VITO VOLTERRA

OPERE MATEMATICHE

Memorie e Note

PUBBLICATE A CURA DELL'ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
COL CONCORSO
DEL CONSIGLIO NAZIONALE DELLE RICERCHE

Volume quinto
1926 - 1940

corredato dall'ELENCO CRONOLOGICO GENERALE DELLE PUBBLICAZIONI

ROMA
ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
1962

OPERE MATEMATICHE
DI VITO VOLTERRA

COMITATO PER L'EDIZIONE DELLE OPERE MATEMATICHE
DI
VITO VOLTERRA

VITO VOLTERRA

OPERE MATEMATICHE

Memorie e Note

PUBBLICATE A CURA DELL'ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
COL CONCORSO
DEL CONSIGLIO NAZIONALE DELLE RICERCHE

Volume quinto
1926-1940

corredato dall'ELENCO CRONOLOGICO GENERALE DELLE PUBBLICAZIONI

ROMA
ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
1962

MEMORIE E NOTE

I.

VARIAZIONI E FLUTTUAZIONI DEL NUMERO D'INDIVIDUI IN SPECIE ANIMALI CONVIVENTI (*)

«Memorie del R. Comitato talassografico italiano», Mem. CXXXI, 1927.

CONSIDERAZIONI PRELIMINARI.

1. Mi permetto presentare alcuni studi sulla coabitazione di specie in un medesimo ambiente. Ordinariamente esse si disputano un medesimo nutrimento o si nutrono le une delle altre; nulla esclude però che esse possano anche mutuamente giovarsi [1].

Per poter trattare la questione matematicamente conviene partire da ipotesi che, pure allontanandosi dalla realtà, ne diano una immagine approssimata. Anche se la rappresentazione sarà, almeno in un primo momento, grossolana, pure, se essa sarà semplice, vi si potrà applicare il calcolo e verificare o quantitativamente o anche qualitativamente se i risultati che si ottengono corrispondono ai dati statistici e quindi saggiare la giustezza delle ipotesi di partenza e avere il terreno preparato per nuovi risultati. Quindi conviene, per facilitare l'applicazione del calcolo, schematizzare il

(*) In questa Memoria, fino al termine della parte III, l'Autore ha riordinato e arricchito di varie aggiunte quanto aveva già pubblicato, con lo stesso titolo, nelle «Memorie della R. Acc. dei Lincei» (ser. VI, vol. II, 1926, pp. 31–113); nella parte IV ha riprodotto tre Note già pubblicate nei «Rend. Acc. dei Lincei» (ser. VI, vol. V, 1927, pp. 3–10, pp. 61–67, pp. 465–470) rispettivamente con i titoli: *Sulle fluttuazioni biologiche; Leggi delle fluttuazioni biologiche; Sulla periodicità delle fluttuazioni biologiche.*

Per evitare ripetizioni, i lavori sopra citati non sono stati inscritti in queste «Opere». Le poche pagine della detta Memoria dei Lincei che l'Autore ha omesse in questa Memoria del Comitato talassografico vengono qui riportate, alla fine, in un'Appendice.

Sempre per evitare ripetizioni, non si pubblicano in queste «Opere» vari lavori dell'Autore che possono considerarsi riassunti di questa Memoria. [N.d.R.].

(1) Il Dott. UMBERTO D'ANCONA mi aveva più volte intrattenuto di statistiche che stava facendo sulla pesca nel periodo della guerra e in periodi anteriori e posteriori ad essa, chiedendomi se fosse possibile dare una spiegazione matematica dei risultati che veniva ottenendo sulla percentuale delle varie specie in questi diversi periodi. Questa richiesta mi ha spinto ad impostare il problema come è fatto in queste pagine ed a risolverlo stabilendo varie leggi che si trovano enunciate alla fine del § 2 della 1ª parte e nel § 5 della 2ª parte. Tanto il D'ANCONA quanto io che lavoravamo in maniera indipendente fummo soddisfatti nel comunicarci dei risultati che ci erano rispettivamente rivelati col calcolo e colla osservazione i quali concordavano fra loro; così quello che l'uomo colla pesca, perturbando lo stato naturale di variazione di due specie, una delle quali si nutre dell'altra, fa diminuire il quantitativo della specie mangiante ed aumentare quello della specie mangiata.

Ciò può giustificare se mi sono permesso di pubblicare queste ricerche, semplici dal punto di vista analitico, ma che per me riuscivano nuove.

fenomeno isolando le azioni che si vogliono esaminare, supponendole funzionare da sole e trascurando le altre. Ora, per esempio, le fluttuazioni del numero di pesci viventi in un certo ambiente dipendono dalle condizioni degli animali e da quelle ambientali. Io ho cominciato dallo studiare il *fenomeno puro interno* dovuto solamente alla voracità delle specie coabitanti ed alla loro potenza riproduttiva, ponendomi nelle condizioni ideali in cui queste sole cause agiscano e tutte le altre possano trascurarsi.

Successivamente (Parte seconda, § 8) ho considerato anche la sovrapposizione di queste azioni ad azioni ambientali periodiche.

2. Prima di trattare casi generali ho desiderato considerare dei casi particolari che permettessero di orientarsi in un campo che, almeno per me, riusciva del tutto nuovo [(2)] ed ho trattato in modo speciale nella prima parte due casi particolari. L'uno di due specie che si trovano da sole in uno stesso ambiente e si contendono il medesimo nutrimento (§ 1); l'altro di due specie, una delle quali si accrescerebbe continuamente perché trova sufficiente nutrimento, l'altra che da sola si esaurirebbe per mancanza di nutrimento, ma che unita alla prima vive a spese di questa in quanto si nutre degli individui di essa (§ 2).

Ho poi considerato nel § 4 della prima parte tutti i casi che possono presentarsi quando due specie convivono e le azioni scambievoli sono ad esse favorevoli o sfavorevoli.

Nei due casi trattati nei §§ 1 e 2, ponendo convenientemente la questione, si trovano equazioni differenziali di cui si possono dare degli integrali che indicano le leggi colle quali si accrescono o diminuiscono le due specie. Nel secondo caso il calcolo prevede il prodursi di fluttuazioni periodiche delle due specie di cui può determinarsi il periodo; fluttuazioni che la statistica della pesca sembra dimostrare effettivamente esistenti. Queste fluttuazioni e i loro periodi dipendono da tre leggi generali. La terza legge regola anche la perturbazione prodotta nelle quantità medie delle due specie da un'azione esterna che cerchi distruggere gl'individui di esse e fa prevedere un accrescimento medio della specie mangiata ed una diminuzione media dell'altra. Anche questo risultato sembra in accordo colle statistiche

(2) Il lavoro è stato da me pubblicato dapprima nelle «Memorie della R. Accademia Nazionale dei Lincei», Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali, Serie VI, vol. II, fasc. III, 1926. Dopo la pubblicazione di questa Memoria ho avuto notizia che nelle questioni parassitologiche relative alla malaria esistevano le equazioni del ROSS, ed ho saputo che il dott. LOTKA nel volume *Elements of physical Biology*, New York 1925, aveva considerato il caso di due specie da me svolto nel § 2 della 1ª parte, giungendo con altro metodo all'integrale ed al suo diagramma ed al periodo delle piccole oscillazioni. Però le leggi generali da me ottenute nello stesso paragrafo, i vari casi svolti negli altri paragrafi della 1ª parte, come pure tutte le altre parti della mia Memoria, nelle quali considero le applicazioni delle leggi suddette e la convivenza di *n* specie nella ipotesi di associazioni conservative e dissipative, sono nuove e per la prima volta trattate. Spiacemi di non aver potuto citare nella detta Memoria l'interessante opera del dott. LOTKA, la quale contiene applicazioni diverse delle matematiche a questioni chimiche e biologiche.

della pesca, se si assume come azione perturbatrice quella prodotta artificialmente dall'uomo colla pesca.

Ottenuto questo risultato era naturale domandarsi fino a che punto tale distruzione riesce favorevole alla specie mangiata, giacché è intuitivo che proseguendo nella distruzione delle due specie deve raggiungersi un limite oltre il quale ambedue le specie debbono esaurirsi. Perciò nel § 5 della prima parte ho studiato specialmente questo *limite ottimo* ed ho riconosciuto che esso ha piuttosto il carattere di un limite superiore che di un massimo, cioè avvicinandosi ad esso cresce continuamente la quantità media della specie mangiata, ma raggiuntolo, mentre la specie mangiante si esaurisce, l'altra tende verso un valore che è inferiore alle medie precedentemente raggiunte.

3. I due casi svolti nei primi due paragrafi presentano un andamento essenzialmente diverso. Mentre nel primo l'andamento è di tipo assintotico, nel secondo è di tipo ciclico–periodico. Perciò essi possono considerarsi come due casi tipici distinti.

Confrontato poi il 2° caso, che è un caso di stabilità, con quelli trattati nel § 4 questi ultimi si rivelano d'indole instabile.

L'introduzione di nuovi principii permette d'impostare il problema nel caso generale, il che vien fatto nella seconda parte della presente Memoria.

In essa, dopo aver posto le equazioni generali corrispondenti ad un'associazione biologica di più specie le quali si nutrono le une delle altre, riconosco l'esistenza delle fluttuazioni ed estendo le tre leggi generali precedentemente trovate pel caso delle associazioni biologiche di due specie. Distinguo poi le associazioni biologiche in *conservative* e *dissipative*, e studio la sovrapposizione di fluttuazioni libere (dovute alle sole azioni riproduttive e a quelle delle voracità delle varie specie) a fluttuazioni forzate (dovute ad azioni ambientali periodiche); esamino infine la perturbazione prodotta in un'associazione biologica dall'aggiunta d'una nuova specie.

L'appendice che segue, contiene un'applicazione della teoria generale al caso in cui in un ambiente limitato coabitino tre specie, la prima delle quali si nutre della seconda e questa della terza, mentre l'ultima trova il nutrimento nell'ambiente stesso, come sarebbe se si avesse il parassita d'una specie ed un parassita del parassita. Vi si è in ultimo aggiunto lo studio del caso ereditario che conduce ad equazioni integro–differenziali.

4. Quanto ai metodi matematici adoperati dirò che non sono i procedimenti fondati sul calcolo delle probabilità, che primi potrebbero presentarsi alla mente, i quali conducono allo scopo. Ecco come può impostarsi la questione: cerchiamo di esprimere con parole come procede all'ingrosso il fenomeno; quindi traduciamo queste parole in linguaggio matematico. Questa traduzione conduce ad equazioni differenziali. Se allora ci lasciamo guidare dai metodi dell'analisi siamo condotti molto più lontani di quanto potrebbero

portarci il linguaggio ed il ragionamento ordinario e possiamo formulare delle leggi precise matematiche. Queste non contraddicono i risultati dell'osservazione. Anzi la più importante di esse sembra in perfetto accordo con i risultati statistici (3).

Dal punto di vista analitico è da notare che lo studio delle fluttuazioni o oscillazioni del numero di individui di specie conviventi, come viene fatto in questa Memoria, esce dal quadro dello studio ordinario delle oscillazioni, giacché nelle presenti ricerche abbiamo dovuto trattare in generale equazioni non lineari, mentre lo schema classico della teoria delle oscillazioni si svolge nell'ambito delle equazioni lineari.

Ed infatti le fluttuazioni studiate non sono in generale piccole fluttuazioni. Solo quando abbiamo fatto l'ipotesi di piccole fluttuazioni e le abbiamo studiate approssimativamente, trascurando i termini del 2° ordine, abbiamo potuto valerci del sussidio delle equazioni differenziali o integro-differenziali lineari.

5. In base alle idee esposte di sopra, per semplificare la trattazione, ammetteremo che le specie si accrescano o diminuiscano in modo continuo, cioè ammetteremo che il numero che misura la quantità di esseri di una specie non sia un numero intero, ma un numero reale e positivo qualunque che varia per gradi continui. In generale le nascite hanno luogo in determinate epoche, a distanza di tempo le une dalle altre; noi trascureremo queste circostanze, ammettendo che esse avvengano con continuità in ogni istante e che, a parità di tutte le altre condizioni, esse si verifichino proporzionalmente al numero degli individui esistenti della specie. Lo stesso si dica delle morti e, secondo che prevalgono le nascite sulle morti, o viceversa, avverrà aumento o diminuzione degli individui. Così ammetteremo la omogenità degli individui di ciascuna specie trascurando le variazioni di età e grandezza.

Se una specie è sola o le altre non influiscono su di essa, finché le circostanze di nascita e di morte non si muteranno, avremo, se N indica il numero degli individui,

$$\frac{dN}{dt} = nN - mN = (n - m)N$$

essendo t il tempo, n il coefficiente di natalità e m quello di mortalità, ambedue costanti. Posto $n - m = \varepsilon$ avremo

$$\text{(I)} \quad \frac{dN}{dt} = \varepsilon N, \qquad \text{(II)} \quad N = N_0 e^{\varepsilon t}$$

ove N_0 denota il numero degli individui al tempo o. Si chiamerà ε il coefficiente di accrescimento della specie e, se esso sarà positivo, si avrà vero

(3) Per tutti gli studi statistici vedi la Memoria CXXVI pubblicata in questa stessa raccolta dal dott. UMBERTO D'ANCONA: *Dell'influenza della stasi peschereccia nel periodo 1914–18 sul patrimonio ittico dell'Alto Adriatico*, nella quale si esaminano le conseguenze teoriche e pratiche dei risultati raggiunti (cfr. § 2, N. 9).

accrescimento, altrimenti esaurimento. Se le circostanze di nascita e di morte cambieranno, ε sarà variabile col tempo o con N o con altri elementi. In tal caso la (I) sussisterà sempre, ma evidentemente non avremo più la (II).

PARTE PRIMA

Associazione biologica di due specie.

§ 1. – DUE SPECIE CHE SI DISPUTANO UNO STESSO NUTRIMENTO.

1. Supponiamo di avere due specie viventi in uno stesso ambiente: i numeri degli individui rispettivi siano N_1 e N_2 e siano ε_1 e ε_2 i valori che avrebbero i loro coefficienti di accrescimento se il nutrimento comune fosse in quantità sempre tale da soddisfare pienamente la loro voracità. Avremo

$$\frac{dN_1}{dt} = \varepsilon_1 N_1 \quad , \quad \frac{dN_2}{dt} = \varepsilon_2 N_2 \qquad (\varepsilon_1 > 0 \, , \varepsilon_2 > 0) \, .$$

Si ammetta ora che gl'individui continuamente crescenti di numero delle due specie diminuiscano la quantità di nutrimento di cui ciascun individuo può disporre. Supponiamo che la presenza degli N_1 individui della prima specie diminuisca questa quantità nella misura $h_1 N_1$ e la presenza degli N_2 individui della seconda specie la diminuisca nella misura $h_2 N_2$, onde per l'insieme delle due la diminuzione avvenga nella misura $h_1 N_1 + h_2 N_2$ e perciò, in virtù del diverso bisogno di nutrimento delle due specie, i due coefficienti di accrescimento vengano ridotti a

$$\varepsilon_1 - \gamma_1 (h_1 N_1 + h_2 N_2) \quad , \quad \varepsilon_2 - \gamma_2 (h_1 N_1 + h_2 N_2) \, . \tag{1}$$

Avremo allora le equazioni differenziali

$$\frac{dN_1}{dt} = (\varepsilon_1 - \gamma_1 (h_1 N_1 + h_2 N_2)) N_1 \tag{2_1}$$

$$\frac{dN_2}{dt} = (\varepsilon_2 - \gamma_2 (h_1 N_1 + h_2 N_2)) N_2 \tag{2_2}$$

nelle quali dovremo supporre $\varepsilon_1 , \varepsilon_2 , h_1 , h_2 , \gamma_1 , \gamma_2$ costanti positive.

2. Dalle equazioni precedenti segue

$$\frac{d \log N_1}{dt} = \varepsilon_1 - \gamma_1 (h_1 N_1 + h_2 N_2) \tag{3_1}$$

$$\frac{d \log N_2}{dt} = \varepsilon_2 - \gamma_2 (h_1 N_1 + h_2 N_2) \tag{3_2}$$

e quindi

$$\gamma_2 \frac{d \log N_1}{dt} - \gamma_1 \frac{d \log N_2}{dt} = \varepsilon_1 \gamma_2 - \varepsilon_2 \gamma_1 \tag{4}$$

cioè

$$(5)\qquad \frac{d \log \dfrac{N_1^{\gamma_2}}{N_2^{\gamma_1}}}{dt} = \varepsilon_1 \gamma_2 - \varepsilon_2 \gamma_1$$

e integrando e passando dai logaritmi ai numeri

$$(6)\qquad \frac{N_1^{\gamma_2}}{N_2^{\gamma_1}} = C e^{(\varepsilon_1 \gamma_2 - \varepsilon_2 \gamma_1) t}$$

ove C è una quantità costante.

3. Se il binomio

$$\varepsilon_1 \gamma_2 - \varepsilon_2 \gamma_1 = 0$$

ossia

$$\frac{\varepsilon_1}{\gamma_1} = \frac{\varepsilon_2}{\gamma_2} = K$$

avremo

$$(7)\qquad \frac{N_1^{\gamma_2}}{N_2^{\gamma_1}} = C$$

da cui

$$N_2 = \frac{1}{C^{1/\gamma_1}} N_1^{\gamma_2/\gamma_1}$$

e sostituendo nella (2_1)

$$\frac{dN_1}{N_1 \left\{ \varepsilon_1 - \gamma_1 \left(h_1 N_1 + \dfrac{h_2}{C^{1/\gamma_1}} N_1^{\gamma_2/\gamma_1} \right) \right\}} = dt .$$

Le variabili sono dunque separate e

$$(8)\qquad t - t_0 = \int_{N_1^0}^{N_1} \frac{dN_1}{N_1 \left\{ \varepsilon_1 - \gamma_1 \left(h_1 N_1 + \dfrac{h_2}{C^{1/\gamma_1}} N_1^{\gamma_2/\gamma_1} \right) \right\}}$$

ove N_1^0 è il numero di individui della prima specie al tempo iniziale t_0.

Tre casi potranno presentarsi (se i valori iniziali di N_1 e N_2 sono N_1^0 e N_2^0) e cioè

1° caso $\qquad K > h_1 N_1^0 + h_2 N_2^0$,

allora N_1 e N_2 cresceranno a partire dai valori iniziali conservando la proporzione (7), cioè

$$\frac{N_1^{\gamma_2}}{N_2^{\gamma_1}} = \frac{N_1^{0\,\gamma_2}}{N_2^{0\,\gamma_1}}$$

e tenderanno assintoticamente verso i valori per cui

$$(9)\qquad h_1 N_1 + h_2 N_2 = K$$

senza mai raggiungerli;

2° caso $$K < h_1 N_1^0 + h_2 N_2^0$$

N_1 e N_2 diminuiranno a partire dai valori iniziali conservando la proporzione (7) tendendo assintoticamente ai valori per cui è soddisfatta la (9);

3° caso $$h_1 N_1^0 + h_2 N_2^0 = K$$

allora N_1 e N_2 si manterranno costanti.

Ma è evidente che la condizione (7) ha un grado infinitesimo di probabilità.

4. Se il binomio $\varepsilon_1 \gamma_2 - \varepsilon_2 \gamma_1$ non è nullo potremo supporlo positivo, perché se non fosse tale, basterebbe scambiare la specie 1 colla specie 2 per ridurlo positivo.

In questo caso

$$\lim_{t=\infty} \frac{N_1^{\gamma_2}}{N_2^{\gamma_1}} = \infty .$$

Per N_1 uguale o superiore a $\varepsilon_1/\gamma_1 h_1$, in virtù della ($2_1$), il coefficiente differenziale dN_1/dt è negativo, quindi N_1 non può sorpassare un certo limite.

È dunque necessario che N_2 tenda a zero.

È facile calcolare l'espressione assintotica di N_1.

Infatti quando N_2 sarà così piccolo da ritenersi trascurabile, l'equazione (2_1) si scriverà

$$\frac{dN_1}{dt} = (\varepsilon_1 - \gamma_1 h_1 N_1) N_1$$

ossia, separando le variabili

$$dt = \frac{dN_1}{N_1(\varepsilon_1 - \gamma_1 h_1 N_1)}$$

e integrando e passando dai logaritmi ai numeri

$$\frac{N_1}{\varepsilon_1 - \gamma_1 h_1 N_1} = C_0 e^{\varepsilon_1 t}$$

essendo C_0 una costante. Quindi

$$N_1 = \frac{C_0 \varepsilon_1 e^{\varepsilon_1 t}}{1 + \gamma_1 h_1 C_0 e^{\varepsilon_1 t}} = \frac{C_0 \varepsilon_1}{e^{-\varepsilon_1 t} + \gamma_1 h_1 C_0} .$$

Perciò N_1 tende assintoticamente al valore $\varepsilon_1/\gamma_1 h_1$ per valori crescenti o decrescenti secondo che C_0 è positivo o negativo.

Possiamo riassumere i risultati ottenuti nella proposizione seguente: *Se* $\varepsilon_1/\gamma_1 > \varepsilon_2/\gamma_2$ *la seconda specie tende ad esaurirsi e la prima tende a raggiungere il numero di individui* $\varepsilon_1/\gamma_1 h_1$.

5. In generale il problema non è ridotto alle quadrature, ma vi è un caso particolare in cui ciò può ottenersi facilmente.

Se possiamo supporre approssimativamente $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$ ponendo $C^{-1/\gamma} = c$ avremo

$$N_2 = c\, N_1\, e^{(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)t}$$

ossia

$$N_2\, e^{-\varepsilon_2 t} = c\, N_1\, e^{-\varepsilon_1 t}$$

cioè ponendo

$$N_1\, e^{-\varepsilon_1 t} = M_1 \qquad N_2\, e^{-\varepsilon_2 t} = M_2$$

sarà

$$M_2 = c M_1$$

e la equazione (3_1) diverrà

$$\frac{d \log M_1}{dt} = -\gamma\,(h_1 N_1 + h_2 N_2) = -\gamma\,(h_1 e^{\varepsilon_1 t} M_1 + h_2 e^{\varepsilon_2 t} M_2) =$$

$$= -\gamma\, M_1\,(h_1 e^{\varepsilon_1 t} + h_2\, c\, e^{\varepsilon_2 t})$$

vale a dire

$$\frac{dM_1}{M_1^2} = -\gamma\,(h_1 e^{\varepsilon_1 t} + h_2\, c\, e^{\varepsilon_2 t})\, dt$$

e integrando

$$\frac{1}{M_1} = \gamma\left(\frac{h_1}{\varepsilon_1} e^{\varepsilon_1 t} + \frac{h_2 c}{\varepsilon_2} e^{\varepsilon_2 t}\right) + C'$$

ove C' è una costante. Quindi

$$M_1 = \frac{1}{\gamma\left(\frac{h_1}{\varepsilon_1} e^{\varepsilon_1 t} + \frac{h_2 c}{\varepsilon_2} e^{\varepsilon_2 t}\right) + C'} \quad , \quad M_2 = \frac{c}{\gamma\left(\frac{h_1}{\varepsilon_1} e^{\varepsilon_1 t} + \frac{h_2 c}{\varepsilon_2} e^{\varepsilon_2 t}\right) + C'}$$

da cui

$$N_1 = \frac{e^{\varepsilon_1 t}}{\gamma\left(\frac{h_1}{\varepsilon_1} e^{\varepsilon_1 t} + \frac{h_2 c}{\varepsilon_2} e^{\varepsilon_2 t}\right) + C'} \quad , \quad N_2 = \frac{c\, e^{\varepsilon_2 t}}{\gamma\left(\frac{h_1}{\varepsilon_1} e^{\varepsilon_1 t} + \frac{h_2 c}{\varepsilon_2} e^{\varepsilon_2 t}\right) + C'} .$$

È facile verificare in questo caso particolare, nel quale tutte le quadrature sono eseguite completamente, la proposizione precedente. Infatti se $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$ avremo

$$\lim_{t=\infty} N_1 = \frac{\varepsilon_1}{\gamma_1 h_1} \quad , \quad \lim_{t=\infty} N_2 = 0 .$$

6. Abbiamo supposto che la presenza di N_1 individui della prima specie e di N_2 della seconda riduca i coefficienti di accrescimento ε_1 e ε_2 nella misura indicata dalle (1), nelle quali formule N_1 e N_2 compaiono linearmente. Ma noi possiamo supporre molto più generalmente che i detti coefficienti divengano

$$\varepsilon_1 - \gamma_1\, F(N_1, N_2) \quad , \quad \varepsilon_2 - \gamma_2\, F(N_1, N_2)$$

ove $F(N_1, N_2)$ è una funzione continua, positiva, che si annulla per $N_1 = N_2 = 0$ ed è crescente tanto rispetto ad N_1 che ad N_2 ed inoltre cresce indefinitamente col crescere indefinito di ciascuna di queste due variabili. Del resto $F(N_1, N_2)$ può essere comunque.

Allora le (2_1) e (2_2) vanno sostituite con

$$\frac{dN_1}{dt} = (\varepsilon_1 - \gamma_1 F(N_1, N_2)) N_1 \quad , \quad \frac{dN_2}{dt} = (\varepsilon_2 - \gamma_2 F(N_1, N_2)) N_2 .$$

Le equazioni (4), (5), (6) valgono sempre e perciò tutte le loro conseguenze; in particolare, se $\varepsilon_1 \gamma_2 - \varepsilon_2 \gamma_1 > 0$, N_2 tende a zero col crescere indefinito del tempo, cioè la seconda specie tende a esaurirsi.

Il comportamento assintotico della prima specie sarà dato dalla formula

$$dt = \frac{dN_1}{N_1(\varepsilon_1 - \gamma_1 F(N_1, 0))} .$$

Se in questa formula partiamo dalla coppia di valori N_1^0, 0, e supponiamo

$$\varepsilon_1 - \gamma_1 F(N_1^0, 0) > 0$$

poiché $\varepsilon_1 - \gamma_1 F(\infty, 0) < 0$ dovranno esistere radici N_1 della equazione

$$(10) \qquad \varepsilon_1 - \gamma_1 F(N_1, 0) = 0$$

superiori a N_1^0. Allora N_1 crescerà tendendo assintoticamente verso la minima di esse. Se invece sarà $\varepsilon_1 - \gamma_1 F(N_1^0, 0) < 0$ poiché $\varepsilon_1 - \gamma_1 F(0, 0) > 0$ dovranno esistere radici della (10) minori di N_1^0. In tal caso N_1 decrescerà tendendo assintoticamente verso la massima di esse.

§ 2. – Due specie una delle quali si nutre dell'altra.

1. Siano N_1 e N_2 i numeri degli individui delle due specie. Il coefficiente di accrescimento che avrebbe la prima, se l'altra non esistesse, sia $\varepsilon_1 > 0$. Supponiamo che la seconda si esaurirebbe per mancanza di nutrimento se fosse sola; sia perciò negativo il suo coefficiente di accrescimento ed eguale a $-\varepsilon_2$ (ε_2 può considerarsi come il coefficiente di esaurimento). Se ciascuna delle due specie fosse sola si avrebbe

$$(11_1) \qquad \frac{dN_1}{dt} = \varepsilon_1 N_1 , \qquad\qquad (11_2) \qquad \frac{dN_2}{dt} = -\varepsilon_2 N_2 .$$

Ma se esse sono insieme e la seconda specie si nutre della prima, ε_1 diminuirà e $-\varepsilon_2$ crescerà e evidentemente ε_1 diminuirà tanto più quanto più numerosi saranno gli individui della seconda specie e $-\varepsilon_2$ crescerà tanto più quanto più numerosi saranno gli individui della prima specie. Per rappresentare questo fatto nella maniera più semplice supponiamo che ε_1 diminuisca proporzionalmente a N_2, cioè nella misura $\gamma_1 N_2$, e $-\varepsilon_2$ cresca proporzionalmente a N_1 cioè nella misura $\gamma_2 N_1$.

Avremo allora le due equazioni differenziali

$$(A_1) \qquad \frac{dN_1}{dt} = (\varepsilon_1 - \gamma_1 N_2) N_1 , \qquad\qquad (A_2) \qquad \frac{dN_2}{dt} = (-\varepsilon_2 + \gamma_2 N_1) N_2 .$$

Assumere i coefficienti di accrescimento e di esaurimento rispettivamente lineari rispetto a N_2 e a N_1 può sembrare molto grossolano; ma si giustifica, come vedremo nel § 5, se noi computiamo questi coefficienti mediante il numero probabile di incontri degli individui delle due specie. Del resto anche se prendiamo i due coefficienti funzioni qualunque di N_2 e N_1 rispettivamente, il procedimento di integrazione usato in questo paragrafo, in cui essi si suppongono lineari, riesce lo stesso.

2. Mentre le costanti ε_1 e ε_2 riassumono le condizioni di natalità e di mortalità delle due specie, i coefficienti γ_1 e γ_2 misurano numericamente l'attitudine a proteggersi della prima specie ed i mezzi di offesa della seconda specie. Infatti crescendo questi ultimi dovranno aumentare γ_1 e γ_2 mentre aumentando i mezzi di protezione della prima specie questi coefficienti dovranno diminuire.

Per avere il modo di misurare ε_1 e ε_2 basterà integrare le (11_1), (11_2); si avrebbe, se ciascuna delle due specie fosse sola,

$$N_1 = C_1 e^{\varepsilon_1 t} \quad , \quad N_2 = C_2 e^{-\varepsilon_2 t}$$

ove C_1 e C_2 sono rispettivamente i valori di N_1 e N_2 per $t = 0$. Poniamo $N_1 = 2\,C_1$, $N_2 = C_2/2$ e denotiamo con t_1 e t_2 i tempi necessari rispettivamente perché si raddoppi la prima specie e si riduca a metà la seconda. Avremo

$$\varepsilon_1 = \frac{\log_e 2}{t_1} = \frac{0{,}693}{t_1} \quad , \quad \varepsilon_2 = \frac{\log_e 2}{t_2} = \frac{0{,}693}{t_2} \,.$$

Ne segue che ε_1 e ε_2 sono di dimensioni -1 rispetto al tempo. Sarebbe sempre possibile prendere le unità di tempo in modo che $\varepsilon_1 = 1$. Infatti se prendiamo come unità di tempo il tempo necessario affinché la prima specie cresca nel rapporto $e = 2{,}728$ sarà $e = e^{\varepsilon_1}$ e quindi $\varepsilon_1 = 1$. Analogamente si dica per ε_2.

Posto

$$(12) \qquad \frac{\varepsilon_2}{\gamma_2} = K_1 \quad , \quad \frac{\varepsilon_1}{\gamma_1} = K_2$$

le equazioni (A_1) e (A_2) ci dicono che se

$$N_1 = K_1 \quad , \quad N_2 = K_2 \quad , \quad \frac{dN_1}{dt} = \frac{dN_2}{dt} = 0$$

cioè le due specie sono in uno stato stazionario.

Avremo dunque

$$\gamma_1 = \frac{\varepsilon_1}{K_2} \quad , \quad \gamma_2 = \frac{\varepsilon_2}{K_1} \,.$$

Passiamo adesso alla integrazione della equazioni (A_1) e (A_2).

Dalle (A_1) e (A_2) segue

$$(13) \qquad \frac{d\dfrac{N_1}{K_1}}{dt} = \varepsilon_1\left(1 - \frac{N_2}{K_2}\right)\frac{N_1}{K_1} \quad , \quad \frac{d\dfrac{N_2}{K_2}}{dt} = -\,\varepsilon_2\left(1 - \frac{N_1}{K_1}\right)\frac{N_2}{K_2}$$

onde ponendo

$$(14) \qquad N_1 = K_1\, n_1 \quad , \quad N_2 = K_2\, n_2$$

le equazioni precedenti si scriveranno

$$(A_1') \quad \frac{dn_1}{dt} = \varepsilon_1 (1 - n_2) n_1 , \qquad (A_2') \quad \frac{dn_2}{dt} = - \varepsilon_2 (1 - n_1) n_2 .$$

Moltiplicando rispettivamente queste equazioni per ε_2 e ε_1 e sommando si ha

$$(15) \qquad \frac{d}{dt} (\varepsilon_2 n_1 + \varepsilon_1 n_2) = \varepsilon_1 \varepsilon_2 (n_1 - n_2) .$$

Moltiplicando rispettivamente per ε_2/n_1 e ε_1/n_2 e sommando si trova

$$\frac{\varepsilon_2}{n_1} \frac{dn_1}{dt} + \frac{\varepsilon_1}{n_2} \frac{dn_2}{dt} = \varepsilon_1 \varepsilon_2 (n_1 - n_2)$$

cioè

$$(16) \qquad \frac{d}{dt} (\log n_1^{\varepsilon_2} + \log n_2^{\varepsilon_1}) = \varepsilon_1 \varepsilon_2 (n_1 - n_2) .$$

Eguagliando fra loro i primi membri delle (15) e (16) segue

$$\frac{d}{dt} (\varepsilon_2 n_1 + \varepsilon_1 n_2) = \frac{d}{dt} (\log n_1^{\varepsilon_2} + \log n_2^{\varepsilon_1})$$

e integrando e passando dai logaritmi ai numeri

$$n_1^{\varepsilon_2} n_2^{\varepsilon_1} = C e^{\varepsilon_2 n_1 + \varepsilon_1 n_2}$$

essendo C una costante positiva. Donde

$$(17) \qquad \left(\frac{n_1}{e^{n_1}}\right)^{\varepsilon_2} = C \left(\frac{n_2}{e^{n_2}}\right)^{-\varepsilon_1} .$$

Dalle (A_1') e (A_2') segue

$$dt = \frac{dn_1}{\varepsilon_1 (1 - n_2) n_1} = \frac{dn_2}{- \varepsilon_2 (1 - n_1) n_2} .$$

Se per mezzo dell'integrale (17) esprimiamo n_2 per mezzo di n_1 o n_1 per mezzo di n_2 e sostituiamo rispettivamente questi valori nelle equazioni precedenti le variabili restano separate, onde la integrazione è ridotta alle quadrature.

4. Ma noi vogliamo discutere direttamente la soluzione e specialmente l'integrale (17).

Poniamo perciò

$$(18) \qquad x = \left(\frac{n_1}{e^{n_1}}\right)^{\varepsilon_2} = C \left(\frac{n_2}{e^{n_2}}\right)^{-\varepsilon_1}$$

e consideriamo la curva Γ_1, che ha per ascissa e ordinata n_1 e x e quella Γ_2, che ha per ascissa e ordinata n_2 e x (fig. 1).

Avremo

$$(19) \qquad \frac{d}{dn_1} \left(\frac{n_1}{e^{n_1}}\right) = e^{-n_1} (1 - n_1)$$

che è positivo per $n_1 < 1$ e negativo per $n_1 > 1$. Dunque, mentre n_1 varia tra 0 e ∞, x partendo da 0 raggiunge il massimo $(1/e)^{\varepsilon_2}$ per $n_1 = 1$ e poi tende a 0 per n_1 crescente indefinitamente. Invece mentre n_2 varia tra 0 e ∞, x_1 decresce da ∞ fino al valore minimo $C\,e^{\varepsilon_1}$ per $n_2 = 1$, quindi cresce indefinitamente divenendo ∞ per $n_2 = \infty$. L'andamento delle curve Γ_1 e Γ_2 risulta perciò immediato come lo dimostra la fig. 1.

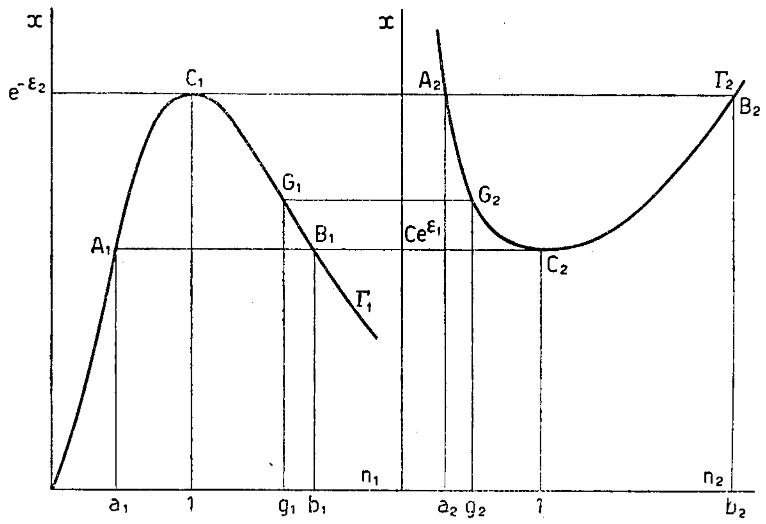


Fig. 1.

La costante C è determinata dalla (17), quando siano noti i valori iniziali di n_1 e n_2, ed è

$$C \leq e^{-(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}.$$

Se $C < e^{-(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}$ ossia $e^{-\varepsilon_2} > C\,e^{\varepsilon_1}$, ad ogni valore di x compreso tra $C\,e^{\varepsilon_1}$ ed $e^{-\varepsilon_2}$ corrispondono due valori per n_1 e due per n_2 eccettuati i due valori corrispondenti ai punti C_1 e C_2 di massimo e di minimo delle ordinate delle due curve Γ_1 e Γ_2. Avendo disposto le due curve come nella fig. 1, cioè con gli assi delle ascisse l'uno sul prolungamento dell'altro, tiriamo per i vertici C_1 e C_2 le normali ad x e consideriamo le porzioni $A_1\,C_1\,B_1$, $A_2\,C_2\,B_2$ delle due curve comprese fra queste due parallele. Siano $a_1 < 1$ e $b_1 > 1$ le ascisse di A_1 e B_1, $a_2 < 1$, $b_2 > 1$ le ascisse di A_2 e B_2.

Cerchiamo allora di costruire la curva λ avente per ascissa n_1 e ordinata n_2. Supponiamo dapprima di far corrispondere al punto C_1 il punto A_2 e di percorrere col punto G_1 l'arco $C_1\,B_1$. Nella curva Γ_2 percorriamo allora l'arco $A_2\,C_2$ ed a G_1 su Γ_1 corrisponderà G_2 su Γ_2 che si trova sulla stessa perpendicolare ad x. Quindi al valore $n_1 = g_1$ corrisponderà $n_2 = g_2$ essendo g_1 e g_2 rispettivamente le ascisse di G_1 e G_2. Dunque mentre n_1 crescerà da 1 a b_1, n_2 crescerà da a_2 a 1, ossia si andrà nella figura 2 dal punto R_2 di coordinate $(1\,,\,a_2)$ al punto S_1 di coordinate $(b_1\,,\,1)$. Di seguito, mentre n_1 decrescerà da b_1 a 1, n_2 crescerà da 1 a b_2, ossia ci muoveremo nella figura 2 dal punto S_1 di coordinate $(b_1\,,\,1)$ al punto S_2 di coordinate $(1\,,\,b_2)$. Di seguito, mentre

n_1 decrescerà da 1 a a_1, n_2 decrescerà da b_2 a 1, ossia ci muoveremo nella fig. 2 dal punto S_2 di coordinate $(1, b_2)$ al punto R_1 di coordinate $(a_1, 1)$. Finalmente, mentre n_1 cresce da a_1 a 1, n_2 decrescerà da 1 a a_2 e nella fig. 2 andremo dal punto R_1 di coordinate $(a_1, 1)$ al punto R_2 di coordinate $(1, a_2)$.

Quando saremo ritornati al punto di partenza si ricomincerà a percorrere periodicamente il ciclo chiuso della fig. 2, e in virtù della (18) (come anche risulta dalla fig. 1), quando n_1 e n_2 riprenderanno gli stessi valori anche x riprenderà lo stesso valore.

5. Dalla (18) segue $\log x = \varepsilon_2 (\log n_1 - n_1)$, quindi, derivando rispetto a t e tenendo conto della (A'_1)

$$\frac{1}{x}\frac{dx}{dt} = \varepsilon_2\left(\frac{1}{n_1} - 1\right)\frac{dn_1}{dt} = \varepsilon_1 \varepsilon_2 (1 - n_1)(1 - n_2),$$

cioè

$$dt = \frac{dx}{\varepsilon_1 \varepsilon_2 x (1 - n_1)(1 - n_2)}.$$

Ne segue che ogni qual volta si percorrerà con n_1 e n_2 il ciclo chiuso della fig. 2, t crescerà di una quantità costante T. Ne viene che n_1 e n_2 e, in virtù delle (14), anche N_1 e N_2 saranno funzioni periodiche del tempo col periodo T. La curva Λ della fig. 3 ottenuta dalla fig. 2 moltiplicando le ascisse per K_1 e le ordinate per K_2, cioè la curva che ci dà il diagramma del ciclo che lega N_1 a N_2 si chiamerà *il ciclo di fluttuazione* e $K_1(b_1 - a_1)$, $K_2(b_2 - a_2)$ le ampiezze delle fluttuazioni delle due specie. In generale il ciclo di fluttuazione non avrà un centro di simmetria, però il punto Ω di coordinate K_1 e K_2 si troverà internamente a tutti i possibili cicli $\Phi, \Lambda, \Psi, X, \cdots$ di fluttuazione dipendenti da tutte le possibili condizioni iniziali delle due specie come è indicato nella fig. 3. Al punto Ω si potrà quindi dare il nome di *centro di fluttuazione*. Tutte le curve del diagramma 3 si otterranno mantenendo costanti $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \gamma_1, \gamma_2$ e facendo cambiare la costante C. Queste curve non si incontrano tra loro, ma sono interne le une alle altre.

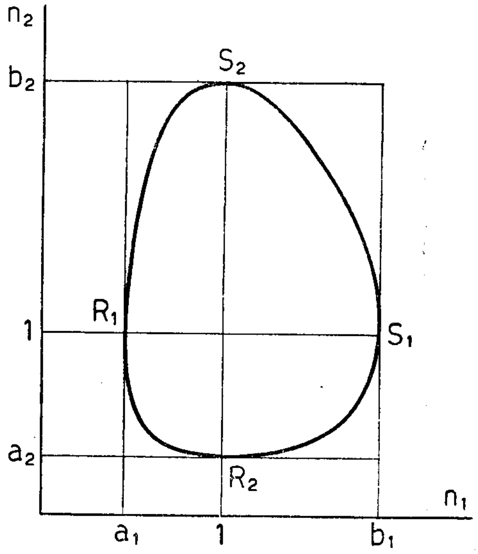


Fig. 2.

Abbiamo dunque in questo caso una *fluttuazione periodica del numero degli individui delle due specie col periodo* T, ossia il fenomeno avrà il carattere *ciclico periodico*.

6. Per calcolare il periodo T noi dovremo calcolare l'integrale

$$\int \frac{dx}{\varepsilon_1 \varepsilon_2 x (1 - n_1)(1 - n_2)}$$

estendendolo successivamente al percorso dei quattro archi $R_2 S_1$, $S_1 S_2$, $S_2 R_1$, $R_1 R_2$.

La somma dei quattro integrali ci darà il periodo T.

La funzione sotto il segno d'integrazione diviene infinita ai quattro vertici R_1, R_2, S_1, S_2, ma, come si riconosce facilmente, l'ordine degl'infiniti è tale che gli integrali sono convergenti.

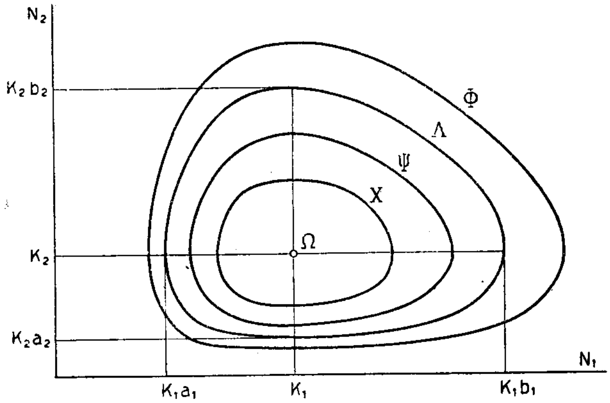


Fig. 3.

L'integrale precedente prova che il periodo T dipende solamente da ε_1, ε_2 e C.

Nel seguente paragrafo noi calcoleremo approssimativamente questo periodo supponendo che le fluttuazioni siano piccole [(4)] (*).

7. Il caso approssimato nel quale le fluttuazioni sono piccole può trattarsi facilmente partendo dalle equazioni (A_1) e (A_2).

Infatti ponendo

(20) $$n_1 = 1 + v_1 \quad , \quad n_2 = 1 + v_2$$

avremo

(21) $$N_1 = K_1(1 + v_1) \quad , \quad N_2 = K_2(1 + v_2).$$

Le (A'_1), (A'_2) diverranno

$$(A''_1) \quad \frac{dv_1}{dt} = -\varepsilon_1 v_2 - \varepsilon_1 v_1 v_2, \qquad (A''_2) \quad \frac{dv_2}{dt} = \varepsilon_2 v_1 + \varepsilon_2 v_1 v_2.$$

(4) Per il calcolo esatto del periodo T rimando alla Memoria già citata della R. Accademia dei Lincei, Parte 1ª, § 3, N. 5.

(*) Il calcolo di T, pubblicato nella Memoria dell'Acc. dei Lincei, è riportato nel N. 1 dell'appendice che si è aggiunta alla fine di questa Memoria [N.d.R.].

Se le fluttuazioni sono piccole v_1 e v_2 potranno considerarsi come quantità piccole del 1° ordine, onde, se nelle equazioni precedenti trascuriamo i termini del 2° ordine, avremo

$$\frac{dv_1}{dt} = -\varepsilon_1 v_2 \quad , \quad \frac{dv_2}{dt} = \varepsilon_2 v_1$$

le quali si integrano mediante le formule

$$v_1 = \mathrm{L}\sqrt{\varepsilon_1}\cos\left(\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}\,t + a\right) \quad , \quad v_2 = \mathrm{L}\sqrt{\varepsilon_2}\,\mathrm{sen}\left(\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}\,t + a\right)$$

ove L ed a sono due costanti.

Avremo quindi, tenendo conto delle (12), (14), (20), e ponendo

$$\mathrm{L}\frac{\varepsilon_1\varepsilon_2}{\gamma_1\gamma_2} = \mathrm{E}$$

$$(22) \qquad \begin{cases} \mathrm{N}_1 = \dfrac{\varepsilon_2}{\gamma_2} + \dfrac{\gamma_1}{\sqrt{\varepsilon_1}}\mathrm{E}\cos\left(\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}\,t + \alpha\right) \\ \mathrm{N}_2 = \dfrac{\varepsilon_1}{\gamma_1} + \dfrac{\gamma_2}{\sqrt{\varepsilon_2}}\mathrm{E}\,\mathrm{sen}\left(\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}\,t + \alpha\right) \end{cases}$$

onde N_1 e N_2 risultano periodiche col periodo $2\pi/\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}$.

A questo stesso valore si sarebbe giunti calcolando direttamente l'integrale T del paragrafo precedente e trascurando termini di ordine infinitesimo.

Potremo dunque assumere approssimativamente i periodo del ciclo di fluttuazione delle due specie dato da

$$\mathrm{T} = \frac{2\pi}{\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}}\,.$$

Se chiamiamo, come nell'Art. 2, t_1 e t_2 i due tempi nei quali rispettivamente la prima specie si raddoppia e l'altra si riduce a metà, avremo

$$\mathrm{T} = \frac{2\pi\sqrt{t_1 t_2}}{0{,}693} = 9{,}06\sqrt{t_1 t_2}\,.$$

Il ciclo di fluttuazione diverrà una ellisse avente per centro il centro di fluttuazione e avente per semiassi

$$\mathrm{E}\frac{\gamma_1}{\sqrt{\varepsilon_1}} \quad , \quad \mathrm{E}\frac{\gamma_2}{\sqrt{\varepsilon_2}}$$

onde le ampiezze delle fluttuazioni saranno

$$f_1 = 2\,\mathrm{E}\frac{\gamma_1}{\sqrt{\varepsilon_1}} \quad , \quad f_2 = 2\,\mathrm{E}\frac{\gamma_2}{\sqrt{\varepsilon_2}}\,.$$

Il rapporto delle ampiezze delle due fluttuazioni risulterà

$$\frac{f_1}{f_2} = \frac{\gamma_1}{\gamma_2}\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}\,.$$

La famiglia dei cicli di fluttuazione sarà formata in questo caso di un insieme di ellissi omotetiche aventi per centro comune il centro di fluttuazione (vedi fig. 4).

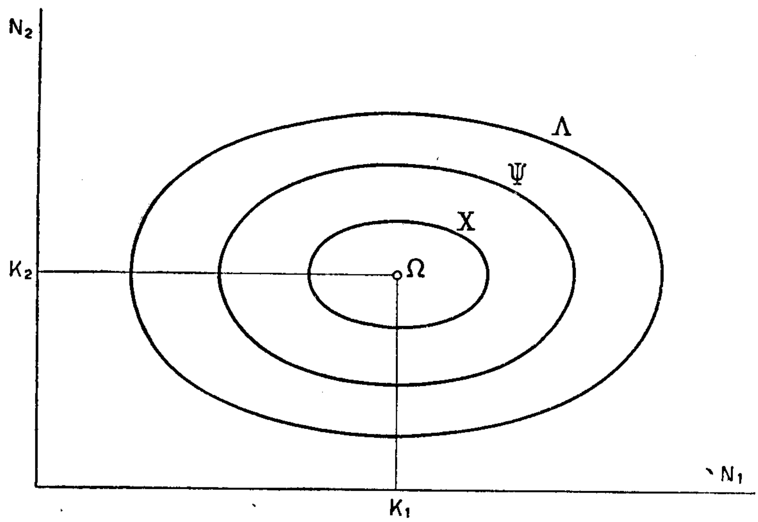


Fig. 4.

8. Occupiamoci ora del numero medio di individui delle due specie durante un ciclo.

Riprendiamo perciò le equazioni (A_1'), (A_2'). Dividendo ambo i membri rispettivamente per n_1 e n_2 avremo

$$\frac{d \log n_1}{dt} = \varepsilon_1 (1 - n_2) \quad , \quad \frac{d \log n_2}{dt} = - \varepsilon_2 (1 - n_1)$$

e integrando fra due tempi t' e t'' nei quali n_1 e n_2 assumono rispettivamente i valori n_1', n_1'' ; n_2', n_2'', si otterrà

$$\log \frac{n_1''}{n_1'} = \varepsilon_1 \left[(t'' - t') - \int_{t'}^{t''} n_2 \, dt \right] \quad , \quad \log \frac{n_2''}{n_2'} = - \varepsilon_2 \left[(t'' - t') - \int_{t'}^{t''} n_1 \, dt \right].$$

Se estendiamo gli integrali ad un periodo T i primi membri si annulleranno e avremo

$$T = \int_0^T n_1 \, dt = \int_0^T n_2 \, dt$$

vale a dire

$$\frac{1}{T} \int_0^T n_1 \, dt = \frac{1}{T} \int_0^T n_2 \, dt = 1 .$$

Le medie dei valori di n_1 e n_2 in un periodo sono dunque eguali ad 1 e in virtù delle (14)

$$\frac{1}{T} \int_0^T N_1 \, dt = K_1 = \frac{\varepsilon_2}{\gamma_2} \quad , \quad \frac{1}{T} \int_0^T N_2 \, dt = K_2 = \frac{\varepsilon_1}{\gamma_1},$$

cioè le coordinate del centro di fluttuazione sono i valori medi dei numeri di individui delle specie durante un ciclo. Ne segue che se ε_1, ε_2, γ_1, γ_2 si mantengono costanti, le medie degli individui delle due specie durante un ciclo di fluttuazione saranno sempre le stesse comunque siano i numeri iniziali di individui delle due specie.

Vediamo adesso come cambiano queste medie col cambiare di ε_1 e ε_2, supponendo γ_1 e γ_2 costanti. Si vede subito che la media della prima specie cresce proporzionalmente ad ε_2 e quella della seconda specie decresce proporzionalmente ad ε_1 finché questa quantità si mantiene positiva. Ora far crescere ε_2 significa distruggere uniformemente individui della seconda specie

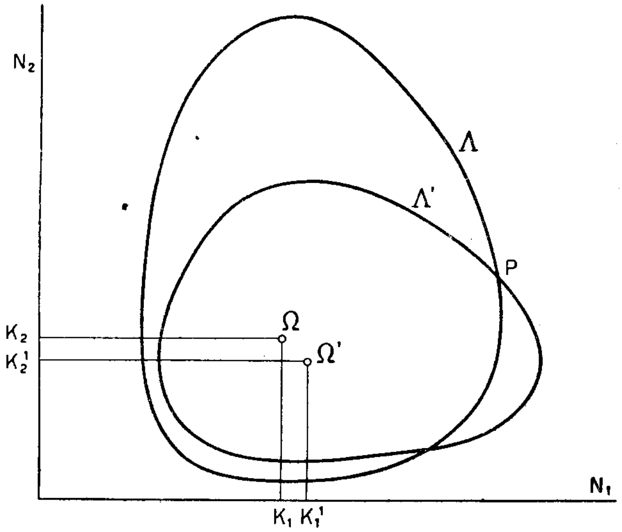


Fig. 5.

in quantità proporzionale al loro numero e far decrescere ε_1 significa distruggere uniformemente individui della prima specie in quantità proporzionale al loro numero; ne viene che, se cerchiamo di distruggere contemporaneamente individui di ambedue le specie nella maniera anzidetta, mantenendo però ε_1 sempre positivo, si accrescerà la media degli individui della prima specie (ossia di quella mangiata), mentre si diminuirà la media del numero degli individui della seconda specie (quella mangiante). Nella fig. 5 noi abbiamo rappresentato il passaggio da un ciclo Λ corrispondente ai parametri ε_1, ε_2 ad un ciclo Λ' corrispondente ai parametri $\varepsilon'_1 < \varepsilon_1$, $\varepsilon'_2 > \varepsilon_2$ (i parametri γ_1 e γ_2 si sono supposti invariabili ed $\varepsilon'_1 > 0$). Si può immaginare che questo passaggio avvenga in un istante corrispondente al punto P di incontro di due cicli, cioè senza che in quell'istante avvenga un sensibile mutamento nel numero degli individui delle due specie, mutamento però che coll'andar del tempo si manifesterà in virtù dell'azione costante dovuta al cambiamento dei parametri ε_1, ε_2. Il centro Ω' della Λ' è spostato a destra ed in basso rispetto ad Ω, il che accenna ad una diminuzione del valore medio di N_2 ed un aumento del valore medio di N_1.

Aumentare la protezione della specie mangiata dalla voracità dell'altra significa diminuire γ_1 e γ_2; e ciò corrisponde ad un aumento delle quantità medie delle due specie (*).

9. Noi possiamo riassumere i diversi risultati ottenuti nelle leggi seguenti che chiameremo le *leggi fondamentali delle fluttuazioni* di due specie conviventi:

1ª) LEGGE DEL CICLO PERIODICO. – *Le fluttuazioni delle due specie sono periodiche ed il periodo dipende soltanto da* ε_1, ε_2, C, (cioè dai coefficienti di accrescimento e di esaurimento e dalle condizioni iniziali).

2ª) LEGGE DELLA CONSERVAZIONE DELLE MEDIE. – *Le medie dei numeri di individui delle due specie sono costanti qualunque siano i valori iniziali dei numeri di individui delle due specie finché si mantengono costanti i coefficienti di accrescimento e di esaurimento delle due specie e quelli di protezione e di offesa* (ε_1, ε_2, γ_1, γ_2).

3ª) LEGGE DELLA PERTURBAZIONE DELLE MEDIE. – *Se si cerca di distruggere uniformemente e proporzionalmente al loro numero gli individui delle due specie, cresce la media del numero di individui della specie mangiata e diminuisce quella degli individui della specie mangiante* (5).

L'aumento di protezione della specie mangiata aumenta invece ambedue le medie.

Nel caso in cui le fluttuazioni sono piccole abbiamo le seguenti leggi approssimate:

1ª) *Le piccole fluttuazioni sono isocrone, cioè il loro periodo non risente sensibilmente né del numero iniziale di individui, né delle condizioni di protezione e di offesa.*

2ª) *Il periodo di fluttuazione è in ragione composta delle radici quadrate dei tempi nei quali la prima specie da sola si raddoppierebbe e la seconda da sola si ridurrebbe a metà* ($T = 9{,}06\sqrt{t_1 t_2}$).

3ª) *La distruzione uniforme di individui della specie mangiante accelera le fluttuazioni e la distruzione di individui della specie mangiata le rallenta.*

Se si distruggono contemporaneamente e uniformemente individui delle due specie cresce il rapporto dell'ampiezza della fluttuazione della specie mangiata all'ampiezza della fluttuazione della specie mangiante.

Sembra che le specie animali per le quali nel loro stato naturale le verifiche di queste leggi sono le più facili ad eseguirsi siano i pesci, dei quali ap-

(*) Nel N. 2 dell'appendice a questa Memoria si riporta quanto, a questo punto, è contenuto nella già citata Memoria dell'Acc. dei Lincei (N. 9 del § 3 di tale Memoria) e che qui è stato omesso dall'autore. [N.d.R.].

(5) Si intende che questa legge vale entro certi limiti, come è esplicitamente detto nel N. 8, cioè finché il coefficiente di accrescimento ε_1 si conserva positivo. Nel § 5 verrà particolarmente studiato il limite entro cui una causa distruttrice di due specie favorisce la specie mangiata.

punto esistono specie che si nutrono le une delle altre. La pesca continua costituisce una distruzione uniforme di individui delle varie specie.

La cessazione della pesca durante il periodo della guerra e la ripresa nel dopo guerra costituiscono passaggi paragonabili a quelli considerati di sopra da uno ad un altro ciclo. Inoltre la maggiore o minore abbondanza di pesca delle varie specie determinata colle statistiche dà una misura dell'abbondanza degli individui delle varie specie; quindi le statistiche della pesca forniscono dei dati sulle fluttuazioni.

I risultati delle statistiche si mostrano in accordo colle previsioni matematiche (6).

§ 3. – Diagrammi di fluttuazione.

1. Per costruire i diagrammi che danno n_1 e n_2 in funzione del tempo parto dalla equazione (A'_1) cioè

$$\frac{dn_1}{dt} = \varepsilon_1 (1 - n_2)\, n_1$$

e suppongo per semplicità $\varepsilon_1 = 1$.

La A della fig. 6 riproduce la fig. 1; da essa posso ricavare $1 - n_2$ per mezzo di n_1 quindi con un processo grafico posso ottenere il prodotto dei due segmenti $(1 - n_2)$ e n_1. Dividiamo perciò il segmento 1.7 (vedi A della fig. 6) che rappresenta la escursione di n_1, nelle parti 1.2, 2.3, 3.4, 4.5, 5.6, 6.7 e riportiamo la divisione 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 sull'asse delle ascisse della B della fig. 6, sul quale pure riportiamo il segmento arbitrario $OP = p$. Sull'asse delle ordinate riporteremo i segmenti positivi Oa, Ob, Oc, e i segmenti negativi Od, Oe, Of, ricavati dalla A della fig. 6. Proiettiamo nella B della fig. 6 i punti a, b, c, d, e, f dal punto P e conduciamo dai punti 2, 6 rispettivamente le parallele a Pa e a Pd dai punti 3, 5 le parallele a Pb e a Pe dal punto 4 le parallele a Pc e a Pf e determiniamo le loro intersezioni coll'asse delle ordinate. Otterremo così nella B della fig. 6 i punti $2'$, $3'$, $4'$, $5'$, $6'$ e $2''$, $3''$, $4''$, $5''$, $6''$. Le loro distanze dall'origine O, contate col loro segno, moltiplicate per p daranno i valori di dn_1/dt corrispondentemente ai valori di n_1 eguali a 02, 03,

(6) Cfr. la nota al 1° paragrafo in cui si parla delle statistiche del dott. D'Ancona.

Una intuizione dei fenomeni connessi alla legge della perturbazione delle medie l'ebbe Carlo Darwin quando, parlando della lotta per l'esistenza, disse:

« The amount of food for each species of course gives the extreme limit to which each can increase; but very frequently it is not the obtaining food, but the serving as prey to other animals which determines the average numbers of a species. Thus, there seems to be little doubt that the stock of partridges, grouses and hares on any large estate depends chiefly on the destruction of vermin. If not one head of game were shot during the next twenty years in England, and, at the same time, if no vermin were destroyed, there would, in all probability, be less game than at present, although hundreds of thousands of game animals are now annually shot ».

Ved. Ch. Darwin, *The origin of species by means of natural selection, or the preservation of favoured races in the struggle for life.* Sixth edition, with corrections to 1871. London John Murray, 1882 (pp. 53-54).

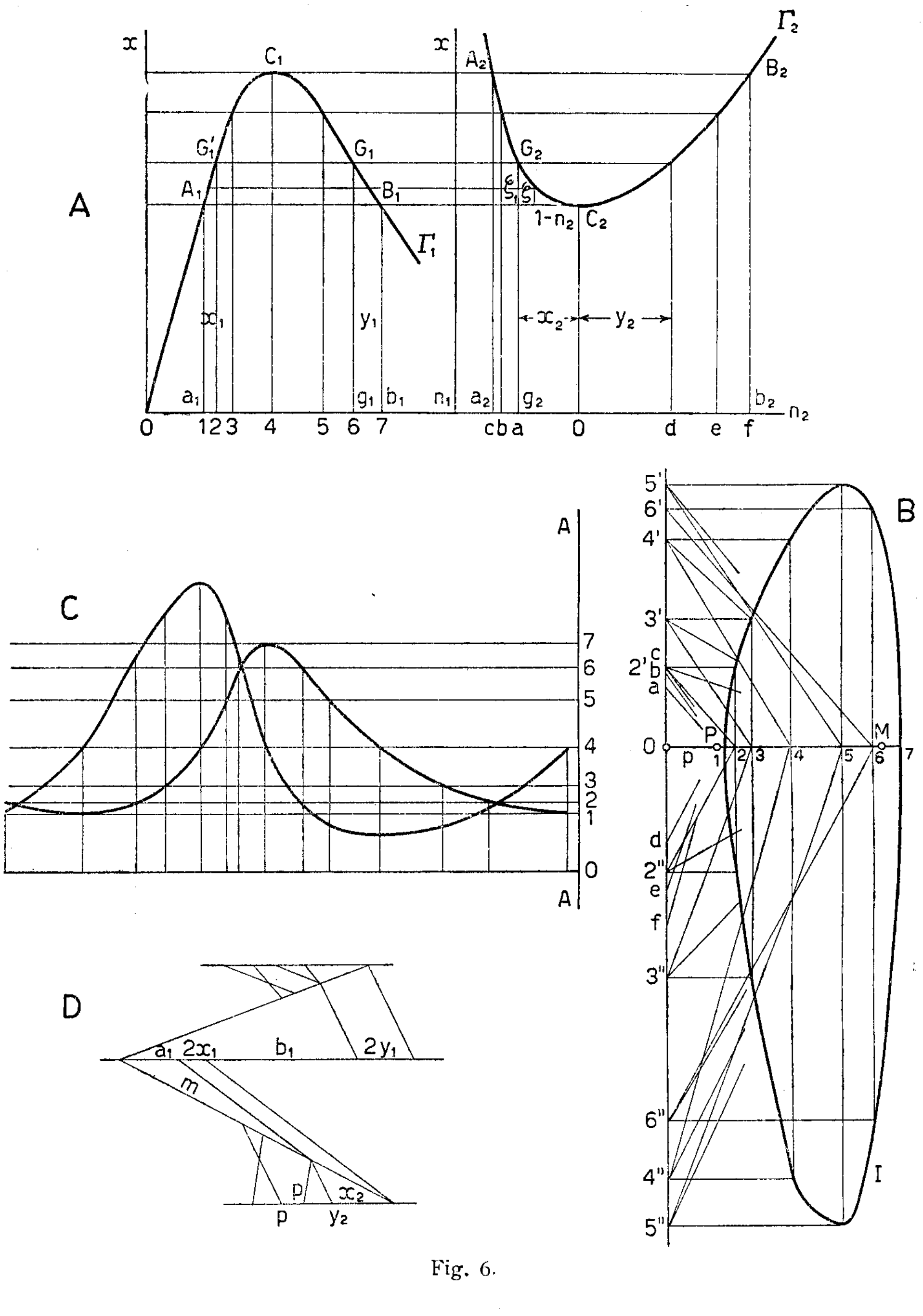


Fig. 6.

04, 05, 06. La quantità dn_1/dt risulterà positiva per n_1 crescente e negativa per n_1 decrescente; sarà zero per n_1 eguale a 01 e 07. Se noi costruiamo la curva che ha per ascissa n_1 e per ordinata dn_1/dt otterremo la curva B (fig. 6) che dà la velocità con cui varia n_1 in funzione di n_1 stesso.

2. Noi vogliamo ora costruire la curva che ha n_1 per ordinata e t per ascissa.

Da un punto M (vedi B della fig. 6) sull'asse delle ascisse ($OM = m$) proiettiamo i punti 2', 3', 4', 5', 6', e 2'', 3'', 4'', 5'', 6''. Scegliendo convenientemente l'unità di tempo queste rette potranno assumersi come parallele alle tangenti della curva cercata nei punti le cui ordinate hanno rispettivamente le grandezze 02, 03, 04, 05, 06. Nei punti le cui ordinate sono uguali a 01 e 07 le tangenti saranno parallele all'asse dei tempi. Riportiamo ora sulla retta AA parallela all'asse delle ordinate della B (vedi C della fig. 6) la divisione 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 e per i punti di divisione tiriamo un fascio di rette ortogonali ad AA che denotiamo con gli stessi numeri. Se assumiamo la retta AA come asse delle ordinate nella C, le rette di questo fascio ci denoteranno le varie altezze a cui si troveranno i punti della curva che dobbiamo costruire. Prendiamo ad arbitrio (vedi C della fig. 6) sulla retta 2 il punto corrispondente di questa curva e da esso tiriamo la parallela alla retta M 2' della B fino ad incontrare la retta 3. Assumiamo il punto d'incontro come punto della curva cercata che si trova su questa retta. Nel passaggio dalla retta 2 alla retta 3, n_1, ossia l'ordinata del punto della curva cercata, è cresciuto di $(\Delta n)_{23} = 23$. Se indichiamo con $(\overline{\Delta t})_{23}$ l'incremento dell'ascissa avremo in virtù della costruzione

$$(23) \qquad \frac{(\Delta n)_{23}}{(\overline{\Delta t})_{23}} = \frac{02'}{m}.$$

Ma se denotiamo con $(\Delta t)_{23}$ l'incremento del tempo, per quello che è stato detto nel n. 1, avremo approssimativamente

$$\frac{(\Delta n)_{23}}{(\Delta t)_{23}} = 02' \cdot p$$

quindi

$$\frac{(\overline{\Delta t})_{23}}{(\Delta t)_{23}} = m \cdot p.$$

Ciò significa che con $(\overline{\Delta t})_{23}$ si è intesa la misura di $(\Delta t)_{23}$ nella scala della B della fig. 6.

Dal punto ottenuto sulla retta 3 tiriamo la parallela alla retta M3' fino ad incontrare la retta 4. Il punto che si ottiene si potrà considerare approssimativamente come punto della curva cercata che giace sulla retta 4.

Infatti n_1 è cresciuto di $(\Delta n)_{34} = 34$ e se l'ascissa è cresciuta di $(\overline{\Delta t})_{34}$ dalla costruzione si deduce

$$\frac{(\Delta n)_{34}}{(\overline{\Delta t})_{34}} = \frac{03'}{m}$$

mentre se $(\Delta t)_{34}$ è il corrispondente incremento del tempo si deve avere (vedi n. 1)

$$\frac{(\Delta n)_{34}}{(\Delta t)_{34}} = 03' \cdot p$$

d'onde

$$\frac{(\overline{\Delta t})_{34}}{(\Delta t)_{34}} = m \cdot p;$$

la scala dei tempi si è quindi conservata inalterata.

Così si può procedere innanzi e trovare approssimativamente i punti immediatamente successivi della curva cercata che giacciono sopra le rette 5 e 6. Ma quale sarà il punto della curva cercata che giace sopra la retta 1, e quale sarà quello che giace sulla retta 7? Siccome in questi punti le tangenti hanno la direzione dell'asse delle ascisse così si vede che per questi punti non si può procedere come per gli altri.

Converrà quindi ricorrere a speciali artifizi per ottenere le ascisse di questi punti.

3. Supponiamo approssimativamente che l'arco C_2 G_2 nella A della fig. 6 sia un arco di parabola in modo che la sua equazione possa scriversi

$$1 - n_2 = \sqrt{2 q \zeta}\,,$$

essendo q il parametro della parabola, ζ la differenza fra l'ordinata d'un punto generico e l'ordinata del vertice C_2.

Avremo, in virtù della (A_1'), essendo $\varepsilon_1 = 1$,

$$\frac{dn_1}{dt} = n_1 \sqrt{2 q \zeta}$$

e supponendo rettilineo il tratto A_1 G_1' sarà

$$\zeta = \alpha\,(n_1 - a_1) \tag{24}$$

scrivendo $O a_1 = a_1$ ed essendo α costante.

Poniamo

$$n_1 = a_1 + \xi^2\,; \tag{25}$$

sarà in virtù delle (24) e (25)

$$\frac{dn_1}{dt} = 2\,\xi\,\frac{d\xi}{dt} = (a_1 + \xi^2)\sqrt{2\,q\alpha\,\xi^2}$$

ossia

$$2\,\frac{d\xi}{dt} = \sqrt{2\,q\alpha}\,(a_1 + \xi^2)$$

da cui si ricava

$$dt = \frac{2\,d\xi}{\sqrt{2\,q\alpha}\,(a_1 + \xi^2)}$$

e quindi

$$t - t_1 = \frac{2}{\sqrt{2\,q\alpha}}\,\frac{1}{\sqrt{a_1}}\,\text{arco tg}\,\frac{\xi}{\sqrt{a_1}}$$

ove t_1 denota il tempo corrispondente all'ordinata 01 nella A della fig. 6.

Se dunque t_2 è il tempo corrispondente all'ordinata 02 (fig. 6, A), avremo

$$t_2 - t_1 = \frac{2}{\sqrt{2\,q\alpha}}\,\frac{1}{\sqrt{a_1}}\,\text{arco tg}\,\frac{\xi_{12}}{\sqrt{a_1}}$$

posto

$$\xi_{12} = \sqrt{x_1}$$

ove x_1 è la distanza 12 nella A della fig. 6. Ora posto $1 - a = x_2$ sarà $x_2^2 = 2\,q\zeta_1$, essendo ζ_1 il valore di ζ corrispondente al punto G_2. Quindi a cagione delle (24) e (25),

$$\sqrt{2\,q\alpha} = x_2\sqrt{\frac{\alpha}{\zeta_1}} = \frac{x_2}{\sqrt{x_1}}$$

e per conseguenza

$$t_2 - t_1 = \frac{2}{\left(\frac{x_2}{\sqrt{x_1}}\right)\sqrt{a_1}}\,\text{arco tg}\sqrt{\frac{x_1}{a_1}} = \frac{2}{x_2}\sqrt{\frac{x_1}{a_1}}\,\text{arco tg}\sqrt{\frac{x_1}{a_1}}\,.$$

Siccome $\sqrt{x_1/a_1}$ è piccolo, prenderemo approssimativamente

$$\text{arco tg}\sqrt{\frac{x_1}{a_1}} = \sqrt{\frac{x_1}{a_1}}$$

e quindi

$$t_2 - t_1 = \frac{2\,x_1}{x_2\,a_1}\,.$$

Chiamiamo $\overline{t_2 - t_1}$ il $t_2 - t_1$ misurato nella scala colla quale si misurano i tempi nella C della fig. 6. Tenendo conto dei risultati del numero 2, avremo

$$\frac{\overline{t_2 - t_1}}{t_2 - t_1} = m \cdot p\,.$$

Dunque

$$\overline{t_2 - t_1} = \frac{2\,x_1}{x_2\,a_1}\,mp = 2\,x_1\frac{m}{a_1}\cdot\frac{p}{x_2}\,.$$

Il segmento $\overline{t_2 - t_1}$ sarà la differenza delle ascisse di punti della curva cercata, i quali si trovano nella C della fig. 6 rispettivamente sulle rette 1 e 2.

La costruzione grafica del $\overline{t_2 - t_1}$ è fatta, in base alla formula precedente, nella D della fig. 6. Con procedimento analogo conviene costruire altri tre

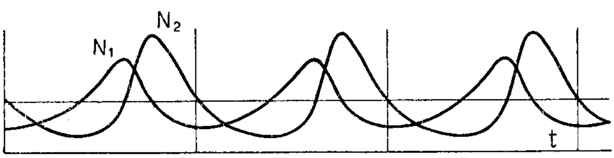


Fig. 7.

segmenti che sono in condizioni simili del $\overline{t_2 - t_1}$ che ci daranno le posizioni dei vertici della curva in relazione ai punti adiacenti, e questo è pure fatto in D della fig. 6. I rimanenti punti s'ottengono col procedimento del n. 2. Tenendo presente la periodicità potremo prolungare la curva che ha per ordinata n_1 e per ascissa t. Siccome dalla A della fig. 6 possiamo ottenere n_2 per mezzo di n_1 così potremo subito costruire la curva che ha per ascissa t, per ordinata n_2.

I due diagrammi che danno n_1 e n_2 mediante t sono stati riprodotti in scala diversa nella fig. 7 prolungandoli a tre periodi.

§ 4. – Effetti delle diverse azioni che possono scambievolmente esercitarsi due specie conviventi.

1. Supponiamo di avere due specie conviventi e siano N_1 e N_2 i numeri di individui di ciascuna rispettivamente. Il numero di incontri di individui della prima specie con individui della seconda, che avvengono nell'unità di tempo, sarà proporzionale a $N_1 N_2$ e si potrà quindi assumere uguale a $\alpha N_1 N_2$, essendo α una costante. Siano λ_1 e λ_2 i coefficienti di accrescimento positivi o negativi delle due specie quando ciascuna è sola. Nel caso che abbiamo trattato precedentemente λ_1 è positivo e λ_2 è negativo. Inoltre gli incontri sono sfavorevoli alla prima specie (specie mangiata), mentre sono favorevoli alla seconda specie (specie mangiante). Indichiamo con β_1 l'incremento di individui della prima specie e con β_2 l'incremento di individui della seconda specie dovuto ad un certo numero d'incontri, per esempio n. Nel caso precedente dovrebbe prendersi β_1 negativo e β_2 positivo. Nel tempo dt gli incrementi delle due specie saranno rispettivamente

$$dN_1 = \lambda_1 N_1 \, dt + \frac{\beta_1}{n} \alpha N_2 N_1 \, dt$$

$$dN_2 = \lambda_2 N_2 \, dt + \frac{\beta_2}{n} \alpha N_1 N_2 \, dt .$$

Posto

$$\frac{\beta_1}{n} \alpha = \mu_1 \quad , \quad \frac{\beta_2}{n} \alpha = \mu_2$$

le equazioni precedenti diverranno

$$(26) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{dN_1}{dt} &= N_1 (\lambda_1 + \mu_1 N_2) \\ \frac{dN_2}{dt} &= N_2 (\lambda_2 + \mu_2 N_1) \end{aligned} \right.$$

e se poniamo in evidenza i segni, quali si presentano nel caso precedente, scrivendo

$$\lambda_1 = \varepsilon_1 \qquad \lambda_2 = -\varepsilon_2$$

$$\mu_1 = -\gamma_1 \qquad \mu_2 = \gamma_2$$

ritroviamo le equazioni (A_1), (A_2) del § 2, cioè

$$\frac{dN_1}{dt} = N_1 (\varepsilon_1 - \gamma_1 N_2)$$

$$\frac{dN_2}{dt} = N_2 (-\varepsilon_2 + \gamma_2 N_1) .$$

In tal modo resta giustificato (come è detto nel n. 1 del § 2) l'aver preso i coefficienti di accrescimento lineari rispetto a N_2 e a N_1.

2. Prendiamo adesso le (26) senza preoccuparci dei segni dei coefficienti, ammettendo cioè che essi possano prendere valori positivi o negativi; po-

tremo assumerle come rappresentanti le leggi di accrescimento di due specie conviventi per le quali λ_1 e λ_2 sono i *coefficienti di accrescimento*, mentre μ_1 e μ_2 sono i *coefficienti incrementali d'incontro.* I segni di λ_1 e λ_2 ci dicono se le specie si accrescono o si esauriscono da sole, mentre i segni dei coefficienti μ_1 e μ_2 ci indicano se gli incontri sono favorevoli o sfavorevoli all'una e all'altra specie rispettivamente. Per esempio se λ_1 e λ_2 saranno positivi e μ_1, μ_2 negativi ciò significherà che le specie si accrescono da sole, e gl'incontri sono sfavorevoli ad ambedue le specie. Noi potremo considerare tutti i casi possibili (7).

3. Dalle equazioni (26) segue

$$\mu_2 \frac{dN_1}{dt} - \mu_1 \frac{dN_2}{dt} = \lambda_1 \mu_2 N_1 - \lambda_2 \mu_1 N_2$$

$$\lambda_2 \frac{d \log N_1}{dt} - \lambda_1 \frac{d \log N_2}{dt} = \lambda_2 \mu_1 N_2 - \lambda_1 \mu_2 N_1$$

e sommando membro a membro

$$\mu_2 \frac{dN_1}{dt} + \lambda_2 \frac{d \log N_1}{dt} = \mu_1 \frac{dN_2}{dt} + \lambda_1 \frac{d \log N_2}{dt} .$$

Integrando e passando dai logaritmi ai numeri

$$N_1^{\lambda_2} e^{\mu_2 N_1} = C N_2^{\lambda_1} e^{\mu_1 N_2} \tag{27}$$

ove C è una costante positiva.

Per studiare l'andamento del fenomeno, ossia la curva che ha per equazione la (27), converrà costruire le due curve

$$x = C' N_1^{\lambda_2} e^{\mu_2 N_1} \quad , \quad x = C'' N_2^{\lambda_1} e^{\mu_1 N_2}$$

(ove C' e C'' sono due costanti tali che $C''/C' = C$) prendendo rispettivamente per ascissa e ordinata N_1, x e N_2, x e accoppiare le due curve ponendole cogli assi delle ascisse l'uno sul prolungamento dell'altro cone nella fig. 1. Operando come si è fatto nel § 2 si potrà costruire la curva che ha per ascissa N_1 e ordinata N_2.

4. I tipi della curva (C denota una costante positiva)

$$x = CN^{\lambda} e^{\mu N} ,$$

secondo i segni di λ e μ, sono quattro: figg. 8, 9, 10, 11.

(7) È certo che molti fatti interessanti per la medicina possono farsi rientrare nei fenomeni che dipendono dagli incontri e dalle reciproche azioni fra specie diverse (specie umana e germi patogeni; specie parassitata e specie parassita) e quindi le fluttuazioni delle epidemie possono aver rapporto colle teorie qui svolte. Cfr. Sir RONALD ROSS, *The prevention of Malaria,* Second edition 1911; MARTINI, *Berechnungen und Beobachtungen zur Epidemiologie der Malaria* (Gente, Hamburg, 1921); A. J. LOTKA and F. R. SHARPE, *Contribution to the Analysis of Malaria Epidemiologie* (« American Journ. of Hygiene », Vol. III); LOTKA, op. cit.
Circa le possibilità di alcuni di questi casi vedi i nn. 8 e 9 di questo paragrafo.

Le curve I e II sono incontrate in un solo punto dalle normali ad x e la III e la IV in due punti reali o nessuno.

Per considerare tutti i casi possibili basterà accoppiare una curva di un tipo con una dello stesso tipo o di un altro tipo, quindi avremo 10 casi

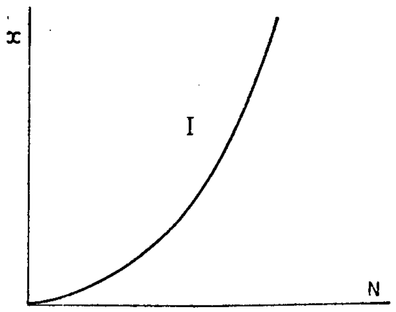


Fig. 8.

$\lambda > 0 \quad , \quad \mu > 0$

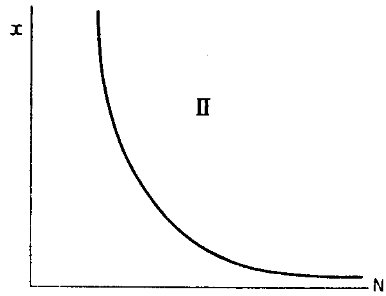


Fig. 9.

$\lambda < 0 \quad , \quad \mu < 0$

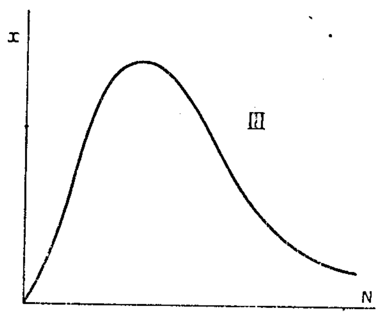


Fig. 10.

$\lambda > 0 \quad , \quad \mu < 0$

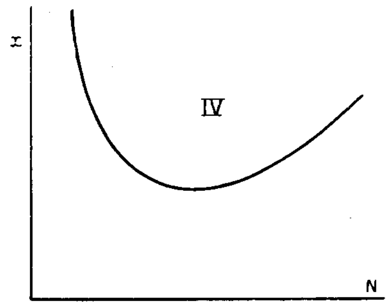


Fig. 11.

$\lambda < 0 \quad , \quad \mu > 0$

tipici cioè quante sono le combinazioni di 4 cose due a due con ripetizione. Questi casi possono individuarsi con i simboli

$$
\begin{array}{cccc}
(\mathrm{I},\ \mathrm{I})\ , & (\mathrm{I},\ \mathrm{II})\ , & (\mathrm{I},\ \mathrm{III})\ , & (\mathrm{I},\ \mathrm{IV}) \\
 & (\mathrm{II},\ \mathrm{II})\ , & (\mathrm{II},\ \mathrm{III})\ , & (\mathrm{II},\ \mathrm{IV}) \\
 & & (\mathrm{III},\ \mathrm{III})\ , & (\mathrm{III},\ \mathrm{IV}) \\
 & & & (\mathrm{IV},\ \mathrm{IV}).
\end{array}
$$

Per esempio con (II, III) intendiamo la curva ottenuta coll'accoppiamento della curva

$$x = C' N_1^{\lambda'} e^{\mu' N_1} \quad (\text{nella quale } \lambda' < 0 , \mu' < 0)$$

colla curva

$$x = C'' N_2^{\lambda''} e^{\mu'' N_2} \quad (\text{nella quale } \lambda'' > 0 , \mu'' < 0) ;$$

C' e C'' denotano due costanti; dunque la curva (II, III) ha per equazione

$$N_1^{\lambda'} e^{\mu' N_1} = C N_2^{\lambda''} e^{\mu'' N_2} \quad (\lambda' < 0\,,\, \mu' < 0\,,\, \lambda'' > 0\,,\, \mu'' < 0)$$

essendo C una quantità costante.

5. Ora osserviamo che per passare dal caso (I, I) al caso (II, II) basta cambiare nella equazione (27) i segni dei quattro coefficienti $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2$, il che equivale a cambiare in questa formula C in $1/C$, onde dal punto di vista tipico della curva che lega N_1 a N_2 non si alterano le cose. Lo stesso si dica di

(II, III) e (I, IV) ; (III, III) e (IV, IV) ; (I, III) e (II, IV).

Riducendosi dunque alle sole curve tipicamente differenti, restano i casi

(I, I) (I, II) (I, III) (II, III) (III, III) (III, IV).

Ma l'ultimo è stato già trattato nel § 2 in maniera particolare. Lasciandolo da parte restano solo i casi nuovi

(I, I) (I, II) (I, III) (II, III) (III, III).

Essi sono rappresentati nelle figure seguenti: figg. 12, 13, 14, 15, 16, 16', 16''. Le ultime tre corrispondono al caso (III, III).

6. La curva corrispondente al caso (III, III) consta di due rami disposti come nella fig. 16, quando si supponga che il massimo di x nella curva (N_1, x) sia minore del massimo di x nella curva (N_2, x). Se avesse luogo il contrario i due rami sarebbero disposti come nella fig. 16' il che equivarrebbe a scambiare N_1 con N_2 nella precedente. Se i due massimi fossero uguali allora le due curve si attraverserebbero in un punto doppio formando un angolo come nella fig. 16''. Per calcolare quest'angolo dividiamo membro a membro le equazioni (26), avremo

$$\frac{dN_2}{dN_1} = \frac{\mu_2}{\mu_1}\,\frac{N_2}{N_1}\left[\frac{\dfrac{\lambda_2}{\mu_2} + N_1}{\dfrac{\lambda_1}{\mu_1} + N_2}\right].$$

Il punto doppio verrà raggiunto quando

$$N_1 = -\frac{\lambda_2}{\mu_2} \quad , \quad N_2 = -\frac{\lambda_1}{\mu_1},$$

quindi quando ciò avverrà avremo

$$\lim \frac{dN_2}{dN_1} = \frac{\mu_2}{\mu_1}\,\frac{\lambda_1 \mu_2}{\lambda_2 \mu_1} \lim \frac{\dfrac{\lambda_2}{\mu_2} + N_1}{\dfrac{\lambda_1}{\mu_1} + N_2} = \frac{\mu_2}{\mu_1}\,\frac{\lambda_1 \mu_2}{\lambda_2 \mu_1} \lim \frac{dN_1}{dN_2}$$

e quindi

$$\left(\lim \frac{dN_2}{dN_1}\right)^2 = \frac{\mu_2^2}{\mu_1^2}\,\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$$

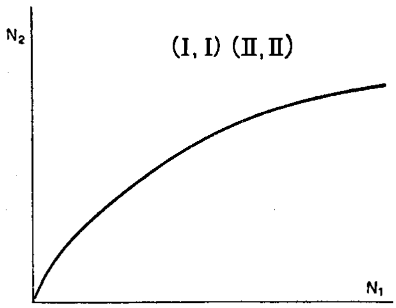


Fig. 12.

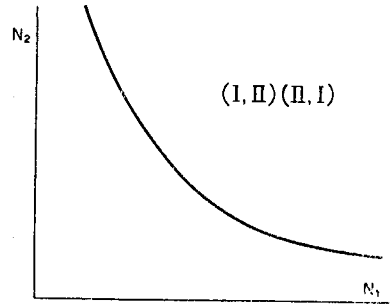


Fig. 13.

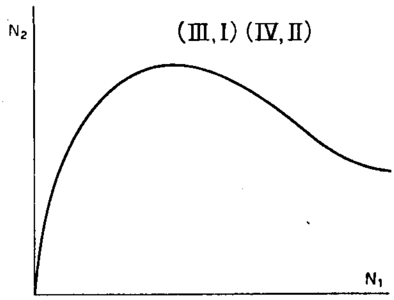


Fig. 14.

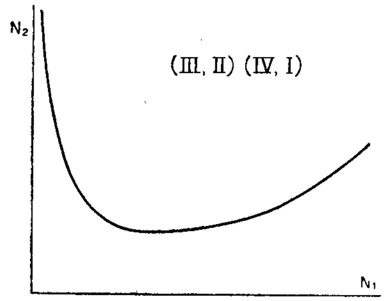


Fig. 15.

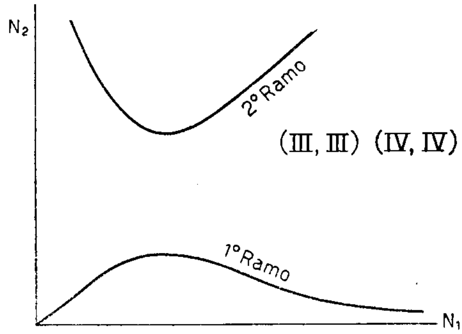


Fig. 16.

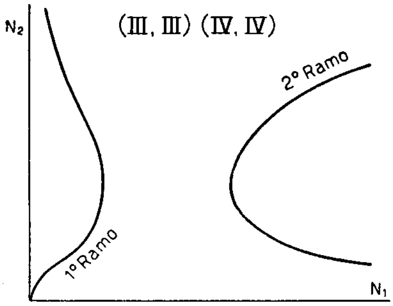


Fig. 16′.

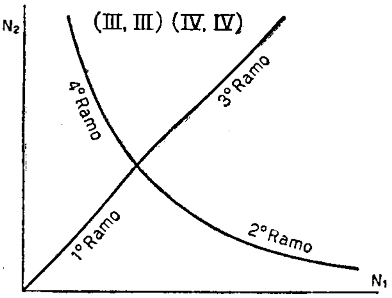


Fig. 16″.

ossia

$$\lim \frac{dN_2}{dN_1} = \pm \frac{\mu_2}{\mu_1} \sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}}\,.$$

Dunque la tangente trigonometrica dell'angolo formato dalle due tangenti nel punto doppio sarà

$$\frac{2\,\mu_1\,\mu_2 \sqrt{\lambda_1\,\lambda_2}}{\mu_1^2\,\lambda_2 - \mu_2^2\,\lambda_1}\,.$$

7. Volendo valersi delle figure precedenti per esaminare tutti i casi possibili (eccettuati quelli studiati nel § 2) osserviamo che, se nelle (26) cambiamo i segni dei quattro coefficienti, ciò equivale a cambiare t in $-t$, onde basterà cambiare il senso in cui col variare del tempo si deve percorrere la figura corrispondente.

Possiamo riassumere questi risultati nella tabella seguente

fig. 12	(I, I)	s.d.	$\lambda_1 > 0,\ \mu_1 > 0,\ \lambda_2 > 0,\ \mu_2 > 0$
	(II, II)	d.s.	$\lambda_1 < 0,\ \mu_1 < 0,\ \lambda_2 < 0,\ \mu_2 < 0$
fig. 13	(I, II)	d.s.	$\lambda_1 < 0,\ \mu_1 < 0,\ \lambda_2 > 0,\ \mu_2 > 0$
	(II, I)	s.d.	$\lambda_1 > 0,\ \mu_1 > 0,\ \lambda_2 < 0,\ \mu_2 < 0$
fig. 14	(III, I)	s.d.	$\lambda_1 > 0,\ \mu_1 > 0,\ \lambda_2 > 0,\ \mu_2 < 0$
	(IV, II)	d.s.	$\lambda_1 < 0,\ \mu_1 < 0,\ \lambda_2 < 0,\ \mu_2 > 0$
fig. 15	(III, II)	d.s.	$\lambda_1 < 0,\ \mu_1 < 0,\ \lambda_2 > 0,\ \mu_2 < 0$
	(IV, I)	s.d.	$\lambda_1 > 0,\ \mu_1 > 0,\ \lambda_2 < 0,\ \mu_2 > 0$
fig. 16	(III, III)	s.d. 1° ramo d.s. 2° ramo	$\lambda_1 > 0,\ \mu_1 < 0,\ \lambda_2 > 0,\ \mu_2 < 0$
	(IV, IV)	d.s. 1° ramo s.d. 2° ramo	$\lambda_1 < 0,\ \mu_1 > 0,\ \lambda_2 < 0,\ \mu_2 > 0$
fig. 16′	(III, III)	b.a. 1° ramo a.b. 2° ramo	$\lambda_1 > 0,\ \mu_1 < 0,\ \lambda_2 > 0,\ \mu_2 < 0$
	(IV, IV)	a.b. 1° ramo b.a. 2° ramo	$\lambda_1 < 0,\ \mu_1 > 0,\ \lambda_2 < 0,\ \mu_2 > 0$
fig. 16″	(III, III)	s.d. 1° ramo, 2° ramo d.s. 3° ramo, 4° ramo	$\lambda_1 > 0,\ \mu_1 < 0,\ \lambda_2 > 0,\ \mu_2 < 0$
	(IV, IV)	d.s. 1° ramo, 2° ramo s.d. 3° ramo, 4° ramo	$\lambda_1 < 0,\ \mu_1 > 0,\ \lambda_2 < 0,\ \mu_2 > 0.$

Nella tabella precedente s.d. significa che col crescere del tempo la curva va percorsa da sinistra a destra, d.s. da destra a sinistra, a.b. dall'alto in basso e b.a. dal basso all'alto.

8. I soli casi nei quali possa raggiungersi l'equilibrio sono i casi (III, IV) (III, III) e (IV, IV) e questi due ultimi nelle condizioni infinitamente poco probabili in cui i due massimi o i due minimi delle curve accoppiate di tipo III o di tipo IV sono uguali. Il primo è un equilibrio di natura stabile, perché, spostato il sistema dallo stato di equilibrio, avvengono intorno ad esso delle fluttuazioni che possono ridursi tanto piccole quanto ci piace (vedi il § 2). Se si cerca di raggiungere nel caso (III, III) o nel caso (IV, IV) l'equilibrio attraverso uno qualunque dei quattro rami che nella figura 16'' fanno capo al punto doppio, si vede che esso non si otterrebbe che dopo un tempo infinitamente lungo. D'altra parte postici nello stato di equilibrio (il che non può presentarsi che con un grado infinitesimo di probabilità) una piccola perturbazione può allontanarci infinitamente da esso.

In tutti gli altri casi le due specie tendono ad esaurirsi, o i numeri di individui di una delle specie o di ambedue tendono all'∞ e quindi si presentano condizioni di instabilità.

Noi abbiamo considerato tutti i casi possibili riguardo ai segni dei coefficienti λ_1, λ_2, μ_1, μ_2.

Converrebbe ancora trattare i casi nei quali alcuni di questi coefficienti si annullano. Sono evidentemente casi infinitamente poco probabili, non di meno presentano interesse perché segnano i passaggi tra un tipo ed un altro di quelli considerati sopra. Noi non li tratteremo; ma nel paragrafo seguente tratteremo il caso in cui $\lambda_1 = 0$ (essendo $\lambda_2 < 0$, $\mu_1 < 0$, $\mu_2 > 0$) come passaggio fra il tipo (III, IV) e il tipo (IV, II) giacché è necessario svolgerlo per esaminare una questione di speciale interesse. Questo caso potrà servire di guida per lo svolgimento degli altri.

Riassumendo e riandando su tutti i diversi casi considerati nella prima parte del presente scritto (se si eccettuano quelli infinitamente poco probabili) si può asserire che *la convivenza delle due specie in un modo stabile e permanente non può aversi che nel caso considerato nel* § 2. In tutti gli altri una delle due specie distrugge l'altra, o ambedue si distruggono, o ve ne è almeno una che cresce indefinitamente. Evidentemente questo risultato è puramente teorico giacché praticamente il crescere di una delle due specie non può avvenire al di là di un certo limite.

Quest'ultima condizione sarà discussa ed approfondita nella seconda parte § 6.

9. Fin qui ci siamo occupati della equazione o della curva che lega N_1 a N_2, ma abbiamo trascurato l'equazione del tempo.

L'annullarsi dei binomi $\lambda_1 + \mu_1 N_2$ o $\lambda_2 + \mu_2 N_1$ (escludiamo che ciò avvenga contemporaneamente) corrisponde a massimi o minimi rispettivamente di N_1 o N_2 (che assumeremo eguali a M_1 e M_2). Perciò i binomi stessi sono infinitesimi d'ordine 1/2 rispetto a $N_1 - M_1$, $N_2 - M_2$.

Ne viene che

$$\int \frac{dN_1}{N_1(\lambda_1 + \mu_1 N_2)}, \quad \int \frac{dN_2}{N_2(\lambda_2 + \mu_2 N_1)}$$

non divengono infiniti nei detti punti di massimo o di minimo.

Vediamo ciò che avviene quando N_1, N_2 divengono ∞.

Osservando i risultati precedenti (vedi figg. 12–16″) si riconosce che, quando uno dei numeri diviene ∞, l'altro diviene zero o ∞. Nel primo caso t diviene ∞, nell'altro caso N_1 e N_2 divengono ∞ dello stesso ordine. Infatti dalle (26) si ricava, allorché N_1 e N_2 tendono ambedue all'∞,

$$\lim \frac{dN_1}{dN_2} = \lim \frac{\frac{\lambda_1}{N_2} + \mu_1}{\frac{\lambda_2}{N_1} + \mu_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2} .$$

Dunque, come ce lo rivelano i due precedenti integrali, in questo secondo caso t rimane finito. Per conseguenza i numeri di individui delle due specie N_1 e N_2 raggiungono il valore ∞ dopo decorso un tempo finito; in altri termini la curva che lega N_1 a N_2 è percorsa, a partire da un punto iniziale fino al punto $N_1 = N_2 = \infty$, in un tempo finito.

In tutti gli altri casi contemplati in questo paragrafo le curve sono percorse in un tempo ∞, ed infatti ciascun estremo corrisponde all'annullarsi di uno almeno dei numeri N_1 e N_2.

Se noi ritorniamo alla tabella del n. 7 confrontandola colle figg. 12–16″, si vede che N_1, N_2 divengono contemporaneamente ∞ nei casi

fig. 12 (I, I); fig. 15 (IV, I); fig. 16 (IV, IV) 2° ramo;
fig. 16′ (IV, IV) 2° ramo; fig. 16″ (IV, IV) 3° ramo.

Tutti questi casi, nei quali ogni incontro è favorevole ad ambedue le specie (cioè μ_1 e μ_2 sono ambedue positivi), non sembrano praticamente realizzabili.

§ 5. – Limiti entro cui una causa distruttrice di due specie favorisce la specie mangiata.

1. Noi abbiamo mostrato (§ 2, n. 8) che diminuendo ε_1, cioè il coefficiente di accrescimento della specie mangiata, ed aumentando ε_2, ossia il coefficiente d'esaurimento della specie mangiante, cresce la media degli individui della prima specie e diminuisce quella degli individui della seconda specie, onde abbiamo enunciato nel n. 9 la legge: *Se si cerca di distruggere uniformemente e proporzionalmente al loro numero individui delle due specie, cresce la media del numero di individui della specie mangiata e diminuisce quella degli individui della specie mangiante.*

Ma abbiamo aggiunto che questa legge è valida entro certi limiti, cioè finché ε_1 si mantiene positivo.

2. Si tratta ora di studiare come avviene il fenomeno nei suoi particolari. Denotiamo con $\alpha\lambda$ il rapporto fra il numero n_1 di individui della prima specie che si distruggono, vale a dire che si sottraggono alla associazione biologica, nella unità di tempo, ed il numero totale di individui di essa, e con $\beta\lambda$ l'analogo

rapporto per la seconda specie. Durante il tempo dt si tolgono alla associazione biologica rispettivamente

$$n_1\, dt = \alpha\lambda\, N_1\, dt \qquad \text{e} \qquad n_2\, dt = \beta\lambda\, N_2\, dt$$

individui delle due specie, onde le equazioni (A_1), (A_2) dovranno modificarsi sostituendo in esse ε_1, ε_2 rispettivamente con

$$\varepsilon_1 - \alpha\lambda \quad , \quad \varepsilon_2 + \beta\lambda.$$

Il rapporto anarmonico fra i quattro numeri n_2, N_2, n_1, N_1 cioè

$$(n_2 : N_2) : (n_1 : N_1) = \frac{\beta}{\alpha} = \vartheta$$

ci darà il rapporto delle percentuali di distruzione o sottrazione delle due specie che si può supporre dipendere solo dal *modo con cui avviene la detta distruzione o sottrazione*, mentre la *intensità della distruzione o sottrazione* si può far dipendere da λ. L'ingrandire di λ mantenendo costanti α e β significherà quindi intensificare la sottrazione procedendo sempre nello stesso modo per eseguirla, mentre cambiare il rapporto $\vartheta = \beta/\alpha$ vorrà dire mutare il procedimento con il quale si consegue la distruzione o sottrazione.

Per riferirsi ad un esempio concreto, consideriamo due specie di pesci conviventi, la seconda delle quali si nutre della prima. Accrescere λ senza variare né α né β vuol dire intensificare la pesca valendosi sempre dello stesso mezzo di pesca, mentre cambiare $\vartheta = \beta/\alpha$ vuol dire cambiare il metodo di pesca.

3. Le equazioni (A_1) e (A_2) diverranno dunque

$$\frac{dN_1}{dt} = (\varepsilon_1 - \alpha\lambda - \gamma_1 N_2)\, N_1 \tag{28}$$

$$\frac{dN_2}{dt} = (-\varepsilon_2 - \beta\lambda + \gamma_2 N_1)\, N_2 . \tag{28'}$$

Se $\varepsilon'_1 = \varepsilon_1 - \alpha\lambda > 0$ avverrà la fluttuazione con un periodo T (§ 2, n. 5). Il numero di individui della prima specie sottratti nel tempo dt sarà

$$\alpha\lambda\, N_1\, dt,$$

e durante il periodo T

$$\int_0^T \alpha\lambda\, N_1\, dt,$$

onde la media di individui sottratti nella unità di tempo sarà

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T \alpha\lambda\, N_1\, dt = \frac{\alpha\lambda}{T}\int_0^T N_1\, dt .$$

Ma per quanto risulta dal § 2, n. 8

$$\frac{1}{T}\int_0^T N_1\, dt = \frac{\varepsilon_2 + \beta\lambda}{\gamma_2} = \frac{\varepsilon'_2}{\gamma_2},$$

quindi

$$P = \frac{\alpha\lambda(\varepsilon_2 + \beta\lambda)}{\gamma_2}.$$

Siccome $\varepsilon_1 - \alpha\lambda > 0$, così il limite superiore di λ sarà ε_1/α e in conseguenza il limite superiore di P risulterà

$$P_m = \frac{\varepsilon_1(\varepsilon_2 + \vartheta\varepsilon_1)}{\gamma_2}.$$

Se ci riferiamo all'esempio concreto della pesca potremo concludere che, mantenendo lo stesso metodo di pesca (cioè ϑ costante), la quantità media della prima specie, pescata nella unità di tempo, durante un ciclo di fluttuazione, non potrà superare P_m potendo avvicinarsi a questo numero tanto quanto ci piace.

Potremo anche dire che P_m sarà tanto più grande quanto più grande sarà il rapporto anarmonico ϑ.

4. Se λ oltrepasserà il valore ε_1/α, tanto che

$$\varepsilon_1 - \alpha\lambda < 0,$$

allora cesserà di sussistere la fluttuazione, ambedue le specie tenderanno ad esaurirsi (vedi § 4, n. 5) e saremo nel caso denotato nel § 4 come il tipo (IV, II) (fig. 14) in cui il percorso della curva è da destra a sinistra.

È interessante esaminare il caso limite nel quale λ raggiunge il valore ε_1/α. Si perviene allora al punto di passaggio dal tipo (III, IV) al tipo (IV, II). Come è detto nel § 4, noi non abbiamo considerati i diversi casi di passaggio fra i vari tipi; ma esamineremo qui questo perché lo richiede il soggetto che stiamo trattando. Esso potrà servire, come fu detto alla fine del § 4, quale esempio della trattazione dei diversi altri casi di passaggio da uno ad un altro tipo.

Se $\lambda = \varepsilon_1/\alpha$ le (28), (28') diventano

$$\frac{dN_1}{dt} = -\gamma_1 N_1 N_2, \tag{29}$$

$$\frac{dN_2}{dt} = (-\varepsilon_2'' + \gamma_2 N_1) N_2, \tag{29'}$$

dove

$$\varepsilon_2'' = \varepsilon_2 + \varepsilon_1 \vartheta.$$

Queste equazioni ammettono l'integrale (cfr. § 4, n. 2)

$$N_1^{\varepsilon_2''} e^{-\gamma_2 N_1} = C\, e^{\gamma_1 N_2}, \tag{30}$$

ove C è una costante positiva.

Posto

$$x = N_1^{\varepsilon_2''} e^{-\gamma_2 N_1} = C\, e^{\gamma_1 N_2},$$

le due curve Γ_1 e Γ_2 che hanno rispettivamente per ascissa e ordinata (N_1, x) e (N_2, x) vengono rappresentate nella fig. 17:

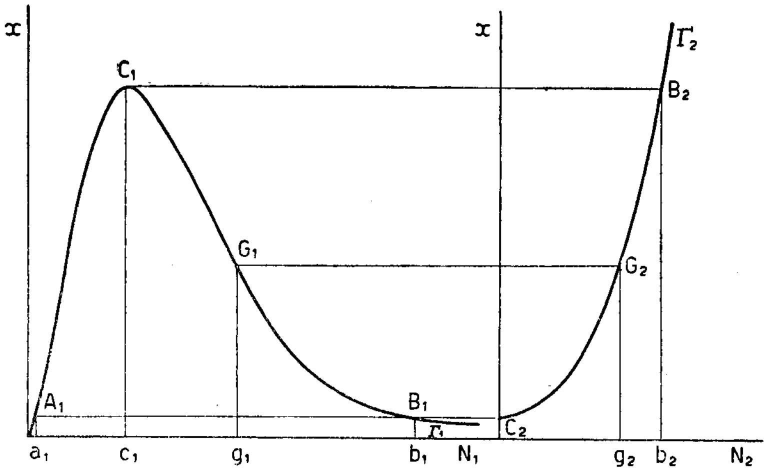


Fig. 17.

onde, impiegando lo stesso procedimento che abbiamo tenuto nel § 2, n. 4 (cfr. fig. 1 e fig. 2), potremo disegnare la curva che ha per equazione la (30) (vedi fig. 18).

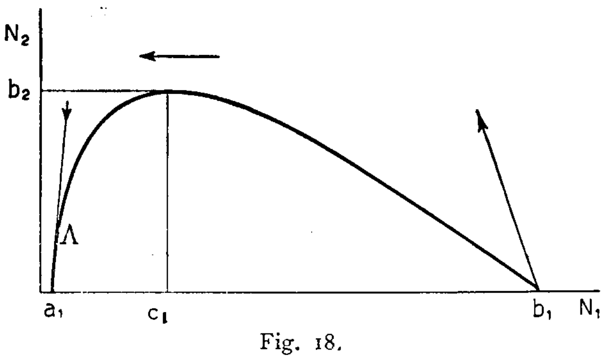


Fig. 18.

I valori minimo e massimo a_1, b_1 di N_1 daranno le due radici reali dell'equazione

$$N_1^{\varepsilon_2''} e^{-\gamma_2 N_1} = C . \tag{30'}$$

Il massimo b_2 di N_2 corrisponderà al valore c_1 di N_1 e dato che

$$c_1 = \frac{\varepsilon_2''}{\gamma_2}$$

sarà

$$b_2 = \frac{\varepsilon_2'' (\log c_1 - 1) - \log C}{\gamma_1} .$$

Ma abbiamo

$$\log C = \varepsilon_2''\left(\log a_1 - \frac{a_1}{c_1}\right)$$

quindi

$$b_2 = \frac{-\varepsilon_2''\left(\log\frac{a_1}{c_1} + \frac{c_1 - a_1}{c_1}\right)}{\gamma_1} = \frac{\varepsilon_2''}{\gamma_1}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{c_1 - a_1}{c_1}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{c_1 - a_1}{c_1}\right)^3 + \cdots\right).$$

Dalle (29), (29′) segue

$$tg\,\varphi = \frac{dN_2}{dN_1} = \frac{\gamma_2 N_1 - \varepsilon_2''}{\gamma_1 N_1} = \frac{\gamma_2}{\gamma_1}\frac{N_1 - c_1}{N_1}$$

denotando con φ l'angolo che la tangente generica alla curva fa con l'asse N_1. Chiamando rispettivamente φ_{a_1} e φ_{b_1} i valori di φ agli estremi a_1 e b_1, avremo

$$tg\,\varphi_{b_1} = \frac{\gamma_2}{\gamma_1}\frac{b_1 - c_1}{b_1} \quad , \quad tg\,\varphi_{a_1} = \frac{\gamma_2}{\gamma_1}\frac{a_1 - c_1}{a_1}.$$

Col crescere di t la curva sarà percorsa da destra a sinistra, ossia la N_1 andrà continuamente diminuendo. Calcoliamo il tempo necessario affinché il numero N_1 di individui della prima specie si riduca da N_1^0 a N_1' essendo

$$a_1 < N_1^0 < b_1 \quad , \quad a_1 < N_1' < N_1^0.$$

Applicando la (29) questo tempo risulterà

$$t = \int_{N_1'}^{N_1^0} \frac{dN_1}{\gamma_1 N_1 N_2} = \int_{N_1^0}^{N_1'} \frac{-dN_1}{\gamma_1 N_1 N_2}.$$

Ma dalla (30) si ricava

$$\gamma_1 N_2 = \varepsilon_2''\left(\log N_1 - \frac{N_1}{c_1}\right) - \log C = \varepsilon_2''\left(\log\frac{N_1}{a_1} - \frac{N_1 - a_1}{c_1}\right);$$

quindi $\gamma_1 N_2$ per $N_1 = a_1$ si annulla dello stesso ordine di $N_1 - a_1$. Sarà dunque

$$\int_{a_1}^{N_1^0} \frac{dN_1}{\gamma_1 N_1 N_2} = \infty.$$

Ciò prova che, da qualunque punto della curva Λ (fig. 18) si parta, ci si avvicina indefinitamente al punto a_1 senza mai raggiungerlo. In altri termini da qualunque stato iniziale si parta, il numero degli individui della prima specie tende assintoticamente verso

$$a_1 < c_1 = \frac{\varepsilon_2''}{\gamma_2},$$

mentre la seconda specie tende ad esaurirsi.

Quando $\varepsilon_1' = \varepsilon_1 - \alpha\lambda$ si annulla, le curve cicliche della fig. 3 assumono al limite la forma della curva della fig. 18. La parte appiattita in basso delle prime tende verso il tratto rettilineo $a_1\,b_1$ della fig. 18. Ma mentre le curve della fig. 3 sono totalmente e periodicamente percorse, il che costituisce il fenomeno della fluttuazione, il tratto rettilineo $a_1\, b_1$ non può mai venire percorso perché per raggiungere il punto a_1 occorre un tempo infinitamente lungo. Se ci mettiamo poi in un punto qualunque del tratto rettilineo $a_1\, b_1$ si ha N_1 costante e $N_2 = 0$.

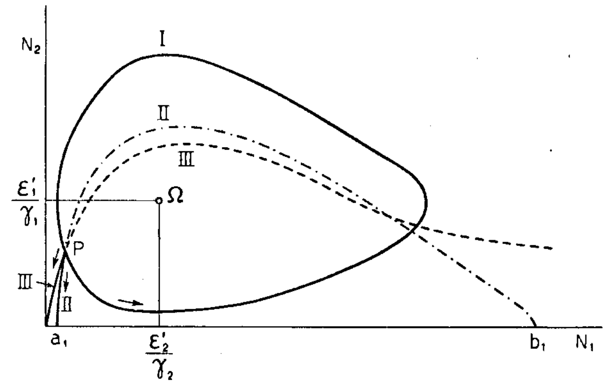


Fig. 19.

Nella fig. 19 sono rappresentate tre curve I, II, III, che escono da un medesimo punto P. Esse hanno rispettivamente per equazioni:

$$\text{I.} \qquad N_1^{\varepsilon_2'}\; e^{-\gamma_2 N_1} = C'\; N_2^{-\varepsilon_1'}\, e^{\gamma_1 N_2}$$

$$\text{II.} \qquad N_1^{\varepsilon_2''}\; e^{-\gamma_2 N_1} = C''\; e^{\gamma_1 N_2}$$

$$\text{III.} \qquad N_1^{\varepsilon_2'''}\; e^{-\gamma_2 N_1} = C'''\, N_2^{h}\, e^{\gamma_1 N_2}.$$

La I è una curva di fluttuazione che corrisponde quindi a $\varepsilon_1' > 0$ (è perciò del tipo (III, IV)), la II è una curva del tipo di quelle della fig. 18 (curva di passaggio dal tipo (III, IV) al tipo (IV, II)), la III è una curva del tipo (IV, II) e corrisponde a $\varepsilon_1 - \alpha\lambda$ negativo e eguale a $-h$. Abbiamo inoltre

$$0 < \varepsilon_2' < \varepsilon_2'' < \varepsilon_2'''.$$

Le dette curve si riferiscono rispettivamente ai tre casi in cui l'intensità della distruzione delle specie non raggiunge il limite ε_1/α, o lo eguaglia, o lo sorpassa (cfr. § 4, n. 5).

Nello studio delle fluttuazioni corrispondenti alle diverse curve del tipo I, troviamo un esempio tipico di un limite superiore che non è un massimo. Infatti, man mano che colla intensità λ della distruzione ci si avvicina al limite ε_1/α, la media ε_2'/γ_2 degli individui della prima specie cresce tendendo verso $C_1 = \varepsilon_2''/\gamma_2$, ma non può raggiungere questo valore perché se λ raggiunge il limite ε_1/α, la fluttuazione cessa di avvenire e il numero di individui della prima specie tende verso a_1 (inferiore alle medie precedentemente raggiunte), mentre la seconda specie tende ad esaurirsi.

Oltrepassato colla intensità della distruzione il detto limite, ambedue le specie tenderanno ad esaurirsi.

I tratti continui delle tre curve e le relative frecce indicano come si producono le variazioni nei tre casi.

È da osservare per ultimo che, mentre ci si avvicina ad ε_1/α colla intensità della distruzione, la media degli individui della prima specie aumenterà, ma il tempo nel quale bisognerà computare questa media, cioè il periodo di una fluttuazione, andrà continuamente ed indefinitamente crescendo.

PARTE SECONDA

Associazione biologica di più specie.

§ 1. – Caso di un numero qualunque di specie che si disputano uno stesso nutrimento.

1. È facile estendere ciò che è stato fatto nel caso di due specie conviventi che si contendono lo stesso nutrimento al caso di un numero qualunque di specie.

Ammettiamo che il numero delle specie sia n e che i coefficienti di accrescimento siano $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ supposta ciascuna specie sola. Denotiamo con $F(N_1, N_2, \cdots, N_n)\, dt$ la diminuzione della quantità di nutrimento nel tempo dt, quando i numeri di individui delle varie specie sono rispettivamente $N_1, N_2, \cdots, N_n$. Questa funzione si annullerà per $N_1 = N_2 = \cdots N_n = 0$; sarà positiva e crescente e crescerà indefinitamente col crescere indefinito di ciascuna N_r. Per semplicità potremmo prendere F lineare cioè

$$F(N_1, N_2, \cdots, N_n) = \alpha_1 N_1 + \alpha_2 N_2 + \cdots + \alpha_n N_n$$

ove i coefficienti α_r sono positivi. Ma noi lasceremo F generale.

La presenza di N_1 individui della prima specie, N_2 della seconda ecc. influirà allora sui coefficienti di accrescimento riducendo le ε_r a $\varepsilon_r - \gamma_r F(N_1, \ldots, N_n)$ ove il coefficiente positivo γ_r misura l'influenza che ha sull'accrescimento della specie la diminuzione del nutrimento.

Avremo quindi le equazioni differenziali

$$\frac{dN_r}{dt} = N_r(\varepsilon_r - \gamma_r F(N_1, \cdots, N_n)), \qquad (r = 1, 2, \cdots, n) \tag{31}$$

da cui segue

$$\frac{1}{\gamma_r N_r}\frac{dN_r}{dt} - \frac{1}{\gamma_s N_s}\frac{dN_s}{dt} = \frac{\varepsilon_r}{\gamma_r} - \frac{\varepsilon_s}{\gamma_s}$$

e integrando e passando dai logaritmi ai numeri

$$\frac{N_r^{1/\gamma_r}}{N_s^{1/\gamma_s}} = C\, e^{\left(\frac{\varepsilon_r}{\gamma_r} - \frac{\varepsilon_s}{\gamma_s}\right)t}$$

ove C denota una costante positiva.

2. Disponiamo i rapporti ε_r/γ_r in ordine di grandezza, supponiamo cioè (8)

$$\frac{\varepsilon_1}{\gamma_1} > \frac{\varepsilon_2}{\gamma_2} > \frac{\varepsilon_3}{\gamma_3} \cdots > \frac{\varepsilon_n}{\gamma_n}$$

avremo allora se $r < s$

$$\lim_{t=\infty} \frac{N_r^{1/\gamma_r}}{N_s^{1/\gamma_s}} = \infty .$$

Questo risultato porta come conseguenza che o N_r può prendere col crescere del tempo valori tanto grandi quanto ci piace o

$$\lim_{t=\infty} N_r = 0 .$$

Ma il primo caso è da escludersi, perché F cresce indefinitamente col crescere indefinito di N_r quindi nella (31) il secondo membro diviene negativo allorché N_r oltrepassa un certo limite; onde il limite superiore di N_r è finito. Dovrà dunque verificarsi il secondo caso. Da ciò segue che tutte le specie tendono a sparire eccettuata la prima.

Per avere l'andamento assintotico di N_1 basterà ripetere quanto si è fatto nel caso di due specie sole.

§ 2. – Caso di un numero qualunque di specie che si nutrono le une delle altre.

1. Consideriamo il caso di n specie e supponiamo che l'incontro di due individui di specie diverse porti sempre un risultato favorevole alla specie a cui appartiene l'uno e sfavorevole a quella a cui appartiene l'altro, oppure un risultato nullo per ambedue. Se N_r è il numero di individui della specie r e N_s il numero di individui della specie s la probabilità di un incontro di un individuo dell'una con un individuo dell'altra sarà proporzionale a $N_r N_s$, onde potremo assumere uguale a $m_{rs} N_r N_s$ il numero di incontri che avvengono nell'unità di tempo. Supponiamo che ad ogni incontro vengano distrutti p_{rs} individui (p_{rs} sarà evidentemente una frazione) di una delle due specie per esempio della specie r, allora nell'unità di tempo verranno distrutti $m_{rs} p_{rs} N_r N_s$ individui di questa specie. Vediamo come si può calcolare l'influenza che ciò ha sul numero di individui dell'altra specie.

Un calcolo grossolano può farsi in questo modo: Denotiamo con $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$ i pesi medi degli individui delle n specie e con $P_1, P_2, \cdots, P_n$ i pesi totali di tutti gli individui appartenenti a ciascuna specie. Per avere i numeri di individui di ciascuna specie basterà che prendiamo

$$N_1 = \frac{P_1}{\beta_1}, \cdots, N_r = \frac{P_r}{\beta_r}, \cdots, N_n = \frac{P_n}{\beta_n} .$$

Ora se un individuo della specie r viene mangiato da individui della specie s il peso P_r diverrà $P_r - \beta_r$, mentre il peso P_s diverrà $P_s + \beta_r$ e perciò

(8) Escludiamo i casi di eguaglianza come infinitamente poco probabili.

i numeri rispettivi di individui delle due specie diverranno all'ingrosso

$$\frac{P_r - \beta_r}{\beta_r} = N_r - 1 \quad , \quad \frac{P_s + \beta_r}{\beta_s} = N_s + \frac{\beta_r}{\beta_s} .$$

Dunque in modo grossolano potremo dire che nell'unità di tempo, in virtù degli incontri di individui della specie r con individui della specie s, la diminuzione di individui della specie r sarà data da

$$m_{rs}\, p_{rs}\, N_r\, N_s$$

e l'aumento di individui della specie s, pure nell'unità di tempo, sarà dato da

$$m_{rs}\, p_{rs}\, N_r\, N_s \frac{\beta_r}{\beta_s} .$$

Posto $m_{rs}\, p_{rs}\, \beta_r = a_{rs}$ avremo che la diminuzione di individui della specie r sarà

$$\frac{1}{\beta_r} a_{rs}\, N_r\, N_s$$

e l'aumento d'individui della specie s sarà

$$\frac{1}{\beta_s} a_{rs}\, N_r\, N_s$$

o anche posto $a_{rs} = - a_{sr}$ (supposto a_{sr} sia negativo) potremo dire che i numeri di individui della specie r e della specie s crescono nella unità di tempo, in virtù dei loro incontri, rispettivamente di

$$\frac{1}{\beta_r} a_{sr}\, N_r\, N_s \quad , \quad \frac{1}{\beta_s} a_{rs}\, N_r\, N_s$$

e quindi nel tempo dt crescono per i loro incontri rispettivamente di

$$\frac{1}{\beta_r} a_{sr}\, N_r\, N_s\, dt \quad , \quad \frac{1}{\beta_s} a_{rs}\, N_r\, N_s\, dt .$$

Lo stesso potrà dirsi per ogni altra coppia di specie. In altri termini i numeri $1/\beta_1, 1/\beta_2, \cdots, 1/\beta_n$ sono stati assunti come gli *equivalenti* degli individui delle varie specie. Infatti ammettere che $1/\beta_r$ individui della specie r possano trasformarsi in $1/\beta_s$ individui della specie s, significa che $1/\beta_r$ individui della specie r sono *equivalenti* a $1/\beta_s$ individui della specie s. Come *equivalenti* noi abbiamo così presi, in prima approssimazione molto grossolana, le inverse dei pesi medi, ma ci basterà ammettere come *ipotesi la esistenza di numeri equivalenti*, anche se questi non coincidano con gl'inversi dei pesi medi, per ottenere lo stesso risultato che abbiamo ora avuto.

2. Chiamiamo ε_r il coefficiente di accrescimento della specie r allorché questa è sola, avremo allora, se tutte le n specie vivono insieme, che nel tempo dt l'aumento degli individui N_r sarà

$$dN_r = \varepsilon_r\, N_r\, dt + \frac{1}{\beta_r} \sum_{1}^{n}{}_s\, a_{sr}\, N_r\, N_s\, dt ,$$

onde avremo le equazioni differenziali

$$\frac{dN_r}{dt} = \left(\varepsilon_r + \frac{1}{\beta_r} \sum_1^n {}_s\, a_{sr}\, N_s\right) N_r\,, \qquad (r = 1, 2, \cdots, n)$$

o anche

$$\text{(B)} \qquad \beta_r \frac{dN_r}{dt} = \left(\varepsilon_r \beta_r + \sum_1^n {}_s\, a_{sr}\, N_s\right) N_r\,, \qquad (r = 1, 2, \cdots, n)$$

nelle quali

$$a_{rs} = -a_{sr} \quad , \quad a_{rr} = 0 \quad , \quad \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n > 0\,.$$

Nel caso di due sole sole specie, una delle quali si nutra dell'altra noi abbiamo considerato le equazioni (§ 2, n. 1)

$$\frac{dN_1}{dt} = (\varepsilon_1 - \gamma_1 N_2)\, N_1 \quad , \quad \frac{dN_2}{dt} = (-\varepsilon_2 + \gamma_2 N_1)\, N_2\,.$$

Se noi poniamo

$$\gamma_1 = \frac{a_{12}}{\beta_1} \quad , \quad \gamma_2 = \frac{a_{12}}{\beta_2}$$

queste equazioni assumono la forma (B), basta che noi scriviamo ε_2 invece di $-\varepsilon_2$ e intendiamo ε_2 negativo. Noi vediamo dunque che in questo caso non vi è bisogno di un'ipotesi speciale.

Così pure supponiamo di avere n specie e supponiamo che gl'individui della prima si nutrano di quelli della seconda; questi degl'individui della terza, i quali alla lora volta si nutrano degl'individui della quarta specie e così di seguito fino alla n^{esima}.

Avremo allora le equazioni

$$\frac{dN_1}{dt} = (\varepsilon_1 + \gamma_1' N_2)\, N_1 \quad , \quad \frac{dN_2}{dt} = (\varepsilon_2 - \gamma_2 N_1 + \gamma_2' N_3)\, N_2\,,$$

$$\frac{dN_3}{dt} = (\varepsilon_2 - \gamma_3 N_2 + \gamma_3' N_4)\, N_3\,, \cdots, \frac{dN_n}{dt} = (\varepsilon_n - \gamma_n N_{n-1})\, N_n\,,$$

in cui le $\gamma_2, \cdots, \gamma_n$ e $\gamma_1', \gamma_2', \cdots, \gamma_{n-1}'$ sono numeri positivi. Potremo quindi scegliere i numeri $a_{21}, a_{32}, a_{43}, \cdots, a_{n-1,n}, \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$ in modo che

$$\gamma_1' = \frac{a_{21}}{\beta_1}\,, \ \gamma_2 = \frac{a_{21}}{\beta_2}\,, \ \gamma_2' = \frac{a_{32}}{\beta_2}\,, \ \gamma_3 = \frac{a_{32}}{\beta_3}\,, \ \gamma_3' = \frac{a_{43}}{\beta_3}\,, \cdots, \gamma_n = \frac{a_{n,n-1}}{\beta_n}$$

mentre si ammettono nulle tutte le altre a_{sr}, quindi le equazioni precedenti assumeranno la forma (B).

Un altro esempio potrebbe aversi considerando quattro specie e supponendo che gl'individui della prima specie si nutrano di quelli della seconda e questi siano mangiati anche dagl'individui della terza specie i quali si nutrano pure di quelli della quarta.

In questo caso si otterrebbero le equazioni

$$\frac{dN_1}{dt} = (\varepsilon_1 + \gamma_1 N_2)\, N_1 \quad , \quad \frac{dN_2}{dt} = (\varepsilon_2 - \gamma_2 N_1 - \gamma_2' N_3)\, N_2$$

$$\frac{dN_3}{dt} = (\varepsilon_3 + \gamma_3 N_2 + \gamma_3' N_4)\, N_3 \quad , \quad \frac{dN_4}{dt} = (\varepsilon_4 - \gamma_4 N_3)\, N_4$$

nelle quali le $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4, \gamma'_2, \gamma'_3$ sono numeri positivi. Esse possono scriversi sotto la forma (B)

$$\frac{dN_1}{dt} = \left(\varepsilon_1 + \frac{a_{21}}{\beta_1} N_2\right) N_1 \quad , \quad \frac{dN_2}{dt} = \left(\varepsilon_2 + \frac{a_{12}}{\beta_2} N_1 + \frac{a_{32}}{\beta_2} N_3\right) N_2$$

$$\frac{dN_3}{dt} = \left(\varepsilon_3 + \frac{a_{23}}{\beta_3} N_2 + \frac{a_{43}}{\beta_3} N_4\right) N_3 \quad , \quad \frac{dN_4}{dt} = \left(\varepsilon_4 + \frac{a_{34}}{\beta_4} N_3\right) N_4 .$$

scegliendo convenientemente $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, a_{12}, a_{23}, a_{34}$, e prendendo nulle tutte le altre a_{sr}.

In tutti questi casi, come in molti altri che si possono immaginare, nessun'altra ipotesi è necessaria di fare e i numeri $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$ possono senz'altro ottenersi.

3. Le equazioni (B) ci danno subito alcuni teoremi generali:

Basta che uno almeno dei coefficienti di accrescimento sia positivo perchè le specie non si esauriscano tutte.

Infatti supponiamo $\varepsilon_r > 0$ e

$$N_1, N_2, \cdots, N_n < \eta \quad , \quad \frac{1}{\beta_r} \sum_{1}^{n}{}_s |a_{sr}| = p_r$$

avremo

$$\frac{1}{N_r} \frac{dN_r}{dt} > \varepsilon_r - p_r \eta .$$

Se le n specie si esaurissero, $N_1, N_2, \cdots, N_n$ tenderebbero a zero, quindi potrebbe trovarsi un valore t_0 del tempo tale che, per $t \geq t_0$, si potrebbe ammettere

$$\eta < \frac{\varepsilon_r}{p_r}$$

quindi

$$\varepsilon_r - p_r \eta = l > 0$$

e per conseguenza

$$N_r > N_r^0 e^{l(t-t_0)}$$

essendo N_r^0 il valore di N_r per $t = t_0$. Ne segue che, col crescere indefinito di t, N_r diverrebbe tanto grande quanto ci piace, il che sarebbe in contraddizione con $N_r < \eta$.

Se tutti i coefficienti di accrescimento sono negativi, le specie si esauriscono, mentre, se tutti sono positivi, il numero totale d'individui di tutte le specie cresce indefinitamente.

Infatti nelle (B) supponiamo

$$\varepsilon_r < -\varepsilon \qquad (r = 1, 2, \cdots, n) ,$$

essendo ε una quantità positiva. Sommando membro a membro le (B) si avrà

$$\sum_{1}^{n}{}_r \beta_r \frac{dN_r}{dt} < -\varepsilon \sum_{1}^{n}{}_r \beta_r N_r ,$$

ossia

$$\frac{d}{dt}\log\sum_{1}^{n}{}_r\,\beta_r\,N_r < -\varepsilon\,,$$

e integrando e passando dai logaritmi ai numeri:

$$\sum_{1}^{n}{}_r\,\beta_r\,N_r < \sum_{1}^{n}{}_r\,\beta_r\,N_r^{\circ}\,e^{-\varepsilon t}$$

ove si è denotato con N_r° il valore iniziale di N_r. Questa diseguaglianza dimostra che le N_r tendono a zero. Analogamente, se si avesse

$$\varepsilon_r > \varepsilon\,, \qquad (r = 1\,, 2\,, \cdots, n)$$

essendo ε positivo, si otterebbe

$$\sum_{1}^{n}{}_r\,\beta_1\,N_r > \sum_{1}^{n}{}_r\,\beta_r\,N_r^{\circ}\,e^{\varepsilon t}$$

onde tutte le N_r non potrebbero conservarsi inferiori ad un numero finito. È interessante non disgiungere questo enunciato dal teorema precedente.

Ambedue uniti ci conducono alla proposizione seguente: *Condizione necessaria e sufficiente perché tutte le specie si esauriscano è che tutti i coefficienti di accrescimento siano negativi.*

4. Affinché $N_1, N_2, \ldots, N_n$ siano costanti dovranno essere soddisfatte le equazioni

$$\frac{dN_1}{dt} = \frac{dN_2}{dt} = \cdots = \frac{dN_n}{dt} = 0$$

onde le equazioni (B) diverranno

$$(B') \qquad \varepsilon_r\,\beta_r + \sum_{1}^{n} a_{sr}\,N_s = 0\,.$$

Chiameremo queste equazioni le *equazioni della stazionarietà.* Il loro determinante

$$(C) \qquad \begin{vmatrix} 0 & , a_{21} & , a_{31} & ,\cdots, & a_{n1} \\ a_{12} & , 0 & , a_{32} & ,\cdots, & a_{n2} \\ a_{13} & , a_{23} & , 0 & ,\cdots, & a_{n3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & , a_{2n} & , a_{3n} & ,\cdots, & 0 \end{vmatrix},$$

che si chiamerà il *determinante fondamentale,* sarà *emisimmetrico,* quindi sarà un quadrato se n è pari e sarà nullo se n è dispari.

Ci converrà dunque distinguere il caso in cui il numero delle specie è *pari* da quello in cui il numero delle specie è *dispari.*

§ 3. - Numero pari di specie conviventi.

1. Abbiamo distinto alla fine del paragrafo precedente due casi secondo che n è pari o dispari. Cominciamo dal primo caso.

Poichè $a_{sr} = - a_{rs}$ avremo

$$\sum_{1}^{n}{}_r \beta_r \frac{dN_r}{dt} = \sum_{1}^{n}{}_r \varepsilon_r \beta_r N_r \tag{32}$$

$$\beta_r \frac{d \log N_r}{dt} - \varepsilon_r \beta_r = \Sigma_s a_{sr} N_s , \qquad (r = 1, 2, \ldots, n). \tag{33}$$

Il determinante fondamentale emisimmetrico

$$\begin{vmatrix} 0 & , a_{21} & , a_{31} & , \cdots, & a_{n1} \\ a_{12} & , 0 & , a_{32} & , \cdots, & a_{n2} \\ a_{13} & , a_{23} & , 0 & , \cdots, & a_{n3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & , a_{2n} & , a_{3n} & , \cdots, & 0 \end{vmatrix} \tag{C}$$

sarà in generale diverso da zero, perché di grado pari. Noi lo ammetteremo sempre *positivo*, essendo esso un quadrato ed essendo infinitamente poco probabile che esso si annulli.

Chiamiamo A_{sr} l'elemento coniugato di a_{sr}, cioè tale che

$$\sum_{1}^{n}{}_r A_{hr} a_{sr} \begin{cases} = 0 , & h \gtrless s \\ = 1 , & h = s . \end{cases}$$

Si otterrà dalle (33)

$$N_h = \sum_{1}^{n}{}_r A_{hr} \left(\beta_r \frac{d \log N_r}{dt} - \varepsilon_r \beta_r \right) .$$

Avremo per conseguenza

$$\sum_{1}^{n}{}_h \varepsilon_h \beta_h N_h = \sum_{1}^{n}{}_h \varepsilon_h \beta_h \sum_{1}^{n}{}_r A_{hr} \left(\beta_r \frac{d \log N_r}{dt} - \varepsilon_r \beta_r \right) .$$

Ma $A_{hr} = - A_{rh}$, quindi

$$\sum_{1}^{n}{}_h \varepsilon_h \beta_h \sum_{1}^{n}{}_r A_{hr} \varepsilon_r \beta_r = 0 ,$$

onde l'equazione precedente diverrà

$$\sum_{1}^{n}{}_h \varepsilon_h \beta_h N_h = \sum_{1}^{n}{}_h \sum_{1}^{n}{}_r A_{hr} \beta_h \beta_r \varepsilon_h \frac{d \log N_r}{dt} = \sum_{1}^{n}{}_r q_r \beta_r \frac{d \log N_r}{dt}$$

ove si è posto

$$q_r = \sum_{1}^{n}{}_h A_{hr} \beta_h \varepsilon_h \tag{34}$$

e a cagione della (32)

$$\sum_1^n {}_r \beta_r \frac{dN_r}{dt} = \sum_1^n {}_r q_r \beta_r \frac{d \log N_r}{dt}$$

ossia

$$\frac{d}{dt} \sum_1^n {}_r \beta_r (N_r - q_r \log N_r) = 0.$$

Integrando e passando dai logaritmi ai numeri si ha l'integrale

$$\left(\frac{e^{N_1}}{N_1^{q_1}}\right)^{\beta_1} \left(\frac{e^{N_2}}{N_2^{q_2}}\right)^{\beta_2} \cdots \left(\frac{e^{N_n}}{N_n^{q_n}}\right)^{\beta_n} = C$$

ove C è una costante positiva.

Questa equazione può scriversi ancora, nella ipotesi che le q_i siano tutte diverse da zero,

$$\left(\frac{e^{N_1/q_1}}{\frac{N_1}{q_1}}\right)^{q_1 \beta_1} \left(\frac{e^{N_2/q_2}}{\frac{N_2}{q_2}}\right)^{q_2 \beta_2} \cdots \left(\frac{e^{N_n/q_n}}{\frac{N_n}{q_n}}\right)^{q_n \beta_n} = C'$$

ove $C' = C\, q_1^{q_1 \beta_1} q_2^{q_2 \beta_2} \cdots q_n^{q_n \beta_n}$, cioè è una nuova costante positiva. Posto

$$n_r = \frac{N_r}{q_r}$$

sarà

$$\left(\frac{e^{n_1}}{n_1}\right)^{q_1 \beta_1} \left(\frac{e^{n_2}}{n_2}\right)^{q_2 \beta_2} \cdots \left(\frac{e^{n_n}}{n_n}\right)^{q_n \beta_n} = C'. \tag{35}$$

Se $q_1, q_2, \cdots, q_n$ sono numeri positivi, $n_1, n_2, \cdots, n_n$ saranno pure positivi e quindi

$$\frac{e^{n_r}}{n_r} \geqq e$$

onde

$$\left(\frac{e^{n_r}}{n_r}\right)^{q_r \beta_r} \leqq \frac{C' e^{q_r \beta_r}}{e^{\Sigma_h q_h \beta_h}} = K e^{q_r \beta_r}$$

avendo posto

$$K = \frac{C'}{e^{\Sigma_h q_h \beta_h}}$$

quindi

$$\frac{e^{n_r}}{n_r} \leqq e\, K^{1/(q_r \beta_r)}. \tag{36}$$

Ciò prova che n_r deve mantenersi compreso fra due numeri positivi, l'uno maggiore l'altro minore dell'unità, il che si può riconoscere geometricamente in modo molto semplice. Riprendiamo infatti la curva avente per equazione (vedi fig. 20):

$$y = \frac{e^x}{x} \quad \begin{cases} 0 < x < \infty \\ e < y < \infty. \end{cases}$$

La ordinata y assumerà il valore minimo e per $x = 1$ e diverrà infinita per

$x = 0$ e $x = \infty$. Tiriamo la parallela all'asse x che dista da questa retta di $y_0 > e$, e che taglia la curva in due punti A e B di ascisse x^0, x'.

Se $(e^x/x) < y_0$, sarà $0 < x^0 < 1 < x' < \infty$; $x^0 < x < x'$.

Dalla (36) si deduce dunque $n_r^0 < < n_r < n'_r$, essendo n_r^0 e n'_r due numeri positivi, il primo minore, l'altro maggiore dell'unità. Ponendo

$$n_r^0 q_r = N_r^0 \quad , \quad n'_r q_r = N'_r$$

sarà $N_r^0 < N_r < N'_r$ ove N_r^0 e N'_r sono due numeri positivi l'uno minore l'altro maggiore di q_r.

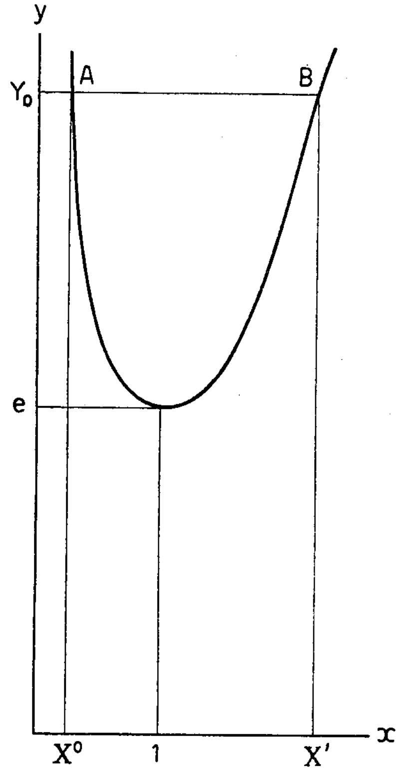


Fig. 20.

Vediamo ora che cosa significa essere le q_r positive.

Dalle (B) segue che condizione necessaria e sufficiente perché le N_r assumano valori costanti, è che possa aversi (vedi § 2, n. 4)

$$(B') \qquad \varepsilon_r \beta_r + \sum_1^n {}_s\, a_{sr} N_s = 0 \,, \qquad (r = 1, 2, \cdots, n)$$

cioè che queste equazioni risolute rispetto alle N_s diano soluzioni positive. Queste soluzioni sono (vedi (34))

$$(34') \qquad N_s = -\sum_1^n {}_r\, A_{sr} \varepsilon_r \beta_r = = \sum_1^n {}_r\, A_{rs} \varepsilon_r \beta_r = q_s \,.$$

Ne viene che condizione necessaria e sufficiente perchè esista uno stato stazionario è che le q_s siano positive.

Con questo noi *escludiamo il caso che lo stato stazionario si raggiunga coll'esaurimento di qualcuna delle specie.*

Possiamo dunque enunciare il teorema:

Se esiste uno stato stazionario, ponendo le specie in uno stato iniziale qualunque diverso da questo stato stazionario, il numero di individui di ciascuna specie si manterrà limitato fra due numeri positivi.

2. Ciò premesso ci conviene stabilire delle definizioni onde enunciare alcune proposizioni senza ambiguità.

Se N (t) indica il numero di individui di una specie e resta sempre compreso fra due numeri positivi, si dirà che la specie ha *variazione limitata fra numeri positivi.*

Se N (t) tende a zero ciò significa che la specie si *esaurisce* o anche che la sua *variazione* consiste in un *esaurimento.*

Se N (t) è limitato fra due numeri positivi si dirà che N (t) ha delle *fluttuazioni* se per $t > t_0$ (per quanto grande sia t_0) N ha massimi e minimi.

Si dirà che le *fluttuazioni sono smorzate* se l'oscillazione (differenza fra il limite superiore e il limite inferiore) di N (t) per $t > t_0$ può rendersi tanto piccola quanto ci piace ingrandendo sufficientemente t_0. In questo caso e solo in questo caso, le fluttuazioni permettono che N tenda verso un limite determinato e finito per $t = \infty$.

Si dirà che N (t) *varia assintoticamente* e *tende assintoticamente* al limite q, se N (t) non ha fluttuazioni e tende al limite determinato e finito q per $t = \infty$.

3. Possiamo ora enunciare la proposizione:

Se esiste uno stato stazionario, ponendo le specie in uno stato iniziale qualunque diverso da quello stazionario si avranno sempre fluttuazioni delle specie le quali non potranno smorzarsi.

Per dimostrare questo teorema osserviamo che due casi possono presentarsi: o tutte le $N_1, N_2, \cdots, N_n$ tendono verso dei limiti determinati e finiti col crescere indefinito del tempo [9] o qualcheduna di esse deve oscillare con ampiezze di oscillazioni che debbono mantenersi superiori ad un numero positivo, e quindi si avranno fluttuazioni, che non tutte si smorzeranno. Ora $N_1, N_2, \cdots, N_n$ non possono tendere tutte verso $q_1, q_2, \cdots, q_n$, ossia le $n_1, n_2, \cdots, n_n$ non possono tendere tutte verso 1, perché il più piccolo valore che può assumere la costante C′ è

$$m = e^{q_1 \beta_1 + q_2 \beta_2 + \cdots + q_n \beta_n}$$

valore che prende quando tutte le n_r sono eguali ad 1. Basta che una almeno di queste quantità sia positiva e diversa da 1 perché C′ sia maggiore di m. Quindi se lo stato iniziale non coincide con quello nel quale $n_1, n_2, \cdots, n_n$ sono tutte eguali ad 1 (nel qual caso esse conserverebbero sempre questo valore) sarà $C' > m$. Ma se $n_1, n_2, \ldots, n_n$ tendessero tutte verso 1 il primo membro della (35) dovrebbe tendere verso m, mentre si conserva sempre uguale a $C' > m$.

Le $N_1, N_2, \cdots, N_n$ non possono nemmeno tendere tutte verso altri limiti $q'_1, q'_2, \cdots, q'_n$ in tutto o in parte diversi da $q_1, q_2, \ldots, q_n$.

Infatti in tal caso le $\beta_r dN_r/dt$ tenderebbero verso i limiti determinati e finiti

$$\left(\varepsilon_r \beta_r + \sum_1^n {}_s\, a_{sr} q'_s\right) q'_r .$$

Ma se N_r e dN_r/dt tendono verso limiti determinati e finiti per $t = \infty$ le dN_r/dt tendono tutte verso zero, onde dovremo avere

$$\varepsilon_r \beta_r + \sum_1^n {}_s\, a_{sr} q'_s = 0 .$$

(9) Rientrerebbe in questo caso quello in cui qualcuna delle N_r fosse costante.

Risolvendo queste equazioni rispetto alle q'_s, e tenendo presente che il determinante (C) è diverso da zero, troviamo (vedi (34))

$$q'_s = q_s\,, \qquad (s = 1\,, 2\,, \cdots, n)$$

il che è contrario alla ipotesi fatta.

È dunque necessario che qualcheduna delle $N_1, N_2, \cdots, N_n$ conservi delle oscillazioni non smorzate col crescere indefinito del tempo e perciò il teorema è dimostrato.

Riprendiamo ora le (B) e integriamo fra due tempi t_0 e t. Si avrà

$$\frac{\beta_r}{T} \log \frac{N_r}{N_r^0} = \varepsilon_r\, \beta_r + \sum_1^n{}_s\, a_{sr} \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t} N_s\, dt$$

ove N_r^0 è il valore di N_r per $t = t_0$, e $T = t - t_0$. Posto

$$\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t} N_s\, dt = \mathfrak{M}_s$$

ossia chiamando $\mathfrak{M}_s$ la media dei valori N_s nell'intervallo $(t_0\,, t)$ di tempo, le equazioni precedenti si scriveranno

$$\frac{\beta_r}{T} \log \frac{N_r}{N_r^0} = \varepsilon_r\, \beta_r + \sum_1^n{}_s\, a_{sr}\, \mathfrak{M}_s\,.$$

Prendendo T sufficientemente grande, poichè N_r e N_r^0 sono compresi fra numeri positivi determinati, si potrà rendere

$$\frac{\beta_r}{T} \log \frac{N_r}{N_r^0} = \sigma_r$$

tanto piccolo quanto ci piace. I valori delle $\mathfrak{M}_s$ che verificano le precedenti equazioni si potranno perciò rendere tanto vicini ai valori q_s quanto ci pare, vale a dire

$$\lim_{T=\infty} \mathfrak{M}_r = q_r\,.$$

Abbiamo dunque il teorema:

Ferme le condizioni dei teoremi precedenti, i limiti delle medie delle N_r *in un intervallo di tempo* $(t_0\,, t)$ *tendono verso le* q_r *per* $t = \infty$.

Questi limiti si chiameranno le *medie assintotiche*.

Dal teorema precedente segue come corollario:

Le medie assintotiche delle N_r *sono indipendenti dai valori iniziali delle* N_r *stesse* (cfr. con il teorema della *costanza delle medie* del § 2, n. 9).

Riassumendo questi vari risultati possiamo enunciare la proposizione generale:

I) *Se esiste uno stato stazionario per l'associazione biologica, i numeri d'individui di ciascuna specie sono limitati fra numeri positivi, sussistendo sempre fluttuazioni che non possono smorzarsi, e le medie assintotiche dei valori* *dei numeri d'individui di tutte le singole specie sono i valori corrispondenti allo stato stazionario* [10].

Come abbiamo veduto sopra, ai valori $n_1, n_2, \cdots, n_n$ eguali ad 1 corrispondono i valori $N_1 = q_1, N_2 = q_2, \cdots, N_n = q_n$ e reciprocamente.

Prendendo nella (35) i valori iniziali di $n_1, n_2, \cdots, n_n$ abbastanza vicini ad 1, potremo rendere C' vicino a $e^{\Sigma_h q_h \beta_h}$ tanto quanto ci piace e quindi K vicino ad 1 tanto quanto ci piace. Ma in un istante qualunque, a cagione della (36), abbiamo

$$e \leqq \frac{e^{n_r}}{n_r} \leqq e K^{1/(q_r \beta_r)} .$$

Potremo quindi far sì che n_r si conservi vicino ad 1 tanto quanto ci piace.

Possiamo dunque concludere:

II) *Gli scostamenti dallo stato stazionario potranno ridursi tanto ristretti quanto ci piace, purché lo stato iniziale sia sufficientemente vicino a quello stazionario.*

In altri termini:

Lo stato stazionario è sempre uno stato stabile [11].

4. Le piccole oscillazioni vicine allo stato stazionario possono studiarsi facilmente. Infatti a cagione della (34) avremo

$$(34'') \qquad \varepsilon_r \beta_r = - \sum_1^n {}_s a_{sr} q_s ,$$

onde le (B) diverranno

$$\beta_r \frac{dN_r}{dt} = \sum_1^n {}_s a_{sr} (N_s - q_s) N_r$$

cioè

$$\beta_r \frac{dn_r}{dt} = \sum_1^n {}_s a_{sr} q_s (n_s - 1) n_r .$$

Posto $n_r = 1 + \nu_r$ le equazioni precedenti assumeranno la forma

$$\frac{\beta_r d\nu_r}{dt} = \sum_1^n {}_s a_{sr} q_s \nu_s (1 + \nu_r) .$$

Se nell'istante iniziale le ν_r sono sufficientemente piccole, pel teorema della stabilità dello stato stazionario, esse si conserveranno tanto piccole quanto ci piace.

Trascurando nelle equazioni precedenti i termini di 2° ordine nelle ν_r esse diverranno

$$37) \qquad \beta_r \frac{d\nu_r}{dt} = \sum_1^n {}_s a_{sr} q_s \nu_s .$$

(10) Lo studio delle piccole fluttuazioni svolto nel n. 4 dà una chiara idea di queste uttu azioni e ne mostra l'andamento.

(11) La stabilità qui, come precedentemente (cfr. 1ª parte, § 2), è intesa in senso analogo alla stabilità dell'equilibrio in meccanica.

Poniamo $\nu_r = A_r e^{-xt}$. Le (37) si scriveranno

$$\beta_r A_r x + \sum_{1}^{n}{}_s a_{sr} q_s A_s = 0, \qquad (r = 1, 2, \cdots, n) \tag{38}$$

da cui eliminando le A_r si ricaverà l'equazione

$$\begin{vmatrix} \frac{\beta_1}{q_1} x, & a_{21}, & a_{31}, & \cdots, & a_{n1} \\ a_{12}, & \frac{\beta_2}{q_2} x, & a_{32}, & \cdots, & a_{n2} \\ a_{13}, & a_{23}, & \frac{\beta_3}{q_3} x, & \cdots, & a_{n3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n}, & a_{2n}, & a_{3n}, & \cdots, & \frac{\beta_n}{q_n} x \end{vmatrix} = 0. \tag{39}$$

Questa equazione ha tutte le radici puramente immaginarie.

Infatti se esistesse una radice reale x, si potrebbero assumere le A_r reali e dalle (38) si ricaverebbe

$$x \sum_{1}^{n}{}_r \beta_r q_r A_r^2 + \sum_{1}^{n}{}_r \sum_{1}^{n}{}_s a_{sr} q_s q_r A_s A_r = 0;$$

ma il doppio sommatorio è nullo, dunque

$$x \sum_{1}^{n}{}_r \beta_r q_r A_r^2 = 0$$

e siccome β_r e q_r sono positive si avrebbe $x = 0$, mentre la equazione (39) non può ammettere la radice nulla avendo fatta l'ipotesi che il determinante (C) sia diverso da zero.

Se la (39) avesse la radice complessa $a + ib$ dovrebbe avere la radice coniugata $a - ib$. Le A_r corrispondenti alla prima radice sarebbero in generale numeri complessi. Chiamiamo A'_r i numeri complessi coniugati. Essi corrisponderanno alla seconda radice onde avremo

$$(a + ib)\, \beta_r A_r + \sum_{1}^{n}{}_s a_{sr} q_s A_s = 0$$

$$(a - ib)\, \beta_r A'_r + \sum_{1}^{n}{}_s a_{sr} q_s A'_s = 0,$$

d'onde

$$(a + ib) \sum_{1}^{n}{}_r \beta_r q_r A_r A'_r + \sum_{1}^{n}{}_r \sum_{1}^{n}{}_s a_{sr} q_r q_s A_s A'_r = 0$$

$$(a - ib) \sum_{1}^{n}{}_r \beta_r q_r A'_r A_r + \sum_{1}^{n}{}_r \sum_{1}^{n}{}_s a_{sr} q_r q_s A'_s A_r = 0$$

e sommando membro a membro

$$2a \sum_{1}^{n}{}_r \beta_r q_r A_r A'_r + \sum_{1}^{n}{}_r \sum_{1}^{n}{}_s (a_{sr} + a_{rs})\, q_r q_s A_s A'_r = 0,$$

cioè

$$a \sum_{1}^{n}{}_r \beta_r q_r A_r A'_r = 0$$

e quindi $a = 0$.

Ciò dimostra che le radici sono puramente immaginarie.

Il cambiare nella (39) x in $-x$ equivale a cambiare le linee in colonne. Dunque se la (39) ammette la radice x, ammette la radice $-x$.

Supponiamo tutte le radici disuguali. Esse potranno indicarsi con

$$ib' \,,\, ib'' \,,\cdots,\, ib^{(n/2)} \,,\, -ib' \,,\, -ib'' \,,\cdots,\, -ib^{(n/2)}$$

e evidentemente potremo scrivere

$$ib^{(h)} = \frac{2\pi i}{T^{(h)}} .$$

Scriviamo come segue i coefficienti A_r corrispondenti a questa radice:

$$M_r^{(h)} e^{\frac{2\pi i}{T^{(h)}} a_r^{(h)}} .$$

Denotiamone cioè con $M_r^{(h)}$ i moduli e con $2\pi a_r^{(h)}/T^{(h)}$ gli argomenti.

I coefficienti A_r corrispondenti alla radice $-ib^{(h)} = -2\pi i/T^{(h)}$ saranno

$$M_r^{(h)} e^{-\frac{2\pi i}{T^{(h)}} a_r^{(h)}} ,$$

onde avremo le soluzioni delle equazioni (37) date da

$$\nu_r^{(h)} = M_r^{(h)} e^{-\frac{2\pi i}{T^{(h)}}\left(t - a_r^{(h)}\right)} , \qquad (r = 1\,,\,2\,,\cdots,\,n)$$

e quelle coniugate da

$$\nu_r'^{(h)} = M_r^{(h)} e^{\frac{2\pi i}{T^{(h)}}\left(t - a_r^{(h)}\right)} , \qquad (r = 1\,,\,2\,,\cdots,\,n) .$$

Accoppiandole colle costanti moltiplicative coniugate

$$\frac{1}{2} C^{(h)} e^{\frac{2\pi i}{T^{(h)}} \alpha^{(h)}} \quad , \quad \frac{1}{2} C^{(h)} e^{-\frac{2\pi i}{T^{(h)}} \alpha^{(h)}}$$

otterremo una prima soluzione reale delle (37) con due costanti arbitrarie $C^{(h)}$ e $\alpha^{(h)}$ cioè

$$\nu_r''^{(h)} = C^{(h)} M_r^{(h)} \cos \frac{2\pi}{T^{(h)}} \left(t - a_r^{(h)} - \alpha^{(h)}\right) .$$

Questa funzione è periodica col periodo $T^{(h)}$. Le ampiezze e le fasi dipenderanno dalle due costanti arbitrarie $C^{(h)}$ e $\alpha^{(h)}$.

Se ne deduce l'integrale generale della (37)

$$\text{(III)} \qquad \nu_r = \sum_{1}^{n/2}{}_h C^{(h)} M_r^{(h)} \cos \frac{2\pi}{T^{(h)}} \left(t - a_r^{(h)} - \alpha^{(h)}\right) , \qquad (r = 1\,,\,2\,,\cdots,\,n)$$

colle n costanti arbitrarie

$$C', C'', \ldots, C^{(n/2)} \quad ; \quad \alpha', \alpha'', \ldots, \alpha^{(n/2)} .$$

Possiamo quindi enunciare il teorema generale:

III) *Le piccole fluttuazioni delle n specie conviventi possono ottenersi mediante la sovrapposizione di $n/2$ fluttuazioni non smorzate e ciascuna delle quali ha un periodo proprio.*

Siccome in generale i periodi $T^{(h)}$ saranno fra loro incommensurabili, così la fluttuazione risultante in generale non sarà periodica. Si osservi che il numero dei periodi $T^{(h)}$ è uguale alla metà del numero delle specie conviventi, ma si ricordi che le leggi delle fluttuazioni adesso ottenute valgono nel caso in cui il numero delle specie conviventi è pari.

Riassumendo, i tre teoremi che abbiamo designato con I, II, III, possono considerarsi come *tre leggi generali delle variazioni di un numero pari di specie conviventi.*

5. Dallo svolgimento precedente possono ricavarsi varie proposizioni sugli stati stazionari e quindi sulle fluttuazioni che ne conseguono. Così dalla (34'') segue

$$(34''') \qquad \varepsilon_r = \frac{1}{\beta_r} \sum_{1}^{n}{}_s\, a_{rs}\, q_s .$$

Le a_{rs}/β_r (vedi n. 1 del § 2) individuano le azioni scambievoli dovute agli incontri degli individui delle varie specie conviventi. Prendendo per le q_s dei numeri positivi arbitrari *le (34''') determinano tutti i possibili coefficienti di accrescimento delle singole specie compatibili colla esistenza di stati stazionari e colle conseguenti fluttuazioni delle specie stesse.*

Dalla equazione (32) si ricava

$$\sum_{1}^{n}{}_r\, \beta_r N_r - \sum_{1}^{n}{}_r\, \beta_r N_r^{0} = \sum_{1}^{n}{}_r\, \varepsilon_r \beta_r \int_0^t N_r\, dt ,$$

ove N_r^0 denotano i valori iniziali (cioè per $t = 0$) delle N_r. Se esiste uno stato stazionario ciascuna delle N_r deve mantenersi compresa fra due numeri positivi. Sia g un numero positivo inferiore al minimo di essi. Avremmo allora, se le ε_r fossero tutte positive,

$$\sum_{1}^{n}{}_r\, \beta_r N_r > \sum_{1}^{n}{}_r\, \beta_r N_r^0 + \left(\sum_{1}^{n}{}_r\, \varepsilon_r \beta_r\right) gt$$

e se le ε_r fossero tutte negative

$$\sum_{1}^{n}{}_r\, \beta_r N_r < \sum_{1}^{n}{}_r\, \beta_r N_r^0 + \left(\sum_{1}^{n}{}_r\, \varepsilon_r \beta_r\right) gt .$$

Ora ambedue queste diseguaglianze non potrebbero sussistere giacché, mentre i primi membri sarebbero sempre limitati, i secondi membri, col crescere del tempo, tenderebbero rispettivamente verso $+\infty$ e $-\infty$.

Possiamo dunque enunciare la proposizione: *affinché esistano uno stato stazionario e le conseguenti fluttuazioni, alcuni dei coefficienti ε_r di accrescimento debbono essere positivi ed altri negativi*, ossia:

Se da sole tutte le specie crescono o tutte si esauriscono non è possibile l'esistenza di uno stato stazionario né delle conseguenti fluttuazioni.

Quindi le equazioni (B′) non possono avere radici tutte positive se le ε_r hanno lo stesso segno; ciò può vedersi anche direttamente, infatti dalle (B′) segue

$$\sum_1^n {}_r\, \varepsilon_r \beta_r q_r = 0$$

e questa equazione non potrà essere verificata se tutte le q_r sono positive e le ε_r dello stesso segno.

§ 4. – Numero dispari di specie conviventi.

1. Passiamo ora al caso in cui il numero delle specie conviventi è dispari. Il determinante fondamentale emisimmetrico (cfr. § 2, n. 4):

$$\text{(C)} \qquad \begin{vmatrix} 0 & , a_{21} & , a_{31} & , \cdots , & a_{n1} \\ a_{12} & , 0 & , a_{32} & , \cdots , & a_{n2} \\ a_{13} & , a_{23} & , 0 & , \cdots , & a_{n3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & , a_{2n} & , a_{3n} & , \cdots , & 0 \end{vmatrix}$$

di ordine dispari è nullo ed i minori di ordine $n - 1$ corrispondenti ad una sua colonna qualunque sono proporzionali alle radici quadrate dei minori corrispondenti agli elementi in diagonale, i quali minori essendo determinanti emisimmetrici d'ordine pari sono quadrati. Noi supporremo che essi non siano nulli e quindi li supporremo positivi.

Chiamiamo $R_1, R_2, \cdots, R_n$ queste radici quadrate. Siccome esse si assumono proporzionali ai minori di ordine $n - 1$, avremo che, fissato arbitrariamente il segno di una di esse, restano fissati i segni di tutte le altre. Ora

$$\sum_1^n {}_h\, a_{rh} R_h = 0, \qquad (r = 1, 2, \cdots, n)$$

quindi dalle (B) si ricaverà

$$\sum_1^n {}_r\, \frac{\beta_r}{N_r} R_r \frac{dN_r}{dt} = \sum_1^n {}_r\, \varepsilon_r \beta_r R_r$$

e integrando e passando dai logaritmi ai numeri

$$\text{(40)} \qquad N_1^{\beta_1 R_1} N_2^{\beta_2 R_2} \cdots N_n^{\beta_n R_n} = Ce^{Lt}$$

ove C è una costante positiva, e $L = \sum_1^n {}_r\, \varepsilon_r \beta_r R_r$.

È infinitamente poco probabile che L sia zero e quindi potrà ritenersi una costante positiva o negativa e perciò col crescere indefinito del tempo il secondo membro tenderà a zero o a ∞.

Noi non conosciamo a *priori* il segno delle R_h, quindi potremo solo concludere che almeno una delle N_h dovrà assumere valori piccoli oppure valori grandi quanto ci piace, senza escludere che una o più di esse possano divenire infinitamente piccole mentre altre divengono infinitamente grandi.

La proposizione che ne deriva (escludendo l'ipotesi $L = 0$) è la seguente:

Se il numero delle specie è dispari non è possibile che il numero di individui di ciascuna specie resti limitato fra due numeri positivi.

Per ben comprendere il significato di questo teorema, bisogna considerarlo come un risultato puramente teorico. Osserviamo intanto che, se una delle specie tenderà a esaurirsi, il numero delle specie tenderà a divenire pari e quindi rientreremo nel caso svolto nel paragrafo precedente.

Ma se il numero di individui di una delle specie crescerà indefinitamente si può riconoscere che le equazioni (B) finiranno col non essere più valide. Noi abbiamo infatti supposto le ε_r costanti, cioè indipendenti dal numero di individui presenti, il che può ammettersi se questo numero non oltrepassa un certo limite, ma al di là la cosa non sarà più vera, onde le equazioni si modificheranno, almeno per il valore mutato che dovrà attribuirsi alle costanti ε_r, in modo da arrestare l'accrescimento di quella specie che aumenterebbe indefinitamente (cfr. § 6).

2. Riprendiamo le equazioni generali (B) nel caso d'un numero dispari di specie

$$\text{(B)} \qquad \beta_r \frac{dN_r}{dt} = \left(\varepsilon_r \beta_r + \sum_1^n {}_s\, a_{sr} N_s\right) N_r$$

e supponiamo che il sistema di equazioni in numero di $n - 1$

$$\varepsilon_r \beta_r + \sum_2^n {}_s\, a_{sr} N_s = 0 , \qquad (r = 2, 3, \cdots, n)$$

abbia le radici positive

$$Q_2, Q_3, \cdots, Q_n .$$

Potremo scrivere le (B) sotto la forma

$$\beta_1 \frac{dN_1}{dt} = \left(\varepsilon_1 \beta_1 + \sum_2^n {}_s\, a_{s1} N_s\right) N_1$$

$$\beta_r \frac{dN_r}{dt} = \left(\sum_2^n {}_s\, a_{sr} (N_s - Q_s) + a_{1r} N_1\right) N_r , \qquad (r = 2, 3, \cdots, n)$$

e ponendo

$$N_1 = Q_1 \nu_1 \quad , \quad N_r = Q_r (1 + \nu_r) , \qquad (r = 2, 3, \cdots, n)$$

ove Q_1 è una costante positiva, e trascurando inoltre i termini di 2° grado nelle $\nu_1, \nu_2, \cdots, \nu_n$ si avrà

$$(41) \qquad \beta_1 \frac{d\nu_1}{dt} = \left(\varepsilon_1 \beta_1 + \sum_2^n {}_s a_{s1} Q_s\right) \nu_1$$

$$(42) \qquad \beta_r \frac{d\nu_r}{dt} = \sum_2^n {}_s a_{sr} Q_s \nu_s + a_{1r} Q_1 \nu_1 , \qquad (r = 2, 3, \cdots, n).$$

3. Prendiamo il determinante emisimmetrico di ordine pari

$$D' = \begin{vmatrix} 0 & , a_{23} & , a_{24} & , \cdots , & a_{2n} \\ a_{32} & , 0 & , a_{34} & , \cdots , & a_{3n} \\ a_{42} & , a_{43} & , 0 & , \cdots , & a_{4n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n2} & , a_{n3} & , a_{n4} & , \cdots , & 0 \end{vmatrix};$$

sarà

$$Q_s = - \frac{\sum_2^n {}_r \varepsilon_r \beta_r D'_{rs}}{D'}$$

ove D'_{rs} è l'elemento reciproco di a_{rs} nel precedente determinante.

Quindi:

$$\sum_2^n {}_s a_{s1} Q_s = - \frac{\sum_2^n {}_r \varepsilon_r \beta_r \sum_2^n {}_s a_{s1} D'_{rs}}{D'}.$$

Consideriamo ora il determinante fondamentale emisimmetrico di ordine dispari

$$D = \begin{vmatrix} 0 & , a_{12} & , a_{13} & , \cdots , & a_{1n} \\ a_{21} & , 0 & , a_{23} & , \cdots , & a_{2n} \\ a_{31} & , a_{32} & , 0 & , \cdots , & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & , a_{n2} & , a_{n3} & , \cdots , & 0 \end{vmatrix}$$

e sia D_{rs} l'elemento coniugato di a_{rs}. Avremo

$$D' = D_{11}$$

$$\sum_2^n {}_s a_{s1} D'_{rs} = - \sum_2^n {}_s a_{1s} D'_{rs} = - D_{r1}$$

e perciò

$$\sum_2^n {}_s a_{s1} Q_s = \frac{\sum_2^n {}_r \varepsilon_r \beta_r D_{r1}}{D_{11}}$$

$$\varepsilon_1 \beta_1 + \sum_2^n {}_s a_{s1} Q_s = \frac{\sum_1^n {}_r \varepsilon_r \beta_r D_{r1}}{D_{11}}.$$

Ma

$$D_{r1} = \sqrt{D_{rr}} \sqrt{D_{11}} ,$$

quindi

$$\varepsilon_1 \beta_1 + \sum_2^n {}_s a_{s1} Q_s = \frac{1}{R_1} \sum_1^n {}_r \varepsilon_r \beta_r R_r = \frac{L}{R_1}$$

ponendo, come nel n. 1, $\sum_1^n {}_r \varepsilon_r \beta_r R_r = L$ e chiamando R_r la $\sqrt{D_{rr}}$.

Secondo quanto è ivi detto, i segni delle R_r sono determinati quando si fissa il segno di una; prendiamo perciò $R_1 > 0$.

4. Supponiamo L negativo e scriviamo $L/(\beta_1 R_1) = -m$ allora l'equazione (41) si integra mediante la formula

$$\nu_1 = A_1 e^{-mt}.$$

Ciò giustifica l'avere trascurato precedentemente i termini del 2° ordine. Ma se L fosse positivo, allora *a posteriori* si riconosce che i detti termini non potevano trascurarsi.

Integriamo le equazioni

$$\beta_r \frac{d\nu_r}{dt} = \sum_2^n {}_s a_{sr} Q_s \nu_s, \qquad (r = 2, 3, \cdots, n)$$

che hanno forma identica alle (37). Le soluzioni u_r avranno la forma degli integrali (III) ottenuti nel § 3, n. 4. Gli integrali delle (42) saranno dunque dati da

$$\nu_r = u_r + A_r e^{-mt}$$

ove i coefficienti A_r si calcolano facilmente colle ben note regole della teoria delle equazioni differenziali lineari.

Dunque allorchè $R_1 > 0$, $L < 0$ (cfr. n. 1) *la variazione dell'associazione biologica si otterrà sovrapponendo una variazione corrispondente ad un esaurimento di tutte le specie alle fluttuazioni delle specie* $2, 3, \cdots, n$. *In altri termini, la prima specie tende assintoticamente ad un esaurimento, mentre le rimanenti* $n - 1$ *specie tendono alle fluttuazioni delle associazioni con un numero pari di specie* (12), *vicine al loro stato stazionario.*

§ 5. – Estensione delle tre leggi fondamentali sulle fluttuazioni.

1. Nel § 2 della 1ª parte sono state enunciate tre leggi fondamentali sulle fluttuazioni di due specie conviventi. Quale è la loro estensione al caso generale di n specie?

Nel § 3 della 2ª parte è stato dimostrato che, *nel caso di un numero pari di specie, se il determinante fondamentale è diverso da zero e se esiste uno stato stazionario senza esaurimento di specie, le variazioni dei numeri degli individui delle diverse specie sono limitate fra numeri positivi e esistono sempre delle*

(12) Le associazioni qui considerate sono *conservative* (ved. § 7, n. 6).

fluttuazioni che non si smorzano. Così si enuncia la estensione della *prima legge* relativa a due specie. Con questa estensione evidentemente si perde la proprietà della periodicità mentre rimane quella della fluttuazione.

2. Ammettiamo verificate le suddette ipotesi e cominciamo dall'osservare riguardo alla estensione della seconda legge (cioè quella della invariabilità delle medie dei numeri degli individui), che mancando la periodicità non può individuarsi la durata del tempo nel quale debbono prendersi le medie. Ma noi sappiamo che, prendendo le medie per durate di tempo infinitamente lunghe, queste tendono verso le radici delle equazioni di stazionarietà. Ora queste radici sono indipendenti dalle condizioni iniziali onde *la* 2ª *legge resta inalterata quando si prendano come medie* (cfr. 2ª parte, § 3) *dei numeri di individui delle singole specie, i limiti delle medie stesse per durate di tempo infinitamente lunghe* (*medie assintotiche*).

3. Si tratta ora di vedere che forma assumerà in generale la terza legge, quella cioè della perturbazione delle medie, sempre ammettendo verificate le suddette ipotesi. Come medie dei numeri degli individui delle diverse specie assumeremo sempre quelle assintotiche.

Nella terza legge (1ª parte, § 2, n. 9) si fa una distinzione fra specie mangiata e specie mangiante. Quando si passa ad un numero di specie più grande di 2, può darsi che gli individui di una stessa specie siano mangiati da quelli di un'altra e si nutrano degli individui di una terza specie. Volendo dunque conservare la distinzione fra specie mangianti e specie mangiate bisogna ammettere che, se una specie A si nutre di un'altra, non vi sia alcuna specie che si nutra di A e quindi che, se una specie B è mangiata da un'altra, essa non si nutra di nessuna specie dell'associazione biologica.

4. Dimostriamo ora il teorema che, mantenendo le precedenti ipotesi, *il numero delle specie mangianti deve essere uguale al numero delle specie mangiate*.

Infatti supponiamo che il numero delle prime sia diverso da quello delle seconde. Assumiamo come specie mangianti le specie $1, 2, \cdots, p$ e come specie mangiate le specie $p+1, p+2, \cdots, p+q$ con $q \lessgtr p$.

Avremo come equazioni di stazionarietà (cfr. § 3, n. 4):

$$\left\{\begin{array}{l}
\beta_1 \varepsilon_1 = a_{1,p+1} N_{p+1} + a_{1,p+2} N_{p+2} + \cdots + a_{1,p+q} N_{p+q} \\
\beta_2 \varepsilon_2 = a_{2,p+1} N_{p+1} + a_{2,p+2} N_{p+2} + \cdots + a_{2,p+q} N_{p+q} \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\beta_p \varepsilon_p = a_{p,p+1} N_{p+1} + a_{p,p+2} N_{p+2} + \cdots + a_{p,p+q} N_{p+q}
\end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l}
\beta_{p+1} \varepsilon_{p+1} = a_{p+1,1} N_1 + a_{p+1,2} N_2 + \cdots + a_{p+1,p} N_p \\
\beta_{p+2} \varepsilon_{p+2} = a_{p+2,1} N_1 + n_{p+2,2} N_2 + \cdots + a_{p+2,p} N_p \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\beta_{p+q} \varepsilon_{p+q} = a_{p+q,1} N_1 + a_{p+q,2} N_2 + \cdots + a_{p+q,p} N_p
\end{array}\right.$$

nelle quali $a_{1,p+1}, \cdots, a_{p,p+q}$ sono negative, mentre $a_{p+1,1}, \cdots, a_{p+q,p}$ sono positive e quindi $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_p$ sono negative e $\varepsilon_{p+1}, \varepsilon_{p+2}, \cdots, \varepsilon_{p+q}$ sono positive, escludendo il caso che esse possano essere nulle.

Per $q \lessgtr p$ il determinante emisimmetrico delle a_{rs}, come facilmente si verifica, risulterebbe nullo, contro l'ipotesi fatta. Dunque deve aversi $q = p$ ossia il numero delle specie mangiate è uguale a quello delle specie mangianti.

5. Ora aumentiamo

$$|\varepsilon_1|, |\varepsilon_2|, \cdots, |\varepsilon_p|$$

e diminuiamo

$$|\varepsilon_{p+1}|, |\varepsilon_{p+2}|, \cdots, |\varepsilon_{p+q}|,$$

ossia distruggiamo tanto le une quanto le altre specie in proporzione del numero di individui che esse hanno rispettivamente. Dovrà qualcuna delle

$$N_{p+1}, N_{p+2}, \cdots, N_{p+q}$$

soddisfacenti alle equazioni di stazionarietà aumentare e qualcuna delle

$$N_1, N_2, \cdots, N_p$$

soddisfacenti alle stesse equazioni diminuire. Reciprocamente, se nessuna delle $N_{p+1}, \cdots, N_{p+q}$ decresce, ma tutte o alcune crescono; se nessuna delle $N_1, \cdots, N_p$ cresce, ma tutte o alcune diminuiscono, debbono diminuire $|\varepsilon_{p+1}|, |\varepsilon_{p+2}|, \cdots, |\varepsilon_{p+q}|$ e aumentare $|\varepsilon_1|, |\varepsilon_2|, \cdots, |\varepsilon_p|$, ossia si debbono distruggere individui tanto delle specie mangianti quanto delle specie mangiate proporzionalmente al loro numero.

In questo consiste la estensione della terza legge, la quale (ricordando il significato delle radici delle equazioni di stazionarietà) potrà così enunciarsi:

In un'associazione d'ordine pari [13], *con determinante diverso da zero, per la quale esiste uno stato stazionario e si possono distinguere le specie mangianti da quelle mangiate, se si distruggono uniformemente e proporzionalmente al numero dei loro individui tutte le specie, le medie assintotiche dei numeri degli individui di qualcuna delle specie mangiate (se non di tutte) cresceranno e le medie assintotiche dei numeri degli individui di qualcuna delle specie mangianti (se non di tutte) diminuiranno.*

Naturalmente questa proposizione vale fino ad un certo limite di distruzione (cfr. 1ª parte, §§ 4, 5) e se le radici delle equazioni di stazionarietà sono positive.

§ 6. – Caso in cui il coefficiente d'accrescimento di ogni singola specie dipende dal numero di individui della stessa specie.

1. Varie volte nei paragrafi precedenti abbiamo avuto occasione di considerare dei casi nei quali il calcolo condurrebbe ad un accrescimento indefinito del numero di individui di una o più specie. Tale risultato va considerato

(13) Le associazioni qui considerate sono *conservative* (ved. § 7, n. 6).

come teorico e non abbiamo mancato di avvertirlo esplicitamente, come nel n. 1 del § 4, osservando che col crescere del numero degli individui, le equazioni fondamentali debbono cessare di essere valide, e in particolare i coefficienti di accrescimento debbono subire delle modificazioni in virtù dell'indefinito crescere del numero degli individui.

Ciò rende necessario di considerare l'influenza che il numero di individui di una specie ha sul suo coefficiente d'accrescimento. È evidente che si potrà trascurare questo effetto finché il numero di individui non oltrepassi certi limiti, ma quando il calcolo condurrebbe ad un accrescimento infinito di individui è necessario tenerne conto. Vediamo come ciò può farsi.

Nel caso in cui esiste una specie sola e si ammette il coefficiente d'accrescimento costante ed eguale ad ε, avremo

$$\frac{dN}{dt} = \varepsilon N$$

ove N denota il numero di individui, quindi

$$N = N_0 e^{\varepsilon t}$$

ove N_0 è il numero iniziale di individui. Se ε è positivo, N crescerà indefinitamente.

Ora supponiamo che il coefficiente di accrescimento non sia costante, ma sia dato da $\varepsilon - \lambda N$ ove ε e λ sono costanti positive, avremo in tal caso

$$\frac{dN}{dt} = (\varepsilon - \lambda N)\, N,$$

d'onde

$$\varepsilon\, dt = \frac{\varepsilon\, dN}{N(\varepsilon - \lambda N)} = \frac{dN}{N} + \frac{\lambda\, dN}{\varepsilon - \lambda N},$$

e integrando e passando dai logaritmi ai numeri

$$C e^{\varepsilon t} = \frac{N}{\varepsilon - \lambda N}$$

ove C è una costante. Quindi

$$N = \frac{C\varepsilon\, e^{\varepsilon t}}{1 + C\lambda\, e^{\varepsilon t}}$$

e per conseguenza

$$\lim_{t=\infty} N = \frac{\varepsilon}{\lambda}.$$

Se chiamiamo N_0 il numero iniziale di individui della specie avremo

$$C = \frac{N_0}{\varepsilon - N_0 \lambda}$$

e quindi

$$N = \frac{\varepsilon N_0\, e^{\varepsilon t}}{\varepsilon + N_0 \lambda\, (e^{\varepsilon t} - 1)}.$$

Dunque il numero di individui si mantiene sempre compreso fra N_0 e ε/λ e non può crescere indefinitamente.

Supponiamo ora, nel caso di n specie conviventi, che i coefficienti di accrescimento, anziché essere le costanti ε_r, siano

$$\varepsilon_r - \lambda_r N_r$$

ove le λ_r sono costanti positive o nulle. Le (B) diverranno

$$\text{(D)} \qquad \beta_r \frac{dN_r}{dt} = \left((\varepsilon_r \beta_r - \lambda_r \beta_r N_r + \sum_1^n {}_s\, a_{sr} N_s \right) N_r$$

e se le equazioni

$$\varepsilon_r \beta_r - \lambda_r \beta_r N_r + \sum_1^n {}_s\, a_{sr} N_s = 0$$

avranno le radici positive $N_r = q_r$, potremo scrivere le (D)

$$\beta_r \frac{dN_r}{dt} = \left(-\lambda_r \beta_r (N_r - q_r) + \sum_1^n {}_s\, a_{sr} N_s - q_s) \right) N_r ,$$

d'onde, posto $N_r = q_r n_r$,

$$\beta_r \frac{dn_r}{dt} = \left(-\lambda_r \beta_r q_r (n_r - 1) + \sum_1^n {}_s\, a_{sr} q_s (n_s - 1) \right) n_r$$

e

$$\beta_r \frac{d \log n_r}{dt} = -\lambda_r \beta_r q_r n_r + \lambda_r \beta_r q_r + \sum_1^n {}_s\, a_{sr} q_s n_s - \sum_1^n {}_s\, a_{sr} q$$

dalle quali segue

$$\sum_1^n {}_r\, \beta_r q_r \frac{dn_r}{dt} = - \sum_1^n {}_r\, \lambda_r \beta_r q_r^2 n_r^2 + \sum_1^n {}_r\, \lambda_r \beta_r q_r^2 n_r - \sum_1^n {}_r \sum_1^n {}_s\, a_{sr} q_r q_s n_r$$

$$\sum_1^n {}_r\, \beta_r q_r \frac{d \log n_r}{dt} = - \sum_1^n {}_r\, \lambda_r \beta_r q_r^2 n_r + \sum_1^n {}_r\, \lambda_r \beta_r q_r^2 + \sum_1^n {}_r \sum_1^n {}_s\, a_{sr} q_s q_r n_s$$

e sottraendo membro a membro

$$\frac{d}{dt} \Sigma_r \beta_r q_r (n_r - \log n_r) = - \Sigma_r \lambda_r \beta_r q_r^2 (n_r^2 - 2 n_r + 1) = - \Sigma_r \lambda_r \beta_r q_r^2 (n_r - 1)^2 .$$

Integrando e passando dai logaritmi ai numeri risulta

$$\left(\frac{e^{n_1}}{n_1} \right)^{\beta_1 q_1} \left(\frac{e^{n_2}}{n_2} \right)^{\beta_2 q_2} \cdots \left(\frac{e^{n_n}}{n_n} \right)^{\beta_n q_n} = C e^{-\int_0^t \Sigma_r \lambda_r \beta_r q_r^2 (n_r - 1)^2 dt}$$

ove C è una costante positiva.

Da questa equazione segue (cfr. 2ª parte, § 3, n. 1)

$$\frac{e^{n_r}}{n_r} \leqq e G^{1/(q_r \beta_r)} ,$$

ove

$$G = \frac{C}{e^{\Sigma_h \beta_h q_h}} e^{-\int_0^t \Sigma_r \lambda_r \beta_r q_r^2 (n_r - 1)^2 dt} .$$

2. Di qui noi possiamo trarre varie conseguenze:

1° Ciascuna delle $n_1, n_2, \cdots, n_n$ e quindi ciascuna delle $N_1, N_2, \cdots, N_n$ dovrà mantenersi compresa fra due numeri positivi.

La dimostrazione può farsi come nel n. 1 del § 3, 2ª parte, osservando che dovrà sostituirsi G al K di quel paragrafo. Ora il G è ottenuto moltiplicando un fattore analogo al K per una potenza di e (avente esponente negativo) inferiore ad 1. Osserviamo inoltre che dovendo essere

$$e \leqq \frac{e^{n_r}}{n_r} \leqq e G^{\frac{1}{q_r \beta_r}}$$

G non può tendere a zero al crescere indefinito di t.

2° Se λ_r è diversa da zero, N_r, se non coincide con q_r, dovrà tendere verso q_r e, *se non vi tende assintoticamente, la fluttuazione corrispondente alla specie r dovrà smorzarsi.*

In altri termini preso σ positivo piccolo ad arbitrio dovrà esistere un tempo t, a partire dal quale si ha $|n_r - 1| < \sigma$. Infatti, se esistessero valori di t tanto grandi quanto ci piace, per i quali si avesse $|n_r - 1| \geq \sigma$ (siccome dn_r/dt in virtù delle (D') è una quantità limitata, cioè può determinarsi un numero ϑ tale che $\vartheta > |dn_r/dt|$), dovrebbero trovarsi degli intervalli di tempo, corrispondenti a valori di t superiori a ogni numero tanto grande quanto ci piace, di ampiezza superiore a $\sigma/(2\vartheta)$ nei quali $|n_r - 1| \geq \sigma/2$ e questo condurrebbe alla conseguenza che

$$\int_0^t \sum_1^n {}_r \lambda_r \beta_r q_r^2 (n_r - 1)^2 dt$$

potrebbe rendersi superiore a qualunque quantità assegnata prendendo t sufficientemente grande, il che è assurdo perchè G non può tendere indefinitamente a zero.

Osservando che i valori q_r delle N_r corrispondono ad uno stato stazionario, ed escludendo, come nel n. 1 del § 3, i casi nei quali esso si raggiunga coll'esaurimento di qualche specie, potremo enunciare il teorema:

Se esiste uno stato stazionario e se i coefficienti di accrescimento di una o più specie decrescono linearmente col crescere del numero dei rispettivi individui, mentre i coefficienti di accrescimento delle altre specie sono costanti, partendo da uno stato iniziale qualunque diverso da quello stazionario si avranno sempre per le prime, o variazioni assintotiche, o fluttuazioni che andranno smorzandosi. Se tutti i coefficienti decresceranno nel modo suddetto lo stato del sistema tenderà verso quello stazionario [14].

In certo modo le azioni che tendono a smorzare gli accrescimenti di ciascuna specie col crescere del numero di individui di essa producono un

(14) Anche se alcuni coefficienti λ_r sono nulli lo stato del sistema può tendere verso quello stazionario (cfr. § 5, n. 4).

È facile persuadersi con esempi particolari che a seconda dei casi possono aversi variazioni assintotiche e fluttuazioni smorzate.

effetto analogo a quello degli attriti interni in un sistema materiale, cioè smorzano le fluttuazioni.

3. Riprendiamo le equazioni (D) e poniamo $\lambda_r \beta_r = a_{rr}$ invece che $a_{rr} = 0$ ma conserviamo la condizione $a_{rs} = -a_{sr}$ quando $s \gtrless r$. Le (D) si scriveranno

$$\beta_r \frac{dN_r}{dt} = \varepsilon_r \beta_r N_r - \sum_1^n {}_s a_{rs} N_s N_r .$$

Consideriamo la forma quadratica

$$F(N_1, N_2, \cdots, N_n) = \sum_1^n {}_r \sum_1^n {}_s a_{sr} N_s N_r = \sum_1^n {}_r a_{rr} N_r^2 ; \tag{43}$$

avremo

$$\frac{d}{dt} \sum_1^n {}_r \beta_r N_r = -F(N_1, N_2, \cdots, N_n) + \sum_1^n {}_r \varepsilon_r \beta_r N_r .$$

Se supponiamo che, a partire da un certo istante, cessino le cause costanti di accrescimento o di decremento delle singole specie, cioè se le ε_r si annullano, allora

$$\sum_1^n {}_r \varepsilon_r \beta_r N_r$$

sarà trascurabile, quindi F misurerà il decremento rispetto al tempo di $\sum_1^n {}_r \beta_r N_r$.

Per esempio se ci riferiamo al primo significato grossolano delle β_r (vedi § 2, n. 1) F misurerebbe il decremento rispetto al tempo del peso totale degli individui appartenenti a tutte le specie, se cessassero di agire le cause costanti di accrescimento o di decremento delle singole specie.

§ 7. - Associazioni biologiche conservative e dissipative.

1. Le considerazioni svolte nel paragrafo precedente possono essere notevolmente estese; saremo così condotti ad una classificazione fondamentale delle associazioni biologiche.

A tal fine supponiamo che i coefficienti di accrescimento dipendano linearmente ed in un modo qualunque dal numero di individui, non di ciascuna specie soltanto, ma delle varie specie e gli effetti degli incontri degl'individui di specie diverse vengano risentiti in un modo qualunque, purché costante, dalle specie stesse, proporzionalmente al numero degli incontri, senza più preoccuparci se è soddisfatta o meno l'ipotesi del § 2, n. 1, 2ª parte.

Le equazioni (B) e (D) assumeranno allora la forma generale

$$\frac{dN_r}{dt} = \left(\varepsilon_r - \sum_1^n {}_s p_{rs} N_s\right) N_r \tag{E}$$

ove le ε_r e le p_{rs} sono coefficienti costanti qualunque.

Potremo considerare le ε_r come dipendenti dalle cause costanti di accrescimento o decremento delle specie e gli altri termini come dipendenti dalle azioni reciproche degl'individui. Con ciò evidentemente si dà una estensione molto più grande al concetto di azione reciproca fra i vari individui di quello che non sia stato fatto sin qui.

Se ciascuna specie fosse sola le ε_r sarebbero i loro coefficienti di accrescimento, mentre le

$$\varepsilon_r - \sum_1^n {}_s\, p_{rs} N_s$$

sono i coefficienti d'accrescimento delle specie stesse come risultano in virtù della loro coabitazione. Chiameremo questi ultimi i *coefficienti veri di accrescimento*, e le ε_r i *coefficienti bruti di accrescimento* o anche li chiameremo semplicemente *coefficienti d'accrescimento* quando non potrà nascere confusione fra gli uni e gli altri coefficienti.

2. Prima di tutto potremo ripetere qui quanto è stato dimostrato nel n. 3 del § 2 e cioè: *basta che uno almeno dei coefficienti di accrescimento sia positivo, perché le specie non si esauriscano tutte.*

Siano poi $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ delle quantità positive e poniamo

$$F(N_1, N_2, \cdots, N_n) = \sum_1^n {}_r \sum_1^n {}_s\, \alpha_r\, p_{rs} N_s N_r .$$

Si avrà il teorema:

Se la forma F *è definita positiva, esisterà un numero* N *a cui nessuno dei numeri* $N_1, N_2, \cdots, N_n$ *potrà conservarsi superiore a partire da un certo istante.*

Infatti dalle (E) segue

$$\sum_1^n {}_r\, \alpha_r \frac{dN_r}{dt} = \sum_1^n {}_r\, \alpha_r\, \varepsilon_r N_r - F(N_1, N_2, \cdots, N_n) .$$

Posto $N_r = 1$ denotiamo con m_r il limite inferiore dei valori di F per tutti i possibili valori di $N_1, N_2, \cdots, N_{r-1}, N_{r+1}, \cdots, N_n$. Sarà $m_r > 0$. Sia m il minore dei numeri $m_1, m_2, \cdots, m_n$. Sia inoltre

$$\sum_1^n {}_r\, |\alpha_r\, \varepsilon_r| < E .$$

Supponiamo che N_r a partire da un certo istante t_1 si conservi superiore a

$$\frac{E+1}{m} = N .$$

Denotiamo con $M(t_2)$ il maggiore dei numeri $N_1(t_2), N_2(t_2), \cdots, N_n(t_2)$ essendo $t_2 > t_1$.

Sarà

$$F(N_1, N_2, \cdots, N_n)_{t=t_2} > m M^2(t_2)$$

$$\sum_1^n {}_r\, \alpha_r\, \varepsilon_r N_r(t_2) < E M(t_2)$$

onde avremo

$$\left(\sum_1^n {}_r \alpha_r \frac{dN_r}{dt}\right)_{t=t_2} < (E - mM(t_2))\, M(t_2)\,.$$

Ora

$$M(t_2) > \frac{E+1}{m}$$

quindi

$$\left(\sum_1^n {}_r \alpha_r \frac{dN_r}{dt}\right)_{t=t_2} < -\frac{E+1}{m}\,, \qquad (t_2 > t_1)\,,$$

ciò che porterebbe come conseguenza che, a partire da un certo istante, qualcuna delle $N_1, N_2, \cdots, N_n$ dovrebbe diventare negativa il che è assurdo, giacché le N_r non possono essere che positive come segue anche dalle (E). Infatti da queste equazioni si ricava

$$N_r = N_r^0 e^{\int_0^t (\varepsilon_r - \Sigma_s p_{rs} N_s)\, dt}$$

ove N_r^0 è il valore di N_r per $t = 0$, onde essendo N_r^0 positivo tale si manterrà N_r. Dunque esiste il numero $N = (E+1)/m$ a cui ogni N_r non può conservarsi superiore a partire dall'istante t_1.

Riunendo i due teoremi ora dimostrati potremo enunciare la proposizione: *Se uno almeno dei coefficienti di accrescimento è positivo e la forma* F *è definita positiva l'associazione biologica sarà stabile.*

La *stabilità* consiste nel fatto che l'intera associazione non tende ad esaurirsi e nessuna specie può crescere indefinitamente (cfr. 1ª parte § 4, nn. 8, 9; 2ª parte § 2, n. 3).

Siccome le N_i sono sempre positive, così il teorema precedente può estendersi al caso in cui la forma F non si annulla che per tutte le $N_i = 0$ ed è positiva per tutti i valori positivi delle N_i.

3. Noi possiamo facilmente riconoscere che, se la forma F è definita positiva, il determinante formato colle p_{rs} non può annullarsi [15]. Infatti supponiamo che esso si annulli. Allora esisterebbero dei numeri $N_1, N_2, \cdots, N_n$ (positivi, negativi o nulli, ma non tutti nulli) per i quali si avrebbe

$$\sum_1^n {}_s\, p_{rs} N_s = 0$$

e quindi

$$0 = \sum_1^n {}_r \sum_1^n {}_s\, \alpha_r p_{rs} N_s N_r = F(N_1, N_2, \cdots, N_n)$$

il che è in contraddizione colla ipotesi che la forma F sia definita positiva.

(15) Nel n. 6 del § 1 della 3ª parte verrà dimostrato che nel caso in cui la forma *F* è positiva il detto determinante è positivo.

Ciò premesso supponiamo che le equazioni

(E') $$\varepsilon_r - \sum_1^n {}_s\, p_{rs} N_s = 0$$

risolute rispetto alle N_s diano le soluzioni q_s diverse da zero. Sarà identicamente

$$\varepsilon_r = \sum_1^n {}_s\, p_{rs}\, q_s$$

onde le (E) diverranno

$$\frac{dN_r}{dt} = -\sum_1^n {}_s\, p_{rs} (N_s - q_s) N_r$$

ossia, posto

$$\frac{N_r}{q_r} = n_r,$$

avremo

(44) $$\frac{dn_r}{dt} = -\sum_1^n {}_s\, p_{rs}\, q_s (n_s - 1)\, n_r .$$

Da queste equazioni segue

$$\frac{1}{n_r} \frac{dn_r}{dt} = -\sum_1^n {}_s\, p_{rs}\, q_s (n_s - 1) .$$

Denotiamo con α_r delle quantità costanti positive; risulterà:

$$\sum_1^n {}_r\, \alpha_r q_r \frac{n_r - 1}{n_r} \frac{dn_r}{dt} = -\sum_1^n {}_r \sum_1^n {}_s\, p_{rs}\, \alpha_r q_r q_s (n_s - 1)(n_r - 1) .$$

Poniamo

(45) $$\frac{1}{2}(p_{rs}\,\alpha_r + p_{sr}\,\alpha_s) = m_{rs} = m_{sr} ,$$

(46) $$F(x_1, x_2, \cdots, x_n) = -\Sigma_r \Sigma_s\, m_{rs}\, x_r x_s ,$$

l'equazione precedente si scriverà

$$\frac{d}{dt} \Sigma_r\, \alpha_r q_r (n_r - \log n_r) = -F(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

ove

$$x_r = (n_r - 1) q_r .$$

Integrando e passando dai logaritmi ai numeri, avremo

$$\left(\frac{e^{n_1}}{n_1}\right)^{\alpha_1 q_1} \left(\frac{e^{n_2}}{n_2}\right)^{\alpha_2 q_2} \cdots \left(\frac{e^{n_n}}{n_n}\right)^{\alpha_n q_n} = C e^{-\int_0^t F\, dt} .$$

ove C è una costante positiva.

Se le $q_1, q_2, \cdots, q_n$ sono positive, ossia *se esiste uno stato stazionario* e se si possono scegliere le costanti positive $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ in modo da annullare identicamente la forma quadratica (46) [16] (*come è stato calcolato nel* § 3, 2ª parte, n. 1), *i numeri di individui delle singole specie saranno limitati fra numeri po-*

(16) In questo caso, affinché il determinante delle p_{rs} sia diverso da zero, dovrà essere n pari.

sitivi e dovranno sussistere fluttuazioni le quali non si smorzano. Se esiste uno stato stazionario e se le costanti positive $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ potranno prendersi in modo che la forma (46) sia positiva, potremo asserire che *la variabilità dei numeri d'individui delle singole specie è limitata fra numeri positivi* (17): ma se la forma sarà *definita positiva* oltre a ciò avremo che *tutte le variazioni delle singole specie saranno assintotiche o saranno fluttuazioni smorzate che faranno tendere l'associazione biologica verso lo stato stazionario.*

La dimostrazione di questa proposizione si fa in modo analogo a quello seguito nel n. 2 del § 6 (2ª parte).

Avremo poi che *ogni qual volta la forma* (46) *sarà positiva i limiti delle medie di* $N_1, N_2, \cdots, N_n$ *in intervalli di tempo infinitamente crescenti saranno* $q_1, q_2, \cdots, q_n$.

La espressione F può scriversi

$$F = \sum_1^n{}_r \sum_1^n{}_s \alpha_r p_{rs} (N_r - q_r)(N_s - q_s) . \tag{47}$$

Nel n. 2 del § 6 l'azione smorzatrice delle fluttuazioni è stata paragonata ad un attrito interno. Come misura di questa azione smorzatrice può prendersi la forma precedente F, la quale caratterizza *la tendenza verso lo stato stazionario dell'insieme di tutte le specie.* Ed infatti, *se essa è nulla l'associazione biologica non tenderà verso uno stato limite,* mentre *se essa è definita positiva, tenderà verso lo stato stazionario.*

Noi chiameremo la forma $F(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ la *forma fondamentale* e le equazioni (E′) al pari delle (B′) le *equazioni della stazionarietà.* Come nel n. 2 del § 3 (2ª parte) escludiamo il caso che queste abbiano radici nulle, ossia che lo stato stazionario possa raggiungersi coll'esaurimento di qualcuna delle specie.

4. Sono facili a trovarsi le condizioni necessarie e sufficienti a cui debbono soddisfare le p_{rs} affinché la forma (46) si riduca nulla identicamente.

Infatti dalla (45) segue

$$\frac{p_{rs}}{p_{sr}} = -\frac{\alpha_s}{\alpha_r}$$

d'onde

$$p_{rs} p_{sg} p_{gr} + p_{rg} p_{gs} p_{sr} = 0 , \tag{48}$$

per tutte le combinazioni a tre a tre degli indici $1, 2, \cdots, n$.

Queste condizioni, insieme ad essere la p_{rs} e la p_{sr} di segno opposto (e quindi le $p_{rr} = 0$) giacché le α_r sono tutte positive, sono *condizioni necessarie.* È facile verificare che esse sono pure *sufficienti.*

Infatti dalla (48) si deduce

$$\left(-\frac{p_{rs}}{p_{sr}}\right) = \left(-\frac{p_{rg}}{p_{gr}}\right) : \left(-\frac{p_{sg}}{p_{gs}}\right)$$

(17) Questa proprietà conduce subito a riconoscere che anche in questo caso, come in quello precedente (§ 3, 2ª parte, n. 3) i limiti delle medie di $N_1, N_2, \cdots, N_n$ in intervalli di tempo infinitamente crescenti sono $q_1, q_2, \cdots, q_n$.

onde osto

$$-\frac{p_{rs}}{p_{sr}} = w_{rs}$$

sarà $w_{rs} = w_{rg} : w_{sg}$ e siccome il primo membro è indipendente da g si avrà

$$\frac{w_{rg}}{w_{sg}} = \frac{w_r}{w_s}$$

ove w_r e w_s dipendono rispettivamente solo da r e s. Quindi

$$w_{rg} = \frac{w_r}{\left(\frac{w_s}{w_{sg}}\right)}$$

da cui segue che w_s/w_{sg} deve essere indipendente da s.

Si potrà dunque porre

$$w_{rg} = \frac{\alpha_g}{\alpha_r}\,.$$

Se ogni p_{rg} è di segno opposto a p_{gr}, le w_{rg} saranno positive e quindi le α_r potranno prendersi positive e avremo

$$-\frac{p_{rg}}{p_{gr}} = \frac{\alpha_g}{\alpha_r}$$

ossia $\alpha_r\, p_{rg} + \alpha_g\, p_{gr} = 0$. Le condizioni sono dunque anche sufficienti [18].

5. Le piccole variazioni assintotiche e le piccole fluttuazioni smorzate, supposto che esista uno stato stazionario e F sia definita positiva, si possono studiare ponendo nelle (44) $n_s = 1 + \nu_s$ e trascurando i termini di secondo ordine. Si hanno così le equazioni:

$$\frac{d\nu_r}{dt} = -\sum_1^n{}_s\, p_{rs}\, q_s\, \nu_s\,. \tag{49}$$

Ponendo $\nu_r = \gamma_r\, e^{xt}$ si trovano le equazioni

$$\gamma_r\, x + \sum_1^n{}_s\, p_{rs}\, q_s\, \gamma_s = 0 \tag{49'}$$

e l'equazione in x

$$\begin{vmatrix} p_{11} + \frac{x}{q_1}, & p_{12} & , p_{13} & ,\cdots, p_{1n} \\ p_{21} & , p_{22} + \frac{x}{q_2}, & p_{23} & ,\cdots, p_{2n} \\ p_{31} & , p_{32} & , p_{33} + \frac{x}{q_3}, & \cdots, p_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{n1} & , p_{n2} & , p_{n3} & ,\cdots, p_{nn} + \frac{x}{q_n} \end{vmatrix} = 0\,. \tag{50}$$

(18) Come ha osservato la Sig.$^{\text{na}}$ dott. ELENA FREDA e come risulta dal modo di dimostrazione, queste condizioni sono valide nella ipotesi che tutte le p_{rs} $(r \gtrless s)$ siano diverse da zero. Quando ve ne sono alcune nulle le equazioni di condizione cessano di essere a tre termini, come con alcuni esempi ha veduto la Sig.$^{\text{na}}$ FREDA.

Le radici di questa equazione hanno le parti reali negative. Infatti se

$$x = x' + ix''$$

è una radice e $x' - ix''$ la sua coniugata e

$$(\gamma'_r + i\gamma''_r)\, e^{(x'+ix'')t} \quad , \quad (\gamma'_r - i\gamma''_r)\, e^{(x'-ix'')t}, \qquad (r = 1, 2, \cdots, n)$$

soddisfano le (49') si avrà

$$\Sigma_r\, \alpha_r\, q_r\, (\gamma'^2_r + \gamma''^2_r)\, x' + F\,(q_1 \gamma'_1, \cdots, q_n \gamma'_n) + F\,(q_1 \gamma''_1, \cdots, q_n \gamma''_n) = 0$$

il che dimostra che x' è negativo.

Il caso generale per ultimo trattato abbraccia colla sua analisi tutti quelli prima esaminati e mostra da un punto di vista sintetico l'insieme dei metodi adoperati.

6. Noi possiamo anche ritornare sopra l'ipotesi del § 2 n. 1, e vederne più profondamente il significato.

Supponiamo di dare ad ogni individuo della specie r, un valore positivo α_r. Il valore dell'intera associazione biologica sarà $V = \sum_1^n {}_r\, \alpha_r\, N_r$ onde dalle uguaglianze (E) seguirà

$$dV = \sum_1^n {}_r\, \alpha_r\, \varepsilon_r\, N_r\, dt - \sum_1^n {}_r \sum_1^n {}_s\, p_{rs}\, \alpha_r\, N_r\, N_s\, dt\,.$$

L'aumento di valore dell'associazione biologica in un tempuscolo dt consta quindi di due parti

$$dV_1 = \sum_1^n {}_r\, \alpha_r\, \varepsilon_r\, N_r\, dt$$

$$dV_2 = -\sum_1^n {}_r \sum_1^n {}_s\, p_{rs}\, \alpha_r\, N_r\, N_s\, dt\,.$$

La prima è dovuta alle cause costanti di accrescimento e di decremento di ciascuna specie (individuate dalle ε_r), l'ultima è dovuta alle azioni reciproche dei vari individui nel senso generale precedentemente inteso.

Se si potranno scegliere le α_r in modo che dV_2 sia nullo, comunque siano le $N_1, N_2, \cdots, N_n$; il valore della associazione biologica non muterà in conseguenza delle azioni reciproche degli individui. *Un'associazione biologica di questa natura, vale a dire nella quale è possibile assegnare ai singoli individui valori tali che le loro azioni reciproche conservino costante il valore della intera associazione, si dirà conservativa.* Per un sistema conservativo è evidentemente soddisfatta la ipotesi del § 2, n. 1 (2ª parte). Reciprocamente se è verificata quella ipotesi e sono trascurabili le azioni reciproche fra individui della stessa specie, l'associazione biologica sarà conservativa.

Le associazioni biologiche assolutamente conservative sono probabilmente enti ideali che possono solo approssimarsi a quelli effettivi della natura. Nondimeno ricordiamo che il caso di due specie svolto nel § 3 della 1ª parte si riferisce ad un sistema conservativo. Così pure esempi speciali di sistemi conservativi si hanno in tutti i casi considerati nel n. 2 del § 2 (Parte II).

Allorquando potranno assegnarsi ai singoli individui dei valori (eguali per quelli della stessa specie) tali che *la forma fondamentale* F *sia definita positiva*, le azioni reciproche fra gl'individui stessi tenderanno a diminuire il valore dell'intera associazione che potrà quindi chiamarsi *dissipativa*. In molti casi reali le associazioni biologiche sembra debbano approssimarsi ad associazioni dissipative.

Come abbiamo veduto nel n. 4, le condizioni necessarie e sufficienti perché un sistema sia conservativo sono:

$$p_{rs}\, p_{sg}\, p_{gr} + p_{rg}\, p_{gs}\, p_{sr} = 0,$$

per tutte le combinazioni tre a tre degli indici, mentre p_{rs} e p_{sr} hanno segno opposto e $p_{rr} = 0$ [19].

Se invece, ferme restando le precedenti condizioni o le precedenti equazioni per tutte le combinazioni tre a tre senza ripetizione degl'indici, le p_{rr} fossero tutte positive, l'associazione sarebbe dissipativa. Questo caso ha uno speciale interesse, perché corrisponde al verificarsi dell'ipotesi enunciata nel n. 1 del § 2 per le azioni reciproche fra individui di specie diversa, mentre il crescere del numero d'individui di ciascuna specie diminuisce il corrispondente coefficiente d'accrescimento (cfr. i nn. 2, 3 del paragrafo precedente).

PARTE TERZA

Svolgimento ed applicazioni della teoria generale.

§ 1. – Teoremi generali sulle associazioni biologiche conservative e dissipative.

1. Una proposizione contenuta nel n. 3 del § 2 (2ª parte) può enunciarsi dicendo che *il valore di una associazione biologica conservativa*: 1°) *tende a zero, se tutti i coefficienti di accrescimento sono negativi e solo quando tutti sono negativi*; 2°) *tende all'infinito se sono tutti positivi* [20].

La *prima parte* di questa proposizione *può estendersi ai sistemi dissipativi*.

Infatti dalle (E), tenendo conto delle (45), segue

$$\sum_{1}^{n}{}_r\, \alpha_r \frac{dN_r}{dt} = \sum_{1}^{n}{}_r\, \alpha_r\, \varepsilon_r\, N_r - \sum_{1}^{n}{}_r \sum_{1}^{n}{}_s\, m_{rs}\, N_r\, N_s\,.$$

(19) Ricordiamo che le precedenti condizioni valgono nel caso in cui le p_{rs} $(r \gtrless s)$ sono diverse da zero.

Se un'associazione sarà dissipativa le p_{rr} dovranno essere positive. Quindi un'associazione dissipativa è nettamente distinta da un'associazione conservativa.

(20) È escluso in questo enunciato il caso di annullamento dei coefficienti di accrescimento e la stessa esclusione manterremo nell'estensione della proposizione.

Se la forma

$$\sum_1^n {}_r \sum_1^n {}_s m_{rs} N_r N_s$$

è una forma positiva (definita o meno) sarà

$$\sum_1^n {}_r \alpha_r \frac{dN_r}{dt} \leqq \sum_1^n {}_r \alpha_r \varepsilon_r N_r$$

e se

$$\varepsilon_r < -\varepsilon , \qquad (r = 1, 2, \cdots, n)$$

essendo ε una quantità positiva, risulterà come nel n. 3 del § 2 (2ª parte)

$$\sum_1^n {}_r \alpha_r N_r < \sum_1^n {}_r \alpha_r N_r^\circ e^{-\varepsilon t}$$

il che prova che il valore dell'associazione biologica tende a zero se tutti i coefficienti di accrescimento sono negativi; basta poi che uno solo di essi sia positivo, perché l'associazione biologica non si esaurisca (2ª parte, § 7, n. 2).

Quanto alla *seconda parte* della precedente proposizione, in virtù di ciò che è stato dimostrato nel n. 2 del § 7 (2ª parte) essa dovrà sostituirsi con: *il valore di una associazione biologica dissipativa si mantiene limitato.*

2. Riprendiamo le equazioni (B) che valgono nel caso di sistemi conservativi (vedi § 2, n. 2, 2ª parte).

$$\beta_r \frac{dN_r}{dt} = \left(\varepsilon_r \beta_r + \sum_1^n {}_s a_{sr} N_s\right) N_r , \qquad (r = 1, 2, \cdots, n)$$

$$a_{rs} = -a_{sr} \quad , \quad a_{rr} = 0 .$$

Da esse segue:

$$\sum_1^n {}_r \beta_r \frac{dN_r}{dt} = \sum_1^n {}_r \varepsilon_r \beta_r N_r .$$

Se ρ è maggiore della più grande delle $|\varepsilon_r|$, avremo:

$$-\rho \sum_1^n {}_r \beta_r N_r < \sum_1^n {}_r \beta_r \frac{dN_r}{dt} < \rho \sum_1^n {}_r \beta_r N_r$$

e quindi:

$$-\rho < \frac{\dfrac{d}{dt}\left(\sum_1^n {}_r \beta_r N_r\right)}{\sum_1^n {}_r \beta_r N_r} < \rho$$

d'onde

$$\sum_1^n {}_r \beta_r N_r^\circ e^{-\rho t} < \sum_1^n {}_r \beta_r N_r < \sum_1^n {}_r \beta_r N_r^\circ e^{\rho t}$$

denotando con N_r° i valori delle N_r per $t = 0$.

Di qui segue il teorema: *Un'associazione conservativa non può esaurirsi né crescere indefinitamente che in un tempo* ∞.

3. Ma noi possiamo dimostrare ancora di più e cioè che *nessuna singola specie può divenire* ∞ *né esaurirsi in un tempo finito.*

La prima parte della proposizione segue immediatamente dal teorema ora enunciato; quanto alla seconda parte, osserviamo prima di tutto, in virtù dei teoremi generali sulle equazioni differenziali, che partendo da valori iniziali finiti delle $N_1, N_2, \cdots, N_n$ queste risultano *funzioni analitiche del tempo* e perciò in un intorno qualunque di un valore t_0 di t nel quale $N_1, N_2, \cdots, N_n$ assumono valori finiti esse sono sviluppabili in serie di potenze di $t - t_0$.

Ora si può dimostrare il teorema:

Se in un certo istante t_0 *nel quale* $N_1, N_2, \cdots, N_n$ *sono finite si ha* $N_h = 0$ *la* N_h *in tutti i tempi successivi sarà nulla e sarà stata nulla in tutti i tempi precedenti.*

Infatti se $(N_h)_{t=t_0} = 0$ dalle (B) si ricava $\left(\frac{dN_h}{dt}\right)_{t=t_0} = 0$, da cui derivando successivamente si ottiene

$$\left(\frac{d^2 N_h}{dt^2}\right)_{t=t_0} = 0 \quad , \quad \left(\frac{d^3 N_h}{dt^3}\right)_{t=t_0} = 0, \cdots,$$

cioè tutte le derivate di N_h rispetto a t nell'istante t_0 sono nulle e perciò la funzione analitica N_h sarà costantemente nulla.

Se dunque una specie, per esempio la h^{esima}, si esaurisse dopo un tempo finito, cioè partendo da un numero positivo di individui giungesse in un istante t_0 ad averne un numero nullo, si avrebbe $(N_h)_{t=t_0} = 0$, mentre le altre specie avrebbero, come inizialmente, un numero finito d'individui, quindi N_h dovrebbe essere stato sempre nullo, contro l'ipotesi fatta. Dunque anche la seconda parte della proposizione resta dimostrata (*).

4. Passiamo al caso delle associazioni dissipative:

Per queste sappiamo che il numero di individui di ciascuna specie è limitato, ma si può provare che non può nemmeno annullarsi in un tempo finito e perciò basta ripetere una dimostrazione analoga alla precedente.

La conclusione sarà:

In una associazione dissipativa nessuna specie può esaurirsi in un tempo finito, mentre il numero di individui di ogni specie è limitato.

5. Possiamo poi dimostrare il teorema: *se il numero di individui di ciascuna specie di una associazione (dissipativa o conservativa di ordine pari a determinante diverso da zero) si mantiene compreso fra numeri positivi, le equazioni della stazionarietà non possono avere radici negative né radici nulle.*

(*) Nel n. 3 dell'appendice a questa Memoria si riportano alcune considerazioni sulle *associazioni coniugate* che l'autore fa, a questo punto, nella già citata Memoria dei Lincei (nn. 3 e 4 del § 10 di tale Memoria) e che qui ha omesse. [N.d.R.].

Infatti prendiamo le equazioni generali:

$$\text{(E)} \qquad \frac{dN_r}{dt} = \left(\varepsilon_r - \sum_1^n {}_s\, p_{rs}\, N_s\right) N_r$$

da cui segue:

$$\frac{d \log N_r}{dt} = \varepsilon_r - \sum_1^n {}_s\, p_{rs}\, N_s\,.$$

Integrando fra zero e T e tenendo presente che $N_r(0) = N_r^0$ avremo

$$\log \frac{N_r}{N_r^0} = \varepsilon_r\, T - \sum_1^n {}_s\, p_{rs} \int_0^T N_s\, dt$$

ossia

$$\frac{1}{T} \log \frac{N_r}{N_r^0} = \varepsilon_r - \sum_1^n {}_s\, p_{rs} \frac{1}{T} \int_0^T N_s\, dt\,.$$

Se le N_r restano comprese fra limiti positivi, facendo crescere T indefinitamente, i primi membri tendono a zero, dunque esisterà

$$\lim_{T=\infty} \frac{1}{T} \int_0^T N_s\, dt = \mathfrak{N}_s$$

e avremo

$$0 = \varepsilon_r - \sum_1^n {}_s\, p_{rs}\, \mathfrak{N}_s\,.$$

Le $\mathfrak{N}_s$ sono dunque radici delle equazioni della stazionarietà. Ma le $\mathfrak{N}_s$ essendo ottenute come medie delle N_s sono numeri positivi e quindi le radici delle equazioni della stazionarietà non possono essere nulle né negative.

Da questo risultato e da ciò che è stato dimostrato nella 2ª parte, § 3 e § 7, possiamo dedurre la seguente proposizione:

Condizione necessaria e sufficiente affinché in un'associazione dissipativa o in un'associazione conservativa di ordine pari (a determinante diverso da zero) il numero di individui di ciascuna specie resti compreso fra numeri positivi è che le radici delle equazioni della stazionarietà siano positive.

6. Nel caso che il sistema sia conservativo abbiamo enunciato esplicitamente la condizione che il suo determinante sia diverso da zero; ciò non è necessario nel caso di un sistema dissipativo.

Se il sistema è dissipativo, ossia se

$$F = \sum_1^n {}_r \sum_1^n {}_s\, \alpha_r\, p_{rs}\, N_r\, N_s\,,$$

nella quale $\alpha_1\, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ sono quantità positive, è una forma definita positiva, il determinante delle p_{rs} è sempre positivo.

Noi abbiamo dimostrato nel n. 3 del § 7 (2ª parte) che esso è diverso da zero; dimostriamo ora che non può essere nemmeno negativo. Poniamo infatti

$$\frac{1}{2}(\alpha_r p_{rs} + \alpha_s p_{sr}) = m_{rs} = m_{sr} ,$$

$$\omega_{rs} = \frac{m_{rs} + h_{rs}}{\alpha_r} ,$$

ove

$$h_{rs} = -h_{sr} .$$

Avremo

$$F = \sum_1^n {}_r \sum_1^n {}_s \alpha_r p_{rs} N_r N_s = \sum_1^n {}_r \sum_1^n {}_s \alpha_r \frac{m_{rs}}{\alpha_r} N_r N_s = \sum_1^n {}_r \sum_1^n {}_s \alpha_r \omega_{rs} N_r N_s ;$$

quindi le costanti m_{rs}/α_r e le costanti ω_{rs} corrisponderanno come le p_{rs} a sistemi dissipativi.

Per far passare le ω_{rs} dai valori m_{rs}/α_r ai valori p_{rs} basterà far variare le h_{rs} da zero fino a certi valori $H_{rs} = -H_{sr}$. Se il determinante delle p_{rs} fosse negativo, poiché il determinante delle m_{rs} (e quindi quello delle m_{rs}/α_r) è positivo, le h_{rs} dovrebbero attraversare certi valori per i quali il determinante delle ω_{rs} dovrebbe risultare nullo, il che, per quanto precedentemente si è dimostrato, è in contraddizione col fatto che le costanti ω_{rs} corrispondono ad un sistema dissipativo.

7. Nel n. 1 del § 2 (1ª parte) abbiamo osservato che il procedimento d'integrazione usato in quel paragrafo poteva anche servire nel caso in cui i coefficienti di accrescimento perturbati dalla convivenza delle due specie anziché essere lineari e della forma

$$\varepsilon_1 - \gamma_1 N_2 \quad , \quad -\varepsilon_2 + \gamma_2 N_1$$

fossero delle funzioni qualunque $F_1(N_2)$ e $F_2(N_1)$ rispettivamente di N_2 e N_1. Ci si può proporre ora di estendere le equazioni (E) (2ª parte, § 7, n. 1) colla condizione che si conservi un integrale analogo all'integrale che abbiamo trovato nel § 3, n. 1 per le associazioni conservative d'un numero pari di specie.

8. A tal fine sostituiamo nelle equazioni (E) ai polinomi

$$\varepsilon_r - \sum_1^n {}_s p_{rs} N_s$$

le funzioni

$$f_r(N_1, N_2, \cdots, N_n) ;$$

ciò significherà che ammettiamo cangiati in una maniera generale arbitraria i coefficienti di accrescimento di ciascuna specie in virtù della convivenza delle specie stesse.

Le equazioni (E) diverranno

$$\text{(F)} \qquad \frac{dN_r}{dt} = f_r(N_1, N_2, \cdots, N_n) N_r .$$

Se si potranno trovare $\varphi_1(N_1), \varphi_2(N_2), \cdots, \varphi_n(N_n)$ tali che sia soddisfatta la condizione

$$\sum_1^n {}_r\, \varphi_r(N_r) f_r(N_1, N_2, \cdots, N_n) = 0$$

si avrà

$$\sum_1^n {}_r\, \frac{\varphi_r(N_r)}{N_r} dN_r = 0$$

e integrando

$$\sum_1^n {}_r \int \frac{\varphi_r(N_r)}{N_r} dN_r = C$$

ove C è una costante. Quest'integrale potrà anche scriversi

$$e^{\psi_1(N_1)}\, e^{\psi_2(N_2)} \cdots e^{\psi_n(N_n)} = \text{cost}.$$

posto

$$\psi_r(N_r) = \int \frac{\varphi_r(N_r)}{N_r} dN_r .$$

Affinché la condizione di cui sopra sia soddisfatta è necessario e sufficiente che

$$f_r(N_1, N_2, \cdots, N_n) = \sum_1^n {}_s\, F_{rs}(N_1, N_2, \cdots, N_n)\, \varphi_s(N_s)$$

ove le funzioni $F_{rs}(N_1, N_2, \cdots, N_n)$ godono della proprietà

$$F_{rs} = -F_{sr} \quad , \quad F_{rr} = 0 .$$

Le (F) diventano dunque

$$\frac{dN_r}{dt} = N_r \sum_1^n {}_s\, F_{rs}(N_1, N_2, \cdots, N_n)\, \varphi_s(N_s) \text{ (*)}.$$

Supponiamo che il limite inferiore di ψ_r sia finito e

$$\lim_{N_r=0} \psi_r(N_r) = \infty \quad , \quad \lim_{N_r=\infty} \psi_r(N_r) = \infty , \qquad (r = 1, 2, \cdots, n)$$

allora, ripetendo il ragionamento del § 3, n. 1 (2ª parte) si riconosce che ciascuna N_r ha variazione limitata fra numeri positivi.

Potremo dunque enunciare, come estensione di una proprietà dei sistemi conservativi, la proposizione seguente:

Se la convivenza delle specie rende i loro coefficienti di accrescimento della forma

$$\sum_1^n {}_s\, F_{rs}(N_1, N_2, \cdots, N_n)\, \varphi_s(N_s)$$

(*) Da questo punto fino alla fine del paragrafo, la trattazione differisce da quella che è contenuta nella già citata Memoria dei Lincei (cfr. i nn. 2 e 3 del § 11 di tale Memoria) e che si riporta nel n. 4 dell'appendice più volte menzionata [N.d.R.].

ove

$$F_{rs} = -F_{sr} \quad , \quad F_{rr} = 0$$

le equazioni differenziali delle variazioni del numero d'individui appartenenti alle singole specie

$$\frac{dN_r}{dt} = N_r \sum_1^n {}_s F_{rs}(N_1, N_2, \cdots, N_n)\, \varphi_s(N_s),$$

avranno l'integrale

$$\sum_1^n {}_r \psi_r(N_r) = cost.$$

ove $\psi_r = \int (\varphi_r(N_r)/N_r)\, dN_r$ *e, se il limite inferiore delle* ψ_r *è finito, e* $\lim_{N_r=0} \psi_r(N_r) = \infty$, $\lim_{N_r=\infty} \psi_r(N_r) = \infty$, *ciascuna* N_r *avrà variazione limitata fra numeri positivi.*

§ 2. – Fluttuazioni proprie e forzate e principio della loro sovrapposizione.

1. Nelle equazioni (E) del § 7, 2ª parte che possono considerarsi come le più generali e come quelle che riassumono tutte le precedenti, abbiamo supposto che i coefficienti di accrescimento ε_r fossero costanti; ma in realtà essi cambiano ed i loro cambiamenti sono in generale periodici o dovuti alla sovrapposizione di più termini periodici. Certo in tutti i casi pratici dovremo considerare un periodo annuale in connessione coll'alternarsi delle stagioni e delle condizioni meteorologiche. Ma nulla esclude che altri periodi possano sussistere.

Cerchiamo di tener conto di queste perturbazioni periodiche dei coefficienti d'accrescimento, perciò ad ε_r sostituiamo

$$\varepsilon_r + g'_r \cos kt + g''_r \operatorname{sen} kt$$

ove g'_r, g''_r e k sono quantità costanti.

Le equazioni (E) diverranno

$$\text{(G)} \qquad \frac{dN_r}{dt} = \left(\varepsilon_r + g'_r \cos kt + g''_r \operatorname{sen} kt - \sum_1^n {}_s\, p_{rs} N_s\right) N_r$$

e le (44)

$$\frac{dn_r}{dt} = \left(g'_r \cos kt + g''_r \operatorname{sen} kt - \sum_1^n {}_s\, p_{rs}\, q_s\, (n_s - 1)\right) n_r,$$

nelle quali supporremo le q_s positive.

Studiamo le piccole fluttuazioni ponendo

$$n_s = 1 + \nu_s$$

e consideriamo g'_r, g''_r, e ν_r come quantità infinitesime del 1° ordine.

Se si trascurano i termini d'ordine superiore al 1°, le (49) prenderanno la forma

$$(51) \qquad \frac{d\nu_r}{dt} g'_r \cos kt + g''_r \operatorname{sen} kt - \sum_1^n{}_s\, p_{rs}\, q_s\, \nu_s .$$

Poniamo

$$g'_r - i g''_r = \mathrm{G}_r$$

sarà

$$\mathrm{G}_r\, e^{ikt} = g'_r \cos kt + g''_r \operatorname{sen} kt + i\,(g'_r \operatorname{sen} kt - g''_r \cos kt),$$

quindi se scriviamo le equazioni differenziali

$$(52) \qquad \frac{d\nu_r}{dt} = \mathrm{G}_r\, e^{ikt} - \sum_1^n{}_s\, p_{rs}\, q_s\, \nu_s$$

basterà prendere le parti reali degl'integrali delle (52) per integrare le (51). Scriviamo

$$(53) \qquad \nu_r = \mathrm{A}_r\, e^{ikt} + \gamma_r\, e^{xt}$$

ove $\gamma_r\, e^{xt}$ denotano gl'integrali delle (49).

Avremo

$$(54) \qquad ik\,\mathrm{A}_r + \sum_1^n{}_s\, p_{rs}\, q_s\, \mathrm{A}_s = \mathrm{G}_r .$$

Il determinante dei coefficienti delle A_r nelle equazioni precedenti sarà

$$q_1 q_2 \cdots q_n \begin{vmatrix} \frac{ik}{q_1} + p_{11}, & p_{12} & , p_{13}, \cdots, & p_{1n} \\ p_{21} & , \frac{ik}{q_2} + p_{22}, & p_{23}, \cdots, & p_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{n1} & , p_{n2} & , p_{n3}, \cdots, & \frac{ik}{q_n} + p_{nn} \end{vmatrix} .$$

Se dunque ik non coincide con alcuna radice della equazione (50), potremo calcolare le A_r dalle equazioni (54) e quindi avere gl'integrali (53), nei quali potremo separare le parti reali dalle immaginarie.

I termini $\gamma_r\, e^{xt}$ corrispondono alle *variazioni proprie* dell'associazione biologica, e i termini $\mathrm{A}_r\, e^{ikt}$ alle *fluttuazioni forzate*.

Tenendo presente che le ε_r sono i valori medi dei coefficienti di accrescimento durante il periodo $2\pi/k$, potremo enunciare il teorema:

Se i coefficienti di accrescimento sono periodici ed i loro valori medi differiscono poco dai valori variabili e se, prendendo come coefficienti d'accrescimento questi valori medi, si ottengono variazioni assintotiche, o fluttuazioni smorzate o non smorzate vicine ad uno stato stazionario (variazioni proprie), per le piccole fluttuazioni corrispondenti ai coefficienti di accrescimento periodici varrà il principio della sovrapposizione delle variazioni proprie alle fluttuazioni forzate, cioè esse si otterranno sovrapponendo alle variazioni proprie quelle forzate aventi il periodo dei coefficienti d'accrescimento, quando esso non coincida con alcuno dei periodi delle eventuali fluttuazioni proprie.

§ 3. – Variazioni fra limiti positivi sovrapposte ad un esaurimento.

1. Riprendiamo le equazioni (E) nelle quali abbiamo considerato

$$1^\circ \text{ le } \varepsilon_r \quad , \quad 2^\circ \text{ le } \varepsilon_r - \sum_1^n p_{rs} N_s .$$

Le prime sono i coefficienti di accrescimento propri di ciascuna specie, se si trascurano tutte le azioni reciproche dei vari individui, ossia i *coefficienti bruti di accrescimento*. Le seconde sono i coefficienti di accrescimento quali risultano dal tener conto delle azioni reciproche dei vari individui. Li abbiamo precedentemente chiamati *coefficienti veri di accrescimento* (2ª parte, § 7, n. 1).

Ma supponiamo che delle n specie manchino le prime m, cioè si abbia $N_1 = N_2 = , \cdots , N_m = 0$. Allora i coefficienti veri di accrescimento per le rimanenti $n - m$ specie saranno

$$\varepsilon_r - \sum_{m+1}^n {}_s\, p_{rs} N_s , \qquad (r = m+1 , \cdots , n).$$

Per le prime m specie i coefficienti di accrescimento non hanno alcun senso, giacché esse non hanno possibilità di accrescimento o di diminuzione. Però le espressioni

$$\varepsilon_r - \sum_{m+1}^n {}_s\, p_{rs} N_s \qquad (r = 1 , 2 , \cdots , m) ,$$

hanno dei valori determinati. Possono chiamarsi i *coefficienti virtuali di accrescimento delle prime m specie.*

2. Dimostreremo ora il teorema seguente:

Se per un insieme di $n - m$ specie (facente parte di un'associazione di n specie conservativa o dissipativa) esiste uno stato stazionario al quale corrispondono, per le m rimanenti, coefficienti virtuali di accrescimento negativi, le piccole variazioni dell'intera associazione risulteranno di variazioni fra limiti positivi delle $n - m$ specie sovrapposte ad un esaurimento di tutte le specie.

Infatti supponiamo che lo stato stazionario delle $n - m$ specie sia individuato dai valori positivi $q_{m+1} , \ldots , q_n$ delle $N_{m+1} , \ldots , N_n$.

Posto

$$N_r = q_r + \nu_r , \qquad (r = m+1 , \cdots , n)$$

le equazioni (E) potranno scriversi

$$\frac{dN_i}{dt} = \left(\varepsilon_i - \sum_1^m {}_s\, p_{is} N_s - \sum_{m+1}^n {}_l\, p_{il} (q_l + \nu_l) \right) N_i , \qquad (i = 1 , 2 , \cdots , m) \tag{55}$$

$$\frac{d\nu_r}{dt} = \left(- \sum_{m+1}^n {}_l\, p_{rl} \nu_l - \sum_1^m {}_s\, p_{rs} N_s \right) (q_r + \nu_r) , \qquad (r = m+1 , \cdots , n) \tag{56}$$

e tenendo conto dei soli termini del 1° ordine

$$\frac{dN_i}{dt} = \left(\varepsilon_i - \sum_{m+1}^{n}{}_l\, p_{il}\, q_l\right) N_i\,, \qquad (i = 1\,, 2\,, \cdots, m) \tag{57}$$

$$\frac{d\nu_r}{dt} = -\sum_{m+1}^{n}{}_l\, p_{rl}\, q_r\, \nu_l - \sum_{1}^{m}{}_s\, p_{rs}\, q_r\, N_s\,, \qquad (r = m + 1\,, \cdots, n). \tag{58}$$

I coefficienti virtuali di accrescimento

$$\varepsilon_i - \sum_{m+1}^{n} p_{il}\, q_l = -n_i\,, \qquad (i = 1\,, 2\,, \cdots, m)$$

sono negativi il che giustifica l'aver trascurato i termini del 2° ordine. Avremo quindi

$$N_i = N_i^0\, e^{-n_i t}\,, \qquad (i = 1\,, 2\,, \cdots, m)$$

ove N_i^0 denotano i valori iniziali delle N_i e le equazioni (58) diverranno

$$\frac{d\nu_r}{dt} = -\sum_{m+1}^{n} p_{rl}\, q_r\, \nu_l - \sum_{1}^{m} p_{rs}\, q_r\, N_s^0\, e^{-n_s t}\,, \qquad (r = m + 1\,, \cdots, n). \tag{59}$$

Siccome l'intera associazione biologica è conservativa o dissipativa, così tale dovrà essere l'associazione delle $n - m$ specie da sole, quindi se $\nu_r = f_r(t)$ sono soluzioni delle equazioni

$$\frac{d\nu_r}{dt} = -\sum_{m+1}^{n} p_{rl}\, q_r\, \nu_l\,, \qquad (r = m + 1\,, \cdots, n)$$

$q_r + f_r$ ci daranno fluttuazioni smorzate o meno, o variazioni assintotiche di queste $n - m$ specie vicino al loro stato stazionario.

Ma le soluzioni delle equazioni (59) hanno la forma

$$\nu_r = f_r(t) + \sum_{1}^{m}{}_i\, A_{ri}\, e^{-n_i t} \qquad (r = m + 1\,, \cdots, n) \tag{60}$$

e, poiché $N_r = q_r + \nu_r$, il teorema precedente resta dimostrato.

Quindi la variazione considerata *condurrà assintoticamente all'esaurimento delle prime specie ed alle variazioni delle rimanenti vicino al loro stato stazionario.*

3. Se per la intera associazione biologica conservativa o dissipativa esiste uno stato stazionario, le variazioni non possono consistere che in variazioni comprese fra limiti positivi, restano quindi esclusi gli esaurimenti di una o più specie.

Ma cerchiamo di dimostrare direttamente che, *se esistono uno stato stazionario per l'intera associazione ed uno stato stazionario parziale per una parte di essa, i valori dei coefficienti di accrescimento virtuali delle specie rimanenti non possono essere tutti negativi nello stato stazionario.*

Infatti siano $q_1, q_2, \cdots, q_n$ i valori positivi di $N_1, N_2, \ldots, N_n$ nello stato stazionario della intera associazione e $q'_{m+1}, q'_{m+2}, \cdots, q'_n$ i valori positivi di

$N_{m+1}, \cdots, N_n$ nello stato stazionario delle specie $m+1, \cdots, n$. Avremo

$$\varepsilon_i - \sum_1^n{}_s\, p_{is} N_s = \sum_1^n{}_s\, p_{is}(q_s - N_s), \qquad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

$$\varepsilon_r - \sum_1^n{}_s\, p_{rs} N_s = \sum_1^n{}_s\, p_{rs}(q_s - N_s) = \sum_{m+1}^n{}_l\, p_{rl}(q_l' - N_l) - \sum_1^m{}_s\, p_{rs} N_s,$$

$$(r = m+1, \cdots, n)$$

onde ponendo

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \sum_1^n{}_i \sum_1^n{}_s\, p_{is}\, \alpha_i x_i x_s,$$

ove le α_i sono positive, avremo

$$F(q_1 - N_1, \cdots, q_n - N_n) = \sum_1^m{}_i\, \alpha_i \left(\varepsilon_i - \sum_1^n{}_s\, p_{is} N_s\right)(q_i - N_i) +$$

$$+ \sum_{m+1}^n{}_r\, \alpha_r \left[\sum_{m+1}^n{}_l\, p_{rl}(q_l' - N_l) - \sum_1^m{}_s\, p_{rs} N_s\right](q_r - N_r).$$

Prendendo $N_1 = N_2 = \cdots N_m = 0$, $N_{m+1} = q'_{m+1}, \cdots, N_n = q'_n$ si otterrà

$$F = \sum_1^m \alpha_i \left(\varepsilon_i - \sum_{m+1}^n{}_s\, p_{is} q'_s\right) q_i .$$

Se la forma F è nulla o positiva, siccome le q_i sono positive, segue che i coefficienti virtuali di accrescimento

$$\varepsilon_i - \sum_{m+1}^n{}_s\, p_{is} q'_s, \qquad (i = 1, 2, \cdots, m)$$

non possono essere tutti negativi, il che dimostra il teorema.

§ 4. – Perturbazione prodotta in un'associazione biologica avente uno stato stazionario dall'aggiunta di una nuova specie.

1. Consideriamo $N_1, N_2, \cdots, N_n$ come incognite nelle equazioni della stazionarietà

$$\varepsilon_r - \sum_1^n{}_s\, p_{rs} N_s = 0, \qquad (r = 1, 2, \cdots, n)$$

e supponiamo che le radici siano

$$q_1, q_2, \cdots, q_n$$

e che si abbia $q_1 < 0$.

Prendiamo le equazioni

$$\varepsilon_r - \sum_2^n{}_s\, p_{rs} N_s = 0 \qquad (r = 2, 3, \cdots, n)$$

e, considerando come incognite $N_2, N_3, \cdots, N_n$, abbiansi le radici positive

$$q'_2, q'_3, \cdots, q'_n .$$

Supponiamo poi che la forma

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \sum_1^n{}_r \sum_1^n{}_s m_{rs} x_r x_s$$

sia definita positiva, nell'ipotesi che sia

$$m_{rs} = \frac{1}{2}(p_{rs}\alpha_r + p_{sr}\alpha_s)$$

e che $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ siano quantità positive.

Avremo

$$\varepsilon_r - \sum_1^n{}_s p_{rs} N_s = \sum_1^n{}_s p_{rs}(q_s - N_s), \qquad (r = 1, 2, \cdots, n)$$

$$\varepsilon_r - \sum_2^n{}_s p_{rs} N_s = \sum_2^n{}_s p_{rs}(q'_s - N_s), \qquad (r = 2, 3, \cdots, n)$$

quindi

$$\varepsilon_r - \sum_1^n{}_s p_{rs} N_s = \sum_2^n{}_s p_{rs}(q'_r - N_s) - p_{r1} N_1 = \sum_1^n{}_s p_{rs}(q_s - N_s),$$
$$(r = 2, 3, \cdots, n)$$

$$\varepsilon_1 - \sum_1^n{}_s p_{1s} N_s = \sum_1^n{}_s p_{1s}(q_s - N_s)$$

e per conseguenza

$$\sum_1^n{}_r \sum_1^n{}_s p_{rs}(q_s - N_s)(q_r - N_r)\alpha_r = F(q_1 - N_1, \cdots, q_n - N_n) =$$
$$= \sum_2^n{}_r \left(\sum_2^n{}_s p_{rs}(q'_s - N_s) - p_{r1} N_1\right)(q_r - N_r)\alpha_r + \left(\varepsilon_1 - \sum_1^n{}_s p_{1s} N_s\right)(q_1 - N_1)\alpha_1 .$$

2. Prendiamo ora

$$N_1 = 0, N_2 = q'_2, \cdots, N_n = q'_n$$

sarà

$$F(q_1, q_2 - q'_2, \cdots, q_n - q'_n) = (\varepsilon_1 - \sum_2^n{}_s p_{1s} q'_s)\alpha_1 q_1 > 0 .$$

Ma $q_1 < 0$ mentre il primo membro è positivo. Segue dunque

$$\varepsilon_1 - \sum_2^n{}_s p_{1s} q'_s < 0 .$$

Tenendo conto dei risultati del paragrafo precedente possiamo quindi enunciare il seguente teorema:

Se esiste uno stato stazionario per una certa associazione biologica, ma associando ad essa una nuova specie si perde la possibilità dello stato stazionario, perché le equazioni della stazionarietà hanno una radice negativa per il numero *di individui della specie aggiunta, le piccole variazioni dell'associazione totale (supposta dissipativa) consisteranno in una variazione della primitiva associazione vicina al suo stato stazionario sovrapposta ad un esaurimento delle specie*[21].

Perciò la specie aggiunta tenderà ad esaurirsi e le altre tenderanno ad una variazione vicina allo stato stazionario, quindi l'aggiunta della nuova specie produrrà una perturbazione che tenderà a dissiparsi.

§ 5. – Studio di una particolare associazione biologica di tre specie.

1. Come esempio della trattazione svolta precedentemente esaminiamo un caso particolare che, in virtù delle teorie esposte innanzi, può trattarsi matematicamente in modo completo.

Supponiamo tre specie viventi in un ambiente limitato, per esempio un'isola. Di queste tre specie la prima mangi la seconda e questa la terza e non viceversa. Come esempio possiamo prendere una specie di animali carnivori che si nutre di una specie di erbivori e questa a sua volta di una specie vegetale, ammettendo che per quest'ultima possa valere la stessa trattazione usata per gli animali. Tale caso può applicarsi anche agl'insetti parassiti delle piante e ai parassiti di essi.

2. Ammettiamo dapprima che l'associazione biologica sia *conservativa* (cfr. 2ª parte, § 7).

Se indichiamo il numero di individui delle tre specie con N_1, N_2, N_3 avremo le equazioni (vedi (B), 2ª parte, § 2, n. 2)

$$\beta_1 \frac{dN_1}{dt} = (\beta_1 \varepsilon_1 + a_{21} N_2 + a_{31} N_3) N_1$$

$$\beta_2 \frac{dN_2}{dt} = (\beta_2 \varepsilon_2 + a_{12} N_1 + a_{32} N_3) N_2$$

$$\beta_3 \frac{dN_3}{dt} = (\beta_3 \varepsilon_3 + a_{13} N_1 + a_{23} N_2) N_3 .$$

Nel nostro caso dovremo prendere

$$\begin{array}{lll} \varepsilon_1 = -l < 0 \; , & a_{21} = a > 0 \; , & a_{31} = 0 \\ \varepsilon_2 = -m < 0 \; , & a_{12} = -a < 0 \; , & a_{32} = b > 0 \\ \varepsilon_3 = k > 0 \; , & a_{13} = 0 \; , & a_{23} = -b < 0 \end{array}$$

ove $\beta_1, \beta_2, \beta_3, a, l, m, k$ sono quantità costanti; quindi

$$\beta_1 \frac{dN_1}{dt} = (-\beta_1 l + aN_2) N_1 \tag{H$_1$}$$

$$\beta_2 \frac{dN_2}{dt} = (-\beta_2 m - aN_1 + bN_3) N_2 \tag{H$_2$}$$

$$\beta_3 \frac{dN_3}{dl} = (\beta_3 k - bN_2) N_3 . \tag{H$_3$}$$

(21) È opportuno mettere in relazione questo teorema con quello del § 1, n. 5.

Poiché il numero delle specie è dispari, potremo fare uso dell'integrale (40) (2ª parte, § 4, n. 1) e avremo

$$N_1^{\beta_1 b} N_3^{\beta_3 a} = Ce^{(\beta_3 ka - \beta_1 lb)t}. \tag{61}$$

Distinguiamo due casi che si presentano secondo che il binomio

$$\beta_3 ka - \beta_1 lb \tag{62}$$

è positivo o negativo.

3. Supponiamolo dapprima negativo. Il caso in cui N_3 tende a zero è da escludere perché, in virtù della (H_2), N_2 dovrebbe decrescere indefinitamente· Ma quando N_2 fosse divenuto inferiore ad un numero inferiore a $\beta_3 k/b$, N_3 crescerebbe indefinitamente contro l'ipotesi di partenza.

Dunque N_1 col crescere indefinito del tempo dovrà prendere valori positivi inferiori a qualunque numero positivo assegnabile.

Poniamo

$$\frac{\beta_1 l}{a} = Q_1 \, ; \; \frac{\beta_3 k}{b} = Q_2 \, ; \; \frac{\beta_2 m}{b} = Q_3 \, .$$

In forza della ipotesi che il binomio (52) sia negativo, sarà $Q_1 > Q_2$ e le equazioni (H_1), (H_2), (H_3) si scriveranno

$$\beta_1 \frac{dN_1}{dt} = - a (Q_1 - N_2) N_1$$

$$\beta_2 \frac{dN_2}{dt} = (- aN_1 + b (N_3 - Q_3)) N_2$$

$$\beta_3 \frac{dN_3}{dt} = - b (N_2 - Q_2) N_3 \, .$$

Poniamo

$$N_1 = Q_1 \nu_1 \, ; \; N_2 = Q_2 (1 + \nu_2) \, ; \; N_3 = Q_3 (1 + \nu_3) \, .$$

Avremo le equazioni

$$\beta_1 \frac{d\nu_1}{dt} = - a (Q_1 - Q_2) \nu_1 + aQ_2 \nu_2 \nu_1$$

$$\beta_2 \frac{d\nu_2}{dt} = - aQ_1 \nu_1 + bQ_3 \nu_3 - aQ_1 \nu_1 \nu_2 + bQ_3 \nu_2 \nu_3$$

$$\beta_3 \frac{d\nu_3}{dt} = - bQ_2 \nu_2 - bQ_2 \nu_2 \nu_3 \, .$$

Se trascuriamo le parti del secondo ordine, queste equazioni diverranno

$$\beta_1 \frac{d\nu_1}{dt} = - a (Q_1 - Q_2) \nu_1$$

$$\beta_2 \frac{d\nu_2}{dt} = - aQ_1 \nu_1 + bQ_3 \nu_3$$

$$\beta_3 \frac{d\nu_3}{dt} = - bQ_2 \nu_2 \, .$$

L'integrale generale di questo sistema di equazioni differenziali è

$$\nu_1 = \frac{\beta_2(\rho^2 + km)}{\beta_1 l} C_1 e^{-\rho t}$$

$$\nu_2 = \rho C_1 e^{-\rho t} + C_2 \sqrt{m}\,\mathrm{sen}\,(\sqrt{km}\,t + C_3)$$

$$\nu_3 = k C_1 e^{-\rho t} + C_2 \sqrt{k}\cos(\sqrt{km}\,t + C_3)$$

ove $\rho = a(Q_1 - Q_2)/\beta_1$ e C_1, C_2, C_3 sono tre costanti.

L'esponente negativo $-\rho t$ giustifica l'aver trascurato i termini del secondo ordine.

Posto

$$\nu_1' = \frac{\beta_2(\rho^2 + km)}{\beta_1 l} C_1 e^{-\rho t} \quad , \quad \nu_2' = \rho C_1 e^{-\rho t} \quad , \quad \nu_3' = k C_1 e^{-\rho t}$$

$$\nu_1'' = 0 \, , \quad , \quad \nu_2'' = C_2\sqrt{m}\,\mathrm{sen}\,(\sqrt{km}\,t + C_3) \quad , \quad \nu_3'' = C_2\sqrt{k}\cos(\sqrt{km}\,t + C_3)$$

$$N_1' = Q_1 \nu_1' \quad , \quad N_2' = Q_2 \nu_2' \quad , \quad N_3' = Q_3 \nu_3'$$

$$N_1'' = 0 \quad , \quad N_2'' = Q_2(1 + \nu_2'') \quad , \quad N_3'' = Q_3(1 + \nu_3'')$$

avremo

$$N_1 = N_1' + N_1'' \quad , \quad N_2 = N_2' + N_2'' \quad , \quad N_3 = N_3' + N_3'' .$$

La variazione dell'associazione biologica consiste quindi nella sovrapposizione della variazione N_1', N_2', N_3' alla variazione N_1'', N_2'', N_3''. La prima conduce ad un esaurimento delle tre specie, la seconda consiste in fluttuazioni non smorzate della 2ª e della 3ª specie.

Ciò prova che, *in questo caso, la prima specie tende assintoticamente ad esaurirsi mentre le altre due specie tendono allo stato di fluttuazione non smorzata studiato nel* § 2 *della prima parte.*

La condizione che il binomio (62) sia negativo sta ad indicarci che la quantità di nutrimento fornita dal vegetale ai carnivori, attraverso gli erbivori, non è sufficiente a compensare l'esaurimento naturale della specie carnivora. Poiché la specie vegetale si mantiene entro limiti costanti e non può crescere indefinitamente, così la ipotesi fatta che k sia costante ossia che l'associazione sia *conservativa*, resta pienamente giustificata.

4. Ben diverso si presenta il caso in cui il binomio (62) è positivo. Che N_3 possa mantenersi finito è da escludere. Infatti in tale ipotesi, in virtù della (61), N_1 dovrebbe crescere indefinitamente e quindi per la (H_2) N_2 dovrebbe decrescere indefinitamente, onde per la $(H)_3$ N_3 crescerebbe indefinitamente contro l'ipotesi di partenza.

Ora N_3 non potrà prendere valori superiori ad un certo limite perchè l'isola, una volta coperta interamente della vegetazione costituita dalla terza specie, non potrà più produrre piante della specie stessa. In questo caso dunque l'ipotesi fatta che l'associazione sia *conservativa*, ossia che k sia costante diviene assurda. Bisognerà dunque ricorrere alla ipotesi che il coefficiente di accrescimento della specie vegetale dipenda dal numero di individui di questa specie e che il sistema sia *dissipativo* e converrà applicare i calcoli del § 6 (2ª parte).

Quindi nella equazione (H_3) sostituiamo $\beta_3 k - \lambda N_3$ a $\beta_3 k$ ove λ è una quantità positiva. Otterremo allora le equazioni:

$$(63') \qquad \beta_1 \frac{dN_1}{dt} = (-\beta_1 l + aN_2) N_1$$

$$(63'') \qquad \beta_2 \frac{dN_2}{dt} = (-\beta_2 m - aN_1 + bN_3) N_2$$

$$(63''') \qquad \beta_3 \frac{dN_3}{dt} = (\beta_3 k - \lambda N_3 - bN_2) N_3 .$$

Risolvendo le equazioni

$$-\beta_1 l + aN_2 = 0$$

$$-\beta_2 m - aN_1 + bN_3 = 0$$

$$\beta_3 k - \lambda N_3 - bN_2 = 0$$

si trovano per N_1, N_2, N_3 i valori

$$q_1 = \frac{ab\beta_3 k - b^2 \beta_1 l - a\lambda \beta_2 m}{a^2 \lambda} = \frac{b(a\beta_3 k - b\beta_1 l) - a\lambda \beta_2 m}{a^2 \lambda}$$

$$q_2 = \frac{\beta_1 l}{a}$$

$$q_3 = \frac{a\beta_3 k - b\beta_1 l}{a\lambda} .$$

Se poniamo la condizione

$$ab\, \beta_3 k - b^2 \beta_1 l - a\lambda \beta_2 m > 0$$

avremo che le radici q_1, q_2, q_3 saranno positive e quindi esisterà uno stato stazionario.

Poniamo

$$N_1 = q_1 (1 + \nu_1)$$

$$N_2 = q_2 (1 + \nu_2)$$

$$N_3 = q_3 (1 + \nu_3)$$

e trascuriamo i termini del secondo ordine nelle (63'), (63''), (63''').
Queste assumeranno la forma

$$(63'_1) \qquad \beta_1 \frac{d\nu_1}{dt} = aq_2 \nu_2$$

$$(63''_1) \qquad \beta_2 \frac{d\nu_2}{dt} = -aq_1 \nu_1 + bq_3 \nu_3$$

$$(63'''_1) \qquad \beta_3 \frac{d\nu_3}{dt} = -bq_2 \nu_2 - \lambda q_3 \nu_3 .$$

Posto nelle ($63'_1$), ($63''_1$), ($63'''_1$)

$$\nu_1 = A_1 e^{xt}$$

$$\nu_2 = A_2 e^{xt}$$

$$\nu_3 = A_3 e^{xt}$$

esse diverrano

$$A_1 \beta_1 x = a q_2 A_2$$
$$A_2 \beta_2 x = - a q_1 A_1 + b q_3 A_3$$
$$A_3 \beta_3 x = - b q_2 A_2 - \lambda q_3 A_3 .$$

Eliminando A_1, A_2, A_3, si otterrà l'equazione

$$\begin{vmatrix} -\beta_1 x, & a q_2 & , 0 \\ - a q_1, & -\beta_2 x, & b q_3 \\ 0 \quad , & - b q_2, & -\lambda q_3 - \beta_3 x \end{vmatrix} = 0 .$$

Questa equazione non può avere che radici reali negative o complesse con la parte reale negativa.

Infatti sia x' il coniugato di x; A'_1, A'_2, A'_3, i numeri complessi coniugati di A_1, A_2, A_3; avremo:

$$A'_1 \beta_1 x' = a q_2 A'_2$$
$$A'_2 \beta_2 x' = - a q_1 A'_1 + b q_3 A'_3$$
$$A'_3 \beta_3 x' = - b q_2 A'_2 - \lambda q_3 A'_3$$

da cui segue

$$(A_1 A'_1 \beta_1 q_1 + A_2 A'_2 \beta_2 q_2 + A_3 A'_3 \beta_3 q_3)(x + x') = - 2 \lambda q_3^2 A_3 A'_3 .$$

Dunque $x + x'$ è negativo a meno che non si abbia $A_3 = 0$, ma ciò porterebbe alla conseguenza $A_1 = A_2 = 0$. La precedente equazione in x non può dunque avere che radici reali negative o complesse colla parte reale negativa. Ciò prova che le *variazioni saranno assintotiche o saranno fluttuazioni smorzate*, quindi *lo stato del sistema tenderà a quello stazionario* (22).

5. Resta da esaminare il caso in cui il binomio (62) è positivo e

(64) $$a b \beta_3 k - b^2 \beta_1 l - a \lambda \beta_2 m < 0 .$$

Scriviamo l'espressione precedente sotto la forma

$$a (b \beta_3 k - \lambda \beta_2 m) - b^2 \beta_1 l$$

e distinguiamo due sottocasi

I. (65) $$b \beta_3 k - \lambda \beta_2 m < 0$$

il che porta come conseguenza la diseguaglianza (64)

II. (66) $$b \beta_3 k - \lambda \beta_2 m > 0$$

insieme a (64) (23)

$$a b \beta_3 k - b^2 \beta_1 l - a \lambda \beta_2 m < 0 .$$

(22) Cfr. la nota del § 6, n. 3, parte 2ª.

(23) Non abbiamo considerato i casi

$$b \beta_3 k - \lambda \beta_2 m = 0$$
$$a b \beta_3 k - b^2 \beta_1 l - a \lambda \beta_2 m = 0 .$$

I. Poniamo

$$\frac{\beta_3 k}{\lambda} = g$$

$$N_3 = g\,(1 + \nu_3)\,.$$

Le equazioni (63'), (63''), (63''') si scriveranno

$$\beta_1 \frac{dN_1}{dt} = -\beta_1 l N_1 + a N_1 N_2$$

$$\beta_2 \frac{dN_2}{dt} = (-\beta_2 m + bg)\,N_2 - a N_1 N_2 + bg\,N_2 \nu_3$$

$$\beta_3 \frac{d\nu_3}{dt} = (-\lambda g\,\nu_3 - b N_2)\,(1 + \nu_3)\,.$$

Trascurando i termini del secondo ordine, si ha

$$\frac{dN_1}{dt} = -l N_1$$

$$\frac{dN_2}{dt} = -\omega N_2$$

$$\frac{d\nu_3}{dt} = \frac{-b}{\beta_3} N_2 - \frac{\lambda g}{\beta_3} \nu_3$$

ove

$$\omega = \frac{\beta_2 m - bg}{\beta_2} > 0$$

in virtù della diseguaglianza (65).

L'integrale generale di questo sistema di equazioni differenziali è

$$N_1 = C_1\, e^{-lt}$$

$$N_2 = C_2\, e^{-\omega t}$$

$$\nu_3 = C_2 \frac{b}{\beta_3 (\omega - k)}\, e^{-\omega t} + C_3\, e^{\frac{-\lambda g}{\beta_3} t}\,.$$

Gli esponenti negativi giustificano di avere trascurato i termini del secondo ordine. In questo caso dunque tanto la prima che la seconda specie si esauriscono e il numero d'individui della specie vegetale tende verso il valore $g = \beta_3 k/\lambda$.

II. Poniamo $\beta_2 m/b = f_3$, e

$$\frac{\beta_3 k - \dfrac{\lambda \beta_2 m}{b}}{b} = f_2 > 0 \tag{67}$$

in virtù della diseguaglianza (66).

Poniamo inoltre $N_2 = f_2 (1 + \nu_2)$, $N_3 = f_3 (1 + \nu_3)$. Le equazioni (63'), (63''), (63''') diverranno

$$\beta_1 \frac{dN_1}{dt} = (-\beta_1 l + a f_2)\,N_1 + a f_2 \nu_2 N_1$$

$$\beta_2 \frac{d\nu_2}{dt} = (b f_3 \nu_3 - a N_1)\,(1 + \nu_2)$$

$$\beta_3 \frac{d\nu_3}{dt} = (-\lambda f_3 \nu_3 - b f_2 \nu_2)\,(1 + \nu_3)\,.$$

Trascurando i termini del secondo ordine si avrà

$$\frac{dN_1}{dt} = -\frac{\rho_1}{\beta_1} N_1$$

$$\frac{d\nu_2}{dt} = -\frac{a}{\beta_2} N_1 + \frac{bf_3}{\beta_2} \nu_3$$

$$\frac{d\nu_3}{dt} = -\frac{bf_2}{\beta_3} \nu_2 - \frac{\lambda f_3}{\beta_3} \nu_3$$

ove

$$-\rho_1 = -\beta_1 l + af_2 = \frac{ab\,\beta_3\, k - a\lambda\,\beta_2 m - b^2\,\beta_1 l}{b^2} < 0$$

in virtù della diseguaglianza (64). I segni dei coefficienti giustificano i termini trascurati. Senza ripetere la stessa analisi svolta precedentemente, si riconosce subito che N_1 tende assintoticamente a zero, mentre ν_2 e ν_3 tendono assintoticamente ad una fluttuazione smorzata che alla sua volta tende ad uno stato stazionario.

6. Riassumendo tutti i casi possibili si ha il seguente quadro.

1) $$\beta_3 ka - \beta_1 lb < 0\,.$$

Anche se ammettiamo che i vegetali possano aumentare indefinitamente, il nutrimento che giunge ai carnivori attraverso gli erbivori non è sufficiente a mantenere la specie carnivora e questa si esaurisce, mentre gli erbivori e i vegetali tendono ad una fluttuazione periodica non smorzata.

2) $$\beta_3 ka - \beta_1 lb > 0\,.$$

Se il coefficiente di accrescimento della specie vegetale fosse costante, il numero di individui di essa crescerebbe indefinitamente, quindi conviene supporre che il detto coefficiente decresca proporzionalmente al numero degl'individui.

2_a) $$b\beta_3 k - \lambda\beta_2 m < 0\,.$$

Il nutrimento fornito dai vegetali non è sufficiente a mantenere gli erbivori, quindi la specie erbivora e la specie carnivora si esauriscono, mentre il numero d'individui della specie vegetale tende ad un valore costante.

2_b) $$b\beta_3 k - \lambda\beta_2 m > 0$$
$$ab\,\beta_3 k - b^2\,\beta_1 m - a\lambda\,\beta_2 m < 0\,.$$

Le piante sono sufficienti a mantenere gli erbivori, ma non vi è sufficiente nutrimento per i carnivori attraverso gli erbivori, quindi la specie carnivora si esaurisce, mentre erbivori e piante tendono ad una fluttuazione smorzata, e finalmente ad uno stato stazionario.

2_c) $$ab\,\beta_3 k - b^2\,\beta_1 l - a\lambda\,\beta_2 m > 0\,.$$

Il nutrimento è sufficiente perché tutte le specie vivano ed esse, attraverso variazioni assintotiche o fluttuazioni smorzate, tendono verso uno stato stazionario.

Restano così discriminati e discussi tutti i casi possibili (24).

(24) Naturalmente eccettuati quegli intermedi nei quali, invece di disuguaglianze, si hanno eguaglianze, casi che sono del resto infinitamente poco probabili.

PARTE QUARTA

Studio delle azioni ereditarie.

§ 1. – ESTENSIONE DELLA PRIMA LEGGE DELLE FLUTTUAZIONI AL CASO EREDITARIO.

1. Il carattere dei fenomeni biologici è in generale ereditario, giacché nella maggior parte dei casi il passato influisce sullo stato presente e sulla evoluzione futura.

L'analisi che ho svolto in varie occasioni [25] sui fenomeni di carattere ereditario appartiene al campo delle equazioni integro–differenziali e a quello delle equazioni alle derivate funzionali. Ma nelle parti precedenti di questa Memoria ho trattato il problema delle fluttuazioni biologiche, col semplice sussidio delle equazioni differenziali. Debbo ora notare che l'assenza di carattere ereditario nella precedente trattazione è dovuta all'aver fatto solo un primo esame approssimativo della questione. Volendo, per dir così, stringere più da vicino la realtà e fare un passo ulteriore, conviene ricorrere ad equazioni integro–differenziali, anche se si voglia conservare allo svolgimento il suo carattere schematico [26].

2. Nel caso di due specie conviventi, che da sole avrebbero i coefficienti di accrescimento $\varepsilon_1 > 0$, $-\varepsilon_2 < 0$, e tali che gl'individui della seconda si nutrono di quelli della prima, vennero scritte le equazioni differenziali (cfr. 1ª parte, §§ 2 e 4).

$$(A_1) \quad \frac{dN_1}{dt} = N_1(\varepsilon_1 - \gamma_1 N_2), \qquad (A_2) \quad \frac{dN_2}{dt} = N_2(-\varepsilon_2 + \gamma_2 N_1)$$

ove N_1 e N_2 denotano i numeri d'individui delle due specie e γ_1, γ_2 due costanti positive.

Riprendiamo il ragionamento fatto nella 1ª parte, § 4, n. 1 per giustificare queste equazioni: Se la prima specie fosse sola, il numero dei suoi individui crescerebbe nel tempo dt di $\varepsilon_1 N_1 dt$. Ma in questo intervallo di tempo il numero di incontri degli individui delle due specie sarà proporzionale a $N_1 N_2 dt$, ed a questo stesso numero sarà proporzionale il numero

(25) Cfr. VOLTERRA, *Leçons sur les fonctions de lignes*, Paris, Gauthier–Villars 1913, e *Saggi scientifici*, Bologna, Zanichelli 1920.

(26) Il dott. LOTKA accenna, nella sua opera citata, nel caso di malattie, alla possibilità di ritardi (lag) nelle azioni ed anche alla possibilità di azioni in precedenza (lead) senza farne applicazioni matematiche. Però nella sua Memoria: *Contribution to the Analysis of Malaria epidemiology. IV Incubation lag*, la maniera come egli considera i ritardi e come imposta la questione matematica mostra che i suoi concetti e la sua trattazione sono completamente al difuori della mia analisi ereditaria e delle equazioni integro–differenziali.

d'individui della prima specie che verranno mangiati nel tempo dt. Chiamando γ_1 questo rapporto di proporzionalità, potremo dunque scrivere

$$dN_1 = \varepsilon_1 N_1 dt - \gamma_1 N_1 N_2 dt,$$

d'onde l'equazione (A_1).

Riguardo alla seconda specie osserviamo che, se essa fosse sola, il numero dei suoi individui varierebbe nel tempo dt di $-\varepsilon_2 N_2 dt$. Siccome la seconda specie si rifornisce di nutrimento negl'incontri dei suoi individui con quelli della prima specie, così l'incremento del numero d'individui della seconda specie nel tempo dt si assume approssimativamente proporzionale al numero degli incontri, e perciò, chiamando γ_2 il coefficiente di proporzionalità, abbiamo

$$dN_2 = -\varepsilon_2 N_2 dt + \gamma_2 N_1 N_2 dt,$$

da cui segue l'equazione (A_2).

Ora, se per la (A_1) il ragionamento, per quanto schematico, non offre difficoltà, una grave obiezione può muoversi al ragionamento da cui discende la (A_2), giacché i due casi non presentano quella simmetria che può apparire a primo aspetto.

Infatti la distruzione degl'individui della prima specie durante il tempo dt può ritenersi opera degl'individui della seconda esistenti in questo istante, ma il nutrimento che ricevono gl'individui della seconda specie durante lo stesso intervallo di tempo non è quello che produce l'incremento della specie nell'istante stesso; sarà invece il nutrimento a sua disposizione nei tempi precedenti che influirà sull'incremento della specie.

Supponiamo, in virtù delle ipotesi generali, che la percentuale degl'individui distribuiti per età si conservi inalterata col volger del tempo. Denotiamo con $\varphi(\xi)\,d\xi$ il rapporto fra gl'individui aventi l'età compresa fra ξ e $\xi + d\xi$ ed il numero totale, allora il rapporto fra il numero degl'individui aventi un'età superiore a $t - \tau$ ed il numero totale sarà:

$$\int_{t-\tau}^{\infty} \varphi(\xi)\,d\xi = f(t-\tau).$$

Ne segue che la frazione degli $N_2(t)$ individui esistenti al tempo t che già esisteva al tempo τ, anteriore a t, sarà data da $f(t-\tau)\,N_2(t)$ e la quantità di nutrimento da essi ingerita nell'intervallo di tempo $(\tau, \tau + d\tau)$ potrà esprimersi mediante la formula

$$\gamma f(t-\tau)\,N_2(t)\,N_1(\tau)\,d\tau$$

ove γ è una costante positiva.

Tale nutrimento influirà sull'accrescimento degli individui della seconda specie al tempo t, in misura diversa secondo la grandezza dell'intervallo di tempo $t - \tau$; quindi potremo misurare questa influenza moltiplicando la precedente espressione per una funzione positiva $\psi(t-\tau)$, onde avremo

$$\gamma\psi(t-\tau)\,f(t-\tau)\,N_2(t)\,N_1(\tau)\,d\tau = F(t-\tau)\,N_2(t)\,N_1(\tau)\,d\tau.$$

Sommando queste quantità per tutti gl'intervalli di tempo che precedono l'istante t, otterremo

$$\int_{-\infty}^{t} F(t-\tau)\, N_2(t)\, N_1(\tau)\, d\tau .$$

Perciò alla equazione (A_2) dovremo sostituire l'altra

$$\frac{dN_2}{dt} = N_2(t)\left(-\varepsilon_2 + \int_{-\infty}^{t} F(t-\tau)\, N_1(\tau)\, d\tau\right).$$

Avremo dunque, anziché le (A_1) e (A_2), le equazioni simultanee

$$\text{(IV)} \qquad \frac{dN_1}{dt} = N_1(t)\,(\varepsilon_1 - \gamma_1 N_2(t)),$$

$$\text{(V)} \qquad \frac{dN_2}{dt} = N_2(t)\left(-\varepsilon_2 + \int_{-\infty}^{t} F(t-\tau)\, N_1(\tau)\, d\tau\right)$$

la prima delle quali è un'equazione differenziale e l'altra un'equazione integro-differenziale.

Quanto alla funzione $F(t-\tau)$ noi dovremo supporre che, quando il suo argomento cresce indefinitamente, essa divenga infinitesima di ordine tale che l'integrale nel quale comparisce sia convergente.

Ma noi potremo senz'altro supporre che essa si annulli per un certo valore T_0 del suo argomento e per tutti i valori ad esso superiori.

3. Per rendere simmetrica la trattazione matematica sostituiamo alle equazioni (IV) e (V) le due altre (a cui può darsi anche significato biologico)

$$\text{(K)} \qquad \frac{dN_1}{dt} = N_1(t)\left(\varepsilon_1 - \gamma_1 N_2(t) - \int_{-\infty}^{t} F_1(t-\tau)\, N_2(\tau)\, d\tau\right),$$

$$\text{(L)} \qquad \frac{dN_2}{dt} = N_2(t)\left(-\varepsilon_2 + \gamma_2 N_1(t) + \int_{-\infty}^{t} F_2(t-\tau)\, N_1(\tau)\, d\tau\right),$$

ove γ_1 e γ_2 sono due costanti positive (γ_2 può essere anche nulla) e F_1, F_2 sono due funzioni finite, continue, positive che si annullano per valori dell'argomento eguali o superiori a $T_0 > 0$ (F_1 può essere anche nulla).

Prendiamo arbitrariamente le funzioni $N_1(t)$ e $N_2(t)$ nell'intervallo $(t_0 - T_0, t_0)$ ma tali che siano finite continue e positive. Noi potremo prolungarle in modo da essere finite e da soddisfare le equazioni (K) e (L) per $t_0 \leqq t < t_1$, impiegando per esempio il metodo delle approssimazioni successive. I valori di $N_1(t)$ e $N_2(t)$ corrispondenti all'intervallo $(t_0 - T_0, t_0)$ si riattaccheranno con continuità per $t = t_0$ a quelli corrispondenti all'intervallo (t_0, t_1) ma questo in generale non avverrà per le loro derivate.

4. TEOREMA I. — *Gl'integrali delle* (K), (L) *sono positivi per* $t_0 \leq t < t_1$. Infatti, posto $N_1(t_0) = N_1^0$, $N_2(t_0) = N_2^0$, sarà

$$N_1(t) = N_1^0 e^{P_1(t)} \quad , \quad N_2(t) = N_2^0 e^{P_2(t)}, \qquad t_0 \leqq t < t_1,$$

ove

$$P_1(t) = \int_{t_0}^{t} \left(\varepsilon_1 - \gamma_1 N_2(\theta) - \int_{-\infty}^{\theta} F_1(\theta - \tau) N_2(\tau) d\tau\right) d\theta,$$

$$P_2(t) = \int_{t_0}^{t} \left(-\varepsilon_2 + \gamma_2 N_1(\theta) + \int_{-\infty}^{\theta} F_2(\theta - \tau) N_1(\tau) d\tau\right) d\theta,$$

e siccome gli esponenziali sono positivi, così N_1 e N_2 si conserveranno sempre positivi.

TEOREMA II. – *Per* $t_0 < t < t_1$ *avremo*

$$N_1(t) < N_1^0 e^{\varepsilon_1 (t - t_0)} < N_1^0 e^{\varepsilon_1 (t_1 - t_0)} = \mathfrak{N}_1(t_1 - t_0) \tag{68}$$

$$N_2(t) < N_2^0 e^{\frac{\gamma_2 + \Gamma_2}{\varepsilon_1} N_1^0 e^{\varepsilon_1 (t - t_0)}} < N_2^0 e^{\frac{\gamma_2 + \Gamma_2}{\varepsilon_1} N_1^0 e^{\varepsilon_1 (t_1 - t_0)}} = \mathfrak{N}_2(t_1 - t_0) \tag{68'}$$

$$\left|\frac{dN_1(t)}{dt}\right| < \mathfrak{N}_1(t_1 - t_0)(\varepsilon_1 + (\gamma_1 + \Gamma_1)\mathfrak{N}_2(t_1 - t_0)) \tag{69}$$

$$\left|\frac{dN_2(t)}{dt}\right| < \mathfrak{N}_2(t_1 - t_0)(\varepsilon_2 + (\gamma_2 + \Gamma_2)\mathfrak{N}_1(t_1 - t_0)) \tag{69'}$$

ove

$$\left\{\begin{array}{ll} \Gamma_1 = \int_0^{T_0} F_1(\xi)\, d\xi \quad , & \Gamma_2 = \int_0^{T_0} F_2(\xi)\, d\xi. \\ \mathfrak{N}_1(t) = N_1^0 e^{\varepsilon_1 t} \quad , & \mathfrak{N}_2(t) = N_2^0 e^{\frac{\gamma_2 + \Gamma_2}{\varepsilon_1} N_1^0 e^{\varepsilon_1 t}}. \end{array}\right. \tag{70}$$

Infatti, in virtù del teorema precedente, sarà $P_1(t) < \varepsilon_1$, d'onde la (68) e quindi

$$P_2(t) < \int_{t_0}^{t} \left(\gamma_2 N_1^0 e^{\varepsilon_1 (\theta - t_0)} + e^{\varepsilon_1 (\theta - t_0)} \int_{-\infty}^{\theta} F_1(\theta - \tau)\, d\tau\right) d\theta.$$

Ma

$$\int_{-\infty}^{\theta} F_1(\theta - \tau)\, d\tau = \int_0^{\infty} F_1(\xi)\, d\xi = \int_0^{T_0} F_1(\xi)\, d\xi = \Gamma_1,$$

segue dunque facilmente la (68'). Le (K) e (L) conducono poi immediatamente dalle (68) e (68') alle (69) e (69)'.

TEOREMA III. – *Se t tende verso t_1, $N_1(t)$ e $N_2(t)$, dN_1/dt e dN_2/dt tendono verso dei limiti determinati e finiti.*

A cagione delle (68) e (68') e del teorema I i limiti superiori dei valori assoluti di N_1 e N_2 nell'intervallo (t_0, t_1) sono finiti, quindi per $t = t_1$, N_1 e N_2 non possono tendere all'∞. Se mancassero di limite per $t = t_1$ i limiti superiori dei valori assoluti di dN_1/dt e dN_2/dt dovrebbero essere ∞; giacché le oscillazioni di N_1 e N_2 in intervalli $(t_1 - \alpha, t_1)$ dovrebbero mantenersi superiori ad un certo valore $\sigma > 0$, per quanto piccolo fosse α. Si avrebbe dunque una contraddizione colle formule (69) e (69′). Il teorema resta quindi dimostrato.

TEOREMA IV. – *Se esistono gl'integrali delle* (K) *e* (L) *per* $t_0 < t < t_1$ *potrà trovarsi* $t_2 > t_1$ *in modo che gl'integrali esistano per* $t_0 < t < t_2$.

Infatti gl'integrali stessi e le loro derivate tenderanno verso limiti determinati e finiti per $t = t_1$, onde operando a partire da t_1 come si è fatto a partire da t_0 potremo estendere gl'integrali ad un intervallo (t_1, t_2) ove $t_2 > t_1$ e nel punto t_1 gl'integrali stessi e le loro derivate, prima individuati negli intervalli (t_0, t_1) e (t_1, t_2), si riattaccheranno con continuità, il che dimostra il teorema.

Si può di qui ricavare, con speciali osservazioni sulle approssimazioni successive, che *gl'integrali delle equazioni* (K) *e* (L) *si possono estendere per* $t_0 < t < \infty$, *restando sempre positivi.*

5. TEOREMA V. – *Esistono dei valori costanti di* N_1 *e* N_2 *che soddisfano le* (K) *e* (L).

Basterà infatti prendere

$$N_1 = K_1 \quad , \quad N_2 = K_2$$

tali che

$$\varepsilon_1 - K_2\left(\gamma_1 + \int_0^{T_0} F_1(\xi)\, d\xi\right) = 0$$

$$\varepsilon_2 - K_1\left(\gamma_2 + \int_0^{T_0} F_2(\xi)\, d\xi\right) = 0$$

e quindi

$$K_1 = \frac{\varepsilon_2}{\gamma_2 + \Gamma_2} \quad , \quad K_2 = \frac{\varepsilon_1}{\gamma_1 + \Gamma_1} .$$

TEOREMA VI. – *Se* α *è una quantità positiva qualunque, non potrà aversi, per tutti i valori del tempo superiori a un certo limite,*

(71) $$N_1 > K_1 + \alpha$$

oppure

(71′) $$N_1 < K_1 - \alpha ;$$

ed analogamente non potrà aversi, per tutti i valori del tempo superiori ad un certo limite,

(72) $$N_2 > K_2 + \alpha ,$$

oppure

(72′) $$N_2 < K_2 - \alpha .$$

Supponiamo che, a partire da un certo valore t_1 di t, sia sempre soddisfatta la (71). Avremo allora, per la (K), se $t > t_1 + T_0$,

$$\frac{dN_2}{dt} > N_2(t)(\gamma_2 + \Gamma_2)\alpha,$$

quindi chiamando N_2' il valore di N_2 al tempo t_1, sarà

$$N_2(t) > N_2' e^{\alpha(\gamma_2+\Gamma_2)(t-t_1)}$$

cioè $N_2(t)$ crescerà indefinitamente col tempo.

Esisterà dunque un valore t_2 del tempo, tale che, per $t > t_2$,

$$N_2(t) > K_2 + \alpha$$

e quindi, per la (K), se $t > t_2 + T_0$, sarà

$$\frac{dN_1}{dt} < -N_1(t)\,\alpha(\gamma_1 + \Gamma_1)$$

da cui segue, ponendo $N_1(t_2) = N_1''$,

$$N_1(t) < N_1'' e^{-\alpha(\gamma_1+\Gamma_1)(t-t_2)},$$

cioè N_1 tenderà a zero col crescere indefinito del tempo.

Esisterà dunque un valore del tempo t, superiore a t_1, per il quale

$$N_1(t) < K_1 + \alpha,$$

il che è in contraddizione coll'ipotesi di partenza.

In modo analogo si dimostrano le altre parti del teorema.

COROLLARIO. – N_1 *non potrà tendere verso un valore qualunque diverso da* K_1, *né* N_2 *potrà tendere verso un valore qualunque diverso da* K_2.

Dunque i numeri di individui delle due specie non possono in particolare né tendere a zero, né tendere all'∞.

6. TEOREMA VII. – N_1 *non potrà tendere assintoticamente verso* K_1 *né* N_2 *potrà tendere assintoticamente verso* K_2.

Supponiamo che N_1 tenda assintoticamente verso K_1, continuamente decrescendo a partire da un certo valore del tempo, e quindi attraversando valori più grandi di K_1. Siccome la (L) può scriversi

$$\frac{dN_2}{dt} = N_2(t)\left(\gamma_2(N_1(t) - K_1) + \int_{-\infty}^{t} F_2(t-\tau)(N_1(\tau) - K_1)\,d\tau\right),$$

così sarà, almeno per t sufficientemente grande,

$$\frac{dN_2}{dt} > 0,$$

onde N_2, a partire da un certo valore del tempo, crescerà continuamente e, in virtù del precedente corollario, dovrà tendere verso K_2 attraversando valori più piccoli di K_2. Ma la (K) può scriversi

$$\frac{dN_1}{dt} = N_1(t)\left(\gamma_1(K_2 - N_2(t)) + \int_{-\infty}^{t} F_1(t-\tau)(K_2 - N_2(\tau))\,d\tau\right),$$

ne segue

$$\frac{dN_1}{dt} > 0,$$

onde N_1 crescerà a partire da un certo valore del tempo, e ciò è contrario all'ipotesi di partenza. Similmente si dimostra che N_1 non può tendere verso K_1 crescendo e pure si dimostrano per N_2 le analoghe proposizioni.

COROLLARIO. – N_1 *e* N_2 *dovranno oscillare passando, col crescere indefinitamente del tempo, per infiniti massimi e minimi.*

TEOREMA VIII. – N_1 *e* N_2 *dovranno rispettivamente traversare infinite volte i valori* K_1 *e* K_2 *per valori del tempo superiori a qualunque limite assegnato.*

Infatti, se N_1 restasse, a partire da un certo istante, sempre superiore a K_1,

$$-\varepsilon_2 + \gamma_2 N_1 + \int_{-\infty}^{t} F_2(t-\tau)\, N_1(\tau)\, d\tau$$

si manterrebbe positivo, e per conseguenza non si potrebbe annullare, quindi N_2 non avrebbe più massimi né minimi il che è contrario al corollario precedente. Nello stesso modo si prova che N_1 non può, a partire da un certo valore del tempo, restare inferiore a K_1. Dunque N_1 deve traversare questo valore infinite volte col crescere del tempo. Similmente si prova l'analoga proposizione per N_2.

7. I precedenti teoremi estendono, anche nel caso ereditario, la prima legge delle *infinite fluttuazioni delle due specie attorno agli stati stazionari*, senza però che risulti la periodicità (cfr. 1ª parte, § 2, n. 9).

§ 2. – ESTENSIONE DELLA SECONDA E DELLA TERZA LEGGE DELLE FLUTTUAZIONI AL CASO EREDITARIO.

1. Se passiamo al caso ereditario, la seconda e la terza legge delle fluttuazioni si mantengono, nella loro essenza, inalterate, e quindi conservano la loro forma semplice. Però l'analisi che conduce a dimostrarle, come vedremo in questo paragrafo, è più complessa di quella impiegata nel caso non ereditario.

2. Riprendiamo le equazioni (K) e (L) del paragrafo precedente, le quali, tenendo conto che, per

$$\tau > T_0 \quad , \quad F_1(\tau) = F_2(\tau) = 0,$$

possono scriversi

$$\text{(K')} \qquad \frac{dN_1}{dt} = N_1(t)\left(\varepsilon_1 - \gamma_1 N_2(t) - \int_0^{T_0} F_1(\tau)\, N_2(t-\tau)\, d\tau\right)$$

$$\text{(L')} \qquad \frac{dN_2}{dt} = N_2(t)\left(-\varepsilon_2 + \gamma_2 N_1(t) + \int_0^{T_0} F_2(\tau)\, N_1(t-\tau)\, d\tau\right)$$

o anche

$$\text{(K'')}\qquad \frac{dN_1}{dt} = N_1(t)\left(\varepsilon_1 - \gamma_1 N_2(t) - \int_{t-T_0}^{t} F_1(t-\tau) N_2(\tau) d\tau\right)$$

$$\text{(L'')}\qquad \frac{dN_2}{dt} = N_2(t)\left(-\varepsilon_2 + \gamma_2 N_1(t) + \int_{t-T_0}^{t} F_2(t-\tau) N_1(\tau) d\tau\right),$$

nelle quali ε_1 e ε_2 sono diverse da zero e positive e $\gamma_1, \gamma_2, F_1, F_2$ non sono mai negative.

Da esse si deduce, se una almeno delle quantità γ_1, Γ_1 è diversa da zero, e una almeno delle quantità γ_2, Γ_2 è pure diversa da zero, siccome N_1 e N_2 sono sempre positive,

$$\varepsilon_1 > \frac{1}{N_1}\frac{dN_1}{dt} > -\gamma_1 N_2(t) - \int_0^{T_0} F_1(\xi) N_2(t-\xi) d\xi$$

$$-\varepsilon_2 < \frac{1}{N_2}\frac{dN_2}{dt} < \gamma_2 N_1(t) + \int_0^{T_0} F_2(\xi) N_1(t-\xi) d\xi$$

e, integrando fra τ e t, essendo $\tau < t$,

$$(73)\qquad e^{-\varepsilon_1(t-\tau)} < \frac{N_1(\tau)}{N_1(t)} < e^{\gamma_1\int_\tau^t N_2(\xi)d\xi + \int_\tau^t d\xi\int_0^{T_0} F_1(\eta) N_2(\xi-\eta) d\eta}$$

$$(73')\qquad e^{+\varepsilon_2(t-\tau)} > e^{-\gamma_2\int_\tau^t N_1(\xi)d\xi - \int_\tau^t d\xi\int_0^{T_0} F_2(\eta) N_1(\xi-\eta) d\eta}.$$

A cagione della (73') sarà

$$\gamma_1\int_\tau^t N_2(\xi) d\xi + \int_\tau^t d\xi \int_0^{T_0} F_1(\eta) N_2(\xi-\eta) d\eta <$$

$$< N_2(t)\int_\tau^t e^{\varepsilon_2(t-\xi)} d\xi\left(\gamma_1 + \int_0^{T_0} F_1(\eta) e^{\varepsilon_2\eta} d\eta\right) < N_2(t)\frac{e^{\varepsilon_2(T_0+t-\tau)}}{\varepsilon_2}(\gamma_1 + \Gamma_1).$$

Le equazioni (73) e (73') potranno dunque scriversi

$$(74)\qquad N_1(t)\, e^{-\varepsilon_1(t-\tau)} < N_1(\tau) < N_1(t)\, e^{N_2(t)\frac{e^{\varepsilon_2(T_0+t-\tau)}}{\varepsilon_2}(\gamma_1+\Gamma_1)}$$

$$(74')\qquad N_2(t)\, e^{\varepsilon_2(t-\tau)} > N_2(\tau) > N_2(t)\, e^{-\gamma_2\int_\tau^t N_1(\xi)d\xi - \int_\tau^t d\xi\int_0^{T_0} F_2(\eta) N_1(\xi-\eta) d\eta}.$$

Se $t - \tau \leq T_0$, dalle equazioni precedenti seguirà:

$$(75)\qquad N_1(t)\, e^{-\varepsilon_1 T_0} < N_1(\tau) < N_1(t)\, e^{N_2(t)\frac{e^{2\varepsilon_2 T_0}}{\varepsilon_2}(\gamma_1+\Gamma_1)},$$

$$(75')\qquad N_2(t)\, e^{\varepsilon_2 T_0} > N_2(\tau) > 0.$$

Se poi $t - \tau \leq T_0$ e nello stesso tempo $N_2 < K_2 = \varepsilon_1/(\gamma_1 + \Gamma_1)$ si avrà in conseguenza della (75)

$$N_1(t)\, e^{-\varepsilon_1 T_0} < N_1(\tau) < N_1(t)\, e^{\varepsilon_1 m} \tag{76}$$

ove

$$m = \frac{1}{\varepsilon_2}\, e^{2\varepsilon_2 T_0}.$$

3. Supponiamo che al valore t del tempo corrisponda un massimo o un minimo di N_1, a cagione della (K') avremo

$$\varepsilon_1 - \gamma_1 N_2(t) - \int_0^{T_0} F_1(\tau)\, N_2(t-\tau)\, d\tau = 0$$

e, in virtù della (75') se $F_1 > 0$,

$$\varepsilon_1 - \gamma_1 N_2(t) > 0$$

$$\varepsilon_1 - \gamma_1 N_2(t) - N_2(t)\, e^{\varepsilon_2 T_0} \int_0^{T_0} F_1(\tau)\, d\tau < 0$$

quindi, se $\gamma_1 > 0$, $\Gamma_1 > 0$, sarà

$$\frac{\varepsilon_1}{\gamma_1 + \Gamma_1 e^{\varepsilon_2 T_0}} < N_2(t) < \frac{\varepsilon_1}{\gamma_1} \tag{77}$$

mentre se $\gamma_1 > 0$, $\Gamma_1 = 0$ sarà $N_2(t) = \varepsilon_1/\gamma_1$.

Osserviamo ora che, in virtù del teorema VIII del paragrafo precedente, debbono esistere, col crescere indefinito del tempo, infiniti minimi di N_1 inferiori a K_1 ed infiniti minimi di N_2 inferiori a K_2; supponiamo che uno di questi minimi di N_2 corrisponda al valore t del tempo.

A cagione della equazione (L') sarà

$$\varepsilon_2 - \gamma_2 N_1(t) - \int_0^{T_0} F_2(\tau)\, N_1(t-\tau)\, d\tau = 0$$

e in conseguenza delle (76), se $F_2 > 0$,

$$\varepsilon_2 - \gamma_2 N_1(t) - N_1(t)\, e^{-\varepsilon_1 T_0}\, \Gamma_2 > 0$$

$$\varepsilon_2 - \gamma_2 N_1(t) - N_1(t)\, e^{\varepsilon_1 m} \quad \Gamma_2 < 0$$

d'onde

$$\frac{\varepsilon_2}{\gamma_2 + e^{-\varepsilon_1 T_0}\Gamma_2} > N_1(t) > \frac{\varepsilon_2}{\gamma_2 + e^{\varepsilon_1 m}\,\Gamma_2}. \tag{77'}$$

Noi potremo dunque enunciare le proposizioni seguenti:

LEMMA I. – *Se* $\gamma_1 > 0$, *ai massimi e minimi di* N_1 *corrispondono valori di* N_2 *compresi fra i limiti seguenti*

$$\frac{\varepsilon_1}{\gamma_1 + \Gamma_1 \varepsilon^{\varepsilon_2 T_0}} \leq N_2 \leq \frac{\varepsilon_1}{\gamma_1};$$

i segni superiori corrispondono a $\Gamma_1 > 0$, *gl'inferiori a* $\Gamma_1 = 0$.

LEMMA II. – *Se uno almeno dei numeri* γ_2, Γ_2 *è maggiore di zero, ai minimi di* N_2 *inferiori a* K_2 *corrispondono valori di* N_1 *compresi fra i limiti seguenti*

$$\frac{\varepsilon_2}{\gamma_2 + e^{-\varepsilon_1 T_0}\Gamma_2} \geq N_1 \geq \frac{\varepsilon_2}{\gamma_2 + e^{\varepsilon_1 m}\Gamma_2} ;$$

i segni superiori corrispondono a $\Gamma_2 > 0$, *gl'inferiori a* $\Gamma_2 = 0$.

LEMMA III. – *Se* $N_1(t_1)$ *e* $N_2(t_2)$ *sono minimi di* $N_1(t)$ *e* $N_2(t)$ *rispettivamente inferiori a* K_1 *e* K_2 *avremo*

$$(t_1 - T_0 \leq \tau \leq t_1) \quad , \quad N_1(\tau) < p_1 K_1 \quad , \quad p_1 = e^{\left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \frac{\gamma_1+\Gamma_1}{\gamma_1} e^{2\varepsilon_2 T_0}\right)},$$

$$(t_2 - T_0 \leq \tau \leq t_2) \quad , \quad N_2(\tau) < p_2 K_2 \quad , \quad p_2 = e^{\varepsilon_2 T_0} ,$$

supponendo $\gamma_1 > 0$ *e uno almeno dei numeri* γ_2, Γ_2 *maggiore di zero.*

4. Passiamo adesso a dimostrare il Teorema: *Se* $\gamma_1 > 0$ *e uno almeno dei numeri* γ_2 *e* Γ_2 *è maggiore di zero, il valore medio di* N_1, *fra un istante iniziale qualunque e un istante in cui raggiunge un minimo inferiore a* K_1, *tende verso* K_1, *col crescere indefinito del tempo nel quale il minimo viene raggiunto; ed il valore medio di* N_2, *fra un istante iniziale qualunque e un istante nel quale raggiunge un minimo inferiore a* K_2, *tende verso* K_2 *col crescere indefinito del tempo nel quale il minimo viene raggiunto.*

Osserviamo prima di tutto che le due equazioni (K″) e (L″) possono scriversi sotto una forma unica mediante l'equazione:

$$\text{(M)} \qquad (-1)^{i+1} \frac{dN_i}{dt} = N_i(t)\left(\varepsilon_i - \gamma_i N_{i+1}(t) - \int_{t-T_0}^{t} F_i(t-\tau) N_{i+1}(\tau)\, d\tau\right)$$

facendo la convenzione di sostituire i e $i+1$ con i numeri 1, o 2 secondoché essi sono dispari o pari.

Ciò premesso dividiamo ambo i membri della (M) per $N_i(t)$ e integriamo fra il tempo iniziale t_0 e il tempo $t_{i+1} > t_0 + T_0$. Avremo:

$$\text{(78)} \qquad (-1)^{i+1} \log \frac{N_i(t_{i+1})}{N_i(t_0)} = \varepsilon_i (t_{i+1} - t_0) - \gamma_i \int_{t_0}^{t_{i+1}} N_{i+1}(t)\, dt -$$
$$- \int_{t_0}^{t_{i+1}} dt \int_{t-T_0}^{t} F_i(t-\tau) N_{i+1}(\tau)\, d\tau .$$

L'ultimo integrale può scriversi

$$I_i = \int_{t_0}^{t_{i+1}} dt \int_{t_0-T_0}^{t_0} F_i(t-\tau) N_{i+1}(\tau)\, d\tau + \int_{t_0}^{t_{i+1}} dt \int_{t_0}^{t} F_i(t-\tau) N_{i+1}(\tau)\, d\tau .$$

Applicando al secondo di questi integrali il principio di DIRICHLET [27], si avrà

$$\mathrm{I}_i = \int_{t_0}^{t_{i+1}} dt \int_{t_0-\mathrm{T}_0}^{t_0} \mathrm{F}_i(t-\tau)\,\mathrm{N}_{i+1}(\tau)\,d\tau + \int_{t_0}^{t_{i+1}} \mathrm{N}_{i+1}(\tau)\,d\tau \int_{\tau}^{t_{i+1}} \mathrm{F}_i(t-\tau)\,dt =$$

$$= \int_{t_0-\mathrm{T}_0}^{t_0} \mathrm{N}_{i+1}(\tau)\,d\tau \int_{t_0}^{t_{i+1}} \mathrm{F}_i(t-\tau)\,dt + \int_{t_0}^{t_{i+1}} \mathrm{N}_{i+1}(\tau)\,d\tau \int_{0}^{t_{i+1}-\tau} \mathrm{F}_i(\xi)\,d\xi =$$

$$= \int_{t_0-\mathrm{T}_0}^{t_0} \mathrm{N}_{i+1}(\tau)\,d\tau \int_{t_0}^{t_{i+1}} \mathrm{F}_i(t-\tau)\,dt + \int_{t_0}^{t_{i+1}-\mathrm{T}_0} \mathrm{N}_{i+1}(\tau)\,d\tau \int_{0}^{t_{i+1}-\tau} \mathrm{F}_i(\xi)\,d\xi +$$

$$+ \int_{t_{i+1}-\mathrm{T}_0}^{t_{i+1}} \mathrm{N}_{i+1}(\tau)\,d\tau \int_{0}^{t_{i+1}-\tau} \mathrm{F}_i(\xi)\,d\xi\,.$$

Ora osserviamo che nel primo termine e nel terzo termine della espressione precedente abbiamo

$$\int_{t_0}^{t_{i+1}} \mathrm{F}_i(t-\tau)\,dt \leq \Gamma_i \quad , \quad \int_{0}^{t_{i+1}-\tau} \mathrm{F}_i(\xi)\,d\xi \leq \Gamma_i$$

mentre nel secondo termine

$$\int_{0}^{t_{i+1}-\tau} \mathrm{F}_i(\xi)\,d\xi = \int_{0}^{\mathrm{T}_0} \mathrm{F}_i(\xi)\,d\xi = \Gamma_i$$

giacché in questo termine il più piccolo valore di $t_{i+1} - \tau$ é T_0 e $\mathrm{F}_i(\xi)$ è zero per $\xi > \mathrm{T}_0$.

Si avrà dunque

$$\mathrm{I}_i = \Gamma_i \left\{ \theta' \int_{t_0-\mathrm{T}_0}^{t_0} \mathrm{N}_{i+1}(\tau)\,d\tau + \theta'' \int_{t_{i+1}-\mathrm{T}_0}^{t_{i+1}} \mathrm{N}_{i+1}(\tau)\,d\tau + \int_{t_0}^{t_{i+1}-\mathrm{T}_0} \mathrm{N}_{i+1}(\tau)\,d\tau \right\},$$

ove θ' e θ'' denotano numeri compresi fra 0 e 1.

Potremo ancora scrivere

$$\mathrm{I}_i = \Gamma_i \left\{ \theta' \int_{t_0-\mathrm{T}_0}^{t_0} \mathrm{N}_{i+1}(\tau)\,d\tau - (1-\theta'') \int_{t_{i+1}-\mathrm{T}_0}^{t_{i+1}} \mathrm{N}_{i+1}(\tau)\,d\tau + \int_{t_0}^{t_{i+1}} \mathrm{N}_{i+1}(\tau)\,d\tau \right\}. \tag{79}$$

(27) Con «principio di DIRICHLET» si intende qui la nota trasformazione di integrali doppi

$$\int_a^b dx \int_a^x \mathrm{F}(x, y)\,dy = \int_a^b dy \int_y^b \mathrm{F}(x, y)\,dx.$$

Supponiamo che al tempo t_{i+1}, N_{i+1} raggiunga un minimo inferiore a K_{i+1}, in virtù del Lemma III, sarà

$$\int_{t_{i+1}-T_0}^{t_{i+1}} N_{i+1}(\tau)\, d\tau < p_{i+1} K_{i+1} T_0 .$$

Denotiamo poi con M_{i+1} il massimo valore raggiunto da $N_{i+1}(\tau)$ nell'intervallo di tempo $(t_0 - T_0, t_0)$; esso sarà un valore finito indipendente da t_{i+1}, e avremo

$$\int_{t_0-T_0}^{t_0} N_{i+1}(\tau)\, d\tau < M_{i+1} T_0 .$$

Se dunque θ''' e θ^{IV} sono due numeri rispettivamente compresi fra o e θ', e o e $1 - \theta''$ l'equazione (79) potrà sostituirsi con

$$I_i = \Gamma_i \left\{ \theta''' M_{i+1} T_0 - \theta^{IV} p_{i+1} K_{i+1} T_0 + \int_{t_0}^{t_{i+1}} N_{i+1}(\tau)\, d\tau \right\}.$$

Ponendo nella (78) quest'ultimo valore trovato per l'integrale I_i si avrà

$$(-1)^{i+1} \log \frac{N_i(t_{i+1})}{N_i(t_0)} = \varepsilon_i (t_{i+1} - t_0) - (\gamma_i + \Gamma_i) \int_{t_0}^{t_{i+1}} N_{i+1}(\tau)\, d\tau -$$
$$- T_0 \Gamma_i \{ \theta''' M_{i+1} - \theta^{IV} p_{i+1} K_{i+1} \},$$

e quindi

$$\frac{1}{t_{i+1} - t_0} \int_{t_0}^{t_{i+1}} N_{i+1}(\tau)\, d\tau = \frac{\varepsilon_i}{\gamma_i + \Gamma_i} + \frac{1}{(\gamma_i + \Gamma_i)(t_{i+1} - t_0)} \left\{ (-1)^i \log \frac{N_i(t_{i+1})}{N_i(t_0)} - \right.$$
$$\left. - T_0 \Gamma_i (\theta''' M_{i+1} - \theta^{IV} p_{i+1} K_{i+1}) \right\}.$$

Consideriamo ora minimi inferiori a K_{i+1} che si hanno in tempi sempre più lontani, ossia facciamo crescere indefinitamente t_{i+1}.

In virtù dei Lemma I e II, $N_i(t_{i+1})$ si manterrà compreso fra due limiti positivi indipendenti da t_{i+1} onde $\log [N_i(t_{i+1})/N_i(t_0)]$ si manterrà sempre inferiore ad un limite finito, e la equazione precedente ci darà

$$\lim_{t_{i+1}=\infty} \frac{1}{t_{i+1} - t_0} \int_{t_0}^{t_{i+1}} N_{i+1}(\tau)\, d\tau = \frac{\varepsilon_i}{\gamma_i + \Gamma_i} = K_{i+1}$$

il che dimostra il teorema.

5. Le equazioni che regolano le fluttuazioni biologiche ereditarie sono le (IV) e (V) del § 1, n. 2, le quali si possono ricavare dalle (K) e (L) facendo rispettivamente $F_1 = 0$, e $\gamma_2 = 0$, mentre si mantengono diverse da zero e

positive γ_1 e F_2, quindi anche Γ_2. Saranno dunque soddisfatte nel caso ereditario le condizioni di validità del teorema precedente.

Noi potremo intendere per *valore medio assintotico* o *media assintotica* del numero N di individui di una specie oscillante attorno ad un valore costante K, corrispondente ad uno stato stazionario, il limite della media di N calcolata per un periodo di tempo compreso fra un istante iniziale qualunque ed un istante di minimo di N inferiore a K, quando il suddetto periodo di tempo cresce indefinitamente (cfr. 2ª parte, § 3).

Le medie assintotiche dei numeri N_1 e N_2 d'individui delle due specie saranno perciò, in virtù del teorema enunciato, K_1 e K_2.

Riassumendo dunque ciò che è stato ottenuto nel paragrafo precedente e ciò che è stato ora ottenuto, avremo che le tre leggi fondamentali delle fluttuazioni assumeranno, nel caso ereditario, la forma seguente:

1ª (Legge delle fluttuazioni). – *I numeri di individui delle due specie oscillano indefinitamente attorno ai valori corrispondenti allo stato stazionario, passando, col crescere indefinito del tempo, per infiniti massimi e minimi.*

2ª (Legge della conservazione delle medie). – *I valori medi assintotici dei numeri di individui delle due specie sono indipendenti dallo stato iniziale e coincidono con i valori corrispondenti allo stato stazionario.*

3ª (Legge della perturbazione delle medie). – *Se si cerca di distruggere uniformemente e proporzionalmente al loro numero gl'individui delle due specie, cresce la media assintotica del numero d'individui della specie mangiata e diminuisce quella del numero d'individui della specie mangiante.*

Infatti le medie assintotiche dei numeri d'individui delle due specie coincidendo con i valori corrispondenti allo stato stazionario ε_2/Γ_2 e ε_1/γ_1 (giacché $\gamma_2 = \Gamma_1 = 0$) sono indipendenti dalle condizioni iniziali. Inoltre distruggere uniformemente e proporzionalmente al loro numero gl'individui delle due specie equivale ad aumentare ε_2 ed a diminuire ε_1 lasciando inalterati Γ_2 e γ_1, quindi il primo valore medio cresce ed il secondo diminuisce.

§ 3. – Non periodicità delle piccole fluttuazioni nel caso ereditario.

1. Nel presente paragrafo mi propongo di dimostrare che *nel caso ereditario non possono sussistere piccole fluttuazioni periodiche intorno allo stato stazionario.*

Riprendiamo perciò le equazioni fondamentali sotto la forma (K'), (L') (cfr. § 2, n. 2), cioè

$$\text{(K')} \qquad \frac{dN_1}{dt} = N_1(t)\left(\varepsilon_1 - \gamma_1 N_2(t) - \int_0^{T_0} F_1(\tau)\, N_2(t-\tau)\, d\tau\right)$$

$$\text{(L')} \qquad \frac{dN_2}{dt} = N_2(t)\left(-\varepsilon_2 + \gamma_2 N_1(t) + \int_0^{T_0} F_2(\tau)\, N_1(t-\tau)\, d\tau\right).$$

Lo stato stazionario corrisponde a

$$N_1 = K_1 = \frac{\varepsilon_2}{\gamma_2 + \Gamma_2} \quad , \quad N_2 = K_2 = \frac{\varepsilon_1}{\gamma_1 + \Gamma_1}$$

$$\Gamma_1 = \int_0^{T_0} F_1(\tau)\, d\tau \quad , \quad \Gamma_2 = \int_0^{T_0} F_2(\tau)\, d\tau$$

(cfr. formule 70 e teorema V del § 1).

Poniamo

$$N_1 = K_1 + n_1 \quad , \quad N_2 = K_2 + n_2 \, .$$

Le (K′) e (L′) assumeranno la forma

$$\frac{dn_1}{dt} = -(K_1 + n_1)\left(\gamma_1 n_2(t) + \int_0^{T_0} F_1(\tau)\, n_2(t-\tau)\, d\tau\right)$$

$$\frac{dn_2}{dt} = (K_2 + n_2)\left(\gamma_2 n_1(t) + \int_0^{T_0} F_2(\tau)\, n_1(t-\tau)\, d\tau\right).$$

Scrivasi

$$\frac{n_1}{K_1} = \nu_1 \quad , \quad \frac{n_2}{K_2} = \nu_2 \quad , \quad \gamma_1 K_2 = \alpha_1 \quad , \quad \gamma_2 K_1 = \alpha_2$$

$$K_2 F_1(t) = \Phi_2(t) \quad , \quad K_1 F_2(t) = \Phi_2(t).$$

Se i termini di secondo grado in ν_1 e ν_2 sono trascurabili le equazioni precedenti divengono

$$\text{(80)} \qquad \frac{d\nu_1}{dt} + \alpha_1 \nu_2(t) + \int_0^{T_0} \Phi_1(\tau)\, \nu_2(t-\tau)\, d\tau = 0$$

$$\text{(80′)} \qquad \frac{d\nu_2}{dt} - \alpha_2 \nu_1(t) - \int_0^{T_0} \Phi_2(\tau)\, \nu_1(t-\tau)\, d\tau = 0 \, .$$

2. Supponiamo ora che le equazioni precedenti ammettano soluzioni periodiche rispetto al tempo aventi lo stesso periodo. Sviluppandole in serie di FOURIER, potremo scrivere (28)

$$\nu_1 = \sum_1^{\infty}{}_m (a'_m \operatorname{sen} m\lambda t + b'_m \cos m\lambda t)$$

$$\nu_2 = \sum_1^{\infty}{}_m (a''_m \operatorname{sen} m\lambda t + b''_m \cos m\lambda t) \, .$$

Ammettendo di potere applicare a queste serie la derivazione termine a termine, eseguendola e sostituendo nelle precedenti equazioni si otterrà

$$\sum_1^{\infty}{}_m \left\{ \left[a'_m m\lambda + \alpha_1 b''_m - a''_m \int_0^{T_0} \Phi_1(\tau) \operatorname{sen} m\lambda\tau\, d\tau + \right.\right.$$

(28) I termini corrispondenti a $m = 0$ debbono mancare.

$$+ b''_m \int_0^{T_0} \Phi_1(\tau) \cos m\lambda\tau \, d\tau \Big] \cos m\lambda t +$$

$$+ \Big[- b'_m m\lambda + \alpha_1 a''_m + a''_m \int_0^{T_0} \Phi_1(\tau) \cos m\lambda\tau \, d\tau +$$

$$+ b''_m \int_0^{T_0} \Phi_1(\tau) \operatorname{sen} m\lambda\tau \, d\tau \Big] \operatorname{sen} m\lambda t \Big\} = 0$$

$$\sum_1^\infty {}_m \Big\{ \Big[a''_m m\lambda - \alpha_2 b'_m + a'_m \int_0^{T_0} \Phi_2(\tau) \operatorname{sen} m\lambda\tau \, d\tau -$$

$$- b'_m \int_0^{T_0} \Phi_2(\tau) \cos m\lambda\tau \, d\tau \Big] \cos m\lambda t +$$

$$+ \Big[- b''_m m\lambda - \alpha_2 a'_m - a'_m \int_0^{T_0} \Phi_2(\tau) \cos m\lambda\tau \, d\tau -$$

$$- b'_m \int_0^{T_0} \Phi_2(\tau) \operatorname{sen} m\lambda\tau \, d\tau \Big] \operatorname{sen} m\lambda t \Big\} = 0 \, .$$

Da queste equazioni si ricava

$$\begin{array}{lllll}
a'_m m\lambda & & - a''_m M_{11}^{(m)} & + b''_m (\alpha_1 + M_{12}^{(m)}) & = 0 \, , \\
& - b'_m m\lambda & + a''_m (\alpha_1 + M_{12}^{(m)}) & + b''_m M_{11}^{(m)} & = 0 \, , \\
a'_m M_{21}^{(m)} & - b'_m (\alpha_2 + M_{22}^{(m)}) & + a''_m m\lambda & & = 0 \, , \\
- a'_m (\alpha_2 + M_{22}^{(m)}) & - b'_m M_{21}^{(m)} & & - b''_m m\lambda & = 0 \, ,
\end{array}$$

ove si è posto

$$M_{11}^{(m)} = \int_0^{T_0} \Phi_1(\tau) \operatorname{sen} m\lambda\tau \, d\tau \quad , \quad M_{12}^{(m)} = \int_0^{T_0} \Phi_1(\tau) \cos m\lambda\tau \, d\tau$$

$$M_{21}^{(m)} = \int_0^{T_0} \Phi_2(\tau) \operatorname{sen} m\lambda\tau \, d\tau \quad , \quad M_{22}^{(m)} = \int_0^{T_0} \Phi_2(\tau) \cos m\lambda\tau \, d\tau \, .$$

Eliminando fra le quattro equazioni lineari precedenti a'_m, b'_m, a''_m, b''_m, si trova, se queste non sono tutte eguali a zero,

$$(\mathrm{M}) \quad \begin{vmatrix}
m\lambda \, , & 0 \, , & - M_{11}^{(m)} \, , & \alpha_1 + M_{12}^{(m)} \\
0 \, , & - m\lambda \, , & \alpha_1 + M_{12}^{(m)} \, , & M_{11}^{(m)} \\
M_{21}^{(m)} \, , & -(\alpha_2 + M_{22}^{(m)}) \, , & m\lambda \, , & 0 \\
-(\alpha_2 + M_{22}^{(m)}) \, , & - M_{21}^{(m)} \, , & 0 \, , & - m\lambda
\end{vmatrix} = 0 \, .$$

e, sviluppando questo determinante, si ottiene

$$\text{(M')} \qquad [m^2\lambda^2 - (\alpha_1 + M_{12}^{(m)})(\alpha_2 + M_{22}^{(m)})]^2 + M_{11}^2(\alpha_2 + M_{22}^{(m)})^2 +$$
$$+ M_{21}^2(\alpha_1 + M_{12}^{(m)})^2 + M_{11}^{(m)^2} M_{21}^{(m)^2} + 2\, m^2\lambda^2 M_{11}^{(m)} M_{21}^{(m)} = 0\,.$$

3. Ora, con un'analisi che abbiamo già impiegata in altra occasione per questioni ereditarie (29), si può riconoscere che $M_{11}^{(m)}$ e $M_{21}^{(m)}$ sono quantità positive, se $\Phi_1(\tau)$ e $\Phi_2(\tau)$ sono funzioni positive decrescenti per $0 \leq \tau < T_0$.

Supponiamo infatti

$$\frac{2(h-1)\pi}{m\lambda} < T_0 \leq \frac{2h\pi}{m\lambda}$$

ove h è un numero intero e positivo, e poniamo $2\pi/m\lambda = \omega$. Avremo

$$\int_0^\omega \Phi_i(\tau) \operatorname{sen} m\lambda\tau\, d\tau > 0 \quad , \quad \int_\omega^{2\omega} \Phi_i(\tau) \operatorname{sen} m\lambda\tau\, d\tau > 0, \cdots$$
$$\cdots \int_{(h-1)\omega}^{T_0} \Phi_i(\tau) \operatorname{sen} m\lambda\tau\, d\tau > 0\,,$$

essendo $i = 1, 2$. Da qui segue:

$$M_{11}^{(m)} = \int_0^{T_0} \Phi_1(\tau) \operatorname{sen} m\lambda\tau\, d\tau > 0 \quad , \quad M_{21}^{(m)} = \int_0^{T_0} \Phi_2(\tau) \operatorname{sen} m\lambda\tau\, d\tau > 0\,.$$

Basterà dunque che sia soddisfatta, per $0 \leq \tau < T_0$, una delle tre condizioni seguenti

(VI) $\Phi_1(\tau) > 0$ e decrescente, $\Phi_2(\tau) > 0$ e decrescente

(VII) $\Phi_1(\tau) = 0$, $\Phi_2(\tau) > 0$ e decrescente, $\alpha_1 \lesseqgtr 0$

(VIII) $\Phi_2(\tau) = 0$, $\Phi_1(\tau) > 0$ e decrescente, $\alpha_2 \lesseqgtr 0$,

perché il primo membro della equazione (M'), ossia il determinante che costituisce il primo membro della (M), sia positivo. In questi tre casi le equazioni (M) e (M') non possono essere soddisfatte, ed in conseguenza a'_m, b'_m, a''_m, b''_m, debbono esser tutte nulle, ossia soluzioni periodiche non possono sussistere.

Le equazioni che regolano le fluttuazioni biologiche sono le equazioni (IV) e (V) del § 1, le quali si possono ricavare dalle (K') e (L') (vedi il n. 2 del presente paragrafo) facendo $F_1 = 0$, $\gamma_2 = 0$, mentre $\gamma_1 > 0$, $\varepsilon_1 > 0$, e, se si ammette che l'azione ereditaria vada continuamente decrescendo di intensità, $F_2 > 0$ e decrescente.

È dunque verificata la condizione precedente (VII) che *esclude l'esistenza nel caso ereditario di piccole fluttuazioni periodiche.*

(29) *Vibrazioni elastiche nel caso delle eredità*, « Rend. della R. Acc. dei Lincei », vol. XXI, serie 5ª, 2° sem., fasc. 1°, luglio 1912.

4. Noi possiamo dimostrare il teorema per altra via senza ricorrere allo sviluppo in serie di FOURIER.

Dalle equazioni (80) e (80′) segue

$$\left(\alpha_2 \nu_1(t) + \int_0^{T_0} \Phi_2(\tau)\, \nu_1(t-\tau)\, d\tau\right) \frac{d\nu_1}{dt} + \left(\alpha_1 \nu_2(t) + \int_0^{T_0} \Phi_1(\tau)\, \nu_2(t-\tau)\, d\tau\right) \frac{d\nu_2}{dt} = 0,$$

equazione che si può scrivere

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\alpha_2 \nu_1^2(t) + \nu_1(t)\int_0^{T_0} \Phi_2(\tau)\, \nu_1(t-\tau)\, d\tau + \right. \\ &\qquad \left. + \frac{1}{2}\alpha_1 \nu_2^2(t) + \nu_2(t)\int_0^{T_0} \Phi_1(\tau)\, \nu_2(t-\tau)\, d\tau\right) = \\ &= \nu_1(t)\int_0^{T_0} \Phi_2(\tau) \frac{d}{dt} \nu_1(t-\tau)\, d\tau + \nu_2(t)\int_0^{T_0} \Phi_1(\tau) \frac{d}{dt}\nu_2(t-\tau)\, dt = \\ &= -\nu_1(t)\int_0^{T_0} \Phi_2(\tau) \frac{d}{d\tau}[\nu_1(t-\tau) - \nu_1(t)]\, d\tau - \\ &\qquad - \nu_2(t)\int_0^{T_0} \Phi_1(\tau) \frac{d}{d\tau}[\nu_2(t-\tau) - \nu_2(t)]\, d\tau . \end{aligned}$$

Mediante una integrazione per parti, tenendo conto che (cfr. § 1, n. 3)

$$\Phi_2(T_0) = \Phi_1(T_0) = 0,$$

l'ultimo membro diverrà

$$\nu_1(t)\int_0^{T_0} \Phi_2'(\tau)\,[\nu_1(t-\tau) - \nu_1(t)]\, d\tau + \nu_2(t)\int_0^{T_0} \Phi_1'(\tau)\,[\nu_2(t-\tau) - \nu_2(t)]\, d\tau,$$

onde l'equazione precedente si scriverà

$$(81) \quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\alpha_2 \nu_1^2(t) + \nu_1(t)\int_0^{T_0} \Phi_2(\tau)\, \nu_1(t-\tau)\, d\tau + \right. \\ &\qquad \left. + \frac{1}{2}\alpha_1 \nu_2^2(t) + \nu_2(t)\int_0^{T_0} \Phi_1(\tau)\, \nu_2(t-\tau)\, d\tau\right) \\ &= \int_0^{T_0} \Phi_2'(\tau)\,[\nu_1(t)\, \nu_1(t-\tau) - \nu_1^2(t)]\, d\tau + \\ &\qquad + \int_0^{T_0} \Phi_1'(\tau)\,[\nu_2(t)\, \nu_2(t-\tau) - \nu_2^2(t)]\, d\tau. \end{aligned} \right.$$

Osserviamo ora che

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\int_0^{T_0} \Phi_2(\tau)\, \nu_1^2(t-\tau)\, d\tau + \int_0^{T_0} \Phi_1(\tau)\, \nu_2^2(t-\tau)\, d\tau\right) =$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^{T_0} \Phi_2(\tau)\frac{d}{d\tau}[\nu_1^2(t-\tau)-\nu_1^2(t)]\,d\tau -$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^{T_0} \Phi_1(\tau)\frac{d}{d\tau}[\nu_2^2(t-\tau)-\nu_2^2(t)]\,d\tau =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{T_0} \Phi'_2(\tau)[\nu_1^2(t-\tau)-\nu_1^2(t)]\,d\tau +$$

$$+ \frac{1}{2}\int_0^{T_0} \Phi'_1(\tau)[\nu_2^2(t-\tau)-\nu_2^2(t)]\,d\tau\,.$$

Sottraendo membro a membro l'equazione precedente dall'equazione (81), si trova

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{\alpha_2\nu_1^2 + \alpha_1\nu_2^2 + \int_0^{T_0}[\Phi_2(\tau)\,\nu_1(t-\tau)\,(2\,\nu_1(t)-\nu_1(t-\tau)) + \right.$$

$$\left. + \Phi_1(\tau)\,\nu_2(t-\tau)\,(2\,\nu_2(t)-\nu_2(t-\tau))]\,d\tau\right\} =$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^{T_0}[\Phi'_2(\tau)\,(\nu_1(t-\tau)-\nu_1(t))^2 + \Phi'_1(\tau)\,(\nu_2(t-\tau)-\nu_2(t))^2]\,d\tau\,.$$

Poniamo

$$A_1 = \int_0^{T_0}\Phi_1(\tau)\,d\tau \quad , \quad A_2 = \int_0^{T_0}\Phi_2(\tau)\,d\tau\,,$$

$$H = (\alpha_2 + A_2)\,\nu_1^2(t) + (\alpha_1 + A_1)\,\nu_2^2(t) - \int_0^{T_0}[\Phi_2(\tau)\,(\nu_1(t)-\nu_1(t-\tau))^2 +$$

$$+ \Phi_1(\tau)\,(\nu_2(t)-\nu_2(t-\tau))^2]\,d\tau\,.$$

L'equazione precedente potrà scriversi

$$\frac{dH}{dt} = -\int_0^{T_0}[\Phi'_2(\tau)\,(\nu_1(t)-\nu_1(t-\tau))^2 + \Phi'_1(\tau)\,(\nu_2(t)-\nu_2(t-\tau))^2]\,d\tau\,.$$

Se una delle funzioni Φ_1, Φ_2 è decrescente e l'altra è pure decrescente o nulla, il secondo membro dell'ultima equazione sarà positivo, quindi H *sarà una funzione sempre crescente.* Ma se ν_1 e ν_2 fossero funzioni periodiche collo stesso periodo anche H dovrebbe essere periodica e quindi non potrebbe crescere sempre; dunque *resta esclusa la periodicità di ν_1 e ν_2 collo stesso periodo,* e perciò viene dimostrata la proposizione enunciata al principio di questo paragrafo.

5. Applicando i risultati dei teoremi VI, VII, VIII del § 1, oppure direttamente applicando alle equazioni (80) e (80') i procedimenti usati per

dimostrare quei teoremi, e tenendo inoltre conto di quanto adesso è stato ottenuto, si può giungere al

TEOREMA I. – *Gli integrali* $\nu_1(t)$ *e* $\nu_2(t)$ *delle equazioni* (80) *e* (80'), *col crescere indefinito del tempo, oscillano attorno al valore zero attraversandolo infinite volte e passando per infiniti massimi e minimi; nondimeno se una delle due funzioni* Φ_1 *e* Φ_2 *è decrescente e l'altra è pure decrescente o nulla, la espressione* H *formata con* ν_1 *e* ν_2 *varierà sempre nello stesso senso, cioè crescerà continuamente.*

Abbiamo poi l'altra proposizione:

TEOREMA II. – *Se in un istante* H *è positivo le oscillazioni di* ν_1 *e* ν_2 *non potranno entrambe smorzarsi.*

Infatti se $\nu_1(t)$ e $\nu_2(t)$ tendessero a zero col crecere indefinito di t, anche H dovrebbe tendere a zero, mentre esso deve continuamente crescere a partire dal valore positivo assunto.

INDICE

APPENDICE (*)

1.

Per calcolare il periodo poniamo

$$n_1 = 1 + v_1 \quad , \quad n_2 = 1 + v_2 \, .$$

Le equazioni (18) diverranno

$$v_1^2\left(\frac{1}{1\cdot 2} - \frac{2\,v_1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{3\,v_1^2}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} - \cdots\right) = 1 - e x^{1/\varepsilon_2}$$

$$v_2^2\left(\frac{1}{1\cdot 2} - \frac{2\,v_2}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{3\,v_2^2}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} - \cdots\right) = 1 - e\left(\frac{x}{C}\right)^{-1/\varepsilon_1}$$

onde scrivendo

$$S(v) = \frac{1}{1\cdot 2} - \frac{2\,v}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{3\,v^2}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} - \cdots$$

sarà, prendendo convenientemente i segni dei radicali,

$$n_1 - 1 = v_1 = \sqrt{1 - e x^{1/\varepsilon_2}}\;\frac{1}{\sqrt{S(v_1)}}$$

$$n_2 - 1 = v_2 = \sqrt{1 - e\left(\frac{x}{C}\right)^{-1/\varepsilon_1}}\;\frac{1}{\sqrt{S(v_2)}}$$

e ciascuno dei 4 integrali si scriverà

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\varepsilon_1\,\varepsilon_2\,x\sqrt{(1 - e x^{1/\varepsilon_2})\left(1 - e\left(\frac{x}{C}\right)^{-1/\varepsilon_1}\right)}}\sqrt{S(v_1)\,S(v_2)}$$

ove si è posto

$$x_1 = Ce^{\varepsilon_1} \quad , \quad x_2 = e^{-\varepsilon_2}$$

ossia

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\varepsilon_1\,\varepsilon_2\,x\sqrt{\left(1 - \left(\frac{x}{x_2}\right)^{1/\varepsilon_2}\right)\left(1 - \left(\frac{x}{x_1}\right)^{-1/\varepsilon_1}\right)}}\sqrt{S(v_1)\,S(v_2)}\, .$$

Ma come è noto

$$1 - \left(\frac{x}{x_2}\right)^{1/\varepsilon_2} = \sum_{1}^{\infty}{}_m (-1)^{m-1}\left(\frac{1}{\varepsilon_2}\right)_m\left(1 - \frac{x}{x_2}\right)^m$$

$$1 - \left(\frac{x}{x_1}\right)^{-1/\varepsilon_1} = \sum_{1}^{\infty}{}_m (-1)^{m-1}\left(-\frac{1}{\varepsilon_1}\right)_m\left(1 - \frac{x}{x_1}\right)^m$$

(*) Cfr. la nota con asterisco in corrispondenza al titolo della precedente Memoria. Per i nn. 1, 2, 3, 4 di questa appendice, cfr. rispettivamente le note con asterisco contenute nel n. 6, § 2, parte I; nel n. 8, § 2, parte I; nel n. 3, § 1, parte III; nel n. 8, § 1, parte III. [N.d.R.].

ove

$$\left(\frac{1}{\varepsilon_2}\right)_m \quad \text{e} \quad \left(\frac{-1}{\varepsilon_1}\right)_m$$

denotano i coefficienti binomiali.

Avremo dunque che l'integrale precedente potrà scriversi

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\sqrt{S(v_1)\,S(v_2)}\,dx}{\varepsilon_1\varepsilon_2 x \sqrt{\left\{\sum_1^\infty {}_m (-1)^{m-1}\left(\frac{1}{\varepsilon_2}\right)_m\left(1-\frac{x}{x_2}\right)^m\right\}\left\{\sum_1^\infty {}_m (-1)^{m-1}\left(-\frac{1}{\varepsilon_1}\right)_m\left(1-\frac{x}{x_1}\right)^m\right\}}}\,.$$

Supponiamo che le fluttuazioni siano piccole in modo da poter trascurare in $S(v_1)$, $S(v_2)$ e nelle serie che figurano al denominatore della formula precedente tutti i termini eccettuati i primi. L'integrale precedente diverrà

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{2\varepsilon_1\varepsilon_2 x\sqrt{\frac{1}{\varepsilon_1\varepsilon_2}\left(1-\frac{x}{x_2}\right)\left(\frac{x}{x_1}-1\right)}} = \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}}\int_{x_1}^{x_2}\frac{dx}{x\sqrt{\left(1-\frac{x}{x_2}\right)\left(\frac{x}{x_1}-1\right)}}$$

e coi noti metodi del calcolo integrale si trasformerà in

$$\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}}\int_0^\infty \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{2\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}}\,.$$

Dunque approssimativamente i quattro integrali estesi agli archi R_2S_1, S_1S_2, S_2R_1, R_1R_2 sono uguali e quindi sarà

$$T = 4\frac{\pi}{2\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}}\,.$$

2.

Noi possiamo seguire ancora meglio un cambiamento di ciclo del genere considerato precedentemente se consideriamo il caso di piccole fluttuazioni giovandoci della soluzione approssimata (22) e supponendo inoltre che le variazioni di ε_1, ε_2, γ_1, γ_2 siano piccole.

Dalle (22) segue, chiamando con N'_1, N'_2 i valori variati di N_1 e N_2 quando variano ε_1, ε_2, γ_1, γ_2, E, α di $\delta\varepsilon_1$, $\delta\varepsilon_2$, $\delta\gamma_1$, $\delta\gamma_2$, δE, $\delta\alpha$ e tenendo conto solo delle parti del 1° ordine,

$$(22_1)\qquad N'_1 = \frac{\varepsilon_2}{\gamma_2} + \frac{\gamma_1}{\sqrt{\varepsilon_1}}E\cos\Theta' + \frac{1}{\gamma_2}\delta\varepsilon_2 - \frac{\varepsilon_2}{\gamma_2^2}\delta\gamma_2 +$$
$$+\left(-\frac{1}{2}\frac{\gamma_1}{\varepsilon_1^{3/2}}E\,\delta\varepsilon_1 + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_1}}E\,\delta\gamma_1 + \frac{\gamma_1}{\sqrt{\varepsilon_1}}\delta E\right)\cos\Theta' - \frac{\gamma_1}{\sqrt{\varepsilon_1}}E\,\delta\alpha\cdot\operatorname{sen}\Theta',$$

$$(22_2)\qquad N'_2 = \frac{\varepsilon_1}{\gamma_1} + \frac{\gamma_2}{\sqrt{\varepsilon_2}}E\operatorname{sen}\Theta' + \frac{1}{\gamma_1}\delta\varepsilon_1 - \frac{\varepsilon_1}{\gamma_1^2}\delta\gamma_1 +$$
$$+\left(-\frac{1}{2}\frac{\gamma_2}{\varepsilon_2^{3/2}}E\,\delta\varepsilon_2 + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_2}}E\,\delta\gamma_2 + \frac{\gamma_2}{\sqrt{\varepsilon_2}}\delta E\right)\operatorname{sen}\Theta' + \frac{\gamma_2}{\sqrt{\varepsilon_2}}E\,\delta\alpha\cdot\cos\Theta'$$

ove

$$\Theta' = \sqrt{(\varepsilon_1 + \delta\varepsilon_1)(\varepsilon_2 + \delta\varepsilon_2)}\; t + \alpha .$$

Non abbiamo potuto evidentemente calcolare $\cos\Theta'$ e $\operatorname{sen}\Theta'$ prendendo le parti del 1° ordine nelle $\delta\varepsilon_1$, $\delta\varepsilon_2$ perché t può assumere valori infinitamente grandi. Supponiamo ora che il cambiamento nelle $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots$ abbia luogo al tempo 0 e che in questo istante N'_1 e N'_2 siano eguali a

$$N_1 = \frac{\varepsilon_2}{\gamma_2} + \frac{\gamma_1}{\sqrt{\varepsilon_1}} E \cos\Theta \quad , \quad N_2 = \frac{\varepsilon_1}{\gamma_1} + \frac{\gamma_2}{\sqrt{\varepsilon_2}} E \operatorname{sen}\Theta$$

ove

$$\Theta = \sqrt{\varepsilon_1 \varepsilon_2}\; t + \alpha .$$

Osservando che per $t = 0$ si ha $\Theta = \Theta' = \alpha$, avremo le equazioni

$$\frac{\gamma_2}{\sqrt{\varepsilon_2}} (\operatorname{sen}\alpha\, \delta E + \cos\alpha\, E\, \delta\alpha) = -\frac{1}{\gamma_1} \delta\varepsilon_1 + \frac{\gamma_2}{2\varepsilon_2^{3/2}} E \operatorname{sen}\alpha\, \delta\varepsilon_2 + \frac{\varepsilon_1}{\gamma_1^2} \delta\gamma_1 - \frac{E \operatorname{sen}\alpha}{\sqrt{\varepsilon_2}} \delta\gamma_2 ,$$

$$\frac{\gamma_1}{\sqrt{\varepsilon_1}} (\cos\alpha\, \delta E - \operatorname{sen}\alpha\, E\, \delta\alpha) = -\frac{1}{\gamma_2} \delta\varepsilon_2 + \frac{\gamma_1}{2\varepsilon_1^{3/2}} E \cos\alpha\, \delta\varepsilon_1 + \frac{\varepsilon_2}{\gamma_2^2} \delta\gamma_2 - \frac{E \cos\alpha}{\sqrt{\varepsilon_1}} \delta\gamma_1 ,$$

da cui si ricava

$$(22_3) \qquad \delta E = \left(\frac{1}{2}\frac{E}{\varepsilon_1} - M_1 \operatorname{sen}\alpha\right)\delta\varepsilon_1 + \left(\frac{1}{2}\frac{E}{\varepsilon_2} - M_2 \cos\alpha\right)\delta\varepsilon_2 + \\ + \left(-\frac{E}{\gamma_1} + P_1 \operatorname{sen}\alpha\right)\delta\gamma_1 + \left(+\frac{E}{\gamma_2} + P_2 \cos\alpha\right)\delta\gamma_2$$

$$(22_4) \qquad E\,\delta\alpha = -M_1 \cos\alpha\, \delta\varepsilon_1 + M_2 \operatorname{sen}\alpha\, \delta\varepsilon_2 + P_1 \cos\alpha\, \delta\gamma_1 - P_2 \operatorname{sen}\alpha\, \delta\gamma_2$$

ove

$$M_1 = \frac{\sqrt{\varepsilon_2}}{\gamma_1\gamma_2} + \frac{1}{2}\frac{E}{\varepsilon_1}\operatorname{sen}\alpha \quad ; \quad M_2 = \frac{\sqrt{\varepsilon_1}}{\gamma_1\gamma_2} + \frac{1}{2}\frac{E}{\varepsilon_2}\cos\alpha ;$$

$$P_1 = \left(\frac{\sqrt{\varepsilon_2}}{\gamma_1\gamma_2} + \frac{E}{\varepsilon_1}\operatorname{sen}\alpha\right)\frac{\varepsilon_1}{\gamma_1} \quad ; \quad P_2 = \left(\frac{\sqrt{\varepsilon_1}}{\gamma_1\gamma_2} + \frac{E}{\varepsilon_2}\cos\alpha\right)\frac{\varepsilon_2}{\gamma_2} .$$

Sostituendo i valori (22_3), (22_4) nelle (22_1), (22_2) otteniamo i valori perturbati dei numeri di individui delle due specie se immaginiamo che nell'istante 0 principi e poi si conservi la perturbazione. Se prendiamo le medie di N'_1, N'_2 durante un periodo, spariscono evidentemente tutti i termini che contengono $\cos\Theta'$ e $\operatorname{sen}\Theta'$ e restano come valori medi

$$\frac{\varepsilon_2}{\gamma_2} + \frac{\delta\varepsilon_2}{\gamma_2} - \frac{\varepsilon_2\,\delta\gamma_2}{\gamma_2^2} \quad , \quad \frac{\varepsilon_1}{\gamma_1} + \frac{\delta\varepsilon_1}{\gamma_1} - \frac{\varepsilon_1\,\delta\gamma_1}{\gamma_1^2}$$

espressioni che conducono alle stesse leggi trovate precedentemente.

3.

Il processo di variazione dei numeri di individui delle specie gode di una particolare *invertibilità* che è opportuno mettere in evidenza.

Cambiamo nelle equazioni (B) t in $2\,t_0 - t$. Ponendo

$$(50^*) \qquad N_r(2\,t_0 - t) = N'_r(t)$$

otteremo le equazioni

$$\beta_r \frac{dN'_r}{dt} = \left(-\varepsilon_r \beta_r + \sum_1^n {}_s a_{rs} N'_s\right) N'_r .$$

Queste equazioni corrispondono alle variazioni di un'associazione biologica per la quale le ε_r sono cambiate in $-\varepsilon_r$ e le a_{rs} in $-a_{rs}$ (cfr. 1ª parte, § 4, n. 7). Essa potrà chiamarsi *l'associazione biologica coniugata* della primitiva.

Il teorema fondamentale sulle associazioni biologiche coniugate è il seguente:

Al tempo t_0 i due sistemi coniugati coincidono, cioè

$$N_1(t_0) = N'_1(t_0) \quad , \quad N_2(t_0) = N'_2(t_0), \cdots, N_n(t_0) = N'_n(t_0);$$

ed inoltre

$$N_r(t_0 - t) = N'_r(t_0 + t) \quad , \quad N_r(t_0 + t) = N'_r(t_0 - t),$$

ossia uno dei due sistemi coniugati assume col progredire del tempo tutti i valori presi dall'altro nei tempi anteriori ed in ordine inverso.

Ciò si dimostra immediatamente ponendo nella (50*) $t = t_0$, oppure $t_0 + t$ in luogo di t, oppure $t_0 - t$ in luogo di t.

Possiamo dunque dire che le *variazioni dei due sistemi coniugati sono simmetriche rispetto al tempo t_0* o anche che *l'una si specchia nell'altra.*

Un altro teorema che si può enunciare e la cui dimostrazione è pure immediata è il seguente: *Il sistema coniugato di un sistema conservativo è conservativo.*

(Per un'associazione dissipativa se prenderemo in esame il sistema coniugato questo non risulterà né conservativo, né dissipativo in quanto che la corrispondente forma fondamentale sarà negativa).

La considerazione dei sistemi coniugati ci dà modo di dimostrare con altre parole (senza alterare l'essenza del procedimento) la seconda parte della proposizione del n. 3 (§ 1 della 3ª parte).

Ammettiamo infatti che, partendo da uno stato iniziale in cui tutte le $N_1, N_2, \cdots, N_n$ sono finite e diverse da zero (chiamo i loro valori $C_1, C_2, \cdots, C_n$), un'associazione conservativa possa giungere, dopo un tempo finito T, ad uno stato in cui la specie h sia esaurita, vale a dire in cui $N_h = 0$.

Prendiamo l'associazione coniugata, la quale coincide nell'istante iniziale $t = 0$ con l'associazione data. All'istante $-$T dovevano $N'_1, N'_2, \cdots, N'_n$ essere uguali ai valori di $N_1, N_2, \cdots, N_n$ al tempo T. Quindi, per un teorema precedente, $N'_1, N'_2, \cdots, N'_n$ saranno finiti; inoltre per l'ipotesi fatta, N'_h dovrà essere nullo. Trasportiamo l'origine dei tempi in $-$T, avremo allora che all'origine dei tempi $N'_1, N'_2, \cdots, N'_n$ saranno finiti e $N'_h = 0$. Ora per un teorema precedentemente dimostrato N'_h dovrà conservarsi sempre nullo, quindi dopo decorso il tempo T dovrà mantenersi nullo. Ma in questo istante esso deve coincidere col valore C_h che è diverso da zero. Si giunge dunque ad una contraddizione, la quale prova l'assurdità dell'ipotesi che la specie h possa esaurirsi dopo un tempo finito.

Dunque: *In un'associazione biologica conservativa nessuna specie può esaurirsi dopo un tempo finito.*

4.

Poniamo

$$\varphi_r(N_r) = q_r - N_r \psi_r(N_r)$$

ove le q_r sono costanti.

Si avrà

$$\int \frac{\varphi_r \, dN_r}{N_r} = q_r \log N_r - \int \psi_r(N_r) \, dN_r = q_r \log N_r - \theta_r(N_r).$$

Quindi, passando dai logaritmi ai numeri, l'integrale precedentemente trovato si scriverà:

$$\left(\frac{e^{\theta_1(N_1)}}{N_1^{q_1}}\right)\left(\frac{e^{\theta_2(N_2)}}{N_2^{q_2}}\right) \cdots \left(\frac{e^{\theta_n(N_n)}}{N_n^{q_n}}\right) = C$$

essendo C una costante positiva.

Possiamo quindi enunciare il teorema:

Se la convivenza delle specie rende i loro coefficienti di accrescimento della forma

$$\sum_1^n{}_s F_{rs}(N_1, N_2, \cdots, N_n)(q_s - N_s \theta'_s(N_s))$$

$$(F_{rs} = -F_{sr}, \; F_{rr} = 0)$$

le equazioni differenziali delle variazioni dei numeri d'individui appartenenti alle singole specie

$$\frac{dN_r}{dt} = N_r \sum_1^n{}_s F_{rs}(N_1, N_2, \cdots, N_n)(q_s - N_s \theta'_s(N_s))$$

avranno l'integrale

$$\left(\frac{e^{\theta_1(N_1)}}{N_1^{q_1}}\right)\left(\frac{e^{\theta_2(N_2)}}{N_2^{q_2}}\right) \cdots \left(\frac{e^{\theta_n(N_n)}}{N_n^{q_n}}\right) = C$$

ove C è una costante positiva.

Nel caso di due sole specie l'integrale precedente diviene

$$\left(\frac{e^{\theta_1(N_1)}}{N_1^{q_1}}\right)\left(\frac{e^{\theta_2(N_2)}}{N_2^{q_2}}\right) = C$$

quindi si può separare il tempo e ridurre il problema alle quadrature. Limitando convenientemente la forma delle funzioni f_r le teorie svolte nella Parte I e nella Parte II possono quindi generalizzarsi.

Ma è da osservare che la scelta delle F_{rs} costanti e delle $\theta'(N_r)$ pure costanti, come viene fatto in tutto lo svolgimento della presente teoria, resta giustificata dal fatto che conviene supporre che le conseguenze, in un dato tempo, delle azioni fra individui di due specie differenti siano proporzionali al numero dei loro incontri nel medesimo tempo. Ora il numero di incontri, in un dato tempuscolo, fra gl'individui della specie r e quelli della specie s è proporzionale a $N_r \, N_s$ (cfr. 2ª parte, § 2, n. 1) donde la linearità delle f_r. Nondimeno non è da trascurarsi la generalizzazione indicata.

II.

UNA TEORIA MATEMATICA SULLA LOTTA PER L'ESISTENZA

«Scientia», vol. XLI, 1927_1; pp. 85–102 (*).

1. Sono state fatte molte applicazioni delle matematiche alla biologia. Vengono in primo luogo le ricerche su questioni fisiologiche relative ai sensi, alla circolazione del sangue, al moto degli animali, le quali possono riguardarsi come capitoli dell'ottica, dell'acustica, dell'idrodinamica o della meccanica dei corpi solidi e quindi non hanno dato luogo alla costituzione di metodi nuovi fuori dell'ambito della fisica matematica classica. La biometria invece con procedimenti propri ha ricorso all'impiego del calcolo delle probabilità ed ha creato un insieme di studi nuovi ed originali [1]. Carattere originale hanno pure le recenti ricerche geometriche sulla forma e sull'accrescimento degli esseri organizzati. In esse la geometria è stata adoperata per descrivere le forme stesse ed il loro sviluppo come già da molto tempo era stata impiegata in astronomia a descrivere le orbite ed il moto dei corpi celesti [2]. Inoltre è da sperare che i metodi collegati all'analisi ereditaria possano essere utilmente impiegati in questioni interessanti la biologia [3].

Tralasciando altre applicazioni delle matematiche, dirò che ritengo meritare di essere studiate ed approfondite quelle di cui parlerò in questo articolo, le quali possono chiarire varii punti interessanti attualmente i biologi [4].

(*) Nello stesso volume di «Scientia» si trova una traduzione in francese di questo articolo; del medesimo è stata fatta anche una traduzione in russo. Sulla teoria a cui si accenna in questo articolo, cfr. la 1ª Memoria del presente vol. V di queste «Opere». [N.d.R.].

(1) Cfr. VOLTERRA, *Saggi scientifici*. – I. *Sui tentativi di applicazione delle matematiche alle Scienze biologiche e sociali*. Bologna, Zanichelli, 1920. Per la *Biometria* vedi il periodico «Biometrika» fondato nel 1901 da CARLO PEARSON.

(2) D'ARCY THOMPSON WENTWORTH, *On Growth and form*, Cambridge 1917.

(3) VOLTERRA, Ibid., VII. *L'evoluzione delle idee fondamentali del calcolo infinitesimale*. – VIII. *L'applicazione del calcolo ai fenomeni d'eredità*.

(4) Il lavoro completo è stato da me pubblicato nelle «Memorie della R. Accademia Nazionale dei Lincei», Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali, serie VI, vol. II, fasc. III col titolo: *Variazioni e fluttuazioni del numero d'individui in specie animali conviventi*. Dopo la pubblicazione di questa Memoria ho avuto notizie che nelle questioni parassitologiche relative alla malaria esistevano le equazioni del ROSS, ed ho saputo che il dott. LOTKA, nel volume: *Elements of physical Biology*, New York 1925, aveva considerato il caso di due specie da me svolto nel § 3 della 1ª parte, giungendo con altro metodo all'integrale ed al suo diagramma ed al periodo delle piccole oscillazioni. Però le leggi generali da me ottenute nello stesso paragrafo, i vari casi svolti negli altri paragrafi della 1ª parte, come pure tutte le altre tre parti della mia Memoria, nelle quali considero le applicazioni delle leggi suddette e la convivenza di *n* specie nella ipotesi di associazioni conservative e dissipative, sono nuove e per la prima volta trattate. Spiacemi di non aver potuto citare nella detta Memoria l'interessante opera del dott. LOTKA, la quale contiene altre applicazioni diverse delle matematiche connesse a questioni chimiche e biologiche e che formerà il soggetto di una speciale recensione.

2. Le associazioni biologiche (biocenosi) sono costituite da più specie che vivono nello stesso ambiente. Ordinariamente i varii individui di tali associazioni si contendono lo stesso nutrimento oppure alcune specie vivono a spese di altre delle quali si nutrono. Nulla esclude però che esse possano anche mutuamente giovarsi. Tutto ciò rientra nel fenomeno generale chiamato *la lotta per l'esistenza.*

Il carattere quantitativo di questo fenomeno si manifesta nelle variazioni del numero di individui che costituiscono le varie specie. In certe condizioni tali variazioni consistono in fluttuazioni attorno a valori medii, in altre rivelano un esaurimento o un accrescimento continuo della specie.

Lo studio di queste variazioni e di queste varie tendenze è importante teoricamente, ma molte volte ha anche una notevole importanza pratica, come nel caso delle specie di pesci che vivono negli stessi mari e le cui variazioni interessano l'industria della pesca (5). Così pure interessano l'agronomia le fluttuazioni dei parassiti delle piante allorché questi vengono combattuti mediante parassiti di questi parassiti. Anche le malattie infettive (malaria, ecc.) mostrano delle fluttuazioni che sono probabilmente di natura analoga.

La questione si presenta in modo molto complesso. Certo esistono delle circostanze ambientali periodiche come sarebbero, per esempio, quelle che dipendono dall'avvicendarsi delle stagioni, le quali producono delle oscillazioni forzate e di carattere esterno, nel numero di individui delle varie specie.

Queste azioni periodiche esterne furono quelle che vennero specialmente studiate dal lato statistico; ma ve ne sono altre di carattere interno aventi periodi propri, le quali sussisterebbero anche se cessassero le cause esterne periodiche e che ad esse si sovrappongono?

La osservazione propende per una risposta affermativa ed il calcolo matematico la conferma, come vedremo in questo articolo. Ma a primo aspetto può sembrare che per la sua estrema complicazione la questione non si debba prestare ad una trattazione matematica, e che anzi i metodi matematici, perché troppo delicati, possano mettere in evidenza dei particolari e nascondere l'essenziale della questione. Per difendersi da questo pericolo conviene partire da ipotesi, siano pure grossolane, ma semplici e schematizzare il fenomeno.

Cominceremo perciò dallo studiare ciò che può chiamarsi il *fenomeno puro interno*, dovuto solamente alla potenza riproduttiva ed alla voracitá

(5) Il dott. UMBERTO D'ANCONA mi aveva più volte intrattenuto di statistiche che stava facendo sulla pesca nel periodo della guerra e in periodi anteriori e posteriori ad essa chiedendomi se fosse possibile dare una spiegazione matematica dei risultati che veniva ottenendo sulla percentuale delle varie specie in questi diversi periodi. Questa richiesta mi ha spinto ad impostare il problema ed a risolverlo stabilendo le leggi che si trovano enunciate nel § 6. Tanto il D'ANCONA quanto io che lavoravamo in maniera indipendente, fummo soddisfatti nel comunicarci dei risultati che ci erano rispettivamente rivelati dal calcolo e dalla osservazione, i quali concordavano fra loro; così quello che l'uomo colla pesca, perturbando lo stato naturale di variazione di due specie, una delle quali si nutre dell'altra, fa diminuire il quantitativo della specie mangiante ed aumentare quello della specie mangiata.

delle specie immaginate agenti da sole. Studieremo poi la loro sovrapposizione con azioni esterne o forzate periodiche quali sono le azioni ambientali.

3. E quali metodi matematici converrà impiegare ? Forse dei metodi fondati sul calcolo della probabilità che primi potrebbero presentarsi alla mente ? Dico subito che non sono questi che conducono allo scopo.

Mi permetto di indicare come può considerarsi la questione: cerchiamo di esprimere con parole come procede all'ingrosso il fenomeno; quindi traduciamo queste parole in linguaggio matematico. Ciò porta ad impostare delle equazioni differenziali. Se allora ci lasciamo guidare dai metodi dell'analisi siamo condotti molto più lontano di quanto potrebbero portarci il linguaggio e il ragionamento ordinari e possiamo formulare delle leggi precise matematiche. Queste non contraddicono i risultati dell'osservazione. Anzi la più importante di esse sembra in perfetto accordo con i risultati statistici [(6)]. Il cammino seguito resta così chiaramente indicato con queste brevi parole. Vedremo fra poco come vennero superate le difficoltà incontrate.

4. Abbiasi una specie animale. Ammettiamo che essa si accresca e diminuisca in modo continuo, cioè ammettiamo che il numero N di individui di essa non sia un numero intero ma un numero positivo che varii per gradi continui. In generale le nascite avvengono in determinate epoche a distanza di tempo le une dalle altre; noi trascureremo queste circostanze ammettendo che esse avvengano con continuità in ogni istante e che, a parità di tutte le altre condizioni, esse avvengano proporzionalmente al numero degli individui esistenti della specie. Lo stesso si dica delle morti, e, secondo che prevalgano le nascite sulle morti, o viceversa, avverrà aumento o diminuzione del numero degli individui. Inoltre ammetteremo la omogeneità degli individui di ciascuna specie trascurando le variazioni di età e di grandezza.

Se la specie è sola o le altre non influiscono su di essa, finché le circostanze di nascita o di morte non si muteranno, avremo che la velocità di accrescimento della specie, ossia il numero di individui di cui cresce nell'unità di tempo, sarà

$$V = n\mathrm{N} - m\mathrm{N} = (n - m)\,\mathrm{N}\,,$$

essendo n il coefficiente di natalità e m quello di mortalità ambedue costanti. Posto $n - m = \varepsilon$ avremo

$$V = \varepsilon \mathrm{N}$$

da cui si ricava la ben nota legge di variazione esponenziale della specie, ossia che se i tempi crescono in progressione aritmetica il numero di individui della specie varia in progressione geometrica. Si chiamerà ε il coeffi-

(6) Come vedremo in particolare nel § 7, D'ANCONA rileva dall'esame delle statistiche dei mercati di Trieste, Venezia e Fiume che durante la guerra si è avuto nell'Alto Adriatico uno spostamento delle proporzioni degli individui delle varie specie di pesci a vantaggio dei Selaci che dobbiamo considerare fra i più voraci. Questo risultato concorda con la legge delle perturbazioni delle medie che esporremo più avanti.

ciente di accrescimento della specie e se esso sarà positivo la progressione geometrica sarà crescente, se ε sarà negativo sarà decrescente, ossia nel primo caso la specie si accrescerà, nell'altro si esaurirà. Noi potremo dare di ciò una immagine geometrica. Abbiasi una prima specie la quale trovi nell'ambiente il nutrimento sufficiente tanto che il suo coefficiente di accrescimento ε_1 sia costante e positivo. Se N_1 ne denota il numero di individui, la curva esponenziale (fig. 1) in cui il tempo t è l'ascissa mentre N_1 è l'ordinata ci rappresenta la variazione del numero di individui della specie quando essa vive da sola, ossia la curva della fig. 1 rappresenterà l'equazione

$$V_1 = \varepsilon_1 N_1,$$

ove V_1 è la velocità di accrescimento della specie.

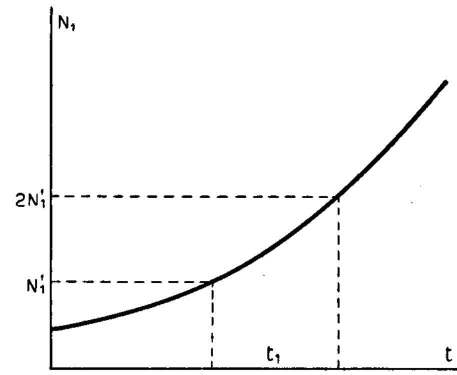


Fig. 1.

Noi potremo facilmente determinare il tempo necessario alla specie per raddoppiarsi, cioè perché il numero dei suoi individui cresca da N'_1 a $2N'_1$. La costruzione è indicata nella fig. 1 Questo tempo t_1 è indipendente dal valore di partenza N'_1 e dipende solo dal coefficiente ε_1. Esso è infatti dato da

$$\frac{\log \text{nep. } 2}{\varepsilon_1}.$$

Consideriamo una seconda specie, la quale non trovi nutrimento nell'ambiente, tanto che se fosse sola il suo coefficiente di accrescimento $-\varepsilon_2$ sarebbe costante e negativo (ε_2 potrà chiamarsi coefficiente d'esaurimento). Se N_2 denota il numero degli individui la curva esponenziale (fig. 2) rappresenterà la variazione del numero di individui della specie quando essa è sola nell'ambiente.

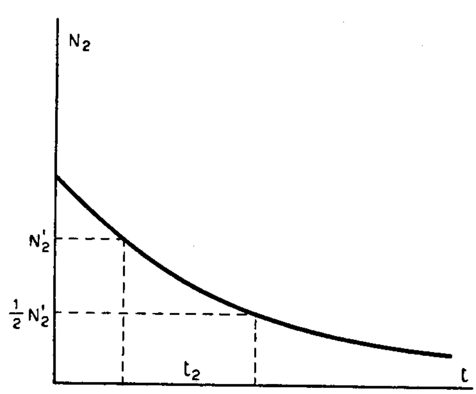


Fig. 2.

L'andamento della curva mostra in modo evidente l'esaurimento indefinito della specie. Essa rappresenterà geometricamente l'equazione

$$V_2 = -\varepsilon_2 N_2$$

ove V_2 è la velocità di accrescimento (negativa) della specie.

In modo analogo a quanto è stato fatto precedentemente si può ottenere il tempo nel quale la specie si riduce a metà.

La costruzione indicata nella fig. 2 dà il tempo t_2 nel quale gl'individui della specie da N'_2 divengono $(1/2)\ N'_2$.

Anche t_2 è indipendente dal valore iniziale, ed è:

$$\frac{\log \text{nep. } 2}{\varepsilon_2}.$$

5. Supponiamo ora che le due specie vivano insieme e che gli individui della seconda specie si nutrano di quelli della prima. Che cosa avverrà nell'associazione biologica così costituita ?

Cerchiamo di esprimere con parole l'andamento del fenomeno. È certo che il coefficiente di accrescimento ε_1 della prima specie si modificherà: non sarà più costante, sarà tanto minore quanto più numerosi saranno gli individui della seconda specie che li mangiano e potrà anche divenir negativo. Anche il numero $-\varepsilon_2$ non sarà più costante, ma aumenterà (potrà cambiar segno) e sarà tanto più grande quanto più numerosi saranno gli individui della prima specie, giacché col crescere di questi crescerà il nutrimento della seconda specie. Noi potremo ora tradurre questo in linguaggio matematico

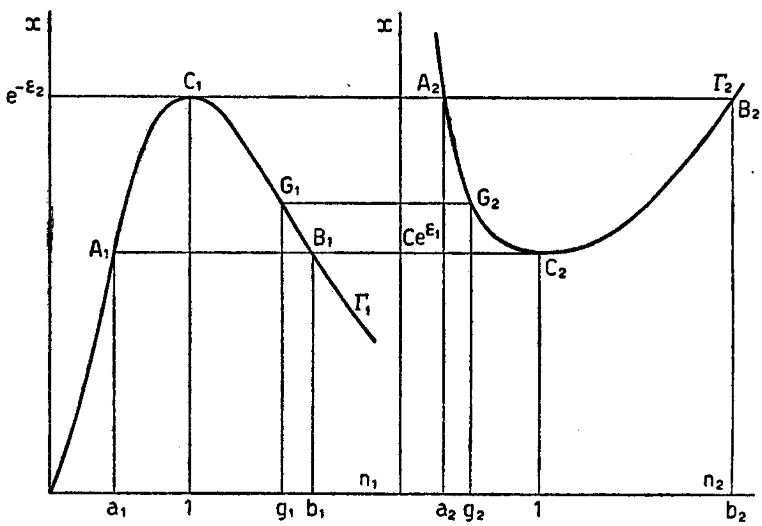


Fig. 3.

dicendo che dovrà sostituirsi la quantità costante ε_1 con una quantità che decresce col crescere di N_2 ossia in prima approssimazione potremo sostituire ε_1 con $\varepsilon_1 - \gamma_1 N_2$ e $-\varepsilon_2$ con $-\varepsilon_2 + \gamma_2 N_1$ ove γ_1 e γ_2 sono due coefficienti positivi. Se dunque V_1 e V_2 denotano le velocità di accrescimento rispettive delle due specie, ossia i numeri di individui delle due specie di cui esse crescono nell'unità di tempo, avremo che le due equazioni precedenti dovranno sostituirsi colle due altre

$$(1) \qquad V_1 = (\varepsilon_1 - \gamma_1 N_2) N_1, \qquad\qquad (2) \qquad V_2 = (-\varepsilon_2 + \gamma_2 N_1) N_2 \text{ (7)}.$$

(7) Queste due equazioni sono molto meglio giustificate giovandosi delle *probabilità di incontro* fra individui delle due specie come è accennato nel § 9, considerazione sulla quale si appoggia la trattazione del caso generale di un numero qualunque di specie conviventi, § 10.

Esse non potranno più considerarsi separatamente, ma simultaneamente. In tal modo si trova ciò che il calcolo chiama due equazioni differenziali simultanee. Da esse l'analisi ci fa ottenere facilmente una relazione costante che passa fra N_1 e N_2.

Noi potremo farci un'idea molto semplice di questa relazione con una rappresentazione geometrica in cui ci si giova di una variabile ausiliaria x, la quale è legata ad $n_1 = N_1 \gamma_2/\varepsilon_2$ da una relazione rappresentata dalla curva a sinistra della fig. 3 ed a $n_2 = N_2 \gamma_1/\varepsilon_1$ da una relazione rappresentata dalla curva a destra della stessa figura. n_1 e n_2 sono le ascisse delle due curve, mentre x è il valore comune delle loro ordinate. Per trovare i valori di n_2 che corrispondono ad uno stesso valore di n_1 basta fare la costruzione che è indicata nella fig. 3 la quale mostra che ad ogni valore di n_1 corrispondono due valori di n_2 e reciprocamente ad ogni valore di n_2 due valori di n_1.

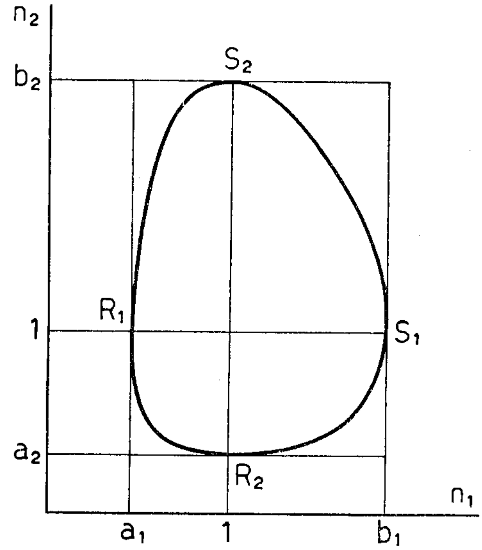


Fig. 4.

La costruzione stessa ci permette di ottenere la curva che ha per ordinata n_2 e per ascissa n_1. Essa è una curva chiusa ciclica rappresentata dalla fig. 4. Se denotiamo con T il tempo nel quale il ciclo intero è percorso, alla fine di esso i numeri N_1 e N_2, riprendono gli stessi valori che avevano al principio, ossia le condizioni finali sono identiche a quelle iniziali. Il fenomeno è dunque periodico ed il periodo T può ottenersi mediante i coefficienti ε_1, ε_2 ed i dati iniziali.

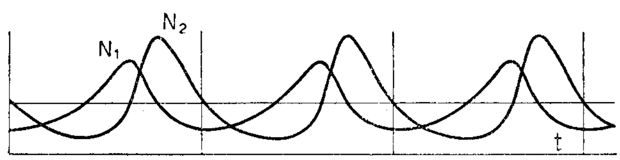


Fig. 5.

Approssimativamente, allorché si tratta di piccole fluttuazioni esso è dato dalla formula

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\varepsilon_1 \varepsilon_2}} = 9{,}06 \sqrt{t_1 t_2}$$

ossia *il periodo della fluttuazione è proporzionale alla media geometrica fra i due tempi nei quali rispettivamente la prima specie si raddoppia e la seconda si riduce a metà.*

Si può anche con un grafico rappresentare come variano N_1 e N_2 col variare del tempo. Questo è dato dalla fig. 5 nella quale per ascissa è stato preso il tempo, mentre N_1 e N_2 sono le ordinate delle due curve.

Se noi cambiamo le condizioni iniziali il ciclo cambia. Abbiamo quindi infiniti cicli, i quali sono rappresentati da tante curve chiuse le une interne alle altre come è indicato nella fig. 6. L'unico punto Ω interno a tutte queste infinite curve ha per coordinate i rapporti $K_1 = \varepsilon_2/\gamma_2$, $K_2 = \varepsilon_1/\gamma_1$. Vedremo fra poco il significato dei numeri K_1 e K_2.

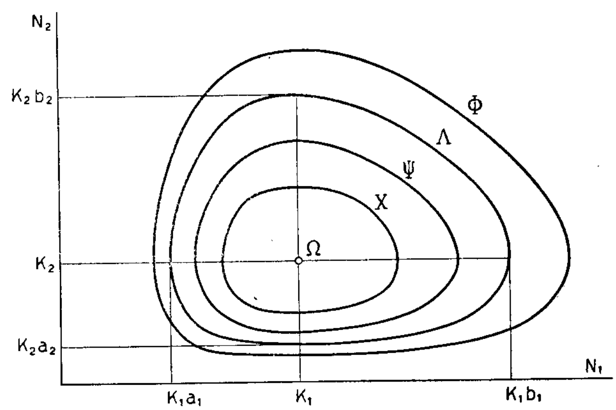


Fig. 6.

6. Cerchiamo prima il significato di ε_1, ε_2, γ_1, γ_2. Evidentemente ε_1 è il coefficiente di accrescimento della prima specie (supposta sola nell'ambiente); ε_2 è il coefficiente di esaurimento della seconda specie (nella ipotesi che essa fosse sola).

Quanto a γ_1 e γ_2 si riconosce subito che essi crescono colla voracità degli individui della seconda specie, mentre diminuiscono col crescere dei mezzi di protezione della prima specie.

Si potranno in una parola chiamare *i coefficienti di voracità.*

Quanto a K_1 e K_2 si vede subito che se $N_1 = K_1$, $N_2 = K_2$, V_1 e V_2 sono nulli, dunque K_1 e K_2 sono i numeri di individui corrispondenti ad uno stato *stazionario,* cioè ad uno stato nel quale le due specie non crescono né diminuiscono. D'altra parte, pur non essendo le curve della fig. 6 simmetriche rispetto ad Ω, si dimostra che K_1 e K_2 *sono le medie dei valori* di N_1 e N_2 durante il *decorso* di un periodo.

Dunque: 1° *le fluttuazioni delle specie sono periodiche*; 2° *le medie dei numeri di individui delle due specie non dipendono dalle condizioni iniziali finché si mantengono inalterati i coefficienti di accrescimento e quelli di voracità*; ossia si parta da uno stato iniziale in cui vi sono pochi o molti individui, le medie, dopo decorso un periodo, saranno sempre le stesse. I periodi però cambieranno col cangiare degli stati iniziali.

Supponiamo ora di distruggere artificialmente le due specie. Per esempio, se si tratta di pesci, supponiamo di pescare. Allora ε_1 coefficiente di accrescimento della prima specie diminuirà, mentre ε_2 coefficiente di esaurimento della seconda crescerà. Dunque se la voracità della seconda specie ed i mezzi di protezione della prima non cambieranno: K_1 aumenterà e K_2 diminuirà, ossia crescerà la media degli individui della prima specie (specie mangiata) e diminuirà la media degli individui della seconda specie (specie mangiante) d'onde la terza legge : 3° *Se si cerca di distruggere ambedue le specie, la media del numero di individui della specie mangiata cresce e la media del numero di individui della specie mangiante diminuisce.*

7. Come è stato precedentemente accennato questa terza legge è perfettamente in accordo con i risultati ricavati dall'esame delle statistiche della pesca per l'Alto Adriatico. Il D'ANCONA ha esaminato le statistiche dei mercati di Venezia, Trieste e Fiume, che raccolgono la maggior parte del prodotto della pesca dell'Alto Adriatico, per i periodi precedente e successivo agli anni della guerra e ha potuto notare che verso la fine della guerra si rilevava una maggiore abbondanza relativa delle specie più voraci e principalmente dei Selaci (*Acanthias vulgaris*, *Scyllium* sp., *Mustelus* sp., *Squatina angelus*, *Trygon* sp., *Myliobatis* sp., *Raja* sp.), invece una relativa minore abbondanza per alcune almeno fra le specie più innocue. D'ANCONA interpreta tale fatto ammettendo che la stasi peschereccia del 1914–18 abbia temporaneamente spostato l'equilibrio tra le diverse specie biologiche dell'Alto Adriatico favorendo le più voraci a danno delle più inermi fra quelle economicamente importanti. Da ciò consegue che l'equilibrio biologico formatosi naturalmente tra le diverse specie di pesci dell'Alto Adriatico sia stato spostato dalla pesca con reti a strascico a favore delle specie meno difese; la cessazione della pesca durante il periodo della guerra ha invece ricondotto alle condizioni primitive, vale a dire ha dato incremento alle specie predatrici.

8. Ma si comprende facilmente che ciò potrà verificarsi fino ad un certo punto, non indefinitamente, giacché oltrepassando un certo limite ambedue le specie tenderanno ad esaurirsi. Questo limite sotto il quale la causa distruttrice delle due specie è favorevole alla specie mangiata può calcolarsi facilmente e si trova che oltrepassatolo le due specie si esauriscono, ma raggiuntolo la specie mangiante si esaurisce, mentre quella mangiata tende verso un limite che è inferiore alla media precedentemente raggiunta. In altri termini esiste un *limite superiore* che non è un *massimo*.

9. Noi abbiamo supposto che quando le due specie convivono ε_1 e $-\varepsilon_2$ debbano rispettivamente diminuire e crescere col crescere rispettivo di N_2 e N_1 onde li abbiamo in prima approssimazione sostituiti con $\varepsilon_1 - \gamma_1 N_2$ e $-\varepsilon_2 + \gamma_2 N_1$. L'aver preso queste quantità lineari rispetto a N_2 e N_1 non solo ci dà una prima immagine approssimata del fenomeno, ma si giustifica anche tenendo presente che le velocità di accrescimento delle due specie debbono esser mo-

dificate proporzionalmente al numero probabile di incontri degli individui di esse e quindi al prodotto $N_1 N_2$ che è proporzionale al numero degli incontri stessi. La forma delle due equazioni (1) e (2) resta così rigorosamente provata.

Ma si possono trattare le stesse equazioni facendo tutte le ipotesi possibili sui segni dei coefficienti ε_1, ε_2, γ_1, γ_2 ed allora vengono a prendersi in considerazione i diversi casi nei quali gli incontri fra individui delle due specie sono favorevoli o sfavorevoli ad esse.

Quando si pensa che molti fatti interessanti per la medicina possono farsi rientrare nei fenomeni che dipendono dagli incontri e dalle reciproche azioni fra specie diverse (specie umana e germi patogeni, specie parassitata e specie parassita) si comprende come le fluttuazioni delle epidemie possono aver rapporto colle teorie adesso qui esposte.

10. Il considerare la convivenza di due sole specie è un limitare troppo la questione. Ma è possibile trattare matematicamente il caso del tutto generale in cui convivano un numero qualunque di specie esercitanti le une sulle altre azioni qualunque.

Ammettiamo che il loro numerò sia n e che l'incontro di due individui di specie diverse porti sempre un risultato favorevole alla specie a cui appartiene l'uno e sfavorevole a quella a cui appartiene l'altro oppure un risultato nullo per ambedue. Prendiamo due di queste specie, per esempio la prima e la seconda, e formiamo il rapporto fra il numero di individui di cui aumenta l'una (per esempio la prima) ed il numero di individui di cui diminuisce l'altra (la seconda) in conseguenza dei loro incontri, durante i quali i primi divorano i secondi, il che produce una diminuzione di questi ed un aumento degli altri proporzionale al nutrimento ottenuto. Supponiamo che il suddetto rapporto sia sempre espresso da γ_1/γ_2 in cui $\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_n$ denotano n numeri positivi, rispettivamente corrispondenti alla 1ª, alla 2ª, $\cdots$, alla n^a specie. E così supponiamo che formando i rapporti fra altri di questi stessi numeri si ottengano gli analoghi rapporti relativi agli incontri degli individui delle specie corrispondenti. In tale ipotesi i numeri $\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_n$ costituiscono gli *equivalenti* degli individui delle varie specie. Infatti ammettere che gli individui della prima specie in virtù della loro rapacità possano distruggere γ_2 individui della seconda, accrescendosi loro stessi di γ_1, significa che γ_1 individui della prima specie sono equivalenti a γ_2 individui della seconda.

Ciò si può esprimere con altri termini chiamando rispettivamente $\beta_1 = 1/\gamma_1$, $\beta_2 = 1/\gamma_2 \cdots$, $\beta_n = 1/\gamma_n$ i *valori* dei singoli individui della 1ª, della 2ª, $\cdots$, della n^{ma} specie, e se $N_1, N_2, \cdots$ sono i numeri corrispondenti di individui delle varie specie, chiamando

$$W = \beta_1 N_1 + \beta_2 N_2 + \cdots + \beta_n N_n$$

il valore dell'associazione biologica..

Allora le ipotesi precedenti equivalgono ad ammettere che *gli incontri degli individui delle varie specie non alterino il valore dell'associazione biologica.*

Un'associazione di questa natura si dirà *conservativa*. Le variazioni nel numero di individui delle varie specie sono in questo caso regolate da un sistema di equazioni differenziali quadratiche simultanee collegate ad un determinante emisimmetrico. In virtù delle proprietà di questo determinante lo svolgimento analitico nel caso di un numero pari di specie differisce da quello di un numero dispari. In ambedue i casi può trovarsi un integrale del sistema di equazioni differenziali.

11. Allorché il numero delle specie è pari, dalle suddette equazioni si ricavano tre leggi che sono un'estensione di quelle enunciate precedentemente.

La prima legge dice:

Nel caso di una associazione biologica conservativa di ordine pari, n, per la quale esiste uno stato stazionario, le variazioni del numero di individui delle varie specie sono limitate fra numeri positivi e esistono sempre delle fluttuazioni che non si smorzano.

Con questa estensione evidentemente si perde la proprietà della periodicità, mentre si mantiene quella della fluttuazione.

Quando le fluttuazioni sono piccole e n è il numero delle specie, esse possono ottenersi approssimativamente mediante la sovrapposizione di $n/2$ fluttuazioni non smorzate ciascuna delle quali ha un periodo proprio che è indipendente dalle condizioni iniziali.

La seconda legge resta inalterata *quando si prendano come medie dei numeri di individui delle singole specie i limiti delle medie stesse per durate di tempo infinitamente lunghe (medie assintotiche).*

Quanto alla terza legge essa assume la forma seguente: *Se in un'associazione conservativa d'ordine pari (nella quale si possano distinguere le specie mangianti da quelle mangiate), si cerca distruggere tutte le specie, le medie assintotiche dei numeri di individui di qualcuna delle specie mangiate (se non di tutte) cresceranno e le medie assintotiche dei numeri di individui di qualcuna delle specie mangianti (se non di tutte) diminuiranno* [8].

Se il numero delle specie di un sistema conservativo è dispari *non è possibile che il numero d'individui di ciascuna specie resti limitato fra due numeri positivi*, onde il sistema cessa di avere un carattere stabile [9].

12. Il caso dei sistemi conservativi può considerarsi come un caso limite a cui si approssimano le associazioni della natura, ma più prossime ancora ai sistemi effettivamente esistenti sembrano essere le *associazioni dissipative*, il *valore* delle quali diminuisce per ogni incontro fra individui di due specie seguìto da una divorazione. Allorché ciò avviene *le fluttuazioni intorno allo stato stazionario si smorzano ed il sistema tende verso lo stato stazionario stesso.*

(8) Come già dicemmo nel § 8, questa legge vale fino ad un certo limite; giacché progredendo nella distruzione potranno esaurirsi tutte le specie.

(9) Questo risultato non deve recare sorpresa visto il carattere *assoluto* dei sistemi conservativi (cfr. il § 12).

13. In tal modo si studiano le cause interne delle fluttuazioni le quali sono sufficienti per spiegare varii fenomeni osservati e per prevederne dei nuovi, molto probabilmente suscettibili di controllo sperimentale e di osservazione. Ma noi abbiamo precedentemente anche accennato a cause esterne periodiche. Se ne può tener conto assumendo *periodici, anzichè costanti,* i coefficienti di accrescimento, ed allora, nel caso delle piccole fluttuazioni, vale il principio della sovrapposizione delle variazioni proprie a quelle forzate, cioè *le piccole fluttuazioni si otterranno sovrapponendo alle variazioni proprie quelle forzate aventi il periodo dei coefficienti di accrescimento quando esso non coincide con alcuno dei periodi delle fluttuazioni proprie.*

14. Un caso particolare che può studiarsi matematicamente in modo completo e nei più minuti particolari in virtù dei precedenti risultati, è quello nel quale si hanno tre specie viventi in un ambiente limitato, come sarebbe un'isola, e la prima di esse mangi la seconda e questa la terza e non viceversa. Come esempio possiamo prendere una specie di animali carnivori che si nutre di una specie di erbivori e questa a sua volta di una specie vegetale, ammettendo che per quest'ultima possa valere la stessa trattazione usata per gli animali. (Il procedimento stesso può applicarsi anche agli insetti parassiti delle piante e ai parassiti di essi).

Ecco i diversi casi e sottocasi che possono presentarsi, i quali vengono caratterizzati dai valori dei coefficienti che compaiono nelle equazioni relative.

1° CASO. – *Anche se ammettiamo che i vegetali possano aumentare indefinitamente, il nutrimento che giunge ai carnivori attraverso gli erbivori non è sufficiente a mantenere la specie carnivora, e questa si esaurisce, mentre gli erbivori e i vegetali tendono ad una fluttuazione periodica non smorzata.*

2° CASO. – *Se il coefficiente di accrescimento della specie vegetale fosse costante, il numero di individui di essa crescerebbe indefinitamente, quindi conviene supporre che il detto coefficiente decresce proporzionalmente al numero degli individui.*

2° caso, sottocaso *a*). – *Il nutrimento fornito dai vegetali non è sufficiente a mantenere gli erbivori, quindi la specie erbivora e la specie carnivora si esauriscono, mentre la specie vegetale tende ad un valore costante.*

2° caso, sottocaso *b*). – *Le piante sono sufficienti a mantenere gli erbivori, ma non vi è sufficiente nutrimento per i carnivori attraverso gli erbivori, quindi la specie carnivora si esaurisce, mentre erbivori e piante tendono ad una fluttuazione smorzata e finalmente ad uno stato stazionario.*

2° caso, sottocaso *c*). – *Il nutrimento è sufficiente perché tutte le specie vivano ed esse, attraverso variazioni assintotiche e smorzate, tendono tutte verso uno stato stazionario* [10] (*).

(10) Noi abbiamo tralasciato di scrivere le disuguaglianze algebriche a cui debbono soddisfare i coefficienti che caratterizzano i diversi casi e sottocasi. Si trovano nella Memoria citata dell'Accademia dei Lincei a pag. 62.

(*) Cfr. anche queste «Opere», 1ª Memoria del vol. V, parte III, § 5, n. 6. [N.d.R.].

15. È da notare, dal punto di vista analitico, che lo studio delle fluttuazioni e oscillazioni del numero di individui delle specie conviventi esce dal quadro dello studio ordinario delle oscillazioni, giacché le equazioni generali non sono lineari, mentre lo schema classico delle teorie delle oscillazioni si svolge nell'ambito delle equazioni lineari.

E infatti le fluttuazioni studiate non sono in generale piccole fluttuazioni. Solo quando abbiamo fatto l'ipotesi di piccole fluttuazioni abbiamo trascurato i termini del secondo ordine ed abbiamo potuto valerci del sussidio delle equazioni lineari.

16. Prima di chiudere questo articolo desideriamo porre in guardia i lettori da obiezioni che potrebbero sollevarsi, le quali metterebbero in falsa luce i risultati delle precedenti ricerche tanto da farle anche apparire inesatte e prive di senso. Noi teniamo anzi a prevenirle e metterci al riparo da esse.

Così, per esempio, nel caso trattato delle due specie, una delle quali mangia l'altra, noi troviamo che si stabilisce sempre un ciclo periodico che fa oscillare le due specie attorno a certi valori medi. Si potrebbe obiettare che è facile immaginare la specie mangiante così numerosa e vorace da distruggere in breve tempo uno a uno tutti gl'individui dell'altra e quindi rendere impossibili le suddette oscillazioni.

Ma facciamo osservare che la legge del ciclo discende dalla proposizione che una specie la quale manca di nutrimento non si può esaurire che in un tempo infinito e questo può sembrare lontano dalla realtà ancora più della legge stessa. Ciò dipende dal fatto che fra le ipotesi che stanno a base di tutta la trattazione vi è quella che il numero degli individui è un numero positivo variante con continuità, mentre in realtà esso non può essere che intero, e non può scendere al disotto dell'unità. Quindi dobbiamo intendere che, se il numero degli individui d'una specie è ridotto sufficientemente piccolo esso deve supporsi nullo ed il prolungarne il valore non è altro che una concezione teorica sprovvista di qualsiasi significato reale. E così ritornando al caso del § 5, se il coefficiente di voracità γ_1 sarà molto grande ed il valore iniziale di N_2 pure, N_1 potrà rapidamente divenire più piccolo di 1 il che in pratica equivale al suo annullamento, e perciò il ciclo che teoricamente continuerebbe non potrà richiudersi, ma cesserà a questo punto.

Tutto ciò non è peculiare delle applicazioni adesso esposte della matematica alla biologia, ma l'analogo si presenta in tutti quegli altri casi nei quali si sostituisce il continuo al discontinuo. Ora è necessaria, nella maggior parte dei casi, tale sostituzione, altrimenti non sarebbe possibile valersi dello strumento più potente che la matematica possiede, cioè del calcolo infinitesimale, e d'altra parte in tutti i casi classici le conseguenze che se ne traggono si applicano praticamente.

E non solo quando si fa questa sostituzione, ma anche, si può dire, in ogni applicazione delle matematiche ai fenomeni naturali si presentano questioni del tipo a cui adesso alludiamo, giacché per applicare le matematiche a qualsiasi oggetto è necessario attribuire per ipotesi agli enti che si considerano proprietà che si allontanano più o meno da quelle effettive. Così i corpi solidi della meccanica si suppongono tali che, soggetti a qualsiasi sforzo, non si deformano mai, il che evidentemente non avviene per nessun materiale.

Come si procede nelle teorie ormai da lungo tempo applicate per superare le difficoltà di cui adesso ci occupiamo ?

Conviene distinguere due fasi: nella prima si risolve il problema abbandonandosi, per così dire, ai procedimenti dell'analisi considerando le ipotesi fatte come se esse fossero assolutamente verificate. Ottenuta la soluzione, in una seconda fase, conviene discuterle e se nella soluzione appare che certi limiti vengono oltrepassati, per cui le ipotesi fatte si allontanano troppo dalla realtà, è necessario rinunziare alla soluzione o modificarla.

Così noi possiamo calcolare gli sforzi che sopportano le parti di una travatura ideale, supposto che esse siano infinitamente resistenti e assolutamente rigide. Ma, una volta ottenuta la soluzione, bisogna, in una seconda fase, vedere se taluni di questi sforzi superano certi limiti, perché allora non sarà possibile l'equilibrio, ma la travatura si spezzerà, il che è estremamente importante a prevedersi.

Così, nel caso delle fluttuazioni, le specie che si considerano sono specie ideali formate da un numero positivo qualunque di individui. Ma, se dopo fatto il calcolo, troveremo che il numero di individui d'una delle specie traverserà un valore minore di 1, noi potremo senz'altro dire (come già abbiamo sopra riconosciuto) che la variazione della specie s'interromperà, giacché la specie non potrà più continuare ad esistere. La soluzione trovata non è dunque vana, ma ci rivela una circostanza di notevole importanza ed utilità.

La prima fase, di cui sopra abbiamo parlato, costituisce ciò che può chiamarsi la *fase razionale*, l'altra l'*applicata*, e noi abbiamo difatti una *meccanica razionale* ed una *applicata*. Le ricerche fatte, e qui brevemente riassunte, di matematica biologica apparterrebbero, secondo questa classificazione, alla *fase razionale*.

III.

SUR L'HISTOIRE (*) DU BUREAU INTERNATIONAL DES POIDS ET MESURES

« Comptes Rendus des séances de la Septième conférence des Poids et Mesures », Paris (1927); pp. 16–20.

Mais c'est une raison plus profonde encore qui me fait exprimer au Gouvernement français nos sentiments de reconnaissance envers le grand pays qui nous accorde une si noble hospitalité.

Nous ne pouvons oublier, en effet, que c'est la France qui, dans une des plus grandioses périodes de son histoire, a osé lancer dans le monde l'idée d'unifier les mesures fondamentales et de leur donner une base invariable. Les noms des plus illustres savants français de cette époque et des périodes subséquents sont liés au développement et à la réalisation de cette idée si féconde.

Il serait intéressant d'en suivre le progrès, et de voir comment elle s'est répandue parmi les différentes nations, et a conduit aux conséquences les plus importantes.

Mais ce n'est pas maintenant le moment de rappeler les étapes qui se sont suivies dans l'établissement des unités fondamentales de longueur et de masse. On y a consacré des ouvrages spéciaux; le plus important d'entre eux est l'œuvre de l'éminent astronome qui, au nom de l'Académie des Sciences, dirigera nos séances; il intéresse également l'historien et le savant.

Le chemin parcouru a été long et pénible. Le 4 Messidor de l'An VII, c'est-à-dire le 22 juin 1799, les étalons du Mètre et du Kilogramme furent présentés au Corps législatif et déposés aux Archives; mais combien de temps n'a-t-il pas fallu, même en France, pour faire pénétrer les nouvelles mesures dans la vie ordinaire et les rendre d'un usage courant!

Les décrets et les lois de la première moitié du siècle dernier facilitèrent l'établissement du Système métrique. Les expositions universelles, qui mirent en présence une immense variété de produits de toutes les parties du monde, montrèrent la nécessité de les évaluer en les rapportant aux mêmes étalons. Enfin et surtout, les besoins toujours croissants de l'industrie et du commerce international contribuèrent à répandre l'usage des nouvelles unités.

(*) Discorso pronunziato dal VOLTERRA all'inaugurazione della settima conferenza generale del Comitato internazionale dei Pesi e Misure, quale Presidente del Comitato stesso. Nell'elenco completo delle « Pubblicazioni di Vito Volterra » che chiude il presente volume, figura, al n. 254, anche il discorso inaugurale dell'ottava conferenza. [N.d.R.].

Ce n'est que dans le courant de l'année 1875 qu'eut lieu à Paris la réunion internationale à laquelle on a donné le nom de *Conférence diplomatique du Mètre*. Elle réunissait les représentants de 20 États répondant à l'invitation du Gouvernement français, et était chargée de délibérer sur les mesures qu'il convenait de prendre en commun, afin de donner à l'unification du Système métrique le caractère d'un acte international.

La convention du Mètre signée le 20 mai 1875 fut le résultat de cette conférence. Elle créait un Bureau international des Poids et Mesures scientifique et permanent, ayant son siège à Paris et fonctionnant sous la surveillance d'un Comité international soumis lui-même à l'autorité d'une Conférence générale.

La date que je viens de rappeler est mémorable. Pour la première fois on fondait une institution scientifique internationale, et, après de si longs efforts, on organisait sur un plan systématique les études et les comparaisons des mesures fondamentales de la longueur et de la masse.

Aujourd'hui que la Convention du Mètre compte 31 États adhérents avec une population de 717 millions d'habitants dont 560 millions, c'est-à-dire 78 pour 100 sous le régime obligatoire, on peut regarder avec satisfaction le chemin parcouru.

Mais que de lenteur dans la marche des idées, même des plus simples et des plus rationnelles, et combien de difficultés se sont opposées à leur progrès!

Souvenons-nous que, depuis la Renaissance et l'introduction de la méthode expérimentale, on savait que les lois naturelles ne sont dévoilées et ne peuvent être vérifiées que par des mesures; la mesure est donc la base de toutes les sciences. Cependant il a fallu des siècles de préparation, l'état d'esprit qui s'est développé en France vers la fin du XVIII^e^ siècle, les progrès scientifiques considérables du XIX^e^, enfin l'immense accroissement des rapports et des échanges entre peuples qui sont la caractéristique de la civilisation moderne, pour que l'on atteignît les résultats que je viens de rappeler, et pour que l'on arrivât à fonder un Institut consacré aux mesures fondamentales. Cet Institut qui compte un demi-siècle d'existence, conscient d'avoir rendu d'éminents services aux sciences, à l'industrie et au commerce, plein de confiance dans l'avenir, célèbre aujourd'hui son premier cinquantenaire.

Ce qui fit la force de la nouvelle institution, ce fut l'union de son caractère pratique avec un esprit scientifique élevé, dû à la largeur de vues des hommes éminents qui ont consacré leurs efforts à son développement, et qui n'ont jamais oublié les nobles traditions léguées par les fondateurs mêmes du Système métrique.

Les conséquences auxquelles on a été conduit ont été d'une importance inattendue, et ont soulevé un sentiment de surprise mêlée de sincère admiration.

En effet, on supposait qu'après avoir distribué les prototypes, le travail du Bureau se trouverait considérablement réduit. La réalité a démenti ces prévisions, car le programme des recherches que le Bureau a entreprises, au lieu de se restreindre, n'a fait que s'augmenter et se développer de jour en jour. En même temps cet établissement a reçu un nouvel éclat, grâce à une série de découvertes remarquables.

Il suffit de parcourir les Comptes rendus des six conférences qui ont précédé la Conférence actuelle et d'examiner les mémoires publiés par le Bureau, ou simplement de lire l'ouvrage qui vient de paraître à l'occasion du Cinquantenaire, pour suivre les progrès du Bureau dans les différentes étapes qu'il a parcourues et se rendre compte de l'œuvre qu'il a accomplie.

Je n'entrerai pas dans les détails de cette œuvre, mais il me faut citer quelques travaux parmi les plus importants, et signaler quelques sujets traités dans les Conférences précédentes, et qui se rattachent également à l'avenir de notre institution.

Les longues recherches de PIERRE CHAPPUIS ont apporté de nouvelles lumières dans la thermométrie, et ouvert un domaine encore inexploré à cette branche de la physique par des études de précision, notamment sur les basses températures.

L'examen approfondi des alliages de fer et de nickel fait par M. GUILLAUME dans les laboratoires du Bureau l'ont amené à sa grande découverte de l'Invar. Elle a été communiquée en 1901 pendant la Troisième Conférence. Ses innombrables applications, parmi lesquelles il faut signaler celles qui ont transformé les méthodes de la géodésie, ont excité le plus grand intérêt et un véritable enthousiasme dans tout le monde scientifique. Le prix NOBEL décerné à M. GUILLAUME en 1920 a montré au grand public l'importance que les physiciens attribuent à sa découverte.

La Deuxième Conférence a pris connaissance d'une série de travaux métrologiques fondamentaux. Ce sont les travaux de MM. MICHELSON et BENOÎT sur la comparaison entre l'unité métrique et la longuer de certaines ondes lumineuses. Ces recherches ont été suivies par celles de MM. BENOÎT, FABRY et PEROT, qui ont été rendues publiques en 1907 au cours de la Quatrième Conférence. Elles ont confirmé les résultats trouvés par les premiers expérimentateurs et montré quel degré prodigieux d'exactitude ils avaient atteint.

Ces études, ainsi que toutes celles qui se rattachent aux idées et aux méthodes célèbres de FIZEAU, ont donné une orientation et une impulsion nouvelles aux travaux métrologiques. Elles ont établi une entente et une liaison étroite entre deux branches de la physique, la métrologie et la spectroscopie: l'une, la branche la plus délicate et la plus rigoureuse de la science; l'autre, la plus merveilleuse, car elle nous révèle la constitution des atomes par une harmonie optique qui rappelle l'harmonie des mondes de PYTHAGORE.

A côté de ce mouvement qui touche aux fondements de la métrologie classique et à la définition même de l'unité principale de longueur, un autre mouvement d'une nature toute différente a pris naissance. Il se rapporte à un élargissement des fonctions du Bureau. Les développements récents de la mécanique et de la physique, notamment de l'électrotechnique, ont rendu nécessaires des études de jour en jour plus approfondies sur les unités de mesure de quantités nouvellement prises en considération, et ont montré aussi la nécessité de nouveaux accords de caractère universel.

Le Bureau international des Poids et Mesures n'est pas resté étranger à ce mouvement. Les recherches expérimentales qu'on y a exécutées ont montré quel rôle est appelé à remplir dans cette branche d'activité, qui touche également aux sciences et à leurs applications.

L'estime qu'il s'est acquise est un sûr garant des résultats qu'il pourra atteindre dans toute nouvelle fonction qui lui sera confiée. Cela explique pourquoi l'on a porté devant la dernière Conférence la proposition tendant à charger le Bureau de l'établissement et de la conservation des étalons prototypes à l'égard d'autres unités que celles de la longueur et de la masse, et de leur comparaison avec d'autres étalons de précision.

Cette proposition a donné lieu à de longues et profondes discussions au sein de la Sixième Conférence. Elles ont abouti au vote unanime suivant, vote qui ouvre de nouvelles voies à l'activité du Bureau:

« Après que le Comité aura procédé au travail de coordination des mesures relatives aux unités électriques, et lorsque la Conférence générale en aura décidé par un vote unanime, le Bureau sera chargé de l'établissement et de la conservation des étalons des unités électriques et de leurs témoins, ainsi que de la comparaison de ces étalons avec des étalons nationaux et d'autres étalons de précision ».

La dernière Conférence s'est close sur ce vote. Selon l'avis de son illustre Président, M. ÉMILE PICARD, elle a marqué une date importante dans l'histoire de la grande Institution internationale des Poids et Mesures.

Le Bureau n'a pas manqué de se conformer au vote de la Conférence en se mettant à cet effet en rapport avec les laboratoires nationaux de Paris, Londres, Berlin, Washington et Tokio pour la comparaison des étalons nationaux de ces laboratoires.

Voilà pour l'histoire et pour le passé. Aujourd'hui nous avons la joie d'enregistrer l'adhésion de trois nouveaux États à la Convention du Mètre: ce sont la Tchècoslovaquie, la Pologne et l'État libre d'Irlande. A leurs délégués, ainsi qu'à ceux des États anciennement représentés, nous souhaitons la plus cordiale bienvenue.

Nous saluons aussi MM. ISAACHSEN, KARGATCHIN et KONOVALOV, élus au Comité depuis la dernière Conférence; ils apportent à nos délibérations de nouvelles lumières et le poids de leur autorité. Malheureusement nous avons à déplorer des pertes bien cruelles: KLAS–BERNHARD HASSELBERG, qui, sentant ses forces décliner, avait considéré comme son devoir de laisser vacante, au sein du Comité, la place éminente qu'il avait occupée pendant plus de vingt ans; STEFAN–C. HEPITES, élu membre du Comité international en septembre 1894 et successeur de BLASERNA, dans les fonctions de Secrétaire, qu'il remplit pendant deux années jusqu'à sa mort, survenue en 1922; ERNEST PASQUIER, l'éminent savant belge, dont les œuvres mathématiques et astronomiques sont bien connues, et IVAR FREDHOLM, l'illustre mathématicien suédois, dont les célèbres découvertes d'analyse resteront classiques; J.–RENÉ BENOÎT, qui a consacré sa longue existence à la création et à l'avancement de la métrologie, et dont l'exemple nous incite à persévérer dans la voie lumineuse qu'il nous a tracée.

A tous ces disparus, nous donnons un pieux souvenir.

Tournons maintenant nos regards vers le présent. Nous avons devant les yeux le programme très chargé de la Conférence actuelle, et les nombreuses propositions, arrivées de différents pays, dont l'examen et la discussion doivent nous amener à des décision définitives. Tout l'avenir de notre Institution dépendra de ces déliberations. Or, puisque nous admirons le Bureau international des Poids et Mesures pour les contributions importantes que la science lui doit, et que nous lui sommes reconnaissants pour les avantages pratiques qu'il a apportés à toutes les nations civilisées, nous devons souhaiter que la présente Conférence marque un nouveau progrès dans son évolution. Elle s'ouvre sous des auspices favorables: la situation financière qui nous avait donné de graves préoccupations dans les dernières années s'est améliorée, grâce à une subvention due à des amis dévoués du Bureau, parmi lesquels nous devons nommer notre éminent collègue, M. STRATTON, et grâce surtout à l'intervention directe du Gouvernement français auprès des autres gouvernements pour que les contributions du Bureau soient versées en or dès l'année courante. La France elle-même a donné l'exemple en payant sa cotisation en or depuis l'année 1926; cet exemple a déjà été suivi cette année-ci par un grand nombre d'États. Il appartient à la Conférence de consolider cette mesure par un vote. En attendant, nous vous prions, Monsier le Ministre, de bien vouloir porter au Gouvernement de la République française l'expression de notre profonde gratitude pour cette initiative généreuse, qui ne peut manquer de donner à l'activité du Bureau un rayonnement plus grand et un nouvel essor.

IV.

SUR LA THÉORIE MATHÉMATIQUE DES PHÉNOMÈNES HÉRÉDITAIRES

« Journ. de Math. pures et appliquées », 9e sér., t. VII (1928); pp. 249-298.

INTRODUCTION.

J'ai traité plusieurs fois la question des phénomènes héréditaires comme application des théories sur les équations intégrales, intégro-différentielles et fonctionnelles. Plusieurs chapitres de mes *Leçons sur les équations intégrales et les équations intégro-différentielles* (1) et de celles *sur les fonctions de lignes* (2), sont consacrés à l'étude mathématique de l'hérédité. C'est pourquoi je me rapporterai à ces ouvrages pour les principes qu'il me faudra rappeler (3).

Dans le présent Mémoire, j'étudie la question énergétique que j'avais laissée de côté dans mes précédents travaux. En partant de certains postulats je montre l'accord existant entre la théorie de l'hérédité linéaire et les principes de l'énergétique. Je démontre que le travail des forces externes nécessaire pour amener d'un état à un autre un système, sujet à des phénomènes héréditaires linéaires, dépasse toujours la variation d'une certaine fonctionnelle qui ne dépend que de l'état du système. Lorsque le système revient à l'état initial on peut calculer le travail des forces externes dissipé.

J'ai obtenu peu à peu ces résultats. C'est ainsi que dans une Note publiée en 1912 (4) j'ai démontré l'impossibilité d'un mouvement spontané périodique en supposant que l'hérédité soit linéaire. Ce résultat découle du fait qu'une certaine intégrale est toujours positive. On peut le considérer comme un premier pas dans la voie que j'ai suivie après.

(1) Paris, Gauthier-Villars, 1913 (*Collection de monographies sur la théorie des fonctions*, publiées sous la direction de M. BOREL).

(2) Paris, Gauthier-Villars, 1913 (de la même Collection).

(3) La démonstration de la formation des cycles, les relations entre les cycles périodiques et l'invariabilité de l'hérédité, résultent de la théorie développée dans ces Leçons. Certaines particularités des cycles d'hystérésis, par exemple leurs points de rebroussement (qui d'autre part n'existent pas toujours), ne s'expliquent pas par la seule hérédité, au moins par celle linéaire. Il est possible qu'elles doivent être attribuées à des causes qui s'ajoutent à l'hérédité telle qu'on la considère ordinairement.

(4) *Vibrazioni elastiche nel caso della eredità*, « Rend. Acc. Lincei », 1912 [in queste « Opere » : vol. terzo, XXXVIII, pp. 569-577]. Dans cette Note, les intégrales qui paraissent dans les formules (12) et (12') sont précédées du signe $+$. Les conséquences sont les mêmes si elles sont précédées du signe $-$. C'est justement ce second cas qu'il faut envisager.

Dans les Cours professés à Rome en 1912–1913 et en 1924–1925, j'avais montré, en appliquant la propriété analytique qu'on vient de rappeler, qu'il existe une dissipation de l'énergie mécanique dans les cycles fermés périodiques. Mais je n'avais pas encore réussi à aborder la question générale énergétique. Ce n'est que dans mes recherches récentes de biologie mathématique, ou j'ai envisagé des phénomènes d'un caractère héréditaire, que je suis arrivé à trouver un procédé de calcul pouvant s'employer avec succès pour traiter cette question générale (5).

J'ai ainsi obtenu les résultats exposés dans les paragraphes I, II du Chap. II et dans les paragraphes II, III du Chap. III du présent Mémoire.

Celui–ci est divisé en trois Chapitres. Dans le premier je donne les équations et quelques théorèmes de calcul intégral et de la théorie des équations intégrales et intégro–différentielles dont je fais usage dans les Chapitres suivants.

J'ai cru nécessaire de traiter à part le cas d'un seul degré de liberté en y consacrant le Chap. II, et de ne pas le déduire du cas général envisagé dans le Chap. III, car toutes les hypothèses qu'il faut introduire lorsque le système qu'on étudie a plusieurs degrés de liberté ne sont pas nécessaires s'ils se réduisent à un seul.

Les paragraphes des Chapitres II et III, qui ne sont pas cités ci–dessus, renferment les méthodes que j'avais exposées dans mes Cours de 1912–1913 et 1924–1925 et que je n'avais pas publiées jusqu'ici.

Enfin la Note qui termine le Mémoire étend les résultats obtenus au cas où l'on tient compte du frottement proportionnel à la vitesse.

L'étude de l'énergétique des systèmes continus présentant des phénomènes héréditaires, ainsi que celle des systèmes pour lesquels l'hérédité n'est pas linéaire, méritent de faire l'objet de Mémoires spéciaux.

CHAPITRE I

Équations générales des phénomènes héréditaires linéaires et formules auxiliaires.

I. – ÉQUATIONS DES PHÉNOMÈNES HÉRÉDITAIRES LINÉAIRES.

1. Soient $q_1, q_2, \cdots, q_n$ les coordonnées indépendantes d'un système,

$$T = \frac{1}{2} \sum_{1}^{n}{}_{is}\, a_{is}\, q'_i\, q'_s \tag{1}$$

la force vive, $-\Omega$ le potentiel des forces internes et $\mathcal{Q}_1, \mathcal{Q}_2, \cdots, \mathcal{Q}_n$ les forces externes.

(5) *Variazioni e fluttuazioni nel numero d'individui in specie animali conviventi*, «Mem. Comitato Talassografico it.», 1927 [in questo vol.: I, pp. 1–111].

Les équations du mouvement seront

$$(\mathrm{I}) \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q'_1} - \frac{\partial (T-\Omega)}{\partial q_i} = \mathfrak{Q}_i \qquad (i = 1, 2, \cdots, n).$$

Si les coefficients a_{is} sont constants et si l'on a

$$\Omega = \frac{1}{2}\sum_1^n {}_{is}\, b_{is}\, q_i\, q_s\,,$$

les coefficients b_{is} étant aussi costants, les équations (I) prendront la forme linéaire

$$(\mathrm{I}') \qquad \sum_1^n {}_s\, a_{is}\, q''_s + \sum_1^n {}_s\, b_{is}\, q_s = \mathfrak{Q}_i\,,$$

ou l'on suppose que les forces externes soient des fonctions connues du temps.

La forme (1) est une forme définie et positive. Nous supposerons que Ω aussi soit une forme définie et positive. Dans ce cas les déplacements (coordonnées) se conserveront aussi petits que l'on veut si les vitesses initiales ainsi que les déplacements initiaux sont suffisamment petits, les forces externes étant nulles ou si elles satisfont à certaines conditions. La théorie des petits mouvements est fondée sur les équations (I′) que l'on peut simplifier et mettre sous la forme

$$(\mathrm{I}'') \qquad q''_i + b_i\, q_i = \mathfrak{Q}_i$$

en effectuant une substitution linéaire sur les coordonnées.

2. Les *actions héréditaires* sont des actions actuelles dues à des causes qui ont existé dans le passé (6). Nous supposerons que dans chaque instant elles soient des fonctionnelles dépendant des déplacements (coordonnées) qui ont eu lieu précédemment, ces déplacements étant considérés comme des fonctions du temps.

Si ces fonctionnelles sont linéaires, puisque les déplacements sont continus, les actions dues à l'hérédité pourront s'exprimer par les formules

$$\sum_1^n {}_s \int_{-\infty}^{t} F_{is}(t, \tau)\, q_s(\tau)\, d\tau .$$

Elles s'appelleront des *actions héréditaires linéaires*; les fonctions F_i seront les *coefficients d'hérédité.* Supposons que dans un système du type considéré dans le numéro précédent, outre les forces qu'on a envisagées, s'exercent des actions héréditaires linéaires. Alors il faudra remplacer les équations (I′) par les équations

$$(\mathrm{A}) \qquad \sum_1^n {}_s\, a_{is}\, q''_s + \sum_1^n {}_s\, b_{is}\, q_s(t) = \sum_1^n {}_s \int_{-\infty}^{t} F_{is}(t, \tau)\, q_s(\tau)\, d\tau + \mathfrak{Q}_i .$$

(6) Voir *Leçons sur les fonctions de lignes*, professées par M. VITO VOLTERRA à la Sorbonne en 1912 (citées ci-dessus), Chap. VI, VII, VIII, XIV.

Le cas où les F_{is} sont des fonctions de la différence $t-\tau$ s'appelle le cas du *cycle fermé* (7). Nous supposerons que *cette condition soit toujours satisfaite.*

Nous supposerons aussi que les actions héréditaires soient négligeables au delà d'une certaine limite de temps, c'est-à-dire que l'on ait

$$F_{is}(t) = 0 \qquad \text{pour} \quad t \geqq T_0 \qquad (i, s = 1, 2, \cdots, n).$$

T_0 s'appellera la *durée de l'hérédité.*

Les équations (A) s'écriront

$$(\text{A}') \qquad \sum_1^n{}_s\, a_{is}\, q_s''(t) + \sum_1^n{}_s\, b_{is}\, q_s(t) = \sum_1^n{}_s \int_{t-T_0}^{t} F_{is}(t-\tau)\, q_s(\tau)\, d\tau + \mathcal{Q}_i ,$$

ou bien

$$(\text{A}'') \qquad \sum_1^n{}_s\, a_{is}\, q_s''(t) + \sum_1^n{}_s\, b_{is}\, q_s(t) = \sum_1^n{}_s \int_0^{T_0} F_{is}(\tau)\, q_s(t-\tau)\, d\tau + \mathcal{Q}_i .$$

La même substitution linéaire sur les déplacements qui amène à l'équation (I'') conduit les équations précédentes aux formes

$$(\text{A}''') \qquad q_i'' + b_i q_i = \sum_1^n{}_s \int_{t-T_0}^{t} F_{is}(t-\tau)\, q_s(\tau)\, d\tau + \mathcal{Q}_i ,$$

$$(\text{A}^{\text{IV}}) \qquad q_i'' + b_i q_i = \sum_1^n{}_s \int_0^{T_0} F_{is}(\tau)\, q_s(t-\tau)\, d\tau + \mathcal{Q}_i .$$

On dira qu'il y a équilibre lorsque les quantités q' et q'' sont négligeables; c'est pourquoi les équations de l'équilibre seront

$$(\text{B}') \qquad \sum_1^n{}_s\, b_{is}\, q_s = \sum_1^n{}_s \int_{t-T_0}^{t} F_{is}(t-\tau)\, q_s(\tau)\, d\tau + \mathcal{Q}_i ,$$

que l'on peut aussi écrire

$$(\text{B}'') \qquad \sum_1^n{}_s\, b_{is}\, q_s = \sum_1^n{}_s \int_0^{T_0} F_{is}(\tau)\, q_s(t-\tau)\, d\tau + \mathcal{Q}_i .$$

Dans le cas où le système a un seul degré de liberté, chacun des systèmes d'équations (A'), (A''), (B'), (B'') se réduit à une seule équation et l'on a

$$(a') \qquad q'' + bq = \int_{t-T_0}^{t} F(t-\tau)\, q(\tau)\, d\tau + \mathcal{Q} ,$$

$$(a'') \qquad q'' + bq = \int_0^{T_0} F(\tau)\, q(t-\tau)\, d\tau + \mathcal{Q} ,$$

(7) Voir *Leçons sur les fonctions de lignes*, professées par M. VITO VOLTERRA à la Sorbonne en 1912 (citées ci-dessus), Chap. VII.

$$(b') \qquad bq = \int_{t-T_0}^{t} F(t-\tau)\, q(\tau)\, d\tau + \mathcal{Q},$$

$$(b'') \qquad bq = \int_{0}^{T_0} F(\tau)\, q(t-\tau)\, d\tau + \mathcal{Q}.$$

3. L'action héréditaire totale $\int_{t-T_0}^{t} F(t-\tau)\, q(\tau)\, d\tau$ est la somme des actions héréditaires élémentaires $F(t-\tau)\, q(\tau)\, d\tau$. La quantité $F(t-q)\, q(\tau)\, d\tau$ peut être regardée comme l'action héréditaire qui s'exerce au temps t due au déplacement $q(\tau)$ qui a eu lieu dans l'intervalle de temps $(\tau, \tau + d\tau)$. Nous verrons dans le n° 6 que l'on peut donner aux formules une autre forme équivalente et interpréter d'une autre manière les actions héréditaires élémentaires.

4. S'il n'y a pas d'hérédité ni de force externe, on a

$$-q'' = bq.$$

Cette équation peut s'interpréter en disant que bq mesure en valeur absolue l'accélération avec laquelle le déplacement q tend à se dissiper.

Lorsqu'il y a l'hérédité et qu'il n'y a pas de forces externes, on a

$$(2) \qquad -q'' = bq - \int_{t-T_0}^{t} F(t-\tau)\, q(\tau)\, d\tau.$$

Supposons que dans tout l'intervalle de temps T_0 qui précède l'instant t, q conserve le même signe.

Or, on sait que *les actions héréditaires retardent l'action dissipatrice du déplacement*, donc il faut supposer que $F(\tau)$ soit positive.

D'autre part, *l'action héréditaire produite à l'instant t par un déplacement $q(\tau)$ qui a lieu au temps τ, doit diminuer si la distance de temps $t - \tau$ augmente.* C'est pourquoi $F(\tau)$ doit être une fonction décroissante. On a donc les propriétés suivantes de cette fonction:

$F(\tau)$ *est une fonction finie continue, positive, décroissante qui s'annule pour* $\tau \geqq T_0$.

On en tire que

$$\begin{array}{ll} (3) & F(\tau) > 0 \\ (3') & F'(\tau) < 0 \end{array} \Bigg\} \quad \text{pour} \quad 0 < \tau < T_0.$$

Prenons q costante pendant l'intervalle de temps $(t - T_0, t)$. L'équation (2) s'écrira

$$-q''(t) = q\left(b - \int_{0}^{T_0} F(\tau)\, d\tau\right).$$

Si

$$b = \int_0^{T_0} F(\tau)\, d\tau ,$$

on aurait $q''(t) = 0$ et puisque $q'(t) = 0$, q se conserverait constant après l'instant t.

Si l'on avait

$$b < \int_0^{T_0} F(\tau)\, d\tau ,$$

q augmenterait toujours à partir de l'instant t. Ces deux résultats seraient absurdes, car nous supposerons que *le déplacement par soi-même, c'est-à-dire sans causes externes, ne peut pas se conserver constant ni augmenter.* Il faut donc qu'on ait

(4) $$b - \int_0^{T_0} F(\tau)\, d\tau = m > 0 .$$

5. Passons au cas général de n degrés de liberté.

Dans ce cas, on peut envisager

$$\sum_i^n {}_s F_{is}(t-\tau)\, q_s(\tau)\, d\tau ,$$

comme la mesure de l'action héréditaire qui s'exerce au temps t et est due aux déplacements $q_1(\tau), q_2(\tau), \cdots, q_n(\tau)$ ayant eu lieu dans l'intervalle de temps $(\tau, \tau + d\tau)$. Nous verrons après (n° 7) comment on peut aussi interpréter les formules.

Supposons que, quel que soit τ, on ait

$$\sum_i^n {}_s F_{is}(\tau)\, q_s = \frac{\partial \Phi}{\partial q_s} .$$

Φ sera le *potentiel héréditaire élémentaire.*

Les conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence de la fonction Φ seront

$$F_{is} = F_{si} .$$

Dans l'hypothèse qu'elles soient satisfaites, nous ferons aussi les hypothèses que

(5) $$\Phi(t \mid q_1, q_2, \cdots, q_n) = \frac{1}{2} \sum_1^n {}_{is} F_{is}(t)\, q_i\, q_s ,$$

soit une *forme définie et positive,* et

(5') $$\Psi(t \mid q_1, q_2, \cdots, q_n) = \frac{\partial \Phi(t \mid q_1, q_2, \cdots, q_n)}{\partial t} = \frac{1}{2} \sum_1^n {}_{is} F'_{is}(t)\, q_i\, q_s ,$$

soit une *forme définie et négative*. On a posé

$$F'_{is}(t) = \frac{dF_{is}(t)}{dt}$$

et l'on a considéré, dans la dérivation de la formule (5'), les quantités $q_1, q_2, \cdots, q_n$ comme des constantes.

Nous regarderons ces hypothèses comme l'extension des conditions (3) et (3').

Écrivons

$$b_{is} - \int_0^{T_0} F_{is}(\tau)\, d\tau = m_{is}. \tag{6}$$

Comme extension de la condition (4), nous supposerons que

$$\Lambda = \frac{1}{2} \sum_1^n {}_{is}\, m_{is}\, q_i\, q_s \tag{7}$$

soit une forme *définie et positive*.

On donnera ensuite les conséquences énergétiques de ces diverses hypothèses (Chap. III, § II), qui pourront les justifier.

6. L'équation (a') peut s'écrire indifféremment

$$q'' + bq = \int_0^{T_0} F(\tau)\, q(t-\tau)\, d\tau + \mathfrak{Q} \tag{a''}$$

ou

$$q'' + mq + \int_0^{T_0} F(\tau)\, [q(t) - q(t-\tau)]\, d\tau = \mathfrak{Q}, \tag{a''_1}$$

où m est positif [*voir* formule (4)].

Cette seconde forme correspond à l'interprétation suivante: On peut regarder l'action interne qui s'exerce à l'instant t comme résultante d'une force $-mq$ proportionnelle au déplacement actuel et des forces héréditaires

$$-F(\tau)\, [q(t) - q(t-\tau)]\, d\tau$$

proportionnelles aux excès des déplacements actuels sur les déplacements qui ont eu lieu pendant la durée de l'hérédité (voir n° 3).

Le potentiel de $-mq$ est $-(1/2)\, mq^2$; en effet,

$$mq = \frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{1}{2} mq^2\right),$$

et le potentiel des forces

$$-\int_0^{T_0} F(\tau)\, [q(t) - q(t-\tau)]\, d\tau$$

est

$$-\frac{1}{2} \int_0^{T_0} F(\tau)\, [q(t) - q(t-\tau)]^2\, d\tau.$$

En effet

$$\frac{\partial}{\partial q(t)} \frac{1}{2} \int_0^{T_0} F(\tau) [q(t) - q(t-\tau)]^2 \, d\tau = \int_0^{T_0} F(\tau) [q(t) - q(t-\tau)] \, d\tau \text{ (8)}.$$

Le potentiel de toutes les forces internes est donc $-\Theta$, étant

$$(C_1) \qquad \Theta = \frac{1}{2} m q^2 + \frac{1}{2} \int_0^{T_0} F(\tau) [q(t) - q(t-\tau)]^2 \, d\tau =$$

$$= \frac{1}{2} b q^2 - \int_0^{T_0} F(\tau) \, q(t) \, q(t-\tau) \, d\tau + \frac{1}{2} \int_0^{T_0} F(\tau) \, q(t-\tau)^2 \, d\tau.$$

Tandis que la première expression correspond à la formule (a''), la seconde correspond à la formule (a_1''). On pourrait même supprimer le dernier terme dans la dernière expression, ce qui ne changerait pas la dérivée par rapport à $q(t)$ mais nous verrons après (Chap. II, § I) qu'il convient de le conserver.

7. De même les équations (A') peuvent s'écrire sous la forme (A'') ou sous la forme équivalente

$$(A_1'') \qquad \sum_1^n {}_s \, a_{is} q_s''(t) + \sum_1^n {}_s \, m_{is} q_s(t) + \sum_1^n {}_s \int_0^{T_0} F_{is}(\tau) [q_s(t) - q_s(t-\tau)] \, d\tau = \mathfrak{Q}_i$$

et l'on peut regarder l'action interne qui s'exerce à l'istant t comme résultante des forces

$$-\sum_1^n {}_s \, m_{is} \, q_s(t),$$

exprimables linéairement par les déplacements actuel et des forces héréditaires

$$-\sum_1^n {}_s \, F_{is}(\tau) [q_s(t) - q_s(t-\tau)] \, d\tau$$

(8) Si l'on prend la fonctionnelle $\frac{1}{2} \int_0^{T_0} F(\tau) [q(t) - q(t-\tau)]^2 \, d\tau$ et l'on calcule sa variation première, on trouve

$$\delta q(t) \int_0^{T_0} F(\tau) [q(t) - q(t-\tau)] \, d\tau - \int_0^{T_0} F(\tau) [q(t) - q(t-\tau)] \, \delta q(t-\tau)] \, d\tau.$$

La fonctionnelle n'est donc pas *normale* au sens de M. Lévy (*Lecons d'analyse fonctionnelle*, p. 67, Paris 1922). Le premier terme montre que la fonctionnelle *dépend d'une manière spéciale* de $q(t)$ d'après les définitions que j'ai données dans mon premier Mémoire sur les fonctionnelles [*Sopra le funzioni che dipendono da altre funzioni*, « Rend. Acc. Lincei », 1887; in queste « Opere », vol. primo, XVII, pp. 294–314]. C'est le coefficient de $\delta q(t)$ dans l'expression de la variation première que nous avons indiqué ici par

$$\frac{\partial}{\partial q(t)} \frac{1}{2} \int_0^{T_0} F(\tau) [q(t) - q(t-\tau)]^2 \, d\tau.$$

exprimables linéairement par les excès des déplacements actuels sur les déplacements qui ont eu lieu pendant la durée de l'hérédité.

A ce point de vue, le potentiel des forces internes est exprimé par $-\Theta$, étant

$$\text{(C)} \qquad \Theta = \frac{1}{2}\sum_{1}^{n}{}_{is} m_{is} q_i(t) q_s(t) +$$

$$+\frac{1}{2}\int_{0}^{T_0}\sum_{1}^{n}{}_{is} F_{is}(\tau)\,[q_i(t) - q_i(t-\tau)]\,[q_s(t) - q_s(t-\tau)]\,d\tau =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{1}^{n}{}_{is} b_{is} q_i(t) q_s(t) - \sum_{1}^{n}{}_{i} q_i(t)\int_{0}^{T_0}\sum_{1}^{n}{}_{s} F_{is}(\tau) q_s(t-\tau)\,d\tau +$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{1}^{n}{}_{s}\int_{0}^{T_0} F_{is}(\tau) q_i(t-\tau) q_s(t-\tau)\,d\tau .$$

Au sujet de ces deux expressions équivalentes, on peut répéter ce que nous avons dit dans le n° 6 sur les deux expressions (C_1) (*voir* Chap. III, § 2).

8. Remarquons que le potentiel des forces internes [formules (C) et (C_1)] au temps t dépend des valeur des déplacements dans cet instant et des valeurs des déplacements qui ont eu lieu pendant la durée précédente de l'hérédité. D'après les hypothèses précédentes, ce potentiel est une quantité négative, qui ne s'annule que si tous les déplacements pendant la durée de l'hérédité sont nuls. Nous exprimerons cette propriété en disant que *le potentiel des forces internes est défini et négatif.*

9. Nous nommerons *potentiel dérivé* l'expression

$$\frac{1}{2}\int_{0}^{T_0}\sum_{1}^{n}{}_{is} F'_{is}(\tau)\,[q_i(t) - q_i(t-\tau)]\,[q_s(t) - q_s(t-\tau)]\,d\tau\,;$$

il sera *défini et négatif*, car il est négatif et ne s'annule que lorsque

$$q_i(t) = q_i(t-\tau) \qquad (0 < \tau < T_0)\,.$$

II. – Digression sur les équations intégrales et intégro-différentielles.

1. Théorème I. – *Si l'on a l'équation intégrale*

$$\text{(8)} \qquad y(t) = x(t) + \int_{t-T_0}^{t} F(t-\tau)\,x(\tau)\,d\tau ,$$

où $F(t) = o$ *pour* $t \geqq T_0$, *et si l'on suppose que* $y(t)$ *soit connue depuis* $t = t_0$

jusqu'à $t = t_1$ $(t_1 > t_0)$, *et* $x(t)$ *soit connue depuis* $t = t_0 - T_0$ *jusqu'à* $t = t_0$, $x(t)$ *sera déterminée depuis* $t = t_0$ *jusqu'à* $t = t_1$.

En effet, soit d'abord $t_0 < t < t_0 + T_0$.

L'équation (8) pourra s'écrire

$$y(t) = x(t) + \int_{t_0}^{t} F(t-\tau)\, x(\tau)\, d\tau + \int_{t-T_0}^{t_0} F(t-\tau)\, x(\tau)\, d\tau .$$

Or $x(\tau)$ est connu si $t - T_0 < \tau < t_0$. Donc

$$\int_{t-T_0}^{t_0} F(t-\tau)\, x(\tau)\, d\tau = z(t)$$

est connu. Par suite, la résolution de l'équation intégrale

$$y(t) - z(t) = x(t) + \int_{t_0}^{t} F(t-\tau)\, x(\tau)\, d\tau \tag{8'}$$

pourra donner $x(t)$ pour t compris entre t_0 et $t_0 + T_0$.

Supposons maintenant que t soit compris entre $t_0 + T_0$ et $t_1 > t_0 + T_0$. Puisque $F(\tau) = 0$ pour τ égale ou supérieur à T_0, l'intégrale

$$\int_{t_0}^{t_0 - T_0} F(t-\tau)\, x(\tau)\, d\tau$$

sera nulle. Par suite, l'équation (8) pourra s'écrire

$$y(t) = x(t) + \int_{t_0}^{t} F(t-\tau)\, x(\tau)\, d\tau + \int_{t_0 - T_0}^{t_0} F(t-\tau)\, x(\tau)\, d\tau ,$$

c'est-à-dire

$$y(t) = x(t) + \int_{t_0}^{t_0} F(t-\tau)\, x(\tau)\, d\tau .$$

Nous avons montré que l'on peut calculer $x(t)$ pour t compris entre t_0 et $t_0 + T_0$; la dernière équation nous donnera $x(t)$ pour t compris entre $t_0 + T_0$ et t_1.

2. THÉORÈME II. - *Si l'on a le système d'équations intégrales*

$$y_i(t) = x_i(t) + \sum_{1}^{n}{}_s \int_{t-T_0}^{t} F_{is}(t-\tau)\, x_s(\tau)\, d\tau , \tag{9}$$

où $F_{is}(t) = 0$ *pour* $t \geqq T_0$, *et si l'on suppose que les* $y_i(t)$ *soient connues depuis* $t = t_0$ *jusqu'à* $t = t_1$, $(t_1 > t_0)$, *et les* $x_i(t)$ *soient connues depuis* $t = t_0 - T_0$ *jusqu'à* $t = t_0$, *les fonctions* $x_i(t)$ *seront déterminées depuis* $t = t_0$ *jusqu'à* $t = t_1$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$.

La démonstration de ce théorème se fait de la même manière que celle du théorème précédent.

3. Prenons dans l'équation (8) $t = t_0$, il viendra

$$y(t_0) = x(t_0) + \int_{t_0 - T_0}^{t_0} F(t_0 - \tau)\, x(\tau)\, d\tau . \tag{10}$$

Donc $y(t_0)$ est connue étant données les valeurs de $x(\tau)$ pour τ compris entre $t_0 - T_0$ et t_0.

Si l'on ne veut pas que $y(t)$ soit discontinue pour $t = t_0$, il faut que les valeurs de cette fonction, que l'on donne à partir de $t = t_0$, commencent par la valeur de $y(t_0)$ déduite de l'équation (10).

Cette condition n'étant pas satisfaite, on voit, à cause de l'équation (8'), que $x(t)$ aussi est discontinue pour $t = t_0$.

On peut faire la même remarque dans le cas du système d'équations intégrales (9).

4. Les théorèmes précédents amènent au corollaire suivant:

COROLLAIRE. - *Dans le cas de l'équilibre héréditaire, si l'on connaît les déplacements* $q_1, q_2, \cdots, q_n$ *pendant un intervalle de temps égal à la durée héréditaire et si l'on connaît les forces externes dans tous les instants suivants, il sera possible de calculer les déplacements à ces instants.*

La continuité des déplacements sera assurée par les conditions qui résultent de la remarque du n° 3.

5. Soient les équations intégro-différentielles

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = \sum_1^n {}_s \left\{ A_{is}(t)\, x_s(t) + \int_{t-T_0}^{t} F_{is}(t-\tau)\, x_s(\tau)\, d\tau \right\} + y_i(t) \tag{11}$$

$$(i = 1, 2, \cdots, n),$$

où l'on suppose $F_{is}(t) = 0$ pour $t \geqq T_0$.

On peut passer aux équations intégrales

$$x_i(t) = x_i(t_0) + \int_{t_0}^{t} \sum_1^n {}_s A_{is}(\tau)\, x_s(\tau)\, d\tau + \tag{11'}$$

$$+ \int_{t_0}^{t} d\xi \int_{\xi - T_0}^{\xi} \sum_1^n {}_s F_{is}(\xi - \tau)\, x_s(\tau)\, d\tau + \int_{t_0}^{t} y_i(\tau)\, d\tau .$$

Examinons maintenant l'intégrale

$$I = \int_{t_0}^{t} d\xi \int_{\xi - T_0}^{\xi} F_{is}(\xi - \tau)\, x_s(\tau)\, d\tau . \tag{11$_1$}$$

Prenons dans le plan $\tau\xi$ les points suivants:

A	de coordonnées	$\tau = t_0$,	$\xi = t_0$;
B	»	$\tau = t$,	$\xi = t$;
C	»	$\tau = t - T_0$,	$\xi = t$;
D	»	$\tau = t_0 - T_0$,	$\xi = t_0$.

L'aire ABCD $= \sigma$ est un parallélogramme et l'on aura évidemment

$$I = \int_\sigma F_{is}(\xi - \tau)\, x_s(\tau)\, d\sigma.$$

Conduisons la droite AE parallèle à l'axe ξ. Elle partagera l'aire σ en deux parties σ_1 et σ_2 situées respectivement à gauche et à droite de cette droite.

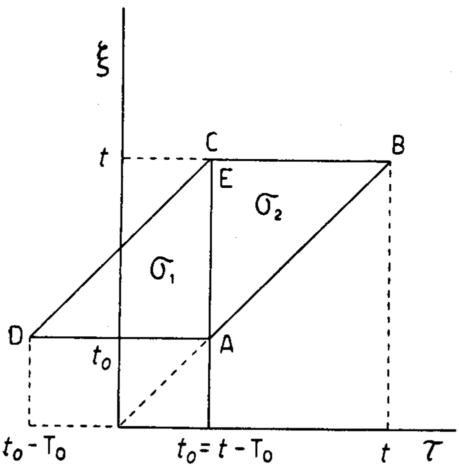


Fig. 1.

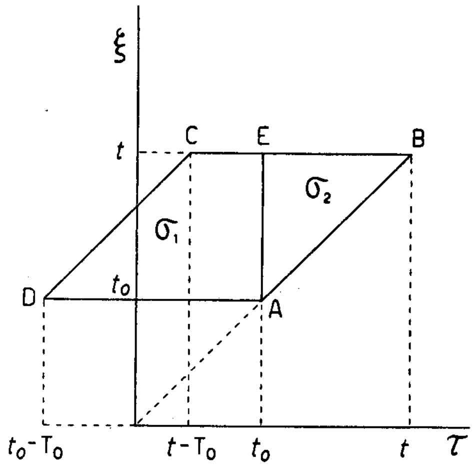


Fig. 2.

Or deux cas peuvent se présenter: ou $t - T_0 \leqq t_0$ (figg. 1, 2) ou $t - T_0 > t_0$ (fig. 3). Dans le premier cas, l'aire σ_2 est constituée du triangle AEB; dans le second cas, elle est constituée du quadrilatère AFCB, F étant le point où la droite AE rencontre le côté DC du parallélogramme. Soient ξ, τ les coordonnées d'un point du triangle CEF $= \sigma_3$; on aura

$$\xi - \tau \geqq T_0.$$

En effet la droite CD a pour équation

$$\xi - \tau = T_0$$

et les points du triangle σ_3 sont situés à la gauche de cette droite. Mais

$$F(t) = 0 \quad \text{si} \quad t \geqq T_0;$$

donc

$$\int_{\sigma_3} F_{is}(\xi - \tau)\, x_s(\tau)\, d\sigma_3 = 0,$$

et par suite, dans le second cas,

$$\int_{\sigma_2} F_{is}(\xi-\tau)\, x_s(\tau)\, d\sigma_2 = \int_{\sigma_2} F_{is}(\xi-\tau)\, x_s(\tau)\, d\sigma_2 + \int_{\sigma_3} F_{is}(\xi-\tau)\, x_s(\tau)\, d\sigma_3 =$$

$$= \int_{\mathrm{ABE}} F_{is}(\xi-\tau)\, x_s(\tau)\, d\sigma .$$

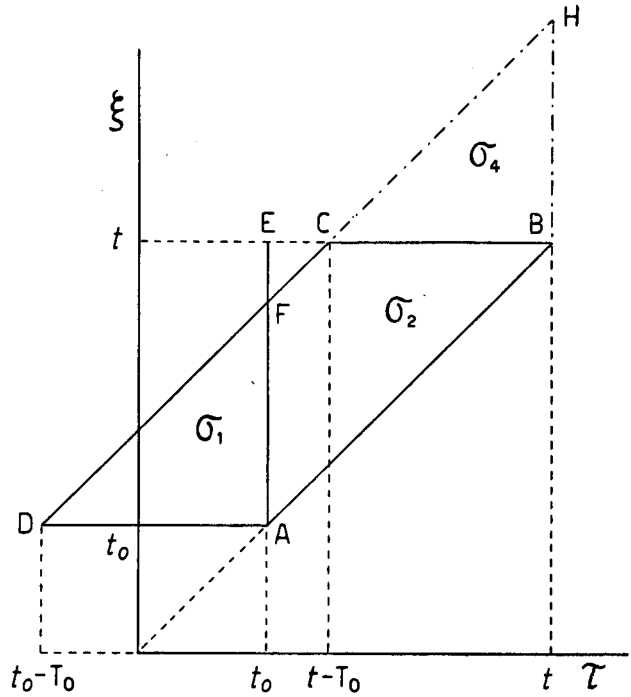


Fig. 3.

Dans le premier cas, on a directement

$$\int_{\sigma_2} F_{is}(\xi-\tau)\, x_s(\tau)\, d\sigma = \int_{\mathrm{ABE}} F_{is}(\xi-\tau)\, x_s(\tau)\, d\sigma .$$

Donc, dans les deux cas, on pourra écrire

$$\mathrm{I} = \int_{\sigma_1} F_{is}(\xi-\tau)\, x_s(\tau)\, d\sigma_1 + \int_{\mathrm{ABE}} F_{is}(\xi-\tau)\, x_s(\tau)\, d\tau =$$

$$= \int_{\sigma_1} F_{is}(\xi-\tau)\, x_s(\tau)\, d\sigma_1 + \int_{t_0}^{t} d\xi \int_{t_0}^{\xi} F_{is}(\xi-\tau)\, x_s(\tau)\, d\tau =$$

$$= \int_{\sigma_1} F_{is}(\xi-\tau)\, x_s(\tau)\, d\sigma_1 + \int_{t_0}^{t} x_s(\tau)\, d\tau \int_{\tau}^{t} F_{is}(\xi-\tau)\, d\xi ,$$

et les équations intégrales (11′) pourront s'écrire

$$(11'') \qquad x_i(t) - \int_{t_0}^{t} \sum_{1}^{n}{}_s \left[A_{is}(\tau) + \int_{\tau}^{t} F_{is}(\xi - \tau)\, d\xi \right] x_s(\tau)\, d\tau =$$

$$= x_i(t_0) + \sum_{1}^{n}{}_s \int_{\sigma_1} F_{is}(\xi - \tau)\, x_s(\tau)\, d\sigma_1 + \int_{t_0}^{t} y_i(\tau)\, d\tau\,.$$

En posant

$$-\left[A_{is}(\tau) + \int_{\tau}^{t} F_{is}(\xi - \tau)\, d\xi \right] = \Phi_{is}(\tau\,,\, t)\,,$$

$$x_i(t_0) + \sum_{1}^{n}{}_s \int_{\sigma_1} F_{is}(\xi - \tau)\, x_s(\tau)\, d\sigma_1 + \int_{t_0}^{t} y_i(\tau)\, d\tau = z_i(t)\,,$$

les équations (11″) deviendront

$$(12) \qquad x_i(t) + \sum_{1}^{n}{}_s \int_{t_0}^{t} \Phi_{is}(\tau\,,\, t)\, x_s(\tau)\, d\tau = z_i(t) \qquad (i = 1\,, 2\,, \cdots, n)\,.$$

Si les A_{is} et les F_{is} sont des fonctions connues, $\Phi_{is}(\tau\,,\,t)$ seront aussi connues. Si $y_i(t)$ sont données pour t compris entre t_0 et $t_1 > t_0$, on pourra calculer $\int_{t_0}^{t} y_i(\tau)\, d\tau$ pour t compris entre les mêmes limites. Supposons de connaître les $x_s(\tau)$ pour τ compris entre $t_0 - T_0$ et t_0, alors les intégrales

$$\int_{\sigma_1} F_{is}(\xi - \tau)\, x_s(\tau)\, d\sigma_1$$

seront connues, car les points situés dans l'intérieur de l'aire σ_1 ont l'abscisse comprise entre $t_0 - T_0$ et t_0.

On en déduit que les fonctions $z_i(t)$ seront connues depuis $t = t_0$ jusqu'à $t = t_1$, et par suite, en résolvant les équations intégrales (12), on pourra déterminer les $x_i(t)$ pour t compris entre t_0 et t_1.

6. La proposition qu'on tire de là est un théorème général sur les équations intégro-differentielles qu'il est facile d'énoncer. Mais voyons son application aux équations héréditaires du mouvement.

Si l'on pose dans les équations (A‴)

$$q'_i = p_i\,,$$

elles s'écriront

$$p'_i + b_i q_i + \sum_{1}^{n}{}_s \int_{t-T_0}^{t} F_{is}(t - \tau)\, q_s(\tau)\, d\tau = \mathcal{Q}_i \quad , \quad q'_i - p_i = 0\,,$$

qui rentrent dans la forme générale des équations intégro-différentielles (11) en supposant dans celles-ci quelques noyaux nuls.

Donc on aura le théorème suivant:

Si l'on connaît les déplacements pendant une période de temps égale a la durée de l'hérédité et si l'on connaît les forces dans un intervalle de temps suivant, on pourra calculer les déplacements qui ont lieu pendant cet intervalle de temps.

III. – Propriétés de quelques intégrales.

1. Théorème I. – *Si* $F(\xi)$ *est une fonction positive décroissante pour* $0 \leqq \xi < T_0$,

$$\int_0^{T_0} F(\xi) \sin \alpha\xi \, d\xi > 0,$$

α *étant une constante positive.*

En effet, soit

$$\frac{2(\lambda - 1)\pi}{\alpha} < T_0 \leqq \frac{2\lambda\pi}{\alpha},$$

λ étant un nombre entier. Posons

$$\frac{2\pi}{\alpha} = \omega .$$

On aura

$$\int_0^{\omega} F(\xi) \sin \alpha\xi \, d\xi > 0 \quad , \quad \int_{\omega}^{2\omega} F(\xi) \sin \alpha\xi \, d\xi > 0, \cdots,$$

$$\int_{(\lambda-1)\omega}^{T_0} F(\xi) \sin \alpha\xi \, d\xi > 0,$$

d'où l'on tire

$$\int_0^{T_0} F(\xi) \sin \alpha\xi \, d\xi > 0 .$$

Corollaire. – *Si*

$$\frac{1}{2} \Sigma_{is} F_{is}(\xi) a_i a_s = \Phi(\xi \mid a_1, a_2, \cdots, a_n)$$

est une forme définie positive, et si

$$\frac{1}{2} \Sigma_{is} F'_{is}(\xi) a_i a_s = \psi(\xi \mid a_1, a_2, \cdots, a_n)$$

est une forme définie négative,

$$\int_0^{T_0} \Phi(\xi \mid a_1, a_2, \cdots, a_n) \sin \alpha\xi \, d\xi > 0,$$

quelles que soient les constantes $a_1, a_2, \cdots, a_n, \alpha$, *pourvu que cette dernière constante soit positive.*

Remarque. - Si, outre les conditions que nous avons posées précédemment, on suppose que

$$| F(\xi) | < \frac{m}{\xi^{1+\varepsilon}} \quad , \quad | F_{is}(\xi) | < \frac{m}{\xi^{1+\varepsilon}} ,$$

m étant une constante positive déterminée et $\varepsilon > 0$, on pourra prendre dans les inégalités précédentes $T_0 = \infty$, c'est-à-dire

$$\int_0^\infty F(\xi) \sin \alpha\xi \, d\xi > 0 \quad , \quad \int_0^\infty \Phi(\xi \mid a_1, a_2, \cdots, a_n) \sin \alpha\xi \, d\xi > 0 ,$$

2. THÉORÈME II. - *Si, quelle que soit la constante* α, *on a*

(13)
$$\int_0^{T_0} \alpha\xi \, F(\xi) \sin d\xi = 0$$

ou

(14)
$$\int_0^{T_0} F(\xi) \cos \alpha\xi \, d\xi = 0 ,$$

$F(\xi)$ *étant une fonction finie et continue, il s'ensuivra* $F(\xi) = 0$.

On pourrait déduire cette proposition de la théorie des systèmes orthogonaux fermés, mais nous en donnerons une démonstration directe.

Prenons

$$\eta = \frac{\pi\xi}{T_0} \quad , \quad F\left(\frac{T_0 \eta}{\pi}\right) = F_1(\eta) \quad , \quad \beta = \frac{T_0 \alpha}{\pi} ;$$

on aura, si l'équation (13) est satisfaite,

$$\int_0^\pi F_1(\eta) \sin \beta\eta \, d\eta = 0 ,$$

quelle que soit la constante β.

Soit $f(\eta)$ une fonction continue périodique impaire avec la période 2π ayant dans une période un nombre fini d'oscillations. Elle pourra se développer en série de Fourier uniformément convergente et l'on aura

$$f(\eta) = \sum_1^\infty {}_n A_n \sin n\eta ,$$

d'où l'on tire

(13′)
$$\int_0^\pi F_1(\eta) f(\eta) \, d\eta = 0 .$$

Si $F_1(\eta)$ n'est pas nul en un point de l'intervalle $(0, \pi)$ on pourra trouver un intervalle $(\eta_1, \eta_2 + \varepsilon)$ intérieur à $(0, \pi)$ et dans lequel $F_1(\eta)$ conserve le même signe. Or on pourra choisir:

$f(\eta) = 0$	pour η compris entre		0 et η_1,
$f(\eta) > 0$	»		η_1 et $\eta_1 + \varepsilon$,
$f(\eta) = 0$	»		$\eta_1 + \varepsilon$ et π;

c'est pourquoi

$$\int_0^{\pi} F_1(\eta) f(\eta) \, d\eta$$

ne serait pas nul, ce qui est en contradiction avec l'équation (13'). Donc $F_1(\eta)$ doit être nul en tous les points de l'intervalle $(0, \pi)$, ce qui démontre la première partie du théorème.

On démontre la seconde partie du théorème II directement par un procédé analogue à celui par lequel nous en avons démontré la première partie, mais il est inutile de le rapporter, parce que l'on peut remarquer que par dérivation par rapport à α on tire de l'équation (14) l'égalité

$$\int_0^{T_0} \xi F(\xi) \sin \alpha\xi \, d\xi = 0 , \tag{14}$$

et en vertu de la première partie du théorème II on a $F(\xi) = 0$.

3. THÉORÈME III. – *Si $f(x)$ est une fonction périodique ayant la période 2ω,*

$$\int_{-T_0}^{t} F(t-\tau) f(\tau) \, d\tau$$

sera périodique avec la même période.

En effet,

$$\int_{t-T_0}^{t} F(t-\tau) f(\tau) \, d\tau = \int_0^{T_0} F(\tau) f(t-\tau) \, d\tau = \int_0^{T_0} F(\tau) f(t+2\omega-\tau) \, d\tau =$$

$$= \int_{t+2\omega-T_0}^{t+2\omega} F(t+2\omega-\tau) f(\tau) \, d\tau .$$

CHAPITRE II

Phénomènes héréditaires linéaires. Cas d'un seul degré de liberté.

I. – PRINCIPES ÉNERGÉTIQUES.

1. Prenons l'équation (a'') (9),

$$q''(t) + bq(t) = \int_0^{T_0} F(\tau) q(t-\tau) \, d\tau + \mathfrak{Q}. \tag{a''}$$

(9) Il est utile de comparer les calculs suivants, ainsi que ceux du paragraphe II, Chap. III, avec les calculs qui sont effectués dans le dernier paragraphe du dernier chapitre du Mémoire précedemment cité: *Variazioni e fluttuazioni nel numero d'individui*, etc. (voir l'Introduction).

En multipliant les deux membres par $q'(t)$, on a

$$q'(t)\,q''(t) + bq(t)\,q'(t) = q'(t)\int_0^{T_0} F(\tau)\,q(t-\tau)\,d\tau + \mathcal{Q}q',$$

c'est-à-dire

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}q'^2(t) + \frac{1}{2}bq^2(t) - q(t)\int_0^{T_0} F(\tau)\,q(t-\tau)\,d\tau\right) =$$

$$= -q(t)\int_0^{T_0} F(\tau)\,q'(t-\tau)\,d\tau + \mathcal{Q}q' =$$

$$= q(t)\int_0^{T_0} F(\tau)\,\frac{d}{d\tau}\left[q(t-\tau) - q(t)\right]d\tau + \mathcal{Q}q'.$$

En effectuant une intégration par parties dans la deuxième intégrale et en tenant compte que $F(T_0) = 0$, on a

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}q'^2(t) + \frac{1}{2}bq^2(t) - q(t)\int_0^{T_0} F(\tau)\,q(t-\tau)\,d\tau\right) = \tag{15}$$

$$= -q(t)\int_0^{T_0} F'(\tau)\left[q(t-\tau) - q(t)\right]d\tau + \mathcal{Q}q'.$$

Considérons maintenant l'identité

$$\frac{1}{2}\,\frac{d}{dt}\int_0^{T_0} F(\tau)\,q^2(t-\tau)\,d\tau = -\frac{1}{2}\int_0^{T_0} F(\tau)\,\frac{d}{d\tau}\left[q^2(t-\tau) - q^2(t)\right]d\tau.$$

Par une intégration par parties, elle peut s'écrire

$$\frac{1}{2}\,\frac{d}{dt}\int_0^{T_0} F(\tau)\,q^2(t-\tau)\,d\tau = \frac{1}{2}\int_0^{T_0} F'(\tau)\left[q^2(t-\tau) - q^2(t)\right]d\tau. \tag{16}$$

En ajoutant membre à membre les équations (15) et (16), on a

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{2}q'^2(t) + \frac{1}{2}bq^2(t) + \frac{1}{2}\int_0^{T_0} F(\tau)\,q^2(t-\tau)\,d\tau - \right. \tag{17}$$

$$\left. - \int_0^{T_0} F(\tau)\,q(t-\tau)\,q(t)\,d\tau\right\} =$$

$$= -q(t)\int_0^{T_0} F'(\tau)\left[q(t-\tau) - q(t)\right]d\tau +$$

$$+ \frac{1}{2}\int_0^{T_9} F'(\tau)\left[q^2(t-\tau) - q^2(t)\right]d\tau + \mathcal{Q}q' =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{T_0} F'(\tau)\,[q^2(t-\tau)+q^2(t)-2\,q(t)\,q(t-\tau)]\,d\tau + \mathcal{Q}q' =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{T_0} F'(\tau)\,[q(t-\tau)-q(t)]^2\,d\tau + \mathcal{Q}q'.$$

Or

$$\frac{1}{2}q'^2(t)+\frac{1}{2}bq^2(t)+\frac{1}{2}\int_0^{T_0} F(\tau)\,q^2(t-\tau)\,d\tau - \int_0^{T_0} F(\tau)\,q(t-\tau)\,q(t)\,d\tau =$$

$$= \frac{1}{2}q'^2(t)+\frac{1}{2}bq^2(t)+\frac{1}{2}\int_0^{T_0} F(\tau)\,[q(t-\tau)-q(t)]^2\,d\tau - \frac{1}{2}\int_0^{T_0} F(\tau)\,q^2(t)\,d\tau =$$

$$= \frac{1}{2}q'^2(t)+\frac{1}{2}\left[b-\int_0^{T_0} F(\tau)\,d\tau\right]q^2(t)+\frac{1}{2}\int_0^{T_0} F(\tau)\,[q(t-\tau)-q(t)]^2\,d\tau =$$

$$= \frac{1}{2}q'^2(t)+\frac{1}{2}mq^2(t)+\frac{1}{2}\int_0^{T_0} F(\tau)\,[q(t-\tau)-q(t)]^2\,d\tau,$$

où l'on a posé

$$m = b - \int_0^{T_0} F(\tau)\,d\tau > 0$$

[*voir* la formule (4), Chapitre I, § 1].

L'equation (17) pourra donc s'écrire

$$(18)\qquad \frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{2}q'^2(t)+\frac{1}{2}mq^2(t)+\frac{1}{2}\int_0^{T_0} F(\tau)\,[q(t-\tau)-q(t)]^2\,d\tau\right\} -$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^{T_0} F'(\tau)\,[q(t-\tau)-q(t)]^2\,d\tau = \mathcal{Q}q'.$$

En multipliant par dt et en intégrant entre les temps t_0 et t, on aura

$$(D_1)\qquad \left\{\frac{1}{2}q'^2(t)+\frac{1}{2}mq^2(t)+\frac{1}{2}\int_0^{T_0} F(\tau)\,[q(t-\tau)-q(t)]^2\,d\tau\right\} -$$

$$-\left\{\frac{1}{2}q'^2(t_0)+\frac{1}{2}mq^2(t_0)+\frac{1}{2}\int_0^{T_0} F(\tau)\,[q(t_0-\tau)-q(t_0)]^2\,d\tau\right\} -$$

$$-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t} dt\left\{\int_0^{T_0} F'(\tau)\,[q(t-\tau)-q(t)]^2\,d\tau\right\} = \int_{t_0}^{t} \mathcal{Q}q'(t)\,dt.$$

On peut regarder l'équation précédente comme *l'équation fondamentale énergétique de la mécanique héréditaire linéaire pour les systèmes ayant un seul degré de liberté* (10).

(10) Si au lieu de partir de l'équation (a'') nous partons de l'équation équivalente (a''_1) en

2. Nous allons maintenant analyser l'équation précédente. Le second membre est le *travail effectué par les forces*. Nous pouvons le désigner par $\mathfrak{L}$.

$$\frac{1}{2} q'^2(t) = E^{(c)} \tag{19}$$

est l'*énergie cinétique toujours positive*, c'est pourquoi

$$\frac{1}{2} q'^2(t) - \frac{1}{2} q'^2(t_0) = E^{(c)} - E_0^{(c)}$$

est *la variation de l'énergie cinétique.*

Considérons la quantité *toujours positive*

$$\frac{1}{2} mq^2(t) + \frac{1}{2}\int_0^{T_0} F(\tau)\,[q(t) - q(t-\tau)]^2\,d\tau = \Theta(t)\,; \tag{C_1}$$

$-\Theta$ est *le potentiel des forces internes* [Chap. I, § I, formule (C_1)] et ne dépend que de l'état du système pendant la période de temps égale à la durée de l'hérédité qui précède l'instant actuel t.

Puisque $F'(\tau)$ est négative

$$-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t} d\xi \int_0^{T_0} F'(\tau)\,[q(\xi-\tau) - q(\xi)]^2\,d\tau = E^{(d)} \tag{C'_1}$$

est une *quantité toujours positive.*

L'équation (D_1) s'écrira donc

$$[E^{(c)} - E_0^{(c)}] + [\Theta(t) - \Theta(t_0)] + E^{(d)} = \mathfrak{L}. \tag{D'_1}$$

Si nous posons

$$E^{(c)} + \Theta(t) = E^{(m)}, \tag{20}$$

nous aurons

$$E^{(m)} - E_{(0)}^{(m)} + E^{(d)} = \mathfrak{L} \tag{D''_1}$$

multipliant les deux membres par q', on trouve

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{2} q'^2(t) + \frac{1}{2} mq^2(t) + \frac{1}{2}\int_0^{T_0} F(\tau)\,[q(t) - q(t-\tau)]^2\,d\tau\right\} =$$

$$= -\int_0^{T_0} F(\tau)\,[q(t) - q(t-\tau)]\,q'(t-\tau)\,d\tau + \mathfrak{Q}q' =$$

$$= -\int_0^{T_0} F(\tau)\,[q(t) - q(t-\tau)]\,\frac{d}{d\tau}[q(t) - q(t-\tau)]\,d\tau + \mathfrak{Q}q' =$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^{T_0} F(\tau)\,\frac{d}{d\tau}[q(t) - q(t-\tau)]^2\,d\tau + \mathfrak{Q}q' =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{T_0} F'(\tau)\,[q(t) - q(t-\tau)]^2\,d\tau + \mathfrak{Q}q',$$

c'est-à-dire on trouve l'équation (18). C'est donc une manière plus simple de l'obtenir, mais qui ne diffère pas essentiellement de celle qu'on a suivie dans le texte (voir la note ([12])).

et par suite

$$E^{(m)} - E_0^{(m)} < \mathfrak{L}.$$

Donc *le travail (positif ou négatif) que les forces externes doivent effectuer pour amener le système d'un état à un autre est toujours supérieur à la variation que la fonctionnelle* $E^{(m)}$ *subit dans le même passage.*

Remarquons que cette proposition est une conséquence des *hypothèses* formulées dans le n° 4, § I, Chapitre I.

Si nous appelons *par définition* Θ *l'énergie potentielle interne*, $E^{(m)}$ *l'énergie mécanique*, la formule (D_1') peut s'interpréter de la manière suivante:

THÉORÈME I. – *Le travail des forces externes dépasse toujours la variation de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle interne d'une quantité positive*, ou encore [formule (D_1'')]:

Le travail des forces externes dépasse toujours la variation de l'énergie mécanique d'une quantité positive.

On peut aussi énoncer ce théorème de la manière suivante en supposant $\mathfrak{L}$ positif:

Le travail des forces externes ne se transforme jamais complètement en énergie mécanique, mais il reste toujours une partie résiduelle de ce travail qui ne se transforme pas en énergie mécanique.

Et si nous supposons les forces externes nulles et par conséquent $\mathfrak{L} = 0$, on a:

THÉORÈME II. – *S'il n'y a pas de forces externes, l'énergie mécanique diminue continuellement.*

Supposons $\mathfrak{L}$ négatif, alors le système effectue un travail externe $-\mathfrak{L}$ et l'on a:

THÉORÈME III. – *La diminution d'énergie mécanique dépasse toujours le travail externe effectué,*

ou même:

L'énergie mécanique ne se transforme qu'en partie en travail mécanique externe.

3. Si $q(t) = q(t_0)$ et $q'(t) = q'(t_0)$, on peut dire que le système au temps t a le même déplacement et les mêmes vitesses qu'au temps t_0, mais, au point de vue de l'hérédité, on ne peut pas conclure que le système est revenu aux conditions initiales. Nous dirons que *le système est revenu aux conditions initiales si*

$$q(t - \tau) = q(t_0 - \tau) \qquad \text{pour} \quad 0 \leqq \tau \leqq T_0$$

(*voir* Chap. I, § I, n° 7).

On pourra alors énoncer les théorèmes suivants:

THÉORÈME IV. – *Si le système revient aux conditions initiales, l'énergie potentielle reprend la même valeur qu'elle avait initialement.*

THÉORÈME V. – *Pendant une période de temps au bout de laquelle le système revient aux conditions initiales, les forces effectuent un travail positif.*

Si le système revient aux conditions initiales, rien n'est changé au point de vue mécanique et, puisque les forces ont produit un travail positif, il s'ensuit qu'il y a un travail mécanique dissipé. La mesure du travail dissipé s'obtient de la formule (D_1'') en prenant $E^{(m)} = E_0^{(m)}$. Par suite on a

$$E^{(d)} = \mathfrak{L}.$$

Donc $E^{(d)}$ *est le travail dissipé lorsqu'on revient aux conditions initiales.*

D'aprés le principe de la conservation de l'énergie, ce travail doit se transformer en d'autres formes d'énergie.

Si l'on ne revient pas aux conditions initiales, on ne sait pas si $E^{(d)}$ est une quantité de travail mécanique qui s'est transformé dans une autre forme d'énergie.

4. Il faut bien s'entendre sur la signification des mots dont nous avons fait usage. Ce n'est que par *définition*, que nous avons appelé Θ *énergie potentielle*, $E^{(m)}$ *énergie mécanique*; mais les résultat précédents montrent que ces *définitions* sont compatibles avec les principes de l'énergétique.

II. – Mouvement spontané.

1. Un mouvement est *spontané* s'il a lieu sans que des forces externes agissent. Si des forces externes agissent, le mouvement est *forcé*. Considérons maintenant le mouvement d'un système ayant un seul degré de liberté dans le cas héréditaire.

S'il n'y a pas des forces externes, c'est-à-dire si $\mathfrak{Q} = 0$, l'équation (a'') deviendra

$$q''(t) + bq(t) = \int_0^{T_0} F(\tau)\, q(t-\tau)\, d\tau, \tag{21}$$

où $F(\tau)$ est positif et $F'(\tau) < 0$.

Alors l'équation (18) s'écrira

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{2}q'^2(t) + \frac{1}{2}mq^2(t) + \frac{1}{2}\int_0^{T_0} F(\tau)\,[q(t-\tau) - q(t)]^2\, d\tau\right\} = \tag{22}$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{T_0} F'(\tau)\,[q(t-\tau) - q(t)]^2\, d\tau < 0,$$

et, en tenant compte des égalités (19), (C_1), (20),

$$\frac{dE^{(m)}}{dt} < 0.$$

Donc, comme premier théorème sur le mouvement spontané, on a le théorème II du paragraphe précédent, c'est-à-dire: *s'il n'y a pas de forces externes, l'énergie mécanique diminue toujours.*

On tire de là comme conséquence:

Théorème II. – *S'il n'y a pas de forces externes, tout mouvement périodique est impossible.*

En effet, s'il existait un mouvement périodique $q(t)$ et $q'(t)$ seraient des fonctions périodiques du temps. Par suite, l'énergie mécanique

$$\frac{1}{2} q'(t) + \frac{1}{2} m q^2(t) + \frac{1}{2}\int_0^{T_0} F(\tau)\,[q(t-\tau) - q(t)]^2\, d\tau \tag{23}$$

serait une fonction périodique de t. Donc cette quantité ne pourrait pas diminuer constamment, comme le prouve l'inégalité (22).

2. THÉORÈME III. - *S'il n'y a pas de forces externes, $q(t)$ et $q'(t)$ doivent se conserver toujours comprises entre des limites finies à partir d'un certain instant initial où elles ont des valeurs déterminées.*

En effet, si la valeur absolue d'une des deux quantités q ou q' pouvait devenir aussi grande que l'on veut, la quantité (23) aussi pourrait croître indéfiniment, ce qui est en contradiction avec la formule (22). Ce théorème peut être aussi énoncé de la manière suivante:

S'il n'y a pas de forces externes, le mouvement est toujours borné à partir d'un certain temps initial.

En prenant

$$|q'(t_0)| \quad \text{et} \quad |q(\tau)| \qquad (t_0 - T_0 \leqq \tau \leqq t_0)$$

suffisamment petits,

$$|q'(t)| \quad \text{et} \quad |q(t)|$$

se conserveront pour $t_0 < t < \infty$ plus petits qu'une quantité σ quelconque donnée. Donc:

THÉORÈME IV. - *Il y a stabilité de l'équilibre lorsque les déplacements sont nuls.*

Ce théorème est le fondement de la *théorie des petits mouvements spontanés dans le cas de l'hérédité*, car il prouve l'existence de déplacements qui se conservent aussi petits que l'on veut, pourvu que l'on choisisse d'une manière convenable les conditions initiales.

3. L'équation (21) peut s'écrire aussi [*voir* formule (a')]

$$q'' + bq - \int_{t-T_0}^{t} F(t-\tau)\, q(\tau)\, d\tau = 0.$$

Par une intégration entre les limites t_0 et t, on trouve

$$q'(t) - q'(t_0) + b\int_{t_0}^{t} q(\tau)\, d\tau - \int_{t_0}^{t} d\xi \int_{\xi - T_0}^{\xi} F(\xi - \tau)\, q(\tau)\, d\tau = 0. \tag{24}$$

Envisageons la dernière intégrale

$$I = \int_{t_0}^{t} d\xi \int_{\xi - T_0}^{\xi} F(\xi - \tau)\, q(\tau)\, d\tau.$$

Si nous prenons $F = F_{is}$, elle est l'intégrale (11_1) du Chapitre I, § II, n° 5. Supposons que t soit si grand que dans le calcul de cette intégrale on puisse se rapporter à la figure 3. On aura

$$I = \int_\sigma F(\xi - \tau)\, q(\tau)\, d\sigma,$$

où σ est l'aire du parallélogramme ABCD. Considérons maintenant le parallélogramme $\sigma' = ABHF$ qu'on obtient de σ en retranchant l'aire du triangle isoscèle et rectangle $\sigma_1 = AFD$ et en ajoutant l'aire di triangle $\sigma_4 = HBG$ égale à AFD. C'est pourquoi

$$I = \int_{\sigma'} F(\xi - \tau)\, q(\tau)\, d\sigma' - \int_{\sigma_1} F(\xi - \tau)\, q(\tau)\, d\sigma_1 + \int_{\sigma_4} F(\xi - \tau)\, q(\tau)\, d\sigma_3 .$$

Mais $|q|$ ne peut pas dépasser une certaine limite M (n° 2, théorème III) et $F(\xi - \tau)$ est positive et inférieure à une certaine limite N.

D'autre part l'aire des triangles σ_1 et σ_4 est $(1/2)\, T_0^2$, par conséquent

$$\left| \int_{\sigma_1} F(\xi - \tau)\, q(\tau)\, d\sigma_1 \right| < \frac{1}{2} MNT_0^2, \left| \int_{\sigma_4} F(\xi - \tau)\, q(\tau)\, d\sigma_4 \right| < \frac{1}{2} MNT_0^2 .$$

On pourra donc écrire

$$I = \int_{\sigma'} F(\xi - \tau)\, q(\tau)\, d\sigma' + \theta MNT_0^2,$$

où θ est un nombre compris entre $+1$ et -1. Or

$$I' = \int_{\sigma'} F(\xi - \tau)\, q(\tau)\, d\sigma' = \int_{t_0}^{t} q(\tau)\, d\tau \int_{\tau}^{\tau + T_0} F(\xi - \tau)\, d\xi = \int_{t_0}^{t} q(\tau)\, d\tau \int_0^{T_0} F(\eta)\, d\eta .$$

Par suite l'équation (24) pourra s'écrire

$$q'(t) - q'(t_0) + \left(b - \int_0^{T_0} F(\eta)\, d\eta\right) \int_{t_0}^{t} q(\tau)\, d\tau - \theta MNT_0^2 = 0 . \tag{24'}$$

Et en rappelant [formule (4), Chap. I, § I, n° 4] que

$$b - \int_0^{T_0} F(\eta)\, d\eta = m,$$

il viendra

$$q'(t) - q'(t_0) + m \int_{t_0}^{t} q(\tau)\, d\tau - \theta MNT_0^2 = 0,$$

c'est-à-dire

$$\frac{1}{t - t_0} \int_{t_0}^{t} q(\tau)\, d\tau = \frac{\theta MNT_0^2}{m(t - t_0)} - \frac{q'(t) - q'(t_0)}{m(t - t_0)} .$$

En faisant croître indéfiniment t, on trouvera

$$\lim_{t=\infty} \left[\frac{1}{t - t_0} \int_{t_0}^{t} q(\tau)\, d\tau \right] = 0,$$

car $|q'|$ est inférieure à une limite finie (théorème III, n° 2).

On aura donc:

THÉORÈME V. - *La moyenne asympotique du déplacement est nulle.*

Evidemment

$$\frac{1}{t-t_0}\int_{t_0}^{t} q'(\tau)\, d\tau = \frac{1}{t-t_0}\left[q(t) - q(t_0)\right]$$

et par suite

$$\lim_{t=\infty} \frac{1}{t-t_0}\int_{t_0}^{t} q'(\tau)\, d\tau = 0,$$

qui amène au théorème suivant :

THÉORÈME VI. - *La moyenne asymptotique de la vitesse est nulle.*

4. Si les moyennes asymptotiques du déplacement et de la vitesse sont nulles, ces quantités tendent en moyenne vers zéro asymptotiquement ou doivent osciller autour de la valeur zéro.

Montrons par un exemple que l'on peut toujours prendre les conditions initiales de manière que le déplacement et la vitesse tendent asymptotiquement vers zéro. A cet effet prouvons que l'on peut toujours satisfaire l'équation (21) en prenant

$$q(t) = e^{-zt}, \tag{25}$$

z étant positif.

En remplaçant $q(t)$ dans (21) par l'expression (25), on a

$$z^2 e^{-zt} + be^{-zt} - e^{-zt}\int_0^{T_0} F(\tau)\, e^{z\tau}\, d\tau = 0,$$

c'est-à-dire

$$z^2 + b - \int_0^{T_0} F(\tau)\, e^{z\tau}\, d\tau = 0.$$

Posons

$$f(z) = z^2 + b - \int_0^{T_0} F(\tau)\, e^{z\tau}\, d\tau,$$

$f(z)$ est une fonction entière de z. Pour $z = 0$, nous avons

$$f(0) = m$$

et, pour $z = \infty$,

$$f(\infty) = -\infty;$$

donc il y a une racine réelle positive de l'équation

$$f(z) = 0,$$

ce qui prouve que l'expression (25) satisfait l'équation (21) si l'on remplace z par cette racine. On en tire

$$q'(t) = -ze^{-zt}$$

et, par suite, le déplacement et la vitesse $q(t)$ et $q'(t)$ tendent asymptotiquement vers zéro.

III. – Cycle périodique forcé.

1. Nous allons examiner le cas où les mouvements sont périodiques et de type harmonique, c'est-à-dire que l'on a

$$q(t) = \alpha \sin Kt + \beta \cos Kt, \tag{26}$$

α, β, K étant des quantités constantes.

Si nous remplaçons q par l'expression (26) dans l'équation (a''), nous trouvons

$$-\alpha K^2 \sin Kt - \beta K^2 \cos Kt + b\alpha \sin Kt + b\beta \cos Kt -$$

$$-\int_0^{T_0} F(\tau)\,[\sin Kt\,(\alpha \cos K\tau + \beta \sin K\tau) + \cos Kt\,(-\alpha \sin K\tau + \beta \cos K\tau)]\,d\tau = \mathcal{Q},$$

c'est-à-dire

$$\sin Kt \left\{ \alpha(-K^2 + b) - \int_0^{T_0} F(\tau)\,(\alpha \cos K\tau + \beta \sin K\tau)\,d\tau \right\} +$$

$$+ \cos Kt \left\{ \beta(-K^2 + b) - \int_0^{T_0} F(\tau)\,(-\alpha \sin K\tau + \beta \cos K\tau)\,d\tau \right\} = \mathcal{Q}.$$

Posons

$$\int_0^{T_0} F(\tau) \cos K\tau\,d\tau = \mathcal{S}, \tag{27}$$

$$\int_0^{T_0} F(\tau) \sin K\tau\,d\tau = \mathcal{M} \tag{27'}$$

et l'on aura

$$\sin Kt\,\{\alpha(-K^2 + b) - (\alpha\mathcal{S} + \beta\mathcal{M})\} + \cos Kt\,\{\beta(-K^2 + b) - (\beta\mathcal{S} - \alpha\mathcal{M})\} = \mathcal{Q}.$$

Posons

$$\left\{ \begin{aligned} &\alpha(-K^2 + b) - (\alpha\mathcal{S} + \beta\mathcal{M}) = A, \\ &\beta(-K^2 + b) - (\beta\mathcal{S} - \alpha\mathcal{M}) = B. \end{aligned} \right. \tag{82}$$

Il viendra

$$\mathcal{Q} = A \sin Kt + B \cos Kt, \tag{29}$$

d'où le théorème suivant:

Théorème I. – *Si le déplacement est harmonique, la force sera aussi harmonique avec la même période. La phase sera en général changée.*

2. Si le déplacement est périodique, supposons de pouvoir le développer en une série de Fourier uniformément convergente, ayant aussi les séries

des dérivées du premier et du second ordre des termes, uniformément convergentes.

Soit $2\pi/K$ la période,

$$(26') \qquad q(t) = \sum_0^\infty{}_p (\alpha_p \sin p\,Kt + \beta_p \cos p\,Kt)$$

et l'on trouvera

$$(29') \qquad \mathfrak{Q}(t) = \sum_0^\infty{}_p (A_p \sin p\,Kt + B_p \cos p\,Kt),$$

ou

$$(28') \qquad \begin{cases} A_p = \alpha_p(-p^2 K^2 + b) - (\alpha_p \mathcal{S}_p + \beta_p \mathfrak{M}_p), \\ B_p = \beta_p(-p^2 K^2 + b) - (\beta_p \mathcal{S}_p - \alpha_p \mathfrak{M}_p), \end{cases}$$

étant

$$(30) \qquad \begin{cases} \mathcal{S}_p = \int_0^{T_0} F(\tau) \cos p\,K\tau\,d\tau, \\ \mathfrak{M}_p = \int_0^{T_0} F(\tau) \sin p\,K\tau\,d\tau. \end{cases}$$

$\mathfrak{Q}(t)$ est donc périodique avec la même période que $q(t)$.

Les équations (28), (28') peuvent s'écrire

$$(28'') \qquad \begin{cases} (b - K^2 - \mathcal{S})\,\alpha - \mathfrak{M}\beta = A, \\ \mathfrak{M}\alpha + (b - K^2 - \mathcal{S})\,\beta = B, \end{cases}$$

$$(28''') \qquad \begin{cases} (b - p^2 K^2 - \mathcal{S}_p)\,\alpha_p - \mathfrak{M}_p\,\beta_p = A_p, \\ \mathfrak{M}_p\,\alpha_p + (b - p^2 K^2 - \mathcal{S}_p)\,\beta_p = B_p. \end{cases}$$

Le déterminant des coefficients de α et β dans le système d'équations (28'') est

$$\Delta = (b - K^2 - \mathcal{S})^2 + \mathfrak{M}^2.$$

A cause du théorème I du paragraphe III du Chapitre I, $\mathfrak{M}$ ne peut pas s'annuler, donc Δ aussi ne peut pas s'annuler et il est toujours positif. En résolvant les équations (28'') par rapport à α et β, on trouve

$$\alpha = \frac{1}{\Delta}[(b - K^2 - \mathcal{S})A + \mathfrak{M}B],$$

$$\beta = \frac{1}{\Delta}[-\mathfrak{M}A + (b - K^2 - \mathcal{S})B].$$

De même en posant

$$\Delta_p = (b - p^2 K^2 - \mathcal{S}_p)^2 + \mathfrak{M}_p^2,$$

on aura

$$\Delta_p > 0$$

et, en résolvant les équations (28‴) par rapport à α_p, β_p,

$$\alpha_p = \frac{1}{\Delta_p}[(b - p^2 K^2 - \mathcal{S}_p) A_p + \mathfrak{M}_p B_p] ,$$

$$\beta_p = \frac{1}{\Delta_p}[(b - p^2 K^2 - \mathcal{S}_p) B_p - \mathfrak{M}_p A_p] .$$

Supposons que les forces externes soient nulles. Cela correspond à prendre

$$A_p = B_p = 0 \qquad (p = 0, 1, 2, \cdots, \infty) ;$$

c'est pourquoi l'on aura

$$\alpha_p = \beta_p = 0 \qquad (p = 0, 1, 2, \cdots, \infty)$$

et, par suite,

$$q = 0 .$$

On en déduit *q'il n'y a pas de mouvement spontané périodique.*

On a ainsi une nouvelle démonstration du théorème II donné dans le paragraphe II du Chapitre II.

3. Lorsque le déplacement est périodique, le système revient aux conditions initiales après chaque période. Un point d'un plan ayant pour abscisse et pour ordonnée q et $\mathcal{Q}$ décrit pendant chaque période le même cycle fermé (11). Le travail effectué par les forces externes pendant une période doit être positif d'après le théorème V du paragraphe I. On pourrait le calculer en évaluant par la formule (C_1') l'energie mécanique dissipée. Mais c'est plus simple de le calculer directement. Il suffit en effet de déterminer

$$\mathcal{L} = \int_0^{2\pi/K} \mathcal{Q}(t)\, q'(t)\, dt =$$

$$= \int_0^{2\pi/K} \sum_0^\infty{}_p (A_p \sin pKt + B_p \cos pKt) \sum_0^\infty{}_p (\alpha_p \cos pKt - \beta_p \sin pKt)\, pK\, dt .$$

Et par des théorèmes bien connus sur les intégrales des fonctions trigonométriques, on trouve

$$\mathcal{L} = \int_0^{2\pi/K} \sum_0^\infty{}_p (- A_p \beta_p \sin^2 pKt + B_p \alpha_p \cos^2 pKt)\, pK\, dt .$$

Or

$$\int_0^{2\pi/K} \sin^2 pKt \cdot pK\, dt = \int_0^{2\pi/K} \cos^2 pKt \cdot pK\, dt = p\pi ;$$

donc

$$\mathcal{L} = \pi \sum_0^\infty{}_p\, p\, (\alpha_p B_p - \beta_p A_p)$$

(11) Voir *Leçons sur les fonctions de lignes* professées à la Sorbonne par M. VITO VOLTERRA (citées ci-dessus), Chapitre VII.

et, en vertu des équations (28‴),

$$\mathfrak{L} = \pi \sum_{0}^{\infty}{}_p \, p \, (\alpha_p^2 + \beta_p^2) \, \mathfrak{M}_p .$$

Puisque $\mathfrak{M}_p$ est positif [voir formule (30) et théorème I du paragraphe III du Chapitre I] $\mathfrak{L}$ *sera positif*, ce qui confirme le théorème V du paragraphe I de ce Chapitre.

4. Dans le cas où le déplacement est harmonique, la série (26′) se réduit à un seul terme [formule (26)] et le travail devient

$$\mathfrak{L} = \pi (\alpha^2 + \beta^2) \, \mathfrak{M}.$$

L'expression (26) peut s'écrire

(31) $$q(t) = \mathrm{G} \sin 2\pi \left(\frac{t}{\mathrm{T}} + \varepsilon\right),$$

où G est *l'amplitude*, T la *période*, ε la *phase*,

$$\mathrm{G}^2 = \alpha^2 + \beta^2 \quad , \quad \alpha = \mathrm{G} \cos 2\pi\varepsilon \quad , \quad \beta = \mathrm{G} \sin 2\pi\varepsilon ,$$

$$\mathrm{K} = \frac{2\pi}{\mathrm{T}} \qquad\qquad (0 \leqq \varepsilon < 1),$$

on aura donc

(32) $$\mathfrak{L} = \pi \mathrm{G}^2 \, \mathfrak{M} = \pi \mathrm{G}^2 \int_0^{\mathrm{T}_0} \mathrm{F}(\tau) \sin \frac{2\pi\tau}{\mathrm{T}} \, d\tau .$$

Posons

$$b - \mathrm{K}^2 - \mathcal{S} = \mathrm{H} \cos 2\pi\varepsilon',$$

$$\mathfrak{M} = \mathrm{H} \sin 2\pi\varepsilon',$$

où

$$\mathrm{H} = \left| \sqrt{(b - \mathrm{K}^2 - \mathcal{S})^2 + \mathfrak{M}^2} \right| .$$

H et ε' ne dépendront que de la période et du coefficient d'hérédité, outre que du coefficient b. Puisque $\mathfrak{M}$ est positif, on aura

$$0 < \varepsilon' < \frac{1}{2}$$

et les équations (28″) deviendront

$$\mathrm{A} = \mathrm{GH} \cos 2\pi (\varepsilon + \varepsilon'),$$

$$\mathrm{B} = \mathrm{GH} \sin 2\pi (\varepsilon + \varepsilon');$$

par suite, à cause des équations (29) et (32),

(33) $$\mathfrak{Q} = \mathrm{GH} \sin 2\pi \left[\frac{t}{\mathrm{T}} + (\varepsilon + \varepsilon')\right],$$

(34) $$\mathfrak{L} = \pi \, \mathrm{G}^2 \, \mathrm{H} \sin 2\pi\varepsilon'.$$

La formule (32) amène au théorème suivant:

Le travail positif effectué pendant une période par les forces externes est proportionnel au carré de l'amplitude, dépend de la période, est une fonctionnelle du coefficient d'hérédité et est indépendant de la phase.

5. Changer ε en $(1/2) - \varepsilon$ équivaut à changer dans la formule (31) t en $-t$. En vertu de la formule (34) *le travail effectué pendant un cycle ne changera pas.*

On peut représenter les valeurs du déplacement q par les ordonnées d'une sinusoïde de hauteur G et de base $AB = T$, les valeurs du temps étant les abscisses. Plaçons-nous au point M entre A et B, AM étant égal à $2\pi\varepsilon$. Si, à partir de l'instant O, la sinusoïde marche parallèlement à la base dans le sens BA (flèche supérieure) avec la vitesse 1, les ordonnées qui se présentent devant M seront les valeurs de q à chaque istant. Changer t en $-t$ équivaut à changer le sens du mouvement de la sinusoïde (flèche inférieure). Nous dirons dans ce cas que *les oscillations du déplacement q sont inverties.*

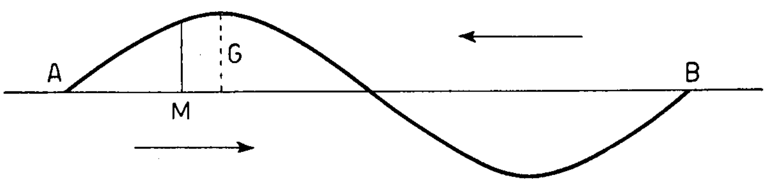


Fig. 4.

On pourra donc énoncer la proposition :

Le travail effectué par les forces externes pendant une période ne change pas en invertissant les oscillations du déplacement (voir le paragraphe suivant, n° 4).

CHAPITRE III

Phénomènes héréditaires linéaires.
Cas d'un nombre quelconque de degrés de liberté.

I. – Cycles périodiques forcés.

1. Considérons le cas où le système a n degrés de liberté et supposons que tous les mouvements soient harmoniques avec la même période, c'est-à-dire que les déplacements étant $q_1, q_2, \cdots, q_n$ on ait

$$q_i = \alpha^{(i)} \sin Kt + \beta^{(i)} \cos Kt \,. \tag{35}$$

En remplaçant ces expressions dans les équations (A″), on aura

$$-K^2 \sin Kt \sum_1^n {}_s\, a_{is}\, \alpha^{(s)} - K^2 \cos Kt \sum_1^n {}_s\, a_{is}\, \beta^{(s)} + \sin Kt \sum_1^n {}_s\, b_{is}\, \alpha^{(s)} +$$

$$+ \cos Kt \sum_1^n {}_s\, b_{is}\, \beta^{(s)} - \sum_1^n {}_s \int_0^{T_0} F_{is}(\tau)\, [\alpha^{(s)} \sin K(t-\tau) + \beta^{(s)} \cos K(t-\tau)]\, d\tau = \mathcal{Q}_i.$$

En posant

$$\int_0^{T_0} F_{is}(\tau) \cos K\tau \, d\tau = \mathcal{S}_{is}, \tag{36}$$

$$\int_0^{T_0} F_{is}(\tau) \sin K\tau \, d\tau = \mathfrak{M}_{is}, \tag{36'}$$

il viendra

$$\sin Kt \sum_1^n {}_s [(-K^2 a_{is} + b_{is} - \mathcal{S}_{is}) \alpha^{(s)} - \mathfrak{M}_{is} \beta^{(s)}] +$$

$$+ \cos Kt \sum_1^n {}_s [(-K^2 a_{is} + b_{is} - \mathcal{S}_{is}) \beta^{(s)} + \mathfrak{M}_{is} \alpha^{(s)}] = \mathcal{Q}_i,$$

c'est-à-dire

$$\mathcal{Q}_i = A^{(i)} \sin Kt + B^{(i)} \cos Kt,$$

où

$$A^{(i)} = \sum_1^n {}_s [(-K^2 a_{is} + b_{is} - \mathcal{S}_{is}) \alpha^{(s)} - \mathfrak{M}_{is} \beta^{(s)}],$$

$$B^{(i)} = \sum_1^n {}_s [(-K^2 a_{is} + b_{is} - \mathcal{S}_{is}) \beta^{(s)} + \mathfrak{M}_{is} \alpha^{(s)}].$$

2. Calculons maintenant le travail $\mathfrak{L}$ effectué par les forces externes pendant une période, et tout d'abord ne tenons pas compte de la condition $F_{is} = F_{si}$ (*voir* Chapitre I, § I, n° 5). On trouvera

$$\mathfrak{L} = \int_0^{2\pi/K} \sum_1^n {}_i \mathcal{Q}_i \frac{dq_i}{dt} dt = \pi \sum_1^n {}_i (\alpha^{(i)} B^{(i)} - \beta^{(i)} A^{(i)}) =$$

$$= \pi \sum_1^n {}_{is} (-K^2 a_{is} + b_{is} - \mathcal{S}_{is}) (\alpha^{(i)} \beta^{(s)} - \alpha^{(s)} \beta^{(i)}) + \pi \sum_1^n {}_{is} \mathfrak{M}_{is} (a^{(i)} \alpha^{(s)} + \beta^{(i)} \beta^{(s)}) =$$

$$= \pi \sum_1^n {}_{is} [(-K^2 a_{is} + b_{is} - \mathcal{S}_{is}) - (-K^2 a_{si} + b_{si} - \mathcal{S}_{si})] \alpha^{(i)} \beta^{(s)} +$$

$$+ \pi \sum_1^n {}_{is} \mathfrak{M}_{is} (\alpha^{(i)} \alpha^{(s)} + \beta^{(i)} \beta^{(s)}),$$

et puisque

$$a_{is} = a_{si} \quad , \quad b_{is} = b_{si},$$

on aura

$$\mathfrak{L} = \pi \sum_1^n {}_{is} (\mathcal{S}_{si} - \mathcal{S}_{is}) \alpha^{(i)} \beta^{(s)} + \pi \sum_1^n {}_{is} \mathfrak{M}_{is} (\alpha^{(i)} \alpha^{(s)} + \beta^{(i)} \beta^{(s)}) =$$

$$= \frac{\pi}{2} \sum_1^n {}_{is} (\mathcal{S}_{si} - \mathcal{S}_{is}) (\alpha^{(i)} \beta^{(s)} - \alpha^{(s)} \beta^{(i)}) + \pi \sum_1^n {}_{is} \mathfrak{M}_{is} (\alpha^{(i)} \alpha^{(s)} + \beta^{(i)} \beta^{(s)}).$$

Posons

$$(37)\qquad K=\frac{2\pi}{T}\quad,\quad \alpha^{(i)}=G^{(i)}\cos 2\pi\varepsilon^{(i)}\quad,\quad \beta^{(i)}=G^{(i)}\sin 2\pi\varepsilon^{(i)}$$

$$(0\leqq\varepsilon^{(i)}<1\,,\,G^{(i)}>0)\,;$$

il viendra

$$(38)\qquad q_i=G^{(i)}\sin 2\pi\left(\frac{t}{T}+\varepsilon^{(i)}\right)\qquad (i=1\,,2\,,\cdots,n)\,,$$

$$(39)\qquad \mathfrak{L}=\frac{\pi}{2}\sum_1^n{}_{is}(\mathcal{S}_{si}-\mathcal{S}_{is})\,G^{(i)}G^{(s)}\sin 2\pi(\varepsilon^{(s)}-\varepsilon^{(i)})+$$

$$+\pi\sum_1^n{}_{is}\mathfrak{M}_{is}\,G^{(i)}G^{(s)}\cos 2\pi(\varepsilon^{(s)}-\varepsilon^{(i)})\,,$$

où

$$(40)\qquad \mathcal{S}_{si}-\mathcal{S}_{is}=\int_0^{T_0}[F_{si}(\tau)-F_{is}(\tau)]\cos\frac{2\pi\tau}{T}\,d\tau\,,$$

$$(40')\qquad \mathfrak{M}_{is}=\int_0^{T_0}F_{is}(\tau)\sin\frac{2\pi\tau}{T}\,d\tau\,.$$

3. Si le déplacement est périodique avec la période $2\pi/K$ et si l'on suppose qu'il soit développable en série de FOURIER uniformément convergente, les séries des dérivées du premier et du second ordre des termes étant aussi uniformément convergentes, on trouvera

$$q_i=\sum_1^\infty{}_p(\alpha_p^{(i)}\sin pKt+\beta_p^{(i)}\cos pKt)\quad,\quad \mathfrak{Q}_i=\sum_1^\infty{}_p(A_p^{(i)}\sin pKt+B_p^{(i)}\cos pKt)\,,$$

avec

$$A_p^{(i)}=\sum_1^n{}_s[(-p^2K^2a_{is}+b_{is}-\mathcal{S}_{is}^{(p)})\,\alpha_p^{(s)}-\mathfrak{M}_{is}^{(p)}\beta_p^{(s)}]\,,$$

$$B_p^{(i)}=\sum_1^n{}_s[(-p^2K^2a_{is}+b_{is}-\mathcal{S}_{is}^{(p)})\,\beta_p^{(s)}+\mathfrak{M}_{is}^{(p)}\alpha_p^{(s)}]\,,$$

et, puisque le travail $\mathfrak{L}$ effectué par les forces externes pendant une période est

$$\int_0^{2\pi/K}\sum_1^n\mathfrak{Q}_i\frac{dq_i}{dt}\,dt\,,$$

on aura

$$(41)\qquad \mathfrak{L}=\frac{\pi}{2}\sum_1^\infty{}_p\,p\left\{\sum_1^n{}_{is}(\mathcal{S}_{si}^{(p)}-\mathcal{S}_{is}^{(p)})(\alpha_p^{(i)}\beta_p^{(s)}-\alpha_p^{(s)}\beta_p^{(i)})+\right.$$

$$\left.+2\sum_1^n{}_{is}\mathfrak{M}_{is}^{(p)}(\alpha_p^{(i)}\alpha_p^{(s)}+\beta_p^{(i)}\beta_p^{(s)})\right\}$$

$$=\frac{\pi}{2}\sum_1^\infty{}_p\,p\left\{\sum_1^n{}_{is}(\mathcal{S}_{si}^{(p)}-\mathcal{S}_{is}^{(p)})\,G_p^{(i)}G_p^{(s)}\sin 2\pi(\varepsilon_p^{(s)}-\varepsilon_p^{(i)})+\right.$$

$$\left.+2\sum_1^n{}_{is}\mathfrak{M}_{is}^{(p)}G_p^{(i)}G_p^{(s)}\cos 2\pi(\varepsilon_p^{(s)}-\varepsilon_p^{(i)})\right\}\,,$$

où l'on a supposé

$$\alpha_p^{(i)} = G_p^{(i)} \cos 2\pi\varepsilon_p^{(i)} \quad , \quad \beta_p^{(i)} = G_p^{(i)} \sin 2\pi\varepsilon_p^{(i)};$$

$$\mathcal{S}_{si}^{(p)} = \int_0^{T_0} F_{si}(\tau) \cos \frac{2\pi p\tau}{T} d\tau \quad , \quad \mathfrak{M}_{si}^{(p)} = \int_0^{T_0} F_{si}(\tau) \sin \frac{2\pi p\tau}{T} d\tau .$$

4. Si dans la formule (39) on change toutes les phases d'une même quantité constante, *le travail $\mathfrak{L}$ ne changera pas*. Changeons maintenant toutes les $\varepsilon^{(i)}$ en $(1/2) - \varepsilon^{(i)}$, le travail (39) deviendra

$$\mathfrak{L}' = \frac{\pi}{2} \sum_1^n{}_{is} (\mathcal{S}_{si} - \mathcal{S}_{is}) G^{(i)} G^{(s)} \sin 2\pi (\varepsilon^{(i)} - \varepsilon^{(s)}) +$$

$$+ \pi \sum_1^n{}_{is} \mathfrak{M}_{is} G^{(i)} G^{(s)} \cos 2\pi (\varepsilon^{(i)} - \varepsilon^{(s)}) ,$$

d'où

$$\mathfrak{L} - \mathfrak{L}' = \pi \sum_1^n{}_{is} (\mathcal{S}_{si} - \mathcal{S}_{is}) G^{(i)} G^{(s)} \sin 2\pi (\varepsilon^{(s)} - \varepsilon^{(i)}) .$$

Les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'on ait $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}'$, quels que soient les $G^{(i)}$ et les $\varepsilon^{(i)}$, sont

$$(42) \qquad \mathcal{S}_{si} - \mathcal{S}_{is} = 0 \qquad (i, s = 1, 2, \cdots, n);$$

c'est-à-dire, à cause de la formule (40),

$$(42') \qquad \mathcal{S}_{si} - \mathcal{S}_{is} = \int_0^{T_0} [F_{is}(\tau) - F_{si}(\tau)] \cos \frac{2\pi\tau}{T} d\tau = 0 \qquad (i, s = 1, 2, \cdots, n).$$

Si cette égalité doit être vérifiée quelle que soit la période T, il faut, en vertu du théorème II du paragraphe III du Chapitre I, que l'on ait

$$(43) \qquad F_{is}(\tau) = F_{si}(\tau) \qquad (i, s = 1, 2, \cdots, n)$$

et par suite seront satisfaites les conditions pour l'existence du potentiel héréditaire élémentaire, d'après ce que nous avons vu dans le n° 5 du paragraphe I du Chapitre I.

Réciproquement, si le potentiel héréditaire élémentaire existe, les équations (43) seront vérifiées et par suite les équations (42') aussi, d'où l'on tire la relation $\mathfrak{L} - \mathfrak{L}' = 0$ et par conséquent on aura $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}'$.

Or, si dans les équations (33) on change les $\varepsilon^{(i)}$ en $(1/2) - \varepsilon^{(i)}$ elles deviennent

$$q_i = G^{(i)} \sin 2\pi \left(\frac{-t}{T} + \varepsilon^{(i)} \right) ,$$

c'est-à-dire cela correspond à changer t en $-t$ ou bien à invertir les oscillations de tous les déplacements q_i (*voir* paragraphe précédent, n° 5). On peut donc énoncer le théorème:

Il est nécessaire et suffisant que le potentiel héréditaire existe pour que le travail effectué par les forces externes pendant une période ne change pas, en invertissant les oscillations de tous les déplacements, quelles que soient leurs amplitudes, leurs phases et leur période.

5. Supposons maintenant que le potentiel héréditaire élémentaire existe et reprenons la formule (41). Puisque

$$\mathcal{G}_{si}^{(p)} = \mathcal{G}_{is}^{(p)}$$

elle deviendra

$$\mathfrak{L} = \pi \sum_{1}^{\infty}{}_p\, p \sum_{1}^{n}{}_{is}\, \mathfrak{M}_{is}^{(p)} (\alpha_p^{(i)} \alpha_p^{(s)} + \beta_p^{(i)} \beta_p^{(s)})$$

et, en vertu de la formule (40'),

$$\text{(41')} \qquad \mathfrak{L} = \pi \int_0^{T_0} \sum_{1}^{\infty}{}_p\, p \left\{ \sum_{1}^{n}{}_{is} F_{is}(\tau) (\alpha_p^{(i)} \alpha_p^{(s)} + \beta_p^{(i)} \beta_p^{(s)}) \right\} \sin \frac{2\pi p \tau}{T} d\tau =$$

$$= \pi \sum_{1}^{\infty}{}_p f_p(\tau) \sin \frac{2\pi p \tau}{T} d\tau ,$$

en posant

$$p \sum_{1}^{n}{}_{is} F_{is}(\tau) (\alpha_p^{(i)} \alpha_p^{(s)} + \beta_p^{(i)} \beta_p^{(s)}) = f_p(\tau) .$$

On aura en outre

$$p \sum_{1}^{n}{}_{is} F'_{is}(\tau) (\alpha_p^{(i)} \alpha_p^{(s)} + \beta_p^{(i)} \beta_p^{(s)}) = f'_p(\tau) .$$

Or les conditions que nous avons posées dans le n° 5 du paragraphe I du Chapitre I pour les formes (5) et (5') nous montrent que

$$f_p(\tau) > 0 \quad , \quad f'_p(\tau) < 0 \qquad (0 \leqq \tau \leqq T_0);$$

donc les $f_p(a)$ sont des fonctions positives et décroissantes et par suite, à cause du théorème I du paragraphe III du Chapitre I, la formule (41') nous prouve que $\mathfrak{L}$ est positif. Par conséquent, on a le théorème:

Si tous les déplacements sont périodiques avec la même période, le travail effectué par les forces externes pendant une période est positif (*voir*, dans ce Chapitre, § II, n° 3).

6. Si les forces externes sont nulles, leur travail sera nul pendant une période. Or il suffit qu'une seule au moins des quantités $\alpha_p^{(i)}$, $\beta_p^{(i)}$ ne soit pas nulle pour rendre $f_p(\tau)$ positif et $f'(\tau)$ négatif (*voir* numéro précédent) et par suite $\mathfrak{L}$ [formule (41')] positif.

On en tire que tous les coefficients $\alpha_p^{(i)}$ et $\beta_p^{(i)}$ doivent être nuls et par suite les déplacements q_i devront être nuls. D'où le théorème:

Il n'y a aucun mouvement périodique compatible avec des forces externes nulles (voir § III, n° I).

II. – ÉNERGÉTIQUE HÉRÉDITAIRE DANS LE CAS GÉNÉRAL DE L'HÉRÉDITÉ LINÉAIRE.

1. Revenons aux formules et aux hypothèses des n^{os} 5,6 du paragraphe I du Chapitre I.

Multiplions les deux membres de chacune des équations (A″) par $q_i'(t)$. En les sommant par rapport à l'indice i, on trouvera

$$\sum_1^n {}_i\, q_i'(t) \sum_1^n {}_s\, a_{is} q_s''(t) + \sum_1^n {}_i\, q_i'(t) \sum_1^n {}_s\, b_{is} q_s(t) = \tag{44}$$

$$= \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\sum_1^n {}_{is}\, a_{is} q_i'(t)\, q_s'(t) + \frac{1}{2}\sum_1^n {}_{is}\, b_{is} q_i(t)\, q_s(t)\right] =$$

$$= \sum_1^n {}_i\, q_i'(t) \sum_1^n {}_s \int_0^{T_0} F_{is}(\tau)\, q_s(t-\tau)\, d\tau + \sum_1^n \mathcal{Q}_i q_i'.$$

Or

$$q_i'(t) \sum_1^n {}_s \int_0^{T_0} F_{is}(\tau)\, q_s(t-\tau)\, d\tau =$$

$$= \frac{d}{dt}\left[q_i(t) \sum_1^n {}_s \int_0^{T_0} F_{is}(\tau)\, q_s(t-\tau)\, d\tau\right] - q_i(t) \sum_1^n {}_s \int_0^{T_0} F_{is}(\tau)\, q_s'(t-\tau)\, d\tau =$$

$$= \frac{d}{dt}\left[q_i(t) \sum_1^n {}_s \int_0^{T_0} F_{is}(\tau)\, q_s(t-\tau)\, d\tau\right] + q_i(t) \sum_1^n {}_s \int_0^{T_0} F_{is}(\tau) \frac{d}{d\tau}\left[q_s(t-\tau) - q_s(t)\right] d\tau =$$

$$= \frac{d}{dt}\left[q_i(t) \sum_1^n {}_s \int_0^{T_0} F_{is}(\tau)\, q_s(t-\tau)\, d\tau\right] - q_i(t) \sum_1^n {}_s \int_0^{T_0} F_{is}'(\tau)\left[q_s(t-\tau) - q_s(t)\right] d\tau.$$

2. D'autre part,

$$\frac{d}{dt}\int_0^{T_0} F_{is}(\tau)\, q_i(t-\tau)\, q_s(t-\tau)\, d\tau =$$

$$= -\int_0^{T_0} F_{is}(\tau) \frac{d}{d\tau}\left[q_i(t-\tau)\, q_s(t-\tau) - q_i(t)\, q_s(t)\right] d\tau =$$

$$= \int_0^{T_0} F_{is}'(\tau)\left[q_i(t-\tau)\, q_s(t-\tau) - q_i(t)\, q_s(t)\right] d\tau;$$

par suite,

$$q_i'(t) \sum_1^n {}_s \int_0^{T_0} F_{is}(\tau)\, q_s(t-\tau)\, d\tau =$$

$$= \frac{d}{dt}\left[q_i(t)\sum_1^n{}_s\int_0^{T_0} F_{is}(\tau)\,q_s(t-\tau)\,d\tau - \frac{1}{2}\sum_1^n{}_s\int_0^{T_0} F_{is}(\tau)\,q_i(t-\tau)\,q_s(t-\tau)\,d\tau\right] -$$

$$-\int_0^{T_0}\sum_1^n{}_s F'_{is}(\tau)\left\{q_i(t)\,[q_s(t-\tau)-q_s(t)] - \frac{1}{2}q_i(t-\tau)\,q_s(t-\tau) + \frac{1}{2}q_i(t)\,q_s(t)\right\}d\tau =$$

$$= \frac{d}{dt}\int_0^{T_0}\sum_1^n{}_s F_{is}(\tau)\left\{q_i(t)\,q_s(t-\tau) - \frac{1}{2}q_i(t-\tau)\,q_s(t-\tau)\right\}d\tau -$$

$$-\int_0^{T_0}\sum_1^n{}_s F'_{is}(\tau)\left\{\frac{1}{2}q_i(t)\,[q_s(t-\tau)-q_s)] - \frac{1}{2}q_s(t-\tau)\,[q_i(t-\tau)-q_i(t)]\right\}d\tau$$

et enfin

$$\sum_1^n{}_i q'_i(t)\sum_1^n{}_s\int_0^{T_0} F_{is}(\tau)\,q_s(t-\tau)\,d\tau =$$

$$= \frac{d}{dt}\int_0^{T_0}\sum_1^n{}_{is} F_{is}(\tau)\left\{q_i(t)\,q_s(t-\tau) - \frac{1}{2}q_i(t-\tau)\,q_s(t-\tau)\right\}d\tau +$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^{T_0}\sum_1^n{}_{is} F'_{is}(\tau)\,[q_i(t-\tau)-q_i(t)]\,[q_s(t-\tau)-q_s(t)]\,d\tau\,.$$

Le premier terme du second membre de l'équation (44) n'est que le premier membre de l'équation précédente. En le remplaçant par le second membre on trouve

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{2}\sum_1^n{}_{is} a_{is}\,q'_i(t)\,q'_s(t) + \frac{1}{2}\sum_1^n{}_{is} b_{is}\,q_i(t)\,q_s(t) -\right.$$

$$\left.-\int_0^{T_0}\sum_1^n{}_{is} F_{is}(\tau)\left[q_i(t)\,q_s(t-\tau) - \frac{1}{2}q_i(t-\tau)\,q_s(t-\tau)\right]d\tau\right\} -$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^{T_0}\sum_1^n{}_{is} F'_{is}(\tau)\,[q_i(t-\tau)-q_i(t)]\,[q_s(t-\tau)-q_s(t)]\,d\tau = \sum_1^n{}_i \mathcal{Q}_i\,q'_i\,.$$

Mais

$$\frac{1}{2}\sum_1^n{}_{is} b_{is}\,q_i(t)\,q_s(t) - \int_0^{T_0}\sum_1^n{}_{is} F_{is}(\tau)\left[q_i(t)\,q_s(t-\tau) - \frac{1}{2}q_i(t-\tau)\,q_s(t-\tau)\right]d\tau =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_1^n{}_{is} b_{is}\,q_i(t)\,q_s(t) - \frac{1}{2}\sum_1^n{}_{is}\int_0^{T_0} F_{is}(\tau)\,q_i(t)\,q_s(t)\,d\tau +$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^{T_0}\sum_1^n{}_{is} F_{is}(\tau)\,[q_i(t-\tau)-q_i(t)]\,[q_s(t-\tau)-q_s(t)]\,d\tau\,.$$

Donc, à cause des équations (6),

$$\text{(E)}\qquad \frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{2}\sum_{1}^{n}{}_{is}\, a_{is}\, q_i'(t)\, q_s'(t) + \frac{1}{2}\sum_{1}^{n}{}_{is}\, m_{is}\, q_i(t)\, q_s(t) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}\int_0^{T_0}\sum_{1}^{n}{}_{is}\, F_{is}(\tau)\,[q_i(t-\tau) - q_i(t)]\,[q_s(t-\tau) - q_s(t)]\,d\tau\right\} -$$

$$- \frac{1}{2}\int_0^{T_0}\sum_{1}^{n}{}_{is}\, F'_{is}(\tau)\,[q_i(t-\tau) - q_i(t)]\,[q_s(t-\tau) - q_s(t)]\,d\tau = \sum_{1}^{n}{}_{i}\, Q_i\, q_i'\ ^{(12)}.$$

3. Or, nous savons que [*voir* équation (I)]

$$\text{(F)}\qquad \frac{1}{2}\sum_{1}^{n}{}_{is}\, a_{is}\, q_i'(t)\, q_s'(t) = E^{(c)}(t)$$

est l'énergie cinétique, toujours positive.

$$\text{(G)}\quad \frac{1}{2}\sum_{1}^{n}{}_{is}\, m_{is}\, q_i\, q_s + \frac{1}{2}\int_0^{T_0}\sum_{1}^{n}{}_{is}\, F_{is}(\tau)\,[q_i(t-\tau) - q_i(t)]\,[q_s(t-\tau) - q_s(t)]\,d\tau = \Theta(t)$$

est une expression définie et positive, $-\Theta(t)$ étant le potentiel des forces internes [voir la formule (C)].

$$\text{(C')}\quad -\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t} dt \int_0^{T_0}\sum_{1}^{n}{}_{is}\, F'_{is}(\tau)\,[q_i(t-\tau) - q_i(t)]\,[q_s(t-\tau) - q_s(t)]\,d\tau = E^{(d)}$$

(12) Multiplions les deux membres des équations (A_1'') par q_i'. En les ajoutant on trouve

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{2}\sum_{1}^{n}{}_{is}\, a_{is}\, q_i' q_s' + \frac{1}{2}\sum_{1}^{n}{}_{is}\, m_{is}\, q_i\, q_s + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}\int_0^{T_0}\sum_{1}^{n}{}_{is}\, F_{is}(\tau)\,[q_i(t) - q_i(t-\tau)]\,[q_s(t) - q_s(t-\tau)]\,d\tau\right\} =$$

$$= -\int_0^{T_0}\sum_{1}^{n}{}_{is}\, F_{is}(\tau)\,[q_s(t) - q_s(t-\tau)]\, q_i'(t-\tau)\,d\tau + \sum_{1}^{n}{}_{i}\, Q_i\, q_i =$$

$$= -\int_0^{T_0}\sum_{1}^{n}{}_{is}\, F_{is}(\tau)\,[q_s(t) - q_s(t-\tau)]\,\frac{d}{d\tau}\,[q_i(t) - q_i(t-\tau)]\,d\tau + \sum_{1}^{n}{}_{i}\, Q_i\, q_i' =$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^{T_0}\sum_{1}^{n}{}_{is}\, F_{is}(\tau)\,\frac{d}{d\tau}\{[q_s(t) - q_s(t-\tau)]\,[q_i(t) - q_i(t-\tau)]\}\,d\tau + \sum_{1}^{n}{}_{i}\, Q_i\, q_i' =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{T_0}\sum_{1}^{n}{}_{is}\, F'_{is}(\tau)\,[q_i(t) - q_i(t-\tau)]\,[q_s(t) - q_s(t-\tau)]\,d\tau + \sum_{1}^{n}{}_{i}\, Q_i\, q_i.$$

On trouve ainsi d'une manière très rapide l'équation (E). Cependant ce procédé ne diffère pas d'une manière essentielle de celui qu'on a employé dans le texte (*voir* la note ([10])).

est une expression définie et positive égale au potentiel dérivé changé de signe (*voir* n° 8, § I, Chap. I).

$$\sum_1^n {}_i \mathfrak{Q}_i q'_i(t)\, dt$$

est le travail des forces externes pendant l'intervalle de temps $(t, t + dt)$. En intégrant les deux membres de l'équation (E) dans l'intervalle de temps (t_0, t) après les avoir multipliés par dt, on trouvera

$$\text{(D)} \qquad [E^{(c)}(t) - E^{(c)}(t_0)] + [\Theta(t) - \Theta(t_0)] + E^{(d)} = \mathfrak{L},$$

où

$$\mathfrak{L} = \int_{t_0}^{t} \sum_1^n {}_i \mathfrak{Q}_i q'_i\, dt$$

est le travail effectué par les forces externes pendant l'intervalle de temps (t_0, t).

En posant

$$\text{(H)} \qquad E^{(c)} + \Theta = E^{(m)},$$

l'équation (D) s'écrira

$$\text{(D')} \qquad E^{(m)}(t) - E^{(m)}(t_0) + E^{(d)} = \mathfrak{L},$$

et en appelant $E^{(m)}$, *par définition, l'énergie mécanique* (voir Chap. II, § I, n° 2) on aura la proposition: *Le travail des forces externes dépasse toujours la variation de l'énergie mécanique d'une quantité positive.* Si

$$q_i(t - \tau) = q_i(t_0 - \tau) \qquad (i = 1, 2, \cdots, n), \quad (0 \leqq \tau \leqq T_0),$$

on pourra dire que le système revient au temps t aux contitions existentes au temps initial t_0. On aura alors

$$\mathfrak{L} = E^{(d)}$$

et par suite: *Le travail des forces externes, pendant une période de temps qui ramène le système aux conditions initiales, est positif.*

Il est égal à l'*énergie mécanique dissipée* et par suite transformée en d'autres formes d'énergie.

Les théorèmes que nous venons d'énoncer ne sont que l'extension de ceux que nous avons trouvés au Chapitre II, § I, et étendent aussi ceux que nous avons démontrés pour le cas des cycles périodiques dans le paragraphe I de ce Chapitre, n° 5.

On peut répéter ici les mêmes remarques que nous avons faites dans le n° 4 du paragraphe I, Chapitre II, au sujet des dénominations dont nous avons fait usage, et rappeler que les résultats obtenus sont les conséquences des hypothéses formulées dans le n° 5 du Chapitre I.

III. – Mouvements spontanés.

1. Si les forces externes manquent et si nous supposons vérifiées les suppositions du paragraphe précédent, on aura, à cause des équations (E), (F), (G), (H),

$$\frac{dE^{(m)}}{dt} < 0 ;$$

donc $E^{(m)}$ diminue toujours, d'où l'on tire les mêmes conséquences que nous avons énoncées dans le paragraphe II du Chapitre II, c'est-à-dire que *tout mouvement périodique est impossible* et que *les déplacements doivent rester compris entre des limites finies.*

En outre, *si les déplacements sont nuls, l'équilibre est stable.*

2. En prenant dans les équations (A'), $\mathfrak{Q}_1 = 0, \mathfrak{Q}_2 = 0, \cdots, \mathfrak{Q}_n = 0$, et en intégrant entre t_0 et t, on trouvera

$$\sum_1^n {}_s\, a_{is}\,[q_s'(t) - q_s'(t_0)] + \sum_1^n {}_s\, b_{is} \int_{t_0}^{t} q_s(\tau)\, d\tau - \sum_1^n {}_s \int_{t_0}^{t} d\xi \int_{\xi - T_0}^{\xi} F_{is}(\xi - \tau)\, q_s(\tau)\, d\tau = 0 .$$

A ce point nous pouvons suivre la même analyse que nous avons employée dans le n° 3 du paragraphe II du Chapitre II en supposant t suffisamment grand et $|q_i(t)| < M$, $|F_{is}(\tau)| < N$. Elle nous amène aux formules

$$(45) \qquad \sum_1^n {}_s\, a_{is}\,[q_s'(t) - q_s'(t_0)] + \sum_1^n {}_s\, m_{is} \int_{t_0}^{t} q_s(\tau)\, d\tau - \theta_i\, n\, MNT_0^2 = 0$$

$$(i = 1, 2, \cdots, n),$$

θ_i étant des nombres compris entre $+1$ et -1.

Posons

$$\theta_i\, n\, MNT_0^2 - \sum_1^n {}_s\, a_{is}\,[q_s'(t) - q_s'(t_0)] = A_i .$$

Les équations (45) s'écrivent

$$\sum_1^n {}_s\, m_{is} \int_{t_0}^{t} q_s(\tau)\, d\tau = A_i ,$$

mais la forme (7) (Chap. I, § I, n° 5) est définie et positive, donc le déterminant

$$D = \begin{vmatrix} m_{11}, & m_{12}, & \cdots, & m_{1n} \\ m_{21}, & m_{22}, & \cdots, & m_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ m_{n1}, & m_{n2}, & \cdots, & m_{nn} \end{vmatrix}$$

n'est pas nul. Dans ce déterminant, soit D_{is} l'élément réciproque de l'élément m_{is}. On aura

$$\int_{t_0}^{t} q_s(\tau)\, d\tau = \frac{\sum_{1}^{n}{}_i D_{is} A_i}{D},$$

d'où l'on tire

$$\lim_{t=\infty} \frac{1}{t-t_0} \int_{t_0}^{t} q_s(\tau)\, d\tau = \lim_{t=\infty} \frac{1}{t-t_0} \frac{\sum_{1}^{n} D_{is} A_i}{D} = 0,$$

c'est-à-dire *les moyennes asymptotiques des déplacements sont nulles.*

Donc *les déplacements oscillent autour de la valuer zéro ou tendent en moyenne vers la valeur zéro asymptotiquement.*

On voit immédiatement que les *moyennes asymptotiques des vitesses sont nulles.*

En effet

$$\frac{1}{t-t_0} \int_{t_0}^{t} q'_i(\tau)\, d\tau = \frac{q_i(t) - q_i(t_0)}{t-t_0},$$

c'est pourquoi

$$\lim_{t=\infty} \frac{1}{t-t_0} \int_{t_0}^{t} q'_i(\tau)\, d\tau = 0.$$

Note.

Nous n'avons pas considéré le *frottement* (frottement proportionnel aux vitesses), mais on pourrait en tenir compte en ajoutant dans les premiers membres des équations (A') ou (A'') les termes

$$\sum_{1}^{n}{}_s c_{is} q'_s(t),$$

où les c_{is} sont des constantes et $c_{is} = c_{si}$, en supposant en outre que la forme

$$\frac{1}{2} \sum_{1}^{n}{}_{is} c_{is} q'_i(t) q'_s(t)$$

soit définie et positive.

Alors il faudrait ajouter le terme

$$\frac{1}{2} \int_{t_0}^{t} \sum_{1}^{n}{}_{is} c_{is} q'_i q'_s(t)\, dt$$

à l'expression de $E^{(d)}$ donnée par la formule (c') du Chapitre III, § II, n° 3.

Il est évident que $E^{(d)}$ resterait toujours positif, ainsi tous les théorèmes suivants du même paragraphe et du paragraphe III ne changeraient pas.

On peut dire la même chose pour le cas particulier d'un seul degré de liberté (Chap. II, § I et II).

V.

LA TEORIA DEI FUNZIONALI APPLICATA AI FENOMENI EREDITARI

« Atti Congr. intern. dei Mat. a Bologna, 3–10 settembre 1928 », vol. I; pp. 215–232.

Gli studi da me incominciati circa 45 anni or sono intorno a ciò che io allora chiamavo *funzioni di linee*, e che più tardi ebbero il nome di *funzionali*, erano fondati sul concetto del passaggio dal discontinuo al continuo (suggerito dall'analogo passaggio che è la base del calcolo integrale) e, prendendo le mosse dai procedimenti del calcolo delle variazioni, miravano ad un'estensione di esso. Anzi può meglio dirsi ad una sua doppia estensione, sia perché davo la maggiore generalità possibile al modo di far dipendere una quantità da tutti i valori di una funzione in un dato intervallo (dipendenza che nel calcolo delle variazioni è limitata al processo di quadratura), sia perché non ponevo alcuna limitazione alla natura dei problemi nei quali figuravano i nuovi elementi introdotti, problemi che nel calcolo delle variazioni sono invece ristretti a quelli di massimo e di minimo. La *derivazione* di una funzione di linea fu il primo concetto stabilito, donde scaturì quello di differenziale di una funzione di linea: se però allora seguii questa via, è certo che oggi conviene, come hanno osservato HADAMARD, FRÉCHET, PAUL LÉVY ed altri, che hanno ripreso in esame la questione, partire piuttosto dal concetto di differenziale e ricavare in conseguenza quello di derivata.

Applicai quindi questo concetto alla estensione della serie di Taylor allo scopo di gettare le basi di sviluppi analitici e funzionali analoghi a quelli che si hanno per le ordinarie funzioni analitiche. A questo proposito è da osservare che la varietà delle espressioni analitiche, proprie a rappresentare i funzionali, supera di gran lunga l'insieme delle rappresentazioni delle funzioni ordinarie, il che ha colpito tutti coloro che hanno avuto occasione di trattare questo soggetto. Si poteva inoltre subito riconoscere che i differenziali delle funzioni di linee dovevano essere classificati in varie categorie secondoché essi contenevano o meno dei termini affetti dalle variazioni della funzione (costituente l'elemento variabile) in punti determinati o anche le variazioni delle sue derivate pure in determinati punti. Già il calcolo ordinario delle variazioni offriva di ciò un esempio nel caso che la variazione di un integrale semplice dipenda dalle variazioni ai limiti. Ma il nuovo concetto di funzionale portava a nuove forme di differenziali. Avremo l'occasione più tardi di tornare sopra questo punto, mettendone in luce l'importanza in un'applicazione di carattere meccanico.

La proprietà delle derivate dei funzionali, che si rilevano con le simmetrie loro relative ai parametri da cui dipendono, e le integrazioni del differenziale di un funzionale con un procedimento che si basa sopra un'estensione del teorema di STOKES, insieme a ciò che abbiamo detto precedentemente, costituivano e ritengo che costituiscano tuttora i capisaldi della teoria.

Questi concetti fondamentali avevano però bisogno di un'ulteriore chiarificazione mediante un'analisi delicata e sottile. Nella sua bella opera sull'analisi funzionale, PAUL LÉVY ha assolto magistralmente questo compito riproducendo ed estendendo quanto era stato fatto prima di lui da HADAMARD e da molti altri su questo argomento. Io non avevo potuto condurre a termine questo studio critico, in quanto la mia attenzione era stata subito attratta in altre direzioni: infatti l'applicazione dei principî teorici ai nuovi problemi che si presentavano, le possibilità di risolvere antichi problemi insoluti, suscitavano per primi la curiosità e l'interesse; onde era naturale la tendenza a non approfondire subito queste parti più astratte della ricerca, rimandandone a più tardi lo studio.

Non ritengo sia oggi opportuno di esaminare le diverse vie per cui si è svolta l'analisi funzionale. Ciò mi condurrebbe troppo lontano ed esorbiterebbe dal soggetto che mi sono prefisso e che la ristrettezza del tempo mi concede solo di svolgere. Non posso però passare sotto silenzio che una delle prime applicazioni che si presentò fu quella di impiegare il passaggio dal discontinuo al continuo per estendere i problemi algebrici. Naturalmente le equazioni integrali lineari (estensione immediata dei sistemi d'equazioni di primo grado) richiamarono subito la mia attenzione e per conseguenza uno dei primi risultati da me ottenuti fu la soluzione loro nei casi più semplici ed elementari impiegando per la prima volta il detto passaggio. Ho largamente esposto nelle mie lezioni svolte sedici anni fa alla Sorbona questi argomenti, ponendo in luce sia il concetto fondamentale che fu la guida nel procedimento impiegato, sia il legame con le teorie generali delle equazioni integrali e di altre più generali.

Accennando io qui alle equazioni integrali, alla loro teoria generale e al loro legame coi metodi che si ispirano al passaggio dal discontinuo al continuo, il mio pensiero si rivolge reverente alla memoria di un matematico illustre che oggi abbiamo il dolore di non vedere tra noi. Il mesto ricordo va alla memoria di IVAR FREDHOLM, il cui nome onora la Scuola Matematica Svedese, la quale, capitanata dal MITTAG LEFFLER, anch'egli con nostro immenso dolore scomparso da poco più di un anno, rese così eminenti servigi alla Analisi Matematica.

Ma le equazioni integrali non furono che un primo passo nel campo delle estensioni algebriche, nel quale il prof. HILBERT (circa quindici anni dopo che le prime ricerche sui funzionali erano cominciate), ed altri dopo di lui, dovevano ottenere risultati così notevoli.

Le equazioni integrali furono inoltre il primo avviamento agli studi sulle equazioni integro-differenziali e sulle equazioni alle derivate funzionali.

Molte questioni di fisica e di meccanica e numerose estensioni di ricerche classiche conducono a queste nuove relazioni fondamentali dell'analisi funzionale.

Tali problemi si presentarono da principio come questioni di carattere particolare; ma una lunga esperienza insegna che sono appunto i problemi particolari, sorgenti dall'esame dei fenomeni naturali, che danno luogo alla creazione dei metodi analitici più fecondi e suscettibili col loro svolgersi di maggiore estensione, mentre invece le questioni generali stabilite a priori artificialmente non sono spesso le più proficue.

Per restare strettamente nel nostro soggetto, tralasceremo di parlare delle equazioni, le quali dipendono dalla estensione, studiata fra gli altri dal FRÉCHET, dei metodi di HAMILTON e di JACOBI ai sistemi continui, di quelle stabilite da HADAMARD e PAUL LÉVY per le funzioni di Green, e di tante altre che si ricollegano anche alle più recenti ricerche di meccanica ondulatoria. E così non ci sarà possibile di parlare degli studi di EVANS e di PÉRÈS, delle ultime memorie del FANTAPPIÈ e di molti altri che hanno portato così utili contributi al calcolo funzionale, e dovremo limitarci solo a citare gli studi generali sugli spazi astratti e sulle loro corrispondenze che sono fra i più larghi e comprensivi della matematica moderna, dei quali tratta la recente opera del FRÉCHET ricollegante in una vasta sintesi il calcolo funzionale coll'analisi generale del MOORE.

Ci converrà invece soffermarci su quelle equazioni integro-differenziali che discendono dai problemi di natura ereditaria.

Ho avuto già spesso occasione di parlare sopra questo argomento ed ho esposto i fondamenti della teoria matematica dei fenomeni ereditari nelle mie lezioni della Sorbona.

Un fenomeno che ha luogo in un dato mezzo o in seno ad un dato sistema materiale è di natura ereditaria quando il suo modo di svolgersi in un certo istante è determinato, oltre che dalle condizioni del mezzo o dal sistema in quell'istante, anche dalle condizioni attraversate in passato, durante tutto un periodo di tempo, dal mezzo stesso o dal sistema materiale. Il fenomeno cessa di essere di natura ereditaria se si svolge solo dipendentemente dallo stato attuale del mezzo o del sistema materiale considerato.

Le equazioni che regolano i fenomeni non ereditari sono in generale di natura differenziale. Tale qualità conservano anche le equazioni che si riferiscono ai fenomeni ereditari, ma in questo caso le equazioni diventano di natura più complessa. Infatti, siccome i fenomeni stessi dipendono dagli infiniti stati attraversati dal sistema nei tempi che han preceduto l'istante attuale, dovranno esistere delle azioni che si esercitano presentemente, ma che sussistono in virtù delle condizioni che si sono svolte durante tutto il tempo passato. Queste azioni si calcoleranno quindi mediante dei funzionali, i quali alla loro volta in casi particolari potranno esprimersi mediante integrali definiti estesi ad intervalli di tempo facenti capo al momento presente. Le espressioni di queste azioni, che compariscono nelle equazioni, daranno dunque alle equazioni stesse un carattere funzionale e nei casi particolari, a cui abbiamo fatto allusione, daranno loro un carattere integrale. Questo si aggiunge a quello differenziale preesistente: perciò si otterranno equazioni aventi contemporaneamente i caratteri di equazioni differenziali e di equazioni integrali, donde il loro nome di *equazioni integro-differenziali.*

Nelle lezioni citate e in altre memorie ho svolto lo studio delle equazioni integro-differenziali che si trovano per vari fenomeni ereditari di natura meccanica e fisica relativi sia a sistemi d'un numero finito di gradi di libertà sia a sistemi continui.

L'esame di queste equazioni ha dato luogo ad una classificazione delle equazioni integro-differenziali, alla ricerca di metodi per integrarle ed allo studio degli elementi arbitrari che da esse nascono. Vari metodi classici, come quelli di GREEN e quelli delle caratteristiche, si possono estendere allo studio delle equazioni integro-differenziali e si possono ottenere soluzioni analoghe alle soluzioni fondamentali delle equazioni alle derivate parziali.

Tutto ciò costituisce la parte matematica delle ricerche le quali conducono ad un principio di carattere generale la cui portata va, a mio modo di vedere, molto al di là del campo analitico propriamente detto, pur avendo notevoli ripercussioni nel campo stesso.

Per maggior chiarezza, esprimiamoci con linguaggio matematico. Chiamiamo q il parametro da cui dipende un certo fenomeno e denotiamo con t il tempo. Se noi scriviamo

$$F(q(t))$$

avremo una quantità che dipende dal valore del parametro nell'istante t (istante attuale). Ora

$$q(t-\tau)$$

è il valore del parametro stesso in un istante $t-\tau$, cioè in un istante che ha preceduto di τ l'istante attuale, quindi

$$\int_0^{T_0} \Phi(\tau)\, q(t-\tau)\, d\tau \tag{1}$$

sarà una quantità che dipende da tutti i valori del parametro q in un periodo di tempo di ampiezza T_0 che precede l'istante attuale. Essa è una particolare espressione propria delle quantità che risentono la eredità del parametro q durante l'intervallo di tempo $(t-T_0, t)$.

Analogamente

$$aq(t)+\int_0^{T_0} \Phi(\tau)\, q(t-\tau)\, d\tau\,,$$

ove a denota una costante, dipenderà dal valore attuale di $q(t)$ e dall'eredità lasciata da questo parametro durante l'intervallo di tempo $(t-T_0, t)$.

Essa sarà un'espressione lineare e perciò la corrispondente eredità si dirà *lineare*. Quella più generale corrisponde a un funzionale che dipende da tutti i valori di $q(t-\tau)$ per τ compreso fra o e T_o; essa si scriverà col simbolo generalmente adottato

$$F\left|\left[q\left(t-\overset{T_o}{\underset{o}{\tau}}\right)\right]\right| = F\left|\left[q\left(\overset{t}{\underset{t-T_o}{\tau}}\right)\right]\right|.$$

Riprendiamo l'espressione (1); allorché essa denota un'azione (forza) questa sarà acceleratrice se $\Phi(\tau)$ sarà positivo, mentre se $\Phi(\tau)$ sarà negativo l'azione sarà ritardatrice. Inoltre ogni elemento dell'integrale

$$\Phi(\tau)\, q(t-\tau)\, d\tau$$

può assumersi come una componente dell'azione totale e precisamente può ritenersi esser quella componente che dipende dall'eredità del parametro q nell'intervallo di tempo $(t-\tau-d\tau\,,\, t-\tau)$. Vedremo tra poco come può modificarsi questo concetto dell'azione ereditaria elementare.

Nelle formule precedenti noi abbiamo tenuto conto dell'eredità limitatamente all'intervallo di tempo T_o anteriore all'istante attuale; noi abbiamo cioè supposto che l'eredità vada dissipandosi col tempo, tanto da poter ammettere che sia

$$\Phi(t) = o \quad \text{per} \quad t \geq T_o\,.$$

In tal caso T_o si chiama la *durata dell'eredità*.

Ma si può supporre che si debba tener conto dell'eredità anche in tempi infinitamente lontani, allora all'espressione (1) dovrà sostituirsi l'altra

$$(1') \qquad \int_o^\infty \Phi(\tau)\, q(t-\tau)\, d\tau$$

che ha significato analitico ben determinato assumendo convenientemente l'ordine di infinitesimo di $\Phi(\tau)$ per $\tau = \infty$. Lo stesso si dica quando l'eredità non è lineare, sostituendo alle precedenti espressioni l'espressione funzionale:

$$F\left|\left[q\left(t-\overset{\infty}{\underset{o}{\tau}}\right)\right]\right|.$$

Le formule (1) e (1') sono suscettibili di scriversi anche nel modo seguente:

$$\int_{t-T_o}^{t} \Phi(t-\tau)\, q(\tau)\, d\tau \quad , \quad \int_{-\infty}^{t} \Phi(t-\tau)\, q(\tau)\, d\tau.$$

Come abbiamo detto sopra, $\Phi(t-\tau)\, q(\tau)\, d\tau$ è la parte di eredità lasciata al tempo t dal valore $q(\tau)$ dal parametro nel tempuscolo $(\tau\,,\, \tau+d\tau)$. In tal modo noi assumiamo a priori che questa parte di eredità dipenda solo dalla distanza di tempo $t-\tau$ tra l'istante attuale e l'istante τ. Ma nulla c'impedirebbe di supporre che in generale Φ fosse una funzione, oltre che della distanza di tempo $t-\tau$, anche di t, cioè che si avesse $\Phi(t\,,\, t-\tau)$. Si verrebbe così ad ammettere che la legge che individua il contributo lasciato per eredità variasse col tempo. Questo che noi diciamo per l'eredità lineare può evidentemente ripetersi per l'eredità non lineare nella quale devesi ricorrere al concetto generale di funzionale. Vengono così a distinguersi due sorta di eredità: quella la cui legge resta invariabile col tempo e quella che invece si altera col tempo. Ora il principio cui sopra alludevo serve a distinguere le due specie di eredità, giacché esso suona così: *se a cause periodiche, con qualunque periodo, corrispondono effetti ereditarii periodici, l'eredità deve essere invariabile col tempo, e reciprocamente, se l'eredità segue una legge invariabile, le cause periodiche generano sempre effetti periodici.*

Tali relazioni fra cause ed effetti, allorché l'una e l'altra possono rappresentarsi mediante le due coordinate di un punto di un piano (punto rappresentativo), hanno per immagine geometrica un ciclo chiuso indefinitamente percorso dal punto rappresentativo nel piano, coll'infinito volgere del tempo. Perciò a questo principio ho dato il nome di *principio del ciclo chiuso.* I fenomeni suscettibili di essere rappresentati con cicli chiusi possono distinguersi con questo nome ed i nuclei $\Phi\,(t - \tau)$ corrispondenti a eredità di natura invariabile vengono detti *nuclei appartenenti al ciclo chiuso.* I fenomeni di natura ereditaria, che ci rivela il mondo fisico, appartengono in generale al ciclo chiuso.

I cicli contengono in taluni casi delle singolarità dovute probabilmente a cause che si aggiungono alla semplice eredità.

I fenomeni biologici, sebbene non definibili sempre con precisione matematica, non ci fanno pensare anch'essi ad una periodicità di effetti dovuta ad una periodicità di cause? E perciò entro i limiti d'una tale periodicità non dovrebbe forse verificarsi un'invariabilità nella legge ereditaria? Limitiamoci a queste semplici suggestioni senza approfondire un soggetto che ci condurrebbe troppo lontano.

Certo finché studiamo dei fenomeni fisici di natura ereditaria sarà giustificato fare uso di nuclei appartenenti al ciclo chiuso. Ora, come già abbiamo accennato, ciò è di notevole importanza dal punto di vista analitico. Infatti alle equazioni integrali ed integro-differenziali corrispondenti a tali nuclei sono applicabili dei metodi di una notevole semplicità ed eleganza. Conviene perciò introdurre un'operazione da eseguirsi sulle funzioni la quale può esprimersi con simboli matematici mediante la formula

$$\int_x^y f(x\,,\,\xi)\,\varphi\,(\xi\,,y)\,d\xi$$

e che chiamasi la *composizione* delle funzioni f e φ. Essa gode delle proprietà associativa e distributiva. Ora tutte le funzioni per le quali vale anche la proprietà commutativa *costituiscono un gruppo,* giacché l'operazione stessa genera nuove funzioni che appartengono al gruppo, come appartengono al gruppo tutte quelle generate per combinazioni lineari a coefficienti costanti delle funzioni stesse. Tale gruppo chiamasi un *gruppo di funzioni permutabili*. Ora le equazioni integrali ed integro-differenziali, dipendenti da nuclei appartenenti ad uno stesso gruppo di funzioni permutabili, si risolvono partendo dalle soluzioni di equazioni algebriche o differenziali del tipo classico sviluppate in serie di potenze e sostituendo in esse alle potenze algebriche quelle che si chiamano potenze di composizione. Ma le soluzioni delle equazioni integrali ed integro-differenziali, ottenute mediante questa trasformazione, hanno, rispetto alle soluzioni delle equazioni classiche da cui si ricavano, un vantaggio notevole in quanto le serie sono illimitatamente convergenti anche se non lo sono quelle di partenza.

Esaminiamo ora i nuclei appartenenti al gruppo del *ciclo chiuso*. Essi formano un *gruppo di funzioni permutabili* nel senso sopra stabilito, onde si può applicare alle equazioni integro-differenziali ed integrali che si hanno nel caso della *eredità di tipo invariantivo* i metodi e l'analisi che abbiamo ora sommariamente esposto e risolvere così con grande facilità i numerosi problemi che si presentano.

Le operazioni di composizione e le funzioni permutabili, man mano che se ne esaminano le proprietà, si approfondiscono le questioni che ad esse si riattaccano, e si procede alle estensioni che nascono spontaneamente dal loro studio, danno luogo ad una teoria che si svolge parallelamente a quella dell'algebra e del calcolo infinitesimo classico. Il Signor PÉRÈS ed altri Autori hanno aggiunto alle primitive ricerche su questo soggetto dei capitoli interessanti che ho raccolto insieme al succitato autore in un volume. Esso dà un'idea dell'insieme di questi studi.

Tralasciamo questi sviluppi analitici e ritorniamo ad esaminare le vere e proprie questioni ereditarie, anzi esaminiamole in quello che esse hanno di più essenziale, cioè dal punto di vista energetico.

Questo è quanto andrò ora ad esporre e ciò che ritengo oggi nuovo, giacché ha costituito la ricerca a cui mi sono consacrato in questi ultimi tempi e di cui ho pubblicato un saggio nell'ultimo fascicolo del « Journal de mathématiques ». Quale forma assume il principio di conservazione dell'energia, allorché si considerano i fenomeni di tipo ereditario? Dei numerosi casi che devono prendersi in considerazione cominciamo da quello che si presenta sotto la forma più semplice ed elementare.

Immaginiamo un sistema meccanico avente un sol grado di libertà, la cui configurazione sia quindi individuata da un solo parametro q. I piccoli movimenti spontanei di un tale sistema dipenderanno dall'equazione differenziale ben nota

$$\frac{d^2 q(t)}{dt^2} + a^2 q(t) = 0.$$

Se noi supponiamo che la forza viva o energia cinetica del sistema sia

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dq(t)}{dt}\right)^2 = T$$

e il potenziale delle forze interne sia

$$\mathrm{P} = -\mathrm{E} = -\frac{1}{2} a^2 q^2 ,$$

l'equazione delle forze vive avrà la forma

$$d\,(\mathrm{T} + \mathrm{E}) = 0$$

ossia

$$\mathrm{T} + \mathrm{E} = \text{cost.}$$

$\mathrm{E} = \frac{1}{2} a^2 q^2$ esprimerà l'energia potenziale interna del sistema.

Se il moto anziché libero sarà forzato, l'equazione fondamentale si scriverà

$$\frac{d^2 q\,(t)}{dt^2} + a^2 q\,(t) = \mathrm{Q}\,(t) \tag{2}$$

denotando con $\mathrm{Q}\,(t)$ la forza esterna ed in questo caso avremo

$$d\,(\mathrm{T} + \mathrm{E}) = \mathrm{Q}\,dt.$$

Questa equazione dice che il lavoro delle forze esterne va impiegato ad aumentare l'energia totale del sistema, cioè la somma della forza viva (energia cinetica) e dell'energia interna (energia potenziale). Supponiamo ora che il sistema sia soggetto ad azioni interne ereditarie, e per considerare il caso più semplice supponiamo ch'esse siano azioni ereditarie lineari. Dovremo allora aggiungere l'azione ereditaria al termine $a^2 q$ che figura nel primo membro. Come abbiamo detto precedentemente questa azione ereditaria potrà scriversi

$$\int_0^{\mathrm{T}_0} \Phi\,(\tau)\, q\,(t - \tau)\, d\tau$$

supponendo l'eredità di natura invariabile col tempo e supponendo che T_0 sia la sua durata.

Dovremo ora ammettere quest'azione ereditaria acceleratrice o ritardatrice? È facile persuadersi che essa opera in senso opposto all'azione interna $a^2 q\,(t)$, in modo che, come equazione generale da sostituirsi alla (2), dovremo assumere

$$\frac{d^2 q\,(t)}{dt^2} + a^{\circ} q\,(t) + \int_0^{\mathrm{T}_0} \Phi\,(\tau)\, q\,(t - \tau)\, d\tau = \mathrm{Q}\,(t) \tag{3}$$

ove $\Phi\,(\tau)$ è una quantità essenzialmente negativa. Si ponga ora

$$a^2 + \int_0^{\mathrm{T}_0} \Phi\,(\tau)\, d\tau = m$$

e l'equazione precedente diverrà

$$\frac{d^2 q\,(t)}{dt^2} + m q\,(t) - \int_0^{\mathrm{T}_0} \Phi\,(\tau)\, [q\,(t) - q\,(t - \tau)]\, d\tau = \mathrm{Q}\,(t)\,. \tag{3'}$$

Un semplice ragionamento ci porta a concludere che m è positivo. Infatti, se m fosse nullo, sopprimendo la forza esterna e prendendo $q(t) = q(t - \tau)$ si avrebbe $q'(t) = 0$, mentre dalla equazione precedente seguirebbe $q''(t) = 0$, onde q non cambierebbe valore. Se m fosse negativo risulterebbe $q''(t) > 0$, perciò q tenderebbe a crescere. Ambedue queste conseguenze contraddicono all'andamento dei fenomeni ereditari.

Consideriamo il funzionale

$$\text{(I)} \qquad E_p = \frac{1}{2} m q^2(t) - \frac{1}{2} \int_0^{T_0} \Phi(\tau) [q(t) - q(t - \tau)]^2 d\tau ;$$

il suo differenziale potrà scriversi

$$m q(t)\, \delta q(t) - \int_0^{T_0} \Phi(\tau) [q(t) - q(t - \tau)]\, d\tau \cdot \delta q(t) +$$

$$+ \int_0^{T_0} \Phi(\tau) [q(t) - q(t - \tau)]\, \delta q(t - \tau)\, d\tau.$$

Il primo termine che, nella classificazione dei differenziali dei funzionali di cui abbiamo parlato sopra, prende il nome datogli dal sig. PAUL LÉVY di *parte irregolare del differenziale*, è il prodotto della forza totale interna attuale cambiata di segno per il differenziale $\delta q(t)$ dello spostamento attuale. Potremo dunque chiamare $-E_p$ il *potenziale dell'insieme di tutte le azioni interne*.

E_p è un funzionale il quale dipende dallo stato attuale del sistema e da tutti gli stati che ha attraversato il sistema nell'intervallo di tempo T_0 che ha preceduto l'istante attuale. Ora dal punto di vista ereditario il sistema si trova nelle stesse condizioni in due istanti diversi quando, non solo i parametri che definiscono lo stato del sistema hanno gli stessi valori nei due istanti, ma sono rispettivamente uguali tra loro anche i valori dei parametri stessi nei due intervalli di tempo d'ampiezza T_0 che precedono i due detti istanti.

E_p è dunque un funzionale che riprende il valore iniziale allorché il sistema ritorna, dal punto di vista ereditario, nelle stesse condizioni iniziali. Nella equazione (3') la forza interna attuale è scritta sotto la forma

$$- m q(t) + \int_0^{T_0} \Phi(\tau) [q(t) - q(t - \tau)]\, d\tau ;$$

ora quest'espressione può interpretarsi dicendo che il contributo di forza interna attuale proveniente dal tempuscolo $(\tau, \tau + d\tau)$ è dato da

$$\Phi(\tau) [q(t) - q(t - \tau)] ,$$

ossia è proporzionale alla differenza tra il valore attuale del parametro q ed il suo valore nell'istante $t - \tau$. Ciò modifica il concetto di azione elementare ereditaria che avevamo precedentemente esposto. Fu appunto questa modificazione del concetto primitivo di *contributo elementare ereditario*, al quale abbiamo già alluso precedentemente, che diede luogo alle più feconde conseguenze.

Noi abbiamo detto che $\Phi(\tau)$ deve assumersi negativo, ma vi è da ricordare un'altra ipotesi sopra questa quantità. Siccome l'azione ereditaria tende ad estinguersi col tempo, così il valore assoluto di $\Phi(\tau)$ deve andare continuamente decrescendo col crescere di τ; quindi potremo scrivere

$$\Phi(\tau) < 0 \quad , \quad (0 \leq \tau < T_0) \quad ; \quad \Phi(T_0) = 0 \quad ; \quad \Phi'(\tau) > 0 \quad , \quad (0 < \tau < T_0).$$

Abbiamo adesso tutti gli elementi per stabilire la relazione energetica fondamentale e faremo uso per ottenerla di un artificio che mi è stato suggerito da uno studio di natura diversa, ma che rientra sempre nel campo delle questioni ereditarie.

È possibile infatti costruire sopra basi matematiche una teoria delle fluttuazioni che si osservano nei numeri di individui di specie biologiche diverse, allorché, vivendo esse in un medesimo ambiente, esercitano le une sulle altre delle azioni di aiuto o di distruzione, il che avviene, per esempio, quando alcune specie si nutriscono degli individui di altre o si disputano uno stesso nutrimento. Un primo esame conduce a regolare tali fluttuazioni mediante equazioni differenziali non uguali, ma simili alle equazioni differenziali della dinamica classica. Un esame più profondo conduce invece a riconoscere un carattere ereditario nelle azioni che sono in gioco. Ed infatti la maggiore o minore quantità di nutrimento ingerita oggi dagli individui di una specie ha un'azione che si manifesta solo dopo un certo tempo sulla quantità degl'individui della specie stessa.

Si è così condotti a modificare le equazioni primitive di natura differenziale sostituendole con equazioni integro-differenziali. Le leggi delle fluttuazioni che si ricavavano dalle equazioni differenziali in parte si conservano, in parte si trasformano impiegando alcuni artifici analitici.

Questi stessi artifici possono adoperarsi (ed anzi con maggior successo) nel caso della ordinaria dinamica ereditaria ed anche nello studio di altri fenomeni fisici sempre di natura ereditaria. Sono appunto questi artifici di cui faremo uso per ottenere il principio energetico che vogliamo stabilire.

Riprendiamo perciò l'equazione (3'). Se noi vogliamo ottenere il lavoro della forza esterna Q durante il tempuscolo dt dovremo calcolare

$$Q(t)\, q'(t)\, dt$$

e questo si esprimerà sotto la forma

$$q''(t)\, q'(t)\, dt + mq(t)\, q'(t)\, dt - q'(t)\, dt \int_0^{T_0} \Phi(\tau)\, [q(t) - q(t-\tau)]\, d\tau .$$

I primi due termini, come risulta ovviamente dall'analisi che conduce al principio delle forze vive, sono due differenziali esatti e cioè insieme formano

$$d\,\frac{1}{2}\,[q'^2(t)+mq^2(t)].$$

Il terzo termine non è un differenziale esatto ma differisce da

$$d\left[-\frac{1}{2}\int_0^{T_0}\Phi(\tau)\,[q(t)-q(t-\tau)]^2\,d\tau\right]$$

per la quantità

$$dt\cdot\int_0^{T_0}\Phi(\tau)\,[q(t)-q(t-\tau)]\,\frac{dq(t-\tau)}{dt}\,d\tau\,.$$

Ora quest'espressione può scriversi

$$dt\cdot\frac{1}{2}\int_0^{T_0}\Phi(\tau)\,\frac{d\,[q(t)-q(t-\tau)]^2}{d\tau}\,d\tau$$

e, con un'integrazione per parti, osservando che

$$\Phi(T_0)=0 \quad , \quad (q(t)-q(t-\tau))_{\tau=0}=0,$$

si trasforma in

$$-dt\cdot\frac{1}{2}\int_0^{T}\Phi'(\tau)\,[q(t)-q(t-\tau)]^2\,d\tau\,,$$

onde otterremo finalmente

$$d\left\{\frac{1}{2}\,q'^2(t)+\frac{1}{2}\,mq^2(t)-\frac{1}{2}\int_0^{T_0}\Phi(\tau)\,[q(t)-q(t-\tau)]^2\,d\tau\right\}+$$

$$+\frac{dt}{2}\int_0^{T_0}\Phi'(\tau)\,[q(t)-q(t-\tau)]^2\,d\tau=Q(t)\,dq(t)\,.$$

E siccome (vedi (I))

$$\frac{1}{2}\,q'^2(t)=T \quad , \quad \frac{1}{2}\,mq^2(t)-\frac{1}{2}\int_0^{T_0}\Phi(\tau)\,[q(t)-q(t-\tau)]^2\,d\tau=E_p$$

e possiamo porre

$$E_\partial=\frac{1}{2}\int_0^{T_0}\Phi'(\tau)\,[q(t)-q(t-\tau)]^2\,d\tau$$

avremo

$$d\,(T+E_p)+E_\partial\,dt=Q(t)\,dq(t).$$

Ora E_∂ è una quantità positiva, dunque il lavoro delle forze esterne supera sempre l'incremento della quantità

$$T+E_p\,.$$

Se noi scriviamo $T + E_p = E_m$ ed integriamo tra due tempi t_0 e t, dall'equazione precedente risulterà

$$E_m - E_m^\circ + \int_{t_0}^{t} E_\partial \, dt = L, \tag{II}$$

ove E_m e E_m° sono i valori di E_m ai tempi t_0 e t, e L è il lavoro delle forze esterne.

È questa la *equazione fondamentale energetica che volevamo stabilire.*

Chiamiamo per definizione E_p l'*energia potenziale interna* ed E_m l'*energia meccanica.* Si avrà allora il principio energetico:

Il lavoro delle forze esterne oltrepassa sempre la variazione dell'energia meccanica di una quantità positiva.

Se L è positivo questa legge può enunciarsi:

Il lavoro delle forze esterne non si trasforma completamente in energia meccanica, ma resta sempre una parte residua positiva del lavoro stesso che non si trasforma in energia meccanica. Se mancano forze esterne (e quindi $L = 0$) *l'energia meccanica diminuisce costantemente e, se il lavoro delle forze esterne è negativo, l'energia meccanica si trasforma solo in parte in lavoro esterno.*

Supponiamo ora che il sistema ritorni dopo un certo tempo alle condizioni iniziali (dal punto di vista ereditario), allora l'energia potenziale riprenderà il valore primitivo, onde avremo che, *se, alla fine di un certo periodo di tempo, il sistema ritorna, dal punto di rivista ereditario, nelle stesse condizioni iniziali, le forze esterne eseguiscono un lavoro positivo.* In questo caso nulla si cambia dal punto di vista meccanico nel sistema, perciò questo lavoro positivo è un lavoro dissipato dal punto di vista meccanico. Esso si calcola subito dalla formula (II) prendendo $E_m = E_m^\circ$, onde sarà

$$\int_{t_0}^{t} E_\partial \, dt$$

il lavoro meccanico dissipato. Naturalmente secondo i principî della conservazione dell'energia *esso deve essersi trasformato in altre forme di energia.*

E allora può domandarsi: se il ciclo percorso dal sistema non è chiuso, cioè se il sistema non ritorna al tempo t nelle stesse condizioni (dal punto di vista ereditario) nelle quali si trovava al tempo t_0, la quantità

$$\int_{t_0}^{t} E_\delta \, dt$$

ci darà sempre una quantità di lavoro meccanico trasformato in altre forme di energia? Noi non possiamo affermarlo. Bisogna a questo proposito intendersi bene sul significato delle parole delle quali abbiamo fatto uso. Non è infatti che *per definizione, come è stato detto esplicitamente sopra,* che E_p si è chiamata l'*energia potenziale interna* ed E^m *l'energia meccanica.* Ciò che preme di mettere in luce è che tali definizioni sono compatibili con i principî della energetica e che abbiamo mostrato *l'esistenza di un funzionale, di cui si è data l'espressione analitica, dipendente dalle condizioni del sistema dal punto di vista ereditario, tale che il lavoro delle forze esterne nel passaggio da uno stato ad un altro ne oltrepassa sempre le variazioni.*

Il funzionale considerato non è il solo che goda di queste proprietà.

Il risultato ottenuto conduce a molte conseguenze ed esso può ancora estendersi notevolmente.

In primo luogo si dimostra che *i moti spontanei sono limitati e vanno indefinitamente smorzandosi, o mediante oscillazioni, o mediante moti asintotici.*

Si può poi estendere i risultati al caso di un sistema avente un grado qualunque di libertà. La estensione può farsi con un'analisi delicata, introducendo nuove condizioni e nuovi postulati che generalizzano ed integrano quelli posti nel caso di un solo grado di libertà. Anche i sistemi continui possono studiarsi dallo stesso punto di vista. In particolare è interessante lo studio dei solidi elastici allorché si tien conto dell'eredità. Il procedimento il quale conduce alla relazione energetica fondamentale non differisce essenzialmente da quello di cui abbiamo esposto poco fa le basi fondamentali.

Oltre all'equazione energetica, che abbiamo precedentemente ottenuta, possono aversene anche altre. Ciò è legato ad alcune considerazioni generali sulla eredità che brevemente riferiremo. Sia ρ un parametro il cui valore al tempo t dipende linearmente ed ereditariamente dal parametro q, cioè sia

$$\rho(t) = aq(t) + \int_{-\infty}^{t} q(\tau)\,\Phi(t-\tau)\,d\tau. \tag{4}$$

La funzione $q(\tau)$ individua la *storia* del parametro q (storia primitiva) e la funzione $\rho(t)$ la *storia* del parametro ρ (storia ereditaria). In questo caso la eredità si dirà *completa*. Se Φ si annulla per valori dell'argomento eguali o superiori a T_0, come abbiamo veduto precedentemente, la eredità è *limitata alla durata* T_0 ed abbiamo

$$\rho(t) = aq(t) + \int_{t-T_0}^{t} q(\tau)\,\Phi(t-\tau)\,d\tau. \tag{4'}$$

Ma, se la eredità anteriore ad un istante t_0 è trascurabile, l'equazione (4) assumerà la forma

$$q(t) = aq(t) + \int_{t_0}^{t} q(\tau)\,\Phi(t-\tau)\,d\tau. \tag{4''}$$

In questo caso la eredità si dirà *posteriore* all'istante t_0 e l'equazione integrale precedente potrà invertirsi e si otterrà:

$$q(t) = \frac{1}{a}\rho(t) + \int_{t_0}^{t} \rho(\tau)\,\varphi(t-\tau)\,d\tau,$$

ove la funzione φ si chiama il *nucleo risolvente* dell'equazione (4''). Si avrà dunque che, *nello stesso modo che la storia primitiva posteriore a t_0 individua quella ereditaria, così la storia ereditaria posteriore a t_0 individua quella primitiva.*

La eredità posteriore a t_0 può quindi completamente invertirsi e si può considerare q come dipendente ereditariamente da ρ.

Analoghe proprietà non si verificano allorché la eredità è completa o limitata, così, per esempio, in questi casi ad una stessa storia ereditaria possono corrispondere diverse storie primitive, a meno che non si pongano alcune condizioni restrittive.

L'essere l'eredità primitiva posteriore a t_0, non esclude che essa possa essere anche limitata ad una certa durata T_0, però la eredità invertita può non essere limitata alla durata T_0, né essere in alcun modo limitata.

Tutte queste diverse classificazioni e proprietà ereditarie portano a forme diverse di equazioni energetiche.

Così considerando l'eredità posteriore ad un certo istante può estendersi la relazione energetica precedentemente ottenuta ed invertendo l'eredità può ottenersene una di forma diversa.

Come esempio di un'altra forma di relazione energetica esaminiamo i fenomeni elettromagnetici di natura ereditaria.

Prendiamo le equazioni fondamentali di MAXWELL nel caso il più semplice dei mezzi isotropi ed omogenei. Per passare dal caso ordinario a quello in cui si tien conto della eredità si può sostituire alle due relazioni

$$P_e(t) = \varepsilon F_e(t) \quad , \quad P_m(t) = \mu F_m(t) ,$$

ove P_e e P_m denotano i vettori polarizzazione elettrica e polarizzazione magnetica e F_e e F_m i vettori forza elettrica e forza magnetica nell'istante t, le relazioni di tipo integrale

$$P_e(t) = \varepsilon F_e(t) + \int_0^{T_0} \mathcal{F}(\tau)\, F_e(t-\tau)\, d\tau \quad , \quad P_m(t) = \mu F_m(t) + \int_0^{T_0} \Phi(\tau)\, F_m(t-\tau)\, d\tau .$$

In queste equazioni i coefficienti di eredità $\mathcal{F}(\tau)$ e $\Phi(\tau)$ debbono essere positivi e decrescenti ed annullarsi per $t = T_0$, ammesso che T_0 sia la durata dell'eredità, allorché si assumono come storie primitive quelle della forza elettrica e della forza magnetica e come storie ereditarie quelle delle corrispondenti polarizzazioni.

Sostituendo nelle equazioni di MAXWELL le precedenti espressioni delle polarizzazioni si ottengono subito le equazioni integro–differenziali che esprimono l'andamento dei fenomeni elettromagnetici nel caso ereditario.

Ora per stabilire la legge fondamentale energetica si può applicare alle equazioni di MAXWELL il procedimento ben noto del POYNTING. Bisogna allora calcolare la somma dei prodotti scalari

$$\frac{dP_e}{dt} \times F_e \quad , \quad \frac{dP_m}{dt} \times F_m$$

la quale si esprime, eseguiti tutti i calcoli e le trasformazioni necessarie, mediante la formula

$$\frac{d}{dt}(E_e + E_m) - E_\partial ,$$

avendo posto

$$E_e = \frac{\varepsilon}{8\pi} F_e^2 + \int_0^{T_0} \frac{\mathfrak{F}(\tau)}{8\pi} F_e^2(t-\tau)\, d\tau$$

$$E_m = \frac{\mu}{8\pi} F_m^2 + \int_0^{T_0} \frac{\Phi(\tau)}{8\pi} F_m^2(t-\tau)\, d\tau$$

$$E_\partial = -\frac{1}{8\pi}\int_0^{T_0} \{\mathfrak{F}'(\tau)\,[F_e(t-\tau) - F_e(t)]^2 + \Phi'(\tau)\,[F_m(t-\tau) - F_m(t)]^2\}\, d\tau$$

e ove con

$$F_m^2(t) \quad , \quad F_m^2(t) \quad , \quad [F_e(t-\tau) - F_e(t)]^2 \quad , \quad [F_m(t-\tau) - F_m(t)]^2$$

si intendono rispettivamente i quadrati dei tensori dei vettori

$$F_e(t) \quad , \quad F_m(t) \quad , \quad F_e(t-\tau) - F_e(t) \quad , \quad F_m(t-\tau) - F_m(t).$$

Se *per definizione* chiamiamo E_e l'*energia potenziale unitaria elettrica* ed E_m l'*energia potenziale unitaria magnetica*, mentre chiamiamo E_∂ la *energia di dissipazione elettromagnetica unitaria dovuta all'eredità*, queste quantità saranno tutte positive ed il flusso di energia elettromagnetica che penetra in un intervallo di tempo (t_0 , t) attraverso il contorno di un campo S sarà eguale a

$$\int_S (E_e + E_m)\, dS - \int_S (E_e^0 + E_m^0)\, dS + \int_{t_0}^{t} dt \int_S E_\partial\, dS + J ,$$

denotando con J il calore JOULE (misurato in energia meccanica) e avendo messo un apice o per denotare i valori iniziali (al tempo t_0) di E_e ed E_m. Da qui segue il teorema: *il flusso dell'energia elettromagnetica attraverso il contorno di un campo supera la somma dell'energia* JOULE *e dell'incremento dell'energia elettro-magnetica del campo di una quantità positiva* o, in altri termini, *solo una parte dell'energia elettro-magnetica che penetra attraverso il contorno accresce l'energia elettro-magnetica del campo e si trasforma in calore* JOULE. La parte che si dissipa (e che in generale verrà trasformata anch'essa in calore) viene calcolata dalla formula:

$$\int_{t_0}^{t} dt \int_S E_\partial\, dS.$$

Ciò potremo asserire almeno tutte le volte che il sistema torna dal punto di vista ereditario nelle condizioni iniziali.

Pur prescindendo dalle definizioni attribuite ad E_e , E_m , E_∂, anche in questo caso resta dimostrata per ogni campo l'*esistenza di un funzionale dipendente dalle condizioni del sistema dal punto di vista ereditario, le cui varia-*

zioni in ogni intervallo di tempo aggiunte all'energia JOULE *sono sempre superate dall'energia elettro–magnetica che penetra nel campo dal suo contorno.*

Questo funzionale non è il solo che gode di tali proprietà. Infatti potrebbe calcolarsene un altro (analogo a quello trovato per i sistemi dinamici) dal quale il primo differisce perché in questo figurano soltanto i valori che individuano lo stato del sistema nel periodo di durata dell'eredità, mentre nell'altro compariscono le differenze tra gli elementi che definiscono lo stato del sistema nell'istante attuale e quelli che lo individuano nel tempo passato.

Tutto quanto abbiamo detto sin qui relativamente alla energetica ereditaria si riferisce al caso in cui essa sia *lineare*. Ora è del maggiore interesse vedere se i principî stabiliti sono estensibili al caso dell'eredità non *lineare*. Evidentemente tale estensione va riservata al caso dei sistemi dinamici, giacché per l'elettro–magnetismo conviene rimanere sempre nel caso lineare.

Ma se esaminiamo l'estensione stessa dal punto di vista analitico si riconosce facilmente che essa ci conduce ad un impiego molto più largo dei metodi del calcolo funzionale e dei suoi elementi fondamentali di quanto non sia stato fatto finora.

È forse l'esempio più istruttivo che si abbia del loro uso e la prova più sicura della facilità colla quale possono adoperarsi e della loro utilità. Infatti conviene valersi, fra le altre cose, dei differenziali dei funzionali, giovandosi ad un tempo della loro parte regolare e di quella non regolare ed applicare lo sviluppo funzionale analogo a quello di TAYLOR. Mi riferivo precisamente a questo al principio della conferenza.

Noi non staremo a svolgere nei suoi particolari tale estensione la quale ci condurrebbe troppo lontano. Diremo solo che conviene partire dalle equazioni dinamiche sotto la seconda forma di LAGRANGE, ed ammettere l'esistenza del potenziale ereditario dipendente dalla differenza dei valori attuali dei parametri che individuano lo stato del sistema e dei valori dei parametri stessi in tutti gli istanti di un intervallo di tempo che precede quello attuale, di ampiezza eguale alla durata dell'eredità. Questo potenziale è un funzionale il cui differenziale si suppone regolare. È possibile allora modificare le equazioni di LAGRANGE in modo da tener conto dell'eredità. Se in seguito noi applichiamo a queste equazioni il classico metodo che conduce al principio delle forze vive noi otteniamo una relazione differenziale la quale esprime il lavoro elementare delle forze esterne mediante il differenziale della somma dell'energia cinetica e di un funzionale dipendente dallo stato del sistema dal punto di vista ereditario. A questo differenziale è aggiunto un termine che esprime l'energia di dissipazione. L'operazione più difficile è la sua trasformazione, la quale può ottenersi mediante la costruzione di un nuovo funzionale *dipendente in modo speciale dal valore d'una funzione in un punto determinato e di cui si conosce la parte non regolare del differenziale.* Esso ci dà il funzionale di dissipazione che, in virtù di alcuni postulati, risulta positivo.

I teoremi quindi che abbiamo enunciati nel caso dell'eredità lineare possono senz'altro estendersi al caso generale.

Un esempio particolare di notevole interesse lo abbiamo allorché il funzionale che esprime il potenziale ereditario è sviluppabile in serie analoga a quella di TAYLOR, il che ci conduce alle *espressioni analitiche complete* e del *potenziale ereditario stesso* e della *energia di dissipazione*.

Ritengo così di avere dato un'idea generale dei fenomeni ereditari per quella parte che può chiamarsi la *teoria pura dei fenomeni stessi* la quale si basa sulla semplice ipotesi della esistenza di azioni che dipendono, oltre che dal presente, anche dal passato. L'esame di tali azioni costituisce a mio avviso un passo nello studio approssimativo dei fenomeni naturali.

Ma evidentemente se ciò avvicina la teoria analitica ai risultati delle osservazioni, questi sono ben lungi dal venire completamente spiegati in tutti i loro particolari. Molti fatti sfuggono alla teoria. Essi alla loro volta non vi rientreranno, almeno parzialmente, se non aggiungendo nuove ipotesi a quelle già fatte che riescano a stringere più da vicino la realtà. L'avanzarsi dunque per questa via, come in tutte quelle secondo cui procede la filosofia naturale, è e continuerà ad essere il risultato di successive approssimazioni.

La teoria si serve delle equazioni integro–differenziali e delle equazioni funzionali che esprimono matematicamente il fenomeno; si svolge con lo studio analitico di esso basato sulla dottrina del calcolo funzionale; stabilisce un principio fondamentale: quello del ciclo chiuso, il quale dal punto di vista matematico apre la via all'impiego dei metodi delle funzioni permutabili e della composizione. Infine la teoria stessa procede nel campo dell'energetica riuscendo ad esprimere mediante dei funzionali l'energia di dissipazione dovuta all'eredità nel caso dei cicli chiusi e dando un seguito di proposizioni compatibili con le leggi generali dell'energetica.

Le più importanti di esse provano l'esistenza, in ogni caso, di funzionali, le cui variazioni aggiunte a quelle dell'energia cinetica (fenomeni dinamici) o del calore JOULE (fenomeni elettro–magnetici) sono sempre superati dal lavoro delle forze esterne o dall'energia che penetra dall'esterno nel campo in cui il fenomeno si svolge.

Queste diverse proposizioni esprimono in forma sintetica il modo di prodursi dei fenomeni ereditari e ne caratterizzano l'andamento generale.

VI.

IN MEMORIA DI H. A. LORENTZ

« Il Nuovo Cimento », n. s., vol. V, 1928; pp. 41–43.

HENDRICK ANTON LORENTZ nacque in Arnhem il 18 luglio 1853. Si laureò nella Università di Leida nel 1875 ed in essa fu nominato professore di fisica matematica nel 1878. Tenne come titolare la cattedra fino a 10 anni fa, ma anche in seguito non la abbandonò completamente, perché, come professore onorario, continuò ad impartire in Leida corsi liberi, mentre aveva la direzione dell'Istituto Teyler nella vicina Haarlem.

Nel 1902 gli fu conferito il premio Nobel per la fisica e la Società Reale di Londra, che lo ebbe fra i suoi membri stranieri, gli assegnò nel 1918 e nel 1925 le medaglie Copley e Rumford. Le principali Accademie Italiane lo elessero loro Socio.

Mentre era ancora vivo il ricordo delle solenni onoranze, alle quali partecipò tutto il mondo scientifico, celebrate tre anni fa in Leida per festeggiare la ricorrenza cinquantenaria della sua laurea, e mentre tutti ammiravano la sua vegeta e robusta vecchiezza, giunse inattesa il 4 febbraio scorso la notizia della sua morte. Narrarono i giornali che oltre diecimila persone accorsero ai suoi funerali, prova manifesta della stima in cui era tenuto e dell'affetto e della simpatia da cui era circondato.

Sarebbe superfluo diffondersi qui a parlare delle sue scoperte e delle sue opere scientifiche, tanto esse sono universalmente note. Diventate ormai classiche, non è lecito a nessun cultore della fisica, anche il più modesto, di ignorarle. Anzi la fama di esse ha varcato la cerchia degli studiosi ed il nome del LORENTZ è divenuto negli ultimi tempi popolare a cagione del legame esistente fra le sue ricerche e la teoria della relatività.

La grandiosa opera svolta dal MAXWELL nel campo della elettricità, al momento nel quale il LORENTZ iniziava la sua carriera, richiamava l'attenzione di tutti i fisici; se ne comprendeva l'immensa importanza e si intuiva la profonda rivoluzione che essa avrebbe determinato nei principî fino allora seguiti; si riconosceva nel tempo stesso la necessità di completarla e continuarla. Le memorabili scoperte di HERTZ le diedero una solida base sperimentale. Ma, per esempio, lo studio della propagazione delle onde elettromagnetiche nei mezzi in moto era ancora da fare. Si deve al LORENTZ la creazione di nuove teorie le quali completarono in gran parte l'edificio scientifico di MAXWELL, e, alla lor volta, furono feconde di altri meravigliosi progressi.

È noto che i suoi calcoli facevano prevedere l'esistenza di un nuovo fenomeno magneto-ottico e che ZEEMAN, guidato da questa previsione, scopriva il celebre fenomeno a cui fu dato il suo nome. Le teorie matematiche del LORENTZ aprirono poi la via a quelle relativistiche le quali si svilupparono in virtù delle geniali concezioni di EINSTEIN, seguite da una lunga serie di lavori consacrati allo sviluppo delle nuove dottrine, fra cui primeggiano gli scritti di POINCARÉ e di MINKOWSKI.

Le ricerche del LORENTZ si basano sui concetti del MAXWELL, ma esse vi introducono delle essenziali modificazioni. Il mezzo etereo di natura eguale nei vari corpi viene infatti dal LORENTZ popolato di elettroni in condizioni diverse secondo la trasparenza e la conducibilità dei corpi stessi.

Ma l'opera del LORENTZ non si è limitata al solo elettromagnetismo. La teoria cinetica dei gas fra le altre ha formato ancora l'oggetto dei suoi studî; certamente la grande celebrità degli scritti sul primo argomento ha oscurato gli altri.

Quanti hanno partecipato alla memorabile riunione di Como dello scorso autunno, nella quale i più noti fisici del mondo si raccolsero per onorare la memoria di ALESSANDRO VOLTA, non possono scordare la figura del LORENTZ. Egli attirava l'attenzione, non solo per la fama che circondava il suo nome, ma anche per la vivacità con la quale prendeva parte alle discussioni, per la sua mirabile facilità di afferrare i più svariati soggetti e per l'acutezza dei suoi giudizi. Sembrava anzi che, col volgere degli anni, egli avesse acquistata maggiore prontezza nell'impadronirsi dei diversi argomenti che gli erano presentati e maggiore perspicacia nell'approfondirli.

Meravigliose erano poi la chiarezza e l'efficacia che aveva nell'esporre i diversi temi scientifici anche in forma estemporanea e senza preparazione, il che rendeva anzi la sua parola più attraente e persuasiva.

Già altre volte aveva partecipato ai nostri convegni. Lo avevamo visto fra noi durante il Congresso dei matematici tenuto in Roma nel 1907, dove aveva esposto interessanti considerazioni sulla teoria dell'irraggiamento ed in particolare su quella ancora nuova del PLANCK sui quanta.

Negli ultimi anni la sua attività si esplicò anche nelle organizzazioni internazionali di carattere scientifico. Egli infatti fu presidente della Unione intellettuale presso la Società delle Nazioni e prese parte attiva ai lavori del Consiglio internazionale delle Ricerche. Le riunioni di carattere amministrativo, talvolta aride, di questo Consiglio furono spesso ravvivate dalla sua parola, che trasportava gli ascoltatori nelle regioni le più elevate della scienza.

La sua modestia in mezzo alla universale ammirazione, il suo carattere vivace ed espansivo, la mancanza di ogni affettazione nei suoi modi sempre semplici e cortesi lo resero estremamente simpatico e lo fecero amare da tutti. Fu uno degli spiriti più elevati che ci fu dato conoscere ed avvicinare in questi ultimi anni.

L'Olanda non vasta per territorio, ma grande per il genio scientifico ed artistico dei suoi figli, per l'amore tenace di essi alle loro antiche libere istituzioni, rifugio ed asilo in ogni epoca a spiriti innovatori che arricchirono di nuove idee quell'ambiente di schietta tolleranza, aperta alle correnti che dalle vicine Inghilterra, Francia e Germania e dalla più lontana Italia vi apportarono fecondi germi di cultura, fu sempre uno dei centri intellettuali più importanti d'Europa. Nella eletta schiera di scienziati che, dall'epoca di HUYGENS fino ai nostri giorni, vi brillarono per il loro genio e portarono tanti preziosi contributi alla filosofia naturale, il LORENTZ conserverà sempre una posizione delle più eminenti.

VII.

ALCUNE OSSERVAZIONI SUI FENOMENI EREDITARI

« Rend. Accad. dei Lincei », ser. 6ª, vol. IX_1, 1929; pp. 585–595.

I.

1. In una recente Memoria pubblicata nel « Journal de Mathématiques » [1] sono ritornato sopra mie precedenti ricerche ed ho esaminato i fenomeni ereditari dal punto di vista energetico.

Mi permetto ora di aggiungere alcune osservazioni generali sui detti fenomeni portando qualche nuovo contributo al loro studio.

2. Supponiamo che lo stato attuale d'un parametro ρ dipenda dalla storia di un parametro q e la dipendenza sia lineare. La funzione $q(t)$ (t denotando il tempo) individuerà la *storia di* q ossia la *storia primitiva*, mentre la funzione $\rho(t)$ individuerà la *storia di* ρ ossia la *storia ereditaria*.

Ammetteremo ρ e q funzioni finite e continue e se vorremo considerare la *eredità completa* scriveremo nel caso del ciclo chiuso

$$\rho(t) = aq(t) + \int_{-\infty}^{t} q(\tau)\, F(t-\tau)\, d\tau \text{ [2]}. \tag{1}$$

Il *coefficiente di eredità* $F(t)$ sarà una funzione finita e continua e, se q è limitata, lo supporremo, per $t = \infty$, infinitesimo di ordine superiore ad un numero maggiore dell'unità.

a sarà una funzione continua compresa fra due numeri positivi che potremo supporre sempre ridotta eguale all'unità.

3. Se lo stato del parametro q anteriore ad un certo istante t_0 non influisce sul valore di ρ scriveremo la (1)

$$\rho(t) = q(t) + \int_{t_0}^{t} q(\tau)\, F(t-\tau)\, d\tau. \tag{A}$$

Questa equazione integrale può risolversi e avremo

$$q(t) = \rho(t) + \int_{t_0}^{t} \rho(\tau)\, G(t-\tau)\, d\tau \tag{B}$$

(1) « Journ. de Math. », tome VII, fasc. III, 1928. [In questo volume, IV, pp. 130–169].

(2) VOLTERRA, *Sur les fonctions de lignes*, Chap. VII, Paris 1913.

ove G è il nucleo coniugato di F, cioè

$$G = -F + \overset{*}{F}{}^{2} - \overset{*}{F}{}^{3} + \cdots \quad (2)$$ [3].

In questo caso la eredità si dice *posteriore all'istante* t_0 e, *come la storia primitiva posteriore a* t_0 *individua quella ereditaria*, così, reciprocamente, *questa ultima individua la storia primitiva pure posteriore a* t_0.

L'equazione (A) corrisponderà all'eredità diretta e la (B) a quella inversa.

La eredità sarà *ritardatrice* o *acceleratrice* secondoché il nucleo F è negativo o positivo.

Abbiamo subito i teoremi:

TEOREMA I. – *Se l'eredità diretta è ritardatrice quella inversa è acceleratrice.* Infatti dalla (2) segue che, se F è negativa, G è positiva.

TEOREMA II. – *Se l'eredità diretta è acceleratrice quella inversa non potrà essere anch'essa acceleratrice.*

Infatti dalla (2) segue:

$$\overset{*}{G}\overset{*}{F} = -\overset{*}{F}{}^{2} + \overset{*}{F}{}^{3} - \overset{*}{F}{}^{4} + \cdots = (F - \overset{*}{F}{}^{2} + \overset{*}{F}{}^{3} - \overset{*}{F}{}^{4} + \cdots) - F = -G - F$$

e per conseguenza

$$G + F + \overset{*}{G}\overset{*}{F} = 0$$

relazione incompatibile coll'ipotesi che G ed F siano ambedue positive.

Dalle formule precedenti segue:

$$G = (-\overset{*}{F} + \overset{*}{F}{}^{2} - \overset{*}{F}{}^{3} + \cdots + \overset{*}{F}{}^{2p})(\overset{*}{F}{}^{0} + \overset{*}{F}{}^{2p} + \overset{*}{F}{}^{4p} + \cdots)$$

essendo p intero e positivo.

Quindi se vale la: (3) $F > 0$, e inoltre

$$F + \overset{*}{F}{}^{3} + \cdots + \overset{*}{F}{}^{2p-1} > \overset{*}{F}{}^{2} + \overset{*}{F}{}^{4} + \cdots + \overset{*}{F}{}^{2p}, \quad (4)$$

G sarà negativo. Dunque:

TEOREMA III. – *Se saranno soddisfatte le relazioni* (3) *e* (4), *l'eredità diretta sarà acceleratrice e quella inversa sarà ritardatrice.*

4. Se il coefficiente di eredità $F(t)$ si annulla per $t \geq T_0$, T_0 si dirà la *durata dell'eredità diretta.*

Avremo allora che la equazione (1) diverrà

$$\rho(t) = q(t) + \int_{t-T_0}^{t} q(\tau) F(t-\tau)\, d\tau = q(t) + \int_{0}^{T_0} q(t-\tau) F(\tau)\, d\tau. \quad (C)$$

In questo caso la storia ereditaria non individua la storia primitiva, supponendo che non si tratti di eredità posteriore ad un certo istante.

(3) VOLTERRA et PÉRÈS, *Composition et fonctions permutables*, Chap. II, Paris 1924.

Infatti prendiamo nella equazione precedente $q(t) = e^{\alpha t}$ con α costante positiva o negativa.

Avremo

$$\rho(t) = e^{\alpha t}\left(1 + \int_0^{T_0} F(\tau)\, e^{-\alpha\tau}\, d\tau\right).$$

Se $F(\tau)$ è negativo si potrà sempre scegliere α in modo che

$$1 + \int_0^{T_0} F(\tau)\, e^{-\alpha\tau}\, d\tau = 0$$

onde si avrà $\rho(t) = 0$ il che dimostra che la (C), nella quale si considera $q(t)$ come incognita, ha infinite soluzioni della forma

$$q(t) + Ce^{\alpha t},$$

ove C è una costante arbitraria.

Nel caso in cui la durata dell'eredità è ∞, cioè la eredità è completa, il sig. KOSTITZIN aveva fatto analoga osservazione (4) (cfr. § 5).

Ma nella citata Memoria del « Journal de Mathématiques » (5) ho enunciato il teorema che stabilisce la determinazione dell'eredità primitiva (nel caso della eredità limitata) nel modo seguente:

Nel caso della eredità diretta di durata limitata, nota la storia primitiva in un intervallo di tempo eguale alla durata dell'eredità e nota la storia ereditaria successiva, potrà determinarsi pure, durante lo stesso tempo, la storia primitiva.

5. Se la eredità diretta ha una durata limitata non viene come conseguenza che quella inversa abbia pure una durata limitata. Può inoltre il coefficiente d'eredità $F(t)$ tendere a zero per t crescente indefinitamente, senza che il nucleo coniugato $G(t)$ tenda analogamente a zero. Così, per esempio, se

$$F = -e^{-t}$$

sarà

$$G = 1.$$

Per rapporto alla decrescenza dei nuclei daremo qui alcuni teoremi.

Supponiamo, nella (A), F negativo ed eguale a $-f$ e poniamo g in luogo di G. In virtù della (2) sarà

$$g = f + \overset{*}{f^2} + \overset{*}{f^3} + \cdots \tag{2'}$$

TEOREMA IV. - *Se*

$$f(t) = e^{-\varphi(0)\,t}\,\varphi(t), \tag{5}$$

(4) *Sur les solutions singulières des équations intégrales du cycle fermé* (« Recueil mathématique de Moscou », *33*, 1926, p. 41). Cfr. anche « Comptes Rendus Acad. des Sci. de Paris », 1927, 1er sémestre, p. 1403.

(5) Chap. I, § II, n. 1.

ove $\varphi(t)$ è una funzione positiva decrescente, $g(t)$ sarà pure una funzione positiva decrescente.

Infatti la (2') può scriversi

$$g(t) = f(t) + \int_0^t f(\tau) g(t-\tau)\, d\tau$$

da cui segue

$$g'(t) = f'(t) + \int_0^t f(\tau) g'(t-\tau)\, d\tau + g(0) f(t) =$$

$$= [f'(t) + g(0) f(t)] + \int_0^t g'(\tau) f(t-\tau)\, d\tau,$$

a cagione della proprietà delle funzioni permutabili appartenenti al ciclo chiuso. Quindi

$$[f'(t) + g(0) f(t)] = g'(t) - \int_0^t g'(\tau) f(t-\tau)\, d\tau,$$

o anche

$$[f'(t) + f(0) f(t)] = g'(t) - \int_0^t g'(\tau) f(t-\tau)\, d\tau,$$

giacché $f(0) = g(0)$.

Risolvendo questa equazione integrale rispetto a $g'(t)$ otterremo

$$g'(t) = [f'(t) + f(0) f(t)] + \int_0^t g(t-\tau)\, [f'(\tau) + f(0) f(\tau)]\, d\tau\,. \tag{6}$$

Dalla (5) segue $f(0) = \varphi(0)$, e

$$\varphi'(t) = \frac{d}{dt}[f(t)\, e^{f(0)\, t}] = e^{f(0)\, t}\, [f'(t) + f(0) f(t)].$$

Siccome $\varphi(t)$ è decrescente e quindi $\varphi'(t) < 0$, sarà

$$f'(t) + f(0) f(t) < 0,$$

onde, per la (6), $g'(t) < 0$; il che dimostra il teorema.

Lemma. *Se*

$$f(t) = e^{mt} f_1(t)$$

e g_1 è il nucleo coniugato di $-f_1$ *sarà*

$$g(t) = e^{mt} g_1(t).$$

Infatti

$$\overset{*}{f}{}^2 = e^{mt} \overset{*}{f}{}_1^2 \quad , \quad \overset{*}{f}{}^3 = e^{mt} \overset{*}{f}{}_1^3 , \ldots$$

Teorema V. - *Se* $|\varphi(t)| < \lambda$,

$$f(t) = e^{-(\lambda+\varepsilon)\, t}\, \varphi(t)$$

λ *ed* ε *essendo due costanti positive, avremo:*

$$\lim_{t=\infty} g(t) = 0.$$

Infatti, per il lemma precedente sarà

$$g(t) = e^{-(\lambda+\varepsilon)t}\,\gamma(t),$$

ove γ è il nucleo coniugato di $-\varphi$. Ora per i principii delle equazioni integrali

$$|\gamma(t)| < \lambda e^{\lambda t},$$

quindi

$$|g(t)| < \lambda e^{-\varepsilon t},$$

il che dimostra il teorema.

Se $f(t)$ è positivo resta implicitamente inteso che anche φ sarà positivo. Ma il teorema precedente è valido indipendentemente dal segno di $f(t)$.

Combinando i due teoremi IV e V si avrà la proposizione:

TEOREMA VI. - *Se*

$$f(t) = e^{-(\varphi(0)+\varepsilon)t}\,\varphi(t) \tag{7}$$

ove φ *è una funzione positiva decrescente ed* ε *è una costante positiva, la funzione coniugata* $g(t)$ *sarà una funzione positiva decrescente che tenderà a zero per* $t = \infty$.

I teoremi precedenti provano la esistenza di *coefficienti di eredità diretta ed inversa che sono due nuclei coniugati ambedue decrescenti in valore assoluto e tendenti a zero.*

6. Se supponiamo

$$f(t) = e^{-(\lambda+\varepsilon)t}\,\varphi(t) \quad , \quad g(t) = e^{-(\lambda+\varepsilon)t}\,\gamma(t) \tag{8}$$

con $|\varphi(t)| < \lambda > 0$, $\varepsilon > 0$ e costante (ved. teor. V), avremo

$$|f(t)| < \lambda e^{-(\lambda+\varepsilon)t} \,,\ |g(t)| < \lambda e^{-\varepsilon t}$$

quindi

$$\int_{-\infty}^{t} |f(t-\tau)|\,d\tau < \frac{\lambda}{\lambda+\varepsilon} < 1 \quad , \quad \int_{-\infty}^{t} |g(t-\tau)|\,d\tau < \frac{\lambda}{\varepsilon}. \tag{9}$$

L'equazione integrale

$$\rho(t) = q(t) - \int_{t_0}^{t} q(\tau) f(t-\tau)\,d\tau, \qquad (t > t_0) \tag{A'}$$

si inverte mediante la formula

$$q(t) = \rho(t) + \int_{t_0}^{t} \rho(\tau) g(t-\tau)\,d\tau, \qquad (t > t_0) \tag{B'}$$

e, in questo caso, se il parametro q è limitato, cioè

$$|q| < M,$$

sarà pure limitato il parametro ρ, e avremo

$$|\rho| < 2M;$$

e se

$$|\rho| < N,$$

dovrà essere

$$|q| < N\left(1 + \frac{\lambda}{\varepsilon}\right).$$

Supponendo ρ e q limitate le due formule inverse (A') e (B') ove f e g sono date dalle (8) valgono anche per $t_0 = -\infty$; vale a dire, se $\rho(t)$ è limitata, l'equazione integrale

$$\text{(A'')} \qquad \rho(t) = q(t) - \int_{-\infty}^{t} q(\tau) f(t-\tau)\, d\tau$$

viene risoluta dalla funzione

$$\text{(B'')} \qquad q(t) = \rho(t) + \int_{-\infty}^{t} \rho(\tau) g(t-\tau)\, d\tau,$$

la quale è limitata. Ciò si prova coll'ordinario procedimento [6].

Dimostriamo ora che, se poniamo la condizione che la soluzione della (A'') debba essere limitata, questa è unica.

Infatti, supponiamo che debba essere

$$|q| < M,$$

e che sia $\rho = 0$.

Dalla (A'') segue

$$q(t) = \int_{-\infty}^{t} q(\tau) f(t-\tau)\, d\tau,$$

quindi, in virtù della (9),

$$|q(t)| < M \int_{-\infty}^{t} |f(t-\tau)|\, d\tau < M \frac{\lambda}{\lambda+\varepsilon},$$

e perciò

$$|q(t)| < M\left(\frac{\lambda}{\lambda+\varepsilon}\right)^n$$

n essendo un intero positivo qualunque. Dunque $|q(t)|$ deve essere inferiore a qualunque numero positivo e, per conseguenza, nel caso di $\rho = 0$, non vi è altra soluzione limitata che $q = 0$.

Le soluzioni della (A'') della forma

$$q(t) = e^{\alpha t},$$

(6) È il procedimento esposto in VOLTERRA, *Leçons sur les équations intégrales*, Paris 1913, Chap. II, § II, *III Principe d'inversion* che si può estendere al caso del limite inferiore ∞ dato l'ordine di infinitesimo dei nuclei per l'argomento ∞.

secondo il segno di α, divengono ∞ per $t = -\infty$ oppure per $t = \infty$ e non sono per conseguenza limitate (cfr. § 3).

II.

7. Nella Memoria precedentemente citata ho studiato la questione energetica nel caso della eredità lineare per un sistema dinamico con un sol grado di libertà ammettendo la durata della eredità limitata. Cerchiamo ora di togliere questa condizione e supporre la eredità posteriore ad un certo istante iniziale.

Evidentemente se la eredità è limitata e consideriamo il fenomeno dopo decorso un periodo di tempo superiore alla durata dell'eredità, sarà lecito trascurare il fatto che l'eredità è posteriore all'istante iniziale. Quindi le formule che troveremo comprenderanno quelle già ottenute.

8. Prendiamo l'istante iniziale come origine dei tempi. Allora l'equazione dinamica da cui partiremo sarà [7]

$$\text{(D)} \qquad q''(t) + bq(t) = \int_0^t f(t-\tau)\, q(\tau)\, d\tau + Q\,,$$

o anche

$$\text{(D')} \qquad q''(t) + bq(t) = \int_0^t f(\tau)\, q(t-\tau)\, d\tau + Q$$

con

$$f(t) > 0 \quad , \quad f'(t) < 0.$$

Inoltre dovremo supporre [8]

$$m(t) = b - \int_0^t f(\tau)\, d\tau > 0$$

comunque sia $t > 0$.

La (D) potrà scriversi

$$q''(t) + m(t)\, q(t) + \int_0^t f(\tau)\, [q(t) - q(t-\tau)]\, d\tau = Q\,,$$

e, moltiplicando ambo i membri per $q'(t)$,

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{2} q'^2 + \frac{1}{2} m(t)\, q^2(t) + \frac{1}{2}\int_0^t f(\tau)\, [q(t) - q(t-\tau)]^2\, d\tau\right\} =$$

(7) Vedi la mia Memoria precedentemente citata, Chap. I, § 1, n. 2.
(8) Cfr. Chap. I, § 1, n. 4 della Memoria sopra citata.

$$= \frac{1}{2} m'(t) q^2(t) + \frac{1}{2} f(t) [q(t) - q(0)]^2 - \int_0^t f(\tau) [q(t) - q(t-\tau)] q'(t-\tau) d\tau +$$

$$+ Qq' = -\frac{1}{2} f(t) q^2(t) + \frac{1}{2} f(t) [q(t) - q(0)]^2 - \frac{1}{2} \int_0^t f(\tau) \frac{d}{d\tau} [q(t) - q(t-\tau)]^2 d\tau + Qq'.$$

Ma, per mezzo di una integrazione per parti, si trova

$$\frac{1}{2} f(t) [q(t) - q(0)]^2 - \frac{1}{2} \int_0^t f(\tau) \frac{d}{d\tau} [q(t) - q(t-\tau)]^2 d\tau =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^t f'(\tau) [q(t) - q(t-\tau)]^2 d\tau.$$

Avremo dunque

$$\text{(E)} \qquad \frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{2} q'^2 + \frac{1}{2} m(t) q^2(t) + \frac{1}{2} \int_0^t f(\tau) [q(t) - q(t-\tau)]^2 d\tau \right\} +$$

$$+ \frac{1}{2} f(t) q^2(t) - \frac{1}{2} \int_0^t f'(\tau) [q(t) - q(t-\tau)]^2 d\tau = Qq'.$$

I termini

$$\frac{1}{2} f(t) q^2(t) \quad , \quad -\frac{1}{2} \int_0^t f'(\tau) [q(t) - q(t-\tau)]^2 d\tau$$

sono sempre positivi, dunque: *il lavoro eseguito dalle forze esterne, durante un intervallo qualunque di tempo, supera sempre la variazione subita nello stesso intervallo di tempo dal funzionale positivo*

$$\frac{1}{2} q'^2 + \frac{1}{2} m(t) q^2(t) + \frac{1}{2} \int_0^t f(\tau) [q(t) - q(t-\tau)]^2 d\tau.$$

9. *Se il moto è spontaneo* (ossia $Q = 0$), *il precedente funzionale va continuamente diminuendo.*

Di qui segue che *il moto spontaneo è limitato e, quando gli spostamenti sono nulli, l'equilibrio è stabile.*

Dalla (D) segue, supposto $Q = 0$,

$$q'(t) - q'(0) + b \int_0^t q(\tau) d\tau - \int_0^t d\tau \int_0^\tau f(\tau - \xi) q(\xi) d\xi = 0,$$

o anche

$$q'(t) - q'(0) + \int_0^t q(\tau) \left[b - \int_0^{t-\tau} f(\xi) d\xi \right] d\tau = 0$$

dunque

$$\frac{q'(t) - q'(0)}{t} + \frac{1}{t} \int_0^t q(\tau) m(t-\tau) d\tau = 0.$$

Ne viene

$$\lim_{t=\infty} \frac{1}{t} \int_0^t q(\tau)\, m(t-\tau)\, d\tau = 0$$

da cui si ricava con facile dimostrazione che $q(t)$ *oscillerà indefinitamente attorno al valore zero, o tenderà in media assintoticamente verso zero.*

10. Nel caso in cui

(10) $$f(t) = 0 \quad \text{per} \quad t \geq T_0$$

preso $t > T_0$ si ricade nelle formole ottenute nel caso della eredità di durata limitata a T_0 (9). La differenza essenziale che passa fra il caso (10) e il caso nel quale $f(t)$ non si annulla per $t \geq T_0$ consiste in questo: che nel primo caso è possibile ritornare dopo un certo tempo allo stato iniziale, anche dal punto di vista ereditario, mentre ciò non è possibile nell'altro caso.

11. È facile ottenere un'altra formula del tipo (E) nel modo seguente: Supposto $b = 1$, poniamo

$$\rho(t) = q(t) - \int_0^t f(t-\tau)\, q(\tau)\, d\tau,$$

da cui segue

$$q(t) = \rho(t) + \int_0^t g(t-\tau)\, \rho(\tau)\, d\tau,$$

onde la (D) si scriverà

$$q''(t) + \rho(t) = Q(t).$$

Moltiplicando ambo i membri per q' avremo

$$q'q'' + q'\rho = Qq'$$

ossia

(11) $$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} q'^2 + q\rho\right) = \rho' q + Qq'.$$

Ora

$$P = -\rho q + \frac{1}{2}\rho^2 + \frac{1}{2}\int_0^t g(t-\tau)\, \rho^2(\tau)\, d\tau =$$

$$= -\frac{1}{2}\rho^2 - \rho(q-\rho) + \frac{1}{2}\int_0^t g(t-\tau)\, \rho^2(\tau)\, d\tau =$$

$$= -\frac{1}{2}\rho^2(t) - \rho(t)\int_0^t g(t-\tau)\, \rho(\tau)\, d\tau + \frac{1}{2}\int_0^t g(t-\tau)\, \rho^2(\tau)\, d\tau,$$

(9) Cfr. la mia Memoria sopra citata, Chap. II.

quindi

$$(12) \qquad \frac{dP}{dt} = -\rho'(t)\left(\rho(t) + \int_0^t g(t-\tau)\,\rho(\tau)\,d\tau\right)$$

$$-\rho(t)\int_0^t g'(t-\tau)\,\rho(\tau)\,d\tau + \frac{1}{2}\int_0^t g'(t-\tau)\,\rho^2(\tau)\,d\tau - \frac{1}{2}g(0)\,\rho^2(t)$$

$$= -\rho'(t)\,q(t) + \frac{1}{2}\int_0^t g'(t-\tau)\,[\rho(t)-\rho(\tau)]^2\,d\tau - \frac{1}{2}g(t)\,\rho^2(t).$$

Sommando membro a membro le equazioni (11) e (12) si trova

$$(\mathrm{F}) \qquad \frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{2}q'^2 + \frac{1}{2}\rho^2(t) + \frac{1}{2}\int_0^t g(t-\tau)\,\rho^2(\tau)\,d\tau\right\} =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^t g'(t-\tau)\,[\rho(t)-\rho(\tau)]^2\,d\tau - \frac{1}{2}g(t)\,\rho^2(t) + Qq'.$$

Se $g' < 0$ e $g > 0$ i termini

$$-\frac{1}{2}\int_0^t g'(t-\tau)\,[\rho(t)-\rho(\tau)]^2\,d\tau \quad , \quad \frac{1}{2}g(t)\,\rho^2(t)$$

sono ambedue positivi, e quindi il lavoro eseguito dalle forze esterne, in un dato intervallo di tempo, supera la variazione subita dal funzionale positivo

$$\frac{1}{2}q'^2(t) + \frac{1}{2}\rho^2(t) + \frac{1}{2}\int_0^t g(t-\tau)\,\rho^2(\tau)\,d\tau,$$

nello stesso intervallo di tempo.

La formula (F), che può anche scriversi

$$(\mathrm{F}') \qquad \frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{2}q'^2 + \frac{1}{2}\rho^2(t) + \frac{1}{2}\int_0^t g(t-\tau)\,\rho^2(\tau)\,d\tau\right\} -$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^t g'(t-\tau)\,[\rho(t)-\rho(\tau)]^2\,d\tau + \frac{1}{2}g(t)\,\rho^2(t) = Qq',$$

è quella che volevamo ottenere. Se la eredità inversa avesse una durata limitata T_0, cioè se fosse $g(t) = 0$ per $t \geqq T_0$, l'ultimo termine del primo membro della (F') si annullerebbe qualora fosse $t > T_0$ e questa formula diverrebbe:

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{2}q'^2(t) + \frac{1}{2}\rho^2(t) + \frac{1}{2}\int_0^{T_0} g(\tau)\,\rho^2(t-\tau)\,d\tau\right\} -$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^{T_0} g'(\tau)\,[\rho(t)-\rho(t-\tau)]^2\,d\tau = Qq'.$$

VIII.

ERIK IVAR FREDHOLM

«Procès-verbaux des séances du Comité international des Poids et Mesures», ser. 2ª, vol. XIII, 1929; pp. 277-280.

ERIK IVAR FREDHOLM naquit le 7 avril 1867 à Stockholm. Il appartenait au Comité international des Poids et Mesures depuis l'année 1923. Sa santé ne lui avait permis de prendre part qu'à deux de nos réunions: celles de 1923 et de 1925. Pendant l'hiver de 1927 il avait été toujours souffrant et il avait suspendu ses cours à l'Université; mais lorsque je le revis à Stockholm en mai de la même année, j'appris par lui qu'il espérait être remis dans l'été qui s'approchait, et il pensait avec joie que nous nous rencontrerions quelques mois après à Paris, aux séances du Comité. Malheureusement c'était la dernière fois que je devais le voir, car il mourait trois mois après à Mörby, enlevé par le mal impitoyable qui menaçait son existence depuis quelques années.

I.

Le souvenir de FREDHOLM et de son oeuvre ne se perdra pas. Mais ceux qui l'ont connu personnellement, comme moi, qui ai eu l'occasion de le rencontrer depuis sa jeunesse dans les congrès européens et dans les milieux intellectuels de Stockholm, qui me suis entretenu souvent familièrement avec lui de questions scientifiques, et qui l'ai vu dans sa famille auprès d'une aimable et tendre épouse, ne pourront jamais oublier son aspect sérieux et calme, sa conversation posée et pleine d'intérêt et son âme affectueuse.

FREDHOLM a suivi de près dans le tombeau son maître et ami MITTAG-LEFFLER, décédé en juin 1927, à l'âge de 81 ans. L'un et l'autre appartenaient à l'école mathématique suédoise, qui a constitué un des centres les plus importants de culture scientifique européenne au cours du XIXᵉ siècle et dans le commencement du présent siècle, et qui poursuit aujourd' hui encore ses nobles traditions. La Suède avait eu parmi ses savants de grands naturalistes et de grands chimistes, mais ce n'est que dans la seconde moitié du dernier siècle qu'on voit apparaître dans ce pays des mathématiciens d'une valeur exceptionnelle. Il faut attribuer à MITTAG-LEFFLER le mérite principal d'avoir suscité ce mouvement intellectuel. Ses efforts furent aidés par le haut patronage du Roi OSCAR Iᵉʳ, qui a toujours été un protecteur des sciences et particulièrement des mathématiques.

Le moment où cette école mathématique prit naissance coïncide avec la période la plus brillante du développement de la théorie des fonctions. C'est à peu près au même moment que le célèbre journal « Acta mathematica » commença à paraître.

L'influence des grands géomètres vivant à cette époque, en particulier de WEIERSTRASS, d'HERMITE, de BETTI, se fait sentir dès le commencement, et c'est seulement après que l'on perçoit celle de POINCARÉ, de PICARD, de DARBOUX, de CANTOR, de DINI et d'autres mathématiciens, parmi lesquels il faut rappeler SOPHIE KOWALEWSKI, laquelle enseigna pendant un certain nombre d'années à l'Université de Stockholm.

II.

Fredholm obtint en 1898, à Upsala, le grade de Docteur, et fut attaché tout de suite comme docent à l'Université de Stockholm, où il devint professeur de mécanique rationnelle et de physique mathématique à partir de 1906.

Les premières recherches de FREDHOLM se rapportent à la théorie des équations aux dérivées partielles, en vue spécialement des applications à la physique mathématique. En effet, dans les années 1899 et 1900 il publia quatre travaux: *sur une classe d'équations aux dérivées partielles; sur une équation aux dérivées partielles du quatrième ordre*, et deux Mémoires *sur la théorie mathématique de l'élasticité.*

C'est à la même époque que FREDHOLM commença à s'occuper des équations intégrales. Le premier de ses écrits sur ce sujet porte le titre très modeste: *Sur une nouvelle méthode pour la solution du problème de* DIRICHLET, et fut inséré dans les Archives de l'Académie de Stockholm.

On doit à ABEL le mérite d'avoir appelé pour la première fois l'attention des géomètres sur la classe de problèmes qui sont connus aujourd'hui sous le nom d'équations intégrales. C'est à l'occasion de l'étude des lignes tautochrones que le grand mathématicien norvégien posa la question de résoudre une équation intégrale très particulière, qui est aussi une équation à noyau singulier. Mais il montra son génie par l'extension qu'il donna à la question, ce qui conduit à supposer qu'il eut l'intuition du rôle que les équations intégrales devaient jouer dans l'analyse.

Après ABEL s'est écoulée une longue période durant laquelle LIOUVILLE et bien d'autres ont appliqué la solution de la même équation intégrale à un grand nombre de problèmes d'analyse, de mécanique et de physique mathématique, ainsi qu'à l'extension du concept de dérivation; mais aucun progrès n'a été réalisé pour la résolution des équations intégrales au delà de ce qu'ABEL avait obtenu.

Il faut arriver à une époque plus récente, à SONINE et à ROUX, pour trouver un vrai progrès dans ce domaine de l'analyse.

Pour ma part j'ai appliqué mes études sur les fonctionnelles et mes méthodes du passage du fini à l'infini à la résolution des équations intégrales, en les regardant comme un cas limite d'équations algébriques, et en employant pour leur solution les déterminants infinis.

Le problème des équations intégrales qui forme le sujet des Mémoires publiés plus tard par FREDHOLM est celui des équation linéaires à limites constantes lorsqu'il y a un terme, externe à l'intégrale, contenant la fonction inconnue. Ce sont ces équations qu'on appelle *Équations de* FREDHOLM.

FREDHOLM emploie la méthode indiquée précédemment, qui consiste à considérer les équations intégrales comme le cas limite d'un système d'équations algébriques, et à se servir du passage du fini à l'infini, qui a dévoilé le secret de leur résolution.

Le nombre des applications que l'équation de FREDHOLM a eues dans tous les domaines de l'analyse et de la physique mathématique est immense. Elles se suivent sans interruption, et leur importance ne fait qu'augmenter de jour en jour. La renommée qu'elles ont donné à FREDHOLM est très grande, et elles le placent parmi les géomètres qui ont le plus contribué dans ces derniers temps aux progrès des mathématiques.

III.

Un grand nombre d'Académies le nommèrent leur associé ou leur correspondant; je rappellerai l'Académie de Stockholm, l'Académie des Sciences de Paris, l'Académie des Lincei, celles d'Upsala, de Göttingue, de Kristiania, de Finlande. Il a été nommé Docteur honoraire de l'Université de Leipzig, et l'Académie de Budapest lui décerna pour ses travaux une de ses plus grandes récompenses, le prix BOLYAY.

Comme il arrive souvent à ceux qui ont fait une grande découverte ou qui ont publié un ouvrage célèbre à cause de ses applications, le nom de FREDHOLM reste attaché au problème des équations intégrales; mais même en dehors de ses Mémoires sur ce sujet, l'ensemble des autres travaux qu'on lui doit serait suffisant pour lui assurer une place parmi les plus savants géomètres des derniers temps.

IX.

SULLA MECCANICA EREDITARIA

« Rend. Acc. Lincei », ser. 6ª, vol. XI, 1930₁; pp. 619-625.

1. In una recente Memoria [1] ho studiato la energetica nel caso della meccanica ereditaria, limitandomi al caso delle azioni ereditarie lineari. Nella presente Nota considero il caso di azioni non lineari, ma per semplicità tratto la questione per un sistema avente un solo grado di libertà, rimandando il caso generale ad un prossimo lavoro più esteso [2].

2. Sia q il parametro lagrangiano del sistema, ossia la configurazione del sistema sia nota allorché si conosce nell'istante attuale t il valore $q(t)$; ma supporremo che *dal punto di vista ereditario* lo stato del sistema resti definito solo quando si conosce $q(t-\tau)$ per tutti i valori di τ compresi fra o e T_0. Si chiamerà T_0 la *durata dell'eredità.*

Lo *stato naturale* del sistema corrisponda a $q = 0$ durante un intervallo di tempo eguale a T_0.

Portiamo ora il sistema dallo stato naturale nello stato individuato da

$$q(t-\tau) \quad \text{per} \quad 0 < \tau < T_0 .$$

Ammettiamo che il lavoro necessario a questo scopo, detratto tutto quello che si è trasformato in calore o in altre forme di energia, sia dato da

$$P = F(q(t)) + \Phi \left| [q(t) - q(t-\overset{T_0}{\underset{0}{\tau}})] \right| ,$$

ove il primo termine è una funzione di funzione ordinaria di $q(t)$ ed il secondo è un funzionale della differenza $q(t) - q(t-\tau)$.

Formiamo il differenziale di P, ammettendo che quello di Φ sia regolare. Sarà

$$(1) \qquad \delta P = \frac{dF}{dq}\delta q(t) + \int_0^{T_0} \Phi' \left| [q(t) - q(t-\overset{T_0}{\underset{0}{\tau}}), \xi] \right| (\delta q(t) - \delta q(t-\xi))\, d\xi =$$

(1) *Sur la théorie mathématique des phénomènes héréditaires,* « Journ. de Math. », 1928 [in questo vol.: IV, pp. 130-169].

(2) Nella mia conferenza: *La teoria dei funzionali applicata ai fenomeni ereditari,* tenuta nel 1928 al Congresso dei Matematici di Bologna, ho dato un breve cenno del contenuto della presente Nota.

$$
= \left(\frac{dF}{dq} + \int_0^{T_0} \Phi' \left| \left[q(t) - q(t - \overset{T_0}{\underset{0}{\tau}}), \xi \right] \right| d\xi \right) \delta q(t) -
$$

$$
- \int_0^{T_0} \Phi' \left| \left[q(t) - q(t - \overset{T_0}{\underset{0}{\tau}}), \xi \right] \right| \delta q(t - \xi)\, d\xi .
$$

Potremo assumere

$$
M = -\frac{dF}{dt} - \int_0^{T_0} \Phi' \left| \left[q(t) - q(t - \overset{T_0}{\underset{0}{\tau}}), \xi \right] \right| d\xi \tag{2}
$$

come la *forza interna* che agisce sul sistema nell'istante t; il secondo termine di questa espressione sarà la *forza ereditaria*.

L'equazione del moto risulterà

$$
\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial q'} - \frac{\partial T}{\partial q} + \frac{dF}{dq} + \int_0^{T_0} \Phi' \left| \left[q(t) - q(t - \overset{T_0}{\underset{0}{\tau}}), \xi \right] \right| d\xi = Q \tag{I}
$$

essendo T la forza viva del sistema e Q la forza esterna.

Alle espressioni precedentemente considerate potremo dare un significato; così potremo considerare

$$
\Phi' \left| \left[q(t) - q(t - \overset{T_0}{\underset{0}{\tau}}), \xi \right] \right| d\xi
$$

come il contributo della forza ereditaria al tempo t che proviene dall'intervallo di tempo $(t - \xi, t - \xi - d\xi)$ e potremo considerare

$$
\int_0^{T_0} \Phi' \left| \left[q(t) - q(t - \overset{T_0}{\underset{0}{\tau}}), \xi \right] \right| \delta \left(q(t) - q(t - \xi) \right) d\xi
$$

come la variazione dell'energia potenziale dovuta alla variazione $\delta(q(t) - q(t - \tau))$ eseguita in ogni istante $t - \xi$ nell'intervallo $(t - T_0, t)$.

3. Poniamo

$$
q(t) - q(t - \tau) = f(\tau)
$$

$$
\Phi' \left| \left[q(t) - q(t - \overset{T_0}{\underset{0}{\tau}}), \xi \right] \right| = \Psi \left| \left[f(\overset{T_0}{\underset{0}{\tau}}), \xi \right] \right| .
$$

Consideriamo poi il funzionale $X \left| \left[f(\overset{T_0}{\underset{0}{\tau}}), \xi \right] \right|$ che *dipenda in modo speciale da* $f(\xi)$ (3) e soddisfi alla condizione

$$
\delta X \left| \left[f(\overset{T_0}{\underset{0}{\tau}}), \xi \right] \right| = \Psi \left| \left[f(\overset{T_0}{\underset{0}{\tau}}), \xi \right] \right| \delta f(\xi) + \int_0^{T_0} X' \left| \left[f(\tau), \xi, \eta \right] \right| \delta f(\eta)\, d\eta, \tag{3}
$$

mentre sia $X = 0$ per $f(\xi) = 0$.

(3) Ved. VOLTERRA, *Leçons sur les fonctions de lignes*, Chap. II, § 5, Paris, Gauthier-Villars, 1913.

Supponendo noto Ψ, la ricerca di X corrisponde alla costruzione d'un funzionale di cui si conosce la *parte non regolare del differenziale*, onde questa ricerca si può paragonare ad una integrazione parziale.

Ammettiamo di variare $f(\tau)$ soltanto nelle vicinanze di $\tau = \xi$. Avremo in questa ipotesi

$$\delta X \mid [f(\overset{T_0}{\underset{0}{\tau}}), \xi] \mid = \Psi \mid [f(\overset{T_0}{\underset{0}{\tau}}), \xi] \mid \delta f(\xi),$$

onde potremo scrivere

$$\int_0^{T_0} \Psi \mid [f(\overset{T_0}{\underset{0}{\tau}}), \xi] \mid \delta f(\xi)\, d\xi = \int_0^{T_0} \delta X \mid [f(\tau), \xi] \mid d\xi .$$

Nel funzionale X noi possiamo supporre di cambiare ξ e di calcolare $dX/d\xi$. Con tale cambiamento cambia evidentemente $f(\xi)$; noi possiamo supporre di cambiare ξ e di mantenere inalterato $f(\xi)$; la corrispondente derivata si indicherà con $\partial X/\partial \xi$ ed avremo, come relazione fra le due derivate,

$$\frac{dX}{d\xi} = \frac{\partial X}{\partial \xi} + \Psi \mid [f(\tau), \xi] \mid \frac{df(\xi)}{d\xi} \tag{4}$$

ossia

$$\int_0^{T_0} \frac{dX}{d\xi}\, d\xi = \int_0^{T_0} \frac{\partial X}{\partial \xi}\, d\xi + \int_0^{T_0} \Psi \mid [f(\tau), \xi] \mid \frac{df(\xi)}{d\xi}\, d\xi . \tag{5}$$

Il primo membro di questa equazione potrà scriversi

$$X_{\xi = T_0} - X_{\xi = 0} = X_{\xi = T_0} .$$

Infatti, per $\xi = 0$, noi abbiamo che

$$f(\xi) = q(t) - q(t - \xi)$$

si riduce a

$$q(t) - q(t) = 0 ,$$

e quindi, per quello che abbiamo supposto precedentemente,

$$X_{\xi = 0} = 0.$$

Dunque, se noi supponiamo $X_{\xi = T_0} = 0$, il primo membro della (5) sarà nullo, onde avremo

$$\int_0^{T_0} \frac{\partial X}{\partial \xi}\, d\xi = -\int_0^{T_0} \Psi \mid [f(\tau), \xi] \mid \frac{df(\xi)}{d\xi}\, d\xi$$

ovvero

$$\int_0^{T_0} \frac{\partial X}{\partial \xi}\, d\xi = -\int_0^{T_0} \Phi' \mid [q(t) - q(t - \tau), \xi] \mid \frac{\partial\, (q(t) - q(t - \xi))}{\partial \xi}\, d\xi . \tag{6}$$

4. Ciò premesso, riprendiamo l'equazione (I) e moltiplichiamo ambo i membri per $q'(t)$; si avrà

$$\frac{d}{dt}(\mathrm{T}+\mathrm{F}) = -\frac{dq(t)}{dt}\int_0^{\mathrm{T}_0}\Phi' \mid [q(t)-q(t-\tau), \xi] \mid d\xi + \mathrm{Q}q'(t) =$$

$$= -\int_0^{\mathrm{T}_0}\Phi' \mid [q(t)-q(t-\tau), \xi] \mid \frac{\partial(q(t)-q(t-\xi))}{\partial t} d\xi -$$

$$-\int_0^{\mathrm{T}_0}\Phi' \mid [q(t)-q(t-\tau), \xi] \mid \frac{\partial q(t-\xi)}{\partial t} d\xi + \mathrm{Q}q'(t) =$$

$$= -\frac{d\Phi}{dt} - \int_0^{\mathrm{T}_0}\Phi' \mid [q(t)-q(t-\tau), \xi] \mid \frac{\partial(q(t)-q(t-\xi))}{\partial \xi} d\xi + \mathrm{Q}q'(t)$$

e per la (6)

$$\frac{d}{dt}(\mathrm{T}+\mathrm{F}) = -\frac{d\Phi}{dt} + \int_0^{\mathrm{T}_0}\frac{\partial \mathrm{X}}{\partial \xi} d\xi + \mathrm{Q}q'(t),$$

donde

$$\frac{d}{dt}(\mathrm{T}+\mathrm{F}+\Phi) - \int_0^{\mathrm{T}_0}\frac{\partial \mathrm{X}}{\partial \xi} d\xi = \mathrm{Q}q'(t),$$

cioè

$$d(\mathrm{T}+\mathrm{F}+\Phi) - dt\int_0^{\mathrm{T}_0}\frac{\partial \mathrm{X}}{\partial \xi} d\xi = \mathrm{Q}\,dq. \tag{II}$$

Se ora noi supponiamo che X sia una funzione decrescente di ξ, sarà $(\partial \mathrm{X}/\partial \xi) < 0$ e quindi l'equazione precedente ci dirà che il lavoro della forza esterna si trasforma in parte in energia cinetica e potenziale, mentre una parte viene dissipata (cfr. Memoria citata, cap. II, § 1).

Il lavoro meccanico dissipato, ossia l'*energia di dissipazione*, sarà: $-\int_0^{\mathrm{T}_0}\frac{\partial \mathrm{X}}{\partial \xi} d\xi$; perciò il solo *postulato energetico* da ammettere sarà che esista la funzione X, la quale verifichi la equazione (3), si annulli per $f(\xi) = 0$ e sia una funzione decrescente di ξ che diviene eguale a zero per $\xi = \mathrm{T}_0$.

5. Per fare un confronto col caso della eredità lineare svolto nella citata Memoria basta osservare che nel detto caso sarà

$$\mathrm{F}(q) = \frac{1}{2} m q^2 \quad , \quad \text{con } m \text{ costante}$$

$$\Phi = \frac{1}{2}\int_0^{\mathrm{T}_0} \mathrm{F}(\tau)(q(t)-q(t-\tau))^2 d\tau \ , \ \text{con} \begin{cases} \mathrm{F}(\tau) > 0, & \text{per } 0 \leq \tau < \mathrm{T}_0 \\ \mathrm{F}(\mathrm{T}_0) = 0 \end{cases}$$

$$\delta\Phi = \int_0^{T_0} F(\xi)(q(t) - q(t-\xi))(\delta q(t) - \delta q(t-\xi))\, d\xi$$

$$M = -mq(t) - \int_0^{T_0} F(\xi)(q(t) - q(t-\xi))\, d\xi$$

$$\Phi' = \Psi = F(\xi)(q(t) - q(t-\xi)) = F(\xi) f(\xi)$$

$$X = \frac{1}{2} F(\xi) f^2(\xi) = \frac{1}{2} F(\xi)(q(t) - q(t-\xi))^2$$

$$\frac{\partial X}{\partial \xi} = \frac{dX}{d\xi} - \Psi f'(\xi) = \frac{1}{2} F'(\xi) f^2(\xi) < 0 \quad , \quad F'(\xi) < 0 .$$

6. Un caso interessante (di cui quello lineare è un caso particolare) si ha nell'ipotesi che l'energia ereditaria Φ non dipenda che dai valori assoluti di $q(t) - q(t-\tau)$ e possà esprimersi mediante la serie convergente

$$\text{(A)} \qquad \Phi = \frac{1}{2}\int_0^{T_0} a_1(\tau_1)(q(t) - q(t-\tau_1))^2 d\tau_1 +$$

$$+ \frac{1}{2 \cdot 2}\int_0^{T_0}\int_0^{T_0} a_2(\tau_1, \tau_2)(q(t) - q(t-\tau_1))^2 (q(t) - q(t-\tau_2))^2 d\tau_1 d\tau_2 + \cdots$$

$$\cdots + \frac{1}{2\, n!}\int_0^{T_0} \cdots \int_0^{T_0} a_n(\tau_1, \tau_2, \cdots, \tau_n)(q(t) - q(t-\tau_1))^2 \cdots (q(t) -$$

$$- q(t-\tau_n))^2 d\tau_1, \cdots, d\tau_n + \cdots$$

Le funzioni $a_n(\tau_1, \tau_2, \cdots, \tau_n)$ si suppongono funzioni simmetriche delle variabili $\tau_1, \tau_2, \cdots, \tau_n$.

Si avrà

$$\Phi' \,|\, [q(t) - q(t-\tau) \,;\, \xi] \,| =$$

$$= (q(t) - q(t-\xi)) \Big\{ a_1(\xi) + \int_0^{T_0} a_2(\tau_1, \xi)(q(t) - q(t-\tau_1))^2 d\tau_1 + \cdots$$

$$\cdots + \frac{1}{(n-1)!}\int_0^{T_0} \cdots \int_0^{T_0} a_n(\tau_1, \tau_2, \cdots, \tau_{n-1}, \xi)(q(t) -$$

$$- q(t-\tau_1))^2 \cdots (q(t) - q(t-\tau_{n-1}))^2 d\tau, \cdots, d\tau_{n-1} + \cdots \Big\} .$$

Calcoliamo adesso il funzionale X. Avremo

$$X = \frac{1}{2}(q(t) - q(t-\xi))^2 \Big\{ a_1(\xi) + \int_0^{T_0} a_2(\tau_1, \xi)(q(t) - q(t-\tau_1))^2 d\tau_1 + \cdots$$

$$\cdots + \frac{1}{(n-1)!}\int_0^{T_0} \cdots \int_0^{T_0} a_n(\tau_1, \tau_2, \cdots, \tau_{n-1}, \xi)(q(t) -$$

$$- q(t-\tau_1))^2 \cdots (q(t) - q(t-\tau_{n-1}))^2 d\tau_1, \cdots, d\tau_{n-1} + \cdots \Big\} .$$

Evidentemente risulterà

$$X_{\xi=0} = 0$$

e se noi supponiamo che i coefficienti $a_n(\tau_1, \tau_2, \cdots, \tau_n)$ si annullino quando una almeno delle variabili sia eguale a T_0, avremo

$$X_{\xi=0} = 0.$$

Ponendo $a'_n(\tau_1, \tau_2, \cdots, \tau_{n-1}, \xi) = \dfrac{\partial a_n(\tau_1, \tau_2, \cdots, \tau_{n-1}, \xi)}{\partial \xi}$, e supponendo costante $f(\xi) = q(t) - q(t-\xi)$ (ved. form. (4)), otterremo

$$\frac{\partial X}{\partial \xi} = \frac{1}{2}(q(t) - q(t-\xi))^2 \Big\{ a_1(\xi) + \int_0^{T_0} a'_2(\tau_1, \xi)(q(t) - q(t-\tau_1))^2 d\tau_1 + \cdots$$

$$\cdots + \frac{1}{(n-1)!}\int_0^{T_0} \cdots \int_0^{T_0} a'_n(\tau_1, \tau_2, \cdots, \tau_{n-1}, \xi)(q(t) -$$

$$- q(t-\tau_1))^2 \cdots (q(t) - q(t-\tau_{n-1}))^2 d\tau_1, \cdots, d\tau_{n-1} + \cdots \Big\}$$

e questa quantità sarà negativa, se tutte le a'_n saranno negative.

L'energia di dissipazione sarà dunque

$$\text{(B)} \qquad \int_0^{T_0} \frac{\partial X}{\partial \xi} d\xi = \frac{1}{2}\int_0^{T_0} b_1(\tau_1)(q(t) - q(t-\tau))^2 d\tau_1 +$$

$$+ \frac{1}{2 \cdot 2}\int_0^{T_0}\int_0^{T_0} b_2(\tau_1, \tau_2)(q(t) - q(t-\tau_1))^2 (q(t) - q(t-\tau_2))^2 d\tau_1 d\tau_2 + \cdots$$

$$\cdots + \frac{1}{2\, n!}\int_0^{T_0} \cdots \int_0^{T_0} b_n(\tau_1, \tau_2, \cdots, \tau_n)(q(t) - q(t-\tau_1))^2 \cdots (q(t) -$$

$$- q(t-\tau_n))^2 d\tau_1, \cdots, d\tau_n + \cdots$$

avendo posto

$$\text{(7)} \qquad b_n(\tau_1, \tau_2, \cdots, \tau_n) = \sum_1^n{}_i \frac{\partial a_n(\tau_1, \tau_2, \cdots, \tau_n)}{\partial \tau_i}.$$

Tutte le condizioni volute dal postulato energetico enunciato alla fine del § 4 saranno quindi soddisfatte.

X.

I FISICI ITALIANI E LE RICERCHE DI FARADAY (*)

« L'Elettrotecnica », vol. XVIII, 1931; pp. 806–808.

Le scoperte fatte dal FARADAY sono state così numerose ed importanti, che hanno dato un nuovo e grandissimo sviluppo alla fisica, ed ispirato le più svariate ed ammirevoli applicazioni pratiche. I concetti che lo hanno guidato nelle sue celebri esperienze modificarono profondamente il modo di concepire i fenomeni naturali, tanto che una nuova epoca nella storia della filosofia naturale comincia con lui.

Non vi è stato cultore della Fisica negli ultimi anni i cui lavori non si ricolleghino più o meno direttamente ai suoi. Perciò, se si volessero citare tutti quelli che possono dirsi continuatori dell'opera sua e che si sono valsi dei suoi risultati, bisognerebbe fare il nome di tutti i fisici dei tempi recenti. Questo in Italia come negli altri paesi. Ora, non è il caso che io faccia qui la storia della Fisica in Italia nell'ultimo secolo, ma che io dia notizia delle ricerche che s'ispirarono più direttamente a quelle di FARADAY, specialmente nel periodo della loro prima diffusione, ed ebbero maggiore successo e più importanti applicazioni.

Mi rifarò pertanto all'agosto 1831, quando i tentativi del FARADAY di ottenere delle correnti mediante l'azione delle calamite ebbero finalmente esito fortunato. Il risultato non fu comunicato alla Società Reale di Londra che nel Novembre dello stesso anno, ma la Memoria venne pubblicata in ritardo e la traduzione francese apparve solo nel maggio del 1832 negli « Annales de Chimie et de Physique ». Il Faraday, per riparare al ritardo, scrisse su questo argomento una lettera molto concisa all'HACHETTE di Parigi, che la fece conoscere all'Accademia delle Scienze nel Dicembre del 1831.

Il NOBILI, fisico di notevole valore, appartenente al Museo di Firenze, già noto, fra l'altro, per il suo galvanometro astatico, i suoi anelli ed i suoi studi di termo-elettricità, ebbe notizia della scoperta dall'AMICI, che l'aveva letta nel « Temps ». Compresa subito la grande importanza di essa si mise a ripetere le esperienze del FARADAY associandosi in quest'opera un altro fisico fiorentino: l'ANTINORI. La loro prima Memoria è del gennaio 1832 e porta esplicitamente questa data, ma fu pubblicata nel fascicolo del novem-

(*) Questo articolo fu pubblicato in inglese nel supplemento a « Nature » del 29 agosto 1931, dedicato a MICHELE FARADAY.

bre 1831 dell'« Antologia », il quale uscì con grande ritardo [1]. Le successive apparvero nei fascicoli seguenti dello stesso giornale.

I due fisici fiorentini ottennero correnti indotte, sia accostando un circuito chiuso al polo di una calamita, sia aprendo un circuito costituito da una calamita a forma di ferro di cavallo e dall'ancora della calamita stessa, sia capovolgendo un circuito ad elica disposto parallelamente ad un ago magnetico di inclinazione, sia introducendo un nucleo di ferro dolce in una elica formante un circuito chiuso.

Queste esperienze non avrebbero suscitata una polemica (una delle poche del FARADAY) senza le considerazioni che le accompagnavano riferentisi specialmente al magnetismo di rotazione di ARAGO ed alla scintilla di induzione. La tardiva conoscenza del testo esatto della Memoria del FARADAY, e la inesatta interpretazione della lettera all'HACHETTE, influirono nel creare quei malintesi i quali originarono, come osserva il NACCARI, la suddetta polemica [2].

Gli studi sull'induzione seguitarono in Italia per opera specialmente del MATTEUCCI, che si occupò della distribuzione delle correnti nel disco girante di ARAGO, del magnetismo di rotazione e pubblicò nel 1854 il suo *Cours spécial sur l'induction, le magnétisme de rotation, etc.*, il quale dava notizia estesa di quanto si conosceva in quell'epoca sui fenomeni di induzione elettromagnetica [3].

Ma di un lavoro di molto maggiore importanza filosofica e sperimentale desidero rinnovare il ricordo. Nel 1852 il FELICI, allora assistente del MATTEUCCI, poi suo successore nella Cattedra di Fisica nell'Università di Pisa, cominciò la pubblicazione di tre Memorie dal titolo: *Sulla teoria matematica dell'induzione elettro-dinamica* [4].

F. NEUMANN aveva dato già fino dal 1845–47 in due lavori la sua celebre formula e nel 1846 era apparsa quella del WEBER. Il FELICI abbandonò i cammini tenuti da questi scienziati e si propose di ottenere le formule che esprimono le leggi dell'induzione magnetoelettrica, percorrendo passo passo la via puramente sperimentale con la quale un quarto di secolo innanzi AMPÈRE era giunto a stabilire la formula delle forze ponderomotrici che esercitano fra di loro due elementi di corrente. Al pari di AMPÈRE, il FELICI nella sua prima Memoria si basa unicamente sopra esperienze di equilibrio. Con un ingegnoso procedimento, egli esalta l'azione induttiva, ripetendo le aperture e chiusure della corrente, e somma nel galvanometro le intensità delle ripetute correnti indotte aventi medesimo senso. Giunge così ad una formula che dà la forza elettromotrice corrispondente all'azione di elementi di corrente, formula la quale contiene un termine eliminantesi allorché si integra la forza elettromotrice lungo circuiti chiusi. In tal modo la formula del FELICI, oltre dirci qualche cosa di più, conferma per via sperimentale quella del NEUMANN ottenuta estendendo la legge di LENZ.

Nelle successive Memorie il FELICI studia le correnti indotte, non solo in circuiti filiformi, ma anche in conduttori a più di una dimensione, ricollegandosi alle ricerche sperimentali del MATTEUCCI esposte nel suo *Cours spécial* sopracitato.

Nel periodo in cui in Pisa fiorivano il MATTEUCCI e il FELICI, v'insegnava OTTAVIANO FABRIZIO MOSSOTTI che fu una delle più eminenti personalità italiane del secolo scorso. Nato a Novara nel 1791, si laureò a Pavia ed ivi studiò col BRUNACCI ed udì anche il VOLTA. Abbandonata l'Italia in seguito a persecuzioni politiche, andò in Francia ed in Inghilterra, ove fu accolto con molta stima ed ebbe numerosi amici. Chiamato dapprima in Argentina, passò poi come professore a Corfù, nell'epoca della protezione inglese, e finalmente a Pisa in Toscana, dove fondò una scuola astronomica e fisico-matematica che ha avuto una grande importanza nella recente storia delle scienze in Italia.

Fra le molte e belle ricerche del MOSSOTTI, quella che oggi appare come la più importante e che maggiormente ne consacra la fama, è la teoria dei dielettrici. Il FARADAY dedicò l'undecima e la dodicesima serie delle sue « Experimental Researches on Electricity » allo studio dell'azione di dielettrici nei fenomeni di induzione elettrostatica. Tali azioni avevano già da più anni richiamata l'attenzione dell'AVOGADRO [5], ma le celebri e decisive esperienze del FARADAY ne fissarono la natura e condussero alla teoria della polarizzazione dei dielettrici.

Merito del MOSSOTTI fu di aver collegata la teoria della induzione elettrica nei dielettrici alla teoria della induzione magnetica. Ora, il POISSON aveva data la teoria matematica dell'induzione magnetica. Non vi era dunque che leggere nel linguaggio di *elettricità* ciò che il POISSON aveva ottenuto in termini di *magnetismo*, per avere una teoria matematica dei dielettrici basata sui concetti del FARADAY. Infatti una parte della Memoria del MOSSOTTI del 1846 [6] non è, a detta dello stesso suo autore, che una riproduzione di quella del POISSON. Le notevoli ed eleganti conseguenze che il MOSSOTTI ne ha tratte e le interessanti applicazioni di altri, per esempio quella del CLAUSIUS sulle scariche di ritorno, rendono di particolare pregio l'opera del MOSSOTTI.

La quale si riallaccia ai concetti del MOSSOTTI stesso sulla costituzione della materia, argomento intorno al quale questo autore è ritornato più volte, sia in una Memoria dedicata al PLANA [7], sia nella prolusione alle lezioni di Corfù [8], sia in altre occasioni. Il FARADAY nella serie diciannovesima delle sue *Experimental Researches* si compiace di queste idee del MOSSOTTI che rispondono in certo modo alle proprie. Esse meriterebbero oggi di essere rilette, meditate e poste a raffronto con le più moderne teorie, giacché, se l'essere state escogitate prima che si sviluppasse la termodinamica le rendono lontane dalla concezione odierna di molti fenomeni, pure possono in germe contenere pensieri fecondi.

Gli studi sui dielettrici, così sapientemente approfonditi mediante l'analisi matematica dal MOSSOTTI, non si arrestarono in Italia, ma continuarono con lavori fra cui ricorderò quelli del BELLI, del MATTEUCCI, del FELICI sulle costanti dielettriche, e del FELICI stesso sulla viscosità dei dielettrici. Tali ricerche si sono prolungate sino ai nostri giorni con scritti di fisici e di elettrotecnici aventi vedute sia teoriche che pratiche.

L'analisi del MOSSOTTI è un esempio dell'attitudine che hanno le idee del FARADAY ad essere svolte sotto forma matematica. Non è il solo esempio né il più celebre, ed infatti tutti sanno che il MAXWELL riuscì a tradurre i concetti del FARADAY nelle equazioni del campo elettromagnetico, e scoprì in essi il germe della teoria elettromagnetica della luce.

Il FARADAY non conosceva la tecnica dei geometri, ma sapeva esprimere esattamente con parole ciò che dicono le formule. Lo stesso può ripetersi per VOLTA. Se, alla maniera di PLUTARCO, fra questi due eroi della scienza si volesse fare un parallelo, dovrebbe mettersi in evidenza la somiglianza, sotto questo riguardo, della mente del Fisico inglese e di quella del Fisico italiano, del resto così simili anche sotto altri aspetti. Le loro menti erano ambedue matematiche nel più profondo ed intimo senso, giacché i simboli e gli artifici analitici non sono la sostanza, ma solo l'apparenza esteriore della matematica.

Il problema del motore elettrico e quello inverso di produrre le correnti elettriche, generate dapprima con la pila del VOLTA, valendosi invece del principio dell'induzione di FARADAY, con un metodo suscettibile di essere applicato praticamente su larga scala, erano certamente d'attualità, allorché una soluzione ingegnosissima venne data nel 1860 da ANTONIO PACINOTTI, il quale costruì il suo celebre anello nel laboratorio di Fisica Tecnologica dell'Università di Pisa. Solo nel 1864 lo scopritore distese, per iscritto, la descrizione dell'apparecchio, da lui chiamato modestamente «una macchinetta elettromagnetica» e la pubblicò nel 1865 nel «Nuovo Cimento» [9].

Ritengo inutile ricordare qui tale descrizione, perché viene riportata in ogni elementare trattato di Fisica e di Elettrotecnica. La brillante soluzione del problema si rivelò atta alle più larghe ed importanti applicazioni industriali, intuite subito dallo stesso inventore, e divenne una delle macchine più utili e più usate nel mondo. Non è il caso di ripetere la storia ben nota del suo rapido diffondersi e le polemiche, ormai chiuse, cui diede luogo.

Come abbiamo detto sopra, le ricerche che si collegano alle teorie di MAXWELL non possono essere disgiunte dal ricordo di FARADAY, tanto le teorie stesse sono derivate dalle esperienze e dai concetti di questi.

La pressione della luce, che il MAXWELL ottenne come una conseguenza della teoria elettromagnetica, fu dimostrata con un nuovo ed originale procedimento dal BARTOLI in una Memoria, pubblicata nel 1876, consacrata in modo particolare allo studio del radiometro [10].

Il BARTOLI immagina quattro involucri sferici concentrici: il più esterno ed il più interno perfettamente neri, i due intermedi perfettamente riflettenti. Mediante un ciclo, che può ripetersi quante volte si vuole, egli riesce a far passare calore dall'involucro più esterno, che può supporsi più freddo, al più interno, che può supporsi più caldo. Il secondo principio della termodinamica esige che, per compiere il ciclo, debba trasformarsi una quantità di lavoro in calore e che quindi, in virtù dell'irraggiamento del corpo interno, si eserciti una pressione sopra l'involucro adiacente. Di qui segue, come conseguenza, la pressione della luce.

Dei numerosi lavori del BARTOLI è questo il più celebre e ad esso il suo nome è indubbiamente legato. È singolare però che il BARTOLI morto nel luglio 1896, prima che la pressione della luce fosse verificata sperimentalmente, dubitasse della sua realtà e si sforzasse di interpretare variamente i suoi ragionamenti, ma egli serbò in vita sempre celati questi suoi dubbi che si palesarono solo più tardi.

Non si può passare sotto silenzio le belle ricerche del BARTOLI sulla elettrolisi ed in particolare quelle sulla possibilità di decomporre l'acqua anche con le più deboli forze elettromotrici [11]. Esse si ricollegano agli studi del FARADAY della quinta serie e di serie successive.

Caratteristica originale del pensiero del FARADAY è l'aver trasportato la sede principale dei fenomeni elettromagnetici nel dielettrico, ove egli percepiva e seguiva l'andamento e le mutazioni delle linee di forza, le quali materializzavano ciò che egli concepiva per spiegare le azioni elettrodinamiche.

Una delle esposizioni più luminose ed efficaci dei concetti del FARADAY, nella maniera con la quale furono svolti dal MAXWELL e dal HERTZ, fu il discorso tenuto da GALILEO FERRARIS all'Accademia dei Lincei nel giugno 1894 sulla trasmissione elettrica dell'energia [12]. Ma un tale discorso lascerebbe solo il ricordo di una felice volgarizzazione dei concetti di localizzazione e flusso di energia, allora nuovi nel gran pubblico, se non servisse a rivelarci molto di più, cioè quale era l'intima maniera del FERRARIS di comprendere la natura dei fenomeni elettrici, punto di partenza della scoperta del campo magnetico ruotante da lui fatta nove anni prima. Ed infatti fu il vedere, con l'occhio della mente, compiersi le oscillazioni elettriche, non nell'ambito dei conduttori, ma nel mezzo comune fuori di essi e di persuadersi quindi della possibilità di sovrapporre due oscillazioni elettriche ortogonali, pari a quelle luminose, visione apparsagli, come un lampo, mentre passeggiava solitario una notte per le vie di Torino, che diede origine alla scoperta a cui il FERRARIS deve principalmente la sua fama [13].

Tale brillante risultato era stato preceduto da lunghi e profondi studi del FERRARIS sui trasformatori, dei quali diede una teoria completa che lo condusse a stabilire la legge nota dello spostamento di fase, ed a calcolare la potenza di un trasformatore. Ciò valse a dissipare le erronee opinioni che esistevano sul rendimento di un trasformatore ed a mostrare tutta l'importanza nelle applicazioni industriali di questo organo fondamentale, derivato direttamente dal principio dell'induzione, il quale nell'elettrotecnica tiene il posto che ha la leva in meccanica [14].

Il trasporto dell'energia con l'uso di correnti alternate, a cui tutte le industrie debbono un così grande impulso, fu il risultato pratico di questi studi.

La storia dell'evoluzione delle idee del FARADAY, le quali hanno condotto alla teoria matematica di MAXWELL, quindi alle esperienze di HERTZ, non sarebbe completa se non si parlasse del telegrafo senza fili che chiude così mirabilmente il memorabile ciclo.

In Italia il RIGHI, fra gli altri, ripeté e continuò con successo le esperienze di HERTZ, perseguendo in tutti i particolari le analogie fra i fenomeni ottici e quelli delle onde elettromagnetiche [15].

Il MARCONI poi, con mirabile perseveranza, e giovandosi dei più geniali e vari procedimenti, riuscì a dare pratica attuazione ai metodi di trasmissione a distanza mediante onde elettromagnetiche. I rapidi progressi della radiotelegrafia e della radiotelefonia si svolgono ogni giorno davanti ai nostri occhi, e sono seguiti con interesse e con meraviglia in ogni parte del mondo.

Non mi è possibile dilungarmi sopra numerose altre questioni, pur di notevole interesse, come quelle di elettrolisi e di elettrofisiologia, rievocando gli studi del MATTEUCCI [16] è la sua corrispondenza col FARADAY [17], né ritornare sulla teoria chimica della pila che il FARADAY preferì a quella del contatto, ricollegandosi così alle idee manifestate dapprima dal FABBRONI [18]. Né mi è possibile parlare della questione, dibattuta dal FARADAY, se la elettricità, comunque prodotta, sia sempre la stessa e segua le medesime leggi, producendo uguali effetti, di cui lo stesso VOLTA si occupò, e che diede origine fra noi anche a studi recenti. Ricorderò solo l'osservazione resa nota dal Padre BANCALARI nel 1847 [19] e la successiva Memoria dello ZANTEDESCHI sul magnetismo delle fiamme [20], che richiamarono l'attenzione del FARADAY sul magnetismo e diamagnetismo dei gas.

Chiuderò infine accennando alla magnetoottica, che prende le mosse da una delle più celebri scoperte del FARADAY, quella della polarizzazione rotatoria magnetica.

Il RIGHI diede la spiegazione cinematica del fenomeno, che ulteriori ricerche collegarono alla grande scoperta di ZEEMAN. Ed il RIGHI stesso si valse della disposizione della fiamma di sodio, traversata nel senso del campo da un fascio di luce fra due nicol incrociati, la quale permette con mezzi semplici l'osservazione del fenomeno inverso di ZEEMAN [21].

È ben singolare che questa esperienza sia stata eseguita con un apparecchio analogo ad uno ideato dal FARADAY a cui però il risultato sfuggì, esempio assai raro nel corso delle ricerche di questo grande osservatore.

Mi arresterò qui, dopo aver citato gli scomparsi che in Italia si occuparono di questo soggetto, ed aver ricordato che altri valorosi scienziati vi apportarono e vi apportano tuttora preziosi contributi.

Come pochi anni fa l'opera di VOLTA e quella di AMPÈRE, così oggi quella di FARADAY viene rievocata e commemorata.

Questi tre grandi scienziati, appartenenti a paesi diversi, vissero lontani e separati fra loro, ma i loro pensieri concorsero armonicamente al progresso della filosofia naturale ed alla scoperta di nuovi e meravigliosi trovati utili alla società umana. L'influenza che ciascuno esercitò al di là dei confini della propria patria servì a svolgere verso analoghi fini mentalità di stirpi diverse, che acquistarono nuove virtù nello sforzo comune.

Scopo di questo mio breve saggio è stato di lumeggiare l'influenza che ebbe in Italia l'opera del FARADAY. Dal punto di vista filosofico essa fu grandissima e, come abbiamo veduto sopra, le scoperte del Fisico inglese, penetrate fra noi, ne suscitarono nuove ed originali, di singolare importanza dal punto di vista delle applicazioni pratiche, le quali sollevarono l'entusiasmo non solo negli uomini di scienza, ma nella società tutta che ne ritrae tanti benefici vantaggi.

I sentimenti di ammirazione e di riconoscenza che in Italia si nutrono verso il grande pensatore ed esperimentatore britannico sono profondi ed unanimi.

BIBLIOGRAFIA.

[1] *Sopra la forza elettromotrice del magnetismo* dei sigg. L. NOBILI e V. ANTINORI, « Antologia », n. CXXXI; *Nuove esperienze elettromagnetiche e teoria fisica del magnetismo di rotazione,* « Antologia », n. CXXXIV; *Descrizione delle nuove calamite elettriche ed osservazioni sulle medesime,* « Antologia », n. CXXXVI; *Sopra varii punti di magneto elettricismo,* « Antologia », n. CXXXVIII; *Teoria fisica delle induzioni elettrodinamiche* di L. NOBILI, « Antologia », n. CXLII.

[2] *La vita di Michele Faraday,* Padova, 1908.

[3] *Cours spécial sur l'induction, le magnétisme de rotation, le diamagnétisme et sur les relations entre la force magnétique et les actions moléculaires,* Paris, 1854.

[4] « Annali delle Università Toscane », vol. 3°. Le tre Memorie del Felici furono tradotte in tedesco e stampate negli « Ostwald Klassiker der exakten Wissenschaften ».

[5] *Considérations sur l'état dans lequel doit se trover une couche d'un corps non conducteur de l'électricité lorsqu'elle est interposée entre deux surfaces douées d'électricité de différente espèce,* « Journal de Physique, de Chimie et d'Histoire Naturelle et des Arts », par J. C. DELAMÉTHERIE, Paris, vol. 63, Juillet, 1806; Suite des considérations, etc.; AVOGADRO, *Saggio di teoria matematica della distribuzione dell'elettricità sulla superficie dei corpi conduttori nell'ipotesi dell'azione induttiva esercitata dalla medesima sui corpi circostanti per mezzo delle particelle dell'aria frapposta,* « Memorie Società Italiana delle Scienze », vol. 23, 1844.

[6] *Discussione analitica dell'influenza che l'azione di un mezzo dielettrico ha sulla distribuzione dell'elettricità alla superficie di più corpi elettrici disseminati in esso,* « Memorie della Società Italiana delle Scienze », Modena, Parte 2ª, vol. 24, 1846.

[7] *Sur les forces qui régissent la constitution intérieure des corps, aperçu pour servir à la détermination de la cause et des lois de l'action moléculare,* TAYLOR's, Torino, 1836.

[8] *Lezioni elementari di fisica matematica,* Firenze, 1843.

[9] *Descrizione di una macchinetta elettromagnetica del dott. Antonio Pacinotti,* « Nuovo Cimento », giugno 1864, pubblicato il 3 maggio 1865.

[10] *Sopra i movimenti prodotti dalla luce e dal calore e sopra il radiometro di Crookes,* Firenze, 1876.

[11] Citiamo fra le varie Memorie del BARTOLI su questo soggetto: *Su le polarità galvaniche e su la decomposizione dell'acqua con una pila di forza elettromotrice inferiore a quella di un elemento Daniell*, «Nuovo Cimento», 1879.

[12] Lettura fatta alla R. Accademia dei Lincei nella solenne adunanza del 3 giugno 1894.

[13] *Rotazioni elettrodinamiche prodotte per mezzo di correnti alternate*, «Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino», vol. 23, 18 marzo 1888.

[14] *Ricerche teoriche e sperimentali sul generatore secondario Gaulard e Gibbs*, «Memorie della R. Accademia delle Scienze di Torino», vol. 37, serie 2, genn. 11, 1885; *Sulle differenze di fase delle correnti, sul ritardo dell'induzione e sulla dissipazione di energia nei trasformatori*, «Memorie della R. Accademia delle Scienze di Torino», dic. 4, 1887.

[15] *L'ottica delle oscillazioni elettriche*, Bologna, 1887.

[16] *Electro-physiological Researches*, «Phil. Trans.», 1845–1830; *Lezioni sui fenomeni fisico-chimici dei corpi viventi*, Pisa, 1846.

[17] Dott. BENCE JONES: *The Life and letters of Faraday*, vol. 2°.

[18] *Sur l'action chimique des differents métaux à la temperature de l'atmosphère et sur l'explication de quelques phénomènes galvaniques*, Paris, 1796; *Dell'azione chimica dei metalli nuovamente avvertita*, Firenze, 1793.

[19] *Ueber eine Entdeckung des Magnetismus der Flamme*, «Pogg. Ann.», vol. 73.

[20] «Raccolta fisico-chimica Italiana», vol. 3°. Circa le esperienze dello Zantodeschi che preluderebbero all'induzione elettrodinamica, cfr. «Biblioteca Italiana», vol. 53 e NACCARI, op. cit., pag. 236.

[21] *Di un nuovo metodo sperimentale per lo studio dell'assorbimento della luce nel campo magnetico*; 2 Note, «Rend. Acc. dei Lincei», serie V, vol. 7°, 2° sem., 1898.

XI.

LE CALCUL DES VARIATIONS, SON ÉVOLUTION ET SES PROGRÈS, SON RÔLE DANS LA PHYSIQUE MATHÉMATIQUE

« Publ. Fac. Sc. de l'Université Charles et de l'Université Masaryk », Praha–Brno, 1932; 54 pp.

PREMIÈRE CONFÉRENCE

SOMMAIRE DE LA PREMIÈRE CONFÉRENCE.

1. Histoire du calcul des variations. – 2. Problèmes de maxima et minima ordinaires et calcul des variations. – 3. JACQUES BERNOULLI. – 4. EULER et l'équation d'EULER. – 5. LAGRANGE. – 6. LEGENDRE, JACOBI. – 7. WEIERSTRASS. – 8. Les équations différentielles, les équations intégrales, les équations intégro–différentielles qui se déduisent des problèmes du calcul des variations. – 9. Nouvelles théories se rattachant au calcul des variations. – 10. Regard synthétique sur la théorie des fonctionnelles. – 11. Équations intégrales et intégro–différentielles. – 12. Composition, permutabilité, théorèmes d'addition intégrales. – 13. Différents types d'équations intégro–différentielles. – 14. Équations aux dérivées fonctionnelles. – 15. Fonctionnelles isogènes.

1. Nous ne voulons pas exposer ici une histoire détaillée du calcul des variations, mais nous pensons seulement d'exposer les principales étapes par lesquelles il est passé, ainsi que les différentes branches des mathématiques qui s'y rattachent et qu'il a créées. Cela avant d'aborder le principal sujet à la fin de cette conférence et dans la prochaine.

D'autre part nous trouvons des histoires assez étendues du calcul des variations, soit dans les différents ouvrages consacrés à ce calcul, soit dans plusieurs traités de Calcul différentiel et intégral. Nous appelons spécialement l'attention sur l'Histoire of the Calculus of Variations de TODHUNTER [1], qui étudie les théories qui se rattachent à ce calcul et qui se sont développées dans le XIX siècle de LAGRANGE jusqu'à JACOBI et à ses immédiats continuateurs.

2. Les problèmes de maxima et de minima avaient été envisagés déjà par les anciens. On en trouve bien des exemples dans EUCLIDE et les géomètres grecs. Mais il a fallu arriver jusqu'à la création de la géométrie analytique et du calcul différentiel pour trouver des méthodes générales pour leur résolution. On attribue en général à FERMAT la règle de la détermination des maxima et minima d'une fonction par la dérivation de cette fonction.

Mais quoique LAGRANGE ait réduit à cette même règle la résolution générale du problème du calcul des variations, ce problème diffère essentiellement de celui de la détermination des maxima et des minima d'une fonction d'une ou de plusieurs variables. Commençons par un exemple, le premier que l'on trouve au point de vue historique. NEWTON [2] s'est proposé le problème de trouver le solide de révolution de moindre résistance, c'est-à-dire quelle forme on doit donner au profil d'un solide de révolution, qui se déplace dans un milieu fluide d'un mouvement de translation parallèlement à son axe, pour qu'il rencontre la moindre résistance possible. C'est un problème de la plus haute importance en balistique et dans les constructions navales.

Or si nous comparons ce problème au problème de déterminer l'abscisse d'une courbe, qui correspond à un maximum de l'ordonnée, nous voyons que dans ce problème l'inconnue est un nombre, dans l'autre un profil, c'est-à-dire une courbe, c'est-à-dire une fonction.

De même prenons un autre problème classique: le problème de JEAN BERNOULLI [3] de la brachistochrone. On cherche la courbe située dans un plan vertical et qui relie deux points donnés telle qu'un grave qui descend le long de cette courbe emploie dans la descente le temps minimum. Même ici ce qui est inconnu c'est une courbe, c'est-à-dire la fonction qui la représente. Du même type sont les problèmes isopérimétriques envisagés d'une manière générale par JACQUES BERNOULLI [4] dont le plus simple, connu déjà par les anciens, est celui de trouver la courbe plane fermée dont l'aire renfermée est maximum, le périmètre ayant une longueur donnée.

Tous ces problèmes de maxima et de minima, dans lesquels les éléments inconnus sont des fonctions, constituent le calcul des variations.

On peut mettre en évidence le passage des problèmes ordinaires de maxima et de minima du calcul différentiel aux problèmes du calcul des variations par un passage du fini à l'infini qui est caractéristique des nouvelles branches des mathématiques.

Envisageons par exemple le problème de déterminer le polygone plan de n côtés qui a un périmètre donné dont l'aire est un maximum. Soient x_1, y_2; x_2, y_2; $\cdots$; x_n, y_n les coordonnées des sommets. L'aire sera donnée par

$$A = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\begin{vmatrix} x_i\,, & x_{i+1} \\ y_i\,, & y_{i+1}\end{vmatrix} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i\,\Delta y_i - y_i\,\Delta x_i) \tag{1}$$

et le périmètre par

$$\sum_{i=1}^{n}\sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2}\,, \tag{2}$$

où

$$x_{n+1} = x_1 \quad , \quad y_{n+1} = y_1\,,$$
$$\Delta x_i = x_{i+1} - x_i \quad , \quad \Delta y_i = y_{i+1} - y_i\,.$$

Mais si nous passons du problème du polygone maximum de périmètre constant au problème de déterminer la courbe fermée C de longueur donnée

l dont l'aire renfermée est maximum, on a

(3) $$A = \frac{1}{2}\int_C (x\,dy - y\,dx)$$

avec la condition

(4) $$\int_C \sqrt{dx^2 + dy^2} = l = \text{const.}$$

Dans ce cas les inconnues ne sont plus en nombre fini, mais elles sont les coordonnées de tous les points (en nombre infini) de la courbe, c'est-à-dire nous avons un problème de calcul des variations. L'inconnue est une fonction ou une courbe.

Dans le problème du polygone il était suffisant de déterminer les quantités x_1, y_1; x_2, y_2; $\cdots$; x_n, y_n dépendant de l'indice i qui prend n valeurs entières, tandis que dans le cas de la courbe il faut déterminer les coordonnées x, y de tous les points de la courbe qui sont données par

$$x = x(t) \quad , \quad y = y(t) \, ,$$
$$x(b) = x(a) \quad , \quad y(b) = y(a) \, ,$$

où les quantités x, y dépendent du paramètre t, qui varie d'une manière continue dans un intervalle (a, b). Le paramètre continu t remplace l'index discontinu i. De même, tandis que dans les formules (1) et (2) on a des sommes finies, dans les formules (3) et (4) elles sont remplacées par les intégrales où t est la variable d'intégration. Le chemin suivi dans cet exemple particulier pour passer d'un problème où l'on a un nombre fini d'inconnues à un autre problème où l'on a une fonction inconnue, nous amène à une règle générale qui consiste à remplacer les indices discontinus par des indices continus ou paramètres, les sommes se rapportant à ces indices par des intégrales, où les variables d'intégration sont les paramètres.

Mais il faut bien distinguer de ces problèmes d'autres problèmes d'un type tout à fait différent, où l'on a toutefois des fonctions inconnues à déterminer. C'est ainsi par exemple que l'on peut chercher des courbes $y = y(x)$ qui ont une soustangente constante a. On trouve alors l'équation différentielle

$$a\frac{dy}{dx} = y \, .$$

Dans cette équation ne figure aucune intégrale où paraissent simultanément toutes les valeurs de y correspondant aux valeurs en nombre infini de x. Cette équation ne fait qu'établir une relation entre y en un point et sa valeur en un point infiniment voisin caractérisé par dy/dx.

Plus généralement tous les problèmes qui ressortent des équations différentielles

$$f(x, y, y', \cdots, y^{(n)}) = 0$$

établissent des relations entre y en un point et en des points infiniment voisins.

Un problème tout à fait différent consiste à déterminer la courbe plane $y = y(x)$ qui passe par deux points donnés x_0, y_0 ; x_1, y_2, telle que l'aire de la surface engendrée par une rotation autour de l'axe x est un minimum. L'aire étant donnée par

$$A = 2\pi \int_{x_0}^{x_1} y \sqrt{1 + y'^2}\, dx,$$

elle dépend de toutes les valeurs de y dans l'intervalle (x_0, x_1).

Mais le plus grand souci de ceux qui ont fondé le calcul des variations a été justement de ne pas dépasser les limites du calcul intégral ordinaire, c'est-à-dire de ramener les problèmes du calcul des variations à l'intégration des équations différentielles.

Or on a pu obtenir de ne pas dépasser le cadre du calcul infinitésimal ordinaire parce que l'on a d'abord limité les classes de problèmes que l'on a considérés et après on a envisagé la question d'une manière qui, dans bien des cas, n'est pas complètement rigoureuse.

Si l'on prend la question d'un point de vue général on est amené bien au delà des équations différentielles et d'autre part dans beaucoup de cas il faut abandonner la méthode qui conduit aux équations différentielles et aborder la question à un autre point de vue.

Tout cela, comme nous verrons tout à l'heure, nous montrera le rôle que jouent dans la nouvelle analyse les théories qui ont vu le jour tout récemment.

3. Revenons un pas en arrière. Ce fut JACQUES BERNOULLI qui commença à systématiser les problèmes du calcul des variation. Il établit d'abord un principe: Si une courbe a une propriété de maximum ou de minimum, chacun de ses éléments, aussi petit qu'il soit, a la même propriété. Par exemple chaque élément d'une courbe brachistochrone doit être une courbe brachistochrone.

Alors on remplace un élément infiniment petit d'arc par une polygonale et on cherche à en déterminer les sommets, ce qui revient à une question du calcul différentiel ordinaire.

4. EULER [5] étendit les principes employés par BERNOULLI à une grande classe de questions et employa pour les développer et les résoudre son habilité analytique et son incomparable virtuosité.

Il commença par classer les problèmes qu'il allait envisager en deux grandes catégories, ceux qui consistent à rendre maximum ou minimum une intégrale, certaines conditions aux limites étant données, et ceux qui consistent à rendre maximum ou minimum une intégrale en conservant à une autre intégrale ou à plusieurs intégrales des valeurs constantes données. Ce sont ces derniers qu'on appelle des problèmes isopérimétriques. EULER donna une règle qui sert à ramener les problèmes isopérimétriques aux autres et supposa d'abord l'intégrale du type

$$\int_a^b f(x, y, y')\, dx,$$

où $y(x)$ est la fonction inconnue, y' sa dérivée et après il généralisa au cas de l'intégrale

$$\int_a^b f(x, y, y', y'', \cdots, y^{(n)})\, dx,$$

où $y', y'', \cdots, y^{(n)}$ sont les dérivées successives de $y(x)$. Il trouva l'équation qu'on appelle l'équation d'EULER et qui s'écrit

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'} + \frac{d^2}{dx^2}\frac{\partial f}{\partial y''} - \cdots = 0 .$$

5. LAGRANGE [6] retrouva de plusieurs manières les résultats d'EULER et les étendit. Il suffit de lire sa Théorie des fonctions analytiques et ses Leçons sur le calcul des fonctions pour suivre l'évolution des idées qui l'a conduit au calcul des variations. Mais ces ouvrages sont parmi les derniers de sa vie tandis que la création du calcul des variations est l'œuvre de sa jeunesse. Il publia ses premiers Mémoires sur ce sujet dans le Miscellanea Taurinensia, c'est-à-dire dans les premiers volumes des Mémoires de l'Académie de Turin qu'il venait de fonder. Ce furent ces travaux qui démontrèrent aux savants ses contemporains la puissance de son génie. Il a poursuivi ces recherches toute sa vie et la mécanique analytique, où la méthode des variations joue un grand rôle, couronne l'ensemble de ses pensées.

Soit $y = y_0(x)$ la courbe passant par les points fixes A, B par laquelle l'intégrale

$$\mathrm{J} = \int_a^b f(x, y, y')\, dx$$

devient minimum. Pour démontrer cette propriété de minimum il faut comparer la valeur que prend J avec celle qu'elle prend pour les autres courbes $y = y(x)$ qui passent par A et B. La différence

$$y(x) - y_0(x)$$

est ce que LAGRANGE appelle la variation et il la considère pour des petits changements de la courbe de manière à pouvoir regarder ces changements comme infiniment petits et pouvoir négliger comme infiniments petits d'ordre supérieur les puissances d'ordre supérieur par rapport à celles d'ordre inférieur. Si l'on donne à x un changement infiniment petit dx et si l'on ne sort pas de la courbe continue $y = y(x)$, l'ordonnée a un accroissement infiniment petit dy. Cet accroissement est complètement différent de la variation par laquelle on sort de la courbe primitive, c'est-à-dire on la déforme.

LAGRANGE représente par δy la variation et il crée un calcul tout à fait nouveau, mais tout à fait analogue au calcul différentiel ordinaire.

Même l'idée de créer le nouveau symbole δy pour représenter une variation et la distinguer de la différentielle dy constitue, d'après CAUCHY, un grand mérite de LAGRANGE. Et en effet le choix d'une notation appropriée et claire est un grand avantage dans les mathématiques, qui malheureusement n'ont pas comme d'autres sciences une nomenclature et des symboles uniformes et universellement adoptés.

Pour la variation δy de la fonction y l'intégrale J a aussi une variation qui peut se décomposer en parties des différents ordres comme il arrive pour les différentielles. C'est pourquoi on a une variation première δJ, une variation seconde $\delta^2 J$, une variation troisième $\delta^3 J$ et ainsi de suite comme l'on a les différentielles, dJ, $d^2 J$, $d^3 J, \cdots$.

Pour trouver les maxima et les minima on doit d'après LAGRANGE poser

$$\delta J = 0 .$$

De cette manière on obtient pour les maxima et minima de J l'équation différentielle d'EULER

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'} + \frac{d^2}{dx^2}\frac{\partial f}{\partial y''} - \cdots = 0 .$$

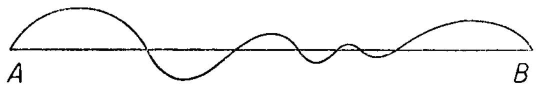
6. Mais, comme LEGENDRE remarqua pour la première fois, on obtient ainsi une condition nécessaire, mais qui n'est pas suffisante. Pour approfondir la question on rencontre de grandes difficultés. Et en effet toute la période suivante qui va de LAGRANGE à JACOBI [7] est spécialement consacrée à distinguer les maxima des minima. Les travaux de JACOBI sur ce sujet sont remarquables par l'élégance et l'importance des résultats.

7. Avec WEIERSTRASS [8] commence une nouvelle période du calcul des variations.

Pour bien approfondir la question et la comprendre il faut regarder les choses à un point de vue beaucoup plus général que celui de WEIERSTRASS et faire, on peut le dire, une incursion dans le domaine des fonctionnelles dont nous avons déjà eu l'occasion de parler mais sur lesquelles nous reviendrons sous peu avec beaucoup de détails.

Dans le calcul des variations l'intégrale J est une fonctionnelle c'est-à-dire elle dépend de toutes les valeurs de y dans l'intervalle (a, b). Or l'élément qui dans une fonctionnelle remplace la variable est une fonction. En voulant adopter un langage géométrique plus frappant encore, c'est une *ligne* qui dans les fonctions de lignes (fonctionnelles) remplace un *point* de la théorie ordinaire des fonctions.

Mais une ligne est un élément beaucoup plus compliqué qu'un point; une ligne a une forme que le point n'a pas. C'est ainsi qu'une ligne peut se rapprocher indéfiniment d'une autre ligne sans que sa forme s'en rapproche. Ceci est tellement courant, qu'il ne serait pas même nécessaire d'en donner un exemple, mais pour plus de clarté envisageons un segment rectiligne AB et une ligne sinusoïdale qui a pour base AB. On peut faire rapprocher tous les points de celle-ci des points du segment rectiligne, sans que les directions des tangentes à la ligne sinusoïdale se rapprochent de la direction AB. Si nous passons du concept de ligne à celui de fonction, on aura qu'une fonction peut se rapprocher d'une autre autant que l'on veut sans que les dérivées



de l'une se rapprochent de celles de l'autre. Or l'intégrale J ne dépend pas seulement des valeurs de y mais aussi de ses dérivées. C'est pourquoi même si y se rapproche indéfiniment de y_0

$$J = \int_a^b f(x, y, y', y'' \cdots) \, dx$$

peut ne pas se rapprocher indéfiniment de

$$J_0 = \int_a^b f(x, y_0, y_0', y_0'', \cdots) \, dx .$$

Tout cela crée différentes sortes de continuité dans le cas des fonctions de ligne (fonctionnelles) qui ne se présentent pas pour les fonctions ordinaires de points. Et en effet dans la théorie des fonctionnelles on a des continuités de différents ordres [9].

On est ainsi conduit à établir une différence essentielle entre les problèmes du calcul des variations et ceux des maxima et des minima ordinaires, parce que tandis que dans ceux-ci le signe de la 2e différentielle sert à distinguer les maxima des minima, dans les problèmes du calcul des variations le signe de la seconde variation n'est pas suffisant pour obtenir une distinction semblable.

C'est pourquoi WEIERSTRASS mit en doute les résultats obtenus dépuis LAGRANGE et LEGENDRE jusqu'à JACOBI et ajouta une nouvelle condition pour déterminer l'existence d'un maximum ou d'un minimum. Cette condition établit le signe d'une certaine fonction qu'on appelle la fonction de WEIERSTRASS.

WEIERSTRASS fit aussi faire des progrès au calcul des variations en montrant qu'on limitait beaucoup le domaine des problèmes en considérant, dans le cas des courbes planes, l'équation de la courbe sous la forme

$$y = y(x)$$

et qu'on étendait beaucoup les considérations en mettant les équations de la courbe sous une forme paramétrique (voir II Conf., § 8):

$$y = y(t) \quad , \quad x = x(t) .$$

De cette manière il faut remplacer l'intégrale précédemment considérée

$$J = \int_a^b f(x, y(x), y'(x))\, dx$$

par une autre

$$J = \int_{t_1}^{t_0} f(x(t), y(t), x'(t), y'(t))\, dt.$$

À côté de l'œuvre de WEIERSTRASS on ne peut pas négliger l'œuvre de DARBOUX. Parmi ses recherches sur la théorie des surfaces, ce grand géomètre s'occupa des lignes géodésiques et il détermina les conditions suffisantes pour qu'une ligne géodésique soit effectivement la plus courte distance sur la surface entre deux points. Les méthodes qu'il employa diffèrent essentiellement de celles de WEIERSTRASS, parce qu'il fait usage de coordonnées curvilignes spéciales qui simplifient beaucoup la question.

Les méthodes de DARBOUX furent étendues aux problèmes de la mécanique et par l'œuvre de KNESER acquirent une généralité comparable à celle des méthodes de WEIERSTRASS [10].

Toutes ces recherches éloignèrent la théorie du calcul des variations de la forme primitive et classique que lui avait donnée LAGRANGE.

8. Avant d'en arriver aux plus récentes études sur le calcul des variations nous désirons ouvrir une parenthèse.

Ce que nous avons dit jusqu'à présent se rapporte aux problèmes du calcul des variations qui amènent à des équations différentielles et dont la solution peut s'obtenir par la méthode des équations différentielles.

En effet tous les problèmes de maxima et de minima d'intégrales de la forme

$$J = \int_a^b F(x, y_1, y_2, \cdots, y_n, y_1', \cdots, y_n', \cdots, y_1^{(m)}, \cdots, y_n^{(m)}, \cdots)\, dx$$

même de nature isopérimètrique, c'est-à-dire tels que les intégrales

$$J_1 = \int_a^b F_1(x, y_1, \cdots)\, dx,$$

$$J_2 = \int_a^b F_2(x, y_1, \cdots)\, dx,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$J_k = \int_a^b F_k(x, y_1, \cdots)\, dx$$

se conservent constantes, et aussi les problèmes qui se présentent lorsqu'on envisage des fonctions de plusieurs variables, par exemple le problème de rendre maximum ou minimum une intégrale double

$$\int_a^b\int_c^d F\left(x\,,y\,,z\,(x\,,y)\,,\frac{\partial z}{\partial x}\,,\frac{\partial z}{\partial y}\,,\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\,,\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\,,\ldots\right)dx\,dy\,,$$

conduisent toujours à des équations différentielles. Ce sont seulement ces problèmes qui avaient tenté LAGRANGE et tous les continuateurs dont nous avons parlé jusqu'à présent.

Mais il y a d'autres classes de problèmes analytiques, qui dépendent directement de problèmes du calcul des variations.

Dès l'année 1884 j'ai établi une liaison entre les questions qui dépendent du calcul des variations et les équations intégrales [11]. À ce moment les équation intégrales avaient formé l'objet de plusieurs études, mais elles n'avaient pas été traitées d'une manière systématique. On n'avait étudié à fond que l'équation d'ABEL des tautochrones et d'autres équations qui pouvaient aussi être transformées en l'équation d'ABEL.

Dans la même année 1884 paraissait simultanément dans les « Acta Mathematica » un Mémoire de SONINE qui élargissait dans une certaine mesure le problème d'ABEL sans sortir de la voie qu'il avait tracée. Mais lui aussi ne traitait qu'un cas très particulier et n'établissait aucune liaison entre le problème des équations intégrales et d'autres problèmes de l'Analyse. Les intéressantes recherches de HILBERT sont parues une vingtaine d'années plus tard [12].

Tout ce que LIOUVILLE, JOACHIMSTHAL, SCHLÖMILCH, BELTRAMI, DINI et bien d'autres mathématiciens avaient fait n'était que transformer la méthode d'ABEL et en donner des applications sans sortir du domaine de cette même équation. Je pense donc qu'il faut considérer avec intérêt la liaison que j'ai établie entre deux classes de problèmes d'analyse, qui en apparence semblent très loin les uns des autres.

Voyons d'abord l'exemple que j'ai donné. Je partais de l'équation intégrale

$$(a)\qquad \varphi\,(x) = \int_0^a f\,(\alpha)\,F\,(\alpha\,,x)\,d\alpha \qquad 0 < x < a$$

où $F\,(\alpha\,,x)$ est une fonction symétrique de α et x. C'est donc une équation qu'aujourd'hui, après les travaux de FREDHOLM parus une vingtaine d'années plus tard, on appellerait une équation de FREDHOLM de première espèce à noyau symétrique. J'ai montré qu'elle peut se déduire en annulant la variation de l'intégrale:

$$P = \frac{1}{2}\int_0^a d\alpha \int_0^a f\,(\alpha) f\,(x)\,F\,(\alpha\,,x)\,dx - \int_0^a \varphi\,(x) f\,(x)\,dx\,,$$

en supposant variable la fonction $f(x)$ tandis que les autres sont fixes.

Ceci est un cas très élémentaire et très simple des classes étendues des équations intégrales et des équations intégro-différentielles qu'on peut obtenir des problèmes les plus généraux du calcul des variations.

Dans les traités sur la théorie des fonctionnelles on en donne plusieurs exemples et je n'en reporterai ici que deux.

Envisageons l'intégrale

$$\int_a^b\int_a^b f(t\,,u\,,y(t)\,,y(u))\,dt\,du\,.$$

Si on en fait la variation et si on l'annule, on trouve l'équation intégrale

$$\int_a^b (f_1+f_2)\,dt=0\,,$$

où

$$f_1=\frac{\partial f(x\,,t\,,y(x)\,,y(t))}{\partial y(x)}\quad,\quad f_2=\frac{\partial f(t\,,x\,,y(t)\,,y(x))}{\partial y(x)}.$$

Prenons maintenant l'intégrale

$$\int_a^b\int_a^b f(t\,,x\,,y(t)\,,y(x)\,,y'(t)\,,y'(x))\,dt\,dx$$

et posons

$$f_1=\frac{\partial f}{\partial y(t)}\quad,\quad f_2=\frac{\partial f}{\partial y(x)}\quad,\quad f_3=\frac{\partial f}{\partial y'(t)}\quad,\quad f_4=\frac{\partial f}{\partial y'(x)}.$$

Si on en annule la variation, on trouve moyennant une intégration par parties l'équation intégro-différentielle

$$\int_a^b(\overline{f}_1+f_2)\,dt-\frac{d}{dx}\int_a^b(\overline{f}_3+f_4)\,dt=0$$

où $\overline{f}_1$ et $\overline{f}_3$ sont obtenues de f_1 et f_3 en échangeant t et x entre eux.

Mais l'idée de relier les équations intégrales au calcul des variations, très féconde par elle même, n'aurait pas présenté au premier abord un réel intérêt sans en donner une application.

L'application que j'en ai faite a consisté à montrer que la résolution de l'équation intégrale (a), quelle que soit φ, peut être ramenée à celle de l'équation intégrale

$$\psi(z\,,x)=\int_0^z\lambda(z\,,\alpha)\,\mathrm{F}(\alpha\,,x)\,d\alpha\,,$$

où l'on prend pour $\psi(z\,,x)$ une fonction spéciale $\nu(x)$, si f est exprimable moyennant $\lambda(z\,,\alpha)$ par une simple relation intégrale.

Cette proposition peut être employée dans la résolution de quelques questions de physique mathématique en particulier de quelques questions d'électrostatique.

9. En arrivant maintenant aux plus récentes recherches qui se rattachent au calcul des variations remarquons que, si ce calcul a engendré la théorie

des fonctionnelles, l'introduction des concepts généraux de celle-ci dans le calcul des variations a produit une révolution complète en transformant et en renouvelant ce calcul.

Le moment correspondant de l'histoire de l'analyse présente donc des analogies avec d'autres moments de l'histoire des mathématiques. C'est ainsi que, si le concept de vitesse et d'accélération a pu produire les concepts de fluctions et de dérivées, le calcul infinitésimal, qui a été de ce fait engendré, a transformé et renouvelé toute la mécanique.

10. Nous allons maintenant donner dans les §§ suivants un aperçu synthétique de l'analyse fonctionnelle.

La définition générale de ce qu'on appelle une fonctionnelle s'exprime de la manière suivante: *Nous disons qu'une quantité z est une fonctionnelle de la fonction $x(t)$ dans l'intervalle (a, b) lorsqu'elle dépend de toutes les valeurs que prend $x(t)$ si t varie dans l'intervalle (a, b)*; ou bien lorsqu'une loi est donnée qui fait correspondre à toute fonction définie dans (a, b) (variable indépendante dans un certain domaine fonctionnel) une et une seule quantité z parfaitement déterminée.

Nous écrivons

$$z = \mathrm{F}\,[x(\overset{b}{\underset{a}{t}})]\,.$$

Si $x(t)$ dépend d'autres variables $\alpha, \beta, \cdots$, nous écrivons

$$z = \mathrm{F}\,[x(\overset{b}{\underset{a}{t}}), \alpha, \beta, \cdots)] = z(\alpha, \beta, \cdots)$$

pour indiquer que l'opérateur fonctionnel F s'applique à x considéré comme une fonction de la variable unique t, les quantités $\alpha, \beta, \cdots$ étant constantes. Dans ce cas F est une fonction ordinaire des $\alpha, \beta, \cdots$ et elle ne dépend pas de t.

Une fonctionnelle z peut aussi contenir certains paramètres $\lambda, \mu, \cdots$

$$z = \mathrm{F}\,[x(\overset{b}{\underset{a}{t}})\,; \lambda, \mu, \cdots]\,.$$

Dans ce cas, pour chaque système de valeurs de $\lambda, \mu, \cdots, z$ est une fonctionnelle de $x(t)$; si au contraire la fonction $x(t)$ est fixée, la quantité z est une fonction ordinaire des variables $\lambda, \mu, \cdots$. On peut dire que, $x(t)$ étant donnée, l'opérateur F lui fait correspondre une autre fonction

$$z(\lambda, \mu, \cdots) = \mathrm{F}\,[x(\overset{b}{\underset{a}{t}})\,; \lambda, \mu, \cdots]\,.$$

On peut aussi considérer des quantités z qui dépendent de toutes les valeurs que prennent une ou plusieurs fonctions $\varphi_1(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, $\varphi_2(y_1, y_2, \cdots, y_n), \cdots$ de plusieurs variables définies respectivement dans les champs $C_1, C_2, \cdots$:

$$z = F[\varphi_1(x_1, x_2, \cdots, x_n), \ \varphi_2(y_1, y_2, \cdots, y_n), \cdots];$$

dans ce symbole on omet d'indiquer les champs C_i.

Cette notion de fonctionnelle implique les fonctions des lignes et, plus généralement, celles des hyperespaces.

Pour définir la dérivée d'une fonctionnelle $F[y\overset{b}{\underset{a}{(t)}}]$, donnons à la fonction $y(t)$ un accroissement $\delta y(t) = \vartheta(t)$, qui ne change pas de signe, tel que $|\vartheta(t)| < \varepsilon$ et que $\vartheta(t) = 0$ en dehors d'un intervalle (m, n) de (a, b), d'amplitude h, qui contient ξ à son intérieur; et nous supposons:

1° que le rapport $\Delta F/\varepsilon h$ est toujours inférieur à un nombre fini M;

2° qu'en posant $\sigma = \int_m^n \vartheta(t)\,dt$, il y a une valeur limite déterminée et finie pour $\Delta F/\sigma$ quand ε et h tendent simultanément vers zéro, l'intervalle (m, n) contenant toujours le point ξ;

3° que le rapport $\Delta F/\sigma$ tend vers sa valeur limite uniformément par rapport à toutes les fonctions $y(t)$ possibles et tous les points ξ.

La limite de ce rapport est une fonctionnelle de $y(t)$ qui dépend du paramètre ξ; nous la représentons par (1)

$$F'[y(t); \xi]$$

et nous la nommons *dérivée première de la fonctionnelle* F *par rapport à la fonction* $y(t)$ *au point* ξ.

Dans le cas d'une fonction ordinaire $f(y_1, y_2, \cdots, y_n)$ de n variables on a n dérivées partielles $\partial f/\partial y_i$ qui dépendent de l'indice discontinu i. Pour la fonctionnelle F l'indice i est remplacé par le paramètre continu ξ et j'ai démontré en 1887 [13] que la quantité

$$\delta F = \int_a^b F'[y(t); \xi]\, \delta y(\xi)\, d\xi$$

(tout à fait analogue à la différentielle totale d'une fonction ordinaire), qui est une fonctionnelle linéaire de $\delta y(t) = \varepsilon\eta(t)$, a la proprieté suivante: la différence entre δF et l'accroissement ΔF de la fonctionnelle (correspondant à l'accroissement $\delta y(t)$ de $y(t)$) est infiniment petite d'un ordre supérieur à celui de ε.

On appelle δF *différentielle ou variation première de* F. On peut calculer la variation première de F correspondante à la variation $\varphi(\xi)$ de $y(\xi)$ en employant la formule

$$\left(\frac{d}{d\varepsilon} F[y(t) + \varepsilon\varphi(t)]\right)_{\varepsilon=0} = \int_a^b F'[y(t); \xi]\, \varphi(\xi)\, d\xi.$$

(1) Nous omettons d'écrire les limites de l'intervalle (a, b).

Si la dérivée première $F'[y(t), \xi_1]$ est elle même dérivable, on peut former la dérivée seconde $F''[y(t), \xi_1, \xi_2]$ qui est une fonction symétrique des variables ξ_1 et ξ_2. En général la dérivée d'ordre n de la fonctionnelle F sera une fonction symétrique des paramètres $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$ et on aura

$$\left(\frac{d^n}{d\varepsilon^n} F[y(t) + \varepsilon\varphi(t)]\right)_{\varepsilon=0} =$$

$$= \int_a^b \int_a^b \cdots \int_a^b F^{(n)}[y(t); \xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n] \varphi(\xi_1) \varphi(\xi_2) \cdots \varphi(\xi_n) \, d\xi_1 \, d\xi_2 \cdots d\xi_n .$$

Considérons, dans la fonctionnelle $F[y(t) + \varepsilon\varphi(t)]$, les fonctions y et φ comme fixes; F sera alors une fonction ordinaire de ε. Cette fonction $f(\varepsilon)$ est dérivable jusqu'à l'ordre n, si la fonctionnelle F l'est et viceversa.

Si $f(\varepsilon)$ est développable en série de TAYLOR, du développement de $f(1)$ on obtient pour F:

$$F[y(t) + \varphi(t)] = F[y(t)] +$$

$$+ \sum_{1}^{\infty}{}_n \frac{1}{n!} \int_a^b \int_a^b \cdots \int_a^b F^{(n)}[y(t); \xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n] \varphi(\xi_1) \varphi(\xi_2) \cdots \varphi(\xi_n) \, d\xi_1 \, d\xi_2 \cdots d\xi_n ,$$

formule analogue à la *série de* TAYLOR pour les fonctions ordinaires.

La formule donnée plus haut pour δF ne convient que dans le cas où F a une *différentielle régulière*, c'est-à-dire exprimable par une intégrale. Dans un cas plus général il peut y avoir des points exceptionnels où la dérivée fonctionnelle devient infinie; ces points donnent lieu à des termes qu'il faut ajouter à l'expression de δF obtenue plus haut, c'est-à-dire à une somme de la forme

$$\Sigma_i \, \alpha_i \, \delta y(\tau_i) ,$$

où les τ_i sont les points exceptionnels; la somme de l'intégrale et de la somme donne la *différentielle irrégulière*. C'est ce qui arrive quelquefois dans le problème ordinaire du Calcul des variations; la variation de l'intégrale est égale à la somme d'une intégrale (qui provient de la variation le long de l'intervalle) et d'une somme finie (due aux variations aux extrémités de l'intervalle d'intégration) (2).

11. Soit $F[y(t)]$ une fonctionnelle dérivable. Pour trouver la fonction $y(t)$ qui donne à F une valeur minimum ou maximum, formons la variation δF

$$\delta F = \int_a^b F'[y(t); x] \, \delta y(x) \, dx .$$

Or δF doit être égale à zero quelle que soit la fonction $\delta y(x)$, donc

$$F'[y(t); x] = 0$$

(2) Ce n'est pas le cas le plus général parce qu'on peut avoir aussi d'autres termes.

pour toute valeur de x. Une équation de ce type peut être regardée comme la généralisation d'un système ordinaire de n équations à n inconnues:

$$f_i(y_1, y_2, \cdots, y_n) = z_i, \qquad i = 1, 2, \cdots, n.$$

En effet, si nous introduisons deux paramètres continus x et t, variables entre a et b, au lieu des indices discontinus i et k des n fonctions f_i et des n variables y_k, $f_i(y_1, y_2, \cdots, y_n)$ devient une fonctionnelle d'une fonction $y(t)$; cette fonctionnelle dépend aussi du paramètre continu x qui remplace l'indice i et notre système de n équations se trouve remplacé par une équation fonctionnelle

$$\Phi[y(t); \mathrm{x}] = z(x),$$

où $y(t)$ est la fonction inconnue. Le problème de résoudre cette équation correspond ainsi au problème de résoudre les n équations par rapport aux inconnues y_k.

Si ces équations sont linéaires, la fonctionnelle Φ est linéaire. Dans le cas d'une fonctionnelle linéaire régulière (c'est-à-dire avec une différentielle régulière), nous avons à considérer *l'équation intégrale de première espèce* (type FREDHOLM)

$$\int_a^b \mathrm{K}(x, t) y(t) dt = z(x).$$

Si la fonctionnelle a un point exceptionnel $t = x$, nous avons l'équation intégrale du type

$$\int_a^b \mathrm{K}(x, t) y(t) dt + a_0 y(x) + a_1 y'(x) + \cdots + a_n y^{(n)}(x) = z(x).$$

Si $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$, $a_0 = 1$, nous avons l'*équation de* FREDHOLM *de seconde espèce*; si $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$, $a_0 = a(x)$, nous avons *l'équation de troisième espèce.*

S'il y a des termes $a_i y^{(i)}(x)$, nous avons une *équation intégro-différentielle.*

Si la fonctionnelle linéaire $\Phi[y(t); x]$ dépend de toutes les valeurs de $y(t)$, t variant entre les limites a et x $(a \leq x \leq b)$, nous aurons à considérer soit l'*équation de* VOLTERRA *de première espèce*

$$\int_a^x \mathrm{K}(x, t) y(t) dt = z(x),$$

soit *l'équation de* VOLTERRA *de seconde espèce*

$$\int_a^x \mathrm{K}(x, t) y(t) dt + y(x) = z(x).$$

12. Il y a une classe étendue d'équations intégrales et intégro-différentielles dont la solution s'obtient à l'aide des fonctions qui se déduisent

d'autres fonctions par l'opération nommée *composition*. Étant données deux fonctions $f(x, y)$ et $g(x, y)$ de deux variables, la fonction $h(x, y)$ définie par

$$h(x, y) = \int_x^y f(x, \xi)\, g(\xi, y)\, d\xi,$$

qui est une fonctionnelle de deux fonctions f et g, sera appelée *produit de composition de première espèce* de f et g et elle sera désignée par $h = \overset{*}{f}\overset{*}{g}$; l'opération que nous venons de définir et qui fait passer des fonctions f et g à la fonction h sera nommée *composition de première espèce* de f et de g. Si l'on prend pour limites d'intégration deux constantes a et b, la fonction

$$k(x, y) = \overset{**}{f}\overset{**}{g} = \int_a^b f(x, \xi)\, g(\xi, y)\, d\xi$$

sera dite *produit de composition de seconde espèce*. Ces opérations de composition s'obtiennent en étendant la notion du produit de deux matrices $\| a_{ir} \|$, $\| b_{rs} \|$, $i, r, s = 1, 2, \cdots, n$, ou celle de la composition des substitutions linéaires correspondantes, au cas d'une infinité de variables. La composition de seconde espèce correspond au cas d'une matrice carré générale tandis que celle de première espèce correspond au cas des matrices $\| a_{ir} \|$ où $a_{ir} = 0$ pour $r > i$.

Deux fonctions f et g sont *permutables de première espèce* si

$$\overset{*}{f}\overset{*}{g} = \overset{*}{g}\overset{*}{f}.$$

Les produits de composition de deux, troix ou plusieurs fonctions permutables sont permutables entre eux ainsi qu'avec les fonctions données. L'opération de composition est associative, c'est-à-dire

$$(\overset{*}{f}\overset{*}{g})\overset{*}{h} = \overset{*}{f}(\overset{*}{g}\overset{*}{h})$$

et distributive:

$$\overset{*}{f}\,(\overset{*}{\overline{g+h}}) = \overset{*}{f}\overset{*}{g} + \overset{*}{f}\overset{*}{h}$$

quelles que soient les fonctions f, g, h (permutables ou non). Des propriétés analogues ont lieu pour la composition de seconde espèce.

Posons $\overset{*}{f^1} = f$; alors, n étant un entier quelconque > 1, la formule

$$\overset{*}{f^n} = \overset{*}{f^{n-1}}\overset{*}{f}$$

donne la $n^{ième}$ *puissance de composition* d'une fonction donnée $f(x, y)$. Ces puissances de composition sont permutables entre elles, et elles obéissent à des règles de calcul qui ne diffèrent pas, en ce qui concerne la forme, de celles qui ont lieu pour les puissances ordinaires.

La somme d'un certain nombre d'expressions du type

$$a\,\overset{*}{f}{}_1^{n_1}\,\overset{*}{f}{}_2^{n_2}\cdots\overset{*}{f}{}_i^{n_i} \qquad (n_1, n_2, \cdots, n_i \text{ entiers positifs})$$

obtenu en composant plusieurs puissances de composition et en multipliant par une constante a sera dite *polynôme de composition de première espèce*; si les fonctions f_i sont permutables entre elles, le polynôme est lui même permutable avec elles. Les règles de calcul pour la composition de ces polynômes sont identiques avec celles qui ont lieu pour les polynômes ordinaires de variable $f_1, f_2, \cdots$. M. EVANS [14] a étudié le premier cette algèbre des fonctions permutables.

Les symboles $\overset{*}{1}{}^{\circ}, \overset{*}{f}{}^{\circ}, \overset{*}{g}{}^{\circ}$ sont définis par les égalités

$$\overset{*}{f}{}^{\circ} \overset{*}{h} = \overset{*}{h}\overset{*}{f}{}^{\circ} = h \quad , \quad \overset{*}{f}{}^{\circ} = \overset{*}{g}{}^{\circ} = \overset{*}{1}{}^{\circ} = 1 .$$

Si

$$\varphi(z_1, z_2, \cdots, z_n) = \sum_{1}^{\infty}{}_{i_1, i_2, \cdots, i_n} a_{i_1, i_2, \cdots, i_n} z_1^{i_1} z_2^{i_2} \cdots z_n^{i_n}$$

est une série de puissances des variables z_r convergente pour les valeurs de $|z_r|$ $(r=1, 2, \cdots, n)$ suffisament petites, la série

$$\Sigma_{i_1, i_2, \cdots, i_n} a_{i_1, i_2, \cdots, i_n} \overset{*}{f}{}_1^{i_1} \overset{*}{f}{}_2^{i_2} \cdots \overset{*}{f}{}_n^{i_n}$$

est convergente quelles que soient les fonctions f_r (pourvu qu'elles soient bornées) et elle représente une fonction de x et de y qui est permutable avec toutes les f_r si celles–ci sont permutables entre elles mêmes. La somme de la série est une fonctionnelle des fonctions f_r, qu'on peut dénoter par $\varphi(\overset{*}{f}_1, \overset{*}{f}_2, \cdots, \overset{*}{f}_n)$ et qu'on peut appeler *fonction de composition.*

Ainsi à toute fonction analytique (série de puissances) correspond une fonctionnelle. Par exemple, à la série

$$z + z^2 + z^3 + \cdots + z^n + \cdots$$

correspond la fonctionnelle

$$f + \overset{*}{f}{}^2 + \overset{*}{f}{}^3 + \cdots + \overset{*}{f}{}^n + \cdots.$$

Si pour les fonctions analytiques $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \cdots$ on a

$$\varphi_3(z_1, \cdots, z_n) = \varphi_1(z_1, \cdots, z_n)\, \varphi_2(z_1, \cdots, z_n)$$

on a, pour les correspondantes fonctions de composition, que le produit de composition de $\varphi_1(\overset{*}{f}_1, \cdots, \overset{*}{f}_n)$ et de $\varphi_2(\overset{*}{f}_1, \cdots, \overset{*}{f}_n)$ est $\varphi_3(\overset{*}{f}_1, \cdots, \overset{*}{f}_n)$.

Les théorèmes d'addition pour les fonctions analytiques ordinaires se transforment en des *théorèmes d'addition intégraux* pour les fonctionnelles correspondantes. Considérons, par exemple, la série

$$e^{\lambda z} = 1 + \lambda z + \frac{\lambda^2}{2!} z^2 + \cdots + \frac{\lambda^n}{n!} z^n + \cdots$$

qui contient la paramètre λ. On a la formule

$$e^{\lambda z} e^{\mu z} = e^{(\lambda+\mu) z}.$$

La série de composition correspondante

$$u(\lambda\,;x\,,y) = \overset{*}{1}{}^{\circ} + \lambda f + \frac{\lambda^2}{2!}\overset{*}{f}{}^2 + \cdots + \frac{\lambda^n}{n!}\overset{*}{f}{}^n + \cdots$$

jouira de la propriété exprimée par la formule suivante

$$\overset{*}{u}(\lambda\,;x\,,y)\,\overset{*}{u}(\mu\,;x\,,y) = u(\lambda+\mu\,;x\,,y)\,.$$

La série

$$v(\lambda\,;x\,,y) = \lambda f + \frac{\lambda^2}{2!}\overset{*}{f}{}^2 + \cdots + \frac{\lambda^n}{n!}\overset{*}{f}{}^n + \cdots$$

obtenue en retranchant l'unité de $u(\lambda\,;x\,,y)$ donne lieu à la formule

$$v(\lambda+\mu\,;x\,,y) = v(\lambda\,;x\,,y) + v(\mu\,;x\,,y) + \int_x^y v(\lambda\,;x\,,\xi)\,v(\mu\,;\xi\,,y)\,d\xi\,,$$

ce qui est un *théorème d'addition intégral* pour la fonction $v(\lambda\,;x\,,y)$.

Supposons maintenant qu'une équation de la forme

$$\varphi(z_1\,,z_2\,,\cdots,z_n) = 0$$

ou

$$\sum_0^\infty{}_{i_1,i_2,\cdots,i_n} a_{i_1,i_2,\cdots,i_n} z_1^{i_1} z_2^{i_2}\cdots z_n^{i_n} = 0$$

soit donnée, la série étant convergente au voisinage de l'origine et que l'on ait

$$a_{00\cdots 0} = 0 \quad , \quad a_{00\cdots 1} \neq 0\,.$$

Cela posé, on peut tirer de l'équation la quantité z_n comme une fonction implicite $\psi(z_1\,,z_2\,,\cdots,z_{n-1})$ régulière au voisinage de $z_1 = z_2 = \cdots = z_{n-1} = 0$ et égale à zéro à ce point. Nous avons donc

$$z_n = \psi(z_1\,,z_2\,,\cdots,z_{n-1}) = \sum_0^\infty b_{i_1 i_2\cdots i_{n-1}} z_1^{i_1} z_2^{i_2}\cdots z_{n-1}^{i_{n-1}}$$

avec $b_{00\cdots 0} = 0$. Si nous considérons l'équation intégrale correspondante

$$\varphi(\overset{*}{f}_1\,,\overset{*}{f}_2\,,\cdots,\overset{*}{f}_n) = \sum_0^\infty a_{i,i_2,\cdots,i_n}\overset{*}{f}{}_1^{i_1}\overset{*}{f}{}_2^{i_2}\cdots\overset{*}{f}{}_n^{i_n} = 0$$

on peut la résoudre par rapport à f_n. La solution est donnée par la formule

$$f_n = \psi(\overset{*}{f}_1\,,\overset{*}{f}_2\,,\cdots,\overset{*}{f}_{n-1}) = \sum_0^\infty b_{i_1,i_2,\cdots,i_{n-1}}\overset{*}{f}{}_1^{i_1}\overset{*}{f}{}_2^{i_2}\cdots\overset{*}{f}{}_{n-1}^{i_{n-1}}$$

et est permutable avec $f_1\,,f_2\,,\cdots,f_{n-1}$.

Tandis que la série de puissances qui donne z_n n'est convergente que pour des valeurs assez petites de $z_1\,,z_2\,,\cdots,z_{n-1}$, la série de composition qui donne f_n est toujours convergente pourvu que les fonctions f_r soient bornées.

Considérons, comme exemple, la série

$$\text{(A)} \qquad g = f + \frac{\overset{*}{f}{}^2}{2!} + \frac{\overset{*}{f}{}^3}{3!} + \cdots + \frac{\overset{*}{f}{}^n}{n!} + \cdots,$$

qui correspond à la série de MACLAURIN pour la fonction $r = e^z - 1$; on tire de cette équation $z = \log(1 + r)$. En développant $\log(1 + r)$ en série de MACLAURIN et en remplaçant ensuite les puissances de r par des puissances de composition de g, on obtient la solution de l'équation intégrale (A) donnée par la série

$$f = g - \frac{\overset{*}{g}{}^2}{2} + \frac{\overset{*}{g}{}^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{\overset{*}{g}{}^n}{n} + \cdots,$$

qui est convergente quelle que soit la fonction bornée g.

Avec les procédés employés ci-dessus on peut montrer [15] que l'équation intégrale de degré m, f étant la fonction inconnue,

$$(a_m \overset{*}{1}{}^\circ + \overset{*}{\varphi}_m)f^m + (a_{m-1} \overset{*}{1}{}^\circ + \overset{*}{\varphi}_{m-1})f^{m-1} + \cdots + (a_1 \overset{*}{1}{}^\circ + \overset{*}{\varphi}_1)f = \varphi_0$$

a toujours, si $a_1 \neq 0$, une et une seule solution.

13. Un système ordinaire d'équations algébriques étant donné, on passe, comme nous l'avons vu plus haut, à une équation fonctionnelle en faisant augmenter indéfiniment le nombre d'inconnues. On passe d'une manière analogue d'un système d'équations différentielles ordinaires du premier ordre, en faisant augmenter indéfiniment le nombre de fonctions inconnues, à une *équation intégro-différentielle ordinaire du premier ordre:*

$$\frac{\partial y(x, \xi)}{\partial x} = \mathrm{T}\left[y(x, \overset{b}{\underset{a}{t}}); x, \xi\right]$$

où y est la fonction inconnue. L'équation peut être résolue par le procédé des approximations successives.

On distingue différentes espèces d'équations intégro-différentielles. Si toutes les dérivées sont prises par rapport à une même variable, l'équation s'appelle *équation intégro-différentielle ordinaire* d'ordre n, si n est l'ordre de la dérivée le plus grand qui y figure. Si les dérivées sont prises par rapport aux différentes variables, nous avons une *équation intégro-différentielle aux dérivées partielles.*

Citons, comme exemple, l'équation suivante

$$\frac{\partial y(x, \xi)}{\partial x} = \int_a^b f(x, \xi, t)\, y(x, t)\, dt$$

étudiée par SCHLESINGER [16]. On peut, pour les équations de ce genre, construire une théorie qui est complètement analogue à celle de FUCHS pour les systèmes d'équations différentielles linéaires.

D'autres équations intégro-différentielles s'obtiennent dans les problèmes de maximum ou de minimum pour certaines fonctionnelles en égalant à zéro la dérivée fonctionnelle.

Nous avons vu plus haut que l'on peut construire la solution pour une classe étendue d'équations fonctionnelles en substituant, dans les séries ordinaires de puissances, des puissances de composition à la place de puissances ordinaires. Une méthode analogue sert à résoudre des équations intégro–différentielles. Soit

$$\Phi\left(z_1, z_2, \cdots, z_n ; \varphi, \frac{\partial\varphi}{\partial z_1}, \frac{\partial\varphi}{\partial z_2}, \cdots, \frac{\partial^{p_1+p_2+\cdots+p_n}\varphi}{\partial z_1^{p_1}\partial z_2^{p_2}\ldots\partial z_n^{p_n}}, \cdots\right) = 0$$

une équation différentielle entre les variables indépendantes $z_1, z_2, \cdots, z_n$, entre la fonction inconnue $\varphi(z_1, z_2, \cdots, z_n)$ et ses dérivées jusqu'à un certain ordre et soit

$$\varphi(z_1, z_2, \cdots, z_n) = \Sigma\, a_{i_1, i_2, \cdots, i_n} z_1^{i_1} z_2^{i_2} \ldots z_n^{i_n}$$

une solution analytique, régulière de cette équation. Si nous substituons $z_k \xi_k$ à la place de z_k $(k = 1, 2, \cdots, n)$ et ψ/ξ_0 à la place de φ (les ξ étant indépendants des z), l'équation dévient

$$\Phi\left(z_1\xi_1, z_2\xi_2, \cdots, z_n\xi_n, \frac{\psi}{\xi_0}, \frac{1}{\xi_0\xi_1}\frac{\partial\psi}{\partial z_1}, \cdots, \frac{1}{\xi_0\xi_1^{p_1}\ldots\xi_n^{p_n}}\frac{\partial^{p_1+p_2+\cdots+p_n}\psi}{\partial z_1^{p_1}, \partial z_2^{p_2}, \cdots, \partial z_n^{p_n}}, \cdots\right) = 0$$

ou, en réduisant à la forme entière,

$$\Psi(z_1, z_2, \cdots, z_n ; \xi_0, \xi_1, \cdots, \xi_n ; \psi, \frac{\partial\psi}{\partial z_1}, \frac{\partial\psi}{\partial z_2}, \cdots) = 0 .$$

Cette équation aux dérivées partielles est vérifiée par

$$\psi = \xi_0\,\varphi(z_1\xi_1, z_2\xi_2, \cdots, z_n\xi_n) .$$

Substituons maintenant à la place de $\xi_0, \xi_1, \cdots, \xi_n$ des fonctions $f_0(x, y)$, $f_1(x, y), \cdots, f_n(x, y)$ arbitraires mais permutables de première espèce entre elles et interprétons les produits ordinaires comme des produits de composition; nous trouvons ainsi que l'équation intégro–différentielle

$$\overset{*}{\Psi}\left(z_1, z_2, \cdots, z_n ; \overset{*}{f_0}, \overset{*}{f_1}, \cdots, \overset{*}{f_n} ; \overset{*}{\psi}, \frac{\partial\overset{*}{\psi}}{\partial z_1}, \frac{\partial\overset{*}{\psi}}{\partial z_2}, \cdots\right) = 0 ,$$

où $\psi(z_1, z_2, \cdots, z_n ; x, y)$ est la fonction inconnue, se résout par la formule

$$\psi(z_1, z_2, \cdots, z_n ; x, y) = \overset{*}{f_0}\,\overset{*}{\varphi}(z_1\overset{*}{f_1}, z_2\overset{*}{f_2}, \cdots, z_n\overset{*}{f_n})$$

et ψ est une fonction entière de $z_1, z_2, \cdots, z_n$. Ce théorème peut être étendu aux systèmes d'équations intégro–différentielles qu'on peut obtenir de la manière indiquée, de systèmes d'équations différentielles dont on connaît une solution. Considérons, par exemple, le système d'équations différentielles suivant formé avec les trois fonctions elliptiques *sn*, *cn*, *dn*:

$$\frac{d}{dz} sn\, z = cn\, z\, dn\, z ,$$

$$\frac{d}{dz} cn\, z = - sn\, z\, dn\, z ,$$

$$\frac{d}{dz} dn\, z = - k^2 sn\, z\, cn\, z .$$

En posant $\varphi_1 = \xi \, sn \, \xi z$, $\varphi_2 = \xi \, cn \, \xi z$, $\varphi_3 = \xi \, dn \, \xi z$ nous avons

$$\frac{d\varphi_1}{dz} = \varphi_2 \varphi_3 \quad , \quad \frac{d\varphi_2}{dz} = -\varphi_3 \varphi_1 \quad , \quad \frac{d\varphi_3}{dz} = -k^2 \varphi_1 \varphi_2 ;$$

les φ_i s'expriment à l'aide des séries de MACLAURIN

$$\varphi_1 = a_1 \xi^2 z + a_2 \xi^4 z^3 + \cdots$$
$$\varphi_2 = b_1 \xi + b_2 \xi^3 z^2 + \cdots$$
$$\varphi_3 = c_1 \xi + c_2 \xi^3 z^2 + \cdots$$

convergentes aux environs de $\xi = 0$, $z = 0$. Substituons maintenant $f(x, y)$ (fonction arbitraire) à la place de ξ et remplaçons les puissances ordinaires par des puissances de compositions; nous aurons au lieu des séries de MACLAURIN les séries suivantes

$$\varphi_1(z; x, y) = a_1 \overset{*}{f}{}^2 z + a_2 \overset{*}{f}{}^4 z^3 + \cdots$$
$$\varphi_2(z; x, y) = b_1 f + b_2 \overset{*}{f}{}^3 z^2 + \cdots$$
$$\varphi_3(z; x, y) = c_1 f + c_2 \overset{*}{f}{}^3 z^2 + \cdots$$

qui représentent trois fonctions entières de z et qui satisfont au système suivant d'équations intégro–différentielles

$$\frac{d\varphi_1}{dz} = \int_x^y \varphi_2(z; x, \xi) \, \varphi_3(z; \xi, y) \, d\xi ,$$

$$\frac{d\varphi_2}{dz} = -\int_x^y \varphi_3(z; x, \xi) \, \varphi_1(z; \xi, y) \, d\xi ,$$

$$\frac{d\varphi_3}{dz} = -k^2 \int_x^y \varphi_1(z; x, \xi) \, \varphi_2(z; \xi, y) \, d\xi .$$

14. Dans le calcul fonctionnel il y a lieu, en outre des équations du type intégral ou integro–différentiel, de considérer les *équations aux dérivées fonctionnelles*.

Un premier exemple de telles équations est fourni par la relation

$$(\alpha) \qquad F'[y(\overset{b}{\underset{a}{t}}); x] = \Phi[y(\overset{b}{\underset{a}{t}}); x]$$

où la fonction Φ est connue et F est la fonction cherchée. On peut démontrer que la condition nécessaire et suffisante pour que (α) soit intégrable est

$$\Phi'[y(\overset{b}{\underset{a}{t}}); x, \xi] = \Phi'[y(\overset{b}{\underset{a}{t}}); \xi, x],$$

ce qui est une condition analogue de celle qui exprime l'intégrabilité du système

$$\frac{\partial f(y_1, y_2, \cdots, y_n)}{\partial y_r} = \varphi_r(y_1, y_2, \cdots, y_n) \qquad (r = 1, 2, \cdots, n).$$

Si cette condition est satisfaite, (α) détermine la fonctionnelle (régulière) F à une constante près (valeur de F pour une fonction déterminée $y_0(t)$) et la solution s'écrit ([15], p. 43):

$$\mathrm{F}\left[y\left(\overset{b}{\underset{a}{t}}\right)\right] = \mathrm{F}\left[y_0\left(\overset{b}{\underset{a}{t}}\right)\right] + \int_{s_0}^{s} ds \int_a^b \Phi\left[\Theta\left(\overset{b}{\underset{a}{ts}}\right); x\right] \frac{\partial \Theta(xs)}{\partial s}\, dx,$$

où

$$\Theta(ts_0) = y_0(t) \quad , \quad \Theta(ts) = y(t).$$

Pour d'autres équations aux dérivées fonctionnelles l'intégrale générale contient, au lieu d'une constante, une fonctionnelle arbitraire. Par exemple, l'intégrale générale de l'équation de Mlle FREDA

$$\int_a^b \mathrm{F}'\left[y\left(\overset{b}{\underset{a}{t}}\right); x\right] y(x)\, dx = r\mathrm{F}\left[y\left(\overset{b}{\underset{a}{t}}\right)\right], \qquad (r \text{ nombre réel}),$$

équation qui est caractéristique pour les fonctionnelles régulières homogènes de degré r, peut être mise sous la forme

$$\Phi\left[\frac{y\left(\overset{b}{\underset{a}{t}}\right)}{\int_a^b y(z)\, dz}\right] \cdot \int_a^b \cdots \int_a^b f^{r_1}(\xi_1) \cdots f^{r_s}(\xi_s)\, d\xi_1 \cdots d\xi_s,$$

où Φ est une fonctionnelle arbitraire et $r_1 + r_2 + \cdots + r_s = r$ ([17], [18]).

On peut établir, entre les équations intégro-différentielles et entre les équations aux dérivées fonctionnelles, des relations analogues à celles qui existent entre les systèmes d'équations différentielles ordinaires et les équations aux dérivées partielles [19]. Nous nous bornerons à énoncer quelques résultats qui peuvent être considérés comme des extensions des théorèmes connus du calcul différentiel ordinaire.

La solution de l'équation intégro-différentielle

$$\frac{\partial y(x\xi)}{\partial x} = \mathrm{F}\left[y\left(\overset{b}{\underset{a}{xt}}\right); x, \xi\right]$$

est donnée par une équation du type

$$y(x\xi) = \psi(\xi) + \Phi\left[\psi\left(\overset{b}{\underset{a}{t}}\right); x, \xi\right]$$

(où ψ est une fonction arbitraire) qui, résolue par rapport à ψ, donne

$$\psi(\xi) = y(x\xi) + \Omega\left[y\left(\overset{b}{\underset{a}{xt}}\right); x, \xi\right].$$

Substituons à la place de $y(xt)$ une fonction (variable) $\varphi(t)$; une fonctionnelle (régulière) arbitraire Θ qui dépend des valeurs, dans l'intervalle (a, b), de la fonction

$$\vartheta(\xi) = \varphi(\xi) + \Omega\left[\varphi\left(\overset{b}{\underset{a}{t}}\right); x, \xi\right]$$

est une fonctionelle Λ de $\varphi(t)$ qui dépend encore du paramètre x et qui satisfait à l'équation aux dérivées fonctionnelles

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial x} + \int_a^b \Lambda' [\varphi(\overset{b}{\underset{a}{t}}); x, \xi] \, F [\varphi(\overset{b}{\underset{a}{t}}); x, \xi] \, d\xi = 0$$

(Λ' étant la dérivée fonctionnelle de Λ au point ξ), équation dont la solution dépendra par conséquent de celle d'une équation intégro-différentielle.

Considérons la fonctionnelle (régulière) $H[f(\overset{b}{\underset{a}{\xi}}); \varphi(\overset{b}{\underset{a}{\xi}}); t]$ qui dépend des fonctions f et φ ainsi que d'un paramètre t; soient

$$H'_f [f(\overset{b}{\underset{a}{\xi}}); \varphi(\overset{b}{\underset{a}{\xi}}); t, x] \quad \text{et} \quad H'_\varphi [f(\overset{b}{\underset{a}{\xi}}); \varphi(\overset{b}{\underset{a}{\xi}}); t, x]$$

ses dérivées fonctionnelles par rapport à f et à φ au point x. Pour le système d'équations intégro-différentielles

$$\frac{\partial q(tx)}{\partial t} = H'_p [q(t\overset{b}{\underset{a}{\xi}}); p(t\overset{b}{\underset{a}{\xi}}); t, x]$$

$$\frac{\partial p(tx)}{\partial t} = H'_q [q(t\overset{b}{\underset{a}{\xi}}); p(t\overset{b}{\underset{a}{\xi}}); t, x]$$

et pour l'équation aux dérivées fonctionnelles

$$\frac{\partial V[f(\overset{b}{\underset{a}{\xi}}); t]}{\partial t} + H[f(\overset{b}{\underset{a}{\xi}}); V'_f(\overset{b}{\underset{a}{\xi}}); t] = 0$$

(où $V'_f(\xi)$ est la dérivée, au point ξ, de la fonctionnelle V de f qui dépend encore du paramètre t) on peut établir un théorème analogue à celui de JACOBI-HAMILTON relatif aux systèmes canoniques dans le calcul différentiel ordinaire.

On peut étudier les équations aux dérivées fonctionnelles d'un ordre supérieur au premier; par exemple, des résultats intéressants ont été obtenus pour les équations aux dérivées fonctionnelles du second ordre linéaires [17].

Une intéressante équation aux dérivées fonctionnelles à été établie par M. HADAMARD [20] pour la fonction de GREEN qui donne la solution du problème de DIRICHLET relatif à une aire plane; cette fonction de GREEN est une fonctionnelle des fonctions qui déterminent le contour de l'aire en question; l'équation aux dérivées fonctionnelles que nous venons de rappeler donne une loi pour la variation subie par la fonction de Green qui correspond aux variations (infinitésimales) du contour.

15. On ne pourrait pas finir cet aperçu général sur les fonctionnelles sans consacrer un mot à une application qui en a été faite tout d'abord à la théorie des fonctions. Il n'est pas possible d'étendre le concept de monogénéité de CAUCHY à un espace à trois ou à plusieurs dimensions en ne consi-

dérant que des fonctions ordinaires d'une ou de plusieurs variables. Mais envisageons une fonctionnelle F dépendante de la forme et de la position d'une ligne fermée de l'espace à trois dimensions et du sens dans lequel on la parcourt. Supposons que deux lignes fermées aient une partie commune et que celle-ci soit parcourue en sens opposé suivant qu'on la regarde comme appartenant à l'une ou à l'autre. On peut envisager la ligne L que l'on obtient en retranchant la partie commune et en formant une ligne unique des deux parties résiduelles comme la somme des deux primitives L_1, L_2 et écrire

$$L = L_1 + L_2 .$$

Si la fonctionnelle F a la propriété additive, c'est-à-dire

$$F(L) = F(L_1) + F(L_2),$$

on dit qu'elle est de premier degré. Déplaçons infiniment peu en un point A un élément infiniment petit ds de la ligne en lui faisant parcourir une aire $d\sigma$ et soit dF la variation infiniment petite de F. Le rapport $dF/d\sigma$ ne dépend que de la position et de la direction de la normale à $d\sigma$. Or l'extension de la monogénéité s'obtient en supposant que, F étant complexe et Φ étant une autre fonctionnelle complexe analogue, le rapport $(d\Phi/d\sigma)/(dF/d\sigma) = d\Phi/dF$ soit une fonction du point A. Dans ce cas on dit que F et Φ sont isogènes. En séparant dans ces fonctionnelles les parties réelles des parties imaginaires on trouve des équations aux dérivées fonctionnelles, dont on aperçoit facilement l'analogie avec l'équation de LAPLACE rapportée à des coordonnées curvilignes sur des surfaces. On peut établir aussi des liaisons isogènes entre des fonctionnelles et des fonctions ordinaires. On tire de là une théorie des intégrales doubles des fonctions de deux variables complexes qui amène à l'extension du théorème de CAUCHY.

Cette théorie va bien au delà si l'on passe des domaines à trois dimensions aux domaines ayant un nombre plus grand de dimensions. Ces considérations sont nécessaires pour approfondir d'une manière complète l'étude des intégrales multiples car ces intégrales, étant étendues à des surfaces ou à des espaces ou à des hyperespaces, dépendent du contour du domaine d'intégration.

Il y a une autre manière d'étendre la théorie des fonctions en considérant des fonctions conjuguées dans les espaces à plusieurs dimensions.

Les divers chapitres sur la théorie des fonctionnelles que nous avons exposée ici d'une manière très sommaire se trouvent développés dans plusieurs Mémoires et ouvrages que j'ai publiés depuis 1887 jusqu'à ces derniers temps. Je citerai particulièrement mes Leçons de la Sorbonne de 1912 sur *les fonctions de lignes* [15] et ma *Theory of functionals* publiée en 1930 [21] où il y a une bibliographie très étendue sur le sujet. Ces travaux montrent, comme le montre aussi l'admirable volume de M. HADAMARD sur le calcul des variations [22], que ce calcul n'est qu'un chapitre de la théorie des fonctionnelles.

Dès mes premiers Mémoires j'ai tenu dans tous mes travaux à faire ressortir l'idée qui m'appartient du passage d'un nombre fini à un nombre infini de variables, idée qui m'a guidé et a engendré les méthodes que j'ai suivies. D'après cette idée directrice les problèmes de la théorie des fonctionnelles se ramènent aux problèmes de l'algèbre et du calcul infinitésimal. Il suffit de supposer que dans ceux-ci le nombre des variables croît infiniment. Cette idée m'a donné la clef pour la résolution des équations intégrales. Un grand nombre d'auteurs, après que j'ai développé mes méthodes et que j'en ai donné des applications, les ont employées. FREDHOLM dans son travail sur les équations intégrales et plus tard HILBERT les ont employées [23].

BIBLIOGRAPHIE.

Je ne donne pas ici une bibliographie du Calcul des variations. Je me borne à citer quelques uns des ouvrages et des mémoires que j'ai rappelés dans le cours de la première leçon. Il faut répéter ce que je viens de dire pour la bibliographie qui se trouve à la fin de la seconde leçon. Pour des bibliographies complètes je renvoie aux ouvrages spéciaux sur le calcul de variations et à la *Bibliographie du calcul des variations* (depuis les origines jusqu'à 1850; de 1850 à 1913) de MAURICE LECAT, Gand, Paris 1913–1916.

[1] *A History of the progress of the Calculus of Variations by* J. TODHUNTER, London 1861.

[2] NEWTON, *Philosophiae naturalis principia mathematica.* Lib. II, Prop. 34 Schol; a Catalogue of the Portsmouth Coll. of Isaac Newton. Cambridge 1888, p. XXII.

[3] JEAN BERNOULLI, *Acta Erud.*, 1697, *Opera Omnia Lausannae*, 1742, p. 187.

[4] JACQUES BERNOULLI, *Analysis magni problematis isoperimetrici.* Basileae 1701; *Opera Genevae*, 1744, T. II, p. 897.

[5] EULER, *Methodus inveniendi, etc.* Lausannae.

[6] LAGRANGE, *Leçons sur le Calcul des fonction; Théorie des fonctions analytiques.* « Oeuvres », T. IX, X.

[7] JACOBI, « Werke », Bd. IV, pp. 39–55; Bd. V, pp. 465–482, « Supplementband », pp. 43–50, 51–57, 143–156.

[8] WEIERSTRASS, « Werke », Bd. VII, Berlin 1927.

[9] PAUL LEVY, *Leçons d'analyse fonctionnelle.* Chapitre II. Paris 1922.

[10] DARBOUX, *Théorie des surfaces.* Vol. III, Livre 6ème. Paris 1894. KNESER: *Lehrbuch der Variationsrechnung*, Brunswick 1900.

[11] VOLTERRA, *Sopra un problema di elettrostatica*, « R. Acc. dei Lincei », vol. VIII, ser. 3a, Transunti, Roma 1884.

[12] HILBERT, *Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen.* Göttingen Nachrichten 1904–1910.

[13] VOLTERRA, *Sopra le funzioni che dipendono da altre funzioni; Sopra le funzioni dipendenti da linee.* « Rendiconti dell'Accademia dei Lincei », 1887, 2o sem., pp. 97, 141, 153, 225, 274.

[14] G. C. EVANS, « Rendiconti dell'Accademia dei Lincei » (5), VIII, 1911; (5) X, 1911; « Rendiconti del Circolo matem. di Palermo », 34, 1912.

[15] VOLTERRA, *Leçons sur les fonctions des lignes*, Chap. IX, § 16, Paris 1913.

[16] L. SCHLESINGER, « Comptes rendus de l'Ac. des Sciences », t. 154, 1914; « Jahresbericht des deutschen Math. Verein. », Bd. 24, 1915.

[17] VOLTERRA, *Sulle equazioni alle derivate funzionali*, « Rendiconti dell'Accademia dei Lincei », vol. XXIII, ser. 5a, 1o sem. 1915.

[18] FREDA, *Il teorema d'Eulero per le funzioni di linee omogenee*, « Rendiconti dell'Accademia dei Lincei », vol. XXIV, ser. 5ª, 1° sem. 1915.

[19] VOLTERRA, *Sulle equazioni integro-differenziali e le equazioni alle derivate funzionali* (« Rend. Acc. Lincei », vol. XXIII, ser. 5ª, 1° sem. 1914).

[20] HADAMARD, *Mémoire sur le problème d'analyse relatif à l'équilibre des plaques élastiques encastrées*. Mémoires présentés par divers savants à l'Académie des Sciences, volume XXXIII, Paris 1908.

[21] VOLTERRA, *Theory of functionals and of integral and integro-differential equations*. London e Glasgow, 1930.

[22] HADAMARD, *Leçons sur le calcul des variations*. Paris 1910.

[23] HILBERT, *Wesen und Ziele einer Analysis der unendlichvielen unabhängigen Variabeln*, « Rend. del Circolo Mat. di Palermo », T. XXVII, 1900.

SECONDE CONFÉRENCE

SOMMAIRE DE LA SECONDE CONFÉRENCE.

1\. Le problème de DIRICHLET. – 2. DIRICHLET, RIEMANN, WEIERSTRASS, NEUMANN, SCHWARZ, POINCARÉ, FREDHOLM. – 3. ARZELÀ, HILBERT et leurs continuateurs. – 4. TONELLI et la semicontinuité. Les vieilles et les nouvelles méthodes du calcul des variations. – 5. Semicontinuité des fonctionnelles inférieure et supérieure. Les méthodes nouvelles de TONELLI. – 6. La réduction des problèmes naturels à des problèmes de minima. Idées philosophiques de MAUPERTUIS, LAGRANGE, HAMILTON, JACOBI, GAUSS, HERTZ. – 7. Principes de l'action stationnaire et de l'action variée. Théorème de GREEN. – 8. Extension des équations canoniques aux problèmes généraux du calcul des variations même à plusieurs variables indépendantes. – 9. Extension du théorème de M. HOSTINSKÝ sur l'invariance des équations canoniques. – 10. Cas particulieurs. – 11. Extension de l'équation de JACOBI aux cas des intégrales multiples. – 12. Autres extensions des équations canoniques et du théorème de JACOBI. 13. – Équations des champs électromagnétiques. Réduction à des problèmes du calcul des variations. – 14. Concepts généraux de M. HOSTINSKÝ sur la transformation des équations de la physique mathématique. – 15. Le calcul des variations, le principe de HAMILTON et la Relativité.

1\. Nous allons examiner maintenant les rapports qui existent entre le calcul des variations et des questions de physique mathématique et de mécanique.

C'est par cette voie que nous pouvons parcourir plusieurs domaines même parmi les plus récents de ces sciences et voir en même temps le rôle que la théorie des fonctionnelles a joué dans l'évolution la plus récente du calcul des variations.

Nous commencerons par un problème très important de la physique mathématique, celui de DIRICHLET, que l'on peut regarder comme un problème typique, car dans un grand nombre de cas on tombe sur des questions analogues. Il est intéressant de remarquer que le principe de DIRICHLET est une question qui touche à la partie que l'on pourrait appeler logique de la physique mathématique. En effet ce principe sert à démontrer qu'il existe une fonction $V(x, y)$ continue, ayant des dérivées partielles du 1er et du 2me ordre, qui vérifie l'équation différentielle de LAPLACE

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0$$

et prenant sur la frontière d'un domaine à deux dimensions des valeurs données.

Si l'on a à faire à une fonction de trois variables, l'équation différentielle est

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

et le domaine est à trois dimensions.

On rencontre ce principe dans la théorie de l'équation de la chaleur, dans l'électricité, l'élasticité, etc. On le rencontre aussi dans l'analyse et dans la théorie des fonctions.

La démonstration du principe de DIRICHLET a été attaquée de plusieurs manières. On peut remplacer la question par la question suivante: Démontrer que parmi les fonctions continues V (x, y) qui prennent à la frontière du domaine Ω à deux dimensions les valeurs données et pour lesquelles l'intégrale

$$J = \int_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2\right] d\Omega$$

a un sens il y en a une pour laquelle cette intégrale est un minimum.

C'est ainsi que le problème de DIRICHLET devient un problème du calcul des variations. Si l'on cherche en effet l'équation d'EULER correspondante à ce cas, on trouve l'équation de LAPLACE.

2. Il est facile de remarquer que l'intégrale précédente est toujours positive ou nulle. DIRICHLET et RIEMANN avaient cru que cette remarque était suffisante pour démontrer l'existence du minimum. Mais WEIERSTRASS montra que cette manière de raisonner était complètement erronée et alors on chercha d'autres voies pour démontrer le principe de DIRICHLET.

On suivit des voies qui n'ont aucun rapport avec le calcul des variations. C'est la méthode de NEUMANN que plusieurs auteurs ont employée et ont étendue à beaucoup d'autres cas; les méthodes de SCHWARZ, celle de POINCARÉ du balayage, enfin les procédés fondés sur les équations intégrales, employés d'abord par FREDHOLM. Ceux derniers ont donné lieu à un nombre très grand de travaux et ont été d'une très grande fécondité.

3. Mais en même temps un courant se forma qui revint au vieux concept d'employer le calcul des variations. Ce fut d'abord ARZELÀ qui, en suivant les idées des fonctionnelles qui s'étaient développées peu à peu, chercha à donner une démonstration rigoureuse de l'existence du minimum sous certaines conditions. Les travaux définitifs d'ARZELÀ remontent à 1897 [1] quoique ses vues et ses études soient plus anciennes.

Plus tard en 1900 HILBERT [2] donna une démonstration complète et rigoureuse en obtenant un résultat définitif, ce qui n'avait pas été atteint par ARZELÀ. Mais c'est en suivant la voie frayée par celui-ci que HILBERT put réussir. De nombreux travaux de LEVI, FUBINI, LEBESGUE, ZAREMBA et autres vinrent après celui de HILBERT. Cependant une nouvelle voie générale ne fut découverte qu'après que l'on s'aperçut que la réussite des procédés employés était due à la propriété de l'intégrale J de posséder la semicontinuité.

4. Ce fut TONELLI qui, en envisageant les problèmes du calcul des variations comme des questions particulières de la théorie des fonctionnelles, mit

à la base du calcul des variations une nouvelle méthode fondée sur le concept de semicontinuité. De cette manière on peut dire que le calcul des variations n'est que le chapitre de la théorie des fonctionnelles limité de la manière suivante:

1° on ne regarde que des fonctionnelles qui sont exprimées par des intégrales définies;

2° on ne regarde que les problèmes de maxima et de minima de ces fonctionnelles.

La théorie des fonctionnelles reste ainsi bornée de deux côtés.

De cette manière le calcul des variations a été mis dans une voie toute nouvelle, dans laquelle on néglige les équations différentielles d'EULER et on considère directement la question.

En effet, dans beaucoup de cas la méthode des équations differentielles ne donne pas ce qu'on cherche. Dans l'emploi de cette méthode il faut:

1° obtenir les équations d'EULER;

2° déterminer les lignes ou surfaces qui vérifient ces équations et qui satisfont aux conditions aux limites, ou au moins démontrer que ces lignes et ces surfaces existent;

3° prouver que ces lignes donnent effectivement un maximum ou un minimum, c'est-à-dire satisfont aux conditions suffisantes pour donner lieu à des maxima et des minima et distinguer les uns des autres.

Or dans un grand nombre de cas, après que les équations d'Euler ont été obtenues, les autres questions sont d'une difficulté insurmontable ou, au moins, très grave. Nous l'avons vu dans l'exemple que nous venons de rappeler du problème de DIRICHLET. Dans beaucoup de cas, spécialement en mécanique et en physique mathématique, il est utile d'intervertir la question. Au lieu d'étudier les problèmes du calcul des variations en les ramenant à des équations différentielles, il est convenable de ramener des problèmes, qui se présentent au premier abord comme des problèmes des équations différentielles, à des problèmes du calcul des variations.

Cela a une importance que l'on peut dire philosophique, comme nous verrons tout à l'heure, et aussi une importance pratique.

Les nouvelles méthodes du calcul des variations ne sont pas seulement importantes au point de vue de ce calcul, mais elles ont aussi un grand intérêt pour l'étude des équations différentielles et des nombreux problèmes qui s'y rattachent. Elles donnent aussi un nouvel intérêt à la théorie des fonctionnelles.

5. Nous venons de parler de la semicontinuité. Il faut entrer dans quelques détails sur cette proprieté. Elle a été d'abord introduite dans l'étude des fonctions ordinaires et après elle pénétra dans la théorie des fonctionnelles dont l'intégrale J nous donne un exemple.

Ce fut BAIRE qui a introduit pour la première fois la semicontinuité pour les fonctions ordinaires. Une fonction d'un point est continue dans un certain domaine, si l'on peut la faire *changer* de si peu que l'on veut pourvu que le déplacement du point ne dépasse une certaine limite.

Une fonction est semicontinue inférieurement, si elle ne *diminue* pas ou diminue moins qu'une quantité aussi petite que l'on veut, pourvu que le déplacement du point soit inférieur à une certaine limite.

De même on définit des fonctions semicontinues supérieurement.

La semicontinuité supérieure et inférieure a été étendue aux fonctionnelles. Or cette extension a une importance beaucoup plus grande qu'on ne pouvait le penser au premier abord. En effet, tandis que pour les fonctions ordinaires la continuité est la propriété qui se présente habituellement, pour les fonctionnelles c'est au contraire la semicontinuité qui se présente le plus fréquemment. Cela dépend du fait, que nous avons déjà mis en évidence, qu'une ligne peut se rapprocher d'une autre sans que la forme de la première se rapproche de celle de la seconde. Nous avons dit en effet qu'il faut considérer pour les fonctions de ligne plusieurs sortes de continuité de différents ordres. Puisque les fonctions de lignes et de surfaces qui se présentent en général dans le calcul des variations jouissent de la semicontinuité supérieure ou inférieure, TONELLI plaça cette propriété à la base du calcul des variations.

D'autre part on peut démontrer que s'il existe une forme spéciale de la ligne pour laquelle la fonction de ligne est un maximum ou un minimum, la fonction de ligne doit être semicontinue par rapport à cette fonction spéciale.

Parmi les fonctions de lignes qui satisfont aux conditions de régularité il y en a qui possèdent une succession infinie de lignes pour lesquelles la fonctionnelle tend à sa limite supérieure ou à sa limite inférieure (succession maximisante ou succession minimisante). Or pour les fonctions de lignes régulières de cette sorte on peut établir une propriété fondamentale. Supposons que la fonction ait la semicontinuité inférieure et possède une succession minimisante, qui admet une ligne limite, alors on peut démontrer que le minimum existe. On a un théorème analogue pour le maximum. On peut ainsi démontrer l'existence de solutions d'un grand nombre de problèmes du calcul des variations. Les propriétés de ces solutions peuvent se tirer de la variation première.

Dès qu'on a démontré l'existence de la solution on peut la calculer de plusieurs manières, soit par des méthodes d'approximations successives, soit par des développements en série (série de FOURIER etc.). On trouve ainsi de nouvelles solutions des problèmes du calcul des variations et on retrouve aussi par une nouvelle voie celles déjà connues et obtenues par les vieilles méthodes.

C'est par là qu'un grand nombre d'équations différentielles et beaucoup de problèmes de mécanique ordinaire et de mécanique céleste trouvent de nouvelles solutions.

C'est M. TONELLI qui a développé ces méthodes dans plusieurs Mémoires et dans un ouvrage devenu classique en peu de temps [3].

6. La tendance à ramener les problèmes naturels à des problèmes de minimum a toujours existé, car on pense toujours que la nature dans ses mani-

festations tend à épargner le plus possible ce qu'elle dépense dans l'accomplissement des différents phénomènes.

Cette idée philosophique a guidé beaucoup de savants qui ont vérifié par exemple que certains problèmes d'optique amènent à des problèmes de minimum.

Cela a été le point de départ de MAUPERTUIS [4] qui dans un ouvrage fameux pensa établir un des principes fondamentaux de la nature, qu'il appela le principe de la moindre quantité d'action et qui était destiné à être pris comme base de la dynamique.

Le principe philosophique auquel s'attacha MAUPERTUIS fut que la nature agit toujours par les moyens les plus simples. En s'appuyant sur ce concept il chercha à tirer toutes les lois du mouvement et du repos d'un seul concept métaphysique. Descartes avait tenté de prendre comme point de départ le principe de la quantité de mouvement et LEIBNITZ celui des forces vives. MAUPERTUIS définit d'abord *la quantité d'action* et chercha à déduire les solutions des problèmes naturels du principe de la moindre action. Il en fit des applications au choc des corps durs et élastiques. Il rappelle dans son ouvrage le principe de FERMAT de la réfraction de la lumière en le mettant en rapport avec son principe.

Il est évident que le principe de MAUPERTUIS est beaucoup plus compréhensif que ceux de DESCARTES et LEIBNITZ, parce que ceux-ci ne donnent que des intégrales des équations de la dynamique, tandis que le principe de MAUPERTUIS est équivalent aux équations mêmes.

LAGRANGE mit la dynamique sur d'autres bases et démontra comme conséquence de ses équations le principe de la moindre action. Il fit rentrer ainsi la mécanique dans le calcul des variations qu'il avait contribué à créer.

Ce fut HAMILTON qui développa ensuite et fit progresser la question en établissant d'abord ce qu'on appelle le principe de HAMILTON ou de l'action stationnaire et en développant le principe de l'action variée [5].

Enfin JACOBI systématisa la théorie générale en arrivant à une équation qui a eu récemment une grande extension et qui se révèle de jour en jour d'une portée plus grande.

Tous ces principes peuvent s'étendre d'un côté aux questions générales du calcul des variations, même à celles qui sont en dehors de la mécanique, d'un autre côté elles peuvent s'étendre aux équations aux dérivées partielles de la physique mathématique et même aux équations intégro-différentielles, pourvu qu'on applique les méthodes de la théorie des fonctionnelles.

Toute cette histoire est très connue et courante et il n'est pas nécessaire que j'y insiste. Je désire mentionner seulement un autre principe qui s'énonce aussi comme un principe de minimum. C'est le principe de GAUSS du *moindre effort*. À ce principe se rattache une mécanique qui souleva beaucoup d'intérêt et qui eut de l'importance à un certain moment: la mécanique de HERTZ.

7. Quoique très connus, rappelons pour un instant ces différents principes et rappelons aussi certains théorèmes fondamentaux de la physique mathé-

matique. Nous montrerons que ces diverses théories peuvent être synthétisées dans les théories du calcul des variations.

1° *Principe de* HAMILTON. – T étant la force vive d'un système, P le potentiel des forces, on a que la variation dans le sens de LAGRANGE de l'intégrale

$$J = \int_{t_0}^{t_1} (T + P)\, dt$$

est nulle, si les variations des paramètres, qui définissent l'état du système, sont nulles aux temps extrêmes t_0 et t_1.

2° *Les équations canoniques.* – Si $q_1, q_2, \cdots, q_\nu$ sont les paramètres indépendants de LAGRANGE et si nous posons

$$\frac{\partial T}{\partial q'_i} = p_i$$

(variables de POISSON ou *moments du système*) et nous appelons (T) la force vive T exprimée par p_i et q_i en écrivant

$$H = (T) - P$$

on a les équations

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad , \quad \frac{dp_i}{dt} = - \frac{\partial H}{\partial q_i}.$$

Ce sont les *équations canoniques.*

3° *Le principe de l'action variée.* – Si nous regardons l'intégrale J comme fonction des valeurs $q_1, q_2, \cdots, q_\nu$ à la limite supérieure et de la limite supérieure t on a

$$\frac{\partial J}{\partial q_i} = p_i$$

et J $(t, q_1, \cdots, q_\nu)$ vérifie l'équation

$$\frac{\partial J}{\partial t} + H = 0,$$

où l'on a remplacé, dans H, $p_1, \cdots, p_\nu$ par

$$\frac{\partial J}{\partial q_1}, \cdots, \frac{\partial J}{\partial q_\nu}.$$

4° *Le principe de* JACOBI. – Si l'on a une intégrale complète V $(t, q_1, q_2, \cdots, q_\nu, a_1, \cdots, a_\nu)$, $a_1, \cdots, a_\nu$ étant des constantes arbitraires, qui vérifie l'équation

$$\frac{\partial V}{\partial t} + H\left(q_1, \cdots, q_\nu, \frac{\partial V}{\partial q_1}, \cdots, \frac{\partial V}{\partial q_\nu}, t\right) = 0$$

où l'on a remplacé $p_1, \cdots, p_\nu$ par $\partial V/\partial q_1, \cdots, \partial V/\partial q_\nu$ on aura les intégrales des équations canoniques données par les équations

$$\frac{\partial V}{\partial q_i} = p_i \quad , \quad \frac{\partial V}{\partial a_i} = b_i$$

où b_i sont de nouvelles constantes arbitraires.

5° *Le lemme et le théorème de* GREEN. – U, V étant deux fonctions obtenues en annulant la variation première de l'intégrale

$$J = \int_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y} \right)^2 \right] d\Omega ,$$

on a

lemme de GREEN
$$\int_{\sigma} \left(U \frac{\partial V}{\partial n} - V \frac{\partial U}{\partial n} \right) d\sigma = 0 ,$$

théorème de GREEN
$$4 \pi V = \int_{\sigma} \left(V \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} - \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial n} \right) d\sigma ,$$

σ étant la frontière du domaine Ω et n la normale interne à cette frontière.

L'intégration de l'*équation de* LAPLACE

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0$$

qui correspond à l'équation d'EULER pour le problème précédent du calcul des variations dépend donc du lemme et du théorème de GREEN et de l'existence de la fonction fondamentale $1/r$.

Il n'est pas sans intérêt, pour l'extension que nous allons en faire, de voir un théorème analogue à celui de GREEN correspondant aux problèmes du calcul des variations pour les intégrales simples.

Considérons

$$J = \int_{t_0}^{t_1} F \left(t, q, \frac{dq}{dt} \right) dt$$

et posons

$$dJ = 0 ;$$

on aura l'équation d'EULER

$$\frac{\partial F}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial q'} = 0 .$$

On aura aussi

$$\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial x'} = 0$$

si l'on remplace partout q par une autre solution x. En multipliant ces équations respectivement par x et q et en intégrant entre t_0 et t_1 on aura

$$\int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial F}{\partial q} x - \frac{\partial F}{\partial x} q \right) dt - \int_{t_0}^{t_1} \left(x \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial q'} - q \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial x'} \right) dt = 0$$

et par une intégration par parties

$$\int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial F}{\partial q} x - \frac{\partial F}{\partial x} q + \frac{\partial F}{\partial q'} x' - \frac{\partial F}{\partial x'} q' \right) dt = \left(x \frac{\partial F}{\partial q'} - q \frac{\partial F}{\partial x'} \right)_{t_0}^{t_1} .$$

Si l'on a identiquement

$$\frac{\partial F}{\partial q} x - \frac{\partial F}{\partial x} q + \frac{\partial F}{\partial q'} x' - \frac{\partial F}{\partial x'} q' = 0,$$

il viendra

$$\left(x \frac{\partial F}{\partial q'} - q \frac{\partial F}{\partial x'}\right)_{t_1} - \left(x \frac{\partial F}{\partial q'} - q \frac{\partial F}{\partial x'}\right)_{t_0} = 0.$$

En écrivant cette équation nous avons supposé que x, q, x', q' sont continus. Supposons x, q, q' continus entre t_0 et t_1 et supposons x' discontinu pour $t = \tau$, étant $t_0 < \tau < t_1$. On aura

(*b*) $$\left(x \frac{\partial F}{\partial q'} - q \frac{\partial F}{\partial x'}\right)_{t_1} - \left(x \frac{\partial F}{\partial q'} - q \frac{\partial F}{\partial x'}\right)_{t_0} = \vartheta q(\tau),$$

ϑ étant la différence des valeurs des limites de $\partial F/dx'$, lorsque t tend vers τ par des valeurs plus grandes et plus petites que τ.

De cette manière par la formule (*b*) on peut intégrer l'équation d'EULER relative à ce problème du calcul des variations en connaissant une solution qui a une discontinuité. C'est justement cette solution discontinue qui constitue la *solution fondamentale* [6].

8. Passons maintenant aux diverses extensions de ces différents principes et de ces différentes méthodes et propositions. Nous commencerons par considérer l'extension aux problèmes du calcul des variations les plus généraux.

JACOBI a montré que les équations différentielles que l'on trouve en égalant à zéro la première variation d'une intégrale simple peuvent se réduire à la forme canonique à laquelle HAMILTON avait réduit les équations de la dynamique. Nous allons prouver que toutes les équations différentielles qui découlent des problèmes du calcul des variations, se rapportant à des intégrales multiples, peuvent se mettre sous une forme commune qui correspond à la forme Hamiltonienne et qui se réduit à celle-ci dans le cas d'une seule variable indépendante [7].

Soient $y_1, y_2, \cdots, y_p$ des fonctions de n variables $x_1, x_2, \cdots, x_n$ et soit F une fonction de $x_1, x_2, \cdots, x_n$, de $y_1, y_2, \cdots, y_p$ et de leurs dérivées partielles. Nous pouvons supposer que $y_1, y_2, \cdots, y_p$ sont indépendantes ou qu'il y a des relations

(1) $$F_1 = 0, F_2 = 0, \cdots, F_r = 0$$

entre ces fonctions et leurs dérivées. Introduisons comme variables auxiliaires les dérivées partielles de $y_1, y_2, \cdots, y_p$ d'ordre inférieur à l'ordre maximum des dérivées qui paraissent dans F, F_1, $F_2, \cdots, F_r$. On indiquera l'ensemble des variables $y_1, y_2, \cdots, y_p$ et des variables auxiliaires par

$$z_1, z_2, \cdots, z_m.$$

Alors F sera une fonction de $x_1, x_2, \cdots, x_n$, de $z_1, z_2, \ldots, z_m$ et de leurs dérivées premières

$$\frac{\partial z_i}{\partial x_k} = z_k^{(i)}.$$

Entre toutes ces fonctions auront lieu les relations

$$F_1 = 0\,,\ F_2 = 0\,,\cdots,\ F_r = 0\,,\ F_{r+1} = 0\,,\cdots,\ F_s = 0$$

dont les r premières ne seront que les relations (1), les autres seront des équations linéaires entre les z_i et les $z_k^{(i)}$.

Nous voulons maintenant annuler la variation de

$$J = \int F\, dx_1\, dx_2 \cdots dx_n .$$

Posons

(1 *a*)
$$\Phi = F + \sum_1^s {}_i \lambda_i F_i\,;$$

on trouvera les équations

$$\sum_1^n {}_k \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial \Phi}{\partial z_k^{(i)}} - \frac{\partial \Phi}{\partial z_i} = 0 \qquad (i = 1,\cdots, m),$$

$$F_1 = 0\,,\ F_2 = 0\,,\cdots,\ F_s = 0 .$$

Si dans Φ manquent les $z_k^{(i)}$ excepté $z_{i_1}^{(i)}, z_{i_2}^{(i)},\cdots, z_{i_v}^{(i)}$, les équations précédentes s'écriront

(2)
$$\frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \frac{\partial \Phi}{\partial z_{i_1}^{(i)}} + \frac{\partial}{\partial x_{i_2}} \frac{\partial \Phi}{\partial z_{i_2}^{(i)}} + \cdots + \frac{\partial}{\partial x_{i_v}} \frac{\partial \Phi}{\partial z_{i_v}^{(i)}} = \frac{\partial \Phi}{\partial z_i} \qquad (i = 1, 2,\cdots, m)$$

(2 *a*)
$$F_1 = 0\,,\cdots,\ F_s = 0 .$$

Posons

(2 *b*)
$$\frac{\partial \Phi}{\partial z_{i_g}^{(i)}} = p_{i_g}^{(i)}, \qquad i = 1, 2,\cdots, m\,;\ g = 1, 2,\cdots, v,$$

et supposons que le système formé par ces équations et par les équations (2 *a*) puisse se résoudre par rapport aux quantités λ_k et $z_{i_g}^{(i)}$ et remplaçons les solutions que l'on obtient dans

(3)
$$H_1 = -H = \Phi - \sum_1^m {}_i \sum_1^v {}_g z_{i_g}^{(i)} p_{i_g}^{(i)} .$$

En effectuant la variation et en tenant compte des relations (2 *b*) on obtiendra

$$\sum_1^m {}_i \left(\frac{\partial H_1}{\partial z_i} \delta z_i + \sum_1^v {}_g \frac{\partial H_1}{\partial p_{i_g}^{(i)}} \delta p_{i_g}^{(i)} \right) = \sum_1^m {}_i \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z_i} \delta z_i - \sum_1^v {}_g z_{i_g}^{(i)} \delta p_{i_g}^{(i)} \right) .$$

d'où, en utilisant les équations (2), on tire les équations que l'on peut appeler canoniques

(4)
$$\sum_1^v {}_g \frac{\partial p_{i_g}^{(i)}}{\partial x_{i_g}} = \frac{\partial H_1}{\partial z_i}\ ,\quad \frac{\partial z_i}{\partial x_{i_g}} = -\frac{\partial H_1}{\partial p_{i_g}^{(i)}}\,, \qquad (i = 1, 2,\cdots, m;\, g = 1, 2,\cdots, v).$$

On peut démontrer la proposition réciproque c'est-à-dire que, si l'on a des équations de la forme précédente, on peut toujours les déduire d'un problème du calcul des variations. En effet on les trouve en annulant la variation de l'intégrale

$$\int \left(\sum_{1}^{m}{}_{i} z_i \sum_{1}^{v}{}_{g} \frac{\partial p_{i_g}^{(i)}}{\partial x_{i_g}} - \mathrm{H}_1 \right) dx_1 \cdots dx_n .$$

Reprenons les équations fondamentales (4) et supposons que nous avons deux solutions que nous indiquerons respectivement par z_i, $p_{i_g}^{(i)}$ et u_i, $q_{i_g}^{(i)}$. Soit S_n un domaine à n dimensions de l'espace $x_1, x_2, \cdots, x_n$ et S_{n-1} un domaine à $n-1$ dimensions qui en constitue la frontière. On obtient par des calculs très simples le théorème de réciprocité suivant

$$\int_{\mathrm{S}_{n-1}} \sum_{1}^{m}{}_{i} z_i \sum_{1}^{v}{}_{g} q_{i_g}^{(i)} \cos \nu\, x_{i_g}\, d\mathrm{S}_{n-1} - \int_{\mathrm{S}_{n-1}} \sum_{1}^{m}{}_{i} u_i \sum_{1}^{v}{}_{g} p_{i_g}^{(i)} \cos \nu\, x_{i_g}\, d\,\mathrm{S}_{n-1} =$$

$$= \int_{\mathrm{S}_n} \sum_{1}^{m}{}_{i} \left(u_i \frac{\partial \mathrm{H}_1}{\partial z_i} + \sum_{1}^{v}{}_{g} q_{i_g}^{(i)} \frac{\partial \mathrm{H}_1}{\partial p_{i_g}^{(i)}} \right) d\,\mathrm{S}_n - \int_{\mathrm{S}_n} \sum_{1}^{m}{}_{i} \left(z_i \frac{\partial \mathrm{H}_1}{\partial u_i} + \sum_{1}^{v}{}_{g} p_{i_g}^{(i)} \frac{\partial \mathrm{H}_1}{\partial q_{i_g}^{(i)}} \right) d\mathrm{S}_n$$

où ν est la normale à l'hyperespace S_{n-1} dirigée à l'intérieur de S_n. Cette proposition n'est que l'extension du théorème de GREEN. Si H est une fonction homogème de 2[ième] degré, le second membre est nul. On peut tirer de là, par exemple, le théorème de BETTI sur l'équilibre élastique.

Nous allons maintenant énoncer un théorème général qui donne des conditions de détermination des problèmes dont nous venons de nous occuper:

Soient Z_i, $\mathrm{P}_{i_g}^{(i)}$ des intégrales des équations (4) telles que les formes quadratiques

$$\Sigma_i \Sigma_k \frac{\partial^2 \mathrm{H}_1}{\partial \mathrm{Z}_i \partial \mathrm{Z}_k} \alpha_i \alpha_k \quad , \quad \Sigma_i \Sigma_k \frac{\partial^2 \mathrm{H}_1}{\partial \mathrm{P}_{i_g}^{(i)} \partial \mathrm{P}_{k_l}^{(k)}} \beta_{i_g} \beta_{k_l}$$

soient des formes définies ayant le signe contraire, alors toutes les intégrales z_i, $p_{i_g}^{(i)}$ qui dans le domaine S_n sont telles que

$$| z_i - \mathrm{Z}_i | < \lambda \ , \ | p_{i_g}^{(i)} - \mathrm{P}_{i_g}^{(i)} | < \mu, \qquad (i = 1, 2, \cdots, m ; g = 1, 2, \cdots, v)$$

λ et μ étant des quantités inférieures à une certaine limite déterminée, seront déterminées, si l'on connaît sur la frontière S_{n-1} les valeurs des z_i ou des sommes

$$\sum_{1}^{v}{}_{g} p_{i_g}^{(i)} \cos \nu\, x_{i_g} = \mathrm{P}_i .$$

9. Nous pouvons continuer l'extension que nous venons de faire au cas de plusieurs variables pour étudier la question de l'invariance. Nous suivrons à cet effet la voie tracée par M. HOSTINSKÝ [8].

Reprenons les équations (2) en supposant que les $\mathrm{F}_1, \mathrm{F}_2, \cdots, \mathrm{F}_s$ manquent, c'est-à-dire

$$\Phi = \mathrm{F},$$

et les mêmes équations deviennent

$$\Sigma_k \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial F}{\partial z_k^{(i)}} - \frac{\partial F}{\partial z_i} = 0 \qquad i = 1, 2, \cdots, p.$$

On aura

$$F = F(x_1, x_2, \cdots, x_n, z_1, z_2, \cdots, z_p, z_1^{(1)}, \cdots, z_n^{(p)})$$

et les équations précédentes seront obtenues de l'équation du calcul des variations $\delta J = 0$, où

$$J = \int\int_s \cdots \int F\, dx_1 \cdots dx_n .$$

Rapportons nous maintenant à des variables $u_1, u_2, \cdots, u_n$, en écrivant

$$x_i = x_i(u_1, u_2, \cdots, u_n)$$

et en supposant

$$D = \frac{d(x_1, \cdots, x_n)}{d(u_1, \cdots, u_n)} \gtrless 0.$$

Il viendra

$$\frac{\partial z_i}{\partial u_k} = \Sigma_g \frac{\partial z_i}{\partial x_g} \frac{\partial x_g}{\partial u_k}$$

d'où

$$z_g^{(i)} = \frac{\partial z_i}{\partial x_g} = \frac{\dfrac{d(x_1, \cdots, z_i, \cdots, x_n)}{d(u_1, u_2, \cdots, u_n)}}{\dfrac{d(x_1, \cdots, x_n)}{d(u_1, \cdots, u_n)}}.$$

Dans le numérateur du second membre on suppose avoir remplacé x_g par z_i. On trouve alors

$$F = F\left(z_1, z_2, \cdots, z_p, x_1, x_2, \cdots, x_n, \frac{\partial z_1}{\partial u_1}, \cdots, \frac{\partial z_p}{\partial u_n}, \frac{\partial x_1}{\partial u_1}, \cdots, \frac{\partial x_n}{\partial u_n}\right)$$

et si nous posons

$$x_1, \cdots, x_n = z_{p+1}, \cdots, z_{p+n}$$

on aura

$$F = \overline{F}\left(z_1, z_2, \cdots, z_{p+n}, \frac{\partial z_1}{\partial u_1}, \cdots, \frac{\partial z_{p+n}}{\partial u_n}\right),$$

$$J = \int\int_\Sigma \cdots \int \overline{F}\left(z_1, z_2, \cdots, z_{p+n}, \frac{\partial z_1}{\partial u_1}, \cdots, \frac{\partial z_{p+n}}{\partial u_n}\right) \left| \frac{d(z_{p+1}, \cdots, z_{p+n})}{d(u_1, \cdots, u_n)} \right| du_1 \cdots du_n$$

et en écrivant $\frac{\partial z_i}{\partial u_r} = \zeta_r^{(i)}$ on aura

$$\overline{F}(z_1, z_2, \cdots, z_{p+n}, \zeta_1^{(1)}, \zeta_2^{(1)}, \cdots, \zeta_n^{(p+n)}) \frac{d(z_{p+1}, \cdots, z_{p+n})}{d(u_1, \cdots, u_n)} =$$

$$= f(z_1, z_2, \cdots, z_{p+n}, \zeta_1^{(1)}, \zeta_2^{(1)}, \cdots, \zeta_n^{(p+n)}),$$

f étant une fonction homogène et de premier degré de

(5) $$\zeta_t^{(1)}, \zeta_t^{(2)}, \cdots, \zeta_t^{(p+n)}, \qquad (t = 1, 2, \cdots, n).$$

En effet chaque $z_g^{(i)}$ pourra s'écrire sous la forme

$$\frac{\dfrac{d(z_{i_1}, z_{i_2}, \cdots, z_{i_n})}{d(u_1, u_2, \cdots, u_n)}}{\dfrac{d(z_{p+1}, \cdots, z_{p+n})}{d(u_1, u_2, \cdots, u_n)}},$$

où $i_1, i_2, \cdots, i_n$ sont des nombres choisis parmi les nombres $1, 2, \cdots, p+n$. Donc chaque $z_g^{(i)}$ sera homogène et de degré zéro par rapport aux variables (5) et par suite F ainsi que $\overline{\mathrm{F}}$ seront homogènes et de degré zéro par rapport aux mêmes variables. Mais le déterminant

$$\frac{d(z_{p+1}, \cdots, z_{p+n})}{d(u_1, \cdots, u_n)}$$

est de premier degré, par rapport aux éléments d'une même ligne ou d'une même colonne, par conséquent f sera homogène et de premier degré.

C'est pourquoi

$$\sum_1^{p+n}{}_i \frac{\partial f}{\partial \zeta_g^{(i)}} \zeta_g^{(i)} = f.$$

D'autre part on a pour les propriétés bien connues des déterminants

$$\sum_1^{p+n}{}_i \zeta_g^{(i)} \frac{\partial}{\partial \zeta_g^{(i)}} \frac{d(z_{i_1}, z_{i_2}, \cdots, z_{i_n})}{d(u_1, u_2, \cdots, u_n)} = \sum_1^n{}_s \zeta_g^{(i_s)} \frac{\partial}{\partial \zeta_k^{(i_s)}}, \frac{d(z_{i_1}, z_{i_2}, \cdots, z_{i_n})}{d(u_1, u_2, \cdots, u_n)} = 0 \ (k \lesseqgtr g)$$

et par conséquent

$$\sum_1^{p+n}{}_i \frac{\partial f}{\partial \zeta_k^{(i)}} \zeta_g^{(i)} = 0 \qquad (k \lesseqgtr g).$$

Considérons maintenant le problème du calcul des variations

$$\delta \mathrm{J} = 0;$$

on trouvera les $p+n$ équations:

$$\frac{\partial f}{\partial z_i} - \sum_1^n{}_k \frac{\partial}{\partial u_k} \frac{\partial f}{\partial \zeta_k^{(i)}} = 0 \qquad (i = 1, 2, \cdots, p+n).$$

Ces équations ne sont pas indépendantes, car leurs premiers membres satisfont à n équations linéaires et homogènes, ayant le déterminant des coefficients différent de zéro.

En effet, écrivons

$$\sum_1^{p+n}{}_i \zeta_g^{(i)} \left[\frac{\partial f}{\partial z_i} - \sum_1^n{}_k \frac{\partial}{\partial u_k} \frac{\partial f}{\partial \zeta_k^{(i)}}\right] = \sum_1^{p+n}{}_i \left(\frac{\partial f}{\partial z_i} \zeta_g^{(i)} + \sum_1^n{}_k \frac{\partial f}{\partial \zeta_k^{(i)}} \frac{\partial \zeta_k^{(i)}}{\partial u_g}\right)$$

$$- \sum_1^{p+n}{}_i \left(\sum_1^n{}_k \frac{\partial f}{\partial \zeta_k^{(i)}} \frac{\partial \zeta_g^{(i)}}{\partial u_k} + \zeta_g^{(i)} \sum_1^n{}_k \frac{\partial}{\partial u_k} \frac{\partial f}{\partial \zeta_k^{(i)}}\right) = \frac{\partial f}{\partial u_g} - \sum_1^n{}_k \frac{\partial}{\partial u_k} \sum_1^{p+n}{}_i \frac{\partial f}{\partial \zeta_k^{(i)}} \zeta_g^{(i)} =$$

$$= \frac{\partial f}{\partial u_g} \frac{\partial}{\partial u_g} \sum_1^{p+n}{}_i \frac{\partial f}{\partial \zeta_g^{(i)}} \zeta_g^{(i)} = \frac{\partial f}{\partial u_g} - \frac{\partial f}{\partial u_g}.$$

On a donc identiquement les n relations linéaires et homogènes

$$\sum_{1}^{p+n}{}_i\, \zeta_g^{(i)} \left[\frac{\partial f}{\partial z_i} - \sum_{1}^{n}{}_k \frac{\partial}{\partial u_k} \frac{\partial f}{\partial \zeta_k^{(i)}}\right] = 0$$

et le déterminant des coefficients $\zeta_g^{(i)}$ n'est que le déterminant D qui n'est pas nul. Faisons maintenant la transformation

$$(6) \qquad \begin{cases} z_1 = \varphi_1 \ (Z_1, Z_2, \cdots, Z_{p+n}) \\ z_2 = \varphi_2 \ (Z_1, Z_2, \cdots, Z_{p+n}) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ z_{p+n} = \varphi_{p+n} (Z_1, Z_2, \cdots, Z_{p+n}). \end{cases}$$

Nous avons identiquement

$$f\left(z_1, z_2, \cdots, z_n, \frac{\partial z_1}{\partial u_1}, \cdots, \frac{\partial z_{p+n}}{\partial u_n}\right) = \Phi\left(Z_1, Z_2, \cdots, Z_n, \frac{\partial Z_1}{\partial u_1}, \cdots, \frac{\partial Z_{p+n}}{\partial u_n}\right).$$

f est une fonction homogène du premier degré de $\partial z_1/\partial u_k, \cdots, \partial z_{p+n}/\partial u_k$ et puisque les relations entre les $\partial z_i/\partial u_k$ et les $\partial Z_i/\partial u_k$ sont linéaires et homogènes on aura que Φ sera aussi homogène et du premier degré en $\partial Z_1/\partial u_k, \cdots \cdots, \partial Z_{p+n}/\partial u_k$.

En effectuant la variation on aura

$$\Sigma_i \frac{\partial f}{\partial z_i} \delta z_i + \Sigma_k \Sigma_i \frac{\partial f}{\delta \zeta_k^{(i)}} \delta \frac{\partial z_i}{\partial u_k} = \Sigma_i \frac{\partial \Phi}{\partial Z_i} \delta Z_i + \Sigma_k \Sigma_i \frac{\partial \Phi}{\partial Z_k^{(i)}} \delta \frac{\partial Z_i}{\partial u_k}$$

et en intégrant

$$\int\!\!\int_S \cdots \int \left(\Sigma_i \frac{\partial f}{\partial z_i} \delta z_i + \Sigma_k \Sigma_i \frac{\partial f}{\partial \zeta_k^{(i)}} \delta \frac{\partial z_i}{\partial u_i}\right) du_1\, du_2 \cdots du_n =$$

$$= \int\!\!\int_S \cdots \int \left(\Sigma_i \frac{\partial \Phi}{\partial Z_i} \delta Z_i + \Sigma_k \Sigma_i \frac{\partial \Phi}{\partial Z_k^{(i)}} \delta \frac{\partial Z_i}{\partial u_k}\right) du_1\, du_2 \cdots du_n$$

c'est-à-dire par des intégrations par parties si $\delta z_i = 0$ à la frontière de l'espace S

$$\int\!\!\int_S \cdots \int \Sigma_i \left(\frac{\partial f}{\partial z_i} - \Sigma_k \frac{\partial}{\partial u_k} \frac{\partial f}{\partial \zeta_k^{(i)}}\right) \delta z_i\, du_1\, du_2 \cdots du_n =$$

$$= \int\!\!\int_S \cdots \int \Sigma_i \left(\frac{\partial \Phi}{\partial Z_i} - \Sigma_k \frac{\partial}{\partial u_k} \frac{\partial \Phi}{\partial Z_k^{(i)}}\right) \delta Z_i\, du_1\, du_2 \cdots du_n =$$

$$= \int\!\!\int_S \cdots \int \Sigma_g \Sigma_i \frac{\partial \varphi_g}{\partial Z_i} \left(\frac{\partial f}{\partial z_g} - \Sigma_k \frac{\partial}{\partial u_k} \frac{\partial f}{\partial \zeta_k^{(g)}}\right) \delta Z_i\, du_1\, du_2 \cdots du_n.$$

On a donc identiquement en égalant les coefficients de δZ_i dans le second et le dernier membre des égalités précédentes

$$\frac{\partial \Phi}{\partial Z_i} - \Sigma_k \frac{\partial}{\partial u_k} \frac{\partial \Phi}{\partial Z_k^{(i)}} = \Sigma_g \frac{\partial \varphi_g}{\partial Z_i} \left(\frac{\partial f}{\partial z_g} - \Sigma_k \frac{\partial}{\partial u_k} \frac{\partial f}{\partial \zeta_k^{(g)}}\right).$$

Cela prouve que les équations

$$\frac{\partial f}{\partial z_g} - \Sigma_k \frac{\partial}{\partial u_k} \frac{\partial f}{\partial \zeta_k^{(g)}} = 0$$

ne changent pas de forme par la transformation [6] et par suite sont invariantes.

De cette manière le théorème de M. HOSTINSKÝ est étendu au cas de plusieurs variables indépendantes.

10. On a ainsi étendu aux problèmes les plus généraux du calcul des variations:

1° la forme canonique;

2° le théorème de GREEN et le théorème analogue de BETTI.

Particularisons les théorèmes généraux trouvés. Supposons d'abord qu'il y ait une seule variable indépendante x, alors les $z_k^{(i)}$ ne dépendront plus de l'indice k et l'on pourra écrire $z^{(i)}$.

De même les $p_{i_k}^{(i)}$ seront indépendants de l'indice i_k et on pourra les écrire $p^{(i)}$ de manière que les équations fondamentales deviendront

$$\frac{dp^{(i)}}{dx} = \frac{\partial H_1}{\partial z^{(i)}} \quad , \quad \frac{dz^{(i)}}{dx} = - \frac{\partial H_1}{\partial p^{(i)}}$$

qui sont les équations canoniques ordinaires.

Supposons que les fonctions $y_1, y_2, \cdots, y_p$ se réduisent à une seule z, les variables $x_1, x_2, \cdots, x_n$ à deux seules x_1 et x_2, $F_1 = 0, \cdots, F_s = 0$ soient des identités et

$$F = \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial z}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial x_2} \right)^2 \right\} = \frac{1}{2} (z_1^2 + z_2^2) ;$$

on aura

$$p_1 = z_1 \quad , \quad p_2 = z_2 ,$$

$$H_1 = \frac{1}{2} (z_1^2 + z_2^2) - p_1 z_1 - p_2 z_2 = - \frac{1}{2} (p_1^2 + p_2^2)$$

et les équations canoniques deviendront

$$- \frac{\partial p_1}{\partial x_1} - \frac{\partial p_2}{\partial x_2} = 0$$

$$p_1 = z_1 = \frac{\partial z}{\partial x_1} \quad , \quad p_2 = z_2 = \frac{\partial z}{\partial x_2}$$

donc

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2} = 0 .$$

Passons maintenant à la généralisation du principe de l'action variée. Pour cela il faut rappeler que dans le cas d'une intégrale simple on regarde cette intégrale comme dépendante des valeurs données aux paramètres aux limites de l'intégrale ainsi que des limites de l'intervalle d'intégration. Si l'on passe à une intégrale multiple, il faudra considérer l'intégrale comme dépendant du domaine d'intégration qui sera déterminé par sa frontière et des valeurs se rapportant aux fonctions inconnues données le long de cette frontière.

L'équation différentielle de JACOBI sera remplacée par une équation où paraîtront les dérivées fonctionnelles de l'intégrale faites par rapport à la frontière considérée comme un espace variable et par rapport aux fonctions données au contour. Elle sera une équation aux dérivées fonctionelles dont nous avons parlé dans la conférence précédente. Or on a depuis mes premiers travaux l'habitude de considérer des quantités comme dépendant de la frontière d'un certain domaine. Je rappellerai à ce propos les travaux de HADAMARD, LÉVY, HOSTINSKŶ sur les fonctions de GREEN regardées comme dépendant du contour du domaine où elles sont définies et ceux plus récents de KRALL relatifs à l'élasticité.

Je ne considérerai pas la question au point de vue plus général, mais je considérerai un cas particulier qui se rapporte au dernier exemple que nous avons envisagé et qui tout en étant bien simple indique la manière d'étendre au cas le plus général [7].

Revenons aux équations (4) en supposant que $F_1, F_2, \cdots, F_r$ manquent, que les $z_1, \cdots, z_m$ se réduisent à une seule z et les variables $x_1, x_2, \cdots, x_n$ se réduisent aux deux variables x_1, x_2. On aura alors

$$\Phi = F, \frac{\partial F}{\partial z_1} = p_1 \quad , \quad \frac{\partial F}{\partial z_2} = p_2 \quad , \quad H_1 = F - \frac{\partial z}{\partial x_1} p_1 - \frac{\partial z}{\partial x_2} p_2 ,$$

et les équations canoniques deviendront

$$\frac{\partial p_1}{\partial x_1} + \frac{\partial p_2}{\partial x_2} = \frac{\partial H_1}{\partial z}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x_1} = -\frac{\partial H_1}{\partial p_1} \quad , \quad \frac{\partial z}{\partial x_2} = -\frac{\partial H_1}{\partial p_2} .$$

Nous supposerons aussi que nous sommes dans le cas, envisagé précédemment, où les valeurs de z (comprises entre certaines limites) données au contour L de tout domaine σ dans une certaine région du plan x_1, x_2 determinent les fonctions z, p_1, p_2 à l'intérieur du même domaine. Soient $z = f(s)$ les valeurs de z données le long de la ligne fermée L, z, p_1 et p_2 seront des fonctions de x_1, x_2 déterminées dans σ. Formons

$$F = H_1 - p_1 \frac{\partial H_1}{\partial p_1} - p_2 \frac{\partial H_1}{\partial p_2}$$

et remplaçons dans cette expression z, p_1, p_2 par les fonctions précédentes. F sera une fonction de x_1 et x_2. Calculons

$$V = \int_\sigma \left(H_1 - p_1 \frac{\partial H_1}{\partial p_1} - p_2 \frac{\partial H_1}{\partial p_2}\right) dx_1\, dx_2 .$$

On obtiendra une quantité qui dépend de la ligne L et des valeurs $f(s)$ de z donnés sur cette ligne, c'est pourquoi nous pourrons écrire

$$V | (L, f) | .$$

Admettons que l'on modifie la ligne L en faisant parcourir à chacun de ses points un petit déplacement normal à la ligne même vers l'intérieur de σ. On pourra supposer que la valeur de f ne change pas par le déplacement. Le changement de V s'indiquera par

$$\delta V = \int_L V'_L(s)\, \delta n\, ds,$$

δn étant le déplacement. $V'_L(s)$ sera la dérivée fonctionnelle de V par rapport à la ligne L dans le point s.

Changeons maintenant f sans modifier la ligne L. On aura

$$\delta V = \int_\sigma \left(\frac{\partial H_1}{\partial z} \delta z + \frac{\partial H_1}{\partial p_1} \delta p_1 + \frac{\partial H_1}{\partial p_2} \delta p_2 - \frac{\partial H_1}{\partial p_1} \delta p_1 - \right.$$

$$\left. - \frac{\partial H_1}{\partial p_2} \delta p_2 - p_1 \delta \frac{\partial H_1}{\partial p_1} - p_2 \delta \frac{\partial H_1}{\partial p_2} \right) d\sigma = \int_\sigma \left(\frac{\partial H_1}{\partial z} \delta z + p_1 \delta \frac{\partial z}{\partial x_1} + p_2 \delta \frac{\partial z}{\partial x_2} \right) d\sigma =$$

$$= \int_L (p_1 \cos nx_1 + p_2 \cos nx_2)\, \delta z\, ds + \int_\sigma \left(\frac{\partial H_1}{\partial z} - \frac{\partial p_1}{\partial x_1} - \frac{\partial p_2}{\partial x_2} \right) \delta z\, d\sigma =$$

$$= \int_L (p_1 \cos nx_1 + p_2 \cos nx_2)\, \delta f\, ds,$$

donc on pourra écrire

$$V'_f(s) = p_1 \cos nx_1 + p_2 \cos nx_2,$$

n étant la normale à la ligne L.

Supposons que l'on change la ligne L en déplaçant ses points de δn vers l'intérieur de σ et en même temps changeons les valeurs de f sur la ligne en prenant les valeurs de z dans les points que la ligne L vient à occuper. On aura que le changement de V sera

$$\delta V = \int_L V'_L(s)\, \delta n\, ds + \int_L V'_f(s) \frac{\partial z}{\partial n} \delta n\, ds.$$

D'un autre côté par la définition de V on aura

$$\delta V = -\int_L \left(H_1 - p_1 \frac{\partial H_1}{\partial p_1} - p_2 \frac{\partial H_1}{\partial p_2} \right) \delta n\, ds,$$

c'est pourquoi

$$(7) \qquad V'_L(s) + V'_f(s)(z_1 \cos nx_1 + z_2 \cos nx_2) = -H_1 + p_1 \frac{\partial H_1}{\partial p_1} + p_2 \frac{\partial H_1}{\partial p_2}.$$

Or

$$z_1 \cos nx_2 - z_2 \cos nx_1 = \frac{df}{ds}$$

$$p_1 \cos nx_1 + p_2 \cos nx_2 = V'_f(s)$$

$$p_1 = \frac{\partial F}{\partial z_1}$$

$$p_2 = \frac{\partial F}{\partial z_2}.$$

Par ces équations on peut obtenir z_1, z_2, p_1, p_2 exprimées par df/ds, $V'_f(s)$ et en éliminant z_1, z_2, p_1, p_2 dans l'équation (7) on trouvera une équation de la forme

$$V'_L(s) + \varphi\left(V'_f(s), \frac{df(s)}{ds}, s, f(s)\right) = 0$$

qui corresponde à l'équation de Jacobi.

12. Il faut maintenant montrer que les extensions des principes dont nous avons parlé peuvent se faire aussi d'une infinité d'autres manières.

C'est ainsi que la première forme que j'ai donnée à l'extension de la théorie JACOBI–HAMILTON a été différente de celle dont je viens de parler [10]. Je rappelle que l'on peut constituer une branche de la théorie des fonctionnelles en considérant les fonctions spéciales de lignes que j'appelle du 1[er] degré (*).

Cette théorie a servi à deux extensions de la théorie classique des fonctions, l'une qui conduit aux fonctions que j'appelle isogènes par analogie à la monogénéité de CAUCHY, l'autre à la théorie des fonctions conjuguées qui donne lieu à de nouveaux invariants d'un type différent des invariants classiques.

Or de même que l'on a l'extension de la théorie JACOBI–HAMILTON, que je viens d'exposer, de même il y en a une autre qui se rattache à ces fonctions de lignes. J'en ai fait le sujet d'un travail qui a subi une grande extension de la part de M. FRÉCHET.

Proposons nous de faire évanouir la variation de l'intégrale double

$$\iint\left(\Sigma p_{ik}\frac{d(x_i, x_k)}{d(u, v)} - \mathrm{H}\right)du\,dv \qquad (i, k = 1, 2, 3);$$

on trouve les équations différentielles

$$\frac{d(x_i, x_k)}{d(u, v)} = \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial p_{ik}} \quad , \quad \Sigma\frac{d(p_{ik}, x_k)}{d(u, v)} = -\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial x_i},$$

où $\frac{d(x_i\, x_k)}{d(u, v)}$ sont des déterminants fonctionnels. Il est possible maintenant d'établir un théorème correspondant au théorème de JACOBI. Il est le suivant:

(*) Soit F [L] une fonctionnelle donnée d'une ligne L. Faisons varier, au voisinage du point $x = x_1$, $y = x_2$, $z = x_3$ la ligne L de telle manière qu'elle prenne la forme L_1 et qu'elle engendre par cette variation de L en L_1 une surface infinitésimale Σ. Nous supposons que les directions des normales menées à cette surface infinitésimale soient toutes infiniment peu différentes de la direction Ox. La limite du rapport $F[L_1] - F[L] : \Sigma$ quand Σ tend vers zéro tend vers une limite que nous représentons par

$$\frac{dF}{d(y, z)} = \frac{dF}{d(x_2, x_3)}$$

et qui s'appelle dérivée de F [L] par rapport au plan yz au point donné (x_1, x_2, x_3) (voir première leçon, § 15).

Prenons l'équation aux dérivées fonctionnelles

$$\mathrm{H}\left(\frac{d\mathrm{F}}{d(x_2, x_3)}, \frac{d\mathrm{F}}{d(x_3, x_1)}, \frac{d\mathrm{F}}{d(x_1, x_2)}, x_1, x_2, x_3\right) + h = 0$$

qu'on obtient en remplaçant, dans H, p_{ik} par $\frac{d\mathrm{F}}{d(x_i, x_k)}$. Les équations précédentes correspondent aux équations canoniques et la dernière équation aux dérivées fonctionnelles correspond à celle de JACOBI. Entre les deux passe la même relation que dans la théorie classique de JACOBI.

13. Nous avons vu les avantages que l'on a en ramenant un problème au calcul des variations. Nous allons maintenant en faire une application en obtenant les équations de l'électrodynamique par le calcul des variations. Puisque les équations que nous voulons trouver sont du premier ordre, on peut se poser la question préalable de trouver sous quelles conditions un problème du calcul des variations amène à des équations du premier ordre. C'est pourquoi nous commencerons par démontrer le théorème suivant [11]:

Soient $z_1, z_2, \cdots, z_m$ des fonctions des variables $x_1, x_2, \cdots, x_n$ et posons comme auparavant

$$z_i^{(s)} = \frac{\partial z_s}{\partial x_i}.$$

La condition nécessaire et suffisante pour que l'on trouve des équations du premier ordre en annulant la variation de

$$\mathrm{J} = \int \cdots \int \mathrm{F}(z_1, \cdots, z_m, z_1^{(1)}, \cdots, z_n^{(m)}, x_1, \cdots, x_n)\, dx_1 \cdots dx_n$$

est que

$$\mathrm{F} = \mathrm{F}_0 + \Sigma_i \Sigma_k \mathrm{F}_i z_i^{(k)} + \Sigma_i \Sigma_k \mathrm{F}_{i_1, i_2}^{k_1, k_2} \frac{d(z_{i_1}, z_{i_2})}{d(x_{k_1}, x_{k_2})} + \cdots$$
$$\cdots + \Sigma_i \Sigma_k \mathrm{F}_{i_1, i_2, \cdots, i_r}^{k_1, k_2, \cdots, k_r} \frac{d(z_{i_1}, z_{i_2}, \cdots, z_{i_r})}{d(x_{k_1}, x_{k_2}, \cdots, x_{k_r})},$$

où les $\mathrm{F}_{i_1, \cdots, i_r}^{k_1, \cdots, k_r}$ sont des fonctions de $x_1, \cdots, x_n$.

On voit tout de suite que cette condition est suffisante, et en effet on trouve les équations différentielles

$$\frac{\partial \mathrm{F}_0}{\partial z_i} - \Sigma_i \Sigma_k \frac{\partial \mathrm{F}_i^k}{\partial x_i} + \Sigma_r \Sigma_k \left(\frac{\partial \mathrm{F}_r^k}{\partial z_i} - \frac{\partial \mathrm{F}_i^k}{\partial z_r} - \Sigma_s \frac{\partial \mathrm{F}_{ir}^{sk}}{\partial x_s}\right) z_k^r + \cdots = 0.$$

Si nous voulons arriver aux équations de l'électrodynamique prenons comme fonctions inconnues (*)

$$z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6$$

(*) La voie que je tiens ici n'est au fond que celle que j'ai suivie en 1891 mais modifiée de telle sorte qu'on aboutit à la forme de MINKOWSKI pour les équations de l'électrodynamique.

et comme variables indépendantes

$$x_1\,,\, x_2\,,\, x_3\,,\, x_4$$

et écrivons les six fonctions inconnues sous la forme (où l'on suppose que, en intervertissant les indices, le terme change de signe):

$$z_1 = H_{12} = \overset{*}{H}_{34} \quad , \quad z_2 = H_{13} = \overset{*}{H}_{42} \quad , \quad z_3 = H_{14} = \overset{*}{H}_{23} \quad , \quad z_4 = H_{23} = \overset{*}{H}_{14}\ ,$$

$$z_5 = H_{34}\,\overset{*}{H}_{12} \quad , \quad z_6 = H_{42} = \overset{*}{H}_{13}\,,$$

c'est-à-dire, comme les six composantes d'un vecteur dans un espace à quatre dimensions.

Prenons F sous la forme

$$F = \sum_{1}^{4}{}_i \sum_{1}^{6}{}_k F_i^k \frac{\partial z_k}{\partial x_i}\,,$$

F_i étant des fonctions de $z_1, \cdots, z_6$. Pour obtenir les équations du champ éléctromagnétique il suffit de prendre

$$\begin{aligned} F = \frac{1}{2}\Big\{ & H_{23}\left(\frac{\partial H_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial H_{13}}{\partial x_3} + \frac{\partial H_{14}}{\partial x_4}\right) + H_{31}\left(\frac{\partial H_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial H_{23}}{\partial x_3} + \frac{\partial H_{24}}{\partial x_4}\right) \\ & + H_{12}\left(\frac{\partial H_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial H_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial H_{34}}{\partial x_4}\right) - \overset{*}{H}_{23}\left(\frac{\partial \overset{*}{H}_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \overset{*}{H}_{13}}{\partial x_3} + \frac{\partial \overset{*}{H}_{14}}{\partial x_4}\right) \\ & - \overset{*}{H}_{31}\left(\frac{\partial \overset{*}{H}_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \overset{*}{H}_{23}}{\partial x_3} + \frac{\partial \overset{*}{H}_{24}}{\partial x_4}\right) - \overset{*}{H}_{12}\left(\frac{\partial \overset{*}{H}_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial \overset{*}{H}_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial \overset{*}{H}_{34}}{\partial x_4}\right)\Big\} \end{aligned}$$

et la variation de

$$\iiiint F\, dx_1\, dx_2\, dx_3\, dx_4$$

sera en négligeant les termes aux limites

$$\begin{aligned} \iiiint \Big[& \delta H_{23}\left(\frac{\partial H_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial H_{13}}{\partial x_3} + \frac{\partial H_{14}}{\partial x_4}\right) + \delta H_{31}\left(\frac{\partial H_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial H_{23}}{\partial x_3} + \frac{\partial H_{24}}{\partial x_4}\right) \\ & + \delta H_{12}\left(\frac{\partial H_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial H_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial H_{34}}{\partial x_4}\right) - \delta \overset{*}{H}_{23}\left(\frac{\partial \overset{*}{H}_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \overset{*}{H}_{13}}{\partial x_3} + \frac{\partial \overset{*}{H}_{14}}{\partial x_4}\right) \\ & - \delta \overset{*}{H}_{31}\left(\frac{\partial \overset{*}{H}_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \overset{*}{H}_{23}}{\partial x_3} + \frac{\partial \overset{*}{H}_{24}}{\partial x_4}\right) - \delta \overset{*}{H}_{12}\left(\frac{\partial \overset{*}{H}_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial \overset{*}{H}_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial \overset{*}{H}_{34}}{\partial x_4}\right)\Big] dx_1\, dx_2\, dx_3\, dx_4 \end{aligned}$$

d'où l'on tire les équations

$$\frac{\partial H_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial H_{13}}{\partial x_3} + \frac{\partial H_{14}}{\partial x_4} = 0$$

$$\frac{\partial H_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial H_{23}}{\partial x_3} + \frac{\partial H_{24}}{\partial x_4} = 0$$

$$\frac{\partial H_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial H_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial H_{34}}{\partial x_4} = 0$$

et les équations analogues que l'on trouve en posant une étoile sur chaque lettre H. Ces équations auxquelles on peut ajouter

$$\frac{\partial H_{41}}{\partial x_1}+\frac{\partial H_{42}}{\partial x_2}+\frac{\partial H_{43}}{\partial x_3}=\rho(x_1, x_2, x_3)$$

ne sont que les équations de MAXWELL sous la forme que leur a donné MINKOWSKI [12]. Prenons en effet

$$x_4 = i\frac{ct}{\sqrt{\varepsilon\lambda}},$$

$$H_{12}=\sqrt{\lambda}\,L_3 \quad , \quad H_{13}=-\sqrt{\lambda}\,L_2 \quad , \quad H_{14}=-i\sqrt{\varepsilon}\,X_1 \quad , \quad H_{23}=\sqrt{\lambda}\,L_1 ,$$
$$H_{34}=-i\sqrt{\varepsilon}\,X_3 \quad , \quad H_{42}=i\sqrt{\varepsilon}\,X_2$$

et les équations précédentes deviendront

$$\frac{\partial L_3}{\partial x_2}-\frac{\partial L_2}{\partial x_3}=\frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial X_1}{\partial t} \qquad \frac{\partial X_2}{\partial x_3}-\frac{\partial X_3}{\partial x_2}=\frac{\lambda}{c}\frac{\partial L_1}{\partial t}$$
$$\frac{\partial L_1}{\partial x_3}-\frac{\partial L_3}{\partial x_2}=\frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial X_2}{\partial t} \qquad \frac{\partial X_3}{\partial x_1}-\frac{\partial X_1}{\partial x_3}=\frac{\lambda}{c}\frac{\partial L_2}{\partial t}$$
$$\frac{\partial L_2}{\partial x_1}-\frac{\partial L_1}{\partial x_2}=\frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial X_3}{\partial t} \qquad \frac{\partial X_1}{\partial x_2}-\frac{\partial X_2}{\partial x_1}=\frac{\lambda}{c}\frac{\partial L_3}{\partial t}$$

qui sont les équations de MAXWELL auxquelles on peut ajouter les équations

$$\frac{\partial X_1}{\partial x_1}+\frac{\partial X_2}{\partial x_2}+\frac{\partial X_3}{\partial x_3}=0$$
$$\frac{\partial L_1}{\partial x_1}+\frac{\partial L_2}{\partial x_2}+\frac{\partial L_3}{\partial x_3}=0 .$$

On pourrait envisager le cas d'anisotropie, mais alors il faudrait que les coefficients d'anisotropie électriques et magnétiques fussent proportionnels, mais on sait qu'il n'y a pas anisotropie magnétique, c'est pourquoi il faut revenir aussi au cas de l'isotropie électrique. On pourrait aussi considérer le cas d'un milieu conducteur.

Il est facile de voir que les considérations que nous avons développées auparavant se rapportant à la réduction à la forme canonique ne peuvent pas s'appliquer dans ce cas.

Mais nous pouvons procéder d'une manière différente si l'on veut ramener les équations de l'électrodynamique au calcul des variations en prenant des expressions symétriques par rapport aux quatre coordonnées $x_1, x_2, x_3, x_4 = ict/\sqrt{\varepsilon\lambda}$. Posons en effet

$$K_i=\sum_{i+1}^{i+3}{}_s\frac{\partial H_{is}}{\partial x_s} \quad , \quad \overset{*}{K}_i=\sum_{i+1}^{i+3}{}_s\frac{\partial \overset{*}{H}_{is}}{\partial x_s}, \qquad (i=1,2,3,4)$$

$$F=\frac{1}{2}\sum_1^4{}_i\sum_1^4{}_s(\overset{*}{H}_{si}K_s-H_{si}\overset{*}{K}_s)$$

$$I=\iiiint F\,dx_1\,dx_2\,dx_3\,dx_4 .$$

En faisant

$$\delta I=0,$$

on obtiendra les équations

$$\begin{aligned}
&K_1 + K_4 + \overset{*}{K}_3 + \overset{*}{K}_2 = 0,\\
&K_2 + K_1 - \overset{*}{K}_3 - \overset{*}{K}_4 = 0,\\
&K_3 + K_2 + \overset{*}{K}_1 + \overset{*}{K}_4 = 0,\\
&K_4 + K_3 - \overset{*}{K}_2 - \overset{*}{K}_1 = 0,\\
&K_2 - K_4 + \overset{*}{K}_3 - \overset{*}{K}_1 = 0,\\
&K_3 - K_1 + \overset{*}{K}_2 - \overset{*}{K}_4 = 0,
\end{aligned}$$

d'où l'on tire

$$3\,\overset{*}{K}_i + \overset{*}{K}_{i+1} - \overset{*}{K}_{i+2} + \overset{*}{K}_{i+3} = 0,$$

et enfin

$$\begin{aligned}
&\overset{*}{K}_1 = -\overset{*}{K}_2 = \overset{*}{K}_3 = -\overset{*}{K}_4,\\
&K_1 = -K_2 = K_3 = -K_4 .
\end{aligned}$$

Mais

$$\sum_1^4{}_i \frac{\partial K_i}{\partial x_i} = \sum_1^4{}_i \frac{\partial \overset{*}{K}_i}{\partial x_i} = 0$$

donc

$$\frac{\partial K_i}{\partial x_1} - \frac{\partial K_i}{\partial x_2} + \frac{\partial K_i}{\partial x_3} - \frac{\partial K_i}{\partial x_4} = 0$$

$$\frac{\partial \overset{*}{K}_i}{\partial x_1} - \frac{\partial \overset{*}{K}_i}{\partial x_2} + \frac{\partial \overset{*}{K}_i}{\partial x_3} - \frac{\partial \overset{*}{K}_i}{\partial x_4} = 0$$

et par suite

$$\begin{aligned}
&-K_{i+1} = K_i = f(x_1 - x_4\,, x_2 + x_4\,, x_3 - x_4)\\
&-\overset{*}{K}_{i+1} = \overset{*}{K}_i = \overset{*}{f}(x_1 - x_4\,, x_2 + x_4\,, x_3 - x_4)\,.
\end{aligned}$$

Si pour $x_4 = 0$, on a $f(x_1, x_2, x_3) = 0$, $\overset{*}{f}(x_1, x_2, x_3) = 0$ dans un certain domaine S on aura que les quatre K_i et les quatre $\overset{*}{K}_i$ seront nulles pour $x_4 = h$ quelconque dans tous les points du domaine qu'on déduit de S en augmentant les coordonnées x_1 et x_2 de h et en diminuant x_3 de h.

14. À ce point je désire exposer une remarque de la plus grande importance de M. HOSTINSKÝ qui donne un intérêt tout nouveau au résultats que je viens de vous présenter.

M. HOSTINSKÝ observe que dans ces derniers temps on a beaucoup écrit sur la forme invariante des équations de la physique mathématique, par exemple celles de MAXWELL. Or cette question est reliée étroitement à celle de déduire les équations différentielles d'un problème de calcul des variations. En effet l'ensemble de conditions qui exprime que la variation d'une certaine intégrale s'annule doit se transformer dans un ensemble de conditions analogues pour l'intégrale transformée obtenue en appliquant aux variables une transformation quelconque.

Tout cela se rattache à des calculs classiques. Par exemple on transforme l'équation de LAPLACE en coordonnées curvilignes en la considérant comme déduite du problème de calcul des variations dont nous nous sommes occupés précédemment.

M. HOSTINSKÝ a déja appliqué avec succés le même concept pour transformer les équations de la mécanique [8].

C'est à cause de cela que la réduction des équations de l'électrodynamique à un problème de calcul des variations peut être envisagé en tenant compte du concept de M. HOSTINSKÝ et il acquiert de cette manière un nouvel intérêt.

A ce propos je ne veux pas oublier d'ajouter une autre remarque qui placée à côté de celle de M. HOSTINSKÝ peut être utile dans beaucoup de cas.

J'ai montré que les problèmes du calcul des variations amènent à des formules dont celle de GREEN n'est qu'un cas très particulier. Or revenons à cette formule dans le cas le plus simple et le plus élémentaire de l'équation de LAPLACE. Elle s'écrit si U, V sont des fonctions régulières (voir § 7, 5°)

$$\int_\sigma \left(U\frac{\partial V}{\partial n} - V\frac{\partial U}{\partial n}\right)d\sigma + \int_S (U\Delta^2 V - V\Delta^2 U)\,dS = 0$$

σ étant la frontière du domaine à trois dimensions S et en prenant $U = 1$

$$\int_\sigma \frac{\partial V}{\partial n}\,d\sigma + \int_S \Delta^2 V\,dS = 0\,.$$

Le premier terme, si l'on prend des coordonnées curvilignes, se transforme immédiatement en conservant la forme d'une intégrale étendue à une surface, mais en employant le théorème de GAUSS on peut la réduire à une intégrale triple qui nous donne $\Delta^2 V$ en coordonnées curvilignes. J'ai employé un procédé analogue pour transformer les équations de l'équilibre en élasticité, et aussi pour transformer les équations de l'optique [13]. Il peut s'employer aussi en électrodynamique et on pourrait aussi l'employer dans beaucoup d'autres cas.

Je vais montrer quel avantage donne l'emploi de ces procédés.

Si l'on veut transformer $\Delta^2 V$ en se servant du ΔV on a l'avantage qu'on calcule sur des dérivées premières au lieu de calculer sur des dérivées secondes, mais on a à faire avec un paramètre différentiel quadratique. En se servant du $\partial V/\partial n$ on a toujours à faire avec des dérivées premières, mais en même temps avec une expression linéaire. On peut dire que les choses se présentent d'une manière analogue dans tous les autres cas de la physique mathématique.

15. Comme dernier point je vais montrer très rapidement la possibilité d'arriver à la relativité en partant du principe du calcul des variations que nous avons appelé le principe de HAMILTON.

Dans le cas d'un seul point en mouvement nous avons

$$T = \frac{1}{2} v^2 \qquad m = \text{masse} = 1\,,$$

P potentiel

et le principe de HAMILTON

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} L\, dt = 0$$

où $L = T + P$, les variations aux limites étant nulles.

Si l'on change les variables cartésiennes y_1, y_2, y_3 en x_1, x_2, x_3 par les équations

$$x_k = x_k(y_1, y_2, y_3, t) \quad , \quad y_k = y_k(x_1, x_2, x_3, t)\,,$$

on trouve les équations de LAGRANGE

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial x_i'} - \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0\,,$$

qui sont des équations invariantes.

L est constitué de trois tèrmes:

1° un terme de second dégré L_2 en x_1', x_2', x_3';

2° un terme de premier dégré L_1 dans ces quantités;

3° un terme L_0 indépendant de ces quantités.

En effet on aura

$$y_k' = \frac{\partial y_k}{\partial t} + \Sigma \frac{\partial y_k}{\partial x_i} x_i'$$

et remplaçant ces valeurs dans

$$\frac{1}{2}(y_1'^2 + y_2'^2 + y_3'^2)$$

on voit que les deux premiers termes se calculent immédiatement.

Le premier terme se trouvera en prenant

$$\frac{1}{2}(dy_1^2 + dy_2^2 + dy_3^2)$$

et, en posant

$$dy_k = \Sigma \frac{\partial y_k}{\partial x_i} dx_i\,,$$

on aura alors

$$dl_0^2 = (dy_1^2 + dy_2^2 + dy_3^2) = \Sigma\Sigma\, a_{ik}\, dx_i\, dx_k$$

et

$$L_2 = \frac{1}{2}\frac{dl_0^2}{dt^2}\,.$$

D'une manière analogue on peut obtenir les deux autres termes L_1, L_0.

Calculons

$$\frac{d}{dt}\left(L - \Sigma_i \frac{\partial L}{\partial x_i'} x_i'\right).$$

On trouvera

$$\frac{\partial L}{\partial t} + \Sigma \frac{\partial L}{\partial x_i} x_i' + \Sigma \frac{\partial L}{\partial x_i'} x_i'' - \Sigma \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial x_i'} x_i' - \Sigma \frac{\partial L}{\partial x_i'} x_i'' =$$

$$= \frac{\partial L}{\partial t} + \Sigma \left(\frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial x_i'} \right) x_i' = \frac{\partial L}{\partial t} .$$

Donc

$$\frac{d}{dt}\left(L - \Sigma_i \frac{\partial L}{\partial x_i'} x_i' \right) - \frac{\partial L}{\partial t} = 0 .$$

Proposons nous maintenant de calculer

$$\delta \int_{t_0}^{t} L\, dt$$

en supposant aussi t variable mais en supposant $\delta t = 0$ aux limites. On aura pour la part qui provient de la variation de t

$$\int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial L}{dt} \delta t + \Sigma \frac{\partial L}{\partial x_i'} \Delta x_i' + L \frac{\delta dt}{dt} \right) dt ,$$

où $\Delta x_i'$ est la variation de x_i' due à la variation de t.

Or

$$\Delta x_i' = \Delta \frac{dx_i}{dt} = - \frac{dx_i}{dt^2} \delta dt$$

par suite l'expression précédente deviendra

$$\int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial L}{\partial t} \delta t - \Sigma \frac{\partial L}{\partial x_i'} \frac{dx_i}{dt} \frac{\delta\, dt}{dt} + L \frac{\delta dt}{dt} \right) dt .$$

Mais par une intégration par parties

$$- \int_{t_0}^{t_1} \left(\Sigma \frac{\partial L}{\partial x_i'} x_i' \,\delta\, dt - L \delta\, dt \right) = \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt} \left(\Sigma \frac{\partial L}{\partial x_i'} x_i' - L \right) dt\, \delta t$$

donc on obtiendra

$$\int_{t_0}^{t_1} \left\{ \frac{\partial L}{\partial t} + \frac{d}{dt} \left(\Sigma \frac{\partial L}{\partial x_i} x_i' - L \right) \right\} dt\, \delta t = 0 .$$

On en tire que la variation δt ne produit aucun effet dans le calcul de

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} L\, dt .$$

C'est pourquoi on pourra considérer de la même manière les quatre variables x_1, x_2, x_3, t, c'est-à-dire on envisagera le phénomène dans un espace à quatre dimensions dont 3 sont des dimensions d'espace et une est le temps.

Alors la transformation la plus générale des quatre variables sera donnée par

$$x_1 = x_1(y_1, y_2, y_3, t)$$
$$x_2 = x_2(y_1, y_2, y_3, t)$$
$$x_3 = x_3(y_1, y_2, y_3, t)$$
$$x_0 = x_0(y_1, y_2, y_3, t).$$

On remplace la variable t par la variable x_0 et celle-ci s'appelle le temps local parce-qu'il dépend aussi des coordonnées d'espace y_1, y_2, y_3.

Pour une telle transformation L n'est plus un invariant. On peut se proposer le problème de chercher une forme qui s'approche de L et pour laquelle on ait ce caractère invariant. Alors on pourra dire que la réalité correspond à cette forme et que la forme L n'en est qu'une simple approximation.

A cet effet prenons une vitesse c telle que les nombres

$$\frac{v^2}{c^2} \quad , \quad \frac{P}{c^2}$$

soient négligeables par rapport à l'unité. On pourra prendre c = vitesse de la lumière $= 3 \cdot 10^5$ km/sec. Si nous prenons v de l'ordre de grandeur de la vitesse de la terre dans son orbite $3 \cdot 10$ km/sec on aura

$$\frac{v}{c} = 10^{-4} \quad , \quad \frac{v^2}{c^2} = 10^{-8}.$$

Puisque δt est nul aux limites de l'intégrale on pourra ajouter à L une constante arbitraire. C'est pourquoi on pourra considérer la variation de

$$\int_{t_0}^{t_1} (c^2 - L)\, dt = \int_{t_0}^{t_1} c^2 \left(1 - \frac{L}{c^2}\right) dt = \int_{t_0}^{t_1} c^2 \left(1 - \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} - \frac{P}{c^2}\right) dt.$$

Or si nous développons en série nous aurons

$$\sqrt{c^2 - v^2 - 2P} = c\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2} - \frac{2P}{c^2}} = c\left(1 - \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} - \frac{P}{c^2} + \cdots\right)$$

et en négligeant les termes que nous n'avons pas écrits comme infiniment petits nous pourrons remplacer la variation de l'intégrale précedente par

$$\delta \int \sqrt{c^2 - v^2 - 2P}\, dt = \delta \int \sqrt{(c^2 - 2P)\, dt^2 - dl_0^2}$$

et en posant

$$ds^2 = (c^2 - 2P)\, dt^2 - dl_0^2$$

il suffira de poser

$$\delta \int ds = 0.$$

Si nous changeons les quatre variables nous obtenons une forme quadratique

$$ds^2 = \Sigma_{i,k}\, g_{ik}\, dx_i\, dx_k.$$

Si

$$ds^2 = c^2\, dt^2 - dl_0^2$$

le mouvement est uniforme. Les transformations qui conservent cette forme sont les transformations de LORENTZ.

La méthode précédente pour arriver à la relativité est due à M. LEVI-CIVITA [14].

BIBLIOGRAPHIE.

[1] ARZELÀ, *Sul principio di Dirichlet*, « R. Acc. delle Scienze dell'Istituto di Bologna », vol. I, 1896–97.

[2] HILBERT, *Über das Dirichletsche Prinzip*, « Jahresbericht Deutsch. Math. Verein », 1900; *Festschr. Feier 150-jahr. Best. K. Ges. Wiss.*, Göttingen 1901.

[3] TONELLI, *Fondamenti di Calcolo delle Variazioni*, Bologna 1921–23.

[4] MAUPERTUIS, *Accord des différentes lois de la nature*, « Mém. de l'Acad. des Sciences de Paris », 1744; *Essay de Cosmologie*, Leide 1751; *Oeuvres*, Lyon 1756, T. IV, p. 3.

[5] HAMILTON, *General method in dynamics by which the study of the motions of all free systems of points is reduced to the search and differentiation of one central relation*, « Philosophical Transactions », 1834–1835.

[6] Voir aussi: BURKHARDT, *Sur les fonctions de Green relatives à un domaine d'une seule dimension*, « Bulletin de la Soc. Math. de France », T. XXII, 1894.

[7] VOLTERRA, *Sulle equazioni differenziali che provengono da questioni di calcolo delle variazioni*. « Rend. Lincei », vol. VI, 1° sem. 1890.

[8] HOSTINSKÝ, *Sur les transformations des équations de la mécanique*, « Bulletin des Sciences math. » 2^me^ série, t. 48, 1924.

[9] VOLTERRA, *Leçons sur les fonctions de lignes* (Paris 1913), p. 57.

[10] VOLTERRA, *Sopra una estensione della teoria Jacobi-Hamilton del calcolo delle variazioni*, « Rend. Acc. dei Lincei », vol. VI, 1890, 1° sem.

[11] VOLTERRA, *Sopra le equazioni fondamentali della elettro-dinamica*, « Rend. Lincei », vol. VII, 1° sem., 1891; « N. Cimento », ser. III, vol. XXIX, 1891.

[12] MINKOWSKI, *Die Grundgleichungen für die elektromagnetische Vorgänge in bewegten Körpern*, « Göttingen Nachr. », 1908, p. 53; *Gesammelte Abhandlungen*, Bd. II, p. 352.

[13] VOLTERRA, *Sur les vibrations lumineuses dans les milieux biréfringents*, « Acta Math. », T. 16, 1892, Art. 1°, § 6, p. 165.

[14] LEVI-CIVITA, « Rend. Sem. Mat. », Roma 1920; *Fondamenti di meccanica relativistica*, Bologna 1928.

XII.

SUR LES JETS LIQUIDES (*)

« Journal de Math. pures et appliquées », tome XI, 1932; pp. 1-35.

CHAPITRE I.

Considérations générales. Les méthodes du problème plan.

1. L'étude des jets liquides constitue un problème déjà ancien dans l'hydrodynamique classique.

Nous dirons en général qu'il y a *jet liquide* lorsque, un liquide étant en mouvement stationnaire, une partie de la frontière qui le limite le sépare, soit d'une partie vide de l'espace, soit d'un fluide (gaz ou liquide) au repos. Cette partie de la frontière constitue la *frontière libre* du liquide, tandis que celle qui est limitée par des parois rigides sera la *frontière rigide*. Nous pourrons aussi avoir à considérer les surfaces par lesquelles le liquide *entre* dans la région où l'on étudie plus spécialement son mouvement, ou par lesquelles il sort de la même région.

Le *voile* liquide adhérant aux frontières libres ou rigides sera - le mouvement étant stationnaire - constitué de lignes de courant.

2. Nous supposerons que le liquide est parfait et incompressible et que, de plus, son mouvement est irrotationnel. Il existera alors un potentiel des vitesses V vérifiant l'équation de LAPLACE

$$\Delta_2 V \equiv \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0. \tag{1}$$

(*) J'ai obtenu la plupart des résultats dans ce travail dans l'automne 1922. En 1923 je les ai communiqués au Congrès de Liverpool de la British Association et je les ai résumés dans une courte Note parue dans les «Comptes rendus» [nel volume IV delle «Opere», XXII, pp. 520-522]. Le présent Mémoire a formé le sujet d'un Cours que j'ai tenu à l'Université de Rome en 1926 et de Conférences que j'ai faites à Cluj en 1929 et à l'Institut Henri Poincaré en 1930. C'est ainsi qu'il a été plusieurs fois remanié tout en restant inédit. M. J. PÉRÈS l'a maintenant rédigé d'après les papiers que je lui ai donnés. Je tiens à lui exprimer ma plus sincère reconnaissance. Je remercie aussi M. PÉRÈS d'avoir ajouté au Chapitre III le paragraphe 4 pour éclaircir un point délicat.

Soient Π le potentiel des forces de masse, p la pression, μ la densité du liquide. Posant

$$P = \Pi - \frac{p}{\mu},$$

on aura

$$\nabla V = \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2 = 2P + h, \tag{2}$$

où h est une constante.

Examinons maintenant les conditions aux limites. Sur une frontière, libre ou rigide, nous aurons

$$\frac{dV}{dn} = 0, \tag{3}$$

la dérivée étant prise suivant la normale n à cette frontière. Par contre, si nous prenons normales aux lignes de courant les surfaces par lesquelles entre ou sort le liquide, nous aurons sur elles

$$V = \text{const}.$$

Soit enfin une frontière libre suivant laquelle le liquide est au contact avec un fluide en repos soumis aux mêmes forces de masse. On aura sur cette frontière

$$0 = 2\left(\Pi - \frac{p}{\mu'}\right) + h', \tag{2'}$$

avec la même valeur p de la pression (puisque les pressions des deux côtés de la surface doivent être égales), h' étant une nouvelle constante et μ' la densité du fluide en repos. On en déduit, sur la frontière en question,

$$2P + h = 2\Pi\left(1 - \frac{\mu'}{\mu}\right) + k, \tag{4}$$

k désignant encore une constante. Si la frontière libre sépare le liquide d'un espace vide, la formule précédente s'appliquera encore avec $\mu' = 0$.

Si le fluide en repos est le même que le liquide en mouvement (la frontière libre étant alors surface de discontinuité) on a $\mu = \mu'$ et dans ce cas $2P + h$ se réduit à une constante. De même lorsque l'on pourra négliger les forces de masse. Dans l'un et l'autre cas, d'après (2), le fluide en mouvement a une vitesse constante sur la frontière libre.

En résumé *le gradient du potentiel des vitesses* (vitesse du fluide), *qui est un vecteur tangent tant aux frontières libres qu'aux frontières rigides, aura une longueur variable sur les dernières, mais* (lorsque $\mu = \mu'$ ou bien Π négligeable) *constante sur les premières.*

3. C'est dans les deux cas précédents, et en admettant de plus le mouvement parallèle à un plan fixe, que l'on a étudié jusqu'à présent le problème des jets liquides car on a pu ainsi y appliquer la théorie des fonctions analytiques et de la représentation conforme.

Si, en effet, le plan fixe est le plan des xy, $\partial V/\partial z$ sera nul et V dépendra seulement de x et de y. A cause de (1) ce sera la partie réelle $f_1(x, y)$ d'une fonction analytique

$$f(x+iy) = f_1 + if_2.$$

En posant

$$\frac{df(x+iy)}{d(x+iy)} = f'(x+iy) = \frac{\partial V}{\partial x} - i\frac{\partial V}{\partial y},$$

il viendra

$$\nabla V = (\operatorname{mod} f')^2.$$

Soit enfin

$$\frac{d(x+iy)}{df(x+iy)} = \frac{1}{f'} = \varphi_1 + i\varphi_2,$$

et considérons f_1, f_2 ; φ_1, φ_2 comme coordonnées des points de deux plans (f et φ) qui sont évidemment en représentation conforme avec le plan xy et entre eux. Dans le plan f frontière libre et frontière rigide correspondent à des droites $f_2 = \text{const}$. Sur la frontière libre on a

$$\varphi_1^2 + \varphi_2^2 = \frac{1}{\nabla V} = \text{const.},$$

de sorte que cette frontière a pour image dans le plan φ un arc de cercle ayant pour centre l'origine.

Prenons alors dans le plan φ une aire limitée par deux arcs de cercle, l'un ayant son centre à l'origine, et dans le plan f une bande comprise entre deux droites parallèles à l'axe f_1. Représentons-les conformément l'une sur l'autre au moyen de la fonction

$$\varphi_1 + i\varphi_2 = F(f_1 + if_2).$$

L'équation différentielle

$$\frac{d(x+iy)}{d(f_1+if_2)} = F(f_1+if_2)$$

donnera, par quadrature,

$$x + iy = \int F(f_1+if_2)\, d(f_1+if_2)$$

et, par inversion de cette relation,

$$f_1 + if_2 = \Phi(x+iy),$$

dont la partie réelle sera

$$V = f_1 = f_1(x, y)$$

et définit un jet liquide, suivant les définitions précédentes.

4. La méthode indirecte qui vient d'être indiquée remonte dans ses lignes essentielles à HELMHOLTZ. Elle a pris un grand développement et son champ d'application a été très étendu par les travaux de KIRCHOFF, Lord RAYLEIGH, LEVI-CIVITA, VILLAT, BRILLOUIN, CISOTTI et leurs élèves. Elle

reste pourtant limitée à l'étude des mouvements plans puisque, dans les autres cas, le potentiel des vitesses n'est plus partie réelle d'une fonction analytique et que l'on doit alors renoncer à utiliser les méthodes de la théorie des fonctions et de la représentation conforme. Elle s'applique d'ailleurs aux seuls cas ($\mu = \mu'$, Π négligeable) où la vitesse est constante sur la frontière libre.

Notons enfin que si l'on peut obtenir ainsi de nombreux exemples de jets liquides, on ne peut, sans rencontrer des difficultés qui ne sont pas entièrement résolues, se donner *a priori* des conditions relatives à la forme de la frontière libre et de la frontière rigide: il faut prendre l'une et l'autre telles que les donnera le calcul.

CHAPITRE II.

Étude du cas général.

1. Nous venons d'indiquer que, pour aborder le cas général, il faut abandonner les méthodes précédentes et en mettre en jeu d'autres fondées sur de nouveaux principes. J'en indiquerai une qui permet de considérer des jets liquides lorsque le mouvement n'est pas plan et en évitant les autres restrictions précédentes.

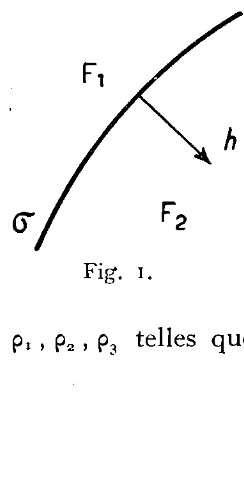


Fig. 1.

2. Soit σ la surface de séparation de deux fluides F_1 et F_2, F_1 étant au repos, F_2 incompressible et en mouvement stationnaire irrotationnel. Soit V le potentiel des vitesses de ce mouvement. On aura les équations précédentes (1), (2), (3) et (4).

Prenons des coordonnées curvilignes orthogonales ρ_1, ρ_2, ρ_3 telles que l'équation de σ soit

$$\rho_3 = \rho_0 = \text{const.},$$

l'élément linéaire de l'espace étant

$$ds^2 = H_1^2 d\rho_1^2 + H_2^2 d\rho_2^2 + H_3^2 d\rho_3^2\,;$$

sur σ il viendra, à cause de (2) et (3),

$$\nabla V = \frac{1}{H_1^2}\left(\frac{\partial V}{\partial \rho_1}\right)^2 + \frac{1}{H_2^2}\left(\frac{\partial V}{\partial \rho_2}\right)^2 = 2P + h, \tag{5}$$

$$\frac{\partial V}{\partial \rho_3} = 0, \tag{6}$$

et, d'aprés (4), P sera fonction *connue* de ρ_1 et ρ_2 si l'on connaît les densités et le potentiel des forces de masse [2].

(2) Dans toute la suite c'est donc l'équation (4) qui définit P sur la frontière libre σ.

3. Supposons que nous sachions intégrer l'équation différentielle (5) et soit $\nu_0(\rho_1, \rho_2)$ une fonction qui satisfait cette équation. Le potentiel des vitesses correspondant $V(\rho_1, \rho_2, \rho_3)$ sera, s'il existe, bien déterminé par les deux équations qu'il doit vérifier sur σ:

$$V = \nu_0(\rho_1, \rho_2), \tag{7}$$

$$\frac{\partial V}{\partial \rho_3} = 0. \tag{8}$$

C'est en effet une fonction harmonique, et une fonction harmonique est bien définie par ses valeurs et celles de sa dérivée normale, supposées *connues* sur une portion de surface (3).

Sinon, en effet, on pourrait trouver une fonction harmonique V non identiquement nulle et s'annulant ainsi que sa dérivée normale sur une portion de surface, soit σ_1. Mais complétons alors σ_1 par une autre portion de surface σ_2, sans sortir du domaine de régularité de V et de telle sorte que l'ensemble σ_1 et σ_2 forme une surface fermée. Puis appliquons la formule de GREEN. L'intégrale

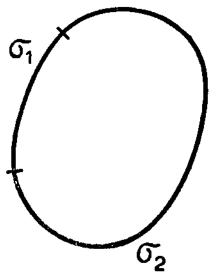


Fig. 2.

$$\frac{1}{4\pi}\int_{\sigma_1+\sigma_2}\left(V\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} - \frac{\partial V}{\partial n}\frac{1}{r}\right)d\sigma$$

est nulle, ou est égale à V, suivant que l'origine des distances r est extérieure, ou intérieure, au volume limité par $\sigma_1 + \sigma_2$. Puisque V et $\partial V/\partial n$ sont nulles sur σ_1 l'intégrale précédente se réduit à l'intégrale analogue prise suivant σ_2; elle représente alors une fonction qui reste régulière quand on traverse σ_1 et qui, étant identiquement nulle à l'extérieur de la surface considérée, est aussi identiquement nulle à l'intérieur.

4. Le numéro précédent esquisse la marche à suivre pour la détermination des jets liquides ayant σ pour contour libre. Mais divers points restent à préciser.

Le mouvement du liquide sera détéminé dans un voisinage de σ, c'est-à-dire dans une région de l'espace suffisamment proche de σ. Mais on peut se demander si existera toujours ce voisinage dans lequel a lieu le mouvement. Sous certaines conditions nous pouvons être assurés de son exisstence.

Supposons que la surface σ soit une surface analytique et que P soit également une fonction analytique. Dans ces conditions les théorèmes généraux sur l'existence des intégrales des équations aux dérivées partielles s'ap-

(3) Cette proposition est bien connue, j'en donne ici la démonstration très élégante due à M. ALMANSI (voir ALMANSI, *Un teorema sulle deformazioni elastiche dei solidi isotropi*, « Rend. R. Acc. dei Lincei », 1er semestre 1907).

pliquent et nous permettent d'affirmer l'existence d'une solution (unique d'après ce qui précède) de l'équation de LAPLACE

$$(1') \qquad \frac{\partial}{\partial\rho_1}\left(\frac{H_2 H_3}{H_1}\frac{\partial V}{\partial\rho_1}\right)+\frac{\partial}{\partial\rho_2}\left(\frac{H_3 H_1}{H_2}\frac{\partial V}{\partial\rho_2}\right)+\frac{\partial}{\partial\rho_3}\left(\frac{H_1 H_2}{H_3}\frac{\partial V}{\partial\rho_3}\right)=0,$$

fonction analytique satisfaisant sur σ les conditions précédentes (7) et (8) [sous réserve peut-être de remplacer σ par une portion de σ convenablement choisie].

Dans ces conditions *il existe donc un jet liquide ayant pour contour libre* σ *ou une partie de* σ. Il restera à chercher le contour rigide et à préciser les surfaces d'entrée et de sortie du liquide.

5. Pour déterminer V, connaissant ν_0, la marche la plus immédiate consiste à prendre V sous forme de série de TAYLOR:

$$(9) \qquad V=\nu_0(\rho_1,\rho_2)+\rho\nu_1(\rho_1,\rho_2)+\cdots+\frac{\rho^n}{n!}\nu_n(\rho_1,\rho_2)+\cdots$$

avec $\rho=\rho_3-\rho_0$. ν_1 sera nul et les coefficients suivants s'obtiendront les uns après les autres au moyen de (1'). D'après ce que nous venons de voir il existera une portion de σ et un voisinage correspondant où la série (9) sera convergente et vérifiera les conditions posées. Nous sommes sûrs de l'existence du mouvement fluide dans le domaine ainsi défini et partout où vaudra le prolongement analytique de (9).

6. On voit ainsi que le problème général des jets liquides se scinde en deux parties, si l'on se donne la frontière libre σ: 1° Calculer ν_0 en intégrant l'équation (5); 2° calculer V connaissant ν_0.

Le second problème est le plus difficile mais, comme on le verra dans la suite, la détermination de ν_0 peut suffire pour obtenir une représentation qualitative du phénomène.

CHAPITRE III.

Mouvement du liquide sur le contour libre.

1. C'est le premier problème, dont la solution repose sur la discussion de l'équation (5).

Mais cette équation se retrouve dans l'étude du mouvement d'un point matériel M de masse unité, assujetti à se déplacer sans frottement sur la surface σ et soumis à des forces dont le potentiel serait P. Les équations différentielles canoniques du mouvement définissent en effet, comme on le vérifie immédiatement, les caractéristiques de l'équation (5).

Dans ces conditions, d'après la théorie de HAMILTON–JACOBI, le mouvement du point matériel M s'obtiendra sans quadratures si l'on connait une intégrale de (5), soit

$$V(\rho_1\, \rho_2\, h,\, C), \tag{10}$$

dépendant des constantes arbitraires h et C. Les diverses trajectoires seront représentées, comme il est connu, par l'équation

$$\frac{\partial V}{\partial C} = C', \tag{11}$$

où C' est une nouvelle constante arbitraire; l'équation du temps sera

$$\frac{\partial V}{\partial h} = t - t_0\,, \tag{12}$$

t_0 étant arbitraire; enfin la vitesse du point sur la trajectoire sera définie par

$$\frac{1}{H_1}\frac{\partial V}{\partial \rho_1} = \frac{H_1\, d\rho_1}{dt} = u_1 \quad , \quad \frac{1}{H_2}\frac{\partial V}{\partial \rho_2} = \frac{H_2\, d\rho_2}{dt} = u_2\,, \tag{13}$$

u_1 et u_2 désignant les projections de cette vitesse sur les tangentes aux lignes coordonnées de σ.

La connaissance de l'intégrale (10) donne donc le mouvement de M sur la surface et réciproquement (nous y reviendrons d'ailleurs) la connaissance du mouvement sur la surface permet d'obtenir toutes les intégrales de l'équation (5). Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant:

Il y a équivalence entre les deux problèmes suivants: 1° *mouvement d'un point matériel assujetti à décrire* σ *sans frottement et sous l'action de forces dont le potentiel est* P; 2° *étude, sur* σ, *des jets liquides ayant cette surface pour frontière libre.*

2. Mais nous pouvons aller plus loin et établir d'autres propositions.

Soient $d\rho_1$, $d\rho_2$ les différentielles prises suivant une trajectoire de M. En vertu de (11) nous aurons

$$\frac{\partial^2 V}{\partial C\, \partial \rho_1} d\rho_1 + \frac{\partial^2 V}{\partial C\, \partial \rho_2} d\rho_2 = 0$$

et, d'après (5),

$$\frac{1}{H_1^2}\frac{\partial V}{\partial \rho_1}\frac{\partial^2 V}{\partial \rho_1\, \partial C} + \frac{1}{H_2^2}\frac{\partial V}{\partial \rho_2}\frac{\partial^2 V}{\partial \rho_2\, \partial C} = 0,$$

donc

$$d\rho_1 : d\rho_2 :: \frac{1}{H_1^2}\frac{\partial V}{\partial \rho_1} : \frac{1}{H_2^2}\frac{\partial V}{\partial \rho_2}\,,$$

ce qui prouve que les trajectoires de M sont orthogonales aux lignes équipotentielles V = const. de la surface σ. Mais, dans le jet liquide, les lignes de courant appartenant à σ sont également orthogonales à ces lignes équipotentielles, d'où le théorème:

Les lignes de courant sont les trajectoires du point M.

3. Ce même théorème résulte aussi des (13) d'après lesquelles u_1 et u_2 sont égales aux composantes de la vitesse du liquide suivant les tangentes aux lignes coordonnées. Donc en tout point, vitesse du liquide et vitesse du point M sont individualisées par le même vecteur; il y a donc bien coïncidence entre lignes de courant et trajectoires de M, et nous pouvons ajouter que:

Les molécules liquides décrivent les lignes de courant coïncidant avec les trajectoires de M *avec la même vitesse que ce point.*

En d'autres termes nous avons le théorème suivant:

Dans un jet liquide toute molécule qui fait partie de la frontière libre se déplace sur cette surface comme si elle était un point libre mobile sans frottement sur cette surface et soumis à des forces de potentiel P.

4. Il est intéressant, pour la suite, de préciser la réciproque que nous prendrons sous la forme suivante (4):

Soit connu un ensemble à un paramètre de trajectoires du point M *correspondant à la même valeur h de la constante des forces vives* ($2\,T - 2\,P = h$); *on peut les considérer* (en ce qui concerne du moins les conditions à remplir sur σ) *comme lignes de courant d'un jet fluide ayant σ pour frontière libre et pour lequel on connaîtra la fonction* $\nu_0(\rho_1, \rho_2)$.

Bornons-nous en effet à une région de σ engendrée par des arcs *sans points communs* des trajectoires considérées et prenons ces trajectoires pour lignes coordonnées ρ_2 constant. La seconde équation de LAGRANGE, qui doit être vérifiée pour ρ_2 constant quelconque, se réduit à

$$- H_1 \frac{\partial H_1}{\partial \rho_2} \rho_1'^2 = \frac{\partial P}{\partial \rho_2},$$

tandis que l'équation de la force vive donne

$$H_1^2 \rho_1'^2 = 2\,P + h,$$

d'où résulte, identiquement en ρ_1, ρ_2,

$$\frac{1}{H_1} \frac{\partial H_1}{\partial \rho_2} + \frac{\partial P}{\partial \rho_2} \frac{1}{2\,P + h} = 0,$$

d'où enfin

$$H_1^2 (2\,P + h) = \varphi(\rho_1)$$

(φ fonction arbitraire).

La fonction

$$\int \sqrt{\varphi(\rho_1)}\, d\rho_1$$

vérifie évidemment l'équation aux dérivées partielles (5); c'est la fonction $\nu_0(\rho_1, \rho_2)$ pour le jet que définit l'ensemble de trajectoires considéré.

5. Supposons que P soit nul, c'est le cas par exemple si σ est une surface de discontinuité séparant partie immobile et partie en mouvement

(4) Ce paragraphe 4 a été ajouté par M. PÉRÈS.

d'un même liquide. Dans ce cas *les molécules liquides* de la frontière libre décriront, avec une vitesse *constante, les géodésiques de cette surface.*

6. Nous connaissons bien des cas dans lesquels on sait résoudre le problème du mouvement d'un point sans frottement sur une surface, dans lesquels au moins ce problème se réduit aux quadratures. Dans chacun d'eux nous saurons résoudre le problème correspondant des jets liquides.

Nous saurons du moins trouver les fonctions $\nu_0(\rho_1, \rho_2)$. On verra, aux chapitres suivants, les cas les plus notables et comment, ν_0 étant connue, on peut passer au calcul de V, ou bien, sans faire ce calcul, se faire une idée de la nature du jet liquide et du contour libre.

CHAPITRE IV.

Jets liquides symétriques.

1. Un jet liquide sera dit symétrique si le contour libre est surface de révolution et que de plus le potentiel P est constant sur chaque parallèle de cette surface. L'axe de σ sera l'axe du mouvement.

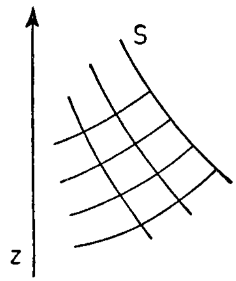


Fig. 3.

Dans ce cas le mouvement du point M pourra être réduit à des quadratures, de sorte que l'on saura intégrer l'équation (5). Notons qu'il en sera ainsi, par exemple, lorsque, l'axe de révolution étant vertical, les forces agissantes sont les forces de pesanteur.

2. Soit z l'axe de la surface de révolution σ, r la distance d'un point à l'axe,

$$r = f(z)$$

l'équation de la ligne méridienne s. Soit enfin φ l'angle qu'un plan passant par l'axe z forme avec un plan origine passant par le même axe. r, z, φ sont des coordonnées cylindriques.

Imaginons maintenant dans le plan méridien un double système de lignes orthogonales, l'une d'elles étant s. Pour individualiser les lignes orthogonales à s nous prendrons pour paramètre la coordonnée z des points où elles rencontrent s. Nous désignerons par ρ_3 un paramètre qui individualise les lignes de l'autre famille. Si nous faisons tourner le plan méridien autour de z les lignes susdites engendreront deux familles de surfaces de révolution, coupées orthogonalement par les plans méridiens. Les paramètres qui fixent les trois familles de surfaces seront

$$\rho_1 = z \quad , \quad \rho_2 = \varphi \quad , \quad \rho_3$$

et le carré de l'élément linéaire sera

$$ds^2 = H_1^2 dz^2 + r^2 d\varphi^2 + H_3^2 d\rho_3^2 .$$

En un point de σ, nous aurons

$$ds^2 = (1 + f'^2)\, dz^2 + r^2 d\varphi^2 + H_3^2 d\rho_3^2,$$

en posant

$$f' = \frac{df}{\partial z} .$$

L'équation (5) devient alors

$$(5') \qquad \frac{1}{1+f'^2}\left(\frac{\partial \nu_0}{\partial z}\right)^2 + \frac{1}{f^2}\left(\frac{\partial \nu_0}{\partial \varphi}\right)^2 = 2\,\mathrm{P} + h,$$

qui doit déterminer la fonction inconnue ν_0 et dans laquelle, suivant l'hypothèse faite, P sera fonction seulement de z.

Nous pourrons prendre pour intégrale de l'équation précédente

$$(14) \qquad \nu_0 = c\varphi + w_0(z),$$

avec

$$(15) \qquad w_0(z) = \int \frac{\sqrt{(1+f'^2)\left[(2\,\mathrm{P} + h) f^2 - c^2\right]}}{f}\, dz.$$

3. Reste maintenant à calculer la fonction harmonique V qui satisfait les conditions (7) et (8). Observons que la fonction $c\varphi$ est définie dans tout l'espace et y est harmonique. De plus elle satisfait sur σ aux équations (7) et (8). Il reste donc à construire une fonction harmonique W (qui sera évidemment un potentiel symétrique) et qui vérifie sur σ les conditions

$$(7') \qquad \mathrm{W} = w_0(z),$$

$$(8') \qquad \frac{\partial \mathrm{W}}{\partial \rho_3} = 0.$$

Donc: *le mouvement du liquide résultera d'un mouvement symétrique par rapport à l'axe z et d'un mouvement ayant pour potentiel* $c\varphi$.

4. La nature de ce dernier mouvement est bien connue. C'est celui qu'induit une ligne-tourbillon, de flux $4\pi c$ et disposée suivant l'axe z. Les molécules décrivent des cercles d'axe z avec une vitesse dépendant de la distance à l'axe et égale à c/r. Nous dirons qu'il y a alors *circulation du fluide*, d'intensité c, autour de l'axe z.

5. En ce qui concerne le mouvement symétrique ayant pour potentiel W, il est bien clair que les méridiens de σ seront des lignes de courant de ce mouvement.

Le calcul de W s'effectuera, sous réserve des conditions d'analyticité déjà posées, par le développement en série indiqué au Chapitre II (n° 5); nous donnerons plus loin des exemples de ce calcul. Indiquons pour le moment par quelle méthode on peut se faire une idée d'ensemble du mouvement du fluide.

6. Soit une portion de la surface σ suivant laquelle f ainsi que $(2P+h)f^2 - c^2$ sont toujours positifs et ne s'annulent pas et considérons, autour de σ, une strate tubulaire S, également symétrique et dans laquelle existe W. Les surfaces de niveau (W constant) seront des surfaces de révolution coupant σ à angle droit. Nous limiterons la strate par deux surfaces tubulaires de révolution $\mathcal{G}'$ et $\mathcal{G}''$ qui coupent orthogonalement les surfaces de niveau et par deux surfaces de niveau $P_1 P_2$. La surface σ divisera P_1 et P_2 respectivement en deux parties, que nous noterons $P'_1 P''_1$ et $P'_2 P''_2$. En choisissant, pour fixer les idées, positivement le radical de la formule (15), W croîtra avec z.

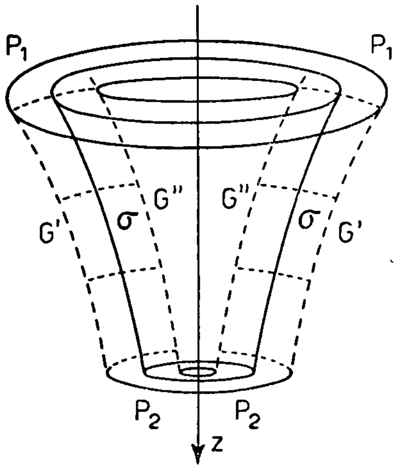


Fig. 4.

Dans ces conditions W peut être considéré comme le potentiel des vitesses d'un écoulement fluide symétrique qui se produit entre des surfaces $\mathcal{G}'$ et $\mathcal{G}''$ constituant des parois fixes et rigides. Les surfaces d'entrée et de sortie sont respectivement P_1 e P_2. Les lignes de courant sont dans des plans passant par l'axe.

Composons maintenant ce mouvement avec une circulation d'intensité c autour de z de façon à avoir le potentiel

$$V = c\varphi + W. \tag{1}$$

Dans le mouvement résultant $\mathcal{G}_1$ et $\mathcal{G}_2$ pourront encore être considérés comme des parois rigides et fixes, P_1 et P_2 étant les ouvertures d'entrée et de sortie du fluide; mais le fluide n'entrera pas dans S normalement à ces surfaces.

Tout comme $\mathcal{G}'$ et $\mathcal{G}''$, toutes les surfaces de révolution de S, qui sont lieux de lignes de courant dans le mouvement de potentiel W, gardent la même propriété dans le mouvement résultant de potentiel V; c'est ce qui arrivera en particulier sur σ. Mais sur σ, de plus, la condition (5) sera remplie.

Si donc nous supprimons le fluide en mouvement compris entre σ et $\mathcal{G}''$ et que nous le remplacions par du fluide au repos de densité μ', le mouvement de la partie de liquide comprise entre σ et $\mathcal{G}'$ ne sera pas altéré pourvu que l'entrée du liquide en P'_1 et sa sortie en P'_2 ne soit pas modifiée. Nous pourrons de même remplacer le liquide compris entre σ et $\mathcal{G}''$ par un fluide en repos de densité μ'.

7. Nous avons ainsi défini deux jets liquides symétriques ayant tous deux pour contour libre σ; mais il convient à ce propos de faire deux remarques.

Tout d'abord la possibilité des deux jets liquides peut faire naître quelques difficultés. Elles s'écartent en observant que, selon les principes de l'hydrodynamique théorique, la paroi rigide doit être considérée comme une liaison à laquelle le liquide doit adhérer. Il faut observer d'ailleurs qu'en substituant une portion quelconque du contour libre par une paroi rigide, le mouvement du liquide ne serait pas altéré.

En second lieu, la réalisation des jets précédents suppose l'entrée et la sortie du fluide par les surfaces P'_1 ou P''_1, P'_2 ou P''_2 *avec une vitesse bien déterminée en chaque point*. Sans aborder pour l'instant l'étude du prolongement analytique du potentiel V en dehors de l'espace S [5], nous admettrons que l'on puisse artificiellement remplir ces conditions d'entrée et de sortie, soit au moyen de petits tubes amenant et enlevant le liquide avec le débit convenable, soit par un réseau dont les mailles règlent la vitesse, soit de toute autre façon.

CHAPITRE V.

Jets symétriques. Les parallèles singuliers de la surface libre.

1. Nous avons supposé, au n° 6 du Chapitre précédent, que suivant la portion de σ considérée, f et $(2\,P + h)\,f^2 - c^2$ étaient toujours positifs et ne s'annulaient pas. Or pour l'expression $(2\,P + h)f^2 - c^2$, trois cas principaux peuvent se présenter:

1° elle est positive quel soit z entre $-\infty$ et $+\infty$;

2° elle est positive pour z compris entre z_1 et $+\infty$ (ou bien entre z_1 et $-\infty$) étant nulle pour $z = z_1$;

3° elle s'annule pour z_1 et z_2 et est positive dans l'intervalle.

Dans le premier cas toute la surface σ doit être considérée comme frontière libre. Dans le second cas nous devrons limiter cette surface au parallèle $z = z_1$ en la prenant d'un côté convenable de ce parallèle qui est alors un parallèle de singularité où le mouvement se réduit à la circulation du fluide. Dans le troisième cas il y a deux parallèles de singularité z_1 et z_2.

2. Il est possible d'étudier le mouvement du fluide au voisinage d'un tel parallèle singulier. Prenons-le dans le plan $z = 0$ et admettons que P et f soient développables en séries de puissances

$$P = g_0 + g_1 z + \frac{g_2}{2!} z^2 + \cdots,$$

$$f = r_0 + r_1 z + \frac{r_2}{2!} z^2 + \cdots$$

(5) Cf. à ce sujet Chapitre V, n° 7.

(r_0 étant le rayon du parallèle singulier). Dans ces conditions

$$(2P + h)f^2 - c^2 = (2g_0 + h)r_0^2 - c^2 + 2r_0(g_1 r_0 + hr_1 + 2g_0 r_1)z + \ldots .$$

Cette fonction doit s'annuler pour $z = 0$, de sorte que

$$(2g_0 + h)r_0^2 - c^2$$

sera nul. En supposant, pour fixer les idées, que le premier membre soit positif pour $z > 0$, le coéfficient de z sera positif ou nul. Excluons ce dernier cas. La formule (15) donne alors pour w_0 un développement en série contenant les puissances successives

$$z^{3/2} \quad , \quad z^{5/2}, \ldots$$

et l'on vérifie immédiatement que

$$(16) \qquad w_0(z) = \frac{2}{3} a z^{3/2} + \ldots$$

avec

$$a^2 = \frac{2(1 + r_1^2)(g_1 r_0 + hr_1 + 2g_0 r_1)}{r_0}.$$

La partie principale de $w_0(z)$ étant ainsi connue, il faut en déduire la partie principale de W. Au préalable nous donnerons quelques résultats utiles sur les potentiels symétriques.

3. Prenons, dans un plan méridien, des axes rectangulaires ξ, η, ayant leur origine en M, sur le parallèle singulier, le premier axe étant parallèle, l'autre perpendiculaire à z.

L'équation aux dérivées partielles qui caractérise les potentiels symétriques est

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(r \frac{\partial \varphi}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial \varphi}{\partial r}\right) = 0$$

et devient, puisque $z = \xi$, $r = r_0 + \eta$,

$$(r_0 + \eta)\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta^2}\right) + \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} = 0.$$

En passant en coordonnées polaires

$$\xi = \tau \cos\theta \quad , \quad \eta = \tau \sin\theta,$$

on obtient enfin

$$(17) \qquad (r_0 + \tau \sin\theta)\left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \tau^2} + \frac{1}{\tau}\frac{\partial \varphi}{\partial \tau} + \frac{1}{\tau^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2}\right] + \frac{\partial \varphi}{\partial \tau}\sin\theta + \frac{1}{\tau}\frac{\partial \varphi}{\partial \theta}\cos\theta = 0.$$

Cherchons une solution développée en série des puissances de τ, sous la forme

$$\varphi = \tau^\alpha \varphi_0 + \frac{\tau^{\alpha+1}}{r_0}\varphi_1 + \ldots + \frac{\tau^{\alpha+h}}{r_0^h}\varphi_h + \ldots,$$

les φ_h dépendant seulement de θ. En substituant dans l'équation (17) précédente il vient, pour déterminer de proche en proche les φ_h, le système

$$(18)\quad \begin{cases} \alpha^2\varphi_0+\varphi_0''=0, \\ [(\alpha+h)^2\varphi_h+\varphi_h'']+\sin\theta(\alpha+h-1)(\alpha+h)\varphi_{h-1}+\cos\theta\,\varphi_{h-1}'+\sin\theta\,\varphi_{h-1}''=0, \end{cases}$$

où les accents marquent des dérivations par rapport à θ.

Par ailleurs, l'équation (17) a évidemment une seule solution prenant, sur un arc de courbe, des valeurs données ainsi que sa dérivée normale. Cherchons une solution telle que, pour $\theta = 0$,

$$\varphi = k\tau^\alpha \quad , \quad \frac{\partial\varphi}{\partial\theta} = k'\,\tau^\alpha,$$

k et k' étant deux constantes. La première des équations (18) donnera

$$\varphi_0 = k\cos\alpha\theta + \frac{k'}{\alpha}\sin\alpha\theta$$

et il faudra intégrer les équations différentielles suivantes avec les conditions

$$(\varphi_h)_{\theta=0} = 0 \quad , \quad (\varphi_h')_{\theta=0} = 0.$$

Or la méthode de variation des constantes donne immédiatement,

$$\varphi_h'' + (\alpha+h)^2\varphi_h = X(\theta)$$

avec les conditions précédentes,

$$\varphi_h = \frac{1}{\alpha+h}\int_0^\theta X(\theta')\sin[(\alpha+h)(\theta-\theta')]\,d\theta';$$

en remplaçant X par sa valeur écrite dans (18) et effectuant les intégrations par parties qui s'imposent, on obtient

$$(19)\quad \varphi_h = -\varphi_{h-1}\sin\theta + \int_0^\theta \varphi_{h-1}(\theta')\cos[(\alpha+h)\theta-(\alpha+h+1)\theta']\,d\theta'$$

qui détermine les φ_h en y joignant

$$(19_1)\quad \varphi_0 = k\cos\alpha\theta + \frac{k'}{\alpha}\sin\alpha\theta.$$

Il est aisé de vérifier dans ces conditions que la série

$$(20)\quad \varphi = \tau^\alpha\varphi_0 + \frac{\tau^{\alpha+1}}{r_0}\varphi_1 + \cdots + \frac{\tau^{\alpha+h}}{r_0^h}\varphi_h + \cdots$$

est convergente pour $|\tau|$ assez petit. *Elle définit donc le potentiel symétrique qui, pour* $\theta = 0$, *est tel que*

$$(21)\quad \varphi = k\tau^\alpha \quad , \quad \frac{\partial\varphi}{\partial\theta} = k'\,\tau^\alpha.$$

4. Remplaçons les conditions (21) par les suivantes: pour $\theta = 0$ φ et $\partial\varphi/\partial\theta$ sont donnés par des séries convergentes

$$(21') \quad \left\{ \begin{aligned} \varphi &= k\,\tau^{\alpha} + k_1\,\tau^{\alpha+1} + k_2\,\tau^{\alpha+2} + \cdots, \\ \frac{\partial\varphi}{\partial\theta} &= k'\,\tau^{\alpha} + k'_1\,\tau^{\alpha+1} + k'_2\,\tau^{\alpha+2} + \cdots, \end{aligned} \right.$$

on obtiendra aisément la fonction φ correspondante en ajoutant les séries, analogues à (20), qui correspondent aux exposants successifs α, $\alpha + 1$, etc.

La *partie principale* de la fonction φ obtenue, quand τ est très petit, reste

$$\tau^{\alpha}\,\varphi_0 \equiv \tau^{\alpha}\left(k\cos\alpha\theta + \frac{k'}{\alpha}\sin\alpha\theta\right).$$

Il est essentiel de remarquer que c'est *la partie réelle d'une fonction de variable complexe* (6).

5. Revenons maintenant à la recherche du potentiel W qui, sur la ligne de jet aboutissant en M, prend les valeurs

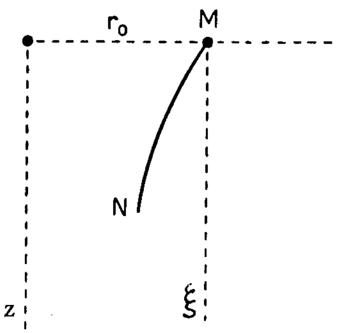


Fig. 5.

$$w_0 = \frac{2}{3}\,a\xi^{3/2} + \cdots;$$

soit $-\theta_0$ l'angle que la tangente à cette ligne de jet MN fait avec l'axe ξ. Nous aurons.

$$w_0 = \frac{2}{3}\,a\cos^{3/2}\theta_0\,\tau^{3/2} + \cdots$$

et il est bien clair que W sera caractérisé par des formules analogues à celles du numéro précédent, en remplaçant θ par $\theta + \theta_0$, en prenant

$$k = \frac{2}{3}\,a\cos^{3/2}\theta_0 \quad \text{et} \quad k' = 0.$$

La partie principale cherchée de W *est donc*

$$(22) \qquad \frac{2}{3}\,a\cos^{3/2}\theta_0\,\tau^{3/2}\cos\frac{3}{2}(\theta + \theta_0).$$

Pour étudier le mouvement fluide au voisinage du point singulier M, c'est-à-dire pour les valeurs très petites de τ, nous pourrons réduire W à sa partie principale et écrire donc

$$W = \frac{2}{3}\,a\cos^{3/2}\theta_0\,\tau^{3/2}\cos\frac{3}{2}\vartheta,$$

en posant

$$\vartheta = \theta + \theta_0$$

ce qui revient à compter les angles polaires à partir de la tangente en M à la courbe MN.

(6) Il y a là un passage, sur lequel nous reviendrons dans un autre Mémoire, des fonctions de variable complexe aux potentiels symétriques.

6. Soit alors le faisceau des demi-droites MN, MN', MN'', $\cdots$, MN^{v} situées dans le plan méridien et inclinées entre elles de 60°, la première représentant l'élément infinitésimal de la ligne de jet MN. Suivant MN, MN'', MN^{iv}, $\partial W/\partial\theta$ est nul, elles sont lignes de courant; suivant MN', MN''', MN^{v} $\partial W/\partial\tau$ est nul, elles sont lignes équipotentielles.

Les autres lignes de courant ont l'équation

$$\tau^{3/2} \sin \frac{3}{2} \vartheta = \text{const.}$$

(lignes $P\mathcal{Q}$, $P'\mathcal{Q}'$, $P''\mathcal{Q}''$, $\cdots$), les lignes équipotentielles (en pointillé sur la figure) ont l'équation

$$\tau^{3/2} \cos \frac{3}{2} \vartheta = \text{const.}$$

On passe évidemment des unes aux autres par rotation de $\pm$ 60° autour du point M.

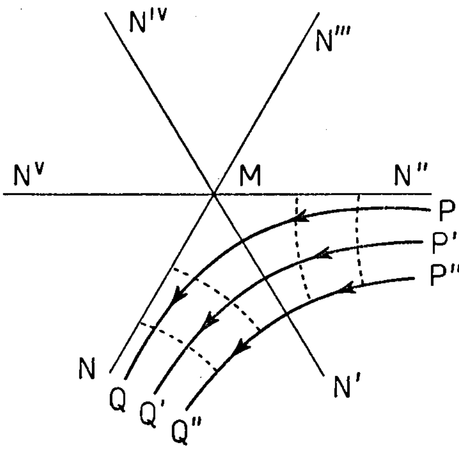


Fig. 6.

En limitant le mouvement entre les lignes MN et MN'', nous avons (figure précédente) l'allure du mouvement au voisinage immédiat du point singulier M. MN est la tangente à la ligne méridienne de la frontière libre. MN'' la tangente à la ligne méridienne d'une paroi rigide. $P\mathcal{Q}$, $P'\mathcal{Q}'$, $P''\mathcal{Q}''$ des lignes de courant du mouvement symétrique, qu'il faudra composer avec la circulation pour obtenir le jet liquide.

On reconnaît facilement que suivant le parallèle singulier de la frontière libre le mouvement liquide se réduit au seul mouvement de circulation, puisque $\partial w_0/\partial z$ s'annule sur ledit parallèle. Donc: *toutes les lignes de courant du jet appartenant à la frontière libre partent tangentiellement du parallèle singulier.*

7. Notons que les considérations précédentes donnent un moyen d'étudier le prolongement du mouvement du fluide en dehors de l'espace S où se bornait l'étude du chapitre précédent.

Il est facile de reconnaître la relation qui existe entre le mouvement du fluide autour de M et les jets liquides plans envisagés au Chapitre I (n° 3).

Notons enfin que d'une manière analogue on pourrait étudier des mouvements avec des parallèles de singularité en lesquels la méridienne de la surface libre présente quelque singularité.

CHAPITRE VI.

Jets liquides symétriques très minces.

1. Dans le cas qui vient d'être étudié des jets liquides symétriques, la frontière rigide est une surface de révolution autour de l'axe du mouvement (Chapitre IV, n° 6). En reprenant les notations du susdit numéro un des jets liquides a pour contour rigide la surface de révolution $\mathcal{S}'$. Si nous supposons que la couche liquide comprise entre σ et $\mathcal{S}'$ soit très mince, nous pourrons facilement calculer de façon approchée l'équation de la ligne méridienne de la frontière rigide.

Observant en effet que

$$r\Delta_2 W \equiv \frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial W}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(r\frac{\partial W}{\partial z}\right) = 0,$$

on voit que

$$-r\frac{\partial W}{\partial r}dz + r\frac{\partial W}{\partial z}dr$$

est une différentielle exacte. Posons cette expression égale à dU. U s'appelle la *fonction conjuguée* du *potentiel symétrique* W et nous aurons

$$(23) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial z} &= -r\frac{\partial W}{\partial r}, \\ \frac{\partial U}{\partial r} &= r\frac{\partial W}{\partial z}. \end{aligned} \right.$$

Les lignes U = const. *sont évidemment les lignes de courant du liquide* (lorsque le potentiel des vitesses est W).

2. Soit s la méridienne de la surface σ, n la normale à s. Nous aurons

$$(24) \qquad \left\{ \begin{aligned} \cos(n, r) &= -\cos(s, z) = \frac{1}{\sqrt{1+f'^2}}, \\ \cos(n, z) &= \cos(s, r) = -\frac{f'}{\sqrt{1+f'^2}}. \end{aligned} \right.$$

De plus, puisque $\partial W/\partial n = 0$, il vient

$$(25)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial z} &= \frac{\partial W}{\partial s}\cos(s\,,z) = \frac{dw_0}{dz}\cos^2(s\,,z) = \frac{1}{1+f'^2}\,\frac{dw_0}{dz}\,,\\ \frac{\partial W}{\partial r} &= \frac{\partial W}{\partial s}\cos(s\,,r) = \frac{dw_0}{dz}\cos(s\,,r)\cos(s\,,z) = \frac{f'}{1+f'^2}\,\frac{dw_0}{dz}\,,\end{aligned}\right.$$

et, en tenant compte de (15) et de la seconde des équations (23), nous pourrons écrire

$$\frac{\partial U}{\partial r} = r\frac{\partial W}{\partial z} = \frac{f}{1+f'^2}\,\frac{dw_0}{dz} = \sqrt{\frac{f^2(2\,P+h)-c^2}{(1+f'^2)}}\,.$$

Soit $U = U_0$ l'équation de la méridienne de la frontière libre et soit $U = U_0 + \Delta U$ l'équation de la méridienne du contour rigide $\mathcal{G}'$, en supposant ΔU très petit. Désignons enfin par Δr l'accroissement que subit r lorsqu'on passe (z restant constant de σ à $\mathcal{G}'$. Nous pourrons remplacer le rapport $\Delta U/\Delta r$ par la dérivée partielle qui vient d'être calculée, d'où

$$(26)\qquad \Delta r = \Delta U\sqrt{\frac{1+f'^2}{f^2(2\,P+h)-c^2}}\,.$$

Posant enfin $r + \Delta r = r_1$, l'équation de la méridienne de $\mathcal{G}'$ sera

$$(27)\qquad r_1 = f + \Delta U\sqrt{\frac{1+f^2}{f^2(2\,P+h)-c^2}}$$

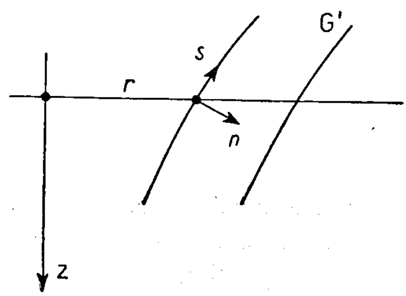


Fig. 7.

dans laquelle ΔU est une constante arbitraire très petite et dans laquelle nous devons exprimer $ff'P$ en fonction de z.

3. Il est intéressant d'introduire dans la formule précédente le débit $\mathcal{Q}$ du jet (volume liquide qui traverse la section du jet liquide dans l'unité de temps). Comme la circulation ne fait pas mouvoir le liquide dans le sens longitudinal, nous aurons

$$\mathcal{Q} = 2\,\pi r\,\Delta r\,\frac{\partial W}{\partial z} = 2\,\pi\,\frac{\partial U}{\partial r}\,\Delta r = 2\,\pi\,\Delta U\,,$$

et (27) devient

$$(27')\qquad r_1 = f + \frac{\mathcal{Q}\sqrt{1+f'^2}}{2\,\pi\sqrt{f^2(2\,P+h)-c^2}}\,.$$

4. Nous avons calculé l'épaisseur du jet liquide dans le sens de l'axe r, mais il est facile d'évaluer son épaisseur normale ν. Nous aurons

$$(27'')\qquad \nu = \Delta r\cos(n\,,r) = \frac{\Delta U}{\sqrt{f^2(2\,P+h)-c^2}} = \frac{\mathcal{Q}}{2\,\pi\sqrt{f^2(2\,P+h)-c^2}}\,.$$

5. Nous devons supposer $(2\,P+h)f^2 - c^2$ positif (cf. Chap. V, n° 1), mais si nous approchons d'un parallèle singulier correspondant à $z = z_0$

$[f^2(2\,P+h) - c^2 = 0]$ le second membre de l'expression précédente croît indéfiniment. Cela fait évidemment perdre toute signification aux formules puisque Δr avait été supposé très petit. Mais on peut interpréter ce résultat en imaginant que le jet liquide sort d'un réservoir placé au-dessus d'un parallèle singulier.

6. Rappelons un phénomène bien connu et qu'on observe dans le cas d'un entonnoir rempli de liquide et qui se vide par son ouverture inférieure. Spécialement lorsque l'on imprime au liquide un mouvement circulaire autour de l'axe de l'entonnoir, on constate que le liquide prend le long des parois de l'entonnoir un mouvement hélicoïdal et qu'il se forme dans le milieu un trou, de telle sorte que le liquide se trouve séparé de l'axe par une surface libre, elle-même en entonnoir. Les considérations précédentes se réfèrent à ce phénomène.

Chapitre VII.

Jets liquides libres.

1. Le chapitre précédent concerne des écoulements compris entre une frontière libre et une paroi rigide $\mathcal{S}'$ très voisine. Nous allons maintenant étudier la question importante de voir quand on peut supprimer cette paroi rigide sans altérer le mouvement, c'est-à-dire quand on peut considérer $\mathcal{S}'$ comme frontière libre du liquide, aussi bien que σ. Nous aurons alors à vérifier sur $\mathcal{S}'$ des équations analogues à (2) et (3).

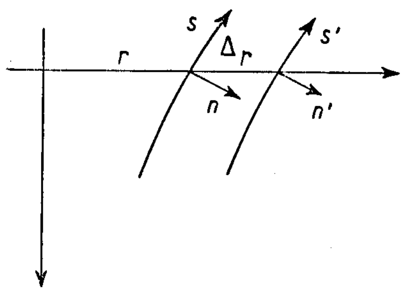


Fig. 8.

Nous résoudrons la question avec la même approximation que précédemment en supposant les deux frontières libres σ et $\mathcal{S}'$ très voisines. Le jet correspondant sera alors dit *jet libre*.

2. Soient s et s' respectivement les méridiennes de σ et de $\mathcal{S}'$ et n et n' les normales correspondantes. Appelons ΔW l'accroissement de W en passant, à z constant, de s à s'. La seconde des (25) donne

$$\Delta W = \frac{\partial W}{\partial r}\Delta r = \frac{dw_0}{dz}\,\frac{f'}{1+f'^2}\,\Delta r$$

et, d'après (26),

$$\Delta W = \frac{f'}{f}\Delta U,$$

de sorte que la valeur de W sur $\mathcal{S}'$, soit W', sera

$$W' = w_0 + \frac{f'}{f}\Delta U$$

et la valeur V' de V sera [formule (I)]

$$V' = w_0 + \frac{f'}{f}\,\Delta U + c\varphi .$$

Calculons maintenant sur s'

$$\nabla V' = \left(\frac{\partial V'}{\partial s'}\right)^2 + \left(\frac{\partial V'}{\partial n'}\right)^2 + \frac{1}{(f+\Delta r)^2}\left(\frac{\partial V'}{\partial \varphi}\right)^2 ;$$

en observant que $\partial V'/\partial n'$ est nul il reste

$$\nabla V' = \left(\frac{\partial V'}{\partial s'}\right)^2 + \frac{c^2}{(f+\Delta r)^2} \cdot$$

Compte tenu de la valeur de l'arc s', puis développant en série et gardant seulement les termes où figure la première puissance de ΔU, on obtient

$$(28) \qquad \nabla V' = \left(\frac{dw_0}{dz}\right)^2 \frac{1}{1+f'^2} + \frac{c^2}{f^2} + 2\,\Delta U \times$$

$$\times \left\{ \frac{1}{1+f'^2}\,\frac{dw_0}{dz}\,\frac{d}{dz}\left(\frac{f'}{f}\right) - \left(\frac{dw_0}{dz}\right)^2 \frac{f'}{(1+f'^2)^2}\,\frac{d}{dz}\left(\frac{1+f'^2}{f^4\,\dfrac{dw_0}{dz}}\right) - \frac{c^2(1+f'^2)}{f^4\,\dfrac{dw_0}{dz}} \right\} .$$

3. Si maintenant P *ne dépend que de la seule z* et par suite ne change pas de valeur lorsque l'on passe de s à s' parallèlement à l'axe Oz, les conditions nécessaires et suffisantes pour que $\mathcal{G}'$ soit frontière libre seront

$$(2') \qquad \nabla V' = 2\,P + h ,$$

$$(3') \qquad \frac{\partial V'}{\partial n'} = 0.$$

La seconde des équations précédentes est vérifiée d'après le choix de $\mathcal{G}'$. Quant à la première, tenant compte de (28) et de ce que

$$\left(\frac{dw_0}{dz}\right)^2 \frac{1}{1+f'^2} + \frac{c^2}{f^2} = 2\,P + h ,$$

elle se réduit à

$$\frac{1}{1+f'^2}\,\frac{dw_0}{dz}\,\frac{d}{dz}\,\frac{f'}{f} - \left(\frac{dw_0}{dz}\right)^2 \frac{f'}{(1+f'^2)^2}\,\frac{d}{dz}\left(\frac{1+f'^2}{f\,\dfrac{dw_0}{dz}}\right) - \frac{c^2(1+f'^2)}{f^4\,\dfrac{dw_0}{dz}} = 0.$$

Il reste à y remplacer dw/dz_0 par sa valeur tirée de l'équation (15). Il vient ainsi

$$\frac{1}{f}\sqrt{\frac{(2\,P+h)f^2 - c^2}{1+f'^2}}\,\frac{d}{dz}\,\frac{f'}{f} -$$

$$- \frac{[(2\,P+h)f^2 - c^2]f'}{f^2(1+f'^2)}\,\frac{d}{dz}\left[\sqrt{\frac{1+f'^2}{(2\,P+h)f^2 - c^2}}\right] - \frac{c^2}{f^3}\sqrt{\frac{1+f'^2}{(2\,P+h)f^2 - c^2}} = 0,$$

ou bien encore

$$\frac{1}{f}\,\frac{d}{dz}\left\{\frac{f'}{f}\sqrt{\frac{(2\,P+h)f^2 - c^2}{1+f'^2}}\right\} - \frac{c^2}{f^3}\sqrt{\frac{1+f'^2}{(2\,P+h)f^2 - c^2}} = 0,$$

ou enfin

$$\frac{f'}{f}\sqrt{\frac{(2\,\mathrm{P}+h)f^2-c^2}{1+f'^2}}\,\frac{d}{dz}\left\{\frac{f'}{f}\sqrt{\frac{(2\,\mathrm{P}+h)f^2-c^2}{1+f'^2}}\right\}-\frac{c^2}{f^3}f'=0,$$

et, en intégrant,

$$\frac{f'^2}{f^2}\,\frac{(2\,\mathrm{P}+h)f^2-c^2}{1+f'^2}+\frac{c^2}{f^2}=k,$$

k étant une constante arbitraire. Par séparation des variables on en déduit

$$\frac{f\,df}{\sqrt{kf^2-c^2}}=\frac{dz}{\sqrt{2\,\mathrm{P}+h-k}} \tag{29}$$

et, en posant

$$\int\frac{dz}{\sqrt{2\,\mathrm{P}+h-k}}=\chi(z),$$

on a

$$f=\sqrt{\frac{c^2}{k}+k\,[\chi(z)+c']^2};$$

c' étant une nouvelle constante arbitraire. L'équation de la méridienne s sera donc

$$r=\sqrt{\frac{c^2}{k}+k\,[\chi(z)+c']^2}; \tag{30}$$

l'équation (27) définira la méridienne s'.

4. Le problème des jets libres très minces de révolution est ainsi traité. Il était intéressant de le traiter, comme nous venons de le faire, en partant des résultats acquis au chapitre précédent. Mais il convient de noter que la solution *directe* de ce problème se présente d'une manière fort simple.

Notons en effet que, dans la formule (4) qui définit P sur une frontière libre, Π et μ' figurent seulement par la combinaison

$$\Pi\left(1-\frac{\mu'}{\mu}\right);$$

rien n'empêche donc de supposer μ' nul, à condition de remplacer Π par $\Pi\,(1-(\mu'/\mu))$. Mais, dans le cas d'un jet libre, nous avons alors affaire à un *voile liquide* très mince dans le vide. Il est dans ces conditions naturel de penser que chaque molécule se déplacera comme un point matériel libre de masse unité, soumis à la force de potentiel $\Pi\,(1-(\mu'/\mu))$, c'est-à-dire P, avec les notations précédentes. De plus, à cause de (2) il faudra, pour former le *voile liquide*, prendre un ensemble des trajectoires précédentes correspondant à la même valeur h de la constante des forces vives.

Dans le cas d'un jet libre *de révolution* cet ensemble de trajectoires sera déduit de l'une d'elles par rotation arbitraire autour de l'axe z.

5. Il est facile de vérifier que les relations précédentes (29) et (30) concordent bien avec ce que nous apprend l'étude directe des jets libres de révolution.

En coordonnées semi–polaires une trajectoire sera définie par les équations

$$\text{(31)} \qquad \begin{cases} \left(\dfrac{dz}{dt}\right)^2 + \left(\dfrac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\dfrac{d\varphi}{dt}\right)^2 = 2\,\mathrm{P} + h, \\ \left(\dfrac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\dfrac{d\varphi}{dt}\right)^2 = k, \\ r^2\dfrac{d\varphi}{dt} = c \end{cases}$$

(puisque P ne dépend que de z).

L'équation différentielle des meridiennes des surfaces de révolution engendrées par les trajectoires s'obtiendra en éliminant, entre les relations (31), φ et t. Or la première s'écrit

$$\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = 2\,\mathrm{P} + h - k,$$

la seconde

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = k - \frac{c^2}{r^2}$$

et, faisant le quotient membre à membre, on retrouve (29).

6. Indiquons quelques cas particuliers.

Si P est nul les trajectoires sont des droites décrites uniformément et le voile est en forme d'hyperboloïde de révolution (à une nappe).

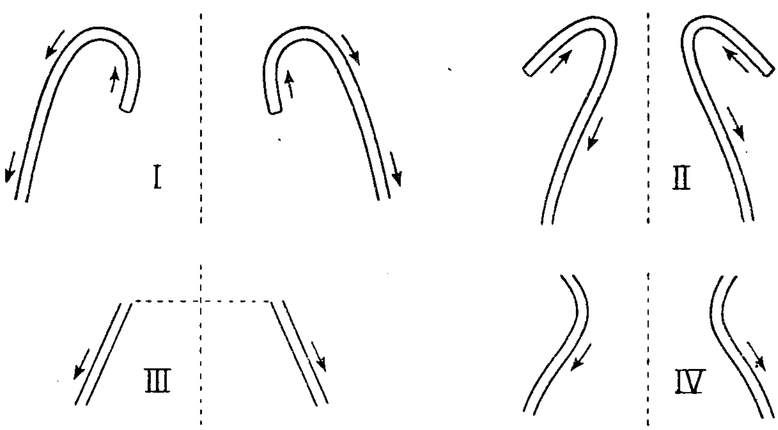


Fig. 9.

Si, l'axe z étant vertical, la force agissante est la pesanteur, le voile sera obtenu par rotation d'une parabole dont l'axe est également vertical. Les formes de méridienne, dont la discussion est aisée, correspondent schématiquement aux figures suivantes:

Pour compléter il faut encore indiquer comment varie l'épaisseur, très petite, du voile liquide. La formule (27″) nous donne l'épaisseur normale ν

$$\nu = \frac{\Delta U}{\sqrt{f^2 (2P + h) - c^2}}.$$

Dans le cas de la pesanteur, posant $g(1 - (\mu'/\mu)) = \alpha$, il vient

$$\chi(z) = \frac{1}{\alpha}\sqrt{2\alpha z + h - k},$$

$$f^2 = \frac{c^2}{k} + k\left(\frac{1}{\alpha}\sqrt{2\alpha z + h - k} + c'\right)^2,$$

où nous pouvons supposer $h = k$ en prenant l'origine des z dans le plan horizontal convenable [plan contenant le point le plus haut du jet]. Dans ces conditions il vient

$$\nu = \frac{\Delta U}{\sqrt{\frac{2\alpha c^2}{k} z + \frac{2k}{\alpha}(2\alpha z + k)\left(\sqrt{z} + c'\sqrt{\frac{\alpha}{2}}\right)^2}}.$$

Le jet correspond à z positif de sorte qu'il est évident que ν garde un signe constant: $\mathcal{S}'$ est tout entière d'un même côté de σ.

Chapitre VIII.

Compléments sur le cas du jet limité par une surface sphérique.

1. En traitant, au Chapitre IV, le cas des jets liquides symétriques, nous n'avons pas insisté sur la détermination du potentiel des vitesses V et nous nous sommes contentés d'une discussion qualitative faite à partir de ν_0 (ou w_0). Nous développerons maintenant un peu plus un cas particulier.

2. C'est celui où la frontière libre est une zone sphérique et où de plus les forces de masse sont négligeables.

En prenant les coordonnées sphériques θ, φ ayant l'origine au centre de la sphère l'équation fondamentale (5′) devient

$$\frac{1}{R^2}\left(\frac{\partial \nu_0}{\partial \theta}\right)^2 + \frac{1}{R^2 \sin^2\theta}\left(\frac{\partial \nu_0}{\partial \varphi}\right)^2 = h \equiv \lambda^2$$

et l'intégrale déjà considérée s'écrit

$$\nu_0(\theta, \varphi) = c\varphi + \int \sqrt{R^2\lambda^2 - \frac{c^2}{\sin^2\theta}}\, d\theta.$$

c^2 est nécessairement inférieur à $R^2\lambda^2$ de sorte qu'on peut poser

$$c = R\lambda \sin\theta_0$$

et

$$\nu_0 = c\varphi + w_0 = c\left(\varphi + \int \frac{\sqrt{\sin^2\theta - \sin^2\theta_0}}{\sin\theta_0 \sin\theta}\, d\theta\right); \tag{32}$$

les parallèles singuliers correspondent à θ_0 et $\pi - \theta_0$.

L'intégrale qui figure dans (32) est aisée à calculer et l'on trouve

$$w_0 = c\left(\frac{\alpha}{\sin\theta_0} - \beta\right) \tag{33}$$

avec

$$\sin\alpha = \frac{\sqrt{\sin^2\theta - \sin^2\theta_0}}{\cos\theta_0}, \qquad \cos\alpha = \frac{\cos\theta}{\cos\theta_0},$$

$$\sin\beta = \frac{\sqrt{\sin^2\theta - \sin^2\theta_0}}{\sin\theta\cos\theta_0}, \qquad \cos\beta = \frac{\cos\theta\sin\theta_0}{\sin\theta\cos\theta_0},$$

enfin, entre z et θ il y a la relation:

$$z = \mathrm{R}\cos\theta.$$

3. Il reste maintenant à déterminer la fonction W qui satisfait aux conditions (7') et (8') dans la zone sphérique limitée par les parallèles singuliers.

On pourra, pour cela, transformer d'abord le problème par une inversion. En prenant le pôle d'inversion en un des points où l'axe z rencontre la sphére, la zone sera transformée en une couronne plane et un volume entourant la zone sera transformé en un volume entourant la couronne. De plus la fonction W, divisée par le rayon vecteur compté à partir du pôle d'inversion, donne une transformée W' harmonique, et, à partir des équations précédentes, il est aisé de calculer les valeurs de W' et celles de sa dérivée normale W'' en tout point de la couronne. De plus W' et W'' sont fonctions analytiques d'un point xy de la couronne [7].

(7) Le pôle d'inversion étant $z = -\mathrm{R}$ et la puissance $2\mathrm{R}^2$, la couronne transformée de la zone est dans le plan xOy (figure ci-contre). Les coordonnées polaires du point a transformé du point A de la sphère sont

$$\rho = \mathrm{R}\ \mathrm{tang}\frac{\theta}{2} \quad \text{et} \quad \varphi,$$

le rayon du cercle interne de la couronne est

$$\rho_0 = \mathrm{R}\ \mathrm{tang}\frac{\theta_0}{2},$$

celui du cercle externe est R^2/ρ_0. Enfin, posant $\delta = \mathrm{P}a$ nous pouvons prendre

$$\mathrm{W}'(a) = \frac{1}{\delta}\mathrm{W}(\mathrm{A}).$$

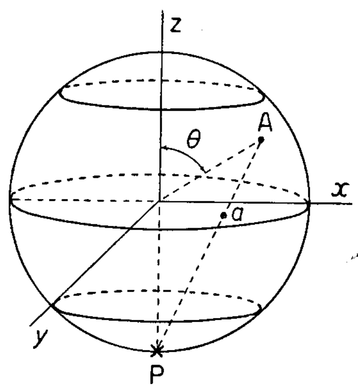


Fig. 10.

En un point de la couronne

$$\mathrm{W}'(a) = \frac{c}{\sqrt{\mathrm{R}^2 + \rho^2}}\left[\frac{\alpha(\mathrm{R}^2 + \rho_0^2)}{2\mathrm{R}\rho_0} - \beta\right],$$

Dans ces conditions j'ai donné une formule très simple pour obtenir W' dans une couche d'épaisseur finie entourant la couronne K [8]. Cette formule résulte de la formule bien connue, due à POISSON, concernant le problème analogue relatif à l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \, .$$

En remplaçant respectivement x, y, t par ix, iy, z, ce qui ne présente pas de difficultés puisque les données sont analytiques, on passe à l'équation caractéristique des potentiels. La fonction W' étant ainsi connue on reviendra à W par l'inversion déjà considérée.

Les calculs, sur lesquels nous n'insistons pas, ne présentent pas de difficultés.

4. La même question (détermination de W) peut se traiter par développement en série du type indiqué au Chapitre II, n° 5. Le rôle de la variable ρ_3 sera tenu par le rayon vecteur r issu du centre de la sphère et, en posant

$$r - R = \rho \, ,$$

nous aurons

$$W = w_0(\theta, \varphi) + \frac{\rho^2}{2!} w_2(\theta, \varphi) + \frac{\rho^2}{3!} w_3(\theta, \varphi) + \cdots . \tag{34}$$

Or l'équation de LAPLACE, en coordonnées sphériques, s'écrit

$$r^2 \Delta_2 W = \frac{\partial}{\partial \rho}\left(r^2 \frac{\partial W}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta \frac{\partial V}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 W}{\partial \varphi^2} = 0 .$$

α et β s'évaluant facilement en fonction de ρ

$$\sin\alpha = \frac{2R\sqrt{(\rho^2 - \rho_0^2)(R^4 - \rho^2\rho_0^2)}}{(R^2+\rho^2)(R^2-\rho_0^2)} \, , \quad \cos\alpha = \frac{(R^2-\rho^2)(R^2+\rho_0^2)}{(R^2+\rho^2)(R^2-\rho_0^2)} \, ,$$

$$\sin\beta = \frac{\sqrt{(\rho^2-\rho_0^2)(R^4-\rho^2\rho_0^2)}}{\rho(R^2-\rho_0^2)} \, , \qquad \cos\beta = \frac{\rho_0}{\rho}\frac{R^2-\rho^2}{R^2-\rho_0^2} .$$

Comme aux points de la zone la dérivée normale de W est nulle, nous aurons, sur la couronne,

$$\frac{\partial W'}{\partial z} = \frac{\partial \frac{1}{\delta}}{\partial z} W(A) = -\frac{1}{\delta^2}\cos\frac{\theta}{2} W(A) = -\frac{cR}{(R^2+\rho^2)^{3/2}}\left[\frac{\alpha(R^2+\rho_0^2)}{2R\rho_0} - \beta\right] .$$

On vérifie aisément que W' et $\partial W'/\partial z$ ainsi connues sont analytiques régulières autour de tout point de la couronne.

(8) *Esercizi di Fisica Matematica.* – I. *Sulle funzioni potenziali*, Torino « Rivista di matematica », 1894 [in queste « Opere », volume secondo, IV, pp. 74–86].

En y substituant (34) on obtient, pour déterminer de proche en proche les w_n, la relation

(35) $$R^2 w_n + 2R(n-1)w_{n-1} + (n-1)(n-2)w_{n-2} + \Omega w_{n-2} = 0$$

où Ω désigne l'opérateur différentiel

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}.$$

5. On obtiendra aisément des résultats analogues concernant d'autres cas simples: cas où σ est un cône ou un cylindre, cas d'une surface du second degré dont il n'est pas besoin de supposer qu'elle est de révolution.

XIII.

SUR LA THÉORIE DES ONDES LIQUIDES ET LA MÉTHODE DE GREEN (1)

« Journal de Math. pures et appliquées », tome XIII, 1934; pp. 1-15.

1. On me permettra, au début de cette Conférence, quelques remarques générales sur les méthodes, remarques qui permettront au moins de situer le problème étudié dans l'ensemble de la Physique mathématique.

Dans une Conférence que j'ai faite en 1920 à Strasbourg, au Congrès International des Mathématiciens, j'ai eu l'occasion de noter certaines analogies entre le développement historique de la Mécanique et celui de la Physique mathématique.

La première se constitue pendant la période de la Renaissance. Sa création est motivée par des problèmes pratiques tels que ceux que pose, par exemple, l'invention de l'artillerie; mais ses progrès dépendent, essentiellement, de ceux du calcul infinitésimal qui donne les méthodes adéquates pour exprimer les lois de la dynamique et pour en tirer les conséquences. Elle atteint son plein développement avec LAGRANGE qui, dans sa Mécanique analytique, unifie et systématise, en un tout organique, les résultats acquis.

Les diverses branches de la Physique mathématique ont de même leur origine dans des questions techniques. L'art de la construction amène à préciser les lois de la résistance des matériaux, puis la théorie générale de l'élasticité. L'usage des machines à feu donne lieu à des recherches qui aboutissent, d'une part, avec SADI CARNOT, à la thermodynamique, et, d'autre part, à la théorie de la propagation de la chaleur développée par FOURIER. Tout récemment, la découverte de la navigation aérienne a déterminé un progrès capital de la Mécanique des fluides. Mais la poussée la plus active qui ait agi sur la Physique mathématique est probablement celle qui se rapporte à l'énorme extension acquise par la théorie et les applications pratiques de l'électricité: dans ce domaine, expérimentation et analyse mathématique ont été intimement rapprochées et les théories qui se sont succédées ont fini par déborder le cadre de la physique mathématique classique.

(1) Je tiens à exprimer toute ma reconnaissance à M. JOSEPH PÉRÈS qui a bien voulu rédiger avec tant de clarté cette conférence faite en 1931 à Paris dans l'Institut de Mécanique des Fluides en mettant en rapport le sujet traité avec les idées que j'avais exposées en 1920 à Strasbourg au Congrès des Mathématiciens.

Si nous laissons de côté ces développements modernes, qui suivent des voies différentes [2], nous constatons que toutes les recherches de la Physique mathématique classique reposent sur l'étude des équations aux dérivées partielles. Le développement de cette branche de l'analyse a constitué l'instrument puissant qui a permis l'étude théorique de l'élasticité, de la chaleur, de l'électricité, de l'hydrodynamique, etc. C'est au moment où d'ALEMBERT, FOURIER, POISSON, CAUCHY commencent à faire un usage courant des équations aux dérivées partielles que s'ouvre la période vraiment féconde de la Physique mathématique.

Dans la Conférence déjà citée j'ai indiqué comment on pourrait concevoir une *Physique analytique*, réalisant, pour des théories développées le plus souvent sous forme monographique, une synthèse et une systématisation actuellement possible.

Dans l'ensemble on pourra distinguer deux méthodes principales. L'une, à laquelle on peut attacher le nom de FOURIER, obtient la solution générale sous forme de série de solutions simples. L'autre, qui remonte à POISSON, GREEN, KIRCHHOFF, utilise des intégrales portant sur toutes les valeurs des données au contour. Dualité qui se retrouve dans d'autres théories modernes: on peut ainsi concevoir l'espace fonctionnel comme espace à une infinité continue de dimensions ou comme espace à une infinité dénombrable de dimensions (lorsqu'on définit les fonctions par les coefficients de développements en série d'un type bien déterminé).

A la méthode de GREEN on peut rattacher celle des caractéristiques. Ce n'en est, en apparence, qu'une modification, mais l'intérêt de la notion de caractéristiques est si grand et elle joue un tel rôle dans l'intégration des équations, qu'une séparation s'impose qui n'est pas artificielle, mais correspond à quelque chose de substantiel. Incidemment, notons que cette méthode a peut-être contribué à préparer la voie aux théories de la relativité, en ce qu'elle implique la nécessité de regarder le temps comme une coordonnée.

La notion de caractéristique conduit à la distinction, bien connue, des équations différentielles en trois types: elliptique, hyperbolique et parabolique. Mais il faut reconnaître que la classification doit être appliquée plutôt aux problèmes qu'aux équations dont ils dépendent, car les données aux limites jouent un rôle essentiel dans cette classification. Que la classification en question soit délicate, c'est ce dont on se rendra compte à propos des développements sur la théorie des ondes dans les liquides qui forment l'objet de cette conférence: comme on le verra par la suite, le problème concerne trois variables spatiales et le temps; mais l'équation aux dérivées partielles correspondante est l'équation de LAPLACE à trois variables, c'est-à-dire l'équation la plus simple du type elliptique; le temps n'intervient que dans les conditions au contour. Ces conditions sont telles que le problème

(2) Au moment où la Conférence de Strasbourg a été prononcée ils n'avaient pas encore pris l'essor qu'ils ont à présent.

peut être rapproché, dans sa solution, de problèmes concernant des équations du type hyperbolique ou parabolique.

2. Soit un liquide homogène soumis à des forces données et occupant un certain volume limité, en partie par des parois solides, en partie par des surfaces libres pour lesquelles la pression est constante. Nous étudierons les petites oscillations de ce liquide à partir d'un état d'équilibre stable.

Désignons par x, y, z les coordonnées d'une molécule à l'état d'équilibre et par

$$x' = x + \xi \quad , \quad y' = y + \eta \quad , \quad z' = z + \xi$$

les coordonnées de la même molécule à l'instant t du mouvement; les déplacement $\xi\eta\zeta$ sont des fonctions, à déterminer, de $xyzt$; nous ferons l'hypothèse que ces déplacements sont petits ainsi que leurs dérivées.

Les équations fondamentales de l'hydrodynamique, prises sous la forme de LAGRANGE, s'écrivent:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}\frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}\frac{\partial y'}{\partial x} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2}\frac{\partial z'}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\mathrm{V} - \frac{\mathrm{P}}{\rho}\right),$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots ,$$

en désignant par P la pression, par ρ la densité et en supposant que les forces de masse admettent le potentiel V. Puisque

$$\frac{\partial x'}{\partial x} = 1 + \frac{\partial \xi}{\partial x} \quad , \quad \frac{\partial y'}{\partial x} = \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad , \quad \frac{\partial z'}{\partial x} = \frac{\partial \zeta}{\partial x}, \quad \dots ,$$

il reste, *en se bornant aux termes principaux*:

$$(1) \qquad \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\mathrm{V} - \frac{\mathrm{P}}{\rho}\right), \quad \dots ;$$

la condition d'incompressibilité

$$\frac{\mathrm{D}(x', y', z')}{\mathrm{D}(x, y, z)} = 1$$

se réduisant, dans les mêmes conditions, à

$$(2) \qquad \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} = 0 .$$

Soit $\Phi(xyzt)$ le potentiel des déplacements

$$\xi = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \quad , \quad \eta = \frac{\partial \Phi}{\partial y} \quad , \quad \zeta = \frac{\partial \Phi}{\partial z};$$

d'après la condition d'intégrabilité, ce sera une fonction harmonique de x, y, z:

$$(3) \qquad \Delta_2 \Phi \equiv \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0$$

et les équations fondamentales (1) se réduiront à l'équation unique

$$(4) \qquad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - \mathrm{V} + \frac{\mathrm{P}}{\rho} = c(t),$$

la constante d'intégration au second membre étant constante par rapport à xyz seuls. C'est l'équation qui détermine la pression P, en fonction de $xyzt$ quand on connaît le potentiel des vitesses.

Pour déterminer ce dernier on a l'équation de LAPLACE et des conditions aux limites qu'il reste à préciser.

Il est clair tout d'abord qu'en tout point d'une paroi rigide fixe on a

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0,$$

n désignant la normale à la paroi.

Soit enfin une surface libre. C'était une surface libre d'équilibre lorsque le fluide était au repos de sorte que V y avait la valeur constante V_0. Par rapport aux variables xyz une telle surface libre est caractérisée par l'équation

$$V = V_0 .$$

A l'instant t la molécule (xyz) a pris les déplacements ξ, η, ζ, de sorte que la valeur de V, à faire figurer dans (4), est

$$V(x+\xi, y+\eta, z+\zeta),$$

c'est-à-dire

$$V = V_0 + \frac{\partial V}{\partial x}\xi + \frac{\partial V}{\partial y}\eta + \frac{\partial V}{\partial z}\zeta,$$

en négligeant les infiniment petits d'ordre supérieur au premier.

Posons:

$$\lambda^2 = \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2,$$

d'où

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \lambda \cos nx,$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = \lambda \cos ny,$$

$$\frac{\partial V}{\partial z} = \lambda \cos nz$$

et enfin

$$V = V_0 + \lambda \frac{\partial \Phi}{\partial n},$$

n étant la normale à la surface libre (considérée en faisant abstraction des déplacements très petits du fluide) normale que nous orienterons vers l'intérieur du fluide.

Sur cette surface libre la pression doit avoir une valeur constante P_0 de sorte que (4) entraîne

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + \frac{\partial \Phi}{\partial n} - V_0 - \lambda \frac{P_0}{\rho} = c(t),$$

d'où, puisque Φ n'est définie qu'à une fonction arbitraire de t près,

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = \lambda \frac{\partial \Phi}{\partial n}.$$

Notons de plus que, comme il est bien connu, V doit croître lorsqu'on quitte la surface libre du côté de la normale positive. On a donc

$$\frac{\partial V}{\partial n} > 0 ;$$

mais

$$\frac{\partial V}{\partial n} = \frac{\partial V}{\partial x} \cos nx + \frac{\partial V}{\partial y} \cos ny + \frac{\partial V}{\partial z} \cos nz = \lambda ,$$

de sorte que λ est positif.

En résumé il vient, pour déterminer la fonction $\Phi(x, y, z, t)$, potentiel des déplacements, les conditions

$$\Delta_2 \Phi = 0 \tag{A}$$

dans tout le domaine occupé par la fluide;

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0 \tag{B}$$

à toute paroi fixe;

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = \lambda \frac{\partial \Phi}{\partial n} \tag{C}$$

à toute surface libre ($\lambda > 0$).

3. Nous pouvons faire une comparaison entre le problème que nous venons de considérer et d'autres problémes de physique mathématique.

Le problème des vibrations d'un milieu élastique dépend de l'équation

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \alpha^2 \Delta_2 U ; \tag{5}$$

celui de la propagation de la chaleur conduit à

$$\frac{\partial V}{\partial t} = a \Delta_2 V ; \tag{6}$$

enfin les problèmes du potentiel et des températures stationnaires dans les milieux isotropes dépendent de l'équation de LAPLACE

$$\Delta_2 W = 0. \tag{7}$$

Ces trois équations sont respectivement des trois types hyperbolique, parabolique et elliptique.

La question que nous avons considérée dans le paragraphe précédent relève du cas elliptique en tant que le potentiel Φ vérifie l'équation de LAPLACE (A). Mais elle diffère essentiellement, pour les données aux limites, des problèmes du potentiel et des températures stationnaires. L'une des conditions aux frontières (C) introduit en effet une nouvelle variable, le temps, comme dans les cas de la propagation de la chaleur ou des vibrations élastiques: il reste cependant une différence puisque (5) et (6) ont leurs caractéristiques réelles.

Nous avons déja dit qu'il y avait deux méthodes principales pour aborder ces problèmes.

La première est celle de la séparation des variables (ou des solutions simples).

Dans le cas de l'équation (5) on posera

$$U = u(x, y, z) \sin mt, \tag{8}$$

m étant une constante. Il vient

$$m^2 u + \Delta_2 u = 0, \tag{9}$$

équation dans laquelle le temps a disparu. Posons, pour fixer les idées, que U soit nul à la frontière: u doit remplir la même condition. Il faut donc trouver les valeurs de m telles que (9) ait des solutions non identiquement nulles (solutions fondamentales). L'intégrale générale de (5) est obtenue par une série infinie de solutions particulières du type (8) multipliées par des constantes arbitraires, dont il faut choisir les valeurs d'après les *données* U et $\partial U/\partial t$ à l'instant initial.

La question de la détermination des solutions fondamentales a été résolue par POINCARÉ. On sait qu'on y a ensuite appliqué la théorie des équations intégrales et que MM. HILBERT, SCHMIDT et d'autres ont établi la théorie des séries de solutions fondamentales.

Un procédé analogue peut être appliqué à l'équation (6). Posant

$$V = e^{-mt} \nu(x, y, z),$$

on a

$$m\nu + a\Delta_2 \nu = 0,$$

entièrement analogue à (9).

La même méthode de séparation des variables peut être appliquée au problème des ondes des liquides (3). Posant

$$\Phi = q(x, y, z) \sin mt,$$

on a toujours

$$\Delta_2 \varphi(x, y, z) = 0;$$

(B) donne de même

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0,$$

tandis que (C) doit être remplacée par

$$m^2 \varphi + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0.$$

Ici encore il faut trouver les valeurs de m pour lesquelles φ n'est pas identiquement nulle et la solution générale sera donnée par une série de solutions particulières. Pour trouver ces valeurs de m on peut utiliser la méthode de POINCARÉ ou celle des équations intégrales (4).

(3) Cf. mes *Leçons sur les équations intégrales et intégro-différentielles*, pp. 133-134.

(4) Comparer avec ce que nous allons dire pour les oscillations des liquides.

Bornons-nous au cas simple d'un liquide pesant, limité par une surface libre horizontale et des parois verticales, dont les petites oscillations sont parallèles au plan vertical xy et indépendantes de la troisième coordonnée z. Le potentiel des vitesses Φ dépendra de xy et t et, posant comme plus haut

$$\Phi = \varphi(x, y) \sin mt,$$

q sera fonction harmonique vérifiant la condition

$$m^2 \varphi + \alpha \frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0 \qquad (\alpha = \text{const.})$$

sur la surface libre que nous prendrons $y = 0$, et la condition

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0$$

sur les parois $x = a$, $x = b$. On en tire aisément

$$\varphi(x_1, y_1) - \varphi(x_2, y_2) = \frac{m^2}{2\pi\alpha} \int_a^b [\log r_1 - \log r_2 + \mathcal{G}'] \varphi(x, 0)\, dx,$$

r_1 et r_2 étant les distances du point $(x, 0)$ aux points (x_1, y_1) et (x_2, y_2) et $\mathcal{G}'$ une fonction de GREEN pour le problème de DIRICHLET. On en déduit

$$\varphi(x_1, 0) - \varphi(x_2, 0) = \frac{m^2}{2\pi\alpha} \int_a^b [\log |x_1 - x| - \log |x_2 - x| + \mathcal{G}'] \varphi(x, 0)\, dx.$$

Mais on a

$$\int_a^b \varphi(x_2, 0)\, dx_2 = 0,$$

ce qui permet aisément d'éliminer $\varphi(x_2, 0)$ de l'équation précédente qui se réduit à

$$\varphi(x_1, 0) = \frac{m^2}{2\pi\alpha} \int_a^b \varphi(x, 0)\, G(x_1, x)\, dx.$$

C'est une équation intégrale homogène; les valeurs de m, c'est-à-dire les périodes $2\pi/m$ des oscillations du liquide, se déduiront des racines du déterminant de cette équation (5).

Nous n'insisterons pas davantage sur la méhode de séparation des variables et passerons à la seconde méthode générale. Elle a été inauguré par

(5) Je reproduis ici la note qui se trouve à la page 134 de mes *Leçons sur les équations intégrales et intégro-différentielles* (Chap. III, § XV: *Application aux oscillations des liquides*). « C'est en considérant ce problème que j'ai eu l'occasion, en 1898, dans ma Conférence de Turin, sur le phénomène des Seiches de remarquer que la résolution d'une équation intégrale à limites fixes peut s'obtenir par une méthode qui amène à l'emploi des déterminants infinis (« N. Cimento », 4e série, t. VIII) [in queste « Opere », volume secondo, XXVIII, p. 370]. M. HILBERT a résolu ensuite ce problème comme exemple d'application de ses résultats généraux sur les équations intégrales ».

GREEN, pour les problèmes aux limites classiques sur l'équation de LAPLACE, puis, peu à peu, étendue à d'autres problèmes de Physique mathématique. C'est ainsi que KIRCHHOFF, appliquant les idées de GREEN à l'équation (5), arriva à la formule célèbre qui exprime le principe de HUYGHENS. BETTI a appliqué une méthode analogue à l'équation (6).

Nous montrerons dans la suite qu'on peut trouver une formule assez semblable dans le cas des ondes des liquides. J'ai eu l'occasion de mentionner cette formule dans mes Leçons de Stockholm (*). Je suis revenu sur ce sujet, plus en détail, dans une conférence faite à l'Université de Houston [6].

4. Établissons d'abord un théorème d'unicité.

THÉORÈME. – *Si* Φ *satisfait aux conditions* (A), (B), (C) *du paragraphe 2 elle est bien déterminée si l'on connaît les valeurs* Φ_0, $(\partial\Phi/\partial t)_0$ *de* Φ *et* $\partial\Phi/\partial t$ *prises à l'instant zéro sur la surface libre du fluide*, ω.

Nous désignons par S le volume occupé par le liquide. Il est limité par une surface dans laquelle nous distinguerons surface libre du liquide (ω) et parois fixes (ω').

Admettons alors qu'il existe deux solutions Φ_1 et Φ_2, vérifiant les conditions du théorème. Posant

$$\Phi_3 = \Phi_1 - \Phi_2,$$

on aurait, sur ω,

$$(\Phi_3)_0 = 0 \quad , \quad \left(\frac{\partial\Phi_3}{\partial t}\right)_0 = 0.$$

Transformons alors

$$\Omega = \frac{1}{2}\,\frac{\partial}{\partial t}\int_\omega \frac{1}{\lambda}\left(\frac{\partial\Phi_3}{\partial t}\right)^2 d\omega,$$

$$\Omega = \int_\omega \frac{1}{\lambda}\,\frac{\partial\Phi_3}{\partial t}\,\frac{\partial^2\Phi_3}{\partial t^2}\,d\omega = \int_\omega \frac{\partial\Phi_3}{\partial t}\,\frac{\partial\Phi_3}{\partial n}\,d\omega$$

et, puisque $\partial\Phi/\partial n$ est nul sur ω',

$$\Omega = \int_{\omega+\omega'} \frac{\partial\Phi_3}{\partial t}\,\frac{\partial\Phi_3}{\partial n}\,d\omega = -\int_S \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\Phi_3}{\partial x}\,\frac{\partial\Phi_3}{\partial t}\right) + \cdots\right] dS$$

et, en vertu de l'équation (A),

$$\Omega = -\int_S \left(\frac{\partial\Phi_3}{\partial x}\,\frac{\partial^2\Phi_3}{\partial x\,\partial t} + \frac{\partial\Phi_3}{\partial y}\,\frac{\partial^2\Phi_3}{\partial y\,\partial t} + \frac{\partial\Phi_3}{\partial z}\,\frac{\partial^2\Phi_3}{\partial z\,\partial t}\right) dS =$$

$$= -\frac{1}{2}\,\frac{\partial}{\partial t}\int_S \left[\left(\frac{\partial\Phi_3}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi_3}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi_3}{\partial z}\right)^2\right] dS.$$

(*) In queste « Opere », volume terzo, X, pp. 66–147 [N.d.R.].

(6) « The Rice Institute Pamphlet », vol. IV, pp. 102–117 [in queste « Opere », volume quarto. X, pp. 286–296].

Il en résulte que

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left\{\int\limits_{\omega}\frac{1}{\lambda}\left(\frac{\partial\Phi_3}{\partial t}\right)^2 d\omega+\int\limits_{S}\left[\left(\frac{\partial\Phi_3}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\Phi_3}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\Phi_3}{\partial z}\right)^2\right]dS\right\}=0,$$

d'où

$$\int\limits_{\omega}\frac{1}{\lambda}\left(\frac{\partial\Phi_3}{\partial t}\right)^2 d\omega+\int\limits_{S}\left\{\left(\frac{\partial\Phi_3}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\Phi_3}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\Phi_3}{\partial z}\right)^2\right\}dS=c, \tag{10}$$

c étant une constante par rapport à t.

Mais à l'instant zero Φ_3 est nul sur ω et $\partial\Phi_3/\partial n$ nul sur ω'; il en résulte que Φ_3 est identiquement nul dans le domaine S à cet instant. La seconde intégrale de (10) disparaît donc pour $t=0$; de même la première intégrale puisque $(\partial\Phi_3/\partial t)_0=0$. Il s'ensuit que c est nul et que Φ_3 est bien identiquement nul dans S quel que soit t.

Nous ajouterons les remarques suivantes:

1° *Si, à un instant, les molécules qui appartiennent à une partie du domaine* S *ne sont pas déplacées de leur position d'équilibre, aucune molécule du fluide n'est déplacée de sa position d'équilibre.*

Car ξ, η, ζ étant nuls dans une certaine région, Φ y est constante et, puisque c'est une fonction harmonique régulière elle est partout constante. ξ, η, ζ sont donc identiquement nuls.

2° *Si, à un instant, les molécules qui appartiennent à une partie de* S *ont des déplacements nuls et des vitesses nulles, le fluide reste dans sa position d'équilibre.*

En effet Φ et $\partial\Phi/\partial t$ sont alors constants dans une partie de S à un instant, donc constants dans le domaine S tout entier à cet instant. En vertu du théorème d'unicité ils seront constants dans S à chaque instant, ce qui implique que le liquide reste au repos.

On voit que dans le cas d'un liquide en mouvement le mouvement gagne toute la masse au même instant. Il y a là une différence essentielle avec les mouvements d'un corps élastique ou d'un liquide compressible, cas dans lesquels il peut y avoir mouvement propagé avec une certaine vitesse d'une région à une autre.

5. Arrivons maintenant à la formule fondamentale analogue, dans la question présente, à la formule de GREEN.

Soient Φ et Ψ deux fonctions régulières qui vérifient les conditions (A), (B), (C) du paragraphe 2. On a (théorème de GREEN)

$$\int\limits_{\omega+\omega'}\left(\Phi\frac{\partial\Psi}{\partial n}-\Psi\frac{\partial\Phi}{\partial n}\right)d\omega=0$$

et, à cause de (B) et (C),

$$\int\limits_{\omega}\left(\Phi\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2}-\Psi\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}\right)\frac{d\omega}{\lambda}=0. \tag{11}$$

Supposons maintenant que $\Psi = (1/r) + \chi$, r désignant la distance d'un point fixe A $(x_0\, y_0\, z_0)$ intérieur au domaine S au point (x, y, z) et χ étant harmonique régulière. Dans ce cas (11) doit être remplacée par

$$4\pi\Phi_A + \int_\omega \left(\Phi \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} - \Psi \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}\right) \frac{d\omega}{\lambda} = 0$$

ou

$$4\pi\Phi''_A = -\frac{\partial}{\partial t} \int_\omega \left(\Phi \frac{\partial \Psi}{\partial t} - \Psi \frac{\partial \Phi}{\partial t}\right) \frac{\partial\omega}{\lambda}$$

Intégrons entre les limites zéro et t_1. Il vient

$$2\pi \int_0^{t_1} \Phi_A\, dt = -\int_\omega \left(\Phi_1 \left(\frac{\partial \Psi}{\partial t}\right)_1 - \Psi_1 \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right)_1\right) \frac{d\omega}{\lambda} +$$

$$+ \int_\omega \left(\Phi_0 \left(\frac{\partial \Psi}{\partial t}\right)_0 - \Psi_0 \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right)_0\right) \frac{d\omega}{\lambda},$$

formule dans laquelle les indices zéro et 1 indiquent que la fonction à laquelle ils s'appliquent est à l'instant zéro ou à l'instant t_1. Supposons Ψ telle que

$$\Psi_1 \quad \text{et} \quad \left(\frac{\partial \Psi}{\partial t}\right)_1$$

soient nuls sur ω. Il viendra alors

$$\text{(D)} \qquad \Phi(x_0, y_0, z_0; t_1) = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t_1} \int_\omega \left\{ \Phi_0 \left(\frac{\partial \Psi}{\partial t}\right)_0 - \Psi_0 \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right)_0 \right\} \frac{d\omega}{\lambda}.$$

C'est la formule que nous avions en vue. Elle fait connaître Φ en tout point de S et à tout instant, si les valeurs de $(\Phi)_0$ et $(\partial\Phi/\partial t)_0$ sont connues sur ω, ce qui est d'accord avec le théorème d'unicité.

Il est nécessaire de calculer auparavant la fonction Ψ (ou χ). Cette fonction joue, dans la question, le rôle de fonction de Green. Il convient de remarquer que Ψ_0 et $(\partial\Psi/\partial t)_0$ dépendent de t_1 qui apparaît ainsi au second membre de (D).

6. Nous ferons une application de la formule fondamentale en prenant pour domaine S une sphère de rayon R et en supposant que ω est la surface de cette sphère: il n'y a donc pas de frontière rigide.

Nous rechercherons Ψ sous forme d'une série

$$\Psi = a_0 + a_2 \frac{(t_1 - t)^2}{2!} + a_4 \frac{(t_1 - t)^4}{4!} + \cdots,$$

$a_0, a_2, a_4 \cdots$, étant des coefficients indépendants de t_1 et de t. Nous aurons

$$\Psi_1 = a_0 \quad , \quad \left(\frac{\partial \Psi}{\partial t}\right)_4 = 0.$$

Or

$$\Psi = \frac{1}{r_A} + Z;$$

donc

$$a_0 = \frac{1}{r_A} + \chi_1$$

et puisque a_0 doit être nul sur ω et que χ est harmonique et régulière dans S la méthode des images donne immédiatement

$$\chi_1 = -\frac{R}{l}\frac{1}{r_{A'}},$$

A′ étant l'image de A par rapport à la sphère et $r_{A'}$ la distance de ce point au point xyz, l étant enfin la distance du centre de la sphère à A.

On a donc

$$a_0 = \frac{1}{r_A} - \frac{R}{l}\frac{1}{r_{A'}}.$$

Soit ρ le rayon vecteur, le pôle étant le centre de la sphére. Il vient

$$\frac{\partial\Psi}{\partial n} = -\frac{\partial\Psi}{\partial\rho} = -\left\{\frac{\partial a_0}{\partial\rho} + \frac{(t_1-t)^2}{2!}\frac{\partial a_2}{\partial\rho} + \cdots\right\}$$

et

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} = a_0 + \frac{(t_1-t)^2}{2!}a_4 + \cdots,$$

de sorte que la condition (C), remplie à la surface de la sphère, donne

$$-\lambda\frac{\partial a_0}{\partial\rho} = a_2 \quad , \quad -\lambda\frac{\partial a_2}{\partial\rho} = a_4, \cdots,$$

vérifiées sur ω.

a_0 étant connu, les fonctions harmoniques régulières a_2, a_4, $a_6, \cdots$ sont déterminées de proche en proche par leurs valeurs à la frontière.

Calculons d'abord a_2. En désignant par γ l'angle des rayons joignant A et (xyz) au centre, il vient

$$a_0 = \frac{1}{(l^2+\rho^2-2l\rho\cos\gamma)^{1/2}} - \frac{R}{l}\frac{1}{\left(\frac{R^4}{l^2}+\rho^2-2\frac{R^2}{l}\rho\cos\gamma\right)^{1/2}}$$

et

$$\frac{\rho}{R}\frac{\partial a_0}{\partial\rho} = \frac{\rho}{R}\frac{\partial}{\partial\rho}\frac{1}{(l^2+\rho^2-2l\rho\cos\gamma)^{1/2}} - \frac{\rho}{R}\frac{\partial}{\partial\rho}\left[\frac{R}{l}\frac{1}{\left(\frac{R^4}{l^2}+\rho^2-2\frac{R^2}{l}\rho\cos\gamma\right)^{1/2}}\right].$$

C'est là, comme on sait, une fonction harmonique qui égale $\partial a_0/\partial\rho$ à la surface de la sphère. On ne peut pourtant l'identifier avec a_2, parce qu'elle présente une singularité au point A.

Mais transformons le premier terme de l'expression précédente par rayons vecteurs réciproques et multiplions par R/ρ; le terme en question reste harmonique sans changer de valeur sur la sphère et devient régulier à l'intérieur. La transformation en question étant obtenue en changeant ρ en R^2/ρ, le terme en question devient

$$-R^2\frac{R^2-l\rho\cos\gamma}{(l^2\rho^2+R^4-2lR^2\rho\cos\gamma)^{3/2}},$$

tandis que le second s'écrit

$$\frac{\rho l (l\rho - R^2 \cos\gamma)}{(R^4 + l^2\rho^2 - 2lR^2\rho\cos\gamma)^{3/2}} .$$

On a ainsi

$$a_2 = -\lambda \frac{l^2\rho^2 - R^4}{[R^4 + l^2\rho^2 - 2lR^2\rho\cos\gamma]^{3/2}} .$$

Pour le calcul des coefficients suivants la difficulté précédente ne se présente pas et l'on a

$$a_4 = -\lambda \frac{\rho}{R} \frac{\partial a_2}{\partial \rho} = -\frac{\lambda}{R} \frac{\partial a_2}{\partial \log \rho} ,$$

$$a_6 = -\lambda \frac{\rho}{R} \frac{\partial a_4}{\partial \rho} = \left(-\frac{\lambda}{R} \frac{\partial}{\partial \log \rho}\right)^2 a_2 ,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

et, en général,

$$a_{2n} = \left(-\frac{\lambda}{R} \frac{\partial}{\partial \log \rho}\right)^{n-1} a_2 .$$

Posant, pour abréger,

$$E = \frac{R^4 - l^2\rho^2}{[R^4 + l^2\rho^2 - 2lR^2\rho\cos\gamma]^{3/2}} ,$$

il vient

$$\Psi = a_0 + \sum_1^\infty (-1)^{n-1} \frac{\lambda^n}{R^{n-1}} \frac{\partial^{n-1} E}{\partial (\log\rho)^{n-1}} \frac{(t_1 - t)^{2n}}{2n!}$$

et

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\sum_1^\infty (-1)^{n-1} \frac{\lambda^n}{R^{n-1}} \frac{\partial^{n-1} E}{\partial (\log\rho)^{n-1}} \frac{(t_1 - t)^{2n-1}}{(2n-1)!} .$$

Pour l'application de la formule (D) du paragraphe précédent il faut évaluer, sur la sphère, $(\Psi)_0$ et $(\partial\Psi/\partial t)_0$; enfin il faut dériver l'expression obtenue par rapport à t_1.

Adoptons les coordonnées polaires et posons

$$x = \rho \sin\theta \cos\alpha \quad , \quad y = \rho \sin\theta \sin\alpha \quad , \quad z = \rho\cos\theta$$

et les mêmes expressions, avec θ_0 et α_0, pour le point A.

Alors il vient

$$\cos\gamma = \cos\alpha\cos\alpha_0 + \sin\alpha\sin\alpha_0\cos(\theta - \theta_0)$$

et, posant

$$\Theta(l, \theta_0, \alpha_0, \theta, \alpha, t) =$$

$$= \sum_1^\infty (-1)^{n-1} \frac{\lambda^{n-1}}{R^{n-1}} \frac{\partial^{n-1}}{(\partial \log l)^{n-1}} \left\{ \frac{R^2 - l^2}{(l^2 + R^2 - 2Rl\cos\gamma)^{3/2}} \right\} \frac{t^{2n-1}}{(2n-1)!} ,$$

la formule (D) s'écrit

$$\Phi(l, \theta_0, \alpha_0, t) = \frac{R}{4\pi} \int \Phi'_0(\theta, \alpha)\, \Theta(l, \theta_0, \alpha_0, \theta, \alpha, t) \sin\theta\, d\theta\, d\alpha +$$

$$+ \frac{R}{4\pi} \int \Phi_0(\theta, \alpha) \frac{\partial}{\partial t} \Theta(l, \theta_0, \alpha_0, \theta, \alpha, t) \sin\theta\, d\theta\, d\alpha ,$$

en écrivant, pour simplifier,

$$\Phi_0(\theta, \alpha) = [\Phi_0(R, \theta, \alpha, t)]_{t=0},$$

$$\Phi_0'(\theta, \alpha) = \left[\frac{\partial}{\partial t}\Phi_0(R, \theta, \alpha, t)\right]_{t=0}.$$

Si, au lieu de la sphère, le liquide occupe une hémisphère dont le plan diamétral constitue la frontière rigide tandis que la sphère forme surface libre, la méthode des images conduira facilement à la solution. De même dans le cas où le liquide occupe une portion de sphère entre deux plans diamétraux rigides dont l'angle est π/n, n étant entier.

7. Il est inutile d'exposer ici l'application de la méthode de GREEN à l'équation (5) des vibrations, car on la trouve dans tous les traités et dans un grand nombre de travaux particuliers parmi lesquels il faut citer ceux de BELTRAMI qui a employé les procédés les plus simples et les plus élégants (7).

Mais nous indiquerons sommairement, pour terminer, comment se présente la méthode de GREEN dans le cas de l'équation de la chaleur, que nous écrirons

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \Delta_2 u.$$

Il faut y joindre l'équation

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\alpha^2 \Delta_2 v.$$

Dans ces conditions

$$v\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial t} = \alpha^2(v\Delta_2 u - u\Delta_2 v),$$

d'où

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_S uv\, dS = \alpha^2\int_S (v\Delta_2 u - u\Delta_2 v)\, dS = \alpha^2\int_\sigma \left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}\right) d\sigma$$

(n normale intérieure) et, enfin,

$$\left(\int_S uv\, dS\right)_{t_1} - \left(\int_S uv\, dS\right)_0 = \alpha^2\int_0^{t_1} dt\int_\sigma \left(u\frac{\partial v}{\partial n} - \frac{\partial u}{\partial n}\right) d\sigma.$$

Prenons

$$v = (t_1 - t)^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2}{4\alpha^2(t_1 - t)}},$$

on constate aisément que la formule précédente conduit à la suivante:

$$u(\xi, \eta, \zeta; t_1)(2\alpha\pi^{1/2})^3 = \alpha^2\int_0^{t_1} dt\int_\sigma \left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}\right) d\sigma + \int_S u_{t=0} v_{t=0}\, dS.$$

(7) BELTRAMI, « Opere Matematiche », t. IV.

Soit alors une fonction w telle que

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -\alpha^2 \Delta_2 w$$

et que

$$w_{t=t_1} = 0,$$

la formule précédente reste valable lorsque l'on y remplace ν par $\nu + w$. Si de plus on choisit w de façon que $\nu + w$ s'annule pour toutes les valeurs de $t\,(0 < t < t_1)$ sur le contour σ, il restera

$$u(\xi, \eta, \zeta; t_1)(2\alpha\pi^{1/2})^3 = \alpha^2 \int_0^{t_1} dt \int_\sigma u \frac{\partial(\nu + w)}{\partial n} d\sigma + \int_S u_{t=0}(\nu + w)_{t=0}\, dS.$$

Cette formule, analogue à (D), fait connaître u quand on connaît $u_{t=0}$ dans S et $u_t\,(0 < t < t_1)$ sur le contour σ. La fonction $\nu + w$ est la fonction de GREEN du problème de la chaleur.

La méthode du présent paragraphe est due à BETTI (8). Elle a été dépassée par celle des caractéristiques, mais il était intéressant de la rapprocher ici des développements du paragraphe 5.

Pour en revenir au problème des oscillations d'un liquide, problème sur lequel les travaux sont fort nombreux, on voit que, s'il n'appartient à aucun des trois types fondamentaux, il se rattache pourtant à tous trois: elliptique par l'équation de LAPLACE que vérifie Φ, parabolique par l'équation au contour

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = \lambda \frac{\partial \Phi}{\partial n},$$

hyperbolique parce qu'il donne lieu à des périodes.

J'ai eu l'occasion d'esquisser ici les deux points de vue sous lesquels on peut l'aborder. Suivant la tournure d'esprit du chercheur et suivant les applications en vue, l'un ou l'autre de ces points de vue pourra être préféré, il ne faut pas faire de choix *a priori*.

(8) BETTI, « Opere Matematiche », t. II.

XIV.

REPRÉSENTATION DES FONTIONNELLES ANALYTIQUES DÉDUITES DU THÉORÈME DE MITTAG-LEFFLER (*)

« Journal de Math. pures et appliquées », tome XIII, 1934; pp. 293-316.

1. Il me semble que les principaux progrès qu'ait fait la théorie des fonctionnelles dans ces dernières années concernent d'une part les champs fonctionnels – étudiés tant du point de vue de l'*Analysis situs* que d'un point de vue métrique, par l'introduction d'éléments linéaires – et concernent d'autre part la théorie des fonctionnelles analytiques, théorie à laquelle un jeune mathématicien italien, M. FANTAPPIÉ, a travaillé d'une manière très efficace (1).

Je voudrais, dans la présente Conférence, donner une idée des recherches récentes de M. FANTAPPIÉ sur les fonctionnelles analytiques. J'aurai d'ailleurs l'occasion d'envisager le sujet d'un point de vue nouveau et de développer une méthode qui, tout en tendant au même but, est différente de celle qu'a adoptée M. FANTAPPIÉ.

2. Nous rappellerons tout d'abord deux modes de représentation des fonctions analytiques, qui interviendront dans la suite et qui reposent, l'un et l'autre, sur l'emploi de la fonction élémentaire $1/(z-x)$ laquelle devient infinie pour $z = x$.

Le premier remonte à CAUCHY qui obtient, pour la valeur d'une fonction analytique $F(z)$, uniforme et régulière dans une aire σ du plan complexe, la formule classique

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_s \frac{F(x)\,dx}{x-z},$$

l'intégrale étant prise le long du contour s de l'aire σ.

L'expression ainsi obtenue est linéaire par rapport à $F(x)$, car elle exprime $F(z)$ comme une somme de fonctions élémentaires $\frac{1}{2\pi i}\,\frac{F(x)\,dx}{x-z}$.

(*) Je tiens à exprimer mes sentiments de reconnaissance à M. J. PÉRÈS, qui a bien voulu rédiger le texte de cette Conférence, faite à l'Institut Henri Poincaré, en mars 1933. V. V.

(1) Cfr. « Rend. Acc. Lincei », ser. 6ª, vol. I, 1925 (2 Note); vol. III, 1926; vol. IV, 1926 (2 Note); vol. V, 1927; vol. VII, 1928 (3 Note); e cfr. la Memoria citata infra (4) [N.d.R.].

3. L'autre méthode à laquelle nous venons de faire allusion est due à MITTAG-LEFFLER. Elle s'applique à une fonction analytique $F(z)$ uniforme dans tout le plan complexe et elle met en évidence les points singuliers de $F(z)$ et la partie principale (partie infinie) relative à chacun d'eux.

On part encore de la fonction élémentaire $1/(z-x)$ qui donne l'infini du premier ordre au point x. Par dérivation par rapport à x on obtient successivement:

$$\frac{1}{(z-x)^2}\ ,\quad \frac{2}{(z-x)^3}\ ,\quad \frac{2\cdot 3}{(z-x)^4}\ ,\quad \dots\ ,$$

et, par combinaison de ces *éléments simples* (somme ou série), on peut construire la partie infinie de tout point singulier x (pôle ou singularité essentielle). En modifiant la valeur de x on peut considérer un ensemble de points singuliers.

Ceci posé, MITTAG-LEFFLER donne $F(z)$ comme somme d'une série dont chaque terme correspond à l'un des points singuliers de $F(z)$ et contient la partie principale correspondante: on ne peut en général réduire les termes de la série aux diverses parties principales, il faut y ajouter des polynomes en x dont le choix intervient pour assurer la convergence de la série.

$F(z)$ est donc exprimée par une série de terme général

$$G\left(\frac{1}{z-x}\right)+P(z),$$

où G représente en général une transcendante entière et P un polynome [2]. On voit que dans la construction de $f(z)$ on a à combiner linéairement non seulement les fractions rationnelles

$$\frac{1}{z-x}\ ,\quad \frac{1}{(z-x)^2}\ ,\quad \frac{2}{(z-x)^3}\ ,\quad \frac{2\cdot 3}{(z-x)^4}\ ,\quad \dots\ ,$$

mais encore les puissances entières de z:

$$z^0\ ,\ z\ ,\ z^2\ ,\ z^3,\ \dots\ .$$

4. Passons maintenant aux fonctionnelles pour rappeler d'abord quelques notions générales.

On sait ce qu'il faut entendre par fonctionnelle: si à chaque fonction $f(z)$ appartenant à un certain domaine fonctionnel correspond une valeur d'une certaine quantité, celle-ci est une *fonctionnelle* de $f(z)$ et $f(z)$ est la *fonction-variable indépendante*.

Nous nous limiterons dans la suite au cas où $f(z)$ est fonction analytique uniforme de la variable complexe z: nous imposons donc une restriction au domaine fonctionnel de définition. Nous admettrons de plus que le domaine de variabilité de z soit une certaine partie Σ du plan complexe; il pourra d'ailleurs arriver que Σ puisse être aussi grand que l'on veut et

(2) Pour le détail de la démonstration, cfr., par exemple, E. BOREL, *Leçons sur les fonctions méromorphes*, pp. 8-14.

étendu à tout le plan complexe. Nous représenterons la fonctionnelle par $F\,|\,[f(z)]\,|$.

5. $F\,|\,[f(z)]\,|$ sera dite *continue* si à tout nombre σ arbitrairement petit on peut en associer un autre, ε, tel que l'inégalité

$$|\,F\,|\,[f_1(z)]\,| - F\,|\,[f_2(z)]\,|\,| < \sigma$$

soit entraînée par

$$|\,f_1(z) - f_2(z)\,| < \varepsilon$$

satisfaite dans tout le domaine Σ.

Si cette propriété subsiste quelle que soit Σ lorsqu'on l'agrandit autant qu'on veut, il y aura continuité dans tout le plan complexe de variabilité de z.

La fonctionnelle continue sera dite *linéaire* si elle vérifie

$$F\,|\,[f_1(z) + f_2(z)]\,| = F\,|\,[f_1(z)]\,| + F\,|\,[f_2(z)]\,|,$$

d'où

$$F\,|\,[\alpha f(z)]\,| = \alpha F\,|\,[f(z)]\,|,$$

α étant une constante.

Pour le cas linéaire la condition de continuité entraîne que

$$|\,F\,|\,[f(z)]\,|\,| < \sigma,$$

arbitrairement petit, dès que

$$|\,f(z)\,| < \varepsilon.$$

6. M. Fantappié a donné le nom de *fonctionnelles analytiques* aux fonctionnelles $F\,|\,[f(z)]\,|$, dépendant de la fonction analytique $f(z)$ et qui jouissent de plus de la propriété suivante: si $f(z)$ dépend *analytiquement* d'un paramètre x [nous la noterons alors $f(z\,|\,x)$], F est fonction analytique de x.

Si la fonctionnelle analytique est de plus *linéaire*, les conditions de linéarité entraînent immédiatement pour la dérivée dF/dx la formule

$$\frac{d}{dx} F\,|\,[f(z\,|\,x)]\,| = F\left|\left[\frac{df(z\,|\,x)}{dx}\right]\right|$$

et une formule analogue vaut évidemment pour l'intégration

$$\int_a^b F\,|\,[f(z\,|\,x)]\,|\,dx = F\left|\left[\int_a^b f(z\,,x)\,dx\right]\right|.$$

Si le chemin d'intégration pour x est une ligne fermée qui n'enferme aucune singularité de f on aura, d'après le théorème de Cauchy:

$$\int_S F\,|\,[f(z\,|\,x)]\,|\,dx = F\left|\left[\int_S f(z\,|\,x)\,dx\right]\right| = 0.$$

Ainsi, dans le cas d'une *fonctionnelle analytique linéaire*, les opérations de dérivation et d'intégration par rapport au paramètre peuvent s'effectuer sous le signe fonctionnel F.

7. Les remarques précédentes permettent, en suivant l'élégante analyse de M. FANTAPPIÉ, d'introduire la notion essentielle d'*indicatrice fonctionelle.*

Puisque $1/(x-z)$ est l'élément fondamental d'une fonction analytique de même

$$F\left|\left[\frac{1}{x-z}\right]\right| = \nu(x),$$

indicatrice fonctionnelle, sera l'élément fondamental dans la construction des fonctionnelles analytiques.

8. Nous pouvons maintenant, suivant toujours la méthode de M. FANTAPPIÉ, effectuer la construction d'une *fonctionnelle analytique linéaire* dont l'indicatrice $\nu(x)$ est connue.

Nous partirons du théorème de CAUCHY

$$\frac{1}{2\pi i}\int_S \frac{f(x)}{x-z}\,dx = f(z),$$

en prenant pour S une ligne qui sépare les singularités de $f(x)$ et celles de $\nu(x)$ (3).

Toute fonctionnelle analytique linéaire admet l'expression fondamentale

$$F\,|\,[f(z)]\,| = \frac{1}{2\pi i}\int_S f(x)\,\nu(x)\,dx. \tag{1}$$

9. La formule précédente (1) de M. FANTAPPIÉ résout le problème de construire les fonctionnelles analytiques linéaires par application du théorème de CAUCHY. Nous allons, dans la suite, appliquer au même problème mon procédé qui consiste à employer la méthode donnée par MITTAG-LEFFLER pour construire les fonctions analytiques.

A cet effet nous partirons toujours de la fonction indicatrice que nous définirons (en changeant son signe) par la formule

$$\nu(x) = F\left|\left[\frac{1}{z-x}\right]\right|,$$

c'est une fonction analytique de x que *nous supposons connue.* Il faut tout d'abord en déduire les valeurs des expressions

$$F\left|\left[\frac{1}{(z-x)^n}\right]\right|$$

et

$$F\,|\,[z^n]\,|.$$

Pour les premières aucune difficulté ne se présente: on aura évidemment

$$F\left|\left[\frac{1}{(z-x)^n}\right]\right| = \frac{\nu^{(n-1)}(x)}{(n-1)!}.$$

(3) Le texte donne seulement une idée de la méthode; pour les détails de la démonstration le lecteur devra se reporter aux travaux de M. FANTAPPIÉ. [Cfr. la nota (4), § 19].

Pour obtenir $F\,|\,[z^n]\,|$ nous partirons du développement

$$x\frac{1}{z-x} = -\frac{1}{1-\dfrac{z}{x}} = -1-\frac{z}{x}-\frac{z^2}{x^2}-\cdots-\frac{z^m}{x^m}+\frac{\dfrac{z^{m+1}}{x^{m+1}}}{\dfrac{z}{x}-1}\,.$$

On en déduit (m étant pris égal à o):

$$F\left|\left[x\frac{1}{z-x}\right]\right| = x\nu(x) = F\,|\,[-1]\,|+F\left|\left[\frac{\dfrac{z}{x}}{\dfrac{z}{x}-1}\right]\right|;$$

admettons que le domaine Σ de variation de z soit fini et faisons croître x indéfiniment. Si $x\nu(x)$ a une limite et que

$$\lim x\nu(x) = -\nu_0,$$

nous devrons poser

$$F\,|\,[1]\,| = +\nu_0.$$

Envisageons alors

$$F\left|\left[x\frac{1}{z-x}\right]\right| + F\,|\,[1]\,| = F\left|\left[-\frac{z}{x}+\frac{\dfrac{z^2}{x^2}}{\dfrac{z}{x}-1}\right]\right|,$$

c'est-à-dire

$$x\nu(x)+\nu_0 = F\left|\left[-\frac{z}{x}\right]\right| + F\left|\left[\frac{\dfrac{z^2}{x^2}}{\dfrac{z}{x}-1}\right]\right|,$$

puis

$$-x\{x\nu(x)+\nu_0\} = F\,|\,[z]\,|-F\left|\left[\frac{\dfrac{z^2}{x}}{\dfrac{z}{x}-1}\right]\right|;$$

si le premier membre a une limite pour $x=\infty$ et que l'on pose

$$-\nu_1 = \lim_{x=\infty} x\,(x\nu(x)+\nu_0),$$

on aura

$$F\,|\,[z]\,| = \nu_1.$$

Un raisonnement analogue conduira à la formule

$$F\,|\,[z^n]\,| = \nu_n,$$

ν_n étant la limite

$$\nu_n = -\lim_{x=\infty}\{x^{n+1}\nu(x)+\nu_0 x^n+\nu_1 x^{n-1}+\cdots+\nu_{n-1}x\}.$$

Pour éviter toute difficulté sur l'existence des limites précédentes nous nous restreindrons au cas où l'indicatrice $\nu(x)$ est régulière autour du point à l'infini et admet un développement en série

$$\nu(x) = \frac{B_0}{x}+\frac{B_1}{x^2}+\cdots+\frac{B_n}{x^{n+1}}+\cdots,$$

valable pour $|x|$ assez grand on aura

$$\lim_{x=+\infty} x\nu(x) = B_0, \quad \lim_{x=+\infty} (x^2\nu(x) - B_0 x) = B_1, \cdots,$$

et, par suite,

$$F|[1]| = \nu_0 = -B_0 \quad , \quad F|[z]| = \nu_1 = -B_1, \cdots,$$

en général

$$F|[z^n]| = \nu_n = -B_n.$$

10. Nous sommes ainsi en mesure d'exprimer la fonctionelle F pour toute fonction f rationnelle et entière: si

$$f(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n,$$

on aura

$$F|[f(z)]| = a_0\nu_0 + a_1\nu_1 + \cdots + a_n\nu_n.$$

Nous pourrons de même avoir F pour une fonction f quelconque rationnelle. Prenant f décomposée en éléments simples sous la forme

$$f = \sum_1^m{}_h \sum_1^{p_h}{}_r \frac{a_{hr}}{(z - z_{hr})^r} + a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n,$$

il viendra

$$F|[f(z)]| = \sum_1^m{}_h \sum_1^{p_h}{}_r a_{hr} \frac{\nu^{(r-1)}(z_h)}{(r-1)!} + \sum_0^n{}_g a_g \nu_g.$$

11. Passons à l'expression d'une fonctionnelle *d'une fonction uniforme transcendante.*

Commençons par supposer que la transcendante n'ait que des singularités polaires, les pôles $z_1, z_2, \cdots, z_n, \cdots,$ dont aucun n'est à l'origine ayant pour point limite $z = \infty$. Nous pouvons toujours admettre que

$$|z_1| < |z_2| < \cdots$$

Soit alors

$$\frac{p_{1n}}{z - z_n} + \frac{p_{2n}}{(z - z_n)^2} + \frac{p_{hn}}{(z - z_n)^h} = S_n(z)$$

la partie principale de la transcendante $f(z)$ au voisinage du pôle z_n. C_n étant le cercle de centre l'origine et de rayon $|z_n| - \delta$, c'est-à-dire de rayon plus petit que $|z_n|$. Dans ce cercle on pourra développer $S_n(z)$ en séries de puissances

$$a_{0n} + a_{1n} z + \cdots + a_{k_n n} z^{k_n} + \cdots,$$

et l'on pourra toujours choisir k_n de façon que

$$|S_n(z) - a_{0n} - a_{1n} z - \cdots - a_{k_n} z^{k_n}| < \varepsilon_n,$$

dans le cercle C_n (ε_n étant arbitrairement petit). Il en résulte (n° 5) que

$$F|[S_n(z) - a_{0n} - a_{1n} z - \cdots - a_{k_n n} z^{k_n}]| < \eta_n,$$

arbitrairement petit avec ε_n.

Ceci posé, prenons une série convergente de termes positifs et constants:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n + \cdots;$$

il sera toujours possible de choisir k_n de façon que, simultanément, on ait

$$\varepsilon_n < \alpha_n \quad , \quad \eta_n < \alpha_n .$$

En effet, nous prendrons d'abord k_n de façon que

$$\varepsilon_n = \alpha_n ;$$

si la valeur correspondante η_n est aussi plus petite que α_n la question est résolue, sinon il suffira d'augmenter k_n, ce qui diminue ε_n, jusqu'au point de rendre $\eta_n < \alpha_n$.

Prenons alors

$$(2) \qquad f(z) = \sum_1^\infty{}_n \left[S_n(z) - a_{0n} - a_{1n} z - \cdots - a_{k_n n} z^{k_n}\right],$$

cette série sera évidemment convergente, comme on le voit par le procédé même qui sert dans le théorème de MITTAG-LEFFLER: z étant un point intérieur à C_n, la série

$$\sum_{n+1}^\infty \left[S_n(z) - a_{0n} - a_{1n} z - \cdots - a_{k_n n} z^{k_n}\right]$$

est majorée par la série convergente

$$\alpha_{n+1} + \alpha_{n+2} + \cdots,$$

et converge par suite.

De même prenons

$$p_{1n}\,\nu(z_n) + p_{2n}\frac{\nu'(z_n)}{1!} + \cdots + p_{hn}\frac{\nu^{(h-1)}(z_n)}{(h-1)!} - a_{0n}\nu_0 - a_{1n}\nu_1 - \cdots - a_{k_n n}\nu_{k_n};$$

cette expression égale

$$F\,|\,[S_n(z) - a_{0n} - a_{1n} z - \cdots - a_{k_n n} z^{k_n}]\,|,$$

et par suite son module est inférieur *à* $\eta_n < \alpha_n$; la série

$$\sum_1^\infty{}_n F\,|\,[S_n(z) - a_{0n} - a_{1n} z - \cdots - a_{k_n n} z^{k_n}]\,|$$

sera donc convergente et l'on aura

$$(3) \quad F|[f(z)]| = \sum_1^\infty \left\{ p_{1n}\nu_1(z_n) + \cdots + p_{hn}\frac{\nu^{(h-1)}(z_n)}{(h-1)!} - a_{0n}\nu_0 - \cdots - a_{k_n n}\nu_{k_n} \right\},$$

la fonctionnelle étudiée est ainsi définie par une série convergente.

12. L'expression (2) ne représente pas la fonction la plus générale ayant les pôles z_n avec les parties principales assignées $S_n(z)$; mais on sait que pour l'obtenir il suffit d'ajouter à la série du second membre de (2) une fonction

entière arbitraire

$$g(z) = \sum_0^\infty {}_n\, a_n z^n.$$

Il s'ajoutera alors à l'expression (3) de F la série

$$\sum_0^\infty {}_n\, a_n \nu_n,$$

dont il reste à vérifier la convergence.

Or, puisque l'indicatrice est supposée régulière dans le voisinage du point à l'infini (n° 9, p. 297), il existe une constante k telle que

$$|\nu_n| < k^n$$

et la série $\Sigma a_n \nu_n$ est majorée par $\Sigma\,|a_n|\,k^n$ évidemment convergente puisque g est fonction entière.

Les termes de la série $\Sigma a_n \nu_n$ peuvent d'ailleurs être répartis dans la série $\Sigma a_{ik} \nu_k$ de sorte que la formule (3) [et aussi (2)] s'appliquera à tous les cas — mais avec une détermination différente des coefficients a_{ik}.

13. Nous pouvons nous rendre compte de la convergence de la série (3) d'une autre manière.

Supposons pour simplifier que tous les pôles de la fonction transcendante $f(z)$ soient du premier ordre et que l'on ait pour partie principale correspondante du pôle z_n

$$\frac{p_n}{z - z_n}.$$

Nous prendrons

$$f(z) = \sum_1^\infty \left(\frac{p_n}{z - z_n} + \frac{p_n}{z_n} + \frac{p_n z}{z_n^2} + \cdots + \frac{p_n z^{k_n}}{z_n^{k_n+1}} \right)$$

en choisissant les k_n de façon que cette série soit convergente. Il viendra alors

$$\mathrm{F}\,|\,[f(z)]\,| = \sum_1^\infty {}_n\, p_n \left\{ \nu(z_n) + \frac{\nu_0}{z_n} + \frac{\nu_1}{z_n^2} + \cdots + \frac{\nu_{k_n}}{z_n^{k_n+1}} \right\} =$$

$$= \Sigma p_n \left(\frac{\mathrm{B}_{k_n+1}}{z_n^{k_n+1}} + \cdots \right)$$

(cf. n° 9) et, puisque $\nu(z)$ est régulière à l'infini, on pourra toujours rendre convergente cette série, en augmentant au besoin les k_n.

14. Passons enfin au cas où $f(z)$ a des points singuliers essentiels.

L'extension est très simple. Si, d'abord, il y a un seul point singulier essentiel z_1 avec une partie infinie donnée par la transcendante entière

$$\mathrm{G}\left(\frac{1}{z - z_1}\right),$$

où la série

$$G(z) = a_1 z + a_2 z^2 + \cdots$$

est convergente quel que soit z, nous avons à considérer la série

$$\sum_1^\infty {}_n\, a_n \frac{\nu^{(n-1)}(z_1)}{(n-1)!};$$

mais cette série est convergente si z_1 n'est pas point singulier de $\nu(z)$, parce que, à partir d'un certain indice, on a certainement $a^n < \varepsilon^n$, ε étant choisi arbitrairement petit.

Sous cette réserve de non-coïncidence des points singuliers de ν et f respectivement, réserve qui d'ailleurs était implicitement contenue dans les résultats précédents, il n'y a aucune difficulté à donner une expression de $F\,|\,[f(z)]\,|$ analogue à (3) pour les cas où $f(z)$ a des points singuliers essentiels.

15. Considérons quelques cas particuliers de fonctions indicatrices. Soit la fonction indicatrice

$$F\left|\left[\frac{1}{z-x}\right]\right| = \frac{1}{y-x},$$

y étant un point fixe qui est le pôle de la fonction indicatrice. On aura

$$F\left|\left[\frac{1}{(z-x)^n}\right]\right| = \frac{1}{(y-x)^n},$$

et, développant $1/(y-x)$ par les puissances de $1/x$, il viendra

$$\frac{y}{y-x} = -\frac{1}{x} - \frac{y}{x^2} - \frac{y^2}{x^3} - \cdots,$$

d'où (n° 9)

$$F\,|\,[z^n]\,| = y^n.$$

Prenant une fonction uniforme quelconque

$$f(z),$$

il en résulte immédiatement que

$$F\,|\,[f(z)]\,| = f(y);$$

la fonctionnelle correspondante fait correspondre à $f(z)$ la valeur de cette fonction au point $z = y$; si l'on considère y comme paramètre variable, on a une transformation fonctionnelle qui se réduit à l'identité.

16. Prenons maintenant pour indicatrice

$$F\left|\left[\frac{1}{z-x}\right]\right| = \frac{1}{(y-x)^n};$$

il vient

$$F\left|\left[\frac{1}{(z-x)^2}\right]\right| = \frac{n}{(z-x)^{n+1}},$$

et, en général,

$$\mathrm{F}\left|\left[\frac{1}{(z-x)^h}\right]\right| = \frac{n(n+1)\cdots(n+h-2)}{(h-1)!}\,\frac{1}{(y-x)^{n+h-1}}.$$

D'autre part, en développant $1/(y-x)$ suivant les puissances de $1/x$, nous avons

$$\frac{1}{(y-x)^n} = \frac{1}{x^n}\left\{\frac{y}{x}-1\right\}^{-n} = (-1)^n\frac{1}{x^n}\left\{1+\frac{ny}{x}+\frac{n(n+1)}{1\cdot 2}\frac{y^2}{x^2}+\cdots\right\},$$

d'où

$$\mathrm{F}\,|\,[z^m]\,| = 0 \quad \text{pour} \quad m = 1, 2, \cdots, n-2,$$

$$\mathrm{F}\,|\,[z^{n-1}]\,| = (-1)^{n-1}$$

et

$$\mathrm{F}\,|\,[z^m]\,| = (-1)^{n-1}\frac{n(n+1)\cdots m}{(m-n+1)!}y^{m-n+1} \quad \text{pour} \quad m > n-1.$$

Nous laissons au lecteur le soin d'écrire la formule [précédente (3)] donnant la fonctionnelle $\mathrm{F}\,|\,[f(z)]\,|$. La convergence de la série se vérifie aisément et l'on retrouve ainsi, dans ce cas particulier, le résultat du n° 13.

17. On passe tout naturellement de là au cas de l'indicatrice

$$\mathrm{F}\left|\left[\frac{1}{z-x}\right]\right| = \sum_1^k{}_h \frac{q_h}{(y-x)^h},$$

et l'on a alors

$$\mathrm{F}\left|\left[\sum_1^m{}_n \frac{p_n}{(z-x)^n}\right]\right| = \sum_1^m{}_n \frac{p_n}{(n-1)!}\sum_1^k{}_h \frac{h(h+1)\cdots(h+n-2)}{(y-x)^{h+n-1}}q_h. \tag{4}$$

Il n'y a d'ailleurs aucune difficulté à remplacer les sommes précédentes Σ_h et Σ_n par des séries, pourvu que

$$\mathrm{G}_1(z) = \sum_1^\infty{}_h q_h z^h \quad , \quad \mathrm{G}_2(z) = \sum_1^\infty{}_n p_n z^n$$

soient des transcendantes entières: dans cette hypothèse, on aura en effet, à partir de certaines valeurs de h et n,

$$|q_h| < \varepsilon^h \quad , \quad |p^n| < \eta^n,$$

quelque petits que soient choisis ε et η. La convergence de la série analogue à (4) se vérifie encore directement: une série majorante est en effet

$$\sum_1^\infty{}_n \frac{\eta^n}{(n-1)!}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\sum_1^\infty{}_h \frac{\varepsilon^h}{(y-x)^h} = \frac{\varepsilon\eta}{y-x}\sum_1^\infty{}_n \frac{\eta^{n-1}}{(n-1)!}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left\{\frac{1}{1-\dfrac{\varepsilon}{y-x}}\right\}$$

$$= \frac{\varepsilon\eta}{y-x}\,\frac{1}{1-\dfrac{\varepsilon}{y-x-\eta}}.$$

Dans ce cas on pourra aussi calculer $\mathrm{F}\,|\,[f(z)]\,|$ si $f(z)$ est une transcendante entière.

18. Rien n'empêche de prendre pour indicatrice une transcendente entière, mais alors on ne pourra trouver les fonctionnelles que des fonctions qui n'ont pas de singularités à l'infini.

On peut enfin prendre pour f et ν deux fonctions uniformes quelconques ayant un nombre fini de singularités dans tout domaine fini du plan complexe. Nous les représenterons par

$$f(z) = \sum_{1}^{M}{}_m \sum_{1}^{n_m}{}_n \frac{p_{mn}}{(z - z_m)^n} + \mathrm{P}(z),$$

$$\nu(x) = \sum_{1}^{H}{}_h \sum_{1}^{k_h}{}_k \frac{q_{hk}}{(x - x_h)^k} + \mathcal{Q}(x),$$

les points singuliers de f étant $z_1, z_2, \cdots$ et ceux de ν: $x_1, x_2, \cdots$; n_m et k_k, M et H peuvent être finis ou infinis.

Admettons qu'il n'y ait pas de singularités communes à distance finie entre f et v; supposons de plus que si $f(z)$ a un point de singularité à l'infini $\nu(x)$ ne l'ait pas, ou réciproquement, et plaçons-nous, pour fixer les idées, dans le premier cas: les termes $\mathcal{Q}(x)$ manqueront alors et H sera fini. On aura alors [soit directement, soit par application de la précédente (3)] $\mathrm{F} \mid [f(x)] \mid$ (ν étant l'indicatrice de la fonctionnelle) exprimées par une série

$$\sum_{1}^{H}{}_m \left\{ \sum_{1}^{n_m}{}_n \frac{p_{mn}}{n!} \nu^{(n)}(z_m) + \tau_m(x_1, x_2, \cdots) \right\},$$

τ_m étant un polynome rationnel ou entier, qui prendra aussi la forme

$$\Sigma \left[\frac{\mathrm{A}}{(z_m - x_h)^q} + \Sigma \alpha x_h^e \right],$$

les sommations étant faites par rapport aux divers indices, les e étant des exposants entiers.

19. Ce qui précède met en évidence une certaine symétrie entre les rôles que peuvent jouer f et ν. Cette symétrie est en évidence sur l'expression due à M. FANTAPPIÉ

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{S} f(z)\, \nu(z)\, dz .$$

C'est là une opération que M. FANTAPPIÉ nomme produit fonctionnel hémisymétrique de f et v et qu'il a étudié de façon très complète dans son Mémoire fondamental auquel nous renvoyons le lecteur [4].

20. Ayant donné dans ce qui précède deux manières de calculer les fonctionnelles analytiques linéaires, l'une créée par M. FANTAPPIÉ quand il a fondé la théorie et qui s'appuie sur le théorème de CAUCHY, l'autre que je

(4) «Memorie della R. Acc. dei Lincei», 6e série, vol III, fasc. XI (1930).

viens de donner reposant sur le théorème de MITTAG–LEFFLER, nous allons passer aux fonctionnelles analytiques qui ne sont pas linéaires. Dans leur étude il faudra suivre une voie analogue à celle que l'on suit dans le cas des fonctions et nous rencontrerons de prime abord une difficulté fondamentale sur laquelle il convient d'insister.

On cherche toujours en Analyse de ramener un problème à des problèmes linéaires: c'est, ainsi, par exemple, que l'on procède dans la résolution des équations transcendantes.

De même l'étude des fonctions débute par celle de leurs différentielles ou, ce qui revient au même, du premier terme de leur développement, lequel est *linéaire* par rapport à la variable. En prenant de proche en proche des différentielles de différentielles on arrive au développement de TAYLOR.

J'ai procédé de même dans l'étude des fonctionnelles [5] et le premier pas que j'ai eu à faire fut de calculer la différentielle ou la dérivée d'une fonctionnelle.

Je me suis en fait attaché à la dérivation des fonctionnelles et ce fut réellement le premier résultat général obtenu dans ce domaine.

Plus tard MM. HADAMARD, FRÉCHET et PAUL LÉVY ont substitué la construction des différentielles à celles des dérivées. Sans examiner ici s'il est plus opportun de commencer par les unes ou par les autres, je vais dire ici les raisons qui m'ont fait choisir les dérivées.

C'est que j'ai toujours envisagé les fonctionnelles comme des fonctions d'un nombre infini de variables et que les dérivées fonctionnelles telles que je les ai introduites correspondent alors parfaitement aux dérivées partielles de la théorie ordinaire des fonctions.

Représentant une fonction d'une variable par une ligne plane je considère tout d'abord la fonctionnelle comme fonction de cette ligne. Dans ces conditions le concept de dérivation (du type de la dérivation partielle) s'obtient en modifiant la courbe dans le voisinage d'un de ses points et la maintenant sans modification dans les autres parties. Si la fonctionnelle est continue, son accroissement est infiniment petit et le rapport de cet accroissement à l'aire comprise entre la ligne primitive et la ligne variée est la dérivée fonctionnelle au point considéré. On passe facilement, d'ailleurs, de la dérivée à la différentielle en modifiant infiniment peu la courbe dans toute son extension par une suite de modifications partielles affectant les voisinages des divers points.

21. Or la difficulté à laquelle je faisais allusion est la suivante: si l'argument variable de la fonctionnelle est une fonction analytique au lieu d'une fonction simplement continue, ce procédé ne peut plus s'appliquer: il est impossible de faire varier cette fonction dans le voisinage d'un point sans

(5) Voir VOLTERRA, *Leçons sur les fonctions de lignes*, Paris, Gauthier-Villars, 1913, ou VOLTERRA, *Theory of fonctionnals and of integral and integro-differential equations*, London and Glasgow, Blackie and Son, 1930.

la modifier partout. Il faut donc ou bien renoncer à établir une dérivée fonctionnelle ou suivre, pour arriver à ce concept, une voie tout à fait différente.

C'est ce qu'a fait M. FANTAPPIÉ, d'une façon très originale et très élégante, en s'appuyant sur le concept d'indicatrice fonctionnelle.

Soit $F \mid [f(z)] \mid$ une fonctionnelle analytique continue; formons

$$F \mid [f(z) + \varepsilon\varphi(z)] \mid$$

et supposons-la développable en série des puissances de ε. Il viendra

$$F \mid [f(z) + \varepsilon\varphi(z)] \mid - F \mid [f(z)] \mid = \varepsilon F_1 \mid [f(z), \varphi(z)] \mid + \cdots,$$

en se limitant aux termes du premier ordre en ε. De même

$$F \mid [f(z) + \eta\psi(z)] \mid - F \mid [f(z)] \mid = \eta F_1 \mid [f(z), \psi(z)] \mid + \cdots$$

et

$$F \mid [f(z) + \varepsilon\varphi(z) + \eta\psi(z)] \mid = F \mid [f(z) + \varepsilon\varphi(z)] \mid +$$
$$+ \eta F_1 \mid [f(z) + \varepsilon\varphi(z), \psi(z)] \mid + \cdots = F \mid [f(z)] \mid + \varepsilon F_1 \mid [f(z), \varphi(z)] \mid +$$
$$+ \eta F_1 \mid [f(z), \psi(z)] \mid + \cdots,$$

les points représentant des termes qui contiennent en facteur ε^2, $\varepsilon\eta$ ou η^2. Prenant $\varepsilon = \eta$, il en résulte

$$F \mid [f(z) + \varepsilon(\varphi(z) + \psi(z))] \mid - F \mid [f(z)] \mid = \varepsilon F_1 \mid [f(z), \varphi(z) + \psi(z)] \mid + \cdots$$
$$= \varepsilon F_1 \mid [f(z), \varphi(z)] \mid + \varepsilon F_1 \mid [f(z), \psi(z)] \mid + \cdots.$$

En comparant les parties du premier ordre on voit que

$$F_1 \mid [f(z), \varphi(z) + \psi(z)] \mid = F_1 \mid [f(z), \varphi(z)] \mid + F_1 \mid [f(z), \psi(z)] \mid,$$
$$F_1 \mid [f(z), \alpha\varphi(z)] \mid = \alpha F_1 \mid [f(z), \varphi(z)] \mid,$$

de sorte que F_1 est fonctionnelle *linéaire* de l'argument $\varphi(z)$ et nous pourrons lui appliquer toutes les théories précédentes.

Nous pourrons en particulier calculer son indicatrice en prenant

$$\varphi(z) = \frac{1}{x - z}\cdot$$

Remarquant que

$$F_1 \mid [f(z), \varphi(z)] \mid = \left\{ \frac{\partial}{\partial\varepsilon} F \mid [f(z) + \varepsilon\varphi(z)] \mid \right\}_{\varepsilon=0},$$

cette indicatrice s'écrira

$$v \mid [f(z), x] \mid = \left\{ \frac{\partial}{\partial\varepsilon} F \left| \left[f(z) + \frac{\varepsilon}{x - z} \right] \right| \right\}_{\varepsilon=0}.$$

22. Avec M. FANTAPPIÉ nous considérerons cette indicatrice fonctionnelle comme étant la dérivée première de la fonctionnelle primitive et nous écrirons

$$v \mid [f(z), x] \mid = F' \mid [f(z), x] \mid,$$

x est un paramètre dont v est fonction au sens ordinaire.

Nous en déduirons la précédente fonction $F_1 \mid [f(z), \varphi(z)] \mid$ par la formule [cf. (1) du n° 8]:

$$F_1 \mid [f(z), \varphi(z)] \mid = \frac{1}{2\pi i} \int_S \nu \mid [f(z), x] \mid \varphi(x)\, dx,$$

où S est une ligne séparatrice des singularités de la fonction $\varphi(x)$ et de celles de la fonction $\nu \mid [f(z), x] \mid$. En d'autres termes la partie du premier ordre de

$$F \mid [f(z) + \varepsilon\varphi(z)] \mid - F \mid [f(z)] \mid$$

sera

$$\frac{1}{2\pi i} \int_S \nu \mid [f(z), x] \mid \varepsilon\varphi(x)\, dx,$$

ou, encore en désignant par δF cette partie du premier ordre et par δf la fonction $\varepsilon\varphi(x)$, on aura

$$\delta F \mid [f(z)] \mid = \frac{1}{2\pi i} \int_S \nu \mid [f(z), x] \mid \delta f(x)\, dx;$$

c'est là l'expression de la différentielle de F.

Il est intéressant de comparer ces formules à celles que j'ai données dans mes premiers Mémoires sur les fonctionnelles. Je considérais alors une fonctionnelle d'une fonction réelle $f(z)$ définie et continue dans l'intervalle ab de variation de z (intervalle réel) et j'ai défini la dérivée par

$$\lim_{\substack{h=0 \\ \varepsilon=0}} \frac{F \mid [f(z) + \varepsilon\varphi(z)] \mid - F \mid [f(z)] \mid}{\sigma} = F' \mid [f(z), x] \mid, \tag{5}$$

$\varphi(z)$ étant une fonction toujours nulle sauf dans un intervalle $x - h$, $x + h$ et σ étant l'aire comprise entre la courbe $y = f(z)$ et la courbe $y = f(z) + \varepsilon\varphi(z)$. J'en déduis pour la différentielle

$$\delta F \mid [f(z)] \mid = \int_a^b F' \mid [f(z), x] \mid \delta f(x)\, dx. \tag{6}$$

Dans la théorie des fonctionnelles analytiques les formules analogues sont

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial\varepsilon} F \left| \left[f(z) + \frac{\varepsilon}{x - z} \right] \right| \right\}_{\varepsilon=0} = F' \mid [f(z), x] \mid \tag{5'}$$

et

$$\delta F \mid [f(z)] \mid = \frac{1}{2\pi i} \int_s F' \mid [f(z), x] \mid \delta f(x)\, dx.$$

23. Dans le cas des fonctionnelles réelles on passe de la dérivée première à la dérivée seconde en considérant la dérivée première comme une fonctionnelle de la fonction indépendante et en calculant dans cette hypothèse une nouvelle dérivée. On passe de même aux dérivées successives.

Nous procéderons de même dans le cas des fonctionnelles analytiques.

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial \eta} \mathrm{F}' \left| \left[f(z) + \frac{\eta}{y-z}, x \right] \right| \right\}_{\eta=0} = \mathrm{F}'' \,|\, [f(z), x, y] \,|$$

est une nouvelle fonctionnelle de f dépendant de plus des deux paramètres x et y et qui par définition est la dérivée seconde fonctionnelle de F.

D'après la définition de la dérivée première on a

$$\mathrm{F}'' \,|\, [f(z), x, y] \,| = \left\{ \frac{\partial^2}{\partial \varepsilon \, \partial \eta} \mathrm{F} \left| \left[f(z) + \frac{\varepsilon}{x-z} + \frac{\eta}{y-z} \right] \right| \right\}_{\substack{\varepsilon=0 \\ \eta=0}}$$

et aussi, en échangeant les signes de dérivation,

$$= \left\{ \frac{\partial^2}{\partial \eta \, \partial \varepsilon} \mathrm{F} \left| \left[f(z) + \frac{\varepsilon}{x-z} + \frac{\eta}{y-z} \right] \right| \right\}_{\substack{\eta=0 \\ \varepsilon=0}},$$

de sorte qu'en général la dérivée seconde sera fonction symétrique de y et x.

On définira de même la dérivée $n^{\text{ième}}$, dépendant, et en général de façon symétrique, de n paramètres $x_1, x_2, \cdots, x_n$. Elle se notera

$$\mathrm{F}^{(n)} \,|\, [f(z), x_1, x_2, \cdots, x_n] \,|.$$

24. Ici encore il y a analogie avec les dérivées successives des fonctionnelles d'une fonction réelle.

La dérivée $n^{\text{ième}}$ dépend dans l'un et l'autre cas de n paramètres qui sont, ou bien les divers points où l'on a fait varier la fonction indépendante, ou bien (pour le cas analytique) les pôles simples de la fonction perturbatrice de la fonction indépendante. Les paramètres figurent toujours de façon symétrique.

25. M. Fantappié a montré qu'on passait des résultats que nous venons d'exposer à l'extension de la série de Taylor.

En effet nous avons

$$\left(\frac{d}{d\varepsilon} \mathrm{F} \,|\, [f(z) + \varepsilon \varphi(z)] \,| \right)_{\varepsilon=0} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathrm{S}} \mathrm{F}' \,|\, [f(z), x] \,|\, \varphi(x)\, dx,$$

et, en général, en supposant que la ligne S puisse toujours servir de ligne de séparation,

$$\left\{ \frac{d^n}{d\varepsilon^n} \mathrm{F} \,|\, [f(z) + \varepsilon \varphi(z)] \,| \right\}_{\varepsilon=0} =$$

$$= \left(\frac{1}{2\pi i} \right)^n \int_{\mathrm{S}} \varphi(x_1)\, dx_1 \cdots \int_{\mathrm{S}} \mathrm{F}^{(n)} \,|\, [f(z), x_1, x_2, \cdots, x_n] \,|\, \varphi(x_n)\, dx_n.$$

Soit alors $\mathrm{F} \,|\, [f(z) + \varepsilon \varphi(z)] \,|$ développable en série de puissance de ε, il viendra

$$\mathrm{F} \,|\, [f(z) + \varepsilon \varphi(z)] \,| = \mathrm{F} \,|\, [f(z)] \,| + \varepsilon \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathrm{S}} \mathrm{F}' \,|\, [f(z), x] \,|\, \varphi(x)\, dx +$$

$$+\frac{\varepsilon^2}{2!}\left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2\int_S \varphi(y)\,dy\int_S F''\,|\,[f(z)\,,x\,,y]\,|\,\varphi(x)\,dx+\cdots,$$

et si le développement est encore valable pour $\varepsilon = 1$

$$F\,|\,[f(z)+\varphi(z)]\,|=F\,|\,[f(z)\,|+\frac{1}{2\pi i}\int_S F'\,|\,[f(z)\,,x]\,|\,\varphi(x)\,dx+$$

$$+\frac{1}{2!}\left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2\int_S \varphi(y)\,dy\int_S F''\,|\,[f(z)\,,x\,,y]\,|\,\varphi(x)\,dx+\cdots,$$

qui est l'extension de la série de TAYLOR.

Si nous supposons que $f(x)$ demeure invariable et que $\varphi(x)$ soit seule variable, l'équation précédente prendra la forme

$$F\,|\,[\varphi(z)]\,|=F_0+\frac{1}{2\pi i}\int_S F'(x)\,\varphi(x)\,dx+$$

$$+\frac{1}{2!}\left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2\int_S \varphi(y)\,dy\int_S F''(x\,,y)\,\varphi(x)\,dx+\cdots.$$

Notons en terminant que cette série pourra être remplacée par une autre expression si nous nous servons de la méthode de MITTAG-LEFFLER pour la construction des fonctions uniformes.

NOTE SUR L'EXTENSION DE LA THÉORIE PRÉCÉDENTE.

1. L'étude des fonctionnelles analytiques peut être prise comme point de départ pour d'autres études beaucoup plus générales.

Remarquons en effet qu'une fonctionnelle analytique peut être envisagée comme une fonctionnelle de la partie réelle de la fonction analytique, c'est-à-dire comme la fonctionnelle d'une fonction harmonique de deux variables. Le domaine des fonctions harmoniques de deux variables n'est que le domaine des fonctions qui satisfont à l'équation de LAPLACE dans un champ à deux dimensions. On peut donc regarder l'étude des fonctionnelles analytiques comme celle qu'on obtient en bornant le domaine fonctionnel à celui des fonctions qui satisfont à l'équation de LAPLACE à deux variables.

2. On est amené par ces considérations à envisager des domaines fonctionnels constitués par toutes les intégrales d'une équation différentielle.

Si l'équation différentielle est ordinaire, alors son intégrale sera fonction d'un certain nombre de constantes arbitraires, c'est pourquoi la fonctionnelle ne sera qu'une fonction ordinaire de ces quantités et l'on n'aura pas ainsi un élément de type réellement fonctionnel. Mais supposons que l'équation différentielle soit à dérivées partielles, alors l'intégrale dépendra d'un certain nombre de fonctions arbitraires et l'on obtiendra de vraies fonctionnelles.

3. Pour fixer les idées, prenons les fonctions harmoniques à trois dimensions, c'est-à-dire admettons que le domaine fonctionnel soit celui des intégrales de l'équation de LAPLACE qui sont régulières dans un certain domaine S à trois dimensions.

Prenons la fonction

$$\frac{1}{r} \qquad \left(r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}\right),$$

et supposons que le point ξ, η, ζ soit extérieur à l'espace S, alors $1/r$ considérée comme une fonction de x, y, z appartiendra au domaine fonctionnel et par suite

$$\mathrm{F}\left|\left[\frac{1}{r}\right]\right| = \mathrm{V}(\xi, \eta, \zeta)$$

sera une des fonctionnelles que nous voulons considérer.

Puisqu'elle dépend de ξ, η, ζ, elle sera aussi une fonction ordinaire de ces paramètres.

Supposons que F soit une fonctionnelle linéaire, alors $\mathrm{F}|[0]| = 0$ et l'on aura

$$\Delta\mathrm{F}\left|\left[\frac{1}{r}\right]\right| = \mathrm{F}\left|\left[\Delta\frac{1}{r}\right]\right| = 0.$$

Soit dans le domaine S une fonction harmonique $f(x, y, z)$. On aura par le théorème de GREEN

$$f(x, y, z) = \frac{1}{4\pi}\int_\sigma \left(f(\xi, \eta, \zeta)\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} - \frac{\partial f}{\partial n}\frac{1}{r}\right)d\sigma,$$

c'est pourquoi

$$\mathrm{F}|[f]| = \frac{1}{4\pi}\int_\sigma \left(f(\xi, \eta, \zeta)\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial n} - \frac{\partial f}{\partial n}\mathrm{V}\right)d\sigma.$$

On voit que $\mathrm{F}|[1/r]|$ joue ici le rôle de *fonction indicatrice* dont nous avons eu l'occasion de voir les applications dans le cours de ce Mémoire.

4. Mais nous pouvons avoir aussi d'autres sortes de fonctions indicatrices. Soit

$$\mathrm{G}(x, y, z \mid \xi, \eta, \zeta)$$

la fonction de GREEN. Lorsque ξ, η, ζ sera la surface σ, quels que soient x, y, z on aura

$$\frac{1}{r} + \mathrm{G}(x, y, z \mid \xi, \eta, \zeta) = 0$$

et, par conséquent,

$$f(x, y, z) = \frac{1}{4\pi}\int_\sigma f(\xi, \eta, \zeta)\frac{\partial\left(\frac{1}{r} + \mathrm{G}\right)}{\partial n}d\sigma,$$

d'où, en posant

$$F \mid [G(x, y, z \mid \xi, \eta, \zeta)] \mid = W(\xi, \eta, \zeta),$$

on déduira

$$F \mid [f(x, y, z)] \mid = \frac{1}{4\pi} \int_\sigma f(\xi, \eta, \zeta) \frac{\partial (V + W)}{\partial n} d\sigma.$$

Dans ce cas c'est

$$F \left| \left[\frac{1}{r} + G \right] \right|$$

qui joue le rôle de fonction indicatrice.

L'espace S étant sphérique de rayon R on calcule immédiatement

$$W(\xi, \eta, \zeta),$$

en employant la méthode des images.

5. Ces considérations ne se bornent pas aux seuls domaines fonctionnels constitués par les intégrales d'équations de type elliptique mais elles peuvent aussi s'étendre aux cas des équations différentielles de type hyperbolique ou parabolique.

C'est ainsi par exemple qu'en prenant la formule que j'ai donnée pour résoudre le problème de CAUCHY dans le cas de l'équation des ondes cylindriques (6), on peut trouver très aisément les fonctionnelles auxquelles il faut faire jouer le rôle de fonctions indicatrices dans le cas où le domaine fonctionnel est celui des intégrales de cette équation.

Le passage des fonctionnelles linéaires à celles non linéaires peut être calqué sur celui qui amène des fonctionnelles analytiques linéaires à celles non linéaires et qui se trouve exposé dans le présent Mémoire.

(6) Voir HADAMARD, *Le problème de Cauchy et les équations aux dérivées partielles linéaires hyperboliques*, Paris 1932.

XV.

ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES ET THÉORIE DES FONCTIONS (*)

« Annales de l'Institut H. Poincaré », 1934; pp. 273-352.

CHAPITRE I

Section I.

La linéarisation du laplacien.

1. Avant d'aborder les problèmes qui constituent l'objet de ces leçons, qui est l'étude de quelques généralisations de la théorie des fonctions et des équations aux dérivées partielles qui s'y rattachent, nous commencerons par faire quelques remarques sur les équations aux dérivées partielles et sur les systèmes obtenus par leur linéarisation.

Considérons l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \tag{1}$$

Cette équation est intimement liée au binôme algébrique

$$x^2 - y^2. \tag{2}$$

La décomposition du binôme (2) en deux facteurs algébriques $(x + y)(x - y)$ conduit à la décomposition de (1) en deux facteurs fonctionnels

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}\right) u = 0,$$

et l'étude de (1) se ramène à l'étude des deux équations

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} - \dfrac{\partial u}{\partial y} = v \\[2ex] \dfrac{\partial v}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} = 0. \end{cases} \tag{3}$$

(*) La publication de ces Conférences, dont M. Gr. Moisil s'était chargé au début, a subi un retard considérable et a dû être ensuite complètement abandonnée. M. J. Pérès a bien voulu la reprendre et la mener à bonne fin. Je dois à la précieuse collaboration de ce savant la forme définitive sous laquelle ces leçons, tenues en 1931, paraissent aujourd'hui. Je dois aussi remercier Mademoiselle H. Freda de l'aide efficace qu'elle m'a apportée.

De cette manière on a *linéarisé* l'équation (1) en ce sens qu'on l'a remplacée par le système (3) d'équations du 1^{er} ordre.

Si, au lieu de l'équation (1), on avait considéré l'équation du type elliptique

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0, \tag{4}$$

on aurait pu envisager sa linéarisation de la façon suivante:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}-i\frac{\partial}{\partial y}\right)u=0;$$

mais, dans ce cas, il convient de considérer u comme complexe

$$u=\mathrm{P}+i\mathrm{Q};$$

on obtient alors successivement l'équation

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\right)(\mathrm{U}+i\mathrm{V})=0,$$

qui n'est que le système d'équations de CAUCHY pour les fonctions monogènes

$$\begin{cases}\dfrac{\partial \mathrm{U}}{\partial x}-\dfrac{\partial \mathrm{V}}{\partial y}=0\\[2mm] \dfrac{\partial \mathrm{U}}{\partial y}+\dfrac{\partial \mathrm{V}}{\partial x}=0,\end{cases} \tag{5}$$

puis l'équation

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}-i\frac{\partial}{\partial y}\right)(\mathrm{P}+i\mathrm{Q})=\mathrm{U}+i\mathrm{V},$$

qui introduit la dérivée ordinaire de la fonction monogène $\mathrm{P}+i\mathrm{Q}$

$$\mathrm{U}+i\mathrm{V}=2\frac{d(\mathrm{P}+i\mathrm{Q})}{dz}. \tag{6}$$

Le système de CAUCHY (5) linéarise l'équation de LAPLACE (4) parce que de (5) on tire la conclusion que U, V sont harmoniques.

On entrevoit déjà les relations entre la linéarisation et la théorie des fonctions.

2. Le procédé ci-dessus conduit d'une équation du deuxième ordre à un système d'équations du premier ordre. La marche inverse présente aussi un grand intérêt. Considérons par exemple les équations de l'électrodynamique dans un milieu anisotrope. Elles ont la forme

$$\begin{cases}\dfrac{\partial \mathrm{L}}{\partial t}=c^2\dfrac{\partial \mathrm{W}}{\partial y}-b^2\dfrac{\partial \mathrm{V}}{\partial z},\\[2mm] \dfrac{\partial \mathrm{M}}{\partial t}=a^2\dfrac{\partial \mathrm{U}}{\partial z}-c^2\dfrac{\partial \mathrm{W}}{\partial x},\\[2mm] \dfrac{\partial \mathrm{N}}{\partial t}=b^2\dfrac{\partial \mathrm{V}}{\partial x}-a^2\dfrac{\partial \mathrm{U}}{\partial y},\end{cases} \tag{7}$$

et

$$(7') \quad \begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial t} = \dfrac{\partial M}{\partial z} - \dfrac{\partial N}{\partial y}, \\ \dfrac{\partial V}{\partial t} = \dfrac{\partial N}{\partial x} - \dfrac{\partial L}{\partial z}, \\ \dfrac{\partial W}{\partial t} = \dfrac{\partial L}{\partial y} - \dfrac{\partial M}{\partial x}. \end{cases}$$

Par un calcul facile, on conclut qu'en posant

$$U = \frac{\partial^2 F_1}{\partial t^2} - a^2 \Delta F_1 + \frac{\partial P}{\partial x},$$

$$V = \frac{\partial^2 F_2}{\partial t^2} - b^2 \Delta F_2 + \frac{\partial P}{\partial y}.$$

$$W = \frac{\partial^2 F_3}{\partial t^2} - c^2 \Delta F_3 + \frac{\partial P}{\partial z},$$

avec

$$P = a^2 \frac{\partial F_1}{\partial x} + b^2 \frac{\partial F_2}{\partial y} + c^2 \frac{\partial F_3}{\partial z},$$

et en introduisant des fonctions f_1, f_2, f_3 telles que

$$F_1 = \frac{\partial f_2}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial y} \quad , \quad F_2 = \frac{\partial f_3}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial z} \quad , \quad F_3 = \frac{\partial f_1}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial x},$$

on obtient des intégrales de (7) et (7′) si f_1, f_2, f_3 satisfont à l'équation

$$(8) \quad \frac{\partial^4 f}{\partial x_1^4} + \frac{\partial^4 f}{\partial x_2^4} + \frac{\partial^4 f}{\partial x_3^4} + \frac{\partial^4 f}{\partial x_4^4} + 2 A_1 \left(\frac{\partial^4 f}{\partial x_1^2 \partial x_4^2} + \frac{\partial^4 f}{\partial x_2^2 \partial x_3^2} \right) +$$
$$+ 2 A_2 \left(\frac{\partial^4 f}{\partial x_2^2 \partial x_4^2} + \frac{\partial^4 f}{\partial x_3^2 \partial x_1^2} \right) + 2 A_3 \left(\frac{\partial^4 f}{\partial x_3^2 \partial x_4^2} + \frac{\partial^4 f}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} \right) = 0 .$$

Dans (8) on a posé

$$A_1 = \frac{b^2 + c^2}{2\,bc} \quad , \quad A_2 = \frac{c^2 + a^2}{2\,ca} \quad , \quad A_3 = \frac{a^2 + b^2}{2\,ab},$$

et on a utilisé les variables

$$t = i x_4 ,$$

$$x_1 = \frac{x}{\sqrt{bc}} \quad , \quad x_2 = \frac{y}{\sqrt{ca}} \quad , \quad x_3 = \frac{z}{\sqrt{ab}}.$$

Le système d'équations du premier ordre (7) et (7′) est remplacé par l'équation du quatrième ordre (8). L'équation (8) jouit de l'invariance relativiste.

L'équation du quatrième ordre (8) est intimement liée à l'équation algébrique du quatrième degré

$$(9) \quad x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + x_4^4 + 2 A_1 (x_1^2 x_4^2 + x_2^2 x_3^2) + 2 A_2 (x_2^2 x_4^2 + x_1^2 x_3^2) +$$
$$+ 2 A_3 (x_3^2 x_4^2 + x_1^2 x_2^2) = 0 ,$$

qui est l'équation de la surface d'onde.

Le parallélisme entre les propriétés algébriques de l'équation (9) et les propriétés fonctionnelles de l'équation (8) est intéressant à poursuivre. Bornons-nous à remarquer que, si le polynôme (9) se décompose en deux facteurs quadratiques, l'équation (8) se réduit à des équations du deuxième ordre. Un exemple nous est fourni par les systèmes monoaxiques ($b = c$): le polynôme (9) se décompose en deux facteurs

$$\left[x_1^2 + x_4^2 + \frac{a}{b}(x_2^2 + x_3^2)\right]\left[x_1^2 + x_4^2 + \frac{b}{a}(x_2^2 + x_3^2)\right],$$

et l'équation (8) se décompose en

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_4^2} + \frac{a}{b}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2}\right) = 0,$$

$$\frac{\partial^2 f_1}{\partial x_2^1} + \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_4^2} + \frac{b}{a}\left(\frac{\partial^2 f_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_3^2}\right) = f_1.$$

Pour les systèmes isotropes, le polynôme (9) est

$$(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)^2$$

et l'équation (8):

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_4^2}\right)^2 u = 0.$$

Enfin, si l'une des variables (x_1 par exemple) est nulle, on obtient une décomposition des ondes cylindriques et une décomposition analogue de l'équation aux dérivées partielles.

3. M. DIRAC a considéré le système d'expressions

$$(10)\quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{1}{ic}\dfrac{\partial\psi_3}{\partial t} + i\dfrac{\partial\psi_4}{\partial x} + \dfrac{\partial\psi_4}{\partial y} + i\dfrac{\partial\psi_3}{\partial z} \\ \dfrac{1}{ic}\dfrac{\partial\psi_4}{\partial t} + i\dfrac{\partial\psi_3}{\partial x} - \dfrac{\partial\psi_3}{\partial y} - i\dfrac{\partial\psi_3}{\partial z} \\ \dfrac{1}{ic}\dfrac{\partial\psi_1}{\partial t} - i\dfrac{\partial\psi_2}{\partial x} - \dfrac{\partial\psi_2}{\partial y} - i\dfrac{\partial\psi_1}{\partial z} \\ \dfrac{1}{ic}\dfrac{\partial\psi_2}{\partial t} - i\dfrac{\partial\psi_1}{\partial x} + \dfrac{\partial\psi_1}{\partial y} + i\dfrac{\partial\psi_2}{\partial z} \end{array}\right.$$

qu'on écrit symboliquement

$$F\psi$$

et qui est tel que

$$FF\psi = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\psi;$$

symboliquement

$$F^2 = \Delta.$$

C'est l'ensemble des quatre formes différentielles (10) qui constitue le correspondant de $\sqrt{\Delta}$.

Un exemple plus immédiat nous est fourni par le système

$$(11)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}&=0\\ \frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z}&=0\\ \frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x}&=0\\ \frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}&=0\end{aligned}\right.$$

d'où on conclut que

$$\Delta u=\Delta v=\Delta w=0.$$

Or, il suffit de poser

$$\varphi_1=iu$$
$$\varphi_2=v+iw,$$

pour écrire le système (11) sous la forme

$$(12)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial\varphi_1}{\partial x}+i\frac{\partial\varphi_2}{\partial y}+\frac{\partial\varphi_2}{\partial z}&=0\\ -\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}-i\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}+\frac{\partial\varphi_1}{\partial z}&=0\end{aligned}\right.$$

ou, symboliquement,

$$\mathfrak{F}\varphi=0,$$

et l'on vérifie facilement que l'expression $\mathfrak{F}$ est la racine carrée du laplacien à trois variables

$$\mathfrak{F}^2=\Delta.$$

Mais, si dans (12) nous écrivons

$$\varphi_1=-s+iu$$
$$\varphi_2=v+iw,$$

nous obtenons le système

$$(13)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}&=0\\ \frac{\partial s}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z}&=0\\ \frac{\partial s}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x}&=0\\ \frac{\partial s}{\partial z}+\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}&=0.\end{aligned}\right.$$

Nous retrouverons les systèmes (11) et (13) dans les recherches sur les fonctions conjuguées.

Au point de vue formel, les expressions F, $\mathfrak{F}$ et les autres systèmes analogues correspondent à $\sqrt{\Delta}$.

Au point de vue des applications on connaît le rôle joué par l'opérateur de M. DIRAC dans la mécanique ondulatoire de l'électron magnétique.

M. Gr. MOISIL [1] a étudié l'intégration des systèmes qui linéarisent l'équation de LAPLACE, leurs applications et relations avec la théorie des nombres complexes et avec celle des fonctions conjuguées. On a pu y étendre quelques-unes des propriétés des fonctions monogènes: théorème de CAUCHY, intégrale de CAUCHY, théorème de MORERA [2].

Section II.

QUELQUES THÉORIES CONNEXES A LA LINÉARISATION.

1. On peut trouver d'autres opérateurs qui réalisent la décomposition en facteurs du laplacien. Ces idées sont liées à une autre branche de l'Analyse fonctionelle: la théorie des fonctions permutables et les équations intégrales. C'est ABEL qui fut le premier a étudier une équation intégrale à limites variables et à noyau singulier. Plus tard, LIOUVILLE et d'autres géomètres y ont rattaché une théorie des dérivées d'ordre fractionnaire que nous allons utiliser.

Considérons l'opération fonctionnelle

$$\mathrm{F}f(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\,\frac{d}{dx}\int_0^x\frac{f(s)-f(0)}{\sqrt{x-s}}\,ds. \tag{14}$$

Nous voulons montrer que, par itération, on obtient la dérivée

$$\mathrm{FF}f(x)=\frac{df}{dx}\,. \tag{15}$$

En effet, en intégrant par parties

$$\mathrm{F}f(x)=\frac{d}{dx}\left|-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{x-s}\,[f(s)-f(o)]\right|_0^x+\frac{2}{\sqrt{\pi}}\,\frac{d}{dx}\int_0^x\sqrt{x-s}\,f'(s)\,ds,$$

la partie intégrée est nulle, donc

$$\mathrm{F}f(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^x\frac{f'(s)\,ds}{\sqrt{x-s}}\,,$$

et

$$\mathrm{FF}f(x)=\frac{1}{\pi}\,\frac{d}{dx}\int_0^x\frac{ds}{\sqrt{x-s}}\int_0^s\frac{f'(t)\,dt}{\sqrt{s-t}}\,,$$

(1) Pour la théorie des systèmes généraux de DIRAC du type elliptique, voir Gr. C. MOISIL [7], [11]; pour l'emploi des nombres hypercomplexes, voir Gr. C. MOISIL [9], [10] [numeri e lettere in [ ] rimandono alla bibliografia alla fine della Memoria, p. 386].

(2) Pour le théorème de MORERA généralisé, voir N. THÉODORESCO [18].

ou, en changeant l'ordre des intégrations,

$$\mathrm{FF}f(x) = \frac{1}{\pi}\frac{d}{dx}\int_0^x f'(t)\,dt\int_t^x \frac{ds}{\sqrt{(x-s)(s-t)}};$$

la seconde intégrale est une intégrale eulérienne ayant pour valeur π et la formule (15) est démontrée.

5. Appelons F_ζ l'opération précédente F où x a été remplacé par la variable ζ. On voit que l'opération

$$\Phi = F_\xi\, F_\eta$$

est telle que

$$\Phi^2 = \frac{\partial^2}{\partial\xi\,\partial\eta}.$$

Or, par le changement de variables

$$x + y = 2\xi,$$

$$x - y = 2\eta,$$

on a

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial\xi\,\partial\eta}.$$

Si nous posons

$$\Phi_{xy} = F_\xi\, F_\eta,$$

nous concluons que

$$\Phi_{xy}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2},$$

de sorte que Φ_{xy} peut être considéré comme $\sqrt{\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2}}$.

Considérons alors le laplacien hyperbolique à trois variables

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Il est égal à

$$\Phi_{xy}^2 - \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

et peut être décomposé en deux facteurs

$$\left(\Phi_{xy} - \frac{\partial}{\partial z}\right)\left(\Phi_{xy} + \frac{\partial}{\partial z}\right).$$

De même, dans le cas de quatre variables,

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2}{\partial u^2}$$

est

$$(\Phi_{xy} - \Phi_{zu})(\Phi_{xy} + \Phi_{zu}).$$

Les opérations intégro-différentielles de ce type sont très semblables aux opérations employées par M. E. Schrödinger dans sa modification de la théorie de M. Dirac.

CHAPITRE II

Les fonctions conjuguées dans l'espace [3].

Section I.

Les fonctions de lignes fermées.

1. Envisageons l'ensemble des lignes L de l'espace, fermées, rectifiables, intérieures à une certaine région R, n'ayant ni nœuds ni points singuliers. Fixons sur chacune de ces lignes un sens de parcours. Faisons correspondre à chacune d'elles une quantité F. Nous dirons que F est une *fonction de ligne*, $F \mid [L] \mid$ [4].

Cette idée est familière aux physiciens. Considérons un champ magnétique et supposons que la courbe L soit parcourue par un courant électrique d'intensité 1. L'énergie potentielle W du courant a une valeur qui dépend de la forme et de la position du circuit ainsi que du sens dans lequel il est parcouru. A chaque courbe L parcourue dans un certain sens correspond une valeur de l'énergie potentielle W. L'énergie potentielle est donc une fonction des lignes L; nous écrivons:

$$W = F \mid [L] \mid .$$

2. La notion de fonction de ligne n'est qu'un cas particulier de la notion de *fonctionnelle*. Si on exprime les trois coordonnées x, y, z des points de la courbe L en fonction d'un paramètre t

$$\begin{aligned} x &= x(t) \\ y &= y(t) \qquad\qquad a \leq t \leq b \\ z &= z(t) \end{aligned}$$

la fonction de ligne $F \mid [L] \mid$ peut être envisagée comme une *expression qui dépend de toutes les valeurs des fonctions* $x(t), y(t), z(t)$ [5] et l'on peut écrire:

$$F \mid [L] \mid = \Phi \mid [x(t), y(t), z(t)] \mid ,$$

(3) Pour ce chapitre, voir V. Volterra [A].

(4) Voir V. Volterra [19], [20] et M. Fréchet [3].

(5) Voir pour la théorie des fonctionnelles V. Volterra [C], [D], ainsi que V. Volterra, *Leçons sur les fonctions de lignes* (Paris, Gauthier-Villars 1913); et V. Volterra, *Leçons sur les équations intégrales et intégro-différentielles* (Paris, Gauthier-Villars).

J'avais donné d'abord aux fonctionnelles le nom de *fonctions qui dépendent de toutes les valeurs d'une fonction* et, après, je leur avais donné le nom de *fonctions de lignes*. La dénomination de *fonctionnelle* a été introduite plus tard par M. Hadamard et maintenant elle est généralement adoptée. J'ai réservé le nom de *fonctions de lignes* aux fonctionnelles particulières, considérées ci-dessus.

mais ce n'est pas la fonctionnelle la plus générale dépendant de trois fonctions d'une variable, ce que nous montrerons plus tard (§ 5).

3. Nous définirons la *continuité* des fonctions de lignes de la manière suivante: entourons la courbe L d'un tube T qui a un diamètre δ. Considérons les lignes L′ intérieures au tube T et qui par déformation continue, sans sortir de T, peuvent être réduites à L. L'ensemble de toutes les courbes L′ constitue le *voisinage* de la courbe L.

Nous dirons que $F\,|\,[L]\,|$ est continue, si, pour chaque ε donné, on peut trouver un voisinage T de L tel que pour toute courbe L′ de T on ait

$$(1) \qquad \big|\, F\,|\,[L']\,| - F\,|\,[L]\,|\,\big| < \varepsilon.$$

En dehors de la continuité, nous supposerons que $F\,|\,[L]\,|$ jouisse d'une propriété analogue à la condition de LIPSCHITZ. Soit MM′ une déformation de L qui déplace chaque point M de L en un point M′ de L′. Appelons σ l'aire de la surface engendrée par les segments MM′. Nous supposerons que si $\sigma < \sigma_0$, il existe un nombre m tel que

$$(2) \qquad \frac{\big|\, F\,|\,[L']\,| - F\,|\,[L]\,|\,\big|}{\sigma} < m.$$

Nous considérons en dehors des fonctions de lignes des *fonctions de lignes et de points*. La définition de la continuité de ces fonctions découle de la définition ci-dessus. Soit une fonction $F\,|\,[L\,,m]\,|$ de la ligne L et du point m. Nous l'appelons continue si, pour chaque ligne L′ du tube T et pour chaque point m' d'une sphère s ayant pour centre m et le rayon ρ, on a

$$\big|\, F\,|\,[L', m']\,| - F\,|\,[L\,, m]\,|\,\big| < \varepsilon$$

dès que $\delta < \delta_0$ et $\rho < \rho_0$.

4. Considérons sur la ligne L un petit arc ab de longueur l. Déplaçons tous les points m de l en m' d'une quantité Δx, parallèlement à Ox; a sera déplacé en a', b en b'. Soit L′ la ligne formée par $L - l\,, aa', l', b'b$ [6].

Si le rapport

$$\frac{F\,|\,[L']\,| - F\,|\,[L]\,|}{l \cdot \Delta x}$$

a une limite pour $l = 0$, $\Delta x = 0$, indépendante de la manière dont $l\,, \Delta x$ tendent vers zero, nous appellerons cette limite

$$(3) \qquad F'_x\,|\,[L\,, m]\,| = \lim_{\substack{l=0\\ \Delta x=0}} \frac{F\,|\,[L']\,| - F\,|\,[L]\,|}{l \cdot \Delta x}$$

la *dérivée* de $F\,|\,[L]\,|$ suivant Ox, en m. De la même manière on définit $F'_y\,|\,[L\,, m]\,|$ et $F'_z\,|\,[L\,, m]\,|$.

(6) $L - l$ étant la ligne L à laquelle on a retranché l'arc l.

Nous admettrons que le rapport (3) tende uniformément vers sa limite, tant par rapport aux lignes que par rapport aux points, et que les dérivées fonctionnelles F'_x, F'_y, F'_z sont continues.

Soit alors L′ une ligne voisine de L et soient $\delta x(s)$, $\delta y(s)$, $\delta z(s)$ les composantes du déplacement mm', du point m d'abscisse curviligne s, suivant Ox, Oy, Oz. $F|[L]|$ varie d'une quantité $F|[L']| - F|[L]|$, qui, aux infiniments petits du second ordre près, est

$$\delta F|[L]| = \int_L [F'_x\,\delta x + F'_y\,\delta y + F'_z\,\delta z]\,ds. \tag{4}$$

L'expression ci-dessus est la *différentielle* ou la *variation* de $F|[L]|$. On peut montrer facilement que, si on pose

$$\delta x(s) = \varepsilon\xi(s), \qquad \delta y(s) = \varepsilon\eta(s), \qquad \delta z(s) = \varepsilon\zeta(s),$$

on a

$$\lim_{\varepsilon=0} \frac{F|[L']| - F|[L]|}{\varepsilon} = \int_L \{\xi(s)\,F'_x|[L, s]| + \eta(s)\,F'_y|[L, s]| + \zeta(s)\,F'_z|L, s]\}\,ds.$$

On peut encore dire que

$$\delta F - \{F|[L']| - F|[L]|\}$$

est un infiniment petit d'ordre supérieur à ε.

5. Supposons que la déformation de la courbe L soit un glissement de L sur elle-même. Dans ce cas

$$\delta x(s) = \alpha K(s), \qquad \delta y(s) = \beta K(s), \qquad \delta z(s) = \gamma K(s),$$

(α, β, γ) étant les cosinus directeurs de la tangente à L, $K(s)$ une fonction arbitraire. $F|[L]|$ ne changera pas de valeur; donc

$$\int_L K(s)\,[\alpha F'_x + \beta F'_y + \gamma F'_z]\,ds = 0,$$

quelle que soit la fonction $K(s)$. On conclut que

$$\alpha F'_x + \beta F'_y + \gamma F'_z = 0. \tag{5}$$

Les dérivées fonctionnelles d'une fonction de lignes satisfont à la relation (5) (comparer avec le § 2).

6. Il est utile de connaître la manière dont se comportent les dérivées de $F|[L]|$ pour un *changement d'axes*. Si on change (x, y, z) en $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ on voit que:

$$F'_{\bar{x}}|[L, m]| = F'_x \cos(\bar{x}, x) + F'_y \cos(\bar{x}, y) + F'_z \cos(\bar{x}, z)$$

$$F'_{\bar{y}}|[L, m]| = F'_x \cos(\bar{y}, x) + F'_y \cos(\bar{y}, y) + F'_z \cos(\bar{y}, z)$$

$$F'_{\bar{z}}|[L, m]| = F'_x \cos(\bar{z}, x) + F'_y \cos(\bar{z}, y) + F'_z \cos(\bar{z}, z).$$

En particulier, si on prend pour axes la tangente, la normale et la binormale à L en m, en vertu de (5) on a

$$F'_t = 0$$
$$F'_n = \alpha' F'_x + \beta' F'_y + \gamma' F'_z$$
$$F'_b = \alpha'' F'_x + \beta'' F'_y + \gamma'' F'_z$$

où $(\alpha', \beta', \gamma')$ et $(\alpha'', \beta'', \gamma'')$, sont les cosinus directeurs de la normale principale n et de la binormale b.

La formule (4) peut alors être écrite sous la forme intrinsèque

$$\delta F \mid [L] \mid = \int_L [F'_n \, \delta n + F'_b \, \delta b] \, bd.$$

7. La relation (5) devant être satisfaite, on peut prendre (7):

$$\text{(6)} \qquad \begin{cases} F'_x = B\gamma - C\beta \\ F'_y = C\alpha - A\gamma \\ F'_z = A\beta - B\alpha. \end{cases}$$

Les quantités A, B, C ne sont pas complètement déterminées, car on peut les remplacer par

$$A^* = A + \lambda\alpha$$
$$B^* = B + \lambda\beta$$
$$C^* = C + \lambda\gamma$$

λ étant une fonction arbitraire de s. A, B, C comme F'_x, F'_y, F'_z sont des fonctions de la ligne L et du point m.

Avec ces fonctions l'expression (4) devient

$$\delta F \mid [L] \mid = \int_L [(B\gamma - C\beta) \, \delta x + (C\alpha - A\gamma) \, \delta y + (A\beta - B\alpha) \, \delta z] \, ds$$

ou encore

$$\delta F \mid [L] \mid = \int_L [A \, (dy \, \delta z - dz \, \delta y) + B \, (dz \, \delta x - dx \, \delta z) + C \, (dx \, \delta y - dy \, \delta x)].$$

Considérons la surface S engendrée par le segment $m m'$. Soient n la normale à S, $d\sigma$ l'élément d'aire de S; on a

$$\text{(7)} \qquad \delta F \mid [L] \mid = \iint_S (A \cos nx + B \cos ny + C \cos nz) \, d\sigma.$$

Supposons qu'on considère deux lignes L_0 et L_1. Déformons L_0 par continuité jusqu'à ce qu'elle devienne L_1. Dans cette déformation, elle engendre une

(7) Voir V. VOLTERRA [20] et [29].

surface S, ayant pour bords L_0 et L_1. Nous dirons que nous avons mené une surface S par L_0 et L_1. La formule (7) donne

$$(8) \qquad F \,|\, [L_1] \,| = F \,|\, [L_0] \,| + \iint_S (A \cos nx + B \cos ny + C \cos nz)\, d\sigma.$$

En particulier si L_0 se réduit à un point et si l'on admet que pour une ligne réduite à un point la fonctionnelle soit nulle,

$$(8') \qquad F \,|\, [L] \,| = \iint_\Sigma (A \cos nx + B \cos ny + C \cos nz)\, d\sigma,$$

Σ ayant un seul bord L.

Section II.

Les fonctions du premier degré.

8. Les fonctions A, B, C des formules (6) dépendent de la ligne L et du point *m*. Un cas particulièrement important est celui des fonctions de lignes telles que A, B, C soient indépendantes de la ligne L, et se réduisent donc à des fonctions de points [8].

Soient L_1, L_2 deux lignes qui ont une partie commune L et les parties différentes L′, L″. Choisissons un sens sur L_1 et sur L_2 tel que L considérée comme partie de L_1 et de L_2 soit parcourue en deux sens différents. Soient enfin σ_1, σ_2 deux surfaces ayant pour contour L_1 et L_2. D'après la formule précédente

$$F \,|\, [L_1] \,| = \iint_{\sigma_1} (A \cos nx + B \cos ny + C \cos nz)\, d\sigma$$

$$F \,|\, [L_2] \,| = \iint_{\sigma_2} (A \cos nx + B \cos ny + C \cos nz)\, d\sigma.$$

Nous appelons la ligne L‴ formée par la réunion de L′ et L″ la somme de L_1 et L_2

$$L''' = L_1 + L_2 .$$

On conclut que si A, B, C sont des fonctions de point

$$F \,|\, [L_1 + L_2] \,| = \iint_{\sigma_1+\sigma_2} (A \cos nx + B \cos ny + C \cos nz)\, d\sigma$$

ou

$$(9) \qquad F \,|\, [L_1 + L_2] \,| = F \,|\, [L_1] \,| + F \,|\, [L_2] \,| .$$

Si (A, B, C) *sont des fonctions de point,* F | [L] | *est une fonction additive.*

(8) Voir V. Volterra [20], [29].

22

9. Montrons que réciproquement: *si* $F | [L] |$ *satisfait à* (9), *c'est-à-dire est une fonction additive, on peut choisir* A, B, C *indépendants de* L, et par suite uniquement fonctions de point.

Nous employons un tétraèdre infinitésimal de CAUCHY dont trois faces sont parallèles aux plans coordonnés, la quatrième face *abc* ayant une orientation quelconque. Soient *ma*, *mb*, *mc* les arêtes respectivement parallèles à Ox, Oy, Oz, n la normale au plan (abc), $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \sigma$ les aires des triangles (mbc), (mca), (mab), (abc). Soient A_x, A_y, A_z les quantités (A, B, C) pour la ligne (mbc)

$$F | [mbc] | = A_x \sigma_x$$

de même soient (B_x, B_y, B_z), (C_x, C_y, C_z) les mêmes quantités pour les lignes (mca), (mbc)

$$F | [mca] | = B_y \sigma_y$$

$$F | [mab] | = C_z \sigma_z ,$$

où il est clair que A_x, B_y, C_z ne dépendent que du point m.

Pour la ligne (abc) on a

$$(A \cos nx + B \cos ny + C \cos nz) \sigma = A_x \sigma_x + B_y \sigma_y + C_z \sigma_z .$$

Or $\sigma_x = \sigma \cos nx$, $\sigma_y = \sigma \cos ny$, $\sigma_z = \sigma \cos nz$, donc pour la ligne (abc) qui est un triangle infiniment petit, on peut prendre pour A, B, C les fonctions de point A_x, B_y, C_z. On voit que cette affirmation est vraie pour toute ligne L, en menant par L une surface S et en divisant S en triangles infiniment petits.

10. Nous allons donner une autre démonstration de cette proposition. Soient L_1 et L_2 deux lignes dont les éléments d'arc ds_1, ds_2 ont un point commun m. Donnons aux points de ds_1 des déplacements parallèles et égaux à ds_2; $F | [L] |$ varie de $\delta_1 F$. Déplaçons ds_2 par une translation égale et parallèle à ds_1, $F | [L] |$ varie de $\delta_2 F$ et on a, à cause de l'additivité,

$$\delta_2 F = \delta_1 F.$$

Soient $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$; $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ respectivement les cosinus directeurs de ds_1 et ds_2; on aura

$$\begin{aligned} F'_x | [L_2] | \alpha_1 + F'_y | [L_2] | \beta_1 + F'_z | [L_2] | \gamma_1 = \\ = F'_x | [L_1] | \alpha_2 + F'_y | [L_1] | \beta_2 + F'_z | [L_1] | \gamma_2 , \end{aligned} \tag{10}$$

d'où, les indices de A, B, C étant ceux des lignes auxquelles elles correspondent,

$$(A_1 - A_2)(\beta_1\gamma_2 - \beta_2\gamma_1) + (B_1 - B_2)(\gamma_1\alpha_2 - \gamma_2\alpha_1) + (C_1 - C_2)(\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1) = 0,$$

ou encore, si on appelle n la normale aux deux éléments ds_1, ds_2,

$$(A_1 - A_2) \cos nx + (B_1 - B_2) \cos ny + (C_1 - C_2) \cos nz = 0.$$

Si nous prenons trois lignes L_1, L_2, L_3 ayant au point m les tangentes parallèles à Ox, Oy, Oz, il vient trois relations déduites de la relation ci-dessus et qui entrainent

$$A_2 = A_3$$
$$B_3 = B_1$$
$$C_1 = C_2.$$

Désignons ces valeurs par A, B, C et soit L° une ligne quelconque passant par le point m et $(\alpha_0 \beta_0 \gamma_0)$ les cosinus directeurs de sa tangente. On aura

$$\frac{A - A_0}{\alpha_0} = \frac{B - B_0}{\beta_0} = \frac{C - C_0}{\gamma_0}$$

d'où l'on conclut

$$A_0 = A + \lambda\alpha_0$$
$$B_0 = B + \lambda\beta_0$$
$$C_0 = C + \lambda\gamma_0$$

λ étant quelconque et, en particulier, en prenant $\lambda = 0$,

$$A_0 = A \quad , \quad B_0 = B \quad , \quad C_0 = C.$$

11. Nous appelons les fonctions qui jouissent de la propriété (9) des *fonctions du premier degré* (9). Suivant (8′) elles sont de la forme

$$(11) \qquad F\,|\,[L]\,| = \iint_\Sigma (A \cos nx + B \cos ny + C \cos nz)\, d\sigma$$

A, B, C étant des fonctions de points. Nous supposerons qu'elles ont des dérivées partielles du premier ordre continues. Puisque l'intégrale (11) ne dépend que de la frontière L de la surface Σ, et si nous supposons $F\,|\,[L]\,|$ nulle lorsque L se réduit à un point, l'intégrale est nulle si Σ est une surface fermée, donc il faut que

$$(12) \qquad \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z} = 0.$$

Si cette condition est satisfaite la formule (11) définit une fonction de ligne du 1er degré.

Nous dirons que (12) est la *condition d'intégrabilité.*

Prenons une fonction de ligne du premier degré, définie par la formule (11). Déformons suivant l' un arc l de la ligne L et cherchons la variation correspondante de la fonction. A cause des propriétés précédentes, cette variation sera la valeur de la fonction correspondant à la ligne formée par les arcs l' et l en changeant le sens du parcours de l; elle s'exprimera donc par l'intégrale

$$W = \int_\sigma (A \cos nx + B \cos ny + C \cos nz)\, d\sigma,$$

σ étant une surface limitée par l et l', n sa normale prise dans le sens déjà dit.

(9) Ou encore *simples* [20] ou *régulières* [B].

Supposons maintenant que Σ, en décroissant indéfiniment de façon régulière, tende vers le point M; on aura

$$\lim \frac{W}{\sigma} = A \cos nx + B \cos ny + C \cos nz ,$$

où A , B , C sont calculés au point M.

La limite en question peut être appelée dérivée de la fonction de ligne F par rapport à σ et on peut la représenter par $dF/d\sigma$.

Prenons la dérivée de F par rapport à une surface σ_1 normale à l'axe x en M; nous aurons

$$\frac{dF}{d\sigma_1} = A$$

et, de même, si σ_2 et σ_3 sont des surfaces respectivement normales aux axes y et z, on aura

$$\frac{dF}{d\sigma_2} = B \quad , \quad \frac{dF}{d\sigma_3} = C;$$

on pourra désigner A , B , C par les symboles

$$\frac{dF}{d(yz)}, \quad \frac{dF}{d(zx)}, \quad \frac{dF}{d(xy)} .$$

On en conclut que

$$\frac{dF}{d\sigma} = \frac{dF}{d(yz)} \cos nx + \frac{dF}{d(zx)} \cos ny + \frac{dF}{d(xy)} \cos nz$$

ou encore

$$dF = \frac{dF}{d(yz)} dy\,dz + \frac{dF}{d(zx)} dz\,dx + \frac{dF}{d(xy)} dx\,dy. \tag{13}$$

La formule (8) devient

$$F\,|\,[L_1]\,| = F\,|\,[L_0]\,| + \iint_S \left(\frac{dF}{d(yz)} dy\,dz + \frac{dF}{d(zx)} dz\,dx + \frac{dF}{d(xy)} dx\,dy\right) \tag{14}$$

tandis que la condition d'intégrabilité (12) est

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{dF}{d(yz)} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{dF}{d(zx)} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{dF}{d(xy)} = 0. \tag{15}$$

12. Les formules ci-dessus montrent une profonde analogie entre les fonctions de lignes et les fonctions de points. En effet si $\varphi(x , y , z)$ est une fonction de points, on a

$$d\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial\varphi}{\partial z} dz \tag{13'}$$

analogue à (13), puis

$$\varphi(x , y , z) = \varphi(x_0 y_0 z_0) + \int_{x_0 y_0 z_0}^{xyz} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial\varphi}{\partial z} dz\right), \tag{14'}$$

analogue à (14), et enfin

$$\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial\varphi}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial\varphi}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial\varphi}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial\varphi}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial y} = 0, \tag{15'}$$

analogues à (15).

Cette analogie se poursuit dans la signification géométrique des deux classes de fonctions.

Soit

$$(u\,,v\,,w) = \operatorname{grad}\varphi$$

un champ scalaire. Considérons l'espace partagé en couches par les surfaces équipotentielles. La fonction de points

$$\varphi_M - \varphi_N = \int_N^M (u\,dx + v\,dy + w\,dz)$$

mesure le nombre de couches qui se trouvent entre N et M.

Soit de même

$$(u\,,v\,,w) = \operatorname{rot}(\xi\,,\eta\,,\zeta)$$

un champ vectoriel; la fonction de lignes

$$\int_L (\xi\,dx + \eta\,dy + \zeta\,dz) = \iint_S (u\,dy\,dz + v\,dz\,dx + w\,dx\,dy)$$

mesure le nombre de tubes de tourbillons entourés par la ligne L.

13. Occupons-nous du changement de variables

$$\bar{x} = \bar{x}(x\,,y\,,z)$$
$$\bar{y} = \bar{y}(x\,,y\,,z)$$
$$\bar{z} = \bar{z}(x\,,y\,,z).$$

La relation

$$F\,|\,[L]\,| = \iint_\Sigma \left(\frac{dF}{d(yz)}dy\,dz + \frac{dF}{d(zx)}dz\,dx + \frac{dF}{d(xy)}dx\,dy\right),$$

en exprimant les coordonnées de Σ en fonction de deux paramètres u, v, donne:

$$F\,|\,[L]\,| = \iint_\Sigma \left[\frac{dF}{d(yz)}\,\frac{d(yz)}{d(uv)} + \frac{dF}{d(zx)}\,\frac{d(zx)}{d(uv)} + \frac{dF}{d(xy)}\,\frac{d(xy)}{d(uv)}\right]du\,dv,$$

où $\dfrac{d(yz)}{d(uv)}$ est le jacobien. Or

$$\frac{d(yz)}{d(uv)} = \frac{d(yz)}{d(\bar{x}\bar{y})}\,\frac{d(\bar{x}\bar{y})}{d(uv)} + \frac{d(yz)}{d(\bar{y}\bar{z})}\,\frac{d(\bar{y}\bar{z})}{d(uv)} + \frac{d(yz)}{d(\bar{z}\bar{x})}\,\frac{d(\bar{z}\bar{x})}{d(uv)};$$

on conclut que

$$\frac{dF}{d(\bar{y}\bar{z})} = \frac{dF}{d(yz)}\cdot\frac{d(yz)}{d(\bar{y}\bar{z})} + \frac{dF}{d(zx)}\,\frac{d(zx)}{d(\bar{y}\bar{z})} + \frac{dF}{d(xy)}\cdot\frac{d(xy)}{d(\bar{y}\bar{z})}$$

$$\frac{dF}{d(\bar{z}\bar{x})} = \frac{dF}{d(yz)}\cdot\frac{d(yz)}{d(\bar{z}\bar{x})} + \frac{dF}{d(zx)}\cdot\frac{d(zx)}{d(\bar{z}\bar{x})} + \frac{dF}{d(xy)}\,\frac{d(xy)}{d(\bar{z}\bar{x})}$$

$$\frac{dF}{d(\bar{x}\bar{y})} = \frac{dF}{d(yz)}\cdot\frac{d(yz)}{d(\bar{x}\bar{y})} + \frac{dF}{d(zx)}\,\frac{d(zx)}{d(\bar{x}\bar{y})} + \frac{dF}{d(xy)}\cdot\frac{d(xy)}{d(\bar{x}\bar{y})}.$$

14. En vertu de la condition d'intégrabilité

$$\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z} = 0$$

toute fonction du premier degré

$$F\,|\,[L]\,| = \iint_{\Sigma} (A\,dy\,dz + B\,dz\,dx + C\,dx\,dy)$$

peut être écrite sous la forme

$$F\,|\,[L]\,| = \int_{L} (X\,dx + Y\,dy + Z\,dz) \tag{16}$$

où X , Y , Z vérifient les relations

$$\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} = A$$

$$\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} = B$$

$$\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} = C.$$

Ce système ne détermine cependant X , Y , Z qu'à un gradient près, car on peut remplacer X , Y , Z par

$$X^* = X + \frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

$$Y^* = Y + \frac{\partial \varphi}{\partial y}$$

$$Z^* = Z + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\,.$$

Pour un changement de variables, les X , Y , Z se comportent comme les composantes d'un vecteur.

15. On peut donner une autre forme à $F\,|\,[L]\,|$. On peut, en vertu de la condition d'intégrabilité, calculer deux fonctions λ et μ telles que (10)

$$A = \frac{d(\lambda\mu)}{d(yz)}$$

$$B = \frac{d(\lambda\mu)}{d(zx)}$$

$$C = \frac{d(\lambda\mu)}{d(xy)}.$$

Il suffit, comme l'enseigne la théorie des multiplicateurs de JACOBI, de trouver une fonction μ intégrale de

$$A\frac{\partial \mu}{\partial x} + B\frac{\partial \mu}{\partial y} + C\frac{\partial \mu}{\partial z} = 0$$

(10) Voir V. VOLTERRA [20].

et de prendre

$$\lambda = \int \frac{1}{\frac{\partial \mu}{\partial z}} (A\, dy - B\, dx) + f(\mu)$$

où f est une fonction arbitraire.

Si on fait un changement de variables on voit que, du fait que

$$\frac{d(\lambda\mu)}{d(\bar{y}\bar{z})} = \frac{d(\lambda\mu)}{d(yz)} \cdot \frac{d(yz)}{d(\bar{y}\bar{z})} + \frac{d(\lambda\mu)}{d(zx)} \cdot \frac{d(zx)}{d(\bar{y}\bar{z})} + \frac{d(\lambda\mu)}{d(xy)} \cdot \frac{d(xy)}{d(\bar{y}\bar{z})},$$

il vient

$$\frac{dF}{d(\bar{y}\bar{z})} = \frac{d(\lambda\mu)}{d(\bar{y}\bar{z})}, \qquad \frac{dF}{d(\bar{z}\bar{x})} = \frac{d(\lambda\mu)}{d(\bar{z}\bar{x})}, \qquad \frac{dF}{d(\bar{x}\bar{y})} = \frac{d(\lambda\mu)}{d(\bar{x}\bar{y})};$$

donc λ , μ *sont invariants*.

Soit alors Σ une surface dont l'élément d'arc est

$$ds^2 = E\, du^2 + 2\, F\, du\, dv + G\, dv^2$$

on conclut que si

$$\frac{dF\,|[L]|}{d\sigma} = A \cos nx + B \cos nx + C \cos nz =$$

$$= \frac{d(\lambda\mu)}{d(yz)} \cos nx + \frac{d(\lambda\mu)}{d(zx)} \cos ny + \frac{d(\lambda\mu)}{d(xy)} \cos nz$$

on aura

(17)
$$\frac{dF\,|[L]|}{d\sigma} = \frac{1}{H} \frac{d(\lambda\mu)}{d(uv)}$$

avec

$$H^2 = EG - F^2.$$

Nous pouvons donc prendre

$$X = \lambda \frac{\partial \mu}{\partial x}$$

$$Y = \lambda \frac{\partial \mu}{\partial y}$$

$$Z = \lambda \frac{\partial \mu}{\partial z}.$$

Alors (16) donne

(18)
$$F\,|[L]| = \int_L \lambda d\mu\,.$$

Section III.

Les connexions des régions de l'espace et la polydromie des fonctions de lignes.

16. On sait que l'application de la formule

$$\varphi_m = \varphi_0 + \int_0^m d\varphi\,,$$

quand les conditions d'intégrabilité sont satisfaites, mène à des remarques importantes relatives à la polydromie des fonctions et à la connexion des domaines.

Considérons un domaine plan D et l'intégrale

$$\varphi_m = \varphi_0 + \int_0^m (udx + vdy), \tag{1}$$

u, v étant uniformes et continues dans D et ayant des dérivées partielles du premier ordre continues liées par

$$\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} = 0. \tag{2}$$

On sait que φ_m est uniforme ou non, suivant que

$$I = \int_c (udx + vdy) \tag{3}$$

est nulle ou non pour les courbes C fermées. Or, si D est simplement connexe (par exemple si D est le domaine intérieur à un cercle) les relations (2) assurent la nullité de I et l'uniformité de φ.

Par contre, si D est multiplement connexe (par exemple si D est la couronne circulaire comprise entre deux cercles concentriques), l'intégrale I peut être différente de 0 et φ peut être polydrome. On peut éviter la polydromie en faisant une coupure qui rend le domaine simplement connexe.

Le rôle des fonctions polydromes dans la physique mathématique est bien connu ainsi que leur importance pour la théorie des fonctions, par exemple pour la théorie des fonctions algébriques et des surfaces de RIEMANN qui leurs sont attachées.

17. Si on passe à l'espace, la théorie se complique par le fait qu'on doit considérer deux espèces différentes de connexions.

La première apparait pour l'intégrale simple

$$\varphi_m = \varphi_0 + \int_0^m (udx + vdy + wdz),$$

avec

$$\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} = 0 \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0. \tag{2'}$$

Si (u, v, w) sont uniformes, continues, dérivables dans un domaine D, les conditions (2') assurent–elles la monodromie de φ? La réponse est affirmative si D est l'espace intérieur à une sphère et même l'espace compris entre deux sphères, mais elle cesse de l'être si D est le domaine intérieur à un tore. En général la réponse est affirmative si toute ligne fermée intérieure au domaine D peut être réduite à un point sans sortir de ce domaine. Elle est négative dans le cas contraire. Dans le premier cas, D est dit *à connexion linéaire simple*, dans le second, *à connexion linéaire multiple*. Les domaines à connexion multiple peuvent être réduits à la connexion simple par des coupures superficielles; ainsi l'espace intérieur au tore peut être ramené à la connexion simple par une coupure superficielle transversale.

18. Par contre, si on applique la formule

$$F\,|\,[L]\,| = F\,|\,[L_0]\,| + \iint_S (A\,dy\,dz + B\,dz\,dx + C\,dx\,dy)\,,$$

avec

$$\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z} = 0\,, \tag{2''}$$

si on veut avoir deux valeurs égales pour $F\,|\,[L]\,|$ lorsqu'on considère deux surfaces S et S′ différentes quelconques qui ont pour bords L_0 et L, on doit avoir

$$\iint_\Sigma (A\,dy\,dz + B\,dz\,dx + C\,dx\,dy) = 0\,, \tag{3''}$$

pour toute surface Σ fermée. Cette condition est satisfaite en vertu de (2″) si le domaine D est tel que toute surface Σ puisse être réduite à un point par déformation continue sans sortir du domaine: par exemple, si D est le domaine intérieur à une sphère. On dit dans ce cas que D a la connexion superficielle simple. Sinon la connexion superficielle est multiple: par exemple si D est le domaine compris entre deux sphères concentriques.

En général un espace à connexion superficielle multiple se réduit à un espace à connexion simple par des coupures linéaires constituées par des lignes formant des lacunes tubulaires de l'espace. C'est ainsi que la connexion de l'espace compris entre deux sphères se réduit à la connexion simple par une ligne (petit tube) reliant les surfaces des deux sphères.

19. Pour les domaines à deux dimensions on peut imaginer des domaines sans frontière simplement connexes (par exemple la surface d'une sphère) ou multiplement connexes (par exemple la surface d'un tore). Comment concevoir des domaines à trois dimensions sans frontière? On peut le faire en utilisant un espace à quatre dimensions mais on peut y arriver d'une manière plus intuitive [11].

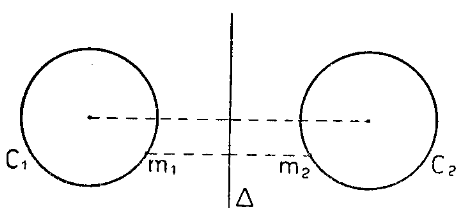


Fig. 1.

Si on veut, sans sortir du plan, avoir une idée topologique de la sphère, il suffit de considérer deux cercles C_1, C_2 symétriques par rapport à une droite

(11) Pour l'analyse des propriétés topologiques des modèles de M. VOLTERRA, nous renvoyons au livre de M. LEFSCHETZ [F].

Δ et de supposer que les points des frontières m_1 et m_2 sont identiques, c'est-à-dire qu'on passe de m_1 à m_2 sans saut. Nous disons dans ce cas que les deux domaines intérieurs aux cercles C_1, C_2 on été *soudés par leurs frontières.*

Pour avoir une idée topologique de la surface d'un tore sans sortir du plan il suffit de considérer que les domaines hachurés de la figure 2 ont été soudés par leurs frontières.

Ces remarques peuvent être étendues à l'espace. Soient S_1 et S_2 deux sphères symétriques par rapport à un plan P. Supposons qu'on puisse passer sans discontinuité d'un point m_1 sur S_1 à son symétrique par rapport à P. Nous dirons que les deux sphères ont été *soudées par leurs surfaces* dans la symétrie par rapport à P. Le domaine formé par la réunion du domaine intérieur à S_1 et celui intérieur à S_2 est à connexion superficielle et linéaire simple, et sans frontière.

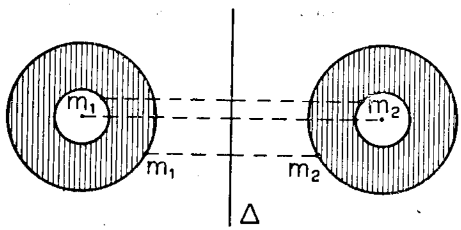


Fig. 2.

20. Par cette construction, on arrive à des domaines homéomorphes (qui peuvent se réduire l'un à l'autre par déformation continue) d'aspects très variés. Soit D_1 le domaine compris entre deux sphères concentriques S_2 et s_1; nous l'appelons *sphère trouée* ($S_1 - s_1$).

Deux sphères trouées, soudées par leurs frontières dans la symétrie par rapport à P, *et deux tores, soudés par leurs frontières dans la même symétrie, sont homéomorphes.*

Nous décrirons la déformation en priant le lecteur de se reporter à la planche (I).

a) Soient les deux sphères trouées (fig. 1 où sont seulement représentées les sections de ces sphères par un plan de figure passant par les centres). Coupons-les par un plan Q perpendiculaire à P par la ligne des centres. Puis, faisons tourner les hémisphères supérieurs de 180° autour des droites $\Delta\Delta'$ du plan Q (normales au plan de figure). Nous obtenons la situation de la fig. 2. Les couronnes circulaires planes marquées 1, 1 et 2, 2 sont soudées par symétrie respectivement par rapport aux plans R, R′ (plans menés par Δ, Δ' parallèles à P); les hémisphères grandes et petites (hachurés), sont soudées dans la symétrie par rapport à P. Elles se trouvent au-dessous du plan Q de la figure.

Déformons les parties planes 1 et 2 pour les rendre sphériques et aplatissons les hémisphères; nous obtenons la figure 3 où les solides sont venus au dessus du plan Q.

Une rotation de 180° autour de S (droite commune à P et Q) réalise matériellement la soudure des parties planes à hachures simples et donne la figure 4: deux sphères dont les surfaces sont soudées dans la symétrie par rapport à R, ces deux sphères étant tronquées par des sections planes (hachures doubles) que l'on doit souder dans la symétrie par rapport à Q.

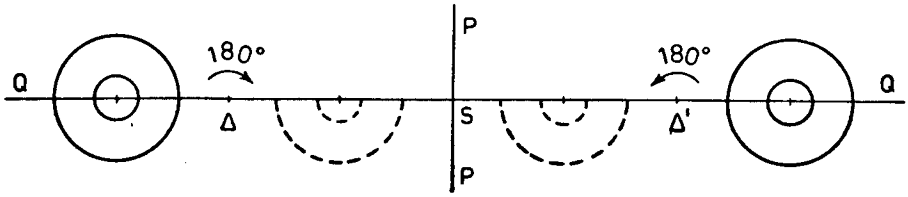


Fig. 1.

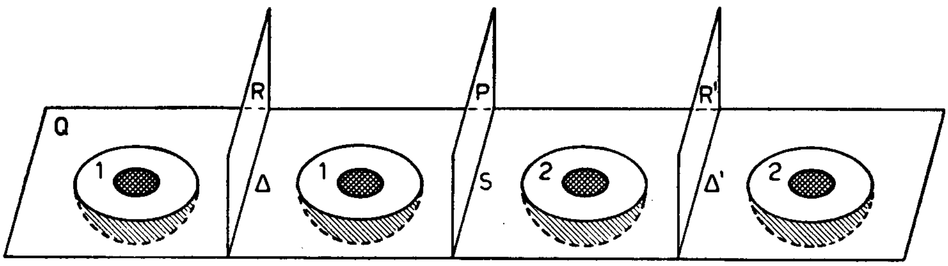


Fig. 2.

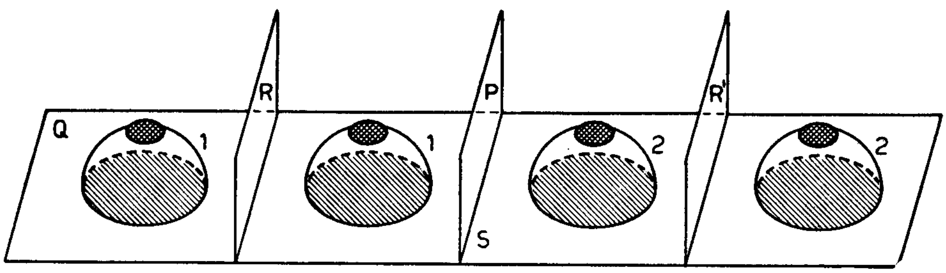


Fig. 3.

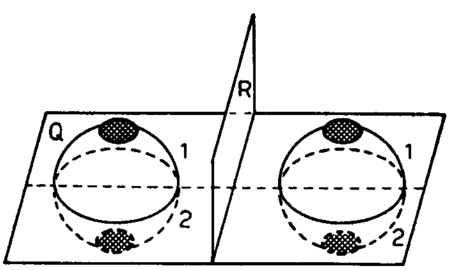


Fig. 4.

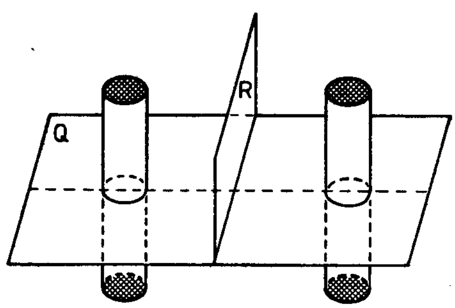


Fig. 5.

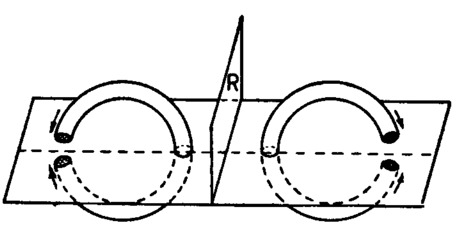


Fig. 6.

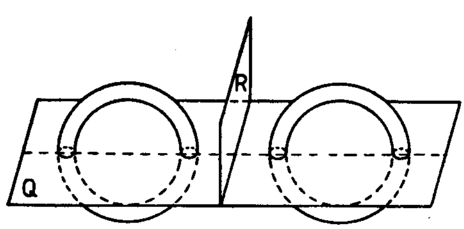


Fig. 7.

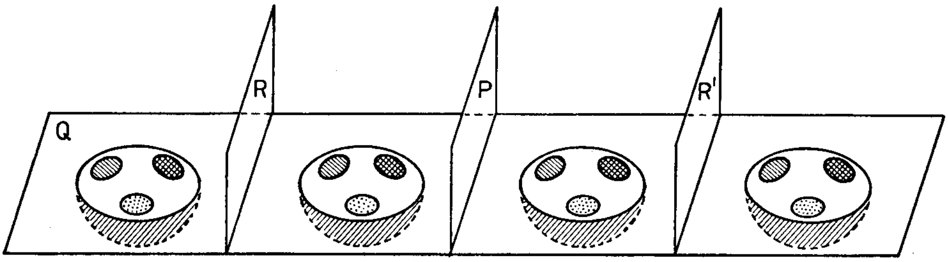


Fig. 1.

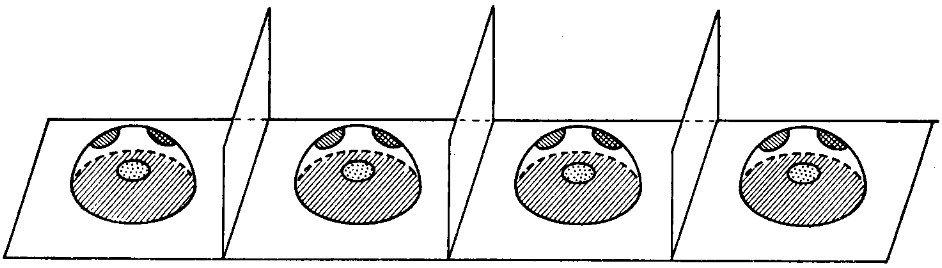


Fig. 2.

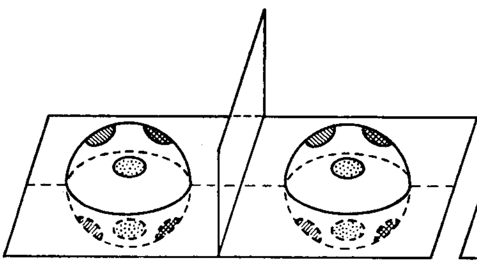


Fig. 3.

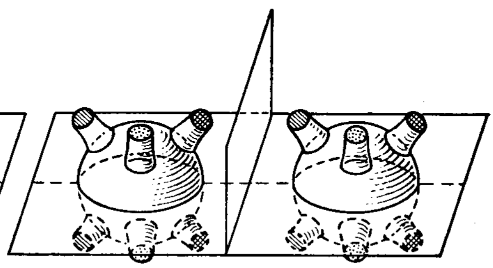


Fig. 4.

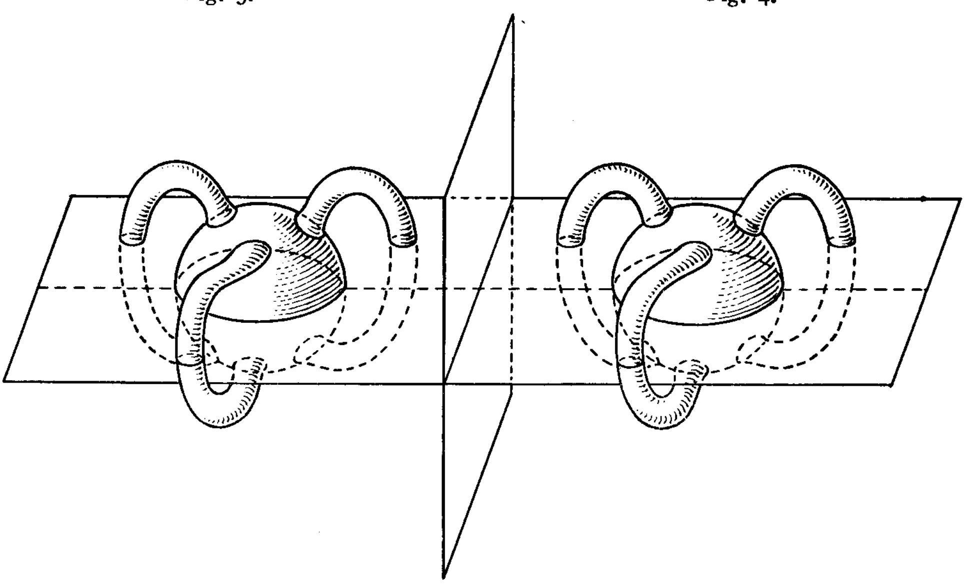


Fig. 5.

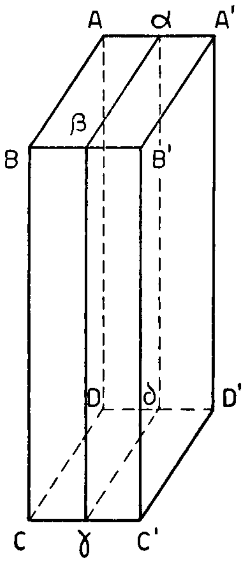


Fig. 1.

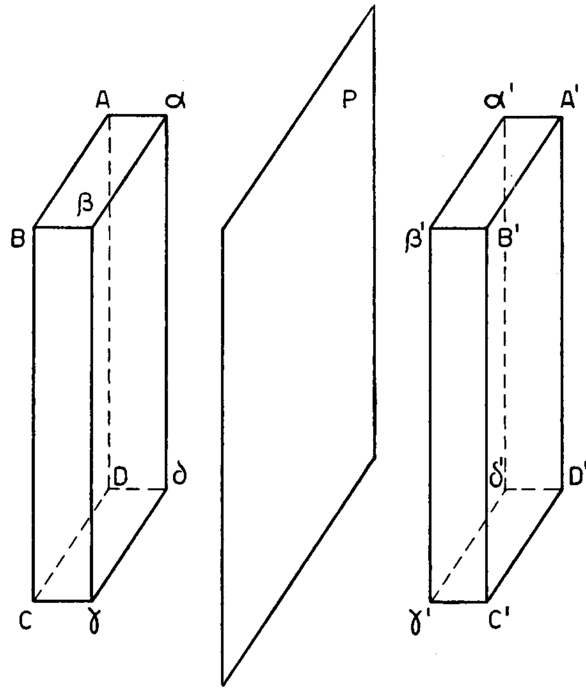


Fig. 2.

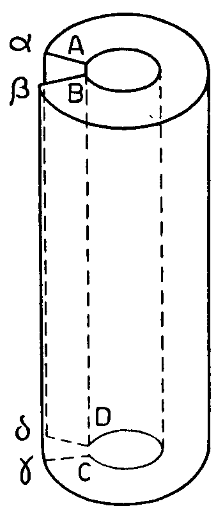


Fig. 3.

b) Il reste enfin à allonger ces deux sphères en deux cylindres, puis à courber ces cylindres de manière à souder matériellement leurs bases dans le plan Q. On a bien obtenu les tores de l'énoncé.

21. Soit une sphère S_1 et R sphères intérieures s_1, et le domaine D_1 intérieur à S_1 et extérieur aux s_i. Nous appelons ce domaine une *sphère à* R *trous*. Considérons une sphère Σ ayant des manches (voir pl. II, fig. 5).

Deux sphères à R *trous soudées par leurs frontières et deux sphères à* R *manches soudées par leurs frontières enferment des domaines homéomorphes.*

En suivant le raisonnement du paragraphe 20 *a*, on arrive à la fig. 3, planche II. On continue à déformer le domaine de la manière suivante:

b) On fait saillir les sections droites (hachurées) au bout de tentacules qui prolongent la surface sphérique (fig. 4), puis on courbe ces tentacules de façon à les souder dans le plan Q; on obtient ainsi des sphères à manches (fig. 5) et l'assertion est justifiée.

22. *Un parallélipipède ayant les faces opposées soudées et deux tores, chacun à un canal soudés par la frontière, sont homéomorphes.*

Nous disons que les faces opposées d'un parallélipipède sont soudées lorsque nous convenons de considérer comme coïncidantes les extrémités, situées dans deux faces opposées, d'un segment parallèle à une arête.

Pour justifier l'énoncé on fera, dans le parallélipipède ABCDA'B'C'D' une section médiane $\alpha\beta\gamma\delta$, puis on écartera les deux morceaux de sorte que leurs faces $\alpha\beta\gamma\delta$ soient respectivement soudées dans la symétrie par rapport à un plan P (fig. 1 et 2, planche III).

Puis on courbera les arêtes (AB et parallèles) de manière à obtenir, par soudure des faces $B\beta\gamma C$ et $A\alpha\delta D$ un tube cylindrique (fig. 3). Il suffira enfin de courber ce tube jusqu'à en souder les bases et de faire les mêmes opérations sur le solide $A'B'C'\alpha\beta\gamma\delta$ pour obtenir les deux tores soudée par leurs frontières dans la symétrie par rapport à P.

Section IV.

Propriétés des fonctions conjuguées.

23. Nous avons attiré l'attention dans le premier chapitre sur le fait que le système d'équations de Cauchy

$$(1) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} - \dfrac{\partial v}{\partial y} = 0 \\[2mm] \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x} = 0 \end{cases}$$

est une linéarisation de l'équation de Laplace, parce qu'il conduit à

$$\Delta u = \Delta v = 0.$$

Les fonctions de point u, v sont appelées *fonctions conjuguées*. Quelle est l'extension de cette théorie dans l'espace ?

24. On a vu dans le chapitre I que le système qui correspond au système (1) est le suivant

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \tag{2'}$$

$$\left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} = 0 \\ &\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \\ &\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \end{aligned} \right. \tag{2''}$$

duquel on tire

$$\Delta u = \Delta v = \Delta w = 0.$$

Or l'équation (2') est la condition d'intégrabilité de la différentielle d'une fonction de ligne

$$d\Phi = u dy\, dz + v dz\, dx + w dx\, dy,$$

tandis que (2'') sont les conditions d'intégrabilité de la différentielle d'une fonction de points

$$d\varphi = u dx + v dy + w dz.$$

Cette propriété ressemble au fait que les équations (1) sont les conditions d'intégrabilité des deux différentielles

$$dU = u dx + v dy$$

$$dV = u dy - v dx$$

et l'on sait que la fonction

$$U + iV = \int (u - iv)(dx + idy)$$

a pour dérivée $u - iv$, ou bien que U et V sont conjuguées.

De même, (2) expriment que

$$\varphi = \int (u dx + v dy + w dz),$$

$$\Phi = \iint (u dy\, dz + v dz\, dx + w dx\, dy)$$

(intégrales étendues respectivement à un arc de courbe compris entre un point fixe et un point variable et à une surface limitée par une ligne fermée variable) ont pour dérivées

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = u, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = v, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = w,$$

et

$$\frac{d\Phi}{d(yz)} = u\,, \qquad \frac{d\Phi}{d(zx)} = v\,, \qquad \frac{d\Phi}{d(xy)} = w\,.$$

On en conclut

(3) $$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{d\Phi}{d(yz)}\,, \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{d\Phi}{d(zx)}\,, \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial z} = \frac{d\Phi}{d(xy)}\,.$$

A la fonction de points on associe donc la fonction de lignes Φ et les relations de CAUCHY (1) sont remplacées par les relations (3): nous pourrons dire que Φ et φ sont conjuguées.

25. Avant de pousser plus loin cette idée, donnons-en une image physique [12].

Dans l'électromagnétisme, on considère deux espèces d'éléments: les pôles magnétiques et les courants électriques. Chaque pôle magnétique est individualisé par sa position dans l'espace et par sa masse magnétique. Chaque courant électrique est individualisé par son circuit, qui est une courbe fermée de l'espace, et par son intensité.

Considérons un système de masses magnétiques et leur potentiel φ par rapport à un pôle magnétique m de masse 1 et de position variable; φ est une fonction du point m, la dérivée de φ dans une direction n est la composante de l'action exercée sur m suivant la direction n.

De même, considérons le potentiel Φ de ces masses par rapport à un courant d'intensité 1 qui parcourt un circuit qui est une courbe fermée L. Φ est une fonction de la ligne L. Si nous remplaçons L par une ligne L' voisine de L, ne différant de L qu'autour du point m, et telle que L'— L enferme une aire $d\sigma$, le rapport $d\Phi/d\sigma$ représente la composante de l'action exercée sur un courant infiniment petit suivant la normale n à $d\sigma$.

L'équivalence des courants et des feuillets magnétiques conduit à

$$\frac{d\Phi}{d\sigma} = \frac{\partial\varphi}{\partial n}\,.$$

26. Enfin, on arrive aux mêmes conclusions par le raisonnement suivant: Les équations (1) expriment que, si n et s sont deux directions perpendiculaires, disposées l'une par rapport à l'autre comme $o\,,x$ est disposé par rapport à $o\,,y$, u et v sont conjuguées si [13]

(4) $$\frac{du}{dn} = \frac{dv}{ds}\,.$$

Pour étendre cette relation dans l'espace, nous considérons une direction linéaire dn et la direction planaire perpendiculaire $d\sigma$ et deux fonctions φ et Φ telles que

$$\frac{d\varphi}{dn} = \frac{d\Phi}{d\sigma}\,.$$

(12) Voir V. VOLTERRA [26].
(13) Voir V. VOLTERRA [26].

Pour avoir une dérivée daus la direction planaire $d\sigma$, Φ doit être une fonction de ligne. En résumant: nous *disons qu'une fontion de points* φ *et une fonction de lignès* Φ *du premier degré sont conjuguées si pour chaque couple de directions: dn, direction linéaire, et* $d\sigma$, *direction planaire perpendiculaire, on a*

$$\frac{d\varphi}{dn} = \frac{d\Phi}{d\sigma}. \tag{5}$$

En vertu de

$$\frac{d\varphi}{dn} = \alpha\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \beta\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \gamma\frac{\partial\varphi}{\partial z},$$

$$\frac{d\Phi}{d\sigma} = \alpha\frac{d\Phi}{d(yz)} + \beta\frac{d\Phi}{d(zx)} + \gamma\frac{d\Phi}{d(xy)},$$

$\alpha\beta\gamma$ étant les cosinus directeurs de dn (5), conduit à

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{d\Phi}{d(yz)}, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{d\Phi}{d(zx)}, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial z} = \frac{d\Phi}{d(xy)}. \tag{3'}$$

La condition d'intégrabilité de Φ conduit à

$$\Delta\varphi = 0,$$

tandis que les conditions d'intégrabilité de φ conduisent à

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial y}\frac{d\Phi}{d(xy)} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{d\Phi}{d(xz)} = 0 \\ &\frac{\partial}{\partial z}\frac{d\Phi}{d(yz)} + \frac{\partial}{\partial x}\frac{d\Phi}{d(yx)} = 0 \\ &\frac{\partial}{\partial x}\frac{d\Phi}{d(zx)} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{d\Phi}{d(zy)} = 0. \end{aligned}\right. \tag{6}$$

Nous appelons les fonctions de lignes qui vérifient (6) des *fonctions harmoniques*.

Si une fonction de lignes et une fonction de points sont conjuguées, elles sont harmoniques.

Réciproquement: *chaque fonction de point* (ou fonction de ligne) *harmonique admet une fonction de ligne* (ou fonction de point) *qui lui est conjuguée.*

27. Ecrivons la fonction de ligne Φ définie au § 24 sous la forme

$$\Phi\,|\,[L]\,| = \int_L (X\,dx + Y\,dy + Z\,dz),$$

où

$$\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} = \frac{d\Phi}{d(yz)},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

On sait que ce système ne détermine pas complètement X, Y, Z; mais on peut profiter de cette indétermination pour ajouter que, dans un certain domaine, on ait la condition

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = 0.$$

Cette équation jointe au système (3) donne:

$$(7)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial\varphi}{\partial x}-\dfrac{\partial Z}{\partial y}+\dfrac{\partial Y}{\partial z}=0 \\[2mm] \dfrac{\partial\varphi}{\partial y}-\dfrac{\partial X}{\partial z}+\dfrac{\partial Z}{\partial x}=0 \\[2mm] \dfrac{\partial\varphi}{\partial z}-\dfrac{\partial Y}{\partial x}+\dfrac{\partial X}{\partial y}=0 \\[2mm] \dfrac{\partial X}{\partial x}+\dfrac{\partial Y}{\partial y}+\dfrac{\partial Z}{\partial z}=0. \end{cases}$$

On conclut que *les fonctions* X , Y , Z *sont des fonctions de point harmoniques*, c'est-à-dire

$$\Delta X=\Delta Y=\Delta Z=0\,.$$

Le système (7) a été pris par M. Gr. MOISIL comme base d'une extension à l'espace de la théorie des fonctions monogènes (14). Il a pu étendre au système (7) les propriétés principales du système (1).

28. Dans le cas des potentiels φ symétriques autour d'un axe Δ, on se borne à considérer les valeurs de la fonction conjuguée $\Phi\,|\,[L]\,|$ pour les lignes L qui sont des cercles ayant pour axe de symétrie Δ. $\Phi\,|\,[L]\,|$ est une fonction de deux variables et on retombe sur la théorie des fonctions associées, développée par KIRCHHOFF et BELTRAMI dans plusieurs Mémoires.

CHAPITRE IV.

Fonctions conjuguées dans l'espace à plusieurs dimensions.

1. Nous passerons rapidement en revue l'extension des résultats précédents aux espaces à n dimensions E_n (15). Considérons dans E_n une variété à r dimensions $(0<r<n)$ S_r, donnée par les relations

$$x_i = x_i(\omega_1\,,\dots,\,\omega_r).$$

Soit la matrice fonctionnelle

$$(1)\qquad \left\| \begin{matrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial\omega_1},\dots,\dfrac{\partial x_n}{\partial\omega_1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \dfrac{\partial x_1}{\partial\omega_r},\dots,\dfrac{\partial x_n}{\partial\omega_r} \end{matrix} \right\|;$$

(14) Voir Gr. C. MOISIL [7].
(15) Voir V. VOLTERRA [24] et [A].

désignons par $\Delta_{i_1,\ldots,i_r}$ le déterminant

$$(2)\qquad \Delta_{i_1,\ldots,i_r} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x_{i_1}}{\partial \omega_1}, \ldots, \dfrac{\partial x_{i_r}}{\partial \omega_1} \\ \dfrac{\partial x_{i_1}}{\partial \omega_r}, \ldots, \dfrac{\partial x_{i_r}}{\partial \omega_r} \end{vmatrix}$$

et soit Δ^2 le carré de la matrice (1)

$$(3)\qquad \Delta^2 = \sum_i \Delta^2_{i_1,\ldots,i_r}.$$

Supposons que la variété S_r soit *orientée*, c'est-à-dire qu'en choisissant un signe pour Δ en un point, le signe de Δ soit déterminé univoquement en tout point de S_r par continuité.

L'élément de volume de S_r est

$$(4)\qquad dS_r = \Delta\, d\omega_1 \cdots d\omega_r;$$

les quantités

$$(5)\qquad \alpha_{i_1,\ldots,i_r} = \frac{\Delta_{i_1,\ldots,i_r}}{\Delta}$$

ne changeant pas si l'on substitue aux ω d'autres variables, nous les nommerons cosinus directeurs de S_r; on vérifie qu'ils satisfont aux relations

$$(6)\qquad \begin{cases} \sum_i \alpha^2_{i_1,\ldots,i_r} = 1 \\ \sum_1^{r+1}{}_s (-1)^s \alpha_{i_1,\ldots,i_{s-1},\, i_{s+1},\ldots,i_{r+1}}\, \alpha_{i_s,\, h_2,\ldots,h_r} = 0. \end{cases}$$

Quel que soit l, on peut écrire

$$(7)\qquad d\omega_l = \sum_i A_{i_1,\ldots,i_{r-1}} \frac{d(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_{r-1}})}{d(\omega_1, \ldots, \omega_{l-1}, \omega_{l+1}, \ldots, \omega_r)},$$

les A étant des paramètres infinitésimaux, en partie indéterminés, et la somme étant étendue à toutes les combinaison des indices $i_1\, i_2, \ldots, i_{r-1}$. En effet, en formant la matrice des coefficients des A, parmi ses mineurs se trouveront les puissances $(r-1)$-ièmes des mineurs de la matrice (1), de sorte que ces mineurs ne peuvent être tous nuls. On en conclut que si

$$a_{i_1,\ldots,i_{r-1}} = -\Delta \cdot A_{i_1,\ldots,i_{r-1}},$$

on a

$$(8)\qquad dx_s = \sum_i a_{i_1,\ldots,i_{r-1}}\, \alpha_{s,i_1,\ldots,i_{r-1}}.$$

2. Nous considérons un nombre Φ *fonction de l'hyperespace* S_r, c'est-à-dire un nombre Φ qui a une valeur déterminée pour chaque $S_r : \Phi\,|\,[S_r]\,|$.

La définition de la continuité de $\Phi\,|\,[S_r]\,|$ est une généralisation immédiate de la continuité des fonctions de lignes: soit un point P de S_r et, en ce point, un hyperespace S_{n-r} normal à S_r, dans lequel nous prenons un petit voisinage v du point P.

Lorsque P décrit S_r, v engendrera une portion de l'espace à n dimensions que l'on peut appeler un voisinage de S_r et un point P^1 de v engendrera un nouvel hyperespace S_r^1 que nous dirons appartenir au voisinage de S_r. La fonction $\Phi\,|\,[S_r]\,|$ sera dite *continue* lorsque, η étant choisi arbitrairement petit, on peut toujours trouver un voisinage de S_r tel que

$$|\,\Phi\,|\,[S_r^1]\,| - \Phi\,|\,[S_r]\,|\,| < \eta$$

dès que S_r^1 appartient à ce voisinage.

A côté de la continuité de $\Phi\,|\,[S_r]\,|$ nous admettrons aussi la propriété suivante. On passe de l'hyperespace S_r à S_r^1 par un déplacement ε qui varie continûment de point en point. Ce déplacement ε engendre un hyperespace S_{r+1}, à $r+1$ dimensions, d'étendue σ; nous admettrons que l'on peut rendre $\Phi\,|\,[S_r^1]\,| - \Phi\,|\,[S_r]\,|$ arbitrairement petit, en prenant σ inférieur à un σ_0, convenablement choisi.

La *dérivée* fonctionnelle de Φ en un point P est

$$\Phi'_{x_i} = \lim_{\substack{\Delta x_i = 0 \\ s=0}} \frac{\Phi\,|\,[S_r^1]\,| - \Phi\,|\,[S_r]\,|}{s\cdot\Delta x_i}, \tag{9}$$

obtenue en prenant dans S_r le voisinage s d'un point P et en donnant aux points de s un déplacement δx_i parallèle à x_i, ce qui fait passer de S_r à S_r^1. Si la limite est atteinte uniformément et si cette limite est continue, on a pour la variation de Φ, lorsque chaque point de S_r prend un déplacement $\delta x_1, \delta x_2, \cdots, \delta x_r$, la formule

$$\delta\Phi = \int\limits_{S_r} \sum_i \Phi'_{x_i}\,\delta x_i\, dS_r. \tag{10}$$

Le dérivées fonctionnelles sont liées par

$$\sum_i \Phi'_{x_i}\,\alpha_{ih_1,\cdots,h_{r-1}} = 0 \tag{11}$$

que l'on obtient immédiatement si l'on écrit que $\delta\Phi$ est identiquement nul pour des déplacements δx s'effectuant dans S_r.

Or, les α satisfont à (6), donc à

$$\sum_1^{r+1}{}_t\, (-1)^t\, \alpha_{q_t h_1,\cdots,h_{r-1}}\, \alpha_{q_1,\cdots,q_{t-1}\, q_{t+1},\cdots,q_{r+1}} = 0;$$

en multipliant par les indéterminées λ satisfaisant à la condition de changer de signe pour chaque transposition des indices, on arrive à

$$\sum_1^n{}_i\, \sum_q \lambda_{iq_1,\cdots,q_r}\, \alpha_{q_1,\cdots,q_r}\, \alpha_{ih_1,\cdots,h_{r-1}} = 0;$$

retranchant enfin cette équation de la précédente (11), on démontre que les

Φ' sont de forme

$$\Phi'_{x_i} = \sum_q \lambda_{iq_1,\cdots,q_r}\,\alpha_{q_1,\cdots,q_r}, \tag{12}$$

les λ étant des fonctions de points et d'hyperespaces S_r.

On en conclut que

$$\delta\Phi = \int_{S_r} \Sigma\,\lambda_{iq_1,\cdots,q_r}\,\alpha_{q_1,\cdots,q_r}\,\delta x_i\,dS_r. \tag{13}$$

Considérons une S_{r+1} ayant pour frontière S_r et la S_r déformée: S'_r. Si les équations de S_r sont

$$x_i = x_i(w_1, w_2, \cdots, w_r) \qquad (i = 1, 2, \cdots, n),$$

celles de S_{r+1} seront

$$x_i = x_i(w_1, \cdots, w_r) + w_{r+1}\,\delta x_i \qquad (i = 1, 2, \cdots, n).$$

Soit alors Δ^2_{r+1} le carré de la matrice

$$\left\|\begin{matrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial w_1}, \cdots, \dfrac{\partial x_n}{\partial w_1} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{\partial x_1}{\partial w_r}, \cdots, \dfrac{\partial x_n}{\partial w_r} \\ \delta x_1, \cdots, \delta x_n \end{matrix}\right\|$$

et Δ^2_r le carré de la matrice obtenue en supprimant la dernière ligne, on vérifie que

$$\Delta^2_{r+1} = \Delta^2_r \left\{ \sum_q \sum_{1}^{r+1}{}_t (-1)^{t-1}\,\alpha_{q_1,\cdots,q_{t-1},\,q_{t+1},\cdots,q_{r+1}}\,\delta x_t \right\};$$

on peut fixer la direction de S_{r+1} par rapport à celle de S_r de façon que

$$\Delta_{r+1} = (-1)^r \Delta_r \sum_q \sum_{1}^{r+1}{}_t (-1)^{t-1}\,\alpha_{q_1,\cdots,q_{t-1}q_{t+1},\cdots,q_{r+1}}\,\delta x_{qt};$$

(13) donne alors, en désignant par $\alpha_{i_1,i_2,\cdots,i_{r+1}}$ les cosinus directeurs de S_{r+1} calculés par la matrice précédente,

$$\delta\Phi = \int_{S_{r+1}} \sum_q \lambda_{q_1,\cdots,q_{r+1}}\,\alpha_{q_1,\cdots,q_{r+1}}\,dS_{r+1}. \tag{14}$$

Si, par suite, l'hyperespace S_r passe de S'_r à S''_r en engendrant S_{r+1}, on aura

$$\Phi\,|\,[S''_r] - \Phi\,|\,[S'_r]\,| = \int_{S_{r+1}} \sum_q \lambda_{q_1,\cdots,q_{r+1}}\,\alpha_{q_1,\cdots,q_{r+1}}\,dS_{r+1};$$

il faut remarquer qu'en général λ est fonction de point et aussi d'hyperespace.

3. Soient S'_r et S''_r deux hyperespaces ayant une partie commune s qui a une orientation différente suivant qu'elle appartient à S'_r et à S''_r. Appelons $S'_r + S''_r$ la variété formée par les parties non communes à S'_r et S''_r. Les fonctions du premier degré sont définies par

$$\Phi \mid [S'_r + S''_r] \mid = \Phi \mid [S'_r] \mid + \Phi \mid [S''_r] \mid . \tag{15}$$

Dans ce cas on peut choisir les λ indépendants de la variété S_r et la dernière formule du n° 3, appliquée en remarquant que Φ tend vers zéro avec S_r, donnera

$$\Phi = \int_{S_{r+1}} \sum_q \lambda_{q_1,\cdots,q_{r+1}} \alpha_{q_1,\cdots,q_{r+1}} dS_{r+1}, \tag{16}$$

les λ étant des fonctions de points et S_{r+1} un espace arbitraire à $r+1$ dimensions, dont la frontière est S_r.

Si S_{r+1} est un domaine très petit autour du point P, on aura

$$\frac{d\Phi}{dS_{r+1}} = \sum_q \lambda_{q_1,\cdots,q_{r+1}} \alpha_{q_1,\cdots,q_{r+1}}, \tag{17}$$

les α étant les cosinus directeurs de S_{r+1} au point P.

Prenons en particulier S_{r+1} telle que, au point P, tous les cosinus directeurs soient nuls sauf $\alpha_{q_1 q_2,\cdots,q_{r+1}} = 1$; le second membre de (17) se réduit à $\lambda_{q_1,q_2,\cdots,q_{r+1}}$ et, comme au n° 11 du chapitre II, il sera naturel de poser

$$\lambda_{q_1,\cdots,q_{r+1}} = \frac{d\Phi}{d(x_{q_1},\cdots,x_{q_{r+1}})}, \tag{18}$$

et de définir cette quantité comme *dérivée de Φ par rapport a $x_{q_1}, x_{q_2}, \cdots, x_{r+1}$*. Reste à établir les relations entre les *dérivées* ainsi obtenues.

4. Rappelons pour cela *la formule de Stokes généralisée* [16]:

$$\int_{S_r} \sum_i L_{i_1,i_2,\cdots,i_r} \alpha_{i_1,\cdots,i_r} dS_r = \int_{S_{r+1}} \sum_h M_{h_1,\cdots,h_{r+1}} \alpha_{h_1,\cdots,h_{r+1}} dS_{r+1}. \tag{19}$$

avec

$$M_{i_1,\cdots,i_{r+1}} = \sum_{z=1}^{s=r+1} (-1)^{s-1} \frac{\partial L_{i_1,\cdots,i_{s-1}\, i_{s+1},\cdots,i_{r+1}}}{\partial x_{i_s}}. \tag{20}$$

Cette relation montre que si

$$\int_{S_r} \sum_i L_{i_1,\cdots,i_r} \alpha_{i_1,\cdots,i_r} dS_r = 0,$$

(16) Cette formule a été donnée pour la première fois par M. V. VOLTERRA dans ses Notes [24, 25] des « Rendiconti dei Lincei ». D'autres généralisations ont été données ultérieurement.

pour tout hyperespace S_r fermé, on a

$$\sum_{s=1}^{s=r+1} (-1)^{s-1} \frac{\partial L_{i_1,\dots,i_{s-1}\,i_{s+1},\dots,i_{r+1}}}{\partial x_{i_s}} = 0.$$

Il s'ensuit que les dérivées d'une fonction d'hyperespace satisfont aux relations

$$(21) \qquad \sum_{s=1}^{r+1} (-1)^{s-1} \frac{\partial}{\partial x_{i_s}} \frac{d\Phi}{d(x_{i_1},\dots,x_{i_{s-1}}\,x_{i_{s+1}},\dots,x_{i_{r+1}})} = 0,$$

qui sont les conditions *d'intégrabilité*.

5. On dit que deux espaces S'_r et S''_{n-r} sont orthogonaux en un point si en ce point

$$22) \qquad \alpha'_{i_1,\dots,i_r} = \alpha''_{i_{r+1},\dots,i_n},$$

pour toutes les permutations paires $(i_1,\dots,i_n)$ des indices $(1,\dots,n)$.

Nous dirons que deux fonctions du premier degré $\Phi\,|\,[S_{r-1}]\,|$ et $\Psi\,|\,[S_{n-r-1}]\,|$ sont *conjuguées* (17) si pour chaque couple d'éléments d'espaces dS_r et dS_{n-r} orthogonaux, on a

$$(23) \qquad \frac{d\Phi}{dS_r} = \frac{d\Psi}{dS_{n-r}}.$$

On en déduit

$$(24) \qquad \frac{d\Phi}{d(x_{i_1},\dots,x_{i_r})} = \frac{d\Psi}{d(x_{i_{r+1}},\dots,x_{i_n})}.$$

Nous appelons *ordre* de $\Phi\,|\,[S_r]\,|$ le nombre r.

6. *Théorème d'existence.* – Pour établir l'existence des fonctions conjuguées de différents ordres, nous allons démontrer quelques lemmes préliminaires.

La condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe des fonctions P *intégrales du système*

$$(25) \qquad \sum_t (-1)^t \frac{\partial P_{i_1,\dots,i_{t-1},\,i_{t+1},\dots,i_{r+1}}}{\partial x_{i_t}} = p_{i_1,\dots,i_{r+1}}$$

est que:

$$(26) \qquad \sum_s (-1)^s \frac{\partial p_{i_1,\dots,i_{s-1},\,i_{s+1},\dots,i_{r+2}}}{\partial x_{i_s}} = 0.$$

Pour démontrer que la condition est nécessaire, on introduit les valeurs (25) des p dans le premier membre de (26) et on en conclut qu'on obtient zéro. Pour démontrer que la condition (26) est suffisante, nous allons procéder par récurrence. Soient $M_{h_1,\dots,h_{r-1}n}$, des fonctions arbitraires et en supposant $h_1, h_2,\dots, h_r \neq n$ prenons

$$\frac{\partial M_{h_1,\dots,h_r}}{\partial x_n} = (-1)^{r-1} \left\{ p_{h_1,\dots,h_r n} - \sum_s (-1)^s \frac{\partial M_{h_1,\dots,h_{s-1},\,h_{s+1},\dots,h_r n}}{\partial x_{h_s}} \right\}.$$

(17) Voir V. VOLTERRA [26].

On aura

$$\left\{\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial x_n}\sum_1^{r+1}(-1)^s\frac{\partial M_{h_1,\dots,h_{s-1},h_{s+1},\dots,h_{r+1}}}{\partial x_{h_s}}=\\&=(-1)^{r+1}\sum_s(-1)^{s-r}\frac{\partial p_{h_1,\dots,h_{s-1},h_{s+1},\dots,h_{r+1},n}}{\partial x_{h_s}}=\frac{\partial p_{h_1,\dots,h_{r+1}}}{\partial x_n}.\end{aligned}\right.$$

C'est pourquoi on pourra écrire

$$\Sigma(-1)^s\frac{\partial M_{h_1,\dots,h_{s-1},h_{s+1},\dots,h_{r+1}}}{\partial x_{h_s}}=p_{h_1,\dots,h_{r+1}}+p'_{h_1,\dots,h_{r+1}},$$

$p_{h_1,\dots,h_{r+1}}$ n'étant fonctions que des variables $x_1,\dots,x_{n-1}$. En vertu de (26) on obtient

$$\sum_s(-1)^s\frac{\partial p'_{h_1,\dots,h_{s-1},h_{s+1},\dots,h_{r+2}}}{\partial x_{h_s}}=0.$$

Il suffit maintenant de trouver des P' qui soient des intégrales de

$$\sum_s(-1)^s\frac{\partial P'_{i_1,\dots,i_{s-1},i_{s+1},\dots,i_{r+1}}}{\partial x_{i_s}}=0\qquad(i_{r+1}=n),$$

$$\sum_s(-1)^s\frac{\partial P'_{i_1,\dots,i_{s-1},i_{s+1},\dots,i_{r+1}}}{\partial x_{i_s}}=p'_{i_1,\dots,i_{r+1}}\qquad(i_1,i_2,\dots,i_{r+1}\neq n),$$

car en vertu de ces relations en posant

$$P_{i_1,\dots,i_r}=M_{i_1,\dots,i_r}+P'_{i_1,\dots,i_r}$$

on obtiendra des intégrales de (25).

Or, si l'on prend

$$P'_{i_1,\dots,i_{r-1},n}=0$$

et $P_{i_1,\dots,i_r}$ fonctions de $x_1,\dots,x_{n-1}$ on arrive à un système du type (25) à $n-1$ variables. Par récurrence, on ramène la question à voir si l'on peut déterminer les $P^{n-r-1}_{1,2,\dots,s-1,s+1,\dots,r+1}$ telles qu'elles satisfont une seule équation

$$\sum_1^{r+1}(-1)^s\frac{\partial P^{n-r-1}_{1,\dots,s-1,s+1,\dots,r+1}}{\partial x_s}=p^{n-r-1}_{1,\dots,r+1}$$

à $n-r-1$ variables. Puisque on voit facilement que cela est possible, le théorème est démontré et on voit aussi qu'on peut déterminer les P par quadratures.

7. Si nous posons:

$$Q_{i_1,\dots,i_{r+1}}=P_{i_{r+2},\dots,i_n},$$

$$q_{i_1,\dots,i_r}=p_{i_{r+1},\dots,i_n},$$

on en conclut que:

La condition nécessaire et suffisante pour que le système

$$\sum_1^n{}_t \frac{\partial Q_{i_1,\ldots,i_r t}}{\partial x_t} = q_{i_1,\ldots,i_r} \tag{27}$$

soit intégrable est que:

$$\sum_1^n{}_s \frac{\partial q_{i_1,\ldots,i_{r-1},s}}{\partial x_s} = 0. \tag{28}$$

8. En vertu de la condition d'intégrabilité (21) et du lemme précédent on peut écrire, $F \mid [S_r] \mid$ étant une fonction de premier degré de l'hyperespace S_r,

$$\frac{\partial F \mid [S_r] \mid}{\partial (x_{i_1},\ldots, x_{i_{r+1}})} = \lambda_{i_1,\ldots,i_{r+1}} = \sum_t (-1)^t \frac{\partial \Lambda_{i_1,\ldots,i_{t-1},i_{t+1},\ldots,i_{r+1}}}{\partial x_{i_t}},$$

et si $\alpha_{q_1,\ldots,q_{r+1}}$ sont les cosinus de direction de S_{r+1}

$$\Phi \mid [S_r] \mid = \int_{S_{r+1}} \sum_q \lambda_{q_1,\ldots,q_{r+1}} \alpha_{q_1,\ldots,q_{r+1}} dS_{r+1}$$

on pourra donc écrire

$$\Phi \mid [S_r] \mid = \int_{S_r} \sum_q \Lambda_{q_1,\ldots,q_r} \alpha_{q_1,\ldots,q_r} dS_r,$$

$\alpha_{q_1;\ldots,q_r}$ étant les cosinus de direction de S_r de sorte que toute fonctionnelle Φ du premier degré de la variété S_r peut s'exprimer par une intégrale étendue à S_r. Réciproquement toute intégrale analogue à l'intégrale précédente sera une fonctionnelle de premier degré de S_r.

9. Nous pouvons maintenant démontrer la proposition fondamentale.

Il existe, pour chaque hyperespace S_n, *des couples de fonctions conjuguées, d'ordre* $r-1$ *et* $n-r-1$.

En effet, nous montrerons que si l'on prend des fonctions $M_{i_1,\ldots,i_r}$ harmoniques, et *que l'on pose*

$$P_{i_1,\ldots,i_{r-1}} = \sum_1^n{}_t \frac{\partial M_{i_1,\ldots,i_{r-1},t}}{\partial x_t}$$

$$Q_{i_1,\ldots,i_{r+1}} = \sum_1^{r+1}{}_s (-1)^s \frac{\partial M_{i_1,\ldots,i_{s-1},i_{s+1},\ldots,i_{r+1}}}{\partial x_{i_s}}$$

$$p_{i_1,\ldots,i_r} = \sum_1^r{}_s (-1)^s \frac{\partial P_{i_1,\ldots,i_{s-1},i_{s+1},\ldots,i_r}}{\partial x_{i_s}}$$

$$q_{i_{r+1},i_{r+2},\ldots,i_n} = \sum_1^n{}_t \frac{\partial Q_{i_1,\ldots,i_r,t}}{\partial x_t}$$

a) *p et q sont les dérivées de deux fonctions d'hyperespace*

$$\Phi \mid [S_{r-1}] \mid \text{ et } \Psi \mid [S_{n-s-1}] \mid$$

$$\frac{d\Phi}{d(x_{i_1},\cdots,x_{i_r})} = p_{i_1,\cdots,i_r}$$

$$\frac{d\Psi}{d(x_{i_{r+1}},\cdots,x_{i_n})} = q_{i_{r+1},i_{r+2},\cdots,i_n}.$$

b) Φ *et* Ψ *sont conjuguées.*

En effet, notons tout d'abord que, si les fonctions d'hyperespace Φ et Ψ existent, elles sont conjuguées. Pour s'en rendre compte, il suffit de remarquer que

$$p_{i_1,\cdots,i_r} = \sum_1^r{}_s (-1)^s \frac{\partial P_{i_1,\cdots,i_{s-1},i_{s+1},\cdots,i_r}}{\partial x_{i_s}}$$

$$= \sum_1^r{}_s \sum_1^n{}_t (-1)^s \frac{\partial^2}{\partial x_{i_s}\partial x_t} M_{i_1,\cdots,i_{s-1},i_{s+1},\cdots,i_r,t};$$

or

$$Q_{i_1 i_2,\cdots,i_n t} = \sum_1^r (-1)^s \frac{\partial M_{i_1,\cdots,i_{s-1},i_{s+1},\cdots,i_r t}}{\partial x_{i_s}} - (-1)^r \frac{\partial M_{i_1,\cdots,i_r}}{\partial x_t},$$

d'où

$$p_{i_1 i_2,\cdots,i_r} = q_{i_{r+1},\cdots,i_n} + (-1)^r \Delta M_{i_1,\cdots,i_r}.$$

et, puisque les M sont harmoniques,

$$p_{i_1 i_2,\cdots,i_r} = q_{i_{r+1},\cdots,i_n}.$$

D'autre part, la condition d'intégrabilité de Φ est bien vérifiée, comme il résulte du lemme du n° 6. Le lemme du n° 7, en tenant compte des relations entre les p et les q entraîne

$$\sum_1^n \frac{\partial p_{i_1,\cdots,i_{r-1},t}}{\partial x_t} = 0,$$

qui donnent enfin

$$\Sigma (-1)^t \frac{\partial q_{i_r,\cdots,i_{t-1},i_{t+1},\cdots,i_n}}{\partial x_{i_t}} = 0,$$

c'est-à-dire la condition d'intégrabilité de Ψ.

L'énoncé est ainsi entièrement justifié.

Il s'ensuit que, dans un espace à n dimensions, on peut construire des fonctions de points (fonctions de S_0) conjuguées à des fonctions d'espaces à n-2 dimensions, des fonctions de lignes (fonctions de S_1) conjuguées à des fonctions d'espaces à n-3 dimensions etc. . ., des fonctions d'espaces à n-3 dimensions conjuguées à des fonctions de lignes, enfin des fonctions d'espaces à n-2 dimensions conjuguées à des fonctions de points.

On démontre que si $\Phi \mid [S_{r-1}] \mid$ et $\Psi \mid [S_{n-r-1}] \mid$ sont conjuguées, $\Psi \mid [S_{n-r-1}] \mid$ et $(-1)^{r(n-r)} \Phi \mid [S_{r-1}] \mid$ sont aussi conjuguées.

10. Si $n = 4k$, il peut exister des fonctions d'espaces S_{2k-1} qui soient leurs propres conjuguées. Un exemple dû à M. MOISIL [18] est le suivant: si $n = 4$, la fonction de lignes

$$\Phi \mid [L] \mid = \int_L (X dx + Y dy + Z dz + T dt)$$

est sa propre conjuguée

$$\frac{d\Phi}{d(xy)} = \frac{d\Phi}{d(zt)}$$
$$\frac{d\Phi}{d(yz)} = \frac{d\Phi}{d(tx)}$$
$$\frac{d\Phi}{d(zx)} = \frac{d\Phi}{d(yt)}$$

si

$$\frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial t} + \frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y} = 0$$
$$\frac{\partial T}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial t} + \frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z} = 0$$
$$\frac{\partial T}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial t} + \frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x} = 0.$$

11. Le théorème fondamental du n° 9 admet une réciproque [19]: *si*

$$p_{i_1,\dots,i_r} = \frac{\partial F \mid [S_{r-1}] \mid}{\partial (x_{i_1},\dots,x_{i_r})} \quad , \quad \sum_1^n {}_t \frac{\partial p_{i_1,\dots,i_{r-1},t}}{\partial x_t} = 0$$

$$\sum_1^{r+1} {}_s (-1)^s \frac{\partial p_{i_1,\dots,i_{s-1},i_{s+1},\dots,i_{r+1}}}{\partial x_{i_s}} = 0,$$

il existe des fonctions harmoniques $M_{i_1\dots}$ *telles que*

$$\sum_1^n {}_t \frac{\partial M_{i_1,\dots,i_{r-1},t}}{\partial x_t} = P_{i_1,\dots,i_{r-1}},$$

$$\sum_1^n {}_s (-1)^s \frac{\partial P_{i_1,\dots,i_{s-1},i_{s+1},\dots,i_r}}{\partial x_{i_s}} = p_{i_1,\dots,i_r},$$

et à partir desquelles on pourra construire, comme au n° 9, la fonctionnelle $\Psi \mid [S_{n-r-1}] \mid$, *conjuguée de la fonctionnelle* $\Phi \mid [S_{r-1}] \mid$.

Nous démontrons ce théorème pour $r = 1$. Le système est

$$\Sigma_i \frac{\partial p_i}{\partial x_i} = 0$$

$$-\frac{\partial p_i}{\partial x_j} + \frac{\partial p_j}{\partial x_i} = 0$$

donc

$$p_i = \frac{\partial P}{\partial x_i}$$

(18) Voir Gr. C. MOISIL [9].
(19) Voir V. VOLTERRA [26].

et

$$\Delta P = 0;$$

on pourra donc prendre des M_i tels que

$$\Delta M_i = 0$$

$$\sum_i \frac{\partial M_i}{\partial x_i} = P.$$

Pour le cas général on procédera par récurrence en passant de r à $r-1$, $r-2, \cdots, 1$.

Par définition, nous dirons que $\Phi \mid [S_{r-1}] \mid$ *est harmonique* si elle satisfait à l'équation

$$\sum_1^n {}_t \frac{\partial}{\partial x_t} \frac{d\Phi}{d(x_{i_1}, \cdots, x_{i_{r-1}}, x_t)} = 0;$$

dans ces conditions, le théorème précédent prend l'énoncé suivant: *si* $\Phi \mid [S_{r-1}]$ *est harmonique, il existe une fonction* $\Psi \mid [S_{n-r-1}] \mid$ *conjuguée de* Φ.

Pour quelques classes de fonctions conjuguées, nous renvoyons le lecteur à une Note de M. Gr. C. MOISIL [20].

12. Soient $\Phi' \mid [S_{r-1}] \mid$, $\Phi'' \mid [S_{r-1}] \mid$ deux fonctions du premier degré. On peut généraliser à leur sujet le théorème de GREEN; on montre en effet que [21]

$$\left\{\begin{aligned} &(-1)^{r-1} \int_{S_n} \Sigma \frac{d\Phi'}{d(x_{i_1}, \cdots, x_{i_r})} \cdot \frac{d\Phi''}{d(x_{i_1}, \cdots, x_{i_r})} dS_n = \\ &= \int_{S_{n-1}} \Sigma_i P'_{i_1, \ldots, i_{r-1}} \Sigma_t \frac{d\Phi''}{d(x_{i_1}, \cdots, x_{i_{r-1}}, x_t)} \cos(\nu x_t)\, dS_{n-1} + \\ &+ \int_{S_n} \Sigma_i P'_{i_1, \ldots, i_{r-1}} \Sigma_t \frac{\partial}{\partial x_t} \frac{d\Phi''}{d(x_{i_1}, \cdots, x_{i_{r-1}}, x_t)} dS_n, \end{aligned}\right.$$

les P étant définis à partir des $p_{i_1, \ldots, i_r} = \dfrac{d\Phi}{d(x_{i_1}, \cdots, x_{i_r})}$ comme au n° 9, S_{n-1} étant la frontière de S_n et ν désignant sa normale dirigée vers l'intérieur de S_n.

La dernière intégrale est nulle si Φ'' est harmonique.

On conclut de la formule précédente que

$$\int_{S_{n-1}} \left\{ \Sigma_i P'_{i_1, \ldots, i_{r-1}} \Sigma_t \frac{d\Phi''}{d(x_{i_1}, \cdots, x_{i_{r-1}}, x_t)} \cos(\nu x_t) - \right.$$

$$\left. - \Sigma_i P''_{i_1, \ldots, i_{r-1}} \Sigma_t \frac{d\Phi'}{d(x_{i_1}, \cdots, x_{i_{r-1}}, x_t)} \cos(\nu x_t) \right\} dS_{n-1} +$$

(20) Voir Gr. C. MOISIL [8].
(21) Voir V. VOLTERRA [27].

$$+\int_{S_n} \Big\{ \Sigma_i \mathrm{P}'_{i_1,\ldots,i_{r-1}} \Sigma_t \frac{\partial}{\partial x_t} \frac{d\Phi''}{d(x_{i_1},\cdots,x_{i_{r-1}},x_t)} -$$

$$-\Sigma_i \mathrm{P}''_{i_1,\ldots,i_{r-1}} \Sigma_t \frac{\partial}{\partial x_t} \frac{d\Phi'}{d(x_{i_1},\cdots,x_{i_{r-1}},x_t)} \Big\} d\mathrm{S}_n = 0.$$

13. Les fonctions harmoniques peuvent être rattachées à un *problème du calcul des variations*. En effet, si on veut minimiser la valeur de l'intégrale

$$\int_{S_n} \Sigma \left[\frac{d\Phi}{d(x_{i_1},\cdots,x_{i_r})} \right]^2 d\mathrm{S}_n$$

pour la fonction Φ, lorsqu'on suppose données à la frontière les valeurs

$$\sum_1^{r+1}{}_s (-1)^s \frac{d\Phi}{d(x_{i_1},\cdots,x_{i_{s-1}},x_{i_{s+1}},\cdots,x_{i_{r+1}})} \cos(\nu x_{i_s}) = b_{i_1,\ldots,i_{r+1}},$$

on arrive à la conclusion que Φ doit être harmonique. On peut montrer que, si les $b_{i_1,\ldots,i_{r+1}}$ sont données à la frontière, Φ est déterminée. Mais, à la frontière, ces quantités ne sont pas arbitraires. On peut donner aux problèmes analogues aux problèmes de Dirichlet et de Neumann des solutions qui généralisent les solutions relatives aux fonctions harmoniques ordinaires.

En résumant: les expressions

$$\sum_i \left[\frac{d\Phi}{d(x_{i_1},\cdots,x_{i_r})} \right]^2$$

$$\sum_1^n{}_t \frac{\partial}{\partial x_t} \frac{d\Phi}{d(x_{i_1},\cdots,x_{i_r},x_t)}$$

$$\sum_i \frac{d\Phi'}{d(x_{i_1},\cdots,x_{i_r})} \frac{d\Phi}{d(x_{i_1},\cdots,x_{i_r})}$$

jouent le rôle du premier paramètre différentiel, du second paramètre différentiel et du paramètre mixte.

14. Les problèmes auxquels il vient d'être fait allusion peuvent être complètement résolus pour le cas de la sphère.

Sans les traiter complètement, montrons par quelle voie on peut en trouver la solution.

Les données au contour sont

$$\sum_1^n{}_t p_{i_1,\ldots,i_{r-1},t} \cos(\nu x_t) = a_{i_1,\ldots,i_{r-1}}$$

ou

$$\sum_1^{r+1} (-1)^s p_{i_1,\ldots,i_{s-1},i_{s+1},\ldots,i_{r+1}} \cos(\nu x_{i_s}) = b_{i_1,\ldots,i_{r+1}}.$$

On peut montrer d'abord que les deux problèmes rentrent l'un dans l'autre.

Cela posé envisageons le deuxième problème. On remarquera que les fonctions

$$\omega_{i_1,\cdots,i_{r+1}} = \sum_s (-1)^s p_{i_1,\cdots,i_{s-1},i_{s+1},\cdots,i_{r+1}} x_{i_s}$$

sont harmoniques et connues à la surface de la sphère, on sait donc les calculer et on en déduira finalement les p. Cf., pour plus de détails, VOLTERRA [28].

15. Étudions le caractère invariant de la théorie développée (23). Si nous faisons un changement de variables (coordonnées curvilignes quelconques):

$$\bar{x}_i = \bar{x}_i (x_1, \cdots, x_n),$$

on voit facilement que pour une $\Phi \mid [S_{r-1}] \mid$

$$\frac{d\Phi}{d(\bar{x}_{i_1}, \cdots, \bar{x}_{i_r})} = \sum_h \frac{d\Phi}{d(x_{h_1}, \cdots, x_{h_r})} \frac{d(x_{h_1}, \cdots, x_{h_r})}{d(\bar{x}_{i_1}, \cdots, \bar{x}_{i_r})}.$$

Si Φ et Ψ sont conjuguées et si nous posons

$$\frac{d\Phi}{\partial(x_{i_1}, \cdots, x_{i_r})} = p_{i_1,\cdots,i_r}$$

$$\frac{\partial\Psi}{\partial(x_{i_{r+1}}, \cdots, x_{i_n})} = q_{i_{r+1},\cdots,i_n}$$

on trouve, puisque $p_{i_1,\cdots,i_r} = q_{i_{r+1},\cdots,i_n}$,

$$\bar{q}_{h_{r+1},\cdots,h_n} = \sum_i p_{i_1,\cdots,i_r} \frac{d(x_{i_{r+1}}, \cdots, x_{i_n})}{d(\bar{x}_{h_{r+1}}, \cdots, \bar{x}_{h_n})}$$

et

$$p_{i_1,\cdots,i_r} = \frac{1}{\dfrac{d(x_{i_1}, \cdots, x_{i_n})}{d(\bar{x}_{h_1}, \cdots, \bar{x}_{h_n})}} \sum_k \frac{d(x_{i_1}, \cdots, x_{i_r})}{d(\bar{x}_{h_1}, \cdots, \bar{x}_{h_r})} q_{h_{k+1},\cdots,h_n}.$$

En employant le carré de l'élément linéaire

$$ds^2 = \sum_i \sum a_{i_j} d\bar{x}_i d\bar{x}_j$$

et l'identité

$$\sum_i \frac{d(x_{i_1}, \cdots, x_{i_r})}{d(\bar{x}_{h_1}, \cdots, \bar{x}_{h_r})} \frac{d(x_{i_1}, \cdots, x_{i_r})}{d(\bar{x}_{k_1}, \cdots, \bar{x}_{k_r})} = \begin{vmatrix} a_{h_1 k_1}, \cdots, a_{h_1 k_r} \\ a_{h_r k_1}, \cdots, a_{h_r k_r} \end{vmatrix}$$

on obtient

$$\bar{p}_{h_i,\cdots,h_r} = \sqrt{a} \sum_k \begin{bmatrix} h_1, \cdots, h_r \\ k_1, \cdots, k_r \end{bmatrix} \bar{q}_{k_{r+1},\cdots,k_n}$$

$$\bar{q}_{k_{r+1},\cdots,k_n} = \sqrt{a} \sum_h \begin{bmatrix} h_{r+1}, \cdots, h_n \\ k_{r+1}, \cdots, k_n \end{bmatrix} \bar{p}_{h_1,\cdots,h_r}$$

(23) Voir V. VOLTERRA [27].

en posant

$$a = \begin{vmatrix} a_{11}, \dots, a_{1n} \\ \vdots \\ a_{n1}, \dots, a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} h_1, \dots, h_r \\ k_1, \dots, k_r \end{bmatrix} = \frac{1}{a} \begin{vmatrix} a_{h_1 k_1}, \dots, a_{h_1 k_r} \\ \vdots \\ a_{h_r k_1}, \dots, a_{h_r k_r} \end{vmatrix}.$$

Le premier paramètre différentiel est

$$\sum_{h_1 k} \begin{bmatrix} h_{r+1}, \dots, h_n \\ k_{r+1}, \dots, k_r \end{bmatrix} \frac{d\Phi}{d(\bar{x}_{h_1}, \dots, \bar{x}_{h_r})} \cdot \frac{d\Phi}{d(\bar{x}_{k_1}, \dots, \bar{x}_{k_r})}$$

et le second

$$\sum_{r}^{n}{}_s (-1)^s \frac{\partial}{\partial \bar{x}_{k_s}} \sum_h \sqrt{a} \begin{bmatrix} h_{r+1}, \dots\dots\dots\dots\dots, h_n \\ k_r, \dots, k_{s-1}, k_{s+1}, \dots, k_n \end{bmatrix} \frac{d\Phi}{d(\bar{x}_h, \dots, \bar{x}_{h_r})}.$$

Ces expressions sont valables dans un espace de RIEMANN quelconque et elles ne dépendent que des coefficients du carré de l'élément linéaire.

CHAPITRE IV

Fonctions isogènes dans l'espace.

Section I.

LES FONCTIONS DE LIGNES ISOGÈNES.

1. Nous avons montré dans les chapitres précédents que la notion de fonctions conjuguées est susceptible d'être généralisée dans un espace à un nombre quelconque de dimensions. Montrons que la *monogénéité* est un concept qui a aussi son correspondant dans un espace à plusieurs dimensions.

On sait que deux fonctions complexes des points d'une surface

$$\varphi = \varphi_1(u, v) + i\varphi_2(u, v)$$

$$f = f_1(u, v) + if_2(u, v)$$

sont appelées *monogènes* si le quotient

$$\frac{d\varphi}{df} = \lim \frac{\Delta\varphi}{\Delta f}$$

est indépendant de la manière dont le point variable (auquel correspondent $\varphi + \Delta\varphi, f + \Delta f$) tend vers le point initial (auquel correspondent φ, f). La condition de monogénéité est

$$\frac{\dfrac{\partial(\varphi_1 + i\varphi_2)}{\partial u}}{\dfrac{\partial(f_1 + if_2)}{\partial u}} = \frac{\dfrac{\partial(\varphi_1 + i\varphi_2)}{\partial v}}{\dfrac{\partial(f_1 + if_2)}{\partial v}}.$$

En introduisant les notations

$$\frac{\partial f_1}{\partial u} = p \quad , \quad \frac{\partial f_1}{\partial v} = q_1 \quad , \quad \frac{\partial f_2}{\partial u} = p_2 \quad , \quad \frac{\partial f_2}{\partial v} = q_2$$

$$p_1^2 + p_2^2 = \varepsilon_{11} \quad p_1 q_1 + p_2 q_2 = \varepsilon_{12} \quad q_1^2 + q_2^2 = \varepsilon_{22}$$

$$p_2 q_1 - p_1 q_2 = \mathrm{D}$$

la relation de monogénéité conduit à

$$\frac{\partial\varphi_2}{\partial u} = \frac{\varepsilon_{11}\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial v} - \varepsilon_{12}\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial u}}{\mathrm{D}}$$

$$\frac{\partial\varphi_2}{\partial v} = \frac{\varepsilon_{12}\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial v} - \varepsilon_{22}\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial u}}{\mathrm{D}}$$

ou bien à

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial u} = \frac{-\varepsilon_{11}\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial v} + \varepsilon_{12}\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial u}}{\mathrm{D}}$$

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial v} = \frac{-\varepsilon_{12}\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial v} + \varepsilon_{22}\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial u}}{\mathrm{D}}.$$

La condition d'intégrabilité conduit à l'équation de LAPLACE

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\varepsilon_{22}\dfrac{\partial\varphi}{\partial u} - \varepsilon_{12}\dfrac{\partial\varphi}{\partial v}}{\mathrm{D}}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\varepsilon_{11}\dfrac{\partial\varphi}{\partial v} - \varepsilon_{12}\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}}{\mathrm{D}}\right) = 0$$

à laquelle satisfont φ_1 et φ_2. Réciproquement, si φ_1 satisfait à l'équation ci-dessus, on peut lui associer une fonction φ_2 telle que $\varphi_1 + i\varphi_2$ soit monogène à $f_1 + if_2$.

2. Si on passe à l'espace à trois dimensions, nous allons considérer deux fonctions complexes de lignes, qui soient des fonctions du premier degré:

$$\Phi\,|\,[\mathrm{L}]\,| = \Phi_1 + i\Phi_2$$

$$\mathrm{F}\,|\,[\mathrm{L}]\,| = \mathrm{F}_1 + i\mathrm{F}_2$$

et nous supposerons que le rapport de leurs dérivées prises suivant un élément plan $d\sigma$

(1) $$\frac{d\Phi}{d\sigma} : \frac{d\mathrm{F}}{d\sigma} = \frac{d\Phi}{d\mathrm{F}}$$

soit indépendant de la direction de l'élément plan $d\sigma$. Dans ce cas, nous dirons que Φ, F sont *isogènes* (24).

Introduisons les notations

$$(2)\quad \left\{\begin{array}{lll} \dfrac{dF_1}{d(yz)} = p_1 & \dfrac{dF_1}{d(zx)} = q_1 & \dfrac{dF_1}{d(xy)} = r_1 \\ \dfrac{dF_2}{d(yz)} = p_2 & \dfrac{dF_2}{d(zx)} = q_2 & \dfrac{dF_2}{d(xy)} = r_2 \\ \dfrac{d\Phi_1}{d(yz)} = \omega_1 & \dfrac{d\Phi_1}{d(zx)} = \chi_1 & \dfrac{d\Phi_1}{d(xy)} = \rho_1 \\ \dfrac{d\Phi_2}{d(yz)} = \omega_2 & \dfrac{d\Phi_2}{d(zx)} = \chi_2 & \dfrac{d\Phi_2}{d(xy)} = \rho_2 . \end{array}\right.$$

Si n est la normale à l'élément $d\sigma$ le rapport

$$\frac{(\omega_1 + i\omega_2)\cos(nx) + (\chi_1 + i\chi_2)\cos(ny) + (\rho_1 + i\rho_2)\cos(nz)}{(p_1 + ip_2)\cos(nx) + (q_1 + iq_2)\cos(ny) + (r_1 + ir_2)\cos(nz)}$$

doit être indépendant de n, donc

$$\frac{\omega_1 + i\omega_2}{p_1 + ip_2} = \frac{\chi_1 + i\chi_2}{q_1 + iq_2} = \frac{\rho_1 + i\rho_2}{r_1 + ir_2},$$

d'où

$$(1')\quad \left\{\begin{array}{ll} q_1\omega_1 - q_2\omega_2 = p_1\chi_1 - p_2\chi_2, & q_2\omega_1 + q_1\omega_2 = p_2\chi_1 + p_1\chi_2 \\ r_1\chi_1 - r_2\chi_2 = q_1\rho_1 - q_2\rho_2, & r_2\chi_1 + r_1\chi_2 = q_2\rho_1 + q_1\rho_2 \\ p_1\rho_1 - p_2\rho_2 = r_1\omega_1 - r_2\omega_2, & p_2\rho_1 + p_1\rho_2 = r_2\omega_1 + r_1\omega_2 . \end{array}\right.$$

Si on pose

$$(3)\quad \left\{\begin{array}{lll} p_1^2 + p_2^2 = \varepsilon_{11}, & q_1^2 + q_2^2 = \varepsilon_{22}, & r_1^2 + r_2^2 = \varepsilon_{33} \\ q_1 r_1 + q_2 r_2 = \varepsilon_{23} = \varepsilon_{32}, & r_1 p_1 + r_2 p_2 = \varepsilon_{31} = \varepsilon_{13}, & p_1 q_1 + p_2 q_2 = \varepsilon_{21} = \varepsilon_{12} \\ q_2 r_1 - q_1 r_2 = D_1, & r_2 p_1 - r_1 p_2 = D_2, & p_2 q_1 - p_1 q_2 = D_3 \end{array}\right.$$

on aura

$$(4)\quad \left\{\begin{array}{l} \omega_2 = \dfrac{\varepsilon_{11}\chi_1 - \varepsilon_{12}\omega_1}{D_3} = -\dfrac{\varepsilon_{11}\rho_1 - \varepsilon_{13}\omega_1}{D_2}. \\ \chi_2 = \dfrac{\varepsilon_{22}\rho_1 - \varepsilon_{23}\chi_1}{D_1} = -\dfrac{\varepsilon_{22}\omega_1 - \varepsilon_{21}\chi_1}{D_3} \\ \rho_2 = \dfrac{\varepsilon_{33}\omega_1 - \varepsilon_{31}\rho_1}{D_2} = -\dfrac{\varepsilon_{33}\chi_1 - \varepsilon_{31}\rho_1}{D_1} \end{array}\right.$$

et six autres équations dans lesquelles on a échangé ω_2, χ_2, ρ_2 avec $-\omega_1$, $-\chi_1$, $-\rho_1$, et ω_1, χ_1, ρ_1 avec ω_2, χ_2, ρ_2.

Or, on voit facilement que

$$(5)\quad \left\{\begin{array}{l} \varepsilon_{11} D_1 + \varepsilon_{12} D_2 + \varepsilon_{13} D_3 = 0 \\ \varepsilon_{21} D_1 + \varepsilon_{22} D_2 + \varepsilon_{23} D_3 = 0 \\ \varepsilon_{31} D_1 + \varepsilon_{32} D_2 + \varepsilon_{33} D_3 = 0 \end{array}\right.$$

(24) Voir V. VOLTERRA [21].

$$\varepsilon_{22}\varepsilon_{33}-\varepsilon_{23}^2=D_1^2,\qquad \varepsilon_{12}\varepsilon_{13}-\varepsilon_{11}\varepsilon_{23}=D_2D_3$$
$$\varepsilon_{33}\varepsilon_{11}-\varepsilon_{31}^2=D_2^2,\qquad \varepsilon_{23}\varepsilon_{21}-\varepsilon_{22}\varepsilon_{31}=D_3D_1$$
$$\varepsilon_{11}\varepsilon_{22}-\varepsilon_{12}^2=D_3^2,\qquad \varepsilon_{31}\varepsilon_{32}-\varepsilon_{33}\varepsilon_{12}=D_1D_2;$$

on en déduit

$$(6)\qquad \left\{\begin{aligned} \omega_2 &= \frac{\varepsilon_{12}\rho_1-\varepsilon_{13}\chi_1}{D_1}, & \omega_1 &= \frac{\varepsilon_{13}\chi_2-\varepsilon_{12}\rho_2}{D_1}\\ \chi_2 &= \frac{\varepsilon_{23}\omega_1-\varepsilon_{21}\rho_1}{D_2}, & \chi_1 &= \frac{\varepsilon_{21}\rho_2-\varepsilon_{23}\omega_2}{D_2}\\ \rho_2 &= \frac{\varepsilon_{31}\chi_1-\varepsilon_{32}\omega_1}{D_3}, & \rho_1 &= \frac{\varepsilon_{32}\omega_2-\varepsilon_{31}\chi_2}{D_3}, \end{aligned}\right.$$

d'où l'on conclut que ω_1, χ_1, ρ_1 satisfont à l'équation

$$D_1\omega_1+D_2\chi_1+D_3\rho_1=0;$$

la condition d'intégrabilité

$$\frac{\partial\omega_1}{\partial x}+\frac{\partial\chi_1}{\partial y}+\frac{\partial\rho_1}{\partial z}=0$$

donne

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\varepsilon_{12}\rho_1-\varepsilon_{13}\chi_1}{D_1}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\varepsilon_{23}\omega_1-\varepsilon_{21}\rho_1}{D_2}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\varepsilon_{31}\chi_1-\varepsilon_{32}\omega_1}{D_3}\right)=0.$$

La partie réelle Φ_1 d'une fonction de ligne Φ isogène à F *satisfait aux équations aux dérivées fonctionnelles*

$$(7)\qquad D_1\frac{d\Phi_1}{d(yz)}+D_2\frac{d\Phi_1}{d(zx)}+D_3\frac{d\Phi_1}{d(xy)}=0$$

$$(8)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\varepsilon_{12}\dfrac{d\Phi_1}{d(xy)}-\varepsilon_{13}\dfrac{d\Phi_1}{d(zx)}}{D_1}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\varepsilon_{23}\dfrac{d\Phi_1}{d(yz)}-\varepsilon_{21}\dfrac{d\Phi_1}{d(xy)}}{D_2}\right)+\\ &\qquad+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\varepsilon_{31}\dfrac{d\Phi_1}{d(zx)}-\varepsilon_{32}\dfrac{d\Phi_1}{d(yz)}}{D_3}\right)=0. \end{aligned}\right.$$

Le coefficient Φ_2 de la partie imaginaire satisfait aux mêmes équations fonctionnelles.

3. Réciproquement *si* $\Phi_1 \mid [L] \mid$ *satisfait au système* (7), (8), *on peut trouver une fonction de lignes* $\Phi_2 \mid [L] \mid$ *telle que* $\Phi_1+i\Phi_2=\Phi$ *soit isogène à* F.

Il suffit de construire une fonction de lignes telle que

$$\frac{d\Phi_2}{d(yz)}=\frac{\varepsilon_{12}\dfrac{d\Phi_1}{d(xy)}-\varepsilon_{13}\dfrac{d\Phi_1}{d(zx)}}{D_1}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

ce qui est possible, la condition d'intégrabilité étant satisfaite en vertu de (8).

En tenant compte de la condition (7) on trouve que le rapport (1) est indépendant de la direction de l'élément plan σ, donc Φ est isogène à F.

La propriété suivante des fonctions isogènes est évidente:

Si Φ *et* F *sont isogènes et si* Φ *et* G *sont isogènes* G *et* Φ *sont également isogènes.*

4. Nous allons donner une propriété intéressante due à M. S. MANDELBROJT [(25)], qui montre que les fonctionnelles isogènes peuvent être envisagées comme un prolongement des fonctions monogènes.

On sait que si $f(x)$ est une fonction d'une variable réelle, développable en série de Taylor, on peut trouver une fonction monogène $f(z)$ qui coincide avec $f(x)$ sur l'axe des x.

Soient S une surface, Q un point arbitraire de S, C une congruence de courbes fermées de l'espace, qui jouissent des propriétés suivantes:

α) par chaque point Q de S il passe une courbe C et une seule; nous l'appelons C_Q;

β) deux courbes C_P et C_Q quelconques ont toujours une portion AMB commune.

γ) les portions non communes des deux courbes C : APB et AQB tendent vers zéro si le point Q tend vers P.

Soient $\Phi\,|\,[L]\,|$ et $F\,|\,[L]\,|$ des fonctionnelles isogènes; définissons deux fonctions des points de S par

$$\varphi(Q) = \Phi\,|\,[C_Q]\,|$$

$$f(Q) = F\,|\,[C_Q]\,|.$$

Lorsque Φ et F sont isogènes, le rapport

$$\frac{\Delta\Phi}{\Delta F} = \frac{\Phi\,|\,[C_Q]\,| - \Phi\,|\,[C_P]\,|}{F\,|\,[C_Q]\,| - F\,|\,[C_P]\,|}$$

tend vers une limite indépendante de la manière dont C_Q tend vers C_P, puisque C_Q ne diffère de C_P qu'au voisinage du point P; cette limite est donc indépendante de la direction dans laquelle Q tend vers P.

Il s'ensuit que le rapport des différentielles des fonctions de point

$$\frac{d\varphi}{df}$$

est indépendant de la manière dont Q tend vers P.

Les deux fonctions de ligne isogènes Φ *et* F, *qui prennent les mêmes valeurs que* φ *et* f *sur les courbes C correspondant aux points de* S, *peuvent être considérées comme prolongement analytique pour les courbes de l'espace, des deux fonctions monogènes de point* φ *et* f.

(25) Voir S. MANDELBROJT [5], [6].

Section II.

Etude d'un cas particulier.

5. Nous étudierons d'une manière plus approfondie un cas particulier très intéressant: celui dans lequel l'équation

$$D_1\, dx + D_2\, dy + D_3\, dz = 0 \tag{9}$$

est complètement intégrable [26], ou bien

$$D_1\, dx + D_2\, dy + D_3\, dz = \zeta d\eta. \tag{10}$$

Cette propriété se conserve par un changement des variables x, y, z. En posant

$$\omega = \omega_1 + i\omega_2 = \frac{d\Phi}{d(yz)} \quad , \quad \chi = \chi_1 + i\chi_2 = \frac{d\Phi}{d(zx)} \quad , \quad \rho = \rho_1 + i\rho_2 = \frac{d\Phi}{d(xy)},$$

$$D_1\, \omega + D_2\, \chi + D_3\, \rho = 0$$

la relation (7) devient

$$\frac{\partial\eta}{\partial x}\,\omega + \frac{\partial\eta}{\partial y}\,\chi + \frac{\partial\eta}{\partial z}\,\rho = 0. \tag{11}$$

Or

$$\frac{\partial\omega}{\partial x} + \frac{\partial\chi}{\partial y} + \frac{\partial\rho}{\partial z} = 0,$$

on peut donc (cf. Chap. II, n° 15) trouver une fonction $\theta = \theta_1 + i\theta_2$, telle que

$$\left\{\begin{aligned} \omega &= \frac{\partial(\theta\eta)}{\partial(yz)} \\ \chi &= \frac{\partial(\theta\eta)}{\partial(zx)} \\ \rho &= \frac{\partial(\theta\eta)}{\partial(xy)}. \end{aligned}\right. \tag{12}$$

D'ailleurs

$$p = \frac{dF}{d(yz)}, \qquad q = \frac{dF}{d(zx)}, \qquad r = \frac{dF}{d(xy)}$$

satisfont aux relations

$$\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial y} + \frac{\partial r}{\partial z} = 0$$

$$D_1\, p + D_2\, q + D_3\, r = 0,$$

d'où, t étant une fonction complexe $t_1 + it_2$,

$$p = \frac{d(t\eta)}{d(yz)}, \qquad q = \frac{d(t\eta)}{d(zx)}, \qquad r = \frac{d(t\eta)}{d(xy)}.$$

Il en résulte aisément que

$$D_1 = -\frac{d(t_1 t_2 \eta)}{d(xyz)}\,\frac{\partial\eta}{\partial x}, \qquad D_2 = -\frac{d(t_1 t_2 \eta)}{d(xyz)}\,\frac{\partial\eta}{\partial y}, \qquad D_3 = -\frac{d(t_1 t_2 \eta)}{d(xyz)}\,\frac{\partial\eta}{\partial z},$$

(26) Voir V. Volterra [22].

donc, à cause de l'équation (10),

$$\zeta = -\frac{d\,(t_1 t_2 \eta)}{d\,(xyz)}\,.$$

6. Si nous portons dans les équations du § 2, Section 1, les valeurs de ω, χ, ρ données par (12), nous obtenons en séparant les parties réelles des parties imaginaires

$$(13)\quad \left\{\begin{aligned} D_2\frac{\partial\theta_2}{\partial z} - D_3\frac{\partial\theta_2}{\partial y} &= \varepsilon_{11}\frac{\partial\theta_1}{\partial x} + \varepsilon_{12}\frac{\partial\theta_1}{\partial y} + \varepsilon_{13}\frac{\partial\theta_1}{\partial z}\\ D_3\frac{\partial\theta_2}{\partial x} - D_1\frac{\partial\theta_2}{\partial z} &= \varepsilon_{21}\frac{\partial\theta_1}{\partial x} + \varepsilon_{22}\frac{\partial\theta_1}{\partial y} + \varepsilon_{23}\frac{\partial\theta_1}{\partial z}\\ D_1\frac{\partial\theta_2}{\partial y} - D_2\frac{\partial\theta_2}{\partial x} &= \varepsilon_{31}\frac{\partial\theta_1}{\partial x} + \varepsilon_{32}\frac{\partial\theta_1}{\partial y} + \varepsilon_{33}\frac{\partial\theta_1}{\partial z}\,.\end{aligned}\right.$$

On peut trouver un système analogue en changeant θ_2 en $-\theta_1$ et θ_1 en θ_2. On en conclut que θ_1 e θ_2 satisfont à l'équation

$$(14)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{\zeta}\left(\varepsilon_{11}\frac{\partial\theta_1}{\partial x} + \varepsilon_{12}\frac{\partial\theta_1}{\partial y} + \varepsilon_{13}\frac{\partial\theta_1}{\partial z}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{1}{\zeta}\left(\varepsilon_{21}\frac{\partial\theta_1}{\partial x} + \varepsilon_{22}\frac{\partial\theta_1}{\partial y} + \varepsilon_{23}\frac{\partial\theta_1}{\partial z}\right)\right] +\\ &\qquad + \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{1}{\zeta}\left(\varepsilon_{31}\frac{\partial\theta_1}{\partial x} + \varepsilon_{32}\frac{\partial\theta_1}{\partial y} + \varepsilon_{33}\frac{\partial\theta_1}{\partial z}\right)\right] = 0\,.\end{aligned}\right.$$

θ, η sont invariants dans un changement de variables. Si nous prenons comme nouvelles variables t_1, t_2, η on a

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = 1 \qquad \varepsilon_{33} = \varepsilon_{23} = \varepsilon_{31} = \varepsilon_{12} = 0$$

$$D_1 = D_2 = 0 \qquad D_3 = -1$$

et le système (13) devient

$$\frac{\partial\theta_1}{\partial t_1} - \frac{\partial\theta_2}{\partial t_2} = 0$$

$$\frac{\partial\theta_1}{\partial t_2} + \frac{\partial\theta_2}{\partial t_1} = 0$$

donc $\theta_1 + i\theta_2$ *est fonction analytique de* $t_1 + it_2$.

Réciproquement, *si* $\theta_1 + i\theta_2$ est fonction analytique *de* $t_1 + it_2$ *les fonction de lignes*

$$\Phi\,|\,[L]\,| = \int_L (\theta_1 + i\theta_2)\,d\eta\,,$$

$$F\,|\,[L]\,| = \int_L (t_1 + it_2)\,d\eta$$

sont isogènes.

On a donc le moyen de construire ces fonctions isogènes dans le cas où (9) est complètement intégrable. Il suffit de prendre trois fonctions régulières de x, y, z, soient t_1, t_2, η, puis une fonction analytique $\theta_1 + i\theta_2$ de la variable complexe $t_1 + it_2$, dépendant aussi de η; les deux intégrales curvilignes précédentes définiront des fonctionnelles isogènes.

7. Considérons l'expression

$$H_{\Phi_1 \Phi_2} = \frac{\varepsilon_{22}\rho_1\rho_2 - \varepsilon_{23}(\rho_1\chi_2 + \rho_2\chi_1) + \varepsilon_{33}\chi_1\chi_2}{D_1^2} =$$

$$= \frac{1}{\zeta}\left\{ \frac{\varepsilon_{13}\chi_1 - \varepsilon_{12}\rho_1}{D_1}\frac{\partial\theta_2}{\partial x} + \frac{\varepsilon_{23}\chi_1 - \varepsilon_{22}\rho_1}{D_1}\frac{\partial\theta_2}{\partial y} + \frac{\varepsilon_{33}\chi_1 - \varepsilon_{32}\rho_1}{D_1}\frac{\partial\theta_2}{\partial z} \right\}.$$

On a la généralisation du *théorème de* GREEN

$$\iiint_V \zeta H_{\Phi_1\Phi_2}\, dv =$$

$$= \iint_S \theta_2 \left\{ \frac{\varepsilon_{13}\chi_1 - \varepsilon_{12}\rho_1}{D_1}\cos nx + \frac{\varepsilon_{23}\chi_1 - \varepsilon_{22}\rho_1}{D_1}\cos ny + \frac{\varepsilon_{33}\chi_1 - \varepsilon_{32}\rho_1}{D_1}\cos nz \right\} -$$

$$- \iiint \theta_2 \left\{ \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\varepsilon_{13}\chi_1 - \varepsilon_{12}\rho_1}{D_1}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\varepsilon_{22}\chi_1 - \varepsilon_{22}\rho_1}{D_1}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\varepsilon_{33}\chi_1 - \varepsilon_{23}\rho_1}{D_1}\right) \right\}.$$

On en conclut que *la condition d'extrémum de l'intégrale*

$$I = \iiint \zeta H_{\Phi\Phi}\, dv$$

est

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\varepsilon_{13}\chi - \varepsilon_{12}\rho}{D_1}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\varepsilon_{23}\chi - \varepsilon_{22}\rho}{D_1}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\varepsilon_{33}\chi - \varepsilon_{32}\rho}{D_1}\right) = 0.$$

Une autre propriété analogue au théorème de GREEN est obtenue si on considère l'expression:

$$\Theta_{\Phi_1\Phi_2} = \frac{1}{D_1}\begin{vmatrix} \chi_2 & \rho_2 \\ \chi_1 & \rho_1 \end{vmatrix};$$

on trouve

$$\Theta_{\Phi_1\Phi_2} = \frac{1}{\zeta}\left[\omega_1\frac{\partial\theta_2}{\partial x} + \chi_1\frac{\partial\theta_2}{\partial y} + \rho_1\frac{\partial\theta_2}{\partial z}\right] =$$

$$= -\frac{1}{\zeta}\left[\omega_2\frac{\partial\theta_1}{\partial x} + \chi_2\frac{\partial\theta_1}{\partial y} + \rho_2\frac{\partial\theta_1}{\partial z}\right],$$

d'où

$$\iiint \zeta\Theta_{\Phi_1\Phi_2}\, dv = \iint \theta_2\frac{d\Phi_1}{d\sigma}\, d\sigma = -\iint \theta_1\frac{d\Phi_2}{d\sigma}\, d\sigma.$$

Section III.

RELATION D'ISOGÉNÉITÉ ENTRE LES FONCTIONS DE LIGNE ET LES FONCTIONS DE POINT (27).

8. Si Φ et F sont deux fonctions de ligne isogènes, on a par définition

$$\frac{d\Phi}{d\sigma} : \frac{dF}{d\sigma} = f(x, y, z)$$

f étant une fonction complexe de point; on a donc

$$\frac{d\Phi}{d(yz)} = f\cdot\frac{dF}{d(yz)}, \qquad \frac{d\Phi}{d(zx)} = f\cdot\frac{dF}{d(zx)}, \qquad \frac{d\Phi}{d(xy)} = f\cdot\frac{dF}{d(xy)};$$

(27) Voir V. VOLTERRA [23].

en vertu des conditions d'intégrabilité, on conclut que F et f satisfont à

$$\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{dF}{d(yz)}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dF}{d(zx)}+\frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{dF}{d(xy)}=0. \tag{15}$$

Rappelons que si φ et ψ sont deux fonctions monogènes des points d'une surface, on a

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial y}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial(-x)}=0.$$

Nous dirons que la relation (15) caractérise la liaison d'isogénéité de la fonc tion de point f et de la fonction de ligne Ψ.

La fonction f est appelée dérivée de $\Phi\,|\,[L]\,|$ par rapport à $F\,|\,[L]$

$$f=\frac{d\Phi}{dF};$$

donc: *la dérivée d'une fonction* Φ *par rapport à une fonction* F, *qui lui est isogène, est une fonction de point, elle-même isogène aux deux fonctions* Φ *et* F.

Pour montrer que f est isogène à F et à Φ, il suffit d'écrire les conditions d'intégrabilité des dérivées de Φ et de F.

Réciproquement: *si f est isogène à* $F\,|\,[L]\,|$, *il existe une fonction* $\Phi\,|\,[L]\,|$ *telle que* $d\Phi : dF = f$.

En effet, si

$$\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{dF}{d(yz)}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dF}{d(zx)}+\frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{dF}{d(xy)}=0$$

en vertu de

$$\frac{\partial}{\partial x}\cdot\frac{dF}{d(yz)}+\frac{\partial}{\partial y}\cdot\frac{dF}{d(zx)}+\frac{\partial}{\partial z}\cdot\frac{dF}{d(xy)}=0$$

on conclut que

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(f\cdot\frac{dF}{d(yz)}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(f\cdot\frac{dF}{d(zx)}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(f\cdot\frac{dF}{d(xy)}\right)=0;$$

il existe donc une fonction de ligne $\Phi\,|\,[L]\,|$ ayant pour dérivées

$$f\frac{dF}{d(yz)},\qquad f\frac{dF}{d(zx)},\qquad f\frac{dF}{d(xy)}.$$

Φ sera appelée *intégrale* de f par rapport à $F\,|\,[L]\,|$ et nous écrirons

$$\Phi\,|\,[L]\,|=\iint f\,dF$$

notation qui est justifiée parce que

$$\Phi\,|\,[L]\,|=\iint\left[f\,\frac{dF}{d(yz)}dy\,dz+f\,\frac{dF}{d(zx)}dz\,dx+f\,\frac{dF}{d(xy)}dx\,dy\right|,$$

l'intégrale étant étendue à une surface σ limitée par la ligne fermée L.

9. *Si* f_1, f_2, f_3 *sont isogènes à* $F\,|\,[L]\,|$, on a

$$\frac{\partial(f_1,f_2,f_3)}{\partial(x,y,z)}=0;$$

en effet, les dérivées de F, non toutes nulles, doivent satisfaire aux trois équations

$$\frac{\partial f_i}{\partial x}\,\frac{d\mathrm{F}}{d(yz)}+\frac{\partial f_i}{\partial y}\,\frac{d\mathrm{F}}{d(zx)}+\frac{\partial f_i}{\partial z}\,\frac{d\mathrm{F}}{d(xy)}=0 \qquad (i=1,2,3),$$

dont le déterminant doit être nul; on peut dire que, *si* f_1, f_2, f_3 sont *isogènes à une même fonction de lignes*, f_3 *est fonction de* f_1, f_2.

Réciproquement *si* f_1 *et* f_2 *sont isogènes à* $\mathrm{F}\,|\,[\mathrm{L}]\,|$, *toute fonction de* f_1, f_2 telle que $f_3=\varphi(f_1 f_2)$ *est isogène à* $\mathrm{F}\,|\,[\mathrm{L}]\,|$.

Nous dirons, dans ce cas, que f_1, f_2, f_3 sont isogènes entre elles.

Pour donner une signification à l'isogénéité des fonctions de point, analogue à la monogénéité, rappelons la définition de monogénéité de deux fonctions f_1, f_2 des points d'une surface. Soint P un point infiniment voisin du point fixe M et d différentielle suivant MP. Les deux fonctions sont monogènes si $df_1 : df_2$ est indépendant de la manière par laquelle P tend vers M.

De même soient P_{I}, P_{II} deux points infiniment voisins d'un point fixe M dans un espace à trois dimensions et $d_{\mathrm{I}}, d_{\mathrm{II}}$ les différentielles suivant MP_{I}, $\mathrm{MP}_{\mathrm{II}}$. *Si* f_1, f_2, f_2 sont *isogènes, les rapports*

$$\begin{vmatrix} d_{\mathrm{I}} f_1 & d_{\mathrm{II}} f_1 \\ d_{\mathrm{I}} f_2 & d_{\mathrm{II}} f_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} d_{\mathrm{I}} f_2 & d_{\mathrm{II}} f_2 \\ d_{\mathrm{I}} f_3 & d_{\mathrm{II}} f_3 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} d_{\mathrm{I}} f_3 & d_{\mathrm{II}} f_3 \\ d_{\mathrm{I}} f_1 & d_{\mathrm{II}} f_1 \end{vmatrix}$$

sont indépendants de la manière dont les points P_{I}, P_{II} *tendent vers* M.

10. Considérons des fonctions de lignes $\mathrm{F}_i\,|\,[\mathrm{L}]\,|$, isogènes d'une fonction de points f:

$$\frac{d\mathrm{F}_i}{d(yz)}\cdot\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{d\mathrm{F}_i}{d(zx)}\cdot\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{d\mathrm{F}_i}{d(xy)}\cdot\frac{\partial f}{\partial z}=0;$$

on vérifie qu'il existe des fonctions de points φ_i telles que

$$\frac{d\mathrm{F}_i}{d(yz)}=\frac{d(\varphi_i f)}{d(y,z)},\quad\ldots$$

et que les fonctions φ_i, f sont isogènes.

Réciproquement, si les fonctions φ_i sont isogènes, il existe des fonctions de lignes Φ_{ij} telles que

$$\frac{d\Phi_{ij}}{d(yz)}=\frac{d(\varphi_i\varphi_j)}{d(yz)},\quad\ldots$$

et les Φ_{ij} sont isogènes entre elles; en même temps, les Φ_{ij} sont isogènes aux fonctions φ_k.

11. Puisqu'on a, quelles que soient f_1 et f_2,

$$\frac{\partial}{\partial x}\,\frac{d(f_1 f_2)}{d(yz)}+\frac{\partial}{\partial y}\cdot\frac{d(f_1 f_2)}{d(zx)}+\frac{\partial}{\partial z}\,\frac{d(f_1 f_2)}{d(xy)}=0$$

il existe évidemment une fonction $\Psi\,|\,[\mathrm{L}]\,|$ donnée par

$$\frac{d\Psi}{d(yz)}=\frac{d(f_1 f_2)}{d(yz)},\quad\ldots;$$

nous l'écrirons

$$\Psi = (f_1 f_2);$$

nous dirons que Ψ provient de la *composition des deux fonctions* f_1, f_2. L'opération générale de composition sera étudiée dans le chapitre suivant. Nous démontrerons ici seulement le théorème: *pour que*

$$(f_1 f_2) = (g_1 g_2)$$

il est nécessaire et suffisant que f_1, f_2 *soient deux fonctions de* g_1, g_2 *satisfaisant à*

$$\frac{d(g_1, g_2)}{d(f_1, f_2)} = 1.$$

La condition est évidemment suffisante; pour établir qu'elle est nécessaire notons que l'égalité de $(f_1 f_2)$ et $(g_1 g_2)$ signifie que

$$\frac{\partial(f_1, f_2)}{d(y, z)} = \frac{d(g_1, g_2)}{d(y, z)}, \dots.$$

On en conclut que

$$\frac{d(f_1, f_1, f_2)}{d(x, y, z)} = \frac{d(f_1, g_1, g_2)}{d(x, y, z)} = 0$$

d'où

$$\frac{d(f_1, f_2)}{d(y, z)} = \frac{d(f_1, f_2)}{d(g_1, g_2)} \cdot \frac{d(g_1, g_2)}{d(y, z)}, \dots,$$

et par suite

$$\frac{d(f_1 f_2)}{d(g_1 g_2)} = 1.$$

12. Remarquons aussi que, si nous cherchons une fonction F isogène aux deux fonctions f_1, f_2, nous pourrons écrire

$$\frac{dF}{d(yz)} = \lambda \frac{d(f_1 f_2)}{d(yz)}$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots,$$

puisque

$$\frac{\partial f i}{\partial x} \frac{dF}{d(yz)} + \frac{\partial f i}{\partial y} \cdot \frac{dF}{d(zx)} + \frac{\partial f i}{\partial z} \cdot \frac{dF}{d(xy)} = 0 \qquad (i = 1, 2),$$

λ étant évidemment fonction de f_1, f_2. Si nous posons

$$\lambda = \frac{\partial f_3}{\partial f_2}$$

ces relations deviennent

$$\frac{dF}{d(yz)} = \frac{d(f_3 f_2)}{d(yz)}.$$

On en conclut que $F = (f_3 f_2)$, ce qui peut encore s'écrire

$$F = \iint_s \frac{d(f_3 f_2)}{d(uv)} du\, dv$$

ou encore

$$F = \iint df_3 \cdot df_2,$$

l'intégrale double étant toujours étendue à une portion de surface (de paramètres u et v) limitée par la courbe fermée L.

13. Nous avons défini plus haut la *dérivée* d'une $\Phi\,|\,[L]\,|$ par rapport à une $F\,|\,[L]\,|$ isogène et nous avons aussi considéré (§ 9) l'opération inverse d'intégration.

f étant une fonction de point isogène à $F\,|\,[L]\,|$ et σ une surface ouverte ou fermée de l'espace, $dF/d\sigma$ est défini dès que le sens de la normale est fixé et de même l'intégrale

$$\int_\sigma f \frac{dF}{d\sigma}\, d\sigma,$$

que nous avons écrit

$$\int_\sigma f dF \tag{15}$$

(et qui change de signe avec le sens de la normale).

Les conditions posées entraînent immédiatement que, si σ est une surface fermée ne renfermant pas de singularités de f et F, l'intégrale de fonction isogène (15) est nulle. C'est l'analogue du théorème de CAUCHY pour les intégrales de fonctions analytiques.

Le théorème inverse (MORERA) se généralise aussi: si (15) s'évanouit identiquement pour toute surface fermée σ, f est isogène à F.

Dans ces conditions si σ est une surface ouverte (limitée par la courbe L) l'intégrale (15) *ne dépend pas de la forme de cette surface*, supposée variable dans un champ simplement connexe où f et F n'ont pas de singularités, *mais dépend uniquement de* L; c'est une fonctionnelle $\Phi\,|\,[L]\,|$, isogène à F et telle que

$$\frac{d\Phi}{dF} = f.$$

Nous avons donc bien obtenu l'opération inverse de la dérivation.

Si nous prenons F sous forme de *composition*, $F = (f_1 f_2)$, l'intégrale (15) s'écrira

$$\int_\sigma f dF = \int_\sigma f d\,(f_1 f_2) = \iint_\sigma f\, \frac{d\,(f_1 f_2)}{d\,(uv)}\, du\, dv;$$

et, puisque f est, d'après ce qui précède, fonction de f_1 et f_2,

$$\int_\sigma f dF = \iint_\sigma f\,(f_1 f_2)\, df_1\, df_2.$$

Ceci montre que *la théorie des intégrales doubles des fonctions de deux variables complexes est un problème de la théorie des fonctions isogènes*. Notre résultat précédent sur l'extension du théorème de CAUCHY coïncide au fond avec l'extension du même théorème, donnée par POINCARÉ pour le cas des intégrales doubles.

CHAPITRE V

L'isogénéité dans les espaces à plus de trois dimensions.

Section I.

1. Passons aux fonctions isogènes dans un espace à n dimensions (28). Soient $\Phi\,|\,[S_r]\,|$ et $F\,|\,[S_r]\,|$ deux fonctions complexes du premier degré. Nous dirons qu'elles sont *isogènes* si le rapport

$$\frac{d\Phi}{dS_{r+1}} : \frac{dF}{dS_{r+1}} \tag{1}$$

est indépendant de l'orientation de l'élément dS_{r+1}. Si nous séparons les parties réelle et imaginaire

$$\left\{\begin{aligned} \frac{dF}{d(x_{i_1},\cdots,x_{i_{r+1}})} &= p_{i_1,\dots,i_{r+1}} + iq_{i_1,\dots,i_{r+1}} = p_1 + iq_1 \\ \frac{d\Phi}{d(x_{i_1},\cdots,x_{i_{r+1}})} &= \omega_{i_1,\dots,i_{r+1}} + i\chi_{i_1,\dots,i_{r+1}} = \omega_1 + i\chi_1, \end{aligned}\right. \tag{2}$$

où nous désignons par I l'ensemble d'indices

$$\mathrm{I} = (i_1, \cdots, i_{r+1}) \tag{3}$$

qui représentent une combinaison quelconque $r+1$ à $r+1$ des nombres $1, 2, \cdots, n$; H aura une signification analogue.

La relation d'isogénéité conduit à

$$\frac{\omega_\mathrm{I} + i\chi_\mathrm{I}}{p_\mathrm{I} + iq_\mathrm{I}} = \frac{\omega_\mathrm{H} + i\chi_\mathrm{H}}{p_\mathrm{H} + iq_\mathrm{H}} \tag{4}$$

d'où

$$\left\{\begin{aligned} \omega_\mathrm{I}\,p_\mathrm{H} - \omega_\mathrm{H}\,p_\mathrm{I} &= \chi_\mathrm{I}\,q_\mathrm{H} - \chi_\mathrm{H}\,q_\mathrm{I} \\ \omega_\mathrm{I}\,q_\mathrm{H} - \omega_\mathrm{H}\,q_\mathrm{I} &= \chi_\mathrm{H}\,p_\mathrm{I} - \chi_\mathrm{I}\,p_\mathrm{H}. \end{aligned}\right. \tag{5}$$

Posons

$$\left\{\begin{aligned} \mathrm{E}_\mathrm{IH} &= p_\mathrm{I}\,p_\mathrm{H} + q_\mathrm{I}\,q_\mathrm{H} \\ \mathrm{D}_\mathrm{IH} &= p_\mathrm{I}\,q_\mathrm{H} - p_\mathrm{H}\,q_\mathrm{I}, \end{aligned}\right. \tag{6}$$

d'où les relations

$$\left\{\begin{aligned} \mathrm{D}_\mathrm{IH}\,\mathrm{E}_\mathrm{KL} + \mathrm{D}_\mathrm{HK}\,\mathrm{E}_\mathrm{LI} + \mathrm{D}_\mathrm{KI}\,\mathrm{E}_\mathrm{LH} &= 0 \\ \mathrm{E}_\mathrm{IH}\,\mathrm{E}_\mathrm{KL} - \mathrm{E}_\mathrm{IL}\,\mathrm{E}_\mathrm{KH} &= \mathrm{D}_\mathrm{IK}\,\mathrm{D}_\mathrm{HL}. \end{aligned}\right. \tag{7}$$

(28) Voir V. VOLTERRA [24] et [B].

La solution des équations (5) est

$$\omega_1 = \frac{E_{IH}\,\chi_I - E_{II}\,\chi_H}{D_{HI}} \quad , \quad \chi_1 = \frac{E_{IH}\,\omega_I - E_{II}\,\omega_H}{D_{IH}} ;$$

on en conclut, par un calcul simple,

$$(8) \qquad \begin{cases} \omega_I = \dfrac{E_{IH}\,\chi_K - E_{IK}\,\chi_H}{D_{HK}} \\ \chi_I = \dfrac{E_{IH}\,\omega_K - E_{IK}\,\omega_H}{D_{KH}} \end{cases}$$

d'où

$$(9) \qquad \begin{cases} D_{HK}\,\omega_I + D_{KI}\,\omega_H + D_{IH}\,\omega_K = 0 \\ D_{HK}\,\chi_I + D_{KI}\,\chi_H + D_{IH}\,\chi_K = 0 . \end{cases}$$

Les conditions d'intégrabilité

$$\sum_{1}^{r+2}{}_s (-1)^{s-1} \frac{\partial}{\partial x_{i_s}} \omega_{i_1,\dots,i_{s-1},i_{s+1},\dots,i_{r+2}} = 0$$

$$\sum_{1}^{r+2}{}_s (-1)^{s-1} \frac{\partial}{\partial x_{i_s}} \chi_{i_1,\dots,i_{s-1},i_{s+1},\dots,i_{r+2}} = 0$$

donnent en vertu de (8)

$$\sum_{1}^{r+2}{}_s (-1)^{s-1} \frac{\partial}{\partial x_{i_s}} \left\{ \frac{E_{i_1,\dots,i_{s-1},i_{s+1},\dots,i_{r+2},H}\,\chi_K - E_{i_1,\dots,i_{s-1},i_{s+1},\dots,i_{r+2},H}\,\chi_K}{D_{HK}} \right\} = 0 ,$$

et la même équation pour ω. Donc: *les parties réelle et imaginaire de Φ satisfont au système.*

$$(10) \qquad \begin{cases} D_{HK} \dfrac{d\Psi}{d(x_I)} + D_{KI} \dfrac{d\Psi}{d(x_H)} + D_{IH} \dfrac{d\Psi}{d(x_K)} = 0 \\ \displaystyle\sum_{1}^{r+2}{}_s (-1)^{s-1} \frac{\partial}{\partial x_{i_s}} \\ \left\{ \dfrac{E_{i_1,\dots,i_{s-1}\,i_{s+1},\dots,i_{r+2}\,H} \dfrac{d\Psi}{d(x_K)} - E_{i_1,\dots,i_{s-1},i_{s+1},\dots,i_{r+2},K} \dfrac{d\Psi}{d(x_H)}}{D_{HK}} \right\} = 0 . \end{cases}$$

On peut montrer que réciproquement *si Φ satisfait au système* (10), *il existe une fonction Ψ telle que $\Phi + i\Psi$ soit isogène avec* F.

2. Considérons deux fonctions isogènes Φ et F et la fonction de points

$$f = \frac{d\Phi}{dS_{r+1}} : \frac{dF}{dS_{r+1}} .$$

f sera appelée *dérivée de Φ par rapport à* F

$$f = \frac{d\Phi}{dF} .$$

En vertu des conditions d'intégrabilité de

$$p_1 = \frac{d\mathrm{F}}{d(x_{\mathrm{I}})}$$

$$\pi_1 = \frac{d\Phi}{d(x_{\mathrm{I}})}$$

on conclut que

$$\sum_{1}^{r+2}{}_s (-1)^{s-1} p_{i_1,\ldots,i_{s-1},i_{s+1},\ldots,i_{r+2}} \frac{\partial f}{\partial x_{i_s}} = 0$$

ou

$$\sum_{1}^{r+2} (-1)^{s-1} \frac{\partial f}{\partial x_{i_s}} \frac{d\mathrm{F}}{d(x_{i_1},\ldots,x_{i_{s-1}},x_{i_{s+1}},x_{i_{r+2}})} = 0 .$$

Nous dirons dans ce cas qu'il y a *isogénéité entre* $\mathrm{F}\,|\,[\mathrm{S}_r]\,|$ *et* f.

La dérivée f *d'une fonction d'hyperespace* Φ *par rapport à une fonction isogène* F *est isogène avec* F *et* Φ.

3. Supposons qu'on considère une fonction d'hyperespace $\mathrm{F}\,|\,[\mathrm{S}_r]\,|$, isogène à une fonction de points f. L'intégrale

$$\int_{\mathrm{S}_{r+1}} f \frac{d\mathrm{F}}{d\mathrm{S}_{r+1}} d\mathrm{S}_{r+1}$$

sera écrite simplement

$$\int_{\mathrm{S}_{r+1}} f \cdot d\mathrm{F} .$$

Elle est, si $\alpha_{i_1,\ldots,i_{r+1}}$ sont les cosinus directeurs de S_{r+1},

$$\int_{\mathrm{S}_{r+1}} f \cdot d\mathrm{F} = \int_{\mathrm{S}_{r+1}} f \Sigma_{\mathrm{I}} \frac{d\mathrm{F}}{d(x_1)} \alpha_1 \, d\mathrm{S}_{r+1}$$

ou, en employant le théorème de STOKES, $\alpha_{i_1,i_2,\ldots,i_{r+2}}$ étant les cosinus directeur d'une S_{r+2} qui a pour frontière S_{r+1} (supposée fermée)

$$\int_{\mathrm{S}_{r+1}} f \cdot d\mathrm{F} = \int_{\mathrm{S}_{r+2}} \Sigma_i \, \alpha_{i_1,\ldots,i_{r+2}} \sum_{1}^{r+2}{}_s (-1)^s \frac{\partial f(p_{i_1,\ldots,i_{s-1}\,i_{s+1},\ldots,i_{r+2}})}{\partial x_{i_s}} d\mathrm{S}_{r+2} =$$

$$= \int_{\mathrm{S}_{r+2}} \Sigma_i \, \alpha_{i_1,\ldots,i_{r+2}} \left\{ \sum_{1}^{r+2}{}_s (-1)^s p_{i_1,\ldots,i_{s-1},i_{s+1},\ldots,i_{r+2}} \frac{\partial f}{\partial x_{i_s}} + \right.$$

$$\left. + f \sum_{1}^{r+2}{}_s (-1)^s \frac{\partial p_{i_1,\ldots,i_{s-1},i_{s+1},\ldots,i_{r+2}}}{\partial x_{i_s}} \right\} d\mathrm{S}_{r+2}$$

elle est donc nulle

$$\int_{\mathrm{S}_{r+1}} f d\mathrm{F} = 0 .$$

C'est la généralisation du *théorème de* CAUCHY.

4. Considérons deux S_r que nous appellerons S_r^0 et S_r^1, tels qu'on puisse mener un S_{r+1} qui ait pour frontières S_r^0 et S_r^1; il est facile de voir qu'en vertu du théorème ci-dessus

$$\int_{S_{r+1}} f \cdot dF$$

est une fonction de S_r^0 et S_r^1 seuls; nous le désignons par

$$\int_{S_r^0}^{S_r^1} f dF$$

et l'appelons *intégrale* (*somme*) de f *par rapport à* F. Si S^0 est fixe

$$\Phi \mid [S_r] \mid = \int_{S_r^0}^{S_r} f dF$$

est une fonction de S_r *qui est isogène avec* F *et telle que*

$$\frac{d\Phi}{dF} = f.$$

Ceci signifie que *la dérivation et l'intégration qui viennent d'être définies sont deux opérations inverses.*

Section II.

Fonctions elementaires. Composition.

5. On voit en comparant les propriétés du paragraphe précédent que *la condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe des fonctions isogènes avec* F *est que le système d'équations aux dérivées partielles*

$$\varepsilon_{i_1, \ldots, i_{r+2}} \equiv \sum_1^{r+2} (-1)^s p_{i_1, \ldots, i_{s-1} i_{s+1}, \ldots, i_{r+2}} \frac{\partial f}{\partial x_{i_s}} \tag{11}$$

ait au moins une intégrale f (29).

Le système précédent peut être incompatible. Dans le cas de quatre dimensions et pour les fonctions de lignes ($n = 4$, $r = 1$) le système est

$$p_{32} \frac{\partial f}{\partial x_1} + p_{13} \frac{\partial f}{\partial x_2} + p_{21} \frac{\partial f}{\partial x_3} = 0$$

$$p_{43} \frac{\partial f}{\partial x_2} + p_{24} \frac{\partial f}{\partial x_3} + p_{32} \frac{\partial f}{\partial x_4} = 0$$

(29) Pour plus de détails, cf. Volterra [B].

$$p_{14}\frac{\partial f}{\partial x_3} + p_{31}\frac{\partial f}{\partial x_4} + p_{43}\frac{\partial f}{\partial x_1} = 0$$

$$p_{21}\frac{\partial f}{\partial x_4} + p_{42}\frac{\partial f}{\partial x_1} + p_{14}\frac{\partial f}{\partial x_2} = 0 .$$

Il n'est compatible que si

$$p_{12}\,p_{34} + p_{13}\,p_{42} + p_{23}\,p_{14} = 0 .$$

6. Il existe une classe importante de systèmes du type (11): ceux pour lesquels

$$\sum_{1}^{r+2}{}_s (-1)^s p_{i_s h_1, \ldots, h_{r+1}}\, p_{i_1, \ldots, i_{s-1}, i_{s+1}, \ldots, i_{r+2}} = 0 . \tag{12}$$

L'un au moins des p est différent de zéro: supposons que ce soit $p_{i_1 i_2, \ldots, i_{r+1}}$; les conditions (12) entraînent alors que *les équations* (11) *sont des conséquences du système*

$$\varepsilon_{i_1 i_2, \ldots, i_{r+1} h_1} = 0 , \ldots , \varepsilon_{i_1, \ldots, i_{r+1}, h_{n-r-1}} = 0 \tag{11'}$$

dans lequel les $h_1, h_2, \ldots, h_{n-r-1}$ *sont tous différents entre eux et différents des* i.

Ce théorème est valable même si les p ne sont pas les dérivées d'une fonction F | [S_r] |: il suffit seulement qu'ils soient hémisymétriques par rapport à leurs indices et liés par les relations (12).

Si les p satisfont seulement aux conditions ci-dessus, on montre que (11) n'est pas complet; mais il le devient par l'adjonction du système

$$\sum_s (-1)^s L_{i_1, \ldots, i_{s-1}, i_{s+1}, \ldots, i_{r+3}} \frac{\partial f}{\partial x_{i_s}}$$

avec

$$L_{h_1, \ldots, h_{r+2}} = \Sigma\, (-1)^s \frac{\partial p_{h_1, \ldots, h_{s-1}, h_{s+1}, \ldots, h_{r+2}}}{\partial x_{h_s}} .$$

Les p étant les dérivées d'une F | [S_r] |, les précédentes L sont nulles à cause des condition d'intégrabilité de sorte que, *sous les conditions* (12), *le système* (11) *est complètement intégrable. Les parenthèses alternées de Poisson*

$$(\varepsilon_{i_1, \ldots, i_{r+1}, h_t}, \varepsilon_{i_1, \ldots, i_{r+1}, h_v})$$

sont identiquement nulles de sorte que le système (11') est JACOBIEN.

7. Si les conditions (12) sont satisfaites, nous dirons que F | [S_r] | est une *fonction élémentaire* (30). Dans ce cas, (11) a $r+1$ intégrales indépendantes

$$f, f_1, \ldots, f_r ,$$

le rapport

$$\theta = \frac{p_{i_1, \ldots, i_{r+1}}}{\left(\dfrac{d(f, f_1, \ldots, f_r)}{d(x_{i_1}, \ldots, x_{i_{r+1}})}\right)}$$

(30) Voir V. VOLTERRA [25].

est indépendant des indices i, et

$$p_{i_1,\ldots,i_{r+1}} = \theta \frac{d(f, f_1, \cdots, f_r)}{d(x_{i_1}, \ldots, x_{i_{r+1}})}.$$

En vertu de

$$\sum_1^{r+2}{}_s (-1)^s \frac{\partial p_{i_1,\ldots,i_{s-1},i_{s+1},\ldots,i_{r+2}}}{\partial x_{i_s}} = 0$$

on a

$$\sum_1^{r+2}{}_s (-1)^s \frac{\partial\theta}{\partial x_{i_s}} \frac{d(f, f_1, \cdots, f_r)}{d(x_{i_1}, \ldots, x_{i_{s-1}}, x_{i_{s+1}}, \ldots, x_{i_{r+2}})} = 0$$

ou

$$\sum_1^{r+2}{}_s (-1)^s p_{i_1,\ldots,i_{s-1},i_{s+1},\ldots,i_{r+2}} \frac{\partial\theta}{\partial x_{i_s}} = 0;$$

donc θ est une fonction de $f, f_1, \cdots, f_r$. Si nous écrivons

$$\theta = \frac{\partial f_0}{\partial f},$$

nous obtenons

$$p_{i_1,\ldots,i_{r+1}} = \frac{d(f_0, f_1, \cdots, f_r)}{d(x_{i_1}, \ldots, x_{i_{r+1}})}.$$

Donc, *si* F *est une fonction élémentaire*

$$\frac{dF}{d(x_{i_1}, \ldots, x_{i_{r+1}})} = \frac{d(f_0, f_1, \cdots, f_r)}{d(x_{i_1}, \ldots, x_{i_{r+1}})} \tag{13}$$

où $f_0, f_1, \cdots, f_r$ sont isogènes avec F.

Réciproquement, *si nous prenons $r+1$ fonctions $f_0, f_1, \cdots, f_r$, les expressions* (13) *définissent une fonction* F *élémentaire et isogène avec les f.*

8. *Toute fonction isogène à une fonction élémentaire est elle-même élémentaire.*

Car si F est élémentaire et que

$$\frac{d\Phi}{dF} = f$$

f est une intégrale du système (11) et

$$\frac{d\Phi}{d(x_{i_1}, \cdots, x_{i_{r+1}})} \equiv \pi_{i_1,\ldots,i_{r+1}} = f \frac{d(f_0, f_1, \cdots, f_r)}{d(x_{i_1}, \cdots, x_{i_{r+1}})}.$$

f est donc fonction de $f_0, f_1, \cdots, f_r$; définissons λ par

$$f = \frac{d\lambda}{df_0},$$

il viendra

$$\pi_{i_r,\cdots,i_{r+1}} = \frac{d(\lambda, f_1, \cdots, f_r)}{d(x_{i_1}, \cdots, x_{i_{r+1}})}.$$

Nous désignerons la fonction F, définie par (13), par

$$F = (f_0, f_1, \cdots, f_r)$$

et nous dirons qu'elle est obtenue par *composition.*

9. *Si*

$$(f_0, f_1, \cdots, f_r) = (g_0, g_1, \cdots, g_r),$$

les g_i *sont fonctions des* f_i *telles que*

$$\frac{d(g_0, g_1, \cdots, g_r)}{d(f_0, f_1, \cdots, f_r)} = 1 .$$

La démonstration est identique à celle donnée pour l'espace à trois dimensions.

10. Jusqu'à présent nous avons *composé* des fonctions de point, mais la notion de *composition* (31) peut être étendue aux fonctions d'ordre quelconque.

Indiquons par

$$(-1)^{\binom{h_1, \cdots, h_{t+2}}{i_1, \cdots, i_{t+2}}}$$

le nombre 1 ou -1 suivant que la permutation $\binom{h_1, \cdots, h_{t+2}}{i_1, \cdots, i_{t+2}}$ est paire ou impaire.

Il existe une fonction $F \,|\, [S_{t+1}] \,|$ *définie par*

$$\frac{dF}{d(x_{i_1}, \cdots, x_{i_{t+2}})} = \sum_h (-1)^{\binom{h_1, \cdots, h_{t+2}}{i_1, \cdots, i_{t+2}}} \frac{d\Phi}{d(x_{h_1}, \cdots, x_{h_{r+1}})} \cdot \frac{d\Psi}{d(x_{h_{r+2}}, \cdots, x_{h_{t+2}})},$$

la somme étant étendue à toutes les combinaisons des $t+2$ indices $i_1, \cdots, i_{t+2}$, pris $r+1$ à la fois.

Nous écrirons

$$F = (\Phi, \Psi)$$

et dirons qu'on obtient F par la composition de Φ et Ψ.

D'une manière générale, étant données les fonctionnelles

$$\Phi^{(1)} \,|\, [S_{r_1}] \,|, \cdots, \Phi^{(K)} \,|\, [S_{r_K}] \,|$$

nous désignerons par

$$F = (\Phi^{(1)}, \cdots, \Phi^{(K)})$$

la fonctionnelle d'hyperespace S_R, avec

$$R = \sum_1^K r_t + K$$

obtenue comme il suit:

$$\Psi_2 = (\Phi^{(1)}, \Phi^{(2)}) \quad , \quad \Psi_3 = (\Psi_2 \, \Phi^{(3)}), \quad \cdots, \quad F = (\Psi_{K-1} \, \Phi^{(K)})$$

et nous dirons que F résulte par composition de $\Phi^{(1)}, \Phi^{(2)}, \cdots, \Phi^{(K)}$.

(31) Voir V. VOLTERRA [25] et [B].

La composition est associative mais non commutative; une inversion dans les éléments de F peut d'ailleurs produire seulement un changement de signe du résultat.

Nous disons que $\Phi^{(K)}$ est un *diviseur* de F. Si F n'a aucun diviseur, elle sera appelée *première*. Si une fonction divise un diviseur d'une autre fonction, elle divise cette fonction.

Deux fonctions $\Phi\,|\,[S_r]\,|$ et $F\,|\,[S_r]\,|$ *sont isogènes si*

$$F = (\Psi f) \quad , \quad \Phi = (\Psi g),$$

f, g étant des fonctions de points et f étant fonction de g.

Section III.

Quelques extensions de la notion d'isogénéité.

11. *a*) Nous pouvons étendre l'idée d'isogénéité aux fonctions d'ordres différents $\Phi\,|\,[S_r]\,|$ et $\Psi\,|\,[S_t]\,|$. Nous disons que $\Phi\,|\,[S_r]\,|$ et $\Psi\,|\,[S_t]\,|$, avec $r > t$, sont isogènes si

$$(14) \qquad \sum_{1}^{r+2} (-1)^s \frac{d\Phi}{d(x_{i_1}, \cdots, x_{i_{s-1}} x_{i_{s+1}}, \cdots, x_{i_{r+2}})} \cdot \frac{d\Psi}{d(x_{i_s} x_{h_1}, \cdots, x_{h_t})} = 0\,;$$

c'est l'extension de la définition du n° 2 de la 1re section à laquelle elle se réduit si $t = 0$.

Si $r = t$, les conditions (14) impliquent que Φ et Ψ sont non seulement isogènes dans notre premier sens, mais aussi qu'elles sont élémentaires. Réciproquement, deux fonctions d'hyperespace du même nombre de dimensions, élémentaires et isogènes dans le sens du début, sont isogènes dans le sens actuel.

Toute fonction qui est divisible par Φ est isogène avec Ψ.

La condition nécessaire et suffisante pour que Φ soit isogène dans ce sens avec la fonction élémentaire Ψ est que

$$\Phi = (\Psi\Theta).$$

b) Un système de fonction élémentaires sera dit *système isogène d'ordre* r (32) si toutes les fonctions composées ayant un ordre $> r$ sont nulles mais s'il existe une fonction composée de ces fonctions, d'ordre $r - 1$, non nulle.

Les fonctions élémentaires proviennent de la composition de certaines fonctions de points

$$f_1, \cdots, f_m.$$

(32) Voir V. Volterra [25].

La condition nécessaire et suffisante pour l'isogénéité d'ordre r est qu'on ait

$$\frac{d(f_{i_1},\cdots,f_{i_{r+1}})}{d(x_{l_1},\cdots,x_{l_{r+1}})}=0 \tag{15}$$

pour toutes les combinaisons d'indices i, l.

Une fonction du système d'ordre $r-1$ est isogène avec toute autre fonction du système (dans le sens a).

Toute fonction du système d'ordre $r-1$ admet comme diviseur toute autre fonction du système d'ordre moindre.

Considérons en particulier les fonctions de point du système, soient f_i ; d'après (15), il y en a seulement r indépendantes: $f_1, f_2, \cdots, f_r$; toute autre fonction de point du système est fonction de $f_1, f_2, \cdots, f_r$, que l'on peut appeler *variables indépendantes du système isogène.*

Si Φ et F sont des fonctions du système d'ordre $r-1$, on aura

$$\frac{d\Phi}{d\mathrm{F}}=f(f_1,\cdots,f_r)$$

et, l'intégration étant faite sur un S_r fermé,

$$\int f d\mathrm{F}=0\,.$$

Si

$$\mathrm{F}=(f_1,\cdots,f_r)$$

on conclut que

$$\int_{\mathrm{S}_r} f df_1\cdots df_r=0\,,$$

qui est le théorème de CAUCHY pour les intégrales de fonctions de plusieurs variables complexes.

Sans qu'il soit besoin d'insister, on voit que l'intégration multiple des fonctions de r variables complexes donnera lieu à un système isogène d'ordre r tel que les r variables complexes soient précisément les r *variables indépendantes du système.*

12. Nous indiquerons enfin une autre extension du théorème de CAUCHY en renvoyant, pour plus de détails, aux Mémoires de M. VOLTERRA (cf. en particulier [30], nos 13 et 14).

Soient deux fonctions du premier degré d'hyperespaces

$$\mathrm{F}\,|\,[\mathrm{S}_r]\,|\qquad \text{et}\qquad \mathfrak{F}\,|\,[\mathrm{S}_{m-r-2}]\,|\,,$$

telles que

$$\frac{d\mathrm{F}}{d(x_{i_1},\cdots,x_{i_{r+1}})}=\sum_1^{r+1}{}_s(-1)^s\,\frac{\partial \mathrm{V}_{i_1,\cdots,i_{s-1},i_{s+1},\cdots,i_{r+1}}}{\partial x_{i_s}}$$

$$\frac{d\mathfrak{F}}{d(x_{i_{r+2}},\cdots,x_{i_m})}=\sum_{r+2}^{m}{}_s(-1)^s\,\frac{\partial \mathfrak{V}_{i_{r+2},\cdots,i_{s-1},i_{s+1},\cdots,i_m}}{\partial x_{i_s}}\,.$$

Posant

$$\mathrm{I}_{i_1,\cdots,i_{m-1}} = \sum_h \frac{d\mathrm{F}}{d(x_{h_1},\cdots,x_{h_{r+1}})} \mathfrak{V}_{h_{r+2},\cdots,h_{m-1}},$$

$$\mathfrak{I}_{i_1,\cdots,i_{m-1}} = \sum_h \frac{d\mathfrak{F}}{d(x_{h_{r+1}},\cdots,x_{h_{m-1}})} \mathrm{V}_{h_1,\cdots,h_r},$$

nous aurons, comme le montre un calcul simple

$$(16) \quad \sum_{1}^{m}{}_s (-1)^s \frac{\partial \mathrm{I}_{i_1,\cdots,i_{s-1},i_{s+1},\cdots,i_m}}{dx_{i_s}} = \sum_h \frac{d\mathrm{F}}{d(x_{h_1},\cdots,x_{h_{r+1}})} \frac{d\mathfrak{F}}{d(x_{h_{r+2}},\cdots,x_{h_m})} =$$

$$= \sum_{1}^{m}{}_s (-1)^s \frac{\partial \mathfrak{I}_{i_1,\cdots,i_{s-1},i_{s+1},\cdots,i_m}}{\partial x_{i_s}},$$

avec $h_1, h_2, \cdots, h_m \equiv i_1, i_2, \cdots, i_m$.

Si nous posons $\frac{df}{d(x_{i_1},\cdots,x_{i_m})}$ égal au premier membre de (16), il en résulte que

$$f \equiv (\mathrm{F}, \mathfrak{F}).$$

Cette propriété peut encore s'exprimer de façon différente. Prenons pour S_{m-1} un hyperespace fermé à $m-1$ dimensions, contenu dans S_n et qui peut se réduire à un point sans rencontrer de singularités de F et $\mathfrak{F}$; soient $\alpha_{i_1,\cdots,i_{m-1}}$ ses cosinus directeurs. Nous aurons

$$f\,|\,[\mathrm{S}_{m-1}]\,| =$$

$$= \int_{\mathrm{S}_{m-1}} \sum_i \left(\sum_h \frac{d\mathrm{F}}{d(x_{h_1},\cdots,x_{h_{r+1}})} \mathfrak{V}_{h_{r+2},\cdots,h_{m-1}} \right) \alpha_{i_1,\cdots,i_{m-1}} d\mathrm{S}_{m-1} =$$

$$= \int_{\mathrm{S}_{m-1}} \sum_i \left(\sum_h \frac{d\mathfrak{F}}{d(x_{h_{r+1}},\cdots,x_{h_{m-1}})} \mathrm{V}_{h_1,\cdots,h_r} \right) \alpha_{i_1,\cdots,i_{m-1}} d\mathrm{S}_{m-1},$$

avec

$$h_1, h_2, \cdots, h_{m-1} \equiv i_1, i_2, \cdots, i_{m-1}.$$

Si

$$(\mathrm{F}, \mathfrak{F}) = 0,$$

on aura

$$(17) \quad \left\{ \begin{aligned} &\int_{\mathrm{S}_{m-1}} \sum_i \left(\sum_h \frac{d\mathrm{F}}{d(x_{h_1},\cdots,x_{h_{r+1}})} \mathfrak{V}_{h_{r+2},\cdots,h_{m-1}} \right) \alpha_{i_1,\cdots,i_{m-1}} d\mathrm{S}_{m-1} = \\ &= \int_{\mathrm{S}_{m-1}} \sum_i \left(\sum_h \frac{d\mathfrak{F}}{d(x_{h_{r+1}},\cdots,x_{h_{m-1}})} \mathrm{V}_{h_1,\cdots,h_r} \right) \alpha_{i_1,\cdots,i_{m-1}} d\mathrm{S}_{m-1} = 0. \end{aligned} \right.$$

Si $\mathfrak{F}$ est une fonction de point, la formule précédente se réduit à l'extension du théorème de CAUCHY donnée au n° 3 de la section précédente. Elle représente donc une nouvelle extension du sus-dit théorème.

Voici un cas particulier auquel (17) sera applicable: celui où F et $\mathfrak{F}$ admettent un diviseur commun, qui est une fonction d'un hyperespace d'ordre pair. Dans ce cas, en effet, on a

$$(F, \mathfrak{F}) \equiv 0.$$

Pour vérifier ce dernier point, on remarquera que si λ est fonction d'un hyperespace d'ordre pair, $(\lambda, \lambda) \equiv 0$, parce que la somme

$$\sum_i l_{i_1, \ldots, i_t} l_{i_{t+1}, \ldots, i_n}$$

dans laquelle

$$l_{i_1, i_2, \ldots, i_t} \frac{d\lambda}{d(x_{i_1}, \ldots, x_{i_t})}$$

contiendra des termes deux à deux égaux et opposés. En appliquant la propriété associative de l'opération de composition des fonctions d'hyperespace, on obtiendra le résultat annoncé.

3. Si au lieu d'un couple de fonctions F et $\mathfrak{F}$ nous en avons plusieurs F_K et $\mathfrak{F}_K$, auxquels correspondent respectivement les $V^{(k)}_{h_1, \ldots, h_r}$ et $V^{k}_{h_{r+2}, \ldots, h_{m-1}}$, nous constaterons en posant

$$f = \Sigma_K (F_K, \mathfrak{F}_K),$$

que f peut s'exprimer comme deux sommes d'intégrales analogues à celles qui figurent dans (17); si $f \equiv 0$, les deux sommes d'intégrales seront nulles.

BIBLIOGRAPHIE

LIVRES.

[A] VITO VOLTERRA, *Leçons sur l'intégration des équations différentielles aux dérivées partielles* (Professées à Stockholm, 1906), Paris, A. Hermann, 1912 [in queste «Opere», volume terzo, X, p. 63].

[B] VITO VOLTERRA, *The generalisation of analytic functions* (dans «The Rice Institute Pamphlet», vol. IV, 1917, p. 53 et suiv.) [ibidem, volume quarto, IX, p. 249].

[C] VITO VOLTERRA, *Teoria de las funcionales* (rédigée par Luigi Fantappié), Madrid 1927, cap. III, p. 77.

[D] VITO VOLTERRA, *Theory of Functionals* (édition anglaise du livre précédent, traduit par Miss M. Long, revue et augmentée) Blackie et Son, London et Glasgow, 1930, chap. III, p. 74.

Pour une étude de la signification physique des équations de Dirac voir:

[E] P. A. M. DIRAC, *Les principes de la mécanique quantique*. Traduction française par Al. Proca et J. Ullmo, Les Presses Universitaires, Paris.

Une description et une analyse topologique des modèles de M. Volterra se trouve dans:

[F] LEFSCHETZ, *L'Analysis Situs et la Géométrie algébrique* (Gauthier-Villars, 1924).

MÉMOIRES.

[1] BOHANNAN R. D., *Pascal line equation and some consequences*, «Math. Monthly», vol. XXIII (1916).

[2] DE DONDER, *Sur les fonctions de Volterra et les invariants intégraux*, « Publ. Acad. Royale de Belgique», juin 1906.

[3] FRÉCHET M., *Sur les fonctions de lignes fermées*, «Ann. de l'Ecole Norm. Sup.», vol. XXI (1904).

[4] GRAUSTEIN W. C., *Note on isogenous complex functions of curves*, « Bull. of Am. Math. Soc.», vol. XXIX (1918).

[5] MANDELBROJT S., *Sur le prolongement analytique des fonctions monogènes de Cauchy en fonctions isogènes au sens de M. Volterra*, «C. R. Ac. Sc. de Paris», vol. CLXXX (1925).

[6] MANDELBROJT S., *Remarques sur la manière dont peuvent être engendrées les fonctionnelles isogènes*, «C. R. Ac. Sc. de Paris», vol. CLXXXI (1925).

[7] MOISIL Gr. C., *Quatre Notes dans les* «C. R. Ac. Sc. de Paris», t. CXCI (1930) pp. 984 et 1192.

[8] MOISIL Gr. C., *Sur les fonctions conjuguées au sens de M. Volterra*, « Rend. Acc. Lincei» (1931).

[9] MOISIL Gr. C., *Sur les quaternions monogènes*, « Bull. des Sc. Math. » (1931).

[10] MOISIL Gr. C., *Fonctions monogènes dans les espaces à plusieurs dimensions*, «C. R. du Congrès des Sociétés Savantes» (Clermont-Ferrand, 1931).

[11] MOISIL Gr. C., *Sur une classe de systèmes d'équations aux dérivées partielles de la physique mathématique* (Bucarest 1931).

[12] NICOLESCO MIRON, *Fonctions complexes dans le plan et dans l'espace* (Thèse, Paris 1928, Gauthier-Villars).

[13] PASCAL ERNESTO, *L'integrazione doppia nel campo complesso*, « Rend. Acc. Scienze di Napoli» (3), vol. XXIII (1917).

[14] PASCAL ERNESTO, *Il teorema di Cauchy-Morera esteso agli integrali doppi delle funzioni di variabili complesse*, « Rend. Acc. Scienze di Napoli» (3), vol. XXIII (1917).

[15] PASCAL MARIO, *Le funzioni monogenee di linee complesse*, « Rend. Acc. Scienze di Napoli» (3), XXV (1919).

[16] PASCAL MARIO, *Il teorema e la formula di Cauchy per le funzioni monogenee di linee complesse*, « Rend. Acc. Scienze di Napoli» (3), vol. XXV (1919).

[17] THEODORESCO N., *La dérivée aréolaire et ses applications physiques* (Thèse, Paris 1931, Gauthier-Villars).

[18] THEODORESCO N., *Sur les systèmes d'équations aux dérivées partielles de M. Dirac*, « Rend. Acc. Lincei», 1931, p. 342.

[19-20] VOLTERRA V., *Sopra le funzioni dipendenti da linee* (2 Notes dans les «Rend. Acc. Lincei» (4), vol. III, 1887, pp. 225, 274) [in queste «Opere»: volume primo, XVIII, pp. 315 e 321].

[21-23] VOLTERRA V., *Sopra una estensione della teoria di Riemann sulle variabili complesse*. 3 Notes dans « Rend. Acc. Lincei» (4), vol. III, 1887, p. 281 et vol. IV, 1888, pp. 107 et 196) [ibidem, XIX, pp. 329, 336, 344].

[24-25] VOLTERRA V., *Delle variabili complesse negli iperspazi*, « Rend. Acc. Lincei» (4), vol. V, 1889, pp. 158 et 291) [ibidem, XXIII, pp. 403 e 411].

[26] VOLTERRA V., *Sulle funzioni coniugate*, « Rend. Acc. Lincei» (4), vol. V, p. 599 [ibidem, XXIV, p. 420].

[27] VOLTERRA V., *Sulle funzioni di iperspazî e sui loro parametri differenziali*, « R. Acc. Lincei» (4), vol. V, p. 630 [ibidem, XXV, p. 433].

[28] VOLTERRA V., *Sulla integrazione di un sistema di equazioni differenziali a derivate parziali che si presenta nella teoria delle funzioni coniugate*, « Rend. Circ. Mat. di Palermo », vol. III, 1889 [ibidem, XXVI, p. 444].
[29] VOLTERRA V., *Sur une généralisation de la théorie des fonctions d'une variable imaginaire.* « Acta Mathematica », Stockohlm 1889, p. 233 [ibidem XXII, p. 363].
[30] VOLTERRA V., *Sulle variabili complesse negli iperspazî*, « Rend. Acc. Lincei » (4), vol. VI, 1890 [ibidem, XXIX, p. 476].
[31] VOLTERRA V., *Un teorema sugli integrali multipli*, « R. Acc. Sci. di Torino », vol. XXXII, 1897, p. 859 [ibidem, volume secondo, XXV, p. 329].

TABLE DES MATIÈRES

XVI.

REMARQUES SUR LA NOTE DE M. RÉGNIER ET Mlle LAMBIN (*)

«Comptes rendus de l'Académie des Sciences», t. 199, 1934$_2$; pp. 1684–1686.

Si nous envisageons le cas d'une seule espèce de bacilles, nous voyons que son développement ne suit pas la loi de PEARL ou la courbe logistique. Chaque espèce étant seule, le nombre des individus rejoint un maximum à un certain temps et après il diminue. La courbe logistique correspond à une population dans laquelle la nourriture disponible pour chaque individu diminue lorsque le nombre de ceux-ci augmente. On peut penser que la loi d'accroissement trouvée par les auteurs dépende des substances toxiques s'accumulant dans le terrain de culture ou par d'autres causes analogues dues à la vie des bacilles. J'ai cherché à établir un calcul en partant de cette hypothèse.

On peut supposer que le pouvoir toxique du terrain de culture au temps t à cause de la vie de $N(\tau)$ bacilles dans l'intervalle de temps $(\tau, \tau + d\tau)$ soit donné par

$$N(\tau) f(t - \tau)\, d\tau,$$

de manière que le coefficient d'accroissement de l'espèce au temps t doit être diminué de

$$\int_0^t N(\tau) f(t - \tau)\, d\tau,$$

à cause de la période $(0, t)$ de vie des bacilles dans le milieu.

On aura alors l'équation intégro-différentielle

$$\frac{dN(t)}{dt} = \left[\varepsilon - hN(t) - \int_0^t N(\tau) f(t - \tau)\, d\tau\right] N(t),$$

où ε est le coefficient brut d'accroissement et $-hN(t)$ est le terme correspondant à l'effet PEARL.

L'équation précédente peut se simplifier en négligeant ce terme et en supposant $f = c$ constante. Si nous posons $\int_0^t N(\tau)\, d\tau = n(t)$ l'équation

(*) Questa breve Nota di V. VOLTERRA è inserita nei «Comptes rendus» di seguito alla Nota di J. RÉGNIER e S. LAMBIN: *Étude d'un cas d'antagonisme microbien* (*Bacillus Coli* - *Staphylococcus aureus*) [N.d.R.].

intégro–différentielle se réduit à l'équation différentielle

$$\frac{d^2 n(t)}{dt^2} = (\varepsilon - cn)\frac{dn}{dt}.$$

L'intégration de cette équation conduit à la formule

$$N = \frac{N_0(\alpha+\beta)^2 e^{\lambda t}}{(\beta c^{\lambda t}+\alpha)^2},$$

où N_0 est le nombre initial des bacilles, α et $-\beta$ sont les racines de l'équation

$$\frac{1}{2}cx^2 - \varepsilon x - N_0 = 0 \quad , \quad \lambda = \frac{1}{2}c(\alpha+\beta).$$

Le maximum est atteint à l'instant $1/\lambda \log \alpha/\beta$, et il est $c/8\,(\alpha+\beta)^2$.

Dans le cas de deux espèces vivant ensemble, on trouve le système d'équations intégro–différentielles

$$\frac{dN_1(t)}{dt} = \left\{\varepsilon_1 - [h_{11}N_1(t) + h_{12}N_2(t)] - \int_0^t [N_1(\tau)f_{11}(t-\tau) + N_2(\tau)f_{12}(t-\tau)]\,d\tau\right\} N_1(t),$$

$$\frac{dN_2(t)}{dt} = \left\{\varepsilon_2 - [h_{21}N_1(t) + h_{22}N_2(t)] - \int_0^t [N_1(\tau)f_{21}(t-\tau) + N_2(\tau)f_{22}(t-\tau)]\,d\tau\right\} N_2(t)$$

qui se réduit, comme dans le cas précédent, aux équations

$$\frac{d^2 n_1}{dt^2} = [\varepsilon_1 - c_{11}n_1(t) - c_{12}n_2(t)]\frac{dn_1}{dt},$$

$$\frac{d^2 n_2}{dt^2} = [\varepsilon_2 - c_{21}n_1(t) - c_{22}n_2(t)]\frac{dn_2}{dt},$$

dont on trouve l'intégrale

$$c_{21}\frac{dn_1}{dt} + c_{12}\frac{dn_2}{dt} = c_{21}\varepsilon_1 n_1 + c_{12}\varepsilon_2 n_2 - c_{11}c_{21}\frac{n_1^2}{2} - c_{12}c_{21}n_1 n_2 - c_{12}c_{22}\frac{n_2^2}{2} + K,$$

K étant une costante; n_1 et n_2 sont des quantités positives croissantes.

N_1 et N_2 augmentent jusqu'à des maxima qu'ils rejoignent respectivement lorsque $\varepsilon_1 = c_{11}n_1 + c_{12}n_2$ et $\varepsilon_2 = c_{21}n_1 + c_{22}n_2$. Ils décroissent après. c_{12} est le coefficient toxique de la deuxième espèce agissant sur la première et c_{21} celui de la première sur la seconde. On peut les évaluer approximativement en connaissant des données sur les courbes d'accroissement des deux espèces.

XVII.

LES ÉQUATIONS DES FLUCTUATIONS BIOLOGIQUES ET LE CALCUL DES VARIATIONS

« Comptes rendus de l'Académie des Sciences » (Institut de France), t. CCII, 1936₁; pp. 1953–1957.

1. Rapportons-nous d'abord à une représentation graphique:

Dans une bande verticale correspondante à un certain milieu, conduisons des bandes horizontales égales et consécutives qui correspondent à des années qui se suivent les unes les autres en partant d'une bande qui est à l'origine des temps.

Menons des segments verticaux, chacun desquels part de l'année où commence la vie de chaque individu d'une certaine espèce vivant dans le milieu envisagé et continue pendant toute sa vie en s'arrêtant à l'année où finit son existence. La *vie* de chaque individu est mesurée par le nombre des bandes horizontales rencontrées par chaque segment et, à la fin d'un certain temps, on peut regarder le nombre total de ces rencontres comme exprimant la *quantité de vie* de l'espèce à partir de l'origine des temps jusqu'à l'année où l'on s'est arrêté.

Mais le nombre des rencontres d'une bande horizontale avec les segments verticaux donne la population de l'espèce dans l'année correspondante à cette bande. Par suite la somme des populations des diverses années depuis l'origine des temps jusqu'à une certaine année est égale à la totalité des rencontres considérées tout à l'heure. Elle peut être regardée donc comme la mesure de la *quantité de vie* de l'espèce pendant la même durée de temps.

Si l'on appelle N_h la population dans l'année h,

$$\sum_1^m {}_h N_h$$

exprimera la quantité de vie de l'espèce depuis l'origine des temps jusqu'à l'année m.

En passant du discontinu au continu et en appelant $N(t)$ la population au temps t,

$$\int_0^t N(t)\,dt = X$$

sera la *quantité de vie* de l'espèce pendant l'intervalle de temps $(0, t)$. On peut tenir compte dans les calculs statistiques indifféremment de N ou de X, car ces quantités sont liées entre elles par les relations

$$X = \int_0^t N(t)\, dt \quad , \quad N(t) = \frac{dX}{dt}.$$

2. En particulier prenons n espèces dont les populations sont $N_1, N_2, \cdots, N_n$; les *quantités de vie* de ces espèces seront

$$X_1 = \int_0^t N_1(t)\, dt, \quad X_2 = \int_0^t N_2(t)\, dt, \quad \cdots, \quad X_n = \int_0^t N_n(t)\, dt.$$

Si ces espèces luttent pour la vie et s'entredévorent, on a les équations fondamentales de la lutte pour la vie que nous avons trouvées sous la forme (1):

$$\beta_r \frac{dN_r}{dt} = \left(\varepsilon_r \beta_r + \sum_1^n {}_s\, a_{sr} N_s\right) N_r, \tag{1}$$

où les ε_r sont les coefficients d'accroissement, β_r les inverses des équivalents des individus des différentes espèces et les coefficients a_{sr} sont tels que $a_{sr} = -a_{rs}$.

En introduisant les éléments X_r, on pourra remplacer les équations précédentes par les suivantes:

$$\beta_r \frac{d^2 X_r}{dt^2} = \left(\varepsilon_r \beta_r + \sum_1^n {}_s\, a_{sr} \frac{dX_s}{dt}\right) \frac{dX_r}{dt}. \tag{A}$$

Or nous allons voir que la substitution des équations (A) aux équations (1) est bien loin d'être une substitution banale comme il pourrait paraître au premier abord.

En effet, il est possible de ramener les équations (A) à dépendre d'une question du calcul des variations d'une manière tout à fait pareille à ce qui arrive pour les équations qui expriment la plupart des autres phénomènes de la nature.

3. La tendance à ramener les problèmes naturels à des problèmes de minimum a toujours existé, car on pense que la nature dans ses manifestations tend à épargner le plus possible de ce qu'elle dépense dans l'accomplissement des différents phénomènes. Cela a été le point de départ de MAUPERTUIS qui, dans un ouvrage fameux, pensa établir un des principes fondamentaux de la nature, qu'il appela le principe de la moindre quantité d'action et qui était destiné à être pris comme base de la dynamique.

Le principe philosophique auquel s'attacha MAUPERTUIS fut que la nature agit toujours par les moyens les plus simples. En s'appuyant sur ce concept, il chercha à tirer toutes les lois du mouvement et du repos d'un seul concept

(1) VOLTERRA, *Leçons sur la théorie mathématique de la lutte pour la vie*, Paris 1931, p. 40, formule (4) [vedi anche queste «Opere», vol. V, p. 1 e seguenti].

métaphysique. DESCARTES avait tenté de prendre comme point de départ le principe de la quantité de mouvement et LEIBNITZ celui des forces vives. MAUPERTUIS définit d'abord la *quantité d'action* et chercha à déduire les solutions des problèmes naturels du principe de la moindre action. Il en fit des applications au choc des corps durs et élastiques. Il rappelle dans son ouvrage le célèbre principe de FERMAT de la réfraction de la lumière en le mettant en rapport avec son principe.

Il est évident que le principe de MAUPERTUIS est beaucoup plus compréhensif que ceux de DESCARTES et LEIBNITZ, parce que ceux-ci ne donnent que des intégrales des équations de la dynamique, tandis que le principe de MAUPERTUIS est équivalent aux équations mêmes.

LAGRANGE mit la dynamique sur d'autres bases et démontra comme conséquence de ses équations le principe de la moindre action. Il fit rentrer ainsi la mécanique dans le calcul des variations qu'il avait contribué à créer.

Ce fut HAMILTON qui développa ensuite et fit progresser la question en établissant d'abord ce qu'on appelle le principe de HAMILTON ou de l'action stationnaire et en développant le principe de l'action variée.

Enfin JACOBI systématisa la théorie générale en arrivant à une équation qui a eu récemment une grande extension et qui se révèle de jour en jour d'une portée plus grande.

Nous allons voir que le même chemin peut être tenu dans le problème biologique et nous montrerons que les équations de la lutte pour la vie peuvent être mises sous la forme canonique et être aussi reconduites à une équation de type jacobien.

4. Prenons l'expression

$$\text{(B)} \qquad \Phi = \Sigma_i\, \beta_i \left(\frac{dX_i}{dt} \log \frac{dX_i}{dt} + \varepsilon_i\, X_i\right) + \frac{1}{2}\, \Sigma_{is}\, a_{si} \left(X_i \frac{dX_s}{dt} - X_s \frac{dX_i}{dt}\right),$$

où Σ_{is} est la somme des combinaisons deux à deux des indices i, s.

On pourra aussi l'écrire, en posant

$$X'_i = \frac{dX_i}{dt} = N_i,$$

$$\text{(B')} \qquad \Phi = \Sigma_i \left[X'_i\left(\beta_i \log X'_i + \frac{1}{2}\, \Sigma_s\, a_{is}\, X_s\right) + \beta_i\, \varepsilon_i\, X_i\right]$$

et l'on aura

$$\text{(2)} \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial X'_i} = \beta_i \log X'_i + \beta_i + \frac{1}{2}\, \Sigma_s\, a_{is}\, X_s,$$

$$\text{(2')} \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial X_i} = \beta_i\, \varepsilon_i + \frac{1}{2}\, \Sigma_s\, a_{si}\, X'_s.$$

Faisons maintenant

$$\text{(C)} \qquad U = \int_{t_0}^{t} \Phi\, dt.$$

En écrivant

$$\delta U = 0 , \tag{3}$$

les équations d'Euler nous donneront

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\Phi}{\partial X'_i} - \frac{\partial\Phi}{\partial X_i} = 0 , \tag{4}$$

c'est-à-dire

$$\frac{d}{dt}(\beta_i \log X'_i) = \beta_i \, \varepsilon_i + \Sigma_s \, a_{si} \, X'_s , \tag{A'}$$

qui sont les équations (A). On a donc ramené les équations des fluctuations à dépendre d'un *problème du calcul des variations* (2).

(2) VOLTERRA, *Sulle equazioni differenziali che provengono da questioni di calcolo delle variazioni*, « Rend. Acc. Lincei », vol. VI_1, 1890, p. 43.

XVIII.

LES ÉQUATIONS CANONIQUES DES FLUCTUATIONS BIOLOGIQUES

«Comptes rendus de l'Académie des Sciences», t. CCII, 1936₁, pp. 2023-2026.

1. L'équation (3) (*) est satisfaite si les δX_i sont nulles aux limites. Si elles ne le sont pas, en continuant à les désigner par δX_i à la limite supérieure et par δX_i° à la limite inférieure on aura

$$(3')\qquad \delta U = \Sigma_i \left[\beta_i \log X_i' + \beta_i + \frac{1}{2}\Sigma_s a_{is} X_s\right] \delta X_i - \\ - \Sigma_i \left[\beta_i \log X_i'^\circ + \beta_i + \frac{1}{2}\Sigma_s a_{is} X_s^\circ\right] \delta X_i^\circ .$$

Regardons U comme fonction de la limite supérieure t et des valeurs de $X_1, X_2, \cdots, X_n$ à la limite supérieure. Les dérivées correspondantes pourront être écrites

$$\frac{\partial U}{\partial t}, \quad \frac{\partial U}{\partial X_1}, \quad \frac{\partial U}{\partial X_2}, \quad \cdots, \quad \frac{\partial U}{\partial X_n},$$

et l'on aura, en vertu de l'équation (3'),

$$(5)\qquad \frac{\partial U}{\partial X_i} = \beta_i \log X_i' + \beta_i + \frac{1}{2}\Sigma_s a_{is} X_s .$$

Mais, si nous considérons $X_1, X_2, \cdots, X_n$ comme les intégrales des équations (4) et par suite comme fonctions de t, la dérivée totale de U par rapport à t sera

$$\frac{dU}{dt} = \frac{\partial U}{\partial t} + \Sigma_i \frac{\partial U}{\partial X_i} X_i' .$$

Or

$$\frac{dU}{dt} = \Phi ,$$

donc

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \Phi - \Sigma_i \frac{\partial U}{\partial X_i} X_i' .$$

Posons, en tenant compte des relations (2) et (5),

$$(6)\qquad p_i = \beta_i \log X_i' + \beta_i + \frac{1}{2}\Sigma_s a_{is} X_s = \frac{\partial \Phi}{\partial X_i'} = \frac{\partial U}{\partial X_i} .$$

(*) Per le formule precedenti quelle contenute in questa Nota, cfr., in queste « Opere », la Nota precedente [N.d.R.].

En prenant

$$\text{(D)} \qquad H = \Phi - \Sigma_i\, p_i\, X'_i = \Sigma_i\, \beta_i\, (\varepsilon_i\, X_i - X'_i)\,,$$

nous aurons

$$\text{(7)} \qquad \frac{\partial U}{\partial t} = H\,.$$

En résolvant l'équation (6) par rapport à X'_i, on trouvera

$$\text{(8)} \qquad X'_i = e^{\frac{1}{\beta_i}\left(p_i - \beta_i - \frac{1}{2}\,\Sigma_s\, a_{is}\, X_s\right)}$$

et en éliminant les X'_i dans H on aura

$$\text{(D}'\text{)} \qquad H = \Sigma_i\, \beta_i \left[\varepsilon_i\, X_i - e^{\frac{1}{\beta_i}\left(p_i - \beta_i - \frac{1}{2}\,\Sigma_s\, a_{is}\, X_s\right)}\right].$$

On en tire

$$\text{(9)} \qquad \frac{\partial H}{\partial p_i} = - e^{\frac{1}{\beta_i}\left(p_i - \beta_i - \frac{1}{2}\,\Sigma_s\, a_{is}\, X_s\right)} = - X'_i\,.$$

Mais de (6) et (4)

$$\text{(10)} \qquad \frac{dp_i}{dt} = \frac{d}{dt}\,\frac{\partial \Phi}{\partial X'_i} = \frac{\partial \Phi}{\partial X_i}$$

et de (D'), (2') et (10)

$$\text{(11)} \qquad \frac{\partial H}{\partial X_i} = \beta_i\, \varepsilon_i + \frac{1}{2}\, \Sigma_s\, a_{si}\, X'_s = \frac{\partial \Phi}{\partial X_i} = \frac{dp_i}{dt}\,.$$

On trouve donc les équations canoniques (11), (9), c'est-à-dire

$$\text{(E)} \qquad \frac{dp_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial X_i} \quad , \quad \frac{dX_i}{dt} = - \frac{\partial H}{\partial p_i}\,,$$

où H est donné par l'expression (D').

2. L'équation jacobienne sera l'équation (7) où H aura la forme (D') dans laquelle on a remplacé les quantités p_i par $\partial U/\partial X_i$ à cause des relations (6). Si nous posons

$$U = Ct + V,$$

C étant une constante, on aura

$$p_i = \frac{\partial U}{\partial X_i} = \frac{\partial V}{\partial X_i} \quad , \quad \frac{\partial U}{\partial t} = C$$

et l'équation jacobienne deviendra

$$\text{(F)} \qquad C = \Sigma_i\, \beta_i \left[\varepsilon_i\, X_i - e^{\frac{1}{\beta_i}\left(\frac{\partial V}{\partial X_i} - \beta_i - \frac{1}{2}\,\Sigma_s\, a_{is}\, X_s\right)}\right].$$

Il est bien connu le lien qui passe entre l'intégration de cette équation et l'intégration des équations canoniques.

3. En additionnant membre à membre les équations (A), puisque $a_{sr} = -a_{rs}$ on trouve

$$\Sigma_r \beta_r \frac{d^2 X_r}{dt^2} - \Sigma_r \varepsilon_r \beta_r \frac{dX_r}{dt} = 0$$

et, en intégrant,

$$\text{(G)} \qquad \Sigma_r \beta_r (\varepsilon_r X_r - X'_r) = \text{const.},$$

c'est-à-dire, en vertu de (D),

$$\text{(G')} \qquad \mathrm{H} = \text{const.}$$

Si n est pair, les équations (A) ont aussi l'intégrale [1]

$$\text{(I)} \qquad \mathrm{K} = \Sigma_i \beta_i (X'_i - q_i \log X'_i) = \text{const.},$$

où

$$(12) \qquad q_i = \Sigma_h \alpha_{hi} \beta_h \varepsilon_h ,$$

α_{hi} étant l'élément conjugué de a_{hi} dans le déterminant symétrique gauche formé par ces quantités. Les équations canoniques auront donc l'intégrale que l'on trouve en remplaçant, dans K, X'_i par l'expression (8).

$$\text{(I')} \qquad \mathrm{K} = \Sigma_i \left[\beta_i \, e^{\frac{1}{\beta_i}\left(p_i - \beta_i - \frac{1}{2}\Sigma_s a_{is} X_s\right)} - q_i \left(p_i - \beta_i - \frac{1}{2}\Sigma_s a_{is} X_s\right) \right] = \text{const.}$$

Il est aisé de vérifier par des calculs très faciles que la parenthèse de POISSON

$$(\mathrm{H}, \mathrm{K}) = 0 ,$$

ce qui revient à donner une nouvelle preuve que $\mathrm{K} = \text{const.}$ est une intégrale des équations des fluctuations.

Posons

$$(13) \qquad \Sigma_r \beta_r N_r = \Sigma_r \beta_r X'_r = \mathfrak{L} ,$$

$$(14) \qquad C - \Sigma_r \beta_r \varepsilon_r X_r = \mathfrak{M} ,$$

C étant une constante que l'on peut supposer être la limite supérieure de $\Sigma_r \beta_r \varepsilon_r X_r$. L'intégrale (G') s'écrira

$$(15) \qquad \mathfrak{L} + \mathfrak{M} = \text{const.}$$

Au point de vue biologique, en regardant $\mathfrak{L}$ comme une énergie de population *actuelle* et $\mathfrak{M}$ comme une énergie de population *potentielle* on aura qu'elles se transforment l'une dans l'autre, leur somme se conservant constante. Cette proposition est analogue au théorème des forces vives en mécanique.

(1) VOLTERRA, *Leçons sur la théorie mathématique de la lutte pour la vie*, Paris 1931, p. 45.

XIX.

SUR L'INTÉGRATION DES ÉQUATIONS DES FLUCTUATIONS BIOLOGIQUES (*)

«Comptes Rendus de l'Académie des Sciences», t. CCII, 1936_1; pp. 2113-2116.

1. Les équations (A) [1] ont les intégrales

$$\beta_r \log \frac{dX_r}{dt} + \sum_1^n {}_s a_{rs} X_s - \varepsilon_r \beta_r t = \text{const.} \tag{16}$$

En vertu des équations (6) on peut les écrire

$$\frac{p_r + \frac{1}{2} \sum_1^n {}_s a_{rs} X_s}{\varepsilon_r \beta_r} - t = \text{const.} \tag{16'}$$

En posant

$$\frac{p_r + \frac{1}{2} \sum_1^n {}_s a_{rs} X_s}{\varepsilon_r \beta_r} = H_r ,$$

et en éliminant le temps t, on trouvera les intégrales des équations canoniques (E)

$$H_r - H_i = H_{ri} = \text{const.}$$

Il est facile de vérifier que

$$(H , H_r) = 1 , \tag{17}$$

$$(H_r , H_h) = \frac{a_{hr}}{\varepsilon_h \beta_h \varepsilon_r \beta_r} , \tag{18}$$

et, par suite,

$$(H , H_{ri}) = 0 , \tag{19}$$

$$(H_{rh} , H_{gl}) = \frac{a_{gr}}{\varepsilon_g \beta_g \varepsilon_r \beta_r} + \frac{a_{lh}}{\varepsilon_l \beta_l \varepsilon_h \beta_h} + \frac{a_{rl}}{\varepsilon_r \beta_r \varepsilon_l \beta_l} + \frac{a_{hg}}{\varepsilon_h \beta_h \varepsilon_g \beta_g} . \tag{20}$$

Posons

$$- H - K = L \tag{21}$$

(*) Per le formule precedenti quelle contenute in questa Nota, cfr., in queste «Opere», le due Note precedenti [N.d.R.].

(1) V. VOLTERRA, «Comptes rendus», t. 202, 1936, pp. 1953 et 2023.

on aura

$$L = \sum_1^n {}_r \varepsilon_r \beta_r q_r H_r = \sum_1^n {}_r \varepsilon_r \beta_r q_r H_{ri} ,$$

étant

$$\sum_1^n {}_r \varepsilon_r \beta_r q_r = 0 .$$

Par suite

$$(L , H_h) = \sum_1^n {}_r \varepsilon_r \beta_r q_r (H_r , H_h) = \frac{1}{\varepsilon_h \beta_h} \sum_1^n {}_r a_{hr} q_r = 1$$

et

$$(L , H_{rh}) = 0 .$$

2. Donc les trois intégrales des équations canoniques

$$\text{(II)} \qquad H , L , H_{rh}$$

sont indépendantes et en involution.

Chaque combinaison linéaire de $H_{12}, H_{13}, \cdots, H_{1n}$ est en involution avec les fonctions H et L. Si l'on pouvait en trouver $n - 2$ en involution indépendantes et indépendantes aussi de L, le problème serait réduit aux quadratures, car on aurait n intégrales indépendantes et en involution.

Mais si l'on ne pose aucune limitation aux quantités constantes $a_{rs} = - a_{sr}$, β_r, ε_r, cela est impossible, parce que l'on pourrait tirer $H_{12}, H_{13}, \cdots, H_{1n}$ exprimées linéairement par des fonctions en involution et par suite en involution elles-mêmes. Cela est en contradiction en général avec les relations (20). Mais, pour des valeurs particulières des constantes $a_{rs} = - a_{sr}$, β_r, ε_r, les choses peuvent se passer autrement.

3. Supposons n quelconque et remarquons qu'il est nécessaire et suffisant pour que H_{1h}, H_{1g} soient en involution que l'on ait [voir (20)]

$$\frac{a_{gh}}{\varepsilon_g \beta_g \varepsilon_h \beta_h} + \frac{a_{1g}}{\varepsilon_1 \beta_1 \varepsilon_g \beta_g} + \frac{a_{h1}}{\varepsilon_h \beta_h \varepsilon_1 \beta_1} = 0 .$$

Par suite, si

$$\text{(22)} \qquad a_{rs} = \varepsilon_r \beta_r \varepsilon_s \beta_s (m_s - m_r) ,$$

les $m_1, m_2, \cdots, m_n$ étant des constantes, les $H_{12}, H_{13}, \cdots, H_{1n}$ seront en involution. Elles seront en outre indépendantes, parce que chacune contient une p_r que les autres ne contiennent pas.

Donc, *dans le cas où les a_{rs} ont la forme* (22), *le problème se réduit aux quadratures*.

On peut vérifier ce résultat directement sur les équations (1). En effet, en posant

$$\Sigma_s \varepsilon_s \beta_s N_s = N \quad , \quad 1 - \Sigma_s \varepsilon_s \beta_s m_s N_s = M ,$$

elles deviennent

$$\frac{1}{\varepsilon_r} \frac{d}{dt} \log N_r = m_r N + M ,$$

et, en éliminant M et N,

$$(23)\qquad \frac{\frac{1}{\varepsilon_1}\frac{d}{dt}\log N_1 - \frac{1}{\varepsilon_2}\frac{d}{dt}\log N_2}{m_1 - m_2} = \frac{\frac{1}{\varepsilon_1}\frac{d}{dt}\log N_1 - \frac{1}{\varepsilon_3}\frac{d}{dt}\log N_3}{m_1 - m_3} = \cdots$$

$$\cdots = \frac{\frac{1}{\varepsilon_1}\frac{d}{dt}\log N_1 - \frac{1}{\varepsilon_n}\frac{d}{dt}\log N_n}{m_1 - m_n},$$

qui nous donnent immédiatement $n-2$ intégrales indépendantes du temps.

Mais dans les équations (1) on peut éliminer dt et l'on trouve $n-1$ équations qui ont un multiplicateur, ce qui prouve que l'intégration se réduit aux quadratures.

4. L'expression (B') de Φ à cause des intégrales (16) peut se transformer. En effet, les C_i étant des constantes, elle peut s'écrire

$$(B'')\qquad \Phi = \Sigma_i\left[\frac{1}{2}\Sigma_s\, a_{si}\, X_s\, X'_i + \varepsilon_i\,\beta_i\, X_i + \varepsilon_i\,\beta_i\, tX'_i + C_i\, X'_i\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\Sigma_i\,\Sigma_s\, a_{si}\, X_s\, X'_i + \frac{d}{dt}\Sigma_i\, X_i\,(\varepsilon_i\,\beta_i\, t + C_i),$$

d'où

$$(B''')\qquad \Phi\, dt = \frac{1}{2}\Sigma_i\,\Sigma_s\, a_{si}\, X_s\, dX_i + d\Sigma_i\, X_i\,(\varepsilon_i\,\beta_i\, t + C_i).$$

XX.

LE PRINCIPE DE LA MOINDRE ACTION EN BIOLOGIE

«Comptes Rendus de l'Académie des Sciences», t. CCIII, 1936_2; pp. 417-421.

1. N étant la population d'une espèce, dN/N est son *accroissement relatif élémentaire* et $\int_1^N dN/N = \log N$ l'accroissement relatif total nécessaire pour atteindre la valeur actuelle N en partant d'un seul individu.

Or, dX étant l'accroissement élémentaire de la quantité de vie de l'espèce, on a

$$N = \frac{dX}{dt} = X'.$$

On peut appeler *action vitale élémentaire* la quantité

$$\beta \log N\, dX = \beta N \log N\, dt = \beta X' \log X'\, dt,$$

en voulant adopter une locution analogue à celle que l'on emploie en mécanique (par $1/\beta$ on entend l'*équivalent* de l'espèce).

Donc, pendant l'intervalle de temps $0, t$ l'action totale sera

$$\int_0^t \beta N \log N\, dt = \int_0^t \beta X' \log X'\, dt,$$

et, si l'on a une association de n espèces, l'*action vitale* totale sera

$$A = \int_0^t \sum_1^n {}_r\, \beta_r\, X'_r \log X'_r\, dt = \int_0^t \sum_1^n {}_r\, \beta_r\, N_r \log N_r\, dt.$$

Or nous avons trouvé [1] que les lois de la lutte pour la vie dépendent d'une question du calcul des variations, c'est-à-dire que lorsque les équations des fluctuations biologiques sont satisfaites, une certaine expression est *stationnaire* pour toutes variations infinitésimales des paramètres qui individualisent les états successifs d'une association biologique.

Nous allons maintenant démontrer que le passage naturel d'un état à un autre de l'association correspond effectivement, sous *certaines conditions*, à un *minimum* de l'expression que nous avons appelée *action vitale*.

(1) V. VOLTERRA, *Les équations des fluctuations biologiques et le calcul des variations*, «Comptes rendus», *202*, 1936, pp. 1953 et suivantes [in queste «Opere», volume quinto, XVII, pp. 392].

Il en ressort un principe analogue au principe de la moindre action en mécanique.

2. Nous avons mis les équations des fluctuations biologiques sous la forme

$$\beta_r \frac{d^2 X_r}{dt^2} = \left(\varepsilon_r \beta_r + \sum_1^n {}_s\, a_{sr} \frac{dX_s}{dt}\right) \frac{dX_r}{dt} \tag{1}$$

et nous avons trouvé les intégrales [2]

$$\Theta_r = \beta_r \log X'_r + \sum_1^n {}_s\, a_{rs} X_s - \varepsilon_r \beta_r t - C_r = 0 , \tag{2}$$

$$P = \sum_1^n {}_r\, \varepsilon_r \beta_r X_r - \sum_1^n {}_r\, \beta_r X'_r - C = 0 , \tag{3}$$

les C_r et C étant des constantes. On en tire l'intégrale

$$\begin{aligned} \Theta = \Sigma_r X'_r \Theta_r + P = \sum_1^n \beta_r X'_r \log X'_r + \sum_1^n {}_r \sum_1^n {}_s\, a_{rs} X_s X'_r - \\ - \sum_1^n {}_r\, \varepsilon_r \beta_r t X'_r - \sum_1^n {}_r\, C_r X'_r + \sum_1^n {}_r\, \varepsilon_r \beta_r X_r - \sum_1^n {}_r\, \beta_r X'_r - C = 0 . \end{aligned} \tag{4}$$

Si nous varions les quantités X_r de manière que $\delta t = 0$ (variation isochrone) nous trouverons

$$\delta\Theta = \sum_1^n {}_r\, \delta X'_r \cdot \Theta_r + \sum_1^n {}_r\, \delta X_r \left(\sum_1^n {}_s\, a_{sr} X'_s + \varepsilon_r \beta_r\right)$$

et en supposant que les équations (2) soient vérifiées par les $X_1, X_2, \cdots, X_n$ on aura

$$\delta\Theta = \sum_1^n {}_r\, \delta X_r \left(\sum_1^n {}_s\, a_{sr} X'_s + \varepsilon_r \beta_r\right) .$$

Donc si la variation isochrone sera telle que

$$\sum_1^n {}_r\, \delta X_r \left(\sum_1^n {}_s\, a_{sr} X'_s + \varepsilon_r \beta_r\right) = 0 ,$$

on aura

$$\delta\Theta = 0 ,$$

c'est-à-dire on pourra par une variation isochrone conserver l'intégrale (4).

Par conséquent les deux conditions

$$\sum_1^n {}_r\, \delta X_r \left(\sum_1^n {}_s\, a_{sr} X'_s + \varepsilon_r \beta_r\right) = 0 , \tag{5}$$

$$\delta\Theta = 0 \tag{5'}$$

sont équivalentes pour une même variation isochrone.

(2) «Comptes rendus», *202*, 1936, p. 2113 et suiv. [queste «Opere», vol. V, p. 399].

Il est évident que nous pourrons prendre arbitrairement $n - 1$ des quantités $\delta X_1, \delta X_2, \cdots, \delta X_n$, et la $n^{\text{ième}}$ sera déterminée par la (5). Par conséquent on pourra annuler contemporainement $\delta X_1, \delta X_2, \cdots, \delta X_n$ aux limites o, t.

3. Nous avons vu que les conditions (5) et (5′) sont équivalentes. La première exprime que la variation isochrone conserve l'intégrale (4).

Cherchons maintenant d'interpréter la seconde condition.

A cet effet remarquons que, les coefficients d'accroissement des différentes espèces étant à un certain instant $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ et $\delta X_1, \delta X_2, \cdots, \delta X_n$ étant des variations virtuelles des quantités de vie, on peut regarder

$$\sum_1^n{}_r\, \beta_r \lambda_r \delta X_r$$

comme *le travail virtuel d'accroissement*. Or les coefficients d'accroissement *vrais* sont

$$\varepsilon_r + \frac{1}{\beta_r} \Sigma_s\, a_{sr} N_s = \varepsilon_r + \frac{1}{\beta_r} \Sigma_s\, a_{sr} X'_s \text{ [3]},$$

par suite

$$\sum_1^n{}_r \left(\varepsilon_r \beta_r + \sum_{1\ s}^n a_{sr} X'_s\right) \delta X_r$$

sera le travail virtuel d'accroissement pour la variation $\delta X_1, \delta X_2, \cdots, \delta X_n$. C'est pourquoi la condition (5) exprime que le *travail d'accroissement virtuel* est nul.

4. Donnons maintenant une démonstration de la propriété annoncée au paragraphe 1. Écrivons d'abord [voir citation du paragraphe 1, p. 1956, form. (B′)]

$$2\,\Phi - \Theta = \sum_1^n{}_r\, \beta_r X'_r \log X'_r + \frac{d}{dt}\left[\sum_1^n{}_r\, \varepsilon_r \beta_r t X_r + \sum_1^n{}_r\, (C_r + \beta_r) X_r\right] + C,$$

on aura

$$\chi = \sum_1^n{}_r\, \beta_r X'_r \log X'_r = 2\,\Phi - \Theta - \frac{d}{dt}\left[\sum_1^n{}_r\, \varepsilon_r \beta_r t X_r + \sum_1^n{}_r\, (C_r + \beta_r) X_r\right] - C,$$

et par suite

$$\text{(6)} \quad A = \int_0^t \chi\, dt = \int_0^t (2\,\Phi - \Theta)\, dt - \left[\sum_1^n \varepsilon_r \beta_r t X_r + \sum_1^n (C_r + \beta_r) X_r\right]_0^t - Ct.$$

Prenons $X_1, X_2, \cdots, X_n$ tels que les équations (1) soient vérifiées, c'est-à-dire que l'on ait

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \Phi}{\partial X'_r} - \frac{\partial \Phi}{\partial X_r} = 0.$$

(3) On les appelle *vrais* pour les distinguer des coefficients d'accroissement ε_r.

En outre supposons que les variations isochrones $\delta X_1, \delta X_2, \cdots, \delta X_n$ satisfont la condition

$$\delta\Theta = 0,$$

c'est-à-dire la condition (5), et supposons que ces quantités soient nulles aux limites $0, t$.

On aura

$$\delta A = 0.$$

5. Nous arrivons au résultat définitif. En effet on tire de l'équation (6)

$$\delta^2 A = \delta^2 \int_0^t \chi\, dt = \int_0^t \sum_1^n{}_r\, \beta_r \frac{\delta X_r'^2}{X_r'}\, dt.$$

Or les $X_r' = N_r$ sont positives, par suite

$$\delta^2 A > 0.$$

Donc: *toute variation isochrone infiniment petite des* $X_1, X_2, \cdots, X_n$ *conservant l'intégrale* (4) *détermine une augmentation de l'action vitale.*

Il s'agit donc d'un *minimum*. Cela prouve le *principe de la moindre action vitale.*

XXI.

SUR LA MOINDRE ACTION VITALE

«Comptes rendus de l'Académie des Sciences», t. CCIII, 1936_2; pp. 480-481.

On peut obtenir plus simplement et plus directement le résultat que nous avons donné dans une Note précédente [1] par la nouvelle voie que nous allons suivre. Le résultat sera même mieux précisé.

Changeons, dans

$$\chi = \sum_1^n{}_r \beta_r X'_r \log X'_r = \sum_1^n{}_r \beta_r N_r \log N_r ,$$

X_r en $X_r + \Delta X_r = X_r + \xi_r$ et, par suite, X'_r en $X'_r + \xi'_r = N_r + \nu_r$ $(\xi'_r = \nu_r)$. En supposant $\nu_r > -N_r$, alors $N_r \log N_r$ deviendra

$$(N_r + \nu_r)\log(N_r + \nu_r) = N_r \log N_r + \nu_r(\log N_r + 1) + N_r f\left(\frac{\nu_r}{N_r}\right)$$

en posant

$$f(x) = (1 + x)\log(1 + x) - x.$$

Par suite $A = \int_0^t \chi\, dt$ deviendra

$$\int_0^t \chi\, dt + \int_0^t \sum_1^n{}_r \beta_r (\log N_r + 1)\,\xi'_r\, dt + \int_0^t \sum_1^n{}_r \beta_r N_r f\left(\frac{\nu_r}{N_r}\right) dt.$$

Si les ξ_r sont nulles aux limites o, t, il viendra

$$\int_0^t \sum_1^n{}_r \beta_r (\log N_r + 1)\,\xi'_r\, dt = \int_0^t - \sum_1^n{}_r \beta_r \frac{N'_r}{N_r}\,\xi_r\, dt \tag{6}$$

et, si les équations

$$\sum_1^n{}_r \xi_r \left(\sum_1^n{}_s a_{sr} N_s + \varepsilon_r \beta_r\right) = 0$$

(1) «Comptes rendus», *203*, 1936, p. 417 [queste «Opere», Nota precedente].

sont vérifiées, on verra, à cause des équations (1), que l'expression (6) est nulle. Par conséquent $A = \int_0^t \chi \, dt$ augmentera de

$$\int_0^t \sum_1^n {}_r \beta_r N_r f\left(\frac{\nu_r}{N_r}\right) dt,$$

quantité qui sera positive pour $\nu_r > -N_r$ et qui ne s'annulera que lorsque toutes les ν_r seront nulles.

En effet $df(x)/dx = \log(1 + x)$ et, par suite, $f(\nu_r/N_r)$ diminuera tandis que ν_r variera entre $-N_r$ et 0, sera nulle pour $\nu_r = 0$ et sera croissante pour les valeurs positives de ν_r.

On aura donc la proposition suivante, en tenant compte de ce que les populations ne peuvent pas être négatives:

Modifions de manière isochrone le passage naturel d'une association biologique d'un état à un autre, en variant les populations des différentes espèces. L'action vitale augmentera si les quantités de vie à l'instant initial et à l'instant final ne changent pas et si le travail virtuel d'accroissement est nul à chaque instant (2).

On trouve donc un minimum effectif de l'action vitale, ce qui constitue le principe de la moindre action en biologie.

(2) Cfr. «Comptes rendus», *203*, 1936, p. 420, § 5 [questo volume delle «Opere», Nota precedente].

XXII.

LA THÉORIE MATHÉMATIQUE DE LA LUTTE POUR LA VIE ET L'EXPÉRIENCE

(À PROPOS DE DEUX OUVRAGES DE C. F. GAUSE [1]).

«Scientia», vol. LX, 1936_2; pp. 169–174. Traduction par H. BURIOT-DARSILES.

En 1927, l'auteur de la présente Note publiait dans «Scientia» un article [2] dans lequel il résumait les résultats de ses études mathématiques sur la lutte pour la vie entre espèces vivant ensemble dans un même milieu, et sur les fluctuations biologiques qui en dérivent. Il considérait deux cas: celui d'espèces se disputant une même nourriture, et celui d'espèces se dévorant l'une l'autre. Dans le premier cas, l'application du calcul conduisait, avec l'aide d'hypothèses fondamentales, aux formules de résolution et aux principes qui en découlent. Dans le second cas, l'analyse mathématique, fondée sur le principe d'après lequel les rencontres entre individus d'espèces différentes seraient analogues aux rencontres entre les molécules d'un gaz, et sur celui de l'existence d'équivalents biologiques entre individus d'espèces diverses, amenait l'auteur à énoncer, pour la première fois, trois lois fondamentales qui venaient constituer la base de toute sa théorie. Sans entrer dans les détails, nous renvoyons nos lecteurs à cet article.

Ce travail avait été précédé d'autres recherches analogues, tant théoriques que pratiques, et de nature variée. Il convient de rappeler particulièrement les études de ROSS, de THOMPSON et surtout de LOTKA, lequel avait trouvé des cycles périodiques.

Du point de vue de l'observation sont à mentionner les intéressantes études statistiques de D'ANCONA sur la faune marine, d'autant plus que ce sont ces recherches qui nous ont poussé à étudier les fluctuations avant même que nous eussions connaissance des travaux de LOTKA, de ROSS et des autres auteurs.

Quelles que puissent être toutefois les confirmations statistiques de nos lois, les résultats de D'ANCONA faisaient apparaître avec évidence la néces-

(1) C. F. GAUSE, *The struggle for existence*, The Williams & Wilkins Company, Baltimore, 1934, et *Vérifications expérimentales de la théorie mathématique de la lutte pour la vie*, «Actualités scientifiques et industrielles», N. 277, Hermann & Cie, Paris, 1935.

(2) V. VOLTERRA, *Una teoria matematica sulla lotta per l'esistenza*, «Scientia», XLI, 1927_1, p. 85.

sité de nouvelles vérifications expérimentales. C'est de ces vérifications que nous allons parler, en prenant pour point de départ les importants ouvrages du Dr. G. F. GAUSE indiqués à la note [1], ouvrages qui, rappelons-le tout de suite, succèdent à de nombreux Mémoires publiés par ce savant, dans diverses revues, depuis quelques années déjà.

La préface au premier des deux volumes, imprimé en Amérique, a été écrite par le biologiste statistique RAYMOND PEARL, et elle a, elle aussi, un grand intérêt, parce qu'elle fait la lumière sur l'état actuel des études relatives au transformisme et à la sélection naturelle, questions qui, ces derniers temps, sont de nouveau à l'ordre du jour. PEARL note que, pendant presque trois quarts de siècle, la lutte pour la vie et les processus de sélection ont été l'objet d'innombrables écrits, dépassant tout ce qu'ont suscité les autres idées et questions d'actualité. PEARL dit que, il y a quelque temps, la sélection naturelle « semblait être à son lit de mort », mais qu'elle s'en est récemment relevée, en montrant une surprenante puissance de vie. Toujours selon PEARL, les écrits et les expériences de laboratoire, depuis 1859, et malgré de remarquables contributions d'auteurs célèbres, n'avaient pas abouti à des conclusions d'une grande portée, mais l'attitude du monde scientifique aurait totalement changé dans ces derniers temps. Ce changement dépendrait des directions nouvelles dans lesquelles la génétique s'est engangée, et du grand intérêt actuellement éveillé par les études statistiques sur la population ainsi que par la persuasion que la lutte pour la vie et la sélection naturelle rentrent dans la dynamique démographique. Cela, PEARSON l'avait reconnu depuis longtemps, mais on ne l'avait pas écouté. PEARL le déplore, mais en constatant que, ces années dernières, les recherches mathématiques et expérimentales ont fait progresser, plus que ce n'avait été le cas dans le demi-siècle précédent, les questions relatives au transformisme et à l'évolution.

Nous avons déjà dit un mot des études mathématiques; quant aux recherches expérimentales, elles ont tout d'abord été consacrées plus spécialement aux insectes. La question pratique qui s'y rattache, à savoir celle de la lutte biologique en agriculture, a conféré à ces recherches un intérêt énorme. Parmi les études les plus récentes, signalons les beaux travaux de CHAPMAN sur le *Tribolium confusum*, qu'ont suivis par la suite, pour tout ce qui est de l'accord avec les théories mathématiques, STANLEY, PARK et d'autres. Nous avons déjà parlé aussi des travaux de D'ANCONA, dont les recherches statistiques confirment notre troisième loi sur les déplacements, provenant de causes externes, des moyennes du nombre d'individus. Enfin, les études et les vérifications se sont tournées, ces années dernières, vers les protozoaires et en tout dernier lieu vers les bacilles [3].

(3) Les études sur les bacilles ont été exécutées récemment par REGNIER et LAMBIN; elles concordent, elles aussi, avec nos résultats et ceux de KOSTITZIN. Un spécimen de leurs recherches a paru en 1934 dans les « Comptes Rendus » de Paris, et un travail étendu, de ces mêmes auteurs, est en voie d'élaboration.

Nous voici maintenant arrivés aux études de GAUSE. Commençons par exposer les résultats contenus dans le volume *Struggle for existence*. Cet ouvrage se compose de six parties distinctes, qui traitent successivement de la lutte pour la vie dans les conditions naturelles, de la lutte pour la vie du point de vue mathématique, de la mécanique de compétition dans les levures, de la compétition commune pour la nourriture chez les protozoaires, et de la destruction d'une espèce par une autre.

GAUSE note la grande différence qui existe entre les conditions dans lesquelles la lutte pour la vie se déroule dans la nature, et celles qui se présentent dans les cas créés artificiellement pour les expériences de laboratoire. Il observe que, pour les plantes, les conditions naturelles d'étude se présentent même plus favorablement que pour les animaux. A propos de ceux-ci, il examine longuement et à fond la notion de *niche*, laquelle caractérise la situation d'une espèce dans une collectivité, pour ce qui est de ses habitudes, de la nourriture, de la façon de vivre.

Dans la partie que GAUSE consacre à la compétition entre espèces du point de vue expérimental, il insiste sur la nécessité des expériences pour la vérification des résultats mathématiques. Il parle, d'une manière générale, des difficultés qui se présentent, non seulement en biologie, mais dans toutes les sciences d'observation, lorsque l'on a affaire à des équations empiriques. Il expose la méthode qu'il a suivie pour prouver l'exactitude des calculs mathématiques, méthode qui consiste à contrôler les valeurs des coefficients numériques obtenus par des voies diverses. L'auteur entre ensuite dans des détails techniques sur les expériences effectivement exécutées, lesquelles confirment les résultats théoriques. GAUSE a procédé à ses expériences en se servant de deux espèces différentes de levures, le *Saccharomyces cerevisiae* et le *Schizosaccharomyces kefir*, qui vivent dans le même milieu de culture et se disputent la même nourriture. Ces espèces peuvent vivre aussi bien en *anaérobie* qu'en *aérobie*. Dans le premier cas, l'énergie nécessaire est fournie par la décomposition du sucre en alcool et acide carbonique. Avec une aération intensive, on a un énorme accroissement de cellules de la levure et une grande augmentation du processus d'oxydation. GAUSE a trouvé que, dans les cultures mixtes, le *Saccharomyces* se multiplie plus lentement que lorsqu'il est isolé, attendu que le *Schizosaccharomyces* nuit à l'accroissement du *Saccharomyces*. Par contre, ce dernier a sur l'autre une action beaucoup plus faible, ce qui s'explique par le fait que l'activité fermentative du *Schizosaccharomyces* est plus intense que celle du *Saccharomyces*, et la production d'alcool est en effet plus grande pour le premier que pour le second, probablement parce que le premier a un métabolisme plus intense et, par suite, un accroissement plus élevé. En *aérobie*, les données expérimentales concordent entièrement avec les calculs théoriques. En *anaérobie*, par contre, l'interprétation de ces données est plus complexe, à cause de l'intervention d'autres facteurs.

Dans ses recherches ultérieures, GAUSE a étudié les vicissitudes de deux espèces de protozoaires, le *Paramecium caudatum* et le *Paramecium aurelia*, qui se disputent la nourriture disponible, constituée par des bactéries et des levures. Lorsque cette nourriture est totalement épuisée, une des deux espèces prend graduellement le dessus, tandis que l'autre diminue. En fait, c'est le *Paramecium caudatum* qui décroît et auquel se substitue le *Paramecium aurelia*. Il arrive même qu'une espèce s'épuise complètement, et cela en parfait accord avec les résultats mathématiques et avec l'examen de la grandeur approximative que l'on peut attribuer aux coefficients. Dans d'autres expériences sur les protozoaires, GAUSE examine une association de deux espèces, dont l'une, le *Didinium nasutum*, dévore l'autre, le *Paramecium caudatum*. Si le milieu de culture est homogène, les deux espèces s'épuisent, mais si le milieu n'est pas homogène, et s'il offre des refuges à l'espèce attaquée, il peut y avoir épuisement seulement de l'espèce attaquante, tandis que l'autre croît.

Enfin, lorsqu'il y a, à intervalles constants, immigrations des individus des deux espèces, on obtient des fluctuations périodiques. Parfois, la destruction d'une espèce par l'autre peut être si active que les fluctuations deviennent imperceptibles; mais elles recommencent à se manifester quand l'inténsité de destruction diminue. C'est à cette fin que servent les immigrations dans le cas, ci-dessus considéré, du *Didinium nasutum* et du *Paramecium caudatum*. Cette introduction d'immigrations extérieures, imaginée par GAUSE, nous a amené, dans un de nos derniers travaux [4], à tenir compte de leur influence aussi dans nos calculs.

GAUSE a enfin réalisé une dernière expérience avec une association dans laquelle l'intensité de destruction était, par elle-même, peu élevée. Il s'agissait de *Paramecium bursaria* et de *Paramecium aurelia* dévorant les levures *Schizosaccharomyces pombe* et *Saccharomyces exiguus*. Par d'opportunes dispositions, les fluctuations prévues par le calcul apparaissaient de façon tout à fait évidente.

Le second travail de GAUSE, *Vérification expérimentale de la théorie mathématique de la lutte pour la vie*, a suivi de près celui dont nous nous sommes occupés jusqu'à présent. Le but principal des expériences qu'il décrit est de fournir une base permettant de comprendre la nature des rapports numériques qui interviennent entre différentes espèces d'animaux vivant ensemble, en relation avec les résultats du calcul mathématique. L'auteur cherche à établir le caractère géométrique de certains types fondamentaux de fluctuations et de changements qui se produisent dans les associations biologiques. En d'autres termes, il s'intéresse principalement aux propriétés qualitatives des intégrales des équations différentielles qui figurent dans la théorie de la lutte pour la vie, et à la vérification de ces propriétés. GAUSE commence par noter que le type de lutte pour la vie change selon qu'il s'agit d'espèces ayant *une niche* unique, ou *des niches* différentes. C'est ainsi qu'il revient sur la vie en commun du *Paramecium caudatum* et du *Paramecium aurelia*,

(4) VOLTERRA et D'ANCONA, *Les Associations biologiques au point de vue mathématique*. Hermann & Cie, Paris 1935.

qui se ressemblent beaucoup, ne différant que par la grosseur et la structure de l'appareil nucléaire, et que l'on peut, par suite, considérer comme appartenant à une même *niche*. Comme nous l'avons déjà vu, tous deux commencent par croître, jusqu'à ce que l'*aurelia* prenne le dessus et reste seul. L'un finit donc par inhiber totalement l'autre. Mais lorsque GAUSE expérimente avec le *Paramecium caudatum* et le *Paramecium bursaria*, c'est-à-dire avec deux espèces appartenant à des *niches* différentes, avec une nourriture mixte constituée par une levure *Saccharomyces exiguus* et par le *Bacillus pyocyaneus*, il trouve qu'ils s'inhibent beaucoup moins l'un l'autre, et le *résultat* de l'expérience est que chacune des espèces profite dans sa propre *niche* et qu'elles peuvent vivre ensemble indéfiniment.

Puis l'auteur examine aussi l'effet que les conditions initiales ont sur la marche de l'association. En général, les résultats théoriques se trouvent confirmés. Leur non confirmation est due, dans la majeure partie des cas, aux effets des produits du catabolisme, produits auxquels les diverses espèces sont sensibles de diverse façon.

Jusqu'ici, les expériences concernent des espèces qui se disputent la nourriture contenue dans le milieu. Le livre de GAUSE passe ensuite à l'étude d'espèces qui se dévorent entre elles, et à l'étude de la distribution des œufs des parasites.

C'est dans ce dernier cas que prend spécialement du relief l'observation de LOTKA, que les rencontres entre les êtres organisés ne sont pas toujours absolument semblables à celles qui se produisent fortuitement entre les molécules d'un gaz, mais qu'il existe parfois, dans les organismes, une possibilité de choix qui perturbe l'effet du pur hasard. Évidemment, ce fait se manifeste d'une manière spéciale dans les infections produites par la distribution des œufs d'insectes parasites, ceux-ci tendant à répartir leur progéniture en évitant les hôtes déjà infectés. Cela a été reconnu aussi expérimentalement par SALT; toutefois, quand le nombre des hôtes est limité ou, en d'autres termes, quand le parasite ne réussit pas à trouver des hôtes non infectés, on constate de l'ultra-parasitisme, et alors les effets du hasard et ceux du choix se superposent.

Mais lorsque deux espèces sont telles que l'une dévore l'autre, il convient, d'ordinaire, de ne pas tenir compte du choix de la part des agresseurs. Nous sommes alors dans les conditions les plus simples, et le système biologique procède, de façon très approximative, selon tout ce que prévoit la théorie classique. C'est ainsi que GAUSE a expérimenté avec le *Paramecium bursaria*, qui dévore les petites cellules de la levure *Saccharomyces exiguus*. Celles-ci ont des dimensions telles que le *Paramecium* ne peut choisir un à un les individus, de sorte que beaucoup échappent à l'attaque. D'ailleurs, le *Paramecium* est si résistant qu'il ne se détruit pas, même lorsque la nourriture devient très rare. Il se produit ainsi, de façon tout à fait évidente, des fluctuations très voisines des fluctuations classiques prévues par le calcul. Les figures que GAUSE insère dans son volume le démontrent sans laisser aucun doute. Sous l'influence d'une augmentation de puissance chez les agresseurs, les fluctuations classiques changent graduellement et tendent vers ces fluctuations que l'on a appelées de relaxation.

GAUSE a fait d'autres expériences avec l'infusoire *Bursaria truncatella*, qui dévore les individus du *Paramecium bursaria*, tandis que celui-ci est nourri par la levure *Saccharomyces exiguus*. Dans ce cas, l'agresseur, bien qu'il ne soit pas capable de détruire complètement tous les individus de l'autre espèce, est cependant si sensible au manque de nourriture qu'il meurt avant même que les seconds puissent acquérir de nouveau la possibilité de se multiplier. Cela est manifeste dans les cycles dessinés par GAUSE, cycles non clos. D'autres cas que GAUSE fait connaître sont ceux obtenus avec deux espèces d'acariens de la farine, le *Cheyletus eruditus* (agresseur) et l'*aleuroglyphus agilis* (victime). Dans une proportion déterminée de concentration, les fluctuations classiques se produisent nettement. Nous ne nous étendrons pas davantage sur les détails des expériences exécutées et sur d'autres cas qui se sont présentés au cours des nombreuses recherches de GAUSE, car il nous semble que l'exposé ci-dessus donne une vue suffisante de l'œuvre accomplie par ce savant, et qu'il en montre toute l'importance.

Pour conclure, disons qu'il est indubitable que les résultats théoriques sont suffisamment confirmés par les expériences, tout au moins du point de vue qualitatif. Par là se révèle le grand intérêt de la récente tendance prise par les recherches biologiques, avec l'introduction systématique, dans de nouvelles branches de ces disciplines, de méthodes mathématiques unies à des recherches expérimentales. Cette tendance rapproche de plus en plus, même du point de vue méthodologique, la biologie des autres branches de la philosophie de la nature; aussi faut-il saluer avec un véritable enthousiasme la naissance et le rapide développement de la jeune école biologique dont GAUSE est un des représentants les plus autorisés.

« Scientia », qui a toujours tenu ses lecteurs au courant des nouvelles tendances scientifiques, ne pouvait manquer de signaler celle que la présente Note critique a essayé de mettre en lumière.

XXIII.

PRINCIPES DE BIOLOGIE MATHÉMATIQUE

«Acta Biotheoretica» (Leiden), vol. III, parte I, 1937.

PREMIÈRE PARTIE

Les fondements de la théorie de la lutte pour la vie.

§ 1. – Population et quantité de vie.

1. Nous avons consacré, depuis 1926, plusieurs travaux à la théorie mathématique de la lutte pour la vie.

Dans le présent Mémoire nous laisserons de côté tous les détails et les applications pour lesquels nous renvoyons aux ouvrages que nous venons de rappeler (VOLTERRA, 1931; VOLTERRA et D'ANCONA, 1935) et nous nous occuperons seulement des lois et des principes généraux.

Dans les ouvrages précédents nous avons envisagé deux cas: 1) celui où plusieurs espèces se disputent une même nourriture et 2) celui où les individus de diverses espèces, vivant ensemble, s'entredévorent.

Le premier cas est le plus simple à traiter. Les lois qui découlent des équations générales ont été très bien vérifiées par plusieurs biologistes, entre autres tout récemment par M. GAUSE.

Le second cas est plus difficile à traiter et c'est justement de celui-ci que nous nous occuperons dans le présent article.

2. Désignons par $N_1, N_2, \cdots, N_n$ les nombres des individus de n espèces vivant dans le même milieu, c'est-à-dire d'une *association biologique*. Nous supposerons ces nombres tels qu'on puisse les traiter comme des quantités qui varient d'une manière continue et auxquelles on peut appliquer les méthodes infinitésimales. C'est ce que l'on fait dans la plupart des cas dans les théories statistiques. Nous appellerons ces nombres les *populations* des différentes espèces. Mais à ceux-ci il faut joindre d'autres nombres que nous allons définir.

Rapportons-nous à une représentation graphique:

Dans une bande verticale correspondante à un certain milieu, conduisons des bandes horizontales égales et consécutives qui correspondent à des années qui se suivent les unes les autres en partant d'une bande qui est à l'origine des temps.

Menons des segments verticaux, chacun desquels part de l'année initiale ou de l'année où commence la vie d'un individu d'une certaine espèce vivant dans le milieu envisagé et continue pendant toute sa vie en s'arrêtant à l'année où finit son existence ou à la dernière année que l'on considère. La *vie* de chaque individu est mesurée par le nombre des bandes horizontales rencontrées par chaque segment et, à la fin d'un certain temps, on peut regarder le nombre total de ces rencontres comme exprimant la *quantité de vie* de l'espèce à partir de l'origine des temps jusqu'à l'année où l'on s'est arrêté.

Mais le nombre des rencontres d'une bande horizontale avec les segments verticaux donne la population de l'espèce dans l'année correspondante à cette bande. Par suite la somme des populations des diverses années depuis l'origine des temps jusq'à une certaine année est égale à la totalité des rencontres considérées toute à l'heure. Elle peut être regardée donc comme la mesure de la *quantité de vie* de l'espèce pendant la même durée de temps.

Si l'on appelle N_h la population dans l'année h,

$$\sum_1^m {}_h N_h$$

exprimera la *quantité de vie* de l'espèce depuis l'origine des temps jusqu'à l'année m.

En passant du discontinu au continu et en appelant $N(t)$ la population au temps t

$$X = \int_0^t N(t)\, dt$$

sera la *quantité de vie* de l'espèce pendant l'intervalle de temps $(0, t)$. On peut tenir compte dans les calculs statistiques indifféremment de N ou de X car ces quantités sont liées entre elles par les relations

$$X = \int_0^t N(t)\, dt \quad , \quad N(t) = \frac{dX}{dt} \, .$$

§ 2. – Les équations fondamentales.

1. Supposons que les n espèces vivant ensemble se nourrissent les unes des autres. Pour traiter ce cas nous appliquerons le procédé que l'on peut appeler la *méthode des rencontres*.

Nous pouvons supposer que chaque rencontre entre deux individus d'espèces différentes amène un résultat favorable pour l'une des espèces et défavorable pour l'autre ou bien que le résultat est nul pour l'une et pour l'autre. Prenons les espèces r et s.

Si N_r est le nombre des individus composant l'espèce r et N_s celui de l'espèce s, la probabilité qu'aura un individu de l'une de ces espèces de se rencontrer avec un individu de l'autre sera proportionnelle à $N_r N_s$; autrement dit, en une unité de temps le nombre des rencontres pourra être représenté par $m_{rs} N_r N_s$ étant m_{rs} un coefficient constant.

Supposons qu'à chaque rencontre il y ait p_{rs} (nombre qui sera évidemment une fraction) individus d'une espèce, par exemple de l'espèce r, qui succombent; alors dans l'unité de temps les individus de cette espèce voués à la destruction seront au nombre de $m_{rs} p_{rs} N_r N_s$.

Pour calculer l'effet de cette destruction sur le nombre d'individus de l'autre espèce, désignons par $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$ les poids moyens des individus dans chacune des n espèces et par $P_1, P_2, \cdots, P_n$ les poids totaux des individus formant chaque espèce.

C'est pourquoi les nombres des individus de chaque espèce s'exprimeront par

$$N_1 = \frac{P_1}{\beta_1}, \qquad N_2 = \frac{P_2}{\beta_2}, \qquad \cdots, \qquad N_n = \frac{P_n}{\beta_n}.$$

Or si un individu de l'espèce r est dévoré par un individu de l'espèce s le poids P_r deviendra $P_r - \beta_r$, tandis que le poids P_s sera devenu $P_s + \beta_r$ et, par conséquent, les nombres des individus des deux espèces (en traitant les choses *grosso modo*, puisque nous supposons que le poids total de l'individu dévoré s'en va augmenter le poids du dévorateur) deviendront

$$\frac{P_r - \beta_r}{\beta_r} = N_r - 1 \quad , \quad \frac{P_s + \beta_r}{\beta_s} = N_s + \frac{\beta_r}{\beta_s}.$$

D'une manière toujours très grossière, nous déterminerons donc la diminution du nombre d'individus de l'espèce r dans une unité de temps par

$$m_{rs} p_{rs} N_r N_s$$

et l'accroissement du nombre d'individus de l'espèce s dans la même unité de temps par

$$m_{rs} p_{rs} N_r N_s \frac{\beta_r}{\beta_s}.$$

Comme nous avons dit, on s'en tient à la fiction que la substance vivante de l'espèce r se transforme, aussitôt dévorée, en substance de l'espèce s. Bien entendu cette hypothèse est loin de correspondre aux observations exactes de la biologie, mais pour notre calcul son approximation est suffisante.

2. Si nous posons

$$m_{rs} p_{rs} \beta_r = a_{rs}$$

nous aurons comme diminution des individus de l'espèce r

$$\frac{1}{\beta_r} a_{rs} N_r N_s$$

et pour accroissement des individus de l'espèce s:

$$\frac{1}{\beta_s} a_{rs} N_r N_s .$$

En supposant $a_{sr} = -a_{rs}$ nous serons en droit de dire qu'en une unité de temps et par l'effet des rencontres des individus des espèces r et s les nombres des individus de l'espèce r et de l'espèce s augmentent respectivement de

$$\frac{1}{\beta_r} a_{sr} N_r N_s \quad , \quad \frac{1}{\beta_s} a_{rs} N_r N_s .$$

Donc, en un temps dt ils augmenteront de

$$\frac{1}{\beta_r} a_{sr} N_r N_s \, dt \quad , \quad \frac{1}{\beta_s} a_{rs} N_r N_s \, dt .$$

On obtiendra le même résultat pour tout autre couple d'espèces.

Autrement dit, les nombres $1/\beta_1, 1/\beta_2, \cdots, 1/\beta_n$ ont été adoptés comme équivalentes des individus des diverses espèces. En effet admettre que $1/\beta_r$ individus de l'espèce r peuvent se transformer en $1/\beta_s$ individus de l'expèce s signifie que $1/\beta_r$ individus de l'espèce r sont équivalents à $1/\beta_s$ individus de l'espèce s.

En une première approximation fort grossière, nous avons donc pris, à titre d'*equivalents*, les inverses des poids moyens. Mais il nous suffira d'admettre, par hypothèse, l'existence de nombres *équivalents*, même si ceux-ci ne coïncident pas avec les inverses des poids moyens, pour obtenir le même résultat que celui auquel nous venons d'aboutir.

3. Si, maintenant, nous appelons ε_r le coefficient d'accroissement de l'espèce r quand elle existe seule, alors, lorsque les n espèces vivent ensemble, la variation avec le temps des nombres N_r aura lieu selon les équations différentielles

$$(1) \qquad \frac{dN_r}{dt} = \left(\varepsilon_r + \frac{1}{\beta_r} \sum_1^n {}_s \, a_{sr} N_s\right) N_r \qquad (r = 1, 2, \cdots, n),$$

c'est-à-dire

$$(\mathrm{I}) \qquad \beta_r \frac{dN_r}{dt} = \left(\varepsilon_r \beta_r + \sum_1^n {}_s \, a_{sr} N_s\right) N_r$$

où

$$a_{sr} = -a_{rs} \quad , \quad a_{rr} = 0 .$$

Nous appellerons les ε_r *les coefficients d'autoaccroissement* et

$$\varepsilon_r + \frac{1}{\beta_r} \sum_1^n {}_s \, a_{sr} N_s = \vartheta_r$$

les coefficients d'accroissement effectifs ou *coefficients démographiques*.

4. Il est facile de voir que, les valeurs initiales N_r^0 pour $t = 0$ des N_r étant données, on pourra intégrer les équations (I) par des fonctions analytiques

uniformes. Il suffit de comparer par majoration les équations (I) avec l'équation

$$\frac{dN}{dt} = (a + nb\,N)\,N\,,$$

où $a > |\varepsilon_r|$, $b > |a_{sr}/\beta_r|$, en intégrant par série de puissances de t. Si les valeurs initiales des N_r sont positives elles se conserveront positives parce que $N_r = N_r^0 e^{\int_0^t \vartheta_r\,dt}$. Elles seront toujours finies et à cause de la relation précédente elles ne s'annuleront pour aucune valeur de t. On peut donc énoncer le théorème que *si une espèce existe à un certain instante elle existera toujours et aura toujours existé.* C'est le théorème de la *conservation des espèces.*

Il peut arriver que quelques unes des N_r tendent pour $t = \infty$ vers zéro. On dit alors que les espèces correspondantes *s'épuisent* (cfr. § 5, n° 1).

5. En introduisant les éléments $X_r = \int_0^t N_r\,dt$ on pourra remplacer les équations (I) par les équations

$$\beta_r \frac{d^2 X_r}{dt^2} = \left(\varepsilon_r \beta_r + \sum_1^n{}_s\, a_{sr} \frac{dX_s}{dt}\right) \frac{dX_r}{dt}\,. \tag{II}$$

Or nous verrons que la substitution des équations (II) aux équations (I) est bien loin d'être une substitution banale, comme il pourrait paraître au premier abord.

En effet, il est possible de ramener les équations (II) à dépendre d'une équation du calcul des variations d'une manière tout à fait pareille à ce qui arrive pour les équations qui expriment la plupart des phénomènes de la nature (cfr. § 3, deuxième partie).

En posant $dX_r/dt = X'_r$, $d^2 X_r/dt^2 = X''_r$ les équations (II) s'écrivent

$$\beta_r X''_r = \left(\varepsilon_r \beta_r + \sum_1^n{}_s\, a_{sr}\, X'_s\right) X'_r. \tag{II'}$$

Lorsque les quantités N_r varient avec le temps nous dirons qu'il y a des *variations biologiques.*

§ 3. – Cas d'équilibre.

1. Les $N_1, N_2, \cdots, N_n$ seront des constantes lorsque

$$\frac{dN_1}{dt} = \frac{dN_2}{dt} = \cdots = \frac{dN_n}{dt} = 0 \tag{2}$$

c'est-à-dire lorsque

$$\left(\varepsilon_r \beta_r + \sum_1^n{}_s\, a_{sr}\, N_s\right) N_r = 0. \tag{2'}$$

Les espèces seront alors dans un état stationnaire. Il faudra aussi que les N_r *soient positives*. Si une ou plusieurs de ces quantités seront nulles elles se conserveront toujours nulles en vertu du principe de la conservation des espèces. Cela correspond à supprimer certaines espèces de l'association et à considérer une association formée par un nombre moindre d'espèces.

Les équations (2′) seront satisfaites si l'on aura

$$\text{(III)} \qquad \varepsilon_r \beta_r + \sum_1^n {}_s\, a_{sr} N_s = 0.$$

Ces conditions sont suffisantes et ne sont pas nécessaires car les (2′) peuvent être satisfaites sans que toutes ces conditions soient vérifiées. Mais alors certaines des N_r devront être nulles ce qui nous ramènera, comme nous venons de le dire, à pouvoir considérer une association résiduelle constituée par un nombre moindre d'espèces. De même il peut arriver que certaines des racines des équations (III) soient nulles. Dans ces cas aussi l'état sera stationnaire mais l'association pourra être réduite. C'est pourquoi *pour l'étude des états stationnaires nous ne considérerons que le cas où les équations* (III) *ont des racines positives.*

Ce sont ces cas que nous appelerons les *cas d'équilibre de l'association.* Nous négligerons tous les autres. L'équilibre sera conservé par les actions mutuelles des différentes espèces sans qu'on doive considérer certaines espèces de l'association comme épuisées (cfr. § 2 n° 4, § 5 n° 1).

2. Nous appellerons les équations (III) les *équations fondamentales.* Nous dirons que la solution est positive si toutes les racines sont positives. *Les solutions positives donneront les cas d'équilibre.*

Le déterminant des équations (III)

$$\text{(A)} \qquad D = \begin{vmatrix} 0 & , a_{21} & ,\cdots, & a_{n1} \\ a_{12} & , 0 & ,\cdots, & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & , a_{2n} & ,\cdots, & 0 \end{vmatrix}$$

sera appelé le *déterminant fondamental.*

Il est *hemisymétrique*, c'est-à-dire les élements de la diagonale sont nuls et les éléments symétriques par rapport à la diagonale sont égaux en valeurs absolues et de signe contraire. D'après la théorie des déterminants, il sera un carré si n est un nombre pair et sera nul si n est un nombre impair.

3. Soient $q_1, q_2, \cdots, q_n$ des solutions des équations (III); à cause des relations $a_{sr} = - a_{rs}$ on aura

$$\text{(3)} \qquad \sum_1^n {}_r\, \varepsilon_r \beta_r q_r = 0.$$

Supposons que $q_1, q_2, \cdots, q_n$ soient positives.

On tire tout de suite de la relation précédente le théorème:

Si tous les coefficients d'autoaccroissement ont le même signe, l'équilibre n'est pas possible.

4. Nous allons maintenant étudier en détail les deux cas du déterminant fondamental différent ou égal à zéro.

Premier cas où le déterminant fondamental n'est pas nul.

Ce cas ne peut se présenter que si le nombre des espèces est pair. Les équations fondamentales auront toujours une et une seule solution, et si les solutions des équations de l'équilibre sont positives il n'y aura qu'un seul cas d'équilibre.

Dans ce cas changeons les ε_r en $\varepsilon_r + \Delta\varepsilon_r$ et appelons Δq_r les variations des q_r telles que $q_r + \Delta q_r$ [solutions des équations (III)] restent positives. On aura

$$\beta_r(\varepsilon_r + \Delta\varepsilon_r) + \sum_1^n {}_s\, a_{sr}(q_s + \Delta q_s) = 0$$

et par suite

$$\beta_r \Delta\varepsilon_r + \sum_1^n {}_s\, a_{sr} \Delta q_s = 0 \tag{4}$$

d'où

$$\sum_1^n {}_r\, \beta_r \Delta\varepsilon_r \Delta q_r = 0. \tag{4'}$$

Par conséquent *si nous augmentons (ou diminuons) contemporainement tous les coefficients d'autoaccroissement, les populations d'équilibre de quelques espèces augmenteront et celles d'autres espèces diminueront*, car à cause des (4) toutes les Δq_r ne pourront pas être nulles et à cause des (4') celles qui ne sont pas nulles ne pourront pas avoir le même signe.

Si toutes les quantités a_{sr} $(s = 1, 2, \cdots, r-1, r+1, \cdots, n)$ sont positives ou nulles, l'espèce r ne sera pas dévorée par aucune des autres, donc à cause de l'équation (4) si $\Delta\varepsilon_r$ est négative (positive) les Δq_s ne pourront pas être toutes négatives (positives) ou nulles et par suite si le coefficient d'accroissement de l'espèce $r^{\text{ième}}$ diminuera (augmentera), quelques unes des populations d'équilibre des autres espèces augmenteront (diminueront).

De même si toutes les quantités a_{sr} $(s = 1, 2, \cdots, r-1, r+1, \cdots, n)$ sont négatives ou nulles on aura que l'espèce r ne dévorera pas les autres et par suite si $\Delta\varepsilon_r$ est négative (positive) les Δq_s de l'équation (4) ne pourront pas être toutes positives (négatives) ou nulles, d'où une conséquence opposée à celle que nous venons de trouver.

Deuxième cas. Déterminant fondamental nul.

5. Ce cas se présente toujours lorsque le nombre des espèces est impair. Mais il peut aussi arriver qu'il se verifie lorsque le nombre des espèces est pair.

Si les équations fondamentales ont une solution il en existe une infinité.

6. Supposons que les coefficients d'autoaccroissemet soient nuls, alors les équations fondamentales ont toujours des solutions différentes de zéro. Celles positives correspondent aux cas d'équilibre. S'il existe une solution positive il y en aura une infinité. Soient

$$q_1^{(h)}, q_2^{(h)}, \cdots, q_n^{(h)} \qquad (h = 1, 2, \cdots, g)$$

toutes les solutions indépendantes. On aura

$$\sum_1^n{}_s\, a_{sr}\, q_s^{(h)} = 0. \tag{5}$$

Toutes les solutions seront données par

$$\sum_1^g{}_h\, \vartheta_h\, q_1^{(h)}, \quad \sum_1^g{}_h\, \vartheta_h\, q_2^{(h)}, \quad \cdots, \quad \sum_1^g{}_h\, \vartheta_h\, q_n^{(h)}$$

où $\vartheta_1, \vartheta_2, \cdots, \vartheta_g$ sont des constantes arbitraires.

7. Supposons maintenant que les coefficients d'autoaccroissement ne soient pas tous nuls et qu'il existe une solution $q_1^\circ, q_2^\circ, \cdots, q_n^\circ$ des équations fondamentales. Alors

$$q_1^\circ + \sum_1^g{}_h\, \vartheta_h\, q_1^{(h)}, \quad q_2^\circ + \sum_1^g{}_h\, \vartheta_h\, q_2^{(h)}, \quad \cdots, \quad q_n^\circ + \sum_1^g{}_h\, \vartheta_h\, q_n^{(h)} \tag{6}$$

seront aussi des solutions. Ces formules donneront toutes les solutions possibles. En effet, s'il y en aura deux, leurs différences satisferont les équations fondamentales dans le cas où les coefficients d'autoaccroissement sont nuls.

Si l'une des solutions sera positive il y en aura une infinité et par suite lorsque le déterminant fondamental est nul, s'il y a un état d'équilibre, il y en aura une infinité.

8. Supposons que les équations fondamentales lorsque les ε_r ne sont pas toutes nulles aient une solution $q_1^\circ, q_2^\circ, \cdots, q_n^\circ$. On aura

$$\beta_r\, \varepsilon_r + \sum_1^n{}_s\, a_{sr}\, q_s^\circ = 0. \tag{III'}$$

Mais les équations (5) peuvent s'écrire, puisque $a_{sr} = -a_{rs}$,

$$\sum_1^n{}_s\, a_{rs}\, q_s^{(h)} = 0; \tag{5'}$$

donc il viendra

$$\sum_1^n{}_r\, \beta_r\, \varepsilon_r\, q_r^{(h)} = 0, \qquad (h = 1, 2, \cdots, g). \tag{7}$$

Il faut donc que ces équations soient satisfaites pour que les (III') soient vérifiées. Il suffit qu'une seule des équations (7) ne soit pas satisfaite pour que l'équilibre ne soit pas possible.

9. Les théorèmes que nous avons donnés dans le premier cas (déterminant non nul) (n° 4), peuvent être étendus au cas du déterminant nul, mais il faut tenir compte que dans ce cas les $\Delta\varepsilon_r$ ne peuvent pas être prises arbitrairement.

§ 4. – Intégrales des équations fondamentales.

1. D'après les conditions $a_{sr} = -a_{rs}$ on tire des équations (II')

$$\sum_1^n{}_r\, \beta_r\, X_r'' = \sum_1^n{}_r\, \varepsilon_r\, \beta_r\, X_r'$$

et en intégrant

$$\text{(B)} \qquad \sum_1^n{}_r\, \beta_r\, X_r' - \sum_1^n{}_r\, \varepsilon_r\, \beta_r\, X_r + C = 0$$

C étant une quantité constante.

2. Les équations (II) donnent

$$\text{(II'')} \qquad \beta_r \frac{d}{dt} \log X_r' = \varepsilon_r\, \beta_r + \sum_1^n{}_s\, a_{sr}\, X_s'$$

et en intégrant

$$\text{(C)} \qquad \Theta_r = \beta_r \log X_r' + \sum_1^n{}_s\, a_{rs}\, X_s - \varepsilon_r\, \beta_r\, t - C_r = 0$$

les C_r étant des constantes. On en déduit l'intégrale

$$\text{(C')} \qquad \Theta = \sum_1^n{}_r\, X_r'\, \Theta_r = \chi + Z - \left(\sum_1^n{}_r\, \varepsilon_r\, \beta_r\, t + C_r\right) X_r' = 0$$

en désignant par Z la forme bilinéaire

$$\text{(8)} \qquad Z = \sum_1^n{}_r \sum_1^n{}_s\, a_{rs}\, X_r'\, X_s$$

et par χ l'expression

$$\text{(8')} \qquad \chi = \sum_1^n{}_r\, \beta_r\, X_r' \log X_r'.$$

En combinant les intégrales (B) et (C') on trouve

$$\text{(C'')} \qquad \Omega = \Theta + \sum_1^n{}_r\, \varepsilon_r\, \beta_r\, X_r - \sum_1^n{}_r\, \beta_r\, X_r' - C =$$

$$= \sum_1^n{}_r\, \beta_r\, X_r' \log X_r' + \sum_1^n{}_r \sum_1^n{}_s\, a_{rs}\, X_s\, X_r' -$$

$$- \sum_1^n{}_r\, \varepsilon_r\, \beta_r\, t X_r' - \sum_1^n{}_r C_r\, X_r' + \sum_1^n{}_r\, \varepsilon_r\, \beta_r\, X_r - \sum_1^n{}_r\, \beta_r\, X_r' - C = 0.$$

3. Supposons que les équations (III) aient les racines

(9) $$q_1, q_2, \cdots, q_n,$$

on aura alors identiquement

$$\varepsilon_r \beta_r = -\sum_1^n {}_s a_{sr} q_s$$

et les équations (I) pourront s'écrire

$$\beta_r \frac{dN_r}{dt} = \sum_1^n {}_s a_{sr} (N_s - q_s) N_r.$$

Puisque $a_{sr} = -a_{rs}$ il viendra

$$\sum_1^n {}_r \frac{\beta_r}{N_r} (N_r - q_r) \frac{dN_r}{dt} = 0$$

d'où

$$\sum_1^n {}_r \left(\beta_r \frac{dN_r}{dt} - q_r \beta_r \frac{1}{N_r} \frac{dN_r}{dt}\right) = 0$$

et en intégrant

(D) $$\sum_1^n {}_r (\beta_r N_r - q_r \beta_r \log N_r) = C'$$

C' étant une costante.

Nous allons maintenant examiner en détail les différents cas [1].

4. *Premier cas. Déterminant fondamental non nul.*

1 *a*) *Les* ε_r *ne sont pas toutes nulles*. Dans ce cas il n'y a qu'une seule solution (9). Les racines ne seront pas toutes nulles et on aura l'intégrale (D).

1 *b*) Si les ε_r sont nulles, les racines (9) seront toutes nulles et l'intégrale (D) se réduira à

(D') $$\sum_1^n {}_r \beta_r N_r = C''$$

C'' étant une constante.

5. *Deuxième cas. Déterminant fondamental nul.*

Les valeurs différentes de zéro

$$q_1^{(h)}, q_2^{(h)}, \cdots, q_n^{(h)} \qquad (h = 1, 2, \cdots, g)$$

existeront et, en vertu des équation (I) et (5'), on aura

$$\sum_1^n {}_r \beta_r q_r^{(h)} \frac{dN_r}{N_r} = \sum_1^n {}_r \beta_r \varepsilon_r q_r^{(h)} dt$$

(1) Nous avons utilisé dans cette exposition une intéressante remarque de M. B. Levi (1931).

et, en intégrant,

$$(D'') \qquad \sum_1^n {}_r \beta_r q_r^{(h)} \log N_r = \sum_1^n {}_r \beta_r \varepsilon_r q_r^{(h)} t + C^{(h)},$$

$C^{(h)}$ étant des constantes.

2 *a*) Toutes les relations (7) ne sont pas satisfaites (les ε_r n'étant pas toutes nulles) et par suite les équations fondamentales n'ont pas de solutions. Par conséquent l'intégrale (D) n'existera pas et subsisteront les intégrales (D'') dans une desquelles au moins le coefficient de t n'est pas nul.

2 *b*) Les ε_r sont nulles, alors les intégrales (D'') deviendront

$$(D''') \qquad \sum_1^n {}_r \beta_r q_r^{(h)} \log N_r = C^{(h)} .$$

On aura en outre l'intégrale

$$(D') \qquad \sum_1^n {}_r \beta_r N_r = C''.$$

2 *c*) Les ε_r ne sont pas nulles et ils existent des solutions $q_1^\circ, q_2^\circ, \cdots, q_n^\circ$ des équations (III). Dans ce cas les équations (voir § 3, n° 8)

$$\sum_1^n {}_r \beta_r \varepsilon_r q_r^{(h)} = 0 \qquad (h = 1, 2, \cdots, g)$$

doivent être satisfaites et l'intégrale (D) et les intégrales (D'') existeront (le coefficient de t étant nul), c'est-à-dire

$$(D_0) \qquad \sum_1^n {}_r \left(\beta_r N_r - \beta_r q_r^\circ \log N_r\right) = C'$$

$$(D''') \qquad \sum_1^n {}_r q_r^{(h)} \beta_r \log N_r = C^{(h)} \qquad (h = 1, 2, \cdots, g)$$

c'est-à-dire

$$(D^{IV}) \qquad N_1^{\beta_1 q_1^{(h)}} N_2^{\beta_2 q_2^{(h)}} \ldots N_n^{\beta_n q_n^{(h)}} = \text{const.}$$

D'autre part les (III) auront aussi les solutions (voir § 3, n° 7)

$$q_1 = q_1^\circ + \sum_1^g {}_h \vartheta_h q_1^{(h)}, \quad q_2 = q_2^\circ + \sum_1^g {}_h \vartheta_h q_2^{(h)}, \quad \cdots, \quad q_n = q_n^\circ + \sum_1^g {}_h \vartheta_h q_n^{(h)}$$

c'est pourquoi l'intégrale (D) s'écrira

$$\sum_1^n {}_r (\beta_r N_r - \beta_r q_r^\circ \log N_r) - \sum_1^g {}_h \vartheta_h \sum_1^n {}_r q_r^{(h)} \beta_r \log N_r = C'.$$

Mais les ϑ_r sont arbitraires, on retrouve donc les intégrales (D_0) et (D''').

6. En conclusion nous avons obtenu les intégrales (B) et (C) et en conséquence les intégrales (C′) et (C″). Nous avons aussi trouvé dans les différents cas envisagés les intégrales (D), (D′), (D″), (D‴), (D^IV).

Il faudra maintenant interpréter ces différentes intégrales et en déduire les conséquences pour en tirer les lois générales qui règlent les phénomènes de la lutte pour la vie et les fluctuations biologiques. À cela seront consacrés les §§ suivants.

§ 5. - Conséquences des intégrales.

1. Il nous faut d'abord établir des définitions dont nous aurons ensuite à faire usage. Si N (t) indique le nombre des individus d'une espèce et s'il demeure toujours compris entre deux nombres positifs, on dira que l'espèce a des *variations limitées entre deux nombres positifs*.

N (t) ne peut tendre vers zéro que pour $t = \infty$. Dans ce cas on dit que l'espèce s'épuise (cfr. § 2, n° 4). Nous dirons en outre qu'elle *s'épuise d'une façon régulière*. Mais si N peut, sans tendre vers zéro, prendre des valeurs arbitrairement petites quand $t \rightarrow \infty$ (c'est-à-dire lorsque sa limite inférieure est nulle) nous dirons que l'espèce *s'épuise d'une façon non régulière* par opposition à l'autre cas. A cette convention de langage mathématique correspond un postulat biologique, celui de la disparition réelle de l'espèce dans tous les cas où la fonction correspondante N a sa limite inférieure nulle (cfr. N° 7).

Si N (t) est limité entre deux nombres positifs et si N (t) a des maxima et des minima pour des valeurs de $t > t_0$ quelque soit t_0, on dira que l'espèce a des *fluctuations*.

On dira encore que les *fluctuations s'amortissent* lorsque l'oscillation (différence entre la limite supérieure et la limite inférieure) de N (t) pour $t > t_0$ deviendra et se conservera aussi petite qu'il nous plaît en augmentant suffisamment t_0. En ce dernier cas, et en ce cas seulement, les fluctuations permettront à N de tendre vers une limite déterminée et finie lorsque t tend vers l'∞.

On dira enfin que N (t) *tend asymptotiquement* vers la limite q lorsque N(t) n'aura pas de fluctuations et qu'il tendra vers la limite déterminée et finie q pour $t = \infty$. Quand la moyenne du nombre N (t) dans l'intervalle (t_0, t) tend vers une limite pour $t = \infty$ on appellera cette limite la *moyenne asymptotique* de N.

2. Supposons que les équations fondamentales (III) aient les racines *positives* $q_1, q_2, \cdots, q_n$.

Il *existera un état d'équilibre* correspondant à ces racines et par suite on aura l'intégrale (vois § 4, n° 3)

(D) $$\sum_1^n{}_r \beta_r (\mathrm{N}_r - q_r \log \mathrm{N}_r) = \mathrm{C}'.$$

En passant des logarithmes aux nombres on pourra l'écrire [2]

$$\text{(E)} \qquad \left(\frac{e^{N_1}}{N_1^{q_1}}\right)^{\beta_1}\left(\frac{e^{N_2}}{N_2^{q_2}}\right)^{\beta_2}\cdots\left(\frac{e^{N_n}}{N_n^{q_n}}\right)^{\beta_n} = c'$$

c' étant une constante.

En posant

$$n_r = \frac{N_r}{q_r}$$

$$c = c'\, q_1^{q_1\beta_1} q_2^{q_2\beta_2} \cdots q_n^{q_n\beta_n}$$

elle deviendra

$$(10) \qquad \left(\frac{e^{n_1}}{n_1}\right)^{\beta_1 q_1}\left(\frac{e^{n_2}}{n_2}\right)^{\beta_2 q_2}\cdots\left(\frac{e^{n_n}}{n_n}\right)^{\beta_n q_n} = c.$$

Puisque $q_1, q_2, \cdots, q_n$ sont positifs, $n_1, n_2, \cdots, n_n$ seront aussi positifs et par suite

$$\frac{e^{n_r}}{n_r} \geq e$$

d'où

$$\left(\frac{e^{n_r}}{n_r}\right)^{q_r\beta_r} \leq \frac{c e^{q_r\beta_r}}{e^{\sum_1^n q_h\beta_h}} = K e^{q_r\beta_r}$$

étant

$$K = \frac{c}{e^{\sum_1^n q_h\beta_h}}.$$

On en tire

$$\frac{e^{n_r}}{n_r} \leq e K^{1/(q_r\beta_r)}.$$

Cela montre que n_r doit être comprise entre deux nombres positifs dont l'un est plus grand et l'autre plus petit que l'unité. En effet envisageons la courbe ayant pour équation

$$y = \frac{e^x}{x} \qquad \begin{array}{l} 0 < x < \infty \\ e \leq y < \infty. \end{array}$$

L'ordonnée y prendra sa valeur minimum e pour $x = 1$ et deviendra infinie pour $x = 0$ et $x = \infty$. Menons la parallèle à l'axe x à la distance $y_0 > e$. Elle coupera la courbe en deux points, ayant les abscisses x^0, x'.

Si $e^x/x < y_0$ on aura

$$0 < x^0 < 1 < x' < \infty \quad , \quad x^0 < x < x'.$$

Donc, n_r^0 et n_r' étant deux nombres positifs comprenant entre eux l'unité, et en posant

$$n_r^0 q_r = N_r^0 \quad , \quad n_r' q_r = N_r'$$

(2) On pourrait se passer de faire cette transformation et opérer sur les formules logarithmiques directement (voir n° 6).

on aura

$$N_r^0 < N_r < N_r'$$

N_r^0 et N_r' étant deux nombres positifs entre lesquels est comprise la quantité q_r.

Il en ressort le théorème:

S'il existe un état d'équilibre et si l'état initial est différent de cet état les nombres des individus de chaque espèce auront des variations limitées entre des nombres positifs.

3. Supposons maintenant que le déterminant fondamental ne soit pas nul. Dans ce cas on peut compléter le théorème précédent de la manière suivante.

S'il existe un état d'équilibre et si l'on part d'un état initial différent de l'état d'équilibre, on a des fluctuations des espèces qui ne s'amortissent pas.

En effet remarquons que, le temps croissant indéfiniment, deux cas seulement peuvent se présenter: 1° les $N_1, N_2, \cdots, N_n$ tendent vers des limites déterminées et finies; 2° ces nombres ont des oscillations ayant une amplitude supérieure à un nombre positif.

Or $N_1, N_2, \cdots, N_n$ ne peuvent pas tendre vers $q_1, q_2, \cdots, q_n$, c'est-à-dire $n_1, n_2, \cdots, n_n$ ne peuvent pas tendre vers 1, parce que la plus petite valeur de la constante c est

$$m = e^{q_1\beta_1 + q_2\beta_2 + \cdots + q_n\beta_n}$$

valeur qui correspond à $n_1 = n_2 = \cdots = n_n = 1$.

Il suffit que dans un instant quelconque une seule de ces quantités soit positive et différente de l'unité pour rendre $c > m$. C'est pourquoi si dans l'état initial $n_1, n_2, \cdots, n_n$ ne sont pas égales à l'unité on doit avoir $c > m$. Mais si $n_1, n_2, \cdots, n_n$ tendent vers 1 le premier membre de (10) devrait tendre vers m, tandis qu'il se conserve égale constamment à $c > m$. $N_1, N_2, \cdots, N_n$ ne peuvent pas tendre vers des nombres $q_1', q_2', \cdots, q_n'$ différents de $q_1, q_2, \cdots, q_n$ dans leur totalité ou seulement en partie. En effet dans ce cas les quantités $\beta_r\, dN_r/dt$ devraient tendre vers des limites déterminées et finies:

$$\left(\varepsilon_r \beta_r + \sum_1^n {}_s\, a_{sr} q_s'\right) q_r'.$$

Mais si N_r et dN_r/dt tendent vers des limites déterminées et finies les dérivées dN_r/dt doivent tendre vers 0 et par suite

$$\varepsilon_r \beta_r + \sum_1^n {}_s\, a_{sr} q_s' = 0.$$

En resolvant ces équations par rapport aux q_s' on a

$$q_s' = q_s \qquad (s = 1, 2, \cdots, n)$$

car le déterminant fondamental n'est pas nul, ce qui est contraire à l'hypothèse que nous avons faite sur les q_s'.

Il est donc nécessaire qu'il y ait parmi les $N_1, N_2, \cdots, N_n$ quelques unes qui gardent des fluctuations non amorties, le temps croissant indéfiniment. C.Q.F.D.

4. Revenons aux équations (I) et intégrons entre t_0 et t. On aura

$$(11) \qquad \frac{\beta_r}{T} \log \frac{N_r}{N_r^0} = \varepsilon_r \beta_r + \sum_1^n a_{sr} \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t} N_s \, dt$$

N_r^0 étant la valeur de $N_r(t_0)$ et $T = t - t_0$. Posons

$$\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t} N_r \, dt = \mathfrak{n}_r$$

$\mathfrak{n}_r$ sera la moyenne de N_r dans l'intervalle (t_0, t).

Donc les équations (11) s'écriront

$$(11') \qquad \frac{\beta_r}{T} \log \frac{N_r}{N_r^0} = \varepsilon_r \beta_r + \sum_1^n {}_s \, a_{sr} \mathfrak{n}_r .$$

En prenant T suffisamment grand on pourra rendre les modules des premiers membres des équations précédentes aussi petits que l'on veut et par suite on pourra rendre les $\mathfrak{n}_r$ aussi proches des q_r que l'on veut, d'où l'on tire

$$\lim_{t=\infty} \mathfrak{n}_r = q_r .$$

Donc *les q_r sont les moyennes asymptotiques des N_r et par conséquent celles-ci sont indépendantes des valeurs initiales des N_r.*

5. Si nous prenons les valeurs initiales des $n_1, n_2, \cdots, n_n$ suffisamment proches de l'unité, on pourra rendre c proche de $e^{\sum_1^n h q_h \beta_h}$ autant que l'on veut et par suite K proche de 1 autant que l'on veut. Mais nous avons

$$e \leq \frac{e^{n_r}}{n_r} \leq e K^{1/(q_r \beta_r)} .$$

On pourra donc conserver les n_r aussi proches de 1 que l'on veut, d'où l'on déduit la proposition:

Si l'état initial est suffisamment proche de l'état d'équilibre, l'association biologique se conservera aussi proche de cet état que l'on veut. C'est pourquoi *l'état d'équilibre sera stable.*

6. Envisageons le cas où les équations fondamentales ont des racines nulles ou négatives. Soient $r_1, r_2, \cdots, r_h$ les espèces qui correspondent aux racines positives que nous désignerons par $q_{r_1}, q_{r_2}, \cdots, q_{r_h}$ et soient $s_1, s_2, \cdots, s_k$ les espèces qui correspondent aux racines nulles. Supposons d'abord qu'il n'y ait pas de racines négatives.

L'intégrale (D) s'écrira

$$\sum_{1}^{h}{}_i\, \beta_{r_i}(N_{r_i} - q_{r_i}\log N_{r_i}) + \sum_{1}^{k}{}_i\, \beta_{s_i} N_{s_i} = C'.$$

Or la plus petite valeur de

$$\beta_{r_i}(N_{r_i} - q_{r_i}\log N_{r_i}) \tag{12}$$

sera rejointe par $N_{r_i} = q_{r_i}$ et sera

$$\beta_{r_i} q_{r_i}(1 - \log q_{r_i});$$

par suite la première des sommes précédentes dépassera ou sera égale à

$$\sum_{1}^{h}{}_i\, \beta_{r_i} q_{r_i}(1 - \log q_{r_i}) = c_1.$$

Donc

$$\sum_{1}^{k}{}_i\, \beta_{s_i} N_{s_i} \leq C' - c_1.$$

Cela prouve que les N_{s_i} sont bornées. En outre les N_{r_i} doivent se conserver comprises entre des nombres positifs parce que les expressions (12) croissent indéfiniment lorsque les N_{r_i} se rapprochent de zéro ou croissent indéfiniment.

7. Supposons maintenant que le déterminant fondamental ne soit pas nul et voyons ce qui arrive pour les N_{s_i} lorsque t croit indéfiniment. Si elles aussi restaient comprises entre des nombres positifs, les formules (11′) seraient valables, c'est pourquoi les moyennes asymptotiques de toutes les N devraient tendre vers les racines des équations fondamentales ce qui est impossible parce que parmi ces racines il y en a qui sont nulles tandis que les moyennes asymptotiques devraient être comprises entre des nombres positifs.

Donc, pour t suffisamment grand, quelques unes des N_{s_i} devront être plus petites que tout nombre positif choisi arbitrairement. Comme on voit facilement cela ne prouve pas qu'il y a des N_s qui tendent vers zéro, mais qu'il y aura certainement des espèces qui s'épuiseront d'une façon régulière ou non (cfr. § 5, n° 1).

Si les espèces $s_1, s_2, \cdots, s_k$ correspondent aux racines nulles, et aux espèces $v_1, v_2, \cdots, v_g$ correspondent les racines négatives $-p_1, -p_2, \cdots, -p_g$ l'intégrale (D) deviendra

$$\sum_{1}^{h}{}_i\, \beta_{r_i}(N_{r_i} - q_{r_i}\log N_{r_i}) + \sum_{1}^{k} \beta_{s_i} N_{s_i} + \sum_{1}^{g} \beta_{v_i}(N_{v_i} + p_i \log N_{v_i}) = C'.$$

On voit que les N_{s_i} et les N_{v_i} seront bornées, mais on ne saurait pas affirmer que toutes les $N_1, N_2, \cdots, N_n$ seront comprises entre deux nombres positifs.

8. Plaçons nous dans le cas où le déterminant fondamental est nul.

1) Si les équations fondamentales ont des solutions constituées par des racines positives, le théorème énoncé à la fin du n° 2 sera vérifié.

2) Si les racines sont nulles ou positives le résultat du n° 6 est valable.

3) Les équations fondamentales ayant des racines négatives et nulles on peut conclure par des raisonnements analogues à ceux du n° 7 que les espèces correspondantes aux racines nulles et négatives seront bornées.

4) Si les $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ ne sont pas nulles et toutes les relations (7) ne sont pas satisfaites il n'y aura pas de solution des équations fondamentales. Par suite il y aura des valeurs $q_1^{(h)}, q_2^{(h)}, \cdots, q_n^{(h)}$ telles que

$$N_1^{\beta_1 q_1^{(h)}} N_2^{\beta_2 q_2^{(h)}} \ldots N_n^{\beta_n q_n^{(h)}} = Ce^{zt}$$

C étant une constante et

$$z = \sum_1^n{}_r \beta_r \varepsilon_r q_r^{(h)} \gtrless 0.$$

Lorsque t croit indéfiniment, le second membre tend vers 0 ou l'∞. *Donc dans ce cas il est impossible que les nombres des individus de chaque espèce soient compris entre deux nombres positifs.*

5) Les coefficients d'autoaccroissement étant nuls on aura les intégrales (D') et (D''') c'est pourquoi les espèces seront bornées. Si une des solutions $q_1^{(h)}, q_2^{(h)}, \cdots, q_n^{(h)}$ est positive c'est-à-dire s'il existe un état d'équilibre on aura que les $N_1, N_2, \cdots, N_n$ seront plus grands qu'un nombre positif et par suite tous ces nombres seront compris entre deux nombres positifs.

On peut donner un exemple assez significatif de ce cas. Soient trois espèces dont les nombres des individus peuvent être regardés comme les coordonnées cartésiennes d'un espace.

Les équations fondamentales pourront s'écrire

$$\beta_1 \frac{dN_1}{dt} = (cN_2 - bN_3) N_1$$

$$\beta_2 \frac{dN_2}{dt} = (aN_3 - cN_1) N_2$$

$$\beta_3 \frac{dN_3}{dt} = (bN_1 - aN_2) N_3$$

$a = a_{32} = -a_{23}$, $b = a_{13} = -a_{31}$, $c = a_{21} = -a_{12}$ étant trois constantes du même signe. Les états d'équilibre correspondront à la droite

$$\frac{N_1}{a} = \frac{N_2}{b} = \frac{N_3}{c}$$

et les intégrales (D') et (D^{IV}) au plan

$$(D_1') \qquad \beta_1 N_1 + \beta_2 N_2 + \beta_3 N_3 = C_2$$

et à la surface

$$(D_1^{IV}) \qquad N_1^{\beta_1 a} N_2^{\beta_2 b} N_3^{\beta_3 c} = C_3.$$

L'intersection du plan avec cette surface est une courbe fermée qui nous donnera le cycle des valeurs de N_1, N_2, N_3. Le cycle étant fermé on voit que le phénomène est périodique.

DEUXIÈME PARTIE

Les lois générales de la lutte pour la vie.

§ 1. – Le principe de la conservation de l'énergie démographique.

1. Posons

$$\sum_1^n {}_r\, \beta_r N_r = \sum_1^n {}_r\, \beta_r X'_r = L$$

$$C_0 - \sum_1^n {}_r\, \beta_r \varepsilon_r X_r = M$$

C_0 étant une constante que l'on peut supposer être la limite supérieure de $\sum_1^n {}_r\, \beta_r \varepsilon_r X_r$. L'intégrale (B) s'écrira

$$L + M = \text{const.}$$

Au point de vue biologique, en regardant L comme une *énergie démographique actuelle* et M comme *une énergie démographique potentielle*, on aura qu'elles se transforment l'une dans l'autre, leur somme se conservant constante. Cette proposition est analogue au théorème des forces vives en mécanique.

2. Désignons par $\vartheta_1, \vartheta_2, \cdots, \vartheta_n$ les coefficients démographiques et supposons que $\delta X_1, \delta X_2, \cdots, \delta X_n$ soient des changements virtuels des quantités de vie.

On peut regarder

$$\Sigma_r\, \beta_r \vartheta_r \delta X_r$$

comme le *travail d'accroissement ou travail démographique.* Si nous prenons

$$\vartheta_r = \varepsilon_r + \frac{1}{\beta_r} \sum_1^n {}_s\, a_{sr} N_s$$

et si nous supposons que les δX_i soient les accroissements naturels qui ont lieu dans le temps dt on aura

$$\delta X_r = N_r\, dt$$

et par suite le travail démographique sera

$$\Sigma_r\, \beta_r \varepsilon_r N_r\, dt$$

c'est-à-dire le travail correspondant aux accroissements dus aux actions réciproques des différentes espèces sera nul et le travail total se réduira à celui dû aux seuls autoaccroissements.

3. Dans certains cas la vie passée par une espèce dans un certain milieu en modifie les propriétés de manière que les coefficients d'accroissement changent.

C'est ce qui arrive par exemple lorsque des produits cataboliques sont émis par les différents individus. En effet ces produits dans certains cas sont capables d'une intoxication du milieu. La variation du milieu ainsi produite par les différentes espèces dans un instant est due à l'action des individus dans les instants précédents. Si l'action de chaque espèce se conserve constante on pourra la considérer à chaque instant comme proportionnelle à la quantité de vie de l'espèce et par conséquent le changement du coefficient d'accroissement de chaque espèce r pourra être donné par une expression

$$\frac{1}{\beta_r}\sum_1^n{}_s\, c_{rs}\, X_s$$

où les c_{rs} sont des quantités constantes.

Lorsque l'action entre les différentes espèces est réciproque on aura $c_{rs} = c_{sr}$ et par conséquent l'expression précédente s'écrira

$$\frac{1}{\beta_r}\frac{\partial}{\partial X_r}\left[\frac{1}{2}\sum_1^n{}_r\sum_1^n{}_s\, c_{rs}\, X_r\, X_s\right].$$

En posant

$$P = \sum_1^n{}_r\, \beta_r\, \varepsilon_r\, X_r + \frac{1}{2}\sum_1^n{}_r\sum_1^n{}_s\, c_{rs}\, X_r\, X_s \tag{13}$$

les équations fondamentales deviendront

$$\beta_r\, X_r'' = \left(\frac{\partial P}{\partial X_r} + \sum_1^n{}_s\, a_{sr}\, X_s'\right) X_r' \tag{II''}$$

et par suite

$$\sum_1^n{}_r\, \beta_r\, X_r'' = \frac{dP}{dt}\,.$$

En intégrant

$$\sum_1^n{}_r\, \beta_r\, N_r = P - c_0 \tag{B'}$$

c_0 étant une constante.

En voulant employer une nomenclature la plus possible analogue à celle de la dynamique on appellera P le *potentiel démographique*. L'énergie potentielle démographique sera

$$c_0 - P = \text{п}$$

et l'on aura comme précédemment

$$L + \text{п} = \text{const.}$$

Le travail démographique exécuté dans le temps dt sera

$$dP \text{ (3)}.$$

Nous avons introduit dans ce § un potentiel démographique ayant des termes de second dégré à côté de ceux de premier dégré. Ensuite, si nous ne dirons pas le contraire explicitement, nous supposerons que le potentiel démographique n'a que des termes de premier dégré.

§ 2. – Les trois lois des fluctuations biologiques.

1. Nous avons vu que dans le cas d'un nombre impair d'espèces le déterminant fondamental est nul et qu'en général ils n'existent pas des états d'équilibre et que les nombres des individus de quelques espèces doivent croître indéfiniment ou devenir plus petits que tout nombre positif. Donc dans le cas d'un nombre impair d'espèces il est probable que l'association ne se conserve pas et qu'elle finisse par devenir une association constituée par un nombre pair d'espèces.

2. Envisageons donc d'une manière spéciale le cas d'un nombre pair d'espèces, le déterminant fondamental n'étant pas nul. En outre supposons que toutes les racines des équations fondamentales soient positives et qu'il existe par suite un état d'équilibre.

C'est dans ce cas que nous pourrons énoncer les trois lois fondamentales des fluctuations:

Première loi. – Loi de la conservation des fluctuations.

Les nombres des individus des différentes espèces sont limités entre des nombres positifs, et il y a toujours des fluctuations qui ne s'amortissent pas (voir § 4, n° 3, Première partie).

Deuxième loi. – Loi de la conservation des moyennes.

Si l'on prend comme moyennes des nombres des individus des différentes espèces les limites des moyennes pour des durées de temps infiniment longues

(3) Dans l'ouvrage *Les associations biologiques au point de vue mathématique* (Paris, Hermann, 1935) en tenant compte des variations des actions cataboliques avec le temps on a trouvé des équations intégro-différentielles. La réciprocité des coefficients c_{rs}, c_{sr} ne serait pas vérifiée dans les experiences de M. Regnier et M.lle Lambin.

(*moyennes asymptotiques*) *ces moyennes sont des constantes indépendentes des valeurs initiales des nombres des individus des espèces* (voir § 5, n° 4. Première partie).

Troisième loi. – Loi de la perturbation des moyennes.

Si l'on détruit toutes les espèces uniformement et proportionnellement aux nombres de leurs individus (4) *il y aura toujours des espèces qui s'en avantageront* (*c'est-à-dire dont les moyennes augmenteront*) *et il y aura toujours des espèces qui seront endommagées* (*c'est-à-dire dont les moyennes diminueront*).

Parmi les premières il y en aura une au moins de celles qui sont dévorées par d'autres et parmi les secondes il y en aura une au moins de celles qui en dévorent d'autres.

Pour démontrer cette loi rappelons que les moyennes (moyennes asymptotiques) sont égales aux populations d'équilibre. Par suite ce que l'on dit pour ces dernières est valable pour les premières. Or nous savons que si $\Delta\varepsilon_1, \Delta\varepsilon_2, \cdots, \Delta\varepsilon_n$ ont le même signe, parmi les $\Delta q_1, \Delta q_2, \cdots, \Delta q_n$ il y en a certainement quelques unes qui ne sont pas nulles et qui ont des signes différents (voir § 3, n° 4, Première partie).

Supposons $\Delta q_1 > 0$. On peut faire deux hypothèses; ou entre les $a_{21}, a_{31}, \cdots, a_{n1}$ il y en a des négatives et alors l'espèce 1 sera dévorée par d'autres; ou toutes ces quantités sont positives ou nulles et alors l'espèce 1 en dévorera d'autres sans être dévorée par aucune. Dans cette seconde hypothèse (voir première partie, § 3, n° 4) en prenant $\Delta\varepsilon_1, \Delta\varepsilon_2, \cdots, \Delta\varepsilon_n$ négatives on trouvera parmi les espèces $2, 3, 4, \cdots, n$ quelques unes dont les populations d'équilibre augmenteront.

Donc il y aura au moins une espèce qui est dévorée par d'autres dont la population augmentera en diminuant les $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$.

Nous avons supposé que Δq_1 soit positive. Par conséquent parmi $\Delta q_2, \Delta q_3, \cdots, \Delta q_n$ il doit y en avoir une au moins négative. Supposons $\Delta q_2 < 0$, alors ou entre les $a_{12}, a_{32}, \cdots, a_{n2}$ il y en aura des positives et alors l'espèce 2 en dévorera d'autres ou $a_{12}, a_{32}, \cdots, a_{n2}$ seront toutes négatives ou nulles et alors l'espèce 2 sera dévorée par d'autres sans en dévorer aucune; par suite si $\Delta\varepsilon_1, \Delta\varepsilon_2, \cdots, \Delta\varepsilon_n$ sont négatives il y aura des espèces qui en dévorent d'autres dont les moyennes diminueront.

La troisième loi est ainsi démontrée.

3. Pour supprimer toute difficulté nous pouvons donner d'autres éclaircissements détaillés au sujet de la troisième loi.

En effet on peut distinguer dans une association biologique trois catégories d'espèces: 1) celles qui dévorent les autres sans être dévorées par aucune;

(4) On suppose que la destruction est assez peu intense pour laisser la possibilité d'un état stationnaire.

2) celles qui sont dévorées par les autres sans en dévorer aucune; 3) celles qui sont dévorées par d'autres espèces et en dévorent aussi d'autres.

Il peut arriver que toutes les catégories existent, ou qu'il en existent deux. S'il n'en existe qu'une seule elle doit être de la troisième sorte.

Or la deuxième partie de l'énoncé précédent de la troisième loi peut être remplacé par les mots suivants:

Parmi les premières il y en aura une au moins appartenant à la deuxième ou à la troisième catégorie et parmi les secondes il y en aura une au moins qui appartient à la première ou à la troisième catégorie.

Supposons que les seules catégories existantes soient la première et la seconde [5], alors parmi les espèces qui s'avantagent d'une diminution des coefficients d'autoaccroissement il y en a une au moins qui appartient à la seconde catégorie et parmi celles qui sont endommagées il y en a une au moins appartenant à la première catégorie.

C'est sous cette forme particulière que j'avais énoncé la troisième loi dans mes travaux précédents, en limitant la signification d'espèces dévorante ou dévorée. Les énoncés par lesquels nous venons d'exprimer la troisième loi lui donnent une nouvelle extension en supprimant toute restriction.

Il est évident qu'on peut faire des raisonnements analogues si l'on suppose d'augmenter au lieu que diminuer $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$.

4. Particularisons maintenant le cas général en envisageant celui de deux espèces, la première dévorant la seconde. L'intégrale (E) deviendra

$$\left(\frac{e^{N_1}}{N_1^{q_1}}\right)^{\beta_1}\left(\frac{e^{N_2}}{N_2^{q_2}}\right)^{\beta_2} = \text{const.}$$

et en regardant N_1 et N_2 (q_1 et q_2 étant positives) comme les coordonnées cartésiennes du plan on obtiendra un cycle fermé. Le phénomène sera donc périodique et les moyennes asymptotiques seront les moyennes pendant une période.

Les trois lois des fluctuations biologiques deviendront:

Première loi. – Loi du cycle périodique.

Les fluctuations des deux espèces sont périodiques.

Deuxième loi. – Loi de la conservation des moyennes.

Les moyennes des nombres des individus des deux espèces pendant une période sont constantes et ne dépendent pas des valeurs initiales.

(5) Dans ce cas le nombre des espèces de la première catégorie doit être égale au nombre de celles de la deuxième.

Troisième loi. - Loi de la perturbation des moyennes.

Si l'on détruit les deux espèces uniformément et proportionnellement aux nombres de leurs individus la moyenne du nombre d'individus de l'espèce dévorée croit et la moyenne du nombre des individus de l'espèce dévorante diminue.

§ 3. - Le principe variationnel.

1. Nous avons dit dans le n° 5 du § 2, Première partie, qu'il est possible de ramener les équations (II) a dépendre d'une question du calcul des variations. Nous allons maintenant réaliser cette assertion et nous montrerons aussi qu'elle est vraie même si l'on envisage à la place des équations (II) les équations (II'').

La tendance à ramener les problèmes naturels à des problèmes de minimum a toujours existé, car on pense que la nature dans ses manifestations tend à épargner le plus possible de ce qu'elle dépense dans l'accomplissement des différents phénomènes. Cela a été le point de départ de MAUPERTUIS qui, dans un ouvrage fameux, pensa établir un des principes fondamentaux de la nature, qu'il appela le principe de la moindre quantité d'action et qui était destiné a être pris comme base de la dynamique.

Le principe philosophique auquel s'attacha MAUPERTUIS fut que la nature agit toujours par les moyens les plus simples. En s'appuyant sur ce concept, il chercha à tirer toutes les lois du mouvement et du repos d'un seul concept métaphysique. DESCARTES avait tenté de prendre comme point de départ le principe de la quantité de mouvement et LEIBNITZ celui des forces vives. MAUPERTUIS définit d'abord la *quantité d'action* et chercha à déduire les solutions des problèmes naturels du principe de la moindre action. Il en fit des applications au choc des corps durs et élastiques. Il rappelle dans son ouvrage le célèbre principe de FERMAT de la réfraction de la lumière en le mettant en rapport avec son principe.

Il est évident que le principe de MAUPERTUIS est beaucoup plus compréhensif que ceux de DESCARTES ed de LEIBNITZ, parce que ceux-ci ne donnent que des intégrales des équations de la dynamique, tandis que le principe de MAUPERTUIS est équivalent aux équations mêmes.

LAGRANGE mit la dynamique sur d'autres bases et démontra comme conséquence de ses équations le principe de la moindre action. Il fit rentrer ainsi la mécanique dans le calcul des variations qu'il avait contribué à créer.

Ce fut HAMILTON qui développa ensuite et fit progresser la question en établissant d'abord ce qu'on appelle le principe de HAMILTON ou de l'action stationnaire et en développant le principe de l'action variée.

Enfin JACOBI systématisa la théorie générale en arrivant à une équation qui a eu récemment une grande extension et qui se révèle de jour en jour d'une portée plus grande.

Nous allons voir que le même chemin peut être tenu dans le problème biologique et nous montrerons que les équations de la lutte pour la vie peuvent être mises sous la forme canonique et être aussi reconduites à une équation de type jacobien.

2. Dans l'étude des intégrales des équations fondamentales (voir § 4, Première partie) nous avons trouvé l'expression

$$\chi = \sum_{1}^{n}{}_r\, \beta_r\, X'_r \log X'_r\,. \tag{8'}$$

N_r étant la population d'une espèce, dN_r/N_r est son *accroissement relatif élémentaire* et $\int_1^{N_r} dN/N$ l'accroissement relatif total nécessaire pour atteindre la valeur actuelle N_r en partant d'un seul individu.

Or dX_r étant l'accroissement élémentaire de la quantité de vie de l'espèce, on a

$$N_r = \frac{dX_r}{dt} = X'_r.$$

On peut appeler *action vitale élémentaire* la quantité

$$\beta_r \log N_r\, dX_r = \beta_r\, N_r \log N_r\, dt = \beta_r\, X'_r \log X'_r\, dt$$

en voulant adopter une locution analogue à celle que l'on emploie en mécanique (par $1/\beta_r$ on entend l'*équivalent* de l'espèce r; Première partie, § 2, n° 2).

Donc, pendant l'intervalle de temps $(0, t)$ l'action totale sera

$$\int_0^t \beta_r\, N_r \log N_r\, dt = \int_0^t \beta_r\, X'_r \log X'_r\, dt$$

et, si l'on envisage l'association de n espèces, l'*action vitale totale* sera

$$A = \int_0^t \sum_{1}^{n}{}_r\, \beta_r\, X'_r \log X'_r\, dt = \int_0^t \sum_{1}^{n}{}_r\, \beta_r\, N_r \log N_r\, dt. \tag{F}$$

3. Nous avons aussi trouvé (voir § 4, n° 2, Première partie) la *forme bilinéaire*

$$Z = \sum_{1}^{n}{}_r \sum_{1}^{n}{}_s\, a_{rs}\, X'_r\, X_s \tag{8}$$

et (§ 1, N° 3, Deuxième partie) le *potentiel démographique*

$$P = \sum_{1}^{n}{}_r\, \beta_r\, \varepsilon_r\, X_r + \frac{1}{2} \sum_{1}^{n}{}_r \sum_{1}^{n}{}_s\, c_{rs}\, X_r\, X_s. \tag{13}$$

Formons

$$\Phi = \chi + \frac{1}{2} Z + P = \sum_{1}^{n}{}_r\, \beta_r\, X'_r \log X'_r + \frac{1}{2} \sum_{1}^{n}{}_r \sum_{1}^{n}{}_s\, a_{rs}\, X'_r\, X_s + P. \tag{14}$$

On aura

$$(14') \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial X'_r} = \beta_r \log X'_r + \beta_r + \frac{1}{2} \Sigma_s a_{rs} X_s$$

$$(14'') \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial X_r} = \frac{1}{2} \Sigma_s a_{sr} X'_s + \frac{\partial P}{\partial X_r} \cdot$$

Faisons maintenant

$$(G) \qquad U = \int_{t_0}^{t} \Phi \, dt.$$

En écrivant

$$(G') \qquad \delta U = 0$$

les équations d'EULER nous donneront

$$(G'') \qquad \frac{d}{dt} \frac{\partial \Phi}{\partial X'_r} - \frac{\partial \Phi}{\partial X_r} = 0$$

c'est-à-dire

$$(G''') \qquad \frac{d}{dt} (\beta_r \log X'_r) = \frac{\partial P}{\partial X_r} + \sum_1^n {}_s \, a_{sr} X'_s$$

qui sont les équations (II'') du § 1 de la deuxième partie et qui se réduisent aux équations (II) du § 2 de la première partie lorsque le potentiel démographique se réduit aux termes de premier dégré.

On a donc ramené les équations fondamentales de la lutte pour la vie à un *problème du calcul des variations*.

§ 4. – LES ÉQUATIONS CANONIQUES.

1. Ayant mis les équations fondamentales (dans le cas où le potentiel démographique a les termes de second dégré) sous la forme Lagrangienne, on pourra les obtenir sous la forme canonique.

Posons

$$(14''') \qquad p_r = \frac{\partial \Phi}{\partial X'_r} = \beta_r \log X'_r + \beta_r + \frac{1}{2} \sum_1^n {}_s \, a_{rs} X_s$$

d'où l'on tire

$$(14^{IV}) \qquad X'_r = e^{\frac{1}{\beta_r}\left(p_r - \beta_r - \frac{1}{2} \sum_1^n {}_s \, a_{rs} X_s\right)}$$

En prenant

$$(15) \qquad H = \Phi - \sum_1^n {}_r \, p_r X'_r = P - \sum_1^n {}_r \, \beta_r X'_r =$$

$$= P - \sum_1^n {}_r \, \beta_r \, e^{\frac{1}{\beta_r}\left(p_r - \beta_r - \frac{1}{2} \sum_1^n {}_s \, a_{rs} X_s\right)},$$

on aura

$$\text{(15')} \qquad \frac{\partial H}{\partial p_r} = -e^{\frac{1}{\beta_r}\left(p_r - \beta_r - \frac{1}{2}\sum_{1}^{n}{}_s\, a_{rs} X_s\right)} = -X'_r = -\frac{dX_r}{dt}.$$

Mais de (15), (14''), (G'') et (14''') on a

$$\text{(15'')} \qquad \frac{\partial H}{\partial X_r} = \frac{\partial P}{\partial X_r} + \frac{1}{2}\sum_{1}^{n}{}_s\, a_{sr} X'_s = \frac{\partial \Phi}{\partial X_r} = \frac{d}{dt}\frac{\partial \Phi}{\partial X'_r} = \frac{dp_r}{dt}.$$

On arrive donc aux équations canoniques

$$\text{(IV)} \qquad \frac{dp_r}{dt} = \frac{\partial H}{\partial X_r} \quad , \quad \frac{dX_r}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial p_r}$$

où H est donnée par l'expression

$$\text{(15)} \qquad H = P - \sum_{1}^{n}{}_r\, \beta_r\, e^{\frac{1}{\beta_r}\left(p_r - \beta_r - \frac{1}{2}\Sigma_s a_{rs} X_s\right)}.$$

2. Les équations canoniques ont l'intégrale

$$H = \text{const.}$$

Cette intégrale est celle de la conservation de l'énergie démographique que nous avons donné dans le § 1, n° 3, Deuxième partie.

Nous avons aussi trouvé (voir § 4, n° 3, Première partie) lorsque le potentiel démographique n'a que les termes de premier dégré l'intégrale

$$\text{(D)} \qquad \sum_{1}^{n}{}_r\, \beta_r (N_r - q_r \log N_r) = \sum_{1}^{n}{}_r\, \beta_r (X'_r - q_r \log X'_r) = \text{const.}$$

On peut l'écrire

$$K = \sum_{1}^{n}{}_r \left[\beta_r\, e^{\frac{1}{\beta_r}\left(p_r - \beta_r - \frac{1}{2}\sum_{1}^{n}{}_s\, a_{rs} X_s\right)} - q_r\left(p_r - \beta_r - \frac{1}{2}\sum_{1}^{n}{}_r\, a_{rs} X_s\right)\right] = \text{const.}$$

Il est aisé de vérifier par des calculs très faciles que la parenthèse de Poisson

$$(H\,,\,K)$$

est égale zéro.

3. L'équation Jacobienne déduite des équations canoniques (IV) sera

$$\text{(IV')} \qquad C = \sum_{1}^{n}{}_r\, \beta_r \left[\varepsilon_r X_r - e^{\frac{1}{\beta_r}\left(\frac{\partial V}{\partial X_r} - \beta_r - \frac{1}{2}\Sigma_s a_{rs} X_s\right)}\right]$$

et les intégrales des équations canoniques seront

$$\frac{\partial V}{\partial a_r} = b_r \quad , \quad \frac{\partial V}{\partial X_r} = p_r$$

$V(X_1, X_2, \cdots, X_n; a_1, a_2, \cdots, a_n)$ étant une intégrale complète de l'équation aux dérivées partielles (IV') et $a_1, a_2, \cdots, a_n; b_1, b_2, \cdots, b_n$ des constantes.

§ 5. – Les intégrales en involution.

1. Les équations (II') ont les intégrales (voir Première partie, § 4, n° 2)

$$\beta_r \log \frac{dX_r}{dt} + \sum_1^n {}_s\, a_{rs} X_s - \varepsilon_r \beta_r t = \text{const.} \tag{C}$$

En vertu des équations (14''') on peut les écrire

$$\frac{p_r + \frac{1}{2} \sum_1^n {}_s\, a_{rs} X_s}{\varepsilon_r \beta_r} - t = \text{const.} \tag{16}$$

En posant

$$\frac{p_r + \frac{1}{2} \sum_1^n {}_s\, a_{rs} X_s}{\varepsilon_r \beta_r} = H_r$$

et en éliminant le temps t on trouvera les intégrales des équations canoniques (III) (P n'ayant que les termes de premier dégré)

$$H_r - H_i = H_{ri} = \text{const.}$$

Il est facile de vérifier que

$$(H, H_r) = 1 \quad , \quad (H_r, H_h) = \frac{a_{hr}}{\varepsilon_h \beta_h \varepsilon_r \beta_r} \tag{17}$$

et, par suite,

$$(H, H_{ri}) = 0 \tag{18}$$

$$(H_{rh}, H_{gl}) = \frac{a_{gr}}{\varepsilon_g \beta_g \varepsilon_r \beta_r} + \frac{a_{lh}}{\varepsilon_l \beta_l \varepsilon_h \beta_h} + \frac{a_{rl}}{\varepsilon_r \beta_r \varepsilon_l \beta_l} + \frac{a_{hg}}{\varepsilon_h \beta_h \varepsilon_g \beta_g} \,. \tag{19}$$

Posons

$$-H - K = L - \sum_1^n {}_i\, q_i \beta_i \tag{20}$$

on aura

$$L = \sum_1^n {}_r\, \varepsilon_r \beta_r q_r H_r = \sum_1^n {}_r\, \varepsilon_r \beta_r q_r H_{ri}$$

étant, à cause de la relation (3) (§ 3, n° 3, Première partie),

$$\sum_1^n {}_r\, \varepsilon_r \beta_r q_r = 0.$$

Par suite

$$(L, H_h) = \sum_1^n {}_r\, \varepsilon_r \beta_r q_r (H_r H_h) = \frac{1}{\varepsilon_h \beta_h} \sum_1^n {}_r\, a_{rh} q_r = -1$$

et

$$(L\,,H_{rh}) = 0\,.$$

2. Donc les intégrales des équations canoniques

$$H\,,L\,,H_{rh}$$

sont indépendantes et en involution.

Chaque combinaison linéaire de $H_{12}\,,H_{13}\,,\cdots,H_{1n}$ est en involution avec les fonctions H et L. Si l'on pouvait en trouver $n-2$ en involution, indépendantes et indépendantes aussi de L, le problème serait réduit aux quadratures, car on aurait n intégrales indépendantes et en involution.

Mais si l'on ne pose aucune limitation aux quantités constantes $a_{rs} = -a_{sr}\,,\beta_r\,,\varepsilon_r$, cela est impossible, parce que l'on en pourrait tirer $H_{12}\,,H_{13}\,,\cdots$ $\cdots,H_{1n}$ exprimées linéairement par des fonctions en involution et par suite en involution elles-même, ce qui serait en contradiction, en général, avec les équations (19). Mais, pour des valeurs particulières des constantes $a_{rs} = -a_{sr}\,,\beta_r\,,\varepsilon_r$, les choses peuvent se passer autrement.

3. Supposons n quelconque et remarquons qu'il est nécessaire et suffisant, pour que $H_{1h}\,,H_{1g}$ soient en involution, que l'on ait (voir (19))

$$\frac{a_{gh}}{\varepsilon_g\,\beta_g\,\varepsilon_h\,\beta_h} + \frac{a_{1g}}{\varepsilon_1\,\beta_1\,\varepsilon_g\,\beta_g} + \frac{a_{h\,1}}{\varepsilon_h\,\beta_h\,\varepsilon_1\,\beta_1} = 0\,.$$

Par suite si

$$a_{rs} = \varepsilon_r\,\beta_r\,\varepsilon_s\,\beta_s\,(m_s - m_r) \tag{21}$$

les $m_1\,,m_2\,,\cdots,m_n$ étant des constantes, les $H_{12}\,,H_{13}\,,\cdots,H_{1n}$ seront en involution. Elles seront en outre indépendantes, parce que chacune contient une p_r que les autres ne contiennent pas.

Donc, *dans le cas où les* a_{rs} *ont la forme* (21), *le problème se réduit aux quadratures.*

4. On peut vérifier ce résultat directement sur les équations (I) (§ 2, n° 3, Première partie). En effet, en posant

$$\Sigma\,\varepsilon_s\,\beta_s\,N_s = N \qquad , \qquad 1 - \Sigma_s\,\varepsilon_s\,\beta_s\,m_s\,N_s = M$$

elles deviennent

$$\frac{1}{\varepsilon_r}\,\frac{d}{dt}\log N_r = m_r\,N + M$$

et, en éliminant M et N,

$$\frac{\dfrac{1}{\varepsilon_1}\dfrac{d}{dt}\log N_1 - \dfrac{1}{\varepsilon_2}\dfrac{d}{dt}\log N_2}{m_1 - m_2} = \frac{\dfrac{1}{\varepsilon_1}\dfrac{d}{dt}\log N_1 - \dfrac{1}{\varepsilon_3}\dfrac{d}{dt}\log N_3}{m_1 - m_3} = \cdots$$

$$\cdots = \frac{\dfrac{1}{\varepsilon_1}\dfrac{d}{dt}\log N_1 - \dfrac{1}{\varepsilon_n}\dfrac{d}{dt}\log N_n}{m_1 - m_n}$$

qui nous donnent immédiatement $n-2$ intégrales indépendantes du temps.

Mais dans les équations (I) on peut éliminer dt et l'on trouve $n-1$ équations qui ont un multiplicateur, ce qui prouve que l'intégration se réduit aux quadratures.

§ 6. – Le principe de la moindre action en biologie.

1. Nous avons trouvé (voir § 4, n° 2, Première partie) l'intégrale

$$(C'') \qquad \Omega = \sum_1^n{}_r X'_r \Theta_r + \sum_1^n{}_r \varepsilon_r \beta_r X_r - \sum_1^n{}_r \beta_r X'_r - C = 0$$

des équations (II)

$$(II) \qquad \beta_r \frac{d^2 X_r}{dt^2} = \left(\varepsilon_r \beta_r + \sum_1^n{}_s a_{sr} \frac{dX_s}{dt}\right) \frac{dX_r}{dt}.$$

Si nous varions les quantités X_r, de manière que $\delta t = 0$ (variation isochrone) nous trouverons

$$\delta\Omega = \sum_1^n{}_r \delta X'_r \Theta_r + \sum_1^n{}_r \delta X_r \left(\sum_1^n{}_s a_{sr} X'_s + \varepsilon_r \beta_r\right)$$

et en supposant que les équations (C) soient vérifiées par les $X_1, X_2, \cdots, X_n$ on aura

$$\delta\Omega = \sum_1^n{}_r \delta X_r \left(\sum_1^n{}_s a_{sr} X'_s + \varepsilon_r \beta_r\right).$$

Donc si la variation isochrone sera telle que

$$\sum_1^n{}_r \delta X_r \left(\sum_1^n{}_s a_{sr} X'_s + \varepsilon_r \beta_r\right) = 0$$

on aura

$$\delta\Omega = 0$$

c'est-à-dire on pourra par une variation isochrone conserver l'intégrale (C″).

Par conséquent les deux conditions

$$(22) \qquad \sum_1^n{}_r \delta X_r \left(\sum_1^n{}_s a_{sr} X'_s + \varepsilon_r \beta_r\right) = 0$$

$$(22') \qquad \delta\Omega = 0$$

sont équivalentes pour une même variation isochrone.

Il est évident que nous pourrons prendre arbitrairement $n-1$ des quantités $\delta X_1, \delta X_2, \cdots, \delta X_n$ et la $n^{\text{ième}}$ sera déterminée par la (22). Par conséquent on pourra annuler contemporainement $\delta X_1, \delta X_2, \cdots, \delta X_n$ aux limites $0, t$.

2. Nous avons vu que les conditions (22) et (22′) sont équivalentes. La seconde exprime que la variation isochrone conserve l'intégrale (C″).

Cherchons maintenant d'interpréter la première condition.

À cet effet rappelons que, les coefficients démographiques des différentes espèces étant à un certain instant (voir deuxième partie, § 1, n° 2) $\vartheta_1, \vartheta_2, \cdots$ $\cdots, \vartheta_n$ et $\delta X_1, \delta X_2, \cdots, \delta X_n$ étant des variations virtuelles des quantités de vie, on peut regarder

$$\Sigma_r \beta_r \vartheta_r \delta X_r$$

comme le *travail virtuel démographique*. Or les coefficients démographiques s'expriment par (Première partie, § 2, N° 3)

$$\varepsilon_r + \frac{1}{\beta_r} \sum_1^n {}_s a_{sr} N_s = \varepsilon_r + \frac{1}{\beta_r} \sum_1^n {}_s a_{sr} X'_s$$

par suite

$$\sum_1^n {}_r \left(\varepsilon_r \beta_r + \sum_1^n {}_s a_{sr} X'_s \right) \delta X_r$$

sera *le travail virtuel démographique* pour la variation $\delta X_1, \delta X_2, \cdots, \delta X_n$. C'est pourquoi la condition (22) exprime que *le travail démographique virtuel est nul*.

3. Or nous avons trouvé que les lois de la lutte pour la vie dépendent d'une question du calcul des variations, c'est-à-dire que, lorsque les équations des fluctuations biologiques sont satisfaites, une certaine expression est *stationnaire* pour toutes les variations infinitésimales des paramètres qui individualisent les états successifs d'une association biologique (§ 3, Deuxième partie).

Nous allons maintenant démontrer que le passage naturel d'un état à un autre de l'association correspond effectivement, *sous certaines conditions*, à un *minimum* de l'expression que nous avons appelée *action vitale* (§ 3, n° 2, Deuxième partie).

Il en ressort un principe analogue au principe de la moindre action en mécanique.

Écrivons d'abord

$$2\Phi - \Omega = \sum_1^n {}_r \beta_r X'_r \log X'_r + \frac{d}{dt}\left[\sum_1^n {}_r \varepsilon_r \beta_r t X_r + \sum_1^n {}_r (C_r + \beta_r) X_r \right] + C$$

on aura

$$\chi = \sum_1^n {}_r \beta_r X'_r \log X'_r = 2\Phi - \Omega - \frac{d}{dt}\left[\sum_1^n {}_r \varepsilon_r \beta_r t X_r + \sum_1^n {}_r (C_r + \beta_r) X_r \right] - C$$

et par suite

$$\text{(F)} \quad A = \int_0^t \chi \, dt = \int_0^t (2\Phi - \Omega)\, dt - \left[\sum_1^n {}_r \varepsilon_r \beta_r t X_r + \sum_1^n {}_r (C_r + \beta_r) X_r \right]_0^t - Ct.$$

Prenons $X_1, X_2, \cdots, X_n$ tels que les équations (II) soient vérifiées, c'est-à-dire que l'on ait

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \Phi}{\partial X'_r} - \frac{\partial \Phi}{\partial X_r} = 0.$$

En outre supposons que les variations isochrones $\delta X_1, \delta X_2, \ldots, \delta X_n$ satisfont la condition (22′) et supposons que ces quantités soient nulles aux limites $0, t$. On aura en vertu de l'équation (F)

$$\delta A = 0 .$$

4. Nous arrivons au résultat définitif. En effet on tire de l'équation (F)

$$\delta^2 A = \delta^2 \int_0^t \chi \, dt = \int_0^t \sum_1^n {}_r \beta_r \frac{\delta X_r'^2}{X_r'} \, dt .$$

Or les $X_r' = N_r$ sont positives, par suite,

$$\delta^2 A > 0 .$$

Donc *toute variation isochrone infiniment petite des* $X_1, X_2, \ldots, X_n$, *conservant l'intégrale* (C″), *détermine une augmentation de l'action vitale.*

Il s'agit donc d'un *minimum*. Cela prouve le *principe de la moindre action vitale.*

5. On pourrait se servir directement de la relation (22) à la place de la relation équivalente (22′) pour obtenir le même résultat, mais on peut arriver d'une manière plus simple et plus directe au résultat précédent, qu'on peut aussi mieux préciser, en suivant la voie qu'on va exposer.

Changeons, dans

$$\chi = \sum_1^n {}_r \beta_r X_r' \log X_r' = \sum_1^n {}_r \beta_r N_r \log N_r ,$$

X_r en $X_r + \Delta X_r = X_r + \xi_r$ et, par suite, X_r' en $X_r' + \xi_r' = N_r + \gamma_r$ où $\gamma_r = \xi_r'$.

En supposant $\gamma_r > -N_r$ on aura que $N_r \log N_r$ deviendra

$$(N_r + \gamma_r) \log (N_r + \gamma_r) = N_r \log N_r + \gamma_r (\log N_r + 1) + N_r f\left(\frac{\gamma_r}{N_r}\right)$$

en posant

$$f(x) = (1 + x) \log (1 + x) - x .$$

Par suite $A = \int_0^t \chi \, dt$ deviendra

$$\int_0^t \chi \, dt + \int_0^t \sum_1^n {}_r \beta_r (\log N_r + 1) \xi_r' \, dt + \int_0^t \sum_1^n {}_r \beta_r N_r f\left(\frac{\gamma_r}{N_r}\right) dt .$$

Si les ξ_r sont nulles aux limites $0, t$ il viendra

$$\int_0^t \sum_1^n {}_r \beta_r (\log N_r + 1) \xi_r' \, dt = -\int_0^t \sum_1^n {}_r \beta_r \frac{N_r'}{N_r} \xi_r \, dt \tag{23}$$

et, si les équations

$$\sum_1^n {}_r \xi_r \left(\sum_1^n {}_s a_{sr} N_s + \varepsilon_r \beta_r \right) = 0$$

sont vérifiées, on aura à cause des équations (I) que l'expression (23) sera nulle. Par conséquent $A = \int_0^t \chi \, dt$ augmentera de

$$\int_0^t \sum_1^n {}_r \beta_r N_r f\left(\frac{\gamma_r}{N_r}\right) dt,$$

quantité qui sera positive pour $\gamma_r > -N_r$ et qui ne s'annulera que lorsque toutes les γ_r seront nulles.

En effet $df(x)/dx = \log(1 + x)$ et par suite $f(\gamma_r/N_r)$ diminuera, tandis que γ_r variera entre $-N_r$ et 0, sera égale à 0 pour $\gamma_r = 0$ et augmentera pour les valeurs positives de γ_r.

On aura donc la proposition suivante, en tenant compte que les populations ne peuvent pas être négatives:

Modifions de manière isochrone le passage naturel d'une association biologique d'un état à un autre, en variant les populations des différentes espèces.

L'action vitale augmentera si les quantités de vie à l'instant initial et à l'instant final ne changeront pas et si le travail virtuel démographique sera nul à chaque instant (cfr. n° 4).

Il s'agit donc d'un minimum effectif de l'action vitale, ce qui constitue le principe de la moindre action en biologie.

6. Nous avons ainsi constitué une *Dynamique biologique* qui est pareille à la *Dynamique des systèmes matériels*. En effect le principe variationnel (§ 3, Deuxième partie) peut être comparé au principe de HAMILTON et nous avons aussi obtenu en biologie le principe correspondant à celui de la moindre action. Le passage de l'un à l'autre soit dans le domaine biologique soit dans celui des systèmes matériels peut avoir lieu d'une manière analogue, en considérant dans la mécanique des systèmes des déplacements par lesquels on n'exécute aucun travail mécanique, comme on considère en biologie des variations d'action vitale sans travail démographique.

On peut remarquer qu'en biologie il s'agit effectivement d'un minimum de l'action ce qui n'est pas toujours vrai dans la mécanique des systèmes matériels.

Cette circonstance ne doit pas nous surprendre parce que les principes généraux que nous venons de comparer, tout en ayant une apparence analogue diffèrent entre eux à cause des fonctions qui expriment d'un côté l'action mécanique et d'un autre côté l'action vitale.

Auteurs cités.

Gause G. F., 1934. *The struggle for existence*. Baltimore, The Williams & Wilkins Company, S. I–X, 1–163.

Levi B., 1931. « Bull. Un. Mat. It. », Anno X, n° 4.

Regnier et Lambin, 1934, *Étude d'un cas d'antagonisme microbien* (*B. Coli, Staphylococcus aureus*), avec des remarques par Vito Volterra. «Comptes rendus de l'Acad. des Sciences ». Décembre 1934.

Volterra Vito, 1931. *Leçons sur la théorie mathématique de la lutte pour la vie* ». Paris, Gauthier–Villars.

Volterra Vito et D'Ancona Umberto, 1935. *Les associations biologiques au point de vue mathématique*. Paris, Hermann et Cie.

TABLE DES MATIÈRES

Première partie

LES FONDEMENTS DE LA THÉORIE DE LA LUTTE POUR LA VIE.

Deuxième partie

LES LOIS GÉNÉRALES DE LA LUTTE POUR LA VIE.

XXIV.

APPLICATIONS DES MATHÉMATIQUES À LA BIOLOGIE (*)

« L'Enseignement mathématique », année XXXVI, 1937; pp. 297–330.

§ I.

Les fondements de la Science des nombres et de la Géométrie appartiennent aux époques les plus reculées de la civilisation. Ils ont donné une base aux études sur le mouvement des astres et se sont introduits peu à peu dans toutes les branches de la Science. Les applications de la mécanique doivent leur développement aux mathématiques et la statique des solides et des fluides était déjà très développée dans la Science hellène. Tout le monde sait quels admirables travaux avait accomplis Archimède dans le domaine des études sur l'équilibre.

Ce n'est que beaucoup plus tard que les mathématiques servirent de base à la dynamique. A la Renaissance, l'usage des artilleries étant devenu courant, il fallut étudier les mouvements des projectiles et les lois de la chute des graves. TARTAGLIA, CARDANO, CAVALIERI, GALILEI ont la gloire d'avoir fondé la balistique. C'est en même temps que naissaient et se développaient le calcul infinitésimal et la dynamique.

NEWTON réduisit la théorie du système du monde à une grande balistique et la dynamique générale, qui fut fondée à cette époque, a abouti à la mécanique de LAGRANGE.

Le besoin de connaissances sur la résistance des matériaux et sur la conductibilité de la chaleur donnèrent plus tard naissance à la théorie mathématique de l'élasticité et à celle de la propagation de la chaleur, alors que l'optique et l'acoustique avaient eu l'occasion déjà d'employer les méthodes mathématiques.

La thermodynamique et les principes de l'énergétique vinrent après l'invention des machines à feu. Enfin l'énorme développement de l'électricité sous toutes ses formes, et avec ses innombrables applications à la vie moderne, donna à la physique mathématique son épanouissement actuel.

C'est ainsi que les mathématiques ont pénétré dans le domaine de la physique et ont contribué largement à ses progrès. Le tour de la Chimie vint plus tard et l'on peut dire qu'elle aussi, dans beaucoup de ses branches,

(*) Leçon faite, le 17 juin 1937, dans la série des *Conférences internationales des Sciences mathématiques* organisées par l'Université de Genève.

fut aidée par les mathématiques. Aujourd'hui un bon chimiste ne peut se passer d'appliquer les mathématiques dans une foule de questions qui se présentent tous les jours. C'est d'hier, enfin, que l'hydrodynamique théorique a été renouvelée en vue des besoins créés par la nécessité de parcourir les voies aériennes.

En biologie, on ne peut pas passer sous silence le fait qu'un grand nombre de chapitres de la physique mathématique ont été utilisés pour des questions de physiologie, de biochimie, de thérapeutique, tout en restant liés à leurs méthodes propres et sans donner lieu à des branches nouvelles des mathématiques.

§ II.

Mais ce sont les idées de l'évolution qui, en se développant dans diverses directions, ont le plus contribué à constituer une nouvelle philosophie des Sciences naturelles. On est bien loin de pouvoir poser des conclusions sûres tant il y a d'objections, de difficultés et de contradictions qui se sont accumulées à la suite d'expériences, d'observations et de discussions. Ainsi tout ce qui peut éclaircir même quelques points particuliers de la théorie est précieux.

Les théories statistiques, les études génétiques sur les populations, sur leur accroissement, sur leurs variations ont énormément contribué dans ces derniers temps à ouvrir des nouveaux horizons et à faire pénétrer dans le fond des choses.

Un des plus illustres statisticiens vivants, RAYMOND PEARL, dans la préface à un récent ouvrage d'un naturaliste expérimentateur, GAUSE, affirme qu'il y a quelques années la sélection naturelle semblait être à son lit de mort, mais qu'elle s'en est relevée en montrant une surprenante puissance de vie. Selon PEARL, les écrits et les expériences de laboratoire, depuis 1859, malgré de remarquables contributions d'auteurs célèbres, n'avaient pas abouti à des conclusions d'une grande portée, mais l'attitude du monde scientifique aurait totalement changé dans ces derniers temps. Ce changement dépendrait des directions nouvelles dans lesquelles la Génétique s'est engagée et du gran intérêt actuellement éveillé par les études mathématiques sur les populations ainsi que par la conviction que la lutte pour la vie et la sélection naturelle rentrent dans la dynamique démographique.

Un mathématicièn célèbre dont nous regrettons la perte récente, KARL PEARSON, avait fondé en 1900 le journal *Biometrica*, qui a obtenu un grand succès et a donné des résultats très utiles. PEARSON avait reconnu depuis longtemps le rôle que les statistiques devaient jouer, mais on ne l'avait pas assez écouté. PEARL le déplore en constatant d'ailleurs que, pendant ces dernières années, les recherches mathématiques avaient fait progresser les questions relatives au transformisme et à l'évolution plus que ne l'avaient fait les travaux accomplis dans le demi-siècle précédent, bien que pendant cette longue période les idées darwiniennes aient eu plus de retentissement que toutes autres. C'est ainsi oue ces idées sont revenues à l'ordre du jour.

Nous allons exposer une suite de recherches destinées à éclaircir les bases de la théorie de la lutte pour la vie en donnant leurs lois fondamentales [1] [*].

§ III.

Mais avant d'entrer dans les détails de ce sujet, je désire dire quelques mots sur un chapitre général de l'analyse qui s'est développé ces derniers temps, qui a eu déjà des relations avec la biologie mathématique et qui est destiné dans l'avenir à en avoir toujours de plus étroites. Nous aurons l'occasion d'en parler au cours de cette conférence.

Les phénomènes de la vie présentent un caractère particulier dont il faut toujours tenir compte. A savoir l'influence notable et souvent prépondérante du passé pour déterminer les réactions dans le présent et l'évolution dans l'avenir.

En vertu de ce caractère nous dirons que dans ces phénomènes il y a la *mémoire du passé* ou mieux encore nous parlerons du *caractère historique* des phénomènes vitaux.

Des faits analogues se présentent aussi en dehors du monde organique et constituent l'ensemble des phénomènes qui prennent le nom d'hystéresis de traînage, etc. et qui ont une énorme importance dans la technique. Tous les ingénieurs savent qu'un pont ressent des efforts qu'il a supporté dans le passé et que dans les machines électrodynamiques le magnétisme offre des phénomènes notables de retard.

Dans le monde inorganique le terme *hérédité* a prévalu pour les désigner, mais il amènerait des confusions avec le concept d'hérédité qui est adopté en biologie. Peut-être vaut-il mieux se rallier au terme *phénomènes historiques*, tant dans le monde organique que dans le monde inorganique.

Or, il y a une analyse mathématique pour traiter ces questions; c'est l'*analyse fonctionnelle*. Bien probablement, celle-ci sera destinée à jouer un rôle prépondérant dans les questions de biologie mathématique. Jusqu'à présent elle a donné lieu à quelques propositions et à un chapitre spécial de la théorie de la lutte pour la vie.

§ IV.

Mais revenons à l'exposé des nouvelles théories.

Elles se présentent sous une forme extrêmement systématique et qui est tout à fait comparable à celle qu'a adopté depuis longtemps la dynamique analytique.

(1) Pour la bibliographie, voir: VOLTERRA et D'ANCONA, *Les associations biologiques au point de vue mathématique*. Paris, 1935, Hermann (Actualités scientifiques et industrielles).

(*) Cfr. anche i lavori sulle associazioni biologiche inseriti in queste «Opere» [N.d.R.].

On peut, en effet, prendre pour point de départ des propositions simples et presque évidentes en les regardant comme des postulats ou des axiomes et procéder d'une manière entièrement déductive en obtenant des équations générales applicables au plus grand nombre des cas. Ces équations, de type différentiel, se transforment et s'intègrent comme les équations de la mécanique et de la physique mathématique. Elles peuvent prendre la forme canonique qui appartient aussi aux équations de la mécanique céleste. On peut enfin les rattacher à un principe général unique qui est celui qui se retrouve dans un très grand nombre de cas, comme principe souverain de la nature. C'est le principe de minimum d'après lequel la nature agit toujours de manière à épargner le plus possible. FERMAT l'avait entrevu comme

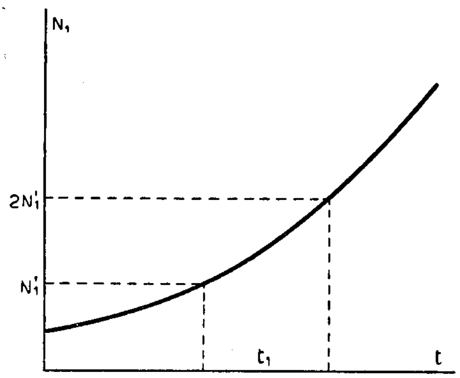


Fig. 1. – Croissance libre d'une espèce (courbe exponentielle croissante).

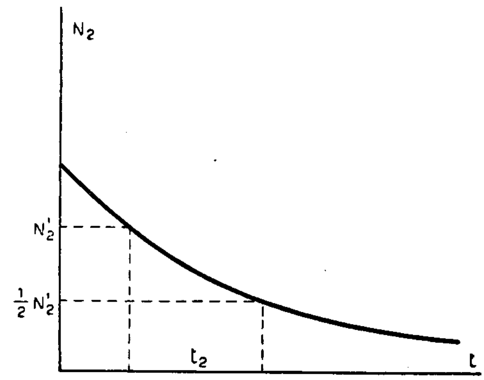


Fig. 2. – Epuisement libre d'une espèce (courbe exponentielle décroissante).

base de la propagation de la lumière, MAUPERTUIS comme fondement de la mécanique et évoluant, après HAMILTON, JACOBI et d'autres savants, il est en train de pénétrer dans tous les domaines de la philosophie naturelle.

Commençons par considérer le cas d'un nombre quelconque d'espèces animales vivant dans le même milieu et supposons que les individus de certaines espèces dévorent ceux d'autres espèces. Nous laissons de côté le cas où plusieurs espèces se disputent la même nourriture, cas qui est beaucoup plus simple que l'autre (voir § XI).

Pour fixer les idées on peut imaginer un cas réel d'animaux carnivores qui se nourrissent d'animaux herbivores tandis que ceux-ci se nourrissent de plantes. On peut supposer que les trois espèces animales et végétales vivent dans une une île séparée du reste du monde.

Un autre cas pratique fréquent est celui d'insectes nuisibles à certaines espèces végétales et d'autres insectes qui détruisent les premiers.

Si une espèce est seule, l'on peut prendre comme équation qui représente sa multiplication, l'équation $\frac{dN}{dt} = \varepsilon N$ où N désigne le nombre des individus ou la population et ε le coefficient d'accroissement. Si celui-ci est positif, on a un accroissement réel de l'espèce, s'il est négatif, on a au contraire un épuisement. Cette équation exprime la *loi malthusienne* (figg. 1 et 2).

On peut prendre le coefficient constant si les conditions de vie sont telles que la nourriture ne vient jamais à manquer ou à subir des perturbations.

Son intégrale est $N = N_0 e^{\varepsilon t}$ où N_0 est la valeur de N pour $t = 0$. Si au contraire les conditions de vie sont affectées par l'accroissement de l'espèce, alors il faut diminuer le coefficient d'accroissement et en première approximation on peut le diminuer proportionnellement aux nombres des individus existants. On trouve ainsi l'équation $\frac{dN}{dt} = (\varepsilon - \lambda N) N$ qui s'intègre facilement et qui amène à la loi de VERHULST–PEARL représentée par la formule

Fig. 3. – Courbe logistique.

$$N = \frac{\varepsilon N_0 e^{\varepsilon t}}{\varepsilon + N_0 \lambda (e^{\varepsilon t} - 1)}$$

et par la courbe bien connue que nous reproduisons dans la figure 3. La figure 4 donne des résultats expérimentaux qui vérifient la théorie.

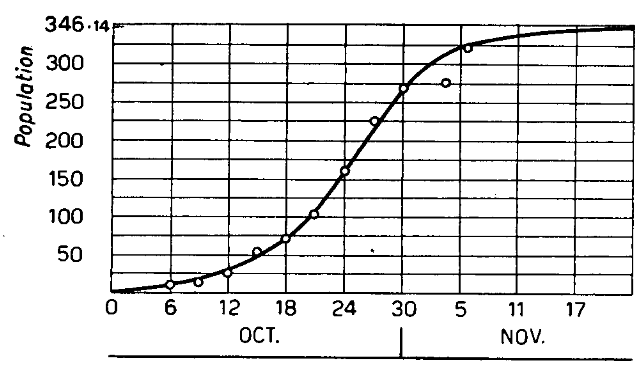


Fig. 4. – Accroissement d'une population de *Drosophila* (d'après PEARL).

J'ai étudié aussi le cas où des produits métaboliques se forment, lesquels empoisonnent le milieu. Même alors l'analyse mathématique peut être appliquée, tout en devenant beaucoup plus compliquée: il faut tenir compte que l'empoisonnement croît peu à peu et que le passé a une influence sur les conditions actuelles.

C'est donc un cas *historique* et pour le traiter il faut recourir aux équations intégro-différentielles qui forment un chapitre de l'analyse fonctionnelle (fig. 5).

§ V.

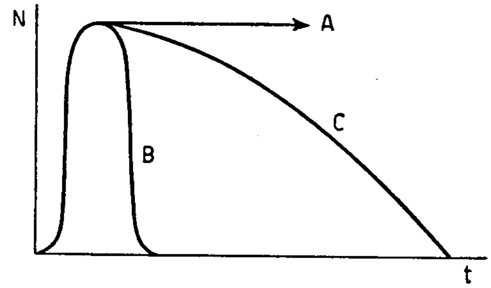


Fig. 5. – Courbes de croissance d'une population.

A. Courbe logistique. – B. Courbe de l'intoxication pure. C. Courbe mixte de PEARL et de l'intoxication constante.

Mais laissons le cas d'une seule espèce et passons à celui de plusieurs espèces. A cause de leur action mutuelle les coefficients d'accroissement seront modifiés et on pourra en première approximation considérer ces modifications comme proportionnelles aux nombres des individus des différentes espèces. Or, si dans la lutte pour la vie les uns dévorent les autres, ces modifications seront avantageuses pour les espèces dévorantes et défavorables aux espèces dévorées.

Pour mettre effectivement en équation le problème, le plus simple est de recourir au *principe des rencontres*.

Soit N_r le nombre des individus de l'espèce r et N_s le nombre des individus de l'espèce s. Alors la probabilité qu'un individu de la première espèce rencontre un individu de la seconde espèce sera proportionnelle à

$$N_r N_s$$

et par suite on pourra exprimer par

$$m_{rs} N_r N_s$$

le nombre des rencontres qui auront lieu dans chaque unité de temps.

Supposons qu'à chaque rencontre soient détruits

$$p_{rs} \qquad\qquad (p_{rs} \leq 1)$$

individus d'une des deux espèces, par exemple de la première. Dans ce cas il y en aura

$$p_{rs}\, m_{rs} N_r N_s$$

qui seront détruits dans l'unité de temps.

Ceci arrive à la première espèce. Comment pourra-t-on calculer la modification subie par la seconde espèce ? On peut faire un calcul très grossier de la manière suivante. Désignons par

$$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$$

les poids moyens des individus des n espèces et par $P_1, P_2, \cdots, P_n$ les poids totaux de tous les individus appartenant à chaque espèce.

On aura évidemment

$$N_1 = \frac{P_1}{\beta_1}, \quad N_2 = \frac{P_2}{\beta_2}, \quad \cdots, \quad N_n = \frac{P_n}{\beta_n}.$$

Or si un individu de l'espèce r est dévoré par des individus de l'espèce s le poids P_r deviendra $P_r - \beta_r$ tandis que le poids P_s deviendra $P_s + \beta_r$;

par suite les nombres des individus des deux espèces deviendront (cela d'une manière approchée, mais tout à fait grossière)

$$\frac{P_r}{\beta_r} - 1 \,, \quad \frac{P_s + \beta_r}{\beta_s} \,.$$

Donc, en restant toujours au point de vue approché, on pourra dire que, dans l'unité de temps, à cause des rencontres des individus de l'espèce r avec les individus de l'espèce s, on aura une diminution des individus de l'espèce r donnée par $p_{rs}\, m_{rs}\, N_r\, N_s$ tandis qu'il y aura une augmentation des individus de l'espèce s donnée par $p_{rs}\, m_{rs}\, N_r\, N_s\, \beta_r/\beta_s$.

En posant $a_{rs} = p_{rs}\, m_{rs}\, \beta_r$, la diminution des individus de l'espèce r sera exprimée par $a_{rs}/\beta_r\, N_r\, N_s$ et l'augmentation des individus de l'espèce s par $a_{rs}/\beta_s\, N_r\, N_s$.

On pourra toujours parler d'augmentation en introduisant des nombres négatifs. Nous conviendrons donc de poser $a_{rs} = - a_{sr} > 0$. Dès lors les deux espèces r, s augmentent algébriquement dans l'unité de temps, en vertu de leurs rencontres, respectivement de $a_{sr}/\beta_r\, N_r\, N_s$ et de $a_{rs}/\beta_s\, N_r\, N_s$, où l'on admet qu'une augmentation négative soit une diminution.

On en déduit que les augmentations des deux espèces dans le temps dt seront

$$\frac{a_{sr}}{\beta_r}\, N_r\, N_s\, dt \quad , \quad \frac{a_{rs}}{\beta_s}\, N_r\, N_s\, dt \,.$$

On peut répéter le même raisonnement pour chaque couple. C'est pourquoi les nombres

$$\frac{1}{\beta_1}, \frac{1}{\beta_2}, \dots, \frac{1}{\beta_n}$$

seront pris comme *équivalents* des individus des différentes espèces. En effet, étant supposé que $1/\beta_r$ individus de l'espèce r peuvent se transformer en $1/\beta_s$ individus de l'espèce s nous avons admis que $1/\beta_r$ individus de l'espèce r sont équivalents à $1/\beta_s$ individus de l'espèce s.

Nous avons pris dans ce qui précède (et cela en nous basant sur un raisonnement très grossier) les valeurs inverses des poids moyens comme *équivalents* mais il nous suffira d'admettre l'existence d'*équivalents*, même s'ils ne sont pas les inverses des poids moyens, pour obtenir le résultat que nous venons d'exposer.

§ VI.

Nous sommes maintenant en mesure d'écrire les équations générales de la lutte pour la vie.

Soit en effet ε_r le coefficient d'accroissement de l'espèce r lorsqu'elle est seule; en supposant que toutes les espèces coexistent, l'accroissement de la population N_r dans le temps dt sera donné par

$$\left(\varepsilon_r + \frac{1}{\beta_r}\, \Sigma_s\, a_{sr}\, N_s\right) N_r\, dt \,.$$

D'où les équations différentielles

$$\frac{dN_r}{dt} = \left(\varepsilon_r + \frac{1}{\beta_r} \Sigma_s a_{sr} N_s\right) N_r, \tag{1}$$

qui sont équivalentes à

$$\beta_r \frac{dN_r}{dt} = (\varepsilon_r \beta_r + \Sigma_s a_{sr} N_s) N_r \tag{1'}$$

ou à

$$\frac{d}{dt} \log N_r^{\beta_r} = \varepsilon_r \beta_r + \Sigma_s a_{sr} N_s \tag{1''}$$

dans lesquelles

$$a_{sr} = -a_{rs} \quad , \quad a_{rr} = 0 .$$

Nous pouvons envisager des cas particuliers intéressants (se référer aux figg. 6, 7, 8, § XI). Si l'on n'a, par exemple, que deux espèces, les équations précédentes deviennent

$$\frac{dN_1}{dt} = \left(\varepsilon_1 + \frac{1}{\beta_1} a_{21} N_2\right) N_1 \quad , \quad \frac{dN_2}{dt} = \left(\varepsilon_2 + \frac{1}{\beta_2} a_{12} N_1\right) N_2$$

ou

$$\frac{dN_1}{dt} = (\varepsilon_1 - \gamma_1 N_2) N_1 \quad , \quad \frac{dN_2}{dt} = (-\varepsilon_2 + \gamma_2 N_1) N_2 . \tag{2}$$

On suppose, lorsqu'on écrit ces équations (2), que la seconde espèce dévore la première et $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \gamma_1, \gamma_2$ soient positifs et que l'on remplace ε_2 par $-\varepsilon_2$.

Si on a trois espèces, dont la seconde dévore la première, la première dévore la troisième et la troisième la seconde, il viendra

$$\begin{cases} \dfrac{\beta_1}{N_1} \dfrac{dN_1}{dt} = a + q N_3 - r N_2 \quad , \quad \dfrac{\beta_2}{N_2} \dfrac{dN_2}{dt} = b + r N_1 - p N_3 , \\ \dfrac{\beta_3}{N_3} \dfrac{dN_3}{dt} = c + p N_2 - q N_1 , \end{cases} \tag{2'}$$

où a, b, c remplacent $\varepsilon_1 \beta_1, \varepsilon_2 \beta_2, \varepsilon_3 \beta_3$, tandis que p, q, r remplacent a_{23}, a_{31}, a_{12} et où tous ces coefficients sont positifs.

Et ainsi de suite car on peut multiplier les exemples autant que l'on veut.

Ces équations jouent dans la dynamique démographique un rôle analogue aux équations de LAGRANGE dans la dynamique des corps.

Un simple examen de ces équations au point de vue analytique nous révèle une propriété très importante; c'est le *principe de la conservation des espèces*. On peut l'énoncer en disant que: *si une espèce existe à un certain instant, elle existera toujours et aura toujours existé.*

Il ne faut pas s'étonner de ce résultat qui, au premier abord, peut paraître paradoxal; il faut tenir compte du fait que les associations que nous envisageons sont des êtres idéaux tout à fait comparables aux êtres théoriques utilisés depuis longtemps dans les autres sciences et que l'on définit par une idéalisation des êtres réels. C'est ainsi qu'on suppose en mécanique rationnelle que les corps solides sont indéformables, que les contacts ont lieu sans frottement; et il est bien connu que pour pouvoir appliquer les mathématiques, une telle idéalisation est nécessaire, c'est-à-dire qu'il est nécessaire d'attribuer des propriétés absolues aux êtres qu'on étudie. Ces propriétés ne sont réalisées que d'une manière approchée dans le monde réel.

D'autre part, même dans le cas théorique traité, le nombre des individus d'une espèce peut se réduire à zéro, mais il faut pour cela un temps infiniment long. Dans ce cas on dit que *l'espèce s'épuise.*

§ VII.

Dans bien des cas il est préférable de mettre les équations générales sous une autre forme. Il faut pour cela introduire un nouveau concept destiné à jouer un rôle important en statistique; c'est la *quantité de vie.*

Rapportons-nous à une représentation graphique: dans une bande verticale correspondant à un certain milieu, dessinons des bandes horizontales égales et consécutives qui correspondent à des années qui se suivent les unes les autres en partant d'une bande qui est à l'origine des temps. Menons des segments verticaux, chacun desquels part de l'année où commence la vie de chaque individu d'une certaine espèce, vivant dans le milieu envisagé, et continue pendant toute sa vie en s'arrêtant à l'année où finit son existence. La vie de chaque individu est mesurée par le nombre des bandes horizontales rencontrées par chaque segment et, à la fin d'un certain temps, on peut regarder le nombre total de ces rencontres comme exprimant la quantité de vie de l'espèce à partir de l'origine des temps jusqu'à l'année où l'on s'est arrêté.

Le nombre des rencontres d'une bande horizontale avec les segments verticaux donne la population de l'espèce dans l'année correspondant à cette bande. Par suite, la somme des populations des diverses années depuis l'origine des temps jusqu'à une certaine année est égale à la totalité des rencontres que nous venons de considérer. Elle peut être regardée comme la *mesure de la quantité de vie* de l'espèce pendant la même durée de temps.

Si l'on appelle N_h la population dans l'année h,

$$\sum_1^m {}_h N_h$$

exprime la quantité de vie de l'espèce depuis l'origine des temps jusqu'à l'année m. Si l'on passe du discontinu au continu en appelant $N(t)$ la population au temps t,

$$X = \int_0^t N(t)\, dt$$

exprime la quantité de vie de l'espèce pendant l'intervalle de temps $0, t$.

On peut s'attacher dans les calculs statistiques indifféremment à la considération de N ou à celle de X car ces quantités sont liées entre elles pas les relations

$$X = \int_0^t N(t)\,dt \quad , \quad N = \frac{dX}{dt} = X'.$$

Revenons aux n espèces ayant les populations $N_1, N_2, \cdots, N_n$. Leurs quantités de vie sont

$$X_1 = \int_0^t N_1(t)\,dt\,,\ X_2 = \int_0^t N_2(t)\,dt\,, \cdots, X_n = \int_0^t N_n(t)\,dt$$

et en introduisant les éléments

$$X_1, X_2, \cdots, X_n\,;\ X_1' = N_1\,,\ X_2' = N_2\,, \cdots, X_n' = N_n$$

on peut remplacer les équations (1′) par les suivantes

$$(3) \qquad \beta_r \frac{d^2 X_r}{dt^2} = \left(\varepsilon_r \beta_r + \sum_1^n {}_s\, a_{sr} X_s'\right) X_r'.$$

Nous verrons tout à l'heure que la substitution des équations (3) aux équations (1′) est bien loin d'être une substitution banale comme il pourrait paraître au premier abord.

§ VIII.

Dans l'étude des équations (1), la première question qui se pose est de chercher les conditions dans lesquelles les populations restent constantes.

Ce sont les conditions d'*équilibre* ou de l'*état stationnaire*.

Ces conditions sont

$$\left(\varepsilon_r \beta_r + \sum_1^n {}_s\, a_{sr} N_s\right) N_r = 0$$

les racines de ces équations étant positives. Nous pouvons supposer, par exemple, $N_r = 0$; mais dans ce cas, en vertu du principe de la conservation de l'espèce, N_r reste nul. Cela revient évidemment à supprimer l'espèce r de l'association, qui est par suite réduite. Considérons donc les cas où

$$(4) \qquad \varepsilon_r \beta_r + \sum_1^n {}_s\, a_{rs} N_s = 0\,,$$

les racines de ces équations étant positives.

Nous les appellerons les *cas d'équilibre* de l'association, les autres étant négligées.

Une étude approfondie des équations (4) exige une analyse très délicate que nous ne reproduisons pas. Il nous suffit de dire qu'il faut distinguer le cas où le nombre des espèces est pair de celui où il est impair. C'est le premier cas qui est le plus intéressant. Dans l'autre, l'association perd sa stabilité parce que quelques espèces s'épuisent ou tendent à croître indéfiniment.

Rapportons-nous donc à un nombre pair d'espèces. On voit facilement que si tous les coefficients d'accroissement ont le même signe, l'équilibre n'est pas possible et que si nous augmentons ou diminuons simultanément ces coefficients, les populations d'équilibre de quelques espèces augmenteront et celles d'autres espèces diminueront. Or, on peut aller beaucoup plus loin dans la distinction entre les premières et les secondes. En effet, on peut distinguer dans une association biologique trois catégories d'espèces:

1) les espèces qui dévorent les autres sans être dévorées par aucune;

2) celles qui sont dévorées par d'autres sans en dévorer aucune;

3) celles qui sont dévorées par d'autres espèces et en dévorent aussi d'autres.

Il peut arriver que toutes les catégories existent, ou qu'il en existe deux. S'il n'en existe qu'une seule, elle doit être de la troisième sorte.

Supposons maintenant qu'on diminue tous les coefficients d'accroissement; on peut démontrer alors, par un raisonnement très subtil, qu'il y aura au moins une espèce appartenant à la seconde ou à la troisième catégorie dont la population d'équilibre augmentera et qu'il y en aura une au moins qui appartient à la première ou à la troisième catégorie dont la population diminuera.

Ce résultat a un grand intérêt pour ce qui suit parce qu'il est à la base de l'une des lois fondamentales des fluctuations biologiques.

§ IX.

On sait que, dans la mécanique, on déduit des équations fondamentales certaines intégrales qui ont un intérêt considérable par les conséquences qu'on en tire. De même ici on peut trouver des intégrales importantes des équations (3). Nous ne développerons pas l'analyse qui permet de les obtenir, ni même nous ne les écrirons toutes, mais nous nous attacherons à la considération des lois générales qui en sont les conséquences.

Commençons par établir le principe que nous avons appelé de la *conservation de l'énergie démographique*.

Posons

$$\sum_1^n {}_r \beta_r N_r = \sum_1^n {}_r \beta_r X'_r = L .$$

Puisque $1/\beta_r$ est l'équivalent de chaque individu de l'espèce, β_r peut être regardé comme sa *valeur* et par suite $L = \sum_1^n {}_r \beta_r N_r$ est la *valeur de toute l'association*. Au point de vue biologique, on peut la regarder comme une *énergie démographique actuelle* tandis que $M = C - \sum_1^n {}_r \beta_r \varepsilon_r X_r$ sera considérée comme une *énergie démographique potentielle*, étant supposé que la constante C est la limite supérieure de $\sum_1^n{}_r \beta_r \varepsilon_r X_r$, appelé *potentiel démographique*. Or, la première intégrale qu'on tire des équations (3) est

$$L + M = \text{const.}$$

Cette intégrale exprime que *la somme des deux énergies démographiques est constante*, c'est-à-dire que *l'une se transforme dans l'autre*. Cette proposition est analogue au théorème des forces vives en mécanique.

Nous avons fait déjà allusion aux produits cataboliques émis quelquefois par les individus et dit que ces produits sont capables, dans certains cas, d'une intoxication du milieu (voir § IV). Si nous envisageons l'action de ces produits cataboliques d'une manière tout à fait générale, nous sommes conduits à un problème d'analyse historique qui s'exprime par des équations intégrodifférentielles. Mais on peut le simplifier en supposant que l'action due à chaque espèce reste constante. Dans ce cas elle sera à chaque instant proportionnelle à la quantité de vie de l'espèce. Il est alors possible de modifier les coefficients d'accroissement de chaque espèce en y ajoutant une expression linéaire des quantités de vie.

Si les actions d'intoxication sont réciproques, on peut introduire un potentiel démographique en ajoutant une forme quadratique au potentiel linéaire précédent. L'énergie potentielle démographique devient alors égale à une constante diminuée de la valeur totale du potentiel (§ XIII).

Le principe de la conservation de l'énergie démographique ne subit ainsi aucune altération de forme.

§ X.

Etablissons maintenant les lois des fluctuations biologiques. Elles se déduisent de certaines intégrales des équations fondamentales.

On peut d'abord donner à celles-ci une interprétation cinématique.

Supposons par exemple que le nombre des espèces soit trois, alors on voit que les seconds membres des équations (2') sont les formules bien connues de la cinématique des corps rigides à trois dimensions où les translations correspondent à a, b, c, les rotations correspondent à p, q, r et les coordonnées sont N_1, N_2, N_3.

Dans le cas général les seconds membres des équations (1'') peuvent être envisagés comme donnant les composantes d'un *déplacement infiniment petit* ou de la *vitesse* d'un point appartenant à un espace rigide à n dimensions, les populations étant les coordonnées, les produits $\varepsilon_r \beta_r$ les translations, et les coefficients a_{rs} les rotations.

Mais, tandis qu'en cinématique les premiers membres sont les dérivées des coordonnées, dans les formules (1'') les premiers membres sont les dérivées des logarithmes des puissances $N_r^{\beta_r}$ des populations. Cela déforme complètement l'image du mouvement.

Si les équations (4) ont les racines $q_1, q_2, \cdots, q_n$ il y a un centre de rotation et si l'on prend, pour un instant, celui-ci comme origine des coordonnées, la somme des produits des seconds membres par les coordonnées, est nulle et par suite la somme des produits des premiers membres par les coordonnées est aussi nulle. Or cette somme est la dérivée exacte d'une expression qu'on calcule facilement. Cette dernière est donc constante et par suite on obtient une intégrale. Elle s'écrit

$$\sum_{1}^{n}{}_r\, \beta_r (N_r - q_r \log N_r) = \text{const.} \tag{5}$$

où $q_1, q_2, \cdots, q_n$ étant positives dénotent les populations d'équilibre.

Si l'une des quantités N_r croit indéfiniment ou tend vers zéro, le premier membre de l'équation précédente croît indéfiniment, ce qui est contradictoire au fait qu'il doit être toujours égal à une constante finie. On en déduit que chacun des nombres $N_1, N_2, \cdots, N_n$ doit se conserver compris entre deux nombres positifs finis.

L'existence des fluctuations est ainsi démontrée.

Les fluctuations ne peuvent pas s'amortir, car on peut démontrer que toutes les quantités $N_1, N_2, \cdots, N_n$ ne peuvent tendre vers des limites. Il faut donc qu'elles oscillent indéfiniment.

La moyenne d'un nombre $N(t)$ pendant un intervalle de temps (t_0, t) est le rapport

$$\frac{1}{t - t_0}\int_{t_0}^{t} N(t)\, dt = \frac{X(t) - X(t_0)}{t - t_0}.$$

Si nous supposons que cet intervalle de temps augmente indéfiniment, la limite de ce rapport s'appelle la *moyenne asymptotique* de $N(t)$.

Or, les équations (1) montrent que ces moyennes asymptotiques existent et sont les valeurs des nombres des individus des espèces dans l'état d'équilibre. On peut donc appliquer les propriétés que nous avons trouvées pour les populations d'équilibre aux moyennes asymptotique. En particulier on pourra énoncer le théorème suivant: *Si l'on diminue tous les coefficients d'accroissement, les moyennes asymptotiques de quelques-unes des espèces dévorantes diminuent et les moyennes asymptotiques de quelques-unes des espèces dévorées augmentent.*

En outre, on voit que les moyennes asymptotiques étant égales aux populations d'équilibre, qui ne sont pas affectées par les états initiaux, les dites moyennes ne dépendent pas des conditions initiales.

Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer les *trois lois fondamentales des fluctuations*, qui résument les résultats que nous venons d'obtenir.

Première loi. - Loi de la conservation des fluctuations.

Les nombres des individus des différentes espèces sont compris entre des nombres positifs, et il existe toujours des fluctuations qui ne s'amortissent pas.

Deuxième loi. - Loi de la conservation des moyennes.

Si l'on prend, comme moyennes des nombres des individus des différentes espèces, les limites de leurs moyennes pour des durées de temps infiniment longues (moyennes asymptotiques), ces moyennes sont des constantes indépendantes des valeurs initiales des nombres des individus des espèces.

Troisième loi. - Loi de la perturbation des moyennes.

Si l'on détruit toutes les espèces uniformément et proportionnellement aux nombres des individus il y aura toujours des espèces qui en seront avantagées (c'est-à-dire dont les moyennes augmenteront) et il y aura toujours des espèces défavorisées (c'est-à-dire dont les moyennes diminueront).

Parmi les premières, il y en aura une au moins de celles qui sont dévorées par d'autres et parmi les secondes, il y en aura une au moins de celles qui en dévorent d'autres.

§ XI.

Il est intéressant de particulariser ces lois au cas de deux espèces, la deuxième dévorant la première. L'intégrale (5) devient [en tenant compte des équations (2)]

$$(5') \qquad \frac{1}{\gamma_1}\left(N_1 - \frac{\varepsilon_2}{\gamma_2}\log N_1\right) + \frac{1}{\gamma_2}\left(N_2 - \frac{\varepsilon_1}{\gamma_1}\log N_2\right) = \text{const.}$$

et, en regardant les nombres positifs N_1, N_2 comme les coordonnées cartésiennes d'un point du plan, on obtient un cycle fermé. Le phénomène est donc périodique et les moyennes asymptotiques sont les moyennes pendant une période. Elles sont les populations d'équilibre.

Les trois lois des fluctuations biologiques deviennent alors:

Première loi. - Loi du cycle périodique.

Les fluctuations des deux espèces sont périodiques.

Deuxième loi. - Loi de la conservation des moyennes.

Les moyennes des nombres des individus des deux espèces pendant une période sont constantes et ne dépendent pas des valeurs initiales.

Troisième loi. - Loi de la perturbation des moyennes.

Si l'on détruit les deux espèces uniformément et proportionnellement aux nombres de leurs individus, la moyenne du nombre d'individus de l'espèce dévorée croît et la moyenne du nombre des individus de l'espèce dévorante diminue.

Le cas de deux espèces a donné lieu à beaucoup de vérifications pratiques.

Chapmann et son école ont fait dans ce domaine des études sur les insectes. Chapmann a étudié spécialement l'augmentation de la population du *tribolium confusum*, coléoptère vivant dans la farine, c'est-à-dire dans un milieu dont il est aisé de maintenir constante la température, l'humidité et la quantité de nourriture. Ses recherches ont été poursuivies et étendues par PARK et STANLEY.

GAUSE a examiné une association constituée de deux espèces dont l'une dévore l'autre et a pu établir que, sous certaines conditions, les fluctuations prévues par le calcul sont vérifiées. Les espèces envisagées étaient des acares de la farine ainsi que des protozoaires.

GAUSE avait d'abord étudié le cas des deux espèces qui se disputent la même nourriture, dont nous avons laissé de côté le développement mathématique (cf. § IV). Il avait commencé ses expériences en se servant de deux espèces de levures, le *Saccharomices cerevisae* et le *Schizosaccharomices kefir*. Dans ses recherches ultérieures, il a étudié les vicissitudes de deux espèces de protozoaires, le *Paramecium caudatum* et le *Paramecium aurelia*. Lorsque la nourriture, constituée par des bactéries et des levures, est épuisée, une des deux espèces prend le dessus, tandis que l'autre diminue. Il arrive même qu'une espèce s'épuise complètement et cela en accord avec les résultats du calcul.

Mais GAUSE a examiné aussi des cas qui correspondent à ceux qu'on a développés mathématiquement. C'est ainsi qu'il a expérimenté sur une association de deux espèces de protozoaires, dont l'une, le *Didinium nasutum*, dévore l'autre, le *Paramecium caudatum*. Lorsqu'il y a des intervalles constants d'immigrations des individus des deux espèces on obtient des fluctuations périodiques. Cela correspond au fait que si la destruction d'une espèce par l'autre est très active, les fluctuations deviennent imperceptibles.

Dans une expérience réalisée par GAUSE l'intensité de destruction était par elle-même peu élevée. Il s'agissait d'une association constituée par le *Paramecium bursaria* et *Paramecium aurelia* dévorant les levures *Schizosaccharomices pombe* et *Saccharomices exiguus*. Par d'opportunes dispositions les fluctuations prévues par le calcul apparaissaient de façon tout à fait évidente.

Nous ne rappellerons pas d'autres expériences de GAUSE qui vérifient d'une manière assez satisfaisante les résultats théoriques.

D'ANCONA a étudié les statistiques des marchés de poissons de Trieste, de Fiume et de Venezia pour les années 1910 à 1923. D'après les chiffres indiquant les pourcentages pour chaque espèce de poissons vendus sur les marchés mentionnés il apparut qu'à la suite de l'interruption de la pêche pendant la période de guerre de 1914-1918, il y avait eu une diminution relative, pour certaines espèces, et une augmentation pour d'autres. Les espèces dont on constatait l'augmentation étaient pour la plupart des espèces voraces (particulièrement les Sélaciens) qui dévorent d'autres poissons, tandis que les espèces en diminution étaient celles qui se nourrissent de végétaux ou d'animaux invertébrés et qui sont souvent la proie des espèces voraces.

La constatation de ces faits amena D'ANCONA à la conclusion suivante: tandis que la pêche, telle qu'on la pratiquait dans les années précédant la guerre, avait déplacé l'équilibre naturel qui existe entre les espèces de proie et les espèces moins protégées à l'avantage de ces dernières, la suspension de la pêche pendant la guerre avait rétabli les conditions primitives, en favorisant de nouveau le développement plus vigoureux des espèces de proie.

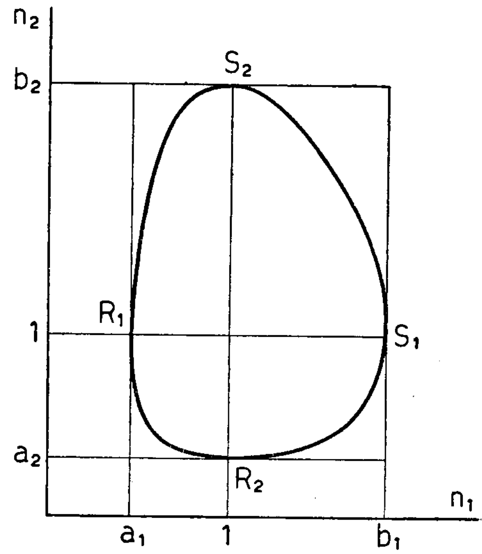


Fig. 6. – Diagramme du cycle de fluctuations de deux exspèces dont l'une dévore l'autre. Les coordonnées n_1, n_2 sont: $N_1 \gamma_2/\varepsilon_2$, $N_2 \gamma_1/\varepsilon_1$, où N_1 et N_2 dénotent les populations des deux espèces.

Selon D'ANCONA il y aurait un optimum dans l'intensité avec laquelle se pratique la pêche; en laissant tomber cette activité au-dessous d'un certain niveau, on favorise les espèces plus voraces au détriment des autres; en dépassant la mesure dans le sens opposé, on détermine la diminution de toutes les espèces (fig. 7).

On voit que cet enseignement, tiré des statistiques, s'accorde avec notre troisième loi, celle de la perturbation des moyennes. Or, nous l'avions formulée avant de connaître les résultats auxquels était parvenu D'ANCONA.

Des recherches semblables ont été faites par MARCHI (1929) sur les produits du marché de Cagliari, en Sardaigne. Il fut amené à des conclusions qui se rapprochent de celles de D'ANCONA; lui aussi remarqua une augmentation des Sélaciens pendant la période qui suivit immédiatement la guerre.

Nous avons vu que l'équation (5′) peut être représentée par un cycle fermé d'où l'on a déduit la périodicité du phénomène. Mais cette périodicité ainsi que l'allure des fluctuations peut être mise en évidence beaucoup mieux en dessinant les courbes qui représentent les nombres des individus de deux espèces en fonction du temps. Nous reproduisons ici ces courbes très caractéristiques qui sont devenues aujourd'hui très connues (fig. 8).

La troisième loi, c'est-à-dire la loi de perturbation des moyennes, nous dit que si l'on cherche à détruire les espèces il y en a qui s'en trouvent avantagées. Parmi celles-ci il y a des espèces dévorées tandis qu'il y a des espèces qui sont défavorisées, parmi lesquelles il y a des espèces dévorantes.

DARWIN avait eu l'intuition que quelque chose d'analogue devait se produire dans la nature lorsqu'il a dit que la chasse, au lieu d'être nuisible, est quelquefois avantageuse pour les espèces les plus utiles.

Dans le cas de deux espèces un problème se pose: jusqu'à quelle limite la destruction est-elle avantageuse à l'espèce dévorée ? Et quand est-ce qu'en dépassant cette limite la destruction est nuisible pour les deux espèces? On peut résoudre complètement ces questions qui ont un intérêt pratique.

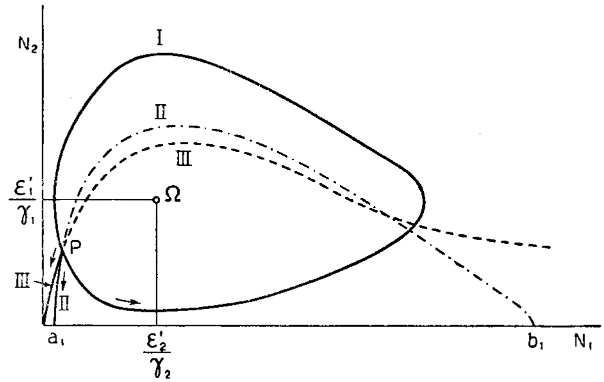


Fig. 7. - Diagramme des changements du cycle de fluctuations de deux èspèces dont l'une dévore l'autre, lorsqu'on cherche à les détruire simultanément.

Courbe I: Lorsqu'on est au-dessous de la limite complète de destruction d'une espèce.
Courbe II: Lorsqu'on rejoint cette limite.
Courbe III: Lorsq'on la dépasse.

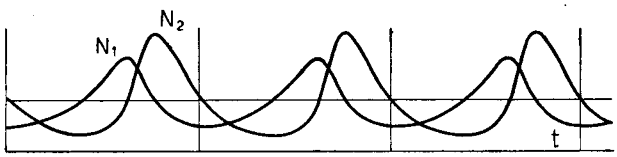


Fig. 8. - Fluctuations de deux espèces dont l'une dévore l'autre: les conditions en fonction du temps.

Mais les calculs nécessaires sont compliqués, c'est pourquoi nous nous bornerons à n'en donner qu'une simple indication et une représentation graphique (fig. 7).

§ XII.

Nous avons parlé, dans le cas d'une seule espèce, des modifications apportées à la loi de MALTHUS.

Si nous tenons compte de ce que l'augmentation de la population diminue la quantité disponible de nourriture, nous avons énoncé la loi de VERHULST-PEARL.

On peut examiner une question analogue lorsqu'on a une association de plusieurs espèces et que l'on suppose que le coefficient d'accroissement de chacune est affecté par le nombre des individus de cette espèce.

Il suffit pour cela d'ajouter dans le second membre de chacune des équations un terme contenant le carré de la population de l'espèce correspondante affecté d'un coefficient négatif. On constate alors que, s'il existe un état stationnaire, l'association tend vers cet état asymptotiquement ou au travers de fluctuations amorties. Mais on peut même étendre ces considérations et parvenir à une distinction essentielle des associations biologiques.

Remplaçons les équations (1) par

$$\frac{dN_r}{dt} = \left(\varepsilon_r - \sum_1^n{}_s\, p_{sr} N_s\right) N_r ,$$

où les p_{rs} sont des coefficients quelconques et considérons la forme quadratique

$$\sum_1^n{}_r \sum_1^n{}_s\, p_{sr}\, \beta_r\, N_s N_r , \qquad \text{où } \beta_1, \cdots, \beta_n \text{ sont positives.}$$

Dans le cas des équations (1) elle est identiquement nulle, mais d'ailleurs on pourrait supposer qu'elle ne le soit pas.

Dans le cas particulier qui a été examiné tout à l'heure, cette forme est définie positive. On peut démontrer qu'en général, si la forme est définie et positive, l'association biologique est stable, c'est-à-dire que l'association ne peut pas s'épuiser et aucune des populations ne peut croître indéfiniment. En outre, s'il existe un état stationnaire, l'association biologique s'approchera indéfiniment de cet état.

D'après les définitions que nous avons données, (§ IX) la valeur de l'association biologique ou son énergie actuelle est donnée par

$$V = L = \sum_1^n{}_r\, \beta_r N_r .$$

Dans un temps infiniment petit, l'augmentation de cette valeur est constituée de deux parties

$$dV_1 = \sum_1^n{}_r\, \varepsilon_r\, \beta_r N_r\, dt \quad , \quad dV_2 = - \sum_1^n{}_r \sum_1^n{}_s\, p_{sr}\, \beta_r N_s N_r\, dt .$$

La première est due aux causes constantes d'accroissement ou de diminution de chaque espèce. La seconde est due aux actions réciproques des individus des différentes espèces. Si celle-ci est nulle, l'association s'appellera *conservative*. Les associations biologiques conservatives sont justement celles que nous avons étudiées d'abord. Elles sont des êtres idéaux dont la nature s'approche. Si la forme fondamentale est définie et positive, les actions réciproques entre individus tendent à diminuer la valeur ou l'énergie actuelle de l'association. Nous dirons alors que l'association est *dissipative.*

La loi de la conservation de l'énergie démographique n'est plus vérifiée, car l'énergie totale diminue comme s'il existait un frottement interne au sein de l'association.

§ XIII.

Ayant indiqué les conséquences des intégrales, nous allons établir d'autres principes qui nous rapprochent des théories classiques de la mécanique analytique.

Nous avons déjà annoncé l'existence d'un principe de minimum dont on aurait pu déduire toutes les lois de la lutte pour la vie.

Nous allons maintenant l'établir. Pour cela, il faut employer les équations (3). N_r étant la population d'une espèce, dN_r/N_r est son accroissement relatif élémentaire. Si nous faisons la somme de tous ces accroissements élémentaires depuis l'existence d'un individu jusqu'à l'existence de N_r individus, nous trouvons

$$\int_1^{N_r} \frac{dN}{N} = \log N_r .$$

On peut prendre comme mesure de l'*action vitale élémentaire* le produit

$$\beta_r \log N_r \, dX_r = \beta_r \log N_r \cdot N_r \, dt = \beta_r \log X'_r \cdot X'_r \, dt$$

et si nous ajoutons toutes les actions vitales élémentaires pendant un intervalle de temps $(0 \, , t)$ nous aurons pour l'espèce r

$$\int_0^t \beta_r \log N_r \cdot X'_r \, dt .$$

Si nous envisageons toutes les espèces de l'association l'*action vitale totale* sera donnée par

$$A = \int_0^t \sum_1^n \beta_r \log N_r \cdot N_r \, dt .$$

Considérons maintenant la forme bilinéaire

$$Z = \sum_1^n{}_r \sum_1^n{}_s a_{rs} X'_r X_s ,$$

et le potentiel démographique P qui s'écrit (§ IX):

$$P = \sum_1^n{}_r \beta_r \varepsilon_r X_r + \frac{1}{2} \Sigma_r \Sigma_s c_{rs} X_r X_s$$

où

$$c_{rs} = c_{rs} .$$

Alors en introduisant la fonction

$$\Phi = \sum_{1}^{n} {}_r \beta_r X'_r \log X'_r + \frac{1}{2} Z + P$$

on peut mettre les équations fondamentales (3) sous la forme

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \Phi}{\partial X'_r} - \frac{\partial \Phi}{\partial X_r} = 0, \tag{6}$$

qui est la forme eulérienne des équations du calcul des variations.

L'importance de cette transformation consiste dans le fait qu'elle relie la question de la lutte pour la vie à un problème du calcul des variations.

§ XIV.

Nous allons dire un mot en général au sujet de ce chapitre de l'analyse.

Le calcul différentiel est né du problème des maxima et minima des fonctions. Si une quantité variable est représentée par une fonction dérivable on trouvera ses maxima et ses minima en annulant sa dérivée. Mais il peut arriver que la dérivée s'annule sans que l'on ait à faire ni à un maximum ni à un minimum. On dit alors que la fonction est stationnaire.

C'est là le cas le plus simple, mais on peut avoir aussi à chercher des maxima ou des minima de quantités qui ne dépendent pas d'une ou de plusieurs variables, mais qui dépendent d'une courbe variable. C'est ainsi que se présente le problème de trouver la forme qu'il faut donner au profil d'un projectile pour qu'il rencontre la moindre résistance dans l'air, ou la forme qu'il faut donner à la courbe de descente d'un corps pesant pour que le temps de la chute soit un minimum. Le calcul qui traite de ces problèmes est le calcul des variations.

Or le problème général de la mécanique se réduit à un problème du calcul des variations. C'est LAGRANGE qui l'a vu d'une manière claire pour la première fois et le principe général correspondant a été formulé sous sa forme définitive par HAMILTON, d'où son nom de *principe de* HAMILTON.

Mais de même que dans le cas simple des maxima et des minima, où les équations qu'on trouve ne donnent pas toujours des maxima ou des minima, mais quelquefois des cas stationnaires, de même le principe de HAMILTON correspond quelquefois à des cas stationnaires.

Dans le calcul des variations c'est une intégrale qui doit être rendue maximum ou minimum, ou en général stationnaire, et on cherche les conditions correspondantes que doivent satisfaire les fonctions figurant dans cette intégrale.

D'une manière analogue à ce que l'on a en Mécanique, dans le cas de la dynamique démographique la question peut être reconduite à un problème de calcul des variations et, de fait, à annuler la variation de l'intégrale

$$U = \int_0^t \Phi \, dt .$$

Lorsqu'on parle d'annuler la variation de cette intégrale, on suppose que l'on fait varier infiniment peu les quantités de vie de manière à obtenir une variation nulle de cette intégrale. Cette proposition est démontrée par la forme eulérienne sous laquelle se présentent les équations (6).

Dans ces derniers temps on a toujours eu la tendance à ramener tous les problèmes qui se présentent dans la physique et plus spécialement dans la nouvelle physique au principe de HAMILTON et nous voyons maintenant que même les lois démographiques appartiennent comme les autres lois de la philosophie naturelle à la même branche des mathématiques.

Je tiens à ajouter que le calcul des variations n'est que le premier chapitre de l'analyse fonctionnelle. Cette analyse embrasse donc, même à ce point de vue, une grande partie des sciences de la nature, s'étend jusqu'à la théorie des populations, à la lutte pour la vie et elle se relie aux problèmes de l'évolution et du transformisme.

§ XV.

Toutes les conséquences que l'on tire en mécanique du principe de HAMILTON peuvent être transportées dans le domaine de la biologie. C'est ainsi qu'on peut mettre les équations fondamentales de la lutte pour la vie sous la forme canonique.

On peut les réduire à une équation aux dérivées partielles du type de JACOBI et faire usage des méthodes d'intégration que l'on emploie pour celle-ci en cherchant par exemple des intégrales en involution. Par cette voie on se rend compte que si dans les équations (1) les coefficients a_{rs} ont la forme

$$a_{rs} = \varepsilon_r \beta_r \varepsilon_s \beta_s (m_s - m_r)$$

les $m_1, m_2, \cdots, m_n$ étant des constantes, le problème d'intégrer les équations fondamentales se réduit aux quadratures. Ayant trouvé cette propriété, on peut en suivre la trace dans les équations sous la forme primitive. Celles-ci peuvent être ramenées à la forme

$$\frac{1}{\varepsilon_r} \frac{d}{dt} \log N_r = m_r N + I$$

où

$$N = \sum_1^n {}_s \varepsilon_s \beta_s N_s \quad , \quad I = 1 - \Sigma_s \varepsilon_s \beta_s N_s m_s N_s$$

et, en éliminant N et I, on obtient des équations qui s'intègrent immédiatement.

Nous venons de prouver que les lois de la lutte pour la vie peuvent être ramenées à un principe analogue à celui de HAMILTON et nous avons vu que non seulement on peut trouver des maxima ou des minima mais aussi une intégrale stationnaire.

Nous pouvons aller beaucoup plus loin et aboutir à un vrai principe de minimum qu'on peut appeler le principe *de la moindre action vitale en biologie* et qui a peut-être une importance plus grande que les autres lois dont nous nous sommes occupés jusqu'ici. Nous en avons déjà fait allusion précédemment, mais je pense qu'il n'est pas inutile d'y revenir plus en détail.

En mécanique on peut passer du principe de HAMILTON au principe de la moindre action de plusieurs manières. JACOBI a insisté beaucoup sur la forme que prend ce principe par l'élimination du temps. Il y consacre un chapitre de ses admirables *Leçons de dynamique* et réussit à le reconduire à un théorème géométrique de manière que toute question de dynamique devient le problème des géodésiques dans un espace à plusieurs dimensions.

Mais on peut prendre la question à un autre point de vue et à la place de démontrer que la résolution d'un problème de dynamique peut être obtenue par la résolution d'un problème de minimum, on peut prouver (outre le principe de HAMILTON) que, dans tout phénomène de mouvement, il y a une quantité qui, *sous certaines conditions*, est un minimum ou au moins est stationnaire. C'est sous ce point de vue qu'il faut prendre la question en biologie.

Nous avons appelé *action vitale totale* d'une association biologique la quantité

$$A = \int_0^t \sum_1^n {}_r \beta_r N_r \log N_r \, dt = \int_0^t \sum_1^n {}_r \beta_r X'_r \log X'_r \, dt$$

et nous pouvons regarder comme *travail d'accroissement* ou *travail démographique virtuel* la quantité

$$S = \sum_1^n {}_r \left(\varepsilon_r \beta_r + \sum_1^n {}_s a_{sr} X'_s \right) \Delta X_r$$

calculée pour les changements virtuels ΔX_r des quantités de vies. Alors si, en conservant les X_r invariables aux limites $0, t$ du temps, nous changeons à chaque instant les X_r en $X_r + \Delta X_r$, S étant nul, A augmente. On tire de là le théorème: *Modifions de manière isochrone le passage naturel d'une association biologique d'un état à un autre en variant les populations des différentes espèces. L'action vitale augmente si les quantités de vie à l'instant initial et à l'instant final ne changent pas et si le travail virtuel démographique est nul à chaque instant.* Il s'agit donc d'un *minimum effectif* de l'action vitale, ce qui constitue le *principe de la moindre action* en biologie.

On peut insister qu'en biologie il s'agit effectivement d'un minimum de l'action, ce qui n'est pas toujours vrai dans la mécanique des systèmes matériels.

Cette circonstance ne doit pas nous surprendre parce que les principes généraux que nous venons de comparer, tout en ayant une apparence analogue, diffèrent entre eux à cause des fonctions qui expriment, d'un côté *l'action mécanique*, et d'un autre côté *l'action vitale*.

§ XVI.

. Nous avons parlé à plusieurs reprises de l'analyse fonctionnelle et nous avons montré l'existence de nombreuses liaisons entre les questions biologiques que nous avons traitées et cette analyse. Nous avons fait aussi allusion au fait que, dans les phénomènes vitaux, le passé a une influence prépondérante sur l'état actuel, si bien que celui-ci dépend d'une infinité de variables: celles qui caractérisent les états passés; c'est justement le domaine de l'analyse fonctionnelle celui où l'on envisage des quantités variables dépendant d'une infinité d'autres variables.

L'étude approfondie du problème de la lutte pour la vie conduit directement à ce genre de questions. En effet, l'accroissement d'une espèce ne dépend pas seulement de sa nourriture actuelle mais elle dépend aussi de son alimentation au temps passé.

Si l'on veut tenir compte de cette circonstance capitale il faut modifier les équations fondamentales. Pour simplifier, rapportons-nous au cas de deux espèces dont l'une dévore l'autre. Le coefficient d'accroissement de l'espèce dévorante ne doit alors pas être affecté du terme $\gamma_2 N_1$ qui ne dépend que de l'état actuel de l'espèce dévorée, mais doit être affecté d'un terme dépendant des valeurs de la population de l'espèce dévorée dans tous les instants précédents.

Si on suppose une dépendance linéaire, il faut donc remplacer le terme $\gamma_2 N_1$ par un terme de la forme

$$\int_{-\infty}^{t} F(t-\tau)\, N_1(\tau)\, dt$$

et les deux équations des fluctuations [voir équations (2)] s'écriront

$$\frac{dN_1}{dt} = N_1(t)\,(\varepsilon_1 - \gamma_1 N_2(t)),$$

$$\frac{dN_2}{dt} = N_2(t)\left(-\varepsilon_2 + \int_{-\infty}^{t} F(t-\tau)\, N_1(\tau)\, dt\right).$$

Par symétrie analytique, on peut les mettre sous la forme

$$\frac{dN_1}{dt} = N_1(t)\left(\varepsilon_1 - \gamma_1 N_2(t) - \int_0^t F_1(t-\tau)\, N_2(\tau)\, d\tau\right)$$

$$\frac{dN_2}{dt} = N_2(t)\left(-\varepsilon_2 + \gamma_2 N_1(t) + \int_0^t F_2(t-\tau)\, N_1(\tau)\, d\tau\right).$$

Une analyse très délicate appliquée à ces équations permet de retrouver les lois des fluctuations même dans ce cas historique. La première loi s'énonce toujours: il y a un état stationnaire autour duquel les populations des deux espèces oscillent indéfiniment. La seconde loi aussi ne change pas, ni la troisième. Ce qui change, c'est le fait que la périodicité des fluctuations, reconnue dans le cas de deux espèces, disparaît.

§ XVII.

Nous avons donné un très court aperçu des calculs mathématiques liés à la lutte pour la vie et aux fluctuations des populations qui en dépendent. Mais nous n'avons pas pu toucher aux rapports existants entre ces études et d'autres recherches scientifiques. Il y a, par exemple, une branche de la zoologie appliquée qui s'occupe de la destruction des animaux nuisibles à l'agriculture. On réalise souvent cette lutte en introduisant d'autres animaux parmi les animaux à détruire. Nous n'avons pu dire qu'un mot à ce sujet dans cette conférence, mais nous tenons à ajouter que la lutte biologique a rendu nécessaire la création de nouveaux laboratoires et l'organisation des terrains d'expériences pour les essais nécessaires. Les résultats obtenus sont de la plus grande importance au point de vue théorique comme au point de vue pratique. Des savants spécialisés parcourent divers pays à la recherche d'insectes et d'autres animaux dont on puisse se servir. L'intérêt de cette lutte s'accroît à cause des relations toujours plus nombreuses et étroites entre les différents pays. Certaines espèces nuisibles sont par suite transportées facilement d'un pays à un autre. Dans leur pays d'origine elles avaient des adversaires naturels qui en entravaient l'action. Il s'agit de trouver dans les régions où elles ont été transportées des adversaires capables aussi de freiner leur diffusion. Il est évident que les théories sur la population dont nous avons parlé jouent un rôle de premier ordre dans cette science nouvelle.

Parmi les études en rapport avec les considérations que nous avons développées il faut citer les recherches sur la lutte microbienne dans lesquelles les produits métaboliques et leurs actions sont de première importance et où il faut tenir compte des phénomènes de défense des organismes. Les cas les plus simples d'action de produits métaboliques ont été envisagés au cours de cette conférence.

Ces questions engagent même à considérer des branches de la médecine. Bien souvent des phénomènes qui se présentent dans les maladies épidémiques, en particulier leurs fluctuations, semblent avoir des rapports avec les fluctuations biologiques dont nous nous sommes occupés.

Les sciences sociologiques, enfin, ne doivent pas négliger les recherches qui ont formé le sujet de notre conférence. Pensons, en effet, aux questions de population et aux lois démographiques qui nous conduisent directement vers la sociologie et l'économie politique. On a déjà tenté d'appliquer dans ces domaines les théories que nous avons exposées, mais nous ne pouvons pas entrer dans des détails sur ce sujet car nous serions entraînés trop loin et nous dépasserions les limites que nous sommes imposées dans cette conférence.

XXV.

POPULATION GROWTH, EQUILIBRIA, AND EXTINCTION UNDER SPECIFIED BREEDING CONDITIONS: A DEVELOPMENT AND EXTENSION OF THE THEORY OF THE LOGISTIC CURVE

« Human Biology », vol. 10, n° 1, 1938; pp. 1–11.

Professor D'ANCONA has asked me if it is possible to state the mating conditions under which a population living under defined environmental conditions will decrease and vanish or on the contrary continue to grow steadily larger.

1. We can give a criterion to distinguish these two cases and settle a critical value of the population such that for a smaller value the population exhausts itself, and for a larger one, increases.

2. Let N be the population and ε the mortality coefficient. If we suppose that the ratio of the males to the females remains constant, the number of the males will be αN and the number of the females βN, α and β being two constants such that $\alpha + \beta = 1$. The number of the meetings of the two sexes in a unit of time will be proportional to $\alpha N \cdot \beta N = \alpha\beta N^2$; and if the birth of m individuals corresponds to n meetings, the number of the births in a unit of time can be expressed by:

$$K\alpha\beta \frac{m}{n} N^2 = \lambda N^2$$

K and λ being two positive constants. It results from this that in a time dt we have:

$$dN = -\varepsilon N\, dt + \lambda N^2\, dt$$

that is:

$$\frac{dN}{dt} = (-\varepsilon + \lambda N)\, N\,.$$

3. This equation is identical to the equation of VERHULST-PEARL, except for the signs of the coefficients which are interchanged.

Thus if we take the VERHULST-PEARL integral with the necessary sign-interchange, we get the formula:

$$N = \frac{-\varepsilon N_0 e^{-\varepsilon t}}{-\varepsilon - N_0 \lambda (e^{-\varepsilon t} - 1)} = \frac{\varepsilon N_0}{(\varepsilon - N_0 \lambda)\, e^{\varepsilon t} + N_0 \lambda} = N_0 \frac{1}{(1 - h)\, e^{\varepsilon t} + h}\,,$$

where N_0 is the initial population at the epoch $t = 0$ and $h = N_0 \lambda / \varepsilon$.

4. We can then distinguish three cases:

(1) $$\varepsilon - \lambda N_0 = 0 \text{ (i.e. } h = 1)$$

(2) $$\varepsilon - \lambda N_0 > 0 \text{ (i.e. } h < 1)$$

(3) $$\varepsilon - \lambda N_0 < 0 \text{ (i.e. } h > 1).$$

In the first case the population N *remains always constant* and equal to $\varepsilon/\lambda = N_0$. In the second case, when t increases indefinitely, the denominator increases indefinitely and N tends to zero, and therefore the population tends to vanish. In the third case, the denominator decreases and becomes zero when

$$e^{\varepsilon t} = \frac{N_0 \lambda}{N_0 \lambda - \varepsilon}$$

i.e. at the epoch

$$t = \frac{1}{\varepsilon} \log \frac{N_0 \lambda}{N_0 \lambda - \varepsilon},$$

we have $N = \infty$.

Of course this occurrence cannot happen; other causes lessen the increase of the population.

Thus a critical value $N_0 = \varepsilon/\lambda$ *exists above which the population grows continuously but below which it decreases and vanishes. When* $N_0 = \varepsilon/\lambda$ *the population remains stationary.*

5. The case of the vanishing can be verified, but of course the case in which the population increases indefinitely and becomes infinite after a finite time is not a realizable one. There must exist some cause which lessens the endless increase.

In the case considered by PEARL which leads to the logistic curve, it is supposed that with the increase of the population the means of subsistence become rarefied and a negative term proportional to the already existing population must be added in the increase coefficient. It would be possible to think that in our case too PEARL's term $-\mu N$ (μ being positive) must be added in the increase coefficient $-\varepsilon + \lambda N$. In this manner the latter would become $-\varepsilon + (\lambda - \mu) N$. But, if $\lambda - \mu$ is positive we find again the case we have already treated; otherwise, $\lambda - \mu$ is negative and then we have a rapid decrease of N until N becomes zero.

6. We can consider all the cases in which the increase coefficient is linear in N. The equation takes then the form

(I) $$\frac{dN}{dt} = (a + bN)N,$$

and we can distinguish four cases:

(1) $a > 0, b < 0$

(2) $a < 0, b > 0$

(3) $a > 0, b > 0$

(4) $a < 0, b < 0$.

The integral of equation (I) is:

$$e^t = \left(\frac{N}{N_0} \cdot \frac{a + b\,N_0}{a + b\,N}\right)^{1/a}, \text{ i.e. } N = \frac{N_0\,a}{(a + b\,N_0)\,e^{-at} - N_0\,b}.$$

The first case is PEARL's and leads to the logistic curve.

The second case is the case we have just discussed.

The third leads to $N = \infty$, for

$$t = \frac{1}{a} \log\left(\frac{a + bN_0}{bN_0}\right).$$

But an infinite increase after a finite time is impossible.

The fourth case leads to $N = 0$ for $t = \infty$; and is thus the extinction case.

7. We have seen that by the allowance of a restraint similar to PEARL's, i.e. a decrease proportional to the increase of the population, we add nothing essentially new to the study already made.

The failure is due to the fact that the increase coefficient is a linear function of the population. But it is obvious that, by examining the question more profoundly, we can succeed by logic and natural means in establishing for the said coefficient a second degree polynomial. In this manner the resulting demographical phenomenon becomes entirely altered.

In fact we supposed that to n meetings between individuals of different sexes would correspond m births, but the hypothesis of a constant ratio between the births and the meetings can be admitted only as a first approximation [1]. If we wish to consider the possible cases with greater accuracy, it is necessary to suppose that this ratio can be influenced by the population itself, and not solely by the rarefaction of the means of subsistence which results from the increase of the population. As a first approximation we can suppose, as it is done in analogous cases, that this ratio decreases linearly with the population. The birth number in a unit of time will be expressed by:

$$K\,\alpha\beta\,\frac{(m - \rho N)}{n}\,N^2$$

ρ being positive; i.e. by

$$(\lambda - \gamma N)N^2$$

λ and γ being positive.

(1) Compare R. PEARL and S. L. PARKER, « Proc. Nat. Ac. of Sci. », vol. 8 (1922).

8. Thus if we take into account the *mortality coefficient* $-\varepsilon$, PEARL's *term* $-\mu N$, and the *birth term* $(\lambda - \gamma N)N$, we shall obtain the increase coefficient:

$$-\varepsilon + (\lambda - \mu) N - \gamma N^2,$$

from which it results that (I) is replaced by

$$\frac{dN}{dt} = (-\varepsilon + (\lambda - \mu) N - \gamma N^2) N$$

or

$$\text{(I}'\text{)} \qquad \frac{dN}{dt} = -(c - bN + aN^2) N$$

where a and c are positive.

We will suppose too that b is positive, keeping the case of b negative apart for the present.

Let us suppose that the roots of the equation

$$\text{(II)} \qquad aN^2 - bN + c = 0$$

are real: they will be positive. Let us suppose first that they are unequal and call them α and β $(\alpha > \beta)$. The equation (I′) will be

$$\frac{dN}{dt} = -a(N-\alpha)(N-\beta)N$$

or as well

$$-a dt = \frac{dN}{(N-\alpha)(N-\beta)N}$$

and integrated

$$e^{-c(\alpha-\beta)t} = \left(\frac{N}{N_0}\right)^{\alpha-\beta} \left(\frac{N-\alpha}{N_0-\alpha}\right)^{\beta} \left(\frac{N-\beta}{N_0-\beta}\right)^{-\alpha}$$

N_0 is the value of N when $t = 0$ and we suppose N_0 different from $0, \alpha, \beta$.

We have further

$$\frac{d^2 N}{dt^2} = -aX \frac{dN}{dt}$$

where

$$X = 3N^2 - 2(\alpha + \beta) N + \alpha\beta .$$

But

$$X_{N=\alpha} > 0, \; X_{N=\beta} < 0, \; X_{N=0} > 0,$$

so the equation $X = 0$ has two positive roots: one γ lying between α and β, and the other δ smaller than β, i.e. we have

$$\alpha > \gamma > \beta > \delta > 0,$$

and

$$\frac{d^2 N}{dt^2} = -3a(N-\gamma)(N-\delta)\frac{dN}{dt}.$$

9. I. If $N_0 > \alpha$, we have $dN/dt < 0$, $d^2N/dt^2 > 0$. N will decrease tending towards α and the curve $N(t)$ will always turn its concavity upwards. It has the straight line $N = \alpha$ for an asymptote (fig. A).

II. If $\alpha > N_0 > \gamma$, we have $dN/dt > 0$, $d^2N/dt^2 < 0$. N will increase tending towards the value α and the curve will always turn its concavity downwards, its asymptote being the straight line $N = \alpha$ (fig. B).

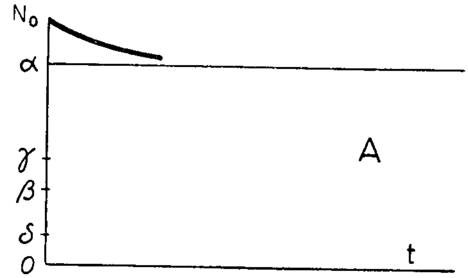


Fig. A.

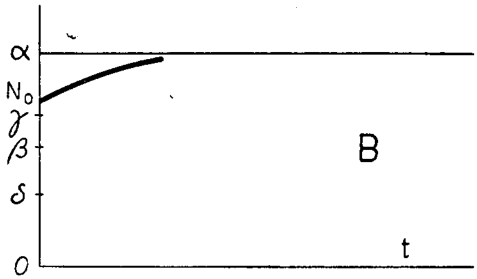


Fig. B.

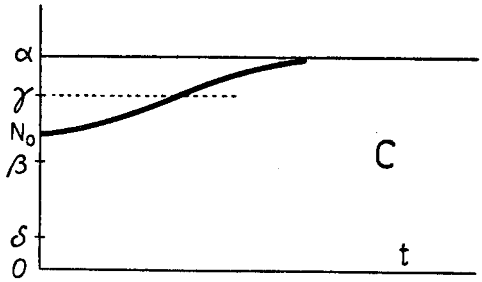


Fig. C.

III. If $\gamma > N_0 > \beta$, we have $dN/dt > 0$, N will increase towards the α value and the curve N (t) will have the straight line $N = \alpha$ as an asymptote. When N shifts between N_0 and γ we have $d^2N/dt^2 > 0$ and the curve N (t) turns its concavity upwards; for $N = \gamma$, the curve presents an inflexion and as N shifts between γ and α, we have $d^2N/dt^2 < 0$, and the curve turns its convexity upwards. The curve N (t) will have the same trend as the logistic curve of VERHULST-PEARL (fig. C).

IV. If $\beta > N_0 > \delta$, we have $dN/dt < 0$, N will decrease tending towards 0 and the curve N (t) will have the axis $N = 0$ as an asymptote. When N shifts between N_0 and δ, we shall have $d^2N/dt^2 < 0$ and the curve N (t) will turn its convexity upwards; for $N = \delta$, the curve will have an inflexion and when N shifts between δ and 0, d^2N/dt^2 will be > 0 and the curve will turn its concavity upwards (fig. D). The species will decline and ultimately perish.

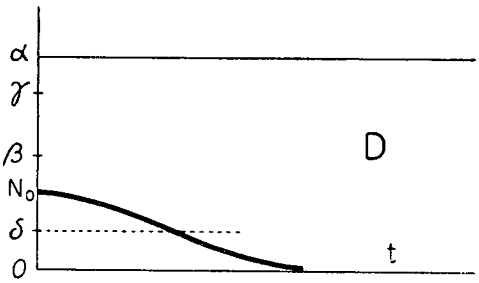


Fig. D.

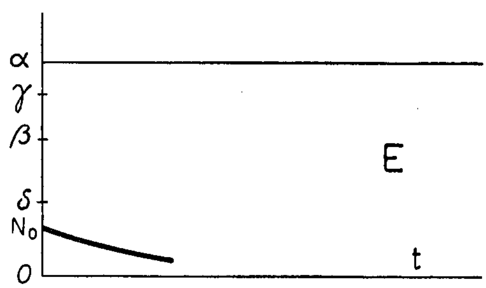


Fig. E.

V. If $\delta > N_0$ we shall have $dN/dt < 0$; N will decrease and tend towards zero and the curve N (t) will have as an asymptote the axis $N = 0$. We shall have $d^2N/dt^2 > 0$ and the curve N (t) will turn its concavity upwards (fig. E). There will be an exhaustion in this case also.

10. The populations $N = \alpha$, and $N = \beta$ *are equilibrium populations* because they correspond to $dN/dt = 0$ and therefore to N = constant. But for $N = \alpha$ *the equilibrium is stable*, while for $N = \beta$; *the equilibrium is unstable*, because if N departs a little from the α value, it returns to α indefinitely, while if N departs from β, it gets away from β further and further as it tends towards α or zero.

11. Let us now consider the case of a double root equal to α. We shall then have

$$\frac{dN}{dt} = - a(\alpha - N)^2 N,$$

whence it results that N decreases. The integration gives

$$e^{-at} = e^{\frac{N - N_0}{\alpha(\alpha - N)(\alpha - N_0)}} \cdot \left(\frac{N}{N_0}\,\frac{\alpha - N_0}{\alpha - N}\right)^{1/\alpha^2}$$

where N_0 is the initial value of N for $t = 0$.

We have then

$$\frac{d^2 N}{dt^2} = -a(N - \alpha)(3N - \alpha)\frac{dN}{dt}.$$

I. If $N_0 > \alpha$, we shall have $dN/dt < 0$, and $d^2N/dt^2 > 0$, therefore N will decrease tending indefinitely towards α. The straight line $N = \alpha$ will be an asymptote of the curve $N(t)$ which will always turn its concavity upwards (fig. F).

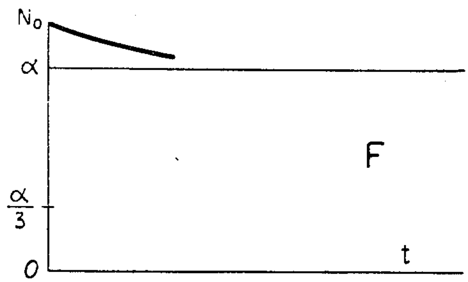


Fig. F.

II. If $\alpha/3 < N_0 < \alpha$ we shall have $dN/dt < 0$; N will decrease, indefinitely tending towards 0. When N shifts between N_0 and $\alpha/3$, d^2N/dt^2 will be < 0 and the curve $N(t)$ will have its convexity turned upwards. For $N = \alpha/3$, the curve $N(t)$ will have an inflexion and when N shifts between $\alpha/3$ and 0, d^2N/dt^2 will be > 0 and the curve will turn its concavity upwards. The axis $N = 0$ will be an asymptote (fig. G).

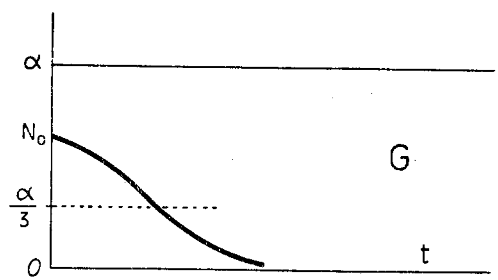


Fig. G.

III. If $N_0 < \alpha/3$ we shall have $dN/dt < 0$ and $d^2N/dt^2 > 0$. N will decrease and tend towards 0. The curve $N(t)$ will turn its concavity upwards. The axis $N = 0$ will be an asymptote (fig. H).

In the case of two roots equal to α, the population $N = \alpha$ will be an equilibrium population. It will be stable for a disturbance which tends to increase it and unstable for one which tends to decrease it.

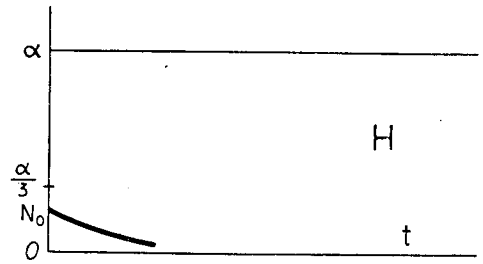


Fig. H.

12. In the case when equation (II) has imaginary roots, the integral of (I′) will be

$$e^{-t} = \left(\frac{N^2 (aN_0^2 - bN_0 + c)}{N_0^2 (aN^2 - bN + c)} \right)^{1/2c} e^{\frac{b}{c\sqrt{K}} \operatorname{arctg} \frac{2a(N - N_0)}{\sqrt{K}\left(1 + \frac{(2aN - b)(2aN_0 - b)}{K}\right)}}$$

where N_0 is the initial value of N for $t = 0$ and $K = 4ac - b^2 > 0$.

It immediately appears that $dN/dt < 0$ and N decreases and tends towards 0 for $t = \infty$. The curve $N(t)$ has the axis $N = 0$ as an asymptote and it is easy to distinguish the cases where there is an inflection or not. It is easy to recognize that if $b < 0$, N tends towards 0 for $t = \infty$.

In short:

If the initial population is an equilibrium population, the population remains constant. In all other circumstances the species will disappear, except when: (a) two equilibrium populations exist and the initial amount of the population is greater than the stable equilibrium population or contained between the stable equilibrium population and the unstable equilibrium population. In both cases, the population tends towards the stable population and in the case where the population lies between the two equilibrium populations and is close enough to the unstable one, it can tend towards the stable population by changing the trend of its increase; (b) only one equilibrium population exists smaller than the initial population. In this case the population tends towards the equilibrium population.

XXVI.

REMARQUES SUR L'ACTION TOXIQUE DU MILIEU À PROPOS DE LA NOTE DE M. RÉGNIER ET M^lle^ LAMBIN [1]

(In collaborazione con V. A. KOSTITZIN)

« Comptes rendus de l'Académie des Sciences », t. 207, 1938_2; pp. 1146–1148.

Dans une Note sur l'antagonisme microbien [2] M. RÉGNIER et M^lle^ LAMBIN ont étudié le développement de *Staphylococcus aureus* et de *Bacillus coli* dans un milieu liquide (bouillon de viande peptoné salé), soit en culture pure, soit en culture mixte. Dans le premier cas la population suit une loi toute différente de celle de VERHULST–PEARL, en passant par un maximum et en décroissant assez rapidement ensuite. Dans une remarque publiée à la suite de ladite Note et dans un volume publié en collaboration avec M. D'ANCONA [3], M. VOLTERRA a tâché d'expliquer ce phénomène par l'action de substances toxiques dues à l'action chimique de la population bactérienne et s'accumulant dans le milieu. Du point de vue mathématique, le problème se réduit à une équation intégro–différentielle, laquelle, dans le cas d'intoxication constante, peut être présentée comme une équation différentielle. M. VOLTERRA en a donné une solution approchée dont l'allure traduit assez bien la courbe expérimentale. M. V. A. KOSTITZIN [4] a repris la question en donnant une solution exacte qui, elle aussi, est en bon accord avec les observations, et en résolvant un problème plus général.

Dans la nouvelle Note de M. RÉGNIER et M^lle^ LAMBIN [1] est étudié le développement d'une population pure de *Bacillus coli* dans un milieu salé contenant du peptone à concentration variable d'une expérience à l'autre. Dans le cas de l'absence complète de la nourriture on observe une extinction extrêmement rapide, *surtout au début*, de la population, mais il suffit d'une concentration minime de la nourriture pour que la courbe du développement présente un maximum très caractérisé avec décroissance ultérieure. La courbe de ces maxima considérés en fonction de la concentration

(1) J. RÉGNIER et S. LAMBIN, *Étude sur le croît microbien en fonction de la quantité de substance nutritive des milieux de culture*, « Comptes Rendus de l'Ac. des Sciences », t. 207, 1938_2, p. 1263.

(2) « Comptes rendus », t. 199, 1934, p. 1682.

(3) VOLTERRA–D'ANCONA, *Les associations biologiques au point de vue mathématique*, Paris 1935.

(4) « Comptes rendus », t. 201, 1935, pp. 516–518; t. 204, 1937, pp. 1683–1685; voir aussi *Biologie mathématique*, Paris, 1937.

du peptone a une forme pareille à la courbe logistique. MM. VOLTERRA et KOSTITZIN ont essayé d'avoir une idée de la forme de cette courbe, en partant des formules de M. KOSTITZIN. En effet, ces formules donnent le maximum p_m en fonction des coefficients vitaux ε (multiplication), h (action mutuelle, concurrence), c (action toxique). On peut supposer *a priori* que la multiplication croît avec la concentration q de nourriture et qu'au contraire l'action mutuelle et l'action toxique décroissent dans les mêmes conditions. Les calculs numériques de M. KOSTITZIN, qui sont résumés dans la table suivante, montrent qu'en effet le comportement des coefficients correspond aux prévisions théoriques:

q	0,001.	0,005.	0,020.	0,050.	0,100.	0,25.	0,5.	1,0.	2,5.	5,0.	10.	20.
ε	0,33.	0,37.	0,46.	0,63.	0,93.	0,99.	1,07.	1,13.	1,18.	1,23.	1,24.	1,24.
$10^3 \cdot h$	144	93	39	30	24	12,3	7,3	5,0	3,9	3,4	3,3	3,1
$10^5 \cdot c$	430	370	78	93	60	31	11,7	6,7	4,6	4,1	3,3	3,2
$10^{-6} \cdot p_m$ ...	1,8	3,0	16,7	17,2	35,8	70,0	134,0	214,0	286,0	348,0	363,5	380,6.

On voit d'autre part que, pour de grandes concentrations du peptone, les coefficients ε, h, c ont une allure nettement asymptotique. Ce fait s'explique très bien par l'existence d'une limite physiologique supérieure pour l'assimilation de la nourriture, ainsi que pour la vitesse de croissance et de divisions cellulaires. Donc, en admettant que tous les coefficients sont des fonctions de la concentration q, on peut supposer que les limites suivantes existent:

$$\lim_{q\to\infty} \varepsilon = 1{,}2 \quad , \quad \lim_{q\to\infty} h = 0{,}003 \quad , \quad \lim_{q\to\infty} c = 0{,}00003 \, .$$

Cette hypothèse se trouve confirmée par les chiffres publiés dans la première Note de M. RÉGNIER et M^lle^ LAMBIN (2). En tenant compte de la différence de la technique du dénombrement dans les deux séries d'expériences, on trouve les valeurs suivantes des coefficients

$$\varepsilon = 1{,}1 \quad , \quad h = 0{,}003 \quad , \quad c = 0{,}00003 \, .$$

Or la concentration de nourriture dans les premières expériences de M. RÉGNIER et M^lle^ LAMBIN était certainement supérieure à 20. L'accord est parfait.

Considérons maintenant la formule

$$p_m = \frac{\varepsilon}{h} - \frac{c}{h^2} \log\left(1 + \frac{\varepsilon h}{c} - p_0 \frac{h^2}{c}\right)$$

exprimant le maximum p_m en fonction de ε, h, c. Il est clair que p_m considéré en fonction de q tend nécessairement vers une limite finie, ce qui concorde très bien avec les observations. Donc l'hypothèse de l'action toxique accumulée de M. VOLTERRA rend très bien compte de ces nouvelles expériences de M. RÉGNIER et de M^lle^ LAMBIN.

XXVII.

FLUCTUATIONS DANS LA LUTTE POUR LA VIE: LEURS LOIS FONDAMENTALES ET DE RÉCIPROCITÉ (*)

« Société mathématique de France », 1938.

1. C'est après 1900 que les travaux statistiques et mathématiques de biologie se sont intensifiés. On a commencé par des statistiques et c'est justement en 1900 qu'un éminent mathématicien anglais, KARL PEARSON, a fondé le journal « Biometrica » qui a rendu d'immenses services aux sciences. C'est PEARSON qui a reconnu que les problèmes posés par les théories sur l'évolution, le transformisme et la sélection naturelle devaient être envisagés du point de vue démographique, mais il n'a pas été entendu, tout de suite, par les savants. Il a fallu du temps pour s'en convaincre.

D'après PEARL, un des plus grands statisticiens biologistes vivants, les théories en question semblaient être, il y a quelques années, dans leur lit de mort.

Et cependant les idées d'évolution, de lutte pour l'existence, avaient suscité, de prime abord, un très grand intérêt. Elles avaient été l'objet d'innombrables écrits dépassant tout ce qui avait été fait sur les autres questions d'actualité.

Mais les écrits et les expériences faites sur ces sujets pendant plus d'un demi-siècle, n'avaient pas abouti malgré des contributions d'auteurs célèbres à des conclusions d'une grande portée. Tel est l'avis de PEARL qui ajoute que c'est la nouvelle voie dans laquelle s'est engagée la génétique et que ce sont les nouvelles études sur les populations et sur la dynamique démographique qui ont fait ressusciter le transformisme et la lutte pour la vie en montrant que ces théories conservaient une surprenante vitalité.

Actuellement ces études progressent continuellement, soit au point de vue expérimental et pratique, soit au point de vue mathématique et théorique. ROSS et principalement LOTKA, ELTON, GAUSE, THOMPSON et bien d'autres doivent être cités pour leurs calculs, leurs expériences, leur lutte pratique contre les insectes nuisibles à l'agriculture.

Je signale, parmi les travaux les plus récents, le beau volume publié par M. KOSTITZIN dans la collection COLIN.

(*) Conférence de la Réunion internationale des mathématiciens tenue à Paris en juillet 1937.

Deux nouvelles branches de la biologie se sont ainsi développées dans ces derniers temps: la biologie mathématique et la biologie expérimentale.

J'ai déjà eu l'occasion de parler à Paris plusieurs fois sur ce sujet. J'ai fait d'abord à l'Institut HENRI POINCARÉ une série de leçons sur la lutte pour la vie qui ont été réunies en un volume publié en 1931. L'année dernière, dans une conférence, j'ai montré que l'on pouvait avancer dans la dynamique biologique d'une manière analogue à celle qui a été suivie par la mécanique rationnelle, en introduisant un principe variationnel du type de celui de Hamilton, en réduisant les équations fondamentales à la forme canonique, en développant des théories analogues aux théories énergétiques et en énonçant enfin *le principe de la moindre action vitale.*

I.

2. Je commence par donner un résumé de la théorie générale.

Si l'on a une seule espèce dont la population est N_1 et si le coefficient d'accroissement est le nombre positif ε_1, la loi de MALTHUS s'exprime par

$$\frac{dN_1}{dt} = \varepsilon_1 N_1 ,$$

et la population augmente d'une manière exponentielle. De même, la population d'une seconde espèce étant N_2, on aura

$$\frac{dN_2}{dt} = -\varepsilon_2 N_2 .$$

Le coefficient d'accroissement étant le nombre négatif $-\varepsilon_2$. La population alors décroîtra d'une manière exponentielle et l'espèce s'épuisera.

Si les deux espèces vivent ensemble, mais l'une et l'autre n'ont aucune action réciproque, les deux équations précedentes seront vérifiées simultanément.

Mais supposons que les individus de la seconde espèce dévorent ceux de la première, alors le coefficient d'accroissement de la première espèce diminuera d'autant plus que la population de la seconde sera plus grande, tandis que le coefficient d'accroissement de la seconde espèce augmentera avec la population de la première dont les individus forment sa nourriture. Si nous admettons dans une première approximation que ces augumentations et ces diminutions soient linéaires, il faudra remplacer ε_1 et ε_2 par $\varepsilon_1 - \gamma_1 N_2$ et $-\varepsilon_2 + \gamma_2 N_1$, γ_1 et γ_2 étant des coefficients positifs constants. C'est pourquoi il faudra mettre à la place des équations précédentes les suivantes:

$$\text{(A)} \qquad \frac{dN_1}{dt} = (\varepsilon_1 - \gamma_1 N_2) N_1 \quad , \quad \frac{dN_2}{dt} = (-\varepsilon_2 + \gamma_2 N_1) N_2 .$$

Nous laisserons de côté l'intégration de ces équations qui a formé le sujet de plusieurs travaux et nous passerons au cas général de *n* espèces.

Pour l'étudier j'ai employé, dans mes précédents travaux, *le principe des rencontres*. Montrons maintenant d'une manière très sommaire que l'on peut obtenir les mêmes résultats en généralisant aussi le procédé que nous venons d'utiliser dans le cas de deux espèces.

Envisageons une association biologique de n espèces ayant les populations $N_1, N_2, \cdots; N_n$ et supposons que les individus des unes dévorent ceux d'autres espèces.

Leurs coefficients d'accroissement qui seraient $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ si chaque espèce était seule seront modifiés à cause de leurs actions mutuelles.

Si nous supposons toujours que ces modifications soient données par des termes fonctions linéaires des populations, les coefficients d'accroissement pour les espèces r et s s'écriront

$$\varepsilon_r + \sum_1^n {}_s A_{sr} N_s \quad , \quad \varepsilon_s + \sum_1^n {}_r A_{rs} N_r .$$

Or il est évident que A_{sr} et A_{rs} doivent être des constantes de signe contraire, parce que si l'espèce s dévore l'espèce r, A_{sr} devra être négatif; mais alors l'espèce r est dévorée par l'espèce s et par suite A_{rs} devra être positif. Si les deux espèces n'ont aucune action réciproque, on aura $A_{rs} = A_{sr} = 0$. On aura en outre que toutes les A avec des indices égaux seront toujours nulles. Qu'est-ce que signifient A_{rs} et A_{sr}?

Il est évident que A_{sr} mesure l'effet exercé sur l'accroissement de l'espèce r par la présence dans l'association biologique de chaque individu de l'espèce s tandis que A_{rs} mesure la réaction exercée sur l'accroissement de l'espèce s par la présence de chaque individu de l'espèce r. Or ces deux actions ne peuvent pas s'égaliser en général en valeur absolue.

Supposons, par exemple, qu'il s'agisse de deux espèces: l'une de gros poissons, l'autre de petits poissons et que les individus de la première dévorent ceux de la seconde. On conçoit facilement que l'introduction d'un gros poisson qui dévore les petits aura plus d'effet pour altérer l'accroissement de ceux-ci que n'en aura, pour l'accroissement de l'espèce des gros poissons, l'introduction d'un petit, laquelle n'aura d'autre effet que d'augmenter dans une faible mesure la nourriture des gros poissons.

On pourra tenir compte de cette remarque en faisant une nouvelle hypothèse, d'ailleurs très facile à accepter, et qui consiste à donner des valeurs différentes aux individus selon qu'ils appartiennent à l'une ou à l'autre espèce. Les inverses de ces valeurs seront alors les équivalents des individus des différentes espèces.

Appelons $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$ ces valeurs et, par suite, $1/\beta_1, 1/\beta_2, \cdots, 1/\beta_n$ ces équivalents, ce qui correspond à dire que $1/\beta_r$ individus de l'espèce r sont équivalents à $1/\beta_s$ individus de l'espèce s. En vertu de cette hypothèse, on pourra prendre

$$A_{sr} = \frac{1}{\beta_r} a_{sr} \quad , \quad A_{rs} = \frac{1}{\beta_s} a_{rs} \quad , \quad a_{sr} = - a_{rs} ,$$

et alors les coefficients d'accroissement des différentes espèces seront donnés par

$$\varepsilon_r + \frac{1}{\beta_r} \sum_{1}^{n}{}_s\, a_{sr} N_s \quad , \quad \varepsilon_s + \frac{1}{\beta_s} \sum_{1}^{n}{}_r\, a_{rs} N_r \,.$$

On aura donc, comme extension des équations (A) au cas général de n espèces

$$\text{(B)} \qquad \frac{dN_r}{dt} = \left(\varepsilon_r + \frac{1}{\beta_r} \sum_{1}^{n}{}_s\, a_{sr} N_s\right) N_r \qquad (r = 1, 2, \cdots, n)\,.$$

Le procédé que nous venons de suivre n'est pas si rigoureux que celui que nous avons employé dans nos travaux précédents, mais peut-être il est plus intuitif et plus simple.

On pourra aussi écrire les équations (B)

$$(1) \qquad \beta_r \frac{dN_r}{dt} = \left(\varepsilon_r \beta_r + \sum_{1}^{n}{}_s\, a_{sr} N_s\right) N_r \,,$$

dans lesquelles

$$a_{sr} = -a_{rs} \quad , \quad a_{ss} = 0 \quad , \quad \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n > 0 \,.$$

Si a_{sr} est positif, cela signifie que l'espèce r dévore l'espèce s, s'il est négatif, le contraire sera vérifié, c'est-à-dire l'espèce r sera dévorée par l'autre; si $a_{sr} = 0$ les individus des deux espèces n'agissent pas les uns sur les autres.

Les quantités $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ sont les coefficients d'accroissement des espèces lorsque chaque espèce est seule. On les prendra positives pour les espèces pour lesquelles il y a une augmentation effective, et négatives pour celles qui tendent à s'épuiser.

3. Lorsque les équations

$$(2) \qquad \varepsilon_r \beta_r + \sum_{1}^{n}{}_s\, a_{sr} N_s = 0$$

sont satisfaites, les populations $N_1, N_2, \cdots, N_n$ se conservent constantes

Les équations (2) sont *les équations de l'équilibre* ou de *l'état stationnaire.* Nous supposerons que le déterminant (*déterminant fondamental*)

$$\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & 0 & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

ne soit pas nul.

Il faut pour cela que les nombres des espèces soit pairs, parce que ce déterminant est hémisymétrique. D'ailleurs on peut démontrer que, si n est impair, on a en général que quelques-unes des espèces tendent à s'épuiser ou à croître indéfiniment. Cela produit une complète modification de l'association biologique qui perd sa stabilité. Nous supposerons donc que le *nombre des espèces soit pair et que le déterminant ne soit pas nul.*

En outre, on fera l'hypothèse que les racines des équations (2) soient positives. Nous les désignerons par $q_1, q_2, \cdots, q_n$ et nous serons ainsi sûrs qu'il existe un état d'équilibre et que ces nombres donneront les populations d'équilibre.

4. On tire des équations (2)

$$\sum_1^n {}_r \, \varepsilon_r \, \beta_r \, q_r = 0 .$$

C'est pourquoi il est nécessaire pour avoir l'équilibre, que les ε_r n'aient pas toutes le même signe, car les β_r sont toutes positives.

Varions les ε_r de $\Delta\varepsilon_r$, alors les racines des équations (2) varieront de $\Delta q_1, \Delta q_2, \cdots, \Delta q_n$. Par conséquent, à cause des équations (2), on aura

$$\beta_r \, \Delta\varepsilon_r + \sum_1^n {}_s \, a_{sr} \, \Delta q_s = 0 , \tag{3}$$

d'où

$$\sum_1^n {}_r \, \beta_r \, \Delta\varepsilon_r \, \Delta q_r = 0 . \tag{4}$$

Si les quantités $\Delta\varepsilon_r$ ne sont pas nulles et ont toutes le même signe, les Δq_r ne pourront pas être toutes nulles [voir (3)] et celles qui ne sont pas nulles auront des signes différents [voir (4)].

II.

5. Envisageons maintenant les lois fondamentales des fluctuations. L'énoncé de la première est le suivant:

Si l'on a un nombre pair d'espèces, et s'il existe un état stationnaire, en partant d'un état initial non d'équilibre, on aura des fluctuations qui ne s'amortissent pas.

On dit que l'on a des fluctuations d'une population, si elle a des maxima et des minima pour des valeurs du temps infiniment grand.

Elles s'amortissent si les oscillations deviennent aussi petites que l'on veut pour des valeurs suffisamment grandes du temps.

Pour démontrer cette loi, il faut commencer par obtenir une intégrale des équations (1).

Supposons que les équations (2) aient les racines $q_1, q_2, \cdots, q_n$. On pourra alors écrire

$$\varepsilon_r \, \beta_r = - \sum_1^n a_{sr} \, q_s ,$$

et les équations (1) deviendront, en éliminant $\varepsilon_r \beta_r$,

$$\beta_r \frac{dN_r}{dt} = \sum_1^n {}_s\, a_{sr}(N_s - q_s)\, N_r\,.$$

En multipliant ces équations par $\frac{N_r - q_r}{N_r}$ et en sommant par rapport à l'indice r de 1 à n, il viendra, puisque $a_{sr} = -a_{rs}$,

$$\sum_1^n {}_r \frac{\beta_r}{N_r}(N_r - q_r)\frac{dN_r}{dt} = 0\,,$$

c'est-à-dire

$$\sum_1^n {}_r \left(\beta_r \frac{dN_r}{dt} - \beta_r q_r \frac{1}{N_r}\frac{dN_r}{dt}\right) = 0\,,$$

et, en intégrant,

$$\sum_1^n {}_r (\beta_r N_r - \beta_r q_r \log N_r) = C\,, \tag{5}$$

C étant une constante.

Posons

$$\beta_r (N_r - q_r \log N_r) = P_r\,.$$

On aura en dérivant

$$\frac{dP_r}{dN_r} = \beta_r\left(1 - \frac{q_r}{N_r}\right) \quad , \quad \frac{d^2 P_r}{dN_r^2} = \beta_r \frac{q_r}{N_r^2}\,.$$

Donc la valeur minima de P_r s'obtiendra en prenant $N_r = q_r$ et sera

$$p_r = \beta_r q_r (1 - \log q_r).$$

On voit, d'autre part, que les valeurs de N_r et P_r se correspondent de la manière suivante:

$$N_r, \quad 0 \cdots \rightarrow \cdots q_r \cdots \rightarrow \infty\,,$$
$$P_r, \quad \infty \cdots \leftarrow \cdots p_r \cdots \rightarrow \infty$$

(la flèche indique le sens de la croissance).

On tire de là, puisque

$$\sum_1^n {}_r P_r = C$$

(C étant fini si les N_r ont des valeurs initiales finies), que *chaque* N_r *doit se conserver comprise entre deux nombres positifs finis.*

Il est évident que, si les $N_r = q_r$, on a $C = \sum_1^n p_r$ et inversement, lorsque C a cette valeur, on a que toutes les $N_s = q_s$.

C'est pourquoi la condition nécessaire et suffisante pour que la constante C soit égale à $\sum_1^n p_r$ est que l'état de l'association biologique soit stationnaire.

Les équations (1) donnent

$$\beta_r \frac{d \log \mathrm{N}_r}{dt} = \left(\varepsilon_r \beta_r + \sum_1^n {}_s\, a_{sr} \mathrm{N}_s \right)$$

et, en intégrant entre t_0 et t,

$$\frac{\beta_r}{t - t_0} \log \frac{\mathrm{N}_r(t)}{\mathrm{N}_r(t_0)} = \varepsilon_r \beta_r + \sum_1^n {}_s\, a_{sr} \frac{1}{t - t_0} \int_{t_0}^{t} \mathrm{N}_s(\tau)\, d\tau .$$

Puisque $\mathrm{N}_r(t)$, $\mathrm{N}_r(t_0)$ doivent être compris entre des nombres positifs finis, il suit que, en faisant croître indéfiniment t, le premier membre de l'équation précédente aura pour limite 0 et, par conséquent, on trouvera que les quantités

$$n_s = \lim_{t=\infty} \frac{1}{t - t_0} \int_0^t \mathrm{N}_s(\tau)\, d\tau$$

satisfont les équations (2) de l'équilibre. Le déterminant n'étant pas nul, il faut donc que $n_s = q_s$, c'est-à-dire: *la moyenne asymptotique de* N_s *sera* q_s. On appellera simplement *moyenne* cette *moyenne asymptotique*.

Si $\mathrm{N}_1, \mathrm{N}_2, \cdots, \mathrm{N}_n$ avaient des limites pour t infini, ces limites seraient leurs moyennes asymptotiques et, par suite, elles correspondraient à un état stationnaire. Donc la constante C aurait la valeur $\sum_1^n {}_s\, p_s$ et, par conséquent, les valeurs de $\mathrm{N}_1, \mathrm{N}_2, \cdots, \mathrm{N}_n$ correspondraient à un état d'équilibre et se conserveraient constantes. On tire de là que, si l'état initial n'est pas d'équilibre, les $\mathrm{N}_1, \mathrm{N}_2, \cdots, \mathrm{N}_n$ ne tendront pas vers des limites et, par suite, *les fluctuations ne s'amortiront pas.*

La première loi est ainsi démontrée complètement. Elle prend le nom de *loi de la conservation des fluctuations.*

D'après ce que nous avons trouvé précédemment, *les moyennes des populations sont égales aux populations d'équilibre.* C'est la seconde loi.

Cette loi s'appelle *la loi de la conservation des moyennes.*

En effet, celles-ci étant égales aux populations d'équilibre sont indépendantes des conditions initiales et, par suite, ne changent pas en variant les conditions initiales.

6. Nous arrivons maintenant à la troisième loi qui s'appelle *la loi de la variation des moyennes.*

Elle se rapporte au changement des moyennes asymptotiques lorsqu'on modifie les coefficients d'accroissement, c'est-à-dire lorsqu'on augmente ou qu'on diminue contemporainement tous les nombres $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$, ce qui correspond à supposer que l'on accroît ou que l'on détruit les espèces proportionnellement à leurs populations. La destruction, par exemple, peut se réaliser par la pêche lorsque l'association biologique est constituée par plusieurs espèces de poissons cohabitant dans le même milieu.

Calculons les variations des moyennes asymptotiques correspondant aux $\Delta\varepsilon_r$ ayant toutes le même signe.

On tire du paragraphe 4 que si les $\Delta\varepsilon_r$ sont toutes positives ou toutes négatives, les Δq_r ne peuvent pas être ni toutes nulles, ni toutes du même signe. C'est pourquoi *les moyennes de certaines espèces doivent augmenter et les moyennes d'autres espèces doivent diminuer*, c'est-à-dire qu'en augmentant ou diminuant contemporainement les coefficients d'accroissement des espèces, quelques-unes en seront avantagées, tandis que d'autres seront défavorisées.

Mais les espèces peuvent être classées en trois catégories: 1. celles qui en dévorent d'autres sans être dévorées par aucune; 2. celles qui sont dévorées par d'autres sans qu'elles en dévorent aucune; 3. celles qui sont dévorées par d'autres espèces et en dévorent aussi d'autres.

Il est évident que la première catégorie ne peut pas exister toute seule, et de même la deuxième catégorie, mais il pourra arriver que les trois catégories existent contemporainement, ou qu'il en existe deux, ou qu'il existe la troisième seule.

Supposons que les $\Delta\varepsilon_1 , \Delta\varepsilon_2 , \cdots , \Delta\varepsilon_n$ soient négatives et que la première espèce soit comprise parmi celles qui sont avantagées de la destruction, c'est-à-dire que Δq_1 soit positive.

Alors deux cas peuvent se présenter: ou l'un des nombres $a_{21} , a_{31} , \cdots , a_{n1}$ est négatif, ou ces nombres sont tous positifs ou nuls. Le cas où tous ces nombres sont nuls n'est pas possible, car le déterminant n'est pas nul.

Dans le premier cas existe une espèce qui dévore la première et, par suite, une espèce dévorée est avantagée. Dans le second cas, $a_{21} , a_{31} , \cdots , a_{n1}$ sont tous positifs ou nuls; par conséquent, en vertu de la première des équations (3), parmi les $\Delta q_2 , \Delta q_3 , \cdots , \Delta q_n$ il y en aura des positives et, par suite, il y aura une des espèces $2 , 3 , \cdots , n$, qui sont dévorées par l'espèce 1, qui sera avantagée.

Donc il existe toujours une espèce dévorée qui est favorisée, c'est-à-dire parmi les espèces qui s'avantagent il y en aura au moins une qui appartient à la catégorie 2 ou à la catégorie 3.

Mais, si l'espèce 1 s'avantage de la destruction (correspondant à la diminution des quantités ε_r), il doit exister une espèce qui est défavorisée. Alors, si l'on fait pour celle-ci un raisonnement analogue à celui que nous venons de faire pour l'espèce 1, on trouvera qu'il doit exister au moins une espèce des catégories 1 et 3, c'est-à-dire une espèce dévoratrice, qui est endommagée.

7. La troisième loi, c'est-à-dire la loi de la variation des moyennes, pourra donc s'énoncer de la manière suivante: *Si l'on détruit toutes les espèces uniformément et proportionnellement à leurs populations, la moyenne d'une au moins des espèces dévorées (espèces appartenant aux catégories 2 et 3) augmentera et la moyenne d'une au moins des espèces dévoratrices (c'est-à-dire appartenant aux catégories 1 et 3) diminuera.*

Cela correspond au fait que l'une au moins des espèces appartenant aux catégories 2 et 3 s'avantagera, et une au moins des espèces appartenant aux catégories 1 et 3 sera endommagée.

Dans le cas qu'il n'existe que des espèces des catégories 1 et 2, alors la destruction avantage au moins une des espèces 2 et défavorise une au moins des espèces 1.

Mes précédents travaux n'envisageaient que ce cas. Je n'appelais espèces dévoratrices que celles appartenant à la catégorie 1 et espèces dévorées que celles appartenant à la catégorie 2. Je supprimais l'existence des espèces appartenant à la catégorie 3, ce qui limitait beaucoup la portée de la troisième loi et m'éloignait des conditions réelles qui se présentent en nature.

Je laisserai de côté l'exposition des vérifications expérimentales auxquelles ont amené les trois lois, car nous nous éloignerions du point de vue mathématique que nous ne voulons pas abandonner.

III.

8. Nous passerons plutôt à l'exposé des principes de réciprocité qui découlent des lois et des formules que nous avons envisagées (*).

Supposons d'avoir deux états d'équilibre. Le premier correspond aux coefficients d'accroissement $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ et aux populations d'équilibre $q_1, q_2, \cdots, q_n$.

L'autre correspond aux coefficients $\varepsilon'_1, \varepsilon'_2, \cdots, \varepsilon'_n$ et aux populations d'équilibre $q'_1, q'_2, \cdots, q'_n$. Nous ferons en plus l'hypothèse, que nous maintiendrons aussi dans la suite, que les β_r et les a_{rs} ne changent pas.

En vertu des équations (2), on aura

$$(2') \qquad \left\{ \begin{aligned} &\varepsilon_r \beta_r + \sum_1^n{}_s a_{sr} q_s = 0, \\ &\varepsilon'_r \beta'_r + \sum_1^n{}_s a_{sr} q'_s = 0, \end{aligned} \right.$$

d'où

$$\sum_1^n{}_r \varepsilon_r \beta_r q'_r = \sum_1^n{}_r \sum_1^n{}_s a_{rs} q_s q'_r,$$

$$\sum_1^n{}_r \varepsilon'_r \beta_r q_r = \sum_1^n{}_r \sum_1^n{}_s a_{rs} q'_s q_r.$$

Mais

$$\sum_1^n{}_r \sum_1^n{}_s a_{rs} q'_s q_r = \sum_1^n{}_r \sum_1^n{}_s a_{sr} q'_r q_s = -\sum_1^n{}_r \sum_1^n{}_s a_{rs} q_s q'_r,$$

(*) Questi principi di reciprocità sono stati pubblicati dall'Autore anche nella Nota: *Leggi delle fluttuazioni e principi di reciprocità in biologia* (« Rivista di Biologia », vol. XXII, 1937), che non si inserisce in queste « Opere » per evitare ripetizioni [N.d.R.].

donc

$$\sum_1^n{}_r\, \varepsilon_r\, \beta_r\, q'_r = -\sum_1^n{}_r\, \varepsilon'_r\, \beta_r\, q_r\,.$$

C'est le *premier des principes de réciprocité.*

9. Remarquons que les quantités q_r et q'_r doivent être positives, mais cette limitation n'embrasse pas leurs variations. En outre, observons que les équations (3), qu'on obtient en variant les équations (2'), ont la même forme, car celles-ci sont linéaires.

Or, dans les équations (3), ne paraissent pas les ε_r ni les q_r; donc, quelles que soient les $q_1, q_2, \cdots, q_n$, les Δq_r sont toujours les mêmes, pourvu que l'on conserve les valeurs des $\Delta\varepsilon_r$. On pourra donc énoncer le théorème: *Les variations des populations d'équilibre dépendent des variations des coefficients d'accroissement, mais sont indépendantes des coefficients d'accroissement et des populations primitives d'équilibre.*

Il est évident que cette proposition est subordonnée à la condition que les populations d'équilibre, après leur variation, se conservent positives.

10. En vertu des équations (2') et (3), on obtient

$$\sum_1^n{}_r\, \varepsilon_r\, \beta_r\, \Delta q_r = \sum_1^n{}_r \sum_1^n{}_s\, a_{rs}\, q_s\, \Delta q_r\,,$$

$$\sum_1^n{}_r\, \Delta\varepsilon_r\, \beta_r\, q_r = \sum_1^n{}_r \sum_1^n{}_s\, a_{rs}\, \Delta q_s\, q_r\,,$$

et, par un procédé analogue à celui suivi dans le paragraphe 8, on a

$$\sum_1^n{}_r\, \varepsilon_r\, \beta_r\, \Delta q_r = -\sum_1^n{}_r\, \Delta\varepsilon_r\, \beta_r\, q_r\,.$$

C'est le *second principe de réciprocité.*

11. On tire des équations (4) que si $\Delta\varepsilon_i$ n'est pas nul, tandis que $\Delta\varepsilon_1, \cdots$ $\cdots, \Delta\varepsilon_{i-1}, \Delta\varepsilon_{i+1}, \cdots, \Delta\varepsilon_n$ sont nulles, on doit avoir $\Delta q_i = 0$. Il s'ensuit le théorème:

La population d'équilibre d'une espèce se conserve, si l'on change son coefficient d'accroissement, pourvu qu'on ne change pas les coefficients des autres espèces.

Mais nous avons trouvé, dans le paragraphe 5, que la moyenne de la population d'une espèce coïncide avec sa population d'équilibre; donc, on peut énoncer la proposition précédente de la manière suivante:

Si l'on conserve sans altération les coefficients d'accroissement des espèces, une seule exceptée, la moyenne de la population de cette espèce ne changera pas, tandis que les moyennes des populations d'autres espèces changeront.

Ce théorème a un énoncé qui semble *paradoxal*, c'est pourquoi on peut l'appeler *le paradoxe démographique*. Il est facile cependant de se persuader de son exactitude.

Il suffit pour cela d'envisager un exemple particulier, celui de deux espèces que nous avons considéré dans le paragraphe 2.

Les équations (A) deviennent, dans le cas de l'équilibre,

$$\varepsilon_1 - \gamma_1 N_2 = 0 \quad , \quad -\varepsilon_2 + \gamma_2 N_1 = 0 ,$$

c'est pourquoi les populations d'équilibre seront

$$q_1 = \frac{\varepsilon_2}{\gamma_2} \quad , \quad q_2 = \frac{\varepsilon_1}{\gamma_1} ,$$

et nous aurons

$$\Delta q_1 = \frac{\Delta\varepsilon_2}{\gamma_2} \quad , \quad \Delta q_2 = \frac{\Delta\varepsilon_1}{\gamma_1} .$$

Si par exemple $\Delta\varepsilon_1 > -\varepsilon_1$ est négative et $\Delta\varepsilon_2 = 0$, il viendra Δq_2 négative et $\Delta q_1 = 0$; donc, une réduction du coefficient d'accroissement de l'espèce 1 (espèce dévorée), sans qu'il y ait aucune variation dans le coefficient d'accroissement de l'espèce 2, produira une diminution de la population d'équilibre et, par suite, de la moyenne de l'espèce 2 (espèce dévorante), mais ne modifiera pas la population d'équilibre de l'espèce 1 et, par suite, sa moyenne. Il est facile de concevoir la vérité de cette conclusion, parce qu'il y a une sorte de compensation entre la variation négative de l'accroissement de l'espèce dévorée et la diminution de la destruction due à la rèduction de la population de l'espèce dévorante. C'est pourquoi la moyenne de la première espèce ne changera pas, tandis que celle de la seconde espèce diminuera.

Tous les autres cas qui peuvent se présenter s'interprètent de façon analogue.

12. Supposons de donner aux coefficients d'accroissement une première fois les variations $\Delta\varepsilon_1 , \Delta\varepsilon_2 , \cdots, \Delta\varepsilon_n$ et une seconde fois les variations $\Delta'\varepsilon_1$, $\Delta'\varepsilon_2 , \cdots, \Delta'\varepsilon_n$, et que l'on obtienne d'abord les variations des populations d'équilibre $\Delta q_1 , \Delta q_2 , \cdots, \Delta q_n$, et après $\Delta' q_1 , \Delta' q_2 , \cdots, \Delta' q_n$.

A cause des équations (3), on aura

$$\beta_r \Delta\varepsilon_r + \sum_1^n {}_s a_{sr} \Delta q_s = 0 ,$$

$$\beta_r \Delta'\varepsilon_r + \sum_1^n {}_s a_{sr} \Delta' q_s = 0 ,$$

d'où

$$\sum_1^n {}_r \beta_r \Delta\varepsilon_r \Delta' q_r = \sum_1^n {}_r \sum_1^n {}_s a_{rs} \Delta q_s \Delta' q_r ,$$

$$\sum_1^n {}_r \beta_r \Delta'\varepsilon_r \Delta q_r = \sum_1^n {}_r \sum_1^n {}_s a_{rs} \Delta' q_s \Delta q_r .$$

Mais

$$\sum_1^n{}_r \sum_1^n{}_s a_{rs}\, \Delta q_s\, \Delta' q_r = \sum_1^n{}_s \sum_1^n{}_r a_{sr}\, \Delta q_r\, \Delta' q_s = -\sum_1^n{}_r \sum_1^n{}_s a_{rs}\, \Delta' q_s\, \Delta q_r\,.$$

Donc

$$\sum_1^n{}_r \beta_r\, \Delta\varepsilon_r\, \Delta' q_r = -\sum_1^n{}_r \beta_r\, \Delta'\varepsilon_r\, \Delta q_r\,.$$

C'est le *troisième principe de réciprocité.*

Nous avons appelé (§ 2) $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$ les valeurs des individus des différentes espèces. C'est pourquoi $V_r = \beta_r N_r$ sera la valeur de l'espèce r et

$$V = \sum_1^n{}_r \beta_r N_r$$

sera la valeur de l'association biologique constituée des n espèces.

De même $\nu_r = \beta_r q_r$ sera la valeur moyenne de l'espèce r et

$$\nu = \sum_1^n{}_r \beta_r q_r$$

sera la valeur moyenne de l'association.

Étant $a_{sr} = -a_{rs}$, on aura

$$\frac{dV}{dt} = \sum_1^n{}_r \frac{\beta_r\, dN_r}{dt} = \sum_1^n{}_r \varepsilon_r\, \beta_r\, N_r + \sum_1^n{}_r \sum_1^n{}_s a_{sr}\, N_s\, N_r = \sum_1^n{}_r \varepsilon_r\, \beta_r\, N_r\,,$$

et, par conséquent,

$$dV = \sum_1^n{}_r \varepsilon_r\, \beta_r\, N_r\, dt\,.$$

Donc, à chaque instant, l'augmentation de la valeur de l'association ne dépendra que des coefficients d'accroissement, car elle ne dépendra pas des actions réciproques que les différentes espèces exercent les unes sur les autres. Une association de cette sorte s'appelle *conservative.*

Supposons

$$\Delta\,\varepsilon_1 = \Delta\,\varepsilon_2 = \cdots = \Delta\,\varepsilon_{r-1} = \Delta\,\varepsilon_{r+1} = \cdots = \Delta\,\varepsilon_n = 0\,,$$
$$\Delta'\varepsilon_1 = \Delta'\varepsilon_2 = \cdots = \Delta'\varepsilon_{s-1} = \Delta'\varepsilon_{s+1} = \cdots = \Delta'\varepsilon_n = 0\,,$$

tandis que $\Delta\varepsilon_r$ et $\Delta'\varepsilon_s$ ne sont pas nuls.

A cause du troisième principe de réciprocité, on aura

$$\beta_r\, \Delta\varepsilon_r\, \Delta' q_r = -\beta_s\, \Delta'\varepsilon_s\, \Delta q_s$$

et, par suite, si

$$\Delta\varepsilon_r = \Delta'\varepsilon_s\,,$$

il viendra

$$\beta_r\, \Delta' q_r = -\beta_s\, \Delta q_s\,,$$

c'est-à-dire

$$\Delta'\nu_r = -\Delta\nu_s\,.$$

On aura donc la proposition:

La variation de la valeur moyenne de l'espèce r (variation de la valeur de la population d'équilibre) *produite par une variation du coefficient d'accroissement de l'espèce s est égale et de signe contraire à la variation de la valeur moyenne de l'espèce s* (variation de la valeur de la population d'équilibre) *due à une variation égale du coefficient d'accroissement de l'espèce r.*

Ce théorème présente une analogie avec les théorèmes de réciprocité connus de la théorie de l'élasticité et de l'électrostatique, mais il en diffère par un changement de signe. En effet, ces derniers théorèmes dépendent d'un déterminant symétrique, tandis que le théorème précédent qu'on a en biologie découle de l'existence d'un déterminant hémisymétrique.

15. Je terminerai par une élégante extension donnée par M[lle] E. FREDA des propositions précédentes.

Prenons un groupe d'espèces appartenant à l'association et considérons sa valeur moyenne $\Sigma\beta_r q_r$ qu'on obtient en additionnant les valeurs moyennes des espèces qui le composent. La variation de cette valeur, due à un changement des coefficients d'accroissement, sera $\Sigma\beta_r \Delta q_r$.

Si l'on ne varie que les coefficients d'accroissement des espèces du groupe, et *d'une même quantité* $\Delta\varepsilon$ (variation uniforme), on aura, à cause de l'équation (4),

$$\Sigma\beta_r \Delta\varepsilon \Delta q_r = 0$$

et, par suite,

$$\Sigma\beta_r \Delta q_r = 0\,;$$

la valeur moyenne du groupe ne change pas.

Envisageons un second groupe d'espèces différentes appartenant à l'association. Si nous le réunissons au premier, nous obtiendrons un ensemble dont la valeur ne changera pas en donnant la même variation à tous les coefficients d'accroissement des espèces qui le constituent.

Mais la variation de la valeur moyenne de l'ensemble est formée des variations des valeurs moyennes des deux groupes; dans chacune d'elles on pourra réunir les termes qui résultent de la variation uniforme limitée aux seuls coefficients d'accroissement des espèces de l'un ou l'autre groupe. Distinguant les deux groupes par les indices 1 et 2, on aura donc

$$\Delta V_{11} + \Delta V_{22} + \Delta V_{12} + \Delta V_{21} = 0\,,$$

ΔV_{ik} désignant la variation de la valeur moyenne du groupe i lorsque la modification uniforme des coefficients d'accroissement intéresse les seules espèces du groupe k.

Les deux premiers termes de l'égalité précédente étant nuls, les deux autres doivent se compenser, c'est-à-dire être égaux et de signe contraire.

On peut donc énoncer les théorèmes suivants:

Si l'on donne aux coefficients d'accroissement d'un groupe d'espèces une variation uniforme, la valeur moyenne de ce groupe ne change pas (pourvu qu'on ne change pas les coefficients des autres espèces de l'association).

La variation de la valeur moyenne d'un groupe due à une variation uniforme des coefficients d'accroissement d'un autre groupe est égale et de signe contraire à la variation de la valeur moyenne du second groupe pour la même variation uniforme des coefficients du premier.

Ces théorèmes généralisent ceux des paragraphes 11 et 14.

On peut ajouter que le premier de ces théorèmes reste valable si le groupe embrasse toute l'association.

XXVIII.

THE GENERAL EQUATIONS OF BIOLOGICAL STRIFE IN THE CASE OF HISTORICAL ACTIONS

« Proceedings of the Edinburgh Mathemathical Society », ser. 2, vol. 6, 1939; pp. 4-10.

I.

1. I have begun to study the laws of the struggle for life by a group of species living in the same environment in such a way that some devour others. I have used for this purpose the so called *principle of encounter*, considering the encounters of the individuals of the various species, and what follows by reason of the actions that the individuals exercise on one another [1].

Making very simple and probable hypotheses, the equations to which it leads are the following:

$$\beta_r \frac{dN_r}{dt} = \left(\varepsilon_r \beta_r + \sum_1^n {}_s\, a_{sr} N_s\right) N_r\,, \qquad (a_{rs} = -a_{sr}) \tag{A}$$

in which $N_1, N_2, \cdots, N_n$ denote the populations of the various species, $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ the coefficients of auto-increase of the various species and $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$ the values of the individuals.

These equations are well known and their consequences can be summed up in the following general laws:

LAW I. - *Law of conservation of fluctuations.*

The populations of the different species are limited in positive numbers and there are always fluctuations that never die out.

LAW II. - *Law of conservation of means.*

If we take as means of the different species the asymptotic means they are constant and independent of the initial populations.

(1) *Variazioni e fluttuazioni del numero di individui in specie animali conviventi.* « Memorie della R. Accademia dei Lincei », ser. 6ª, vol. 2 (1926), pp. 31-113 [ved. anche il lavoro con lo stesso titolo in « Mem. del R. Comitato Talassografico italiano », 1927, riprodotto in questo volume delle « Opere », I, pp. 1-111].

LAW III. – *Laws of perturbation of means.*

If all the species are destroyed uniformly and in proportion to the numbers of their individuals, there are always some species which profit and others which suffer. Among the first, there is at least one which is devoured by the others and among the second there is also one species that devours others.

2. But in this treatment only immediate actions are considered. Now in all biological phenomena it is necessary to examine not only immediate actions but also those depending on the past, that is, on the changes which the species have undergone. These actions were first called *hereditary actions*; but this name was not well chosen, although it may have been useful to signify such phenomena in the inorganic world. It was found preferable to use the term *historical actions* or *actions belonging to memory*. We shall use the first of these two denominations.

To treat this case I have tried to extend the *method of encounter* which has already been happily employed; in the case of two species, one of which devours the other, the same method was perfectly successful and the three general laws could be extended, introducing only a few modifications.

For this consult the work: *Leçons sur la théorie mathématique de la lutte pour la vie* (Paris, Gauthier-Villars, 1931)[*].

But if we are determined to extend the same method to any number of species living together there arise difficulties which seem not easily resolvable.

Shall we then give up the study of a general case taking the historical phenomenon into account? Or will it be possible to change the method, no longer using the method of encounter proved useful?

II.

3. Last year, at the Mathematical Society of France [2], I gave a lecture in which I examined only the case of immediate actions, but did not follow the method of encounters. I used instead a more simple and intuitive, but perhaps not so rigorous, method. I believe that this method can be easily applied to the historical case not only of two species, but also to that of any number of species.

This method consists fundamentally in making all the actions exercised in the past, that is, all the historical actions, enter into the values of the coefficients of increase.

(*) Cfr. anche questo volume delle « Opere », I*, pp. 1–111 [N.d.R.].

(2) *Fluctuations dans la lutte pour la vie, leurs lois fondamentales et de reciprocité.* Conférence de la réunion internationale des mathématiciens, Société Math. de France, Paris 1938 [questo volume delle « Opere », XXVII, pp. 482–495].

4. After these general considerations let us expound the matter in detail. Assume that we have n species whose populations are denoted by

$$N_1, N_2, \ldots, N_n .$$

If their coefficients of increase are called $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$, taking these constants as positive or negative according to whether the species tend to increase or to die out when not interfered with, we shall have the following equations expressing the variations of the populations:

$$\frac{dN_1}{dt} = \varepsilon_1 N_1 , \frac{dN_2}{dt} = \varepsilon_2 N_2 , \ldots , \frac{dN_n}{dt} = \varepsilon_n N_n .$$

But we want to suppose that the various species act on one another dependently upon the number of these populations; and if we suppose this dependency to be of an immediate and linear nature, we shall have to substitute for $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$

$$\varepsilon_1 + \sum_1^n {}_s A_{s1} N_s , \quad \varepsilon_2 + \sum_1^n {}_s A_{s2} N_s , \quad \ldots, \quad \varepsilon_n + \sum_1^n {}_s A_{sn} N_s .$$

The coefficient A_{sr} measures that unitary action (per individual) which the species s exercises upon the species r, while A_{rs} denotes the inverse action that the species r exercises upon the species s; and as it is supposed that these actions are such that, while one species injures the other, the latter profits from the first (for example, one species devours the other) the coefficients A_{sr}, A_{rs} may be assumed to have opposite signs. They will not however be of equal absolute value.

Without repeating the discussion made in last year's lecture, we shall make a simple and probable hypothesis; that their absolute values be in the inverse ratio of certain constant and positive coefficients, which we shall assume as values of the individuals of each species. In this way we can write:

$$(1) \qquad A_{rs} = \frac{1}{\beta_r} a_{rs} \quad , \quad A_{sr} = \frac{1}{\beta_s} a_{sr} \quad , \quad a_{rs} = - a_{sr} ;$$

and we shall have as general equations of the struggle for life the equations (A), that is, the very same equations which are found by the method of encounters.

5. We can generalise further and suppose that the equations (1) do not hold and that the condition $A_{rr} \gtrless 0$ is satisfied, when, instead of supposing that the individuals of the various species devour each other, we assume that they act on one another in such a way that they influence the generic coefficients of increase of the populations. Then we find the following equations

$$\frac{dN_r}{dt} = \left(\varepsilon_r + \sum_1^n {}_s A_{sr} N_s \right) N_r ,$$

which have been classified and studied in paragraph 7, part II of *Variazioni*

e fluttuazioni del numero d'individui in specie animali conviventi, R. Comit. Talassografico Italiano, Mem. CXXXI, 1927.

III.

6. Now we come to examine the historical case. By t we denote the actual instant and by τ a preceding instant. The number of individuals of the species s at time τ will be $N_s(\tau)$.

Let us suppose that the species s exercises over the coefficient of increase of the species r an action which will be manifested in the future and which varies with the distance in time. We shall denote such a (unitary) action by $F_{sr}(t-\tau)$ when it is exercised by the species s in the infinitesimal interval of time $(\tau, \tau + d\tau)$ and is manifested on the species r at time t. Then the action corresponding to the population $N_s(\tau)$ will be

$$N_s(\tau)\, F_{sr}(t-\tau)\, d\tau\,.$$

If we take into account all these actions beginning from the origin of times at which they are supposed to have begun, up to the present moment t we shall have

$$\int_0^t N_s(\tau)\, F_{sr}(t-\tau)\, d\tau\,.$$

Considering historical actions for all n species on the coefficient of increase of the species r we shall have

$$\sum_1^n{}_s \int_0^t N_s(\tau)\, F_{sr}(t-\tau)\, d\tau\,.$$

The coefficient of increase of the species r, taking into account all immediate and historical actions exercised upon it, will therefore become

$$\varepsilon_r + \sum_1^n{}_s \left(A_{sr} N_s(t) + \int_0^t N_s(\tau)\, F_{sr}(t-\tau)\, d\tau\right).$$

And as general equations of the struggle for life we shall assume

$$\text{(B)} \qquad \frac{dN_r}{dt} = \left\{\varepsilon_r + \sum_1^n{}_s \left[A_{sr} N_s(t) + \int_0^t N_s(\tau)\, F_{sr}(t-\tau)\, d\tau\right]\right\} N_r(t)\,.$$

In this way we shall have n integro-differential equations.

It is not impossible that some of the A_{sr}, F_{sr} may be zero, and up to now we shall assume nothing about their signs.

7. We may suppose that the historical actions may be prolonged indefinitely in the past, and then the equations (B) must be replaced by the

following:

$$(B') \qquad \frac{dN_r}{dt} = \left\{ \varepsilon_r + \sum_1^n {}_s \left[A_{sr} N_s(t) + \int_{-\infty}^{t} N_s(\tau) F_{sr}(t-\tau) \, d\tau \right] \right\} N_r(t) .$$

Of course we must suppose that the necessary conditions for convergence of these integrals are satisfied. We may also suppose that the historical actions cease after a certain interval of time, and then it is sufficient to change the lower limit of the preceding integral into $t - T_0$, denoting by $T_0 > 0$ this interval of time. Then (B′) becomes

$$(B'') \qquad \frac{dN_r}{dt} = \left\{ \varepsilon_r + \sum_1^n {}_s \left[A_{sr} N_s(t) + \int_{t-T_0}^{t} N_s(\tau) F_{sr}(t-\tau) \, d\tau \right] \right\} N_r(t) ,$$

or

$$(B''') \qquad \frac{dN_r}{dt} = \left\{ \varepsilon_r + \sum_1^n {}_s \left[A_{sr} N_s(t) + \int_0^{T_0} N_s(t-\tau) F_{sr}(\tau) \, d\tau \right] \right\} N_r(t) .$$

8. We easily see that there may be stationary states. For that purpose we shall substitute in the equations (B‴) for $N_1, N_2, \cdots, N_n$ the constants $K_1, K_2, \cdots, K_n > 0$.

The equations become

$$\varepsilon_r + \sum_1^n {}_s \left(A_{sr} + \int_0^{T_0} F_{sr}(\tau) \, d\tau \right) K_s = 0 ;$$

and if we write

$$A_{sr} + \int_0^{T_0} F_{sr}(\tau) \, d\tau = C_{sr} ,$$

we shall have

$$(C) \qquad \varepsilon_r + \sum_1^n {}_s C_{sr} K_s = 0 .$$

If the determinant of the C_{sr} is different from 0 and the roots are positive, these will represent the populations of equilibrium (stationary states).

9. Let us take again the equation (B), multiply both sides by $dt/N_r(t)$ and then integrate between 0 and θ. We find

$$\log \frac{N_r(\theta)}{N_r(0)} = \varepsilon_r \theta + \sum_1^n {}_s \int_0^{\theta} \left[A_{sr} N_s(t) + \int_0^{t} N_s(\tau) F_{sr}(t-\tau) \, d\tau \right] dt .$$

Applying a well known Dirichlet's transformation, we obtain

$$\log \frac{N_r(\theta)}{N_r(o)} = \varepsilon_r \theta + \sum_{1}^{n}{}_s \int_{o}^{\theta} \left[A_{sr} + \int_{t}^{\theta} F_{sr}(\tau - t)\, d\tau \right] N_s(t)\, dt\,,$$

from which it follows that

$$N_r(\theta) = N_r(o)\, e^{P}$$

where

$$P = \varepsilon_r \theta + \sum_{1}^{n}{}_s \int_{o}^{\theta} \left[A_{sr} + \int_{t}^{\theta} F_{sr}(\tau - t)\, d\tau \right] N_s(t)\, dt\,.$$

Now we may apply a method of successive approximations and integrate the integro-differential equations. I have already applied the method of successive approximations to the resolution of the integro-differential equations relative to the historical case for two species; these equations are a particular case ($n = 2$) of those now found.

The procedure for the application of the method of successive approximations to the case when $n = 2$ has been exposed in detail in the work *Leçons sur la théorie mathématique de la lutte pour la vie* (see page 192 and following). I think it unnecessary to explain here the easy extension of this proceedure to the general case.

10. There are many interesting particular cases to examine. For instance if the actions are reciprocal (as in the case in which the individuals of the various species devour each other) it will be convenient to assume A_{sr}, A_{rs}, with different signs, and so F_{sr}, F_{rs}. Some of these may be zero.

If we admit both for the A_{sr}, A_{rs} and for the F_{sr}, F_{rs}, that they will be in certain cases inversely proportional to the values

$$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$$

of the individuals, we shall put

$$A_{sr} = \frac{a_{sr}}{\beta_r} \quad , \quad A_{rs} = \frac{a_{rs}}{\beta_s} \quad , \quad a_{sr} = -a_{rs}\,,$$

$$F_{sr}(t - \tau) = \frac{f_{sr}(t-\tau)}{\beta_r} \quad , \quad F_{rs}(t-\tau) = \frac{f_{rs}(t-\tau)}{\beta_s} \quad , \quad f_{sr} = -f_{rs}\,;$$

so that the equations (B‴) become

$$(\mathrm{B^{IV}}) \qquad \beta_r \frac{dN_r}{dt} = \left\{ \beta_r \varepsilon_r + \sum_{1}^{n}{}_s \left[a_{sr} N_s(t) + \int_{o}^{T_0} N_s(t-\tau) f_{sr}(\tau)\, d\tau \right] \right\} N_r(t)\,.$$

The equations which give the stationary states (conditions of equilibrium) will then be

$$(\mathrm{C'}) \qquad \beta_r \varepsilon_r + \sum_{1}^{n}{}_s c_{sr} K_s = o$$

when we put

$$C_{sr} = \frac{c_{sr}}{\beta_r} \quad , \quad c_{sr} = - c_{rs} .$$

From (C′) we deduce

$$\sum_1^n{}_r \beta_r \, \varepsilon_r \, K_r = 0 ,$$

from which we may deduce, for the historical case, the same laws of reciprocity that we have enunciated in previous works in the case of immediate actions (see the conference mentioned in § 2).

It is however necessary to observe that while in the last case the populations of equilibrium coincide with the averages of the populations, we cannot say the same, at least in general, in the historical case.

11. We confine ourselves, in the present short essay, to the preceding general considerations and leave aside any further developments.

Finally we consider it convenient to summarise the following conclusions:

I. That with conveniently appropriate hypotheses the general case of historical actions, already studied for two species, can also be examined for any number of species.

II. That in this case we can obtain some general integro-differential equations which include all those previously given for the problems of biological struggle.

III. That we can completely and easily integrate these equations with simple methods of successive approximations.

IV. That we can undertake to study the stationary case.

XXIX.

CALCULUS OF VARIATIONS AND THE LOGISTIC CURVE

« Human Biology », vol. 11, N. 2, 1939; pp. 173–178.

1. I have been able to show that the equations of the struggle for existence depend on a question of Calculus of Variations, or more precisely on a problem of minimum.

In order to obtain this result, I have replaced the notion of *population* by that of *quantity of life* (1). In this manner I have also obtained some results by which dynamics is brought into relation to problems of the struggle for existence.

2. The quantity of life X and the population N of a species are connected by the relations

$$X = \int_0^t N\,dt \quad , \quad N = \frac{dX}{dt}$$

where N is to be considered as a function of the time. All depends on a theorem of Calculus of Variations that I have already used in my Memoir above cited. I shall now give the enunciation, the demonstration, and some applications of this theorem.

3. THEOREM: *The differential equation*

$$\text{(I)} \qquad \frac{dz}{dt} = f(z) = a(z - a_1)(z - a_2)\cdots(z - a_n),$$

where $f(z)$ is a rational and integral polynomial of degree n, can be obtained by equating to zero the first variation of

$$P = \int_0^T F(t)\,dt \quad ; \quad F = \sum_1^n {}_i\, m_i\left(a_i - \frac{dX}{dt}\right)\log\left(a_i - \frac{dX}{dt}\right) + KX,$$

by putting $dX/dt = z$ and by making a convenient choice of the constants m_i, K.

(1) *Principes de Biologie Mathématique*: Ière Partie, § 1, N. 2; « Acta Biotheoretica », vol. III, parte I, 1937 [in questo volume delle « Opere », XXIII, pp. 414–447].

In fact we shall have

$$(\mathrm{II}) \qquad \delta P = \int_0^T \delta F \, dt = \int_0^T \left\{ -\Sigma_i m_i \left[\frac{d\,\delta X}{dt} \log\left(a_i - \frac{dX}{dt}\right) - m_i \frac{d\,\delta X}{dt} \right] + K\,\delta X \right\} dt$$

and with an integration by parts, neglecting the terms out of the integral, this takes the form

$$(\mathrm{III}) \qquad \delta P = \int_0^T \delta X \left[\Sigma_i \frac{-m_i \dfrac{d^2 X}{dt^2}}{a_i - \dfrac{dX}{dt}} + K \right] dt .$$

If $\delta P = 0$ for every value of δX then we shall have

$$\Sigma_i \frac{m_i \dfrac{d^2 X}{dt^2}}{a_i - \dfrac{dX}{dt}} = K ,$$

from which we deduce, by putting $dX/dt = z$,

$$(\mathrm{IV}) \qquad Q(z) \frac{dz}{dt} = K (a_1 - z)(a_2 - z) \cdots (a_n - z) .$$

4. $Q(z)$ is a polynomial of degree $n - 1$ linear and homogeneous with respect to $m_1, m_2, \cdots, m_n$.

We can write

$$(\mathrm{V}) \qquad Q(z) = A_1 z^{n-1} + A_2 z^{n-2} + \cdots A_n$$

where

$$A_i = m_1 p_{1i} + m_2 p_{2i} + \cdots + m_n p_{ni} ,$$

A_i and $p_{1i}, p_{2i}, \cdots, p_{ni}$ being of degree $i - 1$ with respect to $a_1, a_2, \cdots, a_n$.

If we write

$$(\mathrm{VI}) \qquad A_1 = A_2 = \cdots = A_{n-1} = 0, \qquad A_n = A$$

(A constant), we have n equations linear with respect to $m_1, m_2, \cdots, m_n$.

The determinant of these equations is

$$D = \begin{vmatrix} p_{11}, p_{12}, \cdots, p_{1n} \\ p_{21}, p_{22}, \cdots, p_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ p_{n1}, p_{n2}, \cdots, p_{nn} \end{vmatrix} .$$

Considering that $p_{1i}, p_{2i}, \cdots, p_{ni}$ are of degree $i - 1$ with respect to $a_1, a_2, \cdots, a_n$ we shall see that D is of degree

$$1 + 2 + \cdots + (n - 1) = \frac{n(n-1)}{2} .$$

Moreover by changing i with s we produce an exchange between the columns i and s; hence D admits the factors $a_i - a_s$. They are in number of $n(n-1)/2$.

We conclude that D will be equal to a constant multiplied by all the factors $a_i - a_s$, which can be obtained by means of the combinations two by two of the indexes $1, 2, \cdots, n$. Hence D will not be zero if $a_1, a_2, \cdots, a_n$ are all different among them.

Therefore we can determine $m_1, m_2, \cdots, m_n$ as solutions of equations (VI). Then we have $Q(z) = A$ and

$$\frac{dz}{dt} = a(a_1 - z)(a_2 - z) \cdots (a_n - z)$$

where

$$a = K/A .$$

5. We have demonstrated the theorem in the case where $f(z)$ does not have multiple roots. The case of multiple roots can be treated by the usual procedure supposing that two or more roots become indefinitely near among them.

We shall consider only a particular example. Let us suppose a case having three roots and that $a_2 = a_3$.

We can write

$$\text{(VII)} \quad F = m_1\left(a_1 - \frac{dX}{dt}\right)\log\left(a_1 - \frac{dX}{dt}\right) + m_2\left(a_2 - \frac{dX}{dt}\right)\log\left(a_2 - \frac{dX}{dt}\right) +$$
$$+ \frac{m_3}{\varepsilon}\left[\left(a_2 + \varepsilon - \frac{dX}{dt}\right)\log\left(a_2 + \varepsilon - \frac{dX}{dt}\right) - \left(a_2 - \frac{dX}{dt}\right)\log\left(a_2 - \frac{dX}{dt}\right)\right].$$

As ε approaches zero, F approaches

$$m_1\left(a_1 - \frac{dX}{dt}\right)\log\left(a_1 - \frac{dX}{dt}\right) + m_2\left(a_2 - \frac{dX}{dt}\right)\log\left(a_2 - \frac{dX}{dt}\right) +$$
$$+ m_3 \log\left(a_2 - \frac{dX}{dt}\right) + m_3 ,$$

and if we take $\delta P = 0$ we shall obtain the equations

$$\text{(VIII)} \qquad m_1 a_2^2 + m_2 a_1 a_2 + m_3 a_1 = A$$
$$\text{(IX)} \qquad 2 m_1 a_2 + m_2 (a_1 + a_2) + m_3 = 0$$
$$\text{(X)} \qquad m_1 + m_2 = 0$$

whose determinant D is $-(a_1 - a_2)^2$, and therefore is not zero if

$$a_1 \gtrless a_2 .$$

6. Starting from the expression (II) for δP we obtain for the second variation

$$\int_0^T \Sigma_i \frac{m_i \left(\dfrac{d\,\delta X}{dt}\right)^2}{a_i - \dfrac{dX}{dt}} dt .$$

If $m_i > 0$ and $a_i > dX/dt$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ the preceding expression is positive and then we shall have a minimum.

7. In a lecture published in 1937 (2) I spoke about the variational principle in mathematical biology. Having received that Memoir, Prof. L. AMOROSO asked me this question: Is it possible to reduce the equation of VERHULST-PEARL to the Eulerian form in the sense indicated in my Memoir and to reduce consequently the movement of human population to a principle of minimum ?

I have been able to answer this interesting question by means of the preceding theorem showing that it is also applicable to the VERHULST-PEARL case.

8. In fact the VERHULST-PEARL differential equation can be written

$$\frac{dN}{dt} = N\,(\varepsilon - \lambda N)\,.$$

Now let us proceed as in Section 2 above. Letting

$$N = \frac{dX}{dt}$$

the integral whose variation we must consider can be written

$$\int_0^T \left(m_1 \frac{dX}{dt} \log \frac{dX}{dt} + m_2\left(\varepsilon - \lambda \frac{dX}{dt}\right) \log\left(\varepsilon - \lambda\frac{dX}{dt}\right) + KX\right) dt$$

and its first variation will be

$$\text{(XI)} \qquad \int_0^T \left[\left\{ m_1 \log \frac{dX}{dt} + m_1 - m_2 \lambda \log\left(\varepsilon - \lambda \frac{dX}{dt}\right) - m_2 \lambda\right\} \frac{d\delta X}{dt} + K\delta X\right] dt\,.$$

Integrating by parts and neglecting the terms out of the integral we shall have

$$\int_0^T \left[\left(-\frac{m_1}{\dfrac{dX}{dt}} - \frac{m_2 \lambda^2}{\varepsilon - \lambda \dfrac{dX}{dt}}\right) \frac{d^2 X}{dt^2} + K\right] \delta X\, dt\,.$$

Equating to zero this first variation and assuming $m_1 = \lambda m_2 > 0$, $K = m_1 \varepsilon$ we reach the equation

$$\text{(XII)} \qquad \frac{d^2 X}{dt^2} = \frac{dX}{dt}\left(\varepsilon - \lambda \frac{dX}{dt}\right),$$

that is

$$\text{(XIII)} \qquad \frac{dN}{dt} = N\,(\varepsilon - \lambda N)\,,$$

which is PEARL's equation.

(2) *Applications des Mathématiques à la Biologie*, « L'enseignement Mathématique », vol. 36, 1937, pp. 297–330 [in questo volume delle « Opere », XXIV, pp. 448–471].

If we calculate the second variation starting from equation (XI) we find

$$\text{(XIV)}\qquad \int_0^T \left(\frac{m_1 \left(\frac{d\delta X}{dt}\right)^2}{\frac{dX}{dt}} + \frac{m_2 \lambda^2 \left(\frac{d\delta X}{dt}\right)^2}{\varepsilon - \lambda \frac{dX}{dt}} \right) dt\,.$$

Now since

$$o < \frac{dX}{dt} = N < \frac{\varepsilon}{\lambda}$$

we can say that the second variation is positive and hence that we have a minimum.

9. In a preceding paper [3] I have extended PEARL's equation, taking into account beside the *mortality term* and PEARL's *term* also a *birth term*; I have thus found an equation [see [3], § 8, equation (I′)] which can be written in the form (I). Therefore the theorem enunciated in Section 2 of the present paper is applicable to the cases treated in the earlier above mentioned paper.

(3) *Population growth, equilibria, and extinction under specified breeding conditions: a development and extension of the theory of the logistic curve,* « Human Biology », vol. 10, 1938, pp. 1–11 [in questo volume delle « Opere », XXV, pp. 472–479].

XXX.

ENERGIA NEI FENOMENI ELASTICI EREDITARII (*)

«Acta Pontificia Acad. Scient.», vol. IV, 1940; pp. 115–128.

I. – Una delle principali applicazioni della teoria dei funzionali è stata da me rivolta allo studio dei fenomeni naturali che io chiamai *ereditarii*, cioè di quelli nei quali un sistema risente attualmente l'azione di cause che si sono esercitate nel passato. La denominazione di ereditario ha incontrato però qualche difficoltà da parte di alcuni naturalisti, per i quali il concetto di ereditario implica un passaggio da uno ad altro soggetto.

Potrebbe sembrare quindi più appropriato di sostituire la denominazione di *storico* a quella di *ereditario*, in quanto si può ritenere storico ogni avvenimento del passato. Però in questa Nota ho continuato a servirmi della parola fenomeni ereditarii, in quanto essa si ricollega direttamente ad altre Memorie nelle quali avevo già fatto uso del vocabolo ereditario. Mutandolo poteva nascere qualche confusione e l'ho pertanto conservato.

I sistemi materiali in cui si verificano fenomeni ereditarii possono dipendere da un numero finito di parametri o possono essere dei sistemi continui. Ai primi ho consacrato vari scritti ed anche ai secondi ho rivolto la mia attenzione quando ho studiato la ereditarietà nei corpi elastici.

Però è solo in lavori più recenti che ho esaminato la questione energetica nei casi ereditarii. In una Memoria pubblicata nel « Journal de Mathématiques » (1) ho ampiamente trattato la questione energetica nei sistemi ereditarii aventi un grado finito di libertà. Nella presente Nota studio un caso ereditario di sistemi continui: quello dei solidi elastici dal punto di vista energetico.

In ambedue i casi si giunge ad analoghe conclusioni.

Ora, siccome il procedimento usato per i corpi elastici si basa sopra postulati e impiega metodi ed artifizi che sono una estensione di quelli adoperati per i sistemi aventi un numero finito di gradi di libertà, per maggiore chiarezza comincerò dal ripetere brevemente la teoria energetica pel caso di un sistema avente un solo grado di libertà e solo in ultimo tratterò la questione energetica per i corpi elastici nel caso ereditario.

Chiamiamo q il parametro da cui dipende un certo fenomeno e denotiamo con t il tempo.

(*) Nota presentata il 19 maggio 1940.

(1) In questo volume delle « Opere », IV, pp. 130–169 [N.d.R.].

Se noi scriviamo

$$F(q(t))$$

avremo una quantità che dipende dal valore del parametro nell'istante t (istante attuale). Ora

$$q(t-\tau)$$

è il valore del parametro stesso in un istante $t-\tau$ cioè in un istante che ha preceduto di τ l'istante attuale, quindi

$$\int_0^{T_0} \Phi(\tau)\, q(t-\tau)\, d\tau \tag{1}$$

è una quantità che dipende da tutti i valori del parametro q in un periodo di tempo di ampiezza T_0 che precede l'istante attuale. Essa è una particolare espressione propria delle quantità che risentono la eredità del parametro q durante l'intervallo di tempo

$$(t-T_0\,, t)\,.$$

Analogamente

$$aq(t)+\int_0^{T_0} \Phi(\tau)\, q(t-\tau)\, d\tau\,,$$

ove a denota una costante, dipenderà dal valore attuale di $q(t)$ e dall'eredità lasciata da questo parametro durante l'intervallo di tempo $(t-T_0\,, t)$.

Esso sarà un'espressione lineare e perciò la corrispondente eredità si dirà lineare.

Riprendiamo l'espressione (1); allorché essa denota un'azione (forza) questa sarà acceleratrice se $\Phi(\tau)$ sarà positivo, mentre se $\Phi(\tau)$ sarà negativo l'azione sarà ritardatrice. Inoltre ogni elemento dell'integrale

$$\Phi(\tau)\, q(t-\tau)\, d\tau$$

può assumersi come una componente dell'azione totale e precisamente può ritenersi esser quella componente che dipende dall'eredità del parametro q nell'intervallo di tempo $(t-\tau-d\tau\,, t-\tau)$. Vedremo tra poco come può modificarsi questo concetto dell'azione ereditaria elementare.

Nelle formule precedenti noi abbiamo tenuto conto dell'eredità limitatamente all'intervallo di tempo T_0 anteriore all'istante attuale; noi abbiamo cioè supposto che l'eredità vada dissipandosi col tempo, tanto da poter ammettere che sia

$$\Phi(t)=0 \qquad \text{per} \quad t \geq T_0\,.$$

In tal caso T_0 si chiama la *durata dell'eredità*.

II. - In questo paragrafo, come ho annunziato precedentemente, riprenderò brevemente la teoria energetica nel caso di un sistema avente un sol grado di libertà.

Immaginiamo un sistema meccanico avente un sol grado di libertà, la cui configurazione sia quindi individuata da un solo parametro q. I piccoli movimenti spontanei nel noto schema vibratorio di un tale sistema dipenderanno dall'equazione differenziale ben nota

$$\frac{d^2 q(t)}{dt^2} + a^2 q(t) = 0 .$$

Se noi supponiamo che la forza viva o energia cinetica del sistema sia

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dq(t)}{dt}\right)^2 = T$$

e il potenziale delle forze interne sia

$$P = -E = -\frac{1}{2} a^2 q^2 ,$$

l'equazione delle forze vive avrà la forma

$$d(T + E) = 0 ,$$

ossia

$$T + E = \text{cost.} ,$$

ed $E = \frac{1}{2} a^2 q^2$ esprimerà l'energia potenziale interna del sistema.

Se il moto anziché libero sarà forzato, l'equazione fondamentale si scriverà

$$\frac{d^2 q(t)}{dt^2} + a^2 q(t) = Q(t) \tag{2}$$

denotando $Q(t)$ la forza esterna ed in questo caso avremo

$$d(T + E) = Q\, dt .$$

Questa equazione dice che il lavoro delle forze esterne va impiegato ad aumentare l'energia totale del sistema, cioè la somma della forza viva (energia cinetica) e dell'energia interna (energia potenziale). Supponiamo ora che il sistema sia soggetto ad azioni interne ereditarie, e per considerare il caso più semplice supponiamo ch'esse siano azioni ereditarie lineari. Dovremo allora aggiungere l'azione ereditaria al termine $a^2 q$ che figura nel primo membro. Come abbiamo detto precedentemente, questa azione ereditaria potrà scriversi

$$\int_0^{T_0} \Phi(\tau)\, q(t-\tau)\, d\tau ,$$

supponendo l'eredità di natura invariabile col tempo e supponendo che T_0 sia la sua durata.

Dovremo ora ammettere quest'azione ereditaria acceleratrice o ritardatrice? È facile persuadersi che essa opera in senso opposto dell'azione interna

$a^2 q(t)$ in modo che, come equazione generale da sostituirsi alla (2), dovremo assumere

$$\frac{d^2 q(t)}{dt^2} + a^2 q(t) + \int_0^{T_0} \Phi(\tau)\, q(t-\tau)\, d\tau = Q(t), \tag{3}$$

ove $\Phi(t)$ è una quantità essenzialmente negativa. Si ponga ora

$$a^2 + \int_0^{T_0} \Phi(\tau)\, d\tau = m$$

e l'equazione precedente diverrà

$$\frac{d^2 q(t)}{dt^2} + mq(t) - \int_0^{T_0} \Phi(\tau)\,[q(t) - q(t-\tau)]\, d\tau = Q(t). \tag{3'}$$

Un semplice ragionamento ci porta a concludere che m è positivo altrimenti q non cambierebbe o crescerebbe.

Consideriamo il funzionale

$$E_p = \frac{1}{2} mq^2(t) - \frac{1}{2} \int_0^{T_0} \Phi(\tau)\,[q(t) - q(t-\tau)]^2\, d\tau;$$

il suo differenziale potrà scriversi

$$mq(t)\,\delta q(t) - \int_0^{T_0} \Phi(\tau)\,[q(t) - q(t-\tau)]\, d\tau\, \delta q(t) +$$

$$+ \int_0^{T_0} \Phi(\tau)\,[q(t) - q(t-\tau)]\, \delta q(t-\tau)\, d\tau.$$

Il primo termine è il prodotto della forza totale interna attuale cambiata di segno per il differenziale $\delta q(t)$ dello spostamento attuale. Potremo dunque chiamare $-E_p$ il *potenziale dell'insieme di tutte le azioni interne.*

E_p è un funzionale il quale dipende dallo stato attuale del sistema e da tutti gli stati che ha attraversato il sistema nell'intervallo di tempo T_0 che ha preceduto l'istante attuale. Ora dal punto di vista ereditario il sistema si trova nelle stesse condizioni in due istanti diversi quando, non solo i parametri che definiscono lo stato del sistema hanno gli stessi valori nei due istanti, ma sono rispettivamente uguali tra loro anche i valori dei parametri stessi nei due intervalli di tempo d'ampiezza T_0 che precedono i due detti istanti.

E_p è dunque un funzionale che riprende il valore iniziale allorché il sistema ritorna, dal punto di vista ereditario, nelle stesse condizioni iniziali. Nella equazione (3) la forza interna attuale è scritta sotto la forma

$$-mq(t) + \int_0^{T_0} \Phi(\tau)\,[q(t) - q(t-\tau)]\, d\tau;$$

ora quest'espressione può interpretarsi dicendo che il contributo di forza interna attuale proveniente dal tempuscolo $(\tau, \tau + d\tau)$ è dato da $\Phi(\tau)[q(t) - q(t-\tau)]\,d\tau$ ossia è proporzionale alla differenza tra il valore attuale del parametro q ed il suo valore nell'istante $t - \tau$. Ciò modifica il concetto di azione elementare ereditaria che avevamo precedentemente esposto. Fu appunto questa modificazione del concetto primitivo di contributo elementare ereditario, al quale abbiamo già alluso precedentemente, che diede luogo alle più feconde conseguenze.

Noi abbiamo detto che $\Phi(\tau)$ deve assumersi negativo, ma vi è da ricordare un'altra ipotesi sopra questa quantità. Siccome l'azione ereditaria tende ad estinguersi col tempo, così il valore assoluto di $\Phi(\tau)$ deve andare continuamente decrescendo col crescere di τ quindi potremo scrivere

$$\Phi(\tau) < 0 \quad , \quad (0 \leq \tau < T_0) \quad , \quad \Phi(T_0) = 0 \quad , \quad \Phi'(\tau) > 0 \quad , \quad (0 < \tau < \tau_0).$$

Riprendiamo l'equazione (3'). Se noi vogliamo ottenere il lavoro della forza esterna Q durante il tempuscolo dt dovremo calcolare

$$Q(t)\,q'(t)\,dt$$

e questo si esprimerà sotto la forma

$$q''(t)\,q'(t)\,dt + mq(t)\,q'(t)\,dt - q'(t)\int_0^{T_0}\Phi(\tau)[q(t) - q(t-\tau)]\,d\tau .$$

I primi due termini, come risulta ovviamente dall'analisi che conduce al principio delle forze vive, sono due differenziali esatti e cioè insieme formano

$$d\frac{1}{2}[q'^2(t) + mq^2(t)] .$$

Il terzo termine non è un differenziale esatto ma differisce da

$$d\left\{-\frac{1}{2}\int_0^{T_0}\Phi(\tau)[q(t) - q(t-\tau)]^2\,d\tau\right\}$$

per la quantità

$$dt\int_0^{T_0}\Phi(\tau)[q(t) - q(t-\tau)]\frac{dq(t-\tau)}{dt}\,d\tau$$

Ora quest'espressione può scriversi

$$dt\cdot\frac{1}{2}\int_0^{T_0}\Phi(\tau)\frac{d[q(t) - q(t-\tau)]^2}{d\tau}\,d\tau$$

e, con un'integrazione per parti, osservando che

$$\Phi(T_0) = 0 \quad , \quad [q(t) - q(t-\tau)]_{\tau=0} = 0$$

si trasforma in

$$-dt\frac{1}{2}\int_0^{T_0}\Phi'(\tau)[q(t) - q(t-\tau)]^2\,d\tau ,$$

onde otterremo finalmente

$$d\left\{\frac{1}{2}q'^2(t) + \frac{1}{2}mq^2(t) - \frac{1}{2}\int_0^{T_0}\Phi(\tau)\,[q(t)-q(t-\tau)]^2\,d\tau + \right.$$

$$\left. + \frac{dt}{2}\int_0^{T_0}\Phi'(\tau)\,[q(t)-q(t-\tau)]^2\,d\tau\right\} = Q(t)\,dq(t).$$

E siccome (vedi (1))

$$\frac{1}{2}q'^2(t) = T \quad , \quad \frac{1}{2}mq^2(t) - \frac{1}{2}\int_0^{T_0}\Phi(\tau)\,[q(t)-q(t-\tau)]^2\,d\tau = E_p$$

e possiamo porre

$$E_\delta = \frac{1}{2}\int_0^{T_0}\Phi'(\tau)\,[q(t)-q(t-\tau)]^2\,d\tau\,,$$

avremo

$$d(T + E_p) + E_\delta\,dt = Q(t)\,dq(t).$$

Ora E_δ è una quantità positiva, dunque il lavoro delle forze esterne supera sempre l'incremento della quantità

$$T + E_p.$$

Se noi scriviamo $T + E_p = E_m$ ed integriamo tra due tempi t_0 e t_1, dall'equazione precedente risulterà

$$E_m - E_m^0 + \int_{t_0}^{t} E_\delta\,dt = L$$

ove E_m e E_m^0 sono i valori di E_m ai tempi t_1 e t_0, e il lavoro delle forze esterne è L.

È questa l'equazione fondamentale energetica che volevamo stabilire.

Chiamiamo per definizione E_p l'energia potenziale interna ed E_m l'energia meccanica. Si avrà allora il principio energetico:

Il lavoro delle forze esterne oltrepassa sempre la variazione dell'energia meccanica di una quantità positiva. Se L è positivo questa legge può enunciarsi:

Il lavoro delle forze esterne non si trasforma completamente in energia meccanica ma resta sempre una parte residua positiva del lavoro stesso che non si trasforma in energia meccanica. Se mancano forze esterne (e quindi $L = 0$) *l'energia meccanica diminuisce costantemente, e, se il lavoro delle forze esterne è negativo, l'energia meccanica si trasforma solo in parte in lavoro esterno.*

III. – Passiamo adesso al caso della elasticità e annunziamo subito che alle ipotesi precedenti $\Phi(\tau) < 0$, $\Phi'(\tau) > 0$ (vedi § II) noi sostitueremo le ipotesi che la forma

$$\sum_1^6{}_r \sum_1^6{}_s\, \varphi_{rs}\,\xi_r\,\xi_s$$

sia negativa e la forma

$$\sum_1^6{}_r \sum_1^6{}_s \varphi'_{rs} \xi_r \xi_s$$

sia positiva.

Chiamiamo u_1, u_2, u_3 le componenti degli spostamenti dei punti d'un corpo elastico secondo gli assi x_1, x_2, x_3 e chiamiamo

$$\gamma_1 = \gamma_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \quad , \quad \gamma_2 = \gamma_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2} ,$$

$$\gamma_3 = \gamma_{33} = \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \quad , \quad \gamma_4 = \gamma_{23} = \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} ,$$

$$\gamma_5 = \gamma_{31} = \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \quad , \quad \gamma_6 = \gamma_{12} = \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}$$

le caratteristiche delle deformazioni (strain), mentre rappresentiamo colla forma

$$F = \frac{1}{2} \sum_1^6{}_r \sum_1^6{}_s a_{rs} \gamma_r \gamma_s$$

il potenziale elastico quando manchino forze ereditarie.

Se queste invece sussistono assumeremo come potenziale elastico al tempo t

$$\Phi = \frac{1}{2} \sum_1^6{}_r \sum_1^6{}_s a_{rs} \gamma_r(t) \gamma_s(t) +$$

$$+ \frac{1}{2} \int_0^{T_0} \sum_1^6{}_r \sum_1^6{}_s \varphi_{rs}(\tau) [\gamma_r(t) - \gamma_r(t-\tau)] [\gamma_s(t) - \gamma_s(t-\tau)] \, d\tau = F + \Psi$$

ove T_0 è la durata della eredità e la forma

$$\sum_1^6{}_r \sum_1^6{}_s \varphi_{rs} \xi_r \xi_s$$

è una forma definita negativa che si annulla per $\tau = T_0$.

Denotando con

$$t_1 = t_{11} \quad , \quad t_2 = t_{22} \quad , \quad t_3 = t_{33} \quad , \quad t_4 = t_{23} = t_{32} \quad , \quad t_5 = t_{31} = t_{13} \quad , \quad t_6 = t_{12} = t_{21}$$

le caratteristiche delle tensioni avremo nel caso ereditario

$$t_i(t) = \frac{\partial \Phi}{\partial \gamma_i(t)}$$

e le equazioni delle vibrazioni elastiche saranno

$$(4) \qquad \rho\left(\frac{d^2 u_i}{dt^2} - \chi_i\right) + \frac{\partial t_{i1}}{\partial x_1} + \frac{\partial t_{i2}}{\partial x_2} + \frac{\partial t_{i3}}{\partial x_3} = 0$$

$$\chi_i^{(\sigma)} = t_{i1} \cos nx_1 + t_{i2} \cos nx_2 + t_{i3} \cos nx_3$$

ove le χ_i sono le componenti delle forze di massa, ρ la densità del corpo, $\chi_i^{(\sigma)}$ le componenti delle tensioni superficiali n la normale esterna al contorno σ dello spazio S occupato dal corpo elastico.

Dalle (4) si ricava

$$(5)\qquad \int_S \sum_1^3{}_i\, \rho\left(\frac{d^2 u_i}{dt^2}\frac{du_i}{dt} - \chi_i \frac{du_i}{dt}\right) dS - \int_\sigma \sum_1^3{}_i\, \chi_i^{(\sigma)} \frac{du_i}{dt}\, d\sigma = \int_S \sum_1^6{}_i\, t_i \frac{d\gamma_i}{dt}\, dS .$$

Ora poniamo

$$\lambda = \frac{1}{2}\sum_1^6{}_r \sum_1^6{}_s\, \varphi_{rs}\,(\gamma_r(t) - \gamma_r(t-\tau))\,(\gamma_s(t) - \gamma_s(t-\tau))$$

con che

$$\Psi = \int_0^{T_0} \lambda\, d\tau$$

si avrà

$$\sum_1^6{}_i\, t_i \frac{d\gamma_i}{dt} = \sum_1^6 \frac{\partial\Phi}{\partial\gamma_i(t)}\frac{d\gamma_i}{dt} = \sum_1^6\left(\frac{\partial F}{\partial\gamma_i(t)}\frac{d\gamma_i}{dt} + \frac{\partial\Psi}{\partial\gamma_i(t)}\frac{d\gamma_i}{dt}\right) =$$

$$= \frac{dF}{dt} + \int_0^{T_0} \sum_1^6{}_i\, \frac{\partial\lambda}{\partial(\gamma_i(t) - \gamma_i(t-\tau))}\left\{\frac{d(\gamma_i(t) - \gamma_i(t-\tau))}{dt} + \frac{d\gamma_i(t-\tau)}{dt}\right\} d\tau =$$

$$= \frac{dF}{dt} + \frac{d\Psi}{dt} - \int_0^{T_0} \sum_1^6{}_i \left\{\frac{\partial\lambda}{\partial(\gamma_i(t) - \gamma_i(t-\tau))}\frac{d\gamma_i(t-\tau)}{d\tau}\right\} d\tau =$$

$$= \frac{d\Phi}{dt} + \int_0^{T_0} \sum_1^6{}_i \left\{\frac{\partial\lambda}{\partial(\gamma_i(t) - \gamma_i(t-\tau))}\frac{d(\gamma_i(t) - \gamma_i(t-\tau))}{d\tau}\right\} d\tau =$$

$$= \frac{d\Phi}{dt} + \int_0^{T_0} \left\{\frac{d\lambda}{d\tau} - \frac{1}{2}\sum_1^6{}_r \sum_1^6{}_s\, \varphi'_{rs}(\tau)\,(\gamma_r(t) - \gamma_r(t-\tau))\,(\gamma_s(t) - \gamma_s(t-\tau))\right\} d\tau .$$

Poniamo

$$X = \frac{1}{2}\int_0^{T_0} \sum_1^6{}_r \sum_1^6{}_s \{(\gamma_r(t) - \gamma_r(t-\tau))\,(\gamma_s(t) - \gamma_s(t-\tau))\,\varphi'_{rs}(\tau)\}\, d\tau$$

e teniamo conto che la forma

$$\sum_1^6{}_r \sum_1^6{}_s\, \varphi'_{rs}(\tau)\,\xi_r\,\xi_s$$

si è supposta definita positiva. Inoltre, siccome

$$\varphi_{rs}(T_0) = 0 ,$$

risulterà

$$\int_0^{T_0} \frac{\partial\lambda}{\partial\tau}\, d\tau = 0$$

e quindi

$$\sum_1^6 t_i \frac{d\gamma_i}{dt} = \frac{d\Phi}{dt} - \mathrm{X},$$

onde, ponendo

$$\mathrm{T} = \frac{1}{2} \sum_1^3 \int_S \rho \left(\frac{du_i}{dt}\right)^2 dS,$$

l'equazione (5) si scriverà

$$\frac{d}{dt}(\mathrm{T} - \Phi) + \mathrm{X} = \int_S \sum_1^3 \rho \chi_i \frac{du_i}{dt} dS + \int_S \sum_1^3 \chi_i^{(\sigma)} \frac{du_i}{dt} d\sigma.$$

Moltiplicando per dt avremo

(6) $$d(\mathrm{T} - \Phi) + \mathrm{X}\, dt = \mathfrak{L},$$

essendo

$$\mathfrak{L} = \int_S \sum_1^3 \rho \chi_i \frac{du_i}{dt} dS + \int_\sigma \sum_1^3 \chi_i^{(\sigma)} \frac{du_i}{dt} d\sigma$$

i lavoro eseguito dalle forze esterne nel tempo dt. Chiamiamo per *definizione* $-\Phi$ *la energia elastica del corpo*. Avremo dunque che il lavoro eseguito dalle forze elastiche si trasforma in parte in forza viva $d\mathrm{T}$ in parte in energia elastica $-d\Phi$ ed in parte (χdt) si dissipa.

Se mancano le forze esterne la (6) ci dà

$$\frac{d}{dt}(\mathrm{T} - \Phi) < 0$$

e quindi

$$\mathrm{T} - \Phi$$

ossia la energia del sistema andrà continuamente diminuendo. Il moto non potrà cessare ad un dato istante. Infatti se il primo istante nel quale tutte le velocità fossero nulle incominciasse al tempo t non potrebbero essere tutte nulle le $\gamma_i(t) - \gamma_i(t-\tau)$ $(0 < \tau < \mathrm{T})$ quindi

$$\frac{d(\mathrm{T} - \Phi)}{dt} < 0$$

il che prova che tutte le du_i/dt non potrebbero essere nulle nell'istante t.

ELENCO CRONOLOGICO GENERALE DELLE PUBBLICAZIONI DI VITO VOLTERRA (*)

1. *Sul potenziale di un'ellissoide eterogenea sopra sè stessa* (« Il Nuovo Cimento », s. III, t. IX, 1881_1, pp. 221–229).
   Queste « Opere », vol. I, nota I, pp. 1–6.

2. *Alcune osservazioni sulle funzioni punteggiate discontinue* (« Giornale di Matematiche », vol. XIX, 1881, pp. 76–87).
   Queste « Opere », vol. I, nota II, pp. 7–15.

3. *Sui principi del calcolo integrale* (« Giornale di Matematiche », vol. XIX, 1881, pp. 333–372).
   Queste « Opere », vol. I, nota III, pp. 16–48.

4. *Sopra alcune condizioni caratteristiche delle funzioni di una variabile complessa* (« Annali di Matematica pura ed applicata », s. II, t. XI, 1882–83, pp. 1–55).
   Queste « Opere », vol. I, nota IV, pp. 49–95.

5. *Sopra una legge di reciprocità nella distribuzione delle temperature e delle correnti galvaniche costanti in un corpo qualunque* (« Il Nuovo Cimento », s. III, t. XI, 1882_1, pp. 188–192).
   Queste « Opere », vol. I, nota V, pp. 96–99.

6. *Sopra alcuni problemi di idrodinamica* (« Il Nuovo Cimento », s. III, t. XII, 1882_2, pp. 65–96).
   Queste « Opere », vol. I, nota VI, pp. 100–123.

7. *Sulle apparenze elettrochimiche alla superficie di un cilindro* (« Atti della R. Accademia di Torino », vol. XVIII, 1882–83, pp. 147–168, ed « Il Nuovo Cimento », s. III, t. XIII, 1883_1, pp. 119–139).
   Queste « Opere », vol. I, nota VII, pp. 124–139.

8. *Sopra alcuni problemi della teoria del potenziale* (« Annali della R. Scuola Normale Superiore di Pisa, Scienze fisiche e matematiche », vol. III, 1883, pp. 207–270).
   Queste « Opere », vol. I, nota VIII, pp. 140–174.

9. *Sulle figure elettrochimiche di A. Guébhard* (« Atti della R. Accademia di Torino », vol. XVIII, 1882–83, pp. 329–336).
   Queste « Opere », vol. I, nota IX, pp. 175–179.

(*) Il presente Elenco riproduce, con poche varianti, la Bibliografia raccolta da A. MASOTTI e pubblicata nei « Rendiconti del Seminario matematico e fisico di Milano », vol. XVII, 1946. Da essa sono state omesse soltanto le Relazioni su Premi; inoltre, mentre dei lavori inclusi nelle presenti « Opere Matematiche » sono anche dati i riferimenti relativi a queste, il numero d'ordine delle opere rimanenti vien qui contrassegnato da un asterisco.

10. *Sull'equilibrio delle superficie flessibili ed inestendibili* («Transunti della R. Accademia dei Lincei», s. III, vol. VIII, 1883–84, pp. 214–218, 244–246).
Queste «Opere», vol. I, nota X, pp. 180–187.

11. *Sopra un problema di elettrostatica* («Transunti della R. Accademia dei Lincei», s. III, vol. VIII, 1883–84, pp. 315–318, ed «Il Nuovo Cimento», s. III, t. XVI, 1882_2, pp. 49–57).
Queste «Opere», vol. I, nota XI, pp. 188–195.

12. *Sulla deformazione delle superficie flessibili ed inestendibili* («Rendiconti della R. Accademia dei Lincei», s. IV, vol. I, 1884–85, pp. 274–278).
Queste «Opere», vol. I, nota XII, pp. 196–200.

13. *Integrazione di alcune equazioni differenziali del secondo ordine* («Rendiconti della R. Accademia dei Lincei», s. IV, vol. I, 1885, pp. 303–306).
Queste «Opere», vol. I, nota XIII, pp. 201–204.

14. *Sopra una proprietà di una classe di funzioni trascendenti* («Rendiconti della R. Accademia dei Lincei», s. IV, vol. II, 1886, pp. 211–214).
Queste «Opere», vol. I, nota XIV, pp. 205–208.

15. *Sui fondamenti della teoria delle equazioni differenziali lineari* («Memorie della Società Italiana delle Scienze, detta dei XL», s. III, vol. VI, 1887, pp. 1–107).
Queste «Opere», vol. I, nota XV, pp. 209–290.

16. *Sulle equazioni differenziali lineari* («Rendiconti della R. Accademia dei Lincei», s. IV, vol. III, 1887, pp. 393–396).
Queste «Opere», vol. I, nota XVI, pp. 291–293.

17. *Sopra le funzioni che dipendono da altre funzioni* («Rendiconti della R. Accademia dei Lincei», s. IV, vol. III_2, 1887_2, pp. 97–105, 141–146, 153–158).
Queste «Opere», vol. I, nota XVII, pp. 294–314.

18. *Sopra le funzioni dipendenti da linee* («Rendiconti della R. Accademia dei Lincei», s. IV, vol. III_2, 1887_2, pp. 225–230, 274–281).
Queste «Opere», vol. I, nota XVIII, pp. 315–328.

19. *Sopra una estensione della teoria di Riemann sulle funzioni di variabili complesse* («Rendiconti della R. Accademia dei Lincei», s. IV, vol. III_2, 1887_2, pp. 281–287; s. IV, vol. IV_1, 1881_1, pp. 107–115, 196–202).
Queste «Opere», vol. 1, nota XIX, pp. 329–350.

20. *Sulla teoria delle equazioni differenziali lineari* («Rendiconti del Circolo Matematico d, Palermo», t. II, 1888, pp. 69–75).
Queste «Opere», vol. I, nota XX, pp. 351–355.

21. *Sulle funzioni analitiche polidrome* («Rendiconti della R. Accademia dei Lincei», s. IV, vol. IV_2, 1888_2, pp. 355–361).
Queste «Opere», vol. I, nota XXI, pp. 356–362.

22. *Sur une généralisation de la théorie des fonctions d'une variable imaginaire* («Acta Mathematica», t. 12, 1889, pp. 233–286).
Queste «Opere», vol. I, nota XXII, pp. 363–402.

23. *Delle variabili complesse negli iperspazi* («Rendiconti della R. Accademia dei Lincei», s. IV, vol. V_1, 1889_1, pp. 158–165, pp. 291–299).
Queste «Opere», vol. I, nota XXIII, pp. 403–419.

24. *Sulle funzioni coniugate* (« Rendiconti della R. Accademia dei Lincei », s. IV, vol. V_1, 1889_1, pp. 599–601).
Queste « Opere », vol. I, nota XXIV, pp. 420–432.

25. *Sulle funzioni di iperspazi e sui loro parametri differenziali* (« Rendiconti della R. Accademia dei Lincei », s. IV, vol. V_1, 1889_1, pp. 630–640).
Queste « Opere », vol. I, nota XXV, pp. 433–443.

26. *Sulla integrazione di un sistema di equazioni differenziali a derivate parziali che si presenta nella teoria delle funzioni coniugate* (« Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo », t. III, 1889, pp. 260–272).
Queste « Opere », vol. I, nota XXVI, pp. 444–453.

27. *Sulle equazioni differenziali che provengono da questioni di calcolo delle variazioni* (« Rendiconti della R. Accademia dei Lincei », s. IV, vol. VI_1, 1890_1, pp. 43–54).
Queste « Opere », vol. I, nota XXVII, pp. 454–463.

28. *Sopra una estensione della teoria Jacobi–Hamilton del Calcolo delle variazioni* (« Rendiconti della R. Accademia dei Lincei », s. IV, vol. VI_1, 1891_1, pp. 127–138).
Queste « Opere », vol. I, nota XXVIII, pp. 464–475.

29. *Sulle variabili complesse negli iperspazi* (« Rendiconti della R. Accademia dei Lincei », s. IV, vol. VI_2, 1890_2, pp. 241–252).
Queste « Opere », vol. I, nota XXIX, pp. 476–487.

30*. *Lezioni di Meccanica razionale* del prof. VITO VOLTERRA. Professore nella R. Scuola di Applicazione per gli Ingegneri in Pisa, per cura dello studente Ugo Moschini. Anno accademico 1889–90 (Autografia Bertini, un vol. litografato di pp. LXXVII–408, esemplare nella Biblioteca Braidense).

31*. *Sopra le equazioni fondamentali della elettrodinamica* (« Rendiconti della R. Accademia dei Lincei », s. IV, vol. VII_1, 1891_1, pp. 177–188).

32. *Sopra le equazioni di Hertz* (« Il nuovo Cimento », s. III, vol. XXIX, 1891, pp. 53–63).
Queste « Opere », vol. I, nota XXX, pp. 488–495.

33. *Sopra le equazioni fondamentali della elettrodinamica* (« Il Nuovo Cimento », s. III, vol. XXIX, 1891, pp. 147–154).
Queste « Opere », vol. I, nota XXXI, pp. 496–501.

34*. *Lezioni di Meccanica Razionale* del prof. VITO VOLTERRA. R. Università di Pisa, Anno accademico 1890–91. Pisa, Silvestrini, 1891. Un vol. litografato di pp. (12)–462. (Esemplare nella Biblioteca matematica dell'Università di Milano). Una successiva edizione, pure litografica, del 1893, è citata nelle *Lezioni di Meccanica razionale* di LEVI-CIVITA e AMALDI. Questi Autori attingono da essa il « teorema di VOLTERRA » sul moto impulsivo. Il teorema trovasi già nelle litografie del 1891, pp. 333–336.

35. *Sopra le equazioni fondamentali della elettrodinamica* (« Rendiconti della R. Accademia dei Lincei », s. IV, vol. VII_1, 1891_1, pp. 177–188).
Queste « Opere », vol. I, nota XXXII, pp. 502–513.

36. *Sur les vibrations lumineuses dans les milieux biréfringents* (« Acta Mathematica », t. XVI, 1892, pp. 153–215).
Queste « Opere », vol. I, nota XXXIII, pp. 514–558.

37. *Sulle vibrazioni luminose nei mezzi isotropi* (« Rendiconti della R. Accademia dei Lincei », s. V, vol. I_2, 1892_2, pp. 161–170).
Queste « Opere », vol. I, nota XXXIV, pp. 559–567.

38. *Sulle onde cilindriche dei mezzi isotropi* (« Rendiconti della R. Accademia dei Lincei », s. V, vol. I_2, 1892_2, pp. 265–277).
Queste « Opere », vol. I, nota XXXV, pp. 568–579.

39. *Sul principio di Huyghens* (« Il Nuovo Cimento », s. III, vol. XXXI, 1892_1, pp. 244–255; vol. XXXII, 1892_2, pp. 59–65; vol. XXXIII, 1893_1, pp. 32–36, 71–77).
Queste « Opere », vol. I, nota XXXVI, pp. 580–599.

40. *Enrico Betti* (« Il Nuovo Cimento », s. III, vol. XXXII, 1892_2, pp. 5–7).
Queste « Opere », vol. I, nota XXXVII, pp. 600–602.

41*. *Enrico Betti* [Cenno necrologico]. – (« Rivista scientifico-industriale », del VIMERCATI, Firenze), a. XXIV, 1892, pp. 211–212 [non firmato].

42. *Sulle vibrazioni dei corpi elastici* (« Rendiconti della R. Accademia dei Lincei », s. V, vol. II_1, 1° sem. 1893, pp. 389–397).
Queste « Opere », vol. II, nota I, pp. 1–9.

43. *Sulla integrazione delle equazioni differenziali del moto di un corpo elastico isotropo* (« Rendiconti della R. Accademia dei Lincei », s. V, vol. II_1, 1° sem. 1893, pp. 549–558).
Queste « Opere », vol. II, nota II, pp. 10–18.

44. *Sur les vibrations des corps élastiques isotropes* (« Acta Mathematica », vol. XVIII, 1894, pp. 161–232).
Queste « Opere », vol. II, nota III, pp. 19–73.

45. *Esercizi di Fisica Matematica* (« Rivista di Matematica », vol. IV, 1894, pp. 1–14).
Queste « Opere », vol. II, nota IV, pp. 74–86.

46*. *Sinossi delle lezioni di Meccanica razionale* del prof. V. VOLTERRA fatte dallo studente L. NICOLIS, rivedute dal prof. PORTA. R. Università di Torino. 1893–94. Un vol. litografato di pp. 402, senza note tipografiche [esemplare presso il prof. Luigi Gabba].

47. *Sulla teoria dei movimenti del polo terrestre* (« Astronomische Nachrichten », vol. CXXXVIII, 1895, col. 33–52).
Queste « Opere », vol. II, nota V, pp. 87–107.

48. *Sulla teoria dei moti del polo terrestre* (« Atti della R. Accademia di Torino », vol. XXX, 1894–95, pp. 301–306).
Queste « Opere », vol. II, nota VI, pp. 108–112.

49. *Sul moto di un sistema nel quale sussistono moti interni stazionari* (« Atti della R. Accademia di Torino », vol. XXX, 1895, pp. 372–384).
Queste « Opere », vol. II, nota VII, pp. 113–121.

50. *Sopra un sistema di equazioni differenziali* (« Atti della R. Accademia di Torino », vol. XXX, 1895, pp. 445–454).
Queste « Opere », vol. II, nota VIII, pp. 122–128.

51. *Un teorema sulla rotazione dei corpi e sua applicazione al moto di un sistema nel quale sussistono moti interni stazionari* (« Atti della R. Accademia di Torino », vol. XXX, pp. 524–541).
Queste « Opere », vol. II, nota IX, pp. 129–140.

52. *Sui moti periodici del polo terrestre* (« Atti della R. Accademia di Torino », vol. XXX, 1895, pp. 547–561).
Queste « Opere », vol. II, nota X, pp. 141–151.

53. *Osservazioni sulla mia Nota: Sui moti periodici del polo terrestre* («Atti della R. Accademia di Torino», vol. XXX, 1895, pp. 817–820).
Queste «Opere», vol. II, nota XI, pp. 152–154.

54. *Sulla teoria dei moti del polo nella ipotesi della plasticità terrestre* («Atti della R. Accademia di Torino», vol. XXX, 1895, pp. 729–743).
Queste «Opere», vol. II, nota XII, pp. 155–165.

55. *Sulla rotazione di un corpo in cui esistono sistemi ciclici* («Rendiconti della R. Accademia dei Lincei», s. V, t. IV, 2° sem. 1895, pp. 93–97).
Queste «Opere», vol. II, nota XIII, pp. 166–169.

56. *Sul moto di un sistema nel quale sussistono moti interni variabili* («Rendiconti della R. Accademia dei Lincei», s. V, vol. IV, 2° sem. 1895, pp. 107–110).
Queste «Opere», vol. II, nota XIV, pp. 170–172.

57. *Sulle rotazioni permanenti stabili di un sistema in cui sussistono moti interni stazionari* («Annali di Matematica», s. II, t. XXIII, 1895, pp. 269–285).
Queste «Opere», vol. II, nota XV, pp. 173–186.

58. *Sulla rotazione di un corpo in cui esistono sistemi policiclici* («Annali di Matematica», s. II, vol. XXIV, 1896, pp. 29–58).
Queste «Opere», vol. II, nota XVI, pp. 187–212.

59. *Replica ad una Nota del prof. Peano* («Rendiconti della R. Accademia dei Lincei», s. V, vol. V, 1896, pp. 4–7).
Queste «Opere», vol. II, nota XVII, pp. 213–215.

60. *Sulla inversione degli integrali definiti* («Atti della R. Accademia di Torino», vol. XXXI, 1896, pp. 311–323, 400–408, 557–567, 693–708).
Queste «Opere», vol. II, nota XVIII, pp. 216–254.

61. *Sulle inversioni degli integrali definiti* («Rendiconti della R. Accademia dei Lincei», s. V, vol. V, 1896, pp. 177–185).
Queste «Opere», vol. II, nota XIX, pp. 255–262.

62. *Sulla inversione degli integrali multipli* («Rendiconti della R. Accademia dei Lincei», s. V, vol. V_1, 1896_1, pp. 289–300).
Queste «Opere», vol. II, nota XX, pp. 263–275.

63. *Osservazioni sulla Nota del prof. Lauricella relativa alla integrazione della equazione* $\Delta^2 \Delta^2 = 0$ *e sopra una Nota di analogo argomento dell'ing. Almansi* («Atti della R. Accademia di Torino», vol. XXXI, 1896, pp. 1018–1021).
Queste «Opere», vol. II, Nota XXI, pp. 276–278.

64*. *Lezioni di Meccanica. Prime lezioni di Cinematica.* Livorno, Giusti, 1896. Un vol. di pp. (2)–98.

65. *Sopra alcune questioni di inversione di integrali definiti* («Annali di Matematica», s. II, vol. XXV, 1897, pp. 139–178).
Queste «Opere», vol. II, nota XXII, pp. 279–313.

66. *Sul principio di Dirichlet* («Circolo Matematico di Palermo», vol. XI, 1897, pp. 83–86).
Queste «Opere», vol. II, nota XXIII, pp. 314–316.

67. *Sulla scarica elettrica nei gas e sopra alcuni fenomeni di elettrolisi* («Rendiconti della R. Accademia dei Lincei», s. V, vol. VI_1, 1897_1, pp. 389–401. Un largo sunto di questa nota fu fatto da N. FEDERICO ne «Il Nuovo Cimento», s. IV, t. VII, 1898_1, pp. 53–57).
Queste «Opere», vol. II, nota XXIV, pp. 317–328.

68. *Un teorema sugli integrali multipli* (« Atti della R. Accademia di Torino », vol. XXXII, 1896–97, pp. 859–868).
Queste « Opere », vol. II, nota XXV, pp. 329–335.

69*. *Giuseppe Bartolomeo Erba*. Notizia biografica (« Annuario della R. Università di Torino », 1896–97, pp. 145–148).

70. *Sopra una classe di equazioni dinamiche* (« Atti della R. Accademia di Torino », vol. XXXIII, 1898, pp. 471–475, anche vol. XXXV, 1899–900, p. 192).
Queste « Opere », vol. II, nota XXVI, pp. 336–355.

71. *Sulla integrazione di una classe di equazioni dinamiche* (« Atti della R. Accademia di Torino », vol. XXXIII, 1897–98, pp. 542–558).
Queste « Opere », vol. II, nota XXVII, pp. 356–369.

72. *Sul fenomeno delle « seiches »*. Conf. tenuta al Congr. della Soc. italiana di Fisica in Torino il 23 settembre 1892 (« Il Nuovo Cimento », s. IV, t. VIII, 1898_2, pp. 270–272).
Queste « Opere », vol. II, nota XXVIII, pp. 370–378.

73. *Sur la théorie des variations des latitudes* (« Vierteljahrsschrift der Astr. Gesellschaft », Jahrg. 33, 1908, pp. 275–279).
Queste « Opere », vol. II, nota XXIX, pp. 379–382.

74. *Sui fondamenti della teoria delle equazioni differenziali lineari*, II (« Memorie della Soc. It. delle Scienze, detta dei XL », s. III, t. XII, 1899, p. 3–68).
Queste « Opere », vol. II, nota XXX, pp. 383–451.

75. *Sur la théorie des variations des latitudes* (« Acta Mathematica », t. XXII, 1898, pp. 201–357).
Queste « Opere », vol. II, nota XXXI, pp. 452–573.

76. *Sulle funzioni poliarmoniche* (« Atti Istituto Veneto », t. LVII, 1898–99, pp. 233–235).
Queste « Opere », vol. II, nota XXXII, pp. 574–575.

77. *Sopra una classe di moti permanenti stabili* (« Atti della R. Accademia di Torino », vol. XXXIV, 1898–99, pp. 247–255).
Queste « Opere », vol. II, nota XXXIII, pp. 576–582.

78. *Sul flusso di energia meccanica* (« Atti della R. Accademia di Torino », vol. XXXIV, 1898–99, pp. 366–375).
Queste « Opere », vol. II, nota XXXIV, pp. 583–590.

79. *Sopra alcune applicazioni della rappresentazione analitica delle funzioni del prof. Mittag-Leffler* (« Atti della R. Accademia di Torino », vol. XXXIV, 1898–99, pp. 492–494).
Queste Opere, vol. II, Nota XXXV, pp. 591–593.

80. *Sopra alcune applicazioni delle leggi del flusso di energia meccanica sul moto dei corpi che si attraggono colla legge di Newton* (« Atti della R. Accademia di Torino », vol. XXXIV, 1898–99, pp. 805–817).
Queste « Opere », vol. II, nota XXXVI, pp. 594–602.

81. *Sul flusso di energia meccanica* (« Il Nuovo Cimento », s. IV, vol. X, 1899, pp. 337–359).
Queste « Opere », vol. II, nota XXXVII, pp. 603–619.

82. *Sugli integrali lineari dei moti spontanei a caratteristiche indipendenti* (« Atti della R. Accademia di Torino », vol. XXXV, 1899–900, pp. 186–192).
Queste « Opere », vol. II, nota XXXVIII, pp. 620–624.

83. *Betti, Brioschi, Casorati. Trois Analystes italiens et trois manières d'envisager les questions d'Analyse* (« Compte rendu du 2e Congrès intern. des math., Paris 1900 », Parigi 1902, Gauthier-Villars, pp. 43-57).
Queste « Opere », vol. III, nota I, pp. 1-11.

84. *Sur les équations aux dérivées partielles* (« Compte rendu du 2e Congrès intern. des math., Paris 1900 », Paris 1902, Gauthier-Villars, pp. 377-378).
Queste « Opere », vol. III, nota II, pp. 12-13.

85*. *Eugenio Beltrami.* Cenno necrologico (« Annuario della R. Università di Roma », 1900-1901, pp. 184 A-184 C).

86. *Sui tentativi di applicazione delle Matematiche alle scienze biologiche e sociali.* Discorso inaugurale (« Annuario della R. Università di Roma », 1901-902, p. 3-28; « Giornale degli economisti », s. II, vol. XXIII, 1901_2, pp. 436-458).
Queste « Opere », vol. III, nota III, pp. 14-29.

87. *Sur la stratification d'une masse fluide en équilibre* (« Acta mathematica », t. XXVII, - N. H. Abel in memoriam - 1903, pp. 105-124).
Queste « Opere », vol. III, nota IV, pp. 30-43.

88. *Commemorazione del Socio straniero G. G. Stokes* (« Rendiconti della R. Accademia dei Lincei », s. V, vol. XII_1, 1903_1, pp. 174-179).
Queste « Opere », vol. III, nota V, pp. 44-48.

89. *Sul numero dei componenti indipendenti di un sistema* (« Rendiconti della R. Accademia dei Lincei », s. V, vol. XII_2, 1903_2, pp. 417-419).
Queste « Opere », vol. III, nota VI, pp. 49-51.

90*. *Congresso storico internazionale* (« Archivio storico italiano, Firenze », s. V, t. XXXI, 1903_1).

91*. *Relazione su di una Memoria contenuta in un piego suggellato presentato nel 1882 dal prof. Adolfo Bartoli.* Relazione di A. RÒITI, relatore, e V. VOLTERRA (« Rendiconti della R. Accademia dei Lincei », s. V, vol. XII_2, 1903_2, pp. 345-346).

92. *Sur les équations différentielles du type parabolique* (« Comptes rendus de l'Académie des Sciences », vol. CXXXIX, 1904_2, pp. 956-959).
Queste « Opere », vol. III, nota VII, pp. 52-54.

93*. *Relazione sul viaggio compiuto dal prof. Vito Volterra per incarico avuto dalla Commissione nominata pel riordinamento del Politecnico di Torino* (« Atti interni del Senato del Regno », Sessione 1904-909, Legislatura XXII, vol. II, n. 144, pp. 19-34).

94. *Note on the application of the method of images to problems of vibrations* (« Proceedings of the London Mathematical Society », s. II, vol. II, 1905, pp. 327-331).
Queste « Opere », vol. III, nota VIII, pp. 55-58.

95*. *Un teorema sulla teoria della elasticità* (« Rendiconti della R. Accademia dei Lincei », s. V, vol. XIV_1, 1905, pp. 127-137).

96*. *Sull'equilibrio dei corpi elastici più volte connessi* (Ibidem, pp. 193-202).

97*. *Sulle distorsioni dei solidi più volte connessi* (Ibidem, pp. 35-356).

98*. *Sulle distorsioni dei corpi elastici simmetrici* (Ibidem, pp. 431-438).

99*. *Contributo allo studio delle distorsioni dei solidi elastici* (Ibidem, pp. 641–654. Ved. anche vol. XIV_2, 1905_2, p. 342).

100*. *Sulle distorsioni generate da tagli uniformi* (Ibidem, s. V, vol. XIV_2, 1905_2, pp. 329–342).

101*. *Presentazione all'Accademia di Torino di cinque volumi di Lavori del Socio corrispondente Alfredo Cornu* (« Atti della R. Accademia di Torino », vol. XL, 1904–05, pp. 448–450).

102*. *Sull'equilibrio dei corpi elastici più volte connessi* (« Il Nuovo Cimento », s. V, t. X, 1905_2, pp. 361–385 e t. XI, 1906_1, pp. 5–20, 144–161, 205–221, 338–347).

103. *Sur les fonctions qui dépendent d'autres fonctions* (« Comptes Rendus de l'Académie des Sciences », t. CXLII, 1906_1, pp. 691–695).
Queste « Opere », vol. III, nota IX, pp. 59–62.

104*. *Nuovi studi sulle distorsioni dei solidi elastici* (« Rendiconti della R. Accademia dei Lincei », s. V, vol. XV_1, 1906_1, pp. 519–525).

105. *Leçons sur l'intégration des équations différentielles aux dérivées partielles*, professées à Stockholm (Février, mars 1906) sur l'invitation de S. M. le Roi de Suède (Upsal, Almqvist & Niksell, 1906. Nouveau tirage, Paris, Hermann, 1912).
Queste « Opere », vol. III, nota X, pp. 63–141.

106*. *Les mathématiques dans les sciences biologiques et sociales*. Traduction par LUDOVIC ZORETTI (« La Révue du Mois », Paris vol. I, 1906, pp. 1–20). [Edizione francese del lavoro n. 86].

107*. *Sui tentativi di applicazione delle matematiche alle scienze biologiche e sociali* (« Archivio di Fisiologia », Firenze, vol. III, 1906, pp. 175–191). [Nuova edizione del lavoro n. 86].

108. *L'economia matematica e il nuovo manuale del prof. Pareto* (« Giornale degli economisti », Roma, s. II, vol. XXXII, 1906_1, pp. 296–301).
Queste « Opere », vol. III, nota XI, pp. 142–145.

109*. *Discorso pronunciato al Senato sopra la fondazione di un Politecnico nella città di Torino* (« Atti parlamentari della Camera dei Senatori – Discussioni », Legislatura XXII, 1ª Sessione 1904–906, vol. V, pp. 3359–63, tornata del 19 giugno 1906).

110. *Proposta di un'Associazione Italiana per il Progresso delle Scienze* (« Atti del Congresso dei naturalisti italiani, Milano, 1906 », Saggi Scientifici, Bologna Zanichelli (s. d.) [1920], pp. 81–95).
Queste « Opere », vol. III, nota XII, pp. 146–152.

111. *Sur l'équilibre des corps élastiques multiplement connexes* (« Annales de l'École Normale Supérieure », s. III, t. XXIV, 1907, pp. 401–518).
Queste Opere », vol. III, nota XIII, pp. 153–242.

112*. *Parole pronunziate alle feste giubilari di Augusto Righi* (Bologna, 1907).

113. *Il momento scientifico presente e la nuova Società Italiana per il Progresso delle Scienze* (« Rivista di Scienza », anno I, 1907, vol. II, pp. 225–237).
Queste « Opere », vol. III, nota XIV, pp. 243–252.

114. *Le Matematiche in Italia nella seconda metà del secolo XIX* (« Atti del IV Congresso internazionale dei matematici, Roma, 6–11 aprile 1908, vol. I, pp. 55–65. Roma, Salviucci, 1909. « Nuova Antologia », s. V, v. CXXXV, 1908_3, pp. 385–395).
Queste « Opere », vol. III, nota XV, pp. 253–264.

115. *Sull'applicazione del metodo delle immagini alle equazioni di tipo iperbolico* («Atti del IV Congresso internazionale dei matematici, Roma, 1908», vol. II, pp. 90–93. Roma, Salviucci, 1909).
Queste «Opere», vol. III, nota XVI, pp. 265–268.

116*. *Parole alla seconda riunione della S.I.P.S.*, pronunziate come Presidente della Società («Atti della Società Italiana per il Progresso delle Scienze», seconda riunione, Firenze, 1908, pp. 10–12).

117*. *Parole del Preside della Facoltà di Scienze*, nell'opuscolo *Onoranze al prof. Alfonso Sella* (Roma, Bertero, 1908, pp. 9–11).

118. *Sulle equazioni integro-differenziali* («Rendiconti della R. Accademia dei Lincei», s. V, vol. $XVIII_1$, 1909_1, pp. 167–174).
Queste «Opere», vol. III, nota XVII, pp. 269–275.

119. *Sulle equazioni della elettrodinamica* («Rendiconti della R. Accademia dei Lincei», s. V, vol. $XXIII_1$, 1909_1, pp. 203–211).
Queste «Opere», vol. III, nota XVIII, pp. 276–283.

120. *Alcune osservazioni sopra proprietà atte ad individuare una funzione* («Rendiconti della R. Accademia dei Lincei», s. V, vol. $XVIII_1$, 1909_1, pp. 263–266).
Queste «Opere», vol. III, nota XIX, pp. 284–287.

121. *Sulle equazioni integro-differenziali della teoria dell'elasticità* («Rendiconti della R. Accademia dei Lincei»), s. V, vol. $XVIII_1$, 1909_2, pp. 295–301).
Queste «Opere», vol. III, nota XX, pp. 288–293.

122. *Equazioni integro-differenziali della elasticità nel caso della isotropia* («Rendiconti della R. Accademia dei Lincei», s. V, vol. $XVIII_2$, 1909_2, pp. 577–586).
Queste «Opere», vol. III, nota XXI, pp. 294–303.

123*. *Parole alla terza riunione della S.I.P.S.*, pronunziate come Presidente della Società («Atti della Società Italiana per il progresso delle Scienze», Terza riunione, Padova, 1909, pp. 64–65).

124*. *Parole del Preside della Facoltà di Scienze*, nell'opuscolo *Onoranze al prof. Luigi Cremona* (Roma, Bertero, 1909, pp. 15–17).

125*. *Giovani Vailati:* Necrologia («Bollettino della Mathesis», a. 1, 1909, pp. 60–63).

126*. *Commemorazione di Valentino Cerruti*. Roma, 1909.

127. *Soluzione delle equazioni integro-differenziali dell'elasticità nel caso di una sfera isotropa* («Rendiconti della R. Accademia dei Lincei», s. V, vol. XIX_1, 1910_1, pp. 107–114).
Queste «Opere», vol. III, nota XXII, pp. 304–310.

128. *Questioni generali sulle equazioni integrali e integro-differenziali* («Rendiconti della R. Accademia dei Lincei», s. V, vol. XIX_1, 1910_1, pp. 169–180).
Queste «Opere», vol. III, nota XXIII, pp. 311–322.

129. *Deformazione di una sfera elastica soggetta a date tensioni, nel caso ereditario* («Rendiconti della R. Accademia dei Lincei», s. V, vol. XIX_1, 1910_1, pp. 239–243).
Queste «Opere, vol. III, nota XXIV, pp. 222–327.

130. *Osservazioni sulle equazioni integro-differenziali ed integrali* («Rendiconti della R. Accademia dei Lincei», s. V, vol. XIX_1, 1910_1, pp. 361–363).
Queste «Opere», vol. III, nota XXV, pp. 328–330.

131. *Sopra le funzioni permutabili* («Rendiconti della R. Accademia dei Lincei», s. V, vol. XIX_1, 1910_1, pp. 425–437).
Queste «Opere», vol. III, nota XXVI, pp. 331–342.

132. *Espacio, tiempo y masa segun las ideas modernas* («Anales de la Sociedad Científica Argentina», t. LXIX, 1910, 223–243).
Queste «Opere», vol. III, nota XXVII, pp. 343–358

133*. *Parole pronunziate avanti al feretro di Stanislao Cannizzaro* («Il Nuovo Cimento», s. V, t. XIX_1, pp. 387–389, con ritratto su tavola fuori testo).

134. *Equazioni integro-differenziali con limiti costanti* («Rendiconti della R. Accademia dei Lincei», s. V, vol. XX_1, 1911_1, pp. 95–99).
Queste «Opere», vol. III, nota XXVIII, pp. 359–363.

135. *Contributo allo studio delle funzioni permutabili* («Rendiconti della R. Accademia dei Lincei», s. V, vol. XX, 1911, pp. 296–304).
Queste «Opere», vol. III, nota XXIX, pp. 364–372.

136. *Sopra le funzioni permutabili di 2^a specie e le equazioni integrali* («Rendiconti della R. Accademia dei Lincei», s. V, vol. XX, 1911, pp. 521–527).
Queste «Opere», vol. III, nota XXX, pp. 373–379.

137. *Sopra una proprietà generale delle equazioni integrali ed integro-differenziali* («Rendiconti della R. Accademia dei Lincei», s. V, vol. XX_1, 1911_1, pp. 79–88).
Queste «Opere», vol. III, nota XXXI, pp. 380–388.

138*. *Articolo* introduttivo nell'opuscolo *In memoria di Fernando De Helguero* (Roma, Bertero, 1911, pp. 3–5).

139*. *Opere matematiche del Marchese Giulio Carlo de' Toschi di Fagnano,* pubblicate sotto gli auspici della Società Italiana per il Progresso delle Scienze dai Soci V. VOLTERRA, G. LORIA, D. GAMBIOLI (Tre voll. di complessive pp. 1232. Milano, Roma, Torino, Albrighi, Segati e C., 1911, 1911, 1912. Con due prefazioni degli editori: vol. I, pp. VII–IX e vol. III, pp. IX–XI).

140*. *Leçons sur l'intégration des équations différentielles aux dérivées partielles,* professées à Stockholm (Février, Mars 1906) sur l'invitation de S. M. le Roi de Suède. Nouveau tirage. Paris, Hermann, 1912. Un vol. in-4° di pp. (8)–4–IV–83. [Rispetto all'edizione del 1906 (ved. n. 105) vi sono in più una prefazione ed alcune correzioni ed aggiunte].

141*. *Trois leçons sur quelques progrès récents de la physique mathématique.* Lecture delivered at the celebration of the twentieth anniversary of the foundation of Clark University under the auspices of the Department of Physics. Worcester, Mass., September 7–11, 1909. Published by Clark University, 1912. Un vol. di pp. (2)–82, con 3 tavole fuori testo. Le stesse lezioni nel volume: *Lectures delivered*... by V. VOLTERRA, E. RUTHERFORD, R. W. WOOD, C. BARUS. New York, Stechert. Un vol. di pp. 161. [Le lezioni del VOLTERRA furono pubblicate in traduzione tedesca nel 1914 (ved. nota XXXII)].

142. *Sulle temperature nell'interno delle montagne* («Il Nuovo Cimento», s. VI, vol. IV, 1912, pp. 111–126).
Queste «Opere», vol. III, nota XXXIII, pp. 471–481.

143. *Sopra equazioni di tipo integrale* («Proceedings of the Fifth International Congress of Mathematicians, Cambridge, 1912», vol. I, pp. 403–406, 1913).
Queste «Opere», vol. III, nota XXXIV, pp. 482–486.

144. *Sur les équations intégro-différentielles et leurs applications* (« Acta Mathematica », t. XXXV, 1912, pp. 295–356).
Queste « Opere », vol. III, nota XXXV, pp. 487–538.

145. *L'evoluzione delle idee fondamentali del Calcolo infinitesimale* (« La Revue du Mois », Paris 1912). *Leçons sur les fonctions des lignes* (Paris, Gauthier-Villars, 1913, chap. I, pp. 1–21). *Saggi scientifici* (Bologna, Zanichelli (s. d.) [1920], pp. 159–188).
Queste « Opere », vol. III, nota XXXVI, pp. 539–553.

146. *L'applicazione del Calcolo ai fenomeni di eredità* (« La Revue du Mois », Paris, 1912). *Leçons sur les fonctions de lignes* (Paris, Gauthier-Villars, 1913, chap. XIV, pp. 207–225). *Saggi scientifici* (Bologna, Zanichelli (s. d.), [1920], pp. 189–218).
Queste « Opere », vol. III, nota XXXVII, pp. 554–568.

147. *Vibrazioni elastiche nel caso della eredità* (« Rendiconti della R. Accademia dei Lincei », s. V, vol. XXI_2 e 1912_2, pp. 3–12).
Queste « Opere », vol. III, nota XXXVIII, pp. 569–577.

148. *Onoranze al prof. Valentino Cerruti.* Roma, 1812.

149*. *Leçons sur les équations intégrales et les équations intégro-differentielles.* Leçons professées à la Faculté des Sciences de Rome en 1910, et publiées par M. TOMASSETTI, F.-S. ZARLATTI. (Paris, Gauthier-Villars, 1913. Un vol. di pagg. VI–165 nella « Collection de monographies sur la théorie de fonctions », publiées sous la direction de M. EMILE BOREL).

150*. *Leçons sur les fonctions de lignes,* professées à la Sorbonne en 1912. Recueillies et rédigées par JOSEPH PÉRÈS. (Paris, Gauthier-Villars 1913. Un vol. di pp. VI–230, nella predetta collezione Borel. Precedette una edizione italiana: *Lezioni sopra le funzioni di linee.* Roma, 1910).

151*. *Henri Poincaré.* « La Revue du Mois », vol. XV, 1913, pp. 129–154. Riprodotto (pp. 3–49) col titolo *L'Oeuvre mathématique* nel volume *Henri Poincaré: l'oeuvre scientifique, l'oeuvre philosophique* (Alcan, 1914); esso trovasi inoltre (tradotto in inglese) in « The Rice Institute Pamphlets », vol. I, 1915, pp. 133–162 e (tradotto in italiano), nell'opera 180 del presente Elenco.

152*. *Some integral equations* (« Bulletin of the American Mathematical Society », vol. XIX, 1912–13, pp. 164, 170–171).

153. *Sui fenomeni ereditarii* (« Rendiconti della R. Accademia dei Lincei », s. V, vol. $XXII_1$, 1913_1, pp. 529–539).
Queste « Opere », vol. III, nota XL, pp. 597–606.

154. *Sopra equazioni integro-differenziali aventi i limiti costanti* (« Rendiconti della R. Accademia dei Lincei », s. V, vol. $XXII_2$, 1932, pp. 43–49).
Queste « Opere », vol. III, nota XLI, pp. 607–612.

155*. *Discorso* pronunciato al Senato sopra la istituzione della Scuola di Applicazione per gli Ingegneri presso la R. Università di Pisa (« Atti parlamentari della Camera dei Senatori – Discussioni », Legislatura XXIII, Sessione unica 1909–1913, vol. XV, pp. 11675–11678, tornata del 17 giugno 1913).

156*. *Discorso* pronunciato nell'occasione delle onoranze al prof. G. B. GUCCIA nel XXX anniversario della fondazione del Circolo matematico di Palermo (« Supplemento ai Rendiconti del Circolo matematico di Palermo », vol. IX, 1914, pp. 13–15).

157. *Osservazioni sui nuclei delle equazioni integrali* (« Rendiconti della R. Accademia dei Lincei », s. V, vol. $XXIII_1$, 1914_1, pp. 266–269).
Queste « Opere », vol. IV, nota I, pp. 1–4.

158. *Sulle equazioni alle derivate funzionali* («Rendiconti della R. Accademia dei Lincei», s. V, vol. $XXIII_1$, 1914_1, pp. 393–399).
Queste «Opere», vol. IV, nota II, pp. 5–12.

159. *Equazioni integro-differenziali ed equazioni alle derivate funzionali* («Rendiconti della R. Accademia dei Lincei», s. V, vol. $XXIII_1$, 1941_1, pp. 551–557).
Queste «Opere», vol. IV, nota III, pp. 13–18.

160. *Les problèmes qui ressortent du concept de fonctions de lignes* («Sitzungsberichte der Berliner Matematischen Gesellschaft», XIII Jahrgang, 1914, pp. 130–150).
Queste «Opere», vol. IV, nota IV, pp. 19–42.

161. *Drei Vorlesungen über neuere Fortschritte der mathematischen Physik*, gehalten im September 1909 an der Clark University («Archiv der Math. und Physik», III R., Bd. XXII, 1914, pp. 97–181).
Queste «Opere», vol. III, nota XXXII, pp. 389–470.

162. *The theory of permutable functions.* Lectures delivered at Princeton University, October 1912 (Louis Clark Vanukem Foundation. Princeton University Press, 1915).
Queste «Opere», vol. IV, nota V, pp. 43–72.

163. *Sulle correnti elettriche in una lamina metallica sotto l'azione di un campo magnetico* («Rendiconti della R. Accademia dei Lincei», s. V, vol. $XXIV_1$, 1915_1, pp. 220–234, 289–303, 378–390, 533–543).
Queste «Opere», vol. IV, nota VI, pp. 73–117.

164. *Teoria delle potenze, dei logaritmi e delle funzioni di composizione* («Memorie della R. Accademia dei Lincei», s. V, vol. XI, 1916, pp. 167–249).
Queste «Opere», vol. IV, nota VII, pp. 118–200.

165. *Metodi di calcolo degli elementi di tiro per artiglieria aeronautica* («Rendiconti dell'Istituto Centrale aeronautico», Roma, 1916).
Queste «Opere», vol. IV, nota VIII, pp. 201-248.

166*. *Discorso* per l'inaugurazione dell'Istituto Centrale di Biologia Marina in Messina, 10 dicembre 1916 («Bollettino bimestrale del R. Comitato talassografico italiano», vol. VI (nn. 39–44, 1916, pp. 11–14).

167. *The generalization of analytic functions* («The Rice Institute Pamphlet», vol. IV, 1917, pp. 53–101).
Queste «Opere», vol. IV, nota IX, pp. 249–285.

168. *On the theory of waves and Green's method* («The Rice Institute Pamphlet», vol. IV, 1917, pp. 102–117).
Queste «Opere», vol. IV, nota X, pp. 286–296.

169*. *Relazione* sulla missione in Inghilterra ed in Francia compiuta dal 24 aprile al 20 maggio 1917. Roma, 1917.

170*. *Parole* pronunciate al Senato in commemorazione di PIETRO BLASERNA («Atti parlamentari della Camera dei Senatori – Discussioni», Legislatura XXIV, Sessione 1913–1918, v. IV, p. 4102, tornata del 27 febbraio 1918) [ved. n. 181].

171*. *Parole* del Preside della Facoltà di Scienze, nell'opuscolo *Onoranze a Luciano Orlando, Ruggiero Torelli, Eugenio Elia Levi, Adolfo Viterbi, Professori di matematica nelle Università italiane caduti in guerra.* Seminario matematico della Facoltà di Scienze della R. Università di Roma. Seduta del 22 giugno 1918. Roma, Bertero, 1918, pp. 7–8.

172*. *Dedica* della Memoria: *Teoria delle potenze, dei logaritmi e delle funzioni di composizione* all'Università di Edimburgo, 1918.

173*. *Relazione* sui lavori della Conferenza interalleata sulla organizzazione scientifica. Riunioni di Londra, 9–11 ottobre 1918 (« Rendiconti della R. Accademia dei Lincei », s. V, vol. $XXVII_2$, 1918_2, pp. 276–279).

174*. *La Conferenza interalleata sulla organizzazione scientifica.* Relazione fatta dal sen. prof. VITO VOLTERRA alla R. Accademia dei Lincei (anche a nome dei proff. NASINI, REINA, RICCÒ e FANTOLI per la Conferenza di Parigi) nelle sedute del 3 novembre 1918 e del 5 gennaio 1919 [ved. nn. 177, 179]. « L'Intesa intellettuale » (Bologna) a. I, 1918, pp. 218–230 [questo periodico, diretto dal prof. ANDREA GALANTE, era la rivista della Associazione italiana per l'intesa intellettuale fra i Paesi alleati ed amici, presieduta dal VOLTERRA].

175*. *Relazione* sui lavori della commissione di organizzazione scientifica interalleata, riunitasi in Parigi nel novembre 1918. Relazione anche a nome dei colleghi NASINI, REINA, RICCÒ e FANTOLI («Rendiconti della R. Accademia dei Lincei», s. V, vol. $XXVIII_1$, 1919_1, pp. 90–99).

176. *Rapporto preliminare sulla terza conferenza del Consiglio internazionale di Ricerche* (« Rendiconti della R. Accademia dei Lincei », s. V, vol. XXVIII, 1° sem. 1919, pp. 437–452).
Queste « Opere », vol. IV, nota XI, pp. 297–311.

177*. *L'entente scientifique* (« Nouvelle Revue d'Italie », 1919).

178*. *La terza Conferenza del Consiglio internazionale di Ricerche* tenuta a Bruxelles dal 18 al 28 luglio 1919 (« L'Intesa Intellettuale », Bologna, a. II, 1919, pp. 132–150).

179. *Functions of composition* (« The Rice Institute Pamphlet », vol. VII, october 1920, n. 4, pp. 181–251).
Queste « Opere », vol. IV, nota XII, pp. 312–365.

180*. *Saggi scientifici* (Bologna, Zanichelli, 1920. Un vol. di p. (8)–219).

181. *Pietro Blaserna* (« Procès–verbaux des seances du Comité International des poids et mesures », s. II, vol. VIII, 1920, pp. 105–108).
Queste « Opere », vol. IV, nota XIII, pp. 366–369.

182*. *Le congrès de mathématiques de Strasbourg* (« Nouvelle Revue d'Italie », 1920).

183*. *Sur l'enseignement de la Physique et de quelques points d'analyse* (« L'Enseignement Mathématique », a. XXI, 1920, p. 200–202. [Sunto. V. n. 188]).

184. *Sur l'enseignement de la Physique Mathématique et de quelques points d'analyse.* Conférenza generale al « Congrès International des Mathématiciens », Strasburgo, 24 settembre 1920, « Comptes rendus du Congrès », pp. 81–97).
Queste « Opere », vol. IV, nota XIV, pp. 370–385.

185. *Osservazioni sul metodo di determinare la velocità dei dirigibili* (« Rassegna marittima aeronautica illustrata », Roma, 1920).
Queste « Opere », vol. IV, nota XV, pp. 386–392.

186*. *Parole* pronunciate al Senato in commemorazione di AUGUSTO RIGHI (« Atti parlamentari della Camera dei Senatori – Discussioni », Legislatura XXV, 1ª sessione 1919–1920, vol. I, pp. 882–883, tornata del 24 giugno 1920).

187*. *Parole* pronunciate al Senato durante lo svolgimento di una interpellanza intorno a provvedimenti per proteggere e sviluppare l'industria della pesca (Ibidem, vol. I, pp. 931–932, tornata del 25 giugno 1920).

188*. *Parole* pronunciate al Senato durante la discussione di un disegno di legge su provvedimenti in favore della pesca e dei pescatori (Ibidem, vol. II, pp. 2076–2078, tornata del 7 dicembre 1920).

189 *Interpellanza* al Ministro della Pubblica Istruzione riguardante la Stazione Zoologica di Napoli, presentata dai Senatori VOLTERRA, ARLOTTA, BIANCHI LEONARDO, DE LORENZO, MANGO, SALVIA. *Discorsi* del VOLTERRA sullo stesso argomento (Ibidem, vol. II, pp. 1932, 1961, 2094–2099, 2135; tornata del 2, 3, 8, 9 dicembre 1920).

190. *Funzioni di linee. Equazioni integrali e integro–differenziali* («Anales de la Sociedad Científica Argentina», t. XCII, p. 31 y seguientes).
Queste «Opere», vol. IV, nota XVI, pp. 393–403.

191. *Flow of electricity in a magnetic field* («University of California Publications in Mathematics», vol. I, 1921, pp. 249–320).
Queste «Opere», vol. IV, nota XVII, pp. 404–475.

192*. *Sistemazione della rete telegrafica e telefonica nazionale in dipendenza della elettrificazione delle ferrovie dello Stato.* Senato del Regno. Relazione dell'Ufficio Centrale composto dei Senatori MILLO, presidente, VOLTERRA, segretario e relatore, DI ROVASENDA, CHIMIENTI, MAZZONI, BERTARELLI e TORRIGIANI FILIPPO («Atti interni del Senato del Regno», Sessione 1921–923, Legislatura XXVI, vol. II, n. 159–A, p. 1 [Relazione in data 9 agosto 1921, pubblicata nel 1923]).

193*. *Provvedimenti per la ricerca e la utilizzazione delle sostanze radioattive.* Senato del Regno. Relazione dell'Ufficio Centrale composto dei Senatori D'OVIDIO ENRICO, presidente, MENGARINI, segretario, LUSTIG, CUZZI, SANARELLI, TAMASSIA e VOLTERRA, relatori («Atti interni del Senato del Regno», Sessione 1921–923, Legislatura XXVI, v. I, n. 4–A, pp. 1–2 [Relazione in data 10 agosto 1921, pubblicata nel 1923. Ved. n. 198]).

194. *Relazione al progetto di legge sui provvedimenti per la ricerca e la utilizzazione delle sostanze radioattive* («Atti Parlamentari Senato del Regno», Legislatura XXVI, 1ª sezione 1921, vol. I, n. 4–A, pp. 1–2).
Queste «Opere», vol. V, nota XVIII, pp. 476–477.

195. *Relazione sull'insegnamento della dinamica nelle scuole industriali* («Rivista d'ottica e meccanica di precisione», Bologna, n. 1, 1921, pp. 4–31).
Queste «Opere», vol. IV, nota XIX, pp. 478–495.

196. *Parole* in commemorazione di CAMILLO JORDAN («Rendiconti della R. Accademia dei Lincei», s. V, vol. $XXXI_1$, 1922_1, pp. 134–135).

197. *Discorso inaugurale della «International Astronomical Union»* («Transactions of the international astronomical Union», vol. I, 1922, pp. 127–131).
Queste «Opere», vol. IV, nota XX, pp. 496–502.

198*. *Provvedimenti per la ricerca e la utilizzazione delle sostanze radioattive.* Senato del Regno. Relazione dell'Ufficio Centrale composto dei Senatori D'OVIDIO ENRICO, presidente, MENGARINI, segretario, LUSTIG CUZZI, SANARELLI, TAMASSIA e VOLTERRA, relatori («Atti interni del Senato del Regno», Sessione 1921–923, Legislatura XXVI, v. I, n. 4–C, p. 1 [Relazione in data 21 novembre 1922, pubblicata nel 1923. Ved. n. 197]).

199. *Sur les fonctions permutables* (« Bulletin de la Société mathématique de France », t. LII, 1923, pp. 548–568).
Queste « Opere », vol. IV, nota XXI, pp. 503–519.

200*. *Parole* in commemorazione di LUIGI PASTEUR (« Rendiconti della R. Accademia dei Lincei », s. V, vol. $XXVII_1$, 1923_1, pp. 403–404).

201. *Mouvement d'un fluide en contact avec un autre et surfaces de discontinuité* (« Comptes Rendus de l'Académie des Sciences », t. CLXXVII, 1923_2, pp. 569–571).
Queste « Opere », vol. IV, nota XXII, pp. 520–522.

202*. *Leçons sur la composition et les fonctions permutables.* In collaborazione con J. PÉRÈS. Paris, Gauthier–Villars, 1924. Un vol. di pp. VIII–184 della collezione BOREL. [Una recensione orale, fatta dal VOLTERRA presentando il volume ai Lincei, è riferita nei « Rendiconti dell'Accademia », s. V, vol. $XXXIII_2$, 1924_2, p. 361. V. anche i « Comptes rendus de l'Académie des Sciences », t. CLXXIX, 1924_2, p. 733].

203*. *Inauguration du buste de Philippe-A. Guye*, remis à l'Université de Genève par l'Association des Élèves et Anciens Élèves de l'École de Chimie de cette ville, le 13 mars 1924. Cette brochure contient, notamment, l'allocution prononcée, à cette cérémonie, par M. JEAN PERRIN, au nom de l'Académie des Sciences, celles de MM. MAURICE LUGEON et ROBERT CHODAT et les adresses de MM. VOLTERRA, LE CHATELIER, HALLER, MOUREU et GUILLAUME. Così leggesi nei « Comptes rendus de l'Académie des Sciences », t. CLXXIX, 1924_2, p. 853.

204. *Discorso presidenziale del 1924* (« Rendiconti delle sedute solenni della R. Accademia dei Lincei », vol. III, 1916–28, pp. 517–522).
Queste « Opere », vol. IV, nota XXIII, pp. 523–528.

205*. *Arthur Gordon Webster.* Worcester–Mass., 1924.

206*. *Parole* per il cinquantenario della Società francese di Fisica. Le Livre du cinquantenaire de la Société française de Physique. Paris, 1945.

207*. *Toast* per il cinquantenario della Società francese di Fisica. Ibidem.

208. *Discorso presidenziale del 1925* (« Rendiconti delle sedute solenni della R. Accademia dei Lincei », vol. III, 1916–28, pp. 567–573).
Queste « Opere », vol. IV, nota XXIV, pp. 529–534.

209*. *Parole* in commemorazione del Presidente FRANCESCO D'OVIDIO (« Rendiconti della R. Accademia dei Lincei », s. VI, vol. II, 1925, pp. 573–574).

210. *In memoria di Cornelia Fabri* (« Arti grafiche », Ravenna, 1925).
Queste « Opere », vol. IV, nota XXV, pp. 535–538.

211*. *Variazioni e fluttuazioni del numero d'individui in specie animali conviventi* (« Memorie della R. Accademia dei Lincei », s. VI, vol. II, 1926, pp. 31–113).

212*. *Fluctuations in the abundance of a species considered mathematically* (« Nature », vol. CXVIII, 1926_2, pp. 558–560). Sotto lo stesso titolo furono poi pubblicate due lettere, una del LOTKA e una del VOLTERRA (Ibidem, vol. CXIX, 1927, pp. 12–13).

213*. *L'ignorance sépare, la science rapproche.* Conversation avec M. VITO VOLTERRA rapportée par PIERRE CHANLAINE (« La science et la vie », Paris, t. XXX, 1926, pp. 111–112, con ritratto del VOLTERRA).

214*. *Teoría de los funcionales y de las ecuaciones integrales e integro-diferenciales.* Conferencias explicadas en la Facultad de Ciencias de la Universidad Central en el mes de abril 1925. Redactadas por el Profesor Dr. LUIGI FANTAPPIÈ. Editadas por la Facultad de Ciancias. Un vol. di pp. VIII–208 (Madrid, Imprenta clásica española, 1927). Una presentazione di quest'opera, fatta dal VOLTERRA all'Accademia di Francia, leggesi nei «Comptes rendus», t. CLXXXV, 1927_2, pp. 596–597).

215. *Variazioni e fluttuazioni del numero d'individui in specie animali conviventi* («Memorie del R. Comitato talassografico italiano», mem. CXXXI, 1927, di p. 142).
Queste «Opere», vol. V, nota I, pp. 1–111.

216*. *Sulle fluttuazioni biologiche* («Rendiconti della R. Accademia dei Lincei», s. VI, vol. V, 1927, pp. 3–10).

217*. *Leggi sulle fluttuazioni biologiche.* Ibidem, pp. 61–67.

218*. *Sulla periodicità delle fluttuazioni biologiche.* Ibidem, pp. 465–470.

219*. *Essai mathématique sur les fluctuations biologiques* («Bulletin de la Société d'océanographie de France» (Paris, 1927, 4 pp.).

220. *Una teoria matematica sulla lotta per l'esistenza* («Scientia», vol. XLI, 1927, pp. 85–102).
Queste «Opere», vol. V, nota II, pp. 112–124.

221*. *Une théorie mathématique de la lutte pour la vie* («Scientia», pp. 33–48 del «Supplément»). [Traduzione francese del lavoro precedente, fatta da MARCEL THIERS].

222*. *Lois des fluctuations de la population de plusieurs espèces coexistant dans le même milieu.* Association française pour l'avancement des sciences. Paris, 1927, 3 pp.

223*. *Rapports et procès-verbaux des réunions du Conseil permanent pour l'exploration de la mer. Discours de clôture.* Copenhague, 1927.

224*. *Cinquantenaire scientifique de M. Paul Appell.* Paris, 1927.

225*. *La création du Bureau international des Poids et Mesures. Préface.* Paris, 1927.

226*. *Discours prononcé à la Septième Conférence des Poids et Mesures.* Comptes rendus des séances. Paris, 1927.

227. *Sur l'histoire du Bureau international des Poids et Mesures* («Comptes Rendus des Séances de la Septième Conférence des Poids et Mésures», Paris, 1927, pp. 16–20).
Queste «Opere», vol. V, nota III, pp. 125–129.

228. *Sur la théorie mathématique des phénomènes héréditaires* («Journal de Mathématiques pures et appliquées», s. IX, t. VII, 1928, pp. 249–298).
Queste «Opere», vol. V, nota IV, pp. 130–169.

229. *La teoria dei funzionali applicata ai fenomeni ereditari* («Atti del Congresso internazionale dei Matematici a Bologna 1928», t. I, Bologna, Zanichelli, 1929).
Queste «Opere», vol. V, nota V, pp. 170–186.

230*. *Théorie mathématique de la lutte pour la vie.* Mosca, 1928 (in russo).

231*. *Variation and fluctuations of the number of individuals in animal species living together.* Translated by Miss MARY EVELYN WELLS («Journal du Conseil international pour l'exploration de la mer», Copenhague, vol. III, n. 1, 1928, pp. 3–51).

232 *In memoria di H. A. Lorentz* (« Il Nuovo Cimento », n. s., vol. V, 1928, pp. 41–43).
Queste « Opere », vol. V, nota VI, pp. 187–189.

233*. *Cinquantenaire scientifique de M. Émile Picard. Allocutions, lettres et télégrammes Allocution au nom de l'Académie Royale des Lincei.* Paris, Gauthier–Villars, 1928.

234*. *Sulle fluttuazioni biologiche* [Conferenza tenuta al Seminario matematico e fisico di Milano il 24 aprile 1929. Redatta dal prof. ARNALDO MASOTTI]. (« Rendiconti del Seminario matematico e fisico di Milano », vol. III, 1929, pp. 154–174).

235. *Alcune osservazioni sui fenomeni ereditari* (« Rendiconti della R. Accademia dei Lincei », s. VI, vol. IX, 1929, pp. 585–595).
Queste « Opere », vol. V, nota VII, pp. 190–199.

236*. *Presentazione* ai Lincei dell'ultimo volume delle opere di ALESSANDRO VOLTA (« Rendiconti della R. Accademia dei Lincei », s. VI, vol. X, 1929, pp. 451–452; ved. anche vol. XIII, 1931_1, p. 243, dove trovasi una comunicazione supplementare del VOLTERRA circa la pubblicazione del carteggio voltiano).

237. *Erik Ivar Fredholm* (« Procès–verbaux des séances du Comité International des Poids et Mesures » s. II, vol. XIII, 1929, pp. 277–280).
Queste « Opere », vol. V, nota VIII, pp. 200–202.

238*. *In memoria di Traiano Lalesco* (« Revista universitara matematica », Bucarest, vol. I, 1929, pp. 252–253).

239*. *Theory of functionals and of integral and integro–differential equations.* Edited by Prof. LUIGI FANTAPPIÈ. Authorised translation by Miss M. LONG. Un vol. di pp. XIV–226. London and Glasgow, Blaskie, 1930. [Traduzione, con migliorie fatte dall'autore, delle conferenze tenute all'Università di Madrid nel 1925. Una presentazione di quest'opera, fatta dal VOLTERRA all'Accademia di Francia, leggesi nei « Comptes Rendus », t. CXCII, 1931_1, pp. 395–396].

240*. *La théorie des fonctionnelles appliquée aux phénomènes héréditaires* (« Revue générale des sciences pures et appliquées », t. 41, 1930, pp. 197–206). [Traduzione francese, fatta dal PÉRÈS, della comunicazione al Congresso internazionale dei matematici tenuto a Bologna nel 1928].

241. *Sulla meccanica ereditaria* (« Rendiconti della R. Accademia dei Lincei », s. VI, vol. XI, 1930_1, pp. 619–625).
Queste « Opere », vol. V, nota IX, pp. 203–208.

242*. *Leçons sur la théorie mathématique de la lutte pour la vie,* redigées par MARCEL BRELOT Paris, Gauthier–Villars, 1931. Un vol. di pp. VI–214, fasc. VII della collezione « Cahiers scientifiques », publiés sous la direction de M. GASTON JULIA. [Le conferenze furono tenute all'Istituto Henri Poincaré nell'inverno 1929–30. La redazione contiene qualche contributo del BRELOT e del D'ANCONA. Una presentazione di quest'opera, fatta dal PICARD all'Accademia di Francia, leggasi nei « Comptes rendus », t. CXCI, 1930_2, p. 1273].

243*. *Ricerche matematiche sulle associazioni biologiche* (« Giornale dell'Istituto italiano degli attuari », a. II, pp. 295–355).

244*. *La concorrenza vitale tra le specie nell'ambiente marino.* In collaborazione con UMBERTO D'ANCONA. VII Congrès international d'aquiculture et de pêche. Paris-Orléeans, 1931.

245*. *Italian physicists and Faraday's researches.* Translated by T. MARK. Supplement to « Nature », vol. CXXVIII, 1931_2, pp. 342–345.

246. *I fisici italiani e le ricerche di Faraday* (« L'Elettrotecnica », vol. XVIII, 1931, pp. 806–808).
Queste « Opere », vol. V, nota X, pp. 209–216.

247. *Le calcul des variations, son évolution et ses progrès, son rôle dans la physique mathematique* (« Publ. par les Faculté des sciences de l'Université Charles et de l'Université Masaryk », Praha–Brno, 1932, pp. 54).
Queste « Opere », vol. V, nota XI, pp. 217–267.

248. *Sur le jets liquides* (« Journal de Mathématiques pures et appliquées », s. IX, t. XI, 1932, pp. 1–35).
Queste « Opere », vol. V, nota XII, pp. 268–293.

249*. *Variačni počet, jeho vývoj, jeho pokroky a jeho úloha v matematické fysice* (« Časopis pro pěstováni matematiky a fysiky », Praha, vol. 62, 1932–33, pp. 93–116, 201–227).

250*. *De Moivre's « Miscellanea analytica »* (« Nature », vol. CXXXII, 1933_2, p. 898) [Nota bibliografica].

251*. *Paul Painlevé et les inventions interalliées* (« Recherches et inventions », 1923).

252* *Discours* prononcé à la première séance de la Conférence générale de poids et mesures. 1933.

253. *Sur la théorie des ondes liquides et la méthode de Green* (« Journal de mathématiques pures et appliquées », s. IX, t. XIII, 1934, pp. 1–15).
Queste « Opere », vol. V, nota XIII, pp. 294–307.

254. *Représentation des fonctionnelles analytiques déduites du théorème de Mittag–Leffler* (« Journal de Mathématiques pures et appliquées », s. IX, t. XIII, 1934, pp. 293–316).
Queste « Opere », vol. V, nota XIV, pp. 308–325.

255. *Équations aux dérivées partielles et théorie des fonctions* (« Annales de l'Institut H. Poincaré », t. IV, 1934, pp. 273–352).
Queste « Opere », vol. V, nota XV, pp. 326–389.

256. *Remarques sur la Note de M. Régnier et Mlle. Lambin* (« Comptes rendus de l'Académie des Sciences », t. CXCIX, 1934, pp. 1684–1686).
Queste « Opere », vol. V, nota XVI, pp. 390–391.

257*. *Les associations biologiques au point de vue mathématique.* In collaborazione con UMBERTO D'ANCONA. Paris, Hermann, 1935. Un vol. di p. 96, n. 243 della collezione « Actualité scientifiques et industrielles ».

258. *Les équations de fluctuations biologiques et le calcul des variations* (« Comptes rendus de l'Académie des Sciences », t. CCII, 1936, pp. 1953–1957).
Queste « Opere », vol. V, nota XVII, pp. 392–395.

259. *Les équations canoniques des fluctuations biologiques* (« Comptes rendus de l'Académie des Sciences », t. CCII, 1936_1, pp. 2023–2026).
Queste « Opere », vol. V, nota XVIII, pp. 396–398.

260. *Sur l'intégration des équations des fluctuations biologiques* (« Comptes rendus de l'Académie des Sciences », t. CCII, 1936, pp. 2113–2116).
Queste « Opere », vol. V, nota XIX, pp. 399–401.

261. *Le principe de la moindre action en biologie* (« Comptes rendus de l'Académie des Science », t. CCIII, 1936_2, pp. 417–421).
Queste « Opere », vol. V, nota XX, pp. 402–405.

262. *Sur la moindre action vitale* (« Comptes rendus de l'Académie des Sciences » t. CCIII, 1936_2, pp. 480–481).
Queste « Opere », vol. V, nota XXI, pp. 406–407.

263. *La théorie mathématique de la lutte pour la vie et l'expérience* (A propos de deux ouvrages de C. F. GAUSE; « Scientia », vol. LX, 1936, pp. 169–174).
Queste « Opere », vol. V, nota XXII, pp. 408–413.

264*. *Théorie générale des fonctionnelles.* In collaborazione con JOSEPH PÉRÈS. Tomo I: *Généralités sur les fonctionnelles, Théorie des équations intégrales.* Paris, Gauthier–Villars, 1936. Un vol. di p. XII–359 nella predetta collezione BOREL. [Contenuto degli annunciati tomi successivi: T. II: *Composition, Équations intégro–différentielles et aux dérivés fonctionnelles, Généralisations des fonctions analytiques.* T. III: *Compléments et applications*].

265*. *Traian Lalescu.* « Numerus » (Bucarest), vol. 2, 1936, pp. 217. [Sotto quel titolo sono raccolte numerose brevi commemorazioni di T. L. fra le quali una in italiano del VOLTERRA].

266*. *Préface* à l'ouvrage: Mlle HÉLÈNE FREDA, *Méthode des caractéristiques pour l'intégration des équations aux dérivées partielles linéaires hyperboliques* (« Mémorial des sciences mathématiques », fasc. LXXXIV, Paris, Gauthier–Villars, 1937, pp. V–VII).

267*. *Préface* à l'ouvrage: V. A. KOSTITZIN, *Biologie mathématique* (« Collection Armand Colin », vol. 200. Paris, Colin, 1937, pp. 5–7).

268. *Principes de biologie mathématique* (« Acta Biotheoretica », Leiden, vol. III, parte I, 1937, pp. 6).
Queste « Opere », vol. V, nota XXIII, pp. 414–447.

269. *Leggi delle fluttuazioni e principi di reciprocità in biologia* (« Rivista di Biologia », vol. XXII, 1937, pp. 365–380).

270. *Applications des mathématiques à la biologie* (« L'Énseignement mathématiques », année XXXVI, 1937, pp. 297–330).
Queste « Opere », vol. V, nota XXIV, pp. 448–471.

271*. *I miei studi più recenti di biologia matematica* (« Gazzetta del Popolo della Sera », 1937).

272. *Population growth, equilibria and extintion under specified breeding conditions: a development and extention of the theory of the logistic curve* (« Human Biology », vol. X, n. 1, 1938, pp. 1–11).
Queste « Opere », vol. V, nota XXV, pp. 472–479.

273*. *Lois des fluctuations biologiques et leurs consequences* (« Bulletin de la Société mathématique de France », 1938) [?].

274*. *Opérations infinitésimales linéaires. Applications aux équations différentielles et fonctionnelles.* In collaborazione con BOHUSLAV HOSTINSKY, Paris, Gauthier–Villars, 1938. Un vol. di pp. VIIII–238, nella collezione Borel.

275*. *Conférences sur quelques questions de mécanique et de physique mathématique. I. Rotation des corps dans lesquels existent des mouvements internes.* Rédaction de PIERRE COSTA-

BEL. Paris, Gauthier-Villars, 1938. Un vol. di pp. VIII-85, fasc. IV della «Collection de physique mathématiques» edita da ÉMILE BOREL e MARCEL BRILLOUIN.

276*. *Presentazione* all'Accademia di Francia dei *Procès-Verbaux* delle sedute *del Comité international des Poids et Mésures*, s. II, vol. XVIII («Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences», t. CCVI, 1938_2, pp. 1333-1334).

277. *Remarques sur l'action toxique du milieu à propos de la Note de M. Régnier e Mlle Lambin* («Comptes rendus de l'Académie des Sciences», t. CCVII, 1938_2, pp. 1146-1148).
Queste «Opere», vol. V, nota XXVI, pp. 480-481.

278. *Fluctuations dans la lutte pour la vie: leurs lois fondamentales et de réciprocité* («Société mathématique de France», 1938, 17 pp.).
Queste «Opere», vol. V, nota XXVII, pp. 482-495.

279. *The general equations of biological strife in the case of historical actions* («Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society», s. II, vol. V, 1939, pp. 4-10).
Queste «Opere», vol. V, nota XXVIII, pp. 496-502.

280. *Calculus of variations and the logistic curve* («Human Biology», vol. II, n. II, 1939, pp. 173-178).
Queste «Opere», vol. V, nota XXIX, pp. 503-507.

281. *Energia nei fenomeni elastici ereditari* («Pontificia Academia Scientiarum, Acta», vol. IV, 1939-40, pp. 115-128).
Queste «Opere», vol. V, nota XXX, pp. 508-516.

INDICE

FINITO DI STAMPARE NELLA
TIPOGRAFIA DELL'ACCADEMIA
NAZIONALE DEI LINCEI IN ROMA
NEL GENNAIO 1962.