TULLIO LEVI-CIVITA

OPERE MATEMATICHE

Memorie e Note

PUBBLICATE
A CURA DELL'ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Volume primo
1893 - 1900

NICOLA ZANICHELLI EDITORE
BOLOGNA 1954

OPERE MATEMATICHE
DI TULLIO LEVI-CIVITA

1938

Tullio Levi - Civita

TULLIO LEVI-CIVITA

OPERE MATEMATICHE

Memorie e Note

PUBBLICATE
A CURA DELL'ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Volume primo
1893 - 1900

LABORAVI FIDENTER

NICOLA ZANICHELLI EDITORE
BOLOGNA 1954

№ 211

Bologna - La Monografica - III-1954

PREFAZIONE

Negli anni immediatamente successivi alla ricostituzione dell'Accademia Nazionale dei Lincei il Consiglio accademico approvò unanime la proposta formulata dal Presidente Guido Castelnuovo di pubblicare le Opere matematiche di TULLIO LEVI-CIVITA, *e l'attuazione di questa iniziativa fu affidata ad un Comitato costituito dallo stesso Presidente Guido Castelnuovo, dai soci Ugo Amaldi, Giulio Krall, Enrico Persico, Antonio Signorini, Angelo Tonolo e dal prof. Giovanni Lampariello.*

Nel settembre 1950 il prof. Signorini, invitato a tenere alcune conferenze alla « J. Hopkins University », ebbe occasione di parlare di tale iniziativa negli ambienti scientifici di Baltimora, e immediatamente il « Department of Mathematics » di quella Università, su proposta del prof. J. Carstoiu, deliberò di aderirvi con un suo contributo. Il Comitato, anche a nome dell'Accademia, rinnova qui pubblicamente alla « J. Hopkins University » l'espressione della sua riconoscenza.

Delle opere del LEVI-CIVITA *fu deliberato di pubblicare le sole Memorie e Note, escludendo i Trattati; e, dopo lunghe e ponderate discussioni, il Comitato unanime ritenne che, a meglio mettere in luce la naturale evoluzione del pensiero matematico del grande scienziato, convenisse seguire nella pubblicazione l'ordine cronologico. Si è posta la più attenta cura nel riprodurre con scrupolosa fedeltà i singoli lavori in ogni particolare della loro forma originale e, come unica deroga a questo criterio, si è tenuto conto di alcune postille autografe dell'Autore su esemplari da Lui stesso posseduti o donati ad amici e discepoli* (*).

(*) Queste postille sono messe in rilievo da note a piè di pagina, richiamate nel testo con asterischi e contrassegnate con la sigla [N.d.R.] ≡ [Nota dei Revisori].

All'inizio del presente volume, che comprende le Memorie e Note pubblicate dal 1893 al 1900, si ripubblica la commemorazione del LEVI-CIVITA, *letta dal socio U. Amaldi, per l'inaugurazione della «Sala* LEVI-CIVITA*», che, nella sede accademica, custodisce la Sua biblioteca personale, donata all'Accademia dall'eletta Consorte.*

Il Comitato, nel licenziare questo primo volume, non può non rievocare la memoria di GUIDO CASTELNUOVO, *che di ogni cura e di ogni fatica dedicata a questa pubblicazione fu, fino all'ultimo giorno di vita, il fervido e illuminato animatore.*

TULLIO LEVI-CIVITA (*)

TULLIO LEVI-CIVITA si è spento in Roma il 29 dicembre 1941. Era nato a Padova il 29 marzo 1873.

Il padre, che, in età tenerissima, dalla nativa Rovigo era stato recato a Padova, quando ancora vi era vivo e cocente il ricordo delle repressioni austriache dei moti studenteschi del 1848, si era mostrato, fin dalla prima adolescenza, così insofferente della dominazione straniera, che la famiglia, subito dopo il 1859, lo aveva mandato a continuare gli studi in Piemonte. Appena diciassettenne, era stato con Garibaldi ad Aspromonte; e, laureatosi poi giovanissimo in Giurisprudenza a Pavia, aveva partecipato fra i Volontari garibaldini alla campagna del 1866, guadagnandosi a Bezzecca una medaglia al valore. Tornato a Padova dopo la liberazione del Veneto, vi era salito rapidamente in rinomanza di insigne giureconsulto e di avvocato principe e, circondato dalla generale estimazione, aveva avuto larga parte nelle amministrazioni cittadine. Sindaco di Padova dal 1904 al 1910, fu nominato nel 1908 Senatore del Regno.

Da lui TULLIO LEVI-CIVITA trasse la fermezza del carattere e, con la forza dell'ingegno, talune note salienti della sua mentalità speculativa, mentre dalla madre, mite e dolce figura di donna gentile, che sempre egli circondò della più devota e delicata tenerezza, ricevette, in un ambiente familiare affettuoso e signorile, le assidue cure di un'elevata educazione del cuore.

Compì in casa i primi studi, fino ai rudimenti della cultura umanistica, che gli furono impartiti da un dotto sacerdote cattolico — il professor Padrin — e a dieci anni fu iscritto alla seconda classe

---

(*) Commemorazione letta dal Socio U. AMALDI davanti alla classe di Sc. fis., mat. e nat., dell'Acc. Naz. dei Lincei nell'adunanza del 16 novembre 1946. «Rend. Acc. Lincei», s. 8ª, vol. 1 (1946); pp. 1130-1146.

del pubblico Ginnasio « Tito Livio », dove i condiscepoli, tutti maggiori di età, furono ben presto affascinati da quel minuscolo compagno, vivace e socievole, che con la stessa spontanea semplicità, con cui partecipava alla loro chiassosa spensieratezza, li superava poi tutti nella scuola per la prontezza del capire e la facilità dell'apprendere. Questa superiorità si palesò addirittura eccezionale, quando il LEVI-CIVITA, quattordicenne, passò al Liceo; e, dall'inizio di quel triennio, si venne manifestando in lui più decisamente quell'inclinazione agli studi matematici, che prima era rimasta in qualche modo velata dall'eclettico fervore d'interessi, che, anche nel campo delle lingue classiche e, più particolarmente, della storia, lo portava ad allargare e approfondire la sua cultura ben oltre i limiti dei programmi scolastici.

In quella scoperta di se stesso egli era assecondato, con amorevole comprensione, dal suo professore di matematica del Liceo — Paolo Gazzaniga, insegnante efficacissimo e valente cultore della Teoria dei numeri — e da uno zio materno, ingegnere a riposo, che amava rinfrescare le sue conoscenze matematiche, rileggendo con quel nipote d'eccezione i vecchi suoi testi universitari. Erano i venerandi trattati del Todhunter e del Salmon, che non solo fornivano al giovane LEVI-CIVITA un largo campo di esercitazioni svariate, ma, lasciando spesso insoddisfatto il finissimo senso critico connaturato alla sua mentalità, lo inducevano alle prime prove di riflessione autonoma e di ricerca. Il Gazzaniga, anche negli ultimi anni della sua vita, rievocando la sorprendente precocità di quel suo discepolo, amava ricordarne un tentativo di dimostrazione del postulato delle parallele, che correva, elegante e ineccepibile, sino ad una inavvertita ammissione finale, in cui si annidava la petizione di principio. A quindici anni, nella delusione di quell'insuccesso, il LEVI-CIVITA non poteva certo immaginare che un giorno avrebbe legato per sempre il suo nome ad una estensione, altrettanto geniale quanto feconda, di quel concetto stesso di parallelismo.

Alla fine del Liceo ebbe chiara e sicura la certezza della sua vocazione. Il padre aveva a lungo accarezzato il sogno di veder continuata da un tale erede l'opera sua; ma, mente illuminata e cuore consapevole dei doveri paterni, non si oppose alla libera scelta del figlio, e questi, nel 1890, s'iscrisse all'Università di Padova per la Laurea in Matematica.

In quell'antico Studio, custode nei secoli delle più pure e gloriose tradizioni del pensiero scientifico italiano, i matematici di quel tempo erano G. Veronese, G. Ricci-Curbastro, F. d'Arcais e, trasferitovi qualche anno innanzi da Pisa per la Meccanica superiore, E. Padova. Il Veronese, nella piena maturità della sua produzione scientifica, dava allora gli ultimi tocchi ai *Fondamenti di Geometria a più dimensioni* e il Ricci era ormai entrato nella fase conclusiva della costruzione del *Calcolo differenziale assoluto*, mentre il d'Arcais, già discepolo del Dini, recava nell'insegnamento un suo personale equilibrio di valutazione delle esigenze critiche rispetto alle finalità costruttive dell'Analisi — in senso, quasi si direbbe, euleriano — e il Padova, nei suoi corsi di Meccanica, s'ispirava direttamente agli indirizzi e all'opera del Betti e del Beltrami.

Ma dai corsi propedeutici, il LEVI-CIVITA, che già se li era da sè anticipati nel triennio liceale, ben poco aveva da apprendere, se non forse una visione sintetica e sistematica di nozioni ormai familiari, talchè, fin dai primi contatti coi nuovi Maestri, egli fu tratto a seguirne l'opera viva d'indagine personale e quasi a dividerne lo sforzo e la passione. Nel quadro vasto e, sotto qualche aspetto, farraginoso dei *Fondamenti* del Veronese il LEVI-CIVITA, con singolare intuito, fissò l'attenzione su uno dei risultati più originali e più significativi, cioè sulla dimostrazione della possibilità di Geometrie non-archimedee; e, quasi presago delle obiezioni mal fondate, con cui più tardi sarebbe stata contesa al Veronese la legittima priorità di quel ritrovato, si accinse a ricercarne una giustificazione diretta per via nettamente analitica. Inaugurava, così, fra il '91 e il '92, la sua produzione scientifica con una memoria *Sugli infiniti e infinitesimi attuali quali elementi analitici*, che ancora oggi appare, piuttosto che il primo saggio di un diciottenne, l'opera matura di un ricercatore provetto. Segue immediatamente, in tutt'altro indirizzo, la Dissertazione di Laurea *Sugli invarianti assoluti*, nella quale il LEVI-CIVITA, ricollegando per primo le vedute del Ricci alle teorie e ai metodi di Sophus Lie, di cui fin d'allora palesa un pieno e sicuro possesso, studia la forma e le proprietà dei sistemi differenziali, atti a definire, per un qualsiasi sistema di funzioni di quante si vogliono variabili, soggette alla più generale legge mista di covarianza e contravarianza, gl'invarianti differenziali e integrali, non già, come nel Calcolo differenziale assoluto, rispetto al gruppo di tutte le possibili trasformazioni, bensì di fronte a un qualsiasi altro gruppo continuo (finito o infinito).

E la Laurea fu, più che per lui, una festosa solennità per i suoi Maestri, ormai ben consapevoli delle ascese, cui, nel campo matematico, era predestinato quel discepolo.

Sul cammino di ogni giovane scienziato, la Laurea, come passaggio dalla vigilata attività scolastica alla libera estrinsecazione delle iniziative personali, segna per lo più l'inizio di un periodo tormentoso di ricerca dell'orientamento; e, in qualche modo, anche il LEVI-CIVITA dovette risentire quell'intimo travaglio, ma non per questo rallentò la sua attività.

Conclusa una ricerca di *Teoria dei numeri*, con la quale perveniva ad una espressione, sotto forma di residuo, del numero dei numeri primi compresi in un dato intervallo, si trasferì per alcuni mesi a Bologna, dove allora insegnavano l'Enriques, il Pincherle, l'Arzelà, il Donati; e in quell'ambiente di raccolto fervore speculativo trovò quotidiane occasioni a ricambi d'idee e nuovi incentivi all'innata sua versatilità. Attratto dalle ricerche del Pincherle sulle operazioni funzionali lineari, rappresentabili per mezzo d'integrali curvilinei sul piano complesso, e, ravvisato in quella classe d'operazioni un nuovo campo per l'applicazione di vedute gruppali, ne determinò, sotto restrizioni imposte dalla natura del problema, tutti i gruppi continui infiniti; e dai risultati così conseguiti dedusse da un lato la caratterizzazione delle equazioni differenziali ordinarie riducibili con un cambiamento di funzione incognita alla forma lineare e dall'altro un principio generale e uniforme per l'inversione degli integrali definiti.

Si può dire che con queste ricerche il LEVI-CIVITA abbia chiuso la fase iniziale della sua attività, chè già l'anno successivo, a Pavia, dov'era stato nominato Professore interno alla Scuola Normale Superiore annessa a quella Facoltà di Scienze, si affermava poderosamente, nel campo della Meccanica analitica, con quella ricerca sulle trasformazioni delle equazioni dinamiche, che per l'importanza dei risultati e l'originalità dei procedimenti, non meno che per la suscettibilità di sviluppi ulteriori, è rimasta classica. Del problema generale della mutua trasformabilità di due sistemi di equazioni dinamiche, posto qualche anno innanzi dall'Appell, s'erano già occupati, senza giungere a conclusioni esaurienti, vari matematici, in particolare il Painlevé, che lo aveva precisato, rilevandone la riducibilità alla determinazione di tutti i *corrispondenti* di un dato sistema dinamico, cioè di tutti quei sistemi che hanno dato comuni col le traiettorie; e il LEVI-CIVITA, ripresa *ab initio* la questione e analizzatane con lucidezza ed eleganza mirabili l'impostazione generale, ne affrontò la discussione nell'ipotesi dell'assenza di forze applicate. Era così condotto, sotto l'aspetto geometrico, al problema generale delle mutue rappresentazioni geodetiche delle varietà riemanniane a un qualsiasi numero di dimensioni, cioè ad un problema, cui, come oggi appar ben chiaro, si presentavano direttamente e specificamente adeguati i metodi del Calcolo differenziale assoluto; e, appunto con l'uso sagacissimo di tali metodi, egli pervenne alla conclusione che per la più generale coppia di sistemi dinamici corrispondenti, dotati di uno stesso numero n di gradi di libertà e non sollecitati da forze, sono possibili precisamente n tipi, fra loro distinti, caratterizzati ciascuno dal numero degli integrali primi quadratici e, conseguentemente, da altrettante forme canoniche, da lui esplicitamente assegnate, per le rispettive energie cinetiche. Così, ad opera del LEVI-CIVITA, il Calcolo differenziale assoluto, che sino allora il Ricci, fors'anche contrastato dall'incomprensione dei matematici di quel tempo, aveva cimentato quasi esclusivamente entro i confini tradizionali della Geometria differenziale metrica, era per la prima volta portato a mostrare la sua potenza nella trattazione di un problema nuovo ed elevato, di fronte al quale sarebbero riusciti vani mezzi d'indagine meno penetranti.

Ed un'altra non meno suggestiva illustrazione della fecondità di quei procedimenti il LEVI-CIVITA forniva poco più tardi con la determinazione dei tipi di potenziali dello spazio, che si possono far dipendere da due sole coordinate. Era questo un problema, che già si era implicitamente presentato nella *Commentatio mathematica* del Riemann e che, più recentemente, era stato segnalato, per il suo interesse, dal Volterra, che, mirando a raccogliere in una teoria più comprensiva ed elevata gli sviluppi di C. Neumann sul potenziale logaritmico e le ricerche del Beltrami sui potenziali simmetrici, aveva iniziato lo studio generale di codesti potenziali binari. La diretta traduzione analitica di quel problema conduceva a sistemi differenziali di una complicazione addirittura inestricabile; e il LEVI-CIVITA, con una di quelle geniali vedute semplificatrici, che gli furono caratteristiche, notò che necessariamente risulta binario ogni potenziale, che ammetta una trasformazione infinitesima in se stesso; onde, classificando i sottogruppi a un solo parametro del gruppo ∞^7 delle similitudini, che è il più ampio gruppo continuo puntuale ammesso dall'equazione del Laplace, pervenne a cinque tipi di potenziali binari, di cui uno completamente nuovo (i potenziali spirali). Ma con ciò le difficoltà intrinseche del problema non erano vinte, bensì, in qualche modo, spostate, giacchè restava da assodare se altri tipi sfuggissero alla enumerazione così ottenuta; ed è qui che il LEVI-CIVITA faceva intervenire, con piena aderenza concettuale al problema e con insuperabile eleganza, i metodi del Calcolo differenziale assoluto. Associata ad ogni potenziale binario la rispettiva congruenza di curve equipotenziali e approfondita adeguatamente la geometria intrinseca delle congruenze di curve, ne traeva la conclusione che i soli potenziali binari non trasformati in sè da un gruppo ∞^1 di similitudini sono quelli, che risultano caratterizzati come aventi a congruenza equipotenziale una qualsiasi congruenza rettilinea del Ribaucour e che, secondo un'osservazione del Klein, coincidono coi potenziali a parametro differenziale primo identicamente nullo, già considerati dal Jacobi.

Nel frattempo, spentosi prematuramente Ernesto Padova, il LEVI-CIVITA, già nel novembre del 1896, era stato chiamato a succedergli per incarico; e, alla fine di quello stesso anno accademico, si aggiudicava, per concorso, la cattedra di Meccanica razionale, assumendo, qualche anno dopo (1902), per incarico, anche l'insegnamento della Meccanica superiore.

Tornava così, maestro fra i suoi maestri, in quella stessa Università, che non più di tre anni innanzi lo aveva avuto scolaro; e nella quiete della città natale, nella raccolta intimità della famiglia paterna trovava pienamente appagate la sua profonda affettività e l'innata aspirazione ad una semplicità ordinata e tranquilla di abitudini, che, fuori di ogni cura materiale, gli permettesse di concentrarsi tutto in un'intensa vita di pensiero.

A Padova insegnò per oltre vent'anni e l'opera scientifica da lui compiuta in quel periodo appare prodigiosa per la vastità degli sviluppi e, al tempo stesso, per la meditata perfezione di ogni ricerca particolare. Matematico nato nel pieno senso della parola, egli passava senza sforzo dall'uno all'altro di campi svariati — dalla meccanica analitica all'elettromagnetismo, dalla meccanica celeste alla teoria del calore, dall'idromeccanica all'elasticità — e ovunque affrontava problemi precisi ed elevati, per lo più i problemi fondamentali caratteristici dei singoli indirizzi considerati. Dotato di una sicura e acutissima potenza logica, in cui talvolta pareva riflettersi la mentalità giuridica del padre, e guidato da una larga visione storica dell'evoluzione dei concetti e dei metodi matematici, attinta direttamente alle fonti classiche, sottoponeva ogni problema a una profonda e serrata analisi preliminare, diretta a individuarne gli elementi logici irriducibili; e le difficoltà così sceverate e graduate superava l'una dopo l'altra, applicando a ciascuna, nella sua piena padronanza dell'Analisi, i procedimenti deduttivi più semplici e meglio adeguati allo scopo, spesso da lui medesimo affinati e rielaborati sotto nuove forme in ricerche collaterali. Grazie a quella sua tecnica concettuale di schematizzazione dei problemi, riusciva ad imprimere alle sue trattazioni caratteri inconfondibili di profondità, di chiarezza, di eleganza algoritmica, e a mettere in luce, fra ordini di questioni estrinsecamente lontani, ravvicinamenti inaspettati, nessi riposti e non di rado precisi ed intrinseci rapporti di equivalenza astratta.

Quel ventennio di attività padovana s'inizia con un poderoso gruppo di ricerche di meccanica analitica, e prime si presentano quelle sulla stabilità dei fenomeni di moto, e, più in generale, delle soluzioni dei sistemi differenziali. Com'è ben noto, quest'ordine di questioni, la cui lontana origine risale alla *Mécanique analytique* del Lagrange, che vi aveva stabilito il suo metodo delle piccole oscillazioni, era stato ripreso e approfondito dal Dirichlet, e, più recentemente, dal Poincaré e dal Ljapunov; e nei casi via via più larghi, così considerati, si era assodato che in generale la stabilità, a differenza dell'instabilità, è un carattere di natura nettamente quantitativa, talchè il Poincaré aveva potuto affermare che la instabilità è la regola, la stabilità soltanto un'eccezione. Tuttavia ragioni di analogia, specialmente in base a circostanze segnalate dallo stesso Poincaré per sistemi differenziali normali, i cui secondi membri dipendano dal tempo, sembravano render presumibile che, nei problemi di meccanica celeste, la stabilità potesse assumere un carattere meno eccezionale di quel che le va riconosciuto in astratto. Il Levi-Civita dimostrò che tale presunzione non era fondata. Introdotto e sviluppato un suo metodo generale, che riconduce il giudizio di stabilità o instabilità di ogni singola soluzione di un sistema differenziale a quello relativo a una ben determinata trasformazione puntuale, e, trattane una nuova dimostrazione, singolarmente semplice e perspicua, del teorema fondamentale del Ljapunov, cimentò quel suo metodo su casi non prima considerati e pervenne ad assodare che anche soluzioni periodiche, che in prima approssimazione appaiono stabili, risultano in senso rigoroso instabili. Così, nel caso del problema ristretto dei tre corpi, potè giungere alla conclusione, altrettanto significativa quanto inattesa, che per le soluzioni prossime a moti circolari uniformi esistono nel piano dei tre corpi infinite zone d'instabilità. Nuovi apporti a quello stesso ordine di questioni sono stati recati più tardi da altri matematici, particolarmente dal Birkhoff, ma, nei riguardi della stabilità, nulla di sostanziale si è sinora potuto aggiungere a quanto già aveva visto il LEVI-CIVITA.

Altro contributo geniale alla Meccanica analitica egli recava, in quello stesso periodo di tempo, con quel suo procedimento di sorprendente evidenza geometrica — e ormai accolto nei trattati sotto il suo nome — che, estendendo il metodo della ignorazione delle coordinate, permette di determinare, col minimo d'integrazioni, famiglie di soluzioni per quei sistemi canonici, o anche differenziali normali quali si vogliano, che ammettono più integrali primi o più relazioni invarianti, in involuzione fra loro. Sulla base di tale suo procedimento costruiva per la prima volta una teoria generale dei moti stazionari, che gli consentiva non solo di ritrovare con metodo uniforme tutti i casi noti — in particolare, le soluzioni periodiche del problema dei tre corpi, determinate dal Lagrange — ma di scoprirne anche di nuovi, e in parte inattesi, con la classificazione completa dei moti stazionari di un corpo rigido con un punto fisso, nel caso della Kowalevska.

Ma già fra l'una e l'altra delle precedenti ricerche, si era volto alla Meccanica celeste e aveva iniziato quella serie concatenata d'indagini, che, per tappe successive, dal 1903 al 1916, doveva condurlo alla regolarizzazione canonica del problema dei tre corpi nella prossimità di un urto binario. Lo studio analitico del comportamento dei tre corpi nelle vicinanze di un urto era stato iniziato dal Painlevé, che, nelle sue Lezioni di Stoccolma, era stato condotto a prospettare come probabile che l'urto binario dovesse implicare due relazioni uniformi fra le coordinate e le componenti delle velocità dei tre corpi e che, nel caso particolare del problema piano, dovesse bastare una condizione sola, l'altra risultando soddisfatta per identità. Il LEVI-CIVITA, per concentrare gli sforzi sul nodo della questione, prese a considerare il caso più semplice, cioè il « problema ristretto », nel quale non si possono verificare che urti binari; e, traverso un'analisi finissima della singolarità che, in una posizione d'urto, insorge per il sistema differenziale che regge il moto, non solo riuscì a costruire sotto forma esplicita la condizione d'urto, che, come aveva presunto il Painlevé, risulta unica e uniforme, ma pervenne, con un cambiamento semplicissimo di parametri, a far sparire quella singolarità, senza alterare la forma canonica del sistema differenziale. Gli fu agevole, dopo ciò, regolarizzare in modo analogo il problema piano generale; ma il caso spaziale resistette lungamente ai suoi sforzi, perchè gli si mostravano insufficienti alla voluta regolarizzazione non solo le trasformazioni puntuali, che erano bastate nei casi precedentemente trattati, bensì anche le usuali trasformazioni canoniche, che si riconnettono al moto ellittico; e, soltanto dopo reiterati tentativi, potè nel 1916 raggiungere lo scopo, grazie ad una nuova trasformazione canonica, da lui desunta dal moto parabolico.

È noto che già nel 1912, cioè prima che codeste ricerche del LEVI-CIVITA fossero concluse, il finlandese Sundmann era pervenuto ad una regolarizzazione del problema generale dei tre corpi e ne aveva dedotto che, in una soluzione qualsiasi, le coordinate dei tre corpi e il tempo sono funzioni olomorfe di un parametro per tutti i valori reali di esso, in corrispondenza biunivoca con quelli del tempo, sicchè posizione e tempo si possono esprimere per mezzo di sviluppi in serie sempre convergenti, non soltanto fino ad un eventuale urto, ma anche al di là di esso. Risultati d'interesse indiscutibilmente eccezionale, poichè fornivano una prima soluzione rigorosa di un celebre problema, intorno al quale si erano vanamente affaticati i maggiori matematici; ma non ne veniva sminuita l'importanza delle conclusioni del LEVI-CIVITA. Mentre il Sundmann alla regolarizzazione nell'intorno di un urto era pervenuto in modo indiretto, introducendo un numero non indifferente di variabili ausiliarie parassite e facendo uscire il sistema differenziale dal quadro delle equazioni della Dinamica, il LEVI-CIVITA aveva raggiunto lo scopo per via diretta e aderente alla natura specifica della questione, conservando al sistema differenziale, che regge il fenomeno, la sua originaria forma canonica e mantenendo così applicabili i risultati teorici e i metodi di calcolo della Meccanica analitica.

Le indagini fondamentali sin qui ricordate valgono a caratterizzare l'elevatezza, non la vastità dell'opera del LEVI-CIVITA in quel primo, più fervido periodo della sua attività; chè ad esse si avvicenda e si intreccia tutta una serie di altre ricerche, di cui talune, per sua iniziativa e sotto la sua guida, fornirono a numerosi discepoli argomento di ulteriori sviluppi. Restando ancora nel campo della Meccanica analitica e della Meccanica celeste, mi limito a ricordare, in un'arida enumerazione, le più significative: condizione necessaria e sufficiente per l'equazione caratteristica delle equazioni di Hamilton-Jacobi integrabili per separazione di variabili e classificazione dei tipi nel caso di due variabili; studio analitico dell'equazione del Kepler e determinazione della regione di olomorfismo dell'anomalia eccentrica, come funzione dell'eccentricità; prima dimostrazione rigorosa dell'esistenza di un moto medio (asintotico) del nodo lunare; costruzione di un nuovo sistema canonico di elementi ellittici, che poi l'Andoyer ha riconosciuto vantaggioso in problemi di Astronomia; nuova riduzione esplicita delle equazioni differenziali del problema generale dei tre corpi, nella quale, con sobrietà di sviluppi pari all'eleganza, si assegnano separatamente, in forma espressiva, il sistema ridotto a quattro gradi di libertà nel piano dei tre corpi e le equazioni supplementari, che, quando sia integrato il sistema ridotto, permettono di determinare, con semplici quadrature, la posizione di codesto piano nello spazio; infine, una trattazione, sulla base d'ipotesi più larghe di quelle tradizionali, della teoria meccanica degli anelli di Saturno, dalla quale, tra l'altro, tenuto conto dei dati numerici d'osservazione, si desume una nuova presunzione in favore dell'ipotesi che l'anello non sia continuo, nè assimilabile ad un continuo, bensì risulti costituito da uno sciame di meteoriti abbastanza spaziati, perchè ne risultino quasi trascurabili le azioni reciproche.

Sul problema degli anelli di Saturno egli è tornato due volte (1908, 1916), valendosi dei risultati generali, da lui stesso precedentemente stabiliti in una preliminare indagine asintotica sull'attrazione esercitata da una linea materiale in punti prossimi ad essa e in uno studio diretto, e analiticamente delicatissimo, sull'autopotenziale di un tubo sottile; e tali risultati costituiscono per se stessi il nucleo essenziale di un nuovo capitolo, aggiunto dal LEVI-CIVITA alla teoria classica del potenziale newtoniano, che ad opera sua e di suoi discepoli doveva in seguito dar luogo ad altre interessanti applicazioni.

Ma conviene oramai passare ad un altro campo, all'Idrodinamica, in cui l'opera del LEVI-CIVITA ha suscitato una larga corrente d'idee e di ricerche. Risale allo Stokes e allo Helmholtz la prima idea che la resistenza opposta da un fluido alla traslazione uniforme di un solido immerso sia intimamente legata alle discontinuità provocate dal solido nel moto del fluido circostante; ma lo studio di quei moti discontinui, anche considerati soltanto in due dimensioni e schematizzati mediante la cosiddetta «ipotesi della scia», presentava difficoltà analitiche gravissime, sicchè lo stesso Helmholtz ed altri dopo di lui — dal Bobylev al Love — non ne erano venuti a capo se non in casi particolarissimi di profili mobili rettilinei; e, per quanto tutti quei ricercatori avessero fatto ricorso alla rappresentazione conforme, in qualche modo suggerita dalla natura della questione, i procedimenti diversi da loro usati caso per caso non davano alcuna norma sicura per la trattazione di casi nuovi, in particolare per lo studio di moti dovuti a profili curvilinei. Il LEVI-CIVITA, in una celebre Memoria del 1906, affrontava in tutta la sua generalità il problema in piano orizzontale e, desunta da un'esauriente analisi qualitativa del fenomeno la rappresentazione conforme più aderente ai caratteri fisici della questione, perveniva all'integrazione generale dei moti irrotazionali, dotati di scia, per ogni possibile forma del profilo che li provoca; onde poi deduceva, con un elegante procedimento, fornito dalla teoria dei residui del Cauchy, l'espressione della resistenza sotto forma semplice e impreveduta. L'importanza di questa ricerca è data, forse più ancora che dai risultati, dal metodo inauguratovi dal LEVI-CIVITA, che doveva ben presto rivelare la sua larga fecondità. Egli stesso, applicandolo a problemi in piano verticale, nei quali non è più trascurabile, come in piano orizzontale, l'azione della gravità, poneva i fondamenti della teoria generale delle onde di canale, con particolare riguardo a quelle di tipo permanente; e sulla via da lui dischiusa un valoroso gruppo di discepoli diretti e di suoi continuatori davano vita ad una operosa scuola italiana d'Idromeccanica, mentre anche all'estero le sue vedute e i suoi risultati facevano sentire il loro forte influsso. Basterà ricordare i brillanti sviluppi dovuti a L. M. Brillouin e al Villat.

Ma negli indirizzi da lui stesso promossi il LEVI-CIVITA, aperta la via e raggiunti i risultati generali di carattere fondamentale, generalmente non amava insistere, quasi preferisse saggiare la vitalità delle sue idee e la fecondità dei suoi apporti nelle ulteriori ricerche che suscitavano ad opera di altri; e, obbedendo alla naturale sua versatilità, recava il suo spirito chiarificatore su nuovi problemi, con una tale varietà d'iniziative che per ogni matematico di altra tempra avrebbe costituito una pericolosa dispersione di forze. Così, ancora nella fase giovanile della sua attività, aveva dimostrato come dalla teoria elettrodinamica dello Helmholtz si possa essere condotti alle equazioni di Maxwell-Hertz, quando si ammetta che le azioni a distanza, tanto di origine elettrostatica, quanto di origine elettromagnetica, si propaghino con velocità finita; poi nel 1901 assegnava una sua prima valutazione del massimo cimento dinamico nei sistemi elastici; nel 1902, in connessione con alcuni dubbi critici espressi dal Righi circa l'interpretazione di esperienze, allora molto discusse, sulla produzione di un campo magnetico per convezione elettrica, risolveva due questioni d'induzione elettrodinamica in base alla teoria (integrale) di Helmholtz-Hertz; nel 1904 traduceva una questione di massimo cimento specifico, presentatasi nella costruzione di cavi per trasporto di energia ad alto potenziale, in un problema di elettrostatica, da lui poi discusso e risolto fino a trarne precise norme costruttive di sicurezza; nel 1914, poste le basi dello studio del regime variabile del calore raggiante, stabiliva, in tali condizioni, l'equazione indefinita dell'irraggiamento. E, quasi a svago dello sforzo d'indagini di largo respiro, tornava, di quando in quando, a problemi particolari di Analisi pura, come, ad esempio con l'acuta osservazione sulle trascendenti intere di genere infinito (1902) o col teorema, oramai classico, sulle varietà caratteristiche delle equazioni di monogeneità delle funzioni di più variabili complesse (1905); oppure s'indugiava su questioni speciali di carattere più strettamente tecnico, suggeritegli dal suo duplice insegnamento di Meccanica razionale e di Meccanica superiore: contrazione delle vene liquide (1906); penetrazione dei proiettili (1906); regime e sforzo d'avviamento per veicoli trainati (1914); nuovo metodo per il tracciamento delle linee di azione degli ingranaggi (1917).

Sullo scorcio del periodo padovano, intorno al 1917, si iniziano le sue fondamentali ricerche relativistiche. Se si tien conto dell'ampiezza dei suoi orizzonti speculativi e della sua connaturata facilità a risentire e assimilare ogni nuovo orientamento del pensiero scientifico, può apparire che la sua attiva partecipazione a quel movimento d'idee sia maturata con una certa lentezza. Ma, quanto pronto nel cogliere e dominare le idee nuove, altrettanto era cauto e ponderato nel consentire e nell'affermare. A dir vero, già durante la elaborazione della relatività ristretta egli era intervenuto, fra il 1908 e il 1909, con una sua teoria asintotica delle radiazioni elettriche, che, pur rispettando il principio di relatività, com'egli allora diceva, di Lorentz-Einstein-Minkowski, evitava ogni ipotesi cinematica di accomodamento (quali la rigidità delle cariche dell'Abraham o la contrazione lorentziana o l'ipotesi del Poincaré); ma, ancora nel 1911, in un suo magistrale Rapporto alla Società italiana per il progresso delle Scienze sulla *Estensione ed evoluzione della Fisica matematica nell'ultimo cinquantennio, con speciale riguardo all'Italia*, dopo aver rilevato la « tendenza rivoluzionaria » com'egli diceva testualmente « a fondere i concetti di spazio e di tempo e a negare l'invariabilità della massa che renderebbe... necessaria una ricostruzione *ab imis* di tutta la filosofia naturale », concludeva: « attendiamo per giudicare ». E, forse, a chiarire non soltanto quella sua prudente attesa, ma, sotto qualche aspetto, il suo abituale atteggiamento speculativo, possono valere le parole, con cui, qualche anno dopo, iniziava una sua conferenza al Seminario matematico di Roma, *Come potrebbe un conservatore giungere alla soglia della nuova Meccanica*: « In politica » egli disse in quell'occasione « non sono molti quelli che amano chiamarsi puramente e semplicemente conservatori, perchè conservatore si prende spesso a sinonimo di misoneista. Questo pericolo non c'è evidentemente in scienza. Nessun ricercatore può essere misoneista, ma molti cultori di scienza possono, quasi direi debbono essere conservatori per la stessa loro missione di custodire con gelosa cura un certo patrimonio intellettuale ben consolidato, e di vagliare con severo spirito critico tutto ciò che importa variazione o alienazione del patrimonio stesso ».

Ora è appunto con questo « severo spirito critico », guidato da un vigile senso storico della continuità evolutiva delle teorie scientifiche, che egli ha affrontato i problemi matematici della nascente relatività generale. Riprendendo alla base la formulazione analitica della teoria, assegnava anzitutto la corretta espressione del tensore gravitazionale, che sotto la forma allora attribuitagli dallo stesso Einstein, difettava di quell'invariantività, che doveva essere suo carattere essenziale, e, d'altro canto, implicava conseguenze fisiche non accettabili se non a patto di accomodamenti desunti dalla teoria dei quanti; stabiliva poi i fondamenti della Statica einsteniana, riducendo le equazioni gravitazionali a quella forma spazialmente invariante, che ad esse conviene nel caso statico, e, classificatene, in base alle loro caratteristiche geometriche, le soluzioni possibili *a priori*, le determinava effettivamente in vari casi suscettibili di espressive interpretazioni meccaniche, di cui uno conduce ad un'ampia generalizzazione della soluzione dello Schwarzschild; riconosceva, infine, che, per ogni metrica stazionaria, il postulato fondamentale dell'Ottica einsteniana, enunciato dallo Hilbert, equivale al principio della minima durata del Fermat.

È poi ben noto che già l'Einstein aveva trovato nel Calcolo differenziale assoluto lo strumento algoritmico direttamente adeguato allo sviluppo matematico della sua concezione, in cui intervenivano, come elementi essenziali, le proprietà di curvatura della varietà riemanniana quadridimensionale spazio-tempo. Il LEVI-CIVITA, obbedendo alla costante sua tendenza semplificatrice, si volse a indagare se non fosse possibile ridurre e chiarire, nelle sue profonde ragioni di successo, l'apparato formale, che, traverso i procedimenti del Calcolo differenziale assoluto, conduce a individuare quella curvatura e a stabilirne il carattere invariante; e, movendo da una costruzione geometrica di sorprendente semplicità, scoperse il suo trasporto per parallelismo sulle varietà riemanniane a quante si vogliono dimensioni. Veniva così rivelato l'intrinseco significato geometrico delle operazioni fondamentali del Calcolo differenziale assoluto, il quale si trovava trasformato, come per un'improvvisa luce, da algoritmo aridamente formalistico in una teoria nitidamente concettuale. Ma la portata di quella geniale scoperta andava ben oltre quella geometrizzazione del Calcolo differenziale assoluto. La possibilità, messa in luce dal LEVI-CIVITA, di analizzare le proprietà di curvatura di una qualsiasi varietà riemanniana, considerandola come un continuo di elementi spaziali euclidei, raccordati fra loro per mezzo di una legge di trasporto per parallelismo, ha dato origine, per via di successive estensioni in vario senso, ad una vasta corrente d'indagini geometriche, cui attendono tuttora operosamente e fruttuosamente matematici di ogni paese. Può apparir singolare il fatto che uno dei più vivi e caratteristici indirizzi di ricerca della Geometria d'oggi sia stato promosso proprio da un matematico, che, ove, tornando a vecchie classificazioni — in verità ormai superate —, si badasse alla specie degli interessi speculativi in lui prevalenti e al tipo delle tecniche preferite, andrebbe collocato fra gli analisti. Ma anche nel LEVI-CIVITA, come nella più gran parte dei nostri maggiori matematici, era innata quella profonda tendenza — di natura, in qualche senso, estetica — alla visione dell'essenza geometrica dei problemi, che costituisce una caratteristica saliente del genio matematico italiano.

Alla fine del 1918 la Facoltà di Scienze di Roma, conscia degli alti compiti, che, in quella tormentata ripresa delle relazioni scientifiche internazionali dopo la prima grande guerra, le tradizioni e la vittoria imponevano all'Italia, volle accrescere il prestigio del suo collegio di maestri insigni e chiamò nel suo seno il LEVI-CIVITA, che, superato non senza qualche contrasto il suo profondo attaccamento alla città natale, nel gennaio del 1919 assunse nell'Università romana la cattedra di Analisi superiore, da cui, due anni dopo, si trasferì a quella di Meccanica razionale.

Qui in Roma, per un altro ventennio, esplicò ancora più intensa e più larga la sua opera di Maestro, iniziando e guidando alla ricerca tutta una schiera di giovani matematici, che indirizzava sulle vie da lui stesso aperte, a tutti proponendo con inesauribile fantasia nuovi problemi, a tutti prodigando con generosa larghezza germi d'idee e norme direttive. Ma la sua guida non era costrizione, il suo consiglio non era imposizione di metodi o di vedute particolari. Comprensivo e rispettoso delle inclinazioni e delle attitudini di ciascun suo discepolo, le assecondava e le reggeva con una assistenza assidua e suggestiva, quanto discreta e quasi dissimulata, fino a suscitare le prime iniziative personali. Molti di quei giovani erano stranieri e, tornati ai loro paesi, portano ancora oggi, nei loro insegnamenti universitari, il carattere di quella formazione speculativa nettamente italiana.

Poco prima di lasciar Padova, cedendo a reiterate insistenze di colleghi e discepoli, aveva accolto il disegno di sviluppare e fissare sistematicamente in un trattato le vedute personali e i risultati di rielaborazione critica e di esperienza didattica, maturati nel suo ventennale insegnamento di Meccanica; ed in me è sempre vivo, e ormai nostalgico, il ricordo dei lunghi colloqui, susseguitisi periodicamente per più anni, in cui mi veniva chiarendo il suo pensiero sui principî e gli sviluppi concatenati delle varie teorie, con una così larga e limpida visione d'insieme, con una così precisa e meditata analisi di ogni nesso logico e di ogni possibile semplificazione dei procedimenti deduttivi, che poi lo sforzo di dar forma non indegna a quel pensiero lucidissimo si tramutava in un appassionante godimento.

Frattanto la rinomanza mondiale, ormai indiscussa, e l'eco dei suoi insegnamenti, gli procuravano sempre più frequenti inviti di Università straniere; e, a quando a quando, vi aderiva, vincendo la naturale riluttanza a distogliersi dalle sue abitudini di lavoro e ad interrompere anche per poco l'adempimento dei doveri accademici, che sempre osservò con scrupolosa dedizione. Fu così, successivamente, in Spagna, in Austria, in Germania, in Russia, in Olanda, in Svizzera, in Francia, negli Stati Uniti, nel Perù, in Argentina, nell'Uruguay, nel Brasile; e dovunque con trattazioni riassuntive delle sue teorie accrebbe il prestigio della Matematica italiana, dovunque, col suo fascino personale, suscitò, in quei lontani ambienti culturali, larghe correnti di simpatia per la Patria nostra.

Ma nè le assidue cure dedicate ai discepoli, nè le missioni all'estero interrompevano il suo lavoro, chè anzi egli ne traeva occasione non soltanto a rielaborare, talvolta radicalmente, gruppi di precedenti sue ricerche, ma anche ad affrontare nuovi ordini di problemi.

Al breve periodo dell'insegnamento di Analisi superiore appartiene un memorabile suo corso, in cui espose il Calcolo differenziale assoluto, ricostruito e rinnovato alla luce della sua nozione di trasporto per parallelismo; e ne vennero quelle *Lezioni* (1925), che, nella forma fedele e limpidissima data ad esse dal prof. Persico, allora suo discepolo, restano nella nostra produzione matematica un modello di perspicuità concettuale e di eleganza analitica. Furon subito tradotte in inglese (1927) e in tedesco (1928); e per la traduzione inglese il LEVI-CIVITA vi aggiunse una serie di nuovi capitoli, pubblicati anche a parte in italiano (*Fondamenti di Meccanica relativistica*, 1928), in cui tratteggiava l'evoluzione relativistica della Meccanica propriamente detta e dell'Ottica geometrica, secondo il suo costante criterio di prender le mosse dalle leggi classiche e di cercare induttivamente quali modificazioni (lievissime in condizioni ordinarie) si dovessero introdurvi per rispecchiare le idee dell'Einstein; e vi trovava posto un suo profondo teorema di equivalenza dinamica in seconda approssimazione, da lui allora formulato (1926), che ha poi avuto le sue più significative applicazioni nel problema relativistico del moto dei pianeti intorno al Sole.

In quello stesso periodo di tempo tornava all'Idrodinamica. In una delle sue conferenze di Barcellona, pubblicate, oltre che in catalano (1922), in italiano (*Questioni di meccanica classica e relativistica*, 1924) e in tedesco (1924), egli, pur mirando al caso tipico delle onde di canale, aveva anzitutto sottoposto ad una profonda analisi la generale nozione fisica di fenomeno ondoso, traducendo in termini matematici precisi una suggestiva veduta, che faceva risalire a Leonardo; e aveva poi inquadrato i suoi precedenti apporti alla teoria delle onde di canale in una magistrale trattazione sistematica delle classiche ricerche dell'Airy, del Gerstner, dello Stokes, del Rayleigh. Ma restava insoluto il problema — fondamentale in quella teoria — della determinazione di onde irrotazionali periodiche permanenti o, se si vuole, del passaggio dalla prima approssimazione dell'Airy alla soluzione rigorosa. Esso era stato oggetto di reiterati tentativi dello Stokes e del Rayleigh, che avevano spinto i loro calcoli alla seconda approssimazione; ma il metodo da loro seguìto, pur essendo il più naturale, non era adatto a mostrare la via per le approssimazioni successive e tanto meno a preparare la verifica della convergenza. Nel 1925 il LEVI-CIVITA affrontò direttamente il problema e, vincendone le gravi difficoltà analitiche con l'uso di un nuovo tipo di funzioni maggioranti, da lui per primo ideate, lo risolse con pieno rigore nel caso di canali molto profondi. In tal modo, come ebbe poi a rilevare, nella sua alta autorevolezza, H. Lamb, il LEVI-CIVITA concludeva « an historic controversy », assegnando per mezzo di formule particolarmente maneggevoli non solo il profilo esatto di quelle onde, ma anche la relazione globale che lega l'altezza e la lunghezza d'onda al trasporto di liquido e alla velocità di propagazione. In relazione coi risultati del LEVI-CIVITA sono state effettuate numerose ricerche da suoi discepoli, come lo Struik, il Weinstein, il Geppert, e da altri matematici, come il Burgers e il Favre; e quest'ultimo ha potuto assodare che nei casi ordinari (in cui l'altezza dell'onda supera raramente 1/20 della lunghezza) le differenze tra le onde irrotazionali del LEVI-CIVITA e quelle trocoidali del Gerstner sono praticamente trascurabili, sicchè risulta giustificato l'uso largo e pressochè esclusivo, che di quest'ultime si suol fare nelle applicazioni idrauliche e nautiche, benchè il loro carattere implichi l'intervento di misteriose azioni dissipative, che non sembrano avere riscontro nel fenomeno fisico. Le verifiche quantitative del Favre, nei confronti delle onde del LEVI-CIVITA, assicurano che in quelle applicazioni non v'è da preoccuparsi di tale difficoltà, perchè nei casi comunemente considerati la sua influenza non è praticamente sensibile.

I problemi matematici suggeriti dalla schematizzazione di fenomeni ondosi esercitavano sul Levi-Civita un fascino particolare, e, qualche anno dopo (1930), egli si volse alla teoria della propagazione delle onde di discontinuità, iniziata dall'Hugoniot e sviluppata dall'Hadamard, per applicarla a stabilire la coincidenza delle bicaratteristiche delle equazioni gravitazionali dell'Einstein con le geodetiche di lunghezza nulla della corrispondente varietà quadridimensionale, con che risultava stabilito il collegamento diretto fra codeste equazioni e l'Ottica geometrica, indipendentemente da ogni teoria dei fenomeni elettro-magnetici. Condotto così a rimeditare sulla teoria delle onde di discontinuità dell'Hadamard, originariamente alquanto involuta e faticosa, il Levi-Civita sentì il bisogno di rielaborarne i fondamenti matematici secondo quei criteri di semplicità e di chiarezza, che gli erano propri; e la nuova trattazione espose nelle sue linee essenziali in un corso di conferenze, raccolte dal prof. Lampariello (*Caratteristiche dei sistemi differenziali e propagazione ondosa*, 1931), che, anche a prescindere dal contenuto matematico, offrono un alto grado d'interesse concettuale nelle riflessioni conclusive. Il Levi-Civita vi rileva, anche in base ad esempi espressivi, come ad ogni fenomeno, che trovi un'adeguata rappresentazione analitica in un determinato sistema a derivate parziali, si possano associare simultaneamente, attraverso le varietà caratteristiche di quel sistema, un aspetto ondulatorio, e, attraverso le bicaratteristiche, un aspetto corpuscolare. « Si ha così — egli concludeva — uno schema matematico comprensivo, e, nel suo agnosticismo, perfettamente soddisfacente, di quel dualismo fra onde e corpuscoli, che ispirò la geniale intuizione del De Broglie, e di cui fu, dallo stesso De Broglie e da altri, indarno cercato un più concreto modello, veramente in accordo coi fatti osservati ».

Egli aveva sempre seguìto con attento interesse e con largo spirito di comprensione gli sviluppi della Fisica atomica e i nuovi problemi matematici, che, anche fuori degli schemi classici, mano mano vi si imponevano. Così, nel 1927-28, fissando l'attenzione sugli invarianti adiabatici, che, pur avendo ricevuto fondamentali applicazioni nel primo assetto sistematico della Meccanica atomica, erano stati considerati soltanto sotto aspetti particolari, ne costruì per primo la teoria generale, riconducendola, traverso i principî della Meccanica statistica, alle proprietà degli integrali dei sistemi canonici; e di tale sua teoria illustrò la portata anche su problemi di

Meccanica planetaria, aprendo una via, che fu proseguita con brillanti risultati dal prof. Krall.

Ma al suo pensiero, non appena egli aveva conchiuso un'indagine, si affacciavano nuovi problemi; e vediamo così susseguirsi tutta una serie di altre ricerche, in ciascuna delle quali si ravvisa il frutto maturo di lunghe meditazioni, e che qui non mi è dato che di accennare in una scheletrica enumerazione: nel campo teorico, lo studio differenziale dello scostamento geodetico su di una varietà riemanniana qualsiasi (1926); l'estensione della distribuzione maxwelliana a un sistema di corpuscoli, in cui siano rappresentate non soltanto tutte le velocità, ma anche tutte le masse, con applicazione al problema del moto di un punto di massa variabile (1930); la deduzione dell'Ottica gometrica, anche nel caso stazionario, dal principio variazionale dell'Einstein, con una espressiva applicazione allo specchio mobile (1931); la dimostrazione che lo schema di Dinamica analitica, di cui si valevano i teorici della Fisica, prima del De Broglie, dello Schrödinger, del Dirac, riguardandolo come generale, rientra invece, in base a classici risultati del Liouville e del Weierstrass, nel caso particolare, in cui esistono n integrali uniformi (1933); la proposta di aggiunta di termini elettromagnetici all'equazione di Schrödinger, in sostituzione degli spinori provenienti dalle matrici del Dirac, di cui il LEVI-CIVITA asserisce l'incompatibilità con la norma generale d'indipendenza delle leggi fisiche dagli elementi geometrici di riferimento (1933); la trigonometria dei piccoli triangoli curvilinei su di una qualsiasi superficie (1937-38); nel campo applicativo, la valutazione globale dell'aumento di cimento, che si riscontra in un sistema elastico, quando di una data sollecitazione si considera non soltanto l'effetto statico, bensì anche quello dinamico (1928); un primo saggio di trattazione in tre dimensioni dello strato limite del Prandtl (1930); infine la teoria dei getti liquidi sotto forte carico (1931-32).

L'ultimo periodo della sua attività fu dedicato al problema relativistico degli n corpi, sul quale a più riprese aveva lungamente meditato. Fin dal 1922 erano state segnalate da L. M. Brillouin le difficoltà derivanti dal fatto che nella relatività generale vengono meno, insieme col principio di reazione, tutte le schematizzazioni abituali, che nella Meccanica classica ad esso si riconnettono. Il LEVI-CIVITA, sottoposta la questione ad una profonda analisi critica, poteva nel 1937 enunciare, per il caso dei due corpi, conclusioni precise intorno alle ineguaglianze secolari, riservando i particolari deduttivi e gli ulteriori sviluppi, riguardanti il caso degli n corpi, ad una trattazione sistematica, sinora rimasta inedita (**).

Si conclude così l'opera del LEVI-CIVITA, che, per l'ampiezza dei campi via via indagati, per l'originalità delle schematizzazioni concettuali e dei metodi, per l'importanza fondamentale dei risultati conseguiti, per la fecondità degli indirizzi promossi, resterà nella storia come uno dei più geniali e più poderosi contributi a quel movimento d'idee e di ricerche, che, dagli ultimi decenni del secolo passato ai giorni nostri, ha assicurato alla Matematica italiana, nel mondo scientifico internazionale, un alto e indiscusso prestigio.

Larghi furono i riconoscimenti che il LEVI-CIVITA ebbe in Italia e all'estero. Del suo nome si fregiarono tutte — si può dire — le antiche Accademie nostre, alle quali si aggiunsero, quasi in gara, le più insigni istituzioni scientifiche straniere — fra le altre le Accademie delle Scienze di Amsterdam, di Berlino, di Boston, di Bruxelles, di Dublino, di Lisbona, di Madrid, di Mosca, di Parigi e la Società Reale di Londra —; e particolarmente gradita gli giunse nel 1936 la nomina ad Accademico Pontificio, personalmente voluta, all'atto della istituzione di quell'Accademia, da S.S. Pio XI. Già nel 1903 aveva avuto la Medaglia d'oro della Società dei XL e nel 1907, da questa Accademia dei Lincei, il Premio Reale per la Matematica, diviso con un altro Grande scomparso — Federigo Enriques —; mentre nel 1922 la Società Reale di Londra gli assegnava la « Medaglia Sylvester », di cui prima di allora erano stati insigniti soltanto matematici anglo-sassoni, nel 1928 l'Università di Amburgo lo fregiava della Medaglia « dem Verdienste », nel 1937 l'Università di San Marcos di Lima gli decretava una speciale medaglia d'oro; e via via gli era conferita la Laurea « honoris causa » dalle Università di Amsterdam, Cambridge Mass., La Plata, Lima, Parigi, Tolosa e dal Politecnico di Aquisgrana.

Ma, ben più di quel plebiscito di onori accademici, fu suo privilegio l'universale consenso di calde simpatie, di affettuosa reverenza,

(**) È stata poi pubblicata, postuma, la seguente monografia, che il LEVI-CIVITA aveva redatto con la collaborazione del prof. G. LAMPARIELLO: *Le problème des n corps en relativité générale* « Mémorial des Sciences mathématiqes », fasc. CXVI, Paris (1950).

che, sempre e dovunque, egli suscitò intorno a se stesso. Le doti sovrane di pensiero si armonizzavano in lui con le note umane del carattere morale e dell'indole affettiva in un così suggestivo equilibrio, che chiunque avesse la ventura di avvicinarlo se ne sentiva immediatamente avvinto. In lui tutto era semplice, limpido, spontaneo: l'aperta e signorile cordialità, l'impareggiabile modestia, candidamente ignara di se stessa, la finezza squisita nel comprendere e nel compiacere gli altri, la innata, fiduciosa predisposizione a giudicare benevolmente; e al fondo di quelle avvincenti caratteristiche personali traspariva, come norma di ogni suo atteggiamento e di ogni sua manifestazione, una rettilinea dirittura morale, costantemente illuminata da un largo e altruistico senso di solidarietà umana. Severo soltanto con se stesso, conservò imperturbata, nella vicenda degli anni e nel contrasto degli eventi, una sua visione serena e ottimistica della vita e dei rapporti umani; e, come fu sempre largo del suo in opere di bene, a lui tanto più gradite quanto più silenziose e nascoste, recò una eguale generosità — virtù fors'anche più rara — nel campo della ricerca scientifica, dove non cercò un tranquillo e comodo rifugio a straniarsi dalla vita, ma una sfera elevata di operosa ed espansiva comunione spirituale. Per questo fece suo mondo la Scuola, per questo vi fu Maestro incomparabile di scienza e di vita. Ben lo sanno, anche oltre la numerosa schiera dei discepoli, quanti matematici, in Italia e fuori, attinsero alla prodiga sua ricchezza d'idee, e tutti recano in sè per la vita, con la forte impronta del suo pensiero, la memoria indelebilmente cara della incontaminata sua superiorità morale e della sua comunicativa umanità.

Quando sopravvenne il brutale, obbrobrioso ostracismo dalla Scuola, la ferita fu profonda e insanabile. Nel sicuro dominio di se stesso, non vacillò e, pensoso soltanto di celare alla eletta Consorte e agli amici rimastigli vicini il suo chiuso dolore, proseguì, in dignitoso isolamento, la sua vita di meditazione e di ricerca, pronto ancora a prodigare ai giovani, che a lui ricorrevano, i tesori inesausti della sua genialità e del suo fervore speculativo, pronto ancora a compiacersi, senza recriminazione, delle voci, che a quando a quando gli giungevano dalla sua Scuola.

Ma a quel profondo e contenuto travaglio interiore le forze fisiche a un tratto cedettero e le progressive insidie del male gli contesero ben presto il conforto del lavoro scientifico. Anche quel supremo sacrificio accolse con tranquilla fermezza d'animo, e già si andava adattando a vivere spiritualmente ai margini di quel mondo d'idee, che aveva così poderosamente signoreggiato; ma oramai tutto, che in lui era di pensiero e di affettività, egli aveva dato fino all'estremo, e, in silenzio, si spense. In quel tramonto, che — dopo tanta luce di pensiero e di nobiltà morale — per il prevalere della iniquità si colorò di tragedia, la vita di TULLIO LEVI-CIVITA si è conclusa con la più alta delle ascese umane.

MEMORIE E NOTE

I.

SUGLI INFINITI ED INFINITESIMI ATTUALI QUALI ELEMENTI ANALITICI

«Atti Ist. Veneto di Sc., lett. ed arti», s. VII, t. IV (1892-93)
pp. 1765-1815

I concetti di infinito e infinitesimo attuale, di cui potevasi riscontrare il germe nelle opere di CAVALIERI e di LEIBNITZ, disparvero poi completamente dal dominio della matematica; nell'analisi, perchè, fissate le basi del calcolo sul concetto di limite, nessun'altra teoria ne faceva sentire il bisogno, nella geometria, per l'influenza dell'empirismo fino ad oggi dominante.

Solo pochi anni or sono dal CANTOR e dal DU BOIS-REYMOND fu ripresa una tale questione, posta però e studiata da essi sotto punti di vista essenzialmente diversi. Il primo ricava il concetto di numero transfinito, movendo da considerazioni sulla serie naturale dei numeri interi; il secondo mostra la opportunità di introdurre nuovi simboli (numeri) per rappresentare l'ordine di infinità di alcune funzioni.

Tuttavia nè i risultati di questi due matematici, nè quelli, cui posteriormente pervenne lo STOLZ, soddisfanno a tutti i principii fondamentali dell'aritmetica e non sono quindi suscettibili di una trattazione analitica, che corrisponda agli ordinarii procedimenti di calcolo.

Il chiar.mo Prof. VERONESE, nella sua opera magistrale *Fondamenti di Geometria a più dimensioni* ecc. (Padova, Tip. del Seminario, 1891), come seppe abbattere gli ostacoli, che pregiudizî inveterati opponevano allo svolgimento della ipergeometria, quale scienza pura, così, essendo condotto da quegli studii a discutere e a riformare i principii di tutta la geometria, apportò, anche in tale riguardo, vedute nuove e feconde. Tra queste, per lo scopo nostro, ci limiteremo ad accennare la possibilità astratta di segmenti infiniti ed infinitesimi limitati e la conseguente ammissibilità di nuovi segmenti, pur essi infiniti od infinitesimi, che, di fronte ai primi, si comportino come quelli di fronte ai finiti (infiniti ed infinitesimi dei varî ordini).

Quindi, per rappresentare questi enti così introdotti, egli coordina loro dei numeri e ne stabilisce le operazioni fondamentali; codesti numeri tuttavia non possono adoperarsi con vantaggio quali strumenti analitici, da un lato per la loro origine essenzialmente geometrica (la quale appunto li rende più direttamente applicabili a questa scienza), dall'altro per la mancanza di simboli o convenzioni, onde riescano compendiosamente rappresentati.

Sembrami pertanto non del tutto inopportuno di presentare questo stesso soggetto da un punto di vista assolutamente analitico, dando anche, in un campo però più ristretto (n. 25 nota), maggiore generalizzazione al concetto di ordine di infinità. Dovrò poi varcare i confini dell'aritmetica elementare, per poter dedurre qualche conseguenza analitica dei risultati ottenuti e farne da ultimo anche una applicazione d'indole strettamente geometrica.

Monosemii e numeri generali di 2ª specie (ellittici ed iperbolici).

1. – Fissato, nel campo dei numeri reali, un numero qualunque a, noi possiamo pensare insieme con a, o, se si vuole, successivamente ad a, un altro numero reale ν e risguardare il risultato di questa operazione intellettuale diverso da quello, che si sarebbe ottenuto, pensando prima l'a e poi, fatta astrazione da esso, il ν. Indicheremo col simbolo a_ν (che leggeremo a coll'indice ν) il risultato di una siffatta elaborazione mentale. Converremo poi di attribuire l'indice 0 a quei numeri, che vennero originariamente pensati o di cui, come accade per esempio, in seguito alla l'operazione del numerare, formossi l'idea, indipendentemente da alcun concetto di indice. Ciò premesso, il far astrazione dell'indice ν di un dato ente a_ν, con che resta solo l'idea del numero a, val quanto sostituire l'indice 0 al primitivo indice ν di a.

Tali nuovi enti saranno chiamati *numeri monosemii del continuo numerico di seconda specie.* Tra essi, come fu detto, sono compresi gli ordinarii numeri reali, cui spetta l'indice 0.

Nel monosemio a_ν il numero a si chiama *caratteristica.*

In generale due monosemii li diremo eguali allora e solo allora che hanno eguale indice ed eguale caratteristica. Però risguarderemo nulli e quindi tutti eguali fra loro quei monosemii, la cui caratteristica è 0. Ciò equivale a dire che 0_ν, 0_μ, ecc., si considerano come simboli rappresentanti lo 0. Con tale convenzione, ai monosemii di caratteristica nulla, qualunque sia il loro indice, si potrà sempre intendere sostituito il numero zero, cioè, siccome esso appartiene alla categoria dei numeri reali, il monosemio di indice zero, che ha pure 0 per caratteristica.

2. – Un numero reale è maggiore o minore di zero, secondochè è positivo o negativo; usando le denominazioni testè introdotte, potremo anche dire: Un monosemio d'indice zero è maggiore o minore di 0, secondochè la sua caratteristica è positiva o negativa. Questa definizione si può generalizzare all'intera classe dei monosemii, stabilendo che un monosemio qualunque a_ν abbia a dirsi maggiore o minore di zero (che sarà corrispondentemente minore o maggiore di a_ν), secondochè la caratteristica a è positiva o negativa. Il monosemio stesso a_ν si dirà in conformità positivo o negativo.

Stabilite le relazioni di disuguaglianza fra lo zero e un monosemio non nullo, prendiamo due monosemii quali si vogliono a_ν e b_μ diversi da zero. Dal loro confronto possono emergere anzitutto due casi distinti: o $\nu = \mu$, o ν è diverso da μ. Nel primo caso, se le caratteristiche a e b sono fra loro eguali, i due monosemii pure, per la definizione precedente (n. 1) saranno fra loro eguali e scriveremo $a_\nu = b_\mu$. Se le caratteristiche sono differenti, a seconda che $a \gtrless b$, porremo di conformità $a_\nu \gtrless b_\mu$. Se invece $\nu \gtrless \mu$, ove inoltre si suppongano le caratteristiche entrambe positive, risguarderemo come maggiore dell'altro quello tra i due monosemii, cui compete indice maggiore. Quando le caratteristiche non sono tutte due positive, si applicherà in prima il criterio precedente, risguardandole tali, e la relazione di disuguaglianza, così risultante, si dovrà poi modificare a seconda dei segni dei due monosemii, come se si trattasse di due numeri reali (¹).

In conseguenza di queste definizioni, i segni $=$, $>$, $<$ assumono, secondo i casi, significati diversi, ma soddisfanno sempre (ciò, che si ricava immediatamente, passando in rassegna i diversi casi possibili) alle leggi fondamentali, che li caratterizzano, quando si riferiscono ai numeri ordinarii, ai segmenti del continuo rettilineo, ecc.

Così, per esempio, dal confronto di due monosemii a_ν e b_μ, emerge sempre o $a_\nu = b_\mu$, o $a_\nu > b_\mu$, o finalmente $a_\nu < b_\mu$ e di questi fatti si verifica uno solo. Se $a_\nu > b_\mu$ e $b_\mu > c_\varrho$, si ha subito $a_\nu > c_\varrho$ e via dicendo.

3. – Proponiamoci di definire il simbolo

$$\sum_1^n{}_r\, a_\mu^{(r)} = a_\mu^{(1)} + a_\mu^{(2)} + \dots + a_\mu^{(n)},$$

essendo $a_\mu^{(1)}$, $a_\mu^{(2)}, \dots$, ecc., monosemii dello stesso indice. Tale simbolo

---

(¹) Possiamo riconoscere fin d'ora nei monosemii i contrassegni degli infiniti e degli infinitesimi. Infatti, per le definizioni adottate, i monosemii d'indice $\nu > 0$ sono, in valore assoluto, maggiori di tutti i numeri finiti ordinari (monosemii d'indice 0), e i monosemii d'indice minore di 0, pur non essendo nulli, sono minori d'ogni numero finito.

diciamo *somma* dei numeri $a_\mu^{(1)}$, $a_\mu^{(2)}$, ..., che ne sono gli addendi e ne fissiamo il significato colla seguente definizione:

Colla scrittura

$$\sum_1^n {}_r\, a_\mu^{(r)}$$

si intende il risultato, che si ottiene, facendo astrazione dall'indice comune degli addendi, sommandoli insieme e attribuendo al totale l'indice μ stesso.

Così avremo per definizione:

$$a_\mu^{(1)} + a_\mu^{(2)} + \dots + a_\mu^{(n)} = \{a^{(1)} + a^{(2)(n)} + \dots\} + a_\mu \,,$$

qualunque sieno gli addendi a, purchè, si intende, in numero finito.

Sarebbe facilissimo il mostrare, nè occorre insistere maggiormente, come, per la somma di più monosemii dello stesso indice, così definita, valgono tutte le proprietà dell'addizione ordinaria. Accenniamo ancora che, avendo noi inteso parlare della somma algebrica delle a, si trovano senz'altro estese alla sottrazione di monosemii dello stesso indice le proprietà ricordate.

4. – Indichiamo colla lettera G un gruppo di monosemii, i cui elementi abbiano *indici fra loro distinti* (²), per esempio:

$$a_{\nu^{(1)}}^{(1)}, \quad a_{\nu^{(2)}}^{(2)}, \quad \dots, \quad a_{\nu^{(n)}}^{(n)}, \quad \dots$$

e prendiamo a considerare gli indici $\nu^{(1)}$, $\nu^{(2)}$, ..., $\nu^{(n)}$, ..., i quali costitui scono un gruppo Γ di numeri reali ordinarî. Fra tutti i possibili gruppi Γ, presentano per noi uno speciale interesse quelli, che soddisfanno a particolari condizioni.

Per esempio, può accadere che, scelto un numero A arbitrariamente piccolo (cioè grande quanto si vuole e negativo), sia pur sempre finito il numero degli elementi $\nu^{(r)}$ di Γ maggiori di A. (Basta supporre che G e quindi Γ sieno costituiti da un numero finito di elementi, per convincersi della possibilità dell'ipotesi fatta). I gruppi di questo tipo li chiameremo *ellittici* e si potranno anche contraddistinguere, dicendo che essi soddisfanno alla condizione (E) o, se si vuole, che possiedono la proprietà (E).

Del pari si potranno costruire dei gruppi G, di cui i Γ corrispondenti sieno invece tali che, assegnato un numero A arbitrariamente grande, sia sempre finito il numero di elementi $\nu^{(r)}$ di Γ minori di A. Questo

(²) La ragione di questa restrizione apparirà nel paragrafo seguente.

carattere, che, collo scambio delle parole maggiore e minore, corrisponde al precedente, sarà indicato col simbolo (I), ed *iperbolici* si diranno i gruppi corrispondenti.

Fissiamo ora alcune proprietà, che competono ai gruppi ellittici. Vedremo poi che proposizioni del tutto analoghe si potranno enunciare pei gruppi iperbolici.

Suppongasi dunque dato

$$G = a^{(1)}_{\nu^{(1)}},\ a^{(2)}_{\nu^{(2)}},\ \ldots,\ a^{(n)}_{\nu^{(n)}},\ \ldots$$

sicchè sarà $\Gamma = \nu^{(1)}, \nu^{(2)}, \ldots, \nu^{(n)}, \ldots$, il gruppo di numeri reali, rispetto al quale è verificata la (E). Si ha intanto che i numeri $\nu^{(1)}, \nu^{(2)}, \ldots, \nu^{(n)}, \ldots$, non possono ammettere alcun elemento limite l finito. Infatti, ove esso esistesse, in ogni suo intorno comunque piccolo, dovrebbero cadere infiniti elementi del gruppo, nè potrebbe quindi contemporaneamente avvenire, come segue invece dalla (E), che, per $l' < l$, il numero delle $\nu^{(r)}$ maggiori di l' fosse finito. Di più si ha subito:

[E_1] Il gruppo ammette un massimo.

[E_2] Il gruppo è costituito da un numero finito di elementi, oppure è tale che questi elementi hanno per limite inferiore $-\infty$, senza ammettere contemporaneamente alcun altro elemento limite.

[E_3] Si può ordinare il gruppo, costituendo una successione, i cui termini sono disposti in ordine decrescente. Questi sono in numero finito, ovvero decrescono indefinitamente.

Analogamente pei gruppi del tipo (I) si conclude:

[I_1] Esiste un minimo.

[I_2] Gli elementi del gruppo sono in numero finito, ovvero hanno per limite superiore l'infinito, nè ammettono alcun altro elemento limite.

[I_3] Si possono disporre gli elementi del gruppo in ordine crescente. La successione, che così si ottiene, consta di un numero finito di termini, ovvero ha per limite $+\infty$.

I gruppi limitati godono ad un tempo delle proprietà (E) ed (I), e, si riconosce facilmente, che sono i soli.

5. – Un gruppo G di monosemii si può considerare anche sotto un altro punto di vista, immaginando che esso porga il mezzo di determinare uno ed un solo monosemio, quando si fissa un indice ν: ed infatti, se ν è un elemento di Γ, cioè se esiste un monosemio a_ν appartenente al gruppo G, il cui indice sia ν, e in questo caso ne esiste uno solo (n. 4 nota), allora si potrà far corrispondere a_ν a ν; in caso diverso, quando cioè all'indice ν non corrisponde in G alcun monosemio, si potrà convenire che spetti a quell'indice la caratteristica 0. Così la legge di corrispondenza riesce univoca, senza eccezione alcuna; è poi chiaro che assegnare un gruppo di monosemii, i cui elementi abbiano indice distinto, coincide col porre un algoritmo, mediante il quale ogni indice determina una ed una sola caratteristica.

Ciò ritenuto, possiamo dare le seguenti definizioni fondamentali:

Se un gruppo ellittico si considera come dato, la rappresentazione mentale corrispondente si dirà *numero generale ellittico.*

Numero generale iperbolico è la rappresentazione analoga, relativa però ad un gruppo iperbolico.

Queste due classi di numeri verranno studiate ciascuna per sè, indipendentemente dall'altra; tuttavia si troverà che le loro proprietà si corrispondono univocamente e si possono ricavare letteralmente una dall'altra, collo scambio delle parole maggiore e minore, massimo e minimo, ellittico ed iperbolico. Per rendere manifesto tale nesso, addotteremo sul principio una disposizione simultanea, che, colla semplice sostituzione di alcuni vocaboli, posti fra parentesi, permette immediatamente di passare dal sistema ellittico all'iperbolico.

6. – I numeri ellittici e gli iperbolici si chiameranno complessivamente *numeri generali di seconda specie.*

Integranti monosemie di un numero generale, o semplicemente integranti, sono i monosemii del gruppo G corrispondente. Le integranti (n. 4) hanno indici tutti distinti. Dato un numero generale, è fissato l'algoritmo determinativo delle sue integranti (n. 5), si ha cioè una legge, mediante la quale, scelto un indice, si risale alla integrante corrispondente.

Il carattere (E) $((I))$ di ciascun gruppo, il quale definisce un numero generale ellittico (iperbolico) a, dà luogo alle seguenti proprietà dei numeri stessi.

I. *È sempre finito il numero delle integranti di* a, *il cui indice sia maggiore* (*minore*) *di un numero prefissato* A.

II. *Tra le integranti, ve ne ha una* a_ν *di indice massimo* (*minimo*); *essa si dirà* valore principale *del numero* a, *che si considera, e si scriverà* $a_\nu = [a]_E$ $(a_\nu = [a]_I)$. A denotare questo fatto, diremo talvolta che a appartiene all'indice ν.

III. *Le integranti di un numero* a, $a^{(0)}_{\nu^{(0)}}$, $a^{(1)}_{\nu^{(1)}}, \dots, a^{(n)}_{\nu^{(n)}}, \dots$ *si possono ordinare in modo che i loro indici* $\nu^{(0)}, \nu^{(1)}, \dots, \nu^{(n)}$ *costituiscano una successione decrescente* (*crescente*). Per mettere in evidenza questa proprietà, e senza attribuire per adesso alcun particolare significato al segno $+$, (cfr. n. 9 e 15), indicheremo talora a col simbolo:

$$a^{(0)}_{\nu^{(0)}} + a^{(1)}_{\nu^{(1)}} + \dots + a^{(n)}_{\nu^{(n)}} + \dots$$

od anche, secondo i casi,

$$\sum_{0}^{n}{}_{r}\, a^{(r)}_{\nu(r)}\,, \qquad \text{ovvero} \qquad \sum_{0}^{\infty}{}_{r}\, a^{(r)}_{\nu(r)}\,,$$

dove supponiamo le ν, che sono tutte distinte (n. 4), disposte in ordine decrescente (crescente) e tali oltre a ciò (n. 4, $[E_3]$ ed $[I_3]$ rispettivamente) che, se il numero delle integranti non è finito, $\lim\limits_{r=\infty} \nu^{(r)} = -\infty$ ($\lim\limits_{r=\infty} \nu^{(r)} = +\infty$).

Tanto fra i numeri ellittici che fra gli iperbolici, sono compresi i monosemii, i quali provengono da gruppi di un solo elemento. Essi coincidono evidentemente col loro valore principale ed appartengono al proprio indice ([3]).

Ogni gruppo nullo, privo cioè di elementi, sta a rappresentare lo zero. In tale condizione, per le convenzioni fatte (n. 5), sono quei gruppi, pei quali a ciascun indice corrisponde la caratteristica zero.

Considerare un numero ellittico (iperbolico) a, rispetto all'indice ν, o prendere il valore di a per $E = \nu$ ($I = \nu$), significa fare astrazione da tutte le integranti di a, il cui indice sia minore (maggiore) di ν. Il risultato di questa operazione, per la proprietà fondamentale I., è sempre costituito da un numero finito di integranti monosemie e queste (n. 4 alla fine) definiscono un nuovo numero ellittico $\operatorname*{Val}\limits_{E=\nu} a$ (iperbolico $\operatorname*{Val}\limits_{I=\nu} a$), che si leggerà valore di a rispetto all'indice ν, il quale ha, in ordine decrescente (crescente), fino a quella d'indice ν incluso, le stesse integranti di a.

7. – Le definizioni seguenti sono applicabili tanto al sistema ellittico che a quello iperbolico. *Eguali* si dicono due numeri di seconda specie, quando lo sono tutte le loro integranti monosemie, cioè quando i gruppi corrispondenti coincidono. Evidentemente questa definizione vale anche pei monosemii, benchè si riduca allora alla semplice enunciazione del principio di identità.

Dati due numeri generali a e b, diremo che: $a \gtrless b$ *secondochè il valore principale di* a (n. 6, II) (si tratta di monosemii e quindi ci rife-

---

([3]) Tanto il sistema ellittico, quanto il sistema iperbolico, si presentano quale una generalizzazione dell'ordinario campo numerico, ottenuta introducendo elementi infiniti ed infinitesimi (si vegga la nota al n. 2). Tuttavia, nel solo sistema ellittico, valgono quelle proprietà, che si attribuiscono empiricamente ai concetti di infinito e di infinitesimo, e quindi i numeri del sistema ellittico, a differenza degli iperbolici, si troveranno rappresentabili geometricamente da segmenti limitati, in modo conforme all'intuizione spaziale.

riamo al n. 2) *è maggiore o minore del valore principale di b* (4). Se le integranti principali e un certo numero tra le successive riescono tra loro eguali, dovremo confrontare la prima coppia di integranti, che nell'ordine degli indici (decrescente o crescente, secondochè si tratta di numeri ellittici od iperbolici) riescono disuguali, e, in conformità alla relazione, risultante da tale paragone, si stabilirà la disuguaglianza fondamentale tra i due numeri in questione. Nè può accadere, per la prima definizione, che le integranti principali dei due numeri e tutte le successive siano uguali, senza che questi pure sieno eguali tra loro. Al solito questa definizione riesce identica, quando si applichi ai monosemii, i quali (n. 6) coincidono col valore principale. Si riconosce immediatamente, che, anche pei numeri di seconda specie, valgono le leggi caratteristiche dei segni $=$, $>$ e $<$.

Un numero di seconda specie si dirà *positivo* o *negativo*, secondo che è positivo o negativo (n. 2) il suo valore principale.

Due numeri ellittici (iperbolici) a e b *si dicono eguali rispetto all'indice* ν, e si scrive:

$$\underset{E=\nu}{a=b} \qquad \left(\underset{I=\nu}{a=b}\right),$$

quando $\underset{E=\nu}{\mathrm{Val}}\, a = \underset{E=\nu}{\mathrm{Val}}\, b \left(\underset{I=\nu}{\mathrm{Val}}\, a = \underset{I=\nu}{\mathrm{Val}}\, b\right)$.

Addizione - sottrazione - moltiplicazione.

8. – Dati n gruppi di monosemii G_i $(i = 1, 2, ..., n)$ (sempre nel senso indicato al n. 4, cioè ciascuno costituito da monosemii con indici tra loro distinti), possiamo costruirne un altro G, che chiameremo *somma* degli n dati, il quale comprenda tutti gli elementi di ciascun G_i, con questa avvertenza però che, se più monosemii, nei diversi gruppi, corrispondono ad uno stesso indice ν, a quest'indice si attribuisca in G, come caratteristica, la somma delle caratteristiche, che gli spettano nei vari G_i. Il gruppo somma comprende adunque tutti i monosemii dei diversi G_i, che hanno indice fra loro distinto e la somma di quelli, cui compete indice eguale (n. 3).

(4) L'osservazione, fatta alla fine del n. 4, che i gruppi limitati sono ad un tempo ellittici ed iperbolici, potrebbe far credere che, rispetto alle relazioni di disuguaglianza, il confronto fra due di tali gruppi, a seconda che si risguardano ellittici od iperbolici, possa dar luogo a contraddizione. Si elimina tale dubbio, quando si avverta che qui si tratta di *numeri ellittici* od *iperbolici* e non dei gruppi corrispondenti, e che due numeri, l'uno ellittico e l'altro iperbolico, anche se provengono da un medesimo gruppo limitato, *sono distinti*, poichè (n. 5) il primo è la rappresentazione mentale del gruppo, in quanto esso è ellittico, il secondo invece è la rappresentazione dello stesso gruppo, ma in quanto gode della proprietà (I).

Se ciascun gruppo G_i è ellittico (iperbolico) lo è del pari il gruppo somma.

Scelto infatti un numero qualunque A, se si indica con $k^{(i)}$ il numero degli elementi di G_i, il cui indice sia maggiore (minore) di A, sarà al più

$$\sum_1^n {}_i\, k^{(i)} ,$$

che è, in ogni caso, finito, il numero degli elementi del gruppo G, cui spetta un indice maggiore (minore) di A.

9. – Una operazione da eseguirsi sui numeri di seconda specie si definirà in generale, enunciando una legge, per mezzo della quale, dati certi elementi, si può costruire un nuovo numero od un sistema di nuovi numeri.

Somma o *totale* di un numero finito n di numeri ellittici (iperbolici) $a_1), a_2), \ldots, a_n)$, che corrispondono rispettivamente ai gruppi $G_1, G_2, \ldots, G_n$ ellittici (iperbolici), è il numero definito dal gruppo G somma (n. 8) di $G_1, G_2, \ldots, G_n$.

Questa operazione comprende come caso particolare la somma di più monosemii dello stesso indice, precedentemente considerata (n. 3); essa ha poi le proprietà caratteristiche dell'addizione ordinaria ([5]). Il modo, col quale si costruiscono le integranti della somma s di n addendi $a_1)$, $a_2), \ldots, a_n)$ mostra che, se ad un certo indice non corrisponde integrante in nessuno degli addendi, lo stesso avviene per la somma; in particolare, se gli indici principali di $a_1), a_2), \ldots, a_n)$ sono tutti inferiori (superiori) ad un certo numero K, ciò si verifica pure per l'indice principale di s, ecc.

Un numero

$$a = a^{(0)}_{\nu^{(0)}} + a^{(1)}_{\nu^{(1)}} + \ldots + a^{(n)}_{\nu^{(n)}} ,$$

costituito da un numero finito di integranti, ne è altresì la somma. Infatti il gruppo somma relativo ai monosemii

$$a^{(0)}_{\nu^{(0)}} , \quad a^{(1)}_{\nu^{(1)}} , \quad \ldots , \quad a^{(n)}_{\nu^{(n)}}$$

([5]) Per tutte le operazioni aritmetiche sui numeri di seconda specie si troverà mantenuto l'algoritmo ordinario. Questa caratteristica, comune ai numeri del Prof. VERONESE e ai sistemi ellittico ed iperbolico, li distingue essenzialmente dai numeri transfiniti di CANTOR, dagli ordini di infinità del DU BOIS-REYMOND, dai momenti dello STOLZ. Notiamo poi, come già ebbe ad osservare il Prof. VERONESE, nella sua opera citata, che questa possibilità di conservare tutte le leggi fondamentali dell'aritmetica non è in contraddizione col teorema di WEIERSTRASS, da cui discende che, all'infuori dei numeri reali e complessi ordinarii, non esiste alcun altro sistema, *con un numero finito n di unità indipendenti,* per il quale valgano le ordinarie regole di calcolo. Infatti nè al sistema ellittico, nè all'iperbolico può applicarsi una tale proposizione, poichè ciascuno dei due sistemi contiene un numero infinito di unità I_ν; dove l'indice ν assume tutti i valori reali da $-\infty$ a $+\infty$.

è precisamente quello, che definisce il numero a. Con ciò si giustifica, per il caso di un numero finito di integranti, la eguaglianza

$$a = a^{(0)}_{\nu^{(0)}} + a^{(1)}_{\nu^{(1)}} + \ldots + a^{(n)}_{\nu^{(n)}},$$

assunta precedentemente (n. 6, III) come una semplice convenzione. Si vedrà in seguito (n. 16) la ragione del simbolo

$$\sum_0^\infty{}_r\, a^{(r)}_{\nu^{(r)}}.$$

Dato un numero di seconda specie a, se si cambia il segno alle caratteristiche di tutti gli elementi del gruppo corrispondente G, riesce definito un nuovo numero $(-a)$ della stessa natura di a (cioè ellittico od iperbolico insieme ad a) e tale che $a + (-a) = 0$. Infatti (n. 6) il gruppo somma è tale che ad ogni indice corrisponde la caratteristica 0. Fissata per ogni numero l'esistenza del suo opposto, possediamo gli elementi per definire la sottrazione e riconoscere che è l'operazione inversa della somma: così per la somma algebrica, ecc.

Per *valore assoluto* di un numero negativo (n. 7) si intende il numero positivo opposto. Vale, rispetto ai valori assoluti, il noto teorema che il modulo della somma non è mai maggiore della somma nè minore della differenza dei moduli.

Si verifica subito che considerare una somma rispetto ad un dato indice ν (n. 6) val quanto considerare separatamente ciascun addendo rispetto allo stesso indice e sommare poi i risultati, e cioè:

$$\operatorname*{Val}_{E=\nu}(a+b) = \operatorname*{Val}_{E=\nu} a + \operatorname*{Val}_{E=\nu} b,$$

se i due numeri a e b sono ellittici, ed analogamente:

$$\operatorname*{Val}_{I=\nu}(a+b) = \operatorname*{Val}_{I=\nu} a + \operatorname*{Val}_{I=\nu} b,$$

se trattasi di due addendi iperbolici.

10. – Chiameremo *prodotto* di più monosemii, quel monosemio, che ha per caratteristica il prodotto delle caratteristiche e per indice la somma degli indici. Così, per definizione:

$$a^{(1)}_{\nu^{(1)}} \cdot a^{(2)}_{\nu^{(2)}} \ldots a^{(n)}_{\nu^{(n)}} = \{a^{(1)} \cdot a^{(2)} \ldots a^{(n)}\}_{(\nu^{(1)} + \nu^{(2)} + \ldots + \nu^{(n)})}.$$

Si trovano senz'altro estese alla moltiplicazione dei monosemii i caratteri tutti della moltiplicazione ordinaria, per il fatto che le proprietà fondamentali associativa e commutativa valgono separatamente per il prodotto delle caratteristiche e per la somma degli indici.

11. – Dati due gruppi ellittici (iperbolici) G_1 e G_2, i cui elementi, disposti in ordine decrescente (crescente) (n. 4 $[E_3]$ o $[I_3]$), sieno rispettivamente:

$$a^{(0)}_{\nu^{(0)}},\ a^{(1)}_{\nu^{(1)}},\ \dots,\ a^{(n)}_{\nu^{(n)}},\ \dots;\qquad b^{(0)}_{\mu^{(0)}},\ b^{(1)}_{\mu^{(1)}},\ \dots,\ b^{(n)}_{\mu^{(n)}}, \dots,$$

e, scelto un numero A ad arbitrio, noi vogliamo provare che il numero dei monosemii c_ϱ del tipo:

$$a^{(r)}_{\nu^{(r)}} b^{(s)}_{\mu^{(s)}} = \{a^{(r)} b^{(s)}\}_{\nu^{(r)}+\mu^{(s)}},$$

cui compete un indice $\varrho = \nu^{(r)} + \mu^{(s)} > A$ ($\varrho = \nu^{(r)} + \mu^{(s)} < A$), è in ogni caso finito o nullo. Ed invero, se $\nu^{(r)} + \mu^{(s)}$ deve essere maggiore (minore) di A, a più forte ragione dovranno sussistere le due disuguaglianze $\nu^{(r)} + \mu^{(0)} > A$ e $\nu^{(0)} + \mu^{(s)} > A$ ($\nu^{(r)} + \mu^{(0)} < A$ e $\nu^{(0)} + \mu^{(s)} < A$). La prima, che può essere scritta $\nu^{(r)} > A - \mu^{(0)}$ ($\nu^{(r)} < A - \mu^{(0)}$), siccome l'indice $\nu^{(r)}$ deve, in ogni caso, appartenere ad un gruppo ellittico (iperbolico), mostra che ve ne ha al più un certo numero finito, i quali fanno al caso nostro; così la seconda $\mu^{(s)} > A - \nu^{(0)}$ ($\mu^{(s)} > A - \nu^{(0)}$), rispetto a μ. Combinando due a due, in ogni maniera, questi valori possibili, resta pur sempre finito il numero di coppie distinte $\nu^{(r)}$ e $\mu^{(s)}$, per cui può essere verificata la disuguaglianza $\nu^{(r)} + \mu^{(s)} > A$ ($\nu^{(r)} + \mu^{(s)} < A$). Dovrà dunque essere finito il numero delle

$$c_\varrho = a^{(r)}_{\nu^{(r)}} b^{(s)}_{\mu^{(s)}}$$

per cui è $\varrho > A$ ($\varrho < A$). Come corollario si ha che è del pari finito il numero dei monosemii c_ϱ, ottenuti nello stesso modo, pei quali invece ϱ è eguale ad un numero prefissato ν.

Coi due gruppi ellittici (iperbolici) G_1 e G_2 si può costruirne un terzo Π, i cui elementi sieno dati dal prodotto di un monosemio qualunque $a^{(r)}_{\nu(r)}$ di G per un altro qualsiasi $b^{(s)}_{\mu(s)}$ di G_2, colla solita avvertenza (cfr. n. 8) di considerare come elemento unico, relativo ad un dato indice ν, la somma algebrica di tutti quelli (per il corollario della proposizione precedente sono certo in numero finito), cui compete lo stesso indice ν.

Il nuovo gruppo, così ottenuto, per la dimostrazione data qui sopra, è esso pure ellittico (iperbolico). Si vede poi subito che il monosemio di indice massimo (minimo) si ottiene moltiplicando fra loro

$$a^{(0)}_{\nu^{(0)}} \quad \text{e} \quad b^{(0)}_{\mu^{(0)}},$$

che hanno rispettivamente l'indice massimo (minimo) in G_1 e G_2.

12. – Per *prodotto* di due numeri ellittici (iperbolici) a e b, che corrispondono rispettivamente ai gruppi G_1 e G_2, si intende quel terzo numero ellittico (iperbolico) c, che viene definito dal gruppo Π prodotto di G_1 per G_2.

Se si tien presente l'algoritmo, col quale si è costituito il gruppo Π, si conclude facilmente che la moltiplicazione è commutativa, associativa e distributiva. Se ne estende subito la definizione al caso di un numero qualunque n di fattori.

Abbiamo (n. 6-II, 11):

$$[a]_E[b]_E = [ab]_E\,, \qquad ([a]_I[b]_I = [ab]_I)\,.$$

Il prodotto di due numeri generali, così definito, coincide col semplice prodotto di due monosemii, caso mai i fattori fossero entrambi monosemii. Se uno dei fattori è monosemio, le integranti del prodotto si han subito, moltiplicando il fattore monosemio per le singole integranti dell'altro fattore.

Si intende che, se k è intero e positivo: $a^k = \overbrace{a\cdot a \ldots a}^{k \text{ volte}}$; di più, se a è monosemio d'indice ν: $(a_\nu)^k = (a^k)_{k\nu}$ L'osservazione fatta or ora che il valore principale del prodotto è il prodotto dei valori principali, si estende naturalmente alle potenze e porge: $[a^k]_E = \{[a]_E\}^k$ $([a^k]_I = \{[a]_I\}^k)$, da cui si desume che, se a appartiene all'indice ν, la sua k-esima potenza appartiene all'indice $k\nu$.

Limiti e serie.

13. – Sia S una successione di numeri ellittici (iperbolici) $y^{(1)}$, $y^{(2)}$, ..., $y^{(n)}$, ... Diciamo che un certo numero l è il *limite ellittico* (*iperbolico*) *di quella successione* e scriviamo

$$E\lim_{n=\infty} y^{(n)} = l\,, \qquad (I\lim_{n=\infty} y^{(n)} = l)$$

quando, per ogni quantità positiva σ, comunque piccola (grande), previamente assegnata, si può determinare un elemento della successione $y^{(N)}$, tale che, per tutti gli y ad esso successivi, cioè per $n > N$, si abbia costantemente: $|l - y^{(n)}| < \sigma$ $(|l - y^{(n)}| > \sigma)$.

Rispetto al sistema ellittico, si può osservare che la definizione precedente è analoga a quella, che si dà nel caso delle successioni ordinarie, con questa differenza che il nostro σ non è vincolato ad essere uno dei soliti numeri reali, ma può supporsi appartenente ad un indice algebricamente piccolo quanto si vuole ([6]).

([6]) Questo si potrebbe anche esprimere dicendo che, nelle successioni di numeri ellittici sopra considerate, l'elemento variabile finisce col differire dal proprio limite meno di ogni prefissato infinitesimo, per quanto d'ordine elevato.

14. – Per i limiti definiti nel paragrafo precedente, malgrado i caratteri, che li distinguono dagli ordinari (anzi gli iperbolici non hanno con essi alcuna analogia), valgono gli stessi teoremi, che si danno abitualmente. Ci accontenteremo di stabilire la condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza del limite, poichè tutte le altre proprietà discendono in modo affatto evidente.

Mostriamo dunque che:

Condizione necessaria e sufficiente affinchè una successione S di numeri ellittici (iperbolici) ammetta un limite ellittico (iperbolico) l, si è, che per ogni σ arbitrariamente piccolo (grande) e positivo, si possa determinare un elemento $y^{(N)}$ della successione, tale che, per due $y^{(n)}$ ed $y^{(m)}$ qualisivogliano ad esso successivi, cioè per $n, m > N$, si abbia costantemente: $|y^{(n)} - y^{(m)}| < \sigma$ $(|y^{(n)} - y^{(m)}| > \sigma)$.

La condizione è necessaria. Infatti, se l è il limite di S, dato σ (di cui porremo in evidenza l'indice principale ν, scrivendo $\sigma_{(\nu)}$), scegliamo una caratteristica positiva ζ ad arbitrio ed un indice $\nu' < \nu$ $(\nu' > \nu)$; per ipotesi, esisterà un N tale che per $n, m > N$, ma del resto qualisivogliano, sono verificate ad un tempo le disuguaglianze:

$$(1)\ |l - y^{(n)}| < \zeta_{\nu'}, \qquad (2)\ |l - y^{(m)}| < \zeta_{\nu'},$$
$$((1)\ |l - y^{(n)}| > \zeta_{\nu'}, \qquad (2)\ |l - y^{(m)}| > \zeta_{\nu'}).$$

La (1) ci dice che $l - y^{(n)}$ appartiene al più all'indice ν', cioè non contiene alcuna integrante di indice maggiore (minore) di ν', e quindi le integranti di l, il cui indice è maggiore (minore) di ν', dovranno anche essere integranti di $y^{(n)}$ e reciprocamente, poichè in caso diverso, comparirebbero nella differenza fra l ed $y^{(n)}$ (n. 9) integranti coll'indice maggiore (minore) di ν', ciò, che per la (1), non può avvenire. Lo stesso dicasi di $y^{(m)}$, sicchè gli $y^{(n)}$ ed $y^{(m)}$ hanno, fino a quella d'indice $\nu' < \nu$ $(\nu' > \nu)$, le stesse integranti; la loro differenza appartiene dunque tutt'al più all'indice ν' e, in ogni caso, qualunque sieno n ed m, purchè maggiori di N, si ha:

$$(3) \qquad |y^{(n)} - y^{(m)}| < \sigma_{(\nu)} \qquad ((3)\ |y^{(n)} - y^{(m)}| > \sigma_{(\nu)}).$$

La condizione (3) è anche sufficiente. Mostreremo infatti come, supponendola soddisfatta, si può determinare un numero l, che si riconosce essere limite della successione.

Per definire l, gioverà costruire un gruppo G, il quale si dimostrerà poi essere ellittico (iperbolico). A tale scopo, scelto un indice ν, si prenda $\nu' < \nu$ $(\nu' > \nu)$ e si osservi che, per ipotesi, essendo σ una caratteristica positiva arbitraria, si può determinare un $y^{(N)}$ tale che, per ogni coppia di elementi successivi $y^{(n)}$ ed $y^{(m)}$, si abbia:

$$|y^{(n)} - y^{(m)}| < \sigma_{(\nu')} \qquad (|y^{(n)} - y^{(m)}| > \sigma_{(\nu')}) .$$

Come precedentemente, si desume da questa diseguaglianza che $y^{(n)}$ ed $y^{(m)}$, cioè insomma tutte le y posteriori ad $y^{(N)}$, hanno, fino all'indice $\nu' < \nu$ $(\nu' > \nu)$ e quindi certo fino all'indice ν incluso, le stesse integranti. Per ogni valore dell'indice ν, esiste adunque un $y^{(N)}$ tale che tutte le y ad essa successive hanno la stessa integrante d'indice ν, con che si comprende anche il caso che nessuna di tali y abbia integrante d'indice ν. Si può quindi costruire un gruppo G di monosemii, convenendo attribuire come caratteristica a ciascun indice ν quella stessa, che spetta a ν in tutte le y, successive al detto $y^{(N)}$. Il gruppo G è ellittico (iperbolico), ossia, scelto un numero qualunque ϱ, i monosemii di G con indice maggiore (minore) di ϱ sono in numero finito, perchè essi appartengono anche, per definizione, ad una qualunque fra le y, che seguono un certo $y^{(N)}$, e queste y sono numeri ellittici (iperbolici).

Al gruppo G corrisponde adunque un numero ellittico (iperbolico) l, e questo, per il modo con cui sono costruite le sue integranti, è tale che, scelto un numero positivo comunque piccolo (grande) $\sigma_{(\nu)}$, esiste un $y^{(N)}$ tale che, per $n > N$, ogni $y^{(n)}$ ammette, fino a quella d'indice ν inclusa, le stesse integranti di l. Ne segue che: $|l - y^{(n)}| < \sigma_{(\nu)}$ $(|l - y^{(n)}| > \sigma_{(\nu)})$ per tutti i valori di $n > N$, cioè l è il limite ellittico (iperbolico) di S.

15. – Diciamo una parola anche delle serie, i cui termini sieno numeri generali di seconda specie, applicando queste nozioni sui limiti.

Se si indicano i termini, che in generale saranno numeri ellittici (iperbolici), con $u^{(0)}$, $u^{(1)}, \ldots, u^{(n)}, \ldots$ e si pone

$$S^{(r)} = \sum_{0}^{r}{}_{k}\, u^{(k)} ,$$

diremo che la serie proposta è *ellitticamente* (*iperbolicamente*) *convergente*, quando esiste il limite ellittico (iperbolico) S della successione $S^{(r)}$. Questo limite si chiamerà *somma della serie.*

Per stabilire la convergenza di una serie, gioverà spesso ricorrere al seguente teorema:

Una serie è convergente, se la successione di numeri reali, costituita cogli indici principali $\nu^{(0)}{}_0$, $\nu^{(1)}{}_0, \ldots, \nu^{(n)}{}_0, \ldots$ *dei suoi termini* $u^{(0)}$, $u^{(1)}, \ldots, u^{(n)}, \ldots$, *ha, in senso ordinario, per limite* $-\infty$ $(+\infty)$ *ed inversamente.*

Infatti, per la prima parte, si osservi che la successione S ammette limite, se (n. 14), per ogni assegnato $\sigma_{(\nu)}$, esiste un $S_{(N)}$, tale che due $S^{(n)}$ ed $S^{(m)}$ qualisivogliono, ad esso successivi, differiscano fra loro in valore assoluto meno (più) di $\sigma_{(\nu)}$. Ora l'ipotesi fatta sugli indici principali $\nu^{(0)_0}, \nu^{(1)_0}, \ldots, \nu^{(n)_0}, \ldots,$ permette di determinare un certo $\nu^{(N)_0}$, a partire dal quale, tutti i successivi sono minori (maggiori) di ν. Conseguentemente per $n > m > N$ ogni differenza,

$$S^{(n)} - S^{(m)} = \sum_{n+1}^{m}{}_k\, u^{(k)}$$

apparterrà ad un indice minore (maggiore) di ν (n. 9), avvenendo ciò per ciascuno degli addendi $u^{(m+1)}, u^{(m+2)}, \ldots, u^{(n)}$, di cui essa differenza $S^{(n)} - S^{(m)}$ è la somma. Sarà pertanto: $|S^{(n} - S^{(m)}| < \sigma_{(\nu)}$, $(|S^{(n)} - S^{(m)}| > \sigma_{(\nu)})$, da cui si conclude l'esistenza del limite e la convergenza della serie. Ammesso invece che esista

$$E \lim_{n=\infty} S^{(n)} = S \qquad (I \lim_{n=\infty} S^{(n)} = S)\,,$$

per quanto piccolo (grande) si fissi A, dico che esiste, fra gli indici prinpali $\nu^{(k)_0}$ dei termini $u^{(k)}$ della serie, un certo $\nu^{(N)_0}$ tale che, per $n > N$, $\nu^{(n)_0} < A$ $(\nu^{(n)_0} > A)$. Infatti, dacchè la serie è convergente, a partire da un certo $S^{(N)}$, la differenza fra due S successive qualisivogliono e quindi in particolare fra due S consecutive, cioè un qualunque $u^{(n)}$ per $n > N$, appartiene ad un indice minore (maggiore) di A. Questo mostra appunto che la successione $\nu^{(0)_0}, \nu^{(1)_0}, \ldots, \nu^{(n)_0}, \ldots,$ costituita cogli indici principali dei termini della serie, ha per limite $-\infty$ $(+\infty)$.

Per le serie ellittiche, il teorema precedente si può anche enunciare in modo diverso, osservando che, se la successione degli indici principali ha per limite $-\infty$, quella dei termini corrispondenti, come si può verificare facilmente, ha per limite 0, e quindi: *Condizione necessaria e sufficiente affinchè una serie a termini ellittici converga, è che la successione dei suoi termini abbia per limite ellittico* 0.

Va notato che, per le serie a termini reali o complessi ordinarii, la condizione analoga alla precedente, quantunque necessaria, in generale non basta a stabilire la convergenza.

Si può ora dimostrare che *la somma di una serie ellitticamente* (*iperbolicamente*) *convergente appartiene al massimo* (*minimo*) *fra gli indici principali dei suoi termini o ad un indice minore* (*maggiore*).

Infatti, siccome la successione $\nu^{(0)_0}, \nu^{(1)_0}, \ldots, \nu^{(n)_0}, \ldots,$ ha per limite $-\infty$ $(+\infty)$, così, fra gli indici principali $\nu^{(0)_0}, \nu^{(1)_0}, \ldots, \nu^{(n)_0}, \ldots,$ o ve ne ha uno $\nu^{(p)_0}$ più grande (piccolo) degli altri, o ve ne ha un certo numero finito m, $\nu^{(p(1))_0}, \nu^{(p(2))_0}, \ldots, \nu^{(p(m))_0}, \ldots,$ cui compete lo stesso valore massimo (minimo) $\nu^{(p)_0}$. In ogni caso a costituire gli elementi $S^{(r)}$ della successione S, non entrano integranti d'indice superiore (inferiore) a un certo $\nu^{(p)_0}$; lo stesso avviene adunque per il limite S della successione, cioè per la somma della serie.

Se i termini $u^{(1)}, u^{(2)}, \ldots, u^{(n)}, \ldots$ *hanno indici principali fra loro distinti, la somma della serie appartiene effettivamente al massimo (minimo) di quelli* $\nu^{(p)_0}$ e ciò perchè $S^{(p)}$, gli S successivi e quindi il loro limite appartengono in questo caso proprio all'indice $\nu^{(p)_0}$ e non ad un indice minore (maggiore), la qual cosa invece è possibile, quando vi sono più termini $u^{(p(1))}, u^{(p(2))}, \ldots, u^{(p(m))}$ collo stesso indice principale massimo (minimo), poichè allora la somma delle corrispondenti integranti potrebbe anche essere nulla: *Di più il valor principale della somma della serie coincide col valor principale di quel suo unico termine, cui spetta l'indice massimo (minimo)* $\nu^{(p)_0}$.

Osserviamo, poichè in seguito si dovrà farne uso, che valgono, rispetto alle serie convergenti di seconda specie, teoremi analoghi a quelli, che si danno nel campo ordinario. Così, per esempio, applicando il teorema che il limite della somma è eguale alla somma dei limiti (per questo rimandiamo all'avvertenza fatta in principio del paragrafo 14), si trova:

$$\sum_0^\infty {}_k u^{(k)} = u^{(p(1))} + u^{(p(2))} + \ldots + u^{(p(m))} + \sum_0^\infty {}_{\bar{k}} u^{(\bar{k})},$$

dove $\bar{k}$ prende tutti i valori interi da 0 ad ∞, esclusi $p^{(1)}, p^{(2)}, \ldots, p^{(m)}$.

Inoltre, e anche di questo dovremo tener conto (n. 20), si può eseguire il prodotto di due serie convergenti di seconda specie in modo del tutto analogo a quello, con cui si ottiene il prodotto di serie ordinarie a termini reali o complessi assolutamente convergenti.

16. – Presenta qualche interesse il caso, in cui i termini $u^{(0)}, u^{(1)}, \ldots, u^{(n)}, \ldots$, di una serie S sieno ordinatamente le integranti

$$a^{(0)}_{\nu^{(0)}}, \quad a^{(1)}_{\nu^{(1)}}, \quad \ldots, \quad a^{(n)}_{\nu^{(n)}}, \quad \ldots$$

di uno stesso numero ellittico (iperbolico) a, supposto al solito

$$\nu^{(0)} > \nu^{(1)} > \ldots > \nu^{(n)} > \ldots \qquad (\nu^{(0)} < \nu^{(1)} < \ldots < \nu^{(n)} < \ldots)\,.$$

La successione degli indici principali relativi ai termini di S è qui costituita dagli indici $\nu^{(0)}, \nu^{(1)}, \ldots, \nu^{(n)}, \ldots$ delle integranti di a; ma una tale successione, restando, per ipotesi, escluso che sia costituita da un numero finito di elementi (n. 6, III) ha per limite $-\infty$ $(+\infty)$, dunque (n. 15) la serie S è convergente e l'algoritmo (n. 14), con cui si definiscono le integranti successive del limite, mostra la loro coincidenza colle integranti di a.

D'altronde due numeri di seconda specie sono eguali quando lo sieno (n. 7) le loro integranti monosemie, sicchè:

$$E \lim_{\nu=\infty} S^{(\nu)} = a \qquad (I \lim_{\nu=\infty} S^{(\nu)} = a)$$

cioè ogni numero ellittico (iperbolico) è la somma della serie avente per termini, nell'ordine decrescente (crescente) degli indici, le sue integranti monosemie.

In ciò sta adunque (n. 6, III; 9) la giustificazione dell'uguaglianza simbolica:

$$a = \sum_{0}^{\infty}{}_k\, a^{(k)}_{\nu(k)} .$$

Si ha inoltre (n. 15) che ogni numero di seconda specie a è eguale alla somma di m qualunque tra le sue integranti, col numero definito dalle integranti rimanenti, cioè:

$$a = a^{(p^{(1)})}_{\nu(p^{(1)})} + a^{(p^{(2)})}_{\nu(p^{(2)})} + \ldots + a^{(p^{(m)})}_{\nu(p^{(m)})} + \sum_{0}^{\infty}{}_{\bar{k}}\, a^{(\bar{k})}_{\nu(\bar{k})} ,$$

dove $\bar{k}$ prende tutti i valori da 0 ad ∞, eccettuati

$$p^{(1)}, \quad p^{(2)}, \quad \ldots, \quad p^{(m)} .$$

17. – Alle considerazioni istituite (n. 13 e 14) sui limiti ellittici, si collega naturalmente il concetto di una successione $y^{(1)}$, $y^{(2)}$, ..., $y^{(n)}$,..., i cui elementi possono divenire e mantenersi discosti da un certo numero l meno di ogni quantità σ_ν di caratteristica σ arbitrariamente piccola, ma di indice determinato ν. Il numero l si dice allora *limite della successione rispetto all'indice* ν.

Riguardo alle proposizioni di questo paragrafo, ci converrà notare che non esistono le corrispondenti del sistema iperbolico, quantunque si tratti di una generalizzazione di concetti ordinarî. Veramente la definizione analoga a questa di limite, rispetto ad un determinato indice, si potrebbe dare nell'altro sistema, ma essa non soddisfa più a quelle condizioni, che valgono invece pei numeri ellittici.

Rispetto a queste, cominciamo coll'osservare che, posto $\nu = 0$, si ritrova il concetto ordinario di limite. Mentre una successione $y^{(1)}$, $y^{(2)}$, ..., $y^{(n)}$, ..., non può ammettere due limiti ellittici distinti (n. 14, Avvertenza) è facile invece riconoscere che, se essa ammette un limite l rispetto all'indice ν, ne ammette infiniti altri, cioè tutti i numeri della forma $l + \alpha$, essendo α un numero qualsiasi, purchè appartenente ad un indice $\nu' < \nu$.

In primo luogo, se $|l - y^{(n)}| < \sigma_\nu$, la differenza fra l ed $y^{(n)}$ appartiene ad un indice $< \nu$ ovvero, pur appartenendo all'indice ν, ha per caratteristica principale un numero minore di σ; lo stesso avviene evidentemente per la differenza fra $l + \alpha$ ed $y^{(n)}$, di guisa che, insieme con $|l - y^{(n)}| < \sigma_\nu$, sarà sempre anche $|l + \alpha - y^{(n)}| < \sigma_\nu$, ossia $l + \alpha$ potrà dirsi esso pure limite di y rispetto all'indice ν. Inoltre si vede subito che, se un certo L è limite di y rispetto all'indice ν, la differenza fra L e l non può appartenere all'indice ν; posto quindi:

$$L = l + \alpha\,, \qquad \text{dovrà essere:} \quad \operatorname*{Val}_{E=\nu} \alpha = 0\,.$$

Segue da ciò che:

$$\operatorname*{Val}_{E=\nu} L = \operatorname*{Val}_{E=\nu} l\,,$$

cioè, considerati rispetto all'indice ν, tutti i limiti della successione proposta sono coincidenti.

Se si risguarda come limite di una successione, rispetto ad un indice determinato, soltanto il valore comune di tutti i suoi limiti, rispetto a quell'indice, si può ancora asserire che il limite di una successione è unico; questo è appunto il caso dei limiti ordinari.

Si possono dimostrare con facilità i due teoremi seguenti:

Perchè la successione $y^{(1)}, y^{(2)}, \ldots, y^{(n)}, \ldots$, ammetta limite rispetto all'indice ν, è necessario e basta che ciò avvenga per la successione:

$$\operatorname*{Val}_{E=\nu} y^{(1)}, \quad \operatorname*{Val}_{E=\nu} y^{(2)}, \quad \ldots, \quad \operatorname*{Val}_{E=\nu} y^{(n)}, \quad \ldots$$

Condizione necessaria e sufficiente perchè una data successione $y^{(1)}$, $y^{(2)}, \ldots, y^{(n)}, \ldots$ ammetta limite, rispetto all'indice ν, si è che, per ogni σ_ν di caratteristica σ arbitrariamente piccola e positiva, esista un $y^{(N)}$ tale che, per $n, m > N$, si abbia costantemente: $|y^{(n)} - y^{(m)}| < \sigma_\nu$.

Divisione.

18. – Ritornando a proprietà dei numeri di seconda specie, le quali si corrispondono nei due sistemi ellittico ed iperbolico, ci riferiremo d'ora innanzi per brevità, meno qualche caso speciale (n. 21), al solo sistema ellittico, riuscendo ormai manifesto quali saranno le proposizioni corrispondenti pei numeri iperbolici. E veniamo alla operazione inversa della moltiplicazione, trovando, innanzi a tutto, il quoziente di due monosemii a_ν e b_μ, cioè quel terzo numero, se esiste, che, moltiplicato per b_μ, riproduce a_ν. Apparisce immediatamente che codesto numero esiste ed è il monosemio

$$\left(\frac{a}{b}\right)_{\nu-\mu},$$

quando però la caratteristica b del divisore e quindi il divisore stesso sia diverso da 0. Del resto basta fare il prodotto di

$$\left(\frac{a}{b}\right)_{\nu-\mu},$$

per b_μ, che si ha per risultato il monosemio a_ν.

19. – Dati ora due numeri ellittici a e b, di cui almeno il secondo b e quindi $[b]_E$ diverso da 0, si tratta di fissare l'algoritmo determinativo di un terzo numero c tale che $bc = a$.

Sia

$$a = a^{(0)}_{\nu^{(0)}} + a^{(1)}_{\nu^{(1)}} + \ldots + a^{(n)}_{\nu^{(n)}} + \ldots, \qquad b = b^{(0)}_{\mu^{(0)}} + b^{(1)}_{\mu^{(1)}} + \ldots + b^{(n)}_{\mu^{(n)}} + \ldots$$

dove si suppongono al solito gli indici delle integranti disposti in ordine decrescente.

Facciamo

$$u_0 = \frac{[a]_E}{[b]_E} = \frac{a^{(0)}_{\nu^{(0)}}}{b^{(0)}_{\mu^{(0)}}} = \left(\frac{a^{(0)}}{b^{(0)}}\right)_{\nu^{(0)}\mu^{(0)}}, \quad u^{(1)} = \frac{[a - u^{(0)}b]_E}{[b]_E} = \frac{[a - u^{(1)}b]_E}{b^{(0)}_{\mu^{(0)}}},$$

e, in generale, posto $S^{(r-1)} = \sum_k{}_0^{r-1} u^{(k)}$:

$$u^{(r)} = \frac{[a - S^{(r-1)}b]_E}{[b]_E} = \frac{(a - S^{(r-1)}b)_E}{b^{(0)}_{\mu^{(0)}}}.$$

Come quozienti di due monosemii, di cui il divisore $[b]_E$ è, per ipotesi, diverso da 0, le u (n. 18) sono esse pure monosemie e si può osservare, in primo luogo, che, succedendosi come vengono definite, riescono disposte secondo l'ordine decrescente dei loro indici, cioè qualunque sia r, l'indice di $u^{(r+1)}$ è minore dell'indice di $u^{(r)}$. Infatti, nella espressione

$$\frac{[a - S^{(r)}b]_E}{b^{(0)}_{\mu^{(0)}}},$$

di $u^{(r+1)}$, si può mettere $S^{(r)}$ sotto la forma: $S^{(r-1)} + u^{(r)}$, e sarà allora:

$$u^{(r+1)} = \frac{[(a - S^{(r-1)}b) - u^{(r)}b]_E}{b^{(0)}_{\mu^{(0)}}} .$$

D'altra parte per definizione: $u^{(r)}[b]_E = [a - S^{(r-1)}b]_E$, e, siccome il monosemio $u^{(r)}$ è anche il suo valor principale, si avrà $u^{(r)}[b]_E = [u^{(r)}]_E[b]_E$, cioè (n. 12) eguale a $[u^{(r)}b]_E$, e quindi: $[u^{(r)}b]_E = [a - S^{(r-1)}b]_E$ la quale, mostrando la coincidenza dei valori principali di $a - S^{(r-1)}$ e di $u^{(r)}b$, permette di asserire che la loro differenza $(a - S^{(r-1)}b) - u^{(r)}b$ appartiene ad un indice minore dell'indice principale comune. Ne segue che l'indice del dividendo $[(a - S^{(r-1)}b) - u^{(r)}b]_E$, nell'espressione di $u^{(r+1)}$, si trova inferiore all'indice del dividendo $[a - S^{(r-1)}b]_E$, che spetta invece ad $u^{(r)}$; il medesimo avviene pei quozienti, essendovi in entrambi i casi lo stesso divisore $b^{(0)}_{\mu^{(0)}}$. Riesce così dimostrato che gli indici delle u costituiscono una successione decrescente e di ciò avremo bisogno più innanzi. Prescindendo per ora da questo fatto, veniamo alla parte essenziale della nostra ricerca, occupandoci di stabilire che il gruppo G costituito dai monosemi u è ellittico.

A tale scopo, osserviamo dapprima come ogni indice, che spetta ad un monosemio u, abbia la forma:

$$F = \nu^{(\tau)} - \mu^{(0)} - s\mu^{(0)} + \mu(p^{(1)}) + \mu(p^{(2)}) + \dots + \mu(p^{(s)}) ,$$

essendo $\nu^{(\tau)}$ uno qualunque fra gli indici delle integranti di a; $\mu^{(p^{(1)})}$, $\mu^{(p^{(2)})}, \dots, \mu^{(p^{(s)})}$, s qualisivogliono indici spettanti a monosemii di b succsivi, si intende, a μ_0. In caso diverso infatti basterebbe diminuire s di una unità. Ciò avviene effettivamente per il primo monosemio $u^{(0)}$, il cui indice $\nu^{(0)} = \mu^{(0)}$ si desume dal tipo indicato, supponendo $\nu^{(\tau)} = \nu^{(0)}$ ed $s = 0$. Di più è facile riconoscere che, se i primi r monosemii u, cioè $u^{(0)}, u^{(1)}, \dots, u^{(r-1)}$ hanno i loro indici della forma F, anche l'$(r+1)$-esimo $u^{(r)}$ riesce dello stesso tipo. Infatti, $S^{(r-1)}$ essendo costituito di termini di indice F, il prodotto $S^{(r-1)}b$ (n. 12) avrà le sue integranti con indici tutti della forma $F + \mu^{(p^{(s+1)})}$ e l'indice principale di $a - S^{(r-1)}b$, ossia l'indice del monosemio $[a - S^{(r-1)}b]_E$ sarà del tipo $\nu^{(\tau)}$ o $F + \mu^{(p^{(s+1)})}$, secondo che esso proviene da integranti di a o da integranti di $S^{(r-1)}b$. La divisione per $b^{(0)}_{\mu^{(0)}}$ dà poi, per l'indice di $u^{(r)}$, le espressioni $\nu^{(\tau)} - \mu^{(0)}$ ovvero $F + \mu^{(p^{(s+1)})} - \mu^{(0)}$, che sono, in ogni caso, del tipo F.

Ricordiamo ora che il nostro scopo si è di provare finito il numero dei monosemii u, il cui indice supera un numero qualsiasi prefissato A, ossia, per quanto si è visto, che è limitato il numero delle espressioni della forma:

$$F = \nu^{(\tau)} - \mu^{(0)} - s\mu^{(0)} + \mu^{(p^{(1)})} + \mu^{(p^{(2)})} + \dots + \mu^{(p^{(s)})} > A .$$

Perciò cominciamo dall'osservare che, quando sia:

$$\nu^{(\tau)} - \mu^{(0)} - s\mu^{(0)} + \mu^{(\nu^{(1)})} + \mu^{(\nu^{(2)})} + \dots + \mu^{(\nu^{(s)})} > A\,,$$

dovrà a più forte ragione essere soddisfatta la disuguaglianza:

$$\nu^{(0)} - \mu^{(0)} - s(\mu^{(0)} - \mu^{(1)}) > A\,,$$

poichè in ogni caso:

$$\nu^{(\tau)} \leqslant \nu^{(0)}\,, \quad \mu^{(\nu^{(1)})}\,, \quad \mu^{(\nu^{(2)})}\,, \quad \dots\,, \quad \mu^{(\nu^{(s)})} \leqslant \mu^{(1)}\,;$$

ossia dovremo avere:

$$s < \frac{\nu^{(0)} - \mu^{(0)} - A}{\mu^{(0)} - \mu^{(1)}}$$

e quindi s, che è per sua natura intero e positivo, o nullo, lo potremo dire, in ogni eventualità, minore del massimo intero contenuto in

$$\left| \frac{\nu^{(0)} - \mu^{(0)} - A}{\mu^{(0)} - \mu^{(1)}} \right|$$

aumentato di una unità; e questo, per brevità, chiameremo n.

Ritornando alla nostra condizione:

$$\nu^{(\tau)} - s\mu^{(0)} + \mu^{(\nu^{(1)})} + \mu^{(\nu^{(2)})} + \dots + \mu^{(\nu^{(s)})} > A + \mu^{(0)}\,,$$

vediamo che essa non può essere soddisfatta, se per $\nu^{(\tau)}$ si prenda un numero $\leqslant A + \mu^{(0)}$, poichè la parte rimanente $-s\mu^{(0)} + \mu^{(\nu^{(1)})} + \mu^{(\nu^{(2)})} + \dots + \mu^{(\nu^{(s)})}$ è essenzialmente negativa. Di più, se indichiamo genericamente con μ uno degli s indici $\mu^{(\nu^{(1)})}$, $\mu^{(\nu^{(2)})}, \dots, \mu^{(\nu^{(s)})}$, sarà pure, per le ragioni accennate, $\nu^{(0)} - 2\mu^{(0)} + \mu > A$, di guisa che ciascuna μ deve soddisfare alla disuguaglianza $\mu > A + 2\mu^{(0)} - \nu^{(0)}$. Ora sappiamo che a possiede al più un certo numero finito e determinato N di integranti, il cui indice è maggiore di $A + \mu^{(0)}$, b d'altra parte contiene al più un certo numero pure finito M di integranti, il cui indice è superiore ad $A + 2\mu^{(0)} - \nu^{(0)}$. Perciò, con ciascun $\nu^{(\tau)}$ potremo al massimo costituire P indici F distinti, che possono spettare a monosemii u del gruppo G e sieno maggiori di A, indicando P la somma delle combinazioni con ripetizione di M elementi (1 a 1), (2 a 2), ..., (n a n). Ma di indici $\nu^{(\tau)}$ ve ne ha al più N compatibili collo scopo prefissoci, potremo dunque asserire che il numero delle u, il cui indice supera un numero prefissato A, è certamente inferiore a NP, quindi in ogni caso finito.

Per conseguenza il gruppo G è ellittico e definisce un numero c; siccome abbiamo visto precedentemente che le u, come vengono definite, riescono disposte secondo l'ordine decrescente degli indici, lo stesso c è (n. 16) la somma della serie

$$\sum_0^\infty {}_k\, u^{(k)}, \qquad \text{ossia} \qquad c = E \lim_{r=\infty} S^{(1)}.$$

D'altra parte, sempre per essere ellittico il gruppo G, la successione, costituita cogli indici u, non solo è decrescente, come abbiamo visto fin da principio, ma è anche indefinitamente decrescente oppure costituita da un numero finito di termini; lo stesso vale per gli indici dei monosemii $[a - S^{(r)}b]_E$, i quali differiscono per la costante $\mu^{(0)}$ dagli indici delle u corrispondenti; quindi, se per un certo valore finito di r, non è già $[a - S^{(r)}b]_E = 0$, da cui si desume $a - bc = 0$, al crescere indefinito di r, l'indice principale di $a - S^{(r)}b$ ha (in senso ordinario) per limite $-\infty$ e conseguentemente $E \lim_{r=\infty} \{a - S^{(r)}b\} = a - b\, E \lim_{r=\infty} S^{(r)} = 0$, cioè come precedentemente $a - bc = 0$, la quale eguaglianza esprime appunto la caratteristica del quoziente. Ciò stabilito, le proprietà tutte della divisione scaturiscono immediatamente da quelle dell'operazione diretta. Per esempio:

$$\left[\frac{a}{b}\right]_E = \frac{[a]_E}{[b]_E}, \qquad \text{ecc.}$$

Se si considera il modo, col quale si sono definite le u, se ne trae una regola comoda per l'effettivo calcolo del quoziente di due numeri a e b, le cui integranti sieno disposte in ordine decrescente. Basta infatti adottare lo stesso procedimento, che vale per la divisione di due polinomii ordinati secondo potenze decrescenti di una stessa variabile. Come ivi gli esponenti, così, nel caso nostro, gli indici decrescono da termine a termine. Le considerazioni precedenti sono però necessarie per stabilire:

1°) che i monosemii così ottenuti costituiscono le integranti di un numero ellittico;

2°) che questo numero, moltiplicato per il divisore, riproduce il dividendo.

Funzioni esponenziali e trigonometriche.

20. – Facciamo qualche considerazione sulle tre serie:

$$(\alpha) = \sum_0^\infty {}_r \frac{x^r}{r!}, \quad (\beta) = \sum_0^\infty {}_r (-1)^r \frac{x^{2r}}{(2r)!}, \quad (\gamma) = \sum_0^\infty {}_r -1)^r \frac{x^{2r+1}}{(2r+1)!}$$

i cui termini generali sono rispettivamente:

$$u^{(r)} = \frac{x^r}{r!}, \quad v^{(r)} = (-1)^r \frac{x^{2r}}{(2r)!}, \quad w^{(r)} = (-1)^r \frac{x^{2r+1}}{(2r+1)!}.$$

Se x è un numero ellittico (iperbolico) e appartiene ad un indice negativo (positivo) ν, cioè $\operatorname*{Val}_{E=0} x = 0$, $(\operatorname*{Val}_{I=0} x = 0)$, i termini generali $u^{(r)}$ di (α), $v^{(r)}$ di (β) e $(w^{(r)})$ di (γ) apparterranno rispettivamente (n. 12) agli indici $r\nu$, $2r\nu$, $(2r+1)\nu$, e la loro forma mostra senz'altro che, in ciascun caso, per r crescente indefinitamente, la successione degli indici ha per limite $-\infty$ $(+\infty)$. Le tre serie (n. 15) sono dunque ellitticamente (iperbolicamente) convergenti e definiscono ciascuna un numero ellittico (iperbolico).

Per questi valori di x, come si fa, quando esso è monosemio d'indice 0, possiamo denotare la somma delle serie sopra indicate coi simboli e^x, $\cos x$, $\operatorname{sen} x$ rispettivamente.

Si può osservare che, *se x appartiene all'indice $\nu < 0$ $(\nu > 0)$, lo stesso avviene per* $\operatorname{sen} x$; *invece e^x e* $\cos x$ *appartengono all'indice* 0. Ed infatti i termini generali delle tre serie hanno rispettivamente per indici principali $(2r+1)\nu$, $r\nu$, $2r\nu$ e il massimo (minimo) loro valore, che corrisponde ad $r = 0$, sarà ordinatamente ν, 0, 0. Da ciò, ricordando il paragrado 15, si conclude giusta l'enunciato. Anzi si può aggiungere che $\operatorname{sen} x$ *ha lo stesso valore principale di* x; e^x *e* $\cos x$ *hanno invece per valore principale l'unità.*

Vediamo ora di studiare un po' più da vicino queste tre funzioni, riferendoci da principio alla esponenziale.

La moltiplicazione delle serie, che, nel caso della convergenza ellittica (iperbolica), si effettua (n. 15) come d'ordinario, ci permette intanto di asserire che, se:

$$\operatorname*{Val}_{E=0} x = \operatorname*{Val}_{E=0} y = 0 \qquad (\operatorname*{Val}_{I=0} x = \operatorname*{Val}_{I=0} y = 0),$$

$e^x e^y = e^{x+y}$.

Ora, supposto che z sia un numero ellittico (iperbolico), appartenente all'indice 0, si faccia $z = x + \xi$ (n. 16), essendo x l'integrante d'indice 0 e ξ il numero definito dalle successive e quindi tale che $\operatorname*{Val}_{E=0} \xi = 0$ $(\operatorname*{Val}_{I=0} \xi = 0)$.

Il simbolo e^z sarà ora definito, a mezzo della eguaglianza seguente $e^z = e^{x+\xi} = e^x e^\xi$, dove i due fattori e^x ed e^ξ sono completamente determinati. Se si pone:

$$z^{(1)} = x^{(1)} + \xi^{(1)}, \qquad z^{(2)} = x^{(2)} + \xi^{(2)},$$

si avrà:

$$e^{z(1)}e^{z(2)} = e^{x(1)}e^{\xi(1)}e^{x(2)}e^{x\xi(2)},$$

per definizione; e, permutando i fattori, si troverà:

$$e^{z(1)}e^{z(2)} = e^{x(1)}e^{x(2)}e^{\xi(1)}e^{\xi(2)} = e^{x(1)+x(2)}e^{\xi(1)+\xi(2)} = e^{z(1)+z(2)}.$$

Così pertanto rimane definita la funzione esponenziale *per tutti i valori dell'argomento, che appartengono ad un indice negativo (positivo) o nullo* (7): *essa mantiene la sua proprietà caratteristica*: $e^a e^b = e^{a+b}$.

21. – È intuitivo il modo, con cui si possono introdurre nel sistema ellittico i numeri complessi, della forma cioè $a + ib$, essendo a e b due numeri ellittici e $i = \sqrt{-1}$.

Avuto riguardo ad alcune ovvie modificazioni nella forma, si riconosce che *i risultati ottenuti precedentemente pei numeri reali, si possono riferire a tutto il campo dei numeri ellittici complessi*. Questa osservazione era necessaria per poter, ciò che ora particolarmente interessa, estendere la relazione di Euler fra le tre serie (α), (β), (γ) e quindi fra le funzioni trigonometriche e la esponenziale, a tutti i valori ellittici di x, pei quali (n. 21) è stata definita la esponenziale stessa. Applicando infatti qualche teorema (n. 13-16) sui limiti e sulle serie, si mostra $e^{\pm ix} = \cos x \pm i \operatorname{sen} x$ collo stesso procedimento, che viene impiegato nel campo ordinario. Ciò

(7) Limiteremo a questo campo di variabilità la definizione di e^x: tuttavia, rispetto alla serie corrispondente,

$$\sum_0^\infty{}_r \frac{x^r}{r!},$$

gioverà considerare il caso, in cui il numero ellittico (iperbolico) x *contenga esclusivamente integranti d'indice* > 0 (< 0). Il loro numero (n. 4 $[E_3]$ o $[I_3]$) sarà certamente finito trattandosi di intégranti di un numero ellittico (iperbolico) coll'indice maggiore (minore) di un valore prefissato (0 nel nostro caso). Al gruppo limitato, costituito da questi monosemii, corrisponderà, in pari tempo, un numero iperbolico (ellittico), che, per l'ipotesi fatta apparterrà ad un indice > 0 (< 0). In tale condizione adunque (n. 20) la serie

$$\sum^\infty{}_r \frac{x^r}{r!}$$

è *iperbolicamente* (*ellitticamente*) convergente ed ha quindi per somma un numero iperbolico (ellittico).

Questo esempio fa vedere come un'operazione (però trascendente) eseguita su numeri ellittici, possa anche dare per risultato un numero iperbolico e reciprocamente; tuttavia non possiamo qui entrare in particolari e ci accontentiamo di accennare che un'ulteriore estensione della esponenziale condurrebbe a stabilire delle relazioni analitiche fra i due sistemi ellittico ed iperbolico, comprendendoli entrambi in un sistema di numerazione più generale.

risparmia ogni ulteriore considerazione sulle funzioni circolari, poichè, stabilite le espressioni di $\operatorname{sen} x$ e di $\cos x$, per mezzo di e^{ix}, tutte le loro proprietà scaturiscono immediatamente e, quando se ne presenti l'occasione, *le potremo senz'altro ritenere dimostrate*. Così per esempio, si potrà valersene, per stabilire che la integrante di indice 0 d'una funzione trigonometrica dipende solo dalla corrispondente dell'argomento z. Questo numero z si deve supporre appartenente all'indice 0, ovvero ad un indice minore di 0, poichè, solo per tali valori (n. 20), furono definite le funzioni trigonometriche. Si potrà dunque porre $z = x + \xi$, dove (n. 16) x è la integrante d'indice 0 (che potrebbe anche mancare e allora si sostituisce collo 0) e ξ, che appartiene ad un indice $\nu < 0$, è il numero definito dalle integranti successive di z.

Ora, riferendoci per esempio al $\cos z$, noi mostreremo che la sua integrante d'indice 0 si esprime esclusivamente per x. Ed invero: $\cos z = \cos(x + \xi) = \cos x \cos \xi - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} \xi$. Ricordando che ξ appartiene ad un indice $\nu < 0$, si ha (n. 20) che il valore principale di $\cos \xi$ è l'unità, mentre $\operatorname{sen} \xi$ appartiene all'indice ν.

Per conseguenza $\cos x$ è l'integrante d'indice 0 di $\cos x \cos \xi - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} \xi$ cioè di $\cos z$. Segue da ciò che, a due valori dell'argomento, i quali hanno la stessa integrante principale d'indice 0, corrispondono due valori del coseno, che hanno pure la stessa integrante principale di indice 0, cioè, se $\underset{E=0}{\mathrm{Val}}\, z = \underset{E=0}{\mathrm{Val}}\, y$, sarà anche:

$$\underset{E=0}{\mathrm{Val}} \cos z = \underset{E=0}{\mathrm{Val}} \cos y \, .$$

In particolare si avrà: $\cos \underset{E=0}{\mathrm{Val}}\, z = \underset{E=0}{\mathrm{Val}} \cos z$ ed analogamente: $\operatorname{sen} \underset{E=0}{\mathrm{Val}}\, z = \underset{E=0}{\mathrm{Val}} \operatorname{sen} z$.

22. – Mostriamo ora che, per ogni valore di x appartenente all'indice 0, si può determinare un numero l tale che $e^l = x$. Siccome, per brevità, ci limitiamo a considerare le funzioni reali, così supporremo $x > 0$. Del resto una ulteriore estensione del risultato, che otterremo, al campo dei numeri negativi e complessi non presenterebbe alcuna difficoltà e si farebbe al solito, secondo perfetta analogia coi procedimenti ordinari.

Sia pertanto x un numero positivo, che appartiene all'indice 0 e si osservi (n. 16) che esso può mettersi sotto forma $x_0 + \xi$, essendo x_0 il suo valor principale, e ξ il numero definito dalle integranti successive. In virtù delle ipotesi fatte, dovrà x_0 essere un monosemio positivo d'indice 0 e quindi esiste, fra i numeri reali, il suo logaritmo; ξ apparterrà ad un certo indice $\nu < 0$. Ciò premesso si ponga $y^{(0)} = \log x_0$ e si costituisca la successione $y^{(0)}, y^{(1)}, \ldots, y^{(r-1)}, y^{(r)}, \ldots$, facendo generalmente:

$$(1) \qquad y^{(r)} = y^{(r-1)} + \frac{R^{(r-1)}}{e^{y(r-1)}}.$$

$$(2) \qquad R^{(r-1)} = x - e^{y(r-1)}.$$

Le formule ricorrenti (1) e (2) definiscono il termine $y^{(r)}$ della successione, per mezzo del suo antecedente $y^{(r-1)}$, quando però $y^{(r-1)}$ appartenga all'indice 0 o ad un indice minore di 0, poichè, in caso diverso, la esponenziale $e^{y(r-1)}$ non ha per noi alcun significato.

Le posizioni precedenti hanno quindi bisogno di una ulteriore giustificazione. A tale scopo, cominciamo coll'osservare che il primo termine della successione $y^{(0)}$ è monosemio d'indice 0 o nullo, (caso mai fosse $x_0 = 1$) e quindi si può determinare $R^{(0)}$, facendo $R^{(0)} = x - e^{y(0)} = x - x_0 = \xi$, che appartiene all'indice $\nu < 0$.

In generale noi dimostreremo ora che $y^{(r)}$ *non appartiene ad un indice maggiore di* 0 e, in pari tempo, che $R^{(r)}$ appartiene all'indice $2^r\nu$, quando si supponga che $y^{(r-1)}$ non appartenga ad un indice maggiore di 0 e $R^{(r-1)}$ invece all'indice $2^{r-1}\nu$.

Siccome, per $r = 1$, ciò si verifica effettivamente, così, provata la nostra asserzione, pel passaggio da $r-1$ ad r, essa si troverà stabilita in generale. Supposto adunque che $y^{(r-1)}$ vi soddisfaccia, $e^{y(r-1)}$ appartiene all'indice 0 e quindi il quoziente $R^{(r-1)}/e^{y(r-1)}$, come il dividendo per ipotesi, all'indice $2^{r-1}\nu$. Essendo ora, per la (1), $y^{(r)} = y^{(-1)} + R^{(r-1)}/e^{y(r-1)}$, esso avrà, fino a quella d'ordine $2^{r-1}\nu$, le stesse integranti di $y^{(r-1)}$, nè può quindi appartenere ad un indice > 0. Stabilita questa prima parte, si potrà porre $R^{(r)} = x - e^{y(r)}$ e dovremo provare che il suo indice principale è $2^r\nu$. Sostituendo ad $y^{(r)}$ il suo valore $y^{(r-1)} + R^{(r-1)}/e^{y(r-1)}$, per la proprietà caratteristica dell'esponenziale, si avrà:

$$R^{(r)} = x - e^{y(r-1)+R^{(r-1)}/e^{y(r-1)}} = x - e^{y(r-1)} \sum_0^{\infty}{}_k \frac{1}{k!}\left(\frac{R^{(r-1)}}{e^{y(r-1)}}\right)^k =$$

$$= x - e^{y(r-1)}\left\{1 + \frac{R^{(r-1)}}{e^{y(r-1)}} + \sum_2^{\infty}{}_k \frac{1}{k!}\left(\frac{R^{(r-1)}}{e^{y(r-1)}}\right)^k\right\} =$$

$$= x - e^{y(r-1)} - R^{(r-1)} - e^{y(r-1)} \sum_2^{\infty}{}_k \frac{1}{k!}\left(\frac{R^{(r-1)}}{e^{y(r-1)}}\right)^k.$$

Ricordando che, per la (2),

$$x - e^{y(r-1)} - R^{(r-1)} = 0\,, \quad \text{sarà} \quad R^{(r)} = - e^{y(r-1)} \sum_2^\infty \frac{1}{k\,!}\left(\frac{R^{(r-1)}}{e^{y(r-1)}}\right)^k ;$$

il primo fattore $e^{y(r-1)}$ appartiene, come si ebbe ad osservare, all'indice 0, il secondo, cioè la somma della serie

$$\sum_2^\infty{}_k \frac{1}{k\,!}\left(\frac{R^{(r-1)}}{e^{y(r-1)}}\right)^k,$$

all'indice $2^r\nu$, che è l'indice principale del suo primo termine

$$\left(\frac{R^{(r-1)}}{e^{y(r-1)}}\right)^2 ;$$

quindi il prodotto $R^{(r)}$ appartiene effettivamente all'indice $2^r\nu$, come avevamo annunciato.

Ciò premesso, io dico che la successione y ammette un limite determinato l. Infatti, sommando membro a membro s relazioni (1), da $r+1$ ad $r+s$, si ha:

$$y^{(r+s)} - y^r = \frac{R^{(r)}}{e^{y(r)}} + \frac{R^{(r+1)}}{e^{y(r+1)}} + \ldots + \frac{R^{(r+s-1)}}{e^{y(r+s-1)}} = \delta\,,$$

e si vede che δ appartiene, qualunque sia s, all'indice $2^r\nu$, il quale, prendendo r sufficientemente grande, può essere reso minore di ogni λ assegnato ad arbitrio; perciò δ può divenire e mantenersi minore di ogni σ_ϱ prefissato ed è questa appunto condizione necessaria e sufficiente (n. 14), affinchè la successione y ammetta un limite determinato l. Di più vogliamo mostrare che $e^l = x$. Proviamo infatti a supporre e^l diverso da x, di guisa che sia $x - e^l = \theta$, essendo θ un numero non nullo, che appartenga ad un certo indice ϱ. Siccome l è il limite della successione y, scelto un indice $\varrho' < \varrho$, possiamo determinare un $y^{(N)}$ tale che, per tutti gli y successivi, sia $|l - y| < \sigma_\varrho$, cioè: o $l = y$, o $l = y + \tau_{\varrho''}$, essendo ϱ'' l'indice principale di τ, (minore od eguale a ϱ'), minore di ϱ. In conformità la differenza $e^l - e^y$ o è nulla, oppure eguale a

$$e^y \left\{e^{\tau_{\varrho''}} - 1\right\} = e^y \sum_1^\infty \frac{\tau_{\varrho''}^k}{k\,!}\,,$$

che appartiene all'indice ϱ''.

D'altra parte la differenza $x - e^{y^{(M)}} = R^{(M)}$ appartiene, l'abbiamo visto precedentemente, all'indice $2^M \nu$ e quindi, siccome $\nu < 0$, al crescere di M, $2^M \nu$ decresce indefinitamente. Si può adunque, prendendo M sufficientemente grande, determinare un $y^{(M)}$ tale che, per tutti gli y ad esso successivi, la differenza $x - e^y$ appartenga sempre ad un indice $< \varrho$.

Così, per uno qualunque tra gli y, che seguono sia $y^{(M)}$, sia $y^{(N)}$, si può porre contemporaneamente:

$$e^l - e^y = d\,, \qquad x - e^y = R\,,$$

dove tanto d (che può anche essere nullo) come R appartengono ad un indice $< \varrho$. Lo stesso avverrà per la loro differenza $x - e^l$, cioè θ, contro la ipotesi, la quale ci siamo provati ad assumere, che θ stessa appartenga propriamente all'indice ϱ.

Si ricava adunque essere l quel numero, di cui volevamo stabilire l'esistenza, da darsi come esponente ad e per riprodurre x, ossia, *per ogni valore di* x, *che appartiene all'indice* 0, *esiste il* $\log x$.

Anche qui, come per il quoziente (n. 19), le proprietà dei logaritmi si deducono con somma facilità da quelle della esponenziale.

Il simbolo a^x finora ha per noi significato solo quando x è un numero ordinario intero e positivo. Servendosi dei logaritmi, si può adesso, *per tutti i valori di* a, *che appartengono all'indice* 0, *e per tutti i valori di* x, *che appartengono ad un indice non maggiore di* 0, definire a^x, ponendo:

$$a^x = e^{x \log a}, \tag{3}$$

di cui il secondo membro ha un senso perfettamente determinato. La (3) è verificata quando, essendo x intero e positivo,

$$a^x = \overbrace{a \ldots a}^{x \text{ volte}}\,,$$

ed è verificata altresì nel campo dei numeri reali. Si ha poi immediatamente dalla (3) stessa, $a^0 = 1$, $a^{-x} = 1/a^x$, ecc.

Cenno sulle funzioni in generale.

23. – Veniamo ora a considerare in generale una funzione $f(x)$ di una variabile reale x, supponendo x suscettibile di prendere tutti i valori ellittici o almeno quelli compresi in un determinato intervallo (m, n), cioè maggiori di m e minori di n. Veramente sarebbe qui opportuno di far vedere come un intervallo, oltre che per mezzo dei suoi estremi, può essere definito in modo diverso. Si avverta però che noi non ci proponiamo affatto di trattare completamente i principî della teoria delle funzioni nel sistema ellittico e nemmeno di riassumere quei risultati, che si presentano come una immediata generalizzazione degli ordinarî. Perciò si trovano qui esposte appena alcune definizioni, in quanto vengono in uso nel successivo paragrafo 24.

Ritenuto questo, potremo limitarci alle nozioni seguenti.

Una funzione $f(x)$ della variabile indipendente x dicesi *continua* in un punto [8] a, se, per ogni assegnato σ_ν arbitrariamente piccolo, esiste un intorno di a, per tutti i punti x del quale sia

$$|f(x)-f(a)|<\sigma_\nu. \tag{1}$$

Notiamo, senza insistervi, che si potrebbero distinguere varie specie di continuità, secondo le relazioni che, al decrescere indefinito di σ_ν (cioè quando il suo indice ν si prende negativo e si fa crescere indefinitamente) passano fra ν stesso e l'indice, relativo all'ampiezza del corrispondente intorno di a.

Accenniamo ancora che una funzione $f(x)$ si dirà continua in un punto a, *rispetto ad un indice determinato* ν, quando, senza verificare la precedente condizione di continuità, sia però tale che, per ogni σ_ν, di caratteristica σ arbitrariamente piccola, ma di indice ν prefissato, esiste un intorno di a, di ampiezza c, per tutti i punti x del quale $|f(x)-f(a)|<\sigma_\nu$. Anche in questo caso si dovrebbero esaminare particolarmente i rapporti fra le oscillazioni σ e gli intorni corrispondenti c.

Si dice che l è *limite di* $f(x)$, *per* x *convergente ad* a, quando, per ogni assegnato σ_ν arbitrariamente piccolo, esiste un intorno di a, per tutti i punti x del quale:

$$|l-f(x)|<\sigma_\nu.$$

Anche rispetto ai limiti di una funzione, determinati dal convergere di un'altra quantità variabile verso un dato valore, si possono considerare alcuni casi speciali. Si può supporre, per esempio, o che x converga ad a, passando solo pei punti di un certo gruppo, ovvero, che, fissato un certo indice ν, la funzione ammetta limite solo rispetto a quell'indice.

Le derivate delle funzioni nel campo ordinario si trovano precisamente nelle due circostanze accennate. Infatti si tratta sempre di elementi di un certo gruppo, cioè di valori monosemii d'indice zero, e si esige che la differenza fra il rapporto incrementale e il suo limite divenga e

---

[8] S'intende che tali locuzioni geometriche hanno un senso puramente analitico e valgono come comode abbreviazioni; del resto esse conservano lo stesso significato, che loro si attribuisce nella teoria delle funzioni di variabile reale.

resti più piccola d'ogni numero di caratteristica piccola ad arbitrio, ma sempre d'indice 0.

Se, per h convergente a 0, esiste il limite di

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h},$$

esso si dirà *derivata di seconda specie* della funzione $f(x)$, relativa al punto x.

24. – Per le funzioni $f(x)$ che, considerate in un punto x monosemio d'indice 0, ammettono in quel punto derivata ordinaria $f'(x)$ e sono tali oltre a ciò che lo stesso $f'(x)$ è la derivata di seconda specie [9], si ha la relazione:

$$f'(x) = \operatorname*{Val}_{E=0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

per tutti i valori di h, che appartengono ad un certo intorno c del punto 0. Ed infatti, dacchè $f'(x)$ è limite dell'espressione

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h},$$

per h convergente a 0, scelto σ_ν ad arbitrio (a noi converrà di prendere

(9) Non sempre però, come si riconosce agevolmente, la derivata ordinaria coincide colla derivata di seconda specie; si possono anzi costruire delle funzioni, che ammettono derivata di seconda specie, ma non la derivata in senso ordinario e reciprocamente. Come esempio del primo caso si consideri, in un intervallo compreso fra due qualunque valori monosemii di indice zero, una funzione $f(x)$ tale che, per ogni valore di ξ_0 di x monosemio di indice 0, sia

$$f(\xi_0) = \sum_0^\infty{}_n \frac{1}{31^n} \cos(31^n \xi),$$

e, per ogni valore di $x = \xi_0 + h$ ($\operatorname*{Val}_{E=10} h = 0$, $h \lessgtr 0$), $f(\xi_0 + h) = f(\xi_0) + h$. La funzione $f(\xi_0)$ (veggasi: DINI, *Fond. per la teoria delle funz. di var. reali*, Pisa, Nistri, 1878; p. 163) si è scelta a bello studio in modo che in nessun punto ammetta derivata ordinaria determinata e finita; esiste invece, come è manifesto, la derivata di seconda specie, il cui valore è costante per tutti i punti dell'intervallo ed eguale all'unità.

Ancora più semplice riescirà un esempio del secondo caso. Consideriamo infatti, tanto per fissar le idee, nell'intervallo da -1 a $+1$, una funzione $f(x)$, i cui valori, per $x - \operatorname*{Val}_{E=10} x = 0$, si calcolino dalla relazione $f(x) = \operatorname{sen} x$ e, per $x - \operatorname*{Val}_{E=10} x \lessgtr 0$, sia costantemente $f(x) = 0$. Siccome, fra i valori di x, pei quali $x - \operatorname*{Val}_{E=10} x = 0$, sono compresi i monosemii di indice zero, così, per tali punti, in tutto l'intervallo $(-1, +1)$, la $f(x)$ coincide con $\operatorname{sen} x$ e quindi la derivata ordinaria è $\cos x$. Manca invece la derivata di seconda specie, (eccezion fatta pel punto zero), poichè la funzione $f(x)$ è discontinua. Nel punto $x = 0$ esiste la derivata di seconda specie, ma è nulla, mentre la derivata ordinaria ha per valore l'unità.

$\nu < 0$), esiste certamente un intorno c dello zero, per tutti i punti h del quale sia

$$f'(x) - \frac{f(x+h)-f(x)}{h} < \sigma^{\nu}.$$

Segue da una tale disuguaglianza che $f'(x)$ e

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

differiscono al più per un numero, che appartiene all'indice ν, e quindi, considerati rispetto all'indice 0, che è maggiore di ν, saranno necessariamente eguali. D'altra parte $f'(x)$, essendo una derivata ordinaria, è un monosemio d'indice 0 e quindi coincide con $\operatorname*{Val}_{E=0} f'(x)$, sicchè si conclude per questi valori di h compresi nell'intorno c:

$$f'(x) = \operatorname*{Val}_{E=0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \text{ [10]}.$$

Applicazione geometrica.

25. – Veniamo ora ad una applicazione geometrica delle cose esposte, cioè a dire cerchiamo di rilevare il significato, che, colla scorta di alcune definizioni fondamentali, si può attribuire ad una conseguenza delle considerazioni precedenti.

A tal uopo si osservi dapprima che la geometria della retta, intesa in senso puramente astratto, al pari di quella d'ogni altro sistema ad

---

[10] Questa relazione in fondo significa che, per le funzioni, le quali soddisfano alle ipotesi precedenti, *la derivata si esprime come valore del rapporto di due infinitesimi attuali.* Sarebbe facile riconoscere che le funzioni algebriche, circolari, esponenziali e loro combinazioni, per il modo, col quale vennero estese al campo dei numeri ellittici, verificano effettivamente tali condizioni in tutti quei punti, in cui ammettono derivata ordinaria, e l'incremento h, pel quale $f'(x) = \operatorname*{Val}_{E=0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ è, in questo caso, vincolato alla sola restrizione di appartenere ad un indice minore di 0; così, tanto per dare un esempio, posto $f(x) = x^3 + \operatorname{sen} x + x \log\cos x$, la derivata $f'(x)$ in un punto generico x, cioè $3x^2 + \cos x + \log\cos x - \operatorname{tg} x$ è anche espressa da:

$$\operatorname*{Val}_{E=0} \frac{(x+h)^3 + \operatorname{sen}(x+h) + (x+h)\log\cos(x+h) - x^3 - \operatorname{sen} x - x\log\cos x}{h}$$

purchè $\operatorname*{Val}_{E=0} h = 0$

una dimensione, può dirsi l'enunciato delle proprietà spettanti al continuo numerico, usando convenienti denominazioni geometriche.

Nello stesso modo, coll'introdurre notazioni analoghe, si può definire la geometria di una retta più generale, atta cioè a rappresentare non i soli numeri ordinarii, ma tutti i numeri ellittici o tutti quelli, almeno, che appartengono ad un dato intervallo. Senza considerare separatamente questi due casi, si può osservare che le disuguaglianze fondamentali, l'operazione dell'unire e la sua inversa, ecc., conservano, rispetto ai numeri ellittici, le loro caratteristiche e conseguentemente si interpreteranno sulla retta in modo conforme all'ordinario. Ciò avverrà per tutti i numeri ellittici, se si suppone che la retta ne rappresenti l'intero sistema; se invece essa, sia per semplice definizione (sistema aperto), sia coll'aggiunta di convenzioni ulteriori (sistema chiuso), si risguarda corrispondentemente ad una parte soltanto, allora avranno diretto significato geometrico appena le relazioni, che si riferiscono a numeri di quell'intervallo ([11]).

Lasciando impregiudicata tale questione, rileveremo tuttavia che vi ha in ogni caso una classe di proprietà, la quale non trova riscontro nella geometria elementare, quella cioè, che si riferisce alle relazioni dei nuovi segmenti cogli ordinari (rappresentati cioè dai consueti numeri reali). Tali proprietà sono la traduzione in linguaggio geometrico delle proposizioni riferentisi ai concetti di indice principale, di valore rispetto ad un indice dato, ecc.; esse riposano sulle definizioni seguenti.

Un segmento dicesi d'ordine ν, quando il numero, che lo rappresenta appartiene all'indice ν.

Il segmento rappresentato dal numero 1_ν o, più brevemente, il segmento 1_ν dicesi *unità dell'ordine* ν. L'unità dell'ordine 0 chiamasi *unità fondamentale.*

Un segmento a *dicesi infinito, finito od infinitesimo* secondochè l'indice, cui appartiene a, è maggiore, eguale o minore di 0. *Un segmento* a *dicesi infinito, finito od infinitesimo rispetto ad un numero o segmento dato* k, secondochè il rapporto a/k appartiene ad un indice maggiore, eguale o minore di zero.

L'insieme dei segmenti infinitesimi costituisce il *campo infinitesimo,* rispetto all'unità fondamentale; l'insieme dei segmenti infiniti il *campo all'infinito.*

Considerare una relazione geometrica rispetto all'unità fondamentale

---

([11]) Queste distinzioni avrebbero grande importanza dal punto di vista geometrico, poichè oltre a riferirsi alla retta in sè, sono intimamente collegate colla natura della forma spaziale, cui la retta stessa appartiene. Tuttavia noi qui abbandoniamo tale argomento, avendo in vista una sola applicazione, che, se presenta forse qualche interesse per sè stessa, ha però appena lo scopo di mostrare in qual modo si adoperino i risultati antecedenti.

significa considerare la corrispondente relazione numerica (n. 6) rispetto all'indice 0.

I risultati, ottenuti col metodo puro del prof. VERONESE per la sua forma fondamentale, corrispondono, nelle linee generali, a quelli, cui si perverrebbe, dando forma geometrica ai paragrafi antecedenti, col mezzo delle definizioni ora indicate ([12]).

26. – Riferendoci per un momento all'ordinario sistema di numerazione, ricordiamo che, in senso astratto, il concetto della forma angolare è anch'esso una interpretazione del continuo numerico, quando però si convenga di risguardare coincidenti o meglio di far corrispondere ad uno stesso elemento del fascio due numeri a e b, che differiscono per un multiplo intero di 2π.

Ogni relazione fra numeri si potrà dunque interpretare come relazione fra segmenti, o fra angoli, o fra questi e quelli. In particolare si dirà che a, b, c, sono i lati, α β, γ gli angoli di uno stesso triangolo rettilineo, quando, fra a, b, c, α, β, γ, passino tre qualunque fra le relazioni seguenti della trigonometria generale ([13]) (poichè ogni altra è conseguenza

([12]) Che ciò debba avvenire appare evidente, purchè si abbia riguardo al carattere essenziale, comune tanto alla forma fondamentale del Prof. VERONESE, quanto alla retta, che rappresenta il sistema ellittico, di conservare cioè la loro omogeneità nei campi infiniti ed infinitesimi. Tuttavia bisogna avvertire che gli elementi infiniti ed infinitesimi, che noi consideriamo, sono sempre di un ordine (indice) finito ν, mentre la forma fondamentale del Prof. VERONESE è così costituita che, data l'esistenza di un certo gruppo di segmenti, essa contiene anche tutti quelli, i cui ordini vengono rappresentati dai numeri corrispondenti a quel gruppo.

Nell'opera più volte citata del Prof. VERONESE (Intr. n. 93, *m*) si dimostra però che l'insieme dei segmenti infiniti ed infinitesimi, i cui ordini sono finiti con un ordine dato μ, costituisce un gruppo, il quale si trasforma in sè medesimo, per effetto delle operazioni fondamentali eseguite un numero finito di volte. Ora i segmenti, che corrispondono ai numeri del sistema ellittico, formano appunto un gruppo di tale natura e quindi, in certo modo, ***il sistema ellittico corrisponde ad una parte soltanto della forma fondamentale del Prof. Veronese, ma è, nel proprio campo, più generale***, poichè gli ordini di infinità dei suoi elementi non sono costretti ad essere numeri interi, ma possono assumere qualunque valore reale ordinario.

Osserviamo da ultimo che noi ci siamo limitati al sistema ellittico, essendoci proposti soltanto di dare un saggio del calcolo aritmetico con elementi infiniti ed infinitesimi. Se si volesse protrarre ulteriormente l'introduzione di nuovi enti, in modo, per esempio, da esaurire la forma fondamentale, si presenterebbe spontanea l'idea di ripetere sui numeri ellittici, formando dei nuovi monosemii con indici e caratteristiche ellittiche, l'operazione fatta da prima sui numeri reali ordinari; ottenuto così un nuovo campo, si potrebbe ancora applicare ad esso tale procedimento e così per ciascuno dei successivi.

Però non tutte le proprietà dei numeri ellittici si potrebbero estendere nello stesso modo agli enti di questo sistema. Una generalizzazione, invece, conforme a tutti i principii dell'aritmetica si avrebbe, introducendo come nuovo elemento analitico un monosemio con caratteristica ellittica, ma indice ordinario. Basterebbe poi ripetere passo passo le convenzioni e i procedimenti adottati per i numeri ellittici.

([13]) Per queste relazioni tra i lati e gli angoli di un triangolo rettilineo indipendenti dalla natura della forma spaziale, nella quale il triangolo si suppone contenuto, si cfr. per esempio:

FLYE S. MARIE, *Etudes analitiques sur la théorie des parallèles*, Paris, Gauthier-Villars, 1871.

W. KILLING, *Die Nicht-Euklidischen Raumformen in analytischer Behandlung*, Leipzig, Teubner, 1885.

di quelle tre):

$$(1) \qquad \operatorname{sen}\frac{a}{k} : \operatorname{sen}\frac{b}{k} : \operatorname{sen}\frac{c}{k} = \operatorname{sen}\alpha : \operatorname{sen}\beta : \operatorname{sen}\gamma$$

$$(2) \qquad \begin{cases} \cos\alpha = -\cos\beta\cos\gamma + \operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\gamma\cos\frac{a}{k} \\ \cos\beta = -\cos\gamma\cos\alpha + \operatorname{sen}\gamma\operatorname{sen}\alpha\cos\frac{b}{k} \\ \cos\gamma = -\cos\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta\cos\frac{c}{k} \end{cases}$$

$$(3) \qquad \begin{cases} \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

Noi prenderemo in particolare le (1) e la prima delle (2). Secondochè la quantità $1/k^2$, che si dice *curvatura totale* o *riemanniana*, è maggiore o minore di zero, il triangolo si dirà conforme *all'ipotesi di Riemann* o *di Lobatscheffsky*. Se si considera il caso limite, in cui sia $1/k^2 = 0$ (che si risguarda proveniente dagli antecedenti al crescere indefinito di k), applicando la regola dell'HÔPITAL, si ha, per le relazioni (1), (2), ..., la forma seguente:

$$(1') \qquad a : b : c = \operatorname{sen}\alpha : \operatorname{sen}\beta : \operatorname{sen}\gamma$$

$$(2') \qquad \alpha + \beta + \gamma = \pi$$

$$(3') \qquad \dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

che si dirà legare fra loro gli angoli e i lati nel *sistema Euclideo*.

Ci siamo studiati di dare a questi concetti ben noti forma pretta-

A. CLEBSCH, *Vorlesungen über Geometrie*, Zweiten Bandes, erster Teil; Leipzig, 1891, S. 480, 525.

Gli stessi risultati, da un punto di vista più generale, si hanno per la trigonometria dei triangoli geodetici nelle varietà a curvatura costante; veggasi per esempio:

L. BIANCHI, *Geometria Differenziale*, Cap. VIII [*Lez. di Geom. diff.*, 2ª ed., Pisa, Spoerri, 1902-03; Cap. XII]; dove però tali ricerche sono limitate alle varietà a due dimensioni.

mente astratta ([14]), per poterli trasportare senza alcuna modificazione al caso di elementi, rappresentati in generale da numeri ellittici.

Infatti le (1), (2), ..., ovvero le (1′), (2′), ..., si potranno definire come equazioni di condizione per gli elementi di un triangolo, anche quando non si imponga ai segmenti rettilinei, agli angoli e alla curvatura la restrizione di essere misurati da numeri reali ordinarî, ma si risguardino in generale come corrispondenti a *numeri ellittici qualunque*, purchè, si intende, compatibili colle equazioni di condizione ([15]) e quindi certamente tali che gli argomenti delle funzioni trigonometriche, le quali compariscono nelle (1), (2), ..., (1′), (2′), ..., non appartengano ad un indice superiore a zero (n. 22).

27. – Ciò premesso, noi vogliamo dimostrare che, se i lati di un triangolo, dato nel sistema di Riemann o di Lobatscheffski, *sono infinitesimi rapporto alla radice quadrata della curvatura*, la somma degli angoli, *rispetto all'unità fondamentale*, è eguale a due retti, come se si trattasse di un triangolo euclideo. Di più, oltre alla (2′), nell'ipotesi accennata, intercedono, fra gli elementi del triangolo, *alcune* ([16]) fra le relazioni (1′), (3′), ..., in quanto si considerino rispetto all'unità fondamentale.

([14]) Nei citati lavori di Flye S. Marie, di Killing e di Clebsch viene impiegato bensì il metodo analitico, ma si stabilisce tuttavia effettivamente in qual modo queste relazioni fra gli elementi di un triangolo discendono da concetti geometrici. Anche nel caso nostro, ciò sarebbe stato possibile, ma si sarebbero allora rese necessarie molte considerazioni di geometria pura, evitate invece con uno svolgimento formale. D'altra parte poi, pur rimanendo nel campo strettamente analitico, non potevamo senz'altro risguardare le (1), (2), (3), ... quali relazioni fra gli elementi di un triangolo geodetico in una varietà a curvatura costante, poichè questi risultati di geometria differenziale hanno a base una espressione analitica dell'elemento lineare, che è limitata *al campo dei numeri ordinarii*, mentre noi vogliamo poi riferire le (1), (2), (3), ... a tutto il sistema ellittico. È indubitato però, e spero di poterlo mostrare in altra occazione, che, stabiliti con generalità, per il sistema ellittico, i principii del metodo differenziale (cui si accennò soltanto alla sfuggita nei n. 24 e 25) si potranno costruire le medesime teorie e darne quelle stesse interpretazioni geometriche, che si applicano al continuo ordinario.

([15]) Usando considerazioni di questo genere, secondo che, per gli elementi di un triangolo, si adotta l'uno o l'altro degli accennati sistemi di relazioni, si può determinare la natura della retta nella forma spaziale corrispondente (n. 25). Così per esempio si troverebbe: *La retta è aperta nei due sistemi di Euclide e di Lobatscheffski, chiusa nel sistema riemanniano. Nei due sistemi di Riemann e di Lobatscheffski non esistono segmenti infiniti, rispetto alla radice quadrata della curvatura. La forma angolare è chiusa e non contiene settori infiniti, ecc.*

([16]) Diciamo alcune fra le relazioni, che spettano ai triangoli euclidei e non tutte, quantunque si possano stabilire le fondamentali (1′) e (2′), perchè le eguaglianze, rispetto ad un indice determinato, non godono di tutte le proprietà valevoli per la eguaglianza in senso assoluto. Così per es., se si possono sommare o sottrarre membro a membro le eguaglianze rispetto ad un indice determinato, non è lecito in generale moltiplicarle, o dividerle, o elevarle a potenza, ecc. Quindi, riferendoci alle relazioni (1′) fra gli elementi di un triangolo, noi troveremo che esiste certamente una forma, sotto la quale esse, considerate rispetto all'indice 0, valgono per un triangolo infinitesimo qualunque, ma ciò non è incondizionatamente vero, quando si scrivano in modo diverso, o si combinino comunque fra loro.

Ci occuperemo dapprima delle equazioni (1), mostrando appunto che, per lati infinitesimi rapporto a k, esse assumono, rispetto all'indice zero una delle forme (1'). Cioè per esempio, se sia, dalle (1),

$$\frac{\operatorname{sen}\frac{a}{k}}{\operatorname{sen}\frac{b}{k}}=\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\beta}, \quad \text{e si sappia che} \quad \operatorname*{Val}_{E=0}\frac{a}{k}=\operatorname*{Val}_{E=0}\frac{b}{k}=0\,,$$

si può concludere, rispetto all'indice 0, ossia rispetto all'unità fondamentale, l'eguaglianza dei due rapporti a/b e $\operatorname{sen}\alpha/\operatorname{sen}\beta$, ovvero quella dei loro inversi.

Per dimostrarlo, cominciamo coll'osservare che, siccome per ipotesi

$$\operatorname*{Val}_{E=0}\frac{a}{k}=\operatorname*{Val}_{E=0}\frac{b}{k}=0,$$

le integranti principali delle funzioni

$$\operatorname{sen}\frac{a}{k} \quad \text{e} \quad \operatorname{sen}\frac{b}{k}\,,$$

saranno date (n. 20) dai valori principali dei loro argomenti. D'altra parte il valore principale del quoziente è il quoziente dei valori principali (n. 19) e quindi:

$$\left[\frac{\operatorname{sen}\frac{a}{k}}{\operatorname{sen}\frac{b}{k}}\right]_E=\left[\frac{\frac{a}{k}}{\frac{b}{k}}\right]_E=\left[\frac{a}{b}\right]_E.$$

Indicando ora con $a^{(0)}_{\nu(0)}$ il valore principale di a, con $b^{(0)}_{\mu(0)}$ quello di b, giova considerare separatamente i due casi $\nu^{(0)}=\mu^{(0)}$ e $\nu^{(0)}\gtrless\mu^{(0)}$. Nella prima ipotesi, dividendo a per b, l'integrante principale

$$\left[\frac{a}{b}\right]_E,$$

del quoziente è

$$\left(\frac{a^{(0)}}{b^{(0)}}\right)_{\nu(0)-\nu(0)},$$

cioè il numero reale $a^{(0)}/b^{(0)}$, da cui si deduce che, considerando il quoziente a/b, rispetto all'indice zero, si ha per risultato la sua integrante principale $a^{(0)}/b^{(0)}$.

La equazione

$$\frac{\operatorname{sen}\frac{a}{k}}{\operatorname{sen}\frac{b}{k}} = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\beta} \quad \text{ci dà} \quad \left[\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\beta}\right]_E = \left[\frac{\operatorname{sen}\frac{a}{k}}{\operatorname{sen}\frac{b}{k}}\right]_E = \frac{a_0}{b_0}$$

e, come precedentemente, essendo 0 l'indice principale di sen α/sen β sarà

$$\operatorname*{Val}_{E=0} \frac{\operatorname{sen} a}{\operatorname{sen}\beta} = \left[\frac{\operatorname{sen} a}{\operatorname{sen}\beta}\right]_E.$$

Riassumendo adunque:

$$\operatorname*{Val}_{E=0} \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\beta} = \operatorname*{Val}_{E=0} \frac{a}{b} \quad \text{cioè} \quad \frac{a}{b} \underset{E=0}{=} \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\beta}.$$

Se invece $\nu^{(0)}$ è diverso da $\mu^{(0)}$, potremo sempre supporre $\nu^{(0)} < \mu^{(0)}$ (altrimenti basterebbe scambiare a con b) e allora, dividendo a per b, il quoziente appartiene all'indice $\nu^{(0)} - \mu^{(0)} < 0$, sicchè $\operatorname*{Val}_{E=0} \frac{a}{b} = 0$. D'altra parte si è visto or ora:

$$\left[\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\beta}\right]_E = \left[\frac{\operatorname{sen}\frac{a}{k}}{\operatorname{sen}\frac{b}{k}}\right]_E = \left[\frac{a}{b}\right]_E \quad \text{e quindi} \quad \left[\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\beta}\right]_E = \left[\frac{a^{(0)}}{b^{(0)}}\right]_{\nu^{(0)}-\mu^{(0)}}$$

da cui apparisce che sen α/sen β appartiene all'indice $\nu^{(0)} - \mu^{(0)} < 0$, cioè

$$\operatorname*{Val}_{E=0} \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\beta} = 0.$$

Così, anche in questo caso, è lecito porre:

$$\frac{a}{b} \underset{E=0}{=} \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\beta}.$$

Avremmo invece trovato

$$\frac{b}{a} \underset{E=0}{=} \frac{\operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}\alpha},$$

se, per $\nu^{(0)} > \mu^{(0)}$, si fossero dovuti scambiare a e b. Analogamente si dimostrebbe l'eguaglianza, rispetto all'indice 0, delle altre due coppie di rapporti

$$\frac{b}{c} \quad \text{e} \quad \frac{\operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}\gamma}, \qquad \frac{c}{a} \quad \text{e} \quad \frac{\operatorname{sen}\gamma}{\operatorname{sen}\alpha},$$

ovvero quella dei loro inversi.

Ora, per le (2), partiamoci dalla relazione:

$$\cos\alpha = -\cos\beta\cos\gamma + \operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\gamma\cos\frac{a}{k}$$

e suppongasi $a = a^{(0)}_{\nu(0)} + a^{(1)}_{\nu(1)} + \dots$, essendo, per ipotesi,

$$\operatorname*{Val}_{E=0}\frac{a}{k} = 0.$$

Ricavando

$$\cos\frac{a}{k} = \frac{\cos\alpha + \cos\beta\cos\gamma}{\operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\gamma},$$

si ha pure

$$\left[\cos\frac{a}{k}\right]_E = \left[\frac{\cos\alpha + \cos\beta\cos\gamma}{\operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\gamma}\right]_E,$$

e, siccome (n. 20) il valor principale di $\cos a/k$ è l'unità, otteniamo:

$$[\operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\gamma]_E = [\cos\alpha + \cos\beta\cos\gamma]_E\,.$$

Ora le funzioni trigonometriche di α, di β e di γ, che compariscono in questa relazione non appartengono certamente ad un indice maggior di zero, di guisa che l'eguaglianza dei loro valori principali porta per conseguenza necessaria la loro eguaglianza, rispetto all'indice 0, e sarà:

$$\operatorname*{Val}_{E=0}\operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\gamma = \operatorname*{Val}_{E=0}(\cos\alpha + \cos\beta\cos\gamma)$$

od anche (n. 9 e 22),

$$\operatorname*{Val}_{E=0}\cos\alpha = \operatorname*{Val}_{E=0}\cos(\pi - \beta - \gamma).$$

Si è anche visto al n. 22 che

$$\operatorname*{Val}_{E=0}\cos x = \cos(\operatorname*{Val}_{E=0} x),$$

e quindi l'eguaglianza precedente può essere scritta:

$$\cos (\operatorname*{Val}_{E=0} \alpha) = \cos (\operatorname*{Val}_{E=0} [\pi - \beta - \gamma]) ,$$

la quale mostra che $\operatorname*{Val}_{E=0} \alpha$ e $\operatorname*{Val}_{E=0} (\pi - \beta - \gamma)$ devono essere eguali, prescindendo sempre, per le convenzioni fatte sul continuo angolare, da multipli interi di 2π. Si ha dunque:

$$\alpha + \beta + \gamma \underset{E=0}{=} \pi .$$

Rimane così dimostrato che *a qualunque sistema, in senso assoluto, appartenga un triangolo, se, rapporto a k, i suoi lati sono infinitesimi, vale, rispetto alla somma degli angoli, l'ipotesi euclidea.*

Padova, Maggio 1893.

II.

SUGLI INVARIANTI ASSOLUTI

« Atti Ist. Veneto di Sc., lett., ed arti », s. VII, t. V (1893-94)

pp. 1447-1523

1. – Sia un sistema di funzioni $f_1, f_2, ..., f_N$ dipendenti da n variabili $x_1, x_2, ..., x_n$, e si sappia che le leggi caratteristiche, le quali reggono le trasformazioni del sistema, sono l'*invarianza*, la *covarianza*, la *contravarianza* (veggasi la nota (4) a pag. 42). Si tratta in primo luogo di:

« Determinare tutte le espressioni I, formate colle variabili, colle fun-
« zioni del sistema e colle loro derivate, le quali non cambiano di valore,
« quando sulle variabili si eseguisca una sostituzione arbitraria e corri-
« spondentemente le funzioni si trasformino secondo le leggi anzidette ».

2. – GAUSS fu il primo, che, riferendosi ad un particolare sistema, ne determinò un invariante differenziale e ne fece rilevare tutta l'importanza. L'invariante di GAUSS è, come si sa, del secondo ordine, si riferisce ad un sistema covariante doppio e simmetrico a due variabili e rappresenta la curvatura totale di una superficie, il quadrato del cui elemento lineare ha per coefficienti le funzioni del sistema.

Il compianto prof. FELICE CASORATI, affrontando la questione da un punto di vista più generale (2), fece vedere come il problema della determinazione di tutti gli invarianti differenziali, che si possono ottenere da una forma quadratica binaria, si lasci risolvere per via di eliminazioni puramente algebriche. Egli mostrò poi quali modificazioni sul numero delle risultanti (invarianti) erano apportate dalla natura speciale delle equazioni, fra cui l'eliminazione doveva eseguirsi.

---

(1) Questo lavoro, salvo alcune lievi modificazioni, che mi furono, con somma benevolenza, suggerite dall'illustre Prof. GREGORIO RICCI, venne presentato alla Facoltà di Scienze di Padova quale dissertazione per la laurea in matematica.

(2) *Ricerca fondamentale per lo studio di una certa classe di proprietà delle superfici curve.* « Ann. di Mat. », ser. 1a, tom. III e IV, 1860-61.

L'illustre prof. BELTRAMI, nella sua celebre Memoria *Sulla teorica generale dei parametri differenziali* (3), mise sotto nuova luce, estendendoli altresì ad un numero qualunque di variabili, certi parametri differenziali, occorsi già nelle ricerche di LAMÉ e di JACOBI, ed ebbe così a considerare espressioni invariantive, che contengono non solo i coefficienti della forma quadratica fondamentale e loro derivate, ma anche funzioni trasformabili per invarianza e relative derivate.

L'importanza somma di questo scritto, oltre che alla maggior generalità del problema risoluto, è dovuta altresì alla semplicità del metodo e all'uso straordinariamente fecondo dei risultati in questioni svariatissime d'analisi pura ed applicata.

Alcuni anni or sono il chiar. prof. RICCI (4) diede al problema della determinazione degli invarianti differenziali la massima generalità finora raggiunta, associando ad una forma differenziale quadratica fondamentale $\varphi = \sum_{rs} a_{rs}\, dx_r\, dx_s$ quanti si vogliono sistemi covarianti e contravarianti.

L'essenza del metodo consiste in ciò: Eliminare, a mezzo dei coefficienti della forma fondamentale e loro derivate, le derivate delle variabili d'ordine superiore al primo, per modo che tutte le eliminanti esprimano relazioni di covarianza oppure di contravarianza.

Basta allora risolvere una questione puramente algebrica, determinare cioè tutti gli invarianti assoluti di un sistema di forme puntuali o reciproche, che hanno ordinatamente per coefficienti:

se si vogliono gli invarianti di ordine zero:

1) i coefficienti della forma fondamentale,
2) gli elementi dei sistemi proposti;

se si vogliono gli invarianti di ordine zero ed uno:

1) i coefficienti della forma fondamentale,
2) gli elementi dei sistemi proposti,
3) gli elementi ottenuti dai proposti con una prima derivazione covariante o contravariante a norma della loro natura;

se infine si vogliono tutti gli invarianti, fino a quelli di un certo ordine $\mu > 1$:

1) i coefficienti della forma fondamentale,
2) gli elementi dei sistemi proposti,

---

(3) « Memorie dell'Acc. delle Scienze dell'Ist. di Bologna », ser. 2ª, tom. VIII (1868). [Opere mat., t. II, Milano, Hoepli, 1911; pp. 74-118].

(4) *Sui parametri e gli invarianti delle forme quadratiche differenziali.* « Ann. di Mat. », ser. 2ª, tom. XIV (1886-87); *Della derivazione covariante e contravariante.* Memorie pubblicate per commemorare l'VIII centenario dalle origini dell'Università di Bologna, Padova, 1888.

3) gli elementi ottenuti dai proposti con μ derivazioni covarianti o contravarianti a norma della loro natura,

4) i simboli di CHRISTOFFEL a_{rstu},

5) gli elementi, che da questi si ottengono con $\mu - 2$ derivazioni covarianti successive.

Come si vede, questo metodo, rimarchevole per genialità di concezione ed eleganza di procedimenti, esige la esistenza di una forma fondamentale quadratica di riferimento e diviene inapplicabile, se il sistema proposto non comprende almeno un sistema covariante doppio.

Il prof. SOMIGLIANA, essendo condotto da ricerche sulle equazioni a derivate parziali (5) a considerare forme differenziali superiori, tentò di estendere il metodo del prof. RICCI, ma, come osserva egli stesso in una nota inserita alla fine, i suoi risultati hanno valore solo fin tanto che la forma fondamentale di riferimento, di grado qualunque, sia però di classe zero.

Riassumendo, per ciò che riguarda la determinazione uniforme di tutti gli invarianti differenziali, noi ci siamo finora trovati di fronte ad un unico criterio direttivo fondamentale, che costituisce, si può dire, il metodo classico (6). Esso risale a CASORATI e trova il suo fondamento nella eliminazione algebrica. Fu generalizzato e ridotto a forma più comprensiva dal prof. RICCI, quando, fra gli elementi del sistema proposto, esiste un sistema covariante doppio.

3. – Una via affatto diversa dalle precedenti è offerta dalle belle e profonde ricerche del LIE. Ecco il problema generale proposto da questo autore:

« È dato un gruppo G finito od infinito di trasformazioni (alcune delle « quali possono anche essere identiche) in N variabili $x_1, x_2, \dots, x_n$; « $z_1, z_2, \dots, z_m$ $(n + m = N)$, di cui le x si risguardano indipendenti, le z « invece come loro funzioni. Determinare tutte le espressioni formate

---

(5) *Sulle trasformazioni delle equazioni lineari omogenee a coefficienti costanti.* « Ann. di Mat. », ser. 2ª, tom. XVIII (1890).

(6) Lo stesso indirizzo viene seguito in lavori più recenti da G. FROBENIUS, *Ueber die in der Theorie der Flächen auftretenden differentialparameter,* « Crelle's Journal », B. 110, Heft I, 1892, e da J. KNOBLAUCH, *Ueber Biegungscovarianten, Zur Theorie der Differentialparameter.* Ib., B. 111, Hefte I, IV, 1893, dove però la forma fondamentale considerata è quadratica binaria, e, rispetto alla teoria generale, nulla vi si trova, che non sia già implicitamente contenuto nei lavori del prof. RICCI.

Da concetto diverso è mosso invece il prof. PADOVA, il quale, in una sua nota *Sulle espressioni invariabili* « Memorie dell'Accademia dei Lincei », ser. IV, vol. IV, 1887, accostandosi ai procedimenti di JACOBI e BELTRAMI, mostrò in qual modo, per stabilire molte espressioni invariantive, si possano con vantaggio usare certe estensioni agli iperspazii dei lemmi di GREEN. Tale metodo, che ha lo scopo precipuo di assegnare il valore effettivo di molti invarianti differenziali, non sembra però atto ad una ricerca sistematica.

« colle x, colle z e colle derivate delle z rapporto alle x fino a quelle di « un certo ordine μ, le quali non cambiano di valore, quando sugli ele- « menti, da cui esse dipendono, si eseguisca una qualunque trasforma- « zione del gruppo ».

Questo enunciato, finchè si resta nell'ambito degli invarianti differenziali, generalizza considerevolmente la questione, di cui al § 1 (7), poichè, mentre in quella sono richiesti gli invarianti assoluti, le espressioni cioè, che rimangono inalterate di fronte a *qualsivoglia* trasformazione delle variabili indipendenti, qui invece abbiamo un elemento arbitrario di più, il gruppo di trasformazioni, che è il campo della loro invariabilità.

I risultati, che, a questo proposito, si trovano nei lavori del Lie, possono essere riassunti nel modo seguente:

1) « Gli invarianti differenziali relativi ad un sistema di n variabili « indipendenti $x_1, x_2, \ldots, x_n$ e di m funzioni $z_1, z_2, \ldots, z_m$ di fronte a tutte « le trasformazioni di un gruppo qualunque G (ad $N = n + m$ variabili) « sono le soluzioni (quando queste soluzioni esistono) di un sistema di « equazioni a derivate parziali lineari ed omogenee ».

2) « Il sistema in questione è completo e quindi ammette soluzioni « ogni qualvolta il numero delle variabili sia superiore almeno di una » « unità a quello delle equazioni algebricamente indipendenti » (8).

4. – Queste due proposizioni esauriscono manifestamente la questione degli invarianti differenziali dal punto di vista della teorica generale dei gruppi; nei casi singoli si può richiedere qualche cosa di più. Perciò, essendomi proposto (§ 1) lo studio degli invarianti assoluti di un sistema S alquanto più generale di quello considerato dal prof. Ricci (perchè francato dal vincolo della forma quadratica fondamentale), e, dovendomi in primo luogo (§§ 5-16) occupare degli invarianti differenziali, ritenni insufficiente di limitarmi a stabilire il sistema di equazioni, che li definiscono,

---

(7) Si può infatti vedere come la ricerca degli invarianti assoluti del nostro sistema S non sia che un caso particolare di questo problema. Basta immaginare un gruppo, le cui equazioni di definizione sieno:

1) La identità $0 = 0$, cui si possono far corrispondere tutte le trasformazioni puntuali nelle n variabili $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

2) Le equazioni differenziali fra le f e le (f), le quali si possono ottenere, derivando rispetto alle f stesse le relazioni fondamentali di covarianza e di contravarianza ed eliminando poi le derivate delle variabili indipendenti.

Gli invarianti di questo gruppo infinito sono precisamente le espressioni richieste.

(8) *Ueber Differentialinvarianten.* « Math. Annalen », B. XXIV (1884), Heft 4. [Gesamm. Abhandl., Leipzig-Oslo, Teubner-Aschehoug, Bd. VI (1927), pp. 95-138.] — *Theorie der Transformationsgruppen*, Erster Abschnitt, Leipzig, Teubner, 1888; Kap. 25. — *Die Grundlagen für die Theorie der unendlichen continuirlichen Transformationsgruppen.* « Leipziger Berichte », 1891, Heft 3; pp. 316-393. [Gesamm. Abhandl., Leipzig-Oslo, Teubner-Aschehoug, Bd. VI (1927), pp. 300-364.]

ma volli altresì, quantunque per ciò si esigessero sviluppi laboriosi, rintracciare direttamente la struttura del sistema e investigare (veggasi particolarmente Teor. I, pag. 86-87) qualche proprietà delle sue soluzioni.

Nella seconda parte di questo lavoro si trova minor complicazione di calcolo e, se io non m'inganno, taluna novità di vedute, in quanto cercai di estendere il concetto di invariante, considerando certe espressioni integrali. Una tale ricerca (§§ 17-21) è, si può dire, una applicazione dei risultati ottenuti nella prima parte. Aggiunsi in fine (§ 22) un breve cenno diretto a mostrare in qual modo la considerazione degli invarianti integrali si possa estendere al caso di un gruppo qualsiasi.

5. – Veniamo ormai al nostro problema e rifacciamoci *ab initio*. Supponiamo dato un sistema S, il quale contenga α sistemi covarianti $Z_{1m_1}, Z_{2m_2}, \dots, Z_{\alpha m_\alpha}$ d'ordine rispettivo $m_1, m_2, \dots, m_\alpha$ e certi β sistemi contravarianti $Z_1^{w_1}, Z_2^{w_2}, \dots, Z_\beta^{w_\beta}$ rispettivamente dell'ordine $w_1, w_2, \dots, w_\beta$. Non consideriamo particolarmente le funzioni invarianti, potendo immaginarle incluse in una delle due classi accennate quali sistemi di ordine zero.

Fissiamo ora in generale un sistema covariante Z_m dell'ordine m e un sistema contravariante Z^w dell'ordine w; si dicano genericamente

$$f_{r_1 r_2 \dots r_m}, \quad f^{r_1 r_2 \dots r_w} \qquad (r_1, r_2, \dots, r_m, r_w = 1, 2, \dots, n)$$

gli elementi rispettivi. Avremo le leggi caratteristiche di trasformazione:

$$(1) \qquad (f_{r_1 r_2 \dots r_m}) = \sum_1^n{}_{q_1 q_2 \dots q_m} f_{q_1 q_2 \dots q_m} \frac{\partial x_{q_1}}{\partial (x_{r_1})} \frac{\partial x_{q_2}}{\partial (x_{r_2})} \dots \frac{\partial x_{q_m}}{\partial (x_{r_m})},$$

$$(1') \qquad (f^{r_1 r_2 \dots r_w}) = \sum_1^\infty{}_{q_1 q_2 \dots q_m} f^{q_1 q_2 \dots q_w} \frac{\partial (x_{r_1})}{\partial x_{q_1}} \frac{\partial (x_{r_2})}{\partial x_{q_2}} \dots \frac{\partial (x_{r_w})}{\partial x_{q_w}}.$$

Queste relazioni dovranno sussistere, anche quando il cambiamento delle variabili x si riduca ad una variazione infinitesima, per cui si abbia:

$$(3) \qquad (x_i) = x_i + \delta x_i .$$

Soddisfatte, come noi supponiamo, le necessarie condizioni di continuità, trascurando gli infinitesimi di ordine superiore al primo si trova:

$$(f_{r_1 r_2 \dots r_m}) = f_{r_1 r_2 \dots r_m} - \sum_1^\infty{}_{q_1} f_{q_1 r_2 \dots r_m} \frac{\partial \delta x_{q_1}}{\partial x_{r_1}} -$$

$$- \sum_1^n{}_{q_2} f_{r_1 q_2 \dots r_m} \frac{\partial \delta x_{q_2}}{\partial x_{r_2}} - \dots - \sum_1^n{}_{q_m} f_{r_1 r_2 \dots q_m} \frac{\partial \delta x_{q_m}}{\partial x_{r_m}},$$

$$(f^{r_1 r_2 \dots r_w}) = f^{r_1 r_2 \dots r_w} + \sum_1^n {}_{q_1} f^{q_1 r_2 \dots r_w} \frac{\partial \delta x_r}{\partial x_{q_1}} +$$

$$+ \sum_1^n {}_{q_2} f^{r_1 q_2 \dots r_w} \frac{\partial \delta x_{r_2}}{\partial x_{q_2}} + \dots + \sum_1^n {}_{q_w} f^{r_1 r_2 \dots q_w} \frac{\partial \delta x_{r_w}}{\partial x_{q_w}} ,$$

le quali compendiosamente possono anche essere scritte:

$$(2) \qquad (f_{r_1 r_2 \dots r_m}) - f_{r_1 r_2 \dots r_m} = - \sum_1^m {}_l \sum_1^n {}_q f_{r_1 r_2 \dots r_{l-1} q r_{l+1} \dots r_m} \frac{\partial \delta x_q}{\partial x_{r_l}} ,$$

$$(2') \qquad (f^{r_1 \dots r_2 r_w}) - f^{r_1 r \dots {}_2 r_w} = \sum_1^w {}_l \sum_1^n {}_q f^{r_1 r_2 \dots r_{l-1} q r_{l+1} \dots r_w} \frac{\partial \delta x_{r_l}}{\partial x_q} .$$

Come è manifesto, le differenze $(f) - f$ si possono risguardare quali variazioni prime delle quantità f stesse. Esse sono evidentemente nulle, se la f è una invariante, e sono date dalle (2), (2′), se f appartiene ad un sistema covariante o contravariante. Del resto basta fare $m = 0$ nella (2) o $w = 0$ nella (2′) che, mancando il secondo membro, si ritrova il caso della funzione invariante.

Poniamo per maggior semplicità

$$(4) \qquad \delta x_i = \xi_i , \qquad (i = 1, 2, \dots n),$$

$$(5) \qquad (f) - f = \delta f = \varphi ,$$

$$(6) \qquad \frac{\partial^j f}{\partial x_{s_1} \partial x_{s_2} \dots \partial x_{s_j}} = f_{)s_1 s_2 \dots s_j} \ (j \text{ qualunque}; \ s_1, s_2, \dots, s_j = 1, 2, \dots, n),$$

e corrispondentemente:

$$(7) \qquad \delta f_{)s_1 s_2 \dots s_j} = \varphi_{(s_1 s_2 \dots s_j} .$$

Cerchiamo di esprimere, come, a mezzo delle (2), (2′), si è fatto per le f, le variazioni $\varphi_{(s_1 s_2 \dots s_j}$ delle loro derivate in funzione di quantità finite, delle ξ_i e delle loro derivate. Ricordiamo a tale scopo una formula fondamentale nel calcolo delle variazioni, che, per le (4), (5), (6), (7), potrà essere scritta:

$$\varphi_{(s_1} = \varphi_{)s_1} - \sum_1^n {}_q f_{)q} \frac{\partial \xi_q}{\partial x_{s_1}} .$$

Considereremo separatamente il caso, in cui f appartiene ad un sistema covariante e quello, in cui esso è invece elemento di un sistema contravariante.

6. – Riferendoci da principio al primo caso, denoti Z_m il sistema generico, cui appartiene f, che sarà adunque un certo $f_{r_1 r_2 \dots r_m}$. Avremo per le (2), (4) e (5):

$$\varphi_{r_1 r_2 \dots r_m} = -\sum_1^m{}_l \sum_1^n{}_q f_{r_1 r_2 \dots r_{l-1} q r_{l+1} \dots r_m} \frac{\partial \xi_q}{\partial x_r} . \tag{2bis}$$

Dalla formula sopra citata:

$$\varphi_{r_1 r_2 \dots r_m (s_1} = \varphi_{r_1 r_2 \dots r_m) s_1} - \sum_1^n{}_q f_{r_1 r_2 \dots r_m) q} \frac{\partial \xi_q}{\partial x_{s_1}} = \tag{8}$$

$$= -\sum_1^m{}_l \sum_1^n{}_q f_{r_1 r_2 \dots r_{l-1} q r_{l+1} \dots r_m) s_1} \frac{\partial \xi_q}{\partial x_{r_l}} - \sum_1^n{}_q f_{r_1 r_2 \dots r_m) q} \frac{\partial \xi_q}{\partial x_{s_1}}$$

$$- \sum_1^m{}_l \sum_1^n{}_q f_{r_1 r_2 \dots r_{l-1} q r_{l+1} \dots r_m} \frac{\partial^2 \xi_q}{\partial x_{r_l} \partial x_{s_1}} ,$$

la qual relazione porge le variazioni delle derivate prime di $f_{r_1 r_2 \dots r_m}$ espresse per gli altri elementi del sistema Z_m, per le loro derivate prime e per le derivate prime e seconde delle ξ.

Più generalmente noi ci proponiamo di assegnare la forma di $\varphi_{r_1 r_2 \dots r_m (s_1 s_2 \dots s_j}$. Con questo intento si ponga:

$$\tag{9} \left\{ \begin{aligned} & T^{(\varrho)}_{(j) r_1 r_2 \dots r_m (s_1 s_2 \dots s_j} = 0 && \text{per } \varrho > j+1 \\ & = -\sum_1^m{}_l \sum_1^n{}_q \gamma^j_{\varrho-1} f_{r_1 r_2 \dots r_{l-1} q r_{l+1} \dots r_m) s_1 s_2 \dots s_{j-\varrho+1}} \frac{\partial^\varrho \xi_q}{\partial x_{r_l} \partial x_{s_{j-\varrho+2}} \dots \partial x_{s_j}} && \text{per } \varrho \leq j+1 , \end{aligned} \right.$$

$$\tag{10} \left\{ \begin{aligned} & \Theta^{(\varrho)}_{(j) r_1 r_2 \dots r_m (s_1 s_2 \dots s_j} = 0 && \text{per } \varrho > j , \\ & = -\sum_1^n{}_q \gamma^j_\varrho f_{r_1 r_2 \dots r_m) s_1 s_2 s_{j-\varrho} q} \frac{\partial^\varrho \xi_q}{\partial x_{s_{j-\varrho+1}} \partial x_{s_{j-\varrho+2}} \dots \partial x_{s_j}} , && \text{per } \varrho \leq j , \end{aligned} \right.$$

dove i simboli $\gamma^j_{\varrho-1}$, γ^j_ϱ abbracciano la somma di tutte le combinazioni semplici degli j indici $s_1, s_2, \dots, s_j$, considerati come elementi essenzialmente distinti ($\varrho-1$ a $\varrho-1$), (ϱ a ϱ) rispettivamente.

La (9) ci dà:
per $j=0$, $\varrho=1$,

$$T^{(1)}_{(0)r_1r_2\ldots r_m}=-\sum_1^m{}_l\sum_1^n{}_q f_{r_1r_2\ldots r_{l-1}qr_{l+1}\ldots r_m}\frac{\partial\xi_q}{\partial x_{r_l}};$$

per $j=1$, $\varrho=1$,

$$T^{(1)}_{(1)r_1r_2\ldots r_m(s_1}=-\sum_1^m{}_l\sum_1^n{}_q f_{r_1r_2\ldots r_{l-1}qr_{l+1}\ldots r_m)s_1}\frac{\partial\xi_q}{\partial x_{r_l}};$$

per $j=1$, $\varrho=2$,

$$T^{(2)}_{(1)r_1r_2\ldots r_m(s_1}=-\sum_1^m{}_l\sum_1^n{}_q f_{r_1r_2\ldots r_{l-1}qr_{l+1}\ldots r_m}\frac{\partial^2\xi_q}{\partial x_{r_l}\partial x_{s_1}}.$$

La (10) invece porge:
per $j=0$, $\varrho=1$,

$$\Theta^{(1)}_{(0)r_1r_2\ldots r_m}=0;$$

per $j=1$, $\varrho=1$,

$$\Theta^{(1)}_{(1)r_1r_2\ldots r_m(s_1}=-\sum_1^m{}_q f_{r_1r_2\ldots r_m)q}\frac{\partial\xi_q}{\partial x_{s_1}};$$

per $j=1$, $\varrho=2$,

$$\Theta^{(2)}_{(1)r_1r_2\ldots r_m(s_1}=0.$$

Posto ancora:

$$T^{(\varrho)}_{(j)r_1r_2\ldots r_m(s_1s_2\ldots s_j}+\Theta^{(\varrho)}_{(j)r_1r_2\ldots r_m(s_1s_2\ldots s_j}=\mathfrak{T}^{(\varrho)}_{(j)r_1r_2\ldots r_m(s_1s_2\ldots s_j},\tag{11}$$

si ha manifestamente, per le (2^{bis}):

$$\varphi_{r_1r_2\ldots r_m}=\mathfrak{T}^{(1)}_{(0)r_1r_2\ldots r_m},$$

e per le (8):

$$\varphi_{r_1r_2\ldots r_m(s_1}=\mathfrak{T}^{(1)}_{(1)r_1r_2\ldots r_m(s_1}+\mathfrak{T}^{(2)}_{(1)r_1r_2\ldots r_m(s_1}.$$

Io dico ora che si ha in generale, qualunque sia j:

$$\varphi_{r_1r_2\ldots r_m(s_1s_2\ldots s_j}=\sum_1^{j+1}{}_\varrho\,\mathfrak{T}^{(\varrho)}_{(j)r_1r_2\ldots r_m(s_1s_2\ldots s_j}.\tag{12}$$

Si supponga infatti che la (12) sussista per un certo valore di j; possiamo provare che essa vale anche per $j+1$. In primo luogo, per la formula già ricordata dal calcolo delle variazioni:

$$\varphi_{r_1 r_2 \dots r_m (s_1 s_2 \dots s_j s_{j+1}} = \varphi_{r_1 r_2 \dots r_m) s_1 s_2 \dots s_j\, s_{j+1}} - \sum_1^n {}_q\, f_{r_1 r_2 \dots r_m) s_1 s_2 \dots s_j q} \frac{\partial \xi_q}{\partial x_{s_{j+1}}},$$

quindi per la (12):

$$\varphi_{s_1 s_2 \dots s_j s_{j+1}} = \sum_1^{j+1} {}_\varrho \frac{\partial \mathcal{T}^{(\varrho)}_{(j) r_1 r_2 \dots r_m (s_1 s_2 \dots s_j}}{\partial x_{s_{j+1}}} - \sum_1^n {}_q\, f_{r_1 r_2 \dots r_m (s_1 s_2 \dots s_j q} \frac{\partial \xi_q}{\partial x_{s_{j+1}}}. \tag{13}$$

Indichiamo con $\partial_1 \mathcal{T} / \partial_1 x_s$ il risultato, che si ottiene derivando, in una $\mathcal{T}$ qualsiasi il primo fattore f rapporto ad x_s, con $\partial_2 \mathcal{T} / \partial_2 x_s$ il risultato, che si ottiene, derivando invece il secondo fattore. Analogo significato riserbiamo naturalmente a $\partial_1 T / \partial_1 x_s$, $\partial_1 \Theta / \delta_1 x_s$, ecc. Avremo, come è manifesto:

$$\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial x_s} = \frac{\partial_1 \mathcal{T}}{\partial_1 x_s} + \frac{\partial_2 \mathcal{T}}{\partial_2 x_s},$$

e le altre analoghe.

Tenendo presente dalle (10) che $\Theta^{(j+1)}_{(j) s_1 s_2 \dots s_j s_{j+1}} = 0$, la (13) potrà essere scritta

$$\varphi_{r_1 r_2 \dots r_m (s_1 s_2 \dots s_{j+1}} = \frac{\partial_1 \mathcal{T}^{(1)}_{(j) r_1 r_2 \dots r_m (s_1 s_2 \dots s_j}}{\partial_1 x_{s_{j+1}}} - \sum_1^n {}_q\, f_{r_1 r_2 \dots r_m (s_1 s_2 \dots s_j q} \frac{\partial \xi_q}{\partial x_{s_{j+1}}}$$
$$+ \sum_2^{j+1} {}_\varrho \left\{ \frac{\partial_1 \mathcal{T}^{(\varrho)}_{(j) r_1 r_2 \dots r_m (s_1 s_2 \dots s_j}}{\partial_1 x_{s_{j+1}}} + \frac{\partial_2 \mathcal{T}^{(\varrho - 1)}_{(j) r_1 r_2 \dots r_m (s_1 s_2 \dots s_j}}{\partial_2 x_{s_{j+1}}} \right\} + \frac{\partial_2 \mathcal{T}^{(j+1)}_{(j) r_1 r_2 \dots r_m (s_1 s_2 \dots s_j}}{\partial_2 x_{s_{j+1}}}. \tag{13bis}$$

Ora si ha dalle (9), essendo l'indice variabile ϱ della sommatoria antecedente sempre $\leqslant j+1$:

$$\frac{\partial_1 T^{(\varrho)}_{(j) r_1 r_2 \dots r_m (s_1 s_2 \dots s_j}}{\partial_1 x_{s_{j+1}}} =$$
$$= - \sum_1^m {}_l \sum_1^n {}_q\, \gamma^j_{\varrho - 1} f_{r_1 r_2 \dots r_{l-1} q r_{l+1} \dots r_m) s_1 s_2 \dots s_{j-\varrho+1} s_{j+1}} \frac{\partial^\varrho \xi_q}{\partial x_{r_l}\, \partial x_{s_{j-\varrho+2}} \dots \partial x_{s_j}}$$

$$\frac{\partial_2 T^{(\varrho - 1)}_{(j) r_1 r_2 \dots r_m (s_1 s_2 \dots s_j}}{\partial_2 x_{s_{j+1}}} =$$
$$= - \sum_1^m {}_l \sum_1^n {}_q\, \gamma^j_{\varrho - 2} f_{r_1 r_2 \dots r_{l-1} q r_{l+1} \dots r_m) s_1 s_2 \dots s_{j-\varrho+1} s_{j-\varrho+2}} \frac{\partial^\varrho \xi_q}{\partial x_{r_l}\, \partial x_{s_{j-\varrho+3}} \dots \partial x_{s_j}\, \partial x_{s_{j+1}}}.$$

Sommando e ricordando dal calcolo combinatorio che:

$$\gamma^{j+1}_{\varrho-1}(s_1 s_2 \dots s_j s_{j+1}) = \gamma^{j}_{\varrho-1}(s_1 s_2 \dots s_j) + s_{j+1}\gamma^{j}_{\varrho-2}(s_1 s_2 \dots s_j)\,,$$

si conclude:

$$\frac{\partial_1 T^{(\varrho)}_{(j) r_1 r_2 \dots r_m (s_1 s_2 \dots s_j}}{\partial_1 x_{s_{j+1}}} + \frac{\partial_2 T^{(\varrho-1)}_{(j) r_1 r_2 \dots r_m (s_1 s_2 \dots s_j}}{\partial_2 x_{s_{j+1}}} = T^{(\varrho)}_{(j+1) r_1 r_2 \dots r_m (s_1 s_2 \dots s_j s_{j+1}}\,;$$

analogamente:

$$\frac{\partial_1 \Theta^{(\varrho)}_{(j) r_1 r_2 \dots r_m (s_1 s_2 \dots s_j}}{\partial_1 x_{s_{j+1}}} + \frac{\partial_2 \Theta^{(\varrho-1)}_{(j) r_1 r_2 \dots r_m (s_1 s_2 \dots s_j}}{\partial_2 x_{s_{j+1}}} = \Theta^{(\varrho)}_{(j+1) r_1 r_2 \dots r_m (s_1 s_2 \dots s_j s_{j+1}}\,,$$

e quindi:

$$(14) \qquad \frac{\partial_1 \mathfrak{T}^{(\varrho)}_{(j) r_1 r_2 \dots r_m (s_1 s_2 \dots s_j}}{\partial_1 x_{s_{j+1}}} + \frac{\partial_2 \mathfrak{T}^{(\varrho)}_{(j) r_1 r_2 \dots r_m (s_1 s_2 \dots s_j}}{\partial_2 x_{s_{j+1}}} = \mathfrak{T}^{(\varrho)}_{(j+1) r_1 r_2 \dots r_m (s_1 s_2 \dots s_j s_{j+1}}\,.$$

Si ha poi:

$$\frac{\partial_1 \mathfrak{T}^{(1)}_{(j) r_1 r_2 \dots r_m (s_1 s_2 \dots s_j}}{\partial_1 x_{s_{j+1}}} = -\sum_1^m{}_l \sum_1^n{}_q f_{r_1 r_2 \dots r_{l-1} q r_{l+1} \dots r_m) s_1 s_2 \dots s_{j+1}} \frac{\partial \xi_q}{\partial x_{r_j}} = \mathfrak{T}^{(1)}_{(j+1) r_1 r_2 \dots r_m (s_1 s_2 \dots s_{j+1}}\,,$$

$$\frac{\partial_1 \Theta^{(1)}_{(j) r_1 r_2 \dots r_m (s_1 s_2 \dots s_j}}{\partial_1 x_{s_{j+1}}} = -\sum_1^n{}_q \gamma^j_1 f_{r_1 r_2 \dots r_m) s_1 s_2 \dots s_{j-1} q s_{j+1}} \frac{\partial \xi_q}{\partial x_{s_j}}\,,$$

ed aggiungendo a entrambi i membri

$$-\sum_1^n{}_q f_{r_1 r_2 \dots r_m) s_1 s_2 \dots s_j q} \frac{\partial \xi_q}{\partial x_{s_{j+1}}}\,,$$

otterremo a destra:

$$-\sum_1^n \gamma^{j+1}_1 f_{r_1 r_2 \dots r_m) s_1 s_2 \dots s_j q} \frac{\partial \xi_q}{\partial x_{s_{j+1}}}\,, \qquad \text{cioé:} \quad \Theta^{(1)}_{(j+1) r_1 r_2 \dots r_m (s_1 s_2 \dots s_{j+1}}\,,$$

per il che da ultimo, sommando colla relazione precedente, si otterrà:

$$(15) \qquad \frac{\partial_1 \mathfrak{T}^{(1)}_{(j) r_1 r_2 \dots r_m (s_1 s_2 \dots s_j}}{\partial_1 x_{s_{j+1}}} - \sum^n f_{r_1 r_2 \dots r_m) s_1 s_2 \dots s_j q} \frac{\partial \xi_q}{\partial x_{s_{j+1}}} = \mathfrak{T}^{(1)}_{(j+1) r_1 r_2 \dots r_m (s_1 s_2 \dots s_j s_{j+1}}\,.$$

Infine:

$$\frac{\partial_2 \mathfrak{T}^{(j+1)}_{(j) r_1 r_2 \dots r_m (s_1 s_2 \dots s_j}}{\partial_2 x_{s_{j+1}}} = -\sum_1^m{}_l \sum_1^n{}_q f_{r_1 r_2 \dots r_{l-1} q r_{l+1} \dots r_m} \frac{\partial^{j+1} \xi_q}{\partial x_r\, \partial x_{s_1} \dots \partial x_{s_j}\, \partial x_{s_{j+1}}}$$

$$= \mathfrak{T}^{(j+2)}_{(j+1) r_1 r_2 \dots r_m (s_1 s_2 \dots s_j s_{j+1}}\,,$$

e, siccome $\Theta^{(j+2)}_{(j+1)r_1r_2\ldots r_m(s_1s_2\ldots s_js_{j+1}} = 0$, potremo anche scrivere:

$$\frac{\partial_2 T^{(j+1)}_{(j)r_1r_2\ldots r_m(s_1s_2\ldots s_j}}{\partial_2 x_{j+1}} = \mathfrak{T}^{(j+2)}_{(j+1)r_1r_2\ldots r_m(s_1s_2\ldots s_js_{j+1}} . \tag{16}$$

Valendoci ora delle (14), (15), (16), ricaviamo senza difficoltà dalla (13$^{\text{bis}}$):

$$\varphi_{r_1r_2\ldots r_m(s_1s_2\ldots s_js_{j+1}} = \sum_{1}^{j+2}{}_{\varrho}\, \mathfrak{T}^{(\varrho)}_{(j+1)r_1r_2\ldots r_m(s_1s_2\ldots s_js_{j+1}} ,$$

la quale non è che la (12), cangiatovi j con $j+1$. Ora noi la abbiamo verificata effettivamente per $j=0$ e per $j=1$, quindi, in virtù della dimostrazione, che precede, essa vale in generale.

7. – In modo del tutto analogo si possono stabilire le formule corrispondenti per i sistemi contravarianti. Noi qui le trascriviamo senz'altro, riferendoci ad un generico sistema contravariante Z^w dell'ordine w. Avremo designando le formule correlative a quelle del paragrafo antedecente collo stesso numero accentato:

$$\varphi^{r_1r_2\ldots r_w} = \sum_{1}^{w}{}_{l} \sum_{1}^{n}{}_{q} f^{r_1r_2r_{l-1}qr_{l+1}\ldots r_w} \frac{\partial \xi_{r_l}}{\partial x_q} , \tag{2$'$bis}$$

$$\varphi^{r_1r_2\ldots r_w}_{(s_1} = \sum_{1}^{w}{}_{l} \sum_{1}^{n}{}_{q} f^{r_1r_2\ldots r_{l-1}qr_{l+1}\ldots r_w}_{)s_1} \frac{\partial \xi_{r_l}}{\partial x_q} - \sum_{1}^{n}{}_{q} f^{r_1r_2\ldots r_w} \frac{\partial \xi_q}{\partial x_{s_1}} + \tag{8$'$}$$
$$+ \sum_{1}^{w}{}_{l} \sum_{1}^{1}{}_{q} f^{r_1r_2\ldots r_{l-1}qr_{l+1}\ldots r_w} \frac{\partial^2 \xi_{r_l}}{\partial x_q\, \partial x_{s_1}} ,$$

$$\left\{\begin{array}{ll} T^{(\varrho)r_1r_2\ldots r_w}_{(j)s_1s_2\ldots s_j} = 0 & \text{per} \quad \varrho > j+1 , \\ = \displaystyle\sum_{1}^{w}{}_{l} \sum_{1}^{n}{}_{q} \gamma^{j}_{\varrho-1} f^{r_1r_2\ldots r_{l-1}qr_{l+1}\ldots r_w}_{)s_1s_2\ldots s_{j-\varrho+1}} \frac{\partial^{\varrho} \xi_{r_l}}{\partial x_q \partial x_{s_{j-\varrho+2}} \ldots \partial x_{s_j}} & \text{per} \quad \varrho \leqslant j+1 , \end{array}\right. \tag{9$'$}$$

$$\left\{\begin{array}{ll} \Theta^{(\varrho)r_1r_2\ldots r_m}_{(j)(s_1s_2\ldots s_j} = 0 & \text{per} \quad \varrho > j , \\ = -\displaystyle\sum_{1}^{n}{}_{q} \gamma^{j}_{\varrho} f^{r_1r_2\ldots r_w}_{(j))s_1s_2\ldots s_{j-\varrho}q} \frac{\partial^{\varrho} \xi_q}{\partial x_{s_{j-\varrho+1}}\, \partial x_{s_{j-\varrho+2}} \ldots \partial x_{s_j}} & \text{per} \quad \varrho \leqslant j , \end{array}\right. \tag{10$'$}$$

$$T^{(\varrho) r_1 r_2 \ldots r_w}_{(j)(s_1 s_2 \ldots s_j} + \Theta^{(\varrho) r_1 r_2 \ldots r_w}_{(j)(s_1 s_2 \ldots s_j} = \mathfrak{T}^{(\varrho) r_1 r_2 \ldots r_w}_{(j)(s_1 s_2 \ldots s_j}, \tag{11'}$$

$$\varphi^{r_1 r_2 \ldots r_w}_{(s_1 s_2 \ldots s_j} = \sum_{1}^{j+1}{}_{\varrho}\, \mathfrak{T}^{(\varrho) r_1 r_2 \ldots r_w}_{(j)(s_1 s_2 \ldots s_j}. \tag{12'}$$

8. – Si immagini ora che sia I un invariante differenziale del sistema S d'ordine, poniamo, μ. Dovendosi avere $(I) = I$ di fronte a qualsiasi cambiamento di variabili, la stessa relazione dovrà sussistere, anche quando il cambiamento coincide colla variazione infinitesima (3). Sarà quindi: $(I) - I = \delta I = 0$. Ora I, per ipotesi, è formata colle variabili, cogli elementi del sistema S e colle loro derivate fino all'ordine μ; perciò, rappresentando genericamente con $f_{hm_h \atop r_1 r_2 \ldots r_{m_h}}$ un elemento del sistema

$$Z_{hm_h}, \qquad (h = 1, 2, \ldots, \alpha),$$

con $f_{kw_k}^{r_1 r_2 \ldots r_{w_k}}$ un elemento del sistema

$$Z_k^{w_k}, \qquad (k = 1, 2, \ldots, \beta),$$

con $\varphi_{hm_h \atop r_1 r_2 \ldots r_{m_k}}$, $\varphi_{kw_k}^{r_1 r_2 \ldots r_{w_k}}$ le variazioni corrispondenti, avremo:

$$\delta I = \sum_{1}^{n}{}_{i} \frac{\partial I}{\partial x_i} \xi_i + \sum_{1}^{\alpha}{}_{h} \sum_{0}^{\mu}{}_{j} \sum_{1}^{n}{}_{r_1 r_2 \ldots r_{m_k} \mid s_1 s_2 \ldots s_j} \frac{\partial I}{\partial f_{hm_h \atop r_1 r_2 \ldots r_{m_h}) s_1 s_2 \ldots s_j}} \varphi_{hm_h \atop r_1 r_2 \ldots r_{m_h}(s_1 s_2 \ldots s_j}$$
$$+ \sum_{1}^{\beta}{}_{k} \sum_{0}^{\mu}{}_{j} \sum_{1}^{n}{}_{r_1 r_2 \ldots r_{w_k} \mid s_1 s_2 \ldots s_j} \frac{\partial I}{\partial f_{kw_k \atop) s_1 s_2 \ldots s_j}^{r_1 r_2 \ldots r_{w_k}}} \varphi_{kw_k \atop (s_1 s_2 \ldots s_j}^{r_1 r_2 \ldots r_{w_k}} = 0, \tag{18}$$

dove la somma tra 1 ed n, rispetto agli indici $s_1 s_2 \ldots s_j$, (separati perciò dagli r con una sbarretta) si intende estesa a tutte le combinazioni con ripetizione.

Da ciò risulta che la I, risguardata come funzione degli elementi che la costituiscono, è integrale della (18). Ma per le formule precedenti, le $\varphi_{r_1 r_2 \ldots r_m (s_1 s_2 \ldots s_j}$, $\varphi^{r_1 r_2 \ldots r_w}_{(s_1 s_2 \ldots s_i}$ sono funzioni lineari ed omogenee delle derivate delle ξ, fino all'ordine $\mu + 1$ incluso, e d'altra parte le variazioni ξ_i e le loro derivate sono completamente arbitrarie; dunque la I soddisfa a tutte le equazioni, che si possono ottenere dalla (18), eguagliando separatamente a zero i coefficienti delle ξ_i e delle loro derivate fino all'ordine $\mu + 1$ incluso. Il sistema complessivo di tali equazioni, rappresentato anche dalla (18), potremo brevemente dinotare con Ω_μ.

Reciprocamente è facile dimostrare che ogni funzione I, la quale soddisfa a tutte le equazioni Ω_μ è un invariante del sistema S. Per brevità si potrebbe osservare che, siccome I non cambia di valore di fronte a nessuna variazione infinitesima delle variabili, lo stesso deve accadere per un cangiamento finito. Tuttavia, se si voglia condurre compiutamente la dimostrazione, si può far vedere che, scelta ad arbitrio una sostituzione di variabili:

$$(x_i) = \chi_i(x_1, x_2, \dots, x_n), \qquad (i = 1, 2, \dots, n) \tag{19}$$

ed eseguitala sulle funzioni del sistema S, la (I) relativa ad esse è identica alla I primitiva.

Assumiamo a tale scopo una variabile ausiliaria t e poniamo:

$$y_i = x_i + t[\chi_i(x_1, x_2, \dots, x_n) - x_i], \qquad (i = 1, 2, \dots, n), \tag{20}$$

risguardando le (20) come un gruppo monometrico (eingliedrige Gruppe) di trasformazioni, che opera sulle variabili indipendenti x e che, per $t = 0$, dà la trasformazione identica, per $t = 1$, la (19). Immaginando di eseguire effettivamente sulle nostre variabili indipendenti e quindi sulle funzioni di S le trasformazioni del gruppo (20), la I diverrà una certa funzione $I(t)$ di t, tale che basterà assegnare il valore t, perchè $I(t)$ porga la (I) (relativa a quella trasformazione (20), che corrisponde al dato valore di t) espressa per le variabili primitive x. Ma δI è nullo per ogni variazione infinitesima, in particolare sarà $dI = 0$, rappresentando dI l'incremento, che subisce I, quando da un valor generico t si passa al valore contiguo $t + dt$. Ne consegue che I è indipendente da t e quindi eguale ad $I(0) = I$, con che riesce dimostrata completamente per il nostro sistema S la prima delle due proposizioni, di cui al § 3 [9].

---

[9] Nei riguardi degli invarianti differenziali assoluti, questa proposizione, oltre che dallo stesso LIE, si trova accennata esplicitamente alla fine di una nota del sig. GOURSAT, *Sur les invariants des équations différentielles*, « Comptes Rendus », tom. CVII, n. 23, 1888, nella quale però mancano naturalmente tutti gli sviluppi dei paragrafi antecedenti, non essendosi l'autore proposto di studiare i sistemi di equazioni differenziali.

Più recentemente il sig. KASIMIR ŻORAWSKI, seguendo la via tracciata da LIE, si occupò della effettiva determinazione di tutti gli invarianti differenziali, che si possono ottenere associando ad una forma quadratica binaria una o più funzioni invariantive, tenendo conto anche di quelli, che provengono da una estensione del gruppo (Mindingsche erweiterte Gruppe) dovuta all'ipotesi che delle due variabili originariamente indipendenti una si possa considerare funzione dell'altra. La sua memoria *Ueber Biegungsinvarianten*, « Acta Math. », vol. 16, 1892, dopo alcune osservazioni preliminari, contiene degli sviluppi analoghi ai precedenti nel caso speciale di due variabili, di un solo sistema covariante doppio e di quanti si vogliono sistemi di ordine zero. Vi è poi mostrato come le equazioni, da noi qui designate con Ω_μ, a partire da $\mu = 2$, sieno tutte indipendenti, del che si vale l'autore per stabilire il numero totale di invarianti differenziali di ordine qualunque, che possiede il sistema da lui considerato. L'ultima parte della memoria ha per iscopo il calcolo di alcuni invarianti già noti.

A proposito della estensione (dallo ŻORAWSKI denominata di MINDING) vogliamo avvertire che per le nostre n variabili x riterremo superflua l'ipotesi di un qualsiasi legame funzionale, accontentandoci, per ciò che si riferisce a questa ed eventualmente ad altre estensioni dei gruppi, delle teorie generali del LIE.

9. – Consideriamo un po' da vicino le equazioni del sistema Ω_μ. Noi abbiamo intanto $\partial I/\partial x_i = 0$ $(i = 1, 2, \dots, n)$, da cui si conclude la notissima proprietà degli invarianti assoluti di non contenere esplicitamente le variabili indipendenti. Le altre equazioni Ω_μ si potranno genericamente rappresentare con $X_{(\mu)} I = 0$; in particolare poi quella tra esse, che si ottiene, eguagliando a zero il coefficiente di

$$\frac{\partial^\varrho \xi_q}{\partial x_{r_1} \partial x_{r_2} \dots \partial x_{r_\varrho}},$$

sarà designata con $X^{(\varrho)}_{(\mu) p_1 p_2 \dots p_\varrho} I = 0$.

È bene rilevare dalle formule precedenti che le φ, relative sia agli elementi di un sistema (covariante e contravariante), sia alle loro derivate, si esprimono esclusivamente per gli elementi del sistema stesso e loro derivate, talchè, come del resto è chiaro a priori, le φ di due sistemi diversi hanno per coefficienti delle derivate delle ξ quantità assolutamente indipendenti. Ora potremo porre, come si rileva dalla (18):

$$X^{(\varrho)}_{(\mu) q r_1 r_2 \dots p_\varrho} I = \sum_1^\alpha{}_h R^{(\varrho)}_{\substack{hm_h \\ (\mu) q p_1 p_2 \dots p_\varrho}} I + \sum_1^\beta{}_k R^{(\varrho)}_{\substack{kw_k \\ (\mu) q p_1 p_2 \dots p_\varrho}} I, \tag{21}$$

purchè con

$$R^{(\varrho)}_{\substack{hm_h \\ (\mu) q p_1 p_2 \dots p_\varrho}} I, \qquad R^{(\varrho)}_{\substack{km_k \\ (\mu) q p_1 p_2 \dots p_\varrho}} I,$$

si denotino rispettivamente i coefficienti di

$$\frac{\partial^\varrho \xi_q}{\partial x_{p_1} \partial x_{p_2} \dots \partial x_{r_\varrho}}$$

in:

$$\sum_0^\mu{}_j \sum_1^n{}_{r_1 r_2 \dots r_{m_h} \mid s_1 s_2 \dots s_j} \frac{\partial I}{\partial f^{hm_h}_{r_1 r_2 \dots r_{m_h}) s_1 s_2 \dots s_j}} \varphi^{hm_h}_{r_1 r_2 \dots r_{m_h} (s_1 s_2 \dots s_j},$$

e in

$$\sum_0^\mu{}_j \sum_1^n{}_{r_1 r_2 \dots r_{w_k} \mid s_1 s_2 \dots s_j} \frac{\partial I}{\partial f^{\;r_1 r_2 \dots r_{w_h}}_{\substack{kw_k \\ ) s_1 s_2 \dots s_j}}} \varphi^{\;r_1 r_2 \dots r_{w_k}}_{\substack{kw_k \\ (s_1 s_2 \dots s_j}}.$$

Per la osservazione fatta, variabili di derivazione e coefficienti sono da una R ad un'altra assolutamente distinti, il che è assai utile per il calcolo della risultante jacobiana di due qualsiansi equazioni: $X_{(\mu)} I = 0$, $X'_{(\mu)} I = 0$ del sistema Ω_μ.

Siccome infatti:

$$(R_{\underset{(\mu)}{h}m_h} R'_{\underset{(\mu)}{k}w_k})I \equiv 0,$$

qualunque sieno h e k;

$$(R_{\underset{(\mu)}{h}m_h} R'_{\underset{(\mu)}{k}m_k})I \equiv 0, \qquad (R_{\underset{(\mu)}{h}w_h} R'_{\underset{(\mu)}{k}w_k})I \equiv 0,$$

per $h \gtrless k$, si conclude:

$$(X_{(\mu)} X'_{(\mu)})I \equiv \sum_1^{\alpha}{}_h [R_{\underset{(\mu)}{h}m_h} R'_{\underset{(\mu)}{h}m_h}]I + \sum_1^{\beta}{}_k [R_{\underset{(\mu)}{k}w_k} R'_{\underset{(\mu)}{k}w_k}]I, \tag{22}$$

talchè, per assegnare il valore effettivo del primo membro, tutto si riduce a trovare l'espressione generica di:

$$[R_{\underset{(\mu)}{h}m_h} R'_{\underset{(\mu)}{h}m_h}]I \quad \text{e di} \quad [R_{\underset{(\mu)}{k}w_k} R'_{\underset{(\mu)}{k}w_k}]I.$$

Prima di accingerci effettivamente a questa ricerca, arrestiamoci un momento a determinare il numero totale delle equazioni Ω_μ e quello delle relative variabili indipendenti. Possiamo ormai prescindere dalle n equazioni $\partial I/\partial x_i = 0$ e corrispondentemente dalle variabili x_i.

Il numero totale M_μ delle equazioni equivarrà manifestamente a quello di tutte le derivate delle ξ, fino all'ordine $\mu + 1$ incluso, sarà cioè:

$$M_\mu = n\left[n + \binom{n+1}{2} + \ldots + \binom{n+\mu-1}{\mu} + \binom{n+\mu}{\mu+1}\right].$$

La totalità delle variabili coincide invece colla totalità delle funzioni del sistema S e loro derivate fino all'ordine $\mu + 1$ incluso. Ora un sistema covariante o contravariante di m-esimo ordine contiene n^m elementi e quindi, insieme alle loro derivate, fino all'ordine μ incluso, dà luogo complessivamente a:

$$n^m\left[1 + n + \binom{n+1}{2} + \ldots + \binom{n+\mu-1}{\mu}\right]$$

variabili.

Noi abbiamo senz'altro asserito che un sistema covariante d'ordine m contiene n^m elementi, perchè, anche se non fossero tutti distinti, nella espressione di I, si possono risguardare, non foss'altro formalmente, diversi l'uno dall'altro, così da dar in ogni caso origine alle (18). Esse ammettono sempre per soluzioni tutti gli invarianti differenziali di S, solo che, quando, per esempio, tra i sistemi assegnati ve ne abbia di simmetrici, si potranno trovare compresi tra gli invarianti i primi membri delle equazioni di simmetria o loro derivate (come $f_{12} - f_{21}$ o $f_{12)s_1 s_2 \dots s_j} - f_{21)s_1 s_2 \dots s_j}$, ecc.), che non fanno parte delle espressioni effettivamente richieste, essendo conosciuti a priori [10].

Ciò posto, il numero totale delle variabili indipendenti N_μ sarà espresso da:

$$N_\mu = \left\{1 + n + \binom{n+1}{2} + \dots + \binom{n+\mu}{\mu+1}\right\}\left\{\sum_1^{\alpha}{}_h\, n^{m_h} + \sum_1^{\beta}{}_k\, n^{w_k}\right\}.$$

Ora, per una formula conosciuta del calcolo combinatorio:

$$1 + n + \binom{n+1}{2} + \dots + \binom{n+\mu-1}{\mu} = \binom{n+\mu}{\mu}$$

ed analogamente:

$$n + \binom{n+1}{2} + \dots + \binom{n+\mu-1}{\mu} + \binom{n+\mu}{\mu+1} = \binom{n+\mu+1}{\mu+1} - 1\ ;$$

quindi potremo anche scrivere:

$$M_\mu = n\left\{\binom{n+\mu+1}{\mu+1} - 1\right\}, \tag{23}$$

$$N_\mu = \binom{n+\mu}{\mu}\left\{\sum_1^{\alpha}{}_h\, n^{m_h} + \sum_1^{\beta}{}_k\, n^{w_k}\right\}. \tag{24}$$

---

[10] Usando le relazioni di invarianza, che eventualmente intercedessero fra gli elementi del sistema S, si potrebbe formare direttamente il sistema di equazioni analogo ad Ω_μ; ma liberato da tutte le soluzioni illusorie. Così, per esempio, nel caso che un sistema covariante o contravariante sia simmetrico, si potrebbero introdurre originariamente appena

$$\binom{n+m-1}{m}$$

variabili, risguardando, come lo sono effettivamente, identici gli elementi, che differiscono per una diversa posizione degli indici r ed estendendo, nella (18), la somma, rispetto agli indici r di quel sistema, soltanto a tutte le combinazioni con ripetizione. È tuttavia più opportuno di prendere in esame il tipo unico di equazioni (18) e quindi il conseguente sistema Ω_μ; basta aver poi cura di sceverare dalle sue soluzioni quelle, che corrispondono a relazioni di invarianza preesistenti fra gli elementi del sistema S o che da esse si possono ricavare per derivazione.

10. – Esaurita così la parte preliminare, la quale in fondo, salvo forse le relazioni (12) e (12′), non contiene che amplificazioni e sviluppi di cose già da altri indirettamente accennate, passiamo allo studio dei sistemi Ω_μ.

Cominciamo dal considerare un sistema covariante generico dell'ordine m e cerchiamo l'espressione generale di un $\overset{(\varrho)}{R}{}^{m}_{(\mu)q p_1 p_2 \ldots p_\varrho}$ ad esso relativo.

Per definizione (pag. 54) $\overset{(\varrho)}{R}{}^{m}_{(\mu)q p_1 p_2 \ldots p_\varrho}$ è il coefficiente di

$$\frac{\partial^\varrho \xi_q}{\partial x_{p_1}\, \partial x_{p_2} \ldots \partial x_{p_\varrho}}$$

nell'espressione di:

$$W_m = \sum_0^\mu{}_j \sum_1^n{}_{r_1 r_2 \ldots r_m \mid s_1 s_2 \ldots s_j} \frac{\partial I}{\partial f_{r_1 r_2 \ldots r_m) s_1 s_2 \ldots s_j}}\, \varphi_{r_1 r_2 \ldots r_m (s_1 s_2 \ldots s_j}\,, \tag{24}$$

come si rileva dalla (18), indicando, per il generico valore di h, cui ci riferiamo, $f_{hm_h \atop r_1 r_2 \ldots r_{m_h}) s_1 s_2 \ldots s_j}$ semplicemente con $f_{r_1 r_2 \ldots r_m) s_1 s_2 \ldots s_j}$, $\varphi_{hm_h \atop r_1 r_2 \ldots r_{m_h} (s_1 s_2 \ldots s_j}$ semplicemente con $\varphi_{r_1 r_2 \ldots r_m (s_1 s_2 \ldots s_j}$. Poniamo inoltre:

$$\underset{j}{W_m} = \sum_1^n{}_{r_1 r_2 \ldots r_w \mid s_1 s_2 \ldots s_j} \frac{\partial I}{\partial f_{r_1 r_2 \ldots r_m) s_1 s_2 \ldots s_j}}\, \varphi_{r_1 r_2 \ldots r_m (s_1 s_2 \ldots s_j}\,, \tag{25}$$

sicchè sarà:

$$W_m = \sum_0^\mu{}_j \underset{j}{W_m}\,. \tag{26}$$

D'altra parte, per le (11) e (12):

$$\underset{j}{W_m} = \sum_1^{j+1}{}_\varrho \sum_1^n{}_{r_1 r_2 \ldots r_m \mid s_1 s_2 \ldots s_j} \frac{\partial I}{\partial f_{r_1 r_2 \ldots r_m) s_1 s_2 \ldots s_j}} \times \left[T^{(\varrho)}_{(j) r_1 r_2 \ldots r_m (s_1 s_2 \ldots s_j} + \Theta^{(\varrho)}_{(j) r_1 r_2 \ldots r_m) s_1 s_2 \ldots s_j}\right],$$

e quindi, se si faccia per brevità:

$$\underset{j}{U_m} = \sum_1^{j+1}{}_\varrho \sum_1^n{}_{r_1 r_2 \ldots r_m \mid s_1 s_2 \ldots s_j} \frac{\partial I}{\partial f_{r_1 r_2 \ldots r_m) s_1 s_2 \ldots s_j}}\, T^{(\varrho)}_{(j) r_1 r_2 \ldots r_m (s_1 s_2 \ldots s_j}\,, \tag{27}$$

$$\underset{j}{V_m} = \sum_1^{j}{}_\varrho \sum_1^n{}_{r_1 r_2 \ldots r_m \mid s_1 s_2 \ldots s_j} \frac{\partial I}{\partial f_{r_1 r_2 \ldots r_m) s_1 s_2 \ldots s_j}}\, \Theta^{(\varrho)}_{(j) r_1 r_2 \ldots r_m (s_1 s_2 \ldots s_j}\,, \tag{28}$$

si ha manifestamente:

(29) $$W_j^m = U_j^m + V_j^m .$$

Determiniamo in primo luogo il coefficiente di

$$\frac{\partial^\varrho \xi_q}{\partial x_{p_1} \partial x_{p_2} \dots \partial x_{p_{p_\varrho}}},$$

in W_j^m. Tuttavia, allo scopo di abbreviare un po' le scritture, conveniamo di designare con p il complesso dei ϱ indici $p_1, p_2, \dots, p_\varrho$, con r il complesso degli m indici $r_1, r_2, \dots, r_m$, con s il complesso degli j indici $s_1, s_2, \dots, s_j$; inoltre introduciamo anche le notazioni $\bar{p}^\tau$, $\bar{s}^\tau$, $\bar{r}^\tau$, per indicare ordinatamente i complessi p, s, r, escluso però ciascuna volta uno di quegli indici, se ve n'ha, che corrisponda al valore τ. Infine, e di ciò faremo uso costante senza ripeterlo più oltre, risguarderemo il simbolo binomiale

$$\binom{a}{b} \equiv \frac{a!}{b!\,(a-b)!},$$

eguale a zero ogni qualvolta sia a minore di b ovvero di $a-b$. Con tale convenzione avranno per noi significato espressioni del tipo

$$\binom{a-1}{a}, \quad \binom{-1}{0}, \quad \binom{-1}{-1}, \quad \text{ecc.},$$

che stanno tutte a rappresentare lo zero.

La (28), scritta per disteso, a mezzo della (10), diverrà:

$$V_j^m = -\sum_1^j{}_\varrho \sum_1^n{}_{r|s} \frac{\partial I}{\partial f_{r)s}} \sum_1^n{}_q \gamma_\varrho^j f_{r)s_1 s_2 \dots s_{j-\varrho} q} \frac{\partial^\varrho \xi_q}{\partial x_{s_{j-\varrho+1}} \partial x_{s_{j-\varrho+1}} \dots \partial x_{s_j}} .$$

In primo luogo, se $\varrho > j$, V_j^m non contiene termini del tipo

$$\frac{\partial^\varrho \xi_q}{\partial x_{p_1} \partial x_{p_2} \dots \partial x_{p_\varrho}};$$

se $\varrho \leqslant j$, tra tutte le combinazioni con ripetizione dei nostri indici s, trascegliamo quelle, che contengono gli elementi assegnati $p_1, p_2, \dots, p_\varrho$. Esse si otterranno, immaginando di fissare ϱ tra gli indici s, per esempio, $s_{j-\varrho+1}, s_{j-\varrho+2}, \dots, s_j$, col porli eguali a $p_1, p_2, \dots, p_\varrho$ e lasciando poi variare i rimanenti $s_1, s_2, \dots, s_{j-\varrho}$ da 1 ad n in modo da esaurire tutte le possibili combinazioni con ripetizione. I termini trovati in tal guisa conterranno

$$\frac{\partial^\varrho \xi_q}{\partial x_{r_1} \partial x_{r_2} \dots \partial x_{p_\varrho}},$$

ma non saranno i soli; infatti, per completare l'esame di V^m_j, sopra ciascuno di essi è da eseguire l'operazione indicata con γ^j_ϱ. Per fissare effettivamente il numero dei termini, che si ottengono in tal modo, introduciamo delle costanti $\eta_{\lambda p}$, $\eta_{\lambda s}$ $(\lambda = 1, 2, \dots, n)$, le quali esprimano quanti fra gli indici $p_1, p_2, \dots, p_\varrho$ o rispettivamente $s_1, s_2, \dots, s_{j-\varrho}$ sono eguali a λ. Formando le combinazioni semplici ϱ a ϱ degli j elementi $s_1, s_2, \dots, s_{j-\varrho}, p_1, p_2, \dots, p_\varrho$ considerati come distinti, quelle tra esse, che sono identiche a $p_1, p_2, \dots, p_\varrho$ proverranno da scambi degli $\eta_{\lambda p}$ indici p eguali a λ cogli $\eta_{\lambda s}$ indici s eguali del pari a λ $(\lambda = 1, 2, \dots, n)$.

Il numero dei termini risultanti, per ciascun valore di λ, è manifestamente eguale a quello delle combinazioni semplici ($\eta_{\lambda s}$ a $\eta_{\lambda s}$) di $\eta_{\lambda s} + \eta_{\lambda p}$ elementi, supposti fra loro distinti. Ciò posto, chiamando $\underset{(j)pq}{\overset{(\varrho)}{Q^m}} I$ il coefficiente di

$$\frac{\partial^\varrho \xi_q}{\partial x_{p_1} \partial x_{r_2} \dots \partial x_{r_\varrho}},$$

in V^m_j, avremo:

$$\left\{ \begin{aligned} &\underset{(j)qp}{\overset{(\varrho)}{Q^m}} I = 0 && \text{per } \varrho > j\,, \\ &= - \sum_1^n{}_{r|s} \prod_1^n{}_\lambda \binom{\eta_{\lambda p} + \eta_{\lambda s}}{\eta_{\lambda s}} f_{r)sq} \frac{\partial I}{\partial f_{r)sp}} && \text{per } \varrho \leqslant j\,. \end{aligned} \right. \tag{30}$$

Si ha per le (9) e (27):

$$\underset{j}{U_m} = - \sum_1^{j+1}{}_\varrho \sum \frac{\partial I}{\partial f_{r)s}} \sum_1^m{}_l \sum_1^n{}_q r^j_{\varrho-1} f_{r_1 r_2 \dots r_{l-1} q r_{l+1} \dots r_m) s_1 s_2 \dots s_{j-\varrho+1}} \frac{\partial^\varrho \xi_q}{\partial x_{r_l} \partial x_{s_{j-\varrho+2}} \dots \partial x_{s_j}}.$$

Il coefficiente $\underset{(j)qp}{\overset{(\varrho)}{P^m}} I$ di

$$\frac{\partial^\varrho \xi_q}{\partial x_{r_1} \partial x_{r_2} \dots \partial x_{r_\varrho}},$$

in $\underset{j}{U_m}$ sarà manifestamente nullo, se $\varrho > j + 1$; nel caso invece di

$\varrho \leqslant j+1$, per aver termini contenenti

$$\frac{\partial^\varrho \xi_q}{\partial x_{p_1} \partial x_{p_2} \dots \partial x_{p_\varrho}},$$

bisognerà porre r_l eguale ad una delle quantità $p_1, p_2, \dots, p_\varrho$ e poi tutto si condurrà come precedentemente; solo è d'uopo notare che, se per esempio, si è fatto $\tau = r_l = p_\vartheta$, alle quantità p dobbiamo sostituire $\overline{p}^\tau$. Con ciò si ottiene:

$$(31)\quad \left\{\begin{aligned} & \underset{(j)qp}{\overset{(\varrho)}{P_m}} I = 0 \qquad\qquad \text{per } \varrho > j+1\,, \\ & = -\sum_1^m{}_l \sum_1^n{}_{r_1 r_2 \dots r_{l-} r_{l+1} \dots r_m | s} \left\{ \sum_1^n{}_\tau \prod_1^n{}_\lambda \binom{\eta_{\lambda \overline{p}^\tau} + \eta_{\lambda s}}{\eta_{\lambda_s}} f_{r_1 r_2 \dots r_{l-1} q r_{l+1} \dots r_m) s} \times \right. \\ & \qquad \left. \times \frac{\partial I}{\partial f_{r_1 r_2 \dots r_{l-1} \tau r_{l+1} \dots r_m) s \overline{p}^\tau}} \right\} \quad \text{per } \varrho \leqslant j+1\,, \end{aligned}\right.$$

dove la somma rispetto all'indice τ, il quale veramente dovrebbe assumere soltanto valori eguali a qualcuna delle p, si è estesa completamente fra 1 ed n, colla tacita convenzione di risguardare in ogni caso, anche quando $\eta_{\tau p} = 0$, $\eta_{\tau \overline{p}^\tau} = \eta_{\tau p} - 1$ e quindi (vedi pag. 58) $\binom{\eta_{\tau s} - 1}{\eta_{\tau s}} = 0$. Posto:

$$(32)\qquad \underset{(j)pq}{\overset{(\varrho)}{R_m}} I = \underset{(j)pq}{\overset{(\varrho)}{P_m}} I + \underset{(j)pq}{\overset{(\varrho)}{Q_m}} I\,,$$

sarà, per le (29) e (26) $\sum_0^\mu{}_j \underset{(j)pq}{\overset{(\varrho)}{R_m}} I$ il coefficiente di

$$\frac{\partial^\varrho \xi_q}{\partial x_{p_1} \partial x_{p_2} \dots \partial x_{p_\varrho}}$$

in W e quindi, nel primo membro della corrispondente equazione di Ω, $X_{(\mu)qp} I = 0$, quella parte, che proviene dal nostro sistema covariante generico d'ordine m, sarà:

$$(33)\qquad \underset{(\mu)qp}{\overset{(\varrho)}{\mathcal{R}_m}} I = \sum_0^\mu{}_j \underset{(j)qp}{\overset{(\varrho)}{R_m}} I\,.$$

In particolare, per $\varrho = \mu + 1$, dalle (30), (31) e (32) si ha:

$$\begin{cases} \overset{(\mu+1)}{\underset{(j)qp}{R_m}} I \equiv 0\,, \qquad (j = 0, 1, \ldots, \mu - 1) \\[2ex] \overset{(\mu+1)}{\underset{(\mu)qp}{R_m}} I = \overset{(\mu+1)}{\underset{(\mu)qp}{P_m}} I, \end{cases}$$

e per conseguenza:

$$(33^a)\quad \overset{(\mu+1)}{\underset{(j)qp}{\mathcal{R}_m}} I = -\sum_{1}^{m}{}_{l} \sum_{1}^{n}{}_{r_1 r_2 \ldots r_{l-1} r_{l+1} \ldots r_m} \sum_{1}^{n}{}_{\tau} \binom{\eta_{\tau \bar{p}}^{\ \ -\tau}}{0} f_{r_1 r_2 \ldots r_{l-1} q r_{l+1} \ldots r_m} \frac{\partial I}{\partial f_{r_1 r_2 \ldots r_{l-1} \tau r_{l+1} \ldots r_m) \bar{p}}^{-\tau}}$$

Dalle quali, per $\mu = 0$:

$$(33^b)\quad \overset{(1)}{\underset{(0)qp}{\mathcal{R}_m}} I = -\sum_{1}^{m}{}_{l} \sum_{1}^{n}{}_{r r_1 r_2 \ldots r_{l-1} r_{l+1} \ldots r_m} f_{r_1 r_2 \ldots r_{l-1} q r_{l+1} \ldots r_m} \frac{\partial I}{\partial f_{r_1 r_2 \ldots r_{l-1} p_1 r_{l+1} \ldots r_m}}\,,$$

e per $\mu = 1$:

$$(33^c)\quad \begin{cases} \overset{(2)}{\underset{(0)qp}{\mathcal{R}_m}} I = -\displaystyle\sum_{1}^{m}{}_{l} \sum_{1}^{n}{}_{r_1 r_2 \ldots r_{l-1} r_{l+1} \ldots r_m} f_{r_1 r_2 \ldots r_{l-1} q r_{l+1} \ldots r_m} \frac{\partial I}{\partial f_{r_1 r_2 \ldots r_{l-1} p_1 r_{l+1} \ldots r_m) p_2}} \qquad \text{per } p_1 = p_2\,, \\[3ex] = -\displaystyle\sum_{1}^{m}{}_{l} \sum_{1}^{n}{}_{r_1 r_2 \ldots r_{l-1} r_{l+1} \ldots r_m} f_{r_1 r_2 \ldots r_{l-1} q r_{l+1} \ldots r_m} \left[\frac{\partial I}{\partial f_{r_1 r_2 \ldots r_{l-1} p_1 r_{l+1} \ldots r_m) p_2}} + \frac{\partial I}{\partial f_{r_1 r_2 \ldots r_{l-1} p_2 r_{l+1} \ldots r_m) p_1}} \right]. \\ \hfill \text{per } p_1 \gtrless p_2\,, \end{cases}$$

Calcoliamo ancora il valore di $\overset{(1)}{\underset{(\mu)qp}{\mathcal{R}_m}} I$, che è:

$$(33^c)\quad \overset{(1)}{\underset{(\mu)qp}{\mathcal{R}_m}} I = \sum_{1}^{\mu}{}_{j} \overset{(1)}{\underset{(j)qp}{R_m}} I = \sum_{1}^{\mu}{}_{j} \overset{(1)}{\underset{(j)qp}{P_m}} I + \sum_{1}^{\mu}{}_{j} \overset{(1)}{\underset{(j)qp}{Q_m}} =$$

$$= \sum_{0}^{\mu}{}_{j} \sum_{1}^{m}{}_{l} \sum_{1}^{n}{}_{r_1 r_2 \ldots r_{l-1} r_{l+1} \ldots r_m | s_1 s_2 \ldots s_j} f_{r_1 r_2 \ldots r_{l-1} q r_{l+1} \ldots r_m) s_1 s_2 \ldots s_j} \frac{\partial I}{\partial f_{r_1 r_2 \ldots r_{l-1} p r_{l+1} \ldots r_m) s}}$$

$$- \sum_{0}^{\mu}{}_{j} \sum_{1}^{n}{}_{r_1 r_2 \ldots r_m | s_1 s_2 \ldots s_{j-1}} (1 + \eta_{ps}) f_{r) s_1 s_2 \ldots s_{j-1} q} \frac{\partial I}{\partial f_{r) s_1 s_2 \ldots s_{j-1} q}}\,.$$

11. – Pei sistemi contravarianti, fissatone al solito il rappresentante generico Z^w, potremo scrivere senz'altro, conservando le notazioni pre-

cedenti:

(24′) $$W_w = \sum_0^{\mu}{}_j \sum_1^{n}{}_{r_1 r_2 \ldots r_w \mid s_1 s_2 \ldots s_j} \frac{\partial I}{\partial f^{r_1 r_2 \ldots r_w}_{)s_1 s_2 \ldots j}} \varphi^{r_1 r_2 \ldots r_w}_{(s_1 s_2 \ldots s_j},$$

(25′) $$W_{\underset{j}{w}} = \sum_1^{n}{}_{r \mid s_1 s_2 \ldots s_j} \frac{\partial I}{\partial f^{r}_{)s_1 s_2 \ldots s_j}} \varphi^{r}_{(s_1 s_2 \ldots s_j},$$

(26′) $$W_w = \sum_0^{\mu} W_{\underset{j}{w}},$$

(27′) $$U_{\underset{j}{w}} = \sum_1^{j+1}{}_{\varrho} \sum_1^{n}{}_{r \mid s_1 s_2 \ldots s_j} \frac{\partial I}{\partial f^{r}_{)s_1 s_2 \ldots s_j}} T^{(\varrho) r}_{(j)(s_1 s_2 \ldots s_j},$$

(28′) $$V_{\underset{j}{w}} = \sum_1^{j+1}{}_{\varrho} \sum_1^{n}{}_{r \mid s_1 s_2 \ldots s_j} \frac{\partial I}{\partial f^{r}_{)s_1 s_2 \ldots s_j}} \Theta^{(\varrho) r}_{(j) s_1 s_2 \ldots s_j},$$

(29′) $$W_{\underset{j}{w}} = U_{\underset{j}{w}} + V_{\underset{j}{w}},$$

(30′) $$\begin{cases} \underset{(j)qp}{Q^{(\varrho)}_{w}} I = 0 & \text{per } \varrho > j, \\ = \sum_{r \mid s} \prod_1^{n}{}_{\lambda} \left(\dfrac{\eta_{\lambda q} + \eta_{\lambda s}}{\eta_{\lambda s}} \right) f^{r}_{)sq} \dfrac{\partial I}{\partial f^{r}_{)sp}} & \text{per } \varrho \leqslant j, \end{cases}$$

(31′) $$\begin{cases} \underset{(j)qp}{P^{(\varrho)}_{w}} I = 0 & \text{per } \varrho > j+1 \\ = \sum_1^{w}{}_{l} \sum_1^{n}{}_{r_1 r_2 \ldots r_{l-1} r_{l+1} \ldots r_w \mid s} \sum_1^{n}{}_{\tau} \prod_1^{n}{}_{\lambda} \left(\dfrac{\eta_{\lambda \bar{p} \tau} + \eta_{\lambda s}}{\eta_{\lambda s}} \right) \times & \\ \times f^{r_1 r_2 \ldots r_{l-1} q r_{l+1} \ldots r_w}_{)s} \dfrac{\partial I}{\partial f^{r_1 r_2 \ldots r_{l-1} \tau r_{l+1} \ldots r_w}_{s \bar{p} \tau}} & \text{per } \varrho \leqslant j+1. \end{cases}$$

Questa formula (31′) si trova anch'essa in modo identico alla corrispondente (31), purchè, nella espressione di $U_{\underset{j}{w}}$, si abbia cura di scambiare fra loro i due indici r_l e q. Si dovrà poi fare:

(32′) $$\underset{(j)qp}{R^{(\varrho)}_{w}} I = \underset{(j)qp}{P^{(\varrho)}_{w}} I + \underset{(j)qp}{Q^{(\varrho)}_{w}} I,$$

sicchè sarà:

$$(33') \qquad \underset{(\mu)qp}{\overset{(\varrho)}{\mathscr{R}_w}} I = \sum_0^{\mu} {}_j \underset{(j)qp}{\overset{(\varrho)}{R_w}} I, \qquad \text{ecc.}$$

12. – Ritorniamo al nostro sistema covariante Z_m e calcoliamoci la risultante jacobiana $\left(\underset{(\mu)qp}{\overset{(\varrho)}{\mathscr{R}^m}} \underset{(\mu)q'p'}{\overset{(\varrho')}{\mathscr{R}^m}}\right) I$. Essendo, per la (33), $\underset{(\mu)qp}{\overset{(\varrho)}{\mathscr{R}^m}} I = \underset{(\mu-1)qp}{\overset{(\varrho)}{\mathscr{R}^m}} I + \underset{(\mu)qp}{\overset{(\varrho)}{R^m}} I$ ed analogamente $\underset{(\mu)q'p'}{\overset{(\varrho')}{\mathscr{R}^m}} I = \underset{(\mu-1)q'p'}{\overset{(\varrho')}{\mathscr{R}^m}} I + \underset{(\mu)q'p'}{\overset{(\varrho')}{R^m}} I$, potremo porre:

$$(34) \quad \left(\underset{(\mu)qp}{\overset{(\varrho)}{\mathscr{R}^m}} \underset{(\mu)q'p'}{\overset{(\varrho')}{\mathscr{R}^m}}\right) I = \left(\underset{(\mu-1)qp}{\overset{(\varrho)}{\mathscr{R}^m}} \underset{(\mu-1)q'p'}{\overset{(\varrho')}{\mathscr{R}^m}}\right) I + \underset{(\mu)qp}{\overset{(\varrho)}{\mathscr{R}^m}} \underset{(\mu-1)q'p'}{\overset{(\varrho')}{R^m}} I -$$
$$- \underset{(\mu)q'p'}{\overset{(\varrho')}{R^m}} \underset{(\mu-1)qp}{\overset{(\varrho)}{\mathscr{R}^m}} I + \underset{(\mu)qp}{\overset{(\varrho)}{R^m}} \underset{(\mu-1)q'p'}{\overset{(\varrho')}{\mathscr{R}^m}} I - \underset{(\mu)q'p'}{\overset{(\varrho')}{\mathscr{R}^m}} \underset{(\mu-1)qp}{\overset{(\varrho)}{R^m}} I .$$

Prescindendo, come faremo sempre in seguito, dai termini contenenti le derivate seconde di I, i quali si elidono identicamente, noi abbiamo in primo luogo $- \underset{(\mu)q'p'}{\overset{(\varrho')}{R^m}} \underset{(\mu-1)qp}{\overset{(\varrho)}{\mathscr{R}^m}} I \equiv 0$, perchè i coefficienti di $\underset{(\mu-1)qp}{\overset{(\varrho)}{\mathscr{R}^m}} I$ contengono $m + j - (\varrho - 1) \leqslant m + \mu - 1$ $(j = 0, 1, \ldots, \ \mu - 1)$ indici, mentre le variabili di derivazione di $\underset{(\mu)q'p'}{\overset{(\varrho')}{R^m}} I$ sono munite di $m + \mu$ indici. Nello stesso modo si riconosce che $\underset{(\mu)qp}{\overset{(\varrho)}{R^m}} \underset{(\mu-1)q'p'}{\overset{(\varrho')}{\mathscr{R}^m}} I \equiv 0$. Restano pertanto da determinare $\underset{(\mu-1)qp}{\overset{(\varrho)}{\mathscr{R}^m}} \underset{(\mu)q'p'}{\overset{(\varrho')}{R^m}} I$ e $- \underset{(\mu-1)q'p'}{\overset{(\varrho')}{\mathscr{R}^m}} \underset{(\mu)qp}{\overset{(\varrho)}{R^m}} I$, le quali espressioni per brevità chiameremo rispettivamente C e D; la (34) diverrà:

$$(34^{bis}) \qquad \left(\underset{(\mu)qp}{\overset{(\varrho)}{\mathscr{R}^m}} \underset{(\mu)q'p'}{\overset{(\varrho')}{\mathscr{R}^m}}\right) I = \left(\underset{(\mu-1)q'p'}{\overset{(\varrho)}{\mathscr{R}^m}} \underset{(\mu-1)q'p'}{\overset{(\varrho')}{\mathscr{R}^m}}\right) I + C + D .$$

Avendosi $\underset{(\mu-1)qp}{\overset{(\varrho)}{\mathscr{R}^m}} I = \sum_0^{\mu} {}_j \underset{(j)qp}{\overset{(\varrho)}{R^m}} I$ e d'altra parte, per le ragioni accennate:

$$\underset{(j)qp}{\overset{(\varrho)}{R^m}} \underset{(\mu)q'p'}{\overset{(\varrho')}{R^m}} I \equiv 0 \qquad (j \gtrless \mu - \varrho' + 1),$$

ne deduciamo:

$$C = \underset{(\mu-\varrho'+1)qp}{\overset{(\varrho)}{R^m}} \underset{(\mu)qp}{\overset{(\varrho')}{R^m}} I .$$

Analogamente sarà:

$$D = - \underset{(\mu-\varrho+1)q'p'}{\overset{(\varrho')}{R^m}} \underset{(\mu)qp}{\overset{(\varrho)}{R^m}} I .$$

Segue immediatamente dalle (30), (31) e (32), $C = D = 0$ tutte le volte che $\varrho' > \mu - \varrho + 2$ ossia $\varrho + \varrho' - 1 > \mu + 1$.

Assai più laboriosa è la determinazione di C e D, quando $\varrho + \varrho' - 1 \leqslant \mu + 1$; questa ipotesi abbraccerà buon tratto degli sviluppi del presente paragrafo.

Avremo:

$$C = P^{(\varrho)}_{\substack{m \\ (\mu-\varrho'+1)qp}} P^{(\varrho')}_{\substack{m \\ (\mu)q'p'}} I + P^{(\partial)}_{\substack{m \\ (\mu-\varrho'+1)q'p'}} Q^{(\varrho')}_{\substack{m \\ (\mu)q'p'}} I$$
$$+ Q^{(\varrho)}_{\substack{m \\ (\mu-\varrho'+1)qp}} P^{(\varrho')}_{\substack{m \\ (\mu)q'p'}} I + Q^{(\varrho)}_{\substack{m \\ (\mu-\varrho'+1)qp}} Q^{(\varrho')}_{\substack{m \\ (\mu)q'p'}} I,$$

i quali addendi, allo scopo di guadagnare un po' in concisione, chiameremo ordinatamente C_1, C_2, C_3, C_4. Sarà quindi:

(35) $$C = C_1 + C_2 + C_3 + C_4,$$

e corrispondentemente:

(36) $$D = D_1 + D_2 + D_3 + D_4.$$

Occupiamoci per ora del valore di C; nella espressione di C_1, che calcolata a mezzo della (31), sarà:

$$C_1 = \sum_1^m{}_{ll'} \sum_1^n{}_{\substack{r_1 r_2 \ldots r_{l-1} r_{l+1} \ldots r_m \mid s \\ r'_1 r'_2 \ldots r'_{l'-1} r'_{l'+1} \ldots r'_m \mid s'}} \left\{ \sum_1^n{}_{\tau\tau'} \prod_1^n \binom{\eta_{\lambda \bar{p}^\tau} + \eta_{\lambda s'}}{\eta_{\lambda s}} \binom{\eta_{\lambda \bar{p}^{\tau'}} + \eta_{\lambda s'}}{\eta_{\lambda s'}} \times \right.$$
$$\left. \times f_{r_1 r_2 \ldots r_{l-1} q r_{l+1} \ldots r_m) s} \frac{\partial f_{r'_1 r'_2 \ldots r'_{l-1} q' r'_{l+1} \ldots r'_m) s'}}{\partial f_{r_1 r_2 \ldots r_{l-1} \tau r_{l+1} \ldots r_m) s \bar{p}^\tau}} \frac{\partial f}{\partial f_{r'_1 r'_2 \ldots r'_{l'-1} \tau' r'_{l'+1} \ldots r'_m) s \bar{p}^{\tau'}}} \right\};$$

facciamo dapprima $l \lesseqgtr l'$ e indichiamo con C'_1 il complesso dei termini, che vi corrispondono. Affinchè il fattore

$$\frac{\partial f_{r'_1 r'_2 \ldots r'_{l'-1} q' r'_{l'+1} \ldots r'_m) s'}}{\partial f_{r_1 r_2 \ldots r_{l-1} \tau r_{l+1} \ldots r_m) s \bar{p}^\tau}},$$

non sia identicamente nullo, è d'uopo supporre in primo luogo $r'_1 = r_1$, $r'_2 = r_2, \ldots$, $r'_{l-1} = r_{l-1}$, $r'_l = \tau$, $r'_{l'+1} = r_{l+1}, \ldots$, $r'_{l'-1} = r_{l'-1}$ $q' = r_{l'}$, $r'_{l'+1} = r_{l'+1}, \ldots$, $r'_m = r_m$; fra gli indici s'_1, $s'_2, \ldots$, $s_{\mu+1-\varrho'}$ bisognerà poi sceglierne $\varrho - 1$ eguali a $\bar{p}^\tau$ e i rimanenti $\mu + 2 - \varrho - \varrho'$ farli ordinatamente coincidere con s. Per evitare ambiguità, indichiamo con t gli indici s, che restano variabili ed esprimiamo $\eta_{\lambda s}$, $\eta_{\lambda s'}$ per $\eta_{\lambda t}$.

Abbiamo immediatamente, non essendosi cambiata che la denominazione, $\eta_{\lambda s} = \eta_{\lambda t}$; quanto agli indici s', $\mu + 1 - \varrho'$ son già fissati ed eguali a $\overline{p}^{\tau}$, i rimanenti coincidono con t. Sarà pertanto: $\eta_{\lambda s'} = \eta_{\lambda \overline{p}^{\tau}} + \eta_{\lambda t}$. Ora, essendo $\eta_{\lambda \overline{p}^{\tau}} + \eta_{\lambda \overline{p}'^{\tau'}}$ manifestamente eguale a $\eta_{\lambda[\overline{p}^{\tau} + \overline{p}'^{\tau'}]}$ e d'altra parte:

$$\binom{\eta_{\lambda \overline{p}^{\tau}} + \eta_{\lambda t}}{\eta_{\lambda t}} \binom{\eta_{\lambda \overline{p}'^{\tau'}} + \eta_{\lambda \overline{p}^{\tau}} + \eta_{\lambda t}}{\eta_{\lambda \overline{p}^{\tau}} + \eta_{\lambda t}} = \binom{\eta_{\lambda[\overline{p}^{\tau} + \overline{p}'^{\tau}]} + \eta_{\lambda t}}{\eta_{\lambda t}} \frac{(\eta_{\lambda[\overline{p}^{\tau} + \overline{p}'^{\tau'}]})!}{\eta_{\lambda \overline{p}^{\tau}}!\, \eta_{\lambda \overline{p}^{\tau}}!} \quad (^{11}),$$

verrà:

$$(37) \qquad C'_1 = \sum_1^m{}_{ll'} \sum_1^n{}_{r_1 r_2 \dots r_{l-1} r_{l+1} \dots r_{l'-1} r_{l'+1} \dots r_m \mid t} \left\{ \sum_1^m{}_{\tau\tau'} \prod_1^n{}_{\lambda} \binom{\eta_{\lambda[\overline{p}^{\tau} + \overline{p}'^{\tau'}]} + \eta_{\lambda t}}{\eta_{\lambda t}} \times \right.$$

$$\left. \times \frac{(\eta_{\lambda[\overline{p}^{\tau} + \overline{p}'^{\tau'}]})!}{\eta_{\lambda \overline{p}^{\tau}}!\, \eta_{\lambda \overline{p}'^{\tau'}}} f_{r_1 r_2 \dots r_{l-1} q r_{l+1} \dots r_{l'-1} q' r_{l'+1} \dots r_m} \frac{\partial I}{\partial f_{r_1 r_2 \dots r_{l-1} \tau r_{l+1} \dots r_{l'-1} q' r_{l'+1} \dots r_m) t \overline{p}^{\tau} \overline{p}'^{\tau'}}} \right\},$$

da cui apparisce che C'_1 è indipendente dalla posizione speciale, che in C_1 occupano le quantità non accentate di fronte a quelle accentate.

Supponendo ora $l = l'$, troveremo la rimanente parte di C_1, che chiameremo C''_1. Se $q' \gtrless \tau$, sarà necessariamente

$$\frac{\partial f_{r'_1 r'_2 \dots r'_{l-1} q' r'_{l+1} \dots r'_m) s'}}{\partial f_{r_1 r_2 \dots r_{l-1} \tau r_{l+1} \dots r_m) s \overline{p}^{\tau}}} = 0;$$

perciò bisogna anche fissare $\tau = q'$. Operando del resto come precedentemente, verrà:

$$C''_1 = \sum_1^m{}_{l} \sum_1^n{}_{r_1 r_2 \dots r_{l-1} r_{l+1} \dots r_m \mid t} \left\{ \sum_1^n{}_{\tau'} \prod_1^n{}_{\lambda} \binom{\eta_{\lambda[\overline{p}^{q'} + \overline{p}'^{\tau'}]} + \eta_{\lambda t}}{\eta_{\lambda t}} \frac{(\eta_{\lambda[\overline{p}^{q'} + \overline{p}'^{\tau'}]})!}{\eta_{\lambda \overline{p}^{q'}}!\, \eta_{\lambda \overline{p}'^{\tau'}}!} \times \right.$$

$$\left. \times f_{r_1 r_2 \dots r_{l-1} q r_{l+1} \dots r_m) t} \frac{\partial I}{\partial f_{r_1 r_2 \dots r_{l-1} \tau' r_{l+1} \dots r_m) t \overline{p}^{q'} \overline{p}'^{\tau'}}} \right\}.$$

---

(11) Questa identità e alcune altre, riportate nelle pagine seguenti 66, 67, 68, 69, 71, 72 sono evidentissime, finchè i simboli binomiali si mantengono nel campo consueto. È facile però riconoscere che esse sussistono ancora, quando detti simboli si immaginino estesi secondo le convenzioni, di cui a pag. 58. Così, per es., riferendoci alla relazione qui sopra indicata, si vede che essa vale anche nel caso, in cui, per $\eta_{\tau \overline{p}^{\tau}}$ ovvero $\eta_{\tau' \overline{p}^{\tau'}}$ eguali a -1, i fattoriali portino sopra quantità negative. Ed invero, se ciò accade, tanto il primo che il secondo membro, per le nostre convenzioni, si annullano, onde la eguaglianza sussiste ancora. Analogamente per le altre relazioni della stessa natura.

Ma è:

$$\frac{(\eta_{\lambda[\bar{p}q'+\bar{p}'\tau']})!}{\eta_{\lambda\bar{p}q'}!\,\eta_{\lambda\bar{p}'\tau'}!}=\frac{(\eta_{\lambda[\bar{p}q'+p']})!}{\eta_{\lambda\bar{p}q'}!\,\eta_{\lambda p'}!}$$

per $\lambda \lessgtr \tau'$; e, per $\lambda = \tau'$,

$$\frac{(\eta_{\tau'[\bar{p}q'+\bar{p}'\tau']})!}{\eta_{\tau'\bar{p}q'}!\,\eta_{\tau'\bar{p}'\tau'}!}=\frac{(\eta_{\tau'[\bar{p}'q'+p']})!}{\eta_{\tau'\bar{p}q'}!\,\eta_{\tau'p'}!}\,\frac{\eta_{\tau'p'}}{\eta_{\tau'\bar{p}q'}+\eta_{\tau'p'}},$$

quindi, ponendo

$$H_{\bar{p}q'p'}=\prod_1^n{}_\lambda\left[\frac{(\eta_{\lambda[\bar{p}q'+p']})!}{\eta_{\lambda\bar{p}q'}!\,\eta_{\lambda p'}!}\right] \tag{38}$$

ed osservando che $H_{\bar{p}q'p'}$ è indipendente da tutti gli indici di sommatoria, si potrà scrivere:

$$\begin{aligned} C_1'' = H_{\bar{p}q'p'}\sum_1^m{}_l\sum_1^n{}_{r_1r_2\ldots r_{l-1}r_{l+1}\ldots r_m|t}\sum_1^n{}_{\tau'}\prod_1^n{}_\lambda\binom{\eta_{\lambda[\bar{p}q'+\bar{p}'\tau']}+\eta_{\lambda t}}{\eta_{\lambda t}}\times\\ \times\frac{\eta_{\tau'\bar{p}q'}+\eta_{\tau'p'}}{\eta_{\tau'p'}}f_{r_1r_2\ldots r_{l-1}qr_{l+1}\ldots r_m)t}\frac{\partial I}{\partial f_{r_1r_2\ldots r_{l-1}\tau' r_{l+1}\ldots r_m)t\bar{p}q'\bar{p}'\tau'}}. \end{aligned} \tag{39}$$

Abbiamo:

$$\begin{aligned} C_2 = P^{(\varrho)}_{\substack{m\\(\mu+1-\varrho')qp}}\,Q^{(\varrho')}_{\substack{m\\(\mu)q'p'}}\,I =\\ =\sum_1^m{}_l\sum_1^n{}_{\substack{r_1r_2\ldots r_{l-1}r_{l+1}\ldots r_m\\r'}|\substack{s\\s'}}\left\{\sum_1^n{}_\tau\prod_1^n{}_\lambda\binom{\eta_{\lambda\bar{p}\tau'}+\eta_{\lambda s}}{\eta_{\lambda s}}\binom{\eta_{\lambda p'}+\eta_{\lambda s'}}{\eta_{\lambda s'}}\times\right.\\ \left.\times f_{r_1r_2\ldots r_{l-1}qr_{l+1}\ldots r_m)s}\frac{\partial f_{r')s'q'}}{\partial f_{r_1r_2\ldots r_{l-1}\tau' r_{l+1}\ldots r_m)s\bar{p}\tau'}}\frac{\partial I}{\partial f_{r')s'p'}}\right\}. \end{aligned}$$

Perchè sia

$$\frac{\partial f_{r's')q'}}{\partial f_{r_1r_2\ldots r_{l-1}\tau' r_{l+1}\ldots r_m)s\bar{p}\tau'}};$$

diverso da zero, bisogna supporre $r_1' = r_1$, $r_2' = r_2$, ..., $r_{l-1}' = r_{l-1}$, $r_l' = \tau'$,

$r'_{l+1} = r_{r+1}, \ldots, r'_m = r_m$ e quindi identificare il complesso degli indici s', q' ad $s\bar{p}^{\tau'}$. Gioverà a tale scopo distinguere i due casi $\eta_{q'\bar{p}^{\tau'}} = 0$ ed $\eta_{q'\bar{p}^{\tau'}} > 0$. Per quei valori di τ', per cui riesce $\eta_{q'\bar{p}^{\tau'}} = 0$, fra gli indici variabili $s_1, s_2, \ldots, s_{\mu+2-\varrho-\varrho'}$, uno deve prendersi eguale a q', mentre i $\mu - \varrho'$ indici s' complessivamente hanno a coincidere con $\bar{p}^{\tau'}$, $\bar{s}^{\tau'}$, che sono, come è evidente, in numero di $(\varrho - 1) + (\mu + 2 - \varrho - \varrho' - 1) = \mu - \varrho'$.

Gl'indici s rimasti variabili, in numero di $\mu + 1 - \varrho - \varrho'$, come precedentemente, chiameremo t e sarà:

$$\eta_{\lambda s} = \eta_{\lambda t} \quad \text{per} \quad \lambda \lessgtr q', \qquad \eta_{q's} = \eta_{q't} + 1, \qquad \eta_{\lambda s'} = \eta_{\lambda\bar{p}^{\tau'}} + \eta_{\lambda t}.$$

Eseguendo talune riduzioni, analoghe affatto alle precedenti, ove si ponga:

$$H_{pp'} = \prod_1^n {}_\lambda \left[\frac{\eta_{\lambda[p+p']}!}{\eta_{\lambda p}!\,\eta_{\lambda p'}!}\right], \tag{40}$$

l'addendo di C_2, che corrisponde ad un valore τ', per cui $\eta_{q'\bar{p}^{\tau'}} = 0$, si trova essere:

$$H_{pp'} \sum_1^m {}_l \sum_1^n {}_{r_1 r_2 \ldots r_{l-1} r_{l+1} \ldots r_m \mid t} \left\{ \sum_1^n {}_\lambda \left(\frac{\eta_{\lambda[\bar{p}^{\tau'}+p']} + \eta_{\lambda t}}{\eta_{\lambda t}}\right) \frac{\eta_{\tau' p}}{\eta_{\tau' p} + \eta_{\tau' p'}} \times \right.$$
$$\left. \times f_{r_1 r_2 \ldots r_{l-1} q r_{l+1} \ldots r_m) t q'} \frac{\partial I}{\partial f_{r_1 r_2 \ldots r_{l-1} \tau' r_{l+1} \ldots r_m) t p' \bar{p}^{\tau'}}} \right\}.$$

Quando invece $\eta_{p'\bar{p}^{\tau'}} > 0$, allora l'identità fra s' q', $s\bar{p}^{\tau'}$ si può stabilire, anche senza porre uno degli indici s eguale a q'; basta assumere i $\mu - \varrho$ indici s' coincidenti con $s\bar{p}^{\tau' q'}$. Avremo pertanto, conservando per un momento il simbolo s agli indici variabili: $\eta_{\lambda s'} = \eta_{\lambda\bar{p}^{\tau' q'}} + \eta_{\lambda s}$ $(\lambda = 1, 2, \ldots, n)$, od anche $\eta_{\lambda s'} = \eta_{\lambda\bar{p}^{\tau'}} + \eta_{\lambda s}$ $(\lambda \gtrless q')$, $\eta_{q's'} = \eta_{q'\bar{p}^{\tau'}} + \eta_{q's} - 1$. Come sopra:

$$\binom{\eta_{\lambda\bar{p}^{\tau'}} + \eta_{\lambda s}}{\eta_{\lambda s}} \binom{\eta_{\lambda[\bar{p}^{\tau'}+p']} + \eta_{\lambda s}}{\eta_{\lambda\bar{p}^{\tau'}} + \eta_{\lambda s}} = \binom{\eta_{\lambda[\bar{p}^{\tau'}+p']} + \eta_{\lambda s}}{\eta_{\lambda s}} \frac{(\eta_{\lambda[\bar{p}^{\tau'}+p']})!}{\eta_{\lambda\bar{p}^{\tau'}}!\,\eta_{\lambda p'}!} \qquad (\lambda \lessgtr q')$$

e

$$\binom{\eta_{q'\bar{p}^{\tau'}} + \eta_{q's}}{\eta_{q's}} \binom{\eta_{q'[\bar{p}^{\tau'}+p']} + \eta_{q's} - 1}{\eta_{q'\bar{p}^{\tau'}} + \eta_{q's} - 1} =$$

$$= \frac{(\eta_{q'[\bar{p}^{\tau'}+p']} + \eta_{q's} - 1)!}{(\eta_{q'\bar{p}^{\tau'}} + \eta_{q's} - 1)!\,\eta_{q'p'}!} \frac{(\eta_{q'\bar{p}^{\tau'}} + \eta_{q's})!}{\eta_{q's}!\,\eta_{q'\bar{p}^{\tau'}}!} = \frac{[\eta_{q'[\bar{p}^{\tau'}+p']} + (\eta_{q's} - 1)]!}{[\eta_{q'\bar{p}^{\tau'}} + (\eta_{q's} - 1)]!\,\eta_{q'p'}!} \times$$

$$\times \frac{[\eta_{q'\bar{p}^{\tau'}} + (\eta_{q's} - 1)]!}{\eta_{q'\bar{p}^{\tau'}}!\,(\eta_{q's} - 1)!}\left[1 + \frac{\eta_{q'\bar{p}^{\tau'}}}{\eta_{q's}}\right] = \frac{[\eta_{q'[\bar{p}^{\tau'}+r']} + (\eta_{q's} - 1)]!}{[\eta_{q'\bar{p}^{\tau'}} + (\eta_{q's} - 1)]!\,\eta_{q'p}!} \times$$

$$\times \frac{[\eta_{q'\bar{p}^{\tau'}} + (\eta_{q's} - 1)]!}{\eta_{q'\bar{p}^{\tau'}}!\,(\eta_{q's} - 1)!} + \frac{[\eta_{q'[\bar{p}^{\tau'}+r']} + \eta_{q's}]!}{[\eta_{q'\bar{p}^{\tau'}q'} + \eta_{q's}]!\,\eta_{q'r'}!}\,\frac{[\eta_{q'\bar{p}^{\tau'}q'} + \eta_{q's}]!}{\eta_{q'\bar{p}^{\tau'}q'}!\,\eta_{q's}!} \times$$

$$= \binom{\eta_{q'[\bar{p}^{\tau'}+r']} + (\eta_{q's} - 1)}{(\eta_{q's} - 1)} \frac{(\eta_{q'[\bar{p}^{\tau'}+r']})!}{\eta_{q'\bar{p}^{\tau'}}!\,\eta_{q'r'}!} + \binom{\eta_{q'[\bar{p}^{\tau'}q'+p']} + \eta_{q's}}{\eta_{q's}} \times$$

$$\times \frac{(\eta_{q'[\bar{p}^{\tau'}q'+p']})!}{\eta_{q'\bar{p}^{\tau'}}!\,\eta_{q'p'}!}\,.$$

Corrispondentemente a questi due termini, da cui risulta l'espressione di

$$\binom{\eta_{q'\bar{p}^{\tau'}} + \eta_{q's}}{\eta_{q's}} \binom{\eta_{q'[\bar{p}^{\tau'}+r']} + \eta_{q's} - 1}{\eta_{q'\bar{p}^{\tau'}} + \eta_{q's} - 1},$$

l'addendo di C_2, che spetta ad ogni τ', per cui $\eta_{q'\bar{p}^{\tau'}} > 0$, si scinde in due parti, cioè:

$$\sum_1^m{}_l \sum_1^n{}_{r_1 r_2 \ldots r_{l-1} r_{l+1} \ldots r_m \mid s} \left\{ \prod_1^n{}_\lambda^{q'} \binom{\eta_{\lambda[\bar{p}^{\tau'}+r']} + \eta_{\lambda s}}{\eta_{\lambda s}} \frac{(\eta_{\lambda[\bar{p}^{\tau'}+p']})!}{\eta_{\lambda\bar{p}^{\tau'}}!\,\eta_{\lambda p'}!} \times \right.$$

$$\left. \times \binom{\eta_{q'\bar{p}^{\tau'}[+r']} + (\eta_{q's} - 1)}{(\eta_{q's} - 1)} \frac{(\eta_{q'[\bar{p}^{\tau'}+r']})!}{\eta_{q'\bar{p}^{\tau'}}!\,\eta_{q'p'}!} f_{r_1 r_2 \ldots r_{l-1} q r_{l+1} \ldots r_m) s} \frac{\partial I}{\partial f_{r_1 r_2 \ldots l-1 \tau' r_{l+1} \ldots r_m) s \bar{p}^{\tau'} q' p'}} \right\}$$

e:

$$\sum_1^m{}_l \sum_1^n{}_{r_1 r_2 \ldots r_{l-1} r_{l+1} \ldots r_m \mid s} \left\{ \prod_1^n{}_\lambda^{q'} \binom{\eta_{\lambda[\bar{p}^{\tau'}+p']} + \eta_{\lambda s}}{\eta_{\lambda s}} \frac{(\eta_{\lambda[\bar{p}^{\tau'}+r']})!}{\eta_{\lambda\bar{p}^{\tau'}}!\,\eta_{\lambda p'}!} \times \right.$$

$$\left. \times \binom{\eta_{q'[\bar{p}^{\tau'}q'+r']} + \eta_{q's}}{\eta_{q's}} \frac{(\eta_{q'[\bar{p}^{\tau'}q'+r']})!}{\eta_{q'\bar{p}^{\tau'}q'}!\,\eta_{q'r'}!} f_{r_1 r_2 \ldots r_{l-1} q r_{l+1} \ldots r_m) s} \frac{\partial I}{\partial f_{r_1 r_2 \ldots r_{l-1} \tau' r_{l+1} \ldots r_m) s \bar{p}^{\tau'} q' r'}} \right\}.$$

Rispetto alla prima parte, è inutile supporre $\eta_{q's} = 0$, chè altrimenti, essendo zero il fattore

$$\binom{\eta_{q'[\bar{p}^{\tau'}+r']} + (\eta_{q's} - 1)}{(\eta_{q's} - 1)}$$

(pag. 58), essa si annulla.

Possiamo adunque fin d'ora fissare un indice s eguale a q' e lasciarne variabili soltanto $\mu+1-\varrho-\varrho'$, il cui complesso chiameremo l; sarà $\eta_{\lambda s}=\eta_{\lambda t}$ $(\lambda \gtrless q')$, $\eta_{q's}-1=\eta_{q't}$, perciò l'espressione precedente diverrà:

$$\sum_1^m{}_l \sum_1^n{}_{r_1 r_2 \ldots r_{l-1} r_{l+1} \ldots r_m \mid t} \left\{ \prod_1^n{}_\lambda \left(\frac{\eta_{\lambda[\bar{p}\tau'+p']}) + \eta_{\lambda t}}{\eta_{\lambda t}} \right) \frac{(\eta_{\lambda[\bar{p}\tau'+p']})!}{\eta_{\lambda\bar{p}\tau'}!\,\eta_{\lambda p'}!} \times \right.$$

$$\left. \times f_{r_1 r_2 \ldots r_{l-1} q r_{l+1} \ldots r_m) t q'} \frac{\partial I}{\partial f_{r_1 r_2 \ldots r_{l-1} \tau' r_{l+1} \ldots r_m) t \bar{p}\tau' p'}} \right\},$$

od anche, ricordando che:

$$\frac{(\eta_{\lambda[\bar{p}\tau+p']})!}{\eta_{\lambda\bar{p}\tau'}!\,\eta_{\lambda p'}!} = \frac{(\eta_{\lambda[p+p']})!}{\eta_{\lambda p}!\,\eta_{\lambda p'}!} \qquad (\lambda \gtrless \tau'),$$

$$\frac{(\eta_{\tau'[\bar{p}\tau'+p']})!}{\eta_{\tau'\bar{p}\tau'}!\,\eta_{\tau' p'}!} = \frac{(\eta_{\tau'[p+p']})!}{\eta_{\tau' p}!\,\eta_{\tau' p'}!}\, \frac{\eta_{\tau' p}}{\eta_{\tau' p}+\eta_{\tau' p'}},$$

e la (40):

$$H_{pp'} \sum_1^m{}_l \sum_1^n{}_{r_1 r_2 \ldots r_{l-1} r_{l+1} \ldots r_m \mid t} \left\{ \prod_1^n{}_\lambda \left(\frac{\eta_{\lambda[\bar{p}\tau'+p']} + \eta_{\lambda t}}{\eta_{\lambda t}} \right) \frac{\eta_{\tau' p}}{\eta_{\tau' p}+\eta_{\tau' p'}} \times \right.$$

$$\left. \times f_{r_{12} \ldots r_{l-1} q r_{l+1} \ldots r_m) t q'} \frac{\partial I}{\partial f_{r_1 r_2 \ldots r_{l-1} \tau' r_{l+1} \ldots r_m) t \bar{p}\tau' p'}} \right\},$$

la quale prima parte è identica all'unico addendo, che proviene da quei τ', per cui $\eta_{q'\tau'}=0$. Ne segue, sommando rispetto a τ' da 1 ad n, che C_2 contiene un primo gruppo di termini:

$$(41) \qquad C_2' = H_{pp'} \sum_1^m{}_l \sum_1^n{}_{r_1 r_2 \ldots r_{l-1} r_{l+1} \ldots r_m \mid t} \left\{ \sum_1^s{}_{\tau'} \prod_1^n{}_\lambda \left(\frac{\eta_{\lambda[\bar{p}\tau'+p']} + \eta_{\lambda t}}{\eta_{\lambda t}} \right) \times \right.$$

$$\left. \times \frac{\eta_{\tau' p}}{\eta_{\tau' p}+\eta_{\tau' p'}} f_{r_1 r_2 \ldots r_{l-1} q r_{l+1} \ldots r_m \mid t q'} \frac{\partial I}{\partial f_{r_1 r_2 \ldots r_{l-1} \tau' r_{l+1} \ldots r_m) t \bar{p}\tau' p'}} \right\}.$$

Quando $\eta_{q'\bar{p}\tau'}>0$, abbiamo trovato l'ulteriore addendo:

$$\sum_1^m{}_l \sum_1^n{}_{r_1 r_1 \ldots r_{l-1} q r_{l+1} \ldots r_m \mid t} \left\{ \prod_1^{n}{}^{q'}_{\lambda} \left(\frac{\eta_{\lambda[\bar{p}\tau' q'+p']} + \eta_{\lambda s}}{\eta_{\lambda s}} \right) \frac{(\eta_{\lambda[\bar{p}\tau'+p']})!}{\eta_{\lambda\bar{p}\tau'}!\,\eta_{\lambda p'}!} \times \right.$$

$$\left. \times \left(\frac{\eta_{q'[\bar{p}\tau' q'+p']} + \eta_{q's}}{\eta_{q's}} \right) \frac{(\eta_{q'[\bar{p}\tau' q'+p']})!}{\eta_{q'\bar{p}\tau' q'}!\,\eta_{q' p'}!} f_{r_1 r_2 \ldots r_{l-1} q r_{l+1} \ldots r_m) s} \frac{\partial I}{\partial f_{r_1 r_2 \ldots r_{l-1} \tau' r_{l+1} \ldots r_m) s \bar{p}\tau' q' p'}} \right\},$$

il quale, osservando che $\eta_{\lambda[\overline{p}\tau'+p']} = \eta_{\lambda[\overline{p}\tau'q'+p']}$, $\eta_{\lambda\overline{p}\tau'} = \eta_{\lambda\overline{p}\tau'q'}$ $(\lambda \gtrless q')$, in virtù della (38), fattovi anche $s = l$, potrà essere scritto:

$$H_{\overline{p}q'p'} \sum_{1}^{m}{}_{l} \sum_{1}^{n}{}_{r_1 r_2 \dots r_{l-1} r_{l+1} \dots r_m \mid t} \left\{ \prod_{1}^{n}{}_{\lambda} \binom{\eta_{\lambda[\overline{p}\tau'q'+p']} + \eta_{\lambda t}}{\eta_{\lambda t}} \frac{\eta_{\tau'\overline{p}q'}}{\eta_{\tau'\overline{p}q'} + \eta_{\tau'p'}} \times \right.$$

$$\left. \times f_{r_1 r_2 \dots r_{l-1} q r_{l+1} \dots r_m)t} \frac{\partial I}{\partial f_{r_1 r_2 \dots r_{l-1} \tau' r_{l+1} \dots r_m)t\overline{p}\tau'q'p'}} \right\}.$$

Se $\eta_{q'\overline{p}\tau'} > 0$ per ogni valore di τ', sommando rispetto a τ' da uno ad n, troviamo la seconda parte di C_2:

$$(42) \qquad C_2'' = H_{\overline{p}q'p'} \sum_{1}^{m}{}_{l} \sum_{1}^{n}{}_{r_1 r_1 \dots r_{l-1} r_{l+1} \dots r_m \mid t} \left\{ \sum_{1}^{n}{}_{\tau'} \prod_{1}^{n}{}_{\lambda} \binom{\eta_{\lambda[\overline{p}\tau'q'+p']} + \eta_{\lambda t}}{\eta_{\lambda t}} \times \right.$$

$$\left. \times f_{r_1 r_2 \dots r_{l-1} q r_{l+1} \dots r_m)t} \frac{\partial I}{\partial f_{r_1 r_2 \dots r_{l-1} \tau' r_{l+1} \dots r_m)tp\tau'\overline{p}'q'}} \right\}.$$

È facile però riconoscere che si ha, in qualunque caso:

$$(43) \qquad C_2 = C_2' + C_2'' \; ;$$

ed in vero, se per ogni valore di τ', $\eta_{q'\overline{p}\tau'} = 0$, allora manca la seconda parte C_2'', ma la (43) sussiste sempre, perchè da $\eta_{q'\overline{p}\tau'} = 0$ $(\tau' = 1, 2, \dots n)$, segue $\eta_{q'p} = 0$ e quindi (pag. 58) $H_{q'\overline{p}\tau'} = 0$. Se poi $\eta_{q'\overline{p}\tau'} > 0$ $(\tau' \gtrless q')$, ma $\eta_{q'\overline{p}\tau'} = 0$ (altri casi non sono evidentemente possibili), la somma rispetto a τ' dovrebbe escludere il valore q'; tuttavia il valore di detta somma è anche in questo caso C_2'', poichè il termine, che proverrebbe dal fare $\tau' = q'$, è nullo, contenendo $\eta_{q'\overline{p}q'}$ a fattore.

Più spedita indagine avuto riguardo alle cose dette, può essere istituita rispetto a C_3. Infatti essendo:

$$C_3 = \underset{(\mu-\varrho'+1)qp}{Q_m^{(\varrho)}} \; \underset{(\mu)q'p'}{P_m^{(\varrho)}} I =$$

$$= \sum_{1}^{m}{}_{l} \sum_{1}^{n}{}_{r_1'' r_2' \dots r_{l-1}' \overset{r}{} r_{l+1}' \dots r_m' \mid s'}^{\mid s'} \left\{ \sum_{1}^{n}{}_{\tau'} \prod_{1}^{n} \binom{\eta_{\lambda p} + \eta_{\lambda s}}{\eta_{\lambda s}} \binom{\eta_{\lambda\overline{p}'\tau'} + \eta_{\lambda s'}}{\eta_{\lambda s'}} \times \right.$$

$$\left. \times f_{r)sq} \frac{\partial f_{r_1' r_2' \dots r_{l-1}' q' r_{l+1}' \dots r_m')s'}}{\partial f_{r)sq}} \frac{\partial I}{\partial f_{r_1' r_2' \dots r_{l-1}' \tau' r_{l+1}' \dots r_m')s'\overline{p}'\tau'q'}} \right\},$$

la parte finita si otterrà, facendo $r_1' = r_1$, $r_2' = r_2, \ldots$, $r_{l-1}' = r_{l-1}$, $q' = r_l$, $r_{l+1}' = r_{l+1}, \ldots$, $r_m' = r_m$ e fissando gli indici s' col porli eguali ad s, p. Se si designano con t i $\mu + 2 - \varrho - \varrho'$ indici s rimasti variabili e si osserva al solito che $\eta_{\lambda s} = \eta_{\lambda t}$, $\eta_{\lambda s'} = \eta_{\lambda p} + \eta_{\lambda t}$, ponendo mente anche alla (40), si trova senza difficoltà:

$$(44) \qquad C_3 = H_{pl'} \sum_1^m {}_l \sum_1^n {}_{r_1 r_2 \ldots r_{l-1} r_{l+1} \ldots r_m \mid t} \left\{ \sum_1^m {}_{\tau'} \prod_1^n {}_\lambda \binom{\eta_{\lambda[p + \bar{p}'\tau']} + \eta_{\lambda t}}{\eta_{\lambda t}} \times \right.$$

$$\left. \times \frac{\eta_{\tau' p'}}{\eta_{\tau' p} + \eta_{\tau' p'}} f_{r_1 r_2 \ldots r_{l-1} q r_{l+1} \ldots r_m) t q} \right\}.$$

Infine, passando a:

$$C_4 = Q^{(\varrho)}_{\substack{m \\ (\mu - \varrho' + 1) q p}} Q^{(\varrho')}_{\substack{m \\ (\mu) q' p'}} I =$$

$$= \sum_1^n {}_{\substack{r \mid s \\ r' \mid s'}} \prod_1^n {}_\lambda \binom{\eta_{\lambda p} + \eta_{\lambda s}}{\eta_{\lambda s}} \binom{\eta_{\lambda p'} + \eta_{\lambda s'}}{\eta_{\lambda s'}} f_{r) s q} \frac{\partial f_{r') s' q'}}{\partial f_{r) s p}} \frac{\partial I}{\partial f_{r') s' p'}},$$

se $\eta_{q' p} = 0$, si calcolerà la parte non nulla C_4', facendo $r_1' = r_1$, $r_2' = r_2$, $\ldots$, $r_m' = r_m$, uno degli indici s eguale a q' e finalmente $s' \equiv \bar{s}^{q'} p$. Chiamando sempre t il complesso dei $\mu + 1 - \varrho - \varrho'$ indici s, rimasti variabili, col solito metodo, in virtù della (40):

$$(45) \qquad C_4' = H_{pp'} \sum_1^n {}_{r \mid t} \prod_1^n {}_\lambda \binom{\eta_{\lambda[p+p']} + \eta_{\lambda t}}{\eta_{\lambda t}} f_{r) t q q'} \frac{\partial I}{\partial f_{r) p p' t}}.$$

Se all'incontro $\eta_{q' p} > 0$, potremo lasciar variare tutti gli indici s, purchè si assuma $s' \equiv s\bar{p}^{q'}$; abbiamo:

$$\eta_{\lambda s'} = \eta_{\lambda \bar{p}^{q'}} + \eta_{\lambda s} \quad (\lambda = 1, 2, \ldots, n), \qquad \eta_{\lambda p} = \eta_{\lambda \bar{p}^{q'} p} \qquad (\lambda \gtrless q'),$$

$$\eta_{q' p} = \eta_{q' \bar{p}^{q'}} + 1,$$

e al solito:

$$\binom{\eta_{\lambda \bar{p}''} + \eta_{\lambda s}}{\eta_{\lambda s}} \binom{\eta_{\lambda[p' + \bar{p}^{q'}]} + \eta_{\lambda s}}{\eta_{\lambda \bar{p}^{q'}} + \eta_{\lambda s}} = \binom{\eta_{\lambda[\bar{p}^{q'} + p']} + \eta_{\lambda s}}{\eta_{\lambda s}} \frac{(\eta_{\lambda[\bar{p}^{q'} + p']})!}{\eta_{\lambda \bar{p}^{q'}}! \, \eta_{\lambda p'}!} \qquad (\lambda \gtrless q'),$$

mentre:

$$\binom{\eta_{q'\bar{p}^{q'}}+\eta_{q's}+1}{\eta_{q's}}\binom{\eta_{q'[\bar{p}^{q'}+p']}+\eta_{q's}}{\eta_{q'\bar{p}^{q'}}+\eta_{q's}}=\left\{\binom{\eta_{q'\bar{p}^{p'}}+\eta_{q's}}{\eta_{q's}}+\right.$$

$$\left.+\binom{\eta_{q'\bar{p}^{q'}}+\eta_{q's}}{(\eta_{q's}-1)}\right\}\binom{\eta_{q'[\bar{p}^{q'}+p']}+\eta_{q's}}{\eta_{q'\bar{p}^{q'}}+\eta_{q's}}=\binom{\eta_{q'\bar{p}^{q'}}+\eta_{q's}}{\eta_{q's}}\times$$

$$\times\binom{\eta_{q'[\bar{p}^{q'}+p']}+\eta_{q's}}{\eta_{q'\bar{p}^{q'}}+\eta_{q's}}+\binom{\eta_{q'p}+(\eta_{q's}-1)}{(\eta_{q's}-1)}\binom{\eta_{q'[p+p']}+(\eta_{q's}-1)}{\eta_{q'p}+(\eta_{q's}-1)}=$$

$$=\binom{\eta_{q'[\bar{p}^{q'}+p']}+\eta_{q's}}{\eta_{q's}}\frac{(\eta_{q'[\bar{p}^{q'}+p']})!}{\eta_{q'\bar{p}^{q'}}!\,\eta_{q'p'}!}+\binom{\eta_{q'[p+p']}+(\eta_{q's}-1)}{(\eta_{q's}-1)}\frac{(\eta_{q'[p+p']})!}{\eta_{q'p}!\,\eta_{q'p'}!}.$$

Dal primo di questi addendi, ponendo t per s, nasce il termine:

$$C_4''=H_{\bar{p}^{q'}p'}\sum_1^n{}_{r\,|\,t}\prod_1^n{}_\lambda\binom{\eta_{\lambda[\bar{p}^{q'}+p']}+\eta_{\lambda t}}{\eta_{\lambda t}}f_{r)tq}\frac{\partial I}{\partial f_{r)(\bar{p}^{q'}p'}}= \tag{46}$$

$$=H_{\bar{p}^{q'}p'}Q^{(\varrho+\varrho'-1}_{m\,(\mu)q[\bar{p}^{q'}+p]}I.$$

Quanto al secondo, per le nostre convenzioni, esso è nullo ogni qualqualvolta $\eta_{q's}=0$, perchè contiene

$$\binom{\eta_{q'[\bar{p}^{q'}+p']}+(\eta_{q's}-1)}{(\eta_{q's}-1)}=0,$$

a fattore. Si può quindi addirittura immaginare attribuito il valore fisso q' ad uno degli indici s e, chiamando t i rimanenti $\mu-\varrho-\varrho'$ indici s variabili, basta ripetere in modo identico il ragionamento fatto a proposito di C_2, per stabilire che questa seconda porzione di C_4 è ancora C_4'. Nel caso, adunque, in cui $\eta_{q'\bar{p}^{q'}}>0$, abbiamo trovato:

$$C_4=C_4'+C_4'', \tag{47}$$

mentre per $\eta_{q'\bar{p}^{q'}}=0$, era identicaments $C_4=C_4'$; è facile però rilevare che la (47) vale in generale, inquantochè, per $\eta_{q'\bar{p}^{q'}}=0$, C_4'' svanisce.

Ora dalle (31), (39) e (42) si ha:

$$C_1''+C_2''=-H_{\bar{p}^{q'}p'}P^{(\varrho+\varrho'-1)}_{m\,(\mu)q[\bar{p}^{q'}+p']}I, \tag{48}$$

poichè, se per un certo valore di τ', tanto $\eta_{\tau'\bar{p}^{q'}} > 0$, quanto $\eta_{\tau' p'} > 0$, ne viene $\eta_{\lambda[\bar{p}^{q'}+\bar{p}'\tau']} = \eta_{\lambda[\bar{p}^{q'}\tau'+p']} = \overline{\eta_{\lambda[\bar{p}^{q'}+p']}}^{\tau'}$; se invece $\eta_{\tau'\bar{p}^{q'}} = 0$, ma $\eta_{\tau' p'} > 0$, $\eta_{\lambda[\bar{p}^{q'}+\bar{p}'\tau']} = \eta_{\lambda\overline{[\bar{p}^{q'}]+p'}^{\tau'}}$; finalmente, quando $\eta_{\tau'\bar{p}^{q'}} > 0$, mentre $\eta_{\tau' p'} = 0$, allora $\eta_{\lambda[\bar{p}^{q'}\tau'+p']} = \eta_{\lambda\overline{[\bar{p}^{q'}+p']}^{\tau'}}$. Osserviamo ancora che le tre quantità C_1', $C_2' + C_3$, C_4', come apparisce dalle (37), (41), (44) e (46), si comportano in modo affatto simmetrico, rispetto alla posizione, che occupano gli indici accentati di fronte a quelli non accentati. Cambiata la posizione relativa degli uni rispetto agli altri, il che appunto accade in D, si devono riprodurre delle quantità identiche a C_1', $C_2' + C_3$, C_4'; siccome però in D anche i segni sono cambiati, così, nella somma $C+D$, le quantità C_1', $C_2' + C_3$, C_4' si elideranno colle corrispondenti D_1', $D_2' + D_3$, D_4'. Resterà pertanto: $C + D = C_1'' + C_2'' + C_4'' + D_1'' + D_2'' + D_4''$, ossia, per le (46), (48), (32), ritenuto che D differisce da C per il segno e per l'inversione fra le lettere accentate e le non accentate:

$$C + D = - H_{\bar{p}^{q'}p'} R_{m\,(\mu)q[\bar{p}^{q'}+p']}^{(\varrho+\varrho'+1)} I + H_{p\bar{p}'^{q}} R_{m\,(\mu)q'[p+\bar{p}^{q}]}^{(\varrho+\varrho'-1)} I, \tag{49}$$

la qual relazione, ricordando quanto si è detto a pag. 64, vale per $\varrho + \varrho' - 1 \leqslant \mu + 1$, mentre $C + D$ è nullo se $\varrho + \varrho' - 1 > \mu + 1$; ma in questo caso, come segue dalle (30), (31), (32), anche il secondo membro della (49) si annulla, dunque la (49) stessa fornisce l'espressione generale di $C + D$.

La (34^{bis}) diviene ormai:

$$\left\{ \mathscr{R}_{m\,(\mu)qp}^{(\varrho)} \mathscr{R}_{m\,(\mu)q'p'}^{(\varrho')} \right\} I = \left\{ \mathscr{R}_{m\,(\mu-1)qp}^{(\varrho)} \mathscr{R}_{m\,(\mu-1)q'p'}^{(\varrho')} \right\} I$$

$$- H_{\bar{p}^{q'}p'} R_{m\,(\mu)q[\bar{p}^{q'}+p']}^{(\varrho+\varrho'-1)} I + H_{p\bar{p}^{q'}} R_{m\,(\mu)q'[p+\bar{p}'^{q}]}^{(\varrho+\varrho'-1)} I .$$

Cambiando μ in $\mu - 1$, poi in $\mu - 2$ e così successivamente fino ad 1, e sommando infine membro a membro si trova:

$$\left\{ \mathscr{R}_{m\,(\mu)pq}^{(\varrho)} \mathscr{R}_{m\,(\mu)q'p'}^{(\varrho')} \right\} I = \left\{ \mathscr{R}_{m\,(0)qp}^{(\varrho)} \mathscr{R}_{m\,(0)q'p'}^{(\varrho')} \right\} I$$

$$- H_{\bar{p}^{q'}p'} \sum_{1}^{\mu}{}_{j} R_{m\,(j)q[\bar{p}q'+p']}^{(\varrho+\varrho'-1)} I + H_{p\bar{p}'^{q}} \sum_{1}^{\mu}{}_{j} R_{m\,(j)q'[p+\bar{p}'q]}^{(\varrho+\varrho'-1} I .$$

Se si osserva che $\mathscr{R}_{(0)}$ è in ogni caso identico a $R_{(0)}$, e quindi che il primo termine del secondo membro può essere scritto:

$$\underset{(0)qp}{\mathcal{R}_m^{(\varrho)}}\,\underset{(0)q'p'}{R_m^{(\varrho')}}\,I - \underset{(0)q'p'}{\mathcal{R}_m^{(\varrho')}}\,\underset{(0)qp}{R_m^{(\varrho)}}\,I = C + D$$

(per il caso speciale di $\mu = 0$), avremo, applicando ancora la (49):

$$\left\{ \underset{(\mu)qp}{\mathcal{R}_m^{(\varrho)}}\,\underset{(\mu)q'p'}{\mathcal{R}_m^{(\varrho')}} \right\} I = - H_{\bar{p}q'p'}\,\underset{(\mu)q[\bar{p}q'+p']}{\mathcal{R}_m^{(\varrho+\varrho'-1)}}\,I + H_{p\bar{p}'q}\,\underset{(\mu)q'[p+\bar{p}'q]}{\mathcal{R}_m^{(\varrho+\varrho'-1)}}\,I\,, \tag{50}$$

la quale è appunto la relazione, che ci importava di stabilire.

13. – Pei sistemi contravarianti si può operare in modo analogo a quello seguito finora; risparmiandoci di ripetere qui tutto il calcolo, ci accontentiamo di accennare il risultato finale, che è identico a quello or ora trovato. Si ha cioè per un sistema generico contravariante Z^w:

$$\left\{ \underset{(\mu)qp}{\mathcal{R}_w^{(\varrho)}}\,\underset{(\varrho)q'p'}{\mathcal{R}_w^{(\varrho')}} \right\} I = - H_{\bar{p}q'p'}\,\underset{(\mu)q[\bar{p}q'+p']}{\mathcal{R}_w^{(\varrho+\varrho'-1)}}\,I + H_{p\bar{p}'q}\,\underset{(\mu)q'[p+\bar{p}'q]}{\mathcal{R}_w^{(\varrho+\varrho'-1)}}\,I\,. \tag{50'}$$

Riprendiamo ormai la (21) e poniamovi nel secondo membro, in luogo delle risultanti jacobiane, i loro valori desunti dalle (50) e (50'); verrà:

$$\left\{ X^{(\varrho)}_{(\mu)qp} X^{(\varrho')}_{(\mu)q'p'} \right\} I = - H_{\bar{p}q'p'} X^{(\varrho+\varrho'-1)}_{(\mu)q[\bar{p}q'+p']} I + H_{p\bar{p}'}{}^{q} X^{(\varrho+\varrho'-1)}_{(\mu)q'[p+\bar{p}'q]} I\,, \tag{51}$$

la quale infine non solo dimostra che il nostro sistema Ω_μ è incondizionatamente completo, ma, essendo $H_{\bar{p}q'p'}$, $H_{q\bar{p}'}{}^{q}$ fattori puramente numerici, ci dice ([12]) altresì che le equazioni Ω_μ definiscono un gruppo finito G_μ di trasformazioni nelle variabili f e loro derivate. Questo gruppo è al più M_μ-metrico (M_μ-gliedrig), essendo costituito da M_μ trasformazioni infinitesime, che potrebbero però non esser tutte linearmente indipendenti ([13]). Noi ne conosciamo la struttura (Zusammensetzung), in virtù delle (51), e d'altra parte le equazioni in termini finiti non possono essere che le originarie relazioni di invarianza, covarianza, contravarianza e loro derivate, che legano gli elementi trasformati ai primitivi. Le derivate delle variabili indipendenti, che compariscono in queste relazioni, devono essere risguardate come le costanti caratteristiche, i parametri del gruppo. Immaginando, per esempio, di esprimere, per mezzo delle derivate delle antiche rispetto alle nuove variabili, quelle altre delle

---

([12]) LIE-ENGEL, *Theorie* ecc., Erster Abschnitt, Kap. 9.

([13]) LIE-ENGEL, loc. cit., Kap. 3, § 16.

nuove rispetto alle antiche, noi troviamo proprio M_μ parametri, ma non è detto che abbiano ad essere tutti essenziali, perchè, come si è accennato, in generale non sappiamo se le trasformazioni infinitesime Ω_μ sieno tutte linearmente indipendenti. In ogni caso il fatto che noi conosciamo le equazioni in termini finiti di G_μ permetterebbe di determinare le espressioni invariantive di fronte a G_μ, che sono poi i domandati invarianti assoluti, senza integrare effettivamente il sistema Ω_μ ([14]); basta eliminare i parametri dalle equazioni in termini finiti. In ciò nulla di nuovo per noi, avendo ritrovato per altra via il criterio fondamentale dei metodi ordinarî. Però in questo risultato due conseguenze non ispregevoli sono incluse implicitamente: una dimostrazione rigorosa (cfr. appunto il più volte citato *Erster Abschnitt*, pag. 218) che le eliminanti (nel senso di Casorati) si possono mettere sotto la forma $(I) = I$; la proprietà del gruppo, costituito dalle derivate d'ordine qualunque di tutti i sistemi di n variabili indipendenti, di possedere la struttura (51) e ciò perchè tali gruppi sono parametrici (Parametergruppe) rispetto ai gruppi G e ogni gruppo è oloedrico isomorfo col gruppo dei suoi parametri ([15]).

14. – Procedendo col metodo della eliminazione alla ricerca delle espressioni invariabili, noi siamo certi che le eliminanti si presenteranno sotto forma algebrica razionale negli elementi primitivi e nei trasformati, perciocchè le derivate delle antiche rispetto alle nuove variabili, le quali noi dobbiamo eliminare, entrano razionalmente nelle equazioni originarie di invarianza, covarianza, contravarianza e loro derivate.

Non è tuttavia in alcun modo evidente che dette eliminanti si possano *razionalmente* ricondurre alla forma canonica $(I) = I$. Anzi il metodo, cui accenna il Lie (sempre a pag. 218 del suo primo volume) in generale non soddisfa certamente a questa condizione. Perciò, dato il solito sistema S, noi non sappiamo a priori se, fra gli invarianti assoluti, ve ne abbia almeno tanti razionali quanti indipendenti. Una tale proprietà si verifica in tutti gli esempi di invarianti finora considerati, ma in generale ha bisogno di essere dimostrata. Per questa dimostrazione noi dobbiamo far uso di un teorema importante nella teorica dei gruppi finiti, dovuto al sig. Maurer. Noi ci limitereno a riportarne l'enunciato, rimandando per maggiori dettagli alle memorie di lui ([16]); tuttavia dobbiamo premettere alcune definizioni.

([14]) Lie-Engel, ib., Kap. 13, S. 217-218.

([15]) Lie-Engel, ib., Kap. 21.

([16]) *Ueber lineare Substitutionen*, Inaugural Dissertation, Strassburg, 1887.
Ueber allgemeinere Invarianten Systeme. « Sitzungsberichte der k. bayerischen Ak. der Wiss. zu München », 1888, Heft I. Un riassunto dei lavori di Maurer sopra questo argomento si trova nel terzo volume della *Theorie*, ecc., Leipzig, 1893, Kap. 29, § 145.

Si dice omogenea una trasformazione infinitesima Xf portante su n variabili indipendenti $x_1, x_2, \ldots, x_n$, quando Xf è del tipo $\sum_1^n{}_i \sum_1^n{}_\nu a_{i\nu} x_\nu \frac{\partial f}{\partial x_i}$; la equazione

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \omega & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \omega & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} - \omega \end{vmatrix} = 0 \,.$$

algebrica di grado n in ω è detta la equazione caratteristica corrispondente alla trasformazione omogenea infinitesima. Infine una equazione caratteristica sarà chiamata *normale*, se tutte le sue radici sono nulle, oppure se i rapporti di queste sono numeri razionali, ogni radice essendo di più tale che annulla insieme al determinante proposto tutti i suoi minori di un ordine corrispondente alla multiplicità della radice stessa.

Ciò posto, il teorema del sig. MAURER suona così: « Se r trasformazioni infinitesime ed omogenee $X_1 f, X_2 f, \ldots, X_r f$ determinano un gruppo finito intransitivo al più r-metrico, condizione *necessaria e sufficiente* affinchè questo gruppo abbia almeno tanti invarianti razionali quanti ne ammette di indipendenti è che le trasformazioni infinitesime del gruppo si possano, mediante combinazioni lineari, porre sotto tale forma che le equazioni caratteristiche corrispondenti a ciascuna di esse riescano normali ».

Noi avremo occasione di applicare successivamente le due parti di questo teorema; in primo luogo ci varremo del fatto che l'accennata condizione è necessaria.

Riprendiamo le equazioni Ω_μ, le quali, abbiam visto, determinano, qualunque sia μ, un gruppo finito al più M_μ-metrico.

Per il valore speciale $\varrho = 1$, le corrispondenti equazioni Ω_μ, saranno manifestamente tante quante le derivate prime delle ξ, cioè n^2; le indicheremo complessivamente con Ω_μ^1 e il loro tipo generale sarà, come si desume dalle (21):

$$X^{(1)}_{(\mu)qp} I = \sum_1^\alpha \underset{(\mu)qp}{\overset{(1)}{R}}{}^{hm_h} I + \sum_1^\beta \underset{(\mu)qp}{\overset{(1)}{R}}{}^{kw_k} I \,,$$

cioè, per le (33 d) e corrispondenti (33′ d):

$$(52) \qquad X^{(1)}_{(\mu)qp} I = \sum_1^\alpha{}_h \sum_0^\mu{}_j \left\{ - \sum_1^{m_h}{}_l \; \sum_1^n{}_{r_1 r_2 \ldots r_{l-1} r_{l+1} \ldots r_{m_h} | s_1 s_2 \ldots s_j} \left(f^{hm_h}_{r_1 r_2 \ldots r_{l-1} q r_{l+1} \ldots r_{m_h}} \right)_s \times \right.$$

$$\times \left. \frac{\partial I}{\partial f_{\substack{hm_h \\ r_1 r_2 \dots r_{l-1} p r_{l+1} \dots r_{m_h})s}}} \right) - \sum_1^n {}_{r_1 r_2 \dots r_{m_h} | s_1 s_2 \dots s_{j-1}} (1 + \eta_{sp}) f_{\substack{hm_h \\ r)sq}} \frac{\partial I}{\partial f_{\substack{hm_h \\ r)sp}}} \Bigg\} +$$

$$+ \sum_1^\beta {}_k \sum_0^\mu {}_j \left\{ \sum_1^{w_k} {}_l \sum_1^h {}_{r_1 r_2 \dots r_{l-1} r_{l+1} \dots r_{w_k} | s_1 s_2 \dots s_j} \left(f_{\substack{km_k \\ )s}}^{r_1 r_2 \dots r_{l-1} p r_{l+1} \dots r_{w_k}} \times \right. \right.$$

$$\times \left. \frac{\partial I}{\partial f_{\substack{kw_k \\ )s}}^{r_1 r_2 \dots r_{l-1} q r_{l+1} \dots r_{w_k}}} \right) - \sum_1^n {}_{r_1 r_2 \dots r_{w_k} | s_1 s_2 \dots s_{l-1}} (1 + \eta_{sp}) f_{\substack{kw_k \\ )sq}}^{r} \frac{\partial I}{\partial f_{\substack{kw_k \\ )sp}}^{r}} \Bigg\}$$

$$(q, p = 1, 2, \dots, n) .$$

Fra poco avremo occasione di riprenderle; prima però si rende opportuna una breve digressione nel campo delle forme algebriche. Se siano $x_1, x_2, \dots, x_n$ coordinate puntuali omogenee in uno spazio Euclideo S_{n-1}, $u_1, \dots, u_{n-1}$ coordinate duali di un S_{n-2}, i simboli a_a, u_x rappresenteranno secondo le notazioni abituali forme lineari ed omogenee del tipo $\sum_i a_i x_i$ e $\sum_i \alpha^i u_i$ rispettivamente.

Una forma di m-esimo grado in coordinate di punti

$$X_m \equiv \sum_1^n {}_{r_1 r_2 \dots r_m} f_{r_1 r_2 \dots r_m} x_{r_1} x_{r_2} \dots x_{r_m}$$

sarà rappresentata dal simbolo a_x^m ovvero $a_x^{(1)} \cdot a_x^{(2)} \dots a_x^{(m)}$, secondochè le $f_{r_1 r_2 \dots r_m}$ che compariscono nella espressione effettiva della forma, sieno o no simmetriche rispetto alla disposizione dei loro indici. Più generalmente se in una forma d'ordine $m_h + j$, i coefficienti sono simmetrici rispetto a certi j indici $s_1, s_2, \dots, s_j$, si può porre:

$$(53) \qquad X_{\substack{hm_h \\ j}} \equiv \sum_1^n {}_{r_1 r_2 \dots r m_h | s_1 s_2 \dots s_j} f_{\substack{km_h \\ r|s}} x_{r_1} x_{r_2} \dots x_{r_{m_h}} x_{s_1} x_{s_2} \dots x_{s_j} \equiv a_x^{(1)} a_x^{(2)} \dots a_x^{(m_h)} b_x^j ,$$

e in ogni caso il passaggio dalla forma simbolica alla effettiva è possibile univocamente e senza ambiguità.

Lo stesso vale per le forme duali in coordinate u e per i connessi (17) a due serie di variabili x ed u del tipo generale:

$$(53') \qquad \Gamma_{\substack{kw_k \\ j}} \equiv \sum_1^n {}_{r_1 r_2 \dots r_{w_k} | s_1 s_2 \dots s_j} f_{\substack{kw_k \\ |s}}^{r} \cdot u_{r_1} u_{r_2} \dots u_{r_{w_k}} x_{s_1} x_{s_2} \dots x_{s_j} \equiv u_\alpha^{(1)} u_\alpha^{(2)} \dots u_\alpha^{(w_k)} c_x^j$$

(17) Clebsch, *Vorlesungen über Geometrie*, Ersten Bandes, zweiter Teil, Leipzig, 1876, Siebente Abtheilung.

l'identità (53') essendosi stabilita nell'ipotesi che le $f^{kw_h}_{)s}$ siano simmetriche rispetto agli indici s.

Il passaggio univoco fra i simboli ed i valori effettivi sarà determinato dalle relazioni:

$$a^{(1)}_{r_1} a^{(2)}_{r_2} \dots a^{(m_h)}_{r_{m_h}} b_{s_1} b_{s_2} \dots b_{s_2} = f^{hm_h}_{r_1 r_2 \dots r_{m_h}) s_1 s_2 \dots s_j} , \tag{54}$$

$$\alpha^{(1) r_1} \alpha^{(2) r_2} \dots \alpha^{(w_k) r_{w_k}} c_{s_1} c_{s_2} \dots c_{s_j} = f^{kw_k \; r_1 r_2 \dots r_{w_k}}_{) s_1 s_2 \dots s_j} . \tag{54'}$$

La proprietà commutativa dei fattori b o c nei prodotti simbolici esprime la simmetria dei coefficienti effettivi rispetto agli indici s, mentre i fattori a ed α, quantunque permutabili fra loro, non hanno alcuna influenza sull'ordine degli indici r, avendo noi a bella posta, coll'introduzione degli apici (1), (2),..., nelle a ed α, vincolato ciascun fattore a rappresentare l'indice di un posto determinato.

Sia ora:

$$x_i = \sum_{1}^{n}{}_{\nu} \, e_{i\nu}(x_\nu) , \qquad (i = 1, 2, \dots, n) \tag{55}$$

una qualunque sostituzione lineare di variabili, il cui determinante E sia diverso da zero.

Sarà corrispondentemente:

$$u_i = \sum_{1}^{n}{}_{\nu} \, e^{\nu i}(u_\nu) , \qquad (i = 1, 2, \dots, n), \tag{56}$$

rappresentando $e^{\nu i}$ il minore complementare $E_{\nu i}$ diviso per E.

Indicando con $(X^{hm_h}_j)$ e $(\Gamma^{kw_k}_j)$ ciò, che divengono $X^{hm_h}_j$, $\Gamma^{km_k}_j$, in seguito a questa sostituzione, avremo, come si sa:

$$\begin{aligned} (f^{hm_h}_{r_1 r_2 \dots r_{m_h} s_1 s_2 \dots s_j}) &= \\ &= \sum_{1}^{n}{}_{q_1 q_2 \dots q_{m_h} t_1 t_2 \dots t_j} f^{hm_h}_{q_1 q_2 \dots q_{m_h} t_1 t_2 \dots t_j} e_{q_1 r_1} e_{q_2 r_2} \dots e_{q_{m_h} r_{m_h}} e_{t_1 s_1} e_{t_2 s_2} \dots e_{t_j s_j} , \end{aligned} \tag{57}$$

$$\begin{aligned} (f^{kw_k \; r_1 r_2 \dots r_{m_k}}_{s_1 s_2 \dots s_j}) &= \\ &= \sum_{1}^{n}{}_{q_1 q_2 \dots q_{w_k} t_1 t_2 \dots t_j} f^{kw_k \; q_1 q_2 \dots q_{w_k}}_{t_1 t_2 \dots t_j} e^{r_1 q_1} e^{r_2 q_2} \dots e^{r_{w_k} q_{w_k}} e_{t_1 s_1} e_{t_2 s_2} \dots e_{t_j s_j} . \end{aligned} \tag{57'}$$

Consideriamo ora un sistema S' costituito da $\alpha(\mu + 1)$ forme puntuali $X^{hm_h}_j$ $(j = 0, 1, 2, \dots, \mu)$ $(h = 1, 2, \dots, \alpha)$ e da $\beta(\mu + 1)$ connessi

$\Gamma_j^{kw_k}$ $(j = 0, 1, 2, ..., \mu)$ $(k = 1, 2, ..., \beta)$ ed osserviamo che, per la teoria delle forme algebriche in quante si vogliono variabili ([18]), gli invarianti assoluti di un tale sistema, cioè le espressioni invariabili di fronte a qualsiasi trasformazione lineare, non sono che rapporti di due invarianti (nel senso considerato dai geometri) e quindi funzioni algebriche razionali ed omogenee dei coefficienti delle forme proposte. Veramente gli autori citati dimostrano ciò per forme a coefficienti simmetrici, rispetto a tutti i loro indici, ma, siccome in tali dimostrazioni si considerano sistemi generali di forme simboliche e le (53) (53') fanno appunto vedere come, anche senza la simmetria rispetto a tutti gli indici, sia possibile una univoca rappresentazione simbolica, così possiamo senz'altro asserire che il sistema S' possiede almeno tanti invarianti assoluti razionali nei coefficienti delle forme, quanti esso ne ammette di indipendenti.

D'altra parte, approfittando delle teorie di LIE, questi invarianti assoluti si possono risguardare ([19]) come soluzioni di un sistema completo di equazioni a derivate parziali, del sistema cioè costituito dalle trasformazioni infinitesime di un gruppo $G'\, n^2$-metrico in N_μ variabili (pag. 56), le cui equazioni in termini finiti sono le (57), (57)', supponendovi j suscettibile di prendere tutti i valori compresi fra 0 e μ, h fra 1 ed α, k fra 1 e β. Ricordiamo ora ([20]) che, per trovare le trasformazioni infinitesime di un gruppo finito G_{n^2}, di cui si conoscono le equazioni in termini finiti, basta derivare successivamente ciascuna di dette equazioni rapporto ai parametri (e_{qp} nel caso nostro) e attribuire, dopo eseguita la derivazione, ai parametri stessi quei valori che loro spettano nella trasformazione identica. Per le nostre equazioni (57) (57'), la trasformazione identica si ha facendo $e_{i\nu} = \varepsilon_{i\nu}$, dove, secondo le notazioni abituali, $\varepsilon_{i\nu} = 0$ per $i \gtrless \nu$, mentre $\varepsilon_{ii} = 1$.

Denoteremo con ψ_0 ciò che diviene una funzione ψ dei parametri $e_{i\nu}$ quando per essi si pongano i valori $\varepsilon_{i\nu}$. Avremo: $E_0 = 1$

$$(58) \qquad e_0^{i\nu} = \frac{(E_{i\nu})_0}{E_0} = \varepsilon_{i\nu}\,,$$

$$(59) \qquad \left(\frac{\partial e_{i\nu}}{\partial e^{i'\nu'}}\right)_0 = \left(\frac{\partial E^{i\nu}}{\partial e_{i'\nu'}}\right)_0 \frac{1}{E_0} - \frac{(E_{i'\nu'})_0\,(E_{i\nu})_0}{E_2^0} = -\,\varepsilon_{i\nu'}\varepsilon_{i'\nu}\,,$$

ciò che può essere verificato senza difficoltà.

([18]) CLEBSCH, Op. cit., Ersten Bandes erster Teil, dritte Abtheilung, S. 267. – Id., *Ueber symbolische Darstellung algebraischer Formen.* « Crelle's Journal », B. 59 (1861).
HILBERT, *Ueber die Theorie der algebraischen Formen.* « Math. Ann. », B. XXXVI (1890). – Id., *Ueber die vollen Invariantensysteme.* « Math. Ann. », B. XLII (1893).
([19]) LIE-ENGEL, *Theorie* ecc., Erster Abschnitt, Kap. 13, S. 215.
([20]) LIE-ENGEL, ib., Kap. 4, S. 78.

Derivando il secondo membro di una generica (57) o (57′), per esempio di:

$$(f^{hm_h}_{r_1 r_2 \ldots r_{m_h} | s_1 s_2 \ldots s_j}) = \sum_1^n {}_{q_1 q_2 \ldots q_{m_h} t_1 t_2 \ldots t_j} f^{hm_h}_{q_1 q_2 \ldots q_{m_h}) t_1 t_2 \ldots t_j} e_{q_1 r_1} e_{q_2 r_2} \ldots e_{q_{m_h} r_{m_h}} e_{t_1 s_1} \ldots e_{t_2 s_2} \ldots e_{t_j s_j}$$

rapporto ad e_{qp} e ponendo poi ciascun $e_{i\nu} = \varepsilon_{i\nu}$ $(i, \nu = 1, 2, \ldots, n)$ il risultato ci rappresenta il coefficiente di $\dfrac{\partial I}{\partial f^{hm_h}_{r_1 r_2 \ldots r_{m_h}) s_1 s_2 \ldots s^j}}$ in una delle n^2 trasformazioni infinitesime indipendenti del nostro gruppo. Noi le troviamo tutte, eseguendo l'operazione indicata rispetto agli n^2 parametri e_{qp} $(p, q = 1, 2, \ldots, n)$; quando poi si eguaglino a zero, esse ammettono per soluzioni comuni gli invarianti del gruppo G'_{n^2}.

Formiamo la trasformazione infinitesima corrispondente ad e_{qp}. Riferendoci ad una equazione (57) ed immaginando di derivare successivamente rispetto ad e_{qp} ciascuno degli $m_h + j$ fattori del secondo membro, facendo poi $e_{i\nu} = \varepsilon_{i\nu}$, il risultato potrà essere espresso da:

$$\sum_1^{m_h}{}_l\, \varepsilon_{pr_l} f^{hm_h}_{r_1 r_2 \ldots r_{l-1} q r_{l+1} \ldots r_{m_h}) s_1 s_2 \ldots s_j} + \sum_1^{i}{}_\lambda\, \varepsilon_{ps_\lambda} f^{hm_h}_{r_1 r_2 \ldots r_{m_h}) s_1 s_2 \ldots s_{\lambda-1} q s_{\lambda+1} \ldots s_j}\,.$$

Per una generica (57′), in virtù delle (59), si avrà invece:

$$-\sum_1^{w_h}{}_l\, \varepsilon_{qr_l} f^{kw_k \; r_1 r_2 \ldots r_{l-1} p r_{l+1} \ldots r_{w_k}}_{) s_1 s_2 \ldots s_j} + \sum_1^{j}{}_\lambda\, \varepsilon_{ps_\lambda} f^{kw_k \; r_1 r_2 \ldots r_{w_k}}_{) s_1 s_2 \ldots s_{\lambda-1} q s_{\lambda+1} \ldots s}\,.$$

Moltiplicando per le corrispondenti derivate

$$\frac{\partial I}{\partial f^{hm_h}_{r_1 r_2 \ldots r_{m_h}) s_1 s_2 \ldots s_j}} \quad \text{ovvero} \quad \frac{\partial I}{\partial f^{kw_k \; r_1 r_2 \ldots r_{w_k}}_{) s_1 s_2 \ldots s_j}}$$

e sommando rispetto a r, s, h, k, j, si trova l'espressione della trasformazione infinitesima relativa ad e_{qp}. Essa è:

$$\begin{aligned}
&\sum_1^{\alpha}{}_k \sum_0^{\mu}{}_j \Bigg\{ \sum_1^{m_h}{}_l \sum_1^{n}{}_{r_1 r_2 \ldots r_{m_h} | s_1 s_2 \ldots s_j} \varepsilon_{qr_l} f^{hm_h}_{r_1 r_2 \ldots r_{l-1} q r_{l+1} \ldots r_{m_h}) s_1 s_2 \ldots s_j} \frac{\partial I}{\partial f^{hm_h}_{r_1 r_2 \ldots r_{l-1} r_l r_{l+1} \ldots r_{m_h}) s_1 s_2 \ldots s_j}} \\
&\qquad + \sum_1^{j}{}_\lambda \sum_1^{n}{}_{r_1 r_2 \ldots r_{m_h} | s_1 s_2 \ldots s_j} \varepsilon_{ps_\lambda} f^{hm_h}_{r_1 r_2 \ldots r_{m_h}) s_1 s_2 \ldots s_{\lambda-1} q s_{\lambda+1} \ldots s_j} \frac{\partial I}{\partial f^{hm_h}_{r_1 r_2 \ldots r_{m_h}) s_1 s_2 \ldots s_j}} \Bigg\} \\
&\qquad + \sum_1^{\beta}{}_k \sum_0^{\mu}{}_j \Bigg\{ -\sum_1^{w_k}{}_l \sum_1^{n}{}_{r_1 r_2 \ldots r_{w_k} | s_1 s_2 \ldots s_j} \varepsilon_{qr_l} f^{kw_k \; r_1 r_2 \ldots r_{l-1} p r_{l+1} \ldots r_{w_k}}_{) s_1 s_2 \ldots s_j} \frac{\partial I}{\partial f^{kw_k \; r_1 r_2 \ldots r_{l-1} r_l r_{l+1} \ldots r_{w_k}}_{) s_1 s_2 \ldots s_j}} \\
&\qquad + \sum_1^{j}{}_\lambda \sum_1^{n}{}_{r_1 r_2 \ldots r_{w_k} | s_1 s_2 \ldots s_j} \varepsilon_{ps\lambda} f^{kw_k \; r_1 r_2 \ldots r_{w_k}}_{s_1 s_2 \ldots s_{\lambda-1} q s_{\lambda+1} \ldots s_j} \frac{\partial I}{\partial f^{kw_k \; r_1 r_2 \ldots r_{w_k}}_{) s_1 s_2 \ldots s_j}} \Bigg\}\,.
\end{aligned}$$

Nel primo e nel terzo dei termini tra parentesi, può essere soppressa la somma rispetto ad r_l, attribuendo ad esso il valor fisso p o q rispettivamente, e ciò perchè $\varepsilon_{pr_l} = 0$, $\varepsilon_{qr_l} = 0$, per r_l diverso da p o da q. Nel secondo e quarto termine invece, una delle s, s_j per esempio, può essere senz'altro fissata eguale a p, perchè, se nessuna s possiede tale valore, e_{ps_λ} è nullo per ogni valore di λ; corrispondentemente poi ad ogni combinazione con ripetizione delle $(j-1)$ s rimaste variabili, le somme

$$\sum_1^i{}_\lambda \varepsilon_{ps_\lambda} f^{hm_h}_{r_1 r_2 \dots r_{m_h}) s_1 s_1 \dots s_{\lambda-1} q s_{\lambda+1} \dots s_j}\,, \qquad \sum_1^i{}_\lambda \varepsilon_{ps_\lambda} f^{kw_k\, r_1 r_2 \dots r_{w_k}}_{) s_1 s_2 \dots s_{\lambda-1} q s_{\lambda+1} \dots s_j}\,,$$

tenendo presente la simmetria degli indici s, saranno eguali a

$$f^{hm_h}_{r_1 r_2 \dots r_{m_h}) s_1 s_2 \dots s_{j-1} q} \quad \text{ovvero a} \quad f^{kw_k\, r_1 r_2 \dots r_{w_k}}_{) s_1 s_2 \dots s_{j-1} q}$$

più tante volte termini identici a quelli, quanti tra gli $j-1$ indici rimasti variabili sono eguali a p. Potremo adunque togliere il simbolo sommatorio rispetto a λ, purchè, fissato uno degli indici eguale a q, e continuando a chiamare s gli $j-1$ indici variabili, si aggiunga in ciascun caso il fattore $\eta_{ps} + 1$. Così facendo verrà:

$$\begin{aligned}
(60) \qquad & \sum_1^\alpha{}_h \sum_0^\mu{}_j \left\{ \sum_1^{m_h}{}_l \sum_1^n{}_{r_1 r_2 \dots r_{l-1} r_{l+1} r_{m_h}) s_1 s_2 \dots s_j} f^{hm_h}_{r_1 r_2 \dots r_{l-1} q r_{l+1} \dots r_{m_h}) s_1 s_2 \dots s_j} \times \right. \\
& \left. \times \frac{\partial I}{\partial f^{hm_h}_{r_1 r_2 \dots r_{l-1} p r_{l+1} \dots r_m) s}} + \sum_1^n{}_{r_1 r_2 \dots r_{m_h} \mid s_1 s_2 \dots s_{j-1}} (1 + \eta_{sp}) f^{hm_h}_{r) sq} \frac{\partial I}{\partial f^{hm_h}_{r) sq}} \right\} \\
& + \sum_1^\beta{}_k \sum_0^\mu{}_j \left\{ - \sum_1^n{}_l \sum_1^{w_k}{}_{r_1 r_2 \dots r_{l-1} r_{l+1} \dots r_{w_k} \mid s_1 s_2 \dots s_j} f^{kw_k\, r_1 r_2 \dots r_{l-1} p r_{l+1} \dots r_{w_k}}_{) s} \times \right. \\
& \left. \times \frac{\partial I}{\partial f^{kw_k\, r_1 r_2 \dots r_{l-1} q r_{l+1} \dots r_{w_k}}_{) s}} + \sum_n^1{}_{r_1 r_2 \dots r_{w_k} \mid s_1 s_2 \dots s_{j-1}} (1 + \eta_{sp}) f^{kw_k\, r}_{) sq} \frac{\partial I}{\partial f^{kw_k\, r}_{) sp}} \right\}.
\end{aligned}$$

Pertanto, qualunque sieno p e q, le n^2 trasformazioni infinitesime di G'_{n^2} sono rappresentate dalle (60) e basta confrontarle coi primi membri delle equazioni Ω^1_μ (52), per concludere, a meno d'un fattore -1, la loro identità.

D'altra parte, come abbiamo osservato a pag. 79, di fronte a tutte le trasformazioni lineari (55) (56), il sistema di forme algebriche S'_{n^2} possiede almeno tanti invarianti assoluti razionali quanti ne ammette di indipendenti; lo stesso vale quindi per il gruppo G'_{n^2}, che può immaginarsi definito dalle trasformazioni infinitesime indipendenti (52) o (60).

In virtù della prima parte del teorema di MAURER sopra citato, noi concludiamo che i primi membri delle equazioni Ω_μ^ϱ sono linearmente riducibili a tal forma che le equazioni caratteristiche corrispondenti a ciascuna di esse sieno normali.

Assai più semplice e diretta investigazione si può intraprendere rispetto alle altre equazioni di Ω_μ. Considerandone una qualsiasi, poniamo $X^{(\varrho)}_{(\mu)qp} I = 0$ $(\varrho > 1)$, riconosceremo tosto che la equazione caratteristica, che le corrisponde è normale. Infatti, avendosi per le (18), (30), (31), (32), (33):

$$
\begin{aligned}
(61) \qquad & X^{(\varrho)}_{(\mu)qp} I \equiv \\
\equiv & \sum_{1}^{a}{}_h \sum_{0}^{\mu}{}_j \left\{ -\sum_{1}^{m_h}{}_l \sum_{1}^{n}{}_{r_1 r_2 \ldots r_{l-1} r_{l+1} \ldots r_{m_h} \mid s_1 s_2 \ldots s_j} \sum_{1}^{n}{}_\tau \prod_{1}^{n}{}_\lambda \begin{pmatrix} \eta_{\lambda \bar{p}^\tau} + \eta_{\lambda s} \\ \eta_{\lambda s} \end{pmatrix} \times \right. \\
& \times f_{hm_h \atop r_1 r_2 \ldots r_{l-1} r_{l+1} \ldots r_{m_h})s} \frac{\partial I}{\partial f_{hm_h \atop r_1 r_2 \ldots r_{l-1} \tau r_{l+1} \ldots r_{m_h})s\bar{p}^\tau}} - \\
& \left. - \sum{}_{r_1 r_2 \ldots r_{m_h} \mid s_1 s_2 \ldots s_{j-1}} \prod_{1}^{n}{}_\lambda \begin{pmatrix} \eta_{\lambda p} + \eta_{\lambda s} \\ \eta_{\lambda s} \end{pmatrix} f_{hm_h \atop r)sq} \frac{\partial I}{\partial f_{hm_h \atop r)sp}} \right\} \\
& + \sum_{1}^{\beta}{}_k \sum_{0}^{\mu}{}_j \left\{ \sum_{1}^{w_k}{}_l \sum_{1}^{n}{}_{r_1 r_2 \ldots r_{l-1} r_{l+1} \ldots r_{w_h} \mid s_1 s_2 \ldots s_j} \sum_{1}^{n}{}_\tau \prod_{1}^{n}{}_\lambda \begin{pmatrix} \eta_{\lambda \bar{p}^\tau} + \eta_{\lambda s} \\ \eta_{\lambda s} \end{pmatrix} \times \right. \\
& \times f_{kw_k \atop)s}^{r_1 r_2 \ldots r_{l-1} \tau r_{l+1} \ldots r_{w_k}} \frac{\partial I}{\partial f_{kw_k \atop)s\bar{p}^\tau}^{r_1 r_2 \ldots r_{l-1} q r_{l+1} \ldots r_{w_k}}} \\
& \left. - \sum_{1}^{n}{}_{r_1 r_2 \ldots r_{w_k} \mid s_1 s_2 \ldots s_{j-1}} \prod_{1}^{n}{}_\lambda \begin{pmatrix} \eta_{\lambda p} + \eta_{\lambda s} \\ \eta_{\lambda s} \end{pmatrix} f_{kw_k \atop)sq}^{r} \frac{\partial I}{\partial f_{kw_k \atop)sp}^{r}} \right\} = 0 ,
\end{aligned}
$$

potremo in primo luogo immaginare ordinate le N_μ variabili, da cui dipende questa trasformazione infinitesima omogenea, in modo che, a ciascun numero intero, compreso fra 1 e N_μ, corrisponda una particolare variabile. Senza fissare tassativamente questa corrispondenza, noi possiamo scindere le nostre variabili in $\mu + 1$ gruppi successivi, il primo dei quali comprende in un certo ordine, che qui non ci importa di stabilire, tutti gli elementi dei proposti sistemi, il secondo tutte le loro derivate prime e così successivamente, finchè il $(\mu + 1)$-esimo sarà costituito da tutte le derivate d'ordine μ.

Una semplice ispezione della precedente equazione $X^{(\varrho)}_{(\mu)qp}I = 0$, mostra come, essendo ϱ, cioè il numero delle p, superiore all'unità, i coefficienti di ciascuna derivata della funzione I appartengono ad uno dei nostri $\mu + 1$ gruppi, inferiore, per numero d'ordine, almeno di una unità a quello, cui appartiene la variabile di derivazione. Se quindi si costituisce il determinante caratteristico d'ordine N_μ e di elementi, diciamo $a_{i\nu}$, e si distribuiscono in ciascuna sua riga i coefficienti delle derivate di I rapporto alle singole variabili, nell'ordine di successione dei gruppi da noi stabilito, per l'osservazione fatta, sarà certamente $a_{i\nu} = 0$, tutte le volte che sia $\nu \geqslant i$. Perciò il determinante si riduce al prodotto degli elementi $-\omega$ posti sulla diagonale principale e l'equazione caratteristica risultante è, come si vede,

$$(-1)^{N_\mu}\omega^{N_\mu} = 0\,,$$

cioè normale.

Al § 13 abbiamo visto che i primi membri delle equazioni Ω_μ determinano un gruppo finito di trasformazioni. Questo gruppo è, per definizione, intransitivo in tutti i casi, in cui esso, cioè a dire il proposto sistema S, ammette invarianti. Rispetto alle trasformazioni infinitesime Ω_μ, per $\varrho = 1$, il confronto col sistema ausiliario di forme algebriche S', per $\varrho > 1$, le brevi considerazioni, che precedono, mostrano che le equazioni caratteristiche relative ad esse sono o si possono rendere normali; applicando quindi la seconda parte del più volte citato teorema di MAURER, noi concludiamo che il nostro sistema S ammette almeno tanti invarianti razionali quanti indipendenti.

15. – Se sia I uno qualunque tra essi, si potrà porre: $I = A/B$, dove tanto A che B designano funzioni intere.

Consideriamo uno dei sistemi covarianti o contravarianti contenuti in S, Z, per esempio, ed indichiamo con Z^μ il gruppo di variabili, costituito dagli elementi di Z e dalle loro derivate fino all'ordine μ. Potremo risguardare le funzioni intere A e B quali somme di funzioni omogenee rispetto alle variabili Z^μ e fare $A = \sum_1^a{}_h A_h$, $B = \sum_1^b{}_k B_k$, dove, col crescere degli indici, supponiamo decrescano i gradi delle funzioni corrispondenti e quindi, per esempio, A_1, B_1, comprenderanno i termini di grado massimo rapporto alle variabili Z^μ, in A e B rispettivamente.

Come apparisce dalle (61), una qualunque operazione $X^{(\varrho)}_{(\mu)qp}I$, applicata ad una funzione intera, lascia inalterato il grado di ciascun suo termine, relativo ad ogni singolo gruppo di variabili Z^μ; per conseguenza le funzioni omogenee A_h, B_k si cangeranno in $X^{(\varrho)}_{(\mu)qp}A_h$, $X^{(\varrho)}_{(\mu)qp}B_k$ pure omogenee e rispettivamente dello stesso grado.

Ora si ha:

$$X^{(\varrho)}_{(\mu)qp} I \equiv X^{(\varrho)}_{(\mu)qp} \frac{A}{B} \equiv X^{(\varrho)}_{(\mu)qp} \frac{A_1 + \sum_2^a{}_h A_h}{B_1 + \sum_2^b{}_k B_k} \equiv$$

$$\equiv \frac{\left\{B_1 + \sum_2^b{}_k B_k\right\} X^{(\varrho)}_{(\mu)qp}\left[A_1 + \sum_2^a{}_h A_h\right] - \left\{A_1 + \sum_2^a{}_h A_h\right\} X^{(\varrho)}_{(\mu)qr}\left[B_1 + \sum_2^b{}_k B_k\right]}{B^2} \equiv 0,$$

e, dovendo il numeratore essere identicamente eguale a zero, si annulleranno separatamente i gruppi di termini dello stesso grado; in particolare sarà:

$$B_1 X^{(\varrho)}_{(\mu)qp} A_1 - A_1 X^{(\varrho)}_{(\mu)qp} B_1 = 0 \text{ od anche } X^{(\varrho)}_{(\mu)qp} \frac{A_1}{B_1} = 0,$$

la quale ci mostra che A_1/B_1 soddisfa a tutte le equazioni del sistema Ω_μ ed è quindi un invariante omogeneo.

Segue da ciò che il quoziente dei termini di grado massimo di un invariante razionale è un invariante omogeneo; ripetendo lo stesso ragionamento sopra $I - A_1/B_1$, si trova un secondo invariante omogeneo, che è il secondo termine del quoziente A/B, in quanto A e B si risguardino quali polinomi ordinatamente costituiti dagli addendi $A_1, A_2, \ldots, A_a$; $B_1, B_2, \ldots, B_b$.

Indichiamo con $O_1, O_2, \ldots$ i termini successivi di questo quoziente; essi saranno, per le cose dette, invarianti omogenei del sistema S.

Noi vogliamo dimostrare che, se la divisione A/B non si effettua esattamente, se cioè si può protrarre a piacere la formazione di termini $O_1, O_2, \ldots$, i rapporti

$$\frac{A_1}{B_1}, \frac{A_2}{B_1}, \ldots, \frac{A_a}{B_1}; \frac{B_2}{B_1}, \frac{B_3}{B_1}, \ldots, \frac{B_b}{B_1},$$

sono tutti esprimibili per le O, e quindi essi stessi degli invarianti omogenei. A tale scopo si osservi che, indicando con $R_1, R_2, \ldots, R_c$ i successivi resti, avremo:

$$A = BO_1 + R_1 = B(O_1 + O_2) + R_2 = \ldots = B(O_1 + O_2 + \ldots + O_c) + R_c$$

e, siccome i polinomii A e B erano ordinati per le funzioni omogenee di grado decrescente in Z^{μ}, così i gradi dei successivi R_1, $R_2, \ldots, R_c$ andranno costantemente decrescendo.

Da ciascuno di essi al consecutivo vi sarà nel grado la differenza almeno di una unità, quindi, prendendo c sufficientemente grande, potremo far sì che il resto R_c abbia grado inferiore a quel numero, che più ci piace, per esempio, al grado di A_a.

Ora, nella identità:

$$A = \sum_1^a {}_h A_h = \sum_1^b {}_k B_k \cdot [O_1 + O_2 + \ldots + O_c] + R_c \,,$$

dovranno separatamente essere eguali i termini dello stesso grado; quelli compresi in R_c hanno tutti grado più piccolo di una qualsiasi funzione A. Ciascuna A_h $(h = 1, 2, \ldots, a)$ si esprimerà pertanto in funzione lineare ed omogenea delle R e delle O.

Sia O_{c+1} il termine del quoziente immediatamente successivo ad O_c. Il grado di una qualunque $O_{c+1}B_k$ $(k = 1, 2, \ldots, b)$, per il modo, onde abbiam scelto R_c, sarà minore del grado di ogni A_h $(h = 1, 2, \ldots, a)$. Di più si può scegliere $c' > c$ tale che $R_{c'}$ contenga soltanto termini inferiori per grado a ciascun $O_{c+1}B_k$ $(k = 1, 2, \ldots, b)$, bastando perciò rendere il grado di $R_{c'}$ inferiore a quello di $O_{c+1}B_b$.

Dalla identità:

$$\sum_1^a {}_h A_h = \sum_1^b {}_k B_k \cdot [O_1 + O_2 + \ldots + O_c + O_{c+1} + \ldots + O_{c'}] + R_{c'}$$

rileviamo che i termini, compresi in

$$\sum_1^b {}_k B_k \cdot [O_1 + O_2 + \ldots + O_c + O_{c+1} + \ldots + O_{c'}]$$

e rispettivamente dello stesso grado di $O_{c+1}B_1$, $O_{c+1}B_2, \ldots, O_{c+1}B_b$, devono ciascuna volta dar per somma zero, inquantochè, per il procedimento adottato, nè il primo membro, nè $R_{c'}$ contengono termini di quei gradi. Avremo certo b relazioni lineari ed omogenee rapporto alle B ed alle O; riferendoci alle ultime $b-1$, noi vogliamo provare che esse sono atte a fornirci i rapporti $B_2/B_1, B_3/B_1, \ldots, B_b/B_1$, si possono cioè risolvere rispetto a $B_2, B_3, \ldots, B_b$. Perciò basterà far vedere che, risguardando le O come elementi essenzialmente distinti, il determinante dei coefficienti delle B (il quale sarà appunto una certa funzione delle O) non si annulla identicamente.

Infatti, in ciascuna equazione: $B_k O_{c+1} + \ldots = 0$ $(k = 2, 3, \ldots, b)$, O_{c+1}

entra soltanto come coefficiente di B_k, poichè ogni altro termine del tipo $O_{c+1}B_{k'}$ $(k' \gtrless k)$ avrebbe nelle Z^μ grado diverso da $O_{c+1}B_k$, nè potrebbe quindi appartenere con esso ad una stessa equazione. Immaginando ora che le equazioni $O_{c+1}B_k + ... = 0$ si succedano nell'ordine crescente di k, il determinante dei coefficienti di $B_2, B_3, ..., B_b$, avrà tutti gli elementi della diagonale principale eguali ad O_{c+1}, nè conterrà in alcun altro modo O_{c+1} stesso. Nel suo sviluppo pertanto il termine O_{c+1} non potrà elidersi con alcuno dei rimanenti e quindi il determinante non è identicamente zero.

Dacchè i rapporti delle B a B_1 si possono esprimere per mezzo degli invarianti omogenei O, e le A a loro volta sono esprimibili per le B e per le O, riconosciamo che i rapporti $A_1/B_1, A_2/B_1, ..., A_a/B_1$ si possono assegnare in funzione degli invarianti omogenei O.

Ora, se la divisione A/B si effettua esattamente, l'invariante razionale I, da cui siamo partiti, ha la forma $I = \sum O$; se ciò non accade, si possono esprimere per mezzo delle O i rapporti A_h/B_1 $(h = 1, 2, ..., a)$,

$$\frac{B_k}{B_1} \qquad (k = 2, 3, ..., b) \qquad \text{e quindi} \qquad I = \frac{\sum_1^a{}_h A_h}{\sum_1^b{}_k B_k} = \frac{\sum_1^a{}_h \dfrac{A_h}{B_1}}{1 + \sum_2^b{}_k \dfrac{B_k}{B_1}}\,.$$

Ne viene che un invariante razionale è sempre esprimibile per mezzo di invarianti omogenei rispetto ad una certa serie di variabili Z^μ, ed è pur chiaro che, ripetendo identicamente lo stesso ragionamento, può anche dirsi, rispetto a ciascuna serie di variabili Z^μ.

Noi abbiamo dimostrato nel paragrafo precedente che ogni sistema S possiede tanti invarianti razionali quanti esso ne ammette di indipendenti, cioè a dire tanti invarianti razionali, non legati tra loro da alcun legame funzionale, quanti sono gli invarianti assoluti indipendenti del sistema.

Questi invarianti razionali, come si è visto, sono esprimibili per mezzo di invarianti omogenei. Dico che tra essi ve ne ha proprio altrettanti di indipendenti. Infatti non potrebbero essere di più, perchè il numero massimo di invarianti, non legati da alcuna relazione, è precisamente quello degli invarianti razionali, nè in numero minore, perchè allora gli invarianti razionali stessi non sarebbero più tutti indipendenti, contro l'ipotesi. Concludiamo pertanto:

Teor. I. – « *Ogni sistema S ammette precisamente tanti invarianti razionali omogenei ed indipendenti, quanti gli competono invarianti non legati da alcuna relazione. La loro omogeneità è relativa ad ogni serie di variabili,* *costituita dagli elementi di qualsivoglia sistema covariante o contravariante contenuto in S e dalle loro derivate* ».

Questi invarianti omogenei tra loro indipendenti si potranno brevemente designare col nome di *invarianti principali.*

16. – Il minimo numero di invarianti indipendenti, che spettano ad un dato sistema S, fino ad un certo ordine prestabilito μ, è espresso manifestamente (§ 9) da $N_\mu - M_\mu$, perchè il sistema Ω_μ, costituito da M_μ equazioni con N_μ variabili indipendenti (§ 13), è completo; siccome però in generale non si sa se le equazioni del sistema Ω_μ sieno tutte fra loro indipendenti, così il numero totale degli invarianti non sarà in ogni caso $N_\mu - M_\mu$, ma potrà subire, per ciascun valore di μ, un certo incremento g_μ, che rappresenta il numero delle equazioni Ω_μ implicitamente incluse nelle rimanenti. La determinazione di g_μ, oltre che dal valore di μ, dipende dalla natura speciale del sistema S, che si prende in esame; tralasciando di occuparcene in generale, non sarà tuttavia inopportuno far menzione di un risultato ottenuto dal sig. ŻORAWSKI, ([21]) il quale, nel caso speciale assai notevole di un solo sistema covariante doppio simmetrico a due variabili indipendenti, ha dimostrato che, a partire da $\mu = 3$, le singole g_μ sono tutte nulle. In conseguenza di ciò, per essere in questo caso:

$$M_\mu = 3\left\{\binom{\mu+3}{\mu+1} - 1\right\} = 2\,\frac{(\mu+3)(\mu+2)}{2} - 2\,,$$

$$N_\mu = 4\binom{\mu+2}{\mu} = 2(\mu+2)(\mu+1)\,,$$

verrà:

$$N_\mu - M_\mu = 2(\mu+2)(\mu+1) - (\mu+3)(\mu+2) + 2 = \mu^2 + \mu\,,$$

da cui, per avere gli invarianti proprii, dovremo togliere il numero delle equazioni di simmetria e loro derivate, cioè:

$$1 + 2 + \ldots + (\mu+1) = \frac{(\mu+1)(\mu+2)}{2}\,,$$

e la differenza

$$\frac{2\mu(\mu+1)}{2} - \frac{(\mu+1)(\mu+2)}{2} = \frac{(\mu+1)(\mu-2)}{2}$$

([21]) Mem. cit., pag. 21.

rappresenterà, a partire da $\mu = 3$, il numero, possiamo anche dire (§ 15), degli invarianti principali d'ordine non superiore a μ, spettanti ad una varietà a due dimensioni.

Per $\mu = 3$, $\mu = 4$, si ritrovano dei numeri, indicati già dal prof. CASORATI [22].

Prima di chiudere queste considerazioni generali sugli invarianti differenziali, vogliamo ancora rilevare come, dato un sistema S, le espressioni, che dal prof. BELTRAMI vengono chiamate parametri o funzioni invariabili, non sono in fondo che degli invarianti, relativi però non più al sistema S, originariamente assegnato, ma a quello, che si ottiene, associando ad esso uno o più sistemi d'ordine zero, cioè una o più funzioni.

Si potrebbe tentare qualche applicazione dei criterii generali precedentemente esposti alla ricerca effettiva di espressioni invariantive; tuttavia, sotto questo punto di vista, non è chi non scorga quanto laboriosa e malagevole riescirebbe la integrazione dei sistemi Ω_μ, pur tenendo conto dei notevoli vantaggi, che, in questo riguardo, potrebbe offrire il metodo di MAYER.

Preferisco per intanto di non insistere, almeno per ora, su cotesta questione, cercando invece di far valere taluno dei risultati fin qui ottenuti in un campo, per quanto io so, del tutto inesplorato.

17. – Dato un sistema S, proponiamoci di determinare tutte le espressioni ψ, dipendenti dalle variabili, dalle funzioni di S e dalle loro derivate fino a quelle d'ordine μ, tali che riescano invarianti gli integrali del tipo:

$$J = \int_C^{(n)} \psi \, dx_1 \, dx_2 \dots dx_n \, ,$$

dove C è un campo arbitrario, però indipendente dal sistema di variabili, rispetto a cui viene eseguita l'integrazione. Tali espressioni ψ diremo *ipofunzioni d'ordine* μ e i corrispondenti J saranno invarianti integrali dello stesso ordine.

Seguendo il procedimento stesso, adottato già per gli invarianti differenziali, riconosciamo che: Condizione necessaria e sufficiente affinchè un integrale J rimanga invariante si è che:

$$\delta J = 0 \, , \tag{63}$$

---

[22] Mem. cit., tom. IV, pag. 179.

ossia, portando il simbolo di variazione sotto il segno:

$$(64) \qquad \int_C \left\{ \delta\psi \, dx_1 \, dx_2 \dots dx_n + \sum_1^n \varphi \, dx_1 \dots dx_{q-1} \delta dx_q \, dx_{q+1} \dots dx_n \right\} = 0 \,,$$

e, scrivendo $(\partial\xi_q/\partial x_q)\, dw_q$ per δdx_q:

$$(65) \qquad \int_C \left\{ \delta\psi + \sum_1^n {}_q \, \psi \frac{\partial \xi_q}{\partial x_q} \right\} dx_1 \, dx_2 \dots dx_n = 0 \,.$$

Dacchè questa relazione deve valere, qualunque sia la natura del campo C, dovremo avere necessariamente:

$$(65') \qquad \delta\psi + \sum_1^n {}_p \, \psi \frac{\partial \xi_q}{\partial x_q} = 0 \,,$$

la quale è condizione necessaria perchè $\delta J = 0$, e, come rilevasi dalla (65), è altresì sufficiente.

Ora, qualunque sia μ, $\delta\psi$, come già δJ, è una funzione lineare ed omogenea delle singole ξ e loro derivate, nella quale il coefficiente di ξ_i è $\partial\psi/\partial x_i$ $(i = 1, 2, \dots, n)$, mentre, secondo la notazione introdotta al § 9,il coefficiente di una generica $\partial^\varrho \xi_q/\partial x_{p_1} \partial x_{p_2} \dots \partial x_{p_\varrho}$ è $X^{(\varrho)}_{(\mu)q p_1 p_2 \dots p_\varrho} I$. (Per l'espressione effettiva si vegga la formula (61)).

Abbiamo quindi dalla (65′):

$$\sum_1^n {}_i \frac{\partial\psi}{\partial x_i} \xi_i + \sum_1^{\mu+1} {}_\varrho \sum_1^n {}_{q \,|\, p_1 p_2 \dots p_\varrho} X^{(\varrho)}_{(\mu) p q_1 p_2 \dots p_\varrho} \psi \frac{\partial^\varrho \xi_q}{\partial x_{p_1} \partial x_{p_2} \dots \partial x_{p_\varrho}} + \sum_1^n {}_q \, \psi \frac{\partial \xi_q}{\partial x_q} = 0 \,,$$

nella quale ci converrà di scrivere a parte i termini della seconda sommatoria, che corrispondono a $\varrho = 1$, ottenendo:

$$\sum_1^p \frac{\partial\psi}{\partial x_i} \xi_i + \sum_2^{\mu+1} {}_\varrho \sum_1^n {}_{q \,|\, p_1 p_2 \dots p_\varrho} X^{(\varrho)}_{(\mu) q q_1 p_2 \dots r_\varrho} \psi \frac{\partial^\varrho \xi_q}{\partial x_{p_1} \partial x_{p_2} \dots \partial x_{p_\varrho}} +$$

$$+ \sum_1^n {}_{qp} \, X^{(\varrho)}_{(\mu) q p} \psi \frac{\partial \xi_q}{\partial x_p} + \sum_1^n {}_q \psi \frac{\partial \xi_q}{\partial x_q} = 0 \,,$$

e questa manifestamente si scinde nelle:

$$(66)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial\psi}{\partial x_i}=0 & (i=1,2,\dots,n) \\ X^{(1)}_{(\mu)qp}\psi+\varepsilon_{qp}\psi=0 & (q,p=1,2,\dots,n) \\ \overline{\Omega}_\mu=0\,, \end{cases}$$

dove, per brevità, con $\overline{\Omega}_\mu=0$ rappresentiamo il complesso di tutte le $M_\mu-n^2$ equazioni $X^{(\varrho)}_{(\mu)qp_1p_2\dots p_\varrho}\psi=0$ di Ω_μ, in cui $\varrho>1$.

La ricerca delle ipofunzioni è così ricondotta allo studio del sistema (66).

18. – Cominceremo con un caso speciale molto notevole, quello cioè delle ipofunzioni d'ordine zero. Segue dalle (65) che esse devono in questo caso soddisfare alle equazioni:

$$(67)\qquad \frac{\partial\psi}{\partial x_i}=0 \qquad (i=1,2,\dots,n)$$

$$(67')\qquad X^{(1)}_{(0)qp}\,\psi+\varepsilon_{qp}\psi=0 \qquad (q,p=1,2,\dots,n)\,.$$

Dalle (67) rileviamo che le ψ non contengono le variabili indipendenti; prima di avviarci a trovare l'integrale generale delle (67′), sarà bene riassumere alcune proprietà note dei sistemi di forme algebriche, le quali, come vedremo, valgono nella maggior parte dei casi a fornire la determinazione completa di questo integrale.

Osserviamo a tale scopo che, siccome il sistema S è costituito da α sistemi covarianti Z_{hm_h} $(h=1,2,\dots,\alpha)$ e da β sistemi contravarianti $Z^{w_k}_h$ $(k=1,2,\dots,\beta)$ (§ 5), così possiamo anche risguardare i suoi invarianti d'ordine zero come invarianti assoluti (di fronte a tutte le trasformazioni lineari) relativi ad un sistema simultaneo di $\alpha+\beta$ forme algebriche puntuali e reciproche, di gradi m_h, w_k, che hanno rispettivamente per coefficienti $f_{hm_h\atop r_1r_2\dots r_{m_h}}$, $f_{kw_k}^{r_1r_2\dots r_{w_k}}$.

Ora le n^2 equazioni $X^{(1)}_{(0)qp}\psi=0$ $(q,p=1,2,\dots,n)$, che definiscono gli invarianti assoluti (cioè il nostro Ω_0) sono già state considerate da CAYLEY [23], da CLEBSCH [24] ed in particolare dall'ARONHOLD, il quale

[23] *Nouvelles recherches sur les covariantes*, « Crelle's Journal », B. 47.

[24] *Ueber die simultane Integration partieller Differentialgleichungen*, ib., B. 65, S. 267.

mostrò inoltre (ed è questo che sommamente ci interessa) come le equazioni $X^{(1)}_{(0)qp}\psi + \varepsilon_{qp}\lambda\psi = 0$ $(q, p = 1, 2, \ldots, n)$ vengano soddisfatte dagli invarianti (nel senso geometrico) dello stesso sistema ([25]), dalle espressioni cioè, che godono della proprietà di riprodursi, in seguito ad una trasformazione lineare, moltiplicati per la potenza λ-esima del determinante della sostituzione. Per ciascun invariante si ha la relazione:

$$\lambda = \frac{\sum_{1}^{\alpha}{}_h\, m_h \gamma^{m_h}_h - \sum_{1}^{\beta}{}_k\, w_k \gamma^{w_k}_k}{n}, \tag{68}$$

dove $\gamma^{m_h}_h$ rappresenta il grado delle f_{hm_h}, $\gamma^{w_k}_k$ quello delle f^{kw_k} nell'invariante geometrico ([26]).

Il nostro scopo, ricordiamolo, è di integrare il sistema di equazioni a derivate parziali (67′), che è un caso particolare di quello studiato dall'Aronhold e corrisponde a $\lambda = 1$.

Esso ammette pertanto come integrali tutti gli invarianti geometrici di caratteristica $\lambda = 1$. È poi bene osservare che da ogni invariante geometrico (non assoluto) si può dedurre un integrale particolare. Sia infatti I un invariante geometrico per modo che si abbia $X^{(1)}_{(0)qp}I + \varepsilon_{qp}\lambda I = 0$ $(q, p = 1, 2, \ldots, n)$ con λ diverso da zero; potendosi allora porre $\psi = I^{1/\lambda}$,

---

([25]) *Ueber eine fundamentale Begründung der invarianten Theorie*, ib., B. 62.
A pag. 311 sono date le equazioni:

$$\begin{cases} SD_{\varrho\varrho}(P) = \lambda P \\ SD_{\varrho\varrho}(P) = 0\,, \end{cases} \tag{2}$$

dove il simbolo sommatorio si riferisce alle singole forme del sistema e le $D_{\varrho\varrho}(P)$, $D_{\varrho\varrho}(P)$ corrispondono alle nostre:

$$-\mathcal{R}^{(1)}_{(0)qp}I \equiv -R^{(1)}_{(0)qp}I \equiv -P^{(1)}_{(0)qp}I$$

[(32), (33), (33*a*), pag. 60-61].

Per vero dire l'autore si riferisce esclusivamente al caso, in cui i coefficienti f sieno simmetrici rispetto a tutti i loro indici; è facile però riconoscere che il teorema accennato è indipendente dall'ipotesi restrittiva della simmetria.

([26]) Nella citata memoria di Aronhold vengono considerate soltanto forme puntuali e si trova assegnata, sempre a pag. 311, la relazione:

$$\lambda = \frac{p_1\gamma_1 + p_2\gamma_2 + \ldots + p_m\gamma_m}{n},$$

nella quale $p_1, p_2, \ldots, p_m$ tengono il posto delle nostre m_h, $\gamma_1, \gamma_h, \ldots, \gamma_m$ rappresentano i gradi dell'invariante nei coefficienti delle singole forme. L'estensione al caso più generale di un sistema, costituito anche da forme reciproche, scaturisce immediatamente da una osservazione semplicissima, dovuta a Clebsch; cfr. *Ueber symbolische Darstellung algebraischer Formen*, « Crelle's Journal », B. 59, S. 3.

cioè $I = \psi^\lambda$, si sostituisca questo valore di I nelle identità precedenti e si troverà:

$$\lambda\psi^{\lambda-1}X^{(1)}_{(0)qp}\psi + \varepsilon_{qp}\lambda\psi^\lambda = 0$$

cioè, dividendo per $\lambda\psi^{\lambda-1}$,

$$X^{(1)}_{(0)qp}\psi + \varepsilon_{qp}\psi = 0\,,$$

come avevamo annunciato. Di questa circostanza trarremo profitto a suo tempo.

Riprendiamo ora lo studio dell'integrale generale del sistema (67'). Immaginiamo che esso sia definito da una equazione implicita del tipo $\chi(\psi) = 0$; avremo identicamente

$$\frac{\partial\chi}{\partial f} + \frac{\partial\chi}{\partial\psi}\frac{\partial\psi}{\partial f} = 0\,,$$

e, siccome le $X^{(1)}_{(0)qp}\psi$ sono espressioni lineari ed omogenee nelle $\partial\psi/\partial f$, sostituendo per queste nelle (67') i loro valori

$$-\frac{\partial\chi}{\partial f}\Big/\frac{\partial\chi}{\partial\psi}\,.$$

e, moltiplicando da una parte e dall'altra per $\partial\chi/\partial\varphi$, verrà:

$$(69)\qquad X^{(1)}_{(0)qp}\chi - \varepsilon_{qp}\frac{\partial\chi}{\partial\psi}\psi = 0 \qquad (q,\, p = 1, 2, \dots, n),$$

le quali n^2 equazioni sono lineari ed omogenee rispetto alla incognita χ, risguardata funzione delle variabili indipendenti f e della ψ.

Scegliamone due ad arbitrio, quelle per esempio, che corrispondono ai valori qp, $q'p'$ e formiamone la funzione alternata; si hanno, tenendo presenti le (50), le nuove equazioni:

$$-H_{\bar{p}^{q'}{}_{p'}}X^{(1)}_{(0)q[\bar{p}^{q'}+p']}\chi + H_{p\bar{p'}^q}X^{(2)}_{(0)q'[p+\bar{p'}^q]}\chi + \varepsilon_{qp}\varepsilon_{q'p'}\psi\frac{\partial\chi}{\partial\psi} - \varepsilon_{qp}\varepsilon_{q'p'}\psi\frac{\partial\chi}{\partial\psi} = 0\,,$$

e, siccome (38):

$$H_{\bar{p}^{q'}{}_{p'}} = \prod_1^n{}_\lambda\left[\frac{(\chi_{\lambda[\bar{p}^{q'}+p']})!}{\eta_{\lambda\bar{p}^{q'}}!\;\;\eta_{\lambda p'}!}\right]$$

è eguale (pag. 58) nel caso presente a zero se $q' \gtrless p$, ad uno se $q' = p$ e analogamente $H_{p\overline{p'}q}$, così, valendoci al solito delle costanti ε, le risultanti jacobiane potranno essere scritte:

$$- \varepsilon_{pq'} \left\{ X^{(1)}_{(0)pq'} \chi - \varepsilon_{qp'} \psi \frac{\partial \chi}{\partial \psi} \right\} + \varepsilon_{p'q} \left\{ X^{(1)}_{(0)q'p} \chi - \varepsilon_{q'p} \psi \frac{\partial \chi}{\partial \psi} \right\} = 0 \ ,$$

le quali mostrano che le (69) costituiscono un sistema completo.

Se fossero tutte indipendenti, ammetterebbero $N_0 - M_0 + 1$ soluzioni distinte; siccome in generale ciò non può essere asserito, denotiamo con g_0' il numero delle equazioni (69), che sono una conseguenza delle rimanenti; siccome gli integrali del sistema Ω_0 soddisfanno anche al sistema (69), essendo per essi $\partial \chi / \partial \psi = 0$, e d'altra parte il sistema (69) stesso contiene tante equazioni quante Ω_0 ed ha una variabile indipendente di più, così è chiaro che sarà o $g_0' = g_0 - 1$, o $g_0' = g_0$. Ora se $N_0 - M_0 + g_0 + 1$ è negativo o nullo, a più forte ragione $N_0 - M_0 + g_0' + 1 \leqslant 0$ e, quindi non esistono ipofunzioni; ciò accade anche quando, pur essendo $N_0 - M_0 + g_0 + 1 > 0$, $g_0' = g_0 - 1$, poichè allora le (69) non ammettono alcun integrale contenente ψ ([27]); se invece $g_0' = g_0$, allora il sistema (69) ammetterà un integrale indipendente di più che non il sistema Ω_0, χ_σ per esempio, e questo sarà necessariamente funzione di ψ.

Avremo per conseguenza come integral generale delle (69) una funzione arbitraria χ delle $N_0 - M_0 + g_0 + 1$ soluzioni particolari χ_σ, I_τ $(\tau = 1, 2, \ldots, N_0 - M_0 + g_0)$.

Le brevi considerazioni sui sistemi di forme algebriche, che noi abbiamo riassunte dalla memoria di ARONHOLD, permettono di determinare un integrale particolare χ_σ, ogni qualvolta il sistema S ammette invarianti geometrici. Infatti si è visto come da ogni invariante geo-

---

([27]) Che un tal caso effettivamente possa presentarsi si riconosce, per es., nel modo che segue. Sieno dati due sistemi a_r, $b^{(r)}$, uno covariante, l'altro contravariante e relativi a due variabili indipendenti x_1, x_2. Le quattro equazioni Ω, sono:

$$-a_1 \frac{\partial I}{\partial a_1} + b^{(1)} \frac{\partial I}{\partial b^{(1)}} = 0 \, , \quad -a_2 \frac{\partial I}{\partial a_1} + b^{(1)} \frac{\partial I}{\partial b^{(2)}} = 0 \, , \quad -a_1 \frac{\partial I}{\partial a_2} + b^{(2)} \frac{\partial I}{\partial b^{(1)}} = 0 \, ,$$

$$-a_2 \frac{\partial I}{\partial a_2} + + b^{(2)} \frac{\partial I}{\partial b^{(1)}} = 0 \, ,$$

che si possono ridurre a tre distinte ed infatti esiste l'invariante $\sum_r{}_1^2 a_r b^{(r)}$. Ora il sistema (69) ha nel caso nostro tutte le sue equazioni indipendenti, quindi $g_0' = 0$ ed esso ammette una sola soluzione, che è la $\sum_r{}_1^2 a_r b^{(r)}$. Non possono pertanto esistere integrali particolari delle (69) contenenti ψ quantunque $N_0 - M_0 + g_0' + 1$, cioè $4 - 4 + 0 + 1$ sia maggiore di zero.

metrico non assoluto, cioè di caratteristica $\lambda \gtrless 0$, si possa dedurre un integrale particolare χ_σ delle (67'). Facendo poi $\chi_\sigma = \psi_\sigma/\psi$, si ha in χ_σ il desiderato integrale delle (69), che contiene la variabile ψ.

19. – In questo paragrafo vogliamo indicare alcune applicazioni a particolari sistemi. Sia in primo luogo un solo sistema covariante doppio e simmetrico di elementi a_{rs}. Il sistema di forme algebriche, che vi corrisponde, si riduce all'unica forma quadratica $\sum_{rs} a_{rs}x_r x_s$, la quale ha, come è noto, l'invariante geometrico $a = \sum \pm a_{11}a_{22} \dots a_{nn}$ e nessun invariante assoluto. Valendoci della formula (68), siccome nel caso presente $\alpha = 1$, $\beta = 0$, $m = 2$, $\gamma = n$, troviamo $\lambda = 2 \cdot n/n = 2$ e quindi ψ è definita dall'equazione $\chi(\sqrt{a}/\psi) = 1$; la funzione arbitraria χ non potendo portare che sopra costanti, sarà, risolvendo, $\sqrt{a}/\psi = C$, $\psi = C^{-1}\sqrt{a}$.

Per conseguenza, ove si prescinda dalla costante arbitraria, un sistema covariante doppio e simmetrico possiede il solo invariante integrale d'ordine zero

$$\int^{(n)} \sqrt{a}\, dx_1 dx_2 \dots dx_n \,.$$

Veniamo al caso di un sistema S, che sia costituito da un solo sistema covariante triplo e simmetrico in due variabili. Abbiamo anche qui un invariante geometrico e precisamente, seguendo le notazioni del CLEBSCH ([28]):

$$R = (ab)^2(cd)^2(ac)(bd) = 2[4(a_0a_2 - a_1^2)(a_1a_3 - a_2^2) - (a_0a_3 - a_1a_2)^2]\,,$$

dove a_0, a_1, a_2, a_3 coincidono ordinatamente cogli elementi a_{111}, a_{112}, a_{122}, a_{222} del proposto sistema. Dalla (68), $\lambda = 2 \cdot 4/2 = 4$, il che si poteva dedurre immediatamente dal fatto che, nella rappresentazione simbolica, entrano quattro serie di lettere. Come precedentemente, abbiamo quindi il solo invariante $\iint \sqrt{R}\, dx_1\, dx_2$, che, si può dire per analogia, rappresenta la superficie di una varietà analitica a due dimensioni, il cubo del cui elemento lineare sia espresso dalla forma differenziale cubica:

$$a_0 dx_1^3 + 3a_1\, dx_1^2\, dx_2 + 3a_2\, dx_1\, dx_2^2 + a_3\, dx_2^3\,.$$

Una tale analogia viene però a cessare appena si considerino forme

([28]) CLEBSCH, *Vorlesungen über Geometrie*, Ersten Bandes erster Teil, Leipzig, Teubner, 1891; S. 219-220.

differenziali superiori. Per esempio, data una varietà, il cui elemento lineare sia:

$$ds = \sqrt[4]{\varphi} = \sqrt[4]{a_0\,dx_1^4 + 4a_1\,dx_1^3\,dx_2 + 6a_2\,dx_1^2\,dx_2^2 + 4a_3\,dx_1\,dx_2^3 + a_4\,dx_2^4}\ ,$$

e, considerando il sistema covariante quadruplo, che le corrisponde, si trovano ([29]) i due invarianti geometrici $i = (ab)^4$, $j = (ab)^2(bc)^2(ca)^2$ dei gradi 2 e 3 rispettivamente e il solo invariante assoluto i^3/j^2. La (68) porge $\lambda = 2\cdot 4/2 = 4$ per i e $\lambda = 3\cdot 4/2 = 6$ per j. Possiamo assumere per integrali particolari $\sqrt[4]{i}/\psi, j^3/j^2$, ovvero $\sqrt[6]{j}/\varphi\,, j^3/j^2$, od anche più semplicemente $\sqrt[4]{i}/\psi$, $\sqrt[6]{j}/\psi$, ed avremo, se la forma quadratica è generale, cioè se fra i ed j non passano speciali relazioni, infiniti invarianti integrali $\iint \psi\,dx_1\,dx_2$, dove ψ è radice dell'equazione: $\chi(\sqrt[4]{i}/\psi,\ \sqrt[6]{j}/\varphi) = 0$. Se si volesse in qualche modo interpretare geometricamente questo risultato, si dovrebbe concludere che le varietà di elemento lineare $\sqrt[4]{\varphi}$ ammettono un numero infinito di caratteristiche geometriche, di cui una soltanto, cioè l'estensione, corrisponde a un concetto intuitivo. Inoltre, come si vede, quando si conosca la espressione di $ds^4 \equiv \varphi$, non resta individuata la geometria metrica della varietà, ma se ne possono immaginare infinite, per ciascuna delle quali l'area si rappresenti con un diverso invariante $\iint \psi\,dx_1\,dx_2$.

20. – Ricordiamo che, nell'ipotesi più generale, la determinazione delle ipofunzioni è stata ricondotta a quella dell'integral generale delle (66). Queste si possono distinguere in due gruppi:

$$X^{(1)}_{(\mu)qp}\psi + \varepsilon_{qp}\psi = 0 \qquad (q, p = 1, 2, \dots, n) \tag{70}$$

$$\bar{\Omega}_\mu = 0\ , \tag{71}$$

prescindendo, si intende, dalle $\partial\psi/\partial x_i = 0$ $(i = 1, 2, \dots, n)$, le quali, come sempre, ci dicono che le cercate ipofunzioni non dipendono dalle variabili x.

Possiamo poi immaginare, nello stesso modo usato per $\mu = 0$, che l'integrale delle (70), (71), sia definito da una equazione implicita

([29]) Ib., S. 229.

$\chi(\varphi) = 0$, χ dovendo soddisfare alle equazioni:

$$X^{)1)}_{(\mu)qp}\chi - \varepsilon_{qp}\frac{\delta\chi}{\delta\psi} = 0 \qquad (q, p = 1, 2, ..., n) \tag{72}$$

$$\overline{\Omega}_\mu = 0\,. \tag{73}$$

Queste costituiscono un sistema completo, come si può verificare con tutta facilità, tenendo presenti le (51); inoltre, detto $M_\mu - g'_\mu$ il numero di quelle tra esse, che sono indipendenti, si riconosce subito (vedi pag. 91) che dovrà essere $g'_\mu = g_\mu$ oppure $g'_\mu = g'_\mu - 1$.

Ora, se $N_\mu - M_\mu + g_\mu + 1$ è negativo o nullo, lo stesso a più forte ragione avverrà per $N_\mu - M_\mu + g'_\mu + 1$ e quindi le (72), (73) non ammettono soluzioni comuni; se invece $N_\mu - M_\mu + g'_\mu + 1 > 0$, ma $g'_\mu = g_\mu - 1$, allora non esiste alcun integrale del sistema contenente ψ e quindi nemmeno si hanno ipofunzioni di ordine μ; allorquando infine $N_\mu - M_\mu + g_\mu + 1 > 0$ e $g'_\mu = g_\mu$, le (72), (73) ammetteranno come integrali particolari indipendenti gli invarianti differenziali I_1, I_2, ..., $I_{N_\mu - M_\mu + g_\mu}$ ed oltre a ciò un'altra funzione χ_σ contenente ψ. Si può adunque enunciare il:

Teor. II. – « *Un sistema S non ammette ipofunzioni ψ d'ordine μ, se $N_\mu - M_\mu + 1 \leqslant 0$, ovvero se $g'_\mu = g_\mu - 1$; in ogni altro caso le ψ suaccennate sono definite dalla equazione implicita*:

$$\chi(\chi_\sigma, I_1, ..., I_{N_\mu - M_\mu + g_\mu}) = 0\,,$$

dove χ è simbolo di funzione arbitraria, I_1, I_2, ..., $I_{N_\mu - M_\mu + g_\mu}$ sono invarianti differenziali indipendenti del nostro sistema ».

La determinazione dell'integrale particolare χ_σ può farsi assai facilmente, allorquando non tutti gli invarianti principali (§ 15) del nostro sistema sieno funzioni intere, per modo che tra essi uno almeno ve n'abbia della forma $I = A/B$, dove A/B è frazione, che supponiamo irriducibile e i cui termini separatamente non sono invarianti.

Dalle $X^{(\varrho)}_{(\mu)qp_1p_2...p_\varrho} A/B = 0$ deduciamo:

$$\frac{X^{(\varrho)}_{(\mu)qp_1p_2...p_\varrho}A}{A} = \frac{X^{(\varrho)}_{(\mu)qp_1p_2...p_\varrho}B}{B}\,;$$

siccome A e B sono funzioni omogenee, ciascun rapporto sarà di grado zero, e quel che più interessa, una semplice costante, per l'ipotesi assunta che A e B non abbiano alcun fattore comune; se si indica questa costante con $\lambda_{q p_1 p_2 \dots p_\varrho}$, deduciamo che A e B sono soluzioni del sistema di equazioni differenziali:

$$(74) \qquad X^{(\varrho)}_{(\mu) q p_1 p_2 \dots p_\varrho} \psi - \lambda_{q p_1 p_2 \dots p_\varrho} \psi = 0 \qquad \left\{ \begin{array}{c} \varrho = 1, 2, \dots, \mu + 1 \\ q, p_1, p_2 \dots, p_\varrho = 1, 2, \dots, n \end{array} \right\}.$$

Ricordando al solito le formule (51), le risultanti jacobiane di due generiche (74) saranno:

$$- H_{\overline{p} q' p'} X^{(\varrho + \varrho' - 1)}_{(\mu) q [\overline{p} q' + p']} \psi + H_{p \overline{p'} q} X^{)\varrho + \varrho' - 1}_{(\mu) q' [p + \overline{p'} q]} \psi = 0 ,$$

che, confrontate colle (74) stesse, porgono:

$$(75) \qquad H_{\overline{p} q' p'} \lambda_{q [\overline{p} q' + p']} - H_{p \overline{p'} q} \lambda_{q' [p + \overline{p}' q]} = 0 .$$

Valendoci di queste relazioni, dimostreremo in primo luogo che è nulla ogni $\lambda_{k h_1 h_2 \dots h_\varrho}$, di cui uno almeno degli indici h, per esempio h_τ, sia diverso da k. Facciamo infatti nella formula precedente $q = k$, $p = h_1 h_2 \dots h_\varrho$, $q' = h_\tau$, $p' = h_\tau$. Siccome $h_\tau \gtrless k$, così $H_{p \overline{p'} q}$ sarà nullo, mentre, essendovi fra gli indici $p(h_1 h_2 \dots h_\varrho)$ il q' cioè h_τ, $H_{\overline{p} q' p'}$ sarà certamente diverso da zero, per cui la (75) porge: $\lambda_{q [\overline{p} q' + p']} = 0$, cioè $\lambda_{k [h_1 h_2 \dots h_{\tau - 1} h_{\tau + 1} \dots h_\varrho + h_\tau]} = \lambda_{k h_1 h_2 \dots h_\varrho} = 0$, come volevasi dimostrare.

Resta da vedere quale valore si debba attribuire a

$$\lambda_{\overset{\varrho \text{ volte}}{\overline{kkk \dots k}}} .$$

È facile riconoscere che

$$\lambda_{\overset{\varrho \text{ volte}}{\overline{kkk \dots k}}}$$

è ancora 0 se $\varrho > 1$. E per verità, preso $k' \gtrless k$, si ponga nella (75),

$$q = k, \quad p = \overset{\varrho - 1 \text{volte}}{\overline{kk \dots kk'}} .$$

I due coefficienti $H_{\overline{p} q' p'}$, $H_{p \overline{p'} q}$, cioè:

$$H_{\frac{\varrho - 1 \text{ v.}}{kk \dots kk}} = \varrho, \qquad H_{\frac{\varrho - 1 \text{ v.}}{kk \dots kk'}} = 1$$

sono entrambi diversi da zero:

$$\lambda_{q'[p+\overline{p}q']} = \lambda_{k'\overline{[k \dots kk']}}^{\varrho - 1 \text{ v.}}$$

e, siccome si è supposto $\varrho > 1$, contiene almeno un indice k diverso da k', quindi per la dimostrazione precedente è nullo; ne consegue $\lambda_{q[p'+\overline{p}q']}$ cioè, nel caso nostro

$$\lambda_{\underline{kkk \dots k}}^{\varrho \text{volte}} = 0 \,.$$

Abbiamo così trovato che le uniche λ diverse da zero, devono essere del tipo λ_{qq} e queste bisogna che sieno eguali tra loro, come si verifica, ponendo nella (75), $p = q'$, $p' = q$, perchè allora se ne trae $\lambda_{qq} = \lambda_{q'q'}$ $(q = 1, 2, \dots, n)$; le (74) potranno scriversi sotto la forma

$$(74') \qquad \begin{cases} X^{(1)}_{(\mu)qp}\psi + \lambda \varepsilon_{qp}\psi = 0 \,, \\ \overline{\Omega}_\mu = 0 \,, \end{cases}$$

e, come abbiamo visto, saranno soddisfatte dalle funzioni A e B. Ora non può essere $\lambda = 0$, poichè le (74') coinciderebbero colle Ω_μ, mentre si è escluso che A e B sieno invarianti assoluti; procedendo, quindi, come nel caso di $\mu = 0$, si riconosce che $\psi_\sigma = A^{1/\lambda}$ è integrale di un sistema analogo al (74'), dove $\lambda = 1$, cioè a dire delle (70), (71). Sarà adunque $\chi_\sigma = \psi_\sigma/\psi = A^{1/\lambda}/\psi$ il richiesto integrale particolare delle (72), (73) non indipendente da ψ.

22. – Noi ci siamo finora occupati delle ipofunzioni, che rendono invarianti gli integrali della forma:

$$J = \int_C^{(n)} \psi \, dx_1 \, dx_2 \dots dx_n \;;$$

esaminiamo da ultimo se esistono espressioni ψ', dipendenti dalle solite quantità, per cui riescano invarianti espressioni come:

$$\int_{C'}^{(n')} \psi \, dx_{\tau_1} dx_{\tau_2} \dots dx_{\tau_{n'}} \,,$$

dove il campo di integrazione C' è ad $n' < n$ dimensioni, rappresentando $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_{n'}$ certi n' distinti tra i numeri $1, 2, \ldots, n$.

Ripetendo proprio identicamente quanto fu detto al § 17, si giunge intanto a provare essere condizione necessaria e sufficiente per l'invarianza di:

$$\int_{C'}^{(n')} \psi' \, dx_{\tau_1} dx_{\tau_2} \ldots dx_{\tau_{n'}},$$

che la funzione integranda ψ' soddisfaccia alle equazioni seguenti:

$$(66')\quad \begin{cases} \dfrac{\partial \psi'}{\partial x_i} = 0 & (i = 1, 2, \ldots, n) \\ X^{(1)}_{(\mu)\tau_1\tau_1}\psi' + \psi' = 0\,, \quad X^{(1)}_{(\mu)\tau_2\tau_2}\psi' + \psi' = 0\,, \quad \ldots, \quad X^{(1)}_{(\mu)\tau_{n'}\tau_{n'}}\psi' + \psi' = 0\,, \\ X^{(1)}_{(\mu)qp}\psi' = 0\,, \quad \text{per tutte le coppie di valori } p,\ q \text{ diverse da } (\tau_1\tau_1)\ldots(\tau_{n'}\tau_{n'})\,; \\ \overline{\Omega}_\mu = 0. \end{cases}$$

Ora queste equazioni sono tutte del tipo

$$X^{(\varrho)}_{(\mu)qp_1p_2\ldots p_\varrho}\psi + \lambda_{qp_1p_2\ldots p_\varrho}\psi = 0\,,$$

e noi abbiamo visto (pag. 98) che sono compatibili equazioni siffatte, solo quando sia: $\lambda_{qp_1p_2\ldots p_\varrho} = 0$, per $\varrho > 1$, e inoltre, per $\varrho = 1$, $\lambda_{qp} = \varepsilon_{qp}\lambda$, quando cioè esse abbiano la forma (74'). Ora, se n' è minore di n, le equazioni (66') manifestamente non appartengono a questa categoria, per cui si può a priori escludere l'esistenza di invarianti integrali del tipo

$$\int_{C'}^{(n')} \psi' \, dx_{\tau_1} dx_{\tau_3} \ldots dx_{\tau_{n'}} \quad \text{con } n' < n.$$

22. – Vogliamo ancora accennare come la ricerca delle ipofunzioni si possa estendere al caso di un qualsiasi gruppo G. Se si suppone infatti che esso operi su $n + m$ variabili: $x_1, x_2, \ldots, x_n$, cui corrispondono le trasformazioni infinitesime $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$; $z_1, z_2, \ldots, z_m$ funzioni delle precedenti x, cui spettano le trasformazioni infinitesime $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_m$, per determinare le ipofunzioni basta assumere a punto di partenza la (63) e supporre che la variazione del corrispondente invariante, senza essere zero identicamente, si annulli per tutti gli spostamenti ξ, ζ conciliabili col nostro gruppo, si annulli cioè, dopo che si sono ridotte le variazioni ξ, ζ e loro derivate a mezzo delle equazioni differenziali lineari, che definiscono le trasformazioni infinitesime del nostro gruppo.

Questo procedimento permetterà in ogni caso di stabilire le equazioni differenziali, cui devono soddisfare le ipofunzioni richieste.

Sarà opportuno illustrare questo concetto con un esempio.

Sia il gruppo di Möbius (30) $\partial\xi/\partial x + \partial\eta/\partial y = 0$ e proponiamoci di determinare le ipofunzioni d'ordine zero, cioè tutte le espressioni $\psi(x, y)$, tali che gli integrali del tipo

$$J = \iint \psi(x, y)\, dx\, dy$$

non mutino di valore, per effetto delle trasformazioni del gruppo.

Dovendosi avere:

$$\delta J \equiv \frac{\partial\psi}{\partial x}\xi + \frac{\partial\psi}{\partial y}\eta + \psi\left\{\frac{\partial\xi}{\partial x} + \frac{\partial\eta}{\partial y}\right\} = 0 \ ,$$

per tutti gli spostamenti ξ, η legati dalla relazione $\partial\xi/\partial x + \partial\eta/\partial y = 0$, la $\delta J = 0$, ridotta, ci porge $\partial\psi/\partial x = 0$, $\partial\psi/\partial y = 0$; e quindi $\psi =$cost è la espressione più generale per le ipofunzioni d'ordine zero.

L'invarianza di

$$\int dx\, dy$$

ci dice, ciò che del resto è notissimo, che, eseguendo una trasformazione del gruppo sopra una figura qualsiasi, la sua area rimane inalterata.

Padova, Giugno 1894.

---

(30) Lie, *Ueber Differentialinvarianten*, «Math. Annalen», B. XXIV (1884), S. 561; Gesamm. Abhandl.», B. VI, Leipzig–Oslo, Teubner–Aschehoug (1927); II Abhandl., pp. 65–138.

III.

SUI GRUPPI DI OPERAZIONI FUNZIONALI

« Rend. Ist. Lombardo di Sc., lett. ed arti », S. II, vol. XXVIII (1895)

pp. 458-468

Accanto al concetto di trasformazione puntuale si venne svolgendo recentemente quello di operazione funzionale, che ne è una generalizzazione spontanea. Come infatti le trasformazioni puntuali legano fra loro due sistemi di variabili, così le operazioni funzionali legano due sistemi di funzioni, esse danno cioè un criterio di corrispondenza fra un sistema primitivo di funzioni $v_1, v_2, \dots, v_n$ di una o più variabili e un sistema trasformato $u_1, u_2, \dots, u_n$.

Noi considereremo esclusivamente il caso più semplice di funzioni analitiche con una sola variabile e adotteremo la scrittura:

$$u(x) = Av(y)$$

per esprimere che l'operazione A cangia la funzione primitiva $v(y)$ nella trasformata $u(x)$.

Esempi di operazioni funzionali si trovano fin nelle prime origini del calcolo. Basti ricordare la derivazione $Av(y) = v'(x)$ ($Dv(x)$ secondo la notazione di CAUCHY), la moltiplicazione

$$Av(y) = \chi(x)\cdot v(x) ,$$

la sostituzione

$$Av(y) = v\{\chi(x)\} ,$$

l'operazione

$$\theta v(y) = v(x+1) , \quad (^1), \text{ ecc.}$$

(1) Quantunque per questi primi esempi non sarebbe necessario, preferiamo usare fin da principio simboli differenti per le variabili primitiva e trasformata. In primo luogo questa notazione è la più comoda per una classe importantissima di operazioni funzionali (quelle rappresentate da integrali definiti), poi la diversità dei due simboli x, y fa risaltar meglio la circostanza che il campo di validità delle due funzioni può essere differente.

In tempi più a noi vicini si considerarono, specie dai matematici inglesi (BOOLE, FORSYTH), operazioni funzionali del tipo:

$$\varphi(D)v(y) = a_0(x)v^{(n)}(x) + a_1(x)v^{(n-1)}(x) + \dots + a_n(x)v(x) ;$$

tuttavia nè gli antichi analisti, nè il BOOLE considerarono mai l'operazione funzionale in sè, rappresentandosela piuttosto come una trasformazione puntuale, che al valore $v(x)$ di v in un punto generico x coordina il valore di $Av(x)$ nello stesso punto.

Fu, per quanto io so, il prof. PINCHERLE, che per il primo si propose, sotto acconce restrizioni, lo studio sistematico delle operazioni funzionali, occupandosi da principio in più lavori (²) di quelle rappresentate da integrali definiti del tipo

$$u(x) = \int a(x, y)v(y)\,dy ,$$

e volgendo quindi le sue ricerche alla teoria generale. Un saggio di questo indirizzo si può trovare nell'*Algebra delle forme lineari alle differenze*, « Mem. dell'Acc. di Bologna », ser. V, vol. V, dove è trattata bensì una particolare operazione funzionale, ma il metodo seguito è senz'altro suscettibile di una completa generalizzazione.

Il chiar.mo autore volle comunicarmi il suo programma di lavoro, il quale, se io bene mi appongo, è destinato a dare per le operazioni funzionali ciò, che dà la teoria generale delle funzioni per le trasformazioni puntuali.

E per verità, come la teoria delle funzioni si appoggia ai concetti fondamentali di serie di potenze, di continuazione analitica, di campo di validità di una funzione, così i concetti corrispondenti, convenientemente adattati al caso delle operazioni funzionali, dovranno costituire i cardini di quest'altra dottrina. Essa permetterà di stabilire in generale per le operazioni funzionali un algoritmo di calcolo e di fissare i limiti della sua applicabilità.

Prescindendo per ora da siffatte condizioni effettive, io mi propongo di studiare alcune operazioni funzionali dal punto di vista gruppale e precisamente di assegnare *tutti i gruppi continui* di operazioni, che appartengono a certe categorie. Per questa determinazione mi valgo di qualche risultato della teoria delle trasformazioni puntali dovuto al signor LIE.

(²) *Studi sopra le operazioni funzionali*, « Mem. dell'Acc. delle scienze di Bologna », ser. IV, vol. VII (1885).

Sulla trasformazione di Laplace, Ib., ser. IV, vol. XI.

Sur certaines opérations fonctionnelles représentées par des intégrales définies, « Acta Mathematica », T. 10 (1887).

Sur la génération des systémes récurrents, ecc. Ib., T. 16 (1892), ecc.

La ricerca è di indole strettamente gruppale, ma essa porge motivo per stabilire una proposizione relativa alle equazioni differenziali. Si dimostra cioè che una equazione differenziale ordinaria

$$W\left(\varphi, \frac{d\varphi}{dA}, \frac{d^2\varphi}{dA^2}, \ldots, \frac{d^n\varphi}{dA^n}, A\right) = 0$$

è, con una trasformazione di variabile $\varphi = \lambda(\psi)$, riducibile alla forma lineare, se, essendo φ_1 e φ_2 due qualisivogliano dei suoi integrali

$$\varphi = \pi(\varphi_1, \varphi_2, A)$$

è ancora un integrale della stessa equazione.

Sotto un certo rispetto questa classe di equazioni differenziali corrisponde alle equazioni di Galois nel campo algebrico. Come infatti la esistenza di una relazione razionale fra tre radici permette di ricondurre la risoluzione di una equazione irreduttibile di grado primo a quella di equazioni abeliane, così l'esistenza di una relazione analitica fra tre integrali permette di ricondurre una equazione differenziale alla forma lineare.

Ritornando alla determinazione dei gruppi di operazioni funzionali, osserveremo che essa si trova qui limitata ad un caso molto particolare, ma si può estendere a classi di operazioni ben più importanti, quelle, per esempio, rappresentate da integrali definiti. Se, come spero, potrò farne oggetto di una seconda nota, si vedrà che in quel caso le considerazioni gruppali si riannodano a questioni d'analisi molto interessanti, tra cui basta ricordare la inversione degli integrali definiti.

* * *

Ammetto di poter considerare una classe Γ di operazioni funzionali e una classe γ di funzioni analitiche, per cui:

I. Se A è contenuto in Γ e $v(x)$ in γ, $u(x) = Av(y)$ appartiene a γ.

Segue da questa ipotesi che, date due operazioni A_1, A_2 di Γ e una funzione qualunque $v(y)$ di γ, si può porre

$$w(z) = A_1 v(y) , \qquad u(x) = A_2 w(z) ,$$

dove $w(z)$ e $u(x)$ appartengono a γ. In altri termini, applicando successivamente prima l'operazione A_1, poi al risultato l'operazione A_2, si ha una nuova operazione funzionale di Γ. Questa si chiamerà *prodotto* delle due proposte A_1, A_2 prese nell'ordine scritto e si potrà designare con

$$A \equiv A_2 A_1 .$$

Le due operazioni

$$A \equiv A_2 A_1 , \qquad A' \equiv A_1 A_2$$

saranno in generale distinte.

II. Se A è contenuto in Γ, esiste una classe γ'_A di funzioni analitiche $\varphi(A)$ del simbolo A, che rappresentano operazioni funzionali di Γ a senso unico e determinato (si intende per tutte le funzioni γ).

Non deve far meraviglia che si parli senza troppo riguardo di funzioni analitiche di una operazione funzionale, poichè si vedrà che esse vengono qui introdotte soltanto come un'utile convenzione per rappresentare una classe di operazioni funzionali. Per noi basta avere un criterio, con cui si corrispondono una certa categoria di operazioni funzionali e una certa classe di funzioni del simbolo A ([3]).

III. Il prodotto di due operazioni del tipo II, $\varphi_1(A)$, $\varphi_2(A)$ si può rappresentare con una funzione analitica $\varphi(A)$ dell'operazione generatrice A.

In base a queste ipotesi, di cui nei casi singoli dovrà essere constatata la validità, si può dare il concetto di gruppo di operazioni funzionali.

«Si dirà che un sistema assegnato di operazioni funzionali appartenenti a Γ costituisce un *gruppo* G, quando il prodotto di due qualunque tra le operazioni del sistema è sempre una operazione dello stesso sistema».

Così per esempio, in virtù della prima ipotesi, costituiscono un gruppo le operazioni di Γ, e, in virtù della terza, anche quelle di γ'_A; anzi si potrà dire che γ'_A è un sottogruppo di Γ.

Un gruppo di operazioni funzionali sarà *limitato*, se contiene soltanto un numero finito di elementi, *illimitato* nel caso contrario.

Per non addentrarci in considerazioni minuziose, eviteremo di definire la continuità; avvertiamo soltanto che quelli speciali gruppi, di cui dovremo occuparci, si dovrebbero chiamare continui (quindi certamente illimitati).

([3]) Per avere un esempio di siffatta corrispondenza, si può pensare alle serie dell'operazione θ (PINCHERLE, *L'algebra* ecc.). Esse sono funzioni analitiche del simbolo θ e rappresentano operazioni funzionali di significato bene determinato per tutte le funzioni $v(y)$ comprese nel loro campo funzionale di convergenza. In modo analogo si può attribuire significato alle funzioni $\varphi(A)$ di ogni altra operazione A. Tale metodo è indubbiamente il più importante, il più fecondo ed anche il più spontaneo, perchè si riattacca al concetto di potenza, che si incontra nella teoria delle sostituzioni. Ciò non toglie però che non si possano immaginare anche criteri puramente astratti, stabilendo, per esempio, che, per tutte le funzioni $\varphi[v(y)]$, che sono comprese in γ, il simbolo $\varphi(A)v(y)$ rappresenti l'operazione $A\varphi\{v(y)\}$, oppure si ponga, per $\varphi v\{(y)\}$ contenuto in γ, $\varphi(A)v(y) = Av\{\varphi(y)\}$, ecc.

Le considerazioni gruppali, di cui ci occupiamo noi, sono affatto indipendenti dal significato dei simboli del tipo $\varphi(A)$, per cui, almeno formalmente, esse acquistano un carattere di notevole generalità.

Noi fisseremo una particolare operazione A e considereremo soltanto la categoria di operazioni $\varphi(A)$ comprese in γ'_A.

La natura di queste operazioni (come si è detto nella nota precedente) non ha alcuna importanza dal punto di vista strettamente [4] gruppale; è necessaria unicamente la legge di *moltiplicazione*, il criterio cioè con cui, date due operazioni $\varphi_1(A)$, $\varphi_2(A)$ di γ'_A, si determina la funzione $\varphi(A)$, che ne rappresenta il prodotto.

Finchè questo criterio rimane del tutto arbitrario, i gruppi sono necessariamente indeterminati, ma, assegnato che sia in un modo qualunque, esso dà luogo ad una corrispondente teoria.

Fra le varie [5] leggi di formazione del prodotto è indubbiamente notevole quella, che ci esprime il prodotto $\varphi(A)$ in funzione analitica dei fattori $\varphi_1(A)$, $\varphi_2(A)$, per cui cioè:

$$\varphi(A) = \prod \{\varphi_1(A), \varphi_2(A), A\} . \tag{1}$$

Noi ci limiteremo a questo caso, occupandoci di determinare quei gruppi G di operazioni funzionali (A), che vengono definiti da equazioni differenziali. Si tratterà cioè, data la legge caratteristica (1), di vedere se e per quali equazioni differenziali:

$$W\left\{\varphi, \frac{d\varphi}{dA}, \frac{d^2\varphi}{dA^2}, \ldots, A\right\} = 0 , \tag{2}$$

di un certo ordine qualunque n accade che $\varphi(A)$ sia, insieme con $\varphi_1(A)$, $\varphi_2(A)$, soluzione di W.

Ammetteremo di più:

a) che il gruppo G (quindi a fortiori γ'_A) contenga l'operazione identica $\varepsilon(A)$, la quale trasformi ogni funzione $v(y)$ nell'identica $v(x)$ e renda quindi, qualunque sia $\varphi(A)$:

$$\varphi(A)\{\varepsilon(A)v(y)\} = \varphi(A)v(x) , \qquad \varepsilon(A)\{\varphi(A)v(y)\} = \varphi(A)v(y) ,$$

cioè:

$$\varphi(A) = \prod \{\varphi(A), \varepsilon(A), A\} , \tag{1'}$$

$$\varphi(A) = \prod \{\varepsilon(A), \varphi(A), A\} . \tag{1''}$$

---

(4) Altra cosa è quando si voglia mettere in relazione il gruppo di trasformazioni cogli enti su cui esso opera; in particolare, per esempio, quando si tratti di determinare gli invarianti,

(5) Un esempio interessante è offerto dal prodotto di due serie ordinate per le potenze di θ (PINCHERLE, *L'algebra* ecc., loco cit.) coi coefficienti funzioni di x ; la legge di moltiplicazione non è allora suscettibile di una espressione analitica del tipo $\pi\{\varphi_1(A), \varphi_2(A), A\}$; se invece i coefficienti non dipendono da x si ha $\varphi(A) = \varphi_1(A)\varphi_2(A)$, cioè il prodotto simbolico $\varphi(A) \equiv \varphi_2(A)\varphi_1(A)$ coincide col prodotto effettivo.

b) che, come, date due operazioni $\varphi_1(A)$, $\varphi_2(A)$ del gruppo, si può semnre colla (1) determinarne una terza $\varphi(A)$, che ne rappresenta il prodotto, così, date, poniamo, $\varphi(A)$ e $\varphi_1(A)$, esista almeno una operazione $\varphi_2(A)$ del gruppo tale che

$$\varphi(A) = \prod \{\varphi_1(A), \varphi_2(A), A\} .$$

La nostra ricerca si dividerà in due parti: dapprima si studierà per quali forme della funzione

$$\prod \{\varphi_1(A), \varphi_2(A), A\} ,$$

cioè per quali leggi di moltiplicazione esistono gruppi continui (nel senso e colle restrizioni stabilite); poi per ciascuna $\prod$, che comporta l'esistenza di gruppi, si fisseranno i tipi corrispondenti.

Suppongasi adunque in primo luogo che, per una determinata legge caratteristca di moltiplicazione (1), esista un gruppo di operazioni funzionali definito dalla (2).

Si immagini di sostituire al posto di $\varphi_2(A)$ nella (1) la sua espressione effettiva

$$f(A, a_1, a_2, \ldots, a_n),$$

come integral generale di $W = 0$, e al posto di $\varphi_1(A)$ un particolare integrale φ'; avremo, per definizione del gruppo, che:

$$\varphi'' = \prod \{\varphi', f(A, a_1, a_2, \ldots, a_n), A\} , \tag{3}$$

dovrà soddisfare alla stessa W; quindi, ponendo:

$$\varphi''' = \prod \{\varphi'', f(A, b_1, b_2, \ldots, b_n), A\} , \tag{4}$$

sarà φ''' a sua volta integrale di W, e, in virtù dell'ipotesi *b*), per una acconcia scelta di $\varphi_2(A)$, esprimibile sotto la forma:

$$\varphi''' = \prod \{\varphi', \varphi_2(A)', A\} ,$$

il che è quanto dire che esiste una conveniente determinazione $c_1, c_2, \ldots, c_n$ delle costanti arbitrarie, che entrano in f, per cui:

$$\varphi''' = \prod \{\varphi', f(A, c_1, c_2, \ldots, c_n), A\} . \tag{5}$$

Dalle (3), (4) (5) segue che la (1), risguardata come trasformazione puntuale fra le variabili φ_1 e φ deve possedere le caratteristiche gruppali;

la stessa proprietà vale manifestamente per la coppia φ_2, φ e di più i due gruppi

$$\varphi = \prod \{\varphi_1, f(A, a_1, a_2, ..., a_n), A\},$$
$$\varphi = \prod \{f(A, a_1, a_2, ..., a_n), \varphi_2, A\},$$

sono identici (prescindendo, si capisce, dalla materiale diversità dei simboli φ_1, φ_2), perchè, sempre in causa della *b*), ogni trasformazione del primo è contenuta nel secondo e reciprocamente.

Ora, rispetto ai gruppi con una sola variabile, è noto (6) che sono tutti simili al proiettivo; quindi come prima conseguenza si deduce che degli n parametri, che entrano nella costituzione di Π, al più tre sono essenziali; inoltre, e questo ha per noi la massima importanza, si può con un semplice cambiamento di variabile (indipendente dai valori dei parametri) attribuire a ciascuno di questi gruppi la forma canonica: $z = (\alpha z_1 + \beta)/(\gamma z_1 + \delta)$; anzi nel caso nostro, per la identità dei gruppi

$$\varphi = \prod \{\varphi_1, f(A, a_1, a_2, ..., a_n), A\},$$
$$\varphi = \prod \{f(A, a_1, a_2, ..., a_n), \varphi_2, A\},$$

la stessa sostituzione di variabili $\varphi = \mu(z)$, $\varphi_1 = \mu(z_1)$, con cui da

$$\varphi = \prod \{\varphi_1, f(A, a_1, a_2, ..., a_n), A\},$$

si passa a $z = (\alpha_1 z_1 + \beta_1)/(\gamma_1 z_1 + \delta_1)$, mutando solo φ_1 in φ_2, z_1 in z_2, riduce:

$$\varphi = \prod \{f(A, a_1, a_2, ..., a_n), \varphi_2, A\} \quad \text{a} \quad z = \frac{\alpha_2 z_2 + \beta_2}{\gamma_2 z_2 + \delta_2}.$$

Ne viene che l'equazione caratteristica (1) deve essere tale che, facendovi

$$\varphi = \mu(z), \qquad \varphi_1 = \mu(z_1), \qquad \varphi_2 = \mu(z_2),$$

z riesca funzione bilineare tanto di z_1, quanto di z_2, sia cioè:

$$z = \frac{a_0(A) z_1 z_2 + a_1(A) z_1 + a_2(A) z_2 + a(A)}{b_0(A) z_1 z_2 + b_1(A) z_1 + b_2(A) z_2 + b(A)}. \tag{6}$$

Ciò posto, gioverà richiamare l'ipotesi *a*), osservando che, per essersi ammessa l'esistenza della trasformazione identica $\varepsilon(A)$, ove si ponga

(6) LIE-ENGEL, *Theorie der Transformationsgruppen*, vol. III, Leipzig, Teubner, 1893, Cap. 1.

$\varepsilon(A) = \mu[\eta(A)]$, le (1'), (1'') divengono:

$$z_1 = \frac{a_0(A)z_1\eta(A) + a_1(A)z_1 + a_2(A)\eta(A) + a(A)}{b_0(A)z_1\eta(A) + b_1(A)z_1 + b_2(A)\eta(A) + b(A)}, \tag{6'}$$

$$z_2 = \frac{a_0(A)\eta(A)z_2 + a_1(A)\eta(A) + a_2(A)z_2 + a(A)}{b_0(A)\eta(A)z_2 + b_1(A)\eta(A) + b_2(A)z_2 + b(A)}. \tag{6''}$$

Ci riferiremo ad una soltanto di queste identità, la (6') per esempio. Essa esprime, possiam dire, che l'equazione in z_1:

$$z_1 = \frac{a_0(A)z_1z_2 + a_1(A)z_1 + a_2(A)z_2 + a(A)}{b_0(A)z_1z_2 + b_1(A)z_1 + b_2(A)z_2 + b(A)},$$

è identicamente soddisfatta per $z_2 = \eta(A)$ e quindi ridotta a forma intera, risulta dal prodotto di due fattori, uno dipendente soltanto da z_1, l'altro della forma $z_2 - \eta(A)$. Segue da ciò che, qualunque sia z_2, la (6), risguardata come una corrispondenza omografica fra z e z_1, ammette gli stessi elementi uniti; dunque è possibile con una trasformazione (bilineare) di variabile $z = \nu(t)$, $z_1 = \nu(t_1)$, indipendente affatto da z_2, porre la (6) sotto la forma:

$$t = \varrho_1 t_1 . \tag{7}$$

D'altra parte, dall'identità dei due gruppi

$$\varphi = \prod \{\varphi_1, f(A, a_1, a_2, \ldots, a_n), A\}, \qquad \varphi = \prod \{f(A, a_1, a_2, \ldots, a_n), \varphi_2, A\},$$

ponendo $f = \mu(F)$, ossia designando con F l'integral generale di

$$W\left\{\mu(F), \frac{d\mu(F)}{dA}, \ldots; A\right\} = 0,$$

si desume quella dei gruppi trasformati:

$$z = \frac{a_0(A)Fz_1 + a_1(A)z_1 + a_2(A)F + a(A)}{b_0(A)Fz_1 + b_1(A)z_1 + b_2(A)F + b(A)},$$

$$z = \frac{a_0(A)Fz_2 + a_1(A)F + a_2(A)z_2 + a(A)}{b_0(A)Fz_2 + b_1(A)F + b_2(A)z_2 + b(A)};$$

quindi la sostituzione di variabile $z = \nu(t)$, che attribuisce al primo di essi la forma (7), essendo indipendente dalle particolari determinazioni, che può ricevere F, attribuisce la stessa forma anche al secondo, e per conseguenza le posizioni

$$z = \nu(t)\,, \qquad z_1 = \nu(t_1)\,, \qquad z_2 = \nu(t_2)$$

conducono la (6) simultaneamente alle due forme:

$$t = \varrho_1(t_2)t_1\,, \tag{7'}$$

$$t = \varrho_2(t_1)t_2\,. \tag{8}$$

Dal loro confronto segue:

$$t = \varrho t_1 t_2\,, \tag{9}$$

dove ϱ è funzione soltanto di A.

Infine col porre

$$t = \frac{1}{\varrho}\,e^{\psi}, \qquad t_1 = \frac{1}{\varrho}\,e^{\psi_1}, \qquad t_2 = \frac{1}{\varrho}\,e^{\psi_2}\,,$$

si scriverà la (9) sotto la forma:

$$\psi = \psi_1 + \psi_2\,, \tag{10}$$

che, riassumendo, potremo risguardare proveniente dalla (1) colle sostituzioni:

$$\left\{\begin{aligned} \varphi &= \mu\left\{\nu\left(\frac{1}{\varrho}\,e^{\psi}\right)\right\} = \lambda(\psi)\,, \\ \varphi_1 &= \mu\left\{\nu\left(\frac{1}{\varrho}\,e^{\psi_1}\right)\right\} = \lambda(\psi_1)\,, \\ \varphi_2 &= \mu\left\{\nu\left(\frac{1}{\varrho}\,e^{\psi_2}\right)\right\} = \lambda(\psi_2)\,. \end{aligned}\right. \tag{11}$$

Pertanto la sola ipotesi dell'esistenza di un gruppo continuo [sotto le condizioni a), b)], permette di concludere che la legge caratteristica $\varphi = \prod \{\varphi_1, \varphi_2, A\}$ di formazione del prodotto deve avere una struttura speciale, poichè deve essere possibile con sostituzioni del tipo (11) attribuirle la forma (10); da ciò il teorema:

« Condizicne necessaria perchè esistano gruppi continui è che la legge caratteristica di moltiplicazione abbia la forma:

$$\varphi = \lambda\{\bar{\lambda}(\varphi_1) + \bar{\lambda}(\varphi_2)\}, \tag{10'}$$

dove λ è simbolo di funzione arbitraria, $\bar{\lambda}$ quello della sua inversa ».

La (10′), essendo simmetrica rispetto a φ_1, φ_2, ci fa tra altro vedere che, nel caso dei gruppi la moltiplicazione deve essere commutativa; si riconosce subito che deve anche essere distributiva.

Data una legge di formazione del prodotto

$$\varphi = \prod \{\varphi_1(A), \varphi_2(A), A\} ,$$

si può decidere se essa spetta al tipo (10′). Infatti, quando sia

$$\prod (\varphi_1, \varphi_2, A) = \lambda\{\bar{\lambda}(\varphi_1) + \bar{\lambda}(\varphi_2)\} ,$$

sussistono le identità:

$$\prod (\varphi_1, \varphi_2, A) = \prod (\varphi_2, \varphi_1, A) , \tag{11'}$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_1} = \frac{\partial \lambda}{\partial\{\bar{\lambda}(\varphi_1) + \bar{\lambda}(\varphi_2)\}} \bar{\lambda}'(\varphi_1), \qquad \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_2} = \frac{\partial \lambda}{\partial\{\bar{\lambda}(\varphi_1) + \bar{\lambda}(\varphi_2)\}} \bar{\lambda}'(\varphi_2) ,$$

$$\frac{\dfrac{\partial \Pi}{\partial \varphi_1}}{\dfrac{\partial \Pi}{\partial \varphi_2}} = \frac{\bar{\lambda}'(\varphi_1)}{\bar{\lambda}'(\varphi_2)} ,$$

da cui prendendo i logaritmi e derivando:

$$\frac{\partial^2}{\partial \varphi_1 \partial \varphi_2} \log \frac{\dfrac{\partial \Pi}{\partial \varphi_1}}{\dfrac{\partial \Pi}{\partial \varphi_2}} = 0 . \tag{12}$$

Si vede subito che le (11′), (12) rappresentano la richiesta condizione necessaria e sufficiente affinchè una funzione assegnata $\prod (\varphi_1, \varphi_2, A)$ abbia la forma (10′).

Veniamo ormai alla seconda parte della nostra ricerca. Ammesso cioè che la

$$\varphi = \prod \{\varphi_1(A), \varphi_2(A), A\}$$

abbia la forma (10′), fissare i tipi di equazioni gruppali:

$$W\left\{\varphi, \frac{d\varphi}{dA}, \frac{d^2\varphi}{dA^2}, \ldots; A\right\} = 0 . \tag{2}$$

La questione si esaurisce immediatamente.

Si ponga infatti nella (2), $\varphi = \lambda(\psi)$ e si dica $W' = 0$ l'equazione trasformata in ψ; siccome, per la (10), la somma di due integrali qualisivogliono ψ_1 e ψ_2 deve ancora soddisfare all'equazione stessa, la W' non può essere che lineare in ψ; d'altra parte inversamente ogni equazione lineare:

$$W' = p_0(A)\frac{d^n\psi}{dA^n} + \ldots + p_n(A)\psi = 0 ,$$

gode della proprietà caratteristica accennata. Possiamo dunque concludere:

«Per ciascuna legge di moltiplicazione espressa da

$$\varphi = \lambda\{\bar{\lambda}(\varphi_1) + \bar{\lambda}(\varphi_2)\},$$

esistono infiniti gruppi continui; le equazioni, che li definiscono sono tutte del tipo:

$$p_0(A)\frac{d^n\bar{\lambda}(\varphi_1)}{dA^n} + \ldots + p_n(A)\bar{\lambda}(\varphi) = 0 \text{ »} .$$

Caso per caso poi si dovrà verificare se le soluzioni, che spettano ad una speciale di queste equazioni appartengono alla classe γ'_A e quindi rappresentano effettivamente operazioni funzionali del nostro sistema.

Prescindendo dall'interpretazione gruppale, noi abbiamo trovato:

1) Non sempre esistono equazioni differenziali i cui integrali sieno legati da una relazione assegnata $\varphi = \prod(\varphi_1, \varphi_2, A)$. Condizione necessaria e sufficiente perchè ciò avvenga si è che la funzione $\prod(\varphi_1, \varphi_2, A)$ abbia la forma particolare (10′).

2) Se fra tre integrali di una equazione

$$W\left(\varphi, \frac{d\varphi}{dA}, \frac{d^2\varphi}{dA^2}, \ldots; A\right) = 0,$$

passa una relazione analitica (10′), ponendo $\varphi = \lambda(\psi)$, l'equazione trasformata in ψ è lineare.

IV.

ALCUNE OSSERVAZIONI ALLA NOTA SUI GRUPPI DI OPERAZIONI FUNZIONALI

« Rend. Ist. Lomb. di Sc., lett. ed arti », S. II, vol. XXVIII (1895)

pp. 864-873.

La proposizione:

Una equazione differenziale ordinaria:

$$W\left(\varphi, \frac{d\varphi}{dA}, \ldots, \frac{d^n\varphi}{dA^n}, A\right) = 0,$$

è, con un cambiamento di funzione $\varphi = \lambda(\psi)$ (λ *contenendo anche la variabile indipendente* A *quale parametro*) *riducibile alla forma lineare, se, essendo* φ_1 *e* φ_2 *due integrali particolari qualunque,*

$$\varphi = \prod (\varphi_1, \varphi_2, A),$$

è ancora un integrale della stessa equazione, venne da me enunciata nella nota *Sui gruppi di operazioni funzionali* (¹), ma la dimostrazione, che io ho indicata allora è soggetta ad alcune restrizioni (²), le quali, pur introducendosi naturalmente rispetto alle operazioni funzionali, ne scemano l'interesse dal lato della teoria delle equazioni differenziali. Inoltre il procedimento da me seguito inceppa in una difficoltà, su cui, con cortese pensiero, richiamò la mia attenzione il chiar.mo prof. E. VESSIOT.

Ecco in primo luogo l'obbiezione del sig. VESSIOT.

Nella relazione (5) (³) le costanti $c_1, c_2, \ldots, c_n$ dipendono *in generale* non soltanto dalle a e dalle b, ma altresì dalla scelta dell'integrale φ'; perciò non si può concludere addirittura che la (1) definisca un gruppo

(¹) Questi *Rendiconti*, anno presente. [In questo volume: III, pp. 110–111].

(²) Nota citata, pp. 105–106.

(³) Ib., p. 106.

(puntuale). Questa asserzione sarebbe legittima, solo introducendo una restrizione di più, ammettendo cioè fin da principio che le operazioni, le quali debbono costituire il gruppo (funzionale), soggiacciano alla legge associativa, mentre nella precedente nota si trova enunciata ([4]) questa proprietà come necessaria conseguenza dell'ipotesi fondamentale.

Ora una tale restrizione non reca danno nel campo delle operazioni funzionali, tanto più che, come i signori PINCHERLE e VOLTERRA hanno recentemente osservato, ogni operazione funzionale è (almeno formalmente) rappresentabile a mezzo di integrali definiti, nel qual caso vale appunto la legge associativa ([5]). Ma, se si bada invece alle equazioni differenziali, ammessa una relazione

$$\varphi = \prod (\varphi_1, \varphi_2, A)$$

fra gli integrali, ogni ulteriore ipotesi sulla natura di Π (il che appunto equivale a restrizioni imposte al gruppo funzionale) sminuisce notevolmente e toglie quasi del tutto interesse al teorema ricordato.

Io sono perciò indotto a presentarne una nuova dimostrazione, che ne ponga in miglior luce tutta la generalità.

Il prof. VESSIOT, al quale comunicai codesta dimostrazione, ne propose a sua volta una oltremodo semplice ed elegante, che il suo gentile consenso mi autorizza a render pubblica nella presente occasione.

Io mi permetterò quindi di riportare, in seguito alla mia dimostrazione, un brano d'una sua lettera, che contiene molte osservazioni acute ed interessanti.

* * *

Sia

$$W\left(\varphi, \frac{d\varphi}{dA}, \ldots, \frac{d^n\varphi}{dA^n}, A\right) = 0,$$

una equazione differenziale d'un ordine qualunque n, rispetto a cui si suppone che, essendo φ_1, φ_2 due integrali particolari arbitrari,

$$\varphi = \prod (\varphi_1, \varphi_2, A)$$

sia ancora un integrale.

Dico in primo luogo che, scelti a piacere due integrali φ e φ_1 (o φ_2), la funzione φ_2 (o φ_1) definita da

$$\varphi = \prod (\varphi_1, \varphi_2, A),$$

([4]) Loco citato p. 110.

([5]) Cfr. ad es. la mia nota: *I gruppi di operazioni funzionali e l'inversione degli integrali definiti*, in questi « Rendiconti », anno presente. [In questo volume: V, pp. 125–152].

è anch'essa un integrale. Se infatti si designa con

$$f(A, c_1, c_2, \ldots, c_n),$$

l'integral generale di $W = 0$, l'espressione

$$\prod \{\varphi_1, f(A, c_1, c_2, \ldots, c_n), A\},$$

è per ipotesi integrale di W, anzi ne è l'integrale generale, perchè contiene essenzialmente le n costanti $c_1, c_2, \ldots, c_n$; essa può dunque, particolarizzando opportunamente queste costanti, ridursi a φ. Ne viene che uno almeno dei rami della funzione φ_2 definita da

$$\varphi = \prod (\varphi_1, \varphi_2, A),$$

è, assieme a φ e φ_1, integrale di $W = 0$. Dacchè però si suppone che la relazione

$$\varphi = \prod (\varphi_1, \varphi_2, A),$$

sia analitica, la medesima proprietà spetta anche a tutti gli altri rami.

Ciò posto, consideriamo dapprima una forma particolare della relazione

$$\varphi = \prod (\varphi_1, \varphi_2, A),$$

cioè:

$$\varphi = H(\varphi_1, A) + K(\varphi_2, A). \tag{1}$$

Scelto a piacere un integrale particolare $\varphi_1 = \varphi_1^0$, si ponga:

$$\varphi' = H(\varphi_1^0, A) + K(\varphi_2, A); \tag{2}$$

eliminando φ_2, ed osservando che, per essere φ_1^0 una funzione determinata A, la differenza $H(\varphi_1, A) - H(\varphi_1^0, A)$ si può designare semplicemente con $\Omega(\varphi_1, A)$ otteniamo

$$\varphi = \varphi' + \Omega(\varphi_1, A), \tag{3}$$

la quale può sostituirsi alla (1) come relazione fondamentale fra tre integrali della nostra equazione $W = 0$, per modo che, se due qualunque delle quantità φ, φ', φ_1 sono integrali, la terza, definita da (3), è a sua volta un integrale.

Sieno ora φ, φ_1, φ_1' tre integrali particolari qualisivogliono di $W=0$ e si faccia:

$$\varphi = \varphi' + \Omega(\varphi_1, A),$$
$$\varphi'' = \varphi + \Omega(\varphi_1', A),$$

da cui:

$$\varphi'' = \varphi' + \Omega(\varphi_1, A) + \Omega(\varphi_1', A).$$

Siccome, qualunque sieno gli integrali φ'' e φ', la funzione φ_1'' definita da:

$$\varphi'' = \varphi' + \Omega(\varphi_1'', A),$$

soddisfa ancora a $W=0$, così avremo, φ_1 e φ_1' essendo per ipotesi arbitrarie, la nuova relazione:

$$\Omega(\varphi_1'', A) = \Omega(\varphi_1, A) + \Omega(\varphi_1', A). \tag{4}$$

fra tre integrali di $W=0$.

Dopo ciò, è manifesto che, se si eseguisce il cambiamento di funzione $\psi = \Omega(\varphi, A)$, la (4) diviene $\psi_1'' = \psi_1 + \psi_1'$, e quindi l'equazione trasformata è certamente lineare.

Passiamo ora alle relazioni:

$$\varphi = \prod(\varphi_1, \varphi_2, A),$$

nelle quali le variabili φ_1 e φ_2 non sono separate. Ciò è quanto dire che

$$\frac{\partial \prod(\varphi_1, \varphi_2, A)}{\partial \varphi_2},$$

non è indipendente da φ_1. Sostituendo per φ_1 il suo valore in funzione di φ e φ_2, verrà:

$$\frac{\partial \prod(\varphi_1, \varphi_2, A)}{\partial \varphi_2} = \chi(\varphi, \varphi_2, A),$$

e si può supporre addirittura che χ non abbia la forma:

$$\mu(\varphi, A)\nu(\varphi_2, A),$$

perchè, da

$$\frac{\partial \prod(\varphi_1, \varphi_2, A)}{\partial \varphi_2} = \frac{\partial \varphi}{\partial \varphi_2} = \mu(\varphi, A)\nu(\varphi_2, A),$$

si dedurrebbe

$$\frac{\partial\varphi}{\mu(\varphi, A)} = \nu(\varphi_2, A)\partial\varphi_2,$$

da cui integrando e cambiando funzione in W, si sarebbe ricondotti alla forma (1).

Escluso questo caso, sieno φ e φ_2 due integrali affatto indeterminati dell'equazione $W = 0$. Si supponga di dare a φ_2 un piccolo aumento $\delta\varphi_2$ conciliabile coll'equazione $W = 0$, cioè tale che:

$$\left(\frac{\partial W}{\partial\varphi}\right)_{\varphi=\varphi_2} \delta\varphi_2 + \left(\frac{\partial W}{\partial \frac{d\varphi}{dA}}\right)_{\varphi=\varphi_2} \delta\frac{d\varphi_2}{dA} + \dots + \left(\frac{\partial W}{\partial \frac{d^n\varphi}{dA^n}}\right)_{\varphi=\varphi_2} \delta\frac{d^n\varphi_2}{dA^n} = 0,$$

ovvero, se si vuole:

$$\left(\frac{\partial W}{\partial\varphi}\right)_{\varphi=\varphi_2} \delta\varphi_2 + \left(\frac{\partial W}{\partial \frac{d\varphi}{dA}}\right)_{\varphi=\varphi_2} \frac{d\delta\varphi_2}{dA} + \dots + \left(\frac{\partial W}{\partial \frac{d^n\varphi}{dA^n}}\right)_{\varphi=\varphi_2} \frac{d^n\delta\varphi_2}{dA^n} = 0; \tag{5}$$

in causa della relazione

$$\varphi = \prod(\varphi_1, \varphi_2, A);$$

all'aumento $\delta\varphi_2$ di φ_2 corrisponderà un aumento $\delta\varphi$ di φ determinato da:

$$\delta\varphi = \frac{\partial\prod(\varphi_1, \varphi_2, A)}{\partial\varphi_2}\delta\varphi_2,$$

ovvero, sostituendo a φ_1 il suo valore dato da

$$\varphi = \prod(\varphi_1, \varphi_2, A),$$

avremo:

$$\frac{\partial\prod(\varphi_1, \varphi_2, A)}{\partial\varphi_2} = \chi(\varphi, \varphi_2, A), \tag{6}$$

$$\delta\varphi = \chi(\varphi, \varphi_2, A)\delta\varphi_2. \tag{7}$$

La variazione $\delta\varphi$, qualunque sieno gli integrali particolari φ e φ_2, che entrano in χ, deve soddisfare all'equazione:

$$\frac{\partial W}{\partial \varphi}\delta\varphi + \frac{\partial W}{\partial \frac{d\varphi}{dA}}\frac{d\delta\varphi}{dA} + \ldots + \frac{\partial W}{\partial \frac{d^n\varphi}{dA^n}}\frac{d^n\delta\varphi}{dA^n} = 0\ ;$$

in altri termini la quantità:

$$XW \equiv \frac{\partial W}{\partial \varphi}\delta\varphi + \frac{\partial W}{\partial \frac{d\varphi}{dA}}\frac{d\delta\varphi}{dA} + \ldots + \frac{\partial W}{\partial \frac{d^n\varphi}{dA^n}}\frac{d^n\delta\varphi}{dA^n}\,,$$

dove $\delta\varphi$ è data dalla (7), si annulla con W.

Seguendo il sig. LIE, noi diremo che l'equazione $W = 0$ ammette la trasformazione infinitesima estesa (erweiterte):

$$(7') \qquad Xf = \frac{\partial f}{\partial \varphi}\delta\varphi + \frac{\partial f}{\partial \frac{d\varphi}{dA}}\frac{d\delta\varphi}{dA} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial \frac{d^n\varphi}{dA^n}}\frac{d^n\delta\varphi}{dA^n}\,.$$

Essa equazione deve dunque ammettere tutte le trasformazioni del gruppo monometrico (eingliedrig) generato dalla trasformazione infinitesima (7').

Poniamo ora:

$$(8) \qquad \varphi_6 = \prod(\varphi_3\,,\ \varphi_4\ A),$$

$$(9) \qquad \varphi_2 = \prod(\varphi_5\,, \varphi_6\,, A) = \Xi(\varphi_3\,, \varphi_4\,, \varphi_5\,, A)\,,$$

e osserviamo che, in quest'ultima equazione, φ_2, φ_3, φ_4 possono considerarsi come integrali affatto arbitrari, che definiscono per φ_5 un nuovo integrale. Supponendo di attribuire a φ_4 una variazione $\delta\varphi_4$ che soddisfaccia all'equazione analoga a (5):

$$(10) \qquad \left(\frac{\partial W}{\partial \varphi}\right)_{\varphi=\varphi_4}\delta\varphi_4 + \left(\frac{\partial W}{\partial \frac{d\varphi}{dA}}\right)_{\varphi=\varphi_4}\frac{d\delta\varphi_4}{dA} + \ldots + \left(\frac{\partial W}{\partial \frac{d^n\varphi}{dA^n}}\right)_{\varphi=\varphi_4}\frac{d^n\delta\varphi_4}{dA^n} = 0,$$

ogni $\delta\varphi_2$, che verifica l'equazione (5), potrà essere rappresentato da:

$$\delta\varphi_2 = \frac{\partial \Xi(\varphi_3\,, \varphi_4\,, \varphi_5\,, A)}{\partial \varphi_4}\delta\varphi_4 = \frac{\partial \Pi(\varphi_5\,, \varphi_6\,, A)}{\partial \varphi_6}\,\frac{\partial \Pi(\varphi_3\,, \varphi_4\,, A)}{\partial \varphi_4}\delta\varphi_4\,,$$

ossia, sostituendo a φ_5 il suo valore (9), a φ_3 il suo valore (8) e tenendo presente la notazione (6):

$$(11) \qquad \delta\varphi_2 = \chi\{\prod(\varphi_3, \varphi_4, A), \varphi_2, A\}\chi\{\prod(\varphi_3, \varphi_4, A), \varphi_4, A)\}\delta\varphi_4 .$$

Siccome χ contiene entrambi gli argomenti, da cui esso dipende (perchè si è esclusa la forma $\mu(\varphi, A)\nu(\varphi_2, A)$ o le sue degenerazioni), il prodotto

$$\chi\{\prod(\varphi_3, \varphi_4, A), \varphi_2, A\}\cdot\chi\{\prod(\varphi_3, \varphi_4, A), \varphi_4, A\}$$

conterrà senza dubbio $\prod(\varphi_3, \varphi_4, A)$ e per conseguenza φ_3. Se si assumono per φ_2 e φ_4 due integrali particolari qualsivogliono φ_2' e φ_4' di W e per $\delta\varphi_4$ un integrale particolare qualunque della (10) moltiplicato per una costante infinitesima ε, $\delta\varphi_2$ prenderà la forma $\varepsilon\varrho(\varphi_3, A)$, ϱ essendo funzione delle variabili indicate, e $\delta\varphi$, facendo:

$$\chi(\varphi_2', \varphi, A) = \xi(\varphi, A) ,$$

diverrà:

$$(12) \qquad \delta\varphi = \varepsilon\varrho\,(\varphi_3, A)\,\xi(\varphi, A) ,$$

la quale rappresenta dunque, affatto indipendentemente dall'integrale φ_3, una trasformazione infinitesima ammessa da $W = 0$.

Se si pone infine:

$$(13) \qquad \bar{\varphi} = \varphi + t\varrho\xi + \frac{t^2}{2!}\varrho^2\xi\frac{d\xi}{d\varphi} + \dots ,$$

ogni trasformazione di questo gruppo monometrico di parametro t cangia un integrale φ di W in un nuovo integrale $\bar{\varphi}$. Ma, facendo:

$$t\varrho(\varphi_3, A) = \tau ,$$

si ha:

$$\bar{\varphi} = \varphi + \tau\xi + \frac{\tau^2}{2!}\xi\frac{d\xi}{d\varphi} + \dots ,$$

e si sa (⁶) che una tale relazione fra $\bar{\varphi}$ e φ può essere scritta:

$$(14) \qquad \Omega(\bar{\varphi}, A) = \Omega(\varphi, A) + S(\tau, A) ,$$

dove nè τ, nè per conseguenza φ_3, entrano nelle Ω.

---

(6) LIE-ENGEL, *Theorie der Transformationsgruppen*, Erster Band, Leipzig, Teubner, 1888; S. 47.

La (13) fornisce per ogni valore di t una relazione fra tre integrali della nostra equazione $W=0$ che rientra nel tipo (1).

Il teorema è così dimostrato. Il procedimento seguito mostra inoltre che, per la riduzione effettiva di una equazione $W=0$ alla forma lineare si richiede, oltre ad operazioni finite, una sola quadratura, che è in generale necessaria per passare dalla (13) alla (14).

Aggiungo la seguente osservazione:

« Non esistono altre equazioni differenziali oltre le lineari (e loro trasformate per un cambiamento di funzione) tali che, essendo conosciuti m (>1) integrali particolari qualunque $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m$, si possa con operazioni in termini finiti determinarne l'integral generale:

$$\varphi = \prod (\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m;\ C_1, C_2, \ldots, C_n) \text{ ».}$$

Basta infatti fissare per $\varphi_3, \varphi_4, \ldots, \varphi_m$ degli integrali particolari arbitrari, per $C_1, C_2, \ldots, C_n$ dei valori numerici a piacere; e si ottiene per l'equazione $W=0$ una relazione determinata fra tre integrali, ciò che permette di concludere giusta l'enunciato.

* * *

Extrait d'une lettre de M.r E. VESSIOT à M.r T. LEVI-CIVITA.

Toulouse, le 23 Mai 1895.

. . . .

J'ai vu avec le plus vif plaisir par votre lettre que le théorème que vous aviez donné dans votre note est vrai sous la forme suivante:

« Si une relation $\varphi = \prod (\varphi_1, \varphi_2, A)$ fournit toujours une intégrale de l'équation différentielle:

$$W\left\{\varphi, \frac{d\varphi}{dA}, \ldots, \frac{d^n\varphi}{dA^n}, A\right\} = 0,$$

quand on y remplace φ_1 et φ_2 par deux intégrales quelconques de la même équation, il existe un changement de fonction

$$\psi = \Omega(\varphi, A),$$

qui ramène l'équation $W=0$ à la forme linéaire et homogène ».

Je n'ai en effet pas d'objection à faire à votre nouvelle démonstration, et je ne puis que vous féliciter de son ingéniosité.

Mais il ne m'a pas semblé sans intérêt d'en chercher une un peu plus rapide, et je viens, à mon tour, vous soumettre la suivante:

Désignant par $f(A, c_1, c_2, \ldots, c_n)$ l'intégrale générale de $W = 0$, je pose:

$$(1) \qquad \begin{cases} \varphi = f(A, c_1, c_2, \ldots, c_n), \\ \varphi_1 = f(A, a_1, a_2, \ldots, a_n), \quad \varphi_2 = f(A, b_1, b_2, \ldots, b_n). \end{cases}$$

L'hypothèse revient à dire que la relation:

$$(2) \qquad \varphi = \prod (\varphi_1, \varphi_2, A)$$

est vérifiée identiquement, pourvu que les constantes c soient certaines fonctions des a et des b:

$$(3) \qquad c_k = \gamma_k(a_1, \ldots, a_n; b_1, \ldots, b_n) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

De plus la relation (2) fournit l'intégrale générale de $W = 0$, lorsque donnant aux b des valeurs particulières, on laisse les a indéterminés; car Π dépend alors essentiellement de n constantes arbitraires. Cela revient à dire que les équations (3) peuvent se résoudre par rapport aux a, c. à. d. que les fonctions γ_k satisfont à un système complet de la forme:

$$(4) \qquad \frac{\partial F}{\partial a_k} = \sum_{h=1}^{m} \varrho_{kh}(a|b) \cdot \frac{\partial F}{\partial b_h} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

où le symbole $\varrho(a|b)$ désigne une fonction des variables

$$a_1, \ldots, a_n; \quad b_1, \ldots, b_n.$$

En vertu des identités (2), on a donc, pour $k = 1, 2, \ldots, n$,

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_1} \cdot \frac{\partial \varphi_1}{\partial a_k} = \sum_h \varrho_{kh}(a|b) \cdot \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_2} \cdot \frac{\partial \varphi_2}{\partial b_h}.$$

Dans ces identités donnons aux b des valeurs particulières, et remplaçons les lettres a par les lettres c; φ_2 devient une fonction particulière de A, les $\partial\varphi_2/\partial b_h$ deviennent des fonctions $f_h(A)$, et le quotient $\partial\Pi/\partial\varphi_2 : \partial\Pi/\partial\varphi_1$ devient une certaine fonction $\theta(\varphi, A)$. On a donc des identitès:

$$(5) \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial c_k} = \theta(\varphi, A) \sum_{h=1}^{n} \sigma_{hk}(c_1, \ldots, c_n) \cdot f_k(A) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Définissons ensuite une fonction $\Omega(\varphi, A)$ par la condition:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \varphi} \cdot \theta(\varphi, A) = 1 , \tag{6}$$

et posons:

$$\psi = \Omega[f(A, c_1, ..., c_n), A] = \Omega(\varphi, A) .$$

Nous aurons:

$$\frac{\partial \psi}{\partial c_k} = \sum_h \sigma_{kh}(c_1, ..., c_n) f_h(A) \qquad (k = 1, 2, ..., n) ,$$

c. à. d. que ψ est de la forme:

$$\psi = \sum_{h=1}^{n} \omega_h(c_1, c_2, ..., c_n) f_h(A) ,$$

si l'on choisit convenablement la fonction arbitraire de A, qui figure dans l'intégrale générale Ω de l'équation (6).

On voi donc bien que l'équation différentielle d'ordre n, dont dépend ψ, a son intégrale générale de la forme:

$$\psi = \sum_{h=1}^{n} C_h f_h(A) ,$$

c. à. d. que c'est une équation linéaire et homogène. Votre théorème se trouve donc démontré.

. . . .

. . . .

Il est bien clair d'après l'énoncé du théorème, que les équations considérées font partie de ces équations, étudiées par M. Lie, qui admettent un groupe continu — nécessairement fini (car le théorème n'à d'intérêt que si $n > 1$) — de transformations ponctuelles. C'est là sans doute l'idée qui vous a inspiré votre démonstration. De là résulte aussi que l'intégration de telles équations comportera les simplifications indiquées par M. Lie (7).

Je remarque enfin que, comme vous le verrez bien facilement, la démonstration précédente — et par suite votre théorème — s'étend à

(7) *Classification und Integration von gewöhnlichen Differentialgleichungen zwischen x, y, die eine Gruppe von Transformationen gestatten*, «Math. Ann.», B. XXXII (1888). [«Gesamm. Abhandl.», B. V, pp. 240–310; Leipzig-Oslo, Teubner-Aschehoug, 1924.]

tout système d'équations différentielles d'ordre quelconque à un nombre quelconque de fonctions inconnues et de variables indépendantes, dont la soluzion la plus générale ne dépend que de constantes arbitraires.

Votre théorème me parait du reste susceptible d'une extension encore plus grande; il n'y aurait en effet que peu de choses à changer à votre démonstration pour qu'elle s'appliquât d'elle même, non seulement au cas où $W = 0$ serait une équation aux dérivées partielles, mais encore au cas tout à fait général d'un système quelconque d'équations aux dérivées partielles.

V.

I GRUPPI DI OPERAZIONI FUNZIONALI E L' INVERSIONE DEGLI INTEGRALI DEFINITI

NOTA I

« Rend. Ist. Lomb. di Sc., lett. ed arti », S. II, vol. XXVIII (1895)

pp. 529-544.

In una nota (¹), che io ebbi or non è molto l'onore di presentare a codesta illustre Accademia, accennai come dal concetto di trasformazione si sia naturalmente condotti a quello di operazione funzionale, immaginando che il corpo degli enti, su cui si opera, invece che una varietà di punti, sia una varietà di funzioni. Dissi anche come questa concezione geniale, dovuta al prof. PINCHERLE, venne svolgendosi per opera sua sotto aspetti molteplici e via via più generali, talchè forse è lecito sperare che ne sorgerà tra breve una completa dottrina.

Di fronte al delinearsi di così estesa e importante classe di trasformazioni sorgeva spontaneo il problema gruppale. SOPHUS LIE in un'opera (²) divenuta ormai classica, riducendo a sistema ciò, che spetta alle trasformazioni puntuali (e di contatto) ha tracciata una via dritta e sicura; ma, per questa nuova classe di trasformazioni, cioè per le operazioni funzionali, le teorie dell'illustre autore non si adattano senz'altro; alcune analogie si mantengono, altre vengono a mancare, molti fatti di vantaggiosa applicazione scompaiono, qualche relazione non priva di interesse si presenta invece per la prima volta. In ogni modo il campo di indagine non sembra infecondo e, malgrado l'esigua misura della mia iniziativa, mi permetto di esprimere il desiderio che altri in breve vi porti ben più valido impulso.

Nella nota sopra menzionata ho considerato un caso di gruppi con-

---

(¹) *Sui gruppi di operazioni funzionali*. « Rend. del r. Istit. Lomb. », ser. II, vol. XVIII. [In questo vol.: III, p. 101-111].

(²) LIE-ENGEL, *Theorie der Transformationsgruppen*. Band 1, 2, 3. Leipzig, Teubner, 1888, 1890, 1890.

tinui molto particolare, il cui scarso interesse vorrei apparisse giustificato dalla questione analitica (relativa alle equazioni differenziali ordinarie), che esso mi porse occasione di risolvere.

Nel presente lavoro io mi riferisco ad una classe assai più vasta e notevole di operazioni funzionali, a quelle cioè che vengono rappresentate da integrali definiti. Ciò, che appartiene al concetto generale di operazioni siffatte, fu già svolto ampiamente (3) dal prof. PINCHERLE, il quale accennò come esempio ad un insieme particolare di operazioni invertibili colla derivazione. Queste operazioni costituiscono un gruppo e stanno, come mostrò lo stesso autore, in stretta relazione coi polinomi del sig. APPELL (4), di guisa che il gruppo da esse costituito si può per brevità chiamare il gruppo di APPELL. Per quanto è a mia cognizione, il gruppo di APPELL è l'unico, che si sia incontrato nel campo delle operazioni funzionali ed è quasi esclusivamente per le operazioni di questo gruppo che si sono potuti studiare dei problemi concreti (inversione di integrali definiti, sviluppo di una funzione secondo un sistema di funzioni date, ecc.).

La lettura della citata memoria, in ordine ai concetti generali enunciati da principio, mi suggerì di intraprendere la ricerca generale dei gruppi continui di operazioni funzionali rappresentate da integrali defigniti; ed è appunto l'esposizione di questa ricerca che forma l'oggetto del presente scritto.

In esso si contiene:

1) La determinazione (§§ 2-5) di tutti i gruppi continui (infiniti, veggasi § 6) di operazioni funzionali rappresentate da integrali definiti.

2) L'enunciato di alcune proprietà generali (§§ 7-8), che conducono facilmente ad estendere ai gruppi funzionali la nozione di invariante.

3) Qualche applicazione dei concetti gruppali all'inversione degli integrali definiti. Si mostra cioè come, posto

$$u(x) = \int_l a(x, y) v(y)\, dy\,,$$

sia possibile, almeno formalmente, esprimere $v(y)$ per mezzo di $u(x)$, ogni qualvolta la funzione $a(x, y)$ soddisfaccia ad equazioni a derivate parziali di tipo determinato.

Accadde più volte ai matematici di dover invertire degli integrali definiti e per ogni singolo caso fu loro mestieri immaginare procedimenti particolari, spesso assai ingegnosi, ma il più delle volte oltre modo com-

(3) *Sur certaines opérations fonctionnelles représentées par des intégrales définies*, « Acta Math. », vol. 10, 1887.

(4) *Sur une classe de polynomes*, « Ann. sc. de l'École normale supérieure », 2e s., t. IX, 1880.

plicati; nel solo caso del gruppo di APPELL fu assegnato [5] un criterio generale di inversione, il quale non conduce tuttavia ad esprimere il risultato in forma esplicita.

Mi sia lecito pertanto di richiamare l'attenzione del lettore sull'ultima parte del lavoro, dove si reca qualche contributo a siffatto problema, coordinandone la soluzione ad un principio generale e uniforme.

1. – Se ad ogni funzione analitica $v(y)$ della variabile complessa y (o almeno a quelle di una certa classe) si può far corrispondere univocamente un'altra funzione analitica $u(x)$, la legge di corrispondenza si dirà l'*operazione funzionale*, che, applicata ad una funzione $v(y)$ della data classe, la trasforma nella corrispondente $u(x)$.

Le operazioni funzionali, secondo la notazione introdotta dal prof. PINCHERLE, si rappresentano con lettere maiuscole, per esempio con A; la scrittura:

$$u(x) = Av(y) ,$$

esprime che l'operazione A trasforma $v(y)$ in $u(x)$.

I campi di validità delle funzioni $v(y)$, $u(x)$ nei piani rispettivi delle due variabili y, x saranno in generale diversi.

Tra le operazioni funzionali sono particolarmente notevoli quelle, che provengono dall'integrazione definita,

Sia l una linea del piano y, $v(y)$ una funzione regolare lungo l e $a(x, y)$ una funzione delle due variabili x ed y regolare essa pure rispetto ad y lungo l per tutti i punti x di un certo campo C; l'integrale

$$\int_l a(x, y)v(y)\, dy .$$

rappresenta, come è manifesto, una funzione $u(x)$ della variabile x regolare nel campo C. Ponendo adunque:

$$u(x) = \int_l a(x, y)v(y)\, dy = Av(y) ,$$

si ha nella $Av(y)$ una operazione funzionale nel senso dichiarato innanzi. La funzione $a(x, y)$ si dice *caratteristica*.

Accanto ad ogni operazione:

$$Av(y) = \int_l a(x, y)v(y)\, dy ,$$

[5] PINCHERLE, loco citato.

giova considerare quella:

$$A'v(y) = \int_l a(x, y)v(x)\,dx\,,$$

che si ottiene scambiando tra loro nella funzione caratteristica l'ufficio delle due variabili x ed y. Le operazioni A e A' si diranno *associate*.

Di queste operazioni funzionali rappresentate da integrali definiti dovremo di continuo occuparci nei §§ seguenti.

2. – Assunta ad arbitrio una forma differenziale lineare del tipo:

$$\Delta v \equiv p_0(y)v^{(n)}(y) + p_1(y)v^{(n-1)}(y) + \ldots + p_n(y)v(y)\,, \tag{1}$$

dove i coefficienti $p_0(y)$, $p_1(y), \ldots$ sono funzioni analitiche di y uniformi e regolari in un certo campo T_y, noi ci proponiamo di assegnare una categoria di operazioni funzionali rappresentate da integrali definiti, che sieno permutabili colla Δ.

Noi vogliamo cioè caratterizzare quelle operazioni

$$Av(x) = \int_l a(x, y)v(y)\,dy\,,$$

tali che, per ogni funzione $v(y)$ regolare lungo la linea l di integrazione, sia:

$$A\Delta v(y) = \Delta A v(y)\,. \tag{2}$$

Colla equazione (2) si viene implicitamente ad ammettere che sia applicabile l'operazione Δ alle funzioni $Av(y)$ e quindi, portando Δ sotto il segno, alle funzioni incognite $a(x, y)$; ne segue:

a) corrispondentemente a tutti i punti y situati lungo la linea di integrazione l, ogni $a(x, y)$ deve mantenersi regolare per qualche punto (e quindi area) compresa in T_x.

Quanto alla linea l di integrazione, pur lasciandola affatto indeterminata, noi supporremo:

b) che sia tutta interna a T_y;

c) che sia chiusa, ovvero tale che nei suoi estremi si annullino $a(x, y)$ e le sue derivate fino all'ordine $n-1$ incluso.

Sotto queste ipotesi si può stabilire molto facilmente a quali relazioni deve soddisfare una funzione caratteristica $a(x, y)$ perchè sussista la (2).

Infatti, la (2) potendo essere scritta:

$$A \sum_0^n {}_r\, p_r(y) \frac{d^{n-r}v}{dy^{n-r}} = \sum_0^n {}_r\, p_r(x) \frac{d^{n-r}Av(y)}{dx^{n-r}},$$

ove si ponga per A la sua espressione effettiva e si derivi nel secondo membro sotto il segno, verrà:

$$\sum_0^n {}_r \int_l a(x, y)p_r(y) \frac{d^{n-r}v(y)}{dy^{n-r}}\, dy = \sum_0^n {}_r \int_l p_r(x) \frac{\partial^{n-r}a(x, y)}{\partial x^{n-r}} v(y)\, dy\,.$$

Integrando successivamente per parti e osservando che, in virtù dell'ipotesi c), i termini ai limiti svaniscono in ogni caso, si deduce:

$$\int_l \sum_0^n {}_r \left\{ (-1)^{n-r} \frac{\partial^{n-r}}{\partial y^{n-r}} \big(a(x, y)p_r(y)\big) - p_r(x) \frac{\partial^{n-r}a(x, y)}{\partial y^{n-r}} \right\} v(y)\, dy = 0\,,$$

la quale, dovendo valere qualunque sia la funzione $v(y)$, ci dà:

$$\sum_0^n {}_r \left\{ p_r(x) \frac{\partial^{n-r}a(x, y)}{\partial x^{n-r}} - (-1)^{n-r} \frac{\partial^{n-r}}{\partial y^{n-r}} [a(x, y)p_r(y)] \right\} = 0\,, \tag{3}$$

che è quindi insieme ad a) condizione necessaria per l'invertibilità di A con Δ.

Reciprocamente, se la (3) è soddisfatta, se $v(y)$ si mantiene regolare lungo la linea l e se, per tutti i valori di y situati in l, la funzione $a(x, y)$ è regolare almeno in qualche punto x di T_x, risalendo si ritrova la (2); quindi possiamo enunciare il teorema:

« Condizione necessaria e sufficiente affinchè, per ogni funzione $v(y)$ « regolare lungo una linea l del tipo b), c), valga la (2), si è che la fun- « zione caratteristica $a(x, y)$ soddisfaccia all'equazione lineare a derivate « parziali (3) e appartenga alla categoria a) ».

3. – Per le equazioni del tipo (3) si possono determinare quanti si vogliono integrali particolari nel modo seguente.

Detta t una costante, si considerino le due equazioni differenziali ordinarie:

$$(\Delta + t)u(x) \equiv \sum_0^n {}_r\, p_r(x) \frac{d^{n-r}u(x)}{dx^{n-r}} + tu(x) = 0\,,$$

$$(\Delta' + t)v(y) \equiv \sum_0^n {}_r\, (-1)^{n-r} \frac{d^{n-r}[p_r(y)v(y)]}{dy^{n-r}} + tv(y) = 0\,,$$

di cui la seconda, astrazion fatta dalla diversità dei simboli, è la aggiunta [6] della prima e reciprocamente.

Se X_t, Y'_t rappresentano due qualunque integrali di queste equazioni, il prodotto $CX_tY'_t$ (con C costante arbitraria) è un integrale particolare $a(x, y)$ della (3). Essa può infatti scriversi, aggiungendo e togliendo $ta(x, y)$:

$$(\Delta + t)a(x, y) - (\Delta' + t)a(x, y) = 0 ,$$

ed è manifestamente soddisfatta per $a(x, y) = CX_tY'_t$. Facendo variare t in modo arbitrario si ottengono altrettanti integrali particolari.

Accenno semplicemente, perchè la dimostrazione esigerebbe qualche considerazione funzionale delicata, su cui non reputo opportuno insistere, in qual modo si perviene all'integrale generale delle equazioni (3) [7].

Sia $X_t^{(1)}$, $X_t^{(2)} \ldots$, $X_t^{(n)}$ un sistema fondamentale di integrali dell'equazione: $(\Delta + t)u(x) = 0$, $Y_t'^{(1)}$, $Y_t'^{(2)}, \ldots$, $Y_t'^{(n)}$ un sistema fondamentale dell'equazione $(\Delta' + t)v(y) = 0$, e si rappresentino con $\psi_1(t), \psi_2(t), \ldots, \psi_n(t)$ n funzioni arbitrarie della variabile t, con $l_1, l_2, \ldots, l_n$, n linee arbitrarie del piano complesso t. Il cercato integrale generale $a(x, y)$ si può rappresentare sotto la forma:

$$a(x, y) = \int_{l_1} X_t^{(1)} Y_t'^{(1)} \psi_1(t)\, dt + \int_{l_2} X_t^{(2)} Y_t^{(2)} \psi_2(t)\, dt + \ldots + \int_{l_n} X_t^{(n)} Y_t'^{(n)} \psi_n(t)\, dt .$$

Per le equazioni (3) del primo ordine, che dovremo considerare più particolarmente (§§ 9-10), si può col solito metodo assegnare in forma esplicita l'integrale generale e si trova:

$$(3') \qquad a = \frac{1}{p_0(y)}\, e^{\int_{x_0}^{x} \frac{p_1(x)}{p_0(x)} dx - \int_{y_0}^{y} \frac{p_1(y)}{p_0(y)} dy}\, \Phi\left(\int_{x_0}^{x} \frac{dx}{p_0(x)} - \int_{y_0}^{y} \frac{dy}{p_0(y)}\right),$$

x_0, y_0 essendo costanti e Φ simbolo di funzione arbitraria.

Come caso particolare, se si fa $x_0 = y_0$,

$$\Phi\left(\int_{x_0}^{x} \frac{dx}{p_0(x)} - \int_{y_0}^{y} \frac{dy}{p_0(y)}\right) = \frac{1}{2\pi i \left(1 - e^{\int_{x_0}^{x} \frac{dx}{p_0(x)} - \int_{y_0}^{y} \frac{dy}{p_0(y)}}\right)} ,$$

---

[6] LAGRANGE, *Oeuvres*, Tome premier, pag. 472.

[7] Il sig. BOREL («Comptes Rendus», 25 marzo 1895) ha enunciato senza dimostrazione un teorema generale relativo alle equazioni lineari a derivate parziali d'ordine qualunque. In

si ha dalla (3') una funzione:

$$j(x, y) = \frac{1}{p_0(x)} e^{\int\limits_{x_0}^{x} \frac{p_1(x)}{p_0(x)} dx - \int\limits_{y_0}^{y} \frac{p_1(y)}{p_0(y)} dy} \frac{1}{2\pi i \left(1 - e^{\int\limits_{x_0}^{x} \frac{dx}{p_0(x)} - \int\limits_{y_0}^{y} \frac{dy}{p_0(y)}}\right)},$$

che per $x = y$ è infinita di prim'ordine col residuo $1/2\pi i$. Se dunque si pone

$$u(x) = \int\limits_{l} j(x, y) v(y)\, dy ,$$

per una linea chiusa l convenientemente scelta e per i punti interni ad essa, in virtù del teorema di CAUCHY: $u(x) = v(x)$; in altri termini $j(x, y)$ dà luogo all'operazione identica.

4. – Sia $a_2(z, y)$ una funzione, che, astrazione fatta dallo scambio dei simboli, verifichi l'equazione (3).

Ad essa corrisponde l'operazione funzionale:

$$A_2 v(y) = \int\limits_{l} a_2(z, y) v(y)\, dy ,$$

generatrice di funzioni $A_2 v(y) = w(z)$ della variabile complessa z. Queste funzioni $w(z)$ avranno un certo campo di validità e, in causa della $a)$, una porzione almeno T_z' di questo campo apparterrà anche a T_z. Ne viene che, assumendo in T_z' una linea λ del tipo $c)$ e un integrale $a_1(x, z)$ della (3), che, rispetto ad l_1, soddisfi alla $a)$, si potrà porre:

$$u(x) = \int\limits_{\lambda} a_1(x, z) w(z)\, dz = A_1(w(z) = A_1 A_2 v(y) =$$

$$= \int\limits_{l} \left\{ \int\limits_{\lambda} a_1(x, z) a_2(z, y)\, dz \right\} v(y)\, dy = Av(y) ,$$

cioè a dire l'operazione $Av(y) = A_1 A_2 v(y)$ ha un significato effettivo;

---

virtù di questo teorema, la determinazione dell'integrale generale si riduce a quella di un integrale completo con $n + 2$ costanti essenziali (n essendo il numero delle variabili indipendenti). Il metodo del sig. BOREL si potrebbe dunque applicare senz'altro alle nostre equazioni gruppali.

conformemente alla definizione generale, essa si chiama prodotto delle due operazioni A_1, A_2 prese nell'ordine scritto.

Per A_1, A_2 valgono le relazioni:

$$A_2 \Delta v(y) = \Delta A_2 v(y) \,, \qquad A_1 \Delta w(z) = \Delta A_1 w(z) \;;$$

scrivendo nella seconda $A_2 v(y)$ al posto di $w(z)$ e combinandola colla precedente, si trae:

$$A_1 A_2 \Delta v(y) = \Delta A_1 A_2 v(y) \,, \tag{4}$$

la quale ci dice che *le operazioni funzionali A permutabili con Δ formano un gruppo.*

Avuto riguardo al teorema del § 2, ricaviamo dalla (4) stessa che la funzione:

$$a(x, z) = \int_\lambda a_1(x, z) a_2(z, y) dz$$

deve soddisfare all'equazione a derivate parziali (3), onde la natura gruppale delle operazioni A può essere riconosciuta a priori nelle funzioni caratteristiche; infatti l'equazione a derivate parziali (3), che le definisce è tale che il prodotto (nel senso funzionale)

$$a(x, y) = \int_\lambda a_1(x, z) a_2(z, y) dz$$

di due qualsiasi dei suoi integrali $a_1(x, z)$, $a_2(z, y)$ è ancora un integrale della stessa equazione.

In generale è manifesto che una data classe di operazioni funzionali rappresentate da integrali definiti si dovrà dir gruppo allora e solo allora che la classe stessa comprende i prodotti di due qualunque tra le operazioni, che ad essa appartengono.

Se quindi noi prendiamo a considerare quelle classi di operazioni, le cui funzioni caratteristiche vengono definite da sistemi di equazioni differenziali, dovremo avere che il prodotto (nel senso funzionale) di due qualsiasi integrali del sistema è ancora un nuovo integrale.

In base a questa definizione, possiamo proporci la ricerca di tutti i gruppi di operazioni funzionali, *che vengono definiti da una equazione d'ordine finito n.*

Noi vedremo nel seguente § che, prescindendo da una categoria molto particolare, studiata già dal prof. PINCHERLE, non vi hanno altre equazioni gruppali all'infuori delle (3); cioè a dire i soli gruppi di operazioni funzionali sono quelli permutabili con una forma lineare Δ.

5. – Sia:

$$\Omega(a;\, x, y) = 0 \tag{Ω}$$

una equazione a derivate parziali d'ordine n rispetto alla funzione a e si supponga che, per due qualunque integrali $a_1(x, z)$, $a_2(z, y)$ delle equazioni: $\Omega(a_1;\, x, z) = 0$, $\Omega(a_2;\, z, y) = 0$ e per tutte le linee λ di una certa categoria, abbia effettivo significato l'integrale:

$$\int_\lambda a_1(x, z)a_2(z, y)\, dz\,,$$

e rappresenti, almeno per qualche coppia x, y un integrale $a(x, y)$ dell'equazione (Ω). Dico che $\Omega(a;\, x, y) = 0$ è certamente della forma (3).

Nella relazione:

$$a(x, y) = \int_\lambda a_1(x, z)a_2(z, y)\, dz\,,$$

si supponga di attribuire ad $a_2(z, y)$ un incremento infinitesimo $\alpha_2(z, y)$ compatibile colla condizione $\Omega(a_1;\, z, y) = 0$, cioè, se Ω si suppone dell'ordine n, tale da soddisfare all'equazione lineare:

$$\sum_0^n{}_r \sum_0^r{}_s\, \mu_{rs}(z, y)\, \frac{\partial^r \alpha_2(z, y)}{\partial z^{r-s}\, \partial y^s} = 0\,, \tag{5}$$

con

$$\mu_{rs}(z, y) = \left\{ \frac{\partial \Omega}{\partial \dfrac{\partial^r a_2}{\partial z^{r-s}\, \partial y^s}} \right\}_{a_2 = a_2(z,\, y)}\,;$$

$a(x, y)$ subirà in corrispondenza la variazione:

$$\alpha(x, y) = \int_\lambda a_1(x, z)\alpha_2(z, y)\, dz\,,$$

che sarà, per le ipotesi ammesse, conciliabile con $\Omega(a;\, x, y) = 0$, cioè integrale dell'equazione lineare:

$$\sum_0^n{}_r \sum_0^r{}_s\, \nu_{rs}(x, y)\, \frac{\partial^r \alpha(x, y)}{\partial x^{r-s}\, \partial y^s} = 0, \tag{6}$$

con

$$\nu_{rs}(x, y) = \left\{ \frac{\partial \Omega}{\partial \dfrac{\partial^r a}{\partial x^{r-s}\, \partial y^s}} \right\}_{a = \alpha(x, y)};$$

ponendovi per $\alpha(x, y)$ il suo valore, si ha:

$$\int_\lambda \left\{ \sum_0^n{}_r \sum_0^r{}_s \nu_{rs}(x, y) \frac{\partial^{r-s} \alpha_1(x, z)}{\partial x^{r-s}} \frac{\partial^s \alpha_2(z, y)}{\partial y^s} \right\} dz = 0 .$$

Invertendo le due sommatorie e scrivendo a parte il termine, che contiene $\partial^n \alpha(z, y)/\partial y^n$, si trae:

$$(7) \qquad \int_\lambda \left\{ \sum_0^{n-1} \frac{\partial^s \alpha_2(z, y)}{\partial y^s} \sum_s^n{}_r \nu_{rs}(x, y) \frac{\partial^{r-s} \alpha_1(x, z)}{\partial x^{r-s}} + \frac{\partial^n \alpha_2(z, y)}{\partial y^n} \nu_{nn}(x, y) \alpha_1(x, z) \right\} dz = 0 .$$

Se si suppone $\nu_{nn}(x, y) \neq 0$, si potrà dividere la (7) per $\nu_{nn}(x, y)$ e scrivendo per brevità:

$$\nu'_{rs}(x, y) = \frac{\nu_{rs}(x, y)}{\nu_{nn}(x, y)},$$

avremo:

$$(7') \qquad \int_\lambda \left\{ \sum_0^{n-1}{}_s \frac{\partial^s \alpha_2(z, y)}{\partial y^s} \sum_s^n{}_r \nu'_{rs}(x, y) \frac{\partial^{r-s} \alpha_1(x, z)}{\partial x^{r-s}} + \frac{\partial^n \alpha_2(x, y)}{\partial y^n} \alpha_1(x, z) \right\} dz = 0 .$$

Convien ora tener conto dell'equazione (5), distinguendo però, anche rispetto ad essa, i due casi $\mu_{nn}(z, y) = 0$ e $\mu_{nn}(z, y) \neq 0$. Riferendoci per ora al secondo, che, come si vedrà, è l'unico, il quale conduca a un risultato positivo, potremo manifestamente assumere la (5) sotto la forma:

$$(5') \qquad \left| \begin{array}{l} \dfrac{\partial^n \alpha_2(z, y)}{\partial y^n} = - \displaystyle\sum_0^{n-1}{}_s \sum_s^n{}_r \mu'_{rs}(z, y) \frac{\partial^r \alpha_2(z, n)}{\partial z^{r-s}\, \partial y^s} \\ \left(\mu'_{rs}(z, y) = \dfrac{\mu_{rs}(z, y)}{\mu_{nn}(z, y)} \right), \end{array} \right.$$

e sostituire nella (7') questo valore di $\partial^n \alpha_2(z, y)/\partial y^n$.

Colla successiva integrazione per parti, tenendo conto che al solito i termini ai limiti son nulli, ricaveremo:

$$\int_{\lambda} dz \sum_{0}^{n-1}{}_s \frac{\partial^s \alpha_2(z, y)}{\partial y^s} \sum_{s}^{n}{}_r \left\{ \nu'_{rs}(x, y) \frac{\partial^{r-s} a_1(x, z)}{\partial x^{r-s}} \right.$$

$$\left. - (-1)^{r-s} \frac{\partial^{r-s}[\mu'_{rs}(z, y) a_1(x, z)]}{\partial z^{r-s}} \right\} = 0 ,$$

la quale relazione dovrà essere soddisfatta, *qualunque sia l'integrale* $\alpha_2(z, y)$ *della* (5′).

Ora la (5′) stessa è un'equazione a derivate parziali d'ordine n, quindi, per un valore generico y, le n quantità

$$\frac{\partial^s \alpha_2(z, y)}{\partial y^s}, \qquad (s = 0, 1, \ldots, n-1)$$

si possono risguardare come funzioni *affatto arbitrarie* della z, talchè l'eguaglianza precedente, per essere soddisfatta, esige l'identico annullarsi dei singoli coefficienti e si scinde quindi nelle:

$$(8) \qquad \sum_{s}^{n}{}_r \left\{ \nu'_{rs}(x, y) \frac{\partial^{r-s} a_1(x. z)}{\partial x^{r-s}} - (-1)^{r-s} \frac{\partial^{r-s}[\mu'_{rs}(z, y) a_1(x, z)]}{\partial z^{r-s}} \right\} = 0 ,$$

$$(s = 0, 1, \ldots, n-1) .$$

Le (8) devono valere per ogni funzione $a_1(x, z)$, che sia integrale della

$$\Omega(a_1; x, z) = 0 ,$$

quindi: o sono pure identità, ovvero coincidono colla (Ω) stessa.

Se le (8) sono tutte relazioni identiche, dovranno annullarsi le singole ν_{rs}, μ'_{rs}, cioè:

$$\left\{ \frac{\partial \Omega}{\partial \dfrac{\partial^r a_2}{\partial z^{r-s} \partial y^s}} \right\}_{a_2 = a_2(z, y)} = 0 , \qquad (r = 0, 1, \ldots, n;\ s = 0, 1, \ldots, n-1),$$

dalle quali (siccome $a_2(z, y)$ si immagina un integrale qualunque, e la (Ω) stessa, per essere $\mu_{nn}(z, y) \gtrless 0$, è risolubile rispetto a $\partial^n a_2/\partial y^n$) si deduce senza difficoltà che (Ω) deve in tal caso necessariamente ridursi a:

$$\frac{\partial^n a_1(z, y)}{\partial y^n} = 0 .$$

Queste equazioni rientrano in un tipo, che ritroveremo, esaminando l'ipotesi finora esclusa $\nu_{nn}(x, y) = 0$.

Supponendo invece che non tutte le $\mu'_{rs}(z, y)$, $\nu'_{rs}(x, y)$ siano identicamente nulle, vi sarà, a partire da 0, un primo valore σ di s, per cui qualcuna delle $\mu'_{r\sigma}$, $\nu'_{r\sigma}$ $(r = 0, 1, ..., n)$ riescirà $\neq 0$; la equazione (8) corrispondente a questo valore σ dovrà coincidere colla:

$$\Omega(a_1; x, z) = 0 ,$$

e, siccome si è supposto che $\Omega(a_1; x, z)$ sia dell'ordine n, così bisogna ammettere $\sigma = 0$, da cui discende che ad $\Omega(a_1; x, z) = 0$ si deve poter attribuire la forma:

$$(8') \qquad \sum_0^n {}_r \left\{ \nu'_{r0}(x, y) \frac{\partial^r a_1(x, z)}{\partial x^r} - (-1)^{r-s} \frac{\partial^r[\mu'_{r0}(z, y) a_1(x, z)]}{\partial z^r} \right\} = 0 ,$$

cioè l'equazione $\Omega(a_1; x, z) = 0$ e quindi le corrispondenti:

$$\Omega(a; x, y) = 0 , \qquad \Omega(a_2; z, y) = 0$$

sono lineari. Ne viene che le funzioni $\nu'_{rs}(x, y)$, salvo lo scambio del simbolo x in z, debbono coincidere colle $\mu'_{rs}(z, y)$; di più la (8′), in causa della sua coincidenza con $\Omega(a_1; x, z) = 0$, non può contenere y che apparentemente. Combinando queste due osservazioni, si riconosce che:

$$\nu'_{r0}(x, y) = \psi(y) p_{n-r}(x) , \qquad \mu'_{r0}(z, y) = \psi(y) p_{n-r}(z) \qquad (r = 0, 1, ..., n),$$

onde la (8′) cioè (Ω) assume l'aspetto definitivo:

$$\sum_0^n {}_r \left\{ p_{n-r}(x) \frac{\partial^r a_1(x, z)}{\partial x^r} - (-1)^r \frac{\partial^r[p_{n-r}(z) a_1(x, z)]}{\beta z^r} \right\} = 0 ,$$

di cui è manifesta la coincidenza colle equazioni (3).

Questo risultato ci dispensa dall'indagare se, per tali (Ω), le ulteriori condizioni (8) riescono soddisfatte, poichè noi sappiamo già che le equazioni (3) sono gruppali; del resto si può, volendo, verificarlo direttamente.

Per esaurire la ricerca delle possibili equazioni gruppali, ci restano da considerare i due casi finora esclusi

$$\nu_{nn}(x, y) \neq 0 \quad \text{e} \quad \mu_{nn}(z, y) = 0 ,$$

oppure addirittura $\nu_{nn}(x, y) = 0$.

Il primo è presto discusso. Infatti corrispondentemente ad esso sussisterà ancora la:

$$(7') \qquad \int_\lambda \left\{ \sum_0^{n-1}{}_s \frac{\partial^s \alpha_2(z, y)}{\partial y^s} \sum_s^n{}_r \left(\nu'_{rs}(x, y) \frac{\partial^{r-s} a_1(x, z)}{\partial x^{r-s}} \right) + \frac{\partial^n \alpha_2(z, y)}{\partial y^n} a_1(x, z) \right\} dz = 0 ,$$

per tutte le funzioni $\alpha_2(z, y)$, che verificano l'equazione (5), cioè nel caso nostro, per essere $\mu_{nn}(x, y) = 0$, la:

$$(5'') \qquad \sum_0^{n-1}{}_s \sum_s^n{}_r \mu_{rs}(z, y) \frac{\partial^r \alpha_2(z, y)}{\partial z^{r-s} \partial y^s} = 0 .$$

Se quindi alla funzione sotto il segno nella (7') si aggiunge la (5'') moltiplicata per una quantità arbitraria k, dovrà essere:

$$\int \left\{ \sum_0^{n-1}{}_s \frac{\partial^s \alpha_2(z, y)}{\partial y^s} \sum_s^n{}_r \nu'_{rs}(x, y) \frac{\partial^{r-s} a_1(x, z)}{\partial x^{r-s}} \right.$$
$$\left. + k \sum_0^{n-1}{}_s \sum_s^n{}_r \mu_{rs}(z, y) \frac{\partial^r \alpha_2(z, y)}{\partial z^{r-s} \partial y^s} + \frac{\partial^n \alpha_2(x, y)}{\partial y^n} a_1(x, z) \right\} dz \equiv 0 .$$

Questo equivale a dire, che eseguite le solite integrazioni per parti, i singoli coefficienti delle $\partial^s \alpha_2(z, y)/\partial y^s$ $(s = 0, 1, \ldots, n)$ saranno nulli identicamente; ora il coefficiente di $\partial^n \alpha_2(z, y)/\partial y^n$ si riduce al solo termine $a_1(x, z)$, onde dovrebb'essere $a_1(x, z) = 0$, il che è assurdo.

L'ultima delle possibili ipotesi $\nu_{nn}(x, y) = 0$ conduce ad avere per la (7) la forma:

$$\int_\lambda \left\{ \sum_0^{n-1}{}_s \frac{\partial^s \alpha_2(z, y)}{\partial y^s} \sum_s^n{}_r \nu_{rs}(x, y) \frac{\partial^{r-s} a_1(x, z)}{\partial x^{r-s}} \right\} dz = 0 ,$$

da cui, come dianzi:

$$\sum_s^n {}_r\, \nu_{rs}(x, y) \frac{\partial^{r-s}\alpha_1(x, z)}{\partial x^{r-s}} = 0 \qquad (s = 0, 1, \ldots, n-1). \tag{9}$$

Le (9) o saranno identità, oppure coincideranno colla $\Omega(a_1; x, z) = 0$.

Col medesimo ragionamento usato precedentemente si riconosce che $\Omega(a_1; x, z)$ non può differire da:

$$\sum_0^n {}_r\, \nu_{r0}(x, y) \frac{\partial^r a_1(x, z)}{\partial x^r} = 0\,,$$

la quale, non dovendo contenere y, sarà della forma:

$$\sum_0^n {}_r\, p_{n-r}(x) \frac{\partial^r a_1(x, z)}{\partial x^r} = 0\,. \tag{9'}$$

È manifesto senz'altro che le successive equazioni (9) riescono verificate e quindi che le operazioni funzionali, di cui le funzioni caratteristiche soddisfanno a equazioni del tipo (9′), formano un gruppo.

Del resto la relazione fondamentale:

$$a(x, y) = \int_\lambda a_1(x, z) a_2(z, y)\, dz\,,$$

mostra immediatamente che, insieme con $a_1(x, z)$, anche $a(x, y)$ è integrale della (9′).

Le operazioni funzionali, le cui funzioni caratteristiche soddisfanno ad equazioni differenziali (9′) contenenti una sola variabile sono state già considerate dal prof. PINCHERLE, che fece vedere [8] in qual modo si riesca ad invertirle. Prescindendo da questo caso particolare, possiamo concludere:

Tutte le equazioni gruppali d'ordine finito appartengono al tipo (3).

6. – È bene osservare che colla ricerca precedente risultano determinati tutti i gruppi di operazioni rappresentabili con integrali definiti e tali che le funzioni caratteristiche $a(x, y)$ si presentino come integrali *di una sola equazione a derivate parziali.*

Se invece di una equazione sola si volesse considerare un sistema

---

[8] *Sur la génération des systèmes récurrents,* ecc. « Acta Mathem. », t. 16, 1892.

(completo), converrebbe tenere una via diversa da quella seguita nel caso di una sola equazione Ω: converrebbe cioè cercare non la forma delle equazioni del sistema, ma addirittura quella delle funzioni integrali.

E per verità, se sia dato un sistema completo di equazioni a derivate parziali con una sola funzione incognita (*), l'integrale generale $a(x, y)$ può dipendere soltanto da un numero finito r di costanti arbitrarie e ha necessariamente la forma:

$$a(x, y) = f(x, y; C_1 C_2 \dots C_r),$$

dove f è funzione perfettamente determinata delle $r+2$ quantità x, y, $C_1, C_2, \dots, C_r$.

La ricerca dei gruppi continui di operazioni funzionali equivale dunque in questo caso alla determinazione di quelle funzioni f, per cui, essendo $a_1, a_2, \dots, a_r$, $b_1, b_2, \dots, b_r$ due sistemi qualunque di costanti, si ha, per ogni linea l del piano (che soddisfa rispetto ad f alle condizioni b), c)):

$$f(x, y; c_1 c_2 \dots c_r) = \int_l f(x, z; a_1 a_2 \dots a_r) f(z, y; b_1 b_2 \dots b_r)\, dz, \tag{10}$$

rappresentando le $c_i = \varphi_i(a_1, a_2, \dots, a_r; b_1, b_2, \dots, b_r)$ $(i = 1, 2, \dots, r)$ un nuovo sistemi di valori delle costanti C.

Un problema di questa natura mi sembra presentare notevoli difficoltà; certo non si può trattare col metodo adoperato finora, il cui successo è essenzialmente dovuto alla presenza di funzioni arbitrarie nell'integrale generale dell'unica equazione gruppale.

Con denominazioni analoghe a quelle introdotte dal Lie per i gruppi puntuali, i gruppi del tipo (10) si chiameranno *finiti*, mentre si potranno dire *infiniti* quelli, che risultano determinati dalle equazioni (3).

A differenza di quanto accade per le trasformazioni puntuali, nel caso delle operazioni funzionali si presentano primi e più spontanei i gruppi infiniti.

(*) Nell'originale della presente nota si trova qui inserita la seguente parentesi: « (ammesso che due almeno tra le equazioni del sistema completo di equazioni del sistema sieno distinte) ». Questa parentesi in una copia del lavoro postillata dall'Autore è cancellata. [N. d. R.].

NOTA II

Ibidem, pp. 565-577.

7. – Riprendiamo lo studio dei gruppi infiniti di operazioni funzionali e mostriamo che ciascuno di essi contiene la operazione identica. Si osservi a tale scopo che una espressione del tipo

$$\int_l j(x, y) v(y)\, dy\,,$$

sarà atta a rappresentare la funzione $v(x)$ le quante volte la linea l del piano y sia chiusa, non contenga alcun punto singolare della funzione $v(y)$ e il solo punto singolare $y = x$ della funzione $j(x, y)$ col residuo $1/2\pi i$.

Se dunque si può determinare un integrale $j(x, y)$ della (3), che divenga infinito del primo ordine col residuo $1/2\pi i$ per $y = x$ e si mantenga regolare in un certo campo, per y diverso da x, questo integrale $j(x, y)$, scegliendo opportunamente la linea l, dà luogo all'operazione identica.

Per mostrare l'esistenza di un integrale siffatto, si ponga nella (3) $a(x, y) = 1/b(x, y)$ e si trasformi la (3) stessa in modo che la funzione incognita sia $b(x, y)$. Per un punto x, y_0, nel quale i coefficienti dell'equazione trasformata si comportano regolarmente, esiste, in base al teorema della signora KOVALEWSKI, se l'ordine dell'equazione differenziale è maggior d'uno (per l'equazione di prim'ordine si vegga il § 3), un integrale, regolare in un certo intorno della coppia (x, y_0), che si annulla per $y = y_0$ ed ha la derivata

$$\left(\frac{\partial b(x, y)}{\partial y}\right)_{y = y_0} = 2\pi i\,.$$

Di questo integrale $b(x, y)$ si può inoltre asserire che non si annulla in due intorni assegnabili dei punti x, y_0 (esclusa, si intende, la coppia x, y_0).

In particolare, se si prende x in modo che, nel punto x del piano x, $y_0 = x$ del piano y, i coefficienti dell'equazione trasformata sieno regolari, si avrà un integrale $b(x, y)$, che si annulla per $y = x$, si mantiene finito e diverso da zero in un certo campo, per y differente da x, ed ha la derivata

$$\left(\frac{\partial b(x, y)}{\partial y}\right)_{y=x} = 2\pi i\,.$$

La funzione reciproca $j(x, y) = 1/b(x, y)$ è la funzione cercata. Essa infatti è, in un certo campo, regolare per y diverso da x ed ha nel punto $y = x$ un infinito di prim'ordine; il residuo corrispondente è dato da:

$$\lim_{y=x} (y - x)j(x, y) = \lim_{y=x} \frac{y - x}{b(x, y)} = \frac{1}{\left(\frac{\partial b(x, y)}{\partial y}\right)_{y=x}} = \frac{1}{2\pi i},$$

come volevasi dimostrare.

8. – La proprietà caratteristica, che ci ha condotto ai gruppi infiniti di operazioni si è la permutabilità con una forma lineare Δ, espressa dall'equazione:

$$A\Delta v(y) = \Delta A v(y)\,. \tag{2}$$

Indicando con t una costante e aggiungendo $tAv(y)$ da una parte e dall'altra, ne deduciamo la relazione più generale:

$$A(\Delta + t)v(y) = (\Delta + t)Av(y)\,, \tag{11}$$

da cui, se si suppone che la funzione $v(y)$ soddisfaccia all'equazione differenziale ordinaria:

$$(\Delta + t)v(y) = 0\,,$$

segue, ponendo al solito $Av(y) = u(x)$,

$$(\Delta + t)u(x) = 0\,,$$

cioè a dire:

Le operazioni del gruppo permutabile con una forma lineare Δ trasformano le soluzioni di una qualunque equazione differenziale

$(\varDelta + t)v(y) = 0$ (dove t è un parametro arbitrario) in soluzioni della stessa equazione. In altri termini:

Le equazioni differenziali lineari $(\varDelta + t)v(y) = 0$ *hanno, qualunque sia il valore di* t, *carattere invariantivo di fronte a tutte le operazioni* A *del gruppo permutabile con* $\varDelta$.

Le equazioni gruppali (3), come fu osservato a § 3, si possono scrivere:

$$\varDelta a(x, y) - \varDelta' a(x, y) = 0 ,$$

dove $\varDelta'$ è la forma aggiunta a $\varDelta$.

Ora è noto che, se di due forme lineari una è aggiunta dell'altra, la relazione è reciproca; sicchè dall'essere $\varDelta'$ aggiunta a $\varDelta$ segue $\varDelta$ aggiunta a $\varDelta'$. Ne viene che, se si assume come fondamentale la forma $\varDelta'$ e si cercano le operazioni permutabili con essa, per definire le funzioni caratteristiche, si deve ritrovare la medesima equazione (3), salvo però lo scambio delle variabili x ed y. In altri termini ciascun integrale $a(x, y)$ della (3) viene a mutarsi in $a(y, x)$ e corrispondentemente ogni operazione funzionale

$$Av(x) = \int_l a(x, y)v(y)\,dy$$

nella sua associata

$$A'v(x) = \int_l a(x, y)v(x)\,dx .$$

Si ha quindi immediatamente:

Come le equazioni $(\varDelta + t)v(y) = 0$ hanno carattere invariantivo di fronte alle operazioni A, così le equazioni aggiunte $(\varDelta' + t(v)(y) = 0$ hanno carattere invariantivo rispetto alle operazioni associate A'.

Di questo risultato dovremo far uso a suo tempo (§ 11).

9. – Applichiamo le considerazioni precedenti al caso particolare di una forma $\varDelta$ del primo ordine e mostriamo come esse permettano di invertire l'integrale:

$$w(z) = \int_l a(z, y(v(y)\,dy \qquad (l \text{ linea del tipo } b), c)) , \tag{12}$$

quando la funzione caratteristica $a(z, y)$ rende soddisfatta l'equazione gruppale del prim'ordine:

$$p_0(z)\frac{\partial a}{\partial z} + p_0(y)\frac{\partial a}{\partial y} + \left\{ p_1(z) - p_1(y) + p_0'(y) \right\} a = 0 ,$$

ha cioè, come si è visto (§ 3), la forma:

$$(3') \qquad a = \frac{1}{p_0(y)} e^{\int\limits_{z_0}^{z} \frac{p_1(z)}{p_0(z)} dz - \int\limits_{z_0}^{y} \frac{p_1(y)}{p_0(y)} dy} \Phi\left(\int\limits_{z_0}^{z} \frac{dz}{p_0(z)} - \int\limits_{y_0}^{y} \frac{dy}{p_0(y)} \right).$$

Sostituendo nella (12) per $a(z, y)$ la sua espressione effettiva (3′) e ponendo:

$$(13) \qquad \begin{cases} \int\limits_{z_0}^{z} \frac{dz}{p_0(z)} = \zeta, & \int\limits_{y_0}^{y} \frac{dy}{p_0(y)} = \eta, \\ e^{-\int\limits_{z_0}^{z} \frac{p_1(z)}{p_0(z)} dz} w(z) = w_1(\zeta), & e^{-\int\limits_{y_0}^{y} \frac{p_1(y)}{p_0(y)} dy} v(y) = v_1(\eta), \end{cases}$$

si ottiene:

$$(12') \qquad w_1(\zeta) = \int\limits_{\lambda} \Phi(\zeta - \eta) v_1(\eta)\, d\eta,$$

dove la linea λ è la immagine della l nel piano

$$\eta = \int\limits_{y_0}^{y} \frac{dy}{p_0(y)}.$$

Possiamo dunque, in luogo che dalla (12), prender le mosse dalla relazione più semplice (12′).

I problemi di inversione, che rientrano nel tipo (12′), si sanno risolvere ([9]) a mezzo dei polinomi di APPELL. Essi permettono di costruire una funzione $\Phi'(\zeta - \xi)$, per la quale, scelta opportunamente una linea di integrazione λ',

$$v_1(\xi) = \int\limits_{\lambda'} \Phi'(\xi - \zeta) w(\zeta)\, d\zeta.$$

([9]) PINCHERLE, *Sur certaines opérations fonctionnelles répresentées par des integrales définies*, « Acta Math. », vol. 10, 1887; PINCHERLE, *Alcune osservazioni sui polinomi del prof. Appell*, « Rendiconti dell'Acc. dei Lincei », ser. 4, tom. 2 (1886).

Tuttavia con tale procedimento si determinano bensì i successivi coefficienti dello sviluppo di $\Phi'(\xi-\zeta)$ per potenze di $\xi-\zeta$, ma non vien fatto di assegnarne una espressione complessiva. Vi si arriva invece in modo assai semplice, applicando la osservazione del paragrafo precedente alle funzioni caratteristiche della forma $\Phi(\zeta-\eta)$. Per esse vale l'equazione di APPELL

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\zeta}+\frac{\partial\Phi}{\partial\eta}=0\,,$$

che è la più semplice delle equazioni gruppali (3); la forma Δ si riduce alla derivazione D e le corrispondenti equazioni invariantive sono tanto per il gruppo, quanto per il suo associato (§ 8): $(D+t)v_1(\eta)=0$, da cui discende che, se una funzione $v_1(\eta)$ la rende soddisfatta, cioè $v_1(\eta)=$ $=Ce^{-t\eta}$, la funzione trasformata $w_1(\zeta)$ sarà anch'essa necessariamente del tipo $C'e^{-t\zeta}$ con C' costante generalmente diversa da C.

Posto ciò, osservo che, se λ è una curva chiusa, l'integrale (12)' si potrà dire invertito, quando siasi determinata una funzione $\Phi'(\xi-\zeta)$ e una linea λ' tali che

$$\int\limits_{\lambda'}\Phi'(\xi-\zeta)\Phi(\zeta-\eta)\,d\zeta=\frac{1}{2\pi i(1-e^{\xi-\eta})}\,, \tag{14}$$

dove il secondo membro rientra nell'espressione generale dianzi assegnata per le funzioni $j(x,y)$.

Intendendo di prendere il segno superiore o inferiore secondochè la parte reale di η sarà maggiore o minore di quella di ξ, si potrà porre,

$$\frac{1}{2\pi i(1-e^{\xi-\eta})}=\frac{1}{2\pi i}\sum_0^\infty{}_t\, e^{\pm t(\xi-\eta)}$$

e riescirà di soddisfare almeno formalmente all'equazione (14) con una funzione:

$$\Phi'(\xi-\zeta)=\sum_0^\infty{}_t\, C_t\, e^{\pm t(\xi-\zeta)}\,, \tag{15}$$

purchè si prenda:

$$C_t=\frac{1}{2\pi i\int\limits_{\lambda'}\Phi(\zeta)e^{\mp t\zeta}\,d\zeta}\,. \tag{16}$$

Si avrà infatti:

$$\int_{\lambda'} \Phi'(\xi-\zeta)\Phi(\zeta-\eta)\,d\zeta = \sum_0^\infty{}_t\, C_t e^{\pm t\xi}\int_{\lambda'} \Phi(\zeta-\eta)\,e^{\mp t\zeta}\,d\zeta\,,$$

e, siccome le funzioni del tipo $e^{\mp t\zeta}$ mantengono la loro forma, dovranno sussistere le identità:

$$\int_{\lambda'} \Phi(\zeta-\eta)\,e^{\mp t\zeta}\,d\zeta = C'_t e^{\mp t\eta} \qquad (t = 0, 1, \ldots, \infty)\,.$$

Facendo $\eta = 0$, segue $C'_t = 1/(2\pi i C'_t)$, dopo di che la (14) si trova senz'altro verificata.

La linea di integrazione λ' si dovrà scegliere in modo che, per tutti i valori ζ di λ' e per i valori ξ di un certo campo S, interno ad un tempo a λ e a λ', una almeno delle due serie

$$\sum_0^\infty C_t e^{t(\xi-\zeta)}\,, \qquad \sum_0^\infty C_t e^{-t(\xi-\zeta)}$$

riesca convergente; con tale avvertenza quella delle due soluzioni formali espresse dalle (15) (16), che corrisponde alla serie convergente, acquista senz'altro un valore effettivo.

Invero ponendo:

$$v'_1(\xi) = \int_{\lambda'} \Phi'(\xi-\zeta)w_1(\zeta)\,d\zeta\,,$$

per i valori di ζ, che appartengono ad S, $\Phi'(\xi-\zeta)$ sarà dato da,

$$\sum_0^\infty{}_t\, C_t\, e^{t(\xi-\zeta)}\,,$$

immaginando, per fissar le idee, di assumere il segno superiore.

Sostituendo per $w_1(\zeta)$ il valore (12′) verrà:

$$v(\xi) = \int_{\lambda'} \sum_0^\infty C_t e^{t(\xi-\zeta)}\,d\zeta \int_{\lambda} \Phi(\zeta-\eta)v_1(\eta)\,d\eta\,,$$

e, invertendo le integrazioni:

$$v'_1(\xi) = \int_{\lambda} v_1(\eta)\,d\eta \sum_0^\infty{}_t\, C_t\, e^{t\xi}\int_{\lambda'} \Phi(\zeta-\eta)\,e^{-t\zeta}\,d\zeta =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{\lambda} v_1(\eta)\,d\eta \sum_0^\infty{}_t\, e^{t(\xi-\eta)} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\lambda} v_1(\eta)\,\frac{1}{1-e^{\xi-\eta}}\,d\eta\,;$$

l'ultimo integrale, corrispondentemente ai punti ξ di S, pei quali appunto è legittimo il seguito procedimento, ha il valore $v_1(\xi)$, come si voleva provare. Naturalmente, conoscendo $v_1(\xi)$ entro S, basta continuarlo analiticamente per averlo in tutto il piano. È opportuno osservare che l'espressione

$$v_1(\xi) = \int_{\lambda'} \Phi'(\xi - \zeta) w_1(\zeta)\, d\zeta$$

vale, qualora si faccia per $v_1(\xi)$ l'ipotesi che si mantenga regolare lungo la linea λ; secondo la natura delle singolarità, di cui la v_1 stessa si suppone dotata, si ha per $v_1(\xi)$ una espressione diversa, ma sempre determinata in modo univoco, scelta che sia la linea λ'. Così per esempio, se si immagina che, nei punti α_i $(i = 1, 2, \ldots, h)$ essa abbia dei poli di prim'ordine di residuo H_i, l'integrale precedente:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\lambda} v_1(\eta) \frac{1}{1 - e^{\xi - \eta}}\, d\eta\,,$$

riesce eguale a:

$$v_1(\xi) + \sum_1^h{}_i H_i \frac{1}{1 - e^{\xi - \alpha_i}}\,,$$

e quindi l'espressione di $v_1(\xi)$ a mezzo di $w_1(\zeta)$ diviene:

$$v_1(\xi) = \int_{\lambda'} \Phi'(\xi - \zeta) w(\zeta)\, d\zeta - \sum_1^h{}_i H_i \frac{1}{1 - e^{\xi - \alpha_i}}\,.$$

Accennerò ancora, benchè sia cosa nota [10], che la questione di sviluppare una funzione assegnata $w_1(\zeta)$ in serie ordinata secondo un sistema di polinomi di Appell $P_n(\zeta)$, si riconduce all'inversione di un integrale della forma (12').

Si ha infatti, essendo A una operazione qualunque del gruppo di Appell: $P_n(\zeta) = A\xi^n$, poichè, per l'invertibilità di A con D, vale la relazione caratteristica: $DP_n(\zeta) = nP_{n-1}(\zeta)$ e, siccome $A\xi_0 = \text{cost.}$, così le funzioni P_n sono effettivamente dei polinomi.

Sia in particolare:

$$P_n(\zeta) = \int_{\lambda} \Phi(\zeta - \eta) \eta^n\, d\eta$$

---

[10] Pincherle, loco citato.

il sistema di polinomi, secondo cui si debba sviluppare una funzione assegnata $w_1(\zeta)$.

Si ponga:

$$v_1(\eta) = \int_{\lambda'} \Phi'(\eta - \zeta) w_1(\zeta)\, d\zeta ,$$

e si immagini di avere lo sviluppo $\sum_0^\infty {}_n c_n \eta^n$ di $v_1(\eta)$ per le potenze positive di η; siccome la funzione $v_1(\eta)$ è tale che:

$$\int_\lambda \Phi(\zeta - \eta) v_1(\eta)\, d\eta = w_1(\zeta) ,$$

così potremo scrivere

$$w_1(\zeta) = \sum_0^\infty {}_n c_n \int_\lambda \Phi(\zeta - \eta)\eta^n\, d\eta ,$$

che porge appunto $w_1(\zeta)$ sviluppata per il sistema di polinomi:

$$P_n(\zeta) = \int_\lambda \Phi(\zeta - \eta)\eta^n\, d\eta .$$

10. – Per dare un esempio di effettiva inversione, supponiamo che la linea λ sia una circonferenza di raggio R col centro nell'origine delle coordinate e che la funzione $\Phi(\zeta)$ abbia tutte le sue singolarità comprese entro un cerchio di raggio non maggiore di $R/3$.

Rispetto alla natura di queste singolarità noi non facciamo alcuna ipotesi, ammettiamo soltanto che almeno un polo isolato sia situato nel semipiano negativo.

Posto ciò, essendo $v_1(\eta)$ una funzione regolare entro il cerchio di raggio R, la:

$$w_1(\zeta) = \int_\lambda \Phi(\zeta - \eta) v_1(\eta)\, d\eta \tag{12'}$$

rappresenta, entro un cerchio di raggio minore di $(2/3)R$, quindi per esempio entro un cerchio di raggio $R/3$, una funzione regolare di ζ.

Assumiamo per λ' una linea chiusa di forma qualunque tutta contenuta entro il cerchio λ, che non passi, si intende, per nessun punto singolare di $\Phi(\zeta)$ e comprenda nel suo interno un certo numero finito di poli $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$, di cui mai due situati sulla stessa parallela all'asse immaginario e uno almeno appartenente al semipiano negativo.

È lecito porre tali condizioni, poichè si è ammesso che tra i punti singolari vi sia certamente un polo isolato nel semipiano negativo.

Tenendo presenti queste ipotesi, avremo dalla (16), adottando il segno superiore:

$$C_t = \frac{1}{2\pi i \int\limits_{\lambda'} \Phi(\zeta) e^{-t\zeta} d\zeta} = -\frac{1}{4\pi^2 \sum_1^m {}_i K_i e^{-t\beta_i}}.$$

Dallo sviluppo di $\Phi(\zeta)e^{-t\zeta}$ nell'intorno di un punto singolare β_i, si riconosce che le K_i possono contenere potenze di t, però soltanto in numero finito perchè i punti β_i non sono singolarità essenziali; essendo pertanto ciascun K_i un polinomio in t, si avrà per considerazioni note $\lim\limits_{t=\infty} K_i\, e^{-t} = 0$.

Ciò posto, si può far corrispondere l'indice $i = m$ a quel punto singolare β, che ha la parte reale minima. Si potrà allora scrivere:

$$C_t = -\frac{e^{-t\beta_m}}{4\pi^2 K_m \left\{1 + \sum_1^{m-1} {}_i \frac{K_i}{K_m} e^{-t(\beta_i - \beta_m)}\right\}},$$

in cui, siccome ciascuna $-(\beta_i - \beta_m)$ ha la parte reale negativa, prendendo t sufficientemente grande, la

$$\sum_1^{m-1} {}_i \frac{K_i}{K_m} e^{-t(\beta_i - \beta_m)}$$

può rendersi in modulo piccola quanto si vuole, per esempio $< 1/2$; quindi, a partire da un certo valore τ di t, si avrà:

$$|C_t| < \frac{|e^{t\beta_m}|}{2\pi^2 |K_m|};$$

di più, per $t < \tau$, le singole C_t avranno un valore finito, se si esclude il caso particolarissimo che gli indici dei punti singolari e i residui corrispondenti soddisfacciano a relazioni della forma:

$$\sum_1^m {}_i K_i e^{-t\beta_i} = 0, \tag{17}$$

per qualche valore intero di t compreso fra 0 e τ.

Si prenda ora a considerare la serie:

$$\Phi'(\xi - \zeta) = \sum_0^\infty {}_t\, C_t e^{t(\xi-\zeta)} ;$$

per $t > \tau$, i suoi termini sono in valore assoluto minori di:

$$\frac{1}{2\pi^2 |K_m|} \left| e^{t(\xi-\zeta+\beta_m)} \right| ,$$

quindi la serie stessa converge, quando $R(\xi - \zeta + \beta_m) < 0$, il simbolo $R(\xi - \zeta + \beta_m)$ designando la parte reale di $\xi - \zeta + \beta_m$.

Ora sia $-p$ (certamente negativa perchè λ' contiene per ipotesi almeno un punto singolare di Φ situato nel semipiano negativo) la proiezione sull'asse reale del punto più a destra di λ' e si guidi per il punto di ascissa $-p - R(\beta_m)$, che è più a destra di $-p$, perchè $R(\beta_m) < 0$, la parallela all'asse immaginario; riesce determinata una regione non nulla S di punti interni a λ' e situati a sinistra della detta parallela, la quale regione potrebbe come caso particolare comprendere tutto l'interno di λ'.

Si ha per i punti ξ di S

$$R(\xi) < p - R(\beta_m) , \qquad \text{cioè} \qquad R(\xi) + p + R(\beta_m) > 0 ;$$

d'altra parte, per ogni punto ζ situato sopra la linea λ':

$$R(\zeta) > p \qquad \text{cioè} \qquad -R(\zeta) < p ,$$

onde sommando $R(\xi - \zeta + \beta_m) < 0$, la quale disuguaglianza, che assicura la convergenza della serie, si trova così soddisfatta per tutte le coppie ξ, ζ di punti situati rispettivamente entro S e sopra λ'.

Si ha dunque per i punti ξ di S:

$$v_1(\xi) = \int_{\lambda'} \Phi'(\xi - \zeta) w_1(\zeta)\, d\zeta = -\frac{1}{4\pi^2} \int_{\lambda'} \sum_0^\infty {}_t \frac{e^{t(\xi-\zeta)}}{\sum_1^m {}_i K_i e^{-t\beta_i}} w_1(\zeta)\, d\zeta. \tag{18}$$

Nella maggior parte dei casi la funzione Φ avrà soltanto un numero finito di poli; escluso che tra essi passino relazioni del tipo (17), si può a priori fissare per linea di integrazione λ' la circonferenza concentrica a λ di raggio eguale a $R/3$.

11. – Il procedimento, che abbiamo tenuto per invertire la (12′), si può applicare in modo analogo ad ogni integrale:

$$w(z) = \int_l a(z, y)v(y)\,dy\,, \tag{19}$$

dove $a(z, y)$ soddisfa ad una equazione gruppale (3).

Come infatti nel caso precedente tutto sta nell'osservare che la operazione di APPELL, che è associata di sè stessa, trasforma le funzioni $Ce^{t\eta}$ in funzioni della stessa forma, così il criterio generale, che passiamo ad esporre, trova il suo fondamento nella proprietà analoga, caratteristica delle operazioni del gruppo associato, di cambiare (§ 8) gli integrali di:

$$(\Delta' + t)v(y) = 0$$

in integrali dell'equazione identica:

$$(\Delta' + t)w(z) = 0\,.$$

Ricordiamo (§ 3) che, se insieme alla equazione $(\Delta + t)u(x) = 0$ si considera l'aggiunta $(\Delta' + t)v(y) = 0$ e si indicano con

$$X_t^{(1)},\ X_t^{(2)}, \ldots,\ X_t^{(n)}\,; \qquad Y_t'^{(1)},\ Y_t'^{(2)}, \ldots,\ Y_t'^{(n)}\,,$$

due sistemi fondamentali di integrali, il prodotto di due qualunque tra essi soddisfa all'equazione a derivate parziali (3). Si faccia ora

$$X_t = \sum_1^n {}_r\, \delta_{tr} X_t^{(r)}\,,$$

dove le δ sono costanti e si supponga che una espressione del tipo:

$$j(x, y) = \sum_0^\infty {}_t\, X_t \sum_1^n {}_r\, C_{tr} Y_t'^{(r)} \tag{20}$$

sia atta a fornire l'operazione identica.

Io dico che si potrà formalmente invertire l'integrale (19) con una espressione del tipo:

$$v(x) = \int_{l'} a'(x, z)w(z)\,dz\,,$$

ponendo:

$$a'(x, z) = \sum_0^\infty{}_t X_t \sum_1^n{}_s D_{ts} Z_t^{\prime(s)}, \tag{21}$$

e determinando in modo conveniente la linea di integrazione l' e le costanti D_{ts}.

Ammessa infatti per $a'(x, z)$ la forma (21), basterà, come al § 9, cercar di rendere:

$$\int_{l'} a'(x, z) a(z, y)\, dz = j(x, y)\,.$$

Ora per l'invarianza di $(\Delta' + t)w(z) = 0$ di fronte a tutte le operazioni del gruppo associato, ogni espressione del tipo

$$\int_{l'} a'(z, y) Z_t^{\prime(s)}\, dz$$

sarà ancora un integrale dell'equazione $(\Delta' + t)w(z) = 0$, quindi dovranno sussistere le identità:

$$\int_{l'} a(z, y) Z_t^{\prime(s)}\, dz = \sum_1^\infty{}_r \gamma_{tsr} Y_t^{\prime(r)} \qquad (t = 0, 1, 2, \ldots, \infty;\ s = 1, 2, \ldots, n). \tag{22}$$

Ponendo in

$$\int_{l'} a'(x, z) a(z, y) dz$$

per $a'(x, z)$ il suo valore dato dalla (21), verrà in causa della (22)

$$\int_{l'} a'(x, z) a(z, y)\, dz = \sum_0^\infty{}_t X_t \sum_1^n{}_r Y_t^{\prime(r)} \sum_1^n{}_s D_{ts} \gamma_{tsr}\,.$$

Basta quindi, per ciascun valore di t, determinare le n costanti D_{ts} in modo che:

$$\sum_1^n{}_s D_{ts} \gamma_{tsr} = C_{tr} \qquad (t = 0, \ldots, \infty;\ r = 1, 2, \ldots, n)$$

e si ha in $a'(x, z)$ la funzione richiesta.

Si potrebbe assegnare l'espressione definitiva di $a'(x, z)$ e considerare qualche caso semplice, in cui la soluzione formale avesse anche un valore effettivo; ritengo tuttavia superfluo di insistere, bastandomi di aver accennato come i criteri gruppali si possano seguire con vantaggio in questi problemi di inversione.

Voglio ancora osservare (per la dimostrazione si cfr. il § 9) che le formule precedenti permettono di sviluppare una funzione assegnata $w(z)$ in serie procedenti per le funzioni del sistema:

$$P_n(z) = \int_l a(z, y) y^n \, dy ,$$

$a(z, y)$ essendo una qualunque funzione gruppale.

Padova, Marzo 1895.

VI.

DI UNA ESPRESSIONE ANALITICA ATTA A RAPPRESENTARE IL NUMERO DEI NUMERI PRIMI IN UN DETERMINATO INTERVALLO

« Rend. Acc. Lincei », s. 5ª, vol. IV, (1º sem., 1895),

pp. 303-309 (*).

La questione di rappresentare con una funzione il numero dei numeri primi compreso in un intervallo determinato, o l'altra, sotto un certo rispetto equivalente, di fissare un carattere distintivo dei numeri primi diede origine a ricerche importanti di molti matematici, colle quali, se non fu raggiunto l'intento, tuttavia venne largo contributo alla scienza di considerazioni feconde. Basterà ricordare che GAUSS, DIRICHLET e TCHEBICHEFF, prendendo le mosse da questo problema, furono condotti a notevoli risultati di teoria dei numeri e oltre a ciò assegnarono espressioni più o meno approssimate del numero dei numeri primi compresi in un dato intervallo.

RIEMANN nella Memoria: *Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegeneben Grösse* (1), risolse in certo senso una tale questione, poichè riescì a rappresentare con una funzione $F(x)$ il numero dei numeri primi inferiori ad x; però codesta soluzione, malgrado la sua grande genialità, apparisce oltremodo complicata e, quasi direi, speciosa, se si osserva che, per costruire la funzione $F(x)$ di RIEMANN si ha la formola

$$F(x) = \sum (-1)^{\mu} \frac{1}{m} f(x^{1/m}) ,$$

(*) Presentata dal Socio corrispondente G. VERONESE nella seduta del 7 Aprile 1895.

(1) Ges. Werke, p. 136, Leipzig, (1876); cfr. anche P. BACHMANN, *Zahlentheorie*, Zweiter Theil, p. 382, Leipzig, (1894).

dove, essendo $f(x)$ una funzione, che si può risguardare conosciuta

$$\left(f(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} x^s \log\left\{\sum_1^\infty{}_n \frac{1}{n^s}\right\}\frac{ds}{s}\right),$$

la sommatoria va estesa successivamente a tutti i numeri m non divisibili per alcun quadrato all'infuori dell'unità, e μ designa il numero dei fattori primi di m. Ne viene che, per calcolare effettivamente $F(x)$, bisognerebbe immaginare di conoscere, per ciascun numero naturale m, se esso ammette fattori primi eguali e, quando siano tutti differenti, se il loro numero è pari o dispari. In altri termini si dovrebbe risguardar nota la funzione $\mu(m)$ di MERTENS [2].

Parmi pertanto non superfluo di riprendere sotto un diverso punto di vista questo stesso problema, proponendomi di eliminare la difficoltà, che si incontra nel procedimento di RIEMANN. In ciò che segue, si troverà assegnata (a mezzo di un integrale definito) l'espressione analitica del numero dei numeri primi compresi in un determinato intervallo; incidentalmente mi si presenterà occasione di indicare un criterio di immediata applicabilità per riconoscere se un dato numero sia primo.

La serie (di LAMBERT) [3] $\sum_1^\infty{}_m x^m/1 - x^m$ converge, come si riconosce agevolmente, per tutti i punti $|x| < 1$ ed è sviluppabile in serie di potenze di x entro il cerchio di raggio 1 col centro nell'origine. Si sa, e questa costituisce la proprietà caratteristica dello sviluppo, osservata già da LAMBERT, che il coefficiente di x^n è uguale al numero dei divisori di n; quindi, escludendo per n il valore 1, questo coefficiente sarà eguale a 2, quando n è un numero primo, maggiore di due nel caso opposto.

Ponendo

$$S(x) = \sum_1^\infty{}_m \frac{x^m}{1-x^m} - \frac{2x^2}{1-x} - x\,, \tag{1}$$

si potrà, per $|x| < 1$, avere $S(x)$ espresso sotto la forma

$$S(x) = \sum_1^\infty{}_m c_m x^m\,, \tag{2}$$

---

(2) *Ueber einige asymptotische Gesetze der Zahlentheorie*, « Giornale di Crelle », tomo LXXVII, (1874) p. 289.

(3) Veggasi, ad es., G. EISENSTEIN, « Giornale di Crelle », tomo XXVII (1844); M. CURTZE, *Notes diverses sur la série de* LAMBERT *et la loi des nombres premiers*, « Ann. di Mat. », ser. 2ª, t. I (1867–68), p. 285; S. PINCHERLE, *Sopra alcuni sviluppi in serie per funzioni analitiche*, « Mem. dell'Acc. di Bologna », serie IV, tomo III (1882).

dove c_m è nullo, se m è un numero primo, maggiore o eguale ad 1 in tutti gli altri casi.

Tracciata una circonferenza C col centro nell'origine, di raggio ϱ, eguale, per esempio, ad 1/2, la serie $\sum_{1}^{\infty}{}_m\, c_m x^m$ convergerà in egual grado lungo C e sarà quindi integrabile termine a termine; lo stesso si potrà dire del prodotto $x^z \sum_{1}^{\infty}{}_m\, c_m x^m$, qualunque sia il numero finito z reale o complesso, poichè x non si annulla, nè diviene infinito lungo la circonferenza. C'è da osservare soltanto che, x^z essendo funzione multiforme, bisogna fissare come e su quale degli infiniti rami di $x^z \sum_{1}^{\infty}{}_m\, c_m x^m$ si opera l'integrazione. Questo si fa nel modo più semplice, ponendo $x = \varrho e^{i\theta}$ e conducendo l'integrazione lungo la circonferenza C da $\theta = 0$ a $\theta = 2\pi$. Le altre determinazioni dello stesso integrale si avrebbero facendo variar θ da un valore iniziale arbitrario θ_0 a $\theta_0 + 2\pi$.

Ponendo pertanto

$$P(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C x^{z-1} S(x)\, dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varrho^z e^{iz\theta} S(\varrho e^{i\theta})\, d\theta\,, \tag{3}$$

resta determinato in modo unico una funzione uniforme $P(z)$ della variabile complessa z, singolare soltanto per $z = \infty$, cioè una trascendente intera.

Indicando con n un numero intero, si ha immediatamente

$$P(n) = 0 \qquad (n \geqslant 0)\,, \tag{4}$$

$$P(-n) = c_n \qquad (n \geqslant 1)\,. \tag{5}$$

La (5) merita di essere notata, perchè, dato ad arbitrio un numero intero n, permette di decidere se esso sia o no primo.

Per ogni altro valore non intero di z, ponendo ancora $x = \varrho e^{i\theta}$ e tenendo presente l'osservazione fatta, si può scrivere $P(z)$ sotto la forma

$$\begin{aligned} P(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int_C \sum_{1}^{\infty}{}_m\, c_m x^{m+z-1}\, dx = \frac{1}{2\pi i}\left\{\sum_{1}^{\infty}{}_m\, c_m \frac{x^{m+z}}{m+z}\right\}_{\varrho e^0}^{\varrho e^{2\pi i}} \\ &= \frac{1}{2\pi i}\, \varrho^z (e^{2\pi i z} - 1) \sum_{1}^{\infty}{}_m \frac{c_m \varrho^m}{m+z}\,. \end{aligned} \tag{6}$$

Se z non è reale e quindi del tipo $\mu + i\nu$ (con ν diverso da zero), mettendo in evidenza in $\sum_1^\infty {}_m\, c_m \varrho^m/(m+z)$ la parte reale e la parte immaginaria, potremo scrivere

$$P(z) = \frac{1}{2\pi i}\, \varrho^z (e^{2\pi i z} - 1) \left\{ \sum_1^\infty {}_m \frac{c_m \varrho^m (m+\mu)}{(m+\mu)^2 + \nu^2} - i\nu \sum_1^\infty {}_m \frac{c_m \varrho^m}{(m+\mu)^2 + \nu^2} \right\},$$

da cui apparisce che $P(z)$ non può annullarsi per valori complessi dell'argomento z. Infatti, ϱ^z, $e^{2\pi i z} - 1$ non vanno certamente a zero per valori finiti non interi di z e nel terzo fattore il coefficiente dell'unità immaginaria

$$-\nu \sum_1^\infty {}_m \frac{c_m \varrho^m}{(m+\mu)^2 + \nu^2)},$$

siccome i termini della serie sono tutti positivi, non si può annullare per $\nu \lessgtr 0$, quindi il fattore stesso è certamente diverso da zero.

Ciò posto, noi ci proponiamo di determinare per ciascun numero intero negativo $-n$ un cerchio di centro $-n$ e di raggio r_n, entro cui non cade alcuna o tutt'al più una radice dell'equazione $P(z) = 0$. Siccome si è visto or ora che $P(z)$ non può avere radici immaginarie, basterà prendere in esame i valori reali di z nell'intorno di ciascun $-n$.

Supporremo dapprima n non primo. Allora, facendo nella (6), $z = -n \pm r_n$, il terzo fattore

$$\sum_1^\infty {}_m \frac{c_m \varrho^m}{m - n \pm r_n},$$

potrà essere scritto

$$\sum_1^\infty {}_m \frac{c_m \varrho^m}{m - n \pm r_n} = -\sum_1^{n-1} {}_m \frac{c_m \varrho^m}{n - m \mp r_n} \pm \frac{c_n \varrho^n}{r_n} + \sum_{n+1}^\infty {}_m \frac{c_m \varrho^m}{m - n \pm r_n}, \quad (c_n > 0).$$

Assumendo r_n già minore di $1/2$, avremo manifestamente nelle due sommatorie del secondo membro

$$\left| \frac{1}{m - n \pm r_n} \right| < 2, \qquad c_m < m,$$

qualunque sia m, e per conseguenza

$$\left| -\sum_1^{n-1} {}_m \frac{c_m \varrho^m}{n - m \mp r_n} + \sum_{n+1}^\infty {}_m \frac{c_m \varrho^m}{m - n \pm r_n} \right| < 2 \sum_1^\infty {}_m\, m \varrho^m < \frac{2\varrho}{(1-\varrho)^2} = 4,$$

per essersi fin da principio assunto $\varrho = 1/2$; ne viene che, prendendo r_n in modo da rendere

$$\frac{c_n \dfrac{1}{2^n}}{r_n} \geqslant 4\,,$$

cioè, per esempio, $r_n = 1/2^{n+2}$, nell'intervallo da $(-n-1/2^{n+2})$ a $(-n+1/2^{n+2})$ non cade alcuna radice dell'equazione.

Se invece n è primo e quindi $c_n = 0$, mettendo in evidenza il primo termine non nullo, potremo scrivere (per $n > 3$)

$$\sum_1^\infty {}_m \frac{c_m\varrho^m}{m-n\pm r_n} = \frac{-\varrho^4}{n-4\mp r^n} - \sum_5^{n-1} {}_m \frac{c_m\varrho^m}{n-m\mp r_n} + \sum_{n+1}^\infty {}_m \frac{c_m\varrho^m}{m-n\pm r_n}\,;$$

qui, assumendo ancora $r_n \leqslant 1/2$, avremo dappertutto

$$\left|\frac{c_m}{m-n\pm r_n}\right| < 2m\,,$$

onde per la parte positiva, sarà (*)

$$\sum_{n+1}^\infty {}_m \frac{c_m\varrho^m}{m-n\pm r_n} < 2\sum_{n+1}^\infty {}_m m\varrho^m = 2\varrho\left[\frac{1}{(1-\varrho)^2} - 1 - 2\varrho - 3\varrho^2 - \ldots - n\varrho^{n-1}\right]$$

$$= \frac{2\varrho^{n+1}\{1+n(1-\varrho)\}}{(1-\varrho)^2} = \frac{n+2}{2^{n-1}}\,, \quad \text{per} \quad \varrho = 1/2;$$

d'altronde la parte negativa non è certamente inferiore in valore assoluto al suo primo termine $\varrho^4/(n-4\mp r_n)$ e siccome

$$\frac{\varrho^4}{n-4\mp r_n} \geqslant \frac{1}{16(n-4+r_n)} > \frac{n+2}{2^{n-1}} \quad \text{per} \quad n \geqslant 12\,,$$

così si può senz'altro asserire che, se n è primo, nell'intervallo da $(-n-1/2)$ a $(-n+1/2)$ e quindi a più forte ragione nell'intervallo da $(-n-1/2^{n+2})$ a $(-n+1/2^{n+2})$, l'espressione $\sum_1^\infty {}_m c_m\varrho^m/(m+z)$ si mantiene costantemente negativa.

Riassumendo, si conclude che per $n \geqslant 12$, qualunque sia il numero intero n, entro il cerchio di centro $-n$ e di raggio $r_n = 1/2^{n+2}$ cade nessuna, ovvero soltanto una radice dell'equazione $P(z) = 0$. Si può proprio

(*) Nella formula successiva figura nell'originale qualche svista che è stata corretta. [N. d. R.].

asserire soltanto una, poichè i punti $-n$, con n primo, in cui $P(z)$ si annulla, non sono radici multiple. Infatti, essendo $c_n = 0$, vale per $P(-n)$ l'espressione (6) e, siccome abbiamo visto che in questo caso $\sum_1^\infty {}_m c_m \varrho^m/(m+z)$ resta, per $z = -n$, finito e diverso da zero, $P(-n)$ si annulla come $e^{-2\pi i n} - 1$, cioè semplicemente.

Noi siamo ora in grado di determinare il numero dei numeri primi compresi in un dato intervallo (α, β). Supporremo, ciò che si può fare senza restrizione, β, α non interi, $\beta > \alpha > 12$.

Indicando con h un qualunque numero intero compreso fra α e β e con C_h la circonferenza di raggio $1/2^{n+2}$ descritta intorno a $-h$, per un noto teorema di CAUCHY, l'integrale

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_h} \frac{P'(z)}{P(z)}\, ex$$

rappresenta il numero delle radici di $P(z)$ comprese entro C_h, quindi 0 o 1 secondochè h è numero composto o primo. Ne deduciamo che il numero $N_{\alpha\beta}$ dei numeri primi compresi fra α e β potrà essere espresso da

$$N_{\alpha\beta} = \frac{1}{2\pi i} \sum_{E(\alpha)+1}^{E(\beta)} {}_h \int_{C_h} \frac{P'(z)}{P(z)}\, dz\,, \tag{7}$$

dove $E(\alpha)$, $E(\beta)$ designano, secondo la notazione di LEGENDRE, i massimi interi contenuti in α e β rispettivamente, $P(z)$, come segue dalle (1), (3), è definito da

$$P(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C x^{z-1} \left\{ \sum_1^\infty {}_m \frac{x^m}{1-x^m} - \frac{2x^2}{1-x} - x \right\} dx = \sum_0^\infty {}_n \frac{a_n}{n!} z^n\,,$$

con

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C (\log x)^n \left\{ \sum_1^\infty {}_m \frac{x^m}{1-x^m} - \frac{2x^2}{1-x} - x \right\} \frac{dx}{x}\,.$$

Nell'espressione di $N_{\alpha\beta}$, le circonferenze C_h si possono anche assumere tutte eguali alla minima tra esse $C_{E(\beta)}$ di raggio $\beta' = 1/2^{E(\beta)+2}$.

Indicando con C' il cerchio di raggio β' col centro nell'origine, si ha con facile trasformazione dalla (7)

$$N_{\alpha\beta} = \frac{1}{2\pi i} \sum_{E(\alpha)+1}^{E(\beta)} {}_h \int_{C'} \frac{P'(z-h)}{P(z-h)}\, dz = \frac{\beta'}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i\theta}\, d\theta \sum_{E(\alpha)+1}^{E(\beta)} {}_h \frac{P'(\beta' e^{i\theta} - h)}{P(\beta' e^{i\theta} - h)}\,,$$

la qual formola risolve esplicitamente la questione, che ci eravamo proposti.

VII.

SULL' INVERSIONE DEGLI INTEGRALI DEFINITI NEL CAMPO REALE

« Atti Acc. Torino », vol. XXXI (1895-96), pp. 25-51

In alcune ricerche di analisi pura e in moltissimi problemi di fisica e di meccanica fa d'uopo invertire qualche integrale definito. Si può anzi affermare che non v'è ramo della fisica matematica, in cui non si incontrino difficoltà di questa natura. Con tutto ciò, per quanto almeno è a mia cognizione, non fu ancora dedicata a siffatto problema alcuna indagine sistematica; se ne considerarono soltanto, in causa del frequente loro apparire, alcuni casi particolari, per la cui trattazione furono da varii autori proposti disparati artifizii.

A tacere di alcune fomule di CAUCHY, che pur rientrano in quest'ordine di studii, ABEL, per il primo, da taluna ricerca sul moto brachistocrono venne condotto ad un teorema di inversione, che porta il suo nome e che, come mise in chiara luce il prof. BELTRAMI (1), è suscettibile di forme svariatissime, tanto che ad esso (finchè si resta nel campo reale (2)) quasi unicamente possono riportarsi i casi di inversione, che gli altri autori hanno ritrovato.

Molti di questi tuttavia presentano grande interesse per la questione che ne vien risolta e basterà ricordare tra i più notevoli il teorema di SCHLÖMLICH (sugli sviluppi in serie procedenti per funzioni cilindriche di argomenti mutlipli) e le molteplici applicazioni dello stesso prof. BELTRAMI.

Se io non mi inganno, eccedono il teorema di ABEL soltanto una generalizzazione di esso riportata da SONINE nelle sue *Recherches sur les fonctions*

---

(1) *Intorno ad un teorema di* ABEL, « Rend. dell'Istituto Lombardo », ser. II, vol. XIII; *Sulla teoria della attrazione degli ellissoidi*, « Mem. dell'Acc. di Bologna », ser. IV, tom. I.

(2) Nel campo complesso la questione fu già discussa sotto aspetto più generale da ABEL e da RIEMANN; venne poi recentemente ripresa dal Prof. PINCHERLE, dal sig. HJ. MELLIN e da me stesso.

cylindriques [3] e una breve, ma importantissima nota del prof. VOLTERRA [4], la quale costituisce forse il primo ed unico esempio di un criterio generale di inversione; il risultato è di ricondurre la questione ad altra più semplice della stessa natura, sì che talora anche riesce di raggiungere lo scopo definitivo.

Ciò accade del pari nel presente scritto; esso si informa (salvo le necessarie modificazioni, dovute alla maggior generalità delle funzioni, con cui si opera) allo stesso concetto fondamentale, che esposi già nella nota *I gruppi di operazioni funzionali e l'inversione degli integrali definiti* [5].

Il primo § è destinato a dare il profilo generale di un metodo, che può condurre alla determinazione di $v(y)$ dalla formula:

$$u(x) = \int_{a(x)}^{b(x)} f(x, y)\, v(y)\, dy\,,$$

dove $u(x)$ e $v(y)$ si intendono funzioni integrabili e $f(x, y)$ soddisfa ad una equazione lineare a variabili separate del tipo:

$$\sum_0^n{}_r\, p_r(x) \frac{\partial^{n-r} f(x, y)}{\partial x^{n-r}} + \sum_0^m{}_s\, q_s(y) \frac{\partial^{m-s} f(x, y)}{\partial y^{m-s}} = 0\,,$$

che chiamo equazione caratteristica; i §§ seguenti sono dedicati alle applicazioni. Io ho considerato esclusivamente il caso che la equazione caratteristica in f sia del primo ordine, nella quale ipotesi si può ridurre senza difficoltà alla forma canonica:

$$u(x) = \int_{a(x)}^{b(x)} f(x - y)\, v(y)\, dy\,.$$

Il procedimento accennato riesce completamente per due casi particolari molto interessanti, cioè:

$$u(x) = \int_a^x f(x - y) v(y)\, dy \quad \text{e} \quad u(x) = \int_a^b f(x - y) v(y)\, dy \qquad (a \text{ e } b \text{ costanti}).$$

Per la prima di queste relazioni, ammessa press'a poco soltanto l'integrabilità della u e della f, immaginando data $u(x)$ in un intervallo qua-

(3) « Math. Ann. », B. XVI.
(4) *Sopra un problema di elettrostatica*, « Acc. dei Lincei », Transunti, ser. 3a, vol. VIII (1884).
(5) « Rend. dell'Ist. Lombardo », ser. II, vol. XXVIII. (1895) [in questo vol.: V, pp. 125-152].

lunque (ab), assegno una espressione analitica (cioè formata cogli ordinari simboli di calcolo) atta a rappresentare $v(y)$ nello stesso intervallo; come casi particolari ritrovo il teorema di ABEL e la generalizzazione indicata da SONINE. Per la seconda formula invece, giungo ad un risultato utile, soltanto quando la $u(x)$ è nota ed integrabile in tutto l'intervallo $(-\infty, \infty)$.

Quanto alle equazioni caratteristiche d'ordine superiore al primo, debbo rimetterne lo studio ad altra comunicazione, per non oltrepassare i giusti limiti della presente.

Spero che nel frattempo mi si offra anche occasione di applicare lo stesso metodo a qualche problema di fisica.

1. – Data l'equazione:

$$u(x) = \int_{a(x)}^{b(x)} f(x, y) v(y)\, dy\,, \tag{1}$$

dove $a(x)$, $b(x)$, $f(x, y)$, $u(x)$ si suppongono funzioni conosciute (le prime tre finite, continue e derivabili quanto occorre e la $u(x)$ integrabile in un intervallo pur dato), il problema di inversione consiste nel determinare una funzione $v(y)$ atta all'integrazione, per cui la (1) riesca identicamente soddisfatta.

Ogni qualvolta la funzione $f(x, y)$, che si può chiamare *caratteristica*, soddisfaccia ad una equazione *caratteristica* a derivate parziali e a variabili separate del tipo:

$$\{ \Delta_x^{(n)} + \Theta_y^{(m)} \} f = 0, \tag{2}$$

$$\left(\Delta_x^{(n)} \equiv \sum_0^n{}_r\, p_r(x) \frac{\partial^{n-r}}{\partial x^{n-r}}\,, \quad \Theta_y^{(m)} \equiv \sum_0^m{}_s\, q_s(y) \frac{\partial^{m-s} f}{\partial y^{m-s}} \right),$$

(cioè essendo $\Delta_x^{(h)}$, $\Theta_y^{(m)}$ forme differenziali lineari qualunque in x, y dell'ordine rispettivo n, m), si può seguire per l'inversione della (1) un criterio direttivo, che permette in qualche caso di andare in fondo.

Gioverà premettere alcune brevi osservazioni.

Formiamo l'equazione:

$$\{ \Delta'^{(n)}_x - \chi(\tau) \} \mu(x) = 0\,, \tag{3}$$

dove Δ'^{n}_x è la forma aggiunta a Δ^n_x e $\chi(\tau)$ è una funzione, che si può scegliere a piacere, di un parametro τ; e poniamo:

$$\nu_\tau(y) = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y) \mu_\tau(x)\, dx\,, \tag{4}$$

essendo $\mu_\tau(x)$ una soluzione determinata della (3). Sarà:

$$\{ \Theta_y^{(m)} + \chi(\tau) \} \nu_\tau(y) = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} \{ \Theta_y^{(m)} + \chi(\tau) \} f(x, y)\mu_\tau(x)\, dx$$

+ termini provenienti dalla derivazione dei limiti.

Ma, in causa della (2): $\Theta_y^{(m)} f(x, y) = - \Delta_x^{(n)} f(x, y)$, e, per la definizione stessa di forma aggiunta,

$$\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} \Delta_x^{(n)} f(x, y)\mu_\tau(x)\, dx = + \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y) \Delta'^{(n)}_x \mu_\tau(x)\, dx$$

+ termini ai limiti.

Chiamando complessivamente $\Omega(y, \tau)$ i termini fuori dell'integrale, che sono perfettamente conosciuti, e avendo riguardo alla (3), si conclude che le funzioni $\nu_\tau(y)$ definite dalla (4) soddisfanno, qualunque sia il valore di τ, ad una equazione differenziale del tipo:

$$\{ \Theta_y^{(m)} + \chi(\tau) \} \nu = \Omega(y, \tau) , \tag{5}$$

la quale le individua completamente, purchè le costanti di integrazione si determinino attribuendo ad y nella (4) valori particolari.

Ciò posto, riprendiamo l'equazione (1) e integriamo rispetto ad x fra certi limiti c e d, dopo aver moltiplicato ambo i membri per una funzione F da determinarsi, dipendente da x e, ove convenga, da altre variabili ausiliarie z, t, ecc.

Avremo:

$$\int_c^d Fu(x)\, dx = \int_c^d F\, dx \int_{a(x)}^{b(x)} f(x, y)v(y)\, dy .$$

Supponendo di poter in qualche modo invertire le due integrazioni rispetto ad x e ad y, la relazione precedente assumerà l'aspetto:

$$\int_c^d Fu(x)\, dx = \int_\gamma^\delta v(y)\, dy \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y)F\, dx . \tag{6}$$

Si tratta ora (e a ciò si trova ricondotta tutta la difficeltà della questione) di operare in modo che il secondo membro della (6) divenga una rappresentazione integrale della funzione $v(y)$; in tale ipotesi infatti, il primo membro, che potrà riguardarsi conosciuto, fornirà l'inversione richiesta.

In generale è noto [6] che:

$$\int_0^\infty dt \int_\gamma^\delta \Psi\{t(y-z)\}\, v(y)\, dy = v(z)\,, \quad (\gamma < z < \delta)\,,$$

essendo $v(y)$ generalmente finita e continua, ed integrabile nell'intervallo $(\gamma\delta)$ e Ψ funzione *fluttuante*.

Se dunque si giunge a conoscere una funzione $F(x, z, t)$ tale che:

$$\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y) F(x, z, t)\, dx = \Psi(t(y-z)),$$

basta poi integrare il primo membro della (6) fra 0 e ∞ per avere una rappresentazione analitica della funzione v.

Ciò vale qualunque sia la funzione caratteristica $f(x, y)$; l'ipotesi restrittiva da noi introdotta, che essa soddisfaccia ad una equazione del tipo (2), permette di fare un passo più avanti e di riportare la questione, che ci occupa, ad altra, se non risoluta, certo più studiata e in qualche caso già nota.

Infatti, dato il sistema di funzioni $\nu_\tau(y)$ $(\tau = 1, 2, ..., \infty)$ definite dalla (5), dico essere sufficiente per lo scopo nostro che si sappia sviluppare una funzione assegnata $\varphi(y)$ in serie procedente per funzioni $\nu_\tau(y)$ del sistema, si possa cioè, per quanto con restrizioni sulla natura di $\varphi(y)$, porre:

$$\varphi(y) = \sum_0^\infty{}_\tau\, C_\tau \nu_\tau(y)\,,$$

colle C_τ indipendenti da y.

Per provare questo asserto, si scelga una qualunque funzione fluttuante, che soddisfaccia alle volute restrizioni (ve ne ha certamente, perchè anzi le forme più note sono addirittura funzioni analitiche) e si

---

(6) W. Hamilton, *On fluctuating function*, « Transaction of the Royal Irish Academy », vol. XIX, 1843; P. Du Bois-Reymond, *Ueber die allgemeinen Eigenschaften der Klasse von, Doppelintegralen, zu welcher das Fourier'sche Doppelintegral gehört*, « Crelle's Journal », B. LIX 1868; C. Neumann, *Ueber die nach Kreis-Kugel- und Cylinder-Funktionen fortschreitenden Entwickelungen*, Leipzig, 1881; veggasi in particolare Cap. 3, § 6; L. Kronecker, *Vorlesungen über Mathematik*. Erster Band, Leipzig, 1894, p. 77.

avrà per $\Psi(t(y-z))$, risguardata come funzione della sola y coi due parametri t e z, una identità del tipo:

$$\Psi\{t(y-z)\} = \sum_0^\infty{}_\tau\, C_\tau(t, z)\nu_\tau(y)\,. \tag{7}$$

Se quindi si pone nella (6)

$$F(x, z, t) = \sum_0^\infty{}_\tau\, C_\tau(t, z)\mu_\tau(x)\,,$$

tenendo presente la (4) e la (7), si ha

$$\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} F(x, z, t)f(x, y)\,dx = \Psi\{t(y-z)\}\,,$$

e per conseguenza, in base a quanto si è osservato a proposito della (6) stessa,

$$v(z) = \int_0^\infty dt\int_c^d \sum_0^\infty{}_\tau\, C_\tau(t, z)\mu_\tau(x)u(x)\,dx\,, \qquad (\gamma < z < \delta)\,. \tag{8}$$

Le condizioni di effettiva validità per il procedimento formale qui indicato sono manifestamente pochissimo restrittive; il discuterle partitamente ci porterebbe molto in lungo con scarso profitto, essendo assai più semplice riconoscerlo nei casi singoli.

Mi pare degna di nota la seguente circostanza: Ogniqualvolta i coefficienti dell'equazione differenziale (5) sono analitici (il che per esempio, accade certamente, quando lo sieno le $q_s(y)$, $\alpha(y)$, $\beta(y)$, $f(x, y)$), il problema di invertire la (1) si riduce ad una questione concreta nel campo analitico, alla sviluppabilità di una data funzione in serie procedente per funzioni del sistema (5) (7).

2. – Passiamo ora a considerare con qualche dettaglio il caso che l'equazione caratteristica in f sia del primo ordine.

---

(7) Veggansi a tale proposito alcune considerazioni generali utili in molti casi, contenute nella Memoria del Prof. S. PINCHERLE, *Sopra alcuni sviluppi in serie per funzioni analitiche*, « Mem. dell'Acc. di Bologna », ser. IV, tom. III (1882).

Avremo:

$$u(x) = \int_{a(x)}^{b(x)} f(x, y) v(y)\, dy \,, \tag{9}$$

con:

$$\{\Delta_x^{(1)} + \Theta_y^{(1)}\} f(x, y) \equiv p_0(x) \frac{\partial f}{\partial x} + p_1(x) f + q_0(y) \frac{\partial f}{\partial y} + q_1(y) f = 0 \,, \tag{10}$$

alle quali, ove si ponga:

$$\left|\begin{array}{l} x_1 = \displaystyle\int_{x_0}^{x} \frac{dx}{p_0(x)}, \quad y_1 = \int_{y_0}^{y} \frac{dy}{q_0(y)}, \quad f_1(x_1, y_1) = f(x, y) \cdot e^{\int_{x_0}^{x} \frac{p_1(x)}{p_0(x)} dx + \int_{y_0}^{y} \frac{q_1(y)}{q_0(y)} dy} , \\[2ex] u_1(x_1) = u(x) \cdot e^{\int_{x_0}^{x} \frac{p_1(x)}{p_0(x)} dx} , \quad v_1(y_1) = v(y) \cdot q_0(y) \cdot e^{-\int_{y_0}^{y} \frac{q_1(y)}{q_0(y)} dy} , \\[2ex] a_1(x_1) = \displaystyle\int_{y_0}^{a(x)} \frac{dy}{q_0(y)}, \quad b_1(x_1) = \int_{y_0}^{b(x)} \frac{dy}{q_0(y)}, \end{array}\right. \tag{11}$$

si attribuisce la forma canonica (⁸):

$$u_1(x_1) = \int_{a_1(x_1)}^{b_1(x_1)} f_1(x_1, y_1) v_1(y_1)\, dy_1 \,,$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_1}{\partial y_1} = 0 \,.$$

Scrivendo nuovamente $x, y, \ldots$, al posto di $x_1, y_1, \ldots$, ed osservando che l'integrale generale di $\partial f/\partial x + \partial f/\partial y = 0$ è $f(x - y)$, le due precedenti equazioni si possono sostituire con:

$$u(x) = \int_{a(x)}^{b(x)} f(x - y) v(y)\, dy \,, \tag{12}$$

dove f è simbolo di funzione arbitraria.

(⁸) Con ovvie modificazioni delle (11) si perviene a questo stesso risultato, anche quando $p_0(x)$ o $q_0(x)$ sieno nulli.

Finchè i limiti di integrazione $a(x)$ e $b(x)$ rimangono indeterminati, il criterio generale di inversione, indicato nel precedente §, non si lascia applicare alla (12) in modo da raggiungere un risultato definitivo; si possono però trattare esaurientemente due casi notevoli ($a = \text{cost.}$, $b(x) = x$; $a, b = \text{cost.}$), che molto spesso si incontrano nell'analisi applicata.

A questi due casi limiteremo il nostro studio, occupandoci successivamente di determinare $v(y)$ dalla equazione:

$$u(x) = \int_a^x f(x-y)v(y)\,dy\,, \tag{13}$$

ovvero dalla:

$$u(x) = \int_a^b f(x-y)v(y)\,dy\,. \tag{14}$$

La ricerca consterà di due parti: 1) ammessa l'esistenza della funzione $v(y)$, determinarne una espressione analitica; 2) assegnare per questa espressione le condizioni di effettiva validità.

3. – Riferendosi alla (13) [9], suppongasi $u(x)$ atta all'integrazione nell'intervallo $(a\ \infty)$, si moltiplichino ambo i membri della (13) per $\cos \pi t(x-z)\,dx$ e si integri fra a ed ∞. Verrà:

$$\int_a^\infty \cos \pi t(x-z)u(x)\,dx = \int_a^\infty \cos \pi t(x-z)\,dx \int_a^x f(x-y)v(y)\,dy\,,$$

od anche, invertendo le integrazioni colla regola di DIRICHLET:

$$\int_a^\infty \cos \pi t(x-z)u(x)\,dx = \int_a^\infty v(y)\,dy \int_y^\infty f(x-y)\cos \pi t\,(x-z)\,dx\,.$$

(9) Nella (13) si è scritto $\int_a^x$, supponendo, tanto per fissare le idee, $a < x$; i risultati, che stabiliremo in appresso si dovranno senz'altro ritenere estesi anche agli integrali del tipo $\int_x^b$ $(x < b)$. Basterà infatti scambiare x in $-x$, y in $-y$, b in $-a$, $f(\lambda)$ in $f(-\lambda)$, ecc., per essere ricondotti al primo caso.

Se nell'integrale interno del secondo membro si assume $\lambda = x - y$ come variabile di integrazione e si pone:

$$h(t) = \int_0^\infty f(\lambda) \cos \pi t \lambda \, d\lambda \,, \tag{15}$$

$$k(t) = \int_0^\infty f(\lambda) \operatorname{sen} \pi t \lambda \, d\lambda \,, \tag{16}$$

si ha immediatamente:

$$\int_a^\infty \cos \pi t(x - z) u(x) \, dx = h(t) \int_a^\infty \cos \pi t(y - z) v(y) \, dy - k(t) \int_a^\infty \operatorname{sen} \pi t(y - z) v(y) \, dy.$$

In modo analogo:

$$\int_a^\infty \operatorname{sen} \pi t(x - z) u(x) \, dx = k(t) \int_a^\infty \cos \pi t(y - z) v(y) \, dy + h(t) \int_a^\infty \operatorname{sen} \pi t(y - z) \, v(y) \, dy,$$

da cui, purchè $h(t)$ e $k(t)$ non si annullino contemporaneamente:

$$\int_a^\infty \cos \pi t(y - z) v(y) \, dy = \int_a^\infty u(x) \, \frac{h(t) \cos \pi t(x - z) + k(t) \operatorname{sen} \pi t(x - z)}{h(t)^2 + k(t)^2} \, dx \,.$$

Integrando ambo i membri rispetto a t fra 0 e ∞, qualora $v(y)$ sia funzione generalmente finita e continua, atta all'integrazione fra 0 e ∞ e dotata soltanto di un numero finito di massimi e minimi, o più generalmente tale che le si possa applicare la rappresentazione integrale di FOURIER [10], si riconosce che dovrà aversi *generalmente* (ciò che basta per il nostro scopo):

$$\int_0^\infty dt \int_a^\infty u(x) \, \frac{h(t) \cos \pi t(x - z) + k(t) \operatorname{sen} \pi t(x - z)}{h(t)^2 + k(t)^2} \, dx = v(z) \,, \qquad (z > a), \tag{17}$$

$$\int_0^\infty dt \int_a^\infty u(x) \, \frac{h(t) \cos \pi t(x - z) + k(t) \operatorname{sen} \pi t(x - z)}{h(t)^2 + k(t)^2} \, dx = 0 \,, \qquad (z < a) \,. \tag{18}$$

---

[10] D'ora innanzi chiamerò brevemente *funzioni di* FOURIER quelle, che si possono *generalmente* rappresentare mediante il noto integral doppio scoperto da questo autore. Veggasi in proposito: P. DU BOIS-REYMOND, *Die Theorie der Fourier'schen Integrale und Formeln*, « Math. Annalen », B. IV.

Per stabilire queste due formule noi ci siamo appoggiati alle relazioni

$$\int_y^\infty f(x-y)\cos\pi t(x-z)\,dx = h(t)\cos\pi t(x-z) - k(t)\,\mathrm{sen}\,\pi t(y-z)\,,$$

$$\int_y^\infty f(x-y)\,\mathrm{sen}\,\pi t(x-z)\,dx = k(t)\cos\pi t(y-z) + h(t)\,\mathrm{sen}\,\pi t(y-z)\,,$$

che si giustificano con un semplice cambiamento della variabile di integrazione; non è tuttavia fuori di luogo il notare come esse si ritrovino, seguendo il concetto direttivo esposto a § 1. Abbiamo infatti, applicando le notazioni di allora al caso presente ed assumendo

$$\chi(\tau) = -i\pi\tau, \qquad \frac{d\mu}{dx} - i\pi t\mu = 0 \qquad \text{e} \qquad \frac{d\nu}{dy} - i\pi t\nu = 0,$$

ossia

$$\nu_t(y) = g(t)\,e^{i\pi t y}$$

la costante $g(t)$ potendosi determinare col fare $y = 0$ nella

$$\nu_t(y) = \int_y^\infty f(x-y)\mu_t(x)\,dx,$$

ciò che, prendendo

$$\mu_t(x) = e^{i\pi t x},$$

dà

$$g(t) = \int_0^\infty f(x)\,e^{i\pi t x}\,dx.$$

Ora, se si pone: $g(t) = h(t) + ik(t)$, le funzioni $h(t)$, $k(t)$ coincidono con quelle definite dalle (15), (16) e scindendo la

$$\nu_t(y) = \int_y^\infty f(x-y)\mu_t(x)\,dx$$

nelle sue parti reale ed immaginaria, si ottengono le identità

$$\int_y^\infty f(x-y)\cos\pi t x\,dx = h(t)\cos\pi t y - k(t)\,\mathrm{sen}\,\pi t y\,,$$

$$\int_y^\infty f(x-y)\,\mathrm{sen}\,\pi t x\,dx = k(t)\cos\pi t y + h(t)\,\mathrm{sen}\,\pi t y\,,$$

donde agevolmente le due riferite sopra. L'artificio, usato precedentemente nel dedurle, presenta il vantaggio di non esigere la derivabilità della funzione $f(x-y)$, che si presuppone invece nel metodo generale.

Ritenuto ciò, converrà riprendere l'espressione trovata sopra per $v(y)$ e verificarla mediante diretta sostituzione nella (13). Finora infatti noi abbiamo stabilito che:

Se esiste una funzione di Fourier $v(y)$ atta all'integrazione fra a e ∞, che rende

$$\int_a^x f(x-y)v(y)\,dy = u(x),$$

essendo $u(x)$ pure integrabile nell'intervallo $(a\ \infty)$; se la f, risguardata come funzione di un argomento λ, è generalmente finita e continua e integrabile in ogni intervallo finito, e se di più hanno significato i due integrali:

$$h(t) = \int_0^\infty f(\lambda)\cos \pi t\lambda\, d\lambda\,, \qquad k(t) = \int_0^\infty f(\lambda)\operatorname{sen} \pi t\lambda\, d\lambda\,,$$

e non si annullano contemporaneamente per alcun valore di t compreso fra 0 e ∞, sussiste la duplice relazione (17), (18), ossia, più comodamente, cambiando x in z e z in y

$$(17') \qquad \int_0^\infty dt \int_a^\infty u(z)\,\frac{h(t)\cos \pi t(z-y) + k(t)\operatorname{sen}\pi t(z-y)}{h(t)^2 + k(t)^2}\,dz = v(y)\,, \qquad (y > a),$$

$$(18') \qquad \int_0^\infty dt \int_a^\infty u(z)\,\frac{h(t)\cos \pi t(z-y) + k(t)\operatorname{sen}\pi t(z-y)}{h(t)^2 + k(t)^2}\,dz = 0\,, \qquad (y < a)\,.$$

Reciprocamente importa di ricercare se, per una f, che soddisfaccia alle condizioni sopra dichiarate, data ad arbitrio una funzione integrabile u (e ci converrà qui aggiungere di Fourier) il primo membro della (17′) (di cui prescindendo dall'ipotesi preventiva dell'esistenza di v, nulla potrebbe dirsi), sostituito al posto di v nella (13), la renda identicamente verificata.

Sarà per questo necessario, in conformità a quanto si è detto sopra, che la (17′) definisca una funzione di Fourier e che sussista la (18′). D'altra parte però, come ora vedremo, queste condizioni sono anche sufficienti.

Avremo infatti dalle (17′) e (18′), moltiplicandone ambo i membri per $f(x-y)$ ed integrando, rispetto ad y fra $-\infty$ ed x:

$$\int_a^x f(x-y)v(y)\,dy$$

$$= \int_{-\infty}^x f(x-y)\,dy \int_0^\infty dt \int_a^\infty u(z)\,\frac{h(t)\cos\pi t(z-y)+k(t)\operatorname{sen}\pi t(z-y)}{h(t)^2+k(t)^2}\,dz$$

$$= \int_0^\infty dt \int_a^\infty u(z)\,\frac{h(t)\int_{-\infty}^x f(x-y)\cos\pi t(z-y)\,dy + k(t)\int_{-\infty}^x f(x-y)\operatorname{sen}\pi t(z-y)\,dy}{h(t)^2+k(t)^2}\,dz;$$

ponendo nei due integrali interni $x-y=\lambda$, e ricordando le (15) e (16) si ha immediatamente:

$$\int_{-\infty}^x f(x-y)\cos\pi t(z-y)\,dy = h(t)\cos\pi t(z-x) - k(t)\operatorname{sen}\pi t(z-x)\,,$$

$$\int_{-\infty}^x f(x-y)\operatorname{sen}\pi t(z-y)\,dy = k(t)\cos\pi t(z-x) + h(t)\operatorname{sen}\pi t(z-x)\,,$$

donde segue:

$$\int_a^x f(x-y)v(y)\,dy = \int_0^\infty dt \int_a^\infty \cos\pi t(z-x)u(z)\,dz\,,$$

ossia, applicando alla u il teorema di Fourier:

$$u(x) = \int_a^x f(x-y)v(y)\,dy\,. \tag{13}$$

In questa dimostrazione, è bene notarlo, non sarebbe necessaria per $v(y)$ la restrizione d'essere funzione di Fourier, ma basterebbe la integrabilità; tuttavia noi abbiamo aggiunto, come faremo anche in seguito, tale restrizione, perchè, ricordando quanto si è visto al principio di questo §, siamo così in grado di asserire che *quando esiste una soluzione della* (13), *essa è necessariamente esprimibile per mezzo della* (17′) *e quindi unica.*

L'inversione della (13) offerta dalla (17′) è suscettibile di una modificazione assai notevole, la quale permette di assegnare la incognita funzione $v(y)$ per valori di y compresi in un intervallo prefissato (ab), *mediante la sola conoscenza dei valori di* $u(x)$ *relativi allo stesso intervallo.*

Suppongasi infatti data $u(x)$ fra a e b; si può immaginarne una estensione fittizia oltre b, ponendo, per esempio, $u(x)=0$, $x>b$. La funzione $u(x)$ riesce così determinata in tutto l'intervallo $(a\ \infty)$ e vi soddisfa alle condizioni di FOURIER: quindi, ogniqualvolta esista una funzione $v(y)$, per cui:

$$\int_a^x f(x-y)v(y)\,dy = u(x)\,, \qquad (a<x<b)\,,$$

e

$$\int_a^x f(x-y)v(y)\,dy = 0\,, \qquad (x>b)\,,$$

sappiamo già che dovrà essere:

$$\int_0^\infty dt \int_a^\infty u(z)\,\frac{h(t)\cos \pi t(z-y)+k(t)\,\mathrm{sen}\,\pi t(z-y)}{h(t)^2+k(t)^2}\,dz = v(y)\,, \quad (y>a)\,,$$

$$\int_0^\infty dt \int_a^\infty u(z)\,\frac{h(t)\cos \pi t(z-y)+k(t)\,\mathrm{sen}\,\pi t(z-y)}{h(t)^2+k(t)^2}\,dz = 0\,, \quad (y<a)\,,$$

cioè, nel caso nostro:

$$\int_0^\infty dt \int_a^b u(z)\,\frac{h(t)\cos \pi t(z-y)+k(t)\,\mathrm{sen}\,\pi t(z-y)}{h(t)^2+k(t)^2}\,dz = v(y)\,, \quad (y>a)\,, \tag{19}$$

$$\int_0^\infty dt \int_a^b u(z)\,\frac{h(t)\cos \pi t(z-y)+k(t)\,\mathrm{sen}\,\pi t(z-y)}{h(t)^2+k(t)^2}\,dz = 0\,, \quad (y<a)\,; \tag{20}$$

inversamente poi si prova come sopra che, qualora la (20) sia soddisfatta e la (19) definisca una funzione di FOURIER $v(y)$, essa $v(y)$, per x compreso fra a e b, verifica la (13).

Noi abbiamo così stabilite le condizioni necessarie e sufficienti affinchè sia invertibile la (13) *per una determinata funzione u nota fra a e b e supposta nulla oltre b.* Tuttavia può ancora accadere che, per qualche funzione u data fra a e b, la (19), la quale presuppone l'accennata estensione oltre b, non abbia alcun significato, mentre invece esista una $v(y)$, che rende soddisfatta la (13). Di ciò daremo un effettivo esempio nel § seguente.

Sotto le solite ipotesi vi hanno altresì (e queste presentano il maggior interesse) funzioni caratteristiche f, per cui la (13) è invertibile, *comunque si assegni la funzione* u *nell'intervallo* $(a\ \infty)$. Vediamo in qual modo si possa riconoscere codesta insigne proprietà.

Si osservi che, se u può essere fissata a piacere, dovrà sussistere la (20), anche prendendo $u(z) = 0$ $(a < z < c)$, $u(z) = 1$ $(c < z < d)$, $u(z) = 0$ $(z > d)$, qualunque sieno c e d. Ciò dà:

$$\int_0^\infty dt \int_c^d \frac{h(t) \cos \pi t(z-y) + k(t) \operatorname{sen} \pi t(z-y)}{h(t)^2 + k(t)^2} dz = 0\,, \qquad (y < a), \tag{21}$$

o se si vuole, eseguendo l'integrazione rispetto a z e tenendo presente la (19):

$$\int_0^\infty \frac{h(t)\,\{\operatorname{sen} \pi t(d-y) - \operatorname{sen} \pi t(c-y)\} - k(t)\,\{\cos \pi t(d-y) - \cos \pi t(c-y)\}}{\pi t\,\{h(t)^2 + k(t)^2\}} dt = 0\,.$$

$$(y < a)\,.$$

Reciprocamente però, come ora vedremo, la (20) si trova soddisfatta per ogni funzione u di FOURIER, qualora sia verificata la (21) per una qualunque coppia di numeri c e d maggiori di a. Sarà questo pertanto il criterio cercato.

Noi ci limiteremo per brevità a considerare nella dimostrazione il caso che u sia generalmente finita e continua, integrabile e senza infiniti massimi o minimi; il risultato si intenderà senz'altro esteso a qualunque funzione di FOURIER mediante il metodo seguito dal DU BOIS-REYMOND (11).

In primo luogo sia u finita in tutto l'intervallo (ab); avendosi ammesso che essa è generalmente continua e dotata di un numero finito di massimi e minimi, si potrà scindere l'intervallo (ab) in un numero finito di segmenti tali che entro ciascuno di essi sia $u(z)$ continua e mai crescente o decrescente.

Dicasi generalmente $(\gamma\delta)$ uno di questi segmenti; potremo scrivere:

$$\int_0^\infty dt \int_a^b u(z) \frac{h(t) \cos \pi t(z-y) + k(t) \operatorname{sen} \pi t(z-y)}{h(t)^2 + k(t)^2} dz$$

$$= \sum \int_0^\infty dt \int_\gamma^\delta u(z) \frac{h(t) \cos \pi t(z-y) + k(t) \operatorname{sen} \pi t(z-y)}{h(t)^2 + k(t)^2} dz\,.$$

(11) Loco citato in (10).

In ciascun intervallo $(\gamma\delta)$, essendo $u(z)$ finita e mai crescente o decrescente e l'altro fattore (trigonometrico) integrabile, è lecito applicare il secondo teorema della media, dal che si trae:

$$\int_\gamma^\delta u(z) \frac{h(t)\cos \pi t(z-y) + k(t)\operatorname{sen} \pi t(z-y)}{h(t)^2 + k(t)^2} dz$$

$$= u(\gamma) \int_\gamma^j \frac{h(t)\cos \pi t(z-y) + k(t)\operatorname{sen} \pi t(z-y)}{h(t)^2 + k(t)^2} dz$$

$$+ u(\delta) \int_j^\delta \frac{h(t)\cos \pi t(z-y) + k(t)\operatorname{sen} \pi t(z-y)}{h(t)^2 + k(t)^2} dz\,, \qquad (\gamma < j < \delta),$$

e quindi:

$$\int_0^\infty dt \int_a^b u(z) \frac{\cos \pi t(z-y) h(t) + k(t)\operatorname{sen} \pi t(z-y)}{h(t)^2 + k(t)^2} dz$$

$$= \sum u(\gamma) \int_0^\infty dt \int_\gamma^j \frac{h(t)\cos \pi t(z-y) + k(t)\operatorname{sen} \pi t(z-y)}{h(t)^2 + k(t)^2} dz$$

$$+ \sum u(\delta) \int_0^\infty dt \int_j^\delta \frac{h(t)\cos \pi t(z-y) + k(t)\operatorname{sen} \pi t(z-y)}{h(t)^2 + k(t)^2} dz\,,$$

dove il secondo membro è nullo in causa della (21), come si era asserito. Allo stesso risultato si giunge poi anche se la funzione u, pur mantenendosi integrabile, diviene infinita in qualche punto α dell'intervallo (ab): infatti, escludendo questi punti α mediante piccoli intorni $(\alpha'\alpha'')$ si può fare in modo che la porzione di integrale (20), relativa al complesso di tali intorni, sia in valore assoluto minore di una quantità $\varepsilon > 0$ prefissata arbitrariamente piccola; dividendo poi l'intervallo totale (ab), esclusi gli intorni $(\alpha'\alpha'')$, in segmenti $(\gamma\delta)$, si trova, ragionando come sopra, che i relativi integrali si annullano, quindi il primo membro della (20) può rendersi in valore assoluto minore di ε, per quanto si scelga piccolo ε. Ciò basta per potere, anche nel caso presente, concludere giusta l'enunciato.

Sarà opportuno riassumere quanto si è trovato finora nel seguente:

Teorema. – *Sia $f(\lambda)$ funzione dell'argomento λ finita e continua in tutto l'intervallo* $(0\ \infty)$, *integrabile in ogni intervallo finito e tale che riescano convergenti i due integrali*:

$$h(t) = \int_0^\infty f(\lambda)\cos \pi t\lambda\, d\lambda, \qquad k(t) = \int_0^\infty f(\lambda)\operatorname{sen} \pi t\lambda\, d\lambda$$

e non si annullino contemporaneamente per alcun valore finito di t; sia $u(x)$ funzione di FOURIER *nell'intervallo (ab); è necessario e basta affinchè, ponendo:*

$$(19)\qquad v(y) = \int_0^\infty dt \int_a^b u(z)\, \frac{h(t)\cos \pi t(z-y) + k(t)\,\mathrm{sen}\, \pi t(z-y)}{h(t)^2 + k(t)^2}\, dz, \quad (a < y < b),$$

riesca soddisfatta la (13), *che:*

1) *Il secondo membro della* (19) *rappresenti nell'intervallo (ab) una funzione di* FOURIER.

2) *Si abbia, per $y < a$:*

$$(20)\qquad \int_0^\infty dt \int_a^b u(z)\, \frac{h(t)\cos \pi t(z-y) + k(t)\,\mathrm{sen}\, \pi t(z-y)}{h(t)^2 + k(t)^2}\, dz = 0\,.$$

La (20) *si trova verificata identicamente, qualunque sia la funzione di* FOURIER, *$u(z)$, le quante volte, per ogni coppia c, d compresa fra a e b e per $y < a$, sussista la relazione:*

$$(21)\qquad \int_0^\infty dt \int_c^d \frac{h(t)\cos \pi t(z-y) + k(t)\,\mathrm{sen}\, \pi t(z-y)}{h(t)^2 + k(t)^2}\, dz = 0\,.$$

Tenuto conto delle ipotesi restrittive da noi introdotte, si ha ancora, per $b = \infty$ (pag. 171), *oppure, per b qualunque, quando sia soddisfatta la* (21): *Se esiste una funzione $v(y)$, che soddisfaccia alla* (13), *essa è unica e rappresentabile sotto la forma* (19).

In sostanza, prescindendo dalla continuità, integrabilità, ecc., la (20) può risguardarsi come la condizione necessaria e sufficiente per l'invertibilità della (13), qualunque sia u.

In modo del tutto analogo (veggasi la nota al principio di questo §) si stabilisce che, per soddisfare all'equazione:

$$u(x) = \int_x^b f(x-y)v(y)\, dy\,, \qquad (a < x < b)\,,$$

basta porre:

$$h(t) = \int_{-\infty}^0 f(\lambda) \cos \pi t \lambda\, d\lambda\,,$$

$$k(t) = \int_{-\infty}^0 f(\lambda)\, \mathrm{sen}\, \pi t \lambda\, d\lambda\,,$$

$$v(y) = \int_0^\infty dt \int_a^b \frac{h(t)\cos \pi t(z-y) + k(t)\,\mathrm{sen}\, \pi t(z-y)}{h(t)^2 + k(t)^2}\, u(z)\, dz\,,$$

purchè si abbia per $y > b$:

$$\int_0^\infty dt \int_a^b u(z) \frac{h(t)\cos \pi t(z-y) + k(t)\,\mathrm{sen}\,\pi t(z-y)}{h(t)^2 + k(t)^2}\, dz = 0\ ; \quad \text{ecc.}$$

Come caso particolare si potrà poi fare in queste formule o nelle precedenti $a = -\infty$, o $b = +\infty$, o insieme $a = -\infty$, $b = +\infty$.

Giova osservare altresì che (quando l'intervallo (ab) è finito) entrano nella (13) valori della funzione f relativi esclusivamente all'intervallo $(0, b-a)$ e che quindi la f stessa potrà essere o risguardarsi data soltanto in questo intervallo; per la applicazione del nostro teorema, basterà poi poterne assegnare una qualunque estensione fittizia, che ottemperi alle condizioni sopra enumerate.

4. – Comincio con un esempio, che, se presenta per sè scarso o punto interesse, mi sembra nondimeno utile illustrazione delle cose dette.

Sia $f(\lambda) = e^{-\lambda}$ e quindi:

$$h(t) = \int_0^\infty e^{-\lambda} \cos \pi t\lambda\, d\lambda = \frac{1}{1+\pi^2 t^2}\,, \tag{15_1}$$

$$k(t) = \int_0^\infty e^{-\lambda}\,\mathrm{sen}\,\pi t\lambda\, d\lambda = \frac{\pi t}{1+\pi^2 t^2}\,, \tag{16_1}$$

le quali non si annullano contemporaneamente per alcun valore finito di t.

Secondo il precedente §, posto:

$$v(y) = \int_0^\infty dt \int_a^b u(z)\, \{\cos \pi t(z-y) + \pi t\,\mathrm{sen}\,\pi t(z-y)\}\, dz\,, \qquad (a < y < b)\,, \tag{19_1}$$

si dovrà constatare in primo luogo se $v(y)$ è funzione di FOURIER; dopo ciò, se si avrà:

$$\int_0^\infty dt \int_a^b u(z)\, \{\cos \pi t(z-y) + \pi t\,\mathrm{sen}\,\pi t(z-y)\}\, dz = 0\,, \quad (y < a), \tag{20_1}$$

la $v(y)$ soddisferà all'equazione:

$$u(x) = \int_a^x e^{-(x-y)} v(y)\, dy\,, \qquad (a < x < b)\,. \tag{13_1}$$

Perchè le volute condizioni sieno effettivamente verificate, converrà nel caso presente aggiungere l'ipotesi che la funzione $u(x)$ si annulli per $x = a$ e per $x = b$, sia in tutto l'intervallo (ab) finita e continua e ammetta in ogni punto derivata prima soddisfacente alle condizioni di FOURIER. Avremo allora:

$$\int_0^\infty dt \int_a^b u'(z) \cos \pi t(z - y)\, dz = u'(y)\,, \qquad (a < y < b),$$

$$\int_0^\infty dt \int_a^b u'(z) \cos \pi t(z - y)\, dz = 0\,, \qquad (y < a)\,.$$

Integrando per parti rispetto a z ed osservando che i termini ai limiti svaniscono, verrà:

$$\int_0^\infty dt \int_a^b u(z)\pi t \operatorname{sen} \pi t(z - y)\, dz = u'(y)\,, \qquad (a < y < b)\,,$$

$$\int_0^\infty dt \int_a^b u(z)\pi t \operatorname{sen} \pi t(z - y)\, dz = 0\,, \qquad (y < a)\,.$$

Questi valori, portati nella (20_1), ove si abbia ancora riguardo al teorema di FOURIER, la verificano identicamente, di più la (19_1) diviene:

$$(19_1') \qquad v(y) = u(y) + u'(y),$$

e sotto questa forma è manifesto che $v(y)$ sarà funzione di FOURIER.

Alla $(19_1')$ si poteva arrivare più semplicemente in modo diretto, partendo dalla (13_1). Infatti, moltiplicando per e^x e derivando, si ottiene:

$$\frac{d(e^x u(x))}{dx} = e^x v(x)\,,$$

ossia precisamente $v(x) = u(x) + u'(x)$, la quale, come si verifica subito, purchè sia $u(a) = 0$, soddisfa alla (13_1). È interessante osservare che in questo modo non occorre affatto supporre $u(b) = 0$, mentre prescindendo da tale ipotesi, la soluzione espressa dalla (19_1) perde ogni significato.

Ove infatti il secondo membro della (19_1) rappresentasse una funzione generalmente finita, essendo

$$v(y) = u(y) + \int_0^\infty dt \int_a^b u(z)\pi t \operatorname{sen} \pi t(z - y)\, dz\,,$$

lo stesso dovrebbe accadere per l'integrale doppio

$$\int_0^\infty dt \int_a^b u(z)\pi t \operatorname{sen} \pi t(z - y)\, dz\,,$$

e, siccome si ha:

$$u'(y) = \int_0^\infty dt \int_a^b u'(z) \cos \pi t(z - y)\, dz\,,$$

si dedurrebbe, integrando come sopra per parti, la convergenza di

$$u(b) \int_0^\infty \cos \pi t(b - y)\, dt\,,$$

ciò che è assurdo.

Si ha con ciò un esempio della possibile esistenza di una funzione di Fourier $v(y)$, che soddisfa alla (13) in un intervallo *finito* ([12]) (ab) e non è rappresentabile mediante l'espressione (19). Questa circostanza può presentarsi, come risulta dal precedente §, soltanto per quelle funzioni caratteristiche f, che *non* soddisfanno alla (21). Qui infatti il primo membro non soltanto non si annulla, ma non ha nemmeno un senso determinato; segue in particolare che non si può risolvere la (13_1) per una funzione $u(x)$, che sia 1 in un certo segmento (cd) e nulla al di fuori.

5. – Poniamo, come seconda applicazione, nella (13), $f(\lambda) = 1/\lambda^p$, p essendo compreso fra 0 e 1.

La funzione $1/\lambda^p$ è integrabile in ogni intervallo positivo finito, finita e continua ovunque, eccettuato soltanto il punto 0; di più i due integrali:

$$\int_0^\infty \frac{\cos \pi t\lambda}{\lambda^p}\, d\lambda\,, \quad \int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} \pi t\lambda}{\lambda^p}\, d\lambda\,,$$

([12]) Per un intervallo infinito $(a\,\infty)$, sappiamo invece che ciò non può accadere.

sono convergenti e non si annullano contemporaneamente per alcun valore finito di t, poichè si ha, come è ben noto:

$$(15_2)\qquad h(t)=\int_0^\infty \frac{\cos \pi t\lambda}{\lambda^p}\,d\lambda=\frac{\Gamma(1-p)}{\pi^{1-p}}\,\frac{\operatorname{sen} p\,\pi/2}{t^{1-p}}\,,$$

$$(16_2)\qquad k(t)=\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} \pi t\lambda}{\lambda^p}\,d\lambda=\frac{\Gamma(1-p)}{\pi^{1-p}}\,\frac{\cos p\,\pi/2}{t^{1-p}}\,,\quad t>0\,,$$

Γ essendo, al solito, simbolo della funzione euleriana di seconda specie.

In questo caso, a differenza dell'esempio precedente, la (21) è soddisfatta.

Il primo membro infatti, svolta la integrazione interna, assume qui l'aspetto:

$$\frac{\pi^{1-p}}{\Gamma(1-p)}\left\{\operatorname{sen} p\frac{\pi}{2}\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}\pi t(d-y)-\operatorname{sen}\pi t(c-y)}{\pi t^p}\,dt\right.$$
$$\left.-\cos p\frac{\pi}{2}\int_0^\infty \frac{\cos \pi t(d-y)-\cos\pi t(c-y)}{\pi t^p}\,dt\right\},$$

e, siccome

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}\pi t|d-y|}{t^p}\,dt=\frac{\Gamma(1-p)}{\pi^{1-p}}\,\frac{\cos p\,\pi/2}{|d-y|^{1-p}}\,,$$

$$\int_0^\infty \frac{\cos\pi t|d-y|}{t^p}\,dt=\frac{\Gamma(1-p)}{\pi^{1-p}}\,\frac{\operatorname{sen} p\,\pi/2}{|d-y|^{1-p}}\,,\quad \text{ecc.},$$

dovendo essere $y<a<c<d$, così le relazioni precedenti valgono anche togliendo il segno di valore assoluto e quindi effettivamente:

$$(21_2)\qquad \frac{\pi^{1-p}}{\Gamma(1-p)}\int_0^\infty dt\int_c t^{1-p}\left\{\operatorname{sen} p\frac{\pi}{2}\cos\pi t(z-y)\right.$$
$$\left.+\cos p\,\frac{\pi}{2}\operatorname{sen}\pi t(z-y)\right\}dz=0\,,\qquad (y<a)\,.$$

Ne viene che, ponendo:

$$(19_2)\qquad v(y)=\frac{\pi^{1-p}}{\Gamma(1-p)}\int_0^\infty dt\int_a^b u(z)t^{1-p}\left\{\operatorname{sen} p\frac{\pi}{2}\cos \pi t(z-y)\right.$$
$$\left.+\cos p\frac{\pi}{2}\operatorname{sen}\pi t(z-y)\right\}dz\,,$$

purchè sia $v(y)$ funzione di FOURIER, necessariamente soddisfa alla:

$$(13_2)\qquad u(x)=\int_0^x\frac{v(y)}{(x-y)^p}\,dy\,,\qquad (a<x<b)\,.$$

Per riconoscere in $v(y)$ le dette proprietà e per attribuirle una forma praticamente più utile, giova aggiungere l'ipotesi che $u(x)$ ammetta nell'intervallo (ab) derivata integrabile.

Partendoci dalle identità:

$$\int_0^\infty\frac{\cos\pi t|z-y|}{t^p}\,dt=\frac{\Gamma(1-p)}{\pi^{1-p}}\,\frac{\operatorname{sen}p\,\pi/2}{|z-y|^{1-p}}\,,$$

$$\int_0^\infty\frac{\operatorname{sen}\pi t|z-y|}{t^p}\,dt=\frac{\Gamma(1-p)}{\pi^{1-p}}\,\frac{\cos p\,\pi/2}{|z-y|^{1-p}}\,,$$

avremo:

$$\frac{\pi^{1-p}}{\Gamma(1-p)}\int_0^\infty\frac{dt}{t^p}\,u'(z)\left\{\cos p\frac{\pi}{2}\cos\pi t(z-y)-\operatorname{sen}p\frac{\pi}{2}\operatorname{sen}\pi t(z-y)\right\}$$
$$=\begin{cases}\operatorname{sen}p\pi\,\dfrac{u'(z)}{|z-y|^{1-p}}\,, & (z<y)\,,\\ 0\,, & (z>y)\,,\end{cases}$$

da cui, integrando rispetto a z fra a e b ed osservando che nel primo membro si possono invertire le integrazioni:

$$\frac{\pi^{1-p}}{\Gamma(1-p)}\int_0^\infty dt\int_a^b u'(z)\left\{\frac{\cos p\,\pi/2\cos\pi t(z-y)-\operatorname{sen}p\,\pi/2\operatorname{sen}\pi t(z-y)}{t^p}\right\}dz$$
$$=\operatorname{sen}p\pi\int_a^y\frac{u'(z)}{(y-z)^{1-p}}\,dz\,,\qquad (a<y<b)\,.$$

In quest'ultima formula è ancora lecita (a sinistra) una integrazione per parti rispetto a z, ciò che porge:

$$\frac{\pi^{1-p}}{\Gamma(1-p)}\, u(b) \int_0^\infty dt\, \frac{\cos p\,\pi/2 \cos \pi t(b-y) - \operatorname{sen} p\,\pi/2 \operatorname{sen} \pi t(b-y)}{t^p}$$

$$-\frac{\pi^{1-p}}{\Gamma(1-p)}\, u(a) \int_0^\infty dt\, \frac{\cos p\,\pi/2 \cos \pi t(a-y) - \operatorname{sen} p\,\pi/2 \operatorname{sen} \pi t(a-y)}{t^p}$$

$$+\frac{\pi^{1-p}}{\Gamma(1-p)}\, \pi \int_0^\infty dt \int_a^b u(z) t^{1-p} \left\{ \operatorname{sen} p\frac{\pi}{2} \cos \pi t(z-y) \right.$$

$$\left. + \cos p\frac{\pi}{2} \operatorname{sen} \pi t(z-y) \right\} dz = \operatorname{sen} p\pi \int_a^y \frac{u'(z)}{(y-z)^{1-p}}\, dz\,.$$

D'altra parte, per essere $b > y$, il coefficiente di $u(b)$ è nullo, mentre il coefficiente di $u(a)$, essendo $a < y$, si riduce immediatamente a $-\operatorname{sen} p\pi/(y-a)^{1-p}$, quindi:

$$\frac{\pi^{1-p}}{\Gamma(1-p)}\, \pi \int_0^\infty dt \int_a^b u(z) t^{1-p} \left\{ \operatorname{sen} p\frac{\pi}{2} \cos \pi t(z-y) \right.$$

$$\left. + \cos p\frac{\pi}{2} \operatorname{sen} \pi t(z-y) \right\} dz = \operatorname{sen} p\pi \left\{ \frac{u(a)}{(y-a)^{1-p}} + \int_a^y \frac{u'(z)}{(y-z)^{1-p}}\, dz \right\}.$$

Confrontando colla (19_2) si ricava:

$$(19_2') \qquad v(y) = \frac{\operatorname{sen} p\pi}{\pi} \left\{ \frac{u(a)}{(y-a)^{1-p}} + \int_a^y \frac{u'(z)}{(y-z)^{1-p}}\, dz \right\}, \quad (a < y < b),$$

o finalmente, come si può stabilire con un facile passaggio al limite:

$$v(y) = \frac{\operatorname{sen} p\pi}{\pi} \frac{d}{dy} \int_a^y \frac{u(z)}{(y-z)^{1-p}}\, dz\,, \qquad (a < y < b)\,.$$

La $(19_2')$ costituisce una generalizzazione, del resto già nota, di un celebre teorema di ABEL. Il SONINE (13) le attribuisce l'aspetto, solo apparentemente diverso, di una rappresentazione integrale della funzione u; per ricavarla, basta sostituire la precedente espressione di $v(y)$ nella (13_2), ciò che dà:

$$u(x) = \frac{\operatorname{sen} p\pi}{\pi} u(a) \int_a^x \frac{dy}{(x-y)^p(y-a)^{1-p}} + \frac{\operatorname{sen} p\pi}{\pi} \int_a^x \frac{dy}{(x-y)^p} \int_a^x \frac{u'(z)}{(y-z)^{1-p}}\, dz \,.$$

Ponendo $(y-a)/(x-a) = s$, l'integrale

$$\int_a^x \frac{dy}{(x-y)^p(y-a)^{1-p}}\,,$$

diviene

$$\int_0^1 \frac{ds}{s^{1-p}(1-s)^p} = \int_0^1 s^{p-1}(1-s)^{-p}\, ds\,,$$

cioè, per definizione $B(p,\ 1-p)$, B designando la funzione euleriana di prima specie; ma, per una nota proprietà di queste trascendenti,

$$B(p, 1-p) = \Gamma(p)\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\operatorname{sen} p\pi}\,;$$

quindi:

$$u(x) - u(a) = \frac{\operatorname{sen} p\pi}{\pi} \int_a^x \frac{dy}{(x-y)^p} \int_a^y \frac{u'(z)\, dz}{(y-z)^{1-p}}\,,$$

che è la forma, cui si alludeva sopra e che immediatamente si potrebbe ridurre a quella assegnata da SONINE.

Come caso particolare, per $p = 1/2$, si hanno le due relazioni equivalenti:

$$\left\{\begin{aligned} u(x) &= \int_a^x \frac{v(y)}{\sqrt{x-y}}\, dy\,, \\ v(y) &= \frac{1}{\pi} \frac{d}{dy} \int_a^y \frac{u(z)}{\sqrt{y-z}}\, dz\,, \end{aligned}\right.$$

cioè il teorema di ABEL.

---

(13) Loco citato in (3); art. 48.

Per stabilirlo, si ricorre ordinariamente ad artifici, semplici, finchè si vuole ed eleganti, ma inadatti, per quanto mi pare, a metterne in luce la vera natura; a ciò risponde forse il nostro procedimento, che permette di presentarlo quale corollario di una formula generale di inversione, dovuta ad un criterio direttivo bene determinato.

6. – Veniamo ora al secondo problema, di cui a § 2, proponiamoci cioè di invertire l'equazione:

$$u(x) = \int_a^b f(x-y)v(y)\,dy\,. \tag{14}$$

Il metodo è sostanzialmente identico a quello tenuto precedentemente, quindi mi limiterò ad un rapido cenno, tanto più che la maggior copia dei dati richiesti lo rendono meno vantaggioso.

Sieno f [14] ed u funzioni integrabili in tutto l'intervallo $(-\infty, \infty)$ e si sappia che esiste una funzione di Fourier $v(y)$, la quale soddisfa alla (14).

Avremo, in seguito a simile ipotesi:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos \pi t(x-z)u(x)\,dx = \int_a^b v(y)\,dy \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y) \cos \pi t(x-z)\,dx\,,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sen} \pi t(x-z)u(x)\,dx = \int_a^b v(y)\,dy \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y) \operatorname{sen} \pi t(x-z)\,dx\,,$$

donde, ponendo:

$$h_1(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda) \cos \pi t\lambda\,d\lambda\,, \tag{22}$$

$$k_1(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda) \operatorname{sen} \pi t\lambda\,d\lambda\,, \tag{23}$$

e operando come a § 3, collo scambio di x in z e di z in y, senza diffi-

(14) Più propriamente basta rispetto ad f l'ipotesi che sia integrabile in ogni intervallo finito e che renda convergenti i due integrali $h_1(t)$ e $k_1(t)$.

coltà si deduce:

$$(24)\qquad \int_0^\infty dt \int_{-\infty}^\infty u(z)\, \frac{h_1(t)\cos\pi t(z-y) + k_1(t)\,\mathrm{sen}\,\pi t(z-y)}{h_1(t)^2 + k_1(t)^2}\, dz = 0\,, \qquad (y < a),$$

$$(25)\qquad \int_0^\infty dt \int_{-\infty}^\infty u(z)\, \frac{h_1(t)\cos\pi t(z-y) + k_1(t)\,\mathrm{sen}\,\pi t(z-y)}{h_1(t)^2 + k_1(t)^2}\, dz = v(y), \quad (a < y < b),$$

$$(26)\qquad \int_0^\infty dt \int_{-\infty}^\infty u(z)\, \frac{h_1(t)\cos\pi t(z-y) + k_1(t)\,\mathrm{sen}\,\pi t(z-y)}{h_1(t)^2 + k_1(t)^2}\, dz = 0\,, \qquad (y > b).$$

Dunque, se esiste una funzione di Fourier, atta a verificare la (14), essa è necessariamente rappresentabile sotto la forma (25); oltre a ciò debbono valere le due relazioni identiche (24) e (26). Inversamente, se queste relazioni sono soddisfatte e se la (25) definisce una funzione di Fourier, portandola nella (14), con riduzioni analoghe a quelle indicate per la (13), si riproduce effettivamente la funzione $u(x)$.

In questo modo non soltanto si è risoluta l'equazione funzionale (14), ma si è anche trovato un criterio per decidere della sua possibilità.

Il procedimento presenta però il gravissimo inconveniente di esigere la conoscenza e l'integrabilità della funzione $u(x)$ in tutto l'intervallo $(-\infty, \infty)$, mentre nelle applicazioni accade il più delle volte di conoscere la funzione $u(x)$ *unicamente* nell'intervallo di integrazione (ab).

Si potrebbe bensì ricondursi a questo caso, con una condizione addizionale, come si è fatto nell'altro problema (formula (21)), ma la pratica applicabilità di questo espediente sarebbe ora pressochè nulla. Giova dunque, rispetto alle questioni di analisi applicata, riservare il metodo per il caso che l'intervallo di integrazione sia $(-\infty, \infty)$, nella quale ipotesi la funzione $u(x)$ viene ad essere conosciuta, come è per noi necessario, in tutto il campo reale; di più le due condizioni (24) e (26) relative alla possibilità del problema vengono a mancare e la $v(y)$, definita dalla (25), purchè dotata delle volute proprietà, soddisfa certamente alla (14).

Quantunque esca dall'ordine di idee, in cui ci siamo posti, stimo necessario di accennare ancora ad un importante risultato stabilito dal prof. Volterra (loc. cit. ([4])) relativamente alla determinazione di $v(y)$ da relazioni del tipo:

$$(27)\qquad u(x) = \int_a^b f(x, y) v(y)\, dy\,, \qquad (a < x < b),$$

dove i limiti si suppongono costanti e $f(x, y)$ è funzione simmetrica rispetto alle due invariabili x ed y. Il metodo del prof. VOLTERRA non inceppa nell'inconveniente ora lamentato della necessità di conoscere $u(x)$ fuori dell'intervallo (ab), e consiste nel ricondurre tutti gli infiniti problemi di inversione, che, al variare di $u(x)$, risultano dalla (27), ad una questione unica, alla ricerca cioè di una funzione $\lambda(y, z)$ tale che, per $a < y < z < b$:

$$\int_a^z \lambda(y, z) f(x, y) dy$$

riesca indipendente da z.

Il vantaggio di una tale risoluzione si palesa specialmente in molte questioni elettrostatiche, dove si può *a priori* asserire (in virtù del principio di DIRICHLET) l'esistenza della funzione λ e in alcuni casi anche determinarla effettivamente.

Non sarà da ultimo fuor di luogo il notare che, fin dal primo §, si è qui pure indicato un mezzo per rendere i problemi di inversione indipendenti dalla natura della funzione u, supposta nota soltanto nell'intervallo (ab). Basta a tal uopo trovare una funzione $F(x, z, t)$ che, per una conveniente scelta di α, β $(a < \alpha < \beta < b)$,

$$\int_\alpha^\beta F(x, z, t) f(x, y)\, dx$$

riesca eguale a $\Psi(t(y - z))$ con Ψ funzione fluttuante.

VIII.

SULLA DISTRIBUZIONE INDOTTA IN UN CILINDRO INDEFINITO DA UN SISTEMA SIMMETRICO DI MASSE

NOTA I

« Rend. Acc. Lincei », s. 5ª, vol. IV, (2º sem. 1895), pp. 332-336 (*).

Il problema dell'induzione elettrica presenta, come è noto, anche per conduttori di forma semplicissima, difficoltà analitiche rimaste fino ad ora quasi sempre insuperate. Per il caso particolare, in cui le masse inducenti e la superficie del conduttore posseggano uno stesso asse di simmetria, il prof. BELTRAMI immaginò alcuni procedimenti analitici (1), che se permettono di risolvere con grande eleganza il problema da lui trattato dell'induzione sopra un disco circolare, non si possono poi utilizzare (almeno direttamente) per altre questioni, neppure ad esempio per il cilindro, che tuttavia ha, come il disco, rettilinee le sezioni meridiane.

La presente Nota ha per iscopo di determinare la densità della distribuzione, indotta in un cilindro circolare indefinito, da un sistema simmetrico di masse. Il calcolo, che vi conduce (quantunque a bello studio non esiga alcun richiamo) è una applicazione immediata del metodo per l'inversione degli integrali definiti, che esposi in uno scritto recente (2). Io dovrò qui limitarmi a far vedere come la equazione funzionale, da cui dipende il proposto problema, si possa ben facilmente ricondurre ad un tipo già noto. Ho poi trovato (e mi propongo di mostrarlo tra breve), assegnando in tal modo una espressione analitica della quantità incognita, e supponendo molto piccolo il raggio del cilindro, che la densità (lineare) della distribuzione indotta in un filo è proporzionale al potenziale delle

(*) Presentata dal Socio EUGENIO BELTRAMI nella seduta del 15 dicembre 1895.

(1) *Sulla teoria delle funzioni potenziali simmetriche*, « Mem. dell'Acc. di Bologna », ser. IV. tom. II.

(2) *Sull'inversione degli integrali definiti nel campo reale*, « Atti dell'Acc. di Torino », vol. XXXI. [In questo vol.: VII, pp. 159–184].

masse inducenti e varia da filo a filo in ragione inversa del logaritmo del raggio della sezione.

Questi risultati relativi ai fili presentano, a mio credere, particolare interesse, perchè valgono senz'altro anche per distribuzioni inducenti non simmetriche.

È appena necessario aggiungere che la nostra ricerca dà mezzo di risolvere *approssimativamente* il problema dell'induzione elettrica, quando il cilindro od il filo, senz'essere indefiniti, sieno abbastanza lunghi, ma però in comunicazione col suolo.

Noto da ultimo che non si sarebbe potuto partire dai noti risultati di F. NEUMANN e di LIPSCHITZ relativi all'ellissoide allungato, immaginando poi grandissimo l'asse di rotazione, poichè le formole di questi autori, anche prescindendo dalla loro estrema complicazione, presuppongono essenzialmente *finita* la lunghezza di detto asse e quindi non si prestano per un facile passaggio al limite; avrei potuto invece prender le mosse da alcune considerazioni di KIRCHHOFF [3] relative al potenziale di masse distribuite sulla superficie di un cilindro, ma il procedimento seguito sembrami assai più semplice e diretto.

Dato un cilindro circolare γ di raggio a, si fissi un sistema cartesiano ortogonale, di cui l'asse delle z coincida con quello del cilindro, poi si ponga: $x = r\cos\vartheta$, $y = r\,\mathrm{sen}\,\vartheta$ e si intendano adottate, come sistema di riferimento, le coordinate cilindriche z, r, ϑ.

Il potenziale di un sistema simmetrico di masse dipenderà, come è manifesto, soltanto da z e da r, e sarà quindi una funzione $P(z, r)$, che, nei punti esterni alle masse potenzianti, soddisfa all'equazione di LAPLACE:

$$\underset{2}{\Delta} P \equiv \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} + \frac{1}{r}\,\frac{\partial\left\{r\,\dfrac{\partial P}{\partial r}\right\}}{\partial r} = 0 .$$

Sulla superficie cilindrica γ, essendo $P(z, a)$ il valore di questo potenziale esterno, quello incognito V della distribuzione indotta dovrà essere $c - P(z, a)$, dove però la costante è da porsi addirittura eguale a zero, perchè il cilindro si estende indefinitamente.

Nè la funzione V, nè, si intende, la corrispondente densità μ della distribuzione indotta dipendono da ϑ, perchè una rotazione arbitraria intorno all'asse delle z lascia inalterate le condizioni del fenomeno.

Avremo poi, indicando con ζ, a, τ le coordinate di un punto generico

---

[3] *Ueber der inducirten Magnetismus eines unbegrenzten Cylinders von weichem Eisen* « Crelle's Journal », B. 48.

di γ, con z, r, ϑ quelle del punto potenziato, con $d\sigma = a\,d\tau\,d\zeta$ un elemento superficiale:

$$V = \int_\gamma \mu(\zeta) \frac{d\sigma}{\sqrt{(z-\zeta)^2 + (a\cos\tau - r\cos\vartheta)^2 + (a\,\mathrm{sen}\,\tau - r\,\mathrm{sen}\,\vartheta)^2}}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \mu(\zeta)\,d\zeta \int_0^{2\pi} \frac{a\,d\tau}{\sqrt{(z-\zeta)^2 + a^2 + r^2 - 2ar\cos(\tau - \vartheta)}},$$

dove l'integrale interno rappresenta il potenziale di una circonferenza omogenea di altezza ζ, di raggio a e di densità 1, sul punto z, r, ϑ ed è quindi evidente [4] che si può addirittura farvi $\vartheta = 0$, dopo di che otterremo:

$$V(z, r) = \int_{-\infty}^{\infty} \mu(\zeta)\,d\zeta \int_0^{2\pi} \frac{a\,d\tau}{\sqrt{(z-\zeta)^2 + a^2 + r^2 - 2ar\cos\tau}}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \mu(\zeta)\,d\zeta \int_0^{\pi} \frac{2a\,d\tau}{\sqrt{(z-\zeta)^2 + a^2 + r^2 - 2ar\cos\tau}},$$

---

[4] Se si volesse proprio la conferma analitica che un integrale del tipo

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\tau}{\sqrt{(z-\zeta)^2 + a^2 + r^2 - 2ar\cos(\tau - \vartheta)}}$$

non dipende da ϑ, si potrebbe procedere nel modo seguente:

Dall'identità:

$$(z-\zeta)^2 + a^2 + r^2 - 2ar\cos(\tau - \vartheta) = \left\{ \frac{\sqrt{(z-\zeta)^2 + (a+r)^2} + \sqrt{(z-\zeta)^2 + (a-r)^2}}{2} \right\}^2$$

$$+ \left\{ \frac{\sqrt{(z-\zeta)^2 + (a+r)^2} - \sqrt{(z-\zeta)^2 + (a-r)^2}}{2} \right\}^2 - 2 \left\{ \frac{\sqrt{(z-\zeta)^2 + (a+r)^2} + \sqrt{(z-\zeta)^2 + (a-r)^2}}{2} \right\}$$

$$\cdot \left\{ \frac{\sqrt{(z-\zeta)^2 + (a+r)^2} - \sqrt{(z-\zeta)^2 + (a-r)^2}}{2} \right\} \cos(\tau - \vartheta),$$

apparisce che ponendo:

$$\alpha = \frac{\sqrt{(z-\zeta)^2 + (a+r)^2} - \sqrt{(z-\zeta)^2 + (a-r)^2}}{\sqrt{(z-\zeta)^2 + (a+r)^2} + \sqrt{(z-\zeta)^2 + (a-r)^2}},$$

($\alpha < 1$, per z, r non contemporaneamente eguali a ζ, a), il nostro integrale può essere e, ponendo $\tau = 2\varphi$, verrà come espressione definitiva:

$$V(z, r) = \int_{-\infty}^{\infty} \mu(\zeta)\, d\zeta \int_0^{\pi/2} \frac{4a\, d\varphi}{\sqrt{(z-\zeta)^2 + (a+r)^2 - 4ar \operatorname{sen}^2\varphi}},$$

la quale sarà valida anche sopra la superficie cilindrica ($r = a$) e dovrà ivi ridursi a $-P(z, a)$.

Il nostro problema è adunque ricondotto alla determinazione di $\mu(\zeta)$ dalla equazione:

$$(1) \qquad -P(z, a) = \int_{-\infty}^{\infty} \mu(\zeta)\, d\zeta \int_0^{\pi/2} \frac{4a\, d\varphi}{\sqrt{(z-\zeta)^2 + 4a^2 - 4a^2 \operatorname{sen}^2\varphi}}.$$

ossia all'inversione dell'integrale definito, che compare nel secondo membro.

---

scritto:

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\tau}{\sqrt{(z-\zeta)^2 + a^2 + r^2 - 2ar\cos(\tau - \vartheta)}}$$

$$= \frac{4}{\left\{\sqrt{(z-\zeta)^2 + (a+r)^2} + \sqrt{(z-\zeta)^2 + (a-r)^2}\right\}} \int_0^{2\pi} \frac{d\tau}{\sqrt{1 + \alpha^2 - 2\alpha\cos(\tau - \vartheta)}}.$$

Siccome si è notato che, nei punti esterni alla circonferenza potenziante, $\alpha < 1$, il radicale sotto il segno è sviluppabile in serie di potenze e precisamente si avrà, come è ben noto:

$$\frac{1}{\sqrt{1 + \alpha^2 - 2\alpha\cos(\tau - \vartheta)}} = \sum_0^{\infty}{}_n\, \alpha^n P_n\{\cos(\tau - \vartheta)\},$$

P_n essendo simbolo della funzione sferica d'indice n. Ora si sa pure dalla teoria delle funzioni sferiche che:

$$P_n\{\cos(\tau - \vartheta)\} = \sum_0^{n}{}_\nu\, a_{n,\nu} \cos \nu(\tau - \vartheta).$$

colle a costanti; ne viene che, quando si eseguisce, rispetto a τ, l'integrazione di

$$\frac{1}{\sqrt{1 + \alpha^2 - 2\alpha\cos(\tau - \vartheta)}},$$

fra 0 e 2π, i termini contenenti coseni ($\nu < 0$) dànno risultato nullo e il valore dell'integrale riesce, come si era asserito, indipendente da ϑ.

Notiamo, prima di passare alla effettiva inversione, che, ponendo:

$$k = \frac{2a}{\sqrt{(z-\zeta)^2 + 4a^2}}, \tag{2}$$

$$K = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}}, \tag{3}$$

la (1) si può anche scrivere:

$$-P(z, a) = \int_{-\infty}^{\infty} \mu(\zeta) \cdot 2kK \, d\zeta . \tag{1'}$$

Per una proprietà caratteristica delle funzioni potenziali, la $P(z, a)$ si annulla all'infinito, in modo anzi che: $\lim_{z=\pm\infty} |z| P(z, a) = M$ (somma algebrica delle masse potenzianti); segue da ciò e da note proposizioni di calcolo che la funzione $\cos \pi t(z-s) \cdot P(z, a)$, dove t ed s sono costanti arbitrarie, di cui la prima differente da zero, è integrabile in tutto l'intervallo $-\infty, \infty$. Si avrà pertanto dalla (1):

$$-\int_{-\infty}^{\infty} \cos \pi t(z-s) P(z, a) \, dz =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dz \cos \pi t(z-s) \int_{-\infty}^{\infty} \mu(\zeta) \, d\zeta \int_0^{\pi/2} \frac{4a \, d\varphi}{\sqrt{(z-\zeta)^2 + 4a^2 - 4a^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}} .$$

Osservando che, per t diverso da zero, si riconosce, come sopra, l'integrabilità di

$$\cos \pi t(z-s) \int_0^{\pi/2} \frac{4a \, d\varphi}{\sqrt{(z-\zeta)^2 + 4a^2 - 4a^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}},$$

nell'intervallo da $z = -\infty$ a $z = +\infty$, e, ammettendo di più l'invertibilità delle integrazioni rispetto a z e a ζ (5), si ricava:

$$-\int_{-\infty}^{\infty} \cos \pi t(z-s) \, P(z, a) \, dz =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \mu(\zeta) \, d\zeta \int_{-\infty}^{\infty} \cos \pi t(z-s) \, dz \int_0^{\pi/2} \frac{4a \, d\varphi}{\sqrt{(z-\zeta)^2 + 4a^2 - 4a^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}} .$$

---

(5) Ciò riescirà giustificato a posteriori, quando a suo tempo constateremo, mediante diretta sostituzione nella (1), che la trovata espressione di $\mu(\zeta)$ vi soddisfa effettivamente.

Cambiando nel secondo integrale la variabile z in $\lambda = z - \zeta$, avremo:

$$-\int_{-\infty}^{\infty} \cos \pi t(z-s) P(z, a)\, dz =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \mu(\zeta)\, d\zeta \left\{ \cos \pi t(\zeta - s) \int_{-\infty}^{\infty} \cos \pi t\lambda\, d\lambda \int_0^{\pi/2} \frac{4a\, d\varphi}{\sqrt{\lambda^2 + 4a^2 - 4a^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}} \right.$$

$$\left. - \operatorname{sen} \pi t\, (\zeta - s) \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sen} \pi t\lambda\, d\lambda \int_0^{\pi/2} \frac{4a\, d\varphi}{\sqrt{\lambda^2 + 4a^2 - 4a^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}} \right\},$$

e, siccome

$$\int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sen} \pi t\lambda\, d\lambda \int_0^{\pi/2} \frac{4a\, d\varphi}{\sqrt{\lambda^2 + 4a^2 - 4a^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}} = 0\,,$$

così, posto:

$$h_1(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \cos \pi t\lambda\, d\lambda \int_0^{\pi/2} \frac{4a\, d\varphi}{\sqrt{\lambda^2 + 4a^2 - 4a^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}} \tag{4}$$

$$= 2 \int_0^{\infty} \cos \pi t\lambda\, d\lambda \int_0^{\pi/2} \frac{4a\, d\varphi}{\sqrt{\lambda^2 + 4a^2 - 4a^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}} = 4 \int_0^{\infty} \cos \pi t\lambda \cdot k \cdot K\, d\lambda\,,$$

rimarrà semplicemente:

$$-\int_{-\infty}^{\infty} \cos \pi t(z-s)\, P(z, a)\, dz = h_1(t) \int_{-\infty}^{\infty} \cos \pi t(\zeta - s) \mu(\zeta)\, d\zeta\,. \tag{1''}$$

La (1″) è una conseguenza della relazione (1), da cui siamo partiti e si presenta apparentemente cogli stessi caratteri, nel senso che la determinazione di $\mu(\zeta)$ equivale ancora all'inversione di un integrale definito. Però la particolare natura della funzione sotto il segno, col sussidio del teorema di FOURIER, permette in questo caso di raggiungere agevolmente lo scopo.

Riservo ad una prossima Nota gli sviluppi necessarî per il rigore del procedimento, proponendomi, come ebbi ad accennare, di aggiungervi anche qualche considerazione relativa ai fili conduttori.

NOTA II

« Rend. Acc. Lincei », s. 5ª, vol. V, (1° sem. 1896), pp. 34-40 (*).

Riprendendo gli sviluppi e le formule della Nota precedente dobbiamo ora occuparci di determinare $\mu(\zeta)$ dalla relazione

$$(1'')\qquad -\int_{-\infty}^{\infty}\cos\pi t(z-s)P(z,a)\,dz = h_1(t)\int_{-\infty}^{\infty}\cos\pi t(\zeta-s)\mu(\zeta)\,d\zeta\,.$$

Sarà tuttavia necessario premettere alcune osservazioni sulla natura della funzione $h_1(t)$. In primo luogo essa non si annulla per t differente da zero. Per dimostrarlo, prendiamo $h_1(t)$ sotto la forma: $4\int_0^{\infty}\cos\pi t\lambda\cdot k\cdot K\,d\lambda$ ed osserviamo dalle (2) (3) (della Nota precedente) che k e quindi K decrescono costantemente (convergendo il primo verso 0, il secondo verso $\pi/2$) col crescere indefinito di $z-\zeta$, ossia di λ, mentre l'altro fattore $\cos\pi t\lambda$, che è positivo in un primo intervallo $[0(1/2t)]$, si riproduce poi periodicamente coi segni alternati nei successivi intervalli di ampiezza $1/2t$. L'integrale $\int_0^{\infty}\cos\pi t\lambda\cdot k\cdot K\,d\lambda$, della cui convergenza si ha in questo modo conferma diretta, si mantiene pertanto positivo per ogni valore di t finito e non nullo.

Esaminiamo altresì come si comporta la funzione $h_1(t)$ per $t=0$, il che incidentalmente ci condurrà anche a stabilire lo sviluppo di $h_1(t)$ considerato come funzione del parametro a, quando il raggio a del cilindro sia abbastanza piccolo.

Converrà perciò assumere $h_1(t)$ sotto la forma:

$$h_1(t) = 2\int_0^{\infty}\cos\pi t\lambda\,d\lambda\int_0^{\pi/2}\frac{4a\,d\varphi}{\sqrt{\lambda^2+4a^2-4a^2\,\mathrm{sen}^2\varphi}} = 8a\int_0^{\pi/2}d\varphi\int_0^{\infty}\frac{\cos\pi t\lambda\,d\lambda}{\sqrt{\lambda^2+4a^2\cos^2\varphi}}\,,$$

(*) Presentata dal Socio EUGENIO BELTRAMI nella seduta del 19 gennaio 1896.

ed esprimere l'integrale interno per funzioni cilindriche, valendosi di una formula di SONINE. Segue infatti dalle ricerche di questo autore [1] che, per $-1 < m < 2(m+l) + 3/2$ e per l numero intero, si ha:

$$\int_0^\infty \frac{I_m(bx)x^{m+1}\,dx}{(x^2+h^2)^{m+l+1}} = \frac{b^{m+l}h^{-l}i^l}{2^{m+l+1}\Pi(m+l)}\left\{\pi i I_l(bhi) - Y_l(bhi)\right\},$$

dove I ed Y designano rispettivamente funzioni cilindriche di prima e di seconda specie d'ordine eguale al relativo indice, $\Pi(m+l)$ è la funzione fattoriale, che si può sostituire colla $\Gamma(m+l+1)$ (Γ indicando la funzione euleriana di seconda specie) e i è $\sqrt{-1}$ [2]. Per applicare questa formula al caso nostro, facciamovi: $m = -1/2$, $b = \pi t$, $x = \lambda$, $h = 2a\cos\varphi$, $l = 0$ e notiamo [3] che:

$$I_{-1/2}(\pi t\lambda)\sqrt{\lambda} = \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{2}{t}}\cos\pi t\lambda\,,$$

e che:

$$\Pi\left(-\frac{1}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}\,.$$

Avremo:

$$\frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{2}{t}}\int_0^\infty \frac{\cos\pi t\lambda\,d\lambda}{\sqrt{\lambda^2+4a^2\cos^2\varphi}} = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{\pi}\sqrt{\pi t}}\left\{\pi i I_0(2ai\pi t\cos\varphi) - Y_0(2ai\pi t\cos\varphi)\right\},$$

ossia:

$$\int_0^\infty \frac{\cos\pi t\lambda\,d\lambda}{\sqrt{\lambda^2+4a^2\cos^2\varphi}} = \frac{1}{2}\left\{\pi i I_0(2ai\pi t\cos\varphi) - Y_0(2ai\pi t\cos\varphi)\right\}.$$

Ora è proprietà nota della funzione cilindrica di seconda specie Y_0 che la differenza $Y_0(x) - 2\log x\, I_0(x)$ è finita per $x = 0$ e sviluppabile in serie di potenze di x. Noi possiamo trarne la triplice conseguenza che $Y_0(2ai\pi t\cos\varphi) - 2\log t\, I_0(2ai\pi t\cos\varphi)$ è funzione di t regolare per $t = 0$, che $Y_0(2ai\pi t\cos\varphi) - 2\log a\, I_0(2ai\pi t\cos\varphi)$ è funzione di a regolare per

---

[1] *Recherches sur le fonctions cylindriques*, «Math. Ann.», B. XVI, S. 51.

[2] Il secondo membro della formula precedente è complesso solo in apparenza, come si potrebbe verificare, tenendo presenti gli sviluppi delle funzioni I ed Y. Per lo scopo nostro serve però benissimo la forma sopra indicata.

[3] Ib. S. 34.

$a=0$ e che $Y_0(2ai\pi t\cos\varphi) - 2\log\cos\varphi\, I_0(2ai\pi t\cos\varphi)$ è funzione di φ, regolare per $\varphi = \pi/2$.

Dopo ciò, si conclude senza difficoltà (4) che, per certi intorni di $t=0$ e di $a=0$, si ha:

$$h_1(t) = -4\pi a\log t + R_1(t) + t^2\log t\, R_2(t)\,, \tag{5}$$

$$\frac{h_1(t)}{a} = -4\pi\log a + R_3(a) + a^2\log a\, R_4(a)\,, \tag{6}$$

R_1, R_2, R_3 ed R_4 designando serie di potenze.

Cerchiamo da ultimo ciò che avviene della funzione $h_1(t)$, quando t cresce indefinitamente. Osserviamo a tale scopo che l'espressione precedente di $h_1(t)$:

$$h_1(t) = 8a\int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{\infty} \frac{\cos\pi t\lambda\, d\lambda}{\sqrt{\lambda^2 + 4a^2\cos^2\varphi}}\,,$$

tenuto conto del valore testè trovato per l'integrale interno, diviene:

$$h_1(t) = 4a\int_0^{\pi/2} \{\pi i I_0(2ai\pi t\cos\varphi) - Y_0(2ai\pi t\cos\varphi)\}\, d\varphi\,.$$

La quantità sotto il segno, come si è già osservato, è una funzione della variabile φ solo apparentemente complessa, la quale diviene infinita logaritmicamente appena nell'estremo superiore dell'intervallo di integrazione ($\varphi = \pi/2$); potremo dunque applicare il primo teorema della media e attribuire ad $h_1(t)$ la forma:

$$h_1(t) = 2\pi a\,\{\pi i I_0(2ai\pi t\cos\bar\varphi) - Y_0(2ai\pi t\cos\bar\varphi)\}\,,$$

$\bar\varphi$ essendo un certo valore di φ, compreso fra 0 e $\pi/2$.

Sotto questo aspetto si riconosce subito che $h_1(t)$ si annulla d'ordine 1/2 per $t=\infty$, poichè, secondo una osservazione di POISSON, tale proprietà, al crescere indefinito dell'argomento, appartiene sì alla funzione I_0 che alla Y_0 (5).

---

(4) Basta tener presente che la I è una funzione pari, eguale all'unità per il valore zero dell'argomento.

(5) Per dare a questa dimostrazione un carattere di completo rigore, avremmo dovuto mostrare altresì che il gruppo dei valori, assunti dalla funzione $\bar\varphi$ al crescere indefinito di t, *non* ammette $\pi/2$ come punto limite: ciò avrebbe per altro richiesto considerazioni minuziose, soverchiamente discoste dallo scopo della presente Nota.

Riassumendo, abbiamo stabilito che la funzione $h_1(t)$ della variabile t e del parametro a, supposto $a > 0$, diviene infinita logaritmica per $t = 0$, è diversa da zero e positiva per ogni valore finito di t e si annulla all'infinito d'ordine $1/2$; oltre a ciò, in un certo intorno di $a = 0$, sussiste la (6).

Ciò posto, notiamo ancora che il potenziale P delle masse inducenti è, nei punti ad esse esterni, ed in particolare sopra la superficie cilindrica, una funzione analitica di z e quindi ammette derivate di tutti gli ordini, nulle anch'esse all'infinito. Questo permette di eseguire in $\int_{-\infty}^{\infty} \cos \pi t(z - s) P(z, a)\, dz$ una duplice integrazione per parti rispetto a z, assumendo ciascuna volta il fattore trigonometrico come fattore differenziale; siccome i termini ai limiti svaniscono, dividendo anche per $h_1(t)$, si ha l'identità:

$$- \frac{1}{h_1(t)} \int_{-\infty}^{\infty} \cos \pi t(z - s) P(z, a)\, dz = \frac{1}{\pi^2 t^2 h_1(t)} \int_{-\infty}^{\infty} \cos \pi t(z - s) \frac{\partial^2 P(z, a)}{\partial z^2}\, dz ,$$

da cui agevolmente deduciamo che la funzione:

$$- \frac{1}{h_1(t)} \int_{-\infty}^{\infty} \cos \pi t(z - s) P(z, a)\, dz ,$$

è integrabile rispetto a t fra 0 e ∞. E per verità, ciò che si è visto, rispetto alla natura della funzione $h_1(t)$ per valori finiti di t, stabilisce senz'altro l'integrabilità di

$$- \frac{1}{h_1(t)} \int_{-\infty}^{\infty} \cos \pi t(z - s) P(z, a)\, dz ,$$

in ogni intervallo finito; la relazione identica sopra accennata permette poi di assumere per limite superiore anche l'infinito.

Prendendo infatti

$$- \frac{1}{h_1(t)} \int_{-\infty}^{\infty} \cos \pi t(z - s) P(z, a)\, dz$$

sotto la forma:

$$\frac{1}{\pi^2 t^2 h_1(t)} \int_{-\infty}^{\infty} \cos \pi t(z - s) \frac{\partial^2 P(z, a)}{\partial z^2} ,$$

abbiamo che separatamente i due fattori

$$\frac{1}{\pi^2 t^2 h_1(t)} \quad \text{e} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \cos \pi t(z-s) \frac{\partial^2 P(z,a)}{\partial z^2}\, dz\,,$$

soddisfanno alle condizioni di integrabilità, quando il limite superiore converge verso l'infinito;

$$\frac{1}{\pi^2 t^2 h_1(t)}\,,$$

in quanto ha all'infinito uno zero d'ordine 3/2 e

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos \pi t(z-s) \frac{\partial^2 P(z,a)}{\partial z^2}\, dz\,,$$

in causa del teorema di FOURIER, per cui, avendosi:

$$\int_0^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} \cos \pi t(z-s) \frac{\partial^2 P(z,a)}{\partial z^2}\, dz = \frac{\partial^2 P(s,a)}{\partial s^2}\,,$$

siamo fatti certi che

$$\lim_{\beta,\,\beta'=\infty} \int_{\beta}^{\beta'} dt \int_{-\infty}^{\infty} \cos \pi t(z-s) \frac{\partial^2 P(z,a)}{\partial z^2}\, dz = 0\,.$$

Dimostrata così la convergenza di

$$-\int_0^{\infty} \frac{dt}{h_1(t)} \int_{-\infty}^{\infty} \cos \pi t(z-s) P(z,a)\, dz\,,$$

avremo dalla (1″), dividendone entrambi i membri per $h_1(t)$ e integrando fra 0 e ∞:

$$-\int_0^{\infty} \frac{dt}{h_1(t)} \int_{-\infty}^{\infty} \cos \pi t(z-s)\, P(z,a)\, dz = \int_0^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} \cos \pi t(\zeta - s) \mu(\zeta)\, d\zeta\,.$$

Supponendo che all'incognita funzione $\mu(\zeta)$ sia applicabile il teorema di FOURIER, abbiamo per essa l'espressione:

$$\mu(s) = -\int_0^\infty \frac{dt}{h_1(t)} \int_{-\infty}^\infty \cos \pi t(z-s) P(z, a)\, dz\,,$$

di cui oramai ci resta solo a constatare l'effettiva validità mediante diretta sostituzione nella (1). In primo luogo, ponendo ζ al posto di s, e s al posto di z, potremo scrivere:

$$\mu(\zeta) = -\int_0^\infty \frac{dt}{h_1(t)} \int_{-\infty}^\infty \cos \pi t(s-\zeta) P(s, a)\, ds\,, \tag{7}$$

e il secondo membro della (1) assumerà l'aspetto:

$$-\int_{-\infty}^\infty d\zeta \int_0^\infty \frac{dt}{h_1(t)} \int_{-\infty}^\infty \cos \pi t(s-\xi) P(s, a)\, ds \int_0^{\pi/2} \frac{4a\, d\varphi}{\sqrt{(z-\zeta)^2 + 4a^2 - 4a^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}}\,.$$

Invertendo, il che si riconosce facilmente essere lecito, l'integrazione rispetto a ζ con entrambe le intermedie rispetto a t e ad s, si ottiene:

$$\int_{-\infty}^\infty \mu(\zeta)\, d\zeta \int_0^{\pi/2} \frac{4a\, d\varphi}{\sqrt{(z-\zeta)^2 + 4a^2 - 4a^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}} \tag{7'}$$

$$= -\int_0^\infty \frac{dt}{h_1(t)} \int_{-\infty}^\infty P(s, a)\, ds \int_{-\infty}^\infty \cos \pi t(s-\zeta)\, d\zeta \int_0^{\pi/2} \frac{4a\, d\varphi}{\sqrt{(z-\zeta)^2 + 4a^2 - 4a^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}}\,.$$

Ora, se nel terzo integrale si assume $\lambda = \zeta - z$ come variabile di integrazione, si ha l'identità:

$$\int_{-\infty}^\infty \cos \pi t(s-\zeta)\, d\zeta \int_0^{\pi/2} \frac{4a\, d\varphi}{\sqrt{(z-\zeta)^2 + 4a^2 - 4a^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}}$$

$$= \cos \pi t(s-z) \int_{-\infty}^\infty \cos \pi t \lambda \int_0^{\pi/2} \frac{4a\, d\varphi}{\sqrt{\lambda^2 + 4a^2 - 4a^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}}$$

$$+ \operatorname{sen} \pi t(s-z) \int_{-\infty}^\infty \operatorname{sen} \pi t \lambda\, d\lambda \int_0^{\pi/2} \frac{4a\, d\varphi}{\sqrt{\lambda^2 + 4a^2 - 4a^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}}\,,$$

la quale, in causa della (4), e per essere:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sen} \pi t\lambda \, d\lambda \int_0^{\pi/2} \frac{4a \, d\varphi}{\sqrt{\lambda^2 + 4a^2 - 4a^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}} = 0 ,$$

si riduce semplicemente a:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos \pi t(s - z) \, d\zeta \int_0^{\pi/2} \frac{4a \, d\varphi}{\sqrt{(z - \zeta)^2 + 4a^2 - 4a^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}} = h_1(t) \cos \pi t(s - z) .$$

Infine, portando questo valore nella (7′), troviamo:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mu(\zeta) \, d\zeta \int_0^{\pi/2} \frac{4a \, d\varphi}{\sqrt{(z - \zeta)^2 + 4a^2 - 4a^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}}$$

$$= - \int_0^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} \cos \pi t(s - z) P(s, a) \, ds = - P(z, a) ,$$

in virtù del teorema di FOURIER.

Con ciò resta provato che la funzione $\mu(\zeta)$, definita dalla (7) soddisfa effettivamente all'equazione (1) e rappresenta per conseguenza la richiesta densità della distribuzione indotta.

Abbiamo dalla (7) che la quantità di materia, la quale viene a disporsi sulla superficie di un segmento cilindrico di spessore $d\zeta$, può essere espressa da:

$$2\pi a \mu(\zeta) \, d\zeta = - d\zeta \int_0^{\infty} \frac{2\pi a}{h_1(t)} \, dt \int_{-\infty}^{\infty} \cos \pi t(s - \zeta) P(s, a) \, ds .$$

Supponendo a molto piccolo, cioè passando al caso limite del filo conduttore, il primo membro, diviso per $d\zeta$, rappresenta la densità lineare, che indicherò con $\nu(\zeta)$; la (6) ci dà poi:

$$- \frac{2\pi a}{h_1(t)} = \frac{1}{2 \log a} \left\{ 1 + \sum_1^{\infty} {}_n \left(\frac{R_3(a)}{4\pi \log a} + \frac{a^2 R_4(a)}{4\pi} \right)^n \right\} ,$$

e, supponendo a così piccolo che i termini del tipo $1/(\log a)^2$, $a^2/\log a$

(e a più forte ragione i successivi $a^p/(\log a)^q$, $p \geqslant 1$, $q \geqslant 2$, ovvero $p \geqslant 2$, $q \geqslant 1$) si possano trascurare di fronte ad $1/\log a$, ne deduciamo:

$$-\frac{2\pi a}{h_1(t)} = \frac{1}{2 \log a}\,;$$

quindi:

$$\nu(\zeta) = \frac{1}{2 \log a} \int_0^\infty dt \int_{-\infty}^\infty \cos \pi t(s - \zeta) P(s, a)\, ds\,,$$

donde, al solito, applicando il teorema di FOURIER:

$$\nu(\zeta) = \frac{1}{2 \log a} P(\zeta, a)\,. \tag{8}$$

Leggiamo in quest'ultima formula la proposizione seguente:

Un filo rettilineo indefinito a sezione circolare, in presenza di masse esteriori, si elettrizza in modo che la densità lineare della distribuzione indotta è, in ciascun punto, direttamente proporzionale al potenziale esterno, e varia da filo a filo in ragione inversa del logaritmo del raggio della sezione.

Nell'enunciato di questo teorema non è detto che la distribuzione inducente sia simmetrica, poichè il teorema stesso può ritenersi indipendente da tale condizione restrittiva. Qualora infatti lo spessore del filo sia abbastanza piccolo, il potenziale esterno può assumersi costante lungo ciascuna sezione circolare ed è quindi applicabile il procedimento testè indicato.

IX.

SUGLI INTEGRALI ALGEBRICI DELLE EQUAZIONI DINAMICHE

« Atti Acc. Torino », vol. XXI (1896), pp. 816-823.

1. – Alcuni anni or sono il signor KOENIGS ha dimostrato (¹) che, se un sistema materiale, soggetto a forze derivanti da un potenziale, ammette un integrale algebrico (rispetto alle velocità), esso ammette altresì almeno un integrale razionale.

La bella nota del signor KOENIGS mi ha suggerito alcune osservazioni assai semplici, che volli raccolte nel presente scritto, quantunque non abbiano carattere di novità, per potermene (dell'ultima in particolar modo) valere con maggior sicurezza in un prossimo lavoro sulle trasformazioni delle equazioni dinamiche.

Io mi propongo di mostrare in primo luogo:

a) che la proposizione del signor KOENIGS vale anche se le forze non provengono da un potenziale;

b) che, per un sistema materiale a legami indipendenti dal tempo e non soggetto a forze, se esiste un integrale razionale indipendente dal tempo, esiste anche almeno un integrale omogeneo;

c) che, qualora un sistema materiale a legami indipendenti dal tempo, ammetta, per un sistema di forze indipendenti dalle velocità, un integrale $A/B =$ cost., razionale rispetto alle velocità, il sistema materiale stesso, libero da forze, ammette come integrale $A'/B' =$ cost. (designando A' e B' il complesso dei termini di grado massimo nei polinomii A e B rispettivamente).

Fatta avvertenza che le osservazioni *b*) e *c*) discendono come caso particolare da un notevole teorema del sig. PAINLEVÉ (²), rilevo che

(¹) *Sur les intégrales algébriques des problèmes de la dynamique,* « Comptes Rendus », Agosto, 1886.

(²) *Sur les intégrales de la dynamique,* « Comptes Rendus », Maggio, 1892.

esse servono, insieme ad *a*), a riportare la classificazione dei problemi dinamici, dal punto di vista degli integrali algebrici, che essi posseggono, al solo caso, in cui non agiscono forze esterne e pel solo tipo degli integrali omogenei. Il campo di ricerca si trova così naturalmente ristretto; io prescinderò tuttavia anche dagli integrali fratti, limitandomi ad esporre, nell'ultimo paragrafo, sotto forma invariantiva, la condizione necessaria e sufficiente, affinchè un sistema materiale a legami indipendenti dal tempo e non soggetto a forze ammetta un integrale intero, omogeneo rispetto alle velocità. La forma di codesta condizione, che mi apparve assai importante per lo studio delle trasformazioni in meccanica, generalizza ovviamente quella assegnata dal prof. RICCI [3], affinchè esistano integrali primi omogenei delle linee geodetiche in una varietà a due dimensioni. Per il caso particolare degli integrali di primo grado, essa riproduce, salvo la diversità dei simboli, un risultato stabilito, collo stesso nostro procedimento, dal prof. CERRUTI [4] e da lui interpretato geometricamente in modo assai elegante.

2. – Sia T la forza viva di un sistema materiale S e si ponga in coordinate lagrangiane:

$$T = \frac{1}{2}\sum_{rs}^{n}{}_{1}\, a_{rs} q'_r q'_s + \sum_{r}^{n}{}_{1}\, a_r q'_r + \tau\,,$$

le a_{rs}, a_r e τ essendo in generale funzioni delle q e del tempo.

Le equazioni del moto, se si dica Q_h (che supporremo dipendere dalle coordinate e dal tempo in modo qualunque, e *razionalmente* dalle velocità) la componente della forza secondo la coordinata q_h, saranno:

$$\frac{d\dfrac{\partial T}{\partial q'_h}}{dt} = Q_h + \frac{\partial T}{\partial q_h}\,, \qquad (h = 1, 2, \dots, n),$$

ovvero, con note riduzioni, ponendo al solito:

$$a_{rs\,h} = \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial a_{rh}}{\partial q_s} + \frac{\partial a_{hs}}{\partial q_r} - \frac{\partial a_{rs}}{\partial q_h}\right\}, \quad a^{(hk)} = \frac{\partial \log a}{\partial a_{hk}}\,,$$

---

(3) *Sulla teoria delle linee geodetiche* ecc. « Atti del R. Ist. Veneto », 1894.

(4) *Sopra una proprietà degli integrali di un problema di meccanica, che sono lineari rispetto alle componenti della velocità*, « Rendiconti dei Lincei », 1895.

e:

$$a_{rs}^k = \sum_1^n{}_h\, a^{(hk)} a_{rs,h}\,, \qquad a_r^k = \sum_1^n{}_h\, a^{(hk)} \left\{ \frac{\partial a_{hr}}{\partial t} + \frac{\partial a_h}{\partial q_r} - \frac{\partial a_r}{\partial q_h} \right\},$$

$$Q^k = \sum_1^n{}_h\, a^{(hk)} Q_h\,, \qquad \tau^k = \sum_1^n{}_k\, a^{(hk)} \left\{ \frac{\partial \tau}{\partial q_h} - \frac{\partial a_h}{\partial t} \right\},$$

$$(1) \qquad q_k'' = Q^k + \tau^k - \sum_1^n{}_{rs}\, a_{rs}^k q_r' q_s' - \sum_1^n{}_r\, a_r^k q_r'\,, \quad (k = 1, 2, \dots, n)\,.$$

Se $F = \text{cost.}$ è un integrale primo delle (1), si avrà $dF/dt = 0$, cioè:

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \sum_1^n{}_k \left\{ \frac{\partial F}{\partial q_k} q_k' + \frac{\partial F}{\partial q_k'} q_k'' \right\} = 0\,,$$

nella quale, sostituendo, al posto delle q_k'', le espressioni (1), siccome i valori iniziali delle q e delle q' sono affatto arbitrarii, il primo membro dovrà annullarsi identicamente. Ponendo pertanto:

$$(2) \qquad \Omega u = \frac{\partial u}{\partial t} + \sum_1^n{}_k \left\{ \frac{\partial u}{\partial q_k} q_k' + \frac{\partial u}{\partial q_k'} \left(Q^k + \tau^k - \sum_1^n{}_{rs}\, a_{rs}^k q_r' q_s' - \sum_1^n{}_r\, a_r^k q_r' \right) \right\},$$

abbiamo che il primo membro F di ogni integrale delle (1), risguardato come funzione dei $2n + 1$ argomenti q_h, q_k' e t, soddisfa all'equazione a derivate parziali lineare ed omogenea $\Omega F = 0$.

Ritenuto ciò, si supponga F funzione algebrica delle q' e quindi definibile mediante un'equazione del tipo:

$$(3) \qquad s_0 F^m + s_1 F^{m-1} + \dots + s_{m-1} F + s_m = 0\,,$$

a coefficienti razionali interi nelle q' stesse. La (3) si può sempre considerare irriducibile nel campo di razionalità delle q'. Applicando ad essa l'operazione Ω, siccome $\Omega F = 0$, verrà:

$$(4) \qquad \Omega s_0 \cdot F^m + \Omega s_1 \cdot F^{m-1} + \dots + \Omega s_{m-1} \cdot F + \Omega s_m = 0\,,$$

e, per l'irriducibilità della (3), siccome, avuto riguardo alla forma di Ω, per le ipotesi ammesse circa le Q_h, i coefficienti della (4) sono ancora razionali nelle q', seguirà necessariamente:

$$\frac{\Omega s_0}{s_0} = \frac{\Omega s_1}{s_1} = \dots = \frac{\Omega s_m}{s_m}\,,$$

e quindi, per esempio, $s_0 \cdot \Omega s_1 - s_1 \cdot \Omega s_0 = 0$, od anche;

$$\frac{s_0 \cdot \Omega s_1 - s_1 \cdot \Omega s_0}{s_0^2} = 0 ,$$

da cui apparisce che ciascun rapporto s_1/s_0, $s_2/s_0, \ldots, s_m/s_0$, ove non si riduca ad una pura costante, è integrale primo delle (1).

In generale questi integrali potranno non essere tutti distinti, nè si può escludere che alcuno sia di per sè una costante; uno almeno deve però contenere effettivamente le q' e sarà l'integrale razionale, di cui volevamo stabilire l'esistenza (5). Se mai la (4) si riduce ad una identità, il sistema possiede almeno un integrale razionale *intero*.

3. - Quando i legami imposti al sistema materiale S sono indipendenti dal tempo e non agiscono forze, le equazioni (1) si riducono a;

$$(1') \qquad q_k'' = -\sum_{1}^{n}{}_{rs}\, a_{rs}^k q_r' q_s' , \qquad (k = 1, 2, \ldots, n);$$

la condizione perchè $F = \text{cost.}$ (con F indipendente dal tempo) sia un integrale, è data da:

$$(2') \qquad \Omega' F = \sum_{1}^{n}{}_{k} \left\{ \frac{\partial F}{\partial q_k} q_k' - \frac{\partial F}{\partial q_k'} \sum_{1}^{n}{}_{rs}\, a_{rs}^k q_r' q_s' \right\} = 0 .$$

Suppongasi che F sia razionale nelle q'; si potrà porre $F = A/B$, A e B essendo funzioni intere, di cui chiameremo A' e B' l'insieme dei termini di grado più elevato. Applicando ad F l'operatore Ω', avremo;

$$\Omega' F = \frac{B \cdot \Omega' A - A \cdot \Omega' B,}{B^2} .$$

Si vede immediatamente che la Ω', applicata ad un polinomio omogeneo nelle q', dà per risultato ancora un polinomio omogeneo col grado aumentato di una unità. Perciò nel prodotto $B \cdot \Omega' A$, i termini di grado più elevato si avranno moltiplicando B' per $\Omega' A'$ e analogamente $A' \cdot \Omega' B'$ sarà il gruppo di termini, aventi lo stesso massimo grado in

---

(5) Come già il sig. KOENIGS, pel caso di forze provenienti da un potenziale, notiamo che, anche nel caso generale, l'esistenza di una integrale F, *algebrico* rispetto ad alcune soltanto delle q' trae necessariamente l'esistenza di almeno un integrale *razionale* rispetto alle stesse quantità. La dimostrazione sarebbe indentica a quella sopra accennata.

$A \cdot \Omega' B$, talchè l'identico annullarsi della differenza $B \cdot \Omega' A - A \cdot \Omega' B$ esigerà che sia:

$$B' \cdot \Omega' A' - A' \cdot \Omega' B' = 0 ,$$

cioè $A'/B' =$ cost. è un integrale omogeneo delle equazioni (1').

4. – Si supponga che un sistema S a legami indipendenti dal tempo ammetta, per date forze Q_h indipendenti dalle velocità, un integrale razionale (indipendente dal tempo) $A/B =$ cost. La condizione (2) diviene nel caso presente

$$(2'') \qquad \Omega'' F = \sum_1^n {}_k \left\{ \frac{\partial F}{\partial q_k} q'_k + \frac{\partial F}{\partial q'_k} \left(Q^k - \sum_1^n {}_{rs} a^k_{rs} q'_r q'_s \right) \right\} = \Omega' F + \sum_1^n {}_k \frac{\partial F}{\partial q'_k} Q^k = 0 ,$$

ed avremo $\Omega''(A/B) = 0$.

Se, come poc'anzi, si designano con A' e B' i termini di grado più elevato in A e in B, si riconosce senza difficoltà che, nella differenza $B \cdot \Omega'' A - A \cdot \Omega'' B$, l'insieme dei termini di grado massimo è dato da $B' \cdot \Omega' A' - A' \cdot \Omega' B'$; dunque:

$$B' \cdot \Omega' A' - A' \cdot \Omega' B' = 0 ,$$

il che dimostra come da ogni integrale *razionale* $A/B =$ cost., relativo a un sistema S e a forze Q_h comunque date, purchè indipendenti dalle velocità, si deduce un integrale *razionale* ed *omogeneo* per lo stesso sistema libero da forze.

Come caso particolare, supponendo nulle le Q_h, si ritrova il contenuto del precedente paragrafo.

5. – Proponiamoci da ultimo di assegnare esplicitamente le condizioni, affinchè un polinomio del tipo:

$$(5) \qquad A = \sum_1^n {}_{r_1 r_2 \ldots r_m} A_{r_1 r_2 \ldots r_m} q'_{r_1} q'_{r_2} \ldots q'_{r_m} ,$$

sia integrale primo per un sistema S a legami indipendenti dal tempo e non soggetto a forze. Essendo:

$$T = \frac{1}{2} \sum_1^n {}_{rs} a_{rs} q'_r q'_s$$

la forza viva del sistema, pongasi:

$$ds^2 = 2T\, dt^2 = \sum_1^n {}_{rs} a_{rs}\, dq_r\, dq_s$$

e si consideri la varietà φ a n dimensioni, di cui ds^2 rappresenta il quadrato dell'elemento lineare.

Ricordo che, dato un sistema di funzioni (delle variabili indipendenti q_i) d'ordine m, cioè del tipo $A_{r_1 r_2 \dots r_m}$ $(r_1, r_2, \dots, r_m = 1, 2, \dots, n)$, simmetrico o no rispetto ai suoi m indici, secondo una denominazione introdotta nella scienza dal prof. Ricci, il sistema d'ordine $m+1$, definito da:

$$A_{r_1 r_2 \dots r_{m+1}} = \frac{\partial A_{r_1 r_2 \dots r_m}}{\partial q_{r_{m+1}}} - \sum_1^m {}_l \sum_1^n {}_r\, a^r_{r_l r_{m+1}} A_{r_1 \dots r_{l-1} r\, r_{l+1} \dots r_m}, \tag{6}$$

chiamasi *derivato covariante* del proposto rispetto alla forma fondamentale φ.

La proprietà essenziale delle derivazioni covarianti risiede nel loro carattere invariantivo, per cui, ogniqualvolta, passando dalle variabili q a certe nuove variabili (q), il sistema (A) trasformato delle $A_{r_1 r_2 \dots r_m}$, si esprima secondo la legge:

$$(A_{r_1 r_2 \dots r_m}) = \sum_1^n {}_{s_1 s_2 \dots s_m} A_{s_1 s_2 \dots s_m} \frac{\partial q_{s_1}}{\partial (q_{r_1})} \frac{\partial q_{s_2}}{\partial (q_{r_2})} \cdots \frac{\partial q_{s_m}}{\partial (q_{r_m})}, \tag{7}$$

sia cioè *covariante* al primitivo, lo stesso accade dei rispettivi derivati. In particolare, siccome evidentemente i coefficienti di un integrale primo costituiscono un sistema covariante, sarà pure covariante il sistema derivato.

Ciò posto, se $A = \text{cost.}$ è integrale delle (1'), la $\Omega' A = 0$, scrivendo r_{m+1} al posto di k, porge nel caso presente:

$$\sum_1^n {}_{r_1 \dots r_m r_{m+1}} \frac{\partial A_{r_1 r_2 \dots r_m}}{\partial q_{r_{m+1}}} q'_{r_1} q'_{r_2} \cdots q'_{r_{m+1}}$$
$$- \sum_1^m {}_l \sum_1^n {}_{r_1 \dots r_{l-1} r_{l+1} \dots r_m r_{m+1}} A_{r_1 \dots r_{l-1} r_{m+1} r_{l+1} \dots r_m} q'_{r_1} \cdots q'_{r_{l-1}} q'_{r_{l+1}} \cdots q'_{r_m} \sum_1^n {}_{rs}\, a^{r_{m+1}}_{rs} q'_r q'_s = 0,$$

od anche, ove si scambino nel secondo termine gli indici r ed r_{m+1}, si scriva r_l al posto di s e poi si riuniscano le due sommatorie:

$$\sum_1^n {}_{r_1 r_2 \dots r_m r_{m+1}} q'_{r_1} q'_{r_2} \cdots q'_{r_m} q'_{r_{m+1}} \left\{ \frac{\partial A_{r_1 r_2 \dots r_m}}{\partial q_{r_{m+1}}} - \sum_1^m {}_l \sum_1^n {}_r\, a^r_{r_l r_{m+1}} A_{r_1 \dots r_{l-1} r\, r_{l+1} \dots r_m} \right\} = 0 .$$

In virtù delle (6), si ha:

$$\sum_1^n {}_{r_1 r_2 \dots r_m r_{m+1}} A_{r_1 r_2 \dots r_m r_{m+1}} q'_{r_1} q'_{r_2} \cdots q'_{r_m} q'_{r_{m+1}} = 0 ,$$

la quale, avuto riguardo alla simmetria del sistema $A_{r_1 r_2 \dots r_m}$, che si conserva pei primi m indici delle $A_{r_1 r_2 \dots r_m r_{m+1}}$, esige che il sistema $A_{r_1 r_2 \dots r_m r_{m+1}}$ sia, come si dice, *emisimmetrico*, che cioè sieno nulle le somme degli elementi, che si ottengono da ogni generico coefficiente $A_{r_1 r_2 \dots r_m r_{m+1}}$, eseguendo sopra i suoi indici $m + 1$ potenze consecutive della sostituzione circolare $(r_1 r_2 \dots r_m r_{m+1})$.

Concludiamo pertanto:

Affinchè $\sum_{r_1 r_2 \dots r_m} A_{r_1 r_2 \dots r_m} q'_{r_1} q'_{r_2} \dots q'_{r_m} = \text{cost.}$ *sia integrale primo per un sistema S, a legami indipendenti dal tempo, su cui non agiscono forze, o, ciò che è lo stesso, per le equazioni delle linee geodetiche in una varietà φ di elemento lineare $ds = \sqrt{2T\,dt^2}$, è necessario e basta che il sistema $A_{r_1 r_2 \dots r_m r_{m+1}}$ sia emisimmetrico.*

Esprimendo così le condizioni per l'esistenza di un integrale omogeneo di grado m, si mette in evidenza colla massima semplicità il loro carattere invariantivo di fronte ad ogni possibile trasformazione di coordinate.

X.

SULLE TRASFORMAZIONI DELLE EQUAZIONI DINAMICHE

« Ann. di Mat. », serie 2ª, t. XXIV (1896), pp. 255-300.

Introduzione.

Accanto al problema classico della trasformabilità di due forme differenziali quadratiche è stato posto in questi ultimi anni dal sig. APPELL (1) il problema analogo più generale della trasformabilità di due sistemi di equazioni dinamiche fra uno stesso numero di variabili.

Varii autori hanno dopo di allora istituito ricerche su questo soggetto, segnatamente i sigg. PAINLEVÉ e R. LIOUVILLE, cui spetta il merito di aver scoperto alcune interessanti proprietà generali. Per aver modo di farne un breve cenno, conviene fin d'ora precisar la questione, indicando altresì l'aspetto definitivo, sotto cui essa può venire formulata.

Ecco in primo luogo l'enunciato del sig. APPELL.

Dati due sistemi materiali S ed S_1 a legami indipendenti dal tempo e collo stesso grado di libertà, e dette rispettivamente x_i e y_i $(i=1, 2, \dots, n)$ le coordinate lagrangiane, che fissano la posizione dei due sistemi, X_i, Y_i le forze, che li sollecitano secondo queste coordinate, saranno:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{1}^{n}{}_{rs}\, a_{rs} x'_r x'_s\,, \qquad T_1 = \frac{1}{2} \sum_{1}^{n}{}_{rs}\, b_{rs} \bar{y}'_r \bar{y}'_s\,,$$

$$\text{(A)} \qquad \frac{d \dfrac{\partial T}{\partial x'_i}}{dt} - \frac{\partial T}{\partial x_i} = X_i\,,$$

$$\text{(B)} \qquad \frac{d \dfrac{\partial T_1}{\partial \bar{y}'_i}}{dt_1} - \frac{\partial T}{\partial y_i} = Y_i\,, \qquad (i = 1, 2, \dots, n)\,,$$

---

(1) *Sur des transformations de mouvements*, « Crelle », Bd. 109, 1892. Si trovano in questa Nota molte indicazioni di lavori aventi attinenza collo stesso argomento o relativi ad alcuni casi particolari.

le forze vive e le equazioni del moto dei due sistemi, essendosi designata al solito con x_i' la derivata di x_i rispetto a t, e, per evitare ambiguità, con $\bar{y}_i'$ la derivata di y_i rispetto a t_1.

Si domanda sotto quali condizioni esista e come si possa assegnare una trasformazione del tipo:

$$\text{(C)} \qquad \begin{cases} y_i = \varphi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) & (i = 1, 2, \ldots, n), \\ dt_1 = \dfrac{dt}{\mu(x_1, x_2, \ldots, x_n)}, & \end{cases}$$

atta a far coincidere il sistema di equazioni (B) col sistema (A), supponendo:

1) Che sieno date tanto le forze X_i, quanto le Y_i.

2) Che sieno date le sole forze X_i e si possano assegnare a piacimento le Y_i.

La seconda parte della questione, come ha osservato lo stesso signor APPELL, è sempre risolubile, se le forze si risguardano dipendenti anche dalle velocità; si può cioè, e in infiniti modi, con opportuna scelta delle Y_i, far corrispondere a ogni movimento del sistema S, dovuto a forze dipendenti dalle coordinate e dalle velocità, un movimento analogo del sistema S_1, le cui equazioni differenziali (B) sieno, mediante trasformazione del tipo (C), riconducibili alle (A).

In vista di ciò e del minor interesse, che può essere annesso al caso di forze dipendenti eziandio dalle velocità, giova addirittura, anche per la prima parte della questione, limitarsi all'ipotesi che le forze sieno indipendenti dalle velocità stesse.

Il problema, ristretto sotto questo punto di vista, venne ripreso dal sig. PAINLEVÉ, che lo presenta [2] tuttavia con una felice modificazione. Egli richiede soltanto che le traiettorie del sistema (B) si possano ricondurre a quelle di (A), o, in altri termini, che gli $n-1$ integrali di (B) indipendenti da t_1 si possano, mediante trasformazioni del tipo:

$$\text{(D)} \qquad y_i = \varphi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n), \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

far coincidere cogli $n-1$ integrali di (A) indipendenti da t; di più egli ha fatto notare come convenga scindere la ricerca in due parti, di cui la prima soltanto è essenziale, riducendosi la seconda ad una trasformazione di forme differenziali quadratiche. Per stabilire questo punto,

---

[2] *Sur la transformation des équations de la dynamique*, « Journal de Liouville », t. 10, 1894.

si immagini di sostituire in (B) le y_i coi loro valori $\varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ e si ponga:

$$T_1 = \sum_1^n{}_{rs}\, b_{rs}\, \overline{y}'_r\, \overline{y}'_s = \sum_1^n{}_{rs}\, \alpha_{rs}\, \overline{x}'_r\, \overline{x}'_s\,,$$

$$\Xi_i = \sum_1^n{}_k\, Y_k \frac{\partial y_k}{\partial x_i}\,;$$

le equazioni

$$(\mathrm{A}_1) \qquad \frac{d\dfrac{\partial T_i}{\partial \overline{x}'_i}}{dt_1} - \frac{\partial T_1}{\partial x_i} = \Xi_i\,, \qquad (i = 1, 2, \dots, n)\,,$$

che sono, come è noto, le trasformate delle (B), dovranno ammettere *le stesse traiettorie* di (A), il che mostra in primo luogo che da ogni coppia di sistemi (A), (B), le cui traiettorie si possono far coincidere per mezzo di una trasformazione (D), si deduce una coppia di sistemi (A), (A_1), pure d'equazioni dinamiche, e *aventi le stesse traiettorie*. D'altra parte poi, se si conoscono, per ogni sistema (A), tutti gli (A_1) aventi le stesse traiettorie, cioè secondo la denominazione del sig. PAINLEVÉ, tutti i sistemi *corrispondenti*, la questione originariamente proposta, di decidere se e come si possa assegnare una trasformazione (D) atta a ricondurre le traiettorie di (B) in quelle di (A), si può risguardare risoluta; poichè una tale trasformazione esisterà allora e solo allora che sia possibile stabilire una identità del tipo

$$\sum_1^n{}_{rs}\, b_{rs}\, dy_r\, dy_s = \sum_1^n{}_{rs}\, \alpha_{rs}\, dx_r\, dx_s\,,$$

le b_{rs} essendo i coefficienti della forza viva di (B) e le α_{rs} essendo i coefficienti della forza viva in un sistema (A_1) corrispondente ad (A).

Se si suppone adunque che tutti i sistemi (A_1) sieno conosciuti, non ci resta che da esaminare, per ciascuno di essi, se le forme differenziali quadratiche $\sum_1^n{}_{rs}\, b_{rs}\, dy_r\, dy_s$, $\sum_1^n{}_{rx}\, \alpha_{rs}\, dx_r\, dx_s$ sono equivalenti nel senso ordinario e da determinare in caso affermativo le formule di trasformazione. Affinchè codesto criterio sia in fatto applicabile, si esige manifestamente che le espressioni possibili per le α_{rs} si riducano ad un numero finito di tipi, e questo precisamente ha luogo nel caso nostro, poichè, come vedremo e come del resto ha già osservato il sig. PAINLEVÉ, il problema della determinazione di tutti i corrispondenti ad un dato (A) è di quelli, il cui integrale generale dipende soltanto da un numero finito di costanti arbitrarie.

Concludiamo pertanto che, senza ledere la generalità della ricerca, basta limitarla alla questione di *determinare, per un dato sistema* (A), *tutti i corrispondenti* (A_1).

I risultati più notevoli raggiunti finora si possono riassumere come segue ([3]):

1) Ogni qual volta un sistema (A) ammette un corrispondente (A_1) *non ordinario* (cioè non di un certo tipo assai facilmente assegnabile, che compete ad ogni (A) fissato ad arbitrio), esiste per entrambi un integrale primo quadratico.

2) Se nel sistema (A) si suppone che le forze sieno nulle, lo stesso deve accadere per ogni suo corrispondente (A_1); quindi, posto $ds^2 = 2T\,dt^2$, $ds_1^2 = 2T_1\,dt_1^2$, la ricerca dei sistemi corrispondenti ad (A) equivale in questo caso alla determinazione di tutte le varietà ds_1, che hanno le medesime geodetiche di ds. (Per $n = 2$, il problema, come è ben noto, è stato risoluto dal prof. DINI).

3) *Teorema di* R. LIOUVILLE ([4]). Due sistemi (A) ed (A_1) privi di forze, i quali definiscano le medesime geodetiche, ammettono entrambi n integrali quadratici, che possono però coincidere ed anche ridursi al solo integrale delle forze vive.

4) La trasformazione, che permette di ricondurre un sistema (A_1) al suo corrispondente (A), è del tipo

$$dt_1 = \frac{dt}{\mu(x_1, x_2, \dots, x_n)},$$

quando non agiscono forze, e più generalmente del tipo

$$dt_1^2 = \frac{dt^2}{\mu^2}\left\{1 - \sum_1^n{}_{rs}\, c_{rs} x'_r x'_s\right\},$$

(la μ e le c_{rs} essendo funzioni delle x) in tutti gli altri casi. Apparisce da ciò come in generale la condizione di ammettere le medesime traiettorie sia per due sistemi di equazioni dinamiche alquanto meno restrittiva che non la loro trasformabilità secondo il sig. APPELL (veggasi la

---

([3]) Io ho esposto questi risultati nel modo, che mi parve più semplice; però il loro ordine, come avremo occasione di constatare più innanzi, non rispecchia la successione naturale, secondo cui si presentano.

([4]) *Sur les équations de la dynamique.* Acta Math., tom. 19, 1895; è notevole l'estensione ivi indicata di alcuni risultati ad una classe di equazioni più generali delle dinamiche.

seconda delle equazioni (C)); le due condizioni si equivalgono, solo quando mancano le forze.

Malgrado queste notevoli proposizioni, il problema generale della determinazione di tutti i corrispondenti ad un dato (A), non venne ancora trattato. Il sig. LIOUVILLE ne ha stabilite le equazioni differenziali (di cui si vale per stabilire in modo diverso da quello del sig. PAINLEVÉ le proprietà accennate), senza tuttavia proporsene la effettiva integrazione, ciò, che per verità, prendendo direttamente le sue formule, non sarebbe punto agevole.

Lo studio di tale questione costituisce all'incontro l'oggetto principale delle mie ricerche.

Io prendo le mosse *ab initio* dalla definizione di sistemi corrispondenti e mostro in primo luogo come *l'integrazione di un sistema equivale a meno di quadrature a quella d'ogni suo corrispondente*; discuto quindi le relazioni che debbono passare tra le variabili t e t_1 e ritrovo per via diretta le forme già note:

$$dt_1 = \frac{dt}{\mu(x_1, x_2, \ldots, x_n)},$$

quando non agiscono forze, e più generalmente

$$dt_1^2 = \frac{dt^2}{\mu^2}\left\{1 - \sum_1^n{}_{rs}\, c_{rs} x'_r x'_s\right\},$$

negli altri casi (secondo e quarto dei risultati sopra riferiti). Ho dovuto limitarmi nella presente Memoria a considerare *il caso, in cui non agiscono forze, cioè, con linguaggio geometrico, il problema della conservazione delle geodetiche.*

Si può attribuire ad esso il seguente aspetto generale:

Data una varietà φ, il cui elemento lineare sia $ds = dt\sqrt{2T}$, determinare tutte le varietà Φ rappresentabili (almeno in una certa regione) *univocamente su φ, in modo che ad ogni geodetica di Φ corrisponda una geodetica di φ.*

È manifesto infatti che, se si risguardano equivalenti le varietà applicabili (e si suppone quindi sostituibile ciascuna categoria di varietà applicabili con un solo individuo), la determinazione delle Φ si riduce a quella di tutte le varietà, che hanno le stesse geodetiche di φ, cioè effettivamente alla determinazione di tutti i $ds_1^2 = \sum_1^n{}_{rs}\, \alpha_{rs}\, dx_r\, dx_s$, che rendono, supposte nulle le forze, il sistema (A_1) corrispondente al sistema (A).

Questo problema trovasi risoluto completamente (5).

Fissate nel § 4 le equazioni, che legano le α_{rs} alle a_{rs}, mi occupo nel § 6 di trasformarle, introducendo le derivate covarianti del prof. Ricci, che sono prezioso quanto elegante stromento in tutte le ricerche, che hanno carattere invariantivo. Dalle equazioni differenziali, in tal guisa trasformate, deduco immediatamente l'esistenza di un integrale primo quadratico (primo dei risultati sopra riferiti).

Estesi quindi (§§ 7 ed 8) (colla scorta di una Nota recente (6) dello stesso prof. Ricci) al caso di n variabili taluni procedimenti di calcolo, immaginati dal medesimo autore nelle sue ricerche sulla teoria delle superficie (7), me ne valgo (§ 9) per attribuire alle mie equazioni un aspetto molto più semplice e sotto cui l'interpretazione geometrica si presenta spontanea. Il successo del metodo da me adottato si deve a questa interpretazione; essa rivela infatti l'esistenza nelle coppie di varietà corrispondenti (chiamando per brevità varietà corrispondenti quelle, le cui geodetiche coincidono) di speciali famiglie di superfici, che, assunte a sistema coordinato, attribuiscono forme particolari ai quadrati degli elementi lineari. Ciò permette la riduzione di una coppia qualsivoglia di sistemi corrispondenti a n tipi perfettamente deteminati t_1), t_2), ..., t_n), ciascun tipo essendo caratterizzato dalla trasformabilità dei ds e ds_1 a certe forme canoniche, rese esplicite a § 12.

Di più, dato ad arbitrio un sistema (A) privo di forze, o ciò che è lo stesso un ds e fissato un tipo t_m), si possono formare, se esistono ,tutti i ds_1 corrispondenti (cioè spettanti a sistemi corrispondenti di quel tipo). La loro espressione generale dipende da due costanti arbitrarie per t_1), t_2), ..., t_{n-1}), da una costante sola pel tipo t_n).

Due sistemi corrispondenti di tipo t_m) ammettono ciascuno $n - m + 1$ integrali primi *quadratici* distinti, con che riesce completato in un punto importante il teorema di Liouville.

Pongo ormai termine a questa introduzione, esprimendo la speranza di poter presentare in un prossimo articolo alcuni risultati relativi ai sistemi sollecitati da forze.

---

(5) Conviene aggiungere, « nel campo reale », poichè non solo noi ci riferiamo sempre (come è naturale, trattandosi di equazioni dinamiche) a forme ds^2, ds_1^2 essenzialmente positive, ma non sarebbe nemmeno possibile col nostro procedimento prescindere dall'ipotesi (cfr. § 7) che una almeno di esse conservi sempre il medesimo segno.

(6) *Sulla teoria degli iperspazii*, « Rendiconti dei Lincei », 1895.

(7) Si veggano gli « Atti dell'Ist. Veneto » 1893, 1894 e 1895.

1. - Sistemi corrispondenti. Loro equivalenza a meno di quadrature.

Sieno:

$$\text{(A)}\qquad \frac{d\dfrac{\partial T}{\partial x_i'}}{dt} - \frac{\partial T}{\partial x_i} = X_i\,, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

$$\text{(A}_1\text{)}\qquad \frac{d\dfrac{\partial T_1}{\partial \bar{x}_i'}}{dt_1} - \frac{\partial T_1}{\partial x_i} = \Xi_i$$

le equazioni differenziali spettanti a due problemi dinamici collo stesso grado di libertà, ma in generale distinti, sì per la natura del sistema in movimento, che per le forze. Se, ogni qualvolta si attribuiscono alle coordinate e alle velocità gli stessi valori iniziali, i due movimenti hanno nello spazio rappresentativo $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ la stessa traiettoria (potendo però differire per il modo con cui, al variare del tempo, tale comune traiettoria viene percorsa), i sistemi (A) ed (A_1) secondo una denominazione proposta dal sig. PAINLEVÉ, si dicono *corrispondenti.*

Giova mostrare prima di tutto che: *L'integrazione delle equazioni differenziali di due problemi corrispondenti, presenta, a meno di quadrature, la stessa difficoltà.* Infatti, integrato uno dei due sistemi, poniamo il primo, si hanno, eliminando il tempo, $n-1$ relazioni tra le coordinate e le costanti arbitrarie, le quali, per ipotesi, debbono essere altresì integrali del secondo sistema. Da esse si potranno ricavare x_2, $x_3, \ldots, x_n$ in funzione di x_1, e, derivando rapporto a t_1, $\bar{x}_2'$, $\bar{x}_3', \ldots, \bar{x}_n'$ in funzione di x_1 e di $\bar{x}_1'$. Si immagini ora di risolvere il sistema (A_1) rispetto ad $\bar{x}_1''$ e di sostituire nel secondo membro per x_2, $x_3, \ldots x_n$; $\bar{x}_2', \bar{x}_3', \ldots, \bar{x}_n'$ le loro espressioni, otterremo, come è agevole riconoscere una equazione della forma:

$$\bar{x}_1'' = P\bar{x}_1'^2 + Q\,,$$

P e Q essendo funzioni della sola x_1; ed è manifesto che basterà integrare tale equazione, per determinare completamente il moto del sistema (A_1). Consideriamo x_1 come variabile indipendente, $y = \bar{x}_1'^2$ come funzione incognita; avendosi

$$\bar{x}_1' = \frac{dx_1}{dt_1}\,, \quad \bar{x}_1'' = \frac{d\bar{x}_1'}{dt_1}\,,$$

risulterà

$$\bar{x}_1'' = \bar{x}_1' \frac{d\bar{x}_1'}{dx_1} = \frac{1}{2}\,\frac{dy}{dx_1}\,,$$

e per conseguenza

$$\frac{1}{2}\frac{dy}{dx_1} = Py + Q .$$

Tale equazione, lineare in y, si integra per quadrature, e, nota y, si ha con una nuova quadratura da

$$dt_1 = \frac{dx_1}{x_1'} = \frac{dx_1}{\sqrt{y}},$$

la richiesta relazione fra x_1 e t_1.

La proposizione enunciata si potrebbe del resto ovviamente dedurre dalla nota teoria dell'ultimo moltiplicatore [8].

2. - Modo di passare dall'uno all'altro di due sistemi corrispondenti.

Il precedente teorema mette in evidenza l'interesse, che si riattacca alla considerazione dei sistemi corrispondenti, poichè un problema dinamico potrà riguardarsi risoluto, le quante volte si giunga a stabilire che esso è il corrispondente di un caso noto. Sorge quindi spontanea la questione di determinare per un sistema (A) tutti i corrispondenti.

Affine di poter anche soltanto abbordare una questione siffatta, occorre manifestamente conoscere quali condizioni leghino tra loro le forze e i coefficienti della forza viva di due sistemi corrispondenti. Noi dovremo pertanto in primo luogo avviarci a stabilire codeste condizioni.

Sia

$$(1)\qquad \begin{cases} x_1 = \varphi_1(t, x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0;\ x_1'^0, x_2'^0, \ldots, x_n'^0) \\ x_2 = \varphi_2(t, x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0;\ x_1'^0, x_2'^0, \ldots, x_n'^0) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n = \varphi_n(t, x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0;\ x_1'^0, x_2'^0, \ldots, x_n'^0), \end{cases}$$

il sistema integrale delle (A), dove si suppone, come è sempre possibile, che le $2n$ costanti di integrazione sieno i valori delle coordinate e della velocità per un generico valore del tempo t^0.

---

(8) C. G. J. JACOBI, *Vorlesungen über Dynamik*, Lez. 18.

Il sistema integrale delle (A_1) sarà:

$$(2)\qquad \begin{cases} x_1 = \psi_1(t_1, x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0;\ x_1'^0, x_2'^0, \dots, x_n'^0) \\ x_2 = \psi_2(t_1, x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0;\ x_1'^0, x_2'^0, \dots, x_n'^0) \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n = \psi_n(t_1, x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0;\ x_1'^0, x_2'^0, \dots, x_n'^0)\,, \end{cases}$$

nelle quali pure $x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0;\ x_1'^0, x_2'^0, \dots, x_n'^0$ rappresentano i valori delle coordinate e delle velocità relativi ad un generico valore t_1^0 di t_1. Se si immagina che tali valori iniziali, pur restando affatto arbitrarii, coincidano con quelli, che compaiono nelle (1), si esprimerà immediatamente la condizione di corrispondenza pei sistemi (A) ed (A_1), dicendo che l'eliminazione di t dalle (1), e di t_1 dalle (1) deve portare *alle stesse relazioni* fra le coordinate.

Ciò equivale ad esigere che, sostituendo nelle (2), t_1 in funzione di t, per mezzo, poniamo, della relazione:

$$(3)\qquad \varphi_1(t, x_1^0, \dots, x_n^0;\ x_1'^0, \dots, x_n'^0) = \psi_1(t_1, x_1^0, \dots, x_n^0;\ x_1'^0, \dots, x_n'^0)\,,$$

le (2) stesse *si riducano identicamente alle* (1). In tal caso avviene altresì che le equazioni:

$$(1')\qquad \begin{cases} x_1' = \dfrac{d\varphi_1}{dt} \\ x_1' = \dfrac{d\varphi_2}{dt} \\ \dots\dots \\ \dots\dots \\ x_n' = \dfrac{d\varphi_n}{dt}\,, \end{cases}$$

derivate delle (1) rapporto a t e le:

$$(2')\qquad \begin{cases} \bar{x}_1' = \dfrac{d\psi_1}{dt_1} \\ \bar{x}_2' = \dfrac{d\psi_2}{dt_1} \\ \dots\dots \\ \dots\dots \\ \bar{x}_n' = \dfrac{d\psi_n}{dt_1}\,, \end{cases}$$

derivate delle (2) rapporto a t_1, si riconducono le une alle altre, mediante la (3) e la conseguente relazione differenziale:

$$\frac{d\varphi_1}{dt}\, dt = \frac{d\psi_1}{dt_1}\, dt_1 . \tag{4}$$

Valendo codesta proprietà per ogni sistema di valori delle costanti arbitrarie $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0; x_1'^0, x_2'^0, \ldots, x_n'^0$, è manifesto che, se nelle (3) e (4) a mezzo delle (1), (1′), si sostituiscono le $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0; x_1'^0, x_2'^0, \ldots, x_n'^0$ colle $x_1, x_2, \ldots, x_n; x_1', x_2', \ldots, x_n'$, e poi tali espressioni di t_1 e dt_1 si portano nelle (2), (2′), il risultato deve sostanzialmente esser sempre quello di ricondurre le (2), (2′) alle (1), (1′). In conseguenza, esprimendo le (3), (4), dopo eseguita l'accennata sostituzione, nella forma:

$$t_1 = F(t, x_1, x_2, \ldots, x_n;\; x_1', x_2', \ldots, x_n') , \tag{3′}$$

$$dt_1 = \frac{dt}{f(t, x_1, x_2, \ldots, x_n;\; x_1', x_2', \ldots, x_n')} , \tag{4′}$$

possiamo concludere che, per la corrispondenza tra (A) e (A_1), è necessario e basta che un cambiamento di variabile indipendente del tipo (3′), (4′) riconduca il sistema integrale delle (A_1) a quello delle (A). Messa sotto questo aspetto, la condizione di corrispondenza si traduce assai facilmente in relazione fra gli stessi sistemi differenziali (A), (A_1); poichè, se esiste un cambiamento di variabile indipendente, che ne fa coincidere i sistemi integrali, il cambiamento stesso deve evidentemente trasformarli l'uno nell'altro.

La variabile t_1 non entrando esplicitamente nelle (A_1), deduciamo il seguente risultato fondamentale:

Condizione necessaria e sufficiente affinchè due sistemi (A) *ed* (A_1) *di equazioni dinamiche ammettano le medesime traiettorie, si è che il sistema* (A_1) *possa identicamente trasformarsi in* (A), *mediante un cambiamento di variabile indipendente del tipo*:

$$dt_1 = \frac{dt}{f(t, x_1, x_2, \ldots, x_n;\; x_1', x_2', \ldots, x_n')} .$$

3. - Caratteri della funzione f.

Nei riguardi della funzione f è bene notare che essa, in un certo intorno di $x_1' = 0$, $x_2' = 0, \ldots, x_n' = 0$, almeno per qualche valore delle coordinate e del tempo, è regolare [9] *e diversa da zero.*

Per stabilire questa proprietà, giova dapprima risolvere i sistemi (A) ed (A_1), rispetto alle derivate seconde, ciò, che, se si pone:

$$a = \sum \pm a_{11}a_{22} \ldots a_{nn}\,, \qquad \alpha = \sum \pm \alpha_{11}\alpha_{22} \ldots \alpha_{nn}\,,$$

$$a^{(ij)} = \frac{\partial \log a}{\partial a_{ij}}\,, \qquad \alpha^{(ij)} = \frac{\partial \log \alpha}{\partial \alpha_{ij}}\,,$$

$$a_{rs,i} = \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial a_{ri}}{\partial x_s} + \frac{\partial a_{is}}{\partial x_r} - \frac{\partial a_{rs}}{\partial x_i}\right\}, \qquad \alpha_{rs,i} = \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial \alpha_{ri}}{\partial x_s} + \frac{\partial \alpha_{is}}{\partial x_r} - \frac{\partial \alpha_{rs}}{\partial x_i}\right\},$$

$$a_{rs}^j = \sum_1^n{}_i\, a^{(ij)} a_{rs,i}\,, \qquad \alpha_{rs}^j = \sum_1^n{}_i\, \alpha^{(ij)} \alpha_{rs,i}\,,$$

$$X^j = \sum_1^n{}_i\, a^{(ij)} X_i\,, \qquad \Xi^j = \sum_1^n{}_i\, \alpha^{(ij)} \Xi_i\,,$$

conduce, come è noto, alle equazioni:

$$(A') \qquad x_j'' = X^j - \sum_1^n{}_{rs}\, a_{rs}^j x_r' x_s'\,,$$

$$(A_1') \qquad \bar{x}_j'' = \Xi^j - \sum_1^n{}_{rs}\, \alpha_{rs}^j \bar{x}_r' \bar{x}_s'\,. \qquad (j = 1, 2, \ldots, n),$$

Immaginando di sostituire col solito metodo alle (A′) il sistema di equazioni di prim'ordine:

$$\frac{dx_j}{dt} = x_j'\,, \qquad \frac{dx_j'}{dt} = X^j - \sum_1^n{}_{rs}\, a_{rs}^j x_r' x_s'\,,$$

---

[9] Noi supponiamo implicitamente in questo paragrafo e nei due successivi che i coefficienti a_{rs} e α_{rs}, nelle espressioni di T e di T_1, sieno funzioni analitiche delle x_i. Non sarà per altro difficile riconoscere che i risultati finali dei paragrafi 4 e 5 sono indipendenti da questa ipotesi restrittiva, quantunque lo stabilirli con rigore riuscirebbe inutilmente penoso.

apparisce che i valori $x_1' = x_1'^0$, $x_2' = x_2'^0, \ldots, x_n' = x_n'^0$, presi comunque, purchè finiti, almeno in un certo campo C delle variabili x_i e t (in cui supporremo presi i valori iniziali $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0, t_0$), non sono singolari pei secondi membri. Si può quindi asserire ([10]) che le funzioni integrali φ sono regolari in C per ogni sistema di valori delle $x_1'^0, x_2'^0, \ldots, x_n'^0$ e in particolare pel valor zero di queste quantità.

Analoga proprietà compete naturalmente alle funzioni ψ, nonchè alle derivate delle φ e delle ψ. Se si prende ora ad esaminare il sistema (1), (1′) e lo si immagina risoluto rispetto ai valori iniziali, questi ci si presentano, nel campo C sopra detto come funzioni analitiche delle x', regolari per tutti i valori finiti delle x' stesse. Sostituendo così i valori iniziali, la relazione (3) $\varphi_1 = \psi_1$ definisce t come una funzione τ_1 di $t_1, x_1, \ldots, x_n, x_1', \ldots, x_n'$, la quale si mantiene certamente regolare, dovunque non sia $d\varphi_1/dt = 0$. Considerando infine la (4), se vi si sostituisce t per mezzo di τ_1 e i valori iniziali mediante le loro espressioni desunte dalle (1), (1′), $d\varphi_1/dt$ diviene x_1' e $d\psi_1/dt_1$ una certa funzione $\chi_1(t_1, x_1, \ldots, x_n;\, x_1', \ldots, x_n')$, la quale nel campo C è regolare per valori finiti delle x', escluso al più il valore $x_1' = 0$ ([11]).

Ne viene che il rapporto

$$\frac{\chi_1(t_1, x_1, \ldots, x_n;\, x_1', \ldots, x_n')}{x_1'},$$

considerato come funzione dei suoi argomenti, può avere nel campo C e per valori finiti delle x', il solo punto singolare $x_1' = 0$.

Le osservazioni precedenti permettono di togliere questa restrizione e di stabilire che il detto rapporto è, anche nel punto $x_1' = 0$, regolare e non identicamente nullo.

Infatti si noti che, assumendo a punto di partenza un'altra ([12]) relazione del tipo $\varphi_i = \psi_i$ $(i > 1)$, per es. la $\varphi_2 = \psi_2$ e operando, come si è fatto sulla $\varphi_1 = \psi_1$, si trova che il rapporto $(d\psi_2/dt_1)/(d\varphi_2/dt)$, sostituitivi τ_2 ([13]) per t e i valori iniziali mediante le loro espressioni ricavate dalle

---

([10]) NICCOLETTI, *Sugli integrali delle equazioni differenziali ordinarie, considerati come funzioni dei loro valori iniziali*, «Rend. dei Lincei», 1895.

([11]) Tale eccezione proviene dalla circostanza che la funzione t di $t_1, x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0;\ x_1'^0, x_2'^0, \ldots, x_n'^0$ definita dalla (3) $\varphi_1 = \psi_1$ non può asserirsi regolare, quando $d\varphi_1/dt = 0$ e quindi, fatte le debite sostituzioni, il medesimo dubbio si presenta per la funzione τ_1, quando $x_1' = 0$.

([12]) Siccome le relazioni $\varphi_i = \psi_i$ sono in numero di n e $n > 1$ (poichè, per $n = 1$, tutti i sistemi si possono riguardare come corrispondenti), così è sempre lecito considerare, oltre alla relazione $\varphi_1 = \psi_1$, almeno la $\varphi_2 = \psi_2$.

([13]) La funzione τ_2 si comporta di fronte alla relazione $\varphi_2 = \psi_2$ come τ_1 di fronte alla $\varphi_1 = \psi_1$ e sarà dunque l'espressione di t, desunta dalla $\varphi_2 = \psi_2$, quando si sieno eliminati i valori iniziali a mezzo delle (1), (1′).

(1), (1′), si riduce a:

$$\frac{\chi_2(t_1, x_1, \ldots, x_n; x_1', \ldots, x_n')}{x_2'},$$

che è una funzione intera rispetto alla variabile x_1. D'altra parte le relazioni $\varphi_1 = \psi_1$, $\varphi_2 = \psi_2$ definiscono, in virtù della proprietà caratteristica dei sistemi corrispondenti, la *medesima* funzione t_1 di t, talchè i due rapporti χ_1/x_1' e χ_2/x_2', i quali esprimono, per mezzo delle stesse quantità, la derivata di t_1 rapporto a t, debbono coincidere, e siccome il secondo è, almeno in un certo campo, funzione intera di x_1, lo sarà del pari χ_1/x_1', come avevamo asserito. Si riconosce che esso non si annulla identicamente per $x_1' = 0$, $x_2' = 0, \ldots, x_n' = 0$ colla semplice considerazione seguente. La funzione $d\psi_1/dt_1$, per $t_1 = t_1^0$, si riduce per ipotesi a $x_1'^0$; tale sarà adunque anche il valore di χ_1, quando si faccia $t_1 = t_1^0$, $x_1 = x_1'$, $x_2 = x_2^0, \ldots, x_n = x_n^0$; $x_1' = x_1'^0$, $x_2' = x_2'^0, \ldots, x_n' = x_n'^0$. Siccome questa circostanza si presenta comunque si immaginino scelti i valori iniziali delle coordinate e delle velocità (purchè soltanto le x^0 sieno in C e le x'^0 finite e diverse da zero), così la funzione χ_1 deve per $t_1 = t_1^0$ ridursi *identicamente* (quindi anche se tutte le x' sono nulle) all'unità. Ciò esclude manifestamente che χ_1/x_1' sia sempre zero per $x_1^0 = 0$, $x_2' = 0, \ldots, x_n' = 0$. Assodato questo punto, facilmente si conclude che la funzione f della (4′) è, nell'intorno di $x_1' = 0$, $x_2' = 0, \ldots, x_n' = 0$, almeno per qualche valore delle coordinate e del tempo, regolare e diversa da zero. E per verità tale funzione f non differisce dalla χ_1/x_1', se non perchè (oltre alle x e alle x'), nell'una compare come variabile t, nell'altra t_1. Ove quindi t_1 si possa (anche per valori tutti nulli delle velocità) esprimere in funzione regolare delle x, x', e t, le proprietà già dimostrate per la χ_1/x_1' si riportano senz'altro alla f.

Ora dalla relazione $\varphi_1 = \psi_1$, t_1 risulta funzione regolare di t, per tutti quei valori di t e delle $x_1^0, \ldots, x_n^0$; $x_1'^0, \ldots, x_n'^0$, che appartengono a C, e per cui resta finito il rapporto $(d\varphi_1/dt)/(d\psi_1/dt_1)$, cioè non nullo l'altro rapporto $(d\psi_1/dt_1)/(d\varphi_1/dt)$. Sostituendo al solito per i valori iniziali le loro espressioni, ricavate dalle (1), (1′), potremo anche dire che t_1 è funzione regolare di t e delle $x_1, \ldots, x_n$; $x_1', \ldots, x_n'$ per tutti i valori di queste quantità, che appartengono a C e non annullano χ_1/x_1'. Ma tale rapporto non è sempre zero per $x_1' = x_2' = \ldots = x_n' = 0$, dunque t_1 si può esprimere, almeno in qualche porzione di C, come funzione delle x, x' e t, regolare nell'intorno di $x_1' = 0$, $x_2' = 0, \ldots, x_n' = 0$.

Il teorema è così dimostrato.

4. - Dimostrazione che in due sistemi corrispondenti le forze devono essere contemporaneamente nulle. Forma della relazione fra t e t_1, quando non agiscono forze. Equazioni, che legano in questo caso, le α_{rs} alle a_{rs}.

Si è visto al § 2 che, sostituendo nel sistema (A_1), $dt/f(t; x; x')$ al posto di dt_1, si deve ritrovare il sistema (A). Lo stesso può evidentemente affermarsi relativamente ai due sistemi (A_1') e (A'), e sarà appunto, nell'esprimere questa circostanza, che ci verrà fatto di precisare la forma della funzione f e di stabilire le relazioni fondamentali tra le α_{rs} e le a_{rs}.

Scrivendo le equazioni (A_1') sotto la forma:

$$\frac{d^2x_j\, dt_1 - d^2t_1\, dx_j}{dt_1^3} = \Xi^j - \sum_1^n{}_{rs}\, \alpha_{rs}^j \frac{dx_r}{dt_1}\frac{dx_s}{dt_1},$$

e, notando che da $dt_1 = dt/f$ segue $-d^2t_1 = (dt/f^2)\, df$, se ne trae agevolmente (qualora si indichino al solito mediante apici le derivazioni rispetto a t):

$$x_j'' = \frac{\Xi^j}{f^2} - \sum_1^n{}_{rs}\, \alpha_{rs}^j x_r' x_s' - x_j' \frac{d \log f}{dt},$$

le quali potranno coincidere colle (A') allora e solo allora che le n relazioni:

$$(5) \qquad \left(X^j - \frac{\Xi^j}{f^2}\right) + x_j' \frac{d \log f}{dt} + \sum_1^n{}_{rs} \left\{ \alpha_{rs}^j - a_{rs}^j \right\} x_r' x_s' \equiv 0, \qquad (j = 1, 2, \ldots, n),$$

sieno soddisfatte *identicamente*, cioè per ogni sistema di valori delle $2n+1$ quantità $t_1, x_1, \ldots, x_n, x_1', \ldots, x_n'$.

Supposto (§ 3) di sostituire ad f il suo sviluppo in serie di potenze di $t - t_0$, e, detto f_0 il primo termine di questo sviluppo (che, come sappiamo, nemmeno per valori tutti nulli delle velocità è identicamente nullo) le (5) dovranno in particolare rimanere identità, quando si faccia $t = t_0$, cioè $f = f_0$. Esse esprimono allora le condizioni necessarie e sufficienti affinchè si possa passare dal sistema (A_1) al suo corrispondente (A), mediante la trasformazione $dt_1 = dt/f_0$, di guisa che si vede che, ogniqualvolta esiste una trasformazione (4'), esiste anche una $dt_1 = dt/f_0$, dove f_0 non contiene il tempo esplicitamente. Basta per conseguenza riferirsi a quest'ultimo caso. Senza trascrivere le (5) col porre $f = f_0$, come equazione di condizione per la corrispondenza fra (A) e (A_1) terremo sempre le (5); *solo f sarà a ritenersi indipendente da t.*

Nel paragrafo precedente abbiamo mostrato come f sia sviluppabile in serie di potenze delle velocità nell'intorno di $x_1' = 0$, $x_2' = 0, \ldots, x_n' = 0$ e come il primo termine di questo sviluppo, che chiameremo μ, *non sia identicamente nullo.* Potremo porre pertanto:

$$f = \mu\left\{1 + \sum_1^n c_r x_r' + \frac{1}{2}\sum_1^n{}_{rs}\, c_{rs} x_r' x_s' + \mathbf{3}\right\},$$

dove le c sono funzioni delle x e si designa per brevità con $\mathbf{k}$ un insieme di termini, almeno d'ordine k (nelle velocità).

Avremo per conseguenza:

$$f^{-1} = \mu^{-1}\left\{1 - \sum_1^n{}_r\, c_r x_r' + \mathbf{2}\right\},$$

$$f^{-2} = \mu^{-2}\left\{1 - 2\sum_1^n{}_r\, c_r x_r' - \sum_1^n{}_{rs}\, c_{rs} x_r' x_s' + 3\left(\sum_1^n{}_r\, c_r x_r'\right)^2 + \mathbf{3}\right\}. \tag{6}$$

Derivando rispetto a t l'espressione di f e immaginando di sostituirvi le derivate seconde, mediante i loro valori (A'), si ottiene:

$$\frac{df}{dt} = \sum_1^n{}_r \frac{\partial\mu}{\partial x_r} x_r' + \mu\left\{\sum_1^n{}_r\, c_r X^r + \sum_1^n{}_{rs}\, c_{rs}\, x_r' X^s\right\} + \mathbf{2},$$

la quale, moltiplicata per la precedente $f^{-1} = \mu^{-1}\left\{1 - \sum_1^n{}_r\, c_r x_r' + \mathbf{2}\right\}$, ci dà:

$$\frac{d\log f}{dt} = \sum_1^n{}_r \frac{\partial \log\mu}{\partial x_r} x_r' + \sum_1^n{}_r\, c_r X^r - \left(\sum_1^n{}_r\, c_r X^r\right)\left(\sum_1^n{}_r\, c_r x_r'\right) + \sum_1^n{}_{rs}\, c_{rs} x_r' X^s + \mathbf{2}. \tag{7}$$

Portando nelle (5), per f^{-2} e $d\log f/dt$ le loro espressioni offerte dalle (6), (7), i termini indipendenti dalle velocità si ridurranno in ciascuna di esse a: $X^j - \Xi^j \mu^{-2}$, talchè, per il carattere identico delle (5) stesse, dovrà essere:

$$\Xi^j = \mu^2 X^j, \qquad (j = 1, 2, \ldots, n), \tag{8}$$

da cui apparisce, per essere μ diverso da zero, che le X^j e le Ξ^j possono annullarsi solo contemporaneamente; lo stesso può dirsi quindi delle forze $X_i = \sum_{ij}{}_1^n a_{ij} X^j$, $\Xi_j = \sum_i{}_1^n a_{ij}\, \Xi^j$, relative a una coppia di sistemi corrispondenti.

Assodato questo punto, cominciamo dal supporre che tutte le forze sieno eguali a zero.

Le (5) danno in questo caso:

$$x_j' \frac{d \log f}{dt} + \sum_{rs}{}_1^n \{ \alpha_{rs}^j - a_{rs}^j \} x_r' x_s' \equiv 0 ,$$

e la (7) si riduce a:

$$\frac{d \log f}{dt} = \sum_r{}_1^n \frac{\partial \log \mu}{\partial x_r} x_r' + \mathbf{2},$$

con che la (5′) può essere scritta:

$$x_j' \sum_r{}_1^n \frac{\partial \log \mu}{\partial x_r} x_r' + x_j' \mathbf{2} + \sum_{rs}{}_1^n \{ \alpha_{rs}^j - a_{rs}^j \} x_r' x_s' \equiv 0 .$$

Vediamo subito che si deve avere separatamente:

$$(5'') \qquad x_j' \sum_r{}_1^n \frac{\partial \log \mu}{\partial x_r} x_r' + \sum_{rs}{}_1^n \{ \alpha_{rs}^j - a_{rs}^j \} x_r' x_s' \equiv 0 ,$$

e $x_j' \mathbf{2} \equiv 0$, cioè $\mathbf{2} \equiv 0$.

Dal confronto delle (5′) colle (5″) apparisce che le seconde si deducono dalle prime collo scambio di f in μ; esse mostrano quindi come dall'esistenza di una trasformazione $dt_1 = dt/f$ atta a far coincidere il sistema (A_1) col sistema (A) segue necessariamente l'esistenza di una trasformazione $dt_1 = dt/\mu$ dotata della medesima proprietà. Ne viene che le condizioni (5″), le quali a priori ci si presentano soltanto come necessarie (poichè, appena insieme alle $\mathbf{2} \equiv 0$, equivalgono alle (5′)) sono effettivamente, nell'ipotesi ammessa che manchino le forze, necessarie e sufficienti per la corrispondenza fra i due sistemi (A) ed (A_1).

Le identità (5″) equivalgono alle relazioni seguenti:

$$(8) \qquad \begin{cases} \alpha_{rs}^j = a_{rs}^j \qquad (\text{per } j \gtrless r, s) \\[2ex] \alpha_{rs}^r = a_{rs}^r - \dfrac{1}{2} \dfrac{\partial \log \mu}{\partial x_s} \qquad (\text{per } r \gtrless s), \quad (r, s, j = 1, 2, \ldots, n) \\[2ex] \alpha_{rr}^r = a_{rr}^r - \dfrac{\partial \log \mu}{\partial x_s} , \end{cases}$$

le quali, tenuto conto delle espressioni effettive spettanti alle α^j_{rs}, a^j_{rs}, sono *precisamente le equazioni differenziali, che legano i coefficienti della forza viva di due sistemi corrispondenti, quando non agiscono forze. Si passa in questo caso dall'uno all'altro di essi mediante la trasformazione* $dt_1 = dt/\mu$, *la funzione* μ *essendo quella stessa, che compare nelle* (8).

5. - Sistemi corrispondenti, in cui non tutte le forze sono nulle.

Riprendiamo le equazioni (5), il cui identico sussistere porge nel caso generale la condizione di corrispondenza fra i due sistemi (A) ed (A_1). Ponendo in esse per f^{-2} e df/dt i loro valori (6) e (7) ed esprimendo che si annullano i termini indipendenti dalle velocità, ne abbiamo già ricavato le (8). Ora ci gioverà, tenuto conto delle (8), esprimere che si debbono annullare i termini lineari nelle velocità. Solo quando, a mezzo di queste equazioni, avremo un po' semplificate le (6) e (7), riescirà vantaggiosa la effettiva sostituzione dei valori di f^{-2} e df/dt per dedurre le relazioni definitive.

I termini lineari di una generica (5) sono: $2\Xi^j\mu^{-2}\sum_1^n{}_r\, c_r x'_r + x'_j \sum_1^n{}_r\, c_r X^r$, e, se, usando come s'è detto delle (8), si esprimerà che sono identicamente nulli, avremo:

$$2X^j \sum_1^n{}_r\, c_r x'_r + x'_j \sum_1^n{}_r\, c_r X^r \equiv 0\,, \qquad (j=1,2,\ldots,n),$$

donde:

$$2X^j c_r = 0\,, \qquad (j \gtrless r),$$

$$2X^j c_j + \sum_1^n{}_r\, c_r X^r = 0\,, \qquad (j=1,2,\ldots,n).$$

Siccome non tutte le forze sono nulle, una almeno delle X^j, poniamo X^i dovrà essere differente da zero; ma allora da $X^i c_r = 0$ $(i \gtrless r)$, segue che tutte le c_r, ad eccezione forse di c_i, si annullano; dopo ciò le equazioni del secondo gruppo si riducono unicamente a $c_i X^i = 0$, donde $c_i = 0$ e quindi effettivamente le singole c_r sono nulle. Tenendo conto di questa semplificazione, la (6) e la (7) divengono:

$$f^{-2} = \mu^{-2}\left\{1 - \sum_1^n{}_{rs}\, c_{rs} x'_r x'_s + \mathbf{3}\right\}, \tag{6'}$$

$$\frac{d\log f}{dt} = \sum_1^n{}_r\, \frac{\partial \log \mu}{\partial x_r}\, x_r + \sum_1^n{}_{rs}\, c_{rs} x'_r X^s + \mathbf{2}\;; \tag{7'}$$

le (5), portandovi ormai questi valori di f^{-2} e df/dt, e intendendo sostituite le Ξ^j con $\mu^2 X^j$, si scindono nelle:

$$(9)\qquad x'_j \sum_1^n {}_r\, x'_r \left\{ \frac{\partial \log \mu}{\partial x_r} + \sum_1^n {}_s\, c_{rs} X^s \right\} + \sum_1^n {}_{rs} \left\{ \alpha^j_{rs} - a^j_{rs} + X^j c_{rs} \right\} x'_r x'_s = 0\,, \qquad (j = 1, 2, \ldots, n),$$

$$x'_j\, \mathbf{2} - X^j\, \mathbf{3} = 0\,,$$

e quest'ultime (si constata agevolmente), equivalgono alla lor volta a:

$$\mathbf{2} = 0\,, \qquad \mathbf{3} = 0\,,$$

di guisa che le condizioni necessarie e sufficienti per la corrispondenza fra i sistemi (A) ed (A_1) si trovano ora espresse dalle (9), $\mathbf{2} = 0$, $\mathbf{3} = 0$.

Vogliamo proporci di attribuire ad esse una forma più utile. Cominciamo per ciò dall'osservare che le (6′), (7′), in causa delle $\mathbf{2} = 0$, $\mathbf{3} = 0$, divengono:

$$(10)\qquad f^{-2} = \mu^{-2} \left\{ 1 - \sum_1^n {}_{rs}\, c_{rs} x'_r x'_s \right\},$$

$$(11)\qquad \frac{d \log f}{dt} = \frac{d \log \mu}{dt} + \sum_1^n {}_{rs}\, c_{rs} x'_r X^s\,,$$

e che la funzione f delle $2n$ variabili $x_1, x_2, \ldots, x_n, x'_1, x'_2, \ldots, x'_n$, definita dalla (10), non soddisfa (come si vedrebbe derivando e rimpiazzando le derivate seconde coi loro valori (A′)) identicamente alla (11), per modo che, esprimendo appunto che la (11) è conseguenza della (10), si troverebbero alcune relazioni tra le funzioni c_{rs}, X^s e μ.

D'altra parte, *supposte queste relazioni*, le (3) esprimono precisamente che, per la funzione f definita dalla (10), il cambiamento di variabile $dt_1 = dt/f$ riconduce il sistema (A_1) al sistema (A). Dunque: *l'insieme delle relazioni risultanti dal confronto delle* (10), (11) *e l'identico sussistere delle* (9) *sono condizioni non solo necessarie, ma altresì sufficienti per la corrispondenza fra i sistemi* (A) *ed* (A_1). *Di più si passa da* (A_1) *ad* (A) *mediante il cambiamento di variabile*:

$$dt_1^2 = \frac{dt^2}{\mu^2} \left\{ 1 - \sum_1^n {}_{rs}\, c_{rs} x'_r x'_s \right\}.$$

Io non posso ora intrattenermi a stabilire la forma effettiva delle accennate condizioni, volendo dedicare il presente lavoro allo studio dei sistemi corrispondenti privi di forze. Ho voluto però dedurre questo primo risultato, perchè, se, come ebbi ad esprimere il desiderio, mi sarà dato di tornare sull'argomento, potrò addirittura prendere le mosse dalle equazioni (9), (10), (11).

6. - Forma invariantiva delle equazioni (8). Integrale quadratico.

Considereremo d'ora innanzi esclusivamente il caso, in cui non agiscono forze.

Una prima conseguenza utile a ricavarsi dalle equazioni (8) è l'espressione della funzione μ, per mezzo dei discriminanti a e α relativi alle forze vive dei due sistemi.

Ricordando le posizioni del § 3, si ha:

$$\alpha_{rs}^{r} = \sum_{1}^{n}{}_{i}\, \alpha^{(ri)}\, \alpha_{rs,i} = \frac{1}{2}\sum_{1}^{n}{}_{i}\, \alpha^{(ri)}\left\{\frac{\partial \alpha_{ri}}{\partial x_s} + \frac{\partial \alpha_{is}}{\partial x_r} - \frac{\partial \alpha_{rs}}{\partial x_i}\right\};$$

quindi, sommando rispetto ad r:

$$\sum_{1}^{n}{}_{r}\, \alpha_{rs}^{r} = \frac{1}{2}\sum_{1}^{n}{}_{ir}\, \alpha^{(ri)}\frac{\partial \alpha_{ri}}{\partial x_s} + \frac{1}{2}\sum_{1}^{n}{}_{ir}\, \alpha^{(ri)}\frac{\partial \alpha_{is}}{\partial x_r} - \frac{1}{2}\sum_{1}^{n}{}_{ir}\, \alpha^{(ri)}\frac{\partial \alpha_{rs}}{\partial x_i},$$

e, siccome il secondo e il terzo termine si elidono, così resterà:

$$\sum_{1}^{n}{}_{r}\, \alpha_{rs}^{r} = \frac{1}{2}\sum_{1}^{n}{}_{ir}\, \alpha^{(ri)}\frac{\partial \alpha_{ri}}{\partial x_s} = \frac{1}{2}\frac{\partial \log \alpha}{\partial x_s};$$

in modo analogo:

$$\sum_{1}^{n}{}_{r}\, a_{rs}^{r} = \frac{1}{2}\frac{\partial \log a}{\partial x_s},$$

e per conseguenza:

$$\sum{}_{r}\left\{a_{rs}^{r} - \alpha_{rs}^{r}\right\} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_s}\log\left(\frac{a}{\alpha}\right).$$

Ora il primo membro, tenendo conto dei due ultimi gruppi delle equazioni (8), si riduce a

$$\frac{n+1}{2}\frac{\partial \log \mu}{\partial x_s},$$

per cui si ottiene:

$$\frac{n+1}{2}\frac{\partial \log \mu}{\partial x_s} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_s}\log\left(\frac{a}{\alpha}\right), \qquad (s = 1, 2, \ldots, n),$$

e da queste:

$$(12) \qquad \mu = C\left(\frac{a}{\alpha}\right)^{\frac{1}{n+1}},$$

dove C designa una costante arbitraria.

Il valore (12) di μ, quantunque notevole per la sua semplicità, non presenta dal nostro punto di vista un particolare interesse, poichè noi intendiamo di riprendere le (8), come stanno, senza sostituirvi per μ il suo valore; la (12) vi si trova del resto implicitamente compresa.

Prima di passare alla effettiva trasformazione delle equazioni (8), sarà opportuno che io ricordi come, data una forma differenziale quadratica fondamentale $\varphi = \sum_{rs}^{n}{}_{1}\, a_{rs}\, dx_r\, dx_s$ e un sistema qualsiasi

$$A_{r_1 r_2 \ldots r_m}, \qquad (r_1, r_2, \ldots, r_m = 1, 2, \ldots, n),$$

(che si dice d'ordine m) di n^m funzioni (distinte o no) delle variabili $x_1, x_2, \ldots, x_n$, il sistema d'ordine $m+1$:

$$(\Omega) \qquad A_{r_1 r_2 \ldots r_m r_{m+1}} = \frac{\partial A_{r_1 r_2 \ldots r_m}}{\partial x_{r_{m+1}}} - \sum_{l}^{m}{}_{1} \sum_{j}^{n}{}_{1}\, a^{j}_{r_l r_{m+1}} A_{r_1 r_2 \ldots r_{l-1}\, j\, r_{l+1} \ldots r_m},$$

$$(r_1, r_2, \ldots, r_m, r_{m+1} = 1, 2, \ldots, n),$$

venne chiamato dal prof. RICCI ([14]) *derivato covariante del primo, secondo la forma fondamentale* φ. L'operazione, per cui da un sistema $A_{r_1 r_2 \ldots r_m}$ d'ordine m si passa al sistema $A_{r_1 r_2 \ldots r_m r_{m+1}}$ d'ordine $m+1$, definito da (Ω), dicesi *derivazione covariante secondo* φ (rispetto alla generica variabile $x_{r_{m+1}}$); *essa possiede le caratteristiche esteriori della derivazione ordinaria* (*in quanto ciascuna funzione di qualunque sistema dà luogo a n derivate*) *e, come ha mostrato il prof.* RICCI *anche tutte le proprietà algoritmiche, tranne la permutabilità degli indici, cioè delle derivazioni.*

([14]) Veggasi in particolare il suo *Résumé de quelques travaux sur les systèmes variables de fonctions associés à une forme différentielle quadratique*, « Bulletin des Sciences Mathématiques », 1892.

Segue in particolare dalle (Ω) che, se il sistema si riduce ad un'unica funzione μ, le sue derivate covarianti μ_r coincidono colle derivate ordinarie $\partial\mu/\partial x_r$; di più, derivando covariantemente il sistema μ_r, non si trovano in generale le derivate seconde ordinarie della funzione μ, ma valgono però le relazioni $\mu_{rs} = \mu_{sr}$.

Si ha, per le derivate covarianti α_{rst} (da non confondersi colle $\alpha_{rs,t}$) di un sistema doppio α_{rs}:

$$(\Omega') \qquad \alpha_{rst} = \frac{\partial\alpha_{rs}}{\partial x_t} - \sum_1^n{}_j \left\{ a^j_{rt}\alpha_{js} + a^j_{ts}\alpha_{rj} \right\},$$

le quali, applicate al caso speciale dei coefficienti di φ, permetterebbero dopo facile calcolo di concludere che le loro derivate covarianti sono identicamente nulle.

Questo breve richiamo ci pone in grado di adoperare con maggior disinvoltura talune denominazioni e taluni procedimenti, che non sono forse finora, come sarebbe desiderabile, divenuti abbastanza d'uso comune.

Intenderemo assunta come forma fondamentale φ la

$$ds^2 = 2T\,dt^2 = \sum_1^n{}_{rs}\, a_{rs}\, dx_r\, dx_s\,,$$

e designeremo talvolta ancora con φ una qualunque varietà, di cui

$$\varphi = \sum_1^n{}_{rs}\, a_{rs}\, dx_r\, dx_s\,,$$

rappresenti il quadrato dell'elemento lineare.

Ritenuto ciò, notiamo che dalle posizioni del § 3 si ricava senza difficoltà:

$$a_{rt,s} + a_{ts,r} = \frac{\partial a_{rs}}{\partial x_t}\,,$$

$$\alpha_{rt,s} = \sum_1^n{}_j\, \alpha^j_{rt}\alpha_{js}\,,$$

$$\alpha_{st,r} = \sum_1^n{}_j\, \alpha^j_{st}\alpha_{rj}\,,$$

e quindi:

$$\frac{\partial\alpha_{rs}}{\partial x_t} - \sum_1^n{}_j \left\{ \alpha^j_{rt}\alpha_{js} + \alpha^j_{st}\alpha_{rj} \right\} = 0\,.$$

Se in queste identità si sostituiscono per α^j_{rt} e α^j_{st} i loro valori offerti dalle (8), si trae ([15]):

$$\frac{\partial \alpha_{rs}}{\partial x_t} - \sum_1^n {}_j \{ a^j_{rt}\alpha_{js} + a^j_{st}\alpha_{rj} \} + \alpha_{rs} \frac{\partial \log \mu}{\partial x_t} + \frac{1}{2} \alpha_{rt} \frac{\partial \log \mu}{\partial x_s} + \frac{1}{2} \alpha_{ts} \frac{\partial \log \mu}{dx_r} = 0 ,$$

ossia, in virtù delle (Ω') e di osservazioni fatte testè:

$$\mu\alpha_{rst} + \mu_t\alpha_{rs} + \frac{1}{2} \{ \mu_r\alpha_{ts} + \mu_s\alpha_{rt} \} = 0 , \qquad (r, s, t = 1, 2, \ldots, n). \tag{13}$$

Queste equazioni di forma invariantiva equivalgono completamente alle (8), perchè seguono da esse, sono in egual numero e certamente indipendenti, in quanto porgono tutte le derivate prime delle α_{rs} definite per mezzo delle α_{rs} stesse, della funzione ausiliaria μ e, si intende, dei coefficienti della forma fondamentale. Del resto dalle (13) si può immediatamente risalire alle (8).

Le (13), moltiplicate per μ, ricordando quanto si è detto circa i calcoli con derivate covarianti, possono essere scritte:

$$(\mu^2\alpha_{rs})_t + \frac{1}{2} \left\{ \mu^2\alpha_{ts} \frac{\mu_r}{\mu} + \mu^2\alpha_{rt} \frac{\mu_s}{\mu} - \mu^2\alpha_{rs} \frac{\mu_t}{\mu} \right\} = 0 ,$$

ovvero, col porre $\mu^2\alpha_{rs} = A_{rs}$:

$$A_{rst} + \frac{1}{2} \left\{ A_{ts} \frac{\mu_r}{\mu} + A_{rt} \frac{\mu_s}{\mu} - A_{rs} \frac{\mu_t}{\mu} \right\} = 0 ;$$

eseguendo sugli indici r, s, t le due permutazioni circolari $\begin{pmatrix} s\,t\,r \\ r\,s\,t \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} t\,r\,s \\ r\,s\,t \end{pmatrix}$ e sommando le equazioni relative, si ottiene:

$$A_{rst} + A_{str} + A_{trs} = 0 , \tag{14}$$

le quali ci dicono che il sistema A_{rst}, derivato covariante di A_{rs} secondo φ, è *emisimmetrico*, e quindi ([16]) che:

$$\sum_1^n {}_{rs} A_{rs}x'_r x'_s = \text{cost.}$$

è un integrale primo per il sistema (A).

([15]) Nell'eseguire la sostituzione, conviene considerare separatamente i vari casi: r ed s entrambi diversi da t; $r \lesseqgtr t$, ma $s = t$, o viceversa; $r = s = t$. Il risultato si può però sempre rappresentare mediante la formula sopra riportata.

([16]) Cfr. la mia Nota: *Sugli integrali algebrici delle equazioni dinamiche.* [In questo vol.: IX, pp. 190–205].

Di qua il teorema [17]:

Se un sistema (A) *privo di forze ammette un corrispondente* (A_1), *la cui forza viva sia*: $T_1 = 1/2 \sum_{1}^{n}{}_{rs} \bar{x}'_r \bar{x}'_s$, *l'equazione* $\sum_{1}^{n}{}_{rs} A_{rs} x'_r x'_s =$ cost., *cioè per la* (12):

$$\left(\frac{a}{\alpha}\right)^{\frac{2}{n+1}} \sum_{1}^{n}{}_{rs} \alpha_{rs} x'_r x'_s = \text{cost.}\,,$$

porge un integrale primo per il sistema (A).

È manifesto che, assumendo a forma fondamentale $ds_1^2 = \sum_{1}^{n}{}_{rs} \alpha_{rs}\, dx_r\, dx_s$, si troverebbe in modo analogo l'integrale primo:

$$\left(\frac{\alpha}{a}\right)^{\frac{2}{n+1}} \sum_{1}^{n}{}_{rs} a_{rs} \bar{x}'_r \bar{x}'_s = \text{cost.}\,,$$

per il sistema (A_1).

Possiamo aggiungere col sig. PAINLEVÉ che, *se* (A_1) *non è un corrispondente ordinario di* (A), se cioè le α_{rs} *non* hanno la forma $\alpha_{rs} = Ca_{rs}$, (con C costante), l'integrale

$$\left(\frac{a}{\alpha}\right)^{\frac{2}{n+1}} \sum_{1}^{n}{}_{rs} \alpha_{rs} x'_r x'_s = \text{cost.}\,,$$

è certamente distinto dall'integrale delle forze vive $\sum_{1}^{n}{}_{rs} a_{rs} x'_r x'_s =$ cost. Basta osservare perciò che, qualora questi due integrali coincidessero, dovrebbe essere

$$a_{rs} = C_1 \left(\frac{a}{\alpha}\right)^{\frac{2}{n+1}} \alpha_{rs}\,,$$

(con C_1 costante), da cui:

$$a = C_1^n \left(\frac{a}{\alpha}\right)^{\frac{2n}{n+1}} \alpha\,;$$

ossia sarebbe costante a/α e quindi costanti altresì i singoli rapporti α_{rs}/a_{rs}.

---

[17] P. PAINLEVÉ, Mem. cit., pag. 43.

Non sarà inopportuno avvertire che i risultati di questo paragrafo e alcune altre osservazioni ([18]), ommesse per brevità, si potranno a suo tempo ricavare come ovvie conseguenze della riduzione a tipi delle coppie di sistemi corrispondenti.

7. - Considerazioni algebriche sul sistema di due forze quadratiche.

Associamo ai coefficienti a_{rs} della nostra forma fondamentale φ un altro sistema di funzioni α_{rs} parimenti doppio e simmetrico, come ad esempio (sarà, si prevede, il caso, cui dovremo più innanzi riferirci) i coefficienti della forza viva T_1.

L'equazione:

$$(15)\qquad \begin{vmatrix} \alpha_{11}-\varrho a_{11} & \alpha_{12}-\varrho a_{12} & \dots & \alpha_{1n}-\varrho a_{1n} \\ \alpha_{21}-\varrho a_{21} & \alpha_{22}-\varrho a_{22} & \dots & \alpha_{2n}-\varrho a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1}-\varrho a_{n1} & \alpha_{n2}-\varrho \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn}-\varrho a_{nn} \end{vmatrix} = 0\,,$$

ammette, come si sa, per essere positiva la forma quadratica $\sum_{1}^{n}{}_{rs} a_{rs} dx_r dx_s$, n radici essenzialmente reali $\varrho_1, \varrho_2, \dots, \varrho_n$, che possono però non essere tutte distinte. Comunque, corrispondentemente ad ogni radice semplice ϱ_h della (15), esiste uno ed un solo sistema $\lambda_h^{(s)}$ $(s = 1, 2, \dots, n)$, che soddisfa alle equazioni lineari ed omogenee:

$$(16)\qquad \sum_{1}^{n}{}_s (\alpha_{rs} - \varrho \alpha_{rs}) z^s = 0\,, \qquad (r = 1, 2, \dots, n),$$

e di più alla condizione:

$$\sum_{1}^{n}{}_{rs} a_{rs} z^r z^s = 1\,.$$

Se invece alcune ϱ, poniamo $\varrho_{a_1}, \varrho_{a_2}, \dots, \varrho_{a_m}$, in numero di m, coincidono tra loro ed hanno il valore comune σ, considerando ancora il sistema di equazioni lineari $\sum_{1}^{n}{}_s (\alpha_{rs} - \varrho a_{rs}) z^s = 0$, sempre per essere positiva la

([18]) P. Painlevé, Mem. cit., pag. 43.

forma φ, si può stabilire ([19]) che esso, quando vi si faccia $\varrho = \sigma$, ammette m sistemi z_i^s $(i = 1, 2, ..., m;\ s = 1, 2, ..., n)$ di soluzioni indipendenti. Ne viene che anche le:

$$\lambda_h^{(s)} = \sum_i^m{}_1 \delta_{hi} z_i^s, \qquad (h = q_1, q_2, ..., q_m),$$

(dove le δ sono quantità arbitrarie a determinante non nullo) porgono m sistemi di soluzioni indipendenti ed è chiaro che le δ si possono (e in $\infty^{\frac{m(m-1)}{2}}$ modi) prendere in maniera che le $\lambda_h^{(s)}$ soddisfacciano alle $m(m+1)/2$ condizioni:

$$\sum_{rs}{}_1^n a_{rs} \lambda_h^{(r)} \lambda_k^{(s)} = \varepsilon_{hk}, \qquad (h, k = q_1, q_2, ..., q_m),$$

dove il simbolo ε_{hk} rappresenta lo zero o l'unità, secondochè gli indici h e k sono distinti, o coincidono.

Supponendo di fissare effettivamente per le δ un sistema qualunque (ma determinato una volta per sempre) di valori, che verifichino le accennate condizioni, e intendendo di ripetere la stessa cosa per ogni radice multipla della (15), ci troveremo infine a possedere n sistemi semplici di funzioni $\lambda_h^{(s)}$ $(h = 1, 2, ..., n;\ s = 1, 2, ..., n)$ tali che:

1) Ciascun sistema $\lambda_h^{(s)}$ $(s = 1, 2, ..., n)$, per $\varrho = \varrho_h$, soddisfa alle equazioni (16).

2) Si hanno le relazioni simultanee:

$$\sum_{rs}{}_1^n a_{rs} \lambda_h^{(s)} \lambda_k^{(r)} = \varepsilon_{hk}, \qquad (h, k = 1, 2, ..., n). \tag{17}$$

Quest'ultima asserzione è giustificata da condizioni imposte esplicitamente alle λ, quando $h = k$ e quando h e k sono indici di radici coincidenti; se poi h e k corrispondono a due radici distinte della (15), allora si mostra, come di solito, che $\sum_{rs}{}_1^n a_{rs} \lambda_h^{(s)} \lambda_k^{(r)} = 0$, partendo dalle:

$$\sum_s{}_1^n (\alpha_{rs} - \varrho_h a_{rs}) \lambda_h^{(s)} = 0,$$

$$\sum_s{}_1^n (\alpha_{rs} - \varrho_k a_{rs}) \lambda_k^{(s)} = 0,$$

([19]) K. WEIERSTRASS, *Ueber ein Theorem die homogenen Functionen der 2ten Grades betreffend*, ecc., «Monatsberichte der Ak. zu Berlin», 1858, p. 207.

e sottraendole l'una dall'altra, dopo averle moltiplicate rispettivamente per $\lambda_k^{(r)}$, $\lambda_h^{(r)}$ e sommate rispetto all'indice r.

Pongasi ora:

$$\lambda_{h/r} = \sum_1^n {}_s\, a_{rs}\lambda_h^{(s)}\,, \qquad (h, r = 1, 2, \ldots, n); \tag{18}$$

potremo scrivere le (17) sotto la forma:

$$\sum_1^n {}_r\, \lambda_k^{(r)}\lambda_{h/r} = \varepsilon_{hk}\,, \qquad (h, k = 1, 2, \ldots, n), \tag{17'}$$

da cui si deduce in primo luogo che il determinante:

$$\Lambda = \begin{vmatrix} \lambda_1^{(1)} & \lambda_1^{(2)} \ldots \lambda_1^{(n)} \\ \lambda_2^{(1)} & \lambda_2^{(2)} \ldots \lambda_2^{(n)} \\ \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \lambda_n^{(1)} & \lambda_n^{(2)} \ldots \lambda_n^{(n)} \end{vmatrix},$$

non è zero e quindi che le $\lambda_{h/r}$, testè definite, sono gli elementi reciproci ([20]) delle $\lambda_h^{(r)}$ in Λ.

Ne consegue che, insieme alle (17'), sussistono pure le relazioni:

$$\sum_1^n {}_h\, \lambda_h^{(s)}\lambda_{h/r} = \varepsilon_{rs}\,, \qquad (r, s = 1, 2, \ldots, n), \tag{17''}$$

le quali, confrontate colle (18), danno:

$$a_{rs} = \sum_1^n {}_h\, \lambda_{h/r}\lambda_{h/s}\,, \qquad (r, s = 1, 2, \ldots, n), \tag{18'}$$

e permettono di ricavare dalle (16) le:

$$\alpha_{rs} = \sum_1^n {}_h\, \varrho_h\lambda_{h/r}\lambda_{h/s} \quad ([21]), \qquad (r, s = 1, 2, \ldots, n). \tag{16'}$$

Quest'ultimo gruppo di equazioni costituirà il nostro punto di partenza per l'ulteriore trasformazione del sistema (13). Occorre tuttavia

---

([20]) Cioè i minori complementari divisi pel valore del determinante.

([21]) Avremmo potuto dedurre immediatamente le formule (16') e (18') da note proposizioni di WEIERSTRASS sull'equivalenza dei sistemi di forme quadratiche; abbiamo tuttavia preferita una concisione minore, per mettere in evidenza il legame tra le λ e l'equazione (15).

qualche sviluppo preliminare, inteso ad introdurre quegli elementi geometrici, che ci saranno precipuo mezzo di indagine.

8. - Cenno di una interpretazione geometrica nel campo differenziale ([22]).

Gli n sistemi di equazioni differenziali ordinarie:

$$\frac{dx_1}{\lambda_h^{(1)}} = \frac{dx_2}{\lambda_h^{(2)}} = \dots = \frac{dx_n}{\lambda_h^{(n)}}, \qquad (h = 1, 2, \dots, n),$$

definiscono nella varietà φ altrettante congruenze di linee, ciascuna delle quali si può perciò risguardare individuata dal sistema di funzioni $\lambda_h^{(r)}$ $(r = 1, 2, \dots, n)$ o, ciò che è poi lo stesso, in causa delle (18), dal sistema $\lambda_{h/r}$ $(r = 1, 2, \dots, n)$, che chiameremo *sistema coordinato covariante della congruenza stessa.* Le (17) esprimono che *le n congruenze, così introdotte, sono ortogonali fra loro nella varietà φ.*

Per poterne rilevare i caratteri geometrici più salienti (curvature, torsioni, ecc.), conviene però prendere in esame anche i differenziali di secondo ordine, e quindi le derivate delle funzioni λ. Ciò si farà nel modo migliore, derivando covariantemente ciascun sistema $\lambda_{h/r}$ e ponendo:

$$\lambda_{h/rs} = \sum_{ij}^{n}{}_{1} \gamma_{hij} \lambda_{i/r} \lambda_{j/s}, \qquad (h, r, s = 1, 2, \dots, n),$$

la qual cosa è certamente possibile, perchè (in causa delle (17')) le (19) equivalgono a:

$$(19') \qquad \gamma_{hij} = \sum_{rs}^{n}{}_{1} \lambda_{h/rs} \lambda_i^{(r)} \lambda_j^{(s)}, \qquad (h, i, j = 1, 2, \dots, n).$$

Le n^3 funzioni γ si riducono a $n[n(n-1)]/2$ algebricamente distinte, poichè, derivando le (17) (o se si vuole le (17')), che sono in numero di $n(n+1)/2$, scaturiscono $n^2(n+1)/2$ relazioni, che legano le $\lambda_{h/r}$, $\lambda_{h/rs}$, e quindi le $\lambda_{h/r}$ alle γ.

Queste relazioni tra le γ si possono stabilire immediatamente, applicando, secondo i cánoni del calcolo differenziale assoluto ([23]), la deri-

---

([22]) Le nozioni sommarie di questo paragrafo (limitate a quanto ci parve indispensabile per l'intelligenza dei successivi) sono tolte per intero dalla Nota del prof. RICCI, *Sulla teoria degli iperspazii*, accennata già nell'introduzione.

([23]) RICCI, *Résumé*, ecc., o per maggior dettaglio: *Di alcune applicazioni del calcolo differenziale assoluto*, « Atti dell'Istituto Veneto », 1893.

vazione covariante alle (17′), e confrontando colle (19). Si trova (appunto per il modo felice, con cui le γ vennero scelte) la forma semplicissima:

$$\gamma_{hkj} + \gamma_{khj} = 0 \,, \tag{20}$$

da cui in particolare:

$$\gamma_{hhj} = 0 \,.$$

Le γ hanno ciascuna un significato cinematico molto notevole, che io lascierò tuttavia di rilevare, non dovendone far uso. Per lo scopo nostro ha invece importanza capitale la proposizione seguente:

Affinchè la congruenza $\lambda_{h/r}$ $(r = 1, 2, ..., n)$ *sia normale, affinchè cioè le linee della congruenza sieno le traiettorie ortogonali di una famiglia di superfici* (ad $n-1$ dimensioni della varietà φ) *è necessario e basta che sieno soddisfatte le* $[(n-1)(n-2)]/2$ *condizioni*:

$$\gamma_{hhj} = \gamma_{hjk} \,, \quad (j, k = 1, 2, ..., h-1, h+1, ..., n).$$

Ometteremo anche la dimostrazione di questo teorema, per non dilungarci soverchiamente in particolari, solo indirettamente collegati colla nostra ricerca; notiamo piuttosto il corollario:

Se le condizioni $\gamma_{hkj} = \gamma_{hjk}$ $(j, k = 1, 2, ..., h-1, h+1, ..., n)$ *sono soddisfatte per qualunque valore di h, nella quale ipotesi, a causa delle* (20), *le* γ *con tre indici distinti sono tutte nulle, le n congruenze* $\lambda_{h/r}$ *risultano dalle mutue intersezioni di un sistema ennuplo ortogonale di superfici.*

9. - Trasformazione delle equazioni (13). Classificazione delle coppie di sistemi corrispondenti.

Come abbiamo già accennato, prenderemo le mosse dalle equazioni (16′). Derivandole covariantemente e designando con $\varrho_{h/t}$ $(t = 1, 2, ..., n)$ le derivate (covarianti o, se si vuole, ordinarie) della funzione ϱ_h, si trae:

$$\alpha_{rst} = \sum_1^n{}_h \left\{ \varrho_{h/t}\lambda_{h/r}\lambda_{h/s} + \varrho_h\lambda_{h/rt}\lambda_{h/s} + \varrho_h\lambda_{h/r}\lambda_{h/st} \right\},$$

cioè, approfittando delle (19):

$$\alpha_{rst} = \sum_1^n{}_h \varrho_{h/t}\lambda_{h/r}\lambda_{h/s} + \sum_1^n{}_{hij} \varrho_h\gamma_{hij}\lambda_{h/s}\lambda_{i/r}\lambda_{j/t} + \sum_1^n{}_{hij} \varrho_h\gamma_{hij}\lambda_{h/r}\lambda_{i/s}\lambda_{j/t} \,.$$

Se ora si portano nelle (13) questi valori delle α_{rst} e si sostituiscono parimenti alle α_{rs} le loro espressioni (16), si ottiene il sistema di equazioni:

$$\mu\left\{\sum_1^n{}_h\, \varrho_{h/t}\lambda_{h/r}\lambda_{h/s}+\sum_1^n{}_{hij}\, \varrho_h\gamma_{hij}\lambda_{h/s}\lambda_{i/r}\lambda_{j/t}+\sum_1^n{}_{hij}\, \varrho_h\gamma_{hij}\lambda_{h/r}\lambda_{i/s}\lambda_{j/t}\right\}$$

$$+\mu_t\sum_1^n{}_h\, \varrho_h\lambda_{h/r}\lambda_{h/s}+\frac{1}{2}\left\{\mu_r\sum_1^n{}_h\, \varrho_h\lambda_{h/t}\lambda_{h/s}+\mu_s\sum_1^n{}_h\, \varrho_h\lambda_{h/r}\lambda_{h/t}\right\}=0\,,$$

apparentemente molto complicato, ma che, a mezzo delle (17′), si riconduce, con calcoli ovvii, alla comoda forma seguente:

$$(\mathrm{E})\left\{\begin{array}{ll}
(21) & (\varrho_h-\varrho_i)\gamma_{hij}=0 \quad \text{(per ogni terna } h,\ i,\ j \text{ di indici distinti)}\\[2ex]
(22) & (\varrho_i-\varrho_j)\gamma_{iji}=\dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_1^n{}_r\,\frac{\partial\varrho_i}{\partial x_r}\,\lambda_j^{(r)} \quad \text{(per ogni coppia } i,j \text{ di indici distinti)}\\
& \hfill (h,\ i,\ j=1,2,\dots n)\\[2ex]
(23) & \displaystyle\sum_1^n{}_r\,\frac{\partial(\mu\varrho_i)}{\partial x_r}\,\lambda_j^{(r)}=0 \quad \text{(per ogni coppia } i,\ j \text{ di indici distinti)}\\[2ex]
(24) & \displaystyle\sum_1^n{}_r\,\frac{\partial(\mu\varrho_i)}{\partial x_r}\,\lambda_i^{(r)}=-\varrho_i\sum_1^n{}_r\,\frac{\partial\alpha}{\partial x_r}\,\lambda_i^{(r)}\,.
\end{array}\right.$$

Le (21), tenuto conto delle (20), sono $[n(n-1)(n-2)]/2$ distinte, le (22) $n(n-1)$, altrettante le (23), infine le (24) sono n, onde complessivamente abbiamo $n\,[n(n+1)]/2$ equazioni, il cui numero coincide intanto con quello delle equazioni (13); non solo, ma il sistema complessivo delle equazioni (E) equivale completamente alle equazioni (13), poichè, come queste, esprime le condizioni necessarie e sufficienti, per la corrispondenza dei due sistemi (A) ed (A_1). E per verità, qualora le a_{rs} e le α_{rs}, che sono gli elementi del problema primitivo, in numero di $n(n+1)$, si risguardino, a tenore delle (16′) e (18′), sostituite dalle ϱ_h, $\lambda_{h/r}$ (che sono $n+n^2$, ma legate dalle $n(n+1)/2$ relazioni (17)), e ci si proponga di tradurre in equazioni differenziali tra le ϱ e le λ le condizioni di corrispondenza tra i sistemi (A) ed (A_1), si è naturalmente condotti ad adottare il procedimento, testè seguito, e si perviene quindi al sistema (E). D'altra parte poi, ammesse le equazioni (E), si può risalire via via fino alle (13), onde effettivamente i due sistemi si equivalgono, ma si ha per le (E) il duplice vantaggio di una semplicità notevolmente maggiore e di una forma, che meglio si presta all'interpretazione geometrica.

Accingiamoci ormai a classificare le coppie di sistemi corrispondenti.

Assumeremo come criterio di classificazione il numero di radici distinte, possedute dall'equazione (15); si vedrà a suo tempo che questo criterio riesce giustificato da un carattere saliente, proprio di tutte le coppie, per cui l'equazione in ϱ ammette uno stesso numero di radici distinte.

Più precisamente converremo di dire che due sistemi corrispondenti (A) ed (A_1) appartengono alla classe o tipo t_m), se l'equazione (15) ad essi relativa possiede $n - m + 1$ radici distinte.

Uno sguardo alle equazioni (E) (e più particolarmente alle (21)) ci avverte di questa circostanza notevole che il loro numero non è costante, ma varia da tipo a tipo, anzi più generalmente nell'ambito di ciascun tipo, secondo il modo, con cui sono aggruppate le radici multiple dell'equazione (15). Difatti, quelle tra le (21), che si riferiscono a coppie di radici coincidenti riescono soddisfatte identicamente, quelle invece, che si riferiscono a coppie di radici distinte, portano l'annullarsi delle corrispondenti γ.

Sembrerebbe da ciò che fosse necessario, per lo studio del sistema (E), di considerare separatamente ogni singolo caso; potremo limitarci tuttavia all'esame particolareggiato del tipo t_1) (§ 10) e di una sottoclasse assai semplice del tipo generale t_m) (§ 11), poichè, dopo questi esempi, anche senza sviluppi prolissi e poco istruttivi, si coglie nettamente il risultato definitivo.

10. - Sistemi corrispondenti di tipo t_1). Forma canonica. Deduzione degli n integrali quadratici da essi posseduti.

Sieno le n radici $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_n$ dell'equazione (15) tutte diseguali. Lé (21) esprimono allora che le singole γ con tre indici distinti sono nulle e quindi (§ 8) che le congruenze $\lambda_{h/r}$ sono normali nella varietà φ. L'esistenza di questa speciale ennupla di famiglie ortogonali di superficie fa sorgere spontaneo il pensiero di servirsene come sistema di riferimento, per indagare a quali sue caratteristiche conduca l'ipotesi della corrispondenza fra (A) ed (A_1). Noi vedremo che, rispetto a quest'ennupla di superficie, il ds^2 di φ e così pure il $ds_1^2 = 2T_1\, dt_1^2$ posseggono una forma molto particolare; inoltre che reciprocamente, ammessa la riducibilità di ds e di ds_1 a quella forma, i due sistemi (A) ed (A_1) riescono corrispondenti. Ne verrà che siffatte espressioni degli elementi lineari si potranno risguardare come canoniche per le coppie di sistemi corrispondenti di tipo t_1), nel senso che tutti e soli i ds, ds_1, riducibili simultaneamente (mediante una scelta conveniente del sistema coordinato, cioè mediante un cambiamento di variabili) a quelle forme, saranno tra loro corrispondenti.

Si immagini pertanto di assumere come sistema di riferimento l'ennupla ortogonale sopra menzionata; in luogo dell'espressione generale

$$ds^2 = \sum_1^n {}_{rs}\, a_{rs}\, dx_r\, dx_s\,,$$

per la forma fondamentale φ, avremo in questo caso più semplicemente:

$$ds^2 = \sum_1^n {}_i\, H_i^2\, dx_i^2\,;$$

di più, siccome le linee $\lambda_{h/r}$ coincidono colle intersezioni delle superficie coordinate $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, ..., $x_{h-1} = 0$, $x_{h+1} = 0$, ..., $x_n = 0$, così, tenuto conto delle equazioni differenziali (§ 8), che definiscono la congruenza, e delle (17), troveremo immediatamente:

$$\lambda_h^{(r)} = \frac{\varepsilon_{hr}}{H_h}\,, \qquad (h, r = 1, 2, ..., n),$$

e quindi, per le (18):

$$\lambda_{h/r} = \varepsilon_{hr} H_h\,, \qquad (h, r = 1, 2, ..., n).$$

Derivando covariantemente queste espressioni delle $\lambda_{h/r}$ rispetto alla forma fondamentale φ (che ora è $\sum_1^n {}_i\, H_i^2\, dx_i^2$) e calcolando le γ per mezzo delle (19′), si può intanto verificare che, come è necessario per le premesse, le γ con tre indici distinti sono tutte nulle e si ottiene poi subito:

$$\gamma_{iji} = -\frac{1}{H_i H_j}\frac{\partial H_i}{\partial x_j}\,, \qquad (i \gtrless j).$$

Dopo ciò, il primo gruppo delle (E) riesce identicamente soddisfatto e gli altri divengono ordinatamente:

$$(22_1) \qquad (\varrho_i - \varrho_j)\frac{\partial \log H_i}{\partial x_j} + \frac{1}{2}\frac{\partial \varrho_i}{\partial x_j} = 0\,, \qquad (i \gtrless j),$$

$$(23_1) \qquad \frac{\partial(\mu\varrho_i)}{\partial x_j} = 0\,, \qquad (i \gtrless j) \qquad (i, j = 1, 2, ..., n),$$

$$(24_1) \qquad \frac{\partial(\mu\varrho_i)}{\partial x_i} = -\varrho_i \frac{\partial \mu}{\partial x_i}\,.$$

Se si nota che in causa delle (16′), la espressione del ds_1^2 del sistema (A_1), rispetto all'ennupla ortogonale, cui ora ci riferiamo, è:

$$ds_1^2 = \sum_1^n {}_i \varrho_i H_i^2 dx_i^2 ,$$

potremo dire che le (22_1), (23_1), (24_1) determinano quali relazioni (per una conveniente scelta delle superficie coordinate) debbono passare fra i coefficienti delle forze vive di due sistemi (A) ed (A_1), affinchè essi appartengono al tipo t_1).

Le equazioni, scritte or ora, si integrano senza difficoltà; in primo luogo le (23_1) equivalgono a:

$$(23_1') \qquad \mu\varrho_i = \frac{1}{\psi_i}, \qquad (i = 1, 2, ..., n),$$

designandosi con ψ_i una funzione della sola variabile x_i ([24]); mediante le ($23_1'$), si ha poi dalle (24_1):

$$\frac{\partial \log \mu}{\partial x_i} = \frac{\partial \log \psi_i}{\partial x_i},$$

ossia:

$$(24_1') \qquad \mu = \frac{\psi_1 \psi_2 \ldots \psi_n}{C},$$

con C costante.

Per integrare le (22_1), sostituiamovi al posto di ϱ_i, ϱ_j i loro valori

$$\frac{C}{\psi_i(\psi_1\psi_2 \ldots \psi_n)}, \qquad \frac{C}{\psi_j(\psi_1\psi_2 \ldots \psi_n)};$$

esse diverranno:

$$(\psi_j - \psi_i) \frac{\partial \log H_i}{\partial x_j} - \frac{1}{2} \frac{\partial \psi_j}{\partial x_j} = 0,$$

([24]) Per la natura del problema, che noi studiamo, è lecito scrivere $1/\psi_i$, senza lasciarci sfuggire alcun caso particolare. Infatti il prodotti $\mu\varrho_i$ è essenzialmente diverso da zero, poichè nè $\mu = dt/dt_1$, nè ϱ_i possono annullarsi (quest'ultima in quanto il termine noto della (15) è $\alpha > 0$).

da cui:

$$\frac{\partial \log H_i^2}{\partial x_j} = \frac{\partial \log (\psi_j - \psi_i)}{\partial x_j} \quad ([25]),$$

e per conseguenza:

$$H_i^2 = F_i \prod_1^n{}'_j (\psi_j - \psi_i),$$

dove F_i rappresenta una funzione della sola x_i e nel fattoriale $\prod_1^n{}'_j$ si esclude il valore i dell'indice j. Non sarà male osservare che, essendo H_i^2 una quantità essenzialmente positiva, lo stesso deve accadere del prodotto $F_i \prod_1^n{}'_j (\psi_j - \psi_i)$ e quindi che si può senz'altro attribuirgli la forma:

$$H_i^2 = V_i^2 \prod_1^n{}'_j |\psi_j - \psi_i|,$$

essendo evidentemente $V_i^2 = \pm F_i$, secondochè il prodotto $\prod_1^n{}'_j (\psi_j - \psi_i)$ è positivo o negativo.

Se si immagina di eseguire nei parametri x_i delle superficie coordinate la trasformazione: $\xi_i = \int V_i dx_i$ e si ripone poi x_i e dx_i per ξ_i e $d\xi_i$, si perviene agevolmente alla conclusione che agli elementi lineari ds, ds_1 di due sistemi (A), (A_1) corrispondenti di tipo t_1) è possibile attribuire simultaneamente le espressioni:

(25) $$ds^2 = \sum_1^n{}_i \left(\prod_1^n{}'_j |\psi_j - \psi_i|\right) dx_i^2,$$

(26) $$ds_1^2 = \frac{C}{\psi_1 \psi_2 \ldots \psi_n} \sum_1^n{}_i \frac{1}{\psi_i} \left(\prod_1^n{}'_j |\psi_j - \psi_i|\right) dx_i^2.$$

D'altra parte poi, se i coefficienti delle (25), (26) si sostituiscono nelle originarie equazioni di condizione (8) (cfr. § 4), si prova nel modo più spiccio che due sistemi (A), (A_1), i cui elementi lineari sieno riducibili alle forme (25) (26), sono corrispondenti (e, si intende, di tipo t_1)). Dunque

---

([25]) Passando dalla formula precedente a questa, abbiamo potuto dividere senza riserve per $\psi_j - \psi_i$, poichè, nel caso, che ora consideriamo, tutte le radici sono diseguali e, per le ($23'_1$), da $\varrho_i \gtrless \varrho_j$ segue necessariamente $\psi_i \gtrless \psi_j$.

le espressioni (25) (26) sono canoniche e si può, nel caso considerato, riportare ad esse esclusivamente lo studio dei sistemi corrispondenti.

Una prima circostanza degna di nota è che, per ogni forza viva del tipo (25)

$$T = \frac{1}{2} \sum_1^n {}_i \left(\prod_1^n{}'_j \, |\psi_j - \psi_i| \right) x_i'^2 ,$$

le equazioni delle geodetiche (A) (e quindi analogamente le (A')) si sanno integrare per sole quadrature col metodo classico della separazione delle variabili.

Altro fatto, che vogliamo porre in rilievo si è che, dato un ds della forma (25), le funzioni ψ si possono ritenere determinate *solo a meno di una costante additiva* c, talchè, quando si vogliono invece considerare le ψ come funzioni completamente individuate, le (25), (26) vanno interpretate come segue: *Per la corrispondenza di tipo* t_1) *fra* (A) *ed* (A_1) *è necessario e basta che i rispettivi* ds, ds_1 *equivalgano* (cioè sieno riconducibili mediante trasformazione di variabili) *a*:

$$ds^2 = \sum_1^n {}_i \left(\prod_1^n{}'_j \, |\psi_j - \psi_i| \right) dx_i^2 , \tag{25}$$

$$ds_1^2 = \frac{C}{(\psi_1 + c)(\psi_2 + c) \dots (\psi_n + c)} \sum_1^n {}_i \frac{1}{\psi_i + c} \left(\prod_1^n{}'_j \, |\psi_j - \psi_i| \right) dx_i^2 , \tag{26'}$$

dove le ψ *sono funzioni della sola variabile accennata dall'indice,* C *e* c *costanti arbitrarie* ([26]).

Questa osservazione che ogni ds della forma (25) ammette come corrispondenti tutti i ds_1, che rientrano nel tipo (26') *qualunque sia il valore della costante* c, reca immediatamente una conseguenza importante per *ogni* coppia di sistemi corrispondenti t_1), permettendo di stabilire per ciascuno di essi la esistenza di n integrali quadratici distinti.

Si ricordi a tale proposito (§ 6) che in generale:

$$\left(\frac{a}{\alpha}\right)^{\frac{2}{n+1}} \sum_1^n {}_{rs} \, \alpha_{rs} x_r' x_s' = \text{cost.} ,$$

([26]) Le forme (25) (26') di due sistemi corrispondenti sono già state considerate a titolo di esempio dal signor R. Liouville nella Memoria citata e dai signori G. Di Pirro e G. Picciati nelle Note: *Sulle trasformazioni delle equazioni della dinamica*, « Rend. del Circolo Mat. di Palermo », 1895; e *Sulla trasformazione delle equazioni della dinamica in alcuni casi particolari*, « Atti dell'Ist. Veneto », 1896. Tutti e tre questi autori arrivano alle forme (25), (26'), studiando il caso particolare della corrispondenza fra due sistemi ortogonali (chiamando così due (A), (A_1), le cui forze vive contengono soltanto i quadrati delle velocità). Il punto di vista, sotto cui noi le abbiamo ritrovate, è manifestamente molto più generale.

è un integrale primo del sistema (A), onde, applicando il teorema al caso presente, si può senz'altro asserire che, *per ogni valore di* c, l'equazione:

$$\sum_1^n{}_i (\psi_1 + c)\dots(\psi_{i-1} + c)(\psi_{i+1} + c)\dots(\psi_n + c)\left(\prod_1^{n}{}'_j |\psi_j - \psi_i|\right) x_i'^2 = \text{cost.},$$

è integral primo del sistema (A).

Ne viene che i coefficienti delle singole potenze di c sono costanti ciascuno separatamente e quindi dan luogo ad altrettanti integrali. Entrando la c al grado $n-1$ nascono così n integrali quadratici, i quali, come si può verificare, per essere le ψ tutte distinte, sono effettivamente tra loro indipendenti.

Riassumendo adunque, le coppie di sistemi corrispondenti di tipo t_1) sono caratterizzate dalla riducibilità dei loro elementi lineari alle forme canoniche (25), (26′); ciascuno dei due sistemi possiede n integrali quadratici indipendenti. Inoltre, per ogni dato sistema (A), se ne possono trovare tutti i corrispondenti (A_1) di tipo t_1), poichè, determinate, quando esistono, tutte le forme (25) (che si possono chiamare *forme generalizzate di* LIOUVILLE), di cui è suscettibile l'elemento lineare ds del sistema proposto (A), per ciascuna di esse, la (26′) porge in modo esplicito tutti i ds_1 corrispondenti e mostra che essi dipendono da due costanti arbitrarie.

Resterebbe a studiare quante e quali forme di LIOUVILLE competono effettivamente ad una data varietà secondo la natura del suo elemento lineare, problema, che, per $n = 2$, è stato risoluto completamente dal prof. RICCI ([27]), e per la cui trattazione si hanno oramai nel sistema (E) i necessari elementi.

Non è però nostro proposito di imprendere ricerche di tal natura, perciocchè, malgrado il loro grande interesse e la natura, quasi direi, più intrinseca, rimangono estranee all'intento, che noi abbiamo di mira. È infatti ben naturale, come ho avvertito fin da principio, che si debba

---

([27]) Non sarà forse superfluo di rilevare in qual modo i risultati di questo autore esauriscano, per $n = 2$, il problema della conservazione delle geodetiche.

Il prof. RICCI ha infatti stabilito i criteri per riconoscere se un dato elemento lineare binario è riducibile alla forma di LIOUVILLE e più in particolare per riconoscere se esso ammette ∞^4, ∞^2, ∞^1 od anche un solo sistema di LIOUVILLE, avendo dimostrato che questi sono i soli casi possibili. Per ciascuno di essi, supposte soddisfatte le volute condizioni, è inoltre indicato in qual modo si possano effettivamente determinare i relativi sistemi di LIOUVILLE. La ricerca esige l'integrazione di un sistema completo, quando i sistemi di LIOUVILLE sono ∞^4, ∞^2 od ∞^1, appena quadrature nel caso di un solo sistema.

Non parrà strano che io non abbia fatto cenno dell'importante e fondamentale Memoria del signor KOENIGS sulle linee geodetiche, quando si pensi che in tutte le sue investigazioni, egli suppone in sostanza l'elemento lineare già ridotto alla forma di LIOUVILLE e solo allora ne scruta i caratteri più riposti e ne determina proprietà, per quanto notevoli, estranee pur sempre al problema, che qui ci intrattiene.

ritenere risoluto un problema concernente la trasformazione di equazioni dinamiche, ogniqualvolta lo si sia ricondotto a questioni concrete dell'ordinaria teoria delle forme differenziali quadratiche.

11. - Sistemi corrispondenti di tipo t_m) in un caso particolare.

Nell'ipotesi che le radici dell'equazione (15) si riducano a $n-m+1$ fra loro distinte, vi è ancora un carattere da prendere in considerazione, il modo cioè, con cui sono distribuite le molteplicità delle radici stesse. Noi vogliamo ora riferirci con qualche dettaglio al caso più semplice, quello cioè, in cui $n-m$ tra le radici, poniamo $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_{n-m}$ sono semplici e quindi la rimanente σ è multipla d'ordine m. Per brevità designeremo con t'_m) una tale sottoclasse del tipo t_m).

Dalle (21) non si potrà, come precedentemente, dedurre che tutte le γ con tre indici distinti sono zero, ma si avrà soltanto:

$$\gamma_{hij} = 0 , \tag{27}$$

(per h, i, j distinti e h, i non contemporaneamente maggiori di $n-m$).

Le (27) esprimono intanto immediatamente (§ 8) che le $n-m$ concongruenze $\lambda_{h/r}$ $(h = 1, 2, \ldots, n-m)$ sono normali. Io dico di più che le famiglie di superficie $f_1 = \text{cost.}$, $f_2 = \text{cost.}, \ldots, f_{n-m} = \text{cost.}$ (di cui le linee λ sono ordinatamente le traiettorie ortogonali) ne ammettono ∞^m, che le tagliano ortogonalmente.

Cominciamo ad osservare che la condizione di ortogonalità (entro la varietà φ) fra due famiglie di superficie $f_h = \text{cost.}$, $u = \text{cost.}$, ove se ne designino con $f_{h/r}$, u_r $(r = 1, 2, \ldots, n)$ le derivate, e si ponga $f_h^{(r)} = \sum_s{}_1^n a^{(rs)} f_{h/s}$, è espressa da:

$$\sum_r{}_1^n f_h^{(r)} u_r = 0 ,$$

la quale è manifestamente una equazione a derivate parziali del prim'ordine lineare ed omogenea rispetto al parametro u. Per essere le linee $\lambda_{h/r}$ traiettorie ortogonali delle superficie $f_h = \text{cost.}$ e quindi le $\lambda_h^{(r)}$ proporzionali alle $f_h^{(r)}$, si può anche attribuirle la forma:

$$\sum_r{}_1^n \lambda_h^{(r)} u_r = 0 .$$

Ne segue che il sistema simultaneo delle $n-m$ equazioni:

$$\sum_1^n {}_r\, \lambda_h^{(r)} u_r = 0\,, \qquad (h = 1, 2, \ldots, n-m), \tag{28}$$

ammette come integrali tutti e soli i parametri di superficie, che tagliano le f_h $(h = 1, 2, \ldots, n-m)$ ortogonalmente.

Per provare il nostro asserto, basterà quindi far vedere che le equazioni (28) costituiscono un sistema completo.

Prendiamo a tale scopo due generiche (28):

$$\sum_1^n {}_r\, \lambda_h^{(r)} u_r = 0\,, \qquad \sum_1^n {}_r\, \lambda_k^{(r)} u_r = 0\,,$$

e formiamone la risultante jacobiana, usando però, ciò che sostanzialmente non reca differenza, la derivazione covariante invece che l'ordinaria. Verrà, secondo le regole del calcolo differenziale assoluto:

$$\sum_1^n {}_r\, (\lambda_{h/rs} u^{(r)} + \lambda_h^{(r)} u_{rs}) = 0\,, \qquad \sum_1^n {}_r\, (\lambda_{k/rs} u^{(r)} + \lambda_k^{(r)} u_{rs}) = 0\,;$$

moltiplicando la prima equazione per $\lambda_k^{(s)}$, la seconda per $\lambda_h^{(s)}$ e sommando rispetto ad s:

$$\sum_1^n {}_{rs} \left\{ \lambda_{h/rs} \lambda_k^{(s)} u^{(r)} + u_{rs} \lambda_h^{(r)} \lambda_k^{(s)} \right\} = 0\,,$$

$$\sum_1^n {}_{rs} \left\{ \lambda_{k/rs} \lambda_h^{(s)} u^{(r)} + u_{rs} \lambda_k^{(r)} \lambda_h^{(s)} \right\} = 0\,,$$

da cui, per sottrazione, ove si tenga conto (§ 6) che $u_{rs} = u_{sr}$:

$$\sum_1^n {}_r\, u^{(r)} \left\{ \sum_1^n {}_s\, \lambda_{h/rs} \lambda_k^{(s)} - \sum_1^n {}_s\, \lambda_{k/rs} \lambda_h^{(s)} \right\} = 0\,.$$

Sostituendo per le $\lambda_{h/rs}$, $\lambda_{k/rs}$ i loro valori (19), si passa, dopo facili riduzioni, alla:

$$\sum_1^n {}_r\, u_r \sum_1^o {}_i\, (\gamma_{hik} - \gamma_{kih})\, \lambda_i^{(r)} = 0\,,$$

e, siccome le γ, che appariscono nella sommatoria interna, hanno il primo indice (h o k) non maggiore di $n-m$, così, in causa delle (27), la risultante jacobiana di $\sum_1^n {}_r \lambda_h^{(r)} u_r = 0$, $\sum_1^n {}_k \lambda_k^{(r)} u_r = 0$ assume l' aspetto definitivo:

$$\gamma_{hkk} \sum_1^n {}_r \lambda_h^{(r)} u_r - \gamma_{khh} \sum_1^n {}_r \lambda_k^{(r)} u_r = 0 \,,$$

e, riescendo una combinazione lineare delle equazioni primitive, mostra che il sistema (28) è completo.

Esiste dunque nella varietà φ [ogniqualvolta $ds^2 = \sum_1^n {}_{rs} a_{rs} dx_r dx_s$ è elemento lineare di un sistema (A), che ammette un corrispondente di tipo t'_m)] un sistema ennuplo di superfici

$$f_1 = \text{cost.}, \; f_2 = \text{cost.}, \ldots, \; f_{n-m} = \text{cost.}; \quad f_{n-m+1} = \text{cost.}, \ldots, \; f_n = \text{cost.},$$

così fatto che le prime $n-m$ sono ortogonali fra loro e a ciascuna delle m rimanenti.

Assumendolo a sistema coordinato, avremo per ds una espressione della forma:

$$ds^2 = \sum_1^{n-m} {}_i H_i^2 dx_i^2 + \sum_{n-m+1}^n {}_{rs} a'_{rs} dx_r dx_s \,;$$

di più $\lambda_h^{(r)} = \varepsilon_{hr}/H_h$ $(h = 1, 2, \ldots, n-m)$, mentre delle $\lambda_{h'}^{(r)}$ $(h' = n-m+1, \ldots, n)$ potrà dirsi soltanto che $\lambda_{h'}^{(r)} = 0$ $(r \leqslant n-m)$; in ogni modo le (16'), (18') danno:

$$ds_1^2 = \sum_1^{n-m} {}_i \varrho_i H_i^2 dx_i^2 + \sigma \sum_{n-m+1}^n {}_{rs} a'_{rs} dx_r dx_s \,,$$

dove le a'_{rs} coincidono con quelle, che appariscono nell'espressione di ds.

Cerchiamo che cosa divengono le (E) rispetto a questo particolare sistema di riferimento.

Le (23) ci danno in primo luogo, per $i > n-m$:

$$\sum_1^n {}_r \frac{\partial(\mu\sigma)}{\partial x_r} \lambda_j^{(r)} = 0 \,, \qquad (j = 1, 2, \ldots, n),$$

donde, moltiplicando per $\lambda_{j/s}$ e sommando rispetto ad j:

$$\frac{\partial(\mu\sigma)}{\partial x_s} = 0 \,, \qquad (s = 1, 2, \ldots, n) \,,$$

ossia $\mu\sigma = \text{cost.}$; per ragioni di simmetria, designeremo il valore di $\mu\sigma$, che è essenzialmente diverso da zero, con $1/\psi_n$.

Usufruendo di questo primo risultato e tenendo presente che $\lambda_i^{(r)} = 0$ per $r \leqslant n-m$, le (24) si riducono, quando $i > n-m$, a:

$$\sum_{n-m+1}^{n}{}_r \frac{\partial\mu}{\partial x_r}\lambda_i^{(r)} = 0\ ;$$

moltiplicandole per $\lambda_{i/s}$ e sommando rispetto ad i fra $n-m+1$ ed n, otteniamo:

$$\sum_{n-m+1}^{n}{}_r \frac{\partial\mu}{\partial x_r}\sum_{n-m+1}^{n}{}_i \lambda_i^{(r)}\lambda_{i/s} = 0\,.$$

Ma $\lambda_i^{(r)} = 0$, per $i \leqslant n-m$, dunque potremo scrivere, al posto della sommatoria interna, $\sum_1^n{}_i \lambda_i^{(r)}\lambda_{i/s} = \varepsilon_{rs}$ e così finalmente deduciamo:

$$\frac{\partial\mu}{\partial x_r} = 0\,, \quad (s = n-m+1,\ n-m+2, \dots, n).$$

Consideriamo ora le rimanenti equazioni (23) e (24), quelle cioè, in cui l'indice i non supera $n-m$. Esse si possono scrivere compendiosamente:

$$\sum_1^n{}_r \frac{\partial(\mu\varrho_i)}{\partial x_r}\lambda_j^{(r)} = -\,\varepsilon_{ij}\varrho_i\sum_1^n{}_r \frac{\partial\mu}{\partial x_r}\lambda_i^{(r)}, \qquad (i \leqslant n-m;\ j = 1, 2, \dots, n),$$

od anche, moltiplicando per $\lambda_{j/s}$ e sommando rispetto a j:

$$\frac{\partial(\mu\varrho_i)}{\partial x_s} = -\,\lambda_{i/s}\varrho_i\sum_1^n{}_r \frac{\partial\mu}{\partial x_i}\lambda_i^{(r)}, \qquad (i \leqslant n-m;\ s = 1, 2, \dots, n).$$

Come abbiamo già notato, per $i \leqslant n-m$, $\lambda_i^{(r)} = \varepsilon_{ir}/H_i$; si vede subito che $\lambda_{i/s} = \varepsilon_{is}H_i$, talchè le precedenti equazioni si riducono a:

$$\frac{\partial(\mu\varrho_i)}{\partial x_s} = 0\,, \qquad (i \leqslant n-m;\ \ s \gtrless i),$$

e:

$$\frac{\partial(\mu\varrho_i)}{\partial x_i} = -\,\varrho_i\frac{\partial\mu}{\partial x_i}\,, \qquad (i \leqslant n-m).$$

Il primo gruppo porge:

$$\mu\varrho_i = \frac{1}{\psi_i}\,, \qquad (i = 1, 2, \dots\ n-m),$$

essendo al solito ogni ψ_i funzione della sola variabile x_i.

Il secondo gruppo, usufruendo delle relazioni $\mu\varrho_i = 1/\psi_i$, equivale a:

$$\frac{\partial \log \mu}{\partial x_i} = \frac{\partial \log \psi_i}{\partial x_i}, \qquad (i = 1, 2, \dots, n-m),$$

e queste, insieme alle:

$$\frac{\partial \mu}{\partial x_s} = 0, \qquad (s = n-m+1,\ n-m+2, \dots, n),$$

ci conducono all'espressione definitiva del sistema delle (23), (24), cioè:

$$\mu = \frac{1}{C}\, \psi_1\psi_2 \dots \psi_{n-m}\, \psi_n,$$

$$\varrho_i = \frac{C}{\psi_i(\psi_1\psi_2 \dots \psi_{n-m}\psi_n)}, \qquad (i \leqslant n-m),$$

$$\sigma = \frac{C}{\psi_n(\psi_1\psi_2 \dots \psi_{n-m}\psi_n)}.$$

Passando ormai alle equazioni (22), sarà bene scinderle in quattro gruppi, secondo i valori degli indici i e j. Per i e j entrambi non superiori ad $n-m$, si ha:

$$\gamma_{iji} = \sum_1^n{}_{rs}\, \lambda_{i/rs}\lambda_j^{(r)}\lambda_i^{(s)} = \frac{\lambda_{i/ji}}{H_iH_j},$$

e, siccome, per definizione:

$$\lambda_{i/ji} = \frac{\partial \lambda_{i/j}}{\partial x_i} - \sum_1^n{}_p\, a_{ij/p}\lambda_i^{(p)},$$

ricordando che la forma fondamentale, è:

$$ds^2 = \sum_1^{n-m}{}_i\, H_1^2 dx_i^2 + \sum_{n-m+1}^{n}{}_{rs}\, a'_{rs}\, dx_r\, dx_s,$$

si trova subito per $i \gtrless j$:

$$\gamma_{iji} = -\frac{1}{H_iH_j}\frac{\partial H_i}{\partial x_j}, \qquad (i, j = 1, 2, \dots, n-m).$$

Le (22) corrispondenti si riducono agevolmente alla forma:

$$\frac{\partial \log H_i^2}{\partial x_j} = \frac{\partial \log (\psi_j - \psi_i)}{\partial x_j}, \qquad (i = 1, 2, ..., n-m;\ j \leqslant n-m).$$

Supponendo ancora $i \leqslant n - m$, ma $j > n - m$, i secondi membri delle (22) si annullano e si ottiene:

$$\gamma_{iji} = 0\,,$$

ossia, per essere

$$\gamma_{iji} = \sum_{rs}{}_1^n \lambda_{i/rs}\lambda_j^{(r)}\lambda_i^{(s)},$$

$\left(\text{eguale nel caso presente a } \sum_r{}_1^n \lambda_{i/ri}\lambda_j^{(r)}/H_i\right)$:

$$\sum_r{}_1^n \lambda_{i/ri}\lambda_j^{(r)} = 0\,, \quad (i = 1, 2, ..., n-m;\ j > n-m).$$

Coll'artificio già adoperato di moltiplicare per $\lambda_{j/s}$ e sommare rispetto ad j fra $n - m + 1$ ed n, osservando poi che la sommatoria si può ritenere estesa fra 1 ed n, deduciamo:

$$\lambda_{i/si} = -\frac{\partial H_i^2}{\partial x_s} = 0\,, \qquad (i = 1, 2, ..., n-m;\ s > n-m);$$

in definitiva le equazioni (22) ci danno per $i \leqslant n - m$:

$$\frac{\partial \log H_i^2}{\partial x_j} = \frac{\partial \log (\psi_j - \psi_i)}{\partial x_j}, \quad (j \leqslant n-m \text{ e diverso da } i),$$

$$\frac{\partial \log H_i^2}{\partial x_j} = 0\,, \qquad (j > n-m)\,,$$

e quindi, ricordando le osservazioni del precedente paragrafo:

$$H_i^2 = V_i^2 \prod_j{}_1^{n-m}{}' \,|\psi_j - \psi_i|\,, \qquad (i \leqslant n-m).$$

Per i e j entrambi maggiori di $n - m$, si hanno dalle equazioni (22) altrettante identità; per $i > n - m$ e $j \leqslant n - m$, si trova subito:

$$\gamma_{iji} = -\frac{1}{2}\frac{1}{H_j}\frac{\partial \log (\psi_j - \psi_n)}{\partial x_j}\,,$$

cui gioverà associare le:

$$\gamma_{ijh} + \gamma_{hji} = 0, \quad (i > n - m;\ j \leqslant n - m;\ h > n - m \text{ e diverso da } i),$$

che sono una conseguenza delle (21).

Questi due sistemi di equazioni si possono raccogliere, scrivendo:

$$\gamma_{ijh} + \gamma_{hji} = -\,\varepsilon_{ih}\frac{1}{H_j}\frac{\partial \log(\psi_j - \psi_n)}{\partial x_j}, \qquad (i, h > n - m;\ j \leqslant n - m).$$

D'altra parte:

$$\begin{aligned}\gamma_{ijh} + \gamma_{hji} &= \sum_{1}^{n}{}_{rs}\left\{\frac{\partial \lambda_{i/r}}{\partial x_s} - \sum_{1}^{n}{}_{p}\, a_{rs\,p}\,\lambda_i^{(p)}\right\}\lambda_j^{(r)}\lambda_h^{(s)}\\ &+ \sum_{1}^{n}{}_{rs}\left\{\frac{\partial \lambda_{h/r}}{\partial x_s} - \sum_{1}^{n}{}_{p}\, a_{rs,p}\lambda_h^{(p)}\right\}\lambda_j^{(r)}\lambda_i^{(s)}\\ &= \frac{1}{H_j}\sum_{n-m+1}^{n}{}_{s}\left(\frac{\partial \lambda_{i/j}}{\partial x_s} - \sum_{n-m+1}^{n}{}_{p}\, a_{js\,p}\lambda_i^{(p)}\right)\lambda_h^{(s)}\\ &+ \frac{1}{H_j}\sum_{n-m+1}^{n}{}_{s}\left(\frac{\partial \lambda_{h/j}}{\partial x_s} - \sum_{n-m+1}^{n}{}_{p}\, a_{js\,p}\lambda_h^{(p)}\right)\lambda_i^{(s)},\end{aligned}$$

e, siccome $\lambda_{i/j}$, $\lambda_{h/j}$ (per $i, h > n - m$ e $j \leqslant n - m$) sono nulli, rimarrà:

$$\begin{aligned}\gamma_{ijh} + \gamma_{hji} &= -\frac{1}{H_j}\sum_{n-m+1}^{n}{}_{sp}\,\lambda_i^{(p)}\lambda_h^{(s)}(a_{js\,p} + a_{jp\,s})\\ &= -\frac{1}{H_j}\sum_{n-m+1}^{n}{}_{sp}\,\lambda_i^{(p)}\lambda_h^{(s)}\frac{\partial a_{sp}}{\partial x_j} = -\frac{1}{H_j}\sum_{n-m+1}^{n}{}_{sp}\,\lambda_i^{(p)}\lambda_h^{(s)}\frac{\partial a'_{sp}}{\partial x_j},\end{aligned}$$

le a'_{sp} essendo i coefficienti tuttora incogniti dell'attuale

$$ds^2 = \sum_{1}^{n-m}{}_{i}\, H_i^2\, dx_i^{2j} + \sum_{n-m+1}^{n}{}_{rs}\, a'_{rs}\, dx_r\, dx_s\,.$$

Abbiamo così:

$$\sum_{n-m+1}^{n}{}_{sp}\frac{\partial a'_{sp}}{\partial x_j}\lambda_i^{(p)}\lambda_h^{(s)} = \varepsilon_{ih}\frac{\partial \log(\psi_j - \psi_n)}{\partial x_i}, \qquad (i, h > n - m;\ j \leqslant n - m),$$

e da queste col solito artificio:

$$\frac{\partial a'_{rq}}{\partial x_j} = \frac{\partial \log(\psi_j - \psi_n)}{\partial x_j} \sum_{n-m+1}^{n}{}_{ih}\, \varepsilon_{ih} \lambda_{i/r} \lambda_{h/q} = \frac{\partial \log(\psi_j - \psi_n)}{\partial x_j}\, a'_{rq}\,;$$

integrando (e riscrivendo s per q) abbiamo le espressioni cercate dei coefficienti a', cioè:

$$a'_{rs} = K_{rs} \prod_{1}^{n-m}{}_i\, |\psi_j - \psi_n|\,, \qquad (r, s = n-m+1,\ n-m+2, \ldots, n),$$

le K_{rs} designando funzioni delle m variabili $x_{n-m+1}, x_{n-m+2}, \ldots, x_n$. Tali funzioni (oltre alla ovvia restrizione di rendere essenzialmente positiva la forma $\sum_{n-m+1}^{n}{}_{rs} K_{rs}\, dx_r\, dx_s$) non sono ulteriormente vincolate. Possiamo infatti ritenere di aver esaurite le condizioni (E), in quanto quelle tra le (21), che non abbiamo ancora considerate, si riducono oramai, come è facile convincersi, ad altrettante identità.

Col solito cambiamento di parametro per le superficie coordinate $x_1 = \text{cost.}$, $x_2 = \text{cost.}, \ldots, x_{n-m} = \text{cost.}$, si possono ridurre le funzioni V_i $(i \leqslant n-m)$, che appariscono nell'espressione di H_i, all'unità, oppure (ciò che apparirà giustificato dal confronto colle formule generali (32) e (33)) si può porre $V_i^2 = |\psi_n - \psi_i|$; si perviene così, tenendo conto dell'opportunità di mettere in evidenza una costante nell'espressione di ds_1 (e scrivendo $C/(\psi_n + c)$ invece di C) alle forme canoniche:

$$(29)\qquad ds^2 = \sum_{1}^{n-m}{}_i \Big\{ |\psi_n - \psi_i| \prod_{1}^{n-m}{}'_j\, |\psi_j - \psi_i| \Big\}\, dx_i^2 + \prod_{1}^{n-m}{}_j\, |\psi_j - \psi_n| \sum_{n-m+1}^{n}{}_{rs} K_{rs}\, dx_r\, dx_s\,,$$

$$(30)\qquad ds_1^2 = \frac{C}{(\psi_1 + c) \ldots (\psi_{n-m} + c)(\psi_n + c)} \left[\sum_{1}^{n-m}{}_j \frac{1}{\psi_i + c} \left(\prod_{1}^{n-m}{}'_j\, |\psi_j - \psi_i| \right) dx_i^2 \right.$$
$$\left. + \frac{1}{\psi_n + c} \prod_{1}^{n-m}{}_j\, |\psi_j - \psi_n| \sum_{n-m+1}^{n}{}_{rs} K_{rs}\, dx_r\, dx_s \right] \ [28].$$

---

[28] I sigg. Di Pirro e Picciati (loc. cit.), proponendosi la ricerca di *tutte le coppie di corrispondenti ortogonali*, hanno trovato soltanto le forme (25_1) e $(26'_1)$, mentre, per esempio, le (29) e (30) (quando $\sum_{n-m+1}^{n}{}_{rs} K_{rs}\, dx_r\, dx_s$ sia riducibile alla forma ortogonale), sono coppie di corrispondenti, che non rientrano nel tipo da essi assegnato. Questa divergenza va attribuita ad una semplice svista, del resto ben naturale, commessa da entrambi; all'ommissione cioè dei vari casi che si possono presentare quando certe equazioni riescano soddisfatte identicamente, ciò che rende inattendibili i calcoli successivi, riferentisi all'ipotesi generale.

Il sistema (A) possiede evidentemente (ψ_n essendo una costante, ma determinata) $n - m + 1$ integrali quadratici distinti, compresi tutti nella formula:

$$(\psi_1 + c) \dots (\psi_{n-m} + c)(\psi_n + c) \left\{ \sum_1^{n-m}{}_i \left(\frac{1}{\psi_i + c} \prod_1^{n-m}{}'_j |\psi_j - \psi_i| \right) x_i'^2 \right.$$
$$\left. + \frac{1}{\psi_n + c} \prod_1^{n-m}{}_j |\psi_j - \psi_i| \sum_{n-m+1}^{n}{}_{rs} K_{rs} x_r' x_s' \right\} = \text{cost.},$$

da cui potrebbero direttamente essere calcolati i relativi primi membri, come coefficienti delle diverse potenze di c.

Come già pel tipo t_1), la questione di determinare tutti i corrispondenti di un dato sistema (A), spettanti alla sottoclasse t'_m), è risoluta, per ogni forma canonica (29), dall'espressione (30) di ds_1, la quale dipende sempre dalle due costanti arbitrarie C e c.

Giova avvertire che la forma canonica (29) per un ds^2 è meno restrittiva che non la (25), ciò che del resto, come si constaterà, vale anche per la forma canonica generale del tipo t_m), talchè sarà molto più ampia la categoria dei ds, che ammettono corrispondenti di tipo t_m), che non di tipo t_1); anzi le condizioni per l'esistenza di un corrispondente (come in fondo si poteva prevedere dal comportamento (§ 9) delle equazioni (E)) vanno gradatamente decrescendo da tipo a tipo, finchè si giunge al tipo t_n), che non ne esige alcuna e determina quei sistemi, che si son detti (§ 6) col sig. PAINLEVÉ *corrispondenti ordinarii* e dipendono da una sola costante arbitraria.

Riuscirà agevole trovar conferma a queste asserzioni.

12. - Tipo generale t_m). Considerazioni riassuntive.

Sieno (A) ed (A_1) due sistemi corrispondenti di tipo generale t_m) e si chiamino $\varrho_{p_1}, \varrho_{p_2}, \dots, \varrho_{p_{n-m+1}}$ ($p_{n-m+1} = n$) le $n - m + 1$ radici distinte dall'equazione (15), supponendo che gli indici $p_1, p_2, \dots, p_{n-m+1}$ sieno disposti in ordine crescente e che la differenza $p_l - p_{l-1}$ ($p_0 = 0$) designi l'ordine di molteplicità della radice ϱ_{p_l}. Questo modo di rappresentare l'aggruppamento delle radici si presenta spontaneo, quando si parta dalla successione $\varrho_1, \varrho_2, \dots, \varrho_n$ e si immagini che coincidano tra loro le prime p_1 radici, e poi quelle (distinte dalle prime), i cui indici sono compresi fra p_1 e p_2 (incluso), ecc., e così in generale quelle, i cui indici sono compresi fra p_{l-1} e p_l (incluso).

Una prima ispezione alle equazioni (E) ci assicura che in questo caso debbono annullarsi tutte le γ_{hij} con tre indici distinti e tali che h ed i non sieno compresi nello stesso intervallo (determinato da due p consecutive). Con metodo analogo a quello seguito, nel caso svolto testè, si potrebbe poi stabilire che i singoli $n-m+1$ sistemi di equazioni

$$(31) \qquad \sum_1^n{}_r\, \lambda_h^{(r)} u_r = 0\,, \qquad (h = 1, 2, \ldots, p_{l-1}, p_l + 1, p_l + 2, \ldots n),$$

sono completi e che quindi ciascuno di essi ammette $p_l - p_{l-1}$ $(l = 1, 2, \ldots, n-m+1)$ integrali indipendenti $f_{p_{l-1}+1}, f_{p_{l-1}+2}, \ldots, f_{p_l}$. Inoltre due qualisivogliono di questi integrali f_α e f_β appartenenti a due distinti sistemi (31) (e quindi cogli indici α e β situati in intervalli differenti) sono fra loro ortogonali.

Infatti, considerando per un momento un sistema (31) come un insieme di $n - p_l + p_{l-1}$ equazioni algebriche lineari ed omogenee nelle n quantità u_r, si hanno le $p_l - p_{l-1}$ soluzioni indipendenti $\lambda_{p_{l-1}+1/r}$, $\lambda_{p_{l-1}+2/r}, \ldots, \lambda_{p_l/r}$, talchè, supposto α compreso fra p_{l-1} e p_l, le derivate $f_{\alpha/r}$ saranno linearmente esprimibili mediante $\lambda_{p_{l-1}+1/r}$, $\lambda_{p_{l-1}+2/r}, \ldots$, $\lambda_{p_l/r}$; analoga proprietà vale per f_β, soltanto, per essere α e β compresi in intervalli differenti, le λ ad esso relative saranno essenzialmente diverse dalle precedenti. Dopo ciò, l'ortogonalità fra f_α e f_β riesce manifesta.

Segue da questa osservazione che, assumendo a sistema coordinato le n famiglie di superfici $f_i = \text{cost.}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, si possono attribuire a ds e ds_1 le forme rispettive:

$$ds^2 = \sum_1^{n-m+1}{}_l \sum_{p_{l-1}+1}^{p_l}{}_{rs}\, a'_{rs}\, dx_r\, dx_s\,,$$

$$ds_1^2 = \sum_1^{n-m+1}{}_l\, \varrho_{p_l} \sum_{p_{l-1}+1}^{p_l}{}_{rs}\, a'_{rs}\, dx_r\, dx_s\,.$$

Una volta ridotti a questa forma, le (E) si integrano subito, basta soltanto aver cura di scinderle in varii gruppi, corrispondenti ai posti, occupati dagli indici negli intervalli p_{l-1}, p_l (come si è fatto nell'ipotesi particolare t_m) pei due intervalli $1, n-m$; $n-m, n$).

Il lettore avrà già intuito il risultato finale, talchè, senza riportare il calcolo, sembrami sufficiente, a complemento della ricerca, di trascrivere le forme canoniche:

$$(32) \qquad ds^2 = \sum_1^{n-m+1}{}_l \prod_1^{n-m+1}{}'_j\, |\psi_{p_j} - \psi_{p_l}| \sum_{p_{l-1}+1}^{p_l}{}_{rs}\, K_{rs}\, dx_r\, dx_s\,,$$

$$(33) \qquad ds_1^2 = \frac{C}{(\psi_{p_1}+c)(\psi_{p_2}+c)\ldots(\psi_{p_{n-m+1}}+c)} \sum_1^{n-m+1}{}_l \frac{1}{\psi_{p_l}+c} \prod_1^{n-m+1}{}'_j\, |\psi_{p_j} - \psi_{p_l}| \sum_{p_{l-1}+1}^{p_l}{}_{rs}\, K_{rs}\, dx_r\, dx_s,$$

in cui ψ_{p_l} è funzione della sola x_{p_l}, se ϱ_{p_l} è radice semplice, una pura costante nel caso opposto; K_i $(p_{l-1}+1 \leqslant i \leqslant p_l)$ è funzione delle sole variabili $x_{p_{l-1}+1}, x_{p_{l-1}+2}, \ldots, x_{p_l}$ e si può sempre supporre eguale ad 1, se ϱ_{p_l} è radice semplice.

Dalle (32), (33) si ritrovano, come è naturale, le (25), (26′), supponendo tutte le radici semplici, cioè $m=1$, $p_1=1$, $p_2=2, \ldots, p_n=n$; si ottengono invece le (29), (30), facendo $p_1=1$, $p_2=2, \ldots, p_{n-m}=n-m$, $p_{n-m+1}=n$; considerando infine come caso particolare il tipo t_n), vengono a mancare le funzioni ψ e si ha semplicemente:

$$ds^2 = \sum_{1}^{n}{}_{rs} K_{rs}\, dx_r\, dx_s\,,$$

$$ds_1^2 = C \sum_{1}^{n}{}_{rs} K_{rs}\, dx_r\, dx_s\,.$$

Il tipo t_n) non esige dunque alcun vincolo per la forza viva del sistema (A), ma comprende però soltanto dei corrispondenti manifesti a priori, cioè i corrispondenti ordinarii.

Apparisce dalle forme canoniche (32) e (33) che il caso dei corrispondenti ordinarii è l'unico (cfr. § 6), in cui esiste per la coppia (A), (A_1) il solo integrale delle forze vive; in tutti gli altri casi abbiamo infatti $n-m+1$ (>1) integrali quadratici, che si possono raccogliere nell'equazione:

$$(\psi_{p_1}+c)(\psi_{p_2}+c)\ldots(\psi_{p_{n-m+1}}+c)\sum_{1}^{n-m+1}{}_{l} \frac{1}{\psi_{p_l}+c}\prod_{1}^{n-m+1}{}'_{j}\,|\psi_j-\psi_{p_l}|\sum_{p_{l-1}+1}^{p_l}{}_{rs} K_{rs}x'_r x'_s = \text{cost.},$$

valida, durante il moto determinato dal sistema (A), per tutti i valori di c.

Per concludere, *vogliamo mostrare in qual modo coi risultati ottenuti si risolve la questione di determinare tutti i sistemi corrispondenti ad un dato* (A).

La ricerca va eseguita separatamente per ciascun tipo t_m) e per ciascuna sottoclasse di esso, individuata dal modo, con cui possono essere distribuite le molteplicità fra $n-m+1$ radici distinte di una equazione di grado n. Ognuna di queste sottoclassi è caratterizzata da una certa forma canonica (32) di elemento lineare. Se ds non è riducibile a quella forma, esso non ammette corrispondenti di quel tipo e sottoclasse; per ogni forma (32), da esso posseduta, i ds_1 corrispondenti, sono tutti compresi nella espressione (33), che dipende da due costanti arbitrarie. Fa eccezione il tipo t_n), che dà luogo, per ogni ds, ai sistemi corrispondenti $C\,ds$, con C costante arbitraria.

XI.

SUL MOTO DI UN CORPO RIGIDO INTORNO AD UN PUNTO FISSO

Nota I.

« Rend. Acc. Lincei », s. 5ª, vol. V (2° sem. 1896)
pp. 3-9 (*).

L'interesse, che a buon diritto si suole accordare ai problemi classici della meccanica analitica, mi conforta ad esporre alcune poche cose relative al moto di un corpo rigido intorno ad un punto fisso.

Premetto una parola di commento sul punto di vista da cui io mi sono posto.

Le equazioni differenziali del moto dipendono, come si sa, da due elementi: la natura del sistema mobile, analiticamente rappresentata da una forma differenziale quadratica, e la natura delle forze che lo sollecitano. La conoscenza del primo di questi elementi, se non basta a caratterizzare una determinata questione dinamica, permette tuttavia di confrontare fra loro più sistemi materiali, dotati di uno stesso grado di libertà e di concluderne la identità (analitica), quando le loro forze vive sieno rappresentate da forme trasformabili l'una nell'altra. In questo caso le equazioni differenziali del moto dei due sistemi si riconducono evidentemente le une alle altre, mediante una trasformazione di coordinate (lagrangiane) e una conseguente trasformazione delle forze.

In ordine a questo criterio, io ho preso a studiare la forza viva T di un corpo rigido, per stabilirne i caratteri essenziali.

Sarebbe stato oltremodo laborioso il ricorrere per questa indagine agli invarianti della forma differenziale. Ho preferito attenermi al concetto gruppale, appoggiandomi sugli insigni lavori del sig. Lie. Determinai pertanto la natura del gruppo che trasforma in se stessa la forza viva T,

---

(*) Presentata dal Socio V. Cerruti (5 luglio 1896).

ed ho trovato, come era agevolmente prevedibile, gruppi diversi, secondo il comportamento dei momenti principali di inerzia, relativi al punto fisso.

Nel caso in cui i tre momenti sieno tra loro eguali, la struttura del gruppo corrispondente porta senz'altro a concludere che la forma differenziale T dev'essere di curvatura costante positiva, e in fatto un'acconcia scelta di variabili permette di constatarlo direttamente, talchè si può identificare la dinamica di un punto materiale in uno spazio ellittico a quella di un corpo rigido, mobile intorno ad un punto fisso, per cui sieno eguali i momenti principali di inerzia.

Mi permetto ancora di rilevare, quantunque nel presente scritto non ne sia fatto cenno, che, allorquando tutti e tre o due almeno dei momenti di inerzia sono distinti, la espressione di T non è utilmente riducibile a tipo diverso, e può invece, come mostrerò in altra occasione, risguardarsi canonica per tutta una categoria di problemi con tre gradi di libertà. Spero allora di poter dar prova, anche dal lato strettamente dinamico, dell'interesse di questo genere di ricerche.

Pel corpo rigido in particolare, se non vien fatto di dedurre dalle considerazioni gruppali conseguenze meccaniche nuove, si mette in luce tuttavia un fatto analitico, che sembrami degno di attenzione; si mostra cioè l'esistenza di potenziali *immaginarii*, per cui (anche quando i momenti di inerzia sono tutti distinti) le equazioni del moto si possono integrare mediante quadrature.

L'Accademia vorrà consentire che io dedichi due Note a queste osservazioni sul moto dei corpi rigidi.

1. – Sia $T = \frac{1}{2} \sum_{rs}^{n} a_{rs} x'_r x'_s$ l'espressione in coordinate lagrangiane della forza viva di un sistema materiale S a legami indipendenti dal tempo; le a_{rs} dovendosi ritenere in tale ipotesi funzioni soltanto delle coordinate x_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Designeremo al solito con a (essenzialmente positivo) il determinante $\sum \pm a_{11} a_{22} \ldots a_{nn}$, e con $a^{(rs)}$ il complemento algebrico di a_{rs} in a, diviso per a.

Suppongasi che l'equazione:

$$\sum_{r}^{n} A_r x'_r = \text{cost.} \tag{1}$$

(le A essendo funzioni delle x) costituisca un integrale primo, lineare, come si vede, rispetto alle velocità, per il moto del sistema S, quando non agiscono forze. Dico che T ammette la trasformazione infinitesima

$$Zf = \sum_{i}^{n} A^{(i)} p_i ,$$

dove

$$p_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}, \qquad A^{(i)} = \sum_{1}^{n}{}_r\, a^{(ir)} A_r .$$

Per provarlo, mostrerò come tale enunciato non sia che l'espressione, secondo la terminologia ormai classica del sig. LIE, di un teorema, dimostrato in questi stessi Rendiconti [1] dal prof. CERRUTI. Egli ha infatti osservato che, ogni qual volta esiste un integrale lineare (1) per un sistema S sollecitato da forze indipendenti dalle velocità (nel qual caso la (1) è sempre integrale, anche quando, come si è supposto, non agiscono forze [2]) è possibile nella varietà Φ di elemento lineare $ds = \sqrt{2T\,dt^2}$ un moto *rigido* infinitesimo, per cui ogni punto (x_1, $x_2, \ldots, x_n$) subisce gli spostamenti $\delta x_1 = \varepsilon A^{(1)}$, $\delta x_2 = \varepsilon A^{(2)}, \ldots, \delta x_n = \varepsilon A^{(n)}$, designando ε una costante infinitesima.

Ora il prof. CERRUTI chiama, come è naturale, rigido uno spostamento, in cui i singoli elementi si comportano come fossero collegati rigidamente, e desume questa interpretazione dalla circostanza analitica che, ponendo, nell'espressione dell'elemento lineare $ds^2 = \sum_{1}^{n}{}_{rs}\, a_{rs}\, dx_r\, dx_s$, $x_i + \varepsilon A^{(i)}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ al posto di x_i (e quindi $dx_i + \varepsilon\, dA^{(i)}$ al posto di dx_i), il ds^2, a meno di infinitesimi d'ordine superiore, rimane invariato. Ciò equivale a dire manifestamente che l'elemento lineare ds, o, se si vuole, la forza viva T, ammette la trasformazione infinitesima Zf, estesa (erweiterte), si intende, alle velocità dx_i/dt.

Giova notare che, se nell'integrale $\sum_{1}^{n}{}_r\, A_r x'_r =$ cost. si sostituiscono alle x' le variabili coniugate $p_i = \partial T/\partial x'_i$, la corrispondente trasformazione infinitesima Zf riesce determinata identicamente, poichè il primo membro dell'integrale coincide allora col simbolo della trasformazione. Infatti da $p_i = \partial T/\partial x'_i = \sum_{1}^{n}{}_i\, a_{ir} x'_r$, si trae $x'_r = \sum_{1}^{n}{}_i\, a^{(ir)} p_i$, e quindi:

$$\sum_{1}^{n}{}_r\, A_r x'_r = \sum_{1}^{n}{}_{ri}\, a^{(ir)} A_r p_i = \sum_{1}^{n}{}_i\, A^{(i)} p_i = Zf .$$

2. – Applichiamo queste generalità al caso di un corpo rigido, mobile intorno ad un punto fisso O.

Si indichino al solito con x, y, z gli assi principali di inerzia nel

---

(1) Aprile, 1895.

(2) Cfr. la mia Nota: *Sugli integrali algebrici delle equazioni dinamiche*, «Atti dell'Acc. di Torino», 1896 [in questo vol.: IX, pp. 199–205].

punto O, con A, B, C i momenti principali, con α_1, β_1, γ_1; α_2, β_2, γ_2; α_3, β_3, γ_3 i coseni degli angoli che gli assi x, y, z formano con una terna qualunque d'assi fissi ξ, η, ζ, aventi l'origine nel punto fisso. Converrà aver presenti due sistemi di coordinate lagrangiane: i parametri razionali di RODRIGUES (³) e gli angoli di EULERO. I primi conducono a stabilire utili raffronti, i secondi meglio si prestano al calcolo effettivo. Per evitare di scrivere tutto in doppio, ci atterremo alla rappresentazione parametrica di RODRIGUES, riportando in coordinate euleriane (⁴) soltanto quelle formule di cui dovrà farsi in appresso esplicito uso. Ritenuto ciò, avremo

$$\alpha_1 = \frac{1 + x_1^2 - x_2^2 - x_3^2}{\sigma^2}, \quad \alpha_2 = \frac{2(-x_3 + x_1x_2)}{\sigma^2}, \quad \alpha_3 = \frac{2(x_2 + x_1x_3)}{\sigma^2},$$

$$\beta_1 = \frac{2(x_3 + x_1x_2)}{\sigma^2}, \quad \beta_2 = \frac{1 + x_2^2 - x_3^2 - x_1^2}{\sigma^2}, \quad \beta_3 = \frac{2(-x_1 + x_2x_3)}{\sigma^2},$$

$$\gamma_1 = \frac{2(-x_2 + x_1x_3)}{\sigma^2}, \quad \gamma_2 = \frac{2(x_1 + x_2x_3)}{\sigma^2}, \quad \gamma_3 = \frac{1 + x_3^2 - x_1^2 - x_2^2}{\sigma^2},$$

dove si è posto per brevità $\sigma^2 = 1 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$.

Le componenti della rotazione attorno agli assi principali di inerzia sono

$$\begin{cases} p = \alpha_2'\alpha_3 + \beta_2'\beta_3 + \gamma_2'\gamma_3 = \dfrac{2}{\sigma^2}(x_1' + x_3x_2' - x_2x_3'), \\[2ex] q = \alpha_3'\alpha_1 + \beta_3'\beta_1 + \gamma_3'\gamma_1 = \dfrac{2}{\sigma^2}(x_2' + x_1x_3' - x_3x_1'), \\[2ex] r = \alpha_1'\alpha_2 + \beta_1'\beta_2 + \gamma_1'\gamma_2 = \dfrac{2}{\sigma^2}(x_3' + x_2x_1' - x_1x_2'), \end{cases}$$

e la forza viva del corpo assumerà la forma:

$$(2) \qquad 2T = Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 =$$

$$= \frac{4}{\sigma^4}\{A(x_1' + x_3x_2' - x_2x_3')^2 + B(x_2' + x_1x_3' - x_3x_1')^2 + C(x_3' + x_2x_1' - x_1x_2')^2\}.$$

(³) DARBOUX, *Leçons sur la théorie des surfaces*, T. 1, p. 34.

(⁴) Le chiamo così per consuetudine, ma effettivamente userò gli angoli ϑ, f, φ del KIRCHHOFF (*Mechanik*, p. 43), che sono legati agli angoli ϑ, φ, ψ di EULERO dalle relazioni $f = \pi/2 - \varphi$, $\varphi = \psi - \pi/2$ e permettono di stabilire le espressioni dei nove coseni senza ricorrere a considerazioni geometriche.

Esprimendo le rotazioni p, q, r per mezzo delle variabili p_1, p_2, p_3 coniugate ad x_1', x_2', x_3', si trova:

$$\text{(3)} \quad \begin{cases} Ap = \dfrac{1}{2}\{(1+x_1^2)p_1 + (x_3 + x_1x_2)p_2 + (-x_2 + x_1x_3)p_3\}, \\[2ex] Bq = \dfrac{1}{2}\{(-x_3 + x_1x_2)p_1 + (1+x_2^2)p_2 + (x_1 + x_2x_3)p_3\}, \\[2ex] Cr = \dfrac{1}{2}\{(x_2 + x_1x_3)p_1 + (-x_1 + x_2x_3)p_2 + (1+x_3^2)p_3\}; \end{cases}$$

le quali uguaglianze, passando alle coordinate euleriane ϑ, f, φ, ove si designino con p_ϑ, p_f, p_φ le $\partial T/\partial\vartheta'$, $\partial T/\partial f'$, $\partial T/\partial\varphi'$, possono essere scritte:

$$\text{(3')} \quad \begin{cases} Ap = \operatorname{sen} f p_\vartheta + \cos f \dfrac{\cos\vartheta}{\operatorname{sen}\vartheta} p_f + \dfrac{\cos f}{\operatorname{sen}\vartheta} p_\varphi, \\[2ex] Bq = -\cos f p_\vartheta + \operatorname{sen} f \dfrac{\cos\vartheta}{\operatorname{sen}\vartheta} p_f + \dfrac{\operatorname{sen} f}{\operatorname{sen}\vartheta} p_\varphi, \\[2ex] Cr = -p_f. \end{cases}$$

Quando non agiscono forze, sussistono, come è ben noto, i tre integrali delle aree:

$$\alpha_1 \frac{\partial T}{\partial p} + \alpha_2 \frac{\partial T}{\partial q} + \alpha_3 \frac{\partial T}{\partial r} = \text{cost.},$$

$$\beta_1 \frac{\partial T}{\partial p} + \beta_2 \frac{\partial T}{\partial q} + \beta_3 \frac{\partial T}{\partial r} = \text{cost.},$$

$$\gamma_1 \frac{\partial T}{\partial p} + \gamma_2 \frac{\partial T}{\partial q} + \gamma_3 \frac{\partial T}{\partial r} = \text{cost.},$$

che, espressi mediante x_1, x_2, x_3, p_1, p_2, p_3, divengono

$$\text{(4)} \quad \begin{cases} \dfrac{1}{2}\{(1+x_1^2)p_1 + (-x_3 + x_1x_2)p_2 + (x_2 + x_1x_3)p_3\} = \text{cost.}, \\[2ex] \dfrac{1}{2}\{(x_3 + x_1x_2)p_1 + (1+x_2^2)p_2 + (-x_1 + x_2x_3)p_3\} = \text{cost.}, \\[2ex] \dfrac{1}{2}\{(-x_2 + x_1x_3)p_1 + (x_1 + x_2x_3)p_2 + (1+x_3^2)p_3\} = \text{cost.}, \end{cases}$$

e, in coordinate euleriane,

$$
(4')\qquad \left\{
\begin{aligned}
&-\operatorname{sen}\varphi\, p_\vartheta - \frac{\cos\varphi}{\operatorname{sen}\vartheta}\, p_f - \cos\varphi\, \frac{\cos\vartheta}{\operatorname{sen}\vartheta}\, p_\varphi = \text{cost.},\\
&\cos\varphi\, p_\vartheta - \frac{\operatorname{sen}\varphi}{\cos\vartheta}\, p_f - \operatorname{sen}\varphi\, \frac{\cos\vartheta}{\operatorname{sen}\vartheta}\, p_\varphi = \text{cost.},\\
&p_\varphi = \text{cost.}\,.
\end{aligned}
\right.
$$

Ne deduciamo che la forza viva T ammette le tre trasformazioni infinitesime

$$
\begin{aligned}
Z_1f &= \frac{1}{2}\{(1+x_1^2)p_1 + (-x_3 + x_1x_2)p_2 + (x_2 + x_1x_3)p_3\} =\\
&= \frac{1}{2}\, p_1 + \frac{1}{2}\, x_1 U + \frac{1}{2}\,(x_2p_3 - x_3p_2)\,,\\
Z_2f &= \frac{1}{2}\{(x_3 + x_1x_2)p_1 + (1 + x_2^2)p_2 + (-x_1 + x_2x_3)p_3\} =\\
&= \frac{1}{2}\, p_2 + \frac{1}{2}\, x_2 U + \frac{1}{2}\,(x_3p_1 - x_1p_3)\,,\\
Z_3f &= \frac{1}{2}\{(-x_2 + x_1x_3)p_1 + (x_1 + x_2x_3)p_2 + (1 + x_3^2)p_3\} =\\
&= \frac{1}{2}\, p_3 + \frac{1}{2}\, x_3\, U + \frac{1}{2}\,(x_1p_2 - x_2p_1)\,,
\end{aligned}
$$

$$
(U = x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3)\,.
$$

Sarebbe facile verificare direttamente che le Z_1f, Z_2f, Z_3f soddisfano alle relazioni

$$
(5)\qquad (Z_1Z_2)f = -Z_3f\,,\qquad (Z_2Z_3)f = -Z_1f\,,\qquad (Z_3Z_1)f = -Z_2f\,;
$$

riesce tuttavia anche più semplice il riportarsi ad una proposizione di JACOBI (5), secondo cui gli integrali delle aree (espressi a mezzo delle

(5) *Werke*, B. V, p. 113. Giova avvertire che le (5) presentano un cambiamento di segno rispetto alle formule di JACOBI, poichè noi, seguendo il sig. LIE, abbiamo posto

$$
(Z_1Z_2)f = Z_1Z_2f - Z_2Z_1f = \sum_1^3{}_i \left\{ \frac{\partial Z_1f}{\partial p_i}\frac{\partial Z_2f}{\partial x_i} - \frac{\partial Z_1f}{\partial x_i}\frac{\partial Z_2f}{\partial p_i} \right\},
$$

mentre il simbolo di JACOBI $[Z_1f, Z_2f]$ equivale a $-(Z_1Z_2)f$. Cfr. anche: MATHIEU, *Dynamique analytique*, p. 243; MAYER A., *Ueber die allgemeinen Integrale der dynamischen Diffgl.* ecc., «Math. Ann.» B. 17, 1880. Aggiungo che la proposizione di JACOBI potrebbe ricavarsi in modo elegante come caso particolare di un teorema gruppale (LIE-ENGEL, *Theorie* ecc., I., p. 233).

coordinate x_i e delle variabili p_i) sono legati da equazioni del tipo (5), non solo, ciò che si constata immediatamente, per un sistema di punti liberi, ma eziandio per un sistema di punti vincolati in modo qualunque, purchè tale, si intende, da conservare gli integrali delle aree.

Proponiamoci di determinare la natura del gruppo, che trasforma in sè stessa la forza viva di un corpo rigido, distinguendo all'uopo tre casi:

a) i momenti principali di inerzia A, B, C sono fra loro diversi;

b) due momenti principali, per es. A e B, sono eguali, ma distinti dal terzo;

c) i momenti principali di inerzia sono tutti eguali fra loro.

In questa Nota trovano posto soltanto poche considerazioni generali relative all'ipotesi *a*); alcune loro conseguenze e la discussione degli altri casi sono rimessi ad altra Comunicazione.

3. – Caso *a*). — Si hanno, come è noto, i *soli* (6) integrali (4) linearmente indipendenti (cioè non legati da relazioni lineari *a coefficienti costanti*); quindi la forza viva T ammette le sole trasformazioni infinitesime indipendenti Z_1f, Z_2f, Z_3f, le quali debbono per ciò costituire un gruppo G_3 a tre parametri. Questo vien messo in evidenza dalle (5), che determinano in pari tempo la struttura (Zusammensetzung) di G_3. Da essa direttamente (7) potrebbe desumersi che il nostro gruppo è costituito come il gruppo proiettivo $x' = (ax + b)/(x + c)$ sopra la retta. Si può per altro riconoscerlo in modo più vantaggioso per l'uniformità dell'indagine, prendendo a considerare il gruppo G_6 di proiettività, che trasformano in sè stessa la sfera immaginaria $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 1 = 0$ nello spazio ordinario. Tale gruppo è generato (8) dalle trasformazioni infinitesime:

$$\left|\begin{array}{lll} p_1 + x_1 U\,, & p_2 + x_2 U\,, & p_3 + x_3 U\,, \\ x_2 p_3 - x_3 p_2\,, & x_3 p_1 - x_1 p_3\,, & x_1 p_2 - x_2 p_1 \end{array}\right|,$$

(6) O. Tedone, *Sopra i casi, in cui il problema del moto di un corpo rigido si riduce alle quadrature*, « Nuovo Cimento », 1895. Veramente dalla ricerca del sig. Tedone risulta che quando $A = B \lesseqgtr C$, esiste, oltre al sistema (4), il solo integrale lineare $r = \text{cost.}$ Siccome però quest'ultimo non compete al caso generale, il nostro asserto si trova giustificato.

(7) Lie-Engel, III, pp. 713-717.

(8) Lie-Engel, ibidem, p. 410.

o, ciò che è lo stesso, da:

$$Z_1 f = \frac{1}{2} p_1 + \frac{1}{2} x_1 U + \frac{1}{2} (x_2 p_3 - x_3 p_2), \quad Z'_1 f = \frac{1}{2} p_1 + \frac{1}{2} x_1 U - \frac{1}{2} (x_2 p_3 - x_3 p_2),$$

$$Z_1 f = \frac{1}{2} p_2 + \frac{1}{2} x_2 U + \frac{1}{2} (x_3 p_1 - x_1 p_3), \quad Z'_2 f = \frac{1}{2} p_2 + \frac{1}{2} x_2 U - \frac{1}{2} (x_3 p_1 - x_1 p_3),$$

$$Z_3 f = \frac{1}{2} p_3 + \frac{1}{2} x_3 U + \frac{1}{2} (x_1 p_2 - x_2 p_1), \quad Z'_3 f = \frac{1}{2} p_3 + \frac{1}{2} x_3 U - \frac{1}{2} (x_1 p_2 - x_2 p_1),$$

la distinzione delle trasformazioni infinitesime del gruppo in due categorie $Z_i f$ $(i = 1, 2, 3)$ e $Z'_j f$ $(j = 1, 2, 3)$ corrispondendo alla circostanza che le tre trasformazioni di ciascuna categoria determinano due sottogruppi invarianti semplicemente transitivi, i quali trasformano in sè le singole generatrici, situate rispettivamente sull'una o sull'altra delle due serie rigate (immaginarie) Γ e Γ' appartenenti alla quadrica $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 1 = 0$. Le trasformazioni Zf, che lasciano ferme le singole generatrici della serie Γ, operano su Γ' (e le $Z'f$ su Γ) come le proiettività binarie sopra la varietà semplicemente infinita, e ciò collima con quanto s'è poc'anzi avvertito: notiamo ancora che, non solo $Z_i f$ $(i = 1, 2, 3)$ e $Z'_j f$ $(j = 1, 2, 3)$ sono sottogruppi invarianti, ma ben anco le singole trasformazioni Zf sono permutabili colle $Z'f$. Tradotto in linguaggio analitico, ciò significa che valgono le relazioni

$$(Z_i Z'_j) f = 0 \qquad (i, j = 1, 2, 3), \tag{6}$$

le quali del resto si possono ovviamente verificare.

Ritornando al gruppo G_3 di T, donde abbiamo preso le mosse, siamo ora in grado di caratterizzarlo, dicendo che è simile a quel gruppo proiettivo dello spazio ordinario, il quale trasforma in sè (*) una serie rigata Γ appartenente alla sfera immaginaria $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 1 = 0$. Di qua si potrebbe ricavarne senza integrazione la espressione generale delle sue trasformazioni finite, poichè tali trasformazioni sono date, come si vede immediatamente, dalle omografie biassiali, che hanno per assi una coppia qualunque di generatrici coniugate di Γ'.

(*) In un esemplare del lavoro, già posseduto dall'A., si trova quì l'aggiunta autografa « le singole generatrici di ». [N. d. R.].

NOTA II.

« Rend. Acc. Lincei », s. 5ª, vol. V (2° sem. 1896), pp. 122-127. (*)

Il lettore voglia riferirsi ad una Nota apparsa non è guari in questi Rendiconti col medesimo titolo, qui sopra indicato (1).

4. – Delle considerazioni gruppali si può usufruire con vantaggio nel ricercare se esistono funzioni delle forze V, per cui si abbiano, oltre all'integrale delle forze vive, due altri integrali lineari delle equazioni del moto, e per cui quindi la integrazione si riduca alle quadrature.

Se una equazione $L = \text{cost.}$, il cui primo membro L sia lineare (nel qual caso, come è facile stabilire, si può addirittura assumere omogeneo (2)) nelle velocità, si suppone integrale pel moto del corpo, quando agiscono forze, essa riesce integrale anche in assenza di forze: dunque L, espresso per le p, è necessariamente una combinazione lineare *a coefficianti costanti* di Z_1f, Z_2f, Z_3f. Una combinazione Yf siffatta sarà poi integrale, allora (3) e solo allora che $YV = 0$. Perchè esistano ad un tempo due integrali lineari indipendenti $L_1 = \text{cost.}$, $L_2 = \text{cost.}$, occorre adunque che il potenziale V delle forze attive soddisfaccia simultaneamente a due equazioni indipendenti:

$$Y_1V = g_{11}Z_1V + g_{12}Z_2V + g_{13}Z_3V = 0\ ,$$
$$Y_2V = g_{21}Z_1V + g_{22}Z_2V + g_{23}Z_3V = 0\ ,$$

i coefficienti numerici g potendo essere scelti in modo arbitrario. Affinchè due equazioni indipendenti $Y_1V = 0$ e $Y_2V = 0$ abbiano una soluzione

(*) Presentata dal Socio E. BELTRAMI (16 agosto 1896).

(1) V. questi « Rendiconti », p. 3 [in questo vol.: IX, Nota I, p. 253].

(2) Cfr. la Nota citata: *Sugli integrali algebrici,* ecc. [in questo vol.: IX, pp. 199-205].

(3) Infatti la condizione affinchè $L = \text{cost.}$ sia integrale, quando agiscono le forze derivanti dal potenziale V, è che le due funzioni $T - V$, L sieno in involuzione; ora $(T - V, L) = 0$, si scinde precisamente in $(T, L) = 0$, $(L, V) = 0$.

comune (diversa da $V=$ cost.) è necessario e basta che il sistema $Y_1 f=0$, $Y_2 f=0$, sia completo, cioè che $(Y_1 Y_2)f$ sia una combinazione lineare, e, in causa delle (5), a coefficienti costanti, di $Y_1 f$, $Y_2 f$. Ne viene che $Y_1 f$, $Y_2 f$ determinano un sottogruppo a due parametri di G_3, come reciprocamente ad ogni sottogruppo ∞^2 di G_3 corrisponde un potenziale dotato della voluta proprietà. Ora esistono in fatto sottogruppi a due parametri del gruppo G_3, disgraziatamente però soltanto immaginari, e sarebbe facile riconoscere che tali sono altresì le V corrispondenti. Senza soffermarci su ciò, diamo un esempio di funzione potenziale (immaginaria), per cui le equazioni del moto si possono integrare mediante quadrature; la cosa non ha manifestamente alcun significato meccanico, ma presenta, se non erro, un certo interesse analitico, poichè non so che sia mai stata osservata la possibilità di integrare mediante quadrature le equazioni corrispondenti al moto di un corpo rigido, quando le tre costanti A, B, C sono fra loro distinte e i secondi membri (forze nel caso reale) non sono tutti nulli.

Come sottogruppo ∞^2 di G_3 si può assumere:

$$\boxed{Z_1 f + iZ_2 f\,, \quad Z_3 f}\,,$$

poichè:

$$\{(Z_1+iZ_2)Z_3\}f=(Z_1Z_3)f+i(Z_2Z_3)f=Z_2f-iZ_1f=-i(Z_1f+iZ_2f)\,.$$

Il sistema, che determina V, è

$$\begin{cases} Z_1V+iZ_2V=0\,, \\ \qquad\quad Z_3V=0\,, \end{cases}$$

ossia in coordinate euleriane (veggansi le (4')):

$$\left\{\begin{aligned} &\left(-\operatorname{sen}\varphi\frac{\partial V}{\partial\vartheta}-\frac{\cos\varphi}{\operatorname{sen}\vartheta}\frac{\partial V}{\partial f}-\cos\varphi\frac{\cos\vartheta}{\operatorname{sen}\vartheta}\frac{\partial V}{\partial\varphi}\right)+\\ &\qquad+i\left(\cos\varphi\frac{\partial V}{\partial\vartheta}-\frac{\operatorname{sen}\varphi}{\operatorname{sen}\vartheta}\frac{\partial V}{\partial f}-\operatorname{sen}\varphi\frac{\cos\vartheta}{\operatorname{sen}\vartheta}\frac{\partial V}{\partial\varphi}\right)=0\,,\\ &\qquad\qquad\frac{\partial V}{\partial\varphi}=0\,. \end{aligned}\right.$$

La prima di queste equazioni, ridotta a mezzo della seconda, diviene

$$e^{i\varphi}\left\{i\frac{\partial V}{\partial\vartheta}-\frac{1}{\operatorname{sen}\vartheta}\frac{\partial V}{\partial f}\right\}=0\,,$$

donde, integrando,

$$V = F_1\left(if + \log \operatorname{tg} \frac{1}{2}\vartheta\right),$$

che può anche essere scritta:

$$V = F_2\left(e^{if + \log \operatorname{tg} \frac{1}{2}\vartheta}\right) = F_2\left(\frac{\operatorname{sen}\vartheta \cos f + i \operatorname{sen}\vartheta \operatorname{sen} f}{1 + \cos\vartheta}\right),$$

F_2 essendo, come F_1, simbolo di funzione arbitraria.

Formiamo le equazioni differenziali, che, corrispondentemente alla funzione V, riescono integrabili per quadrature. Le equazioni del moto sono, come si sa:

$$\text{(7)} \qquad \left\{\begin{aligned} A\frac{dp}{dt} &= (B - C)qr + M_x, \\ B\frac{dq}{dt} &= (C - A)rp + M_y, \\ C\frac{dr}{dt} &= (A - B)pq + M_z, \end{aligned}\right.$$

dove M_x, M_y, M_z rappresentano le componenti della coppia attiva e si intendono in generale, come pure p, q, r, espressi mediante le coordinate lagrangiane del sistema. Riferendoci alle variabili ϑ, f, φ, si ha:

$$\left\{\begin{aligned} p &= \operatorname{sen} f\, \vartheta' + \operatorname{sen}\vartheta \cos f\, \varphi', \\ q &= -\cos f\, \vartheta' + \operatorname{sen}\vartheta \operatorname{sen} f\, \varphi', \\ r &= \cos\vartheta\, \varphi' - f', \end{aligned}\right.$$

e i valori di M_x, M_y, M_z, che corrispondono ad una data funzione potenziale $V(\vartheta, f, \varphi)$, si possono determinare eguagliando le due espressioni del lavoro elementare, compiuto dal corpo rigido, δV e $(pM_x + qM_y + rM_z)\,dt$.

Supponendo che V sia la nostra funzione

$$F_2\left(\frac{\operatorname{sen}\vartheta \cos f + i \operatorname{sen}\vartheta \operatorname{sen} f}{1 + \cos\vartheta}\right),$$

si trova, dopo facili riduzioni:

$$\begin{cases} M_x = i\,\dfrac{\operatorname{sen}\vartheta\cos f + i\operatorname{sen}\vartheta\operatorname{sen} f}{1+\cos\vartheta}\cdot\dfrac{\cos f\cos\vartheta - i\operatorname{sen} f}{\operatorname{sen}\vartheta}\cdot F_2', \\[2ex] M_y = -\dfrac{\operatorname{sen}\vartheta\cos f + i\operatorname{sen}\vartheta\operatorname{sen} f}{1+\cos\vartheta}\cdot\dfrac{\cos f - i\operatorname{sen} f\cos\vartheta}{\operatorname{sen}\vartheta}\cdot F_2', \\[2ex] M_z = -i\,\dfrac{\operatorname{sen}\vartheta\cos f + i\operatorname{sen}\vartheta\operatorname{sen} f}{1+\cos\vartheta}\cdot F_2', \end{cases}$$

F_2' designando la derivata di F_2 rispetto al suo argomento. Siccome

$$\frac{\operatorname{sen}\vartheta\cos f + i\operatorname{sen}\vartheta\operatorname{sen} f}{1+\cos\vartheta}\cdot F_2'$$

può anch'essa ritenersi una funzione arbitraria di

$$\frac{\operatorname{sen}\vartheta\cos f + i\operatorname{sen}\vartheta\operatorname{sen} f}{1+\cos\vartheta},$$

così potremo porre più semplicemente.

$$\frac{\operatorname{sen}\vartheta\cos f + i\operatorname{sen}\vartheta\operatorname{sen} f}{1+\cos\vartheta}\,F_2' = F\left(\frac{\operatorname{sen}\vartheta\cos f + i\operatorname{sen}\vartheta\operatorname{sen} f}{1+\cos\vartheta}\right).$$

Alle equazioni (7) è ora possibile attribuire una forma che ricorda quella del moto di un corpo pesante: introducendo i coseni di direzione $\gamma_1 = \operatorname{sen}\vartheta\cos f$, $\gamma_2 = \operatorname{sen}\vartheta\operatorname{sen} f$, $\gamma_3 = \cos\vartheta$ dell'asse fisso delle z, le (7) divengono:

$$(7')\qquad \begin{cases} A\dfrac{dp}{dt} = (B-C)qr + iF\left(\dfrac{\gamma_1+i\gamma_2}{1+\gamma_3}\right)\dfrac{\gamma_1\gamma_3 - i\gamma_2}{1-\gamma_3^2}, \\[2ex] B\dfrac{dq}{dt} = (C-A)rp - F\left(\dfrac{\gamma_1+i\gamma_2}{1+\gamma_3}\right)\dfrac{\gamma_1 - i\gamma_2\gamma_3}{1-\gamma_3^2}, \\[2ex] C\dfrac{dr}{dt} = (A-B)pq - iF\left(\dfrac{\gamma_1+i\gamma_2}{1+\gamma_3}\right), \end{cases}$$

talchè, per l'integrazione, basta associare a quest'ultimo sistema le formule di Poisson, relative ai tre coseni γ_1, γ_2, γ_3. La medesima circostanza si presenta appunto nel caso della gravità, ma le (7′) sono di più, qualunque sia la forma della funzione F, integrabili per quadrature, mentre, pel corpo pesante, quando, come ora si suppone, $A \gtrless B \gtrless C$, il problema del moto è riducibile alle quadrature solo allora che il centro di gravità cade nel punto fisso.

Si ha una riprova della esistenza di due integrali lineari per le equazioni (7′), moltiplicandole ordinatamente per $\alpha_1 + i\beta_1$, $\alpha_2 + i\beta_2$, $\alpha_3 + i\beta_3$, ovvero per γ_1, γ_2, γ_3 e sommando. In entrambi i casi il coefficiente di F è identicamente nullo.

5. – Caso *b*). — Suppongasi ora $A = B$. La espressione (2) della forza viva T non muta cangiando x_1 in x_2 (e quindi x_1' in x_2'); essa ammette per conseguenza, oltre alle trasformazioni infinitesime $Z_1 f$, $Z_2 f$, $Z_3 f$ anche quelle, che da esse si ottengono collo scambio di x_1, p_1 in x_2, p_2. Così operando, $Z_1 f$ e $Z_2 f$ si permutano tra loro, ma $Z_3 f$ diviene $Z_3' f$; abbiamo dunque in questo caso, oltre agli integrali (4), anche $Z_3' f = \text{cost.}$, che, in virtù delle (3), assume il solito aspetto $r = \text{cost.}$ Siccome poi (Tedone, loc. cit.) non vi è alcun altro integrale lineare indipendente dai quattro accennati, così T ammette le sole trasformazioni infinitesime $Z_1 f$, $Z_2 f$, $Z_3 f$, $Z_3' f$, che debbono perciò costituire un gruppo G_4 a quattro parametri. Le (5) e (6) ce ne danno conferma. Rispetto alla struttura di questo gruppo, si vede subito, confrontando col gruppo proiettivo G_6 $(Z_1 f, Z_2 f, Z_3 f;\ Z_1' f, Z_2' f, Z_3' f)$ della sfera immaginaria: $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 1 = 0$, che G_4 vi è contenuto, mentre contiene come sottogruppo *invariante* (in causa delle (6)) il G_3 $(Z_1 f, Z_2 f, Z_3 f)$ corrispondente all'ipotesi generale $A \gtrless B \gtrless C$. Sotto l'aspetto geometrico il G_4 può ritenersi individuato dalla condizione di trasformare in sè la quadrica $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 1 = 0$, lasciando ferme due generatrici della serie Γ (a differenza del G_3, che ne lascia ferme tre e quindi tutte).

Ogni sottogruppo ∞^2 di G_4, come si desume dalle considerazioni della Nota precedente, determina un caso di integrabilità delle equazioni differenziali del movimento; per G_3 si avevano soltanto dei sottogruppi e quindi dei potenziali immaginari, qui ne troviamo anche di reali, tutti però, come ora verificheremo, sostanzialmente conosciuti.

È manifesto dapprima, in virtù delle (6), che le due trasformazioni infinitesime:

$$\boxed{c_1 Z_1 f + c_2 Z_2 f + c_3 Z_3 f, \qquad Z_3' f},$$

costituiscono, per qualunque valore delle costanti c_1, c_2, c_3, un sottogruppo di G_4, talchè ogni integrale V del sistema completo

$$(8) \qquad \begin{cases} c_1 Z_1 V + c_2 Z_2 V + c_3 Z_3 V = 0, \\ Z_3' V = 0, \end{cases}$$

assunto a funzione delle forze, conduce per un corpo di rivoluzione (o più generalmente per un corpo di cui l'ellissoide di inerzia relativo al punto fisso sia di rivoluzione) a equazioni del moto integrabili per quadrature. Sarebbe poi facile riconoscere che i potenziali *reali* V, corrispondenti a sottogruppi ∞^2 di G_4, sono tutti contenuti nella formula (8).

Quanto alla forma di essi, avremo in coordinate euleriane, a tenore delle (3′):

$$Z'_3 V = -\frac{\partial V}{\partial f} = 0 \,,$$

dopo di che la prima equazione (8) ci dà:

$$(-c_1 \operatorname{sen}\varphi + c_2 \cos\varphi)\frac{\partial V}{\partial \vartheta} + \left(-c_1 \cos\varphi \frac{\cos\vartheta}{\operatorname{sen}\vartheta} - c_2 \operatorname{sen}\varphi \frac{\cos\vartheta}{\operatorname{sen}\vartheta} + c_3\right)\frac{\partial V}{\partial \varphi} = 0 \,,$$

il cui integrale generale è

$$V = F_1(c_1 \operatorname{sen}\vartheta \cos\varphi + c_2 \operatorname{sen}\vartheta \operatorname{sen}\varphi + c_3 \cos\vartheta) \,,$$

con F_1 funzione arbitraria.

Se si osserva che l'argomento $c_1 \operatorname{sen}\vartheta \cos\varphi + c_2 \operatorname{sen}\vartheta \operatorname{sen}\varphi + c_3 \cos\vartheta$ può interpretarsi come la componente, secondo l'asse mobile delle z, di un vettore costante in grandezza e direzione, si è indotti a immaginare l'asse fisso delle ζ parallelo a quel vettore, ciò che riduce l'espressione di V a $F_1(c_3 \cos\vartheta) = F(\cos\vartheta)$, forma di potenziale ben nota, che conviene in particolare al caso di un corpo pesante, il cui centro di gravità sia situato sull'asse di rotazione dell'ellissoide di inerzia, relativo al punto fisso.

6. – Caso *c*). — Quando i tre momenti di inerzia sono tutti eguali, si possono scambiare le coordinate x_1, x_2, x_3 senza che il valore (2) di T rimanga alterato; ne deduciamo che, insieme a $Z_1 f$, $Z_2 f$, $Z_3 f$, T ammette le trasformazioni infinitesime $Z'_1 f$, $Z'_2 f$, $Z'_3 f$ e per conseguenza il gruppo G_4 da esse complessivamente costituito; ma un gruppo siffatto è (anche nel campo reale) simile a quello dei movimenti in geometria ellittica [4], si può dunque *a priori* asserire che la varietà Φ di elemento lineare $ds = \sqrt{2T\, dt^2}$ è a curvatura costante positiva. Del resto, a conferma di ciò, è facile attribuire al ds di Φ la forma canonica [5] degli spazi a curvatura costante positiva.

---

[4] Lie-Engel, ibidem, B. III, p. 479; si cfr. anche la recente Memoria del prof. Bianchi, *Sulle superficie a curvatura nulla in geometria ellittica*, « Ann. di Mat. », anno presente.

[5] E. Beltrami, *Teoria fondamentale degli spazi di curvatura costante*, « Ann. di Mat. », t. 2, 1869, p. 253.

Si ha infatti dalla (2) per $A = B = C$:

$$2T = \frac{4A}{\sigma^4}\{(x_1' + x_3x_2' - x_2x_3')^2 + (x_2' + x_1x_3' - x_3x_1')^2 + (x_3' + x_2x_1' - x_1x_2')^2\} =$$

$$= \frac{4A}{\sigma^4}\{(1 + x_2^2 + x_3^2)\,x_1'^2 + (1 + x_3^2 + x_1^2)\,x_2'^2 +$$

$$+ (1 + x_1^2 + x_2^2)\,x_3'^2 - 2x_2x_3x_2'x_3' - 2x_3x_1x_3'x_1' - 2x_1x_2x_1'x_2'\} =$$

$$= \frac{4A}{\sigma^4}\{(\sigma^2 - x_1^2)x_1'^2 + (\sigma^2 - x_2^2)x_2'^2 + (\sigma^2 - x_3^2)x_3'^2 - 2x_2x_3x_2'x_3' - 2x_3x_1x_3'x_1'$$

$$- 2x_1x_2x_1'x_2'\} = \frac{4A}{\sigma^2}\{x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 - \sigma'^2\},$$

come volevasi dimostrare.

Le conseguenze dinamiche di questa osservazione sono immediate. È noto infatti che le equazioni del moto:

$$\text{(9)} \qquad \frac{d\dfrac{\partial T}{\partial x_i'}}{dt} = \frac{\partial T}{\partial x_i} + X_i \qquad (i = 1, 2, 3)$$

(dove X_i rappresenta la componente della forza secondo la coordinata lagrangiana x_i) di un sistema, alla cui forza viva T corrisponda una varietà di curvatura costante, ammettono *le stesse traiettorie* del sistema,

$$\text{(10)} \qquad x_i'' = \frac{X_i}{\sigma^4} \qquad (i = 1, 2, 3),$$

il quale determina nello spazio ordinario il moto di un punto materiale, sollecitato da forze, che hanno secondo gli assi x_1, x_2, x_3 le componenti: X_1/σ^4, X_2/σ^4, X_3/σ^4 (6). Di più i due sistemi (9) e (10) sono tra loro equivalenti a meno di quadrature (7). Ne viene che ad ogni caso di integrabilità delle equazioni del moto di un punto materiale nello spazio ordinario, corrisponde un caso di integrabilità per quadrature delle equazioni del moto di un corpo rigido intorno ad un punto fisso, per cui siano eguali i tre momenti di inerzia.

In particolare ai casi integrabili del moto di un punto materiale sopra una superficie, corrispondono esempi pure integrabili di moti di un corpo rigido con due gradi di libertà, i quali si possono sempre supporre determinati, imponendo ad un punto del corpo la condizione di strisciare senza attrito sopra una superficie e quindi sopra una curva sferica di essa.

(6) Veggasi per esempio la Nota del sig. G. Picciati, *Sulla trasformazione delle equazioni della dinamica in alcuni casi particolari*, « Atti dell'Ist. Veneto », 1896.

(7) Cfr. la mia Memoria: *Sulle trasformazioni delle equazioni dinamiche*, « Annali di Matematica », 1896, [in questo vol.: X, pp. 205-252].

XII.

SUL MOTO DEI SISTEMI CON TRE GRADI DI LIBERTÀ

« Rend. Acc. Lincei », s. 5a, vol. V° (2° sem. 1896), pp. 164-171. (*)

Oggetto di questa Nota si è lo studio dei sistemi materiali S a legami indipendenti dal tempo e con tre gradi di libertà, per cui, quando non agiscono forze, sussistono i tre integrali delle aree. Io mostrerò che tali ipotesi permettono di caratterizzare la natura della forza viva T e conducono a stabilire che, mediante una opportuna scelta di coordinate lagrangiane, T è certamente riducibile:

o alla forma propria di un corpo rigido con un punto fisso;

o alla forma

$$\frac{1}{2} H^2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) \cdot \{x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2\} .$$

Se ne deduce che, anche quando agiscono forze, la dinamica dei sistemi S sopra indicati equivale:

nel primo caso, identicamente, come è manifesto, alla dinamica di un corpo rigido intorno ad un suo punto, supposto fisso;

nel secondo caso (e nell'ipotesi che l'energia totale del sistema sia costante), *a meno di quadrature*, alla dinamica di un punto materiale.

Quest'ultima asserzione sarà giustificata a suo tempo in modo diretto; non lascio però di rilevare che essa si collega alla teoria generale delle trasformazioni delle equazioni dinamiche.

1. – Sia un sistema S, di punti materiali (x, y, z), soggetto a legami indipendenti dal tempo, i quali limitino a tre gradi la sua libertà, di guisa che se ne possa individuare una posizione mediante tre coordinate

(*) Presentata dal Socio E. BELTRAMI (6 settembre 1896).

lagrangiane. Si supponga di più che la natura dei vincoli sia tale da lasciare sussistere, quando non agiscono forze, i tre integrali delle aree:

$$(1) \qquad \sum m(yz'-zy') = \text{cost.}, \quad \sum m(zx'-xz') = \text{cost.}, \quad \sum m(xy'-yx') = \text{cost.}$$

La forza viva del sistema S sarà espressa in coordinate lagrangiane da una forma differenziale

$$T = \frac{1}{2} \sum_{rs}^{3}{}_{1} a_{rs} q_r' q_s',$$

sulla cui natura dobbiamo ora intrattenerci.

Introducendo al solito le variabili $p_i = \partial T/\partial q_i'$ $(i = 1, 2, 3)$, coniugate delle q_i', si avranno per gli integrali (1) certe espressioni lineari ed omogenee nelle p:

$$(2) \qquad Z_1 f = \sum_{1}^{3}{}_r A_{1r} p_r = \text{cost.}, \quad Z_2 f = \sum_{1}^{3}{}_r A_{2r} p_r = \text{cost.}, \quad Z_3 f = \sum_{1}^{3}{}_r A_{3r} p_r = \text{cost.},$$

dei cui coefficienti A nulla si può ancora affermare. Tuttavia, provenendo per ipotesi $Z_1 f$, $Z_2 f$, $Z_3 f$ dagli integrali delle aree, si ha per le funzioni alternate [1]:

$$(3) \qquad (Z_1 Z_2) f = - Z_3 f, \quad (Z_2 Z_3) f = - Z_1 f, \quad (Z_3 Z_1) f = - Z_2 f.$$

Inoltre, risguardando le forme $Z_1 f$, $Z_2 f$, $Z_3 f$ come simboli di trasformazioni infinitesime, ciascuna di esse sarà ammessa dalla forza viva T del sistema materiale S [2], e complessivamente, in causa delle (3), costituiranno un gruppo Γ_3, a tre parametri (perchè, come vedremo, le Zf non possono essere legate da relazioni lineari a coefficienti *costanti*), il quale trasforma T in sè stessa.

Ciò posto, notiamo in primo luogo che le forme $Z_1 f$, $Z_2 f$, $Z_3 f$ possono non essere tutte e tre indipendenti; per altro due almeno sono tali. Qualora infatti si avesse per es.

$$Z_2 f = \lambda Z_1 f, \qquad Z_3 f = \pi Z_1 f,$$

si dedurrebbe dalle (3):

$$Z_1 \lambda \cdot Z_1 f = - \pi Z_1 f, \quad (\lambda Z_1 \pi - \pi Z_1 \lambda) Z_1 f = - Z_1 f, \quad Z_1 \pi \cdot Z_1 f = \lambda Z_1 f,$$

---

(1) Si cfr., per taluna notizia in proposito, le Note: *Sul moto di un corpo rigido intorno ad un punto fisso*, pubblicate testè in questi « Rendiconti » (§ 2); [in questo vol.: XI, pp. 253–267].

(2) Ibidem, § 1.

e quindi:

$$Z_1\lambda = -\pi\,, \qquad \lambda Z_1\pi - \pi Z_1\lambda = -1\,, \qquad Z_1\pi = \lambda\,,$$

ossia anche:

$$\lambda^2 + \pi^2 = -1\,,$$

il che è assurdo, poichè λ e π dovrebbero in ogni caso, come Z_1f, Z_2f, Z_3f, essere funzioni essenzialmente reali.

Ci restano pertanto due soli casi da esaminare:

1) Le forme Zf sono tutte e tre indipendenti.

2) Due Zf sono indipendenti, la terza essendone una combinazione lineare.

2. – Nella prima ipotesi, cui ora vogliamo riferirci, il gruppo Γ_3, generato dalle Zf, riesce transitivo ed è quindi, come si sa ([3]), simile ad ogni altro gruppo isomorfo pure transitivo e nello stesso numero di variabili. In particolare possiede questa proprietà il gruppo G_3 spettante alla forza viva di un corpo rigido ([4]), le cui trasformazioni infinitesime (assumendo come coordinate lagrangiane i parametri di RODRIGUES) possono essere scritte:

$$\left\{\begin{aligned} Y_1f &= \frac{1}{2}\{(1 + y_1^2)p_1 + (-y_3 + y_1y_2)p_2 + (y_2 + y_1y_3)p_3\}\,, \\ Y_2f &= \frac{1}{2}\{(y_3 + y_1y_2)p_1 + (1 + y_2^2)p_1 + (-y_1 + y_2y_3)p_3\}\,, \\ Y_3f &= \frac{1}{2}\{(-y_2 + y_1y_3)p_1 + (y_1 + y_2y_3)p_2 + (1 + y_3^2)p_3\}\,. \end{aligned}\right.$$

I gruppi Γ_3 e G_3 sono dunque *simili*; esiste cioè un cambiamento di variabili:

$$(4) \qquad q_1 = f_1(y_1, y_2, y_3)\,, \quad q_2 = f_2(y_1, y_2, y_3)\,, \quad q_3 = f_3(y_1, y_2, y_3)\,,$$

(la cui ricerca esige al più l'integrazione del sistema completo $Z_if + Y_if = 0$ $(i = 1, 2, 3)$), che fa passare dalle trasformazioni infinitesime Z_1f, Z_2f, Z_3f

([3]) LIE-ENGEL, *Theorie der Transformationsgruppen*, B. I, Theor. 64, p. 340.

([4]) *Sul moto di un corpo rigido intorno ad un punto fisso*, § 2. [In questo vol.: XI, pp. 253–267] alle Y_1f, Y_2f, Y_3f; anzi, per essere le Yf legate da relazioni identiche alle (3), si può asserire che le (4) trasformano ordinatamente Z_1f in Y_1f, Z_2f in Y_2f, Z_3f in Y_3f. La forza viva T, espressa per le nove variabili y, diverrà: $T=\frac{1}{2}\sum_{1}^{3}{}_{rs}\, b_{rs}y'_r y'_s$, le b essendo certe funzioni delle y, che ci verrà fatto ben presto di caratterizzare, valendoci della circostanza che la forma quadratica $\frac{1}{2}\sum_{1}^{3}{}_{rs}\, b_{rs}y'_r y'_s$ deve ammettere tutte le trasformazioni del gruppo G_3. Questa proprietà fondamentale di T si può esprimere, dicendo che $T=\frac{1}{2}\sum_{1}^{3}{}_{rs}\, b_{rs}y'_r y'_s$ è un invariante del gruppo G_3, esteso alle velocità dy_i/dt, ossia, come è ben noto, integrale di un certo sistema completo:

$$\overline{Y}_1 f=0\,,\qquad \overline{Y}_2 f=0\,,\qquad \overline{Y}_3 f=0\,, \tag{5}$$

(con tre equazioni *distinte* e sei variabili indipendenti), che ommetto, per brevità, di scrivere distesamente, osservando invece addirittura che le tre funzioni:

$$I_1=\frac{2}{\tau^2}\{\,y'_1+y_3y'_2-y_2y'_3\,\}\,,\qquad I_2=\frac{2}{\tau^2}\{\,y'_2+y_1y'_3-y_3y'_1\,\}\,,$$

$$I_3=\frac{2}{\tau^2}\{\,y'_3+y_2y'_1-y_1y'_2\,\}\,,$$

dove è $\tau^2=1+y_1^2+y_2^2+y_3^2$, costituiscono una terna di integrali indipendenti del sistema [5], talchè T dev'essere una funzione dei soli argomenti I_1, I_2, I_3. Siccome le I sono lineari e omogenee nelle x', si avrà identicamente:

$$T=\frac{1}{2}\sum_{1}^{3}{}_{rs}\, b_{rs}y'_r y'_s=\frac{1}{2}\sum_{1}^{3}{}_{rs}\, C_{rs}I_rI_s\,,$$

---

[5] Si può accertarsene tanto mediante diretta verifica, quanto, e più comodamente, notando che la forza viva di un corpo rigido:

$$\frac{2}{\tau^4}\{\,A(y'_1+y_3y'_2-y_2y'_3)^2+B(y'_2+y_1y'_3-y_3y'_1)+C(y'_3+y_2y'_1-y_1y'_2)^2\,\}\,,$$

ammette il gruppo G_3; per modo che, *qualunque sieno i valori delle costanti A, B, C*, il trinomio precedente è integrale delle (5). Ciò implica che appunto separatamente I_1, I_2, I_3 sieno integrali.

le C_{rs} essendo costanti il cui determinante:

$$\sum \pm C_{11}C_{22}C_{33} = \frac{\sum \pm b_{11}b_{22}b_{33}}{\frac{8}{\tau^6}\begin{vmatrix} 1 & y_3 & -y_2 \\ -y_3 & 1 & y_1 \\ y_2 & -y_1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{\tau^4}{8}\sum \pm b_{11}b_{22}b_{33}$$

è positivo.

È facile ora passare alla forma definitiva di T, eseguendo sulle variabili y una sostituzione ortogonale *a coefficienti costanti.* Poniamo per ciò:

$$(6) \qquad y_r = \sum_{1}^{3}{}_p\, \alpha_{rp} x_p\,, \qquad (r = 1, 2, 3),$$

$$\tau^2 = 1 + y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = 1 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = \sigma^2\,,$$

$$J_1 = \frac{2}{\sigma^2}(x_1' + x_3x_2' - x_2x_3')\,, \qquad J_2 = \frac{2}{\sigma^2}(x_2' + x_1x_3' - x_3x_1')\,,$$

$$J_3 = \frac{2}{\sigma^2}(x_3' + x_2x_1' - x_1x_2')\,.$$

Si verifica immediatamente che fra le I e le J passano le stesse relazioni che fra le y e le x, ossia:

$$I_r = \sum_{1}^{3}{}_p\, \alpha_{rp} J_p \qquad (r = 1, 2, 3),$$

e da queste segue senz'altro (col noto procedimento, che equivale geometricamente a riferire l'ellissoide $\sum_{1}^{3}{}_{rs}\, C_{rs}I_rI_s = 1$ ai suoi assi) che T può essere ricondotta alla forma propria del corpo rigido:

$$T = \frac{1}{2}\{AJ_1^2 + BJ_2^2 + CJ_3^2\} =$$

$$= \frac{2}{\sigma^4}\{A(x_1' + x_3x_2' - x_2x_3')^2 + B(x_2' + x_1x_3' - x_3'x_1)^2 + C(x_3' + x_2x_1' - x_1x_2')^2\}\,.$$

3. – Se delle forme Zf due soltanto sono indipendenti, potremo sempre, per la simmetria delle (3), risguardare tali Z_1f e Z_2f, e porre:

$$Z_3f = \mu Z_1f + \nu Z_2f\,.$$

Avremo le identità:

$$(Z_2 Z_3)f = - Z_1 f = \{ Z_2\mu + \mu^2 \} Z_1 f + \{ Z_2\nu + \mu\nu \} Z_2 f ,$$
$$(Z_3 Z_1)f = - Z_2 f = - \{ Z_1\mu - \mu\nu \} Z_1 f - \{ Z_1\nu - \nu^2 \} Z_2 f ,$$

le quali, per l'indipendenza di $Z_1 f$, $Z_2 f$, dànno:

$$(7) \qquad Z_2\mu + \mu^2 = -1 , \quad Z_2\nu + \mu\nu = 0 , \quad Z_1\mu - \mu\nu = 0 , \quad Z_1\nu - \nu^2 = 1 .$$

Di qua si deduce che le quantità *reali* μ e ν sono funzioni indipendenti delle variabili q_1, q_2, q_3 e quindi in particolare che nessuna di esse è costante. Difatti, qualora passasse fra μ e ν una relazione $\psi(\mu, \nu) = 0$, indipendente dalle q, si potrebbe risolvere l'equazione $\psi(\mu, \nu) = 0$, rispetto ad uno almeno dei due argomenti μ o ν e porre, per es., $\nu = \omega(\mu)$; le (7) diverrebbero allora:

$$Z_2\mu + \mu^2 = -1 , \quad \omega'(\mu) Z_2\mu + \mu\omega(\mu) = 0 , \quad Z_1\mu - \mu\omega(\mu) = 0 ,$$
$$\omega'(\mu) Z_1\mu - \omega^2(\mu) = 1 ,$$

donde:

$$1 + \mu^2 + \omega^2(\mu) = 0 ,$$

il che è assurdo.

Dopo ciò si conclude che le trasformazioni infinitesime $Z_1 f$, $Z_2 f$, $Z_3 f$, sono anche in questo caso indipendenti e generano quindi un gruppo Γ_3' a tre parametri (intransitivo), che dico essere simile al gruppo G_3', le cui trasformazioni infinitesime sono:

$$Y_1 f = y_2 p_3 - y_3 p_2 , \qquad Y_2 f = y_3 p_1 - y_1 p_3 , \qquad Y_3 f = y_1 p_2 - y_2 p_1 ,$$

legate, come le Zf, da relazioni del tipo (3).

Per la dimostrazione, basterà notare che le condizioni generali di similitudine fra due gruppi di trasformazioni [6] sono soddisfatte nel caso nostro, poichè G_3' ha la medesima struttura di Γ_3' e, delle sue trasformazioni infinitesime Yf, $Y_1 f$ e $Y_2 f$ sono indipendenti, mentre $Y_3 f$ risulta tale combinazione lineare

$$- \frac{y_1}{y_3} Y_1 f - \frac{y_2}{y_3} Y_2 f ,$$

---

(6) LIE-ENGEL, *Theorie*, ecc., B. I, Theor. 65, pp. 353-354.

delle prime due, che, avuto riguardo alle cose dette, le equazioni

$$\mu = -\frac{y_1}{y_3}, \quad \nu = -\frac{y_2}{y_3}$$

sono compatibili e si possono risolvere tanto rispetto a due delle variabili q, quanto rispetto a due delle variabili y.

Esiste adunque un cambiamento di variabili (7):

$$(8) \qquad q_1 = \varphi_1(y_1, y_2, y_3), \qquad q_2 = \varphi_2(y_1, y_2, y_3), \qquad q_3 = \varphi_3(y_1, y_2, y_3),$$

atto a far passare dalle trasformazioni infinitesime $Z_1 f$, $Z_2 f$, $Z_3 f$ alle $Y_1 f$, $Y_2 f$, $Y_3 f$ rispettivamente.

Indicando con $\frac{1}{2}\sum_{1}^{3}{}_{rs}\,\beta'_{rs} y'_r y'_s$ l'espressione della forza viva T, dopo eseguita la trasformazione (8), si osserverà, come nel caso precedente, che $\frac{1}{2}\sum_{1}^{3}{}_{rs}\,\beta_{rs} y'_r y'_s$ deve essere un invariante del gruppo G'_3 (esteso alle velocità) e quindi, come si verifica senza difficoltà, una funzione dei soli argomenti $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$, $y_1'^2 + y_2'^2 + y_3'^2$, $y_1 y_1' + y_2 y_2' + y_3 y_3'$. Se ne conclude che la più generale espressione di T è:

$$T = \frac{1}{2}\left[K^2(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) \cdot \{y_1'^2 + y_2'^2 + y_3'^2\} + \right.$$
$$\left. + K_1^2(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2)\{y_1 y_1' + y_2 y_2' + y_3 y_3'\}^2\right],$$

K e K_1 designando funzioni non ulteriormente determinabili dell'argomento indicato $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$.

Col porre:

$$(9) \qquad \begin{cases} y_1 = \varrho \operatorname{sen}\vartheta \cos\varphi, \quad y_2 = \varrho \operatorname{sen}\vartheta \operatorname{sen}\varphi, \quad y_3 = \varrho\cos\vartheta, \\ r = e^{\int \frac{\sqrt{K^2(\varrho^2) + \varrho^2 K_1^2(\varrho^2)}}{\varrho K(\varrho)} d\varrho}, \quad H^2(r^2)\cdot r^2 = K^2(\varrho^2)\cdot\varrho^2, \end{cases}$$

il precedente valore di T si semplifica notevolmente e diviene:

$$T = \frac{1}{2} H^2(r^2)\{r'^2 + r^2\vartheta'^2 + r^2 \operatorname{sen}^2\vartheta\,\varphi'^2\},$$

---

(7) In questo caso se ne hanno infiniti che si possono ottenere (LIE-ENGEL, loco citato, § 91) ponendo $\mu = -y_1/y_3$; $\nu = -y_2/y_3$ e $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$ eguale all'integrale generale del sistema completo $Z_1 f = 0$, $Z_2 f = 0$. Tale ricerca esige in fondo, come si vede subito, al più l'integrazione di una equazione differenziale ordinaria.

dopo di che, facendo:

$$(10) \qquad x_1 = r \operatorname{sen} \vartheta \cos \varphi , \qquad x_2 = r \operatorname{sen} \vartheta \operatorname{sen} \varphi , \qquad x_3 = r \cos \vartheta ,$$

otteniamo la forma definitiva:

$$T = \frac{1}{2} H^2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) \{ x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 \} ,$$

la quale differisce solo per il fattore H^2 da quella spettante alla forza viva di un punto materiale nello spazio ordinario.

È facile però riconoscere che la dinamica di un sistema S di forza viva T, quando esiste un potenziale e l'energia è una costante data (ciò che *fisicamente* non costituisce restrizione), equivale, a meno di quadrature, alla dinamica del punto materiale. Infatti le equazioni del moto pel sistema in questione, se si dica V la funzione delle forze (dipendente soltanto dalle coordinate) saranno:

$$(11) \qquad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial x_i'} = \frac{\partial T}{\partial x_i} + \frac{\partial V}{\partial x_i} , \qquad (i = 1, 2, 3) ,$$

e sussisterà l'integrale delle forze vive:

$$(12) \qquad T - V = E .$$

Sostituendo alla variabile indipendente t una nuova variabile t_1, definita da:

$$dt_1 = \frac{dt}{H^2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)} ,$$

e avendo riguardo alla (12), le equazioni (11) si possono scrivere:

$$\frac{d^2 x_i}{dt_1^2} = (V + E) \frac{\partial H^2}{\partial x_i} + H^2 \frac{\partial V}{\partial x_i} = \frac{\partial \{ H^2(V + E) \}}{\partial x_i} , \qquad (i = 1, 2, 3),$$

ond'è manifesto che il moto del sistema S, sollecitato da forze provenienti dal potenziale V e dotato di una energia totale E, ammette, nello spazio rappresentativo (x_1, x_2, x_3), le stesse traiettorie spettanti al moto di un punto materiale, soggetto al potenziale $H^2(V + E)$ e di energia nulla.

Note le traiettorie, la determinazione completa delle leggi del moto si raggiunge mediante una quadratura.

Per avere un esempio (oltre quello del punto materiale) di un sistema, con tre gradi di libertà, per cui, quando non agiscono forze, sussistono i tre integrali delle aree, (funzionalmente) non indipendenti, si può pensare al sistema di due punti materiali, collegati tra loro rigidamente, e costretti a rimanere allineati coll'origine delle coordinate.

XIII.

SUL MOTO DI UN SISTEMA DI PUNTI MATERIALI SOGGETTI A RESISTENZE PROPORZIONALI ALLE RISPETTIVE VELOCITÀ

« Atti Ist. Ven. », serie VII, t. LIV (1895-96),

pp. 1004-1008.

Il compianto prof. E. PADOVA risolse (¹) in modo assai semplice il problema del moto intorno ad un punto fisso di un sistema rigido, ciascun punto del quale sia soggetto ad una resistenza proporzionale alla rispettiva velocità. Egli mostrò con procedimento diretto che il problema ammette due integrali primi e si trova quindi ridotto alle quadrature, le quali si possono poi effettuare con metodo analogo a quello tenuto da JACOBI pel caso di un corpo libero da forze (sì attive che resistenti).

La analogia tra il moto libero e quello soggetto a resistenze proporzionali alle velocità, secondo la deduzione del prof. PADOVA, sembra peculiare pel sistema rigido; si può per altro farla discendere da un teorema di carattere generale, che mi propongo appunto di stabilire nella presente Nota.

Ecco l'enunciato del teorema:

Le equazioni differenziali (E), *che reggono il movimento di un sistema materiale S, quando i singoli suoi punti incontrano resistenze* (di mezzo, d'attrito o d'altra natura qualsiasi) *proporzionali* (*) *alle rispettive velocità, si possono ricavare dalle equazioni* (E_1), *relative al moto libero dello stesso S, mediante il cambiamento di variabile indipendente*: $dt_1 = e^{-\lambda t} dt$. (Nella formula $dt_1 = e^{-\lambda t} dt$, t_1 rappresenta il tempo pel moto libero, t il tempo pel moto soggetto a resistenze e λ il rapporto costante tra la resistenza e la velocità).

Si deduce in particolare che ad ogni integrale primo $f(q_1, q_2, \ldots, q_n; dq_1/dt_1, dq_2/dt_1, \ldots, dq_n/dt_1) = \text{cost.}$ del sistema di equazioni (E_1), corri-

(¹) *Sul moto di rotazione di un corpo rigido*, « Atti dell'Acc. di Torino », 1885.

(*) V. per una maggiore precisazione la p. seg. [N. d. R.].

sponde per (E) un integrale primo del tipo $f(q_1, q_2, ..., q_n; e^{\lambda t}q_1', e^{\lambda t}q_2', ... e^{\lambda t}q_n') = \text{cost.}$, essendosi per brevità indicate con apici le derivazioni rispetto alla variabile t. Se la funzione f è omogenea di grado m rispetto alle velocità, l'integrale primo di (E) assume la forma $f = Ce^{-m\lambda t}$, con C costante arbitraria; ciò si verifica per esempio nel caso considerato dal prof. PADOVA.

Giova rilevare che l'integrazione del sistema (E) equivale completamente (nel senso che differisce soltanto per operazioni in termini finiti) all'integrazione del sistema (E_1). Infatti, integrato quest'ultimo, basterà, in causa della relazione $dt_1 = e^{-\lambda t}\,dt$, porre nelle equazioni integrali, $(-1/\lambda)\,e^{-\lambda t} + \text{cost.}$ al posto di t_1.

Sia S un sistema di punti materiali $(m_j x_j, m_j y_j, m_j z_j)$ a legami indipendenti dal tempo e dotato di n gradi di libertà. Designandone con T la forza viva, con $q_1, q_2, ..., q_n$ le coordinate lagrangiane, si ha:

$$2T = \sum_{1}^{n}{}_{rs}\, a_{rs} q_r' q_s',$$

posto al solito

$$a_{rs} = \sum\nolimits_j m_j \left\{ \frac{\partial x_j}{\partial q_r}\frac{\partial x_j}{\partial q_s} + \frac{\partial y_j}{\partial q_r}\frac{\partial y_j}{\partial q_s} + \frac{\partial z_j}{\partial q_r}\frac{\partial z_j}{\partial q_s} \right\}. \tag{1}$$

Le equazioni del moto sono:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q_h'} = \frac{\partial T}{\partial q_h} + Q_h \qquad (h = 1, 2, ..., n),$$

dove la componente Q_h della forza secondo la coordinata q_h si esprime, per mezzo delle componenti X_j, Y_j, Z_j delle forze unitarie, applicate ai singoli punti del sistema, nel modo seguente:

$$Q_h = \sum\nolimits_j m_j \left\{ X_j \frac{\partial x_j}{\partial q_h} + Y_j \frac{\partial y_j}{\partial q_h} + Z_j \frac{\partial z_j}{\partial q_h} \right\} \qquad (h = 1, 2, ..., n). \tag{2}$$

Cerchiamo la espressione delle Q_h nel caso speciale in cui le forze X_j, Y_j, Z_j sieno resistenze proporzionali alle velocità. Avremo:

$$X_j = -\lambda x_j' = -\lambda \sum_{1}^{n}{}_k \frac{\partial x_j}{\partial q_k} q_k',$$

e in modo analogo:

$$Y_j = -\lambda \sum_{1}^{n}{}_k \frac{\partial y_j}{\partial q_k} q_k', \qquad Z_j = -\lambda \sum_{1}^{n}{}_k \frac{\partial z_j}{\partial q_k} q_k'.$$

Portando nelle (2) questi valori di X_j, Y_j, Z_j, si ricava:

$$Q_h = -\lambda \sum_{1}^{n}{}_k q'_k \sum_j m_j \left\{ \frac{\partial x_j}{\partial q_h} \frac{\partial x_j}{\partial q_k} + \frac{\partial y_j}{\partial q_h} \frac{\partial y_j}{\partial q_k} + \frac{\partial z_j}{\partial q_h} \frac{\partial z_j}{\partial q_k} \right\},$$

ossia, in causa delle (1),

$$Q_h = -\lambda \sum_{1}^{n}{}_k a_{hk} q'_k ;$$

dopo di che le equazioni del moto divengono:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial q'_h} = \frac{\partial T}{\partial q_h} - \lambda \sum_{1}^{n}{}_k a_{hk} q'_k .$$

Gioverà avere queste equazioni risolute rispetto alle derivate seconde delle q. Si faranno per ciò le posizioni:

$$a = \sum \pm a_{11} a_{22} \dots a_{nn} , \qquad a^{(hi)} = \frac{\partial \log a}{\partial a_{hi}} ,$$

$$a^i_{rs} = \frac{1}{2} \sum_{1}^{n}{}_h a^{(hi)} \left\{ \frac{\partial a_{rh}}{\partial x_s} + \frac{\partial a_{hs}}{\partial x_r} - \frac{\partial a_{rs}}{\partial x_h} \right\} ,$$

e si moltiplicheranno le equazioni sopra scritte per $a^{(hi)}$, sommando rispetto all'indice h. Con calcoli ovvii, si trova:

(E) $$q''_i = -\sum_{1}^{n}{}_{rs} a^i_{rs} q'_r q'_s - \lambda q'_i \qquad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Ciò posto, consideriamo le equazioni:

(E_1) $$\frac{d^2 q_2}{dt_1^2} = -\sum_{1}^{n}{}_{rs} a^i_{rs} \frac{dq_r}{dt_1} \frac{dq_s}{dt_1} \qquad (i = 1, 2, \dots, n),$$

che definiscono il moto libero dello stesso sistema S, qualora si designi il tempo con t_1.

Facendo nelle (E_1) $dt_1 = e^{-\lambda t}\, dt$, viene:

$$\frac{d^2 q_i}{dt_1^2} = \frac{d \frac{dq_i}{dt_1}}{dt_1} = e^{\lambda t} \frac{d(e^{\lambda t} q'_i)}{dt} = e^{2\lambda t} q''_i + \lambda e^{2\lambda t} q'_i = -e^{2\lambda t} \sum_{1}^{n}{}_{rs} a^i_{rs} q'_r q'_s ,$$

ossia:

$$q_i'' = -\sum_1^n {}_{rs}\, a_{rs}^i q_r' q_s' - \lambda q_i' \qquad (i = 1, 2, \dots, n),$$

le quali equazioni coincidono colle (E), come dovevasi dimostrare. Si vede subito che la equivalenza fra i due sistemi (E_1) ed (E) persiste anche quando, agendo su (E_1) forze attive Q_h di natura qualsiasi, il sistema (E) sia invece sollecitato da forze di componenti $e^{-2\lambda t} Q_h$.

Possiamo aggiungere l'osservazione seguente:

L'integrale

$$\sum_1^n {}_{rs}\, a_{rs} \frac{dq_r}{dt_1} \frac{dq_s}{dt_1} = C,$$

che esprime, nel caso del moto libero, il principio della conservazione dell'energia, si cangia, quando il sistema incontra le accennate resistenze, in $\sum_1^n {}_{rs}\, a_{rs} q_r' q_s' = C e^{-2\lambda t}$, e, per essere $\lambda > 0$, mostra che l'energia cinetica del sistema diminuisce costantemente e tende a zero per $t = \infty$. Ciò corrisponde al fatto sperimentale che le resistenze dinamiche tendono a trasformare l'energia cinetica, attribuendole aspetti fisici differenti (energia termica, elettrica, magnetica, luminosa, chimica, ecc., a seconda dei casi).

XIV.

SUR LES INTÉGRALES QUADRATIQUES DES ÉQUATIONS DE LA MÉCANIQUE

« Comptes Rendus de l'Acad. des Sciences de Paris, » t. CXXIV (1897), pp. 1434-1438.

M. PAINLEVÉ vient de découvrir une classe extrêmement remarquable de problèmes dynamiques, qui admettent des intégrales quadratiques en dehors de celle des forces vives. Le résultat obtenu par M. PAINLEVÉ, malgré sa grande généralité, est encore loin d'épuiser la question. Je demande à l'Académie la permission d'y revenir.

Soit en variables canoniques x_i, p_i,

$$H \equiv \sum_{rs}^{n} {}_1 \, a^{(rs)} p_r p_s$$

une force vive, dont les géodésiques (j'envisage ce cas pour plus de netteté) admettent l'intégrale quadratique

$$H_1 \equiv \sum_{rs}^{n} {}_1 \, \alpha^{(rs)} p_r p_s = \text{const.}$$

Considérons l'équation $\| \alpha^{(rs)} - \varrho a^{(rs)} \| = 0$ de $n^{\text{ième}}$ degré en ϱ et appelons $\varrho_1, \ldots, \varrho_{\nu_1}, \varrho_{\nu_1+1}, \ldots, \varrho_{\nu_2}, \ldots, \varrho_{\nu_{l-1}+1}, \ldots, \varrho_{\nu_{q-1}+1}, \ldots, \varrho_{\nu_q}$ $(\nu_q = n)$ ses racines, en supposant que $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_{\nu_1}$ et ainsi $\varrho_{\nu_1+1}, \varrho_{\nu_1+2}, \ldots, \varrho_{\nu_2}, \ldots$, soient égales entre elles, de façon que les racines distinctes soient au nombre de q.

Il est bien connu qu'on peut toujours déterminer n^2 quantités $\lambda_h^{(r)}$ telles qu'en posant

$$\Theta_l = \sum_{h=\nu_{l-1}+1}^{\nu_l} \left[\sum_{r=1}^{n} \lambda_h^{(r)} p_r \right]^2 \qquad (l = 1, 2, \ldots, q),$$

on ait

$$H = \sum_1^q {}_l\, \Theta_l\,, \qquad H_1 = \sum_1^q {}_l\, \varrho_{\nu_l} \Theta_l\,.$$

J'ai démontré que les conditions nécessaires et suffisantes pour que $H_1 = \text{const.}$ soit une intégrale quadratique des géodésiques de H sont en tous cas exprimées par

$$\text{(I)} \qquad (\varrho_h - \varrho_i)\gamma_{hij} + (\varrho_i - \varrho_j)\gamma_{ijh} + (\varrho_j - \varrho_h)\gamma_{jhi} = 0$$

$$(h, i, j = 1, 2, \ldots, n \quad \text{et} \quad h \gtrless i \gtrless j)\,,$$

$$\text{(II)} \qquad \sum_1^n {}_r \frac{\partial \varrho_h}{\partial x_r} \lambda_i^{(r)} = 2(\varrho_h - \varrho_i)\gamma_{ihh} \qquad (h, i = 1, 2, \ldots, n)\,,$$

où

$$2\gamma_{hij} = \sum_1^n {}_{rs} \left\{ \frac{\partial \lambda_{h|r}}{\partial x_s} (\lambda_i^{(r)}\lambda_j^{(s)} - \lambda_j^{(r)}\lambda_i^{(s)}) + \frac{\partial \lambda_{j|r}}{\partial x_s} (\lambda_i^{(r)}\lambda_h^{(s)} - \lambda_h^{(r)}\lambda_i^{(s)}) + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial \lambda_{i|r}}{\partial x_s} (\lambda_j^{(r)}\lambda_h^{(s)} - \lambda_h^{(r)}\lambda_j^{(s)}) \right\},$$

$\lambda_{h|r}$ étant le mineur complémentaire de $\lambda_h^{(r)}$, dans le déterminant des n^2 λ, divisé par ce même déterminant.

Les systèmes (I), (II) peuvent s'intégrer complètement dans l'hypothèse particulière qu'il soit possible, par un choix convenable des variables canoniques x_i, p_i, réduire chaque Θ_l à ne contenir que $\nu_l - \nu_{l-1}$ des variables p_i. Les $\lambda_h^{(r)}$ se partagent alors en q groupes de $(\nu_l - \nu_{l-1})^2$ éléments, qui correspondent aux diverses Θ_l, et l'on a

$$\Theta_l = \sum_{\nu_{l-1}+1}^{\nu_l} {}_h \left\{ \sum_{\nu_{l-1}+1}^{\nu_l} {}_r\, \lambda_h^{(r)} p_r \right\}^2,$$

ou, si l'on fait

$$K_l^{(rs)} = \sum_{\nu_{l-1}+1}^{\nu_l} {}_h\, \lambda_h^{(r)} \lambda_h^{(s)} \qquad (l = 1, 2, \ldots, q;\; r, s = \nu_{l-1} + 1, \ldots, \nu_l),$$

$$\Theta_l = \sum_{\nu_{l-1}+1}^{\nu_l} {}_{rs}\, K_l^{(rs)} p_r p_s\,.$$

La recherche des forces vives H, dont les géodésiques admettent une intégrale quadratique, se réduit, dans ce cas, à la détermination de la forme la plus générale des fonctions $K_l^{(rs)}$, pour lesquelles soient satisfaites les équations (I), (II), d'où l'on ait éliminé les ϱ.

En appelant $\varDelta$ le discriminant de Θ et en posant

$$\varLambda_h = \varDelta_l^{\frac{1}{\nu_l - \nu_{l-1}}}$$

(où h peut prendre indifféremment toutes les valeurs, depuis $\nu_{l-1} + 1_l$ jusqu'à ν_l), on peut donner au résultat de l'élimination la forme suivante

$$(1) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial^2 \varLambda_h}{\partial x_i \partial x_j} = \dfrac{1}{\varLambda_i} \dfrac{\partial \varLambda_i}{\partial x_j} \dfrac{\partial \varLambda_h}{\partial x_i} + \dfrac{1}{\varLambda_j} \dfrac{\partial \varLambda_j}{\partial x_i} \dfrac{\partial \varLambda_h}{\partial x_j} \\[2ex] (h = 1, 2, \ldots, n; \text{ ou, ce qui suffit, } h = \nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_q) \end{array} \right.$$

pour toutes les couples i, j qui n'appartiennent pas au même intervalle; et, en outre,

$$(2) \qquad \frac{\partial \log K_l^{(rs)}}{\partial x_i} = \frac{1}{\nu_l - \nu_{l-1}} \frac{\partial \log \varDelta_l}{\partial x_i},$$

pour toutes les valeurs de i, qui ne sont pas comprises dans l'intervalle $(\nu_{l-1} + 1, \ \nu_l)$.

Si l'on suppose, ce qui est toujours permis, que l'intégrale générale de (1) soit définie par q équations de la forme

$$\sum_1^q{}_l \, \varLambda_{\nu_l} \varphi_l^m = \text{const.} \qquad (m = 1, 2, \ldots, q),$$

on reconnaît aisément que les φ_l^m doivent être de la forme signalée par M. Painlevé, et, à cause des équations (2), on retrouve nécessairement les forces vives construites par cet auteur.

Mais les systèmes (I), (II) comportent bien d'autres solutions. Soit par exemple $q = n$; l'existence d'un système de variable x_i, p_i, propres à réduire chaque Θ_l à la forme $K_l p_l^2$, est caractérisée, d'après M. Ricci, par ce fait que $\gamma_{hij} = 0$ $(h \gtrless i \gtrless j)$. Or, il n'est pas indispensable qu'il en soit ainsi pour satisfaire à (I), (II). Il suffit de considérer la force vive

$$H \equiv \mathcal{A} p^2 + \mathcal{B} q^2 + \mathcal{C} r^2,$$

d'un corps solide, ayant un point fixe; lorsque le moment résultant des forces extérieures, par rapport à ce point, est nul, ce qui correspond aux géodésiques de la force vive, il existe l'intégrale

$$H_1 = \mathcal{A}^2 p^2 + \mathcal{B}^2 q^2 + \mathcal{C}^2 r^2 = \text{const.}\,,$$

et l'on a, en supposant les moments d'inertie distincts, $n = q = 3$, $\varrho_1 = \mathcal{A}$, $\varrho_2 = \mathcal{B}$, $\varrho_3 = \mathcal{C}$. En vertu de la propriété invariante de l'équation

$$\| \alpha^{(rs)} - \varrho a^{(rs)} \| = 0\,,$$

si le couple H, H_1 rentre dans ceux de M. PAINLEVÉ, il devrait appartenir à la première classe ($q = n$), c'est-à-dire être réductible à la forme de M. STÄCKEL, ou bien encore avoir les invariants γ_{123}, γ_{231}, γ_{312} tous nuls. Voilà précisément ce qui n'arrive pas, car en exprimant H, H_1 au moyen des angles d'EULER Θ, φ, Ψ, on trouve

$$\gamma_{123} = -\gamma_{213} = \frac{\sin\Theta}{2}\left(\ \ \mathcal{A} + \mathcal{B} - \mathcal{C}\right),$$

$$\gamma_{231} = -\gamma_{321} = \frac{\sin\Theta}{2}\left(-\mathcal{A} + \mathcal{B} + \mathcal{C}\right),$$

$$\gamma_{312} = -\gamma_{132} = \frac{\sin\Theta}{2}\left(\ \ \mathcal{A} - \mathcal{B} + \mathcal{C}\right).$$

D'après ces remarques, la recherche de tous les cas où un problème de Mécanique admet une intégrale quadratique paraît une question trop compliquée pour qu'on puisse espérer en trouver prochainement une solution définitive.

(22 février 1897).

XV.

SUR UNE CLASSE DE ds^2 À TROIS VARIABLES

« Comptes Rendus de l'Acad. des Sciences de Paris », t. CXXIV (1897),

pp. 1434-1438.

On ne connaît jusqu'ici, faisait remarquer il y a quelques mois M. APPELL, aucun type de force vive, dont les géodésiques possèdent une intégrale quadratique, et qui ne soit pas réductible par un choix convenable des variables aux formes de M. STAECKEL ou de M. PAINLEVÉ.

Je vais indiquer une classe assez étendue de forces vives (ou, ce qui est le même, de ds^2) à trois variables, qui ne sont pas réductibles à la forme de M. STAECKEL, ni à la forme

$$(1) \qquad [\varphi(x_1, x_2) + \psi(x_3)][\mathcal{C}_1(x_1, x_2, x_1', x_2') + \mathcal{C}_2(x_3, x_3')]$$

(forme de M. PAINLEVÉ), quoique leurs géodésiques admettent une intégrale quadratique.

Prenons des variables canoniques x_i', p_i $(i = 1, 2, 3)$, et cherchons les forces vives $H \equiv \sum_{1}^{3}{}_{rs}\, a^{(rs)} p_r p_s$, telles que $H_1 \equiv 2p_1p_2 =$ const. soit une intégrale pour les géodésiques. En exprimant que le crochet (HH_1) s'annule identiquement, on trouve pour les $a^{(rs)}$ des équations qui s'intègrent immédiatement et donnent

$$(2) \qquad \begin{cases} a^{(11)} = \varphi x_1^2 + \varphi_1 + \mathcal{D}, \quad a^{(22)} = \varphi x_2^2 + \varphi_2 x_2 + \mathcal{Q}, \quad a^{(33)} = \varphi_3, \\ a^{(23)} = \psi x_2 + \varphi_4, \qquad a^{(13)} = -\psi x_1 + \varphi_5, \\ a^{(12)} = -\varphi x_1 x_2 - \dfrac{1}{2}(\varphi_2 x_1 + \varphi_1 x_2) + \varphi_6, \end{cases}$$

où l'on désigne par φ, ψ, φ_1, ..., φ_6, $\mathcal{D}$, $\mathcal{Q}$ des fonctions de la variable x_3.

Il s'agit de prouver que [les $a^{(rs)}$ ayant les valeurs (2)] $H \equiv \sum_{1}^{3}{}_{rs}\, a^{(rs)} p_r p_s$

ne peut pas, en général, acquérir la forme (1): il suffira évidemment de développer la démonstration pour un cas particulier de (2); je prendrai

$$H \equiv (cx_1^2 + \mathcal{P})p_1^2 + (cx_2^2 + \mathcal{Q})p_2^2 + p_3^2 - 2cx_1x_2p_1p_2\,,$$

c étant une constante.

Faisons voir avant tout que les géodésiques de H n'admettent (lorsque les fonctions $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ de x_3 demeurent indéterminées) aucune intégrale quadratique distincte de $H=$ const., $H_1 =$ const. Pour cela, nous partons de l'hypothèse que $H_2 \equiv \sum_{rs}^{3}{}_{1} a^{(rs)} p_r p_s =$ const. soit une intégrale. On doit avoir $(HH_2) \equiv 0$, c'est-à-dire (*)

$$\frac{\partial \alpha^{(33)}}{\partial x_3} = 0\,, \tag{3}$$

$$\frac{\partial \alpha^{(13)}}{\partial x_3} = \frac{1}{2}\left(x_1\,\Delta\alpha^{(33)} - \mathcal{P}\,\frac{\partial \alpha^{(33)}}{\partial x_1}\right), \tag{4}$$

$$\frac{\partial \alpha^{(23)}}{\partial x_3} = \frac{1}{2}\left(-\,x_2\,\Delta\alpha^{(33)} - \mathcal{Q}\,\frac{\partial \alpha^{(33)}}{\partial x_2}\right), \tag{5}$$

$$\frac{\partial \alpha^{(11)}}{\partial x_3} = 2x_1(\Delta + c)\alpha^{(13)} - 2\,\mathcal{P}\,\frac{\partial \alpha^{(13)}}{\partial x_1} + \mathcal{P}'\alpha^{(33)}, \tag{6}$$

$$\frac{\partial \alpha^{(22)}}{\partial x_3} = -\,2x_2(\Delta - c)\alpha^{(23)} - 2\,\mathcal{Q}\,\frac{\partial \alpha^{(23)}}{\partial x_2} + \mathcal{Q}'\alpha^{(33)}\,, \tag{7}$$

$$x_1(\Delta + 2c)\alpha^{(11)} - \mathcal{P}\,\frac{\partial \alpha^{(11)}}{\partial x_1} + \mathcal{P}'\alpha^{(13)} = 0\,, \tag{8}$$

$$-\,x_2(\Delta - 2c)\alpha^{(22)} - \mathcal{Q}\,\frac{\partial \alpha^{(22)}}{\partial x_2} + \mathcal{Q}'\alpha^{(23)} = 0\,, \tag{9}$$

$$-\,2x_2\,\Delta\alpha^{(12)} + x_1(\Delta - 2c)\alpha^{(22)} - 2\mathcal{Q}\,\frac{\partial \alpha^{(12)}}{\partial x_2} - \mathcal{P}\,\frac{\partial \alpha^{(22)}}{\partial x_1} + \mathcal{Q}'\alpha^{(13)} = 0, \tag{10}$$

$$2x_1\,\Delta\alpha^{(12)} - x_2(\Delta + 2c)\alpha^{(11)} - 2\mathcal{P}\,\frac{\partial \alpha^{(12)}}{\partial x_1} - \mathcal{Q}\,\frac{\partial \alpha^{(11)}}{\partial x_2} + \mathcal{P}'\alpha^{(23)} = 0\,, \tag{11}$$

$$\frac{\partial \alpha^{(12)}}{\partial x_3} = -\,x_2(\Delta + c)\alpha^{(13)} + x_1(\Delta - c)\alpha^{(23)} - \mathcal{Q}\,\frac{\partial \alpha^{(13)}}{\partial x_2} - \mathcal{P}\,\frac{\partial \alpha^{(23)}}{\partial x_1}\,, \tag{12}$$

où j'ai écrit $\mathcal{P}'$, $\mathcal{Q}'$, au lieu de $\partial\mathcal{P}/\partial x_3$, $\partial\mathcal{Q}/\partial x_3$; Δ, au lieu de $-\,cx_1\,\partial/\partial x_1 + cx_2\,\partial/\partial x_2$.

(*) Nelle formule (6), (7), quali figurano nell'originale, si trova una svista di calcolo che è stata corretta. [N. d. R.].

Des équations (4), (6), (8) on déduit que $\alpha^{(33)}$ est une constante. En effet, dérivons la (8) par rapport à x_3, ayant égard aux valeurs (4), (6) de $\partial\alpha^{(13)}/\partial x_3$, $\partial\alpha^{(11)}/\partial x_3$; il viendra

$$\begin{aligned}\varphi''\alpha^{(13)} + 2[x_1(\Delta + c)]^2\,\alpha^{(13)} - 2\varphi x_1(\Delta + 2c)\frac{\partial\alpha^{(13)}}{\partial x_1} \\ - 2\varphi\frac{\partial}{\partial x_1}[x_1(\Delta + c)\alpha^{(13)}] + 2\varphi^2\frac{\partial^2\alpha^{(13)}}{\partial x_1^2} - \varphi\varphi'\frac{\partial\alpha^{(33)}}{\partial x_1} \\ + \varphi' x_1\,(\Delta + 2c)\alpha^{(33)} + \frac{1}{2}\varphi'\left(x_1\Delta\alpha^{(33)} - \varphi\frac{\partial\alpha^{(33)}}{\partial x_1}\right) = \varphi'\frac{\partial\alpha^{(11)}}{\partial x_1}\,.\end{aligned}$$

Convenons de représenter par $\mathcal{A}_i$, $\mathcal{B}_i$, $\mathcal{C}_i$, $\mathcal{D}_i$, $\mathcal{E}_i$ des polynomes à coefficients constants en φ, φ', ..., $\varphi^{(i)}$; par W_i des expressions différentielles en $\alpha^{(33)}$, dont les coefficients dépendent de φ et de ses dérivées jusqu'à l'ordre i. Il est aisé de vérifier que, lorsqu'on élimine $\partial\alpha^{(11)}/\partial x_1$ entre la dernière équation et sa dérivée par rapport à x_3, le résultat est de la forme

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_3\alpha^{(13)} + \mathcal{B}_2\,[x_1(\Delta + c)]^2\alpha^{(13)} + \mathcal{C}_2 x_1(\Delta + 2c)\frac{\partial\alpha^{(13)}}{\partial x_1} + \\ + \mathcal{D}_2\frac{\partial}{\partial x_1}[x_1(\Delta + c)]\alpha^{(13)} + \mathcal{E}_2\frac{\partial^2\alpha^{(13)}}{\partial x_1^2} + W_2 = 0\,,\end{aligned}$$

où $\mathcal{A}_3$ *n'est pas indépendent de* φ'''.

Des dérivations répétées permettent, en employant toujours la formule (4), d'éliminer

$$\frac{\partial^2\alpha^{(13)}}{\partial x_1^2}\,,\quad \frac{\partial}{\partial x_1}[x_1(\Delta + c)]\alpha^{(13)},\quad x_1(\Delta + 2c)\frac{\partial\alpha^{(13)}}{\partial x_1}\,,\quad [x_1(\Delta + c)]^2\alpha^{(13)}$$

et donnent successivement

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_4\alpha^{(13)} + \mathcal{B}_3\,[x_1(\Delta + c)]^2\alpha^{(13)} + \mathcal{C}_3 x_1(\Delta + 2c)\frac{\partial\alpha^{(13)}}{\partial x_1} \\ + \mathcal{D}_3\frac{\partial}{\partial x_1}[x_1(\Delta + c)]\,\alpha^{(13)} + W_3 = 0\,,\end{aligned}$$

$$\mathcal{A}_5\alpha^{(13)} + \mathcal{B}_4\,[x_1(\Delta + c)]^2\alpha^{(13)} + \mathcal{C}_4 x_1(\Delta + 2c)\frac{\partial\alpha^{(13)}}{\partial x_1} + W_4 = 0\,,$$

$$\mathcal{A}_6\alpha^{(13)} + \mathcal{B}_5\,[x_1(\Delta + c)]^2\alpha^{(13)} + W_5 = 0\,,$$

$$\mathcal{A}_7\alpha^{(13)} + W_6 = 0\,,$$

chaque $\mathcal{A}_i$ contenant assurément la dérivée d'ordre i de φ.

Dérivons encore une fois l'équation $\alpha^{(13)} = - W_6/\mathcal{A}_7$; il viendra, à cause de (4),

$$\frac{1}{2}\mathcal{A}_7^2\left(x_1 \Delta\alpha^{(33)} - \mathcal{P}\frac{\partial\alpha^{(33)}}{\partial x_1}\right) = -\mathcal{A}_7\frac{\partial W_6}{\partial x_3} + \frac{\partial\mathcal{A}_7}{\partial x_3}W_6 .$$

Comme $\alpha^{(33)}$ est indépendent de x_3, les coefficients des diverses $\mathcal{P}^{(i)}$ doivent s'annuler séparément, ce qui exige, par exemple, $W_6 = 0$; il reste alors

$$x_1\Delta\alpha^{(33)} - \mathcal{P}\frac{\partial\alpha^{(33)}}{\partial x_1} = 0 , \quad \text{d'où} \quad x_1 \Delta\alpha^{(33)} = 0 , \quad \frac{\partial\alpha^{(33)}}{\partial x_1} = 0 .$$

$\alpha^{(33)}$ est donc une constante.

D'après cela, en appliquant aux équations (4), (6), (8) (dont la première se réduit à $\partial\alpha^{(13)}/\partial x_3 = 0$) un procédé tout à fait analogue, mais bien plus simple, on obtient $\alpha^{(13)} = 0$; de même, les (5), (7), (9) conduisent à $\alpha^{(23)} = 0$. Dès lors, on achève sans peine la détermination des $\alpha^{(rs)}$ et l'on trouve que H_2 se présente nécessairement comme une combinaison linéaire (à coefficients constants) de H, H_1.

Observons maintenant que les invariants algébriques du couple H, H_1, c'est-à-dire les racines

$$\frac{cx_1x_2 \pm \sqrt{(cx_1^2 + \mathcal{P})(cx_2^2 + \mathcal{Q})}}{c\mathcal{Q}x_1^2 + c\mathcal{P}x_2^2 + \mathcal{P}\mathcal{Q}}, \ 0$$

de l'équation

$$\begin{vmatrix} -S\,(cx_1^2 + \mathcal{P}) & 1 + S\,cx_1x_2 & 0 \\ 1 + S\,cx_1x_2 & -S\,(cx_2^2 + \mathcal{Q}) & 0 \\ 0 & 0 & -S \end{vmatrix} = 0 .$$

sont distinctes.

Nous pouvons désormais démontrer que H n'est pas réductible à la forme (1). En effet, lorsqu'une force vive admet une telle forme, ses géodésiques possèdent une intégrale quadratique du type indiqué par M. PAINLEVÉ (¹), et alors deux des invariants algébriques coïncident, pendant que les intégrales $\lambda H + \mu H_1$ de notre cas donnent lieu à des invariants distincts ou coïncidents tous les trois, si $\mu = 0$.

La force vive H n'est pas non plus réductible à la forme de M. STAECKEL, car à une telle forme correspondent trois intégrales quadratiques indépendantes et nous avons prouvé qu'il y en a deux seulement.

Je termine en remarquant qu'on pourrait, sans aucune difficulté, généraliser ce résultat dans plusieurs directions.

(*21 juin 1897*).

(¹) « Comptes Rendus », 1^er^ février, 1897.

XVI.

SULLA RIDUCIBILITÀ DELLE EQUAZIONI ELETTRODINAMICHE DI HELMHOLTZ ALLA FORMA HERTZIANA

« Nuovo Cimento », serie 4ª, vol. VI, agosto 1897,

pp. 93-108.

Le relazioni matematiche tra le forze elettriche e magnetiche nell'etere libero, assegnate da CLERK MAXWELL, vennero (colle debite modificazioni) estese da HERTZ ad un campo qualunque, sì da abbracciare l'intera classe dei fenomeni elettromagnetici.

È noto che MAXWELL aveva dedotto le sue equazioni da ipotesi piuttosto complicate e con ragionamenti non sempre corretti; per non incorrere in simili inconvenienti, parve a HERTZ miglior cosa di prescindere (almeno nel caso dei corpi in quiete) da ogni giustificazione *a priori*, limitandosi a far risaltare il perfetto accordo fra la rappresentazione matematica e quasi tutti i fatti sperimentali finora studiati.

Dal punto di vista positivo, null'altro [1] si potrebbe esigere, qualora di molti fenomeni elettromagnetici (per es. degli stazionarii) non si possedessero già trattazioni sistematiche, conformi del pari all'esperienza e seducenti non meno pel rigore logico dell'insieme che per la limpida semplicità delle ipotesi fondamentali.

---

(1) Rimane però, *anche dal lato strettamente fisico*, la possibilità di ricondurre i fenomeni in questione ad altri più semplici o di tipo più intuitivo, come, ad esempio, i fenomeni dinamici. Una tale possibilità, congiunta forse al bisogno psicologico di risalire nei legami causali, diede origine a molte teorie ed interpretazioni meccaniche dell'elettromagnetismo, le quali sono tutte astrattamente possibili, ma in realtà solo dall'esperienza potrebbero, e potranno forse un giorno, venir sancite o reiette. Prescindendo dall'importanza matematica, esse hanno per ora appena il valore di un modello. Si consulti nei riguardi di tutto ciò: H. EBERT, *Zur Theorie der magnetischen und elektrischen Erscheinungen* e *Ueber die Bewegungsformen, welche den elektromagnetischen Erscheinungen zu Grunde gelegt werden können*, « Wiedemann's Annalen », B. 51 e 52.

Queste Memorie del sig. EBERT, oltre all'esposizione di una nuova teoria, contengono un'accurata letteratura sull'argomento.

L'insigne valore storico e metodologico di queste teorie classiche vieta che si possano ora tacciare di speculazioni metafisiche; talchè si rende più tosto desiderabile che venga fatto di raccogliere nello stesso indirizzo tutte le manifestazioni dell'elettromagnetismo. A tale scopo vennero proposte da fisici e matematici eminenti ipotesi disparate, di cui, se alcune si possono impugnare per conseguenze fisicamente inaccettabili ([2]), altre, nelle loro deduzioni bene armonizzanti, e non contradette finora dai fatti, richiedono matura discussione.

Fra le teorie classiche della elettrodinamica, quella è senza alcun dubbio particolarmente notevole, che fu stabilita e svolta ampiamente da HELMHOLTZ ([3]), in base alla legge potenziale di F. NEUMANN. Se essa coincida in sostanza con quella di HERTZ o dove e come ne differisca, non fu esaminato per anco ([4]), ma la indagine non è, parmi, superflua, onde vorrei intrattenerne i lettori di questo periodico.

Espongo frattanto il resultato ottenuto e alcune considerazioni, che vi si connettono intimamente.

La teoria elettrodinamica di HELMHOLTZ (corrispondente alla legge potenziale di F. NEUMANN) *conduce alle equazioni hertziane, qualora si ammetta che le azioni a distanza* (tanto di origine elettrostatica, quanto di origine elettrodinamica) *si propaghino con velocità finita* ([5]).

Più precisamente noi introdurremo l'ipotesi che, in un mezzo indefinito, generalmente omogeneo ([6]) ed isotropo, la velocità di propagazione sia uniforme ed espressa da $1/(A\sqrt{\varepsilon\mu})$, dove $1/A$ è la velocità della luce nell'etere, ε e μ rappresentano rispettivamente le costanti di dielet-

---

([2]) Veggasi per es., in più memorie di H. HELMHOLTZ (*Wissenschaftliche Abhandlungen*, B. 1, pp. 537-687) la critica della legge di WEBER.

([3]) Loco citato, pp. 537-820; siccome però noi qui dovremo occuparci dei corpi in quiete, basterà riferirsi quasi esclusivamente alla prima delle memorie elettrodinamiche (*Ueber die Bewegungsgleichungen der Elektricität für ruhende Körper*, ibidem, pp. 545-628).

([4]) HELMHOLTZ fece vedere che le equazioni di MAXWELL (e quindi le hertziane) rientrano come caso limite in quelle da lui stabilite. Però codesto passaggio al limite snatura completamente il punto di vista primitivo, nè si presta ad un confronto fra le relazioni, che legano, nei due casi, le stesse quantità fisiche. Un tentativo in questo senso fu fatto da HERTZ nello scritto *Ueber die Beziehungen zwischen den Maxwell'schen elektrodynamischen Grundgleichungen und den Grundgleichungen der gegnerischen Elektrodynamik* («Ges. Werke», B. 1, pp. 295-319) dove si trovano assegnate le correzioni, mediante cui, nel caso dell'etere, si può passare dalle equazioni dell'elettrodinamica ordinaria a quelle di MAXWELL. Non si può tacere tuttavia che le ipotesi dell'illustre estinto sono fisicamente infelici e in aperta contraddizione collo svolgimento matematico. Cfr. C. NEUMANN, *Allgemeine Untersuchungen über das Newton'sche Princip der Fernwirkungen*, Leipzig, 1896, achtes Capitel, § 5.

([5]) Si avverta che l'idea di attribuire alle azioni a distanza una velocità di propagazione finita è tutt'altro che nuova: anzi GAUSS e RIEMANN ritennero che in essa si dovesse cercare il fondamento della elettrodinamica. Quanto all'esistenza qualitativa del fenomeno (o di altro equivalente per le conseguenze sperimentali), se ne ha attualmente una prova indiscutibile nelle celebri esperienze di HERTZ sui raggi di forza elettrica.

([6]) Intendiamo con ciò un mezzo, la cui omogeneità abbia soltanto eccezioni superficiali.

tricità e di magnetizzazione del mezzo. Per brevità, designeremo talora questa ipotesi colla lettera (I).

Si vede subito che, per attribuirle forma matematica, basta sostituire, al potenziale elementare

$$\frac{\Omega(\xi, \eta, \zeta, t)}{r} \quad (r = \sqrt{((x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2)},$$

di una massa o componente di corrente Ω, esistente all'istante t nel punto (ξ, η, ζ), il potenziale

$$\frac{\Omega(\xi, \eta, \zeta, t - A\sqrt{\varepsilon\mu} \cdot r)}{r}.$$

Le due espressioni coincidono, se Ω non dipende da t, cioè per tutti i fenomeni di carattere stazionario; in ogni caso, per essere $A\sqrt{\varepsilon\mu}$ una quantità molto piccola, la ipotesi (I) ha, rispetto alla teoria di HELMHOLTZ, soltanto un valore correttivo e le divergenze sono trascurabili, finchè il campo, entro cui avvengono e si osservano le azioni elettromagnetiche, sia abbastanza ristretto, rispetto alla velocità della luce. Di qua risulta che, qualora le equazioni di HERTZ corrispondano effettivamente alla realtà, assai poco se ne scostano, entro certi limiti, anche le originarie equazioni di HELMHOLTZ.

La ipotesi (I) le fa coincidere identicamente colle equazioni hertziane o, per essere esatti, le fa diventare *integrali* (funzionali) di quelle.

Le relazioni integrali, così per incidenza assegnate, sono meno semplici delle equazioni di HERTZ, ma dicono manifestamente qualche cosa di più e potranno rendere talora utili servizi anche dal punto di vista matematico.

Merita di essere notata un'altra circostanza, resa probabile dalla nostra ricerca, cioè che, *fra le leggi elementari di induzione elettrodinamica, proposte da* AMPÈRE, FARADAY, GRASSMANN, F. NEUMANN, W. WEBER, C. NEUMANN [7]), *la più attendibile, anche per circuiti aperti, è* (nel caso dei corpi in quiete e tenuto conto della ipotesi correttiva (I) sopra indi-

---

(7) Cfr. H. HELMHOLTZ, *Wiss. Abh.*, B. I, pp, 774-790.

In una importante memoria («Leipz. Berichte», 1896) il signor C. NEUMANN discusse con profonda analisi la forma matematica delle leggi elementari elettrodinamiche ed espose sommariamente alcuni risultati di grande interesse. Mettendoli in relazione col presente lavoro, se ne desume un argomento in pregiudizio di certa ipotesi Epsilon, che il chiar.mo Autore sembra prediligere, senza per altro attribuirvi un valor essenziale.

cata) *la legge potenziale di* F. NEUMANN [8]) *in quanto essa e soltanto essa* [9] *permette di arrivare alle equazioni di* HERTZ.

Io mi sono qui limitato a considerare le azioni elettromagnetiche in un mezzo indefinito generalmente omogeneo, isotropo ed in quiete, poichè, tolta su questo terreno la discrepanza fra la elettrodinamica classica e la hertziana, si intuisce senza alcuna difficoltà come, proseguendo in modo analogo, si possa pervenire ad un accordo completo.

Così ad esempio, per un mezzo in movimento, basterà secondo la via tracciata dal Prof. VOLTERRA [10], possedere le trasformate in coordinate generali delle equazioni di HELMHOLTZ.

Ma di ciò eventualmente in altra occasione. Dovrei allora entrare in più minuti dettagli, per preludere alla trattazione di un campo elettromagnetico generale, dopo di che mi sarebbe possibile (invocando il principio della conservazione dell'energia) di indagare la legge delle azioni ponderomotrici.

Pel momento sembrami conveniente di escludere ogni complicazione, nella lusinga che la semplicità dello svolgimento sia per conciliarmi la benevola attenzione degli studiosi.

1. – Sia S un mezzo indefinito, generalmente omogeneo, isotropo ed in quiete, in cui avvengano fenomeni elettrodinamici. Dicansi complessivamente σ le superficie, situate comunque, purchè, si intende, fisse in S, lungo cui può venire meno la omogeneità dello stesso S.

Gli elementi, che determinano lo stato fisico del mezzo (considerando il fenomeno del movimento dell'elettricità nel suo aspetto più generale, ma prescindendo da manifestazioni d'altra natura) sono la densità elettrostatica e le componenti della corrente in ciascun punto (ξ, η, ζ) e in ciascun istante t. Supporremo che la distribuzione della elettricità statica e delle correnti sia generalmente di volume, ma che possa aver luogo sopra le σ anche una distribuzione elettrostatica a due dimensioni. Si indicheranno con $E(\xi, \eta, \zeta, t)$, $u(\xi, \eta, \zeta, t)$, $v(\xi, \eta, \zeta, t)$, $w(\xi, \eta, \zeta, t)$, la densità elettrostatica di volume e le componenti della corrente in un generico punto (ξ, η, ζ) di S e nell'istante t; con $e(\xi, \eta, \zeta, t)$ la densità superficiale in un punto (ξ, η, ζ) delle superficie σ e pure nell'istante t.

---

(8) Ricordo a questo proposito che HELMHOLTZ si attenne costantemente alla legge potenziale di F. NEUMANN e non celò il proprio convincimento che essa fosse per prevalere in via definitiva.

(9) Non ho, per vero dire, mostrato esplicitamente che *soltanto* la legge di F. NEUMANN permette di arrivare alle equazioni di HERTZ, ma lo si può riconoscere, assumendo a punto di partenza un'altra qualunque tra le lèggi mentovate ed applicando ad essa il procedimento, che sarà qui impiegato per la legge di F. NEUMANN. In tal modo si otterrebbero equazioni *contraddittorie* con quelle di HERTZ.

(10) *Sopra le equazioni di* HERTZ, (in questo giornale, t. 29, 1891).

Le funzioni E, u, v, w si risguarderanno nulle all'infinito d'ordine superiore al secondo e, per ogni valore di t, finite, continue e derivabili in tutto lo spazio S, fatta eccezione per le superfici σ, passando attraverso alle quali potranno subire delle discontinuità. La densità superficiale e si intenderà finita, continua e derivabile rispetto al tempo sopra ogni superficie σ.

Designeremo con p', E', v', w', f'; p'', E'', u'', v'', w'', f'' le due direzioni della normale, i valori limiti di E, u, v, w, e più generalmente di una qualsiasi funzione f, da una parte e dall'altra di σ (11); con $\alpha' = -\alpha''$, $\beta' = -\beta''$, $\gamma' = -\gamma''$ i coseni direttori di p' e di p''.

Per completare la determinazione analitica del fenomeno, considerato isolatamente, basta aver riguardo alle relazioni fondamentali (equazioni di continuità):

$$-\frac{\partial E}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial v}{\partial \eta} + \frac{\partial w}{\partial \zeta}, \tag{1}$$

$$-\frac{\partial e}{\partial t} = u'\alpha' + v'\beta' + w'\gamma' + u''\alpha'' + v''\beta'' + w''\gamma''. \tag{2}$$

2. – Ciò posto, occupiamoci di collegare il movimento della elettricità con altri concetti fisici e, in primo luogo, dette rispettivamente ε e μ le costanti di dielettricità e di magnetizzazione del mezzo S, consideriamo, accanto alle densità vere E, e e alle correnti vere u, v, w, le quantità:

$$\mathbf{E} = \frac{E}{\varepsilon}, \qquad \mathbf{e} = \frac{e}{\varepsilon}, \tag{3}$$

$$\mathbf{u} = \mu u, \quad \mathbf{v} = \mu v, \quad \mathbf{w} = \mu w. \tag{4}$$

chiamate, come è noto, densità dell'elettricità *libera* e componenti della corrente *libera*, poichè appunto esse quantità (e non le corrispondenti italiche) rimangono, o rispettivamente divengono *libere* di esercitare azioni a distanza. I potenziali relativi sarebbero, secondo l'ordinaria teoria della propagazione istantanea,

$$\int_S \frac{\mathbf{E}}{r}\, dS, \quad \int_\sigma \frac{\mathbf{e}}{r}\, d\sigma, \quad \int_S \frac{\mathbf{u}}{r}\, dS, \quad \text{ecc.}$$

$$\left(\text{con } r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2} \quad \text{e} \quad dS = d\xi\, d\eta\, d\zeta\right).$$

(11) Per non essere prolissi, ragioneremo sempre come se le superficie σ possedessero in ciascun punto piano tangente. Intenderemo tuttavia che tale condizione sia soddisfatta solo generalmente, bastando ciò a legittimare le operazioni di calcolo, che dovremo eseguire.

Ammessa invece l'ipotesi (I) che la velocità di propagazione sia $1/(A\sqrt{\varepsilon\mu})$, avremo i potenziali:

$$\mathbf{F}(x, y, z, t) = \int_S \frac{\mathbf{E}(\xi, \eta, \zeta, t - Ar\sqrt{\varepsilon\mu})}{r}\, dS + \int_\sigma \frac{\mathbf{e}(\xi, \eta, \zeta, t - Ar\sqrt{\varepsilon\mu})}{r}\, d\sigma\,, \tag{5}$$

$$\left\{\begin{aligned} \mathbf{U}(x, y, z, t) &= \int_S \frac{\mathbf{u}(\xi, \eta, \zeta, t - Ar\sqrt{\varepsilon\mu})}{r}\, dS\,,\\ \mathbf{V}(x, y, z, t) &= \int_S \frac{\mathbf{v}(\xi, \eta, \xi, t - Ar\sqrt{\varepsilon\mu})}{r}\, dS\,,\\ \mathbf{W}(x, y, z, t) &= \int_S \frac{\mathbf{w}(\zeta, \eta, \zeta, t - Ar\sqrt{\varepsilon\mu})}{r}\, dS\,. \end{aligned}\right. \tag{6}$$

Rispetto alla natura analitica delle funzioni $\mathbf{F}$, $\mathbf{U}$, $\mathbf{V}$, $\mathbf{W}$, si osserva quanto segue ([12]):

La funzione $\mathbf{F}$ e le sue derivate prime sono finite e continue in tutto lo spazio, fatta eccezione per le superficie σ, dove la $\mathbf{F}$ stessa e le derivate tangenziali rimangono continue, mentre le derivate normali presentano la discontinuità:

$$\frac{\partial \mathbf{F}'}{\partial p'} + \frac{\partial \mathbf{F}''}{\partial p''} = -\,4\pi\mathbf{e}\,; \tag{5a}$$

in ogni punto di S, non appartenente alle superficie σ, è verificata l'equazione:

$$\underset{2}{\Delta}\mathbf{F} - A^2\varepsilon\mu\,\frac{\partial^2\mathbf{F}}{\partial t^2} = -\,4\pi\mathbf{E}\,; \tag{5'}$$

le funzioni $\mathbf{U}$, $\mathbf{V}$, $\mathbf{W}$, sono ovunque finite e continue, assieme alle loro

---

([12]) V. VOLTERRA, *Sul principio di Huygens*, tomi 31, 32 e 33 di questo giornale.

derivate prime, e soddisfano ordinatamente alle equazioni:

$$(6')\quad \left|\begin{aligned} &\underset{2}{\Delta}\, \boldsymbol{U} - A^2\varepsilon\mu \frac{\partial^2 \boldsymbol{U}}{\partial t^2} = -\,4\pi \boldsymbol{u}\,, \\ &\underset{2}{\Delta}\, \boldsymbol{V} - A^2\varepsilon\mu \frac{\partial^2 \boldsymbol{V}}{\partial t^2} = -\,4\pi \boldsymbol{v}\,, \\ &\underset{2}{\Delta}\, \boldsymbol{W} - A^2\varepsilon\mu \frac{\partial^2 \boldsymbol{W}}{\partial t^2} = -\,4\mu \boldsymbol{w}\,. \end{aligned}\right.$$

Oltre a queste proprietà, dovute esclusivamente alla forma della (5) e delle singole (6), si può stabilire una relazione importantissima tra le quattro funzioni $\boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{U}$, $\boldsymbol{V}$, $\boldsymbol{W}$.

Notiamo a tale scopo che, in causa delle (3), (4), le (1), (2) danno:

$$(1')\qquad -\,\varepsilon\mu \frac{\partial \boldsymbol{E}}{dt} = \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \xi} + \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial \eta} + \frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial \zeta}\,,$$

$$(2')\qquad -\,\varepsilon\mu \frac{\partial \boldsymbol{e}}{\partial t} = \boldsymbol{u}'\alpha' + \boldsymbol{v}'\beta' + \boldsymbol{w}'\gamma' + \boldsymbol{u}''\alpha'' + \boldsymbol{v}''\beta'' + \boldsymbol{w}''\gamma''\,,$$

ossia, cambiando t in $t - Ar\sqrt{\varepsilon\mu}$ e designando per brevità con $\bar{f}$ ciò, che diviene una funzione f di t, quando si sostituisce $t - Ar\sqrt{\varepsilon\mu}$ al posto di t:

$$(1'')\quad -\,\varepsilon\mu \frac{\partial \bar{\boldsymbol{E}}}{\partial t} = \frac{\partial \bar{\boldsymbol{u}}}{\partial \xi} + \frac{\partial \bar{\boldsymbol{v}}}{\partial \eta} + \frac{\partial \bar{\boldsymbol{w}}}{\partial \zeta} + A\sqrt{\varepsilon\mu}\left\{\frac{\partial \bar{\boldsymbol{u}}}{\partial t}\frac{\partial r}{\partial \xi} + \frac{\partial \bar{\boldsymbol{v}}}{\partial t}\frac{\partial r}{\partial \eta} + \frac{\partial \bar{\boldsymbol{w}}}{\partial t}\frac{\partial r}{\partial \zeta}\right\},$$

$$(2'')\qquad -\,\varepsilon\mu \frac{\partial \bar{\boldsymbol{e}}}{\partial t} = \bar{\boldsymbol{u}}'\alpha' + \bar{\boldsymbol{v}}'\beta' + \bar{\boldsymbol{w}}'\gamma' + \bar{\boldsymbol{u}}''\alpha'' + \bar{\boldsymbol{v}}''\beta'' + \bar{\boldsymbol{w}}''\gamma''\,;$$

d'altra parte:

$$\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial x} + \frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial y} + \frac{\partial \boldsymbol{W}}{\partial z} = \int_S \left\{\frac{\partial \dfrac{\bar{\boldsymbol{u}}}{r}}{\partial x} + \frac{\partial \dfrac{\bar{\boldsymbol{v}}}{r}}{\partial y} + \frac{\partial \dfrac{\bar{\boldsymbol{w}}}{r}}{\partial z}\right\} dS =$$

$$= -\int_S \left\{\bar{\boldsymbol{u}}\frac{\partial \dfrac{1}{r}}{\partial \xi} + \bar{\boldsymbol{v}}\frac{\partial \dfrac{1}{r}}{\partial \eta} + \bar{\boldsymbol{w}}\frac{\partial \dfrac{1}{r}}{\partial \zeta}\right\} dS +$$

$$+ A\sqrt{\varepsilon\mu}\int_S \frac{1}{r}\left\{\frac{\partial \bar{\boldsymbol{u}}}{\partial t}\frac{\partial r}{\partial \xi} + \frac{\partial \bar{\boldsymbol{v}}}{\partial t}\frac{\partial r}{\partial \eta} + \frac{\partial \bar{\boldsymbol{w}}}{\partial t}\frac{\partial r}{\partial \zeta}\right\} dS =$$

$$= \int_S \left[\frac{\partial \bar{\boldsymbol{u}}}{\partial \xi} + \frac{\partial \bar{\boldsymbol{v}}}{\partial \eta} + \frac{\partial \bar{\boldsymbol{w}}}{\partial \zeta} + A\sqrt{\varepsilon\mu}\left\{\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t}\frac{\partial r}{\partial \xi} + \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}\frac{\partial r}{\partial \eta} + \frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial t}\frac{\partial r}{\partial \zeta}\right\}\right]\frac{dS}{r} +$$

$$+ \int_\sigma [\bar{\boldsymbol{u}}'\alpha' + \bar{\boldsymbol{v}}'\beta' + \bar{\boldsymbol{w}}'\gamma' + \bar{\boldsymbol{u}}''\alpha'' + \bar{\boldsymbol{v}}''\beta'' + \bar{\boldsymbol{w}}''\gamma'']\frac{d\sigma}{r}\,,$$

per cui, confrontando colle (1''), 2''), si deduce:

$$\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial x}+\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial y}+\frac{\partial \boldsymbol{W}}{\partial z}=-\,\varepsilon\mu\int\limits_{S}\frac{\partial \overline{\boldsymbol{E}}}{\partial t}\frac{dS}{r}-\varepsilon\mu\int\limits_{\sigma}\frac{\partial \bar{e}}{\partial t}\frac{d\sigma}{r}\,,$$

e, siccome il secondo membro, in virtù della (5), equivale a $-\,\varepsilon\mu\,(\partial \boldsymbol{F}/\partial t)$, risulta in definitiva:

$$\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial x}+\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial y}+\frac{\partial \boldsymbol{W}}{\partial z}=-\,\varepsilon\mu\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial t}\,, \tag{7}$$

che è la relazione annunciata.

3. – Nel paragrafo precedente si sono considerati i potenziali $\boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{U}$, $\boldsymbol{V}$, $\boldsymbol{W}$ soltanto sotto l'aspetto matematico, come funzioni definite dalle (5), (6). Ne stabiliremo ora gli attributi fisici, mettendoli in relazione *colle forze e colle polarizzazioni elettriche e magnetiche.*

Si designino con X, Y, Z, $\boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{Y}$, $\boldsymbol{Z}$, le componenti della forza e della polarizzazione elettrica, con L, M, N, $\boldsymbol{L}$, $\boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{N}$ le componenti della forza e della polarizzazione magnetica.

La teoria elettrodinamica di Helmholtz (tenuto conto, si intende, della ipotesi correttiva (I)) conduce a porre:

$$\left\{\begin{aligned}\mu L&=\boldsymbol{L}=A\left(\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial z}-\frac{\partial \boldsymbol{W}}{\partial y}\right),\\ \mu M&=\boldsymbol{M}=A\left(\frac{\partial \boldsymbol{W}}{\partial x}-\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial z}\right),\\ \mu N&=\boldsymbol{N}=A\left(\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial y}-\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial x}\right),\end{aligned}\right. \tag{8}$$

$$\left\{\begin{aligned}\frac{\boldsymbol{X}}{\varepsilon}&=X=-\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial x}-A^2\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial t}\,,\\ \frac{\boldsymbol{Y}}{\varepsilon}&=Y=-\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial y}-A^2\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial t}\,,\\ \frac{\boldsymbol{Z}}{\varepsilon}&=Z=-\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial z}-A^2\frac{\partial \boldsymbol{W}}{\partial t}\,.\end{aligned}\right. \tag{9}$$

Non sarà male ricordare brevemente come si giustificano queste equazioni, o, se si vuole, quali sono le leggi fisiche (elementari), da cui esse provengono. Potremo limitarci al caso di un mezzo non polarizzabile, poichè l'estensione al caso generale si fa poi in modo ovvio ([13]).

Avremo $\varepsilon = \mu = 1$ e $\boldsymbol{E} = E$, $\boldsymbol{e} = e$, $\boldsymbol{u} = u$, $\boldsymbol{v} = v$, $\boldsymbol{w} = w$, $\boldsymbol{L} = L$, $\boldsymbol{M} = M$, $\boldsymbol{N} = N$, $\boldsymbol{X} = X$, $\boldsymbol{Y} = Y$, $\boldsymbol{Z} = Z$. Secondo la *legge di* COULOMB, la azione elettrostatica, esercitata nell'istante t, dalla massa elettrica elementare $E(\xi, \eta, \zeta, t)\, dS$, sulla massa $+1$, situata in (x, y, z) avrebbe per componenti

$$-E \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} dS\,, \qquad -E \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} dS\,, \qquad -E \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} dS\,;$$

in conformità all'ipotesi (I), noi assumeremo invece

$$-\frac{\partial \frac{\overline{E}}{r}}{\partial x}\,, \qquad -\frac{\partial \frac{\overline{E}}{r}}{\partial y}\,, \qquad -\frac{\partial \frac{\overline{E}}{r}}{\partial z}\,,$$

il che porta, nelle singole componenti appena una correzione *di secondo ordine* ([14]) *nella inversa della velocità della luce*. In modo analogo, per fis-

---

([13]) Si vegga: W. VOIGT, *Kompendium der theoretischen Physik*, Leipzig, 1896, B. 2, pp. 48-58, 206-218.

([14]) Si ha infatti, considerando per es. la componente secondo l'asse delle x:

$$\frac{\partial \frac{\overline{E}}{r}}{\partial x} = E(\xi, \eta, \zeta,\ t - Ar) \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial E(\xi, \eta, \zeta,\ t - Ar)}{\partial x}\,,$$

e, siccome (ammettendo che la funzione E sia derivabile due volte rispetto a t) si può scrivere

$$E(\xi, \eta, \zeta,\ t - Ar) = E(\xi, \eta, \zeta,\ t) - Ar \frac{\partial E(\xi, \eta, \zeta, t)}{\partial t} + \frac{1}{2} A^2 r^2 \frac{\partial^2 E(\xi, \eta, \zeta,\ t - A\theta r)}{\partial t^2} \quad (0 < \theta < 1)\,,$$

ne segue:

$$\frac{\partial \frac{\overline{E}}{r}}{\partial x} = E \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} - Ar \frac{\partial E(\xi, \eta, \zeta, t)}{\partial t} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} + \frac{1}{2} A^2 r^2 \frac{\partial^2 E(\xi, \eta, \zeta,\ t - A\theta r)}{\partial t^2} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}$$

$$- \frac{1}{r} A \frac{\partial E(\xi, \eta\, \zeta, t)}{\partial t} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{1}{r} A^2 \frac{\partial^3 \{ r^2 E(\xi, \eta, \zeta,\ t - A\theta r) \}}{\partial t^2 \partial x} =$$

$$= E \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} + \frac{1}{2} A^2 \left[r^2 \frac{\partial^2 E(\xi, \eta, \zeta,\ t - A\theta r)}{\partial t^2} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial^3 \{ r^2 E(\xi, \eta, \zeta,\ t - A\theta r) \}}{\partial t^2 \partial x} \right],$$

il che dimostra l'asserto.

sare la azione di un elemento di corrente ($u\,dS$, $v\,dS$, $w\,dS$) sopra un polo magnetico, sostituiremo alle componenti:

$$A\left(v\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}-w\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}\right)dS\,,\quad A\left(w\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}-u\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}\right)dS\,,\quad A\left(u\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}-v\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}\right)dS\,,$$

desunte dalla *legge di* BIOT *e* SAVARD, le componenti:

$$A\left(\frac{\partial\frac{\overline{v}}{r}}{\partial z}-\frac{\partial\frac{\overline{w}}{r}}{\partial y}\right)dS\,,\quad A\left(\frac{\partial\frac{\overline{w}}{r}}{\partial x}-\frac{\partial\frac{\overline{u}}{r}}{\partial z}\right)dS\,,\quad A\left(\frac{\partial\frac{\overline{u}}{r}}{\partial y}-\frac{\partial\frac{\overline{v}}{r}}{\partial x}\right),$$

la differenza essendo nel caso presente almeno *di terzo ordine* [15] in A.

Infine, ricordando che la *legge potenziale di* F. NEUMANN assegna come componenti della induzione elettrica, dovuta all'elemento di corrente ($u\,dS$, $v\,dS$, $w\,dS$), in un punto (x, y, z), le espressioni:

$$-\frac{A^2}{r}\frac{\partial u}{\partial t}\,,\quad -\frac{A^2}{r}\frac{\partial v}{\partial t}\,,\quad -\frac{A^2}{r}\frac{\partial w}{\partial t}\,,$$

la ipotesi (I) ci porterà ad assumere:

$$-\frac{A^2}{r}\frac{\partial \overline{u}}{\partial t}\,,\quad -\frac{A^2}{r}\frac{\partial \overline{v}}{\partial t}\,,\quad -\frac{A^2}{r}\frac{\partial \overline{w}}{\partial t}\,,$$

con un divario dalle prime, che sarà anche qui almeno *di terzo ordine* [16] in A.

In base alle leggi, così modificate, di COULOMB, di BIOT e SAVARD, e di F. NEUMANN, con una semplice integrazione a tutto il campo S, ricaviamo effettivamente le equazioni (8) e (9), dove si sia posto $\varepsilon=\mu=1$ [17].

---

[15] La dimostrazione è identica a quella indicata testè per le componenti dell'azione elettrostatica.

[16] Lo si prova anche più semplicemente che negli altri due casi, arrestando al primo termine lo sviluppo di TAYLOR.

[17] Prescindendo dall'ipotesi correttiva (I), sono le equazioni (19 b) e (3 b) della citata memoria di HELMHOLTZ, *Ueber die Bewegungsgleichungen der Elektricität für ruhende Körper.* Va notato che nell'ultimo paragrafo HELMHOLTZ discute anche l'influenza delle polarizzazioni elettrica e magnetica, attenendosi alla teoria di POISSON. Le nostre equazioni (8), (9), rispecchiano il modo di vedere, dirò così, sbrigativo, dei moderni circa le dette polarizzazioni.

4. – È tempo ormai di conseguire lo scopo prefisso, mostrando che dalle equazioni generali (8) e (9) discendono le equazioni di Hertz.

In primo luogo, eliminando dalle (9) la funzione $\boldsymbol{F}$, avremo:

$$A^2\left\{\frac{\partial^2 \boldsymbol{V}}{\partial z\,\partial t}-\frac{\partial^2 \boldsymbol{W}}{\partial y\,\partial t}\right\}=\frac{\partial Z}{\partial y}-\frac{\partial Y}{\partial z},$$

$$A^2\left\{\frac{\partial^2 \boldsymbol{W}}{\partial x\,\partial t}-\frac{\partial^2 \boldsymbol{U}}{\partial z\,\partial t}\right\}=\frac{\partial X}{\partial z}-\frac{\partial Z}{\partial x},$$

$$A^2\left\{\frac{\partial^2 \boldsymbol{U}}{\partial y\,\partial t}-\frac{\partial^2 \boldsymbol{V}}{\partial x\,\partial t}\right\}=\frac{\partial Y}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial y},$$

e il confronto colle derivate delle equazioni (8) rispetto al tempo, ci darà:

$$(8') \qquad \left|\begin{array}{l} A\,\dfrac{\partial \boldsymbol{L}}{\partial t}=\dfrac{\partial Z}{\partial y}-\dfrac{\partial Y}{\partial z}, \\[2ex] A\,\dfrac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial t}=\dfrac{\partial X}{\partial z}-\dfrac{\partial Z}{\partial x}, \\[2ex] A\,\dfrac{\partial \boldsymbol{N}}{\partial t}=\dfrac{\partial Y}{\partial x}-\dfrac{\partial X}{\partial y}. \end{array}\right.$$

Derivando invece le (9) rispetto al tempo, moltiplicandole per $A\varepsilon\mu$ e sostituendo ad

$$A^2\,\varepsilon\mu\,\frac{\partial^2 \boldsymbol{U}}{\partial t^2}, \qquad A^2\varepsilon\mu\,\frac{\partial^2 \boldsymbol{V}}{\partial t^2}, \qquad A^2\varepsilon\mu\,\frac{\partial^2 \boldsymbol{W}}{\partial t^2}$$

i loro valori desunti dalle (6′), otteniamo:

$$A\mu\,\frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial t}=-A\left\{\frac{\partial\dfrac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial t}}{\partial x}\,\varepsilon\mu+\mathop{\Delta}_{2}\boldsymbol{U}+4\pi\boldsymbol{u}\right\},$$

$$A\mu\,\frac{\partial \boldsymbol{Y}}{\partial t}=-A\left\{\frac{\partial\dfrac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial t}}{\partial y}\,\varepsilon\mu+\mathop{\Delta}_{2}\boldsymbol{V}+4\pi\boldsymbol{v}\right\},$$

$$A\mu\,\frac{\partial \boldsymbol{Z}}{\partial t}=-A\left\{\frac{\partial\dfrac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial t}}{\partial z}\,\varepsilon\mu+\mathop{\Delta}_{2}\boldsymbol{W}+4\pi\boldsymbol{w}\right\};$$

d'altra parte, avuto riguardo alla (7), si ricava dalle (8):

$$\mu\left(\frac{\partial M}{\partial z}-\frac{\partial N}{\partial y}\right)=-A\left(\frac{\partial\frac{\partial F}{\partial t}}{\partial x}\varepsilon\mu+\underset{2}{\Delta}U\right),$$

$$\mu\left(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial L}{\partial z}\right)=-A\left(\frac{\partial\frac{\partial F}{\partial t}}{\partial y}\varepsilon\mu+\underset{2}{\Delta}V\right),$$

$$\mu\left(\frac{\partial L}{\partial y}-\frac{\partial M}{\partial x}\right)=-A\left(\frac{\partial\frac{\partial F}{\partial t}}{\partial z}\varepsilon\mu+\underset{2}{\Delta}W\right),$$

onde infine, sottraendo ordinatamente queste relazioni dalle precedenti e ricordando le (4):

$$(9')\qquad\left\{\begin{aligned}A\frac{\partial X}{\partial t}&=\frac{\partial M}{\partial z}-\frac{\partial N}{\partial y}-4\pi Au,\\A\frac{\partial Y}{\partial t}&=\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial L}{\partial z}-4\pi Av,\\A\frac{\partial Z}{\partial t}&=\frac{\partial L}{\partial y}-\frac{\partial M}{\partial x}-4\pi Aw.\end{aligned}\right.$$

I sistemi (8′) e (9′) coincidono anche nella forma colle equazioni hertziane (9*a*) e (9*b*) [18]. Restano da esaminare soltanto le condizioni ai limiti.

Hertz ammette [19] che, lungo ogni superficie σ di separazione, rimangano continue le componenti tangenziali delle forze elettriche e magnetiche, ma si abbiano per le componenti normali (se si tratta di mezzi isotropi) le discontinuità:

$$(10)\qquad\mu'\left(\frac{\partial L'}{\partial t}\alpha'+\frac{\partial M'}{\partial t}\beta'+\frac{\partial N'}{\partial t}\gamma'\right)+\mu''\left(\frac{\partial L''}{\partial t}\alpha''+\frac{\partial M''}{\partial t}\beta''+\frac{\partial N''}{\partial t}\gamma''\right)=0,$$

$$(11)\qquad\varepsilon'\left(\frac{\partial X'}{\partial t}\alpha'+\frac{\partial Y'}{\partial t}\beta'+\frac{\partial Z'}{\partial t}\gamma'\right)+\varepsilon''\left(\frac{\partial X''}{\partial t}\alpha''+\frac{\partial Y''}{\partial t}\beta''+\frac{\partial Z''}{\partial t}\gamma''\right)=$$
$$=-4\pi(u'\alpha'+v'\beta'+w'\gamma'+u''\alpha''+v''\beta''+w''\gamma'').$$

---

(18) Ges. Werke, Bd. II, p. 225; od anche tomo 28 di questo giornale, p. 207.
(19) Ibidem, § 8.

Nel caso nostro si tratta di un mezzo unico, o, meglio, ponendo mente alle superficie σ, di più mezzi isotropi, dotati delle stesse costanti di dielettricità e di magnetizzazione. Avuto riguardo a ciò, noi vogliamo far vedere che le funzioni X, Y, Z, L, M, N, definite dalle (8) e (9) soddisfanno effettivamente alle condizioni di HERTZ.

In primo luogo risulta dal § 2 che, passando attraverso ad una superficie σ, le derivate delle funzioni $\boldsymbol{U}$, $\boldsymbol{V}$ e $\boldsymbol{M}$ rimangono continue, onde, per le (8), la stessa proprietà compete alle componenti della forza magnetica, e per conseguenza sarà verificata la (10), che esprime, in causa di $\mu' = \mu'' = \mu$, la continuità delle derivate rispetto al tempo delle componenti normali della forza magnetica.

Passando alle componenti della forza elettrica, si osserverà dalle (9) che le discontinuità possono essere soltanto di origine elettrostatica, e che, siccome, sempre a tenore del § 2, passando attraverso le superfici σ, le derivate tangenziali della funzione $\boldsymbol{F}$ si mantengono continue, lo stesso ha luogo delle componenti tangenziali. Quanto alla componente normale, si stabilisce la formula (11) nel seguente modo.

Si derivino le (9) rispetto al tempo e si sommino, dopo averle moltiplicate ordinatamente per $\varepsilon\alpha$, $\varepsilon\beta$, $\varepsilon\gamma$; verrà:

$$\varepsilon\left(\frac{\partial X}{\partial t}\alpha + \frac{\partial Y}{\partial t}\beta + \frac{\partial Z}{\partial t}\gamma\right) = -\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial x}\alpha + \frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial y}\beta + \frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial z}\gamma\right) -$$
$$- A^2\varepsilon\left(\frac{\partial^2 \boldsymbol{U}}{\partial t^2}\alpha + \frac{\partial^2 \boldsymbol{V}}{\partial t^2}\beta + \frac{\partial^2 \boldsymbol{W}}{\partial t^2}\gamma\right).$$

Osservando che le derivate rispetto al tempo di $\boldsymbol{U}$, $\boldsymbol{V}$, $\boldsymbol{W}$ sono funzioni continue, anche attraverso le σ, si ottiene immediatamente

$$\varepsilon'\left(\frac{\partial X'}{\partial t}\alpha' + \frac{\partial Y'}{\partial t}\beta' + \frac{\partial Z'}{\partial t}\gamma'\right) + \varepsilon''\left(\frac{\partial X''}{\partial t}\alpha'' + \frac{\partial X''}{\partial t}\beta'' + \frac{\partial Z''}{\partial t}\gamma''\right) =$$
$$= -\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \boldsymbol{F}'}{\partial p'} + \frac{\partial \boldsymbol{F}''}{\partial p''}\right),$$

e da questa, per essere, in virtù delle (5a), (2') e (4):

$$\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \boldsymbol{F}'}{\partial p'} + \frac{\partial \boldsymbol{F}''}{\partial p''}\right) = -4\pi\varepsilon\frac{\partial \boldsymbol{e}}{\partial t} = \frac{4\pi}{\mu}(\boldsymbol{u}'\alpha' + \boldsymbol{v}'\beta' + \boldsymbol{w}'\gamma' + \boldsymbol{u}''\alpha'' +$$
$$+ \boldsymbol{v}''\beta'' + \boldsymbol{w}''\gamma'') = 4\pi(u'\alpha' + v'\beta' + w'\gamma' + u''\alpha'' + v''\beta'' + w''\gamma''),$$

si ricava la (11), come dovevasi dimostrare.

XVII.

SOPRA UNA CLASSE DI INTEGRALI DELL' EQUAZIONE $A^2 \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}$

« Nuovo Cimento », s. 4ª, vol. VI (1897),

pp. 204-209.

Sia σ una superficie o più generalmente un sistema di superficie (aperte o chiuse) del nostro spazio. Designiamo con P un punto generico dello spazio, con Q un punto di σ, con $f(Q)$ una funzione continua dei punti di σ. La formula:

$$U(P) = \frac{1}{4\pi} \int_\sigma \frac{f(Q)}{r} d\sigma , \tag{1}$$

(in cui r rappresenta la distanza fra i punti P e Q) definisce una funzione U, regolare all'infinito, che soddisfa in tutto lo spazio alla equazione $\Delta_2 U = 0$ ed è tale di più che le sue derivate normali $\partial U/\partial n$ e $\partial U/\partial n'$, nei punti di σ presentano la discontinuità:

$$\frac{\partial U}{\partial n} + \frac{\partial U}{\partial n'} = - f(Q) .$$

Passando dalla equazione $\Delta_2 U = 0$, alla equazione più generale $A^2(\partial^2 U/\partial t^2) = \Delta_2 U$ (dove A è una costante) e data, in ogni istante t, una funzione continua $f(Q, t)$ dei punti di σ (derivabile due volte rispetto a t), si estende facilmente la formula (1), ponendo:

$$U(P, t) = \frac{1}{4\pi} \int_\sigma \frac{f(Q, t - Ar)}{r} d\sigma , \tag{2}$$

con che si ottiene [1] un integrale della equazione $A^2(\partial^2 U/\partial t^2) = \underset{2}{\Delta} U$, regolare all'infinito e affetto nei punti di σ dalla discontinuità:

$$\frac{\partial U}{\partial n} + \frac{\partial U}{\partial n'} = - f(Q, t) .$$

Se si considera il piano, invece dello spazio a tre dimensioni, e si intende che σ rappresenti una linea o un sistema di linee, la teoria del potenziale logaritmico ci dà una funzione:

$$V(P) = \frac{1}{2\pi} \int_\sigma f(Q) \log \frac{1}{r} \, d\sigma , \tag{1'}$$

dotata di proprietà analoghe a quelle della (1).

Non si ha invece una formula, che corrisponda alla (2), per gli integrali della equazione:

$$A^2 \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} , \tag{3}$$

mentre sarebbe pur profittevole in molte ricerche la conoscenza di un integrale $V(x, y, t)$ della (3), che si annulli all'infinito e presenti nelle derivate normali una data discontinuità $f(Q, t)$ sopra il contorno σ.

Non so se la costruzione di un tale integrale sia stata finora effettuata; mi permetto quindi di indicarne una qui appresso.

Osservo in primo luogo che la funzione data $f(Q, t)$ (la quale è da ritenersi derivabile due volte rispetto a t) si può sempre supporre nulla, assieme ad $f' = \partial f/\partial t$, per $t = 0$ [2].

Ciò posto, io dico che si può prendere $V(P, t)$ eguale alla parte reale di:

$$\frac{1}{2\pi} \int_\sigma d\sigma \int_{Ar}^{t} f(Q, t - \tau) \frac{d\tau}{\sqrt{\tau^2 - A^2 r^2}} .$$

---

(1) Cfr. V. VOLTERRA, *Sul principio di* HUYGENS, t. 31 di questo giornale, p. 251.

(2) Infatti, ove questa condizione non fosse verificata, basterebbe sostituire alla ricerca di V quella della funzione

$$W = V - \frac{1}{2\pi} \int_\sigma \{ f(Q, 0) + t f'(Q, 0) \} \log \frac{1}{r} \, d\sigma ,$$

che dovrebbe, come si vede subito, soddisfare alla (3), esser nulla all'infinito, regolare in tutto il piano e presentare nelle derivate normali la discontinuità $f(Q, t) - f(Q, 0) - t f'(Q, 0)$. Ora questa funzione si annulla precisamente, in uno alla sua derivata prima, per $t = 0$.

Si ha di questa parte reale una espressione analitica, valida per $t > 0$, risguardando $f(Q, t)$ nullo per valori negativi di t (il che non lede la continuità di f e di f') e ponendo:

$$V(P, t) = \frac{1}{2\pi} \int_\sigma d\sigma \int_{Ar}^{t} f(Q, t - \tau) \frac{d\tau}{\sqrt{\tau^2 - A^2 r^2}}. \tag{4}$$

Cominciamo col dimostrare che $V(P, t)$ è derivabile due volte rispetto ad x, y, t. Assumiamo a tal uopo come variabile di integrazione:

$$\mu = \log \frac{\tau + \sqrt{\tau^2 - A^2 r^2}}{Ar};$$

verrà:

$$V(P, t) = \frac{1}{2\pi} \int_\sigma d\sigma \int_0^{\log \frac{t + \sqrt{t^2 - A^2 r^2}}{Ar}} f\left(Q, t - Ar \frac{e^\mu + e^{-\mu}}{2}\right) d\mu, \tag{5}$$

e sotto questa forma la derivabilità è manifesta. Avremo, tenendo conto che $f(Q, 0)$, $f'(Q, 0)$ sono eguali a zero e che quindi svaniscono i termini provenienti dalla derivazione del limite superiore:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = {} & \frac{A^2}{2\pi} \int_\sigma d\sigma \int_0^{\log \frac{t + \sqrt{t^2 - A^2 r^2}}{Ar}} f''\left(Q, t - Ar \frac{e^\mu + e^{-\mu}}{2}\right) \left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2 \left(\frac{e^\mu + e^{-\mu}}{2}\right)^2 d\mu \\ & - \frac{A}{2\pi} \int_\sigma d\sigma \int_0^{\log \frac{t + \sqrt{t^2 - A^2 r^2}}{Ar}} f'\left(Q, t - Ar \frac{e^\mu + e^{-\mu}}{2}\right) \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} \frac{e^\mu + e^{-\mu}}{2} d\mu,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = {} & \frac{A^2}{2\pi} \int_\sigma d\sigma \int_0^{\log \frac{t + \sqrt{t^2 - A^2 r^2}}{Ar}} f''\left(Q, t - Ar \frac{e^\mu + e^{-\mu}}{2}\right) \left(\frac{\partial r}{\partial y}\right)^2 \left(\frac{e^\mu + e^{-\mu}}{2}\right)^2 d\mu \\ & - \frac{A}{2\pi} \int_\sigma d\sigma \int_0^{\log \frac{t + \sqrt{t^2 - A^2 r^2}}{Ar}} f'\left(Q, t - Ar \frac{e^\mu + e^{-\mu}}{2}\right) \frac{\partial^2 r}{\partial y^2} \frac{e^\mu + e^{-\mu}}{2} d\mu,\end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = \frac{1}{2\pi} \int_\sigma d\sigma \int_0^{\log \frac{t + \sqrt{t^2 - A^2 r^2}}{Ar}} f''\left(Q, t - Ar \frac{e^\mu + e^{-\mu}}{2}\right) d\mu.$$

Dalle due prime, per essere:

$$\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial y}\right)^2 = 1\,, \qquad \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 r}{\partial y^2} = \frac{1}{r}\,,$$

segue:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = \frac{A^2}{2\pi}\int_\sigma d\sigma \int_0^{\log\frac{t+\sqrt{t^2-A^2r^2}}{Ar}} f''\left(Q,\, t - Ar\frac{e^\mu + e^{-\mu}}{2}\right)\left(\frac{e^\mu + e^{-\mu}}{2}\right)^2 d\mu$$

$$-\frac{A}{2\pi}\int_\sigma d\sigma \int_0^{\log\frac{t+\sqrt{t^2-A^2r^2}}{Ar}} f'\left(Q,\, t - Ar\frac{e^\mu + e^{-\mu}}{2}\right)\frac{1}{r}\,\frac{e^\mu + e^{-\mu}}{2}\, d\mu\,,$$

e siccome, mediante una integrazione per parti, risulta:

$$\int_0^{\log\frac{t+\sqrt{t^2-A^2r^2}}{Ar}} f'\left(Q,\, t - Ar\frac{e^\mu + e^{-\mu}}{2}\right)\frac{1}{r}\,\frac{e^\mu + e^{-\mu}}{2}\, d\mu =$$

$$= A\int_0^{\log\frac{t+\sqrt{t^2-A^2r^2}}{Ar}} f''\left(Q,\, t - Ar\frac{e^\mu + e^{-\mu}}{2}\right)\left(\frac{e^\mu - e^{-\mu}}{2}\right)^2 d\mu\,,$$

così resterà:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = \frac{A^2}{2\pi}\int_\sigma d\sigma \int_0^{\log\frac{t+\sqrt{t^2-A^2r^2}}{Ar}} f''\left(Q,\, t - Ar\frac{e^\mu + e^{-\mu}}{2}\right) d\mu = A^2\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}\,.$$

Per rilevare la natura della discontinuità delle derivate normali di V nei punti di σ, riprendiamo la equazione (5) e deriviamola rispetto ad n e ad n', risostituendo, dopo la derivazione, la variabile μ con τ; ciò porge:

$$\frac{\partial V}{\partial n} = \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \frac{\partial \log\frac{1}{r}}{\partial\sigma}\, d\sigma \int_{Ar}^{t} f'(Q,\, t-\tau)\,\frac{\tau\, d\tau}{\sqrt{\tau^2 - A^2r^2}}\,,$$

$$\frac{\partial V}{\partial n'} = \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \frac{\partial \log\frac{1}{r}}{\partial n'}\, d\sigma \int_{Ar}^{t} f'(Q,\, t-\tau)\,\frac{\tau\, d\tau}{\sqrt{\tau^2 - A^2r^2}}\,,$$

e, sommando, con considerazioni analoghe a quelle, che si usano nella teoria del potenziale logaritmico:

$$\frac{\partial V}{\partial n} + \frac{\partial V}{\partial n'} = -\left\{\int_{Ar}^{t} f'(Q, t-\tau)\frac{\tau\, d\tau}{\sqrt{\tau^2 - A^2 r^2}}\right\}_{P=Q}$$

$$= -\int_0^t f'(Q, t-\tau)\, d\tau = -f(Q, t),$$

c. d. d.

Giova notare che V e $\partial V/\partial t$ si annullano in tutto lo spazio, per $t = 0$, e questa condizione, unitamente a quelle già poste, valgono, come si stabilisce con ragionamenti ben noti, a determinare univocamente la funzione V. La sua espressione analitica, per $t < 0$, si desume dalla (4), cambiando

$$\int_{Ar}^{t} f(Q, t-\tau)\frac{d\tau}{\sqrt{\tau^2 - A^2 r^2}} \quad \text{in} \quad \int_{Ar}^{-t} f(Q, t+\tau)\frac{d\tau}{\sqrt{\tau^2 - A^2 r^2}},$$

e risguardando nulla la funzione $f(Q, t)$ per valori positivi di t.

Mi si conceda ancora una parola circa la genesi della espressione (4) di $V(P, t)$. Io vi pervenni, cercando la parte reale della continuazione analitica, per $z = it/A$, $i = (\sqrt{-1})$, di un certo potenziale dello spazio ordinario. Il potenziale, di cui mi sono valso è quello di un semplice strato newtoniano distribuito con densità:

$$\frac{1}{4\pi} F(Q, z) = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{z}{z^2 + t^2} f(Q, t)\, dt,$$

sopra un cilindro retto, indefinito, avente σ per direttrice e le generatrici parallele all'asse z.

Non istarò a dichiarare quali ragioni mi abbiano suggerito la scelta di questo potenziale, nè quali calcoli mi abbiano condotto alla (4). La verifica a posteriori, testè accennata, basta per stabilire speditamente il risultato, nè d'altra parte si conviene far posto in queste colonne a sviluppi di carattere esclusivamente matematico.

XVIII.

SULLA STABILITÀ DELL' EQUILIBRIO PER I SISTEMI A LEGAMI COMPLETI

« Atti Ist. Veneto di sc., lett. ed arti », s. 7ª, t. VIII (1896-1897).
pp. 1247-1250.

La questione della stabilità (¹) del movimento, od anche più particolarmente dell'equilibrio, presenta, come è noto, difficoltà assai gravi, nè può cogli attuali stromenti d'analisi venire completamente risolta, poichè c'è di mezzo il comportamento degli integrali di un sistema di equazioni nell'intorno di un punto singolare.

Sono classiche le ricerche istituite a tale riguardo dal sig. POINCARÉ ed esse contribuiscono infatti (²), come si può rilevare da un recente scritto del sig. LIAPOUNOFF (³), a risolvere la questione della stabilità in un numero abbastanza esteso di casi.

Per dire soltanto dell'equilibrio, ecco i due risultati fondamentali, dovuti al sig. LIAPOUNOFF:

1) Se, nello sviluppo del potenziale intorno ad una posizione di equilibrio, non tutti i termini di secondo ordine sono nulli e il potenziale non ammette un massimo, l'equilibrio è instabile.

2) Se, in una posizione di equilibrio, il potenziale presenta un minimo (qualunque sia del resto la forma del suo sviluppo) l'equilibrio in quella posizione è instabile.

Queste due proposizioni, unitamente al teorema di DIRICHLET, riassumono, per quanto so, la letteratura dell'argomento (⁴). Il contributo,

---

(¹) Intendiamo alludere al significato ordinario di stabilità. Dal punto di vista astronomico si definisce spesso la stabilità in modo diverso; veggasi per es. il tomo terzo, cap. 26, della *Mécanique Céleste* del sig. POINCARÉ.

(²) Cfr. in particolare il capitolo sulle soluzioni asintotiche nel tomo primo della *Mécanique céleste*.

(³) *Sur l'instabilité de l'équilibre dans certains cas où la fonction de forces n'est pas un maximum*, « Journal de Math. », 1897.

(⁴) Rimangono evidentemente fuor di questione tutte le ricerche non rigorose, istituite, specie dagli autori inglesi, col così detto metodo delle piccole oscillazioni.

che io mi propongo di apportare colla presente nota, è modesto assai: si tratta di esaurire la ricerca per il caso più semplice, quello dei sistemi materiali a legami indipendenti dal tempo, dotati di un solo grado di libertà e sollecitati da forze, che dipendono soltanto dalla posizione del sistema.

Si designi con x la coordinata lagrangiana di un sistema siffatto, con $X(x)$ la forza, che lo sollecita e si supponga, come è sempre lecito, che la posizione di equilibrio corrisponda al valore 0 di x. Combinando il teorema di DIRICHLET col secondo del sig. LIAPOUNOFF, si ha immediatamente: se lo sviluppo di $X(x)$ comincia con una potenza dispari cx^n di x, l'equilibrio è stabile o instabile, secondochè c è positivo o negativo.

Io dimostrerò più generalmente che l'equilibrio è sempre instabile, a meno che non siano insieme n dispari e $c < 0$. Vale adunque pei sistemi a legami completi la reciproca del teorema di DIRICHLET:

L'equilibrio è instabile, se il potenziale $\int X(x)\,dx$ *non è massimo.*

Per la dimostrazione, cominciamo coll'osservare che, rappresentando con $Ax'^2/2$ la forza viva del nostro sistema, si ha l'integrale delle forze vive:

$$Ax'^2 = 2\left\{C + \frac{cx^{n+1}}{n+1} + \dots\right\}.$$

Se, come noi vogliamo supporre, la posizione di equilibrio $x = 0$ non è singolare pel nostro sistema, il valore A_0 di A per $x = 0$ sarà maggiore di zero; si potrà dunque sviluppare $1/A$ in serie di potenze di x, $1/A_0 + \dots$, donde, ponendo $C = 0$, e designando con $P(x)$ una serie di potenze:

$$x'^2 = \frac{2cx^{n+1}}{(n+1)A_0} + x^{n+2}P(x)\,. \tag{1}$$

Per provare la instabilità dell'equilibrio nei casi accennati, basterà far vedere che, comunque si prenda un numero positivo ε, arbitrariamente piccolo, tra i movimenti determinati dalle condizioni iniziali $|x_0| < \varepsilon$, $|x_0'| < \varepsilon$ ve ne ha sempre qualcuno, per cui il sistema si allontana dalla posizione di equilibrio più di una certa quantità h indipendente da ε. Il nostro h sarà, per esempio, il più piccolo dei due numeri 1 e $|\xi|/2$, essendo ξ l'ascissa del più vicino all'origine tra i punti seguenti:

a) infiniti reali della funzione

$$\frac{2cx^{n+1}}{(n+1)A_0} + x^{n+2}P(x)\;;$$

b) zeri reali della stessa funzione, diversi dall'origine.

Riferiamoci, per fissare le idee, al caso di n pari e $c < 0$. Potremo supporre ε già tanto piccolo che, per $|x| < \varepsilon$, il segno del secondo membro della (1) sia quello di

$$\frac{2cx^{n+1}}{(n+1)A_0}.$$

Fra i movimenti, che rispondono alle condizioni iniziali $|x_0| < \varepsilon$, $|x_0'| < \varepsilon$, consideriamo, come è evidentemente permesso, quelli, per cui $x_0 < 0$ e x_0', pure negativo, soddisfa all'equazione:

$$x_0'^2 = \frac{2cx_0^{n+1}}{(n+1)A_0} + x_0^{n+2}P(x_0)\,. \tag{1'}$$

Il moto successivo del sistema sarà in tal caso retto dalla (1); ne viene che x', essendo inizialmente negativo, seguiterà a rimaner tale, finchè

$$\frac{2cx^{n+1}}{(n+1)A_0} + x^{n+2}P(x)$$

non passi per un valore nullo od infinito; frattanto la funzione x di t sarà decrescente. Ciò mostra che, per $-h < x < x_0$, la (1) può essere scritta:

$$dt = -\frac{dx}{\sqrt{\dfrac{2cx^{n+1}}{(n+1)A_0} + x^{n+2}P(x)}}\,,$$

il radicale intendendosi preso positivamente.

Mediante integrazione si ha:

$$t = -\int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\sqrt{\dfrac{2cx^{n+1}}{(n+1)A_0} + x^{n+2}P(x)}}\,,$$

donde infine apparisce che, al crescere di t da zero a

$$\int_{-h}^{x_0} \frac{dx}{\sqrt{\dfrac{2cx^{n+1}}{(n+1)A_0} + x^{n+2}P(x)}}\,,$$

il sistema passa dalla posizione $x = x_0$ alla posizione $x = -h$.

In modo affatto analogo si dimostra il teorema negli altri due casi ($c > 0$ e n pari o dispari); basta soltanto partire da valori positivi di x_0, x_0', legati sempre dalla (1').

XIX.

SUI NUMERI TRANSFINITI

NOTA I.

« Rend. Acc. Lincei », s. 5ª, vol. VII (1° sem. 1898).

pp. 91-96 (*).

In un lavoro, pubblicato alcuni anni or sono (1), mostrai come, con opportune convenzioni, si riesca a costruire un sistema di numeri finiti, infiniti ed infinitesimi, per cui valgono tutte le ordinarie regole di calcolo. Fui condotto a tale sistema, cercando di svolgere con indirizzo puramente aritmetico un'idea fondamentale del prof. VERONESE. I miei numeri tuttavia non sono atti a rappresentare l'intero edificio di VERONESE, ma ne comprendono (essendo per qualche rispetto più generali) solo una parte. Completo ora la mia ricerca, mostrando in qual modo si possa generare, per via di simboli, un sistema, nel cui tipo può farsi rientrare quello di VERONESE, e per cui conservano la loro validità tutte le ordinarie leggi dell'aritmetica.

Contro i procedimenti del prof. VERONESE sono state sollevate talune obbiezioni da critici eminenti. Se mi si concede di esprimere il mio modesto avviso, direi:

Le obbiezioni, prese in sè, sono generalmente giuste, ma non si possono applicare al sistema di Veronese, che è definito (specie per quanto si riferisce agli elementi infiniti d'ordine infinito) in modo alcun poco diverso da quello inteso dai critici, e sfugge così ai loro appunti.

Fu per certo il carattere eminentemente astratto dei concetti di VERONESE e la insolita forma di intuizione geometrica, di che egli seppe rivestirli, origine e alimento alle divergenze. Io mi lusingo che le mie osservazioni di carattere esclusivamente aritmetico parranno esenti da ogni

---

(*) Presentata dal Corrispondente GIUSEPPE VERONESE nella seduta del 20 Febbraio 1898.

(1) *Sugli infiniti ed infinitesimi attuali quali elementi analitici*, « Atti dell'Istituto Veneto », s. 7ª, t. IV, 1893. [In questo vol.: I, pp. 1–39].

difficoltà e contribuiranno a far cessare il malinteso, col mettere in luce per altra via il senso preciso delle ipotesi geometriche del prof. VERONESE.

Chieggo venia al lettore se l'indole delicata della questione mi obbligherà ad essere alquanto prolisso, sì da dedicare questa prima comunicazione ai preliminari, richiamando cose, dette già altrove, in modo non molto diverso. Seguirà in una Nota prossima la parte sostanziale della generalizzazione annunciata.

1. – Sia un insieme ordinato di elementi (numeri nel significato più generale della parola) e si intendano adottati i segni $>$ e $<$, per esprimere l'ordine degli elementi; si scriva cioè $b > a$, se, nell'insieme ordinato, a precede b, ecc. Si supponga di poter definire, per gli elementi dell'insieme, certe quattro operazioni, che si comportino come le fondamentali dell'aritmetica, per modo:

che gli elementi dell'insieme costituiscano un corpo rispetto alle operazioni stesse;

che valgano tutte le ordinarie regole di calcolo (incluse quelle delle disuguaglianze algebriche) ([2]).

Chiameremo *sistema* A (ovvero A', A'', ecc) un insieme siffatto.

Costituisce, per esempio, un sistema A l'insieme di tutti i numeri reali positivi e negativi, quando come criterio ordinativo si assuma quello della grandezza algebrica. Colla medesima convenzione si possono risguardare come sistemi A: l'insieme di tutti i numeri razionali, o più generalmente un qualsiasi corpo di numeri algebrici reali; infine l'insieme di elementi finiti, infiniti ed infinitesimi, che studiai nel citato mio scritto.

Non possiede invece tutti i requisiti di un sistema A l'insieme degli ordinari numeri reali e complessi (qualora si abbia riguardo soltanto alla grandezza dei rispettivi moduli); bisognerebbe aggiungere una qualche convenzione, atta a farli divenire un insieme ordinato.

Ci gioverà ancora di contraddistinguere con una denominazione speciale, *sistema* N (ovvero N', N'', ecc.) un insieme ordinato, il quale da un lato soddisfaccia a ipotesi meno restrittive di A, in quanto si esiga solamente che gli elementi dell'insieme costituiscano un corpo rispetto alla somma e alla sottrazione (valendo sempre, si intende, le ordinarie regole di calcolo); ma dall'altro verifichi una condizione di più. Si ammetta cioè sotto la forma seguente il così detto *assioma di* ARCHIMEDE: Se ω, ω' ed $\omega'' > \omega'$ sono tre elementi dell'insieme, esiste sempre un numero intero positivo k, tale che:

$$\omega < k(\omega'' - \omega') .$$

([2]) Cioè, per es., da $a > b$, $c > d$, segua $a + c > b + d$ e via dicendo.

Si intende che il simbolo $k(\omega'' - \omega')$ è soltanto un'abbreviatura della somma:

$$\overbrace{(\omega'' - \omega') + (\omega'' - \omega') + \ldots + (\omega'' - \omega')}^{k \text{ volte}},$$

cui, per le convenzioni poste, corrisponde effettivamente un elemento di N. A questo proposito si può osservare che tanto i sistemi A, quanto i sistemi N constano di un numero infinito di elementi e comprendono necessariamente lo zero. Infatti, se ω è un elemento di uno di questi sistemi, anche ω, 2ω, 3ω, ..., *ad infinitum* debbono appartenere all'insieme; del pari $\omega - \omega$, che è poi lo zero, per essersi ammessa la conservazione delle leggi formali.

Sono sistemi N tutti gli A, citati poc'anzi, ad eccezione dell'ultimo; si ha invece un esempio di sistema N (ma non A) nell'insieme di tutti i numeri interi positivi e negativi, col solito criterio ordinativo della grandezza algebrica; così i multipli di un qualsiasi numero reale, ecc.

2. – Dico che, assunti ad arbitrio un sistema A ed un sistema N, è possibile, con opportune convenzioni, costruire un nuovo sistema A' il quale:

1) comprende tra i suoi elementi tutti quelli di A;

2) ne comprende altri, che hanno, rispetto ai primi, carattere di infiniti e di infinitesimi.

Per questa costruzione, basta seguire l'identico metodo, che vale, quando A e N rappresentano l'insieme dei numeri reali (3).

Siano a, b, c, ecc., elementi di A; ν, μ, ϱ, ecc., elementi di N; un generico elemento si dirà, come di solito, positivo o negativo, secondochè esso sia $>$ o $<$ di zero.

Ciò posto, ad ogni coppia a_ν faccio corrispondere un nuovo elemento, che dico *monosemio*. Chiamo a la caratteristica, ν l'indice del monosemio. Risguardo il monosemio a_0 identico al primitivo elemento a di A; pongo di più $0_\nu = 0$, qualunque sia l'indice ν: in ogni altro caso, attribuisco alla eguaglianza di due monosemii il senso della identità.

Per ordinare l'insieme dei monosemii, procedo nel modo seguente.

Considero dapprima due monosemii a_ν e b_μ, le cui caratteristiche sieno entrambe positive o entrambe negative. Se $\nu = \mu$, pongo $a_\nu \gtreqless b_\mu$,

(3) Loc. cit., passim; ivi ho anche accennato (p. 45 [in questo vol. p. 33]) ad una estensione del procedimento al caso che A sia lo stesso sistema, da me costruito. Qui non faccio altro che applicare gli stessi principi, senza specializzare la natura del sistema.

secondochè $a \gtreqless b$; se invece ν è diverso da μ, pongo $a_\nu \gtrless b_\mu$, secondochè $\nu \gtrless \mu$.

Venendo al caso, in cui le caratteristiche a e b sono l'una, poniamo a, positiva o nulla, e l'altra b negativa o nulla, stabilisco sia $a_\nu > b_\mu$; va però esclusa l'ipotesi $a = b = 0$, per cui s'è posto $0_\mu = 0_\nu = 0$.

Si verifica senza difficoltà che queste definizioni permettono effettivamente di ordinare l'insieme dei monosemii; sono cioè soddisfatte le leggi caratteristiche dei segni $=$, $>$ e $<$. Per es., da $a_\nu > b_\mu$, $b_\mu > c_\varrho$, segue $a_\nu > c_\varrho$, e così via.

Consideriamo ora un insieme (finito o infinito) di elementi N, tale però che sia in ogni caso *finito* il numero di quelli tra essi, che superano un elemento ω dello stesso N, comunque si scelga ω. Chiameremo per brevità *ellittico* un insieme di tal natura; esso è necessariamente numerabile, o, in particolare, finito; anzi è manifesto che, facendo decrescere ω in N, se ne possono ordinare gli elementi (tra loro distinti) in una successione decrescente finita:

$$\nu^{(0)}, \quad \nu^{(1)}, \; \dots, \quad \nu^{(n)},$$

o decrescente indefinitamente

$$\nu^{(0)}, \quad \nu^{(1)}, \; \dots, \quad \nu^{(n)}, \; \dots$$

Si dimostra per questi insiemi ellittici:

Lemma I. Se $\nu^{(r)}$, $\mu^{(s)}$ $(r, s = 0, 1, \dots, n, \dots)$ costituiscono due insiemi ellittici, anche l'insieme di elemento generale $\nu^{(r)} + \mu^{(s)}$ è ellittico.

Lemma II. Nelle stesse condizioni è ellittico l'insieme di elemento generale:

$$(\nu^{(\tau)} - \mu^{(0)}) + (\mu^{(p_1)} - \mu^{(0)}) + (\mu^{(p_2)} - \mu^{(0)}) + \dots + (\mu^{(p_k)} - \mu^{(0)}),$$
$$(\tau, k, p_1, p_2, \dots, p_k = 0, 1, \dots, n, \dots).$$

La dimostrazione di questi due lemmi si fa come nella citata mia Nota. Ivi ho supposto che l'insieme N sia costituito da tutti i numeri reali, ma si constata immediatamente che intervengono nella dimostrazione soltanto proprietà, spettanti ad ogni N.

Risguarderò come nuovo ente (numero) un complesso di monosemii, *i cui indici siano distinti* e costituiscano un insieme ellittico. Come caso particolare rientrano in questa definizione i monosemii, i quali comprendono a lor volta gli elementi del sistema primitivo A (monosemii di indice zero). Designeremo con a', b', c', ecc., tali nuovi enti. *Essi costituiscono complessivamente un sistema A'.*

Le convenzioni, atte a ordinare il sistema e a definirne le operazioni fondamentali, la attendibilità di queste convenzioni e le loro principali conseguenze sono state discusse con dettaglio, nel predetto mio lavoro, per il caso che A e N constino di tutti i numeri reali; ognuno riconoscerà agevolmente che le ipotesi qui ammesse sui due sistemi bastano per il rigore del procedimento. Posso dunque limitarmi a ricordare le convenzioni.

Un numero a' sarà a ritenersi eguale a zero, se tutti i monosemii, che lo costituiscono, hanno caratteristica nulla.

Dati due numeri a' e b', si considerino i monosemii, che li costituiscono, nell'ordine decrescente degli indici; o le due successioni sono identiche, e allora porremo $a'= b'$; oppure si incontra in una di esse, poniamo in a', un primo monosemio a_ν, che non coincide col corrispondente b_μ (se quest'ultimo manca, il che può accadere, quando b' consta di un numero finito di elementi, lo si intenderà sostituito collo zero); risguarderemo $a' \gtrless b'$, secondochè $a_\nu \gtrless b_\mu$.

Per *somma algebrica* $a_\nu \pm b_\nu \pm c_\nu \pm \ldots$ *di un numero finito di monosemii, aventi il medesimo indice*, intendo il monosemio $(a \pm b \pm c \pm \ldots)_\nu$; *per somma algebrica di un numero finito di addendi* $a' \pm b' \pm c' \pm \ldots$ intendo il numero, che corrisponde all'insieme dei monosemii di tutti gli addendi. Siccome però, nella definizione di numero, ho supposto distinti gli indici dei monosemii, che lo costituiscono, così soddisferò a questa condizione, stabilendo di sostituire i monosemii, dotati di indice eguale, con la loro somma.

Chiamo *prodotto di due monosemii qualisivogliono* a_ν, b_μ il monosemio $(ab)_{\nu+\mu}$.

Siano rispettivamente $a^{(r)}_{\mu^{(r)}}$, $b^{(s)}_{\mu^{(s)}}$ $(r, s = 0, 1, \ldots, n, \ldots)$ i monosemii di due numeri a' e b'; chiamo *prodotto di* a' *per* b' quel numero c', i cui monosemii si ottengono, moltiplicando in tutti i modi possibili un monosemio di a' per uno di b', e avendo poi cura di sommare tra loro tutti i monosemii di indice eguale.

Il lemma I giustifica questa definizione.

La *divisione* si definisce come la operazione inversa della moltiplicazione. Il quoziente di due monosemii a_ν, b_μ è dunque $(a/b)_{\nu-\mu}$ (il divisore, e quindi b, si intende diverso da zero); per due numeri generali a' e b', se ne ordinano i monosemii, secondo la grandezza decrescente degli indici e si applica il solito algoritmo, che serve a trovare il quoziente di due polinomii.

Per il lemma II, i monosemii, che risultano in tal guisa, definiscono effettivamente un numero, il quale, moltiplicato per b', riproduce a'.

3. – Prendendo come sistema A l'insieme di tutti i numeri reali, come sistema N quello di tutti i numeri interi, si ha un A' sostanzialmente identico ai numeri di VERONESE finiti, infiniti e infinitesimi d'ordine finito (4). Per questi dunque (nè in ciò vi è controversia), valgono tutte le ordinarie ragioni di calcolo.

Quanto ai numeri, che rappresentano, secondo VERONESE, i segmenti più generali possibili sopra la retta (5), bisogna ricorrere, per averne l'equivalente aritmetico, ad un criterio costruttivo un po' più generale, che esporrò ben presto.

Noto intanto che, se si tratta solo di formare un sistema di tipo A, il quale, secondo il modo di dire abituale, comprenda elementi infiniti d'ordine infinito, basta applicare ripetutamente il procedimento, testè delineato, partendo, per esempio, dai numeri reali e assumendo ciascuna volta come sistema $\boldsymbol{N}$ ancora quello dei numeri reali. Dopo la prima operazione, abbiamo come sistema A' quello dei miei numeri, più volte menzionati, che si posson dire infiniti e infinitesimi d'ardine finito e generalizzano gli analoghi di VERONESE. Assumendo gli elementi di A' come caratteristiche e i numeri reali come indici si possono formare nuovi monosemii e con essi un sistema A''; nel medesimo modo si costruisce un A''' e così di seguito fino ad $A^{(n)}$, per n comunque grande. A partire da A'', ogni sistema contiene elementi con due o più indici sovrapposti, e questo è uno dei modi, con cui si può tradurre in simboli la esistenza di elementi infiniti d'ordine infinito. Ciò non ostante si han sempre insiemi chiusi rispetto a tutte le operazioni aritmetiche.

---

(4) *Fondamenti di geometria, ecc.*, Padova, 1891, nn. 87-89 e n. 121, p. 200.
(5) Ibidem, n. 91 e n. 121, p. 199.

NOTA II.

« Rend. Acc. Lincei », s. 5ª, vol. VII (1º sem. 1898),

pp. 113-121 (*)

4. – Prescindiamo, per i sistemi $\boldsymbol{N}$, dall'assioma di ARCHIMEDE, e indichiamoli, in tal condizione, con $\boldsymbol{M}$. Son questi evidentemente sistemi assai generali, richiedendosi soltanto che i loro elementi sieno ordinati e costituiscano un corpo rispetto alla somma e alla sottrazione, cioè, ripetiamolo ancora una volta, rispetto a due operazioni, comunque definite, che sieno algoritmicamente identiche alla somma e alla sottrazione, talchè i segni $>$ e $<$, $+$ e $-$ continuino a soddisfare alle regole ordinarie.

Ogni sistema di tipo A, ovvero di tipo $\boldsymbol{N}$ è senz'altro un $\boldsymbol{M}$, ma non reciprocamente.

Consideriamo, per esempio, i monosemii a_ν con indice e caratteristica reali. Ad ogni aggregato di monosemii, i cui indici costituiscano un insieme ellittico, si può far corrispondere, come sappiamo, un numero a' di un nuovo sistema di tipo A. Se ci limitiamo a quegli a', che constano (cioè, si può anche dire in questo caso, sono somma) di *un numero finito* di monosemii a caratteristica intera e indice intero e positivo (o nullo), abbiamo ancora un insieme ordinato $V^{(1)}$, i cui elementi formano un corpo rispetto alla somma, alla sottrazione e alla moltiplicazione [6]; dunque intanto un sistema di tipo $\boldsymbol{M}$. Esso non è però nè A, nè $\boldsymbol{N}$. Non è A, perchè in generale la divisione fa uscire dagli elementi dell'insieme; non è $\boldsymbol{N}$, poichè non vale l'assioma di ARCHIMEDE; e, per verità, fissiamo i tre elementi $\omega = 1_1$, $\omega' = 1$, $\omega'' = 2$. Si ha $\omega'' > \omega'$, ma, comunque si prenda il numero intero k, riman sempre (§ 2) $\omega > k(\omega'' - \omega')$.

Sia in generale ω un elemento di un sistema $\boldsymbol{M}$; anche $-\omega$ appartiene al sistema. Chiamerò, come di solito, valore assoluto di ω (e lo designerò con $|\omega|$) quello dei due numeri ω, $-\omega$, che non è negativo.

(*) Presentata dal corrispondente GIUSEPPE VERONESE nella seduta del 6 marzo 1898.

[6] È chiaro che $V^{(1)}$ coincide sostanzialmente col sistema dei numeri interi di VERONESE, infiniti di ordine finito; basterebbe designare ogni monosemio a_ν (dove a e ν si intendono ora interi e $\nu \geq 0$) con $a\infty_1^\nu$.

Due elementi non nulli ω ed ω' di M si diranno *finiti* tra di loro e si scriverà $\omega \doteq \omega'$, quando esiste un numero intero e positivo k, tale che il maggiore dei valori assoluti, poniamo $|\omega|$, sia più piccolo di $k|\omega'|$. Se non esiste un tal numero k, si dirà ω *infinito rispetto ad* ω' ($\omega \cdot\!> \omega'$), ovvero ω' *infinitesimo rispetto ad* ω ($\omega' <\!\cdot\, \omega$). Si vede facilmente che i segni $\doteq$, $\cdot\!>$ e $<\!\cdot$ si comportano al tutto come gli analoghi $=, >$ e $<$.

Fissato ad arbitrio un elemento ω di M, è sempre possibile immaginare un sistema di tipo N, che comprende ω ed è contenuto in M. Infatti tale sistema sarà per lo meno costituito dagli elementi:

$$\ldots, \; -2\omega, \; -\omega, \; 0, \; \omega, \; 2\omega, \; \ldots,$$

che formano un corpo rispetto alla somma e alla sottrazione e soddisfanno all'assioma di ARCHIMEDE (per esempio, sotto la forma, indicata a § 1). Se tutti gli elementi di M sono finiti con ω, lo stesso M è un N; in caso diverso esisterà un qualche elemento ω', non finito con ω, e potremo considerare un secondo sistema di tipo N, che lo comprende. Due tali sistemi non hanno, all'infuori dello zero, alcun elemento comune, anzi è manifesto che gli elementi non nulli dell'uno sono tutti infiniti, ovvero tutti infinitesimi, rispetto ad ogni elemento non nullo dell'altro. Chiamerò *indipendenti* due qualunque sistemi N', N'', che si trovino in questa condizione e scriverò $N' \cdot\!\gtrless\!\cdot N''$, secondochè gli elementi di N' sono infiniti od infinitesimi, rispetto a quelli di N''.

Ancora, denominerò *intero* un sistema M, se esiste una varietà, del resto qualunque, di sistemi N indipendenti (che dirò, per brevità, *generatori*), tali che ogni elemento di M sia somma di un numero finito di elementi di questi sistemi.

Nei sistemi interi rientrano come caso particolare quelli di tipo N che ammettono un unico sistema generatore e coincidono con esso. Intero è anche il sistema $V^{(1)}$, ricordato poc'anzi, i cui elementi risultano dalla somma di un numero finito di monosemii a_ν. Infatti tutti gli a_ν, che hanno un medesimo indice ν, costituiscono, al variare di a, un sistema di tipo N; a valori diversi dell'indice corrispondono sistemi indipendenti; sono dunque sistemi generatori i singoli a_ν, ν potendo assumere i valori 0, 1, 2, ...

5. – Vengo finalmente al punto essenziale di questo scritto, che è di generalizzare la deduzione di un sistema A' da un dato A, usufruendo di un sistema intero M, anzichè di un N, come si è fatto a § 2.

Sieno $a, b, \ldots$ elementi di A; $\nu, \mu, \ldots$ elementi di M. Formo in primo luogo i monosemii a_ν, adottando le stesse convenzioni ordinative e operative che a § 2. Definisco poi degli insiemi di elementi di $\boldsymbol{M}$ nel modo seguente:

Dati n sistemi generatori indipendenti $N^{(i)}$ $(i = 1, 2, ..., n)$ di $\boldsymbol{M}$ [7] e supposto, come è sempre permesso:

$$N^{(n)} \cdot\!> N^{(n-1)} \cdot\!> \dots \cdot\!> N^{(1)},$$

fisso in $N^{(n)}$ un insieme ellittico $\nu^{n)p_n}$ $(p_n = 0, 1, 2, ...)$; per ogni elemento $\nu^{n)p_n}$, un insieme ellittico $\nu^{n-1)p_n p_{n-1}}$ $(p_{n-1} = 0, 1, 2, ...)$ in $N^{(n-1)}$, e così di seguito; infine, per ogni elemento $\nu^{2)p_n p_{n-1} \dots p_2}$, un insieme ellittico $\nu^{1)p_n p_{n-1} \dots p_2 p_1}$ $(p_1 = 0, 1, 2, ...)$ in $N^{(1)}$. Chiamo *iperellittico d'ordine* n l'insieme Y di tutti gli elementi di $\boldsymbol{M}$, che risultano dalla somma di un $\nu^{n)p_n}$ con un $\nu^{n-1)p_n p_{n-1}}$, ..., con un $\nu^{1)p_n p_{n-1} \dots p_2 p_1}$.

Ad ogni insieme di monosemii, i cui indici costituiscono un insieme iperellittico, faccio corrispondere un nuovo ente a'. È possibile stabilire fra questi a' le relazioni di disuguaglianza e le operazioni aritmetiche in modo da avere ancora un sistema di tipo A?

La risposta è affermativa.

Per riconoscerlo, giova prima di tutto osservare come, dati due a' (o in generale un numero finito di essi), si può sempre ritenere che gli indici dei loro monosemii risultino dai medesimi sistemi generatori.

Siano infatti due numeri a' e b' e gli insiemi iperellittici corrispondenti, d'ordine rispettivo $m + h$, $m + k$, provengano dai sistemi generatori:

$$N'^{(1)}, N'^{(2)}, \dots, N'^{(m)}, \quad N''^{(1)}, N''^{(2)}, \dots, N''^{(h)};$$
$$N'^{(1)}, N'^{(2)}, \dots, N'^{(m)}, \quad N'''^{(1)}, N'''^{(2)}, \dots, N'''^{(k)},$$

di cui son messi in evidenza quelli comuni ai due insiemi, senza badare alle relazioni di infinità.

È chiaro che, facendo $m + h + k = n$ e designando $N'^{(1)}$ con $N^{(r_1)}$, $N^{(2)}$ con $N^{(r_2)}$, ..., $N'^{(m)}$ con $N^{(r_m)}$; $N''^{(1)}$ con $N^{(r_{m+1})}$, ..., $N''^{(h)}$ con $N^{(r_{m+h})}$; $N'''^{(1)}$ con $N^{(r_{m+h+1})}$, ..., $N'''^{(k)}$ con $N^{(r_n)}$ (dove le r_i si immaginano prese in guisa che riesca $N^{(n)} \cdot\!> N^{(n-1)} \cdot\!> \dots \cdot\!> N^{(1)}$), Y e Z si possono risguardare come insiemi iperellittici d'ordine n, corrispondenti ai medesimi sistemi generatori $N^{(1)}, N^{(2)}, ..., N^{(n)}$.

Basta ritenere, per ogni elemento di Y, nulle le $\nu^{r_{m+1})\dots}$, $\nu^{r_{m+2})\dots}$, ..., $\nu^{r_{m+h})\dots}$ (e prescinder quindi, nelle ν dei sistemi inferiori, dagli apici $p_{r_{m+1}}, p_{r_{m+2}}, ..., p_{r_{m+h}}$); per ogni elemento di Z, nulle invece le $\nu^{r_{m+h+1})\dots}$, $\nu^{r_{m+h+2})\dots}$, ..., $\nu^{r_n)\dots}$, (e prescindere analogamente dagli apici $p_{r_{m+h+1}}, ..., p_{r_n}$).

---

(7) L'intero n è affatto arbitrario, purchè, si capisce, non superiore al numero totale dei sistemi generatori di M, caso mai questi fossero in numero finito.

Ciò posto, considero l'insieme $\{ N^{(1)}, N^{(2)}, \ldots, N^{(n)} \}$ (che dirò *d'ordine n*) di tutti i numeri a', che corrispondono ad insiemi iperellittici costituiti coi sistemi generatori $N^{(1)}, N^{(2)}, \ldots, N^{(n)}$. Dico intanto che si possono adottare tali convenzioni da rendere questo sistema di tipo A.

Ammettiamo per un momento di aver dimostrata la cosa per i sistemi d'ordine $n-1$ ed in particolare per $\{ N^{(1)}, N^{(2)}, \ldots, N^{(n-1)} \}$, intendendo sempre $N^{(n)} > N^{(i)}$ $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$.

Se al sistema $\{ N^{(1)}, N^{(2)}, \ldots, N^{(n-1)} \}$ si applica la costruzione del § 2, assumendo come indici gli elementi di $N^{(n)}$, si trova, come sappiamo, un nuovo sistema di tipo A. Esso differisce da $\{ N^{(1)}, N^{(2)}, \ldots, N^{(n-1)}, N^{(n)} \}$ soltanto nella notazione ([8]), talchè basta convenire che in $\{ N^{(1)}, N^{(2)}, \ldots, N^{(n)} \}$ le regole ordinative e operative sono le stesse, per aver mezzo di estendere la proprietà enunciata ai sistemi d'ordine n, quando essa vale per quelli d'ordine $n-1$. Risalendo da $n-1$ a $n-2$, da $n-2$ a $n-3$, ecc., si è ricondotti ai sistemi di prim'ordine; e per questi risponde il § 2.

Ogni sistema $\{ N^{(1)}, N^{(2)}, \ldots, N^{(n)} \}$ è dunque di tipo A. Bisogna tuttavia accertare, affinchè riesca appieno giustificato il procedimento, che i monosemii a_ν $(\nu = \nu^{1)} + \nu^{2)} + \ldots + \nu^{n)})$ si comportano effettivamente come si è stabilito in principio di questo paragrafo, seguono cioè le stesse regole, valide pei monosemii, che provengono da un solo sistema di tipo N.

Qui ancora, basta ammettere la cosa per i monosemii, di $\{ N^{(1)}, N^{(2)}, \ldots, N^{(n-1)} \}$, che allora la si prova subito per i monosemii di $\{ N^{(1)}, N^{(2)}, \ldots, N^{(n-1)}, N^{(n)} \}$.

Sieno $a' = a_{y+\nu^{n)}}$, $b' = b_{z+\mu^{n)}}$ (con a e b elementi di A, $y = \nu^{1)} + \nu^{2)} + \ldots + \nu^{n-1)}$, $z = \mu^{1)} + \mu^{2)} + \ldots + \mu^{n-1)}$) due monosemii di $\{ N^{(1)}, N^{(2)}, \ldots, N^{(n)} \}$.

Ponendo $\mathfrak{a} = a_y$, $\mathfrak{b} = b_z$, dovremo, secondo il convenuto, considerare i monosemii $\mathfrak{a}_{\nu^{n)}}$, $\mathfrak{b}_{\mu^{n)}}$, e ricavare da essi le norme, che reggono gli elementi corrispondenti a', b'.

Le relazioni di disuguaglianza tra a' e b' dovranno dunque stabilirsi come segue:

1) $\mathfrak{a}$ e $\mathfrak{b}$ del medesimo segno e $\nu^{n)} = \mu^{n)}$:

$$a' \gtreqless b', \quad \text{secondochè} \quad \mathfrak{a} \gtreqless \mathfrak{b} ;$$

([8]) Infatti la forma generale dei monosemii dei due sistemi è $a_{\nu^{1)} + \nu^{2)} + \ldots + \nu^{n-1)} + \nu^{n)}}$, per l'uno, $\left(a_{\nu^{1)} + \nu^{2)} + \ldots + \nu^{n-1)}}\right)_{\nu^{n)}}$, per l'altro; differiscono dunque soltanto nella notazione quei monosemii, che corrispondono agli stessi elementi a, $\nu^{1)}$, $\nu^{2)}$, ..., $\nu^{n)}$. È manifesto dopo ciò che ogni insieme di monosemii di un sistema, diviene, cambiando solo la notazione, insieme di monosemii dell'altro sistema; in particolare un numero dell'uno si cambia in un numero dell'altro. Conviene aggiungere, per giustificare quest'ultimo asserto, che le condizioni, sotto cui un insieme di monosemii dà luogo ad un numero, sono effettivamente le stesse, in entrambi i casi.

2) $\mathfrak{a}$ e $\mathfrak{b}$ del medesimo segno e $\nu^{n)} \gtrless \mu^{n)}$:

$$a' \gtrless b', \quad \text{secondochè} \quad \nu^{n)} \gtrless \mu^{n)} ;$$

3) $\mathfrak{a}$ e $\mathfrak{b}$ entrambi nulli:

$$a' = b' = 0 ;$$

4) $\mathfrak{a}$ e $\mathfrak{b}$ di segno opposto e non entrambi nulli; detto $\mathfrak{a}$ quello non negativo:

$$a' > b' .$$

Per essersi ammesso che $\mathfrak{a}$ e $\mathfrak{b}$ si comportano come monosemii di caratteristiche a, b e di indici y, z l'ipotesi « $\mathfrak{a}$ e $\mathfrak{b}$ del medesimo o di opposto segno » significa che sono del medesimo o di opposto segno a e b, e le relazioni $\mathfrak{a} \gtreqqless \mathfrak{b}$ vanno interpretate in due modi diversi, secondochè $y = z$, ovvero $y \lessgtr z$. Nella prima ipotesi (notando che, per la indipendenza dei sistemi generatori, le due eguaglianze $y = z$, $\nu^{n)} = \mu^{n)}$ si possono raccogliere nell'unica $y + \nu^{n)} = z + \mu^{n)}$) si ha da 1):

1^bis) a e b del medesimo segno e $y^{n)} + \nu^{n)} = z + \mu^{n)}$:

$$a' \gtreqqless b', \quad \text{secondochè} \quad a \gtreqqless b .$$

Nella seconda ipotesi, la 1) stessa ci dice che, per a e b dello stesso segno e $\nu^{n)} = \mu^{n)}$, è $a' \lessgtr b'$, secondochè $y \gtrless z$, o, se si vuole, $y + \nu^{n)} \gtrless z + \mu^{n)}$. Questo caso e quello contemplato da 2) si possono raccogliere nella proposizione:

2^bis) a e b del medesimo segno e $y + \nu^{n)} \gtrless z + \mu^{n)}$:

$$a' \gtrless b', \quad \text{secondochè} \quad y + \nu^{n)} \gtrless z + \mu^{n)} .$$

Infatti, se $\nu^{n)} = \mu^{n)}$, da $y + \nu^{n)} \gtrless z + \mu^{n)}$, segue $y \gtrless z$, e ricadiamo nella seconda parte di 1); se invece $\nu^{n)} \gtrless \mu^{n)}$, per essere y e z infinitesimi rispetto a $\nu^{n)}$ e $\mu^{n)}$, si ha $y + \nu^{n)} \gtrless z + \mu^{n)}$ assieme a $\nu^{n)} \gtrless \mu^{n)}$, e quindi il caso 2).

A 3) e 4) si attribuisce senz'altro la forma equivalente:

3^bis) a e b entrambi nulli:

$$a' = b' = 0 ,$$

4^bis) a e b di segno opposto e non entrambi nulli; supposto a quello non negativo:

$$a' > b' .$$

Le proposizioni $1^{\text{bis}})$, $2^{\text{bis}})$, $3^{\text{bis}})$, $4^{\text{bis}})$ esprimono precisamente che i monosemii, desunti da un sistema intero $\boldsymbol{M}$, si comportano, rispetto all'ordine, come quelli, che provengono da un $\boldsymbol{N}$.

Verifichiamo ancora la regola di moltiplicazione, mostriamo cioè che il prodotto di $a' = a_{y+\nu^{n)}}$ per $b' = b_{z+\mu^{n)}}$ è:

$$a'b' = (ab)_{y+z+\nu^{n)}+\mu^{n)}}\,.$$

Avremo, per definizione, che $a'b'$ è quell'elemento di $\{\boldsymbol{N}^{(1)}, \boldsymbol{N}^{(2)}, \ldots, \boldsymbol{N}^{(n)}\}$, che corrisponde al prodotto di $\mathfrak{a}_{\nu^{n)}}$ per $\mathfrak{b}_{\mu^{n)}}$. Ora:

$$\mathfrak{a}_{\nu^{n)}}\mathfrak{b}_{\mu^{n)}} = (\mathfrak{a}\,\mathfrak{b})_{\nu^{n)}+\mu^{n)}} = (a_y b_z)_{\nu^{n)}+\mu^{n)}} = \left[(ab)_{y+z}\right]_{\nu^{n)}+\mu^{n)}}\,,$$

e al monosemio $\left[(ab)_{y+z}\right]_{\nu^{n)}+\mu^{n)}}$ corrisponde precisamente il monosemio $(ab)_{y+z+\nu^{n)}+\mu^{n)}}$ di $\{\boldsymbol{N}^{(1)}, \boldsymbol{N}^{(2)}, \ldots, \boldsymbol{N}^{(n)}\}$.

Si vede facilmente che m qualunque sistemi generatori $\boldsymbol{N}^{(r_1)}$, $\boldsymbol{N}^{(r_2)}$, ..., $\boldsymbol{N}^{(r_m)}$ di un $\{\boldsymbol{N}^{(1)}, \boldsymbol{N}^{(2)}, \ldots, \boldsymbol{N}^{(n)}\}$ determinano un sistema $\{\boldsymbol{N}^{(r_1)}, \boldsymbol{N}^{(r_2)}, \ldots, \boldsymbol{N}^{(r_m)}\}$, contenuto in $\{\boldsymbol{N}^{(1)}, \boldsymbol{N}^{(2)}, \ldots, \boldsymbol{N}^{(n)}\}$. Ne viene che le relazioni fra due o più a' hanno carattere invariantivo rispetto a tutti i possibili sistemi $\{\boldsymbol{N}^{(1)}, \boldsymbol{N}^{(2)}, \ldots, \boldsymbol{N}^{(n)}\}$, in cui questi a' si immaginino contenuti.

Ciò permette di risguardare l'insieme di tutti gli a' come un sistema di tipo A.

6. – Ad illustrazione del procedimento, testè delineato, prendiamo per sistema A i numeri reali, per sistema $\boldsymbol{M}$ il $V^{(1)}$ del § 4. I sistemi generatori sono del tipo a_ν (dove ν è fisso ed a può assumere tutti i valori interi); fissiamone due: $\boldsymbol{N}^{(1)} = a_\nu$, $\boldsymbol{N}^{(2)} = b_\mu$ $(\mu > \nu)$, e consideriamo il sistema $\{\boldsymbol{N}^{(1)}, \boldsymbol{N}^{(2)}\}$.

Essendo $c^{(ij)}$, $\gamma^{(ij)}$ numeri reali arbitrarii, e $a_\nu^{(ij)} + b_\mu^{(i)}$, $\alpha_\nu^{(ij)} + \beta_\mu^{(i)}$ $(i, j = 0, 1, 2, \ldots)$ due insiemi iperellittici provenienti dai sistemi $\boldsymbol{N}^{(1)}$, $\boldsymbol{N}^{(2)}$:

$$a' = \sum_{0}^{\infty}{}_{ij}\left(c^{(ij)}\right)_{a_\nu^{(ij)} + b_\mu^{(i)}}\,,$$

$$b' = \sum_{0}^{\infty}{}_{ij}\left(\gamma^{(ij)}\right)_{\alpha_\nu^{(ij)} + \beta_\mu^{(i)}}$$

rappresenteranno [9] due generici numeri del sistema $\{\boldsymbol{N}^{(1)}, \boldsymbol{N}^{(2)}\}$.

---

(9) Si avverta che il simbolo sommatorio serve soltanto a rappresentare in modo comodo l'aggregato dei monosemii, che costituiscono un numero. Esso acquista effettivo significato di *somma*, solo quando i monosemii stessi sieno in numero finito; *formalmente però si comporta come una somma*. Ciò risulta dai §§ 2 e 5.

Come si confronteranno tra loro? Dovremo ricorrere agli aggregati:

$$\sum_0^\infty {}_j \left(c^{(ij)}\right)_{a_\nu^{(ij)} + b_\mu^{(i)}},$$

$$\sum_0^\infty {}_j \left(\gamma^{(ij)}\right)_{\alpha_\nu^{(ij)} + \beta_\mu^{(i)}},$$

che corrispondono ad un medesimo valore di i, risguardandoli in sostanza come monosemii, i cui indici sieno rispettivamente $b_\mu^{(i)}$, $\beta_\mu^{(i)}$ e le caratteristiche i numeri di $\{N^{(1)}\}$:

$$\mathfrak{a}^{(i)} = \sum_0^\infty {}_j \left(c^{(ij)}\right)_{a_\nu^{(ij)}},$$

$$\mathfrak{b}^{(i)} = \sum_0^\infty {}_j \left(\gamma^{(ij)}\right)_{\alpha_\nu^{(ij)}}.$$

Si incomincierà col fare $i = 0$, poi, 1, poi 2, ecc.; o le due successioni $\mathfrak{a}_{b_\mu^{(i)}}^{(i)}$, $\mathfrak{b}_{\beta_\mu^{(i)}}^{(i)}$ riusciranno identiche e allora $a' = b'$, o vi sarà una prima coppia $\mathfrak{a}_{b_\mu^{(i)}}^{(i)}$, $\mathfrak{b}_{\beta_\mu^{(i)}}^{(i)}$ di elementi diversi, e allora $a' \gtrless b'$, secondochè $\mathfrak{a}_{b_\mu^{(i)}}^{(i)} \gtrless \mathfrak{b}_{\beta_\mu^{(i)}}^{(i)}$.

Come esempio di operazione, calcoliamo il quoziente di $a' = 1$ per $b' = 1_1 - u_0 - v_{1-1_1}$ (u e v essendo quantità reali arbitrarie). I sistemi generatori $N^{(1)}$, $N^{(2)}$ sono i monosemii di indice 0 ed 1. Per eseguire la divisione, bisogna porre:

$$\mathfrak{a} = 1_0, \quad \mathfrak{b} = 1_1 - u_0, \quad \mathfrak{c} = v_1;$$

$$a' = \mathfrak{a}_0, \quad b' = \mathfrak{b}_0 - \mathfrak{c}_{-1_1},$$

ed operare su questi colle solite regole (§ 2). Ciò dà:

$$\frac{a'}{b'} = \sum_0^\infty {}_i \left(\frac{\mathfrak{c}^i}{\mathfrak{b}^{i+1}}\right)_{-i_1}.$$

Essendo $\mathfrak{c}$ e $\mathfrak{b}$ numeri di $\{N^{(1)}\}$, va applicato analogo criterio per il calcolo di un generico termine

$$\frac{\mathfrak{c}^i}{\mathfrak{b}^{i+1}} = v_i^i \frac{1}{(1_1 - u_0)^{i+1}}.$$

Ora si ha:

$$\frac{1}{(1_1 - u_0)^{i+1}} = 1_{-(i+1)} \sum_i^\infty {}_j \binom{i}{j} u^{i-j}_{-(j-i)},$$

quindi:

$$\frac{\mathfrak{c}^i}{\mathfrak{b}^{i+1}} = 1_{-1} v^i \sum_i^\infty {}_j \binom{i}{j} u^{j-i}_{-(j-i)}.$$

Se si porta questo valore nella espressione precedente di a'/b', e si ripassa al sistema $\{ N^{(1)}, N^{(2)} \}$, lasciando in evidenza il fattore 1_{-1}, si trova in definitiva:

$$\frac{a'}{b'} = 1_{-1} \sum_0^\infty {}_i \sum_j^\infty {}_i \left\{ \binom{j}{i} u^{j-i} v^i \right\}_{-(j-i)-i_1}.$$

7. – Riprendiamo il sistema $V^{(1)}$ e combiniamolo col sistema A dei numeri reali, secondo le norme del § 5. Ne otterremo un $A^{(1)}$ e da esso potremo cavare un $V^{(2)}$, che comprende tutti e soli quegli a', per cui:

1) L'insieme iperellittico corrispondente consta di un numero *finito* di elementi *positivi* $y = \nu^{n)p_n} + \nu^{n-1)p_n p_{n-1}} + ... + \nu^{1)p_n p_{n-1} \cdots p_1}$ (talchè gli apici p_i variano da 0 a un limite superiore determinato s_i, e, in ogni y, la prima delle ν, che non è nulla, è positiva).

2) Le caratteristiche dei relativi monosemii a_y sono intere.

Tale $V^{(2)}$ (che comprenda in sè il primitivo $V^{(1)}$) è a sua volta un sistema $\boldsymbol{M}$ intero, da cui, assumendo sempre come A i numeri reali, si può dedurre un $A^{(2)}$. Le stesse limitazioni, con cui da $A^{(1)}$ si passa a $V^{(2)}$, danno ora un $V^{(3)}$ e così di seguito ([10]).

Si può pensare l'insieme V di tutte le $V^{(i)}$ $(i = 1, 2, ...)$ (o, ciò che è lo stesso, in quanto ciascuna $V^{(i)}$ comprende quelle, che la precedono, l'insieme limite di $V^{(i)}$ per $i = \infty$); anche questo è un sistema intero. Infatti ogni elemento deve, per definizione, appartenere a qualche $V^{(i)}$ e, come tale, risultare da un numero finito di sistemi generatori.

La classe (II) *dei numeri interi del prof.* VERONESE *equivale a* V.

A questo punto si è facilmente tratti a ritenere che, applicando ai numeri reali la costruzione del § 5, con V per sistema intero $\boldsymbol{M}$, risulti un A', che rappresenti completamente il continuo rettilineo di VERONESE. Se ne è in realtà molto vicini, ma bisogna ancora una volta ampliare il sistema A', introducendo nuovi elementi.

([10]) Secondo la notazione di VERONESE, $V^{(2)}$ sarebbe il sistema, che si ottiene dal simbolo Z, supponendovi μ infinito d'ordine finito (cfr. *Fondamenti*, ecc., p. 107; si badi che Z consta in ogni caso di un numero *finito* di addendi). Dallo stesso simbolo Z, usufruendo i numeri di $V^{(2)}$, si han quelli di $V^{(3)}$, ecc.

Giova frattanto rilevare che lo stesso A' rispecchia una forma ad una dimensione, per cui valgono le ipotesi I-VII ([11]) di VERONESE, ma non l'VIII ([12]).

8. – Per abbracciare anche quest'ultima, si procede nel modo seguente. Un numero di A' si dice *appartenente al sistema* $N^{(i)}$, se $N^{(i)}$ è il più elevato dei suoi sistemi generatori, e se di più, negli indici dei singoli monosemii, l'addendo $\nu^{(i)}$ è negativo (non nullo). In tale condizione, gli indici stessi sono negativi e il numero si presenta come un infinitesimo, il cui ordine è in certa guisa misurato dal detto sistema generatore $N^{(i)}$.

Ciò posto, si consideri una successione $a'^{(1)}, a'^{(2)}, a'^{(3)}, \dots$ di elementi di A', e si supponga che, scelto ad arbitrio un elemento ω in V, la differenza $a'^{(h)} - a'^{(k)}$ $(h, k < n)$ *appartenga, da un certo* n *in avanti, a degli* $N^{(hk)} > \omega$. Diremo che la differenza $a'^{(h)} - a'^{(k)}$ diventa *indefinitamente piccola in senso assoluto* e chiameremo *convergente* una successione ([13]), i cui elementi godono di questa proprietà.

Ad ognuna di esse potrà farsi corrispondere un nuovo elemento l ([14]). Si converrà che l sia eguale ad un a' allora e solo allora che, nella corrispondente successione, gli elementi, a partire da un certo, sono eguali a questo a'.

Nulla di più facile che estendere al complesso degli a' e degli l le relazioni di disuguaglianza e le operazioni aritmetiche in modo da costituirne un sistema A'' di tipo A.

Basta riportarsi a quanto si fa nell'algebra elementare per i numeri irrazionali, con questo vantaggio che la convergenza in senso assoluto delle nostre successioni permette di procedere in modo assai più semplice e spedito, senza neanche rendere necessario, o almeno opportuno (come avviene nel campo ordinario) di sostituire ad un'unica successione due classi contigue, ovvero una ripartizione di DEDEKIND.

Il sistema A'' fa perfetto riscontro alla forma fondamentale del prof. VERONESE. Per questo, valgono tutte le ordinarie regole di calcolo; conservano dunque per quella la loro validità tutte le ordinarie costruzioni geometriche. In particolare la geometria proiettiva, come già ebbe a notare il prof. VERONESE.

([11]) Cfr. pp. 67, 84, 92, 106, 128, 147.

([12]) Pag. 150.

([23]) Sarebbe, per esempio, convergente (usando la nomenclatura di VERONESE) la successione:

$$1,\ 1+\frac{1}{\infty_1},\ 1+\frac{1}{\infty_1}+\frac{1}{\infty_1\,\infty_1},\ 1+\frac{1}{\infty_1}+\frac{1}{\infty_1\,\infty_1}+\frac{1}{\infty_1\infty\cdot\infty_1},\ \dots .$$

([14]) Questa convenzione sostituisce l'ipotesi VIII di VERONESE. Volendo mantenere l'analogia, anche nella forma, si potrebbe sostituire alla successione $a'^{(1)}, a'^{(2)}, \dots$ una coppia di classi contigue (in senso assoluto).

XX.

SULLA INTEGRAZIONE DELL' EQUAZIONE $\Delta_2\Delta_2 u = 0$.

« Atti Acc. Torino », vol. XXXIII (1897–1898), pp. 932-956.

La integrazione dell'equazione $\Delta_2\Delta_2 u = 0$ entro un'area piana semplicemente connessa, per dati valori al contorno di u e della sua derivata normale, venne effettuata in modo completo soltanto per contorni di forma molto particolare (¹).

È mio proposito di mostrare anzitutto (§ 1) come la questione possa in ogni caso essere ricondotta:

1) alla rappresentazione conforme dell'area data sopra un cerchio;

2) alla risoluzione di un certo sistema (Ω) di infinite equazioni lineari con infinite incognite.

Con ciò il problema si potrebbe, almeno dal punto di vista teorico, ritenere esaurito, se si sapessero assegnare le incognite del sistema (Ω): ma la cosa non è senz'altro fattibile, rimanendo tale sistema fuor della cerchia, trattata finora col metodo dei determinanti infiniti (²).

È dunque necessario studiare da vicino il sistema (Ω).

Premesso (§ 2) un criterio generale assai semplice, per risolvere i sistemi lineari infiniti a mezzo di successive approssimazioni (³), passo

(¹) Cfr. principalmente: É. MATHIEU, *Mémoire sur l'équation aux différences partielles...* « Journal de Mathématiques », 2ª série, t. XIV, 1869; O. VENSKE, *Zur integration der Gleichung* $\Delta\Delta u = 0$ *für ebene Bereiche,* « Göttinger Nachrichten », 1891; G. LAURICELLA, *Integrazione dell'equazione* $\Delta^2(\Delta^2 u) = 0$ *in un campo di forma circolare,* in questi « Atti », vol. XXXI, 1896; E. ALMANSI, *Sulla integrazione dell'equazione* $\Delta^2\Delta^2 = 0$, ibidem. I risultati generali, stabiliti dal sig. LAURICELLA per le equazioni della elasticità, inducono, a mio credere, la persuasione che sia possibile estendere anche all'equazione $\Delta_2\Delta_2 u = 0$ il metodo di NEUMANN della media aritmetica, ma la teoria è ancora da edificare.

(²) Veggasi: T. CAZZANIGA, *Sui determinanti d'ordine infinito,* « Annali di Matematica », 1897. Si riconoscerebbe facilmente che il nostro sistema (Ω) non rientra nei tipi risoluti dall'Autore (Cap. XIV, nn. 1, 7, 8).

(³) Il Prof. VOLTERRA ha avuto la bontà di comunicarmi un metodo di risoluzione, di cui già da tempo egli era in possesso. La via delle approssimazioni successive, qui seguita, è apparentemente diversa, ma in sostanza coincide con quella proposta dal Prof. VOLTERRA.

a indagarne le condizioni di applicabilità al sistema (Ω). Non mi è riuscito di stabilire in generale la validità effettiva del procedimento, ma solo (§ 3) introducendo una considerevole restrizione sulla natura del contorno. Rimane ciò non pertanto una classe ben ampia di aree piane, per cui si è messi in grado di condurre a termine la ricerca. A ciò è dedicato il § 4. Il § 5 contiene due esempi, che mi sembrano notevoli per la loro generalità.

Del resto io vorrei che il lettore risguardasse la classe di contorni, in tal modo circoscritta, piuttosto come una illustrazione del metodo che come la sua definitiva portata, sembrandomi assai verosimile che il campo di validità ne sia di gran lunga più esteso.

Mi si conceda di aggiungere che il procedimento, di cui qui è parola, porta ad una espressione della funzione incognita u relativamente molto semplice. Essa si presenta come somma di due integrali, uno semplice e uno doppio, che dipendono direttamente dai dati del problema e dal parametro di rappresentazione conforme dell'area, che si considera. L'integrale doppio contiene *linearmente* le costanti, provenienti dalla risoluzione del sistema (Ω).

1. – Sia data nel piano x', y' un'area semplicemente connessa σ'; designi s' il contorno, p' la normale diretta verso l'interno. Si tratta di assegnare una funzione u finita e continua assieme alle sue derivate dei primi quattro ordini in ogni punto di σ', la quale soddisfaccia entro σ' alla equazione:

$$\Delta_2'\Delta_2' u = 0 \,, \tag{1}$$

$$\left(\Delta_2' = \frac{\partial^2}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2}{\partial y'^2}\right),$$

e sul contorno s' alle:

$$u = \varphi \,, \tag{2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial p'} = \psi \,, \tag{3}$$

in cui φ e ψ rappresentano due funzioni continue dei punti del contorno, comunque assegnate.

Consideriamo in un secondo piano x, y (eventualmente sovrapposto al primo) il cerchio σ di raggio 1 col centro nell'origine delle coordinate; poniamo poi $z = x + iy$, $z' = x' + iy'$, $z' = f(z)$, intendendo che f stabilisca la rappresentazione conforme del cerchio sopra l'area σ'.

Se si immagina di sostituire alle variabili x', y' le nuove variabili x, y mediante la trasformazione $z' = f(z)$, risulterà:

$$dx'^2 + dy'^2 = H^2(dx^2 + dy^2)\,,$$

con $H(x, y) = |f'(z)|$; quindi $dp' = H dp$ (essendo dp' e dp elementi lineari normali rispettivamente ad s' e alla circonferenza); e, per la nota teoria dei parametri differenziali:

$$\Delta_2' u = \frac{\partial^2 u}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y'^2} = \frac{1}{H^2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = \frac{1}{H^2}\,\Delta_2 u\,.$$

Ciò posto, risguardando u quale funzione dei punti x, y del cerchio, avremo:

$$(1^{\text{bis}})\qquad \Delta_2\left(\frac{1}{H^2}\,\Delta_2 u\right) = 0\,,$$

entro il cerchio σ;

$$(2^{\text{bis}})\qquad u = \varphi\,,$$

$$(3^{\text{bis}})\qquad \frac{\partial u}{\partial p} = H\psi\,,$$

sopra la circonferenza, dove i valori di φ e ψ in un punto qualunque della circonferenza sono quelli fissati per il punto corrispondente di s'.

La (1^{bis}) ci dice che $(1/H^2)\Delta_2 u$ è una funzione armonica (regolare, per la natura stessa di u e di H, nei punti interni a σ). Perciò, introducendo le coordinate polari ϱ e θ, potremo porre:

$$(4)\qquad w(\varrho, \theta) = \frac{1}{H^2}\,\Delta_2 u = \alpha_0 + \sum_1^\infty \varrho^m \{\, \alpha_m \cos m\theta + \beta_m \operatorname{sen} m\theta \,\}\,,$$

le α e β essendo per ora indeterminate. La (1^{bis}) diviene così:

$$(1^{\text{ter}})\qquad \Delta_2 u = H^2 w(\varrho, \theta)\,.$$

Se si ammette che $H^2 w(\varrho, \theta)$ sia integrabile nel cerchio di raggio 1 (il dubbio può sorgere, perchè nulla si sa a priori circa il comportamento di H^2 e di $w(\varrho, \theta)$ per $\varrho = 1$), alla (1^{ter}) e alla (2^{bis}) si soddisfa, come ben si sa, definendo u mediante l'equazione:

$$(5)\qquad u(\varrho_1, \theta_1) = -\frac{1}{2\pi}\int_0^1 \varrho\, d\varrho \int_0^{2\pi} GH^2 w(\varrho, \theta)\, d\theta - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{\partial G}{\partial \varrho}\right)_{\varrho=1}\varphi\, d\theta\,,$$

in cui G rappresenta la funzione di GREEN, cioè:

$$G = \log\sqrt{1 + \varrho^2\varrho_1^2 - 2\varrho\varrho_1\cos(\theta-\theta_1)} + \log\frac{1}{\sqrt{\varrho^2 + \varrho_1^2 - 2\varrho\varrho_1\cos(\theta-\theta_1)}}\,,$$

Tutto si riduce oramai a determinare w in modo che riesca sulla circonferenza $-\partial u/\partial\varrho_1 = H\psi$.

Per evitare ogni discussione, facciamo l'ipotesi che il contorno s' dell'area, originariamente assegnata, abbia in ogni punto un raggio di curvatura finito e quindi che la funzione H si conservi finita e derivabile (la derivata soddisfacendo alle condizioni di DIRICHLET) anche nei punti della circonferenza; supponiamo di più che la funzione φ sia dotata di derivata prima e seconda, la ψ almeno di derivata prima, soddisfacenti esse pure alle condizioni di DIRICHLET lungo s'.

Risulta da ciò che φ ed $H\psi$ possono essere rappresentate sopra la circonferenza mediante serie di Fourier:

$$(6)\qquad \left\{\begin{aligned} \varphi(\theta_1) &= \frac{1}{2}p_0' + \sum_1^\infty{}_n\,(p_n'\cos n\theta_1 + q_n'\,\mathrm{sen}\, n\theta_1)\,,\\ H(1,\theta_1)\psi(\theta_1) &= \frac{1}{2}p_0 + \sum_1^\infty{}_n\,(p_n''\cos n\theta_1 + q_n''\,\mathrm{sen}\, n\theta_1)\,,\end{aligned}\right.$$

i cui coefficienti p_n', q_n'; p_n'', q_n'' riescono in valore assoluto rispettivamente minori di M/n^3, M/n^2 $(n = 1, 2, \ldots)$, M designando una opportuna costante.

In tale condizione avremo senz'altro:

$$-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{\partial G}{\partial\varrho}\right)_{\varrho=1}\varphi\, d\theta = \frac{1}{2}p_0' + \sum_1^\infty{}_n\,\varrho_1^n\{p_n'\cos n\theta_1 + q_n'\,\mathrm{sen}\, n\theta_1\}\,,$$

$$\frac{1}{2\pi}\left[\frac{\partial}{\partial\varrho_1}\int_0^{2\pi}\left(\frac{\partial G}{\partial\varrho}\right)_{\varrho=1}\varphi\, d\theta\right]_{\varrho_1=1} = -\sum_1^\infty{}_n\, n\{p_n'\cos n\theta_1 + q_n'\,\mathrm{sen}\, n\theta_1\}\,,$$

e la (5), derivando, ci darà:

$$(5') \qquad \left(-\frac{\partial u}{\partial \varrho_1}\right)_{\varrho_1=1} = \frac{1}{2\pi} \lim_{\varrho_1=1} \int_0^1 \varrho\, d\varrho \int_0^{2\pi} \frac{\partial G}{\partial \varrho_1} H^2 w(\varrho, \theta)\, d\theta - \\ - \sum_1^\infty {}_n\, n\{ p'_n \cos n\theta_1 + q'_n \operatorname{sen} n\theta_1 \}.$$

Ammettiamo, salvo a verificarlo a posteriori, che sia lecito sostituire nella (5′) a

$$\lim_{\varrho_1=1} \int_0^1 \varrho\, d\varrho \int_0^{2\pi} \frac{\partial G}{\partial \varrho_1} H^2 w(\varrho, \theta)\, d\theta\,, \qquad \int_0^1 \varrho\, d\varrho \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial G}{\partial \varrho_1}\right)_{\varrho_1=1} H^2 w(\varrho, \theta)\, d\theta\,;$$

e a $-(\partial G/\partial \varrho_1)_{\varrho_1=1}$ il suo sviluppo $1 + 2 \sum_1^\infty {}_n\, \varrho^n \cos n(\theta - \theta_1)$, nonchè eseguire termine a termine l'integrazione rispetto a ϱ.

Si ottiene in tal modo

$$\left(-\frac{\partial u}{\partial \varrho_1}\right)_{\varrho_1=1} = -\frac{1}{2\pi} \int_0^1 \varrho\, d\varrho \int_0^{2\pi} H^2 w(\varrho, \theta)\, d\theta \\ - \sum_1^\infty {}_n \frac{1}{\pi} \int_0^1 \varrho^{n+1}\, d\varrho \int_0^{2\pi} H^2 w(\varrho, \theta) \cos n(\theta - \theta_1)\, d\theta \\ - \sum_1^\infty {}_n\, n\{ p'_n \cos n\theta_1 + q_n \operatorname{sen} n\theta_1 \}.$$

Di qua, ricordando che dev'essere:

$$\left(-\frac{\partial u}{\partial \varrho_1}\right)_{\varrho_1=1} = H\psi = \frac{1}{2} p_0 + \sum_1^\infty {}_n (p''_n \cos \theta_1 + q''_n \operatorname{sen} n\theta_1)\,,$$

e ponendo per brevità:

$$(7) \qquad \begin{cases} p_n = p''_n + np'_n\,, \\ q_n = q''_n + nq'_n\,, \end{cases} \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

segue identicamente:

$$(8)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^1 \varrho^{n+1}\,d\varrho \int_0^{2\pi} H^2 w(\varrho, \theta) \cos n\theta\, d\theta = -\, p_n\,, \quad (n = 0, 1, 2, \ldots); \\[2ex] \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^1 \varrho^{n+1}\,d\varrho \int_0^{2\pi} H^2 w(\varrho, \theta) \operatorname{sen} n\theta\, d\theta = -\, q_n\,, \quad (n = 1, 2, \ldots)\,. \end{cases}$$

È dunque necessario che la funzione armonica w soddisfaccia a queste equazioni funzionali.

Per $\varrho \leqslant 1 - \varepsilon$ (ε positivo e piccolo a piacere), la serie (4) è uniformemente convergente; dunque:

$$(9)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_0^{2\pi} H^2 w(\varrho, \theta) \cos n\theta\, d\theta = \alpha_0 \int_0^{2\pi} H^2 \cos n\theta\, d\theta \\ \qquad + \displaystyle\sum_1^\infty{}_m\, \varrho^m \left\{ \alpha_m \int_0^{2\pi} H^2 \cos n\theta \cos m\theta\, d\theta + \beta_m \int_0^{2\pi} H^2 \cos n\theta \operatorname{sen} m\theta\, d\theta \right\}, \\ \displaystyle\int_0^{2\pi} H^2 w(\varrho. \theta) \operatorname{sen} n\theta\, d\theta = \alpha_0 \int_0^{2\pi} H^2 \operatorname{sen} n\theta\, d\theta \\ \qquad + \displaystyle\sum_1^\infty{}_m\, \varrho^m \left\{ \alpha_m \int_0^{2\pi} H^2 \operatorname{sen} n\theta \cos m\theta\, d\theta + \beta_m \int_0^{2\pi} H^2 \operatorname{sen} n\theta \operatorname{sen} m\theta\, d\theta \right\}. \end{cases}$$

Ora:

$$\cos m\theta \cos n\theta = \frac{1}{2} \{ \cos (m + n)\theta + \cos (m - n)\theta \}\,,$$

$$\cos n\theta \operatorname{sen} m\theta = \frac{1}{2} \{ \operatorname{sen} (m + n)\theta + \operatorname{sen} (m - n)\theta \}\,, \quad \text{ecc.},$$

e siccome, in virtù delle ipotesi fatte su H,

$$\int_0^{2\pi} H^2 \cos (m \pm n)\theta\, d\theta\,, \quad \int_0^{2\pi} H^2 \operatorname{sen} (m \pm n)\theta\, d\theta\,,$$

rimangono, anche per $\varrho = 1$, inferiori in valore assoluto al quoziente di un numero finito per $(m - n)^2$ $(m \gtrless n)$, mentre (a patto di verificarlo a tempo debito) possiamo ritenere α_m, β_m inferiori ad un numero pure finito, così le serie dei secondi membri convergono uniformemente rispetto a ϱ in tutto l'intervallo $(0, 1)$. Ne viene che le (9) sussistono anche per $\varrho = 1$ e che si può valersene per trasformare le (8), integrando termine a termine.

Troviamo così:

$$\alpha_0 \frac{1}{\pi}\int_0^1 \varrho^{n+1} d\varrho \int_0^{2\pi} H^2 \cos n\theta \, d\theta + \sum_1^\infty {}_m \left\{ \alpha_m \frac{1}{\pi}\int_0^1 \varrho^{n+m+1} d\varrho \int_0^{2\pi} H^2 \cos n\theta \cos m\theta \, d\theta \right.$$
$$\left. + \beta_m \frac{1}{\pi}\int_0^1 \varrho^{n+m+1} d\varrho \int_0^{2\pi} H^2 \cos n\theta \operatorname{sen} m\theta \, d\theta \right\} = - p_n ,$$

$$\alpha_0 \frac{1}{\pi}\int_0^1 \varrho^{n+1} d\varrho \int_0^{2\pi} H^2 \operatorname{sen} n\theta \, d\theta + \sum_1^\infty {}_m \left\{ \alpha_m \frac{1}{\pi}\int_0^1 \varrho^{n+m+1} d\varrho \int_0^{2\pi} H^2 \operatorname{sen} n\theta \cos m\theta \, d\theta \right.$$
$$\left. + \beta_m \frac{1}{\pi}\int_0^1 \varrho^{n+m+1} d\varrho \int_0^{2\pi} H^2 \operatorname{sen} n\theta \operatorname{sen} m\theta \, d\theta \right\} = - q_n ,$$

o, più concisamente, ponendo:

$$(10) \quad \left\{ \begin{aligned}
&\frac{\int_0^1 \varrho^{n+m+1} d\varrho \int_0^{2\pi} H^2 \cos n\theta \cos m\theta \, d\theta}{\int_0^1 \varrho^{2n+1} d\varrho \int_0^{2\pi} H^2 \cos^2 n\theta \, d\theta} = a_{2n,\,2m} , \quad (n, m = 0, 1, 2, \ldots), \\
&\frac{\int_0^1 \varrho^{n+m+1} d\varrho \int_0^{2\pi} H^2 \cos n\theta \operatorname{sen} m\theta \, d\theta}{\int_0^1 \varrho^{2n+1} d\varrho \int_0^{2\pi} H^2 \cos^2 n\theta \, d\theta} = a_{2n,\,2m-1} , \quad (n=0, 1, 2, \ldots ;\ m=1, 2, \ldots), \\
&\frac{\int_0^1 \varrho^{n+m+1} d\varrho \int_0^{2\pi} H^2 \operatorname{sen} n\theta \cos m\theta \, d\theta}{\int_0^1 \varrho^{2n+1} d\varrho \int_0^{2\pi} H^2 \operatorname{sen}^2 n\theta \, d\theta} = a_{2n-1,\,2m} , \quad (n=1, 2, \ldots ;\ m=0, 1, 2, \ldots), \\
&\frac{\int_0^1 \varrho^{n+m+1} d\varrho \int_0^{2\pi} H^2 \operatorname{sen} n\theta \operatorname{sen} m\theta \, d\theta}{\int_0^1 \varrho^{2n+1} d\varrho \int_0^{2\pi} H^2 \operatorname{sen}^2 n\theta \, d\theta} = a_{2n-1,\,2m-1} , \quad (n, m = 1, 2, \ldots) ;
\end{aligned} \right.$$

$$
(11) \qquad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{-p_n}{\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^1 \varrho^{2n+1}\,d\varrho \int_0^{2\pi} H^2 \cos^2 n\theta\,d\theta} = v_{2n}\,, \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots\ ),\\
&\frac{-q_n}{\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^1 \varrho^{2n+1}\,d\varrho \int_0^{2\pi} H^2 \operatorname{sen}^2 n\theta\,d\theta} = v_{2n-1}, \qquad (n = 1, 2, \ldots);
\end{aligned}
\right.
$$

$$
(12) \qquad \left\{
\begin{aligned}
&\alpha_m = x_{2m}\,, \qquad (m = 0, 1, 2, \ldots),\\
&\beta_m = x_{2m-1}\,, \qquad (m = 1, 2, \ldots)\,.
\end{aligned}
\right.
$$

$$
(13) \qquad \sum_0^\infty{}_j\, a_{i,j} x_j = v_i\,, \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots).
$$

Le a e le v, come si rileva dalle (6), (7), (10), (11), sono costanti conosciute (e finite, perchè i divisori, che intervengono nelle (10), (11), sono essenzialmente diversi da zero).

Se si può risolvere il sistema lineare infinito (13) e i valori, che si trovano per le x_i, cioè, in causa delle (12), per le α e β, *ammettono un limite superiore finito e definiscono una* $w(\varrho, \theta)$ *integrabile nel cerchio di raggio* 1 *e tale che*:

$$
\lim_{\varrho_1=1} \int_0^1 \varrho\,d\varrho \int_0^{2\pi} -\frac{\partial G}{\partial \varrho_1} H^2 w(\varrho, \theta)\,d\theta = \int_0^1 \varrho\,d\varrho \int_0^{2\pi} H^2 w(\varrho, \theta)\,d\theta
$$
$$
+ 2 \sum_1^\infty{}_n \int_0^1 \varrho^{n+1}\,d\varrho \int_0^{2\pi} H^2 w(\varrho, \theta) \cos n(\theta - \theta_1)\,d\theta\,,
$$

siam fatti certi, eseguendo a ritroso le operazioni indicate, che la funzione u, definita dalla (5), soddisfa alle (1^{bis}), (2^{bis}), (3^{bis}); basta allora esprimere u a mezzo di x', y', per avere la funzione inizialmente richiesta.

L'unica difficoltà consiste pertanto nella determinazione delle costanti x_j dal sistema (13), il quale, osservando che $a_{i,i} = 1$, può anche essere scritto:

$$
(\Omega) \qquad x_i = v_i - \sum_0^{i-1}{}_j\, a_{i,j} x_j - \sum_{i+1}^\infty{}_j\, a_{i,j} x_j\,, \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots).
$$

Ad esso si riattaccano le seguenti considerazioni generali.

2. – Definiamo delle approssimazioni successive delle incognite x_i, prendendo:

$$(14)\qquad \begin{cases} x_i^{(0)} = v_i\,, & (i = 0, 1, 2, \ldots)\,, \\ x_i^{(1)} = v_i - \sum_0^{i-1}{}_j\, a_{i,j} x_j^{(1)} - \sum_{i+1}^{\infty}{}_j\, a_{i,j} x_j^{(0)}, & (i = 0, 1, 2, \ldots)\,, \end{cases}$$

e in generale:

$$(15)\qquad x_i^{(n)} = v_i - \sum_0^{i-1}{}_j\, a_{i,j} x_j^{(n)} - \sum_{i+1}^{\infty}{}_j\, a_{i,j} x_j^{(n-1)}\,, \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots;\ n = 1, 2, \ldots),$$

con che, ammessa la convergenza delle serie dei secondi membri, riescono individuate le approssimazioni di dato ordine $x_i^{(n)}$ per mezzo di quelle d'ordine anteriore, purchè si abbia cura di fare *successivamente* $i = 0, 1, 2, \ldots$.

Se le $x_i^{(n)}$ tendono per $n = \infty$ a limiti finiti e determinati x_i, atti a rendere convergenti le serie $\sum_{i+1}^{\infty}{}_j\, a_{i,j} x_j$, le (15) mostrano senz'altro che detti limiti sono le soluzioni del sistema proposto.

Un caso notevole per l'applicazione, che abbiamo in vista, è quello, in cui le a e le v soddisfanno a disuguaglianze del tipo

$$(16)\qquad |a_{i,j}| < A\lambda^{|i-j|}\,, \qquad (i, j = 0, 1, 2, \ldots;\ i \gtrless j),$$

$$(17)\qquad |v_i| < \frac{B}{(i+g)^s}\,, \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots),$$

$$(18)\qquad 2A\frac{\lambda}{1-\lambda} < 1\,,$$

con A, B, g, s numeri positivi finiti e $\lambda < 1$.

Si osserverà che, aumentando convenientemente B, è sempre possibile immaginare g abbastanza grande perchè sia soddisfatta, assieme alla (18), la:

$$(18')\qquad 2A\frac{\lambda\left(1+\dfrac{1}{g}\right)^s}{1-\lambda\left(1+\dfrac{1}{g}\right)^s} < 1\,.$$

Dico che in questo caso il metodo delle approssimazioni successive riesce completamente.

Cominciamo coll'osservare che le (15), avuto riguardo alle (14), dànno:

$$x_i^{(n)} - x_i^{(n-1)} = -\sum_0^{i-1}{}_j\, a_{i,j}(x_j^{(n)} - x_j^{(n-1)}) - \sum_{i+1}^{\infty}{}_j\, a_{i,j}(x_j^{(n-1)} - x_j^{(n-2)}),$$

ovvero anche, ponendo per brevità:

$$(19) \qquad y_i^{(0)} = v_i, \quad y_i^{(n)} = x_i^{(n)} - x_i^{(n-1)}, \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots;\ n = 1, 2, \ldots),$$

$$(15') \qquad y_i^{(n)} = -\sum_0^{i-1}{}_j\, a_{i,j} y_j^{(n)} - \sum_{i+1}^{\infty}{}_j\, a_{i,j} y_j^{(n-1)}, \quad (i = 0, 1, 2, \ldots;\ n = 1, 2, \ldots).$$

A giustificazione del nostro asserto conviene provare:

a) che le serie $\sum_{i+1}^{\infty}{}_j\, a_{i,j} v_j$ convergono (e ciò risulta immediatamente dalle (16) e (17));

b) che le y, definite per ricorrenza dalle (15′), rendono convergenti le serie $\sum_{i+1}^{\infty}{}_j\, a_{i,j} y_j^{(n-1)}$;

c) che le $x_i^{(n-1)}$, cioè, per le (19), $y_i^{(0)} + y_i^{(1)} + \ldots + y_i^{(n-1)}$, rendono convergenti le serie $\sum_{i+1}^{\infty}{}_j\, a_{i,j} x_j^{(n-1)}$;

d) che le $x_i^{(n)}$ tendono, per $n = \infty$, a limiti finiti e determinati, ossia che sono convergenti le serie $\sum_0^{\infty}{}_n\, y_i^{(n)}$;

e) che le somme x_i di tali serie rendono a lor volta convergenti le serie $\sum_{i+1}^{\infty}{}_j\, a_{i,j} x_j$.

Le proposizioni *b*), *c*), *d*), *e*) sono vere, come tosto si riconosce, quando si abbia, per esempio,

$$|y_i^{(n)}| < \frac{B}{(i+g)^s}\, \eta^n,$$

con

$$\eta = \left(\frac{g}{g+1}\right)^s < 1.$$

Potremo così limitarci a stabilire questa formula, che, a tenore delle (11) e (19), sta intanto per $n = 0$.

Si immagini di averla provata per $y_i^{(n-1)}$ $(i = 0, 1, 2, \ldots)$ e per $y_j^{(n)}$ $(j < i)$; sarà necessario e sufficiente far vedere che essa sussiste anche per $y_i^{(n)}$.

Le (15′) porgono:

$$|y_i^{(n)}| < AB\eta^n \sum_0^{i-1}{}_j \frac{\lambda^{i-j}}{(j+g)^s} + AB\eta^{n-1} \sum_{i+1}^{\infty}{}_j \frac{\lambda^{j-i}}{(j+g)^s},$$

mentre si ha ovviamente:

$$\sum_{i+1}^{\infty}{}_j \frac{\lambda^{j-i}}{(j+g)^s} < \frac{1}{(i+g)^s} \frac{\lambda}{1-\lambda} < \frac{1}{(i+g)^s} \frac{\eta \dfrac{\lambda}{\eta}}{1-\dfrac{\lambda}{\eta}},$$

$$\sum_0^{i-1}{}_j \frac{\lambda^{i-j}}{(j+g)^s} = \frac{1}{(i+g)^s} \sum_0^{i-1}{}_j \frac{\lambda^{i-j}}{\dfrac{(j+g)^s}{(j+g+1)^s} \dfrac{(j+g+1)^s}{(j+g+2)^s} \cdots \dfrac{(i-1+g)^s}{(i+g)^s}},$$

donde anche, per essere $\eta = (g/g+1)^s$ e quindi più piccola di $(g+1/g+2)^s$, $(g+2/g+3)^s$, ecc.

$$\sum_0^{i-1}{}_j \frac{\lambda^{i-j}}{(j+g)^s} \leqslant \frac{1}{(i+g)^s} \sum_0^{i-1}{}_j \left(\frac{\lambda}{\eta}\right)^{i-j} < \frac{1}{(i+g)^s} \frac{\dfrac{\lambda}{\eta}}{1-\dfrac{\lambda}{\eta}}.$$

Dopo ciò la disuguaglianza precedente diviene:

$$|y_i^{(n)}| < \frac{B\eta^n}{(i+g)^s} \frac{2A\dfrac{\lambda}{\eta}}{1-\dfrac{\lambda}{\eta}} = \frac{B\eta^n}{(i+g)^s}\, 2A \frac{\lambda\left(1+\dfrac{1}{g}\right)^s}{1-\lambda\left(1+\dfrac{1}{g}\right)^s},$$

e, in virtù della (18′), assume l'aspetto voluto:

$$|y_i^{(n)}| < \frac{B\eta^n}{(i+g)^s}.$$

Di qua si deducono per le incognite $x_i = \sum_0^\infty {}_n\, y_i^{(n)}$ le condizioni:

$$|x_i| < \frac{B}{(i+g)^s} \sum_0^\infty {}_n\, \eta^n = \frac{B}{(i+g)^s} \frac{1}{1-\eta}, \tag{20}$$

che sono della medesima natura di quelle ammesse per i secondi membri v_i.

3. – Ritornando al particolare sistema (Ω), donde abbiam preso le mosse, vogliamo ora occuparci di caratterizzare una classe di aree σ', per cui si trovano soddisfatte le condizioni (16) e (18).

Suppongasi in primo luogo che il contorno sia costituito da una sola linea analitica. Per un teorema di SCHWARZ [4], la funzione $z' = f(z)$ (di cui al § 1) è allora prolungabile analiticamente al di là di ogni punto della circonferenza di raggio 1; esistono quindi circonferenze di raggio $1/\lambda^3 > 1$, entro e sopra le quali la funzione si mantiene regolare. Vedremo ben presto quale partito si può trarre da questa circostanza.

Poniamo intanto:

$$f'(z) = \sum_0^\infty {}_n\, c_n z^n ,$$

ovvero, mettendo in evidenza la parte reale e la parte immaginaria:

$$f'(z) = \sum_0^\infty {}_n\, (\gamma_n + i\delta_n)\varrho^n e^{in\theta}.$$

Se si cambia i in $-i$ e si moltiplica membro a membro, risulta:

$$H^2(\varrho, \theta) = |f'(z)|^2 = \sum_0^\infty {}_{n\nu} \{ (\gamma_n\gamma_\nu + \delta_n\delta_\nu) - i(\gamma_n\delta_\nu - \delta_n\gamma_\nu)\}\, \varrho^{n+\nu} e^{i(n-\nu)\theta} ,$$

che, ordinata per i seni e coseni d'archi multipli di θ, ove si faccia per brevità:

$$\left\{\begin{aligned} h_\mu(\varrho) &= \varrho^\mu \sum_0^\infty {}_\nu\, (\gamma_{\mu+\nu}\gamma_\nu + \delta_{\mu+\nu}\delta_\nu)\varrho^{2\nu} , \\ k_\mu(\varrho) &= \varrho^\mu \sum_0^\infty {}_\nu\, (\gamma_{\mu+\nu}\delta_\nu - \delta_{\mu+\nu}\gamma_\nu)\varrho^{2\nu} , \end{aligned}\right. \qquad (\mu = 0, 1, 2, \ldots), \tag{21}$$

---

[4] É. PICARD, *Traité d'Analyse*, $2^{\text{ème}}$ éd., Gauthier-Villars, Paris, 1904, t. II, chap. X.

assume l'aspetto:

$$H^2(\varrho, \theta) = h_0(\varrho) + 2 \sum_1^\infty{}_\mu \{ h_\mu(\varrho) \cos \mu\theta + k_\mu(\varrho) \operatorname{sen} \mu\theta \} . \tag{22}$$

Si designi ora con L il massimo dei valori assoluti, assunti da $f'(z)$ sopra la circonferenza di raggio $1/\lambda^2$; sarà, come è ben noto,

$$|c_n| \leqslant L\lambda^{3n} ,$$

quindi anche:

$$|\gamma_\nu - i\delta_\nu| \leqslant L\lambda^{3\nu} ,$$

$$|\gamma_{\mu+\nu} + i\delta_{\mu+\nu}| \leqslant L\lambda^{3\mu+3\nu} ,$$

$$|(\gamma_{\mu+\nu}\gamma_\nu + \delta_{\mu+\nu}\delta_\nu) + i(\gamma_{\mu+\nu}\delta_\nu - \delta_{\mu+\nu}\gamma_\nu)| \leqslant L^2\lambda^{3\mu+6\nu} ,$$

e per conseguenza:

$$|\gamma_{\mu+\nu}\gamma_\nu + \delta_{\mu+\nu}\delta_\nu| \leqslant L^2\lambda^{3\mu+6\nu} ,$$

$$|\gamma_{\mu+\nu}\delta_\nu - \delta_{\mu+\nu}\gamma_\nu| \leqslant L^2\lambda^{3\mu+6\nu} .$$

Dopo ciò, le (21) porgono:

$$|h_\mu(\varrho)| \leqslant L^2\lambda^{3\mu}\varrho^\mu \sum_0^\infty{}_\nu \lambda^{6\nu}\varrho^{2\nu} \leqslant \frac{L^2\lambda^{3\mu}\varrho^\mu}{1 - \lambda^6\varrho^2} ,$$

$$|k_\mu(\varrho)| \leqslant L^2\lambda^{3\mu}\varrho^\mu \sum_0^\infty{}_\nu \lambda^{6\nu}\varrho^{2\nu} \leqslant \frac{L^2\lambda^{3\mu}\varrho^\mu}{1 - \lambda^6\varrho^2} ,$$

o, intendendovi $\varrho < 1$, addirittura:

$$\left\{ \begin{aligned} |h_\mu(\varrho)| &< \frac{L^2\lambda^{3\mu}\varrho^\mu}{1-\lambda^6} , \\ |k_\mu(\varrho)| &< \frac{L^2\lambda^{3\mu}\varrho^\mu}{1-\lambda^6} . \end{aligned} \right. \qquad (\mu = 0, 1, 2, \ldots). \tag{23}$$

Riprendiamo le posizioni (10) e trasformiamole a mezzo delle (22). Otterremo:

$$
(10')\quad\left\{
\begin{aligned}
a_{2n,2m} &= \frac{\pi\int\limits_0^1 \varrho^{n+m+1}\{h_{n+m}(\varrho)+h_{|n-m|}(\varrho)\}\,d\varrho}{\int\limits_0^1 \varrho^{2n+1}\,d\varrho\int\limits_0^{2\pi} H^2\cos^2 n\theta\,d\theta}, \qquad (n,\ m=0,1,2,\ldots),\\
a_{2n,2m-1} &= \frac{\pi\int\limits_0^1 \varrho^{n+m+1}\{k_{n+m}(\varrho)\pm k_{|n-m|}(\varrho)\}\,d\varrho}{\int\limits_0^1 \varrho^{2n+1}\,d\varrho\int\limits_0^{2\pi} H^2\cos^2 n\theta\,d\theta}, \quad (n=0,1,2,\ldots;\ m=1,2,\ldots),\\
a_{2n-1,2m} &= \frac{\pi\int\limits_0^1 \varrho^{n+m+1}\{k_{n+m}(\varrho)\mp k_{|n-m|}(\varrho)\}\,d\varrho}{\int\limits_0^1 \varrho^{2n+1}\,d\varrho\int\limits_0^{2\pi} H^2\,\mathrm{sen}^2 n\theta\,d\theta}, \quad (n=1,2,\ldots;\ m=0,1,2,\ldots),\\
a_{2n-1,2m-1} &= \frac{\pi\int\limits_0^1 \varrho^{n+m+1}\{h_{|n-m|}(\varrho)-h_{n+m}(\varrho)\}\,d\varrho}{\int\limits_0^1 \varrho^{2n+1}\,d\varrho\int\limits_0^{2\pi} H^2\,\mathrm{sen}^2 n\theta\,d\theta}, \qquad (n,\ m=1,2,\ldots),
\end{aligned}
\right.
$$

dove van presi i segni superiori o gli inferiori secondochè $m \lessgtr n$.

Di qua si deducono agevolmente dei limiti superiori per le a.

Consideriamo, per fissar le idee, il primo gruppo delle (10′). Sia l_1 il limite inferiore dei valori assoluti, assunti da $f'(z)$ entro il cerchio di raggio 1 (limite inferiore, che è, per la univocità della corrispondenza fra z' e z, essenzialmente diverso da zero). Si avrà:

$$H^2(\varrho,\theta) \geqslant l_1^2,$$

e

$$\int\limits_0^1 \varrho^{2n+1}\,d\varrho\int\limits_0^{2\pi} H^2\cos^2 n\theta\,d\theta \geqslant l_1^2\int\limits_0^1 \varrho^{2n+1}\,d\varrho\int\limits_0^{2\pi}\cos^2 n\theta\,d\theta = \frac{\pi l_1^2}{2n+2};$$

d'altra parte, avendo riguardo alle (23), per $n > m$:

$$\pi\left|\int\limits_0^1 \varrho^{n+m+1}\{\,h_{n+m}(\varrho)+h_{|n-m|}(\varrho)\,\}\,d\varrho\right| <$$

$$< \frac{\pi L^2}{1-\lambda^6}\,\lambda^{3(n-m)}\left\{\lambda^{6m}\int\limits_0^1 \varrho^{2n+2m+1}\,d\varrho + \int\limits_0^1 \varrho^{2n+1}\,d\varrho\right\} < \frac{\pi}{2n+2}\,\frac{2L^2}{1-\lambda^6}\,\lambda^{3(n-m)},$$

e per $n < m$:

$$\pi \left| \int_0^1 \varrho^{n+m+1} \{ h_{n+m}(\varrho) + h_{|n-m|}(\varrho) \} \, d\varrho \right| <$$

$$< \frac{\pi L^2}{1-\lambda^6} \lambda^{3(m-n)} \left\{ \lambda^{6n} \int_0^1 \varrho^{2n+m+1} \, d\varrho + \int_0^1 \varrho^{2m+1} \, d\varrho \right\} < \frac{\pi}{2m+2} \, \frac{2L^2}{1-\lambda^6} \lambda^{3(m-n)},$$

quindi in entrambi i casi:

$$\pi \left| \int_0^1 \varrho^{n+m+1} \{ h_{n+m}(\varrho) + h_{|n-m|}(\varrho) \} \, d\varrho \right| < \frac{\pi}{2n+2} \, \frac{2L^2}{1-\lambda^6} \lambda^{|3n-3m|} .$$

Se ne inferisce:

$$\text{(24)} \qquad |a_{2n,2m}| < \frac{2L^2}{l_1^2(1-\lambda^6)} \lambda^{|3n-3m|} , \qquad (n \gtrless m);$$

in modo analogo, badando che $k_0(\varrho) = 0$, si trova:

$$\text{(25)} \qquad \left. \begin{array}{l} |a_{2n,\,2m-1}| \\ |a_{2n-1,\,2m}| \end{array} \right\} < \frac{2L^2}{l_1^2(1-\lambda^6)} \lambda^{|3n-3m|} , \qquad \text{per} \quad n \gtrless m ,$$

e:

$$\left. \begin{array}{l} |a_{2n,2n-1}| \\ |a_{2n-1,2n}| \end{array} \right\} < \frac{L^2}{l_1^2(1-\lambda^6)} \lambda^{6n} < \frac{2L^2}{l_1^2(1-\lambda^6)} \lambda , \quad \text{per} \quad m = n > 0 ,$$

$$a_{2\,1} = a_{1\,2} = 0 , \qquad \text{per} \quad m = n = 0 ;$$

cioè in ogni caso:

$$\text{(26)} \qquad \left. \begin{array}{l} |a_{2n,\,2n-1}| \\ |a_{2n-1,\,2n}| \end{array} \right\} < \frac{2L^2}{l_1^2(1-\lambda^6)} \lambda , \quad \text{per} \quad m = n ;$$

infine:

$$\text{(27)} \qquad |a_{2n-1,2m-1}| < \frac{2L^2}{l_1^2(1-\lambda^6)} \lambda^{|3n-3m|} .$$

Dalle (24), (25), (26), (27) si raccoglie con tutta facilità (basta passare in rassegna i diversi casi possibili e notare che, per $m \lesseqgtr n$, $\lambda^{|3n-m|}$ è certamente minore di $\lambda^{|2n-2m|}$ e di $\lambda^{|2n-2m\pm 1|}$):

$$(28) \qquad |a_{i,j}| < \frac{2L^2}{l_1^2(1-\lambda^6)} \lambda^{|i-j|}, \quad (i, j = 0, 1, 2, ...; \; i \gtrless j).$$

Questa disuguaglianza corrisponde alla (16) del caso generale; per stabilirla, ci è stata sufficiente l'ipotesi che il contorno dell'area σ' consti di una sola curva analitica. Altra cosa è per la (18), che assume ora l'aspetto:

$$(29) \qquad 4\frac{L^2}{l_1^2} \frac{\lambda}{(1-\lambda^6)(1-\lambda)} < 1,$$

e dà luogo, come ben si vede, ad una condizione parecchio restrittiva circa la forma del contorno. Dacchè infatti il fattore L^2/l_1^2 è maggiore di $(1-\lambda^3)^2$ ([5]), bisogna per lo meno che sia

$$\lambda < \frac{1}{4} \frac{(1-\lambda^6)(1-\lambda)}{(1-\lambda^3)^2} < \frac{1}{4} \frac{1-\lambda^6}{1-\lambda^3} = \frac{1+\lambda^3}{4} < \frac{1+\lambda}{4},$$

quindi $\lambda < 1/3$ e $1/\lambda^3 > 27$, cioè la funzione $f(z)$ deve mantenersi regolare fin oltre la circonferenza di raggio 27.

Una disuguaglianza un po' meno restrittiva si ha quando l'area data possiede un asse di simmetria. In questo caso è sempre possibile ([6]) stabilire la rappresentazione conforme in modo che l'asse di simmetria della figura corrisponda all'asse delle x, o, se si vuole, in modo che la funzione $f(z)$ abbia i coefficienti reali .Le (21) e (10') portano allora a concludere che $a_{2n,2m-1}$, $a_{2n-1,2m}$ si annullano identicamente. Il sistema lineare da risolvere, rimettendo per x_{2m}, x_{2m-1}; α_m, β_m, si scinde in:

$$\sum_0^\infty{}_m \, a_{2n,2m}\,\alpha_m = v_{2n}, \qquad (n = 0, 1, 2, ...),$$

e

$$\sum_1^\infty{}_m \, a_{2n-1,2m-1}\,\beta_m = v_{2n-1}, \qquad (n = 1, 2, ...);$$

([5]) Questo si ricava facilmente, osservando che, se L è il massimo dei valori assoluti di $f'(z)$ per $|z| = 1/\lambda^3$, il modulo di $f'(z)$, per z compreso entro il cerchio di raggio 1, non può superare $L/(1-\lambda^3)$, quindi $l_1 < L/(1-\lambda^3)$ e per consegienza $L^2/l_1^2 < 1/(1-\lambda^3)^2$.

([6]) Cfr. H. A. Schwarz, *Ueber einige Abbildungsaufgaben*, « Crelle's Journal », B. LXX, 1869.

ai quali sistemi, ponendo:

$$\begin{aligned} a_{2n\,2m} &= a'_{n,m}\,, && (n, m = 0, 1, 2, \ldots), \\ a_{2n-1\,2m-1} &= a''_{n,m}\,, && (n, m = 1, 2, \ldots); \\ v_{2n} &= v'_n\,, && (n \quad = 0, 1, 2, \ldots), \\ v_{2n-1} &= v''_n\,, && (n \quad = 1, 2, \ldots), \end{aligned}$$

può essere attribuita la forma:

$$\sum_0^\infty{}_j\, a'_{i,j}\,\alpha_j = v'_i\,, \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots),$$

$$\sum_0^\infty{}_j\, a''_{i,j}\,\beta_j = v''_i\,, \qquad (i = 1, 2, \ldots).$$

Consideriamone uno qualunque; il primo, per es., e notiamo che, dalle posizioni testè fatte e dalle (24), segue senz'altro:

$$|a'_{n\,m}| = |a_{2n\,2m}| < \frac{2L^2}{l_1^2(1-\lambda^6)}\,\lambda^{|3n-3m|}\,, \qquad (n \gtrless m),$$

o, ciò che è lo stesso:

$$(28') \qquad |a'_{ij}| < \frac{2L^2}{l_1^2(1-\lambda^6)}\,\lambda^{3|i-j|}\,, \quad (i\,j = 0, 1, 2, \ldots;\ i \gtrless j),$$

la quale, confrontata colla (16), ci mostra che il λ è qui sostituito da λ^3, per cui la condizione, che tien luogo della (29) si cangia in:

$$(29') \qquad 4\,\frac{L^2}{l_1^2}\,\frac{\lambda^3}{(1-\lambda^6)(1-\lambda^3)} < 1\,.$$

Partendo dal secondo sistema $\sum_1^\infty{}_j\, a''_{i,j}\,\beta_j = v''_i$, si perviene evidentemente alla medesima disuguaglianza.

Per essa, $\lambda^3 < 1/3$ (non occorre, come prima, $\lambda < 1/3$), quindi non è più a priori indispensabile che $f(z)$ si mantenga regolare fin oltre la circonferenza di raggio 27, ma solo che questo abbia luogo fin oltre la circonferenza di raggio 3.

4. – In questo § si considereranno esclusivamente aree σ', per cui sia possibile, prendendo λ in modo opportuno, soddisfare alla disuguaglianza (29) (o rispettivamente alla (29')) nel caso della simmetria).

Si tratta di fissare in modo definitivo, per codeste aree, la validità del nostro procedimento di integrazione.

Ferme stando per le funzioni φ e ψ, date al contorno, le condizioni, di cui a § 1, si ha, come abbiam visto,:

$$|p'_n| < \frac{M}{n^3}, \qquad |q'_n| < \frac{M}{n^3}, \qquad |p''_n| < \frac{M}{n^2}, \qquad |q''_n| < \frac{M}{n^2}, \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

quindi:

$$|p_n| = |p''_n + np'_n| < \frac{2M}{n^2}, \qquad |q_n| = |q''_n + nq'_n| < \frac{2M}{n^2}, \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

ed è ben chiaro che, designando con g una costante positiva arbitraria, basta prendere M' maggiore di $p_0(g+2)^2$ e di $2M(g+4)^2$, per poter scrivere:

$$|p_n| < \frac{M'}{(2n+2+g)^2}, \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

$$|q_n| < \frac{M'}{(2n+2+g)^2}, \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Le (11) dànno per i secondi membri v_i del sistema (Ω):

$$v_{2n} = \frac{-p_n}{\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^1 \varrho^{2n+1}\,d\varrho \int_0^{2\pi} H^2 \cos^2 n\theta\, d\theta}, \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

$$v_{2n-1} = \frac{-q_n}{\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^1 \varrho^{2n+1}\,d\varrho \int_0^{2\pi} H^2 \operatorname{sen}^2 n\theta\, d\theta}, \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

I denominatori, per quanto si è osservato nel precedente §, si mantengono superiori a $l_1^2/(2n+2)$; se ne trae (prendendo $B = M'/l_1^2$):

$$|v_{2n}| < \frac{M'}{l_1^2}\,\frac{2n+2}{(2n+2+g)^2} < \frac{B}{2n+g}\,, \qquad (n = 0, 1, 2, ..),$$

$$|v_{2n-1}| < \frac{M'}{l_1^2}\,\frac{2n+2}{(2n+2+g)^2} < \frac{B}{2n-1+g}\,, \qquad (n = 1, 2, ...),$$

le quali fanno riscontro alle (17) del caso generale, dove si sia posto $s = 1$. Possiamo quindi asserire (cfr. l'osservazione fatta alla fine del § 2) che le incognite del sistema lineare, cioè i coefficienti α e β della funzione w soddisfanno a disuguaglianze dello stesso tipo.

Le assumeremo addirittura sotto la forma:

$$|\alpha_m| < \frac{N}{m}\,, \qquad |\beta_m| < \frac{N}{m}\,, \qquad (m = 1, 2, ...),$$

con N numero fisso positivo.

Delle condizioni, enumerate alla fine del § 1, ci rimangono così da verificare:

1) *la integrabilità di* $w(\varrho, \theta)$ *entro il cerchio di raggio* 1;

2) *la eguaglianza fra*

$$P = \lim_{\varrho_1 = 1} \int_0^1 \varrho\, d\varrho \int_0^{2\pi} -\frac{\partial G}{\partial \varrho_1}\, H^2 w(\varrho, \theta)\, d\theta\,,$$

e

$$Q = \int_0^1 \varrho\, d\varrho \int_0^{2\pi} H^2 w(\varrho, \theta)\, d\theta + 2 \sum_1^\infty{}_n \int_0^1 \varrho^{n+1}\, d\varrho \int_0^{2\pi} H^2 w(\varrho, \theta) \cos n(\theta - \theta_1)\, d\theta\,.$$

Essendo, per definizione:

$$w(\varrho, \theta) = \alpha_0 + \sum_1^\infty{}_m \varrho^m \{ \alpha_m \cos m\theta + \beta_m \operatorname{sen} m\theta \}\,,$$

risulta:

$$|w(\varrho, \theta) < |\alpha_0| + 2N \sum_1^\infty{}_m \frac{\varrho^m}{m} < |\alpha_0| - 2N \log(1 - \varrho)\,,$$

quindi:

$$\lim_{\varrho=1} \left| \frac{w(\varrho, \theta)}{\log(1-\varrho)} \right| \leqslant 2N ,$$

la quale ci assicura che $w(\varrho, \theta)$ è integrabile entro il cerchio di raggio 1 (circonferenza inclusa). Saranno per conseguenza integrabili $H^2 w(\varrho, \theta)$, $GH^2 w(\varrho, \theta)$, $(\partial G/\partial\varrho_1) H^2 w(\varrho, \theta)\,(\varrho_1 < 1)$, ecc., e, come tosto si riconosce, anche $(\partial G/\partial\varrho_1)_{\varrho_1=1} H^2 w(\varrho, \theta)$.

Ciò posto, è lecito chiaramente di attribuire a P la forma:

$$\int_0^1 \varrho\, d\varrho \int_0^{2\pi} -\left(\frac{\partial G}{\partial \varrho_1}\right)_{\varrho_1=1} H^2 w(\varrho, \theta)\, d\theta ,$$

o, se si vuole:

$$\lim_{\varepsilon=0} \int_0^{1-\varepsilon} \varrho\, d\varrho \int_0^{2\pi} -\left(\frac{\partial G}{\partial \varrho_1}\right)_{\varrho_1=1} H^2 w(\varrho, \theta)\, d\theta .$$

D'altra parte, per ε positivo e arbitrariamente piccolo, si ha, tutto essendo regolare:

$$\int_0^{1-\varepsilon} \varrho\, d\varrho \int_0^{2\pi} -\left(\frac{\partial G}{\partial \varrho_1}\right)_{\varrho_1=1} H^2 w(\varrho, \theta)\, d\theta = \int_0^{1-\varepsilon} \varrho\, d\varrho \int_0^{2\pi} H^2 w(\varrho, \theta)\, d\theta$$
$$+ 2 \sum_1^\infty{}_n \int_0^{1-\varepsilon} \varrho^{n+1}\, d\varrho \int_0^{2\pi} H^2 w(\varrho, \theta) \cos n(\theta - \theta_1)\, d\theta ;$$

quindi basterà mostrare che il limite del secondo membro, per $\varepsilon = 0$, è Q, o, ciò che è lo stesso, che la differenza converge a zero con ε. Prescindendo dal primo termine, che ha manifestamente per limite 0, si tratta di constatare che:

$$\lim_{\varepsilon=0} \sum_1^\infty{}_n \int_{1-\varepsilon}^1 \varrho^{n+1}\, d\varrho \int_0^{2\pi} H^2 w(\varrho, \theta) \cos n(\theta - \theta_1)\, d\theta = 0 .$$

A tale scopo si osservi che, per $\varrho < 1$:

$$(30)\quad \int_0^{2\pi} H^2 w(\varrho, \theta) \cos n(\theta - \theta_1)\, d\theta = \alpha_0 \int_0^{2\pi} H^2 \cos^n (\theta - \theta_1)\, d\theta$$

$$+ \sum_1^\infty{}_m\, \varrho^m \left\{ \alpha_m \int_0^{2\pi} H^2 \cos n(\theta - \theta_1) \cos m\theta\, d\theta + \beta_m \int_0^{2\pi} H^2 \cos n(\theta - \theta_1) \operatorname{sen} m\theta\, d\theta \right\},$$

e, nella ipotesi, cui ci riferiamo, esistono (come tosto si ricava dal § antecedente) due numeri positivi A_1, e $\lambda_1 < 1$, tali che:

$$\left| \int_0^{2\pi} H^2 \cos n\, (\theta - \theta_1) \cos m\, \theta\, d\theta \right| < A_1 \lambda_1{}^{|n-m|},$$

$$\left| \int_0^{2\pi} H^2 \cos n\, (\theta - \theta_1) \operatorname{sen} m\theta\, d\theta \right| < A_1 \lambda_1{}^{|n-m|},$$

per qualunque valore di $\varrho \leqslant 1$.

La serie del secondo membro ha dunque i suoi termini ordinatamente inferiori a quelli della serie convergente a termini costanti:

$$A_1 N \left\{ \lambda_1^n + 2 \sum_1^\infty{}_m \frac{\lambda_1{}^{|n-m|}}{m} \right\} = A_1 N \left\{ \lambda_1^n + 2\lambda_1^{n-1} + 2 \sum_2^{n-1}{}_m \frac{\lambda_1^{n-m}}{m} + 2 \sum_n^\infty{}_m \frac{\lambda_1^{m-n}}{m} \right\},$$

e perciò la (30) sussiste anche quando vi si fa $\varrho = 1$.

Supponendo n già abbastanza grande (maggiore di n', diciamo) sarà $\lambda_1^{n/2} < 1/n^2$, $1/n \log n/2 < 1$; e, siccome:

$$\sum_2^{n-1}{}_m \frac{\lambda_1^{n-m}}{m} < \int_1^n \frac{\lambda_1^{n-m}}{m}\, dm,$$

mentre:

$$\int_1^n \frac{\lambda_1^{n-m}}{m}\, dm = \int_1^{n/2} \frac{\lambda_1^{n-m}}{m}\, dm + \int_{n/2}^n \frac{\lambda_1^{n-m}}{m}\, dm < \frac{1}{n^2} \int_1^{n/2} \frac{dm}{m} + \frac{2}{n} \int_{n/2}^n \lambda_1^{n-m}\, dm =$$

$$= \frac{1}{n^2} \log \frac{n}{2} - \frac{2}{n} \frac{1}{\log \lambda_1} (1 - \lambda_1^{n/2}) < \frac{1 + \dfrac{2}{\log \dfrac{1}{\lambda_1}}}{n},$$

così riescirà, per $n > n'$:

$$2\sum_0^{n-1}{}_m \frac{\lambda_1^{n-m}}{m} < \frac{2 + \dfrac{4}{\log\dfrac{1}{\lambda_1}}}{n};$$

ancora:

$$2\sum_n^{\infty}{}_m \frac{\lambda_1^{m-n}}{m} < \frac{2}{n}\,\frac{1}{1-\lambda_1},$$

$$\lambda_1^n < \frac{1}{n},$$

$$2\lambda_1^{n-1} < \frac{2}{n}.$$

Ne viene

$$A_1 N\left\{\lambda_1^n + 2\sum_1^{\infty}{}_m \frac{\lambda_1^{|n-m|}}{m}\right\} < A_1 N\,\frac{5 + \dfrac{4}{\log\dfrac{1}{\lambda_1}} + \dfrac{2}{1-\lambda_1}}{n};$$

o finalmente, col porre:

$$A_1 N\left\{5 + \frac{4}{\log\dfrac{1}{\lambda_1}} + \frac{2}{1-\lambda_1}\right\} = K,$$

$$\left|\int_0^{2\pi} H^2 w(\varrho, \theta)\cos n\,(\theta - \theta_1)\,d\varrho\right| < A_1 N\left\{\lambda_1^n + 2\sum_1^{\infty}{}_m \frac{\lambda_1^{|n-m|}}{m}\right\} < \frac{K}{n}, \quad (n > n').$$

In tal condizione la serie:

$$\sum_1^{\infty}{}_n \int_{1-\varepsilon}^{1} \varrho^{n+1}\,d\varrho \int_0^{2\pi} H^2 w(\varrho, \theta)\cos n(\theta - \theta_1)\,d\theta$$

converge assolutamente, poichè, a partire dal valore n' di n, i suoi termini sono ordinatamente minori di:

$$\frac{K}{n}\int_{1-\varepsilon}^{1} \varrho^{n+1}\,d\varrho = K\,\frac{1-(1-\varepsilon)^{n+2}}{n(n+2)} < \frac{K}{n(n+2)};$$

per la medesima ragione, essa converge uniformemente rispetto ad ε. Si conclude:

$$\lim_{\varepsilon=0} \sum_1^\infty {}_n \int_{1-\varepsilon}^1 \varrho^{n+1}\, d\varrho \int_0^{2\pi} H^2 w(\varrho, \theta) \cos n(\theta - \theta_1)\, d\theta =$$

$$= \sum_1^\infty {}_n \lim_{\varepsilon=0} \int_{1-\varepsilon}^1 \varrho^{n+1}\, d\varrho \int_0^{2\pi} H^2 w(\varrho, \theta) \cos n(\theta - \theta_1)\, d\theta = 0\ ,$$

come dovevasi dimostrare.

5. – Un esempio semplice di contorni, per cui la condizione (29) trovasi effettivamente soddisfatta, si ha immaginando che il parametro di rappresentazione conforme $f(z)$ sia un polinomio, la cui derivata si annulla in punti abbastanza discosti dall'origine. Ecco in qual modo lo si riconosce.

Posto

$$f'(z) = a_0(z - z_1)(z - z_2) \ldots (z - z_n)\ ,$$

avremo, designando con ζ_i il modulo della radice z_i (che è, per natura sua, > 1):

$$l_1^2 \leqslant |a_0|^2 \prod_1^n {}_i (\zeta_i - 1)^2\ ,$$

mentre, sulla circonferenza di raggio $1/\lambda^3$, il massimo L dei valori assoluti spettanti a $f'(z)$ non potrà superare:

$$|a_0| \prod_1^n {}_i \left(\zeta_i + \frac{1}{\lambda^3}\right).$$

Se si chiama ζ la più piccola delle ζ_i e si nota che, per $\zeta < \zeta_i$:

$$\frac{\zeta_i + \dfrac{1}{\lambda^3}}{\zeta_i - 1} < \frac{\zeta + \dfrac{1}{\lambda^3}}{\zeta - 1}\ ,$$

la disuguaglianza, cui conviene soddisfare per qualche valore di λ, può a fortiori essere sostituita da:

$$(31) \qquad 4 \left\{ \frac{\zeta + \dfrac{1}{\lambda^3}}{\zeta - 1} \right\}^{2n} \frac{\lambda}{(1 - \lambda^6)(1 - \lambda)} < 1\ ,$$

e λ è ora in nostro arbitrio, poichè $f(z)$ si mantiene regolare in tutti i punti del piano, situati a distanza finita.

Ricordando la osservazione che λ dev'essere certamente minore di 1/3, si ha:

$$\frac{1}{(1-\lambda^6)(1-\lambda)} < \frac{1}{\left(1-\frac{1}{729}\right)^{2/3}} < 2\,,$$

e quindi la (31) sussisterà a più forte ragione, purchè sia:

$$8\lambda\left\{\frac{\zeta+\frac{1}{\lambda^3}}{\zeta-1}\right\}^{2n} < 1\,,$$

ovvero:

$$\frac{1}{\zeta} < \frac{\frac{1}{\sqrt[2n]{8\lambda}}-1}{\frac{1}{\lambda^3}+\frac{1}{\sqrt[2n]{8\lambda}}} < \lambda^3\left(\frac{1}{\sqrt[2n]{8\lambda}}-1\right) = \left\{\frac{1}{\sqrt[2n]{8}}\lambda^{\frac{6n-1}{2n}}-\lambda^3\right\}.$$

Ora il massimo valore del secondo membro corrisponde al valore (non nullo) di λ, che annulla

$$\frac{6n-1}{2n\sqrt[2n]{8}}\lambda^{\frac{4n-1}{2n}}-3\lambda^2\,,$$

cioè:

$$\lambda = \left(\frac{6n-1}{6n\sqrt[2n]{8}}\right)^{2n} = \frac{1}{8}\left(1-\frac{1}{6n}\right)^{2n}.$$

A noi basta che la disuguaglianza sia verificata per un qualche valore di λ; giova dunque pigliare addirittura

$$\lambda = \frac{1}{8}\left(1-\frac{1}{6n}\right)^{2n},$$

con che si ottiene:

$$\frac{1}{\zeta} < \frac{1}{512}\left(1-\frac{1}{6n}\right)^{6n}\frac{1}{6n-1}\,,$$

ossia:

$$\zeta > \frac{512(6n-1)}{\left(1-\frac{1}{6n}\right)^{6n}}.$$

Rimane così assicurata la validità del procedimento di integrazione per il corrispondente contorno, ogniqualvalta le radici di $f'(z)$ distano dall'origine più di

$$\frac{512(6n-1)}{\left(1-\frac{1}{6n}\right)^{6n}}.$$

Analogamente si proverebbe che, quando i coefficienti del polinomio $f(z)$ sono reali, la (29′) conduce a:

$$\zeta > \frac{8(2n-1)}{\left(1-\frac{1}{2n}\right)^{2n}}.$$

Un tipo affatto diverso di contorni, che rientrano nella nostra categoria, si ha, ponendo $f'(z) = e^{F(z)}$, con $F(z)$ trascendente intera d'ordine apparente (⁷) minore di $1/6$.

Si ha infatti in questo caso, designando con ε un numero positivo abbastanza piccolo, perchè $(1-\varepsilon)/6$ sia ancora superiore al detto ordine apparente:

$$e^L < e^{\left(\frac{1}{\lambda}\right)^{\frac{1-\varepsilon}{6}}}$$

ossia:

$$L^2\lambda < \lambda^\varepsilon ,$$

per valori di $1/\lambda^3$ sufficientemente grandi.

Siccome anche ora è lecito scegliere a piacere il valore di λ da portare nella (29), così basterà immaginarlo già tale che $L^2\lambda < \lambda^\varepsilon$ perchè la (29) possa essere sostituita da:

$$\frac{4}{l_1^2}\,\frac{\lambda^\varepsilon}{(1-\lambda^6)(1-\lambda)} < 1 ,$$

e questa condizione riesce senz'altro soddisfatta, quando si abbia cura di prendere λ abbastanza piccolo.

(⁷) Secondo la nomenclatura, introdotta dal sig. BOREL nelle sue belle ricerche sulle funzioni intere (« Acta Mathematica », t. 20, 1897 e « Comptes Rendus », 24 Gennaio, 1898), si dice che una funzione intera $F(z)$ è d'*ordine apparente* ϱ, quando il massimo $M(r)$ del modulo della funzione, per $|z| = r$, cresce, da un certo valore di r in avanti, come e^{r^ϱ}.

XXI.

SOPRA UNA TRASFORMAZIONE IN SÈ STESSA DELLA EQUAZIONE $\underset{2}{\Delta}\underset{2}{\Delta} = 0$

« Atti Ist. Veneto di sc., lett. ed arti », s. VII, t. IX (1897-98)
pp. 1399-1410

Se si combina una inversione per raggi vettori reciproci

$$x' = \frac{x}{x^2 + y^2}, \qquad y' = \pm \frac{y}{x^2 + y^2},$$

col cambiamento di funzione

$$u'(x', y') = \frac{u(x, y)}{x^2 + y^2},$$

la equazione

$$\underset{2}{\Delta}\underset{2}{\Delta}\, u = 0 \qquad \left(\underset{2}{\Delta} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)$$

si trasforma in sè stessa. In altri termini ogni integrale $u(x, y)$ di $\underset{2}{\Delta}\underset{2}{\Delta} u = 0$ si cangia in un integrale $u'(x', y')$ della equazione analoga

$$\underset{2}{\Delta}'\underset{2}{\Delta}' u' = 0 \qquad \left(\underset{2}{\Delta}' = \frac{\partial^2}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2}{\partial y'^2}\right)$$

e reciprocamente.

Di tale proprietà, che dimostro qui appresso, mi valgo in particolare per risolvere la questione seguente:

Costruire un integrale u della equazione $\underset{2}{\Delta}\underset{2}{\Delta}u = 0$, regolare [1] nell'area σ limitata da due circonferenze C_1, C_2, che non si tagliano (cioè compresa fra esse o esterna ad entrambe), essendo assegnati i valori di u e della sua derivata normale sopra le due circonferenze.

Faccio vedere da ultimo che, prescindendo dai movimenti, dalle similitudini e dallo scambio di u in Cu (con C costante), la

$$x' = \frac{x}{x^2 + y^2}, \qquad y' = \pm\frac{y}{x^2 + y^2}, \qquad u' = \frac{u}{x^2 + y^2}$$

si può considerare come la più generale trasformazione puntuale in x, y e moltiplicativa in u ($u' = \lambda(x, y)u$), di fronte a cui la equazione $\underset{2}{\Delta}\underset{2}{\Delta} = 0$ rimane invariata.

1. – Posto:

$$x' = \frac{x}{\varrho^2}, \qquad y' = \pm\frac{y}{\varrho^2}, \qquad (\varrho^2 = x^2 + y^2), \tag{1}$$

si ha fra ogni elemento lineare $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ e il corrispondente $ds' = \sqrt{dx'^2 + dy'^2}$ la relazione

$$dx'^2 + dy'^2 = \frac{1}{\varrho^4}(dx^2 + dy^2). \tag{1'}$$

Ne viene, per la nota teoria dei parametri differenziali,

$$\frac{\partial^2}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2}{\partial y'^2} = \varrho^4\left\{\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right\},$$

che scriveremo concisamente

$$\underset{2}{\Delta}' = \varrho^4\underset{2}{\Delta};$$

[1] Intendo con ciò brevemente: se si tratta di un punto x, y a distanza finita, che la funzione $u(x, y)$ è finita e continua in quel punto assieme alle sue derivate dei primi quattro ordini; se si tratta del punto all'infinito, che tale è il caso di

$$u'(x', y') = \frac{u(x, y)}{x^2 + y^2} = (x'^2 + y'^2)\,u\left(\frac{x'}{x'^2 + y'^2}, \frac{\pm y'}{x'^2 + y'^2}\right),$$

per $x' = 0$, $y' = 0$.

quindi, assumendo

$$u'(x', y') = \frac{1}{\varrho^2}\, u(x, y)\,, \tag{2}$$

si ottiene

$$\underset{2}{\Delta'}\underset{2}{\Delta'} u' = \varrho^4 \left[\underset{2}{\Delta}\left\{\varrho^4 \underset{2}{\Delta}\left(\frac{1}{\varrho^2}\, u\right)\right\}\right].$$

Ora si ha

$$\underset{2}{\Delta}\left(\frac{1}{\varrho^2}\, u\right) = \frac{1}{\varrho^2}\underset{2}{\Delta} u + 2\left\{\frac{\partial \dfrac{1}{\varrho^2}}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \dfrac{1}{\varrho^2}}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y}\right\} + u\,\underset{2}{\Delta}\,\frac{1}{\varrho^2},$$

e, se si tien conto che $\underset{2}{\Delta}(1/\varrho^2) = 4/\varrho^4$ (lo si riconosce nel modo più spiccio, usando l'espressione del $\underset{2}{\Delta}$ in coordinate polari, la quale, per funzioni della sola ϱ, è $(1/\varrho)(\partial/\partial\varrho)\varrho(\partial/\partial\varrho)$, risulta

$$\varrho^4\,\underset{2}{\Delta}\left(\frac{1}{\varrho^2}\, u\right) = \varrho^2\,\underset{2}{\Delta} u - 2\left\{\frac{\partial \varrho^2}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \varrho^2}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y}\right\} + 4u\,,$$

$$\begin{aligned}\underset{2}{\Delta}\left\{\varrho^4\,\underset{2}{\Delta}\left(\frac{1}{\varrho^2}\, u\right)\right\} &= \varrho^2\underset{2}{\Delta}\underset{2}{\Delta} u + 2\left\{\frac{\partial \varrho^2}{\partial x}\frac{\partial \underset{2}{\Delta} u}{\partial x} + \frac{\partial \varrho^2}{\partial y}\frac{\partial \underset{2}{\Delta} u}{\partial y}\right\} + \underset{2}{\Delta}\varrho^2\underset{2}{\Delta} u \\ &- 2\left\{\frac{\partial \varrho^2}{\partial x}\frac{\partial \underset{2}{\Delta} u}{\partial x} + \frac{\partial \varrho^2}{\partial y}\frac{\partial \underset{2}{\Delta} u}{\partial y}\right\} - 4\left\{\frac{\partial^2 \varrho^2}{\partial x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\,\frac{\partial^2 \varrho^2}{\partial x \partial y}\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} + \frac{\partial^2 \varrho^2}{\partial y^2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right\} \\ &- 2\left\{\frac{\partial \underset{2}{\Delta}\varrho^2}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \underset{2}{\Delta}\varrho^2}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y}\right\} + 4\underset{2}{\Delta} u\,.\end{aligned}$$

Siccome

$$\frac{\partial^2 \varrho^2}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \varrho^2}{\partial y^2} = 2\,, \qquad \frac{\partial^2 \varrho^2}{\partial x\, \partial y} = 0\,,$$

così il secondo membro si riduce immediatamente a $\varrho^2\underset{2}{\Delta}\underset{2}{\Delta} u$ e per conseguenza

$$\underset{2}{\Delta'}\underset{2}{\Delta'} u' = \varrho^6\underset{2}{\Delta}\underset{2}{\Delta} u\,, \tag{3}$$

la quale identità dimostra il carattere invariantivo della equazione $\underset{2\,2}{\Delta\Delta} = 0$ di fronte alla trasformazione (1), (2).

2. – L'area σ, limitata da due circonferenze C_1, C_2, che non hanno alcun punto comune, si può sempre trasformare in una corona circolare mediante una inversione per raggi vettori reciproci.

Dicansi infatti O_1, O_2 i centri delle due circonferenze; A_1, B_1; A_2, B_2 le rispettive intersezioni colla retta O_1O_2.

Tanto nel caso, in cui C_1 e C_2 siano esterne l'una all'altra, quanto nel caso opposto, le due coppie A_1, B_1; A_2, B_2 non si separano; esiste quindi una coppia reale O, P di coniugati armonici comuni, che, dovendo separare ad un tempo A_1, B_1 e A_2, B_2, cadono necessariamente fuori dell'area σ.

Assumendo uno di questi, O per es., come centro di inversione, le circonferenze C_1', C_2', immagini di C_1, C_2, riescono concentriche [2] e l'area σ si trasforma nella corona circolare, compresa fra C_1' e C_2'.

Le formule di inversione presentano la forma (1) se, come noi vogliamo supporre, si colloca in O l'origine delle coordinate.

Ciò posto, se sia richiesto un integrale u della equazione $\underset{2\,2}{\Delta\Delta} u = 0$, regolare entro l'area σ e tale che si abbia sui due contorni C_1 e C_2

$$u = \varphi\,,$$

$$\frac{du}{dn} = \psi\,,$$

(φ e ψ essendo successioni continue di valori, comunque assegnati, e n designando la normale diretta verso l'interno di σ), gioverà eseguire la trasformazione (1), (2), con che ci si troverà ricondotti a risolvere un problema dello stesso tipo per una corona circolare.

Infatti, la funzione u', trasformata di u, dovrà mantenersi regolare [3]

---

[2] Per verificarlo, si noti che, da $(A_1B_1OP) = -1$, segue

$$\frac{1}{\overline{OP}} = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{\overline{OA_1}} + \frac{1}{\overline{OB_1}}\right\}\,,$$

donde apparisce, moltiplicando per il modulo di inversione $\pm\, k^2$ (che noi assumiamo addirittura eguale a $+1$) che l'immagine P' di P divide per metà il segmento $A_1'B_1'$, immagine di A_1B_1. In modo analogo da $(A_2B_2OP) = -1$ si ricava che lo stesso P' è il punto medio di $A_2'B_2'$. Ora le circonferenze C_1, C_2 sono simmetriche rispetto alla retta O_1O_2, che contiene il centro di inversione; lo stesso deve avvenire per le loro immagini, quindi le corde $A_1'B_1'$, $A_2'B_2'$ sono diametri e la coincidenza dei rispettivi punti di mezzo implica coincidenza dei centri.

[3] Questo risulta senz'altro dalle (1), (2), ricordando il significato, da noi attribuito all'appellativo regolare e tenendo presente che il centro di inversione è esterno a σ.

entro l'area σ' corrispondente a σ (che s'è osservato essere una corona circolare) e soddisfare ivi, in causa della (3), alla equazione $\Delta'_2\Delta'_2 u' = 0$. Sulle due circonferenze C'_1, C'_2, che limitano σ', si avrà poi

$$u' = \frac{u}{x^2 + y^2} = (x'^2 + y'^2)\varphi ,$$

e, siccome la inversione per raggi vettori reciproci conserva gli angoli e quindi, in causa della (1'),

$$dn' = \frac{1}{x^2 + y^2} dn = (x'^2 + y'^2)\, dn ,$$

$$\frac{du'}{dn'} = \frac{d\{(x'^2 + y'^2)u\}}{dn'} = \frac{d(x'^2 + y'^2)}{dn'} \varphi + \psi ,$$

le quali ci porgono appunto i valori di u' e della sua derivata normale al contorno della corona circolare.

La determinazione di u' si sa effettuare (4), e la (2), ripassando alle variabili x, y, porge senz'altro il richiesto u.

Osservazione. – Mediante una inversione per raggi vettori reciproci, si può sempre trasformare l'area, limitata da due circonferenze, che si tagliano (sia essa esterna od interna ad entrambe) in uno spazio angolare, e l'area, racchiusa da due circonferenze, che si toccano, in una striscia compresa fra due rette parallele. Ne viene che anche il problema di $\Delta_2\Delta_2 = 0$, relativo a queste aree, si riduce al problema analogo per uno spazio angolare o per una striscia. Ma ciò non basta ad esaurirlo, poichè, nemmeno per tali due casi fu assegnata finora una soluzione completa (5).

3. – Cerchiamo la più generale trasformazione

$$\left\{ \begin{aligned} x' &= x'(x, y) , \\ y' &= y'(x, y) , \end{aligned} \right. \tag{4}$$

$$u'(x', y') = \lambda(x, y) u(x, y) , \tag{5}$$

---

(4) Cfr. O. Venske, *Zur Integration der Gleichung $\Delta\Delta u = 0$ für ebene Bereiche*, « Göttinger Nachrichten », 1891. Per vero dire, la soluzione è appena indicata e non del tutto rigorosa. Sarebbe però assai facile il renderla tale, come mi ha fatto osservare il prof. D'Arcais. Egli ha anche determinata la seconda funzione di Green per una corona circolare. Veggasi in proposito una sua nota, contenuta in questo stesso fascicolo.

(5) Tale non può dirsi certamente quella abbozzata dal sig. Venske (loco cit.), tanto più che, per il caso dello spazio angolare, l'autore si appoggia sopra la asserzione inesatta che certa funzione W (cfr. pag. 29) sia armonica.

che cangia un integrale u della equazione $\underset{2}{\Delta}\underset{2}{\Delta} = 0$ in un integrale u' della corrispondente $\underset{2}{\Delta'}\underset{2}{\Delta'} = 0$.

Posto per brevità $x = x_1$, $y = x_2$ e

$$\left(\frac{\partial x'}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial y'}{\partial x}\right)^2 = a_{11}\,, \quad \frac{\partial x'}{\partial x}\frac{\partial x'}{\partial y} + \frac{\partial y'}{\partial x}\frac{\partial y'}{\partial y} = a_{12}\,, \quad \left(\frac{\partial x'}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial y'}{\partial y}\right)^2 = a_{22}\,,$$

avremo

$$dx'^2 + dy'^2 = \sum_{rs\,1}^{2} a_{rs}\, dx_r\, dx_s\,,$$

e, introducendo le derivate seconde covarianti [6] della funzione u', rapporto alla forma fondamentale $\sum_{rs\,1}^{2} a_{rs}\, dx_r\, dx_s$,

$$\underset{2}{\Delta'} u' = \sum_{rs\,1}^{2} a^{(rs)} u'_{rs}\,.$$

Se ne trae

$$\underset{2}{\Delta'}\underset{2}{\Delta'} u' = \sum_{pq\,1}^{2} a^{(pq)} \{\sum_{rs\,1}^{2} a^{(rs)} u'_{rs}\}_{pq}\,,$$

donde, per la regola di derivazione di un sistema composto, col tener presente che le derivate covarianti delle $a^{(rs)}$ sono nulle

$$\underset{2}{\Delta'}\underset{2}{\Delta'} u' = \sum_{pqrs\,1}^{2} a^{(pq)} a^{(rs)} u'_{rspq}\,.$$

Dalle formule di definizione delle derivate covarianti segue immediatamente che le singole u'_{rspq} differiscono dalle corrispondenti

$$\frac{\partial^4 u'}{\partial x_r\, \partial x_s\, \partial x_p\, \partial x_q}$$

per termini, che contengono derivate d'ordine non superiore al terzo.

---

(6) Le denominazioni e notazioni, di cui qui mi valgo, sono quelle introdotte nella scienza dal prof. Ricci e da lui con tanto vantaggio applicate in lunga serie di lavori. Cfr. in particolare i Cap. III e V (pag. 104) della introduzione alle *Lezioni sulla teoria della superficie*, Padova, 1898.

Designandoli comprensivamente con (3), potremo scrivere

$$\Delta'_2 \Delta'_2 u' = \sum_{pqrs}^{2}{}_1 \, a^{(pq)} a^{(rs)} \frac{\partial^4 u'}{\partial x_r \, \partial x_s \, \partial x_p \, \partial x_q} + (3) \, .$$

Avendosi $u' = \lambda u$, sarà del pari

$$\frac{\partial^4 u'}{\partial x_r \, \partial x_s \, \partial x_p \, \partial x_q} = \lambda \frac{\partial^4 u}{\partial x_r \, \partial x_s \, \partial x_p \, \partial x_q} + (3) \, ,$$

quindi in definitiva

$$\Delta'_2 \Delta'_2 u' = \lambda \sum_{pqrs}^{2}{}_1 \, a^{(pq)} a^{(rs)} \frac{\partial^4 u}{\partial x_r \, \partial x_s \, \partial x_p \, \partial x_q} + (3) \, .$$

Se si vuole che $\Delta'_2 \Delta'_2 u'$ si annulli assieme a $\Delta_2 \Delta_2 u$, bisogna che il secondo membro differisca soltanto per un fattore da

$$\Delta_2 \Delta_2 u = \frac{\partial^4 u}{\partial x_1^4} + 2 \frac{\partial^4 u}{\partial x_1^2 \, \partial x_2^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial x_2^4} \, .$$

Ne viene $(3) = 0$, e, assumendo il fattore sotto la forma λ / H^4

$$\sum_{pqrs}^{2}{}_1 \, a^{(pq)} a^{(rs)} \frac{\partial^4 u}{\partial x_r \, \partial x_s \, \partial x_p \, \partial x_q} = \frac{1}{H^4} \left\{ \frac{\partial^4 u}{\partial x_1^4} + 2 \frac{\partial^4 u}{\partial x_1^2 \, \partial x_2^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial x_2^4} \right\} .$$

Eguagliando i coefficienti delle medesime derivate, si ricava tosto:

$$a^{(11)} = a^{(22)} = \frac{1}{H^2} \, , \qquad a^{(12)} = 0 \, ,$$

ossia la trasformazione (4) dev'essere conforme.

La relazione fra gli elementi lineari $\sqrt{dx'^2 + dy'^2}$, $\sqrt{dx^2 + dy^2}$ si riduce allora a

$$dx'^2 + dy'^2 = H^2 (dx^2 + dy^2) \tag{6}$$

e quindi

$$\Delta'_2 = \frac{1}{H^2} \Delta_2 \, .$$

Dobbiamo ora cercare, per quali forme di H e di λ, $\Delta'_2\Delta'_2(\lambda u)$ differisce soltanto per un fattore da $\Delta_2\Delta_2 u$.

Si ha ovviamente

$$\Delta'_2 u' = \frac{\lambda}{H^2}\Delta_2 u + \frac{2}{H^2}\left\{\frac{\partial\lambda}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial\lambda}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y}\right\} + \frac{\Delta_2\lambda}{H^2}u, \tag{7}$$

$$\Delta'_2\Delta'_2 u' = \frac{\lambda}{H^4}\Delta_2\Delta_2 u + \frac{2}{H^2}\left\{\frac{\partial\left(\frac{\lambda}{H^2}\right)}{\partial x}\frac{\partial\Delta_2 u}{\partial x} + \frac{\partial\left(\frac{\lambda}{H^2}\right)}{\partial y}\frac{\partial\Delta_2 u}{\partial y}\right\}$$

$$+ \frac{2}{H^4}\left\{\frac{\partial\lambda}{\partial x}\frac{\partial\Delta_2 u}{\partial x} + \frac{\partial\lambda}{\partial y}\frac{\partial\Delta_2 u}{\partial y}\right\} + (2),$$

dove si sono scritte per disteso le derivate quarte e terze di u e si sono raccolti in (2) i termini rimanenti.

La proporzionalità fra $\Delta'_2\Delta'_2 u'$ e $\Delta_2\Delta_2 u$ esige che sia identicamente $(2) = 0$ e che si annullino i coefficienti delle derivate terze, cioè

$$\frac{\partial\left(\frac{\lambda}{H^2}\right)}{\partial x} + \frac{1}{H^2}\frac{\partial\lambda}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial\left(\frac{\lambda}{H^2}\right)}{\partial y} + \frac{1}{H^2}\frac{\partial\lambda}{\partial y} = 0.$$

Dividendo tutto per λ/H^2 si trova subito

$$2d\log\lambda - d\log H^2 = 0,$$

quindi, prescindendo da una costante moltiplicativa C (che cambierebbe soltanto u in Cu)

$$\lambda = H.$$

Dopo ciò la (7) diviene

$$\Delta'_2 u' = \frac{1}{H}\Delta_2 u - 2\left\{\frac{\partial\frac{1}{H}}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial\frac{1}{H}}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y}\right\} + \frac{\Delta_2 H}{H^2}u,$$

e da questa, avendo poi cura di ordinare per le derivate di u,

$$H^2\Delta_2'\Delta_2'u' = \frac{1}{H}\Delta_2\Delta_2 u + \left\{\Delta_2\frac{1}{H} - 4\frac{\partial^2\frac{1}{H}}{\partial x^2} + \frac{\Delta_2 H}{H^2}\right\}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$+\left\{\Delta_2\frac{1}{H} - 4\frac{\partial^2\frac{1}{H}}{\partial y^2} + \frac{\Delta_2 H}{H^2}\right\}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 8\frac{\partial^2\frac{1}{H}}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}$$

$$+2\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{\Delta_2 H}{H^2} - \Delta_2\frac{1}{H}\right\}\frac{\partial u}{\partial x} + 2\frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{\Delta_2 H}{H^2} - \Delta_2\frac{1}{H}\right\}\frac{\partial u}{\partial y} + u\Delta_2\left\{\frac{\Delta_2 H}{H^2}\right\}.$$

Dacchè si devono annullare i coefficienti di $\partial^2 u/\partial x^2$, $\partial^2 u/\partial y^2$, ecc., abbiamo intanto, osservando i termini in $\partial u/\partial x$, $\partial u/\partial y$,

$$\frac{\Delta_2 H}{H^2} = \Delta_2\frac{1}{H} + \text{cost}\,.$$

Se si sostituisce questo valore di $\Delta_2 H/H^2$ nei coefficienti di $\partial^2 u/\partial x^2$ e di $\partial^2 u/\partial y^2$, si vede che la costante deve essere nulla e che

$$\frac{\partial^2\frac{1}{H}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2\frac{1}{H}}{\partial y^2}\,.$$

D'altra parte l'annullarsi del coefficiente di $\partial^2 u/\partial x\,\partial u$ porge

$$\frac{\partial^2\frac{1}{H}}{\partial x\,\partial y} = 0\,,$$

donde agevolmente discende che il valore comune di $\partial^2(1/H)/\partial x^2$ e di $\partial^2(1/H)/\partial y^2$ deve essere costante. Supponendolo diverso da zero si può, mediante una similitudine attribuirgli il valore 2, ed allora

$$\frac{\partial^2\frac{1}{H}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2\frac{1}{H}}{\partial y^2} = 2\,,\quad \frac{\partial^2\frac{1}{H}}{\partial x\,\partial y} = 0\,.$$

Ne consegue che $1/H$ deve avere la forma $x^2 + y^2 + 2\alpha x + 2\beta y + \gamma$, con α, β, γ costanti. A mezzo di una traslazione (cambiando cioè x in $x-\alpha$, y in $y-\beta$) è sempre lecito assumere, per $1/H$, x^2+y^2+h $(h=\gamma-\alpha^2-\beta^2)$, e, siccome la (6) ci dice che la curvatura della forma binaria

$$H^2(dx^2+dy^2)=\frac{1}{(x^2+y^2+h)^2}(dx^2+dy^2)$$

è nulla, così dovrà essere inoltre (7)

$$\Delta_2 \log H = 0\,,$$

il che porge, come si riconosce immediatamente, $h=0$ e quindi

$$H=\frac{1}{x^2+y^2}\,.$$

L'unica trasformazione conforme, per cui riesca

$$dx'^2+dy'^2=\frac{dx^2+dy^2}{x^2+y^2}\,,$$

è manifestamente la (1) (a meno di rotazioni attorno all'origine) e la eguaglianza fra λ ed H implica poi che la (5) si riduca ad

$$u'=\frac{u}{x^2+y^2}\,.$$

Se si suppone invece

$$\frac{\partial^2 \frac{1}{H}}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 \frac{1}{H}}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 \frac{1}{H}}{\partial x\,\partial y}=0\,,$$

si ha

$$\frac{1}{H}=\alpha x+\beta y+\gamma\,.$$

Ma, in causa di

$$\Delta_2 H = H^2 \Delta_2 \frac{1}{H}=0\,,$$

(7) L. BIANCHI, *Lezioni di Geometria differenziale*, E. Spoerri, Pisa, 1894, pag. 67. [Ibidem, 3ª ed., Vol. I, pag. 124. – N. d. R.].

devono annullarsi anche α e β; H è dunque costante, cioè la trasformazione una pura similitudine.

Da tutto ciò si raccoglie che ogni trasformazione (4), (5), la quale lascia invariante la equazione $\underset{2}{\Delta}\underset{2}{\Delta} = 0$, appartiene, per quanto riguarda le variabili x, y, al gruppo dei raggi vettori reciproci ed ha, rispetto alla funzione, la forma $u' = Hu$, designando $-H^2$ il discriminante della trasformazione in x, y [8].

---

[8] Si potrebbe facilmente estendere questo risultato, diciamo così, negativo, mostrando che nemmeno la considerazione di trasformazioni puntuali in tutte le tre variabili x, y, u, o di contatto rispetto a u, conduce a nuovi casi di invarianza pel $\underset{2}{\Delta}\underset{2}{\Delta} = 0$. Non si risguarda naturalmente come caso nuovo lo scambio di u in $u + v$, con v integrale di $\underset{2}{\Delta}\underset{2}{\Delta} = 0$.

XXII.

SULLE CONGRUENZE DI CURVE (*)

« Rendiconti Acc. Lincei », s. 5°, vol. VIII, 1° sem. 1899

pp. 239-246

Data nello spazio ordinario una congruenza [C] di curve c, fissiamo ad arbitrio un punto P (nell'intorno del quale la congruenza si comporti in modo regolare) e diciamo t_P la tangente, π_P il piano normale a c nel punto P.

Le tangenti t alle curve c, spiccate dai punti di π_P, costituiscono una congruenza rettilinea [T_P], ed è ben chiaro che la natura di essa dipende esclusivamente dalla natura della congruenza fondamentale [C].

In particolare gli elementi metrici di prim'ordine (ascisse dei punti limiti, distanza focale, angolo dei piani focali, ecc.), che competono al raggio t_P, in quanto appartiene a [T_P], si possono esprimere per mezzo dei coseni direttori della congruenza [C], relativi al punto P, e loro derivate prime.

L'impiego dei simboli di RICCI permette di attribuire a queste espressioni una forma assai semplice, da cui discendono alcune facili conseguenze.

Si ha in primo luogo che una congruenza [C] è o no normale assieme a [T_P], o più esattamente, che in un generico punto P, la condizione di normalità per la congruenza [C] equivale alla condizione di normalità della congruenza rettilinea [T_P], e si può quindi enunciare dicendo che devono essere perpendicolari i piani focali, relativi al raggio t_P.

Ma più notevole è il caso, in cui sopra t_P coincidono i punti limiti.

Con naturale estensione dell'appellativo, usato per le congruenze rettilinee, diremo *isotrópe* le congruenze [C], per cui si presenta questa circostanza. Esse godono di due proprietà interessanti, che non credo siano state osservate, nemmeno per le congruenze rettilinee.

(*) Presentata dal Socio E. BELTRAMI nella seduta del 5 marzo 1899.

La prima proprietà si deduce immediatamente dalla definizione di isotropia, in base a un teorema del prof. RICCI, e consiste in ciò che ogni congruenza isotrópa $[C]$ si può in infiniti modi risguardare come risultante dalle intersezioni di due famiglie ortogonali di superficie. In altri termini, la equazione lineare ed omogenea del prim'ordine, che ha per caratteristiche le curve c, possiede infinite coppie di integrali fra loro ortogonali.

La seconda proprietà è che le rette cicliche, passanti per i vari punti P, e appartenenti ai rispettivi piani π_P, costituiscono due congruenze coniugate (anzichè due complessi, come avverrebbe in generale). Ciò è quanto dire che *ogni congruenza isotrópa* (reale) *è ortogonale a due congruenze rettilinee coniugate, costituite da rette cicliche, e reciprocamente.*

Di qua segue tosto la costruzione di tutte le congruenze isotrópe, e in pari tempo la espressione generale pei coefficienti A, B (supposti reali) delle equazioni

$$\frac{\partial u}{\partial z} = A\,\frac{\partial u}{\partial x} + B\,\frac{\partial u}{\partial y}\,,$$

che ammettono infinite coppie di integrali fra loro ortogonali.

1. – Alla congruenza data $[C]$ associamone due altre $[1]$ e $[2]$, che costituiscano con essa una terna ortogonale. Per individuarla, ci varremo dei simboli ben noti del prof. RICCI [1]. Si designerà la $[C]$ con $[3]$ e in generale con $\lambda_{h/r}$, $(r = 1, 2, 3)$ il sistema coordinato covariante della congruenza $[h]$, $(h = 1, 2, 3)$.

Lo spazio si intenderà riferito ad un sistema di coordinate curvilinee x_1, x_2, x_3, che ci riserviamo di far coincidere, quando giovi, colle ordinarie coordinate cartesiane ortogonali. Il supporle tali a priori non recherebbe alcuna maggiore semplificazione.

Sieno x_1, x_2, x_3 le coordinate di P, $x_1 + dx_1$, $x_2 + dx_2$, $x_3 + dx_3$ quelle di un generico punto Q, vicino a P in π_P.

Detto ds il segmento elementare PQ, $\varphi_1 = \varphi$, $\varphi_2 = (\pi/2) - \varphi$ gli angoli che esso forma colle direzioni positive delle linee 1, 2, passanti per P, $\lambda_{3/r} + \mu_r\,ds$ i valori delle $\lambda_{3/r}$ in Q, avremo, colle notazioni del calcolo differenziale assoluto:

$$\left.\begin{aligned} dx_r &= ds\,(\cos\varphi\,\lambda_1^{(r)} + \operatorname{sen}\varphi\,\lambda_2^{(r)}) = ds \sum_1^2{}_h \cos\varphi_h\,\lambda_h^{(r)}\,,\\ \mu_r &= \sum_1^3{}_q\,\lambda_{3/rq}\,\frac{dx_q}{ds} = \sum_1^3{}_q\,\lambda_{3/rq} \sum_1^2{}_h \cos\varphi_h \lambda_h^{(q)}. \end{aligned}\right\}\qquad (r = 1, 2, 3)$$

[1] Cfr. principalmente: *Dei sistemi di congruenze ortogonali in una varietà qualunque*, nelle Memorie di questa Accademia, 1896.

(Per convincersene, basta notare che queste formule hanno carattere invariantivo e sussistono evidentemente in coordinate cartesiane ortogonali).

Introducendo gli invarianti γ, definiti dalla formula generale:

$$\gamma_{ljk} = \sum_{rs}^{3}{}_{1} \lambda_{l/rs} \lambda_j^{(r)} \lambda_k^{(s)}, \qquad (l, j, k = 1, 2, 3),$$

si ha:

$$\sum_{q}^{3}{}_{1} \lambda_{3/rq} \lambda_h^{(q)} = \sum_{i}^{3}{}_{1} \gamma_{3ih} \lambda_{i/r},$$

e quindi, ricordando che $\gamma_{33h} = 0$, l'espressione delle μ_r diviene:

$$\mu_r = \sum_{ih}^{2}{}_{1} \lambda_{i/r} \gamma_{3ih} \cos \varphi_h, \qquad (r = 1, 2, 3), \tag{1}$$

donde:

$$\left\{\begin{aligned} \mu^{(r)} &= \sum_{ih}^{2}{}_{1} \lambda_i^{(r)} \gamma_{3ih} \cos \varphi_h, \\ \frac{1}{\varrho^2} &= \sum_{r}^{3}{}_{1} \mu_r \mu^{(r)} = \sum_{ihjk}^{2}{}_{1} \gamma_{3ih} \gamma_{3ik} \cos \varphi_h \cos \varphi_k \sum_{r}^{3}{}_{1} \lambda_{i/r} \lambda_j^{(r)} \\ &= \sum_{ihk}^{2}{}_{1} \gamma_{3ih} \gamma_{3ik} \cos \varphi_h \cos \varphi_k = (\gamma_{311}^2 + \gamma_{321}^2) \cos^2 \varphi + \\ &+ 2(\gamma_{311}\gamma_{312} + \gamma_{321}\gamma_{322}) \cos \varphi \operatorname{sen} \varphi + (\gamma_{312}^2 + \gamma_{322}^2) \operatorname{sen}^2 \varphi . \end{aligned}\right. \tag{2}$$

Abbiamo designato $\sum_{r}^{3}{}_{1} \mu_r \mu^{(r)}$ con $1/\varrho^2$, supponendo implicitamente $\sum_{r}^{3}{}_{1} \mu_r \mu^{(r)}$ diverso da zero. L'ipotesi opposta equivale a $\mu_r = 0$, $(r=1, 2, 3)$. La congruenza $[T_P]$ si comporta allora, rispetto a t_P, come se fosse costituita da rette parallele; e non c'è nulla da aggiungere. Ecco perchè si può escludere a priori che $\sum_{r}^{3}{}_{1} \mu_r \mu^{(r)}$ si annulli.

In coordinate cartesiane, le $\lambda_{3/r}$ (o $\lambda_3^{(r)}$) sono i coseni direttori di t_P e le $\lambda_{3/r} + \mu_r\, ds$ (o $\lambda_3^{(r)} + \mu^{(r)} ds$) quelli di t_Q (la direzione positiva sopra le t corrispondendo a quella delle curve c). Diciamo ancora ν_r (o $\nu^{(r)}$) i coseni direttori della minima distanza dp fra t_P e t_Q; ψ l'angolo fra la direzione positiva di dp e quella della linea 1, relativa al punto P; α l'ascissa del piede di dp sopra t_P, contata a partire da P.

Colla solita convenzione di risguardare equivalenti gli indici, congrui fra loro rispetto al modulo 3, e notando che $\sum_1^3 {}_r\, \lambda_{3/r}\mu^{(r)} = 0$, $\sqrt{a} = 1$ (a è il discriminante della forma fondamentale) potremo scrivere:

$$\nu^{(r)} = \varrho\, \frac{\lambda_{3/r+1}\mu_{r+2} - \lambda_{3/r+2}\mu_{r+1}}{\sqrt{a}}\,, \qquad (r = 1, 2, 3), \tag{3}$$

e ([2]),

$$dp\,\nu^{(r)} = ds\{\cos\varphi\, \lambda_1^{(r)} + \operatorname{sen}\varphi\, \lambda_2^{(r)} + \alpha\mu^{(r)}\}\,, \qquad (r = 1, 2, 3), \tag{4}$$

le quali formule seguitano a sussistere in coordinate generali, purchè si risguardino anche le $\nu^{(r)}$ come elementi di un sistema contravariante.

Con facile trasformazione si trova:

$$\nu^{(r)} = \varrho\cos\varphi\{\gamma_{311}\lambda_2^{(r)} - \gamma_{321}\lambda_1^{(r)}\} + \varrho\operatorname{sen}\varphi\{\gamma_{312}\lambda_1^{(r)} - \gamma_{322}\lambda_2^{(r)}\}, \quad (r=1,2,3), \tag{3'}$$

e da queste, moltiplicando successivamente per $\lambda_{1/r}$, $\lambda_{2/r}$ e sommando ciascuna volta rispetto ad r, ove si tenga conto che $\sum_1^3 {}_r\, \nu^{(r)}\lambda_{1/r} = \cos\psi$, $\sum_1^3 {}_r\, \nu^{(r)}\lambda_{2/r} = \operatorname{sen}\psi$:

$$\begin{cases} \cos\psi = -\,\varrho\,\{\gamma_{321}\cos\varphi + \gamma_{322}\operatorname{sen}\varphi\} \\ \operatorname{sen}\psi = \quad \varrho\,\{\gamma_{311}\cos\varphi + \gamma_{312}\operatorname{sen}\varphi\}\,. \end{cases} \tag{5}$$

Poniamo:

$$\Delta = \gamma_{311}\gamma_{322} - \gamma_{312}\gamma_{321} \tag{6}$$

ed osserviamo che Δ^2 è il discriminante di

$$\frac{1}{\varrho^2} = (\gamma_{311}^2 + \gamma_{321}^2)\cos^2\varphi + 2(\gamma_{311}\gamma_{312} + \gamma_{321}\gamma_{322})\cos\varphi\operatorname{sen}\varphi + (\gamma_{312}^2 + \gamma_{322}^2)\operatorname{sen}^2\varphi$$

e non può quindi annullarsi. Ne viene che le (5) sono certamente risolubili rispetto a $\varrho\cos\varphi$, $\varrho\operatorname{sen}\varphi$ e la effettiva risoluzione porge:

$$\begin{cases} \varrho\cos\varphi = \quad \dfrac{1}{\Delta}\{\gamma_{312}\cos\psi + \gamma_{322}\operatorname{sen}\psi\}\,, \\ \varrho\operatorname{sen}\varphi = -\dfrac{1}{\Delta}\{\gamma_{311}\cos\psi + \gamma_{321}\operatorname{sen}\psi\}\,. \end{cases} \tag{5'}$$

([2]) Cfr. per es. BIANCHI, *Lezioni di geometria differenziale*, Pisa, Spoerri, 1894; pag. 247 [2ª ed., vol. I (1902), pag. 300].

In causa delle (3), $\sum_{1}^{3} {}_r \nu^{(r)}\mu_r = 0$, e perciò, se si moltiplicano le (4) per μ_r e si somma, avendo riguardo alle (1), (2) e (5), risulta:

$$\alpha = \varrho \operatorname{sen}(\varphi - \psi) . \tag{7}$$

A mezzo delle (5′), si può esprimere tutto per ψ e si ha, fra l'anomalia ψ della minima distanza e la ascissa α del suo piede, la relazione:

$$\alpha = -\frac{1}{\Delta}\{\gamma_{311}\cos^2\psi + (\gamma_{312} + \gamma_{321})\cos\psi \operatorname{sen}\psi + \gamma_{322}\operatorname{sen}^2\psi\},$$

cui, posto:

$$\begin{cases} \gamma_{311} - \gamma_{322} = \delta \cos\vartheta , \\ \gamma_{312} + \gamma_{321} = \delta \operatorname{sen}\vartheta , \end{cases} \tag{8}$$

si attribuisce la forma:

$$\alpha = -\frac{\gamma_{311} + \gamma_{322}}{2\Delta} - \frac{\delta}{2\Delta}\cos(2\psi + \vartheta) . \tag{9}$$

Di qua apparisce che i valori di α rimangono necessariamente compresi fra:

$$\begin{cases} \alpha_1 = -\dfrac{\gamma_{311} + \gamma_{322}}{2\Delta} - \dfrac{\delta}{2\Delta} , \\[2ex] \alpha_2 = -\dfrac{\gamma_{311} + \gamma_{322}}{2\Delta} + \dfrac{\delta}{2\Delta} , \end{cases} \tag{10}$$

talchè α_1 e α_2 sono le ascisse dei punti limiti. I corrispondenti valori ψ_1 e ψ_2 di ψ (anomalìe dei piani principali) sono determinati, per δ diverso da zero, dalle equazioni:

$$2\psi_1 + \vartheta = \pi ,$$
$$2\psi_2 + \vartheta = 0 ,$$

e differiscono quindi tra loro di un angolo retto.

Se si suppone che le linee 1 e 2 abbiano in ogni punto P le direzioni dei piani principali, ϑ è nullo e le (8) divengono:

$$\begin{cases} \gamma_{311} - \gamma_{322} = \delta , \\ \gamma_{312} + \gamma_{321} = 0 , \end{cases} \tag{8'}$$

ossia [3] *le dette linee costituiscono il sistema canonico ortogonale rispetto alla congruenza* [3], *e δ è la differenza fra le due radici della equazione caratteristica della congruenza.*

Se t_Q incontra t_P, dovrà essere evidentemente (avuto riguardo al modo, con cui rimane fissata dalle (3) la direzione positiva sopra la normale) $\varphi = \psi + \pi/2$, e, per individuare ψ, si hanno dalle (5) le equazioni:

$$\cos\psi = \varrho\{-\gamma_{322}\cos\psi + \gamma_{321}\,\mathrm{sen}\,\psi\}\,,$$
$$\mathrm{sen}\,\psi = \varrho\{\ \ \gamma_{312}\cos\psi - \gamma_{311}\,\mathrm{sen}\,\psi\}\,,$$

ovvero, eliminando ϱ, la:

$$\gamma_{321}\,\mathrm{tg}^2\psi + (\gamma_{311} - \gamma_{322})\,\mathrm{tg}\,\psi - \gamma_{312} = 0\,. \tag{11}$$

Se invece si elimina ψ, si ottiene:

$$\varDelta\varrho^2 + (\gamma_{311} + \gamma_{322})\varrho + 1 = 0\,, \tag{12}$$

la quale equazione, risultando dalla (7) $\alpha = \varrho$, ha per radici le ascisse ϱ_1, ϱ_2 dei fuochi.

Dalle (10) e (12) si trae:

$$\alpha_1 + \alpha_2 = \varrho_1 + \varrho_2 = -\frac{\gamma_{311} + \gamma_{322}}{\varDelta}\,,$$

cioè i punti limiti e i fuochi hanno il medesimo punto di mezzo, ecc.

2. – La condizione necessaria e sufficiente affinchè la nostra congruenza [3] sia normale, è data, come si sa, da $\gamma_{312} - \gamma_{321} = 0$, la quale, a tenore delle (11), (12) e (10), esprime che i piani focali sono ortogonali fra loro, od anche che i fuochi cadono nei punti limiti.

Se $\delta = 0$, i punti limiti coincidono e (semprechè ciò avvenga per ogni punto P del campo, che si considera) la congruenza [3] è a dirsi isotrópa.

La condizione di isotropia equivale a:

$$\begin{cases} \gamma_{311} - \gamma_{322} = 0\,, \\ \gamma_{312} + \gamma_{321} = 0\,, \end{cases} \tag{8''}$$

---

(3) RICCI, Mem. cit., pag. 31.

donde risulta [4] che la equazione caratteristica di [3] ha le radici eguali e quindi che, ad ogni integrale della equazione

$$\sum_1^3{}_r\, \lambda_3^{(r)} \frac{\partial u}{\partial x_r} = 0\,,$$

ne corrisponde un secondo ortogonale.

3. – Affinchè una generica congruenza:

$$\frac{dx_1}{X^{(1)}} = \frac{dx_2}{X^{(2)}} = \frac{dx_3}{X^{(3)}}\,, \tag{13}$$

consti di linee rette, è necessario e basta che le $\sum_1^3{}_s\, X_{rs} X^{(s)}$ riescano proporzionali alle X_r, si abbia cioè, designando M un moltiplicatore arbitrario [5]:

$$\sum_1^3{}_s\, X_{rs} X^{(s)} = M X_r\,, \qquad (r = 1, 2, 3)\,. \tag{14}$$

Ciò posto, io dico che, se [3] è una congruenza isotrópa, e si suppone:

$$X_r = \lambda_{1/r} \pm i\lambda_{2/r}\,, \qquad (i = \sqrt{-1},\ r = 1, 2, 3), \tag{15}$$

le (14) sono soddisfatte.

Si ha infatti:

$$\sum_1^3{}_s\, X_{rs} X^{(s)} = \sum_1^3{}_s\, (\lambda_{1/rs} \pm i\lambda_{2/rs})(\lambda_1^{(s)} \pm i\lambda_2^{(s)}) \tag{16}$$

$$= \sum_1^3{}_{hk}\, (\gamma_{1hk} \pm i\gamma_{2hk})\lambda_{h/r} \sum_1^3{}_s\, (\lambda_1^{(s)} \pm i\lambda_2^{(s)})\lambda_{k/s} = \sum_1^3{}_h \{(\gamma_{1h1} - \gamma_{2h2}) \pm i(\gamma_{2h1} + \gamma_{1h2})\}\lambda_{h/r}\,,$$

e, siccome, in virtù delle (8″), il coefficiente di $\lambda_{3/r}$ si annulla, così segue tosto:

$$\sum_1^3{}_r\, X_{rs} X^{(s)} = (\gamma_{122} + i\gamma_{211}) X_r\,, \qquad (r = 1, 2, 3),$$

giusta l'asserto.

---

(4) Ricci, ibidem, e pag. 44.

(5) La verifica è ovvia, se si tratta di coordinate cartesiane ortogonali. Il carattere invariantivo delle (14) ne assicura d'altra parte la validità, qualunque sia il sistema di riferimento.

Se dunque nelle (13) si intendono attribuiti alle X i valori (15), si hanno due congruenze rettilinee immaginarie coniugate ed è ben chiaro che, per ogni punto P, i raggi corrispondenti delle due congruenze sono le rette cicliche situate in π_P.

Reciprocamente, data ad arbitrio una coppia di congruenze coniugate, costituite da rette cicliche, la congruenza [3], che rimane univocamente determinata, è isotrópa. Infatti l'annullarsi del coefficiente di $\lambda_{3,r}$ nelle (16) porta per necessità le $(8'')$.

4. – Possiamo valerci della proprietà, testè dimostrata, per costruire tutte le congruenze isotrópe.

Le coordinate x_1, x_2, x_3 essendo cartesiane ortogonali, si faccia:

$$\xi = x_1 + ix_2 , \quad \eta = x_1 - ix_2 , \quad \zeta = x_3 ,$$

$$\Xi = \frac{X^{(1)} + iX^{(2)}}{X^{(3)}} , \quad H = \frac{X^{(1)} - iX^{(2)}}{X^{(3)}} ,$$

(il che è sempre lecito, perchè una almeno delle X è diversa da zero). Le (13) divengono:

$$\frac{d\xi}{\Xi} = \frac{d\eta}{H} = d\zeta , \tag{13'}$$

e si vede subito che la congruenza sarà costituita da rette cicliche, purchè:

$$H = -\frac{1}{\Xi} , \tag{17}$$

$$\frac{\partial \Xi}{\partial \xi}\,\Xi - \frac{\partial \Xi}{\partial \eta}\,\frac{1}{\Xi} + \frac{\partial \Xi}{\partial \zeta} = 0 . \tag{18}$$

L'integrale generale di quest'ultima equazione è dato da:

$$f\left(\Xi,\ \xi - \Xi\zeta,\ \eta + \frac{\zeta}{\Xi}\right) = 0 ,$$

ossia, ripassando alle variabili x_1, x_2, x_3, da:

$$f\left(\Xi,\ x_1 + ix_2 - \Xi x_3,\ x_1 - ix_2 + \frac{x_3}{\Xi}\right) = 0 , \tag{18'}$$

dove f è simbolo di funzione arbitraria.

Noto Ξ, si ha H dalla (17) e, ponendo:

$$\Xi + H = \sigma_1 + i\tau_1 \,, \qquad \Xi - H = -\tau_2 + i\sigma_2 \,, \tag{19}$$

(con σ e τ funzioni reali) le congruenze di rette cicliche restano individuate da:

$$\frac{dx_1}{\sigma_1 + i\tau_1} = \frac{dx_2}{\sigma_2 + i\tau_2} = dx_3 \,. \tag{20}$$

Lo scambio di i in $-i$ determina le congruenze coniugate:

$$\frac{dx_1}{\sigma_1 - i\tau_2} = \frac{dx_2}{\sigma_2 - i\tau_2} = dx_3 \,, \tag{21}$$

e le isotrópe devono risultare ortogonali alle (20), (21). Assumendole per esempio sotto la forma:

$$\frac{dx_1}{A} = \frac{dx_2}{B} = -\,dx_3 \,,$$

saranno A, B soluzioni del sistema:

$$A(\sigma_1 \pm i\tau_1) + B(\sigma_2 \pm i\tau_2) = 1 \,,$$

da cui:

$$A = \frac{\tau_2}{\sigma_1\tau_2 - \sigma_2\tau_1} \,, \qquad B = \frac{-\tau_1}{\sigma_1\tau_2 - \sigma_2\tau_1} \,. \tag{22}$$

Ne viene, scrivendo x, y, z per x_1, x_2, x_3:
Le equazioni

$$\frac{\partial u}{\partial z} = A\frac{\partial u}{\partial y} + B\frac{\partial u}{\partial y} \,,$$

a coppie di integrali ortogonali sono tutte e soltanto quelle, in cui A, B *hanno i valori* (22), *che si ricavano, per mezzo delle* (17), (19) *da ogni soluzione* Ξ *della* (18').

XXIII.

SULLE EQUAZIONI A COPPIE DI INTEGRALI ORTOGONALI (*)

« Rendiconti Acc. Lincei », s. 5°, vol. 8, 1° sem. 1899

pp. 295-296

Le equazioni

$$\text{(E)} \qquad \frac{\partial u}{\partial z} = A \frac{\partial u}{\partial x} + B \frac{\partial u}{\partial y},$$

tali che, per ogni famiglia $f_1(x, y, z) =$ cost. *di superficie integrali, ne esiste un'altra ortogonale* $f_2(x, y, z) =$ cost., *sono tutte e soltanto quelle, le cui caratteristiche*

$$\frac{dx}{A} = \frac{dy}{B} = -dz,$$

godono della seguente proprietà:

Le rette cicliche, che, corrispondentemente ad ogni punto P dello spazio, giacciono nel piano π, *normale in quel punto alla caratteristica, non esauriscono, come nel caso generale, il complesso ciclico, ma formano soltanto un sistema* ∞^2, cioè due congruenze (coniugate, quando i coefficienti A e B sono reali).

Ho stabilito non è guari questo risultato con procedimento analitico (1). Eccone una brevissima dimostrazione sintetica.

Sieno P e Q due punti generici dello spazio, π e χ i rispettivi piani normali alle caratteristiche. Per ogni famiglia $f(x, y, z) =$ cost. di superficie integrali, diciamo ordinatamente a e b le intersezioni con π e χ dei piani tangenti α, β in P, Q.

(*) Presentata dal Socio E. BELTRAMI nella seduta del 19 marzo 1899.

(1) Cfr. la Nota precedente: *Sulle congruenze di curve* [in questo vol.: XXII, pp. 369-377].

Facendo variare la famiglia f, si viene a porre una corrispondenza fra le rette a del fascio (π, P) (così designamo il fascio, che appartiene al piano π ed ha P per centro) e le rette b del fascio (χ, Q). Per la natura della equazione (E), questa corrispondenza è tale che, ad una coppia qualunque di rette ortogonali del primo fascio, corrisponde nel secondo una coppia pure ortogonale, quindi alle rette cicliche i, i' di (π, P) rispettivamente le j, j' di (χ, Q).

Di qua risulta che quella particolare famiglia $\varphi(x, y, z) = \text{cost.}$ di integrali della (E), il cui piano tangente α in P taglia π secondo i (famiglia che si può sempre costruire) interseca ogni altro piano χ secondo una retta j pure ciclica.

Si vede poi subito che α è un piano ciclico, cioè tangente al cono I^2, che proietta da P il cerchio immaginario all'infinito.

Infatti, per ciascuna coppia di integrali ortogonali di (E), i rispettivi piani tangenti in P sono coniugati rispetto ad I^2, perciò α risulta coniugato a sè stesso, ossia ciclico. Lo stesso evidentemente è a dirsi di ogni altro piano tangente alla superficie $\varphi(x, y, z) = \text{cost.}$

Assumiamo ora il punto Q vicinissimo a P sopra i. A meno di infinitesimi d'ordine superiore, esso si può risguardare situato sopra la superficie $\varphi(x, y, z) = \text{cost.}$, che passa per P, e quindi il piano tangente β in Q contiene la retta PQ, cioè i. D'altra parte, per quanto s'è osservato, è questa l'unica retta ciclica, passante per Q e situata in β. Ne viene che la intersezione j di β con χ è la stessa retta i.

Dimostrato ciò per il punto Q di i, contiguo a P, si conclude con facile illazione che lo stesso vale per ogni punto Q della i.

In altri termini, la corrispondenza, che la considerazione delle superficie $\varphi(x, y, z) = \text{cost.}$ stabilisce fra ogni punto P dello spazio e una delle due rette cicliche i del fascio (π, P) è tale che, ad ogni altro punto di i, corrisponde sempre la retta stessa.

Le i costituiscono dunque una congruenza (e così le i'), giusta l'asserto.

La reciproca è pur vera, come si riconosce in modo perfettamente analogo.

XXIV.

TIPI DI POTENZIALI CHE SI POSSONO FAR DIPENDERE DA DUE SOLE COORDINATE

« Mem. Accad. di Torino », s. II, t. XLIX (1899)

pp. 105-152

Introduzione.

La teoria del potenziale logaritmico, edificata da C. NEUMANN e le ricerche del prof. BELTRAMI sui potenziali simmetrici indussero il prof. VOLTERRA a discutere in generale le proprietà dei potenziali che si possono far dipendere da due sole coordinate. Egli ne ha stabilito i più salienti caratteri, indicandone le possibili applicazioni a problemi svariati di fisica matematica. Rimane tuttavia — osserva al principio della sua memoria (¹) lo stesso prof. VOLTERRA — una questione preliminare da risolvere, assegnare cioè i varî tipi dei potenziali in discorso.

Tale è il compito, che io qui mi prefiggo.

Prendo le mosse dalla osservazione semplicissima che debbono riuscire indipendenti da una coordinata tutti quei potenziali, i quali ammettono trasformazioni infinitesime in sè. Sono così condotto a considerare (§ 1) le trasformazioni infinitesime, ammesse dalla equazione di LAPLACE:

$$\underset{2}{\Delta} u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = 0$$

(in quanto vi si risguardi u come invariante), le quali sono tutte e soltanto quelle del gruppo G_7 delle similitudini.

Passo quindi in rassegna i diversi tipi di trasformazioni infinitesime del gruppo G_7 e scelgo per ognuna di esse (§ 2) un sistema di coordinate curvilinee ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3, che abbia per linee $\varrho_1 =$ cost., $\varrho_2 =$ cost. le traiet-

(¹) *Sopra alcuni problemi della teoria del potenziale*, « Annali della Scuola Normale di Pisa », vol. III, 1883.

torie della trasformazione infinitesima. Espresso il $\underset{2}{\Delta} u$ in coordinate ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3, ricavo le forme caratteristiche dei potenziali corrispondenti, ponendovi $\partial u/\partial \varrho_3 = 0$.

Siccome vi hanno cinque categorie (distinte, anche per rispetto alle traiettorie) di trasformazioni infinitesime *reali* di G_7: traslazioni, rotazioni, trasformazioni elicoidali, omotetie, trasformazioni spirali, così si ottengono altrettanti tipi di potenziali binari reali, che, avuto riguardo alla congruenza, formata dalle linee, su cui essi conservano valore costante, possono opportunamente designarsi come segue:

1° Potenziali cilindrici o logaritmici;
2° Potenziali circolari o simmetrici;
3° Potenziali elicoidali (dipendenti da un parametro);
4° Potenziali conici;
5° Potenziali spirali (dipendenti da un parametro).

Di questi tipi l'ultimo soltanto è nuovo, Il 1°, 2° e 4° sono infatti ben noti e il 3°, benchè non sia stato ancora considerato da vicino, ricorre già nella « Commentatio Mathematica » di RIEMANN.

In codesta « Commentatio », insigne concezione del suo genio meraviglioso, RIEMANN enumera tra altro i diversi casi, nei quali la equazione:

$$k\frac{\partial u}{\partial t} + \underset{2}{\Delta} u = 0\,, \quad (\text{con } k \text{ costante})\,,$$

può dipendere da due sole coordinate di spazio. In ognuno di questi casi deve manifestamente dipendere da due sole coordinate la *espressione* $\underset{2}{\Delta} u$ e quindi a fortiori la equazione $\underset{2}{\Delta} u = 0$.

Dei risultati di RIEMANN hanno relazione colla nostra ricerca soltanto quelli, in cui u possiede la massima generalità, l'ipotesi cioè, che egli designa con $m = 1$. Tale ipotesi conduce precisamente ai tipi 1°, 2° e 3° [2].

Si tratta ora di decidere se i potenziali binari, che scaturiscono dalla accennata considerazione gruppale, sono i soli possibili o se vi hanno altri tipi.

Ho istituita a tale scopo una ricerca sistematica, di cui a §§ 3-8.

Dovetti rinunciare al metodo di RIEMANN, che male si sarebbe prestato in questo caso per la maggior complicazione dei calcoli; ho prefe-

---

[2] Osservo per incidenza che la possibilità di rendere indipendenti da una coordinata le *espressioni* del $\underset{2}{\Delta} u$, che spettano a ognuno di questi tipi, segue senz'altro da ciò che essi (ed essi soltanto) corrispondono a trasformazioni infinitesime del gruppo dei movimenti, per cui, nonchè l'equazione $\underset{2}{\Delta} u = 0$, addirittura il $\underset{2}{\Delta} u$ è un invariante.

rito di formare direttamente le equazioni differenziali, cui debbono soddisfare tre funzioni $\xi^{(1)}$, $\xi^{(2)}$, $\xi^{(3)}$ delle variabili x_1, x_2, x_3, affinchè la congruenza:

$$\frac{dx_1}{\xi^{(1)}} = \frac{dx_2}{\xi^{(2)}} = \frac{dx_3}{\xi^{(3)}}$$

sia costituita da linee equipotenziali.

Dopo ciò, ritrovo subito il risultato del § 1, constatando che i coefficienti d'ogni trasformazione infinitesima di G_7 sono integrali del sistema. Uno studio diretto di tale sistema sarebbe per altro pressochè impraticabile, causa il rapido complicarsi delle formule.

Ho fatto perciò appello ai metodi del prof. RICCI, che con mirabile agilità si adattano a questioni svariatissime, mettendone ognora a nudo l'intima natura e sfrondandole da ogni difficoltà inessenziale.

Per facilitare la applicazione di questi metodi al nostro problema, apparve opportuna una breve escursione nel campo della geometria intrinseca di una congruenza di curve.

Ricordate nel § 4 le formule fondamentali di RICCI e indicatane una opportuna specializzazione per lo spazio ordinario, esamino nel § seguente un caso particolare notevole, quello delle congruenze rettilinee isotrópe; costruisco una espressione (che credo nuova) pel quadrato dell'elemento lineare dello spazio, riferito alle rette della congruenza come linee $x_1 =$ cost., $x_2 =$ cost., e ne deduco agevolmente che ad ogni congruenza rettilinea isotrópa corrisponde una classe di potenziali binari (*potenziali isotrópi*), le cui linee equipotenziali sono appunto le rette della congruenza ([3]).

Dopo questa digressione, riprendo (§ 6) le condizioni di equipotenzialità, risguardandovi (come è sempre lecito, finchè non si tratta di linee di lunghezza nulla) $\xi^{(1)}$, $\xi^{(2)}$, $\xi^{(3)}$ quale sistema coordinato contravariante (coseni direttori, se le coordinate sono cartesiane ortogonali) della corrispondente congruenza.

([3]) Debbo alla cortesia del prof. KLEIN la comunicazione che questi potenziali isotrópi compaiono sotto diverso aspetto nella memoria di JACOBI, *Ueber eine particuläre Lösung der partiellen Differentialgleichung* $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$ (« Crelle's Journal », B. XXXVI, 1848, oppure « Ges. Werke », B. II). JACOBI li definisce come soluzioni simultanee delle due equazioni:

$$\underset{2}{\Delta} V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0\,, \qquad (\underset{1}{\Delta} V)^2 = \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2 = 0\,.$$

Il legame tra siffatti potenziali e le congruenze isotrópe fu con geniale intuizione avvertito dallo stesso KLEIN.

Per la dimostrazione, veggasi la nota alla fine del § 5 (p. 420).

Una facile trasformazione conduce di qua alle equazioni intrinseche (E) delle congruenze equipotenziali.

Stabilisco poscia (§ 7) le caratteristiche intrinseche delle congruenze, costituite dalle traiettorie di un gruppo reale ∞^1 di similitudini.

Così finalmente posseggo quanto basta per esaurire la ricerca delle congruenze equipotenziali. Non ho che a tener conto delle condizioni di integrabilità del sistema (E).

Lo studio se ne fa in modo semplice e non privo di eleganza e agevolmente si stabilisce che le congruenze equipotenziali sono rettilinee ed isotrópe, oppure constano delle traiettorie di un gruppo ∞^1 di similitudini.

Se si avverte che le rette parallele o concorrenti in un medesimo punto sono casi particolari di congruenze isotrópe, si può enunciare il risultato:

I potenziali binari sono isotrópi, simmetrici, elicoidali o spirali.

Per essere completo, stimai opportuno di confrontare tra loro questi tipi, ricercando se e quali delle corrispondenti equazioni sieno riducibili (4) l'una all'altra.

Mi sono valso a tale scopo del metodo, proposto dal sig. COTTON nella sua bella nota « Sur les équations aux dérivées partielles du second ordre à deux variables » (5).

È risultato (§ 9) che i potenziali isotrópi equivalgono tutti ai logaritmici; il parametro dei potenziali elicoidali non è essenziale, talchè essi rientrano in una categoria unica, distinta per altro, sì dai potenziali logaritmici, che dai simmetrici e spirali. Quest'ultimi, non solo sono irriducibili agli altri tipi, ma nemmeno si equivalgono tra loro per valori diversi del parametro.

1. - Trasformazioni infinitesime, ammesse dalla equazione di Laplace.

Sia la trasformazione infinitesima:

$$Xf = \xi_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \xi_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \xi_3 \frac{\partial f}{\partial x_3}$$

e la equazione a derivate parziali:

$$\underset{2}{\Delta} u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} = 0 .$$

(4) La riducibilità va intesa nel senso, abitualmente seguito nella teoria delle equazioni del secondo ordine. Due tali equazioni si ritengono equivalenti, se si possono ottenere l'una dall'altra, combinando una trasformazione puntuale nelle variabili indipendenti con una trasformazione moltiplicativa ($u' = \lambda u$) della funzione incognita.

(5) « Comptes Rendus », 30 novembre 1896.

Cerchiamo a quali condizioni debbono soddisfare i coefficienti ξ_1, ξ_2, ξ_3 di Xf, affinchè, convenendo di risguardare la funzione u come invariante, la equazione $\underset{2}{\Delta} u = 0$ ammetta la trasformazione infinitesima Xf (debitamente estesa), si abbia cioè:

$$\bar{X}(\underset{2}{\Delta} u) \equiv -2M \underset{2}{\Delta} u\,, \tag{1}$$

dove $\bar{X}f$ designa appunto la trasformazione, estesa alla u e relative derivate, M una arbitraria funzione di x_1, x_2, x_3.

Rappresentando con v, v_s, v_{ss} i coefficienti della trasformazione estesa, cioè, possiam dire, gli incrementi di u e delle sue derivate $\partial u/\partial x_s$, $\partial^2 u/\partial x_s^2$ rispettivamente, si avrà, per la supposta invarianza di u, $v = 0$, e di conseguenza [6]:

$$v_s = -\sum_1^3{}_r \frac{\partial \xi_r}{\partial x_s} \frac{\partial u}{\partial x_r}\,,$$

$$v_{ss} = -2 \sum_1^3{}_r \frac{\partial \xi_r}{\partial x_s} \frac{\partial^2 u}{\partial x_r \partial x_s} - \sum_1^3{}_r \frac{\partial^2 \xi_r}{\partial x_s^2} \frac{\partial u}{\partial x_r}\,.$$

Troviamo così:

$$\bar{X}(\underset{2}{\Delta} u) = \sum_1^3{}_s v_{ss} = -2 \sum_1^3{}_{rs} \frac{\partial \xi_r}{\partial x_s} \frac{\partial^2 u}{\partial x_r \partial x_s} - \sum_1^3{}_r \underset{2}{\Delta} \xi_r \frac{\partial u}{\partial x_r}\,,$$

la quale espressione, sostituita nella (1), porge tosto le condizioni cercate.

Infatti, perchè la (1) sussista identicamente, occorre e basta che si annullino i coefficienti delle singole $\partial u/\partial x_r$, $\partial^2 u/\partial x_r \partial x_s$, cioè che le ξ_r verifichino le seguenti equazioni:

$$\frac{\partial \xi_r}{\partial x_r} = M\,, \qquad \frac{\partial \xi_r}{\partial x_s} + \frac{\partial \xi_s}{\partial x_r} = 0\,, \qquad (r, s = 1, 2, ;\ r \gtrless s),$$

$$\underset{2}{\Delta} \xi_r = 0\,, \qquad (r = 1, 2, 3)\,.$$

Introducendo i soliti simboli ε_{rs}, esse si possono scrivere:

$$\frac{\partial \xi_r}{\partial x_s} + \frac{\partial \xi_s}{\partial x_r} = 2\varepsilon_{rs} M\,, \qquad (r, s = 1, 2, 3), \tag{2}$$

$$\underset{2}{\Delta} \xi_r = 0\,, \qquad (r = 1, 2, 3)\,. \tag{3}$$

Si trova subito che la indeterminata M deve ridursi ad una costante.

---

(6) LIE-ENGEL, *Theorie der Transformationsgruppen*, vol. I, Leipzig, Teubner, 1888; pag. 545.

Abbiamo infatti, moltiplicando le (2) per ε_{rs} e sommando:

$$\sum_1^3{}_{rs}\, \varepsilon_{rs} \left(\frac{\partial \xi_r}{\partial x_s} + \frac{\xi_s}{\partial x_r} \right) = 2M \sum_1^3{}_{rs}\, \varepsilon_{rs}^2 ,$$

ossia:

$$3M = \sum_1^3{}_s \frac{\partial \xi_s}{\partial x_s} ,$$

da cui:

$$3 \frac{\partial M}{\partial x_r} = \sum_1^3{}_s \frac{\partial^2 \xi_s}{\partial x_r \, \partial x_s} .$$

D'altra parte, derivando le (2) stesse rapporto ad x_s, e sommando rispetto ad s:

$$2 \frac{\partial M}{\partial x_r} = \sum_1^3{}_s \frac{\partial^2 \xi_s}{\partial x_r \, \partial x_s} + \Delta_2 \xi_r ,$$

che, sottratta dalla precedente, porge:

$$\frac{\partial M}{\partial x_r} = - \Delta_2 \xi_r ,$$

talchè le (3) riescono verificate allora e solo allora che $\partial M / \partial x_r = 0$, $(r = 1, 2, 3)$.

Posto poi M eguale ad una costante C, si ha il sistema:

$$(2') \qquad \frac{\partial \xi_r}{\partial x_s} + \frac{\partial \xi_s}{\partial x_r} = 2 \varepsilon_{rs} C , \qquad (r, s = 1, 2, 3)$$

incondizionatamente integrabile ed equivalente al primitivo (2), (3). Esso definisce le trasformazioni infinitesime del gruppo G_7 delle similitudini. La cosa è evidente, se, interpretando le ξ_r come componenti di uno spostamento infinitesimo, si ricorre al significato delle $\partial \xi_r / \partial x_s + \partial \xi_s / \partial x_r$. Possiamo del resto constatarlo, formando l'integrale generale delle (2'). Siccome le derivate seconde delle ξ_r sono tutte nulle (lo si riconosce immediatamente, derivando le (2')), il detto integrale si ha prendendo:

$$\xi_r = c_r + \sum_1^3{}_s c_{rs} x_s , \qquad (r = 1, 2, 3)$$

e disponendo delle costanti in modo da soddisfare alle (2′), ossia:

$$c_{rs} + c_{sr} = 2\varepsilon_{rs} C .$$

Otteniamo così per la più generale trasformazione infinitesima, che conserva i potenziali, la espressione:

$$Xf = \sum_{1}^{3}{}_r\, c_r \frac{\partial f}{\partial x_r} + \sum_{rs} c_{rs}\, x_s \frac{\partial f}{\partial x_r} = \sum_i e_i X_i f ,$$

dove si è posto:

$$X_1 f = \frac{\partial f}{\partial x_1}, \qquad X_2 f = \frac{\partial f}{\partial x_2}, \qquad X_3 f = \frac{\partial f}{\partial x_3},$$

$$X_4 f = x_3 \frac{\partial f}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial f}{\partial x_3}, \quad X_5 f = x_1 \frac{\partial f}{\partial x_3} - x_3 \frac{\partial f}{\partial x_1}, \quad X_6 f = x_2 \frac{\partial f}{\partial x_1} - x_1 \frac{\partial f}{\partial x_2},$$

$$X_7 f = x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + x_3 \frac{\partial f}{\partial x_3};$$

$$e_1 = c_1, \quad e_2 = c_2, \quad e_3 = c_3, \quad e_4 = c_{23}, \quad e_5 = c_{31}, \quad e_6 = c_{12}, \quad e_7 = C .$$

Essa ci si presenta pertanto come la più generale trasformazione infinitesima del gruppo G_7 delle similitudini.

Anche ogni trasformazione finita del gruppo lascia invariante la equazione:

$$\underset{2}{\Delta} u = 0 ,$$

ne trasforma cioè gli integrali in nuovi integrali.

D'ora innanzi si considereranno come equivalenti due potenziali o due classi di potenziali, che si possano dedurre l'una dall'altra mediante una trasformazione di G_7.

2. - Potenziali binari corrispondenti alle trasformazioni infinitesime del gruppo delle similitudini.

Consideriamo le traiettorie:

$$\frac{dx_1}{\xi_1} = \frac{dx_2}{\xi_2} = \frac{dx_3}{\xi_2}$$

del gruppo ∞^1, generato da una trasformazione infinitesima Xf.

Se con ϱ_1, ϱ_2 si rappresentano due integrali indipendenti della equazione:

$$Xf = 0 \ ,$$

le dette traiettorie sono le intersezioni delle superficie:

$$\varrho_1 = \text{cost.} \, ,$$
$$\varrho_2 = \text{cost.}$$

Associando a queste due famiglie una terza qualsiasi, da esse indipendente, $\varrho_3 = \text{cost.}$, la espressione Xf, rispetto al sistema coordinato ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3, assumerà la forma $P(\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3)\partial f/\partial \varrho_3$.

Dico che, se Xf soddisfa alla (1), o ciò che è lo stesso, appartiene al gruppo G_7, la equazione:

$$\underset{2}{\Delta} u = 0$$

si può far dipendere dalle sole coordinate ϱ_1, ϱ_2.

Suppongasi infatti la funzione u indipendente da ϱ_3; lo stesso avviene delle sue derivate, che risultano perciò altrettanti invarianti della trasformazione Xf e, come tosto si riconosce, anche della trasformazione estesa $\overline{X}f$. Applicare quest'ultima al $\underset{2}{\Delta} u$ equivale pertanto ad applicare la $Xf = P(\partial f/\partial \varrho_3)$ ai coefficienti del $\underset{2}{\Delta} u$ (espresso per mezzo delle coordinate ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3), equivale cioè a derivare questi coefficienti rispetto a ϱ_3 e moltiplicare poi per P.

Segue quindi dalla ipotesi che *u non contiene* ϱ_3:

$$\overline{X}(\underset{2}{\Delta} u) = P \frac{\partial}{\partial \varrho_3} (\underset{2}{\Delta} u) \ ,$$

dopo di che la (1) diviene:

$$\frac{\partial}{\partial \varrho_3} (\underset{2}{\Delta} u) = -\frac{2M}{P} \underset{2}{\Delta} u \ ,$$

od anche:

$$\frac{\partial}{\partial \varrho_3} \left\{ e^{\int (2M/P) d\varrho_3} \underset{2}{\Delta} u \right\} = 0 \ ,$$

la quale mostra che, supposto una volta u indipendente da ϱ_3, anche i singoli coefficienti del $\underset{2}{\Delta} u$, moltiplicati per un conveniente fattore, riescono indipendenti da ϱ_3.

È questa precisamente la proprietà annunciata. Ne viene che la equazione $\underset{2}{\Delta} u = 0$, o meglio, per far sparire anche formalmente la variabile ϱ_3, la:

$$\Theta u \equiv e^{\int (2M/P) d\varrho_3} \underset{2}{\Delta} u = 0 \,,$$

postovi $\partial u/\partial \varrho_3 = 0$, definisce una classe di potenziali binari. Naturalmente tale classe rimane invariata, comunque si mutino in Θu le variabili indipendenti ϱ_1, ϱ_2, mediante trasformazioni del tipo $\varrho_1 = \varrho_1(\sigma_1, \sigma_2)$, $\varrho_2 = \varrho_2(\sigma_1, \sigma_2)$, (il che equivale a sostituire due integrali indipendenti di Xf con due altri pure indipendenti).

Non tutte le trasformazioni infinitesime di G_7 danno luogo a distinti potenziali binari, ma quelle soltanto, le cui traiettorie sono distinte rispetto a G_7, non si possono cioè far coincidere mediante trasformazioni del gruppo.

Sieno infatti Xf e $X'f$ due trasformazioni di G_7, $\Theta u = 0$, $\Theta' u = 0$ le equazioni, che definiscono i corrispondenti potenziali binari; e supponiamo che esista una trasformazione T del gruppo, la quale faccia passare dalle traiettorie di $X'f$ a quelle di Xf.

I due sistemi di superficie:

$$\varrho_1' = \text{cost.}\,,$$
$$\varrho_2' = \text{cost.}\,,$$

corrispondenti ad $X'f$, si potranno scegliere in modo che:

$$T\varrho_1' = \varrho_1\,,$$
$$T\varrho_2' = \varrho_2\,.$$

La trasformazione T, applicata agli integrali $u(\varrho_1', \varrho_2')$ di $\Theta' u = 0$, li cangia in $u(T\varrho_1', T\varrho_2') = u(\varrho_1, \varrho_2)$, cioè nelle stesse funzioni delle variabili ϱ_1, ϱ_2; d'altra parte la T conserva i potenziali, dunque le $u(\varrho_1, \varrho_2)$ sono altrettanti potenziali indipendenti da ϱ_3 e perciò integrali della equazione $\Theta u = 0$. Nello stesso modo, considerando la trasformazione inversa a T (e prescindendo, si intende, dallo scambio materiale di ϱ_1, ϱ_2 in ϱ_1', ϱ_2') si riconoscerebbe che $\Theta' u = 0$ ammette tutti gli integrali di $\Theta u = 0$. Le due equazioni sono dunque identiche. Appare così sufficiente, per lo scopo nostro, di considerare trasformazioni infinitesime di G_7, non dotate di traiettorie equivalenti rispetto a tale gruppo. Dei corrispondenti potenziali si può asserire che essi non sono riducibili l'uno all'altro mediante similitudini; poichè, se lo fossero, lo stesso dovrebbe accadere per le rispettive linee equipotenziali, contro l'ipotesi. Essi appartengono perciò da questo punto di vista a tipi diversi.

Altra cosa è per le equazioni, che li definiscono. Queste infatti, pur appartenendo a tipi geometricamente distinti, possono benissimo risultare tutte o in parte trasformabili (nel senso più largo, in cui va qui intesa la trasformabilità).

Ma di ciò a tempo debito (§ 9), quando avremo esaurita l'indagine dei potenziali geometricamente distinti.

Occupiamoci ora della effettiva costruzione delle equazioni $\Theta u = 0$, che provengono dai diversi tipi di traiettorie dei gruppi ∞^1 di G_7. Limitandoci, il che è per noi naturale, al campo reale, si hanno, come è ben noto (7), i cinque tipi seguenti di equazioni $Xf = 0$ (cioè di traiettorie):

1) $$\frac{\partial f}{\partial x_3} = 0 ;$$

2) $$x_2 \frac{\partial f}{\partial x_1} - x_1 \frac{\partial f}{\partial x_2} = 0 ;$$

3) $$x_2 \frac{\partial f}{\partial x_1} - x_1 \frac{\partial f}{\partial x_2} + m \frac{\partial f}{\partial x_3} = 0 , \qquad (m > 0) ;$$

4) $$x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + x_3 \frac{\partial f}{\partial x_3} = 0 ;$$

5) $$x_2 \frac{\partial f}{\partial x_1} - x_1 \frac{\partial f}{\partial x_2} + m \left(x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + x_3 \frac{\partial f}{\partial x_3} \right) = 0 , \qquad (m > 0) .$$

Facendo successivamente:

$$x_1 = \varrho_1 , \qquad x_2 = \varrho_2 , \qquad x_3 = \varrho_3 ;$$

$$x_1 = \varrho_1 \cos \varrho_3 , \qquad x_2 = \varrho_1 \operatorname{sen} \varrho_3 , \qquad x_3 = \varrho_2 ;$$

$$x_1 = \varrho_1 \cos \varrho_3 , \qquad x_2 = \varrho_1 \operatorname{sen} \varrho_3 , \qquad x_3 = \varrho_2 - m\varrho_3 ;$$

$$x_1 = \varrho_3 \operatorname{sen} \varrho_1 \cos \varrho_2 , \qquad x_2 = \varrho_3 \operatorname{sen} \varrho_1 \operatorname{sen} \varrho_2 , \qquad x_3 = \varrho_3 \cos \varrho_1 ;$$

$$x_1 = \varrho_1 \operatorname{sen} \varrho_2 e^{m\varrho_3} \cos \varrho_3 , \qquad x_2 = \varrho_1 \operatorname{sen} \varrho_2 e^{m\varrho_3} \operatorname{sen} \varrho_3 , \qquad x_3 = \varrho_1 \cos \varrho_1 e^{m\varrho_3} ,$$

si constata senza alcuna difficoltà che ϱ_1, ϱ_2 sono in ciascun caso due integrali indipendenti delle cinque equazioni nell'ordine scritto. Se poi

(7) Veggasi per es.: LIE-SCHEFFERS, *Vorlesungen über Differentialgleichungen*, ecc., Leipzig, Teubner, pag. 237-243; oppure: P. STAECKEL, *Beiträge zur Flächentheorie*, VI, « Leipziger Berichte », vol. 50, 1898.

si suppongono ϱ_1, ϱ_2 costanti, e si immagina di far variare ϱ_3, apparisce tosto la natura geometrica della congruenza, costituita dalle linee $\varrho_1 = \text{cost.}$, $\varrho_2 = \text{cost.}$, che sono ordinatamente rette parallele, circoli col medesimo asse, eliche col medesimo passo, raggi concorrenti in un punto, spirali di egual parametro.

Per formare le equazioni $\Theta_i u = 0$ $(i = 1, 2, 3, 4, 5)$, che competono a questi cinque casi, basterà oramai esprimere il $\underset{2}{\Delta} u$ in coordinate curvilinee $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3$, porvi $\partial u/\partial\varrho_3 = 0$ e moltiplicare, se occorre, per un conveniente fattore, in modo da far sparire il ϱ_3.

Ci varremo della formula:

$$\underset{2}{\Delta} u = \frac{1}{\sqrt{a}} \sum_1^3{}_r \frac{\partial}{\partial\varrho_r} \left\{ \sum_1^3{}_s \sqrt{a}\, a^{(rs)} \frac{\partial u}{\partial\varrho_s} \right\},$$

dove a ed $a^{(rs)}$ sono rispettivamente il determinante e gli elementi reciproci dei coefficienti a_{rs} del quadrato dell'elemento lineare in coordinate $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3$.

Si hanno immediatamente per $\Theta_1 u = 0$, $\Theta_2 = 0$, $\Theta_4 u = 0$ le forme consuete dei potenziali logaritmici, simmetrici, conici:

$$\Theta_1 u = \frac{\partial^2 u}{\partial\varrho_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial\varrho_2^2} = 0\,,$$

$$\Theta_2 u = \frac{1}{\varrho_1}\left\{\frac{\partial}{\partial\varrho_1}\left(\varrho_1 \frac{\partial u}{\partial x_1}\right) + \frac{\partial}{\partial\varrho_2}\left(\varrho_1 \frac{\partial u}{\partial\varrho_2}\right)\right\} = \frac{\partial^2 u}{\partial\varrho_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial\varrho_2^2} + \frac{1}{\varrho_1}\frac{\partial u}{\partial\varrho_1} = 0\,,$$

$$\Theta_4 u = \frac{1}{\operatorname{sen}\varrho_1}\left\{\frac{\partial}{\partial\varrho_1}\left(\operatorname{sen}\varrho_1 \frac{\partial u}{\partial\varrho_1}\right) + \frac{\partial}{\partial\varrho_2}\left(\frac{1}{\operatorname{sen}\varrho_1}\frac{\partial u}{\partial\varrho_2}\right)\right\}$$

$$= \frac{\partial^2 u}{\partial\varrho_1^2} + \frac{1}{\operatorname{sen}^2\varrho_1}\frac{\partial^2 u}{\partial\varrho_2^2} + \cot\varrho_1 \frac{\partial u}{\partial\varrho_1} = 0\,.$$

Per gli elicoidali e spirali riporteremo il calcolo per disteso. Nel primo caso il quadrato dell'elemento lineare ha la espressione:

$$\begin{aligned} ds^2 &= dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 = \\ &= (d\varrho_1 \cos\varrho_3 - \varrho_1 \operatorname{sen}\varrho_3\, d\varrho_3)^2 + (d\varrho_1 \operatorname{sen}\varrho_3 + \varrho_1 \cos\varrho_3\, d\varrho_3)^2 + (d\varrho_2 - m\, d\varrho_3)^2 \\ &= d\varrho_1^2 + d\varrho_2^2 + (m^2 + \varrho_1^2)\, d\varrho_3^2 - 2m\, d\varrho_2\, d\varrho_3\,, \end{aligned}$$

quindi:

$$a = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -m \\ 0 & -m & m^2 + \varrho_1^2 \end{vmatrix} = \varrho_1^2\,,$$

$$a^{(11)} = 1\,, \quad a^{(22)} = 1 + \frac{m^2}{\varrho_1^2}\,, \quad a^{(33)} = \frac{1}{\varrho_1^2}\,, \quad a^{(23)} = \frac{m}{\varrho_1^2}\,, \quad a^{(31)} = 0\,, \quad a^{(12)} = 0\;;$$

$$\underset{2}{\Delta} u = \frac{1}{\varrho_1}\left[\frac{\partial}{\partial\varrho_1}\left\{\varrho_1\frac{\partial u}{\partial\varrho_1}\right\} + \frac{\partial}{\partial\varrho_2}\left\{\left(\varrho_1 + \frac{m^2}{\varrho_1}\right)\frac{\partial u}{\partial\varrho_2} + \frac{m}{\varrho_1}\frac{\partial u}{\partial\varrho_3}\right\} + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial}{\partial\varrho_3}\left\{\frac{m}{\varrho_1}\frac{\partial u}{\partial\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_1}\frac{\partial u}{\partial x_3}\right\}\right],$$

$$\underset{3}{\Theta}^{(m)} u = \frac{1}{\varrho_1}\left[\frac{\partial}{\partial\varrho_1}\left\{\varrho_1\frac{\partial u}{\partial\varrho_1}\right\} + \frac{\partial}{\partial\varrho_2}\left\{\left(\varrho_1 + \frac{m^2}{\varrho_1}\right)\frac{\partial u}{\partial\varrho_2}\right\}\right] =$$
$$= \frac{\partial^2 u}{\partial\varrho_1^2} + \left(1 + \frac{m^2}{\varrho_1^2}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial\varrho_1^2} + \frac{1}{\varrho_1}\frac{\partial u}{\partial\varrho_1} = 0\,.$$

Per l'ultimo tipo, risulta:

$$ds^2 = d(x_1 + ix_2)\cdot d(x_1 - ix_2) + dx_3^2$$
$$= d\{\varrho_1 \operatorname{sen}\varrho_2 e^{(m+i\varrho_3)}\}\cdot d\{\varrho_1 \operatorname{sen}\varrho_2 e^{(m-i\varrho_3)}\} + \{d(\varrho_1\cos\varrho_2 e^{m\varrho_3})\}^2$$
$$= e^{2m\varrho_3}\{d\varrho_1^2 + \varrho_1^2 d\varrho_2^2 + (m^2 + \operatorname{sen}^2\varrho_2)\varrho_1^2 d\varrho_3^2 + 2m\varrho_1\, d\varrho_1\, d\varrho_3\}\,,$$

$$a = \begin{vmatrix} e^{2m\varrho_3} & 0 & e^{2m\varrho_3} m\varrho_1 \\ 0 & e^{2m\varrho_3}\varrho_1^2 & 0 \\ e^{2m\varrho_3} m\varrho_1 & 0 & e^{2m\varrho_3}\varrho_1^2(m^2 + \operatorname{sen}^2\varrho_2) \end{vmatrix} = e^{6m\varrho_3}\varrho_1^4 \operatorname{sen}^2\varrho^2\;;$$

$$a^{(11)} = e^{-2m\varrho_3}\left(1 + \frac{m^2}{\operatorname{sen}^2\varrho_2}\right), \qquad a^{(22)} = e^{-2m\varrho_3}\frac{1}{\varrho_1^2}\,, \qquad a^{(33)} = e^{-2m\varrho_3}\frac{1}{\varrho_1^2\operatorname{sen}^2\varrho_2}\,,$$

$$a^{(23)} = 0\,, \qquad a^{(31)} = -\,e^{-2m\varrho_3}\frac{m}{\varrho_1\operatorname{sen}^2\varrho_2}\,, \qquad a^{(12)} = 0\;;$$

$$\underset{2}{\Delta} u = \frac{e^{-3m\varrho_3}}{\varrho_1^2\operatorname{sen}\varrho_2}\left[e^{m\varrho_3}\frac{\partial}{\partial\varrho_1}\left\{\varrho_1^2\left(\operatorname{sen}\varrho_2 + \frac{m^2}{\operatorname{sen}\varrho_2}\right)\frac{\partial u}{\partial\varrho_1} - \frac{m\varrho_1}{\operatorname{sen}\varrho_2}\frac{\partial u}{\partial\varrho_3}\right\} + \right.$$
$$\left. + e^{m\varrho_3}\frac{\partial}{\partial\varrho_2}\left(\operatorname{sen}\varrho_2\frac{\partial u}{\partial\varrho_2}\right) + \frac{\partial}{\partial\varrho_3}\left\{e^{m\varrho_3}\left(\frac{-m\varrho_1}{\operatorname{sen}\varrho_2}\frac{\partial u}{\partial\varrho_1} + \frac{1}{\operatorname{sen}\varrho_2}\frac{\partial u}{\partial\varrho_3}\right)\right\}\right],$$

donde, moltiplicando per $e^{2m\varrho_3}$ e intendendo u indipendente da ϱ_3:

$$\Theta_5^{(m)} u$$

$$= \frac{1}{\varrho_1^2 \operatorname{sen} \varrho_2} \left[\frac{\partial}{\partial \varrho_1} \left\{ \varrho_1^2 \left(\operatorname{sen} \varrho_2 + \frac{m^2}{\operatorname{sen} \varrho_2} \right) \frac{\partial u}{\partial \varrho_1} \right\} + \frac{\partial}{\partial \varrho_2} \left\{ \operatorname{sen} \varrho_2 \frac{\partial u}{\partial \varrho_2} \right\} - \frac{m^2 \varrho_1}{\operatorname{sen} \varrho_2} \frac{\partial u}{\partial \varrho_1} \right]$$

$$= \left(1 + \frac{m^2}{\operatorname{sen}^2 \varrho_2}\right) \frac{d^2 u}{\partial \varrho_1^2} + \frac{1}{\varrho_1^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varrho_1} + \frac{1}{\varrho_1} \left(2 + \frac{m^2}{\operatorname{sen}^2 \varrho_2}\right) \frac{\partial u}{\partial \varrho_1} + \frac{1}{\varrho_1^2} \cot \varrho_2 \frac{\partial u}{\partial \varrho_2} = 0 .$$

Giova raccogliere il risultato di questa indagine nella seguente tabella:

---

1) *Potenziali cilindrici o logaritmici:*

$$\Theta_1 u = \frac{\partial^2 u}{\partial \varrho_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \varrho_2^2} = 0 ,$$

dove ϱ_1 e ϱ_2 designano coordinate cartesiane.

2) *Potenziali circolari o simmetrici:*

$$\Theta_2 u = \frac{1}{\varrho_1} \left\{ \frac{\partial}{\partial \varrho_1} \left(\varrho_1 \frac{\partial u}{\partial \varrho_1} \right) + \frac{\partial}{\partial \varrho_2} \left(\varrho_1 \frac{\partial u}{\partial \varrho_2} \right) \right\} = \frac{\partial^2 u}{\partial \varrho_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \varrho_2^2} + \frac{1}{\varrho_1} \frac{\partial u}{\partial \varrho_1} = 0 ,$$

dove si è posto:

$$x_1 = \varrho_1 \cos \varrho_3 , \qquad x_2 = \varrho_1 \operatorname{sen} \varrho_3 , \qquad x_3 = \varrho_2 .$$

3) *Potenziali elicoidali:*

$$\Theta_3^{(m)} u = \frac{1}{\varrho_1} \left[\frac{\partial}{\partial \varrho_1} \left\{ \varrho_1 \frac{\partial u}{\partial \varrho_1} \right\} + \frac{\partial}{\partial \varrho_2} \left\{ \left(\varrho_1 + \frac{m^2}{\varrho_1} \right) \frac{\partial u}{\partial \varrho_2} \right\} \right] =$$

$$= \frac{\partial^2 u}{\partial \varrho^2} + \left(1 + \frac{m^2}{\varrho_1^2}\right) \frac{\partial^2 u}{\partial \varrho_2^2} + \frac{1}{\varrho_1} \frac{\partial u}{\partial \varrho_1} = 0 ,$$

dove si è posto:

$$x_1 = \varrho_1 \cos \varrho_3 , \qquad x_2 = \varrho_1 \operatorname{sen} \varrho_3 , \qquad x_3 = \varrho_2 - m \varrho_3 , \qquad (m > 0).$$

4) *Potenziali conici*:

$$\Theta_4 u = \frac{1}{\operatorname{sen}\varrho_1}\left\{\frac{\partial}{\partial\varrho_1}\left(\operatorname{sen}\varrho_1\frac{\partial u}{\partial\varrho_1}\right)+\frac{1}{\operatorname{sen}\varrho_1}\frac{\partial^2 u}{\partial\varrho_2^2}\right\}=$$

$$=\frac{\partial^2 u}{\partial\varrho_1^2}+\frac{1}{\operatorname{sen}^2\varrho_1}\frac{\partial^2 u}{\partial\varrho_2^2}+\cot\varrho_1\frac{\partial u}{\partial\varrho_1}=0\,,$$

dove si è posto:

$$x_1=\varrho_3\operatorname{sen}\varrho_1\cos\varrho_2\,,\qquad x_2=\varrho_3\operatorname{sen}\varrho_1\operatorname{sen}\varrho_2\,,\qquad x_3=\varrho_3\cos\varrho_1\,.$$

5) *Potenziali spirali*:

$$\Theta_5^{(m)}u$$

$$=\frac{1}{\varrho_1^2\operatorname{sen}\varrho_2}\left[\frac{\partial}{\partial\varrho_1}\left\{\varrho_1^2\left(\operatorname{sen}\varrho_2+\frac{m^2}{\operatorname{sen}\varrho_2}\right)\frac{\partial u}{\partial\varrho_1}\right\}+\frac{\partial}{\partial\varrho_2}\left\{\operatorname{sen}\varrho_2\frac{\partial u}{\partial\varrho_2}\right\}-\frac{m^2\varrho_1}{\operatorname{sen}\varrho_2}\frac{\partial u}{\partial\varrho_1}\right]$$

$$=\left(1+\frac{m^2}{\operatorname{sen}^2\varrho_2}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial\varrho_1^2}+\frac{1}{\varrho_1^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varrho_2^2}+\frac{1}{\varrho_1}\left(2+\frac{m^2}{\operatorname{sen}^2\varrho_2}\right)\frac{\partial u}{\partial\varrho_1}+\frac{1}{\varrho_1^2}\cot\varrho_1\frac{\partial u}{\partial\varrho_2}=0\,,$$

dove si è posto (con $m>0$):

$$x_1=\varrho_1\operatorname{sen}\varrho_2 e^{m\varrho_3}\cos\varrho_3\,,\qquad x_2=\varrho_1\operatorname{sen}\varrho_2 e^{m\varrho_3}\operatorname{sen}\varrho_3\,,\qquad x_3=\varrho_1\cos\varrho_2 e^{m\varrho_3}.$$

---

3. - Condizioni di equipotenzialità per una congruenza di linee.

Si tratta qui di caratterizzare tutti i possibili potenziali binari. La questione si riduce manifestamente ad assegnare tutte le possibili congruenze di linee equipotenziali, poichè, una volta queste conosciute, basta, come s'è visto, assumerle in un modo qualunque a linee ϱ_3 ($\varrho_1=$ cost., $\varrho_2=$ cost.), per risalire ai corrispondenti potenziali.

Una congruenza $\varrho_1=$ cost., $\varrho_2=$ cost. è a dirsi equipotenziale, quando la equazione:

$$\underset{2}{\Delta} u=0\,,$$

suppostovi $\partial u/\partial\varrho_3=0$, può rendersi esente da ϱ_3. Questo significa in sostanza che le due equazioni:

$$\begin{cases} \underset{2}{\Delta} u = 0\,, \\ Xu \equiv \dfrac{\partial u}{\partial \varrho_3} = 0\,, \end{cases}$$

costituiscono un sistema completo, cioè che la equazione:

$$\underset{2}{\Delta} Xu - X \underset{2}{\Delta} u = 0$$

è una conseguenza necessaria delle due $\underset{2}{\Delta} u = 0$, $Xu = 0$. Messa sotto questa forma, la condizione di equipotenzialità presenta il vantaggio di essere indipendente dal sistema di riferimento.

In coordinate curvilinee qualunque x_1, x_2, x_3, supposto:

$$ds^2 = \sum_{rs}^{3}{}_{1}\, a_{rs}\, dx_r\, dx_s\,,$$

e detti, come sopra, $a^{(rs)}$ gli elementi reciproci ad a_{rs} nel determinante $a = \sum \pm a_{11} a_{22} a_{33}$, sarà colla notazione delle derivate covarianti:

$$\underset{2}{\Delta} u = \sum_{rs}^{3}{}_{1}\, a^{(rs)} u_{rs}\,.$$

La equazione $Xu = 0$ assumerà genericamente l'aspetto:

$$Xu = \xi^{(1)} \frac{\partial u}{\partial x_1} + \xi^{(2)} \frac{\partial u}{\partial x_2} + \xi^{(3)} \frac{\partial u}{\partial x_3} = \sum_{1}^{3} \xi^{(t)} u_t = 0\,.$$

I coefficienti $\xi^{(1)}$, $\xi^{(2)}$, $\xi^{(3)}$ sono elementi di un sistema contravariante a priori indeterminato; perchè essi rispondano alla questione, è necessario e basta che la equazione (di secondo ordine):

$$\underset{2}{\Delta} Xu - X \underset{2}{\Delta} u = 0$$

sia una conseguenza delle due $\underset{2}{\Delta} u = 0$, $Xu = 0$, ossia che il primo membro di essa riesca una combinazione lineare di $\underset{2}{\Delta} u$, Xu e delle tre derivate (ordinarie, o, ciò che torna poi lo stesso, contravarianti) di quest'ultima. Avremo dunque, per caratterizzare le $\xi^{(r)}$ $(r = 1, 2, 3)$, le condizioni, che scaturiscono dalla identità:

$$(4) \qquad \underset{2}{\Delta} Xu - X \underset{2}{\Delta} u \equiv 2M \underset{2}{\Delta} u + NXu + 2 \sum_{1}^{3}{}_{r}\, g_s (Xu)^r\,,$$

dove i moltiplicatori M, N e g_s possono essere arbitrarie funzioni di x_1, x_2, x_3.

È appena necessario osservare che, reciprocamente, ogniqualvolta le $\xi^{(r)}$ $(r = 1, 2, 3)$ soddisfanno alla (4), le caratteristiche della equazione $Xu = 0$, cioè le linee della congruenza:

$$\frac{dx_1}{\xi^{(1)}} = \frac{dx_2}{\xi^{(2)}} = \frac{dx_3}{\xi^{(3)}}$$

riescono equipotenziali.

Infatti esse non sono altro che le linee ϱ_3 ($\varrho_1 =$ cost., $\varrho_2 =$ cost.), quando si assumono come superficie coordinate $\varrho_1 =$ cost., $\varrho_2 =$ cost., due integrali indipendenti di $Xu = 0$. D'altronde la (4) stessa ci assicura che, ponendo in $\underset{2}{\Delta} u = 0$, $\partial u / \partial \varrho_3 = 0$, si ottiene effettivamente un potenziale binario.

Avviamoci a stabilire le equazioni, in cui si scinde la (4), eguagliando i coefficienti delle singole derivate (contravarianti) di u.

Avremo in primo luogo, applicando le regole di derivazione dei sistemi composti ([8]) e scrivendo $\sum_{rs}^{3}{}_{1} a_{rs} u^{(rs)}$, $\sum_{t}^{3}{}_{1} \xi_t u^{(t)}$ per $\sum_{rs}^{3}{}_{1} a^{(rs)} u_{rs}$, $\sum_{t}^{3}{}_{1} \xi^{(t)} u_t$:

$$\underset{2}{\Delta} Xu = \sum_{1}^{3}{}_{rs}\, a_{rs} (Xu)^{rs} = \sum_{1}^{3}{}_{rs}\, a_{rs} \left\{ \sum_{1}^{3}{}_{t}\, \xi_t u^{(t)} \right\}^{rs}$$

$$= \sum_{1}^{3}{}_{rst}\, a_{rs} \xi_t u^{(trs)} + 2 \sum_{1}^{3}{}_{rstp}\, a_{rs} a^{(rp)} \xi_{tp} u^{(ts)} + \sum_{1}^{3}{}_{rstpq}\, a_{rs} a^{(rp)} a^{(sq)} \xi_{tpq} u^{(t)} .$$

Se si tien conto che $\sum_r a_{rs} a^{(rp)} = \varepsilon_{sp}$, con opportuno scambio di indici, risulterà:

$$\underset{2}{\Delta} Xu = \sum_{1}^{3}{}_{rst}\, a_{rs} \xi_t u^{(trs)} + 2 \sum_{1}^{3}{}_{rs}\, u^{(rs)} \xi_{rs} + \sum_{1}^{3}{}_{r}\, u^{(r)} \sum_{1}^{3}{}_{pq}\, a^{(pq)} \xi_{rpq} .$$

Per essere identicamente nulle le derivate covarianti dei coefficienti a_{rs} della forma fondamentale:

$$X \underset{2}{\Delta} u = \sum_{1}^{3}{}_{t}\, \xi_t \left\{ \sum_{1}^{3}{}_{rs}\, a_{rs} u^{(rs)} \right\}^{t} = \sum_{1}^{3}{}_{rst}\, a_{rs} \xi_t u^{(rst)} ,$$

([8]) Cfr. RICCI, *Lezioni sulla teoria delle superficie*, cap. III, Padova, presso i fratelli Drucker, 1898.

e, siccome, in uno spazio euclideo, le derivate covarianti o contravarianti sono simmetriche, al pari delle ordinarie, così nella differenza $\underset{2}{\Delta} Xu - X\underset{2}{\Delta} u$, i termini di terz'ordine si elidono identicamente e rimane:

$$\underset{2}{\Delta} Xu - X \underset{2}{\Delta} u = 2 \sum_{rs}{}_1^3 u^{(rs)} \xi_{rs} + \sum_r{}_1^3 u^{(r)} \sum_{pq}{}_1^3 a^{(pq)} \xi_{rpq} .$$

D'altra parte il secondo membro della (4), scritto per disteso, vale:

$$2M \sum_{rs}{}_1^3 a_{rs} u^{(rs)} + N \sum_r{}_1^3 \xi_r u^{(r)} + 2 \sum_r{}_1^3 g_r \left(\sum_s{}_1^3 \xi_s u^{(s)} \right)^r$$

$$= 2M \sum_{rs}{}_1^3 u^{(rs)} a_{rs} + N \sum_r{}_1^3 u^{(r)} \xi_r + 2 \sum_{rs}{}_1^3 u^{(sr)} g_r \xi_s + 2 \sum_r{}_1^3 u^{(r)} \sum_s{}_1^3 g^{(s)} \xi_{rs} ,$$

onde la (4) stessa assume in definitiva l'aspetto:

$$2 \sum_{rs}{}_1^3 u^{(rs)} \xi_{rs} + \sum_r{}_1^3 u^{(r)} \sum_{pq}{}_1^3 a^{(pq)} \xi_{rpq}$$

$$= 2M \sum_{rs}{}_1^3 u^{(rs)} a_{rs} + N \sum_r{}_1^3 u^{(r)} \xi_r + 2 \sum_{rs}{}_1^3 u^{(sr)} g_r \xi_s + 2 \sum_r{}_1^3 u^{(r)} \sum_s{}_1^3 g^{(s)} \xi_{rs} .$$

Il confronto dei coefficienti dei termini di secondo ordine porge:

$$\xi_{rs} + \xi_{sr} = 2M a_{rs} + g_r \xi_s + g_s \xi_r , \qquad (r, s = 1, 2, 3); \tag{5}$$

quello dei termini di prim'ordine:

$$\sum_{pq}{}_1^3 a^{(pq)} \xi_{rpq} = N \xi_r + 2 \sum_s{}_1^3 g^{(s)} \xi_{rs} , \qquad (r = 1, 2, 3). \tag{6}$$

In coordinate cartesiane ortogonali le a_{rs}, $a^{(rs)}$ valgono ε_{rs} e le derivate covarianti coincidono colle ordinarie. Le equazioni (5) e (6) si possono allora scrivere:

$$\frac{\partial \xi_r}{\partial x_s} + \frac{\partial \xi_s}{\partial x_r} = 2 \varepsilon_{rs} M + g_r \xi_s + g_s \xi_r , \qquad (r, s = 1, 2, 3); \tag{5'}$$

$$\underset{2}{\Delta} \xi_r = N \xi_r + 2 \sum_s{}_1^3 g_s \frac{\partial \xi_r}{\partial x_s} , \qquad (r = 1, 2, 3). \tag{6'}$$

Se si suppongono N e le g eguali a zero, si ritrovano le equazioni (2), (3) del § 1. Ogni loro soluzione appartiene perciò anche al sistema (5), (6). Questo torna a dirci che le traiettorie di un gruppo ∞^1 di similitudini costituiscono una congruenza equipotenziale. La condizione di equipotenzialità ci si presenta per converso sotto una forma molto più generale, in quanto le equazioni, cui debbono soddisfare le ξ_r, contengono ben cinque funzioni arbitrarie. Con tutto ciò, vedremo più innanzi che siffatta maggiore arbitrarietà influisce soltanto in un caso, che potrebbe chiamarsi singolare. Nel caso generale essa sparisce, quando si tien conto delle condizioni di integrabilità del sistema.

4. - Generalità sui sistemi ortogonali di congruenze [9]. Formule intrinseche per una congruenza dello spazio ordinario.

Data in uno spazio qualunque ad n dimensioni, di elemento lineare:

$$ds^2 = \sum_{1}^{n}{}_{rs}\, a_{rs}\, dx_r\, dx_s\,,$$

una congruenza di linee, definita dalle equazioni:

$$\frac{dx_1}{\xi^{(1)}} = \frac{dx_2}{\xi^{(2)}} = \ldots = \frac{dx_n}{\xi^{(n)}}\,,$$

poniamo, come è certamente lecito, se la congruenza è reale:

$$\lambda^{(r)} = e^{\nu}\xi^{(r)} = \frac{dx_r}{ds}\,, \qquad (r = 1, 2, \ldots, n),$$

dove

$$e^{\nu} = \frac{1}{\left|\sqrt{\sum_{1}^{n}{}_{rs}\, a_{rs}\xi^{(r)}\xi^{(s)}}\right|}$$

e ds designa l'elemento d'arco (preso in valore assoluto) di una generica curva della congruenza. Risulta così fissata in ogni punto anche una direzione positiva.

---

[9] Ricci, *Dei sistemi di congruenze ortogonali in una varietà qualunque*, « Memorie della R. Accademia dei Lincei », 1896.

Le $\lambda^{(r)}$ verificano identicamente la relazione:

$$\sum_{1}^{n}{}_{rs}\, a_{rs}\lambda^{(r)}\lambda^{(s)} = 1$$

e costituiscono il *sistema coordinato contravariante* della congruenza considerata. Introducendo insieme il sistema reciproco λ_r, (*sistema coordinato covariante*), la superiore identità si scrive più semplicemente:

$$\sum_{1}^{n}{}_{r}\, \lambda^{(r)}\lambda_r = 1 \,.$$

Se lo spazio è euclideo e riferito a coordinate cartesiane ortogonali, le $\lambda^{(r)}$ e λ_r coincidono manifestamente coi coseni direttori delle tangenti alle linee della congruenza (supposto che per direzione positiva della tangente si assuma quella dell'arco).

Date due congruenze, i cui sistemi contravarianti sieno ordinatamente

$$\lambda_h^{(r)} \quad (r = 1, 2, \ldots, n) \,, \qquad \lambda_k^{(s)} \quad (s = 1, 2, \ldots, n)$$

(e quindi i covarianti $\lambda_{h|r}$, $\lambda_{k|s}$), la condizione di ortogonalità si esprimerà con:

$$\sum_{1}^{n}{}_{rs}\, a_{rs}\lambda_h^{(r)}\lambda_k^{(s)} = 0 \,,$$

o, ciò che è lo stesso:

$$\sum_{1}^{n}{}_{r}\, \lambda_h^{(r)}\lambda_{k|r} = 0 \,,$$

ovvero ancora:

$$\sum_{1}^{n}{}_{r}\, \lambda_{h|r}\lambda_k^{(r)} = 0 \,.$$

Ne viene che, se n congruenze sono ortogonali due a due nella varietà considerata, designandone con

$$\lambda_h^{(r)} \,, \quad \lambda_{h|r} \qquad (h = 1, 2, \ldots, n; \quad r = 1, 2, \ldots, n)$$

i rispettivi sistemi coordinati contravariante e covariante, varranno le identità:

$$\sum_{1}^{n}{}_{r}\, \lambda_h^{(r)}\lambda_{k|r} = \varepsilon_{hk} \,, \qquad (h, k = 1, 2, \ldots, n), \tag{7}$$

in numero di $n(n+1)/2$, che generalizzano quelle ben note tra i coseni di un'ennupla ortogonale negli spazi euclidei.

Per brevità, chiamerò [1], [2], ecc., la congruenza di sistema coordinato $\lambda_1^{(r)}$, $\lambda_2^{(r)}$, ecc.; linea s_1, s_2, ecc., relativa ad un dato punto, la linea della corrispondente congruenza, passante per quel punto.

Derivando covariantemente le (7), si ha:

$$\sum_{1}^{n}{}_r \lambda_{h|rs}\lambda_k^{(r)} + \sum_{1}^{n}{}_r \lambda_{k|rs}\lambda_h^{(r)} = 0\,, \qquad (h, k, s = 1, 2, \ldots, n), \tag{7'}$$

talchè le n^3 derivate delle $\lambda_{h|r}$ si trovano legate da $n^2(n+1)/2$ relazioni. Potremo esprimerle tutte in termini delle $\lambda_{h/r}$ e di certe $n^2(n+1)/2$ ausiliarie, che si introducono nel modo il più conveniente, ponendo:

$$\gamma_{hkl} = \sum_{1}^{n}{}_{rs} \lambda_{h|rs}\lambda_k^{(r)}\lambda_l^{(s)}\,, \qquad (k, h, l = 1, 2, \ldots, n). \tag{8}$$

Queste γ sono altrettanti invarianti e ve ne ha effettivamente solo $n^2(n+1)/2$ di indipendenti, in quanto le (7′), moltiplicate per $\lambda_l^{(s)}$ e sommate rispetto ad s, porgono:

$$\sum_{1}^{n}{}_{rs} \lambda_{h|rs}\lambda_k^{(r)}\lambda_l^{(s)} + \sum_{1}^{n}{}_{rs} \lambda_{k|rs}\lambda_h^{(r)}\lambda_l^{(s)} = 0\,,$$

donde:

$$\gamma_{hkl} + \gamma_{khl} = 0\,, \qquad (h, k, l = 1, 2, \ldots, n), \tag{9}$$

e in particolare:

$$\gamma_{hhl} = 0\,.$$

La risoluzione delle (8) conduce alle cercate espressioni delle derivate prime:

$$\lambda_{h|rs} = \sum_{1}^{n}{}_{ij} \gamma_{hij}\lambda_{i|r}\lambda_{j|s}\,. \tag{8'}$$

Derivando ancora ed eliminando le derivate prime a mezzo delle (8′) stesse, si ottiene:

$$\lambda_{h|rst} = \sum_{1}^{n}{}_{ij} \gamma_{hij|t}\lambda_{i|r}\lambda_{j|s} + \sum_{1}^{n}{}_{ijkl} \gamma_{hij}\gamma_{ikl}\lambda_{k|r}\lambda_{l|t}\lambda_{j|s} + \sum_{1}^{n}{}_{ijkl} \gamma_{hij}\gamma_{jkl}\lambda_{k|s}\lambda_{l|t}\lambda_{i|r}\,. \tag{10}$$

Le γ, che s'è visto essere in numero di $n^2(n+1)/2$ algebricamente indipendenti, sono legate da certe relazioni differenziali, che si ottengono facilmente, esprimendo che i secondi membri delle (10) sono le derivate seconde (covarianti) degli elementi di uno stesso sistema semplice.

Nel caso degli spazi euclidei, queste relazioni tra le derivate seconde si riducono a:

$$\lambda_{h|rst} - \lambda_{h|rts} = 0 \,,$$

con che, sottraendo le corrispondenti (10), moltiplicando per $\lambda_{k'}^{(r)}\lambda_{i'}^{(s)}\lambda_{j'}^{(t)}$ e sommando rispetto ad r, s, t, risulta ovviamente:

$$\sum_1^n{}_t\, \gamma_{hk'i'|t}\lambda_{j'}^{(t)} - \sum_1^n{}_t\, \gamma_{hk'j'|t}\lambda_{i'}^{(t)} + \sum_1^n{}_i\, (\gamma_{hii'}\gamma_{ik'j'} - \gamma_{hij'}\gamma_{ik'i'}) +$$
$$+ \sum_1^n{}_j\, \gamma_{hk'j}(\gamma_{ji'j'} - \gamma_{jj'i'}) = 0 \,,$$

alle quali, sostituendo l per i e j come indice di sommatoria, riponendo k, i, j al posto di k', i', j', e adoperando altresì la notazione $\partial f/\partial s_i$, per designare la derivata di una generica funzione f nella direzione positiva ds_i della curva s_i (cioè la somma $\sum_1^n{}_r\, f_r\lambda_i^{(r)} = \sum_1^n{}_r\, (\partial f/\partial x_r)(dx_r/ds_i)$, si attribuisce la forma definitiva):

$$\text{(11)} \qquad \frac{\partial\gamma_{hki}}{\partial s_j} - \frac{\partial\gamma_{hkj}}{\partial s_i} + \sum_1^n{}_l\, (\gamma_{hli}\gamma_{lkj} - \gamma_{hlj}\gamma_{lki}) + \sum_1^n{}_l\, \gamma_{hkl}(\gamma_{lij} - \gamma_{lji}) = 0 \,,$$
$$(h, k, l, j = 1, 2, \ldots, n) \,.$$

Tali sono le relazioni intrinseche, che caratterizzano gli invarianti γ, spettanti ad un'ennupla ortogonale di congruenze in uno spazio euclideo.

È bene, prima di procedere, accennare ancora alle relazioni, che intercedono fra le derivate seconde $(\partial/\partial s_j)(\partial/\partial s_i)f$, $(\partial/\partial s_i)(\partial/\partial s_j)f$ di una medesima funzione f. Le due derivazioni non sono invertibili come le ordinarie o covarianti, ma si ha:

$$\text{(12)} \qquad \frac{\partial}{\partial s_j}\frac{\partial}{\partial s_i}f - \frac{\partial}{\partial s_i}\frac{\partial}{\partial s_j}f = -\sum_1^n{}_l\, \frac{\partial f}{\partial s_l}(\gamma_{lij} - \gamma_{lji}) \,.$$

La dimostrazione è delle più semplici. Infatti:

$$\frac{\partial f}{\partial s_i} = \sum_1^n{}_h\, f_h\lambda_i^{(h)} \,,$$

$$\frac{\partial}{\partial s_j}\frac{\partial}{\partial s_i}f = \sum_1^n{}_k\, \lambda_j^{(k)}\left(\sum_1^n{}_h\, f_h\lambda_i^{(h)}\right)_k = \sum_1^n{}_{hk}\, f_{hk}\lambda_i^{(h)}\lambda_j^{(k)} + \sum_1^n{}_h\, f^{(h)}\sum_1^n{}_k\, \lambda_{i|hk}\lambda_j^{(k)} \,,$$

e, a tenore delle (8'):

$$\sum_1^n{}_k\, \lambda_{i|hk}\lambda_j^{(k)} = \sum_1^n{}_l\, \gamma_{ilj}\lambda_{l|h} = -\sum_1^n{}_l\, \gamma_{lij}\lambda_{l|h}\,,$$

talchè:

$$\frac{\partial}{\partial s_j}\frac{\partial}{\partial s_i} f = \sum_1^n{}_{hk}\, f_{hk}\lambda_i^{(h)}\lambda_j^{(k)} - \sum_1^n{}_l\, \frac{\partial f}{\partial s_l}\gamma_{lij}\,.$$

Scambiando i con j e sottraendo, le due prime sommatorie si elidono, per la simmetria delle derivate covarianti, e risulta appunto la (12).

Riferiamoci oramai al caso $n = 3$.

Le corrispondenti (11) (essendo simmetriche, tanto rispetto ai due indici h, k, quanto rispetto ad i, j, e identicamente soddisfatte per $h = k$, ovvero $i = j$) si avranno tutte, combinando i valori 2, 3; 3, 1; 1, 2 della coppia h, k coi valori 2, 3; 3, 1; 1, 2 della coppia i, j.

Posto per maggior comodo:

$$\begin{cases} p_1 = \gamma_{231} = -\gamma_{321}\,, & q_1 = \gamma_{311} = -\gamma_{131}\,, \quad r_1 = \gamma_{121} = -\gamma_{211}\,, \\ p_2 = \gamma_{232} = -\gamma_{322}\,, & q_2 = \gamma_{312} = -\gamma_{132}\,, \quad r_2 = \gamma_{122} = -\gamma_{212}\,, \\ p_3 = \gamma_{233} = -\gamma_{323}\,, & q_3 = \gamma_{313} = -\gamma_{133}\,, \quad r_3 = \gamma_{123} = -\gamma_{213}\,; \end{cases}$$

e quindi:

$$\begin{cases} \gamma_{123} - \gamma_{132} = q_2 + r_3\,, & \gamma_{131} - \gamma_{113} = -q_1\,, \quad \gamma_{112} - \gamma_{121} = -r_1\,, \\ \gamma_{223} - \gamma_{232} = -p_2\,, & \gamma_{231} - \gamma_{213} = r_3 + p_1\,, \quad \gamma_{212} - \gamma_{221} = -r_2\,, \\ \gamma_{323} - \gamma_{332} = -p_3\,, & \gamma_{331} - \gamma_{313} = -q_3\,, \quad \gamma_{312} - \gamma_{321} = p_1 + q_2\,, \end{cases}$$

le (11) si scindono nei tre gruppi seguenti:

$$(11_a)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial p_2}{\partial s_3} - \dfrac{\partial p_3}{\partial s_2} + r_2 q_3 - r_3 q_2 + p_1(q_2 + r_3) - p_2^2 - p_3^2 = 0\,, \\ \dfrac{\partial p_3}{\partial s_1} - \dfrac{\partial p_1}{\partial s_3} + r_3 q_1 - r_1 q_3 - p_1 q_1 + p_2(r_3 + p_1) - p_3 q_3 = 0\,, \\ \dfrac{\partial p_1}{\partial s_2} - \dfrac{\partial p_2}{\partial s_1} + r_1 q_2 - r_2 q_1 - p_1 r_1 - p_2 r_2 + p_3(p_1 + q_2) = 0\,; \end{cases}$$

$$(11_b)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial q_2}{\partial s_3}-\dfrac{\partial q_3}{\partial s_2}+p_2r_3-p_3r_2+q_1(q_2+r_3)-q_2p_2-q_3p_3=0\,,\\[2mm] \dfrac{\partial q_3}{\partial s_1}-\dfrac{\partial q_1}{\partial s_3}+p_3r_1-p_1r_3-q_1^2+q_2(r_3+p_1)-q_3^2=0\,,\\[2mm] \dfrac{\partial q_1}{\partial s_2}-\dfrac{\partial q_2}{\partial s_1}+p_1r_2-p_2r_1-q_1r_1-q_2r_2+q_3(p_1+q_2)=0\,; \end{cases}$$

$$(11_c)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial r_2}{\partial s_3}-\dfrac{\partial r_3}{\partial s_2}+q_2p_3-q_3p_2+r_1(q_2+r_3)-r_2p_2-r_3p_3=0\,,\\[2mm] \dfrac{\partial r_3}{\partial s_1}-\dfrac{\partial r_1}{\partial s_3}+q_3p_1-q_1p_3-r_1q_1+r_2(r_3+p_1)-r_3q_3=0\,,\\[2mm] \dfrac{\partial r_1}{\partial s_2}-\dfrac{\partial r_2}{\partial s_1}+q_1p_2-q_2p_1-r_1^2-r_2^2+r_3(p_1+q_2)=0\,; \end{cases}$$

e le (12) dànno:

$$(12')\quad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial s_3}\dfrac{\partial}{\partial s_2}f-\dfrac{\partial}{\partial s_2}\dfrac{\partial}{\partial s_3}f=-(q_2+r_3)\dfrac{\partial f}{\partial s_1}+p_2\dfrac{\partial f}{\partial s_2}+p_3\dfrac{\partial f}{\partial s_3}\,,\\[2mm] \dfrac{\partial}{\partial s_1}\dfrac{\partial}{\partial s_3}f-\dfrac{\partial}{\partial s_3}\dfrac{\partial}{\partial s_1}f=q_1\dfrac{\partial f}{\partial s_1}-(r_3+p_1)\dfrac{\partial f}{\partial s_2}+q_3\dfrac{\partial f}{\partial s_3}\,,\\[2mm] \dfrac{\partial}{\partial s_2}\dfrac{\partial}{\partial s_1}f-\dfrac{\partial}{\partial s_1}\dfrac{\partial}{\partial s_2}f=r_1\dfrac{\partial f}{\partial s_1}+r_2\dfrac{\partial f}{\partial s_2}-(p_1+q_2)\dfrac{\partial f}{\partial s_3}\,. \end{cases}$$

Le quantità p, q, r, come può desumersi dalla interpretazione generale degli invarianti γ [10], e come del resto risulta da note considerazioni di cinematica [11], hanno significato di rotazioni.

Per precisare tale significato, si fissi un generico punto P e altri tre punti infinitamente vicini P_1, P_2, P_3, appartenenti rispettivamente alle direzioni positive delle linee s_1, s_2, s_3, passanti per P. Sieno ds_1, ds_2, ds_3 gli archetti elementari interposti.

Si immaginino i triedri trirettangoli T, T_1, T_2, T_3, costituiti dalle direzioni positive delle tangenti alle linee delle congruenze in P, P_1, P_2, P_3; dicansi in particolare x, y, z le tangenti in P alle linee s_1, s_2, s_3.

---

(10) Ricci, loco cit., pag. 22-23.

(11) Le formole (11a), (11b), (11c) si sarebbero anche potute ricavare dalla così detta teoria del triedro mobile (veggasi ad es. Darboux, *Leçons sur la théorie des surfaces*, Première Partie; livr. I, chap. V), tenendo presente che le differenze di due derivate $(\partial/\partial s_j)(\partial/s_i)$, $(\partial/\partial s_i)(\partial/s_j)$ di una medesima coordinata non sono identicamente nulle, ma hanno i valori (12').

$p_i ds_i$, $q_i ds_i$, $r_i ds_i$ *sono le componenti, rapporto agli assi* x, y, z, *della rotazione elementare, con cui si passa dal triedro* T *al triedro* T_i.

Supponiamo ora che sia data un'unica congruenza [3]. Potremo in infiniti modi associarne altre due, che costituiscano con essa una terna ortogonale.

Per la applicazione, che abbiamo in vista, giova assumere come congruenze [1], [2] quelle definite dalle direzioni positive delle normali principali e binormali alle curve s_3. Intenderemo al solito che la direzione positiva della normale principale (e quindi di s_1) sia rivolta verso la concavità di s_3 e la direzione positiva di s_2 sia tale che il triedro, pocanzi designato con x, y, z, presenti l'ordinario orientamento.

Si ha in tale ipotesi, come è ben noto:

$$p_3 = 0\,, \quad q_3 = \varrho\,, \quad r_3 = -\tau\,, \tag{13}$$

ϱ e τ designando rispettivamente la curvatura e la torsione della curva s_3 nel generico punto, che si considera.

Se mai la congruenza [3] fosse rettilinea, le [1] e [2] rimangono indeterminate. Anche senza individuarle completamente, gioverà sceglierne una, la [1] per es., normale. Ciò si può raggiungere in infiniti modi, prendendo ad arbitrio una famiglia di superficie rigate, le cui generatrici sieno raggi della congruenza [3], e assumendo poi per congruenza [1] quella costituita dalle traiettorie ortogonali.

La [2] risulta allora determinata come ortogonale a [3], [1].

La condizione affinchè la congruenza [1] sia normale si esprime mediante la equazione ([12]):

$$\gamma_{123} - \gamma_{132} = 0\,,$$

cioè:

$$r_3 + q_2 = 0\,.$$

Possiamo dunque per le congruenze rettilinee ritenere soddisfatte le equazioni

$$p_3 = 0\,, \quad q_3 = 0\,, \quad r_3 = -q_2\,. \tag{13'}$$

Questo modo di particolarizzare le (13) è quello, che meglio conviene alla nostra ricerca, ma non è forse il più spontaneo, parendo a primo

([12]) Ricci, loco cit., pag. 27.

aspetto più semplice di assumere le direzioni s_1 ed s_2 parallele fra loro lungo un medesimo raggio.

Ogni triedro T_3 riesce allora parallelo a T e si annullano ad un tempo p_3, q_3, r_3.

5. - Congruenze rettilinee isotrópe e corrispondenti potenziali binari.

Le equazioni intrinseche:

$$p_3 = 0\,, \quad q_3 = 0\,; \quad p_1 = q_2\,, \quad p_2 = -q_1\,, \tag{14}$$

hanno carattere invariantivo rispetto alla congruenza [3] ([13]) e sono perciò valide qualunque sia la coppia di congruenze ortogonali associate. Possiamo poi, prendendo la [1] come s'è detto or ora, supporre verificata anche la condizione:

$$r_3 = -q_2\,.$$

Si tratta di studiare un po' da vicino le congruenze, che appartengono a questa categoria.

Il problema analitico corrispondente è presto formulato. Si dovrà integrare il sistema di equazioni intrinseche, che consta delle fondamentali (11_a), (11_b), (11_c) e delle:

$$p_3 = 0\,, \quad q_3 = 0\,; \quad p_1 = q_2\,, \quad p_2 = -q_1\,; \quad r_3 = -q_2\,. \tag{14'}$$

Portando questi valori nelle equazioni fondamentali, le (11_a), (11_b) si riducono a quattro distinte, che ordineremo come segue:

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial q_1}{\partial s_3} = q_2^2 - q_1^2\,, \\ &\frac{\partial q_2}{\partial s_3} = -2q_2 q_1\,; \end{aligned}\right. \tag{15}$$

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial q_1}{\partial s_1} + \frac{\partial q_2}{\partial s_2} = 0\,, \\ &\frac{\partial q_1}{\partial s_2} - \frac{\partial q_1}{\partial s_1} = 0\,; \end{aligned}\right. \tag{16}$$

([13]) Infatti, coi simboli di RICCI, le due prime equazioni (14) $\gamma_{323} = 0$, $\gamma_{313} = 0$ esprimono che la congruenza [3] è geodetica, e le altre due $\gamma_{312} + \gamma_{321} = 0$, $\gamma_{311} = \gamma_{322}$ che la sua equazione algebrica caratteristica ha radici eguali. Cfr. loco cit., pag. 24, 31.

le (11_c) divengono:

$$(17)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial r_2}{\partial s_3} + \dfrac{\partial q_2}{\partial s_2} = - q_1 r_2 \,, \\[2ex] \dfrac{\partial r_1}{\partial s_3} + \dfrac{\partial q_2}{\partial s_1} = - q_1 r_1 \,, \\[2ex] \dfrac{\partial r_1}{\partial s_2} - \dfrac{\partial r_2}{\partial s_1} = r_1^2 + r_2^2 + q_1^2 + 3q_2^2 \,; \end{cases}$$

e il sistema — che chiamerò (C) per brevità — costituito dalle (14′), (15), (16), (17) è completo, poichè, eliminando le derivate seconde a mezzo delle (12) e tenendo conto delle equazioni di (C), le combinazioni differenziali:

$$\frac{\partial}{\partial s_3}\left\{\frac{\partial q_1}{\partial s_1} + \frac{\partial q_2}{\partial s_2}\right\} - \frac{\partial}{\partial s_1}\frac{\partial q_1}{\partial s_3} - \frac{\partial}{\partial s_2}\frac{\partial q_2}{\partial s_3} = -\frac{\partial}{\partial s_1}(q_1^2 - q_2^2) + 2\frac{\partial}{\partial s_2}(q_2 q_1)\,,$$

$$\frac{\partial}{\partial s_3}\left\{\frac{\partial q_1}{\partial s_2} - \frac{\partial q_2}{\partial s_1}\right\} - \frac{\partial}{\partial s_2}\frac{\partial q_1}{\partial s_3} + \frac{\partial}{\partial s_1}\frac{\partial q_2}{\partial s_3} = -\frac{\partial}{\partial s_2}(q_2^2 - q_1^2) - 2\frac{\partial}{\partial s_1}(q_2 q_1)\,,$$

$$\frac{\partial}{\partial s_3}\left\{\frac{\partial r_1}{\partial s_2} - \frac{\partial r_2}{\partial s_1}\right\} - \frac{\partial}{\partial s_2}\left\{\frac{\partial r_1}{\partial s_2} + \frac{\partial q_1}{\partial s_1}\right\} + \frac{\partial}{\partial s_1}\left\{\frac{\partial r_2}{\partial s_3} + \frac{\partial q_1}{\partial s_2}\right\} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial s_3}\{r_1^2 + r_2^2 + q_1^2 + 3q_2^2\} + \frac{\partial}{\partial s_2}(q_1 r_1) - \frac{\partial}{\partial s_1}(q_1 r_2)$$

si riducono ad altrettante identità.

Per agevolare la integrazione di questo sistema, è bene aver prima riconosciuta la proprietà geometrica, espressa dalle (14).

Esse caratterizzano le congruenze rettilinee isotrópe ([14]) (secondo la denominazione di RIBAUCOUR).

Infatti la condizione necessaria e sufficiente affinchè una determinata congruenza rettilinea $\lambda_{3|r}$ sia isotrópa si riassume nella proporzionalità fra i coefficienti delle due forme:

$$\sum_1^3{}_r\,(d\lambda_{3|r})^2\,, \qquad \sum_1^3{}_r\,d\lambda_{3|r}\,dx_r\,,$$

le coordinate x_1, x_2, x_3 essendo cartesiane ortogonali.

([14]) Cfr. BIANCHI, *Lezioni di geometria differenziale*, Pisa, Spoerri, 1894; cap. X [2ª ed., ibidem, vol. I (1902), cap. X]; ed anche la mia nota: *Sulle congruenze di curve*, nei « Rendiconti della R. Accademia dei Lincei », 5 marzo 1899 [in questo vol.: XXII, pp. 369-377].

Il carattere invariantivo delle espressioni:

$$\psi = \sum_{1}^{3}{}_{pq}\, a^{(pq)} \left\{ \sum_{1}^{3}{}_r\, \lambda_{3|pr} dx_r \right\} \left\{ \sum_{1}^{3}{}_s\, \lambda_{3|qs} dx_s \right\},$$

$$\chi = \sum_{1}^{3}{}_{rs}\, \lambda_{3|rs}\, dx_r\, dx_s\,,$$

le quali, in coordinate cartesiane ortogonali, si riducono rispettivamente a $\sum_{1}^{3}{}_r (d\lambda_{3|r})^2$, $\sum_{1}^{3}{}_r d\lambda_{3|r}\, dx_r$, permette di esprimere la stessa condizione, qualunque sia il sistema di riferimento, mediante la identità:

$$\chi \equiv S\psi\,,$$

con S moltiplicatore arbitrario.

Eguagliando i coefficienti dei medesimi differenziali, otteniamo le equazioni:

$$\lambda_{3|rs} + \lambda_{3|sr} = 2S \sum_{1}^{3}{}_{pq}\, a^{(pq)} \lambda_{3|pr} \lambda_{3|qs}\,,$$

che giova presentare sotto forma invariantiva, moltiplicando per $\lambda_i^{(r)} \lambda_j^{(s)}$ e sommando rispetto ad r e ad s.

Il primo membro, a tenore delle (8), diviene:

$$\gamma_{3ij} + \gamma_{3ji}\,.$$

Quanto al secondo, avremo, usando la formula $a^{(pq)} = \sum_{1}^{3}{}_h\, \lambda_h^{(p)} \lambda_h^{(q)}$ e poi le (8):

$$2S \sum_{1}^{3}{}_{pqrs}\, a^{(pq)} \lambda_{3|pr} \lambda_{3|qs} \lambda_i^{(r)} \lambda_j^{(s)} =$$

$$= 2S \sum_{1}^{3}{}_h \left\{ \sum_{1}^{3}{}_{pr}\, \lambda_{3|pr} \lambda_h^{(p)} \lambda_i^{(r)} \right\} \left\{ \sum_{1}^{3}{}_{qs}\, \lambda_{3|qs} \lambda_h^{(q)} \lambda_j^{(s)} \right\} = 2S \sum_{1}^{3}{}_h\, \gamma_{3hi} \gamma_{3hj}\,,$$

talchè risulta:

$$\gamma_{3ij} + \gamma_{3ji} = 2S \sum_{1}^{3}{}_h\, \gamma_{3hi} \gamma_{3hj}\,, \qquad (i, j = 1, 2, 3).$$

Per $i = 3$, $j = 1, 2, 3$, queste equazioni, scritte per disteso, dànno:

$$\begin{cases} \gamma_{313} = 2S\{\gamma_{313}\gamma_{311} + \gamma_{323}\gamma_{321}\}, \\ \gamma_{323} = 2S\{\gamma_{313}\gamma_{312} + \gamma_{323}\gamma_{322}\}, \\ 0 \;\; = \gamma_{313}^2 + \gamma_{323}^2; \end{cases}$$

e per $i, j = 1, 2$:

$$\begin{cases} \gamma_{311} = S(\gamma_{311}^2 + \gamma_{321}^2), \\ \gamma_{322} = S(\gamma_{312}^2 + \gamma_{322}^2), \\ \gamma_{312} + \gamma_{321} = 2S(\gamma_{311}\gamma_{312} + \gamma_{321}\gamma_{322}). \end{cases}$$

Le prime tre si riducono a:

$$\gamma_{323} = 0, \qquad \gamma_{313} = 0,$$

che sono le:

$$p_3 = 0, \qquad q_3 = 0$$

delle (14); il secondo gruppo equivale a:

$$\gamma_{311} + \gamma_{322} = S(\gamma_{311}^2 + \gamma_{322}^2 + \gamma_{312}^2 + \gamma_{321}^2),$$

$$\begin{aligned} &(\gamma_{311} - \gamma_{322}) \pm i(\gamma_{312} + \gamma_{321}) = \\ &= S\{(\gamma_{311}^2 - \gamma_{312}^2 \pm 2i\gamma_{311}\gamma_{312}) - (\gamma_{322}^2 - \gamma_{321}^2 \mp 2i\gamma_{322}\gamma_{321})\} = \\ &= S\{(\gamma_{311} \pm i\gamma_{312})^2 - (\gamma_{322} \mp i\gamma_{321})^2\} = \\ &= S\{(\gamma_{311} + \gamma_{312}) \pm i(\gamma_{312} - \gamma_{321})\}\{(\gamma_{311} - \gamma_{322}) \pm i(\gamma_{312} + \gamma_{321})\}, \end{aligned}$$

dove $i = \sqrt{-1}$.

Se le (14) sono soddisfatte:

$$\gamma_{311} - \gamma_{322} = q_1 + p_2 = 0,$$
$$\gamma_{312} + \gamma_{321} = q_2 - p_1 = 0,$$

e quindi risultano identicamente verificate le due ultime equazioni; quanto alla prima, basta disporre di S in modo opportuno.

Reciprocamente sarebbe assai facile constatare che, se una congruenza rettilinea reale è isotrópa ($\chi \equiv S\psi$), le (14) riescono soddisfatte, oppure la congruenza consta delle traiettorie ortogonali ad una famiglia di rigate parallele ($\gamma_{312} = \gamma_{321} = 0$, $\gamma_{311}\gamma_{322} = 0$).

Posto ciò, veniamo alla effettiva integrazione del sistema (C).

Incominciamo col fissare le coordinate curvilinee, a cui intendiamo riferirci. Dacchè, per ipotesi, ($q_2 + r_3 = \gamma_{123} - \gamma_{132} = 0$), la congruenza [1] è stata scelta normale, appare indicato di assumere come superficie coordinate $x_1 =$ cost. le traiettorie ortogonali alle linee della congruenza.

Le $\lambda_{1|r}$ risultano allora proporzionali alle derivate della funzione x_1. Indicando con H_1 il fattore di proporzionalità avremo:

$$\lambda_{1|1} = H_1\,, \qquad \lambda_{1|2} = 0\,, \qquad \lambda_{1|3} = 0\,.$$

Per essere, a tenore delle (14′), $p_1 = q_2$ e quindi:

$$p_1 + r_3 = \gamma_{231} - \gamma_{213} = 0\,,$$

anche la [2] è normale ([15]), onde, assumendone le traiettorie ortogonali a superficie $x_2 =$ cost., si potrà porre:

$$\lambda_{2|1} = 0\,, \qquad \lambda_{2|2} = H_2\,, \qquad \lambda_{2|3} = 0\,.$$

Come coordinata x_3 di un punto qualunque prenderemo l'ascissa, contata sul raggio di [3], passante per quel punto a partire dalla superficie media (che giace sempre a distanza finita, a meno che la congruenza non consti di rette parallele, dal qual caso prescindiamo; cfr. pag. 415).

Sarà così $x_3 = 0$ la equazione della superficie media e dovrà aversi identicamente:

$$\frac{\partial}{\partial s_3} = \frac{\partial}{\partial x_3}\,.$$

Siccome per definizione:

$$\frac{\partial}{\partial s_3} = \sum_1^3{}_r\, \lambda_3^{(r)} \frac{\partial}{\partial x_r} = \lambda_3^{(1)} \frac{\partial}{\partial x_1} + \lambda_3^{(2)} \frac{\partial}{\partial x_2} + \lambda_3^{(3)} \frac{\partial}{\partial x_3}\,,$$

ricaviamo:

$$\lambda_3^{(1)} = 0\,, \qquad \lambda_3^{(2)} = 0\,, \qquad \lambda_3^{(3)} = 1\,.$$

([15]) Questo si sarebbe potuto asserire a priori, ricordando il risultato di Ricci, secondo cui ogni congruenza [3], per la quale coincidono le radici della equazione algebrica caratteristica, si può in infiniti modi risguardare risultante dalle intersezioni di due sistemi ortogonali di superficie (cfr. loc. cit., pag. 44).

Introduciamo anche il sistema coordinato covariante $\lambda_{3|r}$ della congruenza [3]. Le equazioni (7) ci dicono che le $\lambda_h^{(r)}$ sono gli elementi reciproci alle $\lambda_{h|r}$ nel determinante

$$\begin{vmatrix} \lambda_{1|1} & \lambda_{1|2} & \lambda_{1|3} \\ \lambda_{2|1} & \lambda_{2|2} & \lambda_{2|3} \\ \lambda_{3|1} & \lambda_{3|2} & \lambda_{3|3} \end{vmatrix},$$

e le $a_{rs} = \sum_h^{3}{}_1 \lambda_{h|r}\lambda_{h|s}$ ci avvertono inoltre che il medesimo determinante vale $\sqrt{a}$.

Nel caso presente si ha:

$$\sqrt{a} = \begin{vmatrix} H_1 & 0 & 0 \\ 0 & H_2 & 0 \\ \lambda_{3|1} & \lambda_{3|2} & \lambda_{3|3} \end{vmatrix} = \lambda_{3|3} H_1 H_2 ,$$

$$\lambda_3^{(1)} = 0 , \qquad \lambda_3^{(2)} = 0 , \qquad \lambda_3^{(3)} = \frac{1}{\lambda_{3|3}} ,$$

ma d'altra parte, per la scelta fatta del sistema coordinato, $\lambda_3^{(3)} = 1$; dunque anche $\lambda_{3|3}$ risulta eguale all'unità e sono a ritenersi pei sistemi coordinati covarianti delle nostre congruenze ortogonali le espressioni seguenti:

$$\begin{cases} \lambda_{1|1} = H_1 , & \lambda_{1|2} = 0 , & \lambda_{1|3} = 0 , \\ \lambda_{2|1} = 0 , & \lambda_{2|2} = H_2 , & \lambda_{2|3} = 0 , \\ \lambda_{3|1} , & \lambda_{3|2} , & \lambda_{3|3} = 1 . \end{cases}$$

Rimangono le quattro indeterminate H_1, H_2, $\lambda_{3|1}$, $\lambda_{3|2}$, i cui valori sono a ricavarsi dalle (C), sostituendovi per le p, q, r le loro espressioni in termini delle λ. Si hanno tali espressioni nelle formule generali (8):

$$\gamma_{hkl} = \sum_{rs}{}_1^3 \lambda_{h|rs} \lambda_k^{(r)} \lambda_l^{(s)} ;$$

riesce per altro più comodo sostituirle con queste loro combinazioni:

$$\gamma_{hk+1k+2} - \gamma_{hk+2k+1} = \sum_{rs}{}_1^3 \lambda_{h|rs} (\lambda_{k+1}^{(r)} \lambda_{k+2}^{(s)} - \lambda_{k+2}^{(r)} \lambda_{k+1}^{(s)}) ,$$

dove, come di solito, si risguardano equivalenti gli indici, congrui tra loro rispetto al modulo 3.

La sommatoria del secondo membro, osservando che il fattore $\lambda_{k+1}^{(r)}\lambda_{k+2}^{(s)} - \lambda_{k+2}^{(r)}\lambda_{k+1}^{(s)}$ si annulla per $r = s$ e cambia di segno quando si scambia r con s, può essere scritta:

$$\sum_{1}^{3}{}_r (\lambda_{h|r+1\,r+2} - \lambda_{h|r+2\,r+1})(\lambda_{k+1}^{(r)}\lambda_{k+2}^{(s)} - \lambda_{k+2}^{(r)}\lambda_{k+1}^{(s)}) .$$

Ma, per definizione di derivata covariante:

$$\lambda_{h|r+1\,r+2} = \frac{\partial \lambda_{h|r+1}}{\partial x_{r+2}} - \sum_{1}^{3}{}_p\, a_{r+1\,r+2\,p}\lambda_h^{(p)} ,$$

$$\lambda_{h|r+2\,r+1} = \frac{\partial \lambda_{h|r+2}}{\partial x_{r+1}} - \sum_{1}^{3}{}_p\, a_{r+2\,r+1\,p}\lambda_h^{(p)} ,$$

quindi:

$$\lambda_{h|r+1\,r+2} - \lambda_{h|r+2\,r+1} = \frac{\partial \lambda_{h|r+1}}{\partial x_{r+2}} - \frac{\partial \lambda_{h|r+2}}{\partial x_{r+1}} ,$$

e, per la nota proprietà dei determinanti reciproci:

$$\frac{\lambda_{k+1}^{(r+1)}\lambda_{k+2}^{(r+2)} - \lambda_{k+2}^{(r+1)}\lambda_{k+1}^{(r+2)}}{\sqrt{\frac{1}{a}}} = \lambda_{k|r} ,$$

onde risulta:

$$(18) \qquad \gamma_{hk+1\,k+2} - \gamma_{hk+2\,k+1} = \frac{1}{\sqrt{a}} \sum_{1}^{3}{}_r \left\{ \frac{\partial \lambda_{h|r+1}}{\partial x_{r+2}} - \frac{\partial \lambda_{h|r+2}}{\partial x_{r+1}} \right\} \lambda_{k|r} , \qquad (h, k = 1, 2, 3),$$

le quali si prestano assai bene al calcolo effettivo delle p, q, r e dànno intanto identicamente (come si poteva prevedere):

$$\gamma_{123} - \gamma_{132} = q_2 + r_3 = 0 ,$$

$$\gamma_{231} - \gamma_{213} = r_3 + p_1 = 0 .$$

Senza scrivere tutti i valori delle p, q, r e poi semplificarli a norma delle (C), procediamo alla spicciolata in modo da usufruire di ogni semplificazione nei calcoli successivi.

Facciamo nelle (18) $h = 3$, $k = 1$, e $h = 3$, $k = 2$. Si ricava:

$$\gamma_{323} = -p_3 = \frac{1}{H_2}\frac{\partial \lambda_{3|2}}{\partial x_3},$$

$$\gamma_{313} = q_3 = -\frac{1}{H_1}\frac{\partial \lambda_{3|1}}{\partial x_3};$$

ma si hanno le equazioni $p_3 = 0$, $q_3 = 0$, dunque $\lambda_{3|1}$, $\lambda_{3|2}$ *sono funzioni soltanto di* x_1, x_2.

Prendiamo ora $h = 2$, $k = 1$, e $h = 1$, $k = 2$,; avremo:

$$-\gamma_{232} = -p_2 = \frac{\partial \log H_2}{\partial x_3},$$

$$\gamma_{131} = -q_1 = -\frac{\partial \log H_1}{\partial x_3},$$

e, in causa della equazione $p_2 + q_1 = 0$:

$$\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\log \frac{H_2}{H_1}\right) = 0,$$

cioè il rapporto H_2/H_1 è funzione soltanto di x_1, x_2. Dato questo, è facile vedere che si può addirittura supporre $H_1 = H_2$.

E per verità, circa le superficie $x_1 = \text{cost.}$, s'è richiesto finora soltanto che sieno rigate della congruenza [3]; in base alle (14), s'è poi constatata la esistenza della famiglia di rigate ortogonali $x_2 = \text{cost.}$ Per individuare queste due famiglie in modo che risulti $H_1 = H_2$, procediamo come segue. Immaginiamo da principio una famiglia affatto generica $x_1' = \text{cost.}$ di rigate della [3] e la famiglia ortogonale associata $x_2' = \text{cost.}$ Sieno [1′], [2′] le corrispondenti congruenze, $\lambda'_{1|r} = \varepsilon_{1r} H_1'$, $\lambda'_{2|r} = \varepsilon_{2r} H_2'$ gli elementi dei loro sistemi coordinati covarianti, relativi, si intende, alle variabili x_1', x_2', $x_3' = x_3$.

Consideriamo poi l'invariante:

$$\sum_{rs}^{\infty} (\lambda'_{1|r}\lambda'_{1|s} + \lambda'_{2|r}\lambda'_{2|s})\, dx_r'\, dx_s' = H_1'^2\, dx_1'^2 + H_2'^2\, dx_2'^2$$

e operiamo una trasformazione di variabili:

$$\begin{cases} x_1' = x_1'(x_1, x_2) \\ x_2' = x_2'(x_1, x_2) \\ x_3' = x_3, \end{cases}$$

mediante cui la forma $dx_1'^2 + (H_2'/H_1')^2 dx_2'^2$ (che dipende, per quanto s'è visto, dalle sole variabili x_1', x_2') risulti riferita a parametri isometrici. Potremo allora porre:

$$H_1'^2 dx_1'^2 + H_2'^2 dx_2'^2 = H^2(dx_1^2 + dx_2^2),$$

con H funzione di x_1, x_2, x_3.

Riferendoci a queste nuove variabili x_1, x_2, x_3, rappresentiamo con $\bar{\lambda}'_{1|r}$, $\bar{\lambda}'_{2|r}$ i sistemi coordinati covarianti di [1'], [2'], con $\lambda_{1|r} = \varepsilon_{1r}H_1$, $\lambda_{2|r} = \varepsilon_{2r}H_2$ quelli delle congruenze [1], [2] (traiettorie ortogonali delle superficie $x_1 = \text{cost.}$, $x_2 = \text{cost.}$, che, come le $x_1' = \text{cost.}$, $x_2' = \text{cost.}$, sono rigate di [3]).

È chiaro che, per ogni punto dello spazio, si passa dalle $\bar{\lambda}'_{1|r}$, $\bar{\lambda}'_{2|r}$ alle $\lambda_{1|r}$, $\lambda_{2|r}$ mediante una trasformazione ortogonale del tipo:

$$\bar{\lambda}_{1|r} = \cos\vartheta\,\lambda_{1|r} + \operatorname{sen}\vartheta\,\lambda_{2|r},$$

$$\bar{\lambda}'_{2|r} = -\operatorname{sen}\vartheta\,\lambda_{1|r} + \cos\vartheta\,\lambda_{2|r},$$

ϑ essendo l'angolo, che formano tra loro, in quel punto, le direzioni positive delle linee di [1] e [1'].

Di qui risulta:

$$\sum_1^3{}_{rs} (\lambda'_{1|r}\lambda'_{1|s} + \lambda'_{2|r}\lambda'_{2|s})\, dx'_r\, dx'_s = \sum_1^3{}_{rs} (\bar{\lambda}'_{1|r}\bar{\lambda}'_{1|s} + \bar{\lambda}'_{2|r}\bar{\lambda}'_{2|s})\, dx_r\, dx_s$$

$$= \sum_1^3{}_{rs} (\lambda_{1|r}\lambda_{1|s} + \lambda_{2|r}\lambda_{2|s})\, dx_r\, dx_s = H_1^2\, dx_1^2 + H_2^2\, dx_2^2.$$

Ma, per il modo, onde vennero scelte le variabili x_1, x_2:

$$\sum_1^3{}_{rs} (\lambda'_{1|r}\lambda'_{1|s} + \lambda'_{2|r}\lambda'_{2|s})\, dx'_r\, dx'_s = H_1'^2\, dx_1'^2 + H_2'^2\, dx_2'^2 = H^2(dx_1^2 + dx_2^2),$$

talchè:

$$H_1^2\, dx_1^2 + H_2^2\, dx_2^2 = H^2(dx_1^2 + dx_2^2)$$

e per conseguenza:

$$H_1 = H_2 = H,$$

come si voleva dimostrare.

Ritenuto ormai $H_1 = H_2 = H$ e $\lambda_{1|3}$, $\lambda_{2|3}$ indipendenti da x_3, abbiamo, per le

$$\lambda_{h|r}\,,\quad \sqrt{a}\,,\quad \lambda_h^{(r)}\,,\quad a_{rs} = \sum_1^3{}_h \lambda_{h|r}\lambda_{h|s}\,,\quad a^{(rs)} = \sum_1^3{}_h \lambda_h^{(r)}\lambda_h^{(s)}\,,\quad \frac{\partial}{\partial s_h} = \sum_1^3{}_h \lambda_h^{(r)} \frac{\partial}{\partial x_r}\,,$$

la seguente tabella di valori:

$$\begin{cases} \lambda_{1|1} = H\,, & \lambda_{1|2} = 0\,, & \lambda_{1|3} = 0\,, \\ \lambda_{2|1} = 0\,, & \lambda_{2|2} = H\,, & \lambda_{2|3} = 0\,, \\ \lambda_{3|1}\,, & \lambda_{3|2}\,, & \lambda_{3|3} = 1\,; \end{cases}$$

$$\sqrt{a} = H^2\,;$$

$$\begin{cases} \lambda_1^{(1)} = \dfrac{1}{H}\,, & \lambda_1^{(2)} = 0\,, & \lambda_1^{(3)} = -\dfrac{\lambda_{3|1}}{H}\,, \\ \lambda_2^{(1)} = 0\,, & \lambda_2^{(2)} = \dfrac{1}{H}\,, & \lambda_2^{(3)} = -\dfrac{\lambda_{3|2}}{H}\,, \\ \lambda_3^{(1)} = 0\,, & \lambda_3^{(2)} = 0\,, & \lambda_3^{(3)} = 1\,; \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{11} = H^2 + \lambda_{3|1}^2\,, & a_{22} = H^2 + \lambda_{3|2}^2\,, & a_{33} = 1\,, \\ a_{23} = \lambda_{3|2}\,, & a_{31} = \lambda_{3|1}\,, & a_{12} = \lambda_{3|1}\lambda_{3|2}\,; \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^{(11)} = \dfrac{1}{H^2}\,, & a^{(22)} = \dfrac{1}{H^2}\,, & a^{(33)} = 1 + \dfrac{\lambda^2{}_{3|1} + \lambda^2{}_{3|2}}{H^2}\,, \\ a^{(23)} = \dfrac{-\lambda_{3|2}}{H^2}\,, & a^{(31)} = \dfrac{-\lambda_{3|1}}{H^2}\,, & a^{(12)} = 0\,; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial s_1} = \dfrac{1}{H}\left(\dfrac{\partial}{\partial x_1} - \lambda_{3|1}\dfrac{\partial}{\partial x_3}\right), \\ \dfrac{\partial}{\partial s_2} = \dfrac{1}{H}\left(\dfrac{\partial}{\partial x_2} - \lambda_{3|2}\dfrac{\partial}{\partial x_3}\right), \\ \dfrac{\partial}{\partial s_3} = \dfrac{\partial}{\partial x_3}\,. \end{cases}$$

Dopo ciò, le (18) si riducono a:

$$
(18')\quad \begin{cases}
q_1 = \dfrac{\partial \log H}{\partial x_3}, \\[2mm]
2q_2 = \dfrac{1}{H^2}\left\{\dfrac{\partial \lambda_{3|1}}{\partial x_2} - \dfrac{\partial \lambda_{3|2}}{\partial x_1}\right\}, \\[2mm]
r_1 = -\dfrac{1}{H}\left\{\dfrac{\partial \log H}{\partial x_2} - \lambda_{3|2}\dfrac{\partial \log H}{\partial x_3}\right\} = -\dfrac{\partial \log H}{\partial s_2}, \\[2mm]
r_2 = \dfrac{1}{H}\left\{\dfrac{\partial \log H}{d x_1} - \lambda_{3|1}\dfrac{\partial \log H}{\partial x_3}\right\} = \dfrac{\partial \log H}{\partial s_1};
\end{cases}
$$

e noi dobbiamo integrare il sistema (15), (16), (17) con questi valori per q_1, q_2, r_1, r_2 e colle espressioni, testè assegnate pei simboli $\partial/\partial s_1$, $\partial/\partial s_2$, $\partial/\partial s_3$.

Supporrò addirittura q_2 diverso da zero, cioè la congruenza [3] non normale. Il caso opposto avremo occasione di considerarlo a § 8; esso comprende soltanto le stelle di raggi (eventualmente col centro a distanza infinita).

Per la prima delle (15), sarà anche q_1 essenzialmente diverso da zero, poichè q_1 non può annullarsi, senza che lo stesso avvenga per q_2.

Sostituendo a q_1 e q_2 i loro valori (18′), la seconda delle (15) si trova identicamente soddisfatta e la prima diviene:

$$
\frac{\partial^2 \log H}{\partial x_3^2} + \left(\frac{\partial \log H}{\partial x_3}\right)^2 = \frac{1}{4H^4}\left\{\frac{\partial \lambda_{3|1}}{\partial x_2} - \frac{\partial \lambda_{3|2}}{\partial x_1}\right\}^2,
$$

che si può scrivere:

$$
2H^2\frac{\partial^2 H^2}{\partial x_3^2} - \left(\frac{\partial H^2}{\partial x_3}\right)^2 = \left\{\frac{\partial \lambda_{3|1}}{\partial x_2} - \frac{\partial \lambda_{3|2}}{\partial x_1}\right\}^2
$$

e, derivata rispetto ad x_3, porge:

$$
\frac{\partial^3 H^2}{\partial x_3^3} = 0,
$$

donde apparisce che H^2 è un polinomio di secondo grado in x_3.

Ricordiamo che si è convenuto di contare le x_3 a partire dalla superficie media. Per un teorema noto [16], dovranno essere applicabili due

[16] BIANCHI, *Lezioni*, ecc., pag. 250.

superficie del sistema $x_3 = \text{cost.}$, che corrispondono a valori opposti di x_3.

Questo esige, come si vede subito, che manchi in H^2 il termine di primo grado rapporto ad x_3. D'altra parte H^2 dipende effettivamente da x_3 (senza di che si annullerebbero q_1 e q_2) ed ha valore essenzialmente positivo. Siamo così autorizzati a porre H^2 sotto la forma:

$$H^2 = e^{\alpha}(x_3^2 + \beta^2)\,,$$

con α e β funzioni reali di x_1, x_2.

La precedente equazione:

$$2H^2 \frac{\partial^2 H^2}{\partial x_3^2} - \left(\frac{\partial H^2}{\partial x_3}\right)^2 = \left\{\frac{\partial \lambda_{3|1}}{\partial x_2} - \frac{\partial \lambda_{3|2}}{\partial x_1}\right\}^2$$

dà:

$$4e^{2\alpha}\beta^2 = \left\{\frac{\partial \lambda_{3|1}}{\partial x_2} - \frac{\partial \lambda_{3|2}}{\partial x_1}\right\}^2,$$

ossia, estraendo la radice e fissando in modo conveniente il segno di β:

$$(15') \qquad 2e^{\alpha}\beta = \frac{\partial \lambda_{3|1}}{\partial x_2} - \frac{\partial \lambda_{3|2}}{\partial x_1}\,.$$

Ne viene:

$$(18'') \qquad \left\{\begin{aligned} q_1 &= \frac{\partial \log H}{\partial x_3} = \frac{1}{2}\frac{\partial \log H^2}{\partial x_3} = \frac{x_3}{x_3^2 + \beta^2}\,,\\ q_2 &= \frac{1}{2H^2}\left\{\frac{\partial \lambda_{3|1}}{\partial x_2} - \frac{\partial \lambda_{3|2}}{\partial x_1}\right\} = \frac{\beta}{x_3^2 + \beta^2}\,.\end{aligned}\right.$$

Passando alle (16), si ha (con trasformazione certamente legittima, poichè, nella ipotesi qui considerata, q_1, q_2 e β non sono nulli):

$$\begin{aligned} &\beta x_3 \left\{\frac{H}{q_2}\frac{\partial \log q_1}{\partial s_1} + \frac{H}{q_1}\frac{\partial \log q_2}{\partial s_2}\right\} \\ &= x_3(x_3^2 + \beta^2)\left\{-\frac{\partial \log (x_3^2 + \beta^2)}{\partial x_1} - \frac{\lambda_{3|1}}{x_3} + \lambda_{3|1}\frac{\partial \log (x_3^2 + \beta^2)}{\partial x_3}\right\} \\ &+ \beta(x_3^2 + \beta^2)\left\{\frac{\partial \log \beta}{\partial x_2} - \frac{\partial \log (x_3^2 + \beta^2)}{\partial x_3} + \lambda_{3|2}\frac{\partial \log (x_3^2 + \beta^2)}{\partial x_3}\right\} \\ &= -2x_3\beta\frac{\partial \beta}{\partial x_1} - (x_3^2 + \beta^2)\lambda_{3|1} + 2x_3^2\lambda_{3|1} + (x_3^2 + \beta^2)\frac{\partial \beta}{\partial x_2} - 2\beta^2\frac{\partial \beta}{\partial x_2} + 2x_3\beta\lambda_{3|2} \\ &= x_3^2\left(\lambda_{3|1} + \frac{\partial \beta}{\partial x_2}\right) + 2\beta x_3\left(\lambda_{3|2} - \frac{\partial \beta}{\partial x_1}\right) - \beta^2\left(\lambda_{3|1} + \frac{\partial \beta}{\partial x_2}\right) = 0\,,\end{aligned}$$

$$\beta x_3 \left\{ \frac{H}{q_2} \frac{\partial \log q_1}{ds_1} - \frac{H}{q_1} \frac{\partial \log q_2}{\partial s_1} \right\}$$

$$= x_3 (x_3^2 + \beta^2) \left\{ - \frac{\partial \log (x_3^2 + \beta^2)}{\partial x_2} - \frac{\lambda_{3|2}}{x_3} + \lambda_{3|2} \frac{\partial \log (x_3^2 + \beta^2)}{\partial x_3} \right\}$$

$$- \beta (x_3^2 + \beta^2) \left\{ \frac{\partial \log \beta}{\partial x_1} - \frac{\partial \log (x_3^2 + \beta^2)}{\partial x_1} + \lambda_{3|1} \frac{\partial \log (x_3^2 + \beta^2)}{\partial x_3} \right\}$$

$$= - 2 x_3 \beta \frac{\partial \beta}{\partial x_2} - (x_3^2 + \beta^2) \lambda_{3|2} + 2 x_3^2 \lambda_{3|2} - (x_3^2 + \beta^2) \frac{\partial \beta}{\partial x_1} + 2 \beta^2 \frac{\partial \beta}{\partial x_1} - 2 x_3 \beta \lambda_{3|1}$$

$$= x_3^2 \left(\lambda_{3|2} - \frac{\partial \beta}{\partial x_1} \right) - 2 \beta x_3 \left(\lambda_{3|1} + \frac{\partial \beta}{\partial x_2} \right) - \beta^2 \left(\lambda_{3|2} - \frac{\partial \beta}{\partial x_1} \right) = 0 ,$$

le quali equivalgono a:

$$(16') \qquad \left\{ \begin{aligned} \lambda_{3|1} &= - \frac{\partial \beta}{\partial x_2} \\ \lambda_{3|2} &= \frac{\partial \beta}{\partial x_1} . \end{aligned} \right.$$

A sua volta la (15′) diviene:

$$(15'') \qquad \frac{\partial^2 \beta}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \beta}{\partial x_2^2} = - 2 e^{\alpha} \beta .$$

Delle (17) le prime due sono identicamente soddisfatte, come si verifica in modo ovvio; rimane da considerare l'ultima:

$$\frac{\partial r_1}{\partial s_2} - \frac{\partial r_2}{\partial s_1} = r_1^2 + r_2^2 + q_1^2 + 3 q_2^2 ,$$

che, sostituiti per r_1, r_2 i loro valori, può essere scritta:

$$\frac{\partial^2 \log H}{ds_1^2} + \frac{\partial^2 \log H}{\partial s_2^2} + \left(\frac{\partial \log H}{\partial s_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial \log H}{\partial s_2} \right)^2 + q_1^2 + 3 q_2^2 = 0 ,$$

od anche, notando che:

$$\frac{\partial^2 \log H}{\partial s_3^2} = \frac{\partial q_1}{\partial s_3} = q_2^2 - q_1^2 ,$$

$$(17') \qquad \frac{\partial^2 \log H}{\partial s_1^2} + \frac{\partial^2 \log H}{\partial s_2^2} + \frac{\partial^2 \log H}{\partial s_3^2} + \left(\frac{\partial \log H}{\partial s_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial \log H}{\partial s_2} \right)^2 + 2 q_1^2 + 2 q_2^2 = 0 .$$

Il primo membro si calcola nel modo più comodo, ricorrendo al parametro differenziale di secondo ordine, relativo alla nostra forma fondamentale, che è (si cfr. la precedente tabella e si tengano presenti le (16')):

$$
\tag{19}
\begin{aligned}
\Delta_2 u = \frac{1}{H^2}\Bigg[&\frac{\partial}{\partial x_1}\left\{\frac{\partial u}{\partial x_1}+\frac{\partial\beta}{\partial x_2}\frac{\partial u}{\partial x_3}\right\}+\frac{\partial}{\partial x_2}\left\{\frac{\partial u}{\partial x_2}-\frac{\partial\beta}{\partial x_1}\frac{\partial u}{\partial x_3}\right\}\\
&+\frac{\partial}{\partial x_3}\left\{\frac{\partial\beta}{\partial x_2}\frac{\partial u}{\partial x_1}-\frac{\partial\beta}{\partial x_1}\frac{\partial u}{\partial x_2}+\left(H^2+\left(\frac{\partial\beta}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial\beta}{\partial x_2}\right)^2\right)\frac{\partial u}{\partial x_3}\right\}\Bigg].
\end{aligned}
$$

Dalla identità:

$$u_p = \sum_1^3{}_h \frac{\partial u}{\partial s_h}\,\lambda_{h|p}$$

si trae per derivazione covariante:

$$u_{pq} = \sum_1^3{}_h \frac{\partial u}{\partial s_h}\,\lambda_{h|pq} + \sum_1^3{}_h \left(\frac{\partial u}{\partial s_h}\right)_q \lambda_{h|p}\,.$$

Applicando a $(\partial u/\partial s_h)_q$ la medesima identità, e sostituendo a $\lambda_{h/pq}$ il suo valore

$$\sum_1^3{}_{ij}\,\gamma_{hij}\lambda_{i|p}\lambda_{j|q}\,,$$

risulta:

$$u_{pq} = \sum_1^3{}_{hij} \frac{\partial u}{\partial s_h}\,\gamma_{hij}\lambda_{i|p}\lambda_{j|q} + \sum_1^3{}_{hk} \frac{\partial}{\partial s_k}\frac{\partial u}{\partial s_h}\,\lambda_{h|p}\lambda_{k|q}\,,$$

e di qua:

$$
\begin{aligned}
\Delta_2 u = \sum_1^3{}_{pq}\, a^{(pq)}u_{pq} &= \sum_1^3{}_{hij} \frac{\partial u}{\partial s_h}\,\gamma_{hij}\varepsilon_{ij} + \sum_1^3{}_{hk} \frac{\partial}{\partial s_k}\frac{\partial u}{\partial s_h}\,\varepsilon_{hk}\\
&= \sum_1^3{}_h \frac{\partial u}{\partial s_h}\sum_1^3{}_i\,\gamma_{hii} + \frac{\partial^2 u}{\partial s_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial s_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial s_3^2}\,.
\end{aligned}
$$

Siccome:

$$
\begin{aligned}
\sum_1^3{}_h \frac{\partial u}{\partial s_h}\sum_1^3{}_i\,\gamma_{hii} &= \frac{\partial u}{\partial s_1}(\gamma_{122}+\gamma_{133}) + \frac{\partial u}{\partial s_2}(\gamma_{233}+\gamma_{211}) + \frac{\partial u}{\partial s_3}(\gamma_{311}+\gamma_{322})\\
&= r_2\frac{\partial u}{\partial s_1} - r_1\frac{\partial u}{\partial s_2} + 2q_1\frac{\partial u}{\partial s_3}\,,
\end{aligned}
$$

prendendo $u = \log H$ e osservando le (18′), otterremo:

$$\underset{2}{\Delta} \log H = \frac{1}{2} \underset{2}{\Delta} \log H^2$$

$$= \frac{\partial^2 \log H}{\partial s_1^2} + \frac{\partial^2 \log H}{\partial s_2^2} + \frac{\partial^2 \log H}{\partial s_3^2} + \left(\frac{\partial \log H}{\partial s_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial \log H}{\partial s_2}\right)^2 + 2q_1^2 .$$

Il confronto colle (17′) e l'impiego delle (18″) conduce immediatamente alla:

$$(17'') \qquad H^2 \underset{2}{\Delta} \log H^2 + 4q_2^2 H^2 = H^2 \underset{2}{\Delta} \log H^2 + \frac{4\beta^2 e^\alpha}{x_3^2 + \beta^2} = 0 ,$$

che sviluppata ci dà:

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left\{ \frac{\partial \alpha}{\partial x_1} + 2 \frac{\beta \frac{\partial \beta}{\partial x_1} + x_3 \frac{\partial \beta}{\partial x_2}}{x_3^2 + \beta^2} \right\} + \frac{\partial}{\partial x_2} \left\{ \frac{\partial \alpha}{\partial x_2} + 2 \frac{\beta \frac{\partial \beta}{\partial x_2} - x_3 \frac{\partial \beta}{\partial x_1}}{x_3^2 + \beta^2} \right\}$$

$$+ \frac{\partial}{\partial x_3} \left\{ \frac{\partial \beta}{\partial x_2} \frac{\partial \alpha}{\partial x_1} - \frac{\partial \beta}{\partial x_1} \frac{\partial \alpha}{\partial x_2} + 2e^\alpha x_3 + 2x_3 \frac{\left(\frac{\partial \beta}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial \beta}{\partial x_2}\right)^2}{x_3^2 + \beta^2} \right\} + \frac{4\beta^2 e^\alpha}{x_3^2 + \beta^2}$$

$$= \left\{ \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x_2^2} + 2e^\alpha \right\} + \frac{2\beta \left\{ \frac{\partial^2 \beta}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \beta}{\partial x_2^2} + 2e^\alpha \beta \right\}}{x_3^2 + \beta^2} = 0 ,$$

ossia, per la (15′):

$$(17''') \qquad \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 a}{\partial x_2^2} = -2e^\alpha .$$

Il nostro calcolo è ora compiuto. Da esso risulta che, *per ogni con-congruenza isotrópa (non normale), un'opportuna scelta del sistema di riferimento permette di attribuire al quadrato dell'elemento lineare dello spazio la forma*:

$$(20) \qquad ds^2 = \left\{ H^2 + \left(\frac{\partial \beta}{\partial x_2}\right)^2 \right\} dx_1^2 + \left\{ H^2 + \left(\frac{\partial \beta}{\partial x_1}\right)^2 \right\} dx_2^2 + dx_3^2$$

$$+ 2 \frac{\partial \beta}{\partial x_1} dx_2 dx_3 - 2 \frac{\partial \beta}{\partial x_2} dx_3 dx_1 - 2 \frac{\partial \beta}{\partial x_1} \frac{\partial \beta}{\partial x_2} dx_1 dx_2 ,$$

dove:

$$H^2 = e^{\alpha}(x_3^2 + \beta^2) \tag{21}$$

e α, β *sono funzioni delle sole variabili* x_1, x_2, *che soddisfano rispettivamente alle equazioni*:

$$\frac{\partial^2 \alpha}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x_3^2} = -2e^{\alpha} \quad (^{17}), \tag{22}$$

$$\frac{\partial^2 \beta}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \beta}{\partial x_2^2} = -2e^{\alpha}\beta . \tag{23}$$

Reciprocamente ogni elemento lineare (20), *per cui* H, α e β *si comportino nel modo detto, appartiene all'ordinario spazio euclideo e le linee* $x_1 =$ cost., $x_2 =$ cost., *costituiscono una congruenza rettilinea isotrópa.*

Quale la conseguenza nei riguardi della teoria del potenziale?

Questa semplicemente che *le congruenze rettilinee isotrópe* [18] *sono equipotenziali, e le equazioni di definizione dei corrispondenti potenziali binari si riducono in ogni caso* (come segue dalla (19), supponendovi u indipendente da x_3) *alla forma di Laplace*:

$$\Theta_1 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = 0 \quad (^{19}) .$$

---

[17] Si può osservare che l'equazione 22) esprime che l'elemento lineare $e^{\alpha}(dx_1^2 + dx_2^2)$ appartiene alla sfera di raggio 1. Nulla di più naturale, poichè, se si assume la superficie media $x_3 = 0$ a superficie di partenza e si forma l'elemento lineare, spettante all'immagine sferica della congruenza $x_1 =$ cost., $x_2 =$ cost., si trova precisamente $e^{\alpha}(dx_1^2 + dx_2^2)$.

[18] Non escludiamo le congruenze normali, poichè anche per queste sussiste la medesima proprietà, come risulta dai §§ 8 e 9.

[19] Si può facilmente riconoscere che l'insieme di tutti i potenziali isotrópi coincide in sostanza con quello, definito da JACOBI, a mezzo delle equazioni:

$$\underset{2}{\Delta} V = 0 , \qquad (\underset{1}{\Delta} V)^2 = 0 . \tag{A}$$

In primo luogo, posto:

$$V = x_1 + i x_2 , \tag{B}$$

si ha, scindendo la parte reale dalla immaginaria:

$$\underset{2}{\Delta} x_1 = 0 , \qquad \underset{2}{\Delta} x_2 = 0 , \tag{A'}$$

$$\underset{1}{\Delta} x_1 = \underset{1}{\Delta} x_2 , \qquad \nabla(x_1, x_2) = 0 , \tag{A''}$$

talchè, nel campo reale, i potenziali di cui si tratta, sono tutte e soltanto le soluzioni del sistema (A'), (A'').

Si noti ora con JACOBI che, assieme a V, anche una qualunque funzione $F(V)$ (della sola V) è integrale delle (A). Perciò la parte reale $u(x_1, x_2)$ di $F(V)$ è ancora un potenziale della cate-

6. - Equazioni intrinseche delle congruenze equipotenziali.

Le equazioni (5) e (6), che definiscono le congruenze equipotenziali, conservano, come è chiaro a priori, la medesima forma, quando le incognite ξ_r si moltiplicano per un medesimo fattore.

Designamolo con e^{ν} e poniamo:

$$\xi_r = e^{-\nu}\bar{\xi}_r \ ;$$

sarà:

$$\xi_{rs} = e^{-\nu}\{\bar{\xi}_{rs} - \nu_s\bar{\xi}_r\} ,$$

$$\xi_{rpq} = e^{-\nu}\{\bar{\xi}_{rpq} - \nu_q\bar{\xi}_{rp} - \nu_p\bar{\xi}_{rq} - (\nu_{pq} - \nu_p\nu_q)\bar{\xi}_r\} ,$$

---

goria considerata. In altri termini, scelti una volta x_1, x_2 in modo da soddisfare alle (A'), (A''), la equazione:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = 0$$

definisce una sottoclasse di potenziali (della detta categoria). Essi sono manifestamente binari. Dobbiamo far vedere che sono isotrópi, cioè che ogni congruenza, costitnita dalle intersezioni delle due famiglie di superficie:

$$x_1 = \text{cost.} , \qquad x_2 = \text{cost.} ,$$

è rettilinea ed isotrópa.

Designiamo una tale congruenza con [3] e completiamo la terna colle traiettorie ortogonali delle famiglie $x_1 = \text{cost.}$, $x_2 = \text{cost.}$ (le quali sono tra loro ortogonali, per la seconda delle (A'')).

Avremo, riferendoci ad un generico sistema di coordinate curvilinee ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3:

$$\begin{cases} \lambda_{1|r} = \dfrac{1}{\underset{1}{\Delta} x_1} \dfrac{\partial x_1}{\partial \varrho_r} \\ \lambda_{2|r} = \dfrac{1}{\underset{1}{\Delta} x_2} \dfrac{\partial x_2}{\partial \varrho_r} , \end{cases} \qquad (r = 1, 2, 3)$$

le quali, avendo riguardo alla (B) e alla prima delle (A''), si possono compendiare in:

$$\lambda_{1|r} + i\lambda_{2|r} = \frac{1}{\underset{1}{\Delta} x_1} V_r .$$

Per derivazione, si trae:

$$\lambda_{1|rs} + i\lambda_{2|rs} = \left(\frac{1}{\underset{1}{\Delta} x_1}\right)_s V_r + \frac{1}{\underset{1}{\Delta} x_1} V_{rs} ,$$

donde, moltiplicando successivamente per $\lambda_3^{(r)}\lambda_3^{(s)}$, $\lambda_3^{(r)}(\lambda_1^{(s)} + i\lambda_2^{(s)})$, sommando rispetto ad r e e le (5) diverranno:

$$\bar{\xi}_{rs} + \bar{\xi}_{sr} = 2Me^{\nu}a_{rs} + (g_r + \nu_r)\bar{\xi}_s + (g_s + \nu_s)\bar{\xi}_r .$$

Le (6) con ovvie riduzioni si trasformano in:

$$\sum_1^3{}_{pq}\, a^{(pq)}\bar{\xi}_{rpq} = \left\{ N + \sum_1^3{}_{pq}\, a^{(pq)}(\nu_{pq} - \nu_p\nu_q) - 2\sum_1^3{}_s\, g^{(s)}\nu_s \right\} \bar{\xi}_r + 2\sum_1^3{}_s\, (g^{(s)} + \nu^{(s)})\bar{\xi}_{rs} .$$

---

ad s e notando che $\sum_1^3{}_r V_r \lambda_3^{(r)} = 0$:

(C) $$\gamma_{133} + i\gamma_{233} = \frac{1}{\underset{1}{\Delta} x_1} \sum_1^3{}_{rs} V_{rs}\lambda_3^{(r)}\lambda_3^{(s)} ,$$

(D) $$(\gamma_{131} - \gamma_{232}) + i(\gamma_{132} + \gamma_{231}) = \frac{1}{(\underset{1}{\Delta} x_1)^2} \sum_1^3{}_{rs} V_{rs}\lambda_3^{(r)} V^{(s)} .$$

D'altra parte le (A) si scrivono:

$$\underset{2}{\Delta} V = \sum_1^3{}_{rs} a^{(rs)} V_{rs} = \sum_1^3{}_h \sum_1^3{}_{rs} V_{rs}\lambda_h^{(r)}\lambda_h^{(s)} = 0 ,$$

$$(\underset{1}{\Delta} V)^2 = \sum_1^3{}_s V_s V^{(s)} = 0 ,$$

e la seconda, derivata, porge:

$$\sum_1^3{}_s V_{sr}\, V^{(s)} = \sum_1^3{}_s V_{rs}\, V^{(s)} = 0 .$$

Se noi la moltiplichiamo per $\frac{1}{\underset{1}{\Delta} x_1}(\lambda_1^{(r)} - i\lambda_2^{(r)})$, sostituiamo a $\frac{1}{\underset{1}{\Delta} x_1} V^{(s)}$ il suo valore $\lambda_1^{(s)} + i\lambda_2^{(s)}$, e sommiamo rispetto ad r, otteniamo:

$$\sum_1^3{}_{rs} V_{rs}\, \lambda_1^{(r)}\lambda_1^{(s)} + \sum_1^3{}_{rs} V_{rs}\lambda_2^{(r)}\lambda_2^{(s)} = 0 ,$$

dopo di che la equazione $\underset{2}{\Delta} V = 0$, diviene:

$$\sum_1^3{}_{rs} V_{rs}\, \lambda_3^{(r)}\lambda_3^{(s)} = 0 .$$

Il secondo membro della (C) è dunque identicamente nullo e per conseguenza:

(C') $$\gamma_{133} = 0 , \qquad \gamma_{233} = 0 ,$$

ossia la congruenza [3] è rettilinea.

Il secondo membro della (D) si annulla del pari, come si constata, moltiplicando la $\sum_1^3{}_s V_{rs}\, V^{(s)} = 0$ per $\lambda_3^{(r)}$ e sommando. Ne viene:

(D') $$\gamma_{133} = \gamma_{233} , \qquad \gamma_{312} + \gamma_{331} = 0 ,$$

che è la condizione di isotropia. c. d. d.

Per ripassare materialmente alla forma primitiva, basta alle cinque indeterminate M, g_r, N, sostituirne altre cinque $\overline{M}$, $\bar{g}_r$, $\overline{N}$, definite da:

$$
(24) \qquad \begin{cases} \overline{M} = Me^{\nu} \\ \bar{g}_r = g_r + \nu_r \\ \overline{N} = N + \sum_{pq}^{2}{}_{1}\, a^{(pq)}(\nu_{pq} - \nu_p\nu_q) - 2\sum_{s}^{3}{}_{1}\, g^{(s)}\nu_s \,. \end{cases}
$$

Questa osservazione permette in particolare di sostituire alle ξ_r d'una congruenza [3], supposta equipotenziale, le $\lambda_{3|r}$. Basta intendere nelle (24)

$$
e^{\nu} = \frac{1}{\left|\sqrt{\sum_{rs}{}_{1}^{3}\, a_{rs}\xi^{(r)}\xi^{(s)}}\right|} \,.
$$

Riscrivendo M, g_r, N per $\overline{M}$, $\bar{g}_r$, $\overline{N}$, le equazioni sono:

$$
(25) \qquad \lambda_{3|rs} + \lambda_{3|sr} = 2Ma_{rs} + g_r\lambda_{3|s} + g_s\lambda_{3|r} \,, \qquad (r, s = 1, 2, 3),
$$

$$
(26) \qquad \sum_{pq}{}_{1}^{3}\, a^{(pq)}\lambda_{3|rpq} = N\lambda_{3|r} + 2\sum_{s}{}_{1}^{3}\, g^{(s)}\lambda_{3|rs} \,, \qquad (r = 1, 2, 3).
$$

Si immagini ora di associare alla [3] le congruenze [1], [2], definite, come s'è detto, dalle direzioni delle normali principali e binormali.

Alle equazioni (25) equivalgono quelle, che se ne ricavano, moltiplicando per $\lambda_i^{(r)}\lambda_j^{(s)}$ e sommando rispetto ai due indici r ed s. Del pari, moltiplicando le (26) per $\lambda_i^{(r)}$ e sommando rispetto ad r, si deduce un sistema equivalente.

Otteniamo così:

$$
(25') \qquad \sum_{rs}{}_{1}^{3}\, \lambda_{3|rs}\lambda_i^{(r)}\lambda_j^{(s)} + \sum_{rs}{}_{1}^{3}\, \lambda_{3|sr}\lambda_i^{(r)}\lambda_j^{(s)} = 2M\varepsilon_{ij} + \varepsilon_{3j}\sum_{r}{}_{1}^{3}\, g_r\lambda_i^{(r)} + \varepsilon_{3i}\sum_{s}{}_{1}^{3}\, g_s\lambda_j^{(s)},
$$

$$
(26') \qquad \sum_{pqr}{}_{1}^{3}\, a^{(pq)}\lambda_{3|rpq}\lambda_i^{(r)} = N\varepsilon_{3i} + 2\sum_{rs}{}_{1}^{3}\, g^{(s)}\lambda_{3|rs}\lambda^{(r)} \,.
$$

Sostituendo alle g_r altre indeterminate $\omega_i = \sum_{r}{}_{1}^{3}\, g_r\lambda_i^{(r)}$ (donde $g_p = \sum_{i}{}_{1}^{3}\, \omega_i\lambda_{i|p}$) e ricordando le (8), le (25′) assumono la forma semplicissima:

$$
(25'') \qquad \gamma_{3ij} + \gamma_{3ji} = 2M\varepsilon_{ij} + \varepsilon_{3i}\omega_j + \varepsilon_{3j}\omega_i \,, \qquad (i, j = 1, 2, 3).
$$

Quanto alle (26′), postovi a tenore delle (10),

$$\lambda_{3|rpq} = \sum_1^3{}_{hk}\, \gamma_{3hk|q}\lambda_{h|r}\lambda_{k|p} + \sum_1^3{}_{hkjl}\, \gamma_{3hk}\gamma_{hjl}\lambda_{j|r}\lambda_{l|q}\lambda_{k|p} + \sum_1^3{}_{hkjl}\, \gamma_{3hk}\gamma_{kjl}\lambda_{j|p}\lambda_{l|q}\lambda_{h|r}\,,$$

si trova subito:

$$(26'')\quad \sum_1^3{}_k \frac{\partial \gamma_{3ik}}{\partial s_k} + \sum_1^3{}_{hk} (\gamma_{3hk}\gamma_{hik} + \gamma_{3ik}\gamma_{khh}) = \varepsilon_{3i} N + 2\sum_1^3{}_k \gamma_{3ik}\omega_k\,, \quad (i = 1, 2, 3).$$

Scriviamo per disteso le nove equazioni (25″) e (26″), introducendo le p, q, r al posto delle γ. Si ha:

$$(25''')\quad \begin{cases} q_1 = M\,, \\ -p_2 = M\,, \\ 0 = M + \omega_3\,, \\ -p_3 = \omega_2\,, \\ q_3 = \omega_1\,, \\ p_1 - q_2 = 0\,; \end{cases}$$

$$(26''')\quad \begin{cases} \dfrac{\partial q_1}{\partial s_1} + \dfrac{\partial q_2}{\partial s_2} + \dfrac{\partial q_3}{\partial s_3} + p_1 r_1 + p_2 r_2 + p_3 r_3 + q_1(r_2 - q_3) + q_2(p_3 - r_1) + \\ \qquad + q_3(q_1 - p_2) = 2\{q_1\omega_1 + q_2\omega_2 + q_3\omega_3\}, \\ -\dfrac{\partial p_1}{\partial s_1} - \dfrac{\partial p_2}{\partial s_2} - \dfrac{\partial p_3}{\partial s_3} + q_1 r_1 + q_2 r_2 + q_3 r_3 - p_1(r_2 - q_3) - p_2(p_3 - r_1) - \\ \qquad - p_3(q_1 - p_2) = -2\{p_1\omega_1 + p_2\omega_2 + p_3\omega_3\}, \\ -(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2) = N\,. \end{cases}$$

Cinque di queste equazioni servono in sostanza a definire M, N, ω_1, ω_2, ω_3; da quelle possiamo prescindere. Il primo gruppo ci dice così soltanto che $p_2 = -q_1$ e $p_1 = q_2$. L'ultima delle (26‴) determina N; le prime due, avuto riguardo alle (13) e ai valori, testè trovati per p_1, p_2, ω_1, ω_2, ω_3, assumono l'aspetto

$$(26^{\text{IV}})\quad \begin{cases} \dfrac{\partial q_1}{\partial s_1} + \dfrac{\partial q_2}{\partial s_2} + \dfrac{\partial \varrho}{\partial s_3} = -\varrho q_1\,, \\ \dfrac{\partial q_1}{\partial s_2} - \dfrac{\partial q_2}{\partial s_1} = \varrho(\tau - 3q_2)\,. \end{cases}$$

Oltre a queste si hanno naturalmente le equazioni fondamentali (11_a), (11_b), (11_c).

Le (11_a), ponendovi $p_1 = q_2$, $p_2 = -q_1$, $p_3 = 0$, $q_3 = \varrho$, $r_3 = -\tau$, divengono:

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial q_1}{\partial s_3} = q_2^2 - q_1^2 + \varrho r_2 ,\\ &\frac{\partial q_2}{\partial s_3} = -2q_1q_2 - \varrho r_1 ,\\ &\frac{\partial q_1}{\partial s_2} + \frac{\partial q_2}{\partial s_1} = 0 . \end{aligned}\right.$$

In modo analogo, tenendo anche conto delle espressioni qui risultate per $\partial q_1/\partial s_3$, $\partial q_2/\partial s_3$, le (11_b) dànno:

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial \varrho}{\partial s_2} = -\varrho r_1 ,\\ &\frac{\partial \varrho}{\partial s_1} = \varrho(\varrho + r_2) ,\\ &\frac{\partial q_1}{\partial s_2} - \frac{\partial q_2}{\partial s_1} = -2\varrho q_2 , \end{aligned}\right.$$

e le (11_c):

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial r_2}{\partial s_3} + \frac{\partial \tau}{\partial s_2} = -q_1(\varrho + r_2) + r_1(\tau - q_2) ,\\ &\frac{\partial r_1}{\partial s_3} + \frac{\partial \tau}{\partial s_1} = -q_1 r_1 - r_2(\tau - q_2) + \varrho(\tau + \varrho_2) ,\\ &\frac{\partial r_1}{\partial s_2} - \frac{\partial r_2}{\partial s_1} = q_1^2 + q_2^2 + r_1^2 + r_2^2 + 2q_2\tau . \end{aligned}\right.$$

In causa delle equazioni:

$$\frac{\partial q_1}{\partial s_1} + \frac{\partial q_2}{\partial s_2} = 0 , \qquad \frac{\partial q_1}{\partial s_2} - \frac{\partial q_2}{\partial s_1} = -2\varrho q_2 ,$$

le (26^{IV}) si riducono a:

$$\frac{\partial \varrho}{\partial s_3} = -\varrho q_1 , \qquad \varrho(\tau - q_2) = 0 .$$

Dopo ciò il sistema di equazioni intrinseche, che caratterizza le congruenze equipotenziali, potrà essere scritto:

$$
(\mathrm{E})\left\{
\begin{array}{ll}
(27) & \varrho(\tau - q_2) = 0\,; \\[2mm]
(28) & \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial \varrho}{\partial s_1} = \varrho(\varrho + r_2)\,, \\ &\frac{\partial \varrho}{\partial s_2} = -\,\varrho r_1\,, \\ &\frac{\partial \varrho}{\partial s_3} = -\,\varrho q_1\,; \end{aligned}\right. \\[2mm]
(29) & \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial q_1}{\partial s_3} = q_2^2 - q_1^2 + \varrho r_2\,, \\ &\frac{\partial q_2}{\partial s_3} = -\,2q_1q_2 - \varrho r_1\,; \end{aligned}\right. \\[2mm]
(30) & \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial q_1}{\partial s_1} + \frac{\partial q_2}{\partial s_2} = 0\,, \\ &\frac{\partial q_1}{\partial s_2} - \frac{\partial q_2}{\partial s_1} = -\,2\varrho q_2\,; \end{aligned}\right. \\[2mm]
(31) & \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial r_2}{\partial s_3} + \frac{\partial \tau}{\partial s_2} = -\,q_1(\varrho + r_2) + r_1(\tau - q_2)\,, \\ &\frac{\partial r_1}{\partial s_3} + \frac{\partial \tau}{\partial s_1} = -\,q_1 r_1 - r_2(\tau - q_2) + \varrho(\tau + q_2)\,; \end{aligned}\right. \\[2mm]
(32) & \dfrac{\partial r_1}{\partial s_2} - \dfrac{\partial r_2}{\partial s_1} = q_1^2 + q_2^2 + r_1^2 + r_2^2 + 2q_2\tau\,; \\[2mm]
(33) & p_1 = q_2\,,\quad p_2 = -\,q_1\,,\quad p_3 = 0\,,\quad q_3 = \varrho\,,\quad r_3 = -\,\tau\,.
\end{array}\right.
$$

In queste formule — giova richiamarlo — si intende che la [3] sia la congruenza equipotenziale, [1], [2] quelle definite dalle direzioni delle normali principali e binormali.

7. - Equazioni intrinseche delle congruenze costituite dalle traiettorie di un gruppo ∞^1 di similitudini.

Le trasformazioni infinitesime del gruppo G_7 delle similitudini sono definite dalle equazioni (2), (3) del § 1. Una congruenza $\lambda_{3|r}$ consterà delle traiettorie di un gruppo ∞^1 di similitudini, quando, posto:

$$\xi_r = e^{-\nu}\lambda_{3|r}\,, \qquad (r = 1, 2, 3), \tag{34}$$

le ξ_r riescano, per una opportuna scelta del moltiplicatore e^{-}_{ν}, integrali delle equazioni (2), (3). Queste in coordinate generali si scrivono:

$$\xi_{rs} + \xi_{sr} = 2Ma_{rs} ,$$

$$\sum_1^3{}_{pq} a^{(pq)}\xi_{rpq} = 0$$

e provengono, come già sappiamo, dalle (5), (6) col farvi $N = 0$, $g_r = 0$.

Per quanto s'è visto nel § antecedente, la sostituzione alle ξ_r dei valori (34) conduce a equazioni della stessa forma nelle $\lambda_{3|r}$. Le nuove $\overline{M}$, $\bar{g}_r$ ed $\overline{N}$ saranno ordinatamente, a tenore delle (24):

$$\overline{M} = Me^{\nu} ,$$

$$\bar{g}_r = \nu_r ,$$

$$\overline{N} = \sum_1^3{}_{pq} a^{(pq)}(\nu_{pq} - \nu_p\nu_q) = \sum_1^3{}_{pq} a^{(pq)}(\bar{g}_{pq} - \bar{g}_p\bar{g}_q) .$$

Se si bada che M e ν sono a priori indeterminate, si può tosto concludere che le $\lambda_{3|r}$ debbono verificare le equazioni (25), (26) delle congruenze equipotenziali, *con questo in più che le* g_r *hanno ad essere le derivate di una medesima funzione ed* $N = \sum_1^3{}_{pq} {}^{(pq)}(g_{pq} - g_p g_q)$.

Le equazioni intrinseche delle traiettorie, corrispondenti ai sottogruppi ∞^1 di G_7, risultano così delle (E) e di quelle, che esprimono le ulteriori condizioni, testè accennate. Per ricavarle effettivamente, notiamo in primo luogo che, dall'essere le g_r derivate di una medesima funzione rapporto alle variabili x_r, segue che le $\omega_i = \sum_1^3{}_r g_r\lambda_i^{(r)}$ sono le derivate della stessa funzione rapporto agli archi s_i.

Ciò si esprime, come si è visto, mediante le formule (12'). Per applicarle al caso nostro, basterà sostituire, al posto delle $\partial f/\partial s_i$, ω_1, ω_2, ω_3 e aver riguardo alle (33).

Essendo, per le (25'''), $\omega_1 = q_3 = \varrho$, $\omega_2 = p_3 = 0$, $\omega_3 = - M = - q_1$, viene:

$$\frac{\partial q_1}{\partial s_2} = \varrho(\tau - q_2) ,$$

$$\frac{\partial q_1}{\partial s_1} + \frac{\partial \varrho}{\partial s_3} = 0 ,$$

$$\frac{\partial \varrho}{\partial s_2} = \varrho r_1 + 2q_1q_2 .$$

In causa della (27) e della seconda e terza delle (28), queste equazioni si possono scrivere:

$$
\left\{
\begin{aligned}
&\frac{\partial q_1}{\partial s_1} = \varrho q_1 \,, \\
&\frac{\partial q_1}{\partial s_2} = 0 \,;
\end{aligned}
\right. \tag{35}
$$

$$
q_1 q_2 + \varrho r_1 = 0 \,. \tag{36}
$$

Rimane da tradurre in formule intrinseche l'altra condizione

$$
N = \sum_{pq}^{3}{}_{1}\, a^{(pq)}(g_{pq} - g_p g_q).
$$

Sostituiamovi per le g i loro valori in termini delle ω. Da $g_p = \sum_{1}^{3}{}_i\, \omega_i \lambda_{i|p}$ segue:

$$
\sum_{1}^{3}{}_{pq}\, a^{(pq)} g_p g_q = \sum_{1}^{3}{}_i\, \omega_i^2 \,,
$$

$$
g_{pq} = \sum_{1}^{3}{}_i\, \omega_{i|q}\, \lambda_{i|p} + \sum_{1}^{3}{}_i\, \omega_i \lambda_{i|pq} \,,
$$

e, per le (8′):

$$
g_{pq} = \sum_{1}^{3}{}_i\, \omega_{i|q} \lambda_{i|p} + \sum_{s}^{3}{}_{ihk}\, \omega_i \gamma_{ihk} \lambda_{h|p} \lambda_{k|q} \,,
$$

che, moltiplicate per $a^{(pq)}$ e sommate, dànno:

$$
\sum_{1}^{3}{}_{pq}\, a^{(pq)} g_{pq} = \sum_{1}^{3}{}_i\, \frac{\partial \omega_i}{\partial s_i} + \sum_{1}^{3}{}_{ih}\, \omega_i \gamma_{ihh} \,,
$$

quindi:

$$
N = \sum_{1}^{3}{}_i\, \frac{\partial \omega_i}{\partial s_i} + \sum_{1}^{3}{}_{ih}\, \omega_i \gamma_{ihh} - \sum_{1}^{3}{}_i\, \omega_i^2 \,.
$$

Posti per le ω e γ i loro valori, risulta subito:

$$
N = \frac{\partial \varrho}{\partial s_1} - \frac{\partial q_1}{\partial s_3} + \varrho(r_2 - \varrho) - 3q_1^2 - \varrho^2 \,,
$$

od anche, per la prima delle (28) e la prima delle (29):

$$
N = -(2q_1^2 + q_2^2 + \varrho^2) + \varrho r_2 \,.
$$

Ma, in causa delle $(26''')$, N vale $-(2q_1^2 + 2q_2^2 + \varrho^2)$, talchè dev'essere:

$$q_2^2 + \varrho r_2 = 0\,. \tag{37}$$

Riassumendo, affinchè una congruenza [3] risulti delle traiettorie di un gruppo ∞^1 di similitudini, è necessario e basta che, oltre alle equazioni (E), sieno soddisfatte le:

$$(\mathrm{E}_1)\qquad \left|\begin{array}{ll} (35) & \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial q_1}{\partial s_1} = \varrho q_1\,, \\[2ex] \dfrac{\partial q_1}{\partial s_2} = 0\,; \end{array}\right. \\[4ex] (36) & q_1 q_2 + \varrho r_1 = 0\,; \\[1ex] (37) & q_2^2 + \varrho r_2 = 0\,. \end{array}\right.$$

8. - Condizioni di integrabilità del sistema (E). Conseguente limitazione dei potenziali binari.

Per stabilire le condizioni di integrabilità del sistema (E), gioverà distinguere i due casi $\varrho = 0$ e ϱ non identicamente nullo.

Cominciamo dal primo. Si tratta di una congruenza rettilinea, quindi (§ 4) potremo assumere $r_3 = -\tau = -q_2$. Le (27) e (28) sono soddisfatte identicamente, le (29), (30), (31) e (32), (33), postovi $\varrho = 0$, $\tau = q_2$, coincidono colle (15), (16), (17), (14′) del § 5 e costituiscono, come s'è visto, un sistema completo.

Per q_2 diverso da zero, questo sistema definisce le congruenze rettilinee isotrópe non normali, di cui già con calcolo diretto abbiamo constatata la equipotenzialità.

La ipotesi $q_2 = 0$ corrisponde poi a congruenze rettilinee (isotrópe e normali), traiettorie di un gruppo ∞^1 di similitudini, cioè stelle di raggi (eventualmente col centro a distanza infinita).

Infatti le (30) si riducono allora a:

$$\frac{\partial q_1}{\partial s_1} = 0\,, \qquad \frac{\partial q_1}{\partial s_2} = 0\,,$$

e un semplice sguardo alle equazioni (E_1) (dove è a ritenersi $\varrho = 0$, $q_2 = 0$) mostra che esse riescono identicamente soddisfatte.

Veniamo al caso generale, in cui sia ϱ non identicamente nullo.

La (27) dà $\tau = q_2$ e le (28) si possono scrivere:

$$\frac{\partial \log \varrho}{\partial s_1} = \varrho + r_2\,,$$

$$\frac{\partial \log \varrho}{\partial s_2} = - r_1\,,$$

$$\frac{\partial \log \varrho}{\partial s_3} = - q_1\,.$$

Le (12′), per essere $q_2 + r_3 = q_2 - \tau = 0$, divengono nel caso presente:

$$(12'')\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial s_3}\dfrac{\partial}{\partial s_2} f - \dfrac{\partial}{\partial s_2}\dfrac{\partial}{\partial s_3} f = \quad - q_1 \dfrac{\partial f}{\partial s_2}\,, \\[2ex] \dfrac{\partial}{\partial s_1}\dfrac{\partial}{\partial s_3} f - \dfrac{\partial}{\partial s_3}\dfrac{\partial}{\partial s_1} f = q_1 \dfrac{\partial f}{\partial s_1} \quad + \varrho \dfrac{\partial f}{\partial s_3}\,, \\[2ex] \dfrac{\partial}{\partial s_2}\dfrac{\partial}{\partial s_1} f - \dfrac{\partial}{\partial s_2}\dfrac{\partial}{\partial s_2} f = r_1 \dfrac{\partial f}{\partial s_1} + r_2 \dfrac{\partial f}{\partial s_2} - 2\tau \dfrac{\partial f}{\partial s_3}\,, \end{cases}$$

e applicate alla funzione $\log \varrho$, porgono:

$$-\frac{\partial r_1}{\partial s_3} + \frac{\partial q_1}{\partial s_2} = q_1 r_1\,,$$

$$-\frac{\partial q_1}{\partial s_1} - \frac{\partial(\varrho + r_2)}{\partial s_3} = q_1(\varrho + r_2) - \varrho q_1 = q_1 r_2\,,$$

$$\frac{\partial(\varrho + r_2)}{\partial s_2} + \frac{\partial r_1}{\partial s_1} = r_1(\varrho + r_2) - r_2 r_1 + 2\tau q_1 = \varrho r_1 + 2\tau q_1\,,$$

ossia, sostituendo alle derivate di ϱ i loro valori (28):

$$(38)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial r_1}{\partial s_3} - \dfrac{\partial q_1}{\partial s_2} = - q_1 r_1\,, \\[2ex] \dfrac{\partial r_2}{\partial s_3} + \dfrac{\partial q_1}{\partial s_1} = q_1(\varrho - r_2)\,; \end{cases}$$

$$(39)\qquad \frac{\partial r_1}{\partial s_1} + \frac{\partial r_2}{\partial s_2} = 2(q_1 \tau + \varrho r_1)\,.$$

Le (30), (31), posto τ per q_2, si scrivono:

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial q_1}{\partial s_1}+\frac{\partial \tau}{\partial s_2}=0\,,\\ &\frac{\partial q_1}{\partial s_2}-\frac{\partial \tau}{\partial s_1}=-2\varrho\tau\,; \end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial r_2}{\partial s_3}+\frac{\partial \tau}{\partial s_2}=-q_1(\varrho+r_2)\,,\\ &\frac{\partial r_1}{\partial s_3}+\frac{\partial \tau}{\partial s_1}=2\varrho\tau-q_1r_1\,; \end{aligned}\right.$$

e, unitamente alle (38), si possono risolvere rapporto alle sei derivate

$$\frac{\partial q_1}{\partial s_1}\,,\ \frac{\partial q_1}{\partial s_2}\,,\ \frac{\partial \tau}{\partial s_1}\,,\ \frac{\partial \tau}{\partial s_2}\,,\ \frac{\partial r_1}{\partial s_3}\,,\ \frac{\partial r_2}{\partial s_3}\,.$$

Si ottengono così sei equazioni complessivamente equivalenti alle (38), (30), (31), cioè:

$$(40)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial q_1}{\partial s_1}=\varrho q_1\,,\\ &\frac{\partial q_1}{\partial s_2}=0\,; \end{aligned}\right.$$

$$(41)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial \tau}{\partial s_1}=2\varrho\tau\,,\\ &\frac{\partial \tau}{\partial s_2}=-\varrho q_1\,; \end{aligned}\right.$$

$$(42)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial r_1}{\partial s_3}=-q_1r_1\,,\\ &\frac{\partial r_2}{\partial s_3}=-q_1r_2\,. \end{aligned}\right.$$

Non sarà male riportare anche le formule (29) e (32), che scriveremo:

$$(43)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial q_1}{\partial s_3}=-q_1^2+(\tau^2+\varrho r_2)\,,\\ &\frac{\partial \tau}{\partial s_3}=-q_1\tau-(q_1\tau+\varrho r_1)\,; \end{aligned}\right.$$

$$(44)\qquad \frac{\partial r_1}{\partial s_2}-\frac{\partial r_2}{\partial s_1}=r_1^2+r_2^2+q_1^2+3\tau^2\,.$$

Formiamo le condizioni di integrabilità per le (40) e (41). Basterà porre successivamente q_1 e τ, al posto di f, nell'ultima delle (12'').

Eseguite, a mezzo delle (40), (41) e (43) opportune riduzioni, risulta:

$$q_1(q_1\tau + \varrho r_1) - \tau(\tau^2 + \varrho r_2) = 0\,,$$
$$3\tau(q_1\tau + \varrho r_1) - q_1(\tau^2 + \varrho r_2) = 0\,.$$

Di qua si ricava che debbono annullarsi separatamente $q_1\tau + \varrho r_1$, $\tau^2 + \varrho r_2$.

La cosa è ovvia se il determinante $3\tau^2 - q_1^2$ è diverso da zero. Se poi esso si annullasse, derivando la identità $3\tau^2 - q_1^2 = 0$, rapporto ad s_2, per le seconde delle (40) e (41), verrebbe $-6\varrho\tau q_1 = 0$ e quindi, per essere ϱ diverso da zero, insieme $\tau q_1 = 0$ e $3\tau^2 - q_1^2 = 0$, donde $q_1 = 0$, $\tau = 0$. Per le (43), anche r_1, r_2 si annullerebbero, e per conseguenza: $q_1\tau + \varrho r_1$, $\tau^2 + \varrho r_2$, giusta l'asserto.

Sussistono dunque in ogni caso le relazioni:

$$q_1\tau + \varrho r_1 = 0\,,$$
$$\tau^2 + \varrho r_2 = 0\,,$$

che sono poi le (36) e (37) delle (E_1). Quanto alle (35), esse si hanno già nelle (40).

È facile riconoscere che il sistema riesce ormai completo. Infatti le (28), (40), (41) e (43), tenuto conto delle due ultime relazioni, assumono la forma definitiva:

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial\varrho}{\partial s_1} &= \varrho^2 - \tau^2\,, \\ \frac{\partial\varrho}{\partial s_2} &= q_1\tau\,, \\ \frac{\partial\varrho}{\partial s_3} &= -\varrho q_1\,; \end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial q_1}{\partial s_1} &= \varrho q_1\,, \\ \frac{\partial q_1}{\partial s_2} &= 0\,, \\ \frac{\partial q_1}{\partial s_3} &= -q_1^2\,; \end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial\tau}{\partial s_1} &= 2\varrho\tau\,, \\ \frac{\partial\tau}{\partial s_2} &= -\varrho q_1\,, \\ \frac{\partial\tau}{\partial s_3} &= -q_1\tau\,; \end{aligned}\right.$$

e le condizioni di integrabilità, come si verifica immediatamente, sono tutte soddisfatte, in virtù delle stesse equazioni del sistema. Ad esso vanno poi associate le seguenti equazioni in termini finiti:

$$\left\{\begin{aligned} &p_1 = q_2 = \tau\,, \quad p_2 = -q_1\,, \quad p_3 = 0\,, \quad q_3 = \varrho\,, \quad r_3 = -\tau\,, \\ &\qquad\qquad r_1 = -\frac{q_1\tau}{\varrho}\,, \qquad r_2 = -\frac{\tau^2}{\varrho}\,. \end{aligned}\right.$$

Delle (39), (42) e (44) non occorre più tener conto, poichè, con questi valori, esse si riducono ad altrettante identità.

Da tutto ciò si raccoglie che il sistema completo, determinato dalle equazioni (E), o coincide colle (C) del § 5, o comprende il gruppo delle (E_1) e quindi che ogni congruenza equipotenziale o è rettilinea isotrópa, o consta delle traiettorie di un gruppo ∞^1 di similitudini.

Ripassando ai corrispondenti potenziali, risulta che non vi hanno altri tipi di potenziali binari reali, oltre quelli considerati a §§ 2, 5.

9. - Classificazione delle equazioni, che definiscono i potenziali binari.

Una osservazione immediata si è che i potenziali conici rientrano nel tipo logaritmico, o, se vogliam dire, isotrópo. Per constatarlo, basta moltiplicare

$$\Theta_4 u = \frac{1}{\operatorname{sen} \varrho_1}\left\{\frac{\partial}{\partial \varrho_1}\left(\operatorname{sen} \varrho_1 \frac{\partial u}{\partial \varrho_1}\right)\right\} + \frac{1}{\operatorname{sen}^2 \varrho_1}\frac{\partial^2 u}{\partial \varrho_2^2} = 0$$

per $\operatorname{sen}^2 \varrho_1$ e sostituire $\displaystyle\int \frac{d\varrho_1}{\operatorname{sen} \varrho_1}$ a ϱ_1.

Ancora si dimostra subito che, in

$$\Theta_3^{(m)} u = \frac{1}{\varrho_1}\frac{\partial}{\partial \varrho_1}\left(\varrho_1 \frac{\partial u}{\partial \varrho_1}\right) + \left(1 + \frac{m^2}{\varrho_1^2}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial \varrho_2^2} = 0\,,$$

il parametro m è inessenziale.

Infatti, essendo per la definizione stessa di potenziale elicoidale, $m > 0$, potremo sostituire, alle variabili ϱ_1 e ϱ_2, ϱ_1/m, ϱ_2/m, con che la precedente equazione diviene:

$$\frac{1}{\varrho_1}\frac{\partial}{\partial \varrho_1}\left(\varrho_1 \frac{\partial u}{\partial \varrho_1}\right) + \left(1 + \frac{1}{\varrho_2^2}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial \varrho_2^2} = 0$$

e corrisponde alle $\Theta_3^{(m)} u = 0$, fattovi $m = 1$; la si designerà semplicemente con $\Theta_3 u = 0$.

Avremo così da confrontare le equazioni:

$$\Theta_1 u = 0\,, \qquad \Theta_2 u = 0\,, \qquad \Theta_3 u = 0\,, \qquad \Theta_5^{(m)} u = 0\,,$$

per il che giova ricorrere al procedimento, esposto dal sig. COTTON nella Nota citata.

Eccolo in due parole.

Data una equazione del secondo ordine, scriviamola, come è sempre lecito:

$$\Delta_{2\varphi} u + 2 \sum_1^2{}_r b^{(r)} \frac{\partial u}{\partial \varrho_r} + cu = 0, \tag{45}$$

il parametro riferendosi ad una certa forma

$$\varphi = \sum_1^2{}_{rs} a_{rs} d\varrho_r d\varrho_s .$$

Si ponga (le notazioni essendo manifeste):

$$H = \frac{\dfrac{\partial b_1}{\partial \varrho_2} - \dfrac{\partial b_2}{\partial \varrho_1}}{\sqrt{a}},$$

$$K = \frac{1}{\sqrt{a}} \sum_1^2{}_r \frac{\partial(\sqrt{a}\, b^{(r)})}{\partial \varrho_r} + \sum_1^2{}_{rs} a_{rs} b^{(r)} b^{(s)} - c .$$

L'annullarsi simultaneo di H e K caratterizza le equazioni riducibili alla forma di Laplace ($\Theta_1 u = 0$).

Per K diverso da zero, gli invarianti della proposta equazione sono tutti e soltanto quelli del sistema, costituito dalla forma differenziale:

$$\overline{\varphi} = K \sum_1^2{}_{rs} a_{rs}\, dx_r\, dx_s$$

e dalla funzione:

$$\frac{H}{K}.$$

Ne viene in particolare che le equazioni, per cui H si annulla (equazioni ad invarianti eguali), si classificano come le forme binarie. Manifestamente poi, essendo H/K un invariante assoluto, si può a priori escludere la trasformabilità di due equazioni, se H si annulla per una di esse e non per l'altra.

Applichiamo questi criteri alle nostre equazioni e cominciamo perciò col ridurle alla forma (45).

È facile verificare che si ha:

$$\Theta_2 u = \underset{2}{\Delta}_\varphi u + 2\frac{1}{2\varrho_1}\frac{\partial u}{\partial \varrho_1} = 0\,, \quad (\varphi = d\varrho_1^2 + d\varrho_2^2)\;;$$

$$\Theta_3 u = \underset{2}{\Delta}_\varphi u + 2\frac{\varrho_1}{2(1+\varrho_1^2)}\frac{\partial u}{\partial \varrho_1} = 0\,, \quad \left(\varphi = d\varrho_1^2 + \frac{\varrho_1^2}{1+\varrho_1^2}d\varrho_2^2\right);$$

$$\Theta_5^{(m)} u = \underset{2}{\Delta}_\varphi u + 2\left\{\frac{1}{2\varrho_1}\frac{\partial u}{\partial \varrho_1} + \frac{\operatorname{sen}\varrho_2\cos\varrho_2}{2\varrho_1^2(m^2+\operatorname{sen}^2\varrho_2)}\frac{\partial u}{\partial \varrho_2}\right\} = 0\,,$$

$$\left(\varphi = \frac{\operatorname{sen}^2\varrho_2}{m^2+\operatorname{sen}^2\varrho^2}d\varrho_1^2 + \varrho_1^2 d\varrho_2^2\right).$$

Per le prime due equazioni, H è nullo e K vale rispettivamente

$$-\frac{1}{4\varrho_1^2}, \qquad \frac{\sqrt{1+\varrho_1^2}}{\varrho_1}\frac{\partial}{\partial\varrho_1}\left\{\frac{\varrho_1^2}{2(1+\varrho_1^2)^{3/2}}\right\} + \frac{\varrho_1^2}{4(1+\varrho_1^2)^2} = \frac{1-\frac{1}{4}\varrho_1^2}{(1+\varrho_1^2)^2}.$$

Dacchè K è diverso da zero, siamo intanto fatti certi che le due equazioni non si possono ricondurre alla forma $\Theta_1 u = 0$.

Per evitare ambiguità, accentiamo le lettere, relative a $\Theta_3 u$. Le forme da confrontare sono:

$$\overline{\varphi} = -\frac{1}{4\varrho_1^2}(d\varrho_1^2 + d\varrho_2^2)\,,$$

$$\overline{\varphi}' = \frac{1-\frac{1}{4}\varrho_1'^2}{(1+\varrho_1'^2)^2}\left(d\varrho_1'^2 + \frac{\varrho_1'^2}{1+\varrho_1'^2}d\varrho_2'^2\right),$$

di curvature rispettive (20):

$$G = 2\varrho_1^2\frac{\partial^2}{\partial\varrho_1^2}\log\left(\frac{1}{4\varrho_1^2}\right) = 4\,,$$

$$G' = -\frac{(1+\varrho_1'^2)^{5/2}}{\varrho_1'(1-\frac{1}{4}\varrho_1'^2)}\frac{\partial}{\partial\varrho_1'}\left\{\frac{1+\varrho_1'^2}{\sqrt{1-\frac{1}{4}\varrho_1'^2}}\frac{\partial}{\partial\varrho_1'}\left(\frac{\varrho_1'\sqrt{1-\frac{1}{4}\varrho_1'^2}}{(1+\varrho_1'^2)^{3/2}}\right)\right\}$$

$$= \frac{\frac{15}{2} - \frac{19}{4}\varrho_1'^2 + \frac{7}{4}\varrho_1'^4 - \frac{1}{16}\varrho_1'^6}{(1-\frac{1}{4}\varrho_1'^2)^3}\,,$$

la prima costante e la seconda no.

---

(20) Cfr. per es. BIANCHI, *Lezioni di Geometria differenziale*, Pisa, Spoerri, 1894; pag. 67 [2a ed., ibidem, vol. I (1902), pag. 93].

Se ne inferisce che le corrispondenti equazioni non sono trasformabili l'una nell'altra.

Veniamo alle equazioni $\Theta_5^{(m)}u = 0$, $(m > 0)$. Si ha:

$$b^{(1)} = \frac{1}{2\varrho_1}, \qquad b^{(2)} = \frac{\operatorname{sen}\varrho_2 \cos\varrho_2}{2\varrho_1^2(m^2 + \operatorname{sen}^2\varrho_2)},$$

$$b_1 = \frac{\operatorname{sen}^2\varrho_2}{2\varrho_1(m^2 + \operatorname{sen}^2\varrho_2)}, \qquad b_2 = \frac{\operatorname{sen}\varrho_2 \cos\varrho_2}{2(m^2 + \operatorname{sen}^2\varrho_2)},$$

donde:

$$H = \frac{\sqrt{m^2 + \operatorname{sen}^2\varrho_2}}{\varrho_1 \operatorname{sen}\varrho_2}\frac{\partial b_1}{\partial\varrho_2} = \frac{m^2\cos\varrho_2}{\varrho_1^2(m^2 + \operatorname{sen}^2\varrho_2)^{3/2}},$$

$$K = \frac{\sqrt{m^2 + \operatorname{sen}^2\varrho_2}}{2\varrho_1 \operatorname{sen}\varrho_2}\frac{\partial}{\partial\varrho_2}\left(\frac{\operatorname{sen}^2\varrho_2\cos\varrho_2}{\varrho_1(m^2 + \operatorname{sen}^2\varrho_2)^{3/2}}\right) +$$

$$+ \frac{1}{4\varrho_1^2}\left\{\frac{\operatorname{sen}^2\varrho_2}{m^2 + \operatorname{sen}^2\varrho_2} + \frac{\operatorname{sen}^2\varrho_2\cos^2\varrho_2}{(m^2 + \operatorname{sen}^2\varrho_2)^2}\right\} = \frac{4m^2 - (1 + 5m^2)\operatorname{sen}^2\varrho_2}{4\varrho_1^2(m^2 + \operatorname{sen}^2\varrho_2)^2}.$$

H non si annulla più identicamente, quindi questo tipo è distinto dai precedenti.

Resta da vedere se il parametro m è essenziale, cioè se sono trasformabili due equazioni $\Theta_5^{(m)}u = 0$, $\Theta_5^{(m')}u = 0$ $(m, m' > 0)$.

Si dovrebbe avere in tal caso, adoperando, per ciò che si riferisce a $\Theta_5^{(m')}u$, lettere accentate:

$$\frac{H}{K} = \frac{H'}{K'},$$

ossia:

$$\frac{4m^2\cos\varrho_2\sqrt{m^2 + \operatorname{sen}^2\varrho_2}}{4m^2 - (1 + 5m^2)\operatorname{sen}^2\varrho_2} = \frac{4m'^2\cos\varrho_2'\sqrt{m'^2 + \operatorname{sen}^2\varrho_2'}}{4m'^2 - (1 + 5m'^2)\operatorname{sen}^2\varrho_2'}, \tag{46}$$

e inoltre sarebbero equivalenti le due forme:

$$\bar{\varphi} = \frac{4m^2 - (1 + 5m^2)\operatorname{sen}^2\varrho_2}{4\varrho_1^2(m^2 + \operatorname{sen}^2\varrho_2)}\left\{\frac{\operatorname{sen}^2\varrho_2}{m^2 + \operatorname{sen}^2\varrho_2}d\varrho_1^2 + \varrho_1^2 d\varrho_2^2\right\},$$

$$\bar{\varphi}' = \frac{4m'^2 - (1 + 5m'^2)\operatorname{sen}^2\varrho_2'}{4\varrho_1'^2(m^2 + \operatorname{sen}^2\varrho_2')}\left\{\frac{\operatorname{sen}^2\varrho_2'}{m^2 + \operatorname{sen}^2\varrho_2'}d\varrho_1'^2 + \varrho_1'^2 d\varrho_2'^2\right\}.$$

Dico che da queste ipotesi segue necessariamente $m = m'$.

Per riconoscerlo senza troppi calcoli, osserviamo anzitutto che al valore zero di $\cos \varrho_2$ deve corrispondere, in virtù della (46), tale valore di ϱ_2', per cui o $\cos \varrho_2' = 0$, o $m'^2 + \operatorname{sen}^2 \varrho_2' = 0$.

Infatti, quando si annulla $\cos \varrho_2$, deve annullarsi del pari il secondo membro della (46). Ora il denominatore non può diventare infinito per valori reali di ϱ_2', e, per valori complessi, diviene infinito in pari tempo il numeratore, senza che sia zero il limite del loro rapporto, che ha il valore

$$i \frac{4m'^2}{1 + 5m'^2} .$$

Deve dunque annullarsi il numeratore, cioè $\cos \varrho_2'$ ovvero $m'^2 + \operatorname{sen}^2 \varrho_2'$.

Per togliere l'ambiguità, consideriamo la relazione $G = G'$. Si ha:

$$G = - \frac{4(m^2 + \operatorname{sen}^2 \varrho_2)^{3/2})}{\operatorname{sen} \varrho_2 (4m^2 - (1 + 5m^2) \operatorname{sen}^2 \varrho_2)} .$$

$$\frac{\partial}{\partial \varrho_2} \left\{ \frac{\sqrt{m^2 + \operatorname{sen}^2 \varrho_2}}{\sqrt{4m^2 - (1 + 5m^2) \operatorname{sen}^2 \varrho_2}} \frac{\partial}{\partial \varrho_2} \left(\frac{\operatorname{sen} \varrho_2}{m^2 + \operatorname{sen}^2 \varrho_2} \sqrt{4m^2 - (1 + 5m^2) \operatorname{sen}^2 \varrho_2} \right) \right\}$$

e una espressione analoga per G'.

Il valore di G per $\cos \varrho_2 = 0$ si ottiene chiaramente, eseguendo la derivazione interna, con che apparisce un fattore $\cos \varrho_2$, derivando soltanto questo fattore e ponendo poi $\operatorname{sen}^2 \varrho_2 = 1$. Ciò dà:

$$(G)_{\cos \varrho_2 = 0} = -8 + \frac{8}{1 + m^2} - 20m^2,$$

che, per m diverso da $\pm i$, è una quantità finita.

Quanto a G', per $m'^2 + \operatorname{sen}^2 \varrho_2' = 0$, esso diverrebbe finito, come si vede subito. Non si possono dunque corrispondere $\cos \varrho_2 = 0$ e $m'^2 + \operatorname{sen}^2 \varrho_2' = 0$.

Avremo così:

$$(G)_{\cos \varrho_2 = 0} = (G')_{\cos \varrho'_2 = 0} ,$$

ossia:

$$\frac{2}{1 + m^2} - 5m^2 = \frac{2}{1 + m'^2} - 5m'^2 ,$$

che può essere scritta:

$$\left\{ 5 + \frac{2}{(1 + m^2)(1 + m'^2)} \right\} (m^2 - m'^2) = 0 . \tag{47}$$

Siccome m ed m' sono positivi ([21]), se ne trae $m = m'$, giusta l'asserto.

Riassumendo, possiamo concludere:

Le equazioni non ulteriormente riducibili, che definiscono potenziali binari reali, sono:

$$\Theta_1 u = 0\ ; \quad \Theta_2 u = 0\ ; \quad \Theta_3 u = 0\ ; \quad \Theta_5^{(m)} u = 0\,, \qquad (m > 0),$$

dove i diversi valori di m caratterizzano tipi distinti.

([21]) Si prova facilmente che, anche senza questa restrizione, due equazioni $\Theta_5^{(m)} u = 0$ $\Theta_5^{(m')} = 0$ sono sempre irriducibili quando $m^2 \neq m'^2$.

Infatti, per due equazioni, supposte trasformabili, si corrispondono (escluso al più il caso $m = \pm\, i$) i valori $\cos \varrho_2 = 0$, $\cos \varrho_2' = 0$ e quindi, assieme alla (47), si ha:

$$\left(\underset{1}{\Delta} \bar\varphi\, \frac{H}{K}\right)_{\cos \varrho_2 = 0} = \left(\underset{1}{\Delta} \bar\varphi'\, \frac{H'}{K'}\right)_{\cos \varrho'_2 = 0}\,,$$

il che porge:

$$\frac{-\,m^2}{\sqrt{1 + m^2}} = \frac{-\,m'^2}{\sqrt{1 + m'^2}}\,,$$

od anche:

$$\{\, m^2 m'^2 + m^2 + m'^2 \,\}\,(m^2 - m'^2) = 0.$$

Questa equazione e la (47) non ammettono altra soluzione comune all'infuori di $m^2 = m'^2$. Se poi $m = \pm\, i$, deve essere necessariamente anche $m' = \pm\, i$, poichè in caso diverso riuscirebbe finito $(G')_{\cos \varrho'_2 = 0}$, mentre $(G)_{\cos \varrho_2 = 0}$ e $(G)_{m^2 + \mathrm{sen}^2 \varrho_2 = 0}$ diventano entrambi infiniti.

XXV.

SUR LES INTÉGRALES PÉRIODIQUES DES ÉQUATIONS LINÉAIRES AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DU PREMIER ORDRE

« Comptes Rendus de l'Acad. des Sciences de Paris », t. CXXVIII (1899)

pp. 978-981

Soit l'équation

$$\frac{\partial f}{\partial t} = X\frac{\partial f}{\partial x} + Y\frac{\partial f}{\partial y}, \tag{1}$$

où l'on suppose X, Y fonctions périodiques de t avec la période τ, holomorphes par rapport à x et à y autour de l'origine O et nulles à la fois en O pour toute valeur de t. Soient encore u, v deux intégrales de (1), régulières en O et telles que

$$\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x},$$

ne s'annule pas pour $x = y = t = 0$. Appelons u_0, v_0, u_1, v_1 les valeurs de u, v pour $t = 0$ et pour $t = \tau$. La relation

$$u_1 - u_0 = \int_0^\tau \left(X\frac{\partial u}{\partial x} + Y\frac{\partial u}{\partial y}\right) dt,$$

nous apprend que $u_1 - u_0$ s'évanouit pour $x = 0$, $y = 0$; de même $v_1 - v_0$. Par suite, le système de deux équations en x, y

$$u_1 = u_0, \qquad v_1 = v_0, \tag{2}$$

admet la solution $x = 0$, $y = 0$.

Voyons ce qui se passe à l'égard des équations (2) au voisinage du point $x=0$, $y=0$.

Trois cas sont possibles:

a) Les équations (2) sont des identités;

b) Elles se réduisent à une seule, c'est-à-dire on a identiquement

$$(2') \qquad u_1 - u_0 = AG\,, \qquad v_1 - v_0 = BG\,,$$

A, B, G étant régulières et de plus $G=0$, pour $x=0$, $y=0$;

c) Elles sont distinctes (du moins auprès de l'origine), et, par conséquent, la solution $x=0$, $y=0$ est isolée.

On s'assure aisément ques *ces caractères ne dépendent pas du choix des intégrales* u, v.

Proposons-nous maintenant de rechercher s'il y a des intégrales w de (1), régulières dans le domaine du point O et périodiques en t avec la période τ. Tout d'abord il est bien clair que dans l'hypothèse a) toutes les intégrales de (1) sont périodiques; dans l'hypothèse c), au contraire, il n'existe aucune intégrale w. Le cas b) exige une discussion plus détaillée. L'équation (1) admet au plus une intégrale périodique w (c'est-à-dire pas deux indépendantes). Mais cette intégrale périodique existe-t-elle effectivement? Je vais montrer qu'il en est ainsi, du moins lorsque (en supposant G exprimée par u_0, v_0)

$$(3) \qquad \operatorname{Mod}\left(1 + A\frac{\partial G}{\partial u_0} + B\frac{\partial G}{\partial v_0}\right)_{x=y=0} \neq 1\,.$$

Le premier membre de (3) est invariant par rapport aux changements du système des intégrales u, v. Si l'on passe, en effet, de u, v a $\bar{u}(u, v)$, $\bar{v}(u, v)$, on voit de suite que les coefficients $\bar{A}$, $\bar{B}$, de G dans $\bar{u}_1 - \bar{u}_0$, $\bar{v}_1 - \bar{v}_0$ se réduisent, pour $x=0$, $y=0$, à

$$\left(\frac{\partial \bar{u}_0}{\partial u_0}A + \frac{\partial \bar{u}_0}{\partial v_0}B\right)_{x=y=0}, \quad \left(\frac{\partial \bar{v}_0}{\partial u_0}A + \frac{\partial \bar{v}_0}{\partial v_0}B\right)_{x=y=0},$$

d'où

$$\left(\bar{A}\frac{\partial G}{\partial \bar{u}_0} + \bar{B}\frac{\partial G}{\partial \bar{v}_0}\right)_{x=y=0} = \left(A\frac{\partial G}{\partial u_0} + B\frac{\partial G}{\partial v_0}\right)_{x=y=0}.$$

Comme, d'après (3), $\partial G/\partial x$, $\partial G/\partial y$ ne s'annulent pas à la fois en O, je puis, par une transformation convenable de variables, supposer $G=x$.

De plus, je prendrai $u_0 = x$, $v_0 = y$. On tire alors de (2′), en écrivant x_1, y_1 pour u_1, v_1,

$$x_1 = x[1 + A(x, y)], \qquad y_1 = y + xB(x, y). \tag{4}$$

La condition (3) nous assure que $|1 + A|_{x=y=0}$ n'est pas égal à l'unité; il est loisible de le supposer < 1. Autrement il suffirait de changer τ en $-\tau$.

Ceci posé, prenons les itérations de (4) en faisant

$$\left\{\begin{array}{l} x_{n+1} = x_n[1 + A(x_n, y_n)] \\ y_{n+1} = y_n + x_n B(x_n, y_n). \end{array}\right. \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{5}$$

On démontre sans peine (1) que $\lim\limits_{n=\infty} x_n = 0$, tandis que y_n converge vers une fonction w_0, regulière en O, qui se réduit à y, pour $x = 0$. Elle ne change pas d'après sa définition lorsqu'on remplace x, y par x_1, y_1. L'intégrale de (1), qui se réduit à w_0 pour $t = 0$ est donc l'intégrale périodique w, dont il s'agissait de prouver l'existence.

Il y a des cas où la simple inspection de l'équation (1) permet d'affirmer qu'on se trouve dans l'hypothèse *b*) [sous la restriction (3)], et par suite qu'il existe une intégrale w. C'est ce qui arrive, par exemple, si $X = xX_1$, $Y = xY_1$, Y_1, X_1, se réduisant respectivement à zéro et à une constante $\alpha \neq 0$, et telle que $\alpha\tau$ ne soit pas purement imaginaire

(1) Remarquons pour cela que, ayant $|1 + A|_{x=y=0} < 1$, on peut choisir des nombres positifs $M < 1$, N, R, tels qu'on ait à la fois

$$|1 + A(x, y)| < M, \qquad |B(x, y)| < N, \tag{6}$$

pour $|x|$, $|y| < R$. Définissons en outre un rayon ϱ moyennant l'inégalité

$$\varrho\left(1 + \frac{N}{1 - M}\right) < R; \tag{7}$$

pour $|x|$, $|y| < \varrho$, on a

$$|x_1| < \varrho M, \qquad |y_1 - y| < \varrho N.$$

D'une façon générale, en supposant

$$|x_\nu| < \varrho M^\nu, \qquad |y_\nu - y_{\nu-1}| < \varrho N M^{\nu-1}, \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n),$$

on trouve, à cause de (5), (6), (7)

$$|x_{n+1}| < \varrho M^{n+1}, \qquad |y_{n+1} - y_n| < \varrho N M^n;$$

dès lors la démonstration s'achève d'elle-même. On peut dire, à un certain point de vue, que c'est le théorème bien connu de M. Koenigs sur les substitutions uniformes, étendu au cas de deux variables.

pour $x = y = 0$. On a alors, pour toute intégrale u de (1),

$$u_1 - u_0 = x \int_0^\tau \left(X_1 \frac{\partial u}{\partial x} + Y_1 \frac{\partial u}{\partial y} \right) dt \,,$$

et, de plus, en prenant $u_0 = x$, il vient, d'après (4),

$$(A)_{x=y=0} = \left[\frac{\partial}{\partial x} (x_1 - x) \right]_{x=y=0} = \alpha \int_0^\tau \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x=y=0} dt = e^{\alpha\tau} - 1 \quad (^2),$$

ce qui donne

$$|1 + A|_{x=y=0} = |e^{\alpha\tau}| \neq 1 \,.$$

Il y aurait lieu naturellement de généraliser ces considérations en les étendant aux équations linéaires à un nombre quelconque de variables.

Qu'il me soit permis, en terminant, de signaler le profit qu'on pourrait en tirer pour l'étude des intégrales des systèmes différentiels ordinaires et pour les questions qui se rapportent à la stabilité de leurs solutions.

(17 avril 1899)

---

[2] On a en effet

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial x} = X_1 \frac{\partial u}{\partial x} + Y_1 \frac{\partial u}{\partial y} + x \frac{\partial}{\partial x} \left(X_1 \frac{\partial u}{\partial x} + Y_1 \frac{\partial u}{\partial y} \right),$$

d'où, en faisant $x = y = 0$ et en appelant c la valeur de $\partial u / \partial x$ pour $x = y = 0$,

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \alpha c \,.$$

Mais, pour $t = 0$, $c = 1$; par conséquent $c = e^{\alpha t}$ et $\alpha \int_0^\tau c\,dt = e^{\alpha t} - 1$.

XXVI.

INTERPRETAZIONE GRUPPALE DEGLI INTEGRALI DI UN SISTEMA CANONICO (*)

« Rend. Acc. Lincei », s. 3ª, vol. VIII, 2º sem. 1899,

pp. 235-238

Il sig. MAURICE LÉVY ha per il primo osservato (1) che, in una varietà qualunque, è possibile uno spostamento senza deformazione allora e solo allora che dal quadrato dell'elemento lineare si può, con acconcia trasformazione, far sparire una delle variabili. Ciò è quanto dire che esiste un integrale primo, lineare ed omogeneo, per le geodetiche della varietà.

Il prof. CERRUTI ritornò sull'argomento (2), trattando altresì il caso, in cui agiscono forze conservative. La relazione, di cui sopra è parola, fra integrali primi e spostamenti rigidi, si enuncia con linguaggio gruppale nel modo seguente (3). Se la forza viva e il potenziale ammettono una stessa trasformazione puntuale infinitesima, le equazioni del moto posseggono un integrale primo lineare ed omogeneo; e reciprocamente. (Il primo membro dell'integrale, scritto in forma canonica, coincide col simbolo della trasformazione infinitesima).

Sorge spontanea la domanda: Agli integrali non lineari corrisponde ancora qualche carattere gruppale?

La risposta è affermativa e si applica senz'altro a qualsivoglia sistema canonico

$$\text{(S)} \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{dx_i}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \frac{dp_i}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial x_i} \end{aligned} \right. \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) ,$$

(*) Presentata dal Socio V. CERRUTI nella seduta del 5 novembre 1899.

(1) « Comptes Rendus », t. LXXXVI, 18 febbraio e 8 aprile 1878.

(2) In questi « Rendiconti », ser. 5ª, vol. III, 1895.

(3) Cfr. le Note: *Sul moto di un corpo rigido intorno ad un punto fisso*, in questi « Rendiconti », ser. 5ª, vol. V, 1896 [in questo vol.: XI, pp. 253-267] e la elegante dimostrazione del sig. LIEBMANN, « Math. Ann. », B. 50, 1897.

purchè non si considerino soltanto trasformazioni puntuali (rapporto alle variabili x, operanti per estensione sulle p), ma più generalmente trasformazioni di contatto nelle x, p. Si trova infatti che *integrali di un sistema canonico e trasformazioni di contatto nelle x, p, mutanti il sistema in sè, sono in sostanza la stessa cosa. Ad ogni integrale fa riscontro una trasformazione e inversamente. Le funzioni caratteristiche delle trasformazioni* (fissando opportunamente un addendo, che rimane a priori indeterminato) *si possono far coincidere coi primi membri dei corrispondenti integrali.*

Il teorema si dimostra in modo assai semplice. Sia

$$\delta f = \xi_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \dots + \xi_n \frac{\partial f}{\partial x_n} + \pi_1 \frac{\partial f}{\partial p_1} + \dots + \pi_n \frac{\partial f}{\partial p_n}$$

una trasformazione infinitesima nelle x, p. Gli incrementi ξ, π si suppongano funzioni delle x, delle p e di un parametro t, invariabile di fronte alla trasformazione. Risguardando le x, p come funzioni di t, potremo estendere la δf alle singole derivate dx_i/dt, dp_i/dt, e i relativi incrementi si avranno dalle formule

$$\delta \frac{dx_i}{dt} = \frac{d\delta x_i}{dt} = \frac{d\xi_i}{dt},$$

$$\delta \frac{dp_i}{dt} = \frac{d\delta p_i}{dt} = \frac{d\pi_i}{dt}.$$

Applicata al sistema (S), la trasformazione δf porge

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\delta \left\{ \frac{dx_i}{dx} - \frac{\partial H}{\partial p_i} \right\} = 0 \\ &\delta \left\{ \frac{dp_i}{dt} + \frac{\partial H}{\partial x_i} \right\} = 0 \end{aligned} \right. \qquad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Queste equazioni dovranno essere identicamente soddisfatte, in virtù delle (S), ogniqualvolta il sistema ammette la trasformazione infinitesima δf.

Introduciamo l'ipotesi che δf è trasformazione di contatto. Le ξ e le π sono derivate di una medesima funzione $W(x, p, t)$ (4), a norma delle

(4) LIE-ENGEL, *Theorie der Transformationsgruppen*, vol. II, cap. 14.

formule

$$\xi_i = \frac{\partial W}{\partial p_i}\,, \qquad \pi_i = -\frac{\partial W}{\partial x_i}\,, \tag{2}$$

e il simbolo δf diventa la parentesi di POISSON (W, f).

Le (1) si possono scrivere

$$\frac{d\,\dfrac{\partial W}{\partial p_i}}{dt} - \left(W, \frac{\partial H}{\partial p_i}\right) = 0,$$

$$\frac{d\,\dfrac{\partial W}{\partial x_i}}{dt} - \left(W, \frac{\partial H}{\partial x_i}\right) = 0,$$

ossia, eseguendo la derivazione e tenendo conto delle (S):

$$\frac{\partial^2 W}{\partial p_i\,\partial t} + \left(H, \frac{\partial W}{\partial p_i}\right) - \left(W, \frac{\partial H}{\partial p_i}\right) = 0\,,$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x_i\,\partial t} + \left(H, \frac{\partial W}{\partial x_i}\right) - \left(W, \frac{\partial H}{\partial x_i}\right) = 0\,,$$

che, per note proprietà delle parentesi, equivalgono a

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial p_i}\left[\frac{\partial W}{\partial t} + (H, W)\right] = 0\,, \\ &\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\frac{\partial W}{\partial t} + (H, W)\right] = 0\,. \end{aligned}\right. \tag{1'}$$

Da queste apparisce che $\partial W/\partial t + (H, W)$ dipende dalla sola t. Ora W, funzione caratteristica della δf, è determinata dalle (2) a meno di una funzione additiva di t. Si può sempre disporne in modo che risulti identicamente

$$\frac{\partial W}{\partial t} + (H, W) = 0\,. \tag{1''}$$

È poi chiaro che dalla (1''), facendo cammino inverso, si ripassa alle (1).

La (1'') è dunque condizione necessaria e sufficiente perchè il sistema canonico (S) ammetta la trasformazione infinitesima di contatto (W, f).

D'altra parte la equazione stessa esprime precisamente che $W =$ cost. è integrale del sistema (S); di qua la proposizione enunciata.

Si noti che, allorquando W è lineare e omogenea nelle p (e in questo caso soltanto), δf proviene dall'estensione di una trasformazione puntuale rapporto alle x. Segue da ciò che la esistenza di un integrale lineare, omogeneo, e quella di una trasformazione puntuale, mutante il sistema canonico in sè, sono due fatti concomitanti. Supponendo in particolare $H = T - U$, con T omogenea di secondo grado nelle p e U funzione delle sole x, si ritrova il teorema di LÉVY-CERRUTI. Risulta infatti dalla (1''), scindendo i termini di diverso grado nelle p, che separatamente T ed U ammettono la trasformazione W.

XXVII.

COMPLEMENTI AL TEOREMA DI MALUS-DUPIN

NOTA I (*).

« Rend. Acc. Lincei », serie 5ª, vol. IX, 1° sem. 1900,
pp. 185-189

È ben noto che, se ad una congruenza normale di raggi si fa subire un numero qualunque di rifrazioni (o in particolare di riflessioni), si ottiene ancora una congruenza normale. La normalità è dunque un carattere delle congruenze rettilinee invariante di fronte a quante si vogliono rifrazioni. Vedremo che è anche l'unica proprietà invariantiva. Mi propongo infatti di mostrare che due congruenze di rette (normali entrambe o non-normali) sono sempre deducibili l'una dall'altra con un numero finito di rifrazioni. Più precisamente per le congruenze normali basta una rifrazione, per le altre ne occorrono in generale due.

Gli indici di rifrazione si possono assumere ad arbitrio, in particolare eguali a -1, il che corrisponde a riflessioni. Le superficie rifrangenti debbono soddisfare a certe condizioni differenziali. La esistenza di tali superficie e il grado di generalità si desumono dai teoremi fondamentali della teoria delle equazioni.

Così, per es., la superficie di passaggio fra due congruenze normali rimane determinata, quando si fissa un punto di essa o, ciò che è lo stesso, la continuazione di un raggio incidente.

Per le congruenze non-normali, si può disporre delle due superficie rifrangenti in modo che ∞^1 raggi della prima congruenza si trasformino in ∞^1 raggi, scelti a piacere, della seconda, si corrispondano cioè due rigate e i singoli raggi sopra di esse.

1. – Designino x_1, x_2, x_3 coordinate cartesiane, X_1, X_2, X_3 funzioni di queste variabili legate dalla identità

$$\sum_{1}^{3}{}_j X_j^2 = 1. \tag{1}$$

(*) Presentata dal Socio V. CERRUTI nella seduta del 18 marzo 1900.

La congruenza

$$\frac{dx_i}{ds} = X_i\,, \qquad (i = 1, 2, 3) \tag{2}$$

sarà rettilinea, purchè i coseni direttori X_i conservino valore costante sopra le singole curve (2), sia cioè

$$\frac{dX_i}{ds} = \sum_1^3{}_j \frac{\partial X_i}{\partial x_j} X_j = 0\,. \qquad (i = 1, 2, 3).$$

D'altra parte la (1) porge in ogni caso

$$\sum_1^3{}_j \frac{\partial X_j}{\partial x_i} X_j = 0\,, \qquad (i = 1, 2, 3),$$

onde sottraendo

$$\sum_1^3{}_j \left(\frac{\partial X_i}{\partial x_j} - \frac{\partial X_j}{\partial x_i}\right) X_j = 0\,, \qquad (i = 1, 2, 3)$$

le quali esprimono che le differenze

$$\frac{\partial X_2}{\partial x_3} - \frac{\partial X_3}{\partial x_2}\,, \quad \frac{\partial X_3}{\partial x_1} - \frac{\partial X_1}{\partial x_3}\,, \quad \frac{\partial X_1}{\partial x_2} - \frac{\partial X_2}{\partial x_1}$$

sono ordinatamente proporzionali a X_1, X_2, X_3. Rappresentando con A (*anormalità* della congruenza rettilinea considerata) il fattore di proporzionalità potremo scrivere

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial X_2}{\partial x_3} - \frac{\partial X_3}{\partial x_2} &= AX_1 \\ \frac{\partial X_3}{\partial x_1} - \frac{\partial X_1}{\partial x_3} &= AX_2\,, \\ \frac{\partial X_1}{\partial x_2} - \frac{\partial X_2}{\partial x_1} &= AX_3\,, \end{aligned}\right. \tag{3}$$

e ne trarremo per A la espressione

$$A = X_1\left(\frac{\partial X_2}{\partial x_3} - \frac{\partial X_3}{\partial x_2}\right) + X_2\left(\frac{\partial X_3}{\partial x_1} - \frac{\partial X_1}{\partial x_3}\right) + X_3\left(\frac{\partial X_1}{\partial x_2} - \frac{\partial X_2}{\partial x_1}\right). \tag{4}$$

Deriviamo le (3) rapporto a x_1, x_2, x_3 rispettivamente e sommiamo; verrà

$$\frac{\partial(AX_1)}{\partial x_1}+\frac{\partial(AX_2)}{\partial x_2}+\frac{\partial(AX_3)}{\partial x_3}=0\,,$$

che si può scrivere

$$\frac{dA}{ds}=-A\left(\frac{\partial X_1}{\partial x_1}+\frac{\partial X_2}{\partial x_2}+\frac{\partial X_3}{\partial x_3}\right)\quad (^1)\,.$$

Questa equazione rende ragione del fatto geometricamente evidente che una congruenza rettilinea non può essere normale ad una superficie senza esserlo a tutta la famiglia delle superficie parallele. Da essa infatti risulta che, se A si annulla in un punto, rimane eguale a zero lungo tutto il raggio passante per quel punto.

Ora, quando una superficie incontra normalmente i raggi di una congruenza, dev'essere sopra di essa $A=0$, e quindi, per l'osservazione fatta, A identicamente nullo.

Le (3) ci dicono allora che X_1, X_2, X_3 sono le derivate di una stessa funzione.

Si può aggiungere che, quando questo ha luogo, la congruenza (2) è necessariamente rettilinea. Di qua una nota proposizione di HAMILTON (²):

Condizione necessaria e sufficiente affinchè una congruenza (2) sia rettilinea e normale è che l'espressione $X_1dx_1+X_2dx_2+X_3dx_3$ costituisca un differenziale esatto.

2. - Consideriamo la superficie σ di separazione di due mezzi ottici. Se $-X_1$, $-X_2$, $-X_3$ rappresentano i coseni direttori (nel verso di propagazione della luce) di un raggio incidente in σ, Y_1, Y_2, Y_3 quelli del corrispondente raggio rifratto (sempre nel verso di propagazione), n l'indice relativo dei due mezzi considerati, la normale alla superficie σ ha i suoi coseni proporzionali a X_1+nY_1, X_2+nY_2, X_3+nY_3. Questo equivale a dire che, per ogni spostamento dx_1, dx_2, dx_3 appartenente a σ, dev'essere

$$\sum_1^3{}_i\, X_i\,dx_i+n\sum_1^3{}_i\, Y_i\,dx_i=0\,. \tag{5}$$

(¹) Le formole di RICCI conducono più generalmente ad una relazione di questo tipo per le congruenze geodetiche di uno spazio qualunque. Veggasi la recente Nota del signor A. DALL'ACQUA, *Ricerche sulle congruenze di curve in una varietà qualunque a tre dimensioni*, « Atti del R. Istituto Veneto », 1900.

(²) DARBOUX, *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, t. II, pag. 275.

Ciò posto, date due congruenze rettilinee $[C]$ e $[C']$ di coseni direttori X_i e Y_i rispettivamente, si potrà risguardare $[C']$ proveniente da $[C]$ per rifrazione d'indice n, purchè esista una superficie σ, su cui vale la (5).

Se le due congruenze $[C]$ e $[C']$ sono entrambe normali, $\sum_1^3{}_i X_i dx_i$, $\sum_1^3{}_i Y_i dx_i$ sono differenziali di due certe funzioni U ed U' e tutte le superficie della famiglia

$$U + nU' = \text{cost}.$$

soddisfanno alla voluta condizione.

Ne viene che la superficie di separazione dei due mezzi si può immaginare condotta per un punto arbitrario dello spazio.

Affinchè vi sia corrispondenza biunivoca fra i raggi di $[C]$ e quelli di $[C']$, bisogna ancora accertarsi che la superficie in questione non consti di raggi di una delle due congruenze, non si abbia cioè nè

$$-\sum_1^3{}_i X_i \frac{\partial}{\partial x_i}(U + nU') = 0, \quad \text{nè} \quad \sum_1^3{}_i Y_i \frac{\partial}{\partial x_i}(U + nU') = 0.$$

Dovremo perciò escludere quella o quelle superficie $U + nU' = \text{cost.}$, per cui eventualmente si avesse $-1 + n\cos\omega = 0$, $-\cos\omega + n = 0$; (designando ω l'angolo che formano tra loro in un punto generico le direzioni di propagazione sui raggi delle due congruenze).

Va notato dal punto di vista ottico che queste due direzioni devono formare colla normale alla superficie angoli della stessa specie (acuti entrambi od ottusi, secondo la direzione, che si assume come positiva sopra la normale). Questo esige che i due binomi $-1 + n\cos\omega$, $-\cos\omega + n$ abbiano medesimo segno, cioè che ω non superi il *complemento dell'angolo limite.*

Supposto che le due congruenze $[C]$ e $[C']$ abbiano un raggio g a comune (e opposta direzione positiva sopra di esso), l'accennata restrizione è certamente verificata nell'intorno di g, perchè, sopra g, $\cos\omega = 1$ e i due binomi $-1 + n\cos\omega$, $-\cos\omega + n$ riescono eguali.

Nel caso della riflessione, ciò ha luogo qualunque sia ω, e rimane eccettuato, per quanto si disse, solo il valore $\omega = \pi$.

Prescindendo dalla ipotesi che le due congruenze $[C]$ e $[C']$ sieno normali, il primo membro della (5) non è più in generale un differenziale esatto. Esisterà ciò nulla meno una famiglia di superficie σ, purchè le $X_i + nY_i$ sieno proporzionali alle derivate di una medesima funzione.

Questo porta alla condizione

$$
\begin{aligned}
&(X_1 + nY_1)\left\{\frac{\partial(X_2 + nY_2)}{\partial x_3} - \frac{\partial(X_3 + nY_3)}{\partial x_2}\right\} + \\
&(X_2 + nY_2)\left\{\frac{\partial(X_3 + nY_3)}{\partial x_1} - \frac{\partial(X_1 + nY_1)}{\partial x_3}\right\} + \\
&(X_3 + nY_3)\left\{\frac{\partial(X_1 + nY_1)}{\partial x_2} - \frac{\partial(X_2 + nY_2)}{\partial x_1}\right\} = 0\,,
\end{aligned}
$$

che, introducendo le anormalità A, A' delle due congruenze $[C]$, $[C']$ e osservando le (3), si semplifica in

$$
A + n^2A' - m(A + A')\cos\omega = 0\,. \tag{6}
$$

Se questa non è una identità, potrà esistere al più una superficie rifrangente σ, ecc.

Nella (6) abbiamo indiretta conferma del teorema di MALUS-DUPIN. Constatiamo infatti l'impossibilità di passare con rifrazioni da una congruenza normale ad altra non-normale, o viceversa. E per verità, supposta normale la $[C]$, ma non la $[C']$, la esistenza di una superficie σ esigerebbe $n - \cos\omega = 0$, il che esclude possa esservi corrispondenza biunivoca fra i raggi delle due congruenze.

NOTA II (*).

« Rend. Acc. Lincei », serie 5ª, vol. IX, 1° sem. 1900,

pp. 237-245

3. – Essendo $[C]$ e $[C']$ due congruenze non-normali, cerchiamo se si può determinarne una terza $[\Gamma]$ congiunta ad entrambe per rifrazione.

Dicasi σ la superficie di passaggio fra $[C]$ e $[\Gamma]$, $1/n$ l'indice di rifrazione per questo passaggio; σ' la superficie, che lega $[\Gamma]$ a $[C']$, n' il relativo indice di rifrazione; x_1, x_2, x_3 le coordinate di un punto qualunque P di σ.

Il raggio di $[\Gamma]$, che passa per P, taglia σ' in un certo punto P', le cui coordinate designeremo con y_1, y_2, y_3.

Posto

$$\overline{PP'} = r = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2}\,,$$

dovrà aversi sopra σ

$$\sum_1^3{}_i \left(nX_i - \frac{\partial r}{\partial x_i}\right) dx_i = 0\,, \tag{7}$$

e sopra σ'

$$\sum_1^3{}_i \left(n'Y_i - \frac{\partial r}{\partial y_i}\right) dy_i = 0\,, \tag{8}$$

intendendosi le X_i funzioni di x_1, x_2, x_3, le Y_i funzioni di y_1, y_2, y_3.

(*) Presentata dal Socio V. CERRUTI nella seduta del 1° aprile 1900.

Reciprocamente se si possono determinare sei funzioni x_i, y_i di due parametri u, v, per cui sieno verificate le (7), (8) e non si annullino nè l'uno, nè l'altro dei determinanti

$$\Delta = \begin{vmatrix} X_1 & X_2 & X_3 \\ \frac{\partial x_1}{\partial u} & \frac{\partial x_2}{\partial u} & \frac{\partial x_3}{\partial u} \\ \frac{\partial x_1}{\partial v} & \frac{\partial x_2}{\partial v} & \frac{\partial x_3}{\partial v} \end{vmatrix},$$

$$\Delta' = \begin{vmatrix} Y_1 & Y_2 & Y_3 \\ \frac{\partial y_1}{\partial u} & \frac{\partial y_2}{\partial u} & \frac{\partial y_3}{\partial u} \\ \frac{\partial y_1}{\partial v} & \frac{\partial y_2}{\partial v} & \frac{\partial y_3}{\partial v} \end{vmatrix},$$

si ha mezzo di passare con una duplice rifrazione da $[C]$ a $[C']$.

In primo luogo, l'insieme dei punti $x_i(u, v)$ costituisce realmente una superficie (non una curva), perchè non tutti i minori della matrice

$$\left\| \begin{matrix} \frac{\partial x_1}{\partial u} & \frac{\partial x_2}{\partial u} & \frac{\partial x_3}{\partial u} \\ \frac{\partial x_1}{\partial v} & \frac{\partial x_2}{\partial v} & \frac{\partial x_3}{\partial v} \end{matrix} \right\|,$$

possono insieme annullarsi, in causa di $\Delta \gtrless 0$. Per la stessa ragione, la superficie σ taglia effettivamente la congruenza $[C]$. Analogamente per σ' e $[C']$.

Sulle due superficie rimangono in tal modo accoppiati i punti $P(x_1, x_2, x_3)$ e $P'(x_1, x_2, x_3)$, cui competono eguali valori dei parametri u, v.

Scelto un generico raggio di $[C]$, sia appunto P la sua intersezione con σ; in virtù della (7), sarà PP' il raggio rifratto; questo si rifrange a sua volta, attraversando σ' e, per la (8), la sua continuazione è data dal raggio di $[C']$, che passa per P'. E ciò prova l'asserto.

Si tratta dunque di stabilire che si può soddisfare al sistema simultaneo (7), (8) con funzioni di due parametri u, v, per cui non si annullano Δ nè Δ'.

Il sistema (7), (8) equivale alle seguenti quattro equazioni a derivate parziali

$$
(9) \qquad \begin{cases} H_1 \equiv \sum_1^3{}_i \left(nX_i - \dfrac{\partial r}{\partial x_i}\right)\dfrac{\partial x_i}{\partial u} = 0\,, \\[2ex] K_1 \equiv \sum_1^3{}_i \left(n'Y_i - \dfrac{\partial r}{\partial y_i}\right)\dfrac{\partial y_i}{\partial u} = 0\,, \end{cases}
$$

$$
(10) \qquad \begin{cases} H_2 \equiv \sum_1^3{}_i \left(nX_i - \dfrac{\partial r}{\partial x_i}\right)\dfrac{\partial x_i}{\partial v} = 0\,, \\[2ex] K_2 \equiv \sum_1^3{}_i \left(n'Y_i - \dfrac{\partial r}{\partial y_i}\right)\dfrac{\partial y_i}{\partial v} = 0\,, \end{cases}
$$

cui bisogna aggiungere le condizioni di integrabilità

$$
H_3 \equiv \frac{\partial H_1}{\partial v} - \frac{\partial H_2}{\partial u} = 0\,,
$$

$$
K_3 \equiv \frac{\partial K_1}{\partial v} - \frac{\partial K_2}{\partial u} = 0\,.
$$

Usando la notazione $\begin{pmatrix}\varphi & \psi \\ u & v\end{pmatrix}$ per designare il determinante jacobiano di due generiche funzioni φ, ψ rapporto alle variabili u, v e avendo riguardo alle (3), si ha subito

$$
(11) \qquad \begin{cases} H_3 \equiv nA\Delta - \sum_1^3{}_{ij} \dfrac{\partial^2 r}{\partial x_i \, \partial y_j}\begin{pmatrix}x_i & y_j \\ u & v\end{pmatrix} = 0\,, \\[2ex] K_3 \equiv n'A'\Delta' - \sum_1^3{}_{ij} \dfrac{\partial^2 r}{\partial y_i \, \partial x_j}\begin{pmatrix}y_i & x_j \\ u & v\end{pmatrix} = 0\,, \end{cases}
$$

che sommate ci danno

$$
nA\Delta + n'A'\Delta' = 0\,.
$$

Questo sistema di equazioni rimane evidentemente invariato per un cambiamento qualunque delle due variabili indipendenti u, v. Esse si possono fissare, sia identificandole con due delle incognite x_i, y_i, sia più generalmente, aggiungendo al sistema due altre equazioni:

$$
(12) \qquad H_4 = 0\,, \qquad K_4 = 0\,,
$$

(non invarianti di fronte alle trasformazioni $u' = u'(u, v)$, $v' = v'(u, v)$).

Comunque, supponiamo di partirci da sei funzioni x_i, y_i *della sola variabile* u, che verifichino le due equazioni (9). Sarà in generale possibile soddisfare alle rimanenti equazioni del sistema, cioè le (10), (11), (12), in numero di sei, con altrettante funzioni delle due variabili u, v, le quali, per un certo valore $v = v_0$, si riducono alle dette funzioni della sola u. Ce ne accerteremo più innanzi in modo rigoroso. Per il momento ammettiamolo, e notiamo che il nostro sistema (9), (10), (11), (12) rimane completamente integrato, poichè anche le (9) (verificate per costruzione, solo quando v ha il valore v_0), sussistono per qualunque valore di v.

Infatti le (11), tenuto conto delle (10), equivalgono a

$$\frac{\partial H_1}{\partial v} = 0\,, \qquad \frac{\partial K_1}{\partial v} = 0\,;$$

siccome H_1 e K_1 si annullano per $v = v_0$, lo stesso avviene per ogni altro valore di v.

Le sei funzioni $x_i(u)$, $y_i(u)$, integrali delle (9), donde si prendon le mosse, si possono scegliere in guisa che ∞^1 raggi di $[C]$ si trasformino, raggio per raggio, in ∞^1 raggi assegnati di $[C']$.

Per dimostrarlo, supponiamo che

$$x_i = x_i(u, \alpha)\,, \qquad (i = 1, 2, 3) \tag{13}$$

$$y_i = y_i(u, \beta)\,, \qquad (i = 1, 2, 3) \tag{14}$$

definiscano rispettivamente le due date rigate γ e γ' di $[C]$ e di $[C']$, rappresentando, sopra ognuna di esse, $u =$ cost. generatrici rettilinee, $\alpha =$ cost., $\beta =$ cost. traiettorie ortogonali e intendendo che abbiano a corrispondersi i raggi, cui compete il medesimo valore di u. Potremo anzi ritenere che α e β rappresentino lunghezze, contate sulle generatrici rettilinee a partire da una stessa traiettoria ortogonale e che u misuri l'arco sopra questa traiettoria. Avremo con tale ipotesi $\partial x_i/\partial\alpha = X_i$, $\partial y_i/\partial\beta = Y_i$; di più anche le $\partial x_i/\partial u$, per $\alpha = 0$, le $\partial y_i/\partial u$, per $\beta = 0$, rappresentano coseni direttori.

Vincoliamo i parametri α e β ad essere funzioni di u in modo da soddisfare alle (9), ossia scrivendo per disteso, conformemente a quanto ora s'espose,

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{d\alpha}{du}\sum_1^3{}_i\left(nX_i - \frac{\partial r}{\partial x_i}\right)X_i + \sum_1^3{}_i\left(nX_i - \frac{\partial r}{\partial x_i}\right)\frac{\partial x_i}{\partial u} = 0\,,\\ &\frac{d\beta}{du}\sum_1^3{}_i\left(n'Y_i - \frac{\partial r}{\partial y_i}\right)Y_i + \sum_1^3{}_i\left(n'Y_i - \frac{\partial r}{\partial y_i}\right)\frac{\partial y_i}{\partial u} = 0\,.\end{aligned}\right. \tag{9'}$$

Questo sarà possibile, almeno in un certo campo di valori delle u, α, β, purchè soltanto i valori iniziali corrispondano a punti P_0, P'_0 delle due rigate γ, γ', per cui non si annullino i coefficienti

$$\sum_1^3{}_i \left(nX_i - \frac{\partial r}{\partial x_i}\right) X_i \,, \qquad \sum_1^3{}_i \left(n'Y_i - \frac{\partial r}{\partial y_i}\right) Y_i \,,$$

di $d\alpha/du$, $d\beta/du$.

Scelti con questa precauzione i valori iniziali, rimangono, pel tramite delle (9'), determinate le sei funzioni

$$x_i(u, \alpha(u)) \,, \qquad y_i(u, \beta(u)) \,,$$

integrali delle (9), e da esse le due superficie rifrangenti σ e σ', in modo che, per $v = v_0$, si corrispondono appunto i due assegnati sistemi ∞^1 di raggi.

4. – Le due congruenze $[C]$ e $[C']$ abbiano un raggio g a comune e precisamente coincidano, sopra g, $-X_1$, $-X_2$, $-X_3$ con Y_1, Y_2, Y_3 ordinatamente.

I valori delle anormalità, relativi ai punti di g sieno diversi da zero.

Voglio mostrare che, almeno in un intorno abbastanza piccolo di g, sono effettivamente soddisfatte tutte le restrizioni di disuguaglianza, che assicurano la esistenza del sistema integrale e la biunivocità della corrispondenza fra i raggi delle due congruenze. In altri termini, *date ad arbitrio una rigata γ di $[C]$ e una γ' di $[C']$, aventi un raggio g a comune, e tra le loro generatrici rettilinee una corrispondenza, di cui sia g raggio unito, esistono* (e sono univocamente individuate dagli indici di rifrazione e dalla condizione di passare per due dati punti P_0, P'_0 di g) *due superficie rifrangenti σ e σ', atte a trasformare $[C]$ in $[C']$* (più esattamente un pennello abbastanza piccolo di raggi di $[C]$, intorno a g, in analogo pennello di $[C']$).

Prendiamo per semplicità la retta g come asse x_3, e, dati arbitrariamente sopra di essa due punti non coincidenti P_0, P'_0, assumiamone le coordinate come valori iniziali delle nostre funzioni x_i, y_i.

Collocando l'origine delle coordinate nel punto medio del segmento $P_0P'_0(= 2l > \varepsilon)$ e scegliendo la $P_0P'_0$ per direzione positiva dell'asse x_3, avremo come valori iniziali

$$(15) \qquad \begin{cases} x_1^0 = 0 \,, & x_2^0 = 0 \,, & x_3^0 = -l \,, \\ y_1^0 = 0 \,, & y_2^0 = 0 \,, & y_3^0 = l \,, \end{cases}$$

e inoltre

$$
(16)\qquad \begin{cases}
X_1^0 = 0\,, \quad X_2^0 = 0\,, \quad X_3^0 = -1\,,\\
Y_1^0 = 0\,, \quad Y_2^0 = 0\,, \quad Y_3^0 = 1\,,\\
\left(\dfrac{\partial r}{\partial x_1}\right)_0 = -\left(\dfrac{\partial r}{\partial y_1}\right)_0 = 0\,, \quad \left(\dfrac{\partial r}{\partial x_2}\right)_0 = -\left(\dfrac{\partial r}{\partial y_2}\right)_0 = 0\,,\\
\left(\dfrac{\partial r}{\partial x_3}\right)_0 = -\left(\dfrac{\partial r}{\partial y_3}\right)_0 = -1\,,\\
r_0 = 2l > 0\,, \quad A_0 \gtrless 0\,, \quad A_0' \gtrless 0\,.
\end{cases}
$$

Comunque si assegnino le rigate γ, γ', e le generatrici che debbono corrispondere sopra di esse, per essere g raggio unito, le rappresentazioni parametriche (del tipo poc'anzi dichiarato) fanno corrispondere, in entrambe le rigate, il raggio g ad uno stesso valore u_0 del parametro u. Riterremo che questo individui sopra γ l'arco di traiettoria, ortogonale alle generatrici, passante per P_0; sopra γ' l'arco della traiettoria, passante per P_0'.

Dacchè le tangenti a queste curve in P_0, P_0' sono entrambe ortogonali a g, le direzioni delle bisettrici costituiscono con g una terna ortogonale e potremo supporre gli assi x_1, x_2 paralleli a queste bisettrici. Chiamando 2ϑ l'angolo delle due tangenti in questione, i valori, per $u = u_0$, di $\partial x_i/\partial u$, $\partial y_i/\partial u$ (coseni direttori delle dette tangenti) saranno del tipo

$$
\frac{\partial x_1}{\partial u} = \cos\vartheta\,, \qquad \frac{\partial x_2}{\partial u} = -\operatorname{sen}\vartheta\,, \qquad \frac{\partial x_3}{\partial u} = 0\,,
$$

$$
\frac{\partial y_1}{\partial u} = \cos\vartheta\,, \qquad \frac{\partial y_2}{\partial u} = \operatorname{sen}\vartheta\,, \qquad \frac{\partial y_3}{\partial u} = 0\,,
$$

potendosi ancora ritenere $0 \leqq \vartheta < \pi/2$.

Cominciamo dal constatare che, coi valori iniziali (16), non si annullano i coefficienti di $d\alpha/du$, $d\beta/du$ nelle (9'). Essi divengono infatti $n-1$, $n'-1$, che sono proprio diversi da 0, perchè $n = 1$ o $n' = 1$ significherebbero assenza di rifrazione, e noi supponiamo essenzialmente che rifrazione (o riflessione) vi sia. Determinate dalle (9') le funzioni α e β di u, portandole nelle (13), (14), se ne traggono sei funzioni

$$
(17)\qquad x_1(u),\ \ x_2(u),\ \ x_3(u)\ ; \qquad y_1(u),\ \ y_2(u),\ \ y_3(u),
$$

che soddisfanno alle (9) e si riducono ai valori (15) per $u = u_0$.

Circa ai valori delle derivate di queste funzioni, per $u = u_0$, si ha intanto dalle (9)

$$\left(\frac{dx_3}{du}\right)_0 = 0\,,\quad \left(\frac{dy_3}{du}\right)_0 = 0\;;$$

d'altra parte

$$\frac{dx_1}{du} = \frac{\partial x_1}{\partial \alpha} + \frac{\partial x_1}{\partial \alpha}\frac{d\alpha}{du} = \frac{\partial x_1}{\partial u} + X_1\frac{d\alpha}{du}\,,$$

quindi

$$\left(\frac{dx_1}{\partial u}\right)_0 = \left(\frac{\partial x_1}{\partial u}\right)_0 = \cos\vartheta\;;$$

analogamente per

$$\left(\frac{dx_2}{du}\right)_0,\quad \left(\frac{dy_1}{du}\right)_0,\quad \left(\frac{dy_2}{du}\right)_0.$$

In definitiva i valori iniziali delle sei derivate delle funzioni (17) sono

$$(18)\qquad \begin{cases} \left(\dfrac{dx_1}{du}\right)_0 = \cos\vartheta\,, & \left(\dfrac{dx_2}{du}\right)_0 = -\operatorname{sen}\vartheta\,, & \left(\dfrac{dx_3}{du}\right)_0 = 0\,,\\[2ex] \left(\dfrac{dy_1}{du}\right)_0 = \cos\vartheta\,, & \left(\dfrac{dy_2}{du}\right)_0 = \operatorname{sen}\vartheta\,, & \left(\dfrac{dy_3}{du}\right)_0 = 0\,. \end{cases}$$

Ciò posto, consideriamo il sistema (10), (11), cui si aggiungano le equazioni ausiliarie (12), particolarizzandole, per es., in

$$(12)\qquad \begin{cases} H_4 \equiv \dfrac{\partial x_1}{\partial u}\dfrac{\partial x_1}{\partial v} - \dfrac{\partial x_2}{\partial u}\dfrac{\partial x_2}{\partial v} + l = 0\,,\\[2ex] K_4 \equiv \dfrac{\partial y_1}{\partial u}\dfrac{\partial y_1}{\partial v} - \dfrac{\partial y_2}{\partial u}\dfrac{\partial y_2}{\partial v} - l = 0\,. \end{cases}$$

Tutto si riduce ormai a far vedere che le sei equazioni (10), (11), (12), per $u = u_0$, $x_i = x_i^0$, $y_i = y_i^0$, si possono risolvere rispetto alle derivate $\partial x_i/\partial v$, $\partial y_i/\partial v$, e che i valori, che se ne traggono per queste derivate, non annullano Δ nè Δ'. Con ciò infatti, il sistema integrale delle (10), (11), (12), il quale, per un valore qualunque v_0 di v, si riduce alle funzioni (17) della sola u, soddisfa a tutte le condizioni volute.

Per la dimostrazione, notiamo in primo luogo che le equazioni (10) e le nostre ausiliarie (12) pei valori (16) e (18), si riducono a

$$(10') \qquad \left(\frac{\partial x_3}{\partial v}\right)_0 = 0\,, \qquad \left(\frac{\partial y_3}{\partial v}\right)_0 = 0\,,$$

$$(12') \qquad \cos\vartheta\left(\frac{\partial x_1}{\partial v}\right)_0 + \operatorname{sen}\vartheta\left(\frac{\partial x_2}{\partial v}\right)_0 = -\,l\,, \quad \cos\vartheta\left(\frac{\partial y_1}{\partial v}\right)_0 - \operatorname{sen}\vartheta\left(\frac{\partial y_2}{\partial v}\right)_0 = l\,;$$

si ha poi

$$-\Delta_0 = \operatorname{sen}\vartheta\left(\frac{\partial x_1}{\partial v}\right)_0 + \cos\vartheta\left(\frac{\partial x_2}{\partial v}\right)_0, \qquad \Delta_0' = -\operatorname{sen}\vartheta\left(\frac{\partial y_1}{\partial v}\right)_0 + \cos\vartheta\left(\frac{\partial y_2}{\partial y}\right)_0.$$

La identità

$$\frac{\partial^2 r}{\partial x_i\,\partial y_j} = -\frac{1}{r}\left(\frac{\partial r}{\partial x_i}\,\frac{\partial r}{\partial y_j} + \varepsilon_{ij}\right) \qquad (i, j = 1, 2, 3),$$

(in cui ε_{ij} designa al solito lo zero o l'unità, secondochè gli indici i e j sono distinti o coincidenti) porge

$$-\sum_1^3{}_{ij}\,\frac{\partial^2 r}{\partial x_i\,\partial y_j}\begin{pmatrix} x_i & y_j \\ u & v\end{pmatrix} = \frac{1}{r}\sum_1^3{}_{ij}\,\frac{\partial r}{\partial x_i}\,\frac{\partial r}{\partial y_j}\begin{pmatrix} x_i & y_j \\ u & v\end{pmatrix} + \frac{1}{r}\sum_1^3{}_{i}\begin{pmatrix} x_i & y_i \\ u & v\end{pmatrix},$$

e, introducendovi i valori (16) e (18), il secondo membro diventa

$$\frac{\cos\vartheta\left\{\left(\frac{\partial y_1}{\partial v}\right)_0 - \left(\frac{\partial x_1}{\partial v}\right)_0\right\} - \operatorname{sen}\vartheta\left\{\left(\frac{\partial y_2}{\partial v}\right)_0 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial v}\right)_0\right\}}{2l},$$

che, in virtù delle ausiliarie (12′), è uguale all'unità.

Le (11) assumono con ciò la forma

$$(11') \qquad \left\{\begin{aligned} \Delta_0 &= -\operatorname{sen}\vartheta\left(\frac{\partial x_1}{\partial v}\right)_0 - \cos\vartheta\left(\frac{\partial x_2}{\partial v}\right)_0 = -\frac{1}{nA_0}\,, \\ \Delta_0' &= -\operatorname{sen}\vartheta\left(\frac{\partial y_1}{\partial v}\right)_0 + \cos\vartheta\left(\frac{\partial y_2}{\partial v}\right)_0 = \frac{1}{n'A'}\,. \end{aligned}\right.$$

Da esse e (12′) si traggono le quattro derivate $(\partial x_1/\partial v)_0$, $(\partial x_2/\partial v)_0$, $(\partial y_1/\partial v)_0$, $(\partial y_2/\partial v)_0$, purchè soltanto non si incontrino sotto angolo retto i piani tangenti in P_0, P'_0 alle due rigate γ e γ', sia cioè $\cos 2\vartheta$ diverso da zero.

Per il suo significato geometrico, questa condizione è indipendente dal modo, con cui si particolarizzano le equazioni ausiliarie (12); si può del resto riconoscerlo direttamente, osservando che, qualunque sieno le equazioni ausiliarie, se il sistema deve fornire valori non infiniti per

$$\left(\frac{\partial x_1}{\partial v}\right)_0, \quad \left(\frac{\partial x_2}{\partial v}\right)_0, \quad \left(\frac{\partial y_1}{\partial v}\right)_0, \quad \left(\frac{\partial y_2}{\partial v}\right)_0,$$

lo stesso è d'uopo avvenga per

$$\Delta_0, \quad \Delta'_0, \quad -\sum_1^3{}_{ij}\left(\frac{\partial^2 r}{\partial x_i\,\partial x_j}\right)\begin{pmatrix} x_i & y_i \\ u & v \end{pmatrix}_0.$$

Ora il quadrato della matrice dei coefficienti di $(\partial x_1/\partial v)_0$, $(\partial x_2/\partial v)_0$, $(\partial y_1/\partial v)_0$, $(\partial y_2/\partial v)_0$ in queste tre espressioni, vale $\cos^2 2\vartheta/2l^2$ e si annulla quindi per $\cos 2\vartheta = 0$. D'altra parte, detto k il valore di

$$-\sum_1^3{}_{ij}\left(\frac{\partial^2 r}{\partial x_i\,\partial y_j}\right)_0\begin{pmatrix} x_i & y_j \\ u & v \end{pmatrix},$$

dovrebbero sussistere, a norma delle (11), le tre equazioni

$$-\sum_1^3{}_{ij}\left(\frac{\partial^2 r}{\partial x_i\,\partial y_j}\right)_0\begin{pmatrix} x_i & y_j \\ u & v \end{pmatrix}_0 = k, \qquad -\Delta_0 = \frac{k}{nA_0}, \qquad \Delta'_0 = \frac{k}{n'A'_0},$$

(per $\vartheta = \pi/4$; $k \lessgtr 0$) e questo richiederebbe, come tosto si riconosce,

$$2l + \frac{1}{nA_0} + \frac{1}{n'A'} = 0,$$

il che in generale non è.

Escluso pertanto che l'angolo 2ϑ sia retto, le equazioni del nostro sistema sono risolubili rispetto alle sei derivate $(\partial x_i/\partial v)_0$, $(\partial y_i/\partial v)$, e $\Delta_0 = -1/nA_0$, $\Delta'_0 = 1/n'A'_0$ riescono, come è necessario, diversi da zero.

Gioverà aggiungere, riportandosi ad una osservazione, fatta alla fine del § 2, che, nell'intorno considerato, *la soluzione del problema è, non solo geometricamente, ma anche fisicamente possibile.*

XXVIII.

SUR L'INSTABILITÉ DE CERTAINES SUBSTITUTIONS

« Comptes Rendus de l'Acad. des Sciences de Paris », t. CXXX (1900)

pp. 103-106.

J'envisage les transformations ponctuelles réelles à deux variables

$$(1)\qquad \begin{cases} x_1 = x + \varphi(x, y) + \dots\,, & y_1 = y + \psi(x, y) + \dots\,, \\ (\varphi = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2\,, & \psi = b_{11}x^2 + 2b_{12}xy + b_{22}y^2) \end{cases}$$

dont la partie du premier ordre se réduit à l'identité, les termes non écrits étant d'ordre supérieur au second.

Je me propose de démontrer que les substitutions telles que (1) sont en général *instables*, c'est-à-dire *qu'on peut, par des itérations*

$$(2)\qquad \begin{cases} x_n = x_{n-1} + \varphi(x_{n-1}, y_{n-1}) + \dots\,, \\ y_n = y_{n-1} + \psi(x_{n-1}, y_{n-1}) + \dots\,, \end{cases} \qquad (n = 2, 3, \dots)\,,$$

de (1), *faire sortir le point représentatif* P_n (dont les coordonnées sont x_n, y_n) *d'un cercle fixe* C, *tracé autour de l'origine* O, *pourvu qu'on prenne la position initiale* P (de coordonnées x, y) *dans un secteur convenable, si près de* O *que l'on veut.*

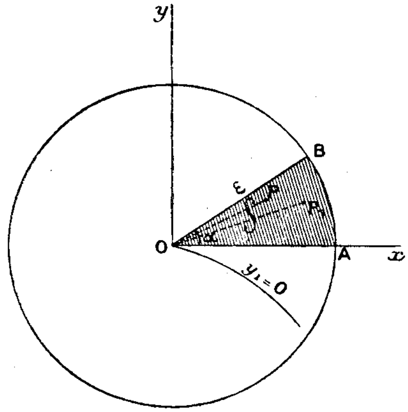
Plaçons-nous dans le cas général, où les deux formes φ et ψ n'ont pas de facteurs en commun.

On peut alors supposer que notre substitution (1) ait été préalablement réduite (par une transformation linéaire réelle) à la forme

$$(3)\qquad \begin{cases} x_1 = x + x^2 + y(ax + by) + U(x, y)\,, \\ y_1 = y(1 + cx + dy) + V(x, y)\,, \end{cases}$$

U et V étant, bien entendu, du troisième ordre au moins par rapport à x, y.

La courbe $y_1 = y(1 + cx + dy) + V = 0$ a pour tangente à l'origine la droite $y = 0$; ce sera en général une tangente d'inflexion. Quoi qu'il en soit, pour x assez petit et positif, la courbe $y_1 = 0$ est située tout entière dans un même quadrant: soit le quatrième. (L'autre cas se réduit à celui-ci en changeant y_1, y en $-y_1$, $-y$ sans toucher à x).



Il convient de distinguer trois cas: $c < 1$, $c > 1$, $c = 1$.

1) $c < 1$. — Considérons un secteur $S = AOB$ du premier quadrant, limité inférieurement par l'axe des abscisses, ayant pour rayon ε et pour ouverture α. Si ε et α sont assez petits, on peut supposer pour tous les points $P(x, y)$ de S

$$x_1 \geqq x + \frac{1}{2} x^2 , \tag{4}$$

$$y_1 \geqq 0 . \tag{5}$$

En posant $y/x = z$, on aura aussi,

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{y_1}{x_1} &= \frac{y(1 + cx + dy) + V(x, y)}{x + x^2 + y(ax + by) + U(x, y)} \\ &= \frac{z(1 + cx + dxz) + \dfrac{1}{x} V(x, xz)}{1 + x + xz(a + bxz) + \dfrac{1}{x} U(x, xz)} \\ &= z + (c - 1)xz + xz[(d - a)z - bz^2] + x^2 W(x, z) , \end{aligned} \right. \tag{6}$$

$W(x, z)$ restant finie.

Profitons encore de la petitesse de ε et de α, en les fixant de façon que, pour $0 \leqq z \leqq \operatorname{tang} \alpha$, $0 \leqq x \leqq \varepsilon$, non seulement soient valables les inégalités (4), (5) et la formule (6), mais en outre

$$(d-a)z - bz^2 < \frac{1-c}{2}, \tag{7}$$

$$1 - \frac{1-c}{2} x > 0, \tag{8}$$

$$xW < \frac{1-c}{2} \operatorname{tang} \alpha. \tag{9}$$

On tire de (6), ayant égard à (7) et (9),

$$\frac{y_1}{x_1} \leqq z - \frac{1-c}{2} xz + \frac{1-c}{2} x \operatorname{tang} \alpha \leqq \operatorname{tang} \alpha - \left(1 - \frac{1-c}{2} x\right) (\operatorname{tang} \alpha - z),$$

et *a fortiori*, d'après (8),

$$\frac{y_1}{x_1} \leqq \operatorname{tang} \alpha. \tag{10}$$

Les inégalités (4), (5) et (10) montrent qu'à tout point P de S notre substitution (3) fait correspondre un point P_1 à la droite de la parallèle à l'axe Oy conduite par P, et non extérieur à l'angle AOB. Si P_1 appartient lui-même au secteur S, déterminons P_2 par (2) et ainsi de suite, en répétant cette opération tant que l'on reste dans S. D'après ce que l'on vient de dire, on ne peut pas sortir du secteur S, sans sortir en même temps du cercle C, auquel le secteur appartient. La proposition énoncée sera donc établie, si nous prouvons que les points de la succession P, P_1, P_2, ..., ne peuvent tomber indéfiniment à l'intérieur de S. À la vérité, s'il en était ainsi, les abscisses x, x_1, x_2, ..., qui forment une succession croissante, devraient tendre vers une limite l *finie et positive*. Mais on a $x_1 \geqq x + \frac{1}{2} x^2$; de même $x_n \geqq x_{n-1} + \frac{1}{2} x_{n-1}^2$, et par conséquent la limite l devrait remplir une inégalité de la forme $l \geqq l + \frac{1}{2} l^2$, ce qui est absurde.

2) $c > 1$. — On a recours à la substitution inverse de (3). On démontre par des considérations analogues qu'en partant des points P d'un secteur convenable les points P_{-1}, P_{-2}, ... approchent indéfiniment de l'origine.

Il est alors possible, avec des positions initiales, si près de l'origine que l'on veut (celles de la dite succession P_{-1}, P_{-2}, ...), de rejoindre, par l'itération de (3), un point P fixé à l'avance. Il y a bien instabilité.

3) $c = 1$. — Ce cas peut être reconduit à l'un ou à l'autre des deux précédents.

Les substitutions $x_1 = x \cos\theta - y \sin\theta + \ldots$, $y_1 = x \sin\theta + y \cos\theta + \ldots$, où θ est commensurable avec 2π, se ramènent par itération à la forme (1). Elles aussi sont donc instables, du moins en général. Il est bien probable que cette conclusion subsiste pour toute valeur de θ, mais je ne puis encore le démontrer rigoureusement. En attendant je voudrais indiquer comment ce qui précède se rattache à la question de la stabilité des solutions périodiques des équations de la Dynamique. Ce sera, si l'Académie le permet, l'objet d'une prochaine Communication.

(9 juillet 1900).

XXIX.

SUR L'INSTABILITÉ DE CERTAINES SOLUTIONS PÉRIODIQUES

« Comptes Rendus de l'Acad. des Sciences de Paris », t. CXXX (1900), pp. 170-173

Soit un système canonique avec deux degrés de liberté

$$(1) \qquad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial q_i}, \quad \frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial F}{\partial p_i}, \qquad (i = 1, 2) \, ,$$

F ne dépendant pas du temps t.

Supposons que les équations (1) admettent une solution périodique de période T. Supposons, en outre, ce qui est toujours permis par un choix convenable de variables ([1]), qu'on ait pour cette solution

$$(2) \qquad p_1 = p_2 = q_2 = 0 \, , \qquad q_1 = \chi(t) \, ,$$

q_1 étant censé varier toujours dans le même sens et augmentant de 2π, tandis que t augmente de T. Les trois dérivées $\partial F/\partial q_1$, $\partial F/\partial q_2$, $\partial F/\partial p_2$ s'annulent alors à la fois, lorsqu'on y fait $p_1 = p_2 = q_2 = 0$; au contraire $\partial F/\partial p_1$ ne s'annule pour aucune valeur de q_1.

La fonction F pourra être représentée sous la forme suivante

$$(3) \qquad F = C + \left(\frac{2\pi}{T} + a\right) p_1 + \frac{1}{2}\left(a_{11} p_2^2 + 2 a_{12} p_2 q_2 + a_{22} q_2^2\right) + \ldots \, ,$$

où C est une constante, les a sont des fonctions périodiques (de période 2π) de la seule variable q_1 et les termes non écrits sont d'ordre supérieur par rapport aux trois variables p_1, p_2, q_2.

([1]) Voir POINCARÉ, *Mécanique céleste*, t. II, n. 208.

La solution périodique (2) possède deux exposants caractéristiques nuls et deux autres α et $-\alpha$. Si la partie réelle de α n'est pas nulle, la solution est instable, ainsi qu'il résulte des travaux bien connus de MM. POINCARÉ et LIAPOUNOFF. Pour α purement imaginaire, M. POINCARÉ convient, à l'exemple des Anglais, d'appeler *stable* la solution correspondante. Sera-t-elle au sens rigoureux du mot? Je crois infiniment peu probable qu'il en soit ainsi en général, mais à présent je ne puis confirmer cette présomption, sinon pour une sorte très particulière de solutions périodiques, celles pour qui le nombre $\alpha/\sqrt{-1}$ serait commensurable avec le moyen mouvement $2\pi/T$.

Envisageons les solutions de (1), pour qui $F = C$, C étant la constante de la formule (3). En résolvant par rapport à p_1 il vient

$$p_1 = -\frac{1}{2}\,\frac{a_{11}p_2^2 + 2a_{12}p_1p_2 + a_{22}q_2^2}{2\pi/T + a} + H = K + H\,,$$

où H est au moins du troisième ordre en p_2, q_2. Les trajectoires de ces solutions (pour qui $F = C$) sont définies par les équations canoniques

$$\frac{dp_2}{dq_1} = \frac{\dfrac{\partial F}{\partial q_2}}{\dfrac{\partial F}{\partial p_1}} = -\frac{\partial(K+H)}{\partial q_2}\,, \qquad \frac{dq_2}{dq_1} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial p_2}}{\dfrac{\partial F}{\partial p_1}} = \frac{\partial(K+H)}{\partial p_2}\,.$$

Posons pour un moment $H = 0$ et intégrons par la méthode de JACOBI, en désignant par x, y un couple de constantes canoniques. On trouve

$$p_2 = c_{11}x + c_{21}y\,, \qquad q_2 = c_{21}x + c_{22}y\,.$$

Les fonctions c de la variable q_1 sont périodiques, d'après l'hypothèse que $2\pi/T$ et $\alpha/\sqrt{-1}$ sont commensurables entre eux. La période est $2k\pi$, ayant posé $\alpha T/2\pi\sqrt{-1} = h/k$, avec h et k entiers, premiers entre eux.

En remplaçant les variables p_2, q_2 par x, y, le système (4) devient

$$(4') \qquad \frac{dx}{dq_1} = -\frac{\partial H}{\partial y}\,, \qquad \frac{dy}{dq_1} = \frac{\partial H}{\partial x}\,,$$

où H est une fonction périodique de q_1, dont le développement en série de puissances de x, y commence par un polynome du troisième degré H_3. Soit $f(x, y)/2k\pi$ le terme indépendant de q_1 dans le développement de

H_3 en série trigonométrique de l'argument q_1/k. *Si la forme cubique (à coefficients constants) $f(x, y)$ n'a pas de facteurs multiples, la solution $x = 0$, $y = 0$ de* (4) *et, par conséquent, la solution périodiques* (2) *du système proposé sont assurément instables.*

En effet, soient x_0, y_0 les valeurs de x, y pour $q_1 = 0$; x_1, y_1 leurs valeurs après la période $2k\pi$. Les intégrales x, y étant développables en séries de puissances de x_0, y_0 posons (en réunissant les termes de même degré)

$$x = P_1 + P_2 + \dots, \qquad y = Q_1 + Q_2 + \dots,$$

Portons ces expressions dans les (4') et nous trouverons de suite

$$P_1 = x_0, \qquad Q_1 = y_0,$$

$$P_2 = -\int_0^{q_1} \frac{\partial H}{\partial y}\, dq_1, \qquad Q_2 = \int_0^{q_1} \frac{\partial H}{\partial x}\, dq_1 .$$

Il va sans dire che, dans $\partial H/\partial x$, $\partial H/\partial y$ les variables x, y doivent être remplacées par x_0, y_0. En faisant $q_1 = 2k\pi$, j'obtiens

$$x_1 = x_0 - \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y_0} + \dots, \qquad y_1 = y_0 + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x_0} + \dots .$$

C'est une substitution instable (voir ma Note du 9 juillet) (*), car f n'a pas de facteurs multiples et, par conséquent, les deux formes quadratiques $\partial f/\partial x$, $\partial f/\partial y$ sont sans facteurs communs.

On en conclut immédiatement l'instabilité de la solution $x = 0$, $y = 0$, d'où, en revenant aux variables p_2, q_2 celle de la solution donnée.

Si l'Académie veut bien le permettre, je reviendrai prochainement sur ces remarques en les appliquant au problème des trois corps.

(16 juillet 1900).

(*) [In questo vol.: XXVIII, pp. 461-464].

XXX.

SUR LE PROBLÈME RESTREINT DES TROIS CORPS

« Comptes Rendus de l'Acad. des Sciences de Paris », t. CXXXI (1900)

pp. 236-239

Soient S, J, P (Soleil, Jupiter, Planète) les trois corps; 1, μ, 0 leurs masses. On suppose les trois corps dans un même plan et le mouvement de Jupiter circulaire.

Les distances PS, PJ seront désignées par r, Δ et l'angle PSJ (compté positivement dans le sens du mouvement de Jupiter) par v. Si l'on prend SJ pour unité de distance et qu'on dispose de l'unité de temps de façon que la constante de GAUSS se réduise à l'unité, les équations du mouvement de P pourront s'écrire

$$\frac{dp_i}{dt} = \frac{\partial F}{\partial q_i}, \qquad \frac{dq_i}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial p_i}, \qquad (i = 1, 2), \tag{1}$$

où

$$F = \frac{1}{2p_1^2} + p_1 - \frac{1}{2}(p_2^2 + q_2^2) + \frac{\mu}{\Delta} - \frac{\mu}{1+\mu} r \cos v .$$

Les variables p_i, q_i sont liées aux éléments elliptiques (du mouvement relatif par rapport à SJ), demi-grand axe a, excentricité e, anomalie moyenne ζ, longitude du périhélie $\bar{\omega}$, par les relations

$$p_1 = \sqrt{a}\,, \quad q_1 = +\bar{\omega}\,\zeta\,; \qquad p_2 = \eta \cos \bar{\omega}\,, \quad q_2 = -\eta \sin \bar{\omega}\,,$$

η étant la racine de l'équation

$$\frac{\eta^2}{4a} - \frac{\eta}{\sqrt{a}} + e^2 = 0\,,$$

qui s'annule avec e.

Pour $\mu = 0$, le mouvement de P est képlérien; il est même circulaire et uniforme dans les ∞^1 solutions suivantes:

$$p_1 = \sqrt{R}\,, \quad q_1 = (n-1)t\;; \qquad p_2 = q_2 = 0 \tag{2}$$

($n = R^{-3/2}$, R étant une constante).

La valeur de F (constante de JACOBI), qui correspond à une solution (2), est $C = \frac{1}{2}R + \sqrt{R}$.

Fixons pour C cette valeur et considérons les trajectoires de (1), sous la condition $F = C$, pour les petites valeurs de μ. Elles sont définies par les équations

$$\frac{dp_2}{dq_1} = -\frac{\partial H}{\partial q_2}\,, \qquad \frac{dq_2}{dq_1} = \frac{\partial H}{\partial p_2}\,, \tag{3}$$

où H n'est que la racine p_1 de l'équation $F = C$, qui se réduit à $\sqrt{R}$, pour $\mu = p_2 = q_2 = 0$.

Il existe parmi ces trajectoires des orbites fermées, peu différentes des cercles (2). Rapportons-nous, pour fixer les idées, à une planète inférieure ($R < 1$).

Plus particulièrement, donnons à R telle valeur que $1/(n-1) = 1(R^{-3/2} - 1)$ soit de la forme $h/3$, h étant un entier positif, premier avec 3

$$R = \left(\frac{1}{\sqrt[3]{1 + \frac{3}{h}}}\right).$$

Les principes exposés dans une Note précédente (16 juillet) (*) vont nous permettre d'affirmer que les solutions périodiques de cette catégorie sont instables (tout en paraissant stables à la première approximation).

Je supposerai pour un moment que l'on donne au paramètre μ seulement des valeurs μ', pour qui les exposants caractéristiques de la solution périodique (par rapport au système réduit (3), qui sont purement imaginaires et très voisins de $\pm\sqrt{-1}/(n-1)$ seraient commensurables avec $\sqrt{-1}/(n-1)$. Les considérations de la dite Note sont alors applicables. On doit, en premier lieu, substituer à p_2, q_2 des nouvelles variables canoniques x et y telles que l'expression de H ne contienne plus ni termes du premier ordre ni termes du second ordre par rapport a x, y. Le

(*) [In questo vol.: XXIX, pp. 465-467].

criterium d'instabilité, c'est que la valeur moyenne (H_3) de H_3 n'ait pas de facteurs multiples (H_3 désigne l'ensemble des termes du troisième degré dans H et la valeur moyenne se rapporte à la variable q_1, de laquelle H est, même après la substitution de x, y à p_2, q_2, fonction périodique). Si μ' est assez petit, il suffit que cette condition soit satisfaite pour le premier coéfficient non nul du développement de (H_3) suivant les puissances de μ. Or, en posant $(H_3) = (H_3)^{(0)} + \mu(H_3)^{(1)} + ...$, on trouve $(H_3)^{(0)} = 0$, $(H_3)^{(1)} = \Theta(x^3 - 3y^2x)$, où Θ dépend uniquement de R et ne s'annule pas identiquement, si non plus pour les valeurs de la forme $1/\sqrt[3]{1 + 3/h}$.

L'instabilité est donc certaine pour les solutions périodiques de l'espèce considérée, pourvu toutefois que μ ait une valeur μ'. Mais on peut se débarasser de cette dernière restriction. On parvient ainsi à établir que *les solutions périodiques du problème restreint des trois corps, qui diffèrent assez peu des orbites circulaires, ayant pour moyen mouvement un nombre de la forme* $1 + 3/h$, *sont assurément instables.*

Les conditions ci-dessus sont à fort peu près satisfaites pour les petites planètes (167) Urda, (243) Ida, (369), dont le moyen mouvement est voisin de $1 + 3/2$, les excentricités et les inclinaisons étant très petites.

Les développements de cette Note et des deux précédentes (9 et 16 juillet) (*) paraîtront prochainement dans les *Annali di Matematica*.

Je ne puis enfin me passer de faire remarquer que, si l'on avait reconnu l'instabilité pour les valeurs rationnelles du moyen mouvement n, on pourrait démontrer qu'il en est de même pour toute valeur de n.

(23 juillet 1900).

(*) [In questo vol.: XXVIII, pp. 461-464; XXIX, pp. 465-467].

XXXI.

FUNZIONI ARMONICHE E TRASFORMAZIONI DI CONTATTO (*)

« Atti Ist. Veneto di sc., lett. ed arti », t. LIX,

pp. 671-675

1. - Sia una trasformazione di contatto nel piano (biunivoca e continua nel campo che si considera) definita dalle formule

$$\tag{1} \begin{cases} X = f(x, y, p) \\ Y = \varphi(x, y, p) \\ P = \psi(x, y, p) . \end{cases}$$

Per la definizione stessa di trasformazione di contatto, rimane invariante la equazione pfaffiana

$$\tag{2} dy - p\,dx = 0 .$$

Immaginiamo di attribuire alle variabili x, y, p valori complessi $x_1 + ix_2$, $y_1 + iy_2$, $p_1 - ip_2$ e scindiamo in f, φ, ψ, e corrispondentemente in X, Y, P, la parte reale dalla immaginaria, ponendo

$$f = f_1 + if_2 , \qquad \varphi = \varphi_1 + i\varphi_2 , \qquad \psi = \psi_1 - i\psi_2 ;$$

$$X = X_1 + iX_2 , \qquad Y = Y_1 + iY_2 , \qquad P = P_1 - iP_2 .$$

f_1, f_2, φ_1, φ_2, ψ_1, ψ_2 risultano funzioni reali delle sei variabili x_1, x_2, y_1, y_2, p_1, p_2, e le (1), interpretate nel campo reale, definiscono complessiva-

(*) Presentata dal Socio corrispondente F. D'Arcais nella adunanza del 20 maggio 1900.

mente una trasformazione

$$
(1') \qquad \begin{cases} X_1 = f_1(x_1, x_2;\; y_1, y_2;\; p_1, p_2) \\ X_2 = f_2(x_1, x_2;\; y_1, y_2;\; p_1, p_2) \\ Y_1 = \varphi_1(x_1, x_2;\; y_1, y_2;\; p_1, p_2) \\ Y_2 = \varphi_2(x_1, x_2;\; y_1, y_2;\; p_1, p_2) \\ P_1 = \psi_1(x_1, x_2;\; y_1, y_2;\; p_1, p_2) \\ P_2 = \psi_2(x_1, x_2;\; y_1, y_2;\; p_1, p_2) \end{cases}
$$

delle sei variabili x_1, x_2, y_1, y_2, p_1, p_2 nelle omologhe maiuscole.

Quali sono le proprietà caratteristiche della trasformazione (1′)?

Quelle evidentemente, che scaturiscono dal lasciar invariante la (2), ossia

$$dy_1 + i\,dy_2 - (p_1 - ip_2)(dx_1 + i\,dx_2) = 0\,,$$

il che è quanto dire il sistema delle due equazioni di PFAFF

$$
(2') \qquad \begin{cases} dy_1 - (+\,p_1\,dx_1 + p_2\,dx_2) = 0 \\ dy_2 - (-\,p_2\,dx_1 + p_1\,dx_2) = 0\,. \end{cases}
$$

Queste esprimono che y_1, y_2 sono funzioni armoniche *associate* delle variabili x_1, x_2. Risulta infatti da esse che y_1, y_2, considerate come funzioni delle variabili indipendenti x_1, x_2, ammettono rispettivamente per derivate p_1, p_2 e $-p_2$, p_1. Si ha dunque

$$\frac{\partial y_1}{\partial x_1} = \frac{\partial y_2}{\partial x_2}\,,$$

$$\frac{\partial y_1}{\partial x_2} = -\frac{\partial y_2}{\partial x_1}\,,$$

donde appunto apparisce che y_1, y_2 sono funzioni armoniche associate.

Le trasformazioni del tipo (1′) *conservano la relazione, espressa dalle* (2′). *Esse fanno perciò corrispondere ad ogni coppia* y_1, y_2 *di funzioni armoniche associate delle variabili* x_1, x_2, *e loro derivate, funzioni associate* Y_1, Y_2, *delle nuove variabili* X_1, X_2, *e derivate relative.*

2. – *Reciprocamente la più generale trasformazione fra sei variabili, dotata di queste proprietà, rientra nella classe* (1′).

Per riconoscerlo, consideriamo le funzioni

$$X = X_1 + iX_2\,, \quad Y = Y_1 + iY_2\,, \quad P = P_1 - iP_2$$

delle sei variabili x_1, x_2, y_1, y_2, p_1, p_2.

Dacchè, per ipotesi, la trasformazione ha da lasciare invariante il sistema (2′), o, ciò che è lo stesso, la (2), dovrà sussistere una identità della forma

$$dY - P\,dX \equiv \varrho(dy - p\,dx)\,, \tag{3}$$

il fattore ϱ essendo a priori indeterminato.

Ciò posto, tutto si riduce a far vedere che X, Y, P dipendono esclusivamente dai tre argomenti

$$x = x_1 + ix_2\,, \quad y = y_1 + iy_2\,, \quad p = p_1 - ip_2\,,$$

(non da tutte le sei variabili x_1, x_2, y_1, y_2, p_1, p_2).

Poniamo a tale scopo

$$x_1 - ix_2 = \xi\,, \quad y_1 - iy_2 = \eta\,, \quad p_1 + ip_2 = \pi\,,$$

e notiamo che dalla (3), risguardando, come è lecito, x, y, p, ξ, η, π quali variabili indipendenti, scendono le relazioni

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial Y}{\partial x} - P\frac{\partial X}{\partial x} = -\varrho p\,, \\ &\frac{\partial Y}{\partial y} - P\frac{\partial X}{\partial y} = \varrho\,, \\ &\frac{\partial Y}{\partial p} - P\frac{\partial X}{\partial p} = 0\,, \end{aligned}\right. \tag{4}$$

$$\frac{\partial Y}{\partial \xi} - P\frac{\partial X}{\partial \xi} = 0\,, \tag{5}$$

$$\frac{\partial Y}{\partial \eta} - P\frac{\partial X}{\partial \eta} = 0\,, \tag{6}$$

$$\frac{\partial Y}{\partial \pi} - P\frac{\partial X}{\partial \pi} = 0\,. \tag{7}$$

Occupiamoci per un momento del solo sistema (4), (5).

Le (4), eliminandone ϱ e P, danno

$$\binom{X\ Y}{x\ p} + p\binom{X\ Y}{y\ p} = 0 \quad (^1). \tag{8}$$

In modo analogo, dalle due prime equazioni (4) e dalla (5) segue

$$\binom{X\ Y}{x\ \xi} + p\binom{X\ Y}{y\ \xi} = 0, \tag{9}$$

mentre l'ultima delle (4) e la (5) stessa porgono

$$\binom{X\ Y}{p\ \xi} = 0\,. \tag{10}$$

Formiamo la combinazione differenziale

$$\frac{\partial}{\partial p}\left[\binom{X\ Y}{x\ \xi} + p\binom{X\ Y}{y\ \xi}\right] - \frac{\partial}{\partial x}\binom{X\ Y}{p\ \xi} - p\frac{\partial}{\partial y}\binom{X\ Y}{p\ \xi} = 0.$$

Il primo membro può essere scritto

$$\frac{\partial}{\partial \xi}\left[\binom{X\ Y}{x\ p} + p\binom{X\ Y}{y\ p}\right] + \binom{X\ Y}{y\ \xi} = 0\,,$$

e, in virtù della (8), rimarrà

$$\binom{X\ Y}{y\ \xi} = 0\,,$$

che è la condizione di integrabilità del sistema (9), (10). Dovremo di conseguenza avere simultaneamente

$$\binom{X\ Y}{x\ \xi} = 0\,, \quad \binom{X\ Y}{y\ \xi} = 0\,, \quad \binom{X\ Y}{p\ \xi} = 0\,.$$

---

(1) Per brevità di scrittura, rappresentiamo colla notazione $\binom{X\ Y}{u\ v}$ il determinante funzionale di X, Y rapporto a due generiche variabili u e v.

In modo analogo, la considerazione dei sistemi (4), (6) e (4), (7) porta alle equazioni

$$\begin{pmatrix} X & Y \\ x & \eta \end{pmatrix} = 0\,, \quad \begin{pmatrix} X & Y \\ y & \eta \end{pmatrix} = 0\,, \quad \begin{pmatrix} X & Y \\ p & \eta \end{pmatrix} = 0\,;$$

$$\begin{pmatrix} X & Y \\ x & \pi \end{pmatrix} = 0\,, \quad \begin{pmatrix} X & Y \\ y & \pi \end{pmatrix} = 0\,, \quad \begin{pmatrix} X & Y \\ p & \pi \end{pmatrix} = 0\,.$$

Ora, se X, Y dipendessero effettivamente da qualcuno dei tre argomenti ξ, η o π, le soprascritte equazioni esigerebbero che fossero eguali a zero i minori della matrice

$$\begin{Vmatrix} \frac{\partial X}{\partial x} & \frac{\partial X}{\partial y} & \frac{\partial X}{\partial p} \\ \frac{\partial Y}{\partial x} & \frac{\partial Y}{\partial y} & \frac{\partial Y}{\partial p} \end{Vmatrix},$$

talchè in definitiva risulterebbe identicamente nulla la matrice

$$\begin{Vmatrix} \frac{\partial X}{\partial x} & \frac{\partial X}{\partial y} & \frac{\partial X}{\partial p} & \frac{\partial X}{\partial \xi} & \frac{\partial X}{\partial \eta} & \frac{\partial X}{\partial \pi} \\ \frac{\partial Y}{\partial x} & \frac{\partial Y}{\partial y} & \frac{\partial Y}{\partial p} & \frac{\partial Y}{\partial \xi} & \frac{\partial Y}{\partial \eta} & \frac{\partial Y}{\partial \pi} \end{Vmatrix}$$

e non sarebbero perciò indipendenti X e Y. Questo è impossibile, perchè le variabili trasformate X_1, X_2, Y_1, Y_2, P_1, P_2 debbono necessariamente supporsi funzioni indipendenti delle primitive.

Concludiamo pertanto che X, Y (e così P, in causa delle (4)) non contengono ξ, η, ζ, ossia sono funzioni delle variabili complesse x, y, p. La trasformazione appartiene dunque al tipo (1′), come dovevasi dimostrare.

XXXII.

MÉTHODES DE CALCUL DIFFÉRENTIEL ABSOLU ET LEURS APPLICATIONS (*)

par

G. Ricci et T. Levi-Civita à Padoue

« Math. Ann. », Band LIV (1900),

pp. 125-201

TABLE DES MATIÈRES

(*) Traduzione polacca: *Metody rachunku róźniczkowego bezwzglednego i ich zastosowania*, « Prac matematyczno-fizycznych », t. XII, Warszawa (1901).

CHAPITRE. III – **Applications analytiques.**

CHAPITRE IV. – **Applications géométriques.**

CHAPITRE V. – **Applications mécaniques.**

CHAPITRE VI. – **Applications physiques.**

PRÉFACE

M. Poincaré (¹) a écrit que dans les Sciences mathématiques *une bonne notation a la même importance philosophique qu'une bonne classification dans les Sciences naturelles.* Évidemment, et même avec plus de raison, on peut en dire autant des méthodes, car c'est bien de leur choix que dépend la possibilité de *forcer* (pour nous servir encore des paroles de l'illustre géomètre français) *une multitude de faits sans aucun lien apparent à se grouper suivant leurs affinités naturelles.*

On peut aussi dire qu'un théorème démontré par des voies détournées et en ayant recours à des artifices et à des considérations, qui n'ont avec lui aucun lien essentiel, n'est bien souvent qu'une vérité découverte à moitié; car il arrive presque toujours que le même théorème se présente d'une manière plus complète et générale, si l'on y parvient par un chemin plus droit et avec des moyens plus appropriés.

Citons comme exemple la démonstration donnée par Jacobi et étendue par Beltrami de l'invariabilité de l'expression $\Delta_2 U$. Elle est certainement élégante et fait témoignage de la pénétration d'esprit de son auteur; mais on est bien surpris que, pour démontrer un théorème, qui appartient par sa nature à la théorie algébrique de l'élimination, on ait à s'occuper de la variation d'une intégrale. C'est à cette remarque et à la possibilité devinée *a priori* de reconduire la théorie des paramètres différentiels du deuxième ordre à celle des invariants des formes algébriques qu'on doit les recherches, qui ont amené à la découverte des méthodes, que nous appelons de *Calcul différentiel absolu* (²); et dont le premier résultat fut la découverte de toute une chaîne d'invariants différentiels contenant une ou plusieurs fonctions arbitraires, et dont le $\Delta_2 U$ est le premier et le plus important anneau.

L'algorithme du Calcul différentiel absolu, c'est à dire l'instrument matériel des méthodes, sur lesquelles nous allons entretenir les lecteurs des *Mathematische Annalen*, se trouve tout entier dans une remarque due a M. Christoffel (³). — Mais les méthodes mêmes et les avantages, qu'ils présentent, ont leur raison d'être et leur source dans les rapports intimes, qui les lient à la notion de variété à n dimensions, que nous devons aux génies de Gauss et de Riemann. —

(¹) Préface aux *Oeuvres de* Laguerre, publiées sous les auspices de l'Académie des Sciences.

(²) Cfr. G. Ricci, *Sui parametri e gli invarianti delle forme quadratiche differenziali*, « Annali di matematica pura ed applicata », serie II, tomo XXIV, 1886.

(³) *Ueber die Transformation der homogenen Differentialausdrücke zweiten Grades*, « Crelle's Journal », Band LXX, 1869.

D'après cette notion une variété V_n est définie intrinsèquement dans ses propriétés métriques par n variables indépendantes et par toute une classe de formes quadratiques des différentielles de ces variables, dont deux quelconques sont transformables l'une en l'autre par une transformation ponctuelle. — Par conséquence une V_n reste invariée vis-à-vis de toute transformation de ses cordonnées. Le Calcul différentiel absolu, en agissant sur des formes covariantes ou contrevariantes au ds^2 de V_n pour en dériver d'autres de même nature, est lui aussi dans ses formules et dans ses résultats indépendant du choix des variables indépendantes. — Étant de la sorte essentiellement attaché à V_n, il est l'instrument naturel de toutes les recherches, qui ont pour objet une telle variété, ou dans lesquelles on rencontre comme élément caractéristique une forme quadratique positive des différentielles de n variables ou de leurs dérivées.

L'exposition sommaire, que nous allons donner ici de ces méthodes et de leurs applications, a pour but de convaincre les lecteurs des avantages, qu'ils présentent et qui nous semblent grands et évidents; et de diminuer, autant que cela se peut, à ceux, qui auraient envie de les appliquer à leur tour, les efforts, qu'exige la pratique de tout instrument nouveau. — Nous pensons que, après avoir surmonté les difficultés de l'initiation, on se convaincra aisément que la généralité, qu'ils consentent, en éloignant de toute question les éléments hétérogènes, qu'on introduit en s'attachant à un système déterminé de variables, contribue non seulement à l'élégance, mais aussi à l'agilité et à la perspicuité des demonstrations et des conclusions.

CHAPITRE I.

ALGORITHME DU CALCUL DIFFÉRENTIEL ABSOLU [1]

1. - Transformations ponctuelles et systèmes de fonctions.

Désignons par T une transformation de variables tout à fait générale

$$x_i = x_i(y_1, y_2, ..., y_n) \tag{1}$$

biunivoque et régulière dans le domaine, que nous aurons à considérer; par Ω un système de plusieurs fonctions $(f_1, f_2, ..., f_p)$ des variables x; fonctions, que nous appellerons *éléments* du système Ω. Désignons aussi par S une substitution, qui porte sur le système Ω en substituant à ses éléments f_1, f_2, ..., f_p respectivement des fonctions g_1, g_2, ..., g_p des variables y.

Concevons S comme fonction de T; c'est-à-dire supposons que, pour chaque transformation (1), qui porte sur les variables indépendantes, on ait une substitution bien déterminée S; et que S considérée comme fonction de T soit assujettie aux conditions suivantes:

1) Si l'on prend pour T la substitution identique, S coïncide aussi avec cette substitution.

2) Si l'on désigne par T, T_1, T_2 trois transformations (1), par S, S_1, S_2 les S correspondantes, et si l'on a $T \equiv T_2 \cdot T_1$, on a aussi $S \equiv S_2 \cdot S_1$.

Il y a bien de manières différentes de déterminer S comme fonction de T. — On peut, par exemple (et c'est ce que l'on fait généralement), prendre comme éléments du système transformé ceux, que l'on tire des éléments du système primitif en y substituant aux variables x leurs expressions par les y. — Nous dirons dans ce cas que le système considéré *se transforme par invariance*; ou qu'il est *invariant*.

Mais bien souvent la nature d'un système donné peut nous faire préférer une autre loi de transformation. Par exemple, si f_1, f_2, ..., f_n sont les dérivées d'une fonction f par rapport respectivement a x_1, x_2, ..., x_n, on trouvera naturel de prendre comme éléments du système transformé les dérivées (f_1), (f_2), ..., (f_n) de la fonction (f), qui est la trans-

---

[1] G. RICCI, *Delle derivazioni covarianti e contravarianti*, « Studi editi dall'Università di Padova, ecc. », Padova, 1888. *Lezioni sulla teoria delle superficie*, Padova, presso i fratelli Drucker, 1898.

formée de f par la transformation T; au lieu des expressions, que l'on obtient de $f_1, f_2, \ldots, f_p$ en les transformant par T.

La substitution S sera dans ce cas définie par les formules

$$(f_r) = \sum_{1}^{n} {}_s f_s \frac{\partial x_s}{\partial y_r}, \qquad (r = 1, 2, \ldots, n), \tag{2}$$

dans lesquelles les fonctions $f_1, f_2, \ldots, f_n$ doivent être exprimées par les variables y.

Si le système donné résulte d'une fonction f et de toutes ses dérivées jusqu'à un ordre donné, on peut exiger qu'il soit composé de la même manière après la transformation (1). — Dans ce cas les formules analytiques, qui représentent la loi de transformation du système sont assez compliquées. — La fonction f se transforme par invariance, ses dérivées premières d'après les formules (2), les dérivées du deuxième ordre d'après les formules

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_r \partial x_s} = \sum_{1}^{n} {}_{pq} \frac{\partial^2 f}{\partial x_p \partial x_q} \frac{\partial x_p}{\partial y_r} \frac{\partial x_q}{\partial y_s} + \sum_{1}^{n} {}_p \frac{\partial f}{\partial x_p} \frac{\partial^2 x_p}{\partial y_r \partial y_s}; \tag{3}$$

etc.

On a aussi des exemples remarquables en considérant les coefficients d'une expression linéaire et homogène dans les dérivées du premier ordre d'une fonction, telle que

$$\sum_{1}^{n} {}_r A^{(r)} \frac{\partial f}{\partial x_r}; \tag{4}$$

et ceux d'une expression quadratique et homogène dans les différentielles des variables indépendantes, telle que

$$\sum_{1}^{n} {}_{rs} a_{rs} dx_r dx_s. \tag{5}$$

Lorsqu'on exécute une transformation (1) sur les variables indépendantes, on passe en même temps des expressions (4) et (5) à leurs transformées

$$\sum_{1}^{n} {}_r B^{(r)} \frac{\partial f}{\partial y_r},$$

$$\sum_{1}^{n} {}_{rs} b_{rs} dy_r dy_s;$$

les nouveaux coefficients $B^{(r)}$ et b_{rs} étant donnés respectivement par les formules

$$B^{(r)} = \sum_{1}^{n}{}_s A^{(s)} \frac{\partial y_r}{\partial x_s}, \tag{4'}$$

$$b_{rs} = \sum_{1}^{n}{}_{pq} a_{pq} \frac{\partial x_p}{\partial y_r} \frac{\partial x_q}{\partial y_s}. \tag{5'}$$

Il est donc bien naturel d'exécuter sur les systèmes des coefficients des expressions (4) et (5) les substitutions (4') et (5'), chaque fois que l'on exécute une transformation (1) sur les variables indépendantes.

Nous concluons qu'il est souvent indiqué de substituer à la loi d'invariance d'autres lois de transformation ayant leur raison d'être dans la nature même des systèmes, que l'on a à étudier.

2. - Systèmes covariantes et contrevariantes. Exemples divers.

Parmi les lois de transformation, que l'on peut concevoir, il y en a deux, qui jouent un rôle prépondérant dans l'Analyse mathématique; ce sont les lois, que nous appelons de *covariance* et de *contrevariance* s'appliquant aux systèmes *multiples*, dont nous allons nous occuper. — Nous disons qu'un système de fonctions de n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ est m^{uple}, ou d'ordre m, si l'on a un élément déterminé du système pour chaque disposition avec répétition m à m des indices $1, 2, \ldots, n$. Une seule fonction sera pour nous, comme cas limite, un système d'ordre 0. — Pour $m = 1, 2, 3, \ldots$ on aura en particulier les systèmes *simples* ou *du premier ordre*, *doubles* ou *du deuxième ordre*, etc. — Les dérivées du premier ordre d'une fonction et les coefficients d'une expression linéaire et homogène par rapport à ces dérivées nous donnent des exemples de systèmes de premier ordre. — On aura des systèmes doubles en considérant les dérivées du deuxième ordre d'une fonction, ou les coefficients d'une quadrique dans les différentielles des variables indépendantes; et, en général, un système d'ordre m sera constitué, par exemple, par les dérivées du même ordre d'une fonction arbitraire.

Nous dirons qu'un système d'ordre m est *covariant* (et dans ce cas nous désignerons ses éléments par des symboles tels que $X_{r_1 r_2 \ldots r_m}$, $r_1, r_2, \ldots, r_m$ pouvant prendre chacun toutes les valeurs $1, 2, \ldots, n$), si les éléments $Y_{r_1 r_2 \ldots r_m}$ du système transformé sont données par les formules

$$Y_{r_1 r_2 \ldots r_m} = \sum_{1}^{n}{}_{s_1 s_2 \ldots s_m} X_{s_1 s_2 \ldots s_m} \frac{\partial x_{s_1}}{\partial y_{r_1}} \frac{\partial x_{s_2}}{\partial y_{r_2}} \cdots \frac{\partial x_{s_m}}{\partial x_{r_m}}. \tag{6}$$

Nous désignerons au contraire par des symboles tels que $X^{(r_1 r_2 \dots r_m)}$ les éléments d'un système *contrevariant*, c'est-à-dire d'un système, dont la transformation est représentée par les formules

$$Y^{(r_1 r_2 \dots r_m)} = \sum_{1}^{n}{}_{s_1 s_2 \dots s_m} X^{(s_1 s_2 \dots s_m)} \frac{\partial y_{r_1}}{\partial x_{s_1}} \frac{\partial y_{r_2}}{\partial x_{s_2}} \cdots \frac{\partial y_{r_m}}{\partial x_{s_m}}, \tag{7}$$

les éléments X et Y se rapportant respectivement aux variables x et y. — Et c'est bien entendu que dans les formules (6) et (7) on conçoit tout exprimé en fonction des variables y. —

En désignant par X une fonction quelconque des variables x, par Y la même fonction exprimée par les y, la formule

$$X = Y$$

peut être regardée autant comme un cas particulier des (6) que comme un cas particulier des (7). — C'est à cause de cela qu'un système d'ordre 0, bien qu'étant invariant, peut être considéré aussi comme cas limite des systèmes covariants ou des systèmes contrevariants.

Dans la suite en introduisant un symbole tel que $X_{r_1 r_2 \dots r_m}$ (ou $X^{(r_1 r_2 \dots r_m)}$) nous entendrons qu'il se rapporte toujours à un élément quelconque d'un système covariant (ou contrevariant) d'ordre m, que nous appellerons système $X_{r_1 r_2 \dots r_m}$ (ou système $X^{(r_1 r_2 \dots r_m)}$).

Les dérivées du premier ordre d'une fonction et les coefficients d'une forme quadratique φ de différentielles, d'après les formules (2) et (5'), nous donnent des exemples de systèmes covariants respectivement du premier et du deuxième ordre. — On a au contraire des exemples de systèmes contrevariants en considérant les coefficients d'une expression linéaire dans les dérivées du premier ordre d'une fonction et les coefficients de la forme réciproque de φ. De même les formules

$$dy_r = \sum_{1}^{n}{}_s dx_s \frac{\partial y_r}{\partial x_s}$$

nous disent que les différentielles des variables indépendantes sont les éléments d'un système simple contrevariant.

Les systèmes, qui sont constitués par les dérivées d'un ordre $m > 1$ d'une fonction des variables indépendantes (comme il résulte par exemple des formules (3) pour $m = 2$) ne sont ni covariants ni contrevariants. — Les lois de transformation de ces systèmes sont bien complexes, et c'est là la source des difficultés, qu'on rencontre dans le Calcul Différentiel ordinaire pour transformer les expressions aux dérivées partielles d'ordre supérieur au premier.

Nous verrons que l'on peut éviter ces difficultés en substituant à la dérivation ordinaire une opération, qui peut la remplacer.

Il est utile de remarquer que les systèmes covariants ou contrevariants de la théorie des formes algébriques sont des cas particuliers de ceux, que nous venons de définir. En effet les transformations (1), que l'on considère dans la théorie des formes algébriques, sont linéaires et homogènes; et lorsqu'une transformation de cette nature agit sur les variables indépendantes, les coefficients des formes ponctuelles se transforment d'après les formules (6) et ceux des formes réciproques d'après les (7).

3. - Addition, multiplication, composition des systèmes. Quadrique fondamentale. Systèmes réciproques.

Addition. - Si $X_{r_1 r_2 \dots r_m}$, $\Xi_{r_1 r_2 \dots r_m}$ sont deux systèmes covariants d'un même ordre m,

$$Y_{r_1 r_2 \dots r_m} = X_{r_1 r_2 \dots r_m} + \Xi_{r_1 r_2 \dots r_m}$$

est aussi un système covariant d'ordre m. Nous dirons qu'il est la *somme* des deux systèmes considérés. — D'une manière analogue on définit la somme de deux systèmes contrevariants d'ordre m, qui sera aussi un système contrevariant de cet ordre.

Multiplication. - Si $X_{r_1 r_2 \dots r_m}$, $\Xi_{s_1 s_2 \dots s_p}$ sont deux systèmes covariants respectivement des ordres m et p,

$$Y_{r_1 r_2 \dots r_m s_1 s_2 \dots s_p} = X_{r_1 r_2 \dots r_m} \cdot \Xi_{s_1 s_2 \dots s_p}$$

est un système covariant d'ordre $m + p$, que l'on appellera *produit* des deux systèmes. — Il suffit de substituer le mot *covariant* par le mot *contrevariant* pour avoir la définition du produit de deux systèmes contrevariants d'ordre quelconque.

Les définitions, que nous venons de donner, s'étendent naturellement à la somme et au produit de plusieurs systèmes ayant la même nature, covariante ou contrevariante.

Composition. - Si $X_{r_1 r_2 \dots r_m s_1 s_2 \dots s_p}$ est un système covariant quelconque d'ordre $m + p$, et $\Xi^{(s_1 s_2 \dots s_p)}$ un système contrevariant d'ordre p, le système d'ordre m

$$Y_{r_1 r_2 \dots r_m} = \sum_{s_1 s_2 \dots s_p}^{n} {}_{1} \Xi^{(s_1 s_2 \dots s_p)} X_{r_1 r_2 \dots r_m s_1 s_2 \dots s_p}$$

est covariant et d'ordre m. D'une manière analogue, étant donnés deux systèmes $X^{(r_1 r_2 \dots r_m\, s_1 s_2 \dots s_p)}$, $\Xi_{s_1 s_2 \dots s_p}$, on en tire un système contrevariant d'ordre m en posant

$$Y^{(r_1 r_2 \dots r_m)} = \sum\nolimits_{s_1 s_2 \dots s_p} X^{(r_1 r_2 \dots r_m\, s_1 s_2 \dots s_p)}\, \Xi_{s_1 s_2 \dots s_p}\,.$$

Nous dirons que le système $Y_{r_1 r_2 \dots r_m}$ (où $Y^{(r_1 r_2 \dots r_m)}$) est *composé* des deux systèmes considérés.

En particulier, pour $m = 0$, on a un système d'ordre 0 c'est-à-dire un invariant, qui résulte de la composition de deux systèmes de nature opposée et de même ordre.

Le lecteur pourra aisément se représenter ces propositions, dont l'usage est fréquent dans le calcul, comme dérivées d'un seul principe, celui de la *saturation des indices.*

Quadrique ou forme fondamentale.

Les méthodes de Calcul Différentiel absolu reposent essentiellement sur la considération d'une forme quadratique positive dans les différentielles de n variables indépendantes $x_1, x_2, \dots, x_n$; c'est-à-dire d'une expression du type

$$\varphi = \sum_{1}^{n}{}_{rs}\, a_{rs}\, dx_r\, dx_s\,.$$

Les coefficients de cette expression, que nous appellerons *quadrique* ou *forme fondamentale*, se rencontrent partout dans nos formules, et y portent une simplicité et une symétrie très remarquables.

Systèmes réciproques.

Si l'on désigne par $a^{(rs)}$ les coefficients de la forme réciproque de φ, on a les identités

$$a^{(rs)} = \sum_{1}^{n}{}_{pq}\, a^{(rp)} a^{(sq)} a_{pq}\,.$$

En général, étant donné un système covariant d'ordre m, $X_{r_1 r_2 \dots r_m}$, on en tire, à l'aide de la forme fondamentale, un système contrevariant du même ordre en posant

$$X^{(r_1 r_2 \dots r_m)} = \sum_{1}^{n}{}_{s_1 s_2 \dots s_m}\, a^{(r_1 s_1)} a^{(r_2 s_2)} \dots a^{(r_m s_m)} X_{s_1 s_2 \dots s_m}\,. \tag{8}$$

De même, si l'on part d'un système contrevariant $\Xi^{(r_1 r_2 \dots r_m)}$ on en tire un système covariant en posant

$$(9) \qquad \Xi_{r_1 r_2 \dots r_m} = \sum_{s_1 s_2 \dots s_m}^{n} {}_{\!1} \, a_{r_1 s_1} a_{r_2 s_2} \dots a_{r_m s_m} \Xi^{(s_1 s_2 \dots s_m)} .$$

La succession des opérations (8) et (9) est bien l'identité, et c'est à cause de cela que nous appelons *réciproques* par rapport à la forme fondamentale deux systèmes tels que $X^{(r_1 r_2 \dots r_m)}$ et $X_{r_1 r_2 \dots r_m}$, ou $\Xi_{r_1 r_2 \dots r_m}$ et $\Xi^{(r_1 r_2 \dots r_m)}$.

Des formules (8) et (9) on tire aisément l'identité

$$(10) \qquad \sum_{r_1 r_2 \dots r_m}^{n} {}_{\!1} \, X^{(r_1 r_2 \dots r_m)} \Xi_{r_1 r_2 \dots r_m} = \sum_{r_1 r_2 \dots r_m}^{n} {}_{\!1} \, X_{r_1 r_2 \dots r_m} \Xi^{(r_1 r_2 \dots r_m)} ,$$

qui nous dit que:

« Tout invariant composé d'un système covariant et d'un système contrevariant du même ordre est identique à l'invariant composé de leurs réciproques ».

La forme fondamentale étant fixée, il suffit de donner un système covariant ou contrevariant pour que leurs réciproques résultent déterminés avec eux. Ce fait trouve son expression matérielle dans la convention, que nous avons déjà appliquée dans les exemples donnés, et d'après laquelle la même lettre affectée de m indices représente un élément quelconque d'un système covariant d'ordre m ou de son réciproque, selon que ses indices sont placés en bas ou en haut de la lettre.

Nous désignerons dorénavant par a le discriminant de la forme fondamentale. Quelle que soit cette forme, on peut en déduire deux systèmes d'ordre n réciproques par rapport à elle, dont les propriétés sont bien remarquables, et qu'il est souvent utile d'introduire dans les calculs. Fixons le signe à donner a $\sqrt{a}$ pour un système déterminé de variables indépendantes $x_1, x_2, \dots, x_n$, et convenons en même temps que ce signe ne change pas, lorsqu'une substitution (1) agit sur les variables indépendantes, si le déterminant jacobien des x par rapport aux y est positif; qu'il change, si ce déterminant est négatif. Le système d'ordre n, dont les éléments $\varepsilon_{r_1 r_2 \dots r_n}$ sont nuls, si les indices $r_1, r_2, \dots, r_n$ ne sont pas tous différents, et égaux à $\sqrt{a}$ ou à $-\sqrt{a}$, selon que, ces indices étant tous différents, la classe de la permutation $(r_1 r_2 \dots r_n)$ est paire ou impaire par rapport à la permutation fondamentale $(1, 2, \dots, n)$, est covariant. — Les éléments $\varepsilon^{(r_1 r_2 \dots r_n)}$ du système réciproque sont respectivement ègaux à zéro où à $\pm 1 : \sqrt{a}$.

Si l'on désigne par $\Delta(z_1 z_2 \dots z_n)$ le jacobien de n fonctions $z_1, z_2, \dots, z_n$ pris par rapport à n variables $x_1, x_2, \dots, x_n$ et divisé par $\sqrt{a}$, on a l'identité

$$\Delta(z_1 z_2 \dots z_n) \equiv \sum_{1}^{n}{}_{r_1 r_2 \dots r_n} \varepsilon^{(r_1 r_2 \dots r_n)} \frac{\partial z_1}{\partial x_{r_1}} \frac{\partial z_2}{\partial x_{r_2}} \dots \frac{\partial z_n}{\partial x_{r_n}},$$

qui, en rendant intuitive la propriété invariantive de Δ, rend en même temps cet invariant accessible aux méthodes du Calcul différentiel absolu.

Nous désignerons le système $\varepsilon_{r_1 r_2 \dots r_n}$ (ou $\varepsilon^{(r_1 r_2 \dots r_n)}$) par le nom de système covariant (ou contrevariant) E.

4. - Applications à l'analyse vectorielle [5].

Nous allons donner dès à présent un exemple important d'application du Calcul différentiel absolu, en exposant les règles du calcul vectoriel en coordonnées générales.

Désignons par y_1, y_2, y_3 des coordonnées cartésiennes orthogonales quelconques dans notre espace, par (R) un vecteur dans ce même espace. — Introduisons le ds^2 de l'espace comme forme fondamentale φ et nous aurons en coordonnées y

$$\varphi = dy_1^2 + dy_2^2 + dy_3^2 ;$$

et en coordonnées générales

$$\varphi = \sum_{1}^{3}{}_{rs} a_{rs} dx_r dx_s .$$

Représentons par l_r $(r = 1, 2, 3)$ les directions positives des lignes coordonnées, par n_r $(r = 1, 2, 3)$ celles des normales aux surfaces coordonnées de paramètre x_r, ces directions étant fixées de manière que, pour un déplacement infiniment petit dans le sens l_r ou n_r, on ait un incrément positif de la variable x_r.

Puisque la propriété caractéristique des substitutions orthogonales peut s'énoncer en disant qu'elles sont en même temps covariantes et contrevariantes, les composantes d'un vecteur (R) selon trois axes orthogonaux peuvent être considérées en même temps comme éléments d'un système covariant ou contrevariant vis-à-vis de tout changement de ces

---

[5] Les résultats contenus dans ce paragraphe sont exposés ici pour la première fois d'une manière systématique et complète.

axes. — Nous allons déterminer pour des coordonnées générales x_1, x_2, x_3 les expressions des projections orthogonales $\overline{R}_{l_r}$ et $\overline{R}_{n_r}$ et des composantes R_{l_r} et R_{n_r} selon les tangentes aux lignes et selon les normales aux surfaces coordonnées.

Dans ce but prenons à considérer deux systèmes réciproques X_r, $X^{(r)}$, dont les éléments coïncident, dans le cas des coordonnées cartésiennes y, avec les projections de (R) sur les axes coordonnés, projections, que l'on pourra désigner par des symboles Y_r ou $Y^{(r)}$.

Puisque la projection sur une droite quelconque d'un polygone fermé est nulle, en considérant les polygones ayant pour côtés R et ses composantes selon les axes y_1, y_2, y_3, ou bien selon les directions l_r, ou n_r, on a les formules

$$\overline{R}_{l_r} = \sum_1^3{}_s \, Y_s \cos(l_r, y_s) , \tag{11}$$

$$\overline{R}_{n_r} = \sum_1^3{}_s \, Y^{(s)} \cos(n_r, y_s) , \tag{12}$$

$$Y^{(s)} = \sum_1^3{}_r \, R_{l_r} \cos(l_r, y_s) , \tag{13}$$

$$Y_s = \sum_1^3{}_r \, R_{n_r} \cos(n_r, y_s) ; \tag{14}$$

ou bien, en y substituant aux cosinus directeurs des l_r et n_r leurs expressions bien connues,

$$\sqrt{a_{rr}} \cdot \overline{R}_{l_r} = \sum_1^3{}_s \, Y_s \frac{\partial y_s}{\partial x_r} , \tag{11'}$$

$$\sqrt{a^{(rr)}} \cdot \overline{R}_{n_r} = \sum_1^3{}_s \, Y^{(s)} \frac{\partial x_r}{\partial y_s} , \tag{12'}$$

$$Y^{(s)} = \sum_1^3{}_r \frac{1}{\sqrt{a_{rr}}} R_{l_r} \frac{\partial y_s}{\partial x_r} , \tag{13'}$$

$$Y_s = \sum_1^3{}_r \frac{1}{\sqrt{a^{(rr)}}} R_{n_r} \frac{\partial x_r}{\partial y_s} . \tag{14'}$$

D'après la nature covariante et respectivement contrevariante des systèmes X_r et $X^{(r)}$ on a les formules

$$X_r = \sum_1^3{}_s \, Y_s \frac{\partial y_s}{\partial x_r} ,$$

$$X^{(r)} = \sum_1^3{}_s \, Y^{(s)} \frac{\partial x_r}{\partial y_s} ,$$

et aussi les formules équivalentes

$$Y^{(s)} = \sum_1^3{}_r\, X^{(r)} \frac{\partial y_s}{\partial x_r},$$

$$Y_s = \sum_1^3{}_r\, X_r \frac{\partial x_r}{\partial y_s};$$

et leur comparaison avec (11′), (12′), (13′) et (14′) donne

$$R_{l_r} = X_r : \sqrt{a_{rr}}, \tag{15}$$

$$R_{n_r} = X^{(r)} : \sqrt{a^{(rr)}}, \tag{16}$$

$$R_{l_r} = \sqrt{a_{rr}} \cdot X^{(r)}, \tag{17}$$

$$R_{n_r} = \sqrt{a^{(rr)}} \cdot X_r. \tag{18}$$

On peut en déduire que:

Deux systèmes réciproques simples X_r et $X^{(r)}$ étant donnés, on peut, quelles que soient les coordonnées x_1, x_2, x_3 de l'espace, regarder les expressions $X_r : \sqrt{a_{rr}}$ et $X^{(r)} : \sqrt{a^{(rr)}}$ comme celles des projections orthogonales d'un même ve teur sur les tangentes aux lignes coordonnées x_r et sur les normales aux surfaces coordonnées x_r, pendant que les expressions $\sqrt{a_{rr}} \cdot X^{(r)}$ et $\sqrt{a^{(rr)}} \cdot X_r$ représentent les composantes du même vecteur respectivement selon les mêmes lignes et les mêmes normales.

5. - Dérivation covariante et contrevariante selon une forme fondamentale. Conservation des règles du calcul différentiel ordinaire.

Dérivation covariante. – M. CHRISTOFFEL (6) a remarqué le premier que si un système d'ordre m, $X_{r_1 r_2 \ldots r_m}$, est covariant, le système d'ordre $m+1$

$$X_{r_1 r_2 \ldots r_m r_{m+1}} = \frac{\partial X_{r_1 r_2 \ldots r_m}}{\partial x_{r_{m+1}}} - \sum_1^m{}_l \sum_1^n{}_q \begin{Bmatrix} r_l\, r_{m+1} \\ q \end{Bmatrix} X_{r_1 r_2 \ldots r_{l-1}\, q\, r_{l+1} \ldots r_m} \tag{19}$$

est aussi covariant. — Nous appellons *dérivation covariante* selon la forme fondamentale φ l'operation, par laquelle, cette forme aidant, on passe

---

(6) *Ueber die Transformation der homogenen Differentialausdrücke zweiten Grades*, « Crelle's Journal », Band LXX, 1869.

d'un système donné $X_{r_1 r_2 \dots r_m}$ au système $X_{r_1 r_2 \dots r_m r_{m+1}}$; et nous disons que celui-ci est *le premier système dérivé de celui-là selon la forme fondamentale.*

Pour $m = 0$, on a, comme cas-limite, que le premier système dérivé d'un système d'ordre zéro X résulte des dérivées de cette fonction, quelque soit la forme fondamentale, et l'on pose par suite

$$(19') \qquad X_r = \frac{\partial X}{\partial x_r} .$$

De même on obtient le premier système dérivé d'un système simple X_r en posant

$$(19'') \qquad X_{rs} = \frac{\partial X_r}{\partial x_s} - \sum_1^n {}_q \begin{Bmatrix} rs \\ q \end{Bmatrix} X_q ,$$

et celui d'un système double X_{rs} en posant

$$(19''') \qquad X_{rst} = \frac{\partial X_{rs}}{\partial x_t} - \sum_1^n {}_q \left[\begin{Bmatrix} r\,t \\ q \end{Bmatrix} X_{qs} + \begin{Bmatrix} s\,t \\ q \end{Bmatrix} X_{rq} \right] .$$

Pour $X_{rs} \equiv a_{rs}$, on a les identités

$$a_{rst} \equiv 0 ,$$

que nous disent que:

Le premier système dérivé selon une forme fondamentale φ du système de ses coefficients est identiquement nul.

En appliquant les formules (19) au système covariant E défini dans le paragraphe 3, on vérifie que:

Le premier système dérivé du système covariant E selon une quadrique fondamentale quelconque est nul.

Si une lettre à m indices représente un système covariant, il sera entendu en général que la même lettre avec un indice en plus représente son premier système dérivé selon la forme fondamentale considérée.

Il va sans dire que par p dérivations covariantes selon φ on peut passer d'un système donné d'ordre m à un système d'ordre $m + p$ (p étant un nombre entier et positif quelconque) qui sera le $p^{\text{ième}}$ système dérivé de celui-ci selon la forme fondamentale. —

Par exemple, en partant d'un système d'ordre 0, c'est-à-dire d'une fonction X, et en appliquant successivement les formules (19'), (19'') etc., on peut en tirer le premier, le deuxième système dérivé etc. En étendant aux ordres supérieurs la locution en usage pour le premier ordre, on appelle quelquefois les éléments X_{rs}, X_{rst} etc., *dérivées covariantes* du deuxième ordre, du troisième ordre etc., de la fonction X.

Des propriétés bien connues des symboles de CHRISTOFFEL et des (19″) on déduit que:

Si un système simple covariant résulte des dérivées d'une fonction par rapport aux variables indépendantes, son premier système dérivé selon une forme fondamentale arbitraire est symétrique; et réciproquement.

D'après les formules (19), les dérivées des éléments d'un système covariant quelconque sont des fonctions linéaires de ces éléments et de ceux de son premier système dérivé selon une forme fondamentale quelconque. — On peut donc dans les calculs éliminer partout les dérivées des éléments d'un système covariant donné, en introduisant les éléments de son premier système dérivé. — Plus en général on pourra partout dans les calculs éliminer les dérivées des différents ordres des éléments d'un système covariant d'ordre quelconque m (et en particulier pour $m = 0$ celles d'une fonction quelconque), en introduisant les éléments de ses systèmes dérivés des mêmes ordres. — On a en procédant ainsi l'avantage (§ 2) d'avoir affaire seulement à des systèmes, qui se transforment d'après une loi uniforme et bien plus simple que celles, qui régissent les transformations des dérivées des différents ordres d'un système covariant (et en particulier d'une fonction), lois, que l'on pourrait déduire par la dérivation ordinaire des formules (6).

On verra plus loin que c'est précisément à la loi de transformation des systèmes covariants que l'on doit la nature invariantive des formules et des équations, que l'on établit par les procédés du Calcul différentiel absolu.

Dérivation contrevariante. — Un système contrevariant $X^{(r_1 r_2 \ldots r_m)}$ étant donné, on peut à l'aide de la quadrique fondamentale passer d'abord à son réciproque par rapport à cette forme, $X_{r_1 r_2 \ldots r_m}$, puis de celui-ci à son premier système dérivé selon φ $X_{r_1 r_2 \ldots r_m r_{m+1}}$, et enfin au système $X^{r_1 r_2 \ldots r_m r_{m+1}}$ réciproque de ce dernier. — On appelle *dérivation contrevariante* selon φ l'opération, par laquelle, cette forme aidant, on passe du système primitif $X^{(r_1 r_2 \ldots r_m)}$ au système $X^{(r_1 r_2 \ldots r_m r_{m+1})}$, qui en est le premier système dérivé selon φ.

Les éléments du premier système dérivé s'expriment en fonction des éléments du système primitif et des coefficients de la forme fondamentale par les formules

$$(20) \qquad X^{(r_1 r_2 \ldots r_m r_{m+1})} = \sum_1^n{}_t\, a^{(t r_{m+1})} \left\{ \frac{\partial X^{(r_1 r_2 \ldots r_m)}}{\partial x_t} + \sum_1^m{}_l \sum_1^n{}_q \begin{Bmatrix} tq \\ r_l \end{Bmatrix} X^{(r_1 r_2 \ldots r_{l-1} q r_{l+1} \ldots r_m)} \right\}.$$

On pourrait faire au sujet de la dérivation contrevariante et des systèmes dérivés des systèmes contrevariants des considérations tout à fait analogues à celles, que l'on vient d'exposer au sujet de la dérivation covariante et des systèmes dérivés des systèmes covariants. — Il est, par exemple, évident que, les systèmes a_{rst}, $\varepsilon_{r_1r_2\ldots r_nr_{n+1}}$ étant identiquement nuls, on peut affirmer la même chose des systèmes $a^{(rst)}$ (premier système dérivé du système $a^{(rs)}$) et $\varepsilon^{(r_1r_2\ldots r_nr_{n+1})}$ (premier système dérivé du système E contrevariant).

On peut dire en général qu'il existe comme une loi de réciprocité ou de dualité, qui permet de tirer de tout théorème ou formule de Calcul différentiel absolu un théorème ou une formule réciproque, en échangeant entre eux les mots *covariant* et *contrevariant*, et en portant les indices de la position covariante à la contrevariante et viceversa.

Règles de calcul. – Les règles bien connues, qui ont trait à la dérivation des sommes et des produits de fonctions, s'étendent de la manière la plus naturelle à la dérivation covariante ou contrevariante des systèmes. En effet, en ayant recours aux formules (19) pour la dérivation covariante des systèmes tels que

$$Y_{r_1r_2\ldots r_m} = X_{r_1r_2\ldots r_m} + \Xi_{r_1r_2\ldots r_m}\,,$$

$$Y_{r_1r_2\ldots r_m\,s_1s_2\ldots s_p} = X_{r_1r_2\ldots r_m}\,\Xi_{s_1s_2\ldots s_p}\,,$$

on parvient aux identités

$$Y_{r_1r_2\ldots r_mr_{m+1}} = X_{r_1r_2\ldots r_mr_{m+1}} + \Xi_{r_1r_2\ldots r_mr_{m+1}}\,,$$

$$Y_{r_1r_2\ldots r_m\,s_1s_2\ldots s_pr_{m+1}} = X_{r_1r_2\ldots r_mr_{m+1}}\,\Xi_{s_1s_2\ldots s_p} + X_{r_1r_2\ldots r_m}\,\Xi_{s_1s_2\ldots s_pr_{m+1}}\,;$$

et les choses se passent d'une manière analogue pour les systèmes contrevariants; et pour la dérivation des systèmes sommes d'un nombre quelconque de termes, ou produits d'un nombre quelconque de facteurs.

Considérons un système composé tel que

$$Y_{r_1r_2\ldots r_m} = \sum_{1}^{n}{}_{s_1s_2\ldots s_p}\,\Xi^{(s_1s_2\ldots s_p)}X_{r_1r_2\ldots r_ms_1s_2\ldots s_p}\,.$$

En appliquant les formules (19) et (20) on trouve pour les éléments de son premier système dérivé les expressions

$$(21)\qquad Y_{r_1r_2\ldots r_mr_{m+1}} = \sum_{1}^{n}{}_{s_1s_2\ldots s_p}\,\Xi^{(s_1s_2\ldots s_p)}\,X_{r_1r_2\ldots r_m\,s_1s_2\ldots s_pr_{m+1}}$$
$$+ \sum_{1}^{n}{}_{s_1s_2\ldots s_pt}\,\Xi^{(s_1s_2\ldots s_pt)}a_{tr_{m+1}}\,X_{r_1r_2\ldots r_ms_1s_2\ldots s_p}\,.$$

On a aussi la formule réciproque pour la dérivation des systèmes composés contrevariants.

Pour un invariant tel que

$$Y = \sum_{1}^{n}{}_{r_1 r_2 \dots r_m} \Xi^{(r_1 r_2 \dots r_m)} X_{r_1 r_2 \dots r_m} ,$$

on a

$$Y_s = \sum_{1}^{n}{}_{r_1 r_2 \dots r_m} \Xi^{(r_1 r_2 \dots r_m)} X_{r_1 r_2 \dots r_m s} + \sum_{1}^{n}{}_{r_1 r_2 \dots r_m t} \Xi^{(r_1 r_2 \dots r_m t)} a_{ts} X_{r_1 r_2 \dots r_m} ,$$

et, en substituant les systèmes $\Xi^{(r_1 r_2 \dots r_m t)}$ et $X_{r_1 r_2 \dots r_m}$ par leurs réciproques,

$$(22) \qquad Y_s = \sum_{1}^{n}{}_{r_1 r_2 \dots r_m} \left(\Xi^{(r_1 r_2 \dots r_m)} X_{r_1 r_2 \dots r_m s} + X^{(r_1 r_2 \dots r_m)} \Xi_{r_1 r_2 \dots r_m s} \right) .$$

En particulier, pour dériver un invariant, tel que

$$Y = \sum_{1}^{n}{}_r \Xi^{(r)} X_r ,$$

on a les formules

$$(22') \qquad Y_s = \sum_{1}^{n}{}_r \Xi^{(r)} X_{rs} + \sum_{1}^{n}{}_r X^{(r)} \Xi_{rs} .$$

Considérons l'invariant

$$(\Delta_1 f)^2 = \sum_{1}^{n} f^{(r)} f_r ,$$

f étant une fonction quelconque de $x_1, x_2, \dots, x_n$. On aura encore

$$\Delta_1 f \cdot \frac{\partial \Delta_1 f}{\partial x_s} = \sum_{1}^{n}{}_r f^{(r)} f_{rs} .$$

6. - Système de Riemann. Relations entre les éléments du deuxième système dérivé d'un système covariant quelconque.

Soit

$$\varphi = \sum_{rs}^{n} {}_{1}\, a_{rs} dx_r dx_s ,$$

la quadrique fondamentale et posons

$$2a_{rs,t} = \frac{\partial a_{rt}}{\partial x_s} + \frac{\partial a_{st}}{\partial x_r} - \frac{\partial a_{rs}}{\partial x_t} ,$$

$$a_{rs,tu} = \frac{\partial a_{rt,s}}{\partial x_u} - \frac{\partial a_{ru,s}}{\partial x_t} + \sum_{pq}^{n} {}_{1}\, a^{(pq)}(a_{ru,p} a_{st,q} - a_{rt,p} a_{su,q}) .$$

Les symboles $a_{rs,tu}$ sont les éléments d'un système quadruple covariant, qui a une grande importance dans la théorie des quadriques de différentielles. On les trouve dans la *Commentatio mathematica* de RIEMANN [7] (à un facteur numérique près) et c'est à cause de cela que nous désignerons ce système par le nom de *système covariant de* RIEMANN. — Les expressions $a_{rs,tu}$ furent rencontrées avant la publication du Mémoire cité du grand géomètre par M. CHRISTOFFEL [8], qui en mit en évidence les propriétés fondamentales. Il suffira ici de rappeler que le nombre de ces expressions, qui ne sont liées entre elles par aucune relation linéaire, est $N = n^2(n^2 - 1) : 12$.

En particulier, pour $n = 2$, il suffit de considérer l'expression $a_{12,12}$, ou le rapport $a_{12,12} : a$, que nous désignerons par G, et qui est l'invariant de GAUSS bien connu dans la théorie des surfaces.

Pour $n = 3$, on a $N = 6$. Dans ce cas les formules gagnent en symétrie si l'on convient que l'on peut remplacer deux indices l'un par l'autre lorsque leur différence est divisibile par 3. — Nous introduirons dès à présent cette convention une fois pour toutes. — Les éléments du système

---

(7) *Gesammelte Werke*, pag. 270.

(8) *Ueber die Transformation der homogenen Differentialausdrücke zweiten Grades*, « Crelle's Journal », B. LXX, 1869. Voir aussi, dans le même volume, les *Untersuchungen in Betreff der ganzen homogenen Functionen von n Differentialen*, par M. R. LIPSCHITZ.

covariant de RIEMANN linéairement indépendants entre eux peuvent alors tous être ramenés au type $a_{r+1\,r+2,\,s+1\,s+2}$, et en posant

$$\alpha^{(rs)} = a_{r+1\,r+2\,,\,s+1\,s+2} : a\,,$$

le système $\alpha^{(rs)}$ est contrevariant. Ce système, que nous désignerons par le nom de *système contrevariant de* RIEMANN (ou son réciproque α_{rs}) peut donc remplacer, si l'on a $n = 3$, le système covariant $a_{rs,\,tu}$.

Cela étant posé, soit $X_{r_1 r_2 \ldots r_m}$ un système covariant quelconque; et considérons son deuxième système dérivé $X_{r_1 r_2 \ldots r_m r_{m+1} r_{m+2}}$. On a les identités

$$(23)\qquad X_{r_1 r_2 \ldots r_m r_{m+1} r_{m+2}} - X_{r_1 r_2 \ldots r_m r_{m+2} r_{m+1}} = \\ = \sum_1^m{}_l \sum_1^n{}_{pq}\, a^{(pq)} a_{r_{m+1} r_{m+2},\, p r_l}\, X_{r_1 \ldots r_{l-1} q r_{l+1} \ldots r_m}\,,$$

qui nous disent que l'élément $X_{r_1 r_2 \ldots r_m r_{m+1} r_{m+2}}$ n'est pas en général identique à l'élement $X_{r_1 r_2 \ldots r_m r_{m+2} r_{m+1}}$.

En particulier, pour $n = 2$, les (23) peuvent être remplacées par les formules

$$(23')\qquad \sum_1^2{}_{rs}\, \varepsilon^{(rs)} X_{r_1 r_2 \ldots r_m rs} = G \cdot \sum_1^m{}_l \sum_1^2{}_{rs}\, a^{(rs)} \varepsilon_{r r_l} X_{r_1 \ldots r_{l-1} s r_{l+1} \ldots r_m}\,,$$

et, pour $n = 3$, par

$$(23'')\qquad \sum_1^3{}_{st}\, \varepsilon^{(rst)} X_{r_1 r_2 \ldots r_m st} = \sum_1^2{}_{qst}\, a^{(qs)} \alpha^{(rl)} \sum_1^3{}_l\, \varepsilon_{r_l st} X_{r_1 \ldots r_{l-1} q r_{l+1} \ldots r_m}\,.$$

Si l'expression de la quadrique fondamentale peut se réduire à la forme $\sum_i dx_i^2$, le système covariant de RIEMANN est identiquement nul; et dans ce cas les formules (23) nous disent que:

« *Pour que un système $X_{r_1 r_2 \ldots r_m r_{m+1}}$ soit le premier système dérivé d'un système d'ordre m, il est nécessaire et il suffit que les éléments $X_{r_1 r_2 \ldots r_m r_{m+1} r_{m+2}}$* et *$X_{r_1 r_2 \ldots r_m r_{m+2} r_{m+1}}$ soient identiques* ».

7. - Caractère invariant des équations, que l'on rencontre en Calcul différentiel absolu.

Les équations (6), qui définissent la loi de transformation des systèmes covariants, nous disent qu'un système covariant quelconque est, ou n'est pas, identiquement nul, indépendamment du choix des variables x_1,

$x_2, \ldots, x_n$. — C'est bien cette propriété que l'on traduit, en disant qu'un système d'équation tel que

$$X_{r_1 r_2 \ldots r_m} = 0\,, \tag{24}$$

a un caractère invariantif ou absolu. — On peut dire la même chose des systèmes d'équations du type

$$X^{(r_1 r_2 \ldots r_m)} = 0\,,$$

mais il n'y a aucun intérêt à les considérer à part, puisqu'on peut les reconduire au type (24), en passant du système $X^{(r_1 r_2 \ldots r_m)}$ à son réciproque. — En effet (formules (8) et (9)) deux systèmes réciproques sont, ou ne sont pas, identiquement nuls ensemble.

Lorsqu'on se pose *ex-novo* un certain problème, il suffit de supposer ses éléments déterminatifs exprimés en variables tout à fait générales, et de substituer la dérivation covariante (selon une forme fondamentale presque toujours indiquée, par la nature de la question) à la dérivation ordinaire, pour que les équations du problème se présentent sans aucun effort sous forme invariantive. — Comme nous le verrons dans plusieurs applications, c'est là le grand chemin, qu'il faut suivre, lorsqu'il s'agit de théories générales, et lorsqu'on a pour but une exposition systématique de ces théories.

Mais bien souvent, en possédant déjà les équations (ε) du problème exprimées en certaines variables y, on veut les transformer en variables générales sans répéter pour ces variables les procédés, qui ont conduit aux équations (ε). — Il suffit pour cela de déterminer en variables générales un système X covariant ou contrevariant, dont les éléments exprimés en variables y coïncident, à des facteurs près, avec les premiers membres des équations (ε). — Il est en effet évident que, en supposant que les seconds membres des équations (ε) soient nuls, on aura leurs transformées en coordonnées générales en égalant à zéro les éléments du système X.

Certainement cette méthode ne peut pas réussir dans tous les cas, mais elle conduit bien souvent au but d'une manière rapide et facile. C'est ce qui arrive particulièrement, comme nous le verrons, pour les équations de la Physique mathématique; à tel point que l'on est presque étonné de ce que, pour atteindre le même but, on ait autrefois parcouru des chemins bien difficiles et détournés.

CHAPITRE II.

LA GÉOMÉTRIE INTRINSÈQUE COMME INSTRUMENT DE CALCUL [9]

1. - Généralités sur les systèmes orthogonaux de congruences dans un espace quelconque.

Dans ce chapitre nous aurons recours au langage géométrique en considérant la forme fondamentale φ comme le ds^2 d'une variété V_n à n dimensions.

Cela étant posé, considérons un système d'équations tel que

$$\frac{dx_1}{\lambda^{(1)}} = \frac{dx_2}{\lambda^{(2)}} = \dots = \frac{dx_n}{\lambda^{(n)}}, \tag{1}$$

en désignant par $\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}, \dots, \lambda^{(n)}$ des fonctions des variables $x_1, x_2, \dots, x_n$ arbitrairement données, mais régulières et qui ne s'annulent pas toutes à la fois dans un certain champ C.

Ces équations définissent dans la variété V_n une congruence de lignes régulière dans C, et c'est à ce champ que nous bornerons nos considérations.

Si l'on regarde le système des $\lambda^{(r)}$ comme contrevariant, et l'on se rappelle que le système des différentiels des variables indépendantes l'est aussi, on reconnaît la nature invariantive des équations (1). — Comme ces équations ne changent pas en multipliant les λ par un même facteur nous supposerons ce facteur préalablement déterminé de manière que l'on ait

$$\sum_{rs}{}_1^n a_{rs}\lambda^{(r)}\lambda^{(s)} = \sum_1^n \lambda^{(r)}\lambda_r = 1 \quad [10]. \tag{2}$$

Nous dirons alors que le système $\lambda^{(r)}$ est le *système coordonné contrevariant* de la congruence représentée par les équations (1); et que son réciproque λ_r en est le *système coordonné covariant.*

---

[9] Cfr. G. RICCI, *Sulla teoria degli iperspazi*, « Rendiconti della R. Accademia dei Lincei », 24 Nov. 1895, et aussi *Dei sistemi di congruenze ortogonali in una varietà qualunque*, « Memorie della R. Accademia dei Lincei », 1896.

[10] Dans le champ réel il est toujours possible de satisfaire à cette équation, parce que nous supposons que la forme fondamentale soit positive.

Désignons par ds l'élément d'arc d'une ligne quelconque de la congruence; c'est-à-dire la valeur positive de $\sqrt{\varphi}$; et il résultera des formules (1) et (2) que ds est la valeur absolue des rapports (1). On aura donc en général

$$(1') \qquad \pm \frac{dx_r}{ds} = \lambda^{(r)}, \qquad (r = 1, 2, \ldots, n);$$

et si l'on prendra, comme nous le ferons en suite, le signe positif, on déterminera pour chaque point de V_n une direction, que nous appellerons *direction positive*, de la ligne de la congruence, qui passe par ce point.

On reconnaît aisément que, si la variété V_n est euclidéenne, et les variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ en sont des coordonnées cartésiennes orthogonales, les $\lambda^{(r)}$ (coïncidentes dans ce cas avec les λ_r) ne sont que les cosinus directeurs des lignes de la congruence.

D'après la définition, que Beltrami a donné pour l'angle α, que font entre elles deux directions dx_r et δx_r sortant d'un même point P de V_n, on a

$$\cos\alpha = \frac{\sum_{rs}^{n}{}_{1}\, a_{rs}\, dx_r\, \delta x_s}{\sqrt{\sum_{rs}^{n}{}_{1}\, a_{rs} dx_r dx_s} \cdot \sqrt{\sum_{rs}^{n}{}_{1}\, a_{rs} \delta x_r \delta x_s}}.$$

Si l'on a deux congruences définies par leurs systèmes coordonnés contrevariants $\lambda^{(r)}$ et $\mu^{(r)}$, et l'on désigne par α l'angle, que font entre elles les lignes de ces congruences sortant de P, on aura d'après cette formule et les (1'),

$$(3) \qquad \cos\alpha = \sum_{r}{}_{1}^{n} \lambda^{(r)} \mu_r,$$

(ou bien, au lieu du second membre, $\sum_{r}{}_{1}^{n} \mu^{(r)} \lambda_r$, ou $\sum_{rs}{}_{1}^{n} a_{rs} \lambda^{(r)} \mu^{(s)}$, ou enfin $\sum_{rs} a^{(rs)} \lambda_r \mu_s$).

La condition d'orthogonalité des deux congruences est donc représentée par l'équation

$$(3') \qquad \sum_{r} \lambda^{(r)} \mu_r = 0.$$

Désignons par $\lambda_{h/r}$ $(h = 1, 2, \ldots, n)$ [11] les systèmes coordonnés covariants de n congruences et supposons que leurs lignes se rencontrent

[11] Le trait, qui sépare les deux indices dans ce symbole est fait pour nous avertir qu'il s'agit de n systèmes simples; et non pas d'un système double; et que le premier indice individualise par ses différentes valeurs les différents systèmes; et le deuxième les différents éléments d'un même systéme.

sous angle droit deux à deux et dans chaque point de V_n. En désignant par η_{hh} l'unité et par η_{hk} $(h \neq k)$ le zéro, d'après les équations (2) et (3′), les $\lambda_{h/r}$ satisferont aux équations

$$(4) \qquad \sum_1^n {}_r\, \lambda_h^{(r)} \lambda_{k/r} = \eta_{hk} \qquad (h, k = 1, 2, \ldots, n),$$

qui ne sont qu'une généralisation de celles, qui lient entre eux les cosinus directeurs de n lignes orthogonales deux à deux dans une variété euclidéenne n fois étendue.

Nous appellerons *ennuple orthogonale dans la variété V_n* tout ensemble de n congruences tel que celui, que nous venons de considérer; et nous désignerons par [1], [2], ..., [n] les congruences de l'ennuple, par 1, 2, ..., n les lignes de ces congruences passant par un point quelconque de V_n; par $s_1, s_2, \ldots, s_n$ les arcs de ces lignes.

Expression d'un système covariant ou contrevariant quelconque en fonction des systèmes coordonnés d'une ennuple orthogonale. Si l'on a un système covariant quelconque $X_{r_1 r_2 \ldots r_m}$ et une ennuple orthogonale tout à fait arbitraire [1], [2], ..., [n], on peut déterminer n^m fonctions $c_{h_1 h_2 \ldots h_m}$ telles que l'on ait les identités

$$(5) \qquad X_{r_1 r_2 \ldots r_m} = \sum_1^n {}_{h_1 h_2 \ldots h_m}\, c_{h_1 h_2 \ldots h_m}\, \lambda_{h_1/r_1} \lambda_{h_2/r_2} \ldots \lambda_{h_m/r_m}.$$

Ces fonctions sont même déterminées ayant les expressions

$$(5') \qquad c_{h_1 h_2 \ldots h_m} = \sum_1^n {}_{r_1 r_2 \ldots r_m}\, \lambda_{h_1}^{(r_1)} \lambda_{h_2}^{(r_2)} \ldots \lambda_{h_m}^{(r_m)} X_{r_1 r_2 \ldots r_m},$$

qui nous disent qu'elles sont des invariants. En passant des formules (5) ou (5′) à leurs réciproques, on les étend aisément aux systèmes contrevariants.

En particulier, s'il s'agit du système a_{rs} ou $a^{(rs)}$, on a, à cause des équations (4), pour toute ennuple orthogonale [1], [2], ..., [n] les identités

$$(4') \qquad a_{rs} = \sum_1^n {}_h\, \lambda_{h/r} \lambda_{h/s},$$

$$(4'') \qquad a^{(rs)} = \sum_1^n {}_h\, \lambda_h^{(r)} \lambda_h^{(s)}.$$

Les déterminants $\| \lambda_{h/r} \|$ et $\| \lambda_h^{(r)} \|$, qui, d'après les (4), sont les discriminants de deux quadriques réciproques, sont donc respectivement égaux à $\sqrt{a}$ et à $1 : \sqrt{a}$ [12].

En revenant aux équations (5) et (5′), on en déduit que tout système d'équations

$$X_{r_1 r_2 \ldots r_m} = 0$$

peut être remplacé par un système

$$c_{h_1 h_2 \ldots h_m} = 0 \ ;$$

c'est-à-dire (Chapitre I, § 7) que tout système absolu d'équations peut être transformé de maniére que ses premiers membres soient des invariants. On a souvent recours avec avantage à cette transformation.

Remarquons encore que, étant

$$\frac{\partial x_r}{\partial s_h} = \lambda_h^{(r)},$$

en désignant par f une fonction quelconque de $x_1, x_2, \ldots, x_n$, on a

$$\sum_r^n \lambda_h^{(r)} f_r = \frac{\partial f}{\partial s_h}, \qquad (h = 1, 2, \ldots, n). \tag{6}$$

Éléments métriques de premier ordre. – Les propriétés métriques des lignes $1, 2, \ldots, n$, qui sont en rapport avec ce que l'on désigne ordinairement par le nom de courbure des lignes gauches, comme on le comprend a priori, sont de fonctions des dérivées des $\lambda_{h/r}$. — Ces dérivées ne sont pas toutes indépendantes; au contraire elles doivent satisfaire aux $n^2(n+1) : 2$ équations, que l'on obtient en dérivant les équations (4).

Posons

$$\gamma_{hkl} = \sum_{rs}^{n}{}_{1} \lambda_k^{(r)} \lambda_l^{(s)} \lambda_{h/rs}, \qquad (h, k, l = 1, 2, \ldots, n), \tag{7}$$

et dérivons ces équations en appliquant la règle de dérivation des systèmes composés (Chapitre I, formules (22′)). — Nous trouvons d'abord les équations, dont il s'agit, sous la forme

$$\sum_r^n{}_1 \lambda_k^{(r)} \lambda_{h/rs} + \sum_r^n{}_1 \lambda_h^{(r)} \lambda_{k/rs} = 0, \qquad (h, k, l = 1, 2, \ldots, n) \tag{8}$$

[12] Les équations (4) nous disent aussi que la nature métrique d'une variété V_n est déterminée, si l'on connaît les systèmes coordonnés d'une ennuple orthogonale quelconque dans V_n.

et l'on voit aisément qu'on peut les remplacer par les:

$$(8') \qquad \gamma_{hkl} + \gamma_{khl} = 0 \qquad (h, k, l = 1, 2, ..., n),$$

qui comprennent comme cas particulier les

$$(8_1) \qquad \gamma_{hhl} = 0 .$$

Le nombre des invariants γ_{hkl} indépendants entre eux est donc égal a $n^2(n-1)/2$, et puisque ce nombre est égal à la différence des nombres n^3 et $n^2(n+1)/2$, dont le premier est celui des dérivées des $\lambda_{h/r}$ et le second celui des relations, qui ont lieu entre ces dérivées, on pourra exprimer les $\lambda_{h/rs}$ en fonction des $\lambda_{h|r}$ et des invariants γ. En résolvant les équations (7) on obtient en effet ces expressions sous la forme

$$(7') \qquad \lambda_{h/rs} = \sum_{1}^{n}{}_{ij} \gamma_{hij}\lambda_{i/r}\lambda_{j/s} .$$

Il nous suffira donc, pour étudier les propriétés métriques des lignes 1, 2, ..., n, de fixer notre attention sur les invariants γ_{hij}; et en effet ils sont liés aux dites propriétés par des relations très étroites et très simples. Sans nous arrêter ici à examiner en détail la signification géométrique ou cinématique de chacune des γ, il nous suffira d'en dire ce qui est nécessaire pour les applications, qui vont suivre. — Ajoutons que, à cause de leurs significations cinématiques, nous désignerons les invariants γ par le nom de *coefficients de rotation* de l'ennuple [1], [2], ..., [n].

2. - Dérivées intrinsèques et leurs relations.

Il nous faut avant tout établir les relations, qui ont lieu entre deux dérivées telles que

$$\frac{\partial}{\partial s_k}\frac{\partial f}{\partial s_h} \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial s_h}\frac{\partial f}{\partial s_k},$$

car on ne peut pas intervertir les opérations représentées par les symboles $\partial/\partial s_h$ et $\partial/\partial s_k$. En effet, si l'on dérive l'identité (6), on a d'abord

$$\frac{\partial}{\partial x_s}\frac{\partial f}{\partial s_h} = \sum_{1}^{n}{}_r \lambda_h^{(r)} f_{rs} + \sum_{1}^{n}{}_r f^{(r)}\lambda_{h/rs} ,$$

et par suite

$$\frac{\partial}{\partial s_k}\frac{\partial f}{\partial s_h} = \sum_{1}^{n}{}_s \lambda_k^{(s)}\frac{\partial}{\partial x_s}\frac{\partial f}{\partial s_h} = \sum_{1}^{n}{}_{rs} \lambda_h^{(r)}\lambda_k^{(s)} f_{rs} + \sum_{1}^{n}{}_{rs} f^{(r)}\lambda_k^{(s)}\lambda_{h/rs} ,$$

ou encore, ayant égard aux identités

$$\sum_{1}^{n}{}_s \lambda_k^{(s)} \lambda_{h/rs} = \sum_{1}^{n}{}_i \gamma_{hik} \lambda_{i/r} ,$$

$$\sum_{1}^{n}{}_{rs} f^{(r)} \lambda_k^{(s)} \lambda_{h/rs} = \sum_{1}^{n}{}_i \gamma_{hik} \frac{\partial f}{\partial s_i} ,$$

qui dérivent des (4), (6) et (7′),

$$\frac{\partial}{\partial s_k} \frac{\partial f}{\partial s_h} = \sum_{1}^{n}{}_{rs} \lambda_h^{(r)} \lambda_k^{(s)} f_{rs} + \sum_{1}^{n}{}_i \gamma_{hik} \frac{\partial f}{\partial s_i} .$$

Enfin on déduit de ces dernières les relations, dont il s'agit, sous la forme

$$\frac{\partial}{\partial s_k} \frac{\partial f}{\partial s_h} - \frac{\partial}{\partial s_h} \frac{\partial f}{\partial s_k} = \sum{}_i (\gamma_{ikh} - \gamma_{ihk}) \frac{\partial f}{\partial s_i} . \tag{9}$$

3. - Congruences normales et géodésiques. Familles isothermes de surfaces. Système canonique par rapport à une congruence donnée.

Congruences normales. – On dit qu'une congruence de lignes tracées dans V_n est *normale*, si elle résulte de trajectoires orthogonales à une famille de surfaces de V_n $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \text{const.}$ Choisissons dans une ennuple orthogonale une congruence $[n]$ et proposons-nous de déterminer les conditions nécessaires et suffisantes pour que cette congruence soit normale.

Évidemment pour cela il faut et il suffit que toute direction δx_r normale à la ligne n appartienne à la surface $f = \text{const.}$, c'est-à-dire que l'on ait

$$\sum_{1}^{n}{}_r \frac{\partial f}{\partial x_r} \delta x_r = 0 .$$

En d'autres termes les conditions, dont il s'agit, sont les mêmes, qui sont nécessaires et suffisantes pour que les équations

$$X_h(f) = \sum_{1}^{n}{}_r \lambda_h^{(r)} f_r = 0 \qquad (h = 1, 2, \ldots, n-1)$$

soient satisfaites par une fonction f; c'est-à-dire pour que le système de ces équations soit complet. Nous devrons donc exprimer que (pour $h, k = 1, 2, \ldots, n-1$) les

$$(X_h X_k)f = X_h X_k(f) - X_k X_h(f)$$

sont des fonctions linéaires des $X_h(f)$.

On a:

$$X_h X_k(f) = \sum_{1}^{n}{}_r \lambda_h^{(r)} \sum_{1}^{n}{}_s (\lambda_k^{(s)} f_{sr} + f^{(s)} \lambda_{k/sr}),$$

ou, à cause des équations (8) et (7′), étant

$$\sum_{1}^{n}{}_r \lambda_h^{(r)} \lambda_{k/sr} = -\sum_{1}^{n}{}_i \gamma_{ikh} \lambda_{i/s},$$

$$X_h X_k(f) = \sum_{1}^{n}{}_{rs} \lambda_h^{(r)} \lambda_k^{(s)} f_{sr} - \sum_{1}^{n-1}{}_i \gamma_{ikh} X_i(f) - \gamma_{nkh} \frac{\partial f}{\partial s_n};$$

et par suite

$$X_h X_k(f) - X_k X_h(f) = \sum_{1}^{n-1}{}_i (\gamma_{ihk} - \gamma_{ikh}) X_i(f) + (\gamma_{nhk} - \gamma_{nkh}) \frac{\partial f}{\partial s_n}.$$

L'expression $\partial f / \partial s_n$, étant indépendante des

$$X_h(f) \qquad (h = 1, 2, \ldots, n-1),$$

l'identité, que nous venons d'établir, nous dit que:

Les conditions nécessaires et suffisantes pour que la congruence $[n]$ *soit normale sont exprimées par les* $(n-1)(n-2):2$ *équations*

$$\gamma_{nhk} = \gamma_{nkh}, \qquad (h, k = 1, 2, \ldots, n-1). \tag{10}$$

On a donc aussi que:

« Si toutes les congruences d'une ennuple orthogonale sont normales, toutes les γ_{hkl} à trois indices distincts sont nulles et réciproquement ».

Comme on n'a rien déterminé sur le choix des congruences [1], [2], ..., $[n-1]$, qui forment avec $[n]$ une ennuple orthogonale, les équations (10), attendu leur signification géométrique, ont un caractère invariantif vis-à-vis, non seulement de toutes les transformations possibles de coordonnées, mais aussi de tous les changements possibles des $n-1$ congruences [1], [2], ..., $[n-1]$, formant avec $[n]$ une ennuple orthogonale.

Les conditions (10) étant remplies, les $\lambda_{n/r}$ seront proportionnelles aux dérivées f_r d'une fonction c'est-à-dire que l'on pourra déterminer un coefficient μ tel que les

$$f_r = \mu\lambda_{n/r}$$

satisfassent aux équations

$$f_{rs} = f_{sr} .$$

Étant, à cause des formules (7′),

$$f_{rs} = \mu_s\lambda_{n/r} + \mu \sum_{ij}{}_1^n \gamma_{nij}\lambda_{i/r}\lambda_{j/s} , \tag{11}$$

et en posant

$$\psi = \log \mu , \tag{12}$$

la fonction indéterminée ψ devra donc satisfaire aux équations

$$\psi_s\lambda_{n/r} + \sum_{ij}{}_1^n \gamma_{nij}\lambda_{i/r}\lambda_{j/s} = \psi_r\lambda_{n/s} + \sum_{ij}{}_1^n \gamma_{nij}\lambda_{i/s}\lambda_{j/r} .$$

En les multipliant par $\lambda_n^{(s)}$ et puis en les additionnant, après avoir fait $s = 1, 2, ..., n$ et en ayant recours aux équations (4) et (9), on peut leur substituer le système équivalent

$$\psi_r = \nu\lambda_{n/r} + \sum_{ij}{}_1^{n-1} \gamma_{nin}\lambda_{i/r} , \tag{13}$$

ν étant indéterminée.

Familles isothermes de surfaces. – On dit qu'une famille de surfaces $f(x_1, x_2, ..., x_n) = \text{const.}$ est isotherme dans la variété V_n et que f en est un paramètre thermométrique, si cette fonction satisfait à l'équation

$$\sum_{rs}{}_1^n a^{(rs)}f_{rs} = 0 \quad (^{13}) . \tag{14}$$

On peut considérer une famille de surfaces comme individualisée, lorsqu'on connaît la congruence de ses trajectoires orthogonales; ce qui signifie par d'autres mots, que toute famille de surfaces peut être représentée

(13) Nous verrons plus loin l'identité de cette équation avec celle des fonctions harmoniques.

par un système $\lambda_{n/r}$ satisfaisant en même temps à l'équation algébrique (2) et aux équations (10) aux dérivées partielles du premier ordre. — Proposons nous d'établir les conditions nécessaires et suffisantes pour que cette famille soit isotherme et d'en déterminer, ces conditions étant remplies, les paramètres thermométriques.

En substituant dans la formule (14) les expressions des f_{rs} données par les (11), on la remplace par la formule équivalente

$$\frac{\partial \psi}{\partial s_n} = -\sum_1^n{}_i\, \gamma_{nii}\,,$$

qui nous donne pour l'indéterminée ν de la formule (13) l'expression

$$\nu = -\sum_1^{n-1}{}_i\, \gamma_{nii}\,. \tag{15}$$

Pour que la famille de surfaces ayant les lignes n comme trajectoires orthogonales soit isotherme, il faut donc et il suffit que, en remplaçant ν par son expression (15), les seconds membres des (13) résultent des dérivées d'une fonction ψ prises par rapport aux x_r; après quoi les

$$f_r = Ce^{\psi}\lambda_{n/r}$$

seront aussi les dérivées d'une fonction f par rapport aux mêmes variables, et

$$f = C\int e^{\psi} \sum_1^n{}_r\, \lambda_{n/r}\, dx_r + c\,,$$

(C et c étant des constantes arbitraires) sera l'expression la plus générale des paramètres thermométriques de la famille considérée.

On reconnaît puis aisément que les conditions d'intégrabilité des formules (13) sont représentées par les équations

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial \nu}{\partial s_h} + \frac{\partial \gamma_{hnn}}{\partial s_n} + \nu\gamma_{hnn} + \sum_1^{n-1}{}_i\, \gamma_{inn}(\gamma_{ihn} - \gamma_{inh}) = 0\,, \\ &\frac{\partial \gamma_{hnn}}{\partial s_k} + \sum_1^{n-1}{}_i\, \gamma_{inn}\gamma_{ihk} = \frac{\partial \gamma_{knn}}{\partial s_h} + \sum_1^{n-1}{}_i\, \gamma_{inn}\gamma_{ikh}\,; \end{aligned}\right.$$

$$(h, k = 1, 2, \ldots, n-1)\,.$$

Si les congruences [1], [2], ..., [n] sont toutes normales, c'est-à-dire si elles sont les intersections des surfaces de n familles orthogonales dans V_n, ces équations se réduisent à la forme bien plus simple

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial \nu}{\partial s_h} + \frac{\partial \gamma_{hnn}}{\partial s_n} + \gamma\nu_{hnn} = 0\,, \\ &\frac{\partial \gamma_{hnn}}{\partial s_k} = \frac{\partial \gamma_{knn}}{\partial s_h}\,. \end{aligned}\right.$$

Congruences géodésiques ([14]). – En disant qu'une ligne est géodésique dans une variété V_n, dont le ds^2 est donné par la forme fondamentale φ, on signifie que la variation première de l'intégrale

$$\int ds = \int \sqrt{\sum_{rs}^{n} {}_{1} a_{rs}\, dx_r\, dx_q}$$

calculée selon cette ligne est nulle. Les conditions pour que toutes les lignes n soient géodésiques (et nous dirons alors que la congruence [n] est géodésique) sont exprimées par les équations

$$\gamma_{inn} = 0\,, \qquad (i = 1, 2, ..., n-1), \tag{16}$$

qui ont les mêmes caractères invariantifs, que nous avons remarqués dans les (10). En particulier, si l'espace est euclidéen, les (16) nous donnent les caractéristiques intrinsèques des congruences rectilignes.

Courbure géodésique d'une congruence. – Si la congruence [n] n'est pas géodésique, et l'on considère la variété V_n comme contenue dans un espace euclidéen S_{n+m}, on peut se représenter la courbure géodésique de la ligne [n] dans un point quelconque P de V_n de la manière suivante. — Que l'on conduise par P dans S_{n+m} un vecteur tangent à V_n, dont la longueur γ soit donnée par la formule

$$\gamma^2 = \sum_{i=1}^{n-1} \gamma_{inn}^2\,,$$

et la direction par celle de la tangente à la ligne qui passe par P et appartient à la congruence ayant comme système coordonné covariant

$$\mu_r = \sum_{i=1}^{n-1} \gamma_{inn}\lambda_{i/r}\,.$$

([14]) Voir. G. Ricci, *Dei sistemi di congruenze ortogonali etc.*, § 5, et aussi *Lezioni sulla teoria delle superficie*, Première Partie, Chapitre IV.

Ce vecteur jouit des propriétés suivantes:

1) Il s'annule identiquement, si la congruence n est géodésique.

2) Sa projection sur le plan tangent aux lignes i et n est égale à la courbure de la projection de la ligne n sur le même plan.

3) Il est normal à la ligne n.

À cause de ces propriétés nous désignons ce vecteur par le nom de *courbure géodésique* et les lignes de la congruence ayant μ_r comme système coordonné covariant par celui de *lignes de courbure géodésique* de la congruence n.

Systèmes canoniques par rapport à une congruence donnée. – Une congruence $[n]$ étant donnée, on peut d'une infinité de manières différentes lui associer $n-1$ congruences constituant avec $[n]$ une ennuple orthogonale dans la variété V_n. Parmi ces systèmes de $n-1$ congruences orthogonales l'une à l'autre et à la congruence $[n]$, il y en a un ou plusieurs, que nous allons définir, et que nous appellerons *canonique* par rapport à la congruence $[n]$.

Posons

$$2X_{rs} = \lambda_{n/rs} + \lambda_{n/sr}\,,$$

et considérons le système d'équations algébriques

$$(17)\qquad \begin{cases} \sum_1^n{}_r\, \lambda_{n/r}\lambda^{(r)} = 0\,, \\ \lambda_n\mu + \sum_1^n{}_r\, (X_{qr} + \omega a_{qr})\lambda^{(r)} = 0\,, \qquad (q = 1, 2, ..., n), \end{cases}$$

μ, ω, $\lambda^{(1)}$, $\lambda^{(2)}$, ..., $\lambda^{(n)}$ étant des indéterminées. C'est un système de $n+1$ équations linéaires et homogènes par rapport aux inconnues μ, $\lambda^{(1)}$, $\lambda^{(2)}$, ..., $\lambda^{(n)}$, et son déterminant égalé à zéro nous donne une équation du degré $n-1$ en ω

$$(18)\qquad \Delta(\omega) = 0\,,$$

dont les racines sont toutes réelles. — Désignons ces racines par ω_h ($h = 1, 2, ..., n-1$) et supposons d'abord qu'elles soient toutes simples. Si l'on pose dans le système (17) $\omega = \omega_h$ et l'on associe à ce système l'équation (2), les inconnues $\lambda^{(1)}$, $\lambda^{(2)}$, ..., $\lambda^{(n)}$ résultent, au signe près, determinées. — Leurs valeurs, que nous désignerons par $\lambda_h^{(r)}$ ($r=1, 2, ..., n$), sont les éléments du système coordonné covariant d'une congruence $[h]$; et les $n-1$ congruences $[1]$, $[2]$, ..., $[n-1]$ étant orthogonales entre elles et à la congruence $[n]$ sont les éléments du système orthogonal canonique par rapport à cette dernière. Dans ce cas ce système est donc tout à fait déterminé.

Si les racines de l'équation (18) sont toutes égales entre elles, tout système de $n-1$ congruences formant avec $[n]$ une ennuple orthogonale satisfait aux équations (17) et peut être regardé comme canonique par rapport à $[n]$.

En général soient $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_m$ les racines distinctes de l'équation (18), $p_1, p_2, \ldots, p_m$ leurs ordres de multiplicité, et posons dans les équations (17) $\omega = \omega_h$ $(h = 1, 2, \ldots, m)$. On peut déterminer p_h congruences orthogonales entre elles deux à deux et telles que les éléments de leurs systèmes coordonnés contrevariants soient les solutions des équations (17). Il y a même dans le groupe Λ_h de ces congruences toute l'arbitrariété, qui appartient à une substitution orthogonale d'ordre p_h, c'est-à-dire une arbitrariété représentée par $p_h \cdot (p_h - 1) : 2$ fonctions arbitraires. Comme les congruences faisant partie de deux groupes Λ_h et Λ_k sont aussi orthogonales entre elles, on a de la sorte

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_m = n - 1$$

congruences constituant avec $[n]$ une ennuple orthogonale. — Dans ce cas aussi les congruences $[1]$, $[2]$, ..., $[n-1]$ sont les éléments d'un système orthogonal canonique par rapport à la congruence $[n]$, mais ce système n'est ni tout à fait déterminé, ni tout à fait arbitraire. Il contient des fonctions arbitraires, dont le nombre est égal à

$$\sum_{1}^{m}{}_h\, p_h(p_h - 1) : 2 \,.$$

Les coefficients de rotation de l'ennuple orthogonale, lorsque $[1]$; $[2]$, ..., $[n-1]$ sont les éléments d'un système canonique par rapport à $[n]$, sont liés entre eux par les relations caractéristiques

$$\gamma_{nhk} + \gamma_{nkh} = 0 \,. \tag{19}$$

En rapprochant ces équations aux (10) on en déduit que, si la congruence $[n]$ est normale, les γ_{nhk} (pour $h \neq k$) sont toutes nulles dans le système orthogonal canonique à $[n]$. Dans ce cas les congruences, qui appartiennent à ce système, ont une signification géométrique bien simple: elles résultent des lignes de courbure des surfaces orthogonales aux lignes n [15].

---

[15] Plusieurs géomètres ont étudié la courbure des surfaces dans les hyperespaces. Il suffira ici de rappeler le Mémoire fondamental de M. R. Lipschitz, *Entwickelungen einiger Eigenschaften der quadratischen Formen von n Differentialen*, « Crelle's Journal », Band LXXI, 1870.

On peut donner une interprétation géométrique assez simple pour le système orthogonal canonique à une congruence donnée quelconque, lorsque la variété fondamentale c'est l'espace euclidéen à trois dimensions ([16]). On pourrait même étendre cette interprétation à une variété V_n de nature quelconque; mais on ne peut pas s'arrêter à tous ces détails et il vaut mieux de passer à d'autres considérations.

4. - Propriétés des coefficients de rotations et liens avec la théorie du trièdre mobile d'après M. Darboux.

On a vu dans le § 2 que l'on a $n^2(n-1)/2$ coefficients de rotation algébriquement indépendants entre eux pour une ennuple quelconque. Ces coefficients ne sont pas tous indépendants entre eux au point de vue fonctionnel; au contraire ils doivent satisfaire à des équations différentielles du premier ordre, que l'on obtient aisément en dérivant encore une fois les équations (7′) et en éliminant les dérivées des $\lambda_{h/r}$ à l'aide de ces mêmes équations et des équations (23) du Chapitre Premier.

En posant

$$\gamma_{hi,kl} = \frac{\partial \gamma_{hik}}{\partial s_l} - \frac{\partial \gamma_{hil}}{\partial s_k} + \sum_1^n {}_j \{\gamma_{hij}(\gamma_{jkl} - \gamma_{jlk}) + \gamma_{jhl}\gamma_{jik} - \gamma_{jhk}\gamma_{jil}\}, \tag{20}$$

on parvient de la sorte aux équations

$$\gamma_{hi\,kl} = \sum_1^n {}_{qrst}\, \lambda_h^{(q)} \lambda_i^{(r)} \lambda_k^{(s)} \lambda_l^{(t)} a_{qr,st}, \tag{21}$$

qui avec les équations (8′) nous donnent toutes les conditions nécessaires et suffisantes pour que n^3 fonctions données γ_{hki} puissent être regardées commes les coefficients de rotation d'une ennuple orthogonale dans la variété V_n, dont le ds^2 est exprimé par la forme fondamentale.

Pour $n = 2$, on a une seule formule (21), que l'on peut réduire à la forme suivante:

$$\frac{\partial \gamma_{121}}{\partial s_2} + \frac{\partial \gamma_{212}}{\partial s_1} = \gamma_{121}^2 + \gamma_{212}^2 + G. \tag{21$_1$}$$

([16]) Cfr. T. LEVI-CIVITA, *Sulle congruenze di curve*, « Rendiconti dell'Accademia dei Lincei », 5 Marzo, 1891; [in questo vol.: XXII, pp. 369-377].

C'est une formule bien connue dans la théorie des surfaces, puisque γ_{121} et γ_{212} sont les courbures géodésiques des lignes 1 et 2.

Pour $n = 3$, en posant

$$\gamma_{hk} = \gamma_{h+1\,h+2\,,\,k+1\,k+2}\,, \tag{22}$$

les équations (21) peuvent être remplacées par les

$$\gamma_{hk} = \sum_{1}^{n}{}_{rs}\, \lambda_h^{(r)} \lambda_k^{(s)} \alpha_{rs}\,, \tag{21_2}$$

qui nous donnent en particulier

$$\gamma_{hk} = \gamma_{kh}\,.$$

En général les équations (21), étant liées au système covariant de RIEMANN, sont aussi intimement liées à la nature métrique de la variété V_n.

Ces équations ne sont pas autre chose que la généralisation de celles, qui ont lieu entre les composantes p, q, r des rotations dans la théorie du trièdre mobile (17). En supposant en effet la variété V_n coïncidente avec l'espace euclidéen à trois dimensions, les tangentes aux lignes 1, 2, 3 déterminent dans chaque point de cet espace un trièdre trirectangle. — Les invariants γ_{ihk} indépendants entre eux nous donnent alors les rotations p_i, q_i, r_i $(i = 1, 2, 3)$ qui se rapportent à des déplacements infiniment petits selon les lignes 1, 2, 3. Les formules, que l'on tire pour ce cas des (21), sont même plus générales que celles, que l'on connaît généralement, puisqu'elles ne supposent pas que les congruences [1], [2], [3] soient normales (18).

On peut voir dans cet exemple comment les méthodes de Calcul Différentiel absolu par leur généralité résument en elles mêmes et offrent tous les avantages des différents procédés déjà connus.

5. - Expressions canoniques des systèmes associés à la forme fondamentale.

Dans l'étude des problèmes de Géométrie, de Physique, de Mécanique analytique etc., on est presque toujours conduit à des systèmes d'équations ayant un caractère invariantif (voir le § 7 du Chapitre Premier),

(17) G. DARBOUX, *Leçons sur la théorie des surfaces*, t. I, Chapitre V; et aussi G. KÖNIGS, *Leçons de Cinématique*, Chapitre X, et la Note des M.M. E. et F. COSSERAT, *Sur la Cinématique dans les milieux continus*, qui suit ces *Leçons*.

(18) T. LEVI-CIVITA, *Tipi di potenziali, che si possono far dipendere da due sole coordinate*, « Memorie della Accademia delle Scienze di Torino », tomo XLIX, 1899, § 4; [in questo vol.; XXIV, pp. 381-428].

et dans lesquelles on rencontre avec les coefficients d'une forme fondamentale les éléments d'un ou de plusieurs systèmes simples et doubles et leurs dérivées. Pour fixer les idées nous nous bornerons ici au cas d'un seul système associé.

Supposons d'abord que ce soit un système simple X_r. On lui fera correspondre une congruence $[n]$ définie par les équations

$$\frac{dx_1}{X^{(1)}} = \frac{dx_2}{X^{(2)}} = \ldots = \frac{dx_n}{X^{(n)}},$$

et dont le système coordonné covariant résultera des éléments

$$\lambda_{n/r} = X_r : \varrho ,$$

étant

$$\varrho^2 = \sum_1^n{}_r X^{(r)} X_r .$$

Nous dirons alors que les formules

$$X_r = \varrho \lambda_{n/r} , \tag{23}$$

nous donnent les expressions canoniques des X_r.

En partant de ces expressions canoniques on procèdera de la manière suivante.

On commencera par associer à la congruence $[n]$ $n-1$ congruences formant avec elle une ennuple orthogonale (et il sera dans ce cas utile d'avoir recours au système, ou à un des systèmes, canoniques par rapport à la congruence $[n]$). Après cela on transformera les équations du problème en substituant respectivement aux a_{rs} et aux X_r les expressions données par les formules (4′) et (23), et à leurs dérivées les éléments des systèmes dérivés par dérivation covariante selon la forme fondamentale.

On obtient de la sorte un système d'équations étroitement en rapport avec les éléments essentiels du problème, et dont l'interprétation géométrique, presque toujours facile et naturelle, le caractérise d'une manière nette et opportune. — Ce système nous donnera aussi souvent des indications très avantageuses pour son intégration, en rendant presque intuitif le système de variables indépendantes, qu'il faut choisir pour en obtenir, si cela est possible, les équations intégrales. — Dans ce cas on revient en fin aux notations ordinaires, et l'on obtient les solutions canoniques du problème.

Ces méthodes, nous le reconnaissons les premiers, n'ont pas la prétention d'éliminer les difficultés essentielles aux questions, aux quelles

elles sont appliquées. Au contraire elles ne conduisent qu'à des transformations d'équations laissant nécessairement subsister toutes ces difficultés. — Elles nous apprennent seulement à éviter tous les obstacles accidentels; et par ce seul fait il arrive souvent que, en partant d'un système d'équations bien compliqué, on parvient à un système canonique très simple et parfaitement abordable. On obtient alors des succès intéressants et inattendus là, où les méthodes ordinaires auraient presque certainement échoué.

S'il s'agit d'un système double symétrique α_{rs}, on a recours aux équations

$$(24) \qquad \sum_1^n {}_s (\alpha_{rs} - \varrho a_{rs})\lambda^{(s)} = 0, \qquad (r = 1, 2, \ldots, n) \text{ [19]}.$$

En éliminant $\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}, \ldots, \lambda^{(n)}$ on parvient à une équation du degré n en ϱ, dont les propriétés sont bien connues. Toutes ses racines $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_n$ sont réelles et leur substitution à ϱ dans les équations (24), conduit en tout cas à la détermination d'une ou de plusieurs ennuples orthogonales $[1], [2], \ldots, [n]$, telles que l'on a pour les éléments du système donné les expressions canoniques

$$\alpha_{rs} = \sum_1^n {}_h \varrho_h \lambda_{h/r} \lambda_{h/s} \,.$$

En partant de ces expressions on transforme les équations du problème et on parvient souvent à ses solutions canoniques d'une manière tout à fait analogue à celle, qui a été indiquée pour le cas des systèmes simples.

Voyons désormais les règles générales, que l'on peut déduire pour un système d'ordre quelconque des exemples, que nous venons de considérer.

On a vu (§ 1) que les éléments d'un système covariant quelconque d'ordre m peuvent être exprimés comme fonctions homogènes du degré m des éléments des systèmes coordonnés covariants d'une ennuple arbitraire, que nous appellerons désormais *ennuple de référence*. Pour obtenir les expressions canoniques des éléments d'un système simple X_r nous avons dans le premier exemple choisi cette ennuple de manière que dans les formules générales

$$X_r = \sum_1^n {}_h c_h \lambda_{h/r} \,,$$

---

(19) G. Ricci, *Sulla teoria delle linee geodetiche e dei sistemi isotermi di* Liouville, § 2, « Atti del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti », 1894, et aussi T. Levi-Civita, *Sulle trasformazioni delle equazioni dinamiche*, § 7, « Annali di Matematica », 1896; [in questo vol.: X, pp. 199-252].

on eût

$$c_1 = c_2 = c_3 = \ldots = c_{n-1} = 0 .$$

De même on a réduit dans le deuxième exemple les α_{rs} à leurs expressions canoniques en choisissant l'ennuple de référence de manière que dans les formules

$$\alpha_{rs} = \sum_1^n{}_{hk}\, c_{hk}\lambda_{h/r}\lambda_{k/s}$$

on eût

$$c_{hk} = 0 . \qquad (h \neq k).$$

En général, si l'on a affaire à un système covariant d'ordre m, il importe avant tout d'en réduire les éléments à des expressions canoniques bien choisies en prenant l'ennuple de référence de la manière la plus opportune. Après cela, pour établir les équations intrinsèque du problème, on n'aura qu'à suivre des procédés très simples et uniformes.

CHAPITRE III.

APPLICATIONS ANALYTIQUES

1. - Classification des formes quadratiques de différentielles [20].

Soit φ une forme quadratique des différentielles des n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$, essentiellement positive. En choisissant convenablement $n + \mu$ fonctions $y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots, y_{n+\mu}$ des x, on peut toujours (pour μ assez grand) satisfaire à l'équation

$$\varphi = dy_1^2 + dy_2^2 + \ldots + dy_n^2 + \ldots + dy_{n+\mu}^2 .$$

La plus petite valeur m de μ, pour laquelle une telle égalité est possible, peut varier de 0 jusqu'à $n(n-1)/2$. On a de la sorte un criterium fondamental pour la classification des formes φ. Le nombre m s'appelle *classe de la forme* correspondante. Il ne peut pas dépasser $n(n-1)/2$. Ainsi, par exemple, les formes binaires ($n = 2$) sont ou bien de classe zéro, ou bien de première classe.

---

(20) Cfr. G. RICCI, *Principi di una teoria delle forme differenziali quadratiche*, « Ann. di Matematica », ser. II, t. XII, 1884, ou le Chapitre V des *Lezioni etc.*

Les formes de classe 0 (à un nombre quelconque de variables) sont caractérisées par ce fait que le système de RIEMANN (voir page 497) est identiquement nul. Pour les formes de première classe on a le théorème suivant:

Pour qu'une forme φ soit de première classe il faut et il suffit qu'on puisse déterminer un système double symétrique b_{rs} tel que

1) $a_{rt,su} = b_{rs}b_{tp} - b_{ru}b_{ts}$,

2) *le système b_{rst}* (dérivé covariant selon φ) *soit symétrique* ([21]).

Lorsque ces conditions sont vérifiées, les fonctions $y_1, y_2, \ldots, y_n, y_{n+1}$ peuvent être déterminées comme intégrales d'un certain système complet.

Pour les formes des classes supérieures on démontre un théorème analogue.

Mais nous n'insistons pas davantage sur cet argument; une autre application importante du calcul différentiel absolu appelle notre attention.

2. - Invariants absolus ([22]). Remarques géométriques. Paramètres différentiels.

Les recherches classiques de JACOBI, LAMÉ et et BELTRAMI, auxquelles on doit l'introduction dans l'analyse des invariants bien connus sous le nom *de paramètres différentiels*, ont leur fondement dans la considération de la variation première de certaines intégrales. Malgré l'élégance et l'ingéniosité de cet artifice, on est ainsi conduit à des méthodes indirectes et très eloignées de celles, que la nature même de la question semble suggérer.

Elle rentre en effet dans le problème général suivant, qui n'est après tout qu'un problème d'élimination algébrique:

Étant donnée une forme quadratique définie φ et un nombre quelconque de systèmes associés S (covariants ou contrevariants), *déterminer tous les invariants absolus, que l'on peut former avec les coefficients de φ, les éléments des systèmes S et les dérivées des uns et des autres jusqu'à un ordre μ fixé à l'avance.*

Si l'on n'avait pas à considérer les dérivées, ce serait une question bien connue, pour laquelle il suffirait de se rapporter à la théorie des formes. L'intervention des dérivées semble au premier abord compliquer

---

([21]) Nous disons qu'un système multiple est symétrique, lorsque ses éléments correspondants à une même combinaison des indices sont identiques.

([22]) Voir G. RICCI, *Sui parametri e gli invarianti delle forme quadratiche differenziali*, « Ann. di Matematica », ser. II, t. XIV, 1886, et *Lezioni etc.*, Chap. V. A consulter aussi T. LEVI-CIVITA, *Sugli invarianti assoluti*, « Atti dell'Istituto Veneto », 1894; [in questo vol.: II, pp. 41-100].

beaucoup la recherche. Fort heureusement il n'en est rien. Le calcul différentiel absolu nous ramène toujours à la même question, en substituant aux dérivées ordinaires les éléments des systèmes, qui proviennent des systèmes donnés par dérivation selon φ. Plus précisément on a le théorème:

Pour obtenir tous les invariants différentiels absolus d'ordre μ, il suffit de déterminer les invariants algébriques du système des formes suivantes:

1) *forme fondamentale φ;*

2) *formes associées S et leurs dérivées selon φ, jusqu'à l'ordre μ;*

3) (pour $\mu > 1$) *forme quadrilinéaire, dont les coefficients sont les éléments du système de* Riemann; *formes dérivées de cette-ci jusqu'à l'ordre $\mu - 2$.*

En appelant *invariants propres* d'une forme φ ceux, qui dépendent uniquement des coefficients de φ et de leurs dérivées, on déduit de la proposition précédente les deux corollaires que voici:

Les formes de classe 0 *n'admettent aucun invariant différentiel propre.*

Les formes de classe supérieure ne possèdent pas des invariants différentiels du premier ordre; leurs invariants d'ordre $\mu > 1$ sont ceux des formes 1), 3).

Ces résultats prennent naturellement une forme bien plus simple pour les formes binaires et ternaires.

Pour $n = 2$ (voir Chapitre I, § 6) le système de Riemann peut être substitué par l'invariant G de Gauss, qui est le seul invariant du second ordre propre des formes binaires.

Il est bon de remarquer dès à présent que, lorsqu'on regarde φ comme le ds^2 d'une surface, la valeur de G n'est que le produit des rayons principaux de courbure. C'est pour cela que G s'appelle aussi *courbure totale de la forme φ*. D'après ce qui précède, nous pouvons affirmer que $G = 0$ donne la condition nécessaire et suffisante pour qu'une forme binaire φ soit de classe zéro. En langage géométrique c'est la proposition bien connue que les surfaces développables sont les seules qui soient applicables sur le plan.

Pour $G = 0$, notre forme binaire n'a pas évidemment des invariants propres; en général:

Les invariants propres d'une forme binaire, jusqu'à un ordre quelconque $\mu > 2$, s'obtiennent en déterminant les invariants absolus algébriques communs à la forme φ et à celles, qui ont pour coefficients les dérivées covariantes de G jusqu'à l'ordre $\mu - 2$.

Ce résultat est contenu implicitement dans un mémoire de Casorati ([23]).

([23]) *Ricerca fondamentale per lo studio di una certa classe di proprietà delle superfici curve,* « Ann. di Matematica », ser. I, t. III e IV, 1860-61.

Pour $n = 3$, on peut substituer à la considération du système covariant de RIEMANN, celle du système contrevariant double $\alpha^{(rs)}$ ou de son réciproque α_{rs}, et il est bien clair avant tout que les conditions $\alpha_{rs} = 0$ sont à la fois nécessaires et suffisantes pour qu'une forme ternaire soit de classe 0. Lorsque le système α_{rs} n'est pas identiquement nul, la considération des deux formes quadratiques aux coefficients a_{rs} et α_{rs} nous donnera tous les invariants différentiels propres du second ordre. Comme invariants algébriques de ces deux formes on peut prendre les racines de l'équation

$$\| \alpha_{rs} - \varrho a_{rs} \| = 0 \,,$$

que nous appellerons *invariants fondamentaux de la forme φ*. On est conduit à ce choix par la réduction du système double α_{rs} à sa forme canonique (Chapitre III § 5). Elle fait ressortir tout naturellement un triple des congruences orthogonales, très importantes pour l'étude géométrique des propriétés, qui généralisent la notion de courbure totale des variétés à deux dimensions.

Nous y reviendrons dans les applications géométriques (Chap. IV, § 8); pour le moment bornons-nous à avertir que nous appelons les congruences du triple *congruences principales* et *directions principales* celles de leurs angentes.

Il est à peine nécessaire d'ajouter que, pour avoir les invariants propres d'une variété ternaire jusqu'à un ordre $\mu > 2$, il suffira de prendre en considération, à côté des deux formes employées tout-à-l'heure, celles, qui se déduisent par la dérivation covariante des α_{rs} jusqu'à l'ordre $\mu - 2$.

Cela posé pour les invariants propres, examinons maintenant quelques exemples simples du cas général, où l'on a aussi des systèmes associés.

Supposons en premier lieu qu'il s'agisse de deux fonctions U et V associées à une forme quelconque φ à n variables.

Les paramètres différentiels du premier ordre $\Delta_1 U$ et $\Delta_1 V$ et celui, que BELTRAMI appelle paramètre mixte de U, V

$$\left(\nabla(U, V) = \sum_{1}^{n}{}_{rs}\, a^{(rs)} U_r V_s\right)$$

épuisent le système des invariants différentiels du premier ordre.

Lorsqu'on a affaire à une seule fonction associée U, pour le premier ordre, on n'a évidemment que $\Delta_1 U$; pour le deuxième ordre on devra considérer les invariants absolus des trois formes algébriques φ, $\sum_{1}^{n}{}_r\, U_r\, dx_r$, $\psi = \sum_{1}^{n}{}_{rs}\, U_{rs}\, dx_r\, dx_s$. En particulier les invariants du couple φ, ψ sous leur forme rationnelle (c'est-à-dire les coefficients de ϱ^{n-1}, ϱ^{n-2}, ... de l'équation $\| U_{rs} - \varrho a_{rs} \| / a = 0$) seront respectivement des degrés 1, 2, ..., n par rapport aux dérivées secondes de U.

L'invariant du premier degré $\sum_{rs\,1}^{n} a^{(rs)} U_{rs}$ n'est que le paramètre bien connu $\underset{2}{\Delta} U$ de Beltrami.

Soit maintenant associé à notre forme φ un système simple X_r. Il donne lieu aux invariants du premier ordre, qui appartiennent au système algébrique de trois formes, c'est-à-dire φ, la forme linéaire $\sum_{r\,1}^{3} X_r\, dx_r$ et la forme *bilinéaire* dont les coefficients sont les éléments du premier système dérivé selon φ du système des X_r. Parmi ces invariants, il convient de signaler

$$\Theta = \sum_{rs\,1}^{n} a^{(rs)} X_{rs} \,,$$

qui se présente fréquemment dans les applications. A ce même point de vue il ne sera pas sans intérêt d'avertir que des transformations faciles conduisent à une seconde expression de Θ, c'est-à-dire

$$\Theta = \frac{1}{\sqrt{a}} \sum_{r\,1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_r} (\sqrt{a} X^{(r)}) \,,$$

qui est plus commode pour les calculs, tandis que l'expression précédente se prête mieux aux déductions théoriques. Dans le cas particulier de deux variables seulement, on peut substituer à la forme bilinéaire, qu'on vient d'indiquer, la forme quadratique aux coefficients $X_{rs} + X_{sr}$, pourvu qu'on y ajoute l'invariant, qui s'obtient en composant le système X_{rs} avec le système contrevarianet E (Chap. I, § 3). Son expression est

$$\sum_{rs\,1}^{2} \varepsilon^{(rs)} X_{rs} = \frac{1}{\sqrt{a}} (X_{12} - X_{21}) \,,$$

ou, si l'on veut,

$$\frac{1}{\sqrt{a}} \left\{ \frac{\partial X_1}{\partial x_2} - \frac{\partial X_2}{\partial x_1} \right\}.$$

D'une façon analogue, pour $n = 3$, il suffit d'associer au système double symétrique $X_{rs} + X_{sr}$, un système contrevariant simple, que nous definissons en posant:

$$2\mu^{(r)} = - \sum_{st\,1}^{3} \varepsilon^{(rst)} X_{st} \,.$$

En développant et en tenant compte de la convention faite à l'égard des indices, on trouve pour les $\mu^{(r)}$ les expressions

$$2\mu^{(r)} = \frac{1}{\sqrt{a}}\left\{\frac{\partial X_{r+2}}{\partial x_{r+1}} - \frac{\partial X_{r+1}}{\partial x_{r+2}}\right\},$$

très-aisées à calculer effectivement dans les applications particulières.

CHAPITRE IV.

APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES

1. - Étude des variétés à deux dimensions (Géométrie sur une surface): Généralités. Courbure. Congruences. Faisceaux de congruences. Invariants d'un faisceau. Théorème de Beltrami.

La théorie des surfaces et des lignes tracées sur une surface, telle qu'elle a été fondée par GAUSS s'est maintenant développée de manière à constituer à elle seule un vaste et fécond domaine scientifique. Mais, même dans les meilleures expositions de cette théorie, l'unité de méthode fait défaut. Elle ne ressort pas comme le développement naturel de principes simples et bien déterminés. Le calcul différentiel absolu y conduit au contraire sans aucun effort, en donnant à la théorie une forme aussi simple que possible.

Il conduit aussi à séparer rationnellement la théorie des variétés à deux dimensions, considérées en elles mêmes, de la théorie des surfaces, considérées comme douées d'une forme rigide dans notre espace. La première découle de la considération de la forme différentielle, qui exprime le ds^2 de la variété (*première forme fondamentale*); pour la seconde, il suffit d'associer une autre forme quadratique (*seconde forme fondamentale*, d'après M. BIANCHI).

Nous commençons par la première. Soit une variété V_2 définie par l'expression du carré de son élément linéaire

$$ds^2 = \sum_{rs}^{2}{}_{1}\, a_{rs}\, dx_r\, dx_s = \varphi\ .$$

Convenons de regarder cette forme comme fondamentale. Si son invariant de GAUSS s'annule, nous savons déjà que la variété sera linéaire. Si cet invariant G n'est pas nul, l'association de G à φ donne lieu à tous les invariants propres de la forme, c'est-à-dire à toutes les expressions liées à des propriétés intrinsèques de la variété V_2.

Soient $\lambda_{1/r}$, $\lambda_{2/r}$ les systèmes coordonnés covariants de deux congruences orthogonales quelconques de courbes tracées dans notre variété (congruences [1], [2]). Reprenons, pour $n = 2$, les positions générales (7′) du Chapitre II. En faisant

(1) $$\varphi_s = \sum_1^2 {}_j \, \gamma_{21j} \lambda_{j/s} \,,$$

elles deviennent

(2) $$\lambda_{1/rs} = -\lambda_{2/r}\varphi_s \,, \qquad \lambda_{2/rs} = \lambda_{1/r}\varphi_s \,.$$

Les coefficients de rotation du couple [1], [2] se réduisent dans ce cas à deux seuls algébriquement indépendants: nous pourrons prendre γ_{121}, γ_{212}. Ils représentent les courbures géodésiques des lignes 1 et 2 respectivement.

Si l'on pose

$$\overline{\varphi}_r = \sum_1^2 {}_s \, \varepsilon_{rs} \varphi^{(s)} \,,$$

la formule (20) du Chapitre II peut être remplacée par

(3) $$\sum_1^2 {}_{rs} \, a^{(rs)} \overline{\varphi}_{rs} = G \,.$$

Dans les deux dernières équations (2) considérons les $\lambda_{2/r}$ comme inconnues et imaginons en même temps les $\lambda_{1/r}$ remplacées par leurs valeurs

$$\lambda_{1/r} = \sum_1^2 {}_s \, \varepsilon_{rs} \lambda_2^{(s)} \quad [24]$$

et les φ_s par celles, qu'on tire des (1). La (3) constitue alors la condition nécessaire et suffisante pour que ces équations et la

(4) $$\sum_1^2 {}_r \, \lambda_{2/r} \lambda_2^{(r)} = 1$$

---

[24] On les obtient en résolvant les deux équations

$$\sum_1^2 {}_r \, \lambda_1^{(r)} \lambda_{1/r} = 1 \,, \qquad \sum_1^2 {}_r \, \lambda_1^{(r)} \lambda_{2/r} = 0 \,,$$

forment un système complètement intégrable. Si l'on désigne par $\lambda_{2/r}$ les éléments d'une solution particulière de ce système algébrico-différentiel, sa solution générale s'obtient en posant

$$\lambda_r = \operatorname{sen} \alpha \, \lambda_{1/r} + \cos \alpha \, \lambda_{2/r} \, ,$$

où α est une constante.

Pour une valeur particulière quelconque de α, les λ_r sont les éléments du système coordonné covariant d'une congruence, dont les lignes forment, en chaque point de V_2, un angle α avec la ligne 2.

Il s'en suit que le système φ_r joue le même rôle pour toutes les congruences, qui rencontrent une congruence donnée sous un angle constant α, quelque soit la valeur de α.

Un tel système de congruences se nomme *faisceau* et φ_r (ou respectivement $\varphi^{(r)}$) s'appelle *système coordonné covariant* (ou *contrevariant*) *du faisceau.*

L'équation (3) représente donc la condition pour qu'un système φ_r donné à l'avance soit le système coordonné covariant d'un faisceau.

Si φ_r et ψ_r sont les systèmes covariants de deux faisceaux, les différences $\varphi_r - \psi_r$ ont une signification géométrique remarquable. Elles sont les dérivées de l'angle, que forment entre elles les lignes de deux congruences déterminées, mais quelconques, des deux faisceaux.

En suivant les règles du § précédent, supposons qu'on ait construit tous les invariants différentiels absolus, qu'on peut obtenir par l'association à φ du système covariant d'une congruence [2]. On aura obtenu, par le fait même, toutes les expressions aptes à représenter les propriétés intrinsèques d'une telle congruence, ou bien encore d'une ligne quelconque tracée dans la variété V_2.

En opérant, comme on vient de dire, nous trouvons un seul invariant algébrique (ou d'ordre zéro), qui, conformément à (4), est égal à l'unité.

A cause des (2), les invariants différentiels du premier ordre sont les invariants algébriques absolus, communs à la forme fondamentale et aux deux formes linéaires ayant pour coefficients $\lambda_{2/r}$ et φ_r.

Il sont au nombre de deux, par exemple

$$J_1 = \sum_1^2{}_r \lambda_2^{(r)} \varphi_r = \gamma_{212} \, ,$$

$$J_2 = \sum_1^2{}_r \varphi^{(r)} \varphi_r = \gamma_{121}^2 + \gamma_{212}^2 \, .$$

Pour avoir les invariants du second ordre, on devra adjoindre la forme bilinéaire aux coefficients φ_{rs}, ou, ce qui est le même, l'invariant G et la forme quadratique ayant pour coefficients

$$\psi_{rs} = \frac{1}{2}(\varphi_{rs} + \varphi_{sr}) .$$

Parmi les invariants qui en résultent, on doit signaler

$$\vartheta = \sum_{1}^{2}{}_{rs}\, a^{(rs)}\psi_{rs} = \sum_{1}^{2}{}_{rs}\, a^{(rs)}\varphi_{rs} .$$

Enfin, pour obtenir tous les invariants d'un ordre quelconque $\mu > 2$, il faut considérer encore les systèmes dérivés de G et de ψ_{rs} jusqu'à l'ordre $\mu - 2$.

Les invariants propres de la forme fondamentale représentent, avons-nous dit, les propriétés intrinsèques de la variété V_2; de même ceux qui dépendent aussi des φ_r, ψ_{rs} et leurs dérivées, sans contenir toutefois les $\lambda_{2/r}$, se rapportent à des propriétés intrinsèques du faisceau, dont φ_r est le système covariant. Ainsi l'invariant J_2 représente la somme des carrés des courbures géodésiques de deux lignes appartenant à deux congruences orthogonales, mais quelconques, du faisceau. C'est une propriété du faisceau qu'une telle somme ait la même valeur pour un couple quelconque de congruences orthogonales.

De même l'invariant ϑ nous apprend que la différence

$$\frac{\partial \gamma_{212}}{\partial s_2} - \frac{\partial \gamma_{121}}{\partial s_1}$$

ne varie pas avec le couple considéré; lorsqu'elle s'annule (et dans ce cas seulement) toute congruence du faisceau est isotherme. D'ici ressort tout naturellement le théorème de BELTRAMI: *Si une congruence est isotherme, il en est de même pour toutes les congruences, qui appartiennent avec elle au même faisceau.*

2. - Surfaces de l'espace ordinaire. Équations fondamentales de la théorie de l'applicabilité. Formes particulières remarquables. Généralisation des formules de Gauss et de Codazzi.

Comme il résulte du § 1 du Chapitre précédent, pour déterminer toutes les surfaces, qui admettent une expression donnée pour leur ds^2, il suffit de déterminer tous les systèmes doubles b_{rs}, qui satisfont au système algébrico-différentiel

$$c)\qquad b_{rst} = b_{rts}\,,$$

$$g)\qquad \frac{b}{a} = G\,,$$

où l'on a posé

$$b = b_{11}b_{22} - b_{12}^2\,.$$

Après cela les coordonnées y_1, y_2, y_3 des points de la surface, par rapport à un système cartésien orthogonal quelconque, sont les intégrales du système

$$i)\qquad a_{rs} = \sum_1^3{}_h\, y_{h/r}y_{h/s}\,,$$

$$(h = 1, 2, 3;\ r, s = 1, 2),$$

$$j)\qquad y_{h/rs} = z_h\, b_{rs}\,,$$

les z_h étant définies par les équations

$$\sum_1^3{}_h\, z_h y_{h/r} = 0\,, \qquad (r = 1, 2),$$

$$\sum_1^3{}_h\, z_h^2 = 1\,.$$

Il va sans dire que $y_{h/r}$, $y_{h/rs}$ désignent les dérivées covariantes des fonctions inconnues y_h. Le système i), j) est désormais complètement intégrable (car les conditions d'intégrabilité se réduisent précisément aux équations c) et g)). Son intégrale générale dépend de six constantes arbitraires; elles fixent la position des axes coordonnés par rapport à la surface, ou, si l'on veut, la position de la surface par rapport aux axes, lorsqu'on regarde ceux-ci comme donnés et qu'il s'agit de trouver la forme de la surface.

Nous voyons donc qu'à chaque intégrale particulière du système i), j) correspond une unique surface, déterminée à un déplacement rigide près, qui admet la forme φ comme expression du carré de son élément linéaire. Les équations i), j) peuvent être appelées *équations intrinsèques* de la surface. Ces équations, en concours avec c) et g) (qu'on dira *équations fondamentales de la théorie des surfaces*), se prêtent à l'étude des propriétés de la surface, qu'elles définissent beaucoup mieux que l'équation en termes finis, où figurent des éléments étrangers à la surface elle-même.

Les équations $c)$, $g)$ aussi bien que les $i)$, $j)$ se transforment convenablement (Chapitre II, § 1) en posant

$$b_{rs} = \sum_{hk}^{2}{}_{1}\, \omega_{hk}\lambda_{h/r}\lambda_{k/s}\,, \tag{5}$$

où les $\omega_{hk} = \omega_{kh}$ désignent trois invariants et les $\lambda_{1/r}$, $\lambda_{2/r}$ les systèmes covariants d'un couple orthogonal quelconque.

On démontre que ω_{11}, ω_{22}, ω_{12} mesurent, au signe près, les courbures normales et la torsion géodésique de lignes 1, 2.

En convenant pour un moment de ne pas considérer comme distincts les indices qui diffèrent entre eux par un multiple de 2, les formules $c)$ et $g)$ équivalent respectivement aux suivantes:

$$c_1)\qquad \frac{\partial \omega_{ii}}{\partial s_{i+1}} - \frac{\partial \omega_{ii+1}}{\partial s_i} = \sum_{1}^{2}{}_h \left\{\omega_{ih}\gamma_{ii+1h} + \omega_{i+1h}\gamma_{hh+1h+1}\right\}\,, \qquad (i = 1, 2)$$

$$g_1)\qquad \omega_{11}\omega_{22} - \omega_{12}^2 = G\,.$$

Si nous introduisons six nouvelles inconnues ξ_1, ξ_2, ξ_3, η_1, η_2, η_3 en écrivant simplement (y, ζ) pour un quelconque des systèmes (y_h, ζ_h), les équations $i)$ et $j)$ deviennent

$$i_1)\qquad \left\{\begin{aligned} &\sum_{1}^{3}{}_h\, \xi_h^2 = 1\,, \qquad \sum_{1}^{3}{}_h\, \eta_h^2 = 1\,, \qquad \sum_{1}^{3}{}_h\, \xi_h\eta_h = 0\,, \\ &\qquad\qquad y_r = \xi\lambda_{1/r} + \eta\lambda_{2/r}\,, \end{aligned}\right.$$

$$j_1)\qquad \left\{\begin{aligned} \xi_r &= \quad\eta\varphi_r + \zeta\sum_{1}^{2}{}_h\, \omega_{1h}\lambda_{h/r}\,, \\ \eta_r &= -\xi\varphi_r + \zeta\sum_{1}^{2}{}_h\, \omega_{2h}\lambda_{hr}\,, \end{aligned}\right.$$

étant

$$\zeta = \sqrt{1 - \xi^2 - \eta^2}\,.$$

Les inconnues ξ_1, ξ_2, ξ_3; η_1, η_2, η_3 ne sont pas autre chose que les cosinus de direction des tangentes aux lignes 1, 2; les ζ_1, ζ_2, ζ_3 sont alors les cosinus de la normale à la surface, toujours, bien entendu, par rapport aux axes y_1, y_2, y_3.

Comme il a été enseigné au Chapitre II, il y a un couple $\lambda_{1/r}$, $\lambda_{2/r}$ pour qui les expressions (5) prennent une forme très simple, qui est leur forme canonique. Ce couple correspond aux lignes de courbure de la surface. On a alors $\omega_{12} = 0$, ce qui donne le théorème connu que les lignes de courbure ont leur torsion géodésique nulle; ω_{11}, ω_{22}, changées de signe, sont les courbures principales. Les c_1) et g_1) se réduisent dans ce cas aux formules bien connues de CODAZZI et de GAUSS.

On peut aussi supposer $\omega_{22} = 0$ (ce qui est loisible toutefois, pour un couple de congruences réelles, seulement lorsque $G \leq 0$). Les lignes de la congruence [2] sont alors asymptotiques; l'équation g_1) définit ω_{12} et les c_1) conduisent à des relations, signalées déjà par M. RAFFY ([25]).

Nous devons renvoyer aux « Lezioni etc. », si souvent citées, le lecteur désireux de se rendre complètement compte comment des formules indiquées descendent les théorèmes les plus importants de cette théorie. Il vaut mieux que nous nous arrêtions un moment sur un problème important de la théorie de l'applicabilité, où le calcul différentiel absolu a permis d'aller jusqu'au fond. Ce sera l'objet du § suivant.

3. - Surfaces jouissant de propriétés données. Quadriques.

Soit donnée une forme φ. Qu'on se propose de reconnaître si, parmi les surfaces, qui admettent la forme φ comme expression de leur ds^2, il en a qui satisfont à certaines conditions fixées à l'avance. Pour cela il suffira d'adjoindre aux équations c_1), g_1); i_1), j_1) celles, qui expriment analytiquement les conditions données. Tout se réduit alors à déterminer les conditions d'intégrabilité d'un tel système. Si on peut y satisfaire, on a par là même les équations dont dépend la recherche des surfaces inconnues. C'est la méthode classique, qui conduit par exemple à décider si, parmi les surfaces, auxquelles convient une expression déterminée pour l'élément linéaire, il y en a de réglées ou à courbure moyenne constante, etc. Nous nous bornons à avertir que les théorèmes connus sur la déformation de telles catégories de surfaces se retrouvent de la façon la plus spontanée en employant nos méthodes.

Nous nous en sommes servi en particulier ([26]) pour reconnaître, s'il existe, et déterminer, lorsqu'il en est ainsi, les surfaces du second degré non developpables, qui possèdent un élément linéaire donné. Ce problème qui avait été résolu seulement pour la sphère, est maintenant épuisé pour une quadrique quelconque. On peut de la sorte, par des simples opérations en termes finis, décider si une forme donnée φ peut appartenir

---

([25]) *Sur le problème général de la déformation des surfaces*, « Comptes Rendus », 13 Juin 1892.

([26]) G. RICCI, *Sulla teoria intrinseca delle superficie ed in ispecie di quelle di secondo grado*, « Atti dell'Istituto Veneto », 1895; *Lezioni etc.*, Seconde partie, Chap. V.

comme carré de l'élément linéaire à une surface du second degré. *Il y a au plus une quadrique, à des mouvements près, qui jouit de cette propriété.* Lorsqu'il il y en a une effectivement, elle reste ainsi déterminée.

4. - Extension de la théorie des surfaces aux espaces linéaires à n dimensions.

Les considérations d'ordre général, dont il a été question dans les §§ qui précèdent, s'étendent très aisément aux variétés à n dimensions contenues dans un espace linéaire S_{n+1}. Il paraît à propos de réserver à de telles variétés le nom d'*hypersurfaces*. On s'en rend compte en se rappelant que les formules c) et g) de ce Chapitre sont un cas particulier ($n = 2$) de celles, qu'on a rencontré au Chapitre précédent, pour exprimer qu'une forme φ est de la première classe.

On peut déduire des dites formules qu'une hypersurface à n dimensions, dont on connaît l'expression du ds^2, est déterminée de forme (en n'ayant pas égard à la position dans l'espace S_{n+1}) par une seconde forme quadratique différentielle. Si aux coefficients b_{rs} de cette dernière on donne des expressions analogues aux (5), on a les équations fondamentales

$$C) \qquad \frac{\partial\omega_{hl}}{\partial s_j} - \frac{\partial\omega_{hj}}{\partial s_l} = \sum_1^n{}_k\, \omega_{hk}(\gamma_{kjl} - \gamma_{klj}) + \sum_1^n{}_k\, (\omega_{jk}\gamma_{khl} - \omega_{lk}\gamma_{khj}),$$

$$G) \qquad \omega_{hk}\omega_{ij} - \omega_{hj}\,\omega_{ik} = \sum_1^n{}_{rstu}\, a_{rs,tu}\lambda_h^{(r)}\lambda_k^{(s)}\lambda_i^{(t)}\lambda_j^{(u)}.$$

À côté des coordonnées cartésiennes $y_1, y_2, \ldots y_{n+1}$ des points de l'hypersurface, il convient d'introduire comme inconnues auxiliaires les cosinus de direction des lignes des congruences de référence. En désignant par ξ_{ih} les cosinus de l'angle que la ligne i fait avec l'axe y_h, les équations intrinsèques d'une hypersurface peuvent se résumer comme il suit

$$\text{I)} \qquad \left\{\begin{aligned} &\sum_1^{n+1}{}_h\, \xi_{ih}\xi_{jh} = \begin{cases} 1, & \text{pour } i = j \\ 0, & \text{pour } i \gtrless j \end{cases} \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n) \\ &y_r = \sum_1^n{}_i\, \xi_i \lambda_{i/r}, \end{aligned}\right.$$

$$\text{II)} \qquad \xi_{i/r} = \sum_1^n{}_j \left(\zeta\omega_{ij} + \sum_1^n{}_l\, \gamma_{ijl}\xi_l\right)\lambda_{j/r}, \qquad (i, r = 1, 2, \ldots, n)$$

où, à la place de ξ_i, il faut entendre successivement chacune des

$$\xi_{ih}\,, \qquad (h = 1, 2, \ldots, n+1)$$

et on a écrit, pour abrégér, ζ au lieu de

$$\sqrt{1 - \sum_1^n {}_h\, \xi_h^2}\,.$$

Il est bien clair que $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_{n+1}$ représentent les cosinus directeurs de la normale à l'hypersurface; les γ sont les coefficients de rotation par rapport aux n congruences de référence.

Les invariants ω ont aussi des significations analogues à celles, qu'on a indiqué pour $n = 2$. En prenant les b_{rs} sous leur forme canonique, les congruences correspondantes sont formées, comme il arrive pour $n = 2$, par les lignes de courbure de l'hypersurface. Il va sans dire que dans ce cas les équations C), G); I), II) se simplifient notablement.

5. - Groupes de mouvements dans une variété quelconque [27].

Soit φ l'expression du ds^2 d'une variété V_n. Considérons un mouvement infinitésimal, qui fait subir aux points de la variété un déplacement infiniment petit $\xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \ldots, \xi^{(n)}$, c'est-à-dire qui fait passer chaque point $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ à la position voisine $(x_1 + \xi^{(1)},\ x_2 + \xi^{(2)}, \ldots,\ x_n + \xi^{(n)})$. Nous dirons *rigide* ou sans déformation un tel mouvement, si la forme φ admet la transformation infinitésimale

$$Xf = \sum_1^n {}_r\, \xi^{(r)} \frac{\partial f}{\partial x_r}\,.$$

Les conditions, auxquelles doivent satisfaire les $\xi^{(r)}$, pour qu'il en soit ainsi, ont été données par M. KILLING [28].

Avec les notations du calcul différentiel absolu, elles s'écrivent

$$k) \qquad \xi_{rs} + \xi_{sr} = 0\,.$$

---

[27] G. RICCI, *Sui gruppi continui di movimenti in una varietà qualunque a tre dimensioni*, « Memorie della Società Italiana delle Scienze », serie 3ª, t. XII, 1899.

Les résultats de ce mémoire ont été résumés dans deux Notes des « Comptes Rendus » (16 et 22 Aout 1898).

[28] Voir le mémoire *Ueber die Grundlagen der Geometrie*, « Crelle's Journal », Bd. CIX, 1892.

Soient

$$\xi_r = \varrho \lambda_r$$

les expressions canoniques des ξ_r.

La congruence, dont λ_r est le système coordonné covariant, est formée par les trajectoires du mouvement rigide, engendré par la transformation infinitésimale Xf.

En posant dans les k) pour les ξ_r leurs expressions canoniques, on trouve le théorème suivant, qui est une extension naturelle de ce, qui arrive pour les surfaces.

Pour qu'une congruence donnée C dans une variété quelconque V_n résulte des trajectoires d'un mouvement sans déformation, il faut et il suffit:

a) *que tout système de $n-1$ congruences orthogonales entre elles et à C soit canonique* (par rapport à cette dernière).

b) *que toute congruence normale à C soit géodésique, ou telle que sa courbure géodésique soit en chaque point perpendiculaire à la ligne de C, passant par le même point.*

c) *que la congruence C soit normale et la famille ∞^1 des hypersurfaces orthogonales soit isotherme.*

Lorsque $n = 3$, en employant le système covariant E (Chap. I, § 3), les équations k) peuvent être remplacées par

$$k_0) \qquad \xi_{rs} = \sum_{1}^{3}{}_t \, \varepsilon_{rst} \mu^{(t)} ,$$

où les $\mu^{(r)}$ sont des inconnues auxiliaires, qui forment évidemment un système contrevariant.

Dans la variété V, que nous considérons, prenons un triple orthogonal quelconque [1], [2], [3] et introduisons à la place des ξ_r et μ_r les invariants η_i et ϑ_i, définis par les équations

$$\eta_i = \sum_{1}^{3}{}_r \, \xi^{(r)} \lambda_{i/r} , \qquad \vartheta_i = \sum_{1}^{3}{}_r \, \mu^{(r)} \lambda_{i/r} .$$

Les k_0) deviennent

$$k_0') \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \eta_i}{\partial s_i} &= \sum_{1}^{3}{}_h \, \gamma_{ihi} \eta_h , \\ \frac{\partial \eta_i}{\partial s_{i+1}} &= \sum_{1}^{3}{}_h \, \gamma_{ihi+1} \eta_h + \vartheta_{i+2} , \qquad (i = 1, 2, 3) \\ \frac{\partial \eta_i}{\partial s_{i+2}} &= \sum_{1}^{3}{}_h \, \gamma_{ihi+2} \eta_h - \vartheta_{i+1} , \end{aligned} \right.$$

et on aura les conditions d'intégrabilité (Chap. II, § 2)

$$h)\qquad \frac{\partial \vartheta_i}{\partial s_j} = \sum_1^3{}_h \gamma_{ihj}\vartheta_h + \gamma_{ij+2}\eta_{j+1} - \gamma_{ij+1}\eta_{i+2}\,, \qquad (i, j = 1, 2, 3).$$

6. - Étude complète des groupes de mouvements pour les variétés V_3 à trois dimensions. Résolution du problème: Reconnaître si une V_3 donnée admet un groupe de mouvements et le déterminer, lorsqu'il existe.

Groupes intransitifs. - Dans une variété V_3 une famille ∞^1 de surfaces V_2 peut être représentée (Chap. II, § 3) par le même système (covariant par exemple) qui représente la congruence de ses trajectoires orthogonales. Soit donc donné un tel système et proposons-nous de reconnaître s'il y a des mouvements rigides dans V_3, qui transforment *chaque* V_2 en elle même. Tout d'abord il est à remarquer que, d'après ce qui précède, on pourra regarder le problème comme résolu toutes les fois que du mouvement cherché restent déterminées les trajectoires; ce, qui arrivera pour les groupes à un seul paramètre.

Cela posé, regardons, dans les équations k_0'), h) du § précédent, comme congruence [3] celle des trajectoires orthogonales aux surfaces V_2. On aura

$$(6)\qquad \eta_3 = 0\,,$$

et les équations k_0'), pour $i = 3$, nous donneront

$$(7)\qquad \sum_1^3{}_h \gamma_{3h3}\eta_h = 0\,,$$

$$(8)\qquad \vartheta_1 = \sum_1^3{}_h \gamma_{3h2}\eta_h\,, \qquad \vartheta_2 = -\sum_1^3{}_h \gamma_{3h1}\eta_h\,.$$

Si la (7) n'est pas une identité, prise avec (6), elle nous fournit les rapports des ξ_1, ξ_2, ξ_3 et par conséquent les trajectoires du mouvement cherché, pourvu toutefois qu'il soit possible, c'est-à-dire que les conditions portées par le théorème du § 5 soient satisfaites.

Si, au contraire, la (7) est identiquement verifiée, on a

$$(9)\qquad \gamma_{313} = \gamma_{323} = 0\,,$$

ce qui nous dit (Chap. II, § 3) que la congruence [3] est géodésique. Nous voyons donc que:

Pour qu'une variété V_3 *admette un groupe de mouvements rigides à plus qu'un paramètre, qui laisse invariant toute surface d'une famille* ∞^1, *il faut que ces surfaces soient parallèles.*

Remarquons maintenant que, à cause des équations (6) et (8), les fonctions inconnues se réduisent à trois seulement, soit η_1, η_2 et ϑ_3. Comme les équations k_0'), qui restent à considérer, et les h) donnent toutes les dérivées premières de ces trois fonctions, exprimées par les fonctions elles mêmes et par des quantités connues, on a encore:

Le groupe de mouvements rigides, qui laisse invariante toute surface d'une famille ∞^1, *dépend au plus de trois paramètres.*

Pour épuiser notre recherche, il faut discuter d'une façon complète le système simultané (6), (8), (9), k_0'), h). Un choix convenable du couple [1], [2] rend cette discussion bien aisée. Nous ne pouvons pas cependant la reproduire ici. Parmi les résultats auxquels elle conduit nous nous bornons à citer le suivant:

Si une variété V_3 *admet un groupe à trois paramètres de l'espèce considérée tout à l'heure, en un point quelconque de* V_3 *les directions principales sont données par la normale et par les tangentes à la surface* V_2, *qui passe par le même point; les invariants principaux de* V_3, *dont deux coïncident, sont invariants du groupe et gardent par conséquent la même valeur sur chaque* V_2.

Groupes transitifs. – Voici les résultats obtenus pour ce cas, en partant toujours des équations k_0'), h) du § précédent.

Lorsque V_3 admet un groupe G à plus qu'un paramètre, les invariants principaux de V sont invariants du groupe.

Pour que ce groupe soit transitif, il faut donc que les invariants principaux soient constants. Admettons qu'il en soit ainsi et désignons ces invariants par ω_1, ω_2, ω_3. Il nous faudra distinguer les trois cas suivants:

1) $$\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 \; ;$$

2) $$\omega_2 = \omega_3 \, , \qquad \omega_1 \neq \omega_2 \; ;$$

3) $$\omega_2 \neq \omega_3 \, , \qquad \omega_3 \neq \omega_1 \, , \qquad \omega_1 \neq \omega_2 \, .$$

Dans le premier cas la variété V_3 est à courbure constante et le groupe G à six paramètres.

Dans le second cas à l'invariant ω_1 correspond une congruence principale [1] unique et déterminée; aux invariants ω_2 et ω_3 toutes les congruences orthogonales à [1]. Le groupe G sera transitif et à 4 paramètres, pourvu que soient encore satisfaites les conditions que voici:

a) la congruence [1] est géodésique; pour toute congruence orthogonale [2], la courbure géodésique est perpendiculaire à la fois aux lignes 1, 2;

b) les coefficients de rotation γ_{132}, γ_{123} ont des valeurs constantes opposées.

Dans le dernier cas, le triple [1], [2], [3] des congruences principales de V_3 est complètement déterminé. Pour que G soit transitif, il faut encore (et il suffit) que les coefficients de rotation du triple soient tous constants. Cette condition vérifiée, le groupe a précisément trois paramètres.

7. - Relations des résultats précédents avec les recherches de Lie et de M. Bianchi.

Les recherches, dont on vient de parler, sont liées intimement avec celles de LIE sur le problème de RIEMANN-HELMHOLTZ et celles de M. BIANCHI sur les espaces à trois dimensions, qui admettent un groupe continu de mouvements ([29]).

M. BIANCHI a déterminé, en se rapportant à des variables convenablement choisies, tous les types de groupes de mouvements possibles dans une variété V_3 et les éléments linéaires (exprimés par les mêmes variables), qui leurs correspondent.

Nous venons de nous occuper de la question suivante:

L'élément linéaire d'une variété quelconque V_3 étant donné en coordonnées générales, reconnaître s'il y a des mouvements rigides possibles dans cette variété, et déterminer, lorsqu'il y en a, le groupe, qu'ils forment, par ses équations de définition.

On fixe de la sorte les criteriums, qui permettent de décider si un élément linéaire donné rentre dans un des types de M. BIANCHI. Ces caractères d'une nature invariante revêtent parfois una forme géométrique très suggestive.

Nos résultats portent une contribution nouvelle au problème, que LIE appelle de RIEMANN-HELMHOLTZ.

Rappelons pour cela que nous avons considéré au § précédent deux systémes simples $\xi^{(r)}$ et $\mu^{(r)}$. Lorsque la variété V_3 est euclidéenne et x_1, x_2, x_3 sont des coordonnées cartésiennes orthogonales, les ξ sont les composantes de la translation, les μ les composantes de la rotation, qui

([29]) Voir les « Memorie della Società Italiana delle Scienze », ser. 3a, t. XI, 1897.

correspondent au mouvement rigide infiniment petit, qu'on envisage. D'après le § 4 du premier chapitre, nous pouvons immédiatement former les composantes de ces vecteurs pour l'espace euclidéen en coordonnées générales. Les mêmes expressions sont valables aussi pour une variété quelconque V_3, lorsqu'on se borne au domaine (du premier ordre) d'un point donné, parce que celui-ci fait toujours partie d'un espace linéaire tangent.

Cela posé, les équations de définition du groupe G des mouvements d'une variété donnée, nous apprennent que:

Dans les variétés à courbure constante, et dans ce cas seulement, il existe un mouvement infiniment petit, pour lequel les composantes de translations et celles de rotation prennent, dans un point donné, des valeurs initiales fixées à l'avance.

Nous trouvons ici la signification cinématique précise des paroles de RIEMANN (30) qui contiennent la solution, donnée par lui, au problème, dont il s'agit. Ce sont les paroles suivantes, reproduites aussi dans l'ouvrage de LIE (31):

Der gemeinsame Charakter dieser Mannigfaltigkeiten, deren Krümmungsmass constant ist, kann auch so ausgedruckt werden, dass sich die Figuren in ihnen ohne Dehnung (ici, remarque LIE, il doit être sous entendu *beliebig*) *bewegen lassen.*

Si nous envisageons maintenant les variétés V_3, qui possèdent un groupe de mouvements G, transitif, mais à 4 paramètres seulement, la translation peut être encore choisie à volonté, mais la rotation doit s'effectuer autour d'un axe déterminé; lorsque le groupe transitif est à trois paramètres il n'est plus possible aucune rotation, tout en restant arbitraire la translation.

Remarquons en terminant que les résultats, qu'on vient d'exposer, répondent complètement, du moins pour les variétés à trois dimensions, à la question, qui a été mise à concours par la Société Jablonowski, pour l'année 1901 (32).

Signalons encore cette circonstance, qu'on aurait pu dans la recherche se passer sans inconvénient de la théorie de groupes, bien qu'on ait préféré en adopter le langage pour faire mieux saisir au lecteur l'esprit des résultats et leur connexion avec ceux, qui étaient déjà connus.

---

(30) *Gesammelte Werke*, pag. 264.

(31) LIE-ENGEL, *Theorie der Transformationsgruppen*, Dritter Abschnitt, pag. 289 et suivantes.

(32) Voir par exemple « Math. Annalen », B. 50, 1898, page 601.

CHAPITRE V.

APPLICATIONS MÉCANIQUES

1. - Intégrales premières des équations de la dynamique. Intégrales linéaires (ordinaires et particularisées).

Considérons un système matériel à liaisons indépendantes du temps, avec n degrés de liberté. Soit

$$2T = \sum_{1}^{n}{}_{rs}\, a_{rs} x'_r x'_s$$

l'expression de la force vive du système. (On désigne selon l'usage par un accent les dérivées par rapport au temps t).

Les équations de LAGRANGE, qui définissent le mouvement du système sous l'action de forces données, sont

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial x'_h}\right) - \frac{\partial T}{\partial x_h} = X_h\,, \qquad (h = 1, 2, ..., n)$$

où les X_h sont liées aux forces directement appliquées par des relations bien connues.

On reconnaît aisément que, lorsqu'on change les paramètres x_i, les X_h se transforment par covariance. Introduisons aussi le système réciproque $X^{(h)}$, notre forme fondamentale étant, bien entendu,

$$2T\, dt^2 = \sum_{1}^{n}{}_{rs}\, a_{rs}\, dx_r\, dx_s\,.$$

En résolvant les équations de LAGRANGE par rapport aux dérivées secondes des coordonnées, on a

$$(1) \qquad x''_i = X^{(i)} - \sum_{1}^{n}{}_{rs} \left\{ \begin{matrix} r\ s \\ i \end{matrix} \right\} x'_r x'_s \quad (33);$$

c'est la forme, qui convient le mieux à notre but.

(33) Les $\left\{ \begin{matrix} r\ s \\ i \end{matrix} \right\}$ sont les symboles de CHRISTOFFEL de seconde espèce; voir Chap. I, § 5.

Soit maintenant f une fonction des x et des x'. Pour que

$$f = \text{const.}$$

soit une intégrale première des équations, il faut et il suffit que df/dt, c'est-à-dire

$$\sum_1^n{}_i \left\{ \frac{\partial f}{\partial x_i} x'_i + \frac{\partial f}{\partial x'_i} x''_i \right\},$$

s'annule identiquement, lorsqu'on remplace les x''_i par leurs valeurs (1). La condition pourra donc s'écrire

$$(2) \qquad \frac{df}{dt} = \sum_1^n{}_i \frac{\partial f}{\partial x'_i} X^{(i)} + \sum_1^n{}_i \left\{ \frac{\partial f}{\partial x_i} x'_i - \frac{\partial f}{\partial x'_i} \sum_1^n{}_{rs} \begin{Bmatrix} rs \\ i \end{Bmatrix} x'_r x'_s \right\} \equiv 0 .$$

Il est bien connu [34] qu'à toute intégrale algébrique (à l'égard des x') du mouvement d'un système, sous l'action de forces données, correspond une intégrale homogène (toujours à l'égard des x') pour le mouvement du même système, sans forces.

C'est ainsi que l'étude de ce cas acquiert une importance toute particulière. Sous forme géométrique il correspond aux intégrales homogènes des géodésiques, car les trajectoires du mouvement en l'absence de forces ne sont autre chose que les géodésiques de la variété V_n, dont $2T\,dt^2$ est l'expression du ds^2.

Appliquons donc en premier lieu la formule (2), pour exprimer qu'une forme homogène

$$f = \sum_1^n{}_{r_1 r_2 \dots r_m} c_{r_1 r_2 \dots r_m} x'_{r_1} x'_{r_2} \dots x'_{r_m}$$

de degré m, égalée à une constante, donne lieu à une intégrale première des géodésiques. En remarquant que les coefficients de f forment un système covariant symétrique d'ordre m et ayant égard aux formules (20) du Chap. I, on passe immédiatement de (2) (où l'on suppose $X^{(i)} = 0$) à

$$(3) \qquad \sum_1^n{}_{r_1 r_2 \dots r_m r_{m+1}} c_{r_1 r_2 \dots r_m r_{m+1}} x'_{r_1} x'_{r_2} \dots x'_{r_m} x'_{r_{m+1}} \equiv 0 .$$

---

[34] Voir par exemple: T. Levi-Civita, *Sugli integrali algebrici delle equazioni dinamiche*, « Atti della Reale Accademia delle Scienze di Torino », vol. XXXI, 1896; [in questo vol.: IX, pp. 199-205].

Le premier système dérivé du système $c_{r_1 r_2 \dots r_m}$ s'est introduit par lui-même. On peut prévoir dès à présent la simplification, que la dérivation covariante va porter dans ce genre de recherches.

Si l'on ne suppose pas que toutes les X s'annulent à la fois, les conditions pour que $f = \text{const.}$ (f étant la forme considérée tout à l'heure) soit une intégrale du système (1) se composent de (3) et de

$$(4) \qquad \sum_{1}^{n} {}_{r_1 r_2 \dots r_m} c_{r_1 r_2 \dots r_m} X^{(r_1)} x'_{r_2} \dots x'_{r_m} \equiv 0 \,.$$

C'est ce qu'on peut déduire de (2), en remarquant que les termes de différent degré doivent s'annuler séparément et en outre que les coefficients $c_{r_1 r_2 \dots r_m}$ sont symétriques par rapport aux m indices. De cette même remarque il suit qu'en égalant à zéro les coefficients de chaque terme en (4), on obtient

$$(4') \qquad \sum_{1}^{n} {}_{r_1} c_{r_1 r_2 \dots r_m} X^{(r_1)} = 0 \,, \qquad (r_2, r_3, \dots, r_m = 1, 2, \dots, n).$$

Illustrons ces généralités, en discutant les conditions d'existence des intégrales

$$\sum_{1}^{n} {}_r c_r x'_r = \text{const.} \,,$$

linéaires (par rapport, peut-on dire, aux composantes des vitesses). L'identité (3) devient

$$\sum_{1}^{n} {}_{rs} c_{rs} x'_r x'_s \equiv 0 \,,$$

ou, en développant,

$$(5) \qquad c_{rs} + c_{sr} = 0 \,, \qquad (r, s = 1, 2, \dots, n).$$

S'il s'agit des géodésiques, il n'y a pas d'autres conditions; en général, on doit avoir égard aussi aux relations (4'), qui dépendent des forces appliquées. Elles se réduisent pour notre cas à

$$(6) \qquad \sum_{1}^{n} {}_r c_r X^{(r)} = 0 \,.$$

Nous avons déjà rencontré le système (5) (Chapitre précédent, § 5); il exprime que l'élément linéaire $\sqrt{2T}\,dt$ de la variété V_n admet la transformation infinitésimale

$$\sum_{n}^{1}{}_{r}\, c^{(r)}\, \frac{\partial f}{\partial x_r}.$$

Ce lien entre les intégrales linéaires des géodésiques et les mouvements sans déformation de la variété correspondante est trop bien connu pour qu'il mérite de s'y arrêter un seul moment.

En mettant le système c_r sous sa forme canonique $c_r = \varrho\lambda_r$, on obtient pour les équations (5) l'interprétation géométrique, qui a été signalée au § cité. La condition (6) prend aussi une signification bien simple; elle exprime que *la congruence canonique d'une intégrale linéaire doit être normale aux lignes de force.* Lorsque ces dernières dérivent d'un potentiel U, c'est-à-dire, pour $X_i = \partial U/\partial x_i$, on a plus simplement que la congruence canonique doit être équipotentielle.

A cause de leur importance, nous réservons aux intégrales quadratiques $\sum_{1}^{n}{}_{rs}\, c_{rs}\, x'_r x'_s =$ const. le §, qui va suivre.

Nous voulons maintenant dire encore un mot sur les *intégrales particularisées* ou *équations invariantes.* On entend par là une équation

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n;\; x'_1, x'_2, \ldots, x'_n) = 0\,,$$

qui est satisfaite pour toute valeur de t, lorsque cela arrive pour l'instant initial. Cela veut dire que la condition $df/dt = 0$ doit être une conséquence des (1) et de l'équation $f = 0$ elle même. Nous sommes ainsi conduits à l'identité

$$\sum_{1}^{n}{}_{i} \left\{ \frac{\partial f}{\partial x_i}\, x'_i + \frac{\partial f}{\partial x'_i}\, x''_i \right\} = Mf\,, \tag{7}$$

où les x'' s'entendent remplacées par leurs valeurs (1) et le multiplicateur M est une fonction des x et des x' indéterminée *a priori.*

Bornons-nous au cas simple, où f serait une fonction linéaires des x'. Il est alors loisible de supposer que l'équation invariant soit

$$\sum_{1}^{n}{}_{r}\, \lambda_{n/r} x'_r = 0\,,$$

$\lambda_{n|r}$ étant le système covariant d'une congruence $[n]$ de la variété V_n.

Le premier membre de (7) est le même que dans le cas des intégrales propres. On a donc

$$\sum_{1}^{n}{}_{rs}\, \lambda_{n/rs} x'_r x'_s + \sum_{1}^{n}{}_{r}\, X^{(r)} \lambda_{n/r} = M \sum_{1}^{n}{}_{r}\, \lambda_{n/r} x'_r\,.$$

Nous devons en conclure que le multiplicateur M peut être seulement de la forme $\sum_1^n{}_s \nu_s x'_s$, les coefficients ν étant encore indéterminés, mais fonctions seulement des x. L'identité se traduit dans les équations suivantes:

$$\sum_1^n{}_r X^{(r)}\lambda_{n/r} = 0 \,, \tag{8}$$

$$\lambda_{n/rs} + \lambda_{n/sr} = \nu_r\lambda_{n/s} + \nu_s\lambda_{n/r} \,. \qquad (r, s = 1, 2, ..., n) \tag{9}$$

L'équation (8) nous dit que les lignes de force et celles de la congruence $[n]$ se coupent sous angle droit. Comme tout à l'heure, pour des forces conservatives, cela signifie que la congruence $[n]$ est équipotentielle. Pour discuter le système (9), on imaginera, bien entendu, associées à $[n]$, $n-1$ congruences, qui complètent l'ennuple et on posera

$$\omega_i = \sum_1^n{}_r \nu_r \lambda_i^{(r)} \,.$$

On tire alors des (9) les conditions équivalentes

$$\gamma_{nij} + \gamma_{nji} = \varepsilon_{jn}\omega_i + \varepsilon_{in}\omega_j \,, \qquad (i, j = 1, 2, ..., n), \tag{9'}$$

où les indéterminées ν se trouvent remplacées par les ω.

Pour $n = 2$, les (9′) sont au nombre de trois. Deux servent à déterminer ω_1, ω_2; la troisième se réduit à $\gamma_{211} = 0$, ce qui veut dire que la congruence [1] est géodésique. Mais, à cause de (8), la congruence [1] est celle des lignes de force. Donc, *les problèmes à deux degrés de liberté possèdent une intégrale linéaire particularisée seulement lorsque les lignes de force sont géodésiques. Cette intégrale exprime que la vitesse et la force ont même direction.*

Il ne serait pas sans intérêt d'établir, aussi pour les problèmes à un nombre quelconque de degrés de liberté, les conditions sous lesquelles ils comportent une équation linéaire invariante.

2. - Intégrales quadratiques des systèmes non soumis à forces. Forme intrinsèque des conditions d'existence. Hypothèse particulière, qui conduit aux forces vives de M. Stäckel.

Pour qu'un système non soumis à forces, c'est-à-dire les géodésiques de la variété V_n correspondante possèdent l'intégrale quadratique

$$\mathrm{H}_1 = \sum_1^n{}_{rs} c_{rs} x'_r x'_s = \text{const.} \,,$$

il faut et il suffit, d'après (3), que la forme dérivée $\sum_{rst}^{n} {}_{1} c_{rst} x'_r x'_s x'_t$ soit identiquement nulle. On a ainsi les conditions

(10) $$c_{rst} + c_{str} + c_{trs} = 0 , \qquad (r, s, t = 1, 2, ..., n).$$

Pour en faire l'étude il convient naturellement d'introduire à la place des c_{rs} leurs expressions canoniques (Chap. II, § 5)

(11) $$c_{rs} = \sum_{1}^{n}{}_{h} \varrho_h \lambda_{h/r} \lambda_{h/s} ,$$

où les ϱ_h désignent, comme on sait, les racines de l'équation

$$\| c_{rs} - \varrho a_{rs} \| = 0 .$$

On trouve ainsi

I) $$(\varrho_h - \varrho_i)\gamma_{hij} + (\varrho_i - \varrho_j)\gamma_{ijh} + (\varrho_j - \varrho_h)\gamma_{jhi} = 0 ,$$
$$(h, i, j = 1, 2, ..., n;\ h \neq i \neq j)$$

II) $$\frac{\partial \varrho_h}{\partial s_i} = 2(\varrho_h - \varrho_i)\gamma_{ihh} , \qquad (h, i = 1, 2, ..., n),$$

ce qui donne une forme intrinsèque à la question de déterminer tous les types de forces vives, dont les géodésiques admettent au moins une intégrale quadratique. Pour obtenir ces types, il faut remonter de I), II) aux expressions des éléments linéaires des variétés V_n, où l'on peut avoir une ennuple de congruences caractérisées par les dites équations. Les ϱ y figurent comme des indéterminées auxiliaires. En les supposant toutes égales entre elles, les équations I) sont satisfaites identiquement et les II) deviennent $\partial\varrho_h/\partial s_i = 0$, ce qui montre que la valeur commune des ϱ doit être constante. Les invariants γ ne restent aucunement liés par cette hypothèse. Il existe donc, indépendamment de l'ennuple et par conséquent pour toute variété V_n, une intégrale quadratique.

On devait s'y attendre; c'est l'intégrale des forces vives. On tire en effet de (11), en y faisant $\varrho_h = C$, $c_{rs} = C \sum_h \lambda_{h/r}\lambda_{h/s} = C a_{rs}$ et l'intégrale $H_1 =$ const. n'est autre chose que $\sum_{1}^{n}{}_{rs} a_{rs} x'_r x'_s =$ const.

A l'instar de ce cas bien évident, il paraît convenable, pour la recherche des solutions du système I), II), de distinguer les divers cas, qui peuvent se présenter à l'égard des ϱ. On aura donc à considérer séparément le cas, où toutes les ϱ sont distinctes, celui où il y en a seulement $n-1$, etc., en ayant soin de distinguer encore pour chaque cas les divers groupements des coïncidences possibles.

Une telle étude n'a pas encore été abordée, en général. Il serait du plus haut intérêt que la question fût épuisée, mais, à présent elle paraît encore assez ardue.

On possède des solutions particulières de notre système. Elles correspondent aux forces vives découvertes par M. STÄCKEL (35) (qui comprennent en particulier les exemples classiques de HAMILTON et de LIOUVILLE). On les retrouve aisément à partir de I), II) en faisant l'hypothèse particulière que les congruences de l'ennuple de référence soient normales (36).

Vu la grande généralité de cette classe de forces vives, on pourrait être tenté de croire qu'elles comprennent toutes les solutions du système I), II). Il en est ainsi évidemment pour $n = 2$ (toute congruence pouvant dans ce cas être regardée comme normale), mais dès qu'on passe à un plus grand nombre de variables, on reconnaît aisément l'existence de types nouveaux de solutions (37). La véritable difficulté consiste à les former tous. Le premier pas à faire, dans cette voie, devrait être la intégration du système I), II) dans le cas le plus proche à celui, où toutes les ϱ coïncident et l'intégration se fait à première vue. C'est le cas, où deux seulement des ϱ sont distinctes.

Nous signalons au lecteur cette recherche, qui, — toute réduction faite — se présente sous un aspect assez simple.

---

(35) Voir dans les « Comptes Rendus » deux notes remarquables de cet auteur (9 Marzo 1893 et 7 Octobre 1895). À consulter aussi:

G. DI PIRRO, *Sugli integrali primi quadratici delle equazioni della meccanica*, « Annali di Matematica », ser. II, t. XXIV, 1896;

P. STÄCKEL, *Ueber die quadratischen Integrale der Differentialgleichungen der Dynamik*, ibidem, t. XXV, 1897;

P. PAINLEVÉ, *Sur les intégrales quadratiques des équations de la Dynamique*, « Comptes Rendus », 1er Février 1897.

(36) Pour être exact, il faut avertir que l'on suppose d'avance la normalité de toutes les congruences de l'ennuple seulement dans le cas, où toutes les ϱ seraient distinctes. Lorsqu'il y en a quelques nnes, qui coïncident, l'hypothèse est un peu moins restrictive. Cfr.:

T. LEVI-CIVITA, *Sur les intégrales quadratiques des équations de la mécanique*, « Comptes Rendus », 22 Février 1897; [in questo vol.: XIV, pp. 283-286].

(37) T. LEVI-CIVITA, *Sur une classe de ds^2 à trois variables*, « Comptes Rendus » 12 Juin 1897; [in questo vol.: XV, pp. 287-290].

3. - Surfaces, dont les géodésiques possèdent une intégrale quadratique (surfaces de Liouville). Classification de ces surfaces d'après le nombre des intégrales distinctes [38].

Pour $n = 2$ les équations I), considérées tout à l'heure, font défaut et il reste seulement l'autre groupe, qui devient

$$\text{II}')\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \varrho_1}{\partial s_1} = \dfrac{\partial \varrho_2}{\partial s_2} = 0\,, \\[2ex] \dfrac{\partial \varrho_1}{\partial s_2} = 2(\varrho_1 - \varrho_2)\gamma_{211}\,, \qquad \dfrac{\partial \varrho_2}{\partial s_1} = 2(\varrho_2 - \varrho_1)\gamma_{122}\,. \end{cases}$$

De celles-ci, en supposant $\varrho_1 \neq \varrho_2$, on tire les conditions d'intégrabilité

$$\text{III})\qquad \frac{\partial \gamma_{211}}{\partial s_1} = \frac{\partial \gamma_{122}}{\partial s_2} = -\,3\gamma_{211}\gamma_{122}\,.$$

Chaque couple [1], [2], pour lequel la condition III) soit vérifiée, donne une intégrale quadratique $H_1 = \text{const.}$ (distincte de celle des forces vives) des équations des géodésiques de la surface. Désignons par ϑ l'angle, que les lignes 2 forment avec les lignes d'une congruence géodésiques quelconque. On peut aisément reconnaître que l'intégrale $H_1 = \text{const.}$ équivaut à la propriété géométrique suivante. On a tout le long d'une même géodésique

$$\varrho_1 \sin^2 \vartheta + \varrho_2 \cos^2 \vartheta = \text{const.}$$

On tire des équations III)

$$\frac{\partial \gamma_{211}}{\partial s_1} - \frac{\partial \gamma_{122}}{\partial s_2} = 0\,,$$

ce qui exprime (Chap. IV, § 1) que le couple [1], [2] appartient à un faisceau isotherme.

Des II') il suit sans difficulté qu'en prenant les lignes du couple [1], [2] comme coordonnées, on peut, par un choix convenable de leurs paramètres u, v, attribuer à la forme fondamentale l'expression

$$\varphi = (\varrho_2 - \varrho_1)(du^2 + dv^2)\,.$$

---

(38) G. RICCI, *Sulla teoria delle linee geodetiche e dei sistemi isotermi di* LIOUVILLE, « Atti dell'Istituto Veneto », 1894; *Lezioni etc.*, Première partie, Chap. VI, VII.

Comme les II′) nous disent encore que ϱ_1 et ϱ_2 ne dépendent que de u et v respectivement, nous avons bien pour φ une forme de LIOUVILLE. On remarquera d'autre côté qu'à toute forme de LIOUVILLE correspond un couple [1], [2] (les congruences formées par les lignes coordonnées), qui satisfait aux conditions III). Donc, pour que les géodésiques d'une surface possèdent une intégrale première quadratique, il faut et il suffit que l'élément linéaire de la surface soit réductible à la forme de LIOUVILLE.

Maintenant se pose d'elle même la question: Reconnaître si un élément linéaire, donné à l'avance, peut être réduit à la forme de LIOUVILLE et en combien de manières essentiellement différentes; déterminer ces formes réduites, lorsqu'elles existent. La recherche équivaut naturellement à celle du nombre et des expressions des intégrales quadratiques distinctes, qui appartiennent aux géodésiques d'une forme binaire donnée.

Voici les résultats de la recherche sous la première forme:

1) *Les surfaces à courbure constante seules possèdent* ∞^1 *systèmes isothermes de* LIOUVILLE (on désigne ainsi, pour abréger, tout couple [1], [2], qui satisfait aux conditions III)).

2) *Les surfaces à courbure variable admettent tout au plus* ∞^4 *systèmes isothermes de* LIOUVILLE. *Il y a effectivement une classe de surfaces, qui jouissent de cette propriété. Ce sont les surfaces applicables sur des surfaces de révolution et ayant en outre les lignes de courbure parallèles.*

3) *Il existe des surfaces douées de* ∞^1 *systèmes de* LIOUVILLE, *et d'autres encore, qui en possèdent un seul.*

M. KOENIGS dans un mémoire, couronné par l'Académie des Sciences de Paris (39), s'est occupé d'une question intimement liée à celle, qui vient d'être exposée, mais non identique. Il s'est proposé en effet d'assigner tous les types d'éléments linéaires, qui admettent *au moins deux* systèmes de LIOUVILLE. Par cette voie on peut établir aussi quelques uns de résultats précédents (ceux qui se rapportent au nombre de systèmes de LIOUVILLE possibles). M. KOENIGS les avait énoncés en même temps que M. RICCI.

4. - Transformations des équations de la dynamique.

Le problème (à une transformation de formes différentielles quadratiques près) se pose, d'après M. PAINLEVÉ (40), sous la forme suivante: *Étant donné un système dynamique* (A), *dont les forces ne dépendent*

(39) *Mémoire sur les lignes géodésiques*, « Mémoires des Savants Étrangers », t. XXXI, 1894.

(40) *Sur la transformation des équations de la dynamique*, « Journal de Liouville », Cinquième série, tom. X, 1894.

pas des vitesses, reconnaître s'il admet des systèmes correspondants (A_1) *et, dans le cas affirmatif, les déterminer tous.*

On nomme correspondants d'un système (A) tous les systèmes (A_1), dont les forces ne dépendent pas non plus des vitesses et qui ont les mêmes trajectoires de (A).

A l'égard des systèmes correspondants on démontre tout d'abord que, si les forces sont nulles pour un système, le même doit arriver pour ses correspondants. Dans cette hypothèse le problème de la transformation revêt l'aspect géométrique que voici:

Déterminer toutes les variétés V_n, *qui peuvent être représentées sur une variété donnée avec conservation des géodésiques, c'est-à-dire de telle sorte qu'à toute géodésique de* V_n *corresponde dans la représentation encore une géodésique.*

Cette question a été étudiée par M. LIOUVILLE dans son mémoire « *Sur les équations de la dynamique* » ([41]). Il a établi des résultats généraux bien remarquables, sans donner toutefois une réponse définitive à la question. Peut être n'aurait-elle été possible sans le secours du calcul différentiel absolu. Nous allons donner une idée de la marche, qui a été suivie dans la résolution du problème par cette méthode ([42]).

Soit

$$\varphi = \sum_1^n {}_{rs}\, a_{rs}\, dx_r\, dx_s$$

l'expression du ds^2 d'une variété V_n donnée,

$$\psi = \sum_1^n {}_{rs}\, \alpha_{rs}\, dx_r\, dx_s$$

la même expression pour une quelconque des variétés représentables sur V_n avec conservation des géodésiques. On fixe en premier lieu les équations, auxquelles doivent satisfaire les α_{rs}. Elles sont

$$2\mu\alpha_{rst} + 2\mu_t\alpha_{rs} + \mu_s\alpha_{rt} + \mu_r\alpha_{st} = 0\ ,$$

où μ est une inconnue auxiliaire et l'on regarde, bien entendu, φ comme forme fondamentale (μ_r et α_{rst} désignant les systèmes dérivées selon φ de μ et du système α_{rs}).

([41]) « Acta Mathematica », t. 19, 1895.

([42]) T. LEVI-CIVITA, *Sulle trasformazioni delle equazioni dinamiche*, « Annali di Matematica », ser. II, t. XXIV, 1896; [in questo vol.: X, pp. 207-252].

Appelons a et α les discriminants de φ et ψ et posons

$$A_{rs} = \mu_s^2 \alpha_{rs} .$$

Des équations précédentes on tire aisément

$$\mu = C \left(\frac{a}{\alpha}\right)^{1/n+1} .$$

(C étant une constante) et

$$A_{rst} + A_{str} + A_{trs} = 0 ,$$

qui nous disent (§ 2) que

$$\sum_1^n {}_{rs}\, A_{rs} x'_r x'_s = \text{const.}$$

est une intégrale quadratiques pour les géodésiques de V_n. Substituons maintenant aux α_{rs} leurs expressions canoniques

$$\alpha_{rs} = \sum_1^n {}_h\, \varrho_h \lambda_{h/r} \lambda_{h/s} .$$

Les équations de condition se transforment dans les suivantes

$$\text{E)} \quad \left\{ \begin{array}{lll} \text{a)} \quad (\varrho_h - \varrho_i)\gamma_{hij} = 0 , & (h \neq i \neq j) & \\ \text{b)} \quad 2(\varrho_i - \varrho_j)\gamma_{iji} = \dfrac{\partial \varrho_i}{\partial s_j} , & (i \neq j) & \\ \text{c)} \quad \dfrac{\partial(\mu\varrho_i)}{\partial s_j} = 0 , & (i \neq j) & (h, i, j = 1, 2, \ldots, n) \\ \text{d)} \quad \dfrac{\partial(\mu\varrho_i)}{\partial s_i} + \varrho_i \dfrac{\partial \mu}{\partial s_i} = 0 . & & \end{array} \right.$$

La forme de ce système nous prévient que le nombre et aussi la nature des équations, qui le composent, dépendent du nombre des racines distinctes de l'équation $\|\alpha_{rs} - \varrho a_{rs}\| = 0$ et de leurs ordres de multiplicité.

Supposons d'abord que toutes les ϱ soient distinctes. L'ennuple de référence reste dans ce cas complètement déterminé et, à cause des équations a), les coefficients de rotation à trois indices distincts doivent tous s'annuler.

Il s'en suit (Chap. II, § 3) que toutes les congruences de l'ennuple sont normales, et on est naturellement amené à prendre les correspondantes variétés orthogonales comme coordonnées. Avec un tel système coordonné, l'expression du ds^2 de V_n doit être de la forme

$$\varphi = \sum_1^n{}_i \, \mathrm{H}_i^2 \, dx_i^2 ,$$

les équations a) se réduisent à des identités et les b), c), d) deviennent respectivement:

$$\mathrm{b}_1) \qquad 2(\varrho_i - \varrho_j) \frac{\partial \log \mathrm{H}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \varrho_i}{\partial x_j} = 0 , \quad (i \neq j)$$

$$\mathrm{c}_1) \qquad \frac{\partial(\mu \varrho_i)}{\partial x_j} = 0 , \qquad (i \neq j) \quad (i, j = 1, 2, \ldots, n)$$

$$\mathrm{d}_1) \qquad \frac{\partial(\mu \varrho_i)}{\partial x_i} + \varrho_i \frac{\partial \mu}{\partial x_i} = 0 .$$

L'intégration de ce système est aisée. On est conduit au résultat suivant:

Désignons par ψ_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ une fonction quelconque de la seule variable x_i, par C et c deux constantes arbitraires. *Tout élément linéaire, ayant une expression de la forme*

$$\mathrm{T}) \qquad ds^2 = \sum_1^n{}_i \left(\prod_1^n{}_j \, |\psi_j - \psi_i| \right) dx_i^2$$

admet les correspondants

$$ds_1^2 = \frac{C}{(\psi_1 + c)(\psi_2 + c) \ldots (\psi_n + c)} \sum_1^n{}_i \frac{1}{\psi_i + c} \left(\prod_1^n{}_j |\psi_j - \psi_i| \right) dx_i^2$$

et ceux-ci seulement. (Dans les factoriels $\prod_1^n{}_j$ on doit exclure le facteur, où l'indice j prendrait la valeur i).

Passons maintenant à l'autre cas extrême, où toutes les ϱ seraient égales. Les a) sont satisfaites identiquement, et les autres équations exigent seulement que μ et la valeur commune C des ϱ soient constantes. Les expressions canoniques des α_{rs} sont $\alpha_{rs} = C a_{rs}$, d'où il suit que la forme ψ n'est que la φ elle même, multipliée par une constante. Il était évident à priori que toute forme φ admet de tels correspondants. M. PAIN-

LEVÉ les a appelés [43] pour cela correspondants ordinaires. Ce sont seulement les correspondants non-ordinaires, qui peuvent nous intéresser.

Il est bien clair qu'en dehors de ce cas les autres hypothèses possibles à l'égard des ϱ aboutissent à des correspondants non-ordinaires. Chacune de ces hypothèses conduit à des types bien déterminées, qu'on calcule sans difficulté en intégrant les équations E), qui leurs appartiennent. Comme il est arrivé pour le premier type, l'interprétation géométrique met au jour le choix des variables, qui se prêtent mieux à l'intégration du système.

En revenant pour un moment encore sur ce premier cas, il est bon de remarquer que l'intégrale quadratique, dont il a été en général prouvé l'existence, prend la forme

$$\sum_1^n{}_i\,(\psi_1+c)\ldots(\psi_{i-1}+c)(\psi_{i+1}+c)\ldots(\psi_n+c)\left(\prod_1^n{}_j\,|\psi_j-\psi_i|\right)x_i'^2=\text{const.},$$

avec la même remarque que tout à l'heure à l'égard du factoriel.

Comme la valeur du premier membre doit être constante *quelle que soit* c, chacun des coefficients des différentes puissances de c nous donne séparément une intégrale quadratique. Elles sont ici au nombre de n (y compris celle des forces vives) toutes distinctes.

En général leur nombre est égal à celui des ϱ distinctes.

Ainsi qu'il a été fait (§ 3) pour $n=2$, ce ne serait pas sans importance d'établir, du moins pour $n=3$, les caractères invariantifs des variétés, dont l'expression de l'élément linéaire est réductible au type T) (*forme généralisée de* LIOUVILLE).

Plus généralement, il ne faut pas oublier que le problème de la transformation, tel qu'il a été énoncé au début de ce §, c'est-à-dire pour des forces non nulles, attend encore d'être résolu. M. PAINLEVÉ y a apporté des contributions très-intéressantes, qui épuisent même la question pour $n=2$ [44].

Sera-t-il reservé au calcul différentiel absolu d'aller jusqu'au fond? Pour le moment nous ne pouvons qu'en exprimer l'espoir.

Du reste, dans cet ordre de questions, on a ouvert devant soi un très vaste champ de recherche.

Il suffit d'étendre avec M. STÄCKEL [45] l'énoncé du problème de la transformation, en éxigeant, non plus que deux systèmes dynamiques

---

[43] Loco cit. [40].

[44] *Sur les transformations des équations de la dynamique*, « Comptes Rendus », 24 Août 1896. Voir aussi deux notes de M. A. VITERBI, *Sulla trasformazione delle equazioni della dinamica a due variabili*, « Rendiconti dell'Accademia dei Lincei », 4 e 18 Febbraio 1900.

[45] *Ueber Transformationen von Bewegungen*, « Göttinger Nachrichten », 1898.

(A), (A_1) aient toutes les trajectoires en commun, mais une partie seulement, c'est-à-dire un ensemble de trajectoires, dépendant d'un certain nombre $k(< 2n - 1)$ de paramètres.

Dans un article, qui paraîtra prochainement, M. MALIPIERO envisage sous ce point de vue le cas des géodésiques, en présentant quelques remarques non dépourvues d'intérêt.

CHAPITRE VI.

APPLICATIONS PHYSIQUES

1. - Cas de réductibilité à deux variables de l'équation $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$ (Potentiels binaires).

Si, dans l'équation de LAPLACE en coordonnées cartésiennes

$$\underset{2}{\Delta} u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0\,,$$

on suppose la fonction u indépendante de z, il reste

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0\,,$$

qui définit une classe très étendue de potentiels, gardant la même valeur le long des droites parallèles à l'axe des z (potentiels logarithmiques, d'après M. C. NEUMANN).

De même, en prenant l'équation de LAPLACE en coordonnées polaires ϱ, ϑ, φ, on peut supposer u indépendant de φ sans limiter davantage la généralité des solution. En effet, lorsqu'on pose $\partial u/\partial\varphi = 0$ dans

$$\frac{1}{\varrho^2 \operatorname{sen}\vartheta}\left\{\frac{\partial}{\partial\varrho}\left(\varrho^2 \operatorname{sen}\vartheta\,\frac{\partial u}{\partial\varrho}\right) + \frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\operatorname{sen}\vartheta\,\frac{\partial u}{\partial\vartheta}\right) + \frac{1}{\operatorname{sen}\vartheta}\,\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}\right\} = 0$$

il ne reste plus aucune trace de φ dans les coefficients. On obtient de la sorte une classe très importante d'intégrales de $\underset{2}{\Delta} u = 0$, les potentiels symétriques, qui sont bien connus d'après les recherches de BELTRAMI ([46]). Ils restent constants sur les cercles $\varrho = \text{const.}$, $\vartheta = \text{const.}$

On peut encore dans l'équation ci-dessus supposer u indépendant de ϱ. Les potentiels correspondants

$$\frac{\partial}{\partial \vartheta}\left(\operatorname{sen}\vartheta \frac{\partial u}{\partial \vartheta}\right) + \frac{1}{\operatorname{sen}\vartheta}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0$$

(aussi généraux, bien que moins importants de ceux, qui précèdent) ont pour lignes équipotentielles les droites issues de l'origine.

Il n'est pas permis de procéder d'une façon analogue à l'égard de ϑ, car, en supposant u indépendant de ϑ, on doit avoir séparément

$$\frac{\partial}{\partial \varrho}\left(\varrho^2 \frac{\partial u}{\partial \varrho}\right) = 0\,, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0\,,$$

et les intégrales de ce système simultané (c'est à dire

$$u = \left(c_1 + \frac{c_2}{\varrho}\right)\varphi + \left(c_3 + \frac{c_4}{\varrho}\right),$$

les c désignent des constantes) n'ont pas la même généralité que tout à l'heure.

Ces remarques nous conduisent à poser avec M. VOLTERRA ([47]) la question suivante:

Soit l'équation $\underset{2}{\Delta} u = 0$, transformée en coordonnées curvilignes quelconques x_1, x_2, x_3. En général, lorsqu'on posera $\partial u/\partial x_3 = 0$ dans le premier membre, on ne pourra pas débarasser l'équation réduite de la variable x_3 (ou, si l'on veut, les deux équations $\underset{2}{\Delta} u = 0$, $\partial u/\partial x_3 = 0$ ne formeront pas un système complet). Il y a des cas (nous en avons rencontré des exemples bien simples) où une pareille circonstance se présente. *Il faut les déterminer tous.*

A chacun d'eux correspond une classe de potentiels, qui dépendent de deux coordonnées (*potentiels binaires*). Ils donnent lieu dans les applications aux mêmes simplifications que les potentiels logarithmiques ou symétriques: M. VOLTERRA, dans le mémoire cité, a fait cette étude en général.

([46]) Voir par exemple le mémoire *Sulla teoria delle funzioni potenziali simmetriche*, « Memorie della Accademia di Bologna », ser. IV, t. II, 1881.

([47]) *Sopra alcuni problemi della teoria del potenziale*, « Annali della Scuola Normale di Pisa », 1883.

Il restait à établir si, outre les types connus, il y en avait d'autres et lesquels.

C'est exactement la même question, qu'a été résolue par RIEMANN ([48]), à l'égard de l'équation de propagation de la chaleur

$$\frac{\partial u}{\partial t} + k\underset{2}{\Delta} u = 0 \qquad (k \text{ étant une constante}).$$

Mais on ne pouvait songer à adopter la méthode de RIEMANN, à cause de l'extrême complication des formules. Il fallait ouvrir une brèche, pour se débarasser des matériaux encombrants.

C'est encore le calcul différentiel absolu qui en a fourni les moyens.

Bornons-nous à faire saisir les résultats de la recherche ([49]).

Remarquons pour cela que une classe de potentiels binaires est caractérisée essentiellement par sa *congruence équipotentielle*, c'est-à-dire par la congruence

$$x_1 = \text{const.}\,, \qquad x_2 = \text{const.}\,,$$

formée par les lignes, le long desquelles tous les individus de la classe gardent une valeur constante. En effet, lorsqu'on connaît cette congruence, il suffit d'associer aux familles $x_1(x, y, z) = \text{const.}$, $x_2(x, y, z) = \text{const.}$ une troisième famille indépendante quelconque $x_3(x, y, z) = \text{const.}$ L'équation, qui définit les potentiels correspondants, s'obtient en transformant $\underset{2}{\Delta} u = 0$ en coordonnées x_1, x_2, x_3 et en y faisant $\partial u/\partial x_3 = 0$. (L'hypothèse qu'une congruence soit équipotentielle équivaut précisément à ce qu'on peut faire $\partial u/\partial x_3 = 0$ dans $\underset{2}{\Delta} u = 0$, sans être gêné par x_3).

Le problème revient ainsi à déterminer toutes les congruences équipotentielles de notre espace.

Ces congruences (supposées réelles) se partagent dans les quatre catégories, que voici:

1) Congruences rectilignes isotropes (d'après RIBAUCOUR ([50]));
2) Congruences des cercles ayant même axe;
3) Congruences de hélices;
4) Congruences de spirales.

On en tire une classification correspondante pour les potentiels binaires. Ils sont *isotropes*, *symétriques*, *hélicoïdes*, ou *spirales*.

([48]) *Commentatio mathematica, qua etc.*, « Ges. Werke », pag. 370.

([49]) T. LEVI-CIVITA, *Tipi di potenziali, che si possono far dipendere da due sole coordinate*, « Memorie della Accademia di Torino », ser. II, t. XLIX, 1899; [in questo vol.: XXIV, pp. 381-438].

([50]) Voir L. BIANCHI, *Lezioni di Geometria differenziale*, 3ª ed., vol. I, 1922, Chap. X; ou bien encore T. LEVI-CIVITA, *Sulle congruenze di curve*, « Rendiconti della Accademia dei Lincei », 5 Marzo, 1899; [in questo vol.: XXII, pp. 369-377].

2. - Des champs vectoriels ([51]).

On a dans un domaine de l'espace un *champ vectoriel*, lorsque à chaque point P du domaine correspond un vecteur (R) ayant l'origine en P.

Soient y_1, y_2, y_3 les coordonnées cartésiennes de P, Y_1, Y_2, Y_3 les composantes de (R) suivant les axes coordonnées. La loi de correspondance entre les points et les vecteurs du champ s'exprime par ce fait que les composantes Y_1, Y_2, Y_3 de (R) sont des fonctions des coordonnées y_1, y_2, y_3 de son point d'application. On suppose bien entendu qu'il s'agit de fonctions continues et douées de toutes les dérivées, qu'il nous faudra considérer.

Lorsqu'on a affaire à un champ vectoriel, la quantité scalaire

$$\Theta = \frac{\partial Y_1}{\partial y_1} + \frac{\partial Y_2}{\partial y_2} + \frac{\partial Y_3}{\partial y_3} \tag{1}$$

s'introduit naturellement.

On l'appelle *divergence* du champ au point P,

$$\Theta = \mathrm{Div}\,(R)\,.$$

Elle joue presque toujours un rôle important dans les questions physiques. Ainsi par exemple, si le vecteur (R) représente le déplacement du point P dans une déformation élastique, Θ c'est la dilatation cubique de la particule, qui environne le même point. Plus généralement, lorsque (R) est un flux d'une nature quelconque, la condensation au point P est mésurée par Θ.

Si les composantes Y_r sont les dérivées d'une même fonction U (auquel cas nous dirons que la distribution vectorielle considérée est *potentielle*) il resulte évidemment

$$\Theta = \Delta_2 U\,. \tag{1'}$$

Il y a encore un vecteur très-intimement lié au champ, le *tourbillon*

([51]) Pour les généralités sur les champs vectoriels, au point de vue, que nous envisageons ici, on consultera avec profit (outre le traité bien connu de TAIT) le mémoire posthume du regretté G. FERRARIS, *Teoria geometrica dei campi vettoriali*, « Memorie dell'Accademia di Torino », t. XLVII, 1897, et un mémoire récent de M. L. DONATI, *Sulle proprietà caratteristiche dei campi vettoriali*, « Memorie dell'Accademia di Bologna », ser. V, t. VII, 1898.

(2ω) (*curl* des anglais) de (R). Ses componsantes $2\nu_1$, $2\nu_2$, $2\nu_3$ sont données par les formules suivantes:

$$(2)\qquad \begin{cases} 2\nu_1 = \dfrac{\partial Y_3}{\partial y_2} - \dfrac{\partial Y_2}{\partial y_3}, \\[2mm] 2\nu_2 = \dfrac{\partial Y_1}{\partial y_3} - \dfrac{\partial Y_3}{\partial y_1}, \\[2mm] 2\nu_3 = \dfrac{\partial Y_2}{\partial y_1} - \dfrac{\partial Y_1}{\partial y_2}. \end{cases}$$

Quant à l'interprétation physique, envisageons, par exemple, l'image hydrodynamique. Soit (R) la vitesse d'un fluide en mouvement, la rotation des particles est définie par le vecteur (ω). Il est identiquement nul pour les distributions potentielles.

Supposons maintenant que l'espace soit rapporté à des coordonnées curvilignes quelconques x_1, x_2, x_3.

La question de représenter un champ vectoriel et ses éléments se pose d'elle même ([52]).

On peut définir très facilement le champ par un système simple covariant X_r, dont les éléments se réduisent en coordonnées cartésiennes aux composantes de (R). Nous savons déjà (Chap. I, § 4) comment s'expriment, par les X_r, composantes et projections de (R) selon les lignes coordonnées. Mais, pour obtenir Θ et (ω), il est inutile de passer par l'intermédiaire de ces projections (et de transformations d'intégrales), comme on le fait habituellement. Les principes du calcul différentiel absolu permettent d'y parvenir sur le champ ([53]).

Il suffit en effet de poser

$$(3)\qquad \Theta = \sum_{rs}^{3}{}_{1}\, a^{(rs)} X_{rs},$$

$$(4)\qquad 2\mu^{(r)} = -\sum_{st}^{3}{}_{1}\, \varepsilon^{(rst)} X_{st} \quad ([54]). \qquad (r = 1, 2, 3).$$

([52]) M. M. ABRAHAM dans un article récent, paru dans ce même recueil (« Math. Annalen », B. 52, 1899, pag. 81) s'est occupé aussi de la représentation des champs vectoriels en coordonnées curvilignes. Il se borne toutefois aux coordonnées orthogonales, en employant pour la déduction des formules les méthodes ordinaires.

([53]) La même méthode conduit aussi à traduire presque immédiatement en coordonnées quelconques certaines relations intégrales. C'est le cas par exemple des formules bien connues de GREEN et de STOKES. Voir, quant à cette dernière: G. RICCI, *Del teorema di* STOKES *in uno spazio qualunque a tre dimensioni e in coordinate generali*, « Atti dell'Istituto Veneto », 1897.

([54]) Pour la définition des symboles, voyez Chap. I, § 5.

On le démontre en remarquant que Θ est un invariant et que sa valeur en coordonnées cartésiennes y_1, y_2, y_3 ($a_{rs} = \varepsilon_{rs}$, $X_{rs} = \partial Y_r/\partial y_s$) se réduit précisément a (1). Pour les distributions potentielles ($X_r = \partial U/\partial x_r = U_r$), il résulte $\Theta = \sum_{rs}^{3}{}_{1} a^{(rs)} U_{rs}$, ce qui est bien la forme générale du paramètre $\underset{2}{\Delta} U$. On devait évidemment s'y attendre d'après (1').

De même le vecteur, défini par le système contrevariant $\mu^{(r)}$ (où son réciproque μ_r) est bien (ω), car les éléments $\mu^{(r)}$, pour des coordonnées cartésiennes, ne sont pas autre chose que les ν_1, ν_2, ν_3 des formules (2). (Comparez aussi Chap. III, § 2).

Nous avons déjà remarqué (Chap. III, § 2) qu'on peut donner aux expressions (3) et (4) la forme

$$\Theta = \frac{1}{\sqrt{a}} \sum_{1}^{3}{}_r \frac{\partial(\sqrt{a}\, X^{(r)})}{\partial x_r}, \tag{3'}$$

$$2\mu^{(r)} = \frac{1}{\sqrt{a}} \left\{ \frac{\partial X_{r+2}}{\partial x_{r+1}} - \frac{\partial X_{r+1}}{\partial x_{r+2}} \right\} \qquad (r = 1, 2, 3) \tag{4'}$$

(où l'on doit, bien entendu, regarder comme identiques les valeurs de r, qui différent entre eux d'un multiple de 3). Ces expressions sont parfois avantageuses pour les calculs.

Dans la théorie de l'élasticité et surtout en électrodynamique on rencontre un vecteur (Ω), lié au vecteur fondamental du champ par la relation

$$(\Omega) = -\operatorname{Curl} \operatorname{Curl} (R) = -2 \operatorname{Curl} (\omega).$$

Il serait bien aisé d'en calculer le système contrevariant $\mathrm{M}^{(r)}$ par la réitération de la formule (4), mais il est encore plus simple de se rapporter pour un moment à des coordonnées cartésiennes. Les éléments $\mathrm{N}^{(r)} = \mathrm{N}_r$ du système en question (composantes du vecteur (Ω)) sont, d'après (2)

$$\mathrm{N}_r = 2\left\{ \frac{\partial \nu_{r+1}}{\partial y_{r+2}} - \frac{\partial \nu_{r+2}}{\partial y_{r+1}} \right\} = \frac{\partial}{\partial y_{r+2}} \left\{ \frac{\partial Y_r}{\partial y_{r+2}} - \frac{\partial Y_{r+2}}{\partial y_r} \right\} - \frac{\partial}{\partial y_{r+1}} \left\{ \frac{\partial Y_{r+1}}{\partial y_r} - \frac{\partial Y_r}{\partial y_{r+1}} \right\},$$

ce qui peut s'écrire

$$\mathrm{N}_r = \sum_{1}^{3}{}_p \frac{\partial^2 Y_r}{\partial y_p^2} - \frac{\partial}{\partial y_r} \sum_{1}^{3}{}_p \frac{\partial Y_p}{\partial y_p} = \sum_{1}^{3}{}_p \frac{\partial^2 Y_r}{\partial y_p^2} - \frac{\partial \Theta}{\partial y_r}. \tag{5}$$

Si maintenant on pose

$$\mathrm{M}_r = \sum_{1}^{3}{}_{pq}\, a^{(pq)} X_{rpq} - \frac{\partial \Theta}{\partial x_r}, \tag{5'}$$

on voit tout de suite que les M_r, pour des coordonnées cartésiennes; sont identiques aux N_r. Le système (5′) est bien covariant; c'est donc le système cherché.

3. - Exemples divers. Équations en coordonnées générales de l'électrodynamique, de la théorie de la chaleur, et de l'élasticité.

Electrodynamique. – Dans un champ électromagnétique, représentons par deux vecteurs (F_e), (F_m) les forces électrique et magnétique correspondant à chaque point P du champ.

Ces forces sont en général variables avec le temps. Nous désignerons, comme d'habitude, par $\partial(F_e)/\partial t$ le vecteur, dont les composantes sont les dérivées des composantes de (F_e), par rapport au temps t, de même pour (F_m).

Cela posé, les équations indéfinies pour un diélectrique homogène, isotrope, en repos s'écrivent d'après HERTZ:

$$A\mu \frac{\partial (F_m)}{\partial t} = \mathrm{Curl}\,(F_e)\,, \tag{6}$$

$$A\varepsilon \frac{\partial F_e}{\partial t} = -\,\mathrm{Curl}\,(F_m)\,, \tag{7}$$

A, μ, ε étant des constantes.

Nous pouvons les traduire en forme explicite, tout en adoptant des coordonnées curvilignes quelconques x_1, x_2, x_3. Il suffit d'avoir recours aux formules du § précédent. Introduisons pour cela les systèmes covariants X_r et L_r des deux vecteurs (F_e), (F_m). Les équations (6) et (7) développées deviennent

$$A\mu \frac{\partial L_r}{\partial t} = \frac{1}{\sqrt{a}} \left\{ \frac{\partial X_{r+2}}{\partial x_{r+1}} - \frac{\partial X_{r+1}}{\partial x_{r+2}} \right\}, \tag{6'}$$

$$A\varepsilon \frac{\partial X_r}{\partial t} = \frac{1}{\sqrt{a}} \left\{ \frac{\partial L_{r+1}}{\partial x_{r+2}} - \frac{\partial L_{r+2}}{\partial x_{r+1}} \right\}. \tag{7'}$$

Il peut être utile (pour l'étude des vibrations, par exemple) d'avoir séparément les lois de variation de chacun des deux vecteurs (F_e), (F_m). C'est ce qu'on peut déduire par la combinaison des équations (6) et (7), en éliminant successivement (F_e) et (F_m). On trouve de la sorte

$$A^2\mu\varepsilon\,\frac{\partial^2(F_m)}{\partial t^2} = A\varepsilon\,\frac{\partial}{\partial t}\,\mathrm{Curl}\,(F_e) = A\varepsilon\,\mathrm{Curl}\,\frac{\partial(F_e)}{\partial t} = -\,\mathrm{Curl}\,\mathrm{Curl}\,(F_m)\,;$$

de même

$$A^2\mu\varepsilon\,\frac{\partial^2(F_e)}{\partial t^2} = -\,\mathrm{Curl}\,\mathrm{Curl}\,(F_e).$$

En posant

$$\Theta_e = \mathrm{Div}\,(F_e)\,,$$
$$\Theta_m = \mathrm{Div}\,(F_m)\,,$$

les formules (5′) nous conduisent aux relations suivantes:

$$A^2\mu\varepsilon\,\frac{\partial^2 L_r}{\partial t^2} = \sum_{1}^{3}{}_{pq}\,a^{(pq)}L_{rpq} - \frac{\partial\Theta_m}{\partial x_r}\,, \tag{6j}$$

$$A^2\mu\varepsilon\,\frac{\partial^2 X_r}{\partial t^2} = \sum_{1}^{3}{}_{pq}\,a^{(pq)}X_{rpq} - \frac{\partial\Theta_e}{\partial x_r}\,. \tag{7j}$$

Pour l'éther on a en particulier

$$\begin{cases} \mu = \varepsilon \ = 1\,, \\ \Theta_m = \Theta_i = 0\,. \end{cases}$$

On devrait maintenant traduire en coordonnées générales les conditions aux limites, puis, en introduisant les polarisations et le courant, considérer les cas des diélectriques isotropes et des conducteurs.

De même il serait intéressant de présenter quelques applications des formules générales, que nous venons d'établir. Mais cela nous entraînerait trop loin. Ici nous devons nous borner à de simples indications nécessaires pour orienter le lecteur.

Chaleur. – Le mouvement de la chaleur dans les corps conducteurs, lorsqu'on néglige à la fois les phénomènes d'absorption et le travail mécanique, est régi par l'équation

$$C\varrho\,\frac{\partial T}{\partial t} = \mathrm{Div}\,(\mathfrak{F})\,; \tag{8}$$

C et ϱ représentent respectivement la chaleur spécifique et la densité T la température, $(\mathfrak{F})$ le flux de la chaleur, qui correspondent au point envisagé dans le conduseur à l'instant t.

Le vecteur $(\mathfrak{F})$ est défini dans les corps isotropes par ce fait que sa composante suivant une direction quelconque est proportionnelle à la dérivée de la température T dans la même direction. On aura donc, en introduisant des coordonnées cartésiennes y_1, y_2, y_3 et les relatives composantes Y_1, Y_2, Y_3 de $(\mathfrak{F})$,

$$Y_r = c \frac{\partial T}{\partial y_r}, \qquad (r = 1, 2, 3) \tag{9}$$

où le facteur c peut dépendre des coordonnées y_1, y_2, y_3.

Passons maintenant à des coordonnées quelconques. On aura bien pour le système covariant X_r de $(\mathfrak{F})$

$$X_r = c \frac{\partial T}{\partial x_r} = cT_r,$$

par conséquent, en nous servant de (3'),

$$C\varrho \frac{\partial T}{\partial t} = \mathrm{Div}\,(\mathfrak{F}) = \frac{1}{\sqrt{a}} \sum_1^3{}_r \frac{\partial}{\partial x_r}\left(c\sqrt{a}\,\frac{\partial T}{\partial x_r}\right). \tag{8'}$$

Lorsque c est constant, on a

$$C\varrho \frac{\partial T}{\partial t} = c\underset{2}{\Delta} T.$$

C'est un résultat bien connu.

Considérons plus généralement le cas d'un conducteur quelconque. Les relations (9), entre les composantes du flux et les dérivées de la température, doivent être remplacées par les suivantes:

$$Y^{(r)} = \sum_1^3{}_p c^{(rp)} \frac{\partial T}{\partial y_p}, \tag{9'}$$

où les $c^{(rp)} = c^{(pr)}$ (*coefficients de conductivité*) peuvent être des fonctions quelconques des y.

Ici encore il est bien aisé de traduire l'équation (8) en coordonnées générales. Définissons en effet un système contrevariant double $c^{(rp)}$ par la condition que ses éléments se réduisent précisément aux coefficients de conductivité pour les variables y.

Le système contrevariant de $(\mathfrak{F})$ pourra se représenter par

$$X^{(r)} = \sum_{1}^{3}{}_p\, c^{(pr)} T_p\,.$$

(La raison en est toujours la même; c'est-à-dire le système est contrevariant et coïncide avec $Y^{(r)} = Y_r$ pour les coordonnées y).

Prenons maintenant $\mathrm{Div}\,(\mathfrak{F})$ sous la forme (3′) et nous aurons

$$(8'') \qquad C\varrho \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{\sqrt{a}} \sum_{1}^{3}{}_r \frac{\partial}{\partial x_r}\left\{\sqrt{a} \sum_{1}^{3}{}_p\, c^{(pr)} \frac{\partial T}{\partial x_p}\right\},$$

qui est l'expression developpée de (8) dans le cas le plus général.

Lorsqu'on suppose le conducteur homogène, les coefficients de conductivité sont des constantes, mais il n'en est pas ainsi en général des $c^{(pr)}$ se rapportant à des coordonnées quelconque; par conséquent on ne peut pas les faire sortir du signe de dérivation dans le second membre de (8″). Il convient plutôt de revenir à l'expression, pour ainsi dire théorique, du $\mathrm{Div}\,(\mathfrak{F})$, c'est-à-dire

$$\sum_{1}{}_{rs}\, a_{rs} X^{(rs)}\,.$$

Comme, à cause de l'homogénéité, les dérivées par rapport aux y des coefficients de conductivité s'annulent à la fois, il en sera de même des derivées *contrevariantes* des $c^{(pr)}$. La dérivation de

$$X^{(r)} = \sum_{1}^{3}{}_p\, c^{(rp)} T_p$$

donne pourtant

$$X^{(rs)} = \sum_{1}^{r}{}_{pq}\, c^{(rp)} a^{(qs)} T_{pq}\,,$$

d'où

$$\mathrm{Div}\,(\mathfrak{F}) = \sum_{1}^{3}{}_{rspq}\, a_{rs} a^{(qs)} c^{((rp)} T_{pq} = \sum_{1}^{3}{}_{pq}\, c^{(pq)} T_{pq}\,,$$

et enfin

$$C\varrho \frac{\partial T}{\partial t} = \sum_{1}^{3}{}_{pq}\, c^{(pq)} T_{pq} \quad ([55])\,.$$

([55]) On peut aussi justifier ce résultat par la simple remarque que les deux membres sont des invariants, et leur égalité est manifeste (d'après (8″) et l'homogéneité du conducteur) en se rapportant à des coordonnées cartésiennes.

Cette équation assez simple s'applique donc aux conducteurs homogènes, mais d'une structure moléculaire quelconque.

Élasticité. – Si u_r sont les composantes suivant les axes y_r du déplacement des points d'un milieu élastique, la déformation, qui en résulte, dépend, comme on sait, des six quantités

$$(10) \qquad 2\alpha_{rs} = \frac{\partial u_r}{\partial y_s} + \frac{\partial u_s}{\partial y_r} \qquad (r, s = 1, 2, 3)$$

(α_{rr} est la dilatation linéaire pour la direction y_r, $\alpha_{r+1\, r+2}$ c'est un glissement, ou, si l'on veut, la dilatation angulaire des deux directions y_{r+1}, y_{r+2}).

Le potentiel des forces élastiques est une fonction 2Π des α_{rs} quadratique et homogène. Posons

$$2\Pi = \sum_{1}^{2}{}_{rspq}\, c^{(rspq)}\alpha_{rs}\alpha_{pq} ,$$

les coefficients d'élasticité $c^{(rspq)}$ ($= c^{(srpq)} = c^{(pqrs)}$ et leurs conséquences) pouvant dépendre des coordonnées y.

Si on désigne par Y_r (ou $Y^{(r)}$) les composantes de la force (F), qui agit sur l'unité de masse, par ϱ la densité et on pose encore

$$(11) \qquad \Pi^{(rs)} = \frac{\partial \Pi}{\partial \alpha_{rs}} = \sum_{1}^{3}{}_{pq}\, c^{(rspq)}\alpha_{pq} ,$$

les équations indéfinies de l'équilibre élastique s'écrivent:

$$(12) \qquad \sum_{1}^{3}{}_{s} \frac{\partial \Pi^{(rs)}}{\partial y_s} = \varrho Y^{(r)} , \qquad (r = 1, 2, 3).$$

Il est bien aisé de les présenter sous une forme valable pour des coordonnées quelconques x_1, x_2, x_3. Regardons à ce but u_r, $c^{(rspq)}$ comme les éléments, se rapportant en général aux coordonnées envisagées, de deux systèmes: simple covariant le premier, contrevariant du quatrième ordre le second.

Si l'on fait

$$(10') \qquad 2\alpha_{rs} = u_{rs} + u_{sr} ,$$

les (11) nous définissent un système double contrevariant $\Pi^{(rs)}$.

En représentant encore par $X^{(r)}$ le système contrevariant de la force (F), les équations démandées seront

$$\sum_{js}^{3}{}_{1} a_{js} \Pi^{(rsj)} = \varrho X^{(r)} . \qquad (r = 1, 2, 3). \tag{11'}$$

C'est bien évident, car la forme même en montre la nature invariante et d'autre part on retrouve les équations (12), lorsqu'on suppose les coordonnées cartésiennes orthogonales.

Ce n'est pas la place ici d'aller plus loin, mais nous ne pouvons passer sous silence que la théorie de l'élasticité est peut-être une de celles, où les méthodes du calcul différentiel absolu sont appelées à rendre les meilleurs services ([56]).

Padoue, Décembre 1899.

([56]) On consultera à ce propos: G. Ricci, *Lezioni sulla teoria dell'elasticità*, qui paraîtront prochainement. [In realtà queste *Lezioni* non furono mai pubblicate dall'A.; ma ne esiste il manoscritto e figureranno nelle Opere, che saranno pubblicate a cura della Unione Matematica Italiana. N.d.R.]

INDICE