OPERE MATEMATICHE

DI

EUGENIO BELTRAMI

PUBBLICATE PER CURA

DELLA

FACOLTÀ DI SCIENZE DELLA R. UNIVERSITÀ DI ROMA.

TOMO QUARTO
ED ULTIMO.

ULRICO HOEPLI
EDITORE-LIBRAJO DELLA REAL CASA
MILANO

1920

LXXII.

SULLA TEORIA DEGLI STRATI MAGNETICI.

Rendiconti del Reale Istituto Lombardo, serie II, tomo XVI (1883), pp. 208-223.

Qualunque sia la distribuzione del magnetismo in un corpo magnetico, la funzione potenziale di questa distribuzione è generalmente rappresentata, come è noto, da un integrale esteso a tutto lo spazio (S) occupato dal corpo. Questo integrale ha la forma

$$V = \int \left(\alpha \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial a} + \beta \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial b} + \gamma \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial c} \right) dS,$$

dove dS è l'elemento di volume circostante al punto qualunque (a, b, c) del corpo, α, β, γ sono tre funzioni di a, b, c che rappresentano le componenti secondo i tre assi del momento magnetico μ (riferito all'unità di volume) e finalmente r è la distanza dell'elemento dS dal punto potenziato (x, y, z), cioè

$$r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}.$$

Quando una delle dimensioni del corpo è estremamente piccola rispetto alle altre due, cioè quando il corpo stesso si riduce ad uno strato di piccolissimo spessore, si può, senza error sensibile rispetto ai punti potenziati esterni, considerare unicamente una superficie *mediana* dello strato, che diremo σ, e porre

$$(1) \qquad V = \int \left(\alpha \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial a} + \beta \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial b} + \gamma \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial c} \right) d\sigma,$$

dove $d\sigma$ è l'elemento di superficie circostante al punto (a, b, c) e dove le tre funzioni α, β, γ, nelle quali è compenetrato, come fattore, lo spessore costante o variabile dello strato, dipendono da due sole variabili indipendenti e rappresentano le componenti del momento magnetico riferito all'unità di superficie. La superficie σ può essere aperta o chiusa: nel primo caso designeremo con s la linea rientrante che ne forma il contorno.

Di tali strati magnetici sono stati finora considerati quasi esclusivamente quelli nei quali la magnetizzazione è *trasversale,* cioè nei quali l'asse magnetico è in ogni punto diretto *normalmente* alla superficie σ. Per questi strati, designando con n la normale alla superficie σ (diretta in un senso convenuto) e con μ il momento magnetico (positivo o negativo secondo che l'asse magnetico ha la direzione n o la direzione opposta), si ha

$$(1_a) \qquad \alpha = \mu\frac{\partial a}{\partial n}, \qquad \beta = \mu\frac{\partial b}{\partial n}, \qquad \gamma = \mu\frac{\partial c}{\partial n}$$

e l'espressione (1) prende la ben nota forma

$$(1_b) \qquad V = \int \mu \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} d\sigma .$$

Il più notevole caso particolare di magnetizzazione normale è quello che risulta dall'ipotesi $\mu = \text{cost}$. Il valore di V (o più esattamente delle derivate di V) non dipende allora che dal valore di μ e dalla linea di contorno s e coincide col potenziale elettromagnetico della corrente d'intensità μ, circolante lungo la linea s. Le derivate di V sono, in questo caso particolare, esprimibili per mezzo di integrali presi lungo il contorno (senza che esista un'analoga espressione generale per V).

Accanto agli strati magnetizzati *normalmente* è naturale di considerare quelli magnetizzati *tangenzialmente,* cioè quelli per i quali, invece delle relazioni (1_a), sussiste in ogni punto della superficie l'unica relazione

$$(2) \qquad \alpha\frac{\partial a}{\partial n} + \beta\frac{\partial b}{\partial n} + \gamma\frac{\partial c}{\partial n} = 0 .$$

Di tali strati magnetici, che sembrano essere stati poco studiati, è fatta menzione da THOMSON (*Reprint,* §§ 520-523), il quale li introduce con una considerazione indiretta ed in modo da dar luogo a qualche osservazione. Non è quindi del tutto inopportuno trattare brevemente di questo argomento, e in generale delle distribuzioni magnetiche a due dimensioni.

Ritenuto che la relazione (2) sia soddisfatta in ogni punto di σ, designamo con ξ, η, ζ tre quantità ausiliari, variabili da un punto ad un altro della superficie, e soggette alla sola condizione di soddisfare in ogni punto di questa alla relazione

$$(2_a) \qquad \alpha\xi + \beta\eta + \gamma\zeta = 0.$$

In virtù delle due relazioni (2), (2_a) si può porre

$$(2_b) \qquad \begin{cases} \alpha = \zeta\dfrac{\partial b}{\partial n} - \eta\dfrac{\partial c}{\partial n}, \\[2mm] \beta = \xi\dfrac{\partial c}{\partial n} - \zeta\dfrac{\partial a}{\partial n}, \\[2mm] \gamma = \eta\dfrac{\partial a}{\partial n} - \xi\dfrac{\partial b}{\partial n}. \end{cases}$$

Reciprocamente, qualunque sieno le tre quantità ξ, η, ζ, questi valori di α, β, γ soddisfanno sempre alla condizione (2) della magnetizzazione tangenziale.

Le tre quantità ξ, η, ζ, in quanto servono ad esprimere mediante le formole (2_b) le tre componenti α, β, γ del momento magnetico dello strato, non hanno bisogno d'essere definite che per i punti della superficie σ. Ma si può anche concepire che esse esistano in tutto uno spazio a tre dimensioni contenente la superficie stessa, vale a dire che esse si possono considerare anche come funzioni delle tre coordinate a, b, c dei punti di questo spazio, ed è appunto questo l'aspetto sotto cui giova riguardarle.

Ciò premesso ricordiamo il noto ed importante teorema contenuto nell'equazione

$$\int\left[\left(\frac{\partial Z}{\partial b} - \frac{\partial Y}{\partial c}\right)\frac{\partial a}{\partial n} + \left(\frac{\partial X}{\partial c} - \frac{\partial Z}{\partial a}\right)\frac{\partial b}{\partial n} + \left(\frac{\partial Y}{\partial a} - \frac{\partial X}{\partial b}\right)\frac{\partial c}{\partial n}\right]d\sigma$$
$$= \int (X\,da + Y\,db + Z\,dc),$$

dove l'integrale del primo membro è esteso alla superficie σ e quello del secondo al contorno s, percorso in senso positivo rapporto alla normale n. Quest'equazione suppone che le tre quantità X, Y, Z sieno funzioni monodrome, continue e finite di a, b, c, dotate di derivate prime nei punti della superficie σ e nell'immediata prossimità di questa superficie e del suo contorno. Designando con U una funzione dotata di questi stessi caratteri, che supporremo pure comuni alle ξ, η, ζ, e ponendo

$$X = U\xi, \qquad Y = U\eta, \qquad Z = U\zeta,$$

Il precedente teorema, avuto riguardo alle equazioni (2_b), dà

$$(3) \qquad \int\left(\frac{\partial U}{\partial a}\alpha + \frac{\partial U}{\partial b}\beta + \frac{\partial U}{\partial c}\gamma\right)d\sigma = -\int U h\,d\sigma - \int U g\,ds,$$

dove si è posto, per brevità,

$$(3_a)\qquad \begin{cases} h = \left(\dfrac{\partial \eta}{\partial c} - \dfrac{\partial \zeta}{\partial b}\right)\dfrac{\partial a}{\partial n} + \left(\dfrac{\partial \zeta}{\partial a} - \dfrac{\partial \xi}{\partial c}\right)\dfrac{\partial b}{\partial n} + \left(\dfrac{\partial \xi}{\partial b} - \dfrac{\partial \eta}{\partial a}\right)\dfrac{\partial c}{\partial n}, \\ g = \xi\dfrac{\partial a}{\partial s} + \eta\dfrac{\partial b}{\partial s} + \zeta\dfrac{\partial c}{\partial s}. \end{cases}$$

Dalla relazione generale (3), il cui primo membro, se U fosse la funzione potenziale di corpi magnetici esterni, rappresenterebbe il potenziale di questi corpi sullo strato che si considera, si ricavano molti corollarî importanti.

In primo luogo, ponendo

$$U = \frac{1}{r},$$

il che suppone che il punto (x, y, z) sia a distanza finita dalla superficie σ, come ammetteremo, si ottiene, (1),

$$(4)\qquad V = -\int \frac{h\,d\sigma}{r} - \int \frac{g\,ds}{r},$$

donde si conclude che l'azione esterna d'uno strato magnetico a magnetizzazione tangenziale può essere sostituita da quella di due distribuzioni ordinarie, l'una di superficie, con densità $-h$, l'altra di contorno, con densità $-g$.

In secondo luogo, ponendo

$$U = 1,$$

si ottiene

$$(4_a)\qquad \int h\,d\sigma + \int g\,ds = 0,$$

donde si conclude che la somma algebrica della massa delle due distribuzioni ordinarie testè menzionate è nulla.

In terzo luogo, ponendo successivamente

$$U = a, \qquad U = b, \qquad U = c,$$

si ottengono le equazioni

$$(4_b)\qquad \begin{cases} -\int a\,h\,d\sigma - \int a\,g\,ds = \int \alpha\,d\sigma, \\ -\int b\,h\,d\sigma - \int b\,g\,ds = \int \beta\,d\sigma, \\ -\int c\,h\,d\sigma - \int c\,g\,ds = \int \gamma\,d\sigma, \end{cases}$$

le quali insegnano che le somme algebriche dei momenti componenti delle due distribuzioni ordinarie anzidette sono eguali agli omologhi momenti componenti totali dello strato magnetico.

Così continuando e ponendo, per esempio,

$$U = b^2 + c^2, \qquad U = c^2 + a^2, \qquad U = a^2 + b^2,$$
$$U = bc, \qquad U = ca, \qquad U = ab,$$

si otterrebbero analoghi teoremi circa i momenti d'inerzia delle due distribuzioni; ecc.

Osserviamo che designando con ν la normale interna al contorno s, diretta tangenzialmente alla superficie σ, le tre direzioni s, ν, n si trovano, per ogni punto del contorno, disposte nello stesso modo di quelle dei tre assi positivi delle x, y, z. Da ciò risulta che, in virtù delle equazioni (2_b), si ha

$$\alpha\frac{\partial a}{\partial \nu} + \beta\frac{\partial b}{\partial \nu} + \gamma\frac{\partial c}{\partial \nu} = \xi\frac{\partial a}{\partial s} + \eta\frac{\partial b}{\partial s} + \zeta\frac{\partial c}{\partial s},$$

talchè alla seconda delle equazioni (3_a) si può sostituire la

$$(3_b) \qquad g = \alpha\frac{\partial a}{\partial \nu} + \beta\frac{\partial b}{\partial \nu} + \gamma\frac{\partial c}{\partial \nu},$$

che mostra essere la densità della distribuzione lineare eguale, in ogni punto del contorno, alla componente del momento magnetico secondo la normale esterna del contorno stesso. Ne segue che, quando lo strato magnetico non è chiuso, la condizione necessaria e sufficiente perchè manchi la distribuzione lineare è che il contorno sia una *linea di magnetizzazione,* cioè una linea tangente in ogni suo punto all'asse magnetico del punto stesso.

Quando lo strato magnetico è chiuso, da un altro notissimo teorema si ha

$$(5) \qquad \int\left(A\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial a} + B\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial b} + C\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial c}\right)dS = -\int\frac{h\,d\sigma}{r},$$

dove

$$(5_a) \qquad A = \frac{\partial \eta}{\partial c} - \frac{\partial \zeta}{\partial b}, \qquad B = \frac{\partial \zeta}{\partial a} - \frac{\partial \xi}{\partial c}, \qquad C = \frac{\partial \xi}{\partial b} - \frac{\partial \eta}{\partial a},$$

epperò, (4), (1), sussiste l'eguaglianza seguente

$$(5_b) \quad \int\left(A\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial a} + B\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial b} + C\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial c}\right)dS = \int\left(\alpha\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial a} + \beta\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial b} + \gamma\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial c}\right)d\sigma.$$

Le quantità A, B, C sono i momenti componenti d'una distribuzione solenoidale di magnetismo nello spazio S, distribuzione che è del resto assolutamente generale, se le funzioni ξ, η, ζ si considerano come arbitrarie. Dall'eguaglianza (5_b) risulta dunque che ogni distribuzione magnetica *solenoidale* a tre dimensioni può essere sostituita da una distribuzione magnetica *tangenziale* sulla superficie limite. Quest'ultima distribuzione magnetica, equivalente per tutti i punti dello spazio alla data solenoidale, non è determinata, anzi è suscettibile di una grandissima varietà. Infatti la funzione potenziale della data distribuzione solenoidale dipende unicamente, in virtù dell'equazione (5), dai valori che prende sulla superficie limite la componente normale del momento magnetico, cioè la quantità

$$h = A\frac{\partial a}{\partial n} + B\frac{\partial b}{\partial n} + C\frac{\partial c}{\partial n};$$

quindi le tre funzioni ξ, η, ζ, che determinano, (2_b), lo strato magnetico equivalente, non sono soggette ad altra condizione che a quella di soddisfare alla prima equazione (3) nei punti della superficie σ, punti pei quali il valore di h è prescritto dalla precedente equazione.

È questo il teorema dato da Thomson. Se non che poscia (§ 523) l'illustre Autore, formulando questo teorema coll'eguaglianza

$$(6) \qquad -\int\frac{h\,d\sigma}{r} = \int\left(\alpha\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial a} + \beta\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial b} + \gamma\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial c}\right)d\sigma,$$

gli attribuisce un'estensione che non è interamente esatta. Prescindendo, cioè, dalla considerazione d'ogni distribuzione solenoidale a tre dimensioni, anzi da ogni concetto di magnetismo, egli riguarda h come una quantità data ad arbitrio in ogni punto della superficie σ, chiusa od *aperta*, sotto la sola condizione

$$(6_a) \qquad \int h\,d\sigma = 0,$$

ed afferma che l'eguaglianza (6) sussiste ogniqualvolta le quantità α, β, γ sieno formate, giusta le formole (2_b), con tre funzioni ξ, η, ζ vincolate *unicamente* da una condizione di superficie, cioè dalla prima delle equazioni (3_a).

Ciò è conforme al vero fintantochè la superficie σ è chiusa, poichè allora l'equazione (4_a) si riduce per l'appunto alla (6_a) e la (4) alla (6). Ma se la superficie σ è aperta, la condizione (6_a), prescritta da Thomson, trae bensì con sè, (4_a), l'altra

$$\int g\,ds = 0,$$

ma questa non è sufficiente a ridurre l'equazione (4) alla (6). Perchè la proposizione di THOMSON sia esatta bisogna allora che le tre funzioni ξ, η, ζ, oltre che ad un'*equazione di superficie,* cioè alla prima equazione (3_a), dove h è soggetta alla condizione (6_a), soddisfacciano eziandio ad un'*equazione di contorno,* cioè alla

$$g = \xi\frac{\partial a}{\partial s} + \eta\frac{\partial b}{\partial s} + \zeta\frac{\partial c}{\partial s} = 0.$$

Abbiamo creduto opportuno di fare questa rettificazione, specialmente perchè THOMSON considera la proposizione testè discussa come «*a remarkable theorem*».

L'equazione (4) porge una trasformazione della funzione potenziale (1) d'uno strato, magnetizzato tangenzialmente, che presenta qualche analogia colla cosidetta trasformazione di POISSON per la funzione potenziale d'un corpo magnetico a tre dimensioni [trasformazione di cui l'equazione (5) è un caso particolare]. L'analogia in discorso non è tuttavia completa, poichè la densità h della distribuzione ordinaria di superficie dipende direttamente non già dalle componenti α, β, γ del momento magnetico, ma dalle funzioni ausiliari ξ, η, ζ. Mostreremo perciò qual sia il procedimento analitico che fa veramente riscontro alla trasformazione di POISSON.

Ritorniamo per tal uopo a cosiderare l'espressione

$$(7) \qquad W = \int\left(\frac{\partial U}{\partial a}\alpha + \frac{\partial U}{\partial b}\beta + \frac{\partial U}{\partial c}\gamma\right)d\sigma,$$

che per $U = \frac{1}{r}$ si riduce alla (1) e di cui abbiamo già ricordato il significato meccanico. Supponiamo che i punti della superficie σ sieno riferiti ad un sistema di coordinate curvilinee u e v, scelte in modo del tutto arbitrario, ed usiamo le notissime segnature relative a queste coordinate. In una Nota del 1880 *Intorno ad alcuni nuovi teoremi del Sig.* C. NEUMANN *sulle funzioni potenziali* *), abbiamo già stabilito alcune formole generali, che permettono di trasformare opportunamente la precedente espressione W. Dal confronto delle formole (3_a) e (4_a) di quella Nota risulta infatti senz'altro

$$\int\frac{\partial U}{\partial a}\alpha\, d\sigma = -\int\left[\frac{\partial(\alpha M_a)}{\partial u} + \frac{\partial(\alpha N_a)}{\partial v}\right]\frac{U\, d\sigma}{Hr} + \int\alpha\frac{\partial a}{\partial n}\frac{\partial U}{\partial n}d\sigma - \int\alpha\frac{\partial a}{\partial \nu}U\, ds,$$

e le analoghe, dove

$$M_\varphi = \frac{1}{H}\left(G\frac{\partial\varphi}{\partial u} - F\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right), \qquad N_\varphi = \frac{1}{H}\left(E\frac{\partial\varphi}{\partial v} - F\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right).$$

*) Annali di Matematica, serie II (1880), tomo X, pp. 46-63; oppure queste OPERE, Vol. III, pp. 305-322.

Sommando le tre equazioni analoghe alla precedente e ponendo per un momento

$$(7_a)\qquad \begin{cases} \mu' = \alpha\dfrac{\partial a}{\partial u} + \beta\dfrac{\partial b}{\partial u} + \gamma\dfrac{\partial c}{\partial u}, \\[2mm] \mu'' = \alpha\dfrac{\partial a}{\partial v} + \beta\dfrac{\partial b}{\partial v} + \gamma\dfrac{\partial c}{\partial v}, \\[2mm] \mu''' = \alpha\dfrac{\partial a}{\partial n} + \beta\dfrac{\partial b}{\partial n} + \gamma\dfrac{\partial c}{\partial n}; \end{cases}$$

$$(7_b)\qquad \begin{cases} h = \dfrac{1}{H}\left[\dfrac{\partial}{\partial u}\left(\dfrac{G\mu' - F\mu''}{H}\right) + \dfrac{\partial}{\partial v}\left(\dfrac{E\mu'' - F\mu'}{H}\right)\right], \\[2mm] g = \mu'\dfrac{\partial u}{\partial \nu} + \mu''\dfrac{\partial v}{\partial \nu}, \end{cases}$$

si trova

$$(7_c)\qquad W = -\int U h\, d\sigma - \int U g\, ds + \int \mu'''\frac{\partial U}{\partial n} d\sigma .$$

Ora se si indicano con

$$\mu_u\sqrt{E}, \qquad \mu_v\sqrt{G}, \qquad \mu_n$$

le componenti del momento magnetico μ secondo le direzioni in cui crescono u, v, n, si ha

$$(8)\qquad \begin{cases} \alpha = \mu_u\dfrac{\partial a}{\partial u} + \mu_v\dfrac{\partial a}{\partial v} + \mu_n\dfrac{\partial a}{\partial n}, \\[2mm] \beta = \mu_u\dfrac{\partial b}{\partial u} + \mu_v\dfrac{\partial b}{\partial v} + \mu_n\dfrac{\partial b}{\partial n}, \\[2mm] \gamma = \mu_u\dfrac{\partial c}{\partial u} + \mu_v\dfrac{\partial c}{\partial v} + \mu_n\dfrac{\partial c}{\partial n}, \end{cases}$$

cosicchè si può scrivere, (7),

$$W = \int\left(\frac{\partial U}{\partial u}\mu_u + \frac{\partial U}{\partial v}\mu_v + \frac{\partial U}{\partial n}\mu_n\right)d\sigma$$

e si ottiene, (7_a),

$$\mu' = E\mu_u + F\mu_v, \qquad \mu'' = F\mu_u + G\mu_v, \qquad \mu''' = \mu_n,$$

donde

$$G\mu' - F\mu'' = H^2\mu_u, \qquad E\mu'' - F\mu' = H^2\mu_v .$$

Ne risulta che i valori (7_b) di h e g si possono scrivere definitivamente così:

$$(8_a)\qquad \begin{cases} h = \dfrac{1}{H}\left[\dfrac{\partial(H\mu_u)}{\partial u} + \dfrac{\partial(H\mu_v)}{\partial v}\right], \\ g = (E\mu_u + F\mu_v)\dfrac{\partial u}{\partial \nu} + (F\mu_u + G\mu_v)\dfrac{\partial v}{\partial \nu}, \end{cases}$$

e che la funzione potenziale (1) di uno strato magnetico *qualunque* può essere rappresentata dalla formola

$$(8_b)\qquad V = -\int\frac{h\,d\sigma}{r} - \int\frac{g\,ds}{r} + \int \mu_n \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}\,d\sigma.$$

Quando la magnetizzazione è *normale*, si ha

$$\mu_u = \mu_v = 0, \qquad \mu_n = \mu, \qquad h = g = 0$$

e l'espressione (8_b) si riduce alla già nota (1_b).

Quando invece la magnetizzazione è *tangenziale*, si ha

$$\mu_n = 0$$

e la stessa (8_b) diventa

$$(8_c)\qquad V = -\int\frac{h\,d\sigma}{r} - \int\frac{g\,ds}{r},$$

cioè coincide coll'espressione (4), se non che le quantità h, g hanno ora i valori (8_a), formati direttamente colle componenti μ_u, μ_v della magnetizzazione tangenziale [il secondo dei quali valori è identico al (3_b) dell'altro metodo].

La trasformazione risultante dal confronto delle espressioni (1), (8_c) è quella cui alludevamo, e la sua perfetta corrispondenza con quella di Poisson si riconosce immediatamente, quando si suppone che lo strato sia piano e che si abbia

$$u = a, \qquad v = b, \qquad \mu_u = \alpha, \qquad \mu_v = \beta, \qquad \gamma = 0,$$
$$E = G = H = 1, \qquad F = 0,$$

giacchè in tal caso si ottiene

$$V = -\int\left(\frac{\partial\alpha}{\partial a} + \frac{\partial\beta}{\partial b}\right)\frac{d\sigma}{r} - \int\left(\alpha\frac{\partial a}{\partial \nu} + \beta\frac{\partial b}{\partial \nu}\right)\frac{ds}{r}.$$

Ponendo successivamente nell'equazione (7_c)

$$U = 1, \qquad U = a, \qquad U = b, \qquad U = c, \qquad \text{etc.}$$

si ritrovano le relazioni (4_a), (4_b), etc.

Abbiamo ricordato al principio quel caso notevolissimo di magnetizzazione normale in cui l'azione esterna dello strato dipende dal solo contorno. Anche per la magnetizzazione tangenziale può accadere che l'azione esterna sia rappresentabile da una sola distribuzione lineare lungo il contorno. Ciò ha luogo quando la quantità h è nulla in ogni punto di σ. Per rilevare agevolmente il significato di questa condizione, giova supporre che le linee $v = \text{cost.}$, $u = \text{cost.}$ sieno rispettivamente le linee di magnetizzazione e le loro trajettorie ortogonali. In tale ipotesi, supposto che il parametro u cresca nella direzione dell'asse magnetico, si ha

$$F = 0, \qquad \mu_u = \frac{\mu}{\sqrt{E}}, \qquad \mu_v = 0,$$

epperò

$$h = \frac{1}{\sqrt{EG}} \frac{\partial(\mu\sqrt{G})}{\partial u},$$

donde

$$h\,d\sigma = \frac{\partial(\mu\sqrt{G}\,dv)}{\partial u} du.$$

Ora se si considera la striscia infinitamente sottile compresa fra le due linee di magnetizzazione v e $v + dv$, la larghezza variabile di questa striscia è $\sqrt{G}\,dv$, epperò il prodotto $\mu\sqrt{G}\,dv$ è il momento magnetico della striscia nel punto (u, v), riferito all'unità di lunghezza. Dunque la condizione necessaria e sufficiente perchè manchi la distribuzione di superficie è che il momento magnetico di ciascuna striscia sia *costante,* ossia che la magnetizzazione dello strato, oltre che tangenziale, sia anche *solenoidale.* Del resto ciò risulta pure dalla relazione (4_a), la quale evidentemente ha luogo non solo per l'intera superficie, ma altresì per ogni porzione di essa. Da questa relazione e dalla (3_b) risulta, infatti, che quando $h = 0$ si ha

$$\int \mu_\nu\,ds = 0,$$

qualunque sia la linea chiusa s tracciata sulla superficie. Supponiamo che questa linea sia formata di due archi di linee di magnetizzazione riuniti da due archi s_1, s_2 di trajettorie ortogonali: l'equazione precedente si riduce a

$$\int \mu_1\,ds_1 = \int \mu_2\,ds_2,$$

dove μ_1 e μ_2 sono i momenti lungo s_1 e lungo s_2, il che equivale a

$$\int \mu\,ds = \text{cost.},$$

s essendo un arco qualunque di trajettoria ortogonale compreso fra due date linee di magnetizzazione. Ciò manifesta il carattere solenoidale della distribuzione. Che se poi il contorno è esso stesso una linea di magnetizzazione, si ha anche $g = 0$ e quindi $V = 0$, cioè l'azione dello strato tangenziale e solenoidale diventa nulla in tutto lo spazio. Infatti lo strato diventa in tal caso un solenoide completo.

Insieme colla funzione potenziale (1) importa considerare, come è noto, anche le tre altre funzioni potenziali

$$(9)\qquad \left\{\begin{aligned} P &= \int\left(\beta\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial c} - \gamma\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial b}\right)d\sigma, \\ Q &= \int\left(\gamma\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial a} - \alpha\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial c}\right)d\sigma, \\ R &= \int\left(\alpha\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial b} - \beta\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial a}\right)d\sigma. \end{aligned}\right.$$

Queste si possono considerare come particolari della (1), giacchè si ottengono da questa ponendo in luogo delle tre componenti

$$\alpha, \qquad \beta, \qquad \gamma$$

rispettivamente le seguenti

$$\begin{array}{ccc} 0, & -\gamma, & \beta, \\ \gamma, & 0, & -\alpha, \\ -\beta, & \alpha, & 0; \end{array}$$

epperò il metodo di trasformazione precedentemente seguito può essere in parte utilizzato anche per queste nuove funzioni. Per esempio, nel calcolo relativo a P, le quantità μ', μ'', μ''' delle formole (7_a) prendono i valori seguenti

$$\mu' = \beta\frac{\partial c}{\partial u} - \gamma\frac{\partial b}{\partial u},$$

$$\mu'' = \beta\frac{\partial c}{\partial v} - \gamma\frac{\partial b}{\partial v},$$

$$\mu''' = \beta\frac{\partial c}{\partial n} - \gamma\frac{\partial b}{\partial n},$$

e son questi i valori che bisogna sostituire nelle formole (7_b) e (7_c). Ora, ponendo per comodo

$$\frac{1}{2}(E\mu_u^2 + 2F\mu_u\mu_v + G\mu_v^2) = \Phi\,,$$

si deduce facilmente dalle precedenti espressioni di μ', μ'', μ''', in virtù delle formole (8),

$$\frac{G\mu' - F\mu''}{H} = -\frac{\partial\Phi}{\partial\mu_v}\frac{\partial a}{\partial n} + \mu_n\frac{\partial a}{\partial v}\,,$$

$$\frac{E\mu'' - F\mu'}{H} = +\frac{\partial\Phi}{\partial\mu_u}\frac{\partial a}{\partial n} - \mu_n\frac{\partial a}{\partial u}\,,$$

$$\mu''' = \frac{1}{H}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\mu_v}\frac{\partial a}{\partial u} - \frac{\partial\Phi}{\partial\mu_u}\frac{\partial a}{\partial v}\right).$$

Ne risulta che ponendo

$$(9_a)\qquad \varkappa = \frac{1}{H}\left[\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\mu_u}\right) - \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\mu_v}\right)\right],\qquad \lambda = H\left(\mu_u\frac{\partial v}{\partial\nu} - \mu_v\frac{\partial u}{\partial\nu}\right),$$

e designando cogli indici 1, 2, 3 le quantità h, g, μ''' relative alle tre funzioni P, Q, R, si ha (scrivendo anche μ_1, μ_2, μ_3 in luogo di μ_1''', μ_2''', μ_3''')

$$(9_b)\quad \left\{\begin{aligned}
h_1 &= \varkappa\frac{\partial a}{\partial n} + \frac{1}{H}\left(\frac{\partial\mu_n}{\partial u}\frac{\partial a}{\partial v} - \frac{\partial\mu_n}{\partial v}\frac{\partial a}{\partial u}\right) - \frac{\partial\mu_1}{\partial n}\,,\\
h_2 &= \varkappa\frac{\partial b}{\partial n} + \frac{1}{H}\left(\frac{\partial\mu_n}{\partial u}\frac{\partial b}{\partial v} - \frac{\partial\mu_n}{\partial v}\frac{\partial b}{\partial u}\right) - \frac{\partial\mu_2}{\partial n}\,,\\
h_3 &= \varkappa\frac{\partial c}{\partial n} + \frac{1}{H}\left(\frac{\partial\mu_n}{\partial u}\frac{\partial c}{\partial v} - \frac{\partial\mu_n}{\partial v}\frac{\partial c}{\partial u}\right) - \frac{\partial\mu_3}{\partial n}\,;\\
g_1 &= \lambda\frac{\partial a}{\partial n} - \mu_n\frac{\partial a}{\partial s}\,,\qquad g_2 = \lambda\frac{\partial b}{\partial n} - \mu_n\frac{\partial b}{\partial s}\,,\qquad g_3 = \lambda\frac{\partial c}{\partial n} - \mu_n\frac{\partial c}{\partial s}\,;\\
\mu_1 &= \frac{1}{H}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\mu_v}\frac{\partial a}{\partial u} - \frac{\partial\Phi}{\partial\mu_u}\frac{\partial a}{\partial v}\right),\\
\mu_2 &= \frac{1}{H}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\mu_v}\frac{\partial b}{\partial u} - \frac{\partial\Phi}{\partial\mu_u}\frac{\partial b}{\partial v}\right),\\
\mu_3 &= \frac{1}{H}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\mu_v}\frac{\partial c}{\partial u} - \frac{\partial\Phi}{\partial\mu_u}\frac{\partial c}{\partial v}\right).
\end{aligned}\right.$$

Le equazioni analoghe alle (8_b) per le tre funzioni P, Q, R sono quindi le seguenti

$$(9_c)\qquad \begin{cases} P = -\int \frac{h_1\, d\sigma}{r} - \int \frac{g_1\, ds}{r} + \int \mu_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} d\sigma, \\[2ex] Q = -\int \frac{h_2\, d\sigma}{r} - \int \frac{g_2\, ds}{r} + \int \mu_2 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} d\sigma, \\[2ex] R = -\int \frac{h_3\, d\sigma}{r} - \int \frac{g_3\, ds}{r} + \int \mu_3 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} d\sigma. \end{cases}$$

Le derivate di μ_1, μ_2, μ_3 rispetto ad n, che entrano nelle espressioni di h_1, h_2, h_3 devono riferirsi alle sole a, b, c *esplicite,* considerate come funzioni di u, v, n. Quindi, per esempio, si deve porre

$$\frac{\partial \mu_1}{\partial n} = \frac{1}{H}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \mu_v}\frac{\partial^2 a}{\partial u \partial n} - \frac{\partial \Phi}{\partial \mu_u}\frac{\partial^2 a}{\partial v \partial n}\right) = \frac{1}{H}\left[\frac{\partial \Phi}{\partial \mu_v}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial a}{\partial n}\right) - \frac{\partial \Phi}{\partial \mu_u}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial a}{\partial n}\right)\right].$$

Approfittando di relazioni ben note nella teoria delle superficie si può svolgere in altro modo quest'espressione, e precisamente, introducendo i simboli A, B, C usati in questa teoria e ponendo

$$\tfrac{1}{2}(A\mu_u^2 + 2B\mu_u\mu_v + C\mu_v^2) = \Psi,$$

si trova

$$\frac{\partial \mu_1}{\partial n} = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)\mu_1 + \frac{1}{H}\left(\frac{\partial \Psi}{\partial \mu_v}\frac{\partial a}{\partial u} - \frac{\partial \Psi}{\partial \mu_u}\frac{\partial a}{\partial v}\right),$$

$$\frac{\partial \mu_2}{\partial n} = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)\mu_2 + \frac{1}{H}\left(\frac{\partial \Psi}{\partial \mu_v}\frac{\partial b}{\partial u} - \frac{\partial \Psi}{\partial \mu_u}\frac{\partial b}{\partial v}\right),$$

$$\frac{\partial \mu_3}{\partial n} = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)\mu_3 + \frac{1}{H}\left(\frac{\partial \Psi}{\partial \mu_v}\frac{\partial c}{\partial u} - \frac{\partial \Psi}{\partial \mu_u}\frac{\partial c}{\partial v}\right),$$

dove R_1, R_2 sono i due raggi principali di curvatura.

Mentre nell'espressione (8_b) di V il potenziale di doppio strato svanisce soltanto nell'ipotesi della magnetizzazione tangenziale, nelle espressioni (9_c) di P, Q, R i tre potenziali di doppio strato svaniscono invece soltanto nell'ipotesi della magnetizzazione normale; giacchè, come è facile vedere, non può essere $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 0$ se non è

$\mu_u = \mu_v = 0$. In tal caso si ha

$$\Phi = 0, \qquad \varkappa = 0, \qquad \lambda = 0, \qquad \mu_n = \mu$$

e le espressioni complete di P, Q, R sono le seguenti:

$$(10) \qquad \begin{cases} P = \displaystyle\int_s \frac{\mu\, d a}{r} - \int \frac{1}{H}\left(\frac{\partial \mu}{\partial u}\frac{\partial a}{\partial v} - \frac{\partial \mu}{\partial v}\frac{\partial a}{\partial u}\right)\frac{d\sigma}{r}, \\ Q = \displaystyle\int_s \frac{\mu\, d b}{r} - \int \frac{1}{H}\left(\frac{\partial \mu}{\partial u}\frac{\partial b}{\partial v} - \frac{\partial \mu}{\partial v}\frac{\partial b}{\partial u}\right)\frac{d\sigma}{r}, \\ R = \displaystyle\int_s \frac{\mu\, d c}{r} - \int \frac{1}{H}\left(\frac{\partial \mu}{\partial u}\frac{\partial c}{\partial v} - \frac{\partial \mu}{\partial v}\frac{\partial c}{\partial u}\right)\frac{d\sigma}{r}. \end{cases}$$

I tre integrali di superficie possono essere ridotti a forma più semplice, col porre in essi $d\sigma = H\,du\,dv$ e col rammentare la regola di trasformazione degli integrali doppi. Questa forma è la seguente

$$(10_a) \qquad \begin{cases} P = \displaystyle\int_s \frac{\mu\, d a}{r} - \int d\mu \int \frac{d a}{r}, \\ Q = \displaystyle\int_s \frac{\mu\, d b}{r} - \int d\mu \int \frac{d b}{r}, \\ R = \displaystyle\int_s \frac{\mu\, d c}{r} - \int d\mu \int \frac{d c}{r}, \end{cases}$$

dove è supposto che la superficie σ sia divisa in striscie infinitamente sottili per mezzo delle linee $\mu = \text{cost.}$ e che, dopo avere eseguito ciascuna delle integrazioni

$$\int \frac{d a}{r}, \qquad \int \frac{d b}{r}, \qquad \int \frac{d c}{r}$$

per la striscia di parametro μ, si moltiplichino i risultati per $d\mu$ e si integri fra i limiti di questo parametro. Il teorema fondamentale di AMPÈRE rende facilmente ragione di questo procedimento. E questo teorema è, alla sua volta, espresso dai risultati che si ottengono supponendo che il momento μ sia costante in ogni punto di σ, nel qual caso si ha semplicemente

$$P = \mu \int_s \frac{d a}{r}, \qquad Q = \mu \int_s \frac{d b}{r}, \qquad R = \mu \int_s \frac{d c}{r}.$$

Le formole (10_a) si possono ricavare anche dalla sostituzione diretta dei valori

(1_a) nelle espressioni (9) e dalla successiva applicazione a queste espressioni del teorema generale che ci ha fornito, nel caso della magnetizzazione tangenziale, le formole (3) e (4). Si trova in questo modo

$$(10_b) \qquad \left\{\begin{aligned} P &= \int_s \frac{\mu\, d a}{r} + \int \left(\frac{\partial \mu}{\partial b} \frac{\partial c}{\partial n} - \frac{\partial \mu}{\partial c} \frac{\partial b}{\partial n} \right) \frac{d\sigma}{r}, \\ Q &= \int_s \frac{\mu\, d b}{r} + \int \left(\frac{\partial \mu}{\partial c} \frac{\partial a}{\partial n} - \frac{\partial \mu}{\partial a} \frac{\partial c}{\partial n} \right) \frac{d\sigma}{r}, \\ R &= \int_s \frac{\mu\, d c}{r} + \int \left(\frac{\partial \mu}{\partial a} \frac{\partial b}{\partial n} - \frac{\partial \mu}{\partial b} \frac{\partial a}{\partial n} \right) \frac{d\sigma}{r}, \end{aligned}\right.$$

ed una facile considerazione geometrica permette di convertire i tre integrali di superficie in quelli delle formole (10) oppure (10_a).

LXXIII.

SULL'EQUIVALENZA DELLE DISTRIBUZIONI MAGNETICHE E GALVANICHE.

Rendiconti del Reale Istituto Lombardo, serie II, tomo XVI (1883), pp. 931-948.

In una recente Nota *Sulla funzione potenziale di conduttori di correnti galvaniche costanti* *), il prof. RICCI ha giustamente osservato che d'ordinario si ammette, in base al celebre teorema d'AMPÈRE sull'identità d'azione di una corrente elementare e d'un elemento magnetico, che ad ogni distribuzione magnetica corrisponda una distribuzione di correnti costanti e chiuse, dotata di eguale azione esterna, senza che si dia una regolare dimostrazione di quest'importante proposizione. E neppure si suol discutere il problema inverso, quello, cioè, di rappresentare una data distribuzione galvanica per mezzo d'una distribuzione magnetica dotata d'eguale azione esterna.

Per verità le formole più essenziali per la risoluzione del problema *diretto* (ricerca d'una distribuzione galvanica equivalente ad una magnetica data) si trovano già nel capitolo intitolato *On Electromagnets* del *Reprint* di W. THOMSON, capitolo che fu redatto fino dal 1859, ma che vide la luce soltanto nel 1872. Formole più generali, applicabili alla stessa questione, trovansi nell'elegante lavoro di LIPSCHITZ: *Beitrag zur Theorie der partiellen Differentialgleichungen* **). Anche circa il problema *inverso* (ricerca di una distribuzione magnetica equivalente ad una galvanica data) si trovano molte indicazioni importanti, benchè alquanto sommarie ed indirette, nel capitolo intitolato

*) Atti del R. Istituto Veneto, serie V, tomo VIII (1882), pp. 1025-1048.

**) Journal für die reine und angewandte Mathematik, t. LXIX (1868).

Inverse Problems (in data del 1871) ed in altri passi del citato *Reprint*. Ma è certamente da desiderarsi una più diretta e completa trattazione dei due problemi in discorso.

Volendo tentare, in ciò che segue, di colmare questa lacuna, osservo innanzi tutto che, trattandosi di equivalenza *in azione esterna*, bisogna introdurre qualche restrizione atta a rimovere l'evidente indeterminazione del problema. A me pare che, quando si allude al teorema d'AMPÈRE, si intenda tacitamente che le due distribuzioni (magnetica e galvanica) debbano occupare lo stesso spazio e che in ciascun punto di questo (o della sua superficie) le intensità specifiche della distribuzione galvanica debbano dipendere unicamente dai momenti magnetici *locali* della distribuzione magnetica. Infatti se si decompone mentalmente il corpo magnetico in parti, l'insieme di tutte le distribuzioni galvaniche equivalenti, secondo il concetto Ampèriano, a ciascuna d'esse, dev'essere identico alla distribuzione galvanica totale equivalente, giusta il medesimo concetto, all'intero magnete.

È in questo senso che mi propongo di trattare l'argomento, pigliando le mosse da una ben nota proposizione d'analisi opportunamente modificata nella sua espressione simbolica.

La proposizione cui alludo è quella della quale ho già fatto uso nella mia Nota precedente [*Sulla teoria degli strati magnetici* *)], e che si traduce nell'eguaglianza

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned}&\int\left[\left(\frac{\partial\gamma}{\partial b}-\frac{\partial\beta}{\partial c}\right)\frac{\partial a}{\partial n}+\left(\frac{\partial\alpha}{\partial c}-\frac{\partial\gamma}{\partial a}\right)\frac{\partial b}{\partial n}+\left(\frac{\partial\beta}{\partial a}-\frac{\partial\alpha}{\partial b}\right)\frac{\partial c}{\partial n}\right]d\sigma\\ &\qquad=\int\left(\alpha\frac{\partial a}{\partial s}+\beta\frac{\partial b}{\partial s}+\gamma\frac{\partial c}{\partial s}\right)ds,\end{aligned}\right.$$

dove α, β, γ sono tre funzioni delle coordinate rettangole a, b, c e dove il primo integrale si estende ad un pezzo di superficie σ (che supporrò semplicemente connesso, per evitare certe distinzioni, non necessarie allo scopo attuale), il secondo al contorno s di questo. Le tre funzioni α, β, γ devono essere monodrome, continue, finite e dotate di derivate prime nell'intorno della superficie σ e del suo contorno; e questo contorno deve intendersi percorso in modo che facendo coincidere la direzione delle x positive con quella di s e la direzione delle z positive con quella di n (normale alla superficie), la direzione delle y positive coincida con quella della retta, che diremo ν, normale al contorno s nel punto considerato, tangente alla superficie e diretta verso l'interno del pezzo σ.

*) Rendiconti del R. Istituto Lombardo, s. II, t. XVI, pag. 208; oppure queste OPERE, vol. IV, pp. 1-15.

La modificazione che bisogna introdurre è la seguente. Essendo le tre direzioni testè mentovate (s, ν, n) disposte come quelle della terna positiva (x, y, z), ha luogo la notissima proprietà che nel determinante

$$(1_a)\qquad \begin{vmatrix} \frac{\partial a}{\partial s} & \frac{\partial b}{\partial s} & \frac{\partial c}{\partial s} \\ \frac{\partial a}{\partial \nu} & \frac{\partial b}{\partial \nu} & \frac{\partial c}{\partial \nu} \\ \frac{\partial a}{\partial n} & \frac{\partial b}{\partial n} & \frac{\partial c}{\partial n} \end{vmatrix}$$

ogni elemento è eguale al proprio determinante complementare. In virtù di questa proprietà, eliminando dall'eguaglianza (1) le derivate relative ad s e ponendo

$$(2)\qquad \begin{cases} u = \frac{\partial \beta}{\partial c} - \frac{\partial \gamma}{\partial b}, & v = \frac{\partial \gamma}{\partial a} - \frac{\partial \alpha}{\partial c}, \quad w = \frac{\partial \alpha}{\partial b} - \frac{\partial \beta}{\partial a}; \\ \mathfrak{u} = \beta\frac{\partial c}{\partial n} - \gamma\frac{\partial b}{\partial n}, & \mathfrak{v} = \gamma\frac{\partial a}{\partial n} - \alpha\frac{\partial c}{\partial n}, \quad \mathfrak{w} = \alpha\frac{\partial b}{\partial n} - \beta\frac{\partial a}{\partial n}, \end{cases}$$

la suddetta eguaglianza assume la forma

$$(2_a)\qquad \int\left(u\frac{\partial a}{\partial n} + v\frac{\partial b}{\partial n} + w\frac{\partial c}{\partial n}\right)d\sigma = \int\left(\mathfrak{u}\frac{\partial a}{\partial \nu} + \mathfrak{v}\frac{\partial b}{\partial \nu} + \mathfrak{w}\frac{\partial c}{\partial \nu}\right)ds.$$

È sotto questa forma che essa serve molto opportunamente allo scopo attuale. Sia infatti

$$(3)\qquad M = \int\left(\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial a}\alpha + \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial b}\beta + \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial c}\gamma\right)dS$$

la funzione potenziale sul punto (x, y, z) di una distribuzione magnetica qualunque, occupante uno spazio S, di cui dS è un elemento di volume circostante al punto (a, b, c), nel quale le componenti del momento magnetico (riferite all'unità di volume) sono α, β, γ. Si è posto al solito

$$r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}.$$

È noto che ponendo

$$(3_a)\qquad \begin{cases} U = \displaystyle\int\left(\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial b}\gamma - \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial c}\beta\right)dS, \\[2ex] V = \displaystyle\int\left(\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial c}\alpha - \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial a}\gamma\right)dS, \\[2ex] W = \displaystyle\int\left(\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial a}\beta - \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial b}\alpha\right)dS, \end{cases}$$

si hanno le identità

$$(3_b)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial z} - \dfrac{\partial W}{\partial y} = 4\pi\alpha - \dfrac{\partial M}{\partial x}, \\[2ex] \dfrac{\partial W}{\partial x} - \dfrac{\partial U}{\partial z} = 4\pi\beta - \dfrac{\partial M}{\partial y}, \\[2ex] \dfrac{\partial U}{\partial y} - \dfrac{\partial V}{\partial x} = 4\pi\gamma - \dfrac{\partial M}{\partial z}, \end{cases}$$

nelle quali le α, β, γ si riferiscono al punto (x, y, z) e sono quindi nulle se questo punto è esterno allo spazio S. Ora, applicando la trasformazione di Poisson alle tre funzioni U, V, W, si trova, (2),

$$(4)\qquad U=\int\frac{u\,dS}{r}+\int\frac{u\,d\sigma}{r},\quad V=\int\frac{v\,dS}{r}+\int\frac{v\,d\sigma}{r},\quad W=\int\frac{w\,dS}{r}+\int\frac{w\,d\sigma}{r},$$

e queste espressioni costituiscono, in virtù delle formole fondamentali dell'elettromagnetismo, ciò che Lipschitz molto opportunamente denomina il *sistema potenziale* d'una distribuzione galvanica mista (di spazio e di superficie), la quale, come ora si vedrà, è formata di correnti *costanti* e *chiuse*.

Questa distribuzione si compone infatti di due, l'una di spazio, l'altra di superficie, coi caratteri seguenti:

1°) Per le correnti che esistono nello spazio S, le componenti dell'intensità specifica sono le quantità u, v, w date dalla prima terna di equazioni (2). Da questa terna risulta che in ogni punto di S si ha

$$(5)\qquad \frac{\partial u}{\partial a}+\frac{\partial v}{\partial b}+\frac{\partial w}{\partial c}=0,$$

equazione la quale stabilisce, come è noto, che le dette correnti sono *costanti,* cioè che ogni fascio infinitamente piccolo di linee di corrente costituisce un filetto nel quale il prodotto dell'intensità specifica per la sezione (cioè l'intensità vera) è costante. Questi filetti, se non rientrano in sè stessi nello spazio S, sono interrotti dalla superficie σ di questo spazio. In quest'ultimo caso l'integrale

$$(5_a) \qquad \int \left(u\frac{\partial a}{\partial n} + v\frac{\partial b}{\partial n} + w\frac{\partial c}{\partial n} \right) d\sigma$$

esteso ad un pezzo qualunque, σ_1, della detta superficie, di cui n designa la normale interna, rappresenta la somma algebrica delle intensità vere di tutte le correnti interrotte da σ_1, contando come positive le intensità delle correnti che entrano in S e come negative quelle delle correnti che ne escono.

2°) Per le correnti che esistono sulla superficie σ, le componenti dell'intensità specifica sono le quantità $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$ date dalla seconda terna di equazioni (2). Da questa terna risulta infatti che in ogni punto di σ si ha

$$(6) \qquad \boldsymbol{u}\frac{\partial a}{\partial n} + \boldsymbol{v}\frac{\partial b}{\partial n} + \boldsymbol{w}\frac{\partial c}{\partial n} = 0,$$

equazione la quale stabilisce che le dette componenti si riferiscono effettivamente a correnti superficiali. I filetti costituiti da fasci infinitamente piccoli di linee di corrente superficiali *non* hanno, in generale, intensità costante come i filetti interni. Infatti se si considera di nuovo un pezzo σ_1 di superficie, limitato da una linea chiusa s, e se si forma l'integrale

$$(6_a) \qquad \int \left(\boldsymbol{u}\frac{\partial a}{\partial \nu} + \boldsymbol{v}\frac{\partial b}{\partial \nu} + \boldsymbol{w}\frac{\partial c}{\partial \nu} \right) ds$$

esteso a tutto questo contorno (di cui ν designa la normale interna), questo integrale, il quale rappresenta la somma algebrica delle intensità vere di tutte le correnti che attraversano il detto contorno (contando come positive le intensità delle correnti che entrano in σ_1 e come negative quelle delle correnti che ne escono), non è, in generale, eguale a zero, poichè, come s'è veduto, esso equivale a

$$-\int \left(\alpha\frac{\partial a}{\partial s} + \beta\frac{\partial b}{\partial s} + \gamma\frac{\partial c}{\partial s} \right) ds$$

e le quantità α, β, γ hanno valori *arbitrarî* sulla superficie, come nello spazio interno.

Ma se si suppone che il pezzo σ_1 di superficie cui si riferisce l'integrale (5_a) sia semplicemente connesso e sia inoltre quello stesso al cui contorno si riferisce l'integrale

(6_a), si scorge, (2_a), che le correnti superficiali che entrano in σ_1, attraverso alla linea s, hanno, nel loro insieme, la stessa intensità di quelle che devono entrare in S, attraverso l'area σ_1, per compensare l'interruzione delle correnti interne alla superficie. Ciò valendo per ogni pezzo della superficie σ, e quindi anche per ogni elemento di questa superficie, è chiaro che le correnti interne e le correnti superficiali formano, nel loro complesso, un unico sistema di correnti *costanti* e *chiuse*, ossia che ogni filetto interno, interrotto come tale dalla superficie, trova la sua continuazione in un filetto superficiale. Un fascio infinitesimale di linee di corrente superficiali non ha, in generale, intensità costante appunto perchè esso consta, in ciascun suo tronco, di più filetti d'intensità costante, alcuni dei quali hanno origine, o fine, in un punto del tronco stesso.

Stabilito così che le correnti miste di cui le funzioni (4) rappresentano il sistema potenziale sono tutte costanti e chiuse, segue dalla nota teoria che le componenti X, Y, Z della forza elettromagnetica unitaria esercitata nel punto (x, y, z) dal complesso di tutte queste correnti sono date dalle espressioni

$$(7) \qquad X = \frac{\partial V}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial y}, \qquad Y = \frac{\partial W}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial z}, \qquad Z = \frac{\partial U}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial x},$$

le quali sussistono in tutti i punti dello spazio ad eccezione di quelli della superficie σ, nei quali le derivate di U, V, W sono discontinue. Ora in tutto lo spazio esterno ad S queste espressioni equivalgono, (3_b), alle

$$(7_a) \qquad X = -\frac{\partial M}{\partial x}, \qquad Y = -\frac{\partial M}{\partial y}, \qquad Z = -\frac{\partial M}{\partial z},$$

cioè a quelle delle omologhe componenti della forza esercitata, nello stesso punto (x, y, z), dal magnete di funzione potenziale M, (3). È dunque dimostrato che le formole (2) definiscono una distribuzione galvanica mista $(u, v, w; \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ equivalente, in azione esterna, alla distribuzione magnetica qualunque (α, β, γ) e soddisfacente alla prescritta condizione d'essere determinata, in ciascun punto di S e di σ, dagli elementi magnetici relativi a questo solo punto.

Che tale distribuzione galvanica sia l'unica soddisfacente alle condizioni volute risulta da ciò che essa riproduce il teorema fondamentale di Ampère, quando il corpo magnetico si riduce ad un *elemento*, nel quale i momenti α, β, γ sieno costanti, giacchè si ha allora

$$u = v = w = 0, \qquad \alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v} + \gamma\mathbf{w} = 0.$$

Quest'ultima equazione, la quale sussiste in ogni punto della superficie d'un corpo magnetico qualunque, si traduce nel teorema seguente: le linee di corrente, sulla superficie, sono le trajettorie ortogonali degli assi magnetici.

Passo ora al problema inverso, all'ipotesi, cioè, che sia data una distribuzione galvanica mista (u, v, w; $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$), la quale soddisfaccia alle condizioni

$$(8)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial a}+\dfrac{\partial v}{\partial b}+\dfrac{\partial w}{\partial c}=0, \qquad \boldsymbol{u}\dfrac{\partial a}{\partial n}+\boldsymbol{v}\dfrac{\partial b}{\partial n}+\boldsymbol{w}\dfrac{\partial c}{\partial n}=0, \\ \displaystyle\int\left(u\frac{\partial a}{\partial n}+v\frac{\partial b}{\partial n}+w\frac{\partial c}{\partial n}\right)d\sigma=\int\left(\boldsymbol{u}\frac{\partial a}{\partial \nu}+\boldsymbol{v}\frac{\partial b}{\partial \nu}+\boldsymbol{w}\frac{\partial c}{\partial \nu}\right)ds, \end{cases}$$

e precisamente alla prima in ogni punto di uno spazio S, alla seconda in ogni punto della superficie σ, limite di questo spazio, alla terza rispetto ad ogni pezzo semplicemente connesso di questa superficie ed al corrispondente contorno. Queste condizioni sono necessarie e sufficienti, per ciò che si è veduto, a definire un sistema misto di correnti costanti e chiuse. Si tratta di determinare, se è possibile, una distribuzione magnetica equivalente in azione esterna a questa distribuzione galvanica; si tratta, cioè, tenendo fermo il già convenuto senso di tale equivalenza, di trovare, se è possibile, tre funzioni α, β, γ monodrome, continue e finite in S, le quali rendano soddisfatte le sei equazioni (2).

Giova osservare innanzi tutto che queste sei equazioni possono ridursi alle quattro seguenti

$$(8_a)\qquad \begin{cases} u=\dfrac{\partial \beta}{\partial c}-\dfrac{\partial \gamma}{\partial b}, \qquad v=\dfrac{\partial \gamma}{\partial a}-\dfrac{\partial \alpha}{\partial c}, \qquad w=\dfrac{\partial \alpha}{\partial b}-\dfrac{\partial \beta}{\partial a}, \\ \boldsymbol{u}\dfrac{\partial a}{\partial \nu}+\boldsymbol{v}\dfrac{\partial b}{\partial \nu}+\boldsymbol{w}\dfrac{\partial c}{\partial \nu}+\alpha\dfrac{\partial a}{\partial s}+\beta\dfrac{\partial b}{\partial s}+\gamma\dfrac{\partial c}{\partial s}=0, \end{cases}$$

delle quali le prime tre devono sussistere in ogni punto dello spazio S e la quarta in ogni punto della superficie σ e per ogni coppia di direzioni ortogonali s, ν disposte in modo da formare con n una terna positiva (s, ν, n). Questa quarta equazione tien luogo delle tre ultime equazioni (2), perchè eliminandone, (1_a), le derivate relative ad s si ottiene da essa un'altra equazione la quale, dovendo sussistere per *tutte* le direzioni ν normali ad n, si decompone di nuovo necessariamente, tenuto conto della seconda condizione (8), nelle suddette tre equazioni.

È bene considerare dapprima un caso particolarissimo, quello, cioè, in cui si abbia

$$u=v=w=0, \qquad \text{in } S$$

$$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{v}=\boldsymbol{w}=0, \qquad \text{in } \sigma.$$

In questo caso le equazioni (8_a) dànno

$$\alpha = \frac{\partial \varphi}{\partial a}, \quad \beta = \frac{\partial \varphi}{\partial b}, \quad \gamma = \frac{\partial \varphi}{\partial c}, \qquad \text{in } S,$$

$$d\varphi = 0, \qquad \text{in } \sigma,$$

e queste formole definiscono una distribuzione lamellare *chiusa,* cioè una distribuzione lamellare in cui le superficie terminali del magnete sono per esse superficie lamellari. La funzione φ che individua tale distribuzione è vincolata soltanto alle condizioni di avere le derivate prime monodrome, continue e finite in tutto lo spazio S e di assumere valori costanti sulle superficie terminali di questo spazio. Si sa effettivamente che ogni distribuzione lamellare chiusa è priva di azione sui punti dello spazio non occupato da essa.

Segue da ciò che se esiste *una* distribuzione magnetica equivalente alla galvanica data, ne esistono necessariamente infinite altre, che si ottengono da quella sovrapponendo ad essa una distribuzione lamellare chiusa. Reciprocamente, *due* distribuzioni magnetiche, equivalenti ad una stessa distribuzione galvanica, non possono differire che per una distribuzione lamellare chiusa.

Prima di cercare se esista una distribuzione magnetica equivalente alla galvanica data (u, v, w; $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$), è necessario di stabilire alcune proposizioni.

Si circoscriva sulla superficie σ una regione semplicemente connessa e se ne riferiscano i punti ad un sistema di coordinate curvilinee p e q sotto la sola condizione che le linee coordinate formino in quella regione un reticolo *ordinario,* cioè un reticolo suscettibile d'essere trasformato con continuità in un reticolo cartesiano. Supposto che per tali coordinate il quadrato dell'elemento lineare generico prenda la forma

$$ds^2 = E dp^2 + 2 F dp dq + G dq^2$$

e designando con $\omega_p \sqrt{E}$, $\omega_q \sqrt{G}$ le componenti dell'intensità specifica superficiale secondo le linee coordinate, nei sensi in cui crescono i parametri p e q rispettivamente, si ha

$$(9) \qquad \left\{ \begin{aligned} \boldsymbol{u} &= \omega_p \frac{\partial a}{\partial p} + \omega_q \frac{\partial a}{\partial q}, \\ \boldsymbol{v} &= \omega_p \frac{\partial b}{\partial p} + \omega_q \frac{\partial b}{\partial q}, \\ \boldsymbol{w} &= \omega_p \frac{\partial c}{\partial p} + \omega_q \frac{\partial c}{\partial q}, \end{aligned} \right.$$

e quindi

$$(9_a)\qquad u\frac{\partial a}{\partial \nu}+v\frac{\partial b}{\partial \nu}+w\frac{\partial c}{\partial \nu}=\left(E\frac{\partial p}{\partial \nu}+F\frac{\partial q}{\partial \nu}\right)\omega_p+\left(F\frac{\partial p}{\partial \nu}+G\frac{\partial q}{\partial \nu}\right)\omega_q.$$

Si ha pure, qualunque sia la funzione ψ,

$$u\frac{\partial \psi}{\partial a}+v\frac{\partial \psi}{\partial b}+w\frac{\partial \psi}{\partial c}=\omega_p\frac{\partial \psi}{\partial p}+\omega_q\frac{\partial \psi}{\partial q},$$

ovvero

$$(9_b)\qquad u\frac{\partial \psi}{\partial a}+v\frac{\partial \psi}{\partial b}+w\frac{\partial \psi}{\partial c}=\frac{1}{H}\left[\frac{\partial(H\psi\omega_p)}{\partial p}+\frac{\partial(H\psi\omega_q)}{\partial q}\right]-[\omega]\psi,$$

dove

$$[\omega]=\frac{1}{H}\left[\frac{\partial(H\omega_p)}{\partial p}+\frac{\partial(H\omega_q)}{\partial q}\right],\qquad H=\sqrt{EG-F^2}.$$

Ora dalle note formole [cfr. la mia Memoria: *Delle variabili complesse sopra una superficie qualunque* *)]

$$\int\frac{\partial\chi}{\partial p}\frac{d\sigma}{H}=-\int\left(E\frac{\partial p}{\partial \nu}+F\frac{\partial q}{\partial \nu}\right)\frac{\chi\, ds}{H},$$

$$\int\frac{\partial\chi}{\partial q}\frac{d\sigma}{H}=-\int\left(F\frac{\partial p}{\partial \nu}+G\frac{\partial q}{\partial \nu}\right)\frac{\chi\, ds}{H},$$

valide per ogni funzione $\chi(p, q)$ monodroma, continua, finita e dotata di derivate prime, si deduce, (9_a), (9_b), supponendo che ψ abbia queste stesse proprietà,

$$(9_c)\qquad \left\{\begin{aligned}&\int\left(u\frac{\partial \psi}{\partial a}+v\frac{\partial \psi}{\partial b}+w\frac{\partial \psi}{\partial c}\right)d\sigma+\int\left(u\frac{\partial a}{\partial \nu}+v\frac{\partial b}{\partial \nu}+w\frac{\partial c}{\partial \nu}\right)\psi\, ds\\ &\qquad\qquad+\int[\omega]\psi\, d\sigma=0.\end{aligned}\right.$$

Dalla natura di questa relazione emerge che l'espressione designata col simbolo $[\omega]$ ha un significato indipendente dalla scelta delle coordinate p, q. Questo significato verrà messo in luce fra un momento: per ora basti avvertire che, tenendo conto di ciò, l'equazione (9_c) può essere anche estesa a tutta la superficie, nel qual caso ne sparisce l'integrale di contorno.

---

*) Annali di Matematica, serie II, t. I (1867), pp. 329-366; oppure queste OPERE, vol. I, pp. 318-353.

Prendansi ora a considerare le funzioni U, V, W, (4), riguardandovi le tre funzioni u, v, w come monodrome, continue, finite e dotate di derivate prime, ma del resto arbitrarie e le $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$ come monodrome, continue, finite e soggette alla sola condizione (6). Si trova in tali ipotesi, per notissime trasformazioni, supponendo che il punto (x, y, z) non sia sulla superficie σ,

$$\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial y}+\frac{\partial W}{\partial z}=\int\left(\frac{\partial u}{\partial a}+\frac{\partial v}{\partial b}+\frac{\partial w}{\partial c}\right)\frac{dS}{r}$$

$$+\int\left(u\frac{\partial a}{\partial n}+v\frac{\partial b}{\partial n}+w\frac{\partial c}{\partial n}\right)\frac{d\sigma}{r}-\int\left(\boldsymbol{u}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial a}+\boldsymbol{v}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial b}+\boldsymbol{w}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial c}\right)d\sigma.$$

Sostituendo all'ultimo dei tre integrali il valore che risulta per esso dall'equazione (9_c), quando questa equazione si estenda a tutta la superficie e vi si ponga

$$\psi=\frac{1}{r},$$

ipotesi lecita qualora il punto (x, y, z) non sia sulla superficie, come è stato già ammesso, si ottiene

$$\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial y}+\frac{\partial W}{\partial z}$$

$$=\int\left(\frac{\partial u}{\partial a}+\frac{\partial v}{\partial b}+\frac{\partial w}{\partial c}\right)\frac{dS}{r}+\int\left(u\frac{\partial a}{\partial n}+v\frac{\partial b}{\partial n}+w\frac{\partial c}{\partial n}+[\omega]\right)\frac{d\sigma}{r}.$$

Da quest'equazione risulta che se in ogni punto dello spazio S è soddisfatta l'equazione (5) e in ogni punto della superficie σ l'equazione

$$u\frac{\partial a}{\partial n}+v\frac{\partial b}{\partial n}+w\frac{\partial c}{\partial n}+[\omega]=0, \tag{10}$$

si ha necessariamente

$$\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial y}+\frac{\partial W}{\partial z}=0 \tag{10$_a$}$$

in *tutto* lo spazio (tranne sulla superficie σ, ove le derivate di U, V, W non hanno valori determinati). Reciprocamente, se quest'equazione (10_a) sussiste così nello spazio interno, come nell'esterno, devono necessariamente sussistere l'equazione (5) in ogni punto di S e la (10) in ogni punto di σ. Ora dalla formola (9_c), per $\psi=1$, si ha

$$\int\left(\boldsymbol{u}\frac{\partial a}{\partial \nu}+\boldsymbol{v}\frac{\partial b}{\partial \nu}+\boldsymbol{w}\frac{\partial c}{\partial \nu}\right)ds+\int[\omega]d\sigma=0;$$

dunque quando sussiste l'equazione (10), sussiste pure l'equazione

$$\int\left(u\frac{\partial a}{\partial n}+v\frac{\partial b}{\partial n}+w\frac{\partial c}{\partial n}\right)d\sigma=\int\left(\boldsymbol{u}\frac{\partial a}{\partial \nu}+\boldsymbol{v}\frac{\partial b}{\partial \nu}+\boldsymbol{w}\frac{\partial c}{\partial \nu}\right)ds$$

e reciprocamente. Quest'ultima equazione non è altro che la terza delle (8) ed esprime la continuità delle correnti interne colle correnti superficiali.

Di quì si conclude che quando la distribuzione galvanica mista $(u, v, w;\ \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$ è formata di correnti costanti e chiuse, ha luogo necessariamente l'equazione (10_a) in tutto lo spazio; e, reciprocamente, se quest'ultima equazione ha luogo in tutto lo spazio, la detta distribuzione mista è necessariamente formata di correnti costanti e chiuse. Si conclude inoltre che la condizione di continuità fra le correnti interne e le superficiali, espressa in forma integrale dalla terza equazione (8), è egualmente espressa in forma differenziale dalla (10), ossia dalla

$$(10_b)\qquad \frac{\partial(H\omega_p)}{\partial p}+\frac{\partial(H\omega_q)}{\partial q}+H\left(u\frac{\partial a}{\partial n}+v\frac{\partial b}{\partial n}+w\frac{\partial c}{\partial n}\right)=0.$$

Una relazione di questa specie trovasi già nel *Reprint*, ma in forma più complicata, poichè le tre componenti $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ vi sono considerate come funzioni delle *tre* coordinate a, b, c. Del resto l'espressione $[\omega]$ rientra in un tipo generale che io ho considerato fino dal 1869, nella Memoria: *Sulla teorica generale dei parametri differenziali* *), e che serve a stabilire l'equazione di continuità in uno spazio a qualunque numero di dimensioni.

Giova osservare che l'equazione (10_a) diventa evidente quando le funzioni U, V, W ammettono la forma (3_a): ma tale forma presuppone già l'esistenza d'una distribuzione magnetica equivalente, mentre la detta equazione è vera in ogni caso.

Combinando quest'equazione (10_a) colle

$$\Delta_2 U+4\pi u=0,\qquad \Delta_2 V+4\pi v=0,\qquad \Delta_2 W+4\pi w=0,$$

si ottengono immediatamente le seguenti espressioni di u, v, w:

$$(11)\quad u=\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial Y}{\partial c}-\frac{\partial Z}{\partial b}\right),\qquad v=\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial Z}{\partial a}-\frac{\partial X}{\partial c}\right),\qquad w=\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial X}{\partial b}-\frac{\partial Y}{\partial a}\right),$$

dove nelle quantità X, Y, Z, date dalle formole (7), si suppongono scritte le a, b, c al

---

*) Memorie della R. Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna, serie II, t. VIII (1868), pp. 551-590; oppure queste OPERE, vol. II, pp. 74-118.

posto delle x, y, z. Queste formole mostrano che nello spazio esterno ad S, dove le u, v, w sono nulle, esiste una funzione potenziale Φ, di cui le componenti elettromagnetiche X, Y, Z sono le derivate negative

$$X = -\frac{\partial \Phi}{\partial x}, \qquad Y = -\frac{\partial \Phi}{\partial y}, \qquad Z = -\frac{\partial \Phi}{\partial z}. \tag{11$_a$}$$

Dal confronto delle tre equazioni (11) colle prime tre (8_a) risulta che a queste si soddisfa ponendo

$$4\pi\alpha = X + \frac{\partial \varphi}{\partial a}, \qquad 4\pi\beta = Y + \frac{\partial \varphi}{\partial b}, \qquad 4\pi\gamma = Z + \frac{\partial \varphi}{\partial c}, \tag{12}$$

dove φ è una funzione la quale, oltre ad avere le derivate prime monodrome, continue e finite in S, deve soddisfare alla quarta equazione (8_a), cioè ad un'equazione di superficie. Ora facendo tendere le a, b, c, nelle equazioni (12), verso i valori relativi ad un punto della superficie, le componenti X, Y, Z tendono verso i valori limiti X_n, Y_n, Z_n, che spettano a queste componenti in quel punto, dalla parte *interna* della superficie, valori generalmente diversi da quelli, che si possono indicare con $X_{n'}$, $Y_{n'}$, $Z_{n'}$, che spettano alle stesse componenti in quel medesimo punto, della parte *esterna*. La quarta equazione (8_a) diventa per tal modo

$$d\varphi + \left[X_n \frac{\partial a}{\partial s} + Y_n \frac{\partial b}{\partial s} + Z_n \frac{\partial c}{\partial s} + 4\pi\left(u \frac{\partial a}{\partial \nu} + v \frac{\partial b}{\partial \nu} + w \frac{\partial c}{\partial \nu}\right)\right] ds = 0, \tag{12$_a$}$$

dove $d\varphi$ è l'incremento che riceve φ lungo l'elemento lineare qualunque ds della superficie σ. Ma dalle note formole relative alle discontinuità delle derivate prime di funzioni potenziali di superficie [cfr. la mia Nota: *Intorno ad alcuni nuovi teoremi del Sig.* C. NEUMANN *sulle funzioni potenziali* *)], si ha

$$\left\{\begin{aligned} X_n - X_{n'} + 4\pi\left(v \frac{\partial c}{\partial n} - w \frac{\partial b}{\partial n}\right) &= 0, \\ Y_n - Y_{n'} + 4\pi\left(w \frac{\partial a}{\partial n} - u \frac{\partial c}{\partial n}\right) &= 0, \\ Z_n - Z_{n'} + 4\pi\left(u \frac{\partial b}{\partial n} - v \frac{\partial a}{\partial n}\right) &= 0, \end{aligned}\right. \tag{12$_b$}$$

*) Annali di Matematica, serie II, t. X (1880), pp. 46-63; oppure queste OPERE, vol. III, pp. 305-322.

donde, (1_a),

$$(X_n - X_{n'})\frac{\partial a}{\partial s} + (Y_n - Y_{n'})\frac{\partial b}{\partial s} + (Z_n - Z_{n'})\frac{\partial c}{\partial s}$$

$$+ 4\pi\left(u\frac{\partial a}{\partial \nu} + v\frac{\partial b}{\partial \nu} + w\frac{\partial c}{\partial \nu}\right) = 0.$$

L'equazione (12_a) può dunque essere sostituita dalla seguente:

$$d\varphi + X_{n'}da + Y_{n'}db + Z_{n'}dc = 0,$$

ossia, (11_a), dalla

$$d(\varphi - \Phi) = 0.$$

Ne consegue che la funzione φ, astrazion fatta da differenze costanti

$$(12_c) \qquad \varphi - \Phi = C$$

lungo le singole superficie chiuse che costituiscono la superficie σ, non è altro che una qualunque *continuazione* della funzione Φ nello spazio S, soggetta unicamente alla condizione di avere le derivate prime monodrome, continue e finite in tutto questo spazio. La natura di questa condizione è evidentemente tale che la generalità della soluzione rappresentata dalle formole (12) non è punto accresciuta dall'aggiunta di una distribuzione lamellare chiusa, cosicchè la soluzione trovata è la più generale possibile.

Or quì si rende subito manifesta la condizione di possibilità o d'impossibilità del problema. Se la funzione Φ è monodroma, il che avviene necessariamente nel caso particolare che lo spazio non occupato dalla distribuzione galvanica sia semplicemente connesso, o composto di spazî semplicemente connessi, è *possibile* ed in *infiniti modi* di determinare una funzione φ, continuazione di Φ in S, la quale abbia le derivate prime monodrome, continue e finite in tutto questo spazio. Ma se la funzione Φ è dotata di moduli di periodicità, il che non può accadere che quando lo spazio esterno è molteplicemente connesso, ogni funzione φ, continuazione interna di Φ, ha necessariamente gli stessi moduli di Φ, e le sue linee di diramazione non possono essere che *interne* ad S, perchè le derivate di Φ sono evidentemente finite in *tutto* lo spazio *esterno*: è quindi *impossibile* determinare una funzione φ che abbia le derivate *finite* in *tutto* lo spazio *interno*.

La condizione necessaria e sufficiente perchè il problema inverso ammetta soluzione è dunque unicamente questa: che la funzione potenziale Φ sia monodroma (e quindi che non esistano, fuori di S, contorni annodati con correnti del sistema). Che questa condizione sia *necessaria* è evidente *a priori;* che essa sia anche *sufficiente* è cosa che doveva essere dimostrata. Conseguita tale dimostrazione, ognun vede che le formole

(12) non sono in sostanza altro che le (3_b), colla sola sostituzione di φ ad M. Quando dunque la funzione potenziale esterna della distribuzione galvanica è monodroma, si può dire che tutte le distribuzioni magnetiche ad essa equivalenti sono date dalle stesse formole (3_b), qualora si ponga in queste per M una qualunque continuazione interna della detta funzione potenziale, con derivate monodrome, continue e finite e con differenze costanti, arbitrariamente scelte, sulle singole superficie limiti.

Del resto la soluzione data dalle formole (12) può essere verificata *a posteriori*. Infatti per esse l'espressione (3) diventa

$$M=\frac{1}{4\pi}\int\left(X\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial a}+Y\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial b}+Z\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial c}\right)dS+\frac{1}{4\pi}\int\left(\frac{\partial\varphi}{\partial a}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial a}+\frac{\partial\varphi}{\partial b}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial b}+\frac{\partial\varphi}{\partial c}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial c}\right)dS.$$

Ora, dovendo la funzione φ essere monodroma e le X, Y, Z soddisfare all'equazione

$$\frac{\partial X}{\partial a}+\frac{\partial Y}{\partial b}+\frac{\partial Z}{\partial c}=0,$$

per note trasformazioni si ha

$$M=-\frac{1}{4\pi}\int\left(X_n\frac{\partial a}{\partial n}+Y_n\frac{\partial b}{\partial n}+Z_n\frac{\partial c}{\partial n}\right)\frac{d\sigma}{r}-\frac{1}{4\pi}\int\varphi\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}d\sigma+\varepsilon\varphi(x,y,z),$$

dove $\varepsilon=1$ in S, ed $\varepsilon=0$ fuori di S. In virtù delle relazioni (12_b) si può scrivere anche, designando con n' la normale esterna,

$$M=\frac{1}{4\pi}\int\left(X_{n'}\frac{\partial a}{\partial n'}+Y_{n'}\frac{\partial b}{\partial n'}+Z_{n'}\frac{\partial c}{\partial n'}\right)\frac{d\sigma}{r}+\frac{1}{4\pi}\int\varphi\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n'}d\sigma+\varepsilon\varphi(x,y,z),$$

ovvero, (11_a),

$$M=\frac{1}{4\pi}\int\left(\varphi\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n'}-\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial n'}\right)d\sigma+\varepsilon\varphi(x,y,z),$$

ossia finalmente, (12_c),

$$M=\frac{1}{4\pi}\int\left(\Phi\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n'}-\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial n'}\right)d\sigma+\varepsilon\varphi(x,y,z)-\sum\eta C,$$

dove ciascun coefficiente η è uguale ad 1 od uguale a 0, secondo che il punto (x, y, z) è interno od esterno a quella superficie chiusa per la quale φ e Φ differiscono della corrispondente costante C. Ora, mercè l'aggiunta di una opportuna costante, si può fare in modo che la funzione Φ, monodroma per ipotesi, si annulli nei punti a distanza infinita. In tal caso il teorema di GREEN diventa applicabile a questa funzione in tutto lo spazio esterno ad S, e si ha

$$M = (1 - \varepsilon)\Phi(x, y, z) + \varepsilon\varphi(x, y, z) - \sum \eta C.$$

Da quest'equazione risulta (come dovevasi dimostrare)

$$M = \Phi(x, y, z) - \sum \eta C, \qquad \text{fuori di } S$$

$$M = \varphi(x, y, z) - \sum \eta C, \qquad \text{in } S$$

e l'effetto del termine $\sum \eta C$ è manifestamente di ristabilire la continuità di M attraverso a ciascuna superficie, continuità, che, come è noto, spetta ad ogni funzione potenziale d'una distribuzione magnetica a tre dimensioni.

La precedente soluzione del problema inverso è la più semplice possibile, in quanto non implica l'integrazione di equazioni differenziali. Ciò non esclude che, in casi particolari, non possa tornar più comodo ricavare direttamente la soluzione (quando questa è possibile) dalle equazioni (8_a). Se, per esempio, il dato sistema galvanico consta di sole correnti superficiali, queste equazioni dànno

$$(13) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\alpha = \frac{\partial \varphi}{\partial a}, \quad \beta = \frac{\partial \varphi}{\partial b}, \quad \gamma = \frac{\partial \varphi}{\partial c}, \qquad \text{in } S \\ &d\varphi + \left(u\frac{\partial a}{\partial \nu} + v\frac{\partial b}{\partial \nu} + w\frac{\partial c}{\partial \nu}\right) ds = 0, \qquad \text{in } \sigma. \end{aligned} \right.$$

Supponendo che l'elemento ds sia diretto, prima nel senso della linea di corrente, poscia nel senso perpendicolare, si rileva da quest'ultima equazione che la funzione φ è costante luogo ogni linea di corrente e che il suo incremento $d\varphi$ coincide coll'intensità vera della corrente che circola nella striscia corrispondente a quest'incremento (secondo la direzione che risulta dall'equazione stessa). Di qui si deduce, (3), supponendo φ monodroma,

$$(13_a) \qquad M = -\int \varphi \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} d\sigma + 4\pi\varepsilon\varphi(x, y, z)$$

come funzione potenziale (interna ed esterna) della distribuzione magnetica equivalente, e, (3_b),

$$\Phi = -\int \varphi \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} d\sigma \tag{13$_b$}$$

come funzione potenziale (interna ed esterna) della distribuzione galvanica stessa.

Quest'ultimo è il teorema sul quale ho dato diversi sviluppi nella *Nota sulla teoria matematica dei solenoidi elettrodinamici* *), fondandolo sopra considerazioni che, come rilevai poscia dal *Reprint,* erano già state fatte da W. THOMSON (Art. 515).

Di proposito ho citato quest'esempio, perchè esso piuttosto che ad un caso particolare dell'esposta teoria, corrisponde ad un caso *eccezionale.* Se infatti si suppone che la superficie σ sia sede d'uno strato magnetico, a magnetizzazione *normale,* coi momenti (riferiti all'unità di superficie)

$$\alpha = -\varphi \frac{\partial a}{\partial n}, \quad \beta = -\varphi \frac{\partial b}{\partial n}, \quad \gamma = -\varphi \frac{\partial c}{\partial n}, \tag{14}$$

si trova, (3), che la funzione potenziale di questo strato magnetico coincide coll'espressione (13_b), talchè

$$M = -\int \varphi \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} d\sigma. \tag{14$_a$}$$

Ora è chiaro che, nel senso Ampèriano, la vera equivalenza ha luogo fra la distribuzione galvanica e questo strato, anzichè fra quella e la distribuzione lamellare (13). Se le equazioni (8_a) conducono alla soluzione (13) anzichè alla (14), egli è perchè esse presuppongono che l'equivalenza debba verificarsi soltanto al di fuori d'un certo spazio *finito,* e lasciano da parte il caso che le distribuzioni equivalenti si estendano soltanto in *due* dimensioni.

Questo caso si riduce del resto a termini semplicissimi. Si tolga, infatti, la restrizione che σ sia superficie chiusa e si riferiscano le formole (14), (14_a) ad un qualunque strato, dotato di magnetizzazione normale. La distribuzione galvanica equivalente è formata di correnti costanti superficiali, d'intensità specifica ($\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$), e di correnti variabili di contorno, d'intensità vera $\boldsymbol{j}$, definite dalle formole

$$\boldsymbol{u}\frac{\partial a}{\partial \nu} + \boldsymbol{v}\frac{\partial b}{\partial \nu} + \boldsymbol{w}\frac{\partial c}{\partial \nu} = -\frac{\partial \varphi}{\partial s}, \qquad \boldsymbol{j} = \varphi. \tag{14$_b$}$$

*) Il Nuovo Cimento, s. II, t. VII-VIII (1871-72), pp. 285-301; oppure queste OPERE, vol. II, pp. 188-201.

Le correnti variabili di contorno hanno per ufficio di compensare l'interruzione delle correnti costanti superficiali nei punti del contorno stesso.

Da queste equazioni (14_b) risulta

$$(14_c) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial(H\omega_p)}{\partial p} + \dfrac{\partial(H\omega_q)}{\partial q} = 0\,, & \text{in ogni punto di } \sigma \\[2ex] u\dfrac{\partial a}{\partial \nu} + v\dfrac{\partial b}{\partial \nu} + w\dfrac{\partial c}{\partial \nu} + \dfrac{dj}{ds} = 0\,, & \text{lungo il contorno}\,. \end{cases}$$

La prima condizione esprime la costanza delle correnti superficiali, la seconda la continuità di queste con quelle di contorno.

Quando queste condizioni sono soddisfatte da una distribuzione galvanica (u, v, w; j), è possibile determinare sulla stessa superficie una, e solamente una, distribuzione magnetica equivalente (14), purchè:

1°) la superficie sia tale da arrestare ogni linea chiusa annodata con una corrente del sistema;

2°) la funzione monodroma φ definita dalla prima equazione (14_b) possa essere determinata in modo da soddisfare alla condizione $j = \varphi$, (14_b), in *ogni* parte del contorno (se questo non è formato di un'*unica* linea chiusa).

In alcuni casi d'impossibilità dello strato magnetico equivalente può avvenire che tale impossibilità venga rimossa dalla semplice aggiunta di correnti isolate, lungo opportune linee della superficie: ma ciò, meglio che in generale, si riconosce agevolmente nei singoli casi particolari.

LXXIV.

SULLA TEORIA DEL POTENZIALE.

Rendiconti del Reale Istituto Lombardo, serie II, tomo XVI (1883), pp. 725-736.

W. Thomson ha osservato per il primo (a quanto credo) che il *potenziale* d'una distribuzione di massa, la cui funzione potenziale sia U, può essere rappresentato dall'espressione semplicissima

$$\frac{1}{8\pi}\int \Delta_1 U\, dS,$$

dove

$$\Delta_1 U = \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2$$

e dove l'integrazione si estende allo spazio *infinito* S. Analogamente, il potenziale mutuo di due distribuzioni di massa, le cui funzioni potenziali siano U e V, può essere rappresentato dall'espressione

$$\frac{1}{4\pi}\int \Delta_1(U, V)\, dS,$$

dove

$$\Delta_1(U, V) = \frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial z}\frac{\partial V}{\partial z},$$

e dove l'integrazione si estende di nuovo allo spazio infinito S.

Finchè si tratta di distribuzioni ordinarie, queste proposizioni non vanno soggette ad alcuna eccezione e sono semplici corollari del teorema di Green *). Ma, nel caso

*) Cfr. Betti, *Teorica delle forze newtoniane*, etc. Pisa, 1879, pp. 121-125.

generale, esse non sussistono punto e vengono sostituite da altre, le quali sono meno generalmente note delle precedenti e si ottengono, nel modo più semplice, invertendo l'enunciato della questione e studiando direttamente l'espressione

$$W_{uv} = \frac{1}{4\pi}\int \Delta_1(U, V)dS, \tag{1}$$

dove dS è un elemento, circostante al punto (x, y, z) cui si riferiscono le funzioni U, V, dello spazio infinito S al quale si estende l'integrale.

Supporremo che U, V sieno due funzioni potenziali, epperò che le loro derivate prime sieno monodrome in tutto lo spazio e, generalmente parlando, continue e finite. Supporremo inoltre che i punti donde emanano le forze sieno tutti nel finito, epperò che i tre prodotti

$$R^2\frac{\partial U}{\partial x}, \quad R^2\frac{\partial U}{\partial y}, \quad R^2\frac{\partial U}{\partial z}, \tag{1$_a$}$$

dove R è la distanza del punto (x, y, z) dall'origine delle coordinate, tendano, per $R = \infty$, verso limiti, variabili colla direzione del raggio R, ma sempre finiti. Lo stesso dicasi dei prodotti

$$R^2\frac{\partial V}{\partial x}, \quad R^2\frac{\partial V}{\partial y}, \quad R^2\frac{\partial V}{\partial z} \tag{1$_b$}$$

e quindi anche del prodotto

$$R^4\Delta_1(U, V).$$

Ne consegue che si potrà sempre prendere R tanto grande da rendere piccolo quanto si voglia il contributo recato all'integrale (1) dallo spazio infinito esterno alla sfera di raggio R.

Se la quantità $\Delta_1(U, V)$ diventa infinita nei punti di una linea, ma se, al tempo stesso, si può assegnare un numero finito $\mu > 0$, tale che l'espressione

$$\lim_{\rho=0}[\rho^{2-\mu}\Delta_1(U, V)],$$

dove ρ è la distanza normale del punto (x, y, z) dalla detta linea, sia sempre finita, il contributo recato all'integrale (1) dall'intorno di questa è evanescente insieme coll'intorno stesso. Ne consegue che *una* delle due distribuzioni può comprendere linee cariche di masse finite, o correnti lineari d'intensità finita; ma tali linee o tali correnti non potrebbero appartenere simultaneamente alle due distribuzioni e quindi, in tali casi, non si potrebbe porre $U = V$. Del resto escluderemo, per semplicità, il caso di linee cariche di masse finite.

Lo spazio esterno ad una superficie sferica, comprendente tutte le sedi di forza cui appartengono le funzioni potenziali U e V, è semplicemente connesso. Ne risulta che se queste funzioni non sono monodrome, è sempre possibile renderle tali per mezzo di diaframmi opportunamente condotti *entro* la suddetta superficie, cioè nel finito. Per tal modo le dette funzioni si possono sempre supporre monodrome, continue e finite colle loro derivate in tutto lo spazio esterno alla superficie immaginata. Ora se sopra un'altra superficie sferica, di raggio R molto più grande, col centro nell'origine delle coordinate, si immagina tracciato un arco di cerchio massimo e si chiama θ l'angolo al centro di quest'arco, dalla già ammessa proprietà dei prodotti (1_a) segue che il prodotto

$$R\frac{\partial U}{\partial \theta}$$

è sempre finito lungo un tale arco, per quanto quande sia R, e che quindi è anche finito il prodotto

$$R(U - U'),$$

dove U ed U' sono i valori di U corrispondenti al principio ed alla fine dell'arco stesso. Dunque se il limite del prodotto RU, per $R = \infty$, è finito quando il raggio R ha una certa direzione, esso resta necessariamente finito (sebbene in generale variabile) qualunque sia la direzione del raggio R. Ora se la funzione potenziale U, le cui derivate sono monodrome, non è monodroma essa stessa, si può fissarne arbitrariamente il valore in un punto dello spazio. È dunque lecito, nelle ipotesi ammesse, supporre che amendue i prodotti

$$RU, \qquad RV \tag{1_c}$$

restino sempre finiti per $R = \infty$.

Importa finalmente osservare che quando, per rendere monodroma una delle funzioni, per esempio U, si introduce un diaframma (finito, giusta le fatte convenzioni), si viene con ciò ad aggiungere alla prima distribuzione una corrente lineare lungo il contorno del diaframma stesso. Quest'aggiunta non è invero che apparente, poichè tale corrente serve appunto ad eliderne un'altra che nasce, lungo lo stesso contorno, dalla discontinuità simultaneamente introdotta nei valori della funzione U, considerata come momento d'un doppio strato *). Ma, anche prescindendo da ciò, è utile notare che una cosiffatta corrente lineare non è di quelle che impediscano la supposizione $U = V$; poichè, potendo essa venire spostata in infiniti modi, è sempre lecito ammettere ch'essa

---

*) È evidente che quando la funzione U è polidroma, le correnti di cui essa è funzione potenziale non possono estendersi, al più, che in due dimensioni: giacchè, se occupassero uno spazio, non potrebbero ammettere ivi una funzione potenziale.

abbia un posto diverso nelle due distribuzioni, quand'anche queste sieno intrinsecamente identiche rispetto alla loro effettiva azione elettromagnetica.

Premesso tutto ciò, rammentiamo che se i tre prodotti

$$U\frac{\partial V}{\partial x}, \quad U\frac{\partial V}{\partial y}, \quad U\frac{\partial V}{\partial z}$$

sono monodromi, continui e finiti in uno spazio qualunque S', si ha

$$\int \Delta_1(U, V)\,dS' = -\int U\Delta_2 V\,dS' - \int U\frac{\partial V}{\partial n'}\,d\sigma',$$

dove σ' è la superficie, od il complesso delle superficie che limitano lo spazio S', e dove n' è la normale diretta verso questo spazio medesimo.

Analogamente, se i tre prodotti

$$V\frac{\partial U}{\partial x}, \quad V\frac{\partial U}{\partial y}, \quad V\frac{\partial U}{\partial z}$$

sono monodromi, continui e finiti nel detto spazio, si ha

$$\int \Delta_1(U, V)\,dS' = -\int V\Delta_2 U\,dS' - \int V\frac{\partial U}{\partial n'}\,d\sigma'.$$

Conviene osservare che se una parte della superficie σ' è all'infinito, gli integrali ad essa relativi, nell'ultimo termine di ciascuno dei secondi membri, riescono nulli, per le proprietà dei prodotti (1_a), (1_b), (1_c). Basta quindi considerare la sola parte di σ' che è situata nel finito.

Denotiamo con S_u, S_v gli spazî *finiti* nei quali le due espressioni $\Delta_2 U$, $\Delta_2 V$ (rispettivamente) sono diverse da zero, spazî i quali possono avere parti comuni ed anche coincidere intieramente. Denotiamo inoltre con σ_u, σ_v le superficie di discontinuità per le funzioni U, V (rispettivamente) o per le loro derivate prime. Anche queste superficie, nelle quali sono da comprendersi i diaframmi introdotti, quando occorra, per rendere monodrome le dette funzioni, possono avere parti comuni e possono trovarsi, in tutto od in parte, entro gli spazî S_u, S_v od ai loro limiti: ma, dalle ipotesi già fatte, segue che esse devono trovarsi tutte nel finito.

Si faccia ora coincidere lo spazio denominato S' collo spazio infinito S, escludendo da questo soltanto l'intorno di ciascuna delle superficie di discontinuità σ_u, σ_v. Al limite si ottiene

$$\int \Delta_1(U, V)dS$$

$$= -\int U\Delta_2 V dS_v - \int\left(U_n \frac{\partial V}{\partial n} + U_{n'}\frac{\partial V}{\partial n'}\right)d\sigma$$

$$= -\int V\Delta_2 U dS_u - \int\left(V_n \frac{\partial U}{\partial n} + V_{n'}\frac{\partial U}{\partial n'}\right)d\sigma,$$

dove σ denota il complesso delle superficie σ_u, σ_v; n, n' sono le due opposte normali dell'elemento $d\sigma$ ed U_n, $U_{n'}$ sono i valori di U sulle due corrispondenti faccie di questo elemento (così V_n e $V_{n'}$).

Distinguendo le due parti, σ_u e σ_v, di σ ed ammettendo che le superficie di discontinuità per una delle due funzioni U, V non sieno tali per le derivate dell'altra, ossia che uno strato semplice dell'una distribuzione non coincida con uno strato doppio dell'altra, si trova

$$\int \Delta_1(U, V)dS$$

$$= -\int U\Delta_2 V dS_v - \int U\left(\frac{\partial V}{\partial n} + \frac{\partial V}{\partial n'}\right)d\sigma_v - \int (U_n - U_{n'})\frac{\partial V}{\partial n}d\sigma_u$$

$$= -\int V\Delta_2 U dS_u - \int V\left(\frac{\partial U}{\partial n} + \frac{\partial U}{\partial n'}\right)d\sigma_u - \int (V_n - V_{n'})\frac{\partial U}{\partial n}d\sigma_v.$$

Ma dal teorema di Green, tenendo conto delle condizioni ammesse per le due funzioni U, V, rese ora monodrome, si traggono le espressioni

$$(2)\qquad \begin{cases} U = \int \frac{k_u dS_u}{r} + \int \frac{h_u d\sigma_u}{r} + \int g_u \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} d\sigma_u, \\[2ex] V = \int \frac{k_v dS_v}{r} + \int \frac{h_v d\sigma_v}{r} + \int g_v \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} d\sigma_v, \end{cases}$$

dove

$$(2_a)\qquad \begin{cases} \Delta_2 U = -4\pi k_u, & \frac{\partial U}{\partial n} + \frac{\partial U}{\partial n'} = -4\pi h_u, & U_n - U_{n'} = 4\pi g_u, \\[2ex] \Delta_2 V = -4\pi k_v, & \frac{\partial V}{\partial n} + \frac{\partial V}{\partial n'} = -4\pi h_v, & V_n - V_{n'} = 4\pi g_v; \end{cases}$$

si ha dunque finalmente

$$(3)\quad \begin{cases} W_{uv} = \frac{1}{4\pi}\int \Delta_1(U, V)dS = \int U k_v dS_v + \int U h_v d\sigma_v - \int \frac{\partial V}{\partial n} g_u d\sigma_u \\ \qquad = \int V k_u dS_u + \int V h_u d\sigma_u - \int \frac{\partial U}{\partial n} g_v d\sigma_v , \end{cases}$$

epperò anche

$$(3_a)\quad \int U k_v dS_v + \int U h_v d\sigma_v + \int \frac{\partial U}{\partial n} g_v d\sigma_v = \int V k_u dS_u + \int V h_u d\sigma_u + \int \frac{\partial V}{\partial n} g_u d\sigma_u .$$

Si possono ora considerare i diversi casi possibili.

Supponiamo dapprima che si abbia

$$g_u = g_v = 0 .$$

cioè che amendue le distribuzioni sieno *ordinarie*. In tale ipotesi i due ultimi membri delle eguaglianze (3) sono espressioni notoriamente equivalenti del potenziale mutuo, che diremo P_0, di queste due distribuzioni. Questo potenziale è quindi espresso anche da

$$(4)\quad P_0 = \frac{1}{4\pi}\int \Delta_1(U, V)dS ,$$

ed in ciò consiste la proposizione ben nota, rammentata al principio.

Supponiamo, in secondo luogo, che si abbia

$$h_u = k_u = h_v = k_v = 0 ,$$

cioè che amendue le distribuzioni sieno di *doppio strato*. In tale ipotesi i due ultimi membri delle eguaglianze (3), *cambiati di segno,* sono espressioni equivalenti del potenziale mutuo, che diremo P_1, di queste due distribuzioni. Questo potenziale è quindi espresso anche da

$$(4_a)\quad P_1 = -\frac{1}{4\pi}\int \Delta_1(U, V)dS ,$$

talchè questo potenziale ammette la stessa espressione che nel caso precedente, ma col segno cambiato.

Supponiamo, in terzo luogo, che una delle distribuzioni, per es. la prima, sia ordinaria e la seconda non consti che di doppî strati, cosicchè si abbia

$$g_u = h_v = k_v = 0 .$$

In tale ipotesi le eguaglianze (3) dànno

$$(4_b)\qquad \int \Delta_1(U,\ V)\,dS = 0,$$

equazione la quale mostra che il potenziale mutuo di due distribuzioni di specie diversa *non* è esprimibile sotto la forma (1). Dalle stesse eguaglianze (3) segue anche, nel caso ora considerato, la relazione

$$(4_c)\qquad \int V k_u\,dS_u + \int V h_u\,d\sigma_u - \int \frac{\partial U}{\partial n} g_v\,d\sigma_v = 0,$$

che verrà interpretata più sotto.

Passiamo finalmente al caso generale, a quello, cioè, di due distribuzioni *complesse*. Decomponiamo la funzione U in due parti

$$U = U_0 + U_1,$$

delle quali la prima corrisponda alla distribuzione ordinaria $(h_u,\ k_u)$, la seconda a quella di doppio strato (g_u). Si ha allora, (3),

$$W_{uv} = \int U_0 k_v\,dS_v + \int U_0 h_v\,d\sigma_v + \int U_1 k_v\,dS_v + \int U_1 h_v\,d\sigma_v - \int \frac{\partial V}{\partial n} g_u\,d\sigma_u.$$

Ma la relazione (3_a), applicata alle due funzioni U_1, V, dà

$$\int U_1 k_v\,dS_v + \int U_1 h_v\,d\sigma_v + \int \frac{\partial U_1}{\partial n} g_v\,d\sigma_v = \int \frac{\partial V}{\partial n} g_u\,d\sigma_u:$$

quindi si può scrivere

$$W_{uv} = \left[\int U_0 k_v\,dS_v + \int U_0 h_v\,d\sigma_v\right] - \left[\int \frac{\partial U_1}{\partial n} g_v\,d\sigma_v\right].$$

Ora la prima espressione fra parentesi è il potenziale mutuo, P_0, delle sole parti ordinarie delle due distribuzioni, la seconda è il potenziale mutuo, P_1, dei soli doppî strati ad esse appartenenti: si ha dunque

$$(4_d)\qquad \frac{1}{4\pi}\int \Delta_1(U,\ V)\,dS = P_0 - P_1.$$

vale a dire che, quando le due distribuzioni sono complesse, l'espressione (1) non rappresenta più il potenziale mutuo, nè col proprio segno, nè col segno cambiato, ma bensì la *differenza* dei potenziali mutui delle parti omonime delle due distribuzioni.

Questa proprietà è del resto una conseguenza necessaria delle precedenti; giacchè, ponendo

$$U = U_0 + U_1, \qquad V = V_0 + V_1,$$

si ha

$$\Delta_1(U, V) = \Delta_1(U_0, V_0) + \Delta_1(U_1, V_1) + \Delta_1(U_0, V_1) + \Delta_1(U_1, V_0).$$

ed essendo, per le equazioni (4_b), (4), (4_a),

$$\int \Delta_1(U_0, V_1)\,dS = 0, \qquad \int \Delta_1(U_1, V_0)\,dS = 0,$$

$$\int \Delta_1(U_0, V_0)\,dS = 4\pi P_0, \qquad \int \Delta_1(U_1, V_1)\,dS = -4\pi P_1,$$

si ricade appunto sulla relazione (4_d).

Giova osservare che se, conservando ad U_0, U_1, V_0, V_1, P_0, P_1 i significati precedenti, si ponesse invece $U = U_0 + i\,U_1$, $V = V_0 + i\,V_1$, si otterrebbe

$$\frac{1}{4\pi}\int \Delta_1(U, V)\,dS = P_0 + P_1.$$

Quando le due distribuzioni sono di specie diversa, il potenziale mutuo non ammette una definizione generale; questa definizione esiste quando la distribuzione ordinaria di spazio e di superficie è quella che rappresenta, rispetto ai punti esterni, un corpo magnetico. Designamo con α, β, γ le componenti del momento magnetico, riferito all'unità di volume, in un punto qualunque (a, b, c) dello spazio S_u occupato dal corpo magnetico, talchè si abbia

$$(5) \qquad U = \int \left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial a}\alpha + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial b}\beta + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial c}\gamma \right) dS_u,$$

e quindi

$$k_u = -\left(\frac{\partial \alpha}{\partial a} + \frac{\partial \beta}{\partial b} + \frac{\partial \gamma}{\partial c} \right),$$

$$h_u = -\left(\alpha\frac{\partial a}{\partial u} + \beta\frac{\partial b}{\partial u} + \gamma\frac{\partial c}{\partial u} \right).$$

In questo caso la superficie σ_u è necessariamente quella che limita lo spazio S_u o, più esattamente, quella che separa le singole regioni dello spazio in cui le funzioni α, β, γ

sono continue. Ponendo

$$(5_a)\qquad V=\int g_v \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} d\sigma_v$$

ed ammettendo che la superficie σ_v possa bensì attraversare lo spazio S_u, ma che le *vere* correnti di cui V è la funzione potenziale restino al di fuori di questo spazio, si deduce dall'equazione (4_c), per note trasformazioni [con riguardo all'eventuale discontinuità di V entro S_u ed alla corrispondente equazione (2_a)],

$$(5_b)\qquad \left\{\begin{aligned} &\int\left(\frac{\partial V}{\partial a}\alpha+\frac{\partial V}{\partial b}\beta+\frac{\partial V}{\partial c}\gamma\right)dS_u\\ &=\int\frac{\partial U}{\partial n}g_v\,d\sigma_v-4\pi\int g_v\left(\alpha\frac{\partial a}{\partial n}+\beta\frac{\partial b}{\partial n}+\gamma\frac{\partial c}{\partial n}\right)d\sigma_v. \end{aligned}\right.$$

Quest'equazione esprime, nel caso ora considerato, il teorema di reciprocità che sussiste per ogni potenziale mutuo, e rende ragione del doppio modo in cui può essere calcolato il potenziale del magnete sul doppio strato. Così KIRCHHOFF, in una questione particolare ove interviene questa determinazione *), si vale della prima espressione: all'incontro ROITI, in un'altra questione, analiticamente identica **) si vale, implicitamente, della seconda. Le due espressioni non si possono, in generale, trasformare l'una nell'altra se non tenendo conto della relazione (4_b). Nel caso particolare considerato dai due citati Autori questa relazione diventa, accidentalmente, un'identità, per essere $U=0$.

Le proposizioni precedenti possono essere presentate sotto una forma più generale.

Consideriamo due sistemi, ciascun dei quali comprenda distribuzioni ordinarie (di spazio e di superficie) e distribuzioni galvaniche stazionarie e chiuse (pure di spazio e di superficie), colla sola restrizione che queste distribuzioni sieno tutte nel finito. Designamo con X, Y, Z le componenti della forza totale (ordinaria ed elettromagnetica) esercitata dal primo sistema sul punto (x, y, z) e poniamo

$$(6)\qquad \left\{\begin{aligned} X&=-\frac{\partial T}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial z}-\frac{\partial W}{\partial y},\\ Y&=-\frac{\partial T}{\partial y}+\frac{\partial W}{\partial x}-\frac{\partial U}{\partial z},\\ Z&=-\frac{\partial T}{\partial z}+\frac{\partial U}{\partial y}-\frac{\partial V}{\partial x}, \end{aligned}\right.$$

*) *Zur Theorie des in einem Eisenkörper inducirter Magnetismus* [POGGENDORFF's Annalen, Ergänzungsbd. V (1870), pp. 1-15, oppure Gesammelte Abhandlungen (1882), pp. 223-237].

**) *Dell'azione elettromotrice dei solenoidi neutri* [Il Nuovo Cimento, serie II, tomo XI (1874), pp. 35-56].

dove T, U, V, W sono quattro funzioni potenziali della forma

$$T = \int \frac{t\,dS_0}{r} + \int \frac{\mathbf{t}\,d\sigma_0}{r},$$

$$U = \int \frac{u\,dS_1}{r} + \int \frac{\mathbf{u}\,d\sigma_1}{r}, \qquad V = \int \frac{v\,dS_1}{r} + \int \frac{\mathbf{v}\,d\sigma_1}{r}, \qquad W = \int \frac{w\,dS_1}{r} + \int \frac{\mathbf{w}\,d\sigma_1}{r},$$

le tre ultime delle quali soddisfanno in ogni punto dello spazio alla nota relazione

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} = 0.$$

Le quantità analoghe del secondo sistema sieno designate colle stesse lettere, accentate.

Tenendo conto di tutte le relazioni (di spazio e di superficie) cui soddisfanno le funzioni *)

$$T,\quad U,\quad V,\quad W;\qquad t,\quad u,\quad v,\quad w;\qquad \mathbf{t},\quad \mathbf{u},\quad \mathbf{v},\quad \mathbf{w},$$

e delle analoghe relative al secondo sistema, si trova

$$(6_a)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{1}{4\pi}\int (XX' + YY' + ZZ')\,dS \\ &= \int Tt'\,dS'_0 + \int T\mathbf{t}'\,d\sigma'_0 + \int (Uu' + Vv' + Ww')\,dS'_1 \\ &\qquad + \int (U\mathbf{u}' + V\mathbf{v}' + W\mathbf{w}')\,d\sigma'_1 \\ &= \int T't\,dS_0 + \int T'\mathbf{t}\,d\sigma_0 + \int (U'u + V'v + W'w)\,dS_1 \\ &\qquad + \int (U'\mathbf{u} + V'\mathbf{v} + W'\mathbf{w})\,d\sigma_1 . \end{aligned}\right.$$

*) Cfr. la mia precedente Nota: *Sull'equivalenza delle distribuzioni magnetiche e galvaniche*, inserita nei Rendiconti dell'Istituto Lombardo, serie II, t. XVI (1883), pp. 931-948; oppure queste OPERE, vol. IV, pp. 16-32.

Ora, conservando a P_0, P_1 i significati precedenti, si ha

$$P_0 = \int T t' d S'_0 + \int T \mathbf{t}' d\sigma'_0$$

$$= \int T' t d S_0 + \int T' \mathbf{t} d\sigma_0 ,$$

$$P_1 = -\int (U u' + V v' + W w') d S'_1 - \int (U \mathbf{u}' + V \mathbf{v}' + W \mathbf{w}') d\sigma'_1$$

$$= -\int (U' u + V' v + W' w) d S_1 - \int (U' \mathbf{u} + V' \mathbf{v} + W' \mathbf{w}) d\sigma_1 ;$$

si ottiene quindi, (6_a), come nel caso già considerato prima, (4_d),

$$(6_b) \qquad \frac{1}{4\pi}\int (X X' + Y Y' + Z Z') d S = P_0 - P_1 .$$

In particolare, quando i due sistemi sono di specie diversa, per esempio quando

$$U = V = W = T' = 0,$$

si trova

$$(6_c) \qquad \int (X X' + Y Y' + Z Z') d S = 0,$$

relazione in cui rientra la (4_b).

Per interpretare ed applicare rettamente queste diverse relazioni, non bisogna dimenticare che le quantità X, Y, Z sono definite dalle equazioni (6), epperò non sono sempre identificabili, in senso assoluto, colle componenti della forza. È noto, per es., che nell'interno di un magnete la forza magnetica non ammette una definizione assoluta, come nei punti esterni. Ciò non ostante la formola (6_a) può essere applicata, con opportuni artifizî, anche ai corpi magnetici.

Supponiamo, per es., che si tratti dell'azione mutua d'un magnete e di un sistema di correnti. Sia M la funzione potenziale del magnete, (U', V', W') il sistema potenziale delle correnti, (U, V, W) il sistema potenziale della distribuzione galvanica equivalente, in azione esterna, al magnete. Si ha, come è noto,

$$\frac{\partial V}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial y} = 4\pi\alpha - \frac{\partial M}{\partial x},$$

$$\frac{\partial W}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial z} = 4\pi\beta - \frac{\partial M}{\partial y},$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial x} = 4\pi\gamma - \frac{\partial M}{\partial z},$$

dove $\alpha = \beta = \gamma = 0$ se il punto (x, y, z) è esterno allo spazio S_0 occupato dal magnete. Tenendo conto di ciò e ponendo

$$T = -M, \qquad T' = 0, \qquad t' = 0, \qquad t' = 0,$$

le quantità X, Y, Z diventano rispettivamente eguali a $4\pi\alpha$, $4\pi\beta$, $4\pi\gamma$ in tutto lo spazio S_0, ed a zero in tutto lo spazio esterno ad S_0, e si ottiene, (6_a),

$$(6_d) \quad \left\{ \begin{aligned} & -\int(\alpha X' + \beta Y' + \gamma Z')\,dS_0 \\ & = -\int(Uu' + Vv' + Ww')\,dS_1' - \int(Uu' + Vv' + Ww')\,d\sigma_1', \end{aligned} \right.$$

eguaglianza i cui due membri sono espressioni equivalenti del potenziale mutuo cercato.

È facile vedere come si modificherebbero queste varie formole se vi fossero anche correnti lineari d'intensità finita.

LXXV.

SULLE FUNZIONI ASSOCIATE E SPECIALMENTE SU QUELLE DELLA CALOTTA SFERICA.

Memorie della Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna, serie IV, tomo IV (1882), pp. 211-246.

Due sono gli scopi principali del lavoro che ho l'onore di presentare quest'anno all'Accademia.

Il primo si è di sottoporre a più minuta e completa disamina una forma singolare, al tempo stesso che semplice, della funzione potenziale d'un disco simmetricamente elettrizzato, che io avevo incontrata nella mia Memoria del 1881: *Sulla teoria delle funzioni potenziali simmetriche* (§ 10) *) e di cui mi ero allora limitato a dare qualche cenno sommario, senza punto considerare, fra le altre cose, la funzione ad essa associata. Nel presente lavoro ho considerato le due funzioni ad un tempo e ne ho stabilito i caratteri e le proprietà più importanti per le svariate applicazioni ond'esse sembrano suscettibili.

In secondo luogo mi sono servito di queste due funzioni, alle quali, verso la fine della Memoria, ho mostrato come si possano dare diverse altre forme, per dedurne, col metodo d'inversione, le funzioni associate d'ogni distribuzione simmetrica sopra una calotta sferica. In tal modo, oltre la funzione potenziale d'una tale distribuzione, che era nota solamente per alcuni casi molto particolari, ho potuto ottenere eziandio l'equazione delle corrispondenti linee di forza, che non mi consta essere stata data per alcun caso: e non è fuor di luogo il notare che le due funzioni associate, così determinate

*) Memorie dell'Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna, serie IV, t. II (1881), pp. 416-507; oppure queste OPERE, vol. III, pp. 349-382.

per la calotta sferica, sono formate direttamente colle coordinate cartesiane del punto variabile.

Ho trattato alquanto più diffusamente il problema dell'equilibrio elettrico sopra una calotta sferica, sia per la sua importanza speciale, sia per mostrare la facilità con cui le formole della presente Memoria si prestano alla deduzione dei principali elementi della questione.

§ 1.

Delle funzioni associate in generale.

La funzione potenziale V d'un sistema di masse simmetricamente distribuite intorno all'asse delle z dipende evidentemente dalle sole due variabili

$$z, \qquad u = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Tutte le considerazioni relative a questa funzione si possono quindi riportare ai punti d'un piano meridiano del sistema, cioè d'un piano passante per l'asse di simmetria: le variabili u e z sono le coordinate cartesiane d'un punto qualunque di questo piano, piano del quale non considereremo che la regione $u > 0$.

In tutto lo spazio esterno alle masse potenzianti l'equazione di LAPLACE può essere utilmente sostituita dalle due equazioni differenziali parziali simultanee di primo ordine

$$(1) \qquad \frac{\partial W}{\partial u} = u \frac{\partial V}{\partial z}, \qquad \frac{\partial W}{\partial z} = - u \frac{\partial V}{\partial u},$$

nelle quali W è una nuova funzione di u e di z, che diciamo *associata* alla funzione potenziale V e che, eguagliata ad una costante arbitraria, fornisce l'equazione delle *linee di forza* esistenti in ogni piano meridiano del sistema.

Le due equazioni (1) possono essere presentate sotto una forma più generale e più significativa. Sia s l'arco d'una linea tracciata ad arbitrio nel piano (uz) e sieno n, n' le direzioni delle due normali opposte che si spiccano da uno stesso punto (s) di questa linea. La prima di queste due direzioni, cioè la n, abbia colla direzione in cui cresce l'arco s la stessa relazione che la direzione dell'asse positivo delle z ha con quella dell'asse positivo delle u. In tali condizioni è facile riconoscere che le equazioni (1) traggono necessariamente con sè le seguenti:

$$(1_a) \qquad \frac{\partial W}{\partial s} = u \frac{\partial V}{\partial n}, \qquad \frac{\partial W}{\partial n} = - u \frac{\partial V}{\partial s},$$

le quali, alla loro volta, comprendono sotto di sè le (1) come caso particolare (per $s = u$, $n = z$). Al tempo stesso si ha

$$(1'_a) \qquad \frac{\partial W'}{\partial s} = -u \frac{\partial V'}{\partial n'}, \qquad \frac{\partial W'}{\partial n'} = u \frac{\partial V'}{\partial s},$$

dove, per maggior chiarezza, abbiamo denotato con V', W' i valori che le due funzioni associate possedono, nell'immediata prossimità della linea s, dalla parte della normale n', per distinguerli da quelli, V e W, che esse possedono dalla parte della normale n.

Dalle precedenti equazioni (1_a), $(1'_a)$ si trae

$$(1_b) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial (W - W')}{\partial s} = u \left(\dfrac{\partial V}{\partial n} + \dfrac{\partial V'}{\partial n'} \right), \\ \dfrac{\partial W}{\partial n} + \dfrac{\partial W'}{\partial n'} = -u \dfrac{\partial (V - V')}{\partial s}. \end{cases}$$

Sia ora σ la superficie generata dalla rotazione della linea s intorno all'asse delle z. Se il sistema di masse cui appartiene la funzione potenziale V comprende una distribuzione *semplice* sulla superficie σ, è noto che, nei punti di questa superficie, si ha $V = V'$ e quindi anche

$$\frac{\partial (V - V')}{\partial s} = 0.$$

Dunque, in forza della seconda equazione (1_b), nei punti di una tale superficie si ha pure

$$\frac{\partial W}{\partial n} + \frac{\partial W'}{\partial n'} = 0,$$

donde consegue che la derivata normale della funzione associata W si mantiene continua attraverso ad ogni superficie materiale, sede d'una distribuzione semplice appartenente al sistema di masse di cui V è la funzione potenziale.

All'incontro non può essere, in un punto della superficie σ,

$$\frac{\partial (W - W')}{\partial s} = 0$$

se in questo stesso punto non è anche, in forza della prima equazione (1_b),

$$\frac{\partial V}{\partial n} + \frac{\partial V'}{\partial n'} = 0;$$

dunque i valori che la funzione associata W prende sulle due faccie d'ogni superficie, sede d'una distribuzione semplice appartenente al sistema di masse di cui V è la funzione potenziale, presentano necessariamente una differenza variabile da punto a punto.

Designando con h la densità d'una distribuzione semplice esistente sulla superficie σ, la massa compresa nella zona generata dall'arco $s_1 - s_0$ (supposto $s_1 > s_0$) è

$$2\pi\int_{s_0}^{s_1} h u d s ,$$

ossia, in virtù della prima equazione (1_b) e della nota espressione di h,

$$\frac{(W - W')_0 - (W - W')_1}{2} . \tag{2}$$

Questa formola, la quale assegna un significato molto semplice alla differenza $W - W'$, comprende come caso particolare quella già stabilita da KIRCHHOFF per le distribuzioni elettriche in equilibrio (*Zur Theorie des Condensators,* 1877, pag. 103 delle *Gesammelte Abhandlungen*).

Quando la superficie σ si considera come la rappresentazione approssimata d'un conduttore elettrizzato, di spessore estremamente piccolo, in tutta l'estensione del quale la funzione potenziale V abbia un valore costante, le due faccie della detta superficie sono, in generale, sedi di due distinte distribuzioni semplici. La carica della zona anzidetta, in ciascuna di queste due distribuzioni, è data [come risulta facilmente dalla considerazione delle prime equazioni dei due gruppi (1_a), $(1'_a)$] da

$$\frac{W_0 - W_1}{2} \tag{2_a}$$

sulla faccia di normale n, e da

$$\frac{W'_1 - W'_0}{2} \tag{$2'_a$}$$

sulla faccia di normale n'. La formola (2) darebbe, in quest'ipotesi, la somma algebrica delle due cariche.

Nel caso particolare che la superficie σ sia piana, cioè che la linea s sia una retta perpendicolare all'asse di simmetria, e che la funzione potenziale V appartenga ad una distribuzione semplice esistente *unicamente* sul piano σ, si ha evidentemente

$$\frac{\partial V}{\partial n} = \frac{\partial V'}{\partial n'}$$

e quindi, in virtù delle due prime equazioni (1_a), $(1'_a)$,

$$\frac{\partial(W+W')}{\partial s}=0\,.$$

Se dunque σ è un'area piana circolare e se si dispone della costante additiva contenuta in W per guisa che sia $W=W'=0$ lungo il contorno dell'area, sarà $W=W'=0$ in ogni punto del piano *esterno* all'area e $W+W'=0$ in ogni punto dell'area stessa. Ciò posto, consideriamo un conduttore in forma di disco circolare, elettrizzato simmetricamente intorno all'asse, sotto l'influenza di forze elettriche esterne, pure simmetriche, le cui funzioni associate sieno v, w, per guisa che la somma $V+v$ sia costante in tutto il disco. Da ciò che precede e dall'osservare che in ogni punto di σ si ha $w=w'$, risulta che la carica della corona compresa fra l'orlo del disco ed il cerchio interno di raggio u è data da

$$(2_b)\qquad \frac{W+w-w_a}{2}$$

sulla faccia di normale n, e da

$$(2'_b)\qquad \frac{W-w+w_a}{2}$$

sulla faccia di normale n', essendo W il valore che prende, sulla circonferenza di raggio u e sulla faccia di normale n, la funzione associata alla funzione potenziale dell'elettricità del disco, e w, w_a essendo i valori di w sulla detta circonferenza e su quella di raggio a, supposto a il raggio del disco. La carica totale su amendue le faccie della detta corona è uguale a W.

§ 2.

Determinazione d'una classe di funzioni associate.

Le equazioni (1) esprimono che i due binomî

$$(3)\qquad V\,dz-\frac{W\,du}{u}=dV_1\,,\qquad V\,u\,du+W\,dz=d\,W_1$$

sono i differenziali esatti (nello spazio esterno alle masse potenzianti) di due nuove funzioni V_1, W_1, dalle quali le V, W dipendono mediante le formole

$$(3_a)\qquad V = \frac{\partial V_1}{\partial z}, \qquad W = -u\frac{\partial V_1}{\partial u};$$

$$(3_b)\qquad V = \frac{1}{u}\frac{\partial W_1}{\partial u}, \qquad W = \frac{\partial W_1}{\partial z};$$

e poichè queste traggono con sè le relazioni

$$\frac{\partial W_1}{\partial u} = u\frac{\partial V_1}{\partial z}, \qquad \frac{\partial W_1}{\partial z} = -u\frac{\partial V_1}{\partial u}$$

che hanno l'identica forma delle (1), si conclude che le due nuove funzioni V_1, W_1 costituiscono, in generale (cioè prescindendo dalle altre proprietà necessarie delle funzioni associate, da verificarsi in ciascun caso particolare), il sistema d'una funzione potenziale (esterna) e della sua funzione associata.

Dalle formole (3_a), (3_b) risulta che mediante una sola funzione, sia potenziale, sia associata, si può formare una serie ascendente (per integrazione) ed una serie discendente (per derivazione) di coppie di funzioni associate. Il carattere generale delle funzioni V è contenuto nell'equazione di LAPLACE

$$(4)\qquad \frac{\partial}{\partial u}\left(u\frac{\partial V}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(u\frac{\partial V}{\partial z}\right) = 0,$$

che risulta dalle (1) eliminando W; e quello delle funzioni W è contenuto nell'equazione

$$(4_a)\qquad \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{u}\frac{\partial W}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{u}\frac{\partial W}{\partial z}\right) = 0,$$

che risulta dalle medesime (1) eliminando V. Di queste due equazioni differenziali parziali del second'ordine bisogna tener conto quando si forma, per integrazione, una serie ascendente di funzioni associate, nell'espressione delle quali intervengono funzioni arbitrarie.

Il più semplice esempio di funzione potenziale simmetrica è quello che risulta dall'ipotesi d'una massa unitaria concentrata in un punto dell'asse di simmetria. Designando con c l'ordinata di questo punto, ponendo

$$r = \sqrt{u^2 + (z - c)^2}$$

e denotando con v, w le funzioni associate relative a questo caso, si trova

$$v = \frac{1}{r}, \qquad w = \frac{z - c}{r} \tag{5}$$

$$v_1 = \log \frac{r + z - c}{u}, \qquad w_1 = r. \tag{5$_a$}$$

La funzione v_1, essendo monodroma, continua e finita colle sue derivate in tutti i punti dello spazio, ad eccezione di quelli dell'asse di simmetria ($u = 0$), è la funzione potenziale d'una distribuzione lineare lungo quest'asse. La densità di tale distribuzione è data, per $u = 0$, da

$$-\frac{1}{2} u \frac{\partial v_1}{\partial u},$$

ossia da

$$\frac{1}{2} w:$$

questa densità è dunque uguale ad $\frac{1}{2}$ in tutti i punti dell'asse nei quali $z > c$, ed è uguale a $-\frac{1}{2}$ in tutti quelli nei quali $z < c$. Le superficie equipotenziali di questa distribuzione sono coni di rotazione col vertice nel punto ($u = 0$, $z = c$), epperò le linee di forza ($w_1 =$ cost.) sono semi-circonferenze col centro in questo punto.

Le due funzioni v e w_1 hanno in comune una proprietà molto spiccata: sono, cioè, le sole funzioni di r (distanza del punto potenziato variabile da un punto fisso dell'asse) che rendano soddisfatte le equazioni caratteristiche (4), (4$_a$).

Si dimostra molto facilmente, mediante le equazioni (1), che se (V, W), (v, w) sono due coppie *qualunque* di funzioni associate, il binomio

$$V dw + W dv \tag{6}$$

è sempre un differenziale esatto (nello spazio esterno alle masse). Di quì segue, in particolare, con riguardo alle formole (5), che, qualunque sia il punto ($u = 0$, $z = c$), il binomio

$$V d\frac{z - c}{r} + W d\frac{1}{r} = dP \tag{6$_a$}$$

è sempre il differenziale esatto d'una certa funzione P delle variabili u e z. Questa funzione non possiede il carattere nè d'una funzione potenziale nè d'una funzione associata, poichè soddisfa all'equazione differenziale parziale

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{r^2}{u}\frac{\partial P}{\partial u}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{r^2}{u}\frac{\partial P}{\partial z}\right)=0:$$

ma vedremo in seguito ch'essa gode d'un'altra proprietà molto interessante.

Dalla forma lineare ed omogenea delle equazioni (1) apparisce senz'altro che se si hanno più coppie di funzioni associate (V, W), la somma $\sum C V$ è una nuova funzione potenziale e la somma $\sum C W$ è la corrispondente funzione associata (sempre nello spazio esterno a tutte le masse), C rappresentando un fattore costante, diverso per ciascuna coppia (V, W). Così, per esempio, se nelle due funzioni v_1, w_1 definite dalle equazioni (5_a) si attribuiscono successivamente diversi valori alla costante c, si potrà porre

$$V_1=\sum C v_1, \qquad W_1=\sum C w_1,$$

dove a ciascun'ordinata c corrisponde una diversa costante C.

Essendo w_1 funzione della sola quantità r, la seconda di queste espressioni ha un carattere di maggior semplicità in confronto della prima. Perciò scrivendo $f(c)$ in luogo di C e considerando un integrale in luogo d'una somma, porremo

$$U=\int_{c_0}^{c_1} f(c)\, r\, dc$$

e concluderemo dalle equazioni (3_b), scrivendo U al posto di W_1, che, qualunque sia la funzione $f(c)$, le due espressioni

$$V=\frac{1}{u}\frac{\partial U}{\partial u}=\int_{c_0}^{c_1}\frac{f(c)\,dc}{r}, \qquad W=\frac{\partial U}{\partial z}=\int_{c_0}^{c_1}\frac{f(c)(z-c)\,dc}{r}$$

rappresentano il sistema d'una funzione potenziale e della corrispondente funzione associata.

Fintantochè la variabile d'integrazione c è reale, la prima delle due espressioni precedenti non è altro, evidentemente, che la funzione potenziale d'una distribuzione lineare sul segmento $c_1 - c_0$ dell'asse di simmetria. Ma se si dà a c un valore complesso e se si prende la parte reale del risultato, si ottengono funzioni potenziali d'altre distribuzioni. Facciamo, per esempio, $c = it$ e, mutando opportunamente la designazione della funzione arbitraria $f(c)$, poniamo

$$(7) \qquad U=\int_{-a}^{a} F'(t)\sqrt{u^2+(z+it)^2}\,dt,$$

dove a è una costante reale e positiva e dove $F(t)$ è una funzione reale, monodroma, continua e finita nell'intervallo da $t = 0$ a $t = a$, che si annulla per $t = 0$ e la cui derivata $F'(t)$ è proseguita nell'intervallo da $t = 0$ a $t = -a$ colla legge

$$F'(t) = F'(-t).$$

In tali ipotesi il valore di U riesce di per sè stesso reale e le espressioni che se ne deducono per V e per W, cioè

$$(7_a) \qquad V = \int_{-a}^{a} \frac{F'(t)dt}{\sqrt{u^2 + (z + it)^2}}, \qquad W = \int_{-a}^{a} \frac{F'(t)(z + it)dt}{\sqrt{u^2 + (z + it)^2}}$$

hanno significati molto interessanti, rappresentano, cioè, la funzione potenziale e la funzione associata d'una distribuzione simmetrica sul disco circolare di raggio a, giacente nel piano $z = 0$. Ciò verrà dimostrato nel § 4.

[Per maggiori svolgimenti intorno alle proprietà generali esposte nella prima parte di questo § e conducenti alle formole testè stabilite per V e W, si vegga la mia Nota del 1878 *Sulle funzioni potenziali di sistemi simmetrici intorno ad un asse* *)].

§ 3.

Osservazioni retrospettive.

La prima delle espressioni (7_a) è, in sostanza, quella che già ottenni nel § 10 della Memoria: *Sulla teoria delle funzioni potenziali simmetriche* **). Ivi essa si presentava come il risultato della trasformazione d'un'altra espressione di V, che formava il principale argomento del lavoro, ed io davo appunto termine a questo con un cenno sommario delle proprietà di quella formola. Ma ora credo opportuno di completare quei cenni, prima di tutto considerando simultaneamente le *due* funzioni associate V e W, sotto le forme corrispondenti (7_a), ed in secondo luogo dimostrandone le proprietà fondamentali indipendentemente da qualunque prenozione sulla natura e sul significato di esse, all'infuori di quella dell'essere esse due funzioni associate, la prima delle quali soddisfa visibilmente alle note condizioni di continuità e di convergenza (all'infinito) d'una funzione potenziale.

---

*) Rendiconti del R. Istituto Lombardo, s. II, vol. XI, pp. 668-680; oppure queste OPERE, tomo III, pp. 115-128.

**) Memorie della Reale Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna, serie IV, tomo II (1880), pp. 461-505, oppure queste OPERE, Volume III, pp. 349-382.

V'è anche un'altra considerazione di massima, per la quale credo utile stabilire direttamente le proprietà delle espressioni (7_a): ed è l'intervento in queste espressioni d'una variabile complessa ausiliare. Il nesso intimo che vige fra la teoria del potenziale e quella delle funzioni di variabile complessa è noto da lungo tempo, specialmente per ciò che si riferisce ai potenziali logaritmici. Ma, più recentemente, esso è stato invocato utilmente anche nella risoluzione d'altre questioni relative al potenziale, ed in ispecie per quella dei condensatori elettrici, come si può vedere in MAXWELL (*Treatise,* parte I, cap. XII), KIRCHHOFF (Memoria già citata), BETTI (*Teoria delle forze newtoniane,* pag. 263). Nelle lezioni di RIEMANN (*Schwere, Elektricität und Magnetismus*) si fa uso dell'integrazione complessa nel calcolo delle componenti d'attrazione d'un cilindro ellittico finito. E non mancano altri esempî di consimili applicazioni. È probabile che l'uso delle variabili complesse, come strumento per la deduzione di funzioni potenziali più difficilmente trattabili con altri processi, si possa estendere ulteriormente, e sotto aspetti diversi. Ma mi sembra che fin d'ora s'intraveggga molto chiaramente l'opportunità, per non dire la spontaneità, di tale applicazione a quella classe di funzioni potenziali che ho chiamato *simmetriche,* perchè appartengono a sistemi di masse simmetricamente distribuite intorno ad un asse rettilineo e dipendono perciò, come le logaritmiche, da due sole variabili indipendenti.

Ciò apparisce molto manifestamente dal già citato e bellissimo lavoro di KIRCHHOFF. Da un breve cenno contenuto nel *Jahrbuch ueber die Fortschritte der Mathematik,* t. XI, pag. 752, rilevo che, in un lavoro del quale sfortunatamente non ho potuto prendere cognizione, MEHLER aveva già svolto nel 1879, mediante espressioni della specie di quelle considerate nella citata mia Memoria del 1881 e nella presente, una nuova soluzione del celebre problema di POISSON intorno a due conduttori sferici elettrizzati. Finalmente, alla pag. 523 delle *Wissenschaftliche Abhandlungen* di HELMHOLTZ è inserita una breve Nota (in data del 1881) nella quale si fa cenno d'un principio di trasformazione del potenziale, che è fondato sull'uso dell'immaginario e che rientra nel genere di considerazioni cui ora alludo.

Del resto gli svolgimenti dei §§ successivi giustificano l'attenzione di cui mi sembrano meritevoli le formole (7_a) e le proprietà che ora procedo a dimostrarne.

§ 4.

Proprietà delle funzioni associate definite nel § 2.

Poniamo

$$\sqrt{u^2 + (z + it)^2} = S + iT, \tag{8}$$

donde

$$(8_a)\qquad u^2 + z^2 - t^2 = S^2 - T^2, \qquad z t = S T$$

e quindi

$$(8_b)\qquad \begin{cases} S^2 = \frac{1}{2}\left[\sqrt{(u^2 + z^2 - t^2)^2 + 4 z^2 t^2} + u^2 + z^2 - t^2\right], \\ T^2 = \frac{1}{2}\left[\sqrt{(u^2 + z^2 - t^2)^2 + 4 z^2 t^2} - u^2 - z^2 + t^2\right], \end{cases}$$

espressioni in cui il radicale deve prendersi in valore assoluto. Se si immagina fatto un taglio nel piano $(u z)$ lungo la retta $z = 0$, da $u = 0$ ad $u = a$, il punto (u, z) non può mai compiere un giro intorno ad uno dei punti nei quali la quantità S diventa nulla nel corso dell'integrazione rispetto a t, epperò questa quantità non può mai cangiare di segno. Se dunque si conviene di prendere sempre positivamente il valore di S dato dalla prima delle equazioni (8_b), bisogna, in virtù della seconda equazione (8_a), dare sempre al valore di T, desunto dalla seconda equazione (8_b), il segno del prodotto $z t$. Ne segue che, per $z = \pm 0$ e per t positivo, si ha

$$(8_c)\qquad \begin{cases} S = \sqrt{u^2 - t^2}, & T = 0, \qquad \text{se} \quad t < u, \\ S = 0, & T = \pm\sqrt{t^2 - u^2}, \qquad \text{se} \quad t > u. \end{cases}$$

Delle due funzioni (7_a) la prima evidentemente non cambia di valore nè di segno cambiando z in $-z$; la seconda invece conserva lo stesso valore assoluto, ma cangia di segno. Da quest'ultima proprietà risulta (§ 1) che la distribuzione di massa cui appartengono le due funzioni associate V e W, giace sul piano $z = 0$. Ora facendo $z = \pm 0$ si ha, per le equazioni (8_c),

$$(9)\qquad \begin{cases} V = 2\int_0^u \frac{F'(t)\,dt}{\sqrt{u^2 - t^2}}, & W = \pm 2\int_u^a \frac{F'(t)\,t\,dt}{\sqrt{t^2 - u^2}}, \qquad \text{se} \quad u < a, \\ V = 2\int_0^a \frac{F'(t)\,dt}{\sqrt{u^2 - t^2}}, & W = 0, \qquad \text{se} \quad u > a, \end{cases}$$

dunque, per ciò che si avvertì alla fine del § 1, la detta distribuzione giace tutta entro il cerchio di raggio a, ed è tale che la porzione di massa, che diremo E_u, contenuta fra questo cerchio ed il cerchio interno di raggio u, è data da

$$(9_a)\qquad E_u = 2\int_u^a \frac{F'(t)\,t\,dt}{\sqrt{t^2 - u^2}}.$$

La carica totale è

$$(9_b)\qquad E = 2F(a)$$

e la densità h in ogni punto della circonferenza di raggio u è data da

$$(9_c) \qquad h = -\frac{1}{2\pi u}\frac{dE_u}{du}.$$

Reciprocamente, data la densità h in funzione di u, si può determinare la corrispondente funzione $F'(t)$. Infatti dall'equazione precedente e dalla (9_a) si deduce

$$\int_s^a u\,h(u)\sqrt{u^2 - s^2}\,du = -\frac{1}{2\pi}\int_s^a \sqrt{u^2 - s^2}\frac{dE_u}{du}\,du$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_s^a \frac{E_u u\,du}{\sqrt{u^2 - s^2}} = \frac{1}{\pi}\int_s^a \frac{u\,du}{\sqrt{u^2 - s^2}}\int_u^a \frac{F'(t)\,t\,dt}{\sqrt{t^2 - u^2}},$$

ossia, invertendo l'ordine delle integrazioni colla regola di DIRICHLET, uguale a

$$\frac{1}{\pi}\int_s^a F'(t)\,t\,dt\int_s^t \frac{u\,du}{\sqrt{(t^2 - u^2)(u^2 - s^2)}} = \frac{1}{2}\int_s^a F'(t)\,t\,dt.$$

Si ha dunque, per ogni valore di t compreso fra o ed a,

$$\int_t^a F'(t)\,t\,dt = 2\int_t^a u\,h(u)\sqrt{u^2 - t^2}\,du,$$

epperò, derivando rispetto a t, si ottiene il cercato valore di $F'(t)$ sotto la forma

$$(10) \qquad F'(t) = 2\int_t^a \frac{h(u)\,u\,du}{\sqrt{u^2 - t^2}}.$$

A riprova di quest'espressione, si può osservare che essa, sostituita nell'equazione (9_a), dà

$$E_u = 2\pi\int_u^a h(u)\,u\,du,$$

formola che riproduce per l'appunto la definizione di E_u.

D'altra parte, scrivendo $V(u)$ in luogo di V nel primo membro della prima equazione (9), si ha da questa stessa equazione

$$\int_0^s \frac{V(u)\,u\,du}{\sqrt{s^2 - u^2}} = 2\int_0^s \frac{u\,du}{\sqrt{s^2 - u^2}}\int_0^u \frac{F'(t)\,dt}{\sqrt{u^2 - t^2}}$$

$$= 2\int_0^s F'(t)\,dt\int_t^s \frac{u\,du}{\sqrt{(s^2 - u^2)(u^2 - t^2)}} = \pi F(s).$$

Quindi se si prende per $F(t)$ la funzione

$$(10_a) \qquad F(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^t \frac{V(u)\, u\, d u}{\sqrt{t^2 - u^2}},$$

si ottengono dalle equazioni (7_a) le due funzioni associate relative a *quella* distribuzione per la quale la funzione potenziale prende sul disco i *dati* valori $V(u)$, valori che devono supporsi continui e finiti.

Anche di questo risultato possiamo ottenere la verificazione osservando che la precedente espressione di $F(t)$, scritta nella forma

$$F(t) = -\frac{1}{\pi} \int_0^t V(u) \frac{d\sqrt{t^2 - u^2}}{d u} d u$$

$$= \frac{1}{\pi} V(0)\, t + \frac{1}{\pi} \int_0^t V'(u) \sqrt{t^2 - u^2}\, d u,$$

dà

$$F'(t) = \frac{1}{\pi} V(0) + \frac{t}{\pi} \int_0^t \frac{V'(u)\, d u}{\sqrt{t^2 - u^2}},$$

il qual valore di $F'(t)$, sostituito nella prima delle equazioni (9), dà alla sua volta

$$V = \frac{2}{\pi} V(0) \int_0^u \frac{d t}{\sqrt{u^2 - t^2}} + \frac{2}{\pi} \int_0^u \frac{t\, d t}{\sqrt{u^2 - t^2}} \int_0^t \frac{V'(s)\, d s}{\sqrt{t^2 - s^2}}$$

$$= V(0) + \frac{2}{\pi} \int_0^u V'(s)\, d s \int_s^u \frac{t\, d t}{\sqrt{(u^2 - t^2)(t^2 - s^2)}} = V(u),$$

come appunto dev'essere.

Le formole (10), (10_a) rendono possibile la determinazione, mediante le equazioni (7_a), delle due funzioni associate relative a qualunque distribuzione simmetrica semplice sul disco di raggio a, quando sia data o la densità h di tale distribuzione, od il valore V che la funzione potenziale deve prendere in ogni punto del disco stesso.

§ 5.

Applicazioni delle formole precedenti.

Facciamo subito alcune applicazioni semplici dei precedenti teoremi, le quali ci serviranno di base per la trattazione di successivi problemi d'indole diversa.

Per ottenere le formole relative alla distribuzione *in equilibrio* sul disco, si porrà, nell'equazione (10_a), $V(u) = 1$ e si troverà

$$(11) \qquad F(t) = \frac{t}{\pi}.$$

Le equazioni (7_a), (9_a), (9_b), (9_c) dànno in tal caso i risultati noti, che non è necessario di quì trascrivere.

Per ottenere invece le formole relative alla distribuzione *uniforme*, si porrà, nell'equazione (10), $h(u) = 1$ e si troverà

$$(12) \qquad F'(t) = 2\sqrt{a^2 - t^2},$$

donde, per le equazioni (7_a),

$$(12_a) \qquad V = 2\int_{-a}^{a} \frac{\sqrt{a^2 - t^2}\,dt}{\sqrt{u^2 + (z + it)^2}}, \qquad W = 2\int_{-a}^{a} \frac{(z + it)\sqrt{a^2 - t^2}\,dt}{\sqrt{u^2 + (z + it)^2}},$$

espressioni molto notevoli per la loro semplicità e dalle quali si possono ricavare molto facilmente le analoghe funzioni V, W per il cilindro retto omogeneo, terminato a due sezioni rette.

Consideriamo, in vista di una successiva applicazione, la distribuzione in cui la densità h è inversamente proporzionale al cubo della distanza del punto cui la densità si riferisce da un punto $(z = c)$ dell'asse di simmetria. Si ha in questo caso, denotando con b una costante,

$$h = \frac{b}{r^3},$$

dove

$$r^2 = u^2 + c^2,$$

epperò l'equazione (10) dà

$$F'(t) = 2b\int_t^a \frac{u\,du}{r^3\sqrt{u^2 - t^2}} = 2b\int_{\sqrt{c^2+t^2}}^{\sqrt{c^2+a^2}} \frac{dr}{r^2\sqrt{r^2 - c^2 - t^2}}$$

$$= \frac{2b}{c^2 + t^2}\int_{\sqrt{c^2+t^2}}^{\sqrt{c^2+a^2}} d\sqrt{1 - \frac{c^2 + t^2}{r^2}},$$

cioè

$$(13) \qquad F'(t) = \frac{2b\sqrt{a^2 - t^2}}{r_0(c^2 + t^2)},$$

dove

$$r_0^2 = a^2 + c^2.$$

Fermiamoci un poco più sulla distribuzione elettrica provocata per induzione nel disco, comunicante col suolo, da un'unità elettrica positiva collocata nel punto ($u = 0$, $z = c > 0$). Ponendo a tal fine nell'equazione (10_a)

$$V(u) = -\frac{1}{\sqrt{c^2 + u^2}},$$

si ottiene

$$F(t) = -\frac{1}{\pi}\int_0^t \frac{u\,du}{\sqrt{(c^2 + u^2)(t^2 - u^2)}} = -\frac{1}{\pi}\operatorname{Arc\,cos}\frac{c}{\sqrt{c^2 + t^2}},$$

donde

$$F'(t) = -\frac{c}{\pi(c^2 + t^2)}. \tag{14}$$

Sostituendo questo valore nelle equazioni (7_a), si ha

$$\left\{\begin{aligned} V &= -\frac{c}{\pi}\int_{-a}^{a}\frac{dt}{(c^2 + t^2)\sqrt{u^2 + (z + it)^2}},\\ W &= -\frac{c}{\pi}\int_{-a}^{a}\frac{(z + it)\,dt}{(c^2 + t^2)\sqrt{u^2 + (z + it)^2}}. \end{aligned}\right. \tag{14_a}$$

Alla superficie del disco si ha, in virtù delle formole (9),

$$W = \mp\frac{2c}{\pi}\frac{1}{\sqrt{c^2 + u^2}}\operatorname{Arc\,cos}\sqrt{\frac{c^2 + u^2}{c^2 + a^2}}, \qquad z = \pm 0. \tag{14_b}$$

Per calcolare le cariche su ciascuna delle due faccie separatamente, si osservi (cfr. la fine del § 1) che le funzioni associate relative al sistema costituito dal punto inducente e dallo strato indotto sono, ricordando le formole (5),

$$\frac{1}{r} + V, \qquad \frac{z - c}{r} + W,$$

dove

$$r = \sqrt{u^2 + (z - c)^2}.$$

Alla superficie del disco la seconda di queste funzioni diventa, per la formola (14_b),

$$-\frac{c}{r}\left(1 \pm \frac{2}{\pi}\operatorname{Arc\,cos}\frac{r}{r_0}\right),$$

dove $r = \sqrt{u^2 + c^2}$, $r_0 = \sqrt{a^2 + c^2}$ e dove il segno superiore corrisponde alla faccia rivolta verso il punto inducente, l'inferiore alla faccia opposta. Ne risulta che la carica E_u è, per la prima faccia,

$$E_u = -\frac{c}{\pi r}\,\mathrm{Arc}\cos\frac{r}{r_0} - \frac{c}{2}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right)$$

e per la seconda

$$E'_u = -\frac{c}{\pi r}\,\mathrm{Arc}\cos\frac{r}{r_0} + \frac{c}{2}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right).$$

Di quì deduconsi facilmente la carica totale, la densità su ciascuna faccia, etc. Una più minuta discussione di questo caso d'induzione può trovarsi in una mia Nota *Intorno ad alcune questioni d'elettrostatica* *), dove ho già dato le espressioni delle due funzioni associate sotto un'altra forma, di cui mostrerò più tardi (§ 10) il nesso colla presente.

§ 6.

Teorema d'inversione.

Ritorniamo nuovamente al caso d'un sistema simmetrico qualunque e, designando con c un'ordinata costante, poniamo

$$(15)\qquad u + i(z - c) = \xi, \qquad u - i(z - c) = \eta.$$

Introducendo queste nuove variabili ξ, η al posto delle u, z nelle funzioni V, W, le equazioni fondamentali (1) diventano

$$(15_a)\qquad \frac{\partial W}{\partial \xi} = i\frac{\xi + \eta}{2}\frac{\partial V}{\partial \xi}, \qquad \frac{\partial W}{\partial \eta} = -i\frac{\xi + \eta}{2}\frac{\partial V}{\partial \eta}.$$

Si eseguisca ora l'inversione (per raggi vettori reciproci) rispetto al punto ($u = 0$, $z = c$) come centro, col raggio r_0, e si denotino con u', z' le coordinate del punto reciproco di (u, z). Ponendo

$$(15')\qquad u' + i(z' - c) = \xi', \qquad u' - i(z' - c) = \eta',$$

tale inversione è rappresentata dalle formole semplicissime

$$(15_b)\qquad \xi\eta' = \xi'\eta = r_0^2.$$

*) Rendiconti del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, serie II, volume X (1877), pp. 171-185; oppure queste OPERE, tomo III, pp. 73-88.

Sieno V', W' le funzioni associate relative ad un sistema di masse esistenti nello spazio (u', z'): considerando queste funzioni come formate colle variabili ξ', η', avremo, (15_a),

$$(15'_a) \qquad \frac{\partial W'}{\partial \xi'} = i\frac{\xi' + \eta'}{2}\frac{\partial V'}{\partial \xi'}, \qquad \frac{\partial W'}{\partial \eta'} = -i\frac{\xi' + \eta'}{2}\frac{\partial V'}{\partial \eta'}.$$

Ma, in virtù delle relazioni (15_b), le funzioni V', W' si possono anche concepire formate colle variabili ξ, η: in tale ipotesi le precedenti equazioni $(15'_a)$ diventano

$$\frac{\partial W'}{\partial \xi} = -i\frac{\xi + \eta}{2\xi\eta}r_0^2\frac{\partial V'}{\partial \xi}, \qquad \frac{\partial W'}{\partial \eta} = i\frac{\xi + \eta}{2\xi\eta}r_0^2\frac{\partial V'}{\partial \eta},$$

donde

$$\frac{\partial W'}{\partial \xi} \pm \frac{\partial W'}{\partial \eta} = -i\frac{\xi + \eta}{2\xi\eta}r_0^2\left(\frac{\partial V'}{\partial \xi} \mp \frac{\partial V'}{\partial \eta}\right).$$

Di qui, riponendo al posto delle variabili ξ, η le primitive coordinate u, z, si ricavano le relazioni seguenti

$$(16) \qquad \frac{\partial W'}{\partial u} = -\frac{r_0^2 u}{r^2}\frac{\partial V'}{\partial z}, \qquad \frac{\partial W'}{\partial z} = \frac{r_0^2 u}{r^2}\frac{\partial V'}{\partial u},$$

dove

$$r = \sqrt{u^2 + (z - c)^2}.$$

Sono queste le relazioni che hanno luogo fra due funzioni associate V', W' quando queste sono espresse non già colle *proprie* variabili u', z', ma colle variabili *inverse* u, z.

Ora dalla teoria dell'inversione è noto che, se V è la funzione potenziale d'un sistema di masse, la funzione potenziale V' del sistema inverso si ottiene operando l'inversione delle variabili nella funzione

$$V' = CVr,$$

dove C è una costante da determinarsi opportunamente ed r è la distanza del punto variabile (u, z) dal centro d'inversione. Sostituendo questo valore di V' nelle equazioni (16), si ottiene

$$\frac{\partial W'}{\partial u} = -\frac{Cr_0^2 u}{r}\frac{\partial V}{\partial z} - \frac{Cr_0^2 u(z - c)}{r^3}V,$$

$$\frac{\partial W'}{\partial z} = \frac{Cr_0^2 u}{r}\frac{\partial V}{\partial u} + \frac{Cr_0^2 u^2}{r^3}V,$$

ossia, in virtù delle equazioni (1),

$$\frac{\partial W'}{\partial u} + \frac{C r_0^2}{r} \frac{\partial W}{\partial u} = - \frac{C r_0^2 u (z - c)}{r^3} V,$$

$$\frac{\partial W'}{\partial z} + \frac{C r_0^2}{r} \frac{\partial W}{\partial z} = \frac{C r_0^2 u^2}{r^3} V,$$

dove W è la funzione associata della primitiva funzione potenziale V. Di quì risulta

$$d\left(W' + \frac{C r_0^2}{r} W\right) = C r_0^2 \left(V d \frac{z - c}{r} + W d \frac{1}{r}\right),$$

epperò, introducendo la funzione P definita dall'equazione (6_a), si conclude

$$(17) \qquad V' = C V r, \qquad W' = C r_0^2 \left(P - \frac{W}{r}\right).$$

Per avere dunque le funzioni V', W', formate colle coordinate inverse u', z', basta operare l'inversione delle coordinate u, z nei secondi membri di queste ultime equazioni.

Ma vi è di più. Tale inversione può essere rappresentata dalle relazioni

$$r r' = r_0^2, \qquad \frac{z' - c}{r'} = \frac{z - c}{r},$$

dove

$$r' = \sqrt{u'^2 + (z' - c)^2};$$

ora dalle equazioni (17), in virtù di queste relazioni, si trae

$$V' d \frac{z' - c}{r'} + W' d \frac{1}{r'} = C V r d \frac{z - c}{r} + C \left(P d r - \frac{W d r}{r}\right)$$

$$= C P d r + C r \left(V d \frac{z - c}{r} + W d \frac{1}{r}\right) = d(C P r);$$

dunque la funzione P ha quest'importante proprietà, che mentre, *prima* dell'inversione, si ha

$$(17_a) \qquad V d \frac{z - c}{r} + W d \frac{1}{r} = d P,$$

dopo l'inversione si ha

$$(17'_a) \qquad V' d \frac{z' - c}{r'} + W' d \frac{1}{r'} = d P',$$

dove si è posto

$$(17_b) \qquad P' = CPr.$$

In altre parole: operando sulla funzione P, definita dall'equazione (17_a), al modo stesso in cui si opera sulla funzione potenziale V per avere la funzione potenziale V' del sistema inverso, cioè mutando P in $P' = CPr$ ed invertendo poscia le variabili, si ottiene una funzione P' delle variabili u', z' la quale somministra le due funzioni associate V', W' del sistema inverso precisamente nello stesso modo, $(17'_a)$, in cui la funzione P delle variabili u, z somministrava, (17_a), le due funzioni associate del sistema primitivo.

Questo teorema completa, nel caso dei sistemi simmetrici, il principio d'inversione stabilito da W. THOMSON per le sole funzioni potenziali. Esso è già stato da me dimostrato nella sovracitata Nota *Sulle funzioni potenziali di sistemi simmetrici intorno ad un asse* *). Ma sebbene esso sia ivi presentato in una forma egualmente generale, le variabili colle quali sono formate le funzioni analoghe a P e P' si prestano meno agevolmente delle attuali alle applicazioni che si hanno in vista nel presente lavoro.

Si osservi che dall'equazione (17_a) segue

$$(17_c) \qquad \left\{ \begin{aligned} V &= r\left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{z-c}{u}\frac{\partial P}{\partial u}\right), \\ W &= -ru\left(\frac{\partial P}{\partial u} + \frac{z-c}{u}\frac{\partial P}{\partial z}\right). \end{aligned} \right.$$

Dalla $(17'_a)$ si hanno due relazioni analoghe fra P', V', W', u', z'. Ma è più comodo giovarsi delle equazioni (17), sostituendo in esse i precedenti valori di V, W. Così le funzioni V', W' vengono espresse per mezzo della sola P e non resta che operare nei risultati l'inversione delle variabili.

§ 7.

Applicazione alle funzioni associate della calotta sferica.

Calcoliamo la funzione P relativa ad una distribuzione simmetrica sul solito disco circolare, relativa, cioè, al caso che le funzioni V, W sieno del tipo (7_a).

---

*) Rendiconti del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, serie II, vol. XI (1878), pp. 668-680; oppure queste OPERE, tomo III, pp. 115-128.

Ponendo, per un momento,

$$z = c + r\cos\theta, \qquad c + it = s,$$

le dette funzioni V, W diventano

$$V = \int_{-a}^{a} \frac{F'(t)\,dt}{\sqrt{r^2 + 2rs\cos\theta + s^2}},$$

$$W = \int_{-a}^{a} \frac{F'(t)(r\cos\theta + s)\,dt}{\sqrt{r^2 + 2rs\cos\theta + s^2}}.$$

Usando il simbolo δ come caratteristico d'una differenziazione relativa alle sole variabili r e θ, si trova

$$V\delta\frac{z-c}{r} + W\delta\frac{1}{r} = \int_{-a}^{a} \frac{\delta\cos\theta + (r\cos\theta + s)\delta\frac{1}{r}}{\sqrt{r^2 + 2rs\cos\theta + s^2}} F'(t)\,dt$$

$$= \int_{-a}^{a} \frac{\delta\frac{\cos\theta}{r} + s\frac{1}{r}\delta\frac{1}{r}}{\sqrt{1 + 2s\frac{\cos\theta}{r} + \frac{s^2}{r^2}}} F'(t)\,dt$$

$$= \int_{-a}^{a} \delta\frac{\sqrt{r^2 + 2rs\cos\theta + s^2}}{r}\,\frac{F'(t)\,dt}{s}.$$

Di qui segue immediatamente che la cercata funzione P è data da

$$P = \frac{1}{r}\int_{-a}^{a} \frac{F'(t)\sqrt{u^2 + (z + it)^2}\,dt}{c + it}, \tag{18}$$

e che per conseguenza si ha

$$P' = C\int_{-a}^{a} \frac{F'(t)\sqrt{u^2 + (z + it)^2}\,dt}{c + it}, \tag{18'}$$

formola in cui le coordinate u, z devono intendersi sostituite dalle loro espressioni in funzione delle coordinate u', z' del punto reciproco.

Mediante la funzione P' così determinata si possono, in base al teorema ed alle formole del § precedente, assegnare le funzioni associate d'ogni distribuzione inversa d'una distribuzione simmetrica sul disco circolare, cioè le *funzioni associate d'ogni distribuzione simmetrica sopra una calotta sferica.*

Così, per esempio, dando ad $F'(t)$ la forma (13), e quindi prendendo per P' la funzione

$$P' = \frac{2bC}{r_0}\int_{-a}^{a}\frac{\sqrt{(a^2-t^2)[u^2+(z+it)^2]}\,dt}{(c^2+t^2)(c+it)},$$

indi trasformando le coordinate u, z nelle inverse u', z' e ricavando le funzioni V', W' nei diversi modi indicati nel § precedente, si otterrebbero le funzioni associate d'una calotta sferica di densità *costante.*

Così ancora, dando ad $F(t)$ la forma (11) ed alla costante C il valore $-\frac{1}{r_0^2}$, con che si ottiene

$$P' = -\frac{1}{\pi r_0^2}\int_{-a}^{a}\frac{\sqrt{u^2+(z+it)^2}}{c+it}\,dt,$$

indi eseguendo le stesse operazioni, si otterrebbero le funzioni associate della distribuzione indotta sopra una calotta sferica comunicante col suolo da un'unità elettrica positiva collocata nel polo esterno della calotta stessa *).

In generale, la conoscenza dell'espressione (18') permette di risolvere, rispetto alle distribuzioni simmetriche sopra una calotta sferica, gli stessi problemi che le formole (7_a) permettono di risolvere rispetto a quelle sopra un disco circolare, e la simultanea dipendenza da P' di ambedue le funzioni V', W' fa sì che ogni qualvolta riesce determinabile la funzione potenziale, riescono determinabili eziandio le linee di forza.

Il primo problema relativo a distribuzioni di materia sopra una calotta sferica fu trattato da GREEN nel celebre *Essay* (*Papers,* pag. 57). Ivi l'illustre Autore espone una soluzione approssimata del problema di determinare la funzione potenziale dell'elettricità in equilibrio sopra un conduttore sferico cavo, dotato d'una piccola apertura circolare. Questa soluzione, sommamente ingegnosa, e notevolissima anche per ciò che ha potuto servire di guida in altre importanti ricerche di fisica matematica, non era tuttavia atta a dar lume per la trattazione rigorosa dell'analogo problema nel caso di un'apertura d'ampiezza finita. Sir W. THOMSON è stato il primo ad affrontare la soluzione di questo problema, anche nel caso dell'induzione da un punto esterno, ed a trovare la legge della densità elettrica, ch'egli diede senza dimostrazione nel 1847 (*Journal de Liouville,* A. 1847 e *Reprint,* p. 152-154). Molto tempo prima che questi facesse conoscere la dimostrazione delle sue formole (*Reprint,* p. 178-191), LIPSCHITZ determinò completa-

*) Chiamo poli di una calotta i due centri di questa sulla superficie sferica cui la calotta appartiene.

mente la funzione potenziale della calotta sferica, tanto nel caso della distribuzione in equilibrio, quanto in quello della distribuzione indotta da un punto esterno (Giornale di CRELLE, t. LXI). Più recentemente BETTI (*Teorica delle forze newtoniane,* pag. 241) e C. NEUMANN (Memorie della Società Reale di Lipsia, T. XII) ripigliarono, con metodi in parte diversi dai precedenti, lo studio delle medesime questioni, le quali si possono ora considerare come compiutamente dilucidate.

Nel caso dell'induzione da un punto esterno, non collocato sull'asse della calotta, la distribuzione elettrica su questa non è, nè può essere simmetrica rispetto all'asse medesimo, e però questo caso esce dal campo d'applicazione delle nostre formole. Ma quando si tratta della distribuzione in equilibrio o di quella indotta da un punto dell'asse, la distribuzione è simmetrica e le formole dimostrate permettono di determinarne le due funzioni associate, cioè non solo la funzione potenziale, ma eziandio le linee di forza.

Noi ci tratterremo alquanto, nel seguente §, sul caso della distribuzione in equilibrio, non solo perchè è il più interessante, ma specialmente perchè è quello che, nel metodo, del resto elegantissimo, di THOMSON, si deduce con artifizio maggiore.

§ 8.

Della distribuzione elettrica in equilibrio sopra una calotta sferica.

Nel § 5 abbiamo già dedotto le formole relative all'induzione provocata nel disco circolare di raggio a, col centro nell'origine, da un punto unitario ($u = 0$, $z = c > 0$) dell'asse di simmetria. L'inversione, eseguita rispetto a questo punto come centro, col raggio $r_0 = \sqrt{a^2 + c^2}$, fa conoscere la distribuzione elettrica in equilibrio sulla calotta sferica avente per orlo l'orlo del disco e per polo esterno il centro d'inversione. Dando poi alla costante C il valore -1, si ottiene così quella particolare distribuzione per la quale il valore costante della funzione potenziale in ogni punto della calotta è uguale ad 1 e per la quale quindi la carica totale è quella che chiamasi *capacità elettrica* della calotta.

Per isvolgere questo caso, basta porre nell'equazione (18) il valore (14) di $F'(t)$, nel qual modo si ha

$$(19) \qquad P = -\frac{c}{\pi r}\int_{-a}^{a} \frac{\sqrt{u^2 + (z + it)^2}\,dt}{(c^2 + t^2)(c + it)}.$$

Sostituendo quest'espressione, insieme colle (14_a), nelle formole (17), e facendo $C = -1$, si troveranno le funzioni associate V' e W' della distribuzione elettrica di livello potenziale uguale ad 1 sulla calotta sferica, funzioni nelle quali non resterà che da eseguire l'inversione delle coordinate u, χ nelle u', χ'. Noi non trascriveremo queste espressioni, e ci limiteremo a far notare che in tutti gli integrali che in esse compaiono non entra altra irrazionalità che la radice quadrata d'un polinomio di 2° grado rispetto alla variabile d'integrazione t, talchè i detti integrali sono tutti esprimibili per funzioni algebriche, circolari e logaritmiche. Le coordinate curvilinee introdotte dagli altri metodi per l'espressione finita di V sono, o possono considerarsi come il naturale risultato delle sostituzioni che converrebbe di fare per agevolare l'esecuzione delle sopraddette integrazioni.

Mostriamo piuttosto come dal metodo quì tenuto si possa trarre facilmente partito per la determinazione completa della distribuzione elettrica in equilibrio sulla calotta.

La funzione (19) può scriversi, in virtù della formola (8), nel modo seguente

$$P = -\frac{c}{\pi r}\int_{-a}^{a}\frac{cS + tT}{(c^2+t^2)^2}\,dt,$$

od anche in quest'altro modo

$$P = \frac{1}{\pi r}\left(c\frac{\partial}{\partial c}\int_0^a \frac{S\,dt}{c^2+t^2} + \frac{\partial}{\partial c}\int_0^a \frac{T\,t\,dt}{c^2+t^2}\right).$$

Per $\chi = \pm 0$ si ha, (8_c),

$$\int_0^a \frac{S\,dt}{c^2+t^2} = \int_0^u \frac{\sqrt{u^2-t^2}\,dt}{c^2+t^2} = \frac{\pi}{2}\left(\frac{r}{c}-1\right), \qquad r = \sqrt{u^2+c^2},$$

$$\int_0^a \frac{T\,t\,dt}{c^2+t^2} = \pm\int_u^a \frac{t\sqrt{t^2-u^2}\,dt}{c^2+t^2} = \pm\left(\sqrt{a^2-u^2} - r\,\mathrm{Arc\,tg}\frac{\sqrt{a^2-u^2}}{r}\right);$$

quindi

$$\frac{\partial}{\partial c}\int_0^a \frac{S\,dt}{c^2+t^2} = \frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{r}-\frac{r}{c^2}\right),$$

$$\frac{\partial}{\partial c}\int_0^a \frac{T\,t\,dt}{c^2+t^2} = \pm\left(\frac{c\sqrt{a^2-u^2}}{r_0^2} - \frac{c}{r}\,\mathrm{Arc\,tg}\frac{\sqrt{a^2-u^2}}{r}\right)$$

$$= \pm\left(\frac{c\sqrt{r_0^2-r^2}}{r_0^2} - \frac{c}{r}\,\mathrm{Arc\,cos}\frac{r}{r_0}\right),$$

epperò

$$P = \frac{c}{\pi r^2}\left[\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{r^2}{c^2}\right) \pm \frac{r\sqrt{r_0^2-r^2}}{r_0^2} \mp \mathrm{Arc\,cos}\frac{r}{r_0}\right], \qquad \chi = \pm 0.$$

Per $u = a$, cioè per $r = r_0$, questa quantità si riduce a

$$\frac{c}{\pi r_0^2}\frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{r_0^2}{c^2}\right),$$

ossia a

$$\frac{c}{\pi r^2}\frac{\pi}{2}\left(\frac{r^2}{r_0^2} - \frac{r^2}{c^2}\right).$$

Aggiungendo a P questa quantità *costante*, presa con segno negativo, il che è manifestamente lecito, si ottiene

$$P = \frac{c}{\pi r^2}\left[\frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{r^2}{r_0^2}\right) \pm \frac{r\sqrt{r_0^2 - r^2}}{r_0^2} \mp \operatorname{Arc}\cos\frac{r}{r_0}\right], \qquad z = \pm 0.$$

Se si sostituisce questo valore di P, insieme con quello di W dato dall'equazione (14_b) ed equivalente a

$$W = \mp \frac{2c}{\pi r}\operatorname{Arc}\cos\frac{r}{r_0}, \qquad z = \pm 0,$$

nella seconda delle equazioni (17), e se si fa in questa $C = -1$, si ottiene

$$W' = \frac{c r_0^2}{\pi r^2}\left[\frac{\pi}{2}\left(\frac{r^2}{r_0^2} - 1\right) \mp \frac{r\sqrt{r_0^2 - r^2}}{r_0^2} \mp \operatorname{Arc}\cos\frac{r}{r_0}\right], \qquad z = \pm 0;$$

e se finalmente si opera l'inversione rappresentata da $r\rho = r_0^2$ (dove ρ sta in luogo di r'), si trova

$$(19_a) \qquad W' = \frac{\rho^2}{2\pi R}\left[\frac{\pi}{2}\left(\frac{\rho_0^2}{\rho^2} - 1\right) \mp \frac{\rho_0\sqrt{\rho^2 - \rho_0^2}}{\rho^2} \mp \operatorname{Arc}\cos\frac{\rho_0}{\rho}\right],$$

dove R è il raggio della superficie sferica di cui fa parte la calotta considerata, cioè dove si è posto

$$\frac{r_0^2}{c} = 2R, \qquad r_0 = \rho_0.$$

Dietro quanto precede, questa quantità W' è dunque il valore che la funzione associata della distribuzione in equilibrio sulla calotta sferica di raggio R prende nei punti della calotta stessa, e propriamente i segni superiori appartengono ai punti della faccia *convessa* della calotta (i quali corrispondono per inversione a quelli della faccia del disco rivolta al punto inducente, cioè a quelli per i quali $z = +0$), mentre i segni inferiori appartengono ai punti della faccia *concava* (i quali corrispondono a quelli della faccia $z = -0$ del disco): ρ è la distanza del punto cui si riferisce W' dal polo esterno della calotta, ρ_0 è il valore di ρ nei punti dell'orlo terminale della calotta. Per $\rho = \rho_0$ la funzione W' si annulla, epperò essa passa con continuità dai valori positivi che possiede sulla faccia concava ai valori negativi che possiede sulla faccia convessa.

Rammentando le convenzioni su cui furono fondate le formole (2_a), $(2'_a)$, si vedrà che le cariche della zona compresa fra l'orlo della calotta ed il parallelo (ρ) sono date rispettivamente da

$$+\tfrac{1}{2} W'_\rho \qquad \text{per la faccia concava,}$$

$$-\tfrac{1}{2} W'_\rho \qquad \text{per la faccia convessa.}$$

Designando dunque queste cariche con E_ρ, E'_ρ si ha, (19_a),

$$(19_b) \qquad \begin{cases} E_\rho = \dfrac{\rho^2}{4\pi R}\left(\operatorname{Arc\,cos}\dfrac{\rho_0}{\rho} + \dfrac{\rho_0\sqrt{\rho^2-\rho_0^2}}{\rho^2}\right) - \dfrac{\rho^2-\rho_0^2}{8R}, \\[2ex] E'_\rho = \dfrac{\rho^2}{4\pi R}\left(\operatorname{Arc\,cos}\dfrac{\rho_0}{\rho} + \dfrac{\rho_0\sqrt{\rho^2-\rho_0^2}}{\rho^2}\right) + \dfrac{\rho^2-\rho_0^2}{8R}. \end{cases}$$

Le cariche totali, E ed E', sulle dette due faccie, si ottengono facendo $\rho = 2R$ e sono facilmente riducibili alle forme

$$(19_c) \qquad \begin{cases} E = \dfrac{a+s}{2\pi} - \dfrac{a^2 R}{2\rho_0^2}, \\[2ex] E' = \dfrac{a+s}{2\pi} + \dfrac{a^2 R}{2\rho_0^2}, \end{cases}$$

dove s è il raggio sferico della calotta, cioè l'arco generatore di questa: la capacità elettrica della calotta è dunque data da

$$(19_d) \qquad E + E' = \frac{a+s}{\pi},$$

formola semplice ed elegante già notata da BETTI e trovata pure da NEUMANN.

Se con ε s'indica l'angolo formato da un raggio R diretto all'orlo della calotta con quello diretto al polo esterno di questa, si ha

$$s = (\pi - \varepsilon)R, \qquad a = R \operatorname{sen} \varepsilon, \qquad \rho_0 = 2R \operatorname{sen}\frac{\varepsilon}{2}$$

e quindi, (19_c),

$$E = \frac{R}{2}\left(\operatorname{sen}^2\frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon - \operatorname{sen}\varepsilon}{\pi}\right),$$

$$E' = \frac{R}{2}\left(1 + \cos^2\frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon - \operatorname{sen}\varepsilon}{\pi}\right).$$

Per piccoli valori di ε si ha di quì

$$E = R\left(\frac{\varepsilon^2}{8} - \frac{\varepsilon^3}{12\pi}\right), \qquad E' = R\left(1 - \frac{\varepsilon^2}{8} - \frac{\varepsilon^3}{12\pi}\right),$$

$$E + E' = R\left(1 - \frac{\varepsilon^3}{6\pi}\right).$$

Queste formole possono servire di complemento ai risultati dell'ingegnosa analisi approssimata di GREEN, cui abbiamo già fatto allusione, (§ 7).

Dalle espressioni (19_b) si desumono quelle delle densità h, h', sulle due faccie concava e convessa, mediante le formole

$$(19_e) \qquad h = \frac{1}{2\pi\rho}\frac{dE_\rho}{d\rho}, \qquad h' = \frac{1}{2\pi\rho}\frac{dE'_\rho}{d\rho},$$

e queste, sviluppate, riproducono i valori che si trovano cogli altri metodi, i quali non conducono direttamente alle formole (19_b). Omettiamo di dare tale sviluppo e facciamo invece un'osservazione su questi valori delle densità.

§ 9.

Breve disgressione.

La differenza delle cariche sulle due faccie d'una medesima zona è data, per le formole (19_b), da

$$E'_\rho - E_\rho = \frac{\rho^2 - \rho_0^2}{4R} = \frac{\sigma}{4\pi R},$$

dove σ è l'area della zona. Ne risulta, (19_e), che la differenza delle densità sulle due faccie è costante in ogni punto ed è uguale a

$$\frac{1}{4\pi R}.$$

Per comprendere *a priori* la ragione di questo fatto, il quale non è peculiare al caso della calotta, consideriamo la funzione potenziale

$$V = \int \frac{h\, d\sigma}{r}$$

d'una distribuzione semplice, di densità per ora qualunque, esistente sulla superficie sferica di raggio R, essendo r la distanza dell'elemento superficiale $d\sigma$ dal punto qualunque M, cui si riferisce la funzione V. Se r' è la distanza dello stesso elemento $d\sigma$ dal punto M', inverso di M rispetto alla sfera σ, il valore V' di V in questo secondo punto, cioè il valore

$$V' = \int \frac{h\, d\sigma}{r'},$$

è legato a V dalla nota relazione

$$V' = \frac{\xi}{R} V,$$

dove ξ è la distanza del punto M dal centro della sfera. Denotando con ξ' l'analoga distanza del punto M' e tenendo conto della relazione $\xi \xi' = R^2$, si trova

$$-\frac{R^2}{\xi^2} \frac{\partial V'}{\partial \xi'} = \frac{V}{R} + \frac{\xi}{R} \frac{\partial V}{\partial \xi}.$$

Facendo quindi tendere il punto M, e però anche M', verso la superficie sferica e supponendo il primo interno, il secondo esterno a questa, si ha

$$(a) \qquad \frac{\partial V}{\partial n} - \frac{\partial V'}{\partial n'} = \frac{V}{R},$$

dove n è la normale interna, n' l'esterna.

Ciò posto se la distribuzione di potenziale V è quella dell'elettricità in equilibrio sopra un conduttore di spessore infinitamente piccolo, la cui superficie media possa considerarsi come una porzione (del resto *qualunque*) di superficie sferica di raggio R, e se si suppone $V = 1$ nella massa di questo conduttore, le densità h ed h' dei due strati esistenti sulle faccie di normali n ed n' (la cui somma equivarrebbe alla h che entrava nell'espressione di V) sono date dalle formole

$$h = -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial V}{\partial n}, \qquad h' = -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial V}{\partial n'},$$

e l'equazione precedente dà

$$h - h' = \frac{1}{4\pi R}.$$

Di qui risulta poi immediatamente, designando con E_σ, E'_σ le cariche su due porzioni finite corrispondenti delle faccie concava e convessa, di comune area σ, che si ha anche

$$E'_\sigma - E_\sigma = \frac{\sigma}{4\pi R}\,.$$

È da queste relazioni più generali che scaturiscono, come caso particolare, quelle di cui la calotta sferica offre l'esempio.

Osserviamo, per incidenza, che se di nuovo si considera la superficie sferica σ come sede d'una distribuzione semplice di densità h, combinando l'equazione (a) colla

$$\frac{\partial V}{\partial n} + \frac{\partial V'}{\partial n'} = -4\pi h,$$

si ottiene

$$(b) \qquad 2\frac{\partial V}{\partial n} + 4\pi h = \frac{V_\sigma}{R}, \qquad 2\frac{\partial V'}{\partial n'} + 4\pi h = -\frac{V_\sigma}{R},$$

dove V_σ designa il comune valore di V e di V' nel punto di σ ove sono erette le normali n, n'. Da queste relazioni si ha

$$2\int \frac{\partial V}{\partial n}\frac{d\sigma}{r} + 4\pi V = \frac{1}{R}\int \frac{V_\sigma d\sigma}{r},$$

$$2\int \frac{\partial V'}{\partial n'}\frac{d\sigma}{r'} + 4\pi V' = -\frac{1}{R}\int \frac{V_\sigma d\sigma}{r'};$$

ma dal teorema di Green si ha pure

$$\int \frac{\partial V}{\partial n}\frac{d\sigma}{r} = \int V_\sigma \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} d\sigma - 4\pi V,$$

$$\int \frac{\partial V'}{\partial n'}\frac{d\sigma}{r'} = \int V_\sigma \frac{\partial \frac{1}{r'}}{\partial n'} d\sigma - 4\pi V',$$

quindi

$$(c) \qquad \left\{ \begin{aligned} V &= \frac{1}{4\pi R}\int V_\sigma \left(2R\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} - \frac{1}{r} \right) d\sigma, \\ V' &= \frac{1}{4\pi R}\int V_\sigma \left(2R\frac{\partial \frac{1}{r'}}{\partial n'} - \frac{1}{r'} \right) d\sigma, \end{aligned} \right.$$

formole note, di uso molto comodo. Del resto le relazioni (a), (b) sono già state stabilite da GREEN (*Essay*, Art. 10), partendo dallo sviluppo di LAPLACE.

§ 10.

Trasformazioni diverse.

Nella già citata mia Nota del 1877 avevo stabilito la forma delle funzioni associate V e W per ogni distribuzione simmetrica sopra un disco circolare (veggasi anche BETTI, pag. 158). Quella forma può chiamarsi *ellittica*, in quanto implica anche le coordinate ellittiche del punto potenziato, mentre quella usata nel presente lavoro può chiamarsi *cartesiana*, in quanto non implica che le coordinate cartesiane u, χ del detto punto.

La verificazione *diretta* dell'identità fra le due funzioni (7_a) e quelle della Nota citata richiederebbe calcoli lunghi e prolissi. Ma la considerazione dell'unica funzione U, (7), da cui dipendono le V, W, (7_a), permette di giungere molto facilmente, con un opportuno artifizio, alle forme ellittiche delle stesse due funzioni V, W.

Osserviamo infatti che, in virtù dell'equazione (8), la funzione U può essere primieramente scritta sotto la forma

$$U = 2\int_0^a F'(t)S\,dt.$$

Osserviamo inoltre che, eliminando χ fra le due equazioni (8_a), si ha

$$u^2 = (t^2 + S^2)\left(1 - \frac{T^2}{t^2}\right), \qquad \chi^2 = S^2\frac{T^2}{t^2},$$

donde risulta

$$\frac{u^2}{t^2 + S^2} + \frac{\chi^2}{S^2} = 1,$$

equazione la quale, ponendo

$$t = a\sqrt{1-\mu}, \qquad S = \lambda\sqrt{1-\mu},$$

diventa

$$\mu = 1 - \frac{u^2}{a^2+\lambda^2} - \frac{\chi^2}{\lambda^2}. \tag{20}$$

Assumendo come variabile d'integrazione μ invece di t, la funzione U diventa al tempo stesso

$$U = a\int_0^1 F'(a\sqrt{1-\mu})\lambda\,d\mu,$$

dove λ è definita, mercè l'equazione (20), in funzione di μ e di u, χ.

Ciò premesso, facciamo variare u e z, dando a queste coordinate gli incrementi infinitesimi δu e δz: il corrispondente incremento δU della funzione U sarà dato da

$$\delta U = a \int_0^1 F'(a\sqrt{1-\mu})\,\delta\lambda\, d\mu,$$

dove $\delta\lambda$ è definito, in virtù dell'equazione (20), il cui primo membro deve mantenersi costante, dall'equazione

$$(20_a)\qquad \delta\mu + \frac{\partial\mu}{\partial\lambda}\delta\lambda = 0,$$

nella quale si è posto

$$(20_b)\qquad \delta\mu = -\frac{2u\,\delta u}{a^2+\lambda^2} - \frac{2z\,\delta z}{\lambda^2}.$$

Ora se si designa con λ_0 la radice positiva (unica) dell'equazione (20) per $\mu = 0$, e se si osserva che, mentre λ cresce da $\lambda = \lambda_0$ a $\lambda = \infty$, la quantità μ cresce da $\mu = 0$ a $\mu = 1$, si scorge che, assumendo come variabile d'integrazione λ in luogo di μ, si ha

$$\delta U = a \int_{\lambda_0}^{\infty} F'(a\sqrt{1-\mu})\,\delta\lambda \frac{\partial\mu}{\partial\lambda} d\lambda;$$

dunque, (20_a),

$$\delta U = -a \int_{\lambda_0}^{\infty} F'(a\sqrt{1-\mu})\,\delta\mu\, d\lambda,$$

ossia, (20_b),

$$\delta U = 2au\,\delta u \int_{\lambda_0}^{\infty} \frac{F'(a\sqrt{1-\mu})\,d\lambda}{a^2+\lambda^2} + 2az\,\delta z \int_{\lambda_0}^{\infty} \frac{F'(a\sqrt{1-\mu})\,d\lambda}{\lambda^2},$$

equazione dalla quale si trae

$$\frac{\partial U}{\partial u} = 2au \int_{\lambda_0}^{\infty} \frac{F'(a\sqrt{1-\mu})\,d\lambda}{a^2+\lambda^2},$$

$$\frac{\partial U}{\partial z} = 2az \int_{\lambda_0}^{\infty} \frac{F'(a\sqrt{1-\mu})\,d\lambda}{\lambda^2}.$$

Poichè dunque le funzioni (7_a) furono ricavate da U colle formole

$$V = \frac{1}{u}\frac{\partial U}{\partial u}, \qquad W = \frac{\partial U}{\partial z},$$

è chiaro che, ponendo

$$(21)\qquad F'(a\sqrt{1-\mu}) = \pi a \varphi(\mu),$$

esse possono anche esprimersi nel modo seguente

$$(21_a)\qquad \begin{cases} V = 2\pi a^2 \displaystyle\int_{\lambda_0}^{\infty} \frac{\varphi(\mu)\,d\lambda}{a^2+\lambda^2}, \\[2ex] W = 2\pi a^2 z \displaystyle\int_{\lambda_0}^{\infty} \frac{\varphi(\mu)\,d\lambda}{\lambda^2}, \end{cases}$$

e queste sono appunto le formole stabilite nella Nota citata. Le equazioni (10), (10_a) della presente Memoria si convertono, mercè la formola (21), nelle analoghe equazioni già dimostrate in quel primo scritto per la funzione $\varphi(\mu)$. L'attuale deduzione di V, W dalla funzione U venne in altro modo giustificata nella Nota del 1878 *Sulle funzioni potenziali di sistemi simmetrici intorno ad un asse* *).

Vi è ancora un'altra forma notevole delle funzioni V, W, forma la quale potrebbe chiamarsi *circolare*, in causa del significato geometrico della nuova variabile d'integrazione che in essa interviene. Pongasi

$$\lambda = a\varkappa\sqrt{\frac{\zeta}{c}},$$

dove $\varkappa$ è la nuova variabile anzidetta, c una costante *positiva* e ζ il valore *assoluto* di z. Per tale sostituzione l'equazione (20) si converte nella seguente

$$\mu = \frac{c}{a^2}\left(\frac{a^2}{c} - \frac{u^2}{c+\varkappa^2\zeta} - \frac{\zeta}{\varkappa^2}\right),$$

la quale può scriversi anche così:

$$u^2 + \zeta^2 - \left[\frac{a^2(1-\mu)\varkappa^2}{c} - \frac{c}{\varkappa^2}\right]\zeta = a^2(1-\mu),$$

o più semplicemente, riponendo t al posto di $a\sqrt{1-\mu}$,

$$(22)\qquad u^2 + \zeta^2 - \left(\frac{t^2\varkappa^2}{c} - \frac{c}{\varkappa^2}\right)\zeta = t^2;$$

e le espressioni (21_a), riponendo la funzione F al posto di φ mediante la relazione

*) Rendiconti del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, serie II, vol. XI (1878), pp. 668-680; oppure queste OPERE, tomo III, pp. 115-128.

(21), diventano similmente

$$(22_a)\qquad \begin{cases} V = 2\sqrt{c\zeta}\displaystyle\int_{x_0}^{\infty}\frac{F'(t)\,dx}{c+x^2\zeta}, \\ W = 2\dfrac{z}{\zeta}\sqrt{c\zeta}\displaystyle\int_{x_0}^{\infty}\frac{F'(t)\,dx}{x^2}, \end{cases}$$

dove x_0 è la radice positiva (unica) dell'equazione (22) per $t = a$.

È chiaro che mentre, rispetto alle formole (21_a), l'equazione $\mu = 0$ rappresenta una famiglia di ellissoidi di rotazione, aventi per comun cerchio focale il solito disco circolare di raggio a; rispetto invece alle formole (22_a), l'equazione $t = a$ (trasformata della $\mu = 0$) rappresenta una famiglia di calotte sferiche, tutte terminate all'orlo del disco stesso.

Quando si fa l'inversione rispetto ad un punto dell'asse, lasciando inalterata la circonferenza base di tutte queste calotte (come si è veduto nell'esempio svolto più sopra), esse non fanno che trasformarsi le une nelle altre. In tale inversione giova considerare l'equazione (22) sotto la forma

$$(22_b)\qquad u^2 + \left(\zeta + \frac{c}{x^2}\right)\left(\zeta - \frac{t^2 x^2}{c}\right) = 0 .$$

La forma circolare (22_a) delle funzioni associate si presta molto opportunamente alla trattazione dei problemi relativi alla calotta sferica. Ma non è mia intenzione di addentrarmi per ora in tale argomento, bastandomi d'aver mostrato il vantaggio che si può ritrarre dall'uso delle funzioni associate, sotto la forma che ho detto cartesiana.

LXXVI.

SUR LES COUCHES DE NIVEAU ÉLECTROMAGNÉTIQUES.

Acta Mathematica, tomo III (1884), pp. 141-152.

Tout le monde connaît les élégantes propriétés des surfaces et des couches de niveau par rapport aux masses agissant d'après la loi de NEWTON, ainsi que la belle application que ces propriétés reçoivent dans l'étude des systèmes ellipsoïdaux.

Des propriétés tout-à-fait analogues ont lieu par rapport aux actions électromagnétiques. Dès 1872, dans une courte note insérée au *Nuovo Cimento* *), j'ai indiqué des systèmes de courants, auxquels j'ai donné le nom (qui peut-être n'a pas été parfaitement bien choisi) de *solenoïdes neutres*, et qui présentent des analogies très-frappantes avec les couches de niveau. J'ai montré, un peu plus tard (en 1874), dans les *Ricerche sulla cinematica dei fluidi* **), que l'on rencontre une application très-simple de ces systèmes chez les surfaces de second ordre: seulement ces surfaces ne sont pas, cette fois, des ellipsoïdes, mais des hyperboloïdes à une nappe.

J'ai quelque raison de croire que la connaissance de ces propriétés n'est pas aussi généralement répandue qu'elle pourrait l'être. C'est pourquoi je prends la permission d'en présenter un exposé succinct aux lecteurs de ce Journal, d'autant plus que des recherches postérieures me permettent d'en abréger considérablement la démonstration. Je m'étais d'abord servi du théorème de GREEN, et ce procédé est sans doute le plus naturel et le plus direct, lorsque l'on tient compte d'une remarque due à M. W. THOMSON

*) V. queste OPERE, tomo II, pp. 188-201.

**) Memorie dell'Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna, serie III, tomi I, II, III, V; oppure queste OPERE, tomo II, pp. 202-379.

(*Reprint*, § 515). Mais les fonctions qu'il faut considérer n'étant pas, en général, monodromes, l'emploi de ce théorème exige, comme on sait d'après M. HELMHOLTZ, quelques modifications qui compliquent un peu les raisonnements. Je suivrai donc une autre voie, en m'appuyant sur les formules qui servent à définir les systèmes de courants dont l'action extérieure est la même que celle d'un corps magnétique donné. J'ai eu tout récemment l'occasion d'établir ces formules d'une manière rigoureuse, dans une *Note* communiquée à l'Institut Royal de Milan (séance du 12 Avril 1883) *).

Je vais d'abord rappeler ces formules, ainsi que les conventions sur lesquelles elles reposent.

Soit S l'espace occupé par un corps magnétique et soient α, β, γ trois fonctions monodromes, continues et finies des coordonnées x, y, z, représentant les composantes suivant les axes du moment magnétique (rapporté à l'unité de volume) au point (x, y, z) de l'espace S. L'action que le corps exerce sur un point extérieur quelconque est identique, comme on sait d'après AMPÈRE, à l'action électromagnétique exercée, sur ce même point, par un certain système de courants constants et fermés qui circulent en partie dans l'espace S, en partie sur la surface σ qui termine cet espace. Pour définir complètement ce système il faut connaître les composantes u, v, w de l'intensité spécifique (de volume) en tout point (x, y, z) de l'espace S et les composantes $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$ de l'intensité spécifique (de superficie) en tout point (x, y, z) de la surface σ. Or ces six quantités sont données en fonction des composantes α, β, γ du moment magnétique par les formules très-simples

$$(1)\qquad u=\frac{\partial\beta}{\partial z}-\frac{\partial\gamma}{\partial y},\qquad v=\frac{\partial\gamma}{\partial x}-\frac{\partial\alpha}{\partial z},\qquad w=\frac{\partial\alpha}{\partial y}-\frac{\partial\beta}{\partial x},$$

$$(1_a)\qquad \boldsymbol{u}=\beta\frac{\partial z}{\partial n}-\gamma\frac{\partial y}{\partial n},\qquad \boldsymbol{v}=\gamma\frac{\partial x}{\partial n}-\alpha\frac{\partial z}{\partial n},\qquad \boldsymbol{w}=\alpha\frac{\partial y}{\partial n}-\beta\frac{\partial x}{\partial n},$$

où n est la normale intérieure à la surface σ (voir le *Reprint* de THOMSON, § 554, ou la *Note* citée ci-dessus).

Il est commode de transformer les trois dernières formules. On a d'abord

$$(2)\qquad \boldsymbol{u}\frac{\partial x}{\partial n}+\boldsymbol{v}\frac{\partial y}{\partial n}+\boldsymbol{w}\frac{\partial z}{\partial n}=0,$$

relation dont la nécessité découle de la définition même des quantités $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$. Menons, ensuite, par le point (x, y, z) de la surface deux éléments linéaires orthogonaux ds, $d\nu$ de cette surface, de telle manière que les trois directions ds, $d\nu$, dn soient con-

*) *Sulla equivalenza delle distribuzioni magnetiche e galvaniche;* queste OPERE, tomo IV, pp. 16-32.

gruentes à celles des axes positifs des x, y, z. On tire alors des équations (1_a)

$$u\frac{\partial x}{\partial \nu} + v\frac{\partial y}{\partial \nu} + w\frac{\partial z}{\partial \nu} + \alpha\frac{\partial x}{\partial s} + \beta\frac{\partial y}{\partial s} + \gamma\frac{\partial z}{\partial s} = 0,$$

et l'on reconnaît très-aisément que les quantités u, v, w, assujetties à la condition (2), ne peuvent satisfaire à cette dernière équation, quel que soit le couple orthogonal $(ds, d\nu)$, qu'en prenant les valeurs (1_a). La dernière équation peut être encore simplifiée. Soit j l'intensité spécifique dont u, v, w sont les composantes suivant les axes, et soit j_ν la composante de cette même intensité suivant une direction quelconque ν: on peut alors écrire

$$(2_a) \qquad j_\nu ds + \alpha dx + \beta dy + \gamma dz = 0,$$

où dx, dy, dz sont les composantes, suivant les axes, de l'élément linéaire ds, et où ν indique la direction de l'élément linéaire normal à ds, dans le sens précis qui a été indiqué ci-dessus.

Cela posé, nous considérerons une distribution de magnétisme très-particulière. On sait déjà par Poisson que lorsque les composantes du moment magnétique satisfont aux conditions

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial y} + \frac{\partial \gamma}{\partial z} = 0 \qquad \text{en tout point de } S,$$

$$\alpha\frac{\partial x}{\partial n} + \beta\frac{\partial y}{\partial n} + \gamma\frac{\partial z}{\partial n} = 0 \qquad \text{» » » » } \sigma,$$

la fonction potentielle magnétique est partout nulle. Mais nous supposerons, *en outre*, qu'il existe une fonction φ des points de S, telle que l'on ait

$$(3) \qquad \alpha = -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \qquad \beta = -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial \varphi}{\partial y}, \qquad \gamma = -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

et que l'on ait aussi, par conséquent,

$$(3_a) \qquad \Delta_2 \varphi = 0 \qquad \text{en tout point de } S,$$

$$(3_b) \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0 \qquad \text{» » » » } \sigma.$$

Les égalités (3) exigent que les premières dérivées de φ soient monodromes, continues et finies en tous les points de S. Si donc on veut pouvoir satisfaire en même temps aux conditions (3_a), (3_b), sans que φ devienne constante, il faut supposer que l'espace S soit infini, ou, s'il est fini, qu'il ne soit pas simplement connexe; et, dans ce second cas, il faut que la fonction φ ne soit pas monodrome dans cet espace. Cette fonction peut, en effet, être envisagée comme le potentiel des vitesses d'un liquide incompressible, mobile dans l'espace S. (Pour fixer les idées, il est bon d'avoir en vue le cas simple d'un espace S fini et doublement connexe, c'est-à-dire d'une surface σ tubulaire et rentrante).

Les équations (1) donnent $u = v = w = 0$, d'où il suit qu'il n'y a pas de courants dans l'espace S. L'équation (2_a) donne de son côté

$$(3_c) \qquad j_\nu \, ds = \frac{d\varphi}{4\pi},$$

d'où il suit $j_\nu = 0$ pour $d\varphi = 0$: il n'y a donc de courants que sur la surface σ et ces courants circulent le long des lignes d'intersection de cette surface avec les surfaces $\varphi =$ Const. Si la direction ν est celle du courant, on a, pour l'intensité vraie du courant qui circule dans la bande comprise entre les deux lignes contigües $\varphi =$ Const., $\varphi + d\varphi =$ Const.,

$$j \, ds = \frac{d\varphi}{4\pi}.$$

On peut dire aussi que l'intensité spécifique j est donnée par la formule

$$(3_d) \qquad j = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial\varphi}{\partial N},$$

où N est la normale aux surfaces $\varphi =$ Const., de sorte que cette intensité j a la même expression, au signe près, que la densité d'une couche de niveau sur une de ces surfaces. D'une manière ou d'autre, on voit que la fonction φ régit la marche aussi bien que l'intensité de tous les courants du système.

De l'équivalence de ce système avec le corps magnétique on conclut immédiatement que l'action des courants est nulle au dehors de l'espace S. Pour calculer cette action dans l'espace S lui-même, il suffit de se rappeler qu'à l'intérieur d'un corps magnétique les composantes de la force, suivant la définition dite *électromagnétique,* sont données par les dérivées négatives de la fonction potentielle (qui est nulle dans notre cas) augmentées respectivement de $4\pi\alpha$, $4\pi\beta$, $4\pi\gamma$. Cette force n'est d'ailleurs autre chose que celle due au système de courants équivalents: donc, (3), les composantes cherchées sont

$$-\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \qquad -\frac{\partial\varphi}{\partial y}, \qquad -\frac{\partial\varphi}{\partial z}.$$

On peut maintenant écarter tout à fait la considération du corps magnétique et envisager φ comme fonction potentielle électromagnétique de courants existant en dehors de l'espace S. On a alors le théorème suivant, dans l'énoncé duquel on a rétabli la généralité des hypothèses essentielles:

Soit φ *la fonction potentielle électromagnétique d'un système* Γ *de courants et soit* σ *une surface, lieu géométrique de lignes de force extérieures relatives à ces courants, et partageant l'espace infini en deux régions,* S *et* S', *dont la première ne renferme aucune partie de* Γ. *Si l'on fait parcourir cette surface par un système de courants* (solénoïde neutre), *dont l'intensité spécifique* (de superficie) *soit*

$$j = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \varphi}{\partial N},$$

N *étant la normale aux surfaces* $\varphi = Const.$, *l'action électromagnétique de ce système est nulle dans tout l'espace* S' *et est identique, dans tout l'espace* S, *à celle du système primitif* Γ.

On peut ajouter que l'intensité *totale* du solénoïde est égale à celle du système Γ, lorsque les lignes de force dont σ est le lieu géométrique entourent *tous* les courants de ce système.

L'analogie de ces énoncés avec ceux qui se rapportent aux couches de niveau ordinaires est évidente. Cette analogie paraît encore plus complète si l'on tient compte d'une propriété importante établie dès 1870 par M. BOLTZMANN *) relativement au potentiel d'un solénoïde neutre sur lui-même, potentiel qui est exprimé par

$$-\frac{1}{8\pi} \int \Delta_1 \varphi . dS.$$

On peut encore généraliser le théorème précédent, de manière à comprendre le cas qui a été considéré par M. BERTRAND par rapport aux distributions de masse ordinaires. On trouve alors que si le solénoïde orthogonal sépare deux parties, Γ_S et $\Gamma_{S'}$, du système Γ, son action en S est égale à celle de la partie $\Gamma_{S'}$, tandis que son action en S' est égale et contraire à celle de la partie Γ_S. (Cette différence de signes est naturellement subordonnée au choix que l'on a fait du sens des courants du solénoïde).

Considérons un exemple très-simple. Supposons que le système Γ se réduise à un seul courant rectiligne et indéfini, auquel cas les surfaces $\varphi =$ Const. sont des plans menés par cet *axe*. Toute surface de révolution autour de ce même axe peut jouer le rôle de surface σ, pourvu que la ligne méridienne ne coupe pas l'axe et soit une courbe fermée ou à branches infinies. Les courants de ce solénoïde étant distribués uniformément le long des lignes méridiennes et leur intensité totale étant égale à celle du courant *axial*, l'action du solénoïde dans l'espace annulaire est identique à celle de ce courant. Par conséquent, s'il existe, dans cet espace annulaire, une masse de fer doux, l'induction magnétique exercée sur cette masse par le solénoïde est nécessairement la

*) Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. LXXIII, pp. 111-134.

même que si, le solénoïde étant supprimé, la masse était exposée à l'action du courant axial de même intensité. D'après cela, lorsque la masse de fer doux a elle-aussi la forme d'un anneau de révolution autour de l'axe (la section étant quelconque), sa surface devient un lieu de lignes de force inductrices. Or chaque fois que la surface d'un corps magnétique isotrope est un lieu de lignes de force inductrices, la solution du problème d'induction est immédiatement donnée par la seule inspection de l'équation fondamentale de Poisson [la magnétisation induite rentre alors dans le type (3), (3_a), (3_b), où φ est *proportionnelle* à la fonction potentielle des forces inductrices extérieures]. On est ramené ainsi, dans le cas très-particulier de l'anneau de révolution, au résultat que M. Kirchhoff a établi par le calcul direct (*Gesammelte Abhandlungen*, p. 226) *).

Voyons maintenant l'application que l'on peut faire des propriétés précédemment établies aux surfaces de second ordre.

Désignons pas u, v, w les trois racines réelles de l'équation en λ

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda}+\frac{y^2}{b^2+\lambda}+\frac{z^2}{c^2+\lambda}=1,$$

en supposant

$$\infty > u > -c^2 > v > -b^2 > w > -a^2;$$

et posons

$$U=\int_{-c^2}^{u}\frac{du}{\sqrt{F(u)}},\qquad V=\int_{-b^2}^{v}\frac{dv}{\sqrt{-F(v)}},\qquad W=\int_{-a^2}^{w}\frac{dw}{\sqrt{F(w)}},$$

où

$$F(\lambda)=(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda).$$

Nous fixerons tout-à-l'heure le signe des radicaux sous les intégrales U, V, W: en attendant, nous désignerons par H, I, K les valeurs absolues de ces trois intégrales, lorsque les variables u, v, w y atteignent leurs limites supérieures (respectives) ∞, $-c^2$, $-b^2$.

On sait que l'élément linéaire de l'espace est donné, en u, v, w, par l'équation

$$4ds^2=(u-v)(u-w)dU^2+(u-v)(v-w)dV^2+(u-w)(v-w)dW^2,$$

d'où l'on tire

$$\Delta_1 U=\frac{4}{(u-v)(u-w)},\qquad \Delta_1 V=\frac{4}{(u-v)(v-w)},\qquad \Delta_1 W=\frac{4}{(u-w)(v-w)}.$$

---

*) Il n'est pas inutile de remarquer qu'il y a deux cas généraux où le problème de l'induction magnétique admet une solution immédiate. Le premier est celui où la surface qui termine le corps est de niveau par rapport aux forces inductrices: c'est le cas qui a servi à M. Thomson pour expliquer les résultats de Faraday au sujet de l'induction électrostatique. Le second est celui dont il est question ci-dessus.

De ces dernières expressions on conclut, comme on sait, que les dérivées des fonctions U, V, W par rapport à x, y, z sont finies partout, excepté le long de l'ellipse focale, pour U, de l'hyperbole focale, pour V, et de ces deux lignes à la fois, pour W. Les dérivées secondes de ces trois fonctions satisfont aux équations

$$\Delta_2 U = 0 , \qquad \Delta_2 V = 0 , \qquad \Delta_2 W = 0$$

partout où elles sont finies.

D'après cela, si on considère un des hyperboloïdes à une nappe, que nous désignerons par σ et qui sera défini par une valeur particulière v_0 de v, et si, pour distinguer entre elles les deux régions de l'espace qui sont séparées par cette surface, l'on indique par S celle où se trouve le centre et par S' la région annulaire extérieure, on voit que les dérivées

$$\frac{\partial U}{\partial x}, \qquad \frac{\partial U}{\partial y}, \qquad \frac{\partial U}{\partial z}$$

sont finies en tout point de S et que les dérivées

$$\frac{\partial W}{\partial x}, \qquad \frac{\partial W}{\partial y}, \qquad \frac{\partial W}{\partial z}$$

sont finies en tout point de S'.

Pour que les dérivées de U deviennent aussi *continues* en S, il suffit de changer le signe au radical $\sqrt{F(u)}$ chaque fois que le point (x, y, z) traverse le plan $z = 0$, où ce radical s'annule. De même, pour que les dérivées de W deviennent aussi continues en S', il suffit de changer le signe au radical $\sqrt{F(w)}$ chaque fois que le point (x, y, z) traverse les deux plans $x = 0$, $y = 0$, où ce radical s'annule. Afin de satisfaire à ces deux conditions, nous conviendrons de donner toujours au radical $\sqrt{F(u)}$ le même signe que z et au radical $\sqrt{F(w)}$ le signe contraire à celui du produit xy. Par ces conventions, lorsque le point (x, y, z) ira de $z = -\infty$ à $z = +\infty$ par un chemin quelconque en S, la fonction *monodrome* U passera avec continuité de la valeur $-H$ à la valeur $+H$; et lorsque le point (x, y, z) décrira en S' un chemin fermé autour de l'hyperboloïde (v_0), la fonction *polidrome* W passera avec continuité de la valeur W, qu'elle possédait au point de départ, à la valeur $W + 4K$ qu'elle prendra au même point, après le tour complet (en sens positif). Par ces mêmes conventions, si l'on désigne par s l'arc de l'une quelconque des courbes à branches infinies

$$v = \text{Const.}, \qquad w = \text{Const.},$$

qui existent dans l'espace S, et par s' l'arc de l'une quelconque des courbes fermées

$$u = \text{Const.}, \qquad v = \text{Const.},$$

qui existent en S', on aura

$$\frac{\partial U}{\partial s} = \frac{2}{\sqrt{(u-v)(u-w)}}, \qquad \frac{\partial W}{\partial s'} = \frac{2}{\sqrt{(u-w)(v-w)}}$$

(radicaux toujours positifs), les arcs s et s' croissant dans les sens indiqués ci-dessus. On voit donc que ces dérivées, ainsi que celles prises par rapport à x, y, z (que l'on déduit immédiatement des précédentes), sont bien réellement monodromes, continues et finies dans les espaces (respectifs) S et S', et qu'elles deviennent, à l'infini, infiniment petites du second ordre par rapport à l'inverse du rayon vecteur.

(On peut faire des considérations tout-à-fait analogues sur la fonction V, qui est de l'espèce de W).

Les fonctions U et W étant définies de la sorte, rien ne s'oppose désormais à ce que nous considérions ces fonctions comme des cas particuliers de celle que nous avions désignée par φ, c'est-à-dire que nous prenions $\varphi = U$, par rapport à l'espace S, et $\varphi = W$, par rapport à l'espace S'. On a alors sur l'hyperboloïde σ deux systèmes de courants et on peut immédiatement énoncer les théorèmes suivants:

Si les lignes de courbure elliptiques de l'hyperboloïde à une nappe (v_0) *sont parcourues par des courants, avec l'intensité spécifique*

$$j = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial U}{\partial N},$$

où N est la normale aux ellipsoïdes, l'action électromagnétique de ce système de courants est nulle dans l'espace S' et a la fonction potentielle U (à une constante près) dans l'espace S.

Si les lignes de courbure hyperboliques du même hyperboloïde sont parcourues par des courants, avec l'intensité spécifique

$$j = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial W}{\partial N},$$

où N est la normale aux hyperboloïdes à deux nappes, l'action électromagnétique de ce second système de courants est nulle dans l'espace S et a la fonction potentielle W (à une constante près) dans l'espace S'.

On peut considérer U comme la fonction potentielle de courants $\Gamma_{S'}$ existant dans l'espace S' et W comme la fonction potentielle de courants Γ_S existant dans l'espace S. Ces courants peuvent prendre, évidemment, des dispositions très-variées. On peut, par exemple, concevoir $\Gamma_{S'}$ comme étant formé de courants disposés suivant les lignes de courbure elliptiques d'un hyperboloïde à une nappe au paramètre $v > v_0$, ou même, à la limite, suivant les ellipses du plan $z = 0$ homofocales et extérieures à l'ellipse focale: la loi de distribution de ces courants serait la même que pour ceux de l'hyperboloïde (v_0); seulement il faudrait, dans le cas limite, en doubler l'intensité. On peut, par la même raison, concevoir Γ_S comme étant formé de courants disposés suivant les lignes de courbure hyperboliques d'un hyperboloïde à une nappe au paramètre $v < v_0$, ou même, à la limite, suivant les hyperboles du plan $y = 0$ homofocales et intérieures à l'hyperbole focale (avec les mêmes remarques touchant la loi de distribution).

Si on fait coexister, sur un même hyperboloïde (v_0), les deux systèmes de courants qui circulent le long des lignes de courbure, on obtient un nouveau système, dont les courants parcourent les lignes

$$\varphi = U + W = \text{Const.}$$

ou les lignes

$$\varphi = U - W = \text{Const.},$$

suivant le sens des deux systèmes composants. Il est facile de voir que ces lignes ne sont autres que les génératrices rectilignes de l'hyperboloïde (ce qui n'est qu'une forme particulière du théorème d'addition). L'intensité du courant composé qui parcourt la bande comprise entre deux génératrices contigües est donnée par la formule générale

$$\frac{d\varphi}{4\pi};$$

mais on peut aussi exprimer l'intensité spécifique au moyen de la troisième fonction V, que nous n'avons pas encore mise en oeuvre. En effet l'élément linéaire de l'hyperboloïde étant donné par l'équation

$$4\,ds^2 = (u - w)[(u - v_0)\,dU^2 + (v_0 - w)\,dW^2],$$

la condition d'orthogonalité de deux éléments ds, δs du même hyperboloïde est

$$(u - v_0)\,dU\,\delta U + (v_0 - w)\,dW\,\delta W = 0.$$

Si le second élément appartient à l'une des génératrices rectilignes, savoir si l'on a $\delta U \pm \delta W = 0$, cette condition se réduit à

$$(u - v_0)\,dU \mp (v_0 - w)\,dW = 0.$$

De cette équation et de $dU \pm dW = d\varphi$ on tire

$$dU = \frac{v_0 - w}{u - w}\,d\varphi, \qquad dW = \pm\frac{u - v_0}{u - w}\,d\varphi,$$

et, par suite, la distance normale ds des deux génératrices φ et $\varphi + d\varphi$, au point considéré, est donnée par

$$4\,ds^2 = (u - v_0)(v_0 - w)\,d\varphi^2,$$

d'où l'on tire

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial s}\right)^2 = \Delta_1 V.$$

L'intensité spécifique des courants rectilignes peut donc s'exprimer, abstraction faite du signe (que l'on détermine aisément d'après les conventions), par

$$j = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial V}{\partial N},$$

où N est la normale à l'hyperboloïde (v_0).

Ainsi l'on a cet autre théorème:

Le système des courants qui parcourent les génératrices rectilignes, d'une même famille, de l'hyperboloïde (v_0), *avec l'intensité spécifique*

$$j = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial V}{\partial N},$$

où N est la normale à cette même surface, a, dans l'espace S, la fonction potentielle U (à une constante et au signe près) *et, dans l'espace S', la fonction potentielle W* (à une constante et au signe près).

Le choix des signes de U et de W dépend du sens des courants rectilignes (nous omettons la discussion de ces signes, qui n'offre aucune difficulté).

On reconnaît aisément que ce dernier théorème n'est qu'un cas particulier de celui que nous avions énoncé pour le cas où la surface σ sépare le système Γ en deux parties. Sous ce point de vue Γ_S et $\Gamma_{S'}$ pourraient être, par exemple, les deux couches focales (électromagnétiques).

D'après ce qui précède, les lignes de courbure et les lignes asymptotiques de l'hyperboloïde à une nappe reçoivent une application électromagnétique très-simple. Dans cette application toutes les racines de l'équation cubique bien connue trouvent leur emploi, tandis qu'une seule de ces racines figure dans les applications qui se rattachent à la théorie du potentiel ordinaire.

LXXVII.

INTORNO AD UN PROBLEMA RELATIVO ALLA TEORIA DELLE CORRENTI STAZIONARIE.

Rendiconti del Reale Istituto Lombardo, serie II, tomo XVII (1884), pp. 538-546.

In una Nota inserita in questi Atti nel 1878 *) ho indicato un procedimento, mediante il quale, dalla conoscenza delle funzioni associate di un sistema simmetrico qualunque, si può passare facilmente a quella delle analoghe funzioni per il sistema, pure simmetrico, ottenuto dal precedente coll'inversione rispetto ad un punto dell'asse di simmetria. Di tale procedimento ho fatto nel 1882 l'applicazione ad un problema di elettrostatica **). Mi propongo ora di indicare un'altra semplicissima applicazione dello stesso metodo, relativa alla teoria delle correnti stazionarie.

Il procedimento in questione, enunciato sotto la forma adottata nella seconda delle citate Memorie, consiste in ciò che segue: Sia U la funzione potenziale d'un sistema simmetrico, V la funzione associata, talchè si abbia

$$\frac{\partial V}{\partial u}=u\frac{\partial U}{\partial z}, \qquad \frac{\partial V}{\partial z}=-u\frac{\partial U}{\partial u}, \tag{1}$$

dove u è la distanza del punto variabile dall'asse di simmetria e z la distanza dello stesso punto da un piano fisso, normale a quest'asse. Si determini la funzione W, in-

---

*) *Sulle funzioni potenziali di sistemi simmetrici intorno ad un asse* [Rendiconti del R. Istituto Lombardo, serie II, tomo XI (1878), pp. 668-680, oppure queste OPERE, tomo III, pp. 115-128].

**) Nella Memoria: *Sulle funzioni associate e specialmente su quelle della calotta sferica* [Memorie della R. Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna, serie IV, tomo IV (1882), pp. 211-246; oppure queste OPERE, t. IV, pp. 45-76].

tegrando il differenziale esatto

$$(1_a) \qquad dW = U d\frac{z}{\rho} + V d\frac{1}{\rho},$$

dove ρ è la distanza del punto variabile dall'origine ($u=0$, $z=0$). Coll'ajuto di questa funzione W si possono determinare in due modi le funzioni associate U', V' del sistema ottenuto dal precedente coll'inversione rispetto all'origine. Si può, in primo luogo, porre

$$W' = C W\rho,$$

dove C è una costante, e, dopo avere espresso W' colle coordinate u', z' del punto inverso di (u, z), si ha l'equazione analoga alla (1_a)

$$dW' = U' d\frac{z'}{\rho'} + V' d\frac{1}{\rho'},$$

che individua le funzioni U', V'. Oppure si può porre addirittura, designando con R il raggio d'inversione,

$$(1_b) \qquad U' = CU\rho, \qquad V' = CR^2\left(W - \frac{V}{\rho}\right),$$

equazioni i cui secondi membri debbono esprimersi in funzione delle coordinate del punto inverso. Usando questa seconda maniera, giova approfittare dell'eguaglianza

$$(1_c) \qquad d\left(W - \frac{V}{\rho}\right) = d\left(\frac{Uz}{\rho}\right) - \frac{z\,dU + dV}{\rho},$$

che risulta dall'equazione (1_a) ed il cui secondo membro si può fare anche dipendere, mercè le equazioni (1), dalla sola funzione U.

Ciò premesso, consideriamo il moto stazionario dell'elettricità in una sfera di centro O, di raggio R e di conducibilità γ, messa in comunicazione con una corrente d'intensità I nei due punti P, P' della sua superficie. La funzione potenziale interna dell'elettricità libera è stata determinata, per questo caso, da FELICI, fino dal 1847, nell'antico *Cimento*. (Veggasi anche la *Nuova nota sulla propagazione dell'elettricità voltaica nell'interno di una sfera,* inserita dallo stesso Autore, nel luglio 1854, negli antichi Annali di TORTOLINI, dove la soluzione è estesa al caso dei poli interni). La detta funzione, considerata sotto la forma ad essa assegnata nel 1853 da HELMHOLTZ (*Wissenschaftliche Abhandlungen,* T. I, p. 496), è la seguente:

$$(2'') \qquad U = \frac{I}{4\pi\gamma}\left(\frac{2}{r} - \frac{2}{r'} + \frac{1}{R}\log\frac{r' + R - \rho\cos\theta'}{r + R - \rho\cos\theta}\right),$$

dove r, r' sono le distanze di un punto qualunque dello spazio sferico da P, P', e dove θ, θ' sono gli angoli che il raggio vettore ρ, condotto dal centro O al detto punto, fa coi raggi condotti a P, P'. Denominando U' la funzione potenziale esterna della stessa elettricità, si trova facilmente, coll'inversione rispetto alla superficie sferica $\rho = R$,

$$(2') \qquad U' = \frac{I}{4\pi\gamma}\left(\frac{2}{r} - \frac{2}{r'} + \frac{1}{\rho}\log\frac{r' + \rho - R\cos\theta'}{r + \rho - R\cos\theta}\right),$$

dove r, r', ρ sono le distanze di un punto esterno qualunque da P, P' O. La densità dell'elettricità libera è data da

$$(2'') \qquad h = \frac{I}{\gamma(4\pi R)^2}\left[\frac{1}{\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}} - \frac{1}{\operatorname{sen}\frac{\theta'}{2}} + \log\frac{\operatorname{sen}\frac{\theta'}{2}\left(1 + \operatorname{sen}\frac{\theta'}{2}\right)}{\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\left(1 + \operatorname{sen}\frac{\theta'}{2}\right)}\right].$$

Il sistema qui considerato diventa simmetrico rispetto all'asse PP' quando i punti P, P' sono diametralmente opposti. In questo caso, assumendo per piano $z = 0$ il piano dell'equatore, si ha

$$(3) \qquad U = \frac{I}{4\pi\gamma}\left(\frac{2}{r} - \frac{2}{r'} + \frac{1}{R}\log\frac{r' + R + z}{r + R - z}\right),$$

$$(3') \qquad U' = \frac{I}{4\pi\gamma}\left(\frac{2}{r} - \frac{2}{r'} + \frac{1}{\rho}\log\frac{r' + \rho + R\cos\theta}{r + \rho - R\cos\theta}\right),$$

dove θ conserva il significato di prima. Questo valore di U', nel quale ρ è il raggio vettore del punto esterno, corrisponde a quello dato dalla prima equazione (1_b), qualora si ponga

$$(3_a) \qquad C = \frac{1}{R}.$$

La densità h si può esprimere, in questo caso particolare, colla formola

$$(3_b) \qquad h = \frac{I}{\gamma(4\pi R)^2}\left(\frac{1}{\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}} - \frac{1}{\operatorname{sen}\frac{\theta'}{2}} + \log\frac{\operatorname{tg}\frac{\theta'}{4}}{\operatorname{tg}\frac{\theta}{4}}\right),$$

dove $\theta' = \pi - \theta$. Essa è quindi nulla all'equatore ed eguale e contraria su due paralleli equidistanti da questo.

Per trovare la funzione V, associata ad U, basta osservare che per la funzione

$$U = \frac{1}{r},$$

dove r è la distanza di un punto variabile da un punto fisso dell'asse di simmetria, si ha

$$V = \frac{\partial r}{\partial z};$$

e che per la funzione

$$U = \log(r + R \pm z), \qquad [r = \sqrt{u^2 + (z \pm R)^2}]$$

la quale è pure una funzione potenziale, si trova facilmente, mediante le equazioni (1),

$$V = \pm r - z.$$

Si ha quindi, per la funzione V associata alla (3),

$$V = \frac{I}{4\pi\gamma}\left[2\frac{\partial(r-r')}{\partial z} + \frac{r+r'}{R}\right],$$

espressione la quale, tenendo conto delle relazioni

$$r^2 = u^2 + (z - R)^2, \qquad r'^2 = u^2 + (z + R)^2,$$

si riduce agevolmente alla forma

$$(4) \qquad V = \frac{I}{8\pi R\gamma}\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'}\right)(r^2 + r'^2 - 4R^2).$$

Ne segue che l'equazione delle correnti che esistono in ciascun piano meridiano è

$$\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'}\right)(4R^2 - r^2 - r'^2) = c,$$

dove c è una costante che può prendere tutti i valori fra 0 e $4R$. Per $c = 0$ si hanno le correnti semicircolari che lambiscono la superficie della sfera, per $c = 4R$ si ha la corrente rettilinea che va dal polo P al polo P'.

Resta da determinare la funzione V' associata ad U', ed a questo uopo, anzichè operare direttamente su quest'ultima funzione, ci varremo delle formole (1_a), (1_b), (1_c), approfittando, come precedentemente, della possibilità di scomporre le funzioni U, V in parti corrispondenti e di formare la funzione W per ciascuna di queste parti.

Considerando i termini corrispondenti della forma

$$U_1 = \frac{1}{r}, \qquad V_1 = \frac{z - R}{r},$$

si ha, (1_a),

$$dW_1 = \frac{1}{r}d\frac{z}{\rho} + \frac{z-R}{r}d\frac{1}{\rho} = \frac{\rho\, dz + (R - 2z)\,d\rho}{r\rho^2}$$

e si trova subito

$$W_1 = -\frac{r}{R\rho}, \qquad W_1 - \frac{V_1}{\rho} = \frac{Rz - \rho^2}{Rr\rho}.$$

Cambiando R in $-R$ si ottiene di qui

$$U_2 = \frac{1}{r'}, \qquad V_2 = \frac{z + R}{r'},$$

$$W_2 = \frac{r'}{R\rho}, \qquad W_2 - \frac{V_2}{\rho} = \frac{Rz + \rho^2}{Rr'\rho}.$$

Consideriamo in secondo luogo i termini corrispondenti della forma

$$U_3 = \log(r + R - z), \qquad V_3 = -(r + z).$$

Dalla equazione (1_c) si ha

$$d\left(W_3 - \frac{V_3}{\rho}\right) = d\left[\frac{z\log(r + R - z)}{\rho}\right] + \frac{(r + R - 2z)dr + (r + R)dz}{(r + R - z)\rho}.$$

Si verifica facilmente che l'ultimo termine del secondo membro ha per integrale

$$\log\frac{r + R + \rho}{r + R - \rho},$$

epperò si ha

$$W_3 - \frac{V_3}{\rho} = \frac{z\log(r + R - z)}{\rho} - \log\frac{r + R - \rho}{r + R + \rho}.$$

Similmente, per

$$U_4 = \log(r' + R + z), \qquad V_4 = r' - z,$$

si ottiene

$$W_4 - \frac{V_4}{\rho} = \frac{z\log(r' + R + z)}{\rho} + \log\frac{r' + R - \rho}{r' + R + \rho}.$$

Ricomponendo insieme queste diverse espressioni, nel modo indicato dalla formola (2), si ottiene

$$W - \frac{V}{\rho} = \frac{I}{4\pi R\gamma}\left[\frac{2Rz}{\rho}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r'}\right) - 2\rho\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'}\right)\right.$$
$$\left. + \frac{z}{\rho}\log\frac{r' + R + z}{r + R - z} + \log\frac{(r + R - \rho)(r' + R - \rho)}{(r + R + \rho)(r' + R + \rho)}\right].$$

L'ultimo termine del secondo membro può essere semplificato, perchè, tenendo conto delle relazioni

$$r^2 = \rho^2 + R^2 - 2Rz, \qquad r'^2 = \rho^2 + R^2 + 2Rz,$$

si trova

$$(r+R+\rho)(r'+R+\rho)=\tfrac{1}{2}(r+r'+2R)(r+r'+2\rho),$$

$$(r+R-\rho)(r'+R-\rho)=\tfrac{1}{2}(r+r'+2R)(r+r'-2\rho).$$

Anche il penultimo termine può essere trasformato, giacchè, eliminandone z mediante la relazione

$$r'^2-r^2=4Rz,$$

si trova

$$r+R-z=\frac{(r+r'+2R)(r-r'+2R)}{4R},$$

$$r'+R+z=\frac{(r+r'+2R)(r'-r+2R)}{4R}.$$

Si può dunque scrivere

$$W-\frac{V}{\rho}=\frac{I}{4\pi R\gamma}\left\{\frac{z}{\rho}\left[2\left(\frac{R}{r}-\frac{R}{r'}\right)+\log\frac{2R+r'-r}{2R+r-r'}\right]+\log\frac{r+r'-2\rho}{r+r'+2\rho}-2\left(\frac{\rho}{r}+\frac{\rho}{r'}\right)\right\}.$$

Ora non resta che da introdurre in questa espressione le coordinate r, r', ρ del punto inverso, e per operare tale trasformazione basta osservare che le quantità

$$\frac{r}{\rho},\quad \frac{r'}{\rho},\quad \frac{R}{\rho}$$

si convertono nelle

$$\frac{r}{R},\quad \frac{r'}{R},\quad \frac{\rho}{R}$$

e reciprocamente, mentre la quantità

$$\frac{z}{\rho}$$

rimane invariata, come coseno di un angolo invariabile. Si ottiene così, (1_b), (3_a),

$$(4')\quad V'=\frac{I}{4\pi\gamma}\left(2\frac{z-R}{r}-2\frac{z+R}{r'}+\frac{z}{\rho}\log\frac{2\rho+r'-r}{2\rho+r-r'}+\log\frac{r+r'-2R}{r+r'+2R}\right).$$

Tale è la funzione V' associata ad U', cioè quella funzione che, eguagliata ad una costante arbitraria, rappresenta, in ogni piano meridiano, le linee di forza esterne dell'elettricità libera.

Considerando due punti simmetrici rispetto al piano dell'equatore, è evidente che le quantità

$$r,\quad r',\quad \rho,\quad z$$

relative all'uno di essi, sono rispettivamente eguali alle quantità

$$r', \quad r, \quad \rho, \quad -z$$

relative all'altro. In base a ciò si riconosce immediatamente che le linee di forza esterne sono, come le correnti interne, simmetriche rispetto al piano dell'equatore. Ne segue che la linea di forza che esce da un punto della superficie sferica torna a raggiungere questa superficie nel punto simmetrico ad esso rispetto all'equatore.

Nei punti della superficie sferica si ha

$$\rho = R, \qquad z = R\cos\theta, \qquad r = 2R\,\text{sen}\,\frac{\theta}{2}, \qquad r' = 2R\cos\frac{\theta}{2},$$

quindi la funzione V' ha in questi punti i valori dati dall'espressione

$$\frac{I}{4\pi\gamma}\left(-2\,\text{sen}\frac{\theta}{2} - 2\cos\frac{\theta}{2} + \cos\theta\log\frac{1+\cos\frac{\theta}{2}-\text{sen}\frac{\theta}{2}}{1-\cos\frac{\theta}{2}+\text{sen}\frac{\theta}{2}} + \log\frac{\cos\frac{\theta}{2}+\text{sen}\frac{\theta}{2}-1}{\cos\frac{\theta}{2}+\text{sen}\frac{\theta}{2}+1}\right),$$

la quale si semplifica alquanto introducendo di nuovo l'angolo $\theta' = \pi - \theta$, giacchè essa diventa

$$\frac{I}{4\pi\gamma}\left[-2\,\text{sen}\,\frac{\theta}{2} - 2\,\text{sen}\,\frac{\theta'}{2} + \cos\theta\log\left(\cot\frac{\theta}{4}\,\text{tg}\frac{\theta'}{4}\right) + \log\left(\text{tg}\,\frac{\theta}{4}\,\text{tg}\,\frac{\theta'}{4}\right)\right],$$

o meglio

$$\frac{I}{2\pi\gamma}\left(-\,\text{sen}\,\frac{\theta}{2} - \text{sen}\,\frac{\theta'}{2} + \text{sen}^2\frac{\theta}{2}\log\text{tg}\,\frac{\theta}{4} + \text{sen}^2\frac{\theta'}{2}\log\text{tg}\,\frac{\theta'}{4}\right).$$

Quest'espressione prende in amendue i poli il valore

$$-\frac{I}{2\pi\gamma}.$$

Poichè dunque si può sempre disporre d'una costante additiva, giova considerare, in luogo della precedente, l'espressione

$$(5) \qquad \Theta = \frac{I}{2\pi\gamma}\left(1 - \text{sen}\,\frac{\theta}{2} - \text{sen}\,\frac{\theta'}{2} + \text{sen}^2\frac{\theta}{2}\log\text{tg}\,\frac{\theta}{4} + \text{sen}^2\frac{\theta'}{2}\log\text{tg}\,\frac{\theta'}{4}\right),$$

la quale si annulla ai due poli.

Così determinato il valore di V' alla superficie della sfera, se si denota con E la carica della calotta limitata dal parallelo θ e comprendente il polo P, si ha, per note proprietà delle funzioni associate,

$$E = -\frac{\Theta}{2},$$

e questo valore s'accorda esattamente con quello che si deduce tenendo conto della formola (3_b). La carica dell'emisfero di centro P è data quindi da

$$E = \frac{I}{4\pi\gamma}[\sqrt{2} - 1 - \log(\sqrt{2} - 1)] = 0,1031\,\frac{I}{\gamma};$$

quella dell'altro emisfero è eguale e contraria.

Per ben comprendere la distribuzione delle linee di forza esterne, bisogna considerare i seguenti tre valori particolari del loro parametro V':

$$V' = 0,$$

$$V' = -\frac{I}{2\pi\gamma},$$

$$V' = -\frac{I}{2\pi\gamma}[\sqrt{2} + \log(\sqrt{2} + 1)].$$

Il primo di questi valori corrisponde [come risulta dall'equazione (4')] alla linea di forza costituita dai due opposti prolungamenti del diametro PP'; il secondo è (come abbiamo veduto dianzi) il limite dei valori che assume V' sulla superficie sferica per $\theta = 0$ e per $\theta = \pi$; il terzo è il valore di V' lungo l'equatore della superficie sferica $\left(\theta = \frac{\pi}{2}\right)$. Le linee di forza il cui parametro V' è compreso fra il primo ed il secondo valore partono tutte dal polo P e vanno al polo P'. Quelle invece il cui parametro V' è compreso fra il secondo ed il terzo valore vanno da un parallelo della superficie sferica al parallelo simmetrico: l'ultima di queste linee si riduce ad un punto dell'equatore. Denominando ϑ l'angolo che una linea del primo gruppo fa in P od in P' coll'asse prolungato, si trova

$$V' = -\frac{I}{\pi\gamma}\,\mathrm{sen}^2\frac{\vartheta}{2}:$$

quindi le linee comuni al primo ed al secondo gruppo sono tangenti alla superficie sferica nei due poli P, P'.

LXXVIII.

SULLA RAPPRESENTAZIONE DELLE FORZE NEWTONIANE PER MEZZO DI FORZE ELASTICHE.

Rendiconti del Reale Istituto Lombardo, serie II, tomo XVII (1884), pp. 581-590.

Non mi propongo, in questa breve Nota, di arrecare alcun nuovo contributo ad una ricerca importantissima, che occupa da qualche tempo i fisici più eminenti; mi permetto soltanto di comunicare un procedimento semplice ed uniforme col quale si giunge direttamente alle espressioni delle sei forze elastiche capaci di rappresentare le ordinarie forze elettriche e magnetiche. Per conseguire maggior brevità, mi restringerò a considerare il caso più semplice, cioè quello in cui non esiste polarizzazione: ma il procedimento si può estendere, con alcune modificazioni, al caso più generale.

Giova premettere, come lemma, la deduzione di una formola che somministra, in forma appropriata all'uopo, la variazione del potenziale di un sistema di masse.

Sia V la funzione potenziale d'un sistema di masse m, che supporremo dapprima concentrate in punti isolati, e sia P il potenziale di questo sistema sopra sè stesso. Immaginiamo che ciascuna massa m subisca uno spostamento ed indichiamo con V' e P' i valori di V e di P dopo tale spostamento. Denotando, per semplicità, con m il punto occupato dalla massa m prima dello spostamento, con μ il punto occupato dalla stessa massa $m=\mu$ dopo lo spostamento e distinguendo cogli indici m, μ i valori di V e di V' in questi punti, si ha, per definizione,

$$2P = \Sigma m V_m, \qquad 2P' = \Sigma \mu V'_\mu$$

e, per il teorema di reciprocità,

$$\Sigma m V'_m = \Sigma \mu V_\mu .$$

Dalle due equazioni che così risultano

$$2(P' - P) = \Sigma m(V'_\mu - V_m), \qquad 0 = \Sigma m(V_\mu - V'_m),$$

si deduce

$$2(P' - P) = \Sigma m[(V_\mu - V_m) - (V'_m - V'_\mu)].$$

Ora supponiamo che lo spostamento sia infinitesimo e che per esso un punto qualunque (x, y, z) vada ad occupare il posto $(x + \delta x,\ y + \delta y,\ z + \delta z)$. Ponendo

$$V'_\mu - V_m = \delta V_m, \qquad P' - P = \delta P,$$

e denotando colle caratteristiche d e d' gli incrementi che riceve una funzione di x, y, z quando queste variabili ricevono gli incrementi δx, δy, δz, oppure $-\delta x$, $-\delta y$, $-\delta z$, cioè ponendo

$$d = \delta x \frac{\partial}{\partial x} + \delta y \frac{\partial}{\partial y} + \delta z \frac{\partial}{\partial z},$$

$$d' = -\delta x \frac{\partial}{\partial x} - \delta y \frac{\partial}{\partial y} - \delta z \frac{\partial}{\partial z},$$

si ha

$$V_\mu - V_m = d V_m,$$

$$V'_m - V'_\mu = d' V'_\mu = d' V_m + d' \delta V_m$$

(x, y, z essendo le coordinate di m ed $x + \delta x$, $y + \delta y$, $z + \delta z$ quelle di μ). Trascurando il termine d'ordine superiore, si ottiene dunque

$$(1) \qquad 2\delta P = \Sigma m(dV - d'V),$$

dove il valore di V si riferisce al punto materiale m.

Passiamo ora al caso d'un sistema continuo a due ed a tre dimensioni. Se il punto m, cui si riferisce la funzione V, appartiene ad una superficie materiale del sistema, e se si designano con V_n, $V_{n'}$ i valori di V nell'immediata prossimità di m, dalla parte della normale n e da quella della normale opposta n', è facile riconoscere che si ha sempre

$$dV - d'V = dV_n + dV_{n'}.$$

All'equazione (1) si può quindi dare la forma

$$(1_a) \qquad 2\delta P = \int (dV_n + dV_{n'})\, dm,$$

ritenendo che l'integrale si estenda a *tutti* gli elementi di massa del sistema. Nelle regioni in cui dm fa parte d'una distribuzione a tre dimensioni, la direzione n non è più determinata: ma, qualunque essa sia, si ha sempre (in tali regioni)

$$d V_n = d V_{n'} = d V,$$

e la quantità sotto l'integrale prende l'ordinaria forma $2\, dm\, dV$.

Ciò premesso, consideriamo un dato sistema di masse, distribuite in due e tre dimensioni, cioè colla densità k nello spazio infinito S e colla densità h sopra una o più superficie σ, indi poniamo, designando con V una funzione delle coordinate,

$$(2)\qquad \begin{cases} H = h + \dfrac{1}{4\pi}\left(\dfrac{\partial V}{\partial n} + \dfrac{\partial V}{\partial n'}\right), & \text{in ogni punto di } \sigma, \\[2ex] K = k + \dfrac{1}{4\pi}\Delta_2 V, & \text{in ogni punto di } S. \end{cases}$$

Quando V è la funzione potenziale del sistema (h, k) si ha

$$(2_a)\qquad \begin{cases} H = 0, & \text{in ogni punto di } \sigma, \\ K = 0, & \text{in ogni punto di } S. \end{cases}$$

Sia U un'altra funzione delle coordinate, che supporremo continua in tutto lo spazio ad eccezione dei punti delle superficie σ, sulle due faccie delle quali essa potrà avere valori diversi, che designeremo con U_n, $U_{n'}$. Formando l'espressione

$$(3)\qquad [U, V] = \int H \frac{U_n + U_{n'}}{2} d\sigma + \int K U dS$$

e tenendo conto dell'identità

$$\int U \Delta_2 V dS = \int \Sigma \frac{\partial}{\partial x}\left(U \frac{\partial V}{\partial x}\right) dS - \int \Delta_1(U, V) dS$$

$$= - \int \left(U_n \frac{\partial V}{\partial n} + U_{n'} \frac{\partial V}{\partial n'}\right) d\sigma - \int \Delta_1(U, V) dS,$$

si trova

$$(3_a)\qquad [U, V] = \int h \frac{U_n + U_{n'}}{2} d\sigma + \int k U dS$$

$$- \frac{1}{4\pi}\int \Delta_1(U, V) dS - \frac{1}{8\pi}\int (U_n - U_{n'})\left(\frac{\partial V}{\partial n} - \frac{\partial V}{\partial n'}\right) d\sigma.$$

Questa formola, i cui due membri sono, (2_a), identicamente nulli quando V è la funzione potenziale del sistema (h, k), si presta a molte applicazioni importanti.

Supponiamo, in primo luogo, che U sia una funzione potenziale della stessa specie di V, talchè si abbia $U_n = U_{n'}$ in ogni punto di σ. Denominando Q il potenziale mutuo dei due sistemi cui appartengono le funzioni potenziali U e V, l'equazione $[U, V] = 0$ dà

$$Q = \int h U d\sigma + \int k U dS = \frac{1}{4\pi} \int \Delta_1(U, V) dS,$$

e, per $U = V$,

$$(4) \qquad P = \frac{1}{2} \int h V d\sigma + \frac{1}{2} \int k V dS = \frac{1}{8\pi} \int \Delta_1 V . dS,$$

dove P è il potenziale del sistema (h, k) sopra sè stesso.

Poniamo, in secondo luogo, $U = \delta V$, dove δV è una variazione arbitraria, ma continua in tutto lo spazio, della funzione V, cioè un incremento variabile, ma continuo, che si concepisce attribuito in ogni punto dello spazio a questa funzione, considerata indipendentemente dal nesso (2_a) coi valori dati di h e k. Essendo, per tale ipotesi, $\delta V_n = \delta V_{n'}$, si ha

$$[\delta V, V] = \int h \delta V d\sigma + \int k \delta V dS - \frac{1}{4\pi} \int \Delta_1(V, \delta V) dS.$$

Ma avendosi evidentemente

$$\Delta_1(V, \delta V) = \frac{1}{2} \delta \Delta_1 V,$$

se si pone

$$(5) \qquad W = \int h V d\sigma + \int k V dS - \frac{1}{8\pi} \int \Delta_1 V dS,$$

si ha

$$[\delta V, V] = \delta W,$$

talchè le relazioni (2_a) dànno

$$(5_a) \qquad \delta W = 0.$$

Reciprocamente, avendosi in generale, (3),

$$\delta W = \int H \delta V d\sigma + \int K \delta V dS,$$

la condizione (5_a), supposta soddisfatta da ogni sistema continuo di valori della variazione δV, trae con sè le due equazioni (2_a). Si può dunque dire che la funzione potenziale V del sistema $[h, k]$ ha la proprietà di annullare la variazione prima dell'espressione W, (5). Questa espressione è d'altronde tale che, quando V rappresenti in essa la funzione potenziale del sistema (h, k), si ha, (4),

$$(5_b) \qquad W = P,$$

cosicchè, in questo caso, W non è che una particolare espressione dell'energia potenziale del detto sistema.

Poniamo finalmente

$$U = dV = \frac{\partial V}{\partial x}\delta x + \frac{\partial V}{\partial y}\delta y + \frac{\partial V}{\partial z}\delta z,$$

dove V è la funzione potenziale del sistema (h, k) e dove δx, δy, δz sono variazioni arbitrarie, ma dovunque continue, delle coordinate x, y, z di un punto qualunque dello spazio. In questo caso le quantità $U_n = dV_n$, $U_{n'} = dV_{n'}$ sono diseguali e si ha, (3_a),

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} 0 = &\int h\frac{dV_n + dV_{n'}}{2}d\sigma + \int k\,dV\,dS - \frac{1}{4\pi}\int \Sigma\Delta_1\left(V, \frac{\partial V}{\partial x}\delta x\right)dS \\ &- \frac{1}{8\pi}\int (dV_n - dV_{n'})\left(\frac{\partial V}{\partial n} - \frac{\partial V}{\partial n'}\right)d\sigma. \end{aligned}\right.$$

Le varie parti del secondo membro di questa equazione possono essere opportunamente trasformate.

In primo luogo, dall'equazione (1_a) risulta immediatamente

$$(6_a)\qquad \int h\frac{dV_n + dV_{n'}}{2}d\sigma + \int k\,dV\,dS = \delta P,$$

dove δP è l'incremento che riceve l'energia potenziale del sistema (h, k) quando ogni punto (x, y, z) di questo subisce lo spostamento $(\delta x, \delta y, \delta z)$.

In secondo luogo, essendo, come è noto, costantemente nulla la differenza $V_n - V_{n'}$ lungo le superficie σ, ed essendo quindi continue le derivate di V tangenzialmente a queste superficie, si ha

$$dV_n - dV_{n'} = \left(\frac{\partial V_n}{\partial n} - \frac{\partial V_{n'}}{\partial n}\right)\delta n,$$

dove δn è la componente dello spostamento $(\delta x, \delta y, \delta z)$ secondo la normale n. Quest'eguaglianza si può scrivere anche così

$$dV_n - dV_{n'} = \left(\frac{\partial V}{\partial n} + \frac{\partial V}{\partial n'}\right)\delta n,$$

epperò si ha

$$(dV_n - dV_{n'})\left(\frac{\partial V}{\partial n} - \frac{\partial V}{\partial n'}\right) = \left[\left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)^2 - \left(\frac{\partial V}{\partial n'}\right)^2\right]\delta n,$$

o meglio, per la dianzi rammentata continuità delle derivate tangenziali,

$$(6_b)\qquad (dV_n - dV_{n'})\left(\frac{\partial V}{\partial n} - \frac{\partial V}{\partial n'}\right) = (\Delta_1 V_n - \Delta_1 V_{n'})\delta n.$$

In terzo ed ultimo luogo si ha

$$\Delta_1\left(V,\ \frac{\partial V}{\partial x}\delta x\right)=\Delta_1\left(V,\ \frac{\partial V}{\partial x}\right)\delta x+\Delta_1(V,\ \delta x)\frac{\partial V}{\partial x}=\frac{1}{2}\frac{\partial \Delta_1 V}{\partial x}\delta x+\Delta_1(V,\ \delta x)\frac{\partial V}{\partial x}$$

$$=\frac{1}{2}\frac{\partial(\Delta_1 V,\ \delta x)}{\partial x}-\frac{1}{2}\Delta_1 V\frac{\partial \delta x}{\partial x}+\Delta_1(V,\ \delta x)\frac{\partial V}{\partial x},$$

epperò

$$(6_c)\quad\left\{\begin{aligned}&-\frac{1}{4\pi}\int\Sigma\Delta_1\left(V,\ \frac{\partial V}{\partial x}\delta x\right)dS=\frac{1}{8\pi}\int(\Delta_1 V_n-\Delta_1 V_{n'})\delta n\,d\sigma\\&+\frac{1}{4\pi}\int\left[-\Sigma\Delta_1(V,\ \delta x)\frac{\partial V}{\partial x}+\frac{1}{2}\Delta_1 V\left(\frac{\partial \delta x}{\partial x}+\frac{\partial \delta y}{\partial y}+\frac{\partial \delta z}{\partial z}\right)\right]dS.\end{aligned}\right.$$

In virtù delle formole (6_a), (6_b), (6_c) l'equazione (6) diventa

$$\delta P+\frac{1}{4\pi}\int\left[-\Sigma\Delta_1(V,\ \delta x)\frac{\partial V}{\partial x}+\frac{1}{2}\Delta_1 V\left(\frac{\partial \delta x}{\partial x}+\frac{\partial \delta y}{\partial y}+\frac{\partial \delta z}{\partial z}\right)\right]dS=0$$

e, svolgendo l'espressione contenuta sotto il segno integrale, si ottiene finalmente

$$(7)\quad\left\{\begin{aligned}&\delta P+\int\left[X_x\frac{\partial \delta x}{\partial x}+Y_y\frac{\partial \delta y}{\partial y}+Z_z\frac{\partial \delta z}{\partial z}\right.\\&\left.+Y_z\left(\frac{\partial \delta z}{\partial y}+\frac{\partial \delta y}{\partial z}\right)+Z_x\left(\frac{\partial \delta x}{\partial z}+\frac{\partial \delta z}{\partial x}\right)+X_y\left(\frac{\partial \delta y}{\partial x}+\frac{\partial \delta x}{\partial y}\right)\right]dS=0,\end{aligned}\right.$$

dove si è posto

$$(7_a)\quad\left\{\begin{aligned}X_x&=-\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2+\frac{1}{8\pi}\Delta_1 V,\\Y_y&=-\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2+\frac{1}{8\pi}\Delta_1 V,\\Z_z&=-\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2+\frac{1}{8\pi}\Delta_1 V,\\Y_z&=Z_y=-\frac{1}{4\pi}\frac{\partial V}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial z},\\Z_x&=X_z=-\frac{1}{4\pi}\frac{\partial V}{\partial z}\frac{\partial V}{\partial x},\\X_y&=Y_x=-\frac{1}{4\pi}\frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial y},\end{aligned}\right.$$

Per tal guisa il decremento $-\delta P$ del potenziale, cioè il lavoro delle forze newtoniane durante l'immaginato spostamento, si presenta sotto la forma d'un lavoro di forze elastiche $(X_x, X_y, \ldots)$ svolto durante lo spostamento medesimo. La natura di queste ultime forze si riconosce facilmente, determinando le componenti

$$X_n = X_x \frac{\partial x}{\partial n} + X_y \frac{\partial y}{\partial n} + X_z \frac{\partial z}{\partial n},$$

$$Y_n = Y_x \frac{\partial x}{\partial n} + Y_y \frac{\partial y}{\partial n} + Y_z \frac{\partial z}{\partial n},$$

$$Z_n = Z_x \frac{\partial x}{\partial n} + Z_y \frac{\partial y}{\partial n} + Z_z \frac{\partial z}{\partial n}$$

della pressione unitaria esercitata sopra un qualunque elemento piano, di normale n, considerato come limite di un corpo situato dalla parte di questa normale. Si trova infatti

$$(7_b)\qquad \begin{cases} X_n = -\dfrac{1}{4\pi}\dfrac{\partial V}{\partial n}\dfrac{\partial V}{\partial x} + \dfrac{1}{8\pi}\Delta_1 V_n \dfrac{\partial x}{\partial n}, \\[2ex] Y_n = -\dfrac{1}{4\pi}\dfrac{\partial V}{\partial n}\dfrac{\partial V}{\partial y} + \dfrac{1}{8\pi}\Delta_1 V_n \dfrac{\partial y}{\partial n}, \\[2ex] Z_n = -\dfrac{1}{4\pi}\dfrac{\partial V}{\partial n}\dfrac{\partial V}{\partial z} + \dfrac{1}{8\pi}\Delta_1 V_n \dfrac{\partial z}{\partial n}, \end{cases}$$

cosicchè la detta pressione si può considerare come la risultante delle due forze

$$\frac{1}{8\pi}\Delta_1 V_n, \qquad \frac{1}{4\pi}\frac{\partial V}{\partial n}\sqrt{\Delta_1 V_n},$$

dirette: la prima nel senso della normale n, la seconda nel senso della forza di potenziale V. Quando l'elemento piano contiene la direzione di quest'ultima forza, si ha $\dfrac{\partial V}{\partial n} = 0$ e l'elemento sopporta unicamente una *pressione* normale di valore $\dfrac{1}{8\pi}\Delta_1 V_n$. Quando invece la direzione n coincide con quella della forza di potenziale V, si ha

$$-\frac{\partial V}{\partial n} = \sqrt{\Delta_1 V_n}$$

e l'elemento piano sopporta unicamente una *tensione* normale, il cui valore è numericamente eguale a quello della pressione relativa al caso precedente. In ogni altro caso la pressione (o la tensione) è obliqua all'elemento piano.

L'equazione (7) può essere verificata *a posteriori*. Ponendo infatti

$$\frac{\partial X_x}{\partial x}+\frac{\partial X_y}{\partial y}+\frac{\partial X_z}{\partial z}=-X,$$

$$\frac{\partial Y_x}{\partial x}+\frac{\partial Y_y}{\partial y}+\frac{\partial Y_z}{\partial z}=-Y,$$

$$\frac{\partial Z_x}{\partial x}+\frac{\partial Z_y}{\partial y}+\frac{\partial Z_z}{\partial z}=-Z,$$

essa si trasforma nella seguente

$$(7_c)\quad\left\{\begin{aligned}&\delta P+\int(X\delta x+Y\delta y+Z\delta z)dS\\&+\int[(X_n+X_{n'})\delta x+(Y_n+Y_{n'})\delta y+(Z_n+Z_{n'})\delta z]d\sigma=0.\end{aligned}\right.$$

Ora dalle formole (7_a) risulta

$$X=\frac{1}{4\pi}\Delta_2 V.\frac{\partial V}{\partial x},\qquad Y=\frac{1}{4\pi}\Delta_2 V.\frac{\partial V}{\partial y},\qquad Z=\frac{1}{4\pi}\Delta_2 V.\frac{\partial V}{\partial z},$$

donde

$$X\delta x+Y\delta y+Z\delta z=\frac{1}{4\pi}\Delta_2 V.dV.$$

Così dalle formole (7_b) risulta

$$X_n\delta x+Y_n\delta y+Z_n\delta z=\frac{1}{4\pi}\frac{\partial V}{\partial n}dV_n-\frac{1}{8\pi}\Delta_1 V_n.\delta n,$$

$$X_{n'}\delta x+Y_{n'}\delta y+Z_{n'}\delta z=\frac{1}{4\pi}\frac{\partial V}{\partial n'}dV_{n'}+\frac{1}{8\pi}\Delta_1 V_{n'}.\delta n,$$

donde, tenendo conto dell'eguaglianza (6_b),

$$(X_n+X_{n'})\delta x+(Y_n+Y_{n'})\delta y+(Z_n+Z_{n'})\delta z=\frac{1}{8\pi}\left(\frac{\partial V}{\partial n}+\frac{\partial V}{\partial n'}\right)(dV_n+dV_{n'}).$$

In virtù delle equazioni (2_a) si ha quindi

$$X\delta x+Y\delta y+Z\delta z=-k\,dV,$$

$$(X_n+X_{n'})\delta x+(Y_n+Y_{n'})\delta y+(Z_n+Z_{n'})\delta z=-h\frac{dV_n+dV_{n'}}{2}$$

e l'equazione (7_c) diventa

$$\delta P=\int h\frac{dV_n+dV_{n'}}{2}d\sigma+\int k\,dV\,dS,$$

riproducendo così, come venne già espresso nella formola (6_a), il valore di δP che risulta dal teorema (1_a).

Questo procedimento di verificazione, seguito in ordine inverso, costituisce a un dipresso la dimostrazione data da Maxwell nella seconda edizione del *Treatise* (T. I, p. 144). L'analisi più comprensiva di Helmholtz *) si fonda invece sulla proprietà (5_a) di un'espressione analoga alla (5); e di questo metodo si vale pure Kirchhoff in una recentissima Memoria **).

*) Monatsberichte der Akademie d. Wiss. zu Berlin, 1881; Wissenschaftliche Abhandlungen, t. I, p. 798.

**) Sitzungsberichte der Akademie d. Wiss. zu Berlin, 28 febbraio 1884.

LXXIX.

SULLA TEORIA DELL'INDUZIONE MAGNETICA SECONDO POISSON.

Memorie della Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna, serie IV, tomo V (1883), pp. 551-584.

La teoria matematica dei fenomeni d'induzione magnetica, data da Poisson, se, per una parte, è stata sempre ed è tuttavia riguardata come uno dei non minori titoli di gloria dell'eminente geometra francese, ha sollevato, per altra parte, obbiezioni gravissime.

Queste obbiezioni sono di due specie diverse. Le une, promosse principalmente dagli sperimentatori, tendono ad infirmare il principio cardinale della teoria ed hanno un reale fondamento nel non perfetto accordo che regna fra i risultati di essa e quelli dell'esperienza. Le altre, promosse invece dai matematici, prescindono dalla questione di principio, e colpiscono i procedimenti di calcolo coi quali Poisson ha dedotte le equazioni d'induzione dalle ipotesi che servono di base alla sua teoria, procedimenti i quali in molti punti sono indubbiamente privi di rigore.

Questi due ordini di questioni non sono punto indipendenti fra di loro, poichè non si può legittimamente parlare di un confronto della teoria coll'esperienza, se prima non sia stato messo in sodo che le formole teoriche adoperate per tale confronto sono la traduzione esatta delle ipotesi che costituiscono la base della teoria.

Rispetto ad una delle più rilevanti divergenze fra la teoria e l'esperienza, cioè rispetto al noto fatto che le leggi teoriche dell'induzione non s'accordano colle vere se non quando le forze inducenti sieno di assai moderata intensità, si può affermare, in base a considerazioni semplicissime (§ 3), indipendenti dalla forma delle equazioni d'induzione ed implicite nell'ipotesi fondamentale, che tale disaccordo esiste veramente, nè potrebbe essere rimosso che da qualche modificazione od aggiunta alla teoria di Poisson.

Ma non era nel nostro proposito d'addentrarci in questo delicato argomento, e, prescindendo dall'osservazione testè citata, noi non ci siamo occupati, nel presente scritto, che del logico svolgimento della detta teoria, colla mira di eliminare, od almeno di attenuare, fin dove ci è stato possibile, le obbiezioni che si possono elevare contro i procedimenti d'ordinario seguiti.

In questi procedimenti si fanno intervenire certe supposizioni sulla forma dei cosidetti elementi magnetici, sulla loro distribuzione e sull'andamento delle forze che essi esercitano gli uni sugli altri, le quali a noi paiono di natura assai disputabile ed incerta. Queste supposizioni non ci sembrano d'altronde avere alcuna diretta dipendenza dal concetto fondamentale della teoria, il quale consiste semplicemente in ciò, che il corpo magnetico indotto sia da assimilarsi ad un ammasso di corpuscoli, di forma e distribuzione totalmente indeterminate, i quali si diportano, rispetto alle azioni magnetiche esterne, come farebbero altrettanti conduttori isolati e primitivamente scarichi, rispetto alle corrispondenti azioni elettriche. A noi è sembrato che, tenendo sempre presente questo solo ed unico concetto (come già accennò a voler fare l'illustre GREEN, e dietro di lui il compianto BEER, senza insistervi quanto era necessario), si potesse giungere alle equazioni d'induzione, senza altre ipotesi sussidiarie, all'infuori di quelle che si fanno intervenire in tutta la teoria del magnetismo per rendere ad essa applicabili gli ordinarî procedimenti del calcolo differenziale ed integrale, e senza delle quali tale teoria non potrebbe assolutamente tradursi in formole matematiche.

Tale è l'argomento del presente lavoro, nei di cui primi tre §§ abbiamo incominciato collo stabilire alcune proposizioni generali, che discendono direttamente dall'anzidetta analogia fra la teoria del magnetismo indotto e l'elettrostatica. I successivi §§ 4, 5 e 6 sono consacrati alla deduzione delle equazioni fondamentali dell'induzione magnetica. Queste equazioni, quali risultano dal procedimento quì seguito, contengono certe funzioni indeterminate, le quali dipendono dalla natura fisica del corpo indotto, e non possono essere ulteriormente precisate se non in base all'esperienza. Non ostante la presenza di queste funzioni, le equazioni trovate, come si dimostra nei §§ 7, 8 e 9, sono sufficienti alla risoluzione d'ogni problema d'induzione e posseggono altre proprietà del tutto analoghe a quelle delle equazioni più particolari che si sogliono considerare d'ordinario. Gli ultimi cinque §§ sono consacrati alla deduzione d'altre proposizioni generali, le quali scaturiscono da un importante teorema di reciprocità che abbiamo stabilito fin dal principio di questo scritto, e che KIRCHHOFF aveva già notato nel caso dei corpi isotropi, deducendolo dall'equazione particolare d'induzione, trovata da POISSON per questo caso. La più interessante di queste proposizioni è che esiste, in ogni caso, una funzione la quale ha, rispetto al problema dell'induzione magnetica, lo stesso ufficio e gli stessi caratteri della funzione di GREEN in elettrostatica, e coincide, nel caso dell'isotropia, con quella che F. NEUMANN ha denominato *funzione caratteristica.*

Nella deduzione di quest'ultima proprietà, come in parecchie altre parti della presente Memoria, s'incontrano non pochi punti che sarebbero bisognevoli di più rigorosa e più circostanziata indagine. Noi non ci siamo trattenuti sovr'essi, sia per non ampliare di troppo il lavoro, sia perchè in più d'un caso non abbiamo veduto alcuna via per eludere la difficoltà. Ma più pazienti ricerche potranno supplire al difetto di queste, se ad alcuno parrà che l'argomento meriti di essere ulteriormente approfondito nell'indirizzo che quì ci siam provati di seguire.

§ 1.

Consideriamo un sistema di conduttori isolati ed originariamente scarichi, esposti all'induzione di forze elettriche esterne ed alle proprie azioni mutue. Denotiamo con U la funzione potenziale delle forze inducenti e con $u_1, u_2, \ldots, u_n$ le funzioni potenziali dei singoli conduttori indotti. Considerando uno qualunque di questi corpi, si ha, per ogni punto della sua superficie e del suo interno, la nota equazione

$$(1) \qquad U + u_1 + u_2 + \cdots + u_n = C,$$

dove C è una costante che ha un valore determinato per ciascun corpo in particolare.

La distribuzione indotta in ciascun corpo è, come è noto, semplicemente superficiale. Denotiamo con $h_1, h_2, \ldots, h_n$ le densità variabili delle singole distribuzioni indotte e con $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ le superficie dei singoli corpi indotti. Si hanno, per ipotesi, le condizioni

$$\int h_1 d\sigma_1 = 0, \qquad \int h_2 d\sigma_2 = 0, \ldots, \int h_n d\sigma_n = 0.$$

Denotiamo inoltre con $h'_1, h'_2, \ldots, h'_n$ le densità variabili di altre distribuzioni che si possono immaginare esistenti sulle stesse superficie $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ rispettivamente, distribuzioni per ora soggette alle sole condizioni

$$\int h'_1 d\sigma_1 = 0, \qquad \int h'_2 d\sigma_2 = 0, \ldots, \int h'_n d\sigma_n = 0.$$

Ciò premesso, dall'equazione (1), che supporremo riferita al corpo limitato dalla superficie σ_s, si deduce

$$\int U h'_s d\sigma_s + \int u_1 h'_s d\sigma_s + \cdots + \int u_n h'_s d\sigma_s = 0,$$

e, sommando tutte le n equazioni analoghe,

$$(1_a)\qquad \Sigma_s \int U h'_s d\sigma_s + \Sigma_r \Sigma_s \int u_r h'_s d\sigma_s = 0 .$$

Supponiamo ora che le densità h' sieno quelle di una distribuzione dovuta ad altre forze inducenti, di potenziale U'. Si avrà, analogamente,

$$\Sigma_s \int U' h_s d\sigma_s + \Sigma_r \Sigma_s \int u'_r h_s d\sigma_s = 0 ,$$

od anche

$$(1_{a'})\qquad \Sigma_s \int U' h_s d\sigma_s + \Sigma_r \Sigma_s \int u'_s h_r d\sigma_r = 0 ,$$

dove $u'_1, u'_2, \ldots, u'_n$ sono le funzioni potenziali relative al secondo stato indotto, cioè a quello cui corrispondono le densità $h'_1, h'_2, \ldots, h'_n$. Per un teorema noto si ha

$$\int u_r h'_s d\sigma_s = \int u'_s h_r d\sigma_r ,$$

epperò

$$\Sigma_r \Sigma_s \int u_r h'_s d\sigma_s = \Sigma_r \Sigma_s \int u'_s h_r d\sigma_r :$$

dalle equazioni (1_a), $(1_{a'})$ segue quindi

$$(2)\qquad - \Sigma_s \int U h'_s d\sigma_s = - \Sigma_s \int U' h_s d\sigma_s = \Sigma_r \Sigma_s \int u_r h'_s d\sigma_s .$$

Facendo coincidere i due stati d'induzione si ottiene

$$(2_a)\qquad - \tfrac{1}{2} \Sigma_s \int U h_s d\sigma_s = \tfrac{1}{2} \Sigma_r \Sigma_s \int u_r h_s d\sigma_s .$$

Ora la quantità

$$P = \tfrac{1}{2} \Sigma_r \Sigma_s \int u_r h_s d\sigma_s$$

è il potenziale della distribuzione indotta (nel primo stato d'induzione) sopra sè stessa, e la quantità

$$Q = \Sigma_r \Sigma_s \int u_r h'_s d\sigma_s$$

è il potenziale della prima distribuzione indotta sulla seconda, o viceversa. Si ha dunque

$$(2_b)\qquad P = - \tfrac{1}{2} \Sigma_s \int U h_s d\sigma_s ,$$

$$(2_c)\qquad Q = - \Sigma_s \int U h'_s d\sigma_s = - \Sigma_s \int U' h_s d\sigma_s .$$

§ 2.

Supponiamo ora che i corpi indotti abbiano tutti dimensioni piccolissime. Si ha in tal caso, senza errore sensibile,

$$\int U h_s \, d\sigma_s = \frac{\partial U}{\partial a_s}\alpha_s + \frac{\partial U}{\partial b_s}\beta_s + \frac{\partial U}{\partial c_s}\gamma_s,$$

dove a_s, b_s, c_s sono le coordinate di un punto qualunque del corpuscolo (s) ed α_s, β_s, γ_s sono i *momenti* della prima distribuzione indotta, in questo corpuscolo. Analogamente si ha

$$\int U h'_s \, d\sigma_s = \frac{\partial U}{\partial a_s}\alpha'_s + \frac{\partial U}{\partial b_s}\beta'_s + \frac{\partial U}{\partial c_s}\gamma'_s,$$

dove α'_s, β'_s, γ'_s sono i momenti della seconda distribuzione. Si può anche scrivere

$$\int U h_s \, d\sigma_s = -(X_s\alpha_s + Y_s\beta_s + Z_s\gamma_s),$$

$$\int U h'_s \, d\sigma_s = -(X_s\alpha'_s + Y_s\beta'_s + Z_s\gamma'_s),$$

denotando con X_s, Y_s, Z_s le componenti della prima forza inducente in un punto qualunque del corpuscolo (s). Si ha quindi, (2_b), (2_c),

$$P = \frac{1}{2}\Sigma_s(X_s\alpha_s + Y_s\beta_s + Z_s\gamma_s), \tag{2_d}$$

$$Q = \Sigma_s(X_s\alpha'_s + Y_s\beta'_s + Z_s\gamma'_s) = \Sigma_s(X'_s\alpha_s + Y'_s\beta_s + Z'_s\gamma_s). \tag{2_e}$$

Ciò posto, e passando dall'ipotesi dell'induzione elettrica a quella dell'induzione magnetica, ammettiamo, come si fa sempre, che in ogni piccolissima porzione ΔS dello spazio S occupato dal corpo indotto, considerato come un ammasso di corpuscoli della specie testè accennata, o, come si suol dire, di *elementi magnetici,* esista un numero grandissimo di tali elementi, e che i valori medî dei momenti veri di tutti gli elementi contenuti in ΔS, cioè le tre quantità

$$\frac{\Sigma\alpha_s}{\Delta S}, \quad \frac{\Sigma\beta_s}{\Delta S}, \quad \frac{\Sigma\gamma_s}{\Delta S},$$

sieno rappresentabili dai valori che tre funzioni α, β, γ delle coordinate dei punti di S prendono in qualche punto del piccolo spazio ΔS. Ammettendo che queste tre funzioni sieno suscettibili d'integrazione, le equazioni (2_d), (2_e) vengono sostituite dalle seguenti

$$P = \frac{1}{2}\int (X\alpha + Y\beta + Z\gamma)dS, \tag{3}$$

$$Q = \int (X\alpha' + Y\beta' + Z\gamma')dS = \int (X'\alpha + Y'\beta + Z'\gamma)dS. \tag{3_a}$$

Immaginiamo che le forze inducenti X, Y, Z varino infinitamente poco e diventino

$$X' = X + \delta X, \qquad Y' = Y + \delta Y, \qquad Z' = Z + \delta Z.$$

I momenti indotti α, β, γ varieranno in corrispondenza e diventeranno

$$\alpha' = \alpha + \delta\alpha, \qquad \beta' = \beta + \delta\beta, \qquad \gamma' = \gamma + \delta\gamma.$$

Anche il potenziale P del corpo indotto sopra sè stesso varierà e diventerà $P + \delta P$ e dall'equazione (3) si avrà

$$\delta P = \frac{1}{2}\int (X\delta\alpha + Y\delta\beta + Z\delta\gamma)dS + \frac{1}{2}\int (\alpha\delta X + \beta\delta Y + \gamma\delta Z)dS.$$

Ma dall'equazione (3_a) risulta

$$\int (X\delta\alpha + Y\delta\beta + Z\delta\gamma)dS = \int (\alpha\delta X + \beta\delta Y + \gamma\delta Z)dS,$$

quindi si ha

$$\delta P = \int (X\delta\alpha + Y\delta\beta + Z\delta\gamma)dS, \tag{3_b}$$

equazione cui si può dare la forma

$$\delta\left[\int\left(\frac{\partial U}{\partial x}\alpha + \frac{\partial U}{\partial y}\beta + \frac{\partial U}{\partial z}\gamma\right)dS + P\right] = 0, \tag{3_c}$$

considerando U come invariabile (x, y, z sono le coordinate di quel punto del corpo in cui dominano i momenti unitarî medî α, β, γ ed a cui è circostante l'elemento di volume dS).

§ 3.

Prima di procedere oltre, tratteniamoci sopra un caso particolare molto semplice, il quale permette di formulare una conclusione importante per la teoria dell'induzione magnetica.

Supponiamo che le forze inducenti esterne sieno costanti in grandezza e direzione, cioè che le componenti X, Y, Z sieno quantità costanti (e così le X', Y', Z'): indi poniamo

$$\int \alpha\, dS = A, \qquad \int \beta\, dS = B, \qquad \int \gamma\, dS = C,$$

cioè designamo con A, B, C le componenti del momento indotto *totale*. Le equazioni (3), (3_a) diventano, in questo caso,

$$P = \tfrac{1}{2}(AX + BY + CZ), \tag{4}$$

$$AX' + BY' + CZ' = A'X + B'Y + C'Z. \tag{4_a}$$

Rappresentando per brevità collo schema

$$(X,\ Y,\ Z;\ \ A,\ B,\ C)$$

il caso d'induzione in cui le forze inducenti costanti sono X, Y, Z ed i momenti totali indotti A, B, C, consideriamo i tre casi particolari rappresentati rispettivamente dagli schemi

$$(1,\ 0,\ 0;\ \ A_x,\ B_x,\ C_x),$$

$$(0,\ 1,\ 0;\ \ A_y,\ B_y,\ C_y),$$

$$(0,\ 0,\ 1;\ \ A_z,\ B_z,\ C_z).$$

L'equazione (4_a) dà, per questi tre casi particolari, confrontati col caso generale,

$$A = A_x X + B_x Y + C_x Z,$$

$$B = A_y X + B_y Y + C_y Z,$$

$$C = A_z X + B_z Y + C_z Z;$$

ma dalla stessa equazione (4_a), facendo

$$X = 0, \quad Y = 1, \quad Z = 0; \quad A = A_y, \quad B = B_y, \quad C = C_y,$$

$$X' = 0, \quad Y' = 0, \quad Z' = 1; \quad A' = A_z, \quad B' = B_z, \quad C' = C_z,$$

si ottiene

$$B_z = C_y,$$

ed analogamente

$$C_x = A_z,$$

$$A_y = B_x.$$

Si ha dunque

$$(5)\qquad P=\tfrac{1}{2}(A_x X^2+B_y Y^2+C_z Z^2+2B_z YZ+2C_x ZX+2A_y XY),$$

$$(5_a)\qquad A=\frac{\partial P}{\partial X},\qquad B=\frac{\partial P}{\partial Y},\qquad C=\frac{\partial P}{\partial Z}.$$

I sei coefficienti A_x, B_y, C_z, A_y, B_z, C_x sono costanti che dipendono dalla natura, dalla forma e dall'orientazione del corpo indotto.

Dalle relazioni (5_a) risulta che quando le tre componenti X, Y, Z variano simultaneamente nel rapporto di 1 a k, anche i momenti totali indotti A, B, C variano simultaneamente nello stesso rapporto. Questo risultato non è, come è noto, d'accordo coll'esperienza se non entro certi limiti. Noi non vogliamo quì occuparci di esaminare se tale disaccordo non possa per avventura essere rimosso da qualche plausibile modificazione o complemento della teoria di POISSON; vogliamo solo constatare che esso sussiste veramente, ed è indipendente dalla forma delle equazioni d'induzione, le quali verranno stabilite più tardi. Aggiungeremo però che, qualunque possa essere la forma di queste equazioni, esse non devono in alcun caso (finchè si tien ferma quella teoria) condurre a risultati in opposizione colla dianzi accennata proporzionalità; cosicchè, per esempio, la modificazione proposta da KIRCHHOFF alle equazioni ordinarie *), se può essere più conforme alla verità fisica, non potrebbe tuttavia essere giustificata dal punto di vista della teoria di POISSON.

Se si ammette che non possa essere

$$A=B=C=0$$

se non quando sia

$$X=Y=Z=0,$$

il discriminante della funzione quadratica $P(X, Y, Z)$ non può essere nullo, epperò denotando con

$$P=\tfrac{1}{2}(a_x A^2+b_y B^2+c_z C^2+2b_z BC+2c_x CA+2a_y AB)$$

la funzione quadratica reciproca della (4), si ha

$$X=\frac{\partial P}{\partial A},\qquad Y=\frac{\partial P}{\partial B},\qquad Z=\frac{\partial P}{\partial C}.$$

Esiste dunque, per ogni corpo magnetizzato per induzione da forze costanti, una fun-

*) Nell'Appendice alla Memoria: *Ueber den inducirten Magnetismus eines unbegrenzten Cylinders von weichem Eisen,* nel t. XLVIII del Journal für die reine und angewandte Mathematik; *Gesammelte Abhandlungen,* p. 217.

zione intera, omogenea e quadratica dei suoi momenti totali A, B, C, la quale rappresenta l'energia potenziale del corpo, e le cui derivate rispetto ai momenti suddetti rappresentano le componenti della forza costante capace di costituirlo, per induzione, nello stato magnetico a cui corrispondono quei momenti.

§ 4.

Torniamo ora alla questione generale.

Consideriamo dapprima una distribuzione magnetica qualunque nell'interno del corpo S, cioè una distribuzione provocata sia per induzione, sia in qualsivoglia altro modo, sotto la sola condizione che i momenti medî locali α, β, γ sieno funzioni integrabili delle coordinate.

Fissiamo uno qualunque degli elementi magnetici del corpo e descriviamo intorno ad un punto di questo elemento una superficie sferica, il cui raggio ρ sia tale che, rispetto ad ogni punto (a, b, c) posto al di fuori di questa superficie, la funzione potenziale dell'elemento si possa esprimere, senza errore sensibile, colla nota formola

$$\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}\alpha_1 + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y}\beta_1 + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}\gamma_1,$$

dove x, y, z sono le coordinate di un punto dell'elemento, α_1, β_1, γ_1 i momenti veri di questo e dove

$$r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}.$$

Segue da quest'ipotesi che anche le funzioni potenziali degli elementi magnetici situati fuori della sfera di raggio ρ ammetteranno alla loro volta la stessa espressione rispetto ai punti dell'elemento considerato. Rappresentando dunque con

$$V_\rho = \int \left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial a}\alpha + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial b}\beta + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial c}\gamma \right) dS_\rho$$

la funzione potenziale, sul punto (x, y, z), di quella parte del corpo magnetico che occupa lo spazio S_ρ esterno alla sfera di raggio ρ, dove a, b, c sono le coordinate di un elemento dS_ρ di questo spazio ed α, β, γ i momenti medî che regnano in questo elemento, sarà

$$V_\rho + v$$

il valore della funzione potenziale di *tutti* gli elementi magnetici del corpo sul punto

(x, y, z), essendo v la funzione potenziale, su questo stesso punto, dell'elemento considerato e di tutti quegli altri elementi magnetici che sono, com'esso, compresi entro la sfera suddetta. Questa funzione v non è, per ipotesi, riducibile al tipo ordinario e deve considerarsi come assolutamente sconosciuta.

Ora osserviamo che la funzione

$$V = \int \left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial a} \alpha + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial b} \beta + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial c} \gamma \right) dS,$$

cioè la funzione potenziale *completa* del corpo S, calcolata al modo ordinario, vale a dire sotto quella forma che serve per i punti potenziati esterni al corpo; è tale che la differenza $V - V_\rho$ è finita, determinata ed evanescente insieme col raggio ρ. Se dunque rappresentiamo con

$$(6) \qquad V + v_1$$

la *vera* funzione potenziale di tutti gli elementi magnetici del corpo sul punto (x, y, z), dove

$$v_1 = v + V_\rho - V,$$

la nuova funzione v_1, sostituita a v, non differisce da questa che di una quantità finita, determinata ed evanescente con ρ, e questa nuova funzione non dipende, come la v, che dalla natura e dalla magnetizzazione del corpo nell'interno della sfera di raggio ρ. In quanto a questo raggio, supporremo che esso sia già ridotto al suo minimo valore, ed osserveremo che questo minimo, per quanto debba supporsi grande rispetto alle dimensioni d'un elemento magnetico, si deve certamente considerare come estremamente piccolo rispetto alle dimensioni d'ogni ordinario corpo.

§ 5.

Ciò premesso, introduciamo una restrizione nella generalità della distribuzione (α, β, γ); supponiamo, cioè, che lo stato magnetico attuale di *ciascun* elemento magnetico del corpo S sia tale che, aggiungendo al sistema di tutti gli elementi magnetici del corpo stesso un conveniente sistema di forze inducenti esterne a *quell'*elemento e variabili con esso, la distribuzione esistente sulla superficie di questo sia *in equilibrio*. (La possibilità di tali distribuzioni risulterà in modo ovvio da un'osservazione che avremo occasione di fare fra un momento). Quando il sistema inducente, da aggiungersi al corpo, è lo stesso per tutti gli elementi magnetici di questo, si ricade nel caso delle ordinarie distribuzioni indotte.

Ammesso che la distribuzione (α, β, γ) sia della classe ora definita, denotiamo con U_1 la funzione potenziale delle forze da aggiungersi a quelle che emanano dal corpo S affinchè lo stato magnetico attuale dell'elemento che abbiamo preso a considerare nel § precedente sia uno stato d'equilibrio d'induzione. Si avrà quindi, (6),

$$U_1 + V + v_1 = \text{Cost.} \tag{6_a}$$

in ogni punto del detto elemento, epperò, designando con ς la superficie di questo e con h' la densità di una qualunque altra distribuzione immaginata su questa superficie, sotto la sola condizione

$$\int h' d\varsigma = 0,$$

si otterrà l'equazione

$$\int (U_1 + V) h' d\varsigma + \int v_1 h' d\varsigma = 0.$$

Ora la funzione $U_1 + V$ è continua in tutta l'estensione dell'elemento: quindi si può, senza errore sensibile, sostituire a questa equazione la seguente

$$\frac{\partial (U_1 + V)}{\partial x} \alpha'_1 + \frac{\partial (U_1 + V)}{\partial y} \beta'_1 + \frac{\partial (U_1 + V)}{\partial z} \gamma'_1 + \int v_1 h' d\varsigma = 0,$$

dove x, y, z sono le coordinate di un punto qualunque dell'elemento ed α'_1, β'_1, γ'_1 sono i momenti veri della distribuzione di densità h'.

Dalla forma dell'ultima equazione, e dal fatto che le quantità α'_1, β'_1, γ'_1 sono assolutamente arbitrarie ed indipendenti dalle distribuzioni cui si riferiscono le funzioni U_1 e V, risulta che l'ultimo termine dell'equazione stessa deve avere la forma

$$\int v_1 h' d\varsigma = \boldsymbol{A} \alpha'_1 + \boldsymbol{B} \beta'_1 + \boldsymbol{C} \gamma'_1,$$

dove $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ sono tre quantità le quali, almeno colla stessa approssimazione con cui le coordinate x, y, z possono essere attribuite ad un punto qualunque dell'elemento magnetico, sono indipendenti da h' e dipendono quindi unicamente dai parametri che individuano la funzione v_1, cioè dalle condizioni fisiche e magnetiche che regnano nell'interno della sfera di raggio ρ.

Avuto dunque riguardo alla piccolezza di questo raggio, possiamo concludere che le tre quantità $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$, sebbene ancora incognite, debbono pur tuttavia dipendere unicamente dalle condizioni fisiche e magnetiche dominanti nell'immediata prossimità del punto (x, y, z), cioè dalla natura del corpo nell'intorno di questo punto e dalla magnetizzazione degli elementi disseminati intorno a questo. Possiamo inoltre concludere che se, entro lo stesso corpo S, si immagina un'altra distribuzione magnetica (α', β', γ'), il potenziale mutuo di questa e della precedente distribuzione (α, β, γ) sarà esprimibile nella forma

$$Q = \int \left[\left(\frac{\partial V}{\partial x} + A \right) \alpha' + \left(\frac{\partial V}{\partial y} + B \right) \beta' + \left(\frac{\partial V}{\partial z} + C \right) \gamma' \right] dS,$$

ossia

$$Q = \int \left(\frac{\partial V}{\partial x} \alpha' + \frac{\partial V}{\partial y} \beta' + \frac{\partial V}{\partial z} \gamma' \right) dS + \int (A\alpha' + B\beta' + C\gamma') dS,$$

dove le quantità A, B, C si riferiscono ad un punto qualunque (x, y, z) dello spazio S.

Ora se la nuova distribuzione $(\alpha', \beta', \gamma')$ è della stessa classe di (α, β, γ), cioè se lo stato magnetico, in essa, di ciascun elemento è suscettibile di diventare stato d'equilibrio coll'aggiunta di un conveniente sistema inducente, esterno all'elemento e variabile con esso, si deve avere similmente

$$Q = \int \left(\frac{\partial V'}{\partial x} \alpha + \frac{\partial V'}{\partial y} \beta + \frac{\partial V'}{\partial z} \gamma \right) dS + \int (A'\alpha + B'\beta + C'\gamma) dS,$$

dove V' è la funzione potenziale ordinaria della nuova distribuzione e dove A', B', C' sono quantità analoghe alle A, B, C per questa seconda distribuzione. Ma, per la legge di formazione delle funzioni V, V', si ha la nota identità

$$\int \left(\frac{\partial V}{\partial x} \alpha' + \frac{\partial V}{\partial y} \beta' + \frac{\partial V}{\partial z} \gamma' \right) dS = \int \left(\frac{\partial V'}{\partial x} \alpha + \frac{\partial V'}{\partial y} \beta + \frac{\partial V'}{\partial z} \gamma \right) dS;$$

quindi deve risultare anche

$$\int (A\alpha' + B\beta' + C\gamma') dS = \int (A'\alpha + B'\beta + C'\gamma) dS.$$

Ora osserviamo che, per il carattere speciale delle distribuzioni alla cui classe appartengono le (α, β, γ), $(\alpha', \beta', \gamma')$, si può, in luogo dell'intero corpo S, considerare isolatamente una qualunque sua porzione, come se il resto non esistesse, senza che la distribuzione, sia (α, β, γ), sia $(\alpha', \beta', \gamma')$, che spetta a questa porzione, cessi d'appartenere alla classe anzidetta. Si ottengono infatti i sistemi inducenti *addendi,* relativi alla sola porzione considerata, aggiungendo a ciascuno di quelli di prima la restante porzione di corpo, nel rispettivo stato di magnetizzazione (α, β, γ) od $(\alpha', \beta', \gamma')$ *). Ne

---

*) Da questa considerazione apparisce manifesta la possibilità di quella classe di distribuzioni che abbiamo definita in questo §. Basta infatti dividere il corpo in un numero qualunque di parti e considerare le distribuzioni indotte separatamente in ciascuna (dopo aver rimosse le altre) da forze inducenti arbitrarie; l'aggregato di tutte le distribuzioni così ottenute e ricomposte nell'ordine primitivo appartiene evidentemente alla classe suddetta.

consegue che la precedente eguaglianza d'integrali deve sussistere indipendentemente dai limiti, e che quindi si deve avere, in ogni punto dello spazio S,

$$\boldsymbol{A}\alpha' + \boldsymbol{B}\beta' + \boldsymbol{C}\gamma' = \boldsymbol{A}'\alpha + \boldsymbol{B}'\beta + \boldsymbol{C}'\gamma.$$

Di qui è facile concludere, come in un caso analogo (§ 3), che esiste una funzione $\psi(\alpha, \beta, \gamma)$, intera, omogenea e quadratica rispetto ai momenti α, β, γ, la quale dà

$$\boldsymbol{A} = \frac{\partial \psi}{\partial \alpha}, \qquad \boldsymbol{B} = \frac{\partial \psi}{\partial \beta}, \qquad \boldsymbol{C} = \frac{\partial \psi}{\partial \gamma}.$$

I coefficienti di questa funzione sono, in generale, funzioni delle coordinate x, y, z del punto cui si riferiscono i momenti α, β, γ, e queste funzioni non possono dipendere che dalle condizioni fisiche dominanti nell'intorno del punto (x, y, z), indipendentemente dalla magnetizzazione attuale, cioè non possono dipendere che dalla natura del corpo (in detto punto), in quanto essa ha influenza sulle manifestazioni magnetiche.

Da quanto precede si ritrae che il potenziale mutuo di due distribuzioni (α, β, γ) ed $(\alpha', \beta', \gamma')$, esistenti in uno stesso corpo S ed appartenenti amendue alla classe che abbiamo definito, è espresso da

$$(7) \qquad Q = \int \left(\frac{\partial V}{\partial x}\alpha' + \frac{\partial V}{\partial y}\beta' + \frac{\partial V}{\partial z}\gamma' \right) dS + \int \psi \begin{pmatrix} \alpha, & \beta, & \gamma \\ \alpha', & \beta', & \gamma' \end{pmatrix} dS,$$

dove il simbolo

$$\psi \begin{pmatrix} \alpha, & \beta, & \gamma \\ \alpha', & \beta', & \gamma' \end{pmatrix}$$

rappresenta la funzione bilineare associata alla funzione quadratica ψ, cioè

$$\psi \begin{pmatrix} \alpha, & \beta, & \gamma \\ \alpha', & \beta', & \gamma' \end{pmatrix} = \frac{\partial \psi}{\partial \alpha}\alpha' + \frac{\partial \psi}{\partial \beta}\beta' + \frac{\partial \psi}{\partial \gamma}\gamma'.$$

Per note trasformazioni il valore di Q può essere posto sotto la forma

$$(7_a) \qquad Q = \frac{1}{4\pi} \int \Delta_1(V, V') \, dS_\infty + \int \psi \begin{pmatrix} \alpha, & \beta, & \gamma \\ \alpha', & \beta', & \gamma' \end{pmatrix} dS,$$

dove S_∞ rappresenta lo spazio infinito.

Il potenziale della distribuzione (α, β, γ) sopra sè stessa è dato similmente da

$$(8) \qquad P = \frac{1}{2} \int \left(\frac{\partial V}{\partial x}\alpha + \frac{\partial V}{\partial y}\beta + \frac{\partial V}{\partial z}\gamma \right) dS + \int \psi(\alpha, \beta, \gamma) \, dS,$$

ovvero da

$$(8_a) \qquad P = \frac{1}{8\pi} \int \Delta_1 V . dS_\infty + \int \psi(\alpha, \beta, \gamma) \, dS.$$

Finalmente ricordiamo (in base a quanto precede) che l'espressione

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}+\frac{\partial\psi}{\partial\alpha}\right)\alpha_1'+\left(\frac{\partial V}{\partial y}+\frac{\partial\psi}{\partial\beta}\right)\beta_1'+\left(\frac{\partial V}{\partial z}+\frac{\partial\psi}{\partial\gamma}\right)\gamma_1'$$

rappresenta il potenziale dell'intera distribuzione (α, β, γ) sopra una qualunque distribuzione di momenti veri α_1', β_1', γ_1' che s'immagini esistente sulla superficie di un elemento magnetico contenente il punto (x, y, z).

§ 6.

Ora è facilissimo stabilire le equazioni dell'induzione magnetica.

Sia U la funzione potenziale delle forze inducenti e V quella della distribuzione indotta che si cerca e che designeremo con (α, β, γ). Per ogni elemento magnetico del corpo indotto si ha, (6_a), un'equazione della forma

$$U+V+v_1=\text{Cost.},$$

e, immaginando sulla superficie dell'elemento una distribuzione qualunque di momenti veri α_1', β_1', γ_1', si ottiene, nel modo che si è veduto nel § precedente, l'equazione

$$\left[\frac{\partial(U+V)}{\partial x}+\frac{\partial\psi}{\partial\alpha}\right]\alpha_1'+\left[\frac{\partial(U+V)}{\partial y}+\frac{\partial\psi}{\partial\beta}\right]\beta_1'+\left[\frac{\partial(U+V)}{\partial z}+\frac{\partial\psi}{\partial\gamma}\right]\gamma_1'=0\,.$$

Essendo totalmente arbitrarî i momenti α_1', β_1', γ_1', si ottengono di quì le tre equazioni separate

$$(9)\qquad \left\{\begin{aligned}&\frac{\partial(U+V)}{\partial x}+\frac{\partial\psi}{\partial\alpha}=0,\\&\frac{\partial(U+V)}{\partial y}+\frac{\partial\psi}{\partial\beta}=0,\\&\frac{\partial(U+V)}{\partial z}+\frac{\partial\psi}{\partial\gamma}=0,\end{aligned}\right.$$

che sussistono in ogni punto dello spazio S occupato dal corpo indotto e che sono le cercate equazioni d'induzione. Esse coincidono con quelle che si ottengono annullando [conformemente all'equazione (3_c)] la variazione dell'espressione

$$(9_a)\quad W=\int\left[\frac{\partial(U+\frac{1}{2}V)}{\partial x}\alpha+\frac{\partial(U+\frac{1}{2}V)}{\partial y}\beta+\frac{\partial(U+\frac{1}{2}V)}{\partial z}\gamma\right]dS+\int\psi(\alpha,\beta,\gamma)\,dS,$$

che rappresenta la somma del potenziale delle forze inducenti sulla distribuzione variabile (α, β, γ) e del potenziale di questa distribuzione sopra sè stessa. Per legittimare l'uso di questa espressione bisogna però ammettere che la distribuzione variabile (α, β, γ) appartenga, in ogni suo stato, a quella classe che abbiamo considerata nel § precedente.

Le equazioni (9) non differiscono dalle ordinarie che per la forma generale della funzione quadratica denominata ψ. Nei corpi magneticamente omogenei ed isotropi, che si sogliono più comunemente considerare, si ha

$$\psi = \frac{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}{2\varkappa},$$

dove $\varkappa$ è la *costante d'induzione*. Nei corpi omogenei ma non isotropi, si ha invece, per una opportuna scelta di assi coordinati,

$$\psi = \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha^2}{a} + \frac{\beta^2}{b} + \frac{\gamma^2}{c}\right),$$

dove a, b, c sono tre costanti. È facile comprendere che in un corpo il quale non sia nè omogeneo, nè isotropo, ma la cui struttura molecolare varî con continuità da punto a punto, la forma precedente di ψ varrà bensì per ogni particella del corpo, ma che le costanti a, b, c varieranno dall'una particella all'altra e varieranno pure le direzioni degli assi rispetto ai quali ciascuna ψ prende la forma precedente. In questo caso, se si mantengono invece fissi gli assi di riferimento, la funzione ψ relativa ad un punto qualunque del corpo assumerà appunto la forma generale da noi ammessa, cioè diverrà una funzione omogenea e quadratica dei momenti α, β, γ, coi coefficienti funzioni continue delle coordinate. La sola proprietà che conviene attribuire a questa funzione ψ più generale, per restare in accordo coi casi particolari conosciuti, è quella ch'essa non possa ridursi a zero se non per $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

Dal punto di vista delle applicazioni agli ordinarî casi sperimentali, la considerazione della funzione ψ a coefficienti variabili non ha certamente un grande interesse. Ma dal punto di vista della teoria di Poisson essa è invece indispensabile, poichè non si può dimostrare la sufficienza di tale teoria senza rimuovere qualunque particolarizzazione che non sia intrinsecamente necessaria. Ora noi vedremo che le equazioni generali (9), non solo sono sufficienti alla risoluzione d'ogni problema d'induzione magnetica, ma, finchè non si tratti che di deduzioni d'indole generale e non già di soluzioni di problemi particolari, vi si prestano con non minore facilità delle equazioni ordinarie *).

*) W. Thomson ha già considerato un problema d'induzione ancora più generale del presente (*Reprint*, p. 544-566), ma senza occuparsi del modo in cui le equazioni fondamentali discendono dalle ipotesi che servono di base alla teoria.

§ 7.

Dimostreremo in primo luogo che, quando sia data la funzione inducente U, non vi possono essere due distinte funzioni V che rendano soddisfatte le tre equazioni (9).

Supponiamo infatti dapprima che non vi sieno forze inducenti, cioè che si abbia $U = 0$ e che quindi le equazioni (9) si riducano alle seguenti:

$$(10) \qquad \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial \alpha} = 0, \qquad \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial \beta} = 0, \qquad \frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial \psi}{\partial \gamma} = 0.$$

Moltiplicando ordinatamente queste equazioni per α, β, γ, sommando ed integrando su tutto lo spazio S, si ottiene, (8),

$$P = 0,$$

epperò, designando con S' lo spazio infinito esterno al corpo ed utilizzando l'altra espressione (8_a) di P, si ha l'equazione

$$\int \Delta_1 V . dS + \int \Delta_1 V . dS' + 8\pi \int \psi(\alpha, \beta, \gamma) dS = 0.$$

Ma dalle equazioni (10) risulta

$$\Delta_1 V = \left(\frac{\partial \psi}{\partial \alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial \beta}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial \gamma}\right)^2,$$

epperò l'equazione precedente può scriversi

$$(10_a) \qquad \int \left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial \alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial \beta}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial \gamma}\right)^2 + 8\pi\psi(\alpha, \beta, \gamma)\right] dS + \int \Delta_1 V . dS' = 0.$$

Consideriamo l'espressione

$$(10_b) \qquad \left(\frac{\partial \psi}{\partial \alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial \beta}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial \gamma}\right)^2 + 8\pi\psi(\alpha, \beta, \gamma),$$

che è, come la ψ, una funzione intera, omogenea e quadratica dei momenti α, β, γ. La quantità

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial \alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial \beta}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial \gamma}\right)^2$$

è un invariante della funzione $\psi(\alpha, \beta, \gamma)$ rispetto ad ogni sostituzione lineare ed ortogonale operata sulle variabili α, β, γ. Quindi, poichè queste variabili si trasformano allo stesso modo delle coordinate, e poichè, per ogni punto individuato di S, si possono (come venne già accennato) dirigere gli assi coordinati in modo che la funzione ψ prenda la forma

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha^2}{a}+\frac{\beta^2}{b}+\frac{\gamma^2}{c}\right),$$

l'espressione (10_b) potrà prendere, in ciascun punto individuato, la forma

$$(10_c)\qquad \frac{1+4\pi a}{a^2}\alpha^2+\frac{1+4\pi b}{b^2}\beta^2+\frac{1+4\pi c}{c^2}\gamma^2.$$

Ora per tutti i corpi omogenei conosciuti, sieno magnetici, sieno diamagnetici, le tre quantità

$$1+4\pi a,\qquad 1+4\pi b,\qquad 1+4\pi c$$

sono sempre *positive,* nè vi è ragione di supporre che ciò non sussista anche per ciascun punto di un corpo non omogeneo, qualora si ammetta che le deviazioni dall'omogeneità ordinaria avvengano con continuità in tutto il corpo, od in singole regioni di esso. Poichè dunque la quantità (10_c) è positiva in ogni punto del corpo, tale dev'essere anche la (10_b), la cui diversa espressione non proviene che dalla diversità degli assi di riferimento, epperò l'integrale

$$\int\left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial\alpha}\right)^2+\left(\frac{\partial\psi}{\partial\beta}\right)^2+\left(\frac{\partial\psi}{\partial\gamma}\right)^2+8\pi\psi(\alpha,\ \beta,\ \gamma)\right]dS$$

è sempre positivo e non può annullarsi che per

$$\alpha=\beta=\gamma=0.$$

Ma in questo caso si ha anche

$$V=0$$

in tutto lo spazio ed è quindi nullo anche l'altro integrale

$$\int\Delta_1 V.dS'$$

che entra, col precedente, nell'equazione (10_a). Quest'equazione non può dunque essere soddisfatta che da

$$\alpha=\beta=\gamma=V=0,$$

e le equazioni (10), donde fu ricavata la (10_a), non ammettono altra soluzione che questa.

Di qui si deduce subito, con un ben noto ragionamento, che le equazioni (9), per una data funzione inducente U, non possono ammettere che un'unica soluzione.

§ 8.

Stabilita questa prima proprietà fondamentale delle equazioni (9), si possono facilmente dedurre altre proprietà generali di esse.

Innanzi tutto, dalla forma lineare ed omogenea di queste equazioni risulta manifestamente che sovrapponendo le distribuzioni indotte, in uno stesso corpo, da diversi sistemi di forze induttrici, agenti separatamente sovr'esso, si ottiene la distribuzione indotta da queste stesse forze, quand'esse agiscono simultaneamente. Questo principio, il quale è stato talvolta assunto come un postulato, è dunque una conseguenza necessaria della teoria di Poisson, come già vedemmo in un caso particolare (§ 3): esso è d'altronde un corollario evidente dell'identità sostanziale fra l'induzione magnetica e l'induzione elettrostatica.

In secondo luogo osserviamo che i teoremi generali (3), (3_a), che noi abbiamo stabiliti fin dal principio, indipendentemente dalle equazioni d'induzione, sono verificati da queste. Infatti moltiplicando ordinatamente le equazioni (9) per α, β, γ, sommando ed integrando su tutto lo spazio S, si ritrova, in virtù della formola (8), il teorema (3). E similmente, moltiplicando le dette equazioni per α', β', γ', sommando ed integrando di nuovo, si ritrova, in virtù della formola (7), la prima equazione (3_a). La seconda si ottiene operando in modo analogo sulle equazioni (9), applicate al secondo stato indotto (α', β', γ').

Notiamo che, in virtù dell'ora ricordato teorema (3), il valore dell'espressione W, (9_a), nello stato d'equilibrio fra il sistema inducente e l'indotto, si riduce semplicemente a

$$W = -P.$$

Denotiamo W' la quantità analoga a W e relativa alla distribuzione di momenti $\alpha+\alpha'$, $\beta+\beta'$, $\gamma+\gamma'$, poniamo, cioè,

$$W' = \int\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{2}\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{1}{2}\frac{\partial V'}{\partial x}\right)(\alpha+\alpha') + \cdots\right] dS$$

$$+\int\psi(\alpha,\beta,\gamma)\,dS + \int\psi(\alpha',\beta',\gamma')\,dS + \int\left(\frac{\partial\psi}{\partial\alpha}\alpha' + \frac{\partial\psi}{\partial\beta}\beta' + \frac{\partial\psi}{\partial\gamma}\gamma'\right) dS.$$

Tenendo conto della già invocata identità

$$\int\left(\frac{\partial V}{\partial x}\alpha' + \frac{\partial V}{\partial y}\beta' + \frac{\partial V}{\partial z}\gamma'\right) dS = \int\left(\frac{\partial V'}{\partial x}\alpha + \frac{\partial V'}{\partial y}\beta + \frac{\partial V'}{\partial z}\gamma\right) dS,$$

quest'espressione può facilmente ridursi alla seguente:

$$W' = W + \int \left\{ \left[\frac{\partial (U + V)}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial \alpha} \right] \alpha' + \cdots \right\} dS + P',$$

dove P' è il potenziale della distribuzione $(\alpha', \beta', \gamma')$ sopra sè stessa. Se dunque (α, β, γ) è la distribuzione indotta dalle forze esterne di potenziale U, si ha semplicemente, in virtù delle equazioni (9) e dell'osservazione precedente,

$$W' = P' - P.$$

Ne risulta che, sovrapponendo ad una distribuzione indotta (α, β, γ) una qualunque altra distribuzione $(\alpha', \beta', \gamma')$ (appartenente però sempre alla classe considerata nel § 5), l'aumento di energia potenziale dell'intero sistema è semplicemente uguale a P', cioè è eguale all'energia potenziale della distribuzione sovrapposta all'indotta. Nel caso dei corpi magnetici propriamente detti la funzione ψ è sempre positiva, epperò è anche positivo ogni potenziale come P'. In questo caso dunque la distribuzione indotta è veramente quella che rende minima l'espressione W, ossia che rende minima l'energia totale del sistema inducente ed indotto (giacchè questa non differisce da W che per una costante, cioè per l'energia potenziale del sistema inducente, la quale si suppone invariabile).

Notiamo ancora la proprietà seguente.

Abbiamo già veduto, (§ 7), che la quantità

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial \alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial \beta}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial \gamma}\right)^2 + 8\pi\psi(\alpha, \beta, \gamma)$$

è sempre positiva. Nel caso che (α, β, γ) sia la distribuzione indotta dalle forze di potenziale U è quindi positiva la quantità

$$\Delta_1(U + V) + 8\pi\psi(\alpha, \beta, \gamma),$$

e per conseguenza anche l'integrale di essa diviso per 8π

$$\frac{1}{8\pi}\int \Delta_1(U + V) . dS + \int \psi(\alpha, \beta, \gamma) dS,$$

ed *a fortiori* quest'altra espressione

$$\frac{1}{8\pi}\int \Delta_1(U + V) . dS_\infty + \int \psi(\alpha, \beta, \gamma) dS,$$

la quale equivale alla seguente

$$P + \frac{1}{8\pi}\int \Delta_1 U . dS_\infty + \frac{1}{4\pi}\int \Delta_1(U, V) . dS_\infty .$$

Ora la quantità

$$\frac{1}{4\pi}\int \Delta_1(U, V).dS_\infty,$$

quando U è la funzione potenziale d'un corpo magnetico *), è il potenziale mutuo dell'inducente e dell'indotto ed è quindi, (3), eguale a $-2P$. Si ha dunque

$$\frac{1}{8\pi}\int \Delta_1 U.dS_\infty - P > 0,$$

ossia

$$P < \frac{1}{8\pi}\int \Delta_1 U.dS_\infty.$$

§ 9.

Introduciamo ora, come è d'uso, la funzione φ definita dall'equazione

$$U + V + \varphi = 0, \tag{11}$$

talchè le equazioni (9) diventano

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial \alpha}, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial \beta}, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{\partial \psi}{\partial \gamma}$$

e, risolute rispetto ad α, β, γ, dànno

$$\alpha = F'\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right), \qquad \beta = F'\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right), \qquad \gamma = F'\left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right), \tag{11$_a$}$$

dove F è la funzione quadratica reciproca della ψ, formata cogli argomenti

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

Le equazioni (11_a) dànno, per note relazioni,

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial y} + \frac{\partial \gamma}{\partial z} = \frac{1}{4\pi}\Delta_2 V = \frac{\partial}{\partial x}F'\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}F'\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}F'\left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right),$$

$$\alpha\frac{\partial x}{\partial n} + \beta\frac{\partial y}{\partial n} + \gamma\frac{\partial z}{\partial n} = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial V}{\partial n} + \frac{\partial V}{\partial n'}\right) = F'\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)\frac{\partial x}{\partial n} + F'\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)\frac{\partial y}{\partial n} + F'\left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)\frac{\partial z}{\partial n},$$

*) Per ben comprendere il senso di questa riserva veggasi una mia Nota *Sulla teoria del potenziale* [Rendiconti del Reale Istituto Lombardo, serie II, tomo XVI (1883), pp. 725-736; oppure queste OPERE, tomo IV, pp. 33-44].

nella prima delle quali equazioni x, y, z sono le coordinate di un punto qualunque dello spazio S, nella seconda sono le coordinate di un punto qualunque della superficie σ che limita questo spazio e della quale n ed n' designano le normali interna ed esterna.

Ora in ogni punto dello spazio S si ha

$$\Delta_2 U = 0$$

ed in ogni punto della superficie σ si ha

$$\frac{\partial U}{\partial n} + \frac{\partial U}{\partial n'} = 0;$$

le due equazioni precedenti si possono dunque scrivere così:

$$(11_b) \qquad \Delta_2 \varphi + 4\pi\left[\frac{\partial}{\partial x} F'\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y} F'\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z} F'\left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)\right] = 0,$$

$$(11_c) \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial n} + \frac{\partial \varphi}{\partial n'} + 4\pi\left[F'\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)\frac{\partial x}{\partial n} + F'\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)\frac{\partial y}{\partial n} + F'\left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)\frac{\partial z}{\partial n}\right] = 0.$$

Ciò premesso osserviamo che, come risulta dalle equazioni (11_a), le quali sono state desunte dalle (9), i momenti indotti α, β, γ sono esprimibili, qualunque sia la natura delle forze inducenti, per mezzo delle derivate di un'unica funzione φ, e lo sono nella forma indicata dalle equazioni (11_a) stesse. Questa funzione φ non è arbitraria, ma deve soddisfare, in ogni punto dello spazio S occupato dal corpo, all'equazione differenziale (11_b). Dunque le equazioni (11_a), (11_b) contengono i caratteri necessarî di ogni distribuzione indotta, indipendentemente da qualunque determinazione particolare delle forze inducenti.

L'equazione (11_c) non esprime egualmente un carattere generale delle distribuzioni magnetiche indotte, poichè essa contiene anche la derivata normale *esterna* della funzione φ, mentre, in quanto questa funzione serve a determinare i momenti α, β, γ, essa non ha d'uopo d'essere definita che per i punti dello spazio interno al corpo.

Giova osservare che denotando con $F(\varphi)$ la funzione reciproca di ψ, formata, come quella che abbiamo dianzi considerata, colle derivate di φ, e introducendo una nuova ed analoga funzione $G(\varphi)$, definita dalla relazione

$$G(\varphi) = \Delta_1 \varphi + 8\pi F(\varphi),$$

la precedente equazione differenziale (11_b) diventa

$$\frac{\partial}{\partial x} G'\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y} G'\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z} G'\left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right) = 0$$

e coincide quindi con quella che si otterrebbe eguagliando a zero la variazione dell'integrale

$$\int G(\varphi)\,dS.$$

Si noti che, in virtù delle equazioni (11_a), nelle quali α, β, γ sieno considerate semplicemente come quantità definite da quelle equazioni medesime, si ha

$$G(\varphi)=\left(\frac{\partial\psi}{\partial\alpha}\right)^2+\left(\frac{\partial\psi}{\partial\beta}\right)^2+\left(\frac{\partial\psi}{\partial\gamma}\right)^2+8\pi\psi(\alpha,\,\beta,\,\gamma),$$

epperò, (§ 7), la funzione $G(\varphi)$, formata colle derivate di φ, si mantiene positiva in ogni punto dello spazio S, qualunque sia φ.

§ 10.

Il teorema di reciprocità, (3_a),

$$(12)\qquad \int(X\alpha'+Y\beta'+Z\gamma')\,dS=\int(X'\alpha+Y'\beta+Z'\gamma)\,dS$$

è già stato stabilito da KIRCHHOFF per il caso, più ordinariamente considerato, dei corpi isotropi *). La dimostrazione che ne abbiamo data fin dal principio stabilisce che questo teorema, ammesse le ipotesi fondamentali della teoria di POISSON, è assolutamente generale, e possiede anzi una generalità maggiore di quella delle equazioni d'induzione (9), nella cui deduzione si son dovute far intervenire diverse altre ipotesi e considerazioni secondarie.

Questo teorema è suscettibile di svariate applicazioni, una delle quali fu indicata dallo stesso KIRCHHOFF, sempre in relazione al caso dei corpi isotropi.

Per formulare quest'applicazione indipendentemente da qualunque restrizione, basta supporre che, restando del tutto generali le componenti X, Y, Z della forza inducente, nel primo caso d'induzione, le componenti X', Y', Z' della stessa forza, nel secondo caso, sieno *costanti*. L'equazione (12) diventa in tal caso

$$(12_a)\qquad \int(X\alpha'+Y\beta'+Z\gamma')\,dS=AX'+BY'+CZ',$$

dove le quantità A, B, C hanno lo stesso significato che nel § 3, rispetto all'induzione generale. Da quest'equazione risulta che, se è nota la distribuzione $(\alpha',\,\beta',\,\gamma')$ indotta

*) V. Memoria citata nel § 3; *Gesammelte Abhandlungen*, p. 212.

dalle forze costanti X', Y', Z' e se quindi i momenti α', β', γ' sono espressi in funzione delle coordinate x, y, z e delle costanti X', Y', Z', si ha

$$(12_b)\qquad \begin{cases} A = \dfrac{\partial}{\partial X'} \displaystyle\int (X\alpha' + Y\beta' + Z\gamma')\,dS, \\ B = \dfrac{\partial}{\partial Y'} \displaystyle\int (X\alpha' + Y\beta' + Z\gamma')\,dS, \\ C = \dfrac{\partial}{\partial Z'} \displaystyle\int (X\alpha' + Y\beta' + Z\gamma')\,dS. \end{cases}$$

Queste formole conducono all'importante conclusione che, qualunque sieno le forze inducenti, si possono sempre calcolare direttamente i momenti *totali* d'ogni distribuzione indotta in un corpo qualunque, quando sia soltanto nota la distribuzione indotta, nello stesso corpo, da una forza arbitraria, ma costante in grandezza e direzione.

Si noti che, per il già avvertito principio di sovrapposizione, (§ 8), se si designano ordinatamente con

$$\alpha_x, \quad \beta_x, \quad \gamma_x; \qquad \alpha_y, \quad \beta_y, \quad \gamma_y; \qquad \alpha_z, \quad \beta_z, \quad \gamma_z,$$

i momenti indotti (in uno stesso punto qualunque del corpo) da una forza costante unitaria, diretta secondo l'asse delle x, oppure delle y, oppure delle z rispettivamente, si hanno, per i momenti α', β', γ' indotti nello stesso punto da una forza costante qualsivoglia (X', Y', Z'), le espressioni

$$\alpha' = \alpha_x X' + \alpha_y Y' + \alpha_z Z',$$

$$\beta' = \beta_x X' + \beta_y Y' + \beta_z Z',$$

$$\gamma' = \gamma_x X' + \gamma_y Y' + \gamma_z Z'.$$

Quindi le equazioni (12_b) equivalgono alle seguenti

$$(12_c)\qquad \begin{cases} A = \displaystyle\int (X\alpha_x + Y\beta_x + Z\gamma_x)\,dS, \\ B = \displaystyle\int (X\alpha_y + Y\beta_y + Z\gamma_y)\,dS, \\ C = \displaystyle\int (X\alpha_z + Y\beta_z + Z\gamma_z)\,dS. \end{cases}$$

§ 11.

Ma la più importante applicazione del teorema di reciprocità è la seguente.

Supponiamo che il secondo sistema inducente si riduca ad un polo magnetico unitario collocato nel punto p, di coordinate x, y, z, *esterno* al corpo S, e denotiamo con α_p, β_p, γ_p i valori particolari dei momenti α', β', γ' relativi a quest'ipotesi. Questi valori saranno funzioni delle coordinate x, y, z del punto inducente e di quelle del punto di S cui le quantità α_p, β_p, γ_p si riferiscono e che ora denoteremo con a, b, c.

Essendo in tal caso

$$U' = \frac{1}{r_p}, \qquad r_p = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2},$$

il secondo membro dell'equazione (12), cambiato di segno, diventa evidentemente l'espressione del valore V_p che la funzione potenziale V, corrispondente alla distribuzione (α, β, γ) indotta dalle forze *qualunque* X, Y, Z, prende nel punto esterno p. Si ha quindi

$$V_p = \int \left(\frac{\partial U}{\partial a} \alpha_p + \frac{\partial U}{\partial b} \beta_p + \frac{\partial U}{\partial c} \gamma_p \right) dS, \tag{13}$$

dove U è la funzione potenziale inducente.

Qualunque sia il sistema inducente, si può dunque determinare il valore di V in ogni punto *esterno* al corpo indotto, quando si conoscano i momenti α_p, β_p, γ_p della distribuzione indotta in questo corpo da un polo unitario collocato in quel punto.

La funzione potenziale, che diremo $V^{(p)}$, di quest'ultima distribuzione particolare, è manifestamente analoga alla funzione di Green e possiede, rispetto ai punti esterni, la stessa proprietà di reciprocità che a questa compete in elettrostatica. Infatti se q è un altro punto esterno qualunque, e se si pone

$$U = \frac{1}{r_q},$$

si ha dall'equazione (13)

$$V_p^{(q)} = \int \left(\frac{\partial \frac{1}{r_q}}{\partial a} \alpha_p + \frac{\partial \frac{1}{r_q}}{\partial b} \beta_p + \frac{\partial \frac{1}{r_q}}{\partial c} \gamma_p \right) dS = V_q^{(p)}.$$

È facile riconoscere che le formole (12_c) non sono altro che casi particolari dell'equazione (13), i quali si ottengono supponendo che il punto p sia a distanza infinita, nella direzione dell'asse delle x, oppure delle y, oppure delle z e che questo punto, anzichè d'una massa unitaria, sia dotato d'una massa infinita, dell'ordine di r^2.

Se le forze inducenti di potenziale U fossero costanti, cioè se fosse

$$U = -(aX + bY + cZ),$$

l'equazione (13) diverrebbe semplicemente

$$V_p = -(A_p X + B_p Y + C_p Z),$$

dove A_p, B_p, C_p sono i momenti totali dovuti all'induzione del polo unitario p.

Se, nell'equazione (12), si suppone che il secondo sistema inducente sia, non già un polo unitario, ma un ago magnetico infinitesimo, di momento unitario e di direzione s, cioè se si pone

$$U' = \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial s},$$

la detta equazione diventa

$$\int\left(\frac{\partial U}{\partial a}\alpha_s + \frac{\partial U}{\partial b}\beta_s + \frac{\partial U}{\partial c}\gamma_s\right)dS = \frac{\partial}{\partial s}\int\left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial a}\alpha + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial b}\beta + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial c}\gamma\right)dS,$$

dove α_s, β_s, γ_s sono i valori particolari di α', β', γ' relativi all'induzione dovuta all'ago. Si ha di qui

$$\frac{\partial V}{\partial s} = \int\left(\frac{\partial U}{\partial a}\alpha_s + \frac{\partial U}{\partial b}\beta_s + \frac{\partial U}{\partial c}\gamma_s\right)dS,$$

talchè si può calcolare ogni componente di forza esterna, esercitata da una qualunque distribuzione indotta, conoscendo la distribuzione indotta da un ago unitario collocato nel punto esterno in cui la forza si esercita, nella direzione della componente cercata.

Anche qui, se le forze inducenti di potenziale U fossero costanti, si avrebbe semplicemente

$$-\frac{\partial V}{\partial s} = A_s X + B_s Y + C_s Z,$$

dove A_s, B_s, C_s sono i momenti totali dovuti all'induzione dell'ago unitario.

Tenuto conto della difficoltà di risolvere il problema d'induzione in casi alquanto complicati, si comprende quanto possano riuscire utili, in alcune occasioni, le relazioni del genere di quelle che abbiamo accennate in questo e nel precedente §.

§ 12.

In elettrostatica, la funzione di GREEN ha la proprietà di fornire l'espressione d'ogni funzione potenziale indotta per mezzo di un integrale di superficie. Invece l'analoga formola (13) porge il valore di V_p sotto la forma di un integrale di volume. Ora si può dimostrare che quest'integrale di volume è convertibile in uno di superficie.

Infatti, mediante le identità

$$\frac{\partial U}{\partial a}\alpha' = \frac{\partial (U\alpha')}{\partial a} - U\frac{\partial \alpha'}{\partial a}, \ldots$$

ed i noti teoremi di trasformazione d'integrali, si ha dapprima

$$\int\left(\frac{\partial U}{\partial a}\alpha' + \frac{\partial U}{\partial b}\beta' + \frac{\partial U}{\partial c}\gamma'\right)dS,$$

$$= -\int U\left(\frac{\partial \alpha'}{\partial a} + \frac{\partial \beta'}{\partial b} + \frac{\partial \gamma'}{\partial c}\right)dS - \int U\left(\alpha'\frac{\partial a}{\partial n} + \beta'\frac{\partial b}{\partial n} + \gamma'\frac{\partial c}{\partial n}\right)d\sigma$$

$$= -\frac{1}{4\pi}\left[\int U\Delta_2 V' dS + \int U\left(\frac{\partial V'}{\partial n} + \frac{\partial V'}{\partial n'}\right)d\sigma\right].$$

Ma per essere $\Delta_2 U = 0$ in S, si ha anche

$$\int U\Delta_2 V' dS + \int\left(U\frac{\partial V'}{\partial n} - V'\frac{\partial U}{\partial n}\right)d\sigma = 0,$$

quindi

$$(14)\qquad \int\left(\frac{\partial U}{\partial a}\alpha' + \frac{\partial U}{\partial b}\beta' + \frac{\partial U}{\partial c}\gamma'\right)dS = -\frac{1}{4\pi}\int\left(U\frac{\partial V'}{\partial n'} + V'\frac{\partial U}{\partial n}\right)d\sigma.$$

Da quest'identità (la quale permetterebbe di scrivere il teorema generale di reciprocità sotto una forma che s'accosterebbe più della primitiva a quella nella quale esso è stato dato da KIRCHHOFF pei corpi isotropi), si ricava, (13), ponendo

$$V' = V^{(p)}, \qquad \alpha' = \alpha_p, \qquad \beta' = \beta_p, \qquad \gamma' = \gamma_p,$$

quest'altra espressione di V_p:

$$(14_a)\qquad V_p = -\frac{1}{4\pi}\int\left(U\frac{\partial V^{(p)}}{\partial n'} + V^{(p)}\frac{\partial U}{\partial n}\right)d\sigma,$$

la quale sussiste, come la (13), per ogni punto esterno p, ed ha appunto la forma cercata.

Denominiamo ora U' quella funzione di x, y, z che soddisfa in tutto lo spazio esterno all'equazione di LAPLACE e che prende sulla superficie σ gli stessi valori di U. Questa nuova funzione U', cambiata di segno, non è altro che la funzione potenziale di quello strato elettrico che sarebbe provocato, per induzione elettrostatica, sulla superficie σ del conduttore S, supposto comunicante col suolo, dalle forze elettriche esterne dotate della funzione potenziale U. La determinazione di U' appartiene quindi ad una classe di problemi che si risolvono coll'ordinaria funzione di GREEN. Si può anche osservare che tale determinazione sarebbe già inclusa nei dati del problema magnetico, se l'induzione magnetica emanasse dai punti di una superficie aderente a quella del corpo.

Supposta nota la funzione U', per essere

$$\Delta_2 U' = 0, \qquad \Delta_2 V^{(p)} = 0$$

in tutto lo spazio esterno, si ha

$$\int \left(U' \frac{\partial V^{(p)}}{\partial n'} - V^{(p)} \frac{\partial U'}{\partial n'} \right) d\sigma = 0,$$

ossia

$$\int U' \frac{\partial V^{(p)}}{\partial n'} d\sigma = \int V^{(p)} \frac{\partial U'}{\partial n'} d\sigma,$$

epperò l'equazione (14_a) diventa

$$V_p = -\frac{1}{4\pi} \int V^{(p)} \left(\frac{\partial U}{\partial n} + \frac{\partial U'}{\partial n'} \right) d\sigma.$$

Ponendo dunque

(15)
$$\frac{\partial U}{\partial n} + \frac{\partial U'}{\partial n'} = -4\pi h,$$

si ha

$$V_p = \int V^{(p)} h \, d\sigma.$$

Designamo, per maggior distinzione, con $V_\sigma^{(p)}$ il valore che la funzione $V^{(p)}$ assume in un punto della superficie σ ed osserviamo che, per la proprietà di reciprocità della funzione $V^{(p)}$, si ha

$$V_\sigma^{(p)} = V_p^{(\sigma)}.$$

L'equazione precedente si può quindi scrivere sotto la forma

(15_a)
$$V_p = \int V_p^{(\sigma)} h \, d\sigma$$

e sussiste per ogni punto esterno p.

§ 13.

Ora si può dimostrare che, sopprimendo nella precedente equazione l'indice p ed intendendo che i valori delle due funzioni potenziali V e $V^{(\sigma)}$ si riferiscano sempre ad *uno stesso* punto (x, y, z), sia *interno*, sia *esterno*, l'equazione

$$V = \int V^{(\sigma)} h\, d\sigma \tag{16}$$

porge la cercata espressione generale di V, valida per *ogni* punto dello spazio, e posta sotto la forma di un integrale di superficie.

Infatti osserviamo, primieramente, che questa formola è già stata dimostrata valida per i punti esterni. Ora la funzione V è continua in tutto lo spazio: dunque i valori che la formola precedente assegna a V nei punti della superficie σ sono quelli che essa deve effettivamente assumere su questa superficie.

Osserviamo ancora, in secondo luogo, che se si denota con U_1 quella funzione monodroma, continua e finita, che soddisfa in tutto lo spazio all'equazione di LAPLACE e che prende sulla superficie σ gli stessi valori di U, ossia, in altri termini, se si denota con U_1 quella funzione che è uguale ad U in S ed uguale ad U' in S', si ha

$$U_1 = \int \frac{h\, d\sigma}{r_\sigma}.$$

Sommando quest'equazione, membro a membro, colla (16), si ottiene

$$U_1 + V = \int \left(V^{(\sigma)} + \frac{1}{r_\sigma} \right) h\, d\sigma$$

ossia

$$-(U_1 + V) = \int \varphi^{(\sigma)} h\, d\sigma, \tag{16$_a$}$$

dove $\varphi^{(\sigma)}$ designa ciò che diventa la funzione φ definita dalla (11) quando l'induzione emana da un polo unitario, collocato in un punto dell'elemento di superficie $d\sigma$. Da quest'equazione (finora valida soltanto pei punti esterni) e dall'osservazione precedente risulta che la funzione (11)

$$\varphi = -(U + V)$$

prende sulla superficie σ i valori rappresentati dalla formola

$$\int \varphi^{(\sigma)} h\, d\sigma$$

quando il punto (x, y, z), cui si riferisce in questa la $\varphi^{(\sigma)}$, è sulla superficie stessa.

Ora se, per ogni punto dello spazio S, si pone

$$\varphi = \int \varphi^{(\sigma)} h \, d\sigma, \tag{16_b}$$

la funzione φ che viene definita da questa formola è monodroma, continua e finita colle sue derivate prime in S, prende sulla superficie σ i valori prescritti alla funzione φ dall'equazione (11) e soddisfa, come questa, in ogni punto di S all'equazione differenziale (11_b), poichè a quest'ultima equazione soddisfa, per ipotesi, la funzione $\varphi^{(\sigma)}$. Se dunque si dimostra che non vi possono essere due distinte funzioni φ soddisfacenti a tutte queste condizioni, resterà pur dimostrato che quella definita dall'equazione (16_b) è la cercata, e che quindi l'equazione (16) è valida, come abbiamo affermato, per ogni punto dello spazio.

Per conseguire tale dimostrazione consideriamo di nuovo l'espressione

$$G(\varphi) = \Delta_1 \varphi + 8\pi F(\varphi),$$

che abbiamo già introdotta alla fine del § 9 e che abbiamo veduto essere positiva in ogni punto di S, qualunque sia la funzione φ. Ponendo per brevità

$$\frac{\partial}{\partial x} G'\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y} G'\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z} G'\left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right) = \nabla \varphi$$

ed osservando essere

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\varphi G'\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\varphi G'\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[\varphi G'\left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)\right] = \varphi \nabla \varphi + 2 G(\varphi),$$

si scorge che, supposte monodrome, continue e finite le funzioni

$$\varphi, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z},$$

come pure quelle funzioni di x, y, z che figurano come coefficienti di α, β, γ in $\psi(\alpha, \beta, \gamma)$, si ha

$$0 = \int \nabla \varphi \, dS + 2\int G(\varphi) \, dS + \int \varphi \left[G'\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)\frac{\partial x}{\partial n} + G'\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)\frac{\partial y}{\partial n} + G'\left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)\frac{\partial z}{\partial n}\right] d\sigma.$$

Da quest'identità segue che una funzione φ, monodroma, continua e finita colle sue derivate prime in S, non può soddisfare simultaneamente alle condizioni

$$\nabla \varphi = 0 \quad \text{in } S, \qquad \varphi = 0 \quad \text{in } \sigma$$

senza ridursi a zero: giacchè non può essere

$$\int G(\varphi)dS = 0$$

se non è $G(\varphi) = 0$ in S, epperò

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0, \qquad \varphi = \text{Cost.} = 0.$$

Di qui risulta, per un noto e già invocato ragionamento, che non possono esistere due differenti valori di φ, monodromi, continui e finiti colle loro derivate prime in S, soddisfacenti in questo spazio all'equazione (11_b) ed assumenti valori dati sulla superficie σ.

Con ciò è dimostrata la proposizione che si era asserita. Si può anche aggiungere che la funzione φ, definita in S dall'equazione (16_b), ha la proprietà di rendere minimo l'integrale

$$\int G(\varphi)dS,$$

in confronto di tutte quelle altre funzioni che prendono sulla superficie σ gli stessi valori di φ e che sono in S monodrome, continue e finite colle loro derivate prime. Infatti se una tale altra funzione si denota con $\varphi + \varphi'$, si ha

$$G(\varphi + \varphi') = G(\varphi) + G(\varphi') + G'\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)\frac{\partial \varphi'}{\partial x} + G'\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)\frac{\partial \varphi'}{\partial y} + G'\left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)\frac{\partial \varphi'}{\partial z}$$

e quindi

$$\int G(\varphi + \varphi')dS = \int G(\varphi)dS + \int G(\varphi')dS - \int \varphi' \nabla \varphi dS$$

$$- \int \varphi'\left[G'\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)\frac{\partial x}{\partial n} + G'\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)\frac{\partial y}{\partial n} + G'\left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)\frac{\partial z}{\partial n}\right]d\sigma.$$

Poichè dunque si ha, per ipotesi,

$$\nabla \varphi = 0 \quad \text{in } S, \qquad \varphi' = 0 \quad \text{in } \sigma,$$

si ha pure

$$\int G(\varphi + \varphi')dS = \int G(\varphi)dS + \int G(\varphi')dS,$$

epperò

$$\int G(\varphi + \varphi')dS > \int G(\varphi)dS,$$

giacchè $G(\varphi')$ è quantità positiva in ogni punto di S.

È facile del resto interpretare la formola (16) in modo da rendere manifesto il significato della funzione V definita da essa.

Perchè nasca l'induzione corrispondente a date forze magnetiche esterne basta infatti che lo spazio S diventi, in qualsivoglia modo, un campo magnetico la cui funzione potenziale U abbia dovunque lo stesso valore di quella delle date forze esterne; basta, quindi, che la funzione U relativa a questo campo S prenda i valori voluti sulla sola superficie σ, poichè in tutto il campo essa deve soddisfare all'equazione di LAPLACE. Ora il modo più semplice di generare questo campo magnetico è quello di costituire uno strato di densità h, (15), sulla superficie σ, giacchè la funzione potenziale interna di questo strato è appunto quella che prende sulla superficie i valori voluti. Si può dunque, senz'altro mutamento dell'azione induttrice, ammettere che l'induzione emani da uno strato deposto sulla superficie σ, nel quale l'elemento $d\sigma$ contenga la massa $h\,d\sigma$. Ora $V^{(\sigma)}$ è, per ipotesi, la funzione potenziale indotta da un'unità di massa collocata in un punto di quell'elemento, epperò, in virtù del principio di sovrapposizione, $V^{(\sigma)} h\,d\sigma$ è quella indotta dall'elemento di massa del detto strato, e, per lo stesso principio, la funzione V definita dall'equazione (16) è la funzione potenziale indotta dall'intero strato. Questa funzione è quindi, al tempo stesso, quella che corrisponde allo stato d'induzione provocato dalle date forze esterne.

§ 14.

La formola generale (16) può essere utilmente trasformata nel caso dei corpi isotropi.

Giova, a tal uopo, risalire all'equazione (14_a), la quale, come sappiamo, si riferisce ad un punto esterno p, e sommata colla

$$o = \frac{1}{4\pi}\int\left(U\frac{\partial\frac{1}{r_p}}{\partial n} - \frac{1}{r_p}\frac{\partial U}{\partial n}\right)d\sigma$$

ossia colla

$$o = -\frac{1}{4\pi}\int\left(U\frac{\partial\frac{1}{r_p}}{\partial n'} + \frac{1}{r_p}\frac{\partial U}{\partial n}\right)d\sigma,$$

dà

$$V_p = \frac{1}{4\pi}\int\left(U\frac{\partial\varphi^{(p)}}{\partial n'} + \varphi^{(p)}\frac{\partial U}{\partial n}\right)d\sigma.$$

Ora nel caso dei corpi isotropi si ha

$$\psi(\alpha, \beta, \gamma) = \frac{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}{2\varkappa},$$

e quindi

$$F(\varphi) = \frac{\varkappa}{2}\left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2\right]$$

dove $\varkappa$ è costante. L'equazione (11_c) prende, in corrispondenza, la nota forma

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n'} + (1 + 4\pi\varkappa)\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0 .$$

L'equazione testè ottenuta può quindi scriversi così:

$$V_p = -\frac{1 + 4\pi\varkappa}{4\pi}\int U\frac{\partial \varphi^{(p)}}{\partial n} d\sigma + \frac{1}{4\pi}\int \varphi^{(p)}\frac{\partial U}{\partial n} d\sigma .$$

Ma, nel caso dell'isotropia, la funzione φ soddisfa, (11_b), in S all'equazione di LAPLACE [alla quale, per conseguenza, deve in questo caso, (11), soddisfare anche la funzione V], epperò si ha

$$\int\left(U\frac{\partial \varphi^{(p)}}{\partial n} - \varphi^{(p)}\frac{\partial U}{\partial n}\right) d\varphi = 0 ;$$

si può dunque scrivere di nuovo

$$V_p = -\varkappa\int \varphi^{(p)}\frac{\partial U}{\partial n} d\sigma ,$$

ossia finalmente, permutando in φ i punti p e σ e poscia sopprimendo l'indice p, come si è già fatto nel caso generale,

$$(17) \qquad V = -\varkappa\int \varphi^{(\sigma)}\frac{\partial U}{\partial n} d\sigma .$$

Questa formola è certamente vera ogni volta che il punto cui si riferiscono simultaneamente le due funzioni V e $\varphi^{(\sigma)}$ è esterno, epperò essa assegna a V i giusti valori sulla superficie σ. Ma i valori che essa assegna alla stessa funzione nei punti interni ad S sono monodromi, continui e finiti colle loro derivate prime, soddisfanno all'equazione di LAPLACE (poichè si ha $\Delta_2 \varphi^{(\sigma)} = 0$) e sono in continuità coi valori esterni: dunque la funzione V definita in tutto lo spazio dall'equazione (17) è la funzione potenziale indotta, poichè ne possiede tutti i caratteri.

L'equazione (17) s'accorda esattamente con quella data da F. NEUMANN *) e la funzione quì designata con $\varphi^{(\sigma)}$ coincide con quella che NEUMANN denomina *funzione caratteristica.*

---

*) *Vorlesungen über die Theorie des Magnetismus.* Leipzig, 1881, p. 112.

LXXX.

SULL'USO DELLE COORDINATE CURVILINEE NELLE TEORIE DEL POTENZIALE E DELL'ELASTICITÀ.

Memorie della R. Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna, serie IV, tomo VI (1884), pp. 401-448.

È noto che l'illustre MAXWELL, cercando di dare una forma precisa alle idee di FARADAY circa l'esistenza di un mezzo che servirebbe alla propagazione delle azioni elettriche, e che sostituirebbe le cosidette azioni a distanza, è giunto a dimostrare che le forze emananti da un'ordinaria distribuzione di massa, in due ed in tre dimensioni, possono essere effettivamente sostituite, in ogni punto dello spazio, dalle forze dovute ad un certo sistema, esattamente definito, di pressioni e di tensioni analoghe a quelle che regnano nell'interno d'un fluido o d'un mezzo elastico. E propriamente, denotando con V l'ordinaria funzione potenziale dell'immaginata distribuzione di spazio e di superficie e con X_n, Y_n, Z_n le componenti, secondo tre assi ortogonali delle x, y, z, della pressione unitaria esercitata sopra un elemento piano di normale n, le relazioni trovate da MAXWELL sono le seguenti:

$$X_x = -\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{8\pi}\Delta_1 V, \qquad Y_z = Z_y = -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial V}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial z},$$

$$Y_y = -\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \frac{1}{8\pi}\Delta_1 V, \qquad Z_x = X_z = -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial V}{\partial z}\frac{\partial V}{\partial x},$$

$$Z_z = -\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2 + \frac{1}{8\pi}\Delta_1 V; \qquad X_y = Y_x = -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial y},$$

dove si è posto

$$\Delta_1 V = \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2.$$

Il sistema di pressioni definito da queste formole, delle quali io ho dato una dimostrazione diretta nella Nota *Sulla rappresentazione delle forze newtoniane per mezzo di forze elastiche* *), genera un campo di forza assolutamente identico a quello che si suole considerare come definito dall'ordinaria funzione potenziale V.

Avendo intrapreso varie ricerche sulle formole di MAXWELL, all'uopo di analizzarne il significato e di giungere possibilmente alla loro interpretazione ed alla loro genesi dinamica, ho dovuto, fra altre cose, esaminare il grado di generalità inerente alle formole stesse, cioè la loro eventuale dipendenza dalla natura dello spazio.

Il procedimento che si offeriva spontaneamente per tale indagine era la deduzione *diretta* delle formole stesse, nell'ipotesi che le coordinate di riferimento fossero assolutamente generali, cioè curvilinee, oblique e considerate come indipendenti da qualunque nesso prestabilito colle ordinarie coordinate cartesiane. Ora tale deduzione non era priva di difficoltà, non solo per la mancata possibilità d'invocare la maggior parte delle proposizioni su cui si fonda l'ordinaria teoria, ma eziandio in causa della ben nota complicazione che le coordinate curvilinee introducono nelle formole relative all'elasticità, complicazione la quale, del resto, come ho già avuto occasione di mostrare altrove **), non è un fatto meramente algoritmico, ma ha la sua radice appunto nell'anzidetta questione della natura dello spazio. Qui poi queste difficoltà diventavano maggiori in causa della rimossa ipotesi dell'ortogonalità ***). Ciò non ostante, stabilendo certe proposizioni preliminari ed usando opportuni artifizî, ho potuto giungere alla meta e porre in sodo la generalità del risultato ottenuto da MAXWELL, con che veniva posta una base più sicura alle ricerche cui alludevo dianzi.

Benchè le conclusioni cui sono fin quì pervenuto in tali ricerche sieno ancora troppo immature ed incomplete perchè possa sembrarne giustificata la pubblicazione, anche parziale, ho tuttavia creduto utile far conoscere la serie dei procedimenti analitici che mi hanno condotto alla dimostrazione generale delle formole di MAXWELL, poichè tali procedimenti possono essere opportunamente invocati anche per altri scopi. Essi conducono infatti a stabilire nel modo più generale tutte le proposizioni fondamentali della teoria del potenziale e di quella dell'elasticità. Rispetto alla prima, massimamente,

---

*) Rendiconti del R. Istituto Lombardo, s. II, t. XVII (1884), pag. 581; oppure queste OPERE, tomo IV, pp. 95-103.

**) V. la Memoria: *Sulle equazioni generali dell'elasticità* [Annali di Matematica pura ed applicata, serie II, tomo X (1880-82), pp. 188-211; oppure queste OPERE, tomo III, pp. 383-407].

***) Nell'interessante sua Nota *Sulle equazioni generali per l'equilibrio dei sistemi continui a tre dimensioni* (Atti della R. Accademia di Torino, t. XX), il Dott. MORERA ha già fatto uso di coordinate curvilinee oblique nella deduzione delle equazioni generali per l'equilibrio elastico. Ma le formole da lui stabilite, notevoli per semplicità ed eleganza, implicano l'esistenza di un ordinario sistema di coordinate cartesiane e non potrebbero essere invocate per lo scopo attuale.

si troveranno quì raccolte, nell'ordine che mi sembra il più naturale e nella forma che mi sembra la più comprensiva, le più importanti equazioni di quel gruppo numeroso e caratteristico che ha, per così dire, il suo centro nel teorema di GREEN. Nella deduzione di tali equazioni interviene, in particolare, una formola che rappresenta la generalizzazione d'un teorema di GAUSS e che sembra non essere stata finora notata, benchè costituisca, a mio credere l'anello più essenziale della catena. Anche rispetto alla parte cinematica della teoria dell'elasticità, cioè rispetto alla teoria della deformazione infinitesima, si troverà indicata una modificazione dell'ordinario procedimento, la quale permette di assegnare ad un tempo tutte sei le caratteristiche della deformazione d'un parallelepipedo elementare obliquo, senza intervento d'alcuna considerazione geometrica ausiliare.

Quanto poi all'utilità di massima che può avere l'uso delle coordinate curvilinee oblique nelle questioni di fisica matematica, indipendentemente dallo scopo particolare in vista del quale esso era quì raccomandato, non è fuor di luogo il notare che stante la frequenza dei casi in cui la natura stessa del problema suggerisce *a priori* un certo sistema di superficie come strumento essenziale di soluzione e stante, d'altronde, la ben nota impossibilità (in generale) di concepire un sistema triplo ortogonale al quale il sistema dato appartenga, è naturale presumere che la trattazione possa essere non di rado agevolata dall'uso di formole non vincolate all'ipotesi della triplice ortogonalità, quand'anche esse possano apparire meno semplici sotto l'aspetto puramente analitico.

Per non dare a questo scritto un'estensione troppo sproporzionata alla parzialità della ricerca che gli ha dato occasione, non ho spinto lo svolgimento delle formole relative all'elasticità fino alla deduzione delle tre equazioni indefinite espresse coi soli spostamenti, deduzione che, come è noto, riesce prolissa anche nel caso dell'ortogonalità. Noterò tuttavia che le formole generali per le componenti di rotazione, le quali hanno un ufficio essenziale in tale deduzione, furono già date da me nel § 11 delle *Ricerche sulla cinematica dei fluidi* *).

§ 1.

Denotiamo con q_1, q_2, q_3 le coordinate generali di un punto qualunque dello spazio e, indicando con ds l'elemento lineare che ha la sua origine in questo punto ed il suo termine nel punto contiguo $(q_1 + dq_1, q_2 + dq_2, q_3 + dq_3)$ poniamo

$$(1) \qquad ds^2 = \sum_{hk} Q_{hk}\, dq_h\, dq_k, \qquad (Q_{hk} = Q_{kh})$$

*) Memorie dell'Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna, t. I della serie III, 1871; oppure queste OPERE, tomo II, pp. 202-379.

dove ciascuno degli indici h, k deve prendere successivamente i valori 1, 2, 3. I coefficienti Q_{hk} dell'espressione differenziale quadratica che costituisce il secondo membro della precedente equazione sono funzioni monodrone, continue e finite delle coordinate q_1, q_2, q_3, funzioni che supporremo soggette alle condizioni che debbono notoriamente verificarsi affinchè l'espressione quadratica anzidetta sia sempre positiva e non si annulli che per $dq_1 = dq_2 = dq_3 = 0$. Una di queste condizioni è che il determinante dei coefficienti Q_{hk} sia maggiore di zero; lo designeremo perciò con Q^2, Q essendo la radice positiva del determinante stesso. Designeremo inoltre con $Q^2 P_{hk}$ il complemento algebrico dell'elemento Q_{hk} in questo determinante, talchè sarà $P_{hk} = P_{kh}$. Le sei quantità Q_{hh}, P_{hh} $(h = 1, 2, 3)$ debbono essere maggiori di zero; quando occorrerà di estrarne la radice quadrata, converremo di assumere sempre questa radice col segno positivo. Indicheremo, per brevità, con 1, 2, 3 le direzioni (in ogni punto) delle linee coordinate, cioè delle linee lungo le quali varia soltanto la coordinata q_1, o soltanto la q_2, o soltanto la q_3, linee che devono sempre intendersi percorse nel senso dell'accrescimento delle rispettive variabili.

Insieme colla formola (1) sussiste quest'altra:

$$(1_a) \qquad ds\,\delta s \cos(ds,\ \delta s) = \sum\nolimits_{hk} Q_{hk}\, dq_h\, \delta q_k ,$$

dove δs è un altro elemento lineare avente in comune col primo l'origine (q_1, q_2, q_3), ma corrispondente ad altri incrementi $(\delta q_1, \delta q_2, \delta q_3)$ delle coordinate [veggasi in proposito i primi due §§ della Memoria *Sulla teorica generale dei parametri differenziali* *)]. Le due formole (1), (1_a) contengono implicitamente tutte le determinazioni metriche relative all'assunto sistema di coordinate. Di tali determinazioni, in gran parte notissime, citiamo solo alcune poche che sono indispensabili per l'intelligenza di ciò che segue.

Ponendo nella formola (1_a)

$$dq_2 = dq_3 = 0, \qquad ds = dq_1 \sqrt{Q_{11}},$$

si ha

$$\delta s \sqrt{Q_{11}} \cos(\delta s,\ 1) = Q_{11}\,\delta q_1 + Q_{12}\,\delta q_2 + Q_{13}\,\delta q_3 ,$$

dove $(\delta s,\ 1)$ è l'angolo che l'elemento δs fa colla direzione 1. Di quì si vede che designando con n una direzione qualunque e sostituendo a q_1 una coordinata qualunque q_i,

$$(2) \qquad \sqrt{Q_{ii}} \cos(n,\ i) = \sum\nolimits_h Q_{ih} \frac{\partial q_h}{\partial n} .$$

Sia ora n_1 la normale alla superficie $q_1 = \text{Cost.}$, diretta in guisa che l'angolo

*) Memorie dell'Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna, s. II, t. VIII (1868), pag. 551; oppure queste OPERE, tomo II, pp. 74-118.

$(n_1, 1)$ sia *acuto*. Dalla relazione (2) si ricava

$$\sum_h Q_{1h} \frac{\partial q_h}{\partial n_1} = \sqrt{Q_{11}} \cos(n_1, 1),$$

$$\sum_h Q_{2h} \frac{\partial q_h}{\partial n_1} = 0,$$

$$\sum_h Q_{3h} \frac{\partial q_h}{\partial n_1} = 0.$$

Moltiplicando ordinatamente queste tre equazioni prima per

$$\frac{\partial q_1}{\partial n_1}, \quad \frac{\partial q_2}{\partial n_1}, \quad \frac{\partial q_3}{\partial n_1},$$

poscia per

$$P_{11}, \quad P_{21}, \quad P_{31}$$

e sommando ciascuna volta, si ottiene

$$1 = \frac{\partial q_1}{\partial n_1} \sqrt{Q_{11}} \cos(n_1, 1), \qquad \frac{\partial q_1}{\partial n_1} = P_{11} \sqrt{Q_{11}} \cos(n_1, 1),$$

donde

$$1 = P_{11} Q_{11} \cos^2(n_1, 1).$$

Si ha dunque, in generale,

$$(2_a) \qquad \cos(n_i, i) = \frac{1}{\sqrt{P_{ii} Q_{ii}}}, \qquad (i = 1, 2, 3).$$

Consideriamo una funzione qualunque U delle coordinate q_1, q_2, q_3. L'espressione

$$(3) \qquad \Delta_1 U = \sum_{hk} P_{hk} \frac{\partial U}{\partial q_h} \frac{\partial U}{\partial q_k}$$

è un invariante differenziale di prim'ordine che si designa, come è noto, col nome di *primo parametro differenziale* della funzione U. Se V è un'altra funzione delle coordinate, l'espressione

$$(3_a) \qquad \Delta_1 UV = \sum_{hk} P_{hk} \frac{\partial U}{\partial q_k} \frac{\partial V}{\partial q_k},$$

la quale si riduce alla precedente per $U = V$, è un invariante differenziale della coppia di funzioni (U, V) che si designa, analogamente, col nome di *primo parametro differenziale* di questa coppia.

Torna spesso comodo introdurre le segnature

$$(3_b)\qquad \begin{cases} U_k = \sum_h P_{hk} \dfrac{\partial U}{\partial q_h} = \dfrac{1}{2} \dfrac{\partial \Delta_1 U}{\partial \dfrac{\partial U}{\partial q_k}}, \\[2ex] V_k = \sum_h P_{hk} \dfrac{\partial V}{\partial q_h} = \dfrac{1}{2} \dfrac{\partial \Delta_1 V}{\partial \dfrac{\partial V}{\partial q_k}}, \end{cases}$$

mercè le quali si può scrivere

$$\Delta_1 U = \sum_k U_k \frac{\partial U}{\partial q_k}, \qquad \Delta_1 UV = \sum_k U_k \frac{\partial V}{\partial q_k} = \sum_k V_k \frac{\partial U}{\partial q_k}.$$

L'espressione

$$(3_c)\qquad \Delta_2 U = \frac{1}{Q} \sum_k \frac{\partial (Q U_k)}{\partial q_k}$$

è un'altro invariante differenziale, di second'ordine, della funzione U, il quale si designa col nome di *secondo parametro differenziale* di questa funzione.

Insieme col sistema delle coordinate generali q_1, q_2, q_3 avremo bisogno di considerare un altro sistema, molto particolare, di coordinate curvilinee, che designeremo coi simboli p, q, r. Di queste tre coordinate l'ultima, r, rappresenta la distanza geodetica di un punto qualunque dello spazio da un punto fisso (del resto arbitrario), che diremo *polo*, e le due prime, p e q, sono due parametri atti ad individuare, in modo qualunque, la direzione iniziale del raggio geodetico r, cioè la direzione in cui questo raggio esce dal polo $r = 0$. Le tre nuove coordinate p, q, r individuano esattamente un punto dello spazio, e reciprocamente, almeno entro quel campo, che supporremo sempre finito, nel quale non esiste alcun punto al quale faccia capo più di un raggio geodetico uscente dal polo: a questo campo intenderemo sempre di limitarci, quando faremo uso delle coordinate polari generalizzate p, q, r.

Rispetto a queste coordinate, l'elemento lineare generico ds è definito da un'espressione del tipo

$$(4)\qquad ds^2 = E\,dp^2 + 2F\,dp\,dq + G\,dq^2 + dr^2,$$

dove i coefficienti E, F, G sono funzioni di p, q, r. Dal fatto che, nell'intorno d'ogni punto, la metrica degli spazî qui considerati è identica alla euclidea, segue che i rapporti

$$\frac{E}{r^2},\quad \frac{F}{r^2},\quad \frac{G}{r^2},\quad \frac{H}{r^2},$$

dove

$$H = \sqrt{EG - F^2},$$

tendono, per $r = 0$, verso limiti finiti e diversi da zero, i cui valori dipendono, in generale, dalle due variabili p, q. Del resto valgono, rispetto all'espressione quadratica *polare* (4), tutte le formole relative all'espressione generale (1), fra le quali citeremo soltanto la seguente

$$(4_a) \qquad \cos(n, r) = \frac{\partial r}{\partial n},$$

che si deduce dalla (2) come caso particolarissimo.

I parametri differenziali Δ_1, Δ_2 prendono, rispetto alle variabili p, q, r, le forme seguenti:

$$(4_b) \qquad \left\{ \begin{aligned} \Delta_1 U &= \Delta_1' U + \left(\frac{\partial U}{\partial r}\right)^2, \\ \Delta_1 UV &= \Delta_1' UV + \frac{\partial U}{\partial r}\frac{\partial V}{\partial r}, \\ \Delta_2 U &= \Delta_2' U + \frac{1}{H}\frac{\partial}{\partial r}\left(H\frac{\partial U}{\partial r}\right), \end{aligned} \right.$$

dove Δ_1', Δ_2' sono gli analoghi parametri, relativi alla quadratica a *due* variabili

$$E dp^2 + 2 F dp dq + G dq^2,$$

nei coefficienti della quale r si deve considerare come costante.

La forma (4) dell'elemento lineare e le corrispondenti relazioni (4_a), (4_b) convengono anche ad un sistema di coordinate meno particolare del precedente; esse si applicano, cioè, anche al caso che le geodetiche r, in luogo di uscire da uno stesso punto, escano *normalmente* da una superficie fissa qualunque. In questo caso le variabili p, q possono considerarsi come coordinate generali dei punti di questa superficie e definiscono il punto di partenza del raggio geodetico r; le funzioni E, F, G tendono, per $r = 0$, verso limiti finiti, dipendenti dalle variabili p, q.

Anche per le cose quì dette circa il sistema delle coordinate p, q, r rimandiamo alla citata Memoria *Sulla teorica generale dei parametri differenziali,* §§ 2 e 3.

§ 2.

Sia φ una funzione delle variabili q_1, q_2, q_3, monodroma, continua e finita in uno spazio che diremo S, e consideriamo l'integrale

$$\int \frac{\partial \varphi}{\partial q_1} \frac{dS}{Q},$$

esteso a questo spazio, di cui dS è un elemento circostante al punto (q_1, q_2, q_3). Determinando la forma di questo elemento nel modo che risulta dalla decomposizione dello spazio S per mezzo delle tre famiglie di superficie coordinate, cioè ponendo

$$dS = Q\,dq_1\,dq_2\,dq_3,$$

il precedente integrale equivale a

$$\int\int dq_2\,dq_3 \int \frac{d\varphi}{dq_1}\,dq_1 .$$

Supponiamo primieramente che il sistema di coordinate q_1, q_2, q_3 presenti, in tutto lo spazio S, quel carattere che si potrebbe dire *cartesiano*: supponiamo, cioè, che questo spazio si possa riferire, punto per punto, senza eccezione e senza smembramento nè sovrapposizione di parti, ad uno spazio ordinario nel quale le variabili q_1, q_2, q_3 abbiano il significato di coordinate cartesiane. In tal caso, supponendo ancora, per semplicità, che ogni linea 1 (cioè ogni linea lungo la quale varia la sola coordinata q_1) attraversi in due soli punti la superficie σ che limita lo spazio S, si ha, integrando lungo una di queste linee, nel senso dell'accrescimento di q_1,

$$\int \frac{\partial\varphi}{\partial q_1}\,dq_1 = \varphi'' - \varphi',$$

dove φ', φ'' sono i valori che la funzione φ prende rispettivamente nei punti in cui la linea di integrazione entra ed esce dallo spazio S. Ne risulta che il prodotto

$$(\varphi'' - \varphi')\,dq_2\,dq_3$$

rappresenta il contributo recato al proposto integrale dalla porzione, inclusa in S, del canaletto a sezione quadrangolare i cui spigoli sono le quattro linee 1 di parametri (q_2, q_3), $(q_2, q_3 + dq_3)$, $(q_2 + dq_2, q_3)$, $(q_2 + dq_2, q_3 + dq_3)$. Questo canaletto intercetta, sì all'entrata che all'uscita da S, un elemento $d\sigma$ della superficie σ ed un elemento $d\sigma_1$ di quell'altra superficie σ_1 che passa per lo stesso punto e che appartiene al sistema $q_1 =$ Cost. Denotando con n, n_1 le normali a questi due elementi, scelte rispettivamente in modo che la prima sia diretta verso S e la seconda faccia un angolo acuto colla direzione 1, si hanno le seguenti due espressioni equivalenti della sezione retta del canaletto:

$$\cos(n_1, 1)\,d\sigma_1 = \pm \cos(n, 1)\,d\sigma,$$

dove il segno superiore vale per l'entrata, l'inferiore per l'uscita. Si ha d'altronde

$$d\sigma_1 = Q\sqrt{P_{11}}\,dq_2\,dq_3, \qquad \cos(n_1, 1) = \frac{1}{\sqrt{P_{11}\,Q_{11}}},$$

quindi

$$dq_2 dq_3 = \pm \frac{\sqrt{Q_{11}} \cos(n, 1) d\sigma}{Q}.$$

Il contributo del canaletto si riduce per tal modo alla somma di due espressioni della forma

$$- \frac{\varphi \sqrt{Q_{11}} \cos(n, 1) d\sigma}{Q},$$

relative l'una all'entrata e l'altra all'uscita; e se il canaletto attraversasse la superficie in più di due posti, si troverebbe sempre la stessa espressione per ognuno dei tragitti. In base a ciò si ottiene subito la formola generale *)

$$(5) \qquad \int \frac{\partial \varphi}{\partial q_1} \frac{dS}{Q} = - \int \frac{\varphi \sqrt{Q_{ii}} \cos(n, i)}{Q} d\sigma,$$

che costituisce l'estensione d'un teorema notissimo.

Applicando successivamente quest'equazione a due spazî separati da una superficie, e supponendo che la funzione φ sia monodroma, continua e finita nello spazio totale, si riconosce immediatamente che, nel secondo membro dell'equazione ottenuta sommando le due equazioni relative ai due singoli spazî, si elidono fra loro gli integrali estesi sulla superficie di separazione. Per l'applicabilità del teorema (5) non è dunque necessaria la restrizione, che avevamo dapprima ammessa, del carattere cartesiano di *tutto* lo spazio S: basta che questo spazio sia decomponibile in spazî parziali, ciascuno dei quali possegga separatamente questo carattere.

La formola (5) continua a sussistere anche se la funzione φ, restando monodroma e continua, diventa infinita, come $1:r$, in punti discreti dello spazio S, essendo r la distanza geodetica di un punto qualunque da uno dei punti d'infinito, o *poli*. Supponiamo, infatti, che ciò avvenga in un sol punto dello spazio S ed applichiamo la formola (5) allo spazio che si ottiene sottraendo da S una piccola sfera geodetica col centro nel polo. Usando le coordinate polari p, q, r, l'elemento di volume dS di questa sfera e l'elemento $d\sigma$ della sua superficie si possono prendere sotto la forma

$$dS = H dp dq dr, \qquad d\sigma = H dp dq;$$

bisogna quindi sottrarre dal primo membro dell'equazione (5) un integrale triplo che si può scrivere così:

$$\int \int dp dq \int_0^r r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial q_i} \cdot \frac{H}{r^2} \frac{dr}{Q},$$

*) Morera — Nota citata.

e dal secondo membro della stessa equazione un integrale doppio che si può scrivere così:

$$r\int\int \frac{r\varphi\sqrt{Q_{ii}}\cos(r,\, i)}{Q}\frac{H}{r^2}dp\,dq.$$

Ora questi due integrali tendono a zero con r *): dunque l'equazione (5) resta inalterata quando, come nel caso normale, si estenda l'integrazione, nel primo membro, a *tutto* lo spazio S e, nel secondo, alla *sola* superficie σ, limite di questo spazio. Lo stesso ha luogo, evidentemente, se la funzione φ ha in S più poli discreti.

Abbiamo implicitamente supposto che il punto d'infinito, ossia il polo $r=0$, fosse a distanza finita dalla superficie σ. Ma il teorema (5) sussiste anche se il polo è sulla superficie. Si sottragga, infatti, dallo spazio S quella porzione di piccola sfera geodetica, col centro nel polo, che cade entro questo spazio. L'integrale triplo che bisogna, in seguito a ciò, sottrarre dal primo membro dell'equazione (5) conserva la stessa forma di dianzi e svanisce istessamente con r. L'integrale doppio che bisogna introdurre nel secondo membro si compone invece di due parti, additiva l'una, sottrattiva l'altra. La parte sottrattiva è dovuta al segmento di superficie sferica che cade entro S, e l'integrale doppio che la rappresenta ha la stessa forma che nel caso del polo interno, talchè svanisce di nuovo con r. La parte additiva è dovuta a quel segmento di superficie σ che cade entro la sfera geodetica, ed è rappresentata da un nuovo integrale doppio che dobbiamo formare. A tal fine riferiamo i punti del segmento di σ a due coordinate ρ, θ di cui la prima sia l'arco geodetico condotto, sulla superficie σ, dal polo $r=0$ ad un punto qualunque del segmento e la seconda sia un parametro atto ad individuare la direzione iniziale di questo arco, cioè la direzione in cui questo esce dal polo **). Il quadrato dell'elemento lineare generico di σ assume, con queste coordinate, la nota forma

$$d\rho^2 + K^2 d\theta^2,$$

dove K è una funzione di ρ e di θ il cui rapporto a ρ tende, per $\rho=0$, verso un

*) Per evitare ogni difficoltà rispetto all'evanescenza del primo di questi due integrali, basta considerare il caso in cui φ abbia la forma $\varphi=\varphi'+\frac{1}{r}$, dove φ' è funzione monodroma, continua e finita, giacchè questo è il solo caso praticamente utile (come in una successiva occasione, § 4). Si ha infatti

$$r^2\frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{1}{r}\right)=-\frac{\partial r}{\partial q_i}=-\sqrt{Q_{ii}}\frac{\partial r}{\partial s_i}=-\sqrt{Q_{ii}}\cos(r,\, i)\,.$$

**) Se il polo fosse situato in un punto cuspidale della superficie σ, nel quale tutte le geodetiche (uscenti da questo polo) avessero una direzione iniziale comune, il parametro θ non potrebbe più avere il preciso significato quì detto, ma ognuno vede come questo significato si dovrebbe modificare. Del resto in questo caso K tenderebbe a zero ancora più rapidamente di ρ.

limite finito dipendente in generale da θ (e ciò anche quando la superficie non ammetta, nel polo, un piano tangente unico e determinato). L'elemento di superficie $d\sigma$ si può, mercè tali coordinate, prendere sotto la forma

$$d\sigma = K\, d\rho\, d\theta,$$

e l'integral doppio di cui abbiamo parlato può quindi scriversi così:

$$\int d\theta \int_0^\rho \frac{\rho}{r} r \varphi \frac{\sqrt{Q_{ii}} \cos(n, i)}{Q} \frac{K}{\rho} d\rho .$$

Ora r è la corda (geodetica dello spazio) dell'arco ρ (geodetica della superficie), ed il limite del rapporto di queste due grandezze è l'unità. Dunque anche l'integrale in questione svanisce con ρ e per conseguenza con r.

Una particolarità notevole dell'equazione (5) è di conservare la stessa forma così per le coordinate ortogonali, come per le oblique. Nel caso delle coordinate ortogonali essa era già stata stabilita da C. NEUMANN *), ma con intervento delle formole di relazione fra le coordinate curvilinee e le cartesiane, cioè nell'ipotesi, non necessaria, dello spazio euclideo. Nel § 4 della già citata Memoria *Sui parametri differenziali* trovasi pure stabilito un teorema sostanzialmente identico a quello contenuto nella equazione (5), ma in una forma meno esplicita.

§ 3.

Il teorema contenuto nell'equazione (5) è valido qualunque sia il sistema delle coordinate q_1, q_2, q_3, purchè nelle varie parti dello spazio S, al quale quel teorema viene applicato, questo sistema possegga, come si è detto, il carattere cartesiano. Quando questa condizione non è soddisfatta, quel teorema, generalmente parlando, non è più applicabile. Invece d'intraprendere l'esame dei varî casi d'eccezione, il che condurrebbe ad una discussione complicata e, probabilmente, neppure suscettibile d'essere esaurita compiutamente, ci limiteremo a considerare un caso particolare, il quale è forse il solo veramente utile ed importante: il caso, cioè, che le coordinate di riferimento sieno quelle che nel § 1 abbiamo designato con p, q, r. È evidente che questo sistema di coordinate non possiede il carattere cartesiano rispetto ad uno spazio comprendente il polo: si può dire invece ch'esso possiede, rispetto ad un tale spazio, il carattere *polare*, purchè, come ammettiamo, ad ogni punto di questo spazio, eccettuato il polo, corrispondano valori individuati delle tre coordinate p, q, r.

---

*) *Zur Theorie der Elasticität* [Journal für die reine und angewandte Mathematik, t. LVII (1860), pp. 281-318].

Ciò premesso, consideriamo l'integrale

$$\int \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{H\varphi}{r^2}\right)\frac{dS}{H}$$

esteso ad uno spazio S soddisfacente alla condizione or detta, φ essendo una funzione monodroma, continua e finita delle coordinate p, q, r, avente nel polo un valore unico e determinato che designeremo con φ_0.

Se lo spazio S non contiene il polo $r = 0$, si rientra nel caso del § precedente e dalla formola (5) si ha subito

$$\int \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{H\varphi}{r^2}\right)\frac{dS}{H} = -\int \frac{\varphi \cos(n, r)}{r^2}\, d\sigma,$$

ossia, (4_a),

$$\int \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{H\varphi}{r^2}\right)\frac{dS}{H} = \int \varphi \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}\, d\sigma. \tag{6}$$

Quest'equazione, come la (5), non cessa di sussistere se la funzione φ diventa infinita come $1:r$ in punti discreti dello spazio S o della superficie σ.

Ma se il polo $r = 0$ giace nello spazio S o sulla superficie σ, quest'equazione non è più vera, sia perchè l'equazione (5) non può più essere invocata, sia perchè la funzione, che qui terrebbe luogo della φ del § precedente, cessa d'essere monodroma nel polo. Bisogna dunque rinnovare direttamente il processo di deduzione.

A tal fine decomponiamo lo spazio S in elementi polari, ponendo

$$dS = H\,dp\,dq\,dr$$

e quindi

$$\int \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{H\varphi}{r^2}\right)\frac{dS}{H} = \int\int dp\,dq \int \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{H\varphi}{r^2}\right) dr.$$

Integrando lungo un raggio geodetico r che, per semplicità, supporremo incontrare in un solo punto la superficie σ, si ha

$$\int \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{H\varphi}{r^2}\right) dr = \frac{H\varphi}{r^2} - \varphi_0 \left(\lim \frac{H}{r^2}\right)_{r=0},$$

dove il limite del quoziente $H:r^2$ è determinato da quei valori dei parametri p, q che individuano il raggio r d'integrazione. Di qui si deduce

$$\int \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{H\varphi}{r^2}\right)\frac{dS}{H} = \int\int \frac{H\varphi\,dp\,dq}{r^2} - \varphi_0 \int\int \left(\lim \frac{H\,dp\,dq}{r^2}\right)_{r=0},$$

dove il primo integrale del secondo membro è relativo alla superficie σ. Ora la piramide quadrangolare infinitesima che ha per spigoli le quattro geodetiche (p, q), $(p, q + dq)$, $(p + dp, q)$, $(p + dp, q + dq)$ intercetta su questa superficie un elemento $d\sigma$, di cui è projezione ortogonale la sezione $H dp dq$ fatta nella stessa piramide dalla superficie sferica che ha il centro nel polo ed il cui raggio è la distanza di questo dall'elemento $d\sigma$. Si ha dunque

$$H dp dq = -\cos(n, r)\, d\sigma = -\frac{\partial r}{\partial n} d\sigma$$

e si può scrivere

$$\int \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{H\varphi}{r^2}\right)\frac{dS}{H} = \int \varphi \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} d\sigma - \varphi_0 \int\int\left(\lim \frac{H dp dq}{r^2}\right)_{r=0}.$$

Osserviamo finalmente che il limite, per $r = 0$, del rapporto

$$\frac{H dp dq}{r^2}$$

fra l'area $H dp dq$ della sezione retta della già menzionata piramide e il quadrato della distanza r di questa sezione dal centro è la misura dell'*angolo visuale* dell'elemento $d\sigma$ rispetto al polo, ammesso che i raggi visuali coincidano coi raggi geodetici. Ne risulta che l'integrale

$$\int\int\left(\lim \frac{H dp dq}{r^2}\right)_{r=0}$$

è la misura dell'angolo visuale dell'intera superficie σ rispetto al polo. Designando quindi quest'angolo visuale con $(\sigma)_0$, si ottiene la formola

$$(6_a) \qquad \int \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{H\varphi}{r^2}\right)\frac{dS}{H} = \int \varphi \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} d\sigma - (\sigma)_0 \varphi_0,$$

la quale è valida sia quando il polo è interno allo spazio S, sia quand'esso è sulla superficie σ; ed è parimente esatta qualunque sia il numero delle volte che un raggio r incontra la superficie σ, purchè, nel computo di $(\sigma)_0$, si consideri come positivo o come negativo l'angolo visuale d'ogni elemento $d\sigma$ secondo che quest'elemento rivolga al polo la sua faccia positiva (di normale n) o la sua faccia negativa. La quantità $(\sigma)_0$ è dunque uguale a 4π quando il polo è interno ad S, è (generalmente) uguale a 2π quand'esso è sulla superficie σ ed è uguale a zero quando il polo è esterno, nel qual caso infatti la formola (6_a) deve ridursi alla (6). Dalla mutua dipendenza di queste due formole risulta poi che anche la (6_a) continua a sussistere inalterata quando la funzione φ diventa infinita come $1:r$ in punti discreti dello spazio S o della superficie σ, purchè tali punti sieno in ogni caso a distanza finita dal polo $r=0$.

La formola (6_a) costituisce la generalizzazione, forse non ancora avvertita, di un importante teorema dato da GAUSS per lo spazio ordinario. Per questo spazio, infatti, r rappresenta il raggio rettilineo che va dal polo ad un punto qualunque, p e q sono le coordinate angolari di questo raggio ed H è, per ogni valore di r, il prodotto di r^2 per una funzione delle sole variabili p, q; quindi la formola (6_a) diventa

$$\int \frac{\partial \varphi}{\partial r}\frac{dS}{r^2} = \int \varphi \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} d\sigma - (\sigma)_0 \varphi_0,$$

la quale è appunto la formola di GAUSS. Facendo $\varphi = 1$, si ottiene la notissima espressione dell'angolo visuale

$$(\sigma)_0 = \int \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} d\sigma,$$

data dallo stesso Autore. In uno spazio qualunque non si può, dalla corrispondente formola (6_a), dedurre un'analoga espressione di $(\sigma)_0$, giacchè non si ha in generale

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{H}{r^2}\right) = 0,$$

come avviene nello spazio ordinario. Ma nel seguente § vedremo che un'espressione cosiffatta esiste, come corollario d'un'altra formola, che generalizza il citato teorema di GAUSS sotto un aspetto un po' diverso.

La segnatura $(\sigma)_0$, introdotta da C. NEUMANN, e adoperata qui per designare l'angolo visuale d'una superficie chiusa, si può utilmente estendere, come fa quest'Autore, ad un pezzo qualunque di superficie. Così il simbolo $(d\sigma)_p$ può servire a rappresentare l'angolo visuale, rispetto ad un punto qualunque p, d'un elemento di superficie $d\sigma$, del quale si deve supporre individuata, con una opportuna convenzione, la faccia positiva.

§ 4.

Riprendiamo l'espressione (3_c) del secondo parametro differenziale d'una funzione qualunque U

$$\Delta_2 U = \frac{1}{Q}\sum_k \frac{\partial (Q U_k)}{\partial q_k}$$

e, denotando con V un'altra funzione per ora qualunque, formiamo il prodotto

$$V\Delta_2 U = \frac{V}{Q}\sum_k \frac{\partial(QU_k)}{\partial q_k} = \frac{1}{Q}\sum_k \frac{\partial(QVU_k)}{\partial q_k} - \sum_k U_k \frac{\partial V}{\partial q_k}.$$

Ricordando l'espressione del primo parametro differenziale della coppia di funzioni U, V, si ricava di quì l'identità

$$\Delta_1 UV + V\Delta_2 U = \frac{1}{Q}\sum_k \frac{\partial(QVU_k)}{\partial q_k},$$

ed integrando sopra uno spazio qualunque S

$$\int(\Delta_1 UV + V\Delta_2 U)dS = \sum_k \int \frac{\partial(QVU_k)}{\partial q_k}\frac{dS}{Q}.$$

Se le due funzioni U, V sono monodrome, continue e finite nello spazio S e se della U sono continue e finite anche le derivate prime, i tre integrali contenuti nel secondo membro possono essere trasformati col teorema (5) e si ottiene così l'equazione

$$\int(\Delta_1 UV + V\Delta_2 U)dS + \int V\left[\sum_k U_k\sqrt{Q_{kk}}\cos(n, k)\right]d\sigma = 0,$$

dove n è la normale interna alla superficie σ, limite dello spazio S. Ma, (2), (3_b),

$$\sum_k U_k\sqrt{Q_{kk}}\cos(n, k) = \sum_{hk} Q_{hk} U_k \frac{\partial q_h}{\partial n} = \sum_{hki} Q_{hk} P_{ki}\frac{\partial U}{\partial q_i}\frac{\partial q_h}{\partial n} = \sum_{ih}\frac{\partial U}{\partial q_i}\frac{\partial q_h}{\partial n}\sum_k Q_{kh}P_{ki};$$

dunque, poichè la somma $\sum_k Q_{kh}P_{ki}$ è uguale ad 1 per $h = i$ ed è uguale a 0 per $h \gtreqless i$, si ha semplicemente

$$\sum_k U_k\sqrt{Q_{kk}}\cos(n, k) = \frac{\partial U}{\partial n},$$

e si ottiene così la formola

$$\int(\Delta_1 UV + V\Delta_2 U)dS + \int V\frac{\partial U}{\partial n}d\sigma = 0, \tag{7}$$

identica a quella notissima che, sotto analoghe condizioni, si stabilisce nello spazio ordinario. Nel § 4 della citata Memoria *Sulla teorica generale dei parametri differenziali* questa stessa formola è dimostrata per qualunque numero di variabili.

Importa notare che la formola precedente sussiste, come il teorema (5) donde venne dedotta, anche quando la funzione V diventi infinita come $1:r$ in punti discreti dello spazio S o della superficie σ. Ma non si potrebbe fare un'ipotesi analoga rispetto alla funzione U.

Per esaminare come debba modificarsi la formola quando quest'ultima funzione diventa infinita nel modo or detto, poniamo

$$(a)\qquad U = U' + \frac{1}{r},$$

dove U' è una funzione monodroma, continua e finita colle sue derivate prime in tutto lo spazio S, ed r è la distanza geodetica del punto qualunque, cui si riferiscono le funzioni U, V, U', da un polo situato in S od in σ. Da ciò segue che, in primo luogo, si ha, (7),

$$(b)\qquad \int (\Delta_1 U' V + V \Delta_2 U') dS + \int V \frac{\partial U'}{\partial n} d\sigma = 0.$$

In secondo luogo, le equazioni (4_b) dànno

$$\Delta_1\left(\frac{1}{r}, V\right) = -\frac{1}{r^2}\frac{\partial V}{\partial r}, \qquad \Delta_2 \frac{1}{r} = -\frac{1}{H}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{H}{r^2}\right),$$

epperò

$$\Delta_1\left(\frac{1}{r}, V\right) + V\Delta_2\frac{1}{r} + \frac{1}{H}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{HV}{r^2}\right) = 0,$$

donde si ricava

$$\int\left[\Delta_1\left(\frac{1}{r}, V\right) + V\Delta_2\frac{1}{r}\right]dS + \int\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{HV}{r^2}\right)\frac{dS}{H} = 0.$$

Applicando quindi il teorema (6_a), nel supposto che il polo $r = 0$ non cada in uno degli eventuali punti di infinito della funzione V, si ottiene

$$\int\left[\Delta_1\left(\frac{1}{r}, V\right) + V\Delta_2\frac{1}{r}\right]dS + \int V\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}d\sigma = (\sigma)_0 V_0.$$

Sommando membro a membro quest'equazione colla (b) e ricordando la segnatura (a), si trova finalmente

$$(7_a)\qquad \int (\Delta_1 U V + V\Delta_2 U) dS + \int V\frac{\partial U}{\partial n}d\sigma = (\sigma)_0 V_0.$$

Tale è la formola che subentra alla (7), ed in cui questa rientra come caso particolare (supponendo che il polo sia esterno ad S), quando la funzione U diventa infinita come $1:r$ in *un solo* punto di S o di σ, mentre la funzione V può, come prima, diventare infinita allo stesso modo in punti discreti di S o di σ, purchè nessuno di questi punti coincida col polo di U.

Se si suppone che amendue le funzioni U, V sieno, senza eccezione, monodrome, continue e finite colle loro derivate prime in tutto lo spazio S, sussiste non solo l'equazione (7), ma eziandio la seguente, che si deduce da quella permutando fra loro le due funzioni:

$$(c) \qquad \int(\Delta_1 UV + U\Delta_2 V)\,dS + \int U\frac{\partial V}{\partial n}\,d\sigma = 0;$$

epperò, combinando le due equazioni per differenza, si ottiene la nota formola di GREEN

$$(8) \qquad \int(U\Delta_2 V - V\Delta_2 U)\,dS + \int\left(U\frac{\partial V}{\partial n} - V\frac{\partial U}{\partial n}\right)d\sigma = 0.$$

Se invece si suppone che, continuando la funzione V ad avere le proprietà anzidette, senza eccezione, la funzione U diventi infinita come $1:r$ in *un solo* punto $r=0$ dello spazio S o della superficie σ, combinando per differenza le due equazioni (7_a) e (c), si ottiene l'importantissima formola

$$(8_a) \qquad \int(U\Delta_2 V - V\Delta_2 U)\,dS + \int\left(U\frac{\partial V}{\partial n} - V\frac{\partial U}{\partial n}\right)d\sigma + (\sigma)_0 V_0 = 0,$$

che costituisce il teorema di GREEN propriamente detto.

Abbiamo fatto allusione, nel § precedente, ad una formola che generalizza, in un senso diverso dalla (6_a), il teorema di GAUSS ricordato nel § stesso. Questa formola non è altro che la stessa (7_a), qualora si aggiunga l'ipotesi che la funzione U soddisfaccia, in tutto lo spazio S, all'equazione $\Delta_2 U = 0$; essa è quindi la seguente:

$$(9) \qquad \int \Delta_1 UV\,dS + \int V\frac{\partial U}{\partial n}\,d\sigma = (\sigma)_0 V_0.$$

Infatti designando con ν la normale, in un punto qualunque dello spazio S, alla superficie $U=$ Cost. che passa per questo punto, normale diretta nel senso in cui U decresce, si ha (Memoria *Sui parametri differenziali,* § 3)

$$\Delta_1 UV = -\sqrt{\Delta_1 U}\frac{\partial V}{\partial \nu},$$

col radicale positivo.

La precedente equazione si può dunque scrivere così:

$$\int \sqrt{\Delta_1 U}\frac{\partial V}{\partial \nu} dS = \int V \frac{\partial U}{\partial n} d\sigma - (\sigma)_0 V_0 .$$

Ora nello spazio ordinario si soddisfa a tutte le condizioni prescritte in questa formola alla funzione U ponendo

$$U = \frac{1}{r}, \qquad \sqrt{\Delta_1 U} = \frac{1}{r^2}, \qquad \nu = r,$$

e, in tale ipotesi, la formola stessa coincide esattamente con quella di GAUSS.

L'importante corollario al quale abbiamo pur fatto allusione nel § precedente si ottiene ponendo $V = 1$ nella formola (9), con che si ha

$$(9_a) \qquad (\sigma)_0 = \int \frac{\partial U}{\partial n} d\sigma .$$

Quest'espressione generale dell'angolo visuale d'una superficie chiusa, rispetto ad un punto qualunque dello spazio, corrisponde esattamente a quella, già citata, di GAUSS, nella quale U riceve il valore particolare $1:r$, ammissibile soltanto nello spazio ordinario.

Se anche nell'equazione (8_a) si suppone che U sia una funzione soddisfacente, oltrechè alle condizioni già ammesse, all'equazione $\Delta_2 U = 0$, si ottiene il teorema di GREEN nella forma più ristretta, ma di più frequente applicazione,

$$(10) \qquad (\sigma)_0 V_0 = \int \left(V\frac{\partial U}{\partial n} - U\frac{\partial V}{\partial n}\right) d\sigma - \int U \Delta_2 V dS .$$

Supponendo infine che la funzione V, monodroma, continua e finita colle sue derivate prime, soddisfaccia anch'essa in S all'equazione $\Delta_2 V = 0$, si ottiene il teorema stesso nella forma semplificata

$$(10_a) \qquad (\sigma)_0 V_0 = \int \left(V\frac{\partial U}{\partial n} - U\frac{\partial V}{\partial n}\right) d\sigma ,$$

che è quella di cui più spesso occorre di far uso. In ogni caso l'infinito della funzione U, cioè il polo $r = 0$, può essere situato dovunque, non esclusi i punti della superficie σ.

L'estendibilità del teorema di GREEN al caso del polo situato sulla superficie è stata avvertita primieramente da BETTI (*Teorica delle forze newtoniane,* Pisa 1879; § XI).

§ 5.

Nel § precedente abbiamo considerato una funzione U dotata delle proprietà seguenti:

1°) di essere monodroma, continua e finita colle sue derivate prime in tutti i punti di un certo spazio, ad eccezione di un solo punto o polo $r = 0$, nel quale essa diventa infinita come $1 : r$;

2°) di soddisfare in tutto il detto spazio all'equazione $\Delta_2 U = 0$.

Una tale funzione, che in generale non è punto determinata da queste condizioni, contiene (indipendentemente da altri eventuali parametri) le coordinate di due distinti punti dello spazio, uno dei quali è il punto *variabile* cui si riferiscono i suoi diversi valori finiti, l'altro è il punto *fisso,* o *polo,* ove essa diventa infinita nel modo prescritto.

Ciò posto, consideriamo un certo spazio determinato ed invariabile, che diremo S, denotiamo con p un punto qualunque di questo spazio e con U_p una funzione, del tipo di U, che diventa infinita nel punto p e che soddisfa in S all'equazione $\Delta_2 U_p = 0$ (dove naturalmente il simbolo Δ_2 si riferisce alle coordinate del punto variabile). Una tale funzione non è, come dicevamo, determinata, ma si può concepire che, in virtù di qualche legge, ad ogni polo p corrisponda una unica e determinata funzione U_p. Ammesso ciò, consideriamo una espressione della forma

(11)
$$V = \sum U_p m_p,$$
oppure
$$V = \int U_p \, d m_p,$$

cioè una somma, finita od infinita, di prodotti ciascuno dei quali si riferisce ad un punto isolato, oppure ad un elemento lineare, superficiale o solido, esistente nello spazio S, ed è formato con un fattore costante m_p, oppure $d m_p$, che diremo *massa* del punto o dell'elemento, e con un fattore variabile che è la funzione U_p, il cui polo è in quel punto od in quell'elemento, ed il cui punto variabile è situato dovunque in S, ma è lo stesso per tutte le analoghe funzioni U_p contenute nella somma.

Quest'espressione V, manifestamente analoga all'ordinaria funzione potenziale, è una funzione delle coordinate del comune punto variabile, che è sempre monodroma, e che, in generale, è continua e finita colle sue derivate prime. Più precisamente, come si riconosce colle ordinarie considerazioni, la funzione V è continua e finita in tutto lo spazio S quando le masse sono distribuite in due od in tre dimensioni; essa diventa infinita come $1 : r$ nei punti discreti dotati di massa e diventa infinita come $\log \nu$ lungo ogni linea dotata di massa, ν essendo la distanza normale da questa linea. Quanto alle derivate prime di V, esse sono continue in tutto lo spazio S solamente quando le masse sono distribuite in tre dimensioni; sono discontinue, ma finite, nei posti occupati dalle masse, quando queste sono distribuite in due dimensioni, e sono infinite nei posti stessi, quando le masse sono distribuite in linee od in punti discreti. Dalle stesse ben note considerazioni si deduce che, qualunque sia la direzioue n, si ha

$$\frac{\partial V}{\partial n} = \sum \frac{\partial U_p}{\partial n} m_p,$$

oppure

$$\frac{\partial V}{\partial n} = \int \frac{\partial U_p}{\partial n} d m_p,$$

purchè il punto cui si riferisce la funzione V non sia sede d'una massa finita, e neppure appartenga a linee od a superficie dotate di densità finita.

Consideriamo ora una superficie chiusa σ esistente in S e non avente parti comuni con superficie dotate di massa, nè contenente linee o punti discreti dotati di massa; denotiamo con n la sua normale interna e formiamo l'integrale

$$\int \frac{\partial V}{\partial n} d\sigma = \sum m_p \int \frac{\partial U_p}{\partial n} d\sigma,$$

oppure

$$\int \frac{\partial V}{\partial n} d\sigma = \int d m_p \int \frac{\partial U_p}{\partial n} d\sigma.$$

Avuto riguardo all'equazione (9_a) si ha, nel primo caso,

$$\int \frac{\partial V}{\partial n} d\sigma = \sum (\sigma)_p m_p = 4\pi M_\sigma,$$

dove M_σ è la somma delle masse di tutti i punti materiali interni alla superficie σ. Nel secondo caso, si possono escludere gli elementi $d m_p$ che giacciono negli intorni dei punti di σ, poichè dalle ipotesi fatte circa questa superficie risulta che le masse di tali elementi non possono mai comporre una somma finita. Siamo così ricondotti al primo caso e si ha di nuovo

(12) $$\int \frac{\partial V}{\partial n} d\sigma = 4\pi M_\sigma,$$

dove M_σ indica la somma delle masse, comunque distribuite, che cadono nell'interno di σ.

Da questa proprietà generale si deducono quattro teoremi distinti, relativi ai quattro casi in cui le masse occupano spazî, superficie, linee o punti.

Nel primo caso, nel quale tanto la funzione V quanto le sue derivate prime sono dovunque continue e finite, basta applicare l'equazione (8) dopo aver fatto in questa $U = 1$, giacchè l'equazione (12) diventa per tal modo

$$\int (\Delta_2 V + 4\pi k)\, dS = 0,$$

dove k è la densità nell'elemento dS dello spazio S contenuto in σ; e, poichè questo spazio può essere qualunque (in S), si ottiene così il *primo* teorema:

$$\Delta_2 V + 4\pi k = 0. \tag{12$_a$}$$

Nel secondo caso, nel quale la sola funzione V è dovunque continua e finita, bisogna considerare dapprima un pezzo finito σ_0 d'una superficie dotata di massa, e, dopo averlo circondato con una superficie chiusa σ, bisogna immaginare che questa superficie si accosti indefinitamente a σ_0, da amendue le parti. Invertendo le normali n di σ e facendole coincidere, al limite, colle opposte normali n ed n' di σ_0, si deduce per tal modo dall'equazione (12)

$$\int \left(\frac{\partial V_0}{\partial n} + \frac{\partial V_0}{\partial n'} + 4\pi h \right) d\sigma_0 = 0,$$

dove h è la densità nell'elemento $d\sigma_0$ e V_0 è quella parte di V che si riferisce al pezzo σ_0. Ora se si pone $V = V_0 + V_1$ si ha, in ogni punto di σ_0,

$$\frac{\partial V_1}{\partial n} + \frac{\partial V_1}{\partial n'} = 0;$$

quindi la precedente equazione si può scrivere così:

$$\int \left(\frac{\partial V}{\partial n} + \frac{\partial V}{\partial n'} + 4\pi h \right) d\sigma_0 = 0,$$

e, poichè σ_0 è un pezzo qualunque della totale superficie dotata di massa, si ottiene il *secondo* teorema

$$\frac{\partial V}{\partial n} + \frac{\partial V}{\partial n'} + 4\pi h = 0. \tag{12$_b$}$$

Nel terzo caso, bisogna di nuovo considerare un tronco s_0 d'una linea dotata di massa e, dopo averlo circondato con una superficie chiusa σ, bisogna immaginare che questa superficie si accosti indefinitamente ad s_0, da tutte le parti. Invertendo le normali n di σ, facendole coincidere, al limite, colle normali ν della linea s_0 e ponendo

$d\sigma = \nu\, d s_0\, d\theta$, dove $\nu\, d\theta$ è l'elemento d'un cerchietto avente per asse $d s_0$ e per raggio ν, si deduce dall'equazione (12)

$$\int\int \frac{\partial V_0}{\partial \nu} \nu\, d s_0\, d\theta + 4\pi \int g\, d s_0 = 0,$$

od anche

$$\lim_{\nu=0} \int \left[\int \nu \frac{\partial V_0}{\partial \nu} d\theta + 4\pi g \right] d s_0 = 0,$$

dove g è la densità nell'elemento $d s_0$. Ora se si pone $V = V_0 + V_1$, si ha, in ogni punto di s_0,

$$\lim_{\nu=0} \nu \frac{\partial V_1}{\partial \nu} = 0,$$

quindi la precedente equazione si può scrivere così:

$$\lim_{\nu=0} \int \left[\int \nu \frac{\partial V}{\partial \nu} d\theta + 4\pi g \right] d s_0 = 0,$$

e, poichè s_0 è un tronco qualunque della totale linea dotata di massa, si ottiene il *terzo* teorema

$$(12_c) \qquad \lim_{\nu=0} \int \nu \frac{\partial V}{\partial \nu} d\theta + 4\pi g = 0.$$

Ammettendo, come si fa di solito dietro note considerazioni, che in un punto ordinario della linea il limite, per $\nu = 0$, del prodotto sotto l'integrale sia indipendente dalla direzione di ν, si ha

$$\lim_{\nu=0} \int \nu \frac{\partial V}{\partial \nu} d\theta = \lim_{\nu=0} 2\pi\nu \frac{\partial V}{\partial \nu},$$

ed il terzo teorema diventa

$$(12_{c'}) \qquad \lim_{\nu=0} \nu \frac{\partial V}{\partial \nu} + 2g = 0.$$

Finalmente, nel quarto ed ultimo caso, stringendo σ intorno ad un punto dotato di massa, invertendo le normali n, facendole coincidere, al limite, colle geodetiche r uscenti dal punto stesso e ponendo $d\sigma = r^2 (d\sigma)$, dove $(d\sigma)$ è l'angolo visuale dell'elemento $d\sigma$ rispetto al punto $r = 0$, si deduce dall'equazione (12) il *quarto* teorema

$$(12_d) \qquad \lim_{r=0} \int r^2 \frac{\partial V}{\partial r} (d\sigma) + 4\pi m = 0,$$

dove m è la massa del punto $r = 0$. Ammettendo che il limite, per $r = 0$, del fattore di $(d\sigma)$ sia indipendente dalla direzione di r, questo quarto teorema diventa

$$(12_{d'}) \qquad \lim_{r=0} r^2 \frac{\partial V}{\partial r} + m = 0,$$

Ognun vede che questi teoremi, validi tutti entro il campo S, sono identici a quelli che, nelle analoghe circostanze, sussistono per le ordinarie funzioni potenziali. Per ottenere, rispetto alle funzioni (11), una teoria identica, in tutti i suoi lineamenti essenziali, a quella delle anzidette funzioni, non mancherebbe che la dimostrazione delle proprietà analoghe a quelle che le ordinarie funzioni potenziali posseggono nei punti all'infinito. Ma, per rendere possibile una tale dimostrazione, bisognerebbe innanzi tutto poter rimuovere la restrizione di un campo limitato (S) e supporre che questo campo fosse illimitato in ogni senso, senza che la funzione denominata U_p cessasse di possedere tutte le proprietà che le abbiamo attribuite. Ora, anche lasciando in disparte gli spazî del tipo riemanniano, ci sembra difficile stabilire in proposito alcuna proposizione generale. Tuttavia, per giustificare le considerazioni precedenti, basterà osservare che vi sono per lo meno due casi nei quali si può effettivamente determinare una forma di U_p valida incondizionatamente in tutto lo spazio; e cioè il caso dello spazio ordinario, nel quale si ha, come è notissimo,

$$U_p = \frac{1}{r},$$

e quello dello spazio pseudosferico di raggio R, nel quale si ha

$$U_p = R \coth \frac{r}{R} + \text{Cost.},$$

o meglio, determinando la costante in modo che U_p si annulli all'infinito,

$$(13) \qquad U_p = R\left(\coth \frac{r}{R} - 1\right).$$

Del primo caso non occorre aggiungere parola. In quanto al secondo caso, annullandosi all'infinito ogni U_p ed ogni V, risultando finito il limite, per $r = \infty$, di ogni prodotto della forma

$$\frac{\partial V}{\partial r} \operatorname{senh}^2 \frac{r}{R}$$

e, finalmente, potendosi il quadrato dell'elemento lineare ridurre alla nota forma

$$ds^2 = dr^2 + R^2 \operatorname{senh}^2 \frac{r}{R} d\zeta^2,$$

dove $d\zeta$ è l'elemento lineare di un'ordinaria superficie sferica di raggio 1, col centro nel polo $r=0$, si riconosce subito che l'integrale

$$\int\left(V\frac{\partial U}{\partial n}-U\frac{\partial V}{\partial n}\right)d\sigma,$$

esteso ad una qualunque regione della superficie all'infinito, è sempre nullo. Ne segue che i teoremi di GREEN possono essere applicati ad uno spazio infinito e che si possono quindi stabilire, per le funzioni potenziali

$$V=R\int\left(\coth\frac{r}{R}-1\right)dm \tag{13$_a$}$$

dello spazio pseudosferico, tutti i teoremi generali relativi alle funzioni potenziali ordinarie.

§ 6.

Basandosi sulle considerazioni del § precedente ed arrestandosi all'ipotesi d'uno spazio nel quale, come nei due casi ivi citati da ultimo, si possano realizzare incondizionatamente tutte le caratteristiche d'una funzione potenziale, non s'incontra più alcuna difficoltà ad estendere ad un tale spazio le proposizioni sulle quali abbiamo fondata, nella Nota ricordata nel proemio, la dimostrazione delle formole di MAXWELL.

Supponendo che le masse sieno distribuite soltanto in due ed in tre dimensioni, denotando con V la loro funzione potenziale, con h e k le densità superficiale e cubica e ponendo

$$\left\{\begin{aligned} H&=h+\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial V}{\partial n}+\frac{\partial V}{\partial n'}\right),\\ K&=k+\frac{1}{4\pi}\Delta_2 V,\end{aligned}\right. \tag{14}$$

si ha

$$\left\{\begin{aligned} H&=0, &&\text{in ogni punto di } \sigma,\\ K&=0, &&\text{in ogni punto di } S,\end{aligned}\right. \tag{14$_a$}$$

dove S indica lo spazio *infinito* e σ la superficie od il gruppo delle superficie dotate di massa, superficie di cui n, n' sono le due normali opposte in uno stesso punto. Denotando inoltre con P il potenziale della distribuzione (h, k) sopra sè stessa, si ha

$$P=\frac{1}{2}\int Vh\,d\sigma+\frac{1}{2}\int Vk\,dS. \tag{14$_b$}$$

Si formi ora l'espressione

$$\int H \frac{U_n + U_{n'}}{2} d\sigma + \int K U dS,$$

dove U è una funzione che si annulla all'infinito e che è continua in tutto lo spazio ad eccezione dei punti della superficie σ, sulle cui due faccie essa prende i valori designati con U_n, $U_{n'}$. Sostituendo in questa espressione, la quale è, (14_a), identicamente nulla, i valori (14) di H e K e tenendo conto della relazione

$$\int (\Delta_1 UV + U\Delta_2 V) dS + \int \left(U_n \frac{\partial V}{\partial n} + U_{n'} \frac{\partial V}{\partial n'}\right) d\sigma = 0,$$

che si deduce dalla formola (c) del § 5 considerando S come uno spazio limitato dalla superficie all'infinito e dalle due faccie delle superficie σ, si ottiene l'eguaglianza

$$(15) \quad \left\{ \begin{aligned} & 0 = \int h \frac{U_n + U_{n'}}{2} d\sigma + \int k U dS \\ & - \frac{1}{4\pi} \int \Delta_1 UV dS - \frac{1}{8\pi} \int (U_n - U_{n'}) \left(\frac{\partial V}{\partial n} - \frac{\partial V}{\partial n'}\right) d\sigma. \end{aligned} \right.$$

Si ponga in questa eguaglianza

$$(a) \qquad U = \delta V = \sum \frac{\partial V}{\partial q} \delta q,$$

dove la somma si riferisce alle tre coordinate generali q_1, q_2, q_3, e dove δq_1, δq_2, δq_3 sono variazioni arbitrarie ma dovunque continue di queste coordinate. I valori $U_n = \delta V_n$, $U_{n'} = \delta V_{n'}$ sono effettivamente diseguali, perchè le derivate prime di V sono discontinue nei punti di σ.

Si dimostra, in primo luogo, esattamente come nella Nota citata, che si ha

$$(b) \qquad \int h \frac{\delta V_n + \delta V_{n'}}{2} d\sigma + \int k \delta V dS = \delta P,$$

dove δP è l'incremento che riceve il potenziale P quando tutti i punti della distribuzione (h, k) subiscono gli spostamenti dovuti alle variazioni δq delle loro coordinate [la funzione V restando sempre riferita, come apparisce dal valore (a) di δV, alla distribuzione originaria].

In secondo luogo, per essere costantemente nulla la differenza $V_n - V_{n'}$ sulle superficie σ, e per essere quindi continue le derivate prime di V tangenzialmente a queste superficie, si ha

$$\delta V_n - \delta V_{n'} = \left(\frac{\partial V}{\partial n} + \frac{\partial V}{\partial n'}\right)\delta n,$$

dove δn è la componente dello spostamento (δq) secondo la normale n; e di quì risulta

$$(\delta V_n - \delta V_{n'})\left(\frac{\partial V}{\partial n} - \frac{\partial V}{\partial n'}\right) = \left[\left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)^2 - \left(\frac{\partial V}{\partial n'}\right)^2\right]\delta n.$$

Ma, immaginando per un momento che la funzione V sia formata con tre variabili p, q, r della specie di quelle di cui è parola alla fine del § 1, e propriamente considerando il punto variabile cui si riferisce V come definito dalla distanza geodetica r che esso ha dalla superficie σ, e dalle coordinate p, q del punto di σ donde esce la geodetica r, si ha dalla prima delle equazioni (4_b), applicata ai punti contigui a σ, dall'una e dall'altra parte,

$$\Delta_1 V_n = \Delta_1' V_n + \left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)^2, \qquad \Delta_1 V_{n'} = \Delta_1' V_{n'} + \left(\frac{\partial V}{\partial n'}\right)^2.$$

Ora le espressioni $\Delta_1' V_n$, $\Delta_1' V_{n'}$ sono fra loro eguali, perchè formate colle sole derivate di V parallele alla superficie, le quali sono continue attraverso a questa: si ha dunque

$$\Delta_1 V_n - \Delta_1 V_{n'} = \left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)^2 - \left(\frac{\partial V}{\partial n'}\right)^2,$$

epperò

$$(c) \qquad (\delta V_n - \delta V_{n'})\left(\frac{\partial V}{\partial n} - \frac{\partial V}{\partial n'}\right) = (\Delta_1 V_n - \Delta_1 V_{n'})\delta n.$$

In virtù delle formole (a), (b), (c) l'equazione (15) diventa

$$(15_a) \qquad \delta P = \frac{1}{4\pi}\int \Delta_1(V, \delta V)\, dS + \frac{1}{8\pi}\int (\Delta_1 V_n - \Delta_1 V_{n'})\,\delta n\, d\sigma.$$

D'altronde si ha

$$(d) \qquad \Delta_1(V, \delta V) = \sum \Delta_1\left(V, \frac{\partial V}{\partial q}\right)\delta q + \sum \Delta_1(V, \delta q)\frac{\partial V}{\partial q},$$

e dalla formola di definizione

$$\Delta_1 V = \sum\nolimits_{hk} P_{hk}\frac{\partial V}{\partial q_h}\frac{\partial V}{\partial q_k}$$

si deduce

$$\frac{\partial \Delta_1 V}{\partial q} = \sum\nolimits_{hk} P_{hk}\frac{\partial V}{\partial q_h}\frac{\partial}{\partial q_k}\left(\frac{\partial V}{\partial q}\right) + \sum\nolimits_{hk} P_{hk}\frac{\partial V}{\partial q_k}\frac{\partial}{\partial q_h}\left(\frac{\partial V}{\partial q}\right) + \sum\nolimits_{hk}\frac{\partial P_{hk}}{\partial q}\frac{\partial V}{\partial q_h}\frac{\partial V}{\partial q_k}$$

$$= 2\Delta_1\left(V, \frac{\partial V}{\partial q}\right) + \sum\nolimits_{hk}\frac{\partial P_{hk}}{\partial q}\frac{\partial V}{\partial q_h}\frac{\partial V}{\partial q_k}.$$

Ne consegue

$$\sum \frac{\partial \Delta_1 V}{\partial q}\delta q = 2\sum \Delta_1\left(V, \frac{\partial V}{\partial q}\right)\delta q + \sum_{hk}\delta P_{hk}\frac{\partial V}{\partial q_h}\frac{\partial V}{\partial q_k}$$

e quindi

$$\sum \Delta_1\left(V, \frac{\partial V}{\partial q}\right)\delta q = \frac{1}{2}\sum \frac{\partial \Delta_1 V}{\partial q}\delta q - \frac{1}{2}\sum_{hk}\delta P_{hk}\frac{\partial V}{\partial q_h}\frac{\partial V}{\partial q_k},$$

formola che, in virtù dell'identità

$$\frac{\partial \Delta_1 V}{\partial q}\delta q = \frac{1}{Q}\left[\frac{\partial(Q\Delta_1 V.\delta q)}{\partial q} - \Delta_1 V\frac{\partial(Q\delta q)}{\partial q}\right],$$

si può scrivere così:

$$\sum \Delta_1\left(V, \frac{\partial V}{\partial q}\right)\delta q = \frac{1}{2Q}\sum \frac{\partial(Q\Delta_1 V.\delta q)}{\partial q} - \frac{\Delta_1 V}{2Q}\sum \frac{\partial(Q\delta q)}{\partial q} - \frac{1}{2}\sum_{hk}\delta P_{hk}\frac{\partial V}{\partial q_h}\frac{\partial V}{\partial q_k};$$

sostituendo in (d) si ottiene quindi

$$(e)\quad \left\{\begin{aligned} &\Delta_1(V, \delta V) = \frac{1}{2Q}\sum \frac{\partial(Q\Delta_1 V.\delta q)}{\partial q} \\ &+ \sum\left[\Delta_1(V, \delta q)\frac{\partial V}{\partial q} - \frac{\Delta_1 V}{2Q}\frac{\partial(Q\delta q)}{\partial q}\right] - \frac{1}{2}\sum_{hk}\delta P_{hk}\frac{\partial V}{\partial q_h}\frac{\partial V}{\partial q_k}.\end{aligned}\right.$$

Così preparata l'espressione di $\Delta_1(V, \delta V)$, bisogna farne la sostituzione nel secondo membro dell'equazione (15_a). Ora, senza effettuare subito tale sostituzione, osserviamo che dal teorema (5), applicato allo spazio infinito con riguardo alla superficie di discontinuità σ, si ha

$$\int \frac{\partial(Q\Delta_1 V.\delta q_i)}{\partial q_i}\frac{dS}{Q} = -\int \sqrt{Q_{ii}}[\Delta_1 V_n \cos(n, i) + \Delta_1 V_{n'}\cos(n', i)]\delta q_i d\sigma$$

$$= -\int (\Delta_1 V_n - \Delta_1 V_{n'})\sqrt{Q_{ii}}\cos(n, i)\delta q_i d\sigma,$$

e quindi, (2),

$$\sum \int \frac{\partial(Q\Delta_1 V.\delta q)}{\partial q}\frac{dS}{Q} = -\int (\Delta_1 V_n - \Delta_1 V_{n'})\sum_{hk} Q_{hk}\frac{\partial q_h}{\partial n}\delta q_k.d\sigma.$$

Ma la formola (1_a), supponendo che l'elemento ds sia nella direzione n e che l'elemento δs sia quello che rappresenta lo spostamento (δq), dà

$$\delta n = \delta s \cos(n, \delta s) = \sum_{hk} Q_{hk}\frac{\partial q_h}{\partial n}\delta q_k;$$

si ha dunque

$$\sum\int\frac{\partial(Q\Delta_1 V.\delta q)}{\partial q}\frac{dS}{Q}=-\int(\Delta_1 V_n-\Delta_1 V_{n'})\delta n\, d\sigma.$$

Ne risulta che, mediante l'accennata sostituzione dell'espressione (e) nell'equazione (15_a), si ottiene

$$\delta P=\frac{1}{4\pi}\sum\int\left[\Delta_1(V,\ \delta q)\frac{\partial V}{\partial q}-\frac{\Delta_1 V}{2Q}\frac{\partial(Q\delta q)}{\partial q}\right]dS-\frac{1}{8\pi}\int\sum\nolimits_{hk}\delta P_{hk}\frac{\partial V}{\partial q_h}\frac{\partial V}{\partial q_k}dS.$$

Ora, essendo

$$\Delta_1(V,\ \delta q)=\sum\nolimits_{hk}P_{hk}\frac{\partial V}{\partial q_h}\frac{\partial\delta q}{\partial q_k},$$

se, per brevità, si pone

$$(15_b)\qquad \sum\nolimits_k P_{hk}\frac{\partial\delta q_i}{\partial q_k}=R_{ih},$$

si ha

$$\Delta_1(V,\ \delta q_i)=\sum\nolimits_h R_{ih}\frac{\partial V}{\partial q_h}$$

e quindi

$$\sum\Delta_1(V,\ \delta q)\frac{\partial V}{\partial q}=\sum\nolimits_{hk}R_{hk}\frac{\partial V}{\partial q_h}\frac{\partial V}{\partial q_k}.$$

Di qui risulta

$$\delta P=\frac{1}{4\pi}\int\sum\nolimits_{hk}\left(R_{hk}-\frac{1}{2}\delta P_{hk}\right)\frac{\partial V}{\partial q_h}\frac{\partial V}{\partial q_k}dS-\frac{1}{8\pi}\int\frac{\Delta_1 V}{Q}\sum\frac{\partial(Q\delta q)}{\partial q}dS,$$

o meglio

$$(15_c)\quad \delta P=\frac{1}{8\pi}\int\sum\nolimits_{hk}(R_{hk}+R_{kh}-\delta P_{hk})\frac{\partial V}{\partial q_h}\frac{\partial V}{\partial q_k}dS-\frac{1}{8\pi}\int\frac{\Delta_1 V}{Q}\sum\frac{\partial(Q\delta q)}{\partial q}dS.$$

§ 7.

Fa d'uopo ora trasformare l'espressione (15_c), testè ottenuta per δP, in guisa da identificarla, se è possibile, con quella di un lavoro di forze elastiche.

A tal fine bisogna innanzi tutto stabilire, facendo uso delle coordinate generali q, le formole fondamentali relative alla deformazione infinitesima d'un mezzo continuo ed alle pressioni che si possono verificare in un tal mezzo.

Dall'equazione (1)

$$ds^2=\sum Q_{hk}\,dq_h\,dq_k,$$

facendo variare con continuità la posizione d'ogni punto (q) d'un certo spazio S, che può essere quello occupato da un corpo elastico, si deduce

$$2\,ds\,\delta ds = \sum_{hk} Q_{hk}(dq_h\, d\delta q_k + dq_k\, d\delta q_h) + \sum_{hk} \delta\, Q_{hk}\, dq_h\, dq_k\,,$$

equazione che, per essere

$$d\delta q_h = \sum \frac{\partial \delta q_h}{\partial q} dq,$$

si può scrivere così:

$$\frac{\delta ds}{ds} = \frac{1}{2} \sum_{hk} \left[\sum_i \left(Q_{hi} \frac{\partial \delta q_i}{\partial q_k} + Q_{ki} \frac{\partial \delta q_i}{\partial q_h} \right) + \delta\, Q_{hk} \right] \frac{\partial q_h}{\partial s} \frac{\partial q_k}{\partial s}\,.$$

Ponendo dunque

$$\text{(16)} \qquad \sum_i \left(Q_{hi} \frac{\partial \delta q_i}{\partial q_k} + Q_{ki} \frac{\partial \delta q_i}{\partial q_h} \right) + \delta\, Q_{hk} = 2 L_{hk}\,, \qquad (L_{hk} = L_{kh})$$

si ha

$$\text{(16}_a\text{)} \qquad \frac{\delta ds}{ds} = \sum_{hk} L_{hk} \frac{\partial q_h}{\partial s} \frac{\partial q_k}{\partial s}\,;$$

e poichè le tre quantità

$$\frac{\partial q_1}{\partial s}, \quad \frac{\partial q_2}{\partial s}, \quad \frac{\partial q_3}{\partial s}$$

non dipendono che dalla direzione arbitraria dell'elemento lineare ds, è chiaro che la deformazione infinitesima, risultante dalle variazioni continue δq delle coordinate q, e consistente essenzialmente nell'alterazione delle lunghezze degli elementi lineari, è definita, nell'intorno d'ogni punto dello spazio S, dai valori delle sei quantità infinitesime L_{hk}, senza che sia necessario, per il momento, di precisare più da vicino il significato geometrico di queste sei quantità, del quale ci occuperemo in seguito, (§ 10).

Ora supponiamo che lo spazio S sia quello occupato da un corpo o da un mezzo, *già deformato ed equilibrato* sotto l'azione di date forze esterne. Denoteremo con

$$F_1 dS, \qquad F_2 dS, \qquad F_3 dS$$

le componenti oblique, secondo le direzioni 1, 2, 3, della forza esterna $F\,dS$ agente sull'elemento di volume dS e con

$$\varphi_1 d\sigma, \qquad \varphi_2 d\sigma, \qquad \varphi_3 d\sigma$$

le analoghe componenti della forza esterna $\varphi\, d\sigma$ applicata all'elemento $d\sigma$ della superficie σ che limita lo spazio S.

Per esprimere le condizioni d'equilibrio del sistema, immaginiamo che ogni suo punto (q) subisca un *nuovo* spostamento (virtuale), in virtù del quale le sue coordinate diventino $(q + \delta q)$, e calcoliamo il lavoro virtuale che ne risulta per le forze esterne ed interne.

Se la direzione della forza F è quella dell'elemento lineare ds che va dal punto (q) ove la forza è applicata, al punto $(q + dq)$, si ha evidentemente

$$\frac{ds}{F} = \frac{\sqrt{Q_{11}}\, dq_1}{F_1} = \frac{\sqrt{Q_{22}}\, dq_2}{F_2} = \frac{\sqrt{Q_{33}}\, dq_3}{F_3},$$

ossia

$$ds : dq_1 : dq_2 : dq_3 = F : \frac{F_1}{\sqrt{Q_{11}}} : \frac{F_2}{\sqrt{Q_{22}}} : \frac{F_3}{\sqrt{Q_{33}}}. \tag{17}$$

In virtù di questa proporzionalità, la formola (1_a) si converte nella seguente

$$F\delta s \cos(F, \delta s) = \Sigma_{hk} \frac{Q_{hk}}{\sqrt{Q_{kk}}} F_k \delta q_h, \tag{17_a}$$

il cui primo membro è il lavoro della forza F durante lo spostamento δs del suo punto d'applicazione. Il lavoro virtuale sviluppato dalla forza esterna $F dS$, che agisce sull'elemento di volume dS, è dunque espresso da

$$(\boldsymbol{F}_1 \delta q_1 + \boldsymbol{F}_2 \delta q_2 + \boldsymbol{F}_3 \delta q_3) dS,$$

dove

$$\boldsymbol{F}_h = \frac{Q_{h1} F_1}{\sqrt{Q_{11}}} + \frac{Q_{h2} F_2}{\sqrt{Q_{22}}} + \frac{Q_{h3} F_3}{\sqrt{Q_{33}}}. \tag{18}$$

Analogamente, il lavoro sviluppato dalla forza esterna $\varphi\, d\sigma$, che agisce sull'elemento di superficie $d\sigma$, è espresso da

$$(\Phi_1 \delta q_1 + \Phi_2 \delta q_2 + \Phi_3 \delta q_3) d\sigma,$$

dove

$$\Phi_h = \frac{Q_{h1} \varphi_1}{\sqrt{Q_{11}}} + \frac{Q_{h2} \varphi_2}{\sqrt{Q_{22}}} + \frac{Q_{h3} \varphi_3}{\sqrt{Q_{33}}}. \tag{18_a}$$

Le quantità $\boldsymbol{F}_h$, Φ_h hanno un significato molto semplice che è utile notare. Se nella formola (17_a) si suppone che l'elemento δs abbia la direzione h, si ha $\delta s = \sqrt{Q_{hh}}\, \delta q_h$ e i differenziali δq relativi alle altre due coordinate sono nulli: quindi la detta formola diventa

$$F \sqrt{Q_{hh}} \cos(F, h) = \sum_k \frac{Q_{hk} F_k}{\sqrt{Q_{kk}}}.$$

Di qui, (18), (18_a),

$$(18_b)\qquad \frac{F_h}{\sqrt{Q_{hh}}} = F\cos(F,\,h), \qquad \frac{\Phi_h}{\sqrt{Q_{hh}}} = \varphi\cos(\varphi,\,h),$$

equazioni i cui secondi membri sono le componenti *ortogonali* delle forze F, φ secondo le direzioni $h = 1, 2, 3$.

Quanto alle forze interne, poichè esse non isviluppano lavoro se non in quanto l'immaginata deformazione (virtuale) altera le lunghezze degli elementi lineari, ammetteremo che il loro lavoro virtuale, nell'elemento di volume dS, sia esprimibile nella forma

$$(19)\qquad dS\sum_{hk} L_{hk} M_{hk}, \qquad (M_{hk} = M_{kh})$$

dove le quantità L_{hk} sono quelle definite dalle formole (16) e le quantità, per ora incognite, M_{hk} sono certe funzioni continue delle coordinate, che dipendono dallo stato di tensione del corpo deformato ed equilibrato.

Dietro quanto precede, l'equazione generale d'equilibrio è la seguente:

$$(20)\qquad \left\{ \begin{aligned} &\int(F_1\delta q_1 + F_2\delta q_2 + F_3\delta q_3)\,dS + \int(\Phi_1\delta q_1 + \Phi_2\delta q_2 + \Phi_3\delta q_3)\,d\sigma \\ &\qquad + \int\sum_{hk} L_{hk} M_{hk}\,dS = 0, \end{aligned} \right.$$

e per dedurne le equazioni ordinarie, indefinite ed ai limiti, bisogna trasformare l'ultima parte del primo membro, cioè l'integrale dell'espressione (19).

In virtù delle formole (16) quest'espressione equivale alla seguente

$$\left(\sum_{ki}\frac{\partial\delta q_i}{\partial q_k}\sum_h Q_{hi} M_{hk} + \frac{1}{2}\sum_{hk} M_{hk}\,\delta Q_{hk}\right) dS$$

o, più semplicemente, a quest'altra

$$\sum_{hk}\left(\mu_{hk}\frac{\partial\delta q_h}{\partial q_k} + \frac{1}{2} M_{hk}\,\delta Q_{hk}\right) dS,$$

dove si è posto

$$(21)\qquad \mu_{hk} = \Sigma_i\, Q_{ih} M_{ik}.$$

Il totale lavoro virtuale delle forze interne è quindi espresso da

$$(21_a)\qquad \sum_{hk}\left(\int \mu_{hk}\frac{\partial\delta q_h}{\partial q_k}\,dS + \frac{1}{2}\int M_{hk}\,\delta Q_{hk}\,dS\right).$$

Ora si ha identicamente

$$\int \mu_{hk} \frac{\partial \delta q_h}{\partial q_k} dS = \int \frac{\partial (Q\mu_{hk} \delta q_h)}{\partial q_k} \frac{dS}{Q} - \int \frac{\partial (Q\mu_{hk})}{\partial q_k} \delta q_h \frac{dS}{Q},$$

epperò, trasformando il primo integrale del secondo membro colla formola (5), si ottiene

$$\int \mu_{hk} \frac{\partial \delta q_h}{\partial q_k} dS = -\int \frac{\partial (Q\mu_{hk})}{\partial q_k} \delta q_h \frac{dS}{Q} - \int \mu_{hk} \sqrt{Q_{kk}} \cos(n, k) \delta q_h d\sigma,$$

dove n è la normale interna alla superficie σ. L'espressione (21_a) del lavoro virtuale interno diventa per tal modo

$$(21_b) \quad \sum_{hk} \left\{ \int \left[\frac{1}{2} M_{hk} \delta Q_{hk} - \frac{\partial (Q\mu_{hk})}{\partial q_k} \frac{\delta q_h}{Q} \right] dS - \int \mu_{hk} \sqrt{Q_{kk}} \cos(n, k) \delta q_h d\sigma \right\}.$$

Consideriamo dapprima il gruppo degli integrali di superficie contenuti in quest'espressione, gruppo il quale, ponendo per un momento

$$(21_c) \qquad \sum_k \mu_{hk} \sqrt{Q_{kk}} \cos(n, k) = \mu_h,$$

si riduce alla forma

$$-\int (\mu_1 \delta q_1 + \mu_2 \delta q_2 + \mu_3 \delta q_3) d\sigma.$$

Immaginando sostituita l'espressione (21_b) nell'equazione (20), la quale deve essere soddisfatta qualunque sieno le variazioni δq sotto gli integrali di superficie, si ottengono subito le equazioni ai limiti nella forma

$$\mu_1 = \Phi_1, \qquad \mu_2 = \Phi_2, \qquad \mu_3 = \Phi_3,$$

ossia, (18_b), (21_c),

$$(22) \qquad \varphi \sqrt{Q_{hh}} \cos(\varphi, h) = \sum_k \mu_{hk} \sqrt{Q_{kk}} \cos(n, k) \qquad (h = 1, 2, 3).$$

Si giunge però ad una forma più semplice, osservando che queste equazioni, le quali equivalgono, (18_a), (18_b), alle seguenti:

$$\sum_i \frac{Q_{hi} \varphi_i}{\sqrt{Q_{ii}}} = \sum_k \mu_{hk} \sqrt{Q_{kk}} \cos(n, k),$$

possono anche, (21), scriversi nel modo che segue:

$$\sum_i Q_{ih} \left[\frac{\varphi_i}{\sqrt{Q_{ii}}} - \sum_k M_{ik} \sqrt{Q_{kk}} \cos(n, k) \right] = 0 \qquad (h = 1, 2, 3);$$

ora, poichè il determinante delle funzioni Q_{hk} non è nullo, il sistema di queste tre equazioni può essere sostituito dal seguente

$$(22_a) \qquad \varphi_i = \sqrt{Q_{ii}} \sum_k M_{ik} \sqrt{Q_{kk}} \cos(n,\, k) \qquad (i = 1,\, 2,\, 3),$$

nel quale figurano direttamente le sei quantità M_{hk}. Queste sono le equazioni ai limiti ridotte alla loro forma più semplice.

Come è noto, queste equazioni sussistono per ogni elemento piano di normale n, immaginato nell'interno del corpo, qualora φ_1, φ_2, φ_3 rappresentino le componenti (oblique) della pressione unitaria esercitata su questo elemento da quella parte del corpo che giace nella regione opposta ad n. Da ciò emerge immediatamente la definizione precisa delle funzioni M_{hk}.

Tuttavia riesce più comodo considerare, in luogo di queste, sei nuove funzioni φ_{hk}, che si ottengono ponendo

$$(22_b) \qquad \varphi_{hk} = M_{hk} \sqrt{Q_{hh}\, Q_{kk}}, \qquad (\varphi_{hk} = \varphi_{kh})$$

giacchè in tal modo le equazioni (22_a) assumono l'ordinaria forma

$$(23) \qquad \begin{cases} \varphi_1 = \varphi_{11} \cos(n,\, 1) + \varphi_{12} \cos(n,\, 2) + \varphi_{13} \cos(n,\, 3), & \varphi_{23} = \varphi_{32}, \\ \varphi_2 = \varphi_{21} \cos(n,\, 1) + \varphi_{22} \cos(n,\, 2) + \varphi_{23} \cos(n,\, 3), & \varphi_{31} = \varphi_{13}, \\ \varphi_3 = \varphi_{31} \cos(n,\, 1) + \varphi_{32} \cos(n,\, 2) + \varphi_{33} \cos(n,\, 3); & \varphi_{12} = \varphi_{21}. \end{cases}$$

Il lavoro virtuale interno, (19), prende al tempo stesso la forma

$$(23_a) \qquad \int \sum_{hk} \frac{L_{hk}\, \varphi_{hk}}{\sqrt{Q_{hh}\, Q_{kk}}}\, dS.$$

Lasciando ora in sospeso la deduzione delle equazioni indefinite e l'interpretazione dei simboli φ_{hk}, L_{hk}, ritorniamo alla questione particolare del § 6, che ci aveva condotto alla precedente ricerca, per operare la richiesta trasformazione della formola (15_c).

§ 8.

Riprendiamo a tal fine la formola (16), che trascriveremo così:

$$(24) \qquad \sum_m \left(Q_{hm} \frac{\partial\, \delta q_m}{\partial q_k} + Q_{km} \frac{\partial\, \delta q_m}{\partial q_h} \right) + \delta\, Q_{hk} = 2\, L_{hk}.$$

Moltiplicando quest'equazione per P_{hk} e sommando rispetto ad amendue gli indici

h, k, si ottiene un risultato che può essere scritto nel modo seguente:

$$(a)\quad \sum_{km}\frac{\partial\delta q_m}{\partial q_k}\sum_h P_{hk}Q_{hm}+\sum_{hm}\frac{\partial\delta q_m}{\partial q_h}\sum_k P_{hk}Q_{km}+\sum_{hk}P_{hk}\delta Q_{hk}=2\sum_{hk}P_{hk}L_{hk}.$$

Ora le somme

$$\sum_h P_{hk}Q_{hm},\qquad \sum_k P_{hk}Q_{km}$$

sono uguali ad 1, oppure a 0, secondo che gli indici fissi, k ed m nella prima, h ed m nella seconda, sono eguali o diseguali. Inoltre la somma

$$\sum_{hk}P_{hk}\delta Q_{hk},$$

tenendo conto del significato (§ 1) delle quantità P_{hk} e considerando come tutti differenti fra loro gli elementi Q_{hk} del determinante Q^2, può scriversi così:

$$\frac{1}{Q^2}\sum_{hk}\frac{\partial(Q^2)}{\partial Q_{hk}}\delta Q_{hk},$$

ed equivale quindi a

$$\frac{1}{Q^2}\delta(Q^2)=\frac{2\delta Q}{Q}.$$

L'equazione (a) si riduce per tal modo alla seguente

$$\sum\frac{\partial\delta q}{\partial q}+\frac{\delta Q}{Q}=\sum_{hk}P_{hk}L_{hk},$$

o meglio a quest'altra

$$(24_a)\qquad \frac{1}{Q}\sum\frac{\partial(Q\delta q)}{\partial q}=\sum_{hk}P_{hk}L_{hk}.$$

Moltiplichiamo ora invece l'equazione (24) per il prodotto $P_{hi}P_{kj}$ e sommiamo di nuovo rispetto ad amendue gli indici h, k. Il risultato che si ottiene può essere scritto nel modo seguente:

$$\sum_{km}P_{kj}\frac{\partial\delta q_m}{\partial q_k}\sum_h P_{hi}Q_{hm}+\sum_{hm}P_{hi}\frac{\partial\delta q_m}{\partial q_h}\sum_k P_{kj}Q_{km}+\sum_{hk}P_{hi}P_{kj}\delta Q_{hk}=2\sum_{hk}P_{hi}P_{kj}L_{hk},$$

ovvero, per un'osservazione già fatta,

$$\sum_k P_{kj}\frac{\partial\delta q_i}{\partial q_k}+\sum_h P_{hi}\frac{\partial\delta q_j}{\partial q_h}+\sum_{hk}P_{hi}P_{kj}\delta Q_{hk}=2\sum_{hk}P_{hi}P_{kj}L_{hk},$$

od ancora, ricordando la segnatura (15_b),

$$R_{ij} + R_{ji} + \sum_{hk} P_{hi} P_{kj} \delta Q_{hk} = 2 \sum_{hk} P_{hi} P_{kj} L_{hk}.$$

Ma la somma che resta nel primo membro può alla sua volta scriversi così:

$$\sum_k P_{kj} \sum_h P_{hi} \delta Q_{hk},$$

e, in virtù della relazione sempre vera

$$\sum_h P_{hi} Q_{hk} = \text{Cost.},$$

può trasformarsi in quest'altra

$$- \sum_k P_{kj} \sum_h Q_{hk} \delta P_{hi},$$

la quale, equivalendo a

$$- \sum_h \delta P_{hi} \sum_k P_{kj} Q_{hk},$$

si riduce semplicemente a $- \delta P_{ij}$. Si ha dunque finalmente

$$(24_b) \qquad R_{ij} + R_{ji} - \delta P_{ij} = 2 \sum_{hk} P_{hi} P_{kj} L_{hk}.$$

Mediante le due relazioni (24_a), (24_b) l'espressione (15_c) di δP si riduce facilmente alla forma richiesta. Si ha infatti, ricordando le segnature (3_b),

$$\sum_{ij} (R_{ij} + R_{ji} - \delta P_{ij}) \frac{\partial V}{\partial q_i} \frac{\partial V}{\partial q_j}$$

$$= 2 \sum_{hkij} P_{hi} P_{kj} \frac{\partial V}{\partial q_i} \frac{\partial V}{\partial q_j} L_{hk} = 2 \sum_{hk} L_{hk} \left(\sum_i P_{hi} \frac{\partial V}{\partial q_i} \right) \left(\sum_j P_{kj} \frac{\partial V}{\partial q_j} \right) = 2 \sum_{hk} L_{hk} V_h V_k;$$

sostituendo quindi quest'espressione, insieme colla (24_a), nell'equazione (15_c), si ottiene

$$\delta P + \int \sum_{hk} L_{hk} \left(- \frac{1}{4\pi} V_h V_k + \frac{1}{8\pi} P_{hk} \Delta_1 V \right) dS = 0.$$

Il confronto dell'integrale contenuto in quest'equazione coll'integrale (23_a), rappresentativo di un lavoro virtuale di forze elastiche, conduce immediatamente alle sei relazioni

$$(25) \qquad \varphi_{hk} = - \frac{\sqrt{Q_{hh} Q_{kk}}}{4\pi} V_h V_k + \frac{P_{hk} \sqrt{Q_{hh} Q_{kk}}}{8\pi} \Delta_1 V \qquad (h, k = 1, 2, 3),$$

le quali soddisfanno alla questione proposta, cioè porgono le cercate componenti φ_{hk}

delle pressioni e tensioni che rappresentano il sistema delle forze dovute alla funzione potenziale V.

Queste formole, relativamente semplici, si semplificano ancor più se si suppone che le coordinate q sieno ortogonali. Si ha infatti in questo caso

$$Q_{23} = Q_{31} = Q_{12} = 0, \qquad P_{23} = P_{31} = P_{12} = 0,$$

$$P_{11} Q_{11} = P_{22} Q_{22} = P_{33} Q_{33} = 1, \qquad V_h = \frac{1}{Q_{hh}} \frac{\partial V}{\partial q_h}.$$

Scrivendo quindi Q_1^2, Q_2^2, Q_3^2 in luogo di Q_{11}, Q_{22}, Q_{33} si trovano le formole

$$(25_a) \qquad \left\{ \begin{aligned} \varphi_{hh} &= -\frac{1}{4\pi Q_h^2}\left(\frac{\partial V}{\partial q_h}\right)^2 + \frac{1}{8\pi}\Delta_1 V, \\ \varphi_{hk} &= -\frac{1}{4\pi Q_h Q_k}\frac{\partial V}{\partial q_h}\frac{\partial V}{\partial q_k}, \qquad (h \gtrless k) \end{aligned} \right.$$

le quali, per $q_1 = x$, $q_2 = y$, $q_3 = z$, $Q_1 = Q_2 = Q_3 = 1$, si riducono immediatamente a quelle di MAXWELL, che abbiamo riferite nel Proemio.

Per interpretare agevolmente le formole (25) nel caso più generale, cioè indipendentemente da ogni supposizione sulla natura dello spazio, giova scegliere le coordinate q_1, q_2, q_3 nel modo seguente, il quale non è vincolato ad alcuna restrizione. Si supponga che la coordinata q_1 abbia dovunque lo stesso valore di V, e che le linee ($q_2 = $ Cost., $q_3 = $ Cost.) sieno ortogonali alle superficie $V = $ Cost., cioè sieno le linee di forza relative al sistema di masse di cui V è la funzione potenziale. Le superficie $q_2 = $ Cost., $q_3 = $ Cost. essendo, per tali ipotesi, ortogonali alle $q_1 = $ Cost., si ha

$$Q_{12} = 0, \qquad Q_{13} = 0; \qquad P_{12} = 0, \qquad P_{13} = 0,$$

$$P_{11} = \frac{1}{Q_{11}}, \qquad P_{22} = \frac{Q_{11} Q_{33}}{Q^2} \qquad P_{33} = \frac{Q_{11} Q_{22}}{Q^2}, \qquad P_{23} = -\frac{Q_{11} Q_{23}}{Q^2},$$

e, per essere $V = q_1$, si ha pure

$$V_1 = \frac{1}{Q_{11}}, \qquad V_2 = V_3 = 0, \qquad \Delta_1 V = \frac{1}{Q_{11}}.$$

Le formole (25) diventano per tal modo

$$\varphi_{11} = -\frac{1}{8\pi Q_{11}}, \qquad \varphi_{22} = \varphi_{33} = \frac{Q_{22} Q_{33}}{8\pi Q^2},$$

$$\varphi_{23} = -\frac{Q_{23}\sqrt{Q_{22} Q_{33}}}{8\pi Q^2}, \qquad \varphi_{31} = \varphi_{12} = 0,$$

dove

$$Q^2 = Q_{11}(Q_{22}Q_{33} - Q_{23}^2).$$

Ora si osservi che, sebbene non sia lecito supporre in generale $Q_{23} = 0$, giacchè ciò equivarrebbe ad ammettere che le superficie di livello facessero parte di un sistema triplo ortogonale, si può però sempre supporre che sia $Q_{23} = 0$ in un punto determinato, ma del resto qualunque, anzi in tutti i punti d'una superficie di livello determinata, ma del resto qualunque. Basta infatti prendere per coordinate q_2, q_3 i parametri d'un doppio sistema ortogonale di linee tracciate su questa superficie, determinando così ciascuna linea di forza per mezzo del punto (q_2, q_3) in cui essa incontra la superficie stessa. Ammettendo, in base a ciò, che in un punto determinato, ma del resto arbitrario, si abbia $Q_{23} = 0$, si ha, nello stesso punto,

$$Q^2 = Q_{11}Q_{22}Q_{33}$$

ed i precedenti valori delle quantità φ_{hk} diventano semplicemente

$$-\varphi_{11} = \varphi_{22} = \varphi_{33} = \frac{\Delta_1 V}{8\pi}, \qquad \varphi_{23} = \varphi_{31} = \varphi_{12} = 0.$$

D'altronde le dette quantità, riferendosi in tal caso a tre elementi piani *ortogonali,* che s'intersecano lungo le linee 1, 2, 3, acquistano, in virtù delle equazioni (23), l'ordinario significato di componenti (ortogonali) di pressione, e precisamente le φ_{11}, φ_{22}, φ_{33} di componenti *normali,* le φ_{23}, φ_{31}, φ_{12} di componenti *tangenziali.* Ne risulta senz'altro che la distribuzione delle pressioni e tensioni equivalenti al sistema delle forze di funzione potenziale V resta sempre la stessa di quella che si verifica nello spazio ordinario, e che quindi la notevolissima correlazione di forze espressa dalle formole di MAXWELL non costituisce punto una peculiarità di questo spazio.

§ 9.

Riprendiamo ora gli svolgimenti che avevamo interrotti alla fine del § 7.

L'integrale di volume contenuto nell'espressione (21_b) può essere scritto così:

$$\int \left[\frac{1}{2}\sum_{hk} M_{hk}\,\delta Q_{hk} - \frac{1}{Q}\sum_i \delta q_i \sum_j \frac{\partial(Q\mu_{ij})}{\partial q_j}\right] dS$$

epperò il coefficiente di δq_i nell'espressione sotto l'integrale è

$$\frac{1}{2}\sum_{hk} M_{hk}\frac{\partial Q_{hk}}{\partial q_i} - \frac{1}{Q}\sum_j \frac{\partial(Q\mu_{ij})}{\partial q_j}.$$

Facendo dunque la sostituzione nell'equazione (20) dell'espressione (21_b) del lavoro virtuale interno, ed annullando i coefficienti delle variazioni arbitrarie δq_i sotto gli integrali di volume, si ottengono, (18), le equazioni indefinite d'equilibrio sotto la forma

$$\frac{1}{2}\sum_{hk} M_{hk}\frac{\partial Q_{hk}}{\partial q_i} - \frac{1}{Q}\sum_j \frac{\partial(Q\mu_{ij})}{\partial q_j} + \sum_j \frac{Q_{ij}F_j}{\sqrt{Q_{jj}}} = 0\,, \qquad (i = 1,\ 2,\ 3).$$

Moltiplicando quest'equazione per P_{im} e sommando rispetto all'indice i si ottiene

$$\frac{1}{2}\Sigma_{hki} M_{hk} P_{im}\frac{\partial Q_{hk}}{\partial q_i} - \frac{1}{Q}\Sigma_{ij} P_{im}\frac{\partial(Q\mu_{ij})}{\partial q_j} + \frac{F_m}{\sqrt{Q_{mm}}} = 0\,,$$

equazione cui si può dare la forma

$$(26)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{1}{2}\sum_{hki} M_{hk} P_{im}\frac{\partial Q_{hk}}{\partial q_i} + \sum_{ij}\frac{\partial P_{im}}{\partial q_j}\mu_{ij} \\ &-\frac{1}{Q}\sum_{ij}\frac{\partial(Q P_{im}\mu_{ij})}{\partial q_j} + \frac{F_m}{\sqrt{Q_{mm}}} = 0\,, \end{aligned}\right. \qquad (m = 1,\ 2,\ 3).$$

Ora introducendo nel secondo membro dell'identità

$$\sum_{ij}\frac{\partial(Q P_{im}\mu_{ij})}{\partial q_j} = \sum_j \frac{\partial}{\partial q_j}\left(Q\sum_i P_{im}\mu_{ij}\right)$$

il valore (21) di μ_{ij}, si ottiene

$$(a)\qquad \sum_{ij}\frac{\partial(Q P_{im}\mu_{ij})}{\partial q_j} = \sum_j \frac{\partial(Q M_{mj})}{\partial q_j}\,.$$

Con questa stessa sostituzione si ottiene successivamente

$$\begin{aligned} \sum_{ij}\frac{\partial P_{im}}{\partial q_j}\mu_{ij} &= \sum_{ijn}\frac{\partial P_{im}}{\partial q_j} Q_{in} M_{nj} = \sum_{nj} M_{nj}\sum_i \frac{\partial P_{im}}{\partial q_j} Q_{in} \\ &= -\sum_{nj} M_{nj}\sum_i P_{im}\frac{\partial Q_{in}}{\partial q_j} = -\sum_{ijn} M_{nj} P_{im}\frac{\partial Q_{in}}{\partial q_j}\,, \end{aligned}$$

epperò si può scrivere

$$\sum_{ij}\frac{\partial P_{im}}{\partial q_j}\mu_{ij} = -\sum_{hki} M_{hk} P_{im}\frac{\partial Q_{hi}}{\partial q_k} = -\sum_{hki} M_{hk} P_{im}\frac{\partial Q_{ki}}{\partial q_h}$$

ed anche

$$(b)\qquad \sum\nolimits_{ij}\frac{\partial P_{im}}{\partial q_j}\mu_{ij}=-\frac{1}{2}\sum\nolimits_{hki}M_{hk}P_{im}\left(\frac{\partial Q_{hi}}{\partial q_k}+\frac{\partial Q_{ki}}{\partial q_h}\right).$$

In virtù delle eguaglianze (a), (b) l'equazione (26) diventa

$$\frac{1}{2}\Sigma_{hki}M_{hk}P_{im}\left(\frac{\partial Q_{hk}}{\partial q_i}-\frac{\partial Q_{hi}}{\partial q_k}-\frac{\partial Q_{ki}}{\partial q_h}\right)-\frac{1}{Q}\Sigma_j\frac{\partial(QM_{mj})}{\partial q_j}+\frac{F_m}{\sqrt{Q_{mm}}}=0$$

ed introducendo finalmente, (22_b), le funzioni φ_{hk} al posto delle M_{hk}, si ottengono le equazioni indefinite d'equilibrio sotto la forma seguente, che considereremo come definitiva:

$$(27)\qquad \left\{\begin{aligned}&\frac{F_m}{\sqrt{Q_{mm}}}=\frac{1}{Q}\sum\nolimits_i\frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{Q\varphi_{mi}}{\sqrt{Q_{mm}Q_{ii}}}\right)\\&+\frac{1}{2}\sum\nolimits_{hki}\frac{P_{mi}\varphi_{hk}}{\sqrt{Q_{hh}Q_{kk}}}\left(\frac{\partial Q_{hi}}{\partial q_k}+\frac{\partial Q_{ki}}{\partial q_h}-\frac{\partial Q_{hk}}{\partial q_i}\right)\end{aligned}\right.\qquad (m=1,2,3).$$

Perchè queste equazioni possano essere debitamente interpretate, resta che si assegni un preciso significato meccanico alle sei funzioni φ_{hk}. A tal fine basta osservare che denotando, in analogia colla segnatura usata da KIRCHHOFF, con

$$K_1,\qquad K_2,\qquad K_3$$

le componenti (oblique) nelle direzioni 1, 2, 3 della pressione unitaria che si esercita sopra un elemento piano tangente, nel punto (q_1, q_2, q_3), alla superficie $q_k=$ Cost. che passa per questo punto, e scegliendo come normale n di questo elemento quella che fa un angolo acuto colla direzione k, talchè sia, (2_a),

$$\cos(n,\ k)=\frac{1}{\sqrt{P_{kk}Q_{kk}}},$$

si ha dalle equazioni (23)

$$K_1=\frac{\varphi_{1k}}{\sqrt{P_{kk}Q_{kk}}},\qquad K_2=\frac{\varphi_{2k}}{\sqrt{P_{kk}Q_{kk}}},\qquad K_3=\frac{\varphi_{3k}}{\sqrt{P_{kk}Q_{kk}}},$$

epperò

$$(28)\qquad \varphi_{hk}=K_h\sqrt{P_{kk}Q_{kk}}.$$

Questa formola assegna il richiesto significato meccanico alle funzioni φ_{hk}; e, poichè queste soddisfanno d'altronde alla condizione $\varphi_{hk}=\varphi_{kh}$, ne risulta che ha luogo la relazione

$$(28_a)\qquad K_k\sqrt{P_{hh}Q_{hh}}=K_h\sqrt{P_{kk}Q_{kk}}.$$

Questa relazione corrisponde, rispetto alle attuali componenti oblique, alla notissima $K_k = K_h$, che si verificherebbe se si trattasse di componenti ortogonali.

§ 10.

Per completare in ogni punto la trattazione delle questioni fondamentali relative alla teoria dell'elasticità in coordinate generali, aggiungeremo le più essenziali interpretazioni delle formole risguardanti la deformazione infinitesima.

La teoria geometrica di tali deformazioni è, in fondo, tutta contenuta nell'equazione (16_a). Ma per assegnare, senz'alcun sussidio di considerazioni estranee, il significato di *tutti* i coefficienti L_{hk}, è utile stabilire un'altra equazione, di cui la (16_a) non è che un caso particolare.

Denotiamo con ds e ds' due elementi lineari quali si vogliano, uscenti dal punto (q) e corrispondenti rispettivamente agli incrementi (dq) e $(d'q)$ delle coordinate di questo punto; denotiamo inoltre con θ l'angolo di questi due elementi. Facendo variare, secondo la caratteristica δ, tutte le quantità che entrano nella formola analoga alla (1_a)

$$ds\,ds' \cos\theta = \sum_{hk} Q_{hk}\, dq_h\, d'q_k,$$

si ottiene

$$(ds\,\delta ds' + ds'\,\delta ds)\cos\theta + ds\,ds'\,\delta\cos\theta$$

$$= \sum_{hk} Q_{hk}(dq_h\, d'\delta q_k + d'q_k\, d\delta q_h) + \sum_{hk} \delta Q_{hk}\, dq_h\, d'q_k .$$

Ma, per essere

$$d\delta q_h = \sum \frac{\partial \delta q_h}{\partial q} dq, \qquad d'\delta q_k = \sum \frac{\partial \delta q_k}{\partial q} d'q,$$

il secondo membro può scriversi così:

$$\sum_{hki} Q_{hk}\left(\frac{\partial \delta q_k}{\partial q_i} dq_h\, d'q_i + \frac{\partial \delta q_h}{\partial q_i} dq_i\, d'q_k\right) + \sum_{hk} \delta Q_{hk}\, dq_h\, d'q_k$$

$$= \sum_{hk}\left[\sum_i \left(Q_{hi}\frac{\partial \delta q_i}{\partial q_k} + Q_{ki}\frac{\partial \delta q_i}{\partial q_h}\right) + \delta Q_{hk}\right] dq_h\, d'q_k,$$

e quindi, avendosi

$$dq_h = \frac{\partial q_h}{\partial s} ds, \qquad d'q_k = \frac{\partial q_k}{\partial s'} ds',$$

la trovata equazione diventa, (16),

$$(29)\qquad \left(\frac{\delta\, ds}{ds} + \frac{\delta\, ds'}{ds'}\right)\cos\theta + \delta\cos\theta = 2\sum\nolimits_{hk} L_{hk}\frac{\partial q_h}{\partial s}\frac{\partial q_k}{\partial s'}\,.$$

È questa l'equazione generale cui alludevamo, e da cui si ricava la (16_a) supponendo che le direzioni dei due elementi lineari ds, ds' coincidano fra loro.

Attribuendo a questi due elementi le direzioni h, k, si ha

$$ds = ds_h = dq_h\sqrt{Q_{hh}}, \qquad ds' = ds_k = dq_k\sqrt{Q_{kk}},$$

e l'equazione precedente, la quale dà, in tal caso,

$$(29_a)\qquad \left(\frac{\delta\, ds_h}{ds_h} + \frac{\delta\, ds_k}{ds_k}\right)\cos(h,\ k) + \delta\cos(h,\ k) = \frac{2L_{hk}}{\sqrt{Q_{hh}Q_{kk}}}\,,$$

somministra il richiesto significato geometrico di tutte le quantità L_{hk}.

In particolare, per $h = k$, si ha

$$L_{hh} = Q_{hh}\frac{\delta\, ds_h}{ds_h}\,,$$

talchè, denotando con δl_1, δl_2, δl_3 le dilatazioni lineari nelle direzioni 1, 2, 3, si ha

$$(30)\qquad \delta l_1 = \frac{L_{11}}{Q_{11}} \qquad \delta l_2 = \frac{L_{22}}{Q_{22}}, \qquad \delta l_3 = \frac{L_{33}}{Q_{33}}.$$

Sostituendo poi questi valori nell'equazione (29_a) e denotando con $\delta\lambda_1$, $\delta\lambda_2$, $\delta\lambda_3$ le variazioni dei coseni degli angoli (23), (31), (12), si trova

$$(30_a)\qquad \left\{\begin{aligned} \delta\lambda_1 &= \frac{2L_{23}}{\sqrt{Q_{22}Q_{33}}} - \left(\frac{L_{22}}{Q_{22}} + \frac{L_{33}}{Q_{33}}\right)\cos(23),\\ \delta\lambda_2 &= \frac{2L_{31}}{\sqrt{Q_{33}Q_{11}}} - \left(\frac{L_{33}}{Q_{33}} + \frac{L_{11}}{Q_{11}}\right)\cos(31),\\ \delta\lambda_3 &= \frac{2L_{12}}{\sqrt{Q_{11}Q_{22}}} - \left(\frac{L_{11}}{Q_{11}} + \frac{L_{22}}{Q_{22}}\right)\cos(12), \end{aligned}\right.$$

equazioni cui si potrebbe dare un'altra forma, approfittando delle note relazioni

$$\cos(23) = \frac{Q_{23}}{\sqrt{Q_{22}Q_{33}}}, \qquad \cos(31) = \frac{Q_{31}}{\sqrt{Q_{33}Q_{11}}}, \qquad \cos(12) = \frac{Q_{12}}{\sqrt{Q_{11}Q_{22}}}.$$

Per tal modo si ottengono, in funzione delle quantità L_{hk} e quindi, (16), delle variazioni δq, i sei elementi

$$\delta l_1, \quad \delta l_2, \quad \delta l_3; \qquad \delta\lambda_1, \quad \delta\lambda_2, \quad \delta\lambda_3$$

che definiscono compiutamente la deformazione infinitesima del parallelepipedo elementare determinato da due terne infinitamente vicine di superficie dei sistemi $q_1 = \text{Cost.}$, $q_2 = \text{Cost.}$, $q_3 = \text{Cost.}$

Per far rientrare queste formole nel tipo ordinario, conviene introdurre al posto delle quantità L_{hk} sei nuove quantità ψ_{hk} definite dalle formole

$$(31) \qquad 2\psi_{hk} = \frac{1}{\sqrt{Q_{hh}Q_{kk}}}\sum_i \left(Q_{hi}\frac{\partial \varkappa_i}{\partial q_k} + Q_{ki}\frac{\partial \varkappa_i}{\partial q_h} + \frac{\partial Q_{hk}}{\partial q_i}\varkappa_i \right),$$

dove $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, $\varkappa_3$ sono tre funzioni *infinitamente piccole* delle variabili q_1, q_2, q_3. L'intervento di queste tre funzioni è dovuto a ciò, che, in luogo di considerare le coordinate q come relative ai punti materiali del corpo *già deformato ed equilibrato* (come finora abbiam fatto, per semplicità), giova di regola considerarle come relative ai punti del corpo *nello stato naturale,* rappresentando invece con $q_1 + \varkappa_1$, $q_2 + \varkappa_2$, $q_3 + \varkappa_3$ le coordinate, nello stato di deformazione del corpo, di quel punto materiale che, nello stato naturale del corpo stesso, aveva le coordinate q_1, q_2, q_3. In tale ipotesi, le variazioni (virtuali) che abbiamo contrassegnate colla caratteristica δ non si applicano che alle funzioni $\varkappa$, e, identificando le variazioni $\delta\varkappa$ di queste funzioni colle variazioni δq contenute nelle formole precedenti, si trova, (16), (31),

$$(31_a) \qquad L_{hk} = \sqrt{Q_{hh}Q_{kk}}\,\delta\psi_{hk},$$

cosicchè le formole (30), (30_a) dànno luogo a queste altre

$$(31_b) \qquad \begin{cases} l_i = \psi_{ii} & (i = 1, 2, 3), \\ \lambda_i = 2\psi_{hk} - (\psi_{hh} + \psi_{kk})\cos(h, k), & \end{cases}$$

nella seconda delle quali ***hki*** è una permutazione circolare di 123. Queste quantità l_i, λ_i definiscono evidentemente la deformazione che possiamo dire *totale* del già mentovato parallelepipedo, cioè quella deformazione che era considerata come preesistente a quell'altra (virtuale) che corrisponde alla differenziazione per δ e che è definita dalle formole (30), (30_a), dove le quantità L_{hk} acquistano ora il significato (31_a).

Le tre dilatazioni principali, relative alla deformazione ($\varkappa$) sono (come si riconosce molto facilmente) le radici dell'equazione di 3° grado in l

$$(32)\qquad \begin{vmatrix} N_{11}-l\,Q_{11} & N_{12}-l\,Q_{12} & N_{13}-l\,Q_{13} \\ N_{21}-l\,Q_{21} & N_{22}-l\,Q_{22} & N_{23}-l\,Q_{23} \\ N_{31}-l\,Q_{31} & N_{32}-l\,Q_{32} & N_{33}-l\,Q_{33} \end{vmatrix} = 0,$$

dove per comodo si è posto

$$(32_a)\qquad N_{hk} = \psi_{hk}\sqrt{Q_{hh}\,Q_{kk}}\,.$$

Le direzioni di queste dilatazioni sono determinate da due delle tre equazioni che si ottengono eguagliando a zero le derivate rispetto a q'_1, q'_2, q'_3 della funzione quadratica

$$(32_b)\qquad \sum\nolimits_{hk}(N_{hk} - l\,Q_{hk})q'_h q'_k,$$

dove l è una radice dell'equazione (32) e dove q' è la derivata di q nella direzione principale corrispondente.

Per determinare le tre pressioni principali osserviamo che dalle formole (18_a), (18_b) si ha

$$\sqrt{Q_{ii}}\,\varphi\cos(\varphi,\ i) = \sum\nolimits_h \frac{Q_{hi}\varphi_h}{\sqrt{Q_{hh}}},$$

donde si ricava reciprocamente

$$\varphi_i = \varphi\sqrt{Q_{ii}}\sum\nolimits_k P_{ik}\sqrt{Q_{kk}}\cos(\varphi,\ k)\,.$$

Le equazioni (22_a) si possono dunque scrivere così:

$$\sum\nolimits_k M_{ik}\sqrt{Q_{kk}}\cos(n,\ k) = \varphi\sum\nolimits_k P_{ik}\sqrt{Q_{kk}}\cos(\varphi,\ k)\,.$$

Quando φ è una pressione principale, la sua direzione coincide con quella di n e si ha quindi

$$(33)\qquad \sum\nolimits_k (M_{ik} - \varphi\,P_{ik})\sqrt{Q_{kk}}\cos(\varphi,\ k) = 0\,.$$

Le grandezze delle tre pressioni principali sono date quindi dalle radici dell'equazione di 3° grado in φ

$$(33_a)\qquad \begin{vmatrix} M_{11}-\varphi P_{11} & M_{12}-\varphi P_{12} & M_{13}-\varphi P_{13} \\ M_{21}-\varphi P_{21} & M_{22}-\varphi P_{22} & M_{23}-\varphi P_{23} \\ M_{31}-\varphi P_{31} & M_{32}-\varphi P_{32} & M_{33}-\varphi P_{33} \end{vmatrix} = 0,$$

dove le quantità M_{hk} sono definite per mezzo delle φ_{hk} dalle formole (22_b). Le direzioni delle pressioni principali restano poscia determinate dalle equazioni (33). Si può osservare che facendo la moltiplicazione per colonne del determinante (33_a) per il determinante Q^2, si ottiene la seguente equazione, equivalente alla (33_a),

$$\begin{vmatrix} \mu_{11} - \varphi & \mu_{12} & \mu_{13} \\ \mu_{21} & \mu_{22} - \varphi & \mu_{23} \\ \mu_{31} & \mu_{32} & \mu_{33} - \varphi \end{vmatrix} = 0,$$

dove le quantità μ_{hk} sono definite dalle formole (21). Quest'altra forma dell'equazione in φ si poteva ottenere direttamente dalle equazioni (22).

Con un'ovvia modificazione dell'ordinario ragionamento e tenendo conto delle proprietà ammesse per la quadratica (1), si dimostra che le radici delle equazioni (32), (33_a) sono tutte reali e che le direzioni delle dilatazioni principali, come pure quelle delle pressioni principali, formano una terna ortogonale.

In virtù delle equazioni (31_a), l'espressione (23_a) del lavoro virtuale interno diventa

$$\int \sum_{hk} \varphi_{hk} \delta \psi_{hk} \, dS \tag{34}$$

e dalle note considerazioni si conclude che deve esistere una funzione intera $-\Pi$ delle sei quantità ψ_{hk}, omogenea e quadratica rispetto a queste, di cui la somma contenuta sotto il segno integrale è la variazione esatta. La mutua dipendenza fra le *sei* quantità ψ_{hk}, che definiscono lo *stato di deformazione* del corpo, e le *sei* quantità φ_{hk}, che ne definiscono lo *stato di tensione*, è quindi espressa dalle sei equazioni

$$\varphi_{ii} = -\frac{\partial \Pi}{\partial \psi_{ii}}, \qquad 2\varphi_{hk} = -\frac{\partial \Pi}{\partial \psi_{hk}}, \qquad (h \gtrless k). \tag{34_a}$$

L'integrale

$$\int \Pi \, dS \tag{34_b}$$

è l'espressione dell'*energia di deformazione*.

LXXXI.

SULLE CONDIZIONI DI RESISTENZA DEI CORPI ELASTICI.

Rendiconti del Reale Istituto Lombardo, serie II, tomo XVIII (1885), pp. 704-714.

Nella versione francese della *Teoria dell'elasticità* di CLEBSCH, riveduta e commentata dall'illustre DE SAINT-VENANT, il quale ha recato con tale pubblicazione un nuovo e segnalato servigio agli studiosi di quell'importantissima teoria, si trova riassunto, in una Nota finale al § 31 (pp. 252-282), il metodo già da lungo tempo proposto dallo stesso DE SAINT-VENANT per la ricerca dei limiti di resistenza dei corpi elastici. Questo metodo differisce da quello generalmente seguito, ed accettato anche da CLEBSCH, per il principio sul quale esso si fonda e che consiste nell'assegnare un limite massimo alle *dilatazioni*, anzichè alle *tensioni*.

Per giustificare questo nuovo principio, DE SAINT-VENANT cita in particolare il caso semplicissimo d'un parallelepipedo rettangolo stirato, con una stessa forza unitaria, secondo una, o secondo due, o secondo tutte tre le direzioni dei suoi assi di figura; ed osserva che, mentre la tensione massima è, per ipotesi, la stessa in tutti tre i casi, la dilatazione massima è maggiore nel primo che nel secondo, ed è parimente maggiore nel secondo che nel terzo, donde sembra ovvio il concludere che il pericolo di disgregazione sia maggiore nel primo caso che nel secondo e nel terzo.

Ora tale conclusione non mi pare così legittima come per avventura potrebbe credersi a prima giunta. Lo stiramento di un corpo nel senso che diremo longitudinale è accompagnato, come è notissimo, da una contrazione in ogni senso trasversale, contrazione che è parzialmente impedita, od anche mutata in dilatazione, quando il corpo è sottoposto contemporaneamente a stiramenti trasversali; ne segue che la coesione molecolare è indebolita, nel senso longitudinale, più nel primo caso che nel secondo, ma è anche rinforzata, nel senso trasversale, più in quello che in questo, cosicchè non è facile, nè forse possibile, decidere *a priori* circa la prevalenza dell'un effetto sull'altro.

Ma se non si può formulare alcuna precisa conclusione intorno a ciò, parmi tuttavia potersi ammettere come evidente, in base appunto all'esempio molto opportunamente addotto da De Saint-Venant, che la vera misura del cimento a cui è messa la coesione di un corpo elastico non debba essere desunta nè dalla sola tensione massima, nè dalla sola dilatazione massima, ma debba risultare, in un qualche modo, dall'insieme di *tutte* le tensioni, o di *tutte* le dilatazioni che regnano nell'intorno d'ogni punto del corpo.

Ora queste tensioni e queste dilatazioni, rappresentate le une e le altre da sei componenti distinte, sono fra loro legate da relazioni lineari, le quali esprimono che le sei componenti di tensione sono le derivate, rispetto alle sei componenti di deformazione, di un'unica funzione quadratica formata con queste seconde componenti; oppure che le sei componenti di deformazione sono le derivate, rispetto alle sei componenti di tensione, di un'analoga funzione formata con queste ultime componenti. Quest'unica funzione, che ha l'identico valore sotto le due diverse forme ch'essa prende nell'uno e nell'altro caso, è il cosidetto *potenziale d'elasticità* ed ha l'insigne proprietà di rappresentare l'*energia,* riferita all'unità di volume, che il corpo elastico possiede nell'intorno del punto che si considera, energia la quale è equivalente sia al lavoro che l'unità di volume del corpo può svolgere nel restituirsi dallo stato attuale allo stato naturale, sia al lavoro che hanno dovuto svolgere le forze esterne per condurre la detta unità di volume dallo stato naturale all'attuale suo stato di coazione elastica.

Dietro ciò mi pare evidente che la vera misura del cimento a cui è messa, in ogni punto del corpo, la coesione molecolare debba essere data dal valore che assume in quel punto il potenziale unitario d'elasticità, e che a questo valore, anzichè a quello di una tensione o di una dilatazione, si debba prescrivere un limite massimo, per preservare il corpo dal pericolo di disgregazione, limite naturalmente diverso, come nelle ordinarie teorie, secondo che si tratti di disgregazione prossima o di remota.

Questa conclusione, giustificata già di per sè stessa dal significato dinamico del potenziale d'elasticità, è resa ancor più manifestamente plausibile da una proprietà analitica di questo potenziale, la quale deve certamente dipendere anch'essa dal suddetto significato, benchè non ci sia ancora nota la dimostrazione rigorosa di tale dipendenza *).

Voglio alludere alla proprietà che ha il detto potenziale d'essere una funzione quadratica *essenzialmente positiva,* cioè una funzione che non si annulla se non quando

---

*) Veggasi nel t. LXXVIII del Journal für die reine und angewandte Mathematik un lavoro notevole di Lipschitz, dove la proprietà in discorso è dedotta dal postulato della *stabilità* d'ogni moto vibratorio libero.

tutte le sue sei variabili sieno nulle, e che si mantiene maggiore di zero per ogni altra sestupla di valori reali di queste variabili. In virtù di questa proprietà non si può imporre un limite al valore del potenziale d'elasticità senza imporre al tempo stesso un limite a quello di *ciascuna* componente, sia di tensione, sia di deformazione, cosicchè l'uso del detto potenziale come misura della resistenza elastica non contraddice intrinsecamente ai criterî desunti sia dalla considerazione delle sole tensioni, sia da quella delle sole deformazioni. Praticamente poi il criterio desunto dal potenziale ha il grande vantaggio di non esigere la risoluzione preliminare d'alcuna equazione e di ridursi alla discussione d'una formola che non può mai presentare ambiguità di segni.

Nel caso dei corpi perfettamente isotropi il potenziale d'elasticità Π è espresso, in funzione delle sei componenti di tensione, dalla formola seguente:

$$2E\Pi = (t_{xx} + t_{yy} + t_{zz})^2 + 2(1+\eta)(t_{yz}^2 + t_{zx}^2 + t_{xy}^2 - t_{yy}t_{zz} - t_{zz}t_{xx} - t_{xx}t_{yy}),$$

nella quale i simboli delle tensioni e quelli delle due costanti d'isotropia E, η sono gli stessi usati da De Saint-Venant. Osserverò di passaggio che il carattere *essenzialmente positivo* di Π è, in questo caso, messo in evidenza dall'espressione equivalente

$$2E\Pi = (1+\eta)[(s\Pi - t_{xx})^2 + (s\Pi - t_{yy})^2 + (s\Pi - t_{zz})^2 + 2(t_{yz}^2 + t_{zx}^2 + t_{xy}^2)]$$

nella quale

$$s = \frac{\sqrt{1+\eta} \pm \sqrt{1-2\eta}}{3\sqrt{1+\eta}}.$$

Ogni volta che si ha

$$-1 < \eta < \tfrac{1}{2}$$

il valore di s è reale e i tre binomî

$$s\Pi - t_{xx}, \qquad s\Pi - t_{yy}, \qquad s\Pi - t_{zz}$$

non si possono annullare simultaneamente che per

$$t_{xx} = t_{yy} = t_{zz} = 0.$$

La precedente limitazione per η corrisponde esattamente ad un'analoga condizione enunciata da Green (pag. 246 dei *Mathematical Papers*) e, a mio avviso, non rigorosamente dimostrata da Ferrers (pag. 330 *ibid.*).

Ammettendo, con De Saint-Venant, che per i corpi cilindrici o prismatici, ordinariamente considerati, sussistano le equazioni

$$t_{xx} = 0, \qquad t_{xy} = 0, \qquad t_{yy} = 0,$$

la condizione di coesione è quindi data da

$$\frac{t_{zz}^2 + 2(1+\eta)(t_{yz}^2 + t_{zx}^2)}{2E} \leqq \Pi_0,$$

dove Π_0 è il massimo valore del potenziale Π. Denotando con R_0, T_0 i massimi valori della tensione unitaria, secondo che il corpo sia soggetto a sola tensione longitudinale, oppure a sola torsione, si hanno di qui le seguenti relazioni fra Π_0, R_0 e T_0:

$$R_0^2 = 2E\Pi_0, \qquad (1+\eta)T_0^2 = E\Pi_0,$$

in virtù delle quali la precedente condizione può scriversi

$$(a) \qquad \frac{t_{zz}^2}{R_0^2} + \frac{t_{yz}^2 + t_{zx}^2}{T_0^2} \leqq 1,$$

mentre fra i massimi valori R_0, T_0 delle due specie di tensioni ha luogo la relazione necessaria

$$(a') \qquad T_0 = \frac{R_0}{\sqrt{2(1+\eta)}}.$$

Questa relazione è diversa da quella ottenuta da DE SAINT-VENANT, il quale trova invece

$$T_0 = \frac{R_0}{1+\eta}.$$

Il valore assegnato da quest'ultima formola al rapporto $R_0 : T_0$ è maggiore di quello che risulta dalla (a'), poichè η è sempre $< \frac{1}{2}$.

Passando al caso dei corpi dotati di sola isotropia trasversale, caso più specialmente considerato da DE SAINT-VENANT, l'espressione del potenziale per mezzo delle tensioni è data dalla formola

$$2\Pi = \frac{t_{zz}^2 - 2\eta t_{zz}(t_{xx}+t_{yy})}{E} + \frac{t_{xx}^2 + t_{yy}^2 - 2\eta' t_{xx}t_{yy} + 2(1+\eta')t_{xy}^2}{E'} + \frac{t_{yz}^2 + t_{zx}^2}{G},$$

dove E, E' sono i due moduli d'elasticità (longitudinale e trasversale), G è il coefficiente di elasticità tangenziale, ed η, η' sono i coefficienti che determinano la contrazione trasversale dovuta rispettivamente ad una dilatazione longitudinale e ad una trasversale. Vi è anche un terzo coefficiente η'', che determina la contrazione longitudinale dovuta ad una dilatazione trasversale, ma questo coefficiente dipende dalle altre costanti per mezzo della relazione

$$\eta'' = \frac{E'\eta}{E}.$$

Se anche quì ci limitiamo a considerare i corpi cilindrici o prismatici pei quali si ammettono le relazioni di De Saint-Venant, la condizione di coesione si riduce a

$$\frac{t_{zz}^2}{E} + \frac{t_{yz}^2 + t_{zx}^2}{G} \leqq 2\,\Pi_0$$

e quindi di nuovo alla (a), con questa sola differenza, che ora i valori massimi R_0, T_0 delle due specie di tensioni hanno fra loro, non più la relazione (a'), ma la

$$(a'') \qquad T_0 = R_0 \sqrt{\frac{G}{E}},$$

nella quale il rapporto $G:E$ può prendere qualunque valore, cosicchè anche il rapporto $T_0 : R_0$ può, almeno *a priori*, assumere un valore qualunque.

Finalmente, nel caso più generale di un corpo cilindrico dotato di tre assi d'elasticità, uno dei quali sia diretto nel senso longitudinale, la condizione di coesione ha ancora la forma semplicissima

$$(b) \qquad \frac{t_{zz}^2}{R_0^2} + \frac{t_{yz}^2}{T_x^2} + \frac{t_{zx}^2}{T_y^2} \leqq 1,$$

dove R_0, T_x, T_y sono i valori massimi delle tensioni t_{zz}, t_{yz}, t_{zx}. Questi valori sono fra loro legati dalle relazioni

$$(b') \qquad T_x = R_0 \sqrt{\frac{G_x}{E}}, \qquad T_y = R_0 \sqrt{\frac{G_y}{E}},$$

dove E è il modulo d'elasticità longitudinale e G_x, G_y sono i coefficienti delle elasticità tangenziali. Quando $t_{zz} = 0$ la precedente condizione s'accorda con quella data da De Saint-Venant, pag. 272.

Coglierò quest'occasione per mostrare come si possa ottenere molto facilmente la determinazione completa delle tensioni nei corpi cilindrici a sezione *ellittica*, anche quando questi corpi abbiano tre assi d'elasticità paralleli ai loro assi di figura *). Il processo elementare di cui farò uso consiste nel dimostrare che si può soddisfare a tutte le condizioni del problema prendendo per le sei componenti di tensione altrettante *funzioni di secondo grado* delle coordinate x, y, z.

---

*) Il metodo è applicabile anche al caso che il *solo asse longitudinale* sia un asse d'elasticità, ma quì, per amore di brevità, mi limito al caso più semplice sovraddetto.

Sia

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

l'equazione della superficie cilindrica laterale. Le condizioni cui devono soddisfare le componenti di tensione in ogni punto di questa superficie sono

$$\frac{x\,t_{xx}}{a^2} + \frac{y\,t_{xy}}{b^2} = 0, \qquad \frac{x\,t_{xy}}{a^2} + \frac{y\,t_{yy}}{b^2} = 0, \qquad \frac{x\,t_{xz}}{a^2} + \frac{y\,t_{yz}}{b^2} = 0$$

e rientrano tutte nel tipo

$$\frac{x\varphi}{a^2} + \frac{y\psi}{b^2} = 0.$$

Ora si riconosce facilmente che la forma più generale di due funzioni di secondo grado φ e ψ, astrette a soddisfare a quest'equazione in ogni punto della superficie cilindrica, è la seguente:

$$\varphi = \frac{H\Gamma}{2} - \frac{y\Lambda}{b^2}, \qquad \psi = \frac{K\Gamma}{2} + \frac{x\Lambda}{a^2},$$

dove H e K sono due costanti, Λ è una funzione *lineare* delle x, y, z e Γ è la funzione di secondo grado

$$\Gamma = 1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}.$$

Dietro ciò, se si osserva che nelle due prime equazioni alla superficie la componente t_{xy} fa alternativamente l'ufficio di ψ e di φ, si trova subito che le cinque prime componenti di tensione non possono avere che le forme seguenti:

$$t_{xx} = \frac{A\Gamma}{2} - a^2 D\frac{y^2}{b^2}, \qquad t_{xy} = \frac{B\Gamma}{2} + Dxy, \qquad t_{yy} = \frac{C\Gamma}{2} - b^2 D\frac{x^2}{a^2},$$

$$t_{xz} = \frac{H\Gamma}{2} - \frac{y\Lambda}{b^2}, \qquad t_{yz} = \frac{K\Gamma}{2} + \frac{x\Lambda}{a^2},$$

dove A, B, C, D, H, K sono costanti e Λ, Γ hanno i significati suddetti.

Sostituendo queste espressioni nelle due prime equazioni d'equilibrio,

$$\frac{\partial t_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial t_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial t_{xz}}{\partial z} = 0, \qquad \frac{\partial t_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial t_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial t_{yz}}{\partial z} = 0,$$

si trovano le condizioni

$$A = a^2 D, \qquad C = b^2 D, \qquad B = 0, \qquad \frac{\partial \Lambda}{\partial z} = 0,$$

tenendo conto delle quali ed aggiungendo il valore dell'ultima componente t_{zz}, quale risulta dalla terza equazione d'equilibrio

$$\frac{\partial t_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial t_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial t_{zz}}{\partial z} = 0,$$

si ottengono le espressioni seguenti

$$t_{xx} = \frac{a^2 D}{2}\left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{3y^2}{b^2}\right), \qquad t_{xy} = Dxy, \qquad t_{yy} = \frac{b^2 D}{2}\left(1 - \frac{3x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right),$$

$$t_{xz} = \frac{H+Q}{2}\left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right) - \frac{y}{b^2}(Px + Qy + R),$$

$$t_{yz} = \frac{K-P}{2}\left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right) + \frac{x}{a^2}(Px + Qy + R),$$

$$t_{zz} = \left(\frac{Hx}{a^2} + \frac{Ky}{b^2}\right)z + \varphi(x, y).$$

Queste espressioni soddisfanno a tutte le equazioni d'equilibrio ed a quelle relative alla superficie laterale, qualunque sieno le costanti D, H, K, P, Q, R e la funzione $\varphi(x, y)$ di secondo grado nelle sole x, y.

Ciò premesso, supponiamo che il corpo abbia tre assi d'elasticità nelle direzioni x, y, z e rappresentiamo con

$$\Pi = \frac{1}{2}(A t_{xx}^2 + B t_{yy}^2 + C t_{zz}^2 + 2A' t_{yy} t_{zz} + 2B' t_{zz} t_{xx} + 2C' t_{xx} t_{yy} + A'' t_{yz}^2 + B'' t_{zx}^2 + C'' t_{xy}^2)$$

il potenziale unitario, espresso colle componenti di tensione. Di quì risultano per le sei componenti di deformazione, simboleggiate al modo di De Saint-Venant, le espressioni

$$\begin{aligned} d_x &= A\, t_{xx} + C' t_{yy} + B' t_{zz}, & g_{yz} &= A'' t_{yz}, \\ d_y &= C' t_{xx} + B\, t_{yy} + A' t_{zz}, & g_{zx} &= B'' t_{zx}, \\ d_z &= B' t_{xx} + A' t_{yy} + C t_{zz}, & g_{xy} &= C'' t_{xy}. \end{aligned}$$

Affinchè si possano determinare tre componenti di spostamento u, v, w capaci di generare date componenti di deformazione d_x, d_y, d_z, g_{yz}, g_{zx}, g_{xy}, devono essere soddisfatte, come è noto, le sei equazioni differenziali di 2° ordine che risultano dalle due seguenti

$$\frac{\partial^2 d_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 d_z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 g_{yz}}{\partial y \partial z}, \qquad 2\frac{\partial^2 d_x}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial g_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial g_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial g_{xy}}{\partial z}\right)$$

colla permutazione circolare delle x, y, z. Sostituendo in queste sei equazioni i precedenti valori delle d_x, d_y, ... e delle t_{xx}, t_{yy}, ... si trova

$$C\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = D\left(\frac{3\,b^2 A'}{a^2} + B'\right), \qquad C\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = D\left(A' + \frac{3\,a^2 B'}{b^2}\right),$$

$$\frac{D}{C}\left[\frac{3\,a^2(A\,C - B'^2)}{b^2} + \frac{3\,b^2(B\,C - A'^2)}{a^2} - 2(A'B' - C\,C') + C\,C''\right] = 0,$$

$$2\,A'H = \quad A''\,Q + \frac{a^2 B''}{b^2}(H + 3\,Q),$$

$$2\,B'K = -\,B''\,P + \frac{b^2 A''}{a^2}(K - 3\,P),$$

$$C\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y} = 0.$$

Ora il coefficiente C, inverso del modulo d'elasticità longitudinale, non può mai essere nullo; l'espressione

$$\frac{3\,a^2(A\,C - B'^2)}{b^2} + \frac{3\,b^2(B\,C - A'^2)}{a^2} - (A'B' - C\,C') + C\,C''$$

non potrebbe annullarsi che per qualche valore particolare del rapporto $a:b$ *); dunque bisogna porre

$$D = 0, \qquad \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = 0.$$

La prima di queste condizioni trae con sè le equazioni

$$t_{xx} = t_{xy} = t_{yy} = 0,$$

le quali costituiscono il punto di partenza del processo di De Saint-Venant. Le residue tre componenti di tensione prendono le espressioni seguenti:

$$(c) \qquad \begin{cases} t_{xz} = \dfrac{H + Q}{2}\left(1 - \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2}\right) - \dfrac{y}{b^2}(P\,x + Q\,y + L'), \\[2ex] t_{yz} = \dfrac{K - P}{2}\left(1 - \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2}\right) + \dfrac{x}{a^2}(P\,x + Q\,y + L'), \\[2ex] t_{zz} = \left(\dfrac{H\,x}{a^2} + \dfrac{K\,y}{b^2}\right)z + H'x + K'y + L, \end{cases}$$

*) E del resto si può dimostrare che quest'espressione si mantiene positiva per ogni valore *reale* del rapporto $a:b$.

dove le costanti H, K, L, H', K', L' sono arbitrarie, mentre le P, Q restano determinate da due delle condizioni testè ottenute e che quì si trascrivono:

$$(c')\qquad \begin{cases} a^2 B''(H + 3\,Q) - b^2(2\,A' H - A''\,Q) = 0\,, \\ b^2 A''(K - 3\,P) - a^2(2\,B' K + B''\,P) = 0\,. \end{cases}$$

Le sei costanti arbitrarie H, K, L, H', K', L' sono direttamente legate colle forze da cui il cilindro è sollecitato. Denotando infatti con X, Y, Z le componenti della forza e con M_x, M_y, M_z quelle del momento che risultano dal trasporto delle forze esterne all'origine delle coordinate, si ha, posto $\pi a b = \sigma$,

$$(c'')\qquad \begin{cases} X = \dfrac{H\sigma}{4}\,, \qquad Y = \dfrac{K\sigma}{4}\,, \qquad Z = L\sigma\,, \\ M_x = \dfrac{K' b^2 \sigma}{4}\,, \qquad M_y = -\dfrac{H' a^2 \sigma}{4}\,, \qquad M_z = \dfrac{L'\sigma}{2}\,. \end{cases}$$

Per la determinazione delle componenti di spostamento u, v, w si hanno le sei equazioni

$$\frac{\partial u}{\partial x} = B' t_{zz}\,, \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = A' t_{zz}\,, \qquad \frac{\partial w}{\partial z} = C t_{zz}\,,$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = A'' t_{yz}\,, \qquad \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = B'' t_{xz}\,, \qquad \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0,$$

la cui integrazione è sempre possibile e non presenta più alcuna difficoltà. Per esempio, nel caso della semplice torsione si trova

$$u = -\frac{L' y z}{2}\left(\frac{A''}{a^2} + \frac{B''}{b^2}\right), \qquad v = \frac{L' x z}{2}\left(\frac{A''}{a^2} + \frac{B''}{b^2}\right),$$

$$w = \frac{L' x y}{2}\left(\frac{A''}{a^2} - \frac{B''}{b^2}\right).$$

Per un corpo dotato di sola isotropia trasversale si avrebbe

$$A = B = \frac{1}{E'}\,, \qquad C = \frac{1}{E}\,, \qquad A' = B' = -\frac{\eta}{E}\,, \qquad C' = -\frac{\eta'}{E'}\,,$$

$$A'' = B'' = \frac{1}{G}\,, \qquad C'' = \frac{2(1 + \eta')}{E'}\,,$$

e le costanti precedentemente designate con P, Q avrebbero i valori seguenti:

$$P = \frac{E b^2 + 2 G \eta a^2}{E(a^2 + 3 b^2)} K, \qquad Q = - \frac{E a^2 + 2 G \eta b^2}{E(b^2 + 3 a^2)} H,$$

donde si deduce

$$H + Q = \frac{E(2 a^2 + b^2) - 2 G \eta b^2}{E(b^2 + 3 a^2)} H, \qquad K - P = \frac{E(a^2 + 2 b^2) - 2 G \eta a^2}{E(a^2 + 3 b^2)} K,$$

con che le tensioni (c) sono esprimibili per mezzo delle sole sei costanti essenziali.

P. S. Dopo avere scritto quanto precede, ho riconosciuto con piacere che le obbiezioni da me sollevate contro i modi fin quì usati di stabilire le condizioni di coesione erano state formulate, quasi negli stessi termini, dal compianto ing. Castigliano, alle pag. 128 e segg. della *Théorie de l'équilibre des systèmes élastiques*. Mi è grato il pensare che il dotto ingegnere, il quale aveva riconosciuta tutta l'importanza del concetto di potenziale elastico, avrebbe probabilmente approvata la mia proposta di fondare sovr'esso anche la deduzione delle condizioni anzidette.

LXXXII.

SULL'INTERPRETAZIONE MECCANICA DELLE FORMOLE DI MAXWELL.

Memorie della R. Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna, serie IV, tomo VII (1886), pp. 1-38.

La ricerca che forma l'oggetto della presente Memoria si riferisce essenzialmente a quelle stesse formole che sono state da me studiate, sotto un altrò punto di vista, nella Memoria che ebbi l'onore di presentare lo scorso anno a cotesta Illustre Accademia *). Alludo alle formole colle quali MAXWELL definisce il sistema delle pressioni che sono atte a generare, in un mezzo elastico, lo stesso campo di forza che ordinariamente si considera come rappresentato da una funzione potenziale newtoniana.

Queste formole, che riproduco cogli stessi simboli già usati nella precedente Memoria, sono le seguenti:

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} X_x &= -\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2+\frac{1}{8\pi}\Delta_1 V, & Y_z &= Z_y = -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial V}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial z},\\ Y_y &= -\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2+\frac{1}{8\pi}\Delta_1 V, & Z_x &= X_z = -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial V}{\partial z}\frac{\partial V}{\partial x},\\ Z_z &= -\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2+\frac{1}{8\pi}\Delta_1 V, & X_y &= Y_x = -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial y};\\ & & \Delta_1 V &= \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2; \end{aligned}\right.$$

*) *Sull'uso delle coordinate curvilinee nelle teorie del potenziale e dell'elasticità* [Memorie della R. Accademia dell'Istituto di Bologna, serie IV, tomo VI (1885), pp. 401-448; oppure queste OPERE, vol. IV, pp. 136-179].

dove V è la funzione potenziale newtoniana che si considera, e dove le componenti di pressione X_x, X_y, etc. sono simboleggiate giusta la segnatura di KIRCHHOFF, convenendo, cioè, di rappresentare con X_n, Y_n, Z_n le componenti, secondo i tre assi ortogonali x, y, z, della pressione unitaria esercitata sopra un elemento piano di normale n.

Ecco ora la questione che mi propongo di trattare e che parmi debba presentarsi naturalmente a chiunque rifletta al significato che si attribuisce, nella teoria dell'elasticità, alle pressioni o tensioni che si verificano in un mezzo elastico. Si prescinda da ogni preconcetto intorno ad una possibile correlazione fisica fra le cosidette azioni a distanza e le pressioni o tensioni definite dalle formole di MAXWELL, e si considerino queste pressioni o tensioni come semplicemente generate, nel seno di un mezzo elastico, da una leggiera deformazione di questo, cioè da un leggiero spostamento di ognuno dei suoi punti (relativamente ad uno stato di iniziale equilibrio). Guardando la cosa sotto questo aspetto, è naturale il domandare: esiste veramente una deformazione capace di generare quelle pressioni, e, se esiste, quali sono le componenti dello spostamento d'ogni punto del mezzo?

Per rispondere a queste domande, bisogna innanzi tutto stabilire alcunchè circa la natura del mezzo elastico nel quale si suppongono generate le pressioni e tensioni definite dalle formole di MAXWELL. Dal punto di vista puramente matematico si potrebbe esigere che la costituzione del mezzo non fosse vincolata da altra condizione che da quella della continuità: ma per evitare le prolissità di una ricerca tanto generale ed astratta, io supporrò che si tratti semplicemente di un mezzo omogeneo ed isotropo, ammettendo tuttavia che le costanti d'isotropìa possano essere diverse nelle regioni dello spazio che si trovano in condizioni differenti rispetto alla distribuzione delle masse potenzianti, cioè delle masse che concorrono alla formazione della funzione potenziale. Se non che, per evitare di nuovo una generalità teoricamente giustificabile, ma praticamente oziosa, conviene in corrispondenza ammettere che, se alla formazione di questa funzione potenziale concorrono masse estese in tre dimensioni, queste sieno di densità costante, come costante è la densità di un mezzo isotropo ordinario. Del resto questa restrizione ha poca importanza rispetto alla teoria fisica nella quale si sono presentate le formole di MAXWELL, poichè in essa non figurano, di regola, che funzioni potenziali di superficie.

Così circoscritto il problema, è possibile intraprenderne la trattazione matematica ed è appunto tale trattazione che forma l'argomento del presente lavoro. Le conclusioni del quale sono quasi interamente negative, poichè esse stabiliscono che, in un vero mezzo isotropo, non si possono attuare deformazioni capaci di riprodurre il sistema delle pressioni definite dalle formole di MAXWELL se non quando la funzione potenziale è lineare rispetto alle coordinate; il qual caso particolarissimo, non solo è destituito di qualsivoglia interesse, ma non può neppure verificarsi quando lo spazio che si considera è infinito. Volendo sfuggire alla necessità di attribuire alla funzione potenziale questa forma così particolare e non sempre ammissibile, bisogna concedere l'esistenza di un mezzo isotropo *sui generis,* le proprietà del quale non rispondono a veruna realità fin quì conosciuta. Per concepire la natura di un tal mezzo, conviene rammentare che il potenziale elementare d'elasticità di un mezzo isotropo propriamente detto, assunto sotto la forma opportunamente adottata da GREEN, consta di due parti ben distinte, le quali si possono in tal qual modo riguardare come i distinti potenziali d'elasticità di due mezzi essenzialmente diversi ed irreducibili, dalla cui combinazione in vario rapporto risulta ogni mezzo isotropo ordinariamente considerato *). Al primo di questi mezzi corrisponde un'entità reale ben nota, giacchè le sue proprietà collimano appuntino con quelle degli ordinarî fluidi elastici, nei quali non si trasmettono che ondulazioni longitudinali. Al secondo invece, nel quale non si trasmetterebbero che ondulazioni trasversali, non corrisponde, nè probabilmente può corrispondere, veruna entità conosciuta, giacchè, a tacer d'altro, non si verificano generalmente in esso le condizioni della stabilità dell'equilibrio. Ora egli è appunto ammettendo l'esistenza di questo secondo mezzo che, giusta l'analisi quì appresso esposta, sembra a prima giunta possibile di spingere più oltre l'indagine delle deformazioni, negli spazî vuoti di masse potenzianti. Senonchè l'ulteriore svolgimento di tale analisi mostra che, almeno nello spazio infinito che circonda le masse, le deformazioni non sono di nuovo possibili che quando la funzione potenziale abbia quella forma semplicissima che essa prenderebbe se tutte le masse fossero raccolte in un punto fisso, del resto arbitrario. È dunque lecito affermare che, data ad arbitrio una funzione potenziale, non è generalmente possibile riprodurre il sistema delle pressioni definite dalle formole di MAXWELL mediante le deformazioni di un mezzo isotropo.

Mi sono indotto, non senza qualche esitazione, a fare di pubblica ragione questi risultati, non già per sollevare obbiezioni contro la dottrina di MAXWELL, ma per mostrare la necessità di indagarne per altre vie l'interpretazione meccanica.

§ 1.

Denotiamo, come di consueto, con u, v, w le componenti dello spostamento d'un punto qualunque (x, y, z) del mezzo elastico e poniamo

---

*) Secondo la teoria molecolare questo rapporto sarebbe sempre di 3 ad 1 e secondo WERTHEIM di 4 ad 1.

$$
(2) \qquad \begin{cases}
\alpha = \dfrac{\partial u}{\partial x}, & \lambda = \dfrac{\partial w}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial z}, \\[2ex]
\beta = \dfrac{\partial v}{\partial y}, & \mu = \dfrac{\partial u}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial x}, \qquad \vartheta = \alpha + \beta + \gamma, \\[2ex]
\gamma = \dfrac{\partial w}{\partial z}; & \nu = \dfrac{\partial v}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y};
\end{cases}
$$

cioè designamo con α, β, γ, λ, μ, ν le note componenti di deformazione del mezzo nel punto (x, y, z) e con ϑ la dilatazione cubica. Assumiamo poscia, nell'ammessa ipotesi dell'isotropìa, il potenziale d'elasticità sotto la forma

$$
(2_a) \qquad \Phi = \tfrac{1}{2}\left[A\vartheta^2 + B(\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 - 4\beta\gamma - 4\gamma\alpha - 4\alpha\beta)\right],
$$

dove A e B sono le costanti d'isotropìa, introdotte nella maniera usata da GREEN e proporzionali rispettivamente ai quadrati delle velocità di propagazione delle onde longitudinali e delle onde trasversali. Affinchè lo stato iniziale del mezzo, cioè quello nel quale le tre funzioni u, v, w sono nulle in ogni punto, sia un vero stato d'equilibrio stabile, bisogna e basta che queste due costanti A e B sieno soggetto alle limitazioni

$$
(2_b) \qquad B > 0, \qquad 3A - 4B > 0,
$$

soddisfatte le quali la funzione Φ non solo si mantiene costantemente *positiva*, per qualunque deformazione propriamente detta, ma si annulla solamente quando *tutte* le componenti di deformazione sieno separatamente nulle.

Le componenti di pressione

$$
X_x, \quad Y_y, \quad Z_z, \quad Y_z, \quad Z_x, \quad X_y,
$$

dovute alla deformazione di componenti

$$
\alpha, \quad \beta, \quad \gamma, \quad \lambda, \quad \mu, \quad \nu,
$$

sono, come è noto, le derivate negative del potenziale Φ rispetto a queste ultime componenti, epperò son date da

$$
\begin{aligned}
X_x &= 2B(\beta + \gamma) - A\vartheta, & Y_z &= -B\lambda, \\
Y_y &= 2B(\gamma + \alpha) - A\vartheta, & Z_x &= -B\mu, \\
Z_z &= 2B(\alpha + \beta) - A\vartheta; & X_y &= -B\nu.
\end{aligned}
$$

Di qui, ponendo per un momento

$$P = X_x + Y_y + Z_z ,$$

si ricava

$$P = -(3A - 4B)\vartheta ,$$

epperò si hanno facilmente le formole reciproche

$$\alpha = \frac{1}{2B}\left(\frac{A-2B}{3A-4B}P - X_x\right), \qquad \lambda = -\frac{1}{B}Y_z ,$$

$$\beta = \frac{1}{2B}\left(\frac{A-2B}{3A-4B}P - Y_y\right), \qquad \mu = -\frac{1}{B}Z_x ,$$

$$\gamma = \frac{1}{2B}\left(\frac{A-2B}{3A-4B}P - Z_z\right); \qquad \nu = -\frac{1}{B}X_y .$$

Sostituendo in queste formole i valori (1), dopo avere osservato che da questi risulta

$$P = \frac{\Delta_1 V}{8\pi} ,$$

si ottengono le espressioni seguenti delle α, β, γ, λ, μ, ν per mezzo di V:

$$(3) \quad \begin{cases} \alpha = \dfrac{1}{8\pi B}\left[\left(\dfrac{\partial V}{\partial x}\right)^2 - \dfrac{A-B}{3A-4B}\Delta_1 V\right], & \lambda = \dfrac{1}{4\pi B}\dfrac{\partial V}{\partial y}\dfrac{\partial V}{\partial z} , \\ \beta = \dfrac{1}{8\pi B}\left[\left(\dfrac{\partial V}{\partial y}\right)^2 - \dfrac{A-B}{3A-4B}\Delta_1 V\right], & \mu = \dfrac{1}{4\pi B}\dfrac{\partial V}{\partial z}\dfrac{\partial V}{\partial x} , \\ \gamma = \dfrac{1}{8\pi B}\left[\left(\dfrac{\partial V}{\partial z}\right)^2 - \dfrac{A-B}{3A-4B}\Delta_1 V\right]; & \nu = \dfrac{1}{4\pi B}\dfrac{\partial V}{\partial x}\dfrac{\partial V}{\partial y} . \end{cases}$$

Tali sono quindi i valori delle sei componenti di deformazione di un mezzo isotropo, cui corrispondono le sei componenti di pressione che risultano dalla teoria di MAXWELL.

Dalle formole (3) si deduce

$$(3_a) \qquad \vartheta = -\frac{\Delta_1 V}{8\pi(3A-4B)} ,$$

$$(3_b) \quad \lambda^2+\mu^2+\nu^2-4\beta\gamma-4\gamma\alpha-4\alpha\beta = (A-B)(3A-5B)\left[\frac{\Delta_1 V}{4\pi B(3A-4B)}\right]^2 ;$$

epperò, sostituendo nell'espressione (2_a), si trova

$$(3_c) \qquad \Phi = \frac{4A-5B}{2B(3A-4B)}\left(\frac{\Delta_1 V}{8\pi}\right)^2 .$$

Tale è quindi il valore particolare che assume il potenziale d'elasticità, quando le pressioni esistenti nel mezzo isotropo sieno quelle che abbiano dianzi accennate.

Ma affinchè ad un *dato* sistema di componenti di deformazione α, β, γ, λ, μ, ν corrisponda effettivamente un sistema di componenti di spostamento u, v, w, ossia, in altri termini, affinchè un *dato* sistema di funzioni α, β, γ, λ, μ, ν rappresenti una deformazione *possibile* del mezzo elastico, è necessario e sufficiente *) che sieno identicamente soddisfatte le sei equazioni seguenti:

$$\frac{\partial^2 \beta}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \gamma}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \lambda}{\partial y \partial z}, \qquad 2\frac{\partial^2 \alpha}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \mu}{\partial y} + \frac{\partial \nu}{\partial z} - \frac{\partial \lambda}{\partial x}\right),$$

$$\frac{\partial^2 \gamma}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \alpha}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \mu}{\partial z \partial x}, \qquad 2\frac{\partial^2 \beta}{\partial z \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \nu}{\partial z} + \frac{\partial \lambda}{\partial x} - \frac{\partial \mu}{\partial y}\right),$$

$$\frac{\partial^2 \alpha}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \beta}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \nu}{\partial x \partial y}; \qquad 2\frac{\partial^2 \gamma}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \lambda}{\partial x} + \frac{\partial \mu}{\partial y} - \frac{\partial \nu}{\partial z}\right).$$

Affinchè dunque esista veramente una deformazione del mezzo, definita dalle sei componenti (3), bisogna e basta che la funzione V soddisfaccia alle sei condizioni seguenti, che risultano dalla sostituzione delle espressioni (3) di α, β, γ, λ, μ, ν nelle sei equazioni precedenti:

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned}
&2\left[\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} - \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial z}\right)^2\right] + C\left(\frac{\partial^2 \Delta_1 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Delta_1 V}{\partial z^2}\right) = 0,\\
&2\left[\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - \left(\frac{\partial^2 V}{\partial z \partial x}\right)^2\right] + C\left(\frac{\partial^2 \Delta_1 V}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \Delta_1 V}{\partial x^2}\right) = 0,\\
&2\left[\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y}\right)^2\right] + C\left(\frac{\partial^2 \Delta_1 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Delta_1 V}{\partial y^2}\right) = 0;\\
&2\left[\frac{\partial^2 V}{\partial z \partial x}\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial z}\right] - C\frac{\partial^2 \Delta_1 V}{\partial y \partial z} = 0,\\
&2\left[\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y}\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\frac{\partial^2 V}{\partial z \partial x}\right] - C\frac{\partial^2 \Delta_1 V}{\partial z \partial x} = 0,\\
&2\left[\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial z}\frac{\partial^2 V}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y}\right] - C\frac{\partial^2 \Delta_1 V}{\partial x \partial y} = 0,
\end{aligned}\right.$$

---

*) Per la dimostrazione della *sufficienza* di queste equazioni, veggasi la *Nota* in fine della presente Memoria.

dove per brevità si è posto

$$\frac{A-B}{3A-4B}=C. \tag{4_a}$$

Questa costante C si può esprimere più brevemente con

$$C=\frac{B}{\boldsymbol{E}}, \tag{4_b}$$

dove $\boldsymbol{E}$ è il modulo d'elasticità del mezzo isotropo.

La soluzione del proposto problema è tutta contenuta nelle precedenti equazioni (4), che ora procediamo a studiare.

§ 2.

Per semplificare i calcoli che seguono, adottiamo primieramente le segnature seguenti:

$$\left\{\begin{array}{lll} \dfrac{\partial V}{\partial x}=a, & \dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2}=e, & \dfrac{\partial^2 V}{\partial y\partial z}=e', \\[2ex] \dfrac{\partial V}{\partial y}=b, & \dfrac{\partial^2 V}{\partial y^2}=f, & \dfrac{\partial^2 V}{\partial z\partial x}=f', \\[2ex] \dfrac{\partial V}{\partial z}=c, & \dfrac{\partial^2 V}{\partial z^2}=g, & \dfrac{\partial^2 V}{\partial x\partial y}=g'. \end{array}\right. \tag{5}$$

Effettuando le derivazioni dell'espressione $\Delta_1 V$ si trovano in tal modo i valori seguenti:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{\partial^2\Delta_1 V}{\partial x^2}&=e^2+f'^2+g'^2+a\frac{\partial e}{\partial x}+b\frac{\partial e}{\partial y}+c\frac{\partial e}{\partial z}, \\
\frac{1}{2}\frac{\partial^2\Delta_1 V}{\partial y^2}&=f^2+g'^2+e'^2+a\frac{\partial f}{\partial x}+b\frac{\partial f}{\partial y}+c\frac{\partial f}{\partial z}, \\
\frac{1}{2}\frac{\partial^2\Delta_1 V}{\partial z^2}&=g^2+e'^2+f'^2+a\frac{\partial g}{\partial x}+b\frac{\partial g}{\partial y}+c\frac{\partial g}{\partial z}; \\
\frac{1}{2}\frac{\partial^2\Delta_1 V}{\partial y\partial z}&=f'g'+e'(f+g)+a\frac{\partial e'}{\partial x}+b\frac{\partial e'}{\partial y}+c\frac{\partial e'}{\partial z}, \\
\frac{1}{2}\frac{\partial^2\Delta_1 V}{\partial z\partial x}&=g'e'+f'(g+e)+a\frac{\partial f'}{\partial x}+b\frac{\partial f'}{\partial y}+c\frac{\partial f'}{\partial z}, \\
\frac{1}{2}\frac{\partial^2\Delta_1 V}{\partial x\partial y}&=e'f'+g'(e+f)+a\frac{\partial g'}{\partial x}+b\frac{\partial g'}{\partial y}+c\frac{\partial g'}{\partial z}.
\end{aligned}$$

Ma, ponendo

$$(5_a)\qquad \left\{\begin{array}{ll} fg - e'^2 = E, & f'g' - ee' = E', \\ ge - f'^2 = F, & g'e' - ff' = F', \\ ef - g'^2 = G; & e'f' - gg' = G'; \\ e + f + g = \theta, & E + F + G = \Theta, \end{array}\right.$$

si trova facilmente

$$(5_b)\qquad \left\{\begin{array}{ll} e^2 + f'^2 + g'^2 = E + \theta e - \Theta, & f'g' + e'(f+g) = E' + \theta e', \\ f^2 + g'^2 + e'^2 = F + \theta f - \Theta, & g'e' + f'(g+e) = F' + \theta f', \\ g^2 + e'^2 + f'^2 = G + \theta g - \Theta; & e'f' + g'(e+f) = G' + \theta g'. \end{array}\right.$$

Se finalmente si pone

$$(5_c)\qquad a^2 + b^2 + c^2 = H^2,$$

si può scrivere

$$(5_d)\qquad a = H\frac{\partial x}{\partial n}, \qquad b = H\frac{\partial y}{\partial n}, \qquad c = H\frac{\partial z}{\partial n},$$

dove n è la normale alla superficie di livello $V = \text{Cost.}$ che passa per il punto (x, y, z), normale di cui non è necessario fissare il senso, il quale dipende dal segno che si attribuisce alla quantità

$$(5_e)\qquad H = \sqrt{\Delta_1 V} = \frac{\partial V}{\partial n}.$$

In base a queste varie formole si ha

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 \Delta_1 V}{\partial x^2} = E + \theta e - \Theta + H\frac{\partial e}{\partial n},$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 \Delta_1 V}{\partial y^2} = F + \theta f - \Theta + H\frac{\partial f}{\partial n},$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 \Delta_1 V}{\partial z^2} = G + \theta g - \Theta + H\frac{\partial g}{\partial n}.$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 \Delta_1 V}{\partial y \partial z} = E' + \theta e' + H\frac{\partial e'}{\partial n},$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 \Delta_1 V}{\partial z \partial x} = F' + \theta f' + H\frac{\partial f'}{\partial n},$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 \Delta_1 V}{\partial x \partial y} = G' + \theta g' + H\frac{\partial g'}{\partial n};$$

e, facendo la sostituzione di queste espressioni e dei simboli (5_a) nelle equazioni (4), si trova che a queste può darsi la forma seguente:

$$
(6) \quad \left\{
\begin{aligned}
(1-C)E &= C\left(\theta e + H\frac{\partial e}{\partial n} + \Theta - \theta^2 - H\frac{\partial \theta}{\partial n}\right), \\
(1-C)F &= C\left(\theta f + H\frac{\partial f}{\partial n} + \Theta - \theta^2 - H\frac{\partial \theta}{\partial n}\right), \\
(1-C)G &= C\left(\theta g + H\frac{\partial g}{\partial n} + \Theta - \theta^2 - H\frac{\partial \theta}{\partial n}\right); \\
(1-C)E' &= C\left(\theta e' + H\frac{\partial e'}{\partial n}\right), \\
(1-C)F' &= C\left(\theta f' + H\frac{\partial f'}{\partial n}\right), \\
(1-C)G' &= C\left(\theta g' + H\frac{\partial g'}{\partial n}\right).
\end{aligned}
\right.
$$

Sommando membro a membro le prime tre di queste equazioni si ottiene un risultato che può essere scritto nel modo seguente:

$$
(6_a) \qquad (1 - 4C)\Theta + 2C\theta^2 + 2CH\frac{\partial \theta}{\partial n} = 0 .
$$

Ora osserviamo in primo luogo che, per le ipotesi fatte, la quantità θ, la quale non è altro che $\Delta_2 V$, non può essere eguale che allo zero o ad una costante: quindi in ogni caso

$$
(6_b) \qquad \frac{\partial \theta}{\partial n} = 0 .
$$

Inoltre, per i significati (5_a) di E, F, G, Θ si ha

$$
2\Theta = (e + f + g)^2 - (e^2 + f^2 + g^2 + 2e'^2 + 2f'^2 + 2g'^2),
$$

ossia

$$
(6_c) \qquad 2\Theta = \theta^2 - (e^2 + f^2 + g^2 + 2e'^2 + 2f'^2 + 2g'^2) .
$$

In virtù di queste equazioni (6_b), (6_c) e del significato (4_a) della costante C, l'equazione (6_a) equivale a quest'altra

$$
(6_d) \qquad (3A - 4B)\theta^2 + A(e^2 + f^2 + g^2 + 2e'^2 + 2f'^2 + 2g'^2) = 0 .
$$

Ora finchè le costanti

$$
3A - 4B, \qquad A
$$

sono amendue maggiori di zero, come è richiesto dalle due condizioni (2_b), quest'equazione non può essere soddisfatta da una funzione *reale* V a meno che non si abbia, in ogni punto dello spazio considerato,

$$e = f = g = e' = f' = g' = 0 ,$$

cioè a meno che non sieno nulle tutte le derivate seconde della detta funzione, la quale non potrebbe avere, in questo caso, che la forma lineare

$$V = ax + by + cz + d ,$$

dove a, b, c, d sono quattro costanti.

Se dunque si prescinde dai casi specialissimi in cui V può assumere questa forma, la quale, in particolare, non può mai convenire ad uno spazio infinito e non presenta d'altronde alcun interesse rispetto al problema d'elasticità, come quella che conduce a valori costanti per le componenti di pressione e per quelle di deformazione, bisogna necessariamente attribuire alle costanti d'isotropìa valori inconciliabili colle condizioni (2_b) dell'equilibrio stabile del mezzo. In particolare, considerando lo spazio vuoto di masse potenzianti, cioè quello in cui la funzione θ soddisfa all'equazione $\theta = 0$, bisogna necessariamente supporre, per il mezzo isotropo che invade questo spazio,

$$(6_e) \qquad A = 0 , \qquad B > 0 .$$

La seconda di queste condizioni è imposta dalla forma che assume, per $A = 0$, l'espressione (3_c) del potenziale d'elasticità, ossia dell'energìa di deformazione (riferita all'unità di volume), la quale diventa

$$(6_f) \qquad \Phi = \frac{5}{8B}\left(\frac{\Delta_1 V}{8\pi}\right)^2 .$$

Le condizioni (6_e) sono in patente contraddizione colle (2_b). Il mezzo definito da esse non può essere in equilibrio stabile rispetto a *tutte* le deformazioni possibili: tuttavia la natura dell'espressione (6_f) è tale che l'equilibrio è ancora stabile rispetto a quella special classe di deformazioni che noi stiamo di presente considerando, cioè a quelle che sono definite da formole del tipo (3), in uno spazio nel quale la funzione V soddisfaccia all'equazione $\Delta_2 V = 0$. Un tal mezzo, se esistesse, avrebbe la proprietà di non trasmettere che vibrazioni trasversali. Per esso sarebbe eguale all'unità il noto coefficiente

$$(6_g) \qquad \eta = \frac{A - 2B}{2(A - B)}$$

della contrazione alla dilatazione, cosicchè una porzione prismatica di tal mezzo, assoggettata ad una semplice estensione longitudinale, si contrarrebbe sempre in eguale rapporto nel senso trasversale.

§ 3.

Vediamo ora se, anche ammettendo l'esistenza del mezzo testè considerato, si possa conseguire in ogni caso la determinazione della deformazione corrispondente ad una data funzione potenziale V; e, per evitare maggiori difficoltà, occupiamoci unicamente dello spazio infinito escluso dalle masse cui questa funzione potenziale appartiene, tanto più che è in questo spazio che si rende maggiormente plausibile la supposizione dell'esistenza di un mezzo isotropo.

Introducendo nelle equazioni (6) le condizioni

$$\theta = 0, \qquad A = 0,$$

donde

$$C = \frac{1}{4},$$

quelle equazioni si riducono alla seguente forma più semplice:

$$(7)\qquad \begin{cases} H\dfrac{\partial e}{\partial n} = 3E - \Theta, & H\dfrac{\partial e'}{\partial n} = 3E', \\[2ex] H\dfrac{\partial f}{\partial n} = 3F - \Theta, & H\dfrac{\partial f'}{\partial n} = 3F', \\[2ex] H\dfrac{\partial g}{\partial n} = 3G - \Theta; & H\dfrac{\partial g'}{\partial n} = 3G'. \end{cases}$$

Rappresentiamo con Δ il determinante delle derivate seconde di V, cioè poniamo

$$\Delta = \begin{vmatrix} e & g' & f' \\ g' & f & e' \\ f' & e' & g \end{vmatrix}$$

ed osserviamo che questo determinante può essere svolto in varî modi. Si ha infatti

$$\begin{aligned} \Delta &= Ee + F'f' + G'g', \\ &= Ff + G'g' + E'e', \\ &= Gg + E'e' + F'f', \end{aligned}$$

e quindi anche

$$3\Delta = Ee + Ff + Gg + 2E'e' + 2F'f' + 2G'g';$$

combinando opportunamente fra loro queste diverse espressioni, si trovano queste altre:

$$(7_a)\qquad \left\{\begin{aligned} \Delta &= Ff + Gg + 2E'e' - Ee\,, \\ &= Gg + Ee + 2F'f' - Ff\,, \\ &= Ee + Ff + 2G'g' - Gg\,. \end{aligned}\right.$$

Inoltre dalle note proprietà dello stesso determinante Δ scaturiscono tre coppie di identità del tipo

$$G'f' + Fe' + E'g = 0\,, \qquad F'g' + E'f + Ge' = 0\,,$$

e, sommando membro a membro le due identità di ciascuna coppia, si hanno le tre formole

$$(7_b)\qquad \left\{\begin{aligned} &F'g' + G'f' - Ee' - E'e + e'\Theta = 0\,, \\ &G'e' + E'g' - Ff' - F'f + f'\Theta = 0\,, \\ &E'f' + F'e' - Gg' - G'g + g'\Theta = 0\,. \end{aligned}\right.$$

Ciò premesso, derivando rispetto alla normale n le espressioni di E, F, G, E', F', G' date dalle formole (5_a) e sostituendo, nelle equazioni così ottenute, i valori delle derivate normali di e, f, g, e', f', g' dati dalle sei equazioni (7), si trovano, coll'aiuto delle precedenti identità (7_a), (7_b), queste altre sei equazioni:

$$(7_c)\qquad \left\{\begin{aligned} &H\frac{\partial E}{\partial n} = -2\Theta e - 3\Delta\,, \qquad H\frac{\partial E'}{\partial n} = -2\Theta e'\,, \\ &H\frac{\partial F}{\partial n} = -2\Theta f - 3\Delta\,, \qquad H\frac{\partial F'}{\partial n} = -2\Theta f'\,, \\ &H\frac{\partial G}{\partial n} = -2\Theta g - 3\Delta\,; \qquad H\frac{\partial G'}{\partial n} = -2\Theta g'\,, \end{aligned}\right.$$

le quali formano un sistema equivalente a quello delle equazioni (7).

Dalla somma delle prime tre di queste equazioni (7_c) si ricava

$$(7_d)\qquad H\frac{\partial \Theta}{\partial n} = -9\Delta\,.$$

Finalmente, dalla derivazione rispetto alla normale di una qualunque delle precedenti espressioni del determinante Δ, e dalla sostituzione dei valori forniti dalle equazioni (7), (7_c) per le derivate normali di e, f, g, e', f', g', E, F, G, E', F', G', si deduce

$$(7_e) \qquad H\frac{\partial \Delta}{\partial n} = 2\Theta^2 .$$

Eliminando H fra le due equazioni (7_d), (7_e) si trova

$$\frac{\partial}{\partial n}(4\Theta^3 + 27\Delta^2) = 0 ,$$

epperò si conclude che l'espressione

$$4\Theta^3 + 27\Delta^2$$

è costante lungo il corso di ciascuna linea di forza. Ma quest'espressione si annulla in ogni punto a distanza infinita, dunque dev'essere sempre

$$(7_f) \qquad 4\Theta^3 + 27\Delta^2 = 0 .$$

Questa conclusione sussiste anche quando una parte soltanto delle linee di forza si protrae a distanza infinita, poichè per essere V una funzione la quale, nello spazio infinito in cui $\Delta_2 V = 0$, è continua e finita con tutte le sue derivate, ogni espressione formata colle derivate di questa funzione non può essere nulla in una regione di questo spazio senza essere tale anche in tutte le altre.

Il primo membro dell'equazione (7_f) è la notissima condizione dell'eguaglianza di due radici dell'equazione di 3° grado priva di secondo termine

$$s^3 + s\Theta - \Delta = 0 ,$$

dove s è l'incognita. Scrivendo quest'equazione sotto la forma

$$\Delta - (E + F + G)s + (e + f + g)s^2 - s^3 = 0 ,$$

si riconosce subito ch'essa equivale alla seguente:

$$\begin{vmatrix} e - s & g' & f' \\ g' & f - s & e' \\ f' & e' & g - s \end{vmatrix} = 0 .$$

È noto che la condizione (7_f) dell'eguaglianza di due radici di quest'ultima equazione si scinde, nell'ipotesi della realità, in più altre, le quali, come vedremo, sono quelle che conducono alla risoluzione del nostro problema. Ma noi preferiamo ottenere queste singole condizioni direttamente, giovandoci di una notevole proprietà del sistema d'equazioni (7), la quale ora procediamo ad esporre.

§ 4.

Derivando ciascuna delle equazioni (7) rispetto alla normale n e sostituendo nei secondi membri delle equazioni che così si ottengono i valori delle derivate normali di E, F, G, E', F', G', Θ forniti dalle equazioni (7_c), (7_d), si trovano le seguenti sei nuove equazioni:

$$(8)\qquad \left\{\begin{aligned} &H\frac{\partial\left(H\frac{\partial e}{\partial n}\right)}{\partial n}+6\Theta e=0\,, &\quad &H\frac{\partial\left(H\frac{\partial e'}{\partial n}\right)}{\partial n}+6\Theta e'=0\,,\\ &H\frac{\partial\left(H\frac{\partial f}{\partial n}\right)}{\partial n}+6\Theta f=0\,, &\quad &H\frac{\partial\left(H\frac{\partial f'}{\partial n}\right)}{\partial n}+6\Theta f'=0\,,\\ &H\frac{\partial\left(H\frac{\partial g}{\partial n}\right)}{\partial n}+6\Theta g=0\,; &\quad &H\frac{\partial\left(H\frac{\partial g'}{\partial n}\right)}{\partial n}+6\Theta g'=0\,. \end{aligned}\right.$$

Di qui risulta che le sei derivate seconde di V soddisfano tutte ad una sola e medesima equazione differenziale della forma

$$(8_a)\qquad H\frac{\partial\left(H\frac{\partial \omega}{\partial n}\right)}{\partial n}+6\Theta\omega=0\,,$$

dove

$$\omega=e,\ f,\ g,\ e',\ f',\ g'.$$

Sieno ora ω ed ω' due qualunque di queste sei derivate seconde, talchè, insieme coll'equazione (8_a), sussista anche la seguente

$$H\frac{\partial\left(H\frac{\partial \omega'}{\partial n}\right)}{\partial n}+6\Theta\omega'=0\,.$$

Da quest'equazione e dalla (8_a) si deduce

$$\omega\frac{\partial\left(H\frac{\partial \omega'}{\partial n}\right)}{\partial n}-\omega'\frac{\partial\left(H\frac{\partial \omega}{\partial n}\right)}{\partial n}=0\,,$$

ovvero

$$\frac{\partial}{\partial n}\left[H\left(\omega\frac{\partial\omega'}{\partial n}-\omega'\frac{\partial\omega}{\partial n}\right)\right]=0.$$

Di quì risulta che l'espressione

$$H\left(\omega\frac{\partial\omega'}{\partial n}-\omega'\frac{\partial\omega}{\partial n}\right)$$

è costante lungo il corso di ciascuna linea di forza. Ma, come si è già osservato rispetto al primo membro dell'equazione (7_f), quest'espressione si annulla in ogni punto a distanza infinita, dunque dev'essere sempre

$$(8_b)\qquad \omega\frac{\partial\omega'}{\partial n}-\omega'\frac{\partial\omega}{\partial n}=0\,.$$

Da quest'equazione, che sussiste per due qualunque delle derivate seconde e, f, g, e', f', g', si deducono in particolare le due eguaglianze

$$(9)\qquad \frac{\dfrac{\partial e'}{\partial n}}{e'}=\frac{\dfrac{\partial f'}{\partial n}}{f'}=\frac{\dfrac{\partial g'}{\partial n}}{g'}$$

e quindi anche, in virtù delle tre ultime equazioni (7), queste altre due

$$(9_a)\qquad \frac{E'}{e'}=\frac{F'}{f'}=\frac{G'}{g'}\,.$$

Queste relazioni contengono gli elementi essenziali della soluzione del nostro problema.

Abbiamo supposto, nel porre le precedenti eguaglianze sotto la forma quì indicata, che nessuna delle derivate seconde e', f', g' sia identicamente nulla. Ora questa supposizione è lecita, poichè non essendosi fatta alcuna ipotesi speciale sulla direzione degli assi coordinati, è sempre possibile fissarla in modo da evitare l'anzidetta eccezione. Il solo caso in cui ciò riuscirebbe impossibile sarebbe quello nel quale *tutte* le derivate seconde fossero identicamente nulle, ossia nel quale V fosse una funzione lineare delle coordinate: ma questo caso, che venne già messo in disparte per altre ragioni, è attualmente escluso dall'infinità dello spazio al quale riferiamo la funzione V.

Denotando con

$$\frac{\dfrac{\partial h'}{\partial n}}{h'}$$

il valore dei tre rapporti eguali (9), si può porre

$$e' = \frac{h'}{\xi}, \qquad f' = \frac{h'}{\eta}, \qquad g' = \frac{h'}{\zeta},$$

dove ξ, η, ζ sono tre funzioni che rimangono costanti lungo una stessa linea di forza, cioè che soddisfanno alle condizioni

$$(10) \qquad \frac{\partial \xi}{\partial n} = \frac{\partial \eta}{\partial n} = \frac{\partial \zeta}{\partial n} = 0$$

e che possono inoltre essere, per comodità di calcolo, assoggettate alla relazione

$$(10_a) \qquad \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1 .$$

Dai precedenti valori di e', f', g' si ricava

$$E' = \frac{h'(h'\xi - e\eta\zeta)}{\xi\eta\zeta}, \qquad F' = \frac{h'(h'\eta - f\zeta\xi)}{\xi\eta\zeta}, \qquad G' = \frac{h'(h'\zeta - g\xi\eta)}{\xi\eta\zeta},$$

epperò, (9_a),

$$\frac{h'\xi}{\eta\zeta} - e = \frac{h'\eta}{\zeta\xi} - f = \frac{h'\zeta}{\xi\eta} - g .$$

Designando con h il valor comune di queste tre espressioni eguali, si ha,

$$e = \frac{h'\xi}{\eta\zeta} - h, \qquad f = \frac{h'\eta}{\zeta\xi} - h, \qquad g = \frac{h'\zeta}{\xi\eta} - h,$$

e la condizione $\theta = e + f + g = 0$ dà, (10_a),

$$\frac{h'}{\xi\eta\zeta} - 3h = 0,$$

cioè

$$h' = 3h\xi\eta\zeta.$$

Si ha dunque finalmente

$$(10_b) \qquad \begin{cases} e = h(3\xi^2 - 1), & e' = 3h\eta\zeta, \\ f = h(3\eta^2 - 1), & f' = 3h\zeta\xi, \\ g = h(3\zeta^2 - 1); & g' = 3h\xi\eta . \end{cases}$$

Di qui si ricava

$$E = h^2(3\xi^2 - 2), \qquad E' = 3h^2\eta\zeta,$$

$$F = h^2(3\eta^2 - 2), \qquad F' = 3h^2\zeta\xi,$$

$$G = h^2(3\zeta^2 - 2); \qquad G' = 3h^2\xi\eta;$$

$$\Theta = -3h^2, \qquad \Delta = 2h^3.$$

Facendo la sostituzione di questi valori nelle equazioni (7), con riguardo alle condizioni (10), si trova che esse si riducono tutte all'unica equazione

$$(10_c) \qquad H\frac{\partial h}{\partial n} = 3h^2.$$

§ 5.

Ritorniamo ora alle formole (5), dalle quali si ha

$$da = e\,dx + g'\,dy + f'\,dz,$$

$$db = g'\,dx + f\,dy + e'\,dz,$$

$$dc = f'\,dx + e'\,dy + g\,dz,$$

e quindi, per i precedenti valori (10_b),

$$(11) \qquad \begin{cases} da = 3h\xi(\xi\,dx + \eta\,dy + \zeta\,dz) - h\,dx, \\ db = 3h\eta(\xi\,dx + \eta\,dy + \zeta\,dz) - h\,dy, \\ dc = 3h\zeta(\xi\,dx + \eta\,dy + \zeta\,dz) - h\,dz. \end{cases}$$

Le nove condizioni d'integrabilità (riducibili ad otto)

$$\frac{\partial g'}{\partial z} - \frac{\partial f'}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial f'}{\partial x} - \frac{\partial e}{\partial z} = 0, \qquad \frac{\partial e}{\partial y} - \frac{\partial g'}{\partial x} = 0;$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial e'}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial e'}{\partial x} - \frac{\partial g'}{\partial z} = 0, \qquad \frac{\partial g'}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial x} = 0;$$

$$\frac{\partial e'}{\partial z} - \frac{\partial g}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f'}{\partial z} = 0, \qquad \frac{\partial f'}{\partial y} - \frac{\partial e'}{\partial x} = 0;$$

si traducono in altrettante equazioni differenziali parziali fra le quattro funzioni ξ, η, ζ, h, che possono essere scritte nel modo seguente:

$$(11_\xi)\qquad \begin{cases} L\xi + h\left(\eta\dfrac{\partial \xi}{\partial z} - \zeta\dfrac{\partial \xi}{\partial y}\right) = 0, \\ M\xi + h\left(\zeta\dfrac{\partial \xi}{\partial x} - \xi\dfrac{\partial \xi}{\partial z}\right) = -\dfrac{1}{3}\dfrac{\partial h}{\partial z}, \\ N\xi + h\left(\xi\dfrac{\partial \xi}{\partial y} - \eta\dfrac{\partial \xi}{\partial x}\right) = +\dfrac{1}{3}\dfrac{\partial h}{\partial y}; \end{cases}$$

$$(11_\eta)\qquad \begin{cases} L\eta + h\left(\eta\dfrac{\partial \eta}{\partial z} - \zeta\dfrac{\partial \eta}{\partial y}\right) = +\dfrac{1}{3}\dfrac{\partial h}{\partial z}, \\ M\eta + h\left(\zeta\dfrac{\partial \eta}{\partial x} - \xi\dfrac{\partial \eta}{\partial z}\right) = 0, \\ N\eta + h\left(\xi\dfrac{\partial \eta}{\partial y} - \eta\dfrac{\partial \eta}{\partial x}\right) = -\dfrac{1}{3}\dfrac{\partial h}{\partial x}; \end{cases}$$

$$(11_\zeta)\qquad \begin{cases} L\zeta + h\left(\eta\dfrac{\partial \zeta}{\partial z} - \zeta\dfrac{\partial \zeta}{\partial y}\right) = -\dfrac{1}{3}\dfrac{\partial h}{\partial y}, \\ M\zeta + h\left(\zeta\dfrac{\partial \zeta}{\partial x} - \xi\dfrac{\partial \zeta}{\partial z}\right) = +\dfrac{1}{3}\dfrac{\partial h}{\partial x}, \\ N\zeta + h\left(\xi\dfrac{\partial \zeta}{\partial y} - \eta\dfrac{\partial \zeta}{\partial x}\right) = 0; \end{cases}$$

dove per brevità si è posto

$$(11_a)\qquad L = \frac{\partial\, h\eta}{\partial z} - \frac{\partial\, h\zeta}{\partial y}, \qquad M = \frac{\partial\, h\zeta}{\partial x} - \frac{\partial\, h\xi}{\partial z}, \qquad N = \frac{\partial\, h\xi}{\partial y} - \frac{\partial\, h\eta}{\partial x}.$$

Sommando le equazioni di ciascuna delle tre terne (11_ξ), (11_η), (11_ζ), dopo averle ordinatamente moltiplicate per ξ, η, ζ, si ottiene

$$(11_b)\qquad \begin{cases} (L\xi + M\eta + N\zeta)\xi = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{\partial h}{\partial y}\zeta - \dfrac{\partial h}{\partial z}\eta\right), \\ (L\xi + M\eta + N\zeta)\eta = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{\partial h}{\partial z}\xi - \dfrac{\partial h}{\partial x}\zeta\right), \\ (L\xi + M\eta + N\zeta)\zeta = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{\partial h}{\partial x}\eta - \dfrac{\partial h}{\partial y}\xi\right). \end{cases}$$

Sommando invece le prime equazioni di ciascuna delle terne anzidette, poscia le seconde, poscia le ultime, dopo averle ordinatamente moltiplicate, ciascuna volta, per ξ, η, ζ, si ottiene, con riguardo alla relazione (10_a),

$$(11_c)\qquad \begin{cases} L + \frac{1}{3}\left(\frac{\partial h}{\partial y}\zeta - \frac{\partial h}{\partial z}\eta\right) = 0\,, \\ M + \frac{1}{3}\left(\frac{\partial h}{\partial z}\xi - \frac{\partial h}{\partial x}\zeta\right) = 0\,, \\ N + \frac{1}{3}\left(\frac{\partial h}{\partial x}\eta - \frac{\partial h}{\partial y}\xi\right) = 0\,. \end{cases}$$

Finalmente, sommando sia le tre equazioni (11_b), sia le tre equazioni (11_c), dopo averle ordinatamente moltiplicate per ξ, η, ζ, si ottiene

$$L\xi + M\eta + N\zeta = 0\,,$$

epperò, in forza delle stesse equazioni (11_b), (11_c), si ha tanto

$$\frac{\partial h}{\partial y}\zeta - \frac{\partial h}{\partial z}\eta = 0\,, \qquad \frac{\partial h}{\partial z}\xi - \frac{\partial h}{\partial x}\zeta = 0\,, \qquad \frac{\partial h}{\partial x}\eta - \frac{\partial h}{\partial y}\xi = 0\,,$$

quanto

$$L = 0\,, \qquad M = 0\,, \qquad N = 0\,.$$

Alle prime tre di queste ultime sei equazioni si può dare la forma

$$(11_d)\qquad \frac{\frac{\partial h}{\partial x}}{\xi} = \frac{\frac{\partial h}{\partial y}}{\eta} = \frac{\frac{\partial h}{\partial z}}{\zeta} = \frac{dh}{\xi\,dx + \eta\,dy + \zeta\,dz}\,;$$

alle ultime tre, tenendo conto delle precedenti, si può dare invece la forma

$$(11_e)\qquad \frac{\partial \eta}{\partial z} - \frac{\partial \zeta}{\partial y} = 0\,, \qquad \frac{\partial \zeta}{\partial x} - \frac{\partial \xi}{\partial z} = 0\,, \qquad \frac{\partial \xi}{\partial y} - \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0\,.$$

Da queste tre equazioni (11_e) consegue immediatamente che esiste una funzione r delle coordinate x, y, z, il cui differenziale totale è dato da

$$(12)\qquad \xi\,dx + \eta\,dy + \zeta\,dz = dr\,,$$

e le precedenti equazioni (11_d) mostrano che la quantità h non può dipendere che da questa funzione r.

Le tre fra le equazioni (11_ξ), (11_η), (11_ζ) i cui secondi membri sono nulli si riducono, in virtù delle equazioni (11_e), alle seguenti

$$(12_a)\qquad \eta\frac{\partial\zeta}{\partial x}-\zeta\frac{\partial\eta}{\partial x}=0,\qquad \zeta\frac{\partial\xi}{\partial y}-\xi\frac{\partial\zeta}{\partial y}=0,\qquad \xi\frac{\partial\eta}{\partial z}-\eta\frac{\partial\xi}{\partial z}=0.$$

Le rimanenti sei equazioni del sistema anzidetto, combinate a due a due per somma, in guisa da eliminare le derivate di h, dànno

$$(12_b)\qquad \left\{\begin{aligned}
&\xi\left(\frac{\partial\eta}{\partial y}-\frac{\partial\zeta}{\partial z}\right)=\eta\frac{\partial\eta}{\partial x}-\zeta\frac{\partial\zeta}{\partial x},\\
&\eta\left(\frac{\partial\zeta}{\partial z}-\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)=\zeta\frac{\partial\zeta}{\partial y}-\xi\frac{\partial\xi}{\partial y},\\
&\zeta\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}-\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)=\xi\frac{\partial\xi}{\partial z}-\eta\frac{\partial\eta}{\partial z}.
\end{aligned}\right.$$

Finalmente quelle stesse equazioni, combinate a due a due per sottrazione, dànno

$$h\xi\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial\eta}{\partial y}+\frac{\partial\zeta}{\partial z}\right)=-\frac{2}{3}\frac{\partial h}{\partial x},$$

$$h\eta\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial\eta}{\partial y}+\frac{\partial\zeta}{\partial z}\right)=-\frac{2}{3}\frac{\partial h}{\partial y},$$

$$h\zeta\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial\eta}{\partial y}+\frac{\partial\zeta}{\partial z}\right)=-\frac{2}{3}\frac{\partial h}{\partial z},$$

equazioni che si compendiano tutte, (12), nell'unica

$$\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial\eta}{\partial y}+\frac{\partial\zeta}{\partial z}\right)dr=-\frac{2}{3}\frac{dh}{h},$$

alla quale si può dare la forma

$$(12_c)\qquad \frac{d\log h}{dr}=-\frac{3}{2}\Delta_2 r.$$

§ 6.

È ora facile ottenere la determinazione delle due funzioni r, h, dalle quali ormai dipende la soluzione del problema.

Le equazioni (12_a), poste sotto la forma

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\eta}{\zeta}\right)=0, \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\zeta}{\xi}\right)=0, \qquad \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\xi}{\eta}\right)=0,$$

dànno

$$(13) \qquad \eta = P\zeta, \qquad \zeta = Q\xi, \qquad \xi = R\eta,$$

dove P è una funzione di y e z, Q di z ed x, R di x ed y. Queste tre funzioni sono vincolate dalla relazione

$$PQR = 1$$

ossia

$$(13_a) \qquad \log P + \log Q + \log R = 0,$$

dalla quale si deduce

$$\frac{\partial \log Q}{\partial x} = -\frac{\partial \log R}{\partial x}, \qquad \frac{\partial \log R}{\partial y} = -\frac{\partial \log P}{\partial y}, \qquad \frac{\partial \log P}{\partial z} = -\frac{\partial \log Q}{\partial z}.$$

Ora nella prima di queste ultime eguaglianze il primo membro è indipendente da y ed il secondo da z: quindi i due membri non possono essere eguali che ad una funzione della sola x. Per una ragione analoga i due membri della seconda eguaglianza non possono essere eguali che ad una funzione della sola y e quelli della terza ad una funzione della sola z. Da ciò e dalla necessità di soddisfare alla primitiva relazione (13_a) segue molto facilmente che le forme di $\log P$, $\log Q$, $\log R$ non possono essere che le seguenti:

$$\log P = Y - Z, \qquad \log Q = Z - X, \qquad \log R = X - Y,$$

dove X è una funzione della sola x, Y della sola y, Z della sola z, e che quindi le equazioni (13) si possono scrivere, mutando la designazione di queste funzioni arbitrarie, nel modo seguente:

$$\frac{\xi}{X'} = \frac{\eta}{Y'} = \frac{\zeta}{Z'},$$

dove X' è la derivata d'una funzione della sola x, Y' quella d'una funzione della sola y e Z' quella d'una funzione della sola z. Di qui e dall'equazione (12) si deduce

$$\frac{\xi}{X'} = \frac{\eta}{Y'} = \frac{\zeta}{Z'} = \frac{dr}{d(X+Y+Z)},$$

cosicchè, ponendo per un momento

$$(13_b) \qquad X + Y + Z = t,$$

si riconosce che r è necessariamente funzione soltanto di t e che si ha

$$(13_c)\qquad \xi = \frac{\partial r}{\partial x} = r'X', \qquad \eta = \frac{\partial r}{\partial y} = r'Y', \qquad \zeta = \frac{\partial r}{\partial z} = r'Z',$$

dove

$$r' = \frac{dr}{dt};$$

l'equazione (10_a) diventa quindi

$$(13_d)\qquad r'^2(X'^2 + Y'^2 + Z'^2) = 1.$$

I precedenti valori (13_c) delle funzioni ξ, η, ζ, sostituiti nelle equazioni (12_b), dànno

$$r'^2X'(Z'' - Y'') = 0, \qquad r'^2Y'(X'' - Z'') = 0, \qquad r'^2Z'(Y'' - X'') = 0,$$

epperò si ha

$$(13_e)\qquad X'' = Y'' = Z'' = 2k,$$

dove $2k$ rappresenta il valor comune delle tre derivate seconde di X, Y, Z, il quale non può essere che *costante*.

Questa costante k non può essere nulla. Infatti se ciò fosse, sarebbero costanti le quantità X', Y', Z' e quindi, (13_d), anche la r', cosicchè r sarebbe una funzione lineare delle x, y, z e si avrebbe $\Delta_2 r = 0$. Per conseguenza, (12_c), anche h avrebbe un valore costante e questo valore non potrebbe essere, (10_c), che lo zero, cosicchè, (11), si avrebbe

$$da = 0, \qquad db = 0, \qquad dc = 0$$

e la funzione V risulterebbe lineare, forma già esclusa come inammissibile.

Poichè dunque la costante k non può essere nulla, si possono assegnare, (13_c), alle funzioni X, Y, Z le forme seguenti

$$X = k(x - x_0)^2 + l, \qquad Y = k(y - y_0)^2 + m, \qquad Z = k(z - z_0)^2 + n,$$

dove x_0, y_0, z_0, l, m, n sono nuove costanti arbitrarie. Di qui si deduce, (13_b),

$$t = k[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2] + l + m + n,$$

$$X'^2 + Y'^2 + Z'^2 = 4k(t - l - m - n),$$

epperò, (13_d),

$$dr = \frac{dt}{2\sqrt{k(t - l - m - n)}},$$

donde si ricava, tralasciando la costante additiva (evidentemente inutile),

$$r = \sqrt{\frac{t - l - m - n}{k}},$$

ossia

(14) $$r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}.$$

Da quest'espressione di r segue

$$\Delta_2 r = \frac{2}{r},$$

talchè l'equazione (12_c) diventa

$$\frac{d \log h}{dr} = -\frac{3}{r}$$

e dà

(14_a) $$h = \frac{M}{r^3},$$

dove M è una nuova costante.

In virtù delle formole (14), (14_a), (13_c), le equazioni (11) diventano

$$da = M\frac{3(x - x_0)dr - r\,dx}{r^4},$$

$$db = M\frac{3(y - y_0)dr - r\,dy}{r^4},$$

$$dc = M\frac{3(z - z_0)dr - r\,dz}{r^4},$$

e danno

$$a = -M\frac{x - x_0}{r^3} + a_0, \qquad b = -M\frac{y - y_0}{r^3} + b_0, \qquad c = -M\frac{z - z_0}{r^3} + c_0,$$

dove a_0, b_0, c_0 sono tre costanti, le quali non possono essere che nulle. Ciò è richiesto già dalla proprietà che devono avere le derivate prime di V di annullarsi all'infinito, ma segue anche necessariamente dalle equazioni del problema. Infatti le tre quantità, (13_c),

$$\xi = \frac{x - x_0}{r}, \qquad \eta = \frac{y - y_0}{r} \qquad \zeta = \frac{z - z_0}{r}$$

debbono soddisfare alle equazioni (10), le quali equivalgono, per questi valori di ξ, η, ζ, alle

$$\frac{\partial x}{\partial n} = \xi\frac{\partial r}{\partial n}, \qquad \frac{\partial y}{\partial n} = \eta\frac{\partial r}{\partial n}, \qquad \frac{\partial z}{\partial n} = \zeta\frac{\partial r}{\partial n}.$$

Queste equazioni mostrano che le quantità ξ, η, ζ debbono essere proporzionali alle tre derivate prime di V, cioè alle quantità testè determinate

$$a = -\frac{M\xi}{r^2} + a_0, \qquad b = -\frac{M\eta}{r^2} + b_0, \qquad c = -\frac{M\zeta}{r^2} + c_0,$$

e tale proporzionalità non può evidentemente aver luogo se non è, come dicevamo, $a_0 = b_0 = c_0 = 0$. Si ha dunque

$$a = \frac{\partial \frac{M}{r}}{\partial x}, \qquad b = \frac{\partial \frac{M}{r}}{\partial y}, \qquad c = \frac{\partial \frac{M}{r}}{\partial z}$$

e di qui si ricava finalmente

$$V = \frac{M}{r}. \tag{14$_b$}$$

La direzione della normale n potendosi far coincidere, in questo caso, con quella del raggio r, si ha, (14_a), (14_b),

$$\frac{\partial h}{\partial n} = -\frac{3M}{r^4}, \qquad H = \frac{\partial V}{\partial n} = -\frac{M}{r^2}$$

e quindi l'equazione (10_c) è anch'essa soddisfatta.

Il trovato valore di V soddisfa così a tutte le equazioni (7). Del resto se questo stesso valore si sostituisce nelle primitive equazioni (4), si trova che queste si riducono alle seguenti:

$$A(2r^2 - 3x^2) = 0, \qquad Ayz = 0,$$

$$A(2r^2 - 3y^2) = 0, \qquad Azx = 0,$$

$$A(2r^2 - 3z^2) = 0, \qquad Axy = 0,$$

e diventano identità quando (e solamente quando) $A = 0$, in accordo colle conclusioni del § 2.

§ 7.

Da quanto precede risulta che è sommamente ristretto il numero dei casi nei quali è possibile riprodurre il sistema delle pressioni di MAXWELL colla effettiva deformazione d'un mezzo isotropo indefinito, mezzo la cui costituzione non corrisponde d'altronde, per la necessaria condizione $A = 0$, ad alcuna realità conosciuta. Vediamo ciò nonostante qual sia la deformazione di questo mezzo che corrisponde all'unica forma testè riconosciuta possibile per la funzione V.

Ponendo per semplicità

$$x_0 = y_0 = z_0 = 0, \qquad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

si ha

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{Mx}{r^3}, \qquad \frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{My}{r^3}, \qquad \frac{\partial V}{\partial z} = -\frac{Mz}{r^3}, \qquad \Delta_1 V = \frac{M^2}{r^4}$$

e le formole (3), posto $A = 0$, dànno

$$\alpha = \frac{M^2(4x^2 - r^2)}{32\pi B r^6}, \qquad \lambda = \frac{8M^2 yz}{32\pi B r^6},$$

$$\beta = \frac{M^2(4y^2 - r^2)}{32\pi B r^6}, \qquad \mu = \frac{8M^2 zx}{32\pi B r^6},$$

$$\gamma = \frac{M^2(4z^2 - r^2)}{32\pi B r^6}; \qquad \nu = \frac{8M^2 xy}{32\pi B r^6},$$

ossia

$$\alpha = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \qquad \lambda = 2\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial z},$$

$$\beta = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}, \qquad \mu = 2\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial x},$$

$$\gamma = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}, \qquad \nu = 2\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y},$$

dove

(15) $$\varphi = \frac{V^2}{64\pi B}.$$

Ne risulta che le componenti u, v, w dello spostamento del punto (x, y, z), le quali supponiamo doversi annullare all'infinito, sono date da

(15_a) $$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \qquad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \qquad w = \frac{\partial \varphi}{\partial z},$$

ossia da

$$u = -\frac{M^2}{32\pi B}\frac{x}{r^4}, \qquad v = -\frac{M^2}{32\pi B}\frac{y}{r^4}, \qquad w = -\frac{M^2}{32\pi B}\frac{z}{r^4}.$$

Lo spostamento di ogni punto del mezzo è dunque *radiale*, come la forza, ed ha il valore

$$(15_b)\qquad -\frac{M^2}{32\pi B}\frac{1}{r^3}.$$

Il segno di quest'espressione mostra che vi è sempre una *contrazione* di tutto l'ambiente verso il centro $x = y = z = 0$: ma la legge del decrescimento di questa contrazione colla distanza dal centro è tale che la dilatazione cubica è sempre *positiva* e data da

$$(15_c)\qquad \vartheta = \frac{M^2}{32\pi B}\frac{1}{r^4}.$$

Si trova poi

$$X_x = \frac{M^2}{8\pi}\cdot\frac{r^2 - 2x^2}{r^6}, \qquad Y_z = \frac{M^2}{8\pi}\cdot\frac{-2yz}{r^6},$$

$$Y_y = \frac{M^2}{8\pi}\cdot\frac{r^2 - 2y^2}{r^6}, \qquad Z_x = \frac{M^2}{8\pi}\cdot\frac{-2zx}{r^6},$$

$$Z_z = \frac{M^2}{8\pi}\cdot\frac{r^2 - 2z^2}{r^6}; \qquad X_y = \frac{M^2}{8\pi}\cdot\frac{-2xy}{r^6};$$

ovvero anche

$$X_x = \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}, \qquad Y_z = \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial y\partial z},$$

$$Y_y = \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}, \qquad Z_x = \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial z\partial x},$$

$$Z_z = \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}, \qquad X_y = \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y},$$

dove

$$\psi = \frac{M^2}{8\pi}\log r.$$

La deformazione definita dalle formole (15_a), (15_b), (15_c) si può riferire allo spazio infinito escluso, per esempio, da una sfera di raggio finito ed ha luogo radialmente ed uniformemente intorno al centro di questa. Ora lo studio d'una deformazione di questo genere si presenta in una delle più elementari applicazioni della teoria dell'elasticità, cioè nel problema dell'equilibrio di un involucro sferico isotropo, soggetto a pressioni costanti sulle sue due superficie, delle quali, nel caso analogo al nostro, l'esterna sarebbe tutta all'infinito e non sopporterebbe pressione veruna. Si potrebbe dunque supporre che la soluzione precedentemente trovata dovesse coincidere colla già nota. Ma ciò non è, nè può essere, per la ragione che ora passiamo ad esporre.

§ 8.

Poichè tanto nell'una quanto nell'altra questione il trinomio

$$u\,dx + v\,dy + w\,dz$$

è un differenziale esatto, poniamo

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \qquad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \qquad w = \frac{\partial \varphi}{\partial z},$$

donde segue, come nel § precedente,

$$\alpha = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \qquad \lambda = 2\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial z},$$

$$\beta = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}, \qquad \mu = 2\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial x},$$

$$\gamma = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}; \qquad \nu = 2\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}.$$

Di qui risultano, per le componenti di pressione in un mezzo isotropo ordinario, i valori

$$X_x = -(A - 2B)\Delta_2 \varphi - 2B\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \qquad Y_z = -2B\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial z},$$

$$Y_y = -(A - 2B)\Delta_2 \varphi - 2B\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}, \qquad Z_x = -2B\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial x},$$

$$Z_z = -(A - 2B)\Delta_2 \varphi - 2B\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}, \qquad X_y = -2B\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y},$$

dai quali si deduce

$$\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} = -A\frac{\partial \Delta_2 \varphi}{\partial x},$$

$$\frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z} = -A\frac{\partial \Delta_2 \varphi}{\partial y},$$

$$\frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z} = -A\frac{\partial \Delta_2 \varphi}{\partial z}.$$

Denotando con X, Y, Z le componenti della forza esterna riferita all'unità di volume, le equazioni indefinite dell'equilibrio sono quindi

$$A\frac{\partial\Delta_2\varphi}{\partial x}+X=0,\qquad A\frac{\partial\Delta_2\varphi}{\partial y}+Y=0,\qquad A\frac{\partial\Delta_2\varphi}{\partial z}+Z=0$$

e, ponendo

$$X=-k\frac{\partial V}{\partial x},\qquad Y=-k\frac{\partial V}{\partial y},\qquad Z=-k\frac{\partial V}{\partial z},$$

dove V è la funzione potenziale delle forze esterne, k la densità, queste equazioni si riassumono nell'unica

$$A\Delta_2\varphi-kV=\text{Cost.},$$

la quale si riduce alla semplicissima

$$A\Delta_2\varphi=\text{Cost.}$$

quando non vi sono che pressioni superficiali.

Ora se A è diverso da zero, come avviene necessariamente nei mezzi isotropi ordinarî, e se, come avviene nel sovracitato problema sferico, la funzione φ dipende soltanto dalla distanza r del punto (x, y, z) dal centro dell'involucro, quest'equazione diventa

$$\frac{1}{r}\frac{\partial^2(r\varphi)}{\partial r^2}=\text{Cost.}$$

e, tralasciando una costante additiva insignificante, dà

$$\varphi=\frac{K}{r}+K'r^2,$$

dove K e K' sono due costanti. Nel caso dello spazio infinito escluso da una sfera bisogna fare $K'=0$ e si ottiene così l'espressione

$$\varphi=\frac{K}{r}$$

che porge l'ordinaria soluzione, nella quale la costante K resta poi determinata dalla pressione che deve aver luogo sulla superficie sferica interna. Ma, qualunque sia questa pressione, la dilatazione cubica del mezzo, data da

$$\theta=\Delta_2\varphi,$$

è sempre *nulla*.

Se invece, come avviene nel caso singolare che siamo stati condotti a considerare nei precedenti §§, la costante A è nulla, si ha, qualunque sia la funzione φ,

$$\frac{\partial X_x}{\partial x}+\frac{\partial X_y}{\partial y}+\frac{\partial X_z}{\partial z}=0,$$

$$\frac{\partial Y_x}{\partial x}+\frac{\partial Y_y}{\partial y}+\frac{\partial Y_z}{\partial z}=0,$$

$$\frac{\partial Z_x}{\partial x}+\frac{\partial Z_y}{\partial y}+\frac{\partial Z_z}{\partial z}=0.$$

Ne risulta che, per l'ammessa natura della deformazione, l'equilibrio non può aver luogo che in assenza di forze di massa, ma, quando questa condizione sia soddisfatta, esso è conciliabile con qualunque forma della funzione φ. Questa palmare contraddizione col teorema fondamentale dell'unicità dello stato d'equilibrio dipende evidentemente da ciò che, per $A=0$, il potenziale d'elasticità non possiede più il carattere di forma quadratica essenzialmente positiva. La precisa determinazione che tuttavia abbiamo ottenuto della funzione φ nel § precedente, ed a tenore della quale la dilatazione cubica (15_c) *non* è punto risultata nulla, scaturisce da un'altra sorgente, e cioè dall'avere assunto *a priori* espressioni di *data forma* per le componenti di pressione X_x, Y_y, etc., cioè le espressioni (1). Queste espressioni contengono bensì una funzione arbitraria V, ma, negli spazî infiniti in cui questa funzione soddisfa all'equazione $\Delta_2 V=0$, esse non possono, come abbiamo dimostrato, convenire alle componenti di pressione derivanti da una vera deformazione del mezzo se non a patto che V abbia la forma (14_b), e da questa forma speciale di V segue necessariamente quella pur speciale determinazione di φ che abbiamo incontrata nel § precedente e che è essenzialmente diversa da quella che conviene ai mezzi isotropi ordinarî.

§ 9.

Non vogliamo por termine a questo lavoro senza far cenno di un caso nel quale il problema della determinazione delle funzioni u, v, w, corrispondenti ad una data forma della funzione potenziale V, con riguardo alle condizioni (1), è riducibile a termini semplicissimi. Il caso cui alludiamo è quello in cui la funzione anzidetta dipende dalla sola distanza r del punto potenziato da un punto fisso, che per semplicità assumeremo come origine delle coordinate.

È facile comprendere (e si può del resto dimostrare) che in questo caso anche gli spostamenti devono essere radiali ed uniformi, cioè che le componenti u, v, w devono essere le derivate d'una funzione della sola distanza r. Ciò posto, considerando V, per comodità di calcolo, come funzione dell'argomento

$$\rho = x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

e ponendo

$$\frac{dV}{d\rho} = V',$$

si ha

$$\frac{\partial V}{\partial x} = 2V'x, \qquad \frac{\partial V}{\partial y} = 2V'y, \qquad \frac{\partial V}{\partial z} = 2V'z, \qquad \Delta_1 V = 4V'^2\rho$$

e le formole (3), (4_a) dànno

$$\alpha = \frac{V'^2}{2\pi B}(x^2 - C\rho), \qquad \lambda = \frac{V'^2}{\pi B} yz,$$

$$\beta = \frac{V'^2}{2\pi B}(y^2 - C\rho), \qquad \mu = \frac{V'^2}{\pi B} zx,$$

$$\gamma = \frac{V'^2}{2\pi B}(z^2 - C\rho); \qquad \nu = \frac{V'^2}{\pi B} xy.$$

Assumendo poscia un'altra funzione φ dello stesso argomento ρ e ponendo

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \qquad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \qquad w = \frac{\partial \varphi}{\partial z},$$

si trova

$$\alpha = 2\varphi' + 4\varphi'' x^2, \qquad \lambda = 8\varphi'' yz,$$

$$\beta = 2\varphi' + 4\varphi'' y^2, \qquad \mu = 8\varphi'' zx,$$

$$\gamma = 2\varphi' + 4\varphi'' z^2, \qquad \nu = 8\varphi'' xy.$$

Ora queste ultime espressioni non si possono identificare colle precedenti se non ponendo simultaneamente le *due* relazioni

$$\varphi'' = \frac{V'^2}{8\pi B}, \qquad \varphi' = -\frac{CV'^2\rho}{4\pi B},$$

dalle quali risulta

$$\frac{\varphi''}{\varphi'} + \frac{1}{2C\rho} = 0.$$

Quest'ultima equazione stabilisce già che la forma della funzione φ (e per conseguenza anche quella della funzione V) dipende unicamente, astrazion fatta da un fattore costante, dalla costituzione del mezzo isotropo che si considera. Ciò sarebbe egualmente vero se la costituzione del mezzo variasse colla distanza dal centro, cioè se i parametri d'isotropìa A e B si supponessero funzioni di ρ, di guisa che il mezzo si concepisse formato di strati concentrici ed isotropi, con parametri d'isotropìa variabili con continuità dall'uno strato all'altro.

Nel caso dei parametri costanti si ha, dall'integrazione dell'ultima equazione,

$$\varphi = K\rho^{-\eta},$$

dove K è una costante arbitraria ed η il già rammentato rapporto della contrazione trasversale alla dilatazione longitudinale. Ne risulta

$$V = 4\sqrt{\frac{\pi \boldsymbol{E} K}{\eta}}\,\rho^{-\frac{\eta}{2}},$$

dove $\boldsymbol{E}$ è il modulo d'elasticità. Riponendo r^2 al posto di ρ si conclude di qui che l'unica soluzione del problema è data da

$$V = \frac{M}{r^\eta}, \qquad \varphi = \frac{\eta}{16\pi \boldsymbol{E}} V^2,$$

dove M è una nuova costante.

La densità della distribuzione dotata di questo potenziale V è espressa da

$$\frac{M\eta(1-\eta)}{4\pi r^{\eta+2}}.$$

Affinchè questa densità sia nulla bisogna che sia $\eta = 1$ e quindi

$$A = 0, \qquad \boldsymbol{E} = 4B.$$

Si ricade così sulla soluzione già trovata. Se invece si volesse che la detta densità risultasse *costante,* si giungerebbe a conclusioni ancora più incongrue. Dovendo infatti essere, perchè ciò avvenisse, $\eta = -2$, si avrebbe

$$5A - 6B = 0$$

e quindi

$$\boldsymbol{E} = -2B,$$

cosicchè bisognerebbe ammettere o che il modulo d'elasticità del mezzo fosse negativo, o che, (3_c), fosse negativo il potenziale d'elasticità

$$\Phi = \frac{-1}{2E}\left(\frac{\Delta_1 V}{8\pi}\right)^2.$$

Vi è anche un altro caso nel quale il problema trattato in questa Memoria si può risolvere in modo diretto, benchè meno semplicemente che nell'ipotesi particolarissima testè considerata. È il caso in cui la distribuzione di masse, cui appartiene la funzione potenziale V, è simmetrica intorno ad un asse rettilineo, cosicchè V diventa funzione delle sole due coordinate che bastano a definire la posizione di un punto in un piano passante per l'asse di simmetrìa. In questo caso le sei equazioni di condizione (4) si riducono a quattro, due delle quali sono le derivate esatte d'una stessa equazione differenziale parziale di 2° ordine. Quest'equazione, combinata colla $\Delta_2 V = 0$, ammette di nuovo un integrale primo: e dalla forma di questo si deduce facilmente (giovandosi all'uopo dell'intervento della funzione *associata*) che, se si esclude la forma lineare e se quindi si pone $A = 0$, la sola forma possibile per V è quella rappresentata dall'equazione (14_b), per un punto (x_0, y_0, z_0) situato sull'asse di simmetrìa.

In questo caso, che è stato il primo da me studiato, la forma (14_b) si palesa come la sola ammissibile (escludendo sempre la lineare) in *ogni* spazio vuoto di masse potenzianti.

NOTA

Delle equazioni di condizione per le quantità α, β, γ, λ, μ, ν, che sono citate nel § 1, si dimostra ordinariamente la *necessità,* non già la *sufficienza*. Stimo perciò opportuno, stante l'importanza di queste equazioni rispetto allo scopo del presente lavoro, di aggiungere una deduzione delle medesime, la quale stabilisca chiaramente la proprietà loro di costituire le condizioni non solo necessarie, ma eziandio sufficienti, per l'esistenza delle tre componenti di spostamento u, v, w.

Si rammenti, dalla teoria generale delle deformazioni d'un mezzo continuo, che insieme colle citate componenti α, β, γ, λ, μ, ν intervengono altresì, con ufficio non meno essenziale, le tre quantità p, q, r definite dalle equazioni

$$(a) \qquad \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} = 2p, \qquad \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} = 2q, \qquad \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 2r$$

e rappresentanti le *componenti di rotazione* della particella circostante al punto (x, y, z). Ora dal sistema delle nove equazioni che si ottengono combinando le sei equazioni (2) del § 1 colle precedenti tre (a), si possono ricavare i valori di tutte le derivate prime delle tre componenti di spostamento u, v, w, e questi valori sono i seguenti:

$$(b) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \alpha, & \dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{\nu}{2} - r, & \dfrac{\partial u}{\partial z} = \dfrac{\mu}{2} + q, \\[2ex] \dfrac{\partial v}{\partial x} = \dfrac{\nu}{2} + r, & \dfrac{\partial v}{\partial y} = \beta, & \dfrac{\partial v}{\partial z} = \dfrac{\lambda}{2} - p, \\[2ex] \dfrac{\partial w}{\partial x} = \dfrac{\mu}{2} - q, & \dfrac{\partial w}{\partial y} = \dfrac{\lambda}{2} + p, & \dfrac{\partial w}{\partial z} = \gamma. \end{cases}$$

Consideriamo le prime tre di queste equazioni, che forniscono i valori delle derivate prime della funzione u. Affinchè, supposte *date* le quantità che entrano nei loro secondi membri, esista una funzione u soddisfacente a queste tre equazioni, è necessario e sufficiente che sieno soddisfatte tre note relazioni, le quali possono essere scritte come segue:

$$-\frac{\partial q}{\partial y} - \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \mu}{\partial y} - \frac{\partial \nu}{\partial z}\right), \qquad \frac{\partial q}{\partial x} = \frac{\partial \alpha}{\partial z} - \frac{1}{2}\frac{\partial \mu}{\partial x}, \qquad \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{1}{2}\frac{\partial \nu}{\partial x} - \frac{\partial \alpha}{\partial y}.$$

Da queste si deducono, colla permutazione ciclica, le due terne analoghe di condizioni necessarie e sufficienti per l'esistenza delle altre due funzioni v e w. Ma, eseguendo dapprima questa permutazione sulla sola prima delle tre precedenti condizioni, e sommando poscia membro a membro le tre equazioni così ottenute, si trova

$$\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial y} + \frac{\partial r}{\partial z} = 0, \quad ^{*)}$$

talchè la prima delle dianzi trovate tre condizioni può scriversi più semplicemente così:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \mu}{\partial y} - \frac{\partial \nu}{\partial z}\right).$$

*) Questa relazione notissima risulta già dalle formole di definizione (a): ma, per lo scopo attuale, era necessario far constare che essa è inclusa nelle nove condizioni d'integrabilità di cui qui è parola.

Per tal modo si ottiene il seguente sistema di relazioni differenziali fra le nove funzioni $\alpha, \beta, \gamma, \lambda, \mu, \nu, p, q, r$:

$$
(c)\quad \begin{cases}
\dfrac{\partial p}{\partial x} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial \mu}{\partial y} - \dfrac{\partial \nu}{\partial z}\right), & \dfrac{\partial p}{\partial y} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial \lambda}{\partial y} - \dfrac{\partial \beta}{\partial z}, \qquad \dfrac{\partial p}{\partial z} = \dfrac{\partial \gamma}{\partial y} - \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial \lambda}{\partial z};\\[2ex]
\dfrac{\partial q}{\partial x} = \dfrac{\partial \alpha}{\partial z} - \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial \mu}{\partial x}, & \dfrac{\partial q}{\partial y} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial \nu}{\partial z} - \dfrac{\partial \lambda}{\partial x}\right), \qquad \dfrac{\partial q}{\partial z} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial \mu}{\partial z} - \dfrac{\partial \gamma}{\partial x};\\[2ex]
\dfrac{\partial r}{\partial x} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial \nu}{\partial x} - \dfrac{\partial \alpha}{\partial y}, & \dfrac{\partial r}{\partial y} = \dfrac{\partial \beta}{\partial x} - \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial \nu}{\partial y}, \qquad \dfrac{\partial r}{\partial z} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial \lambda}{\partial x} - \dfrac{\partial \mu}{\partial y}\right).
\end{cases}
$$

Questo sistema d'equazioni contiene le condizioni necessarie e sufficienti per l'esistenza di tre funzioni u, v, w soddisfacenti alle nove condizioni (b), ossia alle sei equazioni (2) del § 1 ed alle tre equazioni (a) di questa Nota.

Ciò posto, consideriamo come *date* soltanto le *sei componenti di deformazione* α, β, γ, λ, μ, ν. Se esistono tre funzioni u, v, w soddisfacenti alle equazioni (2) del § 1, esistono certamente anche le tre funzioni p, q, r definite dalle equazioni (a) di questa Nota. Poichè dunque le derivate di queste tre ultime funzioni sono legate alle α, β, γ, λ, μ, ν dalle nove equazioni (c), bisogna che sieno soddisfatte le condizioni di integrabilità che risultano da queste ultime nove equazioni e che si riducono alle sei seguenti:

$$
(d)\quad \begin{cases}
\dfrac{\partial^2 \beta}{\partial z^2} + \dfrac{\partial^2 \gamma}{\partial y^2} = \dfrac{\partial^2 \lambda}{\partial y \partial z}, & 2\dfrac{\partial^2 \alpha}{\partial y \partial z} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial \mu}{\partial y} + \dfrac{\partial \nu}{\partial z} - \dfrac{\partial \lambda}{\partial x}\right),\\[2ex]
\dfrac{\partial^2 \gamma}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 \alpha}{\partial z^2} = \dfrac{\partial^2 \mu}{\partial z \partial x}, & 2\dfrac{\partial^2 \beta}{\partial z \partial x} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial \nu}{\partial z} + \dfrac{\partial \lambda}{\partial x} - \dfrac{\partial \mu}{\partial y}\right),\\[2ex]
\dfrac{\partial^2 \alpha}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 \beta}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 \nu}{\partial x \partial y}, & 2\dfrac{\partial^2 \gamma}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{\partial \lambda}{\partial x} + \dfrac{\partial \mu}{\partial y} - \dfrac{\partial \nu}{\partial z}\right),
\end{cases}
$$

le quali sono appunto quelle citate nel § 1. Quando queste condizioni sono soddisfatte, esistono indubbiamente tre funzioni p, q, r soddisfacenti alle nove equazioni (c); ma si è già veduto che se queste nove equazioni son soddisfatte da nove funzioni α, β, γ, λ, μ, ν, p, q, r, esistono tre funzioni u, v, w soddisfacenti alle condizioni (2) del § 1 ed (a) della presente Nota: dunque le sei condizioni (d), evidentemente *necessarie* per l'esistenza di tre funzioni u, v, w soddisfacenti alle sole equazioni (2) del § 1, sono anche *sufficienti*.

LXXXIII.

SULLA TEORIA DELLE ONDE.

Rendiconti del Reale Istituto Lombardo, serie II, tomo XIX (1886), pp. 424-435.

Nei §§ 110-112 delle *Vorlesungen über die Theorie der Elasticität* di F. NEUMANN, recentemente redatte e pubblicate da O. E. MEYER, è esposto il procedimento col quale l'illustre fisico di Königsberg ha, già da lungo tempo, dedotte le leggi di FRESNEL dalle equazioni fondamentali dell'elasticità. Senza menomamente entrare nella grave questione della preferenza da darsi a questa piuttosto che ad altre maniere di stabilire teoricamente le dette leggi, mi propongo semplicemente di quì esporre, a beneficio di chi imprende lo studio di queste materie sull'opera citata, alcune considerazioni le quali pongono, se non erro, in più chiara luce la deduzione neumanniana.

La più generale espressione del potenziale d'elasticità d'un mezzo dotato di tre piani ortogonali di simmetria è notoriamente la seguente:

$$\frac{1}{2}(A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2 + 2A'\beta\gamma + 2B'\gamma\alpha + 2C'\alpha\beta + A''\lambda^2 + B''\mu^2 + C''\nu^2),$$

dove α, β, γ sono i coefficienti di dilatazione nel senso dei tre assi e λ, μ, ν gli analoghi coefficienti di scorrimento. Le nove quantità A, B, C, A', B', C', A'', B'', C'' sono altrettante costanti caratteristiche del mezzo elastico, le quali, accettando (come fa NEUMANN) la cosidetta teoria molecolare, si riducono a sole sei, in virtù delle eguaglianze

$$A' = A''(= a), \qquad B' = B''(= b), \qquad C' = C''(= c) \quad *)$$

*) I simboli a, b, c sono quelli usati, insieme con A, B, C, da F. NEUMANN e da molti altri scrittori, per designare le sei costanti d'elasticità del mezzo.

a cui tale teoria conduce. Se ora si suppone che nel mezzo elastico si propaghino delle onde piane e si designano con p, q, r i coseni di direzione della normale s ai piani di queste onde, si trova che, in ciascuna delle tre onde possibili *), la velocità di propagazione ω e la direzione del moto vibratorio sono determinate dalla grandezza e dalla direzione di uno dei tre assi dell'*ellissoide di propagazione,* cioè dell'ellissoide rappresentato dall'equazione $E = 1$, dove

$$\begin{aligned} E(x, y, z) = (Ap^2 + C''q^2 + B''r^2)x^2 + 2(A' + A'')qryz \\ + (C''p^2 + Bq^2 + A''r^2)y^2 + 2(B' + B'')rpzx \\ + (B''p^2 + A''q^2 + Cr^2)z^2 + 2(C' + C'')pqxy. \end{aligned}$$

E propriamente, detta k la densità del mezzo e ρ uno dei tre semi-assi di quest'ellissoide, l'equazione

$$k\omega^2 = \frac{1}{\rho^2}$$

determina la velocità di propagazione d'un'onda nella quale il moto vibratorio è diretto nel senso del raggio ρ.

Ciò posto, considerando dapprima le onde i cui piani sono normali ai piani di simmetria del mezzo, si trova facilmente che, se fra le nove costanti d'elasticità sussistono le tre relazioni

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} (B - A'')(C - A'') = (A' + A'')^2, \\ (C - B'')(A - B'') = (B' + B'')^2, \\ (A - C'')(B - C'') = (C' + C'')^2, \end{aligned} \right.$$

l'equazione di 3° grado in ρ^{-2}, ossia in $k\omega^2$, che determina le grandezze dei tre semi-assi dell'ellissoide, si spezza in tre equazioni lineari. Supponiamo, con F. NEUMANN, che tali relazioni sieno soddisfatte e procediamo a considerare il caso che i piani delle onde abbiano una orientazione arbitraria.

Ammettendo che i binomî contenuti fra le parentesi, nei primi membri delle precedenti equazioni, sieno tutti positivi, come avviene quando il mezzo è isotropo, poniamo

*) Per semplicità parliamo solamente delle onde cosidette *positive.*

(prendendo tutti i radicali positivamente)

$$(2)\qquad \begin{cases} p\sqrt{A-C''}=P, \quad q\sqrt{B-A''}=Q, \quad r\sqrt{C-B''}=R, \\ p\sqrt{A-B''}=P', \quad q\sqrt{B-C''}=Q', \quad r\sqrt{C-A''}=R', \\ Ap^2+Bq^2+Cr^2=H. \end{cases}$$

Di quì risulta, avendo riguardo alle relazioni (1),

$$\begin{aligned} Ap^2+C''q^2+B''r^2 &= H-Q'^2-R^2, & (A'+A'')qr &= QR', \\ C''p^2+Bq^2+A''r^2 &= H-R'^2-P^2, & (B'+B'')rp &= RP', \\ B''p^2+A''q^2+Cr^2 &= H-P'^2-Q^2, & (C'+C'')pq &= PQ', \end{aligned}$$

epperò

$$E(x,\,y,\,z)=H(x^2+y^2+z^2)$$
$$-(Qz-R'y)^2-(Rx-P'z)^2-(Py-Q'x)^2.$$

Ora la suddetta equazione di 3° grado in $k\omega^2$ si ottiene scrivendo la condizione perchè la quadratica

$$E(x,\,y,\,z)-k\omega^2(x^2+y^2+z^2)$$

abbia il discriminante nullo: se dunque le tre equazioni lineari

$$Qz-R'y=0, \qquad Rx-P'z=0, \qquad Py-Q'x=0$$

sono fra loro compatibili, cioè se ha luogo la relazione

$$(2_a)\qquad PQR-P'Q'R'=0,$$

e se quindi la quadratica

$$(Qz-R'y)^2+(Rx-P'z)^2+(Py-Q'x)^2$$

ha già di per sè il discriminante nullo *), la sopraddetta equazione di 3° grado è evidentemente soddisfatta dal valore

$$(2_b)\qquad k\omega^2=H$$

ed i due rimanenti valori di $k\omega^2$ non dipendono più che da un'equazione di 2° grado.

---

*) In generale il discriminante di questa quadratica è $(PQR-P'Q'R')^2$.

La condizione (2_a) equivale, (2), alla seguente

$$pqr\left[\sqrt{(A-C'')(B-A'')(C-B'')}-\sqrt{(A-B'')(B-C'')(C-A'')}\right]=0,$$

la quale è soddisfatta quando uno dei tre coseni p, q, r è nullo; ciò che poteva prevedersi *a priori*, giacchè in questo caso le relazioni (1) hanno per effetto di spezzare l'equazione di 3° grado in tre equazioni lineari, una delle quali è precisamente la (2_b). Ma quando la direzione s della propagazione è del tutto arbitraria, la condizione (2_a) non è soddisfatta se fra le costanti d'elasticità non ha luogo l'ulteriore relazione (identica, come le (1), quando il mezzo è isotropo)

$$(3)\qquad (A-C'')(B-A'')(C-B'')=(A-B'')(B-C'')(C-A'').$$

La forma di questa nuova relazione è la stessa di quella della notissima relazione che esprime l'involuzione di sei elementi individuati da altrettanti valori d'un parametro. Quest'analogia permette subito di dare all'equazione (3) le tre forme seguenti

$$(3_a)\qquad \begin{cases}(B-C'')(A''-B'')(C-A)=(C-B'')(C''-A'')(A-B),\\ (C-A'')(B''-C'')(A-B)=(A-C'')(A''-B'')(B-C),\\ (A-B'')(C''-A'')(B-C)=(B-A'')(B''-C'')(C-A),\end{cases}$$

che saranno utili più tardi. Essa può anche porsi sotto quest'altra forma

$$(B''-C'')(BC+AA'')+(C''-A'')(CA+BB'')+(A''-B'')(AB+CC'')=0$$

della quale ci serviremo subito. Osserviamo infatti che, in virtù delle già ammesse relazioni (1), scritte sotto le forme

$$\begin{aligned}BC+AA''&=A''(A+B+C)+A'^2+2A'A'',\\ CA+BB''&=B''(A+B+C)+B'^2+2B'B'',\\ AB+CC''&=C''(A+B+C)+C'^2+2C'C'',\end{aligned}$$

la precedente relazione, in quanto deve coesistere con queste tre, può essere sostituita dalla seguente:

$$(3_b)\qquad \begin{vmatrix}1 & A'' & A'^2+2A'A''\\ 1 & B'' & B'^2+2B'B''\\ 1 & C'' & C'^2+2C'C''\end{vmatrix}=0.$$

Ora se si ammettessero le eguaglianze $A'=A''$, $B'=B''$, $C'=C''$, volute dalla teoria molecolare, quest'ultima relazione si ridurrebbe a quest'altra

$$\begin{vmatrix} 1 & A'' & A''^2 \\ 1 & B'' & B''^2 \\ 1 & C'' & C''^2 \end{vmatrix} = 0,$$

ossia alla

$$(3_c) \qquad (B''-C'')(C''-A'')(A''-B'') = 0,$$

e non potrebbe essere soddisfatta che nel caso in cui due delle tre costanti A'', B'', C'' (cioè delle a, b, c di NEUMANN) fossero eguali fra loro.

Si sfugge alla necessità di questa inopportuna restrizione osservando, con NEUMANN, che lo stato reale del mezzo è prossimo all'isotropico e che quindi le differenze

$$B-C, \qquad C-A, \qquad A-B, \qquad B''-C'', \qquad C''-A'', \qquad A''-B''$$

sono quantità molto piccole, di cui è lecito trascurare i quadrati ed i prodotti. In tale stato di cose la condizione (2_a) è soddisfatta, entro questi limiti di approssimazione, sia, (3_c), che si accettino le eguaglianze della teoria molecolare, sia, (3_a), che da esse si prescinda. Ma da questa stessa osservazione emerge che è preferibile mantenere distinte tutte le nove costanti, assoggettandole alle quattro condizioni (1) e (3), poichè ciò permette di procedere, come ora faremo, alla formazione dell'equazione di 2° grado in $k\omega^2$, senza far intervenire innanzi tempo la considerazione dello stato prossimo all'isotropico.

Giova ora introdurre in luogo delle quantità P, Q, R, P', Q', R', legate fra loro dall'equazione (2_a), sei nuove costanti α, β, γ, l, m, n definite dalle equazioni seguenti:

$$(4) \qquad \begin{cases} P = l\sqrt{\gamma}, \qquad Q = m\sqrt{\alpha}, \qquad R = n\sqrt{\beta}, \\ P' = l\sqrt{\beta}, \qquad Q' = m\sqrt{\gamma}, \qquad R' = n\sqrt{\alpha}, \\ \qquad l^2 + m^2 + n^2 = 1. \end{cases}$$

In virtù di queste equazioni, che risolveremo più tardi, si ha

$$E(x, y, z) = H(x^2+y^2+z^2) - \alpha(mz-ny)^2 - \beta(nx-lz)^2 - \gamma(ly-mx)^2,$$

e le equazioni per determinare le grandezze e le direzioni degli assi dell'ellissoide di propagazione sono

$$(4_a) \qquad \begin{cases} (H-k\omega^2)x - \beta n(nx - lz) + \gamma m(ly - mx) = 0, \\ (H-k\omega^2)y - \gamma l\,(ly - mx) + \alpha n\,(mz - ny) = 0, \\ (H-k\omega^2)z - \alpha m(mz - ny) + \beta l\,(nx - lz) = 0. \end{cases}$$

Da queste si conclude immediatamente che l'asse corrispondente alla radice (2_b) ha le equazioni

$$\frac{x}{l} = \frac{y}{m} = \frac{z}{n},$$

cosicchè i suoi coseni di direzione sono le tre quantità l, m, n determinate dalle equazioni (4).

Ma supponiamo invece che la radice ω^2 contenuta nelle equazioni (4_a) sia una delle altre due, e che quindi le coordinate x, y, z si riferiscano ai punti di *uno* degli altri due assi, necessariamente situati nel piano

$$(4_b) \qquad lx + my + nz = 0.$$

Denotando con x_1, y_1, z_1 le coordinate dei punti dell'*altro* di questi due assi e con h un fattore indeterminato, si ha

$$hx_1 = mz - ny, \qquad hy_1 = nx - lz, \qquad hz_1 = ly - mx,$$

e, reciprocamente,

$$-h(mz_1 - ny_1) = x, \qquad -h(nx_1 - lz_1) = y, \qquad -h(ly_1 - mx_1) = z,$$

cosicchè le equazioni (4_a) possono essere trasformate in queste altre:

$$(H - k\omega^2)(mz_1 - ny_1) + \beta n y_1 - \gamma m z_1 = 0,$$
$$(H - k\omega^2)(nx_1 - lz_1) + \gamma l z_1 - \alpha n x_1 = 0,$$
$$(H - k\omega^2)(ly_1 - mx_1) + \alpha m x_1 - \beta l y_1 = 0,$$

o meglio nelle seguenti:

$$(5) \qquad \frac{(H - k\omega^2 - \alpha)x_1}{l} = \frac{(H - k\omega^2 - \beta)y_1}{m} = \frac{(H - k\omega^2 - \gamma)z_1}{n}.$$

Da queste equazioni, molto più semplici delle (4_a) e nelle quali il valore di ω^2 si riferisce ad *uno* dei due assi posti nel piano (4_b), mentre le x_1, y_1, z_1 sono le coordinate di un punto qualunque dell'*altro* asse, e devono quindi soddisfare alla stessa equazione (4_b), si deduce immediatamente

$$(5_a) \qquad \frac{l^2}{H - k\omega^2 - \alpha} + \frac{m^2}{H - k\omega^2 - \beta} + \frac{n^2}{H - k\omega^2 - \gamma} = 0.$$

È questa l'equazione di 2° grado, dalla quale dipendono i due valori di ω^2 che ci rimanevano da determinare.

Ma quest'equazione può essere sostituita da un'altra più semplice. Essa, infatti, ridotta a forma intera, equivale alla seguente:

$$(H - k\omega^2)^2 - (H - k\omega^2)[(\beta + \gamma)l^2 + (\gamma + \alpha)m^2 + (\alpha + \beta)n^2]$$
$$+ \beta\gamma l^2 + \gamma\alpha m^2 + \alpha\beta n^2 = 0\,.$$

Ora dalle formole (4) si deduce

$$(\beta + \gamma)l^2 = P^2 + P'^2 = 2Ap^2 - (B'' + C'')p^2,$$
$$(\gamma + \alpha)m^2 = Q^2 + Q'^2 = 2Bq^2 - (C'' + A'')q^2,$$
$$(\alpha + \beta)n^2 = R^2 + R'^2 = 2Cr^2 - (A'' + B'')r^2,$$

epperò si ha

$$(\beta + \gamma)l^2 + (\gamma + \alpha)m^2 + (\alpha + \beta)n^2$$
$$= 2H - [(B'' + C'')p^2 + (C'' + A'')q^2 + (A'' + B'')r^2].$$

Dalle stesse formole (4) si deduce ancora

$$\beta\gamma l^4 = P^2 P'^2, \qquad \alpha\beta m^2 n^2 = Q^2 R^2, \qquad \gamma\alpha m^2 n^2 = Q'^2 R'^2,$$
$$\gamma\alpha m^4 = Q^2 Q'^2, \qquad \beta\gamma n^2 l^2 = R^2 P^2, \qquad \alpha\beta n^2 l^2 = R'^2 P'^2,$$
$$\alpha\beta n^4 = R^2 R'^2, \qquad \gamma\alpha l^2 m^2 = P^2 Q^2, \qquad \beta\gamma l^2 m^2 = P'^2 Q'^2,$$

epperò si ha

$$\beta\gamma l^4 + \gamma\alpha m^4 + \alpha\beta n^4 + (\alpha\beta + \gamma\alpha)m^2 n^2 + (\beta\gamma + \alpha\beta)n^2 l^2 + (\gamma\alpha + \beta\gamma)l^2 m^2$$
$$= (\beta\gamma l^2 + \gamma\alpha m^2 + \alpha\beta n^2)(l^2 + m^2 + n^2) = \beta\gamma l^2 + \gamma\alpha m^2 + \alpha\beta n^2$$
$$= H^2 - H[(B'' + C'')p^2 + (C'' + A'')q^2 + (A'' + B'')r^2]$$
$$+ B''C''p^2 + C''A''q^2 + A''B''r^2.$$

Di qui risulta la seguente identità:

$$(H - k\omega^2)^2 - (H - k\omega^2)[(\beta + \gamma)l^2 + (\gamma + \alpha)m^2 + (\alpha + \beta)n^2]$$
$$+ \beta\gamma l^2 + \gamma\alpha m^2 + \alpha\beta n^2$$
$$= (k\omega^2)^2 - k\omega^2[(B'' + C'')p^2 + (C'' + A'')q^2 + (A'' + B'')r^2]$$
$$+ B''C''p^2 + C''A''q^2 + A''B''r^2,$$

in virtù della quale l'equazione (5_a) può essere trasformata in quest'altra

$$(5_b) \qquad \frac{p^2}{k\omega^2 - A''} + \frac{q^2}{k\omega^2 - B''} + \frac{r^2}{k\omega^2 - C''} = 0.$$

Ciò posto consideriamo l'ellissoide

$$(6) \qquad A''x^2 + B''y^2 + C''z^2 = 1$$

ed il piano

$$(6_a) \qquad px + qy + rz = 0.$$

Sieno x, y, z le coordinate di un punto d'*uno* degli assi dell'ellisse loro comune sezione. Le coordinate di un punto dell'*altro* asse di quest'ellisse sono proporzionali ai binomî

$$qz - ry, \qquad rx - pz, \qquad py - qx,$$

epperò le tre quantità

$$A''(qz - ry), \qquad B''(rx - pz), \qquad C''(py - qx)$$

sono proporzionali ai coseni di direzione della normale condotta all'ellissoide in una delle estremità del *secondo* asse della sezione ellittica. Ma questa direzione è anche normale al piano diametrale che contiene il primo asse ed il diametro conjugato al piano (6_a), diametro i cui coseni di direzione sono proporzionali alle quantità

$$\frac{p}{A''}, \qquad \frac{q}{B''}, \qquad \frac{r}{C''};$$

dunque i coseni di direzione della detta normale sono anche proporzionali ai binomî

$$\frac{qz}{B''} - \frac{ry}{C''}, \qquad \frac{rx}{C''} - \frac{pz}{A''}, \qquad \frac{py}{A''} - \frac{qx}{B''}.$$

Ne risulta che, designando con θ un opportuno moltiplicatore, dev'essere

$$C''qz - B''ry = \theta(qz - ry),$$

$$A''rx - C''pz = \theta(rx - pz),$$

$$B''py - A''qx = \theta(py - qx),$$

o più semplicemente

$$(6_b) \qquad \frac{(\theta - A'')x}{p} = \frac{(\theta - B'')y}{q} = \frac{(\theta - C'')z}{r};$$

e, poichè le coordinate x, y, z devono soddisfare tanto a queste equazioni quanto alla

(6_a), dev'essere pure

$$(6_c)\qquad \frac{p^2}{\theta - A''} + \frac{q^2}{\theta - B''} + \frac{r^2}{\theta - C''} = 0\,.$$

Quest'equazione determina due valori del moltiplicatore θ, il significato del quale si ottiene immediatamente osservando che dalle equazioni (6_a), (6_b) risulta

$$(\theta - A'')x^2 + (\theta - B'')y^2 + (\theta - C'')z^2 = 0$$

e quindi, (6),

$$\theta \rho^2 = 1\,,$$

dove ρ è quel semi-asse della sezione ellittica la cui direzione è definita dalle equazioni (6_b).

Dal confronto delle due equazioni (5_b), (6_c) emerge che la prima di queste si può considerare, in virtù della relazione $k\omega^2\rho^2 = 1$, ossia $k\omega^2 = \theta$, come l'equazione che determina le grandezze dei semi-assi della sezione ellittica fatta dal piano (6_a) nell'ellissoide (6), che denomineremo *ellissoide di* FRESNEL. Questi semi-assi sono ***eguali in grandezza*** a due dei semi-assi dell'ellissoide di propagazione, ma hanno evidentemente *direzioni differenti*: infatti l'ellisse cui essi appartengono è in un piano (6_a) differente da quello (4_b) della corrispondente sezione principale dell'ellissoide di propagazione.

Si otterrebbe l'identità delle due *coppie di direzioni* se, invece dell'ellissoide di FRESNEL, si considerasse quello definito dall'equazione

$$(7)\qquad (H - \alpha)x^2 + (H - \beta)y^2 + (H - \gamma)z^2 = 1\,,$$

che, per brevità, denomineremo *ellissoide di* NEUMANN, e, invece del piano (6_a), il piano

$$(7_a)\qquad lx + my + nz = 0\,.$$

Infatti, confrontando l'equazione (5_a) colla (6_c) e le equazioni (5) colle (6_b), si scorge che la (5_a) determina le grandezze e le (5) determinano le direzioni dei semi-assi della sezione ellittica fatta dal piano (7_a) nell'ellissoide (7). Se non che, rammentando il significato rispettivo di ω e di x_1, y_1, z_1 nelle equazioni (5), si riconosce che questa nuova sezione ellittica ha bensì la medesima coppia di assi ed è nel medesimo piano di quella che è sezione principale dell'ellissoide di propagazione, ma non potrebbe farsi coincidere con questa che mediante la *rotazione di un angolo retto* intorno al centro comune.

Veniamo finalmente alla determinazione delle quantità l, m, n, α, β, γ. Dalle equazioni (4) si ha

$$\frac{m}{n} = \frac{Q}{R'}\,,\qquad \frac{n}{l} = \frac{R}{P'}\,,\qquad \frac{l}{m} = \frac{P}{Q'}\,,$$

equazioni di cui una è conseguenza delle altre due, in virtù dell'ammessa relazione (2_a). Omettendo la terza, si ha

$$l:m:n = R'P':QR:RR',$$

epperò, ponendo per brevità,

$$K^2 = (A - B'')(C - A'')p^2 + (B - A'')(C - B'')q^2 + (C - A'')(C - B'')r^2,$$

si ottiene

$$(8)\qquad \begin{cases} l = \dfrac{p\sqrt{(A - B'')(C - A'')}}{K}, \\[2ex] m = \dfrac{q\sqrt{(B - A'')(C - B'')}}{K}, \\[2ex] n = \dfrac{r\sqrt{(C - A'')(C - B'')}}{K}. \end{cases}$$

Inoltre le stesse equazioni (4) dànno

$$mn\alpha = QR', \qquad nl\beta = RP', \qquad lm\gamma = PQ'$$

e quindi

$$\alpha = Q^2 + R'^2 + \frac{R'^2 P'^2}{R^2},$$

$$\beta = R^2 + P'^2 + \frac{P'^2 Q'^2}{P^2},$$

$$\gamma = P^2 + Q'^2 + \frac{Q'^2 R'^2}{Q^2},$$

donde si deduce, (1),

$$(8_a)\qquad \begin{cases} H - \alpha = A'' - \dfrac{(C - A)(A'' - B'')}{C - B''}p^2, \\[2ex] H - \beta = B'' - \dfrac{(A - B)(B'' - C'')}{A - C''}q^2, \\[2ex] H - \gamma = C'' - \dfrac{(B - C)(C'' - A'')}{B - A''}r^2. \end{cases}$$

La dissimmetria delle espressioni (8) proviene dalla ammessa sussistenza della relazione

(2_a). Le formole (8_a) non sono propriamente simmetriche, ma si deducono tuttavia ciclicamente le une dalle altre.

Adesso si può rilevare chiaramente l'effetto dell'ipotesi d'uno stato del mezzo elastico prossimo all'isotropico. In primo luogo i coefficienti di p^2, q^2, r^2, nei secondi membri delle equazioni (8_a), diventano di second'ordine rispetto alle differenze $B - C$, $B'' - C''$, ecc., e quindi i due ellissoidi, di NEUMANN e di FRESNEL, si possono considerare come *coincidenti*. Inoltre le differenze fra ciascuna delle tre costanti A, B, C e ciascuna delle tre A'', B'', C'' hanno valori *finiti*, le cui differenze sono piccole quantità dello stesso ordine delle $B - C$, ecc.

Ne risulta, (8), che i coseni l, m, n differiscono dai coseni p, q, r di piccole quantità di questo stesso ordine, epperò che l'onda la cui velocità di propagazione è definita dall'equazione (2_b) è prossimamente *longitudinale*, donde consegue che le altre due, le cui velocità di propagazione sono definite dall'equazione di 2° grado (5_b), sono prossimamente *trasversali*. Finalmente, per determinare la direzione del moto in ciascuna di queste due ultime onde, si possono, in luogo delle equazioni rigorose (5), usare le equazioni approssimate

$$(8_b) \qquad \frac{(k\omega^2 - A'')x_1}{p} = \frac{(k\omega^2 - B'')y_1}{q} = \frac{(k\omega^2 - C'')z_1}{r},$$

in virtù delle quali, combinate colla (5_b), la determinazione delle onde prossimamente trasversali è ricondotta alla costruzione di FRESNEL, indipendentemente dall'accettazione delle eguaglianze volute dalla teoria molecolare. Si può far intervenire, nell'enunciato di questa costruzione, il concetto di piano di polarizzazione, diversamente definito da FRESNEL e da NEUMANN; ma bisogna in ogni caso tener conto della già più volte avvertita perpendicolarità della direzione $(x_1 : y_1 : z_1)$, definita dalle equazioni (8_b), su quel semi-asse del primitivo ellissoide di propagazione cui corrisponde il valore di ω^2 introdotto nelle equazioni medesime.

Le cose esposte nella presente Nota non sono certamente tutte indispensabili per chiarire il procedimento di F. NEUMANN. È tuttavia da deplorarsi che nella tanto lungamente desiderata pubblicazione dei Corsi dati dall'insigne fisico sulla teoria dell'elasticità, il redattore non abbia forse posto una cura adeguata alla gravità dell'impegno da lui assunto. Per esempio, nella questione testè trattata, il lettore delle *Vorlesungen* può essere indotto a credere che la decomposizione dell'equazione di 3° grado in due, una di 1° ed una di 2° grado, sia una conseguenza *rigorosa* delle sole equazioni (1) di questa Nota, ovvero delle (9) del § 110, mentre è certo che NEUMANN (di cui non mi fu dato riscontrare gli scritti originali sull'argomento) ammetteva uno stato del mezzo prossimo all'isotropico. Appunti d'altro genere alla redazione dell'Opera in discorso fece già W. Voigt, in uno scritto *) testè pubblicato per festeggiare il sessantesimo anniversario dalla laurea del venerando Neumann. Del resto basterebbe l'equivoco contenuto nelle linee 11-13 della p. 82 per persuadere ogni lettore che i quaderni i quali hanno servito di base alla redazione delle *Vorlesungen* dovevano essere sottoposti ad una revisione più diligente.

*) *Bestimmung der Elasticitäts-Constanten von Beryll und Bergkrystall* (Nachrichten von der K. Gesellschaft d. Wiss. zu Göttingen, 1886).

LXXXIV.

SULLE FUNZIONI SFERICHE D'UNA VARIABILE.

Rendiconti del Reale Istituto Lombardo, serie II, tomo XX (1887), pp. 469-478.

Nella teoria delle funzioni sferiche occorre spessissimo d'adoperare certe formole che esprimono relazioni sussistenti fra più funzioni sferiche della stessa specie e d'ordine diverso. Nel copioso trattato di HEINE tali formole ricorrenti compariscono a più riprese, sotto forme svariatissime, e sono dedotte di volta in volta da considerazioni non meno svariate, anzi direbbesi quasi, incidentali, senza che si accenni mai ad una sorgente unica e primitiva di tutte queste relazioni, alcune delle quali hanno d'altronde un'importanza grandissima, sia per la teoria generale, sia per le applicazioni. Ora la sorgente delle formole di cui si tratta consiste in due semplicissime relazioni che hanno sempre luogo fra due funzioni consecutive e le loro derivate prime, relazioni che mi propongo di quì stabilire nella loro assoluta generalità.

Queste relazioni non sono nuove, quanto alla forma, ed F. NEUMANN, nei suoi pregevolissimi *Beiträge zur Theorie der Kugelfunctionen* (Leipzig, 1878), le dimostra direttamente, tanto (p. 61) per le funzioni di prima specie, quanto (p. 65) per quelle di seconda. Ma questo stesso fatto della loro separata dimostrazione, e della deduzione di questa dall'espressione analitica di ciascuna delle due specie di funzioni, mostra che alle formole in discorso non si attribuisce il significato che esse hanno realmente, cioè di vere e proprie equazioni differenziali di prim'ordine, atte a definire compiutamente l'intero sistema delle funzioni sferiche d'una variabile.

Rammento che, per ogni dato ordine n, le funzioni sferiche di prima e seconda specie d'una variabile x si designano rispettivamente coi simboli $P_n(x)$, $Q_n(x)$ e che, ponendo

$$A P_n(x) + B Q_n(x) = R_n(x), \tag{1}$$

dove A e B sono due costanti arbitrarie, la funzione $R_n(x)$ è l'integrale generale dell'equazione differenziale di second'ordine

$$\frac{d}{dx}\left[(1 - x^2)\frac{dR_n}{dx}\right] + n(n+1)R_n = 0. \tag{1_a}$$

Tutte le proprietà che si possono stabilire coll'ajuto di questa sola equazione, senza l'intervento d'alcuna nozione relativa all'espressione analitica della funzione integrale, sono assolutamente generali, cioè applicabili sia alle funzioni del tipo P_n, sia a quelle del tipo Q_n, sia finalmente a quelle del tipo misto R_n (salvo un'avvertenza che verrà fatta a suo tempo). Di questa natura sono appunto le due relazioni che si tratta di stabilire.

Si ponga

$$R_n = x\frac{d\varphi}{dx} + m\varphi,$$

dove $\varphi(x)$ è una conveniente funzione ausiliare ed m un numero da determinarsi opportunamente. Sostituendo quest'espressione di R_n nell'equazione differenziale (1_a) si ottiene un risultato il quale è facilmente riducibile alla forma seguente:

$$x\frac{d}{dx}\left\{(1 - x^2)\frac{d^2\varphi}{dx^2} + [n(n+1) - 2(m+1)]\varphi\right\}$$

$$+ (m+2)\left[(1 - x^2)\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{mn(n+1)}{m+2}\varphi\right] = 0.$$

Si determini ora il numero m in modo che sia

$$n(n+1) - 2(m+1) = \frac{mn(n+1)}{m+2}.$$

Quest'equazione equivale alla seguente:

$$\frac{(n - m - 1)(n + m + 2)}{m+2} = 0$$

e dà quindi per m i due valori

$$m = n - 1, \qquad m = -(n+2),$$

donde risulta corrispondentemente

$$n(n+1)-2(m+1)=\frac{mn(n+1)}{m+2}=n(n-1),$$

$$n(n+1)-2(m+1)=\frac{mn(n+1)}{m+2}=(n+1)(n+2).$$

Ne consegue, designando sempre con R_n l'integrale generale dell'equazione (1_a), che, se si pone

$$R_n=x\frac{d\varphi}{dx}+(n-1)\varphi,$$

la funzione ausiliare φ deve soddisfare all'equazione

$$\frac{d}{dx}\left\{x^{n+1}\left[(1-x^2)\frac{d^2\varphi}{dx^2}+n(n-1)\varphi\right]\right\}=0,$$

ossia alla

$$(1-x^2)\frac{d^2\varphi}{dx^2}+n(n-1)\varphi=Cx^{-(n+1)},$$

dove C è una costante arbitraria; e che se invece si pone

$$R_n=x\frac{d\varphi}{dx}-(n+2)\varphi,$$

la funzione ausiliare φ deve soddisfare all'altra equazione

$$\frac{d}{dx}\left\{x^{-n}\left[(1-x^2)\frac{d^2\varphi}{dx^2}+(n+1)(n+2)\varphi\right]\right\}=0,$$

ossia alla

$$(1-x^2)\frac{d^2\varphi}{dx^2}+(n+1)(n+2)\varphi=C'x^n,$$

dove C' è un'altra costante arbitraria.

Facendo quindi, nel primo caso, il cambiamento di n in $n+1$ e, nel secondo, quello di n in $n-1$, si può formulare il seguente corollario immediato delle due proposizioni precedenti: se φ è l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$(1-x^2)\frac{d^2\varphi}{dx^2}+n(n+1)\varphi=0,$$

l'espressione

$$R_{n+1}=x\frac{d\varphi}{dx}+n\varphi$$

rappresenta la più generale funzione sferica d'ordine $n+1$, e l'espressione

$$R_{n-1} = x\frac{d\varphi}{dx} - (n+1)\varphi$$

rappresenta la più generale funzione sferica d'ordine $n-1$.

Ora da queste due espressioni di R_{n+1} e di R_{n-1} si deduce

$$\frac{dR_{n+1}}{dx} = x\frac{d^2\varphi}{dx^2} + (n+1)\frac{d\varphi}{dx},$$

$$\frac{dR_{n-1}}{dx} = x\frac{d^2\varphi}{dx^2} - n\frac{d\varphi}{dx},$$

mentre dall'equazione differenziale per φ segue che la derivata $\varphi'(x)$ soddisfa all'equazione

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{d\varphi'}{dx}\right] + n(n+1)\varphi' = 0.$$

Ne risulta, (1_a), che l'espressione più generale di questa derivata si può rappresentare con

$$\frac{d\varphi}{dx} = R_n$$

e che si possono quindi stabilire le seguenti equazioni

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{dR_{n+1}}{dx} &= x\frac{dR_n}{dx} + (n+1)R_n, \\ \frac{dR_{n-1}}{dx} &= x\frac{dR_n}{dx} - nR_n. \end{aligned}\right.$$

Queste sono appunto le due relazioni fondamentali in cui rientrano, o di cui sono corollarî più o meno immediati, tutte quelle formole ricorrenti cui si faceva allusione al principio di questo articolo.

Le due relazioni precedenti rendono superflua la considerazione dell'equazione differenziale (1_a). Infatti se, dopo avere mutato n in $n+1$ nella seconda relazione, si elimina la derivata di R_{n+1}, si trova

$$(1-x^2)\frac{dR_n}{dx} = (n+1)(xR_n - R_{n+1}),$$

e se dalla derivata di quest'ultima equazione si elimina di nuovo la derivata di R_{n+1}, si ricade per l'appunto sull'equazione differenziale (1_a) della funzione generica R_n. Per tal modo le due equazioni (2) si possono veramente considerare come le equazioni differenziali di prim'ordine dell'intero sistema di funzioni R_0, R_1, R_2, ...

Bisogna fare tuttavia un'osservazione.

Poichè ciascuna di queste funzioni R_n contiene, (1), due costanti A e B, le relazioni (2) fra due consecutive di tali funzioni non hanno un senso ben determinato se non in quanto si ammetta che tali costanti ricevano i medesimi valori nell'una e nell'altra funzione; o, se si vuole, se non in quanto si riguardi ciascuna delle anzidette relazioni come rappresentativa di due relazioni distinte (sebbene d'egual forma), l'una delle quali si riferisca alle due funzioni componenti il cui fattore costante è A, l'altra alle due funzioni componenti il cui fattore costante è B. In altre parole, considerando il sistema delle infinite funzioni R_n come definito dalle due equazioni (2), ciò che s'è veduto essere legittimo, un tale sistema non include sostanzialmente che due costanti arbitrarie, le quali potrebbero essere, a cagion d'esempio, le due costanti che entrano nella prima funzione R_0, costanti che si trasmettono, in virtù di quelle due equazioni, a tutte le funzioni successive.

Per effetto di tale trasmissione, le due componenti P_n, Q_n dell'espressione generale (1) di R_n diventano totalmente determinate, quando sieno fissate le componenti iniziali P_0, Q_0, e diventa quindi necessario di esaminare se tale determinazione collimi con quella che è stata generalmente adottata e che non converrebbe alterare.

Per risolvere questa questione nel modo più generale, ed in guisa da farne anche scaturire un processo per ottenere le espressioni analitiche delle funzioni P_n, Q_n, consideriamo (in analogia colla serie classica che ha condotto allo studio delle funzioni P_n) la serie

$$R_0 + sR_1 + s^2R_2 + s^3R_3 + \cdots$$

di cui ammetteremo la convergenza in egual grado per opportuni intervalli di valori dell'argomento x e della variabile di sviluppo s $(x^2 < 1,\ s^2 < 1)$. Sia $F(x, s)$ la somma incognita di questa serie, talchè abbiasi

$$F(x, s) = \sum_0^\infty s^n R_n$$

e quindi

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \sum_0^\infty s^n \frac{dR_n}{dx}, \qquad \frac{\partial F}{\partial s} = \sum_1^\infty n s^{n-1} R_n.$$

Alla prima di queste due equazioni si può dare, invocando la prima relazione (2), la forma

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \sum_1^\infty s^n \left(x \frac{dR_{n-1}}{dx} + nR_{n-1}\right) + \frac{dR_0}{dx},$$

mentre, invocando invece la seconda relazione (2), essa assume l'altra forma

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \sum_0^\infty s^n \left[x \frac{dR_{n+1}}{dx} - (n+1) R_{n+1}\right].$$

Da queste due diverse espressioni si deducono facilmente le seguenti due relazioni fra le derivate parziali della funzione F:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = s x \frac{\partial F}{\partial x} + s^2 \frac{\partial F}{\partial s} + s F + \frac{d R_0}{d x},$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{x}{s}\left(\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d R_0}{d x}\right) - \frac{\partial F}{\partial s},$$

ricavando dalle quali i valori delle suddette due derivate si ottiene il sistema equivalente

$$(1 - 2 s x + s^2)\frac{\partial F}{\partial x} - s F = (1 - s x)\frac{d R_0}{d x},$$

$$(1 - 2 s x + s^2)\frac{\partial F}{\partial s} + (s - x) F = -(1 - x^2)\frac{d R_0}{d x}.$$

Ponendo per brevità

$$1 - 2 s x + s^2 = u^2,$$

queste equazioni assumono la forma più semplice

$$\frac{\partial (u F)}{\partial x} = \frac{1 - s x}{u}\frac{d R_0}{d x},$$

$$\frac{\partial (u F)}{\partial s} = -\frac{1 - x^2}{u}\frac{d R_0}{d x},$$

e di qui risulta che, affinchè esista la funzione F, dev'essere soddisfatta la condizione d'integrabilità

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1 - x^2}{u}\frac{d R_0}{d x}\right) + \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{1 - s x}{u}\frac{d R_0}{d x}\right) = 0,$$

la quale, a calcolo fatto, si riduce a

$$\frac{d}{d x}\left[(1 - x^2)\frac{d R_0}{d x}\right] = 0.$$

Ora questa non è altro che l'equazione differenziale cui deve soddisfare la funzione iniziale R_0, equazione che nasce, come s'è già veduto, da un'opportuna combinazione delle stesse equazioni (2): dunque la funzione F esiste ed è definita dall'equazione integrabile

(3) $$d(u F) = \frac{B(1 - s x) d x}{u(1 - x^2)} - \frac{B d s}{u},$$

dove, in armonia colla precedente equazione differenziale per R_0, si è posto

$$(1 - x^2)\frac{dR_0}{dx} = B,$$

B essendo una costante arbitraria. Questa costante coincide appuntino colla B della formola (1), qualora si assegni alla funzione sferica di seconda specie d'ordine nullo la sua ordinaria espressione analitica.

Ora avendosi

$$\frac{ds}{u} = d\log(u + s - x),$$

si può porre, (3),

$$uF = f(x) - B\log(u + s - x),$$

donde

$$\frac{\partial(uF)}{\partial x} = f'(x) + \frac{B(u+s)}{u(u+s-x)},$$

equazione la quale, tenendo conto dell'identità

$$(u + s - x)(u - s + x) = 1 - x^2,$$

si può scrivere anche così:

$$\frac{\partial(uF)}{\partial x} = f'(x) + \frac{Bx}{1 - x^2} + \frac{B(1 - sx)}{u(1 - x^2)}.$$

Ne segue che, determinando la funzione $f(x)$ per mezzo dell'equazione

$$f'(x) + \frac{Bx}{1 - x^2} = 0,$$

donde si ricava

$$f(x) = A + B\log\sqrt{1 - x^2} = A + B\log\sqrt{(u + s - x)(u - s + x)},$$

si ottiene per il prodotto uF un'espressione

$$uF = A + B\log\sqrt{\frac{u - s + x}{u + s - x}},$$

il cui differenziale totale ha precisamente il valore (3): inoltre per $s = 0$ (e quindi $u = 1$) la funzione F così determinata si riduce ad

$$F(x, 0) = R_0 = AP_0 + BQ_0,$$

dove

$$P_0 = 1, \qquad Q_0 = \log\sqrt{\frac{1 + x}{1 - x}}.$$

Per tal modo la somma F della serie $\sum s^n R_n$ è definitivamente rappresentata dall'espressione

$$(3_a) \qquad F(x,\,s) = \frac{A}{u} + \frac{B}{u} \log \sqrt{\frac{u - s + x}{u + s - x}}\,,$$

dalla quale si conclude

$$(3_b) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{1}{u} &= \sum_0^\infty s^n P_n\,, \\ \frac{1}{u} \log \sqrt{\frac{u - s + x}{u + s - x}} &= \sum_0^\infty s^n Q_n\,. \end{aligned} \right.$$

Il primo di questi due sviluppi è ben noto; del secondo è fatto un breve cenno nel Trattato di HEINE (I, p. 134), dove la somma della relativa serie è rappresentata da una espressione la quale non differisce sostanzialmente da quella che precede. Comunque sia, resta così assodato che basta supporre

$$R_0 = A P_0 + B Q_0\,,$$

dove P_0 e Q_0 abbiano gli ordinari valori (testè riportati), perchè tutte le successive R_n, definite per mezzo delle equazioni differenziali (2) e formate, (1), colle medesime costanti A e B, riproducano esattamente, nelle loro componenti P_n, Q_n, le funzioni ordinariamente contrassegnate da questi simboli.

Nel passo testè citato HEINE giudica poco interessante il secondo degli sviluppi (3_b). Benchè certamente esso non possa gareggiare di importanza col classico sviluppo di u^{-1}, pure mi sembra che anche esso si presti a talune considerazioni ed a taluni ravvicinamenti di qualche rilievo, su di che mi propongo di ritornare un'altra volta. Fin d'ora osservo tuttavia che il detto sviluppo si presta molto facilmente alla deduzione dell'espressione finita di Q_n (cfr. SCHLAEFLI, *Ueber die zwei* HEINE'*schen Kugelfunctionen,* etc., Memoria pubblicata per il giubileo dell'Università di Berna, 1881, § 15). Essendo infatti

$$\int_0^s \frac{ds}{u} = \log \frac{u + s - x}{1 - x}\,,$$

ovvero

$$\int_0^s \frac{ds}{u} = \log \sqrt{\frac{1 + x}{1 - x}} - \log \sqrt{\frac{u - s + x}{u + s - x}}\,,$$

si ottiene, coll'ajuto del primo sviluppo (3_b),

$$\log \sqrt{\frac{u - s + x}{u + s - x}} = \log \sqrt{\frac{1 + x}{1 - x}} - \sum_0^\infty \frac{s^{m+1} P_m}{m + 1}\,,$$

ed anche

$$\frac{1}{u}\log\sqrt{\frac{u-s+x}{u+s-x}}=\sum_0^\infty s^n\left(P_n\log\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}-\sum_0^\infty\frac{s^{m+1}P_mP_n}{m+1}\right)$$

$$=\sum_0^\infty s^n\left(P_n\log\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}-\sum_{m=0}^{m=n-1}\frac{P_mP_{n-m-1}}{m+1}\right).$$

Di qui si deduce subito, confrontando colla seconda delle equazioni (3_b),

$$Q_n=P_n\log\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}-\sum_{m=0}^{m=n-1}\frac{P_mP_{n-m-1}}{m+1}.$$

La somma finita che comparisce in questa espressione di Q_n è una forma, incontrata anche dal sig. HERMITE *), di quel polinomio del grado $m-1$ che entra, come è noto, insieme col termine logaritmico, a comporre la funzione sferica di seconda specie.

Stimo inutile mostrare con esempi l'utilità delle equazioni (2) per la deduzione diretta delle varie formole ricorrenti note, come di infinite altre che se ne potrebbero ricavare. Chiunque s'accinga a tale deduzione riconoscerà ch'essa si eseguisce colla massima facilità e senza bisogno di ricorrere ad alcun particolare artifizio. Egli è specialmente per ciò che le dette equazioni mi parrebbero dover occupare un maggior posto nella teoria delle funzioni sferiche.

*) *Sur les polynômes de* LEGENDRE (Jornal de Sciencias Mathematicas e Astr., Coimbra, VI).

LXXXV.

SULLE FUNZIONI COMPLESSE.

Rendiconti del Reale Istituto Lombardo, serie II; tomo XX (1887), pp. 624-635; tomo XXIV (1891), pp. 1188-1195; tomo XXVII (1894), pp. 337-344.

NOTA I.

Alla teoria delle ordinarie funzioni potenziali, a tre coordinate indipendenti, si fa di solito corrispondere, nel piano, quella delle funzioni potenziali logaritmiche *). Ed invero questo riscontro è, per molti rispetti, da considerarsi come il più legittimo ed il più ovvio. Ciò non esclude tuttavia che si possano concepire altre maniere di corrispondenza; e fra queste parmi degna di qualche attenzione la seguente, nella quale l'equazione differenziale che fa riscontro a quella di Laplace e Poisson è di prim'ordine, anzichè di secondo.

Sieno a, b le coordinate rettangolari del punto generico d'una qualunque regione finita σ del piano ed x, y quelle d'un punto arbitrario di questo stesso piano.

Si ponga

$$a + bi = c, \qquad x + yi = z$$

e si consideri l'integrale

$$U(x, y) = \int \frac{h\, d\sigma}{c - z} \tag{1}$$

esteso a tutta l'anzidetta regione σ. Il simbolo h rappresenta una funzione reale o com-

*) Intendiamo quelle così designate da C. Neumann e da molti altri scrittori, e da non confondersi coi potenziali logaritmici *a tre variabili,* recentemente studiati e largamente applicati da J. Boussinesq.

plessa di a, b, che corrisponde all'ordinaria densità e che supporremo essere monodroma e finita in σ. Ammetteremo che essa sia ivi anche continua, senza escludere tuttavia la presenza di linee di discontinuità.

È facile riconoscere che la funzione $U(x, y)$ così definita (in generale complessa) è monodroma, continua e finita in tutto il piano, non esclusi i punti della regione σ, del contorno s di questa regione e delle eventuali linee di discontinuità per h, e che all'infinito si ha

$$\lim (z U) = -\int h \, d\sigma. \tag{1$_a$}$$

In quanto alle derivate prime di U, si riconosce agevolmente (considerando il caso d'un'area circolare omogenea, cioè nella quale sia $h = \text{Cost.}$) che esse sono dovunque finite, che si annullano all'infinito e che sono discontinue soltanto lungo il contorno s e lungo le linee di discontinuità per h *).

Sia σ' una qualunque altra regione del piano, cioè una regione totalmente compresa nella data regione σ, oppure avente con questa qualche parte comune, o, finalmente, non avente alcuna parte comune colla suddetta, e sia $f(z)$ una funzione della variabile complessa z, monodroma, continua e finita in σ'. Dall'equazione (1) si ha

$$\int_{s'} U f(z) \, dz = \int_{s'} f(z) \, dz \int \frac{h \, d\sigma}{c - z},$$

dove l'integrazione relativa a z s'intende estesa a tutto il contorno s' della regione σ', percorso nel senso positivo.

Supponiamo dapprima che questo contorno s' non attraversi la regione σ. In questo caso è lecito invertire l'ordine delle integrazioni nel secondo membro dell'equazione precedente e scrivere

$$\int_{s'} U f(z) \, dz = -\int h \, d\sigma \int \frac{f(z) \, dz}{z - c},$$

donde si deduce, in virtù del teorema fondamentale di CAUCHY,

$$\int_{s'} U f(z) \, dz = -2\pi i \int h f(c) \, d\sigma',$$

equazione nel di cui secondo membro la quantità h deve considerarsi come nulla in ogni punto c che non appartenga alla regione σ, cosicchè l'integrazione non si estende in realtà che alla parte di piano comune a σ ed a σ' (se tal parte esiste).

*) Non è da tacersi che il valore della funzione U è indipendente dalla posizione, ma non già dall'orientazione degli assi coordinati.

L'equazione così ottenuta non cessa d'essere valida anche quando il contorno s' di σ' attraversi la regione σ.

Si tolga infatti da σ una striscia σ_1 comprendente il contorno, o la parte di contorno s' che giace in σ, e si denoti con σ_2 la rimanente regione $\sigma - \sigma_1$. Si ha allora l'equazione

$$\int_{s'} Uf(z)\,dz = \int_{s'} f(z)\,dz \int \frac{h\,d\sigma_1}{c-z} - 2\pi i \int hf(c)\,d\sigma',$$

dove, nell'ultimo integrale, la quantità h deve considerarsi come nulla in ogni punto c che non appartenga alla regione σ_2. Facendo ora decrescere indefinitamente la larghezza della striscia σ_1, comprendente la linea o porzione di linea s', l'integrale

$$\int \frac{h\,d\sigma_1}{c-z}$$

converge indefinitamente verso zero, anche se il punto z giace nella detta linea o porzione di linea, mentre la regione σ_2 tende indefinitamente a coincidere con σ. Si ricade dunque sulla stessa equazione che si ottenne nell'altro caso e che trascriveremo così:

$$\int Uf(z)\frac{\partial z}{\partial s'}\,ds' + 2\pi i \int hf(c)\,d\sigma' = 0.$$

Ora, designando con n' la normale interna al contorno s', si ha (per la nota convenzione sul senso positivo di un contorno)

$$(\alpha) \qquad \frac{\partial z}{\partial s'} + i\frac{\partial z}{\partial n'} = 0,$$

talchè si può anche scrivere

$$\int Uf(z)\frac{\partial z}{\partial n'}\,ds' - 2\pi \int hf(c)\,d\sigma' = 0.$$

Ma da teoremi notissimi risulta

$$\int Uf(z)\frac{\partial z}{\partial n'}\,ds' = \int Uf(z)\frac{\partial x}{\partial n'}\,ds' + i\int Uf(z)\frac{\partial y}{\partial n'}\,ds'$$

$$= -\int\left[\frac{\partial\, Uf(z)}{\partial x} + i\frac{\partial\, Uf(z)}{\partial y}\right]d\sigma' = -\int\left(\frac{\partial U}{\partial x} + i\frac{\partial U}{\partial y}\right)f(z)\,d\sigma',$$

talchè si ha

$$\int\left(\frac{\partial U}{\partial x} + i\frac{\partial U}{\partial y}\right)f(z)\,d\sigma' + 2\pi\int hf(c)\,d\sigma' = 0,$$

o più semplicemente

$$\int \left[\frac{\partial U}{\partial x} + i\frac{\partial U}{\partial y} + 2\pi h(x, y)\right] f(z)\, d\sigma' = 0,$$

considerando, anche nell'ultimo termine, z anzichè c come punto generico della regione σ'. E poichè la scelta di questa regione è totalmente arbitraria, si conclude che in ogni punto (x, y) del piano sussiste l'equazione

$$(2) \qquad \frac{\partial U}{\partial x} + i\frac{\partial U}{\partial y} = -2\pi h,$$

la quale, rispetto alla nuova funzione U, fa lo stesso ufficio di quella di Laplace e Poisson rispetto all'ordinaria funzione potenziale.

In particolare, nei punti esterni alla regione σ, per i quali è $h = 0$, la precedente equazione si riduce alla

$$\frac{\partial U}{\partial x} + i\frac{\partial U}{\partial y} = 0,$$

vale a dire si riduce all'equazione caratteristica delle funzioni monogene, cioè delle funzioni della variabile complessa z. Nell'interno di σ, ove h è diversa da zero, questa condizione non è più soddisfatta ed U non è più funzione della variabile complessa z, bensì è funzione, in generale complessa, delle due variabili reali e distinte x ed y.

All'equazione (2) si può dare una forma più generale. Si denotino con s, n due direzioni ortogonali uscenti dal punto qualunque (x, y), in guisa che la coppia di raggi (s, n) sia congrua alla coppia (x, y). Dall'equazione analoga alla (α) si ha, in tale ipotesi,

$$\frac{\partial x}{\partial s} = \frac{\partial y}{\partial n}, \qquad \frac{\partial y}{\partial s} = -\frac{\partial x}{\partial n},$$

e però, moltiplicando i due membri dell'equazione (2) per

$$\frac{\partial (x - iy)}{\partial s},$$

si ottiene l'equazione equivalente

$$(2_a) \qquad \frac{\partial U}{\partial s} + i\frac{\partial U}{\partial n} = -2\pi h \frac{\partial (x - iy)}{\partial s}.$$

Da questa nuova forma dell'equazione caratteristica (2) si deduce un corollario degno di nota.

Consideriamo due punti p, p' infinitamente vicini ad una linea di discontinuità della funzione h, l'uno da una parte l'altro dall'altra di questa linea, e denotiamo per un momento con U, h e con U', h' i valori dell'integrale (1) e della densità in questi punti p e p'. Prendendo per s quella, delle due direzioni della linea di discontinuità nel posto considerato, alla quale corrisponde per n la direzione della normale diretta verso la regione in cui giace il punto p, si ha dall'equazione (2_a), per questo stesso punto,

$$\frac{\partial U}{\partial s} + i\frac{\partial U}{\partial n} = -\, 2\pi h\frac{\partial(x - iy)}{\partial s}$$

e, per l'altro punto p',

$$\frac{\partial U'}{\partial s} + i\frac{\partial U'}{\partial n} = -\, 2\pi h'\frac{\partial(x - iy)}{\partial s}.$$

Ma, se si denota con n' la normale opposta ad n, questa seconda equazione può scriversi così:

$$\frac{\partial U'}{\partial s} - i\frac{\partial U}{\partial n'} = -\, 2\pi h'\frac{\partial(x - iy)}{\partial s},$$

od anche così:

$$\frac{\partial U}{\partial s} - i\frac{\partial U}{\partial n'} = -\, 2\pi h'\frac{\partial(x - iy)}{\partial s},$$

poichè, in primo luogo, dalla continuità della funzione U risulta senz'altro

$$\frac{\partial U}{\partial s} = \frac{\partial U'}{\partial s},$$

e, in secondo luogo, va da sè che la derivazione nel senso della normale n', quando il punto ($p = p'$) è preso sulla linea di discontinuità, non si possa concepire effettuata se non mediante i valori che la funzione assume nella regione verso cui questa normale si dirige. Eliminando la derivata tangenziale fra le due equazioni così ottenute, si trova

$$\frac{\partial U}{\partial n} + \frac{\partial U}{\partial n'} = 2\pi i(h - h')\frac{\partial(x - iy)}{\partial s},$$

o meglio

$$\frac{\partial U}{\partial n} + \frac{\partial U}{\partial n'} = -\, 2\pi(h - h')\frac{\partial(x - iy)}{\partial n}.$$

In particolare, lungo il contorno della regione σ, si ha

$$\frac{\partial U}{\partial n} + \frac{\partial U}{\partial n'} = -\, 2\pi h\frac{\partial(x - iy)}{\partial n},$$

n essendo la normale interna.

Queste relazioni sono analoghe a quella che sussiste per l'ordinaria funzione potenziale di superficie: cosicchè si può dire, in un certo senso, che la nuova funzione U riunisce in sè le proprietà caratteristiche delle due ordinarie funzioni potenziali, di spazio e di superficie.

Sieno ora ξ, η le coordinate di un punto qualunque del piano e sia s' una linea chiusa qualunque, non passante per questo punto. Poniamo

$$\xi + \eta i = \zeta$$

e cerchiamo il valore dell'integrale

$$\int_{s'} \frac{U(x, y)\, dz}{z - \zeta}.$$

Dall'equazione (1) si ha

$$\int_{s'} \frac{U\, dz}{z - \zeta} = \int_{s'} \frac{dz}{z - \zeta} \int \frac{h\, d\sigma}{c - z}.$$

Nel secondo membro è lecito invertire l'ordine delle due integrazioni, purchè c non possa mai diventare uguale a ζ, cioè purchè il punto (ξ, η) non sia nella regione σ *). Per non escludere questo caso essenziale, denotiamo con σ_1 una qualunque porzione di σ comprendente il punto ζ (quando tal porzione esiste) e con σ_2 la rimanente porzione di σ, e poniamo quindi

$$\int_{s'} \frac{U\, dz}{z - \zeta} = \int_{s'} \frac{dz}{z - \zeta} \int \frac{h\, d\sigma_1}{c - z} - \int h\, d\sigma_2 \int_{s'} \frac{dz}{(z - \zeta)(z - c)},$$

dove

$$\int_{s'} \frac{dz}{(z - \zeta)(z - c)} = \frac{1}{c - \zeta} \left(- \int_{s'} \frac{dz}{z - \zeta} + \int_{s'} \frac{dz}{z - c} \right).$$

Dei due integrali

$$\int_{s'} \frac{dz}{z - \zeta}, \qquad \int_{s'} \frac{dz}{z - c}$$

il primo è uguale a $2\pi i \varepsilon$, dove $\varepsilon = 1$, oppure $\varepsilon = 0$ secondo che il punto ζ è interno oppure esterno al contorno s', mentre il secondo si deve considerare come uguale a $2\pi i$ per tutti i punti c che sono interni, ed uguale a zero per tutti quelli che sono esterni al contorno medesimo.

---

*) Le difficoltà procedenti dall'eventuale passaggio della linea s' attraverso la regione σ, si rimovono nel modo che s'è già visto precedentemente in un'analoga ricerca, talchè sarebbe superfluo il trattenersi di nuovo su di ciò.

Si ha dunque

$$\int_{s'} \frac{U d z}{z - \zeta} = \int_{s'} \frac{d z}{z - \zeta} \int \frac{h\, d\sigma_1}{c - z} + 2\pi i \varepsilon \int \frac{h\, d\sigma_2}{c - \zeta} - 2\pi i \int \frac{h\, d\sigma'_2}{c - \zeta},$$

dove σ'_2 è quella parte di σ_2 che giace entro il contorno s'. Ora, facendo diminuire indefinitamente la regione σ_1 fino a ridurla al punto ζ (se tal punto è in σ), i tre integrali

$$\int \frac{h\, d\sigma_1}{c - z}, \qquad \int \frac{h\, d\sigma_2}{c - \zeta}, \qquad \int \frac{h\, d\sigma'_2}{c - \zeta}$$

tendono rispettivamente verso i limiti

$$0, \qquad \int \frac{h\, d\sigma}{c - \zeta} = U(\xi, \eta), \qquad \int \frac{h\, d\sigma'}{c - \zeta},$$

dove σ' è la regione limitata dal contorno s': si ottiene quindi

$$\int_{s'} \frac{U d z}{z - \zeta} = 2\pi i \varepsilon U(\xi, \eta) - 2\pi i \int \frac{h\, d\sigma'}{c - \zeta}$$

ovvero, considerando anche h come formata colle coordinate x, y anzichè colle a, b,

$$(3) \qquad \frac{1}{2\pi i} \int_{s'} \frac{U d z}{z - \zeta} = \varepsilon U(\xi, \eta) - \int \frac{h\, d\sigma'}{z - \zeta}.$$

Tale è la formola richiesta.

Se, per esempio, il contorno s' abbracciasse nel suo interno *tutta* la regione σ, cosicchè questa fosse tutta compresa nella σ', si avrebbe

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{s'} \frac{U d z}{z - \zeta} = (\varepsilon - 1) U(\xi, \eta),$$

epperò l'integrale

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{s'} \frac{U d z}{z - \zeta}$$

sarebbe uguale a zero oppure uguale a $-U(\xi, \eta)$, secondo che il punto ζ fosse interno od esterno al contorno s'.

Sostituendo nell'equazione (3) il valore di h ricavato dalla (2), si ottiene

$$(3_a) \qquad \frac{1}{2\pi i} \int_{s} \frac{U d z}{z - \zeta} = \varepsilon U(\xi, \eta) + \frac{1}{2\pi} \int \left(\frac{\partial U}{\partial x} + i \frac{\partial U}{\partial y} \right) \frac{d\sigma}{z - \zeta},$$

dove σ designa ora una qualunque regione finita del piano, s il suo contorno percorso positivamente e dove ε è uguale ad 1, oppure uguale a zero secondo che il punto ζ è interno od esterno a σ. Per la validità di questa formola, la quale si può considerare come una generalizzazione del già più volte invocato teorema di CAUCHY, si richiede che la funzione U sia monodroma, continua e finita in tutta la regione σ e che le sue derivate prime siano ivi finite e generalmente continue.

L'equazione precedente si può stabilire direttamente nel modo che segue.

Consideriamo una qualunque regione finita σ ed una funzione F monodroma, continua, finita e dotata di derivate prime finite e generalmente continue in questa regione. Riguardando questa funzione come dipendente dalle coordinate polari ρ e θ del punto generico di σ, si ha la nota formola

$$(a) \qquad \int \frac{\partial F}{\partial \rho}\frac{d\sigma}{\rho} = \int F\, d\theta - 2\pi\varepsilon F',$$

nella quale il primo integrale si estende a tutta la regione σ, il secondo, nel quale si deve sottintendere

$$d\theta = \frac{\partial \theta}{\partial s} ds,$$

a tutto il contorno s di questa regione percorso positivamente, e dove finalmente ε è uguale ad 1, oppure uguale a zero, secondo che il polo (cioè il punto $\rho = 0$) è interno od esterno a σ, F' essendo nel primo caso il valore della funzione F in questo punto.

Ora insieme a questa formola ben conosciuta se ne ha un'altra ancora più semplice, ma forse non egualmente notoria. Consideriamo infatti l'integrale

$$\int \frac{\partial F}{\partial \theta} d\sigma = \int \rho\, d\rho \int \frac{\partial F}{\partial \theta} d\theta,$$

e supponiamo dapprima che il polo ($\rho = 0$) sia esterno alla regione σ cui l'integrale stesso s'intende esteso. L'integrazione parziale rappresentata dal simbolo

$$\rho\, d\rho \int \frac{\partial F}{\partial \theta} d\theta$$

si estende a quella striscia infinitamente sottile che è intercetta, nella regione σ, fra le due circonferenze di raggi ρ e $\rho + d\rho$ ($d\rho > 0$), ed il risultato di questa prima integrazione è rappresentato da

$$\rho\, d\rho \int \frac{\partial F}{\partial \theta} d\theta = \rho(- F_1 d\rho + F_2 d\rho - F_3 d\rho + \cdots),$$

dove gli indici 1, 2, 3, ... designano i punti (in numero pari) in cui il contorno s è successivamente incontrato dalla circonferenza di raggio ρ, percorsa nel senso in cui l'angolo θ cresce, supposto che il primo di questi punti sia uno di quelli in cui il punto corrente lungo la detta circonferenza passa dall'esterno all'interno della regione σ. Ora, denotando con ds il valore assoluto di uno degli elementi del contorno s intercetti nella striscia d'integrazione, è facile vedere che nei posti d'entrata 1, 3, ... si ha

$$d\rho = +\frac{\partial \rho}{\partial s} ds$$

e nei posti d'uscita 2, 4, ...

$$d\rho = -\frac{\partial \rho}{\partial s} ds,$$

cosicchè si può scrivere

$$\rho d\rho \int \frac{\partial F}{\partial \theta} d\theta = -\rho \sum F \frac{\partial \rho}{\partial s} ds = -\rho \sum F d\rho,$$

dove la somma $\sum$ si riferisce a tutti gli elementi ds intercetti nella striscia e dove $d\rho$ designa (nella detta somma) l'incremento, positivo o negativo, che riceve il raggio ρ quando l'estremo mobile di questo raggio percorre, nel senso positivo, il corrispondente elemento di contorno. Di quì si conclude, sommando le equazioni analoghe per tutte le striscie elementari, la formola

$$(b) \qquad \int \frac{\partial F}{\partial \theta} d\sigma = -\int F \rho d\rho,$$

dove il primo integrale si estende a tutta la regione σ ed il secondo, nel quale si deve sottintendere

$$d\rho = \frac{\partial \rho}{\partial s} ds,$$

a tutto il contorno s percorso positivamente.

Questa formola non cambia quando il polo è interno a σ. Infatti si può togliere senz'altro da σ l'area del massimo cerchio descritto intorno al polo e compreso in σ: poichè, stante la monodromia della funzione F, l'integrale

$$\rho d\rho \int \frac{\partial F}{\partial \theta} d\theta$$

è nullo per ciascuna delle corone elementari concentriche in cui questo cerchio può essere decomposto. Importa anche osservare che la formola (b) non cessa di sussistere, nel caso del polo interno, se la derivata di F rapporto a θ diventa infinita nel polo stesso, purchè l'integrale

$$\int \frac{\partial F}{\partial \theta} d\sigma'$$

esteso ad un qualunque intorno σ' di questo punto svanisca insieme con questo intorno.

Si noti finalmente che la funzione F, considerata nelle due formole (a), (b), può essere tanto reale quanto complessa.

Ciò premesso, dalla già adoperata relazione

$$\left(\frac{\partial U}{\partial x} + i\frac{\partial U}{\partial y}\right)\frac{\partial(x - iy)}{\partial s} = \frac{\partial U}{\partial s} + i\frac{\partial U}{\partial n}$$

si ricava, attribuendo ad s la direzione ρ,

$$\left(\frac{\partial U}{\partial x} + i\frac{\partial U}{\partial y}\right)\frac{\partial(x - iy)}{\partial \rho} = \frac{\partial U}{\partial \rho} + \frac{i}{\rho}\frac{\partial U}{\partial \theta}.$$

Ma se si pone

$$z - \zeta = \rho e^{i\theta},$$

dove ζ è il valore di z nel polo, si trova

$$\frac{\partial(x - iy)}{\partial \rho} = e^{-i\theta},$$

epperò si ha l'identità

$$\frac{\dfrac{\partial U}{\partial x} + i\dfrac{\partial U}{\partial y}}{z - \zeta} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial U}{\partial \rho} + \frac{i}{\rho^2}\frac{\partial U}{\partial \theta};$$

donde consegue, integrando sopra una qualunque regione finita σ,

$$\int\left(\frac{\partial U}{\partial x} + i\frac{\partial U}{\partial y}\right)\frac{d\sigma}{z - \zeta} = \int \frac{\partial U}{\partial \rho}\frac{d\sigma}{\rho} + i\int \frac{\partial U}{\partial \theta}\frac{d\sigma}{\rho^2}.$$

Ora dalle due formole (a), (b), si deduce

$$\int \frac{\partial U}{\partial \rho}\frac{d\sigma}{\rho} = \int U d\theta - 2\pi\varepsilon\, U(\xi, \eta),$$

$$\int \frac{\partial U}{\partial \theta}\frac{d\sigma}{\rho^2} = -\int \frac{U d\rho}{\rho},$$

equazioni delle quali la seconda, che risulta dalla (b) col porre

$$F = \frac{U}{\rho^2},$$

si giustifica osservando che, per essere

$$\int \frac{\partial U}{\partial \theta} \frac{d\sigma}{\rho^2} = \int\int \left(-\frac{\partial U}{\partial x} \operatorname{sen}\theta + \frac{\partial U}{\partial y} \cos\theta\right) d\rho\, d\theta ,$$

il contributo fornito a quest'integrale da un qualunque intorno del polo (quando questo giace nella regione σ) è evanescente coll'intorno stesso, in armonia con una precedente avvertenza.

Si ha dunque

$$\int \frac{\partial U}{\partial \rho} \frac{d\sigma}{\rho} + i \int \frac{\partial U}{\partial \theta} \frac{d\sigma}{\rho^2} = \int U\left(d\theta - \frac{i\, d\rho}{\rho}\right) - 2\pi\varepsilon\, U(\xi, \eta)$$

$$= \frac{1}{i} \int_s \frac{U dz}{z - \zeta} - 2\pi\varepsilon\, U(\xi, \eta),$$

epperò si ottiene finalmente l'equazione

$$\frac{1}{2\pi} \int \left(\frac{\partial U}{\partial x} + i \frac{\partial U}{\partial y}\right) \frac{d\sigma}{z - \zeta} = \frac{1}{2\pi i} \int_s \frac{U dz}{z - \zeta} - \varepsilon\, U(\xi, \eta),$$

la quale coincide appuntino colla (3_a).

Si può finalmente osservare che a questa stessa equazione si perviene, mediante considerazioni abbastanza ovvie, partendo dalla relazione

$$\int \left(\frac{\partial V}{\partial x} + i \frac{\partial V}{\partial y}\right) d\sigma = \frac{1}{i} \int_s V dz ,$$

facilmente dimostrabile per ogni funzione avente i caratteri della U.

NOTA II.

Nello scritto d'egual titolo, inserito nei *Rendiconti* del 1887 *), è stata considerata una classe di funzioni complesse che fanno riscontro, sotto certi aspetti, alle ordinarie funzioni potenziali. L'oggetto della presente Nota è di svolgere un esempio particolare di tali funzioni, esempio il quale non sembra privo d'interesse, sia per le formole analitiche cui conduce, sia per certe correlazioni ch'esso presenta colla classica teoria dell'attrazione degli ellissoidi.

*) Si allude alla Nota I[a] di questa Memoria.

Ponendo

$$x + iy = z, \qquad x - iy = z'$$

e riguardando U come funzione di z e di z', l'equazione differenziale

$$\frac{\partial U}{\partial x} + i\frac{\partial U}{\partial y} = -2\pi h,$$

che caratterizza le funzioni potenziali complesse

$$U = \int \frac{h\, d\sigma}{c - z},$$

considerate nella prima Nota, diventa semplicemente

$$\frac{\partial U}{\partial z'} = -\pi h.$$

Per trovare l'espressione di U relativa al caso che l'area σ sia quella limitata dall'ellisse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{1}$$

e che la densità h sia uguale ad 1, si osservi che all'equazione

$$\frac{\partial U_i}{\partial z'} = -\pi$$

(dove U_i è il valore di U nell'*interno* di detta area) si soddisfa ponendo

$$U_i = kz - \pi z', \tag{1$_a$}$$

dove k è una costante. Nel campo *esterno* all'area σ la funzione $U = U_e$, dovendo soddisfare all'equazione

$$\frac{\partial U_e}{\partial z'} = 0,$$

non può dipendere che dalla variabile z, di cui essa è funzione analitica. Ammettendo che U_i abbia la forma (1_a), deve aversi, lungo tutto il contorno ellittico (per la continuità di U, già dimostrata nella prima Nota),

$$U_e = kz - \pi z',$$

donde

$$z' = \frac{kz - U_e}{\pi}$$

e quindi

$$x = \frac{(\pi + k)z - U_e}{2\pi}, \qquad iy = \frac{(\pi - k)z + U_e}{2\pi}.$$

Lungo il detto contorno deve dunque sussistere l'equazione

$$\left[\frac{(\pi + k)z - U_e}{a}\right]^2 - \left[\frac{(\pi - k)z + U_e}{b}\right]^2 = 4\pi^2,$$

ossia

$$\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right)U_e^2 - 2\left(\frac{\pi + k}{a^2} + \frac{\pi - k}{b^2}\right)U_e z$$
$$+ \left[\left(\frac{\pi + k}{a}\right)^2 - \left(\frac{\pi - k}{b}\right)^2\right]z^2 = 4\pi^2.$$

Quest'equazione, essendo soddisfatta sul contorno dalla funzione analitica U_e, la quale è continua e finita in tutta la regione limitata internamente dal contorno stesso, dev'essere pure soddisfatta in tutta la regione medesima: essa definisce quindi la funzione U_e. E poichè, all'infinito, questa deve ridursi a zero ed il prodotto $U_e z$ deve diventare uguale a $-\pi a b$, bisogna che sia

$$\left(\frac{\pi + k}{a}\right)^2 - \left(\frac{\pi - k}{b}\right)^2 = 0, \qquad \frac{\pi + k}{a^2} + \frac{\pi - k}{b^2} = \frac{2\pi}{ab}.$$

Attribuendo alla costante k il valore

$$k = \pi\frac{a - b}{a + b},$$

che verifica amendue queste eguaglianze e che dà

$$U_i = \pi\left(\frac{a - b}{a + b}z - z'\right),$$

si soddisfa così a tutte le condizioni volute e si ottiene per U_e la equazione

$$\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right)U_e^2 - \frac{4\pi}{ab}U_e z = 4\pi^2,$$

donde

$$U_e = \frac{2\pi a b}{c^2}(\sqrt{z^2 - c^2} - z)$$

od anche

$$U_e = -\frac{2\pi a b}{z + \sqrt{z^2 - c^2}},$$

ove si è posto

$$a^2 - b^2 = c^2,$$

ed ove il radicale dev'essere preso in modo che, per $z = \infty$, si abbia

$$\sqrt{z^2 - c^2} = z.$$

Questa determinazione è unica, perchè il campo della funzione U_e è esterno all'ellisse (1), mentre il radicale non cambia di segno che quando il punto z gira intorno ad un solo dei due fuochi $z = \pm c$.

Si può dare ad U_e una forma che ne rende evidente la continuità con U_i. Indicando infatti con A, B i semiassi dell'ellisse omofocale alla data e passante per il punto esterno (x, y), si ha identicamente (per essere $A^2 - B^2 = c^2$)

$$z^2 - c^2 = z^2 - c^2 + c^2\left(1 - \frac{x^2}{A^2} - \frac{y^2}{B^2}\right) = \left(\frac{Bx}{A} + i\frac{Ay}{B}\right)^2,$$

donde (per essere uguale ad 1 il limite del rapporto $A:B$, all'infinito)

$$\sqrt{z^2 - c^2} = \frac{Bx}{A} + i\frac{Ay}{B}.$$

Si può quindi scrivere

$$U_e = -\frac{2\pi ab}{A+B}\left(\frac{x}{A} - \frac{iy}{B}\right),$$

ossia

$$U_e = \frac{\pi ab}{AB}\left(\frac{A-B}{A+B}z - z'\right),$$

espressione che si riduce immediatamente a quella di U_i per $A = a$, $B = b$.

Dietro quanto precede, la funzione potenziale complessa U di un'area ellittica ed omogenea di densità h è definita da

$$(1_b) \qquad U_i = \pi h\left(\frac{a-b}{a+b}z - z'\right), \qquad U_e = \frac{2\pi abh}{c^2}\left(\sqrt{z^2 - c^2} - z\right).$$

Dall'espressione di U_i risulta che nel vuoto *interno* d'una corona omogenea compresa fra due ellissi omotetiche e concentriche, questa funzione potenziale è costantemente *nulla*. Da quella di U_e risulta invece che, nel vuoto *esterno* d'una corona omogenea compresa fra due ellissi omofocali, la detta funzione dipende dalla *massa totale* della corona, ma non già dalla scelta particolare delle due ellissi di contorno.

Per un'ellisse di semiassi $a\varkappa$, $b\varkappa$ le espressioni (1_b) diventano

$$U_i = \pi h\left(\frac{a-b}{a+b}z - z'\right), \qquad U_e = \frac{2\pi abh}{c^2}\left(\sqrt{z^2 - c^2\varkappa^2} - z\right),$$

donde, facendo variare $\varkappa$ (parametro sempre positivo), si deduce

(2) $$\delta U_i = 0\,, \qquad \delta U_e = -\frac{2\pi abh}{\sqrt{z^2 - c^2\varkappa^2}}\varkappa\delta\varkappa\,.$$

Ora da

$$m = \pi abh\varkappa^2$$

si deduce

$$\delta m = 2\pi abh\varkappa\delta\varkappa\,,$$

talchè si può scrivere

$$\delta U_i = 0\,, \qquad \delta U_e = -\frac{\delta m}{\sqrt{z^2 - c^2\varkappa^2}}\,.$$

Di qui si conclude che, per una corona infinitamente sottile, omotetica, concentrica ed omogenea, di semiassi a, b, si ha

$$U_i = 0\,, \qquad U_e = -\frac{m}{\sqrt{z^2 - c^2}}\,,$$

ove m è la massa totale, che ora si suppone finita. Questa massa si può concepire ridotta ad una distribuzione *lineare* lungo l'ellisse (1), nel qual caso la sua densità variabile g è data, per notissime proprietà, da

$$g = \frac{mp}{2\pi ab}\,,$$

ove p è la distanza del centro dalla tangente nel punto cui si riferisce g. Denotando con ρ, ρ' le distanze di questo punto dai due fuochi $z = c$ e $z = -c$, si ha d'altronde

$$\frac{ab}{p} = \sqrt{\rho\rho'}\,,$$

talchè si può anche scrivere

$$g = \frac{m}{2\pi\sqrt{\rho\rho'}}\,.$$

Ora ponendo, per un punto z dell'ellisse,

$$z - c = \rho e^{i\theta}\,, \qquad z + c = \rho' e^{i\theta'}\,,$$

si trova

$$\sqrt{z^2 - c^2} = \sqrt{\rho\rho'}\, e^{\frac{i(\theta+\theta')}{2}} = \sqrt{\rho\rho'}\, e^{i\left(\Theta - \frac{\pi}{2}\right)}\,,$$

ove Θ è l'angolo fatto coll'asse reale dalla tangente all'ellisse: si ha dunque

$$\frac{m}{\sqrt{z^2 - c^2}} = \frac{mi}{\sqrt{\rho\rho'}}\, e^{-i\Theta}\,,$$

talchè si può porre, designando con $\overline{U}$ i valori di U in contiguità della linea ellittica,

$$(2_a) \qquad \overline{U}_i - \overline{U}_e = 2\pi i g e^{-i\Theta}.$$

Tale è la relazione che determina, in ogni punto dell'ellisse, la differenza finita dei due valori limiti, interno ed esterno, della funzione U, la quale può ora rappresentarsi coll'integrale lineare

$$(2_b) \qquad U = \int_s \frac{g\,ds}{\gamma - z},$$

esteso al contorno ellittico s; designando γ e g l'indice e la densità del punto in cui ha origine l'elemento ds. Un tale integrale definisce effettivamente una funzione di z, la quale presenta, lungo la linea d'integrazione, ciò che il sig. HERMITE ha chiamato una *coupure*.

È facile convincersi che la precedente relazione (2_a) fra il valore di g, in un punto della linea d'integrazione s, e la differenza dei valori della funzione (2_b), sui due lati di questa linea, è generale, cioè applicabile a qualunque linea s ed a qualunque densità g, astrazione fatta da eventuali punti singolari della linea o della densità, per i quali è indispensabile un'indagine speciale, appropriata ai singoli casi. Questa relazione completa il quadro delle formole stabilite nella prima Nota, ove non era stato considerato il caso delle distribuzioni puramente lineari.

Ripigliando ora in considerazione l'area limitata dall'ellisse (1), suppongasi che la densità varî in quest'area per ellissi omotetiche e concentriche, cioè che la quantità h sia funzione del parametro d'omotetia $\varkappa$. Dalle formole (2) segue senz'altro

$$(3) \qquad U_i = -2\pi ab\int_0^{\varkappa_0} \frac{h\varkappa\,d\varkappa}{\sqrt{z^2 - c^2\varkappa^2}}, \qquad U_e = -2\pi ab\int_0^1 \frac{h\varkappa\,d\varkappa}{\sqrt{z^2 - c^2\varkappa^2}},$$

ove $\varkappa_0$ è il parametro dell'ellisse omotetica passante per il punto z, quando questo è interno all'area, talchè

$$\varkappa_0^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}, \qquad (\varkappa_0 > 0).$$

Quì riesce evidente che U_i non è funzione di z, poichè il limite superiore $\varkappa_0$ dipende da x ed y, ma non già da z. Si rende pure evidente la continuità di U attraverso l'ellisse di contorno.

L'espressione (3) di U_e non è altro, (2), che la somma delle analoghe espressioni dU_e, relative alle singole corone omotetiche elementari in cui si risolve l'area ellittica. Alla massa $2\pi abh\varkappa\,d\varkappa$ della corona elementare $(\varkappa, \varkappa + d\varkappa)$ può essere sostituita, come s'è veduto dianzi, una distribuzione lineare di densità

$$dg = \frac{a b h \varkappa d \varkappa}{\sqrt{\rho \rho'}},$$

ove ρ, ρ' designano ora le distanze del punto di densità dg dai due fuochi $c\varkappa$, $-c\varkappa$ dell'ellisse ($\varkappa$). Ma a quest'ellisse può essere di nuovo sostituita una qualunque altra ellisse omofocale interna, e quindi, in particolare, l'asse focale $2c\varkappa$: la densità dg che si deve attribuire, in quest'ipotesi, al punto $x = c\xi$ di quest'asse è quindi

$$dg = \frac{2 a b h \varkappa d \varkappa}{c\sqrt{\varkappa^2 - \xi^2}}.$$

Trattasi ora di calcolare la densità finita g che spetta a ciascun punto dell'asse focale $2c$ dell'ellisse (1), quando, per ciascuna corona elementare, si supponga effettuato il riporto della corrispondente massa sul corrispondente asse focale.

A tal fine basta osservare che il punto $x = c\xi$ è un fuoco dell'ellisse omotetica $\varkappa = \xi$, e che, per conseguenza, questo punto appartiene soltanto agli assi focali delle ellissi omotetiche il cui parametro $\varkappa$ è compreso fra ξ ed 1 ($\xi > 0$). Di quì risulta senz'altro

$$(3_a) \qquad g(\xi) = \frac{2ab}{c}\int_{\xi}^{1} \frac{h \varkappa d \varkappa}{\sqrt{\varkappa^2 - \xi^2}},$$

colle convenzioni

$$0 \leqq \xi \leqq 1, \qquad g(-\xi) = g(\xi).$$

Tale è l'espressione della densità lineare variabile da attribuirsi all'asse focale $2c$, affinchè l'espressione (3) di U_e convenga egualmente ad una distribuzione lineare lungo questo segmento rettilineo, ossia affinchè si possa rappresentare questa funzione coll'integrale rettilineo

$$U_e = c\int_{-1}^{1} \frac{g(\xi) d\xi}{c\xi - z},$$

o coll'equivalente

$$(3_b) \qquad U_e = -2cz\int_{0}^{1} \frac{g(\xi) d\xi}{z^2 - c^2\xi^2}.$$

Nell'interno dell'area ellittica quest'integrale rappresenta la prosecuzione analitica della funzione, definita all'esterno dalla seconda espressione (3).

Si può del resto verificare direttamente, mercè (3_a), la coincidenza delle due espressioni di U_e nel campo esterno.

La formola (3_a) somministra la densità lineare g per mezzo della superficiale h. Si può, inversamente, esprimere la seconda per mezzo della prima. Designando, infatti, con η una nuova variabile, compresa fra 0 ed 1, si ha, (3_a), da note regole

$$\int_\eta^1 \frac{g(\xi)\xi\, d\xi}{\sqrt{\xi^2-\eta^2}} = \frac{2ab}{c}\int_\eta^1 \frac{\xi\, d\xi}{\sqrt{\xi^2-\eta^2}}\int_\xi^1 \frac{h(x)x\, dx}{\sqrt{x^2-\xi^2}}$$

$$= \frac{ab}{c}\int_\eta^1 h(x)x\, dx \int_\eta^x \frac{2\xi\, d\xi}{\sqrt{(x^2-\xi^2)(\xi^2-\eta^2)}} = \frac{\pi ab}{c}\int_\eta^1 h(x)x\, dx,$$

epperò

$$\frac{d}{d\eta}\int_\eta^1 \frac{g(\xi)\xi\, d\xi}{\sqrt{\xi^2-\eta^2}} = -\frac{\pi ab}{c} h(\eta)\eta\,.$$

La cercata espressione di h, per mezzo di g, è quindi

$$(3_c) \qquad h(x) = -\frac{c}{\pi ab x}\frac{d}{dx}\int_x^1 \frac{g(\xi)\xi\, d\xi}{\sqrt{\xi^2-x^2}}\,.$$

Se, per esempio, si suppone $g = 1$, si trova

$$h(x) = \frac{c}{\pi ab\sqrt{1-x^2}}\,;$$

cosicchè se si volesse che la funzione U_e, per un'area ellittica stratificata omoteticamente, riuscisse identica a quella d'una massa m, distribuita uniformemente sul segmento focale, bisognerebbe assegnare alla densità della distribuzione omotetica l'espressione

$$h(x) = \frac{m}{2\pi ab\sqrt{1-x^2}}\,.$$

Questo risultato si può verificare direttamente e la funzione U_e in questione trovasi essere, nell'uno o nell'altro modo di considerare la cosa,

$$U_e = \frac{m}{2c}\log\frac{z+c}{z-c}\,.$$

Altre formole interessanti si ottengono supponendo che la densità vari per corone omotetiche *non* concentriche: ma di ciò si dirà in altra Nota.

NOTA III.

A complemento della Nota II d'egual titolo ed a svolgimento delle ulteriori applicazioni di cui fu fatto cenno alla fine della detta Nota, giova riprendere le espressioni ivi segnate con (1_b),

$$U_i = \pi h\left(\frac{a-b}{a+b}z - z'\right),$$

$$U_e = \frac{2\pi abh}{c^2}\left(\sqrt{z^2 - c^2} - z\right),$$

rappresentative della funzione potenziale complessa d'un'area ellittica, di semi-assi a, b e di densità costante h *).

Sieno α, β le coordinate d'un punto qualunque del piano, che si assume ad origine di due nuovi assi delle ξ e delle η, paralleli ai primitivi. Ponendo

$$\alpha + i\beta = \gamma, \qquad \alpha - i\beta = \gamma',$$

$$\xi + i\eta = \zeta, \qquad \xi - i\eta = \zeta',$$

si ha

$$z = \gamma + \zeta, \qquad z' = \gamma' + \zeta',$$

talchè le due precedenti espressioni di U diventano

$$U_i = \pi h\left(\frac{a-b}{a+b}\gamma - \gamma'\right) + \pi h\left(\frac{a-b}{a+b}\zeta - \zeta'\right),$$

$$U_e = \frac{2\pi abh}{c^2}\left[\sqrt{(\gamma+\zeta)^2 - c^2} - \gamma - \zeta\right].$$

Rispetto ai nuovi assi l'ellisse (a, b) è definita in posizione e grandezza dalle coordinate $-\alpha$, $-\beta$ del suo centro e dai suoi semiassi a e b, paralleli alle direzioni ξ ed η. Operando una trasformazione omotetica sulla detta ellisse, rispetto alla nuova origine, i parametri

$$\gamma, \quad \gamma', \quad a, \quad b, \quad c\left(= \sqrt{a^2 - b^2}\right)$$

diventano rispettivamente

$$\varkappa\gamma, \quad \varkappa\gamma', \quad \varkappa a, \quad \varkappa b, \quad \varkappa c,$$

$\varkappa$ essendo il rapporto d'omotetia. Ne risulta che le funzioni U_i, U_e relative all'ellisse trasformata (lasciando invariata la densità) sono, per il punto (ξ, η),

$$U_i = \pi h\left(\frac{a-b}{a+b}\gamma - \gamma'\right)\varkappa + \pi h\left(\frac{a-b}{a+b}\zeta - \zeta'\right),$$

$$U_e = \frac{2\pi abh}{c^2}\left[\sqrt{(\varkappa\gamma+\zeta)^2 - \varkappa^2 c^2} - \varkappa\gamma - \zeta\right].$$

*) Nella presente Nota si conservano gli stessi simboli della precedente e si prosegue colla numerazione delle formole.

Le analoghe funzioni, relative alla corona omotetica elementare $(\varkappa, \varkappa + d\varkappa)$, sono quindi

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned} dU_i &= \pi b\left(\frac{a-b}{a+b}\gamma - \gamma'\right)d\varkappa, \\ dU_e &= \frac{2\pi abh}{c^2}\left[\frac{(\varkappa\gamma+\zeta)\gamma - \varkappa c^2}{\sqrt{(\varkappa\gamma+\zeta)^2 - \varkappa^2 c^2}} - \gamma\right]d\varkappa, \end{aligned}\right.$$

la massa dm della corona elementare essendo

$$(4_a)\qquad dm = 2\pi abh\varkappa d\varkappa.$$

Se dapprima si suppone $\varkappa = 1$ e quindi

$$dx = \frac{dm}{2\pi abh},$$

si può scrivere

$$dU_i = \frac{-\alpha b + \beta ai}{a+b}\frac{dm}{ab}$$

$$dU_e = \left[\frac{(\gamma+\zeta)\gamma - c^2}{\sqrt{(\gamma+\zeta)^2 - c^2}} - \gamma\right]\frac{dm}{c^2},$$

donde, ritornando ai primitivi assi delle x, y ed attribuendo alla corona una massa finita m,

$$(5)\qquad \left\{\begin{aligned} U_i &= \frac{m}{ab}\frac{-\alpha b + \beta ai}{a+b}, \\ U_e &= \frac{m}{c^2}\left(\frac{\gamma\zeta - c^2}{\sqrt{\zeta^2 - c^2}} - \gamma\right). \end{aligned}\right.$$

Alla distribuzione omogenea coronale si può sostituire una distribuzione lineare non omogenea lungo il contorno dell'ellisse (a, b), determinandone la densità g colla formola

$$(5_a)\qquad g = \frac{mp}{2\pi ab},$$

dove p designa la perpendicolare condotta dal centro d'omotetia (α, β) alla tangente nel punto cui spetta la densità stessa. Questa perpendicolare deve prendersi positivamente o negativamente secondochè è diretta nel senso dell'analoga perpendicolare condotta dal centro dell'ellisse, oppure in senso contrario. La formola

$$p = \frac{1 - \frac{\alpha x}{a^2} - \frac{\beta y}{b^2}}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4}}} = \frac{ab}{\sqrt{\rho\rho'}}\left(1 - \frac{\alpha x}{a^2} - \frac{\beta y}{b^2}\right),$$

dove il radicale deve assumersi positivo, attribuisce in ogni caso il giusto segno alla perpendicolare p.

Per una formola già stabilita nella Nota II, lungo il contorno ellittico (a, b) sussiste l'eguaglianza

$$\sqrt{z^2 - c^2} = \frac{bx}{a} + i\frac{ay}{b}.$$

Si può, conseguentemente, dare ai valori di U_i, U_e nei detti punti le forme seguenti:

$$\bar{U}_i = \frac{m}{(a+b)\sqrt{z^2 - c^2}}\left[-\frac{\alpha b x}{a^2} - \frac{\beta a y}{b^2} + i\left(\frac{\beta x}{a} - \frac{\alpha y}{b}\right)\right],$$

$$\bar{U}_e = \frac{m}{(a+b)\sqrt{z^2 - c^2}}\left[\frac{\alpha x}{a} + \frac{\beta y}{b} - a - b + i\left(\frac{\beta x}{a} - \frac{\alpha y}{b}\right)\right],$$

donde

$$\bar{U}_i - \bar{U}_e = \frac{m}{\sqrt{z^2 - c^2}}\left(1 - \frac{\alpha x}{a^2} - \frac{\beta y}{b^2}\right),$$

ovvero, per un'altra formola della citata Nota,

$$U_i - U_e = 2\pi i g e^{-i\Theta}.$$

Questa relazione, che coincide formalmente colla (2_a) della Nota II, ma dove g ha ora un significato meno speciale, conferma la già avvertita generalità del risultato espresso dalla relazione medesima.

Delle due espressioni (5) la prima mostra che la funzione potenziale complessa U d'una corona ellittica infinitamente sottile, omotetica ed eccentrica, è costante nel vuoto interno. La seconda, non contenendo che i parametri m, c e γ, mostra che all'esterno di tale corona la detta funzione si mantiene inalterata in ogni punto se, restando costante la massa e fisso il centro d'omotetia, si sostituisce all'ellisse (a, b) un'altra ellisse omofocale qualunque.

Non si potrebbe tuttavia assumere, in generale, per tale nuova ellisse il segmento focale $2c$. Potendosi infatti scrivere

$$g = \frac{m}{2\pi\sqrt{\rho\rho'}}\left(1 - \frac{\alpha x}{a^2} - \frac{\beta}{b}\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}\right),$$

al tendere di b verso zero (e quindi di a verso c), g tende verso ∞, a meno che non sia $\beta = 0$, cioè a meno che il centro d'omotetia non sia sull'asse maggiore dell'ellisse (a, b).

Perciò si supporrà quind'innanzi $\beta = 0$, e si otterranno così le seguenti espressioni di U:

$$(6) \qquad \begin{cases} U_i = -\dfrac{m\alpha}{a(a+b)}, \\ U_e = \dfrac{m}{c^2}\left(\dfrac{\alpha\zeta - c^2}{\sqrt{\zeta^2 - c^2}} - \alpha\right), \end{cases}$$

relative ad una distribuzione lineare di densità

$$(6_a) \qquad g = \frac{m}{2\pi\sqrt{\rho\rho'}}\left(1 - \frac{\alpha x}{a^2}\right)$$

esistente sul contorno dell'ellisse (a, b). Per ciò che spetta ad U_e questa distribuzione può supporsi esistente sopra una qualunque altra ellisse omofocale, ed anche sullo stesso segmento focale $2c$; purchè il simbolo a rappresenti, in ogni caso, il semi-asse maggiore e si riduca quindi a c nel menzionato caso limite (nel quale la densità g deve essere raddoppiata, qualora il segmento focale si conti una volta sola).

Facendo la stessa ipotesi $\beta = 0$ nelle formole (4) e ripassando ai primitivi assi delle x, y, si trova

$$(7) \qquad \begin{cases} dU_i = -\dfrac{2\pi\alpha b h}{a+b}\, d\varkappa, \\ dU_e = \dfrac{2\pi a b h}{c^2}\left\{\dfrac{\alpha[\zeta - (1-\varkappa)\alpha] - \varkappa c^2}{\sqrt{[\zeta - (1-\varkappa)\alpha]^2 - \varkappa^2 c^2}} - \alpha\right\} d\varkappa. \end{cases}$$

Queste due espressioni di dU si riferiscono ad una corona ellittica $(\varkappa, \varkappa + d\varkappa)$, di densità h, il di cui centro ha l'ascissa $(1 - \varkappa)\alpha$, mentre i semi-assi sono $\varkappa a$, $\varkappa b$. I punti d'ascissa α ed x hanno rispettivamente, contando dal centro della corona, le ascisse relative

$$\varkappa\alpha, \quad x - (1 - \varkappa)\alpha.$$

La formola (6_a) somministra quindi, per la densità dg della distribuzione lineare eterogenea equivalente alla distribuzione omogenea della massa dm nella detta corona,

$$(7_a) \qquad dg = \frac{dm}{2\pi\sqrt{\rho_\varkappa \rho'_\varkappa}}\left\{1 - \frac{\alpha[x - (1-\varkappa)\alpha]}{\varkappa a^2}\right\},$$

dove $\rho_\varkappa$ e $\rho'_\varkappa$ sono le distanze del punto cui spetta la densità dg dai due fuochi dell'ellisse omotetica di rapporto $\varkappa$. Le ascisse di questi due fuochi sono date da

$$c\xi_\varkappa = (1 - \varkappa)\alpha + \varkappa c, \qquad c\xi'_\varkappa = (1 - \varkappa)\alpha - \varkappa c,$$

talchè il primo fuoco sta sempre nell'intervallo fra α e c, il secondo in quello fra α e $-c$. Ne consegue che quando il centro d'omotetia è interno al segmento focale $2c$, cioè quando α sta fra c e $-c$, ciascuno dei fuochi corrispondenti ai diversi valori di $\varkappa$ compresi fra 0 ed 1 occupa una porzione distinta del detto segmento.

Per semplicità si supporrà che tale condizione sia verificata e scrivendo, per comodo di calcolo, $c\alpha$ in luogo di α, si supporrà inoltre, a scanso di distinzioni non essenziali, che sia

$$0 < \alpha < 1.$$

Sostituendo alla distribuzione sull'ellisse $(\varkappa)$ la distribuzione di egual funzione potenziale esterna sul corrispondente segmento focale $2\varkappa c$, la densità lineare di questa seconda distribuzione, nel punto d'ascissa $c\xi$, è data da

$$dg = \frac{dm}{\pi\sqrt{\rho_\varkappa \rho'_\varkappa}}\left\{1 - \frac{\alpha[\xi - (1-\varkappa)\alpha]}{\varkappa}\right\},$$

ovvero, riponendo per dm il valore (4_a), da

$$dg = \frac{2abh}{\sqrt{\rho_\varkappa \rho'_\varkappa}}\{\varkappa - \alpha[\xi - (1-\varkappa)\alpha]\}d\varkappa,$$

dove

$$\rho_\varkappa = [\varkappa - \xi + (1-\varkappa)\alpha]c,$$

$$\rho'_\varkappa = [\varkappa + \xi - (1-\varkappa)\alpha]c.$$

Immaginando ora che la densità superficiale h della corona

$$(\varkappa, \varkappa + d\varkappa)$$

varî in funzione del rapporto $\varkappa$, cioè che la densità h dell'area ellittica (a, b) varî per ellissi omotetiche eccentriche, si può alla totale distribuzione superficiale che risulta per la detta area sostituire quella distribuzione lineare sul segmento focale $2c$ la di cui densità g risulta, in ogni punto $c\xi$ di questo segmento, dalla somma algebrica di tutte le densità elementari dg che son date dalla formola precedente e che sono relative a quel solo e medesimo punto.

Per eseguire debitamente questa somma basta osservare che dall'una o dall'altra delle equazioni

$$\rho_\varkappa = 0, \qquad \rho'_\varkappa = 0,$$

si deduce rispettivamente

$$\varkappa = \frac{\xi - \alpha}{1 - \alpha}, \qquad \varkappa = \frac{\alpha - \xi}{1 + \alpha}.$$

Secondochè dunque ξ è maggiore o minore di α, il punto $c\xi$ è incluso nei segmenti focali di tutte le ellissi il cui rapporto d'omotetia $\varkappa$ è compreso fra l'unità ed il primo dei precedenti due valori di $\varkappa$, oppure fra l'unità ed il secondo. Di qui risulta senz'altro

$$g(\xi) = \frac{2ab}{c} \int_{\frac{\xi-\alpha}{1-\alpha}}^{1} \frac{\varkappa - \alpha[\xi - (1-\varkappa)\alpha]}{\sqrt{\varkappa^2 - [\xi - (1-\varkappa)\alpha]^2}} h(\varkappa)\, d\varkappa,$$

$$g(\xi) = \frac{2ab}{c} \int_{\frac{\alpha-\xi}{1+\alpha}}^{1} \frac{\varkappa - \alpha[\xi - (1-\varkappa)\alpha]}{\sqrt{\varkappa^2 - [\xi - (1-\varkappa)\alpha]^2}} h(\varkappa)\, d\varkappa,$$

formole delle quali la prima vale per

$$\alpha < \xi < 1,$$

la seconda per

$$-1 < \xi < \alpha.$$

Al limite comune $\xi = \alpha$ di questi due intervalli si ha, dall'una o dall'altra formola,

$$g(\alpha) = \frac{2ab\sqrt{1-\alpha^2}}{c} \int_0^1 h(\varkappa)\, d\varkappa.$$

Per $\alpha = 0$ questi risultati concordano esattamente con quelli già dedotti nella Nota II.

Per $\alpha > 0$, la duplicità dell'espressione di $g(\xi)$ crea difficoltà alla deduzione inversa di $h(\varkappa)$ da $g(\xi)$. Ma questa difficoltà cessa nel caso limite $\alpha = 1$, cioè nel caso in cui il centro d'omotetia cade in un fuoco dell'ellisse (a, b). In tale ipotesi infatti la prima espressione di $g(\xi)$ scompare e non resta che la seconda, la quale si riduce a

$$g(\xi) = \frac{2ab\sqrt{1-\xi}}{c} \int_{\frac{1-\xi}{2}}^{1} \frac{h(\varkappa)\, d\varkappa}{\sqrt{2\varkappa + \xi - 1}}.$$

Quest'espressione si semplifica ancora un po' se si pone

$$\eta = \frac{1-\xi}{2}$$

e se, per un'ovvia modificazione del significato di $g(\xi)$, si scrive invece

$$g(\eta) = \frac{2ab\sqrt{\eta}}{c} \int_{\eta}^{1} \frac{h(\varkappa)\, d\varkappa}{\sqrt{\varkappa - \eta}}.$$

Rappresentando per un momento con $f(\eta)$ la funzione

$$\frac{cg(\eta)}{2ab\sqrt{\eta}}=f(\eta),$$

cioè ponendo

$$f(\eta)=\int_\eta^1\frac{h(\varkappa)\,d\varkappa}{\sqrt{\varkappa-\eta}},$$

si ricava, coll'introduzione d'una nuova variabile λ, compresa fra o ed 1,

$$\int_\lambda^1\frac{f(\eta)\,d\eta}{\sqrt{\eta-\lambda}}=\int_\lambda^1\frac{d\eta}{\sqrt{\eta-\lambda}}\int_\eta^1\frac{h(\varkappa)\,d\varkappa}{\sqrt{\varkappa-\eta}}$$

$$=\int_\lambda^1 h(\varkappa)\,d\varkappa\int_\lambda^\varkappa\frac{d\eta}{\sqrt{(\varkappa-\eta)(\eta-\lambda)}}=\pi\int_\lambda^1 h(\varkappa)\,d\varkappa,$$

epperò

$$h(\lambda)=-\frac{1}{\pi}\frac{d}{d\lambda}\int_\lambda^1\frac{f(\eta)\,d\eta}{\sqrt{\eta-\lambda}}.$$

Riponendo pertanto al posto di $f(\eta)$ l'espressione testè designata con questo simbolo, si ottiene la cercata rappresentazione inversa di h per mezzo di g nella forma

$$h(\varkappa)=-\frac{c}{2\pi ab}\frac{d}{d\varkappa}\int_\varkappa^1\frac{g(\eta)\,d\eta}{\sqrt{\eta(\eta-\varkappa)}}.$$

LXXXVI.

INTORNO AD ALCUNI PROBLEMI DI PROPAGAZIONE DEL CALORE.

Memorie della Reale Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna, serie IV, tomo VIII (1887), pp. 291-326.

Nella trattazione dei diversi problemi che si presentano nella teoria matematica della propagazione del calore il metodo che si può giustamente considerare come classico è senza dubbio quello che si fonda sulla determinazione delle cosidette soluzioni semplici e sul conseguente sviluppo della soluzione completa in serie trigonometrica, oppure in serie di funzioni cilindriche o sferiche, od in altre simili diversamente combinate fra loro, secondo la natura speciale del proposto problema. Niuno ignora i capitali progressi che l'indagine di questo insieme di procedimenti ha fatto fare all'analisi pura ed alla fisica matematica, in molti rami della quale, ancor più che nella teoria del calore, l'indicato metodo conduce a quella che, secondo ogni più ragionevole induzione, è da considerarsi come l'esatta rappresentazione analitica del vero meccanismo che presiede ai fenomeni della natura.

Senonchè in alcuni problemi estremamente semplici di propagazione del calore, come, a cagion d'esempio, in quelli nei quali la temperatura del corpo non dipende che dal tempo e da una sola variabile geometrica *), le soluzioni fornite dal suaccennato metodo difettano spesso di una tal quale spontaneità ed eleganza, e si prestano poco opportunamente all'immediata verificazione delle proprietà caratteristiche.

In tali casi sembrano riuscire più acconci altri procedimenti, quandanche dotati di

*) A questi problemi è consacrata una notevolissima Memoria del prof. SCHLAEFLI, intitolata: *Ueber die partielle Differentialgleichung* $\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$ [Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. LXXII (1870), pp. 263-284].

minore generalità, fra i quali vanno specialmente notati quelli che si fondano sull'uso di espressioni analoghe alle ordinarie funzioni potenziali. Sul qual proposito non è da tacere che fino dal 1868 il prof. BETTI, in un'importante Memoria *Sopra la determinazione delle temperature nei corpi solidi ed omogenei* *), ha dimostrato, e chiarito con varî esempî, come si possa eziandio fondare su analoghe considerazioni un metodo generale di soluzione dei problemi di propagazione del calore. E del resto l'utilità di simili considerazioni è stata già messa ampiamente in luce, sotto diversi punti di vista e per diversi rami della fisica matematica, da HELMHOLTZ, da MATHIEU, dallo stesso BETTI e da BOUSSINESQ, per non dire di molti altri.

La questione di cui mi occupo nel presente lavoro è semplicissima, poichè si riferisce al caso d'una sfera in cui la temperatura varî per strati concentrici. Ma l'analisi in cui si traduce il procedimento da me seguito, il quale si fonda appunto sull'uso di espressioni potenziali, mi sembra interessante per sè medesima e per i problemi ch'essa conduce a trattare, fra i quali è particolarmente notevole la risoluzione d'una certa equazione funzionale. È lecito pensare che analoghi procedimenti possano servire alla soluzione di problemi meno semplici, porgendo occasione a svolgimenti analitici di maggiore difficoltà ed interesse.

§ 1.

Consideriamo una funzione V delle tre coordinate ortogonali x, y, z, definita da un'espressione analoga a quella dell'ordinaria funzione potenziale newtoniana, cioè nel modo seguente:

$$V = \int k(\xi, \eta, \zeta)\psi(r)\frac{dS}{r}, \tag{1}$$

dove

$$r^2 = (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2$$

e dove dS è un elemento di volume circostante al punto (ξ, η, ζ) di uno spazio qualunque S, al quale s'intende esteso l'integrale. La funzione $k(\xi, \eta, \zeta)$ fa riscontro all'ordinaria densità. La funzione $\psi(r)$ si suppone monodroma, continua e finita, colle sue derivate, anche per $r = 0$.

Per calcolare il Δ_2 d'una tale funzione V, consideriamo una qualunque superficie

*) Memorie della Società italiana delle scienze (detta dei XL), serie III, tomo I, parte II (1868), pp. 165-190.

chiusa σ' e denotiamone con n la normale interna. Dall'equazione (1) si ha

$$\frac{\partial V}{\partial n} = \int k(\xi, \eta, \zeta) \frac{\partial \frac{\psi}{r}}{\partial n} dS$$

e quindi

$$\int \frac{\partial V}{\partial n} d\sigma' = \int k\, dS \int \frac{\partial \frac{\psi}{r}}{\partial n} d\sigma',$$

ovvero anche

$$\int \frac{\partial V}{\partial n} d\sigma' = -\int k\, dS \int r^2 \frac{d \frac{\psi}{r}}{dr} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} d\sigma'.$$

Ora, per una funzione φ monodroma, continua e finita nello spazio S' limitato dalla superficie σ', si ha la nota equazione di GAUSS

$$\int \frac{\partial \varphi}{\partial r} \frac{dS'}{r^2} = \int \varphi \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} d\sigma' - (\sigma')_0 \varphi_0,$$

dove φ_0 è il valore che la funzione φ prende nel polo $r = 0$ e $(\sigma')_0$ è l'angolo visuale della superficie σ' rispetto a questo polo. D'altronde, per le ipotesi fatte, la funzione

$$\varphi = r^2 \frac{d \frac{\psi}{r}}{dr}$$

è continua e finita, anche nel polo $r = 0$. Si ha dunque, come caso particolare della precedente equazione,

$$\int r^2 \frac{d \frac{\psi}{r}}{dr} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} d\sigma' = \int \frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{d \frac{\psi}{r}}{dr}\right) \frac{dS'}{r^2} + (\sigma')_0 \left(r^2 \frac{d \frac{\psi}{r}}{dr}\right)_0$$

$$= \int \frac{d^2 \psi}{dr^2} \frac{dS'}{r} - (\sigma')_0 \psi(0),$$

dove $\psi(0)$ è il valore di ψ per $r = 0$. Di qui risulta

$$\int \frac{\partial \frac{\psi}{r}}{\partial n} d\sigma' = (\sigma')_0 \psi(0) - \int \frac{d^2 \psi}{dr^2} \frac{dS'}{r},$$

epperò

$$\int \frac{\partial V}{\partial n} d\sigma' = -\int \Delta_2 V dS' = \int k\,dS\left[(\sigma')_0 \psi(0) - \int \frac{d^2\psi}{dr^2}\frac{dS'}{r}\right]$$
$$= \psi(0)\int (\sigma')_0 k\,dS - \int\int k\frac{d^2\psi}{dr^2}\frac{dS\,dS'}{r}$$
$$= 4\pi\psi(0)\int k\,dS' - \int dS' \int k\frac{d^2\psi}{dr^2}\frac{dS}{r},$$

cosicchè, finalmente, si giunge all'equazione seguente:

$$\int \left[\Delta_2 V + 4\pi\psi(0)k - \int k\frac{d^2\psi}{dr^2}\frac{dS}{r}\right] dS' = 0,$$

la quale, dovendo sussistere qualunque sia lo spazio S', dà

$$(1_a) \qquad \Delta_2 V = -4\pi\psi(0)k + \int k\frac{d^2\psi}{dr^2}\frac{dS}{r}.$$

È questa la cercata espressione del Δ_2 della funzione V, definita dall'equazione (1).

Se in luogo di ψ si considerasse la differenza $\psi - \psi(0)$, cioè se si aggiungesse a ψ una costante tale che risultasse $\psi = 0$ per $r = 0$, si avrebbe semplicemente

$$(1_b) \qquad \Delta_2 V = \int k\frac{d^2\psi}{dr^2}\frac{dS}{r};$$

e questa stessa equazione è quella che sussiste, anche se non è $\psi = 0$ per $r = 0$, allorchè il punto (x, y, z) è preso fuori dello spazio S, poichè in tal caso si ha $k = 0$ in questo punto.

Supponiamo ora che la funzione ψ, oltre che dalla variabile r, dipenda anche da un parametro t. Ponendo

$$(2) \qquad U = \int k(\xi, \eta, \zeta)\psi(r, t)\frac{dS}{r},$$

si avrà in ogni caso, ammettendo che ψ si annulli per $r = 0$,

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \int k\frac{\partial\psi}{\partial t}\frac{dS}{r}, \qquad \Delta_2 U = \int k\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}\frac{dS}{r};$$

talchè, se la funzione $\psi(r, t)$ soddisfacesse all'equazione

$$(2_a) \qquad \frac{\partial\psi}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2},$$

la funzione $U(x, y, z, t)$ soddisfarebbe all'altra equazione

$$(2_b) \qquad \frac{\partial U}{\partial t} = a^2 \Delta_2 U .$$

Queste conclusioni sussistono, in quanto ai punti (x, y, z) che sono posti al di fuori dello spazio S, anche se la funzione $\psi(r, t)$ non si annulla per $r = 0$.

§ 2.

L'equazione differenziale (2_a) ammette i seguenti due integrali particolari:

$$\psi = r t^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{r^2}{4a^2 t}},$$

$$\psi = t^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{r^2}{4a^2 t}},$$

il primo dei quali si annulla per $r = 0$ ed il secondo no.

Si può dunque applicare senz'altro alla prima delle due precedenti funzioni ψ la conclusione cui siamo pervenuti alla fine del § precedente, e si giunge così a riconoscere che la funzione

$$(3) \qquad U = t^{-\frac{3}{2}} \int k(\xi, \eta, \zeta) e^{-\frac{r^2}{4a^2 t}} dS$$

soddisfa in tutto lo spazio, qualunque sia la funzione $k(\xi, \eta, \zeta)$, all'equazione differenziale (2_b).

Se invece si considerasse la seconda espressione di ψ e si ponesse

$$U = t^{-\frac{1}{2}} \int k(\xi, \eta, \zeta) e^{-\frac{r^2}{4a^2 t}} \frac{dS}{r},$$

si otterrebbe una funzione la quale soddisfa all'equazione (2_b) soltanto nei punti esterni allo spazio S. Ma si torna ad ottenere una soluzione della detta equazione (2_b), valida per tutto lo spazio, col porre

$$(3_a) \qquad U = t^{-\frac{1}{2}} \int k(\xi, \eta, \zeta) e^{-\frac{r^2}{4a^2 t}} \frac{d\sigma}{r},$$

cioè coll'estendere l'integrale non già ad uno spazio S a tre dimensioni, ma ad una qualunque superficie σ. Per tale seconda determinazione di U, le derivate di questa funzione diventano certamente discontinue attraverso la superficie σ: ma questa circostanza non è d'alcun impedimento quando l'equazione (2_b) debba verificarsi soltanto in una porzione dello spazio infinito e quando la superficie σ sia il limite di questa porzione di spazio.

La citata equazione (2_b) è quella che regge la propagazione del calore nei corpi isotropi, e la soluzione (3) di quest'equazione è quella notissima che serve, come ha stabilito FOURIER, ad esprimere la temperatura variabile d'uno spazio indefinito in ogni senso, quando è data la temperatura iniziale d'ogni punto: la qual temperatura iniziale è rappresentata da una funzione che differisce dalla $k(\xi, \eta, \zeta)$ unicamente per un fattore costante.

La soluzione (3_a) ha un carattere del tutto diverso, poichè corrisponde manifestamente ad uno stato iniziale nel quale la temperatura è nulla in ogni punto dello spazio limitato dalla superficie σ; ed è sull'uso di questa seconda soluzione che si fondano più specialmente le considerazioni che seguono.

Ora importa osservare anzitutto che dalla soluzione (3_a) si può ricavare un'altra soluzione più generale, mediante l'estensione d'un procedimento che viene molto spesso adoperato nella teoria del calore. Alludiamo al procedimento col quale, determinata che siasi la temperatura variabile $U(x, y, z, t)$ d'un dato spazio sotto le condizioni seguenti:

1°) che la temperatura iniziale sia nulla in ogni punto dello spazio considerato;

2°) che la superficie limite di questo spazio sia mantenuta in ogni punto alla temperatura unitaria;

si giunge a determinare la temperatura variabile del medesimo spazio nell'ipotesi che, restando ferma la condizione 1°), la superficie limite sia mantenuta in ogni punto ad una temperatura non più costante, ma variabile col tempo secondo una legge continua qualunque $f(t)$ *).

L'applicazione del procedimento in discorso conduce molto facilmente a trovare, per la temperatura variabile $u(x, y, z, t)$ che corrisponde a queste nuove condizioni ai limiti, l'espressione

$$u = f(0)\,U(x, y, z, t) + \int_0^t f'(\tau)\,U(x, y, z, t-\tau)\,d\tau \qquad (4)$$

o, più semplicemente,

$$u = \int_0^t f(\tau)\frac{\partial\, U(x, y, z, t-\tau)}{\partial t}\,d\tau. \qquad (4_a)$$

Per giustificare l'uso di questa nuova soluzione u, evidentemente più generale

*) Questo enunciato può ricevere una assai maggiore estensione (cfr. HEINE, *Handbuch der Kugelfunctionen*, volume II, p. 311-313): ma qui bastava riferirsi al caso più semplice.

della U [cui essa si riduce per $f(t) = 1$], si deve dimostrare innanzi tutto che la funzione u così formata soddisfa all'equazione indefinita (2_b) della propagazione del calore. Ora è facile riconoscere che tale dimostrazione si può dare senza punto presupporre che la primitiva temperatura U soddisfaccia alla condizione 2°), e che basta invece ammettere per essa la sussistenza della condizione 1°), cioè della

$$U(x, y, z, 0) = 0. \tag{4_b}$$

Infatti dall'equazione (4) risulta

$$\frac{\partial u}{\partial t} = f(0)\frac{\partial U}{\partial t} + f'(t)\,U(x, y, z, 0) + \int_0^t f'(\tau)\frac{\partial U(x, y, z, t-\tau)}{\partial t}d\tau,$$

$$\Delta_2 u = f(0)\Delta_2 U + \int_0^t f'(\tau)\Delta_2 U(x, y, z, t-\tau)\,d\tau,$$

epperò

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2\Delta_2 u = f(0)\left(\frac{\partial U}{\partial t} - a^2\Delta_2 U\right)$$

$$+\int_0^t f'(\tau)\left[\frac{\partial U(x, y, z, t-\tau)}{\partial t} - a^2\Delta_2 U(x, y, z, t-\tau)\right]d\tau + f'(t)\,U(x, y, z, 0).$$

Ora la funzione U soddisfa, per ipotesi, tanto all'equazione

$$\frac{\partial U}{\partial t} - a^2\Delta_2 U = 0$$

quanto a quella che se ne deduce mutando t in $t - \tau$, poichè τ non ha mai un valore superiore a t: dunque la condizione necessaria e sufficiente affinchè la nuova funzione u soddisfaccia all'equazione indefinita

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\Delta_2 u$$

è la (4_b), cioè è la condizione 1°), senz'altro.

Che la nuova funzione u soddisfaccia anch'essa, come la U, alla condizione

$$u(x, y, z, 0) = 0, \tag{4_c}$$

cioè all'ipotesi della temperatura iniziale nulla in tutto lo spazio considerato, è reso manifesto dall'espressione (4) e dall'equazione (4_b), già ammessa valida in tutto il detto spazio. Nulla invece si può dire circa la temperatura ch'essa assegna alla superficie limite, se si prescinde da ogni altra ipotesi circa la determinazione della primitiva temperatura U. Resta solo il fatto della deduzione, per mezzo dell'equazione (4), d'una soluzione più generale u da una più particolare U, nell'ipotesi, comune ad amendue, della temperatura iniziale nulla.

§ 3.

Applichiamo le formole (3), (3_a) ad un caso semplicissimo, a quello, cioè, d'uno spazio sferico, per ciò che spetta alla prima, e d'una superficie sferica, per ciò che spetta alla seconda; ammettendo inoltre che la densità k dipenda dalla sola distanza dal centro, e che quindi essa sia costante quando si tratta della superficie sferica.

Il calcolo relativo allo spazio sferico è semplice e notissimo e conduce alla formola *)

$$U = \frac{1}{2ar\sqrt{\pi t}} \int_0^R G(\rho)\left[e^{-\frac{(r-\rho)^2}{4a^2t}} - e^{-\frac{(r+\rho)^2}{4a^2t}}\right]\rho\, d\rho, \tag{5}$$

dove R è il raggio della sfera, r la distanza del centro di questa dal punto cui si riferisce la temperatura U e finalmente $G(r)$ una funzione che tiene le veci della primitiva k (da cui non differisce che per un fattore costante) e che rappresenta la temperatura iniziale della sfera, cioè il valore di U per $t = 0$.

Per ciò che si riferisce al calcolo dell'altra espressione (3_a), nel caso che σ sia una superficie sferica di raggio R e che la densità sia uguale ad 1, basterà ricordare che, in generale, se $\varphi(r)$ è il potenziale mutuo di due masse unitarie alla distanza r, e se $\Phi(r)$ è un'altra funzione di r tale che si abbia

$$\Phi'(r) = r\varphi(r),$$

la funzione potenziale della detta superficie sferica sopra un punto interno, distante di r dal centro, è espressa da

$$\frac{2\pi R}{r}[\Phi(R+r) - \Phi(R-r)].$$

Ora nel caso della formola (3_a) si ha, prescindendo dal fattore $t^{-\frac{1}{2}}$,

$$\varphi(r) = \frac{1}{r} e^{-\frac{r^2}{4a^2t}}$$

*) In questa, come in ogni altra successiva formola, la radice quadrata s'intende presa positivamente.

epperò

$$\Phi'(r) = e^{-\frac{r^2}{4a^2t}},$$

talchè si può prendere

$$\Phi(r) = \int_0^r e^{-\frac{\rho^2}{4a^2t}} d\rho.$$

Si ha dunque

$$(5_a) \qquad U = \frac{2\pi R}{r\sqrt{t}} \int_{R-r}^{R+r} e^{-\frac{\rho^2}{4a^2t}} d\rho.$$

La temperatura variabile che questa formola assegna all'interno della sfera di raggio R può considerarsi come quella che sarebbe determinata dalle seguenti due condizioni:

1°) che la temperatura iniziale sia dovunque nulla, nell'interno della detta sfera;

2°) che ogni punto della superficie limite $r = R$ sia mantenuta ad una temperatura *variabile colla legge individuata*

$$U' = \frac{2\pi}{\sqrt{t}} \int_0^{2R} e^{-\frac{\rho^2}{4a^2t}} d\rho.$$

Ciò premesso, generalizziamo l'espressione (5_a), la quale, come si vede, non contiene alcun elemento arbitrario, coll'applicare ad essa il procedimento rappresentato dall'equazione (4). Si ottiene in tal modo

$$u = f(0)\,U + \frac{2\pi R}{r} \int_0^t \frac{f'(\tau)\,d\tau}{\sqrt{t-\tau}} \int_{R-r}^{R+r} e^{-\frac{\rho^2}{4a^2(t-\tau)}} d\rho,$$

dove U sta, ancora per poco, in luogo dell'espressione (5_a).

Le due integrazioni, relative a ρ ed a τ, sono fra loro indipendenti e possono essere eseguite in ordine inverso. Si può dunque scrivere

$$u = f(0)\,U + \frac{2\pi R}{r} \int_{R-r}^{R+r} d\rho \int_0^t \frac{f'(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} e^{-\frac{\rho^2}{4a^2(t-\tau)}} d\tau,$$

equazione alla quale, sostituendo in luogo di τ una nuova variabile s, mediante la relazione

$$s = \frac{\rho}{2a\sqrt{t-\tau}},$$

si può dare quest'altra forma

$$u = f(0)\,U + \frac{2\pi R}{ar} \int_{R-r}^{R+r} \rho\, d\rho \int_{\frac{\rho}{2a\sqrt{t}}}^{\infty} f'\left(t - \frac{\rho^2}{4a^2 s^2}\right) e^{-s^2} \frac{ds}{s^2}.$$

Ora se si pone, per un momento,

$$\varphi(\rho) = \int_{\frac{\rho}{2a\sqrt{t}}}^{\infty} f\left(t - \frac{\rho^2}{4a^2 s^2}\right) e^{-s^2} ds,$$

donde si ricava

$$\frac{d\varphi}{d\rho} = -\frac{f(0)}{2a\sqrt{t}} e^{-\frac{\rho^2}{4a^2 t}} - \frac{\rho}{2a^2} \int_{\frac{\rho}{2a\sqrt{t}}}^{\infty} f'\left(t - \frac{\rho^2}{4a^2 s^2}\right) e^{-s^2} \frac{ds}{s^2},$$

la precedente equazione può scriversi

$$\begin{aligned} u &= f(0)U - \frac{4\pi a R}{r} \int_{R-r}^{R+r} \left[\frac{d\varphi}{d\rho} + \frac{f(0)}{2a\sqrt{t}} e^{-\frac{\rho^2}{4a^2 t}}\right] d\rho \\ &= f(0)U - \frac{2\pi R f(0)}{r\sqrt{t}} \int_{R-r}^{R+r} e^{-\frac{\rho^2}{4a^2 t}} d\rho \\ &\quad - \frac{4\pi a R}{r}[\varphi(R+r) - \varphi(R-r)], \end{aligned}$$

ossia, in virtù dell'equazione (5_a),

$$u = \frac{4\pi a R}{r}[\varphi(R-r) - \varphi(R+r)].$$

Si ha dunque, riponendo al posto di $\varphi(\rho)$ l'espressione momentaneamente designata con questo simbolo,

$$u = \frac{4\pi a R}{r}\left[\int_{\frac{R-r}{2a\sqrt{t}}}^{\infty} f\left(t - \frac{(R-r)^2}{4a^2 s^2}\right) e^{-s^2} ds - \int_{\frac{R+r}{2a\sqrt{t}}}^{\infty} f\left(t - \frac{(R+r)^2}{4a^2 s^2}\right) e^{-s^2} ds\right].$$

L'espressione cui siamo così pervenuti rappresenta una temperatura variabile della sfera di raggio R, la quale suppone ancora [come la (5_a) cui essa si riduce per $f(t) = 1$] uno stato iniziale di temperatura nulla, ma alla quale corrisponde una temperatura superficiale variabile col tempo, secondo una legge non più *individuata,* ma interamente *arbitraria,* giacchè l'espressione

$$u' = 4\pi a\left[\frac{\sqrt{\pi}}{2} f(t) - \int_{\frac{R}{a\sqrt{t}}}^{\infty} f\left(t - \frac{R^2}{a^2 s^2}\right) e^{-s^2} ds\right],$$

che la formola precedente assegna alla temperatura cui dev'essere mantenuta la superficie limite $r = R$, contiene la funzione arbitraria $f(t)$.

Per semplificare un poco, giova scrivere

$$\frac{f(t)}{2a\pi\sqrt{\pi}} \quad \text{al posto di} \quad f(t).$$

Si ottiene in tal modo

$$(6) \quad u = \frac{2R}{r\sqrt{\pi}}\left[\int_{\frac{R-r}{2a\sqrt{t}}}^{\infty} f\left(t - \frac{(R-r)^2}{4a^2s^2}\right)e^{-s^2}ds - \int_{\frac{R+r}{2a\sqrt{t}}}^{\infty} f\left(t - \frac{(R+r)^2}{4a^2s^2}\right)e^{-s^2}ds\right]$$

come espressione della temperatura nell'interno della sfera, ed

$$(6') \qquad u' = f(t) - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{R}{a\sqrt{t}}}^{\infty} f\left(t - \frac{R^2}{a^2s^2}\right)e^{-s^2}ds$$

come espressione della temperatura alla superficie.

Volendo ora utilizzare la formola (6) per determinare la temperatura variabile nell'interno della sfera (sempre nell'ipotesi della temperatura iniziale nulla) mediante la conoscenza della temperatura alla superficie, supposta data secondo una legge qualunque

$$u' = F(t),$$

bisogna risolvere il problema analitico che consiste nel dedurre dall'equazione funzionale

$$(7) \qquad F(t) = f(t) - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{R}{a\sqrt{t}}}^{\infty} f\left(t - \frac{R^2}{a^2s^2}\right)e^{-s^2}ds$$

la forma della funzione incognita $f(t)$.

Questo problema ammette una soluzione semplice ed elegante, che ora passiamo ad esporre.

§ 4.

Per agevolare l'esposizione del procedimento che conduce alla soluzione del problema testè enunciato, giova premettere la determinazione d'un integrale definito che vedremo essere lo strumento più essenziale di tale soluzione.

Questo integrale definito, che per un momento dinoteremo con H, è il seguente:

$$H = \int_a^b e^{-\frac{A^2}{x-a}-\frac{B^2}{b-x}}[(b-x)(x-a)]^{-\frac{3}{2}}dx,$$

dove a e b ($> a$) sono due costanti reali ed A, B sono due costanti reali e positive.

Ponendo

$$x = \frac{Abe^{\xi}+Bae^{-\xi}}{Ae^{\xi}+Be^{-\xi}},$$

si trova

$$x-a = \frac{A(b-a)e^{\xi}}{Ae^{\xi}+Be^{-\xi}}, \qquad b-x = \frac{B(b-a)e^{-\xi}}{Ae^{\xi}+Be^{-\xi}},$$

$$\frac{dx}{[(b-x)(x-a)]^{\frac{3}{2}}} = \frac{Ae^{\xi}+Be^{-\xi}}{(b-a)^2\sqrt{AB}}2\,d\xi,$$

$$\frac{A^2}{x-a}+\frac{B^2}{b-x} = \frac{(Ae^{\xi}+Be^{-\xi})(Ae^{-\xi}+Be^{\xi})}{b-a} = \frac{(A+B)^2+4AB\,\mathrm{senh}^2\xi}{b-a},$$

e, poichè ai limiti a e b della variabile x corrispondono i limiti $-\infty$ e $+\infty$ della variabile ξ, sostituendo si ottiene

$$H = \frac{2e^{-\frac{(A+B)^2}{b-a}}}{(b-a)^2\sqrt{AB}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{4AB\,\mathrm{senh}^2\xi}{b-a}}(Ae^{\xi}+Be^{-\xi})d\xi.$$

Ora essendo

$$Ae^{\xi}+Be^{-\xi} = (A+B)\cosh\xi+(A-B)\,\mathrm{senh}\,\xi,$$

l'integrale che figura nel secondo membro della precedente eguaglianza può scomporsi nei due

$$(A+B)\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{4AB\,\mathrm{senh}^2\xi}{b-a}}\cosh\xi\,d\xi+(A-B)\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{4AB\,\mathrm{senh}^2\xi}{b-a}}\mathrm{senh}\,\xi\,d\xi,$$

il secondo dei quali è evidentemente nullo. Ne consegue che, ponendo

$$\frac{2\sqrt{AB}\,\mathrm{senh}\,\xi}{\sqrt{b-a}} = s,$$

l'integrale H può scriversi così:

$$H = \frac{A+B}{AB(b-a)^{\frac{3}{2}}}e^{-\frac{(A+B)^2}{b-a}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-s^2}ds,$$

talchè si ha finalmente

$$(8)\quad \int_a^b e^{-\frac{A^2}{x-a}-\frac{B^2}{b-x}}[(b-x)(x-a)]^{-\frac{3}{2}}dx=\frac{(A+B)\sqrt{\pi}}{AB}e^{-\frac{(A+B)^2}{b-a}}(b-a)^{-\frac{3}{2}}.$$

È questa la formola di cui ci serviremo per risolvere il nostro problema e dalla quale vogliamo subito ricavare alcuni utili corollarî, uno dei quali ci gioverà più tardi per trattare un'altra questione.

Moltiplicando la precedente eguaglianza per $2A\,dA$ ed integrando fra A e $+\infty$, si ottiene

$$(8_a)\qquad \int_a^b e^{-\frac{A^2}{x-a}-\frac{B^2}{b-x}}(x-a)^{-\frac{1}{2}}(b-x)^{-\frac{3}{2}}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{B}e^{-\frac{(A+B)^2}{b-a}}(b-a)^{-\frac{1}{2}}.$$

Reciprocamente, da questa formola (8_a) si torna ad ottenere la (8) derivando rispetto ad A. Un'analoga formola si otterrebbe integrando la (8) rispetto a B.

Moltiplicando di nuovo l'eguaglianza (8_a) per $2B\,dB$ ed integrando fra B e $+\infty$, si ottiene

$$(8_b)\qquad \int_a^b e^{-\frac{A^2}{x-a}-\frac{B^2}{b-x}}\frac{dx}{\sqrt{(b-x)(x-a)}}=2\sqrt{\pi}\int_{\frac{A+B}{\sqrt{b-a}}}^{\infty}e^{-s^2}ds.$$

Se in quest'ultima formola si pone

$$A=B=\frac{\xi\sqrt{b-a}}{2},\qquad (\xi>0)$$

si trova

$$\int_a^b e^{-\frac{(b-a)^2\xi^2}{4(b-x)(x-a)}}\frac{dx}{\sqrt{(b-x)(x-a)}}=2\sqrt{\pi}\int_{\xi}^{\infty}e^{-s^2}ds,$$

eguaglianza la quale, colla sostituzione

$$x=a\cos^2\frac{\theta}{2}+b\,\mathrm{sen}^2\frac{\theta}{2},$$

si converte nella semplicissima

$$(8_c)\qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{\xi^2}{\mathrm{sen}^2\theta}}d\theta=\sqrt{\pi}\int_{\xi}^{\infty}e^{-s^2}ds,$$

la quale sussiste per tutti i valori *positivi* di ξ, ed anche per $\xi=0$, ma non già per valori negativi.

È interessante osservare che quest'ultima formola può essere facilissimamente stabilita *a priori*. Pongasi infatti

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = K,$$

dove K è il valore supposto incognito (necessariamente positivo) dell'integrale contenuto nel primo membro. Denotando con s una costante maggiore di zero, si ha pure, posto $x = s\cot g\,\theta$,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-s^2\cot g^2\theta}\,\frac{s\,d\theta}{\operatorname{sen}^2\theta} = K$$

ed anche

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{s^2}{\operatorname{sen}^2\theta}}\,\frac{s\,d\theta}{\operatorname{sen}^2\theta} = K e^{-s^2}.$$

Integrando ambi i membri di quest'eguaglianza rispetto ad s, fra s e $+\infty$, si ottiene

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{s^2}{\operatorname{sen}^2\theta}}\,d\theta = 2K\int_s^\infty e^{-s^2}\,ds,$$

ovvero

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{\xi^2}{\operatorname{sen}^2\theta}}\,d\theta = 2K\int_\xi^\infty e^{-s^2}\,ds.$$

Qui ξ designa un parametro il cui valore deve, come quello della precedente s, supporsi positivo. Ma è facile rilevare, dalla natura delle funzioni sottoposte ai segni d'integrazione, che ξ può anche raggiungere il limite *zero*, in corrispondenza al quale si ha

$$\frac{\pi}{2} = 2K^2,$$

donde

$$K = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Per tal modo si ricade sulla già trovata equazione (8_c), la quale risulta così stabilita direttamente, senza che sia neppure necessario d'ammettere la preliminare conoscenza del classico integrale K.

§ 5.

Riprendiamo ora l'equazione (7), la quale, ponendo

$$s = \frac{R}{a\sqrt{t-\tau}},$$

donde

$$\tau = t - \frac{R^2}{a^2 s^2},$$

dove s è una nuova variabile d'integrazione, diventa

$$F(t) = f(t) - \frac{R}{a\sqrt{\pi}} \int_0^t f(\tau)(t-\tau)^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{R^2}{a^2(t-\tau)}} d\tau \tag{9}$$

e dà

$$f(t) = F(t) + \frac{R}{a\sqrt{\pi}} \int_0^t f(\tau)(t-\tau)^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{R^2}{a^2(t-\tau)}} d\tau. \tag{9_a}$$

Se, in virtù di questa stessa equazione, si pone

$$f(\tau) = F(\tau) + \frac{R}{a\sqrt{\pi}} \int_0^\tau f(s)(\tau - s)^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{R^2}{a^2(\tau-s)}} ds$$

e si sostituisce quest'espressione di $f(\tau)$ nell'integrale che figura nel secondo membro dell'equazione (9_a), si ottiene

$$f(t) = F(t) + \frac{R}{a\sqrt{\pi}} \int_0^t F(\tau)(t-\tau)^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{R^2}{a^2(t-\tau)}} d\tau$$

$$+ \frac{R^2}{a^2\pi} \int_0^t (t-\tau)^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{R^2}{a^2(t-\tau)}} d\tau \int_0^\tau f(s)(\tau-s)^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{R^2}{a^2(\tau-s)}} ds.$$

Ora per la nota regola di Dirichlet, simbolicamente espressa nel caso nostro da

$$\int_0^t d\tau \int_0^\tau ds = \int_0^t ds \int_s^t d\tau,$$

l'ultimo termine del secondo membro della precedente equazione può trasformarsi nel seguente:

$$\frac{R^2}{a^2\pi} \int_0^t f(s)\, ds \int_s^t e^{-\frac{R^2}{a^2(t-\tau)} - \frac{R^2}{a^2(\tau-s)}} [(t-\tau)(\tau-s)]^{-\frac{3}{2}} d\tau$$

e questo, invocando la formola (8) e riponendo poscia τ al posto di s, si converte alla sua volta nell'altro

$$\frac{2R}{a\sqrt{\pi}}\int_0^t f(\tau)(t-\tau)^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{4R^2}{a^2(t-\tau)}} d\tau;$$

l'equazione (9_a) può dunque essere sostituita da quest'altra:

$$(9_b)\qquad \left\{ \begin{aligned} f(t) = F(t) &+ \frac{R}{a\sqrt{\pi}}\int_0^t F(\tau)(t-\tau)^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{R^2}{a^2(t-\tau)}} d\tau \\ &+ \frac{2R}{a\sqrt{\pi}}\int_0^t f(\tau)(t-\tau)^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{4R^2}{a^2(t-\tau)}} d\tau . \end{aligned} \right.$$

Si operi ora su questa nuova equazione (9_b) nel modo stesso che si è operato sulla (9_a); cioè si ponga dapprima, in base all'equazione (9_b),

$$\begin{aligned} f(\tau) = F(\tau) &+ \frac{R}{a\sqrt{\pi}}\int_0^\tau F(s)(\tau-s)^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{R^2}{a^2(\tau-s)}} ds \\ &+ \frac{2R}{a\sqrt{\pi}}\int_0^\tau f(s)(\tau-s)^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{4R^2}{a^2(\tau-s)}} ds \end{aligned}$$

e si sostituisca quest'ultima espressione di $f(\tau)$ nell'ultimo termine del secondo membro della stessa equazione (9_b). Si ottiene in tal modo

$$\begin{aligned} f(t) = F(t) &+ \frac{R}{a\sqrt{\pi}}\int_0^t F(\tau)(t-\tau)^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{R^2}{a^2(t-\tau)}} d\tau \\ &+ \frac{2R}{a\sqrt{\pi}}\int_0^t F(\tau)(t-\tau)^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{4R^2}{a^2(t-\tau)}} d\tau \\ &+ \frac{2R^2}{a^2\pi}\int_0^t (t-\tau)^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{4R^2}{a^2(t-\tau)}} d\tau \int_0^\tau F(s)(\tau-s)^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{R^2}{a^2(\tau-s)}} ds \\ &+ \frac{4R^2}{a^2\pi}\int_0^t (t-\tau)^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{4R^2}{a^2(t-\tau)}} d\tau \int_0^\tau f(s)(\tau-s)^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{4R^2}{a^2(\tau-s)}} ds . \end{aligned}$$

I due ultimi termini del secondo membro di questa equazione si possono trasformare, mercè la citata regola di DIRICHLET, nei due seguenti:

$$\frac{2R^2}{a^2\pi}\int_0^t F(s)ds\int_s^t e^{-\frac{4R^2}{a^2(t-\tau)}-\frac{R^2}{a^2(\tau-s)}}[(t-\tau)(\tau-s)]^{-\frac{3}{2}}d\tau$$

$$+\frac{4R^2}{a^2\pi}\int_0^t f(s)ds\int_s^t e^{-\frac{4R^2}{a^2(t-\tau)}-\frac{4R^2}{a^2(\tau-s)}}[(t-\tau)(\tau-s)]^{-\frac{3}{2}}d\tau,$$

e questi, in virtù della formola (8), si possono alla loro volta convertire in questi altri due, nei quali si è riposto τ al posto di s,

$$\frac{3R}{a\sqrt{\pi}}\int_0^t F(\tau)(t-\tau)^{-\frac{3}{2}}e^{-\frac{9R^2}{a^2(t-\tau)}}d\tau+\frac{4R}{a\sqrt{\pi}}\cdot\int_0^t f(\tau)(t-\tau)^{-\frac{3}{2}}e^{-\frac{16R^2}{a^2(t-\tau)}}d\tau.$$

Ne risulta che, mediante questa seconda operazione, l'equazione (9_b) può essere di nuovo sostituita da quest'altra:

$$(9_c)\quad\left\{\begin{aligned} f(t)=F(t)+\frac{R}{a\sqrt{\pi}}\int_0^t F(\tau)(t-\tau)^{-\frac{3}{2}}\Big[e^{-\frac{R^2}{a^2(t-\tau)}}+2e^{-\frac{4R^2}{a^2(t-\tau)}}+3e^{-\frac{9R^2}{a^2(t-\tau)}}\Big]d\tau\\ +\frac{4R}{a\sqrt{\pi}}\int_0^t f(\tau)(t-\tau)^{-\frac{3}{2}}e^{-\frac{16R^2}{a^2(t-\tau)}}d\tau.\end{aligned}\right.$$

Reiterando indefinitamente l'operazione con cui siamo passati dall'equazione (9_a) alla (9_b) e dalla (9_b) alla (9_c), si giunge finalmente alla seguente *) espressione di $f(t)$:

$$(10)\qquad f(t)=F(t)+\frac{R}{a\sqrt{\pi}}\int_0^t F(\tau)(t-\tau)^{-\frac{3}{2}}\sum_1^\infty n e^{-\frac{n^2R^2}{a^2(t-\tau)}}d\tau,$$

e si può verificare direttamente che quest'espressione soddisfa appuntino all'equazione (7), ovvero sia alla (9).

Infatti, se nel secondo membro di quest'equazione (9) si sostituisce l'espressione (10) di $f(t)$, insieme colla seguente, che ne consegue, di $f(\tau)$

$$(10')\qquad f(\tau)=F(\tau)+\frac{R}{a\sqrt{\pi}}\int_0^\tau F(s)(\tau-s)^{-\frac{3}{2}}\sum_1^\infty n e^{-\frac{n^2R^2}{a^2(\tau-s)}}ds,$$

---

*) I limiti della somma Σ si riferiscono all'intero n. Quest'avvertenza vale per tutte le successive formole in cui ricompare il segno di somma.

si ottiene il risultato seguente:

$$F(t)+\frac{R}{a\sqrt{\pi}}\int_0^t F(\tau)(t-\tau)^{-\frac{3}{2}}\sum_1^\infty n\,e^{-\frac{n^2R^2}{a^2(t-\tau)}}d\tau$$

$$-\frac{R}{a\sqrt{\pi}}\int_0^t F(\tau)(t-\tau)^{-\frac{3}{2}}e^{-\frac{R^2}{a^2(t-\tau)}}d\tau$$

$$-\frac{R^2}{a^2\pi}\int_0^t (t-\tau)^{-\frac{3}{2}}e^{-\frac{R^2}{a^2(t-\tau)}}d\tau\int_0^\tau F(s)(\tau-s)^{-\frac{3}{2}}\sum_1^\infty n\,e^{-\frac{n^2R^2}{a^2(\tau-s)}}ds\,.$$

Ora l'ultimo termine di quest'espressione equivale, in virtù della già motivata inversione, al seguente

$$-\frac{R^2}{a^2\pi}\int_0^t F(s)\,ds\int_s^t\sum_1^\infty n\,e^{-\frac{n^2R^2}{a^2(\tau-s)}-\frac{R^2}{a^2(t-\tau)}}[(t-\tau)(\tau-s)]^{-\frac{3}{2}}d\tau$$

e quindi, per l'applicazione della formola (8) e per il successivo cambiamento di s in τ, a quest'altro

$$-\frac{R}{a\sqrt{\pi}}\int_0^t F(\tau)(t-\tau)^{-\frac{3}{2}}\sum_2^\infty n\,e^{-\frac{n^2R^2}{a^2(t-\tau)}}d\tau\,.$$

Per conseguenza il risultato della sostituzione, nel secondo membro dell'equazione (9), della trovata espressione (10) di $f(t)$ si riduce semplicemente ad

$$F(t),$$

e la detta equazione è identicamente soddisfatta qualunqne sia la funzione data $F(t)$.

Facendo ora la trasformazione inversa di quella che ci condusse dall'equazione (7) alla (9), cioè ponendo

$$\tau=t-\frac{R^2}{a^2s^2}\,,$$

donde

$$s=\frac{R}{a\sqrt{t-\tau}}\,,$$

l'equazione (10) si converte nella seguente:

$$(10_a)\qquad F(t)=F(t)+\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{R}{a\sqrt{t}}}^\infty F\left(t-\frac{R^2}{a^2s^2}\right)\sum_1^\infty n\,e^{-n^2s^2}ds\,.$$

Possiamo quindi enunciare il risultato della fatta ricerca nella seguente proposizione.

Se $F(t)$ è una funzione dipendente da un'altra $f(t)$ per mezzo dell'equazione

$$F(t) = f(t) - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{R}{a\sqrt{t}}}^{\infty} f\left(t - \frac{R^2}{a^2 s^2}\right) e^{-s^2} ds,$$

reciprocamente la funzione $f(t)$ dipende dalla $F(t)$ per mezzo dell'equazione

$$f(t) = F(t) + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{R}{a\sqrt{t}}}^{\infty} F\left(t - \frac{R^2}{a^2 s^2}\right) \sum_{1}^{\infty} n e^{-n^2 s^2} ds.$$

§ 6.

Determinata così la forma della funzione $f(t)$, per mezzo di quella dell'altra funzione $F(t)$, che rappresenta la legge prescritta alla temperatura della superficie limite $r = R$, riprendiamo l'espressione (6) della temperatura nell'interno della sfera, per sostituire in essa la trovata espressione della funzione $f(t)$.

A tal fine giova primieramente trasformare la citata espressione (6) ponendo

$$s = \frac{R - r}{2a\sqrt{t - \tau}} \qquad \text{nel primo integrale,}$$

$$s = \frac{R + r}{2a\sqrt{t - \tau}} \qquad \text{nel secondo,}$$

τ essendo una nuova variabile d'integrazione che si sostituisce ad s. Si trova in tal modo

$$u = \frac{R}{2ar\sqrt{\pi}} \int_0^t f(\tau)(t - \tau)^{-\frac{3}{2}} \left[(R - r) e^{-\frac{(R-r)^2}{4a^2(t-\tau)}} - (R + r) e^{-\frac{(R+r)^2}{4a^2(t-\tau)}}\right] d\tau,$$

formola che, per maggior comodo, scriveremo simbolicamente così:

$$u \equiv \frac{\varepsilon R(R - \varepsilon r)}{2ar\sqrt{\pi}} \int_0^t f(\tau)(t - \tau)^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{(R-\varepsilon r)^2}{4a^2(t-\tau)}} d\tau,$$

intendendo col segno $\equiv$ che, nel secondo membro, si debba porre successivamente $\varepsilon = +1$, $\varepsilon = -1$.

Sostituendo in quest'espressione il valore (10') di $f(\tau)$, si ottiene

$$u = \frac{\varepsilon R(R-\varepsilon r)}{2ar\sqrt{\pi}} \int_0^t F(\tau)(t-\tau)^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{(R-\varepsilon r)^2}{4a^2(t-\tau)}} d\tau$$

$$+ \frac{\varepsilon R^2(R-\varepsilon r)}{2a^2 r\pi} \sum_1^\infty n \int_0^t (t-\tau)^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{(R-\varepsilon r)^2}{4a^2(t-\tau)}} d\tau \int_0^\tau F(s)(\tau-s)^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{n^2R^2}{a^2(\tau-s)}} ds.$$

Colla già più volte eseguita inversione l'integrale doppio, compreso nell'ultimo termine del secondo membro, si può trasformare nel seguente:

$$\int_0^t F(s)ds \int_s^t e^{-\frac{(R-\varepsilon r)^2}{4a^2(t-\tau)} - \frac{n^2R^2}{a^2(\tau-s)}} [(t-\tau)(\tau-s)]^{-\frac{3}{2}} d\tau$$

e questo, per l'applicazione della formola (8) e per il successivo mutamento di s in τ, si converte nell'integrale semplice

$$a\sqrt{\pi}\, \frac{(2n+1)R-\varepsilon r}{nR(R-\varepsilon r)} \int_0^t F(\tau)(t-\tau)^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{[(2n+1)R-\varepsilon r]^2}{4a^2(t-\tau)}} d\tau.$$

Si ha dunque

$$u = \frac{\varepsilon R(R-\varepsilon r)}{2ar\sqrt{\pi}} \int_0^t F(\tau)(t-\tau)^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{(R-\varepsilon r)^2}{4a^2(t-\tau)}} d\tau$$

$$+ \frac{\varepsilon R}{2ar\sqrt{\pi}} \sum_1^\infty [(2n+1)R-\varepsilon r] \int_0^t F(\tau)(t-\tau)^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{[(2n+1)R-\varepsilon r]^2}{4a^2(t-\tau)}} d\tau,$$

ovvero, più semplicemente,

$$u = \frac{\varepsilon R}{2ar\sqrt{\pi}} \sum_0^\infty [(2n+1)R-\varepsilon r] \int_0^t F(\tau)(t-\tau)^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{[(2n+1)R-\varepsilon r]^2}{4a^2(t-\tau)}} d\tau.$$

Passando ora nuovamente da questa forma simbolica alla completa, si ottiene, come cercata espressione di u,

$$(11) \left\{ \begin{aligned} u = \frac{R}{2ar\sqrt{\pi}} \int_0^t F(\tau)(t-\tau)^{-\frac{3}{2}} d\tau \sum_0^\infty \Big\{ & [(2n+1)R-r] e^{-\frac{[(2n+1)R-r]^2}{4a^2(t-\tau)}} \\ & - [(2n+1)R+r] e^{-\frac{[(2n+1)R+r]^2}{4a^2(t-\tau)}} \Big\}. \end{aligned} \right.$$

Quest'espressione si può anche scrivere, più sommariamente, così *)

$$(11_a)\qquad u=\frac{R}{2ar\sqrt{\pi}}\int_0^t F(\tau)(t-\tau)^{-\frac{3}{2}}d\tau\sum_{-\infty}^{\infty}[(2n+1)R-r]e^{-\frac{[(2n+1)R-r]^2}{4a^2(t-\tau)}}.$$

Se poi, ripigliando per un momento l'espressione simbolica di u che precede la (11), si trasforma la variabile d'integrazione col porre

$$\frac{(2n+1)R-\varepsilon r}{2a\sqrt{t-\tau}}=s,$$

si trova

$$u\equiv\frac{2\varepsilon R}{r\sqrt{\pi}}\sum_0^{\infty}\int_{\frac{(2n+1)R-\varepsilon r}{2a\sqrt{t}}}^{\infty}F\left(t-\frac{[(2n+1)R-\varepsilon r]^2}{4a^2s^2}\right)e^{-s^2}ds,$$

ovvero, scrivendo distesamente,

$$(11_b)\qquad \left\{\begin{aligned} u=\frac{2R}{r\sqrt{\pi}}\sum_0^{\infty}\Bigg\{&\int_{\frac{(2n+1)R-r}{2a\sqrt{t}}}^{\infty}F\left(t-\frac{[(2n+1)R-r]^2}{4a^2s^2}\right)e^{-s^2}ds\\ &-\int_{\frac{(2n+1)R+r}{2a\sqrt{t}}}^{\infty}F\left(t-\frac{[(2n+1)R+r]^2}{4a^2s^2}\right)e^{-s^2}ds\Bigg\}.\end{aligned}\right.$$

Questa nuova forma di u si presta bene alla verificazione della condizione di superficie. Facendo in essa $r=R$ si trova infatti

$$u'=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\sum_0^{\infty}\left[\int_{\frac{nR}{a\sqrt{t}}}^{\infty}F\left(t-\frac{n^2R^2}{a^2s^2}\right)e^{-s^2}ds-\int_{\frac{(n+1)R}{a\sqrt{t}}}^{\infty}F\left(t-\frac{(n+1)^2R^2}{a^2s^2}\right)e^{-s^2}ds\right],$$

ossia

$$u'=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}F(t)e^{-s^2}ds,$$

ossia finalmente

$$u'=F(t),$$

come appunto era prescritto.

Siamo dunque pervenuti alla compiuta determinazione della temperatura u variabile nell'interno della sfera di raggio R, subordinatamente alle condizioni:

*) SCHLAEFLI, Memoria citata, IV.

1°) che la temperatura iniziale sia dovunque nulla entro la sfera;

2°) che la superficie limite $r = R$ sia mantenuta ad una temperatura variabile col tempo, secondo una legge data $F(t)$.

§ 7.

Consideriamo, come applicazione più specialmente interessante delle formole precedenti, il caso particolare in cui la temperatura superficiale $F(t)$ sia costante ed uguale ad 1, caso dal quale si potrebbe di nuovo prendere le mosse per risalire al caso generale, mediante il procedimento ricordato nel § 2, come appunto vedremo subito.

Nell'ipotesi or detta l'equazione (11_b) si riduce alla forma semplicissima

$$U(r, t) = \frac{2R}{r\sqrt{\pi}} \sum_0^\infty \int_{\frac{(2n+1)R-r}{2a\sqrt{t}}}^{\frac{(2n+1)R+r}{2a\sqrt{t}}} e^{-s^2} ds, \tag{12}$$

dove $U(r, t)$ rappresenta quella temperatura variabile che corrisponde al caso speciale ora considerato. Da quest'espressione si deduce

$$\frac{\partial U(r, t)}{\partial t} = \frac{R t^{-\frac{3}{2}}}{2ar\sqrt{\pi}} \sum_0^\infty \left\{[(2n+1)R - r] e^{-\frac{[(2n+1)R-r]^2}{4a^2 t}} - [(2n+1)R + r] e^{-\frac{[(2n+1)R+r]^2}{4a^2 t}} \right\}$$

o, più semplicemente,

$$\frac{\partial U(r, t)}{\partial t} = \frac{R t^{-\frac{3}{2}}}{2ar\sqrt{\pi}} \sum_{-\infty}^{\infty} [(2n+1)R - r] e^{-\frac{[(2n+1)R-r]^2}{4a^2 t}}.$$

Dal confronto di questa formola colla (11_a) risulta che l'espressione (11_a) della temperatura più generale u si può scrivere così:

$$u = \int_0^t F(\tau) \frac{\partial U(r, t-\tau)}{\partial t} d\tau,$$

il che sta in perfetto accordo colla formola (4_b), in cui si traduce il suindicato procedimento.

Ponendo

$$s = \frac{(2n+1)R + \rho}{2a\sqrt{t}},$$

dove ρ è una nuova variabile d'integrazione, la formola (12) si trasforma nella seguente:

$$U = \frac{R}{ar\sqrt{\pi t}} \sum_{0}^{\infty} \int_{-r}^{r} e^{-\frac{[(2n+1)R+\rho]^2}{4a^2 t}} d\rho .$$

Quest'espressione può essere ancora utilmente trasformata. Ponendola infatti sotto la forma

$$U = \frac{R}{ar\sqrt{\pi t}} \sum_{0}^{\infty} \int_{0}^{r} \left\{ e^{-\frac{[(2n+1)R+\rho]^2}{4a^2 t}} + e^{-\frac{[(2n+1)R-\rho]^2}{4a^2 t}} \right\} d\rho ,$$

si riconosce subito ch'essa si può scrivere definitivamente così:

$$(12_a) \qquad U = \frac{R}{ar\sqrt{\pi t}} \sum_{-\infty}^{\infty} \int_{0}^{r} e^{-\frac{[(2n+1)R+\rho]^2}{4a^2 t}} d\rho .$$

È evidente *a priori* che la temperatura variabile U, così determinata, deve possedere la proprietà di convergere, qualunque sia r, verso il valore 1, al crescere indefinito di t. Per mostrare che così è veramente, poniamo per un momento

$$\frac{(2n+1)R+\rho}{2a\sqrt{t}} = s_n ,$$

donde

$$\frac{(2n+3)R+\rho}{2a\sqrt{t}} = s_{n+1} ,$$

epperò

$$s_{n+1} - s_n = \Delta s_n = \frac{R}{a\sqrt{t}} .$$

Per tali segnature l'espressione (12_a) può scriversi così:

$$U = \frac{1}{r\sqrt{\pi}} \int_{0}^{r} d\rho \sum_{-\infty}^{\infty} e^{-s_n^2} \Delta s_n .$$

Ora, a misura che t cresce, la differenza Δs_n va costantemente decrescendo e diventa infinitamente piccola quando t diventa infinitamente grande; ne consegue che la somma

$$\sum_{-\infty}^{\infty} e^{-s_n^2} \Delta s_n$$

tende, col crescere indefinito di t, a confondersi coll'integrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-s^2} ds = \sqrt{\pi} ,$$

e che quindi, per t infinitamente grande, si ha

$$\lim U = \frac{1}{r} \int_0^r d\rho ,$$

ossia appunto

$$\lim U = 1 ,$$

qualunque sia il valore di r.

Nella quì fatta supposizione di una temperatura superficiale costante ed uguale ad 1, la temperatura variabile del centro è rappresentata dall'espressione elegante

$$(12_b) \qquad U(0, t) = \frac{R}{a\sqrt{\pi t}} \sum_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(2n+1)^2 R^2}{4a^2 t}} ,$$

la quale si deduce immediatamente dalla formola (12_a).

Meno immediata è la deduzione d'un'opportuna formola per la temperatura centrale, nel caso più generale che la temperatura della superficie varî con legge qualunque $F(t)$. Conviene in tal caso risalire alla formola (11) ed osservare che l'espressione

$$\frac{1}{2r}\left\{[(2n+1)R - r] e^{-\frac{[(2n+1)R-r]^2}{4a^2(t-\tau)}} - [(2n+1)R + r] e^{-\frac{[(2n+1)R+r]^2}{4a^2(t-\tau)}}\right\}$$

tende, per $r = 0$, verso il limite

$$\left[\frac{(2n+1)^2 R^2}{2a^2(t-\tau)} - 1\right] e^{-\frac{(2n+1)^2 R^2}{4a^2(t-\tau)}} ,$$

cosicchè la temperatura centrale $u(0, t)$ è data da

$$u(0, t) = \frac{R}{a\sqrt{\pi}} \sum_0^{\infty} \int_0^t F(\tau)(t-\tau)^{-\frac{3}{2}} \left[\frac{(2n+1)^2 R^2}{2a^2(t-\tau)} - 1\right] e^{-\frac{(2n+1)^2 R^2}{4a^2(t-\tau)}} d\tau ,$$

espressione cui si può dare la forma

$$u(0, t) = -\frac{R}{a\sqrt{\pi}} \frac{\partial}{\partial R}\left[R \sum_0^{\infty} \int_0^t F(\tau)(t-\tau)^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{(2n+1)^2 R^2}{4a^2(t-\tau)}} d\tau\right] .$$

Ma si giunge ad un risultato più semplice ponendo nella formola che precede quest'ultima

$$\frac{R}{2a\sqrt{t-\tau}} = s ,$$

dove s è una nuova variabile, giacchè si ottiene

$$u(0,\ t)=\frac{4}{\sqrt{\pi}}\sum_0^{\infty}\int_{\frac{R}{2a\sqrt{t}}}^{\infty}F\left(t-\frac{R^2}{4a^2s^2}\right)[2(2n+1)^2s^2-1]e^{-(2n+1)^2s^2}ds$$

$$=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\sum_{-\infty}^{\infty}\int_{\frac{R}{2a\sqrt{t}}}^{\infty}F\left(t-\frac{R^2}{4a^2s^2}\right)[2(2n+1)^2s^2-1]e^{-(2n+1)^2s^2}ds,$$

ovvero finalmente

$$u(0,\ t)=-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{R}{2a\sqrt{t}}}^{\infty}F\left(t-\frac{R^2}{4a^2s^2}\right)\frac{d\sum_{-\infty}^{\infty}s\,e^{-(2n+1)^2s^2}}{ds}ds.$$

Per esempio, nel caso particolare $F=1$, questa formola riproduce esattamente il valore (12_b) trovato per altra via.

§ 8.

Riprendiamo ora la formola (5), relativa al caso in cui lo spazio sferico possegga inizialmente una data temperatura $G(r)$.

Facendo in questa formola $r=R$ si ottiene per U un valore variabile con t, che è dato da

$$\frac{1}{2aR\sqrt{\pi t}}\int_0^R G(\rho)[e^{-\frac{(R-\rho)^2}{4a^2t}}-e^{-\frac{(R+\rho)^2}{4a^2t}}]\rho\,d\rho$$

e che vogliamo sostituire in luogo di $F(t)$ nell'espressione (11). Denotando con U_1 il risultato di questa sostituzione, ed usando l'espressione simbolica che precede l'equazione (11), avremo dunque

$$U_1\equiv\frac{\varepsilon R}{2ar\sqrt{\pi}}\sum_0^{\infty}[(2n+1)R-\varepsilon r]\int_0^t F(\tau)(t-\tau)^{-\frac{3}{2}}e^{-\frac{[(2n+1)R-\varepsilon r]^2}{4a^2(t-\tau)}}d\tau,$$

dove $F(\tau)$ rappresenta ora una funzione che, usando il medesimo simbolismo, si può rappresentare con

$$F(\tau)\equiv\frac{\varepsilon'}{2aR\sqrt{\pi\tau}}\int_0^R G(\rho)e^{-\frac{(R-\varepsilon'\rho)^2}{4a^2\tau}}\rho\,d\rho,$$

ε' essendo un fattore il quale, come ε, deve prendere successivamente i valori $\varepsilon'=1$, $\varepsilon'=-1$. Eseguita la sostituzione di questo valore di $F(\tau)$ nella formola precedente, si trova, invertendo l'ordine delle integrazioni, il risultato seguente:

$$U_1 = \frac{\varepsilon\varepsilon'}{4a^2\pi r}\sum_0^\infty[(2n+1)R - \varepsilon r]\int_0^R G(\rho)\rho\, d\rho . K,$$

dove K rappresenta l'integrale

$$K = \int_0^t e^{-\frac{[(2n+1)R-\varepsilon r]^2}{4a^2(t-\tau)} - \frac{(R-\varepsilon'\rho)^2}{4a^2 t}}(t-\tau)^{-\frac{3}{2}}\tau^{-\frac{1}{2}}d\tau .$$

Ora questo integrale si può calcolare per mezzo della formola (8_a), ponendo in questa

$$A = \frac{R-\varepsilon'\rho}{2a}, \qquad B = \frac{(2n+1)R - \varepsilon r}{2a}, \qquad a = 0, \qquad b = t,$$

e si trova in tal modo

$$K = \frac{2a\sqrt{\pi}}{(2n+1)R - \varepsilon r}\, t^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{[2(n+1)R-\varepsilon r-\varepsilon'\rho]^2}{4a^2 t}},$$

cosicchè risulta

$$U_1 \equiv \frac{\varepsilon\varepsilon'}{2ar\sqrt{\pi t}}\int_0^R G(\rho)\rho\, d\rho \sum_0^\infty e^{-\frac{[2(n+1)R-\varepsilon r-\varepsilon'\rho]^2}{4a^2 t}},$$

ossia

$$U_1 \equiv \frac{\varepsilon\varepsilon'}{2ar\sqrt{\pi t}}\int_0^R G(\rho)\rho\, d\rho \sum_1^\infty e^{-\frac{(2nR-\varepsilon r-\varepsilon'\rho)^2}{4a^2 t}}.$$

Scrivendo questa formola distesamente si ha

$$(13)\qquad \left\{\begin{aligned} U_1 = \frac{1}{2ar\sqrt{\pi t}}\int_0^R G(\rho)\rho\, d\rho \sum_1^\infty [&e^{-\frac{(2nR+r+\rho)^2}{4a^2 t}} + e^{-\frac{(2nR-r-\rho)^2}{4a^2 t}} \\ &- e^{-\frac{(2nR+r-\rho)^2}{4a^2 t}} - e^{-\frac{(2nR-r+\rho)^2}{4a^2 t}}].\end{aligned}\right.$$

L'esattezza di questa espressione si verifica *a posteriori* osservando che, per $r = R$, essa diventa

$$\begin{aligned} U'_1 = \frac{1}{2aR\sqrt{\pi t}}\int_0^R G(\rho)\rho\, d\rho \sum_1^\infty \{&e^{-\frac{[(2n+1)R+\rho]^2}{4a^2 t}} - e^{-\frac{[(2n+1)R-\rho]^2}{4a^2 t}} \\ &- e^{-\frac{[(2n-1)R+\rho]^2}{4a^2 t}} + e^{-\frac{[(2n-1)R-\rho]^2}{4a^2 t}}\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} = \frac{1}{2aR\sqrt{\pi t}}\int_0^R G(\rho)\rho\, d\rho \Big\{&\sum_1^\infty (e^{-\frac{[(2n-1)R-\rho]^2}{4a^2 t}} - e^{-\frac{[(2n-1)R+\rho]^2}{4a^2 t}}) \\ &- \sum_2^\infty (e^{-\frac{[(2n-1)R-\rho]^2}{4a^2 t}} - e^{-\frac{[(2n-1)R+\rho]^2}{4a^2 t}})\Big\},\end{aligned}$$

ossia

$$U'_1 = \frac{1}{2aR\sqrt{\pi t}} \int_0^R G(\rho)[e^{-\frac{(R-\rho)^2}{4a^2t}} - e^{-\frac{(R+\rho)^2}{4a^2t}}]\rho\, d\rho,$$

il quale è appunto il valore donde siamo partiti, e che risultava dal porre $r = R$ nell'espressione (5).

Se ora da questa stessa espressione (5) di U si sottrae l'espressione (13) di U_1, è chiaro che la differenza rappresenta quella temperatura variabile della sfera che corrisponde alla temperatura iniziale $G(r)$ e ad una temperatura costantemente *nulla* sulla superficie limite $r = R$. Ma la formola (13) può scriversi così:

$$-U_1 = \frac{1}{2ar\sqrt{\pi t}} \int_0^R G(\rho)\rho\, d\rho \sum_{n=1}^{n=\infty} [e^{-\frac{(2nR+r-\rho)^2}{4a^2t}} - e^{-\frac{(2nR+r+\rho)^2}{4a^2t}}]$$

$$+ \frac{1}{2ar\sqrt{\pi t}} \int_0^R G(\rho)\rho\, d\rho \sum_{n=-1}^{n=-\infty} [e^{-\frac{(2nR+r-\rho)^2}{4a^2t}} - e^{-\frac{(2nR+r+\rho)^2}{4a^2t}}];$$

quindi, sommando membro a membro quest'equazione colla (5) e denotando con v la nuova temperatura variabile, corrispondente alle testè indicate condizioni, si ottiene *)

$$(14) \qquad v = \frac{1}{2ar\sqrt{\pi t}} \int_0^R G(\rho)\rho\, d\rho \sum_{-\infty}^{\infty} [e^{-\frac{(2nR+r-\rho)^2}{4a^2t}} - e^{-\frac{(2nR+r+\rho)^2}{4a^2t}}],$$

formola la cui composizione rende evidente la proprietà che ha v di annullarsi, qualunque sia t, per $r = R$.

Si può dare alla funzione v un'altra forma, la quale permette di verificare anche l'altra proprietà che deve avere questa funzione di ridursi a $G(r)$ per $t = 0$. Scrivasi infatti, col solito simbolismo,

$$v \equiv \frac{\varepsilon}{2ar\sqrt{\pi t}} \int_0^R G(\rho)\rho\, d\rho \sum_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(2nR+r-\varepsilon\rho)^2}{4a^2t}},$$

e si ponga poscia

$$\frac{2nR + r - \varepsilon\rho}{2a\sqrt{t}} = s, \qquad G(\rho)\rho = \varphi(\rho).$$

Si ottiene così

$$v \equiv -\frac{1}{r\sqrt{\pi}} \sum_{-\infty}^{\infty} \int_{\frac{2nR+r}{2a\sqrt{t}}}^{\frac{(2n-\varepsilon)R+r}{2a\sqrt{t}}} \varphi\left(\frac{2nR + r - 2as\sqrt{t}}{\varepsilon}\right) e^{-s^2} ds,$$

---

*) SCHLAEFLI, Memoria citata II.

ossia, scrivendo distesamente,

$$(14_a)\quad \left\{ \begin{aligned} v = \frac{1}{r\sqrt{\pi}} \sum_{-\infty}^{\infty} \Bigg[& \int_{\frac{(2n-1)R+r}{2a\sqrt{t}}}^{\frac{2nR+r}{2a\sqrt{t}}} \varphi(2nR + r - 2as\sqrt{t})\, e^{-s^2}\, ds \\ & - \int_{\frac{2nR+r}{2a\sqrt{t}}}^{\frac{(2n+1)R+r}{2a\sqrt{t}}} \varphi(2as\sqrt{t} - 2nR - r)\, e^{-s^2}\, ds \Bigg]. \end{aligned} \right.$$

Ora è facile vedere che, finchè si ha

$$0 < r < R,$$

i limiti del secondo integrale

$$\frac{2nR + r}{2a\sqrt{t}}, \qquad \frac{(2n+1)R + r}{2a\sqrt{t}}$$

sono amendue diversi da zero ed hanno segno eguale, qualunque sia il valore positivo, negativo o nullo dell'intero n; lo stesso ha luogo per i limiti del primo integrale

$$\frac{(2n-1)R + r}{2a\sqrt{t}}, \qquad \frac{2nR + r}{2a\sqrt{t}}$$

tranne quando $n = 0$, nel qual caso questi limiti si riducono a

$$-\frac{R - r}{2a\sqrt{t}}, \qquad \frac{r}{2a\sqrt{t}}$$

e sono ancora diversi da zero, ma hanno segno contrario. Ne risulta che, facendo tendere t verso zero, rimane semplicemente il termine della serie positiva corrispondente ad $n = 0$ e si ha quindi

$$v = \frac{1}{r\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(r)\, e^{-s^2}\, ds = \frac{\varphi(r)}{r} = G(r).$$

Se invece si fa dapprima $r = R$ e si fa poscia tendere t verso zero, rimane il termine della serie positiva corrispondente ad $n = 0$ e quello della serie negativa corrispondente ad $n = -1$, e si ha quindi

$$v = \frac{1}{R\sqrt{\pi}} \left[\int_0^{\infty} \varphi(R)\, e^{-s^2}\, ds - \int_{-\infty}^{0} \varphi(R)\, e^{-s^2}\, ds \right] = 0.$$

Per determinare il valore v_0 di v nel centro della sfera, si ponga per un momento

$$\sum_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(2nR+r+\rho)^2}{4a^2t}} = K, \qquad \sum_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(2nR+r-\rho)^2}{4a^2t}} = K'$$

e si osservi essere $K' = K$ per $r = 0$, qualunque sia ρ. L'equazione (14) può allora scriversi così:

$$v = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \frac{\int_0^R (K' - K)\, G(\rho)\rho\, d\rho}{r},$$

e quindi, per r tendente a zero, si ha

$$v_0 = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_0^R \left(\frac{\partial K'}{\partial r} - \frac{\partial K}{\partial r}\right)_{r=0} G(\rho)\rho\, d\rho.$$

Ma

$$\frac{\partial K}{\partial r} = \frac{\partial K}{\partial \rho}, \qquad \frac{\partial K'}{\partial r} = -\frac{\partial K'}{\partial \rho},$$

quindi si può scrivere anche

$$v_0 = \frac{-1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_0^R \left[\frac{\partial(K + K')}{\partial \rho}\right]_{r=0} G(\rho)\rho\, d\rho$$

$$= \frac{-1}{a\sqrt{\pi t}} \int_0^R \left(\frac{\partial K}{\partial \rho}\right)_{r=0} G(\rho)\rho\, d\rho,$$

ossia finalmente

$$(14_b) \qquad v_0 = -\frac{1}{a\sqrt{\pi t}} \int_0^R G(\rho)\rho \frac{\partial \sum_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(2nR+\rho)^2}{4a^2t}}}{\partial \rho}\, d\rho.$$

Per esempio, nel caso particolare $\rho\, G(\rho) = R$, si avrebbe

$$v_0 = \frac{R}{a\sqrt{\pi t}} \sum_{-\infty}^{\infty} (-1)^n e^{-\frac{n^2R^2}{4a^2t}}.$$

Se colla funzione u, determinata nel § 6, e colla v, calcolata nel presente §, si forma la somma

$$u + v,$$

è chiaro che si ha in questa somma l'espressione analitica della temperatura variabile d'una sfera, della quale sia data la temperatura iniziale $G(r)$ e la temperatura superficiale $F(t)$.

In parecchie delle formole precedenti si sono presentate delle serie infinite che si potrebbero immediatamente esprimere per funzioni *teta*. Ho ommesso d'introdurre esplicitamente queste funzioni, perchè non era quì il caso di ricorrere alle altre loro proprietà. Il BETTI e lo SCHLAEFLI, nelle citate loro Memorie, si sono serviti di queste proprietà per trasformare opportunamente alcune di quelle formole ed in particolare per ricondurle a quelle che risultano dall'applicazione del metodo classico.

LXXXVII.

CONSIDERAZIONI IDRODINAMICHE.

Rendiconti del Reale Istituto Lombardo, serie II, tomo XXII (1889), pp. 121-130.

Nella teoria generale del moto dei fluidi si presentano due sistemi doppiamente infiniti di linee, che hanno un'importanza fondamentale nello studio cinematico e dinamico del moto stesso. L'uno è quello delle *linee di flusso*, definite dalle equazioni differenziali

$$\frac{dx}{u}=\frac{dy}{v}=\frac{dz}{w}, \qquad dt=0,$$

dove u, v, w sono le componenti della velocità nel punto (x, y, z) e nell'istante t; l'altro è quello delle *linee vorticali*, definite dalle equazioni differenziali

$$\frac{dx}{p}=\frac{dy}{q}=\frac{dz}{r}, \qquad dt=0,$$

dove p, q, r sono le componenti della rotazione nel detto punto, cioè le quantità definite dalle note espressioni

$$2p=\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z}, \qquad 2q=\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x}, \qquad 2r=\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Questi due sistemi di linee non sono, evidentemente, fra loro indipendenti, benchè la loro mutua dipendenza non risulti che in modo molto indiretto dai teoremi idrodinamici noti. Ma non è di questa questione molto generale che intendiamo occuparci, bensì soltanto di due casi particolari che vi si riferiscono e che possono in qualche modo considerarsi come i due casi estremi.

Il primo è quello nel quale le linee dei due sistemi in discorso s'incontrano ad *angolo retto* in ogni istante ed in ogni punto dello spazio occupato dal fluido, caso definito dall'equazione

$$pu + qv + rw = 0,$$

la quale deve verificarsi in tutta la durata del moto ed in tutto lo spazio anzidetto. Quest'equazione ha un'interpretazione ben nota: essa esprime la condizione necessaria e sufficiente affinchè il trinomio

$$u\,dx + v\,dy + w\,dz$$

ammetta sempre un fattore integrante. La classe dei moti di fluido in cui l'enunciata proprietà si verifica è dunque compiutamente rappresentata dalle formole

$$u = \mu \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \qquad v = \mu \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \qquad w = \mu \frac{\partial \varphi}{\partial z},$$

dove μ e φ sono due funzioni arbitrarie delle coordinate e del tempo.

Il secondo caso invece è quello nel quale le linee anzidette s'incontrano sempre e dovunque ad *angolo nullo,* vale a dire, in altri termini coincidono fra loro in ogni istante ed in ogni punto dello spazio occupato dal fluido. Le condizioni analitiche di questa coincidenza sono

(1) $$\frac{p}{u} = \frac{q}{v} = \frac{r}{w},$$

ovvero

(1_a) $$qw - rv = 0, \qquad ru - pw = 0, \qquad pv - qu = 0,$$

delle quali ultime equazioni una è conseguenza delle altre due. Può questo secondo caso verificarsi effettivamente, ben inteso altrimenti che colle ipotesi

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \qquad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \qquad w = \frac{\partial \varphi}{\partial z},$$

le quali, annullando le tre quantità p, q, r, escludono l'esistenza di linee vorticali propriamente dette?

Incominciamo dal considerare una classe particolare di moti, quelli, cioè, in cui ogni molecola fluida si muove parallelamente ad un piano fisso, che supporremo essere quello delle xy. In tal caso si ha $w = 0$ e quindi

$$2p = -\frac{\partial v}{\partial z}, \qquad 2q = \frac{\partial u}{\partial z}, \qquad 2r = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y},$$

talchè le equazioni (1_a) si riducono alle seguenti:

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \qquad u\frac{\partial u}{\partial z} + v\frac{\partial v}{\partial z} = 0.$$

A queste si soddisfa ponendo

$$(2) \qquad u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \qquad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \qquad w = 0,$$

dove φ è una funzione di x, y, z e t, soggetta alla condizione

$$\frac{\partial}{\partial z}\left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2\right] = 0.$$

Una maniera particolare, ma sufficiente allo scopo nostro, di soddisfare a questa condizione è la seguente. Sia F una funzione arbitraria del binomio $x + iy$ e del tempo t, sia Z una funzione pure arbitraria, ma reale, di z e di t, e si ponga

$$(2_a) \qquad F e^{iZ} = \varphi + i\psi,$$

cioè si denotino con φ e ψ la parte reale ed il coefficiente dell'unità immaginaria nello sviluppo dell'espressione scritta nel primo membro. La funzione φ soddisfa alla condizione dianzi trovata. Avendosi infatti

$$2\varphi = F e^{iZ} + F_1 e^{-iZ},$$

dove F_1 è la funzione conjugata di F, si ottiene

$$2\frac{\partial \varphi}{\partial x} = F' e^{iZ} + F'_1 e^{-iZ},$$

$$2\frac{\partial \varphi}{\partial y} = iF' e^{iZ} - iF'_1 e^{-iZ},$$

dove l'apice indica derivazione rispetto al binomio $x + iy$. Di qui risulta

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 = F' F'_1,$$

e poichè il secondo membro dipende, per ipotesi, dalle sole variabili x, y e t, è chiaro che la derivazione ulteriore rispetto a z non può dare che un risultato nullo, come si richiedeva.

Si ottiene così, almeno nel caso del moto parallelo ad un piano fisso, una classe di moti reali, nei quali ha luogo la richiesta coincidenza delle linee di flusso colle verticali. Si noti che ogni funzione φ, ottenuta col processo testè indicato, soddisfa all'equazione

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=0,$$

talchè la suddetta classe di moti conviene, (2), ad un fluido incompressibile. Si noti ancora che, avendosi

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{\partial\psi}{\partial y}, \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial y}=-\frac{\partial\psi}{\partial x},$$

le equazioni differenziali delle linee di flusso diventano

$$d\psi=0, \qquad dz=0, \qquad dt=0,$$

talchè queste linee, identiche alle verticali, sono rappresentate dalle equazioni finite

$$(2_b) \qquad \psi=\text{Cost.}, \qquad z=\text{Cost.}, \qquad t=\text{Cost.}$$

Facciamo un esempio semplicissimo.

Prendendo

$$F=x+iy, \qquad Z=-2Tz,$$

dove T è una funzione qualunque di t, si trova

$$Fe^{iZ}=(x+iy)e^{-2iTz},$$

donde

$$\varphi=x\cos 2Tz+y\,\text{sen}\,2Tz, \qquad \psi=-x\,\text{sen}\,2Tz+y\cos 2Tz.$$

Si ottiene così la soluzione

$$u=\cos 2Tz, \qquad v=\text{sen}\,2Tz, \qquad w=0,$$

nella quale la verificazione della proprietà richiesta è immediata, giacchè si trova

$$p=-T\cos 2Tz, \qquad q=-T\,\text{sen}\,2Tz, \qquad r=0$$

e quindi

$$\frac{p}{u}=\frac{q}{v}=-T.$$

Le linee di flusso e verticali sono le rette

$$-x\,\text{sen}\,2Tz+y\cos 2Tz=\text{Cost.}, \qquad z=\text{Cost.}, \qquad t=\text{Cost.}.$$

Questo esempio particolare conduce facilmente a trovarne un altro, pure spettante ad un fluido incompressibile, ma nel quale le molecole fluide non si muovono più parallelamente ad un piano. Se infatti si pone

$$u = T_2 \cos 2 T y + T_3 \operatorname{sen} 2 T z,$$

$$v = T_3 \cos 2 T z + T_1 \operatorname{sen} 2 T x,$$

$$w = T_1 \cos 2 T x + T_2 \operatorname{sen} 2 T y,$$

dove T, T_1, T_2, T_3 sono quattro funzioni arbitrarie del tempo, si trova subito

$$\frac{p}{u} = \frac{q}{v} = \frac{r}{w} = T.$$

Si può indicare un'altra classe di soluzioni, nelle quali il moto non è nè parallelo ad un piano, nè, in generale, spettante ad un fluido incompressibile.

Sia φ una funzione qualunque di x, y e t, e si ponga

$$u = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}, \qquad v = \frac{\partial \varphi}{\partial x},$$

lasciando per un momento indeterminata la terza componente w. Di qui si ricava

$$2p = \frac{\partial w}{\partial y}, \qquad 2q = -\frac{\partial w}{\partial x}, \qquad 2r = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}.$$

La terza delle equazioni (1_a) diventa quindi

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial x} = 0$$

e mostra che w deve avere la forma

$$w = w(\varphi, z, t),$$

donde risulta

$$\frac{2p}{u} = \frac{2q}{v} = -\frac{\partial w}{\partial \varphi}.$$

L'eguaglianza dei due primi rapporti (1) col terzo è dunque espressa dall'equazione

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{1}{2}\frac{\partial (w^2)}{\partial \varphi} = 0.$$

Ma, per essere φ una funzione indipendente da z, dev'essere anche, in virtù di questa stessa equazione,

$$\frac{\partial^2(w^2)}{\partial\varphi\,\partial z}=0,$$

epperò w^2 non può avere che la forma

$$w^2=F(\varphi,\ t)+Z(z,\ t),$$

mentre φ deve soddisfare all'equazione

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{1}{2}\,\frac{\partial F}{\partial\varphi}=0.$$

Supponendo che φ ed F dipendano soltanto da $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$ e da t, quest'equazione diventa

$$2\varphi'(\rho\varphi')'+\rho F'=0,$$

dove l'apice indica derivazione rispetto a ρ. In queste ipotesi particolari le varie formole che precedono si possono riassumere così:

$$u=-\frac{\partial\varphi}{\partial y},\qquad v=\frac{\partial\varphi}{\partial x},\qquad \varphi'(\rho\varphi')'+\rho ww'=0,$$

$$\frac{2p}{u}=\frac{2q}{v}=\frac{2r}{w}=-\frac{w'}{\varphi'}=\frac{(\rho\varphi')'}{\rho w}.$$

Se, per esempio, la componente del moto parallelamente al piano xy è quella dovuta ad una rotazione di velocità angolare costante Ω intorno all'asse delle z, si può porre

$$\varphi=\tfrac{1}{2}\Omega\rho^2$$

e la relazione differenziale fra φ e w diventa

$$2\Omega^2\rho+ww'=0,$$

donde, integrando,

$$2\Omega^2\rho^2+w^2=Z(z,\ t).$$

Si ha dunque definitivamente

$$u=-\Omega y,\qquad v=\Omega x,\qquad w=\sqrt{Z-2\Omega^2\rho^2},$$

$$u^2+v^2+w^2=Z-\Omega^2\rho^2,$$

$$\frac{p}{u}=\frac{q}{v}=\frac{r}{w}=\frac{\Omega}{\sqrt{Z-2\Omega^2\rho^2}}$$

e le linee di flusso sono date dalle equazioni

$$\rho = \text{Cost.}, \qquad \text{Arctg}\,\frac{y}{x} - \int \frac{\Omega\, d z}{\sqrt{Z - 2\Omega^2 \rho^2}} = \text{Cost.}, \qquad t = \text{Cost.}.$$

Il moto definito da queste formole (che può essere limitato ad uno spazio cilindrico) non conviene ad un fluido incompressibile se non quando Z è indipendente da z: in questo caso le linee di flusso sono eliche, aventi per asse comune l'asse delle z.

Questi esempi bastano a stabilire l'esistenza d'un'estesa ed interessante classe di moti dei fluidi, che si possono (per un'ovvia analogia) denominare *moti elicoidali* e nei quali le linee di flusso coincidono in ogni istante ed in ogni punto colle linee vorticali. Le condizioni necessarie e sufficienti a definire questa classe di moti sono le equazioni (1), oppure le (1_a); ma giova notare un'altra forma che si può dare facilmente a queste equazioni. La prima delle equazioni (1_a), ossia la

$$\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) w - \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) v = 0,$$

può trascriversi infatti così

$$\frac{\partial u}{\partial y} v + \frac{\partial u}{\partial z} w = \frac{\partial v}{\partial x} v + \frac{\partial w}{\partial x} w,$$

e da quest'equazione si passa subito alla prima delle tre seguenti:

$$(4) \qquad \left\{ \begin{aligned} u' &= \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial(\omega^2)}{\partial x}, \\ v' &= \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial(\omega^2)}{\partial y}, \\ w' &= \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial(\omega^2)}{\partial z}, \end{aligned} \right.$$

dove u', v', w', sono le derivate totali di u, v, w e dove per brevità si è posto

$$u^2 + v^2 + w^2 = \omega^2.$$

Queste nuove equazioni, di cui una è conseguenza delle altre due, possono essere assunte come caratteristiche d'ogni moto elicoidale.

Ora, dalla nota forma delle equazioni del moto, per i fluidi perfetti, risulta che, se le forze esterne ammettono un potenziale, il trinomio

$$u'\,dx + v'\,dy + w'\,dz$$

è un differenziale esatto rispetto alle coordinate, cioè esiste un potenziale delle accelerazioni. Avendosi, dalle equazioni (4),

$$\frac{\partial w'}{\partial y} - \frac{\partial v'}{\partial z} = 2\frac{\partial p}{\partial t}, \qquad \frac{\partial u'}{\partial z} - \frac{\partial w'}{\partial x} = 2\frac{\partial q}{\partial t}, \qquad \frac{\partial v'}{\partial x} - \frac{\partial u'}{\partial y} = 2\frac{\partial r}{\partial t},$$

si riconosce subito che l'esistenza d'un tal potenziale delle accelerazioni non può conciliarsi coll'ipotesi d'un moto elicoidale se le quantità p, q, r non sono, in questo moto, indipendenti dal tempo. D'altronde, se si denota con μ il valor comune dei tre rapporti (1), cioè se si pone

$$(4_a) \qquad p = \mu u, \qquad q = \mu v, \qquad r = \mu w,$$

e se s'indicano con p_1, q_1, r_1 tre espressioni formate colle p, q, r nello stesso modo in cui queste sono formate colle u, v, w, si ottengono le relazioni

$$2p_1 = 2\mu p + \frac{\partial \mu}{\partial y} w - \frac{\partial \mu}{\partial z} v,$$

$$2q_1 = 2\mu q + \frac{\partial \mu}{\partial z} u - \frac{\partial \mu}{\partial x} w,$$

$$2r_1 = 2\mu r + \frac{\partial \mu}{\partial x} v - \frac{\partial \mu}{\partial y} u,$$

dalle quali segue

$$pp_1 + qq_1 + rr_1 = (p^2 + q^2 + r^2)\mu.$$

Quando dunque le quantità p, q, r, e quindi anche le p_1, q_1, r_1, sono indipendenti dal tempo, il fattore μ non può dipendere neppur esso da questa variabile, e per conseguenza, (4_a), anche le componenti di velocità non possono essere funzioni che delle coordinate. Si ottiene così il teorema seguente: *quando esiste potenziale d'accelerazione, non si può verificare un moto elicoidale se questo moto non è anche stazionario.* Reciprocamente, dalle equazioni (4) risulta senz'altro che, per ogni moto elicoidale stazionario, esiste un potenziale delle accelerazioni, potenziale il cui valore è $\frac{1}{2}\omega^2$.

Ammessa questa proprietà del moto elicoidale, le equazioni (4_a), derivate ordinatamente rispetto ad x, y, z e sommate, dànno, denotando con ε la densità,

$$\mu\varepsilon' - \mu'\varepsilon = 0:$$

dunque: *in ogni moto elicoidale stazionario il rapporto di μ ad ε si mantiene costante, per ciascuna molecola fluida, in tutto il corso del moto.*

Le equazioni (4) non sono che particolarizzazioni di tre altre, le quali sussistono incondizionatamente. Infatti se al secondo membro dell'eguaglianza

$$(a) \qquad u' = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} u + \frac{\partial u}{\partial y} v + \frac{\partial u}{\partial z} w$$

si aggiunge e si toglie il binomio

$$\frac{\partial v}{\partial x} v + \frac{\partial w}{\partial x} w,$$

si ottiene la prima delle eguaglianze seguenti:

$$u' = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial(\omega^2)}{\partial x} + 2qw - 2rv,$$

$$v' = \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial(\omega^2)}{\partial y} + 2ru - 2pw,$$

$$w' = \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial(\omega^2)}{\partial z} + 2pv - 2qu,$$

dalle quali risultano appunto le equazioni (4), quando si prescriva la proporzionalità (1).

Dalla stessa eguaglianza (a), aggiungendo e togliendo al secondo membro la quantità su, dove

$$s = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z},$$

si deduce anche la prima delle altre eguaglianze seguenti:

$$(5_a) \qquad \begin{cases} u' = \dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{\partial(u^2)}{\partial x} + \dfrac{\partial(uv)}{\partial y} + \dfrac{\partial(uw)}{\partial z} - su, \\[2ex] v' = \dfrac{\partial v}{\partial t} + \dfrac{\partial(vu)}{\partial x} + \dfrac{\partial(v^2)}{\partial y} + \dfrac{\partial(vw)}{\partial z} - sv, \\[2ex] w' = \dfrac{\partial w}{\partial t} + \dfrac{\partial(wu)}{\partial x} + \dfrac{\partial(wv)}{\partial y} + \dfrac{\partial(w^2)}{\partial z} - sw, \end{cases}$$

ed il confronto di queste colle precedenti porge le seguenti identità:

$$
(6) \quad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{\partial\left(u^2 - \frac{\omega^2}{2}\right)}{\partial x} + \frac{\partial(uv)}{\partial y} + \frac{\partial(uw)}{\partial z} = su + 2qw - 2rv,\\
&\frac{\partial(vu)}{\partial x} + \frac{\partial\left(v^2 - \frac{\omega^2}{2}\right)}{\partial y} + \frac{\partial(vw)}{\partial z} = sv + 2ru - 2pw,\\
&\frac{\partial(wu)}{\partial x} + \frac{\partial(wv)}{\partial y} + \frac{\partial\left(w^2 - \frac{\omega^2}{2}\right)}{\partial z} = sw + 2pv - 2qu.
\end{aligned}
\right.
$$

Quando esiste un potenziale di moto φ, si ha

$$
s = \Delta_2 \varphi, \qquad p = q = r = 0
$$

e le relazioni precedenti riproducono le notissime formole di MAXWELL.

Formole molto analoghe sussistono, come si vede, anche nel caso che il moto sia privo di potenziale ed appartenga invece alla classe dei moti elicoidali.

Prese nella loro generalità, le relazioni (6) riproducono quelle altre formole che MAXWELL chiama *equazioni della forza elettromagnetica* (2ª Edizione del *Treatise,* t. II, Art. 643). Per istabilire la coincidenza delle equazioni (6) con quelle di MAXWELL bisogna scrivere

$$
\begin{array}{lcl}
\alpha,\ \beta,\ \gamma & \text{al posto di} & u,\ v,\ w,\\
2\pi u,\ 2\pi v,\ 2\pi w & \text{»} \quad \text{»} & p,\ q,\ r,\\
4\pi m & \text{»} \quad \text{»} & s,
\end{array}
$$

dove α, β, γ sono, per MAXWELL, le componenti della forza magnetica, u, v, w quelle dell'intensità specifica di corrente ed m è la densità della distribuzione newtoniana equivalente, in azione esterna, alla polarizzazione magnetica del mezzo.

LXXXVIII.

SUL PRINCIPIO DI HUYGENS.

Rendiconti del Reale Istituto Lombardo, serie II, tomo XXII (1889), pp. 428-438.

Nella celeberrima *Theorie der Luftschwingungen in Röhren mit offenen Enden*, HELMHOLTZ ha fatto per la prima volta, con felicissimo successo, l'applicazione del teorema di GREEN ad una certa classe di funzioni a tre variabili, che si presentano nello studio del moto vibratorio d'un mezzo elastico ed in altre questioni fisicomatematiche *). A quest'applicazione è stata data da KIRCHHOFF un'ulteriore estensione, col considerare direttamente, al posto delle anzidette funzioni (che dipendono dalle sole coordinate e che figurano negli ultimi risultati come fattori di funzioni periodiche del tempo), le funzioni complete a quattro variabili, coordinate e tempo, che rappresentano sia i potenziali, sia le componenti di spostamento. Mercè questa nuova applicazione del detto teorema, KIRCHHOFF ha potuto facilmente dedurre, nella XXIII delle sue classiche lezioni di meccanica, la famosa formola di POISSON, che è di tanta importanza nella teoria del suono: e, posteriormente, nell'altra non meno classica Memoria *Zur Theorie der Lichtstrahlen* **) è giunto a stabilire una formola ancora più generale, che può servire di base allo studio dei fenomeni ottici, come quella che porge la più precisa e la più completa traduzione analitica del principio di HUYGENS, almeno rispetto ai mezzi isotropi.

In una recente e pregevole Memoria *Sulla propagazione libera e perturbata delle*

*) Il sig. MATHIEU, nella prima parte della sua recente *Théorie du potentiel* (Paris, 1885), consacra un articolo speciale a questo tipo di funzioni, ch'egli denota col nome di *potentiel calorifique*.

**) Sitzungsberichte der k. Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 1882, p. 641.

onde luminose in un mezzo isotropo *), il prof. G. A. MAGGI, egregio Corrispondente di questo Istituto, giudicando per avventura disputabile l'uso fatto da KIRCHHOFF d'una certa funzione ausiliare, per giungere alla formola fondamentale che ho testè ricordata, ha dato di questa formola una nuova dimostrazione, la quale si fonda unicamente sulla necessità che la funzione, cui si tratta di dare una conveniente espressione analitica, soddisfaccia alla nota equazione differenziale dei moti vibratori. Benchè la dimostrazione di KIRCHHOFF possa, a mio avviso, con qualche opportuna modificazione di forma, mettersi al sicuro dall'accennata objezione, riconosco tuttavia che anche quella del prof. MAGGI è perfettamente soddisfacente.

Ciò non pertanto confesso che mi dorrebbe di veder abbandonare il punto di partenza dell'analisi di KIRCHHOFF, voglio dire il teorema di GREEN, parendomi che questo offra la base più naturale ad ogni indagine di tal genere e permetta di giungere alla meta senza nulla anticipare circa la forma del risultato di cui si va in cerca.

Questa considerazione mi induce a comunicare al R. Istituto, nella presente Nota, un altro procedimento dimostrativo, che è molto simile, nell'indole sua generale, a quello di KIRCHHOFF, ma che se ne scosta sotto diversi aspetti, rimovendo, in particolare, quei dubbi che l'originaria dimostrazione potrebbe lasciar sussistere.

Premetto che l'equazione d'onde è partito KIRCHHOFF non è propriamente quella che va nota sotto nome di *teorema* di GREEN **), ma quell'altra che io chiamerei più volentieri *lemma* di GREEN ***) e che involge due distinte funzioni, niuna delle quali presenta valori critici nel campo d'integrazione. Ora a me pare che convenga invece prendere le mosse appunto dal teorema di GREEN propriamente detto, assoggettando però la formola in cui si traduce questo teorema ad una preliminare modificazione, che in apparenza è di lievissimo conto, ma che riesce in realtà di molto vantaggio per la questione attuale e fors'anche per altre.

Credo di giovare alla chiarezza, senza allungare gran fatto il discorso, risalendo alla prima fonte del processo analitico cui alludo.

Questa prima fonte, che è al tempo stesso (come già più volte ho avuto occasione di notare) l'origine vera di tutte le formole che appartengono al tipo di quelle di GREEN, è da cercarsi nelle proposizioni stabilite da GAUSS, fino dal 1813, nella notissima Memoria intitolata *Theoria attractionis corporum homogeneorum,* ed è rappresentata, in modo del tutto esplicito, da una formola dell'Art. 10 degli *Allgemeine Lehrsätze* (1840). Questa formula, traduzione pressochè intuitiva del processo d'integrazione per coordinate po-

---

*) Annali di Matematica, serie II, tomo XVI (1888), pp. 21-48.

**) *Essay*, eq. (3) dell'Art. 3.

***) *Ibid.*, eq. (2).

lari, è la seguente:

$$(1) \qquad \int \frac{\partial U}{\partial r}\frac{dS}{r^2} = \int U \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} d\sigma - (\sigma)_0 U_0,$$

dove S è uno spazio finito qualunque, σ è la totale superficie che lo limita, n è la normale interna a questa superficie (cioè la normale che penetra in S), r è la distanza assoluta d'un qualunque punto fisso, o polo ($r = 0$), da un punto variabile sia dello spazio S, sia della superficie σ, e finalmente U_0, $(\sigma)_0$ sono i valori che prendono nel polo la funzione U delle tre coordinate e quello che si suol chiamare angolo visuale della superficie σ (riguardando come positiva la faccia interna di questa, ossia quella che è rivolta verso lo spazio S). Per la validità di questa formola si richiede che U sia funzione monodroma, continua e dotata di derivate prime integrabili in tutto lo spazio S: questa funzione può avere degli infiniti di prim'ordine isolati, purchè nessuno di essi cada nel polo ($r = 0$), il quale, nelle deduzioni che sto per fare, può essere od interno, nel qual caso si ha $(\sigma)_0 = 4\pi$, od esterno, nel qual caso si ha $(\sigma)_0 = 0$.

Nella formola (1) rientrano, come casi particolari conosciutissimi, quelle tre di cui la prima è

$$(1_a) \qquad \int \frac{\partial U}{\partial x} dS = -\int U \frac{\partial x}{\partial n} d\sigma,$$

e che sussistono nelle medesime condizioni: esse corrispondono, in sostanza, all'ipotesi che il polo sia situato all'infinito, nella direzione delle x, oppure delle y, oppure delle z, e sono la traduzione del *Theorema tertium* della citata *Theoria attractionis.*

Ciò premesso, sieno φ ed F due funzioni monodrome, continue e finite colle loro derivate prime, e dotate di derivate seconde integrabili in tutto lo spazio S. Designando per brevità con Σ una somma relativa alle tre coordinate x, y, z, si deduce dall'equazione (1_a) e dalle due analoghe la relazione seguente:

$$(a) \qquad \Sigma \int \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\varphi}{r}\right) dS + \int \frac{\partial F}{\partial n}\frac{\varphi\, d\sigma}{r} = 0.$$

Sia F_0 il valore di F nel polo ($r = 0$), valore che si deve porre uguale a 0, quando questo punto sia esterno. Ponendo

$$\psi' = \frac{F - F_0}{r}, \qquad F = F_0 + r\psi',$$

si ha identicamente

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\varphi}{r} = \varphi\frac{\partial \psi'}{\partial x} - (F - F_0)\varphi\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x},$$

donde

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\varphi}{r}\right)=\varphi\frac{\partial^2\psi'}{\partial x^2}+\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial x}-\frac{\partial(F\varphi)}{\partial x}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}-(F-F_0)\varphi\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial x^2},$$

ove si è posto

$$\psi=\frac{F}{r}.$$

Ora i due integrali

$$\int\varphi\frac{\partial^2\psi'}{\partial x^2}dS,\qquad\int(F-F_0)\varphi\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial x^2}dS,$$

sono *proprî* (giusta l'opportuna dicitura adoperata dal prof. MORERA, nella Nota *Sulle derivate seconde della funzione potenziale di spazio* *), che qui giova aver presente), e così dicasi dei quattro analoghi: si ha quindi

$$\Sigma\int\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\varphi}{r}\right)dS=\int\left[\varphi\Delta_2\psi'+\Delta_1\varphi\psi+\frac{\partial(F\varphi)}{\partial r}\frac{1}{r^2}\right]dS,$$

ed in virtù del teorema (1) di GAUSS.

$$\Sigma\int\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\varphi}{r}\right)dS=\int(\varphi\Delta_2\psi'+\Delta_1\varphi\psi)dS+\int F\varphi\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}d\sigma-4\pi F_0\varphi_0.$$

Conseguentemente la relazione (a) si può trasformare nella seguente:

$$4\pi F_0\varphi_0=\int(\varphi\Delta_2\psi'+\Delta_1\varphi\psi)dS+\int\varphi\frac{\partial\psi}{\partial n}d\sigma.$$

Ma la stessa relazione (a), nelle ipotesi ammesse, sussiste egualmente se vi si permutano fra loro le due funzioni φ ed F, con che essa si converte nella

$$\Sigma\int\frac{\partial}{\partial x}\left(\psi\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)dS+\int\psi\frac{\partial\varphi}{\partial n}d\sigma=0,$$

ed è subito riducibile alla forma

$$0=\int(\psi\Delta_2\varphi+\Delta_1\varphi\psi)dS+\int\psi\frac{\partial\varphi}{\partial n}d\sigma.$$

---

*) Rendiconti del R. Istituto Lombardo, serie II, tomo XX (1887), pp. 302-310.

Sottraendo quest'ultima equazione dalla già ottenuta, si trova

$$(2)\qquad 4\pi F_0 \varphi_0 = \int (\varphi \Delta_2 \psi' - \psi \Delta_2 \varphi) dS + \int \left(\varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n}\right) d\sigma,$$

dove è bene rammentare che si è posto

$$(2_a)\qquad \psi = \frac{F}{r}, \qquad \psi' = \frac{F - F_0}{r},$$

e che si deve porre $F_0 = 0$ se il polo è esterno.

Quest'equazione (2) rappresenta quella lieve modificazione, o generalizzazione che dir si voglia, dell'ordinario teorema di GREEN, alla quale ho fatto più sopra allusione e che parmi degna di nota, anche indipendentemente dall'applicazione qui avuta in vista. Credo utile aggiungere, ancora in via generale, che l'integrale

$$\int \varphi \Delta_2 \psi' dS,$$

per essere *proprio* (come ho già notato), differisce infinitamente poco (MORERA, Nota citata) da quell'altro che se ne ricaverebbe togliendo al campo S un intorno evanescente del polo (ove questo fosse interno): il quale altro integrale, prescindendo dalla variazione evanescente del campo, non sarebbe poi altro che

$$\int \varphi \Delta_2 \psi dS.$$

Scrivendo, *con questo sottinteso*, ψ in luogo di ψ', la formola (2) assume un aspetto ancora più somigliante a quella data da GREEN *).

Dopo tutti questi preliminari, vengo alla dimostrazione della formola di KIRCHHOFF.

Le due funzioni φ e ψ dipendano non soltanto dalle tre coordinate x, y, z, ma altresì dal tempo t e soddisfacciano alle note equazioni differenziali

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = a^2 \Delta_2 \varphi, \qquad \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = a^2 \Delta_2 \psi,$$

dove a è la velocità di propagazione del moto vibratorio che si considera. Tenendo

*) La citata formola (3). Art. 3, dell'*Essay* non sussiste che con questo sottinteso, ed altrettanto debbo dire delle formole (7_a) ed (8_a) della mia Memoria: *Sull'uso delle coordinate curvilinee nelle teorie del potenziale e dell'elasticità* [Memorie della R. Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna, serie IV, tomo VI (1884), pp. 401-448; oppure queste OPERE, tomo IV, pp. 136-179].

conto della forma (2_a) assegnata alla funzione ψ, si presenta naturalmente l'idea di prendere

$$F = F(r + at),$$

non già invero perchè questa sia l'unica forma attribuibile ad F, ma perchè essa è indubbiamente la più semplice possibile. Bisogna porre, per conseguenza, $F_0 = F(at)$, oppure $F_0 = 0$, secondo che il polo sia interno od esterno, e bisogna inoltre ammettere che F, considerata come funzione dell'unico argomento $r + at$, abbia la derivata seconda integrabile: e le stesse proprietà debbono presupporsi, rispetto alla nuova variabile t, per l'altro integrale φ dell'equazione differenziale, la forma del quale è lasciata, quanto al resto, indeterminata. In tali condizioni, l'equazione (2), ove si scriva ψ in luogo di ψ' col sottinteso già sopra espresso, si converte nella

$$4\pi F_0 \varphi_0 = \int \left(\varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) d\sigma + \frac{d}{dt} \int \left(\varphi \frac{\partial \psi}{\partial t} - \psi \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) dS,$$

nell'ultimo termine della quale il sottinteso anzidetto diventa superfluo, giacchè l'integrale

$$\int \varphi \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} dS,$$

è proprio. Essendo poi

$$\frac{\partial \psi}{\partial n} = F \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} + \frac{1}{ar} \frac{\partial F}{\partial t} \frac{\partial r}{\partial n},$$

e potendosi quindi scrivere

$$\varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} = F \varphi \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} + \frac{1}{ar} \frac{\partial r}{\partial n} \frac{\partial (F\varphi)}{\partial t} - \frac{1}{ar} \frac{\partial r}{\partial n} F \frac{\partial \varphi}{\partial t},$$

l'equazione testè stabilita può mettersi sotto la forma

$$(b) \qquad 4\pi F_0 \varphi_0 = \int F(r + at) G(t) d\sigma + \frac{dH}{dt},$$

dove per brevità si è posto

$$(3) \qquad G(t) = \varphi \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} - \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \frac{1}{ar} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \frac{\partial r}{\partial n},$$

$$H = \int \left(\varphi \frac{\partial \psi}{\partial t} - \psi \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) dS + \frac{1}{a} \int F(r + at) \varphi \frac{\partial r}{\partial n} \frac{d\sigma}{r},$$

lasciando in evidenza, nella prima di queste due espressioni, quella sola variabile t, che giova nel seguito di considerare.

Suppongasi ora che la funzione φ non abbia valori se non da un determinato istante in poi, e sia, o possa considerarsi come nulla, colle sue derivate, in ogni istante anteriore. Suppongasi, per converso, che la funzione F cessi d'aver valori da un certo valore del suo argomento in poi e sia, o possa considerarsi come nulla, colle sue derivate, per ogni valore superiore al predetto; il quale del resto si può e si deve prendere così grande, da superare quel qualunque valore finito del prodotto at che occorra di considerare. In tali condizioni, integrando (b) rispetto a t, da $t = -\infty$ a $t = \infty$, si ottiene

$$4\pi \int_{-\infty}^{\infty} F_0 \varphi_0 \, dt = \int d\sigma \int_{-\infty}^{\infty} F(r + at)\, G(t)\, dt,$$

ossia, introducendo nel secondo membro una nuova variabile s invece di t, col porre $r + at = as$,

$$4\pi \int_{-\infty}^{\infty} F_0 \varphi_0 \, dt = \int_{-\infty}^{\infty} F(as)\, ds \int G\left(s - \frac{r}{a}\right) d\sigma,$$

e finalmente

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(at)\left[4\pi\varphi_0 - \int G\left(t - \frac{r}{a}\right) d\sigma\right] dt = 0.$$

Ora la funzione F è interamente arbitraria: la precedente eguaglianza non può dunque sussistere se non si abbia sempre

$$(4) \qquad 4\pi\varphi_0 = \int G\left(t - \frac{r}{a}\right) d\sigma,$$

giacchè in ogni altra ipotesi si potrebbe disporre di F in guisa da rendere diverso da zero il primo membro dell'eguaglianza stessa.

L'equazione (4) è, in sostanza, la formola di Kirchhoff. Per ridurla alla forma nota bisogna operare una piccola trasformazione sull'espressione (3), trasformazione che si può fare in due modi.

Indicando generalmente colle parentesi quadre il risultato della sostituzione, in quell'espressione che si trova in esse racchiusa, di $t - \frac{r}{a}$ al posto di t, si ha dapprima

$$-\frac{1}{a} \frac{\partial r}{\partial n}\left[\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right] = \frac{\delta[\varphi]}{\delta n},$$

dove la caratteristica δ si riferisce ad una derivazione eseguita con solo riguardo alla variabilità di r. Con tale convenzione si ha, (3),

$$G\left(t-\frac{r}{a}\right)=\frac{\delta}{\delta n}\frac{[\varphi]}{r}-\frac{1}{r}\left[\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right], \tag{4$_a$}$$

e questa è l'espressione adoperata da KIRCHHOFF.

Ma si può anche scrivere

$$G\left(t-\frac{r}{a}\right)=-\frac{1}{r^2}\left[\frac{1}{a}\frac{\partial r}{\partial n}\frac{\partial(r\varphi)}{\partial t}+\frac{\partial(r\varphi)}{\partial n}\right], \tag{4$_b$}$$

dove le derivate normali sono le solite, cioè quelle che provengono dalla variabilità normale delle x, y, z contenute in $\varphi(x, y, z, t)$ e da quella della r visibile. Questa seconda forma lascia meglio riconoscere la relazione che passa fra la formola generale di KIRCHHOFF e quella di POISSON. Quest'ultima si ottiene supponendo che la superficie σ sia sferica, col centro nel polo e col raggio $r = at$. In questo caso l'espressione (4$_b$) diventa

$$G(0)=\frac{1}{r^2}\left\{\frac{1}{a}\frac{\partial(r\varphi)}{\partial t}+\frac{\partial(r\varphi)}{\partial r}\right\}_{t=0} \tag{5}$$

ed è sostanzialmente quella che figura nella formola di POISSON

$$\varphi_0=\frac{1}{4\pi}\int G(0)\,d\sigma, \qquad (r=at). \tag{5$_a$}$$

Giova notare che l'espressione

$$\frac{1}{a}\frac{\partial(r\varphi)}{\partial t}+\frac{\partial(r\varphi)}{\partial r},$$

è quella stessa che, allorquando φ si riferisce ad un'onda sferica col centro nel polo, definisce, col suo annullarsi, il carattere *progressivo* dell'onda: carattere il quale risiede, come rettamente avvertiva POISSON (in un passo riportato dal sig. POINCARÉ, a p. 80 della sua recente ed interessantissima *Théorie mathématique de la lumière*) in un certo « rapport déterminé qui subsiste entre les condensations et les vitesses propres des molécules » *). Questa circostanza si presterebbe, come voglio accennare qui solo per incidenza, a dare un enunciato elegante all'equazione (5$_a$), considerandola come rappresen-

*) POISSON pensava ad onde longitudinali.

tativa d'un'azione a distanza che emanasse da ogni elemento della superficie σ e che giungesse al polo dopo un intervallo di tempo $t = \frac{r}{a}$.

Poichè ho testè ricordata l'importante pubblicazione del chiaro POINCARÉ, mi sia lecito approfittare delle formole precedenti per completare in ogni punto la giustificazione ivi data del principio di HUYGENS, nel caso delle onde sferiche (Art. 75 della citata *Théorie*).

Abbiasi, per $t = 0$,

$$\varphi = \Phi, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \Phi',$$

e sia ρ_0 la distanza del polo ($r = 0$) dal centro dell'onda iniziale: sia inoltre ρ la distanza di questo centro da un punto qualunque della superficie sferica σ: Φ e Φ' sono funzioni date di ρ. Denotando con θ l'angolo che il raggio qualunque $r (= at)$ di σ fa col prolungamento di ρ_0, si ha

$$\rho^2 = \rho_0^2 + r^2 + 2\rho_0 r \cos\theta,$$

e la formola di POISSON dà

$$\varphi_0 = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(\frac{r}{a}\Phi' + \Phi + r\frac{\partial \Phi}{\partial r}\right)\operatorname{sen}\theta\, d\theta.$$

Ma si ha

$$\frac{\partial \Phi}{\partial r} = \frac{r + \rho_0\cos\theta}{\rho}\frac{d\Phi}{d\rho} = \frac{\rho^2 + r^2 - \rho_0^2}{2r\rho}\frac{d\Phi}{d\rho},$$

opperò, introducendo ρ come variabile d'integrazione, si ottiene

$$\varphi_0 = \frac{1}{2\rho_0}\int_{\rho'}^{\rho''}\left\{\frac{\rho}{a}\Phi' + \frac{1}{2r}\frac{d}{d\rho}[(\rho^2 + r^2 - \rho_0^2)\Phi]\right\}d\rho,$$

o meglio

$$\varphi_0 = \frac{1}{2\rho_0}\int_{\rho'}^{\rho''}\left\{\frac{\rho}{a}\Phi' \pm \frac{d(\rho\Phi)}{d\rho} + \frac{1}{2r}\frac{d}{d\rho}[((\rho \mp r)^2 - \rho_0^2)\Phi]\right\}d\rho,$$

dove $\rho'' = \rho_0 + r$, $\rho' = |\rho_0 - r|$.

Considerando quindi separatamente i due casi dell'onda progressiva e dell'onda regressiva, caratterizzati dall'eguaglianza

$$\frac{\rho}{a}\Phi' \pm \frac{d(\rho\Phi)}{d\rho} = 0,$$

col segno superiore nel primo caso e coll'inferiore nel secondo, si ha

$$\varphi(\rho_0, t) = \frac{1}{4\rho_0 a t}[(\rho + \rho_0 \mp at)(\rho - \rho_0 \mp at)\Phi(\rho)]_{\rho'}^{\rho''},$$

donde si trae, prendendo il segno superiore,

$$\varphi(\rho_0, t) = \frac{(\rho_0 - at)\Phi(\rho_0 - at)}{\rho_0}, \qquad \text{se} \qquad \rho_0 > at$$

$$\varphi(\rho_0, t) = 0 \qquad \text{se} \qquad \rho_0 < at,$$

e prendendo il segno inferiore (senza tener conto dell'onda progressiva che si forma dopo la riflessione sul centro), in ogni caso,

$$\varphi(\rho_0, t) = \frac{(\rho_0 + at)\Phi(\rho_0 + at)}{\rho_0}.$$

Se si suppone che l'onda iniziale sia sottilissima e se si prende Φ sotto la forma

$$\Phi(\rho) = \frac{f(\rho)}{\rho},$$

queste formole dànno senz'altro la completa giustificazione del principio di Huygens nel caso delle onde sferiche, caso certamente assai semplice, ma altrettanto fondamentale per la chiara intelligenza del principio stesso.

LXXXIX.

NOTE FISICO-MATEMATICHE;

(Lettera al prof. ERNESTO CESÀRO).

Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, tomo III (1889), pp. 67-79.

Traggo occasione dall'interesse col quale Ella da qualche tempo si è data a coltivare gli studî di fisica matematica, alquanto negletti presso di noi, per comunicarle alcune piccole osservazioni, attinenti a tali studî.

La prima si riferisce ad un punto della teoria del magnetismo, e precisamente al potenziale d'un corpo magnetico sopra sè stesso, che è quanto dire alla misura dell'energia magnetica di questo corpo.

Denotando con V la funzione potenziale d'un tal corpo, si hanno per questa due distinte espressioni, che occorre quasi sempre di considerare ad un tempo. L'una è

$$V = \int \left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial a} \alpha + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial b} \beta + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial c} \gamma \right) dS,$$

dove a, b, c sono le coordinate dell'elemento dS del corpo, α, β, γ sono le componenti del momento magnetico riferito all'unità di volume ed r è la distanza dell'elemento dS dal punto potenziato. L'altra è

$$V = \int \frac{k\,dS}{r} + \int \frac{h\,d\sigma}{r},$$

dove dS ha lo stesso significato di dianzi, $d\sigma$ è l'elemento di ogni superficie che serva di limite al corpo o che ne separi due regioni di natura e però di distribuzione magnetica diversa, r è la distanza dell'elemento dS, oppure $d\sigma$, dal punto potenziato, e finalmente k ed h hanno i valori seguenti:

$$k = -\left(\frac{\partial \alpha}{\partial a} + \frac{\partial \beta}{\partial b} + \frac{\partial \gamma}{\partial c}\right), \qquad h = -(\delta_n + \delta_{n'}),$$

nel secondo dei quali δ_n e $\delta_{n'}$ sono le componenti del momento $\delta = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}$ secondo le due opposte normali n ed n' della superficie σ nel punto (a, b, c) di questa, coll'avvertenza che, ove si tratti della superficie limite, di cui sia n la normale interna, bisogna porre $\delta_{n'} = 0$.

Di queste due forme della funzione potenziale magnetica chiamerei volentieri la prima *forma polare,* la seconda *forma apolare,* e ciò per ragioni facilmente desumibili dalla loro rispettiva origine ed interpretazione.

Risultando dalla forma apolare di V che questa è funzione potenziale d'una distribuzione newtoniana mista, superficiale e cubica, si è tratti a prima vista ad assumere come espressione del potenziale P del corpo sopra sè stesso l'elegantissima formola di W. THOMSON

$$P = \int \frac{\Delta_1 V}{8\pi} dS_\infty,$$

dove S_∞ indica lo spazio infinito: e tale non di rado si dice essere il potenziale d'un corpo magnetico. Ma forti ragioni impediscono di considerare questa come l'espressione completa del potenziale medesimo. Basti dire che con questa forma non si può render conto dell'induzione magnetica, ove si voglia che le equazioni di questa, come quelle dell'induzione elettrostatica, scaturiscano dalla necessità che, nello stato d'equilibrio magnetico fra l'inducente e l'indotto, il potenziale totale del sistema diventi un minimo. Seguendo l'accennata analogia elettrostatica si giunge invece, in diversi modi, a concludere che alla precedente espressione conviene aggiungere un termine della forma

$$\int \Psi(\alpha, \beta, \gamma)\, dS,$$

dove Ψ è una funzione quadratica ed omogenea delle tre componenti del momento unitario e dove l'integrazione si estende a tutto lo spazio occupato dal corpo. I coefficienti di questa funzione Ψ sono quantità che dipendono dalla natura fisica del corpo e che possono anche, almeno teoricamente, variare con data legge da punto a punto. Ma comunque esse possano variare, è sempre lecito, per ogni singolo punto del corpo, supporre gli assi orientati in modo che sia

$$\Psi = \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha^2}{\varkappa_x} + \frac{\beta^2}{\varkappa_y} + \frac{\gamma^2}{\varkappa_z}\right),$$

e le quantità $\varkappa_x$, $\varkappa_y$, $\varkappa_z$ sono allora, per quel punto, i coefficienti d'induzione del corpo nel senso dei tre assi, coefficienti che si riducono ad un solo $\varkappa = \varkappa_x = \varkappa_y = \varkappa_z$ quando il corpo è magneticamente isotropo, nel qual caso l'orientazione degli assi diventa indifferente. Con questi coefficienti si formano poi quelli cosidetti di permeabilità:

$$\mu_x = 1 + 4\pi\varkappa_x, \qquad \mu_y = 1 + 4\pi\varkappa_y, \qquad \mu_z = 1 + 4\pi\varkappa_z,$$

i quali sono specialmente notevoli per ciò che l'esperienza li additerebbe come costantemente positivi, mentre quelli d'induzione sono positivi per i corpi paramagnetici, negativi per i diamagnetici.

Premesso tutto ciò ed assumendo, in base al finquì detto,

$$P = \int \frac{\Delta_1 V}{8\pi} dS_\infty + \int \Psi\, dS$$

come espressione completa (o polare) del potenziale magnetico d'un corpo sopra sè stesso, e però come misura della sua energia magnetica, si presenta una quistione fondamentale, ed è questa. Se l'espressione precedente è veramente quella della totale energia magnetica del corpo, essa deve risultare sempre positiva, nè deve potersi ridurre a zero che mediante il totale annullamento d'ogni magnetizzazione, cioè per $\alpha = \beta = \gamma = 0$ in tutto il corpo, nel qual caso è anche $V = 0$. Ora, che la precedente espressione possegga effetivamente questo carattere, è manifesto senz'altro nel caso dei corpi paramagnetici, poichè allora la quadratica Ψ è essenzialmente positiva: ma nel caso dei corpi diamagnetici, questa quadratica è negativa ed il segno di P riesce incerto.

Non mi è mai avvenuto, forse per imperfetta mia cognizione della bibliografia relativa all'argomento, di trovare discussa questa difficoltà: ma confesso che per lungo tempo non sono stato alieno dal credere alla possibilità di stabilire, coll'ajuto di qualche trasformazione opportuna, la positività di P come conseguenza di quella dei coefficienti μ. Solo recentemente mi sono persuaso del contrario, ed ecco come.

Ella sa che la forza esercitata da un corpo magnetico sopra uno dei proprì punti non è affatto determinata, nè determinabile, a cagione dell'ignoranza in cui siamo circa l'intima costituzione magnetica dei corpi. La forza che MAXWELL denomina *magnetica,* e che è definita dalle componenti

$$X = -\frac{\partial V}{\partial x}, \qquad Y = -\frac{\partial V}{\partial y}, \qquad Z = -\frac{\partial V}{\partial z},$$

non è che la *forza apolare,* quella, cioè, che si produrrebbe effettivamente se, invece della distribuzione polare (α, β, γ), esistesse nel corpo la distribuzione apolare (h, k), di pari funzione potenziale. Fra le molte altre forze che, sotto diversi punti di vista, si possono considerare come rappresentanti l'azione magnetica del corpo, ve n'è però una le cui componenti hanno le espressioni

$$X' = 4\pi\alpha - \frac{\partial V}{\partial x}, \qquad Y' = 4\pi\beta - \frac{\partial V}{\partial y}, \qquad Z' = 4\pi\gamma - \frac{\partial V}{\partial z}$$

(dove le α, β, γ si riferiscono agli argomenti x, y, z) e che, come tutte le altre testè accennate, si riduce alla precedente nei punti esterni al corpo. Essa è quella forza che MAXWELL denomina *induzione magnetica* e che THOMSON aveva già in tal qual modo contrapposto alla precedente colla nota considerazione delle « crevasses ». Si può credere, dietro certi indizî, che essa sia veramente da riguardarsi come quella che funge da *forza polare,* in opposizione alla apolare di dianzi. Ma checchè sia di ciò, égli è appunto colla considerazione di questa forza che ho potuto risolvere la difficoltà circa il segno di P.

Si ha infatti

$$R^2 = X'^2 + Y'^2 + Z'^2 = 16\pi^2(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)$$
$$- 8\pi\left(\frac{\partial V}{\partial x}\alpha + \frac{\partial V}{\partial y}\beta + \frac{\partial V}{\partial z}\gamma\right) + \Delta_1 V,$$

donde, integrando su tutto lo spazio,

$$\int \frac{R^2}{8\pi} dS_\infty = 2\pi \int (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) dS$$
$$- \int \left(\frac{\partial V}{\partial x}\alpha + \frac{\partial V}{\partial y}\beta + \frac{\partial V}{\partial z}\gamma\right) dS + \int \frac{\Delta_1 V}{8\pi} dS_\infty .$$

Da questa relazione, in virtù della ricordata formola di THOMSON

$$\int \left(\frac{\partial V}{\partial x}\alpha + \frac{\partial V}{\partial y}\beta + \frac{\partial V}{\partial z}\gamma\right) dS = \int \frac{\Delta_1 V}{4\pi} dS_\infty ,$$

si deduce l'eguaglianza

$$\int \frac{\Delta_1 V}{8\pi} dS_\infty = 2\pi \int (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) dS - \int \frac{R^2}{8\pi} dS_\infty ,$$

la quale permette di porre la precedente espressione del potenziale sotto la nuova forma seguente:

$$P = \int [\Psi + 2\pi(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)] dS - \int \frac{R^2}{8\pi} dS_\infty .$$

Ora, qualunque sia il posto occupato nel corpo dall'elemento dS, si può sempre supporre, per ciò che ho già ricordato, che gli assi coordinati sieno orientati in modo da rendere, in quel posto,

$$\Psi + 2\pi(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) = \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha^2}{\varkappa_x} + \frac{\beta^2}{\varkappa_y} + \frac{\gamma^2}{\varkappa_z}\right) + 2\pi(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{(1 + 4\pi\varkappa_x)\alpha^2}{\varkappa_x} + \frac{(1 + 4\pi\varkappa_y)\beta^2}{\varkappa_y} + \frac{(1 + 4\pi\varkappa_z)\gamma^2}{\varkappa_z}\right]$$

$$= \frac{\mu_x\alpha^2}{2\varkappa_x} + \frac{\mu_y\beta^2}{2\varkappa_y} + \frac{\mu_z\gamma^2}{2\varkappa_z}.$$

Ammesso che i coefficienti di permeabilità μ_x, μ_y, μ_z sieno sempre positivi, il segno di quest'espressione è positivo nei corpi paramagnetici, negativo nei diamagnetici: tale è, per conseguenza, il segno del primo termine della nuova espressione trovata per P, qualunque sia l'orientazione degli assi. Poichè dunque l'altro términe è essenzialmente negativo, si deve concludere che, per i corpi diamagnetici, la quantità P è sempre negativa e non si annulla che per $\alpha = \beta = \gamma = 0$, nel qual caso è anche $V = 0$ e quindi $R = 0$. L'energia d'un corpo diamagnetico avrebbe dunque un valore *negativo*.

Questo risultato ne trae con sè un altro, che non è meno inverosimile. È noto che se alla distribuzione indotta in un corpo da azioni magnetiche esterne, date ed invariabili, si sovrappone un'altra distribuzione magnetica qualunque, il potenziale di tutto il sistema si accresce d'una quantità che è semplicemente eguale al potenziale della distribuzione sovrapposta all'indotta. Risulta di qui, tenendo conto del risultato precedente, che se il corpo indotto è paramagnetico, il potenziale totale aumenta quando cessa l'equilibrio d'induzione, mentre, se il corpo è diamagnetico, il potenziale diminuisce: nel primo caso dunque il potenziale totale sarebbe minimo nello stato d'equilibrio, nel secondo invece sarebbe massimo, cioè l'equilibrio d'induzione diamagnetica sarebbe instabile.

Queste incongruenze mi sembrano tali da rendere sempre più probabile la nota ipotesi di FARADAY, d'una polarizzabilità di tutto lo spazio, con coefficiente positivo per questo come per ogni corpo in esso immerso: mercè quest'ipotesi l'induzione diamagnetica viene ridotta, com'è noto, ad una mera apparenza.

Gli altri argomenti su cui mi proponevo d'intrattenerla si riferivano alla teoria dell'elasticità: ma per questa volta mi limiterò a semplici osservazioni d'indole didattica, suggeritemi da alcuni passi dell'interessante Corso litografato di Lezioni sull'anzidetta teoria, che Ella si compiacque d'inviarmi.

Per dedurre le espressioni del potenziale unitario d'elasticità, nelle diverse ipotesi particolari che si sogliono fare circa la natura del mezzo elastico cui il potenziale deve riferirsi, si fa uso quasi sempre di certe trasformazioni di coordinate, le quali devono lasciare inalterato il potenziale medesimo. Questa considerazione, la quale conduce a calcoli più o meno prolissi e poco eleganti, può essere del tutto eliminata invocando le proprietà invariantive delle sei componenti di deformazione, cioè di quelle sei quantità che designerò, com'Ella fa seguendo il BETTI ed altri Autori, con a, b, c, f, g, h, dove

$$a=\frac{\partial u}{\partial x}, \qquad b=\frac{\partial v}{\partial y}, \qquad c=\frac{\partial w}{\partial z},$$

$$2f=\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}, \qquad 2g=\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}, \qquad 2h=\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Spiegherò il mio concetto con un solo esempio, il quale è però sufficiente a far comprendere di che si tratti.

Dall'equazione di 3° grado che porge le tre dilatazioni principali risulta immediatamente che le tre espressioni

$$a+b+c,$$

$$bc-f^2+ca-g^2+ab-h^2,$$

$$abc+2fgh-af^2-bg^2-ch^2$$

sono invarianti ortogonali di deformazione, sono, cioè, quantità che non cambiano di valore, in ciascun punto del mezzo, qualunque sia la terna ortogonale d'assi di riferimento. Queste quantità s'incontrano del resto, con altra interpretazione, fin dai primi passi nella teoria delle superficie di second'ordine.

Ora supponiamo che si voglia assegnare la forma del potenziale d'elasticità per quei mezzi che presentano il carattere della cosidetta isotropia incompleta, per i quali, cioè, esiste in ogni punto un asse d'elasticità distinto, di data direzione, mentre ogni direzione normale a questa appartiene ad un altro asse d'elasticità, indistinto od indifferente. Questa costituzione teorica del mezzo rappresenterebbe abbastanza bene, secondo il competentissimo DE SAINT VENANT, il carattere elastico dei corpi dotati di struttura fibrosa, e si presta perciò molto opportunamente alla trattazione dei problemi che si devono risolvere in vista di pratiche applicazioni.

Supponiamo che la direzione dell'asse distinto d'elasticità sia quella delle z. Ordinando come segue rispetto a c i tre invarianti sopra citati

$$(a+b)+c,$$

$$(ab-f^2-g^2-h^2)+(a+b)c,$$

$$(2fgh-af^2-bg^2)+(ab-h^2)c,$$

si riconosce immediatamente che quando, restando fisso l'asse delle z, si spostano gli altri due assi, rimane invariata non solo la quantità c, dilatazione arbitraria nel senso dell'asse fisso, ma eziandio ciascuna delle espressioni seguenti:

$$a+b, \qquad ab-f^2-g^2-h^2, \qquad ab-h^2, \qquad 2fgh-af^2-bg^2.$$

Abbandonando l'ultima di queste, che è di grado superiore al secondo, e semplificando la seconda per mezzo della terza, si hanno dunque quattro espressioni di primo e di secondo grado, cioè

$$a+b, \qquad c, \qquad ab-h^2, \qquad f^2+g^2,$$

che non cambiano di valore nella trasformazione e colle quali si possono formare *cinque*, e non più, espressioni linearmente indipendenti di secondo grado, dotate della stessa proprietà, cioè

$$(a+b)^2, \qquad (a+b)c, \qquad c^2, \qquad ab-h^2, \qquad f^2+g^2.$$

Sommando queste cinque espressioni, moltiplicate per altrettante costanti, si ottiene l'espressione cercata

$$\Pi = \tfrac{1}{2}A(a+b)^2 + B(a+b)c + \tfrac{1}{2}Cc^2 + D(h^2-ab) + E(f^2+g^2)$$

del potenziale unitario d'un mezzo elastico dotato d'isotropia incompleta, sotto la forma che è la più comoda nelle applicazioni, come ho potuto verificare in molte circostanze. Nè si può dubitare che questa forma non sia la più generale possibile, se si riflette che i nove coefficienti di Π per i mezzi dotati di tre assi distinti d'elasticità si riducono già a sei, quando due di questi assi sono fra loro permutabili, e che l'ulteriore restrizione, inclusa nel concetto di isotropia incompleta, deve assorbire almeno uno di questi sei coefficienti.

Le sei componenti di pressione X_x, X_y, etc. hanno gli identici invarianti di quelle di deformazione e però si può affermare *a priori* che il potenziale dello stesso mezzo, espresso per queste nuove componenti, deve prendere l'analoga forma

$$\Pi = \tfrac{1}{2}A'(X_x+Y_y)^2 + B'(X_x+Y_y)Z_z + \tfrac{1}{2}C'Z_z^2$$
$$+ D'(X_y^2 - X_xY_y) + E'(Y_z^2+Z_x^2).$$

Un facile calcolo conduce a trovare, per i nuovi coefficienti costanti di questa seconda espressione, i valori seguenti:

$$A' = \frac{AC - B^2}{DK}, \qquad B' = -\frac{B}{K}, \qquad C' = \frac{2A - D}{K},$$

$$D' = \frac{1}{D}, \qquad E' = \frac{1}{E}, \qquad K = 2(AC - B^2) - CD.$$

Mediante queste relazioni si rende agevolissima la determinazione dei moduli d'elasticità, dei coefficienti di contrazione, ecc.

Ancora un'osservazione, che sarà l'ultima per ora.

Nel di Lei Corso litografato Ella ha voluto riprodurre in Nota la dimostrazione da me data della sufficienza delle sei note equazioni

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 b}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial y^2}\right), \quad \text{ecc.}$$

$$\frac{\partial^2 a}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial x}\right), \quad \text{ecc.}$$

che si sogliono dedurre come condizioni semplicemente necessarie a soddisfarsi dalle sei componenti d'una deformazione possibile. Io credo che quella dimostrazione sia opportuna ad esporsi in un Corso, poichè le varie formole che vi si svolgono trovano poi tutte la loro applicazione nelle più importanti questioni d'elasticità *). È però utile osservare che la sufficienza delle equazioni in discorso può essere stabilita in un modo del quale non può immaginarsi il più perentorio, cioè coll'integrazione diretta, la quale riesce facilissimamente, come segue.

Si rappresentino con U, V, W tre funzioni totalmente arbitrarie e si ponga, com'è evidentemente lecito di fare,

$$a = \frac{\partial U}{\partial x}, \qquad b = \frac{\partial V}{\partial y}, \qquad c = \frac{\partial W}{\partial z}.$$

Le equazioni in discorso diventano (scrivendo sempre la prima soltanto d'ogni terna)

$$\frac{\partial^2}{\partial y \partial z}\left(2f - \frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z}\right) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z} - \frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial h}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial x}\right) = 0.$$

---

*) Nel N. 10 dei *Comptes Rendus* di quest'anno (tome CVIII, pp. 502-505) ho indicato un altro singolare modo di stabilire le proprietà di queste equazioni; vedi queste OPERE, vol. IV, pp. 344-347.

S'integrano le prime tre ponendo

$$2f = \frac{\partial W}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial z} + 2f',$$

dove f', g', h' sono tre funzioni soggette alle condizioni

$$\frac{\partial^2 f'}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 g'}{\partial z \partial x} = \frac{\partial^2 h'}{\partial x \partial y} = 0.$$

Le altre tre, sostituendo per f, g, h i valori precedenti, diventano

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial g'}{\partial y} + \frac{\partial h'}{\partial z} - \frac{\partial f'}{\partial x}\right) = 0$$

e dànno, con una prima integrazione,

$$\frac{\partial g'}{\partial y} + \frac{\partial h'}{\partial z} - \frac{\partial f'}{\partial x} = \frac{\partial^2 X}{\partial y \partial z},$$

dove X, Y, Z sono tre funzioni arbitrarie, di cui però la prima non deve contenere x, la seconda y, la terza z. Da queste ultime equazioni si ricava

$$2\frac{\partial f'}{\partial x} = \frac{\partial^2 Y}{\partial z \partial x} + \frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y},$$

ossia

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(2f' - \frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}\right) = 0,$$

donde, integrando di nuovo,

$$2f' = \frac{\partial Z}{\partial y} + \frac{\partial Y}{\partial z} + X_1,$$

dove X_1, Y_1, Z_1 sono tre funzioni arbitrarie dello stesso tipo di X, Y, Z, ma di forma più particolare. Dovendo infatti aversi

$$\frac{\partial^2 f'}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 X_1}{\partial y \partial z} = 0,$$

è chiaro che X_1 deve risolversi nella somma di due funzioni, l'una della sola y, l'altra della sola z; e così dicasi di Y_1 e Z_1. Si può dunque porre

$$X_1 = \frac{\partial \eta_1}{\partial y} + \frac{\partial \zeta_1}{\partial z}, \qquad Y_1 = \frac{\partial \zeta_2}{\partial z} + \frac{\partial \xi_2}{\partial x}, \qquad Z_1 = \frac{\partial \xi_3}{\partial x} + \frac{\partial \eta_3}{\partial y},$$

dove ξ_2, ξ_3 sono funzioni arbitrarie della sola x,
» η_3, η_1 » » » y,
» ζ_1, ζ_2 » » » z.
Facendo le debite sostituzioni successive si ottiene così:

$$2f = \frac{\partial W}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial Z}{\partial y} + \frac{\partial Y}{\partial z} + \frac{\partial \eta_1}{\partial y} + \frac{\partial \zeta_1}{\partial z}$$

e si può scrivere

$$2f = \frac{\partial(W + Z + \xi_2 + \eta_1)}{\partial y} + \frac{\partial(V + Y + \zeta_1 + \xi_3)}{\partial z},$$

$$2g = \frac{\partial(U + X + \eta_3 + \zeta_2)}{\partial z} + \frac{\partial(W + Z + \xi_2 + \eta_1)}{\partial x},$$

$$2h = \frac{\partial(V + Y + \zeta_1 + \xi_3)}{\partial x} + \frac{\partial(U + X + \eta_3 + \zeta_2)}{\partial y}.$$

Con ciò le sei equazioni sono completamente integrate e basta porre

$$U + X + \eta_3 + \zeta_2 = u,$$

$$V + Y + \zeta_1 + \xi_3 = v,$$

$$W + Z + \xi_2 + \eta_1 = w,$$

donde

$$a = \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x}, \qquad b = \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad c = \frac{\partial W}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial z},$$

per riconoscere che le espressioni così ottenute per a, b, c, $2f$, $2g$, $2h$ sono precisamente quelle volute dalla definizione di queste quantità, come componenti di deformazione: è d'altronde evidente che le funzioni u, v, w, con cui queste quantità restano formate, sono interamente arbitrarie.

Per trattare i problemi del genere di quello che porta il nome di DE SAINT VENANT, giova poter disporre arbitrariamente di alcune delle sei componenti di deformazione. Esaminando questo punto alquanto più da vicino ho potuto convincermi che si possono assumere ad arbitrio tre delle quantità a, b, c, f, g, h, purchè non sieno quelle che si trovano già associate fra loro in una delle tre equazioni di condizione formanti la prima delle due terne testè ricordate. Per conseguenza, delle 20 terne che si possono formare colle sei componenti suddette, sono 17 quelle per una delle quali si può, in un determinato problema, fissare ad arbitrio la forma di tutte tre le funzioni che la compongono.

XC.

SULLA FUNZIONE POTENZIALE DELLA CIRCONFERENZA.

Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, tomo III (1889), pp. 193-209.

In una Nota *Sull'attrazione di un anello circolare od ellittico* *), ho stabilito diverse forme della funzione designata nel titolo del presente Articolo, mettendo in luce alcune singolari relazioni analitiche che si collegano colla genesi di tale funzione e che la rendono meritevole di qualche interesse, malgrado la semplicità della sua definizione e della sua natura. Mi propongo ora di ritornare su quell'argomento per completarne in alcuni punti la trattazione, tanto per ciò che concerne il significato meccanico della detta funzione, quanto per ciò che spetta alle rammentate relazioni di pura analisi che da essa traggono origine.

Sia a il raggio della circonferenza, la quale si suppone omogenea e di massa uguale ad 1. Si assuma come asse delle z l'asse medesimo della circonferenza, collocando l'origine nel centro di questa. Stante la simmetria del sistema intorno a quest'asse, è lecito supporre che il piano xz passi per il punto potenziato e che l'ascissa x di questo punto non sia mai negativa. Un punto qualunque della circonferenza può essere individuato dall'angolo che il raggio ad esso diretto fa coll'asse delle x negative. Denotando con ξ quest'angolo e con r la distanza del punto (ξ) dal punto potenziato (x, z), si ha

$$(1) \qquad r^2 = x^2 + z^2 + a^2 + 2ax\cos\xi,$$

*) Memorie della R. Accademia dei Lincei, serie III, tomo V (1880), pp. 183-194; oppure queste OPERE, volume III, pp. 235-247.

e, delle due espressioni

$$(1_a) \qquad u = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{d\xi}{r}, \qquad v = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi r\,d\xi,$$

la prima definisce l'ordinaria funzione potenziale newtoniana della circonferenza, la seconda quell'altra funzione potenziale che il LAMÉ ha proposto di chiamare *diretta* e la cui considerazione interviene utilmente in parecchie questioni di fisica matematica. Una proprietà notissima permette subito di scrivere questa notevole relazione fra le due funzioni

$$(1_b) \qquad \Delta_2 v = 2u,$$

dove il simbolo Δ_2, trattandosi di sistemi simmetrici intorno all'asse delle z, rappresenta l'operazione

$$(1_c) \qquad \Delta_2 = \frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial}{\partial x}\right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Ciò posto se, nelle due espressioni (1_a), si scrive 2θ in luogo di ξ e se si pone

$$(1_d) \qquad \rho^2 = (x-a)^2 + z^2, \qquad \rho'^2 = (x+a)^2 + z^2,$$

cosicchè ρ rappresenti la minima e ρ' la massima distanza del punto potenziato (x, z) dalla circonferenza (distanze che, al pari di r, si devono sempre considerare come essenzialmente positive), si trova subito

$$(2) \qquad u = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{\rho^2 \operatorname{sen}^2\theta + \rho'^2\cos^2\theta}},$$

$$(2_a) \qquad v = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\rho^2 \operatorname{sen}^2\theta + \rho'^2\cos^2\theta}\,d\theta.$$

La prima di queste due espressioni conduce immediatamente ad una semplicissima rappresentazione meccanica di quell'importante quantità che GAUSS ha denominato la *media aritmetico-geometrica* di due quantità date: se infatti si rappresenta con R la media aritmetico-geometrica di ρ e di ρ', si ha subito, dall'equazione fondamentale che GAUSS ha stabilito per questa media,

$$u = \frac{1}{R}.$$

Le due espressioni (2), (2_a) mostrano che tanto u quanto v sono funzioni omogenee (in senso lato) delle due distanze ρ e ρ', la prima di grado -1, la seconda di grado $+1$. Quest'osservazione, la quale per la funzione u si traduce nella relazione differenziale

$$(2_b)\qquad u+\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}+\rho'\frac{\partial u}{\partial\rho'}=0,$$

sarà utilmente invocata nel seguito.

Un'altra osservazione importante, e non meno semplice, è la seguente. Poichè le derivate negative di u rispetto ad x ed a z sono le espressioni delle due componenti, F_x ed F_z, della forza newtoniana F, l'una parallelamente al piano della circonferenza, l'altra parallelamente all'asse di questa, e poichè si ha d'altronde

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial\rho}\cos(\rho x)+\frac{\partial u}{\partial\rho'}\cos(\rho' x),$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{\partial u}{\partial\rho}\cos(\rho z)+\frac{\partial u}{\partial\rho'}\cos(\rho' z),$$

è evidente che la detta forza F si può anche considerare come la risultante di due, F_ρ ed $F_{\rho'}$, agenti secondo le due rette ρ e ρ' (che si intenderanno sempre dirette dal cerchio verso il punto potenziato) ed espresse da

$$(2_c)\qquad F_\rho=-\frac{\partial u}{\partial\rho},\qquad F_{\rho'}=-\frac{\partial u}{\partial\rho'}.$$

Queste due componenti, benchè non sieno della specie ordinaria, cioè normali, sono tuttavia le più comode a considerarsi per la determinazione della forza F; nel che giova anche notare che basta calcolarne una sola, perchè, (2_b), fra di esse sussiste sempre la relazione

$$(2_d)\qquad \rho F_\rho+\rho' F_{\rho'}=u.$$

Ponendo

$$(3)\qquad k^2=1-\frac{\rho^2}{\rho'^2},\qquad k'=\frac{\rho}{\rho'},\qquad k^2+k'^2=1,$$

ed usando i soliti simboli

$$K=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\operatorname{sen}^2\theta}},\qquad E=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-k^2\operatorname{sen}^2\theta}\,d\theta,$$

si ha subito dalle formole (2), (2_a)

$$(3_a)\qquad u=\frac{2K}{\pi\rho'},\qquad v=\frac{2\rho' E}{\pi}.$$

Mediante le note relazioni

$$(3_b)\qquad K = E - k\frac{dE}{dk}, \qquad E = k'^2\left(K + k\frac{dK}{dk}\right)$$

si ottengono di quì le seguenti espressioni delle derivate di u:

$$(3_c)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial \rho} = \dfrac{2}{\pi k^2 \rho \rho'}(k'^2 K - E), \\[2ex] \dfrac{\partial u}{\partial \rho'} = \dfrac{2}{\pi k^2 \rho'^2}(E - K). \end{cases}$$

Queste espressioni servono molto bene a riconoscere con precisione l'andamento della forza newtoniana F nell'immediata prossimità della linea donde essa emana.

È evidente infatti che la quantità E tende al limite 1 per $\lim \rho = 0$ e quindi $\lim k = 1$, ed è d'altronde ben noto che la quantità K, in questa stessa ipotesi $\lim k = 1$, diventa infinita logaritmicamente, e propriamente in guisa che la differenza

$$K - \log\frac{4}{k'} \doteq K - \log\frac{4\rho'}{\rho},$$

tende a zero con ρ. In base a ciò, se si osserva che, nelle stesse condizioni, ρ' tende verso il valore $2a$, si ottengono i seguenti valori delle componenti F_ρ ed $F_{\rho'}$, per ρ evanescente,

$$(3_d)\qquad F_\rho = \frac{1}{\pi a \rho}, \qquad F_{\rho'} = \frac{1}{2\pi a^2}\log\frac{8a}{e\rho},$$

dove e è la base neperiana. Questi valori, i quali non differiscono dai rigorosamente esatti se non di quantità che tendono a zero insieme con ρ, sono quelli stessi che si otterrebbero se si prendesse addirittura

$$u = \frac{2}{\pi\rho'}\log\frac{4\rho'}{\rho}$$

e si facesse $\rho' = 2a$ nei risultati delle due derivazioni rispetto a ρ ed a ρ'.

Di solito, nello studio delle distribuzioni newtoniane lineari, non si considera, rispetto ai punti potenziati prossimi alla linea, che la componente normale della forza totale secondo la minima distanza del punto dalla linea, componente la quale (in prossimità di un punto ordinario) si sa essere eguale al doppio della densità locale, diviso per la minima distanza anzidetta; e questa proprietà si considera a buon dritto come *caratteristica* delle distribuzioni lineari, nel senso ch'essa serve a determinare la densità per mezzo della forza e quindi della funzione potenziale. La prima delle formole (3_d), benchè si riferisca ad una componente che in generale non è la componente ordinaria, o normale, della forza F secondo la minima distanza ρ, presenta anch'essa la proprietà ora enunciata; il che si comprende facilmente ove si osservi che la componente F_ρ, per $\lim \rho = 0$, è infinitamente grande non solo in sè stessa, ma eziandio rispetto all'altra componente $F_{\rho'}$.

Ma ciò che riesce utile di constatare è appunto il fatto che questa seconda componente, pur essendo evanescente di fronte alla prima, ha tuttavia per sè stessa un valore infinitamente grande: circostanza che, congiunta alla precedente, stabilisce, per esempio, un grandissimo divario da ciò che accade rispetto alle distribuzioni superficiali.

Se fra ρ e ρ' si ponesse la relazione

$$\frac{\rho}{\rho'} = \text{Costante},$$

che è quanto dire

$$k' = \text{Costante},$$

e quindi anche

$$k = \text{Costante},$$

si individuerebbe la superficie d'un toro, su cui il punto potenziato (x, z) ovvero (ρ, ρ'), verrebbe a trovarsi collocato, toro il cui cerchio meridiano sarebbe armonico al dato $(\rho = 0,\ \rho' = 2a)$; vale a dire che questi cerchi avrebbero due diametri situati in una stessa retta e fra loro armonici, e giacerebbero in due piani fra loro perpendicolari. Sulla superficie di questo toro la funzione u è, (3_a), inversamente proporzionale a ρ' (oppure a ρ) e la forza F ha, tangenzialmente a questa superficie, una componente la cui espressione, molto semplice, è

$$\frac{\operatorname{sen}(\rho,\ \rho')}{2a} u = \frac{\operatorname{sen}(\rho,\ \rho')}{\pi a \rho'} K.$$

Non mi trattengo a dimostrare questa formola; ma ho voluto quì riportarla perchè, nel caso di ρ molto piccolo, essa rappresenta una componente che riesce molto prossimamente perpendicolare a quella che si suole considerare (la componente normale secondo ρ) e che serve quindi, insieme con questa, a rendere compiuta la cognizione dell'andamento della forza in prossimità della circonferenza.

È chiaro del resto che, volendo decomporre la forza F secondo il raggio ρ e secondo la perpendicolare a questo raggio, si otterrebbero due componenti ordinarie, o normali, rispettivamente rappresentate da

$$F_\rho + F_{\rho'} \cos(\rho,\ \rho'), \qquad F_{\rho'} \operatorname{sen}(\rho,\ \rho'),$$

dove

$$\cos(\rho, \rho') = \frac{\rho^2 + \rho'^2 - 4a^2}{2\rho\rho'}.$$

Ritornando ora alle equazioni (3_c), si osservi che, tenendo conto della seconda relazione (3_b), esse possono scriversi così:

$$\frac{\partial u}{\partial \rho} = -\frac{2}{\pi\rho\rho'}\frac{\partial(E\rho')}{\partial \rho'}, \qquad \frac{\partial u}{\partial \rho'} = -\frac{2}{\pi\rho}\frac{\partial E}{\partial \rho},$$

talchè si hanno, (3_a), le due eguaglianze seguenti:

$$\rho\rho'\frac{\partial u}{\partial \rho} = -\frac{\partial v}{\partial \rho'}, \qquad \rho\rho'\frac{\partial u}{\partial \rho'} = -\frac{\partial v}{\partial \rho}. \tag{4}$$

Ne consegue che la funzione u soddisfa all'equazione a derivate parziali

$$\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho\rho'\frac{\partial u}{\partial \rho}\right) = \frac{\partial}{\partial \rho'}\left(\rho\rho'\frac{\partial u}{\partial \rho'}\right), \tag{4_a}$$

mentre la funzione v soddisfa all'altra equazione

$$\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\frac{1}{\rho\rho'}\frac{\partial v}{\partial \rho}\right) = \frac{\partial}{\partial \rho'}\left(\frac{1}{\rho\rho'}\frac{\partial v}{\partial \rho'}\right). \tag{4_b}$$

La prima di queste due equazioni è riducibile a quella che venne trovata da BORCHARDT (*Werke,* pag. 129) per l'inversa della media aritmetico-geometrica, considerata come funzione dei due numeri fra i quali si prende la media stessa.

Il nesso fra le due forme dell'equazione in discorso è stabilito dall'eguaglianza (2_b). Infatti, sottraendo l'una dall'altra le due derivate di quest'eguaglianza rispetto a ρ ed a ρ', dopo aver moltiplicato la prima per ρ' e la seconda per ρ, si ottiene

$$(\rho'^2 - \rho^2)\frac{\partial^2 u}{\partial \rho \partial \rho'} + \rho\rho'\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial \rho'^2}\right) + 2\left(\rho'\frac{\partial u}{\partial \rho} - \rho\frac{\partial u}{\partial \rho'}\right) = 0,$$

donde consegue, in virtù di (4_a), la duplice eguaglianza

$$\rho\rho'\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial \rho'^2}\right) = \rho\frac{\partial u}{\partial \rho'} - \rho'\frac{\partial u}{\partial \rho} = (\rho'^2 - \rho^2)\frac{\partial^2 u}{\partial \rho \partial \rho'}. \tag{4_c}$$

L'equazione (4_a) risulta dal confronto della prima colla seconda di queste tre quantità eguali: l'equazione di BORCHARDT risulta invece dal confronto della prima colla terza. Il confronto della seconda colla terza quantità conduce ad un'altra notevolissima equazione, che verrà considerata in seguito.

L'equazione (4_a) si trova già nella citata mia Nota, dove ne avevo pure concluso che l'espressione

$$\rho\rho'\left(\frac{\partial u}{\partial \rho}d\rho' + \frac{\partial u}{\partial \rho'}d\rho\right)$$

doveva essere un differenziale esatto, ma senza pensare alla ricerca del corrispondente integrale: ora si vede che questo integrale non è altro, (4), che $-v$. Si può osservare a questo proposito che, una volta stabilita l'equazione (4_a), che fra breve procederò a dimostrare direttamente, l'integrale della precedente espressione differenziale si può ottenere colla semplicissima considerazione seguente. Per essere u funzione omogenea di grado -1, le due espressioni

$$\rho\rho'\frac{\partial u}{\partial \rho'}, \qquad \rho\rho'\frac{\partial u}{\partial \rho}$$

sono necessariamente omogenee di grado zero, epperò la funzione di cui esse, a tenore dell'equazione (4_a), devono essere le derivate parziali, non può essere (salvo una costante additiva) che omogenea anch'essa di grado 1: questa funzione deve dunque ammettere l'espressione

$$\rho\rho'\left(\frac{\partial u}{\partial \rho}\rho' + \frac{\partial u}{\partial \rho'}\rho\right),$$

ossia, tenendo conto del valore (2) di u,

$$-\frac{2\rho^2\rho'^2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{(\rho^2\operatorname{sen}^2\theta + \rho'^2\cos^2\theta)^{\frac{3}{2}}}.$$

Ora quest'ultima espressione si può precisamente trasformare in quella di $-v$, e ciò mediante un noto artificio, il quale si riduce, in sostanza, all'uso della seconda relazione (3_b).

Ma ciò che più importa è di stabilire direttamente l'equazione (4_a), il che ora farò, completando una deduzione che ho in parte già data nella Nota del 1880 e da cui risulta questa interessante proposizione che *l'equazione a derivate parziali della media aritmetico-geometrica non è altro che una trasformata dell'equazione di* LAPLACE.

Per dimostrare questa proposizione bisogna formare l'espressione Δ_2 colle variabili ρ, ρ' e ciò si fa nel modo seguente.

Dalle equazioni (1_d) risulta

$$\rho^2 + \rho'^2 = 2(x^2 + z^2 + a^2), \qquad \rho'^2 - \rho^2 = 4ax,$$

cosicchè, ponendo

$$\rho' - \rho = 2\sigma, \qquad \rho' + \rho = 2\sigma',$$

donde

$$\rho = \sigma' - \sigma, \qquad \rho' = \sigma' + \sigma,$$

si ottiene

$$\sigma^2 + \sigma'^2 = x^2 + z^2 + a^2, \qquad \sigma\sigma' = ax.$$

Differenziando totalmente queste due equazioni, ricavandone i valori di dx, dz espressi per $d\sigma$, $d\sigma'$ e sostituendo questi valori nel secondo membro dell'equazione

$$ds^2 = dx^2 + dz^2,$$

si trova che il termine in $d\sigma d\sigma'$ svanisce, a cagione dell'eguaglianza

$$z^2 = \frac{(a^2 - \sigma^2)(\sigma'^2 - a^2)}{a^2},$$

e si ottiene in tal guisa

$$ds^2 = (\sigma'^2 - \sigma^2)\left(\frac{d\sigma^2}{a^2 - \sigma^2} + \frac{d\sigma'^2}{\sigma'^2 - a^2}\right).$$

Quest'espressione dell'elemento lineare ds corrisponde all'uso delle coordinate ellittiche σ, σ' nel piano meridiano xz. Tenendo conto della ammessa simmetria del sistema intorno all'asse delle z, si deduce facilmente, dalla nota formola di LAMÉ o di JACOBI, la seguente equazione del Δ_2 di una qualunque funzione di σ e di σ':

$$(\sigma'^2 - \sigma^2)\Delta_2\varphi = \frac{\sqrt{a^2 - \sigma^2}}{\sigma}\frac{\partial}{\partial\sigma}\left(\sigma\sqrt{a^2 - \sigma^2}\frac{\partial\varphi}{\partial\sigma}\right) + \frac{\sqrt{\sigma'^2 - a^2}}{\sigma'}\frac{\partial}{\partial\sigma'}\left(\sigma'\sqrt{\sigma'^2 - a^2}\frac{\partial\varphi}{\partial\sigma'}\right).$$

Eseguendo le derivazioni indicate si trova

$$\rho\rho'\Delta_2\varphi = a^2\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial\sigma^2} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial\sigma'^2} + \frac{1}{\sigma}\frac{\partial\varphi}{\partial\sigma} - \frac{1}{\sigma'}\frac{\partial\varphi}{\partial\sigma'}\right)$$

$$+ \sigma'\left(\sigma'\frac{\partial^2\varphi}{\partial\sigma'^2} + 2\frac{\partial\varphi}{\partial\sigma'}\right) - \sigma\left(\sigma\frac{\partial^2\varphi}{\partial\sigma^2} + 2\frac{\partial\varphi}{\partial\sigma}\right),$$

o meglio

$$\rho\rho'\Delta_2\varphi = a^2\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial\sigma^2} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial\sigma'^2}\right) + \frac{a^2}{\sigma\sigma'}\left(\sigma'\frac{\partial\varphi}{\partial\sigma} - \sigma\frac{\partial\varphi}{\partial\sigma'}\right) + \sigma'\frac{\partial\psi}{\partial\sigma'} - \sigma\frac{\partial\psi}{\partial\sigma},$$

dove si è posto

$$\psi = \varphi + \sigma\frac{\partial\varphi}{\partial\sigma} + \sigma'\frac{\partial\varphi}{\partial\sigma'};$$

e ritornando dalle variabili σ, σ' alle ρ, ρ' si ottiene facilmente

$$\rho\rho'\Delta_2\varphi = \frac{4a^2}{\rho'^2-\rho^2}\left(\rho\frac{\partial\varphi}{\partial\rho'} - \rho'\frac{\partial\varphi}{\partial\rho}\right) - 4a^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial\rho\partial\rho'} + \rho\frac{\partial\psi}{\partial\rho'} + \rho'\frac{\partial\psi}{\partial\rho},$$

od anche

$$\rho\rho'(\rho'^2-\rho^2)\Delta_2\varphi = 4a^2\left[\rho\frac{\partial}{\partial\rho'}\left(\varphi + \rho\frac{\partial\varphi}{\partial\rho}\right) - \rho'\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\varphi + \rho'\frac{\partial\varphi}{\partial\rho'}\right)\right]$$

$$+ (\rho'^2-\rho^2)\left(\rho\frac{\partial\psi}{\partial\rho'} + \rho'\frac{\partial\psi}{\partial\rho}\right),$$

dove ψ riceve ora l'espressione

(5) $$\psi = \varphi + \rho\frac{\partial\varphi}{\partial\rho} + \rho'\frac{\partial\varphi}{\partial\rho'}.$$

Utilizzando nuovamente questa espressione medesima, si giunge finalmente alla seguente equazione definitiva:

(5_a) $$\begin{cases} \rho\rho'(\rho'^2-\rho^2)\Delta_2\varphi = \dfrac{\partial}{\partial\rho}\left[4a^2\rho\rho'\dfrac{\partial\varphi}{\partial\rho} + (\rho'^2-\rho^2-4a^2)\rho'\psi\right] \\ \qquad - \dfrac{\partial}{\partial\rho'}\left[4a^2\rho\rho'\dfrac{\partial\varphi}{\partial\rho'} + (\rho^2-\rho'^2-4a^2)\rho\psi\right]. \end{cases}$$

Questo risultato è più completo di quello cui ero pervenuto nella Nota più volte citata, perchè in questa avevo solamente trasformata l'equazione $\Delta_2 = 0$; inoltre la forma sotto cui avevo posto quest'equazione era meno semplice di quella che risulta dalla precedente espressione generale del Δ_2. Ritenuta la quale, l'equazione (1_b) si traduce nella seguente relazione fra le due quantità K ed E:

$$\Delta_2(E\rho') = \frac{2K}{\rho'}.$$

Se si suppone che la funzione φ sia la stessa u, e se si osserva che in tal caso si ha non solo $\Delta_2\varphi = 0$, ma anche, (2_b), $\psi = 0$, si ottiene subito, come equazione differenziale per u, la già incontrata equazione (4_a) della media aritmetico-geometrica: ed è così che si giunge a stabilire direttamente questa equazione.

Mostrerò ora come si possa da questa trarre partito in un'altra ricerca, che si collega naturalmente coll'argomento quì trattato.

Poichè u è la funzione potenziale della circonferenza omogenea di massa 1 e di raggio a, è chiaro che $2\pi u a d a$ è l'analoga funzione rispetto alla corona circolare piana compresa fra le due circonferenze di raggi a ed $a + da$, supponendo uguale ad 1 la densità superficiale. Per conseguenza

$$2\pi \int_0^a u a d a$$

è la funzione potenziale del disco circolare di raggio a e di densità 1, ed

$$U = -2\pi \int_0^a \frac{\partial u}{\partial z} a d a$$

è la funzione potenziale dello strato magnetico circolare di raggio a e di momento costante 1, ossia la funzione potenziale elettromagnetica della corrente circolare di raggio a e di intensità 1. Questa funzione è di un più elevato grado di trascendenza che non sieno le fin quì considerate, ma la sua *associata* V, cioè quella funzione che è ad essa legata dalle relazioni

$$\frac{\partial V}{\partial x} = x \frac{\partial U}{\partial z}, \qquad \frac{\partial V}{\partial z} = -x \frac{\partial U}{\partial x},$$

si può esprimere colle funzioni u, v. Si ha infatti (naturalmente per punti situati fuori dello strato magnetico)

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -2\pi x \int_0^a \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} a d a, \qquad \frac{\partial V}{\partial z} = 2\pi x \int_0^a \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} a d a.$$

Ma, poichè la funzione U soddisfa all'equazione di LAPLACE e quindi, (1_c), alla relazione

$$x \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(x \frac{\partial u}{\partial x}\right),$$

si può anche scrivere

$$\frac{\partial V}{\partial x} = 2\pi \int_0^a \frac{\partial}{\partial x}\left(x \frac{\partial u}{\partial x}\right) a d a, \qquad \frac{\partial V}{\partial z} = 2\pi \int_0^a \frac{\partial}{\partial z}\left(x \frac{\partial u}{\partial z}\right) a d a;$$

ne consegue che si può prendere per V l'espressione

$$V = 2\pi x \int_0^a \frac{\partial u}{\partial x} a d a, \tag{6}$$

la quale si presta ad una riduzione che non potrebbe effettuarsi sulla funzione U.

Effettivamente, si ha, (1_d),

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial \rho'}\frac{\partial \rho'}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial \rho'}\frac{\partial \rho'}{\partial a}-\frac{\partial u}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial a},$$

epperò, rammentando la già invocata relazione

$$\rho'^2-\rho^2=4ax,$$

si può anche scrivere

$$V=\frac{\pi}{2}\int(\rho'^2-\rho^2)\left(\frac{\partial u}{\partial \rho'}d\rho'-\frac{\partial u}{\partial \rho}d\rho\right),$$

dove l'integrazione dev'essere estesa da $\rho=\rho'$ (relazione che corrisponde ad $a=0$) a quella coppia di valori di ρ e ρ' che risultano dalle formole (1_d) per a eguale al raggio dello strato magnetico, o della corrente. Ora è facile dimostrare che il risultato di questa integrazione è indipendente da qualsivoglia relazione fra le variabili ρ e ρ', poichè la espressione sotto il segno integrale, cioè

$$(6_a)\qquad (\rho'^2-\rho^2)\left(\frac{\partial u}{\partial \rho'}d\rho'-\frac{\partial u}{\partial \rho}d\rho\right)$$

è un differenziale esatto.

Infatti la duplice eguaglianza (4_c), la quale, come ho già notato, fornisce tanto l'equazione (4_a) quanto l'equazione di Borchardt, fornisce anche una terza equazione, cui ho pur fatto allusione. Quest'equazione, che risulta dal confronto del secondo col terzo membro, è facilmente riducibile alla forma

$$(6_b)\qquad \frac{\partial}{\partial \rho}\left[(\rho'^2-\rho^2)\frac{\partial u}{\partial \rho'}\right]+\frac{\partial}{\partial \rho'}\left[(\rho'^2-\rho^2)\frac{\partial u}{\partial \rho}\right]=0$$

e mette appunto in evidenza l'integrabilità dell'espressione (6_a).

D'altronde, riconosciuta questa proprietà, è facilissimo ottenere l'espressione dell'integrale, mediante una considerazione che è già stata precedentemente invocata. Le due derivate rispetto a ρ' e ρ della cercata funzione integrale, cioè le espressioni

$$(\rho'^2-\rho^2)\frac{\partial u}{\partial \rho'},\qquad -(\rho'^2-\rho^2)\frac{\partial u}{\partial \rho},$$

sono omogenee e di grado zero rispetto a ρ ed a ρ', epperò, astrazion fatta da una costante additiva, quella funzione dev'essere omogenea e di grado 1, cioè dev'essere esprimibile nella forma

$$(\rho'^2-\rho^2)\left(\frac{\partial u}{\partial \rho'}\rho'-\frac{\partial u}{\partial \rho}\rho\right).$$

Ora quest'espressione si annulla al limite inferiore $\rho = \rho'$: si può dunque porre senz'altro

$$(6_c) \qquad V = \frac{\pi}{2}(\rho'^2 - \rho^2)\left(\frac{\partial u}{\partial \rho'}\rho' - \frac{\partial u}{\partial \rho}\rho\right).$$

Introducendo i valori (3_c) delle derivate di u, si giunge così all'espressione

$$(6_d) \qquad V = \rho'[2E + (k^2 - 2)K],$$

la quale s'accorda perfettamente con quella che già si conosce e che di solito si deduce da altre considerazioni.

Si può osservare che, sostituendo nell'espressione (6_c) la funzione v, (2_a), alla u, mediante le relazioni (4), V si presenta sotto la forma

$$V = (\rho'^2 - \rho^2)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta}{\sqrt{\rho^2 \operatorname{sen}^2\theta + \rho'^2\cos^2\theta}}\, d\theta,$$

nella quale figura un integrale che è stato ripetutamente considerato da Gauss nella *Determinatio attractionis*, etc. (*Werke*, t. III) ed il cui valore si collega strettamente colla considerazione della media aritmetico-geometrica.

Ho lasciato fin quì in disparte l'equazione differenziale (4_b), cui soddisfa la funzione v: ripiglierò ora questa equazione per ricavarne una conclusione interessante.

Procedendo con quello stesso metodo con cui si giunge alle eguaglianze (4_c), si ottengono per v queste altre eguaglianze analoghe

$$\rho\rho'\left(\frac{\partial^2 v}{\partial \rho^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial \rho'^2}\right) = \rho'\frac{\partial v}{\partial \rho} - \rho\frac{\partial v}{\partial \rho'} = -(\rho'^2 - \rho^2)\frac{\partial^2 v}{\partial \rho\,\partial \rho'}.$$

Il confronto delle due prime di queste tre espressioni eguali riproduce l'equazione (4_c): il confronto delle due ultime conduce invece ad un'equazione che è assolutamente identica alla (6_b), salvo il mutamento di u in v. Ne risulta che *l'equazione a derivate parziali*

$$(7) \qquad \frac{\partial}{\partial \rho}\left[(\rho'^2 - \rho^2)\frac{\partial w}{\partial \rho'}\right] + \frac{\partial}{\partial \rho'}\left[(\rho'^2 - \rho^2)\frac{\partial w}{\partial \rho}\right] = 0$$

è soddisfatta tanto da $w = u$ quanto da $w = v$. Effettivamente, sostituendo successivamente per w in quest'equazione i due valori (3_a), si ottengono le due note equazioni differenziali ordinarie cui soddisfano le quantità K ed E, considerate come funzioni del modulo k. Queste due equazioni non hanno la medesima forma: invece l'equazione (7) esprime una proprietà comune ai due integrali (2), (2_a), considerati come funzioni di ρ e ρ'.

È degno d'essere notato che, se si introducono in luogo di ρ e ρ' le già usate variabili σ e σ', l'equazione (7) si converte nella seguente:

$$(7_a) \qquad \frac{\partial}{\partial \sigma}\left(\sigma\sigma'\frac{\partial w}{\partial \sigma}\right) = \frac{\partial}{\partial \sigma'}\left(\sigma\sigma'\frac{\partial w}{\partial \sigma'}\right),$$

cioè assume la stessa forma della (4_a), rispetto a queste nuove variabili σ e σ'. Ne risulta che l'equazione (7) è soddisfatta anche dalla funzione

$$w = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{(\rho'-\rho)^2 \operatorname{sen}^2\theta + (\rho'+\rho)^2\cos^2\theta}},$$

cioè dalla inversa media aritmetico-geometrica dei due numeri $\rho' - \rho$ e $\rho' + \rho$. E dal confronto delle equazioni (7), (7_a) segue pure che l'equazione (4_a) è soddisfatta non solo dalla funzione u, ma anche da quest'altra

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(\rho'-\rho)^2 \operatorname{sen}^2\theta + (\rho'+\rho)^2\cos^2\theta}\, d\theta.$$

Terminerò questa Nota giovandomi delle proprietà della funzione u per indicare la forma che si può dare al teorema di GREEN, rispetto alle funzioni potenziali simmetriche intorno ad un asse.

Quest'asse di simmetria sia sempre quello delle z, e sia φ una funzione monodroma, continua e finita, insieme colle sue derivate prime, e soddisfacente all'equazione di LAPLACE nello spazio limitato da una superficie chiusa di rotazione intorno al detto asse, superficie che dirò σ e di cui denoterò con s l'arco di linea meridiana giacente nella metà positiva ($x > 0$) del piano xz. Sieno $x = a$, $z = c$ le coordinate d'un punto appartenente a quella porzione, di questa stessa metà positiva del piano xz, che giace entro la superficie σ. Questo punto, rotando intorno all'asse delle z, genera una circonferenza, lungo la quale la funzione φ ha costantemente, per l'ipotesi che si vuol qui considerare, il valore $\varphi(a, c)$; e questa circonferenza, supposta materiale e propriamente omogenea e di massa totale 1, ha la funzione potenziale u_c, dove u_c denota (provvisoriamente) ciò che diventa la funzione u, delle formole (2) oppure (3_a), qualora si ponga $z - c$ al posto di z.

Descrivendo ora intorno al punto (a, c) del piano xz, ed in questo stesso piano, una circonferenza s' di raggio piccolissimo, e denotando con σ' la superficie di rotazione di cui questa circonferenza è la linea meridiana, si può applicare allo spazio compreso fra le due superficie σ e σ' la nota equazione

$$\int\left(\varphi\frac{\partial u_c}{\partial n} - u_c\frac{\partial \varphi}{\partial n}\right)d\sigma + \int\left(\varphi\frac{\partial u_c}{\partial n'} - u_c\frac{\partial \varphi}{\partial n'}\right)d\sigma' = 0,$$

dove n è la normale interna alla superficie σ ed n' la normale esterna alla superficie σ'. Essendo u_c funzione potenziale simmetrica, e tale essendosi supposta anche φ, quest'equazione si può manifestamente ridurre a quest'altra

$$\int\left(\varphi\frac{\partial u_c}{\partial n}-u_c\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)x\,ds+\int\left(\varphi\frac{\partial u_c}{\partial n'}-u_c\frac{\partial\varphi}{\partial n'}\right)x'\,ds'=0,$$

in cui le due funzioni φ ed u_c sono formate colle sole coordinate x e z della linea s ed x' e z' della linea s', rispettivamente, ed in cui n ed n' sono le normali, rispettivamente interna ed esterna, a queste due linee, nel piano xz. Ma considerando la normale n' come un raggio del cerchietto s', intendendola, come tale, individuata da un angolo azimutale η, e ponendo $ds'=n'\,d\eta$, il secondo termine della precedente equazione diventa

$$\int_0^{2\pi}x'\left(\varphi\frac{\partial u_c}{\partial n'}n'-u_c n'\frac{\partial\varphi}{\partial n'}\right)d\eta\,;$$

e poichè, per $\lim n'=0$ e quindi $\lim x'=a$, si sa essere

$$\lim\,(x'u_c n')=0,\qquad \lim\left(x'\frac{\partial u_c}{\partial n'}n'\right)=-\frac{1}{\pi},$$

mentre φ tende verso il valore $\varphi(a,c)$ e la derivata normale di φ si conserva, per ipotesi, continua e finita, è chiaro che il testè trascritto integrale tende, nelle ora indicate condizioni, verso il valore $2\varphi(a,c)$. Si ottiene in tal modo, mutando a e c in x_0 e z_0, la formola

$$\varphi(x_0,z_0)=\frac{1}{2}\int\left(\varphi\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)x\,ds,\qquad (x_0\geqq 0). \tag{8}$$

Ho qui soppresso l'indice c di u, perchè, non dipendendo l'espressione (2), ovvero la prima delle (3_a), che da ρ e ρ', si può e giova ora concepire la funzione u come formata coi due seguenti elementi: 1°) la distanza ρ del punto generico (x,z) del contorno s da quel particolar punto interno (x_0,z_0) al quale s'intende riferito, nel primo membro, il valore della funzione φ; 2°) la distanza ρ' del predetto punto generico dal punto $(-x_0,z_0)$, simmetrico del precedente rispetto all'asse delle z.

La formola (8) si deve riguardare come l'analoga di quella di Green, rispetto alle funzioni potenziali simmetriche.

Per i punti situati sull'asse (quando una parte di questo è interna a σ) questa formola ricade esattamente in quella di Green, poichè per tali punti la funzione u è semplicemente l'inversa di ρ.

Va da sè che il primo membro dell'equazione (8) dev'essere sostituito dallo zero, se il punto (x_0,z_0) è esterno alla superficie σ.

XCI.

SUR LA THÉORIE DE LA DÉFORMATION INFINIMENT PETITE D'UN MILIEU.

(Extrait d'une Lettre de M. EUG. BELTRAMI à M. MAURICE LÉVY).

Comptes Rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences, tome CVIII (1889), pp. 502-505.

Je prends la liberté de vous communiquer quelques remarques que j'ai eu l'occasion de faire, dans des recherches sur la déformation infiniment petite d'un milieu continu, et qui se rapportent à un point tout à fait élémentaire de cette théorie.

... Soient, comme de coutume, u, v, w les trois composantes de déplacement, au point (x, y, z) du milieu, et a, b, c, f, g, h les six composantes de déformation, au même point, c'est-à-dire les six quantités définies par les égalités

$$u_x = a, \qquad v_y = b, \qquad w_z = c,$$

$$w_y + v_z = 2f, \qquad u_z + w_x = 2g, \qquad v_x + u_y = 2h,$$

u_x, u_y, ... étant les dérivées partielles de u, v, w par rapport aux coordonnées. Vous savez que, si l'on considère ces six quantités comme des fonctions données indépendamment des u, v, w, il faut et il suffit qu'elles satisfassent à certaines six équations aux dérivées partielles du second ordre pour qu'elles représentent les composantes d'une déformation possible, c'est-à-dire pour qu'elles soient exprimables, d'après les égalités précédentes, au moyen de trois fonctions arbitraires u, v, w. Or, dans les recherches dont je vous parlais, j'ai été amené à me demander s'il n'y aurait peut-être pas avantage à déduire ces six équations de la variation d'une seule intégrale triple, ainsi que cela se fait très utilement en plusieurs cas, par exemple pour l'équation classique du potentiel.

Au lieu d'écrire ici tout de suite l'intégrale triple qui jouit de la propriété en question, et qui peut d'ailleurs prendre une infinité de formes différentes, je préfère vous présenter la chose d'une manière un peu indirecte, mais qui rend mieux compte du résultat auquel on arrive, surtout si l'on rapproche ce résultat de la considération par laquelle j'ai démontré ailleurs [Addition à mon Mémoire *Sull'interpretazione meccanica delle formole di* MAXWELL *)] que les six équations dont il s'agit sont suffisantes.

Posons

$$2p = w_y - v_z, \qquad 2q = u_z - w_x, \qquad 2r = v_x - u_y,$$

c'est-à-dire désignons par p, q, r les composantes de ce que l'on est convenu d'appeler la *rotation du milieu*, au point (x, y, z). Ces trois équations établissent entre ces composantes et les coordonnées des relations en vertu desquelles on peut concevoir ces dernières comme des fonctions des variables p, q, r; car il n'y a pas, en général, d'équation finie entre ces trois quantités, bien qu'il y en ait une $(p_x + q_y + r_z = 0)$ entre leurs dérivées. En nous plaçant à ce point de vue, désignons par S l'intégrale

$$S = \frac{1}{2}\int\int\int\left(\frac{\partial x}{\partial p} + \frac{\partial y}{\partial q} + \frac{\partial z}{\partial r}\right) dp\, dq\, dr,$$

dont le champ limite est supposé arbitraire, mais fixe. Le déterminant Δ des équations

$$\begin{aligned} dp &= p_x dx + p_y dy + p_z dz, \\ dq &= q_x dx + q_y dy + q_z dz, \\ dr &= r_x dx + r_y dy + r_z dz \end{aligned}$$

n'étant pas généralement nul, on peut tirer de ces équations

$$\Delta\left(\frac{\partial x}{\partial p} + \frac{\partial y}{\partial q} + \frac{\partial z}{\partial r}\right) = q_y r_z - q_z r_y + r_z p_x - r_x p_z + p_x q_y - p_y q_x,$$

et l'intégrale S, transformée des variables p, q, r aux x, y, z, devient ainsi

$$S = \frac{1}{2}\int\int\int (q_y r_z - q_z r_y + r_z p_x - r_x p_z + p_x q_y - p_y q_x)\, dx\, dy\, dz.$$

Sous cette forme, on voit immédiatement que S n'est qu'en apparence une intégrale triple; car on peut de suite la réduire, et de plusieurs manières différentes, à une intégrale étendue à la surface limite: on peut, par exemple, la ramener à la forme

$$S = \frac{1}{4}\int\left(\frac{\partial p}{\partial s}\frac{\partial x}{\partial n} + \frac{\partial q}{\partial s}\frac{\partial y}{\partial n} + \frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial z}{\partial n}\right)\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}\, d\sigma,$$

*) Memorie della R. Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna, serie IV, tomo VII (1886), pp. 1-38; oppure queste OPERE, vol. IV, pp. 190-223.

où s est la direction de l'axe de rotation, $d\sigma$ l'élément de surface limite et n la direction de la normale intérieure à cet élément. Mais il est tout à fait inutile de tenir compte de cette réduction: ce qu'il importe de remarquer, c'est que, si l'on faisait varier les fonctions p, q, r dans l'intégrale triple, la partie indéfinie de la variation correspondante de S, je veux dire celle qui serait représentée de même par une intégrale triple, se réduirait identiquement à zéro.

Cela posé, les dérivées p_x, p_y, ... des composantes de rotation peuvent s'exprimer toutes, ainsi qu'on s'en assure facilement, par celles des six composantes de déformation. En substituant ces expressions de p_x, p_y, ... par les dérivées de a, b, ... on obtient

$$\begin{aligned} S = \frac{1}{2}\int\int\int[(h_z - f_x)(f_x - g_y) + (f_x - g_y)(g_y - h_z) \\ + (g_y - h_z)(h_z - f_x) - (g_z - c_x)(b_x - h_y) \\ - (h_x - a_y)(c_y - f_z) - (f_y - b_z)(a_z - g_x)]\,dx\,dy\,dz, \end{aligned}$$

et la partie indéfinie δS de la variation de cette intégrale, répondant à des variations arbitraires δa, δb, ... des composantes de déformation, a nécessairement la forme

$$\delta S = \int\int\int(A\,\delta a + B\,\delta b + C\,\delta c + F\,\delta f + G\,\delta g + H\,\delta h)\,dx\,dy\,dz.$$

D'après la remarque précédente, cette variation sera ou ne sera pas nulle, quelles que soient les variations δa, δb, ..., suivant que les six fonctions a, b, ... seront ou ne seront pas de nature à représenter, par les expressions qu'on a mises tout à l'heure à la place de p_x, p_y, ..., les dérivées de trois fonctions p, q, r de x, y, z, c'est-à-dire (d'après l'esprit de la démonstration que j'ai citée ci-dessus) suivant que ces six fonctions pourront ou ne pourront pas représenter les composantes d'une déformation possible. En effet, si l'on calcule par la règle connue les coefficients A, B, ... des variations δa, δb, ..., on trouve

$$A = \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial z} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 b}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial y^2}\right),$$

$$B = \frac{\partial^2 g}{\partial z\,\partial x} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 a}{\partial z^2}\right),$$

$$C = \frac{\partial^2 h}{\partial x\,\partial y} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 a}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 b}{\partial x^2}\right),$$

$$F = \frac{\partial^2 a}{\partial y \partial z} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial x}\right),$$

$$G = \frac{\partial^2 b}{\partial z \partial x} - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial h}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial g}{\partial y}\right),$$

$$H = \frac{\partial^2 c}{\partial x \partial y} - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial h}{\partial z}\right);$$

et, en posant

$$A = B = C = F = G = H = 0,$$

on retrouve précisément les six équations que l'on connaît et qui expriment les conditions de toute déformation possible.

La dernière expression de S, dont la variation indéfinie δS donne toutes ces équations, peut être transformée de plusieurs manières et recevoir beaucoup d'interprétations diverses; mais je dois me borner, en ce moment, aux simples indications qui précèdent.

XCII.

UN PRECURSORE ITALIANO DI LEGENDRE E DI LOBATSCHEWSKY.

Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, tomo V (1889), I° Semestre, pp. 441-448.

Nei primi decennî del nostro secolo non è difficile trovare presso parecchi autori, ora in gran parte dimenticati, svariate traccie di tentativi, più o men bene riusciti, d'una ricostruzione razionale dei principî della Geometria, secondo quell'indirizzo che, iniziato da LEGENDRE, fu poi seguito da LOBATSCHEWSKY fino al suo più perfetto svolgimento. Ma a misura che si risale indietro nel tempo questi tentativi, se non si fanno più radi, appaiono tuttavia sempre più manchevoli, e fondati su petizioni di principio che non isfuggono all'esame più sommario. Parmi perciò degnissimo di menzione un libro che porta la data del 1733 ed una buona metà del quale è dedicata ad una critica veramente accurata e profonda del postulato d'EUCLIDE, critica nella quale vengono messi in sodo alcuni dei principî più fondamentali dell'odierna teoria delle parallele, in quella stessa forma, può dirsi, in cui si potrebbero oggi enunciare da noi. Che se disgraziatamente l'Autore finisce col concludere all'assoluta verità (di cui allora niuno dubitava) del famoso postulato, non bisogna fargliene soverchio addebito, tanto più che la bonarietà colla quale egli si adopera, all'ultimo, a demolire tutto il proprio edifizio è di gran lunga superata dall'acume e dal retto senso geometrico di cui fa prova nell'innalzarlo.

L'opera cui alludo è stampata a Milano ed ha per titolo: *Euclides ab omni naevo vindicatus, sive conatus geometricus quo stabiliuntur prima ipsa universae Geometriae principia, Auctore Hieronymo Saccherio, Societate Jesu, in Ticinensi Universitate Matheseos*

Professore *) (in 4°, XVI-142 con 6 tavole). L'opera si divide in due libri e ciascuno di questi in due parti. Il primo libro (di 101 facciate) è tutto dedicato alla questione del postulato, che viene svolta nel lungo giro di trentanove Proposizioni, seguite da Corollarî e da Scolî, giusta l'uso del tempo. Il secondo libro, del quale mi restringo a fare questa sola menzione, tratta d'alcune definizioni del *V* di EUCLIDE.

Mi propongo di far conoscere un po' distesamente il procedimento che tiene l'Autore nella sua ricerca intorno al postulato delle parallele, postulato della cui verità, è bene avvertire subito, anch'egli era già convinto *a priori,* giacchè fin dal Proemio, dopo averne riportata l'esatta enunciazione, giusta il testo del Clavio, soggiunge: *Porro nemo est qui dubitet de veritate expositi Pronunciati; sed in eo unice Euclidem accusant, quod nomine Axiomatis usus fuerit, quasi nempe ex solis terminis rite perspectis sibi ipsi faceret fidem.* Avverto anche che le considerazioni dell'Autore non escono mai dal piano e che quindi son tutte figure piane quelle di cui dovrò tenere parola e che il lettore potrà facilissimamente immaginare o costruire di per sè.

Ecco il punto di partenza del P. SACCHERI, semplice e limpido quant'altro mai. Dalle due estremità A e B d'una retta AB si conducano a questa, da una stessa parte, due eguali perpendicolari AC, BD e si congiungano gli estremi C e D di queste colla retta CD. Gli angoli che questa congiungente fa colle due perpendicolari CA, DB sono necessariamente eguali (Prop. I) e non possono quindi essere amendue che retti, od ottusi, od acuti: nel primo caso (Prop. III) la congiungente CD è eguale ad AB, nel secondo è minore di AB, nel terzo è maggiore di AB: e viceversa (Prop. IV). Di questi tre casi, che l'Autore considera *ab initio* come egualmente possibili, egli chiama il primo *hypothesis anguli recti,* il secondo *hypothesis anguli obtusi,* il terzo *hypothesis anguli acuti* e dimostra subito, in tre consecutive Proposizioni (V, VI e VII), che ciascuna di queste tre ipotesi *si vel in uno casu sit vera, semper in omni casu illa sola est vera.*

Questa è già, come ognun vede, una proposizione molto simile a quella ben nota di LEGENDRE, salvo in quanto all'estensione sua, che è maggiore: ma un teorema che fa ancor più perfetto riscontro a quello di LEGENDRE *) si trova più innanzi, dopo

---

*) Ignoro l'anno della nascita di questo geometra. Dalla nota pubblicazione del prof. CORRADI, *Memorie e documenti per la storia dell'Università di Pavia,* si ritrae che il P. SACCHERI era di Sanremo, che cominciò ad insegnare in Pavia nel 1697 e che morì il 5 ottobre 1733 a Milano, dove reggeva il Collegio di Brera.

*) Il teorema cui qui si allude non fu pubblicato che nel 1833, in una Memoria postuma, inserita

alcune proposizioni intermedie, di cui dirò in appresso, e cioè nella Prop. XV, la quale suona così: *Ex quolibet triangulo, cujus tres simul anguli aequales sint, aut majores, aut minores duobus rectis, stabilitur respective hypothesis aut anguli recti, aut anguli obtusi, aut anguli acuti.* Anzi l'Autore mostra di compiacersi in questo genere di criterì atti a verificare ciascuna delle tre ipotesi o, come diremmo ora noi, ciascuna delle tre geometrie, giacchè dimostra ancora (Prop. XVI) che: *Ex quolibet quadrilatero cujus quatuor simul anguli aequales sint, aut majores, aut minores quatuor rectis, stabilitur respective hypothesis aut anguli recti, aut anguli obtusi, aut anguli acuti*; e, più oltre (Prop. XVIII), che: *Ex quolibet triangulo ABC, cujus angulus ad punctum B in uno quovis semicirculo existat, cujus diametro AC, stabilitur hypothesis aut anguli recti, aut anguli obtusi, aut anguli acuti, prout nempe angulus ad punctum B fuerit aut rectus, aut obtusus, aut acutus.* Nè mancano proposizioni che implicano il confronto di grandezze lineari, anzichè angolari, giacchè per esempio la Prop. XIX suona così: *Esto quodvis triangulum AHD rectangulum in H. Tum in AD continuata sumatur portio DC aequalis ipsi AD, demittaturque ad AH productam perpendicularis CB: dico stabilitum hinc iri hypothesim aut anguli recti, aut anguli obtusi, aut anguli acuti, prout portio HB aequalis fuerit, aut major, aut minor ipsa AH* **).

Ed a questo punto può dirsi che veramente cominci quello che l'Autore chiama (pagina XII) il suo *diuturnum praelium adversus hypothesin anguli acuti, quae sola renuit veritatem illius Axiomatis:* parole che ben tradiscono il costante preconcetto di lui contro quella ch'egli altrove appella *inimicam anguli acuti hypothesim* e che egli vuole *a primis usque radicibus revulsam, sibi ipsa repugnantem ostendere* (Scolio in fine della prima parte del libro primo).

Ma debbo innanzi tratto dire qualche cosa del modo in cui l'Autore esclude l'altra ipotesi dell'angolo ottuso, ossia, diremmo ora noi, la geometria sferica. Questa esclusione si fa ora con pochissime premesse (LEGENDRE, LOBATSCHEWSKY): ma anche il nostro Autore avrebbe potuto anticiparla di molto se non avesse avuto la manifesta

---

fra quelle dell'Accademia delle Scienze di Parigi, t. XII, p. 367. Ma LEGENDRE conosceva già il teorema fino dal 1808 almeno, come risulta da una lettera che diresse in quell'anno a TERQUEM, il quale era pervenuto, in una sua propria ricerca, alla medesima conclusione (Vedi TERQUEM, *Manuel de Géométrie*, Nota I).

**) Questa proposizione, come forse qualche altra, richiede qualche restrizione rispetto alla seconda ipotesi. Quest'ipotesi, esclusa già dal P. SACCHERI, come si vedrà in seguito, non è stata da lui esaminata così minutamente come la terza.

intenzione di far procedere di pari passo, il più a lungo possibile, gli svolgimenti relativi alle sue tre ipotesi. È solo nelle tre Proposizioni XI, XII e XIII ch'egli dimostra come le condizioni del postulato si verifichino non solo nell'ipotesi dell'angolo retto, ma anche in quella dell'angolo ottuso. Ciò basta, in fondo, ad escludere quest'ultima, e questo appunto dichiara l'Autore nella prima dimostrazione che dà della Prop. XIV: *Hypothesis anguli obtusi est absolute falsa, quia se ipsam destruit.* Ma la sua seconda dimostrazione è più esplicita. Sia ABC un triangolo rettangolo in B. La somma dei due angoli A e C è, nell'ipotesi dell'angolo ottuso, maggiore di due retti: se dunque si conduce dal punto C una retta CY tale che i due angoli YCA, CAB valgano insieme due retti, l'angolo YCB riesce necessariamente acuto. La retta CY si trova per tal modo, rispetto alla AB prolungata dalla parte del punto B, in questa condizione che, se si guarda alla trasversale BC, essa dovrebbe incontrarla, e, se si guarda invece alla trasversale AC, non dovrebbe incontrarla (Euclide, 17, I). L'ipotesi dell'angolo ottuso, conclude dunque il P. Saccheri, è insussistente. Ma anche dopo avere così esclusa quest'ipotesi, egli non la perde del tutto di vista e ne fa di nuovo menzione, se avviene ch'essa si presti ad una tal quale simmetria di deduzioni; del che ho già dato esempio citando proposizioni posteriori alla XIV or ora riportata. Comunque sia è certo che spetta al nostro Autore la priorità del teorema, dato molto più tardi da Legendre, che la somma dei tre angoli d'un triangolo non può superare due retti.

La discussione accurata dell'ipotesi dell'angolo acuto s'inizia colla Proposizione XVII che suona così: *Si uni, ut libet, cuidam parvae rectae AB insistat ad rectos angulos recta AH, dico subsistere non posse, in hypothesi anguli acuti, ut quaevis BD, efficiens cum AB quemlibet angulum acutum versus partes ipsius AH, occursura tandem sit ad finitam, seu terminatam distantiam, ipsi AH productae.* Duolmi di non poter riportare la duplice dimostrazione che l'Autore dà di questo teorema ed altre sottili osservazioni che vi si collegano. Debbo pur passare sotto silenzio altri notevoli teoremi ed una lunga disquisizione in cui entra poscia l'Autore, negli Scolî I, II e III della Prop. XXI, a proposito di certe idee di Proclo, del Clavio, del Borelli, dell'arabo Nassir-Eddin e di Wallis. Non posso però tacere d'alcune notevoli considerazioni che mette innanzi l'Autore, per esempio di quella delle linee equidistanti da una retta, su cui dovrò ritornare in appresso, e dell'altra sulla possibilità di verificare il postulato per via sperimentale o, come dice il P. Saccheri, per mezzo di dimostrazioni fisico-geometriche. Di queste dimostrazioni citerò solo la terza, ch'egli reputa (Scolio II della Prop. XXI) *omnium efficacissimam ac simplicissimam, utpote quae subest communi, facillimae, paratissimaeque experientiae,* e che egli enuncia (dimostrandola poi) in questi termini: *Si in circulo, cujus centrum D, tres coaptentur rectae lineae EF, FG, GH aequales singulae radio DE, comperiaturque juncta EH transire per centrum D, satis id erit ad demonstrandum intentum.* È anche notevolissima l'osservazione circa la proposta di

WALLIS, d'assumere *a priori* come possibile la costruzione d'una figura di qualunque grandezza simile ad una data: giustamente afferma e dimostra l'Autore che, per istabilire il postulato, basta ammettere l'eguaglianza degli angoli in due triangoli che non sieno eguali, senz'uopo di verun confronto quantitativo dei loro lati omologhi.

Prosegue poscia l'Autore a dimostrare (Prop. XXIII) che la mutua relazione di due rette non ammette che queste alternative: *vel unum aliquod commune obtinent perpendiculum, vel in alterutram eandem partem protractae, nisi aliquando ad finitam distantiam una in alteram incidat, semper magis ad se invicem accedunt.* Egli esamina poscia (Prop. XXV) se, nel caso della distanza indefinitamente decrescente, possa accadere che tale distanza abbia un limite diverso da zero, e mostra che ciò condurrebbe necessariamente all'ipotesi dell'angolo retto, cioè alla geometria euclidea *). Poco appresso (Corollario II) esce fuori con una giusta osservazione, che non hanno fatto gli autori di alcune moderne geometrie: *Hinc colligitur, satis non esse ad stabiliendam geometriam euclidaeam duo puncta sequentia: unum est quod nomine parallelarum illas rectas censeamus, quae commune aliquod obtinent perpendiculum; alterum vero quod omnes rectas quarum nullum commune sit perpendiculum, ac propterea quae, juxta assumptam definitionem parallelae non sint, debeant ipsae in alterutram partem semper magis protractae inter se aliquando incidere, si non ad finitam, saltem ad infinitam distantiam: nam rursum demonstrare oporteret quod duae quaelibet, in quas recta quaepiam incidens duos ad easdem partes internos angulos efficiat minores duobus rectis, nusquam alibi possint ipsae recipere commune perpendiculum.* Riporterò ancora il seguente teorema per mostrare sempre più come l'Autore avesse rettamente e per ogni verso sviscerata la questione: (Prop. XXVII) *Si recta AX sub aliquo, ut libet, parvo angulo educta ex puncto A ipsius AB, occurrere tandem debeat (saltem ad infinitam distantiam) cuivis perpendiculari BX, quae ad quantamlibet ab eo puncto A distantiam excitari intelligatur super ea incidente AB: dico nullum jam fore locum hypothesi anguli acuti.* Questa proposizione, come l'Autore stesso avverte, serve di riscontro e di complemento ad un'altra, la XVII, che ho già citata più sopra.

Sorvolando ad altri notevoli teoremi che seguono il testè riportato, vengo finalmente a dire della conclusione cui giunge il P. SACCHERI, dopo una ricerca evidente-

*) In questa dimostrazione è invocato uno scolio della Prop. XXIV il quale è esatto soltanto nelle condizioni in cui l'Autore ne fa l'applicazione, cioè nel caso d'un accostamento indefinito delle due rette. Anche in qualche altro luogo ho trovato mende e scuciture di simil genere, le quali provengono, cred'io, da un'affrettata revisione che l'Autore ha dovuto fare del proprio lavoro al momento della pubblicazione, dopo averne forse da lungo tempo preparati ed accumulati i materiali. Non conviene dimenticare che l'opera di cui parliamo uscì in luce nell'ultimo anno di vita dell'Autore.

mente intesa (come quella che poi LOBATSCHEWSKY pose a fondamento delle sue deduzioni) a caratterizzare esattamente il modo di diportarsi, rispetto ad una retta fissa, d'una retta mobile intorno ad un punto fisso. Sia AB la perpendicolare condotta dal punto fisso A alla retta fissa BX. L'Autore osserva dapprima che, partendo dalla posizione AB, la retta mobile incontra la fissa in un punto che si va sempre più allontanando da B, verso X; mentre, d'altra parte, partendo dalla posizione AY (perpendicolare ad AB), e movendo verso AB, la retta mobile ha colla fissa una perpendicolare comune, la quale si va sempre più allontanando da AB, verso XY; ciò premesso (Prop. XXX e XXXI) così conclude (Prop. XXXII): *Jam dico unum aliquem fore (in hypothesi anguli acuti) determinatum acutum angulum BAX, sub quo educta AX non nisi ad infinitam distantiam incidat in ea BX, ac propterea sit ipsa limes, partim intrinsecus, partim extrinsecus, tum earum omnium* (eductarum) *quae sub minoribus acutis angulis ad finitam distantiam incidunt in praedictam AB, tum etiam aliarum quae sub majoribus angulis acutis, usque ad angulum rectum inclusive, commune obtinent in duobus distinctis punctis perpendiculum cum eadem BX.* Quest'angolo acuto BAX, unico e determinato (verso la regione del punto X), è manifestamente quello stesso che LOBATSCHEWSKY doveva poi qualificare come angolo di parallelismo: il P. SACCHERI era dunque pervenuto, con tutte le cautele della classica geometria, a stabilire nettamente il concetto fondamentale di quest'angolo limite.

Or chi crederebbe che subito dopo la proposizione testè citata il lettore dovesse vedersi comparire innanzi quest'altra (Prop. XXXIII): *Hypothesis anguli acuti est absolute falsa, quia repugnans naturae lineae rectae?* Eppure è proprio così. L'Autore fa un lunghissimo discorso per coonestare, piuttosto che per dimostrare cotesto suo asserto, che per noi, oggi, è poco meno che inconcepibile. La sua pretesa dimostrazione si trascina innanzi a stento, per la distesa di sedici fittissime pagine, appoggiata a cinque lemmi e spalleggiata da quattro corollari, con qualche scolio per giunta. Si direbbe quasi che l'Autore, più che a convincere altrui, si adoperi a persuadere sè stesso, con argomentazioni prolisse e diffuse, nelle quali più non si riconosce l'esperto e sicuro geometra di prima. Del resto tutta la confutazione si riduce, in ultima sostanza, a questo, che la retta fissa BX e la retta limite AX dovrebbero *toccarsi* nel punto all'infinito X, mentre è inconcusso che due rette non possano mai toccarsi in un punto senza coincidere: è, come si vede, un semplice equivoco, che nasce, come tanti altri, dall'estendere senz'altro all'infinito le considerazioni ed i concetti che valgono per il finito.

Senonchè l'Autore non si appaga di questa confutazione e ne vuol dare un'altra più diretta, alla quale consacra la *Pars altera* del suo libro primo, *in qua,* dic'egli, *idem Pronunciatum Euclidaeum contra hypothesin anguli acuti redargutive demonstratur.* Dirò brevissimamente, per finire, del poco che contiene questa seconda parte, molto meno estesa della prima. Nelle tre prime Proposizioni (XXXIV, XXXV e XXXVI) si stabiliscono alcune proprietà della linea luogo di punti equidistanti da una retta: in particolare l'Autore insegna a condurre la tangente a questa linea e, fedele alle tradizioni classiche, dimostra che, malgrado l'ipotesi dell'angolo acuto, questa tangente gode pur sempre della proprietà che fra essa e la curva non si può allogare verun'altra retta. Ma subito dopo viene una proposizione onninamente falsa nell'ipotesi or detta, che è questa (Prop. XXXVII): *Curva CKD, ex hypothesi anguli acuti enascens, aequalis esse debet contrapositae basi AB;* per l'intelligenza del quale enunciato conviene aggiungere che CKD è il luogo degli estremi di tutte le perpendicolari di data lunghezza ($= AC = BD$) erette sul segmento rettilineo AB. Ognun vede che questo enunciato non è vero che nell'ipotesi euclidea, nè fa quindi meraviglia che l'Autore abbia potuto concluderne trionfalmente l'impossibilità dell'*inimicam hypothesim.* Ma quello che spiace di vedere è la leggerezza dell'argomentazione cui l'Autore ricorre per istabilire incondizionatamente la da lui asserita eguaglianza: egli ha voluto escire quì dal suo terreno, da quello della geometria greca, per mettere il piede su quello della geometria infinitesimale, che evidentemente non gli era famigliare *). Non approderebbe a nulla l'analizzare più minutamente l'errore in cui egli cade: basti dire che coll'istesso istessissimo discorso si giungerebbe a dimostrare che due circonferenze concentriche sono eguali. Il resto della *Pars altera* non presenta dopo ciò più alcun interesse, e solo piacemi notare che, pur persistendo nel suo errore, l'Autore trova ancor modo di colpire coll'aggiustatezza, sia pur formale, di certi riscontri e di certe osservazioni.

E quì, dando fine a questa mia forse troppo lunga recensione, debbo dire in qual modo io sia venuto a conoscenza del curioso libro di cui ho cercato di dare notizia agli studiosi; giacchè non è mio il merito d'averlo dissepolto dal lungo oblio in cui giaceva da più d'un secolo e mezzo. Essendo venuto per caso a risapere che un dotto gesuita vivente, il P. MANGANOTTI, aveva messo la mano sopra un vecchio Trattato, nel quale egli ravvisava importanti correlazioni colle dottrine della nuova geometria, mi venne desiderio di conoscere quest'opera. Le imperfette notizie che mi erano state riportate sull'epoca e sull'autore del Trattato non mi sarebbero certamente bastate a rintracciarlo, se il ch.^{mo} prof. FAVARO, da me interrogato in proposito, non mi avesse subito messo sulla giusta via. È così che ho potuto procurarmi ed esaminare l'opera in questione, col frutto che apparisce da quanto ho esposto. Se il dotto P. MANGANOTTI vorrà, come mi fu detto essere sua intenzione, fare argomento d'una più estesa

*) Già nella *Pars prima,* e precisamente nel Lemma V della Prop. XXXIII, affermando che *inter angulos rectilineos omnes anguli recti sunt invicem exactissime aequales,* SINE ULLO DEFECTU ETIAM INFINITE PARVO, l'autore aveva dato prova patente di non avere proprio idea di ciò che fosse un infinitamente piccolo.

e più diligente publicazione il lavoro del SACCHERI, traendone eziandio occasione per far meglio conoscere ai contemporanei ed ai posteri questo valente e troppo dimenticato geometra, cui sono dovute altre opere a stampa di vario argomento, egli renderà un segnalato servigio alla storia della scienza italiana, ed io sarò ben lieto d'aver potuto contribuire, se mai, a rendere più desiderata e più sollecita l'esecuzione di cotesto suo lodevolissimo proponimento.

XCIII.

SULL'ESTENSIONE DEL PRINCIPIO DI D'ALEMBERT ALL'ELETTRODINAMICA.

Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, tomo V (1889), 1° Semestre, pp. 852-856.

Nei capitoli V, VI e VII della parte IV del celebre *Treatise* (p. 185-212 del t. II, ed. II), MAXWELL espone il suo notevolissimo tentativo di deduzione diretta delle azioni elettrodinamiche dalle equazioni generali della Meccanica analitica.

Non è mio scopo di qui esaminare punto per punto quella memorabile deduzione, nè di discutere le successive ipotesi che MAXWELL introduce per renderla possibile. Voglio soltanto esporre una considerazione di massima la quale, se non erro, rende molto più naturale e più perspicua la deduzione medesima, esonerando da ogni necessità di farvi intervenire volta per volta concetti non inclusi già nelle basi stesse del metodo. Mi pare che si venga così a colmare una lacuna che in tal qual modo sussiste nel procedimento di MAXWELL, e che credo dovuta, in gran parte, alla precedenza che l'illustre fisico inglese ha amato di dare alle equazioni di HAMILTON su quelle di LAGRANGE.

Ecco in brevi parole di che si tratta.

Il fondamento della Meccanica analitica è tutto contenuto nella nota formola *)

$$\sum[(X - mx'')\delta x + (Y - my'')\delta y + (Z - mz'')\delta z] = 0,$$

che LAGRANGE ha dedotto dalla combinazione di due principî, quello dei lavori virtuali

*) Qui, come in seguito, gli apici indicano derivate totali prese rispetto al tempo t.

e quello di D'ALEMBERT. Di questi due principî il primo, inteso nel senso generalissimo e quasi astratto che gli è attribuito da LAGRANGE, si deve riguardare come un postulato universale, del quale non è mai stata revocata in dubbio l'applicabilità a qualsivoglia classe di fatti meccanici; ma il secondo si fonda sopra un ben determinato canone della dottrina dinamica insegnata da GALILEO e da NEWTON, sul canone, cioè, che quando un punto materiale $m(x, y, z)$ è in stato di moto, l'insieme di tutte le forze che mantengono questo moto è equipollente ad una forza unica, diretta secondo l'accelerazione attuale del punto, e proporzionale in grandezza a questa ed alla massa m del punto medesimo. Tutta la Meccanica analitica implica essenzialmente questo concetto, nè può uscire dal campo delle sue immediate applicazioni.

Ora se da questo campo si passa a quello dei fenomeni elettrodinamici, scompare (almeno per ora) ogni chiaro concetto di forza motrice misurabile da prodotto di massa e di accelerazione, e vien meno con ciò ogni possibilità di applicare senz'altro a tali fenomeni le equazioni classiche della dinamica. Vi è però, in questo nuovo campo di fatti meccanici, un altro canone ben accertato, il quale fa esatto riscontro, quanto al suo significato intimo, a quello dianzi rammentato della meccanica ordinaria, benchè se ne scosti non poco per altri rispetti (così da potersi veramente dubitare se esso possegga un eguale carattere di primordialità). Questo altro canone è la legge di OHM, la quale, rispetto alle correnti chiuse filiformi, può enunciarsi dicendo che quando una tale corrente j esiste, l'insieme di tutte le forze elettromotrici che la mantengono è equipollente ad una forza unica, proporzionale all'intensità attuale j della corrente ed alla resistenza R del conduttore filiforme che questa attraversa.

Tenendo conto di questa legge, quando, come fa MAXWELL, si voglia considerare un sistema di masse ponderali $m(x, y, z)$, fra cui esistano dei conduttori filiformi percorsi da correnti j, e si voglia supporre che le forze esterne agenti su questo sistema sieno in parte ordinarie, (X, Y, Z), in parte elettromotrici, E, misurate le une e le altre in una stessa unità, per es. la meccanica, è evidente che l'equilibrio contemplato dal principio di D'ALEMBERT non deve più sussistere fra le sole reazioni ordinarie

$$(X - mx'', \ Y - my'', \ Z - mz''),$$

ma bensì fra queste e le forze elettromotrici di reazione

$$E - Rj;$$

cosicchè l'equazione dinamica del sistema non può più essere quella di LAGRANGE, ma deve essere invece quest'altra:

$$(A) \quad \sum[(X - mx'')\delta x + (Y - my'')\delta y + (Z - mz'')\delta z + (E - Rj)\delta r] = 0.$$

In questa nuova equazione la lettera r è il simbolo generico d'una nuova classe di variabili, ciascuna delle quali individua lo stato attuale di una delle correnti, e che si possono chiamare *variabili elettriche,* in opposizione alle altre variabili puramente *geometriche,* quali sono le coordinate cartesiane dei varî punti del sistema (o, meglio, quelle variabili indipendenti q, per mezzo delle quali è possibile esprimere, tenuto conto dei legami, le coordinate dei punti di tutti i conduttori ed in genere di tutti i corpi che seguono, di fronte alle forze esterne, le leggi della meccanica ordinaria). Il solo postulato che bisogna ammettere, per legittimare l'uso delle nuove coordinate r, è che sia effettivamente possibile concepire, per ciascuna corrente j, soggetta ad una forza elettromotrice E, l'esistenza d'un parametro r tale che il lavoro elettromotore corrispondente ad una variazione δr di questo parametro sia misurato da $E \delta r$. Questo postulato, non occorre quasi dirlo, è perfettamente nello spirito della Meccanica analitica.

Ma è poi anche indispensabile ammettere che le coordinate di una parte almeno dei punti materiali $m(x, y, z)$ dipendano essenzialmente dalle nuove variabili r, oltre che dalle q, senza di che l'equazione (A) si spezzerebbe in due, di cui l'una sarebbe ancora la formola classica dei sistemi puramente ponderali, mentre la seconda si riferirebbe alle sole correnti, ciascuna delle quali apparirebbe inoltre, stante l'indipendenza delle variabili r, dominata dalla pura e semplice legge di Ohm, come se non vi fosse azione veruna fra una corrente e l'altra. Queste masse m, le cui coordinate dipendono tanto dalle variabili q quanto dalle r, non possono essere altro se non che quelle il cui insieme costituisce il *mezzo* nel quale si genera e si trasmette l'energia cinetica costitutiva dello stato di corrente: e questo è il concetto fondamentale di Faraday e di Maxwell.

Le variabili elettriche sono state introdotte da quest'ultimo e danno, in fondo, la chiave di tutta la sua deduzione. Se non che egli non è già risalito al principio di D'Alembert, ma è partito senz'altro dalle note equazioni di Hamilton e di Lagrange fra le variabili indipendenti ed il tempo, ammettendo che queste variabili vi si risolvano già nei due gruppi delle q e delle r: il che veramente non mi pare perfettamente rigoroso. Infatti le equazioni di Lagrange presuppongono essenzialmente, come dissi, l'eguaglianza

$$\text{Forza} = \text{Massa} \times \text{Accelerazione}$$

e non possono invocarsi, nella loro forma genuina, se non a patto che quest'eguaglianza sussista per tutti gli elementi del sistema, niuno eccettuato. Si può bene presumere che gli ulteriori progressi dell'elettrodinamica condurranno un giorno alla dimostrazione di questa grande verità: ma quando ciò avvenisse, la legge di Ohm perderebbe con ciò stesso il suo carattere di legge primordiale e le variabili di ogni problema sarebbero le sole q. Pertanto introdurre le variabili r, che rappresentano una fase transitoria (se così si vuole) della ricerca, ed al tempo stesso invocare le equazioni di LAGRANGE pure e semplici, è, a stretto rigore di termini, una intrinseca contraddizione. Mi affretto però a soggiungere che questa contraddizione è più di forma che di sostanza, giacchè MAXWELL non si è giovato delle equazioni di LAGRANGE che *per formare i primi membri delle equazioni dinamiche,* i cui secondi membri dovevano poi essere quelle forze, funzionanti da forze motrici esterne, che egli si riservava di introdurre di volta in volta (cfr. i n[i] 579 e 580 del *Treatise*).

Comunque sia, credo che la considerazione precedentemente esposta, e conducente all'equazione (A), giovi a rendere molto più facilmente intelligibili ed accettabili le conclusioni di MAXWELL, come voglio rapidissimamente indicare.

Pongasi per brevità

$$\sum(X\delta x + Y\delta y + Y\delta z) = \delta L,$$

cioè si denoti con δL il totale lavoro virtuale delle forze ordinarie (senza punto intendere con ciò che esista una funzione finita L di cui δL sia la variazione esatta). Facendo la solita ipotesi $\delta = d$ (che qui non è il caso di supporre soggetta a restrizioni), l'equazione (A) dà

$$dL + \sum E dr = dT + \sum Rj dr,$$

dove T è la forza viva totale delle masse m, espressa da una funzione omogenea e quadratica delle derivate q', r', coi coefficienti dipendenti dalle variabili q, r. Il primo membro di quest'eguaglianza è la somma dei lavori effettivamente compiuti nel tempuscolo dt da tutte le forze esterne, ordinarie ed elettromotrici; ma, per la consueta definizione di *intensità di corrente,* il lavoro d'una forza elettromotrice E, sopra una corrente j, nel tempuscolo dt, è epresso da $Ej\,dt$: dev'essere dunque $j\,dt = dr$, cioè $j = r'$, e l'equazione testè ottenuta diventa

$$dL + \sum Ej\,dt = dT + \sum Rj^2 dt.$$

Essa esprime il principio della conservazione dell'energia, poichè mostra che il lavoro totale delle forze esterne è speso in aumento di energia cinetica, così dei corpi come del mezzo, ed in produzione di calore.

Introducendo dappertutto, al posto delle coordinate cartesiane, le variabili indipendenti q, r, si ha da notissime trasformazioni

$$\sum m(x''\delta x + y''\delta y + z''\delta z)$$
$$= -\sum\left[\frac{\partial T}{\partial q} - \left(\frac{\partial T}{\partial q'}\right)'\right]\delta q - \sum\left[\frac{\partial T}{\partial r} - \left(\frac{\partial T}{\partial r'}\right)'\right]\delta r,$$

epperò, ponendo anche

$$\delta L = \sum Q \delta q,$$

si ottengono subito dalla formola (A) tutte le equazioni del problema in due distinti gruppi, il primo dei quali è rappresentato da

$$-\frac{\partial T}{\partial q} + \left(\frac{\partial T}{\partial q'}\right)' = Q$$

ed il secondo da

$$-\frac{\partial T}{\partial r} + \left(\frac{\partial T}{\partial r'}\right)' = E - Rj.$$

Ma qui giova decomporre la forza viva T in due parti, relativa la prima ai soli corpi ponderali, la seconda al mezzo che trasmette le azioni elettrodinamiche. La prima parte, che può continuarsi a designare con T, non dipende evidentemente che dalle q e dalle q'; la seconda, che si denoterà con U, potrebbe *a priori* supporsi dipendente da q, r, q' ed r', ma le considerazioni di Maxwell, che in questa parte sono plausibilissime, conducono a stabilire che U non può dipendere dalle r nè dalle q' e che questa quantità deve quindi essere una funzione quadratica ed omogenea delle j, coi coefficienti funzioni delle q. Conseguentemente i due gruppi d'equazioni dinamiche si possono trascrivere così:

$$-\frac{\partial T}{\partial q} + \left(\frac{\partial T}{\partial q'}\right)' = Q + \frac{\partial U}{\partial q},$$

$$Rj = E - \left(\frac{\partial U}{\partial j}\right)'.$$

La prima equazione mostra che il sistema ponderale, stante l'esistenza delle correnti, è soggetto non solo alle date forze ordinarie Q, ma eziandio alle forze ponderomotrici, d'origine elettrodinamica, la cui componente secondo q è

$$+\frac{\partial U}{\partial q}.$$

Ora queste forze ponderomotrici d'origine elettrodinamica sono quelle stesse che risultano dalla legge d'Ampère, ed un ben noto calcolo conduce per tal modo a concludere che l'espressione U dell'energia cinetica del mezzo non è altro che il potenziale di F. E. Neumann, cangiato di segno. Tenendo conto di questo fatto, le equazioni del secondo gruppo porgono, sotto la forma

$$-\left(\frac{\partial U}{\partial j}\right)',$$

l'esatta espressione delle forze elettromotrici di reazione, ossia delle note forze d'induzione elettrodinamica, determinate dallo stesso F. E. NEUMANN.

Seguendo MAXVELL, non ho qui considerato che il caso delle correnti chiuse filiformi: ma il principio di D'ALEMBERT ammette una più generale applicazione, su di che mi propongo di ritornare in altra occasione.

XCIV.

QUELQUES REMARQUES AU SUJET DES FONCTIONS SPHÉRIQUES.

Comptes Rendus des séances de l'Académie des Sciences, tomo CX (1890), pp. 934-938.

« On sait que l'équation différentielle

$$(a)\qquad (1-x^2)\frac{d^2 R_n}{dx^2} - 2x\frac{dR_n}{dx} + n(n+1)R_n = 0$$

est satisfaite, soit par $R_n = P_n(x)$, soit par $R_n = Q_n(x)$, P_n et Q_n étant respectivement les deux fonctions sphériques de l'ordre n, de première et de seconde espèce. Il y a souvent avantage à remplacer cette équation unique, de second ordre, par les deux suivantes, de premier ordre,

$$(b)\qquad \frac{dR_{n-1}}{dx} = x\frac{dR_n}{dx} - nR_n, \qquad \frac{dR_n}{dx} = x\frac{dR_{n-1}}{dx} + nR_{n-1},$$

dont elle est une conséquence nécessaire. Ces deux équations (b) sont connues: mais on se borne ordinairement à les vérifier séparément pour les P_n et les Q_n (*voir,* par exemple, les importantes *Recherches* de M. J.-E. NEUMANN, publiées en 1878), tandis qu'on peut, ainsi que je l'ai montré ailleurs *), les déduire directement de l'équation de second ordre, sans se rapporter nullement aux propriétés particulières des P_n et des Q_n. Il y a seulement une remarque à faire, lorsque la question est envisagée à ce point de vue: c'est que R_n n'est pas, comme P_n et Q_n, une fonction entièrement déter-

---

*) *Sulle funzioni sferiche di una variabile* [Rendiconti del R. Istituto Lombardo, serie II, tomo XX (1887), pp. 469-478; oppure queste OPERE, vol. IV, pp. 236-244].

minée de la variable; elle admet, au contraire, l'expression générale $R_n = AP_n + BQ_n$, A et B étant des constantes arbitraires. Il suit de là que, si l'on se sert, par exemple, des formules (b) pour exprimer R_n au moyen de R_{n-1}, ce qui se fait en éliminant $\frac{dR_n}{dx}$ et en tirant

$$nR_n = nxR_{n-1} - (1 - x^2)\frac{dR_{n-1}}{dx},$$

l'expression que l'on obtient de la sorte pour R_n contient les mêmes constantes que R_{n-1}. Mais ceci n'est pas un inconvénient, lorsque ces deux fonctions sont considérées indépendamment l'une de l'autre: il suffit de se rappeler que les deux constantes peuvent, pour chaque valeur de n, prendre toutes les valeurs possibles.

« Pour montrer quelque application utile des formules (b), posons

$$U_n = (1 - x^2)^{\frac{n+1}{2}} R_n, \qquad V_n = (1 - x^2)^{-\frac{n}{2}} R_n,$$

et remarquons que lesdites formules, multipliées respectivement par les puissances $\frac{n-2}{2}$ et $-\frac{n+2}{2}$ de $1 - x^2$, se transforment dans les suivantes :

$$nU_n = -(1 - x^2)^{\frac{3}{2}}\frac{dU_{n-1}}{dx}, \qquad nV_{n-1} = (1 - x^2)^{\frac{3}{2}}\frac{dV_n}{dx}.$$

« Or, si l'on suppose, comme d'habitude, $x = \cos\theta$, on a

$$\frac{dx}{(1 - x^2)^{\frac{3}{2}}} = d\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} = d\cot\theta;$$

par suite, en posant

$$\cot\theta = z,$$

d'où

$$\cos\theta = x = \frac{z}{\sqrt{z^2 + 1}}, \qquad \sin\theta = \sqrt{1 - x^2} = \frac{1}{\sqrt{z^2 + 1}},$$

on obtient les équations très simples

$$(c) \qquad U_n = -\frac{1}{n}\frac{dU_{n-1}}{dz}, \qquad V_{n-1} = \frac{1}{n}\frac{dV_n}{dz}.$$

« La première de ces équations permet immédiatement de calculer U_n au moyen de U_0, par la formule

$$U_n = \frac{(-1)^n}{1.2\ldots n}\frac{d^n U_0}{dz^n};$$

et cette formule permet à son tour d'établir l'égalité

$$\sum_0^\infty \alpha^n U_n = \sum_0^\infty \frac{(-\alpha)^n}{1.2\ldots n}\frac{d^n U_0}{dz^n},$$

savoir

$$(d)\qquad \sum_0^\infty \alpha^n U_n = U_0(z-\alpha),$$

où α doit être choisi de manière à assurer la convergence de la série et où le second membre est censé représenter le résultat de la substitution de $z - \alpha$ à la place de z en $U_0(z)$.

« Il est d'ailleurs très facile de déterminer directement U_0. En effet, les fonctions U_n, V_n étant reliées par l'équation

$$U_n = (z^2+1)^{-\frac{2n+1}{2}} V_n,$$

il est aisé de parvenir, à l'aide de (c), aux équations séparées

$$(z^2+1)\frac{d^2 U_{n-1}}{dz^2} + (2n+1)z\frac{dU_{n-1}}{dz} + n^2 U_{n-1} = 0,$$

$$(z^2+1)\frac{d^2 V_n}{dz^2} - (2n-1)z\frac{dV_n}{dz} + n^2 V_n \quad = 0.$$

« De la seconde de celles-ci, on tire pour $n = 0$

$$V_0 = A + B\log\left(z + \sqrt{z^2+1}\right)$$

et, par suite,

$$U_0 = \frac{A + B\log\left(z+\sqrt{z^2+1}\right)}{\sqrt{z^2+1}},$$

c'est-à-dire

$$U_0 = A\sin\theta + B\sin\theta\log\cot\frac{\theta}{2}.$$

« Soit, par exemple, $R_n = P_n$. On a alors

$$U_n = P_n \sin^{n+1}\theta, \qquad U_0 = \sin\theta = \frac{1}{\sqrt{z^2+1}},$$

$$U_0(z-\alpha) = \frac{1}{\sqrt{(z-\alpha)^2+1}} = \frac{\sin\theta}{\sqrt{1 - 2\alpha\sin\theta\cos\theta + \alpha^2\sin^2\theta}}.$$

« La série (d) est convergente si $\operatorname{mod}(\alpha\sin\theta) < 1$ et, dans cette hypothèse, on a le développement

$$\sum_0^\infty \alpha^n P_n \sin^n\theta = \frac{1}{\sqrt{1 - 2\alpha\sin\theta\cos\theta + \alpha^2\sin^2\theta}},$$

qui, en écrivant α à la place de $\alpha\sin\theta$, reproduit la série classique. On obtient en même temps une expression de P_n, qui peut s'écrire

$$P_n = \frac{(-1)^n}{1.2\ldots n}\frac{1}{\sin^{n+1}\theta}\frac{d^n(\sin\theta)}{d(\cot\theta)^n}.$$

« On aurait des résultats analogues pour les Q_n, en posant

$$U_n = \sin\theta\log\cot\frac{\theta}{2}.$$

Les expressions ainsi obtenues pour P_n et Q_n rentrent dans les formules plus générales que M. C. Neumann a établies, par une méthode différente, dans l'Addition à son remarquable Mémoire de 1886 *Sur les fonctions sphériques* (*Académie royale de Saxe*).

« Les deux fonctions

$$\frac{R_{n-1}+R_n}{2} = S_n, \qquad \frac{R_{n-1}-R_n}{2} = T_n$$

satisfont, en vertu des formules (b), combinées par addition et par soustraction, aux équations

$$(1-x)\frac{dS_n}{dx} - nT_n = 0, \qquad (1+x)\frac{dT_n}{dx} + nS_n = 0$$

et, par conséquent, aux équations séparées

$$(1-x^2)\frac{d^2S_n}{dx^2} - (1+x)\frac{dS_n}{dx} + n^2S_n = 0,$$

$$(1-x^2)\frac{d^2T_n}{dx^2} + (1-x)\frac{dT_n}{dx} + n^2T_n = 0.$$

« La première de ces fonctions a un grand intérêt (dans le cas où $R_n = P_n$), parce que sa dérivée représente, comme on sait, la somme

$$\sum_0^{n-1}(m+\tfrac{1}{2})P_m,$$

que l'on rencontre dans l'étude du développement de Laplace, borné aux n premiers termes. L'équation de deuxième ordre en S_n pourrait servir à calculer une valeur approchée de cette fonction pour n très grand; mais je crois que l'expression la plus convenable de S_n est celle qui se tire de l'une des deux formules connues (simplifiées de celles de DIRICHLET) que M. MEHLER a données pour P_n, je veux dire la suivante ($n > 0$):

$$S_n = \frac{2}{\pi} \int_\theta^\pi \frac{\sin n u \cos \frac{u}{2} \, d u}{\sqrt{2(\cos \theta - \cos u)}} .$$

« Si, en effet, supposant $\theta > 0$, on écrit cette expression sous la forme

$$S_n = \frac{1}{\pi} \int_\theta^\pi \frac{\sin n u}{\sin \frac{u}{2}} \, \frac{\sin u \, d u}{\sqrt{2(\cos \theta - \cos u)}} ,$$

et si l'on se rappelle le contenu de l'*Addition* au célèbre Mémoire de DIRICHLET sur le développement de LAPLACE (où l'exemple que cite l'illustre auteur est bien près de celui que fournit l'intégrale qui précède), on reconnaît de suite que $\lim S_n = 0$, pour $n = \infty$: tandis que pour $\theta = 0$, on a $S_n = 1$ quel que soit n. Cette remarque, associée à l'emploi (que MM. DINI, DARBOUX et C. NEUMANN ont fait avec tant de succès) des théorèmes de moyennes, permet, ce me semble, de simplifier l'étude du développement dont il s'agit, en la rapprochant étroitement de celle du développement de FOURIER ».

XCV.

INTORNO AL MEZZO ELASTICO DI GREEN.

NOTA I E II.

Rendiconti del R. Istituto Lombardo, serie II, tomo XXIV (1891), pp. 717-726, 779-789.

I.

Se nelle equazioni del moto vibratorio libero d'un mezzo elastico

$$\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} + k\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0,$$

$$\frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z} + k\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0,$$

$$\frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z} + k\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0$$

(dove k è la densità) si attribuisce alle componenti di spostamento u, v, w la forma

$$(1) \qquad u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \qquad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \qquad w = \frac{\partial \varphi}{\partial z},$$

si ottengono tre equazioni le quali, quando il mezzo è isotropo, trovansi essere le derivate prime rispetto ad x, y, z dell'unica equazione

$$(1_a) \qquad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \Omega^2 \Delta^2 \varphi,$$

nella quale Ω rappresenta la velocità di propagazione dei moti longitudinali. Questa riduzione non si verifica, in generale, quando il mezzo non è isotropo; donde consegue che, generalmente parlando, non sono ammissibili spostamenti dotati di potenziale. È quindi naturale il domandare se, oltre ai mezzi isotropi, non vi sieno per avventura altri mezzi elastici, più o meno speciali, i quali ammettano l'esistenza d'un tal potenziale, ossia per i quali si verifichi, come per gli isotropi, l'anzidetta riduzione delle tre equazioni del moto ad una sola, quando le componenti di spostamento ricevano la forma (1).

Per rispondere a tale quesito, si denotino le componenti di deformazione con

$$\alpha = \frac{\partial u}{\partial x}, \qquad \lambda = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z},$$

$$\beta = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \mu = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x},$$

$$\gamma = \frac{\partial w}{\partial z}, \qquad \nu = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}$$

e si rappresentino i valori generali delle componenti di pressione mutate di segno

$$-X_x, \quad -Y_y, \quad -Z_z, \quad -Y_z, \quad -Z_x, \quad -X_y$$

colle sei espressioni lineari che si deducono ordinatamente da

$$a_{r1}\alpha + a_{r2}\beta + a_{r3}\gamma + a_{r4}\lambda + a_{r5}\mu + a_{r6}\nu$$

(dove $a_{rs} = a_{sr}$) ponendo

$$r = 1, 2, 3, 4, 5, 6.$$

Se ad u, v, w si attribuiscono i valori (1) e se quindi si pone in queste sei espressioni lineari

$$\alpha = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \qquad \beta = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}, \qquad \gamma = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2},$$

$$\lambda = 2\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial z}, \qquad \mu = 2\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial x}, \qquad \nu = 2\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y},$$

i termini di $-X_y$ e di $-X_z$ che non contengono derivate di φ rispetto ad x sono rispettivamente

$$a_{62}\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+a_{63}\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}+2a_{64}\frac{\partial^2\varphi}{\partial y\,\partial z},$$

$$a_{52}\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+a_{53}\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}+2a_{54}\frac{\partial^2\varphi}{\partial y\,\partial z}.$$

Ne consegue che lo sviluppo del primo membro dell'equazione

$$-\frac{\partial X_x}{\partial x}-\frac{\partial X_y}{\partial y}-\frac{\partial X_z}{\partial z}=k\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}\right)$$

si compone della derivata rispetto ad x d'una espressione formata linearmente colle derivate seconde di φ, ed inoltre dei termini seguenti:

$$a_{62}\frac{\partial^3\varphi}{\partial y^3}+a_{53}\frac{\partial^3\varphi}{\partial z^3}+(a_{63}+2a_{54})\frac{\partial^3\varphi}{\partial y\,\partial z^2}+(a_{52}+2a_{64})\frac{\partial^3\varphi}{\partial z\,\partial y^2},$$

i quali debbono necessariamente scomparire affinchè abbia luogo la mentovata riduzione. Bisogna dunque porre

$$a_{62}=a_{53}=a_{63}+2a_{54}=a_{52}+2a_{64}=0.$$

Colla permutazione ciclica delle due terne d'indici 1, 2, 3 e 4, 5, 6 si ottengono così le condizioni seguenti:

$$(1_b)\qquad \left\{\begin{aligned} &a_{42}=a_{43}=a_{53}=a_{51}=a_{61}=a_{62}=0,\\ &2a_{56}=-a_{14},\quad 2a_{64}=-a_{25},\quad 2a_{45}=-a_{36},\end{aligned}\right.$$

tenendo conto delle quali si trova poscia

$$-\left(\frac{\partial X_x}{\partial x}+\frac{\partial X_y}{\partial y}+\frac{\partial X_z}{\partial z}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left[a_{11}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+(a_{12}+2a_{66})\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+(a_{31}+2a_{55})\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\right].$$

Ora affinchè il trinomio fra parentesi nel secondo membro si mantenga inalterato anche nelle due altre equazioni analoghe, è necessario che si abbia ulteriormente, denotando con H una costante arbitraria,

$$(1_c)\qquad \left\{\begin{aligned} &a_{11}=a_{22}=a_{33}=H,\\ &a_{23}=H-2a_{44},\quad a_{31}=H-2a_{55},\quad a_{12}=H-2a_{66}.\end{aligned}\right.$$

Non restano dunque definitivamente, (1_b), (1_c), che *sette* parametri arbitrari, cioè

$$H, \quad a_{44}, \quad a_{55}, \quad a_{66}, \quad a_{14}, \quad a_{25}, \quad a_{36}.$$

Se al posto di questi si scrive, per comodo,

$$H, \quad A, \quad B, \quad C, \quad 2E, \quad 2F, \quad 2G,$$

il cercato potenziale d'elasticità Π, di cui le componenti di pressione

$$X_x, \quad Y_y, \quad Z_z, \quad Y_z, \quad Z_x, \quad X_y$$

sono le derivate negative rispetto a quelle di deformazione

$$\alpha, \quad \beta, \quad \gamma, \quad \lambda, \quad \mu, \quad \nu,$$

assume la forma:

$$(2) \qquad \left\{ \begin{aligned} 2\Pi = {} & H\vartheta^2 + A(\lambda^2 - 4\beta\gamma) + B(\mu^2 - 4\gamma\alpha) + C(\nu^2 - 4\alpha\beta) \\ & + 2E(2\alpha\lambda - \mu\nu) + 2F(2\beta\mu - \nu\lambda) + 2G(2\gamma\nu - \lambda\mu), \end{aligned} \right.$$

dove

$$\vartheta = \alpha + \beta + \gamma.$$

Questa è precisamente la forma assegnata da GREEN al potenziale del più generale mezzo elastico nel quale possono propagarsi onde piane longitudinali, qualunque sia l'orientazione del piano di onda. Effettivamente il caso delle onde piane rientra in quello qui considerato, attribuendo a φ il significato di funzione del tempo t e d'un unico altro argomento formato linearmente colle tre coordinate x, y, z. Qualunque sia del resto il tipo di questa funzione φ, l'equazione che la regge conserva sempre la forma (1_a), per

$$(2_a) \qquad \Omega^2 = \frac{H}{k}.$$

Il mezzo elastico di GREEN, definito dall'espressione (2) del potenziale d'elasticità, presenta molte particolarità interessanti, che meritano d'essere studiate e la cui conoscenza può giovare alla retta interpretazione di parecchie fra le formole che s'incontrano nella teoria delle onde.

Innanzi tutto bisogna rammentare una proprietà che scaturisce dalla definizione delle componenti α, β, ..., ν. Se si cambia l'orientazione della terna ortogonale di riferimento e se si denotano con α', β', ..., ν' le componenti relative alla nuova terna, si ha identicamente

$$\begin{aligned} & \alpha X^2 + \beta Y^2 + \gamma Z^2 + \lambda YZ + \mu ZX + \nu XY \\ = {} & \alpha' X'^2 + \beta' Y'^2 + \gamma' Z'^2 + \lambda' Y'Z' + \mu' Z'X' + \nu' X'Y', \end{aligned}$$

dove X, Y, Z sono tre variabili che si trasformano (al modo delle coordinate) in X', Y', Z'.

Da quest'identità seguono queste altre notissime:

$$\mathfrak{I} = \mathfrak{I}', \qquad \nabla = \nabla',$$

dove

$$\nabla = \begin{vmatrix} 2\alpha & \nu & \mu \\ \nu & 2\beta & \lambda \\ \mu & \lambda & 2\gamma \end{vmatrix}.$$

Si ha quindi anche

$$\frac{\partial \nabla}{\partial \alpha}\delta\alpha + \frac{\partial \nabla}{\partial \beta}\delta\beta + \cdots + \frac{\partial \nabla}{\partial \nu}\delta\nu = \frac{\partial \nabla'}{\partial \alpha'}\delta\alpha' + \frac{\partial \nabla'}{\partial \beta'}\delta\beta' + \cdots + \frac{\partial \nabla'}{\partial \nu'}\delta\nu'$$

dove le variazioni $\delta\alpha$, $\delta\beta$, ... sono quantità arbitrarie, vincolate alle $\delta\alpha'$, $\delta\beta'$, ... dall'identità

$$X^2\delta\alpha + Y^2\delta\beta + \cdots + XY\delta\nu = X'^2\delta\alpha' + Y'^2\delta\beta' + \cdots + X'Y'\delta\nu'.$$

Da questa semplice osservazione risulta immediatamente, scrivendo $-A, -B, \ldots, -2G$ al posto di $\delta\alpha$, $\delta\beta$, ..., $\delta\nu$, che il potenziale Π, riferito alla nuova terna, è dato da

$$2\Pi' = H\mathfrak{I}'^2 + A'(\lambda'^2 - 4\beta'\gamma') + B'(\mu'^2 - 4\gamma'\alpha') + \cdots + 2G'(2\gamma'\nu' - \lambda'\mu'),$$

dove A', B', ..., $2G'$ sono nuovi coefficienti dipendenti linearmente dai primitivi A, B, ..., $2G$ per mezzo dell'identità

$$\begin{aligned} &AX^2 + BY^2 + CZ^2 + 2EYZ + 2FZX + 2GXY \\ &= A'X'^2 + B'Y'^2 + C'Z'^2 + 2E'Y'Z' + 2F'Z'X' + 2G'X'Y' \quad {}^{*}). \end{aligned}$$

Ne consegue che il potenziale del mezzo elastico di Green può sempre essere ridotto alla forma canonica

$$(2') \quad 2\Pi' = H\mathfrak{I}'^2 + A'(\lambda'^2 - 4\beta'\gamma') + B'(\mu'^2 - 4\gamma'\alpha') + C'(\nu'^2 - 4\alpha'\beta'),$$

e ciò mediante quello stesso cambiamento d'orientazione degli assi ortogonali delle x, y, z

---

*) Questa dipendenza proviene dunque da un'analogia dei coefficienti $A, B, \ldots$ colle componenti $\alpha, \beta, \ldots$ e non già colle X_x, Y_y, ..., come lascierebbe credere una frase di Lamé (*Leçons sur l'élasticité*, p. 233). L'equivoco è prodotto dal fattore 2 applicato, per puro comodo, ai coefficienti E, F, G.

che riduce alla forma canonica la quadratica

$$(2_b) \qquad A x^2 + B y^2 + C z^2 + 2 E y z + 2 F z x + 2 G x y.$$

Ciò premesso si osservi che se in (2) si suppongono nulle tutte le componenti α, β, γ, λ, μ, ν ad eccezione di λ, oppure di μ, oppure di ν, si ottiene rispettivamente

$$2\Pi = A\lambda^2, \qquad = B\mu^2, \qquad = C\nu^2:$$

la positività di Π richiede adunque indubbiamente che i tre coefficienti A, B, C sieno tutti *maggiori di zero*. Lo stesso dicasi dei coefficienti A', B', C' nella forma canonica (2').

In base a ciò è facile assegnare le condizioni necessarie e sufficienti per la positività di Π.

Si consideri dapprima la forma canonica (2'), dove si è già visto dover essere

$$A' > 0, \qquad B' > 0, \qquad C' > 0,$$

talchè basta accertare la positività della quadratica

$$H(\alpha' + \beta' + \gamma')^2 - 4(A'\beta'\gamma' + B'\gamma'\alpha' + C'\alpha'\beta').$$

Dovendo essere

$$H > 0,$$

(senza di che questa funzione diverrebbe negativa per tutti i valori positivi di α', β', γ') si può porre

$$1 - \frac{2A'}{H} = \boldsymbol{A}, \qquad 1 - \frac{2B'}{H} = \boldsymbol{B}, \qquad 1 - \frac{2C'}{H} = \boldsymbol{C}$$

e considerare l'altra quadratica

$$\alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2 + 2\boldsymbol{A}\beta'\gamma' + 2\boldsymbol{B}\gamma'\alpha' + 2\boldsymbol{C}\alpha'\beta',$$

per la quale il noto processo elementare conduce subito alle due condizioni di positività

$$1 - \boldsymbol{C}^2 > 0, \qquad 1 + 2\boldsymbol{ABC} - \boldsymbol{A}^2 - \boldsymbol{B}^2 - \boldsymbol{C}^2 > 0,$$

equivalenti ad

$$1 - \frac{C'}{H} > 0,$$

$$2B'C' + 2C'A' + 2A'B' - A'^2 - B'^2 - C'^2 - \frac{4A'B'C'}{H} > 0.$$

Ma la seconda di queste può scriversi

$$4A'B'\left(1 - \frac{C'}{H}\right) > (A' + B' - C')^2,$$

e però include la prima; le condizioni di positività della forma canonica di **Π** sono quindi

$$H > 0, \qquad A' > 0, \qquad B' > 0, \qquad C' > 0,$$

$$4(B'C' + C'A' + A'B') - (A' + B' + C')^2 - \frac{4A'B'C'}{H} > 0.$$

Per passare da queste condizioni speciali alle generali, basta osservare che i coefficienti canonici A', B', C' sono le radici, sempre reali, dell'equazione di 3° grado in s

$$\begin{vmatrix} A-s & G & F \\ G & B-s & E \\ F & E & C-s \end{vmatrix} = 0.$$

Affinchè queste radici sieno tutte maggiori di zero è necessario e sufficiente che i segni dei coefficienti presentino tre variazioni, cioè che si abbia

$$D > 0, \qquad d > 0, \qquad \Delta > 0,$$

dove

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} D &= A + B + C = A' + B' + C', \\ d &= a + b + c = B'C' + C'A' + A'B', \\ \Delta &= \begin{vmatrix} A & G & F \\ G & B & E \\ F & E & C \end{vmatrix} = A'B'C', \\ a &= BC - E^2, \qquad e = FG - AE, \\ b &= CA - F^2, \qquad f = GE - BF, \\ c &= AB - G^2, \qquad g = EF - CG. \end{aligned}\right.$$

Il sistema completo delle condizioni per la positività di **Π** è quindi

$$(3_a)\qquad \left\{\begin{aligned} &H > 0, \qquad D > 0, \qquad \Delta > 0, \\ &4Hd - HD^2 - 4\Delta > 0, \end{aligned}\right.$$

delle quali diseguaglianze la prima, terza e quarta includono l'altra dapprima trovata $d > 0$, che perciò è stata soppressa. (Questa riduzione avrebbe potuto eseguirsi anche prima, sulle cinque condizioni trovate per la forma canonica).

Un'altra ricerca preliminare, necessaria a farsi, è quella della forma che prende il potenziale Π, quand'esso venga espresso per le componenti di pressione anzichè per quelle di deformazione.

Il calcolo diretto di questa nuova espressione di Π esigerebbe la risoluzione, rispetto ad α, β, γ, λ, μ, ν, delle sei equazioni lineari

$$
(4)\qquad \left\{\begin{aligned}
&X_x + H\vartheta - 2B\gamma - 2C\beta + 2E\lambda = 0,\\
&Y_y + H\vartheta - 2C\alpha - 2A\gamma + 2F\mu = 0,\\
&Z_z + H\vartheta - 2A\beta - 2B\alpha + 2G\nu = 0,\\
&Y_z + 2E\alpha + A\lambda - F\nu - G\mu = 0,\\
&Z_x + 2F\beta + B\mu - G\lambda - E\nu = 0,\\
&X_y + 2G\gamma + C\nu - E\mu - F\lambda = 0;
\end{aligned}\right.
$$

ma si può evitare il tedio di siffatta operazione nel modo seguente.

Pongasi per poco

$$
(4_a)\qquad \left\{\begin{aligned}
\varphi &= AX_x + BY_y + CZ_z + 2EY_z + 2FZ_x + 2GX_y + DH\vartheta,\\
\psi &= a\alpha + b\beta + c\gamma + e\lambda + f\mu + g\nu
\end{aligned}\right.
$$

e si osservi che, formando l'espressione

$$\chi = \varphi - 2\psi,$$

si possono sostituire alle equazioni (4) le seguenti:

$$\frac{\partial\chi}{\partial A} = \frac{\partial\chi}{\partial B} = \frac{\partial\chi}{\partial C} = \frac{\partial\chi}{\partial E} = \frac{\partial\chi}{\partial F} = \frac{\partial\chi}{\partial G} = 0.$$

Ora, per essere il determinante Δ diverso da zero, (3_a), le quantità a, b, c, e, f, g sono funzioni *indipendenti* delle A, B, C, E, F, G: dunque le sei equazioni testè scritte possono alla loro volta essere sostituite da queste altre

$$\frac{\partial\chi}{\partial a} = \frac{\partial\chi}{\partial b} = \frac{\partial\chi}{\partial c} = \frac{\partial\chi}{\partial e} = \frac{\partial\chi}{\partial f} = \frac{\partial\chi}{\partial g} = 0,$$

ossia da

$$
(4_b)\qquad \left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial\varphi}{\partial a} = 2\alpha, \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial b} = 2\beta, \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial c} = 2\gamma,\\
&\frac{\partial\varphi}{\partial e} = 2\lambda, \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial f} = 2\mu, \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial g} = 2\nu,
\end{aligned}\right.
$$

dove l'espressione di φ è da considerarsi come definita dall'equazione

$$\Delta\varphi = (bc - e^2)X_x + (ca - f^2)Y_y + (ab - g^2)Z_z$$
$$+ 2(fg - ae)Y_z + 2(ge - bf)Z_x + 2(ef - cg)X_y$$
$$+ (bc - e^2 + ca - f^2 + ab - g^2)H\mathfrak{z}.$$

Per agevolare lo sviluppo delle equazioni (4_b) giova scrivere

$$\Delta\frac{\partial\varphi}{\partial a} = \frac{\partial(\Delta\varphi)}{\partial a} - \varphi\frac{\partial\Delta}{\partial a}, \quad \text{ecc.},$$

ed osservare che da

$$\begin{vmatrix} a & g & f \\ g & b & e \\ f & e & c \end{vmatrix} = \Delta^2$$

si ricava

$$2\Delta\frac{\partial\Delta}{\partial a} = bc - e^2 = \Delta A,$$

$$2\Delta\frac{\partial\Delta}{\partial e} = 2(fg - ae) = 2\Delta E,$$

talchè

$$\Delta\frac{\partial\varphi}{\partial a} = \frac{\partial(\Delta\varphi)}{\partial a} - \frac{1}{2}A\varphi,$$

$$\Delta\frac{\partial\varphi}{\partial e} = \frac{\partial(\Delta\varphi)}{\partial e} - E\varphi.$$

In base a ciò le sei equazioni (4_b), sviluppate, diventano

$$cY_y + bZ_z - 2eY_z + (b + c)H\mathfrak{z} - \tfrac{1}{2}A\varphi = 2\Delta\alpha,$$

. . . .

$$-eX_x - aY_z + gZ_x + fX_y - eH\mathfrak{z} - \tfrac{1}{2}E\varphi = \Delta\lambda,$$

. . . .

dove ora conviene restituire a φ la sua primitiva espressione (4_a).

Sommando le prime tre di queste equazioni, si trova

$$d(X_x + Y_y + Z_z) + 2dH\mathfrak{z} - \tfrac{1}{2}D\varphi - 2\Delta\mathfrak{z}$$
$$-(aX_x + bY_y + cZ_z + 2eY_z + 2fZ_x + 2gX_y) = 0,$$

d'onde, posto per brevità

$$(4_c)\qquad \begin{cases} A X_x + B Y_y + C Z_z + 2 E Y_z + 2 F Z_x + 2 G X_y = 2\Theta, \\ a X_x + b Y_y + c Z_z + 2 e Y_z + 2 f Z_x + 2 g X_y = 2\theta, \\ X_x + Y_y + Z_z = P, \end{cases}$$

si deduce

$$(4_d)\qquad \mathfrak{z} = 2\,\frac{D\Theta + 2\theta - dP}{4Hd - HD^2 - 4\Delta}.$$

Sommando finalmente tutte sei le equazioni, dopo averle ordinatamente moltiplicate per

$$X_x, \quad Y_y, \quad Z_z, \quad 2Y_z, \quad 2Z_x, \quad 2X_y,$$

ed osservando che il secondo membro dell'equazione risultante equivale a $-4\Delta\Pi$, si ottiene, mercè la sostituzione del valore (4_d) di $\mathfrak{z}$,

$$(5)\qquad \begin{cases} 2\Delta\Pi = \Theta^2 + H\,\dfrac{(D\Theta + 2\theta - dP)^2}{4Hd - HD^2 - 4\Delta} \\ \quad + a(Y_z^2 - Y_y Z_z) + b(Z_x^2 - Z_z X_x) + c(X_y^2 - X_x Y_y) \\ + 2e(X_x Y_z - Z_x X_y) + 2f(Y_y Z_x - X_y Y_z) + 2g(Z_z X_y - Y_z Z_x). \end{cases}$$

Quest'equazione fornisce la richiesta espressione del potenziale Π in funzione delle componenti di pressione, e le derivate negative di tale espressione rispetto a queste componenti forniscono i valori di $\alpha, \beta, \gamma, \lambda, \mu, \nu$ espressi per $X_x, Y_y, Z_z, Y_z, Z_x, X_y$, vale a dire quei valori che si sarebbero dovuti ricavare dalle equazioni (4). È manifesta la correlazione dell'ultimo sestinomio in (5) con quello che figura nella primitiva espressione (2) di Π; come è notevole la forma assai più complicata del primo gruppo di termini della nuova espressione (5).

Ma di quest'ultima particolarità, come d'altre svariate questioni, si dirà nella Nota II.

II.

Per un mezzo isotropo si verifica in ogni punto la nota proprietà che la terna delle dilatazioni principali e quella delle pressioni principali sono egualmente orientate: è una proprietà che si può assumere come definizione dell'isotropia.

Quali rapporti geometrici intercedono, in un punto qualunque del mezzo elastico di GREEN, fra le orientazioni delle due analoghe terne? È questo un problema che si presenta naturalmente a chi prenda in esame le proprietà del mezzo elastico anzidetto.

Posto

$$\Phi = X_x x^2 + Y_y y^2 + Z_z z^2 + 2\, Y_z y z + 2\, Z_x z x + 2\, X_y x y\,,$$

è ben noto che la ricerca delle tre pressioni principali equivale, analiticamente parlando, a quella della sostituzione ortogonale che riduce questa funzione quadratica a forma canonica. Sostituendo in questa funzione le espressioni X_x, Y_y, ... fornite dalle equazioni (4) della Nota I, ponendo

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

e scrivendo, per semplicità, quei soli termini donde gli altri analoghi si possono dedurre colla permutazione ciclica, si ottiene

$$-\Phi = H\vartheta r^2 + 2x^2(-C\beta - B\gamma + E\lambda) + \cdots + 2yz(2E\alpha + A\lambda - G\mu - F\nu) + \cdots.$$

La soluzione analitica del problema consiste dunque nella riduzione di questa funzione a forma canonica. Ma la complicazione dei coefficienti non permette di riconoscere agevolmente, per questa via, la cercata legge di dipendenza. Fa d'uopo trasformare convenientemente l'espressione testè calcolata per Φ.

Il mezzo elastico di GREEN presenta, di per sè stesso, una ben distinta terna ortogonale fissa, che ne caratterizza la natura intrinseca e l'orientazione rispetto agli assi coordinati, indipendentemente da ogni considerazione di deformazione o di pressione: è quella definita, (2_b), dalla quadratica essenzialmente positiva

$$\psi = Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Eyz + 2Fzx + 2Gxy\,,$$

della quale è ben noto l'ufficio importantissimo nella teoria delle onde. Intorno a ciascun punto del mezzo l'andamento delle pressioni X_x, Y_y, ..., corrispondenti a date deformazioni α, β, ..., è essenzialmente determinato (quanto a direzione) da questa quadratica ψ, quale elemento *fisso* rappresentativo del mezzo, e dall'altra quadratica

$$\varepsilon = \alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 + \lambda yz + \mu zx + \nu xy\,,$$

quale elemento *variabile* rappresentativo dello stato di deformazione attuale. Quando x, y, z sono coseni d'una direzione, ε rappresenta, com'è notissimo, il coefficiente di dilatazione lineare in questa direzione.

La riduzione dalla quadratica ψ a forma canonica fa intervenire la predetta terna ortogonale (fissa) di direzioni: l'analoga riduzione della quadratica ε fa intervenire un'altra terna ortogonale (variabile), la quale non è altro che quella delle dilatazioni principali. È evidente che la terna ortogonale delle pressioni principali dev'essere *covariante* con queste due: donde consegue che la quadratica Φ non può essere altro che un *covariante ortogonale* di ψ e di ε e che essa deve quindi potersi esprimere, in forma lineare ed omogenea, per mezzo di

$$\psi, \qquad \varepsilon, \qquad \Delta_1(\psi, \varepsilon), \qquad r^2.$$

Egli è siffatta espressione covariante che si tratta di formare.

Si giunge facilmente a questa meta calcolando l'espressione di $\Delta_1(\psi, \varepsilon)$, la quale si trova essere

$$\Delta_1(\psi, \varepsilon) = 2x^2(2A\alpha + F\mu + G\nu) + \cdots$$
$$\cdots + 2yz[2E(\beta + \gamma) + (B + C)\lambda + G\mu + F\nu] + \cdots$$

Di qui, ponendo per brevità

$$\sigma = A\alpha + B\beta + C\gamma + E\lambda + F\mu + G\nu,$$

si deduce

$$-\Phi + \Delta_1(\psi, \varepsilon) = H\vartheta r^2 + 2x^2(\sigma + A\vartheta + D\alpha - D\vartheta) + \cdots$$
$$\cdots + 2yz(2E\vartheta + D\lambda) + \cdots = 2\vartheta\psi + 2D\varepsilon + [2\sigma + (H - 2D)\vartheta]r^2,$$

e si perviene così all'espressione

$$\Phi = \Delta_1(\psi, \varepsilon) - 2\vartheta\psi - 2D\varepsilon - [2\sigma + (H - 2D)\vartheta]r^2$$

che è la richiesta e che riesce formata nel modo già previsto.

Si osservi che, essendo

$$\Delta_1(\psi, r^2) = 4\psi, \qquad \Delta_1(\varepsilon, r^2) = 4\varepsilon, \qquad \Delta_1(r^2, r^2) = 4r^2,$$

si ha

$$\Delta_1(\psi, \varepsilon) - 2\vartheta\psi - 2D\varepsilon = \Delta_1(\psi, \varepsilon) - \frac{\vartheta}{2}\Delta_1(\psi, r^2) - \frac{D}{2}\Delta_1(\varepsilon, r^2)$$
$$= \Delta_1\left(\psi - \frac{D}{2}r^2, \varepsilon - \frac{\vartheta}{2}r^2\right) - D\vartheta r^4,$$

talchè si può porre anche

$$\Phi = \Delta_1\left(\psi - \frac{D}{2}r^2, \varepsilon - \frac{\vartheta}{2}r^2\right) - [2\sigma + (H - D)\vartheta]r^2.$$

Si osservi inoltre che, in ogni riduzione a forma canonica, i termini quadratici proporzionali ad r^2 non hanno influenza sui coefficienti della sostituzione ortogonale. Se, in base a ciò, si pone per un momento

$$\psi^* = \psi - \frac{D}{2} r^2, \qquad \varepsilon^* = \varepsilon - \frac{\mathfrak{F}}{2} r^2,$$

la cercata legge geometrica di dipendenza può essere enunciata nei termini seguenti: *La terna delle pressioni principali è orientata secondo gli assi del cono quadrico*

$$\Delta_1(\psi^*, \varepsilon^*) = 0$$

luogo dei punti in cui i due sistemi di quadriche

$$\psi^* = \text{Cost.}, \qquad \varepsilon^* = \text{Cost.}$$

si segano ad angolo retto. Queste quadriche sono omocicliche alle ψ, ε, di cui si rammentò già il significato caratteristico.

In generale niun asse della terna di pressione coincide con uno di quelli della terna di dilatazione. Si può fondare sull'ipotesi di tale coincidenza, subordinata a certe condizioni particolari, una nuova genesi del mezzo di Green, che è utile di far conoscere.

Si riprenda a considerare un mezzo elastico del tutto generale, di potenziale Π, e s'immagini che in un punto di esso si verifichi uno stato di deformazione particolarissimo, quello, cioè, che consiste semplicemente in una dilatazione lineare ε secondo un'unica direzione, cha si dirà R, di coseni x, y, z. Si ha in tal caso, nel punto considerato (veggasi la Nota I), l'identità

$$\alpha X^2 + \beta Y^2 + \gamma Z^2 + \lambda YZ + \mu ZX + \nu XY = \varepsilon(Xx + Yy + Zz)^2,$$

donde

$$(6) \qquad \begin{cases} \alpha = \varepsilon x^2, & \beta = \varepsilon y^2, & \gamma = \varepsilon z^2, \\ \lambda = 2\varepsilon yz, & \mu = 2\varepsilon zx, & \nu = 2\varepsilon xy. \end{cases}$$

Affinchè la direzione R della dilatazione ε sia pur quella di una, p, delle tre pressioni principali, corrispondenti a questo stato di deformazione, debbono sussistere le equazioni

$$X_x x + X_y y + X_z z = px,$$
$$Y_x x + Y_y y + Y_z z = py,$$
$$Z_x x + Z_y y + Z_z z = pz.$$

La prima di queste equazioni equivale alla seguente:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \alpha} x + \frac{\partial \Pi}{\partial \nu} y + \frac{\partial \Pi}{\partial \mu} z + px = 0$$

e questa, denotando con π la funzione omogenea di 4° grado in x, y, z che si ricava da Π sostituendo ordinatamente

$$x^2, \quad y^2, \quad z^2, \quad 2yz, \quad 2zx, \quad 2xy$$

al posto di

$$\alpha, \quad \beta, \quad \gamma, \quad \lambda, \quad \mu, \quad \nu,$$

si riduce semplicemente, (6), ad

$$\varepsilon \frac{\partial \pi}{\partial x} + 2px = 0 .$$

Le condizioni dell'esistenza d'una pressione principale p nella direzione R della dilatazione ε sono quindi le seguenti:

$$(6_a) \qquad \frac{\partial \pi}{\partial x} + \frac{2px}{\varepsilon} = 0, \qquad \frac{\partial \pi}{\partial y} + \frac{2py}{\varepsilon} = 0, \qquad \frac{\partial \pi}{\partial z} + \frac{2pz}{\varepsilon} = 0$$

e la determinazione delle varie direzioni R, per le quali si verifica questa coincidenza (prescindendo dall'evidente invertibilità d'ognuna d'esse, talchè si può parlare di *rette* R), rientra in quella delle soluzioni reali, rispetto ai rapporti $x:y:z$, delle equazioni che risultano dall'eliminazione di $p:\varepsilon$ fra le equazioni precedenti, cioè delle equazioni omogenee

$$\frac{\partial \pi}{\partial y} z - \frac{\partial \pi}{\partial z} y = 0, \qquad \frac{\partial \pi}{\partial z} x - \frac{\partial \pi}{\partial x} z = 0, \qquad \frac{\partial \pi}{\partial x} y - \frac{\partial \pi}{\partial y} x = 0,$$

una delle quali è conseguenza delle altre due. Ora se si lascia in disparte una di queste equazioni, per esempio l'ultima, si può soddisfare alle due rimanenti ponendo

$$\frac{\partial \pi}{\partial z} = 0, \qquad z = 0;$$

ma le tre rette definite da queste equazioni, quand'anche fossero reali, non potrebbero in generale far parte delle cercate rette R. Infatti queste tre rette giacciono nel piano xy, il quale, essendo arbitrario, può sempre supporsi tale che non contenga veruna retta R (ammesso che il numero di queste rette sia finito). Le due equazioni omogenee sono d'altronde del 4° grado rispetto ai rapporti $x:y:z$ e non possono quindi ammettere più di 16 soluzioni, se il numero delle soluzioni è finito: dunque *le rette R, quando sono in numero finito, non possono essere più di* 13.

Questo massimo numero di rette R può essere effettivamente raggiunto. Ciò risulta dalla discussione già fatta da De Saint-Venant (nella traduzione francese del

Trattato d'elasticità di CLEBSCH, pag. 89 e segg.) di un problema, che non è meccanicamente identico all'attuale, ma che analiticamente non ne differisce, e sul quale si ritornerà in seguito. Ma il numero delle rette R, necessariamente sempre impari, può essere minore di 13; benchè non possa mai scendere al disotto di 3, se il potenziale Π è essenzialmente positivo. Infatti in tal caso la quartica π possiede il medesimo carattere, epperò la superficie

$$2\pi(x, y, z) = 1,$$

se non è sferica (il che corrisponde al caso d'indeterminazione di R), deve possedere almeno un punto di massimo ed uno di minimo valore del raggio vettore quadrato r^2: ora la ricerca di tali punti riconduce ad equazioni della forma (6_a), ed alle due soluzioni necessarie se ne deve associare almeno una terza. Anche questo limite inferiore può essere effettivamente raggiunto: basta supporre che la quartica π si riduca al quadrato d'una quadratica positiva, ipotesi che può benissimo avverarsi per convenienti espressioni del potenziale Π.

Questo potenziale contiene, in generale, 21 coefficienti indipendenti, mentre la quartica π non ne può contenere che 15. Vi è dunque un numero sei volte infinito di potenziali Π ai quali corrisponde una medesima quartica π. Osservando che, se sono soddisfatte le relazioni (6), si annullano identicamente i sei binomi

$$\begin{array}{ccc} \lambda^2 - 4\beta\gamma, & \mu^2 - 4\gamma\alpha, & \nu^2 - 4\alpha\beta, \\ 2\alpha\lambda - \mu\nu, & 2\beta\mu - \nu\lambda, & 2\gamma\nu - \lambda\mu, \end{array}$$

i quali sono fra loro linearmente indipendenti, si riconosce subito che tutti i potenziali della forma

$$\begin{aligned} 2\Pi = 2\Pi_0 + A(\lambda^2 - 4\beta\gamma) + B(\mu^2 - 4\gamma\alpha) + C(\nu^2 - 4\alpha\beta) \\ + 2E(2\alpha\lambda - \mu\nu) + 2F(2\beta\mu - \nu\lambda) + 2G(2\gamma\nu - \lambda\mu) \end{aligned}$$

conducono alla stessa quartica π_0 come il potenziale Π_0, qualunque sieno i sei coefficienti indipendenti A, B, C, E, F, G. Si può dunque, rispetto alla ricerca delle rette R, disporre di questi ultimi in modo da diminuire di 6 il numero dei coefficienti indipendenti contenuti in Π_0, riducendoli così a 15, che è quanto dire allo stesso numero di quelli della quartica *).

*) È interessante notare che questo potenziale Π_0 può essere ridotto, con questo processo, alla forma voluta dalla cosidetta teoria molecolare. Cfr. per esempio l'App. III dell'edizione di NAVIER illustrata da DE SAINT-VENANT.

Se nella precedente espressione di Π si attribuisse a Π_0 la forma particolarissima

$$\Pi_0 = \frac{1}{2} H(\alpha + \beta + \gamma)^2,$$

la corrispondente quartica π_0 prenderebbe la forma

$$\pi_0 = \frac{1}{2} H(x^2 + y^2 + z^2)^2$$

e le equazioni (6_a) si ridurrebbero ad

$$H + \frac{p}{\varepsilon} = 0,$$

restando indeterminati i coseni x, y, z: cosicchè ogni retta sarebbe una retta R. È facile convincersi che il caso qui accennato è il solo nel quale tale proprietà si verifichi. E poichè, in questo stesso caso, Π assume la forma che compete al mezzo di Green, si conclude che questo è *il più generale mezzo elastico nel quale ogni retta è una retta R*.

La questione, cui si alluse dianzi, trattata da De Saint-Venant (dietro concetti di Cauchy), si accosta in qualche modo alla reciproca della precedente, poichè lo stato del mezzo che vi si considera è caratterizzato non già da un'unica dilatazione lineare ε, ma da un'unica pressione p di determinata direzione. La ricerca delle direzioni di questa pressione p, che coincidono con una delle tre corrispondenti direzioni di dilatazione principale ε, equivale analiticamente (dietro quanto precede) a quella dei massimi e dei minimi valori del rapporto $p : \varepsilon$, cioè (mutando il segno) del *modulo d'elasticità* del mezzo nella direzione di p: ed è sotto quest'ultimo punto di vista che De Saint-Venant (il quale del resto non considera un mezzo elastico del tutto generale) studia tale questione e ne discute il numero di soluzioni, senza rilevare il nesso con quella delle direzioni principali. L'evidente correlazione di questo secondo problema col già trattato rende superfluo dimostrare che il potenziale del più generale mezzo elastico, in cui ogni retta è asse di massimo o minimo modulo *), è formato colle componenti di pressione

$$X_x, \quad Y_y, \quad Z_z, \quad Y_z, \quad Z_x, \quad X_y,$$

come il potenziale (2) del mezzo di Green è formato colle quantità

$$2\alpha, \quad 2\beta, \quad 2\gamma, \quad \lambda, \quad \mu, \quad \nu;$$

epperò ha l'espressione che si ricaverebbe dalla (5) facendo $H = 0$ e ponendo, in luogo di Θ^2, il prodotto di P^2 per una nuova costante arbitraria. È del pari manifesto che, rispetto alla ricerca degli assi di massimo e minimo modulo in un mezzo qualunque,

*) Denominazione non assolutamente propria, ma qui adoperata per comodità di linguaggio.

è indifferente ogni sestinomio della forma di quello che, nell'ora citata espressione (5), costituisce l'ultima parte del secondo membro.

Da quest'ultima osservazione risulta che, per il mezzo di GREEN, tale ricerca trovasi notevolmente semplificata; giacchè se si pone per brevità

$$\frac{H}{4Hd - D^2 - 4\Delta} = H_1,$$

la funzione analoga a π si riduce, (5), a

$$\pi = \frac{\psi^2 + H_1 \psi_1^2}{8\Delta},$$

dove ψ è la quadratica già denotata (nella presente Nota) con questo stesso simbolo e ψ_1 è un'altra quadratica, che si deduce da

$$2dP - 2D\Theta - 4\theta$$

scrivendo ordinatamente

$$x^2, \quad y^2, \quad z^2, \quad yz, \quad zx, \quad xy$$

al posto di

$$X_x, \quad Y_y, \quad Z_z, \quad Y_z, \quad Z_x, \quad X_y.$$

Le equazioni analoghe alla (6_a) sono quindi

$$\frac{\partial \pi}{\partial x} + \frac{2\varepsilon}{p} x = 0, \quad \text{ecc.},$$

ossia

$$\psi \frac{\partial \psi}{\partial x} + H_1 \psi_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial x} + \frac{8\Delta\varepsilon}{p} x = 0, \quad \text{ecc.}$$

e diventano ancora più semplici supponendo riferito il mezzo ai suoi tre assi di simmetria, cioè ponendo $E = F = G = 0$. In questo caso infatti si ha

$$\psi = Ax^2 + By^2 + Cz^2, \qquad \psi_1 = A_1 x^2 + B_1 y^2 + C_1 z^2,$$

dove

$$A_1 = A(D - 2A), \qquad B_1 = B(D - 2B), \qquad C_1 = C(D - 2C),$$

e le tre equazioni prendono la forma

$$\left(A\psi + H_1 A_1 \psi_1 + \frac{4\Delta\varepsilon}{p}\right) x = 0,$$

$$\left(B\psi + H_1 B_1 \psi_1 + \frac{4\Delta\varepsilon}{p}\right) y = 0,$$

$$\left(C\psi + H_1 C_1 \psi_1 + \frac{4\Delta\varepsilon}{p}\right) z = 0.$$

I trinomi fra parentesi non possono annullarsi tutti ad un tempo, se non è

$$(B - C)(C - A)(A - B) = 0;$$

cosicchè, supposte diseguali le costanti positive A, B, C, non vi sono da considerare che due specie distinte di soluzioni.

La prima corrisponde ai gruppi d'equazioni di cui è tipo il seguente:

$$x = 1, \qquad y = z = 0, \qquad A\psi + H_1 A_1 \psi_1 + \frac{4\Delta\varepsilon}{p} = 0,$$

donde

$$-\frac{p}{\varepsilon} = \frac{4\Delta}{A^2 + H_1 A_1^2};$$

si ottengono così i tre assi di simmetria del mezzo.

La seconda specie corrisponde all'altro gruppo tipico:

$$x = 0, \qquad \begin{cases} B\psi + H_1 B_1 \psi_1 + \dfrac{4\Delta\varepsilon}{p} = 0, \\ C\psi + H_1 C_1 \psi_1 + \dfrac{4\Delta\varepsilon}{p} = 0, \end{cases}$$

e può somministrare rette situate nei piani di simmetria. Per le rette nel piano yz si ottiene facilmente (per differenza) l'equazione

$$A\psi - H_1 A_1 \psi_1 = 0,$$

dalla quale risulta che tali rette possono essere due, simmetricamente disposte rispetto agli assi. Tenendo conto di quest'equazione, si ha (per somma)

$$[A(B_1 + C_1) - A_1(B + C)]\psi + \frac{8\Delta A_1 \varepsilon}{p} = 0,$$

ovvero, riducendo,

$$\psi + \frac{2A_1\varepsilon}{p} = 0.$$

Questo risultato manifesta già che quando la costante A_1 è negativa, o nulla, il pajo di rette non può esistere: giacchè il rapporto $p : \varepsilon$ deve risultare, per sua natura, negativo. Ed è d'altronde facile riconoscere che delle tre nuove costanti A_1, B_1, C_1 due sono necessariamente maggiori di zero, ma la terza può riuscire negativa o nulla.

Per meglio analizzare le condizioni di realità delle tre paja di rette giova osservare quanto segue.

Dall'identità facilmente verificabile

$$(D - 2B)(D - 2C) = D_1 - 2A_1,$$

ove

$$D_1 = A_1 + B_1 + C_1 = 4d - D^2,$$

risulta

$$B_1 C_1 + BC(D_1 - 2A_1) \quad *).$$

Di qui, sostituendo per H_1 il valore

$$H_1 = \frac{H}{HD_1 - 4\Delta},$$

si ricava

$$BC - H_1 B_1 C_1 = \frac{2BC(HA_1 - 2\Delta)}{HD_1 - 4\Delta},$$

talchè l'equazione del pajo di rette situato nel piano yz può porsi sotto la forma

$$(HC_1 - 2\Delta)By^2 + (HB_1 - 2\Delta)Cz^2 = 0.$$

La discussione circa la realità delle tre paja di rette si riduce quindi a quella dei segni delle tre differenze

$$HA_1 - 2\Delta, \qquad HB_1 - 2\Delta, \qquad HC_1 - 2\Delta.$$

Ora la quarta delle condizioni (3_a) per la positività di **II**, che può scriversi

$$HD_1 - 4\Delta > 0$$

(e che, insieme colla prima e terza, include la condizione $D_1 > 0$), assegna alla costante H, supposte fissate le A, B, C, il limite inferiore $4\Delta : D_1$. Per tale valor limite di H le tre differenze anzidette si riducono, prescindendo da un fattor comune positivo, a

$$-(D_1 - 2A_1), \qquad -(D_1 - 2B_1), \qquad -(D_1 - 2C_1)$$

e sono tutte tre negative, quando le costanti A_1, B_1, C_1 sono positive, mentre due di

*) È interessante notare le formole reciproche

$$\rho A = A_1(D_1 - 2A_1), \qquad \rho B = B_1(D_1 - 2B_1), \qquad \rho C = C_1(D_1 - 2C_1),$$

$$\rho^2 = (D_1 - 2A_1)(D_1 - 2B_1)(D_1 - 2C_1).$$

Il segno da darsi a ρ risulta da

$$ABC\rho = A_1 B_1 C_1.$$

esse sono positive ed una negativa, quando una di queste costanti è negativa *). D'altronde le tre differenze primitive diventano, nel primo di questi due casi, tutte positive per valori abbastanza grandi di H (quantità che non ha limite superiore): dunque le tre differenze in questione, al crescere di H, passano dal comun segno negativo iniziale al positivo, pure comune, presentando necessariamente, in un certo intervallo limitato, una permanenza e due variazioni (in senso ciclico) le quali danno origine, in questo stesso intervallo di valori di H, a due paja reali di rette (di cui un solo pajo resta costantemente nel medesimo piano di simmetria). Fuori del detto intervallo le paja di rette mancano tutte.

Con analoghe considerazioni si stabilisce assai facilmente che, quando invece una delle costanti A_1, B_1, C_1 è negativa, sono e si mantengono costantemente reali due sole delle tre paja di rette, le quali due paja, variando H, appartengono sempre ai medesimi due piani di simmetria.

Le tre paja di rette spariscono tutte quando si pone $H = 0$. È questa un'ipotesi che non sarebbe conciliabile colle condizioni di positività ma che pure dev'essere menzionata, come quella che è implicita in diverse teorie. In questo caso i soli assi di massimo o minimo modulo sono i tre assi di simmetria del mezzo.

*) Ciò risulta da formole riportate un po' più sopra.

XCVI.

SULLA TEORIA GENERALE DELLE ONDE PIANE.

Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, tomo V (1891), pp. 227-235.

Nel recentissimo Volume che contiene le tanto desiderate Lezioni dell'illustre KIRCHHOFF sulla teoria della Luce *) non veggo che sia fatto cenno d'un utile teorema, che pure scaturisce agevolmente dal procedimento ivi adottato e riprodotto dalla nota Memoria del 1876 *Ueber die Reflexion und Brechung des Lichts an der Grenze krystallinischer Mittel* **). Pensando che questo teorema non sia comunemente noto, mi permetto di quì dimostrarlo, ed approfitto dell'occasione per ripigliare *ab initio* la teoria generale delle onde piane, all'uopo di liberarla (senza verun pregiudizio della brevità) da quell'unica restrizione che ancora vi rimane, nella trattazione di KIRCHHOFF ***).

Il più generale moto per onde piane è rappresentato dalle formole

$$u = u(s,\ t), \qquad v = v(s,\ t), \qquad w = w(s,\ t),$$

dove u, v, w sono le componenti di spostamento, t è il tempo ed s è un parametro definito dall'equazione

$$lx + my + nz = s,$$

l, m, n essendo i coseni di direzione della normale ai piani d'onda $s =$ Cost. Il pro-

*) *Mathematische Optik,* Teubner 1891, XI u. XII Vorl.

**) Abhandlungen der Berliner Akademie, 1876, pp. 57-89, oppure Gesammelte Abhandlungen, pp. 352-376.

***) Quella, cioè, che deriva dal supporre *a priori* rettilinee le vibrazioni.

blema consiste nel riconoscere se, o sotto quali condizioni, si possa con queste espressioni u, v, w soddisfare alle tre equazioni del moto

$$\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad \text{etc.},$$

dove la densità del mezzo si suppone compenetrata, come divisore, nelle componenti di pressione X_x, X_y, etc.

Osservando, in primo luogo, che per ogni funzione del parametro s, qual'è appunto ciascuna componente di pressione, sussistono le relazioni simboliche

$$\frac{\partial}{\partial x} = l\frac{\partial}{\partial s}, \qquad \frac{\partial}{\partial y} = m\frac{\partial}{\partial s}, \qquad \frac{\partial}{\partial z} = n\frac{\partial}{\partial s},$$

si scorge immediatamente che le tre equazioni del moto sono riducibili alla forma semplicissima:

$$\frac{\partial X_s}{\partial s} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \qquad \frac{\partial Y_s}{\partial s} + \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0, \qquad \frac{\partial Z_s}{\partial s} + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0,$$

dove le quantità

$$X_s = l X_x + m X_y + n X_z,$$

$$Y_s = l Y_x + m Y_y + n Y_z,$$

$$Z_s = l Z_x + m Z_y + n Z_z,$$

sono le componenti della pressione che si esercita sul piano d'onda; e queste tre equazioni sono, alla loro volta, surrogabili dall'unica

$$\frac{\partial(a X_s + b Y_s + c Z_s)}{\partial s} + \frac{\partial^2(a u + b v + c w)}{\partial t^2} = 0,$$

dove a, b, c sono tre costanti arbitrarie.

In secondo luogo è da notarsi che, dalle ammesse forme di u, v, w, seguono, per le componenti di deformazione, le espressioni

$$\begin{aligned} x_x &= l u_1, & y_z &= m w_1 + n v_1, \\ y_y &= m v_1, & z_x &= n u_1 + l w_1, \\ z_z &= n w_1, & x_y &= l v_1 + m u_1, \end{aligned} \qquad \left(u_1 = \frac{\partial u}{\partial s}, \text{ etc.}\right)$$

talchè, denotando con Π il potenziale d'elasticità, cioè ponendo

$$X_x = -\frac{\partial \Pi}{\partial x_x}, \qquad X_y = -\frac{\partial \Pi}{\partial x_y}, \quad \text{etc.,}$$

si può scrivere

$$X_s = -\left(\frac{\partial \Pi}{\partial x_x}\frac{\partial x_x}{\partial u_1} + \frac{\partial \Pi}{\partial x_y}\frac{\partial x_y}{\partial u_1} + \frac{\partial \Pi}{\partial x_z}\frac{\partial x_z}{\partial u_1}\right) = -\frac{\partial \Pi}{\partial u_1},$$

cioè si ha

$$X_s = -\frac{\partial \Pi}{\partial u_1}, \qquad Y_s = -\frac{\partial \Pi}{\partial v_1}, \qquad Z_s = -\frac{\partial \Pi}{\partial w_1},$$

donde

$$\begin{aligned} aX_s + bY_s + cZ_s &= -\left(\frac{\partial \Pi}{\partial u_1}a + \frac{\partial \Pi}{\partial v_1}b + \frac{\partial \Pi}{\partial w_1}c\right) \\ &= -\left(\frac{\partial \Pi'}{\partial a}u_1 + \frac{\partial \Pi'}{\partial b}v_1 + \frac{\partial \Pi'}{\partial c}w_1\right) \\ &= -\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial \Pi'}{\partial a}u + \frac{\partial \Pi'}{\partial b}v + \frac{\partial \Pi'}{\partial c}w\right), \end{aligned}$$

dove Π' è ciò che diventa Π quando al posto di x_x, x_y, etc. si sostituiscano le quantità costanti

$$\begin{aligned} x'_x &= la, & y'_z &= mc + nb, \\ y'_y &= mb, & z'_x &= na + lc, \\ z'_z &= nc, & x'_y &= lb + ma. \end{aligned}$$

L'equazione differenziale ottenuta più sopra può scriversi pertanto così:

$$\frac{\partial^2(au + bv + cw)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2}{\partial s^2}\left(\frac{\partial \Pi'}{\partial a}u + \frac{\partial \Pi'}{\partial b}v + \frac{\partial \Pi'}{\partial c}w\right).$$

In terzo ed ultimo luogo si osservi che per ricavare da quest'unica equazione un sistema equivalente a quello delle tre equazioni del moto, basta assegnare alle costanti a, b, c (le quali vi entrano sempre in forma lineare ed omogenea) tre successive terne di valori indipendenti. Ora questa triplice determinazione indipendente può ottenersi introducendo una nuova incognita V e stabilendo le equazioni

$$(A) \qquad \frac{\partial \Pi'}{\partial a} = V^2 a, \qquad \frac{\partial \Pi'}{\partial b} = V^2 b, \qquad \frac{\partial \Pi'}{\partial c} = V^2 c,$$

le quali son quelle stesse cui condurrebbe la ricerca degli assi della quadrica $2\Pi' = 1$, se si considerassero le variabili a, b, c come coordinate d'un punto dello spazio. Questa quadrica, il di cui centro è nell'origine, è un ellissoide quando il potenziale Π è positivo: in tale ipotesi, adunque, l'incognita V^2 ammette tre valori positivi (dipendenti da l, m, n), generalmente distinti, e rappresentanti i quadrati inversi dei semiassi del detto ellissoide. Per ciascuno dei tre sistemi di valori corrispondenti delle quantità V^2, a, b, c (alle tre ultime delle quali giova assegnare il significato di coseni di direzione dei rispettivi semiassi), l'equazione differenziale si riduce alla forma

$$\frac{\partial^2(au+bv+cw)}{\partial t^2}=V^2\frac{\partial^2(au+bv+cw)}{\partial s^2}$$

e possiede quindi il ben noto integrale generale

$$au+bv+cw=\varphi(s-Vt)+\psi(s+Vt),$$

dove φ e ψ sono simboli di funzioni arbitrarie e dove a, b, c sono i coseni di direzione del semiasse che ha per misura l'inversa della velocità di propagazione V.

Il primo membro dell'equazione testè ottenuta rappresenta la componente di spostamento nella direzione del detto semiasse: se quindi si designano per poco con σ, σ', σ'' le tre componenti analoghe e con (a, b, c), (a', b', c'), (a'', b'', c''), i coseni di direzione dei semiassi cui queste componenti si riferiscono, si ha

$$u=a\sigma+a'\sigma'+a''\sigma'',$$

$$v=b\sigma+b'\sigma'+b''\sigma'',$$

$$w=c\sigma+c'\sigma'+c''\sigma''.$$

La risposta al problema è pertanto questa: Qualunque sia il piano d'onda, è possibile la propagazione, in amendue i sensi, di tre distinte onde a vibrazione rettilinea, con tre distinte velocità di propagazione; le direzioni delle tre corrispondenti vibrazioni formano una terna ortogonale, la di cui orientazione, del pari che le grandezze delle tre velocità di propagazione, dipendono dall'orientazione del dato piano d'onda.

Fissando ora l'attenzione sull'onda piana corrispondente ad uno dei tre moti rettilinei possibili, per esempio a quello che è definito da

$$u=a\sigma,\qquad v=b\sigma,\qquad w=c\sigma,$$

bisogna stabilire il concetto di ciò che deve intendersi per *raggio*.

Questo concetto è da fondarsi, a mio avviso, sopra una proposizione che spetta alla teoria generale delle pressioni; ed è la seguente.

Se O è un punto d'un mezzo elastico e Q una retta qualunque uscente da esso, esiste sempre una ed una sola altra retta R, uscente del medesimo punto O, tale che le pressioni agenti su *tutti* gli elementi piani ω', condotti per questa seconda retta R, sono ***normali*** alla prima retta Q.

Si conduca infatti per O l'elemento piano ω normale a Q e sia R la retta secondo cui agisce la relativa pressione. Si consideri uno qualunque degli elementi piani ω' passanti, in O, per questa retta R. In virtù d'un teorema notissimo, la componente normale ad ω della pressione su ω' è uguale alla componente normale ad ω' della pressione su ω. Ma questa seconda componente è nulla, *per costruzione;* dunque è nulla anche la prima, cioè la pressione sull'elemento ω' è diretta normalmente a Q. La cercata retta R è dunque quella secondo cui agisce la pressione sull'elemento piano normale a Q e, mercè lo stesso teorema di reciprocità invocato dianzi, si riconosce molto facilmente non esservi alcun'altra retta che goda della medesima proprietà.

Se alla retta Q si attribuisce la direzione del *moto* che si verifica in O, si conclude dalla proposizione or ora stabilita che esiste sempre una retta R tale che, attraverso ogni elemento piano condotto per essa, non ha luogo veruno *scambio di energia,* nell'intorno del punto considerato.

Ciò premesso, si assuma come direzione di Q, in un punto O dell'onda, la direzione del moto locale, cioè quella che è definita dai coseni a, b, c, e si determini la retta d'azione R della pressione sull'elemento piano ω normale a Q. La direzione della retta R è quella del *raggio*. Essendo infatti questa direzione dovunque la stessa, poichè le componenti di pressione non variano, dall'uno all'altro punto dello spazio invaso dall'onda, se non per un fattore comune a tutte (che è la derivata di σ rispetto ad s), ogni porzione del mezzo contenuta in una superficie cilindrica colle generatrici parallele alla retta R non perde nè acquista energia da parte del mezzo circostante. Ora è appunto questa la proprietà che intrinsecamente caratterizza ciò che deve chiamarsi il raggio limitato da quella superficie cilindrica.

Tale è anche la costruzione cui perviene KIRCHHOFF; senonchè sembra opportuno ch'essa apparisca giustificata da una considerazione generale, qual'è quella che precede, tendente a stabilire *a priori* l'esistenza *necessaria* della direzione R.

Le componenti di pressione sull'elemento piano testè denominato ω sono, per l'onda considerata,

$$X_x a + X_y b + X_z c, \quad \text{etc.}$$

e sono quindi proporzionali a

$$\frac{\partial \Pi'}{\partial x'_x}\frac{\partial x'_x}{\partial l} + \frac{\partial \Pi'}{\partial x'_y}\frac{\partial x'_y}{\partial l} + \frac{\partial \Pi'}{\partial x'_z}\frac{\partial x'_z}{\partial l}, \quad \text{etc.}$$

che è quanto dire a

$$\frac{\partial \Pi'}{\partial l}, \quad \frac{\partial \Pi'}{\partial m}, \quad \frac{\partial \Pi'}{\partial n}:$$

i coseni di direzione del raggio R sono dunque proporzionali, come conclude KIRCHHOFF, a queste tre ultime quantità. Ma ad esse se ne possono sostituire tre altre, molto più significative: ed è in tale sostituzione che principalmente consiste il teorema annunciato al principio di questa Nota.

Dalle equazioni (A), per essere Π' funzione omogenea e quadratica dei tre coseni a, b, c, si deduce

$$2\,\Pi' = V^2,$$

epperò, derivando rispetto ad l,

$$\frac{\partial \Pi'}{\partial l} + \frac{\partial \Pi'}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial l} + \frac{\partial \Pi'}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial l} + \frac{\partial \Pi'}{\partial c}\frac{\partial c}{\partial l} = V\frac{\partial V}{\partial l}.$$

Si ha dunque

$$\frac{\partial \Pi'}{\partial l} = V\frac{\partial V}{\partial l}, \qquad \frac{\partial \Pi'}{\partial m} = V\frac{\partial V}{\partial m}, \qquad \frac{\partial \Pi'}{\partial n} = V\frac{\partial V}{\partial n},$$

giacchè tutti gli altri termini scompajono in virtù delle stesse equazioni (A) e della relazione fra i coseni a, b, c. Si può per conseguenza affermare che: *i coseni di direzione del raggio R sono proporzionali alle quantità*

$$(B) \qquad \frac{\partial V}{\partial l}, \quad \frac{\partial V}{\partial m}, \quad \frac{\partial V}{\partial n}.$$

Dalle equazioni che precedono, per essere Π' funzione omogenea e quadratica di l, m, n e per la già notata eguaglianza $2\,\Pi' = V^2$, si ricava inoltre

$$\frac{\partial V}{\partial l}l + \frac{\partial V}{\partial m}m + \frac{\partial V}{\partial n}n = V:$$

dunque: *V è funzione omogenea e di 1° grado* (in senso euleriano) *delle tre quantità l, m, n.* Ne risulta che dall'equazione

$$lx + my + nz = V,$$

rappresentante il piano generico d'onda, nella posizione ch'esso occupa dopo un'unità di tempo dal suo passaggio per l'origine, si passa a quella dell'inviluppo di tutti i piani analoghi, eliminando l, m, n fra le tre derivate dell'equazione stessa rispetto a questi parametri, cioè fra le equazioni (di grado *zero* rispetto ad l, m, n)

$$(C)\qquad x = \frac{\partial V}{\partial l}, \qquad y = \frac{\partial V}{\partial m}, \qquad z = \frac{\partial V}{\partial n}.$$

Ora queste equazioni definiscono il punto di contatto dell'inviluppo col piano generico (l, m, n): basta dunque confrontarle colle espressioni (B) per concludere senz'altro che: *il punto di contatto dell'inviluppo con ciascun piano d'onda si trova sempre sul raggio corrispondente a questo piano.*

Questa proprietà fondamentale viene così ad essere stabilita senza far intervenire l'equazione esplicita della superficie d'onda: essa è resa indipendente dalla trasversalità delle vibrazioni e sussiste tal quale nel mezzo elastico più generale possibile.

La proprietà della funzione $V(l, m, n)$ d'essere omogenea e di 1° grado in l, m, n, essenziale per la deduzione che precede, diventa del tutto intuitiva, se si guarda alla forma dell'equazione cubica che deve determinare V^2. Quest'equazione, risultante dall'eliminazione di a, b, c fra le tre equazioni (A), ha la forma

$$(D)\qquad \begin{vmatrix} L - V^2 & N' & M' \\ N' & M - V^2 & L' \\ M' & L' & N - V^2 \end{vmatrix} = 0,$$

dove L, M, N, L', M', N' sono sei funzioni omogenee e quadratiche delle sole variabili l, m, n: la quantità V^2 non può evidentemente non essere omogenea con queste sei funzioni.

Queste ultime si possono ridurre, con facili operazioni, alla forma seguente:

$$L = \frac{1}{4}\frac{\partial^2 \Pi''}{\partial l^2} + \frac{1}{2} X''_x, \ \dots, \ L' = \frac{1}{4}\frac{\partial^2 \Pi''}{\partial m \partial n} + \frac{1}{2} Y''_z, \ \dots,$$

dove Π'', X''_x, X''_y, etc. sono espressioni formate cogli argomenti

$$x''_x = l^2, \qquad y''_y = m^2, \qquad z''_z = n^2,$$
$$y''_z = 2mn, \qquad z''_x = 2nl, \qquad x''_y = 2lm$$

come Π, X_x, X_y, etc. sono formate cogli argomenti x_x, x_y, etc.

L'equazione effettiva della superficie d'onda si può subito ottenere, senza artificio veruno, in coordinate plückeriane ξ, η, ζ, definite dall'equazione

$$\xi x + \eta y + \zeta z + 1 = 0.$$

Confrontando infatti quest'equazione con quella del piano d'onda, si ha

$$l = -V\xi, \qquad m = -V\eta, \qquad n = -V\zeta$$

e l'equazione tangenziale in discorso può quindi già scriversi, in forma *implicita,* così:

$$V(\xi, \eta, \zeta) + 1 = 0 .$$

In forma *esplicita* essa si ottiene scrivendo in (D): ξ, η, ζ, 1 al posto di l, m, n, V^2 rispettivamente. La superficie d'onda nel mezzo elastico più generale è dunque della 6^a classe.

XCVII.

CONSIDERAZIONI SULLA TEORIA MATEMATICA DEL MAGNETISMO.

Memorie della R. Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna, serie V, tomo I (1891), pp. 409-453.

Fra le difficoltà che s'incontrano nello svolgimento metodico dei concetti posti a base dell'ordinaria teoria matematica del Magnetismo, quale venne inaugurata da COULOMB e grandemente promossa da POISSON, la maggiore è senza dubbio quella che procede dall'intrinseca indeterminatezza di ciò che chiamasi *elemento magnetico.* Mentre, infatti, la deduzione dei più fondamentali strumenti della ricerca non può essere resa indipendente da qualche postulato relativo alla natura, alla forma ed alla distribuzione di questi elementi, è mancato fino ad ora ogni plausibile motivo di circoscrivere, con ipotesi più o meno precise, l'indeterminatezza di cui si tratta. Queste difficoltà si affacciano in particolar modo nell'indagine relativa alle leggi dell'induzione magnetica, qualora si vogliano ricavare le equazioni caratteristiche di questa dai principî stessi della dottrina del magnetismo, e non già da un appello ulteriore ai risultati dell'osservazione.

Egli è appunto per isfuggire a tali difficoltà che, nella mia Memoria: *Sulla teoria dell'induzione magnetica secondo* POISSON, inserita nei volumi di quest'illustre Accademia *), ho cercato di svolgere una serie di considerazioni tendenti a stabilire le equazioni anzidette senza invocare altre ipotesi, circa la natura degli elementi magnetici, all'infuori di quelle che si potevano fondare sulle più ovvie analogie coi fenomeni elettrostatici. Fin d'allora, infatti, ero venuto nell'opinione (come si può vedere dal Proemio della citata Memoria) che convenisse francare il più possibile la dottrina

---

*) Serie IV, tomo V (1883), pp. 551-584; oppure queste OPERE, tomo IV, pp. 104-135.

del Magnetismo da qualunque supposizione, o, se si vuole, da qualunque rappresentazione schematica troppo particolareggiata ed artificiale.

E tale opinione, non che essere scossa da successivi e reiterati studî sul medesimo argomento, è andata invece sempre più rafforzandosi, così da convertirsi finalmente nell'intima convinzione che il concetto di elemento magnetico potesse senz'alcun danno essere ora messo del tutto in disparte, e dovesse venir sostituito da quello di *polarità magnetica*. Per tale sostituzione, già iniziata da THOMSON e da MAXWELL, ma non attuata (per quanto a me sembra) nella sua piena ed assoluta integrità, non viene affatto abbandonato il terreno della classica dottrina di POISSON; giacchè il più mirabile risultato di questa è stato di porre in sodo l'esistenza di una funzione potenziale elementare

$$v = \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial a}\alpha + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial b}\beta + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial c}\gamma,$$

distinta dalla newtoniana

$$v = \frac{\mu}{r}$$

(benchè con questa strettamente collegata), la qual funzione somministra per così dire la chiave dei fenomeni ove interviene una polarità elettrica o magnetica, a quel modo stesso che l'altra porge la spiegazione ultima dei fenomeni d'indole puramente *apolare*. Dal punto di vista che io propongo le due funzioni testè riportate devono considerarsi come alcunchè di primitivo e di irreducibile, per quanto, in via storica, la prima abbia potuto essere ottenuta e considerata come una derivazione della seconda, mercè appunto il concetto provvisorio di elemento magnetico. Questo modo di vedere non può neppur sollevare serie obbiezioni dal punto di vista didattico, essendochè nella stessa teoria del potenziale newtoniano si presenta spontaneamente la funzione

$$\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}$$

che appartiene al tipo *polare*, e la di cui discussione, debitamente interpolata nell'esposizione di quella teoria, può molto opportunamente preparare e giustificare il trapasso dalla dottrina delle forze apolari a quella delle polari.

Egli è con questi intendimenti che mi sono provato a svolgerè, nella presente Memoria, una teoria matematica del Magnetismo esente da qualunque ipotesi arbitraria, fuorchè da quella che le serve essenzialmente di base, voglio dire da quella che consiste nell'assumere *a priori* l'indicata forma di funzione elementare, per costruire con essa la teoria anzidetta. Questo modesto tentativo non mi è sembrato del tutto vano, neppur di fronte alle recenti e ben più radicali dottrine proposte dal chiaro HERTZ per dominare l'intero campo dei fenomeni elettrici e magnetici: giacchè parmi che ogni nuova elaborazione dei metodi che resero già tanti e sì segnalati servigî alla scienza non possa non arrecare qualche lume, per quanto tenue, al definitivo giudizio che si dovrà fare di quelli, rispetto al migliore assetto che la scienza stessa aspira a conseguire.

Del resto la teoria qui esposta si restringe ai capitoli più fondamentali, ed anche di questi non tocca se non le parti sulle quali maggiormente si riflettevano le incertezze del primitivo punto di partenza. Ho tuttavia approfittato dell'occasione sia per mettere in miglior luce alcune proposizioni che non mi paiono abbastanza note, come ad esempio il teorema sull'ortogonalità integrale delle forze di specie diversa (§ 9), sia per generalizzare ed al tempo stesso per precisare maggiormente la trattazione di qualche problema importante, come è quello dell'induzione magnetica in seno ad un mezzo indefinito polarizzabile (§ 16), sia finalmente per mostrare la conciliabilità dell'esposta dottrina con fenomeni d'induzione più complessi di quelli che risulterebbero già spiegati dalla teoria di POISSON (§ 17). All'incontro ho dovuto rinunciare, per non eccedere la giusta misura d'una Memoria accademica, ad ogni raffronto elettromagnetico, malgrado la quasi impossibilità di separare nettamente la teoria matematica del Magnetismo da quella dell'Elettromagnetismo. Ma di quest'altra teoria spero potermi diffusamente occupare in altra Memoria, e però di proposito mi sono astenuto nella presente da ogni questione avente con quella un necessario collegamento. Aggiungerò, per ultimo, che non senza motivo ho conservato, come nella già citata Memoria *Sulla teoria dell'induzione magnetica,* la maggior generalità alla funzione quadratica che comparisce nelle equazioni d'induzione. Da un lato, infatti, non ne risulta veruna complicazione essenziale nelle deduzioni e dimostrazioni relative; dall'altro, le recenti ingegnosissime ricerche del ch.$^{\mathrm{mo}}$ PICARD *) hanno stabilito che equazioni a coefficienti variabili, del genere di quelle cui alludo, non lasciano d'essere accessibili ad un'analisi rigorosa, per ciò che spetta all'esistenza ed alla natura dei loro integrali.

1. Quando un punto (a, b, c) dello spazio è centro d'una forza magnetica, l'azione (unitaria) che ne risulta sopra un altro punto (x, y, z) a distanza finita dal primo, è retta da una funzione potenziale v. Ponendo

$$r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2},$$

---

*) *Mémoire sur la théorie des équations aux dérivées partielles* (nel *Journal de Mathématiques,* 1890). *Sur la détermination des intégrales de certaines équations aux dérivées partielles du second ordre par leurs valeurs le long d'un contour fermé* (nel *Journal de l'École Polytechnique,* 1890).

questa funzione ha la forma

$$(1) \qquad v = \frac{\mu}{r}$$

se il punto (a, b, c) è sede d'una *massa magnetica* μ; ed ha invece la forma

$$(1_a) \qquad v = \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial a}\alpha + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial b}\beta + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial c}\gamma$$

se il punto (a, b, c) è sede d'una *polarizzazione magnetica* (α, β, γ). Quest'ultima funzione può ridursi alla forma monomia

$$(1_{a'}) \qquad v = \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial s}\delta,$$

ove $\delta = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}$ designa l'intensità assoluta della polarizzazione ed s la direzione dell'asse magnetico, od asse di polarizzazione.

Quando esiste un sistema continuo di centri di forza magnetica, cioè una distribuzione magnetica occupante uno spazio S, od una superficie σ, le precedenti espressioni sono applicabili all'azione (sui punti a distanza finita) che emana rispettivamente da un elemento di spazio dS, o di superficie $d\sigma$. In questo caso si pone in (1)

$$\mu = k\,dS,$$

oppure

$$\mu = h\,d\sigma,$$

dove k ed h rappresentano le densità (cubica, o superficiale) del magnetismo residente nell'intorno del punto (a, b, c). Nelle stesse condizioni si pone in (1_a), $(1_{a'})$

$$\alpha = m_a dS, \qquad \beta = m_b dS, \qquad \gamma = m_c dS, \qquad \delta = m\,dS,$$

oppure

$$\alpha = l_a d\sigma, \qquad \beta = l_b d\sigma, \qquad \gamma = l_c d\sigma, \qquad \delta = l\,d\sigma,$$

dove m_a, m_b, m_c rappresentano le componenti unitarie (cioè riferite all'unità di volume) della polarizzazione esistente nell'intorno del punto (a, b, c) ed m rappresenta l'intensità assoluta (unitaria) di questa stessa polarizzazione; significati analoghi hanno i simboli l_a, l_b, l_c, l rispetto alle distribuzioni polari di superficie. Di queste ultime distribuzioni si darà solo un cenno nel § finale: tutti gli altri svolgimenti che qui seguono si riferiscono alle distribuzioni polari in tre dimensioni.

2. Si consideri l'integrale

$$\int\left(\frac{\partial U}{\partial a}m_a+\frac{\partial U}{\partial b}m_b+\frac{\partial U}{\partial c}m_c\right)dS$$

esteso ad un qualunque spazio S dotato di polarizzazione magnetica m. Il simbolo U rappresenta una qualunque funzione monodroma, continua ed in generale finita delle coordinate a, b, c, funzione che può tuttavia diventare infinita come r^{-1} in punti isolati. Le funzioni m_a, m_b, m_c sono monodrome, finite e generalmente continue, ma possono diventare discontinue lungo certe superficie, che si indicheranno complessivamente (includendovi anche le superficie terminali dello spazio S) con σ. Mediante le identità del tipo

$$\frac{\partial U}{\partial a}m_a=\frac{\partial(Um_a)}{\partial a}-U\frac{\partial m_a}{\partial a}$$

e l'applicazione del notissimo teorema di trasformazione d'integrali tripli, si ottiene immediatamente la formola

$$\int\left(\frac{\partial U}{\partial a}m_a+\frac{\partial U}{\partial b}m_b+\frac{\partial U}{\partial c}m_c\right)dS=\int UkdS+\int Uhd\sigma, \tag{2}$$

dove si è posto

$$\left\{\begin{aligned} k&=-\left(\frac{\partial m_a}{\partial a}+\frac{\partial m_b}{\partial b}+\frac{\partial m_c}{\partial c}\right),\\ h&=-(m_n+m_{n'}).\end{aligned}\right. \tag{2_a}$$

In quest'ultima espressiòne le lettere n ed n' designano le direzioni delle due opposte normali, erette in uno stesso punto d'una superficie di discontinuità, ed m_n, $m_{n'}$ designano le componenti di m secondo queste due direzioni, componenti calcolate rispettivamente coi valori di m_a, m_b, m_c relativi a ciascuna delle due regioni verso cui le normali n, n' si dirigono. Rispetto ad ogni punto d'una superficie *terminale,* si riterrà che la direzione della normale *interna* sia n, epperò si dovrà porre, per un tal punto, $m_{n'}=0$, cioè $h=-m_n$.

L'equazione (2) può essere applicata, sotto certe condizioni, anche allo *spazio infinito,* che si designerà, ove occorra, con S_∞. In tale ipotesi, oltrechè delle vere superficie di discontinuità e delle vere superficie terminali, bisogna tener conto anche della superficie all'infinito, σ_∞, la quale dà luogo, nel secondo membro dell'equazione (2), ad un termine della forma

$$-\int Um_n d\sigma_\infty .$$

Se, denotando con R la distanza d'un punto di σ_∞ da un qualunque polo fisso situato nel finito, si ha in ogni direzione

$$\lim_{R=\infty} (R^2 U m) = 0 ,$$

il termine complementare testè scritto scompare dalla formola, la quale riprende la forma (2). Questa circostanza si verifica, in particolare, quando, annullandosi all'infinito la funzione U, il prodotto $R^2 m$ tende, per $R = \infty$, verso un limite finito.

3. La formola generale (2) conduce a stabilire, nel modo più semplice, parecchie importanti proprietà delle polarizzazioni magnetiche in tre dimensioni.

Vi si ponga, in primo luogo,

$$U = \frac{1}{r} ,$$

dove r è la distanza del punto (a, b, c) da un punto qualunque (x, y, z). Si trovano per tal modo due espressioni equivalenti

$$V = \int \left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial a} m_a + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial b} m_b + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial c} m_c \right) dS , \tag{3}$$

$$V = \int \frac{k\, dS}{r} + \int \frac{h\, d\sigma}{r} \tag{3$_a$}$$

d'una medesima funzione V delle coordinate x, y, z, la quale è la cosidetta *funzione potenziale* della distribuzione magnetica esistente nello spazio S.

Queste due espressioni equivalenti hanno caratteri essenzialmente diversi: la prima presenta la detta funzione *in forma polare,* cioè come corrispondente alla *distribuzione polare* (α, β, γ), la seconda la presenta *in forma apolare,* cioè come corrispondente alla *distribuzione apolare* (k, h). Considerata sotto questa seconda forma, V apparisce quale *ordinaria funzione potenziale newtoniana* (di spazio e di superficie). L'essenziale diversità di carattere delle due espressioni risalta nel modo più netto, quando lo spazio S si concepisca diviso, in modo qualunque, in due o più parti. Siffatta divisione non ha veruna influenza sulla composizione dell'espressione polare (3), la quale resta sempre identicamente eguale alla somma delle espressioni formate similmente per ciascuna delle parti in cui si concepisce diviso lo spazio S; mentre invece, se si scomponesse in corrispondenza l'espressione (3_a), attribuendo a ciascuna parte le porzioni di superficie σ che le competono, i frammenti di funzione V così ottenuti non possederebbero più (in generale) la dovuta equivalenza coi frammenti omologhi della funzione (3). Tale equivalenza non si potrebbe ristabilire se non facendo intervenire, insieme colle primitive superficie σ, le sezioni arbitrariamente fatte in S, computando due volte ciascuna d'esse fra le superficie terminali ed introducendo così altri integrali di superficie i quali, nella ricomposizione, si eliderebbero poi di nuovo a due a due.

Ponendo

$$(3_b) \qquad F_x = -\frac{\partial V}{\partial x}, \qquad F_y = -\frac{\partial V}{\partial y}, \qquad F_z = -\frac{\partial V}{\partial z},$$

si ottengono in queste quantità F_x, F_y, F_z le componenti di quella forza F, che si dice *forza magnetica* esercitata sopra un polo unitario collocato nel punto (x, y, z). Quando questo punto è *fuori* dello spazio S occupato dalla distribuzione magnetica di cui V è la funzione potenziale, la forza così determinata è quella che *effettivamente* agisce in quel punto, conformemente alle premesse fondamentali del § 1. Rispetto ai punti *interni* ad S, queste medesime premesse lasciano indeciso se le componenti (3_b) sieno quelle della forza effettiva. Esse conservano però, in ogni caso, il significato di componenti della forza emanante dalla distribuzione apolare (k, h), cosicchè la forza F, definita da esse, si dovrebbe denominare *forza magnetica apolare:* si può tuttavia conservarle la denominazione convenzionale, omai passata in uso, di forza magnetica, senz'altro.

È anche passato in uso di denominare *magnetismo libero* quello che si può concepire come costituente la distribuzione apolare (k, h). Esso non rappresenta, come questa, alcunchè di assolutamente fisso e determinato. Ogni sezione fatta idealmente in un corpo magnetico, di data polarità, fa comparire una carica di magnetismo libero su ciascuna delle due faccie della sezione.

4. Ponendo $U = 1$ nella formola (2) si ottiene l'equazione

$$(4) \qquad \int k\,dS + \int h\,d\sigma = 0,$$

dalla quale consegue che la massa totale della distribuzione apolare (ossia del magnetismo libero) equipollente ad una data distribuzione polare è sempre *nulla;* e ciò, sia che quest'ultima si consideri nella sua totalità, sia che se ne consideri soltanto quella parte che si riferisce ad una qualsivoglia porzione, anche indefinitamente piccola, dello spazio polarizzato.

È questa la proprietà fondamentale che caratterizza la polarità e che ha suggerita la considerazione degli elementi magnetici, come una plausibile rappresentazione materiale del fatto. Come tale, questa rappresentazione possiede una indiscutibile importanza storica: ma le difficoltà che accompagnano lo svolgimento ulteriore di tale concetto ne consigliano l'abbandono, tanto più ch'esso condurrebbe inevitabilmente ad assegnare un limite inferiore al campo di validità del teorema (4), senza che ben si vegga il vantaggio che da tale limitazione potrebbe ritrarsi per la spiegazione dei fatti, o per il migliore assetto della teoria.

5. Ponendo successivamente $U = a, b, c$ nella formola (2) si ottengono le tre relazioni seguenti:

$$(5)\qquad \left\{\begin{aligned} \int m_a\, dS &= \int a k\, dS + \int a h\, d\sigma, \\ \int m_b\, dS &= \int b k\, dS + \int b h\, d\sigma, \\ \int m_c\, dS &= \int c k\, dS + \int c h\, d\sigma. \end{aligned}\right.$$

I secondi membri di queste equazioni rappresentano quelli che, giusta una denominazione usitata nella Statica, sono da designarsi come i *momenti*, secondo i tre assi, della distribuzione apolare (k, h) esistente nello spazio S. L'equivalenza di questi momenti ai tre integrali di volume costituenti i primi membri, equivalenza che sussiste, si noti bene, qualunque sia lo spazio S a cui si attribuisce la polarità m, giustifica la denominazione di *momenti unitarî*, o di *componenti di momento unitario*, attribuita comunemente alle quantità m_a, m_b, m_c (l'epiteto di *unitario* riferendosi al *volume*). Le stesse eguaglianze (5) dimostrerebbero anche, se ve ne fosse d'uopo, che, al mutare della terna ortogonale di riferimento, le componenti m_a, m_b, m_c si trasformano al modo delle componenti d'un ordinario momento statico, cioè al modo delle velocità, delle forze, etc.

6. Si ponga

$$\begin{aligned} V' &= \int \left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial a} m'_a + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial b} m'_b + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial c} m'_c \right) dS' \\ &= \int \frac{k'\, dS'}{r} + \int \frac{h'\, d\sigma'}{r}, \end{aligned}$$

cioè (§ 3) si rappresenti con V' la funzione potenziale d'una seconda distribuzione polare m', esistente in uno spazio S', spazio che si suppone *arbitrariamente* scelto rispetto ad S. Dalla formola (2), ponendo $U = V'$, si deduce

$$\int \left(\frac{\partial V'}{\partial a} m_a + \frac{\partial V'}{\partial b} m_b + \frac{\partial V'}{\partial c} m_c \right) dS = \int V' k\, dS + \int V' h\, d\sigma$$

e similmente, immaginando fatti i debiti scambî di simboli,

$$\int \left(\frac{\partial V}{\partial a} m'_a + \frac{\partial V}{\partial b} m'_b + \frac{\partial V}{\partial c} m'_c \right) dS' = \int V k'\, dS' + \int V h'\, d\sigma'.$$

I secondi membri di queste due equazioni sono eguali fra loro, poichè ciascun d'essi rappresenta il potenziale mutuo delle due distribuzioni apolari (k, h), (k', h'): quindi anche i primi membri sono eguali fra loro, cioè si ha sempre

$$(6) \quad \int\left(\frac{\partial V}{\partial a} m'_a + \frac{\partial V}{\partial b} m'_b + \frac{\partial V}{\partial c} m'_c\right) d S' = \int\left(\frac{\partial V'}{\partial a} m_a + \frac{\partial V'}{\partial b} m_b + \frac{\partial V'}{\partial c} m_c\right) d S .$$

Ma quest'eguaglianza non deve interpretarsi senz'altro come espressione del *principio di reciprocità dei potenziali mutui,* in quanto questo principio possa per avventura essere esteso alle distribuzioni *polari.* I due membri della precedente eguaglianza non rappresentano, in generale, il potenziale mutuo delle due distribuzioni polari m, m'. Come risulta dalle relazioni che precedono la (6), e come si avrà occasione di rammentare in seguito (§ 10), essi non rappresentano veramente questo potenziale se non quando i due spazî S, S' non abbiano veruna parte in comune.

Ciò nondimeno l'eguaglianza (6), considerata dal punto di vista puramente analitico, è sempre vera, anche quando, in particolare, i due spazî S, S' coincidano fra loro, e rappresenta una proprietà di cui si può far uso molto vantaggiosamente in varie occasioni.

7. Vi sono distribuzioni polari la cui funzione potenziale V è *nulla in tutto lo spazio.* Sono evidentemente (§ 3) quelle, e quelle sole, per le quali sussiste: in ogni punto dello spazio S da esse occupato, l'equazione

$$(7) \quad \frac{\partial m_a}{\partial a} + \frac{\partial m_b}{\partial b} + \frac{\partial m_c}{\partial c} = 0,$$

in ogni punto d'una superficie di discontinuità l'equazione

$$(7_a) \quad m_n + m_{n'} = 0$$

ed in ogni punto d'una superficie terminale l'equazione

$$(7_b) \quad m_n = 0 .$$

L'equazione (7) caratterizza quella classe di distribuzioni polari che si dicono *solenoidali;* l'equazione (7_a) esprime che la componente *normale* del momento polare è dovunque *continua* nell'interno dello spazio S; l'equazione (7_b) esprime che questa stessa componente normale è nulla lungo tutte le superficie terminali, ossia che lungo queste superficie la polarizzazione è *tangenziale.*

Se dunque si pone il quesito: Quali sono le distribuzioni polari, in un dato spazio, a cui corrisponde la stessa distribuzione apolare che ad una polare data? è ovvia la risposta. Le distribuzioni cercate sono quelle, e solamente quelle che si ottengono dalla data sovrapponendo ad essa una qualunque delle distribuzioni polari (relative allo spazio dato) che hanno la funzione potenziale dovunque nulla.

8. Dalle due forme (3), (3_a) della funzione potenziale magnetica si deduce immediatamente, per noti teoremi,

$$(8) \qquad \begin{cases} \Delta_2 V = -4\pi k = 4\pi\left(\dfrac{\partial m_x}{\partial x} + \dfrac{\partial m_y}{\partial y} + \dfrac{\partial m_z}{\partial z}\right), \\ \dfrac{\partial V}{\partial n} + \dfrac{\partial V}{\partial n'} = -4\pi h = 4\pi(m_n + m_{n'}), \end{cases}$$

equazioni di cui la prima sussiste in tutti i punti dello spazio e la seconda in tutti i punti d'ogni superficie di discontinuità, o terminale. Nella prima equazione si è scritto m_x, m_y, m_z in luogo di m_a, m_b, m_c, per indicare che i valori di queste componenti si riferiscono al punto qualunque (x, y, z) dello spazio infinito, e tali valori debbono ritenersi uguali a zero quando questo punto sia esterno allo spazio S, occupato dalla polarizzazione m di cui V è la funzione potenziale.

Ricordando le espressioni (3_b) ed introducendo un nuovo vettore G, definito dalle tre componenti

$$(8_a) \qquad \begin{cases} G_x = F_x + 4\pi m_x, \\ G_y = F_y + 4\pi m_y, \\ G_z = F_z + 4\pi m_z, \end{cases}$$

le equazioni (8) prendono le forme seguenti:

$$(8_b) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial G_x}{\partial x} + \dfrac{\partial G_y}{\partial y} + \dfrac{\partial G_z}{\partial z} = 0, \\ G_n + G_{n'} = 0, \end{cases}$$

nella seconda delle quali G_n e $G_{n'}$ sono le componenti di G secondo le direzioni n ed n' delle due opposte normali erette in uno stesso punto di σ, componenti calcolate coi valori che G_x, G_y, G_z prendono in ciascuna delle due regioni verso cui le due normali si dirigono. Queste due equazioni conducono a stabilire una proprietà importantissima del vettore G.

Sia S_1 uno spazio qualunque e σ_1 la superficie che lo limita. Dalla prima equazione (8_b) segue

$$\int\left(\frac{\partial G_x}{\partial x} + \frac{\partial G_y}{\partial y} + \frac{\partial G_z}{\partial z}\right) dS_1 = 0$$

e di qui, in virtù della seconda equazione (8_b), la quale elimina l'influenza di quelle superficie, o porzioni di superficie σ, che eventualmente attraversassero lo spazio S_1,

$$(8_c) \qquad \int G_{n_1} d\sigma_1 = 0,$$

dove n_1 è la normale interna a σ_1. Considerando il vettore G come rappresentativo d'una *forza* ed adottando una locuzione ben nota, si ha dunque il teorema seguente: *Il flusso della forza G, attraverso una qualunque superficie chiusa, è sempre nullo.* È facile vedere che, reciprocamente, questa proprietà non può sussistere *incondizionatamente* (cioè qualunque sia la superficie chiusa) per una forza G, se le componenti di questa forza non soddisfanno alle equazioni (8_b).

La forza F, (3_b), non possiede mai, incondizionatamente, la proprietà in discorso, a meno che essa non sia nulla dovunque. Infatti se nelle equazioni (8_b) si sostituiscono le espressioni (8_a) delle componenti di G, si trova subito che quelle equazioni non sono soddisfatte dalle componenti di F se non quando i momenti polari soddisfanno alle equazioni (7), (7_a), (7_b) del § 7, nel qual caso è nulla la funzione V ed è quindi nulla dovunque la forza F.

Ora la proprietà testè riconosciuta per il vettore G è precisamente quella che, ammettendo l'universale validità del noto teorema circa il flusso di forza che attraversa una superficie chiusa, dovrebbe competere alla forza emanante da una distribuzione dotata della proprietà che *ogni* superficie chiusa contenga una massa totale *nulla;* come appunto avviene (§ 4) per ogni distribuzione apolare equipollente ad una polare. È dunque naturale di assumere il vettore G come rappresentativo della *forza polare,* da contrapporsi in tal qual modo alla *forza apolare F,* colla quale essa non coincide che nello spazio vuoto.

La nuova forza G è quella stessa che THOMSON distingue coll'appellativo di *elettromagnetica* e che MAXWELL denomina invece *induzione magnetica.*

9. È utile raccogliere e mettere fra loro a riscontro i diversi caratteri delle due forze F, G.

La forza polare G soddisfa sempre alla condizione solenoidale; la forza apolare F in generale *no.* Infatti per la prima forza sussiste sempre la prima equazione (8_b), mentre per la seconda si ha [in virtù di (3_b), oppure di (8_a)]

$$\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} = 4\pi k.$$

La componente normale della forza polare G si mantiene continua attraverso qualunque superficie di discontinuità, o terminale; quella della forza apolare F, in generale, *no.* Infatti per la prima componente sussiste sempre la seconda equazione (8_b), mentre per l'altra si ha [in virtù di (3_b), oppure di (8_a)]

$$F_n + F_{n'} = 4\pi h .$$

Ogni componente tangenziale della forza apolare F si mantiene continua attraverso qualunque superficie di discontinuità, o terminale; ogni analoga componente della forza polare G, in generale, *no*. La prima proprietà segue, (3_a), (3_b), da ciò che V è funzione continua in tutto lo spazio; la seconda segue dalla prima e dalle relazioni (8_a), le quali permettono anche di determinare la discontinuità d'ogni componente tangenziale della forza G.

Ogni tubo di forza polare è necessariamente interminato, vale a dire o rientra in sè stesso, o si perde all'infinito. Ciò segue immediatamente dall'equazione (8_c), applicata ad un tubo di forza polare chiuso da due diaframmi; giacchè quest'equazione esprime l'assoluta costanza del flusso di forza polare lungo tutto il tubo. Niuna analoga proprietà è incondizionatamente enunciabile rispetto ad un tubo di forza apolare, l'equazione corrispondente alla (8_c) essendo per questa forza, in virtù di (8_a), (8_c),

$$\int F_{n_1} d\sigma_1 + 4\pi \int m_{n_1} d\sigma_1 = 0$$

ed il secondo termine di quest'equazione non potendo essere nullo incondizionatamente, se non quando sieno adempiute le condizioni specialissime del § 7, cioè quando sia dovunque $V = 0$ e quindi anche $F = 0$.

Si considerino ora due distribuzioni polari arbitrarie e sieno F_x, F_y, F_z le componenti della forza apolare F emanante dalla prima, G'_x, G'_y, G'_z quelle della forza polare G' emanante dalla seconda. Dall'identità

$$F_x G'_x = -\frac{\partial V}{\partial x} G'_x = V\frac{\partial G'_x}{\partial x} - \frac{\partial (V G'_x)}{\partial x}$$

e dalle due analoghe si ricava, in virtù della prima equazione (8_b), applicata alla seconda distribuzione,

$$F_x G'_x + F_y G'_y + F_z G'_z = -\left[\frac{\partial (V G'_x)}{\partial x} + \frac{\partial (V G'_y)}{\partial y} + \frac{\partial (V G'_z)}{\partial z}\right],$$

equazione che sussiste in ogni punto dello spazio. Si ha poi, dalla seconda equazione (8_b), in ogni punto d'una superficie di discontinuità σ', relativa alla seconda distribuzione,

$$V(G_n + G_{n'}) = 0 .$$

Di qui si ricava subito

$$\int (F_x G'_x + F_y G'_y + F_z G'_z) dS_\infty = \int V G'_n d\sigma_\infty ,$$

cosicchè se in ogni direzione si verifica la convergenza

$$\lim_{R=\infty} (R^2 V G'_n) = 0 ,$$

si ha

$$\int (F_x G'_x + F_y G'_y + F_z G'_z) d S_\infty = 0 . \tag{9}$$

La condizione dianzi accennata è manifestamente soddisfatta quando amendue le distribuzioni polari sono tutte nel finito, ma può sussistere, sotto certe restrizioni, che si riterranno di regola adempiute, anche quando l'una o l'altra od amendue invadano tutto lo spazio. Ciò ammesso, l'equazione (9) rappresenta un'importantissima proprietà di correlazione delle due forze F e G', la quale si può designare col nome di *ortogonalità integrale* delle due forze, polare ed apolare, relative a due distribuzioni in tre dimensioni del tutto arbitrarie ed indipendenti (che possono, naturalmente, coincidere anche in una sola) *).

10. Dall'equazione (9) si deduce molto facilmente un'altra importante formola ben nota, che si suole stabilire in altra guisa.

Sostituendo nell'equazione anzidetta le espressioni di G'_x, G'_y, G'_z desunte dalle tre equazioni analoghe alle (8_a), si trova

$$\int (F_x F'_x + F_y F'_y + F_z F'_z) d S_\infty + 4\pi \int (F_a m'_a + F_b m'_b + F_c m'_c) d S' = 0,$$

dove S' è lo spazio occupato dalla seconda distribuzione. Quest'equazione si può scrivere, (3_b), sotto la forma

$$\int \left(\frac{\partial V}{\partial a} m'_a + \frac{\partial V}{\partial b} m'_b + \frac{\partial V}{\partial c} m'_c \right) d S' = \frac{1}{4\pi} \int \Delta_1 V V' d S_\infty \tag{10}$$

e costituisce la formola cui si alludeva.

Questa formola può servire di verificazione alla già stabilita eguaglianza (6), bastando por mente alla forma simmetrica del suo secondo membro. Essa somministra, nel caso che le due distribuzioni non abbiano parti comuni, una nuova espressione del loro potenziale mutuo. Quando questa condizione non si verifica, il significato di potenziale mutuo non appartiene a ciascuna delle espressioni precedenti (come s'è già

---

*) Questo teorema si trova dimostrato, in forma ed estensione alcun poco diverse, in una Nota *Sulla teoria del potenziale* [Rendiconti del Reale Istituto Lombardo, serie II, tomo XVI (1883), pp. 725-736; oppure queste OPERE, tomo IV, pp. 33-44; vedi equazione (6_c)].

avvertito) se non *in senso apolare,* cioè con solo riguardo al magnetismo libero delle due distribuzioni.

Questa distinzione è essenziale ed è utile renderla esplicita mercè una segnatura speciale. Date dunque due distribuzioni polari m, m', occupanti gli spazî S, S' arbitrariamente scelti, colle rispettive funzioni potenziali V, V', si designerà col simbolo $\boldsymbol{P}(V, V')$ il loro *potenziale mutuo apolare,* cioè il potenziale mutuo dei rispettivi magnetismi liberi. Si avrà quindi [(6), (10)]

$$(11)\qquad \left\{\begin{aligned} \boldsymbol{P}(V, V') &= \int\left(\frac{\partial V}{\partial a}m'_a + \frac{\partial V}{\partial b}m'_b + \frac{\partial V}{\partial c}m'_c\right)dS', \\ &= \int\left(\frac{\partial V'}{\partial a}m_a + \frac{\partial V'}{\partial b}m_b + \frac{\partial V'}{\partial c}m_c\right)dS, \\ &= \frac{1}{4\pi}\int \Delta_1 V V'.dS_\infty . \end{aligned}\right.$$

Si designerà invece col simbolo $P(V, V')$ il *potenziale mutuo polare* delle stesse due distribuzioni. L'espressione analitica di questo potenziale è per ora incognita: si può solo affermare che sussiste l'eguaglianza

$$(11_a)\qquad P(V, V') = \boldsymbol{P}(V, V')$$

quando le due distribuzioni *non abbiano veruna parte in comune.*

Si denoterà parimente con $\boldsymbol{P}(V)$ l'*autopotenziale apolare* della distribuzione di funzione potenziale V, cioè il potenziale sovra sè stesso del magnetismo libero di questa distribuzione, e con $P(V)$ l'*autopotenziale polare* della medesima distribuzione. L'espressione di $\boldsymbol{P}(V)$, rispetto alla quale vale la regola

$$\boldsymbol{P}(V, V) = 2\boldsymbol{P}(V),$$

può subito darsi, (11), nella doppia forma

$$(12)\qquad \left\{\begin{aligned} \boldsymbol{P}(V) &= \frac{1}{2}\int\left(\frac{\partial V}{\partial a}m_a + \frac{\partial V}{\partial b}m_b + \frac{\partial V}{\partial c}m_c\right)dS \\ &= \frac{1}{8\pi}\int \Delta_1 V.dS_\infty . \end{aligned}\right.$$

L'espressione analitica di $P(V)$ deve per ora considerarsi come incognita in ogni caso. Solo è da tenersi per fermo ch'essa non potrebbe assolutamente mai essere la stessa di quella di $\boldsymbol{P}(V)$, e ciò per una ragione altrettanto semplice quanto perentoria: ed è che ne risulterebbe $P(V) = 0$ per ognuna di quelle finite distribuzioni polari (§ 7), la di cui funzione potenziale è dovunque nulla; mentre è manifesto che, fintantochè esiste una polarità qualsiasi, deve potersi assegnare una quantità finita di energia potenziale, misurata dall'autopotenziale vero, o polare, ed equivalente al lavoro che ha dovuto essere speso per costituire lo spazio S in quello stato di polarità, che è condizione necessaria, quand'anche solo potenziale, di qualche efficienza magnetica *).

11. Ora come può conseguirsi la determinazione del vero valore di $P(V)$? Una via che, a prima giunta, potrebbe parere conducente a questo fine, è la seguente.

Si concepisca diviso lo spazio S, occupato dalla distribuzione di funzione potenziale V, in parti $S_1, S_2, \ldots$ e sieno $V_1, V_2, \ldots$ le funzioni potenziali di queste singole parti. Il potenziale di tutto il corpo S, meno la parte S_i, su questa parte medesima, è espresso, (11_a), da

$$\boldsymbol{P}(V - V_i, V_i) = \boldsymbol{P}(V, V_i) - 2\boldsymbol{P}(V_i)$$

e la semisomma di tutti i potenziali mutui analoghi a questo è data da

$$P' = \frac{1}{2}\sum{}^{i} \boldsymbol{P}(V, V_i) - \sum{}^{i} \boldsymbol{P}(V_i),$$

ossia da

$$P' = \boldsymbol{P}(V) - \sum{}^{i} \boldsymbol{P}(V_i).$$

Se, aumentando indefinitamente il numero e diminuendo indefinitamente l'estensione delle parti S_i, in cui viene diviso lo spazio S, questa quantità P' tendesse verso un limite finito P, indipendente dal modo di suddivisione, si potrebbe pensare che questo limite fosse per l'appunto la quantità cercata.

---

*) Non è del tutto facile rilevare qual fosse il pensiero di MAXWELL intorno a questa *vexata quæstio* dell'autopotenziale magnetico. Nell'art. 632 del *Treatise* (Ed. II) verrebbe indicata senza altro l'espressione $\boldsymbol{P}(V)$: ma nell'art. 440 e nella Nota I al Cap. XI, Parte IV, è fatto cenno d'altre forme, per lo meno rispetto ai corpi indotti. Il *termine complementare quadratico* (veggasi il successivo § 12) era già stato aggiunto da BETTI (*Teoria delle forze newtoniane*, 1879) in base a considerazioni istituite sugli elementi magnetici. Mercè considerazioni di simile natura, benchè di carattere più indeterminato, esso è stato pure introdotto ed usato nella citata mia Memoria del 1884. Lo stesso termine complementare si era già presentato, come conseguenza delle equazioni d'induzione nei corpi isotropi, a VON HELMHOLTZ, nella Memoria del 1881 *Ueber die auf das Innere magnetisch oder dielektrisch polarisirten Körper wirkenden Kräfte* (formole $2_{f,g}$). In un recentissimo lavoro di C. NEUMANN (*Neue Sätze über das elektrostatische und über das magnetische Potential*, nei *Berichte* della Società Reale di Sassonia, 1890) è stabilita un'espressione Ω dell'energia magnetica d'un sistema di corpi, nella quale comparisce un termine complementare di forma ancor più generale, e cioè nella forma corrispondente alla legge d'induzione nei corpi isotropi generalizzata da KIRCHHOFF (veggasi il successivo § 17).

Senonchè la forma stessa dell'espressione di P' mostra subito che questo procedimento non può essese atto all'uopo. Infatti le singole quantità $\boldsymbol{P}(V_i)$ non possono mai essere, per loro natura, minori di zero, epperò P' non può mai risultare maggiore di $\boldsymbol{P}(V)$: ne consegue che l'obbiezione derivante dall'ipotesi $V = 0$ non viene punto eliminata, e può anzi venire aggravata dalla comparsa d'un risultato negativo. E, del resto, si può facilmente escogitare un caso in cui il processo conduce ad un valore nullo per P', senza che neppur sia nulla la funzione V. Il corpo S sia una sfera magnetizzata uniformemente e le parti S_1, S_2, ... sieno gli involucri in cui questa sfera è divisa da superficie sferiche interne le une alle altre ed alla superficie sferica terminale. Il processo condurrebbe in questo caso a formare la semisomma dei potenziali mutui di tutte le coppie d'involucri. Ora in ciascuna di queste coppie uno dei due involucri comprende l'altro nella sua cavità interna, ed è notissimo che, nella cavità d'un involucro sferico magnetizzato uniformemente, la funzione potenziale dell'involucro stesso è costante, donde consegue che il potenziale dell'involucro esterno sull'interno è nullo. Essendo nullo il potenziale mutuo di ciascuna coppia d'involucri, è nulla la semisomma P' di tutti questi potenziali e rimane sempre tale comunque si aumenti il numero e si diminuisca il volume degli involucri parziali. Coll'adottato metodo di suddivisione del corpo sferico si giungerebbe quindi ad una conclusione inammissibile: e ciò basta ad infirmare tutto il procedimento.

Ciò nondimeno giova proseguire nella facile indagine del valore generale dianzi simboleggiato per P', a cagione delle singolari deduzioni cui per tal modo si giunge.

Per semplicità si ponga l'espressione di $\boldsymbol{P}(V_i)$ sotto la forma [(1_a), (12)]

$$\boldsymbol{P}(V_i) = \frac{1}{2}\int \frac{\partial V_i}{\partial s} m \, dS_i,$$

dove s è la direzione della polarizzazione m nel posto dell'elemento dS_i. Supponendo che gli spazî parziali S_i sieno già così piccoli da potersi in ciascun d'essi considerare, senza error sensibile, il momento m come costante in grandezza e direzione, si può porre

$$V_i = -m_i \frac{\partial U_i}{\partial s_i},$$

dove

$$U_i = \int \frac{dS_i}{r},$$

m_i ed s_i essendo la grandezza e la direzione del momento costante in S_i; epperò si ha

$$\boldsymbol{P}(V_i) = -\frac{m_i^2}{2}\int \frac{\partial^2 U_i}{\partial s_i^2} dS_i,$$

ossia

$$\boldsymbol{P}(V_i) = \frac{m_i^2}{2} \int \frac{\partial U_i}{\partial s_i} \cos(n_i, s_i)\, d\sigma_i,$$

dove n_i è la normale interna alla superficie σ_i, termine dello spazio S_i.

Si consideri ora una suddivisione *particolare* dello spazio S in ispazî parziali S_i; si attribuisca, cioè, a questi la forma di piccoli prismi, la di cui superficie laterale sia formata di linee di magnetizzazione e le di cui basi sieno normali a queste linee. In tal caso la precedente espressione si riduce a

$$\boldsymbol{P}(V_i) = \frac{m_i^2}{2} \int \frac{\partial U_i}{\partial n_i}\, d\sigma'_i,$$

dove σ'_i rappresenta l'insieme delle due basi. Sostituendo per U_i la sua espressione si ottiene successivamente

$$\boldsymbol{P}(V_i) = \frac{m_i^2}{2} \int d\sigma'_i \int \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n_i}\, dS_i$$

$$= \frac{m_i^2}{2} \int dS_i \int \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n_i}\, d\sigma'_i$$

$$= \frac{m_i^2}{2} \int (\sigma'_i)_{dS_i}\, dS_i,$$

dove il simbolo scritto sotto l'ultimo integrale rappresenta l'angolo visuale della superficie σ'_i rispetto ad un punto dell'elemento di volume dS_i. Ciò posto, se la sezione del prisma infinitamente piccolo S_i diventa evanescente di fronte all'altezza di esso, il detto angolo visuale non ha un valore finito se non per elementi dS_i situati nell'immediata prossimità delle basi, epperò l'integrale

$$\int (\sigma'_i)_{dS_i}\, dS_i$$

ha col volume S_i un rapporto evanescente. Se, invece, l'altezza del prisma diventa evanescente di fronte alla sezione, il medesimo angolo visuale non differisce sensibilmente da 4π se non nell'immediata prossimità della superficie laterale, epperò si ha

$$\lim \boldsymbol{P}(V_i) = 2\pi m_i^2 S_i.$$

Nel primo caso si ottiene dunque

$$\lim P' = \boldsymbol{P}(V)$$

e, nel secondo,

$$\lim P' = \boldsymbol{P}(V) - 2\pi \int m^2 dS.$$

Questi risultati assumono una forma più esplicita se si osserva che dalle equazioni (8_a), poste sotto la forma

$$G_x - F_x = 2\pi m_x, \text{ ecc.}$$

si deduce, quadrando e sommando,

$$F^2 + G^2 - 2(F_x G_x + F_y G_y + F_z G_z) = 16\pi^2 m^2,$$

e di qui, integrando su tutto lo spazio, con riguardo all'equazione (9),

$$(13) \qquad \frac{1}{8\pi}\int F^2 dS_\infty + \frac{1}{8\pi}\int G^2 dS_\infty = 2\pi \int m^2 dS.$$

I limiti trovati per P' nei due casi testè considerati si possono pertanto rappresentare così:

1° caso $\qquad \lim P' = +\frac{1}{8\pi}\int F^2 dS_\infty,$

2° caso $\qquad \lim P' = -\frac{1}{8\pi}\int G^2 dS_\infty.$

Questi risultati mettono in evidenza l'assoluta inaccettabilità del procedimento indicato, giacchè questo nè conduce ad un limite unico e determinato, nè rimove la possibilità di valori nulli per $P(V)$, chè anzi rende possibili valori negativi di questa stessa quantità.

12. Conviene dunque battere un'altra e miglior via, e tale è quella cui guida la considerazione seguente.

S'immagini nuovamente che nello spazio infinito esistano due distinte distribuzioni polari m, m', occupanti gli spazî S, S' comunque scelti. Si può concepire l'insieme di queste due distribuzioni come un unico sistema polare, il quale deve possedere, come tale, un autopotenziale $P(V + V')$ che ne misuri la totale energia potenziale. Ora, qualunque sia per essere l'espressione analitica di questa grandezza, si può ammettere come evidente, od almeno come diretta conseguenza del concetto di energia, ch'essa debba equivalere alla somma di tre altre espressioni rappresentanti:

1°) l'energia propria della prima distribuzione isolatamente considerata;

2°) l'energia della seconda distribuzione;

3°) l'energia risultante dalla simultanea sussistenza delle due distribuzioni, l'una in presenza dell'altra. Si deve dunque avere

$$P(V+V') = P(V) + P(V') + P(V, V').$$

Ma, d'altra parte, per la definizione analitica (§ 10) dei potenziali apolari, si ha pure, identicamente,

$$\boldsymbol{P}(V+V') = \boldsymbol{P}(V) + \boldsymbol{P}(V') + \boldsymbol{P}(V, V'),$$

relazione la quale, del resto, esprime la stessa legge testè invocata, con solo riguardo ai magnetismi liberi delle due distribuzioni. Ora, quando i due spazî S, S' non hanno veruna parte in comune, si ha, come s'è già più volte notato,

$$P(V, V') = \boldsymbol{P}(V, V');$$

in questo caso, dunque, formando la differenza delle due equazioni testè scritte, si ottiene

$$P(V+V') - \boldsymbol{P}(V+V') = [P(V) - \boldsymbol{P}(V)] + [P(V') - \boldsymbol{P}(V')].$$

Ciò posto, la differenza $P(V) - \boldsymbol{P}(V)$, qualunque ne possa essere l'espressione analitica, è una grandezza che dipende unicamente dalla natura della polarizzazione m e del corpo S, e può essere opportunamente designata con

$$P(V) - \boldsymbol{P}(V) = p(S),$$

dove p indica una certa operazione, ancora incognita, da farsi sugli elementi analitici che definiscono la polarità e la natura fisica del corpo S, affine di ottenere l'espressione effettiva di quella differenza. Per la stessa ragione si ha

$$P(V') - \boldsymbol{P}(V') = p(S')$$

e così pure

$$P(V+V') - \boldsymbol{P}(V+V') = p(S+S'),$$

dove p rappresenta sempre la medesima operazione incognita. Quest'operazione è quindi tale che deve sempre aversi

$$p(S+S') = p(S) + p(S'),$$

sotto la sola condizione che gli spazî S, S' non abbiamo parti comuni. Da quest'equazione si passa subito alla

$$p(S) = \sum p(\Delta S),$$

dove ΔS è una qualunque delle parti in cui può concepirsi diviso lo spazio S, conservando, naturalmente, a ciascuna la polarità che le spetta nel campo totale S, e quindi alla

$$p(S) = \int_S p(dS).$$

Ora la quantità $p(dS)$ non può avere che la forma $\psi\, dS$, dove ψ è una funzione incognita delle condizioni fisiche e polari che regnano nell'intorno di quel qualunque punto (a, b, c) di S, al quale è circostante l'elemento dS: si ha dunque finalmente

$$(14) \qquad P(V) = \boldsymbol{P}(V) + \int \psi\, dS,$$

dove non resta più da determinare che la funzione incognita ψ, la quale, come si può già prevedere, deve dipendere dalle componenti locali m_a, m_b, m_c ed eventualmente dalle loro derivate, come pure dalle condizioni fisiche del posto ove esiste la polarizzazione individuata da queste componenti.

La dottrina fin qui svolta non somministra, nè può somministrare verun altro lume circa la natura della funzione ψ. Vi è però una legge imprescindibile a cui niuna grandezza meccanica può sottrarsi, ed è la *legge dell'omogeneità,* la quale circoscrive entro certi confini la ricerca della natura di tale funzione. Indicando, come d'uso, con L, M, T le unità concrete di lunghezza, di massa e di tempo, si deve, come è notissimo, poter esprimere ogni energia in unità della specie ML^2T^{-2}. Dovendo quindi l'energia parziale $\int \psi\, dS$ soddisfare a questa condizione, si riconosce intanto che la funzione ψ dev'essere della specie $ML^{-1}T^{-2}$. Nasce da ciò naturalmente l'idea di ricercare di quale specie sia la grandezza m, dalle di cui componenti la funzione ψ deve certamente dipendere. A tal fine basta osservare che dovendo, (1), essere $\mu^2 r^{-2}$ una forza, cioè una grandezza della specie MLT^{-2}, μ dev'essere della specie $M^{\frac{1}{2}}L^{\frac{3}{2}}T^{-1}$: d'altronde μ è (§ 1) una grandezza della stessa specie di $k\,dS$ e di $h\,d\sigma$, epperò, (5), $m\,dS$ è una grandezza della stessa specie del prodotto di μ per una linea. Ne risulta che m è della specie $M^{\frac{1}{2}}L^{-\frac{1}{2}}T^{-1}$ e quindi m^2 della specie $ML^{-1}T^{-2}$; dal che finalmente consegue che *ψ è una grandezza della stessa specie di m^2.*

La più semplice ipotesi che si possa quindi fare sulla forma della funzione ψ è che questa sia una funzione quadratica ed omogenea delle tre componenti m_a, m_b, m_c, con coefficienti (costanti o variabili) di dimensione zero rispetto a tutte tre le unità fondamentali, coefficienti che possono essere discontinui, se il corpo che si considera presenta delle superficie di discontinuità fisica. Quest'ipotesi s'accorda appuntino colle conseguenze della teoria di Poisson ed è quella che si ammetterà nei successivi §§, salvo il far cenno più tardi (§ 17) della logica possibilità d'altre forme meno semplici.

A complemento delle indicazioni date dianzi sulle dimensioni d'alcune grandezze magnetiche, si può aggiungere che μ essendo, come si è veduto, della specie $M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{3}{2}} T^{-1}$, ogni funzione potenziale V è della specie $M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}} T^{-1}$ e quindi ogni forza apolare F della specie $M^{\frac{1}{2}} L^{-\frac{1}{2}} T^{-1}$, cioè della stessa specie di m. Di questa stessa specie è quindi, (8_a), anche ogni forza polare G: anzi avrebbe bastato por mente alle citate equazioni (8_a) per concludere che m è della specie delle derivate prime di V rispetto alle coordinate e che quindi, (14), la seconda parte dell'energia $P(V)$ doveva contenere m^2 nella stessa guisa in cui la prima contiene F^2: ma giovava stabilire direttamente la dimensione di m.

La necessità che $P(V)$ conservi un valore positivo anche per quelle distribuzioni per le quali è dovunque $V = 0$, implica la necessità che il termine $\int \psi \, dS$ si mantenga positivo per ogni sistema di valori non tutti nulli delle componenti m_a, m_b, m_c e quindi che ψ sia funzione quadratica *essenzialmente positiva* di queste componenti. Anche ciò verrà ammesso nel seguito, salvo il ritornare più tardi sopra l'eventualità d'una ipotesi contraria.

Per determinare il potenziale mutuo di due distribuzioni polari m, m', le quali si concepiscano come esistenti in un medesimo spazio S, basta osservare che, in base alla formola (14), si ha

$$P(V + V') = \boldsymbol{P}(V + V') + \int \left(\psi_m + \psi_{m'} + \frac{\partial \psi}{\partial m_a} m'_a + \frac{\partial \psi}{\partial m_b} m'_b + \frac{\partial \psi}{\partial m_c} m'_c \right) dS,$$

donde segue, (14),

$$(14_a) \qquad P(V, V') = \boldsymbol{P}(V, V') + \int \left(\frac{\partial \psi}{\partial m_a} m'_a + \frac{\partial \psi}{\partial m_b} m'_b + \frac{\partial \psi}{\partial m_c} m'_c \right) dS.$$

Questa formola sussiste anche se S è soltanto la *regione comune* a due distinte distribuzioni m, m', di cui sieno V, V' le funzioni potenziali, giacchè i potenziali mutui delle *regioni non comuni* non danno termini che alla parte apolare $\boldsymbol{P}(V, V')$ di $P(V, V')$.

13. Il problema dell'induzione magnetica si pone assai facilmente in equazione, mercè i risultati precedenti, invocando il principio del *minimo di energia*.

Sieno S_0, S gli spazî occupati da due distribuzioni magnetiche, spazî che si supporranno finiti e non aventi parti comuni. Se V_0 è la funzione potenziale della prima distribuzione, V quella della seconda, il potenziale P di tutto il sistema è esprimibile nella forma

$$(15) \qquad P = P(V_0) + P(V) + P(V_0, V).$$

La magnetizzazione di S_0 si suppone *permanente*, quella di S *temporaria*: V_0 è quindi una funzione data ed invariabile, V è invece una funzione incognita della specie (3), dipendente dalla distribuzione polare che si forma *per induzione* in S, sotto l'azione dell'*inducente* S_0. Ammettendo l'invocato principio, questa distribuzione *indotta* m dev'essere tale che, comunque essa venga alterata (entro certi limiti, ristretti quanto si voglia, ma comprendenti un campo finito), il potenziale totale non possa che aumentare di valore.

La cercata distribuzione indotta sia quella di cui V è la funzione potenziale ed m il momento polare. Sia V' la funzione potenziale d'un'altra qualunque distribuzione m', nello stesso spazio S. Una *variazione* arbitraria della vera distribuzione indotta m si può concepire come risultante dalla sovrapposizione della nuova distribuzione m' alla m. Il potenziale P' del sistema così *variato* è espresso da

$$P' = P(V_0) + P(V + V') + P(V_0, V + V'),$$

ossia da

$$P' = P(V_0) + P(V) + P(V') + P(V, V') + P(V_0, V) + P(V_0, V'),$$

talchè si ha

$$P' - P = P(V') + P(V, V') + P(V_0, V'),$$

o, più semplicemente, (14_a),

$$(15_a) \qquad P' - P = P(V_0 + V, V') + P(V').$$

Bisogna dunque che per valori abbastanza piccoli, ma del resto arbitrarî, dei momenti *varianti* m', questa differenza $P' - P$ risulti costantemente maggiore di zero. Tale è già (§ 12) il suo ultimo termine $P(V')$, qualunque sia la distribuzione m'.

Per introdurre la condizione limitativa di quei valori di m' per i quali la proprietà or detta deve verificarsi, si denoti per poco con P'_h ciò che diventa P' quando m', V' diventino rispettivamente hm', hV' e si osservi [(14), (14_a)] essere

$$P(hV') = h^2 P(V'), \qquad P(V_0 + V, hV') = hP(V_0 + V, V').$$

Si ha quindi

$$P'_h - P = h[P(V_0 + V, V') + hP(V')].$$

Di qui risulta che se, comunque sia scelta la distribuzione variante m', la quantità $P(V_0 + V, V')$ non è nulla, si può sempre attribuire ad h un tal valore, con tal segno, che, per esso e per ogni valore numericamente più piccolo, la differenza $P'_h - P$

sia e si mantenga minore di zero. Se invece la detta quantità è nulla, questa differenza è certamente maggiore di zero. La condizione necessaria e sufficiente del minimo di energia è quindi

$$(15_b)\qquad P(V_0 + V,\ V') = 0,$$

e la sussistenza di tale condizione, di fronte all'equazione (15_a) in cui non è imposto alcun limite d'intensità alla distribuzione variante m', mostra già che si tratta d'un *minimo assoluto ed unico*. Infatti l'equazione (15_a) dà

$$(15_c)\qquad P' = P + P(V'),$$

cioè $P' > P$ incondizionatamente.

La trovata condizione (15_b), debitamente sviluppata coll'aiuto della formola (14_a), conduce all'equazione

$$\int\left\{\left[\frac{\partial(V_0+V)}{\partial a}+\frac{\partial\psi}{\partial m_a}\right]m'_a+\left[\frac{\partial(V_0+V)}{\partial b}+\frac{\partial\psi}{\partial m_b}\right]m'_b\right.$$
$$\left.+\left[\frac{\partial(V_0+V)}{\partial c}+\frac{\partial\psi}{\partial m_c}\right]m'_c\right\}dS = 0,$$

la quale non può sussistere, qualunque sieno le funzioni varianti m'_a, m'_b, m'_c, se non sussistono, in ogni punto dello spazio indotto S, le equazioni

$$(16)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial(V_0+V)}{\partial a}+\dfrac{\partial\psi}{\partial m_a}=0, \\[2ex] \dfrac{\partial(V_0+V)}{\partial b}+\dfrac{\partial\psi}{\partial m_b}=0, \\[2ex] \dfrac{\partial(V_0+V)}{\partial c}+\dfrac{\partial\psi}{\partial m_c}=0, \end{cases}$$

e queste sono le cercate *equazioni dell'induzioae magnetica.*

Se queste equazioni si moltiplicano ordinatamente per m_a, m_b, m_c, poscia si sommano e del risultato si prende l'integrale esteso a tutto lo spazio S, si ottiene un'equazione la quale non è evidentemente altro che la (15_b), fatto $V' = V$, cioè

$$P(V_0 + V,\ V) = 0,$$

che è quanto dire

$$(16_a)\qquad P(V_0,\ V) + 2\,P(V) = 0.$$

Di qui risulta, in primo luogo, che se fosse $V_0 = 0$ si dovrebbe avere $P(V) = 0$, equazione la quale (§ 12) non può verificarsi che per

$$m_a = m_b = m_c = V = 0$$

dovunque. Ciò dimostra il teorema che le equazioni d'induzione non ammettono mai se non una soluzione unica; giacchè è chiaro che la differenza di due soluzioni, se una tal differenza potesse esistere, dovrebbe soddisfare, (16), alle stesse equazioni che la funzione V per $V_0 = 0$. Questa dimostrazione verrà però richiamata in seguito (§ 15), per essere nuovamente discussa in confronto con un'altra deduzione del teorema d'unicità.

In secondo luogo è da notarsi che dalle due equazioni (15), (16_a) risulta

$$P = P(V_0) - P(V), \tag{16_b}$$

relazione da cui seguono due proprietà degne di menzione. L'una è che si ha sempre

$$P(V) < P(V_0),$$

perchè P è quantità sempre maggiore di zero; l'altra è che $P(V)$ può considerarsi come l'espressione del lavoro che si dovrebbe spendere per trasportare lentamente il corpo indotto S dal suo posto attuale a distanza infinita, in presenza del corpo inducente S_0; o, viceversa, del lavoro che il detto corpo potrebbe compiere, venendo dall'infinito a collocarsi nel suo posto attuale *).

Se m', V' rappresentano la distribuzione indotta e la relativa funzione potenziale, nel supposto che il corpo S venga sottratto all'azione dell'inducente S_0 ed esposto a quella d'un altro inducente S'_0, di funzione potenziale V'_0, si hanno ad un tempo, (15_b), le due equazioni

$$P(V_0 + V,\ V') = 0, \qquad P(V'_0 + V',\ V) = 0,$$

donde segue

$$P(V_0 + V,\ V') = P(V'_0 + V',\ V),$$

o, più semplicemente,

$$P(V_0,\ V') = P(V'_0,\ V),$$

---

*) In virtù della relazione (16_a) questo risultato è in accordo con uno degli importanti teoremi recentemente stabiliti da C. NEUMANN nella Memoria già citata alla fine del § 10 (cfr. il teorema a pag. 127 della Memoria di NEUMANN). Del resto la ricordata relazione (16_a) non differisce, in sostanza, da quella segnata (3) nella mia Memoria del 1884, ov'essa era stata dedotta da considerazioni d'altro genere.

cioè, in forma esplicita,

$$(16_c)\quad \int\left(\frac{\partial V_0}{\partial a}m'_a+\frac{\partial V_0}{\partial b}m'_b+\frac{\partial V_0}{\partial c}m'_c\right)dS=\int\left(\frac{\partial V'_0}{\partial a}m_a+\frac{\partial V'_0}{\partial b}m_b+\frac{\partial V'_0}{\partial c}m_c\right)dS.$$

Quest'equazione contiene l'importante *teorema di reciprocità,* stabilito per la prima volta da KIRCHHOFF rispetto ai corpi isotropi. Non occorre quì insistere sulle utili applicazioni di tale teorema, che trovansi esposte nella già citata Memoria *Sull'induzione magnetica* e che, insieme a molte altre considerazioni più o meno speciali, escono dal quadro del presente lavoro.

È utile invece ricordare che la quì ammessa ipotesi circa la quadraticità della funzione ψ conduce di necessità alla conclusione, non confermata dall'esperienza, che variando in un rapporto costante i momenti del corpo inducente, debbano variare nello stesso rapporto anche quelli del corpo indotto. Si vedrà nel § 17 come, senza uscire dai caratteri generali imposti alla detta funzione dalle considerazioni del § 12, si possa modificarne la forma in guisa da avvicinarsi meglio ai risultati indicati dall'osservazione. L'ipotesi quadratica resta però sempre applicabile alle induzioni di moderata intensità e, come tale, e per le sue proprietà peculiari, possiede un'importanza preponderante rispetto alla teoria generale della polarizzazione.

14. La terna d'equazioni (16) contiene in sè tutto il problema dell'induzione magnetica, ma non ne lascia chiaramente rilevare la natura analitica, poichè le quattro funzioni incognite m_a, m_b, m_c, V sono fra loro legate da una relazione *integrale*, cioè dalla (3). Per ridurre il problema a termini più espliciti occorre una trasformazione, che è la seguente.

Si ponga

$$(17)\qquad V_0+V=U$$

e si concepiscano risolute le equazioni (16), cioè le

$$\frac{\partial\psi}{\partial m_a}=-\frac{\partial U}{\partial a},\qquad \frac{\partial\psi}{\partial m_b}=-\frac{\partial U}{\partial b},\qquad \frac{\partial\psi}{\partial m_c}=-\frac{\partial U}{\partial c},$$

rispetto alle componenti m_a, m_b, m_c, di cui i primi membri sono funzioni lineari ed omogenee. Le soluzioni hanno la forma:

$$(17_a)\quad m_x=-\Psi'\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right),\quad m_y=-\Psi'\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right),\quad m_z=-\Psi'\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right),$$

dove Ψ è la funzione quadratica *reciproca* di Ψ, formata coi tre argomenti

$$\frac{\partial U}{\partial x},\quad \frac{\partial U}{\partial y},\quad \frac{\partial U}{\partial z},$$

funzione che si potrà, se giovi, designare più distintamente con $\Psi(U)$. Si sono sostituite le coordinate x, y, z, alle a, b, c perchè, a differenza delle equazioni (16), che sussistono solamente entro lo spazio S, le nuove equazioni (17_a) si possono e debbono considerare come valide *in tutto lo spazio*. Basta per ciò, in armonia con una convenzione già fatta al principio del § 8, attribuire ai coefficienti della quadratica Ψ il valor *zero* in tutto lo spazio esterno al corpo indotto S.

Sostituendo le espressioni di m_x, m_y, m_z, date da queste equazioni (17_a), nei secondi membri delle (8_a), si ottiene, (17),

$$G_x = \frac{\partial V_0}{\partial x} - \left[\frac{\partial U}{\partial x} + 4\pi\Psi'\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)\right], \quad \text{etc.}$$

ossia

$$(17_b)\quad G_x = \frac{\partial V_0}{\partial x} - \Phi'\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right), \quad G_y = \frac{\partial V_0}{\partial y} - \Phi'\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right), \quad G_z = \frac{\partial V_0}{\partial z} - \Phi'\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right),$$

dove Φ, ovvero $\Phi(U)$, è una funzione quadratica ed omogenea, formata cogli stessi argomenti di Ψ, e legata con questa dalla relazione

$$(18)\qquad \Phi(U) = \frac{\Delta_1 U}{2} + 4\pi\Psi(U).$$

Sostituendo finalmente le precedenti espressioni (17_b) di G_x, G_y, G_z nelle due equazioni (8_b), caratteristiche delle forze polari, si ottiene

$$(18_a)\qquad \nabla U = \Delta_2 V_0,$$

$$(18_b)\qquad D_n U + D_{n'} U = \frac{\partial V_0}{\partial n} + \frac{\partial V_0}{\partial n'},$$

dove per brevità si è posto

$$(18_c)\qquad \left\{\begin{aligned} \nabla U &= \frac{\partial}{\partial x}\Phi'\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\Phi'\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\Phi'\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right), \\ D_n U &= \Phi'\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)\frac{\partial x}{\partial n} + \Phi'\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)\frac{\partial y}{\partial n} + \Phi'\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)\frac{\partial z}{\partial n}. \end{aligned}\right.$$

È da avvertire, rispetto a quest'ultima segnatura, che nel calcolare il valore di $D_n U$ bisogna sempre far uso di quelle espressioni, così di U come di Φ (funzione i cui coefficienti possono, come quelli di Ψ, essere discontinui lungo certe superficie, e *debbono* in ogni caso considerarsi come tali lungo le superficie terminali), che si riferiscono *alla regione verso la quale si dirige la normale n;* cosicchè, per esempio, quando si tratti dei punti di una superficie terminale di S, si deve porre per essi

$$\Phi = \frac{\Delta_1 U}{2},$$

e quindi

$$D_{n'} U = \frac{\partial U}{\partial n'}$$

se n' è ritenuta essere la direzione della normale *esterna*.

Delle due equazioni in U, (18_a), (18_b) la prima è valida *in tutto lo spazio*, la seconda *nei punti d'ogni superficie di discontinuità* (a rigore, nei punti di qualunque superficie), cioè tanto nei punti di σ quanto in quelli di σ_0 (superficie di discontinuità e terminali di S_0). Queste equazioni (18_a), (18_b) si possono considerare come il risultato dell'eliminazione di m_a, m_b, m_c fra le (16).

Per tal modo la soluzione del problema d'induzione viene a dipendere dalla determinazione d'un'unica funzione U monodroma, continua e finita [per la sua definizione (17)], la quale deve possedere i requisiti seguenti:

I. di soddisfare in tutto lo spazio all'equazione (18_a);

II. di avere le derivate prime continue e finite in tutto lo spazio, tranne nei punti delle superficie di discontinuità, dove dev'essere soddisfatta l'equazione (18_b);

III. di diportarsi all'infinito come una funzione potenziale di masse situate nel finito.

Infatti, nota che sia una tal funzione U, le equazioni (17_a) fanno conoscere senz'altro la distribuzione indotta m, mentre la (17) fa conoscere la funzione potenziale V di questa distribuzione.

Le precedenti condizioni I, II, III sono *caratteristiche*, cioè non possono essere soddisfatte da due distinte funzioni U', U''. Infatti la differenza U di queste due supposte soluzioni, oltre che alle altre condizioni generali, dovrebbe soddisfare, come facilmente si riconosce, alle due equazioni in cui si convertono le (18_a), (18_b) per $V_0 = 0$. Ora dalle equazioni (17_b), moltiplicate ordinatamente per le derivate di U e sommate, si deduce, con una integrazione su tutto lo spazio e con riguardo al teorema generale (9),

$$(18_d) \qquad \int \Phi(U)\, dS_\infty - 2\pi \boldsymbol{P}(V_0, U) = 0,$$

donde, per $V_0 = 0$,

$$(18_e) \qquad \int \Phi(U)\, dS_\infty = 0.$$

Ma la funzione quadratica $\Phi(U)$ è, per le ipotesi fatte sulla ψ e quindi anche sulla $\Psi(U)$, essenzialmente positiva in tutto lo spazio: quindi quest'ultima equazione non può essere soddisfatta che da $U = 0$ dovunque; e ciò esclude ogni possibile differenza fra le due soluzioni supposte distinte.

Così anche per questa via è stabilita l'unicità di soluzione del problema d'induzione.

15. La dimostrazione precedente, messa a fronte di quella del § 13, dà luogo ad alcune osservazioni.

E primieramente apparisce, (18_e), che la condizione necessaria e sufficiente per poter concludere da quella che la differenza di due soluzioni U dev'essere nulla, è che la quadratica $\Phi(U)$, (18), sia dovunque positiva (come è già, per definizione, in ogni punto esterno al corpo S). Ora ciò avviene senza dubbio quando è positiva la quadratica $\Psi(U)$, che è quanto dire l'antica ψ, ma potrebbe anche avvenire senza che questa fosse tale. Quindi la precedente dimostrazione stabilisce l'unicità di soluzione in condizioni più larghe che non fossero quelle sotto le quali tale proprietà venne stabilita nel § 13.

In realtà però si può modificare la deduzione fatta in quest'ultimo §, per guisa da giungere alla medesima conclusione. Basta infatti trascrivere l'espressione (14) nella forma

$$P(V) = \frac{1}{8\pi}\int \Delta_1 V \, dS' + \frac{1}{4\pi}\int\left(\frac{\Delta_1 V}{2} + 4\pi\psi\right) dS,$$

dove S' rappresenta tutto lo spazio escluso dal corpo S, ed osservare che, per la positività di quest'espressione, è sufficiente quella di

$$\frac{\Delta_1 V}{2} + 4\pi\psi(m_a, m_b, m_c)$$

in ogni punto di S. Ora, nei riguardi della dimostrazione da darsi, questa espressione equivale a

$$\frac{\Delta_1 V}{2} + 4\pi\Psi\left(\frac{\partial V}{\partial a}, \frac{\partial V}{\partial b}, \frac{\partial V}{\partial c}\right),$$

giacchè, per l'ipotesi $V_0 = 0$, dovrebbero sussistere, (17_a), le relazioni

$$m_a = -\Psi'\left(\frac{\partial V}{\partial a}\right), \quad \text{etc.,}$$

e questa seconda espressione quadratica non è, (18), altro che $\Phi(V)$. Dunque, rinunciando alla primitiva ipotesi della necessaria positività di ψ, e conservando soltanto quella della positività di $P(V)$, si giungerebbe egualmente alla conclusione più generale di cui s'è detto.

Or quì si presenta una circostanza singolare, la quale vien messa più chiaramente in rilievo quando si assuma la quadratica ψ in forma canonica, cioè quando si ponga

$$\psi = \frac{1}{2}\left(\frac{m_a^2}{\varkappa_a} + \frac{m_b^2}{\varkappa_b} + \frac{m_c^2}{\varkappa_c}\right). \tag{19}$$

La riduzione di ψ a questa forma può essere fatta con una conveniente scelta d'assi *fissi*, se i coefficienti di ψ sono *costanti*, od anche se, essendo questi variabili, il corpo S possiede tre assi ortogonali fissi di simmetria magnetica; ma può, in ogni caso, concepirsi effettuata per ciascun punto di S in particolare. Le quantità (senza dimensione) $\varkappa_a$, $\varkappa_b$, $\varkappa_c$ sono i cosidetti *coefficienti di suscettibilità*, secondo i tre assi, nel primo caso, e secondo tre determinate direzioni ortogonali variabili da punto a punto, nel secondo. La funzione reciproca Ψ è data, in queste ipotesi, da

$$\Psi(U) = \frac{1}{2}\left[\varkappa_x\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \varkappa_y\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 + \varkappa_z\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2\right]$$

e si ha quindi

$$\Phi(U) = \frac{1}{2}\left[\mu_x\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \mu_y\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 + \mu_z\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2\right],$$

dove si è posto

$$\mu_x = 1 + 4\pi\varkappa_x, \qquad \mu_y = 1 + 4\pi\varkappa_y, \qquad \mu_z = 1 + 4\pi\varkappa_z, \tag{19$_a$}$$

dove, cioè, le quantità μ_x, μ_y, μ_z sono i cosidetti *coefficienti di permeabilità*, che si riducono all'unità nello spazio esterno al corpo S, spazio in cui si deve porre $\varkappa_x = \varkappa_y = \varkappa_z = 0$. Le condizioni necessarie e sufficienti per la positività di Φ sono quindi

$$\mu_x > 0, \qquad \mu_y > 0, \qquad \mu_z > 0, \tag{19$_b$}$$

in tutto lo spazio.

Ciò premesso, si osservi che essendo, (14),

$$P(V) = \frac{1}{8\pi}\int F^2 dS_\infty + \int \psi\, dS,$$

si può, (13), scrivere anche

$$P(V) = -\frac{1}{8\pi}\int G^2 dS_\infty + \int(\psi + 2\pi m^2)\, dS, \tag{19$_c$}$$

dove, rispetto agli assi cui si riferisce l'espressione (19), è

$$\psi + 2\pi m^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{\mu_a m_a^2}{\varkappa_a} + \frac{\mu_b m_b^2}{\varkappa_b} + \frac{\mu_c m_c^2}{\varkappa_c}\right).$$

Ne risulta che se, essendo soddisfatte in ogni punto le condizioni (19_b), sono in ogni punto di S negativi i coefficienti $\varkappa_a$, $\varkappa_b$, $\varkappa_c$; ovvero, in altri termini, se, essendo positiva la quadratica Φ, è invece negativa la ψ, riesce necessariamente negativa, (19_c), anche l'espressione dell'energia. Ora, in questo caso, cadono tutte le deduzioni del § 13, mentre non cessa, in virtù delle trasformazioni del § 14, di sussistere il teorema d'unicità di soluzione delle equazioni d'induzione.

Il quì accennato caso d'eccezione ai ragionamenti del § 13 *) è importante a notarsi, per ciò ch'esso non corrisponde già ad una mera possibilità astratta, ma si presenta in una classe di fenomeni reali, in quelli, cioè, che si riferiscono ai corpi diamagnetici; e l'incongruenza del risultato che si verificherebbe per questi corpi, rispetto al segno dell'energia, non è un argomento di picciolo peso in favore dell'ipotesi, già più volte messa innanzi ed ora diventata più che mai probabile, d'una polarizzabilità magnetica di tutto lo spazio ambiente.

Quest'ipotesi verrà trattata nel § successivo. Quì giova aggiungere, a modo di complemento, alcune poche osservazioni circa formole incontrate nel § precedente.

Collo stesso procedimento con cui si dedusse l'equazione (18_d), si può stabilire l'equazione più generale

$$(20)\quad \int\left[\Phi'\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)\frac{\partial U'}{\partial x}+\Phi'\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)\frac{\partial U'}{\partial y}+\Phi'\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)\frac{\partial U'}{\partial z}\right]dS_\infty-4\pi P(V_0,\,U')=0,$$

dove U' è, come U, una funzione potenziale di distribuzione magnetica finita ed in tre dimensioni. Eliminando, con noti processi, le derivate di U', si può dare a quest'equazione la forma:

$$\int U'(\nabla U-\Delta_2 V_0)\,dS_\infty+\int U'\left[D_n U+D_{n'}U-\left(\frac{\partial V_0}{\partial n}+\frac{\partial V_0}{\partial n'}\right)\right]d\sigma=0,$$

dove σ è il complesso di *tutte* le superficie di discontinuità. Da questa unica formola, stante l'arbitrio che regna circa U', si ricavano nuovamente le due equazioni (18_a), (18_b).

Attribuendo ad U' il significato di *variazione*, δU, della funzione U, l'equazione (20) diventa quella stessa che si otterrebbe annullando la variazione δ della quantità

$$\frac{1}{4\pi}\int\Phi(U)\,dS_\infty-\boldsymbol{P}(V_0,\,U).$$

*) Cfr. l'articolo *Note fisico-matematiche*, nei Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, t. III (1889), pp. 67-79; oppure queste OPERE, tomo IV, pp. 320-329.

Finalmente dall'equazione

$$2\int \Phi\, dS + \int U \nabla U\, dS + \int U(D_n U + D_{n'} U)\, d\bar{\sigma} + \int U D_n U\, d\sigma = 0$$

si deduce che una funzione U, assoggettata alla condizione che ∇U debba prendere valori dati in ogni punto di uno spazio S determinato da una superficie σ ed attraversato da superficie di discontinuità $\bar{\sigma}$, è del tutto individuata quando sien dati, lungo le superficie $\bar{\sigma}$ e σ, sia i valori della funzione stessa, sia quelli di $D_n U + D_{n'} U$ e, rispettivamente, di $D_n U$, sia, finalmente, in parte gli uni ed in parte gli altri. Ciò si collega col problema dell'induzione magnetica per via di certe considerazioni che sono state esposte nei §§ 12, 13 della Memoria *Sull'induzione magnetica,* ove è stato soltanto omesso di considerare l'esistenza di superficie di discontinuità non terminali.

16. S'immagini che sieno di nuovo in presenza, come nel § 13, i due corpi S_0 ed S, ma che, al tempo stesso, tutto lo spazio sia occupato da un mezzo isotropo polarizzabile. È ragionevole ammettere che questo mezzo invada anche lo spazio occupato da ciascuno dei corpi S_0 ed S. Senonchè, rispetto al secondo, l'esistenza entro di esso d'una parte del mezzo deve considerarsi, nel quì ammesso ordine d'idee, come la stessa causa efficiente della suscettibilità magnetica del corpo, variamente atteggiata secondo la natura di questo (la quale si rispecchia nei coefficienti della relativa funzione ψ); mentre invece il primo corpo deve considerarsi come polarmente *inerte*, cioè come liberamente pervaso dal mezzo, sul quale esso non esercita che un'azione *apolare*. In tale concetto lo spazio, che si dirà S', da riguardarsi come effettivamente occupato dal mezzo modificatore dell'induzione, è quello escluso dal solo corpo S, talchè, denotando con m, m' i momenti indotti in S ed in S', con V, v le rispettive funzioni potenziali, con V_0 la funzione potenziale inducente, si ottengono (§ 14) le seguenti equazioni d'induzione:

per il corpo S:

$$m_x = -\Psi'\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right), \quad m_y = -\Psi'\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right), \quad m_z = -\Psi'\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right),$$

per il mezzo S':

$$m'_x = -\varkappa\frac{\partial U}{\partial x}, \quad m'_y = -\varkappa\frac{\partial U}{\partial y}, \quad m'_z = -\varkappa\frac{\partial U}{\partial z};$$

dove si è posto

$$U = V_0 + V + v$$

e dove x è il coefficiente di suscettibilità del mezzo.

Le tre equazioni per m' si possono riguardare come comprese in quelle per m (estese in tal caso a tutto lo spazio), e ciò considerando Ψ come una funzione quadratica che possieda, in S, l'espressione generale già prima supposta ed, in S', l'espressione

$$\Psi = \frac{\varkappa}{2} \Delta_1 U .$$

Con tale considerazione, se si rammentano le equazioni fondamentali (18_a), (18_b) del § 14 e se si pone

$$\mu = 1 + 4\pi\varkappa ,$$

si trova facilmente che le condizioni, debitamente particolareggiate, che definiscono univocamente la funzione U (supposta positiva la quadratica Φ e la costànte μ) sono le seguenti:

I. In ogni punto di S si ha

$$\nabla U = \Delta_2 V_0$$

I'. ed in ogni punto di S'

$$\mu \Delta_2 U = \Delta_2 V_0 .$$

II. In ogni punto d'una superficie di discontinuità *interna* ad S si ha

$$D_n U + D_{n'} U = \frac{\partial V_0}{\partial n} + \frac{\partial V_0}{\partial n'} ,$$

II'. in ogni punto d'una superficie terminale di S

$$D_n U + \mu \frac{\partial U}{\partial n'} = \frac{\partial V_0}{\partial n} + \frac{\partial V_0}{\partial n'}$$

II''. ed in ogni punto d'una superficie di discontinuità o terminale di S_0

$$\mu \left(\frac{\partial U}{\partial n} + \frac{\partial U}{\partial n'} \right) = \frac{\partial V_0}{\partial n} + \frac{\partial V_0}{\partial n'} .$$

La sola circostanza che esige qualche riflessione è il modo di diportarsi della funzione U all'infinito: nel caso attuale, infatti, questa funzione non può senz'altro considerarsi come funzione potenziale di masse tutte situate nel finito. Se non che, osservando che in tutto lo spazio esterno ad S e ad S_0 si ha, (I'),

$$\Delta_2 U = 0$$

e che quindi U è funzione potenziale di masse che non possono aver sede se non in S, in S_0 ed all'infinito, si riconosce agevolmente (mercè considerazioni analoghe a quelle fatte da Kirchhoff nella Lez. XVI, § 7, della *Meccanica*) come, ammettendo che la polarizzazione m' del mezzo debba essere nulla all'infinito, il che è necessario per rendere determinato il problema, si possa nuovamente stabilire che

III. i caratteri della funzione U all'infinito sono quelli d'una funzione potenziale di masse situate nel finito.

Ciò posto, si confrontino queste varie condizioni cui è soggetta la funzione U, e che la definiscono completamente, con quelle che dovrebbero sussistere per l'analoga funzione se lo spazio S' fosse *neutro*, cioè se fosse $\mu = 1$. Si riconosce tosto che le condizioni I, II e III resterebbero in questo caso identicamente le stesse, mentre le I', II', II'' muterebbero, e cioè diverrebbero ordinatamente le seguenti:

$$\Delta_2 U = \Delta_2 V_0,$$

$$D_n U + \frac{\partial U}{\partial n'} = \frac{\partial V_0}{\partial n} + \frac{\partial V_0}{\partial n'},$$

$$\frac{\partial U}{\partial n} + \frac{\partial U}{\partial n'} = \frac{\partial V_0}{\partial n} + \frac{\partial V_0}{\partial n'}.$$

Or ecco come si può ristabilire l'accordo *formale* di tutte le condizioni. Si ponga

$$\Phi = \mu \Phi', \qquad V_0 = \mu V'_0$$

e si denotino con ∇', D'_n le operazioni ∇ e D_n eseguite colla quadratica Φ' anzichè colla Φ. Per tale semplice sostituzione le due equazioni I, I' vengono a coincidere nell'unica

I_a $$\nabla' U = \Delta_2 V'_0,$$

valida in tutto lo spazio, mentre le II, II', II'' vengono a coincidere in quest'altra unica equazione

II_a $$D'_n U + D'_{n'} U = \frac{\partial V'_0}{\partial n} + \frac{\partial V'_0}{\partial n'},$$

valida per tutte le superficie di discontinuità e terminali così di S come di S_0. La funzione U individuata da queste condizioni I_a, II_a e dalla III è ancora la stessa di prima, poichè il passaggio dalla quadratica Φ alla Φ' non importa che la divisione di tutti i coefficienti per la *costante* μ, vale a dire che invece di porre

$$\Phi(U) = \frac{\Delta_1 U}{2} + 4\pi \Psi(U) \qquad \text{in } S,$$

$$= \frac{\mu}{2} \Delta_1 U \qquad \text{in } S'$$

si deve porre

$$\Phi'(U) = \frac{\Delta_1 U}{2\mu} + \frac{4\pi}{\mu}\Psi(U) \qquad \text{in } S,$$

$$= \frac{\Delta_1 U}{2} \qquad \text{in } S'.$$

Ma mentre la funzione U, definita dalle condizioni I, I', II, II', II'', III, è quella che soddisfa all'equazione

$$U = V_0 + V + v$$

e che corrisponde alla simultanea considerazione dei soliti due corpi S_0, S e dell'*ambiente magnetico*, quella definita dalle condizioni I_a, II_a e III soddisfa invece (§ 14) all'equazione

$$U = V'_0 + V'$$

e corrisponde alla considerazione d'un inducente S_0 di funzione potenziale V'_0 e d'un indotto S di funzione potenziale V', *ad ambiente neutro*. La necessaria eguaglianza

$$V_0 + V + v = V'_0 + V'$$

dà quindi

$$V' = V + v + V_0 - V'_0,$$

cioè

$$V'_0 = \frac{V_0}{\mu}, \qquad V' = V + v + \frac{4\pi\varkappa}{\mu} V_0.$$

La prima di queste due equazioni fornisce il noto teorema che l'esistenza d'un ambiente di permeabilità μ impicciolisce *apparentemente* il valore di ogni funzione potenziale inducente nel rapporto da μ ad 1. La seconda stabilisce la relazione che passa fra la funzione potenziale indotta *apparente* V', la vera V e quella, v, relativa all'ambiente. Si può osservare che, se non esistesse il corpo S, si avrebbe $V = V' = 0$ e quindi

$$v = -\frac{4\pi\varkappa}{\mu} V_0:$$

denotando con v_0 questo particolare valore (indipendente da S) della funzione potenziale indotta nel mezzo indefinito, si può dunque scrivere

$$V' = V + v - v_0.$$

L'effetto apparente dell'esistenza d'un mezzo si riconosce più distintamente supponendo che ψ abbia la forma (19), giacchè si ha in tal caso

$$\Phi' = \frac{1}{2}\left[\mu'_x\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \mu'_y\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 + \mu'_z\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2\right],$$

dove

$$\mu'_x = \frac{\mu_x}{\mu}, \qquad \mu'_y = \frac{\mu_y}{\mu}, \qquad \mu'_z = \frac{\mu_z}{\mu}.$$

E poiche, ponendo

$$\mu'_a = 1 + 4\pi\varkappa'_a, \qquad \mu'_b = 1 + 4\pi\varkappa'_b, \qquad \mu'_c = 1 + 4\pi\varkappa'_c,$$

risulta

$$\varkappa'_a = \frac{\varkappa_a - \varkappa}{\mu}, \qquad \varkappa'_b = \frac{\varkappa_b - \varkappa}{\mu}, \qquad \varkappa'_c = \frac{\varkappa_c - \varkappa}{\mu},$$

si vede come, pur essendo positivi i quattro coefficienti di suscettibilità *vera* $\varkappa_a$, $\varkappa_b$, $\varkappa_c$, $\varkappa$, possano diventare negativi i coefficienti di suscettibilità *apparente* $\varkappa'_a$, $\varkappa'_b$, $\varkappa'_c$: si vede, cioè, come l'ipotesi della polarizzabilità di tutto lo spazio ambiente permetta di spiegare i fatti del diamagnetismo, senza rinunziare alle condizioni imposte dalla necessità che la vera espressione dell'energia si mantenga sempre positiva.

17. Si è fatto allusione, nei §§ 12 e 13, alla possibilità di attribuire alla funzione ψ una forma diversa dalla quadratica. Or ecco qualche breve cenno in proposito, limitato, per semplicità, al caso dei corpi isotropi.

Si osservi primieramente che le equazioni d'induzione magnetica (16) sussistono per qualsiasi forma della funzione ψ, qualora si considerino come ricavate dal porre uguale a zero la variazione del potenziale totale P.

Nel caso d'un corpo isotropo, in cui la funzione ψ non può dipendere che dall'unico argomento m, quelle equazioni esprimono che l'asse magnetico è in ogni punto (a, b, c) diretto nel senso della forza magnetica totale $\boldsymbol{F}$ di componenti

$$-\frac{\partial(V_0 + V)}{\partial a}, \qquad -\frac{\partial(V_0 + V)}{\partial b}, \qquad -\frac{\partial(V_0 + V)}{\partial c},$$

mentre la grandezza m del momento indotto è data da

$$(21) \qquad \psi'(m) = \boldsymbol{F} \quad *).$$

---

*) Se si assumesse una funzione k di m, tale che quest'equazione (21) prendesse la forma $m = k\boldsymbol{F}$, si avrebbe

$$\frac{m}{k} = \psi'(m),$$

donde

$$\psi(m) = \int \frac{m\,dm}{k},$$

e la forma che ne risulterebbe, (14), per $P(V)$ si troverebbe in accordo coll'espressione generale Ω dell'energia magnetica, data da C. NEUMANN nella Memoria già citata, equazione (28).

Se si ammette l'ipotesi quadratica, cioè se si pone

$$(21_a) \qquad \psi(m) = \frac{m^2}{2\varkappa},$$

dove $\varkappa$ è il coefficiente di suscettibilità del corpo, ha luogo la relazione

$$(21_b) \qquad \psi'(m) = \frac{m}{\varkappa} = \boldsymbol{F},$$

che stabilisce la proporzionalità fra il momento m e la forza $\boldsymbol{F}$.

Egli è appunto perchè l'esperienza non conferma tale proporzionalità, se non per moderate intensità di forza inducente, ed accenna invece, per induzioni d'intensità sempre crescente, all'esistenza d'un limite superiore finito per il valore del momento unitario indotto, che è stata congetturata la possibilità d'una relazione d'altra forma fra $\boldsymbol{F}$ ed m, relazione che dovrebbe ridursi alla forma (21_b) per valori molti piccoli di queste due grandezze.

Che tale possibilità non ripugni punto alla imprescindibile condizione (§ 12) del dover essere ψ una grandezza omogenea col quadrato di un momento unitario, risulta dalla semplicissima considerazione seguente.

Se esiste, per il dato corpo isotropo, un valore assoluto M del momento unitario, il quale sia limite superiore d'ogni possibile valore del momento indotto in esso corpo, questa grandezza M non può non essere un *parametro magnetico* essenziale, che deve, come tale, intervenire nell'espressione della funzione ψ, caratteristica per il corpo nei riguardi magnetici. Ciò posto, per essere il rapporto $m:M$ un numero astratto, basta formare un'espressione del tipo

$$\psi(m) = M^2 \chi\left(\frac{m}{M}\right),$$

per ottenere una classe molto generale di funzioni $\psi(m)$, soddisfacenti alla duplice condizione di contenere il parametro M e di rappresentare una quantità omogenea col quadrato d'un momento unitario (supposto che la funzione arbitraria χ sia, per sè stessa, di dimensione zero). Collo stesso tipo di funzioni si può poi, ed in infiniti modi, soddisfare anche alle altre condizioni, egualmente necessarie, che ψ si riduca alla forma (21_a) per piccoli valori di m e dia luogo alla convergenza di m verso il valore limite M, quando la forza $\boldsymbol{F}$ cresca indefinitamente. Se si pone, per semplicità,

$$\frac{m}{M} = \theta,$$

queste ultime condizioni richiedono che sia

$$\chi(\theta) = \frac{\theta^2}{2\varkappa}, \qquad \chi'(\theta) = \frac{\theta}{\varkappa}$$

per θ infinitamente piccolo e

$$\chi'(\theta) = \infty$$

per $\theta = \pm 1$.

Una funzione semplicissima che soddisfa alle due condizioni per $\chi'(\theta)$ è

$$\chi'(\theta) = \frac{\theta}{\varkappa\sqrt{1-\theta^2}},$$

donde, integrando e determinando la costante in modo da soddisfare alla condizione per $\chi(\theta)$, si deduce

$$\chi(\theta) = \frac{1-\sqrt{1-\theta^2}}{\varkappa}$$

e conseguentemente

$$(21_c) \qquad \psi(m) = \frac{M\left(M-\sqrt{M^2-m^2}\right)}{\varkappa}$$

(radicale positivo). La relazione fra il momento m e la forza $\boldsymbol{F}$ è, per tale funzione,

$$(21_d) \qquad \boldsymbol{F} = \frac{Mm}{\varkappa\sqrt{M^2-m^2}},$$

ovvero

$$m = \frac{\varkappa M \boldsymbol{F}}{\sqrt{M^2+\varkappa^2\boldsymbol{F}^2}},$$

ossia ancora, in forma razionale,

$$\frac{1}{m^2} = \frac{1}{\boldsymbol{m}^2} + \frac{1}{M^2},$$

dove $\boldsymbol{m}(=\varkappa\boldsymbol{F})$ designa il valore che spetterebbe al momento magnetico, nell'ordinaria ipotesi quadratica.

Questa determinazione speciale (certamente in parte arbitraria) della funzione $\psi(m)$ s'accorda coi risultati delle considerazioni, di diversissima natura, esposte da Kirchhoff nell'Appendice alla celebre Memoria del 1853 *Ueber den inducirten Magnetismus,* etc., dove però non è data veruna indicazione concreta circa la natura della funzione ivi indicata con $F(u)$ *). Questa funzione riceverebbe qui l'espressione

$$F(u) = \frac{M\varkappa}{\sqrt{M^2+\varkappa^2u^2}},$$

*) La quale non è altro che la funzione k della Nota precedente, espressa per $\boldsymbol{F}$ (cioè, presso Kirchhoff, per u) anzichè per m.

dove la costante M corrisponde a quella che KIRCHHOFF denota invece con K. Nel citato passo (*Gesammelte Abhandlungen*, p. 221) KIRCHHOFF riporta i risultati numerici di 14 esperienze di WEBER, donde si possono ricavare i valori delle attuali costanti M e $\varkappa$ col metodo dei minimi quadrati. Un valoroso cultore e promotore di questo metodo, l'egregio Professore P. PIZZETTI, ha avuto la compiacenza, della quale gli sono riconoscentissimo, d'eseguire i calcoli necessarî all'uopo, ed ha trovato i valori seguenti:

$$M = 13135{,}2 \pm 203{,}9, \qquad \varkappa = 29{,}0369 \pm 0{,}55,$$

dove i numeri che seguono il segno $\pm$ rappresentano l'error medio gaussiano. Con tali valori di M e $\varkappa$ gli errori residui di $F(u)$ non eccedono 0,7.

18. Passando ora a considerare le distribuzioni polari di superficie (§ 1) conviene prendere in esame l'integrale

$$\int\left(\frac{\partial U}{\partial a} l_a + \frac{\partial U}{\partial b} l_b + \frac{\partial U}{\partial c} l_c\right) d\sigma,$$

dove U è funzione continua e finita nei punti (a, b, c) della superficie σ.

Riferita questa superficie ad un sistema di coordinate curvilinee p, q, talchè il quadrato dell'elemento lineare prenda la nota forma

$$ds^2 = E dp^2 + 2 F dp dq + G dq^2,$$

si ponga *)

$$(22) \qquad \begin{cases} l_a = l_n \dfrac{\partial a}{\partial n} + \lambda_p \dfrac{\partial a}{\partial p} + \lambda_q \dfrac{\partial a}{\partial q}, \\[2ex] l_b = l_n \dfrac{\partial b}{\partial n} + \lambda_p \dfrac{\partial b}{\partial p} + \lambda_q \dfrac{\partial b}{\partial q}, \\[2ex] l_c = l_n \dfrac{\partial c}{\partial n} + \lambda_p \dfrac{\partial c}{\partial p} + \lambda_q \dfrac{\partial c}{\partial q}, \end{cases}$$

dove l_n è la componente del momento l secondo la normale n alla superficie, mentre $\lambda_p \sqrt{E}$ e $\lambda_q \sqrt{G}$ sono le componenti tangenziali (oblique) del medesimo momento nei sensi in cui crescono i parametri p e q, rispettivamente. La direzione n s'intende scelta in modo che la rotazione ($< \pi$) da p verso q si faccia, intorno ad n, nello stesso verso di quella da x verso y, intorno all'asse delle z. Sostituendo nel proposto integrale

*) Sono da confrontarsi, per le cose che seguono, le due Note *Sulla teoria degli strati magnetici* e *Sull'equivalenza delle distribuzioni magnetiche e galvaniche* [Rendiconti del Reale Istituto Lombardo, serie II, tomo XVI (1883), pp. 208-223 e 931-948; oppure queste OPERE, tomo IV, pp. 1-15, 16-32].

i precedenti valori di l_a, l_b, l_c, si trova ch'esso è equivalente all'espressione

$$\int \frac{\partial U}{\partial n} l_n d\sigma + \int \left(\frac{\partial U}{\partial p} \lambda_p + \frac{\partial U}{\partial q} \lambda_q \right) d\sigma.$$

Si rammentino ora le formole di trasformazione

$$\begin{aligned} \int \frac{\partial \chi}{\partial p} \frac{d\sigma}{H} &= - \int \left(E \frac{\partial p}{\partial \nu} + F \frac{\partial q}{\partial \nu} \right) \frac{\chi\, ds}{H}, \\ \int \frac{\partial \chi}{\partial q} \frac{d\sigma}{H} &= - \int \left(F \frac{\partial p}{\partial \nu} + G \frac{\partial q}{\partial \nu} \right) \frac{\chi\, ds}{H}, \end{aligned} \qquad (H = \sqrt{EG - F^2})$$

dove χ è funzione continua delle variabili p, q entro un qualunque pezzo σ di superficie, di cui s sia il contorno e ν la direzione della normale interna a questo contorno, condotta tangenzialmente alla superficie. Da queste formole si ha

$$\int \left[\frac{\partial (HU\lambda_p)}{\partial p} + \frac{\partial (HU\lambda_q)}{\partial q} \right] \frac{d\sigma}{H}$$
$$= - \int U \left[(E\lambda_p + F\lambda_q) \frac{\partial p}{\partial \nu} + (F\lambda_p + G\lambda_q) \frac{\partial q}{\partial \nu} \right] ds;$$

ma dalle equazioni (22), ponendo per brevità

$$(22_a) \qquad \begin{cases} l_p = l_a \dfrac{\partial a}{\partial p} + l_b \dfrac{\partial b}{\partial p} + l_c \dfrac{\partial c}{\partial p}, \\ l_q = l_a \dfrac{\partial a}{\partial q} + l_b \dfrac{\partial b}{\partial q} + l_c \dfrac{\partial c}{\partial q}, \end{cases}$$

risulta

$$(22_b) \qquad l_p = E\lambda_p + F\lambda_q, \qquad l_q = F\lambda_p + G\lambda_q;$$

dunque

$$\int \left(\frac{\partial U}{\partial p} \lambda_p + \frac{\partial U}{\partial q} \lambda_q \right) d\sigma + \int [\lambda] U d\sigma + \int U l_\nu ds = 0,$$

dove l_ν è la componente del momento l secondo la direzione ν e dove il simbolo $[\lambda]$ rappresenta l'espressione

$$(22_c) \qquad [\lambda] = \frac{1}{H} \left[\frac{\partial (H\lambda_p)}{\partial p} + \frac{\partial (H\lambda_q)}{\partial q} \right],$$

la quale si può scrivere anche così:

$$(22_{c'}) \qquad [\lambda] = \frac{1}{H} \left[\frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{G l_p - F l_q}{H} \right) + \frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{E l_q - F l_p}{H} \right) \right].$$

Per tal modo si ottiene definitivamente

$$(23)\quad \int\left(\frac{\partial U}{\partial a}l_a+\frac{\partial U}{\partial b}l_b+\frac{\partial U}{\partial c}l_c\right)d\sigma=\int\frac{\partial U}{\partial n}l_n d\sigma+\int U h\,d\sigma+\int U g\,ds,$$

dove

$$(23_a)\qquad h=-[\lambda],\qquad g=-(l_\nu+l_{\nu'}),$$

ν e ν' essendo le due opposte normali in ogni punto d'una *linea di discontinuità* della superficie σ, cioè d'ogni linea s lungo la quale il momento l sia discontinuo. Fra queste linee s s'intendono comprese anche le *linee terminali,* quando esistono, e per esse si deve prendere per ν la normale *interna,* ponendo $l_{\nu'}=0$, cioè $g=-l_\nu$.

L'equazione (23) può essere considerata come analoga alla (2) del § 2.

Supponendo (x, y, z) punto esterno alla superficie e ponendo

$$U=\frac{1}{r},$$

si ottiene di qui la funzione potenziale V della distribuzione polare di superficie sotto la doppia forma

$$(24)\qquad V=\int\left(\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial a}l_a+\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial b}l_b+\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial c}l_c\right)d\sigma,$$

$$(24_a)\qquad V=\int\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}l_n d\sigma+\int\frac{h\,d\sigma}{r}+\int\frac{g\,ds}{r}.$$

La seconda di queste due espressioni di V non presenta lo stesso carattere dell'analoga (3_a), relativa ad una distribuzione in tre dimensioni: essa non appartiene, cioè, come quest'ultima, ad un'ordinaria funzione potenziale newtoniana. Il primo dei suoi tre termini appartiene invece allo stesso tipo dell'altra espressione (24), giacchè esso può scriversi così:

$$\int\left(\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial a}l_n\frac{\partial a}{\partial n}+\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial b}l_n\frac{\partial b}{\partial n}+\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial c}l_n\frac{\partial c}{\partial n}\right)d\sigma;$$

presentando però l'importante particolarità che la polarizzazione l_n è dovunque diretta *normalmente* alla superficie.

Le funzioni potenziali di questo tipo speciale, dette di *doppio strato,* hanno proprietà notissime, dalle quali scaturiscono per V le due equazioni generali

$$(24_b) \qquad V_n - V_{n'} = 4\pi l_n, \qquad \frac{\partial V}{\partial n} + \frac{\partial V}{\partial n'} = -4\pi h.$$

Tali funzioni, che pur si presentano spontaneamente nella dottrina classica del potenziale newtoniano (per esempio nel teorema di GREEN), debbono riguardarsi come irreducibili, in senso proprio, colle funzioni potenziali ordinarie. La riducibilità a queste ultime funzioni ha luogo invece, come risulta dalla stessa espressione (24_a), per le distribuzioni superficiali a polarizzazione *tangenziale*, cioè per quelle in cui è dovunque $l_n = 0$. Per queste sole, o per la sola *parte tangenziale* d'una distribuzione qualunque, ha luogo produzione di *magnetismo libero*, colla densità superficiale h in ogni punto di σ e colla densità lineare g in ogni punto di s.

Ponendo nell'equazione (23) $U = 1$, si ottiene

$$(24_c) \qquad \int h\,d\sigma + \int g\,ds = 0,$$

equazione che contiene il teorema analogo a (4). Ponendo invece successivamente $U = a, b, c$, si ottiene

$$\int l_a d\sigma = \int l_n \frac{\partial a}{\partial n} d\sigma + \int a h\,d\sigma + \int a g\,ds,$$

$$\int l_b d\sigma = \int l_n \frac{\partial b}{\partial n} d\sigma + \int b h\,d\sigma + \int b g\,ds,$$

$$\int l_c d\sigma = \int l_n \frac{\partial c}{\partial n} d\sigma + \int c h\,d\sigma + \int c g\,ds,$$

equazioni che fanno riscontro alle (5), ma nei secondi membri delle quali figura un termine di più, dovuto alla polarizzazione normale irreducibile l_n.

Se ad U si attribuisce, nella formola (23), il significato di funzione potenziale magnetica d'un sistema non avente punti comuni colla superficie σ, i due membri di quella formola devono considerarsi come espressioni equivalenti del potenziale mutuo di questo sistema esterno e della distribuzione magnetica superficiale. Ma la completa discussione delle varie forme sotto cui questo potenziale mutuo può presentarsi, in circostanze più generali, non si potrebbe opportunamente svolgere senza invocare le formole dell'Elettromagnetismo: epperò giova restringere alle poche deduzioni precedenti ciò che quì importava di dire intorno alle distribuzioni magnetiche di superficie. Queste deduzioni contengono già, in particolare, le formole necessarie alla dimostrazione dell'equivalenza d'ogni distribuzione magnetica ad una distribuzione di correnti chiuse *).

*) Veggasi la citata Nota *Sull'equivalenza*, etc.

XCVIII.

CONSIDERAZIONI SULLA TEORIA MATEMATICA DELL'ELETTROMAGNETISMO.

Memorie della R. Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna, serie V, tomo II (1892), pp. 313-378.

Il punto di vista dal quale, nella presente Memoria, è considerata e discussa la teoria fondamentale dell'elettromagnetismo (intesa quì nel proprio senso della parola, cioè in quello di azioni mutue fra distribuzioni magnetiche e galvaniche) è sostanzialmente di MAXWELL, nel primo Capitolo della Parte IV del *Treatise;* ed anche le deduzioni ulteriori sono quì esposte e coordinate in guisa da render ragione di quasi tutte le formole più importanti stabilite dal citato Autore negli altri Capitoli della stessa Parte IV. Senonchè mentre MAXWELL, conformemente allo spirito che informa tutto il suo Trattato, moltiplica le allegazioni di fatti sperimentali, per averne guida nell'indagine delle leggi teoriche, quì prevale invece la tendenza a fondare queste leggi sul minor numero possibile di postulati; o, per meglio dire, trattasi quì piuttosto di veder chiaramente ciò che v'è di necessario e di indeclinabile nella mutua dipendenza fra le diverse parti della teoria, tralasciando d'insistere su quei non molti punti, del resto ben noti, in cui l'appello all'esperienza si rende assolutamente necessario per assicurare le basi della teoria stessa. Ed anche per alcuni di questi punti, come a cagion d'esempio per l'induzione magnetoelettrica, vengono quì esposte alcune considerazioni, d'indole molto ovvia, le quali conducono nel modo più diretto alle leggi che l'esperienza ha fatto riconoscere per vere.

Fra le varie ragioni per le quali i procedimenti usati da MAXWELL hanno potuto lasciar sussistere qualche dubbio o qualche oscurità nelle menti di molti lettori la principale è forse la seguente. Una caratteristica notevolissima di quei procedimenti è la costante e simultanea contemplazione di due specie di forze, cioè di quelle che MAXWELL chiama la *forza magnetica* e l'*induzione magnetica* che è quanto dire la forza *apolare* e la forza *polare* della Memoria presentata lo scorso anno a quest'Accademia, sotto il titolo di *Considerazioni sulla teoria matematica del magnetismo* *). Ora se non può sorgere dubbio circa la grandissima utilità, per non dire necessità, di considerare ad un tempo amendue queste forze, si può invece dubitare che i molteplici e disparatissimi aspetti sotto cui esse vengono introdotte ed usate da MAXWELL, nel lungo corso delle sue svariate ricerche, sieno atti a lasciarne chiaramente comprendere la natura e l'ufficio reciproco; tanto più che il lettore incontra non di rado espressioni d'una sola e medesima quantità, formate or coll'una ed or coll'altra specie di simboli adoperati per designare le due forze. E che qualche incertezza possa realmente derivarne è mostrato dal fatto che il chiaro POINCARÉ, discutendo due delle più importanti di tali espressioni, fonda la sua scelta sopra considerazioni estrinseche, concludendo con queste parole: *Nous nous contenterons de ce double aperçu, en l'absence d'une théorie plus satisfaisante* (*Electricité et Optique,* I, p. 147).

Per rimovere ogni equivoco circa questo punto essenziale, conveniva in primo luogo svolgere compiutamente le formole dell'equivalenza fra distribuzioni magnetiche e galvaniche, e ciò è stato fatto nella prima parte di questa Memoria. Tali formole, forse non abbastanza note nella loro integrità (benchè già indicate da THOMSON e da altri), ed in particolare non mai esplicitamente invocate da MAXWELL, erano già state anteriormente dedotte e discusse in una Nota pubblicata nel 1883, nei Rendiconti dell'Istituto Lombardo **); ma l'esposizione che quì ne vien data è più completa ed è presentata in una forma che quadra più direttamente cogli scopi elettromagnetici ***). In secondo luogo bisognava evitare, nello studio delle azioni mutue fra magneti e correnti, la considerazione esclusiva delle correnti lineari, mettendo invece in prima linea quella dei sistemi galvanici a tre dimensioni e tenendo anche conto della possibilità che uno stesso spazio fosse sede ad un tempo di polarizzazione magnetica e di flusso galvanico: il che pure è stato fatto nel seguito della presente Memoria. Per tal guisa ogni incertezza ha potuto essere eliminata, salvo tutt'al più circa un punto, che non è del resto

*) Memorie della R. Acc. delle Scienze dell'Istituto di Bologna, serie V, tomo I (1891), pp. 409-453; oppure queste OPERE, tomo IV, pp. 395-435.

**) Serie II, tomo XVI (1883), pp. 931-948; oppure queste OPERE, tomo IV, pp. 16-32.

***) Fra i lavori recenti sull'argomento va notata un'importante Memoria del 1889 di P. DUHEM *Sur l'équivalence des courants et des aimants* [*Ann. de l'École norm. sup.*, Serie III, tomo VI (1889), pp. 297-326]. Se non che il precipuo obbiettivo dell'egregio Autore è di studiare il caso delle correnti *non chiuse,* partendo dalla teoria di HELMHOLTZ; epperò la maggior parte delle sue conclusioni esce dal campo del presente lavoro, ove non si studiano, con MAXWELL, che *sistemi galvanici chiusi*.

discusso di proposito nemmeno da MAXWELL, e che è il solo in cui intervenga la considerazione d'una forza cosidetta *elementare* (la forza ponderomotrice magnetoelettrica, § 16): in questo caso la scelta è stata determinata dal più ovvio modo di riprodurre i risultamenti già noti e bene accertati.

Si è tralasciato di precisare ad ogni passo la corrispondenza fra le formole quì stabilite e quelle del Trattato di MAXWELL, sia perchè queste formole ricorrono ivi più e più volte (sotto aspetti non sempre identici, a seconda degli scopi momentanei dell'Autore), sia sopratutto perchè l'Opera di cui si tratta è indubbiamente famigliare in ogni sua parte a tutti quelli che s'occupano di simili studii. Circa questo proposito giova aggiungere che il chiaro BOLTZMANN, nelle sue recenti ed interessantissime *Vorlesungen ueber* MAXWELL *Theorie der Elektricität und des Lichtes* (Lipsia, 1891) ha manifestato, non senza buone ragioni, il desiderio che s'abbiano a mantenere inalterate, in ogni nuova trattazione di cose elettromagnetiche, le segnature maxwelliane. Nel presente lavoro ciò non potè farsi per non rimutare del tutto i molti simboli già introdotti nella precedente Memoria sul magnetismo, alla quale occorre spesso di far richiamo nella presente (ciò che avviene colla citazione del § o della formola, susseguita dalle lettere *M. M.*), ed anche perchè certe maniere semplici ed uniformi di designare i vettori, adoperate in questa e nella precedente Memoria, sembrano effettivamente d'uso assai comodo e forse preferibili, in massima, a quelle usate da MAXWELL.

Ad evitare ripetizioni è bene dire fin d'ora come s'intendano costituiti i corpi, o sistemi di corpi, che si riguardano quali sedi di distribuzioni magnetiche o galvaniche. Una tal sede è designata di regola con (S, σ), intendendo con S il totale spazio da essa occupato e con σ l'insieme di tutte le superficie *) che limitano questo spazio, o che lo dividono in parti in ognuna delle quali regni perfetta continuità di condizioni fisiche della materia che l'occupa e quindi anche di stato magnetico o galvanico in essa attuabile. Queste superficie possono presentare delle linee d'incontro (sia terminali, sia interne), la considerazione delle quali è indispensabile per la completa enumerazione di certe condizioni (§§ 3, 5), e che si riscontrano d'altronde necessariamente in ogni sistema di corpi eterogenei, a contatto fra loro lungo alcune parti di superficie.

V'è ancora una particolarità di cui conviene far menzione, ed è l'uso d'una certa rappresentazione idrodinamica (già indicata nella Nota del 1883) che comparisce dapprima nel § 4 e che viene invocata frequentemente nel seguito, in ispecie laddove si tratta di forze elettromotrici (§§ 19, 21). Anche questa rappresentazione si collega con ben noti concetti di MAXWELL, benchè sia quì presentata in una forma alquanto più

*) Per queste, come per ogni altra superficie che diventi oggetto delle seguenti considerazioni, si supporrà sempre che si tratti di superficie a *due* faccie distinte.

indeterminata: ma giova ad ogni modo avvertire che non devesi ad essa attribuire se non un valore illustrativo, qual è quello di certe costruzioni grafiche, così utilmente adoperate in altre ricerche. Salvo questa necessaria riserva, è certo che tale rappresentazione offre considerevoli vantaggi tanto per l'esposizione, quanto per l'indagine stessa, il che basta a giustificarne l'uso non solo nell'argomento qui trattato, ma anche in altri della dottrina elettromagnetica intesa in senso lato.

1. Nella teoria del magnetismo le componenti della forza polare G, emanante da un corpo magnetico S, di funzione potenziale

$$V=\int\left(\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial a}m_a+\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial b}m_b+\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial c}m_c\right)dS,$$

sono state definite colle formole (§ 8, *M. M.*)

$$(1)\qquad G_x=F_x+4\pi m_x,\qquad G_y=F_y+4\pi m_y,\qquad G_z=F_z+4\pi m_z,$$

che le fanno dipendere dal momento locale m e dalla forza apolare locale F, di componenti

$$F_x=-\frac{\partial V}{\partial x},\qquad F_y=-\frac{\partial V}{\partial y},\qquad F_z=-\frac{\partial V}{\partial z}.$$

Ora è facile, con una considerazione ben nota, assegnare alle componenti della forza polare G altre espressioni, indipendenti da F.

Se infatti si pone

$$(1_a)\qquad M_x=\int\frac{m_a\,dS}{r},\qquad M_y=\int\frac{m_b\,dS}{r},\qquad M_z=\int\frac{m_c\,dS}{r},$$

si ottiene tanto

$$V=-\left(\frac{\partial M_x}{\partial x}+\frac{\partial M_y}{\partial y}+\frac{\partial M_z}{\partial z}\right),$$

quanto

$$\Delta_2 M_x=-4\pi m_x,\qquad \Delta_2 M_y=-4\pi m_y,\qquad \Delta_2 M_z=-4\pi m_z,$$

talchè si può scrivere

$$G_x=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial M_x}{\partial x}+\frac{\partial M_y}{\partial y}+\frac{\partial M_z}{\partial z}\right)-\Delta_2 M_x,$$

ossia

$$G_x=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial M_y}{\partial x}-\frac{\partial M_x}{\partial y}\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial M_x}{\partial z}-\frac{\partial M_z}{\partial x}\right).$$

Se dunque s'introducono tre nuove funzioni V_x, V_y, V_z colle formole

$$(1_b)\qquad V_x = \frac{\partial M_z}{\partial y} - \frac{\partial M_y}{\partial z}, \qquad V_y = \frac{\partial M_x}{\partial z} - \frac{\partial M_z}{\partial x}, \qquad V_z = \frac{\partial M_y}{\partial x} - \frac{\partial M_x}{\partial y},$$

si ottiene

$$(2)\qquad G_x = \frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z}, \qquad G_y = \frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x}, \qquad G_z = \frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y}$$

e queste sono le espressioni cui si alludeva.

Per ben comprendere la natura di quest'importante risultamento, conviene osservare che, sostituendo in (1_b) le espressioni (1_a) di M_x, M_y, M_z, si ottiene

$$(2_a)\qquad \begin{cases} V_x = \displaystyle\int \left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial c} m_b - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial b} m_c \right) dS, \\ V_y = \displaystyle\int \left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial a} m_c - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial c} m_a \right) dS, \\ V_z = \displaystyle\int \left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial b} m_a - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial a} m_b \right) dS, \end{cases}$$

donde apparisce che le nuove funzioni V_x, V_y, V_z appartengono allo stesso tipo della primitiva funzione V, corrispondendo a tre distinti stati magnetici del corpo S, in cui la primitiva polarizzazione

$$(m_a,\ m_b,\ m_c)$$

è rispettivamente surrogata dalle tre

$$(0,\ -m_c,\ m_b), \qquad (m_c,\ 0,\ -m_a), \qquad (-m_b,\ m_a,\ 0),$$

tutte orientate ortogonalmente alla primitiva. Queste tre funzioni V_x, V_y, V_z, che sono legate, (1_b), dalla relazione solenoidale

$$(2_b)\qquad \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} = 0$$

(la quale per brevità si designerà con $[V_{xyz}] = 0$ o, più semplicemente, con $[V] = 0$, quando non vi sia luogo ad equivoco) e che servono ad esprimere direttamente, sotto la nuova forma (2), le componenti della forza polare in ogni punto ordinario dello spazio, costituiscono ciò che opportunamente si denomina la *terna potenziale polare* della distribuzione (m_a, m_b, m_c).

Delle due proprietà caratteristiche delle forze polari, la prima è messa in immediata evidenza dalle stesse nuove formole di definizione (2), le quali dànno senz'altro

$$(2_c) \qquad \frac{\partial G_x}{\partial x}+\frac{\partial G_y}{\partial y}+\frac{\partial G_z}{\partial z}=0\,,$$

cioè

$$[G]=0\,,$$

per ogni punto ordinario dello spazio. La seconda si presenta come corollario d'un altro importante teorema, che nasce parimente dalla considerazione della terna polare V_{xyz}.

Considerando un pezzo *qualunque* σ di superficie, si ha, (2),

$$\int G_n d\sigma=\int\left[\left(\frac{\partial V_z}{\partial y}-\frac{\partial V_y}{\partial z}\right)\frac{\partial x}{\partial n}+\left(\frac{\partial V_x}{\partial z}-\frac{\partial V_z}{\partial x}\right)\frac{\partial y}{\partial n}+\left(\frac{\partial V_y}{\partial x}-\frac{\partial V_x}{\partial y}\right)\frac{\partial z}{\partial n}\right]d\sigma$$

ossia, per un ben noto teorema di Stokes (che verrà più volte invocato nel seguito),

$$(2_d) \qquad \int G_n d\sigma=\int_s (V_x dx+V_y dy+V_z dz)\,,$$

ove s è il contorno del pezzo σ, percorso in senso positivo rispetto alla normale n. Il primo membro di quest'equazione rappresenta il *flusso di forza polare* G attraverso alla sezione σ, nel senso della normale n: questo flusso è dunque rappresentato anche da un *integrale lineare* preso lungo il contorno della sezione medesima; e questo integrale è formato colle tre funzioni V_{xyz} nel modo semplicissimo che apparisce dalla precedente formola (2_d).

La validità di questo teorema non è punto infirmata dall'eventuale presenza di superficie di discontinuità attraversanti il pezzo σ. Infatti esso sussiste per ciascuna delle parti in cui σ è diviso dalle dette superficie, ed i due margini di ciascun taglio τ, necessariamente da percorrersi in sensi opposti, dànno luogo a due integrali lineari

$$\int_\tau (V_x dx+V_y dy+V_z dz)\,,$$

i quali si elidono, perchè le tre funzioni V_{xyz} sono, come la V, continue in tutto lo spazio.

Prendendo per σ un pezzo di superficie di discontinuità, si ottengono dall'equazione (2_d) due valori eguali e contrarî per i due integrali

$$\int G_n \, d\sigma , \qquad \int G_{n'} \, d\sigma ,$$

donde consegue che si ha sempre

$$\int (G_n + G_{n'}) \, d\sigma = 0$$

e quindi anche, per ogni punto d'una superficie di discontinuità,

$$(2_{d'}) \qquad G_n + G_{n'} = 0 :$$

e questa è la seconda proprietà caratteristica delle forze polari.

Le espressioni (1_b) della terna polare V_{xyz} si mantengono invariate se alle tre funzioni M_{xyz} si aggiungono le omologhe derivate d'una funzione qualunque di x, y, z. Un corollario, utile a notarsi, di quest'ovvia osservazione è il seguente.

In virtù delle relazioni (1) si può scrivere, (1_a),

$$4\pi M_x = \int \frac{G_a \, dS_\infty}{r} + \int \frac{\partial V}{\partial a} \frac{dS_\infty}{r} .$$

Ma, per essere V funzione continua, annullantesi all'infinito come r^{-2}, si ha

$$\int \frac{\partial V}{\partial a} \frac{dS_\infty}{r} = - \int V \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial a} dS_\infty = \int V \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} dS_\infty :$$

dunque

$$4\pi M_x = \int \frac{G_a \, dS_\infty}{r} + \frac{\partial}{\partial x} \int \frac{V \, dS_\infty}{r} .$$

Ne risulta che, per quanto spetta al calcolo, (1_b), delle tre funzioni V_{xyz}, si possono anche attribuire ai simboli M_{xyz} i significati seguenti:

$$(2_e) \quad M_x = \frac{1}{4\pi} \int \frac{G_a \, dS_\infty}{r} , \qquad M_y = \frac{1}{4\pi} \int \frac{G_b \, dS_\infty}{r} , \qquad M_z = \frac{1}{4\pi} \int \frac{G_c \, dS_\infty}{r} .$$

Può sembrare, a prima giunta, che queste altre espressioni, facendo dipendere la terna polare V_{xyz} dalla stessa forza polare G, che deve di regola determinarsi per mezzo di quella terna, non sieno per riuscire d'alcun vantaggio: ma si vedrà più tardi (§§ 5, 10 e 24) com'esse possano venire utilmente invocate. Si può aggiungere che, a differenza delle primitive espressioni (1_a), le nuove (2_e) soddisfano alla relazione solenoidale $[M] = 0$; e ciò in virtù delle due proprietà fondamentali (testè ricordate) d'ogni forza polare.

2. In qualità, (2_a), di funzioni potenziali magnetiche, le tre funzioni V_{xyz} possono essere assoggettate alla trasformazione di Poisson. Egli è su tale trasformazione che si basa essenzialmente tutta la dottrina razionale dell'elettromagnetismo.

Usando i simboli j e $\mathfrak{j}$ per indicare ciò che, rispetto alla funzione V, si designò (§ 2 *M. M.*) con k ed h, cioè ponendo

$$
(2_f) \quad \begin{cases} j_a = \dfrac{\partial m_c}{\partial b} - \dfrac{\partial m_b}{\partial c}, \\[2ex] j_b = \dfrac{\partial m_a}{\partial c} - \dfrac{\partial m_c}{\partial a}, \\[2ex] j_c = \dfrac{\partial m_b}{\partial a} - \dfrac{\partial m_a}{\partial b}; \end{cases} \qquad (2_{f'}) \quad \begin{cases} \mathfrak{j}_a = D m_c \cdot \dfrac{\partial b}{\partial n} - D m_b \cdot \dfrac{\partial c}{\partial n}, \\[2ex] \mathfrak{j}_b = D m_a \cdot \dfrac{\partial c}{\partial n} - D m_c \cdot \dfrac{\partial a}{\partial n}, \\[2ex] \mathfrak{j}_c = D m_b \cdot \dfrac{\partial a}{\partial n} - D m_a \cdot \dfrac{\partial b}{\partial n}; \end{cases}
$$

dove $D m_a$, $D m_b$, $D m_c$ indicano le differenze finite dei valori di m_a, m_b, m_c in un punto (a, b, c) d'una superficie di discontinuità, e propriamente gli eccessi dei valori relativi alla faccia di normale n su quelli relativi alla faccia opposta, si ha

$$
(3) \quad \begin{cases} V_x = \displaystyle\int \frac{j_a\, dS}{r} + \int \frac{\mathfrak{j}_a\, d\sigma}{r}, \\[2ex] V_y = \displaystyle\int \frac{j_b\, dS}{r} + \int \frac{\mathfrak{j}_b\, d\sigma}{r}, \\[2ex] V_z = \displaystyle\int \frac{j_c\, dS}{r} + \int \frac{\mathfrak{j}_c\, d\sigma}{r}, \end{cases}
$$

formole in cui σ designa il complesso delle superficie di discontinuità e terminali; per le quali ultime si riterrà sempre la normale n essere l'*interna*, talchè per esse è da porsi

$$
D m_a = m_a, \qquad D m_b = m_b, \qquad D m_c = m_c.
$$

Le nuove quantità j_a, j_b, j_c, $\mathfrak{j}_a$, $\mathfrak{j}_b$, $\mathfrak{j}_c$ possono essere facilmente espresse mediante le componenti della forza polare G. Infatti dalle relazioni (1) si deduce immediatamente, (2_f), per ogni punto ordinario,

$$
\frac{\partial G_z}{\partial y} - \frac{\partial G_y}{\partial z} = 4\pi j_x.
$$

Similmente si deduce, per ogni punto d'una superficie di discontinuità,

$$D\,G_x = -D\frac{\partial V}{\partial x} + 4\pi D m_x :$$

ma, per note proprietà della funzione potenziale di superficie, si ha

$$D\frac{\partial V}{\partial x} = -4\pi h\frac{\partial x}{\partial n},$$

epperò

$$D\,G_x = 4\pi\left(D m_x + h\frac{\partial x}{\partial n}\right), \text{ etc.},$$

donde, $(2_{f'})$,

$$D\,G_z\frac{\partial y}{\partial n} - D\,G_y\frac{\partial z}{\partial n} = 4\pi \mathfrak{j}_x .$$

Si ottengono così le annunciate formole

$$(3_a)\quad \begin{cases} 4\pi j_x = \dfrac{\partial G_z}{\partial y} - \dfrac{\partial G_y}{\partial z}, \\ 4\pi j_y = \dfrac{\partial G_x}{\partial z} - \dfrac{\partial G_z}{\partial x}, \\ 4\pi j_z = \dfrac{\partial G_y}{\partial x} - \dfrac{\partial G_x}{\partial y}; \end{cases} \qquad (3_{a'})\quad \begin{cases} 4\pi \mathfrak{j}_x = D\,G_z\dfrac{\partial y}{\partial n} - D\,G_y\dfrac{\partial z}{\partial n}, \\ 4\pi \mathfrak{j}_y = D\,G_x\dfrac{\partial z}{\partial n} - D\,G_z\dfrac{\partial x}{\partial n}, \\ 4\pi \mathfrak{j}_z = D\,G_y\dfrac{\partial x}{\partial n} - D\,G_x\dfrac{\partial y}{\partial n}, \end{cases}$$

dove, naturalmente, i primi membri sono da riguardarsi come nulli quando il punto (x, y, z) è fuori dello spazio S, rispetto alla prima terna, e fuori delle superficie σ, rispetto alla seconda.

Qui giova rispondere subito al quesito: esistono distribuzioni magnetiche per le quali la forza polare G ammetta dovunque, come la forza apolare F, una funzione potenziale unica? Se le componenti G_x, G_y, G_z sono le derivate d'una stessa funzione, dev'essere, (3_a), $j_a = j_b = j_c = 0$ epperò, (2_f), le componenti del momento m devono essere le derivate di una stessa funzione di a, b, c; come del resto si poteva già concludere dalla primitiva definizione (1) delle componenti di forza polare. Questa condizione necessaria è anche sufficiente. Posto infatti

$$m_a = -\frac{\partial \varphi}{\partial a}, \qquad m_b = -\frac{\partial \varphi}{\partial b}, \qquad m_c = -\frac{\partial \varphi}{\partial c},$$

si ha

$$-V = \int\left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial a}\frac{\partial \varphi}{\partial a} + \cdots\right)dS = -\int\frac{\partial \varphi}{\partial r}\frac{dS}{r^2}$$

quindi

$$-V=(\sigma)\varphi-U,$$

posto

$$U=\int\varphi\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}d\sigma$$

ed ammesso (a scanso di complicazioni non necessarie) che la funzione φ sia dovunque continua, talchè σ rappresenti il solo sistema delle superficie terminali. Di quì si ricava

$$-\frac{\partial V}{\partial x}=(\sigma)\frac{\partial\varphi}{\partial x}-\frac{\partial U}{\partial x},$$

epperò

$$-\frac{\partial U}{\partial x}=F_x+4\pi m_x$$

(ritenute nulle le componenti m_{xyz} fuori del corpo), vale a dire

$$G_x=-\frac{\partial U}{\partial x},\qquad G_y=-\frac{\partial U}{\partial y},\qquad G_z=-\frac{\partial U}{\partial z},\qquad \text{C. D. D.}$$

In questa classe di distribuzioni magnetiche (che diconsi *lamellari*) rientrano più in particolare quelle per le quali $G=0$, di cui si dirà al § 6.

3. Dalla terna d'equazioni (2_f) si ricava

$$\frac{\partial j_a}{\partial a}+\frac{\partial j_b}{\partial b}+\frac{\partial j_c}{\partial c}=0, \tag{4}$$

cioè

$$[j]=0.$$

Così dalla terna $(2_{f'})$ si ricava

$$\mathbf{j}_n=0. \tag{4_a}$$

A queste due proprietà evidenti delle quantità j, $\mathbf{j}$ se ne aggiungono altre due, non meno essenziali per l'ulteriore interpretazione delle quantità stesse.

S'immagini una terna (s, ν, n) di direzioni ortogonali, congrua a quella degli assi (x, y, z); e la terza, n, di queste direzioni sia quella d'una delle normali a σ (superficie di discontinuità o terminale) nel punto (a, b, c). Calcolando, per mezzo delle formole $(2_{f'})$, la componente $\mathbf{j}_\nu$ di $\mathbf{j}$ nella direzione ν, la quale, come s, è quella d'una tangente alla superficie σ nel punto (a, b, c), si ottiene

$$\mathbf{j}_\nu=Dm_s. \tag{$4_{b'}$}$$

Quest'equazione, insieme con (4_a), tien luogo (a cagione dell'arbitraria orientazione dell'angolo retto (s, ν) nel piano tangente alla superficie) di tutte tre le equazioni $(2_{f'})$. La differenza Dm_s vi è presa nello stesso senso che in queste, se la normale n è la stessa in amendue i casi. Le due proprietà cui si è fatta allusione scaturiscono, come corollarî, dall'equazione $(4_{b'})$.

Suppongasi, in primo luogo, che il punto (a, b, c) appartenga ad una linea di discontinuità, cioè ad una linea che serva di limite comune a più falde di superficie σ. Se la direzione s coincide con quella di tale linea in quel punto, si hanno ivi più valori distinti di $\boldsymbol{j}_\nu$, fra i quali ha luogo la relazione necessaria

$$(4_b) \qquad \sum \boldsymbol{j}_\nu = 0 .$$

Basta infatti, dopo aver fissato arbitrariamente il senso di s, immaginare che la terna (s, ν, n) giri intorno all'asse s, e por mente a ciò che avviene quando l'asse n diventa successivamente normale alle varie falde di superficie σ, e l'asse ν tangente a queste falde medesime. Formando ciascuna volta la rispettiva equazione $(4_{b'})$, coll'attribuzione del debito senso alla differenza Dm_s, si riconosce agevolmente che la somma di tutte queste equazioni riproduce in ogni caso il risultato (4_b).

Si consideri, in secondo luogo, un pezzo semplicemente connesso σ_0 di superficie σ, non contenente linee di discontinuità, e sia s_0 il suo contorno, n la sua normale. Intendendo percorso questo contorno in guisa che la terna (s_0, ν, n) sia congrua a quella degli assi e che la normale ν ad s_0 si diriga verso l'interno di σ_0, si ha, $(4_{b'})$,

$$\int \boldsymbol{j}_\nu \, d s_0 = \int D m_{s_0} \, d s_0 ,$$

ossia

$$\int \boldsymbol{j}_\nu \, d s_0 = \int_{s_0} (D m_a \cdot d a + D m_b \cdot d b + D m_c \cdot d c) ,$$

donde, per il teorema di Stokes e per le formole $(2_{f'})$,

$$(4_c) \qquad \int \boldsymbol{j}_\nu \, d s_0 = \int (j_n + j_{n'}) \, d \sigma_0 .$$

Si hanno così *quattro* distinte proprietà dei due *vettori* j e $\boldsymbol{j}$, cioè quelle che sono rappresentate dalle equazioni (4), (4_a), (4_b), (4_c); e propriamente una, (4), che si riferisce al solo vettore j, due, (4_a), (4_b), che si riferiscono al solo vettore $\boldsymbol{j}$ e finalmente una, (4_c), che stabilisce un nesso fra i due vettori. Il carattere di quest'ultima equazione è, in apparenza, diverso da quello delle prime tre, le quali sussistono per ciascun *punto* sia dello spazio S, sia delle superficie σ, sia delle linee s di discontinuità. Ma, come si vedrà nel § 5, la detta equazione può essere sostituita da un'altra equipollente, che riveste lo stesso carattere delle altre tre.

4. Le quattro proprietà testè stabilite per i vettori j, $\boldsymbol{j}$ possono ricevere un'interpretazione (meramente illustrativa) che giova mettere subito in rilievo.

È notissimo che designando con u, v, w le componenti della velocità d'un fluido, in un punto (a, b, c) ed in un istante t, e con ρ la densità, deve sempre sussistere la relazione

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial a} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial b} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial c} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

(equazione di continuità), la quale, per un moto stazionario, si riduce a

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial a} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial b} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial c} = 0 .$$

Il confronto di quest'equazione colla (4) permette di considerare il vettore j come rappresentante il prodotto della velocità d'un fluido in istato di moto stazionario entro lo spazio S per la densità cubica del fluido stesso (cfr. il § 12 di questa Memoria). Resta però da esaminare come questo moto possa conciliarsi colla presenza delle superficie σ. L'equazione (4_a) permette, alla sua volta, di considerare il vettore $\boldsymbol{j}$ come rappresentante il prodotto della velocità d'un secondo fluido, scorrente lungo le superficie σ, per la densità superficiale del fluido medesimo. Resta però qui invece da verificare se sien soddisfatte le necessarie condizioni di continuità, potendosi solo affermare senz'altro, sulla semplice scorta dell'equazione (4_b), che lungo ogni linea s di discontinuità non ha mai luogo produzione nè distruzione di questo secondo fluido. Ora la quarta equazione (4_c) risponde appuntino ad amendue le fatte riserve.

Infatti il suo primo membro, cioè l'integrale lineare

$$\int \boldsymbol{j}_\nu \, d s_0$$

misura la quantità di fluido della seconda specie che attraversa nell'unità di tempo la linea chiusa s_0, penetrando dal di fuori al di dentro del pezzo di superficie σ_0; il secondo membro, cioè l'integrale doppio

$$\int (j_n + j_{n'}) \, d\sigma_0 ,$$

misura invece la quantità di fluido della prima specie che affluisce dal detto pezzo di superficie σ_0, dirigendosi verso le due regioni separate da esso. Vi è dunque, (4_c), esatto compenso fra l'efflusso del fluido di prima specie e l'afflusso di quello di seconda specie, e ciò qualunque sia il pezzo di superficie σ_0 che si considera: donde segue che se il primo fluido si riguarda come risultante da una continua rarefazione del secondo e questo come risultante da una continua condensazione di quello, è lecito affermare che la continuità e la stazionarietà del moto generale sono compiutamente assicurate, ovvero, in altre parole, che questo moto risulta da un insieme continuo di correnti fluide, costanti e chiuse.

Nulla impedisce, se piaccia, di fissare ad arbitrio la densità dell'uno e dell'altro fluido, e, per esempio, di porle amendue uguali ad 1: non dimenticando, tuttavia, che si tratta di densità cubica per il primo e di densità superficiale per il secondo fluido. Ma una siffatta determinazione sarebbe del tutto arbitraria: essa non è minimamente necessaria per istabilire la seguente proprietà, che scaturisce dalla semplice stazionarietà del moto: le quantità totali del fluido che passano, nell'unità di tempo, attraverso due sezioni del corpo S, vincolate alla sola condizione di staccare dal rimanente una porzione di questo corpo, sono sempre fra loro eguali. La verificazione analitica di tale uguaglianza si otterrebbe facilmente invocando le equazioni (4), (4_c), con riguardo alle eventuali discontinuità delle funzioni j_{abc} nello spazio compreso fra le due sezioni. Ma tale verificazione emergerà più tardi (§ 7) da una considerazione avente scopo più generale.

5. Si consideri l'espressione

$$(A)\qquad \Phi = \int\left(\frac{\partial \varphi}{\partial a}j_a + \frac{\partial \varphi}{\partial b}j_b + \frac{\partial \varphi}{\partial c}j_c\right)dS + \int\left(\frac{\partial \varphi}{\partial a}\mathfrak{j}_a + \frac{\partial \varphi}{\partial b}\mathfrak{j}_b + \frac{\partial \varphi}{\partial c}\mathfrak{j}_c\right)d\sigma,$$

ove φ è funzione monodroma, continua e finita in ogni punto del campo (S, σ), prescindendo da infiniti isolati dell'ordine di r^{-1}. Colle solite trasformazioni, la sua prima parte può essere trascritta così:

$$\int\left(\frac{\partial \varphi}{\partial a}j_a + \frac{\partial \varphi}{\partial b}j_b + \frac{\partial \varphi}{\partial c}j_c\right)dS = -\int \varphi[j]dS - \int \varphi(j_n + j_{n'})d\sigma,$$

dove

$$[j] = \frac{\partial j_a}{\partial a} + \frac{\partial j_b}{\partial b} + \frac{\partial j_c}{\partial c}.$$

Per trasformare in modo analogo la seconda parte, si ponga, come nel § 18 *M. M.* (salvo una insignificante modificazione di segnatura),

$$\mathfrak{j}_a = \mathfrak{j}_n\frac{\partial a}{\partial n} + \mathfrak{j}_p\frac{\partial a}{\partial p} + \mathfrak{j}_q\frac{\partial a}{\partial q},\quad \text{etc.}$$

$$[\mathfrak{j}] = \frac{1}{H}\left[\frac{\partial(H\mathfrak{j}_p)}{\partial p} + \frac{\partial(H\mathfrak{j}_q)}{\partial q}\right].$$

In base alla formola (23) del luogo citato si trova per tal modo

$$(B)\qquad \left\{\begin{aligned}&\int\left(\frac{\partial\varphi}{\partial a}\boldsymbol{j}_a+\frac{\partial\varphi}{\partial b}\boldsymbol{j}_b+\frac{\partial\varphi}{\partial c}\boldsymbol{j}_c\right)d\sigma=\int\left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}\boldsymbol{j}_n+\frac{\partial\varphi}{\partial p}\boldsymbol{j}_p+\frac{\partial\varphi}{\partial q}\boldsymbol{j}_q\right)d\sigma\\&=\int\frac{\partial\varphi}{\partial n}\boldsymbol{j}_n\,d\sigma-\int\varphi[\boldsymbol{j}]\,d\sigma-\int\varphi\sum\boldsymbol{j}_\nu\cdot ds,\end{aligned}\right.$$

dove s designa il complesso delle linee di discontinuità, contate ciascuna una volta sola, e dove $\sum\boldsymbol{j}_\nu$ ha lo stesso significato che in (4_b).

Si ottiene così per Φ la nuova espressione seguente:

$$(C)\qquad \Phi=-\int\varphi[j]\,dS-\int(j_n+j_{n'}+[\boldsymbol{j}])\varphi\,d\sigma+\int\frac{\partial\varphi}{\partial n}\boldsymbol{j}_n\,d\sigma-\int\varphi\sum\boldsymbol{j}_\nu\cdot ds,$$

e si ricava al tempo stesso dall'equazione (B), applicata ad un pezzo semplice σ_0 di σ, per $\varphi=1$,

$$(B')\qquad \int[\boldsymbol{j}]\,d\sigma_0+\int\boldsymbol{j}_\nu\,ds_0=0.$$

In virtù di quest'ultima relazione, l'equazione (4_c) può essere sostituita da quest'altra:

$$\int(j_n+j_{n'}+[\boldsymbol{j}])\,d\sigma_0=0,$$

la quale, dovendo sussistere per ogni pezzo σ_0 di σ, si risolve nella seguente:

$$(4_{c'})\qquad j_n+j_{n'}+[\boldsymbol{j}]=0,$$

che deve verificarsi in ogni *punto* ordinario delle superficie σ. Quest'ultima equazione è quella cui si fece allusione alla fine del § 3: essa è in tutto equipollente all'ultima, (4_c), delle condizioni dedotte per j, $\boldsymbol{j}$ nel detto §.

Ciò posto se nell'espressione (A) si pone $\varphi=r^{-1}$ si ottiene, (3),

$$-\Phi=\frac{\partial V_x}{\partial x}+\frac{\partial V_y}{\partial y}+\frac{\partial V_z}{\partial z}=[V]$$

e l'eguaglianza (C) diventa

$$[V]=\int\frac{[j]\,dS}{r}-\int\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}\boldsymbol{j}_n\,d\sigma+\int\frac{j_n+j_{n'}+[\boldsymbol{j}]}{r}\,d\sigma+\int\frac{\sum\boldsymbol{j}_\nu}{r}\,ds.$$

Se dunque i due vettori j, $\boldsymbol{j}$ soddisfanno alle quattro condizioni (4), (4_a), (4_b), $(4_{c'})$, segue necessariamente che le tre funzioni V_{xyz}, (3), soddisfanno alla relazione solenoidale $[V] = 0$. Reciprocamente, e ciò è ben più importante a notarsi, basta ammettere *a priori* che tale relazione debba essere soddisfatta dovunque, per concludere che gli anzidetti due vettori, coi quali debbono costruirsi, (5), le funzioni V_{xyz}, sono per ciò stesso necessariamente vincolati a soddisfare, come condizioni *necessarie* e *sufficienti* all'uopo, le quattro citate equazioni (4), (4_a), (4_b), (4_c), ovvero (4), (4_a), (4_b), ($4_{c'}$).

Ma vi è di più. Dalle formole (2) segue

$$\frac{\partial G_z}{\partial y} - \frac{\partial G_y}{\partial z} = -\Delta_2 V_x + \frac{\partial [V]}{\partial x},$$

talchè, se è soddisfatta dovunque la condizione solenoidale $[V] = 0$, sono, per ciò stesso, soddisfatte le equazioni (3_a). Dalle stesse formole (2) segue ancora la relazione

$$D\, G_z \frac{\partial y}{\partial n} - D\, G_y \frac{\partial z}{\partial n} = -D\frac{\partial V_x}{\partial n} + \left(D\frac{\partial V_x}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial n} + D\frac{\partial V_y}{\partial x}\cdot\frac{\partial y}{\partial n} + D\frac{\partial V_z}{\partial x}\cdot\frac{\partial z}{\partial n}\right)$$

il di cui secondo membro, per essere

$$D\frac{\partial V_x}{\partial n} = \frac{\partial V_x}{\partial n} + \frac{\partial V_x}{\partial n'} = -4\pi \mathbf{j}_x,$$

$$D\frac{\partial V_x}{\partial x} = -4\pi \mathbf{j}_x \frac{\partial x}{\partial n}, \qquad D\frac{\partial V_y}{\partial x} = -4\pi \mathbf{j}_y \frac{\partial x}{\partial n}, \qquad D\frac{\partial V_z}{\partial x} = -4\pi \mathbf{j}_z \frac{\partial x}{\partial n},$$

si riduce a

$$4\pi \mathbf{j}_x - 4\pi \mathbf{j}_n \frac{\partial x}{\partial n},$$

cioè, (4_a), a $4\pi \mathbf{j}_x$. Pertanto anche le equazioni ($3_{a'}$) diventano conseguenze necessarie dell'ammessa relazione solenoidale, o delle quattro condizioni equivalenti.

Si ha dunque questo risultato fondamentale:

Se con due vettori j, $\mathbf{j}$, soggetti alle quattro condizioni (4), (4_a), (4_b), (4_c), si forma la terna di funzioni (3), questa terna soddisfa dovunqne alla relazione solenoidale e le sei componenti dei due vettori sono esprimibili nella forma (3_a), ($3_{a'}$), dove G è un nuovo vettore ricavato dalla terna collo schema (2), è quel vettore, cioè, che rappresenta la forza polare corrispondente alla terna V_{xyz}, considerata come terna potenziale. Reciprocamente la relazione solenoidale $[V] = 0$, imposta alle funzioni della terna (3), basta, da sola, ad assegnare ai due vettori j, $\mathbf{j}$ le anzidette quattro proprietà ed a verificare le relazioni (3_a), ($3_{a'}$).

Dalla sussistenza, così generalizzata, di queste ultime relazioni segue, in particolare, che non può aversi $G = 0$ in ogni punto dello spazio (ipotesi più minutamente analizzata nel successivo § 6), senza che si abbia pure, necessariamente, $j = \mathbf{j} = 0$ dovunque [nel campo (S, σ)]: donde consegue che, per un determinato campo (S, σ), due coppie di vettori, $(j, \mathbf{j})$ e $(j', \mathbf{j}')$, non possono produrre in ogni punto dello spazio una stessa forza, $G = G'$, se non sono *identiche,* cioè se non è $j = j'$, $\mathbf{j} = \mathbf{j}'$.

D'ora innanzi, quando si parlerà, come or ora s'è fatto, d'una coppia di vettori $(j, \mathbf{j})$ si sottintenderà sempre ch'essi adempiano alle quattro condizioni più volte ricordate, ovvero all'unica, equipollente, che la corrispondente terna potenziale (3) soddisfaccia dovunque alla relazione solenoidale.

Giova notare due proprietà che sussistono, di conseguenza, per tali vettori. La prima è quella espressa dall'equazione

$$(4_{c''}) \qquad 4\pi \mathbf{j}_\nu = D G_s,$$

la quale si deduce dalle formole generali $(3_{a'})$ nel modo stesso in cui la $(4_{b'})$ venne dedotta dalle più particolari $(2_{f'})$. La seconda è che le tre funzioni V_{xyz}, oltrechè colle formole (3), possono essere in ogni caso calcolate [secondo lo schema (1_b)] per mezzo di tre funzioni M_{xyz}, prese sotto la forma (2_e). Infatti le espressioni che così risultano per le funzioni V_{xyz} sono immediatamente riducibili, mediante le relazioni (3_a), $(3_{a'})$ e le solite trasformazioni d'integrali, alla forma normale (3).

Vi è ancora un'altra proprietà importante che si verifica necessariamente per ogni coppia $(j, \mathbf{j})$ ed è, (A, C), la seguente:

$$(5) \qquad \int\left(\frac{\partial \varphi}{\partial a} j_a + \frac{\partial \varphi}{\partial b} j_b + \frac{\partial \varphi}{\partial c} j_c\right) dS + \int\left(\frac{\partial \varphi}{\partial a} \mathbf{j}_a + \frac{\partial \varphi}{\partial b} \mathbf{j}_b + \frac{\partial \varphi}{\partial c} \mathbf{j}_c\right) d\sigma = 0$$

la quale sussiste qualunque sia la funzione φ, purchè monodroma e continua nello spazio S (in luogo del quale si può evidentemente prendere S_∞).

Si può subito notare un'utile applicazione di questa proprietà, e cioè quella che si ottiene ponendo successivamente $\varphi = a, b, c$. Le equazioni che così si ottengono

$$(5_a) \qquad \int j_a dS + \int \mathbf{j}_a d\sigma = 0, \qquad \int j_b dS + \int \mathbf{j}_b d\sigma = 0, \qquad \int j_c dS + \int \mathbf{j}_c d\sigma = 0$$

esprimono essere sempre nulla la *massa totale* corrispondente a ciascuna delle tre funzioni V_{xyz}, considerate come funzioni potenziali newtoniane di spazio e di superficie: donde consegue, in particolare, che queste funzioni si diportano, all'infinito, come le derivate d'una funzione potenziale ordinaria. Questa proposizione, evidente nella primitiva ipotesi di due vettori j, $\mathbf{j}$ definiti dalle relazioni (2_f), $(2_{f'})$, richiedeva d'essere dimostrata in quella, più generale, di due vettori vincolati soltanto alle quattro condizioni più volte ricordate.

All'equazione generale (5) si può dare un'interpretazione semplicissima, invocando l'immagine idrodinamica del § 4. Per tale immagine, i due trinomî

$$-\left(\frac{\partial\varphi}{\partial a}j_a+\frac{\partial\varphi}{\partial b}j_b+\frac{\partial\varphi}{\partial c}j_c\right)dS,\qquad -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial a}\boldsymbol{j}_a+\frac{\partial\varphi}{\partial b}\boldsymbol{j}_b+\frac{\partial\varphi}{\partial c}\boldsymbol{j}_c\right)d\sigma$$

rappresentano evidentemente il *lavoro*, ridotto all'unità di tempo, che la forza di funzione potenziale φ esercita sulle masse elementari (dei due fluidi considerati nel citato §) occupanti rispettivamente i posti dS, $d\sigma$. La detta equazione (5) esprime quindi essere sempre *nullo* il *lavoro totale* esercitato, nell'unità di tempo, sui detti due fluidi da una qualunque forza dotata di funzione potenziale *monodroma* e *continua*.

Benchè già implicita in (5), giova notare l'equazione seguente, traduzione immediata, (3), della relazione solenoidale $[V]=0$:

$$\int\left(\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial a}j_a+\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial b}j_b+\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial c}j_c\right)dS+\int\left(\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial a}\boldsymbol{j}_a+\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial b}\boldsymbol{j}_b+\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial c}\boldsymbol{j}_c\right)d\sigma=0.$$

Quest'equazione esprime che se i vettori j e $\boldsymbol{j}$ si considerassero come rappresentativi di momenti magnetici o dielettrici (rispetto ad una duplice distribuzione, di spazio e di superficie), alla polarizzazione così definita corrisponderebbe una forza apolare nulla in tutto lo spazio: tale polarizzazione apparterrebbe, cioè, a quel tipo speciale che è stato già notato nel § 7 *M. M.* Quest'osservazione, fatta quì per incidenza, si collega con altri capitoli della dottrina dell'elettricità.

6. Tornando ora al primitivo punto di partenza delle precedenti deduzioni, cioè alla loro origine *magnetica*, è naturale il domandare: dati che sieno, *per un determinato campo* (S, σ), due vettori j, $\boldsymbol{j}$, è egli sempre possibile attribuire a quel campo una polarizzazione magnetica m_{abc}, tale da riprodurre, come corrispondente terna polare (2_a), la terna formata con quei vettori giusta le formole (3)?

È facilissimo riconoscere che ciò non è sempre possibile.

Infatti dalle equazioni (3_a), i di cui primi membri son nulli, per ipotesi, in tutto lo spazio S' esterno ad S, segue immediatamente che, in questo spazio esterno, deve esistere una funzione continua U delle x, y, z tale che sia

$$G_x=-\frac{\partial U}{\partial x},\qquad G_y=-\frac{\partial U}{\partial y},\qquad G_z=-\frac{\partial U}{\partial z},$$

funzione che non può invece esistere, in forza delle stesse equazioni, nell'interno di S. Questa funzione non può differire, (1), che per una costante dalla funzione potenziale esterna V della supposta distribuzione magnetica, talchè, in tutto lo spazio esterno S', dev'essere $V = U + C$, dove C è una costante. Ora V è, per la sua stessa definizione analitica, una funzione necessariamente *monodroma*, mentre ciò non può affermarsi per U, a meno che lo spazio S' non sia *semplicemente connesso*. E che la funzione U possa effettivamente essere polidroma, quando questa condizione non si verifichi, si vedrà nei §§ successivi. In generale non esiste dunque una polarizzazione magnetica equivalente in terna polare a due dati vettori j, $\boldsymbol{j}$.

Ma quando la funzione U è monodroma (nel qual caso essa possiede necessariamente, (5_a), a meno d'una costante additiva, tutti i caratteri d'una funzione potenziale magnetica esterna), è sempre possibile, ed in infiniti modi, determinare una distribuzione magnetica soddisfacente alle condizioni volute, che è quanto dire alle equazioni (2_f), ($2_{f'}$).

Infatti il confronto di queste colle (3_a), ($3_{a'}$) dà

$$(6)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial G_z}{\partial y} - \dfrac{\partial G_y}{\partial z} = 4\pi\left(\dfrac{\partial m_z}{\partial y} - \dfrac{\partial m_y}{\partial z}\right), & \text{etc.} \\[2ex] D\,G_z\dfrac{\partial y}{\partial n} - D\,G_y\dfrac{\partial z}{\partial n} = 4\pi\left(D m_z\dfrac{\partial y}{\partial n} - D m_y\dfrac{\partial z}{\partial n}\right), & \text{etc.} \end{cases}$$

ossia

$$\frac{\partial}{\partial y}(G_z - 4\pi m_z) - \frac{\partial}{\partial z}(G_y - 4\pi m_y) = 0\,, \qquad \text{etc.}$$

$$D(G_z - 4\pi m_z)\frac{\partial y}{\partial n} - D(G_y - 4\pi m_y)\frac{\partial z}{\partial n} = 0\,, \qquad \text{etc.}$$

In virtù delle tre prime di queste condizioni, deve esistere una funzione V tale che si abbia, in ogni punto ordinario,

$$(6_a)\quad G_x = -\frac{\partial V}{\partial x} + 4\pi m_x\,, \qquad G_y = -\frac{\partial V}{\partial y} + 4\pi m_y\,, \qquad G_z = -\frac{\partial V}{\partial z} + 4\pi m_z\,,$$

funzione la quale non è altro, (1), che la funzione potenziale della cercata distribuzione magnetica: ma giova prescindere, per un momento, da cotesto suo necessario carattere. In virtù poi delle tre altre condizioni, questa funzione deve soddisfare, lungo le superficie σ, a tre equazioni le quali si risolvono sostanzialmente nell'unica

$$(6_{a'})\qquad D\frac{\partial V}{\partial s} = 0\,,$$

ossia

$$\frac{\partial D V}{\partial s} = 0\,,$$

dove s è una qualunque linea delle dette superficie, ed esprimono che i valori di V

non possono presentare che delle discontinuità *costanti*, lungo queste medesime superficie. Astrazion fatta da queste discontinuità, o differenze costanti, la funzione V, la quale al di fuori di S non può, come si è detto, differire da U che per una costante, può essere, entro S, una *qualunque prosecuzione finita e continua* (naturalmente anche *monodroma*, nel caso in cui fosse possibile il contrario) della medesima funzione U, con derivate prime continue dovunque, tranne lungo le superficie di discontinuità, ove la derivata normale può essere discontinua.

Una funzione V determinata in base a queste condizioni molto generali, colla sola soppressione delle differenze costanti lungo le superficie σ e colla prescrizione del valore $V = 0$ all'infinito, è per l'appunto la funzione potenziale della distribuzione magnetica m_{xyz} definita, mercè di essa, dalle equazioni (6_a). Formando infatti, coll'aiuto di queste stesse equazioni, le espressioni di

$$\Delta_2 V, \qquad \frac{\partial V}{\partial n} + \frac{\partial V}{\partial n'},$$

si riconosce ch'essa possiede tutte le proprietà che si richiedono per caratterizzare tale funzione. Che poi a questa funzione V si associi, come terna polare, la terna costituita dalle *date* funzioni V_{xyz}, risulta dal confronto delle relazioni (3_a), $(3_{a'})$ colle (6), le quali diventano conseguenze delle *identità* (6_a).

Quando dunque esiste *una* distribuzione magnetica, nelle ammesse condizioni, ne esiste un'infinità, e l'azione *polare* è la stessa per tutte. La differenza di due cosiffatte distribuzioni è perciò *priva d'azione polare*: essa appartiene ad un tipo speciale, il quale è definito, (6_a), dalle equazioni

$$(6_b) \qquad m_x = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial V}{\partial x}, \qquad m_y = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial V}{\partial y}, \qquad m_z = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial V}{\partial z}$$

che debbono verificarsi in ogni punto dello spazio. Da queste equazioni stesse risulta che la funzione potenziale V d'una tale distribuzione è costante in ogni spazio vuoto, epperò è *nulla* su tutta la *superficie terminale esterna,* e *costante* su ciascuna delle *superficie terminali interne complete.* (Questo epiteto si riferisce all'eventuale presenza di cavità limitate da più d'una superficie chiusa, caso che può verificarsi in un sistema non connesso). All'infuori di ciò, la funzione V non è soggetta, in S, ad altre condizioni che a quelle d'essere continua e d'avere le derivate prime pure continue, tranne lungo le vere superficie di discontinuità, ove la derivata normale può essere discontinua. Effettivamente le equazioni (6_b) dànno

$$V = -\frac{1}{4\pi}\int \frac{\partial V}{\partial r}\frac{dS}{r^2},$$

donde, in virtù della continuità di V e di un teorema gaussiano che venne già invocato nel § 2, si ricava la seguente relazione fra il valore di V in un punto qualunque dello spazio ed i valori costanti V_i di V sopra le varie superficie terminali σ_i:

$$V = \frac{1}{4\pi}\sum(V - V_i)\int\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n_i}d\sigma = \frac{1}{4\pi}\sum(V - V_i)(\sigma_i)\,.$$

Per tutto lo spazio vuoto esterno si ha di quì $V = 0$. Per ogni punto di una cavità sono diversi da zero soltanto due termini della somma, cioè il termine

$$\frac{V}{4\pi}\int\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n_1}d\sigma_1 = V\,,$$

relativo alla totale superficie σ_1 che limita *esternamente* lo spazio S, ed il termine

$$\frac{V - V_i}{4\pi}\int\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n_i}d\sigma_i = -(V - V_i)\,,$$

relativo alla *totale* superficie σ_i che limita la cavità: per un tal punto si ha dunque (come dev'essere) $V = V_i$. Finalmente per un punto *interno* ad S non sussiste più che il primo dei due termini anzidetti e l'equazione per V si riduce ad una mera *identità*.

Le distribuzioni del tipo quì incontrato si possono acconciamente qualificare come *lamellari chiuse*. Esse sono in tal qual modo l'antitesi di quelle che vennero considerate nel § 7 *M. M.*, per le quali era invece nulla dovunque l'azione *apolare*. Vi sarebbero altre notevoli osservazioni da fare circa queste distribuzioni; ma poichè esse escirebbero dall'argomento del presente scritto, sarà meglio riservarle ad altra occasione.

7. Conviene ora studiare più da vicino il caso in cui una coppia di vettori $(j, \mathfrak{j})$ non sia rappresentabile da veruna distribuzione magnetica.

A tal fine s'immagini tracciata nello spazio S' esterno ad S una linea chiusa s' e si prenda in considerazione l'integrale

$$K = \int_{s'}(G_x dx + G_y dy + G_z dz) = \int G_{s'} ds'$$

esteso ad una tal linea (da intendersi percorsa in un senso determinato). Sia σ' un diaframma semplicemente connesso terminato al contorno s' e sia n' la sua normale *positiva* (rispetto al senso che si è attribuito al contorno). Se questo diaframma non ha verun punto comune con S, risulta immediatamente dal teorema di STOKES e dalle formole (3_a) che dev'essere $K = 0$. Se invece il detto diaframma attraversa in qualsiasi modo lo spazio S, si rendono necessarie alcune osservazioni.

Sia s_1 il complesso delle linee secondo cui il diaframma attraversa le superficie σ (di discontinuità e terminali). Queste linee s_1, insieme col contorno s', dividono σ' in un certo numero di parti, in ciascuna delle quali le componenti G_{xyz} sono continue, talchè per una qualunque di queste parti, tranne per quelle che restano al di fuori di S, si ha (percorrendo il contorno positivamente rispetto alla normale n')

$$\int G_{s_1} d s_1 = 4\pi \int j_{n'} d\sigma'_1,$$

dove σ'_1 è la corrispondente parte di σ'. Per l'insieme delle parti esterne ad S si ha invece (continuando ad indicare anche per esso con s_1 quella parte di s_1 che interviene come limite)

$$\int G_{s'} d s' + \int G_{s_1} d s_1 = 0.$$

Sommando tutte queste equazioni ed osservando che ciascuna delle linee s_1 comparisce due volte, percorsa in sensi opposti, si trova

$$K + \int D\, G_{s_1} d s_1 = 4\pi \int j_{n'} d\sigma',$$

equazione in cui ciascuna linea s_1 è contata una volta sola. Qualunque sia il senso in cui questa linea è percorsa, la corrispondente differenza $D\, G_{s_1}$ (relativa qui ai due lati della linea) contiene positivamente il termine G_{s_1} spettante a quella regione di σ' per la quale s_1 funge da contorno positivo rispetto alla normale n'.

Giova ora fissare il senso delle varie linee s_1 nel modo che segue. Delle due falde di σ che restano separate (nel posto che si considera) da una linea s_1 si ponga mente a quella che penetra nella regione di S verso cui si rivolge la normale n' e si designi con n quella normale ad essa che fa angolo acuto con n'; indi si assuma come senso della linea s_1 quello che spetta a questa linea, considerata come parte di contorno positivo dell'anzidetta falda rispetto alla normale n. In tale stato di cose è facile riconoscere che, nella terna (s_1, ν, n) (§ 3), la direzione ν fa pur essa angolo acuto con n' e che, per conseguenza, la differenza testè indicata col simbolo $D\, G_{s_1}$ (la quale si riferisce alle due regioni di σ contigue ad s_1) è presa in senso *contrario* a quello della formola ($4_{c''}$) del § 5. Si ha dunque

$$D\, G_{s_1} = -4\pi \boldsymbol{j}_\nu$$

e conseguentemente

$$(7) \qquad K = \int G_{s'} ds' = 4\pi \left(\int j_{n'} d\sigma' + \int \boldsymbol{j}_{\nu} ds_1 \right).$$

Stando all'interpretazione idrodinamica del § 4, il secondo membro di quest'equazione rappresenta manifestamente il prodotto di 4π per il flusso totale che si verifica, nell'unità di tempo e nel senso n', attraverso il diaframma (più propriamente, attraverso quella parte di esso che cade entro S, ossia la *sezione* fatta in S da σ'). Questa quantità, che è anche espressa dal primo membro dell'equazione medesima, è dunque la stessa per tutte le sezioni che si possono fare in S con diaframmi terminati ad un medesimo contorno, epperò per ogni coppia di sezioni comprendenti fra loro una porzione dello spazio S: come si era già asserito nel § 4. Ne consegue, in particolare, che il flusso in questione è necessariamente nullo quando la sezione fatta dal diaframma basta da sola a staccare una porzione dello spazio S, giacchè la superficie terminale di questa porzione può allora considerarsi come una seconda sezione fatta in questo spazio, la qual nuova sezione è d'altronde tale (§ 4) che ha luogo per essa esatto compenso fra il fluido uscente ed il fluido entrante. La circostanza quì notata si verifica quando il contorno s' è riducibile a zero: in questo caso si ha dunque $K = 0$, sia che il diaframma intersechi, sia che non intersechi S. Ciò accade per *tutti* i contorni s' tracciabili in S' quando questo spazio S' sia semplicemente connesso: la funzione U del § precedente è in tal caso monodroma e può essere identificata colla funzione potenziale esterna d'una distribuzione magnetica in S.

Ma se lo spazio S' non è semplicemente connesso, come avviene quando la connessione di S è multipla, la quantità K non è necessariamente nulla se non per i contorni riducibili a zero ed è generalmente diversa da zero per quelli che non sono tali. Essa ha lo stesso valore per tutti i contorni riducibili fra loro (giacchè due contorni tali possono essere collocati sopra un medesimo diaframma) e prende generalmente valori diversi per contorni non riducibili. Vi sono dunque, in generale (e prescindendo da combinazioni lineari con coefficienti interi), tanti valori distinti di K quanti sono i tipi irreducibili di contorni non riducibili a zero. Questi diversi valori di K sono altrettanti moduli di periodicità della funzione polidroma U. Basta che vi sia un solo modulo $K \gtrless 0$, basta cioè che il flusso attraverso *una* sezione dello spazio S sia diverso da zero, perchè resti esclusa la possibilità d'ogni rappresentazione magnetica della data coppia di vettori j, $\boldsymbol{j}$.

Una tal coppia è dunque, in generale, alcunchè di irreducibile con una distribuzione magnetica, epperò sorge naturalmente l'idea di ricercare se ad essa corrisponda qualche altra entità fisica reale. Per ricondurre la soluzione di tale problema a termini più comunemente noti, giova premettere la deduzione, molto semplice, d'una dottrina del tutto analoga alla fin qui esposta, ma relativa a certe distribuzioni magnetiche, che si concepiscono come esistenti in due sole dimensioni.

8. Si consideri la funzione potenziale

$$(8) \qquad V = \int \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} \varphi \, d\sigma ,$$

dove σ è una superficie qualunque, n la sua normale (diretta in un senso convenuto) e φ una funzione monodroma, finita e generalmente continua dei punti (a, b, c) di σ, discontinua lungo linee di cui si designerà con s il complesso (comprendendovi anche le linee terminali, quando esistono). La funzione V corrisponde (§ 18 *M. M.*) ad una polarizzazione magnetica *normale* della superficie σ, polarizzazione di cui φ è il momento riferito all'unità di superficie; essa possiede nei punti di σ le proprietà

$$(8_a) \qquad DV = 4\pi\varphi , \qquad \frac{\partial V}{\partial n} + \frac{\partial V}{\partial n'} = 0 .$$

Con procedimenti del tutto analoghi a quelli del § 1, si riconosce l'esistenza d'una *terna potenziale*

$$V_x = \int \left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial c} \frac{\partial b}{\partial n} - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial b} \frac{\partial c}{\partial n} \right) \varphi \, d\sigma ,$$

$$V_y = \int \left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial a} \frac{\partial c}{\partial n} - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial c} \frac{\partial a}{\partial n} \right) \varphi \, d\sigma ,$$

$$V_z = \int \left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial b} \frac{\partial a}{\partial n} - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial a} \frac{\partial b}{\partial n} \right) \varphi \, d\sigma ,$$

associata (nel senso già detto) all'unica funzione potenziale V, con questo, per giunta, che le due forze F, G sono ora identiche fra loro in ogni punto (x, y, z) che non sia in σ (come risulta dalla stessa definizione originaria (1) delle componenti G_{xyz}). Nei punti di σ, ove le componenti di F e di G non hanno valori determinati e che, di regola, giova escludere dalle presenti considerazioni, si ha

$$(8_b) \qquad DV_x = 0 , \qquad DV_y = 0 , \qquad DV_z = 0 ,$$

cioè le funzioni V_{xyz} sono ivi *continue* (diventando però infinite logaritmicamente nei punti di s).

Scrivendo

$$V_x = \int \left(\frac{\partial \frac{\varphi}{r}}{\partial c} \frac{\partial b}{\partial n} - \frac{\partial \frac{\varphi}{r}}{\partial b} \frac{\partial c}{\partial n} \right) d\sigma + \int \left(\frac{\partial \varphi}{\partial b} \frac{\partial c}{\partial n} - \frac{\partial \varphi}{\partial c} \frac{\partial b}{\partial n} \right) \frac{d\sigma}{r}$$

ed applicando il teorema di STOKES al primo integrale, si trova

$$V_x = \int \left(\frac{\partial \varphi}{\partial b} \frac{\partial c}{\partial n} - \frac{\partial \varphi}{\partial c} \frac{\partial b}{\partial n} \right) \frac{d\sigma}{r} + \int_s \frac{D\varphi \cdot da}{r},$$

dove, nella differenza $D\varphi$, è preso positivamente il termine relativo alla regione di σ cui il locale arco s, percorso una sola volta in un senso arbitrario, forma contorno positivo rispetto alla normale n. Se dunque si pone

$$(8_c) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial \varphi}{\partial b} \dfrac{\partial c}{\partial n} - \dfrac{\partial \varphi}{\partial c} \dfrac{\partial b}{\partial n} = j_a, \\[2ex] \dfrac{\partial \varphi}{\partial c} \dfrac{\partial a}{\partial n} - \dfrac{\partial \varphi}{\partial a} \dfrac{\partial c}{\partial n} = j_b, \\[2ex] \dfrac{\partial \varphi}{\partial a} \dfrac{\partial b}{\partial n} - \dfrac{\partial \varphi}{\partial b} \dfrac{\partial a}{\partial n} = j_c, \end{cases} \qquad (8_{c'}) \qquad J = D\varphi,$$

si ottiene

$$(9) \quad V_x = \int \frac{j_a d\sigma}{r} + \int_s \frac{J da}{r}, \quad V_y = \int \frac{j_b d\sigma}{r} + \int_s \frac{J db}{r}, \quad V_z = \int \frac{j_c d\sigma}{r} + \int_s \frac{J dc}{r}.$$

Di qui risulta

$$[V] = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z}$$

$$= - \int \left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial a} j_a + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial b} j_b + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial c} j_c \right) d\sigma - \int_s \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial s} J ds.$$

Ora dalle formole (B), (B') del § 5 si deduce

$$\int \left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial a} j_a + \cdots \right) d\sigma = \int \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} j_n d\sigma - \int [j] \frac{d\sigma}{r} - \int (j_\nu + j_{\nu'}) \frac{ds}{r},$$

$$\int [j] d\sigma_0 + \int j_\nu ds_0 = 0:$$

si ha inoltre

$$\int \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial s} J\, ds = -\int \frac{dJ}{ds}\frac{ds}{r} + \sum \frac{S(\pm J)}{r},$$

dove la somma $\sum$ si riferisce ai varî punti d'incontro delle linee s, mentre l'altra somma S si riferisce ai varî valori che può prendere J, in ciascuno di questi punti, seguendo le diverse linee s che vi concorrono; valori da prendersi ciascuno con segno $+$ o $-$ secondo che la rispettiva linea s (stante il senso che le è stato attribuito) converga verso il punto d'incontro o ne diverga. Si ha quindi

$$[V] = \int [j]\frac{d\sigma}{r} + \int \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} j_n\, d\sigma + \int \left(j_\nu + j_{\nu'} + \frac{dJ}{ds}\right)\frac{ds}{r} - \sum \frac{S(\pm J)}{r},$$

e perchè quest'espressione sia dovunque nulla dev'essere

$$j_n = 0\,, \qquad [j] = 0 \qquad \text{in ogni punto di } \sigma\,,$$

ovvero

$$(9_a) \qquad \left\{ \begin{aligned} j_n &= 0 && \text{in ogni punto di } \sigma\,, \\ \int j_\nu\, ds_0 &= 0 && \text{per ogni contorno semplice } s_0 \text{ in } \sigma\,; \end{aligned} \right.$$

$$(9_b) \qquad j_\nu + j_{\nu'} + \frac{dJ}{ds} = 0 \qquad \text{in ogni punto ordinario di } s\,;$$

$$(9_c) \qquad S(\pm J) = 0 \qquad \text{in ogni punto di ramificazione di } s\,.$$

Queste condizioni necessarie e sufficienti possono interpretarsi (come nel § 4) invocando un fluido scorrente in σ, per guisa che j misuri dovunque il prodotto della densità (superficiale) per la velocità (talchè $j_n = 0$), insieme con un altro fluido scorrente in s, per guisa che J misuri dovunque il prodotto della densità (lineare) per la velocità. In tale concetto la seconda equazione (9_a) stabilisce che l'afflusso totale verso ogni area σ_0 è sempre nullo, la (9_b), o l'equivalente

$$j_\nu\, ds + j_{\nu'} ds + dJ = 0\,,$$

stabilisce che l'efflusso bilaterale da ciascun elemento lineare ds è sempre compensato da un egual decremento della corrente J lungo l'elemento stesso, e finalmente la (9_c) stabilisce che nei punti d'incontro di più correnti lineari non ha luogo produzione, nè distruzione di fluido. Per tal modo la continuità e la stazionarietà del moto simultaneo dei due fluidi sono dovunque perfettamente assicurate.

Le quattro condizioni (9_a), (9_b), (9_c) sono sempre soddisfatte quando $\boldsymbol{j}$ e J si definiscano per mezzo di formole della specie (8_c), $(8_{c'})$, giacchè ogni terna dedotta collo schema (1_b) soddisfa di per sè stessa alla relazione solenoidale. Ciò si verifica del resto facilmente osservando che le formole (8_c), $(8_{c'})$ dànno

$$(9_d) \qquad \boldsymbol{j}_\nu + \frac{\partial \varphi}{\partial s_0} = 0$$

(s_0 essendo una linea qualunque in σ). Con questa relazione si soddisfa infatti alla seconda ed alla terza condizione, mentre la prima e la quarta seguono ovviamente dalle stesse formole (8_c), $(8_{c'})$.

9. Ma se, inversamente, il sistema $(\boldsymbol{j}, J)$ è vincolato soltanto alle condizioni (9_a), (9_b), (9_c), non è possibile, in generale, assegnare una distribuzione magnetica d'eguale terna potenziale, *avente la stessa sede del sistema* $(\boldsymbol{j}, J)$. Basta un esempio semplicissimo per convincersene.

Sia σ un pezzo semplicemente connesso di superficie e sia s il suo contorno. Prendendo

$$\boldsymbol{j} = 0, \qquad J = \text{Costante}$$

tutte le condizioni (9_a), (9_b), (9_c) sono soddisfatte, le formole (9) si riducono a

$$(10) \qquad V_x = J\int_s \frac{da}{r}, \qquad V_y = J\int_s \frac{db}{r}, \qquad V_z = J\int_s \frac{dc}{r}$$

e la *sede effettiva* del sistema $(\boldsymbol{j}, J)$ si riduce alla semplice *linea di contorno* s. Invece le equazioni (8_c), $(8_{c'})$, o meglio le $(8_{c'})$, (9_d) sono bensì soddisfatte da

$$\varphi = \text{Costante} = J\,,$$

ciò che dà, (8),

$$(10_a) \qquad V = J\int \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}\, d\sigma,$$

ma la *sede* della distribuzione magnetica così ottenuta è sempre l'*intera superficie* σ, e non già il semplice contorno s, cosicchè tale distribuzione (J, σ) non può più considerarsi legittimamente come equipollente all'altra (J, s).

La ragione intima di questa discrepanza è sempre quella di cui s'è detto al § 6, vale a dire che la funzione continua U, di cui le componenti G_{xyz} sono le derivate negative nello spazio *doppiamente connesso* esterno ad s, *non è monodroma*. Ed infatti, in virtù dell'eguaglianza $G = F$ si ha, per ogni cammino procedente dalla faccia positiva alla negativa di σ,

$$K = \int G_{s'}\, ds' = \int F_{s'}\, ds' = DV = 4\pi J,$$

talchè la funzione U ha il modulo di periodicità $4\pi J$. La funzione potenziale magnetica V non è che un *ramo* della precedente, reso *monodromo* dal diaframma σ, il quale genera, alla sua volta, la *discontinuità* $4\pi J$.

Di proposito si è citato l'esempio precedente, perchè esso è quello che riconduce direttamente al classico punto di partenza della dottrina razionale dell'elettromagnetismo. In virtù del celebre teorema d'AMPÈRE, il diaframma magnetico σ, di momento unitario J, esercita su ogni polo esterno un'azione magnetica F identica all'azione elettromagnetica G che la corrente elettrica s, d'intensità J, esercita sul polo medesimo. L'azione magnetica F del diaframma è retta dall'*unica* funzione potenziale V, (10_a): l'azione elettromagnetica G della corrente è retta dalla *terna* potenziale V_{xyz}, (10). Questa terna può essere sostituita, se piace, da quell'unica funzione continua di cui G_x, G_y, G_z sono le derivate negative, ma questa non è la funzione *monodroma* V, che presenta una *discontinuità localizzata in modo arbitrario* rispetto alla vera sede s della corrente, bensì la funzione *polidroma* U, definita, a meno d'una costante additiva, dall'integrale

$$(10_b) \qquad U = -\int (G_x dx + G_y dy + G_z dz),$$

preso lungo una via che esce da un punto fisso arbitrario e che termina al punto variabile (x, y, z).

Questa distinzione essenzialissima, la quale può parere formale, o meramente volontaria, nel caso particolare di cui ora s'è detto, apparisce all'incontro razionale ed inevitabile quando, invece d'una semplice corrente lineare J, si consideri un fascio continuo di correnti $(J, \mathfrak{j})$ in un campo (S, σ), vale a dire un sistema di correnti che invadano lo spazio S coll'*intensità specifica* (cubica) j e le superficie σ coll'*intensità specifica* (superficiale) $\mathfrak{j}$, il qual sistema di correnti, quando sieno soddisfatte (come sempre si suppone) le quattro condizioni del § 3, costituisce ciò che si dice una *distribuzione galvanica costante e chiusa*. Una tale distribuzione non ammette, nel proprio interno, che la terna potenziale (3), e la funzione potenziale unica ch'essa possiede nello spazio vuoto non ammette altra definizione generale che (10_b).

Egli è così che ogni coppia di vettori $(j, \mathfrak{j})$ riceve un'interpretazione obbiettiva. In via di fatto le distribuzioni galvaniche ordinarie non comprendono se non correnti di spazio j, ed a queste sole si riferiscono gli ulteriori svolgimenti contenuti in questa Memoria. Si continuerà tuttavia, ancora per poco, a tener conto delle correnti di superficie $\mathfrak{j}$, sia per non perdere subito di vista i sistemi galvanici equipollenti a magnetici (per i quali l'intervento delle correnti $\mathfrak{j}$ è generalmente indispensabile), sia per non rinunciare innanzi tratto ad una generalità che non arreca d'altronde veruna molesta complicazione.

10. La validità ben accertata del teorema d'AMPÈRE, citato nel § precedente, autorizza a concludere, come s'è fatto, che l'azione d'un qualunque sistema galvanico $(j, \boldsymbol{j})$ sopra un polo magnetico è rappresentata dalla *forza elettromagnetica* G, definita, (2), per mezzo della terna potenziale (3) del sistema galvanico stesso. Ciò però non può affermarsi con vero fondamento se non rispetto all'azione *esterna*: nel caso d'un polo magnetico *interno* manca ogni indicazione *diretta* circa la natura dell'azione elettromagnetica, cosicchè la rappresentazione incondizionata di quest'azione per mezzo della forza G non è giustificata, in fondo, che dall'accordo delle deduzioni teoriche coi fatti osservati.

Giova tuttavia notare espressamente che tale questione, dal punto di vista matematico, non presenta quì la stessa indeterminatezza che nel caso del magnetismo, almeno finchè il polo si suppone situato in punto *ordinario* di S. Infatti il contributo dato alle funzioni V_x, V_y, V_z dall'intorno del polo è evanescente, (3), insieme con questo intorno, e lo stesso avviene per le derivate prime di queste funzioni e quindi anche, (2), per le componenti G_x, G_y, G_z. Ne risulta che se il sistema galvanico si concepisce decomposto in filamenti rientranti, indefinitamente attenuati e percorsi ciascuno da una corrente filiforme costante, il contributo dato alla forza G dal filamento che contiene il polo è evanescente insieme col filamento stesso. Ora l'immaginata decomposizione in filamenti non è punto arbitraria: essa è all'incontro suggerita nel modo più preciso dalla natura stessa delle condizioni che sono state riconosciute impreteribili per la sussistenza d'ogni sistema galvanico come tale. Una polarizzazione magnetica non presenta verun carattere analogo, nè si presta, per conseguenza, ad alcuna decomposizione speciale motivata da ragioni egualmente intrinseche.

È questo il luogo di ben fissare il senso d'alcune locuzioni usate da MAXWELL.

Un campo (S, σ) può essere sede ad un tempo d'una *distribuzione magnetica* $\boldsymbol{m}$ e d'una *distribuzione galvanica* $(j, \boldsymbol{j})$. Come tale si può ad esso attribuire una *terna potenziale* unica $(\boldsymbol{V}_x, \boldsymbol{V}_y, \boldsymbol{V}_z)$, le di cui funzioni componenti sieno le *somme* delle omologhe componenti spettanti alle due distribuzioni, separatamente considerate. Questa terna soddisfa alla condizione solenoidale $[\boldsymbol{V}] = 0$. Le quantità $\boldsymbol{G}_x$, $\boldsymbol{G}_y$, $\boldsymbol{G}_z$ calcolate, con queste tre nuove funzioni, per mezzo delle ordinarie formole (2), sono manifestamente le componenti della totale *forza polare* od *elettromagnetica* $\boldsymbol{G}$, cioè della risultante di quelle due omonime forze che emanano separatamente dalle due distribuzioni coesistenti. Ora MAXWELL attribuisce ad un tal sistema misto anche una *forza magnetica* $\boldsymbol{F}$, intendendo per essa la risultante dell'omonima forza F, emanante dalla distribuzione magnetica m, e della forza elettromagnetica G, emanante dalla distribuzione galvanica $(j, \boldsymbol{j})$, come se anche per quest'ultima esistesse una forza *magnetica*, costantemente eguale all'*elettromagnetica*. Questa nuova forza $\boldsymbol{F}$, che in generale *non ammette funzione potenziale unica nell'interno del sistema*, è manifestamente legata all'altra $\boldsymbol{G}$ dalle ordinarie relazioni

$$(11)\qquad \boldsymbol{G}_x = \boldsymbol{F}_x + 4\pi \boldsymbol{m}_x, \qquad \boldsymbol{G}_y = \boldsymbol{F}_y + 4\pi \boldsymbol{m}_y, \qquad \boldsymbol{G}_z = \boldsymbol{F}_z + 4\pi \boldsymbol{m}_z.$$

Ciò posto si riconosce senz'altro che le espressioni

$$(11_a)\qquad \frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial \boldsymbol{F}_x}{\partial x} + \frac{\partial \boldsymbol{F}_y}{\partial y} + \frac{\partial \boldsymbol{F}_z}{\partial z}\right), \qquad \frac{1}{4\pi}(\boldsymbol{F}_n + \boldsymbol{F}_{n'})$$

sono atte a rappresentare le densità, cubica e superficiale, del magnetismo *libero*, nella distribuzione magnetica $\boldsymbol{m}$; ed è altresì facile riconoscere che le formole atte a rappresentare, in analogia a (3_a), $(3_{a'})$, le componenti dei due vettori j, $\boldsymbol{j}$, nella distribuzione galvanica, sono le seguenti:

$$(11_b)\quad \begin{cases} 4\pi j_x = \dfrac{\partial \boldsymbol{F}_z}{\partial y} - \dfrac{\partial \boldsymbol{F}_y}{\partial z}, \\[2ex] 4\pi j_y = \dfrac{\partial \boldsymbol{F}_x}{\partial z} - \dfrac{\partial \boldsymbol{F}_z}{\partial x}, \\[2ex] 4\pi j_z = \dfrac{\partial \boldsymbol{F}_y}{\partial x} - \dfrac{\partial \boldsymbol{F}_x}{\partial y}; \end{cases} \qquad (11_{b'})\quad \begin{cases} 4\pi \boldsymbol{j}_x = D\boldsymbol{F}_z \dfrac{\partial y}{\partial n} - D\boldsymbol{F}_y \dfrac{\partial z}{\partial n}, \\[2ex] 4\pi \boldsymbol{j}_y = D\boldsymbol{F}_x \dfrac{\partial z}{\partial n} - D\boldsymbol{F}_z \dfrac{\partial x}{\partial n}, \\[2ex] 4\pi \boldsymbol{j}_z = D\boldsymbol{F}_y \dfrac{\partial x}{\partial n} - D\boldsymbol{F}_x \dfrac{\partial y}{\partial n}. \end{cases}$$

(È appena necessario avvertire che se, in queste formole, si scrivesse $\boldsymbol{G}$ al posto di $\boldsymbol{F}$, si otterrebbero non già i richiesti vettori galvanici j, $\boldsymbol{j}$, ma le risultanti di questi e degli omologhi vettori relativi a quella distribuzione galvanica che equivale polarmente alla magnetica).

Supposte note ad un tempo (o come tali considerando) le due forze $\boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{G}$ emananti dal sistema *misto*, le precedenti formole adempiono all'importante ufficio di somministrare, per mezzo di quelle, tutti gli elementi più essenziali del sistema stesso, cioè le componenti di polarizzazione magnetica, le densità del magnetismo libero e i due vettori galvanici j, $\boldsymbol{j}$. Anche le funzioni $\boldsymbol{V}_{xyz}$, componenti la terna potenziale mista, possono esprimersi, (1_b), colle tre funzioni $\boldsymbol{M}_{xyz}$ che si deducono dalle formole (2_e) mediante il cambiamento di G in $\boldsymbol{G}$.

Questo modo di considerare le cose costituisce una delle principali peculiarità del Trattato di MAXWELL.

11. Sia V'_{xyz} la terna potenziale d'una seconda distribuzione magnetica o galvanica. Moltiplicando ordinatamente le equazioni (3_a) per le funzioni di questa terna, sommando ed integrando per tutto lo spazio, si ottiene

$$4\pi \int (V'_x j_x + V'_y j_y + V'_z j_z)\,dS = \int \left[V'_x \left(\frac{\partial G_z}{\partial y} - \frac{\partial G_y}{\partial z}\right) + \cdots\right] dS_\infty.$$

Mercè la trasformazione

$$V'_x \frac{\partial G_z}{\partial y} = \frac{\partial (V'_x G_z)}{\partial y} - G_z \frac{\partial V'_x}{\partial y}$$

e le analoghe, con riguardo alla continuità delle funzioni V'_{xyz} ed alle condizioni all'infinito, il secondo membro della precedente equazione si riduce alla forma

$$\int \left[G_x \left(\frac{\partial V'_z}{\partial y} - \frac{\partial V'_y}{\partial z} \right) + \cdots \right] d S_\infty - \int \left[V'_x \left(D G_z \frac{\partial y}{\partial n} - D G_y \frac{\partial z}{\partial n} \right) + \cdots \right] d\sigma,$$

epperò si ottiene, (3_a), $(3_{a'})$,

$$(12) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\int (V'_x j_x + V'_y j_y + V'_z j_z) d S + \int (V'_x \boldsymbol{j}_x + V'_y \boldsymbol{j}_y + V'_z \boldsymbol{j}_z) d\sigma \\ &\qquad = \frac{1}{4\pi} \int (G_x G'_x + G_y G'_y + G_z G'_z) d S_\infty , \end{aligned} \right.$$

dove G' è la forza polare od elettromagnetica emanante dalla seconda delle due distribuzioni considerate. La forma simmetrica del secondo membro mostra che anche nel primo membro si potrebbero permutare fra loro le lettere accentate colle non accentate, e viceversa.

Se le due distribuzioni sono fra loro identiche, l'equazione precedente diventa

$$(12_a) \quad \int (V_x j_x + V_y j_y + V_z j_z) d S + \int (V_x \boldsymbol{j}_x + V_y \boldsymbol{j}_y + V_z \boldsymbol{j}_z) d\sigma = \frac{1}{4\pi} \int G^2 d S_\infty .$$

Suppongasi ora che la seconda distribuzione sia magnetica. In questo caso, introducendo la forza apolare F' in luogo della polare G', per mezzo delle relazioni analoghe ad (1), ed avendo riguardo all'*ortogonalità integrale* (§ 9, *M. M.*) delle due forze F' e G, il secondo membro dell'equazione (12) si riduce a

$$(12_b) \qquad \int (G_x m'_x + G_y m'_y + G_z m'_z)\, d S'.$$

Se anche la prima distribuzione è magnetica, quest'espressione si riduce di nuovo a

$$\int (F_x m'_x + F_y m'_y + F_z m'_z) d S' + 4\pi \int (m_x m'_x + m_y m'_y + m_z m'_z) d \Sigma,$$

ossia (§ 10, *M. M.*) a

$$- \boldsymbol{P}(S, S') + 4\pi \int (m_x m'_x + m_y m'_y + m_z m'_z) d \Sigma,$$

dove Σ è lo spazio comune alle due distribuzioni S, S'. Si ha dunque

$$
(12_c)\quad \left\{\begin{aligned} &\boldsymbol{P}(S,\,S') \\ &=-\int V'_x j_x+V'_y j_y+V'_z j_z)dS-\int(V'_x\boldsymbol{j}_x+V'_y\boldsymbol{j}_y+V'_z\boldsymbol{j}_z)d\sigma+4\pi\int(m_x m'_x+\cdots)d\Sigma \\ &=-\frac{1}{4\pi}\int(G_x G'_x+G_y G'_y+G_z G'_z)dS_\infty+4\pi\int(m_x m'_x+\cdots)d\Sigma, \end{aligned}\right.
$$

si ottengono, cioè, due nuove espressioni del potenziale mutuo apolare delle due distribuzioni magnetiche, espressioni le quali possono dirsi *elettromagnetiche*, in quanto vi figurano gli elementi relativi alle due distribuzioni galvaniche rispettivamente equivalenti alle magnetiche.

Se le due distribuzioni magnetiche sono fra loro identiche, la precedente equazione si converte in quest'altra:

$$
(12_d)\quad \left\{\begin{aligned} \boldsymbol{P}(S)&=-\frac{1}{2}\int(V_x j_x+V_y j_y+V_z j_z)dS-\frac{1}{2}\int(V_x\boldsymbol{j}_x+V_y\boldsymbol{j}_y+V_z\boldsymbol{j}_z)d\sigma+2\pi\int m^2 dS \\ &=-\frac{1}{8\pi}\int G^2 dS_\infty+2\pi\int m^2 dS, \end{aligned}\right.
$$

che porge una duplice espressione dell'autopotenziale apolare d'una distribuzione magnetica (la seconda delle quali espressioni è implicita nella formola (13), § 11, *M. M.*, formola che era già stata notata da W. Thompson, *Reprint*, p. 439).

Per due distribuzioni di carattere *misto* (cfr. il § precedente), il procedimento che ha condotto all'equazione (12) conduce medesimamente alla equazione più generale

$$
(13)\quad \left\{\begin{aligned} &\int(V'_x j_x+V'_y j_y+V'_z j_z)dS+\int(V'_x\boldsymbol{j}_x+V'_y\boldsymbol{j}_y+V'_z\boldsymbol{j}_z)d\sigma \\ &\qquad=\frac{1}{4\pi}\int(\boldsymbol{F}_x\boldsymbol{G}'_x+\boldsymbol{F}_y\boldsymbol{G}'_y+\boldsymbol{F}_z\boldsymbol{G}'_z)dS_\infty, \end{aligned}\right.
$$

la quale, nel caso che le due distribuzioni miste non ne formino che una sola, diventa

$$
(13_a)\quad \left\{\begin{aligned} &\int(V_x j_x+V_y j_y+V_z j_z)dS+\int(V_x\boldsymbol{j}_x+V_y\boldsymbol{j}_y+V_z\boldsymbol{j}_z)d\sigma \\ &\qquad=\frac{1}{4\pi}\int(\boldsymbol{F}_x\boldsymbol{G}_x+\boldsymbol{F}_y\boldsymbol{G}_y+\boldsymbol{F}_z\boldsymbol{G}_z)dS_\infty. \end{aligned}\right.
$$

12. Si procederà ora a considerare il sistema di due distribuzioni poste in presenza l'una dell'altra, l'una magnetica l'altra galvanica, all'uopo di determinare le azioni mutue che intervengono fra queste due distribuzioni.

Per rientrare nelle condizioni ordinarie, si supporrà quindinnanzi che la distribuzione galvanica non comprenda se non *correnti in tre dimensioni,* talchè, denotando con S lo spazio occupato da questa distribuzione, la relativa terna potenziale sarà rappresentata semplicemente da

$$(14) \qquad V_x = \int \frac{j_a dS}{r}, \quad V_y = \int \frac{j_b dS}{r}, \quad V_z = \int \frac{j_c dS}{r},$$

dove le componenti j_{abc} dell'intensità specifica sono soggette alle condizioni

$$(14_a) \qquad [j] = 0, \quad j_n + j_{n'} = 0;$$

e ciò in conformità delle equazioni (4), (4_c) del § 3, restando soddisfatte incondizionatamente (dall'ipotesi $\boldsymbol{j} = 0$) le altre due equazioni (4_a), (4_b). Si supporrà inoltre che gli integrali rappresentati nel § 7 con K *non* sieno tutti *nulli,* cioè che la distribuzione galvanica *non* sia surrogabile da una magnetica, epperò non ammetta, nello spazio esterno ad S, che una funzione potenziale *non* monodroma.

Quanto alla distribuzione magnetica, si denoterà di regola con S' lo spazio da essa occupato, con m il momento polare, con V' la funzione potenziale, con V'_{xyz} la terna potenziale.

Si supporrà finalmente che i due spazî S ed S', sedi delle due distribuzioni, possano avere parti comuni e sieno deformabili con data legge continua qualunque. Tale deformabilità dei due spazî esige la risoluzione d'un problema preliminare, che verrà enunciato e trattato nel § seguente. Quì giova invece aggiungere alcune osservazioni circa la rappresentazione idrodinamica del § 4, rappresentazione alla quale è molto utile ricorrere in parecchie successive occasioni.

Per un sistema galvanico formato di sole correnti in tre dimensioni, i due fluidi considerati nel § 4 si riducono ad un solo, che può concepirsi come esistente nelle condizioni ordinarie: la quantità j può, cioè, assimilarsi al prodotto della densità d'un ordinario fluido per la velocità del fluido stesso. Vi è però una circostanza di cui conviene tener conto.

Nel corso delle teorie fin quì svolte si sono formalmente *identificate* le funzioni (3), dapprima dedotte per una polarizzazione magnetica, colle omologhe relative ad una distribuzione galvanica; e così la forza, polare nel primo caso, elettromagnetica nel secondo, è stata calcolata, amendue le volte, colle *medesime* formole (2). Questa identificazione, la quale corrisponde all'assunzione della *misura magnetica,* trae necessariamente con sè la conseguenza che l'intensità specifica dev'essere trattata come una grandezza della stessa specie di quella che è definita dalle formole (2_f), cioè (*M. M.* § 12) che ogni j deve assumersi della specie

$$j = L^{-\frac{3}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1}.$$

Ora quest'espressione dimensionale di j può trascriversi così:

$$j = \frac{M}{L^3} \cdot \frac{L}{T} \cdot L^{\frac{1}{2}} M^{-\frac{1}{2}} = \rho v \cdot L^{\frac{1}{2}} M^{-\frac{1}{2}},$$

dove ρ è una densità (cubica) e v una velocità: l'assunzione della misura magnetica non permette dunque d'identificare senz'altro j col prodotto ρv, ma esige l'introduzione d'un fattore della specie $L^{\frac{1}{2}} M^{-\frac{1}{2}}$. Basta del resto supporre che questo fattore sia *costante* (ciò che è sempre lecito), perchè la rappresentazione idrodinamica del § 4 continui a sussistere integralmente.

La precedente espressione dimensionale di j conduce ad altre due osservazioni.

In primo luogo, per essere

$$Lj = v\sqrt{\rho},$$

si può rappresentare la forza viva del fluido fittizio, riferita all'unità di volume, con $\varkappa j^2$, purchè al fattore $\varkappa$ (generalmente variabile da punto a punto) si attribuisca la dimensione L^2. Ciò si collega colla nota espressione del calore che si svolge in una distribuzione galvanica, nell'unità di volume *e di tempo*, ed indica che, in misura magnetica, la resistenza specifica (giacchè tale si sa essere il significato che assume il fattore $\varkappa$) è una grandezza della specie $L^2 T^{-1}$: come è noto da altre considerazioni.

La seconda osservazione consiste in ciò che, potendosi anche scrivere

$$j = \frac{L}{T} \cdot \frac{L^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}}}{L^3},$$

ogni intensità specifica j può altresì considerarsi come il prodotto d'una velocità per la densità (cubica) d'un *quid* della specie $L^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}}$. È dunque lecito considerare ogni flusso galvanico come un flusso d'elettricità, purchè si chiami *elettricità* il *quid* della specie indicata. Effettivamente è noto che, in misura magnetica, ogni quantità d'elettricità è della specie $L^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}}$. Non v'è del resto nulla di sorprendente in questa coincidenza, la quale ha origine dalla *convenzione* che il prodotto di un'intensità specifica per un'area e per un tempo rappresenti una quantità d'elettricità.

13. Ritornando ai due corpi S, S', ed incominciando dal corpo magnetico S', supposto mobile e deformabile con continuità, si domanda: in qual modo devesi concepire variabile la distribuzione magnetica m, durante la deformazione *prescritta* allo spazio S' in cui ha sede tale distribuzione?

La risposta a tale quesito è del tutto ovvia, ove si adottino i concetti ordinarî circa la costituzione dei corpi magnetici. Giusta questi concetti, se si considera (ommettendo quì per semplicità gli apici) un elemento di volume dS, circostante al punto (a, b, c), e se si denotano con $\mu_1, \mu_2, \ldots$ le masse magnetiche concentrate nei singoli punti (a_1, b_1, c_1), $(a_2, b_2, c_2), \ldots$ di questo elemento, si hanno le eguaglianze di definizione

$$m_a dS = \sum \mu_i a_i\,, \qquad m_b dS = \sum \mu_i b_i\,, \qquad m_c dS = \sum \mu_i c_i\,,$$

dove la somma $\sum$ si riferisce a tutte le masse μ_i contenute nell'elemento e soddisfacenti alla condizione $\sum \mu_i = 0$. Di quì, facendo variare la posizione di tutti i punti dell'elemento, ma mantenendo costanti le singole masse μ_i, che li debbono accompagnare nei loro spostamenti, si ha

$$\delta(m_a dS) = \sum \mu_i \delta a_i\,, \qquad \text{etc.}$$

Ora, per l'ammessa continuità degli spostamenti si può porre

$$\delta a_i = \delta a + \frac{\partial \delta a}{\partial a}(a_i - a) + \frac{\partial \delta a}{\partial b}(b_i - b) + \frac{\partial \delta a}{\partial c}(c_i - c)\,, \qquad \text{etc.},$$

epperò si ottiene

$$\begin{aligned}\sum \mu_i \delta a_i &= \frac{\partial \delta a}{\partial a}\sum \mu_i a_i + \frac{\partial \delta a}{\partial b}\sum \mu_i b_i + \frac{\partial \delta a}{\partial c}\sum \mu_i c_i \\ &= \left(\frac{\partial \delta a}{\partial a} m_a + \frac{\partial \delta a}{\partial b} m_b + \frac{\partial \delta a}{\partial c} m_c\right) dS; \qquad \text{etc.};\end{aligned}$$

debbono dunque sussistere le equazioni

$$(15)\qquad \begin{cases} \delta(m_a dS) = \left(\dfrac{\partial \delta a}{\partial a} m_a + \dfrac{\partial \delta a}{\partial b} m_b + \dfrac{\partial \delta a}{\partial c} m_c\right) dS\,, \\[2ex] \delta(m_b dS) = \left(\dfrac{\partial \delta b}{\partial a} m_a + \dfrac{\partial \delta b}{\partial b} m_b + \dfrac{\partial \delta b}{\partial c} m_c\right) dS\,, \\[2ex] \delta(m_c dS) = \left(\dfrac{\partial \delta c}{\partial a} m_a + \dfrac{\partial \delta c}{\partial b} m_b + \dfrac{\partial \delta c}{\partial c} m_c\right) dS\,, \end{cases}$$

le quali forniscono le cercate espressioni delle variazioni δm_a, δm_b, δm_c, giacchè si sa essere

$$(15_a)\qquad \delta(dS) = \left(\frac{\partial\,\delta a}{\partial a} + \frac{\partial\,\delta b}{\partial b} + \frac{\partial\,\delta c}{\partial c}\right) dS\,.$$

Queste variazioni son quelle che devono considerarsi, in risposta al quesito dianzi formulato, come semplicemente imposte dalla deformazione della sede materiale S: esse si diranno perciò *variazioni forzate*, in opposizione a quelle altre che potrebbero verificarsi, *a sede fissa*, nell'intensità o nella distribuzione delle masse magnetiche μ_i e che si diranno *variazioni libere*.

Se non che, per restare in armonia col tenore generale di queste ricerche, giova rendere indipendente la deduzione delle formole precedenti dalla considerazione, che vi è implicita, dell'*elemento magnetico*. A tal fine conviene ricorrere all'equazione generale (2) del § 2, *M. M.*, quì trascritta nella forma

$$(15_b)\qquad \int U\,d\mu = \int\left(\frac{\partial U}{\partial a} m_a + \frac{\partial U}{\partial b} m_b + \frac{\partial U}{\partial c} m_c\right) dS\,,$$

dove $d\mu$ rappresenta l'elemento generico di *magnetismo libero*, esistente sotto la forma $k\,dS$ nell'elemento di volume dS, oppure sotto la forma $h\,d\sigma$ nell'elemento di superficie $d\sigma$. Da quest'equazione, facendo dapprima variare tutti gli argomenti, si deduce

$$\int \delta U\,d\mu + \int U\,\delta\,d\mu = \int \delta\left[\left(\frac{\partial U}{\partial a} m_a + \frac{\partial U}{\partial b} m_b + \frac{\partial U}{\partial c} m_c\right) dS\right].$$

Dalla stessa equazione, mutando U in δU (variazione la quale deve supporsi monodroma e continua, come la funzione U stessa) si deduce anche

$$\int \delta U\,d\mu = \int\left(\frac{\partial\,\delta U}{\partial a} m_a + \frac{\partial\,\delta U}{d b} m_b + \frac{\partial\,\delta U}{\partial c} m_c\right) dS\,,$$

dove

$$\frac{\partial\,\delta U}{\partial a} = \delta\left(\frac{\partial U}{\partial a}\right) + \frac{\partial U}{\partial a}\frac{\partial\,\delta a}{\partial a} + \frac{\partial U}{\partial b}\frac{\partial\,\delta b}{\partial a} + \frac{\partial U}{\partial c}\frac{\partial\,\delta c}{\partial a}\,, \qquad \text{etc.}$$

Se dunque si scrive

$$\delta\left(\frac{\partial U}{\partial a} m_a\,dS\right) = \delta\left(\frac{\partial U}{\partial a}\right)\cdot m_a\,dS + \frac{\partial U}{\partial a}\,\delta(m_a\,dS)\,, \qquad \text{etc.}$$

si ottiene l'equazione

$$\int\left[\left(\frac{\partial U}{\partial a}\frac{\partial\delta a}{\partial a}+\frac{\partial U}{\partial b}\frac{\partial\delta b}{\partial a}+\frac{\partial U}{\partial c}\frac{\partial\delta c}{\partial a}\right)m_a+\cdots\right]dS+\int U\delta d\mu$$
$$=\int\left[\frac{\partial U}{\partial a}\delta(m_a dS)+\frac{\partial U}{\partial b}\delta(m_b dS)+\frac{\partial U}{\partial c}\delta(m_c dS)\right],$$

alla quale si soddisfa nel modo più generale ponendo

$$(15_c)\qquad\begin{cases}\delta(m_a dS)=\left[\dfrac{\partial\delta a}{\partial a}m_a+\dfrac{\partial\delta a}{\partial b}m_b+\dfrac{\partial\delta a}{\partial c}m_c+(\delta m_a)\right]dS\,,\\[2ex]\delta(m_b dS)=\left[\dfrac{\partial\delta b}{\partial a}m_a+\dfrac{\partial\delta b}{\partial b}m_b+\dfrac{\partial\delta b}{\partial c}m_c+(\delta m_b)\right]dS\,,\\[2ex]\delta(m_c dS)=\left[\dfrac{\partial\delta c}{\partial a}m_a+\dfrac{\partial\delta c}{\partial b}m_b+\dfrac{\partial\delta c}{\partial c}m_c+(\delta m_c)\right]dS\,,\end{cases}$$

dove (δm_a), (δm_b), (δm_c) sono tre quantità soggette all'unica condizione

$$\int U\delta d\mu=\int\left[\frac{\partial U}{\partial a}(\delta m_a)+\frac{\partial U}{\partial b}(\delta m_b)+\frac{\partial U}{\partial c}(\delta m_c)\right]dS\,,$$

sono, cioè, le componenti di momento d'una distribuzione magnetica, esistente nella *sede fissa* S, cui corrispondono, nei singoli elementi dS, $d\sigma$ di volume e di superficie, le quantità arbitrarie $\delta d\mu$ di magnetismo libero.

Le formole (15_c) sono assolutamente generali. Per venire alla questione particolare di cui doveva trattarsi basta osservare che, se non avesse luogo spostamento veruno, queste stesse formole darebbero $\delta m_a=(\delta m_a)$, etc., mentre la definizione stessa di variazione *forzata* esige che in questo caso debba essere

$$\delta m_a=\delta m_b=\delta m_c=0\,.$$

Il carattere delle variazioni forzate è dunque espresso da

$$(\delta m_a)=(\delta m_b)=(\delta m_c)=0$$

(assenza di variazioni *libere*), con che le equazioni (15_c) si riducono per lo appunto alle (15).

Equazioni del tutto analoghe si verificano per le variazioni delle componenti d'intensità specifica di corrente: a convincersi della qual cosa basta osservare che, sussistendo, (5), per ogni distribuzione galvanica in tre dimensioni l'equazione

$$\int\left(\frac{\partial U}{\partial a}j_a + \frac{\partial U}{\partial b}j_b + \frac{\partial U}{\partial c}j_c\right)dS = 0\,,$$

dove U ha lo stesso carattere che in (15_b), le quantità j_{abc} possono essere considerate come componenti d'una polarizzazione magnetica a magnetismo libero dovunque nullo (ed infatti le equazioni di condizione (14_a) corrispondono appuntino a quelle del § 7 *M. M.*). Le variazioni forzate delle componenti d'intensità specifica d'una distribuzione galvanica a sede variabile sono date quindi dalle equazioni seguenti:

$$(16)\qquad \begin{cases} \delta(j_a dS) = \left(\dfrac{\partial\delta a}{\partial a}j_a + \dfrac{\partial\delta a}{\partial b}j_b + \dfrac{\partial\delta a}{\partial c}j_c\right)dS\,, \\[2ex] \delta(j_b dS) = \left(\dfrac{\partial\delta b}{\partial a}j_a + \dfrac{\partial\delta b}{\partial b}j_b + \dfrac{\partial\delta b}{\partial c}j_c\right)dS\,, \\[2ex] \delta(j_c dS) = \left(\dfrac{\partial\delta c}{\partial a}j_a + \dfrac{\partial\delta c}{\partial b}j_b + \dfrac{\partial\delta c}{\partial c}j_c\right)dS\,. \end{cases}$$

(HELMHOLTZ, Wissenschaftliche Abhandlungen, T. I, p. 731).

14. Per calcolare generalmente l'azione *ponderomotrice* che può venire esercitata sopra un corpo magnetico, variabile di posizione ed eventualmente anche di forma, si denotino con X, Y, Z le componenti della forza qualunque che agisce, nel punto generico (a, b, c), sopra un polo unitario ivi situato. Se $d\mu$ è una quantità di magnetismo libero concentrata nello stesso punto e se δa, δb, δc sono le componenti dello spostamento infinitesimo di questo, il *lavoro ponderomotore* che nasce dall'azione della detta forza sull'intero corpo può essere rappresentato da

$$\delta L_p = \int (X\delta a + Y\delta b + Z\delta c)\,d\mu\,,$$

dove l'integrazione si estende a tutte le masse magnetiche $d\mu$. Ammessa la continuità degli spostamenti, si può porre, nel teorema generale (15_b),

$$U = X\delta a + Y\delta b + Z\delta c$$

e si ottiene

$$\delta L_p = \int\left[\frac{\partial(X\delta a + Y\delta b + Z\delta c)}{\partial a}m_a + \cdots\right]dS\,,$$

ovvero

$$(17)\qquad \begin{cases} \delta L_p = \displaystyle\int\left[\left(\frac{\partial X}{\partial a}m_a + \frac{\partial X}{\partial b}m_b + \frac{\partial X}{\partial c}m_c\right)\delta a + \cdots\right]dS \\ \quad + \displaystyle\int\left[\left(\frac{\partial \delta a}{\partial a}m_a + \frac{\partial \delta a}{\partial b}m_b + \frac{\partial \delta a}{\partial c}m_c\right)X + \cdots\right]dS. \end{cases}$$

L'espressione sotto il secondo integrale può mettersi sotto la forma $(\Omega + \Theta)dS$, dove

$$\Omega = (Zm_b - Ym_c)\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \delta c}{\partial b} - \frac{\partial \delta b}{\partial c}\right) + \cdots,$$

$$\Theta = Xm_a\frac{\partial \delta a}{\partial a} + Ym_b\frac{\partial \delta b}{\partial b} + Zm_c\frac{\partial \delta c}{\partial c} + \frac{1}{2}(Zm_b + Ym_c)\left(\frac{\partial \delta c}{\partial b} + \frac{\partial \delta b}{\partial c}\right) + \cdots,$$

ed il risultato (17) può quindi interpretarsi dicendo che l'azione ponderomotrice delle forze (X, Y, Z) sul corpo magnetico è rappresentata:

1° da *forze traslatorie*, agenti su ciascun elemento di volume dS, colle componenti

$$(17_a)\qquad \begin{cases} \left(\dfrac{\partial X}{\partial a}m_a + \dfrac{\partial X}{\partial b}m_b + \dfrac{\partial X}{\partial c}m_c\right)dS, \\ \left(\dfrac{\partial Y}{\partial a}m_a + \dfrac{\partial Y}{\partial b}m_b + \dfrac{\partial Y}{\partial c}m_c\right)dS, \\ \left(\dfrac{\partial Z}{\partial a}m_a + \dfrac{\partial Z}{\partial b}m_b + \dfrac{\partial Z}{\partial c}m_c\right)dS; \end{cases}$$

2°) da *momenti rotatori*, agenti su ciascun elemento di volume dS, colle componenti

$$(17_b)\qquad (Zm_b - Ym_c)dS, \qquad (Xm_c - Zm_a)dS, \qquad (Ym_a - Xm_b)dS;$$

3°) da *pressioni*, agenti su ciascun elemento piano tracciato nel corpo magnetico, colle componenti unitarie

$$(17_c)\qquad \begin{cases} X_x = Xm_a, \\ Y_y = Ym_b, \\ Z_z = Zm_c; \end{cases} \qquad \begin{cases} Y_z = \frac{1}{2}(Zm_b + Ym_c), \\ Z_x = \frac{1}{2}(Xm_c + Zm_a), \\ X_y = \frac{1}{2}(Ym_a + Xm_b). \end{cases}$$

Queste pressioni restano naturalmente prive d'effetto quando il corpo magnetico è *rigido*.

In questo caso non sussistono se non le forze traslatorie (17_a) ed i momenti rotatori (17_b) *).

Ma all'espressione sotto il secondo integrale in (17) si può anche dare la forma, (15),

$$X\delta(m_a dS) + Y\delta(m_b dS) + Z\delta(m_c dS)\,,$$

mentre quella sotto il primo integrale può essere trasformata in base alle identità

$$\frac{\partial X}{\partial a}m_a + \frac{\partial X}{\partial b}m_b + \frac{\partial X}{\partial c}m_c = \frac{\partial X}{\partial a}m_a + \frac{\partial Y}{\partial a}m_b + \frac{\partial Z}{\partial a}m_c$$
$$+\left(\frac{\partial X}{\partial c} - \frac{\partial Z}{\partial a}\right)m_c - \left(\frac{\partial Y}{\partial a} - \frac{\partial X}{\partial b}\right)m_b\,, \qquad \text{etc.};$$

si può quindi scrivere anche

$$(17_d)\quad \delta L_p = \delta\int(Xm_a + Ym_b + Zm_c)dS + \int\left[\left(\frac{\partial Z}{\partial b} - \frac{\partial Y}{\partial c}\right)(m_b\delta c - m_c\delta b) + \cdots\right]dS\,.$$

Suppongasi ora che la forza agente sul corpo magnetico sia la forza elettromagnetica G, emanante da una distribuzione galvanica; si ponga, cioè

$$X = G_a\,,\qquad Y = G_b\,,\qquad Z = G_c\,.$$

Si ottiene in tal caso, (17_d), (3_a),

$$(17_e)\quad \left\{\begin{aligned} &\delta L_p = \delta\int(G_a m_a + G_b m_b + G_c m_c)dS \\ &+ 4\pi\int[(m_z j_y - m_y j_z)\delta x + (m_x j_z - m_z j_x)\delta y + (m_y j_x - m_x j_y)\delta z]d\Sigma\,, \end{aligned}\right.$$

dove, per chiarezza, si sono designate con x, y, z le coordinate d'un punto qualunque dello spazio Σ comune alle due distribuzioni, magnetica e galvanica (per il caso in cui il corpo magnetico sia in tutto od in parte attraversato dalle correnti donde emana la forza G). Rimettendo a più tardi (§ 18) alcune avvertenze relative a questo spazio comune Σ, giova procedere subito ad una trasformazione dell'espressione precedente.

15. Conviene d'ora innanzi distinguere coll'apice (giusta le indicazioni del § 12)

*) Thomson W., *Reprint of papers on Electrostatics and Magnetism*, pag. 373.

ciò che si riferisce al corpo magnetico, designando in particolare con (a', b', c') un punto dello spazio S' occupato dal detto corpo. Quando occorra di richiamare le formole magnetiche dei precedenti due §§, s'intenderà già fatto in esse tale mutamento.

Stante l'eguaglianza

$$\int(G'_a m'_a + G'_b m'_b + G'_c m'_c)\,d S' = \int(V'_a j_a + V'_b j_b + V'_c j_c)\,d S\,,$$

che risulta dalle formole (12), (12_b) del § 11, si può, nell'equazione (17_c), sostituire all'integrale di cui è da prendere la variazione δ quest'altro integrale, esteso allo spazio S occupato dalla distribuzione galvanica:

$$\Pi = \int(V'_a j_a + V'_b j_b + V'_c j_c)\,d S. \tag{18}$$

Per la più precisa determinazione del senso in cui è ora da prendersi la variazione δ di quest'importantissima espressione Π, si rendono utili le considerazioni seguenti, le quali fanno intervenire alcune nuove formole e relazioni, necessarie anche a conoscersi per una successiva deduzione (§ 20).

In analogia colle formole (1_a) del § 1 si ponga

$$M'_a = \int\frac{m_{a'}\,d S'}{r}\,,\qquad M'_b = \int\frac{m_{b'}\,d S'}{r}\,,\qquad M'_c = \int\frac{m_{c'}\,d S'}{r}\,,$$

talchè sia, (1_b),

$$V'_a = \frac{\partial M'_c}{\partial b} - \frac{\partial M'_b}{\partial c}\,,\qquad \text{etc.}$$

Facendo variare la distribuzione magnetica m, ma considerando come invariabile il punto potenziato (a, b, c), si ha di qui

$$\delta V'_a = \frac{\partial\,\delta M'_c}{\partial b} - \frac{\partial\,\delta M'_b}{\partial c}\,,\qquad \text{etc.}$$

talchè il calcolo delle variazioni $\delta V'_{abc}$, prese in tali condizioni, dipende da quello delle variazioni $\delta M'_{abc}$, prese nelle condizioni medesime. Ora si ha

$$\begin{aligned}\delta M'_a &= \int\frac{\delta(m_{a'}\,d S')}{r} + \int m'_a\left(\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial a'}\,\delta a' + \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial b'}\,\delta b' + \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial c'}\,\delta c'\right)d S'\\ &= \int\frac{\delta(m_{a'}\,d S')}{r} - \frac{\partial}{\partial a}\int\frac{m_{a'}\,\delta a'\,d S'}{r} - \frac{\partial}{\partial b}\int\frac{m_{a'}\,\delta b'\,d S'}{r} - \frac{\partial}{\partial c}\int\frac{m_{a'}\,\delta c'\,d S'}{r}\,,\end{aligned}$$

dove, supposto che si tratti, (15), di variazione forzata, è

$$\int \frac{\delta(m_{a'} d S')}{r} = \int \left(\frac{\partial \delta a'}{\partial a'} m_{a'} + \frac{\partial \delta a'}{\partial b'} m_{b'} + \frac{\partial \delta a'}{\partial c'} m_{c'} \right) \frac{d S'}{r}$$

$$= \int \left[\frac{\partial}{\partial a'} \left(\frac{\delta a'}{r} \right) m_{a'} + \frac{\partial}{\partial b'} \left(\frac{\delta a'}{r} \right) m_{b'} + \frac{\partial}{\partial c'} \left(\frac{\delta a'}{r} \right) m_{c'} \right] d S'$$

$$+ \frac{\partial}{\partial a} \int \frac{m_{a'} \delta a' \, d S'}{r} + \frac{\partial}{\partial b} \int \frac{m_{b'} \delta a' \, d S'}{r} + \frac{\partial}{\partial c} \int \frac{m_{c'} \delta a' \, d S'}{r} ;$$

si può dunque scrivere

$$\delta M'_a = \int \left[\frac{\partial}{\partial a'} \left(\frac{\delta a'}{r} \right) m_{a'} + \frac{\partial}{\partial b'} \left(\frac{\delta a'}{r} \right) m_{b'} + \frac{\partial}{\partial c'} \left(\frac{\delta a'}{r} \right) m_{c'} \right] d S'$$

$$+ \frac{\partial}{\partial b} \int \frac{m_{b'} \delta a' - m_{a'} \delta b'}{r} d S' - \frac{\partial}{\partial c} \int \frac{m_{a'} \delta c' - m_{c'} \delta a'}{r} d S'.$$

Ma il primo integrale del secondo membro non è altro che

$$\int \frac{\delta a' \, d\mu'}{r} ,$$

come si riconosce ponendo $U = \delta a' : r$ nell'equazione (15_b) del § 12 (e scrivendo $d\mu'$ al posto di $d\mu$); ponendo quindi, per brevità,

$$N'_a = \int \frac{m_{c'} \delta b' - m_{b'} \delta c'}{r} dS', \quad N'_b = \int \frac{m_{a'} \delta c' - m_{c'} \delta a'}{r} dS', \quad N'_c = \int \frac{m_{b'} \delta a' - m_{a'} \delta b'}{r} dS',$$

si ottiene finalmente

$$\delta M'_a = \int \frac{\delta a' \, d\mu'}{r} + \frac{\partial N'_c}{\partial b} - \frac{\partial N'_b}{\partial c} ,$$

$$\delta M'_b = \int \frac{\delta b' \, d\mu'}{r} + \frac{\partial N'_a}{\partial c} - \frac{\partial N'_c}{\partial a} ,$$

$$\delta M'_c = \int \frac{\delta c' \, d\mu'}{r} + \frac{\partial N'_b}{\partial a} - \frac{\partial N'_a}{\partial b} .$$

Di qui si deduce

$$\delta V'_a = \int \left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial c'} \delta b' - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial b'} \delta c' \right) d\mu' + \frac{\partial [N']}{\partial a} - \Delta_2 N'_a ,$$

$$\delta V'_b = \int \left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial a'} \delta c' - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial c'} \delta a' \right) d\mu' + \frac{\partial [N']}{\partial b} - \Delta_2 N'_b ,$$

$$\delta V'_c = \int \left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial b'} \delta a' - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial a'} \partial b' \right) d\mu' + \frac{\partial [N']}{\partial c} - \Delta_2 N'_c ,$$

dove, come al solito, si è posto

$$[N'] = \frac{\partial N'_a}{\partial a} + \frac{\partial N'_b}{\partial b} + \frac{\partial N'_c}{\partial c} .$$

Ora se il punto (a, b, c) è interno allo spazio S', si ha

$$\Delta_2 N'_a = -4\pi (m_c \delta b - m_b \delta c) , \qquad \text{etc.}$$

e queste formole sono vere in ogni caso se alle quantità $m_{a'b'c'}$ si attribuisce (come d'uso) il valor *zero* al di fuori del corpo magnetico. Moltiplicando quindi ordinatamente i trovati valori di $\delta V'_{abc}$ per j_{abc} ed integrando su tutto lo spazio S, con riguardo alle formole (14), alle formole (2) ed al teorema (5), si ottiene

$$\int (\delta V'_a \cdot j_a + \delta V'_b \cdot j_b + \delta V'_c \cdot j_c) dS$$
$$= \int (G_{a'} \delta a' + G_{b'} \delta b' + G_{c'} \delta c') d\mu' - 4\pi \int [(m_z j_y - m_y j_z) \delta x + \cdots] d\Sigma,$$

dove, come in (17_c), il luogo Σ dei punti (x, y, z) è lo spazio comune ad S e ad S'. D'altronde l'integrale

$$\int (G_{a'} \delta a' + G_{b'} \delta b' + G_{c'} \delta c') d\mu'$$

non è altro che la quantità designata nel § precedente con δL_p, da designarsi ora invece con $\delta L'_p$; si ha dunque, (17_c),

$$\delta \int (G_{a'} m_{a'} + G_{b'} m_{b'} + G_{c'} m_{c'}) dS' = \int (\delta V'_a \cdot j_a + \delta V'_b \cdot j_b + \delta V'_c \cdot j_c) dS$$

cioè, (18), uguale a

$$\delta \int (V'_a j_a + V'_b j_b + V'_c j_c) dS = \delta \Pi ,$$

dove la variazione δ ha il senso che risulta dal già detto in questo stesso §, cioè proviene dalla deformazione dello spazio S' e dalla conseguente variazione forzata del momento magnetico m, restando fisso il punto (a, b, c) cui si riferisce la terna potenziale V'_{abc} del corpo magnetico S'.

In base a ciò si porrà definitivamente

$$(18_a) \qquad \delta L'_p = \delta \Pi + 4\pi \int [(m_z j_y - m_y j_z) \delta x + \cdots] d\Sigma .$$

16. Per determinare, con un procedimento analogo al precedente, il lavoro ponderomotore che il corpo magnetico S' esercita sul conduttore galvanico S, quando questo subisce una deformazione infinitesima, bisogna conoscere la forza che fa riscontro alla elettromagnetica, cioè quella che sarebbe da qualificarsi come *forza magnetoelettrica.*

Nel caso più semplice, questa forza può essere determinata colla considerazione seguente, fondata sopra un'abbastanza plausibile estensione ai potenziali polidromi di un canone riguardante i potenziali monodromi.

Supposto che il punto (a', b', c') sia esterno al condotture, il trinomio $G_{a'} da' + G_{b'} db' + G_{c'} dc'$ ammette un integrale, generalmente polidromo, che si denoterà con $- U'$. Propriamente si porrà

$$U' = \int_{a'b'c'}^{\infty} (G_{a'} da' + G_{b'} db' + G_{c'} dc'),$$

intendendo che il cammino d'integrazione s' si diriga, in un modo determinato, dal punto (a', b', c') all'infinito, nello spazio esterno al conduttore; per tal guisa U' rappresenta il lavoro ponderomotore compiuto dalle forze elettromagnetiche sopra un punto materiale, sede d'un polo magnetico unitario, durante il passaggio di questo punto (lungo il cammino s') dal posto (a', b', c') all'infinito. Si ammetta che qualora, restando invece fisso il polo magnetico, il conduttore subisse una qualunque deformazione infinitesima, il corrispondente decremento della quantità U' rappresenterebbe il lavoro elementare compiuto sul conduttore medesimo dalle forze magnetoelettriche emananti dal polo.

Introducendo in U' i valori di $G_{a'b'c'}$, si trova

$$U' = \int_{a'b'c'}^{\infty} \int \left[\left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial c} j_b - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial b} j_c \right) da' + \cdots \right] dS,$$

ossia

$$U' = \int (w_a j_a + w_b j_b + w_c j_c) dS,$$

posto per brevità

$$v_a = \int_{a'b'c'}^{\infty} \frac{da'}{r}, \qquad v_b = \int_{a'b'c'}^{\infty} \frac{db'}{r}, \qquad v_c = \int_{a'b'c'}^{\infty} \frac{dc'}{r},$$

$$w_a = \frac{\partial v_c}{\partial b} - \frac{\partial v_b}{\partial c}, \qquad w_b = \frac{\partial v_a}{\partial c} - \frac{\partial v_c}{\partial a}, \qquad w_c = \frac{\partial v_b}{\partial a} - \frac{\partial v_a}{\partial b}.$$

Facendo variare il luogo S dei punti (a, b, c) si ottiene

$$\delta U' = \int [w_a \delta(j_a dS) + w_b \delta(j_b dS) + w_c \delta(j_c dS)] + \int (j_a \delta w_a + j_b \delta w_b + j_c \delta w_c) dS.$$

Avuto riguardo ai valori (16) delle variazioni forzate $\delta(j_a dS)$, etc., la quantità sotto il primo integrale è il prodotto di dS per il polinomio

$$w_a\left(\frac{\partial \delta a}{\partial a} j_a + \frac{\partial \delta a}{\partial b} j_b + \frac{\partial \delta a}{\partial c} j_c\right) + \text{etc.},$$

il quale può essere trasformato in quest'altro:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial a} j_a + \frac{\partial \varphi}{\partial b} j_b + \frac{\partial \varphi}{\partial c} j_c - \left(\frac{\partial w_a}{\partial a} \delta a + \frac{\partial w_b}{\partial a} \delta b + \frac{\partial w_c}{\partial a} \delta c\right) j_a - \text{etc.},$$

dove

$$\varphi = w_a \delta a + w_b \delta b + w_c \delta c:$$

riducendo e tenendo conto del teorema (5) si può quindi scrivere

$$\delta U' = \int \left\{\left[\left(\frac{\partial w_b}{\partial a} - \frac{\partial w_a}{\partial b}\right) j_b - \left(\frac{\partial w_a}{\partial c} - \frac{\partial w_c}{\partial a}\right) j_c\right] \delta a + \cdots \right\} dS.$$

Ma, per essere il punto (a, b, c) a distanza finita dalla linea s', si ha

$$\Delta_2 v_a = \Delta_2 v_b = \Delta_2 v_c = 0,$$

$$\frac{\partial v_a}{\partial a} + \frac{\partial v_b}{\partial b} + \frac{\partial v_c}{\partial c} = -\int_{a'b'c'}^{\infty} \left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial a'} da' + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial b'} db' + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial c'} dc'\right) = \frac{1}{r},$$

epperò

$$\frac{\partial w_c}{\partial b} - \frac{\partial w_b}{\partial c} = -\Delta_2 v_a + \frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{\partial v_a}{\partial a} + \frac{\partial v_b}{\partial b} + \frac{\partial v_c}{\partial c}\right) = \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial a}, \qquad \text{etc.};$$

si giunge così all'espressione definitiva del decremento di U'

$$-\delta U' = \int \left[\left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial b} j_c - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial c} j_b\right)\delta a + \cdots\right] dS,$$

espressione la quale, come si vede, dipende unicamente dalla posizione (a', b', c') del polo e non reca più alcuna traccia del cammino d'integrazione s'.

Dalla forma di quest'espressione risulta, per l'ammessa ipotesi, che il cercato lavoro ponderomotore magnetoelettrico può riguardarsi come dovuto ad una forza di componenti

$$\left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial b} j_c - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial c} j_b\right) dS, \qquad \text{etc.}$$

agente su ciascun elemento dS del conduttore galvanico; forza la quale, come giova notare, è eguale e contraria alla cosidetta forza elettromagnetica *elementare* (cioè a quella donde si può concepire che nasca, per via di composizione, la forza G), la quale è invece applicata al polo. Se, al posto d'un polo unitario, s'immagina collocata in (a', b', c') una massa magnetica elementare $d\mu'$, e se poscia si considera un sistema continuo di tali masse, per guisa da ricostituire un corpo magnetico S', di funzione potenziale V', si ottengono così le seguenti espressioni delle componenti di forza magnetoelettrica esercitata da un tal corpo sull'elemento dS d'un conduttore galvanico:

$$\left(\frac{\partial V'}{\partial b} j_c - \frac{\partial V'}{\partial c} j_b\right) dS, \qquad \text{etc.,}$$

o meglio

$$(19) \qquad (F'_c j_b - F'_b j_c)\, dS, \qquad (F'_a j_c - F'_c j_a)\, dS, \qquad (F'_b j_a - F'_a j_b)\, dS,$$

dove F' è la forza magnetica del corpo.

Queste espressioni restano così stabilite (ammesso il postulato di cui sopra) nel supposto che l'elemento dS sia esterno al corpo magnetico S'. Per il caso in cui quell'elemento faccia parte dello spazio S' sembra mancare qualsiasi indicazione precisa circa l'esistenza e la natura della forza di cui qui si tratta. Se tuttavia si ammette che le componenti di questa forza sieno rappresentate *in ogni caso* dalle espressioni precedenti, si giunge a risultati concordanti colle teorie ricevute.

17. Accettando l'ipotesi testè accennata, se si designa con δL_p il lavoro ponderomotore esercitato dal corpo magnetico S' sul conduttore galvanico S, durante una deformazione infinitesima di quest'ultimo, si ha

$$\delta L_p = \int [(F'_c j_b - F'_b j_c)\delta a + \cdots] dS,$$

od anche, (1),

$$\delta L_p = \int [(G'_c j_b - G'_b j_c)\delta a + \cdots] dS - 4\pi \int [(m_z j_y - m_y j_z)\delta x + \cdots] d\Sigma,$$

dove G' è la forza polare od elettromagnetica del corpo S' e dove Σ è, come sempre, lo spazio comune ad S e ad S'.

Ora dall'eguaglianza

$$G'_c j_b - G'_b j_c = \frac{\partial V'_a}{\partial a} j_a + \frac{\partial V'_b}{\partial a} j_b + \frac{\partial V'_c}{\partial a} j_c - \left(\frac{\partial V'_a}{\partial a} j_a + \frac{\partial V'_a}{\partial b} j_b + \frac{\partial V'_a}{\partial c} j_c\right)$$

e dalle due analoghe si ricava

$$\begin{aligned}(G'_c j_b - G'_b j_c)\delta a + \cdots &= \delta V'_a \cdot j_a + \delta V'_b \cdot j_b + \delta V'_c \cdot j_c \\ &- \left[\left(\frac{\partial V'_a}{\partial a} j_a + \frac{\partial V'_a}{\partial b} j_b + \frac{\partial V'_a}{\partial c} j_c\right)\delta a + \cdots\right],\end{aligned}$$

dove le variazioni $\delta V'_{abc}$ si riferiscono ora al semplice spostamento $(\delta a, \delta b, \delta c)$ del punto potenziato (a, b, c). Il secondo membro di quest'eguaglianza, moltiplicato per dS, si riduce, ponendo per un momento

$$\varphi = V'_a \delta a + V'_b \delta b + V'_c \delta c$$

e facendo intervenire le condizioni (16) di variazione forzata dell'intensità di corrente, all'espressione

$$\begin{aligned}(\delta V'_a \cdot j_a + \delta V'_b \cdot j_b + \delta V'_c \cdot j_c) dS - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial a} j_a + \frac{\partial \varphi}{\partial b} j_b + \frac{\partial \varphi}{\partial c} j_c\right) dS \\ + V'_a \delta(j_a dS) + V'_b \delta(j_b dS) + V'_c \delta(j_c dS),\end{aligned}$$

ossia alla

$$\delta[(V'_a j_a + V'_b j_b + V'_c j_c) dS] - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial a} j_a + \frac{\partial \varphi}{\partial b} j_b + \frac{\partial \varphi}{\partial c} j_c\right) dS;$$

cosicchè, per essere nullo, (5), l'integrale del secondo gruppo di termini, si ottiene, (18),

$$(20) \qquad \int [(G'_c j_b - G'_b j_c)\delta a + \cdots] dS = \delta \int (V'_a j_a + V'_b j_b + V'_c j_c) dS = \delta \Pi .$$

La variazione $\delta\Pi$ ha quì un significato interamente diverso da quello che aveva nel § 15, si riferisce, cioè, alla deformazione dello spazio S luogo dei punti (a, b, c) ed alla conseguente variazione forzata dell'intensità j, mentre si suppone che resti inalterato lo spazio S' donde emana la terna potenziale V'_{abc}.

Con questo significato per $\delta\Pi$ si ha, quale espressione definitiva del lavoro elementare magnetoelettrico

$$(20_a) \qquad \delta L_p = \delta\Pi - 4\pi \int [(m_z j_y - m_y j_z)\delta x + \cdots] d\Sigma.$$

18. Si supponga ora che amendue i corpi S, S' subiscano ad un tempo una deformazione infinitesima, in guisa però che ciascuno dei loro punti comuni, se ne esistono, riceva nell'uno e nell'altro un solo e medesimo spostamento (come non può a meno di avvenire ogni volta che uno stesso elemento materiale è sede ad un tempo di polarizzazione magnetica e di flusso elettrico). Dalla somma delle due equazioni (18_a), (20_a) si ricava in tale supposizione

$$(21) \qquad \delta L_p + \delta L'_p = \delta\Pi ,$$

dove la variazione δ dell'espressione Π è ora *totale*, cioè relativa ad amendue i corpi ad un tempo. Questo risultato conduce a concludere che la quantità $-\Pi$, definita da (18), deve considerarsi come il *potenziale ponderomotore mutuo* dei due corpi. Il decremento di questa quantità (la quale si annulla quando i due corpi sono a distanza infinita fra loro) misura infatti, in ogni caso, il *totale lavoro ponderomotore mutuo* che si produce durante una qualunque deformazione infinitesima del sistema, deformazione accompagnata da quelle sole variazioni d'intensità magnetica e galvanica che sono strettamente *imposte* dalla deformazione stessa.

Quando i due corpi S, S' non hanno punti comuni, i lavori ponderomotori parziali compiuti separatamente sul magnete S' e sul conduttore S ammettono una determinazione distinta, la quale, a tenore delle equazioni (18_a), (20_a), è fornita semplicemente dalla rispettiva *variazione parziale* del potenziale Π. Quando invece esiste una parte Σ comune ai due corpi, non si può più distinguere un lavoro eseguito sul magnete da uno eseguito sul conduttore, e le due citate equazioni (18_a), (20_a) non definiscono questi due lavori se non in un modo puramente convenzionale, cioè nel supposto che la deformazione si compia, nella parte comune Σ, soltanto per l'uno o soltanto per l'altro dei due corpi, il che è fisicamente inconcepibile. Non è che sommando le dette due equazioni che si fa scomparire questa convenzione e che si riproduce quel risultato che sarebbesi ottenuto *ab initio,* se si fosse tenuto conto della variabilità simultanea dei due corpi.

È ora facile completare l'analisi delle forze che sollecitano ciascun elemento del sistema, senza distinzione di corpi, anzi con più diretto riguardo agli elementi che questi possono avere in comune. Si ha, (20), distinguendo per chiarezza con δ' la variazione parziale relativa alla sola distribuzione magnetica,

$$\delta \Pi = \int [\delta' V'_a j_a + \cdots + (G'_c j_b - G'_b j_c)\delta a + \cdots] dS,$$

od anche, utilizzando la verificazione già fatta nel § 15,

$$\delta \Pi = \int \{\delta'[(G_x m_x + G_y m_y + G_z m_z) dS] + (G'_z j_y - G'_y j_z) dS \delta x + \cdots\}$$

dove (x, y, z) designa, per comodo, un punto qualunque di S e di S' e dS l'elemento generico di volume circostante a questo punto. Di qui si ricava, (15),

$$\delta \Pi = \int \Big[\Big(\frac{\partial G_x}{\partial x} m_x + \frac{\partial G_y}{\partial x} m_y + \frac{\partial G_z}{\partial x} m_z + G'_z j_y - G'_y j_z \Big) \delta x + \cdots$$
$$+ G_x \Big(\frac{\partial \delta x}{\partial x} m_x + \frac{\partial \delta x}{\partial y} m_y + \frac{\partial \delta x}{\partial z} m_z \Big) + \cdots \Big] dS$$

e si conclude quindi senz'altro, ricordando le formole del § 14, che le azioni ponderomotrici *mutue* sono rappresentate da *forze traslatorie,* agenti su ciascun elemento di volume dS dell'uno o dell'altro corpo (e quindi in particolare della regione eventualmente comune ad essi), colle componenti

$$(21_a) \quad \left\{ \begin{aligned} &\Big(\frac{\partial G_x}{\partial x} m_x + \frac{\partial G_y}{\partial x} m_y + \frac{\partial G_z}{\partial x} m_z + G'_z j_y - G'_y j_z \Big) dS, \\ &\Big(\frac{\partial G_x}{\partial y} m_x + \frac{\partial G_y}{\partial y} m_y + \frac{\partial G_z}{\partial y} m_z + G'_x j_z - G'_z j_x \Big) dS, \\ &\Big(\frac{\partial G_x}{\partial z} m_x + \frac{\partial G_y}{\partial z} m_y + \frac{\partial G_z}{\partial z} m_z + G'_y j_x - G'_x j_y \Big) dS, \end{aligned} \right.$$

ed inoltre da *momenti rotatorî* e da *pressioni,* le di cui componenti sono ancora quelle delle formole (17_b), (17_c) del citato § 14, fattovi $X = G_x$, $Y = G_y$, $Z = G_z$, $(a, b, c) = (x, y, z)$.

Di proposito si è avvertito che tale rappresentazione non riguarda se non le *azioni mutue* (ponderomotrici) dei due corpi S ed S', poichè vi sarebbero poi anche da considerare quelle che ciascuno di questi corpi esercita sopra sè stesso. Ma queste ultime forze, la di cui determinazione non presenta d'altronde veruna difficoltà, sono propriamente estranee all'elettromagnetismo inteso nello stretto senso della parola.

19. È noto che quando un corpo magnetico è in presenza d'un conduttore galvanico, ogni variazione del sistema costituito da questi due corpi dà luogo, nel secondo, a produzione di *forze elettromotrici,* rivelate dai fenomeni d'*induzione magnetoelettrica.* Per dedurre l'espressione quantitativa di queste forze può valere la considerazione seguente, che trova la sua giustificazione nelle conclusioni stesse cui essa conduce.

Abbiasi il solito conduttore galvanico S, che per un momento si riguarderà come geometricamente ed elettricamente invariabile, ed un punto materiale (a', b', c'), arbitrariamente situato nello spazio. Se questo punto porta con sè una carica magnetica unitaria, fungendo come polo magnetico d'intensità 1, esso trovasi sollecitato dalla forza elettromagnetica G, emanante dal conduttore, la quale dà luogo, per uno spostamento infinitesimo $(\delta a', \delta b', \delta c')$ del punto materiale medesimo, ad un lavoro ponderomotore elementare

$$G_{a'} \delta a' + G_{b'} \delta b' + G_{c'} \delta c'.$$

La forza G non ammette funzione potenziale unica, nell'interno dello spazio S, e non ammette che una funzione potenziale polidroma, nello spazio esterno al conduttore: se, dunque, il punto materiale percorre una linea rientrante in sè stessa, la somma dei successivi lavori elementari analoghi al precedente riesce, in generale, *diversa da zero.*

Per rimuovere l'incongruenza che, in condizioni ordinarie, deriverebbe da questo fatto, bisogna ammettere che al già considerato lavoro ponderomotore se ne associi qualche altro, in virtù del quale, percorsa che sia la linea rientrante e ripristinato il tutto nelle condizioni originarie, il lavoro *totale* sia di nuovo *nullo.* Il modo più semplice di soddisfare a tale esigenza è di supporre che, insieme col precedente lavoro ponderomotore, si produca costantemente un altro lavoro esattamente eguale e contrario

$$- G_{a'} \delta a' - G_{b'} \delta b' - G_{c'} \delta c',$$

il quale non può essere che un lavoro *elettromotore,* cioè un lavoro che si compie sulle correnti del corpo S e che si estrinseca con una modificazione infinitesima delle loro intensità e direzioni, distruggendo così la supposta invariabilità del sistema galvanico nelle immaginate condizioni. Trattasi ora, innanzi tutto, d'indagare la legge delle forze elettromotrici a cui, nelle ammesse ipotesi, è dovuto questo lavoro elementare di compensazione, che si denoterà con δL_e.

Dalle espressioni (2) della forza G si deduce, (14),

$$\delta L_e = \int \left[\left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial b} j_c - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial c} j_b \right) \delta a' + \cdots \right] dS,$$

ossia

$$\delta L_e = \int \left[\left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial c} \delta b' - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial b} \delta c' \right) j_a + \cdots \right] dS,$$

cosicchè, denotando con δt la durata infinitesima dello spostamento e ponendo

$$\delta L_e = \delta t \int (e_a j_a + e_b j_b + e_c j_c) \, dS, \tag{22}$$

si ottiene

$$\left\{ \begin{aligned} e_a \delta t &= \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial c} \delta b' - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial b} \delta c', \\ e_b \delta t &= \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial a} \delta c' - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial c} \delta a', \\ e_c \delta t &= \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial b} \delta a' - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial a} \delta b'. \end{aligned} \right. \tag{22_a}$$

Giova notare che ai secondi membri di queste equazioni si potrebbero aggiungere ordinatamente dei termini della forma

$$\frac{\partial \varphi}{\partial a} \delta t, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial b} \delta t, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial c} \delta t,$$

dove φ denota una qualunque funzione monodroma e continua delle coordinate (a, b, c): e ciò in virtù del teorema generale (5). Ma siffatta aggiunta verrà fatta più opportunamente in seguito. Importa invece avvertire subito che, nell'interpretazione idrodinamica del § 4, il lavoro (22) può considerarsi come quello che verrebbe effettuato sul fluido mobile j, nel tempuscolo δt, dalla forza unitaria e di componenti (22_a). Questa forza è precisamente quella che, nell'ordinario linguaggio ed in armonia colle ordinarie definizioni, si qualifica come *forza elettromotrice* provocata, nel punto (a, b, c) del conduttore, dal polo magnetico mobile (a', b', c').

Si è supposto che il corpo S fosse immobile; e, in particolare, nelle espressioni (22_a) delle componenti di e, è stato supposto immobile il punto materiale (a, b, c). È necessario aggiungere un'ipotesi, per il caso che questo punto sia in moto: quest'ipotesi è che l'azione elettromotrice del polo (a', b', c') sul punto (a, b, c) non muti se ad amendue questi punti si attribuisca un moto addizionale comune, in particolare quello che riduce il secondo punto all'immobilità. Ammesso questo principio, cioè facendo dipendere la forza e dallo spostamento *relativo* dei due punti, se il conduttore S è variabile di posizione, od anche di forma, in guisa che, nel tempuscolo δt, il suo punto materiale (a, b, c) riceva lo spostamento $(\delta a, \delta b, \delta c)$, si devono sostituire alle formole (22_a) le seguenti:

$$(22_{a'})\qquad \begin{cases} e_a \delta t = \dfrac{\partial \frac{1}{r}}{\partial c}(\delta b' - \delta b) - \dfrac{\partial \frac{1}{r}}{\partial b}(\delta c' - \delta c), \\[2ex] e_b \delta t = \dfrac{\partial \frac{1}{r}}{\partial a}(\delta c' - \delta c) - \dfrac{\partial \frac{1}{r}}{\partial c}(\delta a' - \delta a), \\[2ex] e_c \delta t = \dfrac{\partial \frac{1}{r}}{\partial b}(\delta a' - \delta a) - \dfrac{\partial \frac{1}{r}}{\partial a}(\delta b' - \delta b). \end{cases}$$

Il principio testè invocato è abbastanza ovvio per sè medesimo. Esso è stato ammesso, fin dalle prime sue ricerche sulla teoria dell'induzione, da F. E. NEUMANN *), il quale ne ha anche addotto un argomento positivo, desunto dalla rotazione terrestre. Ad ulteriore giustificazione possono servire le considerazioni seguenti. Se i due punti (a, b, c) ed (a', b', c') appartengono ad un sistema che si sposta rigidamente, si può porre

$$\delta a = \alpha + \mu c - \nu b, \text{ etc.}; \qquad \delta a' = \alpha + \mu c' - \nu b', \text{ etc.},$$

dove α, β, γ, λ, μ, ν sono costanti infinitesime. Di qui si deduce

$$\delta a' - \delta a = \mu(c' - c) - \nu(b' - b), \text{ etc.},$$

---

*) *Die mathematische Gesetze der inducirten elektrischer Ströme*, § 4, Abhandlungen der Berliner Akademie der Wissenschaften (1846); oppure Gesammelte Werke, vol. III, pp. 259-343.

epperò

$$e_a\delta t=(a'-a)\left(\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial a}\lambda+\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial b}\mu+\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial c}\nu\right)-\lambda\left[\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial a}(a'-a)+\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial b}(b'-b)+\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial c}(c'-c)\right]$$

$$=\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{\partial r}{\partial a'}\lambda+\frac{\partial r}{\partial b'}\mu+\frac{\partial r}{\partial c'}\nu\right),$$

o, più semplicemente,

$$e_a\,\delta t=\frac{\partial\varphi}{\partial a},\qquad e_b\,\delta t=\frac{\partial\varphi}{\partial b},\qquad e_c\,\delta t=\frac{\partial\varphi}{\partial c},$$

dove la funzione φ è definita da

$$\varphi=\frac{\partial r}{\partial a'}\lambda+\frac{\partial r}{\partial b'}\mu+\frac{\partial r}{\partial c'}\nu.$$

Questa funzione è monodroma dovunque, fuorchè nel punto (a', b', c'), ove ha infiniti valori (tutti finiti): ma questa circostanza non impedisce di concludere che, per una qualunque porzione S_1 di S, mobile rigidamente insieme col polo (a', b', c'), si ha

$$\delta t\int(e_a j_a+e_b j_b+e_c j_c)\,dS_1=\int\left[\frac{\partial(\varphi j_a)}{\partial a}+\frac{\partial(\varphi j_b)}{\partial b}+\frac{\partial(\varphi j_c)}{\partial c}\right]dS_1=-\int\varphi j_{n_1}\,d\sigma_1,$$

dove σ_1 è la superficie terminale di S_1. Dunque il lavoro elettromotore del polo mobile sopra una porzione S_1 di conduttore, colla quale il polo stesso possa riguardarsi come rigidamente connesso, non dipende che dalla componente normale di j nei punti della superficie σ_1 che termina questa porzione; e poichè il campo S_1 può intendersi esteso fino al limite estremo di quella parte di conduttore che si trovi per avventura in tali condizioni di collegamento rigido col polo, si vede che il detto lavoro non dipende che dallo stato galvanico del limite stesso, cioè dei punti in cui *cessa* il collegamento rigido. Che se l'intiero conduttore fosse nelle condizioni quì supposte, si avrebbe sulla superficie limite $j_n = 0$ ed il lavoro elettromotore sarebbe assolutamente nullo: conclusioni tutte che stanno in perfetto accordo coi fatti osservati *).

---

*) Durante la stampa delle presenti *Considerazioni*, è apparsa una Memoria del chiaro C. NEUMANN, intitolata: *Ueber einen eigenthümlichen Fall elektrodinamischer Induction* (nel Tomo XVIII delle Abhandlungen der Kgl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften), dalla quale risulta la possibilità di eccezioni al sovracitato canone di F. E. NEUMANN. Quest'importante pubblicazione, di cui mancherebbe quì il modo di rendere conto più distintamente, dev'essere raccomandata all'attenzione di tutti gli studiosi della materia.

20. Suppongasi ora che nel punto (a', b', c') sia concentrata una massa magnetica non più unitaria, ma infinitamente piccola ed uguale a $d\mu'$, talchè la forza elettromotrice diventi uguale a $e\,d\mu'$; indi s'immagini un sistema continuo di tali masse $d\mu'$ (la di cui somma algebrica sia 0), in guisa da ricostituire il già considerato corpo S', luogo dei punti (a', b', c'). La forza elettromotrice totale E esercitata da questo corpo magnetico, mobile ed eventualmente anche deformabile, sul punto qualunque (a, b, c), considerato come appartenente allo spazio occupato da un conduttore galvanico, è manifestamente definita dalle componenti

$$E_a = \int e_a d\mu', \qquad E_b = \int e_b d\mu', \qquad E_c = \int e_c d\mu',$$

dove gli integrali si estendono a tutte le masse magnetiche contenute nel corpo S': se quindi si denota con V' la funzione potenziale di questo corpo, si ottiene, $(22_{a'})$,

$$E_a \delta t = \frac{\partial V'}{\partial b}\delta c - \frac{\partial V'}{\partial c}\delta b + \frac{\partial}{\partial c}\int \frac{\delta b'\, d\mu'}{r} - \frac{\partial}{\partial b}\int \frac{\delta c'\, d\mu'}{r}, \qquad \text{etc.}$$

I tre integrali che compajono in queste formole sono già stati incontrati nel § 15, dove anzi essi figurano già nelle differenze

$$\frac{\partial}{\partial c}\int \frac{\delta b'\, d\mu'}{r} - \frac{\partial}{\partial b}\int \frac{\delta c'\, d\mu'}{r}, \qquad \text{etc.,}$$

poste ivi sotto le forme equivalenti

$$-\int \left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial c'}\delta b' - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial b'}\delta c' \right) d\mu', \qquad \text{etc.};$$

si possono quindi assegnare subito queste altre espressioni delle differenze in questione:

$$-\delta V'_a + 4\pi(m_c \delta b - m_b \delta c) + \frac{\partial [N']}{\partial a}, \qquad \text{etc.}$$

con che si ottiene

$$E_a \delta t = -\delta V'_a + \left(4\pi m_c - \frac{\partial V'}{\partial c}\right)\delta b - \left(4\pi m_b - \frac{\partial V'}{\partial b}\right)\delta c + \frac{\partial [N']}{\partial a}, \qquad \text{etc.,}$$

o più semplicemente, (1),

$$E_a \delta t = -\delta V'_a + G'_c \delta b - G'_b \delta c + \frac{\partial [N']}{\partial a}, \qquad \text{etc.,}$$

dove G' è la forza polare od elettromagnetica del corpo S'.

Non è necessario svolgere più minutamente l'espressione designata con [N'], poichè, come è già stato notato nel § precedente, è sempre lecito aggiungere alle componenti d'una forza elettromotrice le omologhe derivate d'una qualunque funzione monodroma e continua Φ. Per tal modo le espressioni definitive delle componenti di *forza elettromotrice magnetoelettrica*, in un punto qualunque (a, b, c), sono le seguenti:

$$(23)\qquad \begin{cases} E_a\delta t = -\delta V'_a + G'_c\delta b - G'_b\delta c - \dfrac{\partial\Phi}{\partial a}\delta t, \\[2ex] E_b\delta t = -\delta V'_b + G'_a\delta c - G'_c\delta a - \dfrac{\partial\Phi}{\partial b}\delta t, \\[2ex] E_c\delta t = -\delta V'_c + G'_b\delta a - G'_a\delta b - \dfrac{\partial\Phi}{\partial c}\delta t, \end{cases}$$

dove le variazioni $\delta V'_{abc}$ sono prese nello stesso senso che nel § 15.

È ora facile assegnare l'espressione definitiva del totale lavoro elettromotore δL_e, cioè della quantità

$$\delta L_e = \delta t\int(E_a j_a + E_b j_b + E_c j_c)\,dS.$$

Si ha infatti

$$\begin{aligned} &(E_a j_a + E_b j_b + E_c j_c)\delta t \\ &= -[\delta V'_a\cdot j_a + \delta V'_b\cdot j_b + \delta V'_c\cdot j_c + (G'_c j_b - G'_b j_c)\delta a + \cdots] \\ &\quad - \left(\frac{\partial\Phi}{\partial a}j_a + \frac{\partial\Phi}{\partial b}j_b + \frac{\partial\Phi}{\partial c}j_c\right)\delta t, \end{aligned}$$

epperò, moltiplicando per dS ed integrando su tutto lo spazio S, con riguardo al teorema (5) e ad una formola già incontrata nel § 18, si ottiene

$$(23_a)\qquad \delta L_e = -\delta\Pi,$$

dove il secondo membro rappresenta la variazione negativa *totale* di Π. Questo risultato si può enunciare dicendo che Π è il *potenziale elettromotore* del magnete S' sul conduttore S. Questo potenziale è *eguale e contrario* al *potenziale ponderomotore* $-\Pi$ (§ 18) degli stessi due corpi.

Quando i corpi S, S' non hanno punti comuni, si possono distinguere (come già si notò nel § 18 a proposito dei lavori ponderomotori) due separati lavori elettromotori, di cui l'equazione (23_a) non somministra che la somma. La prima parte, proveniente dalla variazione del solo corpo S', è il lavoro elettromotore dovuto alla deformazione del corpo magnetico in presenza del conduttore; la seconda, proveniente dalla variazione del solo corpo S, è dovuta alla deformazione del conduttore in presenza del corpo magnetico.

Il confronto dei due risultati (21), (23_a) dà

$$(23_b)\qquad \delta L_p + \delta L_e + \delta L'_p = 0,$$

talchè qualora, nelle ammesse condizioni di variabilità dei due corpi, non si producesse verun altro lavoro mutuo all'infuori di quelli fin quì considerati, si dovrebbe concludere che l'*energia mutua* (elettromagnetica) dei due corpi è *nulla;* intendendo per energia *mutua* quella che nasce unicamente dalla simultanea sussistenza dei due corpi, l'uno in presenza dell'altro.

21. Ma quest'ultima conclusione non si potrebbe senz'altro estendere a eondizioni meno particolari di quelle che sono state ammesse fin quì.

I due corpi S, S' sieno fissi, ma lo stato magnetico del secondo sia, per qualsivoglia cagione, variabile. Denotando con (δ) le variazioni che subiscono, nel tempuscolo δt, le funzioni V'_{xyz} per effetto di tale variabilità, si ha

$$-(\delta \Pi) = -\int [(\delta V'_a) j_a + (\delta V'_b) j_b + (\delta V'_c) j_c]\, dS.$$

Ora, nella già più volte invocata rappresentazione idrodinamica, il secondo membro di quest'eguaglianza esprime il lavoro fatto sul fluido mobile j, nel tempuscolo δt, dalla forza unitaria di componenti

$$(24)\qquad -\frac{(\delta V'_a)}{\delta t}, \qquad -\frac{(\delta V'_b)}{\delta t}, \qquad -\frac{(\delta V'_c)}{\delta t},$$

e ciò corrisponde, nel linguaggio ordinario, ad un lavoro elettromotore provocato da semplice variazione d'intensità magnetica, lavoro dovuto ad una forza elettromotrice di cui le precedenti tre quantità sono le componenti locali. Una tal forza si produce effettivamente ed è la forza d'*induzione magnetoelettrica per variazione d'intensità magnetica:* i precedenti valori delle sue componenti si manifestano conformi al vero. Ne risulta che le espressioni (23) delle componenti di forza elettromotrice magnetoelettrica si mantengono valide anche se la variazione δ della terna potenziale magnetica è assolutamente arbitraria; e parimente si mantiene valida l'equazione (23_a) quand'anche la variazione δ della quantità Π acquisti il significato più generale possibile *per ciò che spetta alla distribuzione magnetica,* cioè contempli ad un tempo ogni possibile modificazione infinitesima di posizione, di forma e d'intensità magnetica.

Ma poichè ad una semplice variazione d'intensità magnetica non corrisponde verun lavoro ponderomotore elettromagnetico (cioè di S sopra S'), siffatta estensione del significato di $\delta\Pi$ non è applicabile all'equazione (21); talchè, quando si verifica una variazione dell'anzidetta specie, non sussiste più la relazione (23_b). Si può tuttavia fare in proposito una riflessione importante, che verrà esposta nel § successivo: quì giova aggiungere ancora un'utile osservazione circa le espressioni (24).

Supposto fisso il corpo magnetico, queste espressioni equivalgono, qualunque sia il punto potenziato (x, y, z), a

$$-\frac{\partial V'_x}{\partial t}, \quad -\frac{\partial V'_y}{\partial t}, \quad -\frac{\partial V'_z}{\partial t}.$$

S'immagini che, in un brevissimo intervallo di tempo, durante il quale questo punto (considerato come appartenente ad un campo galvanico) sia, o possa riguardarsi come immobile, il corpo S', primitivamente neutro, acquisti (in qualsiasi modo) la sua magnetizzazione attuale. Gli integrali delle precedenti espressioni rispetto al tempo, estesi al detto intervallo, sono rispettivamente eguali a

$$-V'_x, \quad -V'_y, \quad -V'_z.$$

Le quantità così ottenute possono riguardarsi, per una plausibile analogia, come le componenti della *forza elettromotrice istantanea* cui darebbe luogo la *repentina magnetizzazione* del corpo S', in presenza d'un conduttore cui appartenesse il punto (x, y, z). Le opposte quantità

$$V'_x, \quad V'_y, \quad V'_z$$

sono da riguardarsi, per conseguenza, come le componenti della forza elettromotrice istantanea cui darebbe luogo la repentina smagnetizzazione del medesimo corpo, nelle medesime condizioni.

È questa una notevolissima proprietà delle funzioni V'_{xyz}, che può essere assunta come una nuova loro definizione.

Giova accennare quì sommariamente come si atteggino i risultati ottenuti circa l'induzione magnetoelettrica, quando il sistema galvanico si riduca ad una corrente filiforme chiusa, di direttrice s e d'intensità J.

Assumendo come elemento di volume dS un tronco infinitesimo del filo percorso dalla corrente, si ottengono le relazioni ben note

$$j_a dS = J da, \quad j_b dS = J db, \quad j_c dS = J dc,$$

dove da, db, dc sono le componenti dell'elemento lineare ds, asse del tronco. Ne risulta che Π prende la forma

$$\Pi = J\Pi_1,$$

dove

$$\Pi_1 = \int_s (V'_a da + V'_b db + V'_c dc),$$

e che le condizioni (16) di variazione forzata diventano

$$\delta(J da) = J \delta da, \quad \delta(J db) = J \delta db, \quad \delta(J dc) = J \delta dc,$$

riassumendosi cosi nell'unica

$$\delta J = 0.$$

Conseguentemente il lavoro elettromotore è espresso da

$$-\delta \Pi = -J \delta \Pi_1$$

e la totale forza elettromotrice indotta è

$$-\frac{\partial \Pi_1}{\partial t}.$$

Si noterà [equazione (2_d) del § 1] che Π_1 può anche riguardarsi come il flusso di forza polare attraverso la linea chiusa s.

22. Finora si è considerato lo stato magnetico dol corpo S' come indipendente dallo stato galvanico del conduttore S. Ora si supporrà che la magnetizzazione del corpo S' sia quella che è dovuta unicamente all'*induzione elettromagnetica* del conduttore S sul magnete *temporario* S'.

È generalmente ammesso *) che per tale induzione sussistano le ordinarie equazioni di Poisson [equazioni (16) del § 13 *M. M.*], e ciò quand'anche le correnti inducenti attraversino il corpo magnetico indotto. Nel caso qui considerato si può dunque porre

$$(25) \qquad F'_x + G_x = \frac{\partial \psi}{\partial m_x}, \qquad F'_y + G_y = \frac{\partial \psi}{\partial m_y}, \qquad F'_z + G_z = \frac{\partial \psi}{\partial m_z},$$

dove (x, y, z) è un punto qualunque del corpo magnetico.

Da queste equazioni si ha, denotando con δ' una variazione qualunque della magnetiz-

*) Cfr. Kirchhoff, *Zur Theorie des in einem Eisenkörper inducirten Magnetismus*, Gesammelte Abhandlungen, pag. 230.

zazione m,

$$\int (F'_x \delta' m_x + \cdots) dS' + \int (G_x \delta' m_x + \cdots) dS' = \delta' \int \psi \, dS';$$

da proprietà note si ha inoltre

$$\int (F'_x \delta' m_x + \cdots) dS' = \int (\delta' F'_x \cdot m_x + \cdots) dS' :$$

dunque

$$\frac{1}{2} \delta' \int (F'_x m_x + \cdots) dS' + \delta' \int (G_x m_x + \cdots) dS' = \delta' \int \psi \, dS',$$

ossia (§ 11)

$$\delta'(P' - \Pi) = 0, \tag{25_a}$$

dove la quantità

$$P' = \frac{1}{2} \int \left(\frac{\partial V'}{\partial x} m_x + \cdots \right) dS' + \int \psi \, dS' = \frac{1}{8\pi} \int F'^2 dS_\infty + \int \psi \, dS'$$

è l'autopotenziale del corpo magnetico (§ 12 *M. M.*) e Π è l'espressione (18). Dalle stesse equazioni (25) si ricava ancora

$$\int (F'_x m_x + \cdots) dS' + \int (G_x m_x + \cdots) dS' = 2 \int \psi \, dS',$$

che è quanto dire

$$\Pi = 2 P'. \tag{25_b}$$

S'immagini ora che, rimanendo invariati i due corpi S ed S' quanto a forma ed a posizione, la distribuzione galvanica nel primo e la magnetica nel secondo variino simultaneamente, mantenendosi in costante equilibrio d'induzione (magnetica), per modo che le equazioni (25) si trovino costantemente soddisfatte. Restando, in tale ipotesi, costantemente soddisfatta anche la (25_b), che è un corollario di quelle, si ha

$$\delta \Pi + \delta' \Pi = 2 \delta' P',$$

ove δ designa la variazione parziale dovuta alla modificazione della distribuzione galvanica e δ' la variazione parziale dovuta alla *corrispondente* modificazione della distribuzione magnetica. Ora dall'equazione (25_a), applicata all'equilibrio istantaneo d'induzione (in cui la distribuzione galvanica deve considerarsi come fissa), si deduce

$$\delta' P' = \delta' \Pi \, ;$$

si ha dunque

$$(25_c) \qquad \delta \Pi = \delta' \Pi = \delta' P',$$

talchè la variazione totale di Π si divide in due parti eguali, procedenti l'una dalla variazione del sistema galvanico, l'altra da quella del magnetico.

La quantità $\delta' \Pi$ (costantemente eguale a $\delta' P'$, cioè all'aumento d'energia magnetica) si può considerare come il *lavoro magnetomotore* compiuto da S sopra S' durante la variazione δ' della distribuzione magnetica, cosicchè la quantità $-\Pi$, che funge da potenziale ponderomotore fra S ed S', funge anche da *potenziale magnetomotore* del primo corpo sul secondo (diventando così l'equazione (25_b) del tutto analoga alla (16_a) del § 13 *M. M.*). La quantità $-\delta' \Pi$ dev'essere invece considerata, dietro ciò che s'è detto nel § precedente, come il lavoro elettromotore compiuto da S' sopra S, durante la variazione δ' della distribuzione magnetica. Il lavoro magnetomotore $\delta' \Pi$ ed il lavoro elettromotore $-\delta' \Pi$ sono dunque costantemente *eguali* e *contrarî.*

Tenendo conto di questa proprietà ed immaginando che, dopo l'avvenuta modificazione simultanea (a sede fissa) delle due distribuzioni, intervenga una variazione (per deformazione) di amendue i corpi, si riconosce (§ 20, in fine) che in ogni caso (quando il magnete sia temporario) la somma di tutti i lavori mutui, cioè del totale lavoro ponderomotore, del lavoro elettromotore e del magnetomotore, è uguale a 0. Donde si conclude che l'energia mutua (elettromagnetica) del conduttore S e del magnete indotto S' deve considerarsi come *nulla.*

23. Per tradurre in simboli la conclusione precedente, si rappresenti con $\delta_0 + \delta_1$ la variazione del sistema galvanico, dove δ_0 è la variazione *libera,* che avviene a conduttore fisso, δ_1 è la variazione *forzata,* che avviene a conduttore variabile. Medesimamente si rappresenti con $\delta'_0 + \delta'_1$ la variazione del sistema magnetico, ritenendo che la variazione libera δ'_0, a magnete fisso, sia quella che corrisponde, per induzione, alla variazione del sistema galvanico. Le espressioni dei diversi lavori mutui anzidetti sono, per tali segnature, le seguenti:

lavoro ponderomotore totale $= (\delta_1 + \delta'_1)\Pi$ .... (§ 18)

lavoro elettromotore $= -(\delta'_0 + \delta'_1 + \delta_1)\Pi$ ... (§ 20 e 21)

lavoro magnetomotore $= \delta'_0 \Pi$ .... (§ 22)

e la somma di questi lavori è visibilmente nulla.

Questa verificazione, che per verità può parere superflua, è stata qui accennata per mettere in più immediata evidenza il fondamentale divario che interviene quando trattisi invece di *due sistemi galvanici*, posti in presenza l'uno dell'altro (sistemi che giova supporre non abbiano punti in comune).

Sieno S ed S' questi due sistemi e sieno j, j' le loro intensità specifiche. Il potenziale ponderomotore mutuo è ancora espresso da

$$-\Pi = -\int (V'_a j_a + V'_b j_b + V'_c j_c)\, dS,$$

dove V'_{abc} è la terna potenziale del secondo sistema. La deduzione di questa forma del potenziale mutuo escirebbe dall'argomento del presente scritto: essa è d'altronde ben nota e non va soggetta ad obbiezione di sorta. Ciò posto se, ritenendo le designazioni precedenti per le variazioni parziali (senza che ora sussista più veruna relazione necessaria fra $\delta_0 \Pi$ e $\delta'_0 \Pi$), si formano le espressioni dei varî lavori dovuti alle azioni mutue, si trova

$$\begin{aligned} &\text{lavoro ponderomotore totale} &&= (\delta_1 + \delta'_1)\Pi, \\ &\text{lavoro elettromotore in } S &&= -(\delta'_0 + \delta'_1 + \delta_1)\Pi, \\ &\text{lavoro elettromotore in } S' &&= -(\delta_0 + \delta_1 + \delta'_1)\Pi, \end{aligned}$$

e quindi

$$\text{lavoro mutuo totale} = -(\delta_0 + \delta_1 + \delta'_0 + \delta'_1)\Pi = -\delta\Pi,$$

dove la caratteristica δ rappresenta il complesso di tutte le variazioni parziali. Di qui si conclude che l'energia mutua (elettrodinamica) dei due sistemi galvanici è misurata da $+\Pi$.

Note considerazioni permettono di stabilire, dietro ciò, che l'energia propria (elettrodinamica) d'un sistema galvanico S è misurata da

$$\frac{1}{2}\int (V_a j_a + V_b j_b + V_c j_c)\, dS,$$

dove V_{abc} è la terna potenziale del sistema stesso. Quest'espressione è, come quella dell'energia mutua, trasformabile in varî modi; una forma specialmente notevole ed acconcia allo scopo attuale è

$$\frac{1}{8\pi}\int G^2\, dS_\infty .$$

Ciò premesso, ritornando alla considerazione dei due corpi S, S', galvanico il primo, magnetico (per induzione) il secondo, è facile calcolare l'energia totale (elettromagnetica) del sistema da essi formato. Essendo nulla (§ 22) l'energia mutua, la totale energia cercata è semplicemente la somma delle due energie parziali, cioè

$$P' + \frac{1}{8\pi}\int G^2 \, dS_\infty .$$

Ma si ha, (25_b),

$$P' = \frac{1}{2}\int (V'_a j_a + V'_b j_b + V'_c j_c)\, dS ,$$

ovvero, (12),

$$P' = \frac{1}{8\pi}\int (G_x G'_x + G_y G'_y + G_z G'_z)\, dS_\infty :$$

dunque l'energia totale, che si denota nuovamente con Π, è rappresentata da

$$\Pi = \frac{1}{8\pi}\int [G_x(G_x + G'_x) + \cdots]\, dS_\infty .$$

Ora il sistema dei due corpi S, S' si può riguardare come costituente un unico sistema *misto,* della specie di quelli considerati nel § 10, e si può quindi, ponendo

$$\mathbf{F}_x = F'_x + G_x , \text{ etc.}; \qquad \mathbf{G}_x = G'_x + G_x , \qquad \text{etc.};$$

considerare $\mathbf{F}$ come la forza magnetica e $\mathbf{G}$ come la forza elettromagnetica emanante da questo sistema misto. Tenendo conto del teorema di ortogonalità integrale (§ 9 *M. M.*) si può quindi scrivere la seguente espressione dell'energia totale:

$$\Pi = \frac{1}{8\pi}\int (\mathbf{F}_x \mathbf{G}_x + \mathbf{F}_y \mathbf{G}_y + \mathbf{F}_z \mathbf{G}_z)\, dS_\infty . \tag{26}$$

Quando manca la magnetizzazione, quest'espressione riproduce l'energia del sistema galvanico; essa si riduce invece a zero (per il citato teorema d'ortogonalità) quando manca la distribuzione galvanica: risultato che non deve sorprendere, poichè mancando le forze inducenti deve mancare ogni magnetizzazione. Quando la magnetizzazione fosse anche solo in parte permanente, la formola precedente non sarebbe più (generalmente parlando) applicabile.

24. Colle segnature testè adottate, le equazioni d'indùzione (25) diventano

$$\mathbf{F}_x = \frac{\partial \psi}{\partial m_x}, \qquad \mathbf{F}_y = \frac{\partial \psi}{\partial m_y}, \qquad \mathbf{F}_z = \frac{\partial \psi}{\partial m_z}$$

e dànno

$$m_x = \Psi'(F_x), \qquad m_y = \Psi'(F_y), \qquad m_z = \Psi'(F_z),$$

dove Ψ è la quadratica reciproca di ψ. Di qui risulta

$$G_x = F_x + 4\pi\Psi'(F_x), \qquad \text{etc.}$$

o più brevemente

$$(26_a) \qquad G_x = \Phi'(F_x), \qquad G_y = \Phi'(F_y), \qquad G_z = \Phi'(F_z),$$

dove Φ è in sostanza quella stessa funzione quadratica che è stata designata col medesimo simbolo nel § 14 *M. M.*, cioè (simbolicamente)

$$(26_b) \qquad \Phi(F) = \frac{1}{2}F^2 + 4\pi\Psi(F).$$

Ne risulta che si può anche porre, (26),

$$\Pi = \frac{1}{4\pi}\int\Phi(F)\,dS_\infty,$$

espressione che si riconduce facilmente a quella della somma delle due energie parziali, galvanica e magnetica.

Il problema dell'induzione di S sopra S' si riassume (§ 14 *M. M.*) nelle equazioni

$$\frac{\partial\Phi'(F_x)}{\partial x} + \frac{\partial\Phi'(F_y)}{\partial y} + \frac{\partial\Phi'(F_z)}{\partial z} = 0,$$

$$D\left[\Phi'(F_x)\frac{\partial x}{\partial n} + \Phi'(F_y)\frac{\partial y}{\partial n} + \Phi'(F_z)\frac{\partial z}{\partial n}\right] = 0,$$

le quali determinano la funzione potenziale magnetica V', in virtù delle relazioni

$$F_x = G_x - \frac{\partial V'}{\partial x}, \qquad \text{etc.}$$

Per il calcolo della terna potenziale mista V_{xyz} si può utilmente ricorrere alla seconda forma, (2_e) § 1, delle funzioni ausiliari M_{xyz}, ponendo, (26_a),

$$M_x = \frac{1}{4\pi}\int\Phi'(F_a)\frac{dS_\infty}{r}, \qquad \text{etc.}$$

Quando i coefficienti della quadratica Φ sono costanti, si può far dipendere direttamente la terna $\boldsymbol{M}_{xyz}$ dalla M_{xyz}. Basterà un esempio semplicissimo per chiarire questo punto.

Trattisi d'un mezzo magnetico indefinito ed isotropo, col coefficiente di permeabilità μ. Si ha in tal caso

$$\Phi = \frac{1}{2}\mu \boldsymbol{F}^2$$

e conseguentemente

$$\boldsymbol{M}_x = \frac{\mu}{4\pi}\int \boldsymbol{F}_a \frac{d S_\infty}{r} = \frac{\mu}{4\pi}\int \left(G_a - \frac{\partial V'}{\partial a}\right)\frac{d S_\infty}{r}$$

$$= \frac{\mu}{4\pi}\int G_a \frac{\partial S_\infty}{r} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\mu}{4\pi}\int \frac{V' d S_\infty}{r}\right),$$

talchè, per la formazione della terna $\boldsymbol{V}_{xyz}$, basta prendere

$$\boldsymbol{M}_x = \frac{\mu}{4\pi}\int \frac{G_a d S_\infty}{r}, \qquad \text{etc.},$$

che è quanto dire

$$\boldsymbol{M}_x = \mu M_x, \qquad \text{etc.}$$

[dove M_{xyz} è la terna (2_e) relativa alla sola parte galvanica del sistema]. Di quì seguono le semplicissime espressioni

$$\boldsymbol{V}_x = \mu V_x, \qquad \boldsymbol{V}_y = \mu V_y, \qquad \boldsymbol{V}_z = \mu V_z,$$

che sono le cercate.

Ma questa riduzione così notevole non si verifica che nel caso particolare ora considerato.

XCIX.

SULL'ESPRESSIONE ANALITICA DEL PRINCIPIO DI HUYGENS.

Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, tomo I (1892), 1º semestre, pp. 99-108.

L'esatta espressione analitica del principio di HUYGENS è stata data da KIRCHHOFF (nella Memoria *Zur Theorie der Lichtstrahlen,* 1882), mercè un'ingegnosa applicazione del teorema di GREEN: essa serve oggimai di base alla teoria razionale dei più fondamentali fenomeni ottici. In una mia Nota del 1889 *Sul principio di* HUYGENS *), ho tratto occasione da qualche appunto formulato in proposito dal prof. G. A. MAGGI per proporre alcune varianti alla deduzione di KIRCHHOFF; la quale, così modificata, è stata accolta dal sig. P. DUHEM nel suo interessante Corso d'idrodinamica, elasticità ed acustica (Parigi 1891).

Senonchè, riprendendo in esame quest'argomento, ho riconosciuto che la deduzione in discorso può essere ancora notevolmente semplificata e che, in ispecie, può venirne eliminata ogni molesta distinzione d'integrali *proprî* ed *improprî;* e ciò col generalizzare, in un senso diverso dall'ordinario, la formola di GREEN. Mi propongo di qui esporre il definitivo procedimento di dimostrazione cui così si perviene, approfittando dell'occasione per indicare un'ulteriore estensione che si può dare al risultato finale e da cui si possono trarre alcune utili conclusioni.

Sia S uno spazio qualunque (che giova dapprima supporre finito), σ la superficie che lo limita, n la normale interna di questa, r la distanza d'un qualunque elemento

*) Rendiconti del Reale Istituto Lombardo, serie II, tomo XXII (1889), pp. 428-438; oppure queste OPERE, tomo IV, pp. 310-319.

dS o $d\sigma$ da un *polo* arbitrario, ma fisso: sieno inoltre φ ed F due funzioni delle coordinate x, y, z dei punti di S monodrome, continue, finite e derivabili, insieme colle loro derivate prime. Dall'identità seguente:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(\varphi\frac{\partial F}{\partial x}-F\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)\frac{1}{r}\right]=\left(\varphi\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}-F\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\right)\frac{1}{r}-\left(\varphi\frac{\partial F}{\partial x}-F\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)\frac{\partial r}{\partial x}\frac{1}{r^2}$$

e dalle due analoghe, osservando essere

$$\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{\partial x}{\partial r},\qquad\frac{\partial r}{\partial y}=\frac{\partial y}{\partial r},\qquad\frac{\partial r}{\partial z}=\frac{\partial z}{\partial r},$$

si deduce

$$\sum\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(\varphi\frac{\partial F}{\partial x}-F\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)\frac{1}{r}\right]=(\varphi\Delta_2F-F\Delta_2\varphi)\frac{1}{r}-\left(\varphi\frac{\partial F}{\partial r}-F\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)\frac{1}{r^2};$$

epperò, integrando su tutto lo spazio S, si può scrivere

$$\int(\varphi\Delta_2F-F\Delta_2\varphi)\frac{dS}{r}+\int\left(\varphi\frac{\partial F}{\partial n}-F\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)\frac{d\sigma}{r}+\int\left[\left(\frac{\partial(F\varphi)}{\partial r}-2\varphi\frac{\partial F}{\partial r}\right)\right]\frac{dS}{r^2}=0.$$

Ora in virtù d'un teorema di Gauss, traduzione pressochè intuitiva del processo d'integrazione per coordinate polari, si ha

$$\int\frac{\partial(F\varphi)}{\partial r}\frac{dS}{r^2}=\int F\varphi\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}d\sigma-(\sigma)_0F_0\varphi_0;$$

dove F_0, φ_0 sono i valori delle funzioni F, φ nel polo e $(\sigma)_0$ è, rispetto a questo punto, l'angolo visuale della superficie σ; dietro ciò si ottiene

$$(\sigma)_0F_0\varphi_0=\int\left(\varphi\frac{\partial\frac{F}{r}}{\partial n}-\frac{F}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)d\sigma+\int(\varphi\Delta_2F-F\Delta_2\varphi)\frac{dS}{r}-2\int\varphi\frac{\partial F}{\partial r}\frac{dS}{r^2}.$$

Se quindi si suppone che F dipenda dal solo raggio vettore r, nel qual caso è

$$\Delta_2F=\frac{\partial^2F}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial F}{\partial r},$$

si ha semplicemente

$$(1)\qquad(\sigma)_0F_0\varphi_0=\int\left(\varphi\frac{\partial\frac{F}{r}}{\partial n}-\frac{F}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)d\sigma+\int\left(\varphi\frac{\partial^2F}{\partial r^2}-F\Delta_2\varphi\right)\frac{dS}{r};$$

e questa formola, analoga ma non identica a quella di GREEN, è la più idonea alla deduzione del principio di HUYGENS.

Tale deduzione si fa supponendo che la funzione φ dipenda non solo dalle coordinate, ma anche dal tempo t e soddisfaccia all'equazione dei moti oscillatorî liberi

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = a^2 \Delta_2 \varphi,$$

dove a è la velocità di propagazione. Ma qui, per dare al risultato quell'ulteriore estensione cui ho alluso più sopra, supporrò invece che l'equazione per φ sia la seguente:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = a^2(\Delta^2 \varphi + \psi), \tag{2}$$

dove ψ è un'altra funzione delle coordinate e del tempo. Per F è da prendersi una funzione arbitraria dell'argomento $t + \frac{r}{a}$; una funzione, quindi, che soddisfa identicamente all'equazione

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 F}{\partial r^2}.$$

In tali ipotesi, osservando l'identità

$$\varphi \frac{\partial \frac{F}{r}}{\partial n} = F\left(\varphi \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} - \frac{1}{ar}\frac{\partial \varphi}{\partial t}\frac{\partial r}{\partial n}\right) + \frac{1}{ar}\frac{\partial (F\varphi)}{\partial t}\frac{\partial r}{\partial n},$$

si può mettere l'equazione (1) sotto la forma

$$(\sigma)_0 F_0 \varphi_0 = \int F\left(t + \frac{r}{a}\right) G(t)\, d\sigma + \int F\left(t + \frac{r}{a}\right)\psi(t)\frac{dS}{r} + \frac{dH}{dt},$$

dove per brevità si è posto

$$H = \frac{1}{a}\int F\varphi \frac{\partial r}{\partial n}\frac{d\sigma}{r} + \frac{1}{a^2}\int\left(\varphi\frac{\partial F}{\partial t} - F\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)\frac{dS}{r},$$

$$G(t) = \varphi \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} - \frac{1}{ar}\frac{\partial \varphi}{\partial t}\frac{\partial r}{\partial n} - \frac{1}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial n}.$$

Quest'ultima espressione, che dipende dal tempo t, dalle coordinate dei punti di σ e dai coseni della normale n, è stata designata col simbolo $G(t)$ perchè è sul parametro

t che importa ora fissare l'attenzione: per la stessa ragione si è designata con $\psi(t)$ la funzione ψ che in generale dipende anche dalle coordinate dei punti di S.

Sieno t_0 e $t_1 > t_0$ due valori di t tali che si abbia costantemente

$$(2_a)\qquad \begin{cases} \varphi(x, y, z, t) = \psi(x, y, z, t) = 0 & \text{per} \quad t \leqq t_0, \\ F(t) = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \text{per} \quad t \geqq t_1. \end{cases}$$

Poichè le due funzioni φ ed F sono, per ipotesi, continue insieme colle loro derivate prime nell'intervallo (t_0, t_1), si ha

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{dH}{dt}\, dt = 0$$

e quindi

$$(\sigma)_0 \int_{t_0}^{t_1} F(t)\varphi_0\, dt = \int d\sigma \int_{t_0}^{t_1} F\left(t + \frac{r}{a}\right) G(t)\, dt + \int \frac{dS}{r} \int_{t_0}^{t_1} F\left(t + \frac{r}{a}\right) \psi(t)\, dt,$$

ossia, in virtù di (2_a),

$$\int_{t_0}^{t_1} F(t)\left[(\sigma)_0 \varphi_0 - \int G\left(t - \frac{r}{a}\right) d\sigma - \int \psi\left(t - \frac{r}{a}\right)\frac{dS}{r}\right] dt = 0.$$

Stante l'indeterminazione del fattore $F(t)$, quest'equazione non può sussistere se non è [in tutto l'intervallo (t_0, t_1), del resto arbitrario]

$$(2_b)\qquad (\sigma)_0 \varphi_0 = \int G\left(t - \frac{r}{a}\right) d\sigma + \int \psi\left(t - \frac{r}{a}\right)\frac{dS}{r};$$

giacchè se la differenza fra i due membri di quest'ultima equazione non fosse costantemente nulla, si renderebbe assurda l'equazione antecedente prendendo per $F(t)$ una funzione di segno eguale a quello di tale differenza, in ogni intervallo in cui questa non fosse nulla.

L'equazione (2_b) somministra, quando $\psi = 0$, la rappresentazione analitica assegnata da KIRCHHOFF al principio di HUYGENS.

Per rendere più esplicita questa rappresentazione, si denotino d'ora innanzi con x, y, z le coordinate del polo e con ξ, η, ζ quelle d'un punto qualunque di S o di σ: si designino inoltre con $\varphi(t)$, $\varphi_n(t)$ i valori che le funzioni

$$\varphi(\xi, \eta, \zeta, t), \qquad \frac{\partial \varphi(\xi, \eta, \zeta, t)}{\partial n}$$

prendono nei punti di σ. Dall'espressione data più sopra di $G(t)$ si ricava, con tali segnature,

$$G\left(t-\frac{r}{a}\right)=\frac{\partial}{\partial n}\frac{\varphi\left(t-\frac{r}{a}\right)}{r}-\frac{\varphi_n\left(t-\frac{r}{a}\right)}{r},$$

dove l'indicata derivazione normale non è operativa che sul raggio vettore r; e l'equazione (2_b) prende la forma

$$(3)\quad (\sigma)_0\varphi(x,y,z,t)=\int\left[\frac{\partial}{\partial n}\frac{\varphi\left(t-\frac{r}{a}\right)}{r}-\frac{\varphi_n\left(t-\frac{r}{a}\right)}{r}\right]d\sigma+\int\psi\left(t-\frac{r}{a}\right)\frac{dS}{r},$$

mettendo così in evidenza, quando $\psi=0$, la proprietà che ha la funzione φ, da essa definita per tutti i punti interni a σ [cioè per $(\sigma)_0=4\pi$], di soddisfare all'equazione differenziale dei moti vibratorî liberi (giacchè le due funzioni di x, y, z e t

$$\frac{\varphi\left(t-\frac{r}{a}\right)}{r},\qquad \frac{\varphi_n\left(t-\frac{r}{a}\right)}{r}$$

soddisfanno già di per sè stesse a tale equazione). Del resto l'equazione (3) sussiste anche per uno spazio S che si estenda in tutto od in parte all'infinito, qualora alla funzione φ si attribuiscano le ordinarie proprietà all'infinito d'una funzione potenziale; in questo caso, infatti, resta priva d'influenza quella parte di superficie σ che giace a distanza infinita.

Il carattere analitico dell'equazione completa (3) si rende pienamente manifesto quando si consideri φ come una funzione totalmente arbitraria e ψ come il simbolo rappresentativo, (2), dell'espressione

$$-\Delta_2\varphi+\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}.$$

Ponendo infatti $a=\infty$, si ottiene da (3), sopprimendo l'argomento t (il quale allora non entra più se non a titolo di parametro costante),

$$(\sigma)_0\varphi(x,y,z)=\int\left(\varphi\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}-\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)d\sigma-\int\Delta_2\varphi\frac{dS}{r};$$

si ottiene, cioè, l'ordinaria equazione di GREEN [già inclusa in (1) per $F=1$].

Ma per far meglio rilevare il significato del termine complementare in ψ, conviene premettere un teorema.

Si consideri un'espressione della forma

$$U(x, y, z) = \int f(\xi, \eta, \zeta, r) d S,$$

dove S è uno spazio qualunque (non avente alcuna relazione necessaria con quello già così designato dianzi) e dove r designa la distanza del punto qualunque (ξ, η, ζ), ove è collocato l'elemento dS, dal polo (x, y, z). Osservando essere

$$\frac{df}{d\xi} = \frac{\partial f}{\partial \xi} + \frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial \xi},$$

si può scrivere

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \int \frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} d S = -\int \frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial \xi} d S = \int \frac{\partial f}{\partial \xi} d S - \int \frac{df}{d\xi} d S$$

e quindi, coll'applicazione d'una ben nota trasformazione, si ottiene

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \int \frac{\partial f}{\partial \xi} d S + \int f \frac{\partial \xi}{\partial n} d\sigma,$$

dove σ è la superficie che limita lo spazio S. Derivando nuovamente rispetto ad x ed osservando le eguaglianze

$$\frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{\partial r}{\partial \xi} = -\frac{\partial \xi}{\partial r},$$

si trova

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = -\int \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)\frac{\partial \xi}{\partial r} d S - \int \frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial n} d\sigma.$$

Da questa e dalle due analoghe formole, con riguardo all'eguaglianza

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{\partial f}{\partial r}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)\frac{\partial \xi}{\partial r} + \text{ecc.},$$

si deduce

$$\Delta_2 U = \int \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} d S - \int \frac{d}{dr}\left(\frac{\partial f}{\partial r}\right) d S - \int \frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial n} d\sigma,$$

equazione alla quale, per essere

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{\partial f}{\partial r}\right) = \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r}\right) - \frac{2}{r}\frac{\partial f}{\partial r}, \quad \frac{1}{r}\frac{\partial^2 (rf)}{\partial r^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial f}{\partial r},$$

si può dare la forma

$$\Delta_2 U = \int \frac{\partial^2 (rf)}{\partial r^2} \frac{dS}{r} - \int \frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r}\right) \frac{dS}{r^2} + \int r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} d\sigma .$$

In virtù del già invocato teorema di GAUSS si ha dunque

$$\Delta_2 U = \int \frac{\partial^2 (rf)}{\partial r^2} \frac{dS}{r} + (\sigma)_0 \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r}\right)_{r=0} ,$$

risultato il quale assume una forma molto più significativa se si pone

$$rf(\xi, \eta, \zeta, r) = K(\xi, \eta, \zeta, r),$$

dove K è una funzione dei quattro argomenti ξ, η, ζ, r (che deve supporsi, colla sua derivata prima rispetto ad r, monodroma, continua, finita e derivabile). Si ottiene infatti

$$U = \int K(\xi, \eta, \zeta, r) \frac{dS}{r} ,$$

$$\Delta_2 U = \int \frac{\partial^2 K}{\partial r^2} \frac{dS}{r} - (\sigma)_0 K(x, y, z, 0) ,$$

cosicchè la quantità U si presenta ora sotto la forma d'una funzione potenziale molto più generale della newtoniana, mentre la seconda equazione porge, per tale funzione, un teorema analogo a quello di LAPLACE-POISSON [1]).

Suppongasi ora che la quantità qui designata con K provenga da una funzione $k(\xi, \eta, \zeta, t)$ delle quattro variabili ξ, η, ζ, t col sostituire il binomio $t - \frac{r}{a}$ al posto di t. In tal caso la detta quantità K soddisfa all'equazione

$$\frac{\partial^2 K}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 K}{\partial r^2} ,$$

[1]) Cfr. la mia Memoria *Intorno ad alcuni problemi di propagazione del calore* [Memorie della R. Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna, serie, IV tomo VIII (1887), pp. 291-326; oppure queste OPERE, tomo IV, pp. 270-299], ove questo teorema è stabilito, con altro procedimento, in una forma meno generale. Cfr. anche, per le successive formole (4), (4_a), la *Theory of Sound* di Lord Rayleigh, t. II, p. 92.

cosicchè si può scrivere

$$\Delta_2 U = \frac{1}{a^2} \int \frac{\partial^2 K}{\partial t^2} \frac{dS}{r} - (\sigma)_0 k(x, y, z, t),$$

ossia

$$\Delta_2 U = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - (\sigma)_0 k(x, y, z, t).$$

Ne risulta che la funzione U di x, y, z e t, definita dall'espressione

$$U = \int k\left(\xi, \eta, \zeta, t - \frac{r}{a}\right) \frac{dS}{r}, \tag{4}$$

soddisfa in tutto lo spazio all'equazione

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2 [\Delta_2 U + (\sigma)_0 k(x, y, z, t)],$$

o meglio all'equazione:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2 [\Delta_2 U + 4\pi k(x, y, z, t)], \tag{4_a}$$

dove alla funzione k s'intende attribuito il valor *zero* in ogni punto esterno allo spazio S.

Quest'equazione coincide colla (2) quando si ponga

$$U = \varphi, \qquad k = \frac{\psi}{4\pi}$$

e tale coincidenza spiega la presenza del termine complementare

$$\int \psi\left(t - \frac{r}{a}\right) \frac{dS}{r}$$

nell'equazione (3). A quel modo che (nell'interpretazione ottica) i primi due termini del secondo membro di quest'equazione corrispondono, come nota KIRCHHOFF, a sorgenti luminose distribuite in *due* dimensioni (formando strato semplice o doppio), così il termine complementare corrisponde a sorgenti luminose distribuite in *tre* dimensioni. Questo termine manca quando, entro lo spazio S considerato nel teorema (3), manca quest'ultima distribuzione.

Qui sorge però una questione.

Quando nell'equazione (2) la funzione ψ non è costantemente nulla, quell'equazione non definisce più oscillazioni *libere:* quale è dunque la forza perturbatrice cui quella funzione corrisponde?

Non si può risolvere questa questione se non si precisa il significato della funzione φ, la quale può rappresentare uno spostamento, una dilatazione, una rotazione od un potenziale di spostamento. Ammettendo che si tratti di quest'ultimo significato, si denotino, come di solito, con u, v, w le componenti di spostamento e si ponga

$$u = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_3}{\partial y} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial z},$$

$$v = -\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} - \frac{\partial \varphi_3}{\partial x},$$

$$w = -\frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial y}.$$

Designando con Ω ed ω le velocità di propagazione delle onde longitudinali e trasversali, l'equazione (2) si traduce, rispetto alle quattro funzioni φ, φ_1, φ_2, φ_3, nelle seguenti:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \Omega^2 (\Delta_2 \varphi + \psi),$$

$$\frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial t^2} = \omega^2 (\Delta_2 \varphi_i + \psi_i), \qquad (i = 1, 2, 3).$$

Da queste si deduce

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(-\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_3}{\partial y} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial z}\right)$$

$$= -\Omega^2 \left(\frac{\partial \Delta_2 \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial x}\right) + \omega^2 \left[\Delta_2 \left(\frac{\partial \varphi_3}{\partial y} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial z}\right) + \frac{\partial \psi_3}{\partial y} - \frac{\partial \psi_2}{\partial z}\right],$$

ossia

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Omega^2 \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x}\right) + \omega^2 \left(\Delta_2 u - \frac{\partial \vartheta}{\partial x} + \frac{\partial \psi_3}{\partial y} - \frac{\partial \psi_2}{\partial z}\right),$$

dove $\vartheta (= -\Delta_2 \varphi)$ è la dilatazione cubica. Ma denotando con X, Y, Z le componenti della forza esterna, le equazioni del moto oscillatorio in un mezzo isotropo sono

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = (\Omega^2 - \omega^2)\frac{\partial \vartheta}{\partial x} + \omega^2 \Delta_2 u + X, \quad \text{ecc.};$$

dunque le cercate forze sono date da

$$X = -\Omega^2 \frac{\partial\psi}{\partial x} + \omega^2\left(\frac{\partial\psi_3}{\partial y} - \frac{\partial\psi_2}{\partial z}\right),$$

$$Y = -\Omega^2 \frac{\partial\psi}{\partial y} + \omega^2\left(\frac{\partial\psi_1}{\partial z} - \frac{\partial\psi_3}{\partial x}\right),$$

$$Z = -\Omega^2 \frac{\partial\psi}{\partial z} + \omega^2\left(\frac{\partial\psi_2}{\partial x} - \frac{\partial\psi_1}{\partial y}\right),$$

ossia si compongono d'una forza retta dalla funzione potenziale $\Omega^2\psi$ e d'una forza retta dalla terna potenziale $(\omega^2\psi_1, \omega^2\psi_2, \omega^2\psi_3)$.

Quando si tratta di oscillazioni trasversali, non è dunque che una forza elettromagnetica variabile che può intervenire come causa perturbatrice; e, denotando con

$$\Psi_i(x, y, z, t) \qquad (i = 1, 2, 3),$$

la relativa terna potenziale, si soddisfa alle equazioni indefinite del moto perturbato ponendo

$$\varphi_i = \frac{1}{4\pi\omega^2}\int \Psi_i\left(\xi, \eta, \zeta, t - \frac{r}{a}\right)\frac{dS}{r}, \qquad (i = 1, 2, 3),$$

dove gli integrali si estendono a tutto lo spazio.

Se alle tre funzioni $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ si attribuisse invece [nelle equazioni (2)] il significato di componenti di spostamento, si troverebbe, in modo analogo, che le componenti di forza esterna X, Y, Z coincidono coi prodotti $\omega^2\psi_1$, $\omega^2\psi_2$, $\omega^2\psi_3$ (ciò che del resto s'accorda col risultato precedente).

Se, finalmente, alle dette funzioni si attribuisce il significato di componenti di rotazione, se si pone cioè

$$\varphi_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right), \quad \text{ecc.},$$

si ricava subito, dal confronto colle note equazioni dinamiche che sussistono per queste componenti,

$$\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} = 2\omega^2\psi_1, \qquad \frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} = 2\omega^2\psi_2, \qquad \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} = 2\omega^2\psi_3,$$

e poichè, se X, Y, Z sono componenti di forza elettromagnetica, si sa essere

$$\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} = 4\pi j_1, \qquad \frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} = 4\pi j_2, \qquad \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} = 4\pi j_3,$$

dove j_1, j_2, j_3 sono le componenti d'intensità specifica del sistema di correnti donde emana quella forza (sistema supposto in tre dimensioni), si conclude

$$\psi_1 = \frac{2j_1}{\omega^2}, \qquad \psi_2 = \frac{2j_2}{\omega^2}, \qquad \psi_3 = \frac{2j_3}{\omega^2}.$$

In queste ipotesi si soddisfa dunque alle equazioni indefinite del moto oscillatorio ponendo

$$\varphi_i = \frac{1}{2\pi\omega^2}\int j_i\left(\xi, \eta, \zeta, t - \frac{r}{n}\right)\frac{dS}{r}, \qquad (i = 1, 2, 3),$$

dove gli integrali si estendono a tutto lo spazio occupato dalle correnti. Prescindendo da quel qualunque moto oscillatorio libero che può coesistere col moto dovuto alla perturbazione, una perturbazione cosiffatta non si propaga se non da correnti *variabili*.

È interessante il confronto delle precedenti espressioni delle componenti di rotazione φ_i con quelle che rappresentano le funzioni costituenti la correlativa terna potenziale elettromagnetica, cioè colle

$$\Psi_i = \int j_i(\xi, \eta, \zeta, t)\frac{dS}{r}, \qquad (i = 1, 2, 3).$$

C.

OSSERVAZIONI ALLA NOTA DEL PROF. MORERA.

Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, serie V, tomo I (1892), I° semestre, pp. 141-142.

È noto che rappresentando con

$$\alpha = \frac{\partial u}{\partial x}, \qquad \lambda = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z},$$

$$\beta = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \mu = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x},$$

$$\gamma = \frac{\partial w}{\partial z}, \qquad \nu = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}$$

le sei componenti della deformazione corrispondente ad un sistema di spostamenti (u, v, w), queste sei funzioni α, β, γ, λ, μ, ν, supposte date *a priori,* devono soddisfare a sei condizioni necessarie e sufficienti perchè sia possibile la conseguente determinazione di tre funzioni u, v, w, dalle quali esse dipendano giusta le formole precedenti. Queste sei condizioni sono

$$A = 0, \qquad B = 0, \qquad C = 0, \qquad L = 0, \qquad M = 0, \qquad N = 0,$$

dove

$$A = \frac{\partial^2 \lambda}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 \beta}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \gamma}{\partial y^2}, \quad \text{ecc.}$$

$$L = \frac{\partial^2 \alpha}{\partial y \partial z} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \lambda}{\partial x} - \frac{\partial \mu}{\partial y} - \frac{\partial \nu}{\partial z}\right), \quad \text{ecc.}$$

Ciò premesso è facile verificare che fra queste ultime sei espressioni A, B, C, L, M, N sussistono le seguenti tre relazioni identiche *):

$$\frac{\partial A}{\partial x}+\frac{\partial N}{\partial y}+\frac{\partial M}{\partial z}=0,$$

$$\frac{\partial N}{\partial x}+\frac{\partial B}{\partial y}+\frac{\partial L}{\partial z}=0,$$

$$\frac{\partial M}{\partial x}+\frac{\partial L}{\partial y}+\frac{\partial C}{\partial z}=0.$$

Poichè dunque queste relazioni hanno la stessa forma delle equazioni indefinite d'equilibrio d'un corpo continuo sottratto ad ogni azione esterna, è lecito soddisfare a queste equazioni ponendo

$$X_x=A,\qquad Y_y=B,\qquad Z_z=C,$$
$$Y_z=L,\qquad Z_x=M,\qquad X_y=N$$

e prendendo per α, β, γ, λ, μ, ν *sei* funzioni di x, y, z *interamente arbitrarie*.

La soluzione ottenuta per altra via dal prof. MORERA corrisponde alle ipotesi particolari

$$\alpha=0,\qquad \beta=0,\qquad \gamma=0;\qquad \lambda=U,\qquad \mu=V,\qquad \nu=W.$$

Le sei componenti di pressione X_x, X_y, ... sono necessariamente soggette a certe condizioni, quando corrispondono a forze interne generate per pura deformazione; giacchè esse devono in tal caso potersi esprimere, in un modo del tutto determinato (e dipendente dalla natura del corpo), per mezzo di tre componenti di spostamento u, v, w. Nel caso dell'isotropia, queste condizioni, immediata conseguenza di quelle che ho accennato più sopra, sono estremamente semplici; esse hanno infatti la forma seguente:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}+C\Delta_2 X_x=0,\qquad \frac{\partial^2 P}{\partial y^2}+C\Delta_2 Y_y=0,\qquad \frac{\partial^2 P}{\partial z^2}+C\Delta_2 Z_z=0,$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial y\partial z}+C\Delta_2 Y_z=0,\qquad \frac{\partial^2 P}{\partial z\partial x}+C\Delta_2 Z_x=0,\qquad \frac{\partial^2 P}{\partial x\partial y}+C\Delta_2 X_y=0,$$

*) Queste relazioni ripetono la loro origine da quella notissima che lega fra loro le tre componenti di rotazione; giacchè, come ho stabilito in una Nota addizionale alla mia Memoria *Sull'interpretazione meccanica delle formole di* MAXWELL, le ricordate sei condizioni $A=0$, ecc. non sono altro che condizioni d'integrabilità dei differenziali di quelle componenti.

dove

$$P = X_x + Y_y + Z_z.$$

e dove C è una costante (e propriamente $C = 1 + \eta$, dove η è il noto *rapporto di contrazione,* così designato nella traduzione francese del trattato di Clebsch).

Queste ultime condizioni suppongono l'assenza d'ogni forza esterna. Tralascio, per brevità, di riportare le condizioni analoghe per il caso in cui questa forza esista ed abbia le componenti X, Y, Z.

CI.

SUR LA THÉORIE DES FONCTIONS SPHÉRIQUES.

Comptes Rendus des séances de l'Académie des sciences, t. CXVI (1893), pp. 181-183.

En cherchant à exposer de la manière la plus simple et la plus générale la théorie des fonctions sphériques, j'ai défini comme telle de l'ordre n une fonction $\varphi(\xi, \eta, \zeta)$ des trois cosinus ξ, η, ζ d'un rayon, qui: 1° est homogène de l'ordre n en ces variables, et 2° satisfait à l'équation de LAPLACE $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \zeta^2} = 0$. Il s'agit alors de caractériser cette fonction par rapport à *deux* variables *indépendantes,* telles, par exemple, que ζ et ω, en posant, comme d'habitude,

$$\xi = \cos\omega\sqrt{1-\zeta^2}, \qquad \eta = \sin\omega\sqrt{1-\zeta^2}.$$

Or, quelle que soit la fonction φ, on a

$$(1-\zeta^2)\frac{d\varphi}{d\zeta} = \frac{\partial\varphi}{\partial\zeta} - \zeta F(\varphi),$$

$$\frac{d\varphi}{d\omega} = \xi\frac{\partial\varphi}{\partial\eta} - \eta\frac{\partial\varphi}{\partial\xi},$$

où la caractéristique d se rapporte aux deux variables indépendantes et où le symbole $F(\varphi)$ représente l'opération

$$F = \xi\frac{\partial}{\partial\xi} + \eta\frac{\partial}{\partial\eta} + \zeta\frac{\partial}{\partial\zeta}.$$

En considérant les deux membres des équations précédentes comme les résultats d'opérations, effectuées sur la fonction $F(\zeta, \omega)$, ou $F(\xi, \eta, \zeta)$, et en réitérant ces opérations, on arrive, par des transformations bien simples, à ces autres formules

$$(1-\zeta^2)\frac{d}{d\zeta}\left[(1-\zeta^2)\frac{d\varphi}{d\zeta}\right] = \frac{\partial^2\varphi}{\partial\zeta^2} + \zeta\frac{\partial\varphi}{\partial\zeta} - (1-\zeta^2)F(\varphi) + \zeta^2 F^2(\varphi) - 2\zeta\frac{\partial F(\varphi)}{\partial\zeta},$$

$$\frac{d^2\varphi}{d\omega^2} = (1-\zeta^2)\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial\eta^2}\right) - \zeta\frac{\partial\varphi}{\partial\zeta} - \zeta^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial\zeta^2}$$
$$- F^2(\varphi) + 2\zeta\frac{\partial F(\varphi)}{\partial\zeta},$$

où $F^2(\varphi)$ est la même chose que $F[F(\varphi)]$. En ajoutant les deux dernières égalités, on arrive ainsi à cette autre égalité

$$\frac{d}{d\zeta}\left[(1-\zeta^2)\frac{d\varphi}{d\zeta}\right] + \frac{1}{1-\zeta^2}\frac{d^2\varphi}{d\omega^2} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial\eta^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial\zeta^2} - F(\varphi) - F^2(\varphi),$$

d'où, en introduisant les deux conditions de définition,

$$F(\varphi) = n\varphi, \qquad \frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial\eta^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial\zeta^2} = 0,$$

l'on tire immédiatement l'équation bien connue,

$$\frac{d}{d\zeta}\left[(1-\zeta^2)\frac{d\varphi}{d\zeta}\right] + \frac{1}{1-\zeta^2}\frac{d^2\varphi}{d\omega^2} + n(n+1)\varphi = 0.$$

On reconnaît en même temps, sans qu'il soit nécessaire d'invoquer aucune espèce d'évidence, que l'expression

$$\frac{d}{d\zeta}\left[(1-\zeta^2)\frac{d\varphi}{d\zeta}\right] + \frac{1}{1-\zeta^2}\frac{d^2\varphi}{d\omega^2}$$

est un invariant différentiel de direction, puisque les deux expressions

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi^3} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial\eta^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial\zeta^2}, \qquad F(\varphi)$$

ne changent pas, quelle que soit la série des axes orthogonaux des ξ, η, ζ. Il s'ensuit que la fonction sphérique *spéciale* qui ne contient que la variable ζ ne fait que rentrer dans le type général lorsqu'on déplace ces axes, et devient la fonction sphérique fondamentale de l'angle de deux rayons quelconques.

CII.

NOTE SULLA TEORIA DELLA PROPAGAZIONE DEL CALORE.

Rendiconto delle sessioni della R. Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna (1893), pp. 61-63

La straordinaria importanza che i metodi insegnati da FOURIER per la trattazione della teoria del calore andarono ben presto acquistando, dal punto di vista delle ricerche di pura analisi, contribuì forse a che l'attenzione degli studiosi si distogliesse dai problemi particolari in vista dei quali quei metodi erano stati escogitati e si riportasse quasi per intero sulla natura intima e sulla validità più o meno incondizionata delle nuove formole che l'illustre francese aveva fatte conoscere. Eppure quei problemi presentano pur sempre non piccolo interesse per sè medesimi e si prestano a moltissime indagini atte a dar luce sull'intimo meccanismo, se così può dirsi, della propagazione del calore, in quanto, ben inteso, questo fenomeno può considerarsi come legittimamente definito dalle leggi semplicissime che FOURIER pose a fondamento di tutta la sua teoria.

A prova di tale asserzione basti citare quello che suol chiamarsi il *primo problema* di FOURIER, perchè FOURIER stesso lo ha così qualificato al principio dell'estesissimo capitolo che ad esso dedicò nella sua classica Opera (p. 141 a 238 della nuova edizione egregiamente curata ed annotata dal DARBOUX). Si tratta dell'equilibrio termico d'un corpo di dimensioni infinite, il perimetro della cui sezione normale è formato da un segmento rettilineo (la lunghezza del quale è posta per semplicità uguale a π) e dalle due perpendicolari erette, in un solo medesimo senso, ai due estremi di questo segmento. La temperatura è nulla sulle due faccie parallele ed è data arbitrariamente su quella di larghezza π, variando però soltanto nel senso di questa larghezza. Il problema è dunque a due sole coordinate e può, in sostanza, riferirsi ad una semplice lamina compresa fra due sezioni normali costituenti, per la materia della lamina, due superficie impervie al calore. Dopo aver espresso la soluzione per mezzo della sua serie, FOURIER riescì facilmente a sommare questa serie ed a rappresentare la soluzione stessa con un integrale definito, sul quale del resto egli non si trattenne ulteriormente. Di questo integrale si volle far uso, posteriormente, per ricavarne una dimostrazione della serie di FOURIER, dimostrazione ora però riconosciuta insufficiente; ma esso si presta invece molto utilmente alla più minuta discussione del problema e sopratutto a successive svariate trasformazioni, le quali conducono alla soluzione di altri problemi in apparenza diversissimi. Uno dei mezzi che a ciò servono è l'introduzione sistematica della variabile complessa risultante dalla combinazione delle due coordinate reali, colla conseguente comparsa d'una seconda funzione, associata a quella che deve esprimere la temperatura richiesta. Questa funzione, generalmente parlando, rappresenta anch'essa una temperatura corrispondente ad altre condizioni terminali: ma, anche prescindendo da questo suo eventuale significato, essa interviene per dir così necessariamente nella discussione delle circostanze che si riferiscono al primitivo problema di equilibrio termico. Tale è il punto di partenza di queste *Note*, nelle quali, più che all'importanza intrinseca dei risultati, è da guardarsi alla semplicità delle deduzioni illustrative di formule già note da gran tempo, ma della cui potenza e fecondità non si suol forse tenere abbastanza conto. Non tutti gli argomenti trattati sono fra loro legati da una stretta e manifesta analogia ed alcuno porà anche parere molto remoto dal soggetto cui s'è fatto allusione testè, per esempio l'ultima Nota sulle temperature periodiche. Vi è pur tuttavia anche un punto di contatto, ed è nell'uso dell'immaginario e nell'aiuto che se ne ricava per la più spedita formazione degli integrali particolari che risolvono il problema. Questo aiuto si rende manifesto a chi confronti, per esempio, le soluzioni così ottenute con quelle che si trovano esposte nelle d'altronde tanto interessanti Lezioni di RIEMANN sull'integrazione delle equazioni a derivate parziali *).

*) Le *Note* annunziate in questa comunicazione non furono mai pubblicate. (N. d. R.).

CIII.

SUI POTENZIALI TERMODINAMICI.

Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, t. IV (1895), I° semestre, pp. 473-480.

Si assumano le due equazioni fondamentali della termodinamica nella forma

$$(1) \qquad dQ = dE + dL = t\,dF,$$

dove E è l'energia, F l'entropia, t la temperatura assoluta, dQ il calore elementare (in misura meccanica) assorbito dal sistema e finalmente dL il lavoro elementare speso dal sistema contro le forze esterne. Lo *stato* del sistema si suppone definito dalla temperatura t e da un certo numero di variabili *geometriche* $v_1, v_2, \ldots$, collettivamente designate con v ed atte ad individuare la configurazione del sistema stesso. Nell'espressione esplicita

$$(1_a) \qquad dL = \sum p\,dv$$

del lavoro elementare dL, le quantità $p_1, p_2, \ldots$, collettivamente designate con p, denotano (in senso generale) le forze puramente meccaniche che emanano dal sistema e che tendono ad aumentare i valori delle rispettive variabili $v_1, v_2, \ldots$. Queste forze, insieme colle due quantità E ed F, vengono considerate, di regola, come funzioni delle variabili indipendenti t e v.

Se esiste una funzione H tale che per ogni coppia di valori corrispondenti di p e di v si abbia

$$(1_b) \qquad p = -\frac{\partial H}{\partial v},$$

questa funzione si suole considerare, a giusta ragione, come il potenziale delle forze p

e propriamente come l'*energia libera* del sistema, come quell'energia, cioè, cui è dovuta l'azione esterna *puramente meccanica*, epperò *liberamente trasformabile*, del sistema stesso. Questa funzione, se esiste, non può dipendere dalle sole variabili v, perchè l'espressione del lavoro elementare dL non può essere, evidentemente, un differenziale esatto. Essa deve quindi dipendere, oltre che dalle dette variabili v, da un parametro u che viene considerato come costante nella deduzione delle forze p mediante le equazioni (1_b). Questo parametro rappresenta una determinata funzione

$$(1_c) \qquad u = u(t, v)$$

della temperatura t e delle variabili geometriche v. Ammettere la costanza di questo parametro equivale ad ammettere che la funzione H non esercita veramente l'ufficio di potenziale, o di energia libera, che per i *processi termodinamici invertibili* definiti dall'equazione $u =$ costante. Se, per esempio, u fosse funzione solamente della temperatura t, H sarebbe il potenziale relativo ai *processi isotermi;* se invece u fosse funzione solamente dell'entropia F, H sarebbe il potenziale relativo ai *processi isentropici* od adiabatici.

Ciò posto, si presenta questo quesito: ad *ogni* specie di processo termodinamico invertibile $u =$ costante corrisponde sempre un potenziale H?

Bisogna escludere innanzi tutto il caso che la funzione u non contenga la temperatura t; e ciò sia perchè il processo non potrebbe, a rigor di termini, dirsi allora termodinamico, sia perchè la forma stessa delle equazioni (1_b) suppone che le variabili v sieno fra loro indipendenti, e tali non sarebbero se fra loro sussistesse una relazione $u =$ costante. Per questa stessa ragione si è ammesso senz'altro che il potenziale H non potesse contenere che un solo parametro costante u.

È anche da notarsi che il potenziale H, quando esiste, non riesce compiutamente determinato dalle equazioni (1_b), perchè queste rimangono inalterate se ad H si aggiunge una funzione arbitraria di u. Questa funzione non può risultare individuata se non da qualche altra condizione. Per esempio, nel caso dei processi isotermi ($u = t$) si sa che, ponendo

$$(1_d) \qquad E - tF = G,$$

è lecito assumere come potenziale la funzione G e che questa funzione speciale soddisfa all'ulteriore condizione

$$(1_e) \qquad F = -\frac{\partial G}{\partial t}.$$

Così ancora, nel caso dei processi isentropici ($u = F$) si sa che è lecito assumere come potenziale la stessa energia E (considerata come funzione di v e di F) e che questa funzione speciale soddisfa all'ulteriore condizione

$$(1_f) \qquad t = \left(\frac{\partial E}{\partial F}\right),$$

dove le parentesi indicano che la derivata di E è presa nell'ipotesi or detta.

Ciò premesso, considerando H come funzione incognita delle variabili v e del parametro u, si ha, (1_a), (1_b),

$$dL = -\,dH + \frac{\partial H}{\partial u} du$$

e quindi, (1),

$$dE - dH + \frac{\partial H}{\partial u} du = t\,dF\,,$$

o meglio, (1_d),

$$dG - dH + \frac{\partial H}{\partial u} du + F\,dt = 0\,,$$

talchè se si pone

$$(2) \qquad H = G + \psi\,,$$

si ottiene

$$(2_a) \qquad d\psi = F\,dt + \frac{\partial H}{\partial u} du\,.$$

Qui bisogna distinguere due casi.

Se nella funzione $u(t, v)$ non entrano le variabili v, le quantità t ed u non sono fra loro indipendenti, epperò l'equazione (2_a), cui si può in tale ipotesi dare la forma

$$d\psi = \left(F + \frac{\partial H}{\partial u}\frac{du}{dt}\right) dt\,,$$

stabilisce che ψ dev'essere funzione della sola temperatura t. E poichè da ciò segue

$$F = -\frac{\partial H}{\partial t} + \psi'(t)\,,$$

basta sopprimere la funzione additiva ψ in (2) per ottenere $H = G$ e per ricadere così sulle note formole (1_d), (1_e) relative ai processi isotermi.

Se invece nella funzione $u(t, v)$ entra effettivamente anche una sola delle variabili v, le quantità t ed u diventano per ciò stesso fra loro indipendenti. In questo caso (che è il più generale) dall'equazione (2_a) segue necessariamente che la funzione ψ dev'essere riducibile alla forma

$$\psi = \psi(t, u)$$

e che devono essere soddisfatte le due condizioni

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} - F = 0, \qquad \frac{\partial \psi}{\partial u} - \frac{\partial H}{\partial u} = 0.$$

Queste condizioni non sono indipendenti. Infatti, considerando in (2) H, G e ψ come funzioni delle variabili indipendenti v ed u [coll'eliminazione di t da G e ψ mediante (1_c)] e derivando rispetto ad u, si ottiene

$$\frac{\partial H}{\partial u} = \frac{\partial G}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial u} + \frac{\partial \psi}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial u} + \frac{\partial \psi}{\partial u},$$

ovvero, (1_e),

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial t} - F\right)\frac{\partial t}{\partial u} + \frac{\partial \psi}{\partial u} - \frac{\partial H}{\partial u} = 0,$$

equazione che è una combinazione delle due sopradette. Dunque alla funzione ψ di t e di u basta imporre la prima delle condizioni trovate

(3) $$F = \frac{\partial \psi}{\partial t}.$$

La seconda eguaglianza

(3_a) $$\frac{\partial \psi}{\partial u} = \frac{\partial H}{\partial u}$$

esprime una proprietà che scende necessariamente dalla precedente e dalla forma (2) del potenziale H.

Ora l'equazione (3) costituisce una relazione fra le tre quantità F, t ed u, in virtù della quale il parametro u del processo termodinamico di cui si tratta non può dipendere che da t e da F: dunque i processi termodinamici che ammettono un potenziale sono quelli, e soltanto quelli per i quali la funzione u [dapprima supposta, (1_c), direttamente formata colle variabili t e v] è riducibile alla forma speciale (che abbraccia anche i processi isotermi)

(3_b) $$u = u(t, F).$$

Naturalmente questa forma cessa d'essere speciale allorchè le variabili v si riducono ad una sola.

Quando l'espressione (3_b) del parametro u è *data*, e quand'essa contiene effettivamente F (il che esclude i processi isotermi), la determinazione della funzione ausiliaria ψ si riduce ad una quadratura, cioè, (3), all'integrazione dell'equazione

(3_c) $$u = u\left(t, \frac{\partial \psi}{\partial t}\right),$$

la quale definisce ψ a meno d'un termine additivo composto arbitrariamente con u, termine il quale passa, collo stesso carattere puramente additivo, nell'espressione (2) di H. Quest'ultima espressione può scriversi anche così:

$$H = E + \psi - t\frac{\partial \psi}{\partial t}$$

sempre col sottinteso che venga eliminata la variabile t, mediante la sostituzione del valore che se ne ricava da (3_b) in termini di u e di v. L'energia *non libera* (« *gebundene Energie* ») è pertanto rappresentata (per i processi non isotermi) da

$$t\frac{\partial \psi}{\partial t} - \psi\,.$$

Questa soluzione del problema non è direttamente applicabile al caso (già più volte ricordato e del resto conosciutissimo) dei processi isotermi, caso nel quale, come si disse, le variabili t ed u non sono indipendenti come la soluzione richiede. Ma si può, ed in varî modi, far rientrare indirettamente questo caso d'eccezione nella soluzione precedente, come risulta dalla semplicissima osservazione che segue.

Si assegni al parametro u la forma particolare

$$u = F^m t^n,$$

dove m ed n sono due numeri diseguali. L'integrazione dell'equazione (3_c) dà

$$\psi = \frac{m\,u^{\frac{1}{m}}\,t^{1-\frac{n}{m}}}{m-n} + \varphi(u)$$

e quindi

$$\frac{\partial \psi}{\partial u} = \frac{u^{\frac{1}{m}-1}\,t^{1-\frac{n}{m}}}{m-n} + \varphi'(u)\,,$$

talchè si può scrivere

$$H = E + \frac{n\,t\,F}{m-n} + \varphi(u)\,,$$

$$\frac{\partial H}{\partial u} = \frac{F^{1-m}\,t^{1-n}}{m-n} + \varphi'(u)\,.$$

Per rientrare nel caso dei processi isotermi basta porre $u = t$, cioè $m = 0$, $n = 1$, con che si trova

$$H = E - tF + \varphi(t)\,,$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -F + \varphi'(t)\,.$$

Così, per ottenere il caso dei processi isentropici basta porre $u = F$, cioè $m = 1$, $n = 0$, con che si trova

$$H = E + \varphi(F), \qquad \frac{\partial H}{\partial F} = t + \varphi'(F).$$

Se, in ambedue queste ipotesi, si omette la funzione arbitraria φ, si ricade esattamente sulle formole (1_d), (1_e) ed (1_f) già ricordate quali ad esse notoriamente corrispondenti.

Come ulteriore verificazione della soluzione che precede, si considerino i processi termodinamici del tipo

$$u = t\chi(F).$$

Dando a quest'equazione la forma equipollente

$$F = \varphi'\left(\frac{t}{u}\right),$$

la corrispondente equazione (3_c) diventa

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \varphi'\left(\frac{t}{u}\right)$$

e dà (omettendo per semplicità la funzione additiva)

$$\psi = u\varphi\left(\frac{t}{u}\right).$$

Ne risulta, (2), (3_a),

$$H = G + u\varphi\left(\frac{t}{u}\right) = E + u\varphi\left(\frac{t}{u}\right) - t\varphi'\left(\frac{t}{u}\right).$$

$$\frac{\partial H}{\partial u} = \varphi\left(\frac{t}{u}\right) - \frac{t}{u}\varphi'\left(\frac{t}{u}\right),$$

e per conseguenza

$$E = H - u\frac{\partial H}{\partial u}.$$

Se ora si pone

$$\frac{t}{u} = x, \qquad \boldsymbol{F} = -\frac{\partial H}{\partial u} = x\varphi'(x) - \varphi(x),$$

si trova

$$d\boldsymbol{F} = x\,d\varphi'(x) = x\,dF,$$

vale a dire

$$u\,d\boldsymbol{F} = t\,dF.$$

Quest'ultima eguaglianza permette di dare alle equazioni (1) la forma

$$dQ = dE + dL = u\,d\boldsymbol{F},$$

in cui le primitive quantità t ed F sono surrogate da u ed $\boldsymbol{F}$; ne segue che l'ordinario procedimento di deduzione del potenziale isotermo conduce medesimamente alle formole

$$p = -\frac{\partial H}{\partial v}, \qquad \boldsymbol{F} = -\frac{\partial H}{\partial u}, \qquad E = H - u\frac{\partial H}{\partial u},$$

le quali coincidono con quelle testè incontrate. (Questa osservazione si collega con alcuni passi della prima Memoria di HELMHOLTZ sulla *Statica dei sistemi monociclici*).

Dalle equazioni (1_b) si deduce

$$\sum p\,dv = -\,dH + \frac{\partial H}{\partial u}du,$$

ovvero, (3_a),

$$d\sum pv - \sum v\,dp = -\,dH + \frac{\partial \psi}{\partial u}du,$$

equazione cui si può dare la forma

$$\sum v\,dp + \frac{\partial \psi}{\partial u}du = d(H + \sum pv)\,. \tag{4}$$

Questo risultato si può utilizzare in due modi.

Se primieramente si pone

$$H + \sum pv = K \tag{4_a}$$

e si concepisce questa nuova funzione K come espressa per mezzo delle quantità p ed u, colla sostituzione dei valori dedotti da (1_b), (3_b) per le quantità v e t, si ottiene [mercè la relazione (4) ed altre delle già precedentemente stabilite]

$$\left\{\begin{aligned} & v = \frac{\partial K}{\partial p}, \qquad \frac{\partial \psi}{\partial u} = \frac{\partial K}{\partial u}, \\ & E = K + t\frac{\partial \psi}{\partial t} - \psi - \sum p\frac{\partial K}{\partial p}\,. \end{aligned}\right. \tag{4_b}$$

Ma si può anche sottrarre dall'equazione (4) l'identità

$$\frac{\partial \psi}{\partial t}dt + \frac{\partial \psi}{\partial u}du = d\psi\,,$$

con che si ottiene, (2), (3),

$$\sum v\,dp - F\,dt = d(G + \sum p v),$$

formola da cui la funzione ψ è affatto scomparsa e che può essere dedotta direttamente da (1). Da quest'equazione, ponendo

$$G + \sum p v = K_1 \tag{5}$$

e considerando questa nuova funzione K_1 come espressa per mezzo della temperatura t e delle forze p mediante la sostituzione dei valori dedotti per le quantità v dalle equazioni

$$p = -\frac{\partial G}{\partial t},$$

si ricava

$$\left\{\begin{aligned} v &= \frac{\partial K_1}{\partial p}, \qquad F = -\frac{\partial K_1}{\partial t}, \\ E &= K_1 - t\frac{\partial K_1}{\partial t} - \sum p \frac{\partial K_1}{\partial p}. \end{aligned}\right. \tag{5_a}$$

Queste sono le formole che fanno riscontro alle (4_b) rispetto alla ipotesi isotermica, la quale fa sempre in tal qual modo eccezione. Nel caso, più comunemente considerato, che le variabili geometriche v si riducano ad una sola (volume specifico), la funzione K_1 corrisponde a ciò che il Sig Duhem chiama (in un senso differente) potenziale termodinamico a pressione costante.

In realtà questa funzione K_1, che non è più un vero potenziale nel preciso significato della parola, si riferisce sempre ai processi isotermi ($u = t$). Volendo invece considerare, per esempio, i processi isentropici ($u = F$), basta ricorrere alle formole più generali (4_b), prendendo per K una funzione delle forze p e dell'entropia F e ponendo, (3_c), $\psi = tF$ (omessa, per semplicità, la funzione additiva). Si trova così

$$v = \frac{\partial K}{\partial p}, \qquad t = \frac{\partial K}{\partial F}, \qquad E = K - \sum p \frac{\partial K}{\partial p},$$

formole che si possono immediatamente verificare mercè le equazioni fondamentali (1).

È quasi superfluo avvertire che il concetto di potenziale termodinamico, nel senso qui considerato, non coincide punto necessariamente con quello di *funzione caratteristica.*

CIV.

SULL'ESPRESSIONE DATA DA KIRCHHOFF AL PRINCIPIO DI HUYGENS.

Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, tomo IV (1895), II semestre, pp. 29-31.

In un recente ed interessantissimo articolo inserito nel T. 114 del Giornale di Crelle, il Sig. Gutzmer ha mostrato come la formola fondamentale di Kirchhoff possa essere direttamente ricavata dal teorema di Green.

Questo procedimento ha il rilevantissimo pregio d'eliminare dalla deduzione ogni intervento di funzioni ausiliari (che spariscono poi affatto dal risultato finale) e toglie così di mezzo tutte quelle difficoltà che l'uso di tali funzioni aveva potuto sollevare.

Quantunque la dimostrazione per tal guisa ottenuta della formola di Kirchhoff debba sotto questo rapporto considerarsi come definitiva, mi pare tuttavia che un ulteriore perfezionamento si possa ancora conseguire prendendo invece come punto di partenza il teorema gaussiano espresso dall'equazione *)

$$(1) \qquad \int \frac{dV}{dr}\frac{dS}{r^2} = \int V \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} d\sigma - (\sigma)_0 V_0 .$$

Questo teorema, altrettanto importante quanto poco adoperato (e sull'utilità del quale io ho moltissime volte insistito), scaturisce così direttamente dal processo d'inte-

*) Per la spiegazione delle segnature usate in questa e nelle seguenti formole veggasi la mia Nota: *Sull'espressione analitica del principio di* Huygens, in questi stessi Rendiconti, tomo I (1892), I° semestre, pp. 99-108; oppure queste Opere, tomo IV, pp. 499-509.

grazione per coordinate polari, che esso può quasi riguardarsi come intuitivo. Il teorema di GREEN non ne è che una trasformazione immediata; giacchè per essere

$$\frac{dV}{dr} = \sum \frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} = \sum \frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial r}{\partial x},$$

si ha

$$-\frac{dV}{dr}\frac{1}{r^2} = \sum \frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} = \sum \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\frac{1}{r}\right) - \frac{\Delta_2 V}{r},$$

epperò dall'equazione (1) si ha subito quella di GREEN

$$(\sigma_0) V_0 = \int \left(V \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} - \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial n}\right) d\sigma - \int \frac{\Delta_2 V}{r} dS,$$

dalla quale parte il Sig. GUTZMER.

Si consideri una funzione $\varphi(x, y, z, t)$ soddisfacente all'equazione

(2) $$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = a^2 \Delta_2 \varphi$$

e si ponga

(2_a) $$V = \varphi\left(x, y, z, t - \frac{r}{a}\right),$$

dove

$$r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}.$$

Per essere

$$\frac{dV}{dr} = \sum \frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial r}{\partial x} - \frac{1}{a}\frac{\partial V}{\partial t},$$

la diretta sostituzione di (2_a) nell'equazione (1) dà

(a) $$(\sigma)_0 \varphi(x_0, y_0, z_0, t) = \int V \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} d\sigma + \frac{1}{a}\int \frac{\partial V}{\partial t}\frac{dS}{r^2} + \int dS \sum \frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}.$$

Ma avendosi

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - \frac{1}{a}\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial t}\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - \frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)\frac{\partial x}{\partial r},$$

dalla somma delle tre eguaglianze del tipo

$$\frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} = \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\frac{1}{r}\right) - \frac{1}{r}\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)$$

si ricava

$$(b)\qquad \sum \frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} = \sum \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\frac{1}{r}\right) + \frac{1}{ar}\frac{d}{dr}\left(\frac{\partial V}{\partial t}\right) + \frac{1}{a^2 r}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} - a^2 \sum \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right),$$

dove l'ultimo termine è nullo in virtù di (2). Si ha dunque, (*a*),

$$(\sigma)_0 \varphi(x_0, y_0, z_0, t) = \int \left(V \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} - \frac{V_n}{r}\right) d\sigma + \frac{1}{a}\int \frac{d}{dr}\left(r\frac{\partial V}{\partial t}\right)\frac{dS}{r^2},$$

dove si è posto

$$V_n = \sum \frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial n}.$$

Ma dallo stesso teorema (1) si deduce anche

$$\int \frac{d}{dr}\left(r\frac{\partial V}{\partial t}\right)\frac{dS}{r^2} = -\int \frac{\partial V}{\partial t}\frac{\partial r}{\partial n}\frac{d\sigma}{r} = a\int \frac{\partial V}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial n}\frac{d\sigma}{r};$$

si ha dunque, più semplicemente

$$(3)\qquad (\sigma)_0 \varphi(x_0, y_0, z_0, t) = \int \left[\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{V}{r}\right) - \frac{V_n}{r}\right] d\sigma,$$

intendendo che la derivata normale di $V : r$ si riferisca al solo raggio vettore r.

Se, come è d'uso, si sostituisce a V, nel secondo membro di quest'equazione, il simbolo

$$\varphi\left(t - \frac{r}{a}\right),$$

si ottiene così senz'altro la formola di KIRCHHOFF.

È facile rilevare, da (*b*), che ove si volesse prescindere dalla sussistenza dell'equazione (2), basterebbe aggiungere al secondo membro di (3) il termine

$$-\int \left(\sum \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}\right)\frac{dS}{r}.$$

CV.

SUL TEOREMA DI KIRCHHOFF.

Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, tomo IV (1895), II° semestre, pp. 51-52.

Riflettendo nuovamente sul soggetto della precedente mia Comunicazione, ho riconosciuto che il teorema di KIRCHHOFF si fonda essenzialmente sopra una pura e semplice identità analitica, alla quale soddisfa ogni funzione $U(x, y, z, r)$ delle tre coordinate rettangole x, y, z d'un punto variabile e della distanza r di questo da un punto fisso arbitrario.

Se si designano colla caratteristica ∂ le derivate *parziali* rispetto agli argomenti x, y, z, r e colla caratteristica d le derivate *totali* o *di direzione*, si ha

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial r}\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial r}\frac{dx}{dr}$$

ed anche

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial x}\right) = \frac{1}{r}\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial r}\frac{dx}{dr} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial U}{\partial x}\frac{dx}{dr}.$$

Sommando le tre eguaglianze del tipo di quest'ultima, si trova

$$\sum \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial x}\right) = \frac{1}{r}\Delta_2 U + \frac{1}{r}\left[\frac{d}{dr}\left(\frac{\partial U}{\partial r}\right) - \frac{\partial^2 U}{\partial r^2}\right] - \frac{1}{r^2}\left(\frac{dU}{dr} - \frac{\partial U}{\partial r}\right).$$

risultato cui giova dare la forma seguente:

$$(1) \qquad \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(U - r\frac{\partial U}{\partial r}\right) + \sum \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial x}\right) + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} - \Delta_2 U\right) = 0.$$

È questa l'identità analitica cui alludevo.

Sia U funzione monodroma, continua e finita, colle sue derivate prime, in un determinato campo S, limitato da una o più superficie σ. Se, dopo aver moltiplicato (1) per dS, s'integra sul predetto campo, osservando che, per il teorema di Gauss ricordato nell'altra Nota, si ha

$$\int \frac{d}{dr}\left(U - r\frac{\partial U}{\partial r}\right)\frac{dS}{r^2} = \int \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{U}{r}\right)\frac{dr}{dn}\,d\sigma - (\sigma)_0 U_0,$$

dove U_0 è il valore di U nel punto fisso ($r = 0$), e che, per un altro notissimo teorema (caso particolare del precedente), si ha pure

$$\int dS \sum \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial x}\right) = -\int \frac{U_n}{r}\,d\sigma, \qquad \left(U_n = \sum \frac{\partial U}{\partial x}\frac{dx}{dn}\right),$$

si ottiene senz'altro

$$(2) \qquad (\sigma)_0 U_0 = \int \left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{U}{r}\right)\frac{dr}{dn} - \frac{U_n}{r}\right] d\sigma + \int \left(\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} - \Delta_2 U\right)\frac{dS}{r}.$$

Questa formola esprime ciò che a buon diritto parmi potersi chiamare il teorema di Kirchhoff (in cui rientra quello di Green, nel caso che U non contenga r).

Se $\varphi(x, y, z, t)$ è una funzione che soddisfa all'equazione differenziale dei moti vibratorî

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = a^2 \Delta_2 \varphi$$

e se si designa con U ciò che diventa questa funzione sostituendo $t - \frac{r}{a}$ al posto di t, si ha

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} = \Delta_2 U, \qquad U_0 = \varphi(x_0, y_0, z_0, t)$$

e l'equazione (2) si riduce a quella con cui Kirchhoff esprime il principio di Huygens.

L'identità (1) della presente Nota non differisce sostanzialmente dalla (b) della precedente. Ma la forma (1) permette di stabilire il teorema (2) con una sola applicazione della formola di Gauss, mentre questa dovette essere invocata a due riprese nella deduzione della Nota precedente.

CVI.

A PROPOSITO DI UNA NUOVA RICERCA DEL PROF. CARLO NEUMANN.

Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, tomo IV (1895), II° semestre, pp. 177-180.

In un recentissimo libro dell'infaticabile prof. CARLO NEUMANN, intitolato: *Allgemeine Untersuchungen über das* NEWTON'*sche Princip der Fernwirkungen, mit besonderer Rücksicht auf die elektrischen Wirkungen* (Leipzig, Teubner, 1896), l'eminente autore, guidato da considerazioni di grande interesse e degne del più serio esame da parte dei cultori delle meccaniche discipline, ha intrapreso lo studio d'un nuovo potenziale elementare della forma

$$\frac{\sum A e^{-\alpha r}}{r},$$

il quale si troverebbe soddisfare, sotto certe limitazioni riguardanti le costanti A, α, alle condizioni essenziali dell'equilibrio elettrico (fin qui credute comunemente soddisfatte dal solo potenziale newtoniano).

Gli svariati svolgimenti dati sull'argomento dal prof. NEUMANN, colla consueta abilità e limpidezza, sono diretti in parte alla deduzione delle proprietà caratteristiche delle nuove funzioni potenziali, in parte al raffronto della teoria classica con quella che risulta dall'uso di queste funzioni ed in parte, finalmente, ad alcune altre importanti questioni, più o meno strettamente connesse col soggetto principale. Tanto le premesse fondamentali, quanto questi loro molteplici svolgimenti daranno ampia materia di ponderazione e di studio ai matematici ed ai fisici, ai quali l'autore stesso addita già qualche punto meritevole d'indagine più sottile. Fin d'ora tuttavia mi permetto di presentare alcune semplici osservazioni intorno ad uno dei teoremi caratteristici per le nuove funzioni potenziali, intorno a quello, cioè, che fa in tal qual modo riscontro al teorema di POISSON; e ciò per rilevare il suo collegamento con un teorema generale, già da me stabilito (seguendo un altro ordine di ricerche) in una Nota del 1892 *Sull'espres-*

sione analitica del principio di HUYGENS, inserita nei Rendiconti di questa R. Accademia *). Del quale teorema è caso particolare un altro che era stato ancora prima da me dedotto, in un lavoro del 1887 *Intorno ad alcuni problemi di propagazione del calore*, inserito nelle Memorie della R. Accademia di Bologna **); egli è anzi questo caso particolare che viene più direttamente in acconcio per l'applicazione alla legge esponenziale neumanniana.

Il primo ed il più generale dei due teoremi cui alludo (Nota del 1892) è il seguente. Ponendo

$$U = \int K(\xi, \eta, \zeta, r) \frac{dS}{r}, \tag{1}$$

dove S è un qualunque spazio, luogo dei punti (ξ, η, ζ), e dove r è la distanza dell'elemento dS da un punto arbitrario (x, y, z), si ha

$$\Delta_2 U = \int \frac{\partial^2 K}{\partial r^2} \frac{dS}{r} - 4\pi K(x, y, z, 0), \tag{1$_a$}$$

dove

$$\Delta_2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \tag{1$_b$}$$

La funzione K, delle coordinate e del raggio vettore, deve naturalmente supporsi dotata delle proprietà necessarie perchè le formole precedenti abbiano un significato; essa si suppone *nulla* al di fuori dello spazio S [ed è perciò che nell'ultimo termine dell'equazione (1_a) è stato sostituito, come più comodo, il fattore 4π al fattore (σ) della citata Nota].

Se, in particolare, si attribuisce a questa funzione K la forma

$$K(\xi, \eta, \zeta, r) = k(\xi, \eta, \zeta) . \psi(r),$$

le equazioni (1), (1_a) diventano rispettivamente

$$V = \int k(\xi, \eta, \zeta) \frac{\psi(r) dS}{r}, \tag{2}$$

$$\Delta_2 V = \int \psi''(r) \frac{k\, dS}{r} - 4\pi k(x, y, z) . \psi(0) \tag{2$_a$}$$

e contengono il teorema più speciale che era già stato dedotto nel § 1 dell'altra citata Memoria del 1887. È manifesto che l'espressione (2) non è altro che quella della funzione potenziale di spazio che nasce da un potenziale elementare (fra due unità di massa)

*) Tomo I (1892), I° semestre, pp. 99-108; oppure queste OPERE, tomo IV, pp. 499-509.

**) Serie IV tomo VIII (1887), pp. 291-326; oppure queste OPERE, tomo IV, pp. 270-299.

della forma

$$\frac{\psi(r)}{r};$$

che corrisponde, cioè, ad una legge *arbitraria* d'azione a distanza (salvo le restrizioni naturali testè accennate), legge che comprende come caso particolare quella considerata dal prof. NEUMANN.

Ed effettivamente se si suppone, in primo luogo, che la funzione $\psi(r)$ soddisfaccia all'equazione differenziale

$$\psi'' = \alpha^2 \psi,$$

dove α è una costante, l'equazione (2_a) si riduce senz'altro a

$$\Delta_2 V = \alpha^2 V - 4\pi k \psi(0),$$

coincidendo esattamente con quella che il prof. NEUMANN stabilisce, mediante un calcolo più minuto, per il caso in cui si abbia

$$\psi = A e^{-\alpha r},$$

cioè per quella special legge d'azione

$$\frac{A e^{-\alpha r}}{r}$$

ch'egli designa col nome di legge esponenziale *monomia*.

Ma lo stesso teorema (2_a) si presta molto opportunamente anche alla deduzione della assai più complessa formola neumanniana che corrisponde alla legge esponenziale *polinomia*. Giova a tal fine mutare lievemente la segnatura, sostituendo il simbolo d'operazione ∇ al precedente simbolo Δ_2, e scrivendo ∇_2, ∇_3, ecc. per indicare le successive *iterazioni* dell'operazione ∇, cioè dell'originaria operazione (1_b). In tal modo si ottiene la seguente successione d'equazioni, dove $\psi_0^{(n)}$ rappresenta il valore, per $r = 0$, della derivata n^{esima} di $\psi(r)$:

$$V = \int \psi \frac{k\,dS}{r},$$

$$\nabla V = \int \psi'' \frac{k\,dS}{r} - 4\pi \psi_0 k,$$

$$\nabla_2 V = \int \psi^{\text{IV}} \frac{k\,dS}{r} - 4\pi \psi_0 \nabla k - 4\pi \psi_0'' k,$$

$$\nabla_3 V = \int \psi^{\text{VI}} \frac{k\,dS}{r} - 4\pi \psi_0 \nabla_2 k - 4\pi \psi_0'' \nabla k - 4\pi \psi_0^{\text{IV}} k,$$

. . . .

Suppongasi ora che la funzione $\psi(r)$ soddisfaccia all'equazione differenziale omogenea a coefficienti costanti

$$(3)\qquad \psi^{(2n)} + c_1\psi^{(2n-2)} + c_2\psi^{(2n-4)} + \cdots + c_{n-1}\psi'' + c_n\psi = 0$$

e s'immagini protratta la serie delle antecedenti equazioni fino alla $(n+1)^{\text{esima}}$. Facendo la somma di tutte queste equazioni, dopo averle ordinatamente moltiplicate per i fattori costanti $c_n, c_{n-1}, \ldots, c_1, 1$, si ottiene, con riguardo a (3), il risultato seguente:

$$(3_a)\qquad \left\{\begin{aligned} &\nabla_n V + c_1\nabla_{n-1}V + \cdots + c_{n-1}\nabla V + c_n V\\ &= -4\pi(C_0 k + C_1\nabla k + C_2\nabla_2 k + \cdots + C_{n-1}\nabla_{n-1}k), \end{aligned}\right.$$

dove le n nuove costanti $C_0, C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}$ hanno i valori seguenti:

$$(3_b)\qquad \left\{\begin{aligned} &C_0 = \psi_0^{(2n-2)} + c_1\psi_0^{(2n-4)} + \cdots + c_{n-2}\psi_0'' + c_{n-1}\psi_0,\\ &C_1 = \psi_0^{(2n-4)} + c_1\psi_0^{(2n-6)} + \cdots + c_{n-2}\psi_0,\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ &C_{n-2} = \psi_0'' + c_1\psi_0,\\ &C_{n-1} = \psi_0. \end{aligned}\right.$$

Se ora si pone

$$\psi(r) = A_1 e^{-\alpha_1 r} + A_2 e^{-\alpha_2 r} + \cdots + A_n e^{-\alpha_n r} = \sum A e^{-\alpha r}$$

e se si ammette che le n costanti (diseguali) α siano radici dell'equazione

$$\alpha^{2n} + c_1\alpha^{2n-2} + \cdots + c_n = 0,$$

questa funzione ψ soddisfa appunto all'equazione differenziale (3), qualunque sieno le costanti A, e la formola (3_a) diventa precisamente quella che il prof. NEUMANN assume come espressione definitiva del teorema analogo a quello di POISSON, rispetto alla legge esponenziale polinomia

$$\frac{\sum A e^{-\alpha r}}{r}$$

(cfr. il § 8 del capitolo III dell'opera del NEUMANN).

Per verità la funzione V considerata dal prof. NEUMANN comprende anche una parte dipendente da distribuzioni in superficie; ma un'ovvia riflessione mostra che l'equazione (3_a), la quale non è per sè stessa applicabile che a punti (x, y, z) nei quali la densità cubica k sia finita e determinata, sussiste senz'altro, sotto questa medesima riserva, anche nel caso d'una distribuzione mista, di spazio e di superficie. Rispetto ai punti d'una distribuzione superficiale, continua invece a sussistere l'ordinaria relazione fra le due derivate normali della funzione potenziale, semprechè la funzione $\psi(r)$ e la sua derivata $\psi'(r)$ si mantengano finite per $r = 0$; come risulta dall'identità

$$\frac{\psi(r)}{r} = \frac{\psi(0)}{r} + \frac{\psi(r) - \psi(0)}{r}$$

e come in particolare si verifica per la legge esponenziale. Naturalmente nel secondo membro della relazione anzidetta la densità quadratica si trova affetta dal fattore costante $\psi(0)$.

CVII.

SULLE EQUAZIONI DINAMICHE DI LAGRANGE.

Rendiconti del R. Istituto Lombardo, serie II, tomo XXVIII (1895), pp. 744-752.

L'indirizzo in cui è entrata da qualche tempo l'indagine matematica di numerose classi di fenomeni fisici ha rimesso in grande onore le equazioni dinamiche di LAGRANGE, le quali prima di MAXWELL non erano quasi considerate che come un sussidio di pura analisi, per la più spedita o più elegante trattazione dei problemi appartenenti alla meccanica classica.

Se non che, mentre si fa ora grand'uso di queste equazioni, con non dubbio vantaggio della fisica teoretica, si lascia forse troppo spesso nell'ombra quel principio fondamentale che le riassume tutte in una sola formola semplicissima; principio che è stato sempre considerato, da LAGRANGE in poi, come il vero cardine della meccanica analitica e che, come ha mostrato per esempio BOLTZMANN, può effettivamente essere invocato per la deduzione diretta di importanti leggi fisico-matematiche.

In prova del precedente asserto si può citare il celebre *Treatise on natural Philosophy* di W. THOMSON e TAIT, nella prima edizione del quale le equazioni in discorso erano state ricavate (sull'esempio di LAGRANGE stesso) dal detto principio fondamentale; mentre nella seconda esse vengono invece stabilite mediante la trasformazione delle ordinarie equazioni cartesiane (per evitare, dicono gli illustri Autori, *« an unnecessary complication »*). Altri scrittori risalgono bensì al citato principio, ma solamente per passare da esso a quello di HAMILTON e per ricavare poscia da questo le equazioni lagrangiane; con che si viene ad introdurre nella catena delle deduzioni un anello estraneo all'uopo, per quanto indiscutibile ne sia la potenza sotto altri aspetti.

La questione di metodo cui qui si allude non è in sè stessa certamente di grande rilievo, nè converrebbe esagerarne l'importanza. Ma trattandosi di argomento che interessa quasi più il fisico che il matematico e nel quale è quindi desiderabile che venga rimosso ogni artifizio algoritmico, senza sagrificare alcun elemento utile alla discussione, non parrà forse a tutti superfluo il seguente breve richiamo all'uso diretto del principio di LAGRANGE.

Sieno m la massa, x, y, z le coordinate cartesiane ortogonali di uno qualunque dei punti materiali che costituiscono il sistema da studiarsi e sieno X, Y, Z le componenti della forza attiva che sollecita quel punto nell'istante t. Rappresentando con apici le derivate totali rispetto al tempo e denotando collettivamente con u le tre coordinate x, y, z e con U le omologhe componenti di forza X, Y, Z, il principio fondamentale di LAGRANGE è espresso dalla formola

$$\sum (U - m u'') \delta u = 0 ,$$

dove la somma si estende a tutte le masse ed a tutte le coordinate $u = x$, y, z di ciascuna massa e dove δu è una qualunque variazione *virtuale* della coordinata u. Designando al solito con

$$T = \frac{1}{2} \sum m u'^2$$

la forza viva totale e con

$$\delta L = \sum U \delta u$$

il lavoro virtuale totale, la precedente formola si può, com'è notissimo, porre sotto la forma equivalente

$$\delta L = \left(\sum \frac{\partial T}{\partial u'} \delta u \right)' - \delta T .$$

Ciò posto si rappresenti con $(q_1, q_2, \ldots)$ un gruppo di variabili indipendenti, o *coordinate generali*, mediante le quali, tenuto conto dei legami del sistema, si possano esprimere le coordinate cartesiane di tutti i punti di questo. Il numero di queste nuove coordinate, che si suppone finito, è quello dei *gradi di mobilità* del sistema. Non è escluso che le espressioni delle coordinate u per le q possano contenere esplicitamente anche il tempo t (quando vi sieno legami mobili), per guisa che si abbia

$$u' = \frac{\partial u}{\partial t} + \sum \frac{\partial u}{\partial q} q' .$$

Espressa colle nuove variabili q, la forza viva T diventa una funzione di 2° grado, generalmente non omogenea, delle derivate q', contenente nei suoi coefficienti le variabili q ed il tempo t. Se si osserva che dando nella precedente equazione alle q' gli incrementi δq le u' ricevono gli incrementi δu (poichè le variazioni virtuali delle coordinate devono essere prese per t costante), si ha subito

$$\sum \frac{\partial T_u}{\partial u'} \delta u = \sum \frac{\partial T_q}{\partial q'} \delta q ,$$

dove, per chiarezza, si sono momentaneamente designate con T_u e con T_q le due espressioni equivalenti della forza viva, nel primitivo e nel nuovo sistema di coordinate. Di qui risulta senz'altro che

$$(1) \qquad \delta L = \left(\sum \frac{\partial T}{\partial q'} \delta q\right)' - \delta T$$

è l'espressione del principio di LAGRANGE, colle coordinate generali q. Se al tempo stesso si pone

$$(1_a) \qquad \delta L = \sum Q \delta q ,$$

dove le quantità Q, facilmente calcolabili, sono (in senso generale) le componenti di forza attiva secondo le omologhe coordinate q, basta eseguire le due operazioni indicate nel secondo membro di (1) per ottenere le equazioni del tipo

$$(1_b) \qquad Q = \left(\frac{\partial T}{\partial q'}\right)' - \frac{\partial T}{\partial q} ,$$

cioè le equazioni dinamiche di LAGRANGE.

Se in particolare si suppone in (1) $\delta = d$, il che non è lecito che quando le espressioni delle coordinate u per le q sieno indipendenti dal tempo e, per conseguenza, quando T sia funzione quadratica ed omogenea delle q', si ottiene

$$(1_c) \qquad dL = d\left(\sum q' \frac{\partial T}{\partial q'} - T\right),$$

equazione che esprime il teorema delle forze vive, poichè la quantità fra parentesi è in questo caso uguale a T.

Supponghasi ora che, per ragioni fondate nella natura del problema da trattarsi, sia opportuno (come spesso accade) dividere le variabili q in due gruppi distinti. Per comodo si conservi la designazione collettiva di q per le variabili del primo gruppo e si denotino, pure collettivamente, con r quelle del secondo. All'equazione (1) giova dare in corrispondenza la forma

$$(2) \qquad \delta L = \left(\sum \frac{\partial T}{\partial q'} \delta q + \sum \frac{\partial T}{\partial r'} \delta r\right)' - \delta T ,$$

dove il primo membro ha ora il significato

$$(2_a)\qquad \delta L = \sum Q \delta q + \sum R \delta r .$$

S'introducano nuove quantità ρ (in numero eguale a quello delle r) mediante le eguaglianze del tipo

$$(2_b)\qquad \rho = \frac{\partial T}{\partial r'} ,$$

lineari in ρ ed in r'. Da queste si deduce

$$\sum \rho \, d r' = \sum \frac{\partial T}{\partial r'} d r' ,$$

ovvero

$$d \sum \rho r' - \sum r' d\rho = d T - \sum \frac{\partial T}{\partial \alpha} d\alpha ,$$

dove si è per un momento indicata con α una qualunque delle quantità (considerate tutte come indipendenti) di cui T è funzione all'infuori delle r': cioè una qualunque delle quantità q, q', r ed anche degli altri parametri che possono eventualmente entrare in T, come ad esempio il tempo t. Se la precedente eguaglianza, semplice conseguenza delle (2_b), si scrive nella forma

$$\sum r' d\rho - \sum \frac{\partial T}{\partial \alpha} d\alpha = d U = \sum \frac{\partial U}{\partial \rho} d\rho + \sum \frac{\partial U}{\partial \alpha} d\alpha ,$$

dove si è posto

$$(2_c)\qquad U = \sum \rho r' - T,$$

si ottiene immediatamente

$$(2_d)\qquad r' = \frac{\partial U}{\partial \rho} , \qquad \frac{\partial T}{\partial \alpha} = - \frac{\partial U}{\partial \alpha}$$

ed in virtù delle eguaglianze (2_b), (2_c), come pure delle seconde (2_d) per $\alpha = q'$, l'equazione fondamentale (2) diventa

$$\delta L = \left(\sum \rho \delta r - \frac{\partial U}{\partial q'} \delta q\right)' - \delta\left(\sum \rho r' - U\right),$$

o meglio

$$(3)\qquad \delta L = \delta U - \left(\sum \frac{\partial U}{\partial q'} \delta q\right)' + \sum (\rho' \delta r - r' \delta \rho) .$$

La funzione U che figura in questa formola e nelle (2_d) deve intendersi formata colle quantità q, q', r, ρ, mercè la sostituzione in (2_c) dei valori di r' forniti linearmente dalle equazioni (2_b). Essa è di 2° grado rispetto alle quantità q' e ρ e contiene nei suoi coefficienti le quantità q, r ed eventualmente t. Da (2_c) si ricava reciprocamente, (2_d),

$$T = \sum \rho \frac{\partial U}{\partial \rho} - U. \tag{3_a}$$

Eseguendo le operazioni indicate nel secondo membro di (3) si ottengono i seguenti tre gruppi d'equazioni dinamiche:

$$\left\{\begin{aligned} Q &= \frac{\partial U}{\partial q} - \left(\frac{\partial U}{\partial q'}\right)', \\ R &= \frac{\partial U}{\partial r} + \rho', \\ 0 &= \frac{\partial U}{\partial \rho} - r', \end{aligned}\right. \tag{3_b}$$

il cui numero eguaglia quello delle quantità q, r, ρ. Le equazioni dei due ultimi gruppi non sono che del prim'ordine differenziale, quelle del primo gruppo sono, come già le (1_b), del second'ordine.

Quando i legami sono indipendenti dal tempo è lecito porre in (3) $\delta = d$, con che si ottiene

$$dL = d\left(U - \sum q' \frac{\partial U}{\partial q'}\right),$$

od anche, poichè U è in questo caso funzione quadratica ed omogenea delle q' e delle ρ,

$$dL = d\left(\sum \rho \frac{\partial U}{\partial \rho} - U\right);$$

ciò che riproduce, (3_a), il teorema delle forze vive.

La trasformazione (2_b), (2_c), (2_d), ove fosse applicata a tutte le coordinate, non sarebbe altro che quella di HAMILTON.

Applicata ad una parte soltanto delle coordinate, essa conduce ad equazioni dinamiche (3_b) che presentano in parte il tipo lagrangiano, in parte l'hamiltoniano. L'uso di questa trasformazione intermedia si rende particolarmente vantaggioso nei casi in cui sia lecito attuare quella che gli inglesi chiamano *« ignoration of coordinates »*.

Suppongasi che T (e quindi anche U) non contenga nei suoi coefficienti le coordinate r. Le equazioni (3_b) del secondo gruppo si riducono in questo caso ad

$$R = \rho';$$

epperò, se *tutte* le forze R sono *nulle*, esprimono che le quantità ρ fungono come altrettanti parametri invariabili. Dovendosi, in base a ciò, porre tanto $\rho' = 0$ quanto $\delta\rho = 0$, l'equazione (3) si riduce semplicemente a

$$(4) \qquad \delta L = \delta U - \left(\sum \frac{\partial U}{\partial q'} \delta q\right)' .$$

Ciò posto si decomponga la forza viva T (nella cui espressione di 2° grado rispetto a q', r' i coefficienti sono tutti, per ciò che si disse, funzioni delle sole q ed eventualmente di t) in tre parti

$$(4_a) \qquad T = T_q + T_r + \Lambda ,$$

di cui la prima, T_q, comprende tutti i termini che non contengono alcuna r' (ed è quindi di 2° grado, generalmente non omogenea, rispetto alle q'); la seconda, T_r, è funzione quadratica ed omogenea delle r'; e finalmente la terza

$$(4_b) \qquad \Lambda = \sum \lambda r'$$

è lineare ed omogenea rispetto alle stesse r', coi coefficienti λ funzioni di 1° grado (generalmente non omogenee) delle q'. Avendosi per tal modo, (2_b),

$$(4_c) \qquad \rho = \frac{\partial T_r}{\partial r'} + \lambda,$$

il valore di U viene espresso, (2_c), (4_a), da

$$U = T_r - T_q ,$$

ove si devono intendere sostituiti in T_r i valori delle r' dati da (4_c). Si rappresenta in modo semplice il risultato di questa sostituzione facendo intervenire la quadratica $\mathbf{T}$ reciproca di T_r: è chiaro infatti, (4_c), che la cercata espressione non è altro che questa stessa quadratica reciproca, $\mathbf{T}$, formata cogli argomenti $\rho - \lambda$, vale a dire che si può scrivere

$$(4_d) \qquad T_r = \mathbf{T}_\rho + \mathbf{T}_\lambda - \sum \frac{\partial \mathbf{T}_\lambda}{\partial \lambda} \rho ,$$

dove $\mathbf{T}_\rho$ e $\mathbf{T}_\lambda$ rappresentano rispettivamente la quadratica $\mathbf{T}$ formata una volta cogli argomenti costanti ρ ed un'altra cogli argomenti variabili λ. In virtù delle espressioni così ottenute per U e per T_r, se si pone

$$(5) \qquad \mathbf{U} = T_q - \mathbf{T}_\lambda - \mathbf{T}_\rho , \qquad \mathbf{V} = \sum \frac{\partial \mathbf{T}_\lambda}{\partial \lambda} \rho ,$$

si trova

$$(5_a) \qquad - U = \boldsymbol{U} + \boldsymbol{V},$$

dove nel secondo membro la prima parte, $\boldsymbol{U}$, è di 2° grado e la seconda, $\boldsymbol{V}$, di 1° grado rispetto alle q'. Mercè quest'espressione di U, dal terzo gruppo d'equazioni (3_b) si deduce

$$r' = \frac{\partial \boldsymbol{T}_\rho}{\partial \rho} - \frac{\partial \boldsymbol{T}_\lambda}{\partial \lambda},$$

donde

$$\sum \lambda r' = \sum \frac{\partial \boldsymbol{T}_\rho}{\partial \rho} \lambda - 2 \boldsymbol{T}_\lambda,$$

ovvero, (4_b),

$$\Lambda = \sum \frac{\partial \boldsymbol{T}_\lambda}{\partial \lambda} \rho - 2 \boldsymbol{T}_\lambda,$$

epperò, (4_d),

$$T_r + \Lambda = \boldsymbol{T}_\rho - \boldsymbol{T}_\lambda.$$

La forza viva totale T può quindi mettersi, (4_a), sotto la forma definitiva

$$(5_b) \qquad T = T_q - \boldsymbol{T}_\lambda + \boldsymbol{T}_\rho,$$

forma che risulta anche dall'applicazione del processo (3_a) all'espressione (5_a) di U.

Non resta ora che sostituire questa stessa espressione di U in (4), con che si ottiene

$$(5_c) \qquad \begin{cases} \delta L = \left(\sum \dfrac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial q'} \delta q\right)' - \delta \boldsymbol{U} \\ \qquad + \left(\sum \dfrac{\delta \boldsymbol{V}}{\partial q'} \delta q\right)' - \delta \boldsymbol{V}. \end{cases}$$

Lo sviluppo delle operazioni indicate nel secondo membro dà risultati di forma molto diversa per la parte in $\boldsymbol{U}$ e per quella in $\boldsymbol{V}$. Rispetto alla prima, il coefficiente di δq ha l'ordinaria forma

$$\left(\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial q'}\right)' - \frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial q},$$

la quale, finchè si rimane nella teoria generale, non si presta ad utili riduzioni, come quella che è essenzialmente del second'ordine differenziale. L'altra parte non fornisce invece effettivamente che termini di prim'ordine; ma per riconoscere il carattere peculiare del suo sviluppo bisogna ordinare l'espressione (5) di $\boldsymbol{V}$ secondo le q', ponendo

$$(5_d) \qquad \boldsymbol{V} = \sum \frac{\partial \boldsymbol{T}_\lambda}{\partial \lambda} \rho = \varkappa_0 + \sum_i \varkappa_i q'_i, \qquad (i = 1, 2, \dots)$$

dove i coefficienti $\varkappa$ non dipendono che dalle variabili q ed eventualmente da t. Si trova in tal modo, eseguendo le operazioni indicate in (5_c), che il coefficiente di δq nella detta seconda parte è

$$\frac{\partial \varkappa}{\partial t} - \frac{\partial \varkappa_0}{\partial q} + \sum_i \left(\frac{\partial \varkappa}{\partial q_i} - \frac{\partial \varkappa_i}{\partial q}\right) q_i',$$

dove si sottintende che $\varkappa$ e q abbiano lo *stesso* indice (non designato). Il tipo delle definitive equazioni dinamiche è quindi il seguente:

$$(5_e) \qquad Q = \left(\frac{\partial U}{\partial q'}\right)' - \frac{\partial U}{\partial q} + \sum_i \left(\frac{\partial \varkappa}{\partial q_i} - \frac{\partial \varkappa_i}{\partial q}\right) q_i' + \frac{\partial \varkappa}{\partial t} - \frac{\partial \varkappa_0}{\partial q}.$$

I termini lineari nelle q' compresi sotto la sommatoria hanno la forma *pfaffiana* ed è sempre nullo quello fra essi per il quale $q_i = q$. I due ultimi termini dopo la sommatoria mancano quando non vi sieno legami mobili, nel qual caso i termini pfaffiani sono i soli lineari nelle q'.

In questo stesso caso le equazioni precedenti coincidono, astrazion fatta dalle differenze di segnatura, con quelle date con altro procedimento da THOMSON e TAIT nell'opera citata (p. 323 della 2ª edizione).

Al tipo (5_e) appartengono pure le equazioni date da C. NEUMANN nelle *Hydrodynamische Untersuchungen* del 1883 e più recentemente riprodotte dallo stesso illustre Autore, con nuovi svolgimenti, nel settimo capitolo dei *Beiträge zu einzelnen Theilen der mathematischen Physik* del 1893.

CVIII.

SULLA TEORIA DELLE FUNZIONI SFERICHE.

Rendiconti del R. Istituto Lombardo, serie II, tomo XXIX (1896), pp. 793-799.

Nelle poche pagine che seguono raccolgo alcune semplici osservazioni, che mi sembrano rendere alquanto più agevole la deduzione d'alcuni passi importanti nella teoria generale delle funzioni sferiche.

Sieno ξ, η, ζ i coseni di direzione d'un raggio, espressi mediante i due angoli fondamentali θ ed ω (distanza polare e longitudine) dalle formole

$$\xi = \operatorname{sen}\theta \cos\omega, \qquad \eta = \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\omega, \qquad \zeta = \cos\theta.$$

Queste tre formole sono surrogate dalle due

$$\xi = \sqrt{1-\zeta^2}\cos\omega, \qquad \eta = \sqrt{1-\zeta^2}\operatorname{sen}\omega$$

quando, come spesso avviene, si assumono quali variabili indipendenti ζ ed ω.

L'equazione differenziale delle funzioni sferiche d'ordine n, espressa con queste ultime due variabili, è

$$\frac{\partial}{\partial\zeta}\left[(1-\zeta^2)\frac{\partial\varphi_n}{\partial\zeta}\right] + \frac{1}{1-\zeta^2}\frac{\partial^2\varphi_n}{\partial\omega^2} + n(n+1)\varphi_n = 0. \tag{1}$$

Suppongasi, se è possibile, che la funzione φ_n dipenda direttamente da un solo argomento, u, il quale sia alla sua volta funzione di ζ ed ω. In tale ipotesi la precedente equazione diventa

$$\left[\left(\sqrt{1-\zeta^2}\frac{\partial u}{\partial\zeta}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}}\frac{\partial u}{\partial\omega}\right)^2\right]\frac{d^2\varphi_n}{du^2}$$

$$+\left\{\frac{\partial}{\partial\zeta}\left[(1-\zeta^2)\frac{\partial u}{\partial\zeta}\right]+\frac{1}{1-\zeta^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\omega^2}\right\}\frac{d\varphi_n}{du}+n(n+1)\varphi_n=0;$$

epperò se si pone

$$(2)\qquad\left\{\begin{aligned}&\left(\sqrt{1-\zeta^2}\frac{\partial u}{\partial\zeta}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}}\frac{\partial u}{\partial\omega}\right)^2+u^2=1,\\&\frac{\partial}{\partial\zeta}\left[(1-\zeta^2)\frac{\partial u}{\partial\zeta}\right]+\frac{1}{1-\zeta^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\omega^2}+2u=0,\end{aligned}\right.$$

l'equazione (1) si riduce a

$$\frac{d}{du}\left[(1-u^2)\frac{d\varphi_n}{du}\right]+n(n+1)\varphi_n=0;$$

essa si riduce, cioè, all'equazione caratteristica delle funzioni sferiche d'una sola variabile, u.

Delle due equazioni (2) la seconda rientra in (1) per $n=1$, $\varphi=u$: quindi l'argomento u dev'essere una funzione sferica di 1° ordine. Resta a vedersi se una tale funzione possa anche soddisfare alla prima delle equazioni (2).

Prendendo questa funzione fra quelle di prima specie, la sua espressione generale è

$$(3)\qquad u=a\xi+b\eta+c\zeta=(a\cos\omega+b\,\mathrm{sen}\,\omega)\sqrt{1-\zeta^2}+c\zeta,$$

dove a, b, c sono tre costanti. Di qui si deduce

$$\sqrt{1-\zeta^2}\frac{\partial u}{\partial\zeta}=-(a\cos\omega+b\,\mathrm{sen}\,\omega)\zeta+c\sqrt{1-\zeta^2},$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}}\frac{\partial u}{\partial\omega}=-a\,\mathrm{sen}\,\omega+b\cos\omega;$$

talchè sostituendo nella prima equazione (2) si trova

$$(3_a)\qquad a^2+b^2+c^2=1.$$

Basta dunque ammettere che fra le tre costanti a, b, c sussista questa semplicissima relazione, perchè l'argomento u definito da (3) possegga la proprietà richiesta, qualora si prenda al tempo stesso per $\varphi_n(u)$ una funzione sferica d'ordine n ad una sola variabile, u.

Stante la forma della relazione (3_a), la più ovvia maniera d'interpretare le tre costanti a, b, c è quella di considerarle come coseni (ξ', η', ζ') di una direzione indipendente da (ξ, η, ζ). Così facendo si ricade su quella ben nota funzione dell'argomento

$$\xi\xi' + \eta\eta' + \zeta\zeta' = \zeta\zeta' + \sqrt{1-\zeta^2}\sqrt{1-\zeta'^2}\cos(\omega-\omega')$$

che, nella teoria delle funzioni sferiche di prima specie, va nota sotto il nome di *coefficiente di* LAPLACE, e sulla quale ritornerò fra breve. Ma, poichè nulla vieta di attribuire alle costanti a, b, c valori *complessi*, si può anche soddisfare alla (3_a) ponendo

$$a^2 + b^2 = 0, \qquad c = 1,$$

vale a dire attribuendo ad u la forma complessa

$$u = \zeta + k(\xi + i\eta) = \zeta + k\sqrt{1-\zeta^2}\, e^{\omega i},$$

dove k è una costante assolutamente arbitraria. Si ottiene in tal modo, restando per semplicità nell'ipotesi $\varphi_n(u) = P_n(u)$, la nuova funzione sferica d'ordine n a due variabili ζ, ω

$$P_n(\zeta + k\sqrt{1-\zeta^2}\,.\,e^{\omega i}).$$

Lo sviluppo tayloriano di questa funzione

$$P_n(\zeta) + \sum_{m=1}^{m=n} \frac{k^m}{1\,.\,2\,\ldots\,m}(1-\zeta^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m P_n(\zeta)}{d\zeta^m} e^{m\omega i}$$

fa immediatamente conoscere, stante l'arbitrio di k, le cosidette $2n+1$ funzioni sferiche *fondamentali* di prima specie

$$P_n(\zeta), \qquad P_{n,m}(\zeta)\cos m\omega, \qquad P_{n,m}(\zeta)\,\mathrm{sen}\, m\omega, \qquad (m = 1, 2, \ldots, n)$$

dove si è posto

$$(4) \qquad P_{n,m}(\zeta) = (1-\zeta^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m P_n(\zeta)}{d\zeta^m},$$

dove, cioè, si è designato con $P_{n,m}$ la m^{esima} funzione aggiunta della P_n. È del resto facilissimo verificare che, come la funzione principale P_n, così anche le altre $2n$ funzioni testè dedotte sono razionali, intere ed omogenee del grado n rispetto a ξ, η, ζ.

L'espressione più generale d'una funzione sferica di prima specie φ_n è, dietro quanto precede,

$$\varphi_n(\zeta,\omega) = A_0 P_n(\zeta) + \sum_{m=1}^{m=n}(A_m \cos m\omega + B_m \operatorname{sen} m\omega) P_{n,m}(\zeta)$$

e contiene $2n+1$ costanti arbitrarie A_0, A_m, B_m.

Il dianzi ricordato coefficiente di Laplace, formato cogli argomenti ζ, ω, ζ', ω', rientra in questo tipo $\varphi_n(\zeta, \omega)$ colle peculiari proprietà seguenti:

1° d'essere simmetrico rispetto a ζ, ζ' e ad ω, ω';

2° di contenere le variabili ω, ω' nella sola differenza $\omega - \omega'$;

3° di ridursi a $P_n(\zeta)$ per $\zeta' = 1$.

Ne risulta che tale coefficiente è esprimibile nella forma

$$(5) \quad \left\{\begin{aligned} & P_n\left[\zeta\zeta' + \sqrt{1-\zeta^2}\sqrt{1-\zeta'^2}\cos(\omega-\omega')\right] \\ & = P_n(\zeta)P_n(\zeta') + 2\sum_{m=1}^{m=n} c_{n,m} P_{n,m}(\zeta) P_{n,m}(\zeta') \cos m(\omega-\omega'), \end{aligned}\right.$$

dove non restano da determinare che i valori degli n coefficienti *numerici* $c_{n,m}$.

Per eseguire facilmente tale determinazione giova introdurre una nuova variabile s, ponendo

$$\sqrt{1-\zeta'^2}.e^{(\omega-\omega')i} = 2s.$$

Da questa relazione si deduce facilmente

$$2(1-\zeta'^2)^{\frac{m}{2}} \cos m(\omega-\omega') = (2s)^m(1+S^m),$$

dove per brevità si è posto

$$S = \frac{1-\zeta'^2}{4s^2};$$

in particolare si ha, $(m=1)$,

$$\sqrt{1-\zeta'^2}\cos(\omega-\omega') = s(1+S).$$

Per tale sostituzione, la proprietà espressa dall'equazione (5) si può enunciare in altri termini, dicendo che, qualunque sieno i valori di ζ, ζ' ed s, sussiste, per opportuni valori numerici dei coefficienti $c_{n,m}$, l'eguaglianza

$$P_n\left[\zeta\zeta'+s\sqrt{1-\zeta^2}(1+S)\right]=P_n(\zeta)P_n(\zeta')+\sum_{m=1}^{m=n}c_{n,m}P_{n,m}(\zeta)\frac{d^mP_n(\zeta')}{d\zeta'^m}(2s)^m(1+S^m).$$

Ciò posto, tenendo fissi i valori di ζ e di s, si faccia convergere quello di ζ' verso l'unità. Se si rammenta che, per $\zeta'=1$, si ha notoriamente

$$P_n(\zeta')=1,\qquad \frac{d^mP_n(\zeta')}{d\zeta'^m}=\frac{1}{2.4\ldots 2m}\,\frac{1.2\ldots(n+m)}{1.2\ldots(n-m)},$$

si ottiene in tal modo

$$P_n(\zeta+s\sqrt{1-\zeta^2})=P_n(\zeta)+\sum_{m=1}^{m=n}\frac{1.2\ldots(n+m)}{1.2\ldots(n-m)}c_{n,m}\frac{(s\sqrt{1-\zeta^2})^m}{1.2\ldots m}\frac{d^mP_n(\zeta)}{d\zeta^m}.$$

Il confronto del secondo membro di quest'eguaglianza collo sviluppo tayloriano del primo membro dà immediatamente

$$\frac{1.2\ldots(n+m)}{1.2\ldots(n-m)}c_{n,m}=1,$$

donde

$$c_{n,m}=\frac{1.2\ldots(n-m)}{1.2\ldots(n+m)},\tag{5_a}$$

e questa formola somministra senz'altro la determinazione richiesta.

Colgo quest'occasione per aggiungere una nuova deduzione delle formole segnate (2) nella Nota *Sulle funzioni sferiche d'una variabile*, da me inserita nel 1887 in questi Rendiconti *), deduzione che riesce non solo più semplice, ma anche più comprensiva della ivi esposta, in quanto include simultaneamente altre relazioni legate con quelle ed utilizzate in una posteriore mia Nota del 1890, pubblicata nei *Comptes Rendus* di quell'anno **).

Conservando la segnatura R_n per la funzione sferica formata linearmente con $P_n(\zeta)$ e $Q_n(\zeta)$, le due funzioni consecutive R_{n-1} ed R_n (formate ciascuna con costanti diverse

---

*) Serie II, tomo XX, pp. 469-478; oppure queste OPERE, tomo IV, pp. 236-244.

**) *Quelques remarques au sujet des fonctions sphériques*, Comptes Rendus, tomo CX, pp. 934-938; oppure queste OPERE, tomo IV, pp. 362-366.

ed indipendenti) sono gli integrali completi delle due equazioni differenziali

$$
(6)\qquad \left\{\begin{aligned}
&\frac{d}{d\zeta}\left[(1-\zeta^2)\frac{dR_n}{d\zeta}\right]+(n^2+n)R_n=0\,,\\
&\frac{d}{d\zeta}\left[(1-\zeta^2)\frac{dR_{n-1}}{d\zeta}\right]+(n^2-n)R_{n-1}=0\,.
\end{aligned}\right.
$$

Combinando queste due equazioni per somma e per sottrazione e ponendo

$$
(6_a)\qquad R_n+R_{n-1}=2S_n\,,\qquad R_n-R_{n-1}=2T_n\,,
$$

si trova

$$
\frac{d}{d\zeta}\left[(1-\zeta^2)\frac{dS_n}{d\zeta}\right]+n^2S_n+nT_n=0\,,
$$

$$
\frac{d}{d\zeta}\left[(1-\zeta^2)\frac{dT_n}{d\zeta}\right]+n^2T_n+nS_n=0\,.
$$

Queste due ultime equazioni si possono trascrivere nel modo che segue:

$$
(1+\zeta)\frac{d}{d\zeta}\left[(1-\zeta)\frac{dS_n}{d\zeta}\right]+(1-\zeta)\frac{dS_n}{d\zeta}+n^2S_n+nT_n=0\,,
$$

$$
(1-\zeta)\frac{d}{d\zeta}\left[(1+\zeta)\frac{dT_n}{d\zeta}\right]-(1+\zeta)\frac{dT_n}{d\zeta}+n^2T_n+nS_n=0\,,
$$

epperò, se si pone

$$
(7)\qquad \left\{\begin{aligned}
&(1-\zeta)\frac{dS_n}{d\zeta}+nT_n=H_n\,,\\
&(1+\zeta)\frac{dT_n}{d\zeta}-nS_n=K_n\,,
\end{aligned}\right.
$$

si ottiene

$$
(1+\zeta)\frac{dH_n}{d\zeta}+H_n-nK_n=0\,,
$$

$$
(1-\zeta)\frac{dK_n}{d\zeta}-K_n+nH_n=0\,,
$$

o, più semplicemente,

$$(7_a)\qquad \begin{cases} \dfrac{d}{d\zeta}[(1+\zeta)H_n] - nK_n = 0, \\ \dfrac{d}{d\zeta}[(1-\zeta)K_n] + nH_n = 0. \end{cases}$$

D'altronde avendosi, (6_a),

$$S_n + T_n = R_n, \qquad S_n - T_n = R_{n-1},$$

le equazioni (7), combinate per somma e per sottrazione, dànno

$$(7_b)\qquad \begin{cases} \dfrac{dR_n}{d\zeta} - \zeta\dfrac{dR_{n-1}}{d\zeta} - nR_{n-1} = H_n + K_n, \\ \dfrac{dR_{n-1}}{d\zeta} - \zeta\dfrac{dR_n}{d\zeta} + nR_n = H_n - K_n. \end{cases}$$

Si può dunque dire che il sistema delle quattro equazioni di primo ordine (7_a), (7_b) è equivalente a quello delle due equazioni di secondo ordine (6); od anche, si può dire che le due equazioni (7_b) rappresentano due integrali primi delle stesse equazioni (6), qualora le funzioni H_n, K_n sieno integrali delle equazioni (7_a). Ora queste due ultime equazioni ammettono gli integrali particolari $H_n = K_n = 0$; ne consegue, (7_b), che le due equazioni

$$(8)\qquad \begin{cases} \dfrac{dR_n}{d\zeta} = \zeta\dfrac{dR_{n-1}}{d\zeta} + nR_{n-1}, \\ \dfrac{dR_{n-1}}{d\zeta} = \zeta\dfrac{dR_n}{d\zeta} - nR_n \end{cases}$$

costituiscono un *particolar* sistema integrale delle equazioni (6), al qual sistema corrisponde, (7), l'altro

$$(8_a)\qquad \begin{cases} (1-\zeta)\dfrac{dS_n}{d\zeta} + nT_n = 0, \\ (1+\zeta)\dfrac{dT_n}{d\zeta} - nS_n = 0. \end{cases}$$

Le equazioni (8), che presentano un grandissimo interesse per tutta la teoria delle funzioni sferiche, coincidono con quelle della Nota del 1887. Quanto alla *natura* della particolarizzazione inerente a queste stesse equazioni (8), oppure (8_a), in confronto di (6) (la quale si risolve sostanzialmente in ciò che, ammesse le consuete definizioni per P_n e per Q_n, esse sono identicamente soddisfatte tanto da $R_n = P_n$, quanto da $R_n = Q_n$), non posso che rimandare il lettore a quanto è detto nella seconda metà della testè citata Nota.

INDICE DEL TOMO IV.

FINE DEL TOMO IV ED ULTIMO DELLE OPERE MATEMATICHE DI EUGENIO BELTRAMI.