Omega,$$

designando  $\Omega = \Theta + iT$  una funzione della variabile complessa  $\zeta$ , reale sull'asse reale e regolare entro il cerchio  $|\zeta| < 1$ , al pari di  $\omega$  e di  $\omega_0$ , ma avente sopra di esse il vantaggio di restare finita e continua anche sulla circonferenza.

Dacchè, mediante  $\omega(\zeta)$ , rimangono definiti, come abbiám visto, tutti gli elementi del moto, si può dire che la (24) *costituisce l'integrale generale della classe di problemi qui considerati: la funzione*

$$(25) \quad \Omega(\zeta) = \sum_0^{\infty} c_n \zeta^n,$$

dove le  $c_n$  sono costanti reali e la serie converge entro e sopra la circonferenza  $|\zeta| = 1$ , ne mette nettamente in evidenza il grado di arbitrarietà.

La condizione che la parte reale  $\Theta$  di  $\Omega$  si annulli, in  $j$  e in  $\bar{j}$ , porta manifestamente fra le  $c$  l'unico vincolo espresso dalla equazione

$$(26) \quad \Theta(\sigma_0) = \sum_0^{\infty} c_n \cos n\sigma_0 = 0.$$

Siccome poi  $\omega$  si annulla per  $\zeta = 0$ , così si dovrà anche avere  $\omega_0(0) - \Omega(0) = 0$ , cioè

$$(27) \quad c_0 = \omega_0(0).$$

### 10. - Costruzione di una trascendente elementare $\omega_0$ , dotata della singolarità caratteristica.

Alle (23) e (23') si soddisfa evidentemente supponendo che  $\vartheta_0$  abbia il valore costante  $\delta - \alpha$  sull'arco  $\bar{j}, 1, j$ , e il valore pure costante  $\delta + \alpha$  sull'arco complementare  $j, -1, \bar{j}$ .

Per formare la  $\omega_0$  corrispondente, giova partire dalla funzione

$$\frac{1}{i} \log \frac{j - \zeta}{\bar{j} - \zeta},$$

anzi, più precisamente, da quel ramo di essa, uniforme e regolare entro la circonferenza  $|\zeta| = 1$ , che si riduce per  $\zeta = 0$  a

$$2\sigma_0 = \frac{1}{i} \log \frac{j}{\bar{j}}.$$

La parte reale  $\vartheta^*$  non è altro che l'angolo  $\bar{j}\zeta j$ , o per essere esatti, la misura (compresa 0 e  $2\pi$ ) di tale angolo, contato a partire dal lato  $\zeta j$  nel verso  $\xi \rightarrow \eta$ .

Ovvie considerazioni di geometria elementare mostrano che, sull'arco  $\bar{j}, 1, j$ , si ha

$$\vartheta^* = \pi + \sigma_0,$$

e, sull'arco complementare  $j, -1, \bar{j}$ ,

$$\vartheta^* = \sigma_0.$$

La funzione è poi reale sull'asse reale perchè la sua espressione rimane inalterata cambiandovi  $i$  in  $-i$  (il che implica scambio di  $j$  con  $\bar{j}$ ).

Sottraendo  $\sigma_0 + \pi/2$ , viene

$$\frac{1}{i} \log \frac{j - \zeta}{\bar{j} - \zeta} - \left( \sigma_0 + \frac{\pi}{2} \right) = \frac{1}{i} \log \frac{j - \zeta}{\bar{j} - \zeta} - \frac{1}{i} \log e^{i(\sigma_0 + \pi/2)} = \frac{1}{i} \log \frac{j - \zeta}{\bar{j} - \zeta} - \frac{1}{i} \log ij,$$

ossia, per essere  $j\bar{j} = 1$ ,  $1/i = -i$ ,

$$-i \log \frac{-ij + i\zeta}{1 - j\zeta},$$

la cui parte reale  $\vartheta^* - (\sigma_0 + \pi/2)$  prende, sui due archi  $\bar{j}, 1, j$ ;  $j, -1, \bar{j}$ , i valori  $\pm \pi/2$ . Moltiplicando per  $-2\alpha/\pi$ , questi valori divengono  $\mp \alpha$ .

Dopo ciò è manifesto che

$$(28) \quad \omega_0 = \delta + \frac{2\alpha i}{\pi} \log \frac{-ij + i\zeta}{1 - j\zeta}$$

[dove il logaritmo ha la determinazione, che si riduce a  $i(\sigma_0 - \pi/2)$  per  $\zeta = 0$ ] fornisce la funzione cercata.

Dacchè

$$\omega_0(0) = \delta - \frac{2\alpha}{\pi} \left( \sigma_0 - \frac{\pi}{2} \right),$$

la (27) assume l'aspetto

$$(27') \quad \Omega(0) = c_0 = \delta - \frac{2\alpha}{\pi} \left( \sigma_0 - \frac{\pi}{2} \right).$$

## II. - Interpretazione di $\omega_0$ . Problema di Bobileff.

Cerchiamo a qual tipo di profilo mobile compete la soluzione, che si ottiene dall'integrale generale (24), supponendovi  $\Omega = 0$ , cioè  $\omega = \omega_0$ .

Sui due archi  $1, j, j, -1$ , che corrispondono rispettivamente a  $\pi_2, \pi_1$ , la parte reale  $\vartheta_0$  di  $\omega_0$  assume, per costruzione, i valori costanti  $\delta - \alpha, \delta + \alpha$ .

Ora  $\vartheta$  (che nel caso presente si riduce a  $\vartheta_0$ ) rappresenta, per qualsiasi linea di flusso, e in particolare per  $\pi_1$  e  $\pi_2$ , l'inclinazione della tangente.

Ne viene che  $\pi_1, \pi_2$  sono due tratti rettilinei inclinati rispettivamente di  $\delta + \alpha, \delta - \alpha$  sull'asse delle  $x$ , e quindi comprendenti un angolo  $2\alpha$ .

Dalla (27') (per  $\Omega = 0$ ) si ha

$$(29) \quad \sigma_0 = \frac{\pi}{2} \left( 1 + \frac{\delta}{\alpha} \right).$$

Si noti che, essendo  $\delta$  minore di  $\alpha$  in valore assoluto (§ 9), il valore di  $\sigma_0$ , fornito dalla (29), risulta, come dev'essere, sempre compreso fra 0 e  $\pi$ .

Sulla semicirconferenza  $1, j, -1$  si ha  $\zeta = e^{i\sigma}$  con  $\sigma$  compreso fra 0 e  $\pi$ .

Ne viene

$$\frac{-j + \zeta}{1 - j\zeta} = \frac{-e^{i\sigma_0} + e^{i\sigma}}{1 - e^{i(\sigma_0 + \sigma)}} = \frac{-e^{i\frac{\sigma_0 - \sigma}{2}} + e^{-i\frac{\sigma_0 - \sigma}{2}}}{e^{-i\frac{\sigma_0 + \sigma}{2}} - e^{i\frac{\sigma_0 + \sigma}{2}}} = \frac{\text{sen } \frac{\sigma_0 - \sigma}{2}}{\text{sen } \frac{\sigma_0 + \sigma}{2}} = \frac{\text{tg } \frac{\sigma_0}{2} - \text{tg } \frac{\sigma}{2}}{\text{tg } \frac{\sigma_0}{2} + \text{tg } \frac{\sigma}{2}},$$

da cui si vede che il rapporto considerato (sempre minore dell'unità in valore assoluto) è positivo o negativo secondochè  $\sigma$  è minore o maggiore di  $\sigma_0$ . Avremo di conseguenza, per  $\sigma < \sigma_0$ ,

$$\log i \frac{-j + \zeta}{1 - j\zeta} = i \frac{\pi}{2} + \log \frac{\text{sen } \frac{\sigma_0 - \sigma}{2}}{\text{sen } \frac{\sigma_0 + \sigma}{2}};$$

per  $\sigma > \sigma_0$ ,

$$\log i \frac{-j + \zeta}{1 - j\zeta} = -i \frac{\pi}{2} + \log \frac{\operatorname{sen} \frac{\sigma - \sigma_0}{2}}{\operatorname{sen} \frac{\sigma_0 + \sigma}{2}}.$$

Ciò posto, risulta subito dalla (28) che il coefficiente di  $i$  in  $\omega_0$  ha l'espressione

$$\tau_0 = \frac{2\alpha}{\pi} \log \frac{\operatorname{sen} \left| \frac{\sigma_0 - \sigma}{2} \right|}{\operatorname{sen} \frac{\sigma_0 + \sigma}{2}},$$

valida su tutta la semicirconferenza 1,  $j$ ,  $-1$ .

Sarà perciò

$$(30) \quad e^{-\tau_0} = \left( \frac{\operatorname{sen} \left| \frac{\sigma_0 - \sigma}{2} \right|}{\operatorname{sen} \frac{\sigma_0 + \sigma}{2}} \right)^{-2\alpha/\pi}.$$

Portando questo valore nella (20) e prendendo successivamente 0 e  $\pi$  come limiti inferiori dell'integrale, si hanno le lunghezze dei due tratti rettilinei  $\pi_2$  e  $\pi_1$ .

Ad uno di questi, usufruendo della costante  $\alpha$ , si può immaginare attribuito un valore ad arbitrio; quello dell'altro risulta allora determinato. Il rapporto  $\pi_2/\pi_1$  dipende in modo trascendente, e in generale complicato, dalle due costanti  $\alpha$  e  $\delta$ .

Calcoliamo la resistenza.

Dalla

$$\omega_0 = \delta + \frac{2\alpha i}{\pi} \log i \frac{-j + \zeta}{1 - j\zeta}$$

scende

$$\omega_0'(\zeta) = \frac{2\alpha i}{\pi} \left[ \frac{1}{\zeta - j} - \frac{1}{\zeta - \bar{j}} \right],$$

$$\omega_0''(\zeta) = -\frac{2\alpha i}{\pi} \left[ \frac{1}{(\zeta - j)^2} - \frac{1}{(\zeta - \bar{j})^2} \right],$$

con che

$$\omega_0'(0) = \frac{2\alpha i}{\pi} \left( \frac{1}{j} - \frac{1}{j} \right) = -\frac{4\alpha}{\pi} \operatorname{sen} \sigma_0,$$

$$\omega_0''(0) = \frac{2\alpha i}{\pi} \left( \frac{1}{j^2} - \frac{1}{j^2} \right) = -\frac{4\alpha}{\pi} \operatorname{sen} 2\sigma_0,$$

e la (21<sup>n</sup>) porge

$$(31) \quad R = R_x + iR_y = \frac{4\alpha^2\alpha^3}{\pi} \operatorname{sen}^2 \sigma_0 - ia^2\alpha \operatorname{sen} 2\sigma_0.$$

#### CASI PARTICOLARI NOTEVOLI.

I)  $\alpha = \pi/2$  e  $\delta$  qualunque (HELMHOLTZ). - Veramente per  $\alpha = \pi/2$  e  $\delta$  non nullo le nostre formule non sono senz'altro applicabili, poichè le premesse implicano (§ 9)  $\alpha + \delta \leq \pi/2$ . L'estensione formale al caso indicato rimarrà però giustificata a posteriori, constatando che essa dà luogo a casi intuitivamente possibili ed interessanti, per quanto non soddisfacenti in tutto alle ipotesi preliminari del § 1.

Dacchè  $\alpha = \pi/2$ , i due segmenti  $\pi_1$ ,  $\pi_2$  sono per diritto, e si tratta di un profilo rettilineo (*lamina*).

La (29) porge

$$\sigma_0 = \delta + \frac{\pi}{2};$$

$\sigma_0$  rappresenta quindi l'angolo di  $\pi_1$  — possiam dire della lamina — colla direzione positiva dell'asse  $x$ .

La (30) permette poi di scrivere

$$e^{-\tau_0} (\cos \sigma - \cos \sigma_0) = \left( \frac{\operatorname{sen} \frac{|\sigma_0 - \sigma|}{2}}{\operatorname{sen} \frac{\sigma_0 + \sigma}{2}} \right)^{-1} \cdot 2 \operatorname{sen} \frac{\sigma_0 + \sigma}{2} \operatorname{sen} \frac{\sigma_0 - \sigma}{2} =$$

$$= \pm 2 \operatorname{sen}^2 \frac{\sigma_0 + \sigma}{2} = \pm [1 - \cos (\sigma + \sigma_0)],$$

valendo il segno superiore per  $\sigma < \sigma_0$ , l'inferiore per  $\sigma > \sigma_0$ .

Con ciò, attesa l'identità

$$2 \cos (\sigma + \sigma_0) \operatorname{sen} \sigma = \operatorname{sen} (2\sigma + \sigma_0) - \operatorname{sen} \sigma_0,$$

la (20) dà

$$\begin{aligned}\pi &= \pm a^2 \int_0^{\sigma_0} [2 \operatorname{sen} \sigma - \operatorname{sen} (2\sigma + \sigma_0) + \operatorname{sen} \sigma_0] d\sigma = \\ &= \pm a^2 [-2 \cos \sigma + \frac{1}{2} \cos (2\sigma + \sigma_0) + \sigma \operatorname{sen} \sigma_0]_{\sigma_0}^{\sigma_0};\end{aligned}$$

quindi in particolare, per  $\sigma = 0$ ,

$$\begin{aligned}\pi_2 &= a^2 [2 - 2 \cos \sigma_0 + \frac{1}{2} (\cos 3\sigma_0 - \cos \sigma_0) + \sigma_0 \operatorname{sen} \sigma_0] = \\ &= a^2 [2 - 2 \cos \sigma_0 - 2 \cos \sigma_0 \operatorname{sen}^2 \sigma_0 + \sigma_0 \operatorname{sen} \sigma_0];\end{aligned}$$

per  $\sigma = \pi$  (valendo allora il segno  $-$ )

$$\begin{aligned}\pi_1 &= a^2 [2 + 2 \cos \sigma_0 + \frac{1}{2} (\cos \sigma_0 - \cos 3\sigma_0) + (\pi - \sigma_0) \operatorname{sen} \sigma_0] \\ &= a^2 [2 + 2 \cos \sigma_0 + 2 \cos \sigma_0 \operatorname{sen}^2 \sigma_0 + (\pi - \sigma_0) \operatorname{sen} \sigma_0].\end{aligned}$$

La lunghezza totale  $l$  della lamina risulta pertanto

$$(32) \quad l = \pi_1 + \pi_2 = a^2 (4 + \pi \operatorname{sen} \sigma_0),$$

e la distanza dalla prua al centro della lamina, espressa in termini di  $l$ ,

$$\begin{aligned}\frac{\pi_1 - \frac{1}{2}l}{l} &= \frac{a^2}{l} \left[ 2 \cos \sigma_0 (1 + \operatorname{sen}^2 \sigma_0) + \left( \frac{\pi}{2} - \sigma_0 \right) \operatorname{sen} \sigma_0 \right] = \\ &= \frac{2 \cos \sigma_0 (1 + \operatorname{sen}^2 \sigma_0) + \left( \frac{\pi}{2} - \sigma_0 \right) \operatorname{sen} \sigma_0}{4 + \pi \operatorname{sen} \sigma_0}.\end{aligned}$$

Se l'angolo  $\sigma_0$ , formato da  $\pi_1$  colla direzione positiva dell'asse  $x$ , è acuto ( $\delta < 0$ ), il numeratore è positivo, e quindi  $\pi_1$  è più grande di  $\frac{1}{2}l$ ; l'opposto accade per  $\sigma_0$  ottuso ( $\delta > 0$ ). Ciò corrisponde al fatto intuitivamente evidente che la prua si trova spostata dal centro della lamina verso quella banda, che si protende nella direzione del moto.

Per  $\sigma_0 = \pi/2$ , la lamina è normale alla direzione del moto, la prua cade nel centro e si ha dalla (32)

$$(32') \quad l = a^2 (4 + \pi).$$

Le (31) e (32) dànno per la resistenza unitaria

$$(33) \quad \frac{R_x}{l} = \frac{\pi \operatorname{sen}^2 \sigma_0}{4 + \pi \operatorname{sen} \sigma_0} \quad (1^a),$$

(<sup>1a</sup>) LAMB, loco cit., cap. IV, art. 77. Il nostro  $\sigma_0$  è l'angolo ivi designato con  $\alpha$ .



che, per  $\sigma_0 = \pi/2$ , assume l'aspetto particolare

$$(33') \quad \frac{R_x}{l} = \frac{\pi}{4 + \pi}.$$

II)  $\delta = 0$  e  $\alpha$  qualunque (problema di BOBYLEFF). - Questo caso particolare, colla limitazione sottointesa  $\alpha < \pi/2$ , rientra perfettamente nell'ambito delle nostre ipotesi. Apparirà poi dagli sviluppi, che seguono, che l'interpretazione idrodinamica rimane attendibile anche se  $\alpha$  è retto od ottuso.

La (29) dà

$$\sigma_0 = \frac{\pi}{2},$$

con che  $j = i$ , e l'espressione (28) di  $\omega_0$  diviene

$$\omega_0 = \frac{2\alpha i}{\pi} \log \frac{1 + i\zeta}{1 - i\zeta}.$$

La funzione  $i\omega_0$  assume manifestamente valori reali per  $\zeta$  puramente immaginario; quindi valori complessi coniugati in punti simmetrici rispetto all'asse immaginario; in particolare, in punti della semicirconferenza 1,  $i$ ,  $-1$ , aventi anomalie supplementari  $\sigma$  e  $\pi - \sigma$ .

Essendo

$$i\omega_0 = i\vartheta_0 - \tau_0,$$

$\tau_0$  (in quanto si consideri come funzione di  $\sigma$  sopra la detta semicirconferenza) rimarrà inalterata per lo scambio di  $\sigma$  in  $\pi - \sigma$ ; ossia

$$\tau_0(\sigma) = \tau_0(\pi - \sigma).$$

Ciò posto, osserviamo che la (20), ritenutovi  $\sigma_0 = \pi/2$ , e presivi successivamente  $\sigma = 0$  e  $\sigma = \pi$  come limiti inferiori di integrazione, ci dà

$$\pi_1 = \pi_2,$$

in quanto i due integrali si ottengono l'uno dall'altro collo scambio della variabile corrente  $\sigma$  in  $\pi - \sigma$ .

Ne viene che il profilo consta di due segmenti eguali ed egualmente inclinati sulla direzione del moto.

Dalla (30) si ha, per  $\sigma_0 = \pi/2$ ,

$$e^{-\tau_0} = \left[ \frac{\operatorname{sen} \left| \frac{\pi}{4} - \frac{\sigma}{2} \right|}{\operatorname{sen} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\sigma}{2} \right)} \right]^{-2\alpha/\pi} = \left( \operatorname{tg} \left| \frac{\pi}{4} - \frac{\sigma}{2} \right| \right)^{-2\alpha/\pi};$$

quindi

$$\pi_1 = \pi_2 = 2a^2 \int_0^{\pi/2} \left[ \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\sigma}{2} \right) \right]^{-2\alpha/\pi} \cos \sigma \operatorname{sen} \sigma d\sigma.$$

Assumiamo come variabile di integrazione

$$t = \operatorname{tg}^2 \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\sigma}{2} \right) = \frac{1 - \operatorname{sen} \sigma}{1 + \operatorname{sen} \sigma}.$$

Essendo

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} \sigma &= \frac{1-t}{1+t} = -1 + \frac{2}{1+t}, \\ \cos \sigma d\sigma &= d(\operatorname{sen} \sigma) = -\frac{2 dt}{1(+t)^2}, \end{aligned}$$

risulta subito

$$\pi_1 = 4a^2 \int_0^1 t^{-\alpha/\pi} \left( -1 + \frac{2}{1+t} \right) \frac{dt}{(1+t)^2}.$$

L'integrale del secondo membro si esprime facilmente per mezzo della funzione  $\beta$  (di STIRLING)

$$\beta(x) = \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t} dt \quad (x > 0),$$

legata alla derivata logaritmica  $\Psi$  della funzione  $\Gamma$  dalla formula (17)

$$\beta(x) = \frac{1}{2} \left[ \Psi \left( \frac{x+1}{2} \right) - \Psi \left( \frac{x}{2} \right) \right].$$

Osserviamo a questo scopo che, ponendo

$$\beta_n = \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{(1+t)^n} dt \quad (x > 0 \text{ e } n \text{ intero positivo}),$$

(17) Cfr. per es. NIELSEN, *Handbuch der Theorie der Gammafunktion*, Leipzig, Teubner, 1906, pp. 69 e 16.

con che  $\beta_1$  non è altro che  $\beta(x)$ , si ha, per  $n > 1$ ,

$$\beta_n = \int_0^1 \frac{t^{n-1}}{(1+t)^n} (1+t-t) dt = \beta_{n-1} - \int_0^1 \frac{t^n}{(1+t)^n} dt,$$

da cui, assumendo  $dt/(1+t)^n$  come fattore differenziale ed integrando per parti,

$$\beta_n = \frac{1}{(n-1)2^{n-1}} + \frac{n-1-x}{n-1} \beta_{n-1}.$$

Da questa formula ricorrente segue in particolare

$$\beta_2 = \frac{1}{2} + (1-x)\beta(x),$$

$$\beta_3 = \frac{1}{8} + \frac{1}{2}(2-x)\beta_2 = \frac{1}{8} + \frac{1}{4}(2-x) + \frac{1}{2}(2-x)(1-x)\beta(x),$$

$$2\beta_3 - \beta_2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}(1-x) + (1-x)^2\beta(x).$$

Ora la precedente espressione di  $\pi_1$  non è altro che

$$4a^2(2\beta_3 - \beta_2),$$

le  $\beta$  riferendosi al valore  $1 - \alpha/\pi$  di  $x$ . Ne viene

$$(34) \quad \pi_1 = a^2 \left[ 1 + \frac{2\alpha}{\pi} + \frac{4\alpha^2}{\pi^2} \beta \left( 1 - \frac{\alpha}{\pi} \right) \right].$$

La (31), per  $\sigma_0 = \pi/2$ , porge

$$\mathbf{R} = R_x + iR_y = \frac{4a^2\alpha^2}{\pi}.$$

$R_y$  è nullo, come era evidente a priori, attesa la simmetria; la resistenza diretta  $R_x$ , riportata all'unità di apertura della lamina, divisa cioè per la *larghezza*

$$l = 2\pi_1 \operatorname{sen} \alpha,$$

si presenta sotto la forma

$$(35) \quad \frac{R_x}{l} = \frac{2}{\pi} \frac{\alpha^2}{\operatorname{sen} \alpha \left[ 1 + \frac{2\alpha}{\pi} + \frac{4\alpha^2}{\pi^2} \beta \left( 1 - \frac{\alpha}{\pi} \right) \right]} \quad (18).$$

(18) Cfr. LAMB, loco cit., art. 78.

Per  $\alpha = \pi/2$  ritroviamo il caso particolare, già precedentemente incontrato, di una lamina rettilinea, di larghezza

$$l = 2\pi_1,$$

normale alla direzione del moto.

Naturalmente si ritrovano anche le formule relative.

Si ha infatti

$$\beta \left( \frac{1}{2} \right) = \int_0^1 \frac{t^{-1/2} dt}{1+t} = \frac{\pi}{2},$$

con che la (34), facendovi  $\alpha = \pi/2$ , dà per  $l$  il valore (32'); la (35) porge poi, come la (33'),

$$\frac{R_x}{l} = \frac{\pi}{4 + \pi}.$$

## 12. - Contorni simmetrici e simmetricamente orientati rispetto alla direzione del moto.

Fissiamo le proprietà analitiche conseguenti all'ipotesi che vi sia simmetria rispetto all'asse  $x$ .

Le velocità, in punti simmetrici, essendo simmetriche, potremo anzi tutto asserire che, nella corrispondenza fra i piani  $z = x + iy$ ,  $w = u - iv$ , a valori coniugati di  $z$  fanno riscontro valori coniugati di  $w$ ; in particolare che  $w$  è reale sull'asse di simmetria.

Anche  $f$  risulta allora reale su tale asse e prende quindi valori coniugati in punti simmetrici. Tali essendo i punti di raccordo  $P_1$  e  $P_2$ , lo saranno i corrispondenti valori  $f_1 = f_2$ ; ma si tratta (§ 4) di valori reali; dunque  $f_1 = f_2$ .

Ne viene (§ 5)  $F_1 = F_2$ , e per conseguenza

$$\sigma_0 = \frac{\pi}{2}.$$

D'altra parte (indipendentemente da ogni particolare ipotesi) la formula (12)

$$Z = -\frac{1}{2} \left( \zeta + \frac{1}{\zeta} \right)$$

mostra che a valori di  $\zeta$  di affissa simmetrica rispetto all'asse immaginario (del corrispondente piano), cioè del tipo  $\zeta = \xi + i\eta$ ,  $-\bar{\zeta} = -\xi + i\eta$ , fanno riscontro valori di  $Z$  egualmente simmetrici rispetto all'asse immaginario.

Lo stesso avviene nella corrispondenza fra  $Z$  ed  $F$ , stabilita dalla (11), in quanto si tenga conto della simmetria  $[\cos \sigma_0 = 0$ , con che la (11) si riduce a  $F = aZ$ ].

La (10)

$$f = F^2$$

fa finalmente corrispondere valori coniugati di  $f$  a coppie del tipo  $F$  e  $-\bar{F}$ .

Da ciò si raccoglie che, ammessa la simmetria, a valori di  $\zeta$  simmetrici rispetto all'asse immaginario debbono far riscontro valori coniugati di  $f$ .

Ora, per quanto abbiamo osservato in principio di questo §, la corrispondenza fra i piani  $z$ ,  $w$  ed  $f$  conserva il coniugio. Attesa la biunivocità possiamo quindi asserire:

$w$ , considerata come funzione di  $\zeta$ , assume valori coniugati in punti simmetrici rispetto all'asse immaginario, cioè per valori  $\zeta$  e  $-\bar{\zeta}$  dell'argomento; in particolare  $w$  è reale per  $\zeta$  puramente immaginario.

La (9)

$$w = e^{-i\omega}$$

implica che  $i\omega$  sia anch'esso reale, o che la parte immaginaria si riduca ad un multiplo intero di  $2\pi i$ ; ma quest'ultima eventualità è da escludere, perchè  $\omega$  deve annullarsi con  $\zeta$ .

*In definitiva basterà ritenere che, quando c'è simmetria,*

$$\sigma_0 = \frac{\pi}{2}, \quad j = e^{i\sigma_0} = i;$$

$i\omega(\zeta)$  è funzione di  $\zeta$ , reale sull'asse immaginario  $\eta$ . Tenendo conto che  $\omega(\zeta)$  è in ogni caso reale sull'asse reale  $\xi$ , ciò può anche esprimersi dicendo:  $\omega(\zeta)$  è funzione dispari di  $\zeta$ . Infatti, essendo  $\omega(\zeta)$  regolare per  $|\zeta| < 1$ , si ha lo sviluppo (a coefficienti reali)

$$\omega(\zeta) = \sum_0^{\infty} \frac{\omega^{(n)}(0)}{n!} \zeta^n.$$

Condizione necessaria e sufficiente affinchè  $i\omega$  risulti reale per  $\zeta$  puramente immaginario è che si annullino tutti i coefficienti delle potenze pari.

*C. d. d.*

Affatto ovvia è la semplificazione delle formule dei §§ 7-10: la si ottiene materialmente ponendo  $\sigma_0 = \pi/2$ ,  $j = i$ , e avendo presente, ove giovi, la disparità di  $\omega(\zeta)$ .

Per es. (§ 7) le immagini, nel piano  $\zeta$ , delle linee di flusso sono definite da

$$\xi(\xi^2 + \eta^2 + 1)(\xi^2 + \eta^2 - 1)\eta = b(\xi^2 + \eta^2)^2.$$

Per  $b = 0$ , oltre a  $\xi^2 + \eta^2 = 1$ ,  $\eta = 0$  si ha (come ramo reale della cubica residua) l'asse immaginario  $\xi = 0$ , che è l'immagine di quella tale linea di flusso a proravia del corpo  $C$ , la quale si bipartisce, colpendo la prora  $O$  (e coincide, data la simmetria, col semiasse negativo delle  $x$ ).

L'angolo  $\delta$  (§ 9) è nullo, quindi, per la (28), la parte singolare  $\omega_0$  è

$$\omega_0 = \frac{2\alpha i}{\pi} \log \frac{1 + i\zeta}{1 - i\zeta},$$

la quale da sola dà luogo, come abbiám visto, al problema di BOBYLEFF.

$i\omega_0$  è reale sull'asse immaginario; deve perciò esser tale anche la differenza  $i(\omega_0 - \omega) = i\Omega$ .

Dacchè  $\Omega$  è essa pure funzione dispari di  $\zeta$ , l'espressione generale della serie, che la rappresenta, si potrà porre sotto la forma

$$\Omega = \zeta \sum_0^{\infty} b_n \zeta^{2n}.$$

Le  $b$  sono costanti reali soggette alla sola restrizione qualitativa di render convergente la serie per  $|\zeta| \leq 1$ . Dei due vincoli (26) e (27) del caso generale non è più da tener conto, perchè, le  $c_n$  di indice pari essendo nulle,  $\sigma_0 = \pi/2$  e  $\omega_0(0) = 0$ , essi risultano identicamente verificati.

Nella espressione (21'') della resistenza la parte immaginaria va a zero, e con essa  $R_x$ , come è intuitivamente evidente, perchè, tutto essendo simmetrico rispetto alla direzione del moto, non può ingenerarsi alcuna tendenza a deviazioni laterali.

Quanto alla resistenza diretta

$$R_x = \frac{\pi a^2}{4} \omega'^2(0),$$

è importante l'osservazione seguente:

*Se si aggiunge l'ipotesi [sempre verificata nei casi pratici (cfr. fig. 2)] che sul tratto di parete  $\pi_1$  l'inclinazione  $\vartheta$  della tangente vari, sempre decrescendo, da  $\alpha$  fino ad un certo valore  $\vartheta_1 > 0$  (con che, in  $\pi_2$ ,  $\vartheta$  varierà da*

$-\alpha$  a  $-\vartheta_1$ ), rimane esclusa l'eventualità  $\omega'(0) = 0$ . Quindi  $R_v$ , che non è negativo in alcun caso, risulta essenzialmente  $> 0$ .

La dimostrazione si fa senza difficoltà in base ad un elegante lemma del sig. LANDAU (19), che si enuncia così:

« Sia  $\Omega(\zeta)$  una funzione della variabile complessa  $\zeta$ , regolare per  $|\zeta| < 1$ , finita e continua sulla circonferenza  $|\zeta| = 1$ ;  $\Theta$  la parte reale di  $\Omega$ ,  $E(\Theta)$  la massima oscillazione di  $\Theta$  sulla circonferenza  $|\zeta| = 1$ :  $\Omega'(0)$  non può superare in valore assoluto il prodotto  $(2/\pi)E(\Theta)$  ».

Per usufruire di questo lemma, teniamo presente anzitutto che  $\vartheta = \vartheta_0 - \Theta$ , e che, variando  $\sigma$ , sulla circonferenza  $1, i, -1$ , da  $0$  a  $\pi$ ,  $\vartheta(\sigma)$  (per l'ipotesi complementare da noi introdotta) è sempre decrescente; d'altra parte  $\vartheta_0(\sigma)$  ha valore costante ( $-\alpha$  o  $+\alpha$ , secondochè  $\sigma$  appartiene al primo o al secondo quadrante).  $\Theta$  sarà perciò sempre crescente, e la massima oscillazione, relativa alla semicirconferenza  $1, i, -1$ , sarà data dalla differenza  $\Theta(\pi) - \Theta(0)$ . Dalla  $\Theta = \vartheta_0 - \vartheta$ , essendo  $\pm \vartheta_1$  i valori di  $\vartheta$  nei punti di raccordo  $P_1, P_2$ , cioè per  $\sigma = \pi$  e per  $\sigma = 0$  rispettivamente, segue

$$\Theta(\pi) - \Theta(0) = 2(\alpha - \vartheta_1).$$

Siccome, per essere  $\Omega$  reale sull'asse reale, la  $\Theta$  riprende sulla semicirconferenza  $1, -i, -1$  gli stessi valori, che le competono sulla  $1, i, -1$ , così la massima oscillazione  $E(\Theta)$ , relativa all'intera circonferenza  $|\zeta| = 1$ , è ancora  $2(\alpha - \vartheta_1)$ .

Il lemma di LANDAU ci dà in conformità

$$|\Omega'(0)| < \frac{4}{\pi} (\alpha - \vartheta_1).$$

Ora, da

$$\omega_0 = \frac{2\alpha i}{\pi} \log \frac{1 + i\zeta}{1 - i\zeta}$$

scende

$$\omega'_0 = -\frac{2\alpha}{\pi} \left( \frac{1}{1 + i\zeta} + \frac{1}{1 - i\zeta} \right)$$

e quindi

$$\omega'_0(0) = -\frac{4\alpha}{\pi}.$$

(19) Ueber einige Ungleichheitsbeziehungen in der Theorie der analytischen Funktionen, « Archiv der Math. und Physik », III, Reihe, Bd. XI, 1906, pp. 31-36.

Dacchè

$$\omega'(0) = \omega'_0(0) - \Omega'(0),$$

e il valore assoluto del primo addendo supera quello del secondo, si ha necessariamente  $\omega'(0) \geq 0$ . C. d. d.

Come esempio semplice di contorni (non rettilinei) simmetrici e simmetricamente orientati, si potrebbe approfondire il caso, in cui  $\Omega$  sia limitato al suo primo termine  $b_0\zeta$ . Preferisco però di rimettere lo studio dei casi particolari a quando mi sarò reso conto dei criteri pratici, in base ai quali conviene impostare la discussione.

### 13. - Relazione fra $\Theta$ e $T$ al contorno del cerchio di regolarità. Osservazioni sul problema matematico relativo ad un profilo prefissato.

Supponiamo che in  $\pi_1$  e in  $\pi_2$  la tangente vari sempre nel medesimo senso <sup>(20)</sup>, e richiamiamo la equazione (19).

Badando che, fra le parti reali e i coefficienti di  $i$  in  $\omega$ ,  $\omega_0$ ,  $\Omega$  sussistono le relazioni

$$\tau = \tau_0 - T, \quad \vartheta = \vartheta_0 - \Theta,$$

che  $\vartheta_0$  è costante sulla circonferenza 1,  $i, -1$  (eguale a  $\delta - \alpha$  per  $0 \leq \sigma < \sigma_0$ , a  $\delta + \alpha$  per  $\sigma_0 < \sigma \leq \pi$ ), e che al verso delle  $\sigma$  crescenti ( $|d\sigma| = d\sigma$ ) fa riscontro sugli archi  $\pi_1, \pi_2$  del piano  $z$  il verso  $P_2OP_1$ , siamo condotti a porre la (19) sotto la forma

$$(36) \quad \frac{d\Theta}{d\sigma} = \chi(\sigma) \cdot c(\Theta) \cdot e^{\tau} \quad (0 \leq \sigma \leq \pi)$$

dove, per la (30),

$$\begin{aligned} \chi(\sigma) &= 2a^2 |\cos \sigma - \cos \sigma_0| \operatorname{sen} \sigma e^{-\tau_0} = \\ &= 2a^2 |\cos \sigma - \cos \sigma_0| \operatorname{sen} \sigma \left( \frac{\operatorname{sen} \frac{|\sigma_0 - \sigma|}{2}}{\operatorname{sen} \frac{\sigma_0 + \sigma}{2}} \right)^{-2\alpha/\pi} \end{aligned}$$

è una funzione nota di  $\sigma$ , e, scrivendo  $c(\Theta)$ , abbiamo voluto mettere in evidenza che  $c$  è a ritenersi funzione di  $\Theta$ , perfettamente conosciuta,

<sup>(20)</sup> Questo comportamento è certo implicito nella rappresentazione intuitiva di una scia. Non l'ho enunciato esplicitamente fra le ipotesi del § 1, perchè le considerazioni fatte finora ne sono indipendenti (tranne l'osservazione del paragrafo precedente, concernente  $R_{\#}$ ; alla quale fu appunto premessa l'ipotesi complementare circa il modo di variare di  $\theta$ ).



tostochè si risguardi conosciuta la forma geometrica del profilo  $\gamma$ : infatti, dato  $\gamma$ , nei tratti di parete rigida  $\pi_1$  e  $\pi_2$ , che solo ci interessano, la  $c$  (curvatura) è nota come funzione del punto corrispondente, quindi anche come funzione di un qualunque parametro atto a definire univocamente gli archi, di cui si tratta. Attesa l'ipotesi circa il modo di variare della tangente,  $\vartheta$  è un tale parametro, e perciò anche  $\Theta$ . Esso presenta sopra  $\vartheta$  il vantaggio che, al variare di  $\sigma$  nella (36), varia con continuità, mentre  $\vartheta$ , pur variando sempre nello stesso senso, là dove è continuo, fa un brusco salto (in senso opposto) nel passare per  $O$ .

La (36) è manifestamente una relazione fra le funzioni associate  $\Theta$  e  $T$  al contorno del cerchio di regolarità. Essa si riferisce alla semicirconfenza  $1, i, -1$ ; sull'altra semicirconfenza ( $\pi \leq \sigma \leq 2\pi$ ) valendo le relazioni

$$(37) \quad \Theta(\sigma) = \Theta(2\pi - \sigma), \quad T(\sigma) = -T(2\pi - \sigma),$$

che provengono dall'essere  $\Omega$  reale sull'asse reale, e quindi coniugata in punti simmetrici rispetto a tale asse.

La seconda delle (37), essendo  $T(0) = T(2\pi)$ , dà luogo in particolare alla relazione  $T(0) = 0$ , come pure, facendovi  $\sigma = \pi$ , alla  $T(\pi) = 0$ .

Ricordiamo ancora le (26) e (27).

La condizione (26) non è altro che

$$(38) \quad \Theta(\sigma_0) = 0;$$

l'altra esprime l'annullarsi di  $\omega$  per  $\zeta = 0$ , cioè nel centro del cerchio, ma si traduce subito in una condizione numerica per i valori di  $\Theta$  al contorno. Si ha infatti dal teorema di CAUCHY

$$\Omega(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \Omega(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [\Theta(\sigma) + iT(\sigma)] d\sigma.$$

La parte immaginaria essendo nulla per la seconda delle (37), rimane, in virtù della prima di esse,

$$\Omega(0) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \Theta(\sigma) d\sigma,$$

e la (27') assume l'aspetto

$$(39) \quad \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \Theta(\sigma) d\sigma = \delta - \frac{2\alpha}{\pi} \left( \sigma_0 - \frac{\pi}{2} \right).$$

Il secondo membro — notiamolo incidentalmente — va a zero quando si tratti di profili simmetrici, simmetricamente orientati rispetto alla direzione del moto.

In definitiva riconosciamo che, per un profilo assegnato, la risoluzione del problema idrodinamico implica l'esistenza di due funzioni associate  $\Theta(\sigma)$ ,  $T(\sigma)$  dei punti della circonferenza  $|\zeta|=1$ , finite, continue e soddisfacenti alle (36), (37), (38), (39) per convenienti valori delle due costanti  $a^2$  e  $\sigma_0$  (a priori vincolate soltanto ad essere: la prima positiva, la seconda compresa fra 0 e  $\pi$ ).

Reciprocamente, esisteranno sempre per un assegnato profilo (convesso, supponiamo, e soddisfacente alle restrizioni che risultano dal § 1) due associate  $\Theta(\sigma)$ ,  $T(\sigma)$ , che verifichino tutte le condizioni testè indicate?

Ecco il punto principale della questione dal punto di vista matematico. Superato questo punto, poche considerazioni complementari permetterebbero di esaurire anche l'interpretazione idrodinamica.

Nel caso, in cui vi sia simmetria rispetto all'asse  $x$ , la funzione  $\Omega$  deve essere dispari (§ 12), ossia  $i\Omega$  deve assumere valori coniugati in punti simmetrici rispetto all'asse immaginario. Questo implica in particolare le relazioni

$$(40) \quad \Theta(\pi - \sigma) = -\Theta(\sigma), \quad T(\pi - \sigma) = T(\sigma)$$

fra i valori di  $\Theta$  e  $T$ , al contorno.

Tenendone conto e badando che  $\sigma_0$  vale in questo caso  $\pi/2$ , con che

$$(41) \quad \chi(\sigma) = 2a^2 |\cos \sigma| \operatorname{sen} \sigma \left| \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\sigma}{2} \right) \right|^{-2\alpha/\pi},$$

si vede che basta considerare la (36) per il primo quadrante ( $0 \leq \sigma \leq \pi/2$ ); nel secondo essa si trova di necessità soddisfatta, in virtù delle (40). Pure per la prima delle (40) e per essere  $\delta = 0$ , le (38) e (39) rimangono identicamente verificate.

Il problema analitico fondamentale, per profili simmetrici e simmetricamente orientati, consiste così nella determinazione di due funzioni associate  $\Theta$  e  $T$ , i cui valori al contorno  $|\zeta|=1$ , siano ovunque continui, e soddisfacciano alla (36), col valore (41) di  $\chi$ , nel primo quadrante ( $0 \leq \sigma \leq \pi/2$ ), rimanendo prolungati negli altri tre quadranti a norma delle relazioni (37) e (40).

#### NOTA SULLA RESISTENZA D'ATTRITO.

Un corpo  $C$ , immerso in acqua tranquilla, proceda orizzontalmente con moto traslatorio uniforme. Si supponga che il moto subordinato

del liquido sia irrotazionale e ovunque continuo; lo si riferisca ad un sistema di assi solidale con  $C$ .

Per una generica particella  $P$  del liquido, sia  $W$  il valore assoluto della velocità,  $p$  la pressione.

Diciamo poi (senza specializzare le unità, per poter più comodamente passare ai numeri in unità pratiche)  $V_0$  la velocità (costante) di traslazione del corpo  $C$ ,  $\rho$  la densità (pure costante) del liquido.

Ritenuto che degli assi di riferimento, solidali, per ipotesi, con  $C$ , sia quello delle  $z$  verticale e diretto verso il basso, il potenziale della gravità sarà  $gz$  e (il movimento relativo, di cui si tratta, differendo da un moto assoluto soltanto per una traslazione uniforme) varrà la solita relazione integrale

$$p = \rho gz - \frac{1}{2} \rho W^2 + \text{cost.}$$

Fuori dell'influenza del moto del solido,  $W = V_0$ , perchè l'acqua vi è in quiete assoluta, il che è quanto dire animata, rispetto al corpo  $C$ , da velocità opposta a quella (assoluta) del corpo stesso.

Conveniamo di contare le  $z$  a partire dalla superficie libera e designiamo con  $p_0$  la pressione atmosferica. Applicando la relazione precedente ad un punto della superficie libera a grande distanza dal solido ( $W = V_0$ ), troviamo subito che la costante deve avere il valore  $p_0 + \frac{1}{2} \rho V_0^2$ , talchè

$$p = p_0 + \rho gz + \frac{1}{2} \rho (V_0^2 - W^2).$$

Importa osservare che  $W$  si può porre sotto la forma  $V_0 V$ , con  $V$  indipendente da  $V_0$  <sup>(21)</sup> (la velocità, che si avrebbe, caeteris paribus, nel punto considerato, per una traslazione unitaria di  $C$ ).

In definitiva, posto

$$\begin{aligned} p_s &= p_0 + \rho gz && \text{(pressione statica),} \\ q &= \frac{1}{2} \rho V_0^2 (1 - V^2) && \text{(correzione cinetica),} \end{aligned}$$

avremo come espressione di  $p$ :

$$p = p_s + q,$$

il primo addendo essendo indipendente da  $V_0$ , il secondo proporzionale a  $V_0^2$ .

Per farci un'idea del rapporto numerico dei due addendi, conveniamo anzitutto di riferirci alle unità pratiche metro, secondo, kilogrammo

<sup>(21)</sup> Per riconoscerlo, basta pensare alle equazioni, che caratterizzano il potenziale di velocità  $\phi$  del liquido. Ponendovi  $\phi = V_0 \phi$ , si hanno equazioni definiti  $\phi$ , in cui non resta più traccia di  $V$ .

(peso). Avremo  $\rho g$  (peso di un  $m^3$  d'acqua) = 1000, e, in cifra tonda,  $\frac{1}{2}\rho = 50$ ,  $p_0 = 10000$ .

Quando la velocità di traslazione  $V_0$  è abbastanza piccola, non superiore per es. ai 4 metri al secondo, il secondo addendo  $q$  rimane inferiore a 800, mentre la pressione statica  $p_s$  ( $z$  essendo  $\geq 0$ ) supera 10000: come si vede,  $q$  si può quasi trascurare di fronte a  $p_s$ .

Al crescere di  $V_0$  non è più così, ma, nei limiti delle velocità attualmente raggiungibili dalle navi, il contributo recato dal primo addendo  $p_s$  è sempre importante, e non si può dire, nemmeno in grossolana approssimazione, che la somma  $p_s + q$  varia in ragione del quadrato della velocità.

È facile convincersi che analoga conclusione sta per la resistenza diretta.

Infatti, conformemente alla legge fondamentale dell'attrito dinamico, tale resistenza proviene, per ciascun elemento  $d\gamma$  della superficie del corpo  $C$ , da una forza proporzionale alla pressione normale  $p d\gamma$ , e diretta per verso opposto alla velocità (relativa) della particella fluida in contatto coll'elemento.

Detto  $k$  il coefficiente d'attrito, e  $\vartheta$  l'angolo compreso fra la direzione della velocità, in un generico elemento  $d\gamma$ , e la direzione diametralmente opposta a quella del moto di  $C$ , la resistenza diretta, incontrata da  $d\gamma$ , vale

$$kp \cos \vartheta d\gamma.$$

La resistenza totale segue di qua per integrazione. In essa si riverbera senz'altro il rapporto quantitativo dei due addendi costituenti  $p$ .

In particolare ( $k$  essendo indipendente da  $V_0$ ) rimane giustificata la conclusione che *l'attrito non si può riguardare causa preponderante della resistenza diretta*, poichè, se ciò fosse, la resistenza diretta dovrebbe, di fronte a piccole velocità di traslazione, variare ben poco, e non riscontrarsi, come si riscontra in fatto, sensibilmente proporzionale ai quadrati di tali velocità.

Padova, Settembre 1906.

LE IDEE DI ENRIQUES  
SUI PRINCIPI DELLA MECCANICA

« Rivista di Filosofia e Scienze affini », anno IX (1907), vol. I, n. 5-6,  
pp. 1-10.

Un bell'articolo del collega SEVERI, inserito in questa *Rivista*, ha richiamato l'attenzione degli studiosi sopra un'opera recente <sup>(1)</sup> in cui, forse per la prima volta in Italia, un autentico cultore di scienze esatte — l'ENRIQUES — espone il frutto delle sue meditazioni sui principi generali della conoscenza e su quelli, che più particolarmente si riferiscono alla matematica e alle sue applicazioni.

La lucida sintesi del SEVERI si arresta alla soglia della meccanica. Mi si consenta di varcarla e di dar notizia del capitolo, che si riferisce a questa disciplina. Esso contiene, accanto ad una esposizione critica dello sviluppo storico e psicologico, alcune idee originali sulla gerarchia dei postulati e sopra le eventuali estensioni della dinamica classica.

\* \* \*

La meccanica dei solidi (stereomeccanica, dice felicemente il MAGGI) si può a buon diritto considerare come una continuazione immediata della geometria, conseguibile mediante l'aggiunta di alcuni pochi concetti e postulati fondamentali.

I concetti essenzialmente nuovi si possono ridurre a tre: tempo, forza e massa.

Essi si presentano — osserva ENRIQUES — generalmente collegati a certe rappresentazioni. Quando si sia eliminato l'elemento soggettivo, resta un insieme di rapporti, che costituiscono altrettante supposizioni implicite: dal punto di vista logico, un primo gruppo di postulati.

Occorrono poi i veri postulati fisici, o principi, i quali hanno carattere di leggi desunte da esperienze esplicite.

---

(<sup>1</sup>) F. ENRIQUES: *Problemi della scienza*, Bologna, Zanichelli, 1906.

### Il tempo.

L'A. analizza il concetto di tempo sotto i due diversi aspetti di successione e di durata. Mostra come si assurge dal soggettivo (cioè dalle sensazioni, cui si collega l'idea del prima, del poi e del frapposto intervallo) ad una nozione oggettiva.

Sorge poi la questione della misura. I nostri orologi porgono una misura convenzionale, o forniscono una scala delle durate, che ha base naturale?

Per rendersi conto della questione, basta seguire l'A. nel confronto della misura del tempo con quella di due altri elementi: le temperature e le lunghezze.

La graduazione di un termometro (prescindendo dalla temperatura assoluta, che non è accessibile all'intuizione diretta) apparisce eminentemente convenzionale. Non esiste una sensazione specifica di eguali aumenti di temperatura: il divario da  $0^{\circ}$  a  $10^{\circ}$  ha tutt'altri caratteri del divario da  $15^{\circ}$  a  $30^{\circ}$ , e non vi sarebbe nulla di ripugnante nell'immaginare un termometro, rispetto alle cui indicazioni uno dei due intervalli di temperatura si presentasse doppio dell'altro.

Ma lo stesso non è per le lunghezze. L'eguaglianza di due lunghezze risponde a sensazioni precise, tattili e visive.

Si riconosce senza difficoltà che il tempo si trova in condizioni analoghe. Vi hanno fenomeni fisiologici e naturali, che destano col loro ritmo la sensazione di isocronismo; in uno stadio più evoluto, le molteplici concordanze degli orologi danno valore obbiettivo alle nostre sensazioni e ne allargano il campo. Così, per approssimazioni successive, si è condotti ad attribuire un valore naturale (in certo senso, si potrebbe dire assoluto, cioè non dipendente da convenzioni arbitrarie) al rapporto di due durate.

### La cinematica.

La geometria permette di precisare il significato di cambiamento di posizione di un corpo *C* rispetto ad un altro *S*. Basta associarvi il concetto del tempo, coordinando un istante ad ogni posizione di *C*, per trarne la cinematica (studio del moto in sè, indipendentemente dai fenomeni concomitanti).

La costruzione della cinematica, tostochè si risguardi acquisito il concetto di tempo, procede per via puramente deduttiva, e non ha dato, nè dà, occasione a discussioni di indirizzo.

### Le forze.

Le sensazioni muscolari di sforzo, quali si destano nell'innalzare o nel tener sollevati dei pesi, o nel premere un oggetto contro un altro, hanno dato origine al concetto di forza. Queste sensazioni sono contraddistinte da una maggiore o minore intensità; inoltre esse si presentano quasi sempre associate ad altri dati percettivi. Così al concetto di forza si collega non solo l'idea di una intensità, ma anche quella di una direzione e di un punto di applicazione: geometricamente vien dunque a corrispondere un *vettore*. La determinazione precisa di un tale vettore risulta dai postulati.

Una circostanza merita però di essere in precedenza rilevata. Ed è che l'apprezzamento muscolare diretto consente di graduare soltanto una scala convenzionale (analoga a quella delle temperature). Questo basta tuttavia per procedere ad una accezione più ampia del concetto di forza e ricavarne un criterio intrinseco di misura (scala naturale, analoga a quella del tempo).

Ecco come vi si arriva.

Si constata che in molti casi una determinata circostanza (peso, molla, vento) può benissimo venir sostituita con uno sforzo muscolare senza sensibile variazione di effetti. Si attribuisce allora a quella circostanza carattere di forza, anzi di forza eguale (cioè equivalente nell'ordine dei fenomeni di movimento, ai quali ci si riferisce) allo sforzo muscolare atto a surrogarla.

Per i pesi, si ha una scala naturale, dovuta all'intuizione che i pesi di sostanze omogenee sono proporzionali ai rispettivi volumi, o, se si vuole, dovuta ad una forma primordiale del principio di composizione, che figurerà poi tra i postulati della statica.

La misura dei pesi si trasporta ad una forza di origine qualsiasi.

In definitiva, importa ritenere che al concetto di forza è inerente un vettore rappresentativo, più o meno grossolanamente delimitato dalle nostre sensazioni, ma *suscettibile* di determinazione precisa.

I postulati della meccanica e le loro conseguenze suggeriscono criteri svariati per compiere e per controllare queste determinazioni.

### I postulati della statica.

L'A. ha fin qui dato forma positiva all'introduzione dei concetti, secondo la tradizione classica, illustrando le questioni critiche, che vi

sono connesse e mostrando gli inconvenienti della soverchia astrazione matematica, prevalsa presso qualcuno dei moderni.

Ora egli si scosta dall'assetto metodologico abituale, ove interviene l'assoluto (cioè uno speciale sistema di riferimento), e si propone di fissare le leggi della meccanica — quelle della statica in primo luogo — rispetto ad un sistema di riferimento generico. Sia questo  $S$ .

Per semplicità ci occuperemo soltanto dei punti materiali, cioè dei corpi di dimensioni tanto piccole da potersi senza errore sensibile assimilare a punti geometrici.

Seguendo il concetto dell'A., se non proprio l'ordine della sua esposizione, cominceremo coll'ammettere il *principio del moto incipiente*. Secondo tale principio, l'esistenza di una forza agente sopra un punto materiale, il quale si trovi in stato di quiete rispetto ad  $S$ , ci si rivela per la tendenza del punto ad uscire da questo stato di quiete, e a mettersi in movimento proprio nella direzione della forza.

È così che nell'ordinario campo terrestre controlliamo la sensazione muscolare corrispondente alla forza « peso ».

Supponiamo ora che sopra un punto materiale  $P$  agiscano più forze, indipendentemente l'una dall'altra: per es. il peso e le trazioni di due funicelle. Il secondo postulato fondamentale è il *principio di composizione*, inteso in un senso intermedio fra lo statico ed il dinamico.

Esso esprime che le cose vanno, *si tratti di quiete o di moto incipiente*, come se agisse sul punto un'unica forza: la risultante geometrica delle varie forze applicate.

Questi due postulati (moto incipiente e composizione) non contengono, come si vede, alcuna speciale ipotesi sul sistema di riferimento. Essi permettono di costruire una statica (relativa) del punto materiale. Ne segue immediatamente che condizione necessaria e sufficiente per l'equilibrio è l'annullarsi della forza totale (risultante di tutte le forze, che agiscono sul punto). Il passaggio al caso dei sistemi si compie poi coi criteri ordinari.

È importante fissar bene il senso che si deve attribuire ai postulati suddetti. Se non si presta attenzione, è facile prenderli un po' troppo letteralmente, e ravvisarvi magari contraddizione coi precetti della meccanica classica.

Per spiegarmi meglio comincerò con un esempio.

Sopra un piano orizzontale si trovi una pallina in riposo, soggetta a due trazioni orizzontali diametralmente opposte, esercitate per es. con due fili. In tali condizioni agiscono ulteriormente la gravità e la reazione del piano, le quali si fanno equilibrio l'una all'altra. Se uno dei fili si rompe, la pallina comincia a muoversi nella direzione dell'altro, come esige il principio del moto incipiente.



Supponiamo adesso che il piano non vi sia e che la pallina sia sostenuta per aria fra i due fili tesi orizzontalmente (o quasi orizzontalmente). Quando se ne rompe uno, la pallina non si muove nella direzione dell'altro, ma c'è la deviazione dovuta al peso; il moto incomincia secondo la diagonale del parallelogrammo costruito sulle due forze: trazione del filo che non si è rotto, peso della pallina.

Tutto questo ci appare ben chiaro, per l'abitudine a tener sempre conto del peso fra le varie forze applicate, quando si esperimenta in condizioni ordinarie alla superficie terrestre.

Immaginiamo adesso di trasportarci a fare delle esperienze statiche in un campo sconosciuto: voglio dire in un campo  $S$ , il quale (rispetto alla terra, per es.) si muove con legge ignota, e su cui si esercitano azioni a priori ignote.

Applico ad un punto materiale, in quiete rispetto ad  $S$ , una forza di data direzione (per es. uno sforzo muscolare). In generale il punto non si metterà in movimento nella direzione della forza.

Debbo ritenere infirmato il principio del moto incipiente?

Sarebbe manifestamente un errore, perchè non ho alcun diritto di trascurare a priori l'influenza dell'ambiente, in cui opero (il peso per l'osservatore terrestre).

Un preliminare indispensabile è l'esplorazione del campo, cioè la valutazione della forza  $\varphi$ , che agisce (anche all'infuori da ogni sollecitazione direttamente applicata) sopra un generico punto  $P$ , il quale occupi un'assegnata posizione entro  $S$ . L'esplorazione va fatta naturalmente con esperienze intrinseche.

All'uopo si prova anzi tutto se, in condizioni normali e senza nostro diretto intervento,  $P$  è atto a restare in quiete nelle varie posizioni di  $S$ : in tal caso  $\varphi = 0$ .

In generale ciò non accadrà, ma converrà, per farlo star fermo, applicargli una certa forza (eventualmente variabile col luogo e col tempo). Dovrò inferirne, in base ai postulati, che *la forza del campo*  $\varphi$  è esattamente eguale ed opposta a questa forza, con cui si assicura l'equilibrio.

Trattando  $\varphi$  come una forza autonoma, da aggiungersi caso per caso alle altre direttamente applicate, si può asserire che le leggi della statica non esigono alcun riferimento assoluto.

Nel concetto di ENRIQUES, è l'esplorazione del campo, indagine perfettamente positiva, che deve da sola surrogare quanto, secondo le ordinarie vedute, risulta dalla sovrapposizione di ipotesi trascendenti: che sia  $\varphi = 0$  per un particolare sistema di riferimento  $A$ , che si conosca il moto di  $S$  rispetto ad  $A$ , nonchè le forze, che *agirebbero*, qualora  $S$  fosse in quiete rispetto allo stesso  $A$ .

### La massa.

Il principio del moto incipiente, precisato nel senso che, per ogni punto materiale  $S$ , sia costante il rapporto  $m$  fra la forza e l'accelerazione iniziale, che essa gli imprime, porge una definizione e una misura della massa. Ma questa definizione logica della massa è in perfetta antitesi collo spirito della critica di ENRIQUES. Egli condanna severamente la tendenza a ridurre i concetti fondamentali, schematizzando per via astratta. Ciascun concetto, deve essere, per quanto possibile, separatamente analizzato in rapporto ai dati fisici, così da attribuire ai postulati il massimo contenuto di fatti.

L'A. discute perciò lungamente le intuizioni e i fenomeni fisico-chimici, cui si collega la nozione di massa: principio di LAVOISIER, esistenza di un invariante additivo di un certo gruppo di trasformazioni, immagine atomica, ipotesi dell'unità della materia. Dalla discussione risulta fino a qual punto la massa può essere definita per sè stessa, indipendentemente dalle leggi del moto.

### La dinamica newtoniana. Il desiderato della relatività.

Il principio fondamentale della dinamica newtoniana implica uno speciale sistema di riferimento: quello delle stelle fisse. Esso consiste nell'estendere il principio del moto incipiente, *rispetto a questo sistema*, ammettendo che la proporzionalità fra forza e accelerazione valga, non soltanto all'inizio, ma anche in tutto il corso del moto (legge di inerzia *generalizzata*).

Con ciò rimangono subordinate (teorema di CORIOLIS) leggi più complesse per gli altri sistemi di riferimento  $S$ , che non sono in quiete (o in moto traslatorio uniforme) rispetto alle stelle fisse.

L'A. nota che il passaggio dal caso del moto incipiente al caso generale involge l'ipotesi che la forza agente sopra un punto in movimento possa valutarsi per via statica come se il punto fosse istantaneamente fermato; rintraccia la genesi del postulato newtoniano nelle idee astronomiche del grande scopritore; rileva come essa sia in istretto rapporto coll'ipotesi delle forze centrali e di una propagazione istantanea delle azioni a distanza; riconosce naturalmente la perfetta attendibilità pratica del postulato per le meravigliose conferme, che le sue conseguenze hanno trovato e trovano in ogni campo; ma non sa persuadersi ad accettarlo come base di un assetto definitivo della teoria. L'intervento di

un sistema privilegiato (quello delle stelle fisse), sebbene non sia l'assoluto metafisico, gli sembra un grave inconveniente, altrettanto poco filosofico quanto potrebbe esserlo una concezione grettamente geocentrica dell'universo.

ENRIQUES si augura che gli sforzi degli studiosi riescano a formulare un principio dinamico generale, valido per qualsiasi sistema di riferimento.

Beninteso, una tale dinamica relativa non dovrebbe perdersi nel vago, ma consentire, nell'ambito già sottoposto all'esperienza, le stesse (o sensibilmente le stesse) previsioni concrete della meccanica newtoniana. In questa imprescindibile condizione risiede la difficoltà essenziale del seducente desiderato. L'A. non se lo nasconde, ma si mostra ottimista.

Egli osserva con ragione che le spiegazioni meccaniche di molti fenomeni d'isteresi, giustificano la presunzione che la legge d'inerzia generalizzata non sia espressione rigorosa della realtà; e che la possibilità di una correzione si affaccia senza alcuna ripugnanza a chi abbia abbandonata la veduta delle azioni a distanza e con essa l'incondizionata validità del principio della reazione eguale ed opposta all'azione.

Su ciò danno luce le nuovissime speculazioni sulla meccanica degli elettroni.

Fin qui l'autore. Per conto mio vorrei aggiungere una riserva. Perfettamente d'accordo sulla possibilità e magari sulla opportunità di rinunciare al postulato newtoniano, come espressione rigorosa della realtà, per aprir l'adito a tener conto, ove occorra, della storia anteriore del mobile. Ma non posso dimenticare che si tratterebbe ad ogni modo di correzioni, le quali dovrebbero rendersi sensibili soltanto per velocità grandissime (rispetto alle terrestri e planetarie). Resta quindi da sciogliere un enigma, per così dire, pregiudiziale: l'interpretazione relativa della forza centrifuga composta, nei casi in cui quelle eventuali correzioni sono indiscutibilmente trascurabili.

### **Confronto colla trattazione ordinaria.**

Di solito si premette la statica assoluta (riferita alle stelle fisse); e poi, come particolare applicazione dei principi dinamici, si danno le leggi dell'equilibrio relativo.

ENRIQUES ripudia questo procedimento, e propone, come abbiamo visto, una costruzione statica puramente relativa. Inoltre scinde in due stadi il passaggio dalla statica alla dinamica, ammettendo prima il principio del moto incipiente, e riservando a future esperienze un'ipotesi complementare, che, nella dinamica astronomica (e terrestre), è espressa convenientemente dal principio di inerzia generalizzato.

Limitandosi al primo stadio, vien fatto di caratterizzare la meccanica dell'equilibrio e degli stati prossimi all'equilibrio col minimo numero di supposizioni, e in modo perfettamente indipendente dal sistema di riferimento.

È appena necessario avvertire che, quanto a contenuto sostanziale, non c'è alcuna contraddizione colla teoria ordinaria. Si viene soltanto ad abbracciare un campo di fenomeni, che comprende, oltre alla statica assoluta, anche una parte della dinamica.

Per metterlo bene in evidenza, mi porrò dal punto di vista classico e ragionerò sulla formula fondamentale della dinamica

$$(1) \quad m \cdot a = F,$$

dove  $a$  designa l'accelerazione assoluta di un punto materiale  $P$  in un istante generico,  $m$  la sua massa,  $F$  la forza totale ( $a$  ed  $F$  designano vettori e l'eguaglianza sta in senso vettoriale).

Supponiamo che si voglia studiare il moto di  $P$  con referenza ad un sistema di assi mobili: l'ambiente generale  $S$ , finora considerato.

Diciamo  $b$  l'accelerazione relativa di  $P$  rispetto ad  $S$ ;  $\tau$  l'accelerazione di trascinamento;  $c$  l'accelerazione centrifuga composta.

Sussiste l'identità (teorema di CORIOLIS)

$$(2) \quad a = b + \tau + 2c.$$

Per maggior chiarezza, gioverà distinguere nella forza  $F$  due addendi:  $\Psi$  ed  $f$ .

Raccoglieremo in  $\Psi$  l'insieme delle forze, dirò così, volontariamente provocate (sforzi muscolari, trazioni, azioni elastiche ecc.). Il secondo addendo  $f$  rappresenterà invece l'azione, che in circostanze ordinarie può ritenersi dovuta al campo (forma tipica: l'attrazione universale).

Ciò premesso, si porti nella (1), per  $a$  il suo valore (2), per  $F$  la somma  $\Psi + f$ .

Se ne trae

$$(3) \quad m \cdot b + 2m \cdot c = \Psi + \{f - m \cdot \tau\}.$$

Il vettore in parentesi costituisce, secondo ENRIQUES, la forza  $\varphi$  del campo  $S$ .

Quando si considera in particolare un punto  $P$ , dotato di velocità nulla rispetto ad  $S$ , si ha  $c = 0$ , e la (3) esprime senz'altro il principio del moto incipiente. Il principio di composizione è già implicito nella valutazione del secondo membro.

La statica relativa di ENRIQUES e la sua dinamica, arrestata al primo stadio, sostituiscono, come si vede, quel tanto del postulato newtoniano (1), che si ottiene dalla (3) per una velocità relativa eguale a zero.

Un'ultima osservazione.

La quiete di un punto  $P$ , rispetto ad un sistema di riferimento  $S$ , in un dato istante, può intendersi in doppio modo: istantaneo od ereditario. Nella prima accezione (che è quella comunemente attribuita dal linguaggio scientifico), quiete significa soltanto velocità nulla, *nell'istante considerato*  $t$ . L'altra accezione corrisponde al senso restrittivo del linguaggio comune, secondo cui, parlando di quiete, si presuppone un intervallo *finito* di tempo, anteriore a  $t$ , nel quale  $P$  abbia occupato posizione invariabile rispetto ad  $S$ .

Nel postulato del moto incipiente, si contempla genericamente la quiete istantanea (come si fa sempre nella meccanica classica), o ci si limita al caso particolare della ereditaria?

ENRIQUES non lo dichiara esplicitamente, ma c'è ragione di credere che propenderebbe per l'interpretazione più restrittiva, avendo egli mirato ad abbracciare soltanto le esperienze statiche dirette, e a lasciare al quadro la massima agilità di adattamento ad eventuali future estensioni della dinamica.

L'interesse precipuo della sua critica sta nell'aver fissato — uso le stesse parole dell'A. — la parte più ferma della meccanica, quella cioè che costituisce la parte comune a tutte le meccaniche, relative a sistemi di riferimento qualsiansi.



## SULLO SVILUPPO DELLE FUNZIONI IMPLICITE

« Rend. Acc. Lincei », s. 5<sup>a</sup>, vol. XVI<sub>2</sub> (1907<sub>2</sub>),  
pp. 2-12.

I metodi classici del calcolo offrono due distinti sviluppi per una funzione  $y$  di  $x$ , che sia definita, nell'intorno di un valore generico  $x$ , da una equazione implicita del tipo

$$(I) \quad y - x + \varphi(y) = 0 :$$

1) Lo sviluppo (abbreviato, o eventualmente la serie) di TAYLOR, procedente per potenze di  $x - x_0$ .

2) Lo sviluppo (abbreviato, o eventualmente la serie) di LAGRANGE.

Lo stesso vale più generalmente per una funzione  $f$  della radice  $y(x)$  definita dalla (I).

Nello sviluppo di TAYLOR, l'ordine dei vari termini (rispetto ad  $x - x_0$ , riguardata come quantità di prim'ordine) cresce di una unità da ciascun termine al successivo. Lo sviluppo presenta però l'inconveniente che l'espressione dei coefficiente in funzione di  $f$ ,  $\varphi$  e loro derivate, è assai complicata.

Nello sviluppo di LAGRANGE si trovano, per così dire, scambiati pregi e difetti. I vari termini hanno una espressione semplice, ma viceversa nulla si può dire in generale circa l'ordine di grandezza rispetto alla differenza  $x - x_0$ .

Scopo della presente Nota è di assegnare uno sviluppo, che congiunge i due requisiti: aumento progressivo dell'ordine, e perspicuità della legge di formazione dei singoli termini.

1. - Sia  $\varphi(y)$  una funzione della variabile (diciamo reale, per fissar le idee)  $y$ , la quale, in un certo intorno del valore  $y_0$ , si mantenga finita e continua, assieme alle sue derivate prima, seconda, ecc., fino ad un generico ordine  $n$  ( $\geq 1$ ).

Supposto che

$$(1) \quad 1 + \varphi'(y_0) \neq 0 ,$$

consideriamo l'equazione

$$(I) \quad y - x + \varphi(y) = 0,$$

e chiamiamo  $x_0$  il valore di  $x$ , che essa fa corrispondere ad  $y_0$ .

Nell'intorno della coppia  $x_0, y_0$  la (I) definisce univocamente tanto  $x$  in funzione di  $y$ , quanto anche, per la disuguaglianza (1), la funzione inversa  $y$  di  $x$ . Designeremo la prima con  $x = v(y)$ , la seconda con  $y = u(x)$ . Si noti che la  $v(y)$  è esplicitamente fornita dalla (I), ed ha l'espressione

$$(2) \quad v(y) = y + \varphi(y).$$

Le fatte ipotesi assicurano notoriamente che entrambe le funzioni  $u(x), v(y)$  risultano finite e continue assieme alle loro derivate, fino all'ordine  $n$ , in due certi intorni  $H$  e  $K$  di  $x_0$  e di  $y_0$  rispettivamente. Ed è anche lecito ritenere (limitando convenientemente questi intorni  $H$  e  $K$ ) che per ogni  $x$  compreso entro  $H$ ,  $y = u(x)$  cade entro  $K$ , e che reciprocamente  $x = v(y)$  resta compreso in  $H$ , al variare di  $y$  entro  $K$ .

Per essere  $u$  e  $v$  funzioni inverse, varranno poi le identità

$$(3) \quad \begin{cases} y = u\{v(y)\}, \\ x = v\{u(x)\}, \end{cases}$$

coll'ovvia limitazione che gli argomenti  $y$  ed  $x$  appartengono rispettivamente ai campi  $K$  ed  $H$ , in cui i secondi membri hanno effettivo significato.

2. - Ciò premesso, prendiamo a considerare una funzione  $f$  della radice  $u(x)$  della (I), nell'ipotesi che  $f(u)$  sia, rispetto all'argomento  $u$ , finita e continua, assieme alle prime  $n$  derivate, per  $u = y_0$ , e in tutto l'intorno  $K$  di questo valore.

Se si tien conto che al variare di  $x$  in  $H$ ,  $u(x)$  varia entro  $K$ , la  $f(u)$  si potrà anche riguardare come funzione di  $x$ , finita e continua, assieme alle sue prime  $n$  derivate, nell'intorno  $H$  di  $x_0$ .

Fissiamo un generico valore  $x$ , e poniamo

$$(4) \quad x_1 = v(x) = x + \varphi(x).$$

AmMESSO che  $x$  ed  $x_1$  appartengano entrambi ad  $H$ , potremo applicare alla funzione  $f\{u(x)\}$ , nell'intervallo, che va da  $x_1$  ad  $x$ , lo sviluppo abbreviato di TAYLOR, dell'ordine  $n - 1$ .

Calcoliamone i vari termini.



Anzitutto, attesa la definizione (4) di  $x_1$ , si ha

$$[f(u)]_{x=x_1} = f\{u(x_1)\} = f\{u(v(x))\},$$

ossia, per la prima delle identità (2),

$$(5) \quad [f(u)]_{x=x_1} = f(x).$$

Venendo alle derivate (si intende di un ordine  $m$  non superiore a quello, fin cui è stata supposta l'esistenza), partiamoci dalla identità

$$\left[ \frac{d^m f(u)}{dx^m} \right]_{x=x_1} = \frac{d^m}{dx_1^m} f\{u(x_1)\}.$$

e badiamo che  $x_1$  è stato definito in termini di  $x$  mediante la (1). Come sopra,  $f\{u(x_1)\}$ , espressa per  $x$ , non è altro che  $f(x)$ .

D'altra parte

$$dx_1 = (1 + \varphi') dx,$$

sicchè derivare  $f(x)$ , rapporto ad  $x_1$ , equivale ad applicarle l'operazione differenziale

$$(6) \quad D_x = \frac{1}{1 + \varphi'} \frac{d}{dx}.$$

Risulta dunque

$$(7) \quad \left[ \frac{d^m f(u)}{dx^m} \right]_{x=x_1} = D_x^m f(x).$$

Dopo ciò lo sviluppo di  $f(u)$ , per potenze di  $x - x_1 = -\varphi(x)$ , può essere scritto

$$(II) \quad f(u) = f(x) + \sum_1^{n-1} (-1)^m \frac{\varphi^m(x)}{m!} D_x^m f(x) + R_n,$$

il termine complementare  $R_n$  avendo l'espressione <sup>(1)</sup>

$$(8) \quad R_n = \frac{1}{(n-1)!} \int_{x_1}^x (x-\xi)^{n-1} \frac{d^n f\{u(\xi)\}}{d\xi^n} d\xi,$$

ovvero quella di LAGRANGE

$$(8') \quad R_n = (-1)^n \frac{\varphi^n(x)}{n!} \left[ \frac{d^n f\{u(x)\}}{dx^n} \right]_{x=x_1},$$

in cui  $x_2$  rappresenta un qualche valore compreso fra  $x$  ed  $x_1$ .

(1) Cfr. per es. ARZELÀ, *Lezioni di calcolo infinitesimale*, Firenze, Le Monnier, 1901, pag. 352.

3. - La (II) è la formula, cui ho alluso in principio.

Il termine generale di posto  $m$ -esimo ha l'espressione comodissima

$$(-1)^m \frac{\varphi^m(x)}{m!} D_x^m f(x).$$

Come si vede, esso dipende dalle derivate di  $f$  e di  $\varphi$  fino all'ordine  $m$ , e contiene  $\varphi^m$  a fattore.

È facile mettersi in condizioni, nelle quali quest'ultima circostanza equivale al requisito tipico dello sviluppo di TAYLOR: termine  $m$ -esimo d'ordine  $m$  (almeno) rispetto ad  $x - x_0$ .

All'uopo basta operare preventivamente nella equazione (I) una sostituzione lineare sulla variabile  $y$ , scambiando  $y$  in  $y - y_0 + x_0$ . L'equazione trasformata è ancora del tipo (I) e presenta la particolarità che il valore  $y_0$  di  $y$ , corrispondente ad  $x_0$ , coincide con  $x_0$  medesimo. La (I) stessa implica allora  $\varphi(x_0) = 0$ , e siccome  $\varphi$  è dotata, per ipotesi, di derivata finita, ne consegue che  $\varphi(x)$  è di prim'ordine almeno, rispetto alla differenza  $x - x_0$ .

Risulta così  $\varphi^m$  d'ordine  $\geq m$ , e con esso il termine  $m$ -esimo dello sviluppo (II). L'analogo termine della serie di LAGRANGE ha invece l'espressione

$$\frac{(-1)^m}{m!} \frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}} \{f'(x) \varphi^m(x)\}.$$

Quindi, se si eseguisce la derivazione indicata, rimane in generale a fattor comune soltanto la prima potenza di  $\varphi$ .

Si noti che, quando si assume la (I) sotto forma tale che  $y_0$  coincida con  $x_0$ , l'ipotesi complementare, richiesta per la validità dello sviluppo (II) (che cioè  $x_1 = x + \varphi(x)$  ed  $x$  appartengano contemporaneamente all'intorno  $H$ ), si trova senz'altro soddisfatta. Infatti, annullandosi  $\varphi(x)$  per  $x = x_0$ ,  $x_1$  tende ad  $x_0$  assieme ad  $x$ . Basta quindi prendere  $x$  abbastanza prossimo ad  $x_0$  per far sì che  $x_1$  ed  $x$  cadano entrambi in  $H$ .

Quanto al resto  $R_n$ , la (8') mette senz'altro in evidenza che esso è d'ordine  $\geq n$ .

La prima forma (8) merita invece interesse sotto altro punto di vista. In essa è precisata la dipendenza funzionale, mentre nella (8') compare la funzione  $x_2$ , di cui a priori si sa soltanto che ha valore numerico compreso fra  $x$  ed  $x_1$ .

Giova perciò ricorrere alla (8) quando per es. (ammessa, se occorre, l'esistenza di ulteriori derivate di  $\varphi$  e di  $f$ ) si abbia da derivare lo sviluppo (II) rispetto ad un qualche parametro.

#### 4. - Estensione dello sviluppo.

Indicherò anche una estensione della (II).

Si tratta dello sviluppo di una funzione  $F(u, x)$ , che dipenda da  $x$ , non solo pel tramite di  $u$ , ma anche esplicitamente, e possedga del resto le proprietà qualitative, già ammesse per  $f(u)$ .

Ripetendo le considerazioni del n. 2, si accerta ovviamente che, al posto delle (5) e (7), valgono le relazioni:

$$[F(u, x)]_{x=x_1} = F(x, x_1) = F\{x, x + \varphi(x)\},$$

$$\left[ \frac{d^m F(u, x)}{dx^m} \right]_{x=x_1} = D_x^m F\{x, x + \varphi(x)\}.$$

Se ne ricava lo sviluppo cercato

$$(III) \quad F(u, x) = F\{x, x + \varphi(x)\} + \sum_1^{n-1} (-1)^m \frac{\varphi^m(x)}{m!} D_x^m F\{x, x + \varphi(x)\} + R_n,$$

dove la forma di  $R_n$ , analoga alla (8), è

$$(9) \quad R_n = \frac{1}{(n-1)!} \int_{x_1}^x (x-\xi)^{n-1} \frac{d^n}{d\xi^n} F\{u(\xi), \xi\} d\xi.$$

Anche qui basterebbe attribuirgli la forma di LAGRANGE per accertare che esso contiene  $\varphi^n$  a fattore.

#### 5. - Sviluppi forniti dal metodo delle approssimazioni successive.

Volendo risolvere la (I), rispetto ad  $y$ , per approssimazioni successive, la via più naturale sarebbe di porre

$$y_1 = x,$$

$$y_2 = x - \varphi(y_1),$$

ecc.; in generale

$$y_{m+1} = x - \varphi(y_m) \quad (m = 1, 2, \dots).$$

Ma un tale procedimento non riesce sempre convergente: converrebbe introdurre l'ipotesi addizionale  $|\varphi'(x_0)| < 1$ .

6. - Si evita ogni difficoltà col seguente artificio.

Operata, se occorre, quella tale sostituzione lineare, per cui riesce  $\varphi(x_0) = 0$ , scriviamo la (I) sotto la forma

$$y - x + \varphi(y) - \varphi(x) + \varphi(x) = 0,$$

e raccogliamo, nei primi quattro addendi,  $y - x$  a fattore.

Notando che la funzione

$$(10) \quad \psi(x, y) = 1 + \frac{\varphi(y) - \varphi(x)}{y - x}$$

resta finita e continua anche per  $y = x$ , e che, per  $x, y$  convergenti ad  $x_0$ , essa si avvicina al valore  $1 + \varphi'(x_0)$  [non nullo, per la disuguaglianza fondamentale (1)], possiamo anche dividere per  $\psi$ , ed avremo

$$(I') \quad y - x + \frac{\varphi(x)}{\psi(x, y)} = 0.$$

Definendo ora delle approssimazioni successive mediante le formule

$$(11) \quad y_1 = x,$$

$$(12) \quad y_{m+1} - x + \frac{\varphi(x)}{\psi(x, y_m)} = 0 \quad (m = 1, 2, \dots),$$

queste risultano incondizionatamente convergenti in un conveniente intorno di  $x_0$ .

Per dimostrarlo, cominciamo collo scegliere, entro  $H$ , un intorno  $H_1$  tale che, per  $x, y$  compresi in  $H_1$ ,  $\psi(x, y)$  (che non si annulla per  $x = y = x_0$ ) si mantenga diversa da zero; anzi sia  $1/|\psi(x, y)|$  inferiore ad un numero positivo  $L$ .

Si dica poi  $M$  un limite superiore dei valori di  $|\varphi'(x)|$  entro  $H_1$ . Avremo

$$|\varphi(x) - \varphi(x_0)| \leq M|x - x_0|,$$

ossia, per essere  $\varphi(x_0) = 0$ ,

$$|\varphi(x)| \leq M|x - x_0|.$$

Scegliamo ancora un numero  $h$  abbastanza piccolo perchè il segmento

$$(1 + ML)h,$$

portato nei due versi, a partire da  $x_0$ , sia tutto interno ad  $H_1$ .

Con questa definizione di  $h$ , la disuguaglianza

$$(13) \quad |y - x_0| \leq (1 + ML)h$$

assicura che  $y$  è contenuto entro  $H_1$ .

Per brevità, introdurremo anche un terzo intorno  $H_2$  di  $x_0$ , di ampiezza non superiore ad  $h$ .

Siamo adesso in grado di accertare che, se  $x$  appartiene ad  $H_2$ ,  $y_2$  e così tutte le successive  $y_m$  cadono entro  $H_1$ .

Si osservi all'uopo che la prima delle (12), badando che  $y_1 = x$ , dà

$$y_2 - x_0 = x - x_0 - \frac{\varphi(x)}{\psi(x, x)},$$

donde, per le ipotesi fatte,

$$|y_2 - x_0| \leq (1 + ML)|x - x_0| \leq (1 + ML)h,$$

che è appunto la disuguaglianza (13), relativa ad  $y_2$ .

Per un'altra  $y$  qualunque, sia ad es. la  $y_{m+1}$ , basta supporre di aver fatta la verifica fino ad  $y_m$ , con che  $1/|\psi(x, y_m)|$  si può ritenere inferiore ad  $L$ . La corrispondente (12), scritta sotto la forma

$$y_{m+1} - x_0 = x - x_0 - \frac{\varphi(x)}{\psi(x, y_m)},$$

dà poi luogo alla disuguaglianza caratteristica

$$|y_{m+1} - x_0| \leq (1 + ML)h.$$

Soffermiamoci un momento a stabilire una proprietà della  $\psi$ . Consideriamo perciò la differenza  $\varphi(x) - \varphi(z)$ , nell'ipotesi che  $x, z$  sia una coppia qualunque di valori, appartenenti ad  $H_1$ . Usufruento dello sviluppo abbreviato di TAYLOR del second'ordine, potremo scrivere

$$\varphi(x) - \varphi(z) = (x - z)\varphi'(z) + \frac{1}{2}(x - z)^2\varphi''(\omega),$$

con  $\omega$  compreso fra  $z$  ed  $x$ , e quindi interno anch'esso ad  $H_1$ .

Si ha d'altra parte dalla (10)

$$\frac{\partial\psi(x, z)}{\partial z} = -\frac{\varphi(z) - \varphi(x)}{(z - x)^2} + \frac{\varphi'(z)}{z - x},$$

donde, per confronto colla precedente,

$$(14) \quad \frac{\partial\psi(x, z)}{\partial z} = \frac{1}{2}\varphi''(\omega).$$

Ciò posto, si sottragga da una generica (12) quella, che la precede. Si ha

$$y_{m+1} - y_m = - \frac{\varphi(x)}{\psi(x, y_m) \psi(x, y_{m-1})} \{ \psi(x, y_m) - \psi(x, y_{m-1}) \}.$$

Per il teorema del valor medio, la differenza in parentesi può essere posta sotto la forma

$$(y_m - y_{m-1}) \left[ \frac{\partial \psi}{\partial y} \right]_{y=z_m},$$

dove  $z_m$  rappresenta un qualche valore appartenente ad  $H_1$  (perchè compreso fra  $y_m$  ed  $y_{m-1}$ ).

A norma della (14), applicata al valore  $z_m$  di  $z$ , si deduce

$$y_{m+1} - y_m = \frac{\varphi''(\omega_m)}{2\psi(x, y_m) \psi(x, y_{m-1})} \cdot \varphi(x) \cdot (y_m - y_{m-1}) \quad (m = 2, 3, 4, \dots),$$

con  $\omega_m$  contenuto in  $H_1$ .

Ove si ponga

$$(15) \quad y_1 = x = \delta_0,$$

$$(16) \quad y_{m+1} - y_m = \delta_m \quad (m = 1, 2, \dots),$$

$$(17) \quad \frac{\varphi''(\omega_m)}{2\psi(x, y_m) \psi(x, y_{m-1})} = \tau_m \quad (m = 1, 2, \dots),$$

la formula, ora trovata, può essere scritta più semplicemente

$$(18) \quad \delta_m = \tau_m \cdot \varphi(x) \cdot \delta_{m-1} \quad (m = 2, 3, \dots),$$

mentre, avendo riguardo alla (11) e alla prima delle (12), la prima delle (16) porge

$$(19) \quad \delta_1 = \frac{\varphi(x)}{\psi(x, x)}.$$

Sostituiamo, in una (18) generica, per  $\delta_{m-1}$  l'analogo valore, e così successivamente, finchè si sia ricondotti a  $\delta_1$ , da sostituirsi a sua volta mediante l'espressione (19). Si ottiene

$$(18') \quad \delta_m = \frac{\tau_2 \cdot \tau_3 \cdots \tau_m}{\psi(x, x)} \varphi^m(x) \quad (m = 2, 3, \dots).$$

Le (17) mostrano che, quanto a valore assoluto, nessuna  $\tau_m$  può superare

il prodotto di  $L^2/2$  per il massimo valore di  $\varphi''$  entro  $H_1$ . Chiamando  $T$  questo prodotto, e tenendo presente che anche

$$\frac{1}{|\psi(x, x)|} \leq L,$$

le (17) e (18) somministrano in particolare la disuguaglianza

$$(19) \quad |\delta_m| \leq LT^{m-1} |\varphi(x)|^m \quad (m = 1, 2, \dots).$$

Siccome  $\varphi(x)$  è zero per  $x = x_0$ , così esiste un intorno di  $x_0$ , entro cui il prodotto  $T|\varphi(x)|$  si mantiene minore dell'unità. Entro questo intorno, la serie di termine generale  $\delta_m$  converge colla rapidità di una progressione geometrica.

La somma di tale serie non è altro che la funzione  $y = u(x)$ , definita dalla (I'), o, se si vuole, dalla (I).

Sia infatti

$$(20) \quad u(x) = \sum_0^{\infty} \delta_m.$$

Per le (15) e (16), la somma dei primi  $n$  termini della serie vale  $y_n$ . Per la convergenza,

$$(21) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = u(x);$$

dopo di che, con ovvio passaggio al limite, si ricava dalla (12)

$$u(x) - x + \frac{\varphi(x)}{\psi(x, u)} = 0,$$

*c.d.d.*

7. - Per una generica funzione continua  $F(u, x)$ , si ha manifestamente, in causa della (21),

$$(22) \quad F(u, x) = \lim_{n \rightarrow \infty} F(y_n, x).$$

Ora, ponendo

$$(23) \quad g_0 = F(y_1, x) = F(x, x),$$

$$(24) \quad g_m = F(y_{m+1}, x) - F(y_m, x) \quad (m = 1, 2, \dots),$$

la somma  $g_0 + g_1 + \dots + g_{n-1}$  si riduce a  $F(y_n, x)$ , sicchè la (22) equivale a

$$(IV) \quad F(u, x) = \sum_0^{\infty} g_m.$$

Amnessa la derivabilità di  $F$ , si ha dalle (24) e (16)

$$(24') \quad g_m = \delta_m \left[ \frac{\partial F}{\partial u} \right]_{u=\eta_m} \quad (m = 1, 2, \dots),$$

con  $\eta_m$  compreso fra  $y_{m+1}$  e  $y_m$ , e quindi appartenente al solito intorno  $H_1$ .

Se si indica con  $N$  il limite superiore dei valori assoluti di  $\partial F/\partial u$  al variare degli argomenti entro  $H_1$ , si ha in particolare dalla (24')

$$(24'') \quad |g_m| \leq N |\delta_m| \quad (m = 1, 2, \dots),$$

talchè lo sviluppo (IV) ha lo stesso comportamento della (20), rispetto alla convergenza.

**8.** — Il metodo delle approssimazioni successive ci ha così fornito degli sviluppi, tanto per la radice  $u(x)$  della (I), quanto più generalmente per una qualunque  $F(u, x)$ . Dal punto di vista della validità e della convenienza numerica, questi sviluppi sono altrettanto, anzi più vantaggiosi di quelli differenziali, precedentemente costruiti.

Infatti  $\delta_m$  contiene a fattore  $\varphi^m(x)$ , e per conseguenza, quanto all'ordine dei termini, ci troviamo nelle stesse condizioni. Inoltre il calcolo effettivo riesce anche più spedito, e, per la validità del procedimento, basta largamente (come tosto apparisce dalle proprietà invocate nei nn. 6 e 7) che la funzione  $\varphi$  ammetta derivate continue dei primi due ordini, la  $F(u, x)$  derivata prima finita, rapporto ad  $u$ .

Gli sviluppi differenziali (II) e (III) esigono invece la esistenza di derivate d'ordine tanto più elevato, quanto più si procede nello sviluppo.

Con tutto ciò non viene meno il loro interesse, perchè i singoli termini (escluso, si intende, l'eventuale resto) dipendono dai valori di  $\varphi$ ,  $F$  (o, in particolare,  $f$ ) e loro derivate, *nel solo punto generico*  $x$ , che si vuol considerare.

Colle approssimazioni successive si fanno invece intervenire valori delle funzioni in punti, che sono in generale distribuiti *entro tutto un intervallo*, prossimo ad  $x$ , ma pur sempre finito. Si tratta dunque di sviluppi che, malgrado una maggiore semplicità, hanno carattere eminentemente funzionale.

Rimangono perciò preferibili gli sviluppi differenziali, quando si desidera raggiungere una certa approssimazione, riportandosi ad un unico punto.



SUR LE MOUVEMENT DE L'ÉLECTRICITÉ  
SANS LIAISONS NI FORCES EXTÉRIEURES

« Comptes Rendus de l'Acad. des Sciences de Paris », t. CXLV (1907),  
pp. 417-420.

Les équations fondamentales du champ électromagnétique dans le vide (ou dans des milieux tels que l'air) s'écrivent, d'après HERTZ,

$$(I) \quad \left\{ \begin{array}{l} A \frac{\partial X}{\partial t} = \frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial y} - 4\pi A u, \\ A \frac{\partial Y}{\partial t} = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial z} - 4\pi A v, \\ A \frac{\partial Z}{\partial t} = \frac{\partial L}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial x} - 4\pi A w; \end{array} \right.$$

$$(II) \quad \left\{ \begin{array}{l} A \frac{\partial L}{\partial t} = \frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}, \\ A \frac{\partial M}{\partial t} = \frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}, \\ A \frac{\partial N}{\partial t} = \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}; \end{array} \right.$$

$$(III) \quad \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = 4\pi \rho;$$

$$(IV) \quad \frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial y} + \frac{\partial N}{\partial z} = 0.$$

Dans ces équations: ( $X, Y, Z$ ) représente la force électrique, ( $L, M, N$ ) la force magnétique,  $\rho$  la densité électrique, ( $u, v, w$ ) le courant;  $A = 1/c$  ( $c$  vitesse de la lumière); le trièdre de référence  $Oxyz$  est supposé *sinistror-*

*sum* (tandis que MAXWELL et aussi M. LORENTZ ont adopté la convention opposée).

Soit  $dS$  un élément de volume dans le champ. Il est occupé par une charge électrique  $dS$  et traversé par un courant dont les composantes sont  $u dS$ ,  $v dS$ ,  $w dS$ . Cet élément se trouve soumis à une force mécanique, définie, d'après M. LORENTZ, par les trinomes

$$\begin{aligned} dS[\rho X + A(Mw - Nv)], \\ dS[\rho Y + A(Nu - Lw)], \\ dS[\rho Z + A(Lv - Mu)]. \end{aligned}$$

Supposons qu'il s'agisse d'un champ électromagnétique pur, c'est-à-dire entretenu exclusivement par le mouvement de l'électricité, sans intervention de matière pondérable, ni de liaisons entre les charges électriques, ni d'aucune action extérieure. Alors la force dont on vient de parler est la force totale sollicitant  $dS$ . D'autre part sa masse matérielle est nulle. Il faut donc (pour ne pas violer le principe fondamental de la dynamique ordinaire: force = masse  $\times$  accélération) que l'on ait en tout point du champ

$$(V) \quad \begin{cases} \rho X + A(Mw - Nv) = 0, \\ \rho Y + A(Nu - Lw) = 0, \\ \rho Z + A(Lv - Mu) = 0. \end{cases}$$

Ces équations en termes finis, jointes au système différentiel (I)-(IV), sont caractéristiques des champs électromagnétiques purs. Toute région de l'espace où elles sont vérifiées est par là même le siège d'un champ pur. On remarquera qu'elles sont au nombre de 10, précisément égal à celui des inconnues:  $X, Y, Z; L, M, N; \rho; u, v, w$ .

Une conséquence immédiate des (V) et (III) c'est que, dans un champ pur, il ne peut exister nulle part de l'électricité à l'état de repos. Si, en effet,  $u = v = w = 0$ , il en résulte nécessairement  $\rho = 0$ . On arrive à la même conclusion en cherchant à vérifier les équations (I)-(V) par des fonctions linéaires des variables indépendantes. Ces remarques peuvent donner l'impression <sup>(1)</sup> qu'un véritable transport d'électricité sans liaisons, ni forces extérieures soit impossible. Il n'en est rien cependant, comme on peut le constater dans la solution particulière que je vais indiquer.

<sup>(1)</sup> Voyez par exemple POINCARÉ, *Sur la dynamique de l'électron*, « Rend. del Circolo Matematico di Palermo », t. XXI, 1906.

Elle donne lieu d'espérer qu'on en trouvera d'autres, correspondant aux mouvements d'un électron isolé, et permettant ainsi d'éviter les liaisons cinématiques, qui figurent maintenant dans toute mécanique des électrons (ABRAHAM, LORENTZ, BUCHERER, LANGEVIN, POINCARÉ). De telles hypothèses particulières sont bien précieuses pour arriver rapidement à des prévisions concrètes avec la certitude qu'en tout cas on ne s'éloignera pas beaucoup de la réalité. Mais elles entraînent la demande: Ces liaisons tout à fait immatérielles d'où proviennent-elles? Il est évidemment à souhaiter de n'avoir pas à se poser de telles questions.

Cherchons à satisfaire à (I)-(V) en supposant que le mouvement de l'électricité soit rectiligne, que le champ soit transversal par rapport à la direction du mouvement, les deux forces électrique et magnétique étant en outre perpendiculaires entre elles.

On peut alors poser

$$u = \rho V, \quad v = w = 0; \quad Y = E, \quad Z = X = 0; \quad N = H, \quad L = M = 0,$$

et nos équations se réduisent à

$$(I') \quad \frac{\partial H}{\partial y} + 4\pi A \rho V = 0, \quad A \frac{\partial E}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial x};$$

$$(II') \quad \frac{\partial E}{\partial z} = 0, \quad A \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial E}{\partial x};$$

$$(III') \quad \frac{\partial E}{\partial y} = 4\pi \rho;$$

$$(IV') \quad \frac{\partial H}{\partial z} = 0;$$

$$(V') \quad \rho E + AH \rho V = 0.$$

Il s'ensuit que tout doit être indépendant de  $z$ . En se bornant aux trois autres variables  $x, y, t$ , en exigeant que  $\rho$  ne s'annule pas et en éliminant  $\rho V$  de la première des équations (I') moyennant (III') et (V'), on a le système équivalent:

$$(1) \quad A \frac{\partial E}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial x}, \quad A \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial E}{\partial x}, \quad \frac{\partial}{\partial y} (H^2 - E^2) = 0;$$

$$(2) \quad \frac{\partial E}{\partial y} = 4\pi \rho, \quad cE + HV = 0.$$

Les deux dernières équations définissent  $\varrho$  et  $V$  en fonction de  $E$  et de  $H$ . Les (1) s'intègrent sans peine et donnent pour  $E$  et  $H$  les expressions générales que voici :

$$(1') \quad \begin{cases} E = \eta(y)\varphi(x-ct) + \frac{1}{\eta(y)}\psi(x+ct), \\ H = -\eta(y)\varphi(x-ct) + \frac{1}{\eta(y)}\psi(x+ct), \end{cases}$$

$\eta$ ,  $\varphi$ ,  $\psi$  désignant des fonctions arbitraires des arguments indiqués.

En prenant  $\psi = 0$ , on a affaire à des ondes planes (non homogènes, en général) se propageant avec la vitesse  $c$  dans la direction positive de l'axe des abscisses. Les équations (2) donnent alors

$$\varrho = \frac{\eta'(y)}{4\pi}\varphi(x-ct), \quad V = c.$$

Dès que  $\eta$  dépend effectivement de  $y$ ,  $\varrho$  n'est pas nul; d'autre part  $\varrho V$  mesure le courant. C'est donc de l'électricité, qui se meut avec la vitesse de la lumière. Les trajectoires des particules ne sont que les rayons (normales aux surfaces d'onde).

Pour  $\eta = \text{const.}$ ,  $\varrho = 0$ , et l'on retrouve les ondes de l'éther, envisagées ordinairement. A ce point de vue la théorie ondulatoire se présente comme un cas particulier, ou, si l'on veut, comme un cas limite de la théorie de l'émission.

(19 août 1907).

## SULLA MASSA ELETTROMAGNETICA (\*)

« Nuovo Cimento », s. 5<sup>a</sup>, vol. XIV (1907),  
pp. 387-412.

Lo schema tipico, secondo cui il metodo infinitesimale si applica allo studio dei fenomeni naturali, consta notoriamente di tre stadi:

1) *Induzione*. - Dall'esame approfondito di uno o più casi semplici si desumono le così dette leggi elementari (per lo più sotto forma di relazioni differenziali), le quali caratterizzano il fenomeno, ridotto, in certo modo, ai minimi termini, limitato cioè ad un campo e ad una durata infinitamente piccoli.

A questo primo stadio, eminentemente induttivo, presiedono criteri di semplicità e di convenienza, potendosi in generale escogitare infinite leggi elementari compatibili coi fatti (integrali) dai quali si parte. Spetta agli stadi successivi confermare o infirmare le ipotesi scelte.

2) *Deduzione*. - Qui interviene tutta l'efficacia dello strumento matematico, che permette di raggruppare a piacere elementi di spazio e di tempo, ricomponendo nella sua integrità ogni fenomeno comunque complesso, per cui valgono le leggi elementari.

3) *Verificazione*. - Si sottopongono le previsioni del calcolo a diretto o indiretto controllo sperimentale.

Quando l'accordo è soddisfacente, le ipotesi acquistano definitivo diritto di cittadinanza nella scienza; non come astrazione metafisica, ma per quello che valgono, cioè per la giustificata fiducia che anche ulteriori eventuali applicazioni condurranno a conseguenze attendibili.

\* \* \*

Tale è lo schema classico, che domina tutta la fisica matematica. Ho cercato di rispettarlo anche nel rapporto, che mi onoro di presentarvi, sulle azioni meccaniche connesse ai fenomeni elettromagnetici.

---

(\*) Rapporto presentato alla Società italiana di Fisica nel Congresso di Parma (settembre 1901).

### Leggi elementari e loro sintesi secondo Lorentz.

In un campo elettrostatico la legge elementare di COULOMB si accorda, come è notissimo, con tutti i fatti osservati.

In conseguenza di questa legge, una pallina elettrizzata, la quale si trovi in un campo elettrostatico, subisce una forza meccanica diretta come la forza elettrica e direttamente proporzionale alla carica della pallina e all'intensità del campo.

Altre azioni meccaniche si osservano fra correnti e poli magnetici. Esse sono caratterizzate da una seconda legge elementare ben nota: la legge di BIOT e SAVART, che, almeno nell'ambito dei campi stazionari, ha avuto il più completo suffragio dell'esperienza.

In conseguenza di questa legge, un elemento di corrente, situato entro un campo magnetico, si trova soggetto ad una forza meccanica proporzionale all'intensità della corrente e all'area del parallelogrammo costruito sui due vettori: forza magnetica, elemento di corrente.

La forza è diretta perpendicolarmente al piano del parallelogrammo.

Ciò posto, riprendiamo la nostra pallina elettrizzata e supponiamo che al campo elettrostatico si sovrapponga un campo magnetico (stazionario).

Nessuna variazione interviene nella forza che sollecita la pallina, *finchè questa sta ferma*. (Si esclude beninteso che la pallina sia costituita da materiale magnetico o magnetizzabile per influenza in modo sensibile).

Ma, se la pallina si muove, la sua carica diviene assimilabile ad un elemento di corrente, e, come tale, subisce un'ulteriore forza meccanica da parte del campo magnetico, in cui si trova immersa.

Si è tratti spontaneamente ad estendere la legge di BIOT e SAVART, trattando l'elemento come se appartenesse ad un circuito galvanico. La seconda forza, che sollecita la pallina, va allora ritenuta proporzionale alla carica e all'area del parallelogrammo costruito su due vettori: forza magnetica, velocità della pallina; e diretta normalmente al piano del parallelogrammo.

Un'ultima induzione è necessaria per arrivare al caso generale, in cui si contempi il moto di una carica in un campo elettromagnetico, comunque variabile col tempo.

L'ipotesi, quanto mai plausibile, dovuta a LORENTZ, è che, in un istante generico, la forza meccanica, la quale sollecita una particella elettrizzata, non differisca da quella che si avrebbe in due campi stazionari sovrapposti (elettrostatico e magnetico), definiti dai valori dell'istante considerato.

Si ha così una definitiva legge elementare, che opportunamente si designa col nome di LORENTZ.

### Cariche puntiformi.

La legge elementare di LORENTZ si riferisce beninteso a cariche, che occupano un volume infinitesimo.

Per questa ragione la legge stessa trova applicazione *immediata* in tutti e soli quei casi, in cui è lecito prescindere dalle dimensioni della carica, ossia, come si suol dire, si tratta di cariche puntiformi.

In generale questo passaggio al limite non è affatto lecito, come ora constateremo; ma non c'è alcuna difficoltà concettuale a tener debito conto dell'estensione delle cariche.

Basta scinderle in elementi infinitesimi: la corrispondente forza meccanica si valuta per ciascuno di essi nel modo accennato, e non c'è che da sommare (o, se si vuole, da integrare) i singoli contributi.

### Riflessioni critiche.

Cerchiamo di renderci conto dei limiti, entro cui una particella elettrizzata, che si muove in un campo elettromagnetico, può essere assimilata ad una carica puntiforme.

Diciamo  $S$  lo spazio effettivamente occupato dalla carica in un istante generico. Manifestamente è necessario e basta che, fra i vari punti di  $S$ , non vi sia distinzione sensibile, nè di posizione, nè di velocità, nè di comportamento elettromagnetico.

Le prime due condizioni, di carattere cinematico, sono quelle solite, sotto cui il moto di un corpo riesce sufficientemente caratterizzato da quello di un suo punto qualsiasi. Su queste condizioni non è il caso di indugiarsi. Possiamo senz'altro supporre che esse siano largamente soddisfatte, e fissare la nostra attenzione sul comportamento elettromagnetico.

Se si potesse asserire che, entro  $S$ , sono trascurabili le variazioni del campo elettromagnetico, più precisamente che la massima variazione di forza elettrica entro  $S$  è trascurabile di fronte alla minima intensità, che ivi le compete, e analogamente per la forza magnetica, si sarebbe in diritto di riportarsi al caso limite della carica puntiforme. Ma disgraziatamente le variazioni del campo entro  $S$  sono tutt'altro che trascurabili; ed ecco perchè.

Il campo elettromagnetico può pensarsi dovuto alla sovrapposizione di due altri:

1) Quello che si avrebbe indipendentemente dalla carica considerata: per es. il campo di un elettrocalamita o di un condensatore a facce

piane, il campo magnetico terrestre, o addirittura un campo nullo, secondo le condizioni dell'ambiente, in cui ha luogo il movimento di  $S$ .

Lo diremo il *campo esterno*.

2) *L'autocampo*, cioè il campo generato dalla carica, che si considera.

Nel caso particolare di una carica immobile, esso si riduce, come è ben chiaro, ad un semplice campo elettrostatico. Quando  $S$  si muove, la convezione provoca più generalmente un campo elettromagnetico (variabile).

Il campo esterno, a prescindere da situazioni eccezionali (come l'immediata vicinanza di punte o di spigoli, o più generalmente di sedi di elettricità o di masse magnetiche), può tranquillamente ritenersi costante entro lo spazio  $S$ : basta supporre in ciascun caso che le dimensioni di tale spazio siano abbastanza piccole.

Ma ciò non basta punto per l'autocampo. Già un esempio semplicissimo, quello in cui  $S$  sia una sfera immobile con carica uniformemente distribuita, ci fa toccare con mano che la variazione dell'autocampo entro  $S$  è tutt'altro che trascurabile. Dicansi infatti  $e$  la carica e  $R$  il raggio della sfera. È ben noto (e del resto evidente per ragione di simmetria) che la forza elettrica nel centro della sfera è nulla. Sul contorno, essa vale invece  $e/R^2$ , come se tutta la carica fosse raccolta nel centro. La variazione è così  $e/R^2$ , addirittura eguale all'intensità massima di  $S$ ; di più, a parità di carica, essa tende a crescere indefinitamente, quando si fa rimpicciolire il raggio  $R$  della sfera.

Analogo è naturalmente il comportamento qualitativo anche nel caso generale di una carica in moto, comunque distribuita.

### Generalità sul moto dell'elettricità.

Ne consegue che, per lo studio delle forze agenti sopra una determinata quantità di elettricità, non si può procedere secondo le tradizioni della meccanica ordinaria, perchè manca la semplificazione corrispondente al punto materiale.

Volendo prendere la questione di fronte, senza ricorrere a scappatoie, bisognerebbe discutere addirittura il movimento di una massa continua di elettricità, ciascun elemento essendo solidale cogli altri per lo scambio di azioni elettromagnetiche.

Ognun vede come un tale problema, preso nella sua generalità, debba essere notevolmente complicato. A prescindere da difficoltà specifiche, sarebbe come se, nella meccanica ordinaria, si dovesse cominciare dall'analisi del continuo (sistemi deformabili).



La vera posizione del problema rimane tuttavia quella accennata; essa va tenuta presente, non foss'altro come sicuro criterio direttivo. Dirò di più che, soltanto incamminandosi risolutamente per la via maestra, sembra ormai possibile un vero progresso teorico.

Ma di ciò ci renderemo conto più innanzi. Convieni intanto precisare i termini della questione, e prendere conoscenza dei risultati già acquisiti, seguendo — mi si consenta l'immagine topografica — dei sentieri, che, se non toccano ancora la sommità, hanno però raggiunto più posti, donde si domina un largo orizzonte.

### Intervento del principio fondamentale della dinamica.

Riprendiamo la nostra particella elettrizzata, la quale occupi uno spazio  $S$  di estensione finita. Sia  $e'$  la carica totale della particella, che può essere positiva o negativa;  $e$  ( $= \pm e'$ ) il suo valore assoluto.

In un generico elemento di volume  $dS$  risiederà una certa carica elementare  $de'$ , e inoltre una certa massa materiale  $dm$ ; (naturalmente non è escluso che  $de'$  o  $dm$  possano talora esser nulli).

Consideriamo le forze agenti sull'elemento, mettendoci per un momento nelle condizioni più generali possibili. Così potremo meglio apprezzare la portata delle varie ipotesi semplificatrici.

Avremo anzitutto la forza  $f$ , dovuta al campo elettromagnetico esterno ( $f = 0$ , se il campo elettromagnetico è interamente creato dalla carica  $e'$ ); poi la forza  $\varphi$  dell'autocampo, cioè quella che  $de'$  subisce da parte degli altri elementi costituenti la carica; poi finalmente un'ulteriore forza  $\psi$ , in cui intendiamo compendiate tutte le altre azioni a priori possibili (per es.: peso, azioni molecolari, reazioni provenienti da eventuali vincoli, ecc.);  $f$ ,  $\varphi$  e  $\psi$  designano altrettanti vettori: la loro somma

$$f + \varphi + \psi$$

rappresenta, per definizione, la forza *totale*, che si esercita in  $dS$ .

Detta  $\alpha$  l'accelerazione dell'elemento, avremo, per il principio fondamentale della dinamica,

$$(1) \quad dm \cdot \alpha = f + \varphi + \psi.$$

Sommiamo questa relazione vettoriale con tutte le analoghe, relative agli altri elementi di  $S$ . Nel primo membro, designando con  $m$  la massa totale situata entro  $S$ , e con  $a$  l'accelerazione del baricentro, si ottiene,

come è ben noto,

$$m \cdot a .$$

Se poi si chiamano:  $F$  la risultante delle forze  $f$ , dovute al campo elettromagnetico esterno,  $\Phi$  la risultante delle forze  $\varphi$  dell'autocampo,  $\Psi$  la risultante delle forze complementari  $\psi$ , si ha la formula

$$(2) \quad m \cdot a = F + \Phi + \Psi ,$$

da cui prenderemo le mosse per la nostra discussione.

### Teoria elementare (di Schuster) (1).

Nel caso particolare di una carica immobile (del resto comunque distribuita)

$$\Phi = 0 .$$

Infatti le azioni elettrostatiche  $\varphi$  fra le varie cariche elementari sono caratterizzate dalle legge di COULOMB, e quindi a due a due eguali ed opposte.

Quando si tratta di una carica in moto, le forze  $\varphi$  dell'autocampo non seguono più in generale il principio della reazione eguale ed opposta all'azione, perchè la propagazione da un elemento ad un altro esige un certo tempo, ciò che, in regime variabile, turba di regola il compenso.

In una trattazione rigorosa, bisogna dunque tenere esatto conto di  $\Phi$ .

In prima approssimazione si può tuttavia ragionare come segue.

Dacchè  $\Phi$  è nulla, quando l'elettricità sta ferma, si conserverà, per ragioni di continuità, poco diversa da zero, finchè la velocità sia abbastanza piccola, e allora risulterà trascurabile di fronte ad  $F$ .

Se poi si tratta del movimento di una carica nel vuoto o in gas molto rarefatto, si potrà ritenere ogni  $\psi$ , e quindi  $\Psi$ , eguale a zero. Infatti peso e pressione risultano in tal caso trascurabili, e non c'è alcuna ragione perchè si debba preoccuparsi d'altre forze. Ma, anche senza escludere a priori eventuali azioni ulteriori, basta che esse verifichino il principio di reazione perchè riesca  $\Psi = 0$ .

Rimane pertanto

$$(3) \quad m \cdot a = F .$$

(1) *The discharge of electricity through gases*, • Proc. of the Royal Society », 47, 20 marzo 1890.

Ricordiamo che l'ostacolo essenziale a trattare una carica come puntiforme proveniva dall'autocampo. Essendone scomparsa ogni traccia, nella (3), nulla più vieta di assimilarvi la particella ad un unico punto elettrizzato.

Ciò ha perfetto riscontro in quanto si fa correntemente per i corpi celesti, salvo che allora si ritiene valido in ogni caso il principio di reazione, e quindi non è ipotesi approssimata, ma conseguenza del postulato, il porre eguale a zero il termine corrispondente a  $\Phi$  (risultante delle attrazioni newtoniane di origine interna).

Beninteso, nella (3), sarà giustificato il passaggio al caso limite di un punto geometrico, solo a patto che, entro il volume  $S$  effettivamente occupato dalla carica, le velocità dei vari punti e le forze del campo (esterno) si possano tutte confondere con quelle, diciamo  $v$ ,  $E$  (forza elettrica),  $H$  (forza magnetica), che si riferiscono ad un unico punto, per es. al baricentro di  $S$ .

La (3) — basta richiamarsi alla legge elementare di LORENTZ — si esplicita allora in

$$(3') \quad ma = e' \left\{ E + \frac{1}{c} [v \cdot H] \right\},$$

designando  $c$  la velocità della luce e  $[v \cdot H]$  un prodotto vettoriale.

Se il campo elettromagnetico  $E$ ,  $H$  è costante, la (3') si integra in modo affatto elementare.

### Ricerche sui raggi catodici <sup>(2)</sup>.

Un'applicazione importante di questo modo di vedere è stata fatta ai raggi catodici, in quanto si risguardino costituiti da sciami di particelle elettrizzate, proiettate dal catodo di un tubo di CROOKES; e si ammetta la validità della (3') per ogni singola particella.

Ponendo a raffronto le conseguenze della (3') colle circostanze di fatto, si rende subito conto del normale andamento rettilineo dei raggi catodici; supponendo poi — ciò che fu sperimentalmente dimostrato da PERRIN <sup>(3)</sup> — che la carica  $e'$  sia negativa, si spiegano perfettamente tutte le deviazioni, che si osservano, quando si porta il tubo in un campo elettrostatico o in un campo magnetico (uniformi e normali all'asse del tubo), oppure lo si sottopone all'azione combinata di due tali campi.

<sup>(2)</sup> J. J. THOMSON, *On cathode rays*, « Phil. Mag. » (5), 44, ottobre 1897; inoltre KAUFMANN, LENARD, WIECHERT, SIMON. Cfr. gli « Annalen der Physik », vol. 61 a 69, 1897-1899, oppure la collezione *Ions, électrons, corpuscules*, Paris, Gauthier-Villars, 1905.

<sup>(3)</sup> Cfr. per es. l'articolo *Electrisation des rayons cathodiques, ecc.*, nel t. 2° della collezione, testè citata.

Da questi raffronti si ricava in particolare la determinazione di due elementi importanti: il rapporto  $e/m$  fra la carica (più precisamente il valore assoluto della carica) e la massa delle varie particelle costituenti la radiazione; la loro velocità media.

Quest'ultima risulta compresa fra  $1/10$  e  $1/3$  della velocità della luce. Il rapporto  $e/m$  si trova essere (come media delle varie determinazioni) 1800 volte  $\eta$ , essendo  $\eta$  la così detta costante di FARADAY.

Si rammenti che tale costante  $\eta$  è il rapporto fra carica e massa materiale, caratteristico dei fenomeni elettrolitici. Se, in uno qualunque di questi, l'ione idrogeno migra ad un elettrodo, si ha sempre  $\eta$  come rapporto fra la carica trasportata convettivamente e la corrispondente massa. Per un altro qualsiasi gruppo, messo in libertà dall'elettroisi, l'analogo rapporto vale  $\eta/\nu$  ( $\nu$  equivalente chimico del gruppo).

### **Raggi affini ai catodici. Discussione dei risultati sperimentali e conseguente abbandono della teoria elementare.**

Le leggi fondamentali dell'elettrolisi diventano intuitive, se si suppone che ogni atomo materiale sia suscettibile di trasportare una carica ben determinata, dipendente soltanto dalla sua costituzione chimica.

Questa ipotesi mal si concilia colla precedente spiegazione dei raggi catodici.

Infatti le particelle, che li costituiscono, sarebbero, secondo le cose esposte, dotate di un nucleo materiale, e questo dovrebbe ragionevolmente provenire da sostanze, che si trovano nel tubo di CROOKES. Si tratterebbe quindi del gas, che vi è stato rarefatto, o di frammenti tenuissimi del catodo.

Ma in tal caso sarebbe strano che i vari atomi di sostanza fossero capaci di cariche molto superiori a quelle, che essi comportano nelle migrazioni elettrolitiche (circa 1800 volte maggiori, se si tratta di atomi di idrogeno).

E ciò tanto più che le stesse leggi di FARADAY suggeriscono spontaneamente un'ipotesi atomica anche per l'elettricità: la costanza di rapporto fra carica e massa rende infatti plausibile l'esistenza di un quantum primordiale di elettricità (elettrone), indivisibile al pari dell'atomo materiale.

L'andamento quantitativo dei fenomeni elettrolitici non sarebbe altro che l'aspetto macroscopico del fatto elementare che ogni atomo materiale è atto ad assumere uno ed un solo elettrone per ciascuna valenza.

Perchè, nei raggi catodici, la facoltà, diciamo così, assorbente degli atomi diverrebbe di tanto maggiore? E perchè ancora sarebbe varia-

mente alterata secondo la natura chimica dell'atomo, si da portare  $e/m$  al medesimo livello per tutti, mentre, quando si tratta di fenomeni elettrolitici, questo rapporto è inversamente proporzionale all'equivalente chimico?

Si noti che una circostanza, sperimentalmente accertata in più modi, è l'identico comportamento dei raggi catodici (per un dato stato di rarefazione), qualunque sia la natura del gas e degli elettrodi. Se vi fosse quel certo bombardamento di particelle materiali, una qualche differenza secondo la sostanza dei proiettili dovrebbe pur rendersi sensibile.

Ecco infine un altro elemento di giudizio, assai significativo.

La (3') può applicarsi anche ad altri tipi di radiazioni: per es. ai raggi — studiati da RIGHI (4), LENARD (5), J. J. THOMSON (6) — i quali vengono emessi da superficie metalliche elettrizzate negativamente, quando sono esposte alla luce ultravioletta, oppure da filamenti di carbone, resi incandescenti nell'idrogeno.

Considerando anche in questi casi le radiazioni come dovute a bombardamenti di particelle negative, si trovano per il rapporto  $e/m$  valori sempre prossimi a quello che corrisponde ai raggi catodici ( $1800 \eta$ ).

Da tutto questo emerge che la (3'), senza trovarsi in aperta contraddizione con fatti osservati, non porge però una immagine soddisfacente delle più immediate induzioni che i fatti stessi suggeriscono.

Non è il caso di meravigliarsene, attesa la approssimazione un po' troppo semplicista, in base alla quale abbiamo supposto  $\Phi = 0$ , estendendo al caso di una carica in moto il compenso delle azioni interne, che ha luogo in elettrostatica.

Convieni perciò approfondire l'influenza dell'autocampo.

### Ricerche di Abraham (7) e di Sommerfeld (8). Movimenti quasi stazionari.

Riprendiamo la formula

$$(2) \quad ma = F + \Phi + \Psi,$$

senza trascurarvi alcun termine.

(4) *Sui fenomeni elettrici provocati dalle radiazioni*, « Nuovo Cimento » (3), vol. 24 a 27, 1888-1890; *Sulla convezione elettrica*, « Rend. Lincei », (4), 6, 2 marzo 1890; *Sulle traiettorie percorse nella convezione fotoelettrica*, ibidem, 3 agosto 1890.

(5) *Erzeugung der Kathodenstrahlen durch ultraviolettes Licht*, « Annalen der Physik », (4), 2, 1900.

(6) *On the mass of the ions, ecc.*, « Phil. Mag. », (5), 48, dicembre 1899.

(7) *Theorie der Elektrizität*, vol. II (« Elektromagnetische Theorie der Strahlung »), Leipzig, Teubner, 1905, cap. III.

(8) *Zur Elektronentheorie*, I, II, III, « Göttinger Nachrichten », 1904 e 1905; *Simplified deduction of the field ecc.*, « Akademie van Wetenschappen te Amsterdam, Proceedings » (ediz. inglese), novembre 1904.

Nel primo membro sta il prodotto della massa materiale  $m$  della carica  $e'$ , che si considera, per l'accelerazione del rispettivo baricentro.

Il secondo membro è assai più complicato: specialmente il termine  $\Phi$ , che è la risultante delle azioni mutue dei singoli elementi  $de'$ . Si tratta di azioni, che dipendono dalla posizione e dalla velocità, con l'aggravante che neppure si possono considerare stati di moto sincroni per tutti gli elementi, ma si deve tener presente che l'azione di un generico elemento potenziante impiega del tempo a propagarsi, e quindi, per arrivare in un certo istante all'elemento potenziato, deve essere partita con debita anticipazione.  $\Phi$  dipende insomma dallo stato di moto dei singoli punti della carica, non solo nell'istante attuale, ma anche in un intervallo di tempo ad esso anteriore; certo assai breve, date le dimensioni, generalmente molto piccole della carica e la grande velocità di propagazione; ma pur sempre finito.

In queste condizioni, non si può pretendere di trarre a fil di logica da una sola relazione di insieme, come è la (2), alcuna previsione concreta sull'andamento del moto.

Il problema, preso nella sua integrità, esigerebbe la considerazione simultanea di tutte le (1) per ogni punto geometrico dello spazio occupato dalla carica.

Per semplificare, e per sfruttare la (2) nel miglior modo, ricorreremo all'artificio di introdurre qualche ipotesi complementare, intuitivamente accettabile senza ripugnanza.

A dir vero, un primo tentativo in questo senso lo abbiamo già fatto, provandoci a supporre che seguiti a sussistere il principio di reazione  $\Phi = 0$ ; ma abbiamo riconosciuto che l'ipotesi non è sostenibile. Si tratta ora di esperirne qualche altra, meno grossolana.

Un criterio perfettamente ragionevole è il seguente.

Immaginiamo che la carica mobile posseda un nucleo materiale e che questo sia costituito da un *coibente solido*.

Allora il modo di distribuzione della carica entro il solido non si altera durante il movimento. L'elettricità, al pari della materia, si muove come se i vari elementi fossero rigidamente collegati fra loro.

Ci si trova per conseguenza ridotti a caratterizzare il moto di un sistema rigido, coll'unica complicazione, rispetto agli ordinari problemi di questo tipo, che le forze vengono ora a dipendere anche dalla storia anteriore del mobile. Il problema ha sei gradi di libertà, nel senso che tutto è esprimibile in funzione di sei parametri: tre, che servono a fissare la posizione nello spazio di un punto del solido, diciamo il baricentro; e tre, che individuano l'orientazione del solido attorno a questo punto.

Per determinare questi sei parametri in funzione del tempo, basta procurarsi sei equazioni, che non contengano ulteriori incognite.

Nelle (1), valide per ciascun elemento, appaiono le  $\psi$ , le quali compendiano tutto ciò, che non ha origine elettromagnetica. Dato il tipo di problemi, che vogliamo studiare, basterà attribuire alle  $\psi$  il significato di reazioni provenienti dai vincoli di rigidità. Esse sono a due a due eguali ed opposte, e perciò rimangono eliminate formando le solite combinazioni, dette delle quantità di moto (o del moto del baricentro) e dei momenti (equazioni cardinali, secondo MAGGI).

Le tre combinazioni, esprimenti il principio del moto del baricentro, sono compendiate dalla (2), colla avvertenza che va posto eguale a zero l'ultimo termine  $\Psi$  (risultante delle azioni vincolari), sicchè resta

$$(4) \quad ma = F + \Phi.$$

Le altre tre combinazioni (dei momenti) si compendiano anch'esse in una relazione vettoriale, che indicherò brevemente con

$$(5) \quad \mathbf{M} = 0.$$

Lo studio rigoroso delle (4), (5) si deve specialmente (\*) al sig. SOMMERFELD, che ha superato con ingegnosi artifici notevoli difficoltà analitiche, sviscerando il caso di una sfera elettrizzata uniformemente, con distribuzione sia di volume che superficiale.

Prima ancora di queste ricerche di SOMMERFELD, il sig. ABRAHAM aveva avuto un'idea felice, che gli permise di semplificare enormemente la trattazione del problema, pur raggiungendo tutta la desiderabile approssimazione.

ABRAHAM ha trovato, per dir così, un giusto mezzo fra il computo rigoroso dell'autocampo e l'arbitraria estensione del principio di reazione (dal caso elettrostatico, in cui vale rigorosamente, al caso generale).

Il criterio direttivo si può sintetizzare come segue.

La risultante  $\Phi$  e così il momento risultante delle forze dell'autocampo si possono presentare (POINCARÈ<sup>(10)</sup>) sotto forma di derivate esatte, rispetto al tempo, di due certi vettori  $Q$  e  $K$  (risultante e momento risultante delle così dette quantità di moto elettromagnetiche).  $Q$  e  $K$  dipendono a rigore, al pari delle forze elettromagnetiche, da stati

(\*) Va pur ricordato un lavoro del sig. SCHWARZSCHILD, *Ueber die Bewegung des Elektrons*, « Göttinger Nachrichten », 1903, che ha lo scopo precipuo di discutere matematicamente l'influenza della rotazione sul moto di una carica elettrica. La conclusione è che, nei limiti delle attuali esperienze, si può tranquillamente prescindere dalla rotazione, senza commettere sensibili errori.

(10) Cfr. per es. *Electricité et optique*, Paris, Carré et Naud, 1901, pp. 448-451; oppure ABRAHAM, loco cit., pp. 23-36.

di moto, che spettano a punti della carica, anche in istanti precedenti a quello generico, che si considera.

Ma non si commette un grave errore, valutando questi due vettori come se il movimento della carica fosse stazionario, colle caratteristiche, che gli competono nell'istante attuale. Ottenuti in tal modo  $Q$  e  $K$ , si lascia cadere l'ipotesi provvisoria della stazionarietà, e si deriva rispetto al tempo, risguardando variabili, come generalmente sono, le caratteristiche del moto rigido.

È ben naturale di chiamare *quasi stazionari* quei movimenti, ai quali è applicabile codesto procedimento con approssimazione sufficiente. ABRAHAM ne ha fissato i limiti in modo preciso. Noi non lo seguiremo nella sua analisi, accontentandoci di mettere in luce l'ingegnosità dell'artificio.

Trattare il movimento come stazionario (cioè trascurare l'accelerazione) in tutto il computo delle forze elettromagnetiche sarebbe press'a poco quanto trascurare addirittura l'autocampo. (Infatti, in ogni moto traslatorio uniforme, risultante e momento risultante delle forze dell'autocampo riescono rigorosamente nulli).

Col procedimento di ABRAHAM, le forze vengono valutate tenendo conto, almeno parzialmente, anche dell'accelerazione.

Per i movimenti, che si possono risguardare quasi stazionari, le equazioni (4) e (5) perdono il carattere funzionale, che le rende così poco maneggevoli.

Infatti anche i secondi membri vengono in tal caso a dipendere dal moto, soltanto pel tramite delle velocità e accelerazioni dei punti del sistema, *relative all'istante generico, che si considera*. Ci troviamo insomma di fronte ad un ordinario problema di dinamica del solido, in cui le forze dipendono anche dalla accelerazione. Per verità, negli esempi più comuni, le leggi delle forze dipendono esclusivamente dalla posizione e dalla velocità; non è però senza precedenti il fatto che intervenga anche l'accelerazione.

Basta pensare al caso del moto di un solido entro un liquido perfetto.

Le pressioni del liquido sulle pareti del solido danno luogo a forze addizionali (oltre a quelle direttamente applicate), che dipendono dalle accelerazioni delle molecole fluide, cioè in definitiva (essendo il moto del liquido subordinato a quello del solido) dalle velocità e accelerazioni del solido. In queste condizioni si presenta un fenomeno tipico, del resto ben prevedibile. L'influenza del liquido circostante aumenta l'inerzia del solido; ad es., nel caso di una sfera in moto rettilineo, le cose vanno come se il movimento (sotto l'azione delle forze applicate e di quelle che agirebbero sul liquido spostato) avesse luogo nel vuoto, essendo però aumentata la massa della sfera di una metà della massa del liquido spostato.



Questo richiamo idrodinamico ci lascia presumere analoghi effetti da parte delle forze dell'autocampo.

### Massa elettromagnetica longitudinale e trasversale.

Cerchiamo di precisare, mettendoci nelle circostanze più semplici.

Supponiamo che si tratti di una sferetta omogenea, elettrizzata uniformemente.

Sotto condizioni, che, per brevità, tralascio di specificare, si può supporre il moto puramente traslatorio. Per la sua determinazione basta allora la (4), la (5) risultando identicamente soddisfatta.

Il vettore  $\Phi$  si esplicita senza difficoltà.

Dicendo  $\Phi_T$  la sua componente tangenziale o longitudinale (cioè nel senso del moto), e  $\Phi_n$  una componente normale o trasversale (cioè secondo una qualsiasi direzione  $n$  perpendicolare alla velocità) si trova:

$$\Phi_T = -m_0 \chi_1(\beta) a_T,$$

$$\Phi_n = -m_0 \chi_2(\beta) a_n,$$

dove  $a_T$ ,  $a_n$  sono le analoghe componenti dell'accelerazione;  $\beta$  è il rapporto fra la velocità (in generale variabile) della sfera e la velocità  $c$  della luce;  $\chi_1$  e  $\chi_2$  sono due funzioni del solo argomento  $\beta$  <sup>(11)</sup>, le quali si riducono all'unità per  $\beta = 0$ ; infine

$$(6) \quad m_0 = \frac{4}{5} \frac{e^2}{c^2 R}$$

( $e$  valore assoluto della carica in unità elettrostatiche,  $R$  raggio della sfera).

Ciò premesso, proiettiamo la relazione vettoriale (4) nella direzione del moto e in una generica direzione ortogonale, designando con  $F_T$ ,  $F_n$  le relative componenti del vettore  $F$  (risultante delle forze provenienti dal campo elettromagnetico esterno).

---


$$(11) \quad \chi_1(\beta) = \frac{3}{4\beta^2} \left\{ -\frac{1}{\beta} \log \frac{1+\beta}{1-\beta} + \frac{2}{1-\beta^2} \right\},$$

$$\chi_2(\beta) = \frac{3}{4\beta^2} \left\{ \frac{1+\beta^2}{2\beta} \log \frac{1+\beta}{1-\beta} - 1 \right\}.$$

Ove si ponga per brevità

$$(6') \quad \begin{cases} m_1 = m + m_0 \chi_1(\beta), \\ m_2 = m + m_0 \chi_2(\beta), \end{cases}$$

si ha subito:

$$(7) \quad F_T = m_1 a_T,$$

$$(8) \quad F_n = m_2 a_n.$$

Come si vede, il rapporto fra forza (esterna) e accelerazione vale  $m_1$  nel senso del moto, e vale invece  $m_2$  per una generica direzione perpendicolare.

Nella meccanica ordinaria, (quando cioè non intervengono forze di origine elettromagnetica, e non c'è quindi autocampo), il rapporto fra forza e accelerazione è sempre il medesimo in qualsiasi direzione: la massa, carattere intrinseco del mobile, indipendente in particolare dalla velocità.

Qui abbiamo invece, per usare la terminologia di ABRAHAM, una massa *longitudinale*  $m_1$  e una massa *trasversale*  $m_2$ , distinta in generale dalla prima. Entrambe poi dipendono essenzialmente dalla velocità, oltre che da caratteri intrinseci della carica mobile (la massa materiale  $m$ , la carica  $e$ , il raggio  $R$ ).

### Caso particolare già previsto da J. J. Thomson <sup>(12)</sup>.

#### Applicazione ai raggi catodici ed affini.

#### Opportunità di escludere qualsiasi intervento di materia ponderabile.

Per velocità piccolissime rispetto a quella della luce,  $\beta$  è sensibilmente zero, ed  $m_1$ ,  $m_2$  si riducono entrambe al valore comune e costante  $m + m_0$ .

Questo caso limite, cui si è condotti da intuizioni molteplici <sup>(13)</sup>, ha più stretta analogia col moto di una sfera in un liquido perfetto.

L'effetto dell'autocampo equivale in definitiva ad una inerzia addi-

<sup>(12)</sup> *On the electric and magnetic effects produced by the motion of electrified bodies*, « Phil. Mag. », (5), 11, aprile 1881.

<sup>(13)</sup> Ad es. per via energetica, come si può vedere in J. J. THOMSON, *Elettricità e materia* (traduzione italiana di G. FAÈ, Milano, Hoepli, 1905), pag. 24; o più diffusamente nella memoria del Prof. RIGHI, *Sulla massa elettromagnetica*, « Nuovo Cimento » (5), 12, 1906.

zionale di origine elettromagnetica, misurata dalla espressione (6) di  $m_0$ . L'equazione vettoriale (4), o le equivalenti (scalari) (7), (8), riprendono di conseguenza la forma tipica

$$(4') \quad (m + m_0)a = F.$$

Sofferamoci un momento su queste velocità limitate, per cui  $\chi_1$  e  $\chi_2$  si possono confondere coll'unità.

Anzitutto va notato che la cosa è lecita in un ambito abbastanza largo. Basta per es. che si tratti di velocità non superiori ad un terzo della velocità della luce (che è precisamente il massimo ordine di grandezza, già trovato per i raggi catodici, quando si trascurava l'autocampo) perchè l'errore resti al disotto del 5%.

La (4') differisce dalla (3) soltanto per questo: il coefficiente  $m$ , che compare nella (3), è sostituito nella (4) da  $m + m_0$ .

Ricordiamo che, ammessa la validità della (3), nel caso dei raggi catodici ed affini, eravamo giunti alle conclusioni seguenti:

- a) I fatti sperimentali sono benissimo rappresentati dalle formule.
- b) La velocità delle particelle è compresa fra 1/10 e 1/3 della velocità della luce.
- c) Il rapporto fra la carica e la massa materiale è (in media) 1800  $\eta$ , cioè 1800 volte quello corrispondente ai fenomeni elettrolitici.

L'intervento dell'autocampo (ridotto a quel minimo, di cui ora ci occupiamo) lascia evidentemente sussistere le conclusioni a) e b), e modifica la c) fornendo il valore 1800  $\eta$  per il rapporto  $e/(m + m_0)$ , anzichè per  $e/m$ .

La modificazione è eccezionalmente importante, perchè toglie lo stridente contrasto della c) colla concezione atomica della materia, e rende pressochè incontestabile la conclusione che *i raggi catodici ed affini provengono dal trasporto di cariche elettriche negative senza nucleo materiale*.

Proviamoci infatti ad ammettere che un nucleo materiale vi sia. Le cose andrebbero ancora peggio di quando si trascurava l'autocampo. Se allora era 1800  $\eta$  la carica per unità di massa materiale, la stessa carica spetterebbe adesso all'unità di massa apparente  $m + m_0$ . Ma, per  $m + m_0 = 1$  ed  $m_0$  non addirittura trascurabile, la massa materiale  $m$ , cui compete la carica 1800  $\eta$ , risulta più piccola dell'unità; la carica specifica sarebbe perciò maggiore di 1800  $\eta$ .

L'inconveniente di dover attribuire ad atomi materiali cariche di gran lunga superiori a quelle, di cui li indicano capaci i fenomeni elettrolitici, scompare immediatamente tostochè si rinunci ad attribuire alla carica mobile un substrato materiale, ammettendo invece che l'inerzia sia tutta di origine elettromagnetica.

Allora il rapporto

$$\frac{e}{m_0} = 1800\eta$$

non ha più nulla a che fare colla materia ponderabile, ma soltanto, in virtù della (6), colla carica e colle sue dimensioni.

Sostituendo per  $m_0$  il valore (6), abbiamo dalla precedente espressione di  $e/m_0$ ,

$$(9) \quad R = \frac{4}{5} \cdot 1800 \cdot \frac{e\eta}{c^2}.$$

Se ne trae una conseguenza interessante, ove si accetti la concezione atomistica dell'elettricità, secondo cui la carica elettrica, primordiale ed indivisibile, è l'elettrone (carica dell'ione elettrolitico monovalente), e le particelle costituenti le radiazioni (catodiche ed affini) sono altrettanti elettroni.

L' $e$  della (9) ha allora invariabilmente il valore  $3 \cdot 10^{-10}$  (in unità elettrostatiche), proprio dell'ione elettrolitico.

Si noti che la concezione atomistica è fortemente suffragata dal fatto che la carica degli ioni gasosi si riscontra pressochè identica a quella degli ioni elettrolitici <sup>(14)</sup>.

Posto, nella (9),  $e = 3 \cdot 10^{-10}$ , ove si tenga conto che, in unità elettrostatiche,  $\eta$  vale  $9660 \cdot 3 \cdot 10^{10}$ , o, in cifra tonda,  $10^4 c$ , si trova:

$$R = \frac{72}{50} 10^{-13},$$

ossia  $10^{-13}$  cm come ordine di grandezza delle dimensioni di un elettrone.

Le dimensioni di un atomo di materia ponderabile si valutano invece dell'ordine di  $10^{-8}$  cm <sup>(15)</sup>, talchè la concentrazione dell'elettricità negativa, sciolta da ogni vincolo materiale, risulta circa 100 000 volte maggiore di quella, che essa possiede quando è carica atomica.

<sup>(14)</sup> La effettiva determinazione di tale carica — che Sir OLIVER LODGE (*Electrons*, London, Bell, 1906, pag. 79) non esita a dichiarare uno dei più brillanti risultati della moderna fisica sperimentale — è dovuta ai sigg. J. J. THOMSON e C. T. R. WILSON, e fu poi perfezionata e semplificata dal sig. H. A. WILSON (*A determination of the charge on the Ions*, ecc., « Phil. Mag. » (6), 5, aprile 1903). Tutte queste ricerche sono fondate sopra uno speciale fenomeno: la condensazione e conseguente precipitazione del vapore acqueo, che si produce in aria purissima, sopra-saturata, quando venga attraversata da scariche o da radiazioni elettriche.

<sup>(15)</sup> Cfr. per es. JEANS, *The dynamical theory of gases*, Cambridge, University Press, 1904, pp. 340-341.

La piccolezza delle dimensioni degli elettroni rispetto agli atomi ponderabili rende ragione intuitiva della penetrazione dei raggi catodici ed affini attraverso la materia, specialmente allo stato gassoso. Infatti nei gas le molecole sono molto spaziate, il rapporto fra il volume degli interstizi e quello occupato dalle molecole potendosi ritenere dell'ordine di  $10^4$  <sup>(16)</sup>.

Le coorti dei minutissimi elettroni possono così passare quasi indisturbate.

### Raggi di elettricità positiva.

La nostra attenzione è stata finora rivolta a radiazioni di elettricità negativa.

Sorge spontanea la domanda: Esistono fenomeni analoghi per l'elettricità positiva? Tali fenomeni sono stati effettivamente constatati (per quanto meno stabili e meno cospicui di quelli dovuti all'elettricità negativa): ad es. i raggi-canale di GOLDSTEIN, che si formano durante la scarica elettrica nei gas molto rarefatti, i raggi emessi da un filo rovente, previamente caricato di elettricità positiva, una delle tre specie di radiazioni caratteristiche dei corpi radioattivi (i così detti raggi  $\alpha$ ).

WIEN <sup>(17)</sup>, EWERS <sup>(18)</sup>, J. J. THOMSON <sup>(19)</sup> e RUTHERFORD <sup>(20)</sup> hanno studiato questi tipi di radiazioni coi criteri già esposti per i raggi catodici ed affini.

Confermato che si tratta di cariche positive, hanno stabilito (col solito criterio delle deviazioni elettrostatiche e magnetiche) che il valore di  $e/m$ , diciamo più precisamente di  $e/(m + m_0)$ , immaginando di tenere il debito conto dell'autocampo, è dell'ordine di  $\eta$ , anzi spesso più piccolo (molto prossimamente la metà per i raggi  $\alpha$ ), mentre s'è visto che, per le radiazioni negative, è circa 1800 volte maggiore.

<sup>(16)</sup> Ammesso infatti, per una molecola,  $10^{-8}$  cm come ordine delle dimensioni lineari, il volume sarà dell'ordine di  $10^{-24}$  cm<sup>3</sup>. D'altra parte, detta  $m_H$  la massa di un atomo di idrogeno, si ha  $e/m_H = \eta$ , da cui, sostituendo per  $e$  ed  $\eta$  i loro valori ( $3 \cdot 10^{-10}$ ,  $10^4 \cdot c$ ), risulta  $m_H = 10^{-24}$  g. Se  $N$  è il numero delle molecole per unità di volume,  $2m_H \cdot N$  misura la massa dell'unità di volume, cioè la densità, che per l'idrogeno vale all'ingrosso  $10^{-4}$ . Dall'eguaglianza  $2m_H N = 10^{-4}$ , ricaviamo  $N = 5 \cdot 10^{19}$  (in buon accordo col valore fornito dalla teoria cinetica dei gas). Ciascuna molecola avendo un volume comparabile a  $10^{-24}$  cm<sup>3</sup>, la frazione dell'unità di volume effettivamente occupata da idrogeno, è  $N \cdot 10^{-24}$ , cioè appena 1/20 000. Per gli altri gas si ha un rapporto del medesimo ordine, dacchè  $N$  rimane lo stesso, conformemente all'ipotesi di AVOGADRO.

<sup>(17)</sup> *Untersuchungen über die elektrische Entladung in verdünnten Gases*, « Annalen der Physik », 65, 1898.

<sup>(18)</sup> *Zur Mechanik der Kanal- und Kathodenstrahlen*, « Annalen der Physik », 69, 1899.

<sup>(19)</sup> *Conduction of electricity through gases*, Cambridge, University Press, 1903, pag. 119. *Rays of positive electricity*, « Phil. Mag. », (6), 13 e 14 maggio e settembre 1907.

<sup>(20)</sup> *The mass and velocity of the  $\alpha$  particles...; Mass of the  $\alpha$  particles of Thorium* (in collaborazione con O. HAHN), « Phil. Mag. », (6), 12, ottobre 1906.

Inoltre — riferiamoci per es. ai raggi-canale — è stato trovato che  $e/(m + m_0)$  varia colla natura degli elettrodi e del gas nel tubo di scarica.

In questa condizione di cose, vengono meno le ragioni, che, nel caso delle radiazioni di elettricità negativa, avevano indotto ad escludere ogni intervento di materia ponderabile. Qui anzi (data la accennata dipendenza delle radiazioni dalle sostanze in cui presenza si producono), la ipotesi più probabile è che si tratti di vere e proprie particelle materiali, cariche di elettricità positiva.

Un valido argomento a favore sta nella circostanza che il valore — diciamo  $\eta_1$  — di  $e/(m + m_0)$ , pur variando da caso a caso, fu riscontrato sempre minore di  $\eta$ , come esige l'ipotesi atomica.

Infatti, secondo tale ipotesi,  $e/m$  dovrebbe essere  $\eta/\nu$  ( $\nu$  equivalente chimico del nucleo materiale); perciò  $e/m \leq \eta$ . Ma  $e/(m + m_0)$  è anche più piccolo di  $e/m$ , quindi a fortiori  $\leq \eta$ .

Dato per es. che si tratti di particelle di idrogeno, l'ipotesi atomica porge  $m = e/\eta$ . Eliminando  $m$  dalla  $e/(m + m_0) = \eta_1$ , si ottiene

$$\frac{e}{\frac{e}{\eta} + m_0} = \eta_1,$$

ovvero

$$m_0 = e \left( \frac{1}{\eta_1} - \frac{1}{\eta} \right).$$

Ci troviamo quindi in grado (associando le due ipotesi che nei raggi positivi vi sia un nucleo materiale e che l'elettricità abbia struttura atomica), non soltanto di assegnare la complessiva massa apparente  $m + m_0$ , ma anche di distinguere in essa quanta parte si deve all'inerzia ordinaria e quanta parte all'inerzia elettromagnetica.

### I raggi $\beta$ del radio e le esperienze di Kaufmann <sup>(21)</sup>.

Una delle più brillanti applicazioni della teoria di ABRAHAM è stata fatta da KAUFMANN alle sue celebri esperienze sui raggi  $\beta$  del radio.

Delle esperienze preliminari avevano lasciato supporre che si trattasse di radiazioni di elettricità negativa, dotate di velocità superiori a quelle dei raggi catodici, anzi abbastanza prossime alla velocità della luce.

(<sup>21</sup>) *Ueber die elektromagnetische Masse der Elektronen*, « Göttinger Nachrichten », 1902 e 1903.

La semplificazione di attribuire all'autocampo un puro effetto di inerzia, riguardando  $m_1 = m_2 = m + m_0$  non era dunque in alcun modo lecita. KAUFMANN interpretò le sue esperienze adottando per la forza dell'autocampo l'espressione più completa, che figura nelle (7) ed (8).

Il materiale di osservazione risultò in eccellente accordo colle formule ritenendovi addirittura  $m = 0$ .

Le corrispondenti velocità degli elettroni si trovarono comprese fra i  $2/3$  e i  $9/10$  della velocità della luce.

Fu appunto in seguito a tali significanti constatazioni che KAUFMANN e ABRAHAM annunciarono cinque anni or sono, e tutti oggi riguardano assodata, la costituzione puramente elettromagnetica dei raggi negativi, con esclusione d'ogni materia ponderabile, e pur con effetti di inerzia: identici agli ordinari finchè la velocità è abbastanza piccola, crescenti indefinitamente in grandezza e variabili in direzione al crescere della velocità stessa.

### Le varie meccaniche degli elettroni <sup>(22)</sup>.

Non dimentichiamo il punto di partenza dei riferiti raffronti sperimentali e delle conseguenti induzioni.

Inizialmente abbiamo ammessa un'ossatura materiale rigida e coibente (con che la distribuzione dell'elettricità in ciascuna particella doveva senz'altro ritenersi invariabile durante il movimento), e abbiamo preso a considerare il caso di una sfera uniformemente elettrizzata.

Per rispecchiare le condizioni di fatto, siamo poi stati tratti ad adottare l'ipotesi limite che l'ossatura materiale sia evanescente.

La forma sferica e la distribuzione omogenea non sono, come ognuno intende, che ipotesi di comodo, atte ad agevolare il calcolo effettivo, per giungere rapidamente ai numeri.

Concettualmente più significante è la rinuncia ad ogni substrato materiale. Finchè ce n'è uno, per quanto tenue, basta supporre, come abbiam fatto, che esso sia costituito da sostanza solida e coibente, perchè l'indefornabilità della carica, durante il movimento, si presenti come necessaria conseguenza.

Ma quando scompare la materia coibente, e l'elettricità è libera di obbedire ad ogni eventuale sollecitazione dinamica, non c'è a priori alcuna ragione perchè il moto debba proprio avvenire senza deformazione.

(<sup>22</sup>) Nelle considerazioni, che seguono, si può intendere per « elettrone » anche una generica carica elettrica, considerata a sè, senza pretendere che l'ammontare complessivo di essa sia proprio eguale al quantum elementare (carica dell'ione elettrolitico), già definito come elettrone.

L'ipotesi della rigidità, come un'altra qualunque che introduca deformazioni di carattere prestabilito, lascia manifestamente insoddisfatti, e provoca la domanda:

Donde provengono (quando si esclude ogni traccia di materia) questi vincoli cinematici? o, ciò che è lo stesso, come mai si introducono, per ciascun elettrone, forze vincolari di natura elettromagnetica, mentre si è ammesso che la forza elettromagnetica (totale), agente sopra un elemento generico, sia definita dalla legge di LORENTZ? Per togliere la contraddizione, bisognerebbe considerare non un elettrone isolato, ma un gruppo, e supporre che, per un generico individuo  $I$  del gruppo, le forze vincolari siano precisamente quelle provenienti dagli altri elettroni (le forze esterne provenendo da cause addirittura estranee al gruppo, e l'autocampo dal solo elettrone  $I$ ). Allora le cose andrebbero, come se si trattasse di elettroni isolati, sottoposti a legami (immateriali).

Sono questioni che, debitamente approfondite, riportano a quella posizione rigorosa del problema, che avevamo voluto evitare.

Si ricordi infatti che l'ipotesi del nucleo rigido e coibente era stata introdotta per arrivare a previsioni concrete utilizzando in parte la teoria, senza attenderne il completo svolgimento deduttivo, che appariva irto di difficoltà.

Alla stessa stregua conviene considerare altre ipotesi complementari, che possono sostituire quella testè ricordata; per es. ogni ipotesi cinematica circa il comportamento degli elettroni, risguardati a priori come pura elettricità.

Stando così le cose, una discussione in astratto non avrebbe ragione di essere. Basta assicurarsi che si tratta in ogni caso di ipotesi non discoste dal vero. Si può allora legittimamente presumere che saranno altrettanto attendibili le loro conseguenze qualitative, e, quanto all'ordine di grandezza, anche i risultati numerici.

Per renderci conto delle varie ipotesi cinematiche, che sono state effettivamente proposte, consideriamo un generico elettrone in movimento. Supponiamolo di dimensioni tanto piccole (rispetto a quelle del campo in cui si svolge il moto) da poterlo senza errore sensibile trattare come infinitesimo.

Supponiamo d'altra parte — com'è perfettamente naturale in prima approssimazione, quando si tratta di movimenti aventi andamento continuo e regolare — che la deformazione, cui eventualmente sottosta l'elettrone durante il moto, possa anch'essa trattarsi come infinitesima.

Supponiamo infine, per fissar le idee, che l'elettrone abbia forma sferica all'inizio del movimento.

In queste condizioni, come è ben noto dagli elementi di cinematica, l'elettrone non può far altro che assumere forma ellissoidica, vicina in



ogni caso alla forma sferica, per quanto dipendente, in modo a priori incognito, dalle circostanze del moto. Qualunque ipotesi su tale dipendenza, purchè la deformazione si mantenga entro limiti abbastanza ristretti, può essere ragionevolmente esperita.

Di qua le diverse meccaniche degli elettroni.

Se si ammette la rigidità, si ha la *teoria di ABRAHAM*, su cui già ci siamo intrattenuti, presentandola come caso limite di legami realizzati da una guaina solida e coibente. L'unica differenza sta nel punto di vista. Quello originale dell'a. — come del resto ogni meccanica degli elettroni — esclude a priori qualsiasi intervento di materia ponderabile.

La *teoria di LORENTZ* <sup>(23)</sup> si ha supponendo che l'elettrone si schiacci alquanto nel senso del moto: precisamente, detto  $R$  il raggio della sfera iniziale, che esso divenga un ellissoide di rivoluzione, avente ancora  $R$  per raggio equatoriale, e  $R\sqrt{1-\beta^2}$  per raggio polare ( $\beta$  rappresenta sempre il rapporto fra la velocità dell'elettrone e quella della luce).

BUCHERER <sup>(24)</sup> e LANGEVIN <sup>(25)</sup> considerano elettroni incomprimibili, soggetti alla contrazione lorentziana:  $R_1, R_2$  essendo i raggi equatoriale e polare dell'elettrone deformato, si deve avere per l'incompressibilità  $R_1 R_2 = R^3$ , il rapporto  $R_2/R_1$  assumendosi eguale a  $\sqrt{1-\beta^2}$ , come nell'elettrone di LORENTZ. Se ne trae

$$R_1 = R(1 - \beta^2)^{-\frac{1}{2}}, \quad R_2 = R(1 - \beta^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Infine POINCARÈ <sup>(26)</sup> ha considerato un tipo di legame, che comprende tutti i precedenti come casi particolari. Egli ha discusso i vari casi sotto diversi aspetti, in special modo alla stregua di una certa trasformazione analitica, scoperta da LORENTZ <sup>(27)</sup>, che rispecchia (in senso alquanto più esteso dell'ordinario) il principio di relatività <sup>(28)</sup>: indipendenza dei fenomeni elettromagnetici da una traslazione di insieme.

<sup>(23)</sup> *Electromagnetic phenomena in a system moving, ecc.*, « Akademie van Wetenschappen te Amsterdam, Proceedings » (ediz. inglese), aprile 1904; M. ABRAHAM, loco cit., § 22.

<sup>(24)</sup> *Mathematische Einführung in die Elektronentheorie*, Leipzig, Teubner, 1904, pag. 57.

<sup>(25)</sup> *La physique des électrons*, « Revue générale des Sciences », 30 marzo 1905.

<sup>(26)</sup> *Sur la dynamique de l'électron*, « Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo », 21, 1906.

<sup>(27)</sup> Loco citato; oppure POINCARÈ, loco citato, § 1; sotto forma più elegante in MARCOLONGO, *Sugli integrali delle equazioni dell'elettrodinamica*, « Rend. Lincei », 1° aprile 1906.

<sup>(28)</sup> Cfr. le interessanti considerazioni sintetiche su questo principio, istituite dal signor EINSTEIN (*Zur Elektrodynamik bewegter Körper*, « Annalen der Physik », (4), 17, 1905). Per quanto concerne la elettrodinamica dei corpi in movimento, queste considerazioni mostrano che le ipotesi di LORENTZ sono le sole compatibili col principio esteso di relatività: (si sa che, nel senso ordinario, ci sarebbe soltanto la teoria di HERTZ, atta a rispettarlo).

Va poi notato che il sig. COHN (*Ueber die Gleichungen des elektromagnetischen Feldes für bewegte Körper*, « Göttinger Nachrichten », 1901) era pervenuto da qualche tempo, con felice intuizione formale, ad equazioni differenziali, che equivalgono (interpretazione a parte) alla teoria di LORENTZ. Veggasi in proposito: COHN, *Zur Elektrodynamik bewegter Systeme* (due note), « Berliner Berichte », 1904.

Rispetto a queste varie teorie, sarà opportuno osservare che l'elettrone rigido di ABRAHAM si presenta, assieme alla variante BUCHERER-LANGEVIN, più soddisfacente dal punto di vista energetico dell'elettrone di LORENTZ.

Infatti, tanto per l'elettrone rigido, quanto per quello incomprimibile di BUCHERER-LANGEVIN, c'è accordo fra l'espressione della massa longitudinale, ottenuta per via energetica, e quella che risulta come rapporto fra forza e accelerazione.

Se si adotta invece l'ipotesi di LORENTZ, l'accordo può essere raggiunto solo ammettendo che l'elettrone, oltre all'energia di origine elettromagnetica, posseda una certa provvista supplementare di energia intrinseca (di cui non si saprebbe assegnare la provenienza).

Viceversa l'ipotesi di LORENTZ ha, su *tutte* <sup>(29)</sup> le altre, il vantaggio di rispettare il principio di relatività (in senso esteso, come si è già accennato, cioè previa introduzione del tempo locale e della contrazione lorentziana nella direzione del moto).

L'importanza fondamentale di questo principio sta nel fatto che esso spiega a priori, in base alla teoria elettromagnetica della luce, il risultato negativo di tutte le esperienze ottiche tendenti a mettere in evidenza la traslazione terrestre.

### **Ultime esperienze di Kaufmann <sup>(30)</sup>. Desiderati di future ricerche. Loro relazione colla teoria di Larmor <sup>(31)</sup>.**

Come si vede, nessuna delle varie ipotesi cinematiche soddisfa senza riserve; viceversa (nei limiti di approssimazione, che si possono ragionevolmente pretendere) si trova che esse rappresentano tutte egualmente bene le esperienze di KAUFMANN del 1902-1903, su cui fu saggiata, per la prima, la teoria di ABRAHAM.

Nell'intento di decidere fra le varie teorie, KAUFMANN stesso intraprese nel passato anno una serie di nuove e più delicate esperienze.

Queste sembrerebbero più favorevoli alle teorie di ABRAHAM e di BUCHERER-LANGEVIN (senza notevoli differenze fra le due), che non alla teoria di LORENTZ, compromettendo così implicitamente il principio di relatività e riaprendo la questione di un riconoscimento del moto assoluto, mediante esperienze elettromagnetiche (o, in particolare, ottiche).

<sup>(29)</sup> Cfr. POINCARÉ, loco cit., §. 7.

<sup>(30)</sup> *Ueber die Konstitution des Elektrons*, « Annalen der Physik » (4), 19, 1906.

<sup>(31)</sup> *Aether and matter*, Cambridge, University Press, 1900, cap. V e Appendice A.

Tuttavia non bisogna dimenticare che le varie ipotesi sottoposte a controllo hanno tutte un carattere provvisorio e approssimativo.

Il fatto che esperienze più affinate rispondano meglio ad una piuttosto che ad un'altra va giudicato cogli stessi criteri di approssimazione, che hanno suggerito le ipotesi.

Per conseguenza non è il caso di ragionare come se l'elettrone, soggetto a vincoli cinematici, rispecchiasse rigorosamente la realtà fisica. In particolare cade così ogni illazione contraria al principio di relatività, che, a prima vista, sembrerebbe di poter trarre dalle ultime esperienze del KAUFMANN.

Giova piuttosto assurgere ad una conclusione di massima. Ed è che i mezzi sperimentali si trovano già ora così perfezionati da superare in esattezza l'ambito comune alle varie ipotesi cinematiche.

D'altra parte esse sono state tutte un po' gratuite, per quanto preziose in una prima approssimazione come mezzo euristico.

Non è dunque il caso di appellarsi all'esperienza per scegliere fra esse, ma sembra invece giunto il momento di abbandonare gli artifici di prima approssimazione, cercando di riprendere la teoria esatta, per attinervi approssimazioni ulteriori.

Un primo esempio di soluzione rigorosa è stato dato recentemente <sup>(32)</sup>. Esso lascia sperare che se ne troveranno anche altre rispecchianti le caratteristiche salienti del moto di un elettrone isolato, almeno quando questo è così piccolo che, tranne nei riguardi dell'autocampo, è assimilabile ad un punto.

La questione, così semplificata, dovrebbe essere accessibile per via asintotica: considerando cioè una carica, la quale tenda a concentrarsi in un punto geometrico (mobile), e determinando l'espressione asintotica dell'autocampo.

Tale concetto non è nuovo, trovandosi già nell'opera di LARMOR <sup>(33)</sup> (associato ad una rappresentazione meccanica dell'etere e all'ipotesi che tutto sia governato dal principio della minima azione).

Però il LARMOR non ha spinto la sua indagine fino alle ultime conseguenze matematiche, limitandosi ad un grado di approssimazione, che non supera quello comune alle varie ipotesi cinematiche.

È al di là di questo grado di approssimazione che importa ormai far giungere le ricerche teoriche.

---

<sup>(32)</sup> Cfr. la Nota *Sur le mouvement de l'électricité sans liaison, ni forces extérieures*, « Comptes Rendus », 19 agosto 1907 [in questo volume: XXXIV, pp. 583-586].

<sup>(33)</sup> Loco citato. Cfr. in particolare la pag. 265.

### Modello elettromagnetico della materia.

Mi sia consentito anche un accenno alle nuovissime speculazioni di J. J. THOMSON <sup>(84)</sup> sulla costituzione degli atomi ponderabili. Secondo questo autore, un modello adeguato della molecola si ha immaginando una specie di nebulosa (molto rarefatta) di elettricità positiva, in cui si trovino immersi uno o più elettroni negativi (di carica complessiva eguale ed opposta a quella della nebula). Un tale modello si giustifica come segue.

Dal numero degli elettroni negativi e dalla loro configurazione statica (o più generalmente dal carattere del loro moto stazionario) dipendono le diverse specie di materia ponderabile.

Le piccole vibrazioni attorno alle posizioni di equilibrio (o agli stati di moto stazionario), colle loro frequenze caratteristiche, fanno riscontro al comportamento delle linee spettrali.

Le collisioni catastrofiche di questi microcosmi elettrici e il loro atteggiarsi a nuove forme di equilibrio (o di moto stazionario) provocano i fenomeni chimici, rimanendo così aperto l'adito anche alle ipotetiche trasformazioni iperchimiche.

Se le collisioni, anche senza essere catastrofiche, sono accompagnate da vibrazioni impulsive o mettono in libertà degli elettroni, si hanno fenomeni di radioattività.

Le forze molecolari (sensibili soltanto a distanza piccolissima) trovano poi ovvia spiegazione nelle attrazioni e repulsioni elettromagnetiche. Queste risultano infatti trascurabili quando le molecole sono distanti (rispetto alle proprie dimensioni), perchè la carica totale di ogni molecola è nulla; possono invece esplicarsi in modo vario ed intenso (come si riscontra per le azioni molecolari) quando le molecole sono abbastanza vicine.

Tutto ciò, e altro ancora potrebb'essere aggiunto, è senza dubbio brillante e suggestivo. Ma, se si cerca di precisare, sorgono numerose difficoltà.

Ravvicinamenti felici e punti deboli sono chiaramente riassunti, e discussi con larghe vedute nel libro già citato di OLIVIERO LODGE <sup>(85)</sup>.

Non possiamo neppur sfiorare una tale critica, che mette in campo così larga varietà di fenomeni fisico-chimici.

<sup>(84)</sup> Cfr. la già citata *Elettricità e materia*, cap. V, e due Memorie del « Phil. Mag. » (6), 7, marzo 1904; (6), 11, giugno 1906.

E poi annunciata come imminente la pubblicazione di un apposito volume: *Corpuscular Theory of Matter*, London, Constable, 1907.

<sup>(85)</sup> *Electrons*, cap. XV e seguenti.

Limitiamoci ad approfondire l'aspetto meccanico della questione.

Nei primi entusiasmi per la così detta spiegazione elettromagnetica dell'universo, si potè accontentarsi di una conclusione semplicista. Ecco qual era.

Una carica  $e$ , uniformemente distribuita entro una sfera di raggio  $R$ , possiede, come abbiám visto, una massa elettromagnetica, che, per velocità piccole rispetto alla velocità  $c$  della luce, si comporta in tutti i fenomeni meccanici come un'ordinaria massa materiale.

Essa ha per espressione

$$(6) \quad m_0 = \frac{4}{5} \frac{e^2}{c^2 R}.$$

Per forme e distribuzioni generiche (supposte condizioni tali che sia possibile un moto puramente traslatorio, e dato, beninteso, che si tratti sempre di velocità abbastanza piccole rispetto a quella della luce) si può ancora definire una massa elettromagnetica, che si comporta come una massa ordinaria. Designando con  $R$  il raggio della sfera di volume eguale a quello occupato dalla carica, si troveranno espressioni del tipo

$$(10) \quad m_0 = k \frac{e^2}{c^2 \cdot R},$$

dove  $k$ , per ragione di omogeneità, è un puro numero, e può quindi dipendere soltanto da rapporti di grandezze; nella fattispecie dalla forma geometrica dello spazio occupato dalla carica e dal modo, con cui essa vi è distribuita.

Il modo più ovvio di rappresentarsi l'inerzia ordinaria come una manifestazione elettromagnetica sarebbe senz'altro di identificare il punto materiale ad una generica carica di dimensioni piccolissime, la massa rimanendo definita dalla (10).

Ma un tale procedimento è troppo superficiale. Una grave obiezione, che mi fu messa in vista da ENRIQUES, risiede nel fatto che esso non rispecchia la proprietà additiva della massa.

Possiamo riconoscerlo, considerando un caso particolare qualunque.

Immaginiamo per esempio una carica  $e$ , conformata a cubo e omogeneamente distribuita.

La (10) porge

$$m_0 = k \frac{e^2}{c^2 R},$$

avendo  $k$  ed  $R$  determinati valori numerici.

Prendiamo altri sette cubi identici, e formiamo un cubo di lato doppio. Avremo una nuova carica  $8e$ , collo stesso fattore di forma  $k$ , mentre  $R$  dovrà essere sostituito con  $2R$ .

Detta  $M_0$  la massa di questo nuovo cubo, sarà, a norma della (10),

$$M_0 = k \frac{64 \cdot e^2}{c^2 \cdot 2R} = 32m_0.$$

Se valesse la proprietà additiva, dovrebbe invece risultare  $M_0 = 8m_0$ .

Rimane dunque escluso che si possa rappresentarsi la materia ordinaria come una carica elettrica pura e semplice. In verità il modello di J. J. THOMSON è già più raffinato; l'obbiezione seguita però a sussistere.

All'incontro può darsi che, considerando l'atomo ponderabile come un sistema complesso di moltissimi elettroni (secondo THOMSON, non sarebbe così, ma ogni atomo consterebbe di un numero di elettroni comparabile al peso atomico), intervenga nella massa, definita elettromagneticamente, un qualche compenso statistico, che ristabilisca la proprietà additiva.

Ma queste non sono che vaghe congetture; sarebbe prematuro appoggiarvi una conclusione qualsiasi.

Per mio sentimento, lo confesso, sono piuttosto scettico, e affaccio una pregiudiziale.

Supponiamo per un momento che un modello elettromagnetico del tipo accennato si possa costruire senza contraddizione.

Avremo veramente realizzato un progresso speculativo, paragonabile a quelli, di cui la meccanica ci ha fornito i più luminosi esempi?

(Cito, per fissare le idee, la subordinazione delle leggi di KEPLER alla più semplice e comprensiva legge di attrazione universale).

Si vede subito che le condizioni sono diverse.

Una spiegazione elettromagnetica della meccanica ordinaria dovrebbe rispondere a questo schema:

Si parte da principi elettromagnetici, indipendenti, o almeno distinti dai soliti postulati della meccanica, e poi questi si ritrovano come aspetto particolare o limite di conseguenze più generali.

(È con questi criteri che si intende la spiegazione delle leggi di KEPLER: si adotta in lor vece un unico principio generale — legge di NEWTON —, e da questo si ricavano in particolare le tre leggi come risultati di prima approssimazione.)

Nella meccanica elettromagnetica, come è ora costituita, si invoca invece ad un certo punto proprio il principio fondamentale della mec-

canica ordinaria: forza = massa · accelerazione, ponendo soltanto il secondo membro eguale allo zero.

Trarre da questi principi una spiegazione elettrica della materia non mi pare incoraggiante; direi anzi che si rasenta il circolo vizioso.

Sarà possibile evitarlo con un qualche spostamento nel modo di porre la questione?

L'onere della prova incombe a chi afferma.

*Padova, Settembre 1907.*





## SULLE ONDE PROGRESSIVE DI TIPO PERMANENTE

« Rend. Acc. Lincei », s. 5<sup>a</sup>, vol. XVI (2<sup>o</sup> sem. 1907),  
pp. 777-790.

## I. - Preliminari.

Il moto di un liquido pesante avvenga in piani verticali fra loro paralleli, senza divario (sensibile) dall'uno all'altro di essi.

Pensiamo, per fissar le idee, ad un canale rettilineo a sponde verticali col medesimo stato di moto lungo ogni retta perpendicolare alle sponde. Basta allora occuparsi dell'andamento del fenomeno in una generica sezione parallela alle sponde.

Supponiamo che il fondo del canale sia orizzontale e che i caratteri qualitativi del moto siano quelli che corrispondono ad onde propagantisi entro il canale senza alterazione di forma. Si ha così a fare con perturbazioni *locali*, che danno al fenomeno l'apparenza di un movimento traslatorio orizzontale di tutta la massa fluida; in realtà, si deve ritenere nulla la portata complessiva attraverso una generica sezione trasversale del canale. Si potrà poi parlare di un livello medio del liquido (quello che si avrebbe in assenza della perturbazione ondosca).

## 2. - Specificazione delle ipotesi.

Mettiamo le ipotesi sotto forma analiticamente precisa.

Anzi tutto la qualifica « permanente » sta a significare che, per un osservatore dotato della traslazione apparente della massa fluida, il movimento ha carattere stazionario, ossia indipendente dal tempo.

Ciò posto, assumiamo un sistema di assi  $x$ ,  $y$  animati da tale traslazione, essendo l'asse  $y$  verticale verso l'alto, l'asse  $x$  scorrente sul fondo e rivolto in senso *opposto* alla traslazione.

Per *velocità di propagazione* del moto ondoso si intende la velocità degli assi mobili  $x$ ,  $y$ . Designandone con  $c$  il valore assoluto, si hanno le componenti —  $c$ , 0.

Diremo  $h$  la profondità (media) del canale, cioè la distanza fra l'orizzontale che segna il fondo e quella che segna il livello medio.

La regione del moto sarà rappresentata nel piano  $x, y$  (fig. 1) da una striscia indefinita  $L$ , limitata inferiormente dall'asse delle  $x$  e superiormente da una linea libera  $l$ , più o meno sinuosa, la quale differisce poco dalla orizzontale  $y = h$ , quando si tratta di onde, che si riducono a semplici increspamenti.

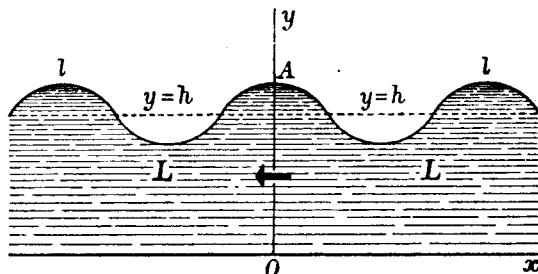


Fig. 1

Con questo andamento generale della  $l$  è poi possibile che essa sia costata di tratti riprodottonsi periodicamente (come nella fig. 1), oppure sia aperiodica (abbia per es. un solo massimo al disopra del livello medio, avvicinandosi asintoticamente alla  $y = h$  da una parte e dall'altra del massimo). Il primo tipo comprende in particolare le così dette *onde oscillatorie semplici* (onde sinusoidali, dinamicamente possibili soltanto in prima approssimazione); l'esempio indicato per il secondo tipo è quello, pure ben noto, dell'*onda solitaria*, studiata sperimentalmente da SCOTT RUSSEL e teoricamente (in via approssimata) da BOUSSINESQ e da Lord RAYLEIGH <sup>(1)</sup>.

Quanto al movimento del liquido nella striscia  $L$ , supporremo che esso sia ovunque regolare e irrotazionale.

Esisterà perciò una funzione uniforme  $\varphi(x, y)$  (potenziale di velocità), regolare entro  $L$ , tale che

$$(1) \quad d\varphi = u dx + v dy,$$

essendo  $u$  e  $v$  le componenti della velocità relativa nel punto generico  $(x, y)$ .

La (1) determina  $\varphi$  a meno di una costante additiva: converremo di prenderla in modo che sia  $\varphi = 0$  nell'origine  $O$  delle coordinate.

<sup>(1)</sup> Cfr. per es. LAMB, *Hydrodynamics* (terza edizione), Cambridge, University Press, 1906, art. 248.

Per l'incompressibilità del liquido, sarà  $\varphi$  funzione armonica, e si potrà quindi definire la funzione associata  $\psi$  (funzione di corrente) mediante l'equazione ai differenziali totali

$$(2) \quad d\psi = -v dx + u dy,$$

fissando anche qui la costante di integrazione in modo che  $\psi$  si annulli nell'origine.

Si noti che il campo  $L$  è semplicemente connesso, talchè la  $\psi$  risulta di necessità uniforme.

Introdurremo inoltre una condizione supplementare ovviamente suggerita dal tipo di movimenti che vogliamo studiare. Si tratta di perturbazioni ondose, cioè di movimenti vibratorii locali, che debbono ritenersi dotati di una velocità *assoluta* poco rilevante, in confronto della velocità di propagazione ( $-c, 0$ ). Ne viene che la velocità *relativa* non può differire gran che dalla traslazione ( $c, 0$ ): certo non può differirne quanto al senso generale del moto.

Ci troviamo così condotti ad ammettere che sia dappertutto  $u > 0$ , anzi che sia *positivo il limite inferiore dei valori di  $u$* . Con ciò anche il *valore assoluto della velocità*

$$V = |\sqrt{u^2 + v^2}|$$

(finito per le ipotesi precedenti) *avrà (in tutto  $L$ , contorno compreso) un limite inferiore diverso da zero.*

### 3. - Pressione. Condizioni ai limiti.

Per i moti irrotazionali, soggetti a forze conservative, e stazionari (rispetto ad assi fissi, ovvero dotati di una traslazione uniforme), le equazioni idrodinamiche si riassumono in un'unica relazione fra il valore assoluto della velocità, la pressione (divisa per la densità) e il potenziale (unitario) delle forze attive.

Nel caso presente si ha:

$$\frac{1}{2}V^2 + gy + p = \text{cost.},$$

designando al solito  $p$  la pressione,  $g$  l'accelerazione di gravità, e immaginando assunta l'unità di massa in modo che la densità del liquido risulti eguale ad 1. (Si lasciano indeterminate le unità di lunghezza e di tempo).

Sulla linea libera  $l$ , la pressione  $p$  è a ritenersi costante; sarà perciò

$$(3) \quad V^2 + 2gy = \text{cost.}, \quad \text{in ogni punto di } l.$$

Le altre condizioni ai limiti provengono dall'esprimere che tanto il fondo  $y = 0$ , quanto la linea libera  $l$  sono *linee di flusso*, cioè dirette come la velocità.

Indichiamo con  $s$  l'arco di una generica linea di flusso, contato a parirte da una origine arbitraria nel senso del moto (ovunque ben determinato, per essere  $V > 0$ ). Saranno  $dx/ds$ ,  $dy/ds$  i coseni direttori della tangente nel senso del moto, e avremo; sopra una tale linea,

$$\frac{dx}{ds} = \frac{u}{V}, \quad \frac{dy}{ds} = \frac{v}{V},$$

donde, in virtù delle (1) e (2),

$$\begin{cases} \frac{d\varphi}{ds} = \frac{\partial\varphi}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial\varphi}{\partial y} \frac{dy}{ds} = V, \\ \frac{d\psi}{ds} = \frac{\partial\psi}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial\psi}{\partial y} \frac{dy}{ds} = 0. \end{cases}$$

La seconda equazione mostra che  $\psi$  si mantiene costante sopra ogni linea di flusso; reciprocamente questa circostanza caratterizza una linea di flusso, perchè, se  $d\psi/ds$  si annulla, lungo una qualche linea, ne segue

$$-v \frac{dx}{ds} + u \frac{dy}{ds} = 0,$$

cioè la tangente ha la direzione della velocità.

In  $O$  si è attribuito a  $\psi$  il valore zero; sarà perciò, qualunque sia  $x$ ,

$$(4) \quad \psi = 0, \quad \text{per } y = 0.$$

Volendo fissare il valore (costante) di  $\psi$  sopra  $l$ , basterà integrare la (2) da un punto generico del fondo ad altro, pure generico, della linea libera (seguendo un cammino qualsiasi interno a  $L$ ). Integriamo per es. lungo l'asse delle ordinate da  $O$  sino all'intersezione  $A$  dell'asse con  $l$ . Avremo, essendo zero il valore di  $\psi$  in partenza, e designando con  $q$  il

cercato valore d'arrivo,

$$q = \int_{o_A} u dy ,$$

quantità essenzialmente positiva, per l'ipotesi supplementare relativa alla  $u$  (\*).

Ne consegue

$$(5) \quad \psi = q, \quad \text{in ogni punto di } l.$$

Va notato che, in tutti i punti del campo  $L$ , la  $\psi$  rimane compresa fra zero e  $q$ . Infatti, per ogni funzione armonica, regolare in un dato campo, i valori, relativi a punti interni, sono sempre compresi fra il limite superiore e il limite inferiore di quelli assunti al contorno. La  $\psi$  è appunto armonica e regolare in  $L$  e assume sul complessivo contorno di tale campo i valori zero e  $q$ .

L'equazione  $d\varphi/ds = V$ , ove si tenga conto che (sempre per l'ipotesi supplementare)  $V$  non scende mai al disotto di una certa costante positiva, mostra che  $\varphi$  cresce costantemente e indefinitamente con  $s$ , convergendo verso  $+\infty$  quando si procede nel senso del moto, verso  $-\infty$ , quando si procede in senso opposto (lungo la linea di flusso, di cui si tratta; in particolare sul fondo o sulla linea libera  $l$ ).

#### 4. - Conseguenze analitiche. Inversione.

Posto

$$(6) \quad \begin{cases} x + iy = z , \\ u - iv = w , \\ \varphi + i\psi = f , \end{cases}$$

$w$  ed  $f$  riescono notoriamente funzioni della variabile complessa  $z$ , in virtù delle (1), (2); e le (1), (2) stesse si compendiano in

$$(7) \quad \frac{df}{dz} = w .$$

(\*) Si osservi che, essendo 1 la densità del liquido,  $q = \int_{o_A} u dy$  non è altro che la portata del moto relativo per unità di larghezza del canale.

Al variare di  $z$  nel campo  $L$ ,  $w$  si mantiene sempre regolare, resta finita all' $\infty$ , e il suo modulo  $|w| = V$  non si annulla mai. La  $f$  è pure regolare (al finito), e  $|df/dz|$  non si annulla mai a norma della (7).

Considerando un piano complesso, rappresentativo dei valori di  $f$  (fig. 2), le proprietà delle funzioni  $\varphi$  e  $\psi$ , rilevate nel n. precedente, permettono di asserire quanto segue:

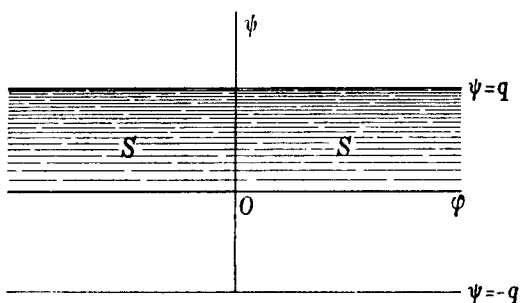


Fig. 2. - Piano  $f = \varphi + i\psi$ .

1) Mentre (nel piano del moto)  $z$  percorre l'asse reale da  $x = -\infty$  a  $x = +\infty$ , anche  $f$  percorre (nel suo piano) l'asse reale, sempre nel senso delle ascisse crescenti, da  $\varphi = -\infty$  a  $\varphi = +\infty$ .

2) Mentre  $z$  percorre la linea libera  $l$ , diciamo nel senso delle ascisse decrescenti (con che si viene a descrivere l'intero contorno del campo  $L$ , sempre in uno stesso verso),  $f$  percorre la parallela  $\psi = q$  all'asse reale, l'ascissa  $\varphi$  decrescendo costantemente da  $+\infty$  a  $-\infty$ .

3) Ad un generico punto  $z$  del campo  $L$  corrisponde nel piano  $f$  un punto della striscia  $S$ , compresa fra l'asse delle ascisse  $\psi = 0$  e la parallela  $\psi = q$ .

Con ciò siamo autorizzati a concludere che la funzione  $f(z)$  porge la rappresentazione conforme di  $L$  su  $S$ .

Infatti, sapendosi che  $f(z)$  varia in  $S$ , mentre  $z$  varia in  $L$ , e che  $|df/dz|$  non si annulla mai, basta che vi sia biunivocità di corrispondenza fra i contorni, perchè reciprocamente ad ogni punto  $f$  di  $S$  corrisponda uno ed un solo punto  $z$  di  $L$  (\*). Si può così riguardare  $z$  come funzione *uniforme* di  $f$  entro la striscia  $S$ .

Tale funzione è manifestamente reale sopra l'asse reale, regolare al finito, assume sulla  $\psi = q$  la successione di valori, che compete alla linea libera  $l$ , ecc..

(\*) Cfr. per es. OSGOOD, *Lehrbuch der Funktionentheorie*, Leipzig, Teubner, 1907, cap. VIII, § 5.

Naturalmente, anche la  $w = u - iv$ , funzione regolare di  $z$  in  $L$ , si può pensare funzione dell'argomento  $f$ , pel tramite di  $z$ : come tale, essa si comporta regolarmente al variare di  $f$  entro  $S$ , resta finita all' $\infty$ , e sempre diversa da zero, assume valori reali sull'asse reale (perchè  $v = 0$  sul fondo, cioè per  $\psi = 0$ ), ecc..

In virtù della (7), le due funzioni  $z(f)$ ,  $w(f)$  sono legate dalla relazione

$$(7') \quad \frac{dz}{df} = \frac{1}{w(f)}.$$

### 5. - Riflessione. Equazione funzionale caratteristica.

Le funzioni  $z(f)$ ,  $w(f)$ , definite in tal modo entro la striscia  $S$ , sono entrambe reali sull'asse reale  $\psi = 0$ . Ne consegue, per il noto principio della riflessione analitica di SCHWARZ <sup>(4)</sup>, che esse sono prolungabili analiticamente nella sottostante striscia  $\psi = 0$ ,  $\psi = -q$ , assumendo quivi valori coniugati a quelli, che loro spettano in  $S$ . Più precisamente, se in un punto generico  $\varphi + i\psi$  di  $S$  è

$$\begin{cases} z(\varphi + i\psi) = x + iy, \\ w(\varphi + i\psi) = u - iv, \end{cases}$$

nel punto coniugato  $\varphi - i\psi$  della striscia riflessa si avrà

$$\begin{cases} z(\varphi - i\psi) = x - iy, \\ w(\varphi - i\psi) = u + iv. \end{cases}$$

Riferiamo in particolare queste equazioni al valore  $\psi = q$  (cui corrisponde nel piano  $z$  la linea libera  $l$ ).

Avremo dalle due prime di ciascun gruppo, per sottrazione,

$$2y = -i\{z(\varphi + iq) - z(\varphi - iq)\};$$

e dalle altre, per moltiplicazione,

$$V^2 = w(\varphi + iq)w(\varphi - iq),$$

<sup>(4)</sup> Cfr. per es. G. DARBOUX, *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, Paris, Gauthier-Villars 1887, vol. I, pp. 174-175.

$y$  e  $V$  riferendosi, per un medesimo valore di  $\varphi$ , ad un medesimo punto di  $l$ .

Con ciò la condizione (3), caratteristica delle linee libere, si può presentare sotto la forma

$$(3') \quad w(\varphi + iq)w(\varphi - iq) - ig\{z(\varphi + iq) - z(\varphi - iq)\} = \text{cost.}$$

Qui interviene l'osservazione essenziale che si tratta di funzioni analitiche. La (3'), ricavata per  $\varphi$  reale, rimane necessariamente valida per qualunque valore dell'argomento, appartenente al campo di esistenza. Si può dunque scrivere il generico argomento  $f$  al posto di  $\varphi$ . Se poi si deriva rispetto ad  $f$ , si elimina la costante del secondo membro, e si ricava, tenendo conto della (7'),

$$(E) \quad \frac{d}{df}\{w(f + iq)w(f - iq)\} - ig\left\{\frac{1}{w(f + iq)} - \frac{1}{w(f - iq)}\right\} = 0,$$

equazione mista (cioè insieme differenziale e alle differenze finite) nella sola  $w(f)$ .

È facile rendersi conto che la (E) caratterizza sostanzialmente il problema meccanico, tutto essendo ricondotto alla determinazione di integrali  $w(f)$  di (E), reali sull'asse reale, regolari nella striscia  $\psi = \pm q$ , finiti all' $\infty$ , e tali che la parte reale  $u$  non scenda mai al disotto di una costante positiva (del resto comunque piccola).

Sia data infatti una tale  $w(f)$ , e si determini  $z(f)$  a norma della (7'), prendendo la costante di integrazione in modo che sia  $z = 0$  per  $f = 0$ . Questa funzione  $z(f)$  risulta così reale sull'asse reale.

Essendo, per la (7') stessa,

$$dx + i dy = \frac{d\varphi + i d\psi}{u - iv},$$

si ha

$$\begin{cases} dx = \frac{u d\varphi - v d\psi}{V^2}, \\ dy = \frac{v d\varphi + u d\psi}{V^2}. \end{cases}$$

Consideriamo la funzione  $y(\varphi, \psi)$ . Essa si annulla sull'asse reale  $\psi = 0$ , e, per un altro punto generico della striscia  $S$ , si può immaginare ottenuta integrando lungo una perpendicolare all'asse reale ( $d\varphi = 0$ ), a partire dalla sua intersezione coll'asse reale stesso.



Si ha così

$$y(\varphi, \psi) = \int_0^{\psi} \frac{u(\varphi, \psi)}{V^2} d\psi,$$

la quale mostra (in virtù dell'ipotesi concernente la  $u$ ) che l'ordinata  $y$  è ovunque positiva, e rimane finita anche se  $\varphi$  cresce indefinitamente.

D'altra parte, mentre  $f$  percorre una generica parallela all'asse delle ascisse,  $dx = (u/V^2) d\varphi$ ; quindi (sempre per l'ipotesi concernente  $u$ ) la  $x$  varia, lungo la corrispondente linea del piano  $z$ , nello stesso senso di  $\varphi$ , da  $-\infty$  a  $+\infty$ . Così in particolare a  $\psi = q$  corrisponderà nel piano  $z$  una certa linea  $l$ , la quale possiede l'andamento qualitativo, già intuitivamente rilevato nelle linee libere.

Alla striscia  $S$  corrisponde in definitiva nel piano  $z$  un campo  $L$ , compreso fra l'asse reale  $y = 0$  e la detta linea  $l$ . C'è corrispondenza *biunivoca* fra  $S$  ed  $L$ , e si può considerare la funzione inversa  $f(z)$ , e trarre per sostituzione una  $w(z)$  dall'originaria soluzione  $w(f)$  di (E).

Tale funzione  $w(z)$  definisce effettivamente un moto ondoso permanente, che si svolge in  $L$ .

Infatti la (7') si ricambia nella (7), e così si è sicuri che sono soddisfatte nel campo  $L$  le equazioni indefinite, e che  $\varphi$  e  $\psi$  (parte reale e coefficiente di  $i$  in  $f(z)$ ) costituiscono rispettivamente il potenziale di velocità e la funzione di corrente.

Rimangono pure soddisfatte, per costruzione, tutte le condizioni ai limiti.

Le (4) e (5), perchè l'asse reale  $y = 0$  e la linea  $l$  corrispondono ordinatamente a  $\psi = 0$  e a  $\psi = q$ . La (3), per l'ipotesi fondamentale che  $w(f)$  sia integrale della (E): basta riflettere che da (E) si ripassa a (3') integrando rispetto ad  $f$  e considerando in particolare valori reali dell'argomento. La (3') è poi equivalente alla (3). C. d. d.

Val la pena di rilevare che la equazione (E) si trasforma in se stessa, cambiando  $f$  in  $-f$ . Ne viene che, se  $w(f)$  è un integrale, lo è pure  $w(-f)$ .

## 6. - Onde oscillatorie.

Le onde di tipo permanente si chiamano *oscillatorie* quando, procedendo di un tratto costante  $\lambda$  (*lunghezza d'onda*) nel senso della propagazione, lo stato di moto della massa fluida si riproduce identicamente.

Ciò val quanto dire che  $u(x, y)$ ,  $v(x, y)$  sono funzioni periodiche di  $x$ , di periodo  $\lambda$ .

Indichiamo alcune conseguenze di questa ipotesi.  
Anzi tutto le differenze

$$\varphi(x + \lambda, y) - \varphi(x, y),$$

$$\psi(x + \lambda, y) - \psi(x, y),$$

sono due costanti (perchè si annullano le loro derivate, tanto rapporto ad  $x$ , quanto rapporto ad  $y$ ). Per valutarle, possiamo porre per es.  $y = 0$ . Siccome  $\psi = 0$  per  $y = 0$ , così si riconosce che  $\varphi$ , al pari di  $u, v$ , è funzione periodica di  $x$ .

Designando poi con  $\omega$  la differenza costante  $\varphi(x + \lambda, y) - \varphi(x, y)$ , si può scrivere, ponendo anche  $x$  eguale a zero,

$$\omega = \int_0^\lambda u(x, 0) dx,$$

donde apparisce che  $\omega$  è essenzialmente positiva.

Ne viene, pensando alla corrispondenza fra il piano  $z$  e il piano  $f$ , che ad una traslazione di ampiezza  $\lambda$  nel primo fa riscontro una traslazione di ampiezza  $\omega$  nel secondo, l'una e l'altra nel senso positivo dei rispettivi assi delle ascisse.

Una funzione di  $z$ , che rimanga invariata per una tale traslazione, che ammetta cioè il periodo reale  $\lambda$ , diventa così, quando la si esprime per  $f$ , funzione periodica di tale variabile col periodo reale  $\omega$ ; e reciprocamente.

L'ipotesi che si tratti di onde oscillatorie si traduce compendiosamente nella periodicità della funzione di variabile complessa  $w(z)$ . Si può sostituirvi, in base all'osservazione ora fatta, la periodicità di  $w(f)$ , e ritenere che: Condizione necessaria e sufficiente, affinchè le onde, definite da un integrale  $w(f)$  della (E), siano oscillatorie, è che la  $w(f)$  ammetta un periodo reale  $\omega$  (seguitando beninteso a possedere gli altri caratteri qualitativi, di cui al n. precedente).

La lunghezza d'onda  $\lambda$  (incremento costante, che subisce  $z(f)$ , quando  $f$  si incrementa di  $\omega$ ) si può rappresentare, a norma della (7'), con l'integrale di  $df/w$  da un  $f$  generico ad  $f + \omega$ , lungo un cammino pure generico. Scriveremo in particolare

$$(8) \quad \lambda = \int_0^\omega \frac{df}{w}.$$

Accanto alla espressione della lunghezza d'onda, giova fissare quella della profondità media  $h$ . Come definizione numerica di  $h$  si deve evidentemente assumere la media (per la lunghezza di un'onda) dei livelli (contati a partire dal fondo) delle superficie libere del liquido; cioè la media dei valori, assunti da  $y$  lungo la linea  $l$ , mentre  $x$  varia di  $\lambda$ , per es. da 0 a  $\lambda$ . Sarà dunque

$$h = \frac{1}{\lambda} \int_0^{\lambda} y dx,$$

$y$  ed  $x$  riferendosi alla linea  $l$ .

Sostituendo ad entrambe le loro espressioni per  $z(\varphi + iq)$ ,  $z(\varphi - iq)$ , tenendo presente la (7') e la natura della corrispondenza fra il piano  $z$  e il piano  $f$ , si passa subito alla formula

$$(9) \quad h = \frac{1}{4i\lambda} \int_0^{\omega} \{z(\varphi + iq) - z(\varphi - iq)\} \left\{ \frac{1}{w(\varphi + iq)} + \frac{1}{w(\varphi - iq)} \right\} d\varphi.$$

Fra i caratteri del moto *relativo* non può naturalmente figurare la velocità di propagazione  $c$ . È però facile definirla in termini delle due costanti  $q$  ed  $h$ . Basta ricordare (n. 1) che è inerente alla nozione di moto ondosio l'annullarsi della portata complessiva. D'altra parte (n. 3, nota) la portata relativa è  $q$ ; attribuendola esclusivamente alla traslazione, e badando al significato di  $h$ , si ha senz'altro

$$(9') \quad q = ch.$$

Può essere ancora opportuno assumere come variabile indipendente

$$(10) \quad \xi = e^{2\pi i f / \omega},$$

al posto di  $f$ .

Come è ben noto, ogni funzione  $w(f)$ , regolare nella striscia  $S$  ( $\varphi = \pm q$ ) e avente per periodo  $\omega$ , diventa, per la (10), funzione dell'argomento  $\xi$ , uniforme e regolare nella corona circolare  $C$ , che viene a corrispondere nel piano  $\xi$  alla striscia  $S$  del piano  $f$ .

Posto

$$(11) \quad \alpha = e^{-2\pi q / \omega}$$

(con che  $\alpha$  risulta una frazione propria), la corona  $C$  si trova limitata dalle due circonferenze  $|\xi| = \alpha$  internamente e  $|\xi| = 1/\alpha$  esternamente.

La equazione (E), per le (10) e (11), diviene

$$(E') \quad \xi \frac{d}{d\xi} \left\{ w(\alpha\xi) w\left(\frac{\xi}{\alpha}\right) \right\} - \frac{g\omega}{2\pi} \left\{ \frac{1}{w(\alpha\xi)} - \frac{1}{w\left(\frac{\xi}{\alpha}\right)} \right\} = 0,$$

e le condizioni qualitative, imposte alla  $w$  saranno le seguenti: essere regolare in  $C$ , reale sulla circonferenza  $|\xi| = 1$ , e tale che la sua parte reale  $u$  resti in tutta la corona al disopra di una costante positiva.

La (E') ammette una trasformazione in se stessa, che proviene, come è naturale, pel tramite della (10), da quella già avvertita per la (E). Si tratta — come del resto appare direttamente dalla (E') — dello scambio di  $\xi$  in  $1/\xi$ . Perciò ogni soluzione  $w(\xi)$  della (E') dà luogo ad una seconda soluzione  $w(1/\xi)$ .

### 7. - Soluzioni approssimate. Onde oscillatorie semplici. Equazione di Airy.

Supponiamo che la perturbazione ondosa sia molto piccola di fronte alla velocità di propagazione  $c$ , che è il caso interessante per la pratica. Allora, ponendo

$$(12) \quad w = c(1 + \varepsilon)$$

(talchè  $|w - c| = c|\varepsilon|$  rappresenta, in valore assoluto, la velocità assoluta della perturbazione ondosa), potremo ritenere trascurabile  $|\varepsilon|^2 = |w - c|^2/c^2$ , e quindi ogni termine d'ordine superiore al primo, rispetto ad  $\varepsilon$ . Con ciò, portando nella (E) il valore (12) di  $w$ , si ha la equazione lineare in  $\varepsilon$ , caratteristica delle soluzioni approssimate:

$$(13) \quad \frac{d}{d\xi} \{ \varepsilon(f + iq) + \varepsilon(f - iq) \} + \frac{ig}{c^3} \{ \varepsilon(f + iq) - \varepsilon(f - iq) \} = 0.$$

Riferiamoci al caso delle onde oscillatorie e consideriamo in conformità  $\varepsilon$  come funzione di  $\xi$ .

La (13) assume l'aspetto

$$(13') \quad \xi \frac{d}{d\xi} \left\{ \varepsilon(\alpha\xi) + \varepsilon\left(\frac{\xi}{\alpha}\right) \right\} + \frac{g\omega}{2\pi c^3} \left\{ \varepsilon(\alpha\xi) - \varepsilon\left(\frac{\xi}{\alpha}\right) \right\} = 0.$$

Questa equazione conserva naturalmente la proprietà, spettante ad (E'), di trasformarsi in se stessa, quando si cambia  $\xi$  in  $1/\xi$ . Perciò, assieme con una generica soluzione  $\varepsilon(\xi)$ , essa ammette la  $\varepsilon(1/\xi)$ , e anche la  $\varepsilon(\xi) + \varepsilon(1/\xi)$ , data la linearità.

L'osservazione ha importanza perchè permette di soddisfare con tutta facilità alla condizione, imposta a  $w$ , e di conseguenza ad  $\varepsilon$ , di essere reale per  $|\xi| = 1$ . Basta infatti considerare una soluzione  $\varepsilon(\xi)$  a coefficienti reali, per essere sicuri che  $\varepsilon(1/\xi)$  assume il valore coniugato, quando  $|\xi| = 1$ ; con ciò  $\varepsilon(\xi) + \varepsilon(1/\xi)$  risulta appunto reale.

D'altra parte, attesa la piccolezza di  $\varepsilon$ , rimane in ogni caso poco diversa da  $c$  la parte reale di  $w$ ; e così anche la condizione concernente  $u$  si trova senz'altro verificata.

Alla (13') si soddisfa nel modo più semplice, prendendo per  $\varepsilon$  una funzione lineare di  $\xi$ , diciamo  $\gamma\xi/2$ , con  $\gamma$  costante reale abbastanza piccola, e ritenendo  $c$ ,  $\alpha$  ed  $\omega$  legate dalla equazione

$$(14) \quad \alpha + \frac{1}{\alpha} + \frac{g\omega}{2\pi c^3} \left\{ \alpha - \frac{1}{\alpha} \right\} = 0.$$

Dopo ciò, possiamo star certi che introducendo nella (12)  $(\gamma/2)(\xi + 1/\xi)$  al posto di  $\varepsilon$ , si ha la rappresentazione di un effettivo moto ondosso oscillatorio.

L'espressione di  $w$  per  $f$  sarà, a norma della (10),

$$(15) \quad w = c \left\{ 1 + \gamma \cos \frac{2\pi f}{\omega} \right\}.$$

L'ipotesi che sia trascurabile  $\varepsilon^2$  implica, per le soluzioni trovate che lo sia  $\gamma^2$ . Con ciò si ha

$$\frac{1}{w} = \frac{1}{c} \left\{ 1 - \gamma \cos \frac{2\pi f}{\omega} \right\},$$

e, per la (7'), avvertendo che si deve prendere  $z = 0$  per  $f = 0$ ,

$$(16) \quad z = \frac{1}{c} \left\{ f - \frac{\gamma\omega}{2\pi} \operatorname{sen} \frac{2\pi f}{\omega} \right\}.$$

Segue di qua che  $f$  differisce da  $cz$  per un termine di primo ordine in  $\gamma$ . Perciò, trascurando sempre  $\gamma^2$ , la (15) può essere scritta

$$(15') \quad w = c \left\{ 1 + \gamma \cos \frac{2\pi c}{\omega} z \right\}.$$

Dalla (8), o più direttamente dalla (15'), apparisce che, fra la costante  $\omega$  e la lunghezza d'onda  $\lambda$ , passa la relazione semplicissima

$$(17) \quad \lambda = \frac{\omega}{c}.$$

L'equazione parametrica della linea  $l$  si ha manifestamente dalla (16), ponendo  $f = \varphi + iq$  e separando il reale dall'immaginario. Coll'approssimazione convenuta, si può sostituire, nella espressione di  $y$ ,  $cx$  al posto di  $\varphi$  e si ottiene

$$y = \frac{q}{c} - \frac{1}{2ic} \frac{\gamma\omega}{2\pi} \left\{ \text{sen} \frac{2\pi}{\omega} (cx + iq) - \text{sen} \frac{2\pi}{\omega} (cx - iq) \right\}.$$

Il valore medio di  $y$  al variare di  $x$ , per un periodo, è manifestamente  $q/c$ , talchè

$$(18) \quad h = \frac{q}{c},$$

conformemente alla osservazione generale del n. precedente [cfr. la formula (9')].

Mediante le (17) e (18), le due costanti  $\omega$  e  $q$  rimangono espresse per elementi direttamente accessibili all'osservazione (la velocità  $c$ , la lunghezza d'onda  $\lambda$  e la profondità media  $h$  del canale). Sostituendo nella precedente espressione dell'ordinata della linea libera, si ha la nota forma (sinusoidale)

$$y = h - \frac{\gamma\lambda}{2\pi} \frac{e^{2\pi h/\lambda} - e^{-2\pi h/\lambda}}{2} \cos \frac{2\pi x}{\lambda}.$$

Sostituendo invece nella equazione fondamentale (14) (fra  $c$ ,  $\omega$  ed  $\alpha =$

$= e^{-2\pi g/\omega}$ ) si ritrova la classica relazione di AIRY (\*)

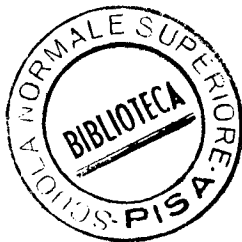
$$c^2 = \frac{g\lambda e^{2\pi h/\lambda} - e^{-2\pi h/\lambda}}{2\pi e^{2\pi h/\lambda} + e^{-2\pi h/\lambda}},$$

che definisce la velocità di propagazione  $c$ , in funzione della lunghezza d'onda  $\lambda$  e della profondità del canale  $h$ .

8. - Queste ed altre soluzioni approssimate sono state oggetto di numerose ricerche sia in ragione dell'interesse pratico, sia perchè la soluzione rigorosa del problema sembrava poco accessibile: almeno, prendendo direttamente le mosse delle equazioni idrodinamiche e cercando di applicare i metodi generali di integrazione. Ridotta come è ora (\*) la questione allo studio dell'equazione (E) [mista e non lineare, ma relativa ad un'unica funzione olomorfa  $w(f)$ ], parmi fondata la speranza che le risorse dell'analisi moderna non si mostreranno inefficaci.

(\*) Cfr. per es. LAMB, loco cit., art. 228; oppure APPELL, *Traité de Mécanique rationnelle*, Paris, Gauthier-Villars, 1903, t. III, pag. 468.

(\*) Va notato che il sig. P. RUDZKI (« Math. Ann. », B. L, 1898, pp. 269-281) era già riuscito con un ingegnoso artificio a liberarsi delle condizioni ai limiti, sfruttando la teoria delle funzioni. Tuttavia la effettiva determinazione della sua funzione ausiliaria  $\Theta$  implica ancora una discussione di tipo incognito. La (E) sintetizza invece nitidamente tutta la difficoltà.







# INDICE



|           |   |        |
|-----------|---|--------|
| I.        | Sopra alcuni criteri di instabilità. « Ann. di Mat. », s. 3 <sup>a</sup> , t. V (1901), pp. 221-308. . . . .  | pag. 1 |
| II.       | Sulla determinazione di soluzioni particolari di un sistema canonico quando se ne conosce qualche integrale o relazione invariante:   |        |
|           | NOTA I. « Rend. Acc. Lincei », s. 5 <sup>a</sup> , vol. X (1 <sup>o</sup> sem. 1901), pp. 3-9 . . . . .   | » 87   |
|           | NOTA II. Ibidem, pp. 35-41 . . . . .  | » 94   |
| III.      | Sui moti stazionari dei sistemi olonomi. « Rend. Acc. Lincei », s. 5 <sup>a</sup> , vol. X (1 <sup>o</sup> sem. 1901), pp. 137-143 . . . . .  | » 101  |
| IV.       | Sui moti stazionari di un corpo rigido nel caso della Kowalevski:   |        |
|           | NOTA I. « Rend. Acc. Lincei », s. 5 <sup>a</sup> , vol. X (1 <sup>o</sup> sem. 1901), pp. 338-346 . . . . .   | » 107  |
|           | NOTA II. Ibidem, pp. 429-434 . . . . .  | » 117  |
|           | NOTA III. Ibidem, pp. 461-466. . . . .  | » 123  |
| V.        | Sulla resistenza dei mezzi fluidi. « Rend. Acc. Lincei », s. 5 <sup>a</sup> , vol. X (2 <sup>o</sup> sem. 1901), pp. 3-9 . . . . .  | » 129  |
| VI.       | Sulla forma dello sviluppo della funzione perturbatrice. « Atti Ist. Veneto di Sc., Lett. ed Arti », t. LX (1901), pp. 653-661 . . . . .  | » 137  |
| VII.      | Sul massimo cimento dinamico dei sistemi elastici. « Nuovo Cimento », s. 5 <sup>a</sup> , vol. II (1901), pp. 188-196 . . . . .   | » 145  |
| VIII.     | Sur le champ électromagnétique engendré par la translation uniforme d'une charge électrique parallèlement à un plan conducteur indéfini. « Annales de la Faculté des Sc. de Toulouse », s. 2 <sup>e</sup> , t. IV (1902), pp. 5-44. . . . . | » 153  |
| VIII bis. | Sul campo elettromagnetico generato dalla traslazione uniforme di una carica elettrica parallelamente ad un piano conduttore indefinito. « Nuovo Cimento », s. 5 <sup>a</sup> , vol. VI (1903), pp. 442-455 . . . . .                       | » 199  |

|        |   |          |
|--------|---|----------|
| IX.    | Influenza di uno schermo conduttore sul campo elettromagnetico di una corrente alternata parallela allo schermo:<br>NOTA I. « Rend. Acc. Lincei », s. 5 <sup>a</sup> , vol. XI (1 <sup>o</sup> sem. 1902),<br>pp. 163-170 . . . . . | pag. 217 |
|        | NOTA II. Ibidem, pp. 191-198 . . . . .  | » 226    |
|        | NOTA III. Ibidem, pp. 228-237. . . . .  | » 235    |
| X.     | La teoria elettrodinamica di HERTZ di fronte ai fenomeni di induzione. « Rend. Acc. Lincei », s. 5 <sup>a</sup> , vol. XI (2 <sup>o</sup> sem. 1902), pp. 75-81 . . . . .   | » 245    |
| XI.    | Sulla cinetostatica. « Atti Acc. Padova », vol. XVIII, disp. III (1902), pp. 1-8. . . . .   | » 253    |
| XII.   | Sur les surfaces ( <i>S</i> ) de M. ZEREMBA. « Bull. de l'Acad. des Sc. de Cracovie », Cl. des Sc. math. et nat. Séance du 4 mai 1902, pp. 263-270. . . . .   | » 259    |
| XIII.  | Sur les fonctions de genre infini. « Bull. des Sc. math. », s. 2, t. XXV (1902), pp. 333-335 . . . . .  | » 267    |
| XIV.   | Sur les trajectoires singulières du problème restreint des trois corps. « Comptes rendus de l'Acad. des Sc. de Paris », t. CXXXV (1903), pp. 82-84 . . . . .  | » 271    |
| XV.    | Condition du choc dans le problème restreint des trois corps. « Comptes rendus de l'Acad. des Sc. de Paris », t. CXXXV (1903), pp. 221-223 . . . . .  | » 275    |
| XVI.   | Traiettorie singolari ed urti nel problema ristretto dei tre corpi. « Ann. di Mat. », s. 3 <sup>a</sup> , t. IX (1903), pp. 1-32 . . . . .  | » 279    |
| XVII.  | Sur la singularité dont sont affectées, pour une vitesse nulle, les équations du mouvement d'un point matériel frottant sur une surface. « Archiv der Math. und Physik », III R., V Bd. (1903), pp. 28-37. . . . .                  | » 309    |
| XVIII. | Sopra l'equazione di KEPLER. « Rend. Acc. Lincei », s. 5 <sup>a</sup> , vol. XIII (1 <sup>o</sup> sem. 1904), pp. 260-268 . . . . .   | » 321    |
| XIX.   | Sopra un problema di elettrostatica che interessa la costruzione dei cavi. « Rend. Acc. Lincei », s. 5 <sup>a</sup> , vol. XIII (1 <sup>o</sup> sem. 1904), pp. 375-382 . . . . .   | » 331    |
| XX.    | Sopra un problema di elettrostatica che si è presentato nella costruzione dei cavi. « Rend. Circolo Mat. di Palermo », t. XX (1905), pp. 173-228. . . . .   | » 339    |
| XXI.   | Sulla integrazione della equazione di HAMILTON-JACOBI per separazione di variabili. « Math. Ann. », Bd. LIX (1904), pp. 383-397 . . . . .   | » 395    |
| XXII.  | Sur la résolution qualitative du problème restreint des trois corps. « Verhandl. des III internat. Math.-Kongresses », Heidelberg, 1904, pp. 402-408 . . . . .  | » 411    |
| XXIII. | Sur la résolution qualitative du problème restreint des trois corps. « Acta Math. », t. 30 (1906), pp. 305-327 . . . . .  | » 419    |

|         |   |          |
|---------|---|----------|
| XXIV.   | Sulla ricerca di soluzioni particolari dei sistemi differenziali. « Rend. Acc. Lincei », s. 5 <sup>a</sup> , vol. XIV (1 <sup>o</sup> sem. 1905), pp. 203-209 . . . . .                 | pag. 441 |
| XXV.    | Sulle funzioni di due o più variabili complesse. « Rend. Acc. Lincei », s. 5 <sup>a</sup> , vol. XIV (2 <sup>o</sup> sem. 1905), pp. 492-499 . . . »                                    | 449      |
| XXVI.   | Sulla contrazione delle vene liquide. « Atti Ist. Veneto di Ist. Veneto di Sc., Lett. ed Arti », t. LXIV (1904-1905), Parte 2 <sup>a</sup> , pp. 1465-72 . . . . . »                    | 459      |
| XXVII.  | Sur la recherche des solutions particulières des systèmes différentiels et sur les mouvements stationnaires. « Prac mat. fizycznych », t. XVII (1906), pp. 1-40 . . . . . »             | 465      |
| XXVIII. | The mixed transformation of LAGRANGE'S equations. « Nature », vol. 74 (1906), pp. 488-489 . . . . . »   | 503      |
| XXIX.   | Sulla penetrazione dei proiettili nei mezzi solidi. « Atti Ist. Veneto di Sc., Lett. ed Arti », t. LXV (1905-1906), pp. 1149-1158 . . . . . »   | 505      |
| XXX.    | Über eine technische Aufgabe, die in Beziehung zur konformen Abbildung steht. « Verhandl. des Ges. deutscher Naturforscher », 77 Versamn. zu Meran, Leipzig 1906, pp. 20-21 . . . . . » | 515      |
| XXXI.   | Scie e leggi di resistenza. « Rend. Circolo mat. di Palermo », t. XXIII (1907), pp. 1-37 . . . . . »  | 519      |
| XXXII.  | Le idee di ENRIQUES sui principi della Meccanica. « Riv. di Filosofia e Sc. affini », anno IX (1907), vol. I, n. 5-6 pp. 1-10 »   | 563      |
| XXXIII. | Sullo sviluppo delle funzioni implicite. « Rend. Acc. Lincei », s. 5 <sup>a</sup> , vol. XVI (2 <sup>o</sup> sem. 1907), pp. 2-12 . . . . . »   | 573      |
| XXXIV.  | Sur le mouvement de l'électricité sans liaisons ni forces extérieures. « Comptes rendus de l'Acad. des Sc. de Paris », t. CXLV (1907), pp. 417-420 . . . . . »                          | 583      |
| XXXV.   | Sulla massa elettromagnetica. « Nuovo Cimento », s. 5 <sup>a</sup> , vol. XIV (1907), pp. 387-412 . . . . . »   | 587      |
| XXXVI.  | Sulle onde progressive di tipo permanente. « Rend. Acc. Lincei », s. 5 <sup>a</sup> , vol. XVI (2 <sup>o</sup> sem. 1907), pp. 777-790 . . . »  | 615      |



62453