VITO VOLTERRA

OPERE MATEMATICHE

Memorie e Note

PUBBLICATE A CURA DELL'ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
COL CONCORSO
DEL CONSIGLIO NAZIONALE DELLE RICERCHE

Volume quarto
1914-1925

ROMA
ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
1960

OPERE MATEMATICHE
DI VITO VOLTERRA

VITO VOLTERRA

OPERE MATEMATICHE

Memorie e Note

PUBBLICATE A CURA DELL'ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
COL CONCORSO
DEL CONSIGLIO NAZIONALE DELLE RICERCHE

Volume quarto
1914 - 1925

ROMA
ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
1960

MEMORIE E NOTE

I.

OSSERVAZIONI SUI NUCLEI DELLE EQUAZIONI INTEGRALI

« Rend. Acc. Lincei », ser. 5ª, vol. XXIII₁, 1914₁; pp. 266–269.

1. Sia

$$\psi(x) = \varphi(x) + \int_0^x \varphi(\xi) f_1(\xi, x)\, d\xi$$

l'equazione risolvente dell'equazione integrale

$$\varphi(x) = \psi(x) + \int_0^x \psi(\xi) f(\xi, x)\, d\xi .$$

Fra il nucleo dell'equazione primitiva e quello della risolvente passano le relazioni [1]

$$f(x, y) + f_1(x, y) = -\int_x^y f(x, \xi) f_1(\xi, y)\, d\xi = -\int_x^y f_1(x, \xi) f(\xi, y)\, d\xi .$$

Se il nucleo dell'equazione primitiva è della forma $f(x - \xi)$, ossia appartiene al *gruppo del ciclo chiuso*, vi apparterrà anche il nucleo risolvente che avrà quindi la forma $f_1(x - \xi)$; e l'equazione precedente si scriverà:

$$\text{(I)} \qquad f(x) + f_1(x) = -\int_0^x f(\xi) f_1(x - \xi)\, d\xi = -\int_0^x f_1(\xi) f(x - \xi)\, d\xi .$$

Il prof. TEDONE, in una recente Nota [2], si domanda quando il nucleo risolvente possa ottenersi dal primitivo mediante un numero finito di operazioni di derivazione e d'integrazione.

Risolviamo il problema nel caso in cui il nucleo risolvente si voglia che resulti dato da una espressione lineare a coefficienti costanti delle derivate e di integrali del nucleo primitivo; cioè:

$$(1) \qquad f_1(x) = a_0 f(x) + a_1 f'(x) + \cdots + a_n f^{(n)}(x) + b_0 + b_1 \int_0^x f(\xi)\, d\xi +$$
$$+ b_2 \int_0^x d\xi \int_0^\xi f(\eta)\, d\eta + \cdots .$$

(1) VOLTERRA, *Leçons sur les fonctions de lignes*, Paris, Gauthier-Villars, 1913, p. 67, form. (E) e (E').

(2) « Rend. Acc. Linc. », seduta 1º febbraio 1914.

2. Facendo uso delle notazioni impiegate per la composizione [3], la (I) si scriverà:

$$f + f_1 = -\overset{\times}{f}\overset{\times}{f_1} \tag{2}$$

ossia

$$f_1 = -\frac{\overset{\times}{f}}{1 + \overset{\times}{f}}.$$

D'altra parte,

$$\int_0^x f(\xi)\,d\xi = \overset{\times}{f}\overset{\times}{1}$$

$$\int_0^x d\xi \int_0^\xi f(\eta)\,d\eta = \overset{\times}{f}\overset{\times}{1}^2$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Sia

$$f(0) = c_0 \quad , \quad f'(0) = c_1 \quad , \quad f''(0) = 2c_2 , \ \cdots \ , f^{(m)}(0) = m!\, c_m ;$$

sarà

$$f - c_0 = \overset{\times}{f'}\overset{\times}{1} \quad , \quad f - c_0 - c_1 x = \overset{\times}{f''}\overset{\times}{1}^2 , \ \cdots \ , f - c_0 - c_1 x - \cdots - c_m x^m = \overset{\times}{f^{(m)}}\, 1^m$$

e, facendo uso del simbolo di divisione [4],

$$\overline{\overset{\times}{(f - c_0)}}\,\overset{\times}{1}^{-1} = f' \quad , \quad \overline{\overset{\times}{(f_0 - c_0 - c_1 x)}}\,\overset{\times}{1}^{-2} = f'' , \ \cdots$$

$$\overline{\overset{\times}{f - c_0 - c_1 x - \cdots - c_m x^{m-1}}}\,\overset{\times}{1}^{-m} = f^{(m)} .$$

Avremo dunque [5]

$$a_0 f + a_1 \overline{\overset{\times}{(f - c_0)}}\,\overset{\times}{1}^{-1} + a_2 \overline{\overset{\times}{(f_0 - c_0 - c_1 x)}}\,\overset{\times}{1}^{-2} + \cdots + b_0 + b_1 \overset{\times}{f}\overset{\times}{1} +$$
$$+ b_2 \overset{\times}{f}\overset{\times}{1}^2 + \cdots = -\frac{\overset{\times}{f}}{1 + \overset{\times}{f}} .$$

Le operazioni simboliche di divisione e di moltiplicazione possono trattarsi come operazioni algebriche; quindi, riducendo a forma intera, avremo:

$$[a_0 \overset{\times}{f}\overset{\times}{1}^m + a_1 \overline{\overset{\times}{(f - c_0)}}\,\overset{\times}{1}^{m-1} + \cdots + a_m (f - c_0 - c_1 x - \cdots - c_m x^{m-1}) + \tag{3}$$
$$+ \overset{\times}{b^{\circ}}\overset{\times}{1}^m + b_1 \overset{\times}{f}\overset{\times}{1}^{m+1} + b_2 \overset{\times}{f}\overset{\times}{1}^{m+2} + \cdots]\,(1 + \overset{\times}{f}) = -\overset{\times}{f}\overset{\times}{1}^m .$$

(3) Vedi le lezioni precedenti citate, cap. IX.

(4) Vedi lezioni precedentemente citate, cap. IX, § 16.

(5) L'uso di questo simbolo è qui intuitivo. L'ho già impiegato più in generale nelle mie lezioni del 1912 alla Università di Princeton, che vedranno presto la luce [in questo volume delle «Opere», V, pp. 43-73].

Questa è una equazione integrale di secondo grado della cui soluzione mi sono occupato nelle mie lezioni sulle funzioni di linee [6].

3. Come esempio, risolviamo il problema di *trovare un nucleo tale che il nucleo risolvente sia la derivata del primitivo*, cioè si abbia

$$f + f' = -\overset{\times\times}{ff'}$$

ossia

$$f' = -\frac{\overset{\times}{f}}{1+\overset{\times}{f}} \, .$$

Ma

$$f' = \overset{\times}{\overline{(f - c_0)}}\,\overset{\times}{1}{}^{-1}$$

quindi

$$\overset{\times}{\overline{(f - c_0)}}\,\overset{\times}{1}{}^{-1} = -\frac{\overset{\times}{f}}{1+\overset{\times}{f}}$$

e, riducendo a forma intera,

$$\overset{\times}{\overline{(f - c_0)}}\,(1 + \overset{\times}{f}) = -\overset{\times\times}{f\,1} \, .$$

Questa equazione integrale si scrive, supponendo $c_0 = 1$ per trattare il caso più semplice,

$$\overset{\times}{f}{}^2 + f - 1 = 0 \, .$$

Per risolverla, basta considerare l'equazione algebrica [7]

$$y^2 + y - z = 0 \, ,$$

da cui segue

$$y = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4z}}{2} \, .$$

Prendiamo la radice che si annulla per $z = 0$ e sviluppiamola in serie di potenze di z. Si otterrà

$$y = \sum_{1}^{\infty} (-1)^{n-1}\, 2^{n-1}\, \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{n!}\, z^n \, .$$

Sostituiamo, al posto di z, $\overset{\times}{1}$ e consideriamone le potenze simboliche come composizioni, cioè

$$\overset{\times}{1}{}^2 = x \quad , \quad \overset{\times}{1}{}^3 = \frac{x^2}{2!} \, , \quad \ldots \quad , \ \overset{\times}{1}{}^n = \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \, .$$

(6) Per trasformare la equazione (2) nella (3) sarebbe bastato applicare m volte la integrazione alla equazione (2).

(7) Vedi lezioni precedentemente citate, cap. IX, § 13.

Avremo il nucleo richiesto

$$f(x) = \sum_{1}^{\infty} (-1)^{n-1} 2^{n-1} \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{n!\,(n-1)!} x^{n-1}.$$

Questa funzione resulta intera, ma anche *a priori* avremmo potuto dire, per le proprietà della composizione, che la funzione f doveva essere intera.

4. Si può anche trattare facilmente il caso in cui i coefficienti della (1) non siano costanti, ed altri casi pure che semplicemente possono dedursi dalla trattazione precedente.

II.

SULLE EQUAZIONI ALLE DERIVATE FUNZIONALI

« Rend. Acc. Lincei », ser. 5^a, vol. $XXIII_1$, 1914_1; pp. 393-399.

1. Nella classificazione dei problemi che dipendono dai concetti di funzioni di linee, dopo quelli di tipo algebrico (equazioni integrali ed equazioni funzionali) vengono le equazioni integro-differenziali e le equazioni alle derivate funzionali. Fra queste ultime, di speciale interesse sono quelle che appartengono al tipo delle equazioni ai differenziali totali, che vennero in modo particolare studiate; ma conviene segnalarne altre di diverso tipo che pure è utile di esaminare. È ciò che mi permetto fare in questa brevissima Nota, limitandomi a darne degli esempi.

2. Denotiamo con $F\left|\left[f(\overset{1}{\underset{0}{x}})\right]\right|$ una quantità che dipende da tutti i valori di $f(x)$ nell'intervallo $0\,,1$, che sia derivabile e non abbia punti eccezionali [1].

Vogliamo che essa soddisfi alla condizione

$$\int_0^1 f(\xi)\, F'\left|\left[f(x)\,,\xi\right]\right| d\xi = 0\,, \tag{1}$$

ove $F'\left|\left[f(x)\,,\xi\right]\right|$ denota la derivata di $F\left|\left[f(x)\right]\right|$ eseguita nel punto ξ.

Troviamo facilmente che la funzione

$$\Phi\left|\left[\frac{f(x)}{\int_0^1 f(\xi)\,d\xi}\right]\right|,$$

ove con Φ si denota una quantità che dipende in modo arbitrario da $\dfrac{f(x)}{\int_0^1 f(\xi)\,d\xi}$, ed è continua derivabile e senza punti eccezionali, soddisfa alla (1). Reciprocamente se F soddisfa la (1) essa può mettersi sotto la forma precedente, perché non deve cambiare moltiplicando $f(x)$ per una costante qualunque.

La (1) rappresenta una delle equazioni del nuovo tipo.

3. Consideriamo

$$F\left|\left[\alpha\,, f(\overset{1}{\underset{0}{x}})\right]\right|$$

(1) VOLTERRA, *Leçons sur les fonctions de lignes*. Paris, Gauthier-Villars, 1913, p. 29.

ove F dipende dal parametro α e dai valori di $f(x)$ in tutto l'intervallo 0, 1 e non ha punti eccezionali. Esaminiamo la equazione

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha} + \int_0^1 F' \,|[\alpha, f(x), \xi]|\, d\xi \int_0^1 \varphi(\xi, \eta) f(\eta)\, d\eta = 0, \tag{2}$$

nella quale $\varphi(\xi, \eta)$ rappresenta una funzione nota delle due variabili ξ e η, e

$$F' \,|[\alpha, f(x), \xi]|$$

indica la derivata funzionale di F rispetto a f, eseguita nel punto ξ.

La (2) rappresenta pure una delle equazioni del nuovo tipo.

La sua risoluzione può farsi dipendere dalla risoluzione della equazione integro-differenziale [(2)]

$$\frac{\partial f(\xi, \alpha)}{\partial \alpha} = \int_0^1 \varphi(\xi, \eta) f(\eta, \alpha)\, d\eta. \tag{3}$$

Posto

$$\Lambda(\xi, \eta \mid \alpha) = \alpha\varphi(\xi, \eta) + \frac{\alpha^2}{2!} \overset{\times\times}{\varphi^2}(\xi, \eta) + \frac{\alpha^3}{3!} \overset{\times\times}{\varphi^3}(\xi, \eta) + \cdots,$$

ove gli asterischi denotano operazioni di composizione di 2ª specie, la soluzione della (3) è data da

$$f(\xi, \alpha) = \Psi(\xi) + \int_0^1 \Lambda(\xi, \eta \mid \alpha)\, \Psi(\eta)\, d\eta,$$

essendo $\Psi(\xi)$ una funzione arbitraria.

Ciò premesso, risolviamo l'equazione integrale

$$f(\xi) = \Psi(\xi, \alpha) + \int_0^1 \Lambda(\xi, \eta \mid \alpha)\, \Psi(\eta, \alpha)\, d\eta,$$

nella quale α figura come un parametro costante, e sia

$$\Psi(\xi, \alpha) = f(\xi) + \int_0^1 \lambda(\xi, \eta \mid \alpha) f(\eta)\, d\eta$$

la soluzione.

Il nucleo $\lambda(\xi, \eta \mid \alpha)$ si otterrà facilmente e sarà

$$\lambda(\xi, \eta \mid \alpha) = -\alpha\varphi(\xi, \eta) + \frac{\alpha^2}{2!} \overset{\times\times}{\varphi^2}(\xi, \eta) - \frac{\alpha^3}{3!} \overset{\times\times}{\varphi^3}(\xi, \eta) + \cdots$$

giacché si verifica immediatamente che

$$\Lambda(\xi, \eta \mid \alpha) + \lambda(\xi, \eta \mid \alpha) = -\int_0^1 \Lambda(\xi, \zeta \mid \alpha)\, \lambda(\zeta, \eta \mid \alpha)\, d\zeta.$$

(2) Vedi lezioni precedentemente citate cap. XIII.

Denoti ora $\Phi \left| \left[\theta \left(\overset{1}{\underset{0}{x}} \right) \right] \right|$ il simbolo di una quantità che dipende arbitrariamente da tutti i valori di $\theta(x)$ per x compreso fra 0 e 1, e sia continua derivabile e senza punti eccezionali. Se $\theta(x)$ dipenderà anche da un parametro α, Φ resulterà una funzione ordinaria del parametro stesso. In particolare si sostituisca, per $\theta(x)$, $\Psi(x, \alpha)$; resulterà allora Φ una quantità che dipenderà da tutti i valori di $f(x)$ per x compreso fra 0 e 1, e sarà una funzione ordinaria del parametro α, cioè avremo (3)

$$\text{(I)} \qquad F \left| \left[\alpha, f \left(\overset{1}{\underset{0}{x}} \right) \right] \right| = \Phi \left| \left[f(x) + \int_0^1 \lambda(x, \eta \,|\, \alpha) f(\eta)\, d\eta \right] \right| .$$

Proviamo adesso che *la* (I) *soddisfa l'equazione* (2). La verifica è molto semplice. Deriviamo $\Phi \,|\, [\theta(x)] \,|$ per rapporto a $\theta(x)$ nel punto ξ: otterremo una quantità che oltre dipendere da $\theta(x)$ è una funzione di ξ. Scriviamola per semplicità $\Phi'(\xi)$. Calcoliamo ora δF. Resulterà

$$\delta F = \int_0^1 \Phi'(\xi) \left\{ \delta f(\xi) + \int_0^1 \lambda(\xi, \eta \,|\, \alpha)\, \delta f(\eta)\, d\eta + \int_0^1 \frac{\partial \lambda(\xi, \eta \,|\, \alpha)}{\partial \alpha} f(\eta)\, d\eta\, \delta\alpha \right\} d\xi ,$$

quindi

$$F' \,|\, [\alpha, f(x), \xi] \,| = \Phi'(\xi) + \int_0^1 \Phi'(\eta)\, \lambda(\eta, \xi \,|\, \alpha)\, d\eta ,$$

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha} = \int_0^1 \Phi'(\xi)\, d\xi \int_0^1 \frac{\partial \lambda(\xi, \eta \,|\, \alpha)}{\partial \alpha} f(\eta)\, d\eta .$$

(3) Se per esempio prendiamo

$$\Phi \left| \left[\theta \left(\overset{1}{\underset{0}{x}} \right) \right] \right| = \int_0^1 \lambda(x)\, \theta(x)\, dx ,$$

ove $\lambda(x)$ è una certa funzione determinata, sarà

$$F \left| \left[f \left(\overset{1}{\underset{0}{x}} \right), \alpha \right] \right| = \int_0^1 \lambda(x)\, \Psi(x, \alpha)\, dx .$$

Se prendiamo invece

$$\Phi \left| \left[\theta \left(\overset{1}{\underset{0}{x}} \right) \right] \right| = \int_0^1 \int_0^1 \mu(x, y)\, \theta(x)\, \theta(y)\, dx\, dy$$

sarà

$$F \left| \left[f \left(\overset{1}{\underset{0}{x}} \right), \alpha \right] \right| = \int_0^1 \int_0^1 \mu(x, y)\, \Psi(x, \alpha)\, \Psi(y, \alpha)\, dx\, dy ,$$

e così di seguito.

Onde il primo membro della (2) si scriverà, sostituendovi le espressioni precedenti,

$$(4)\qquad \int_0^1 \Phi'(\xi)\,d\xi \int_0^1 f(\eta)\,d\eta \times \left[\frac{\partial\lambda(\xi,\eta\,|\,\alpha)}{\partial\alpha} + \varphi(\xi,\eta) + \int_0^1 \lambda(\xi,\zeta\,|\,\alpha)\,\varphi(\zeta,\eta)\,d\zeta\right].$$

Ma dalla espressione trovata superiormente per $\lambda(\xi,\eta\,|\,\alpha)$ si ricava

$$\frac{\partial\lambda(\xi,\eta\,|\,\alpha)}{\partial\alpha} + \varphi(\xi\cdot\eta) + \int_0^1 \lambda(\xi,\zeta\,|\,\alpha)\,\varphi(\zeta,\eta)\,d\zeta = 0,$$

dunque la (4) sarà nulla qualunque siano $\Phi'(\xi)$ e $f(\eta)$, e per conseguenza la (2) è verificata comunque si prendano Φ ed f.

4. I procedimenti indicati, come in tutti i casi analoghi, possono facilmente farsi discendere dal noto concetto di passaggio dal finito all'infinito, che informa tutti i procedimenti dell'analisi a cui appartengono le questioni trattate. È interessante osservare come negli integrali compariscono delle *funzioni arbitrarie di linee.*

5. Di uno speciale interesse sono la equazione

$$(5)\qquad \int_0^1\!\!\int_0^1 F''\,[f(\overset{1}{\underset{0}{x}}),\xi,\eta]\,K(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta = 0,$$

in cui F″ è la derivata seconda di $F\,|\,[f(\overset{1}{\underset{0}{x}})]\,|$ eseguita nei punti ξ e η, e l'altra analoga

$$(5')\qquad \int_0^1 F''\,|\,[f(x),\xi,\xi]\,|\,d\xi + \int_0^1\!\!\int_0^1 F''\,|\,[f(x),\xi,\eta]\,|\,H(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta = 0,$$

ove

$$F''\,|\,[f(x),\xi,\xi]\,| = \lim_{\eta\to\xi} F''\,|\,[f(x),\xi,\eta]\,|.$$

Esse possono considerarsi come equazioni tipiche corrispondenti alle equazioni lineari alle derivate parziali del 2° ordine a coefficienti costanti, e possono rispettivamente chiamarsi *equazioni lineari alle derivate funzionali del 2° ordine di 1ª e di 2ª specie.*

6. Supponiamo, nella (5),

$$K(\xi,\eta) = \sum_1^n{}_i \sum_1^n{}_s a_{is}\,\varphi_i(\xi)\,\varphi_s(\eta)\quad,\quad a_{is} = a_{si},$$

ove le funzioni $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n$ sono normalizzate.

Prendiamo la forma reciproca

$$G(\xi,\eta) = \sum_1^n{}_i \sum_1^n{}_s b_{is}\,\varphi_i(\xi)\,\varphi_s(\eta)\quad,\quad b_{is} = b_{si}$$

tale, cioè, che

$$\sum_{1}^{n}{}_h a_{ih} b_{hs} = \begin{cases} 0 \,, & i \neq s \\ 1 \,, & i = s \,. \end{cases}$$

Poniamo

$$\frac{1}{2}\int_0^1\int_0^1 G(\xi, \eta) f(\xi) f(\eta)\, d\xi\, d\eta = \rho$$

e cerchiamo le funzioni

$$\theta(\rho) = F \,|[f(\overset{1}{\underset{0}{x}})]|$$

che soddisfano la (5).

Avremo

$$F' \,|[f(x), \xi]|= \theta'(\rho) \int_0^1 G(\xi, x) f(x)\, dx$$

$$F'' \,|[f(x)\,, \xi, \eta]| = \theta''(\rho) \int_0^1 G(\xi, x) f(x)\, dx \int_0^1 G(\eta, y) f(y)\, dy + \theta'(\rho)\, G(\xi, \eta),$$

e quindi

$$\int_0^1\int_0^1 F'' \,|[f(x), \xi, \eta]|\, K(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta = 2\,\theta''(\rho)\,\rho + n\theta'(\rho)\,.$$

Se dunque la (5) deve essere soddisfatta, sarà

(II) $$\theta(r) = A\rho^{-\frac{n}{2}+1} + B\,,$$

A e B essendo due costanti arbitrarie.

7. Passiamo adesso alla (5'). Potremo sempre supporre $H(x, y)$ simmetrica. Calcoliamo $L(x, y)$ tale da soddisfare il principio di reciprocità (4), cioè

(6) $$H(x, y) + L(x, y) = -\int_0^1 H(x, \xi)\, L(\xi, y)\, d\xi\,,$$

ammesso diverso da zero il determinante.

Si riconosce facilmente che $L(x, y)$ sarà simmetrico, e che H ed L saranno permutabili di 2ª specie.

Poniamo

$$r = \frac{1}{2}\int_0^1 f^2(\xi)\, d\xi + \frac{1}{2}\int_0^1\int_0^1 L(\xi, \eta) f(\xi) f(\eta)\, d\xi\, d\eta$$

(4) Vedi VOLTERRA, *Leçons sur les équations intégrales et intégro-différentielles*, Paris, Gauthier-Villars, 1913, p. 105.

e cerchiamo le funzioni

$$\theta(r) = \mathrm{F}\,|[f(\overset{1}{\underset{0}{x}})]|$$

che soddisfano la (5'). Avremo

$$\text{(7)}\qquad \mathrm{F}'\,|[f(x)\,,\,\xi]| = \theta'(r)\left\{f(\xi) + \int_0^1 \mathrm{L}(\xi\,,x)\,f(x)\,dx\right\},$$

$$\text{(7')}\qquad \mathrm{F}''\,|[f(x)\,,\,\xi\,,\,\eta]| = \theta''(r)\left\{f(\xi) + \int_0^1 \mathrm{L}(\xi\,,x)\,f(x)\,dx\right\}\times$$

$$\times\left\{f(\eta) + \int_0^1 \mathrm{L}(y\,,\eta)\,f(y)\,dy\right\} + \theta'(r)\,\mathrm{L}(\xi\,,\eta)\,.$$

Per conseguenza,

$$\text{(8)}\qquad \int_0^1 \mathrm{F}''\,|[f(x)\,,\,\xi\,,\,\xi]|\,d\xi + \int_0^1\!\!\int_0^1 \mathrm{F}''\,|[f(x)\,,\,\xi\,,\,\eta]|\,\mathrm{H}(\xi\,,\eta)\,d\xi\,d\eta$$

$$= \theta''(r)\left\{\int_0^1 f^2(\xi)\,d\xi + \int_0^1\!\!\int_0^1 \mathrm{M}(\xi\,,\eta)\,f(\xi)\,f(\eta)\,d\xi\,d\eta\right\}$$

$$+\,\theta'(r)\left\{\int_0^1\!\!\int_0^1 \mathrm{L}(\xi\,,\eta)\,\mathrm{H}(\xi\,,\eta)\,d\xi\,d\eta + \int_0^1 \mathrm{L}(\xi\,,\xi)\,d\xi\right\},$$

ove

$$\mathrm{M} = \mathrm{H} + 2\overset{\times\times}{\mathrm{H}}\,\overset{\times\times}{\mathrm{L}} + \overset{\times\times}{\mathrm{H}}\,\overset{\times\times}{\mathrm{L}^2} + \overset{\times\times}{\mathrm{L}^2} + 2\,\mathrm{L}$$

in cui si è fatto uso, come precedentemente nel § 3, della notazione che rappresenta la composizione di 2ª specie [5].

Ma in virtù della (6), che si può scrivere

$$\mathrm{H} + \mathrm{L} = -\overset{\times\times}{\mathrm{H}}\,\overset{\times\times}{\mathrm{L}},$$

abbiamo

$$\overset{\times\times}{\mathrm{H}}\,\overset{\times\times}{\mathrm{L}^2} = -\overset{\times\times}{\mathrm{L}^2} + \mathrm{H} + \mathrm{L}:$$

quindi

$$\mathrm{M} = \mathrm{H} - 2\,\mathrm{H} - 2\,\mathrm{L} - \overset{\times\times}{\mathrm{L}^2} + \mathrm{H} + \mathrm{L} + \overset{\times\times}{\mathrm{L}^2} + 2\,\mathrm{L} = \mathrm{L}\,.$$

Si ha poi,

$$\int_0^1\!\!\int_0^1 \mathrm{L}(\xi\,,\eta)\,\mathrm{H}(\xi\,,\eta)\,d\xi\,d\eta = -\int_0^1 \{\mathrm{L}(\xi\,,\xi) + \mathrm{H}(\xi\,,\xi)\}\,d\xi\,,$$

(5) Vedi VOLTERRA, *Leçons sur les fonctions de lignes*, Paris, Gauthier-Villars, 1913, p. 179.

onde la (8) si scriverà

$$\Omega = \int_0^1 F'' |[f(x), \xi, \xi]| d\xi + \int_0^1\int_0^1 F'' |[f(x), \xi, \eta]| H(\xi, \eta) d\xi d\eta =$$

$$= 2\theta''(r) r - h\theta'(r),$$

ove

$$h = \int_0^1 H(\xi, \xi) d\xi.$$

Affinché la (5′) sia soddisfatta, basterà dunque prendere

$$\text{(III)} \qquad \theta(r) = A r^{\frac{h}{2}+1} + B,$$

A e B essendo due costanti arbitrarie.

Si è così riusciti ad ottenere gli integrali (II) e (III) delle equazioni del 2° ordine lineari alle derivate funzionali di 1ª e di 2ª specie considerate, analoghi a quelli sui quali si applica l'analisi di GREEN.

8. Dalla (7) segue

$$\delta F' |[f(x), \xi]| = \theta'(r) \delta f(\xi) + \int_0^1 F'' |[f(x), \xi, \eta]| \delta f(\eta) d\eta;$$

il punto ξ è quindi eccezionale (6) e $\theta'(r)$ è il coefficiente differenziale di $\delta f(x)$.

Facendo uso di una notazione adottata fino dai miei primi lavori sopra questo soggetto (7) potremo scrivere

$$(F' |[f(x), \xi]|)'_{f(\xi)} = \theta'(r).$$

Avremo dunque

$$\Omega + \int_0^1 (F' |[f(x), \xi]|)'_{f(\xi)} M(\xi) d\xi = 2\theta''(r) r + (m - h)\theta'(r),$$

ove si è posto

$$m = \int_0^1 M(\xi) d\xi.$$

(6) VOLTERRA, *Leçons sur les équation intégrales et intégro-différentielles*, Chap. I, § VII.

(7) *Sopra le funzioni che dipendono da altre funzioni*, Nota II, § 4, 14. «Rend. Acc. Linc.», 18 sett. 1887. [In queste «Opere», volume primo, XVII, p. 306].

Preso dunque

$$\text{(IV)} \qquad F\,|[f(\overset{1}{\underset{0}{x}})]| = \theta(r) = A r^{\frac{k-m}{2}+1} + B$$

con A e B costanti, essa verificherà l'equazione

$$\int_0^1 F''\,|[f(x), \xi, \xi]|\, d\xi + \int_0^1\!\!\int_0^1 F''\,|[f(x), \xi, \eta]|\, H(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta +$$

$$+ \int_0^1 (F'\,|[f(x), \xi]|)'_{f(\xi)}\, M(\xi)\, d\xi = 0\,.$$

III.

EQUAZIONI INTEGRO-DIFFERENZIALI ED EQUAZIONI ALLE DERIVATE FUNZIONALI

« Rend. Acc. Lincei », ser. 5ª, vol. XXIII₁, 1914₁; pp. 551-577.

1. Nel § 3 della mia Nota: *Sulle equazioni alle derivate funzionali* [1], ho messo in luce la relazione fra equazioni integro-differenziali del 1° ordine ed equazioni alle derivate funzionali, limitandomi al caso della linearità per esaminare l'esempio più semplice. Mi permetto ora di estendere i detti risultati.

2. Sia $F\,|[\theta(\overset{1}{\underset{0}{\xi}}), x, z]|$ una funzione che dipende da tutti i valori di $\theta(\xi)$ nell'intervallo $0, 1$ e da due parametri x e z. Se $\theta(\xi)$ dipenderà anche da un parametro α, avremo che F sarà una funzione ordinaria di x, z, α; ed in particolare, se prenderemo $z=\alpha$, F sarà una funzione ordinaria di x, z. Prendiamo dunque $\theta(\xi) = f(\xi, z)$ e consideriamo [2]

$$F\,|[f(\overset{1}{\underset{0}{\xi}}, z), x, z]|$$

e l'equazione

$$\frac{\partial f(x,z)}{\partial z} = F\,|[f(\overset{1}{\underset{0}{\xi}}, z), x, z]|. \tag{I}$$

Per semplicità supponiamo che $F\,|[\theta(\overset{1}{\underset{0}{\xi}}), x, z]|$ possa considerarsi indipendente dalle derivate di $\theta(\xi)$ [3]; allora diremo che la (I) è una *equazione integro-differenziale del 1° ordine per rapporto a z.*

Per giustificare questa denominazione, basta pensare che F, sotto certe condizioni almeno, potrà esprimersi o per mezzo di una serie analoga a quella di TAYLOR [4] o analoga a quelle polinomiali di WEIERSTRASS [5], e quindi, per mezzo di integrazioni multiple applicate alla f.

(1) « Rend. Acc. Linc. », 15 marzo 1914. [In questo volume delle « Opere », II, pp. 5-12].

(2) Cfr. la nota al § 3 della citata Memoria, p. 395.

(3) Considereremo in altri lavori il caso adesso escluso.

(4) VOLTERRA, *Équations intégrales et intégro-différentielles*, p. 24, Paris, Gauthier-Villars, 1913.

(5) Cfr. GATEAUX, *Sur la représentation des fonctionnelles continues*, « Rend. Acc. Linc. », 21 dicembre 1913, p. 646. Le serie analoghe a quelle polinomiali di Weierstrass furono date dapprima dal sig. Fréchet.

Nel caso particolare in cui F è della forma

$$\int_0^1 f(\xi, z)\, \varphi(x, \xi)\, d\xi ,$$

in cui $\varphi(x, \xi)$ è una funzione determinata, si ricade nella equazione integro-differenziale considerata nel § 3 della Nota citata.

3. Supponiamo l'assoluta continuità di F rispetto agli elementi variabili; e supponiamo che, qualunque siano x e z, purché $1 \geq x \geq 0$, $a + l \geq z \geq$ $\geq a - l$, si abbia

$$\left| \mathrm{F} \left| \left[\theta \left(\overset{1}{\underset{0}{\xi}}\right), x, z \right] \right| - \mathrm{F} \left| \theta_1 \left(\overset{1}{\underset{0}{\xi}}\right), x, z \right] \right| \right| < \mathrm{A}\varepsilon ,$$

se $|\theta(\xi) - \theta_1(\xi)| < \varepsilon$ per ξ compreso fra 0 e 1, e $\theta(\xi)$ e $\theta_1(\xi)$ compresi fra $\psi(\xi) + k$ e $\psi(\xi) - k$; ove A denota una certa quantità costante e $\psi(\xi)$ una funzione continua. Allora, applicando il metodo delle approssimazioni successive, l'integrale della equazione precedente si potrà mettere sotto la forma

$$f(x, z) = \psi(x) + \Theta \left| \left[\psi \left(\overset{1}{\underset{0}{\xi}}\right), x, z \right] \right| , \tag{1}$$

in cui Θ si annulla per $z = a$. La detta forma dell'integrale f sarà valida per $1 \geq x \geq 0$, e z compreso in un certo intorno del punto a. È evidente che $\psi(x)$ rappresenta il valore iniziale di $f(x, z)$ per $z = a$.

L'equazione (I) si può anche scrivere

$$f(x, z) = \lambda\psi(x) + \int_a^z \mathrm{F} \left| \left[f(\xi, \zeta), x, \zeta \right] \right| d\zeta , \tag{I'}$$

la quale dovrà coincidere colla (1) se si fa il parametro costante λ eguale ad 1.

Nella ipotesi, che la $\mathrm{F} \left| \left[\theta \left(\overset{1}{\underset{0}{\xi}}\right), x, z \right] \right|$ sia sviluppabile in serie analoga a quella di TAYLOR rispetto a $\theta(\xi)$, ed i nuclei dei varî termini siano funzioni olomorfe di z nell'intorno di $z = a$, si potrà sviluppare $f(x, z)$ in serie di potenze di λ e di $z - a$, seguendo un procedimento analogo a quello che ho impiegato nel § XVI del Cap. III delle mie lezioni sulle equazioni integrali ed integro-differenziali. In tal caso ci si può evidentemente estendere, per rapporto a z, dal campo reale al campo complesso.

Consideriamo z come un parametro costante, e risolviamo l'equazione (1) rispetto a $\psi(x)$ (6). Avremo

$$\psi(x) = f(x, z) + \Theta_1 \left| \left[f\left(\overset{1}{\underset{0}{\xi}}, z\right), x, z \right] \right| .$$

(6) Cfr. VOLTERRA, *Leçons sur les fonctions de lignes*, Paris, Gauthier-Villars, 1913, chap. IV.

Si riconosce facilmente che, se si indica con

$$\Phi \left| \left[\theta \left(\overset{1}{\underset{0}{x}} \right) \right] \right| ,$$

una quantità che dipende arbitrariamente da $\theta(x)$ per x compresa fra 0 e 1 (senza punti eccezionali), e se per $\theta(x)$ si sostituisce

$$\varphi(x) + \Theta_1 \left| \left[\varphi \left(\overset{1}{\underset{0}{\xi}} \right), x, z \right] \right| ,$$

si avrà

$$\Phi \left| \left[\varphi(x) + \Theta_1 \left| \left[\varphi \left(\overset{1}{\underset{0}{\xi}} \right), x, z \right] \right| \right] \right| = \Omega \left| \left[\varphi \left(\overset{1}{\underset{0}{\xi}} \right), z \right] \right| ,$$

la quale soddisfa l'equazione alle derivate funzionali

$$\frac{\partial \Omega}{\partial z} + \int_0^1 \Omega' \left| \left[\varphi \left(\overset{1}{\underset{0}{\xi}} \right), z, x \right] \right| \mathrm{F} \left| \left[\varphi \left(\overset{1}{\underset{0}{\xi}} \right), x, z \right] \right| dx = 0 ,$$

ove

$$\Omega' \left| \left[\varphi \left(\overset{1}{\underset{0}{\xi}} \right), z, x \right] \right|$$

denota la derivata di Ω rispetto a φ fatta nel punto x. Questa proposizione costituisce una facile estensione del teorema dato nella precedente Nota (§ 3).

4. Di speciale interesse sono le equazioni del tipo canonico.

Abbiasi

$$\mathrm{H} \left| \left[f \left(\overset{1}{\underset{0}{\xi}} \right), \varphi \left(\overset{1}{\underset{0}{\xi}} \right), z \right] \right| ,$$

e supponiamo che, nell'ipotesi di z costante, sia

$$\delta \mathrm{H} = \int_0^1 \mathrm{H}'_f \left| \left[f \left(\overset{1}{\underset{0}{\xi}} \right), \varphi \left(\overset{1}{\underset{0}{\xi}} \right), z, x \right] \right| \delta f(x)\, dx + \int_0^1 \mathrm{H}'_\varphi \left| \left[f \left(\overset{1}{\underset{0}{\xi}} \right), \varphi \left(\overset{1}{\underset{0}{\xi}} \right), z, x \right] \right| \delta \varphi(x)\, dx .$$

Le equazioni

$$\text{(II)} \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial q(x,z)}{\partial z} &= \mathrm{H}'_\varphi \left| \left[q \left(\overset{1}{\underset{0}{\xi}}, z \right), p \left(\overset{1}{\underset{0}{\xi}}, z \right), z, x \right] \right| \\ \frac{\partial p(x,z)}{\partial z} &= -\mathrm{H}'_f \left| \left[q \left(\overset{1}{\underset{0}{\xi}}, z \right), p \left(\overset{1}{\underset{0}{\xi}}, z \right), z, x \right] \right| \end{aligned} \right.$$

si diranno di tipo canonico.

Siano le derivate di

$$\text{(2)} \qquad \Phi \left| \left[q \left(\overset{1}{\underset{0}{\xi}} \right), a \left(\overset{1}{\underset{0}{\xi}} \right), z \right] \right| ,$$

fatte rispetto a $q(\xi)$ e $a(\xi)$ nel punto x, rispettivamente

(3) $$\Phi'_q\left|\left[q\binom{1}{\xi}_0, a\binom{1}{\xi}_0, z, x\right]\right| \quad , \quad \Phi'_a\left|\left[q\binom{1}{\xi}_0, a\binom{1}{\xi}_0, z, x\right]\right|.$$

Denotiamole, per semplicità, con

(4) $$\Phi'_q(z, x) \quad , \quad \Phi'_a(z, x).$$

Se Φ non ha punti eccezionali e soddisfa l'equazione alle derivate funzionali

(III) $$\frac{\partial\Phi}{\partial z} + \mathrm{H}\left|\left[q\binom{1}{\xi}_0, \Phi'_q\left(z, \binom{1}{\xi}_0\right), z\right]\right| = 0,$$

gl'integrali delle equazioni (II) si potranno ricavare dalle relazioni

(5) $$\begin{cases} \Phi'_a\left|\left[q\left(\binom{1}{\xi}_0, z\right), a\binom{1}{\xi}_0, z, x\right]\right| = b(x) \\ \Phi'_q\left|\left[q\left(\binom{1}{\xi}_0, z\right), a\binom{1}{\xi}_0, z, x\right]\right| = p(x, z), \end{cases}$$

ove $b(x)$ rappresenta una funzione continua arbitraria, purché si ammetta, inoltre, che, nell'ipotesi di z e x e $a(\xi)$ invariabili, sia

$$\delta\Phi'_a|[q(\xi), a(\xi), z, x]| = \mathrm{A}\delta q(x) + \int_0^1 \Phi''_{aq}|[q(\xi), a(\xi), z, x, y]|\,\delta q(y)\,dy,$$

e l'equazione integrale

$$\mathrm{A}\psi(x) + \int_0^1 \Phi''_{aq}|[q(\xi), a(\xi), z, x, y]|\,\psi(y)\,dy = \theta(x)$$

abbia, almeno entro un certo campo, per la incognita $\psi(x)$ una soluzione unica, determinata e finita [7].

5. Nella ipotesi che H non contenga z, prendiamo Φ indipendente da z, onde sopprimiamo nelle espressioni (2), (3) e (4) la variabile z e scriviamo queste ultime

(4′) $$\Phi'_q(x) \quad , \quad \Phi'_a(x).$$

Supponiamo che, invece della (III), sia soddisfatta la relazione

(IV) $$h + \mathrm{H}\left|\left[q\binom{1}{\xi}_0 \quad , \quad \Phi'_q\binom{1}{\xi}_0\right]\right| = 0,$$

con

$$h = \Omega\left|\left[a\binom{1}{\xi}_0\right]\right| \quad , \quad \delta h = \int_0^1 \Omega'_a\left|\left[a\binom{1}{\xi}_0, x\right]\right|\,\delta a(x)\,dx.$$

(7) VOLTERRA, *Leçons sur les fonctions de lignes*, chap. IV.

Allora, alle (5), potremo sostituire le altre

$$(5') \quad \begin{cases} \Phi'_a \left| \left[q \left(\overset{1}{\underset{0}{\xi}}, z \right), a \left(\overset{1}{\underset{0}{\xi}} \right), x \right] \right| = b(x) + z\, \Omega'_a \left| \left[a \left(\overset{1}{\underset{0}{\xi}} \right), x \right] \right| \\ \Phi'_q \left| \left[q \left(\overset{1}{\underset{0}{\xi}}, z \right), a \left(\overset{1}{\underset{0}{\xi}} \right), x \right] \right| = p(x, z). \end{cases}$$

6. Come esempio mi permetto di svolgere un caso particolare che corrisponde al caso di STÄCKEL della separazione delle variabili (8).

Sia $g(x, y, q(x)) = \gamma(x, y)$ una funzione composta di $q(x)$ nel senso ordinario.

Calcoliamo $\Gamma(x, y)$, tale che il teorema di reciprocità sia soddisfatto (9),

$$\gamma(x, y) + \Gamma(x, y) = -\int_0^1 \gamma(x, \xi)\, \Gamma(\xi, y)\, d\xi,$$

nell'ipotesi del determinante diverso da zero. $\Gamma(x, y)$ dipenderà da tutti i valori di $q(x)$ per x compreso fra 0 e 1, onde potremo scrivere

$$\Gamma(x, y) = \mathrm{G} \left| \left[x, y, q \left(\overset{1}{\underset{0}{\xi}} \right) \right] \right|.$$

Prendiamo

$$\mathrm{A} \left| \left[x, q \left(\overset{1}{\underset{0}{\xi}} \right) \right] \right| = 2\lambda(x) + 2 \int_0^1 \mathrm{G} \left| \left[x, y, q \left(\overset{1}{\underset{0}{\xi}} \right) \right] \right| \lambda(y)\, dy$$

$$\mathrm{U} \left| \left[q \left(\overset{1}{\underset{0}{\xi}} \right) \right] \right| = \frac{1}{2} \int_0^1 \mathrm{A} \left| \left[x, q \left(\overset{1}{\underset{0}{\xi}} \right) \right] \right| \psi(x, q(x))\, dx,$$

ove $\lambda(x)$ è una funzione arbitraria e $\psi(x, q(x))$ pure una funzione arbitraria composta, nel senso ordinario, di $q(x)$.

Formiamo

$$\mathrm{H} \left| \left[q \left(\overset{1}{\underset{0}{\xi}} \right), p \left(\overset{1}{\underset{0}{\xi}} \right) \right] \right| = \frac{1}{2} \int_0^1 \mathrm{A} \left| \left[x, q \left(\overset{1}{\underset{0}{\xi}} \right) \right] \right| p^2(x)\, dx - \mathrm{U} \left| \left[q \left(\overset{1}{\underset{0}{\xi}} \right) \right] \right|.$$

Ciò premesso, calcoliamo

$$\mathrm{F}(x, q) = \int_0^q \sqrt{\psi(x, q) + a(x) + \int_0^1 a(\xi)\, g(x, \xi, q)\, d\xi}\; dq$$

$$\Phi \left| \left[q \left(\overset{1}{\underset{0}{\xi}} \right) a \left(\overset{1}{\underset{0}{\xi}} \right) \right] \right| = \int_0^1 \mathrm{F}(x, q(x))\, dx.$$

(8) Cfr. CHARLIER, *Die Mechanik des Himmels*, tomo I, Leipzig 1902, p. 77 e sg.
(9) VOLTERRA, *Équations intégrales et intégro-différentielles*, p. 105.

Si dimostra che

$$\int_0^1 \mathrm{A}\,|[x\,,q\,(\overset{1}{\underset{0}{\xi}})]|\,\Phi_q'^2\,(x)\,dx = 2\,\mathrm{U}\,|[q\,(\overset{1}{\underset{0}{\xi}})]| + 2\int_0^1 \lambda\,(\xi)\,a\,(\xi)\,d\xi\,,$$

ossia che l'equazione (IV) è soddisfatta prendendo

$$h = \int_0^1 \lambda\,(\xi)\,a\,(\xi)\,d\xi\,.$$

Gli integrali (5′) saranno quindi

$$(5'') \qquad \left\{\begin{aligned} &\int_0^{q\,(x,z)} \frac{dq}{\sqrt{\mathrm{D}\,(x\,,q)}} + \int_0^1 dy \int_0^{q\,(y,z)} \frac{g\,(y\,,x\,,q)\,dq}{\sqrt{\mathrm{D}\,(y\,,q)}} = \lambda\,(x)\,z + b\,(x) \\ &\sqrt{\mathrm{D}\,(x\,,q\,(x\,,z))} = p\,(x\,,z)\,. \end{aligned}\right.$$

7. L'annullarsi della variazione dell'integrale

$$\int_0^{z_0} \left\{ \mathrm{H}\,|[q\,(\overset{1}{\underset{0}{\xi}}\,,z)\,,p\,(\overset{1}{\underset{0}{\xi}}\,,z)\,,z]| - \int_0^1 \frac{\partial q\,(\xi\,,z)}{\partial z}\,p\,(\xi\,,z)\,d\xi \right\} dz\,,$$

facendo variare di infinitamente poco q e p, conduce evidentemente alle equazioni integro–differenziali (II), e quindi alla equazione alle derivate funzionali (III).

8. È interessante di mettere a confronto i tipi diversi di equazioni alle derivate funzionali che si manifestano allorché si parte da equazioni alle derivate parziali [10] o da equazioni integro–differenziali, derivanti, le une e le le altre, da questioni di calcolo delle variazioni.

9. Problemi meccanici che conducano ad equazioni del tipo (II) si presentano, per esempio, allorché si considerano sciami di corpuscoli del tipo di quelli che si presentano nello studio dell'anello di Saturno, che possono sotto un certo aspetto trattarsi come sistemi continui senza che fra gli elementi esistano vincoli esprimibili con equazioni di tipo differenziale.

(10) VOLTERRA, *Leçons sur les fonctions de lignes*, chap. III, § 8.

IV.

LES PROBLÈMES QUI RESSORTENT DU CONCEPT DE FONCTIONS DE LIGNES

« Sitzungsberichte der Berliner Math. Gesellschaft », XIII Jahrgang, 1914; pp. 130-150.

SOMMAIRE.

1.

Introduction. — Fonctions de lignes. — Calcul des Variations. — Dérivée des fonctions de lignes. — Différentielle. — Développement analogue à celui de TAYLOR.

Je dois commencer par exprimer mes sentiments de vive reconnaissance à la Société Mathématique de Berlin et à son Président, M. KORN, pour m'avoir appelé à tenir une conférence générale sur mes recherches mathématiques. Puisque j'ai consacré une partie de mes travaux à l'extension de la théorie des fonctions et à ses applications aux problèmes de la philosophie naturelle, j'ai pensé qu'il pourrait intéresser de prendre pour sujet de ma conférence l'étude des différentes conceptions qui sont attachées à la théorie des fonctions d'un nombre infini et continu de variables, de celles qui en ressortent et de leurs principales applications.

Je ne puis pas cacher mon émotion en parlant de ces théories devant un public si imposant. La qualité de mes auditeurs, leur grande compétence dans les questions de mathématique et de physique, le prix que je donne à leur avis et à leur approbation sont autant de causes de trouble pour moi.

Il me faut ajouter aussi que je comprends toute la gravité de parler ici de ce sujet. Berlin tient une si grande place dans l'histoire du développement de la théorie des fonctions et du calcul des variations que je suis saisi de la difficulté de parler de questions qui se rattachent aux concepts fondamentaux de ces parties de l'analyse. Je ne puis pas oublier, que c'est à Berlin que WEIERSTRASS a dicté ses cours admirables et, en remontant à une époque plus éloignée, que LAGRANGE a conçu pendant son séjour à Berlin le grandiose ensemble de théories fondées sur le calcul des variations qu'il a développé dans sa Mécanique Analytique.

J'ai eu l'occasion, dans l'introduction à mes leçons sur les fonctions de lignes, de parler avec beaucoup de détail de l'évolution d'idées laquelle m'a conduit aux fonctions d'un nombre infini et continu de variables que j'ai appelées *quantités qui dépendent de toutes les valeurs d'une ou de plusieurs fonctions*, et que j'ai aussi désignées – pour employer une locution plus expressive – par le nom de *fonctions de lignes.*

J'ai imaginé d'abord en 1883, lorsque j'ai commencé à donner une forme concrète à mes idées, le concept de fonction qui dépend de toutes les valeurs d'une autre fonction, en la considérant comme la limite d'une fonction de plusieurs variables, lorsque le nombre de ces variables croît indéfiniment d'une manière continue. Une courbe peut être engendrée par la limite d'une ligne polygonale; de même une fonction des ordonnées des sommets de la ligne polygonale devient à la limite une fonction des infinies ordonnées de tous les points de la courbe. C'est ainsi que je suis arrivé, par un passage à la limite, des fonctions d'un nombre fini aux fonctions d'un nombre infini et continu de variables, et l'on comprend par là pour quelle raison j'ai fait usage indifféremment, depuis mes premiers travaux, des dénominations que j'ai rappelées tout à l'heure.

J'étais saisi de la nécessité de considérer les fonctions de lignes, car une grande partie des phénomènes naturels, dès qu'on les envisage d'une manière approfondie, conduit à des quantités qui dépendent d'un nombre infini de variables. Beaucoup de problèmes d'analyse mènent aussi aux mêmes quantités. Leur conception et leur définition se présentaient donc naturellement. J'ai pensé qu'il aurait été utile de les envisager comme des éléments qu'on pourrait étudier par eux-mêmes. Ils devaient aussi constituer une catégorie à part d'entités dont on pourrait obtenir des propriétés communes et qu'on pourrait considérer dans leur ensemble.

Mais une simple conception générale et une définition n'ont pas de vrai intérêt philosophique, si l'on ne donne pas la manière d'appliquer le calcul aux éléments introduits. Ce qui s'imposait à mon esprit du premier abord était donc de créer une analyse propre à embrasser les propriétés des fonctions de lignes et leurs représentations et de constituer un calcul qui donnât le moyen de poser d'une manière exacte les problèmes qui les concernent et d'en obtenir des solutions rigoureuses.

Il y avait un exemple dans le calcul des variations, car ce célèbre calcul étudie les problèmes des maxima et des minima de certaines intégrales définies, et les intégrales définies peuvent justement être envisagées comme des quantités qui dépendent de toutes les valeurs des fonctions qui paraissent sous le signe d'intégration.

Pour en donner un exemple, examinons le problème de la brachystochrone. Le temps de chute d'un grave s'exprime par une intégrale définie qui est une fonction de la ligne que le corps est obligé à parcourir. Résoudre ce problème consiste à envisager cette ligne comme l'inconnue et à la déterminer par la condition que le temps soit un minimum.

Mais le calcul des variations, tel que LAGRANGE l'a conçu, est limité à une classe spéciale de problèmes. C'est ainsi que le calcul des variations ordinaire ne fait pas sortir du champ des équations différentielles, et dans son domaine classique ne rentrent pas d'autres questions.

Si l'on voulait garder à la catégorie d'entités qui se présentait toute sa généralité, l'exemple du calcul des variations n'était pas suffisant. Il était nécessaire d'en sortir complètement et de créer de nouveaux éléments propres à une analyse tout à fait générale.

Il me fallait d'abord étendre aux nouvelles fonctions le concept de dérivation. Puisque une fonction de n variables a n dérivées partielles, une fonction d'un nombre infini de variables doit donner naissance à un nombre infini de dérivées partielles. En effet considérons une ligne L ayant pour équation $y = f(x)$; une ligne polygonale inscrite $1, 2, 3, 4, \cdots, n$. Les n ordonnées des sommets soient $y_1, y_2, \cdots, y_n$.

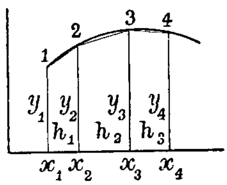


Fig. 1.

On a d'abord une fonction $F(y_1, y_2, \cdots, y_n)$. Si les intervalles $h_1, h_2, \cdots$ décroissent indéfiniment tandis que leur nombre croît indéfiniment, la ligne polygonale tend vers la courbe et la fonction F des n variables tend vers une fonction de la ligne L, c'est-à-dire vers une quantité qui dépend de toutes les valeurs de la fonction $y = f(x)$. Nous la désignerons par

$$\Phi \left| \left[f\overset{b}{\underset{a}{(x)}} \right] \right|$$

ou même par

$$\Phi \left| [\mathrm{L}] \right|$$

ab étant l'intervalle où la fonction $f(x)$ est définie.

Pour calculer les n dérivées partielles de F on fait changer chaque variable y_i séparément et on calcule le rapport de la variation de F et de l'accroissement de y_i. La limite de ce rapport est la dérivée partielle

$$Y_i(y_1, y_2, \cdots, y_n) = \frac{\partial F}{\partial y_i}.$$

De même, la fonction f étant supposée toujours continue, changeons la courbe L dans un domaine h du point ξ d'un côté de la courbe primitive et supposons que les changements des ordonnées soient plus petits que ε. Calculons le rapport de la variation de Φ et de l'aire σ comprise entre la courbe primitive et la courbe déformée. En supposant que le rapport entre la variation de Φ et l'aire σ comprise entre la courbe primitive et la courbe changée ait une limite, en faisant diminuer indépendamment h et ε, on dira que cette limite est la dérivée de Φ par rapport à f dans le point ξ.

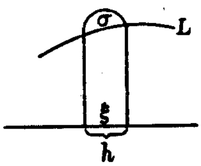


Fig. 2.

Cette limite sera évidemment une quantité qui dépend de la courbe L et du point ξ, c'est pourquoi on pourra la représenter par

$$\Phi' \left| [f(\overset{b}{\underset{a}{x}}), \xi] \right| = Y(\xi),$$

et il faudra regarder Φ' comme une fonction ordinaire de l'abscisse ξ.

On voit se dessiner dès le premier abord une règle qui est au fond la clef d'un grand nombre de résultats nouveaux. Elle s'énonce ainsi: les n indices $1, 2, \cdots, n$ se changent dans toutes les valeurs d'une variable continue; c'est pourquoi les n indices qui paraissent dans $y_1, y_2, \cdots, y_n$ deviennent toutes les valeurs de x dans $f(x)$ et les n indices des dérivées partielles

$$Y_1, Y_2, \cdots, Y_n$$

deviennent toutes les valeurs de la variable ξ.

On pourra donc appeler x la variable qui sert à dénombrer les infinies variables indépendantes et ξ la variable qui sert à dénombrer les infinies dérivées.

Je me suis arrêté avec détail sur ces points fondamentaux quoiqu'ils soient maintenant très connus parce qu'ils sont la base de tous les développements suivants. Cependant pour être complet il faudrait ajouter beaucoup de considérations. Il faudrait remarquer que l'existence de F peut être quelquefois subordonnée à certaines conditions auxquelles f doit satisfaire. Par exemple la définition de F peut impliquer la condition que f soit dérivable jusqu'à un certain ordre et que les valeurs de f et de ses dérivées soient comprises entre certains nombres. Ces conditions limitent le domaine fonctionnel où F est définie. De même pour la continuité de F et pour sa dérivabilité certaines conditions peuvent être nécessaires par rapport aux dérivées de f. Nous n'entrerons pas ici dans cet ordre de considérations.

Dans l'analyse ordinaire on passe des dérivées partielles $Y_1, Y_2, \cdots, Y_n$ à la différentielle totale

$$dF = Y_1 dy_1 + Y_2 dy_2 + \cdots + Y_n dy_n; \tag{1}$$

il faut de même calculer l'élément analogue pour Φ, c'est-à-dire déterminer la variation de Φ, lorsque la courbe L devient L' de manière que les variations de toutes les ordonnées y soient infiniment petites du premier ordre et que l'on néglige dans le calcul de la variation de Φ les quantités infiniment petites d'ordre supérieur.

Pour calculer cette variation on fait la remarque qu'elle peut s'obtenir en superposant une suite de modifications successives de la courbe qui sont représentées dans les figures à côté et en prenant les aires hachées infiniment petites d'ordre supérieur aux autres aires comprises entre les deux courbes.

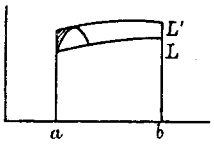


Fig. 3.

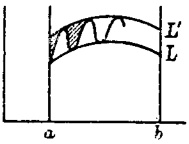


Fig. 4.

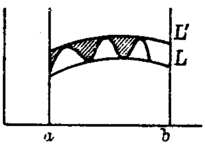


Fig. 5.

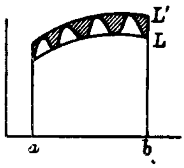


Fig. 6.

Certaines conditions étant satisfaites on trouve que la variation de Φ s'exprime par

$$(1') \qquad \delta\Phi = \int_a^b \Phi' \,|\, [f(\overset{b}{\underset{a}{x}}), \xi] \,|\, \delta f(\xi)\, d\xi\,.$$

La somme qui paraît dans la différentielle (1) est ici remplacée par une intégrale.

Cette formule est bien une formule plus générale que celle que l'on a dans le calcul classique des variations. Mais si l'on a sous les yeux les formules de ce calcul on voit qu'il est très intéressant d'examiner aussi d'autres cas. Ce sont ceux où $\delta\Phi$ est exprimée outre que par l'intégrale précédente par d'autres termes de forme

$$(1'') \qquad \Sigma\, A_i\, \delta f(x_i)$$

ou

$$(1''') \qquad \Sigma\, A_i\, \delta f(x_i) + \Sigma\, B_i\, \delta f'(x_i) + \Sigma\, C_i\, \delta f''(x_i) + \cdots,$$

x_i étant des points compris entre a et b et les suffixes désignant les dérivations. J'ai appelé les points x_i des points exceptionnels.

Il faut maintenant passer aux représentations analytiques des fonctions de lignes.

Celle que j'ai donnée depuis mon premier travail est l'extension de la formule de Taylor. Certaines conditions étant satisfaites, le développement est le suivant:

$$(2) \qquad \Phi \,|\, [f(\overset{b}{\underset{a}{x}})] \,| = A + \int_a^b F(\xi_1) f(\xi_1)\, d\xi_1 +$$

$$+\frac{1}{2!}\int_a^b\int_a^b F(\xi_1,\xi_2)f(\xi_1)f(\xi_2)\,d\xi_1\,d\xi_2+\cdots+$$

$$+\frac{1}{n!}\int_a^b\cdots\int_a^b F(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n)f(\xi_1)\cdots f(\xi_n)\,d\xi_1\cdots d\xi_n+\cdots.$$

Le passage de la formule de TAYLOR pour une fonction de n variables à celle-ci consiste à remplacer les sommes simples, doubles etc. par des intégrales simples, doubles etc.

Une nouvelle règle se montre maintenant, d'après les formules (1′) et (2), c'est-à-dire: Comme les n indices deviennent toutes les valeurs d'une variable, ainsi les sommes se transforment en intégrales. Cette règle et celle que j'ai donnée précédemment sont les deux principales règles qu'il faut toujours appliquer.

Si nous prenons un nombre fini de termes de la série (2), par exemple m termes, nous trouvons une expression P_m qu'on peut regarder comme la limite d'un polynôme ordinaire de degré m.

Je dois maintenant ajouter que la formule (2) ne représente qu'un développement spécial des fonctions de lignes. Il y en a aussi d'autres qui ont été trouvés bien du temps après, parmi lesquels je signalerai ceux de M. HADAMARD pour les fonctions linéaires et ceux de M. FRÉCHET pour des fonctions plus générales. Ces derniers ne sont que l'extension des séries de polynômes de WEIERSTRASS où l'on remplace les polynômes des différents degrés par des expressions P_m. Plus récemment M. GATEAUX a approfondi ces recherches.

Dans les premières Notes que j'ai publiées en 1887 tous les principes du calcul des fonctions de lignes se trouvent déjà posés. Ils étaient suffisants pour pouvoir passer aux applications que je désirais développer peu à peu, tout en laissant à un autre moment le soin d'approfondir les fondements. J'allais au plus pressé. Je me jetais au milieu du sujet. C'est ainsi, par exemple, que le développement (2) m'a suffi au premier abord pour avoir une première expression analytique.

Le champ de recherches qui se présentait était très vaste. Je voyais la possibilité d'employer les nouvelles méthodes dans un certain nombre de questions qui n'étaient pas encore résolues et dont j'entrevoyais des solutions. En même temps une fonte de nouveaux problèmes se présentait. Je ne puis pas passer d'avouer que j'étais presque effrayé du travail à accomplir et de la difficulté de mener de front des questions de nature très diverse. C'est pourquoi l'ordre que j'ai suivi dans mes publications n'a pas été strictement logique d'autant plus que les applications et les méthodes d'analyse se sont toujours entremêlées. Celles-ci ont été exposées à mesure qu'elles étaient nécessaires pour résoudre les problèmes qui se présentaient.

Dans l'exposition que je vais faire je tâcherai de suivre un ordre systématique en séparant les différentes branches de la théorie entre elles et la partie d'analyse pure des applications. J'espère de cette manière pouvoir donner une synthèse des principaux résultats que j'ai obtenus sur le sujet et de quelques questions qui s'y rattachent.

2.

Équations intégrales générales. — Équations linéaires. — Existence des solutions. — Classification.

Le grand problème de l'algèbre est la résolution des équations: Si l'on a les n relations

$$(3) \qquad \left\{ \begin{array}{l} F_1(y_1, y_2, \cdots, y_n) = z_1, \\ F_2(y_1, y_2, \cdots, y_n) = z_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ F_n(y_1, y_2, \cdots, y_n) = z_n, \end{array} \right.$$

c'est-à-dire

$$(3') \qquad F_i(y_1, y_2, \cdots, y_n) = z_i \qquad (i = 1, 2, \cdots, n),$$

il faut calculer les valeurs de $y_1, y_2, \cdots, y_n$ qui satisfont aux relations précédentes, $z_1, z_2, \cdots, z_n$ étant donnés.

Si l'on passe du fini à l'infini et on emploie la règle que j'ai donnée de remplacer les fonctions de n variables par une quantité qui dépend de toutes les valeurs d'une autre fonction $f(\xi)$ et l'on remplace l'indice par toutes les valeurs d'une variable x, l'équation (3') devient

$$(3'') \qquad \Phi \left| \left[f\left(\overset{b}{\underset{a}{\xi}}\right), x \right] \right| = \varphi(x).$$

$f(\xi)$ est une fonction inconnue, $\varphi(x)$ est une fonction donnée.

Il y a maintenant à distinguer plusieurs cas. Le cas qui s'approche du cas algébrique est celui où Φ correspond à un polynôme, c'est-à-dire est une expression du type P_m (voir § précédent), et le cas le plus simple est celui où Φ est de premier degré. S'il n'y a pas de points exceptionnels Φ a la forme

$$\int_a^b f(\xi) F(x, \xi) d\xi.$$

On tombe alors sur les équations intégrales linéaires

$$(4) \qquad \int_a^b f(\xi) F(x, \xi) d\xi = \varphi(x) \qquad \text{(équations de 1}^{\text{ère}}\text{ espèce)};$$

mais s'il y a le point exceptionnel x, alors on a

$$(4') \qquad \int_a^b f(\xi) F(x, \xi) d\xi + A_1 f(x) + A_2 f'(x) + \cdots + A_n f^{(n)}(x) = \varphi(x).$$

Lorsque

$$A_2 = \cdots = A_n = 0 ,$$

et

$$A_1 = 1 ,$$

on trouve

$$(4'') \qquad \int_a^b f(\xi)\, F(x, \xi)\, d\xi + f(x) = \varphi(x) \qquad \text{(Équation de } 2^{\text{ème}} \text{ espèce).}$$

Si

$$A_1 = \lambda(x) ,$$

on trouve une équation qui appartient à la catégorie que M. PICARD a appelée de troisième espèce

$$(4''') \qquad \int_a^b f(\xi)\, F(x, \xi)\, d\xi + \lambda(x) f(x) = \varphi(x) .$$

Finalement lorsque tous les termes existent l'équation est en même temps une équation intégrale et une équation différentielle, et il faut la classer parmi les équations que j'ai appelées intégro–différentielles.

Le cas (4'') où la limite supérieure b est égale à x ne diffère pas essentiellement du cas où b est constant. Pour résoudre ces deux cas il suffit d'employer la méthode du passage du fini à l'infini dans la solution ordinaire des systèmes d'équations algébriques de premier degré obtenue par la règle des déterminants. C'est ce qui m'a conduit à ma solution, dans le cas de la limite supérieure variable, où il faut considérer le seul déterminant qui est numérateur, celui du dénominateur étant égal à l'unité. M. FREDHOLM a considéré plus tard le cas où le dénominateur n'est pas l'unité. Le cas de l'équation (4) où b est constant se distingue de celui où il est variable parce que dans ce dernier cas par une dérivation on peut le ramener à la $2^{\text{ème}}$ espèce.

Le cas général (3'') donne lieu à des classifications tout à fait analogues. Il suffit pour cela de différentier l'équation (3''). On trouvera alors

$$(5) \qquad \delta\Phi \,|\, [f(\overset{b}{\underset{a}{\xi}}), x] \,| = \delta\varphi(x) .$$

Si nous considérons cette équation en prenant pour inconnue δf, elle est linéaire; c'est pourquoi, lorsqu'elle prend une des formes que nous venons de considérer, on peut lui appliquer l'analyse précédente et la classification précédente.

Pour résoudre alors l'équation (3'') on suit le même chemin que l'on tient pour le cas du système (3), c'est–à–dire on part d'une solution correspondante à une certaine fonction donnée $\varphi(x)$ et l'on cherche les solutions $f(x)$ qui correspondent à d'autres formes de $\varphi(x)$ suffisamment rapprochées de la forme primitive. La méthode que l'on emploie pour démontrer l'existence et l'unicité de la solution est celle des approximations successives ou celle du développement en série analogue à celle de TAYLOR. Le déterminant de l'équation linéaire (5) joue le rôle de déterminant fonctionnel.

J'ai développé la méthode du développement de TAYLOR dans une Note publiée en 1906 dans les «Comptes Rendus» et j'ai donné un aperçu de la méthode des approximations successives dans mes leçons à la Sorbonne.

En résumant voici la classification des équations

$$\Phi \,|[f(\overset{b}{\underset{a}{\xi}}), x]| = \varphi(x) \tag{3''}$$

en la réduisant à la classification des équations linéaires

$$\delta\Phi \,|[f(\overset{b}{\underset{a}{\xi}}), x]| = \delta\varphi(x): \tag{5}$$

Équations intégrales en général:
- Équation de 1^re^ espèce, à limites fixes, à limites variables. — Sans points exceptionnels.
- Équation de 2^me^ espèce, à limites fixes, à limites variables. Équation de 3^me^ espèce. Équation de type intégro-différentiel. — Ayant le point exceptionnel x.
- Équation ayant d'autres points exceptionnels.

J'ai examiné particulièrement le cas de l'équation de 2^me^ espèce. M. EVANS a étudié d'une manière spéciale le cas des limites variables. Certains cas de la première espèce peuvent être traités sans de grandes difficultés en partant toujours du cas linéaire. Je dois ajouter que l'on peut envisager d'une manière analogue un système d'équations du type précédent avec n fonctions inconnues et aussi le cas où les fonctions inconnues sont des fonctions de plusieurs variables.

3.

Équations intégro-différentielles ordinaires. — Existence des intégrales. — Différentes sortes d'équations intégro-différentielles. — Fonctions arbitraires et constantes arbitraires.

Nous venons maintenant aux équations intégro-différentielles auxquelles nous sommes menés par les considérations précédentes mêmes.

Nous appellerons en général une équation intégro-différentielle toute relation qui implique des opérations de dérivation et d'intégration définie effectuées sur la fonction ou les fonctions inconnues. On dira qu'elles sont des équations intégro-différentielles ordinaires, si toutes les dérivations sont effectuées par rapport à la même variable indépendante.

Cette définition est très générale et sous un certain point de vue une définition formelle. Peut-on classer les équations intégro-différentielles? Puisqu'on n'a pas peut-être encore une classification complètement satisfaisante de toutes les équations différentielles, nous n'y pensons guère. Mais nous allons envisager de différentes espèces d'équations intégro-différentielles étant toutefois bien sûrs que nous n'épuisons pas toutes celles qui peuvent se présenter.

Suivons pour cela la même voie qui nous a menés aux considérations précédentes. Les équations différentielles ordinaires peuvent toujours se ramener à un système d'équations de premier ordre de la forme

$$(6) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{dy_1(z)}{dz} &= F_1(y_1, y_2, \cdots, y_n, z), \\ \frac{dy_2(z)}{dz} &= F_2(y_1, y_2, \cdots, y_n, z), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{dy_n(z)}{dz} &= F_n(y_1, y_2, \cdots, y_n, z), \end{aligned} \right.$$

c'est-à-dire

$$(6') \qquad \frac{dy_i(z)}{\partial z} = F_i(y_1, y_2, \cdots, y_n, z) \qquad (i = 1, 2, \cdots, n).$$

Si nous employons les règles que nous avons données pour passer du cas fini au cas infini, nous trouverons à la limite l'équation que j'appellerai *équation ordinaire intégro-differentielle du* 1^{er} *ordre*

$$(6'') \qquad \frac{\partial f(x, z)}{\partial z} = \Phi \left| \left[f(\overset{b}{\underset{a}{\xi}}, z), z, x \right] \right|.$$

Il faut s'entendre sur la signification à donner au second membre. Φ désigne une quantité qui dépend de toutes les valeurs d'une fonction $\theta(\xi)$ (pour $b \geqq \xi \geqq a$) et des deux paramètres x, z. Elle s'écrira donc

$$\Phi \left| [\theta(\xi), z, x] \right|.$$

Si maintenant nous remplaçons $\theta(\xi)$ par $f(\xi, z)$, il faut regarder ξ comme variable comprise entre a et b et z comme un paramètre. De cette manière

$$\Phi \left| \left[f(\overset{b}{\underset{a}{\xi}}, z), z, x \right] \right|$$

est une quantité qui dépend de f considéré comme fonction de ξ et est une fonction dans le sens ordinaire des deux paramètres x, z. L'égalité (6″) a donc une signification parfaitement définie.

Si nous supposons que certaines conditions soient satisfaites pour

$$\Phi \left| [\theta(\xi), z, x] \right|$$

alors l'équation intégro-differéntielle (6″) est bien du 1^{er} ordre. Pour son intégration on peut suivre la méthode de PICARD des approximations successives. Admettons la continuité et faisons l'hypothèse que

$$\Phi \left| [\theta(\xi), z, x] \right| - \Phi \left| [\theta_1(\xi), z, x] \right| < A\varepsilon,$$

A étant une constante, lorsque

$$|\theta(\xi) - \theta_1(\xi)| < \varepsilon .$$

On trouve ainsi la solution

$$f(x, z) = \psi(x) + \Psi |[\psi(\overset{b}{\underset{a}{\xi}}), x, z]| , \tag{7}$$

$\psi(x)$ étant une fonction arbitraire et

$$\Psi |[\psi(\overset{b}{\underset{a}{\xi}}), x, z]|$$

s'annullant pour

$$z = z_0 .$$

C'est pourquoi $\psi(x)$ représente la valeur initiale de $f(x, z)$ pour $z = z_0$.

On peut arriver au même résultat en supposant Φ développable dans une série analogue à celle de TAYLOR et l'on peut étendre les considérations même aux valeurs complexes de z.

Le cas où Φ est une fonction linéaire a un intérêt spécial, mais il serait trop long de le développer ici [1].

Au lieu d'une seule équation (6″) on peut en considérer un système, c'est-à-dire

$$\frac{\partial f_i(x, z)}{\partial z} = \Phi_i |[f_1(\overset{b}{\underset{a}{x}}, z), f_2(\overset{b}{\underset{a}{x}}, z), \cdots, z, x]| , \qquad (i = 1, 2, \cdots, n) . \tag{6‴}$$

Les difficultés ne sont pas plus grandes dans ce cas que dans le cas précédent. Il est intéressant à remarquer que par des résolutions d'équations et en ajoutant des inconnues auxiliaires les cas d'équations d'un ordre quelconque peuvent être ramenés au cas précédent.

Il faut encore justifier la dénomination d'équations intégro-différentielles que nous avons donnée aux équations que nous venons de considérer. En supposant que les seconds membres soient développables en séries analogues à celle de TAYLOR ou en séries analogues à celles de WEIERSTRASS, l'on peut penser que les seconds membres soient exprimables par des intégrations faites sur les fonctions inconnues. Sous ce point de vue le nom correspond à la définition primitive.

Par une intégration les équations (6‴) prennent la forme

$$f_i(x, z) = \psi_i(x) + \int_{z_0}^{z} \Phi_i |[f_1(\overset{b}{\underset{a}{x}}, z), f_2(\overset{b}{\underset{a}{x}}, z), \cdots, z, x]| \, dz ,$$

$\psi_i(x)$ étant des fonctions arbitraires, et l'on peut donc les ramener à des équations du type intégral.

(1) Un travail très-intéressant de M. L. SCHLESINGER vient de paraître dans les «Comptes Rendus» des Séances de l'Académie des Sciences de Paris qui est justement consacré à ces équations intégro-différentielles.

Revenons à l'équation (3''). Lorsque le point x est un point exceptionnel et $\delta\Phi$ s'écrit sous la forme d'une intégrale définie à laquelle sont ajoutés des termes de forme

$$A_1 \delta f + A_2 \frac{d}{dx} \delta f + \cdots + A_n \frac{d^n}{dx^n} \delta f,$$

nous avons vu que l'équation (3'') est de type intégro–différentiel. C'est un type nouveau qui ne rentre pas dans celui que nous venons d'envisager, car la variable de dérivation est la même variable x qui remplace l'indice du système d'équations en nombre fini, c'est–à–dire la variable qui dénombre les équations est une variable de dérivation. On voit donc qu'il y a des équations intégro–différentielles ordinaires qui ne rentrent pas dans le type que nous avons considéré.

Envisageons pour simplifier le cas linéaire. C'est celui représenté par l'équation (4'); $A_1, A_2, \cdots, A_n$ étant des fonctions données de x, il est très facile par des quadratures successives et des intégrations par parties de ramener ce cas à celui d'une équation intégrale linéaire dont la résolution ne présente pas en général de difficultés. Les deux types d'équations intégro–différentielles que nous avons envisagés diffèrent essentiellement dans les solutions en cela que les premières ont des solutions avec des fonctions arbitraires, les autres avec des constantes arbitraires.

4.

Équations intégro-différentielles aux dérivées partielles. — Cas des limites variables et des limites constantes. — Cas où la variable qui dénombre les équations est une variable de dérivation.

Les équations intégro–différentielles aux dérivées partielles correspondent aux cas où les dérivations sont exécutées par rapport à plusieurs variables indépendantes.

Nous allons indiquer les principales catégories qui se sont présentées dans les différents problèmes, en particulier ceux de la mécanique et de la physique mathématique.

Je ne considérerai que celles qui sont linéaires. Il faut distinguer d'abord les équations à limites variables et celles à limites constantes.

Envisageons les premières. Parmi celles–ci se présente en première ligne une équation qui se rapproche le plus de l'équation de LAPLACE. C'est l'équation

$$(8) \qquad \frac{\partial^2 u(x,y,z,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y,z,t)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u(x,y,z,t)}{\partial z^2} + \\ + \int_0^t \left\{ \frac{\partial^2 u(x,y,z,\tau)}{\partial x^2} f(t,\tau) + \cdots \right\} d\tau = \theta(x,y,z,t).$$

L'équation à limites constantes correspondante est de la forme

$$(8') \qquad \frac{\partial^2 u(x,y,z,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y,z,t)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u(x,y,z,t)}{\partial z^2} + $$

$$+ \int_0^1 \left\{ \frac{\partial^2 u(x,y,z,\tau)}{\partial x^2} f(t,\tau) + \cdots \right\} d\tau = \theta(x,y,z,t).$$

Ces deux équations typiques sont des équations elliptiques. On peut les transformer facilement en équations hyperboliques en changeant des signes dans les termes qui sont en dehors des intégrales. On peut aussi rapprocher à ces équations d'autres du type parabolique et même des systèmes d'équations. Enfin l'on peut changer le nombre des variables indépendantes. La méthode générale pour traiter toutes ces équations est toujours la même, c'est-à-dire il faut d'abord considérer des équations adjointes, après il faut obtenir une formule de réciprocité entre les solutions des équations données et celles des équations adjointes analogue au théorème de GREEN. Il faut ensuite calculer des solutions fondamentales des équations adjointes. Leur introduction dans la formule précédente mène à de nouvelles formules qui expriment les valeurs des inconnues dans un certain domaine par les valeurs des inconnues mêmes et de leurs dérivées dans la frontière du domaine ou dans une partie de la frontière. L'emploi des fonctions analogues à celles de GREEN sert à éliminer dans les formules des éléments au contour qui ne sont pas caractéristiques.

En un mot le procédé fondamental de GREEN et ceux qui en dérivent plus ou moins directement dans les cas des équations hyperboliques et paraboliques peuvent se transporter du cas fondamental de l'équation de LAPLACE et des autres équations aux dérivées partielles aux différentes équations intégro-différentielles que nous avons envisagées. Il y a un grand nombre de difficultés de détail. Il faut distinguer par exemple pour les équations à limites constantes du type de LAPLACE le cas où le nombre des variables est pair ou impair, mais le principe de la méthode ne change pas. La difficulté plus grande est celle de déterminer la fonction fondamentale, et pour y arriver il faut toujours employer le procédé du passage du fini à l'infini qui même dans ce cas mène à la résolution de la question, comme dans toutes les questions précédentes.

On embrasse de cette manière un vaste domaine d'équations intégro-différentielles. Comme nous verrons tout à l'heure, ces équations sont celles qui ont le plus grand intérêt au point de vue des applications à la physique.

Ce qui caractérise ce domaine d'équations est que la variable t qui se rapporte à l'intégration, ou qui sert à dénombrer les équations, est complètement distinguée des variables de dérivation.

Mais dans une autre classe, qui a beaucoup d'intérêt aussi pour les applications, la même variable paraît aussi comme variable de dérivation. Comme équation typique de cette classe nous écrivons:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + \int_0^t \frac{\partial^2 u(x,\tau)}{\partial x^2} \varphi(t,\tau)\, d\tau .$$

Pour cette équation la méthode de la séparation des variables ou des solutions simples (FOURIER) amène aux solutions les plus utiles dans la physique.

5.

Résumé des différents problèmes envisagés. — Le théorème de la permutabilité de 1ère et de 2me espèce.

On voit donc se dessiner trois grandes classes de problèmes:

1) le problème des équations intégrales dans le sens le plus général,

2) le problème général des équations intégro–différentielles ordinaires,

3) le problème concernant les équations intégro–differentielles aux dérivées partielles de la physique mathématique, c'est–à–dire celles que nous venons d'envisager.

Pour ces dernières on voit aussi que les deux grandes méthodes des solutions fondamentales (GREEN) et des solutions simples (FOURIER) sont applicables.

Ce n'est pas que par ces trois grandes classes de problèmes on ait épuisé tous ceux qui se sont présentés dans l'ensemble de recherches que nous envisageons et qu'on les ait tous classés, mais néanmoins on en a pu commencer une systématisation d'une certaine partie.

Il serait impossible de ne pas parler à ce moment d'une méthode et d'une sorte de calcul qui a eu le plus de succès pour la résolution des problèmes que nous avons tentée et qui a montré des ressources presque inépuisables à ce rapport. J'entends parler de la méthode des fonctions permutables.

Mais si d'un côté elle a servi à la résolution de beaucoup de problèmes, d'un autre côté par son développement elle a mené à s'en poser d'autres et a engendré une nouvelle classe de questions.

Le fondement de la théorie des fonctions permutables repose sur l'opération de composition. Il y a deux sortes de compositions:

$$\int_x^y f(x, \xi) \varphi(\xi, y) \, d\xi \tag{9}$$

se dit une composition de première espèce et se représente par $\overset{*}{f}\overset{*}{\varphi}$,

$$\int_0^1 f(x, \xi) \varphi(\xi, y) \, d\xi \tag{9'}$$

se dit une composition de seconde espèce et se représente par $\overset{**}{f}\overset{**}{\varphi}$.

Or f et φ sont permutables de première espèce, si l'expression (9) ne change pas en la remplaçant par l'autre

$$\int_x^y \varphi(x, \xi) f(\xi, y) \, d\xi$$

et elles sont permutables de seconde espèce si l'expression (9′) est égale à

$$\int_0^1 \varphi(x,\xi) f(\xi,y)\, d\xi .$$

Les opérations de composition sont associatives et, si les fonctions sont permutables, aussi permutatives. Les sommes de fonctions permutables sont permutables. Si l'on opère la composition sur des fonctions égales on obtient des fonctions que l'on représente par

$$\overset{*}{f^n} \text{ ou } \overset{**}{f^n}.$$

On peut les appeler des puissances symboliques. L'on peut constituer une algèbre des fonctions permutables analogue à l'algèbre ordinaire dès que l'on remplace les puissances et les produits par des compositions. Cette algèbre a été développée par M. Evans.

Les deux théorèmes fondamentaux sont les suivants:

Si dans une série de puissances d'une variable, convergente dans un certain domaine, l'on multiplie chaque puissance de la variable par la puissance symbolique correspondante de 1ère espèce d'une fonction finie on trouve toujours une fonction entière.

Si dans une série de puissances d'une variable qui est le rapport de deux fonctions entières on multiplie chaque puissance par la puissance symbolique correspondante de seconde espèce d'une fonction finie on trouve toujours le rapport de deux fonctions entières. C'est sur ces théorèmes, et sur leur généralisation au cas des séries de puissances de plusieurs variables, que l'on peut faire reposer la résolution des équations intégrales linéaires et des équations intégro-différentielles linéaires.

Mais, comme je viens de le dire, de toutes les nouvelles classes d'équations intégrales et d'équations intégro-différentielles ressortent des considérations des fonctions permutables et de la composition. En particulier à toute équation algébrique ou différentielle correspondent deux équations corrélatives dans l'algèbre du calcul des fonctions permutables.

En outre la composition mène à résoudre des équations intégrales du type

$$\overset{*}{f}\overset{*}{\varphi} + \overset{*}{\psi}\overset{*}{f} = \theta ,$$

où f est la fonction inconnue. Il y a des cas où le nombre des solutions est fini, et d'autres où il est infini, et la résolution de ces équations intégrales ne peut se faire qu'à l'aide d'équations intégro-différentielles. Nous n'entrons pas dans ces considérations qui nous feraient sortir de l'ordre systématique des considérations générales que nous voulons examiner. Je les ai envisagées dans mes leçons à l'université de Princeton. J'ajouterai seulement que lorsque $\psi = -\varphi$ et $\theta = 0$ l'équation précédente devient

$$\overset{*}{f}\overset{*}{\varphi} = \overset{*}{\varphi}\overset{*}{f}$$

et elle correspond au problème de trouver toutes les fonctions permutables avec une fonction donnée. J'ai résolu ce problème général sous certaines conditions. M. PÉRÈS l'a traité d'une manière complète dans le cas des fonctions analytiques.

6.

Les équations aux dérivées fonctionnelles du type des équations aux différentielles totales. — Leur liaison avec les équations aux dérivées partielles.

Nous allons passer à une nouvelle classe de problèmes qui ressortent du concept fondamental de fonction de ligne. C'est la classe des équations aux dérivées fonctionnelles. Dès qu'on a défini la dérivée d'une fonction de ligne un problème qui se présente est de calculer cette fonction, la dérivée étant donnée.

Ce problème est le problème-limite de celui-ci:

$$Y_1(y_1, \cdots, y_n) = \frac{\partial F}{\partial y_1}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$Y_n(y_1, \cdots, y_n) = \frac{\partial F}{\partial y_n}$$

étant données, calculer la fonction primitive F. Les fonctions $Y_1, Y_2, \cdots, Y_n$ ne peuvent pas être arbitraires, mais certaines conditions doivent être vérifiées pour que le problème soit possible. Au lieu d'écrire les dérivées séparément on peut écrire la différentielle

$$Y_1\, dy_1 + Y_2\, dy_2 + \cdots + Y_n\, dy_n.$$

Le problème appartient à la classe des équations aux différentielles totales. De même le problème de calculer

$$\Phi \,|\, [f(\overset{b}{\underset{a}{\xi}})] \,|,$$

étant donné

$$\Phi' \,|\, [f(\overset{b}{\underset{a}{\xi}}), x] \,|,$$

est le plus simple des problèmes relatifs aux équations aux dérivées fonctionnelles, et l'on peut dire que la condition pour qu'il soit possible est que

$$\Phi'' \,|\, [f(\overset{b}{\underset{a}{\xi}}), x, y] \,| = \Phi'' \,|\, [f(\overset{b}{\underset{a}{\xi}}), y, x] \,|,$$

c'est-à-dire que la dérivée seconde par rapport à x, y prise dans les points x, y soit symétrique par rapport à ces points.

Cette question est du type des équations aux différentielles totales. En considérant en général

$$\delta\Phi = \int_a^b \Phi' \,|\, [f(\overset{b}{\underset{a}{\xi}}), x] \,|\, \delta f(x)\, dx + \mathrm{H},$$

H étant la somme des termes qui viennent à cause des points exceptionnels, le problème de déterminer Φ appartient aussi à la classe précédente.

On peut évidemment étendre les problèmes des équations aux différentielles totales. Considérons.

$$F = \frac{1}{2} \int_{\sigma} \left\{ \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 \right\} d\sigma ;$$

soit L la frontière du domaine à deux dimensions σ; $f_0(s)$ les valeurs de f à la frontière L, s désignant l'arc de la ligne L. Si f est une fonction harmonique on pourra ragarder F comme une quantité qui dépend de $f_0(s)$ et de la ligne L, c'est-à-dire

$$F \mid [f_0(s), L] \mid .$$

On trouve que

$$F'_L \mid [f_0, L, s] \mid = \frac{1}{2} \left(\frac{df_0}{ds} \right)^2 - \frac{1}{2} F'_{f_0} \mid [f_0, L, s] \mid ,$$

où le premier membre est la dérivée de F par rapport à la ligne L dans le point s, et $F'_{f_0} \mid [f_0, L, s] \mid$ est la dérivée de F par rapport à la fonction f_0 dans le point s.

Cette équation est une équation aux dérivées fonctionnelles du type des équations aux différentielles totales.

7.

Les équations aux dérivées fonctionnelles du type des équations aux dérivées partielles. — 1er exemple. — Équations linéaires aux dérivées fonctionnelles du 1er ordre. — Les équations canoniques et les équations aux dérivées fonctionnelles du 1er ordre. — Équations aux dérivées fonctionnelles du 2me ordre de 1ère et de 2me espèce.

Les équations que nous venons de considérer sont liées aux équations aux dérivées partielles à peu près comme les équations du premier ordre aux dérivées partielles sont liées aux équations ordinaires dans la théorie de JACOBI. Nous citerons à propos des équations aux dérivées fonctionnelles du type des équations aux différentielles totales les beaux travaux de M. PAUL LÉVY.

Mais il y a une autre classe tout à fait nouvelle d'équations aux dérivées fonctionnelles qui correspondent parfaitement aux équations aux dérivées partielles.

Nous allons d'abord en considérer un exemple très simple. Soit

$$\Phi \mid [f(\overset{b}{\underset{a}{\xi}})] \mid$$

telle qu'elle n'ait pas de points exceptionnels. Nous voulons qu'elle vérifie la condition

$$(10) \qquad \int_a^b \Phi' \,|\, [f(\overset{b}{\underset{a}{\xi}}), x] \,|\, f(x)\, dx = 0.$$

A quelle équation aux dérivées partielles pouvons-nous comparer la relation précédente? C'est-à-dire, de quelle équation aux dérivées partielles peut-on l'envisager comme équation-limite?

Écrivons l'équation

$$(10') \qquad \frac{\partial F(y_1, \cdots, y_n)}{\partial y_1} y_1 + \frac{\partial F(y_1, \cdots, y_n)}{\partial y_2} y_2 + \cdots = 0$$

et supposons de faire le passage à la limite que nous avons considéré dès le premier abord. Les variables $y_1, y_2, \cdots, y_n$ doivent être remplacées par toutes les valeurs de $f(x)$ et les derivées partielles

$$\frac{\partial F(y_1, \cdots, y_n)}{\partial y_i}$$

par

$$\Phi' \,|\, [f(\overset{b}{\underset{a}{\xi}}), x] \,|.$$

On doit aussi substituer une intégrale définie à la somme qui paraît dans l'équation (10'). On voit donc que l'équation (10') devient à la limite l'équation (10).

Or l'intégrale générale de l'équation (10') est donnée par une fonction arbitraire du degré d'homogénéité 0, c'est-à-dire, F étant le symbole d'une fonction arbitraire, l'intégrale est

$$F = F\left(\frac{y_1}{\Sigma y_i}, \frac{y_2}{\Sigma y_i}, \cdots\right).$$

De même soit

$$\Psi \,|\, [\theta(\overset{b}{\underset{a}{\xi}})] \,|$$

le symbole d'une fonction arbitraire de ligne n'ayant pas de points exceptionnels. Remplaçons $\theta(\xi)$ par $\dfrac{f(\xi)}{\int_a^b f(\eta)\, d\eta}$, et il est facile de vérifier que toute fonction

$$(11) \qquad \Psi \left| \left[\frac{f(\xi)}{\int_a^b f(\eta)\, d\eta} \right] \right|$$

vérifie l'équation (10) et réciproquement on peut démontrer que toute fonction qui satisfait à l'équation (10) peut se mettre sous la forme (11). Donc ce sont des fonctions arbitraires de lignes qui paraissent dans l'intégration de ces nouvelles équations.

Mais ce qu'il y a de plus intéressant c'est la liaison qui existe entre les équations intégro-différentielles et les équations aux dérivées fonctionnelles. Revenons aux équations (6'') et prenons la solution (7). Résolvons cette équation par rapport à $\psi(x)$, en regardant z comme un paramètre constant. On trouvera

$$\psi(x) = f(x, z) + \Omega \,|\, [f(\overset{b}{\underset{a}{\xi}}, z), x, z] \,|.$$

Remplaçons $f(x, z)$ par une fonction de la seule variable x et écrivons

$$f(x) + \Omega \,|\, [f(\overset{b}{\underset{a}{\xi}}), x, z] \,|.$$

Soit

$$\Theta \,|\, [\theta(\overset{b}{\underset{a}{\xi}})] \,|$$

le symbole d'une fonction de ligne arbitraire dérivable et sans points exceptionnels. Si nous posons

$$\theta(x) = f(x) + \Omega \,|\, [f(\overset{b}{\underset{a}{\xi}}), x, z] \,|$$

et regardons z comme un paramètre, on aura

$$\Theta \,|\, [f(x) + \Omega \,|\, [f(\overset{b}{\underset{a}{\xi}}), x, z] \,|] \,| = \Lambda \,|\, [f(\overset{b}{\underset{a}{\xi}}), z] \,|,$$

qui dépendra de toutes les valeurs de $f(x)$ pour $b \geqq x \geqq a$ et sera une fonction du paramètre z. Elle vérifie l'équation aux dérivées fonctionnelles

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial z} + \int_a^b \Lambda' \,|\, [f(\overset{b}{\underset{a}{\xi}}), x, z] \,|\, \Phi \,|\, [f(\overset{b}{\underset{a}{\xi}}), x, z] \, dx = 0, \tag{12}$$

où

$$\Lambda' \,|\, [f(\overset{b}{\underset{a}{\xi}}), x, z] \,|$$

désigne la dérivée de Λ par rapport à f dans le point x.

Réciproquement pour intégrer l'équation aux dérivées fonctionnelles (12) il suffit d'intégrer l'équation intégro-différentielle (6'').

On peut aller même beaucoup plus en avant et envisager un cas qui a un intérêt tout à fait spécial dans les applications. Revenons aux équations différentielles (6'). Parmi celles-ci on a signalé les équations canoniques. On peut les écrire

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{dq_i}{dz} &= \frac{\partial \mathrm{H}(q_1, \cdots, q_n, p_1, \cdots, p_n, z)}{\partial p_i}, \\ \frac{dp_i}{dz} &= -\frac{\partial \mathrm{H}(q_1, \cdots, q_n, p_1, \cdots, p_n, z)}{\partial q_i}. \end{aligned} \right. \tag{13}$$

Leur importance ressort du fait que Hamilton a mis les équations de la dynamique sous cette forme.

L'intégration des équations canoniques peut s'obtenir depuis JACOBI par l'intégration d'une seule équation aux dérivées partielles. Nous allons montrer que ces résultats peuvent se transporter dans le domaine des équations intégro-différentielles et des équations aux dérivées fonctionnelles. Soit

$$\Phi \left| \left[f(\overset{b}{\underset{a}{\xi}}), \varphi(\overset{b}{\underset{a}{\xi}}), z \right] \right| .$$

Dérivons successivement cette fonction par rapport à f et à φ dans le point x et désignons ces dérivées par

$$\Phi'_f \left| \left[f(\overset{b}{\underset{a}{\xi}}), \varphi(\overset{b}{\underset{a}{\xi}}), x, z \right] \right| ,$$

$$\Phi'_\varphi \left| \left[f(\overset{b}{\underset{a}{\xi}}), \varphi(\overset{b}{\underset{a}{\xi}}), x, z \right] \right| .$$

Supposons qu'il n'y ait pas de points exceptionnels. Cela posé remplaçons

$$f(\xi) \quad \text{et} \quad \varphi(\xi)$$

par

$$q(\xi, z) \quad \text{et} \quad p(\xi, z)$$

en regardant ξ variable entre les limites a, b, et z comme un paramètre; et écrivons les équations intégro-différentielles

$$(13') \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial q(x, z)}{\partial z} = \Phi'_\varphi \left| \left[q(\overset{b}{\underset{a}{\xi}}, z), p(\overset{b}{\underset{a}{\xi}}, z), x, z \right] \right| , \\[2ex] \dfrac{\partial p(y, z)}{\partial z} = -\Phi'_f \left| \left[q(\overset{b}{\underset{a}{\xi}}, z), p(\overset{b}{\underset{a}{\xi}}, z), x, z \right] \right| . \end{cases}$$

Elles ont la forme canonique. Le théorème général que l'on peut donner est que leur intégration ressort de l'intégration d'une équation aux dérivées fonctionnelles. Soit en effet

$$\mathrm{V} \left| \left[f(\overset{b}{\underset{a}{\xi}}), \alpha(\overset{b}{\underset{a}{\xi}}), z \right] \right|$$

et formons, en faisant l'hypothèse qu'il n'y ait pas de points exceptionnels,

$$\mathrm{V}'_f \left| \left[f(\overset{b}{\underset{a}{\xi}}), \alpha(\overset{b}{\underset{a}{\xi}}), x, z \right] \right| ,$$

x étant le point où l'on a dérivé V par rapport à la fonction f. Écrivons pour simplifier cette dérivée

$$\mathrm{V}'_f(x, z).$$

L'équation aux dérivées fonctionnelles est la suivante

$$(14) \qquad \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial z} + \Phi \left| \left[f(\overset{b}{\underset{a}{\xi}}), \mathrm{V}'_f(\overset{b}{\underset{a}{\xi}}, z), z \right] \right| = 0 .$$

Les intégrales des équations canoniques se déduisent très facilement de V par des opérations de dérivation, et l'on a

$$V'_f \,|\, [q(\overset{b}{\underset{a}{\xi}}, z), \alpha(\overset{b}{\underset{a}{\xi}}), x, z] \,| = p(x, z)$$

$$V'_\alpha \,|\, [q(\overset{b}{\underset{a}{\xi}}, z), \alpha(\overset{b}{\underset{a}{\xi}}), x, z] \,| = \beta(x),$$

$\beta(x)$ étant une fonction arbitraire. Afin de s'assurer de cette déduction il suffit d'ajouter une condition à laquelle doit satisfaire la variation de V'_a. Pour simplifier je ne l'énonce pas d'une manière explicite.

Le dernier résultat que j'ai obtenu, et que j'annoncerai seulement, est la détermination de tous les systèmes (13′) tels que V peut s'obtenir par l'opération de séparation des valeurs de f et par suite par des quadratures en supposant que Φ soit indépendant de z.

Avant de laisser ce sujet je désire remarquer que j'ai examiné aussi des équations aux dérivées fonctionnelles du second ordre. Il y a un intérêt spécial à considérer les équations suivantes

$$(15) \qquad \int_a^b\!\!\int_a^b F'' \,|\, [f(\overset{b}{\underset{a}{\xi}}), x, y] \,|\, K(x, y)\, dx\, dy = 0$$

$$(15') \qquad \int_a^b\!\!\int_a^b F'' \,|\, [f(\overset{b}{\underset{a}{\xi}}), x, y] \,|\, H(x, y)\, dx\, dy + \int_a^b F'' \,|\, [f(\overset{b}{\underset{a}{\xi}}), x, x] \,|\, dx = 0$$

ainsi qu'une troisième équation où l'on tient compte des points exceptionnels de F.

Elles peuvent être envisagées comme les équations typiques correspondantes aux équations aux dérivées partielles du second ordre à coefficients constants, c'est pourquoi on peut les appeler équations linéaires aux dérivées fonctionnelles du second ordre de 1re ou de 2me espèce.

Il n'est pas difficile d'en calculer des intégrales particulières qui correspondent aux intégrales fondamentales.

8.

Applications. — Fonctions analytiques de plusieurs variables. — Relations avec d'autres théories analytiques et géométriques. — Mécanique de l'hérédité. — Équations canoniques et mécanique des essaims.

Nous allons terminer par un très court aperçu des applications des différents types des théories développées et des points de rattache avec d'autres théories.

Il me faut mentionner d'abord une application des fonctions de lignes à la théorie des fonctions analytiques de plusieurs variables.

Dès qu'on applique l'intégration aux fonctions de plusieurs variables les domaines d'intégration sont limités dans le cas le plus simple par des lignes et en général par des surfaces ou des hyperespaces. Or les résultats des intégrations ne dépendent que des frontières des domaines d'intégration, c'est pourquoi l'intégration des fonctions de plusieurs variables mène aux fonctions de lignes ou en général à des fonctions de surfaces et d'hyperespaces.

C'est de cette manière que l'on peut développer certains chapitres relatifs aux fonctions de plusieurs variables en employant le théorème de CAUCHY généralisé et en se rattachant à la connexion des espaces. J'ai donné un aperçu de ces questions dans quelques travaux anciens que j'ai résumés dans une de mes leçons de Stockholm. Leur exposition detaillée forme le sujet de quelques conférences qui vont être publiées par le Rice Institute. Ces questions se relient aussi à une théorie des fonctions conjuguées.

Les belles et importantes recherches de M. HILBERT qui ont donné lieu à un si grand nombre d'applications ont des rapports étroits avec celles se rapportant au passage du fini à l'infini dont nous avons traité dès le commencement. En effet si nous examinons le développement analogue à celui de TAYLOR, nous avons déjà vu que chaque terme est comparable à un polynôme homogène d'un degré déterminé.

Examinons le terme de second degré. Un problème fondamental était de transporter la théorie algébrique des formes quadratiques au cas des formes-limites ainsi formées. La résolution de cette question et les applications aux problèmes des développements en séries et à plusieurs questions de physique mathématique a été l'œuvre de M. HILBERT et de son école.

L'application des équations intégrales aux équations aux dérivées partielles de type hyperbolique et parabolique et aux problèmes de géométrie qui s'y rapportent a montré aussi la portée des procédés qui ressortent des questions que nous avons traitées.

Je passerai maintenant aux problèmes de mécanique et de physique. Je me permettrai de dire quelques mots regardant la mécanique qui a reçu le nom de mécanique héréditaire. Je m'en suis occupé d'une manière très détaillée dans les leçons que j'ai professées à la Sorbonne. Dans les problèmes correspondants on tient compte de tous les états passés pour déterminer les états actuels d'un système, en pensant que chaque action qui s'est exercée a laissé un souvenir qui ne peut pas être négligé, mais qui va peu à peu s'effacer. La discussion philosophique sur l'existence de vraies actions héréditaires se présente avec beaucoup d'intérêt. Mais quel que soit le résultat de cette discussion, il existe une nécessité pratique d'envisager les questions de l'élasticité, du magnétisme et de l'électricité en tenant compte des actions héréditaires. Dans une foule de cas qui se présentent bien souvent on ne pourrait pas négliger l'hérédité sans tomber dans de grosses inexactitudes.

Or on voit dès le premier abord que si la valeur d'une certaine quantité, par exemple une déformation, dépend de toutes les valeurs prises par une autre quantité, par exemple la force exercée depuis un certain instant jusqu'à l'instant actuel, on tombe nécessairement sur une quantité qui est une fonction de ligne. C'est pourquoi l'analyse de ces fonctions est la seule que l'on peut appliquer pour résoudre les différents problèmes qui se présentent à ce sujet.

Les équations intégro-différentielles aux dérivées partielles que nous avons considérées précédemment, correspondent justement à ces problèmes, et de cette manière si l'on suppose dans une première approximation que l'hérédité soit linéaire, c'est-à-dire qu'on puisse appliquer le principe de la superposition des effets dus à des différentes causes, on peut transporter l'analyse des problèmes non héréditaires dans le domaine des problèmes héréditaires.

Une circonstance favorable se présente. On peut établir un principe qui est valable pour toutes les actions héréditaires linéaires et non linéaires: c'est celui que j'ai appelé le principe du cycle fermé et qui s'énonce dans les termes suivants: les lois héréditaires ne changent pas avec le temps, si toutes les actions périodiques produisent des effets périodiques. La proposition réciproque est aussi vraie. Puisqu'en nature les phénomènes héréditaires se présentent de manière que les causes périodiques mènent à des effets périodiques, on a une énorme simplification dans tous les calculs, car les noyaux qui paraissent en conséquence du principe du cycle fermé sont des fonctions permutables. L'analyse et l'algèbre de ces fonctions étant appliquées, les solutions deviennent très faciles, et on peut les employer aisément dans la pratique.

Laissons cette application et parlons d'un autre sujet. Nous avons examiné les relations qui existent entre les équations aux dérivées partielles et les équations aux dérivées fonctionnelles du type des équations aux différentielles totales. Cette théorie ouvre aux équations différentielles de la physique mathématique un nouveau domaine. On peut en effet appliquer à ces équations les théorèmes fondamentaux qu'on appliquait jusqu'ici aux équations ordinaires de la mécanique.

Mais sous ce rapport l'extension plus récente des équations canoniques aux systèmes continus et l'extension de la théorie de JACOBI a, à mon avis, un intérêt plus grand. En effet rapportons-nous pour un instant à des systèmes constitués de particules entre lesquelles il n'y a aucune liaison. Nous en avons des exemples dans la constitution de l'anneau de Saturne et d'autres essaims célestes. On peut regarder approximativement ces systèmes comme s'ils étaient continus, et alors les équations du mouvement sont des équations intégro-différentielles canoniques du type que nous avons considéré. C'est pourquoi à ces systèmes est applicable l'analyse des équations aux dérivées fonctionnelles que nous avons examinée auparavant.

On voit donc se dessiner dès à présent deux séries d'applications à la philosophie naturelle des théories dont nous avons donné un aperçu.

D'un côté si l'on passe de la considération des actions actuelles aux actions héréditaires il faut par rapport au temps faire un passage du fini à l'infini qui mène aux équations intégro-différentielles de l'hérédité. D'un autre côté si l'on passe aux systèmes continus par rapport à l'espace on arrive aux équations intégro-différentielles ou aux équations aux dérivées fonctionnelles des différents types que nous avons envisagés.

Soit dans l'une, soit dans l'autre de ces deux branches les concepts qui forment les bases des différentes considérations et des différents résultats sont toujours ceux qui se rapportent à la définition des fonctions de lignes, de leurs dérivées et des opérations que l'on peut faire par ces éléments.

V.

THE THEORY OF PERMUTABLE FUNCTIONS

Lectures Delivered at Princeton University, October 1912
(Louis Clark Vanukem Foundation).
Princeton University Press, 1915.

LECTURE I.

1. We shall begin with quite elementary and general notions.
First, let us recall the properties of a sum

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_1^n {}_i\, a_i .$$

This operation is both associative and commutative, that is,

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

and

$$a + b = b + a .$$

Now we can pass from a sum to an integral by a well-known limiting process. For the sake of simplicity, we shall make use of the definition of RIEMANN: Given a function $f(x)$ which is defined over an interval ab, we subdivide the interval ab into n parts $h_1, h_2, h_3, h_4, \cdots, h_n$. Corresponding to every interval h_i we then take some value f_i of $f(x)$ lying between the upper and lower limits of $f(x)$ on h_i, and we form the sum

$$\sum_1^n {}_i\, f_i\, h_i .$$

Now suppose we allow $h_1, h_2, h_3, \cdots, h_n$ to become indefinitely small. Then, if a unique limit is approached by the sum regardless of the way in which the subdivision of ab is made, we have

$$\lim \sum_1^n {}_i\, f_i\, h_i = \int_a^b f(x)\, dx .$$

Necessary and sufficient conditions for the existence of this limit are well known. In particular, if the function $f(x)$ is continuous over the interval ab or has at most a finite number of discontinuities, the limit and hence also the integral exists.

2. Now let us form the product

$$a \cdot b \cdot c \cdots.$$

This operation is associative and commutative, that is to say,

$$(ab)\,c = a\,(bc)$$

and

$$ab = ba.$$

It is not worth our while to consider the operation which could be obtained from a product by a limiting process such as the one employed in defining an integral. We should be led to logarithmic integration.

3. However, let us consider a limiting process which leads us to something more than these elementary operations.

Let us choose a set of numbers m_{is}, where $i, s = 1, 2, \cdots, g$, which may be written in an array

$$\begin{matrix} m_{11} & m_{12}, & \cdots, & m_{1g} \\ m_{21} & m_{22}, & \cdots, & m_{2g} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ m_{g1} & m_{g2}, & \cdots, & m_{gg} \end{matrix}$$

and numbers n_{is}, where $i, s = 1, 2, \cdots, g$, that is,

$$\begin{matrix} n_{11} & n_{12}, & \cdots, & n_{1g} \\ n_{21} & n_{22}, & \cdots, & n_{2g} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n_{g1} & n_{g2}, & \cdots, & n_{gg}. \end{matrix}$$

We then consider the operation

$$(1) \qquad \sum_{1}^{g}{}_{h}\, m_{ih}\, n_{hr}$$

which we shall call *composition of the second type*. This operation is associative, for if we also introduce a set of numbers p_{is}, where $i, s = 1, 2, \cdots, g$, and write the sum

$$\sum_{1}^{g}{}_{h} \sum_{1}^{g}{}_{k}\, m_{ih}\, n_{hk}\, p_{ks}$$

the expression which we thus obtain is equivalent to either of the forms

$$\sum_{1}^{g}{}_{k} \left(\sum_{1}^{g}{}_{h}\, m_{ih}\, n_{hk} \right) p_{ks}$$

$$\sum_{1}^{g}{}_{h}\, m_{ih} \left(\sum_{1}^{g}{}_{k}\, n_{hk}\, p_{ks} \right),$$

which proves that the associative law is satisfied.

Making use of the notation

$$\sum_{1}^{g}{}_h\, m_{ih}\, n_{hr} = (m\,,\,n)_{ir}$$

we shall have

$$((m\,,\,n)\,p)_{is} = (m\,(n\,,\,p))_{is}$$

which may be written without the parentheses, thus,

$$(m\,,\,n\,,\,p)_{is}.$$

The commutative law will in general not be satisfied. When it is, the quantities under consideration are called permutable, and we have

$$(m\,,\,n)_{ir} = (n\,,\,m)_{ir}.$$

We can at once give an example involving permutable quantities. All that is necessary is to consider

$$(m\,,\,m)_{ir},\ \text{which may be written}\ (m^2)_{ir},$$

$$(m\,,\,m\,,\,m)_{ir},\ \text{which may be written}\ (m^3)_{ir},$$

and so on. And it is clear that

$$(m^h\,,\,m^k)_{ir} = (m^k\,,\,m^h)_{ir},$$

since the associative law is satisfied.

4. We shall consider also another operation similar to the last, namely

$$\sum_{i+1}^{s-1}{}_h\, m_{ih}\, n_{hs} \tag{2}$$

which will be called *composition of the first type*. The sum (1) previously considered reduces to this one if we suppose that the numbers are zero unless the second subscript is greater than the first. In other words, we have in this case the array

$$\begin{array}{llll}
0 & m_{12}\, m_{13}\,, \cdots, m_{1g} & & \\
0 & 0 \quad m_{23}\,, \cdots, m_{2g} & & \\
\cdots & \cdots & & \\
0 & 0 \quad 0 \quad , \cdots, m_{g-1,g} & & \\
0 & 0 \quad 0 \quad , \cdots, 0. & &
\end{array}$$

Let us represent the sum (2) by

$$[m\,,\,n]_{is}.$$

This expression vanishes if s is less than or equal to $i + 1$. Moreover, if we write

$$[[m\,,\,n]\,p]_{is}$$

we shall have

$$[[m\,,\,n]\,p]_{is} = [m\,[n\,,\,p]]_{is} = [m\,,\,n\,,\,p]_{is}\,,$$

which vanishes if s is less than or equal to $i + 2$, and so on.

In general, it is not true that

$$[m\,,\,n]_{is} = [n\,,\,m]_{is}\,,$$

but, when this condition is satisfied, the two quantities are called permutable. To distinguish this sort of permutability from that which we defined in section 3, we shall say that the new and the old are of types one and two respectively. In other words, if

$$\sum_{1}^{g}{}_{h}\, m_{ih}\, n_{hg} = \sum_{1}^{g}{}_{h}\, n_{ih}\, m_{hg} \tag{3}$$

we have permutability of the second type, whereas if

$$\sum_{i+1}^{s-1}{}_{h}\, m_{ih}\, n_{hs} = \sum_{i+1}^{s-1}{}_{h}\, n_{ih}\, m_{hs}$$

we have permutability of the first type.

Clearly, if we put

$$[m^h\,,\,m^k]_{is} = [m^k\,,\,m^h]_{is}\,,$$

we at once obtain an example of permutability of the first type like the one mentioned in the last section. Nevertheless, we shall give another example which is of interest. Let us suppose that $n_{ih} = 1$. Then the condition for permutability becomes

$$\sum_{i+1}^{s-1}{}_{h}\, m_{ih} = \sum_{i+1}^{s-1}{}_{h}\, m_{hs}\,.$$

Putting $s = i + 2$, we have

$$m_{i,\,i+1} = m_{i+1\,,\,i+2}\,,$$

and putting $s = i + 3$, we have

$$m_{i,\,i+1} + m_{i,\,i+2} = m_{i+1,\,i+3} + m_{i+2,\,i+3}\,,$$

whence

$$m_{i,\,i+2} = m_{i+1,\,i+3}$$

and so on. Owing to the above, we have

$$m_{r,\,r+g} = m_{1,\,1+g}$$

for all values of r and g. From this it follows that the matrix of the m's is of the following type:

$$\begin{array}{llll}
0 & a_1 & a_2 & a_3\,,\cdots,\, a_{g-1} \\
0 & 0 & a_1 & a_2\,,\cdots,\, a_{g-2} \\
0 & 0 & 0 & a_1\,,\cdots,\, a_{g-3} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots\cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots\cdots \\
0 & 0 & 0 & 0\,,\cdots,\, a_1 \\
0 & 0 & 0 & 0\,,\cdots,\, 0.
\end{array}$$

The law for this matrix may be expressed by

$$m_{is} = m_{s-i},$$

which puts into evidence the fact that the value of m_{is} depends upon the difference between the two subscripts s and i.

5. Now, what do we find when we pass to the limit by a process analogous to the one employed in the integral calculus in going from a sum to an integral? We there passed from a set of quantities $f_1, f_2, f_3, \cdots, f_n$ with single subscripts to a function $f(x)$ of one independent variable x, the variable taking the place of the subscripts. Here, we have instead a set of quantities m_{is} with double subscripts; hence, we must replace them by a function of two variables

$$f(x, y),$$

where the two variables take the place of the double subscripts. Moreover, we also have another set of quantities n_{is} which must be replaced by a different function of two variables $\varphi(x, y)$. Finally, $\Sigma_h m_{ih} n_{hs}$ must be replaced by

$$\int f(x, \xi) \varphi(\xi, y) \, d\xi.$$

We thus obtain two operations:

Composition of the first type:

$$\int_x^y f(x, \xi) \varphi(\xi, y) \, d\xi;$$

Composition of the second type:

$$\int_a^b f(x, \xi) \varphi(\xi, y) \, d\xi.$$

The condition for permutability of the first type is

$$\int_x^y f(x, \xi) \varphi(\xi, y) \, d\xi = \int_x^y \varphi(x, \xi) f(\xi, y) \, d\xi;$$

for permutability of the second type,

$$\int_a^b f(x, \xi) \varphi(\xi, y) \, d\xi = \int_a^b \varphi(x, \xi) f(\xi, y) \, d\xi.$$

The associative property is always satisfied.

6. Let us begin by examining permutability of the first type. The most important facts are here summarized:

1. All of the functions which can be obtained by the composition of permutable functions are permutable with one another and also with the original functions.

2. All of the functions which can be obtained by the addition or the subtraction of permutable functions are permutable with one another and with the original functions.

Now, let us see how the following problem may be solved: To determine all the functions which are permutable with unity.

We can readily solve this problem if we recall a question which has already been answered. For before passing to the limit, we saw that if the functions m_{is} were permutable with unity, the condition

$$m_{is} = m_{s-i}$$

was satisfied. Now since, in the limit, the subscripts are replaced by the variables x and y, we are led to infer that

$$f(x, y) = f(y - x).$$

This we can prove immediately. For if

$$\int_x^y f(x, \xi)\, d\xi = \int_x^y f(\xi, y)\, d\xi = \varphi(x, y),$$

it must follow that

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} = f(x, y).$$

Hence φ and f are of the forms $\varphi(y-x)$ and $f(y-x)$ respectively.

Moreover, all of the functions of the type $f(y-x)$ are permutable with one another; for

$$\int_x^y f(y-\xi)\, \varphi(\xi - x)\, d\xi = \int_x^y \varphi(y-\xi) f(\xi - x)\, d\xi$$

as can be verified at once. The functions of type $f(y-x)$ form a group of permutable functions which is of especial interest. We have called it the *group of closed cycle* [1]. However, we shall not go into an examination of it here.

7. We have used several different notations representing the operation of composition. The simplest scheme, where no confusion with multiplication is liable to arise, is merely to write

$$f\varphi \quad \text{or} \quad f\varphi(x, y)$$

to represent the resultant of the composition of two function f and φ. But in a case where confusion might arise, we may place a small star over the letters, thus

$$\overset{*}{f}\,\overset{*}{\varphi}.$$

(1) *Leçons sur les équations intégrales et intégro-différentielles*. Paris, Gauthier-Villars, 1913, p. 150.

We may also put the letters in square brackets

$$[f, \varphi],$$

just as in the above we wrote $[m, n]_{hk}$ to represent the composition of the quantities m_{ih} and n_{ik}.

To indicate the composition of f with itself, the composition of the resultant thus obtained with f, and so on, we shall write

$$\overset{*}{f}{}^2, \overset{*}{f}{}^3, \dots$$

respectively and, if no confusion with multiplication is liable to arise, we may even omit the small stars and write

$$f^2, f^3, \dots .$$

8. The notation in certain cases demands particular examination. Thus, to indicate the product of a constant a by f, we write af; and if b is also a constant and φ a function which is permutable with f, then $b\varphi$ is permutable with af and the composition of the two gives us

$$a\, b \overset{*}{f} \overset{*}{\varphi}.$$

Moreover, if we have two polynomials made up of permutable functions with constant coefficients, these polynomials will also be permutable with one another, and to effect their composition all that is necessary is to apply the same rule which is used when polynomials are multiplied together.

But if a and b are constants, then $a + f$ and $b + \varphi$ will not in general be permutable with one another. Nevertheless, we shall extend the definition so as to have in this case

$$(a + \overset{*}{f})(b + \overset{*}{\varphi}) = ab + a\varphi + bf + \overset{*}{f} \overset{*}{\varphi}.$$

9. Before going further, let us consider what takes place in the case of composition of the second type.

All that we have said above concerning permutability of the first type can be established for permutability of the second type barring the remarks on permutability with unity. With this exception, all of the properties just mentioned may be extended to this case at once.

10. Let us pass in review some of the most interesting properties which can be derived from the operation of composition. We shall return once more to the finite case and consider the operation of composition for the numbers m_{is}. We saw above that if we composed the m's with the n's, the resultant thus obtained with the p's and so on, then after $s - i$ compositions, the resultant would be zero. In a like manner, all of the symbolic powers of m_{is} beginning with $[m^{s-i+1}]_{is}$ have a value zero.

Having seen this, let us consider any analytic function

$$\sum_0^\infty{}_n A_n z^n$$

which converges within a certain circle, and let us write

$$\sum_0^\infty{}_n A_n [m^n]_{is} z^n .$$

This new expression is evidently an integral rational function of z, that is, a polynomial.

Moreover, this result may be generalized. Consider the analytic function

$$\sum_0^\infty{}_{n_1} \sum_0^\infty{}_{n_2} \cdots \sum_0^\infty{}_{n_e} z_1^{n_1} z_2^{n_2} \ldots z_e^{n_e} A_{n_1, n_2, \ldots, n_e}$$

of more than one variable, and write

$$\sum_0^\infty{}_{n_1} \sum_0^\infty{}_{n_2} \cdots \sum_0^\infty{}_{n_e} A_{n_1, n_2, \ldots, n_e} [m^{n_1}, p^{n_2}, \ldots, r^{n_e}] z_1^{n_1} z_2^{n_2} \ldots z_e^{n_e} .$$

We again obtain a polynomial.

11. Now, what does the above theorem become when we pass by a limiting process to the composition of functions? This we proceed to investigate.

Consider

$$\sum_0^\infty{}_n A_n \overset{*}{f}{}^n (x, y) z^n .$$

We shall prove that *if $f(x, y)$ is finite, this expression is always an entire function of z, whatever may be the absolute value of $f(x, y)$.*

To prove this theorem, we notice that

$$|A_n| < \frac{M}{R^n}$$

where M is some finite quantity and where R is less than the radius of convergence of the series. Moreover, let μ be a quantity which is larger than the absolute value of f. Then we shall have

$$|f(x, y)| < \mu , \quad |\overset{*}{f}{}^2 (x, y)| < \mu^2 \int_x^y d\xi = \mu^2 (y - x) ,$$

$$|\overset{*}{f}{}^3 (x, y)| < \mu^3 \int_x^y (y - \xi)\, d\xi = \mu^3 \int_0^{y-x} u\,du = \frac{\mu^3 (y - x)^2}{2!} ,$$

$$|\overset{*}{f}{}^4 (x, y)| < \frac{\mu^4 (y - x)^3}{3!} , \ldots$$

and so on, whence

$$| A_n \overset{*}{f}{}^n (x , y) z^n | < \frac{\mu^n (y - x)^{n-1}}{(n-1)!} \frac{M}{R^n} | z^n |,$$

which proves that the series is convergent for all values of z and is thus an entire function of z.

This theorem may also be generalized. Let us consider the series

$$\sum_0^\infty{}_{i_1} \cdots \sum_0^\infty{}_{i_e} A_{i_1 \ldots i_e} z_1^{i_1} \cdots z_e^{i_e}$$

which represents the expansion of a function $F(z_1, z_2, z_3, \cdots, z_e)$ about a point, and which converges if the absolute values of $z_1, z_2, z_3, \cdots, z_e$ do not exceed certain limits. Then the series

$$F = \sum_0^\infty{}_{i_1} \cdots \sum_0^\infty{}_{i_e} A_{i_1 \ldots i_e} \overset{*}{f}{}_1^{i_1} \overset{*}{f}{}_2^{i_2} \cdots \overset{*}{f}{}_e^{i_e} z_1^{i_1} \cdots z_e^{i_e}$$

is always an entire function of $z_1, z_2, z_3, \cdots, z_n$. The proof is made as in the previous case. Thus, if $f_1, f_2, f_3, \cdots, f_e$ are each less than μ in absolute value, then

$$| \overset{*}{f}{}_1^{i_1} \cdots \overset{*}{f}{}_e^{i_e} | < \frac{\mu^{i_1 + \cdots + i_e} (y - x)^{i_1 + \cdots + i_e - 1}}{(i_1 + i_2 + \cdots + i_e - 1)!}$$

and hence the theorem may be verified immediately. We may also demonstrate another property besides the one just shown. Indeed, we have up to the present regarded the function $F(z_1, \cdots, z_e, | x, y)$ as a function of $z_1, z_2, z_3, z_4, \cdots, z_e$, but it is also a function of x and y. Regarded as a function of these two variables, the function is permutable with the functions $f_1, \cdots, f_e$. This may be seen at once; for, owing to the uniform convergence of the series, the operation of composition may be performed term by term, and since each term of the series is permutable with $f_1, f_2, f_3, \cdots, f_e$, so also must be the sum.

To sum up, we have the following theorem:

If

$$\Sigma \Sigma \cdots \Sigma A_{i_1 \ldots i_e} z_1^{i_1} \cdots z_e^{i_e}$$

is the expansion of an analytic function about a point, then

$$F(z_1 \cdots z_e | x, y) = \Sigma \cdots \Sigma A_{i_1 \ldots i_e} \overset{*}{f}{}_1^{i_1} \cdots \overset{*}{f}{}_e^{i_e} z_1^{i_1} \cdots z_e^{i_e},$$

where $f_1, f_2, f_3, \cdots, f_e$ are permutable functions, is an entire function of $z_1, z_2, z_3, \cdots, z_e$, and as a function of x and y is permutable with the functions $f_1, f_2, f_3, \cdots, f_e$.

Now, if in $F(z_1, z_2, \cdots, z_e | x, y)$ we put $z_1 = z_2 = z_3 = \cdots z_e = 1$, we obtain a series

$$\Sigma \cdots \Sigma A_{i_1 \ldots i_e} \overset{*}{f}{}_1^{i_1} \cdots \overset{*}{f}{}_e^{i_e}$$

which is convergent for all values of the f's.

12. The theorems which we have been deriving above suggest a method for investigating to a considerable extent the properties of permutable functions and for carrying out the operations of composition.

Thus, let us consider any analytic expression

$$F(z_1, \cdots, z_e)$$

which can be expanded about the point $z_1 = z_2 = z_3 = z_4 = \cdots = z_e = 0$ in powers of $z_1, z_2, z_3, \cdots, z_e$. If we replace $z_1, z_2, z_3, \cdots, z_e$ in the series by $f_1, f_2, f_3, \cdots, f_e$ respectively, and write the operation of composition wherever we previously had multiplication, we shall always obtain a series which converges for all values of $f_1, f_2, f_3, \cdots, f_e$, and which represents a function permutable with $f_1, f_2, f_3, \cdots, f_e$. We may represent it by

$$F(\overset{*}{f}_1, \overset{*}{f}_2, \cdots, \overset{*}{f}_e).$$

Thus, every algebraic expression takes on a new meaning for the operation of composition. For example,

$$\frac{z}{1+z} = z - z^2 + z^3 - \cdots$$

is a series which converges within the unit circle. But if we write

$$\frac{\overset{*}{f}}{1+\overset{*}{f}} = \overset{*}{f} - \overset{*}{f^2} + \overset{*}{f^3} - \cdots$$

we obtain a series which converges for all values of f and which is permutable with f. Consequently, a meaning has been ascribed to the expression on the left-hand side of the equation.

Moreover, if we take two expressions

$$\frac{\overset{*}{f}}{1+\overset{*}{f}} = \overset{*}{f} - \overset{*}{f^2} + \overset{*}{f^3} - \cdots$$

and

$$\frac{\overset{*}{f}}{1-\overset{*}{f}} = \overset{*}{f} + \overset{*}{f^2} + \overset{*}{f^3} + \cdots$$

then to make the composition of the two left-hand members, it is only necessary to apply the rules for finding their algebraic product and we shall have

$$\frac{\overset{*}{f^2}}{1-\overset{*}{f^2}} = \overset{*}{f^2} + \overset{*}{f^4} + \cdots.$$

Hence, all the rules of ordinary algebra remain valid when we pass from the field of multiplication to the field of composition.

Some of the consequences which can be derived from this fact will be seen shortly.

13. Now let us see what takes place for the second type of composition.

Let

$$F(z) = \frac{\varphi(z)}{1 + \psi(z)} \tag{4}$$

be the ratio of two entire functions $\varphi(z)$ and $1 + \psi(z)$ which are such that $\varphi(0) = \psi(0) = 0$.

Then we shall have an expansion

$$F(z) = A_1 z + A_2 z^2 + A_3 z^3 + \cdots$$

which converges in general within a certain circle having the point $z = 0$ as center.

Now let us consider the expression

$$F_{is}(z) = A_1 m_{is} z + A_2 (m^2)_{is} z^2 + \cdots .$$

We shall prove that this new series is *the quotient of two entire functions.*

14. Let us first write

$$\varphi(z) = B_1 z + B_2 z^2 + \cdots$$

and determine a quantity

$$\varphi_{is}(z) = B_1 m_{is} z + B_2 (m^2)_{is} z^2 + \cdots .$$

We say that $\varphi_{is}(z)$ *is an entire function of* z. For let μ be greater in absolute value than m_{is}. Whe then have (§ 3)

$$|m_{is}| < \mu \quad , \quad |(m^2)_{is}| < g\mu^2 \quad , \quad |(m^3)_{is}| < g^2 \mu^3, \cdots .$$

Moreover,

$$|B_1| \mu z + |B_2| \mu^2 g z^2 + |B_3| \mu^3 g^2 z^3 + \cdots$$

converges for all values of z, and the theorem is proved.

For the same reason, if

$$\psi(z) = C_1 z + C_2 z^2 + \cdots ,$$

then the series

$$\psi_{is}(z) = C_1 m_{is} z + C_2 (m^2)_{is} z^2 + \cdots$$

is an entire function.

Bearing these facts in mind, let us consider the system of algebraic linear equations

$$X_{is} + \sum_1^g \psi_{ie} X_{es} = \varphi_{is} \qquad (i, s = 1, 2, \cdots, g).$$

If we replace the unknowns X_{is} by F_{is} we can verify without trouble that these equations are identically satisfied. But if we solve for the unknowns X_{is} in the above system, the solution will be expressed as the quotients of rational entire functions of ψ_{is} and φ_{is} and hence the quantities X_{is} are quotients of entire functions of z.

It is clear that the determinant which constitutes the denominator of these quotients cannot vanish identically, and hence the theorem is proved.

It is not difficult to generalize this. Thus, instead of the quotient (4), let us write

$$F(z_1, z_2, \cdots, z_e) = \frac{\varphi(z_1, \cdots, z_e)}{1 + \psi(z_1 \cdots z_e)},$$

where φ and ψ are entire functions of the variables $z_1, z_2, z_3, \cdots, z_e$ which vanish for $z_1 = z_2 = z_3 = \cdots z_e = 0$. If

$$F(z_1, \cdots, z_e) = \Sigma \cdots \Sigma A_{i_1, \ldots, i_e} z_1^{i_1} \cdots z_e^{i_e}$$

is the expansion of F about the point for which $z_1 = z_2 = z_3 = \cdots = z_e = 0$, and if we write $F_{is}(z_1, \cdots, z_e) = \Sigma \cdots \Sigma A_{i_1, \ldots, i_e} (m^{i_1}, n^{i_2}, \cdots, q^{i_e}) z_1^{i_1} \cdots z_e^{i_e}$ where $m, n, \cdots, q$ are permutable, then the function $F(z_1, z_2, z_3, \cdots, z_e | x, y)$ will be the quotient of two entire functions of $z_1, z_2, z_3, \cdots, z_e$.

To make the proof in this case, it is only necessary to repeat the argument given above. We may add that F_{is} is permutable with $m_{is}, n_{is}, \cdots, q_{is}$.

15. Let us now pass to the limit, that is, let us consider permutable functions of the second type (2). All of the theorems remain valid. In other words, we have the theorem that

$$F(z_1, \cdots, z_e | x, y) = \Sigma \cdots \Sigma A_{i_1, \ldots, i_e} f_1^{i_1} \cdots f_e^{i_e} z_1^{i_1} \cdots z_e^{i_e},$$

where $f_1, f_2, f_3, \cdots, f_e$ are permutable functions of the second type, is the quotient of two entire functions. Also,

$$F(z_1, \cdots, z_e | x, y)$$

is a function which is permutable with $f_1, f_2, f_3, \cdots, f_e$.

We shall study applications of these fundamental theorems in the second lecture.

Lecture II.

1. We shall begin by classifying integral equations into several categories. First, let us examine those which are linear. The simplest ones which we run across are the following:

$$(1) \qquad f(y) + \int_0^y f(x) F(x, y)\, dx = \varphi(y),$$

(2) To indicate composition of the second type, we shall make use of a double star, thus:

$$\overset{**}{f_1} \overset{**}{f_2}.$$

known as VOLTERRA'S *equation of the second kind*, and

$$(1') \qquad f(y) + \int_0^1 f(x) \, F(x, y) \, dx = \varphi(y),$$

FREDHOLM'S *equation of the second kind*. We shall also consider certain other kinds further on.

Let us look at equation (1). If we multiply both sides by $\Phi(y, z)$ and integrate with respect to y between the limits 0 and z, we obtain

$$\int_0^z \Phi(y, z) f(y) \, dy + \int_0^z f(x) \, dx \int_x^z F(x, y) \, \Phi(y, z) \, dy = \int_0^z \varphi(y) \, \Phi(y, z) \, dy.$$

If now the function Φ be so chosen that

$$(A) \qquad \int_x^z F(x, y) \, \Phi(y, z) \, dy = -\Phi(x, z) - F(x, z),$$

it will follow that

$$\int_0^z \Phi(y, z) f(y) \, dy - \int_0^z \Phi(x, z) f(x) \, dx - \int_0^z F(x, z) f(x) \, dx = \int_0^z \varphi(y) \Phi(y, z) \, dy$$

which is reducible by (1) to

$$f(z) = \varphi(z) + \int_0^z \varphi(y) \, \Phi(y, z) \, dy,$$

so that the difficulty has been narrowed down to the solution of (A). In the symbols for composition of the first kind, this equation may be written as follows:

$$(2) \qquad \Phi(x, y) + F(x, y) + \overset{*}{F} \overset{*}{\Phi}(x, y) = 0.$$

If we apply a similar argument to equation (1′) we find that the solution will be given in the form

$$f(z) = \varphi(z) + \int_0^1 \varphi(y) \, \Phi(y, z) \, dy$$

where

$$(2') \qquad \Phi(x, y) + F(x, y) + \overset{**}{F} \overset{**}{\Phi}(x, y) = 0.$$

2. Let us first see how equation (2) may be solved. If we write

$$z + z_1 + z z_1 = 0$$

we shall obtain

$$z_1 = \frac{-z}{1 + z} = -z + z^2 - z^3 + \cdots,$$

the solution being valid if $|z| < 1$.

But suppose we write

$$-\frac{\overset{*}{F}}{1+\overset{*}{F}} = -F + \overset{*}{F}{}^2 - \overset{*}{F}{}^3 + \cdots.$$

Then, in this case, we have an expansion which converges for all values of F and which satisfies equation (2) by what we have proved. Hence we shall have

$$\Phi = -F + \overset{*}{F}{}^2 - \overset{*}{F}{}^3 + \cdots$$

and the integral equation (2) is solved.

If we replace $F(x, y)$ by $uF(x, y)$ in equation (2), we obtain

$$\Phi(x, y) + uF(x, y) + u\,\overset{*}{F}\overset{*}{\Phi}(x, y) = 0$$

$$\Phi = -uF + u^2\overset{*}{F}{}^2 - u^3\overset{*}{F}{}^3 + \cdots,$$

which series is always an entire function of u.

3. Turning to equation (2′), let us replace F by uF as in the previous case. We shall then have

$$\Phi + uF + u\overset{**}{F}\overset{**}{\Phi} = 0,$$

and, as a consequence of the last theorem of the first lecture, we have that Φ can be expressed as the quotient of two entire functions of u.

4. As soon as we have stated the fundamental problems in this form, it is easy to see that they are only special cases of other classes of problems of a much more general nature.

Indeed, let us consider any analytic function $F(z_1, z_2, z_3, \cdots, z_n)$ whatsoever and write the equation

$$F(z_1, z_2, z_3, \cdots, z_n) = 0. \tag{3}$$

Furthermore, let us suppose that this equation is satisfied by $z_1 = z_2 = z_3 = \cdots = z_n = 0$, and let us regard z_n as a function dependent upon $z_1, z_2, z_3, \cdots, z_{n-1}$. If the point $z_1 = z_2 = z_3 = \cdots = z_n = 0$ is not a critical point, we may develop z_n as a power series in $z_1, z_2, \cdots, z_{n-1}$ and the expansion will be convergent within some region. We shall thus have

$$z_n = \Sigma\Sigma\cdots\Sigma A_{i_1\cdots i_{n-1}} z_1^{i_1}\cdots z_{n-1}^{i_{n-1}} \quad , \quad A_{00\cdots 0} = 0. \tag{4}$$

Now suppose we replace $z_1, z_2, \cdots, z_n$ in equation (3) by the permutable functions $f_1, f_2, \cdots, f_n$ respectively and regard the operations as compositions of the first type. Then, in terms of our notation, we shall have

$$F(\overset{*}{f}_1, \overset{*}{f}_2, \cdots, \overset{*}{f}_n) = 0.$$

The equation which we have just found will no longer be algebraic or transcendental, but will be an integral equation, since the operation of composition is an operation of integration. Nor will the equation in general be linear as was equation (2), but of any degree whatsoever. Nevertheless, if we regard f_n as the unknown function, we shall be able to find its solution by the same process which we used in solving equation (3). Indeed, it is only necessary to replace $z_1, z_2, z_3, \cdots, z_n$ in the series (4) by $f_1, f_2, f_3, \cdots, f_n$ respectively and to treat the operations as operations of composition. In this manner, we find

$$f_n = \Sigma\Sigma\cdots\Sigma A_{i_1,\ldots,i_{n-1}} \overset{*}{f}{}_1^{i_1} \cdots \overset{*}{f}{}_{n-1}^{i_{n-1}}. \tag{5}$$

An interesting fact to be noticed is that, whereas the expansion (4) is in general convergent over a limited region only, the solution (5) is valid for all values of $f_1, f_2, \cdots, f_{n-1}$. Evidently problems of integration are of a more complicated nature than algebraic or transcendental problems, yet we have the surprising and interesting result that the solutions of the former are much more simple in the sense that the regions over which they are valid is infinite.

We may also replace $z_1, z_2, z_3, \cdots, z_{n-1}$ in equation (3) by $z_1 f_1, z_2 f_2, z_3 f_3, \cdots, z_{n-1} f_{n-1}$ respectively and write the equation

$$F(z_1 f_1, z_2 f_2, \cdots, z_{n-1} f_{n-1}, f_n) = 0.$$

Then the solution will be

$$f_n = \Sigma\cdots\Sigma A_{i_1,\ldots,i_{n-1}} z_1^{i_1} \cdots z_{n-1}^{i_{n-1}} \overset{*}{f}{}_1^{i_1} \cdots \overset{*}{f}{}_{n-1}^{i_{n-1}}$$

which is of the form

$$f_n(z_1, \cdots, z_{n-1} \mid x, y).$$

The series will be an entire function of $z_1, z_2, z_3, \cdots, z_{n-1}$, and, with respect to x and y, $f_n(z_1, z_2, z_3, \cdots, z_{n-1} \mid x, y)$ will be permutable with the functions $f_1, f_2, f_3, \cdots, f_{n-1}$.

5. We might also start with a system of equations, as

$$\left\{\begin{array}{l} F_1(z_1, \cdots, z_n, u_1, \cdots, u_p) = 0 \\ F_2(z_1, \cdots, z_n, u_1, \cdots, u_p) = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ F_p(z_1, \cdots, z_n, u_1, \cdots, u_p) = 0 \end{array}\right. \tag{6}$$

which are satisfied when $z_1 = z_2 = \cdots = z_n = 0$. Now let us suppose that we can define

$$\left\{\begin{array}{l} u_1 = \Sigma\Sigma\cdots\Sigma A^{(1)}_{i_1\ldots i_n} z_1^{i_1}\cdots z_n^{i_n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ u_p = \Sigma\Sigma\cdots\Sigma A^{(p)}_{i_1\ldots i_n} z_1^{i_1}\cdots z_n^{i_n} \end{array}\right. \tag{7}$$

as implicit functions of $z_1, z_2, z_3, \cdots, z_n$ which have no critical point at

$z_1 = z_2 = \cdots = z_n = 0$. Then, if we write the integral equations

$$\mathrm{F}_1 (z_1 \overset{*}{f}_1, \cdots, z_n \overset{*}{f}_n, \overset{*}{\varphi}_1, \cdots, \overset{*}{\varphi}_p) = 0$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\mathrm{F}_p (z_1 \overset{*}{f}_1, \cdots, z_n \overset{*}{f}_n, \overset{*}{\varphi}_1, \cdots, \overset{*}{\varphi}_p) = 0$$

where $f_1, f_2, f_3, \cdots, f_n$ are permutable functions, the solution of the system will be

$$\varphi_1 = \Sigma \cdots \Sigma \mathrm{A}^{(1)}_{i_1, \ldots, i_n} z_1^{i_1} \cdots z_n^{i_n} \overset{*}{f}{}_1^{i_1} \cdots \overset{*}{f}{}_n^{i_n}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\varphi_p = \Sigma \cdots \Sigma \mathrm{A}^{(p)}_{i_1, \ldots, i_n} z_1^{i_1} \cdots z_n^{i_n} \overset{*}{f}{}_1^{i_1} \cdots \overset{*}{f}{}_n^{i_n}$$

and the functions thus obtained will be entire functions of $z_1, z_2, z_3, \cdots, z_n$ for all values of $f_1, f_2, f_3, \cdots, f_n$. Moreover, these solutions will be permutable with the given functions.

All of the equations which we have been considering involve only integrals for which the limits of integration are x and y; that is to say, they are equations with variable limits. Let us see what the situation is when the limits are constant. Returning to the set of equations (6), we shall suppose that the solutions (7) are quotients of entire functions. Then let us examine the integral equations

$$\mathrm{F}_1 (z_1 \overset{**}{f}_1, \cdots, z_n \overset{**}{f}_n, \overset{**}{\varphi}_1, \cdots, \overset{**}{\varphi}_p) = 0$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\mathrm{F}_p (z_1 \overset{**}{f}_1, \cdots, z_n \overset{**}{f}_n, \overset{**}{\varphi}_1, \cdots, \overset{**}{\varphi}_p) = 0$$

where $f_1, f_2, f_3, \cdots, f_n$ are permutable functions of the second type. In these equations the limits of integration are constants, since we are concerned with composition of the second type.

If now we put

$$\varphi_1 = \Sigma \cdots \Sigma \mathrm{A}^{(1)}_{i_1 \cdots i_n} z_1^{i_1} \cdots z_n^{i_n} \overset{**}{f}{}_1^{i_1} \cdots \overset{**}{f}{}_n^{i_n}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\varphi_p = \Sigma \cdots \Sigma \mathrm{A}^{(p)}_{i_1 \cdots i_n} z_1^{i_1} \cdots z_n^{i_n} \overset{**}{f}{}_1^{i_1} \cdots \overset{**}{f}{}_n^{i_n},$$

the functions thus obtained:

1) satisfy the preceding system of equations,

2) are quotients of entire functions, and

3) have permutability of the second type with the original functions $f_1, f_2, \cdots, f_n$.

Thus we see that linear equations are only a very special type of integral equations and that we can pass from their study to that of a more general class.

6. Let us prove certain important properties about functions which may be found by a process like the one above outlined. More precisely, let us show what certain algebraic properties become when we pass from multiplication to composition. We shall begin by giving an example.

We consider the exponential function:

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2\,!} + \frac{z^3}{3\,!} + \cdots.$$

Associated with it is an addition theorem

$$e^{z+z_1} = e^z\, e^{z_1}.$$

Suppose we put

$$f(z) = e^z - 1.$$

We then have

$$f(z + z_1) = f(z) f(z_1) + f(z) + f(z_1). \tag{8}$$

Keeping the above in mind, let us write the function

$$\mathrm{V}(z \mid x, y) = zf + \frac{z^2 \overset{*}{f}{}^2}{2\,!} + \frac{z^3 \overset{*}{f}{}^3}{3\,!} + \cdots.$$

We can see at once what the relation (8) becomes. Indeed, we have only to replace multiplication by composition. We shall therefore have

$$\mathrm{V}(z + z_1 \mid x, y) = \mathrm{V}(z \mid x, y) + \mathrm{V}(z_1 \mid x, y) + \overset{*}{\mathrm{V}}(z \mid x, y)\, \overset{*}{\mathrm{V}}(z_1 \mid x, y),$$

that is

$$\mathrm{V}(z + z_1 \mid x, y) = \mathrm{V}(z \mid x, y) + \mathrm{V}(z_1 \mid x, y) + \int_x^y \mathrm{V}(z \mid x, \xi)\, \mathrm{V}(z_1 \mid \xi, y)\, d\xi.$$

In other words, the theorem of algebraic addition for the exponential function becomes for this new function a theorem of integral addition as we have called it (3).

7. To go from the particular case to the general involves no difficulty. Consequently, we may state the theorem: *To every theorem of algebraic addition, there corresponds a theorem of integral addition.*

Thus, for example, if we consider elliptic functions, we can pass from these to entire functions by the process of § 11 of the preceding lecture. To the addition theorems for elliptic functions, there correspond new addition theorems for new functions. In a like manner, let us consider the σ function of WEIERSTRASS. Suppose we examine for a moment the expansion of this function and replace u in the expression by $uf(x, y)$ where the powers of f represent operations of composition. The three-term equation

(3) EVANS has studied in a systematic manner an Algebra of permutable functions. («Memorie Lincei», ser. V, Vol. VIII, 1911; also «Rendiconti del Circolo di Palermo», Vol. XXXIV, 1912).

for σ leads us to a three-term equation for the new function which is of the integral type since we have replaced products by compositions.

8. What we have said about compositions of the first type may be repeated for compositions of the second. Returning once more to the example involving the exponential function, let us put

$$W(z\,|\,x\,,y) = zf + \frac{z^2 \overset{**}{f^2}}{2\,!} + \frac{z^3 \overset{**}{f^3}}{3\,!} + \cdots.$$

This function is also an entire function and we shall have

$$W(z+z_1\,|\,x\,,y) = W(z\,|\,x\,,y) + W(z_1\,|\,x\,,y) + \overset{**}{W}(z\,|\,x\,,y)\,\overset{**}{W}(z_1\,|\,x\,,y)\,,$$

or, in other words,

$$W(z+z_1\,|\,x\,,y) = W(z\,|\,x\,,y) + W(z_1\,|\,x\,,y) + \int_a^b W(z\,|\,x\,,\xi)\,W(z\,|\,\xi\,,y)\,d\xi\,.$$

It is hardly necessary to prove that the above is true in the general case.

9. A similar theorem may also be stated for the case of more than one variable; hence, all the theorems about ABELIAN functions may be carried over to the domain of integration by a process like the one which we have indicated.

10. Let us now return to linear integral equations. As indicated, equations (1) and (1′) are of the second kind. Those of the first kind of the VOLTERRA and FREDHOLM types respectively may be written

$$\int_0^y f(x)\,F(x\,,y)\,dx = \varphi(y)\,, \tag{9}$$

$$\int_0^1 f(x)\,F(x\,,y)\,dx = \varphi(y). \tag{9′}$$

Leaving out of consideration equations (9′) which can only be attacked by methods of a different sort, let us consider equations (9). The latter may be reduced to equations of the second kind. For we can differentiate and obtain

$$F(y\,,y)f(y) + \int_0^y f(x)\,\frac{\partial F(x\,,y)}{\partial y}\,dx = \frac{d\varphi}{dy}\,.$$

If $F(y\,,y)$ does not vanish, we can divide by $F(y\,,y)$ and get an equation of the second kind.

If $F(y, y)$ vanishes identically, the last equation is still of the first kind. But if

$$\left(\frac{\partial F(x, y)}{\partial y}\right)_{x=y}$$

is not zero, then by a second differentiation we shall get an equation of the second kind, and so on.

If $F(x, y)$ is such that $F(x, x) \lessgtr 0$, we shall call it a function of the first order. If $F(x, x) = 0$ and $\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{x=y} \gtrless 0$, we shall call it a function of the second order, and so on. Hence, if the order of the function $F(x, y)$ in equation (9) is determinate, the equation can always be reduced to one of the second kind by a finite number of differentiations, and hence can be solved by the method which we have indicated.

But the order of $F(x, y)$ may not be determinate. A case in point is where $F(x, x)$ is in general different from zero but vanishes for certain values of x. Then the nature of the problem changes, and to solve it, new methods must be used. To develop these, would lead us too far afield. The solution of this question has been the goal of numerous enquiries. We were the first to take up the matter and, since then, LALESCO and others have studied it [4].

Instead of considering equation (9) which is of the first kind, we may consider the equation

$$\int_x^y F(x, \xi)\, \Phi(\xi, y)\, d\xi = \psi(x, y),$$

where we can regard F and ψ as the known functions and Φ as unknown. For we have only to suppose that x is a constant, when the equation reduces at once to equation (9).

If we take the equation of the first kind in this form, we may also write it

$$\overset{*}{F}\,\overset{*}{\Phi} = \psi;$$

that is to say, the problem is of the following nature: given a function ψ which is the resultant of the composition of F and Φ, and given one of the factors F of the composition, to find the other factor Φ. If for the moment we were to replace the operation of composition by that of multiplication, the problem would reduce to that of finding the inverse operation; that is, we are dealing with a problem which is analogous to the problem of division.

Now it is necessary to observe that certain conditions must be satisfied if the problem is to have finite solutions. *The order of ψ must be greater*

(4) See: LALESCO, *Introduction à la théorie des équations intégrales*, Paris, Hermann, 1912. Troisième partie I.

than the order of F *by at least unity*. For, when $x=y$, ψ vanishes to a higher order than F. If F is of order m and ψ is of order n, then Φ must be of order $n-m$. Moreover, two cases may arise according as the functions F and ψ are or are not permutable with one another. Clearly in the latter case Φ cannot be permutable with F, otherwise the resultant of the composition of the two would be permutable with either. But if F and ψ are permutable, will Φ be permutable with F and ψ ?

We shall prove that this property is actually realized. In fact, we have

$$\overset{*}{F}\overset{*}{\Phi}\overset{*}{F}=\overset{*}{\psi}\overset{*}{F} \quad , \quad \overset{*}{F}\overset{*}{F}\overset{*}{\Phi}=\overset{*}{F}\overset{*}{\psi}.$$

Hence

$$F(\Phi F)=F(F\Phi),$$

and since this integral equation has but one solution,

$$\Phi F=F\Phi,$$

and the theorem is proved.

11. Furthermore, when the problem of linear integral equations of the first kind has been put in the form

$$\overset{*}{F}\overset{*}{\Phi}=\psi$$

other problems suggest themselves at once. Thus, if F, Φ and ψ are known functions, we may set the problem of determining a quantity such that

$$\overset{*}{F}\overset{*}{X}+\overset{*}{X}\overset{*}{\Phi}=\psi; \tag{10}$$

or again the following problem: given the known quantities F_1, F_2, F_3, F_4 and ψ, to calculate a quantity Φ such that

$$\overset{*}{F}_1\overset{*}{\Phi}+\overset{*}{\Phi}\overset{*}{F}_2+\overset{*}{F}_3\overset{*}{\Phi}\overset{*}{F}_4=\psi. \tag{11}$$

The above are new equations which up to the present have never been studied and with which we shall now concern ourselves.

First, let us consider equation (10) which we can write

$$\int_x^y F(x,\xi)\,X(\xi,y)\,d\xi+\int_x^y X(x,\xi)\,\Phi(\xi,y)\,d\xi=\psi(x,y).$$

Let us put

$$S(x,y)=\int_x^y F(x,\xi)\,X(\xi,y)\,d\xi=\psi(x,y)-\int_x^y X(x,\xi)\,\Phi(\xi,y)\,d\xi.$$

Then we shall have

$$\frac{\partial S}{\partial x}=-F(x,x)\,X(x,y)+\int_x^y F_1(x,\xi)\,X(\xi,y)\,d\xi,$$

$$\frac{\partial S}{\partial y}=-\Phi(y,y)\,X(x,y)-\int_x^y X(x,\xi)\,\Phi_2(\xi,y)\,d\xi+\frac{\partial\psi}{\partial y},$$

where we have put

$$F_1 = \frac{\partial F}{\partial x} \quad , \quad \Phi_2 = \frac{\partial \Phi}{\partial y} \, .$$

From the first equation, we derive

$$X(x, y) = -\frac{1}{F(x, x)} \frac{\partial S(x, y)}{\partial x} + \int_x^y f(x, \xi) \frac{\partial S(\xi, y)}{\partial \xi} d\xi ,$$

and from the second

$$X(x, y) = -\frac{1}{\Phi(y, y)} \frac{\partial S(x, y)}{\partial y} + \int_x^y \varphi(\xi, y) \frac{\partial S(x, \xi)}{\partial \xi} d\xi + H(x, y) ,$$

where f and φ are two known functions which one can obtain from F and Φ and where

$$H = + \frac{1}{\Phi(y, y)} \frac{\partial \psi(x, y)}{\partial y} - \int_x^y \varphi(\xi, y) \frac{\partial \psi(x, \xi)}{\partial \xi} d\xi$$

is also a known function. Then, by substracting the second equation from the first, we have at once

$$\frac{1}{\Phi(y, y)} \frac{\partial S(x, y)}{\partial y} - \frac{1}{F(x, x)} \frac{\partial S(x, y)}{\partial x} - H(x, y) +$$

$$+ \int_x^y f(x, \xi) \frac{\partial S(\xi, y)}{\partial \xi} d\xi - \int_x^y \varphi(\xi, y) \frac{\partial S(x, \xi)}{\partial \xi} d\xi = 0 ,$$

and integration by parts gives

(12) $$\frac{1}{\Phi(y, y)} \frac{\partial S(x, y)}{\partial y} - \frac{1}{F(x, x)} \frac{\partial S(x, y)}{\partial x} - S(x, y) f(x, x) -$$

$$- \int_x^y \frac{\partial f(x, \xi)}{\partial \xi} S(\xi, y) d\xi - S(x, y) \varphi(y, y) + \int_x^y \frac{\partial \varphi(\xi, y)}{\partial \xi} S(x, \xi) d\xi - H(x, y) = 0 .$$

Thus we are led to the following result: to solve the integral equation (10) we must solve the problem which presents itself in the shape of the last equation. This problem is nothing more than the integration of an integro-differential equation. Indeed, equation (12) is both of the type of an integral equation and of a differential equation.

The above problem admits of a solution, but we shall not go into details of the solution. The interesting point to notice is that integro-differential equations arise in a great variety of problems. We have examined these equations in a number of forms and have made a particular study of the integro-differential equations of the second order and of the elliptic or hyperbolic types which arise in connection with certain problems of mathematical physics [5].

(5) *Leçons sur les fonctions de lignes*, Paris, Gauthier-Villars, 1913.

The problem we were considering is of a different type. It is of the first order, and since two dependent variables appear, it corresponds to problems involving partial derivatives. The case of equation (11) may be handled in a similar manner.

12. We wish to demonstrate certain interesting results which are closely connected with the problems we have been discussing. Let us go back to equation (10). In certain cases, this equation has a finite number of solutions, while in others the number of solutions is infinite and the solutions involve an arbitrary function.

To see this, we need only to consider the equation

$$F\chi + \chi\Phi = 0$$

and to determine under what conditions $\chi = 0$ is the only solution and under what conditions solutions other than 0 exist.

To simplify matters, we shall assume that the functions F and Φ are of the first order and shall determine under what circumstances the equation has a solution of the first order.

Suppose we write our equation in the form

$$\text{(B)} \qquad \int_x^y F(x, \xi)\, \chi(\xi, y)\, d\xi + \int_x^y \chi(x, \xi)\, \Phi(\xi, y)\, d\xi = 0.$$

Then, by differentiation with respect to y, we have

$$F(x, y)\, \chi(y, y) + \int_x^y F(x, \xi)\, \chi_2(\xi, y)\, d\xi + \chi(x, y)\, \Phi(y, y)$$
$$+ \int_x^y \chi(x, \xi)\, \Phi_2(\xi, y)\, d\xi = 0$$

and, when $x = y$,

$$F(y, y) + \Phi(y, y) = 0,$$

which gives us a necessary condition.

Moreover, by suitable transformations of a simple sort, we are always led to the case where

$$\text{(12)} \qquad F(x, x) = -\Phi(x, x) = 1,$$

$$\text{(12')} \qquad F_1(x, x) = F_2(x, x) = \Phi_1(x, x) = \Phi_2(x, x) = 0,$$

where the subscripts 1 and 2 denote partial differentiation with respect to x and y respectively; that is

$$F_1(x, y) = \frac{\partial F(x, y)}{\partial x}, \qquad F_2(x, y) = \frac{\partial F(x, y)}{\partial y},$$

$$\Phi_1(x, y) = \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial x}, \qquad \Phi_2(x, y) = \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial y}.$$

For we can first write

$$x = f(x_1) \quad , \quad y = f(y_1),$$
$$F'(x_1, y_1) = \pm \sqrt{f'(x_1) f'(y_1)}\, F(x, y),$$
$$\Phi'(x_1, y_1) = \pm \sqrt{f'(x_1) f'(y_1)}\, \Phi(x, y),$$
$$\chi'(x_1, y_1) = \pm \sqrt{f'(x_1) f'(y_1)}\, \chi(x, y).$$

Then, if we take

$$f'(x_1) = \frac{\pm 1}{F(x, x)},$$

we clearly see that the equation (B) becomes

$$\int_{x_1}^{y_1} F'(x_1, \xi_1)\, \chi'(\xi_1, y_1)\, d\xi_1 + \int_{x_1}^{y_1} \chi'(y_1, \xi_1)\, \Phi'(\xi_1, y_1)\, d\xi_1 = 0,$$

where

$$F'(x_1, x_1) = -\Phi'(y_1, y_1) = 1.$$

Hence we can suppose at the outset that conditions (12) are satisfied.

The above having been established, equation (B) may be written

$$\int_x^y \frac{\alpha(x)}{\alpha(\xi)} F(x, \xi)\, \alpha(\xi)\, \chi(\xi, y)\, \beta(y)\, d\xi + \int_x^y \alpha(x)\, \chi(x, \xi)\, \beta(\xi)\, \Phi(\xi, y) \frac{\beta(y)}{\beta(\xi)}\, d\xi = 0.$$

If we put

$$\frac{\alpha(x)}{\alpha(y)} F(x, y) = F'(x, y),$$
$$\frac{\beta(y)}{\beta(x)} \Phi(x, y) = \Phi'(x, y),$$
$$\alpha(x)\, \chi(x, y)\, \beta(y) = \chi'(x, y),$$

we shall have

$$\int_x^y F'(x, \xi)\, \chi'(\xi, y)\, d\xi + \int_x^y \chi'(x, \xi)\, \Phi'(\xi, y)\, d\xi = 0.$$

But we can make use of the arbitrariness of α and β to choose

$$F_1'(x, x) = F_2'(x, x) = \Phi_1'(x, x) = \Phi_2'(x, x) = 0,$$

which shows that we can always assume that condition (12′) is satisfied.

Now let us write

$$\psi = -\int_x^y F(x, \xi)\, \chi(\xi, y)\, d\xi = \int_x^y \chi(x, \xi)\, \Phi(\xi, y)\, d\xi.$$

We shall have

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \chi(x, y) - \int_x^y F_1(x, \xi)\, \chi(\xi, y)\, d\xi,$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = \chi(x, y) + \int_x^y \chi(x, \xi)\, \Phi_2(\xi, y)\, d\xi,$$

whence we derive

$$\chi(x,y) = \frac{\partial\psi}{\partial x} + \int_x^y f_1(x,\xi)\frac{\partial\psi}{\partial\xi}\,d\xi,$$

$$\chi(x,y) = \frac{\partial\psi}{\partial y} + \int_x^y \frac{\partial\psi}{\partial\xi}\varphi_2(\xi,y)\,d\xi,$$

where

$$f_1(x,y) = F_1(x_1,y) + \overset{*}{F}{}_1^2(x,y) + \overset{*}{F}{}_1^3(x,y) + \cdots,$$

$$\varphi_2(x,y) = -\Phi_2(x,y) + \overset{*}{\Phi}{}_2^2(x,y) - \overset{*}{\Phi}{}_2^3(x,y) + \cdots,$$

and therefore (see Lecture II, § 1)

$$f_1(x,x) = \varphi_2(x,x) = 0.$$

Hence, integrating by parts, we have

$$\chi = \frac{\partial\psi}{\partial x} - \int_x^y \lambda(x,\xi)\,\psi(\xi,y)\,d\xi,$$

$$\chi = \frac{\partial\psi}{\partial y} - \int_x^y \psi(x,\xi)\,\mu(\xi,y)\,d\xi,$$

where

$$\lambda(x,\xi) = \frac{\partial f_1(x,\xi)}{\partial\xi} \quad , \quad \mu(\xi,y) = \frac{\partial\varphi_2(\xi,x)}{\partial\xi}$$

and therefore

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} - \frac{\partial\psi}{\partial y} - \int_x^y [\lambda(x,\xi)\,\psi(\xi,y) - \psi(x,\xi)\,\mu(\xi,y)]\,d\xi = 0.$$

This integro-differential equation may be integrated.

If we write

$$G(x,y) = \int_x^y [\lambda(x,\xi)\,\psi(\xi,y) - \psi(x,\xi)\,\mu(\xi,y)]\,d\xi,$$

we have

$$\psi(x,y) = \theta(v) + \int_v^u G(\xi+v, v-\xi)\,d\xi, \tag{16}$$

where θ is an arbitrary function and

$$v = \frac{x+y}{2} \quad , \quad u = \frac{x-y}{2}.$$

The solution of the equation (16) is obtained by the method of successive approximations.

Applications of the above will be brought out in the next lecture.

LECTURE III.

1. We shall begin with some applications of the work developed in the last lecture.

We have solved the problem of finding the function $\chi(x, y)$ which satisfies the equation

$$\int_x^y F(x, \xi)\chi(\xi, y)\,d\xi + \int_x^y \chi(x, \xi)\Phi(\xi, y)\,d\xi = 0$$

on the hypothesis that F and Φ are of the first order. Now suppose we put

$$\Phi(x, y) = -F(x, y).$$

Then the condition

$$\Phi(x, x) + F(x, x) = 0$$

is clearly satisfied, and hence we shall be able to calculate all of the functions $\chi(x, y)$ which satisfy the relation

$$\int_x^y F(x, \xi)\chi(\xi, y)\,d\xi = \int_x^y \chi(x, \xi)F(\xi, y)\,d\xi;$$

in other words, all of the functions which have permutability of type one with a given function. However, in the last lecture (§ 12) this problem was solved only in the special case where the given function is of the first order. If the function is of higher order, the method breaks down.

We have seen that the problem may be reduced to the solution of an integro-differential equation of the first order. If the given function is of the second order, the integro-differential equation which we must solve is of the second order and admits of a solution. An arbitrary function always enters in.

As we increase the order of the given function, the problem becomes more and more complicated, hence we shall not go into details on this question as we should be led too far afield. In the general case where the functions are analytic the question has been answered by M. PÉRÈS (6).

2. We wish to present some of the properties of permutable functions. The very method which enables us to calculate all of the functions that are permutable with a given function also leads us to the result that, if F and Φ are permutable and if F is of the first order, then we must have

$$\frac{\Phi(x, x)}{F(x, x)} = \text{const.}$$

(6) « Rendiconti dei Lincei », 1913–14.

We shall give a rigorous proof of this fact.

We write

$$\int_x^y F(x, \xi)\Phi(\xi, y)\, d\xi = \int_x^y \Phi(x, \xi)\, F(\xi, y)\, d\xi .$$

Differentiating with respect to y, we have

$$F(x, y)\Phi(y, y) + \int_x^y F(x, \xi)\Phi_2(\xi, y)\, d\xi = \Phi(x, y)\, F(y, y) + \int_x^y \Phi(x, \xi)\, F_2(\xi, y)\, d\xi,$$

and differentiating this last expression with respect to x,

$$F_1(x, y)\Phi(y, y) - F(x, x)\Phi_2(x, y) + \int_x^y F_1(x, \xi)\Phi_2(\xi, y)\, d\xi = \Phi_1(x, y)\, F(y, y) -$$

$$- \Phi(x, x)\, F_2(x, y) + \int_x^y \Phi_1(x, \xi)\, F_2(\xi, y)\, d\xi .$$

Suppose we put $x = y$. We shall then have

$$F_1(y, y)\,\Phi(y, y) - F(y, y)\,\Phi_2(y, y) = \Phi_1(y, y)\, F(y, y) - \Phi(y, y)\, F_2(y, y),$$

that is

$$[F_1(y, y) + F_2(y, y)]\,\Phi(y, y) = F(y, y)\,[\Phi_1(y, y) + \Phi_2(y, y)] .$$

Moreover, if we put

$$F(y, y) = f(y) \quad , \quad \Phi(y, y) = \varphi(y),$$

we have

$$F_1(y, y) + F_2(y, y) = f'(y),$$

$$\Phi_1(y, y) + \Phi_2(y, y) = \varphi'(y),$$

and consequently

$$f'(y)\,\varphi(y) = f(y)\,\varphi'(y),$$

whence the theorem.

3. It is a simple matter to find the expansion of any function ψ which is permutable with a function F of the first order.

For, by the last theorem,

$$\frac{\psi(x, x)}{F(x, x)} = c_1$$

where c_1 is a constant. The expression

$$\psi(x, y) - c_1 F(x, y)$$

will be of higher order than F and permutable with F.

Now, by one of the theorems which we proved in the last lecture, we may write

$$\psi(x, y) - c_1 F(x, y) = \overset{*}{F}\,\overset{*}{\Phi}_1,$$

where Φ_1 will be permutable with F. Then there will be a constant c_2 such that

$$\Phi_1 - c_2 F = \overset{*}{F}\,\overset{*}{\Phi}_2$$

and consequently we shall have

$$\psi = c_1 F + c_2 \overset{*}{F}{}^2 + \cdots.$$

If this process can be carried on indefinitely, we shall have under certain conditions an expansion of ψ in terms of $F, \overset{*}{F}{}^2, \cdots$.

4. We shall give a short survey of the results which can be obtained by the introduction of a new symbol. If we put

$$\overset{*}{F}\,\overset{*}{\Phi} = \psi,$$

we can write

$$F = \overset{*}{\Phi}{}^{-1}\,\overset{*}{\psi} \quad , \quad \Phi = \overset{*}{\psi}\,\overset{*}{F}{}^{-1},$$

where F^{-1} and Φ^{-1} are merely symbols which do not represent functions, but which may be treated as if they did. If the functions are permutable, we can write

$$F = \overset{*}{\psi}\,\overset{*}{\Phi}{}^{-1} = \overset{*}{\Phi}{}^{-1}\,\overset{*}{\psi},$$

$$\Phi = \overset{*}{\psi}\,\overset{*}{F}{}^{-1} = \overset{*}{F}{}^{-1}\,\overset{*}{\psi},$$

and if

$$\overset{*}{F}\,\overset{*}{\Phi}\,\overset{*}{\Theta} = \chi,$$

$$\Theta = \overset{*}{F}{}^{-1}\,\overset{*}{\Phi}{}^{-1}\,\overset{*}{\chi} = \overset{*}{\Phi}{}^{-1}\,\overset{*}{F}{}^{-1}\,\overset{*}{\chi},$$

hence the symbols Φ^{-1} and F^{-1} are themselves permutable.

Let us assume that we have permutability. We wish to determine

$$\overset{*}{\Phi}{}^{-1} + \overset{*}{F}{}^{-1}.$$

In other words, let

$$\overset{*}{\Phi}\,\overset{*}{\Theta}_1 = \psi \quad , \quad \overset{*}{F}\,\overset{*}{\Theta}_2 = \psi.$$

We shall then have

$$\overset{*}{F}\,\overset{*}{\Phi}\,\overset{*}{\Theta}_1 = \overset{*}{F}\,\overset{*}{\psi} \quad , \quad \overset{*}{\Phi}\,\overset{*}{F}\,\overset{*}{\Theta}_2 = \overset{*}{\Phi}\,\overset{*}{\psi},$$

and, owing to the property of permutability,

$$\overset{*}{F}\,\overset{*}{\Phi}\,(\Theta_1 \overset{*}{+} \Theta_2) = (F \overset{*}{+} \Phi)\,\overset{*}{\psi},$$

whence

$$\Theta_1 + \Theta_2 = (\overset{*}{F}\Phi)^{-1}\,(F \overset{*}{+} \Phi)\,\overset{*}{\psi} = (F \overset{*}{+} \Phi)\,(\overset{*}{F}\Phi)^{-1}\,\overset{*}{\psi},$$

and we may write

$$\overset{*}{\Phi}^{-1} + \overset{*}{F}^{-1} = (F \overset{*}{+} \Phi)(F \overset{*}{\Phi})^{-1},$$

that is, *the rule for the sum of two fractions may be applied.*

Thus we see that we can develop as it were an arithmetic for the symbol $\overset{*}{F}^{-1}$ quite analogous to the theory of fractions.

5. We have seen (§ 1) that if Φ and ψ are of the first type and if

$$\Phi(x, x) = \psi(x, x),$$

then a function $\psi(x, y)$ may always be found such that

$$\overset{*}{\Phi}\overset{*}{\chi} = \overset{*}{\chi}\overset{*}{\psi}.$$

Hence we can write

$$\chi = \overset{*}{\Phi}^{-1}\overset{*}{\chi}\overset{*}{\psi} = \overset{*}{\Phi}\overset{*}{\chi}\overset{*}{\psi}^{-1}, \qquad \Phi = \overset{*}{\chi}\overset{*}{\psi}\overset{*}{\chi}^{-1}. \tag{1}$$

And, by solving the equation

$$\overset{*}{\chi}'\overset{*}{\Phi} = \overset{*}{\psi}\overset{*}{\chi}',$$

we shall have that

$$\Phi = \overset{*}{\chi}'^{-1}\overset{*}{\psi}\overset{*}{\chi}'. \tag{2}$$

Therefore the two functions Φ and ψ can always be obtained the one from the other by a transformation through the functions χ or χ'.

In particular, if

$$\psi(x, x) = 1,$$

we shall always be able to find

$$\overset{*}{\chi}\overset{*}{\psi}\overset{*}{\chi}^{-1} = 1. \tag{3}$$

The relation (1) and (2) may be obtained even if Φ and ψ are permutable. In this case, χ and χ' do not belong to the group of functions which are permutable with the given ones. In particular, equation (3) may hold even if ψ is permutable with unity.

6. We shall bring these lectures on permutable functions to a close by extending some of the results which were obtained in the first lecture (§ 11).

A function which depends upon all the values of a certain function $f(x)$ between the limits a and b admits of an expansion

$$A_0 + \int_a^b f(x_1) F_1(x_1)\, dx_1 + \int_a^b\int_a^b f(x_1) f(x_2) F_2(x_1, x_2)\, dx_1\, dx_2 + \cdots, \tag{4}$$

provided certain conditions are satisfied; where $F_2(x_1, x_2)$ and $F_3(x_1, x_2, x_3)$, etc., are symmetric functions. The expansion in question corresponds to TAYLOR'S expansion (or to a power series) in ordinary analysis [7].

With these facts before us, let $f(x, y \mid \alpha)$ be a set of permutable functions of type one, that is of such a sort that if α be given any two values α_1 and α_2, the two functions thereby obtained will be permutable with one another.

As an example, we give

$$f(x - y \mid \alpha)$$

which has the above properties.

Now, let us write

$$\int_x^y f(x, \xi \mid \alpha) f(\xi, y \mid \beta)\, d\xi = f(x, y \mid \alpha, \beta),$$

$$\int_x^y f(x, \xi \mid \beta) f(\xi, y \mid \alpha)\, d\xi = f(x, y \mid \alpha, \beta).$$

The function $f(x, y) \mid \alpha, \beta)$ is permutable with the original ones.

Again let us write

$$\int_x^y f(x, \xi \mid \gamma) f(\xi, y \mid \alpha, \beta)\, d\xi = \int_x^y f(x, \xi \mid \alpha, \beta) f(\xi, y \mid \gamma)\, d\xi = f(x, y \mid \alpha, \beta, \gamma)$$

and so on, and let us suppose that the series (4) is convergent when $|f(x)|$ is less than a certain quantity. Then if we write the series

$$A_0 + \int_a^b f(x, y \mid x_1) F_1(x_1)\, dx_1 + \int_a^b \int_a^b f(x, y \mid x_1, x_2) F_2(x_1, x_2)\, dx_1\, dx_2 + \cdots,$$

it will converge no matter what the absolute value of $f(x, y \mid \alpha)$ may be.

Moreover, let us consider the series

$$(5)\quad \Phi(\xi) = f(\xi) + \int_a^b f(x_1) F_1(x_1, \xi)\, dx_1 + \int_a^b \int_a^b f(x_1) f(x_2) F_2(x_1, x_2 \mid \xi)\, dx_1 dx_2 + \cdots.$$

If the determinant of the linear integral equation which we obtain by taking into consideration only the first two terms does not vanish, we can

(7) See: *Leçons sur les équations intégrales et intégro-différentielles*, Paris, Gauthier-Villars, 1913. Chap. I, § VIII. *Leçons sur les fonctions de lignes*, Paris, Gauthier-Villars, 1913. Chap. II. *Lectures delivered at Clark University*, Worcester, Mass., 1912. Third lecture, § IV.

derive $f(\xi)$ as a function of $\Phi(\xi)$ from equation (5), provided $|\Phi(\xi)|$ does not exceed a certain value.[8].

But let us examine the series

$$\Phi(x, y \mid \xi) = f(x, y \mid \xi) + \int_a^b f(x, y \mid x_1) F_1(x, \xi) \, dx_1 + \cdots.$$

Then, if Φ is known, we can derive $f(x, y \mid \xi)$ in the form of a series which converges no matter what the absolute value of $\Phi(x, y \mid \xi)$ may be.

This is the latest thorem which we have derived in the field of research we have been developing.

(8) *Leçons sur les équations intégrales et intégro-différentielles*, Paris, Gauthier-Villars, 1913. Chap. III, § XVI.

VI.

SULLE CORRENTI ELETTRICHE IN UNA LAMINA METALLICA SOTTO L'AZIONE DI UN CAMPO MAGNETICO

Nota I.

« Rend. Acc. Lincei », ser. 5ª, vol. XXIV₁, 1915₁; pp. 220–234 (*).

1. Il prof. CORBINO ha dimostrato (1) che le leggi della propagazione delle correnti elettriche in una lamina metallica sotto l'azione di un campo magnetico dipendono da un potenziale V, il quale è legato alle componenti j_x e j_y della densità della corrente dalle relazioni

$$\left\{\begin{aligned} j_x &= -K\left(\frac{\partial V}{\partial x} - \lambda\frac{\partial V}{\partial y}\right) \\ j_y &= -K\left(\frac{\partial V}{\partial y} + \lambda\frac{\partial V}{\partial x}\right), \end{aligned}\right. \tag{1}$$

ove

$$K = \frac{N_1 e^2 v_1}{1 + H^2 e^2 v_1^2} + \frac{N_2 e^2 v_2}{1 + H^2 e^2 v_2^2} \tag{2}$$

$$\lambda = \operatorname{tg}\beta = \frac{He\left(\dfrac{N_1 v_1^2}{1 + H^2 e^2 v_1^2} - \dfrac{N_2 v_2^2}{1 + H^2 e^2 v_2^2}\right)}{\left(\dfrac{N_1 v_1}{1 + H^2 e^2 v_1^2} + \dfrac{N_2 v_2}{1 + H^2 e^2 v_2^2}\right)}, \tag{3}$$

essendo:

H la intensità del campo magnetico normale alla lamina; e il valore assoluto della carica elettrica per gli ioni; v_1 e v_2 le mobilità degli ioni positivi e negativi; N_1 e N_2 il numero degli ioni positivi e negativi per cm^3 (2).

(*) Quanto è contenuto nelle Note I, II, III del presente lavoro (nn. 1–41) è pubblicato anche nel « Nuovo Cimento », ser. VI, vol. IX, 1915₁, pp. 23–79. L'esposizione è la stessa, salvo una suddivisione della materia in capitoli con titolo e poche parole di cenno alle verifiche sperimentali del dott. TASCA BORDONARO (« Rend. Linc. », 1° sem., 1915, p. 336 e p. 709) e della sig.na A. ALIMENTI (« Nuovo Cimento », vol. IX, 1915, p. 109 e vol. XI, 1916, p. 217). [N.d.R.].

(1) Cfr. la Nota del prof. CORBINO, *Il movimento della elettricità in una lamina metallica sottoposta all'azione di un campo magnetico*, « Rend. Lincei », vol. XXIV, 1915; pp. 213–219.

(2) I risultati contenuti in queste Note sono indipendenti dalle formule (2) e (3) (e quindi dalla particolare teoria della conduzione a cui queste due formule si riferiscono); le dimostrazioni richiedono solo che nelle (1), per un dato metallo, K e $\lambda = \operatorname{tg}\beta$ siano due funzioni del campo magnetico trasversale H delle quali la prima resti invariata e la seconda cambi solo segno quando s'inverta tale campo. [N.d.R.].

Di qui il prof. CORBINO deduce che V deve soddisfare alle condizioni seguenti:

1° in tutta l'area σ occupata dalla lamina

$$\Delta^2 V = 0 ;$$

2° nelle porzioni del contorno libere ed isolate

$$\frac{\partial V}{\partial l} = 0 ,$$

ove l è una direzione che forma, colla normale esterna n, un angolo costante eguale a β;

3° lungo degli elettrodi di resistenza trascurabile, V è costante.

2. Cominciamo adesso dallo stabilire alcune formule fondamentali che ci serviranno in tutta la seguente trattazione.

Sia s una linea qualunque tracciata nell'interno o al contorno della lamina, n la sua normale diretta in modo che la coppia di direzioni ortogonali (s, n) sia congruente nel piano colla coppia (x, y).

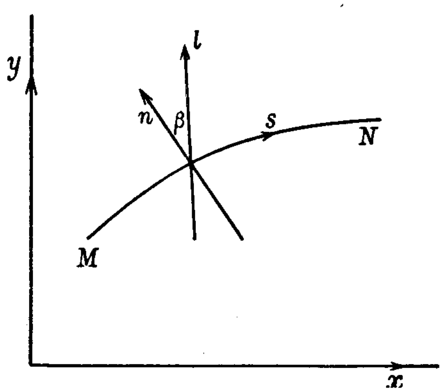


Fig. 1.

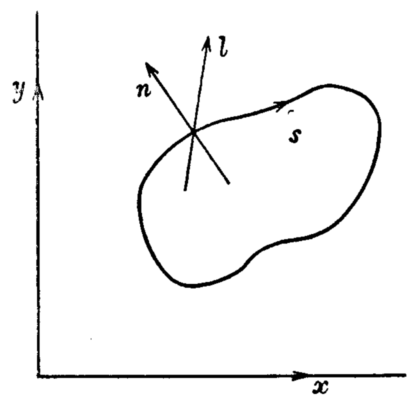


Fig. 2.

Dalle formule (1) seguirà che il flusso di elettricità attraverso ds si esprimerà con

$$j_n\, ds = (j_x \cos nx + j_y \cos ny)\, ds = -\mathrm{K}\left(\frac{\partial V}{\partial n} + \lambda \frac{\partial V}{\partial s}\right) ds = \frac{-\mathrm{K}}{\cos\beta} \frac{\partial V}{\partial l}\, ds ,$$

ove l è una direzione che forma con n l'angolo β. Ed il flusso lungo MN, ossia l'intera linea s, sarà

$$(4) \qquad \int_s j_n\, ds = -\mathrm{K}\int_s \frac{\partial V}{\partial n}\, ds - \lambda \mathrm{K}\,(V_N - V_M) = \frac{-\mathrm{K}}{\cos\beta}\int_s \frac{\partial V}{\partial l}\, ds .$$

Analogamente avremo l'altra formula

$$(5) \qquad \int_s V j_n\, ds = -\mathrm{K}\int_s V \frac{\partial V}{\partial n}\, ds - \frac{\lambda \mathrm{K}}{2}(V_N^2 - V_M^2) = \frac{-\mathrm{K}}{\cos\beta}\int_s V \frac{\partial V}{\partial l}\, ds .$$

Per la validità di queste formule basterà ammettere che, lungo s, V sia finita e le sue derivate prime siano finite o infinite di ordine inferiore ad un numero minore dell'unità [3].

Supponiamo che la linea s sia chiusa. Allora, essendo V *monodroma*, perché ammettiamo che nessuna regione della lamina sia sede di forze elettromotrici, le formule (4) e (5) divengono:

$$\int_s j_n\, ds = -\mathrm{K} \int_s \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial n}\, ds = \frac{-\mathrm{K}}{\cos\beta} \int_s \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial l}\, ds \tag{A}$$

$$\int_s \mathrm{V} j_n\, ds = -\mathrm{K} \int_s \mathrm{V}\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial n}\, ds = \frac{-\mathrm{K}}{\cos\beta} \int_s \mathrm{V}\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial l}\, ds. \tag{B}$$

3. Ciò premesso, supponiamo che la corrente entri lungo la porzione AB del contorno da un elettrodo di resistenza trascurabile, ed esca dalla porzione CD del contorno la quale costituisca pure un elettrodo di resistenza trascurabile, mentre le porzioni del contorno BC e AD siano libere ed isolate.

Avremo lungo AB e CD, rispettivamente,

$$\mathrm{V} = \mathrm{C}_1 \quad , \quad \mathrm{V} = \mathrm{C}_2 ,$$

ove C_1 e C_2 sono costanti; e lungo BC e AD,

$$\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial l} = 0 .$$

Nell'interno dell'area σ occupata dalla lamina, V sarà regolare ed armonica.

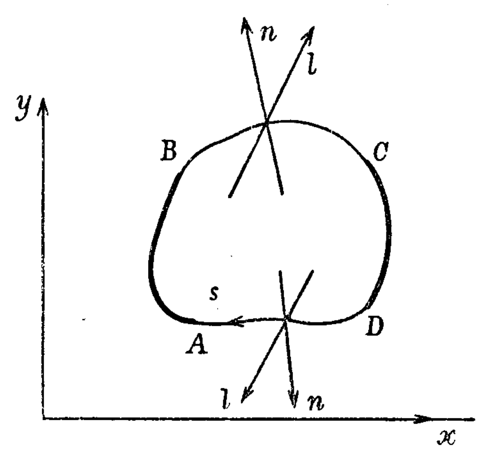


Fig. 3.

Ora, se chiamiamo s l'intero contorno, e supponiamo soddisfatta la condizione precedente circa l'ordine d'infinito delle derivate di V lungo s, avremo, in virtù della (B),

$$\int_{AB} \mathrm{V} j_n\, ds + \int_{CD} \mathrm{V} j_n\, ds = -\mathrm{K} \int_s \mathrm{V}\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial n}\, ds ,$$

giacché, sopra BC e AD, $\partial \mathrm{V}/\partial l = j_n \cos\beta$ è nullo. Quindi

$$\mathrm{C}_1 \int_{AB} j_n\, ds + \mathrm{C}_2 \int_{CD} j_n\, ds = -\mathrm{K} \int_s \mathrm{V}\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial n}\, ds .$$

Chiamando J la intensità totale della corrente che percorre la lamina, sarà

$$\mathrm{J} = \int_{CD} j_n\, ds = -\int_{AB} j_n\, ds ,$$

(3) Qui e nel seguito l'ordine di infinito di una funzione in un punto si ha prendendo come infinito fondamentale la inversa della distanza al punto stesso.

quindi

$$(C_2 - C_1)\,J = -K\int_s V \frac{\partial V}{\partial n}\,ds\,,$$

e, per un noto teorema sulle funzioni armoniche,

$$(C_1 - C_2)\,J = K\int_\sigma \Delta V\,d\sigma\,.$$

Da questa relazione segue che, se $C_1 = C_2 = 0$, V deve essere nulla in tutti i punti di σ, e, per conseguenza, che a dati valori di C_1 e C_2 non può corrispondere che una unica soluzione per V. Abbiamo dunque il teorema:

Noti i valori costanti del potenziale lungo gli elettrodi AB *e* CD, *la distribuzione delle correnti nella lamina è completamente determinata.*

4. Il precedente teorema si estende facilmente. Sia σ un'area nel cui interno la funzione V armonica è regolare, ed s ne sia il contorno. Come conseguenza delle (B) avremo (se, al contorno, V è finita e le sue derivate sono finite o infinite di ordini inferiori ad un numero minore di 1)

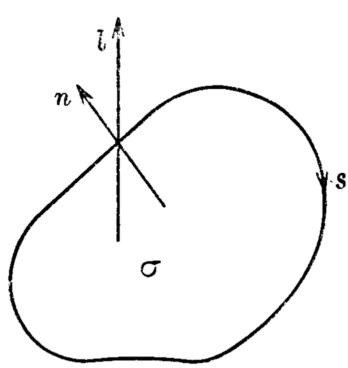


Fig. 4.

$$\int_s V \frac{\partial V}{\partial l}\,ds =$$

$$= \cos\beta \int_s V \frac{\partial V}{\partial n}\,ds = \cos\beta \int_\sigma \Delta V\,d\sigma\,.$$

Quindi, se in certe parti del contorno V è nulla, e nelle rimanenti è nullo il $\partial V/\partial l$, sarà V nulla entro σ: e perciò, se V è nota in certe parti del contorno, e nelle rimanenti è noto il $\partial V/\partial l$, V sarà determinata entro σ. Se lungo tutto il contorno è noto solo il $\partial V/\partial l$, V sarà determinata a meno di una costante. La (A) ci dà la condizione a cui deve soddisfare il $\partial V/\partial l$:

$$\text{(A')} \qquad \int_s \frac{\partial V}{\partial l}\,ds = 0\,.$$

5. Supponiamo, ora, che la corrente entri ed esca dalla lamina attraverso due elettrodi puntiformi A e B. Riprendiamo la formula (A), e supponiamo, dapprima, che la linea s sia una linea s_a che circondi il punto A. Chiamando J l'intensità della corrente, e supponendo n esterna allo spazio racchiuso da s_a, avremo

$$J = \int_{s_a} j_n\,ds_a = -K\int_{s_a} \frac{\partial V}{\partial n}\,ds_a\,;$$

mentre, se chiamiamo s_b una linea che circondi il punto B, e n è la normale esterna allo spazio racchiuso da s_b, avremo

$$-J=\int_{s_b} j_n\, ds_b = -K\int_{s_b}\frac{\partial V}{\partial n}\, ds_b\,.$$

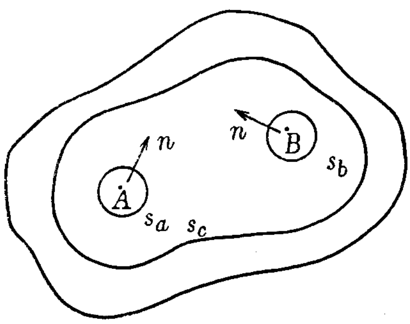


Fig. 5.

Prendendo invece una linea s_c che abbia nell'interno A e B o escluda ambedue questi punti, avremo

$$o=\int_{s_c} j_n\, ds_c = -K\int_{s_c}\frac{\partial V}{\partial n}\, ds_c\,.$$

Dunque, nella suddetta ipotesi, noi dovremo porre

$$V=\frac{J}{2\pi K}(\log r_B - \log r_A)+W, \tag{6}$$

essendo W armonica regolare, e r_A ed r_B essendo le distanze del punto generico $x\,,y$ da A e da B, e dovremo porre al contorno dell'area σ la condizione

$$\frac{\partial V}{\partial l}=o\,, \tag{7}$$

ossia

$$\frac{\partial W}{\partial l}=\frac{\partial}{\partial l}\left[\frac{J}{2\pi K}(\log r_A - \log r_B)\right]. \tag{7'}$$

Ne segue che il problema della distribuzione delle correnti è ricondotto alla determinazione della funzione armonica regolare W, di cui al contorno si conoscono i valori di $\partial W/\partial l$ dati dalla (7′). È facile il riconoscere che la condizione (A′) del § 4 è soddisfatta. W risulterà determinata a meno di una costante arbitraria additiva, la quale evidentemente non ha influenza sulla legge della distribuzione delle correnti.

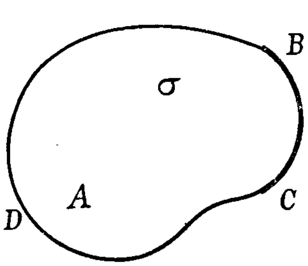


Fig. 6.

6. Supponiamo invece che la corrente entri da un elettrodo puntiforme A ed esca da un elettrodo BC posto al contorno e di resistenza trascurabile.

Sia J la intensità della corrente. In tale ipotesi si riconosce facilmente, con un procedimento analogo a quello tenuto nel paragrafo precedente, che si deve porre

$$V=-\frac{J}{2\pi K}\log r_A + W\,,$$

ove W è una funzione armonica regolare nell'interno di σ. Lungo la porzione libera ed isolata BDC del contorno, si dovrà avere

$$\frac{\partial W}{\partial l}=\frac{\partial}{\partial l}\left[\frac{J}{2\pi K}\log r_A\right],$$

e, lungo BC,

$$W = C + \frac{J}{2\pi K} \log r_A,$$

ove C è il valore costante che deve assumere V lungo l'elettrodo BC. Quindi, se la funzione W è finita, e le sue derivate lungo s sono finite o infinite di ordine inferiore ad un numero minore di 1, essa sarà determinata entro σ (cfr. § 4) e perciò sarà determinata la legge della distribuzione delle correnti.

7. Riterremo, come si suol fare ordinariamente, che, se da un elettrodo esce una corrente di intensità J, ciò sia equivalente a dire che vi entra una corrente di intensità —J. Se dunque abbiamo un elettrodo puntiforme da cui entra la corrente I (qualunque sia il suo segno), nell'intorno di esso il potenziale sarà

$$V = -\frac{I}{2\pi K} \log r + W,$$

ove r è la distanza del punto generico x, y dall'elettrodo e W è una funzione armonica regolare nell'intorno del punto. La parte del potenziale

$$-\frac{I}{2\pi K} \log r = \frac{I}{2\pi K} \log \frac{1}{r}$$

si dirà il *potenziale dell'elettrodo* e sarà il potenziale logaritmico di un punto di massa $I/(2\pi K)$.

8. Stabiliamo adesso alcune altre formule fondamentali, da aggiungersi a quelle trovate nel § 2.

Immaginiamo di invertire il senso del campo magnetico, ossia cambiamo H in —H. Per distinguere i due casi, diremo che, nel primo, il campo magnetico è *diretto*, e nel secondo il campo magnetico è *invertito*. Dalle formule (2) e (3) segue che K rimane inalterato, mentre λ cambia segno, ossia cambia segno l'angolo β, e, per conseguenza, la direzione l si cangia nella direzione simmetrica rispetto alla normale n, che chiameremo l_1. Se diamo un indice 1 a tutti gli elementi corrispondenti a questo caso, dovremo scrivere le formule

$$j_{1,x} = -K\left(\frac{\partial V_1}{\partial x} + \lambda \frac{\partial V_1}{\partial y}\right)$$

$$j_{1,y} = -K\left(\frac{\partial V_1}{\partial y} - \lambda \frac{\partial V_1}{\partial x}\right),$$

ed avremo

$$\frac{\partial V_1}{\partial l_1} = 0$$

lungo le porzioni del contorno libere ed isolate.

Sia ora una linea qualunque $s = MN$ interna o al contorno di σ, come abbiamo considerato nel § 2. Sarà

$$V_1 j_n - V j_{1n} = V_1 (j_x \cos nx + j_y \cos ny) - V (j_{1x} \cos nx + j_{1y} \cos ny) =$$

$$= -K\left[V_1\left(\frac{\partial V}{\partial n} + \lambda \frac{\partial V}{\partial s}\right) - V\left(\frac{\partial V_1}{\partial n} - \lambda \frac{\partial V_1}{\partial s}\right)\right] =$$

$$= -K\left(V_1 \frac{\partial V}{\partial n} - V \frac{\partial V_1}{\partial n}\right) - \lambda K \frac{\partial (VV_1)}{\partial s} = \frac{-K}{\cos\beta}\left(V_1 \frac{\partial V}{\partial l} - V \frac{\partial V_1}{\partial l_1}\right)$$

e, integrando a tutta la linea s,

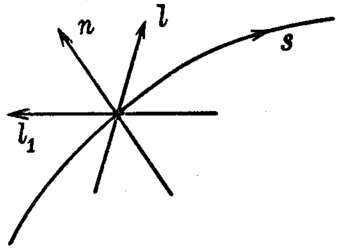


Fig. 7.

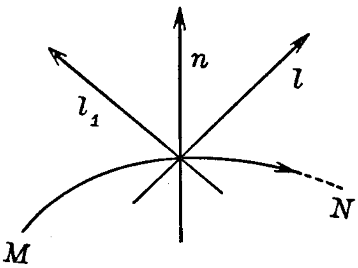


Fig. 8.

$$\int_s (V_1 j_n - V j_{1n})\, ds = -K \int_s \left(V_1 \frac{\partial V}{\partial n} - V \frac{\partial V_1}{\partial n}\right) ds - \lambda K\left[(VV_1)_N - (VV_1)_M\right] =$$

$$= \frac{-K}{\cos\beta} \int_s \left(V_1 \frac{\partial V}{\partial l} - V \frac{\partial V_1}{\partial l_1}\right) ds.$$

Se la linea s sarà chiusa, risulterà

$$\text{(C)} \qquad \int_s (V_1 j_n - V j_{1n})\, ds = -K \int_s \left(V_1 \frac{\partial V}{\partial n} - V \frac{\partial V_1}{\partial n}\right) ds =$$

$$= \frac{-K}{\cos\beta} \int_s \left(V_1 \frac{\partial V}{\partial l} - V \frac{\partial V_1}{\partial l_1}\right) ds.$$

È questa appunto una delle formule che conveniva stabilire.

Essa è suscettibile di estensione. Infatti, denotiamo con S non già una sola linea chiusa ma un insieme di linee chiuse le quali formino il contorno di un campo σ' interno a σ. Siccome per ciascuna linea chiusa vale la formula precedente, così essa varrà anche sostituendo ad s l'insieme S; e se, entro l'area σ', V e V_1 saranno regolari, si avrà prendendo n esterna al campo σ'

$$\text{(D)} \qquad \int_S (V_1 j_n - V j_{1n})\, dS = \frac{-K}{\cos\beta} \int_S \left(V_1 \frac{\partial V}{\partial l} - V \frac{\partial V_1}{\partial l_1}\right) dS = 0,$$

giacché, per il lemma di GREEN, si ha

$$\int_S \left(V_1 \frac{\partial V}{\partial n} - V \frac{\partial V_1}{\partial n}\right) dS = 0.$$

Supponiamo che S sia formato dall'insieme di linee chiuse S' e dall'insieme di linee chiuse S''; allora la formula (D) si potrà ancora scrivere

$$\text{(D')} \qquad \frac{1}{\cos\beta} \int_{S'} \left(V_1 \frac{\partial V}{\partial l} - V \frac{\partial V_1}{\partial l_1}\right) dS' + \int_{S''} \left(V_1 \frac{\partial V}{\partial n} - V \frac{\partial V_1}{\partial n}\right) dS'' = 0.$$

Le formule (D) e (D′), che abbiamo trovato, costituiscono delle estensioni del lemma di GREEN.

9. Passiamo ad alcune applicazioni delle formule precedenti.

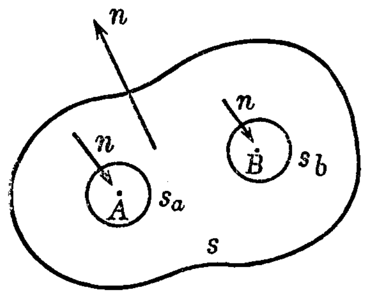


Fig. 9.

Prendiamo V data dalla (6) colla condizione (7), e supponiamo di prendere per S′ il contorno s di σ, e per S″ due cerchi s_a e s_b aventi i centri in A e B. Supponiamo V_1 regolare entro σ. L'area σ' si ottiene togliendo da σ le aree incluse entro s_a e s_b; quindi sarà limitata da s, s_a e s_b. In σ', V e V_1 sono regolari: onde, applicando la (D′), tenendo conto che, su s, $\partial V/\partial l = 0$, risulterà

$$\frac{-1}{\cos\beta}\int_s V\frac{\partial V_1}{\partial l_1}\,ds + \int_{s_a}\left(V_1\frac{\partial V}{\partial n} - V\frac{\partial V_1}{\partial n}\right)ds_a + \int_{s_b}\left(V_1\frac{\partial V}{\partial n} - V\frac{\partial V_1}{\partial n}\right)ds_b = 0.$$

Ma, facendo impiccolire indefinitamente i cerchi s_a e s_b, si vede che

$$\lim\int_{s_a}\left(V_1\frac{\partial V}{\partial n} - V\frac{\partial V_1}{\partial n}\right)ds_a = \frac{J}{K}V_{1,A}$$

$$\lim\int_{s_b}\left(V_1\frac{\partial V}{\partial n} - V\frac{\partial V_1}{\partial n}\right)ds_b = -\frac{J}{K}V_{1,B},$$

ove $V_{1,A}$ e $V_{1,B}$ denotano i valori di V_1 nei punti A e B; quindi

$$V_{1,A} - V_{1,B} = \frac{K}{J\cos\beta}\int_s V\frac{\partial V_1}{\partial l_1}\,ds.$$

Da questa formula si deduce la proposizione seguente:

Se si conosce la distribuzione delle correnti in una lamina, quando la corrente entra da A *ed esce da* B, *ed il campo magnetico è diretto, si potrà determinare la differenza dei valori di una funzione armonica regolare nei punti* A *e* B *allorché si conosce al contorno la sua derivata nella direzione* l_1.

Evidentemente sussiste anche l'altra proposizione:

Se si conosce la distribuzione delle correnti in una lamina, quando la corrente entra da A *ed esce da* B, *ed il campo magnetico è invertito, si potrà determinare la differenza dei valori di una funzione armonica regolare nei punti* A *e* B *allorché si conosce al contorno la sua derivata nella direzione* l.

In altri termini, il potenziale V, corrispondente ad un *campo magnetico diretto* e ai due elettrodi puntiformi A e B, è una *funzione analoga a quella di* GREEN per il caso in cui si conoscono al contorno *i valori della derivata di una funzione armonica regolare nella direzione* l_1; mentre il potenziale corrispondente ad un *campo magnetico invertito* e ai due elettrodi puntiformi A e B, è una *funzione analoga a quella di* GREEN, per il caso in cui si conoscono al contorno i *valori della derivata di una funzione armonica regolare nella direzione l.*

10. Ritorniamo al caso del § 6 e supponiamo che sia C = 0. Sia V_1 una funzione armonica regolare entro σ. Prendiamo per S′ il contorno s della lamina e per S″ una circonferenza s_a avente il centro in A. Applicando la formula (D′) risulterà

$$\frac{1}{\cos\beta}\int_{BDC} V\frac{\partial V_1}{\partial l_1}ds - \frac{1}{\cos\beta}\int_{BC} V_1\frac{\partial V}{\partial l}ds - \int_{s_a}\left(V_1\frac{\partial V}{\partial n} - V\frac{\partial V_1}{\partial n}\right)ds_a = 0$$

e facendo impiccolire indefinitamente il cerchio s_a

$$V_{1,A} = \frac{K}{J\cos\beta}\int_{BDC} V\frac{\partial V_1}{\partial l_1}ds - \frac{K}{J\cos\beta}\int_{BC} V_1\frac{\partial V}{\partial l}ds.$$

Dunque, *se si conosce la distribuzione delle correnti quando la corrente entra da* A *e esce dall'elettrodo* BC *ed il campo magnetico è diretto, si potrà determinare il valore in* A *di una funzione armonica regolare allorché se ne conosce il valore lungo* BC *e si conosce lungo* BDC *il valore della derivata nella direzione* l_1.

Analoga proposizione si ha quando il campo magnetico è invertito.

11. Prendiamo ora V data dalle (6) colla condizione (7), e V_1 dato da

$$V_1 = \frac{J_1}{2\pi K}(\log r_{B_1} - \log r_{A_1}) + W_1,$$

ove W_1 è una funzione armonica regolare entro σ, A_1 e B_1 sono due nuovi punti scelti in questo campo, e si ha

$$\frac{\partial V_1}{\partial l_1} = 0$$

lungo il contorno s di σ. Supponiamo che S′ sia il contorno s, e S″ l'insieme dei quattro cerchi s_a, s_b, s_{a_1}, s_{b_1}, aventi rispettivamente i centri in A, B, A_1 e B_1.

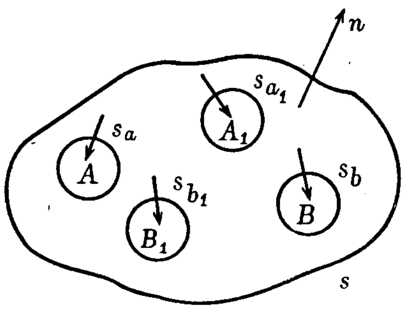


Fig. 10.

L'area σ' si otterrà togliendo da σ le aree racchiuse entro i quattro cerchi. In σ', V e V_1 sono regolari; onde, applicando la (D′) e tenendo conto che, su s, $\partial V/\partial l = \partial V_1/\partial l_1 = 0$, risulterà

$$\int_{s_a}\left(V_1\frac{\partial V}{\partial n} - V\frac{\partial V_1}{\partial n}\right)ds_a + \int_{s_b}\left(V_1\frac{\partial V}{\partial n} - V\frac{\partial V_1}{\partial n}\right)ds_b +$$

$$+\int_{s_{a_1}}\left(V_1\frac{\partial V}{\partial n} - V\frac{\partial V_1}{\partial n}\right)ds_{a_1} + \int_{s_{b_1}}\left(V_1\frac{\partial V}{\partial n} - V\frac{\partial V_1}{\partial n}\right)ds_{b_1} = 0.$$

Ora, facendo impiccolire indefinitamente i quattro cerchi, si ha facilmente

$$\lim \int_{s_a} \left(V_1 \frac{\partial V}{\partial n} - V \frac{\partial V_1}{\partial n}\right) ds_a = + \frac{J}{K} V_{1,A}$$

$$\lim \int_{s_b} \left(V_1 \frac{\partial V}{\partial n} - V \frac{\partial V_1}{\partial n}\right) ds_b = - \frac{J}{K} V_{1,B}$$

$$\lim \int_{s_{a_1}} \left(V_1 \frac{\partial V}{\partial n} - V \frac{\partial V_1}{\partial n}\right) ds_{a_1} = - \frac{J_1}{K} V_{A_1}$$

$$\lim \int_{s_{b_1}} \left(V_1 \frac{\partial V}{\partial n} - V \frac{\partial V_1}{\partial n}\right) ds_{b_1} = + \frac{J_1}{K} V_{B_1},$$

quindi

$$J\,(V_{1,B} - V_{1,A}) = J_1\,(V_{B_1} - V_{A_1});$$

e, se le intensità J e J_1 delle correnti sono eguali,

$$V_{1,B} - V_{1,A} = V_{B_1} - V_{A_1}.$$

Da cui segue la seguente legge di reciprocità:

Se in una lamina conduttrice si fa passare una corrente di intensità J *sotto l'azione di un certo campo magnetico, e in due punti* A_1 *e* B_1 *si ha una differenza di potenziale, otterremo la stessa differenza fra i potenziali dei punti* A *e* B *quando si faccia entrare da* A_1 *e uscire da* B_1 *la stessa corrente d'intensità* J *e si inverta il campo magnetico.*

Ho dato nel 1882 una legge di reciprocità che è un caso particolare della precedente, giacché corrisponde al caso di correnti elettriche senza l'azione del campo magnetico. Debbo osservare, peraltro, che allora non era posta la condizione di omogeneità pel conduttore [4].

12. Supponiamo che al contorno della lamina esistano gli elettrodi $A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, A_4B_4, \cdots$ di resistenza trascurabile e le altre parti siano libere ed isolate. Supponiamo inoltre che non esista alcun elettrodo interno. Siano $J^{(1)}, J^{(2)}, J^{(3)}, J^{(4)}, \cdots$ le intensità delle correnti che entrano da questi elettrodi, $C^{(1)}, C^{(2)}, C^{(3)}, C^{(4)}, \cdots$ i valori del potenziale V sopra di essi quando il campo magnetico è diretto. Siano poi $J_1^{(1)}, J_1^{(2)}, J_1^{(3)}, J_1^{(4)}, \cdots$; $C_1^{(1)}, C_1^{(2)}, C_1^{(3)}, C_1^{(4)}, \cdots$; V_1, le corrispondenti quantità quando il campo magnetico è invertito. Avremo evidentemente

$$\Sigma_h\, J^{(h)} = \Sigma_h\, J_1^{(h)} = 0,$$

come del resto risulta dalla formula (A).

(4) *Sopra una legge di reciprocità nella distribuzione delle temperature e delle correnti galvaniche costanti in un corpo qualunque*, «Nuovo Cimento», ser. III, vol. XI, 1882, p. 188. [In queste «Opere», vol. primo, V, pp. 95–96].

Applichiamo ora la formula (D) prendendo per S il contorno s della lamina. Avremo

$$0 = \Sigma_h \int_{A_h B_h} (V_1 j_n - V j_{1,n})\, ds = \Sigma_h (C^{(h)} J_1^{(h)} - C_1^{(h)} J^{(h)})$$

e quindi

$$\Sigma_h C_1^{(h)} J^{(h)} = \Sigma_h C^{(h)} J_1^{(h)}.$$

Se le $J^{(h)}$ sono tutte nulle escluse $J^{(1)}$ e $J^{(2)}$ e le $J_1^{(h)}$ sono pure tutte nulle escluse $J_1^{(3)}$ e $J_1^{(4)}$, avremo

$$J^{(1)} = -J^{(2)} = I$$
$$J_1^{(3)} = -J_1^{(4)} = I_1$$

onde

$$(C_1^{(1)} - C_1^{(2)})\, I = (C^{(3)} - C^{(4)})\, I_1$$

e se, $I = I_1$,

$$C_1^{(1)} - C_1^{(2)} = C^{(3)} - C^{(4)}.$$

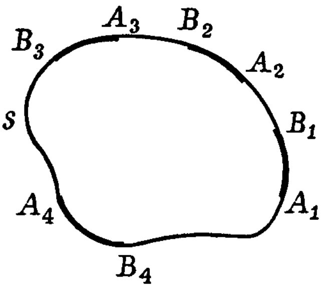


Fig. 11.

Queste ultime formule costituiscono dei nuovi teoremi di reciprocità di facile interpretazione (cfr. coi risultati del § 28).

13. Si può immaginare finalmente che nel caso del campo magnetico diretto, oltre gli elettrodi al contorno A_1B_1, A_2B_2, ··· si abbiano degli elettrodi puntiformi interni $M^{(1)}$, $M^{(2)}$, $M^{(3)}$, ··· da cui entrino delle correnti di intensità $I^{(1)}$, $I^{(2)}$, $I^{(3)}$, ··· e, nel caso del campo magnetico invertito, in luogo dei precedenti, altri elettrodi puntiformi interni $M_1^{(1)}$, $M_1^{(2)}$, $M_1^{(3)}$, ··· da cui entrino delle correnti di intensità $I_1^{(1)}$, $I_1^{(2)}$, $I_1^{(3)}$, ···. Sarà allora

$$\Sigma_h J^{(h)} + \Sigma_k I^{(k)} = \Sigma_h J_1^{(h)} + \Sigma_{k_1} I_1^{(k_1)} = 0$$

e

$$\Sigma_h C_1^{(h)} J^{(h)} + \Sigma_k V_1^{(k)} I^{(k)} = \Sigma_h C^{(h)} J_1^{(h)} + \Sigma_{k_1} V^{(k_1)} I_1^{(k_1)},$$

ove $V_1^{(k)}$ denotano i valori del potenziale V_1 nei punti $M^{(k)}$, e $V^{(k_1)}$ i valori del potenziale V nei punti $M_1^{(k_1)}$.

14. Riprendiamo le formule (1), e denotiamo con V′ la funzione coniugata delle V [5], tale cioè che

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial V'}{\partial y} \quad , \quad \frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{\partial V'}{\partial x};$$

(5) Essa sarà determinata a meno di una costante arbitraria additiva.

allora le (1) potranno scriversi

$$(1')\qquad \begin{cases} j_x = -\,K \dfrac{\partial (V + \lambda V')}{\partial x} \\ j_y = -\,K \dfrac{\partial (V + \lambda V')}{\partial y}, \end{cases}$$

onde, posto $V + \lambda V' = U$, avremo

$$(1'')\qquad j_x = -\,K \frac{\partial U}{\partial x} \quad , \quad j_y = -\,K \frac{\partial U}{\partial y}.$$

Lungo le porzioni del contorno libere ed isolate sarà

$$\frac{\partial U}{\partial n} = 0\,;$$

e in tutta l'area interna sarà $\Delta^2 U = 0$.

Dunque *la distribuzione delle correnti nella lamina avviene come se non vi fosse il campo magnetico, ma il potenziale fosse* U *anziché* V, *e la conducibilità fosse eguale a* K. Siccome K è costante, così le linee di corrente sono indipendenti da K.

La funzione U si chiamerà la *funzione fondamentale della distribuzione delle correnti nella lamina*, o, più semplicemente, la *funzione fondamentale*. Essa non coincide col *potenziale*, altro che se il campo magnetico è nullo. Allorché si conosce il potenziale V, per ottenere U basta la operazione

$$(E)\qquad U = V + \lambda V' = \frac{V \cos\beta + V' \operatorname{sen}\beta}{\cos\beta}.$$

Risolviamo adesso il problema di *calcolare il potenziale quando si conosce la funzione fondamentale*.

Faremo, come precedentemente, uso dell'aggiunta di un apice per denotare la funzione coniugata di una funzione armonica data. Quindi

$$(8)\qquad U' = V' - \lambda V\,;$$

onde, tenendo conto della (E), risulterà

$$(E')\qquad V = \frac{U - \lambda U'}{1 + \lambda^2} = (U \cos\beta - U' \operatorname{sen}\beta)\cos\beta\,.$$

Il problema propostoci è quindi risoluto.

Se poniamo

$$x + iy = z \quad , \quad U + iU' = f(z) \quad , \quad V + iV' = \varphi(z)\,,$$

avremo

$$(E'')\qquad f(z) = \frac{e^{-i\beta}}{\cos\beta}\,\varphi(z).$$

Nota II.

Ibidem pp. 289-303.

15. La funzione coniugata di $\log r_A$ è θ_A, denotando con questo simbolo l'angolo che il raggio vettore spiccato dal punto A forma con una direzione fissa; $-m\,\theta_A/(2\pi)$ è il potenziale di un vortice situato in A, di momento m[6]. Quindi, se si ha in A un elettrodo puntiforme da cui entra la corrente J, il corrispondente potenziale sarà (§ 7)

$$-\frac{J}{2\pi K}\log r_A,$$

e la corrispondente funzione fondamentale

$$-\frac{J}{2\pi K}(\log r_A+\lambda\theta_A)=\frac{J}{2\pi K}\log\frac{1}{r_A}-\frac{\lambda J}{2\pi K}\theta_A;$$

dunque *la funzione fondamentale corrispondente ad un elettrodo puntiforme in* A, *ove entra la corrente di intensità* J, *è il potenziale logaritmico di una massa* $J/(2\pi K)$ *e di un vortice di momento* $\lambda J/K$ *situato nel punto* A.

Questo risultato può enunciarsi dicendo che l'azione del campo magnetico sulla distribuzione delle correnti si esplica, modificando la funzione fondamentale, coll'aggiungere ad ogni elettrodo un vortice il cui momento è eguale alla intensità moltiplicata per λ e divisa per K, mentre si mantiene nulla la derivata normale della funzione fondamentale nei punti del contorno libero ed isolato [7].

La funzione θ_A è polidroma: quindi la funzione fondamentale è una funzione polidroma, la quale ha per punti di diramazione gli elettrodi. Dunque, mentre il potenziale è monodromo, e gli elettrodi puntiformi sono i punti di infinito logaritmico, la funzione fondamentale ha negli elettrodi punti di infinito logaritmico e di diramazione.

16. Supponiamo, adesso, che la lamina sia circolare, e la corrente entri ed esca da elettrodi puntiformi interni. Cerchiamo di calcolare l'effetto del contorno C (che è di render nulla la derivata normale della funzione fondamentale) coll'aggiunta di masse e di vortici immagini distribuiti nei punti reciproci degli elettrodi interni rispetto al contorno.

(6) Supposta l'orientazione degli assi x e y come è indicata nella figura 1 del § 2, noi supponiamo di contare l'angolo θ_A nel senso contrario a quello secondo cui ruotano le lancette di un orologio, mentre ammettiamo che un vortice di momento positivo ruoti nel verso delle lancette di un orologio.

(7) L'aggiunta del vortice per l'azione del campo magnetico risulta ben naturale quando si pensi all'azione deviatrice prodotta dal campo stesso sul moto degli elettroni nell'intorno dell'elettrodo.

Sia A_1 il punto reciproco dell'elettrodo A. Se in A_1 disponiamo una massa $J/(2\pi K)$, il potenziale logaritmico delle due masse $J/(2\pi K)$ distribuite in A e A_1 avrà la derivata normale lungo C eguale a

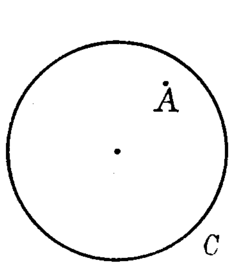


Fig. 12.

$$-\frac{J}{2\pi KR},$$

essendo R il raggio del contorno; e se in A_1 disponiamo un vortice di momento

$$-\frac{\lambda J}{K},$$

il potenziale dei due vortici di momenti $-\lambda J/K$ e $\lambda J/K$ disposti in A_1 e A avrà la derivata normale nulla al contorno.

Tenendo presente che le somme algebriche delle intensità delle correnti che entrano dai varî elettrodi interni è nulla, si otterrà dunque, come espressione della funzione fondamentale,

$$U = -\Sigma \frac{J}{2\pi K} \{\log r_A + \log r_{A_1} + \lambda\theta_A - \lambda\theta_{A_1}\}, \tag{9}$$

essendo estesa la somma a tutti gli elettrodi interni.

La espressione stessa può scriversi:

$$U = -\Sigma \frac{J}{2\pi K} (\log r_A + \lambda\theta_A) + \psi,$$

ove

$$\psi = -\Sigma \frac{J}{2\pi K} (\log r_{A_1} - \lambda\theta_{A_1});$$

ed evidentemente ψ è regolare entro l'area occupata dalla lamina, giacché i punti di infinito e di diramazione sono tutti esterni all'area stessa.

Il risultato ottenuto può enunciarsi nei termini seguenti:

La distribuzione delle correnti che entrano ed escono da elettrodi puntiformi in una lamina circolare soggetta ad un campo magnetico, è quella stessa che si avrebbe sopprimendo il campo magnetico, rendendo indefinita la lamina ed aggiungendo ad ogni elettrodo ove la intensità è J *un vortice di momento* $\lambda J/K$; *inoltre aggiungendo, nel punto reciproco di ciascun elettrodo interno, un elettrodo immagine ove la intensità è la stessa, ed un vortice immagine del vortice interno di momento invertito.*

17. Poiché abbiamo calcolato, mediante la formula (9), la funzione fondamentale della distribuzione delle correnti, così, applicando la regola (E'), possiamo ricavare dalla espressione ottenuta il potenziale.

Cominciamo dall'esprimere la funzione coniugata di U. Questa sarà

$$U' = -\Sigma \frac{J}{2\pi K} (\theta_A + \theta_{A_1} - \lambda \log r_A + \lambda \log r_{A_1}),$$

e perciò il potenziale risulterà

$$(10)\qquad V = \frac{U - \lambda U'}{1 + \lambda^2} = -\Sigma \frac{J}{2\pi K}\left(\log r_A + \frac{1-\lambda^2}{1+\lambda^2}\log r_{A_1} - \frac{2\lambda}{1+\lambda^2}\theta_{A_1}\right).$$

Ora, poiché $\lambda = \operatorname{tg}\beta$, abbiamo

$$\frac{1-\lambda^2}{1+\lambda^2} = \cos 2\beta \quad , \quad \frac{2\lambda}{1+\lambda^2} = \operatorname{sen} 2\beta ,$$

quindi

$$(10')\qquad V = -\Sigma \frac{J}{2\pi K}(\log r_A + \cos 2\beta \cdot \log r_{A_1} - \operatorname{sen} 2\beta \cdot \theta_{A_1}).$$

Questa espressione può scriversi

$$(10'')\qquad V = -\Sigma \frac{J}{2\pi K}\log r_A + \varphi ,$$

ove

$$(10_a)\qquad \varphi = -\Sigma \frac{J}{2\pi K}(\cos 2\beta \cdot \log r_{A_1} - \operatorname{sen} 2\beta \cdot \theta_{A_1}).$$

Il primo termine delle (10″) è il potenziale degli elettrodi, ed il secondo termine φ è una funzione regolare nell'area occupata dalla lamina, giacché i punti di infinito e di diramazione sono esterni.

Il risultato conseguito può enunciarsi nei termini seguenti:

Se in una lamina circolare, soggetta ad un campo magnetico, le correnti entrano ed escono da elettrodi puntiformi, il potenziale si otterrà aggiungendo a quello di ciascun elettrodo ove la intensità è J *il potenziale di un elettrodo immagine situato nel punto reciproco, ove la intensità è* $J \cos 2\beta$, *e quello di un vortice pure disposto nel punto reciproco, di momento* $-(J \operatorname{sen} 2\beta)/K$.

18. Esistono dunque *due diversi principii delle immagini* nel caso in cui la lamina è soggetta al campo magnetico, uno dei quali è relativo alla distribuzione delle correnti e quindi alla *funzione fondamentale*, e l'altro al *potenziale elettrico.*

19. Questi stessi risultati possono ottenersi molto facilmente adoperando le funzioni di variabili complesse introdotte alla fine del § 14. Osserviamo che se a ed a' denotano gl'indici di due punti reciproci rispetto ad un cerchio nel piano complesso $z = x + iy$ e $\Sigma M = 0$, essendo le M e la m reali, si ha che la funzione

$$(11)\qquad e^{im}\Sigma M \log(z - a) - e^{-im}\Sigma M \log(z - a')$$

ha la parte reale costante sulla periferia del cerchio, e

$$(11')\qquad e^{im}\Sigma M \log(z - a) + e^{-im}\Sigma M \log(z - a')$$

ha costante la parte immaginaria.

Ora se denotiamo con a gl'indici degli elettrodi puntiformi il potenziale degli elettrodi è la parte reale della funzione di variabile complessa

$$\varphi = -\Sigma \frac{J}{2\pi K}\log(z - a),$$

quindi in virtù della (E'') la corrispondente funzione fondamentale sarà la parte reale di

$$f = \frac{-e^{-i\beta}}{\cos\beta} \Sigma \frac{J}{2\pi K} \log(z-a).$$

Tenendo conto del contorno circolare, la funzione fondamentale dovrà risultare quindi, a cagione della (11'), come parte reale di

$$F = -\Sigma \frac{J}{2\pi K \cos\beta} \left(e^{-i\beta} \log(z-a) + e^{i\beta} \log(z-a')\right),$$

e per conseguenza, per la (E''), il potenziale elettrico sarà la parte reale di

$$\Phi = -\Sigma \frac{J}{2\pi K} \left(\log(z-a) + e^{2i\beta} \log(z-a')\right),$$

da cui risultano immediatamente le formule (9) e (10).

20. Noi abbiamo fin qui supposto che gli elettrodi puntiformi fossero interni, ammettiamo ora che vadano al contorno. Basterà nelle formule (9) e (10) supporre coincidenti i punti A e A_1, ossia

$$\log r_A = \log r_{A_1} \quad , \quad \theta_A = \theta_{A_1} ,$$

e perciò avremo

$$U = -\Sigma \frac{J}{\pi K} \log r_A$$

$$V = -\Sigma \frac{J}{\pi K} (\cos\beta \cdot \log r_A - \operatorname{sen}\beta \cdot \theta_A) \cos\beta .$$

Ne segue che, se gli elettrodi puntiformi sono al contorno, il campo magnetico non altera la distribuzione delle correnti, mentre altera il potenziale elettrico.

21. Se gli elettrodi sono due A e B, le formule (9) e (10) divengono

$$U = \frac{J}{2\pi K} \left(\log\left(\frac{r_B r_{B_1}}{r_A r_{A_1}}\right) + \lambda(\Omega_{AB} - \Omega_{A_1 B_1})\right),$$

$$V = \frac{J}{2\pi K} \log\left(\frac{r_B r_{B_1}}{r_A r_{A_1}}\right) - \frac{J}{\pi K} \operatorname{sen}\beta \left(\log\left(\frac{r_{B_1}}{r_{A_1}}\right) \operatorname{sen}\beta + \Omega_{A_1 B_1} \cos\beta\right),$$

ove $\Omega_{AB} = \theta_B - \theta_A$, $\Omega_{A_1 B_1} = \theta_{B_1} - \theta_{A_1}$ sono gli angoli sotto cui si vedono dal punto generico x, y le due coppie di punti A, B e A_1, B_1.

Se i due elettrodi sono al contorno, allora

$$U = \frac{J}{\pi K} \log \frac{r_B}{r_A} \quad , \quad V = \frac{J}{\pi K} \left(\cos\beta \cdot \log \frac{r_B}{r_A} - \operatorname{sen}\beta \cdot \Omega_{AB}\right) \cos\beta .$$

22. Allorché gli elettrodi sono puntiformi il problema è quindi risoluto completamente nel caso in cui la lamina è circolare. Per conseguenza esso si risolverà anche in tutti i casi in cui *l'area occupata dalla lamina sarà rappresentabile conformemente in un cerchio.*

23. Consideriamo il caso in cui gli elettrodi puntiformi sono al contorno; allora, *comunque sia la forma della lamina, purché essa sia semplicemente connessa, la distribuzione delle correnti non viene alterata dall'azione del campo magnetico.* Ciò dipende dal risultato ottenuto nel caso del cerchio (§ 20) e trasportato in un campo generale semplicemente connesso mediante la rappresentazione conforme, e può ricavarsi anche direttamente dalle condizioni a cui deve soddisfare U (§ 14).

Infatti, se il campo è semplicemente connesso e gli elettrodi puntiformi sono al contorno, U è monodromo; al contorno $\partial U/\partial n = 0$; inoltre, se con un arco di curva qualunque ε stacchiamo la regione ove esiste l'elettrodo dalla rimanente area della lamina, deve aversi

$$\int_{\varepsilon} \frac{\partial U}{\partial n} d\varepsilon = -\frac{J}{K},$$

ove J è l'intensità della corrente che esce dall'elettrodo. Quindi, se le intensità delle correnti non vengono alterate, U non può differire dal potenziale elettrico nel caso in cui manchi il campo magnetico se non per un fattore costante di proporzionalità eguale al rapporto delle conducibilità della lamina prima e dopo l'azione del campo magnetico.

Chiameremo questa proposizione il *principio degli elettrodi puntiformi al contorno.* Evidentemente, se la lamina non è semplicemente connessa, la sua area non è rappresentabile conformemente nel cerchio, né può dirsi che U deve essere monodroma; quindi le dimostrazioni date non valgono più in questo caso, e difatti la proposizione precedente in generale non è vera quando la lamina non è semplicemente connessa (cfr. § 32).

24. Da quanto è stato trovato nel paragrafo precedente risulta che *se noi conosciamo la legge della distribuzione delle correnti in una lamina qualunque semplicemente connessa non soggetta al campo magnetico, allorché gli elettrodi puntiformi sono al contorno, potremo conoscere* U *onde, applicando la regola del* § 14, *data mediante la* (E'), *potremo avere il potenziale elettrico nel caso in cui agisce il campo magnetico.*

Per esempio: se una lamina rettangolare non è soggetta al campo magnetico noi sappiamo esprimere (secondo i calcoli del BETTI) [8], mediante la funzione ellittica $\Delta\, am$, la distribuzione delle correnti allorché gli elettrodi sono nei punti di mezzo di due lati opposti; applicando dunque le precedenti considerazioni potremo risolvere l'analogo problema quando la lamina è soggetta ad un campo magnetico.

25. Abbiansi delle correnti di date intensità che entrano ed escono in una lamina da elettrodi puntiformi al contorno. Supponiamo di non alterare le intensità stesse allorché si assoggetta la lamina (supposta semplicemente connessa) al campo magnetico.

(8) BETTI, «Opere», vol. II, p. 267.

Se u è la funzione fondamentale prima che esista il campo e U quando esiste il campo magnetico, avremo

$$U = \rho u ,$$

ove ρ è il rapporto delle conducibilità della lamina nei due casi, quindi per la regola (E′), indicando sempre con un apice la funzione coniugata di una funzione data armonica,

$$V = \rho \frac{u - \lambda u'}{1 + \lambda^2} .$$

Conduciamo la rete delle linee di corrente e delle linee equipotenziali nel caso in cui manchi il campo magnetico; MN e QP siano linee di corrente, e MQ e NP linee equipotenziali. Avremo

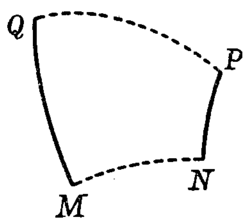


Fig. 13.

$$u_M = u_Q , u_N = u_P \quad , \quad u'_M = u'_N , u'_Q = u'_P ;$$

e per conseguenza

$$V_M - V_N + V_P - V_Q = 0 ,$$

donde il teorema: *Allorché gli elettrodi puntiformi sono al contorno, se si considera un quadrilatero formato da linee di corrente e di livello corrispondenti al caso in cui manchi il campo magnetico, e si determinano i valori del potenziale elettrico ai quattro vertici allorché agisce il campo magnetico, la differenza dei valori in due vertici adiacenti è eguale alla differenza negli altri due.*

Questa proposizione che chiameremo il *teorema dei quattro vertici* è suscettibile di facile verifica sperimentale.

26. Supponiamo in particolare che la lamina sia circolare, le correnti entrino ed escano dagli elettrodi puntiformi A e B al contorno. Tracciamo i cerchi che passano per A e B ed i cerchi ortogonali. Qualunque sia il campo magnetico per un quatrilatero MNPQ formato con questi cerchi

$$V_M - V_N + V_P - V_Q = 0.$$

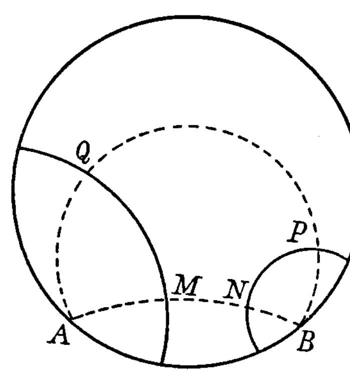


Fig. 14.

27. Il risultato enunciato nel § 22 può notevolmente estendersi; infatti, se si conosce la legge di distribuzione delle correnti in una lamina semplicemente connessa non soggetta al campo magnetico allorché la corrente entra ed esce da due elettrodi puntiformi, si sa fare la rappresentazione conforme dell'area occupata dalla lamina in un cerchio, onde si saprà determinare la distribuzione delle correnti, ed il potenziale quando le correnti entrano

ed escono da elettrodi puntiformi qualsiansi e la lamina è soggetta ad un campo magnetico.

28. Varie fra le proposizioni date valgono tanto se l'area occupata dalla lamina è semplicemente connessa, quanto se è più volte connessa; altre (e lo si è dichiarato esplicitamente volta per volta) non valgono che se si tratta di un'area semplicemente connessa.

Le formule ed i teoremi di reciprocità dati nei §§ 11, 12, 13 sussistono evidentemente anche nel caso in cui la lamina è più volte connessa. Solo in questo caso essi possono assumere un aspetto alquanto diverso, giacché le porzioni del contorno ove il potenziale è costante possono essere alcune delle intere linee chiuse il cui insieme forma il contorno totale dell'area più volte connessa, occupata dalla lamina.

Supponiamo la lamina σ limitata da più linee chiuse $s'_1, s'_2, \cdots, s'_n$; $s''_1, s''_2, \cdots, s''_m$, e ammettiamo che le prime siano libere ed isolate, e le seconde siano mantenute ad un potenziale costante. Chiameremo S' l'insieme delle prime linee, ed S'' l'insieme delle altre. Escluderemo per semplicità l'esistenza di elettrodi puntiformi.

Con il campo magnetico diretto i valori del potenziale V in $s''_1, s''_2, \cdots, s''_m$ siano rispettivamente $C^{(1)}, C^{(2)}, \cdots, C^{(m)}$ e con il campo magnetico invertito i valori del potenziale V_1 siano $C_1^{(1)}, C_1^{(2)}, \cdots, C_1^{(m)}$. Denotiamo poi con $J^{(1)}, J^{(2)}, \cdots, J^{(m)}$ le quantità di elettricità che penetrano nell'unità di tempo nella lamina attraverso i contorni $s''_1, s''_2, \cdots, s''_m$ allorché si sperimenta col campo magnetico diretto, e denotiamo con $J_1^{(1)}, J_1^{(2)}, \cdots, J_1^{(m)}$ le quantità di elettricità che penetrano attraverso gli stessi contorni quando si sperimenta col campo magnetico invertito. Applicando i risultati del § 12 avremo

$$\Sigma_h J^{(h)} C_1^{(h)} = \Sigma_h J_1^{(h)} C^{(h)}.$$

Se noi consideriamo $s''_1, s''_2, \cdots, s''_m$ come orli di elettrodi di resistenza trascurabile, le $J^{(h)}$ e $J_1^{(h)}$ sono rispettivamente le intensità delle correnti che penetrano dagli elettrodi stessi. Dalla precedente relazione si ricavano quindi evidentemente le proposizioni di reciprocità nel caso di elettrodi interni di area finita e di resistenza trascurabile.

29. Ciò premesso, consideriamo il caso del campo magnetico diretto, e impieghiamo la regola (E) (§ 14) per passare dal potenziale V alla funzione fondamentale U. Avremo

$$U = V + \lambda V', \tag{12}$$

e se tracciamo una linea chiusa s nell'area occupata dalla lamina

$$\int_s \frac{\partial V'}{\partial s} ds = -\int_s \frac{\partial V}{\partial n} ds = \frac{1}{K} (J^{(\alpha)} + J^{(\beta)} + \cdots + J^{(\varrho)}),$$

denotando con $s''_\alpha, s''_\beta, \cdots, s''_\varrho$ i contorni interni alla linea s.

Ne segue che la funzione V' è polidroma, i cicli di polidromia sono quelli che contengono nell'interno i contorni $s''_\alpha, \cdots$ ed i moduli di polidromia sono i numeri J_α/K.

Poiché V è monodroma (cfr. § 2), U avrà la stessa polidromia di V' salvo che i moduli di polidromia saranno cambiati nel rapporto λ.

30. Applicando le formule (A) e (B) del § 2 si deduce (cfr. § 4)

$$\Sigma_h J^{(h)} = 0 \quad , \quad \Sigma_h J^{(h)} C^{(h)} = K \int_\sigma \Delta V d\sigma .$$

Dall'ultima si ricava che, se le $J^{(h)}$ sono zero sopra alcuni dei contorni s''_h e le $C^{(h)}$ sono zero sopra i rimanenti s''_h, V deve essere nulla; e che, se si sa che tutte le $J^{(h)}$ sono nulle, V deve essere costante. Se ne conclude che la conoscenza delle $J^{(h)}$ determina V a meno di una costante e la conoscenza di alcune delle $J^{(h)}$ e delle rimanenti $C^{(h)}$ determina completamente V.

Supponiamo che manchino i contorni liberi ed isolati s'_h, e che siano note tutte le $C^{(h)}$. V sarà determinato e sarà indipendente dalla conducibilità K. Se invece sono note tutte le $J^{(h)}$, V cambierà in ragione inversa delle conducibilità K. Se finalmente sono note in parte le $C^{(h)}$, ed in parte le $J^{(h)}$, V dipenderà dalla conducibilità K.

Da tutto ciò segue che se ciascuna delle diverse linee che costituiscono il contorno ha un potenziale costante inalterabile, il potenziale elettrico non dipenderà dal campo magnetico, ma il campo magnetico altererà la funzione fondamentale, e quindi la distribuzione delle correnti.

Ne risulta che, se noi conosceremo la distribuzione delle correnti quando manca il campo magnetico, e quindi il potenziale V, mediante la formula (E) potremo calcolare l'alterazione delle correnti stesse.

In modo analogo avremo risultati simili se si suppongono note ed inalterabili le $J^{(h)}$.

Questi ultimi risultati sono in perfetto accordo con quanto aveva già riconosciuto il prof. CORBINO nel caso di due contorni a potenziale inalterabile [9]. Supponiamo in particolare che i due contorni della lamina siano due circonferenze concentriche di raggi R_1 e R_2. Avremo allora

$$\begin{cases} V = \dfrac{(C^{(1)} - C^{(2)}) \log r + C^{(2)} \log R_1 - C^{(1)} \log R_2}{\log R_1 - \log R_2} \\[2ex] V' = \dfrac{(C^{(1)} - C^{(2)})}{\log R_1 - \log R_2}\, \theta \\[2ex] U = \dfrac{(C^{(1)} - C^{(2)}) (\log r + \lambda\theta)}{\log R_1 - \log R_2} + C \end{cases}$$

(9) O. M. CORBINO, *Azioni elettromagnetiche dovute agli ioni dei metalli deviati dalla traiettoria normale per effetto di un campo*, «Nuovo Cimento», ser. VI, vol. I; E. P. ADAMS, *Some electromagnetic Effects related to the Hall Effect*, «Phil. Magazine», vol. XXVII, Sixth Series; E. P. ADAMS und A. K. CHAPMAN, *The Corbino Effect*, «Phil. Mag.», vol. XXVIII, Sixth Series.

ove r e θ sono le coordinate polari dei punti dell'anello circolare che costituisce la lamina, avendo preso come origine il centro, e C è una costante.

Se la corrente entra dal cerchio maggiore di raggio R_1, e la sua intensità è I, avremo

$$V = \frac{1}{2\pi K}\log r \quad , \quad V' = \frac{I}{2\pi K}\theta \quad , \quad U = \frac{I}{2\pi K}(\log r + \lambda\theta).$$

31. I risultati del § 29 si possono estendere. Supponiamo in generale di avere una lamina più volte connessa limitata dalle linee chiuse $s_1, s_2, \cdots, s_n$. Senza fare alcuna ipotesi sui valori del potenziale lungo di esse e sul modo come sono disposti lungo di esse degli elettrodi puntiformi o lineari, denotiamo con $J_1, J_2, \cdots, J_n$ le quantità di elettricità che nell'unità di tempo entrano nelle lamine attraverso le linee stesse.

Abbiansi poi degli elettrodi puntiformi $M_1, M_2, \cdots, M_m$ *interni* da cui penetrano delle correnti di intensità $I_1, I_2, \cdots, I_m$. Avremo

$$\sum_1^n J_h + \sum_1^m I_k = 0,$$

e se una linea chiusa s interna al campo racchiude nel suo interno le linee $s_\alpha, s_\beta, \cdots, s_\tau$, e i punti $M_a, M_b, \cdots, M_t$, avremo

$$\int_s \frac{\partial V'}{\partial s} ds = -\int_s \frac{\partial V}{\partial n} ds = \frac{1}{K}(J_\alpha + J_\beta + \cdots + J_\tau + I_a + I_b + \cdots + I_t).$$

Ciò prova che V' (e quindi U) è polidroma a meno che tutte le $J_1, J_2, \cdots, J_n$, $I_1, I_2, \cdots, I_m$ non siano nulle. Donde il teorema:

Condizione necessaria e sufficiente affinché la funzione fondamentale sia monodroma, è che non esistano elettrodi puntiformi interni, e che la quantità totale di elettricità che entra dagli elettrodi distribuiti lungo ciascuna linea chiusa che fa parte del contorno sia nulla.

Nel caso invece in cui l'area occupata dalla lamina sia semplicemente connessa, *basta che non esistano elettrodi puntiformi interni perché la funzione fondamentale sia monodroma*, mentre la loro presenza la rende polidroma.

32. Diamo subito un'applicazione dei risultati ora ottenuti. Supponiamo che l'area sia più volte connessa e che tutti gli elettrodi siano *puntiformi*, e distribuiti lungo le linee stesse $s_1, s_2, \cdots, s_n$ che formano il contorno. Siano $i_p^{(1)}, i_p^{(2)}, \cdots, i_p^{(h_p)}$ le intensità delle correnti che entrano dagli elettrodi distribuiti lungo la linea s_p. La condizione necessaria e sufficiente affinché la funzione fondamentale sia monodroma è che

$$\sum_1^{h_p}{}_t\, i_p^{(t)} = 0 \qquad (p = 1, 2, \cdots, n).$$

Ora se la funzione fondamentale è monodroma noi potremo, ripetendo il ragionamento fatto nel § 23, dimostrare che il campo magnetico non altera la distribuzione delle correnti, mentre se la funzione stessa è polidroma, avremo che l'azione del campo magnetico dovrà far cambiare la distribuzione delle correnti, giacché quando esso non esiste la funzione fondamentale coincide col potenziale e quindi è monodroma.

Si avrà dunque il teorema seguente:

Se la lamina è più volte connessa e tutti gli elettrodi sono puntiformi e distribuiti al contorno, l'azione del campo magnetico non altererà la distribuzione delle correnti solo quando la somma delle intensità delle correnti che penetrano dagli elettrodi disposti su ciascuna linea chiusa che forma una parte del contorno sia nulla.

33. Quando la condizione precedente sia soddisfatta, e si conosca la legge della distribuzione delle correnti nella ipotesi che non agisca il campo magnetico, potremo mediante la regola (E′) calcolare il potenziale corrispondente allorché agisce il campo magnetico, precisamente come nel caso della lamina semplicemente connessa, e quindi risolvere completamente il problema.

Resta da risolverlo quando la suddetta condizione non sia soddisfatta.

A tal fine, denotiamo con s_1 la linea chiusa che forma il contorno esterno della lamina più volte connessa, con $s_2, s_3, \cdots, s_n$ le linee chiuse che for-

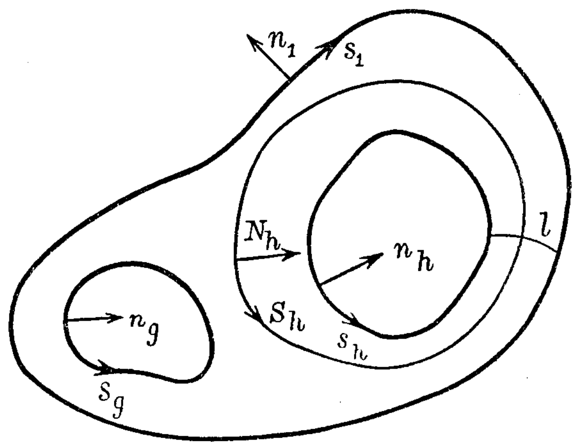


Fig. 15.

mano i contorni interni. Tracciamo una linea l che congiunga s_1 con s_h senza incontrare altre linee del contorno, e immaginiamola sede di una forza elettromotrice 1 diretta nel senso in cui cresce l'arco s_h. Supposto che la lamina non sia soggetta al campo magnetico, il potenziale elettrico φ_h sarà una funzione armonica regolare nel campo occupato dalla lamina stessa che avrà una discontinuità 1 lungo l. Inoltre

$$\frac{\partial \varphi_h}{\partial n_1} = \frac{\partial \varphi_h}{\partial n_2} = \cdots = 0 \quad , \quad \int_{s_h} \frac{\partial \varphi_h}{\partial s_h} ds_h = -1 \quad , \quad \int_{s_g} \frac{\partial \varphi_h}{\partial s_g} ds_g = 0 \quad , \quad 1 < g \gtrless h .$$

φ_h potrà ancora considerarsi come una funzione armonica finita e continua *polidroma* nel campo liberato dal taglio l, i cui cicli di polidromia abbracciano s_h e il cui modulo di polidromia è -1. Le funzioni $\varphi_2, \varphi_3, \cdots$ dipenderanno soltanto dalla forma geometrica del campo e le chiameremo i suoi *potenziali ciclici elementari*. Denoteremo con $\varphi'_2, \varphi'_3, \cdots$ le loro coniugate [10].

Ciò premesso, supponiamo tolta ogni forza elettromotrice interna alla lamina, e chiamiamo W il potenziale elettrico (senza campo magnetico, ma ridotto nel rapporto tra le conducibilità della lamina prima e dopo l'azione del campo stesso) quando le correnti entrano ed escono da elettrodi puntiformi disposti lungo le varie linee chiuse che costituiscono il contorno, V il potenziale elettrico quando agisce il campo magnetico, U la funzione fondamentale.

Sia J_h la somma algebrica delle intensità delle correnti che entrano ed escono dagli elettrodi distribuiti sopra s_h. Se S_h è una linea che abbraccia la sola s_h, avremo

$$J_h = K\int_{S_h} \frac{\partial V}{\partial N_h} dS_h = K\int_{S_h} \frac{\partial W}{\partial N_h} dS_h = -K\int_{S_h} \frac{\partial V'}{\partial S_h} dS_h = -K\int_{S_h} \frac{\partial W'}{\partial S_h} dS_h,$$

ove V′ e W′ sono coniugate di V e W.

Ne segue (vedi formula E):

$$\int_{S_h} \frac{\partial U}{\partial S_h} dS_h = \int_{S_h} \frac{\partial (V + \lambda V')}{\partial S_h} dS_h = -\frac{\lambda J_h}{K};$$

quindi potremo prendere

$$U = W + \frac{\lambda}{K} \sum_2^n {}_h J_h \varphi_h,$$

giacché questa soddisfa a tutte le condizioni che deve verificare la U.

Per avere V basta applicare la regola (E′) e otterremo

$$V = \frac{W - \frac{\lambda^2}{K}\sum_2^n {}_h J_h \varphi'_h - \lambda\left(W' - \frac{1}{K}\sum_2^n {}_h J_h \varphi_h\right)}{1 + \lambda^2}.$$

Dunque, *se si conoscono i potenziali ciclici elementari dell'area più volte connessa occupata dalla lamina, potremo determinare la perturbazione prodotta dal campo magnetico sulle correnti elettriche, qualunque esse siano, purché entrino ed escano da elettrodi puntiformi situati al contorno.*

Le due formole precedenti ci esprimono il *principio degli elettrodi puntiformi al contorno* modificato nel caso delle lamine più volte connesse (cfr. § 23).

(10) I potenziali ciclici elementari si considerano nella idrodinamica classica per ottenere i moti non vorticosi di un fluido in uno spazio più volte connesso limitato da pareti rigide. Essi corrispondono nella teoria della elasticità alle *distorsioni*. Se si conoscono le funzioni regolari armoniche $\psi_2, \psi_3, \cdots, \psi_n$ tali che ψ_h si annulla sulle $s_1, \cdots, s_n$ eccettuata s_h ove ha il valore 1, potremo ottenere (combinandole linearmente con coefficienti costanti) le φ'_h e quindi potremo ricavarne le φ_h. La conoscenza delle φ_h o delle ψ_h è quindi analiticamente equivalente.

34. Consideriamo il caso particolare in cui la lamina sia un anello limitato da due cerchi concentrici.

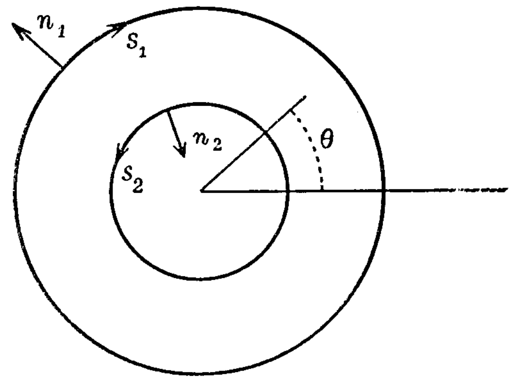


Fig. 16.

In questo caso il potenziale ciclico elementare è $-\theta/(2\pi)$ (ove θ è l'angolo che il raggio vettore spiccato dal centro forma con una direzione fissa) la cui funzione coniugata è $(\log r)/(2\pi)$. Quindi le formule precedenti divengono

$$U = W - \frac{\lambda}{2\pi K} J_2 \theta \quad , \quad V = \frac{W - \frac{\lambda^2}{2\pi K} J_2 \log r - \lambda\left(W' + \frac{1}{2\pi K}\theta\right)}{1 + \lambda^2} .$$

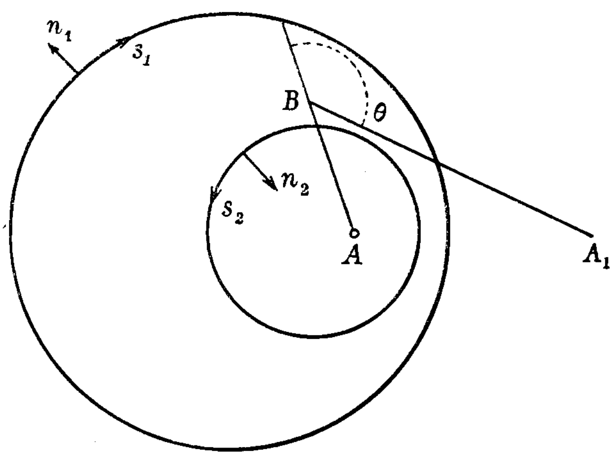


Fig. 17.

Se i due cerchi non sono concentrici presi i punti A e A_1 immagini l'uno dell'altro per rapporto ai due cerchi contemporaneamente, il potenziale ciclico elementare sarà $-\theta/(2\pi)$ ove θ è il supplemento dell'angolo sotto cui dal punto generico B della lamina si vede il segmento AA_1. La funzione coniugata sarà $\log(AB/A_1B)/(2\pi)$.

Nota III.

Ibidem, pp. 378–390.

35. Passiamo a dare la soluzione del problema nel caso in cui gli elettrodi, supposti di resistenza trascurabile, costituiscano delle porzioni del contorno. Ritorniamo quindi alle condizioni esaminate nel § 3.

Supponiamo che si sia potuto rappresentare conformemente l'area σ, semplicemente connessa (fig. 3), entro un parallelogrammo *abcd* nel piano ξ, η, in modo tale che sia

$$\widehat{bad} = \frac{\pi}{2} - \beta .$$

Supponiamo, inoltre, che i lati *ab* e *cd* siano paralleli all'asse η, e che i tratti dei contorni *ab* e AB, *bc* e BC, *cd* e CD, *da* e DA si corrispondono rispettivamente.

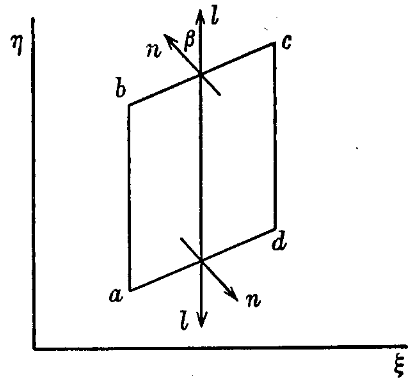


Fig. 18.

Prendiamo la funzione

$$V = M\xi + N ,$$

ove M ed N denotano due costanti, e consideriamo V come funzione di ξ e η. Essa sarà costante lungo i lati *ab* e *cd*, e lungo *bc* e *ad* avremo

$$\frac{\partial V}{\partial \eta} = 0 .$$

È facile riconoscere che lungo *bc* e *ad* le direzioni η e $-\eta$ sono rispettivamente inclinate dell'angolo β rispetto alla normale esterna n ai lati stessi.

Consideriamo ora ξ come funzione di x e y, e riportiamo la funzione V sopra l'area σ nel piano x, y. Essa risulterà armonica e regolare, sarà costante sopra le porzioni del contorno AB e CD, mentre lungo le porzioni BC e AD avremo

$$\frac{\partial V}{\partial l} = 0 .$$

Servendoci dell'arbitrarietà delle costanti M ed N, potremo ridurre i valori di V eguali ai valori dati lungo AB e CD, e perciò V sarà il potenziale richiesto. È facile riconoscere l'ordine di infinito delle derivate di ξ rispetto a x e y nei punti angolosi del contorno.

36. Supponiamo che σ sia un quadrato. Cominciamo dal prendere sull'asse reale del piano complesso z due punti a e $-a$, e poniamo

$$(13) \qquad Z = \int_0^z (a^2 - z^2)^{\nu - 1}\, dz , \qquad\qquad (13') \qquad Z_1 = \int_0^z (a^2 - z^2)^{\mu - 1}\, dz .$$

Mentre z si muove nel semipiano corrispondente al coefficiente dell'immaginario positivo, Z e Z_1 si muovono rispettivamente entro due triangoli

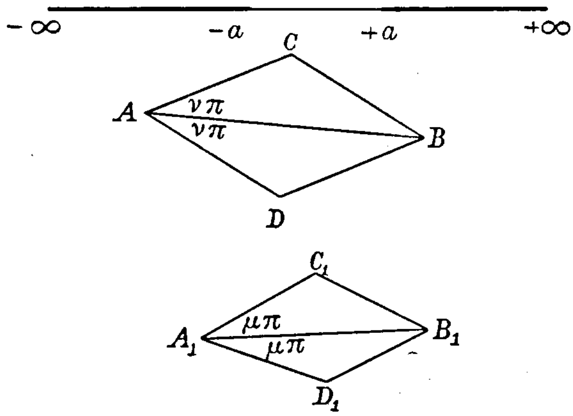


Fig. 19.

isosceli ABC e $A_1B_1C_1$ i cui angoli alla base hanno rispettivamente le aperture $\nu\pi$ e $\mu\pi$. Applicando quindi il principio di simmetria, mentre z percorre tutto il suo piano sezionato con due tagli $-a-\infty$ e $+a+\infty$, Z e Z_1 si muovono rispettivamente nei rombi ACBD e $A_1C_1B_1D_1$.

Prendendo $\nu = 1/4$ il primo rombo diventa un quadrato, e prendendo

$$\mu = \frac{1}{4} - \frac{\beta}{2\pi}$$

il secondo rombo diviene un parallelogrammo avente un angolo uguale a $(\pi/2) - \beta$. Per mezzo di una rotazione

$$Z'_1 = Z_1 \, e^{i(1/2 - \mu)\pi}$$

si riduce il secondo rombo ad avere una coppia di lati paralleli ad un asse, e perciò ci mettiamo nelle condizioni della figura 18 ed otteniamo la rappresentazione conforme del quadrato nel parallelogrammo, che ci risolve il problema di *determinare il potenziale e la distribuzione delle correnti in una lamina quadrata soggetta ad un campo magnetico, allorché due lati opposti sono i due elettrodi di resistenza nulla da cui entra ed esce la corrente, gli altri due lati sono liberi ed isolati.*

È ovvio che, avendo preso $\nu = 1/4$, l'integrale (13) è ellittico; ed infatti, ponendo $a^2 - z^2 = x^4$ e $a = 1$, si ha

$$Z = \int_0^z \frac{dz}{(a^2 - z^2)^{3/4}} = -2 \int_1^x \frac{dx}{\sqrt{1 - x^4}} .$$

37. Esaminiamo ora il caso considerato nel § 6, e supponiamo che la lamina sia circolare. Tutta la questione si riduce a costruire una funzione

armonica regolare W di cui si conosce il valore lungo l'arco BC, mentre si conosce il valore di $\partial W/\partial l$ lungo l'arco CDB.

Rappresentiamo conformemente il cerchio entro un angolo di apertura $(\pi/2) - \beta$ nel piano $\xi\eta$ (fig. 20), in modo che il lato bc_∞ parallelo ad η corri-

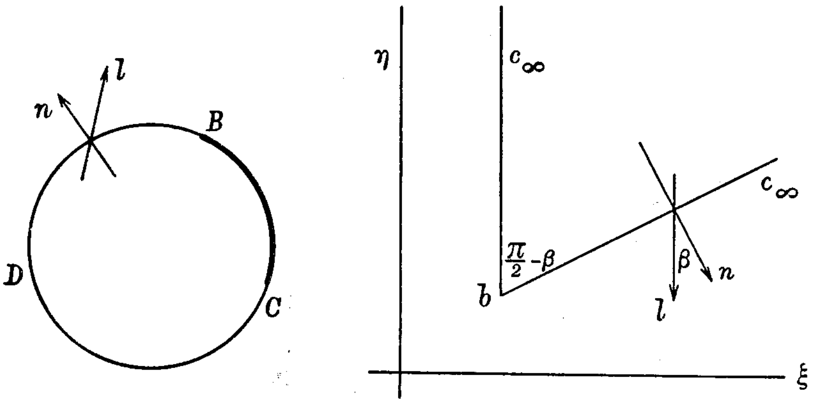


Fig. 20.

sponda all'arco BC, ed il lato inclinato bc_∞ corrisponda all'arco BDC, il vertice b corrisponda a B e il punto c_∞ all'infinito al punto C. Riportiamo nell'angolo i valori di W. Allora $\partial W/\partial\eta$ sarà nota sopra i due lati dell'angolo, e poiché è armonica, potremo calcolare $\partial W/\partial\eta$ interamente all'angolo, d'onde si ricaverà W.

È evidente che si giungerebbe allo stesso risultato se un lato dell'angolo fosse parallelo a ξ e corrispondesse all'arco BC, e l'altro lato inclinato corrispondesse all'arco BDC e si considerasse il $\partial W/\partial\xi$ anziché il $\partial W/\partial\eta$.

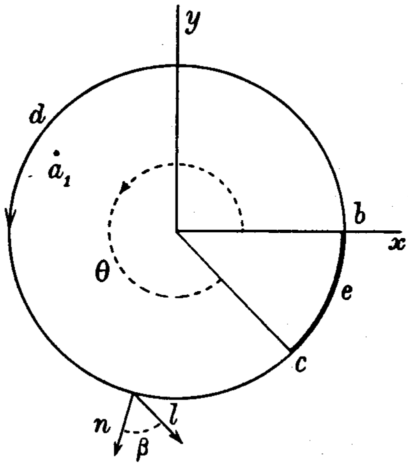


Fig. 21.

Ma per trattare questo caso, che svolgeremo nei §§ seguenti, è utile impiegare le funzioni di variabili complesse introdotte alla fine del § 14. È specialmente interessante esaminare la questione quando $\beta = (n - 2)\pi/n$, giacchè mediante una opportuna rappresentazione conforme e quindi l'applicazione del doppio principio delle immagini considerato (§ 18) si giunge alla soluzione in modo molto semplice.

38. Mediante la funzione

$$Z = \frac{ze^{-\frac{i\theta}{2}} - e^{i\frac{\theta}{2}}}{z - 1}$$

si rappresenta (fig. 21) l'area interna ad un cerchio di raggio 1, col centro all'origine, situato nel piano z, nel semipiano $Z = X + iY$ (fig. 22) corrispondente ai valori positivi di Y. Se consideriamo i punti del contorno del cerchio aventi per indice $z = e^{i\omega}$, si trova per Z

$$Z = \frac{\operatorname{sen}\frac{\omega - \theta}{2}}{\operatorname{sen}\frac{\omega}{2}};$$

quindi detti punti corrispondono ai punti dell'asse reale nel piano Z, ed in particolare a $0 < \omega < \theta$ corrisponde il semiasse reale negativo, e a $\theta < \omega < 2\pi$ corrisponde il semiasse reale positivo.

Supposto

$$0 < \mu < 1,$$

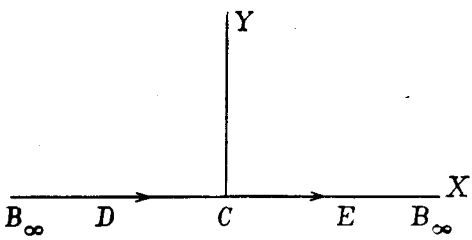


Fig. 22.

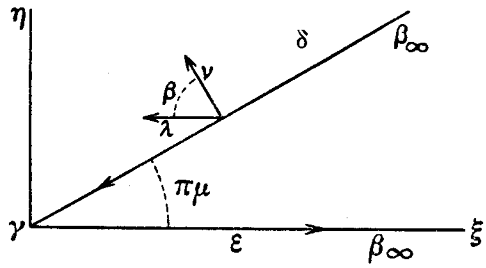


Fig. 23.

e posto $\zeta = Z^{\mu}$, si ottiene la rappresentazione conforme del semipiano nell'angolo di apertura $\pi\mu$ (fig. 23) in modo che al semiasse reale positivo in Z corrisponde il semiasse reale positivo in ζ, e al semiasse reale negativo il raggio spiccato dall'origine γ inclinato di $\pi\mu$ sul detto semiasse positivo, ossia mediante

$$(14) \qquad \zeta = \left(\frac{z e^{-\frac{i\theta}{2}} - e^{i\frac{\theta}{2}}}{z - 1} \right)^{\mu}$$

rappresenteremo il cerchio nell'angolo.

Posto

$$z = re^{i\omega} \quad , \quad \zeta = \xi + i\eta = \rho e^{i\varphi},$$

per $0 < \omega < \theta$, $r = 1$ avremo

$$\zeta = \left(\frac{\operatorname{sen}\frac{\theta - \omega}{2}}{\operatorname{sen}\frac{\omega}{2}} \right)^{\mu} e^{i\mu\pi}, \quad \text{cioè} \quad \rho = \left(\frac{\operatorname{sen}\frac{\theta - \omega}{2}}{\operatorname{sen}\frac{\omega}{2}} \right)^{\mu}, \quad \varphi = \mu\pi;$$

per $\theta < \omega < 2\pi$, $r = 1$ avremo

$$\zeta = \left(\frac{\operatorname{sen}\frac{\omega - \theta}{2}}{\operatorname{sen}\frac{\omega}{2}} \right)^{\mu}, \quad \text{cioè} \quad \xi = \left(\frac{\operatorname{sen}\frac{\omega - \theta}{2}}{\operatorname{sen}\frac{\omega}{2}} \right)^{\mu}, \quad \eta = 0.$$

Derivando le relazioni

$$\rho = \left(\frac{\operatorname{sen} \frac{\theta - \omega}{2}}{\operatorname{sen} \frac{\omega}{2}} \right)^{\mu}, \quad \xi = \left(\frac{\operatorname{sen} \frac{\omega - \theta}{2}}{\operatorname{sen} \frac{\omega}{2}} \right)^{\mu}$$

rispettivamente rapporto a ρ e a ξ, si trova

$$1 = \frac{d}{d\omega} \left(\frac{\operatorname{sen} \frac{\theta - \omega}{2}}{\operatorname{sen} \frac{\omega}{2}} \right)^{\mu} \frac{d\omega}{d\rho} = - \frac{\mu}{2} \frac{\operatorname{sen} \frac{\theta}{2}}{\left(\operatorname{sen} \frac{\theta - \omega}{2}\right)^{1-\mu} \left(\operatorname{sen} \frac{\omega}{2}\right)^{1+\mu}} \frac{d\omega}{d\rho}$$

$$1 = \frac{d}{d\omega} \left(\frac{\operatorname{sen} \frac{\omega - \theta}{2}}{\operatorname{sen} \frac{\omega}{2}} \right)^{\mu} \frac{d\omega}{d\xi} = \frac{\mu}{2} \frac{\operatorname{sen} \frac{\theta}{2}}{\left(\operatorname{sen} \frac{\omega - \theta}{2}\right)^{1-\mu} \left(\operatorname{sen} \frac{\omega}{2}\right)^{1+\mu}} \frac{d\omega}{d\xi},$$

donde

$$\frac{d\omega}{d\rho} = - \frac{2}{\mu} \frac{\left(\operatorname{sen} \frac{\theta - \omega}{2}\right)^{1-\mu} \left(\operatorname{sen} \frac{\omega}{2}\right)^{1+\mu}}{\operatorname{sen} \frac{\theta}{2}}, \quad 0 < \omega < \theta \tag{15}$$

$$\frac{d\omega}{d\xi} = \frac{2}{\mu} \frac{\left(\operatorname{sen} \frac{\omega - \theta}{2}\right)^{1-\mu} \left(\operatorname{sen} \frac{\omega}{2}\right)^{1+\mu}}{\operatorname{sen} \frac{\theta}{2}}, \quad \theta < \omega < 2\pi. \tag{15'}$$

Abbiasi ora la funzione $w(z) = u + iv$ regolare entro il cerchio e al contorno di esso. Consideriamo z come funzione di ζ invertendo la (14), e sostituiamo nella precedente funzione; otterremo

$$w(z(\zeta)) = w_1(\zeta),$$

che sarà regolare nell'interno e al contorno dell'angolo. Calcoliamo

$$u_2 + iv_2 = w_2(\zeta) = \frac{dw_1}{d\zeta} = \frac{\partial u_1}{\partial \xi} + i \frac{\partial v_1}{\partial \xi}. \tag{16}$$

Per far ciò supponiamo noti i valori di u lungo l'arco *ceb* in funzione di ω. Denotiamoli con $L(\omega)$ e formiamo la loro derivata rispetto ad ω che indicheremo con $L'(\omega)$.

Sia poi l una direzione inclinata dell'angolo $\beta = (\pi/2) - \pi\mu$ sulla normale esterna n al cerchio, e formiamo $\partial u/\partial l$ che indicheremo con $M(\omega)$. Ciò posto, avremo lungo il semiasse ξ positivo $\gamma\varepsilon\beta_\infty$, in virtù della (15'),

$$u_2 = \frac{\partial u}{\partial \xi} = \frac{\partial u}{\partial \omega} \frac{d\omega}{d\xi} = L'(\omega) \frac{2}{\mu} \frac{\left(\operatorname{sen} \frac{\omega - \theta}{2}\right)^{1-\mu} \left(\operatorname{sen} \frac{\omega}{2}\right)^{1+\mu}}{\operatorname{sen} \frac{\theta}{2}}$$

e lungo il lato $\gamma\delta\beta_\infty$, se λ è inclinata di β rispetto alla normale ν,

$$u_2 = \frac{\partial u}{\partial \xi} = - \frac{\partial u}{\partial \lambda} = - \frac{\partial u}{\partial l} \left(- \frac{d\omega}{d\rho} \right) = - M(\omega) \frac{2}{\mu} \frac{\left(\operatorname{sen} \frac{\theta - \omega}{2}\right)^{1-\mu} \left(\operatorname{sen} \frac{\omega}{2}\right)^{1+\mu}}{\operatorname{sen} \frac{\theta}{2}}.$$

Se nella (16) sostituiamo a ζ il valore (14), otterremo

$$w_2(\zeta(z)) = u_2(x, y) + iv_2(x, y)$$

e u_2 lungo l'arco *bdc* sarà

$$-\frac{2}{\mu} M(\omega) \frac{\left(\operatorname{sen}\frac{\theta-\omega}{2}\right)^{1-\mu}\left(\operatorname{sen}\frac{\omega}{2}\right)^{1+\mu}}{\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}},$$

e lungo l'arco *ceb* sarà

$$\frac{2}{\mu} L'(\omega) \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\omega-\theta}{2}\right)^{1-\mu}\left(\operatorname{sen}\frac{\omega}{2}\right)^{1+\mu}}{\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}}.$$

Dunque noi conosciamo al contorno del cerchio i valori della parte reale u_2 della funzione $w_2(\zeta(z))$. Ci sarà per conseguenza facile, applicando una formula ben nota, calcolare w_2 entro il cerchio. La formula che impiegheremo sarà

$$w_2(\zeta(z)) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u_2(\omega)\frac{e^{i\omega}+z}{e^{i\omega}-z}d\omega + iC,$$

ove con $u_2(\omega)$ si sono denotati i valori di u_2 al contorno del cerchio, e C è una costante reale.

Risulterà quindi, poichè per $z = 1$ deve aversi $w_2 = 0$,

$$w_2(\zeta(z)) = -\frac{1}{\pi\mu}\int_0^{\theta} M(\omega)\frac{\left(\operatorname{sen}\frac{\theta-\omega}{2}\right)^{1-\mu}\left(\operatorname{sen}\frac{\omega}{2}\right)^{1+\mu}}{\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}}\left(\frac{e^{i\omega}+z}{e^{i\omega}-z} - \frac{e^{i\omega}+1}{e^{i\omega}-1}\right)d\omega +$$

$$+\frac{1}{\pi\mu}\int_{\theta}^{2\pi} L'(\omega)\frac{\left(\operatorname{sen}\frac{\omega-\theta}{2}\right)^{1-\mu}\left(\operatorname{sen}\frac{\omega}{2}\right)^{1+\mu}}{\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}}\left(\frac{e^{i\omega}+z}{e^{i\omega}-z} - \frac{e^{i\omega}+1}{e^{i\omega}-1}\right)d\omega.$$

Ma dalla (14) segue

$$\frac{d\zeta}{dz} = 2\,\mu i e^{i\frac{\theta}{2}(1-\mu)}\frac{\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}}{(z-e^{i\theta})^{1-\mu}(z-1)^{1+\mu}},$$

per conseguenza con operazioni semplici potremo calcolare

$$\frac{dw}{dz} = \frac{dw}{d\zeta}\,\frac{d\zeta}{dz} = w_2(\zeta(z))\frac{d\zeta}{dz},$$

ed otterremo

$$(17)\quad \frac{dw}{dz} = \frac{2}{\pi}\frac{e^{i\frac{\theta}{2}(1-\mu)}}{(z-e^{i\theta})^{1-\mu}(z-1)^{\mu}}\left\{\int_0^{\theta} M(\omega)\frac{\left(\operatorname{sen}\frac{\theta-\omega}{2}\right)^{1-\mu}\left(\operatorname{sen}\frac{\omega}{2}\right)^{\mu}e^{i\frac{\omega}{2}}}{z-e^{i\omega}}d\omega -\right.$$

$$\left.-\int_{\theta}^{2\pi} L'(\omega)\frac{\left(\operatorname{sen}\frac{\omega-\theta}{2}\right)^{1-\mu}\left(\operatorname{sen}\frac{\omega}{2}\right)^{\mu}e^{i\frac{\omega}{2}}}{z-e^{i\omega}}d\omega\right\}.$$

Con una quadratura calcoleremo quindi w a meno di una costante e separando la parte reale dalla parte immaginaria si avrà la funzione armonica u a meno di una costante che si determinerà facilmente.

Dunque, se lungo l'arco bdc conosciamo $\partial u/\partial l$, e lungo l'arco ceb conosciamo u, potremo ricavare la funzione armonica u entro il cerchio.

Da quanto è stato stabilito nel § 6 si vede che il problema della *distribuzione delle correnti in una lamina circolare, allorché la corrente entra da uno (o anche da più) elettrodi puntiformi interni ed esce da un elettrodo costituito da un arco del contorno di resistenza trascurabile*, è completamente risolubile applicando le formule precedenti.

La quadratura da eseguirsi per ricavare w dalla (17) si calcola facilmente allorché $\mu = 1/n$, essendo n un numero intero. Ma in questo caso il metodo delle immagini ci conduce, come vedremo nel paragrafo seguente, molto più facilmente alla soluzione.

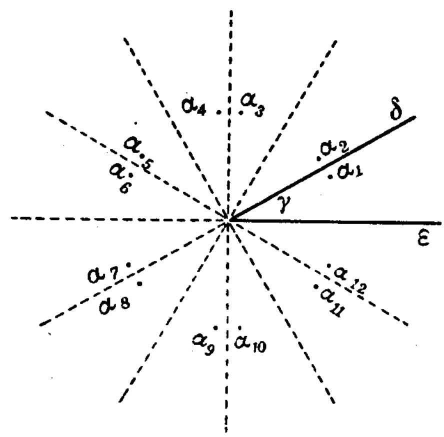


Fig. 24.

39. Sia α_1 un punto interno all'angolo $\delta\gamma\varepsilon$ che supporremo di ampiezza $\pi\mu = \pi/n$, essendo n un numero intero.

Completiamo la divisione dello spazio in angoli tutti eguali a π/n, e specchiamo il punto α_1 nei diversi raggi ottenendo i punti $\alpha_2, \alpha_3, \cdots, \alpha_n$ [11]. Formiamo quindi le due funzioni della variabile complessa ζ

$$(18) \qquad \Phi = \sum_{1}^{n}{}_h \, e^{-\frac{2(h-1)\pi i}{n}} \left[\log(\zeta - \alpha_{2h-1}) - e^{-\frac{2\pi i}{n}} \log(\zeta - \alpha_{2h})\right]$$

$$(18') \qquad F = \sum_{1}^{n}{}_h \, e^{-\frac{2(h-1)\pi i}{n}} \left[e^{\frac{\pi i}{n}} \log(\zeta - \alpha_{2h-1}) - e^{-\frac{\pi i}{n}} \log(\zeta - \alpha_{2h})\right],$$

le quali sono legate dalla relazione

$$(18'') \qquad F = e^{\frac{\pi i}{n}} \Phi,$$

e studiamone le proprietà. È facile riconoscere che ciascun termine non cambia mutando h in $h + n$. Infatti

$$\alpha_g = \alpha_{g+2n},$$

giacchè dopo $2n$ riflessioni le immagini si riproducono, ed inoltre abbiamo

$$e^{-\frac{2(h+n-1)\pi i}{n}} = e^{-\frac{2(h-1)\pi i}{n}}.$$

(11) Nella figura 24 abbiamo preso $n = 6$, $\beta = 60°$. Osserviamo che il minimo valore di n è 2, nel qual caso si ha $\beta = 0$.

Potremo dunque in qualsiasi termine sostituire h' ad h, senza alterarlo, purchè sia

$$h' \equiv h \pmod{n}.$$

Ciò posto, α_{2h-1} e α_{2k} sono immagini l'uno dell'altro rispetto al raggio $\gamma\varepsilon$ quando

$$2h - 1 + 2k = 2n + 1,$$

e α_{2h-1} e $\alpha_{2k'}$ sono immagini l'uno dell'altro rispetto al raggio $\gamma\delta$ quando

$$2h - 1 + 2k' = 2n + 3.$$

Dalle equazioni precedenti si ricava

$$k = n - h + 1 \quad , \quad k' = n - h + 2.$$

Prendiamo óra i due termini seguenti della somma (18):

$$e^{-\frac{2(h-1)\pi i}{n}} \log(z - \alpha_{2h-1}),$$

$$-e^{-\frac{2(k-1)\pi i}{n}} e^{-\frac{2\pi i}{n}} \log(z - \alpha_{2k}) = -e^{\frac{2(h-1)\pi i}{n}} \log(z - \alpha_{2k}).$$

La loro somma sarà

$$e^{-\frac{2(h-1)\pi i}{n}} \log(z - \alpha_{2h-1}) - e^{\frac{2(h-1)\pi i}{n}} \log(z - \alpha_{2k}),$$

ed essa avrà costante la parte reale sul raggio $\gamma\varepsilon$ (cfr. § 19).

Dunque i termini di Φ possono accoppiarsi in modo che la parte reale della somma di ciascuna coppia è costante lungo $\gamma\varepsilon$. Ne segue che su questo raggio la parte reale di Φ è costante.

Consideriamo i due termini della somma (18'):

$$e^{-\frac{2(h-1)\pi i}{n}} e^{\frac{\pi i}{n}} \log(\zeta - \alpha_{2h-1}),$$

$$-e^{-\frac{2(k'-1)\pi i}{n}} e^{-\frac{\pi i}{n}} \log(\zeta - \alpha_{2k'}) = e^{\frac{2(h-1)\pi i}{n}} e^{-\frac{\pi i}{n}} \log(\zeta - \alpha_{2k'}).$$

La loro somma sarà

$$e^{-\frac{(2h-3)\pi i}{n}} \log(\zeta - \alpha_{2h-1}) - e^{\frac{(2h-3)\pi i}{n}} \log(\zeta - \alpha_{2k'}),$$

la cui parte reale è costante lungo il raggio $\gamma\delta$; dunque i termini di F possono accoppiarsi fra loro in modo che la parte reale della somma di ciascuna coppia è costante lungo $\gamma\delta$. Quindi anche F avrà la parte reale costante su questo raggio.

Prendiamo ora

$$\varphi = -\frac{J}{2\pi K}\Phi \tag{19}$$

$$f = -\frac{J}{2\pi K i \operatorname{sen}\frac{\pi}{n}} F. \tag{19'}$$

È evidente che φ avrà la parte reale costante sul raggio $\gamma\varepsilon$, e f avrà la parte immaginaria costante sul raggio $\gamma\delta$, ossia la derivata normale della parte reale di f sarà nulla su $\gamma\delta$. Ma si riconosce facilmente in virtù della (18″) che

$$f = \frac{e^{-i\beta}}{\cos\beta}\,\varphi$$

quando si prenda $\beta = (n-2)\pi/(2n)$. Dunque, se assumiamo la parte reale di φ come potenziale elettrico, la parte reale di f sarà la corrispondente funzione fondamentale (§ 14). Separiamo in f e φ la parte reale dalla parte immaginaria, scrivendo

$$\varphi = V + iV' \quad , \quad f = U + iU';$$

avremo allora, che V e U sono rispettivamente il potenziale elettrico e la funzione fondamentale relativi alla distribuzione delle correnti lungo una lamina indefinita limitata dai raggi $\gamma\varepsilon$ e $\gamma\delta$, quando la corrente di intensità J entri dal polo α_1 ed esca da un elettrodo indefinito di resistenza trascurabile disposto lungo il lato $\gamma\varepsilon$, mentre $\gamma\delta$ è libero ed isolato, nella ipotesi che la lamina sia soggetta all'azione del campo magnetico, e l'angolo β sia

$$\left(\frac{n-2}{2n}\right)\pi .$$

40. Poniamo ora in (19) e (19′) (cfr. formula (14)):

$$\zeta = \left(\frac{ze^{-i\frac{\theta}{2}} - e^{i\frac{\theta}{2}}}{z-1}\right)^{1/n};$$

otterremo la rappresentazione conforme dell'angolo $\varepsilon\gamma\delta$ (fig. 24) nel cerchio (fig. 21), ed al punto α_1 corrisponderà il punto a_1 interno al cerchio tale che

$$\left(\frac{a_1 e^{-i\frac{\theta}{2}} - e^{i\frac{\theta}{2}}}{a_1 - 1}\right)^{1/n} = \alpha_1 .$$

Ne segue che i numeri complessi $\alpha_1, \alpha_3, \alpha_5, \cdots, \alpha_{2n-1}$ saranno gli n valori della radice

$$\sqrt[n]{\frac{a_1 e^{-i\frac{\theta}{2}} - e^{i\frac{\theta}{2}}}{a_1 - 1}},$$

mentre le $\alpha_2, \alpha_4, \cdots, \alpha_{2n}$ saranno i loro coniugati, cioè chiamando a_1' il numero complesso coniugato di a_1 saranno gli n valori della radice

$$\sqrt[n]{\frac{a_1' e^{i\frac{\theta}{2}} - e^{-i\frac{\theta}{2}}}{a_1' - 1}} .$$

Avremo dunque:

$$\textit{Se} \quad \beta = \frac{n-2}{2n}\pi \quad , \quad e \quad \zeta = \left(\frac{ze^{-i\frac{\theta}{2}} - e^{i\frac{\theta}{2}}}{z-1}\right)^{1/n},$$

e se le α_{2h-1} *e le* α_{2h} *denotano rispettivamente gli* n *valori delle radici*

$$\sqrt[n]{\frac{a_1 e^{-i\frac{\theta}{2}} - e^{i\frac{\theta}{2}}}{a_1 - 1}} \quad , \quad \sqrt[n]{\frac{a'_1 e^{i\frac{\theta}{2}} - e^{-i\frac{\theta}{2}}}{a'_1 - 1}}$$

(essendo a'_1 *il coniugato di* a_1*), le parti reali di*

$$\varphi = -\frac{J}{2\pi K}\sum_1^n {}_h\, e^{-\frac{2(h-1)\pi i}{n}}\left[\log(\zeta - \alpha_{2h-1}) - e^{\frac{-2\pi i}{n}}\log(\zeta - \alpha_{2h})\right]$$

$$f = -\frac{J}{2\pi K i \operatorname{sen}\frac{\pi}{n}}\sum_1^n {}_h\, e^{-\frac{2(h-1)\pi i}{n}}\left[e^{\frac{\pi i}{n}}\log(\zeta - \alpha_{2h-1}) - e^{\frac{-\pi i}{n}}\log(\zeta - \alpha_{2h})\right]$$

sono rispettivamente il potenziale elettrico e la funzione fondamentale di una distribuzione di correnti entro il cerchio di raggio 1 (fig. 21), *allorché la corrente entra dall'elettrodo puntiforme interno* a_1 *ed esce dall'elettrodo di resistenza trascurabile* bec, *mentre la porzione* bdc *del contorno è libera ed isolata, nella ipotesi che la lamina circolare sia soggetta all'azione del campo magnetico.*

41. Supponiamo adesso che *l'elettrodo puntiforme* a_1 *vada al contorno in un punto dell'arco* bdc; avremo allora

$$\alpha_{2h-1} = \alpha_{2h}$$

e, posto $a_1 = e^{i\omega}$ con $\omega < \theta$, queste quantità saranno gli n valori della radice

$$\sqrt[n]{\frac{e^{i\omega} e^{-i\frac{\theta}{2}} - e^{i\frac{\theta}{2}}}{e^{i\omega} - 1}},$$

ossia gli n valori di

$$\left(\frac{\operatorname{sen}\frac{\theta-\omega}{2}}{\operatorname{sen}\frac{\omega}{2}}\right)^{1/n} e^{\frac{(2h-1)\pi i}{n}}$$

per $h = 1, 2, \cdots, n$, e quindi avremo

$$f = -\frac{J}{\pi K}\sum_1^n {}_h\, e^{-\frac{2(h-1)\pi i}{n}} \log\left(\zeta - \sqrt[n]{\frac{\operatorname{sen}\frac{\theta-\omega}{2}}{\operatorname{sen}\frac{\omega}{2}}}\, e^{\frac{(2h-1)\pi i}{n}}\right)$$

$$\varphi = -i\,\frac{J \operatorname{sen}\frac{\pi}{n}}{\pi K}\sum_1^n {}_h\, e^{-\frac{(2h-1)\pi i}{n}} \log\left(\zeta - \sqrt[n]{\frac{\operatorname{sen}\frac{\theta-\omega}{2}}{\operatorname{sen}\frac{\omega}{2}}}\, e^{\frac{(2h-1)\pi i}{n}}\right),$$

ove per

$$\sqrt[n]{\frac{\operatorname{sen}\dfrac{\theta-\omega}{2}}{\operatorname{sen}\dfrac{\omega}{2}}}$$

va preso il valore positivo e si deve sempre supporre di sostituire a ζ l'espressione

$$\zeta=\left(\frac{ze^{-i\frac{\theta}{2}}-e^{i\frac{\theta}{2}}}{z-1}\right)^{1/n}.$$

Nota IV.

Ibidem, pp. 533-543.

42. Noi passeremo ora a studiare il caso in cui la lamina sia curva e sia soggetta ad un campo magnetico non uniforme. Il procedimento che seguiremo per giungere a questo caso generale, partendo dalle considerazioni già svolte per il caso della lamina piana soggetta ad un campo uniforme, consisterà nel decomporre la lamina in tanti elementi infinitesimi, ciascuno dei quali potremo riguardare come piano e soggetto ad un campo uniforme; ad ognuno di essi applicheremo, quindi, le formule fondamentali che svolgeremo opportunamente con l'impiego delle coordinate curvilinee. Ci sarà allora possibile passare da elemento ad elemento contiguo e considerare delle relazioni valide sull'intera superficie da cui trarremo come conseguenza le equazioni differenziali generali e le condizioni al contorno.

43. Consideriamo un elemento piano infinitesimo della lamina, adiacente ad un punto A, e riprendiamo le equazioni (1):

$$j_x = -K\left(\frac{\partial V}{\partial x} - \lambda \frac{\partial V}{\partial y}\right)$$

$$j_y = -K\left(\frac{\partial V}{\partial y} + \lambda \frac{\partial V}{\partial x}\right).$$

Sia ds un elemento lineare passante per A, e dn l'elemento normale, orientati fra loro come è stato detto nel § 1: cioè sia

$$\frac{dx}{ds} = \frac{dy}{dn} \quad , \quad \frac{dy}{ds} = -\frac{dx}{dn}.$$

Avremo

$$j_n = j_x \frac{dx}{dn} + j_y \frac{dy}{dn} = -K\left(\frac{\partial V}{\partial n} + \lambda \frac{\partial V}{\partial s}\right),$$

ove j_n denota la densità della corrente normale a ds.

Facendo uso di un sistema di coordinate curvilinee u e v, avremo

$$j_n = -K\left(\frac{\partial V}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial n} + \frac{\partial V}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial n} + \lambda\left(\frac{\partial V}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial V}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial s}\right)\right). \tag{20}$$

Ora, se il quadrato dell'elemento lineare è

$$ds^2 = E\,du^2 + 2\,F\,du\,dv + G\,dv^2,$$

abbiamo [12]

$$(\alpha)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial n} &= -\frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\left(F\frac{\partial u}{\partial s} + G\frac{\partial v}{\partial s}\right) \\ \frac{\partial v}{\partial n} &= \frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\left(E\frac{\partial u}{\partial s} + F\frac{\partial v}{\partial s}\right), \end{aligned}\right.$$

(12) Si intenderà che la rotazione della linea $v = \text{cost}$ (presa nel senso in cui cresce la u) verso la linea $u = \text{cost}$ (presa nel senso in cui cresce la v), attraverso l'angolo minore di π,

$$(\alpha')\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial s} = \dfrac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\left(F\dfrac{\partial u}{\partial n} + G\dfrac{\partial v}{\partial n}\right) \\[2ex] \dfrac{\partial v}{\partial s} = -\dfrac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\left(E\dfrac{\partial u}{\partial n} + F\dfrac{\partial v}{\partial n}\right); \end{cases}$$

e l'equazione (20) si scriverà

$$(20')\quad j_n = -K\left[\frac{E\dfrac{\partial V}{\partial v} - F\dfrac{\partial V}{\partial u}}{\sqrt{EG-F^2}} + \lambda\frac{\partial V}{\partial u}\right]\frac{\partial u}{\partial s} + K\left[\frac{G\dfrac{\partial V}{\partial u} - F\dfrac{\partial V}{\partial v}}{\sqrt{EG-F^2}} - \lambda\frac{\partial V}{\partial v}\right]\frac{\partial v}{\partial s}\,.$$

Supponiamo che la linea s coincida colla linea $u =$ cost.: allora l'equazione precedente diverrà

$$(21)\qquad j_{n_u} = K\left[\frac{G\dfrac{\partial V}{\partial u} - F\dfrac{\partial V}{\partial v}}{\sqrt{EG-F^2}} - \lambda\frac{\partial V}{\partial v}\right]\frac{1}{\sqrt{G}}\,,$$

ove j_{n_u} è la densità della corrente normale all'elemento della linea $u =$ cost. Analogamente:

$$(21_1)\qquad j_{n_v} = -K\left[\frac{E\dfrac{\partial V}{\partial v} - F\dfrac{\partial V}{\partial u}}{\sqrt{EG-F^2}} + \lambda\frac{\partial V}{\partial u}\right]\frac{1}{\sqrt{E}}\ ^{(13)}.$$

44. Tutte le formule precedenti valgono per un elemento piano infinitesimo. Ora, se la *lamina è curva* e si trova in un *campo magnetico costante o variabile*, per ogni elemento infinitesimo della superficie varranno le formule precedenti, solo dovremo supporre che K e $\lambda = \operatorname{tg}\beta$ cambino da elemento a elemento; in altri termini le formule precedenti varranno nel caso più generale di una lamina metallica di forma qualsiasi situata in un campo magnetico qualunque, purché si considerino K e λ funzioni note di u e v. Per calcolarle, dovremo tener conto delle formole (2) e (3) in cui dovremo sostituire punto per punto ad H la componente della intensità del campo magnetico nel senso normale alla superficie, la quale sarà variabile, sia per la diversa inclinazione della normale rispetto alla direzione del campo magnetico, sia per la variabilità di esso [14].

avvenga nello stesso verso in cui avviene, attraverso l'angolo retto, la rotazione della direzione positiva della linea s verso la direzione positiva della linea n. Supporremo inoltre di prendere, qui e nel seguito, il radicale $\sqrt{EG-F^2}$ positivo.

(13) $\sqrt{G}$ e $\sqrt{E}$ debbono essere presi col segno positivo.

(14) Se il campo magnetico non è normale alla superficie, si producono delle azioni secondarie che fanno perdere alla lamina, per rapporto alla sua conducibilità, il carattere della isotropia (cfr. WINKELMANN, *Handb. der Physik.*, 2ª ediz., vol. V, p. 458). Tali azioni costituiscono delle *perturbazioni* al fenomeno, come viene qui studiato. Ci si mette al riparo da queste perturbazioni disponendo la lamina secondo una *superficie di livello* nel campo magnetico, il quale in tal modo risulta normale alla lamina in ogni suo punto.

45. Riprendiamo ora la formula (20′) valida su tutta la superficie, e formiamo

$$(22)\qquad \int_s j_n\,ds = \int_s \left\{ -K\left[\frac{E\dfrac{\partial V}{\partial v} - F\dfrac{\partial V}{\partial u}}{\sqrt{EG-F^2}} + \lambda\frac{\partial V}{\partial u}\right]\frac{\partial u}{\partial s} + \right.$$

$$\left. + K\left[\frac{G\dfrac{\partial V}{\partial u} - F\dfrac{\partial V}{\partial v}}{\sqrt{EG-F^2}} - \lambda\frac{\partial V}{\partial v}\right]\frac{\partial v}{\partial s}\right\} ds,$$

estesa ad una linea s qualunque chiusa, che non includa alcun elettrodo. Il primo membro sarà nullo e, per conseguenza,

$$(23)\qquad -K\left[\frac{E\dfrac{\partial V}{\partial v} - F\dfrac{\partial V}{\partial u}}{\sqrt{EG-F^2}} + \lambda\frac{\partial V}{\partial u}\right]du + K\left[\frac{G\dfrac{\partial V}{\partial u} - F\dfrac{\partial V}{\partial v}}{\sqrt{EG-F^2}} - \lambda\frac{\partial V}{\partial v}\right]dv$$

dovrà essere un differenziale esatto. Chiamandolo dW avremo quindi

$$(24)\qquad \left\{\begin{aligned} -\sqrt{G}\,j_{n_u} &= -K\left[\frac{G\dfrac{\partial V}{\partial u} - F\dfrac{\partial V}{\partial v}}{\sqrt{EG-F^2}} - \lambda\frac{\partial V}{\partial v}\right] = -\frac{\partial W}{\partial v} \\ \sqrt{E}\,j_{n_v} &= -K\left[\frac{E\dfrac{\partial V}{\partial v} - F\dfrac{\partial V}{\partial u}}{\sqrt{EG-F^2}} + \lambda\frac{\partial V}{\partial u}\right] = \frac{\partial W}{\partial u}, \end{aligned}\right.$$

da cui segue che V soddisfa all'equazione differenziale

$$(\mathrm{F})\qquad \frac{\partial}{\partial u}\left\{K\left[\frac{G\dfrac{\partial V}{\partial u} - F\dfrac{\partial V}{\partial v}}{\sqrt{EG-F^2}} - \lambda\frac{\partial V}{\partial v}\right]\right\} + \frac{\partial}{\partial v}\left\{K\left[\frac{E\dfrac{\partial V}{\partial v} - F\dfrac{\partial V}{\partial u}}{\sqrt{EG-F^2}} + \lambda\frac{\partial V}{\partial u}\right]\right\} = 0.$$

Risolvendo le equazioni (24) rispetto a $\partial V/\partial u$ e $\partial V/\partial v$ si ottiene

$$-\frac{1}{K(1+\lambda^2)}\left[\frac{G\dfrac{\partial W}{\partial u} - F\dfrac{\partial W}{\partial v}}{\sqrt{EG-F^2}} + \lambda\frac{\partial W}{\partial v}\right] = \frac{\partial V}{\partial v}$$

$$-\frac{1}{K(1+\lambda^2)}\left[\frac{E\dfrac{\partial W}{\partial v} - F\dfrac{\partial W}{\partial u}}{\sqrt{EG-F^2}} - \lambda\frac{\partial W}{\partial u}\right] = -\frac{\partial V}{\partial u},$$

e, per conseguenza, W soddisfa all'equazione differenziale

$$(\mathrm{G})\qquad \frac{\partial}{\partial u}\left\{\frac{1}{K(1+\lambda^2)}\left[\frac{G\dfrac{\partial W}{\partial u} - F\dfrac{\partial W}{\partial v}}{\sqrt{EG-F^2}} + \lambda\frac{\partial W}{\partial v}\right]\right\} +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial v}\left\{\frac{1}{K(1+\lambda^2)}\left[\frac{E\dfrac{\partial W}{\partial v} - F\dfrac{\partial W}{\partial u}}{\sqrt{EG-F^2}} - \lambda\frac{\partial W}{\partial u}\right]\right\} = 0.$$

46. Ritorniamo alla formula (22) e supponiamo che l'integrazione sia estesa ad una linea aperta s. In virtù della (24), avremo

$$\int_s j_n\, ds = \int_s dW = W_2 - W_1,$$

denotando con W_1 il valore di W all'origine dell'arco s, e con W_2 il valore all'altro estremo dell'arco stesso.

Ne segue che, *lungo le linee di corrente*, W *sarà costante*; e quindi, *lungo tutte le porzioni libere ed isolate del contorno*, W *sarà costante*, mentre *lungo tutti gli elettrodi di resistenza trascurabile*, V *sarà costante*.

Se supponiamo che non esistano forze elettromotrici interne nella lamina, V *sarà una funzione monodroma*, mentre W *risulterà polidroma percorrendo un ciclo chiuso qualsiasi che racchiude* [15] *degli elettrodi da cui entra nella lamina una quantità totale di elettricità diversa da zero*.

Se la lamina è semplicemente connessa e tutti gli elettrodi sono al contorno, W sarà evidentemente monodroma.

Alla funzione W daremo il nome di *funzione delle correnti*.

47. L'espressione di j_n [formula (20')] può trasformarsi in più modi. Valendosi infatti delle (24), potremo scrivere

$$(20'') \qquad j_n = \frac{\partial W}{\partial s},$$

e, applicando invece le (α'), avremo

$$(20''') \qquad j_n = -K \left\{ \left(\frac{\partial V}{\partial u} - \frac{\lambda \left(E \frac{\partial V}{\partial v} - F \frac{\partial V}{\partial u} \right)}{\sqrt{EG - F^2}} \right) \frac{\partial u}{\partial n} + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\partial V}{\partial v} + \frac{\lambda \left(G \frac{\partial V}{\partial u} - F \frac{\partial V}{\partial v} \right)}{\sqrt{EG - F^2}} \right) \frac{\partial v}{\partial n} \right\}.$$

Finalmente, sviluppando la (20''), cioè

$$j_n = \frac{\partial W}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial W}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial s},$$

e tenendo conto delle (α'), si trova

$$(20^{IV}) \qquad j_n = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \left\{ \left(F \frac{\partial W}{\partial u} - E \frac{\partial W}{\partial v} \right) \frac{\partial u}{\partial n} + \left(G \frac{\partial W}{\partial u} - F \frac{\partial W}{\partial v} \right) \frac{\partial v}{\partial n} \right\}.$$

Le formule (21) e (21_1) possono ancora scriversi, tenendo presente le (24),

$$(21') \qquad j_{n_u} = \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial W}{\partial v} \quad , \quad j_{n_v} = -\frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial W}{\partial u}.$$

(15) Alle parole *racchiude degli elettrodi* bisogna dare un senso generale intendendo tutti gli elettrodi che giacciono da una stessa parte della linea chiusa.

Chiamiamo j_u e j_v le proiezioni ortogonali della corrente nelle direzioni delle linee $u =$ cost. e $v =$ cost.; se ne otterranno subito i valori facendo nella (20''') coincidere successivamente n con le direzioni delle linee $u =$ cost. e $v =$ cost., ed avremo

$$(25)\qquad \begin{cases} j_u = -\dfrac{K}{\sqrt{G}}\left(\dfrac{\partial V}{\partial v} + \lambda \dfrac{G\dfrac{\partial V}{\partial u} - F\dfrac{\partial V}{\partial v}}{\sqrt{EG - F^2}}\right) \\[2ex] j_v = -\dfrac{K}{\sqrt{E}}\left(\dfrac{\partial V}{\partial u} - \lambda \dfrac{E\dfrac{\partial V}{\partial v} - F\dfrac{\partial V}{\partial u}}{\sqrt{EG - F^2}}\right), \end{cases}$$

e, mediante W, le stesse quantità si esprimeranno colle formule:

$$(25')\qquad j_u = \frac{1}{\sqrt{G}}\left(\frac{G\dfrac{\partial W}{\partial u} - F\dfrac{\partial W}{\partial v}}{\sqrt{EG - F^2}}\right) \quad , \quad j_v = \frac{1}{\sqrt{E}}\left(\frac{F\dfrac{\partial W}{\partial u} - E\dfrac{\partial W}{\partial v}}{\sqrt{EG - F^2}}\right).$$

Decomponiamo finalmente la corrente secondo le direzioni delle linee $u =$ cost. e $v =$ cost.: troveremo, come componenti,

$$(26)\qquad \begin{cases} i_u = -\dfrac{K\sqrt{G}}{EG - F^2}\left(E\dfrac{\partial V}{\partial v} - F\dfrac{\partial V}{\partial u} + \lambda\sqrt{EG - F^2}\,\dfrac{\partial V}{\partial u}\right) \\[2ex] i_v = -\dfrac{K\sqrt{E}}{EG - F^2}\left(G\dfrac{\partial V}{\partial u} - F\dfrac{\partial V}{\partial v} - \lambda\sqrt{EG - F^2}\,\dfrac{\partial V}{\partial v}\right), \end{cases}$$

che, espresse mediante W, divengono

$$(26')\qquad i_u = \frac{\sqrt{G}}{\sqrt{EG - F^2}}\frac{\partial W}{\partial u} \quad , \quad i_v = -\frac{\sqrt{E}}{\sqrt{EG - F^2}}\frac{\partial W}{\partial v}.$$

Da qualunque gruppo di queste formule si ricava il quadrato della intensità della corrente, che viene espresso da

$$(27)\qquad \begin{cases} j^2 = K^2(1 + \lambda^2)\left(\dfrac{E\left(\dfrac{\partial V}{\partial v}\right)^2 - 2F\dfrac{\partial V}{\partial u}\dfrac{\partial V}{\partial v} + G\left(\dfrac{\partial V}{\partial u}\right)^2}{EG - F^2}\right) \\[2ex] j^2 = \dfrac{E\left(\dfrac{\partial W}{\partial v}\right)^2 - 2F\dfrac{\partial W}{\partial u}\dfrac{\partial W}{\partial v} + G\left(\dfrac{\partial W}{\partial u}\right)^2}{EG - F^2}. \end{cases}$$

Queste formule si possono scrivere nel modo seguente, impiegando il simbolo del parametro differenziale di primo ordine,

$$(27')\qquad \begin{cases} j^2 = K^2(1 + \lambda^2)\,\Delta_1 V \\ j^2 = \Delta_1 W. \end{cases}$$

48. Le espressioni ottenute per j_n ci forniscono sotto altre forme la condizione $j_n = 0$, lungo le porzioni libere ed isolate del contorno. Così, per esempio, servendoci della formula (20'''), potremo scrivere la condizione

stessa mediante la equazione

$$\left(\frac{\partial V}{\partial u} - \lambda \frac{E\frac{\partial V}{\partial v} - F\frac{\partial V}{\partial u}}{\sqrt{EG-F^2}}\right)\frac{\partial u}{\partial n} + \left(\frac{\partial V}{\partial v} + \lambda\frac{G\frac{\partial V}{\partial u} - F\frac{\partial V}{\partial v}}{\sqrt{EG-F^2}}\right)\frac{\partial v}{\partial n} = 0 .$$

49. Supponiamo, adesso, che la lamina sia omogenea, e manchi il campo magnetico; avremo $K = \text{cost.}$ e $\lambda = 0$: quindi le equazioni (F) e (G) diverranno

$$(\beta) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial u}\left\{\frac{G\frac{\partial V}{\partial u} - F\frac{\partial V}{\partial v}}{\sqrt{EG-F^2}}\right\} + \frac{\partial}{\partial v}\left\{\frac{E\frac{\partial V}{\partial v} - F\frac{\partial V}{\partial u}}{\sqrt{EG-F^2}}\right\} = 0 \\ &\frac{\partial}{\partial u}\left\{\frac{G\frac{\partial W}{\partial u} - F\frac{\partial W}{\partial v}}{\sqrt{EG-F^2}}\right\} + \frac{\partial}{\partial v}\left\{\frac{E\frac{\partial W}{\partial v} - F\frac{\partial W}{\partial u}}{\sqrt{EG-F^2}}\right\} = 0 \end{aligned} \right.$$

e potranno anche scriversi, facendo uso del simbolo del parametro differenziale del 2° ordine,

$$(\beta') \qquad \Delta_2 V = 0 \quad , \quad \Delta_2 W = 0 .$$

V e W saranno quindi, come doveva prevedersi, due funzioni armoniche sulla superficie. Inoltre le (24) diverranno

$$(\gamma) \qquad \frac{G\frac{\partial V}{\partial u} - F\frac{\partial V}{\partial v}}{\sqrt{EG-F^2}} = \frac{\partial \frac{W}{K}}{\partial v} \quad , \quad \frac{E\frac{\partial V}{\partial v} - F\frac{\partial V}{\partial u}}{\sqrt{FG-F^2}} = -\frac{\partial \frac{W}{K}}{\partial u} .$$

Le condizioni (β') sono le condizioni necessarie e sufficienti affinchè V e W siano funzioni armoniche sulla superficie; le (γ), affinché

$$V + i\frac{W}{K}$$

sia una variabile complessa sulla superficie [16].

Ora, allorché $K\lambda$ non è costante, le equazioni (F) e (G) differiscono essenzialmente dalle (β), e perciò V e W non sono funzioni armoniche sulla superficie.

Invece, nel caso delle lamine piane omogenee in un campo magnetico costante, il potenziale V si conserva armonico, anche quando agisce il campo magnetico (cfr. § 1); soltanto cambia la condizione a cui deve soddisfare al contorno nelle regioni di esso libere ed isolate. Dunque si manifesta una differenza sostanziale, nel caso che adesso trattiamo, rispetto ai precedenti; cioè, l'azione del campo magnetico, non solo muta le condizioni al contorno a cui deve verificare il potenziale, ove il contorno stesso è libero ed isolato, ma altera intimamente la natura del potenziale in tutta l'area occupata dalla lamina.

È facile stabilire, nel caso in cui K e λ sono costanti, la relazione che passa tra la funzione delle correnti e la funzione fondamentale U (§ 14).

(16) Cfr. BELTRAMI, *Delle variabili complesse sopra una superficie qualunque*, «Opere», vol. primo, p. 318.

Avremo infatti

$$W = KU',$$

ove U' è la funzione armonica coniugata della funzione U.

50. Riassumendo i risultati ottenuti, possiamo dire che, allorquando si passa dalla lamina piana alla lamina curva omogenea o non omogenea in un campo magnetico costante o variabile, si passa (dal punto di vista analitico) dalla equazione differenziale di Laplace a nuove equazioni differenziali di carattere diverso [le equazioni (F) e (G)]. Delle quattro funzioni (*potenziale*, *funzione fondamentale* e loro *coniugate*), due sole si conservano e cioè il *potenziale* e quella che abbiamo chiamato la *funzione delle correnti*. L'una e l'altra di queste perdono però il carattere di funzioni armoniche sulla superficie occupata dalla lamina: ed anzi è questa la ragione per la quale le altre due funzioni cessano di sussistere, in quanto che il potenziale e la funzione delle correnti non essendo armoniche, cioè non avendo il secondo parametro differenziale nullo, ma soddisfacendo invece alle equazioni (F) e (G), non possono avere funzioni coniugate nel senso della teoria delle funzioni di variabili complesse sopra una superficie.

Da tutto ciò discende che il principio degli elettrodi puntiformi al contorno (§ 23) non sussiste più nel caso attuale; come pure non vale più il principio che il potenziale rimane inalterato nel caso di lamine più volte connesse, allorchè le linee che formano il contorno sono elettrodi di resistenza trascurabile, su cui il valore del potenziale si mantiene inalterabile (§ 30).

51. Riconosciute così le essenziali diversità analitiche che si presentano secondochè si tratta del caso precedentemente svolto della lamina piana uniforme nel campo magnetico costante, o del caso generale che adesso si esamina (sebbene quest'ultimo si sia derivato dal precedente), passiamo a mostrare l'esistenza d'un principio fondamentale di carattere invariativo: *il principio generale di reciprocità* (vedi §§ 11, 12, 13, 28).

Dalle (20'), denotando con V_1 una funzione qualsiasi, e rappresentando con S il contorno (formato da una o più linee) di una parte σ della lamina, ove V e V_1 sono regolari, segue

$$\int_S V_1 j_n \, dS = \int_S \left\{ -KV_1 \left[\frac{E\frac{\partial V}{\partial v} - F\frac{\partial V}{\partial u}}{\sqrt{EG - F^2}} + \lambda \frac{\partial V}{\partial u} \right] \frac{\partial u}{\partial s} + \right. \tag{28}$$

$$\left. + KV_1 \left[\frac{G\frac{\partial V}{\partial u} - F\frac{\partial V}{\partial v}}{\sqrt{EG - F^2}} - \lambda \frac{\partial V}{\partial v} \right] \frac{\partial v}{\partial s} \right\} dS =$$

$$= \int_\sigma \frac{K}{\sqrt{EG - F^2}} \left\{ \frac{G\frac{\partial V}{\partial u}\frac{\partial V_1}{\partial u} - F\left(\frac{\partial V_1}{\partial u}\frac{\partial V}{\partial v} + \frac{\partial V}{\partial u}\frac{\partial V_1}{\partial v}\right) + E\frac{\partial V}{\partial v}\frac{\partial V_1}{\partial v}}{\sqrt{EG - F^2}} + \lambda\left(\frac{\partial V}{\partial u}\frac{\partial V_1}{\partial v} - \frac{\partial V_1}{\partial u}\frac{\partial V}{\partial v}\right) \right\} d\sigma,$$

ove si è supposto di prendere n diretto verso l'interno di σ, e quindi si è fissata implicitamente la direzione s.

Denotiamo con $\Delta_1(V, V_1)$ il *parametro differenziale misto* o *intermedio* delle funzioni V e V_1, cioè

$$\Delta_1(V, V_1) = \frac{G\frac{\partial V}{\partial u}\frac{\partial V_1}{\partial u} - F\left(\frac{\partial V_1}{\partial u}\frac{\partial V}{\partial v} + \frac{\partial V}{\partial u}\frac{\partial V_1}{\partial v}\right) + E\frac{\partial V}{\partial v}\frac{\partial V_1}{\partial v}}{EG - F^2},$$

e scriviamo il determinante

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial V}{\partial u}, & \frac{\partial V}{\partial v} \\ \frac{\partial V_1}{\partial u}, & \frac{\partial V_1}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{d(V, V_1)}{d(u, v)}.$$

Si riconosce immediatamente che $\Delta_1(V, V_1)$ è simmetrico rispetto a V e V_1, mentre il determinante $d(V, V_1)/d(u, v)$ cambia segno scambiando V con V_1.

La equazione (28) potrà scriversi

$$\text{(H)} \qquad \int_S V_1 j_n \, dS = \int_\sigma K\left(\Delta_1(V, V_1) + \frac{\lambda}{\sqrt{EG - F^2}}\frac{d(V, V_1)}{d(u, v)}\right) d\sigma.$$

52. Supponiamo, ora, che V_1 corrisponda ad un potenziale elettrico di correnti distribuite nella lamina quando il *campo magnetico è invertito*. In tale ipotesi dovremo mantenere inalterato K in ogni punto, e cambiare segno a λ.

Se in questo caso denotiamo con j_{1n} la densità della corrente normale ad S, e vogliamo stabilire la formula corrispondente alla precedente, dovremo scambiare nel secondo membro V con V_1, il che non altera il parametro simmetrico $\Delta_1(V, V_1)$ ma cambia segno al determinante $d(V, V_1)/d(u, v)$; però il termine corrispondente è moltiplicato per λ, il quale muta anch'esso segno per la inversione del campo, quindi i due cambiamenti di segno manterranno inalterato anche il secondo termine, onde avremo

$$\text{(H')} \qquad \int_S V j_{1n} \, dS = \int_\sigma K\left(\Delta_1(V, V_1) + \frac{\lambda}{\sqrt{EG - F^2}}\frac{d(V, V_1)}{d(u, v)}\right) d\sigma,$$

e quindi

$$\text{(L)} \qquad \int_S (V j_{1n} - V_1 j_n) \, dS = 0.$$

Se confrontiamo la formula (D) con la formula (L), riconosciamo che da questa possono ricavarsi le stesse conseguenze che abbiamo dedotto da quella, ed in particolare i *teoremi di reciprocità*.

53. Per esempio, supponiamo che, con il campo magnetico diretto, la corrente di intensità J entri da un elettrodo puntiforme A ed esca da un elettrodo B; e, con il campo magnetico invertito, la corrente J_1 entri da A_1 ed

esca da B_1. Prendiamo S formato dal contorno s della lamina e da quattro circonferenze geodetiche s_a, s_b, s_{a_1}, s_{b_1}, aventi i centri in A, B, A_1 e B_1. Noi porremo la condizione che, almeno quando esse sono abbastanza piccole, prendendo n dall'interno all'esterno delle circonferenze stesse, j_n sia positivo su s_a, negativo su s_b e j_{1n} sia positivo su s_{a_1} e negativo su s_{b_1}; mentre V e V_1 siano finiti o divengano infiniti di ordine minore ad un numero più piccolo di 1.

Poiché j_n e j_{1n} sono nulli sopra s, avremo

$$\int_{s_a} j_{1n} V \, ds_a + \int_{s_b} j_{1n} V \, ds_b + \int_{s_{a_1}} j_{1n} V \, ds_{a_1} + \int_{s_{b_1}} j_{1n} V \, ds_{b_1} -$$

$$- \int_{s_a} j_n V_1 \, ds_a - \int_{s_b} j_n V_1 \, ds_b - \int_{s_{a_1}} j_n V_1 \, ds_{a_1} - \int_{s_{b_1}} j_n V_1 \, ds_{b_1} = 0,$$

da cui si ricava, passando al limite col far impiccolire indefinitivamente i quattro circoli geodetici,

$$J_1 (V_{A_1} - V_{B_1}) = J (V_{1A} - V_{1B}),$$

e quindi, se $J_1 = J$,

$$V_{A_1} - V_{B_1} = V_{1A} - V_{1B}.$$

Nello stesso modo, *tutti i teoremi di reciprocità* (relativi ad elettrodi di aree finite interni e di resistenze trascurabili o situati al contorno e pure di resistenze trascurabili) *si estendono, dal caso della lamina piana situata in un campo uniforme, al caso di una lamina curva in un campo uniforme o non uniforme.*

54. L'equazione (L) può scriversi ancora,

$$\int_S \left(V \frac{dW_1}{ds} - V_1 \frac{dW}{ds} \right) dS = 0 :$$

ossia $V dW_1 - V_1 dW$ *sarà un differenziale esatto,* e questo sarà un altro modo di esprimere il teorema di reciprocità.

55. Poniamo, nella (H), $V_1 = V$; avremo allora

$$\text{(M)} \qquad \int_S V j_n \, dS = \int_\sigma K \Delta_1 V \, d\sigma,$$

giacché il determinante si annulla, ed il parametro misto diviene quello del primo ordine.

La stessa formula può scriversi

$$\text{(M')} \qquad \int_S V \frac{dW}{ds} \, dS = \int_\sigma K \Delta_1 V \, d\sigma,$$

o anche

$$\text{(M'')} \qquad \int_S V j_n \, dS = \int_\sigma \frac{1}{K (1 + \lambda^2)} j^2 \, d\sigma,$$

oppure

$$(\mathrm{M}''') \qquad \int_{\mathrm{S}} \mathrm{V} j_n d\mathrm{S} = \int_{\sigma} \frac{1}{\mathrm{K}(1+\lambda^2)} \Delta_1 \mathrm{W} d\sigma.$$

I primi membri delle precedenti equazioni misurano la quantità di energia che penetra nell'area σ attraverso il contorno, nell'unità di tempo. Se quindi prendiamo σ infinitamente piccolo, sarà

$$\frac{1}{\mathrm{K}(1+\lambda^2)} j^2 d\sigma$$

la quantità di calore Joule che si sviluppa in ogni elemento superficiale della lamina.

Dalla (M′) poi segue che, se V è nullo in una certa porzione del contorno S, e nelle rimanenti parti W è costante, V è nulla entro tutta l'area σ. Di qui risulta che, se certe porzioni del contorno sono degli elettrodi di resistenza trascurabile ove è noto il valore del potenziale o la intensità della corrente che penetra nella lamina, e le rimanenti sono libere ed isolate, la distribuzione delle correnti sarà determinata (cfr. §§ 3 e 4).

VII.

TEORIA DELLE POTENZE DEI LOGARITMI E DELLE FUNZIONI DI COMPOSIZIONE (*)

«Memorie Acc. Lincei», ser. 5ª, vol. XI, fasc. IV, 1916; pp. 167–250.

INTRODUZIONE.

Nella mia Nota del 1910: *Questioni generali sulle equazioni integrali ed integro-differenziali* (1), ho introdotto il concetto di *composizione* e di *permutabilità* delle funzioni, ed ho stabilito le basi della teoria, che ho poi continuato in successivi lavori e riassunta nelle lezioni tenute alla Sorbona nel 1912 (2). La composizione e la permutabilità possono essere di *1ª* e di *2ª specie*; ma, poiché nella presente Memoria mi occupo solo della composizione e della permutabilità di 1ª specie, così mi riferisco ad esse soltanto.

Varii altri autori hanno in seguito portato notevolí contributi a queste ricerche, e fra essi citerò i professori EVANS e PÉRÈS, i quali hanno compiuto in questo campo lavori sistematici. Il primo ha svolto specialmente l'*algebra delle funzioni permutabili*, ed il secondo ha approfondito lo studio delle *funzioni permutabili analitiche*.

Tuttavia è manifesto che la teoria generale dei gruppi di funzioni permutabili è ben lungi dall'essere completa, e che sono necessarî nuovi sviluppi in varii sensi per compierla. Scopo dell'attuale scritto è di dare l'indirizzo di uno di tali sviluppi.

Perciò, dopo aver ricordato nel 1° capitolo alcuni risultati sulle *potenze intere di composizione* ed averne esposti altri sui *gruppi di funzioni permuta-*

(*) La presente Memoria fu presentata dal Volterra all'Università di Edimburgo con la seguente *Dedica*, in data 30 maggio 1918 [N.d.R.]:

" I have the honour to present to the University of Edinburgh this paper which I had worked out in its main lines on the occasion of the Napier Centenary. I was prevented from attending that ceremony in person, but I am glad to be able to offer this paper to-day as a homage to the famous Scotch University.

" I present these pages written on the eve of the war, at this moment when the great conflict is developing in its whole magnitude. I trust that this little scientific contribution may serve as a token of the admiration with which I and my colleagues feel for Great Britain's share in the common cause of liberty and justice. "

(1) «Rendiconti della R. Accademia dei Lincei». Seduta del 20 febbraio 1910. [In queste «Opere»: vol. terzo, XXIII, pp. 311–322].

(2) *Leçons sur les fonctions de lignes*, professées à la Sorbonne. Paris, Gauthier-Villars, 1913.

bili, nel capitolo successivo procedo a svolgere in maniera sistematica la *teoria generale* delle *potenze fratte ed incommensurabili di composizione*, delle *funzioni di ordine fratto ed incommensurabile* e delle *loro operazioni*. È questo il primo passo che conviene far seguire allo studio delle potenze intere, per iniziare le ricerche contenute in questa Memoria. In tal modo vengo ad estendere il campo delle equazioni integrali a cui sono applicabili i risultati esposti nel cap. XI delle mie citate lezioni. Debbo osservare che nella mia Nota del 1910: *Sopra le funzioni permutabili* (3), avevo già mostrato come potesse ottenersi, mediante una funzione che diviene infinita, la potenza $^1/_2$ di una funzione del 1° ordine. Questo risultato, sebbene costituisse nel suddetto lavoro un esempio isolato, conteneva in germe il procedimento da seguire per lo studio generale delle potenze fratte di composizione.

La composizione di due funzioni f e φ consiste nella operazione

$$\int_x^y f(x, \xi)\, \varphi(\xi, y)\, d\xi,$$

ed essa è simile sotto molti aspetti, alla ordinaria moltiplicazione, come è diffusamente mostrato nei miei precedenti lavori. La operazione inversa, quella cioè di ricavare una delle due funzioni componenti, quando si conosca l'altra e la risultante, cioè la funzione che nasce dalla precedente integrazione, è analoga alla divisione.

Di qui scaturisce il concetto di *frazione di composizione* e, quindi, di *potenze negative di composizione*. Già avevo accennato, per la prima volta, all'idea di frazioni di composizione nelle mie lezioni del 1912 alla Università di Princeton N. J. (4). In esse avevo dato, per esempio, la regola per sommare più frazioni di composizione mediante la loro riduzione allo stesso denominatore. Ma uno svolgimento sistematico di questo argomento si trova nel cap. III della presente Memoria, ove il concetto stesso viene sviluppato coordinandolo alla teoria generale delle potenze di composizione.

Nel corso di questa trattazione ho potuto colmare una notevole lacuna con la introduzione della potenza di composizione di esponente zero. È ben vero che io stesso con una speciale definizione e, più tardi, il prof. EVANS con una opportuna scelta di unità, avevamo cercato sopperire alla mancata introduzione della potenza nulla; ma, non vi ha dubbio, che la considerazione esplicita di questa potenza, introdotta per la prima volta nella presente Memoria, rende molto più semplici le formule e più spedito ed uniforme tutto il calcolo sulle funzioni permutabili. Le potenze negative e nulle e le frazioni di composizione costituiscono il secondo passo, dopo quello delle potenze fratte ed incommensurabili, lungo la via da percorrere per stabilire una teoria uniforme delle potenze nel campo della composizione.

(3) § 4, n. 17. « Rendiconti della R. Accademia dei Lincei ». Seduta del 17 aprile 1910. [In queste « Opere »: vol. terzo, XXVI, pp. 331-342].

(4) *The Theory of permutable Functions*, by VITO VOLTERRA, Lectures delivered at Princeton University, October 1912.

Gli ultimi elementi introdotti sono effettivamente delle espressioni formali; tuttavia ho molto insistito in questo capitolo sulla assenza completa di formalismo in tutti i risultati raggiunti nel presente scritto, giacchè ho mostrato che quelle formule che possono sembrare formali perdono subito questo loro apparente carattere mediante la loro composizione con una opportuna funzione.

Ho dato nello stesso cap. III, come esempio suggerito da questo speciale punto di vista, una trattazione della teoria dei limiti nel campo delle funzioni permutabili. Osservo, però, che si tratta solo di una preliminare trattazione di questo argomento. giacchè esso avrebbe meritato un più largo e completo sviluppo. Ma un tale svolgimento mi avrebbe condotto molto lontano dal principale scopo che avevo dinanzi.

Il quale viene ripreso nel capitolo successivo, ove incomincio lo studio dei *logaritmi di composizione*. Siccome dalle considerazioni precedenti discende l'esistenza di un seguito indefinito di potenze di composizione di una funzione procedente per esponenti che vanno da $-\infty$ a $+\infty$, così questi esponenti possono riguardarsi come i logaritmi di composizione, quando si prenda come base la funzione stessa. Tale idea si presenta naturalmente e non offre difficoltà, allorché si è in possesso dei precedenti risultati; ma essa è ben lungi dall'esaurire la questione e dal mostrare la portata della teoria. Invece la costituzione completa di questa è cosa molto più difficile. Ho dovuto introdurre nel campo della composizione un concetto analogo al fecondo concetto, escogitato 300 anni fa da NEPERO, della base dei logaritmi naturali, ed ho dovuto in seguito definire le potenze di composizione aventi per esponenti le funzioni appartenenti al gruppo per potere, senza ostacoli, estendere i limiti della teoria ed allargare il campo di ricerche a cui guida l'idea dei logaritmi di composizione. Ciò vien fatto nel cap. V nel quale giungo ad ottenere il logaritmo di composizione di una funzione prendendo per base un'altra funzione qualsiasi appartenente allo stesso gruppo di funzioni permutabili.

Quest'ultima questione conduce a nuovi problemi sulle equazioni integrali di 1ª specie del mio tipo il cui nucleo contiene dei termini logaritmici. Ho dedicato il cap. VI alla risoluzione di questi problemi. Le soluzioni ottenute, che spero potranno offrire interesse anche indipendentemente dall'oggetto di questa Memoria, sono un complemento necessario alle ricerche, fatte nel cap. V sulla teoria dei logaritmi di composizione.

La parte più generale dei presenti studii è costituita dal successivo cap. VII il quale tratta della *derivazione* e della *integrazione di composizione* e delle *funzioni di composizione*. È facile il mostrare che, per giungere a queste operazioni ed a questi enti, si può seguire una via che muova dal concetto dei logaritmi di composizione. Infatti, nella ordinaria analisi si passa dalle funzioni razionali alle logaritmiche mediante la integrazione del differenziale razionale dx/x. Esiste una operazione analoga che possa portarci dalle potenze razionali di composizione ai logaritmi di composizione? Una volta posta questa questione, si è condotti ad immaginare il calcolo differenziale ed integrale di composizione, e per far ciò, conviene operare sulle funzioni di composizione, delle quali bisogna stabilire il concetto generale e definire le proprietà. Tutto questo rende necessario risalire ai principii generali della teoria delle funzioni di linee, ai quali i precedenti elementi sono intimamente connessi. Si comprende quindi che si è così guidati da un campo più ristretto ad un altro più vasto e più generale di ricerche.

A questo punto mi permetto osservare che già un primo cenno delle funzioni di composizione e del loro legame colle funzioni di linee si trova in una delle mie prime Memorie del 1896 sulle equazioni integrali (5). La funzione particolare ivi considerata corrispondeva ad uno dei casi più semplici, cioè ad una *funzione di composizione lineare fratta,* ed essa compariva nel suo sviluppo in serie; ma l'essenziale per lo spirito delle presenti ricerche, sta nell'averla allora riguardata alla luce delle idee, già da me, in precedenza (6) esposte, sulle *funzioni dipendenti da altre funzioni* (funzioni di linee). D'altra parte, nelle mie citate lezioni della Sorbona sono considerate spesso particolari funzioni di composizione, senza designarle con una speciale denominazione (7).

Una completa teoria delle funzioni di composizione esige però un lungo sviluppo, e conviene dapprima procedere ad una loro definizione generale. Ciò si raggiunge, come è indicato nella presente Memoria, mediante due condizioni fondamentali, una delle quali rivela che la teoria stessa deve svolgersi, sotto un certo riguardo, parallelamente a quella delle funzioni di variabili complesse. Ed infatti la condizione stessa compie un ufficio analogo a quello della condizione di monogeneità. D'altra parte, fra i teoremi fondamentali se ne presenta fin da principio uno che, in questo campo, ha una portata analoga al teorema di CAUCHY.

La parte trattata di questa teoria, insieme con lo studio delle operazioni di derivazione e d'integrazione di composizione, è limitata nella presente Memoria ai punti fondamentali e quanto è necessario per le applicazioni che se ne fanno nel capitolo successivo. Ma io mi auguro che essa possa preludere ad un lavoro sistematico sull'argomento, in cui sarà sviluppato il *calcolo infinitesimale delle funzioni permutabili,* come ne è già stata svolta l'algebra.

Le applicazioni che vengono fatte nell'VIII ed ultimo capitolo si riferiscono al calcolo effettivo dei logaritmi di composizione mediante operazioni di quadratura ordinaria. In questo capitolo è stabilita la convergenza di un integrale che permette il detto calcolo. Essa è fondata sullo studio di una serie che spero possa presentare interesse. Infine dò il modo di ottenere in generale la potenza di composizione di una funzione espressa mediante una serie di potenze dell'esponente.

In queste pagine dunque, movendo dalle potenze intere di composizione, si passa alle potenze fratte e negative, quindi ai logaritmi di composizione,

(5) *Sulla inversione degli integrali definiti,* § 3, «Rendiconti della R. Accademia dei Lincei», seduta del 15 marzo 1896. [In queste «Opere»: vol. secondo, XIX, p. 258].

(6) Nel 1887.

(7) Cap. IX.

d'onde si risale alle funzioni generali di composizione ed al loro calcolo differenziale ed integrale. Il processo logico che mi ha guidato può riassumersi dicendo che esso riproduce in iscorcio l'evoluzione dei concetti fondamentali che hanno condotto dall'ordinaria analisi finita a quella dell'infinito.

Ariccia, novembre 1914.

CAPITOLO I.

Composizione - Permutabilità - Potenze intere di composizione - Gruppo del ciclo chiuso.

1. Composizione di due funzioni integrabili $f(x,y)$, (x,y) è l'operazione

$$\int_x^y f(x,\xi)\,\varphi(\xi,y)\,d\xi.$$

Supporremo sempre di essere nel campo delle variabili reali e supporremo $y > x$. Se il risultato si chiama $\psi(x,y)$, si scrive

$$\psi = \overset{*}{f}\overset{*}{\varphi}.$$

Se f e φ sono eguali, si scrive

$$\overset{*}{f}{}^2 = \overset{*}{f}\overset{*}{f}$$

$$\overset{*}{f}{}^3 = \overset{*}{f}{}^2\overset{*}{f} = \overset{*}{f}\overset{*}{f}{}^2$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

In generale m ed n essendo interi

$$\overset{*}{f}{}^{m+n} = \overset{*}{f}{}^m\overset{*}{f}{}^n,$$

$\overset{*}{f}{}^m$ si chiama la *potenza intera di composizione di grado m*.

2. Se $a, b, c, \cdots$ sono costanti

$$af,\ b\varphi,\ c\psi, \cdots$$

sono i prodotti delle costanti per le funzioni $f, \varphi, \psi, \cdots$, e

$$(a\overset{*}{f})(b\overset{*}{\varphi})(c\overset{*}{\psi})\cdots = abc\cdots\overset{*}{f}\overset{*}{\varphi}\overset{*}{\psi}\cdots$$

3. La composizione gode della *proprietà associativa*. Se le funzioni sono permutabili gode anche della *proprietà commutativa*. La composizione gode della *proprietà distributiva* (8).

(8) Vedi V. VOLTERRA, *Leçons sur les fonctions de lignes*, Paris, Gauthier-Villars, 1913, Chap. IX, §§ 1-5.

4. Se si ha la serie

$$a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \cdots$$

convergente per $|z| < R$, la serie

$$a_1 f + a_2 \overset{*}{f}{}^2 + a_3 \overset{*}{f}{}^3 + \cdots$$

è uniformemente convergente comunque sia il modulo della funzione f, purchè questa funzione sia finita, e la sua somma è permutabile con f. Il teorema si estende al caso di serie di potenze di più variabili (9).

5. Supponiamo m intero

$$\psi(x, y) = (y - x)^m f(x, y),$$

ove $f(x, y)$ è finita e continua, e

$$f(x, x) \gtrless 0$$

si dice di *ordine* $m + 1$.

La risultante di due funzioni di ordini m *ed* n *è di ordine* $m + n$, *e la potenza di composizione di grado* m *di una funzione di ordine* n *è di ordine* mn.

6. Conoscendo una funzione φ di ordine 1 permutabile con ψ di ordine m, potremo calcolare una funzione θ di ordine 1, la cui potenza di composizione è uguale a ψ ammesso che f e φ siano derivabili m volte e le derivate siano finite. Scriveremo

$$\theta = \overset{*}{\psi}{}^{1/m} \text{ (10)}.$$

7. Siano $\alpha(x)$ e $\beta(x)$ due funzioni finite e continue che non si annullano. Poniamo

$$\frac{dx}{\alpha(x)\beta(x)} = dx_1,$$

da cui si ricavi

$$x_1 = \lambda(x) \quad , \quad x = \mu(x_1).$$

Formiamo quindi la funzione

$$\alpha(x)\beta(y)f(x, y),$$

ed in essa sostituiamo ad x e y rispettivamente $\mu(x_1)$ e $\mu(y_1)$ ottenendo

$$f_1(x_1, y_1) = \alpha(x)\beta(y)f(x, y).$$

Se in $1/\alpha(x)$ e $1/\beta(x)$ sostituiamo $\mu(x_1)$ ad x, ottengansi rispettivamente $\alpha_1(x_1)$ e $\beta_1(x_1)$. Avremo

$$\frac{dx_1}{\alpha_1(x_1)\beta_1(x_1)} = dx$$

$$f(x, y) = \alpha_1(x_1)\beta_1(y_1)f_1(x_1, y_1).$$

(9) Vedi V. VOLTERRA, *Leçons sur les fonctions de lignes*, Paris, Gauthier-Villars, 1913, Chap. IX, § 10.

(10) *Ibid.*, Chap. XI, § 8.

Supponiamo ora che la stessa trasformazione applicata a $f(x,y)$ si applichi a $\varphi(x,y)$ ricavandone $\varphi_1(x_1,y_1)$ e che $\xi = \mu(\xi_1)$. Avremo

$$\alpha(x)\beta(y)\int_x^y f(x,\xi)\varphi(\xi,y)\,d\xi = \int_{x_1}^{y_1}\alpha(x)\beta(y)f(x,\xi)\varphi(\xi,y)\alpha(\xi)\beta(\xi)\,d\xi_1$$

$$= \int_{x_1}^{y_1} f_1(x_1,\xi_1)\varphi_1(\xi_1,y_1)\,d\xi_1 .$$

Ne segue che *la risultante di due trasformate è la trasformata della risultante*, e per conseguenza *una potenza di composizione di una trasformata è la trasformata della potenza di composizione della primitiva*, e finalmente che la *trasformazione indicata precedentemente non altera la permutabilità*, ossia *trasforma un gruppo di funzioni permutabili in un nuovo gruppo di funzioni permutabili.*

8. Data una funzione $F(x,y)$ di grado 1 si possono trovare tutte le funzioni permutabili con essa. A tal fine si può dapprima ricondurre la questione al caso in cui

$$(1) \qquad F(x,x) = 1 \quad , \quad \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{x=y} = \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{x=y} = 0 .$$

Infatti, se $F(x,y)$ non soddisfacesse a queste condizioni, per mezzo di una trasformazione del tipo di quelle considerate precedentemente, si potrebbe sempre ridurla a verificare le condizioni stesse scegliendo convenientemente $\alpha(x)$ e $\beta(x)$ [11]. Diremo che una funzione F che soddisfa le (1) è ridotta *alla forma canonica.* La soluzione viene poi data (supponendo f e le sue derivate di 1° e di 2° ordine finite e continue) mediante la formula

$$(2) \qquad \lambda(y-x) + \int_0^{y-x}\lambda(\xi)\,\Phi(\xi\,|\,x,y)\,d\xi ,$$

ove λ è una funzione arbitraria e Φ si calcola dalla F e dalle sue derivate prime e seconde [12].

Prendendo λ finita e continua la (2) ci fornisce una funzione finita e continua.

(11) Op., cit. Chap. XI, §§ 1-2.

(12) La funzione $\Phi(\xi\,|\,x,y)$ si ottiene nel modo seguente. Si comincia dal calcolare la funzione

$$\Theta(\eta\,|\,x,y) = \sum_1^\infty{}_n \Psi_n(\eta\,|\,x,y)$$

della p. 164 dell'opera citata: *Leçons sur les fonctions de lignes*, quindi si ha

$$\Phi(\xi\,|\,x,y) = \frac{\partial\,\Theta(\xi\,|\,x,y)}{\partial y} - f_2(x+\xi,y) - \int_{x+\xi}^{y}\frac{\partial\,\Theta(\xi\,|\,x,\eta)}{\partial\eta} f_2(\eta,y)\,d\eta ,$$

ove $f_2(x,y)$ ha lo stesso significato che si è dato a questa funzione nella p. 162 dell'op. cit.

La funzione $\Phi(\xi \mid x, y)$ gode della proprietà

$$(3) \qquad \Phi(y - x \mid x, y) = 0.$$

9. Due funzioni finite permutabili con F sono permutabili fra loro [13]. Infatti, se F è una funzione analitica di x e y e λ pure, dalla (2) si ricava una funzione analitica di x, y. Ma le funzioni analitiche permutabili con una terza sono permutabili fra loro [14] quindi tutte le funzioni ricavate dalla (2) saranno permutabili fra loro quando λ sia analitica. Ora qualunque funzione finita e continua λ può ottenersi come limite di un polinomio il quale tende a λ in modo uniforme. Segue da ciò, che, se si prendono le λ continue e finite, si trovano, applicando la formula (2), delle funzioni permutabili fra loro. Ne viene quindi che Φ deve soddisfare la condizione

$$(4) \qquad \Phi(\xi_1 \mid x, y - \xi_2) + \Phi(\xi_2 \mid \xi_1 + x, y) + \int_{x+\xi_1}^{y-\xi_2} \Phi(\xi_2 \mid \eta, y)\, \Phi(\xi_1 \mid x, \eta)\, d\eta$$

$$= \Phi(\xi_2 \mid x, y - \xi_1) + \Phi(\xi_1 \mid \xi_2 + x, y) + \int_{x+\xi_2}^{y-\xi_1} \Phi(\xi_1 \mid \eta, y)\, \Phi(\xi_2 \mid x, \eta)\, d\eta.$$

Se F è finita e continua senza essere analitica basta che possa ottenersi insieme alle sue derivate dei primi due ordini rispettivamente come limite uniforme di un polinomio e delle sue derivate, perchè la corrispondente (4) debba esser verificata e per conseguenza la (2) ci fornisce delle funzioni che sono fra loro permutabili.

10. Dalle (2) e (3) segue, se $\psi(x, y)$ è permutabile con $F(x, y)$ e λ è derivabile,

$$\psi(x, y)_{x=y} = \text{cost} \quad , \quad \left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)_{x=y} = -\left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)_{x=y} = \text{cost}.$$

11. Un gruppo di funzioni permutabili è individuato da una funzione di 1° ordine avente le derivate prime e seconde determinate e finite. Per conseguenza quando noi considereremo un gruppo di funzioni permutabili, noi *ammetteremo sempre che ci sia nota una funzione del 1° ordine appartenente al gruppo avente le derivate 1e e 2e determinate e finite.* Chiameremo questa funzione una *funzione fondamentale del gruppo.* Allorchè una funzione fondamentale del gruppo ha la forma canonica, il gruppo si dice *gruppo canonico.*

(13) Questo teorema è stato dimostrato dal sig. VESSIOT in modo diverso da quello che qui segue. Cfr. op. cit., Chap. XI, § 5.

(14) Questa proprietà risulta facilmente dai risultati ottenuti dal sig. PÉRÈS per le funzioni permutabili analitiche.

12. Un gruppo notevole di funzioni permutabili è il *gruppo del ciclo chiuso* [15] formato dalle funzioni della forma

$$f(y-x).$$

L'unità appartiene al gruppo del ciclo chiuso e si riconosce immediatamente che

$$\overset{*}{1}{}^m = \frac{1}{(m-1)!}(y-x)^{m-1}.$$

CAPITOLO II.

Potenze fratte di composizione - Potenze incommensurabili - Ordine fratto ed incommensurabile delle funzioni di un gruppo.

1. Se φ è del primo ordine e ci proponiamo il problema di trovare f tale che

$$(1) \qquad \overset{*}{f}{}^n = \varphi,$$

non si potrà ottenere nessuna soluzione finita. Però il problema potrà risolversi mediante funzioni che divengono infinite mantenendosi integrali.

Perciò dimostriamo che se $\psi_1(x, y)$ è una funzione di primo ordine e

$$\theta(x, y) = \frac{\psi_1(x, y)}{(y-x)^{(n-1)/n}}$$

$\overset{*}{\theta}{}^n$ è di primo ordine.

Infatti avremo

$$\overset{*}{\theta}{}^2 = \frac{\psi_2(x, y)}{(y-x)^{(n-2)/n}},$$

ove

$$\psi_2(x, y) = \int_0^1 \frac{\psi_1(x, x+(y-x)\eta)\,\psi_1(x+(y-x)\eta, y)\,d\eta}{\eta^{(n-1)/n}(1-\eta)^{(n-1)/n}},$$

per conseguenza ψ_2 è finita e continua al pari di ψ_1, e quindi è di 1° ordine. Analogamente si riconosce che

$$\overset{*}{\theta}{}^3 = \frac{\psi_3(x, y)}{(y-x)^{(n-3)/n}},$$

ove $\psi_3(x, y)$ è una funzione di 1° ordine, e così di seguito, onde

$$\overset{*}{\theta}{}^n = \psi_n(x, y)$$

è una funzione di 1° ordine.

(15) Cfr. op. cit., Chap. VII.

Si vede facilmente che, se ψ_1 ammette le derivate finite e continue fino ad un certo ordine, lo stesso avviene per $\psi_2, \psi_3, \cdots, \psi_n$.

2. Supponiamo che θ sia permutabile con φ, e φ e ψ ammettano le derivate prime finite e continue. In tal caso il calcolo di f che verifica la (1) si eseguisce facilmente.

Osserviamo dapprima che ψ_n deve essere permutabile con φ, giacché

$$\overset{*}{\theta}{}^n \overset{*}{\varphi} = \overset{*}{\theta}{}^{n-1} \overset{*}{\varphi} \overset{*}{\theta} = \overset{*}{\theta}{}^{n-2} \overset{*}{\varphi} \overset{*}{\theta}{}^2 = \cdots = \overset{*}{\varphi} \overset{*}{\theta}{}^n.$$

Ne segue che

$$\varphi(x, x) = C\,\psi_n(x, x),$$

essendo C una costante[16], quindi, poiché $\varphi(x, y)$ e $\psi_n(x, y)$ hanno le derivate prime finite e continue

$$\varphi(x, y) - C\,\psi_n(x, y),$$

per $x = y$ diviene infinitesimo dello stesso ordine o di ordine superiore a $y - x$.

Risolviamo ora l'equazione integrale

$$\varphi(x, y) - C\,\psi_n(x, y) = \int_x^y C\,\psi_n(x, \xi)\, g(\xi, y)\, d\xi, \tag{2}$$

cosiderando g come incognita, il che è possibile, e la soluzione risulterà finita e continua. Ciò fatto avremo

$$f(x, y) = \sqrt[n]{C} \left\{ \theta + \frac{1}{n} \overset{*}{\theta} \overset{*}{g} + \frac{\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n} - 1\right)}{1 \cdot 2} \overset{*}{\theta} \overset{*}{g}{}^2 + \cdots \right\}. \tag{3}$$

Si vede immediatamente che risulterà

$$f(x, y) = \frac{G(x, y)}{(y - x)^{(n-1)/n}},$$

con $G(x, y)$ del 1° ordine e tale che $G(x, x) = \dfrac{\sqrt[n]{\varphi(x, x)}}{\Gamma(1/n)}$. Poiché $\sqrt[n]{C}$ ha n valori noi possiamo in questo modo ottenere n soluzioni.

3. Supponiamo che φ sia ridotto alla forma canonica F (Cap. prec. § 8), allora potremo ricavare θ dalla (2) del Cap. I, prendendo

$$\lambda = \eta^{\frac{1}{n} - 1}. \tag{4}$$

Avremo infatti

$$\theta = \frac{1 + (y - x) \displaystyle\int_0^1 u^{\frac{1}{n} - 1}\, \Phi((y - x)u \mid x, y)\, du}{(y - x)^{(n-1)/n}}, \tag{5}$$

(16) Op. cit., Chap. XI, § 3.

in cui il numeratore è di 1° ordine. Esso sarà derivabile se lo sarà Φ, e quindi avrà le derivate determinate e finite se F avrà tali le derivate terze. In questo caso sarà $C = \Gamma^{-n}(1/n)$.

Se prendiamo invece della (4)

$$\lambda = \eta^{\frac{1}{n}-1}\,\mu(\eta),$$

ove $\mu(\eta)$ è una funzione analitica che non si annulla per $\eta = 0$, otterremo un'altra espressione per θ di cui ci si può pure valere nelle formule (5) e (3); e così pure si può in altri infiniti modi cambiare λ. Ci si può chiedere se si giunge sempre alle stesse soluzioni date dalla (3), o se possono ottenersene delle nuove.

Noi osserveremo per ora che tutte le soluzioni che così si ottengono sono, in virtù della relazione (4) del Cap. I, permutabili fra loro.

4. Le formule, che abbiamo date, ci conducono necessariamente ad estendere la nozione di ordine (vedi Cap. I, § 5).

Se $\varphi(x, y)$ è di primo ordine e

$$f(x, y) = (y - x)^{\alpha}\,\varphi(x, y),$$

f si dirà di *ordine determinato* $\alpha + 1$. Le funzioni θ e f dei §§ precedenti di questo Capitolo sono quindi di ordini $1/n$. La funzione $\varphi(x, y)$ si dirà *caratteristica* di $f(x, y)$, e $\varphi(x, x)$ si dirà la sua *diagonale*.

Se una funzione

$$f(x, y) = (y - x)^{\alpha}\,\varphi(x, y),$$

e $\varphi(x, y)$ è finita e continua, mentre

$$\varphi(x, x) = 0,$$

f si dirà *di ordine superiore ad* $\alpha + 1$. In tal modo tutte le funzioni di ordine determinato β sono di ordine superiore ad ogni numero inferiore a β, ma possono esistere delle funzioni di ordine superiore a γ e che non hanno alcun ordine determinato. Per esempio, la funzione

$$(y - x)^{n-1}\log(y - x)\,\varphi(x, y),$$

ove $\varphi(x, y)$ è di primo ordine, non ha alcun ordine determinato, ma è di ordine superiore a $n - \varepsilon$, essendo ε un numero positivo qualsiasi.

Se $\psi(x, y)$ e $\varphi(x, y)$ non hanno ordini determinati, ma

$$\frac{\psi(x, y)}{(y - x)^{\alpha}\,\varphi(x, y)}$$

è sempre inferiore ad un numero finito, essendo α positivo, si dirà che $\psi(x, y)$ per rapporto a $\varphi(x, y)$ è di ordine non inferiore ad α.

Le operazioni di composizione saranno evidentemente applicabili alle funzioni il cui ordine è maggiore di un numero positivo, e tali saranno le funzioni che passeremo a considerare.

Per ottenere una funzione di ordine determinato r appartenente ad un gruppo di funzioni permutabili basterà, nella formula (2) del Cap. I, porre

$$\lambda(\eta) = \eta^{r-1} \mu(\eta),$$

ove μ è determinata e finita, e non si annulla per $\eta = 0$.

Se due funzioni sono di ordini determinati α *e* β, *la loro risultante sarà di ordine* $\alpha + \beta$. Infatti, se φ_1 e φ_2 sono di 1° ordine

$$f_1 = (y-x)^{\alpha-1} \varphi_1(x, y)$$

$$f_2 = (y-x)^{\beta-1} \varphi_2(x, y)$$

$$\overset{*}{f_1}\overset{*}{f_2} = (y-x)^{\alpha+\beta-1} \int_0^1 \eta^{\alpha-1}(1-\eta)^{\beta-1} \cdot$$

$$\cdot \varphi_1(x, x+(y-x)\eta)\, \varphi_2(x+(y-x)\eta, y)\, d\eta,$$

onde posto

$$\psi(x, y) = \int_0^1 \eta^{\alpha-1}(1-\eta)^{\beta-1} \varphi_1(x, x+(y-x)\eta)\, \varphi_2(x+(y-x)\eta, y)\, d\eta,$$

sarà

$$\overset{*}{f_1}\overset{*}{f_2} = (y-x)^{\alpha+\beta-1}\, \psi(x, y).$$

E avremo

$$\psi(x, x) = \varphi_1(x, x)\, \varphi_2(x, x) \frac{\Gamma(\alpha)\, \Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)},$$

quindi ψ sarà di 1° ordine. Collo stesso procedimento si dimostra che *se una delle due funzioni è di ordine superiore ad* α, *e l'altra di ordine eguale o superiore a* β, la loro *resultante sarà di ordine superiore ad* $\alpha + \beta$.

La funzione ψ potrà derivarsi fino all'ordine a cui possono derivarsi φ_1 e φ_2.

È evidente che la proposizione non esige che f_1 e f_2 siano permutabili.

Se una funzione è di ordine r, *la sua potenza* n^{esima} *sarà di ordine* nr; e se chiamiamo $\mathrm{G}(x, y)$ e $\mathrm{L}(x, y)$ le loro caratteristiche avremo

$$\mathrm{L}(x, x) = \frac{\Gamma^n(r)}{\Gamma(nr)} \mathrm{G}^n(x, x).$$

Se la funzione fosse di ordine superiore ad r, *la potenza* n^{esima} *sarebbe di ordine superiore a* nr.

5. Dimostriamo il teorema: *Se due funzioni di ordini determinati a caratteristiche derivabili sono permutabili, il rapporto delle diagonali elevate a potenze di grado eguale all'inversa del rispettivo ordine di ciascuna funzione è costante.*

Abbiansi infatti le funzioni permutabili

$$(y-x)^{\alpha-1} f(x, y) \quad , \quad (y-x)^{\beta-1} \varphi(x, y)$$

degli ordini positivi α e β.

Sarà

$$\int_x^y (\xi - x)^{\alpha-1} f(x, \xi)(y - \xi)^{\beta-1} \varphi(\xi, y)\, d\xi =$$

$$= (y - x)^{\alpha+\beta-1} \int_0^1 f(x, x + (y - x)\eta)\, \varphi(x + (y - x)\eta, y)\, \eta^{\alpha-1}(1 - \eta)^{\beta-1}\, d\eta,$$

e in virtù della permutabilità

$$\int_0^1 f(x, x + (y - x)\eta)\, \varphi(x + (y - x)\eta, y)\, \eta^{\alpha-1}(1 - \eta)^{\beta-1}\, d\eta =$$

$$= \int_0^1 \varphi(x, x + (y - x)\eta) f(x + (y - x)\eta, y)\, \eta^{\beta-1}(1 - \eta)^{\alpha-1}\, d\eta.$$

Supponendo f e φ derivabili, deriviamo rispetto ad y, e facciamo quindi $y = x$. Risulterà

$$(F_2 \Phi + F\Phi_1) \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} + F\Phi_2 \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} =$$

$$= (\Phi_2 F + \Phi F_1) \frac{\Gamma(\beta+1)\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} + \Phi F_2 \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)},$$

ove

$$F(x) = f(x, x) \quad , \quad \Phi(x) = \varphi(x, x) \quad , \quad F_1 = \left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}\right)_{x=y} \quad , \quad F_2 = \left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\right)_{x=y}$$

$$\Phi_1 = \left(\frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial x}\right)_{x=y} \quad , \quad \Phi_2 = \left(\frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial y}\right)_{x=y}.$$

Dalla eguaglianza precedente si deduce

$$\alpha(F_2 \Phi + F\Phi_1) + (\alpha + \beta) F\Phi_2 = \beta(\Phi_2 F + \Phi F_1) + (\alpha + \beta)\Phi F_2,$$

ossia

$$\alpha F(\Phi_1 + \Phi_2) = \beta\Phi(F_1 + F_2).$$

Ma

$$F_1 + F_2 = \frac{dF}{dx} \quad , \quad \Phi_1 + \Phi_2 = \frac{d\Phi}{dx},$$

quindi

$$\frac{\frac{1}{\alpha}\frac{dF}{dx}}{F} = \frac{\frac{1}{\beta}\frac{d\Phi}{dx}}{\Phi},$$

e per conseguenza

$$\frac{F^{1/\alpha}}{\Phi^{1/\beta}} = \text{cost}.$$

Da questa proposizione segue che *in un gruppo canonico le diagonali di tutte le funzioni del gruppo saranno costanti.*

6. Se

$$\varphi(x, y) = f(x, y)(y - x)^{\alpha - 1},$$

con

$$|f(x, y)| < \mathrm{M} \qquad \text{e} \quad \alpha > 0.$$

avremo, essendo m intero,

$$|\overset{*}{\varphi}{}^{m}| < \mathrm{M}^{m} \frac{\Gamma^{m}(\alpha)}{\Gamma(m\alpha)} (y - x)^{m\alpha - 1}.$$

Se ne ricava come conseguenza che *se la serie*

$$\sum_{1}^{\infty} a_m z^m,$$

sarà convergente, allorché $|z|$ *è inferiore ad un certo valore, la serie*

$$\sum_{1}^{\infty} a_m \overset{*}{\varphi}{}^{m},$$

sarà convergente qualunque sia il modulo di $f(x, y)$ *purché sia inferiore ad un numero finito* (17).

7. Dato f di ordine $n + \alpha$ con $1 > \alpha > 0$, e n intero e positivo o nullo, e ψ di ordine eguale o superiore a $n + \alpha + \beta$ con $\beta > 0$ si tratta di calcolare φ in modo tale che

$$\overset{*}{f}\overset{*}{\varphi} = \psi. \tag{5}$$

Questo problema si può risolvere con metodo analogo a quello che ho dato nelle *Leçons sur les équations intégrales et intégro-différentielles*, Chap. II, § 3, pag. 60 (18).

Infatti posto

$$(y - x)^{-\alpha} = \theta(x, y),$$

avremo

$$\overset{*}{\theta}\overset{*}{f}\overset{*}{\varphi} = \overset{*}{\theta}\overset{*}{\psi}.$$

Ora θ è di ordine $1 - \alpha$, quindi $\overset{*}{\theta}\overset{*}{f} = g$ sarà di ordine $n + 1$, e $\mathrm{K} = \overset{*}{\theta}\overset{*}{\psi}$ sarà di ordine $n + 1 + \beta$ o di ordine superiore.

L'equazione

$$\overset{*}{g}\overset{*}{\varphi} = \mathrm{K},$$

si risolve subito derivando $n + 1$ volte rispetto ad x, e riducendola così ad una equazione di 2^a specie. Evidentemente φ risulterà di ordine β o inferiore a β, e per l'applicazione del metodo bisognerà ammettere, quando f e ψ sono di ordine determinato, che le caratteristiche di f e ψ siano derivabili $n + 1$ volte, e le derivate siano finite.

(17) Cfr. Cap. I, § 4.

(18) Paris, Gauthier-Villars, 1913.

La permutabilità delle funzioni date f e ψ non è necessaria. Se però esse saranno permutabili fra loro anche φ risulterà permutabile con esse. Data la non permutabilità di f e ψ l'equazione

$$\overset{*}{\varphi}\overset{*}{f} = \psi \tag{5'}$$

è distinta dalle (5) e si risolverà formando l'equazione integrale

$$\overset{*}{\varphi}\overset{*}{f}\overset{*}{\theta} = \overset{*}{\psi}\overset{*}{\theta},$$

in cui $\overset{*}{f}\overset{*}{\theta}$ sarà di ordine $n+1$. Con $n+1$ derivazioni rispetto ad y la ridurremo di seconda specie.

Le equazioni (5) e (5′) ammettono ciascuna *una sola soluzione.*

Supponiamo di avere l'equazione

$$\overset{*}{f_1}\overset{*}{\varphi_1} = \psi_1. \tag{6}$$

ove

$$f_1 = f + \overset{*}{f}\overset{*}{\chi} \quad , \quad \psi_1 = \psi + \overset{*}{\psi}\overset{*}{\rho},$$

e ammettiamo che f e ψ abbiano le stesse proprietà attribuite loro precedentemente, mentre χ e ρ siano funzioni di ordine superiore ad un numero positivo.

La soluzione della (6) nella quale si suppongono f_1 e ψ_1 date, e φ_1 incognita si potrà ottenere risolvendo dapprima la (5) quindi prendendo

$$\varphi_1 = \varphi + \overset{*}{\varphi}\overset{*}{\rho} - (\overset{*}{\varphi} + \overset{*}{\varphi}\overset{*}{\rho})\overset{*}{\chi} + (\overset{*}{\varphi} + \overset{*}{\varphi}\overset{*}{\rho})\overset{*}{\chi}{}^2 - \cdots,$$

e la serie sarà sempre uniformemente convergente. *Anche in questo caso la soluzione della* (6) *sarà unica.*

Le funzioni f_1 e ψ_1 sono degli stessi ordini rispettivamente di f e ψ, ma non è necessario che esse soddisfino alle condizioni poste precedentemente per f e ψ riguardo alla derivabilità delle loro caratteristiche.

Così f_1 e ψ_1 possono essere rispettivamente somme di più funzioni degli ordini

$$n+\alpha' \quad , \quad n+\alpha'' \quad , \quad n+\alpha''', \cdots \qquad (0 < \alpha' < \alpha'' < \alpha''' \cdots < 1),$$

e degli ordini

$$n+\beta'+\alpha' \quad , \quad n+\beta''+\alpha'' \quad , \quad n+\beta'''+\alpha''' \qquad (\beta' > 0 \, , \beta'' > 0 \, , \cdots),$$

mentre le loro caratteristiche hanno le derivate degli ordini $n+1$ determinate e finite.

8. Abbiasi una funzione di un ordine determinato α

$$(y-x)^{\alpha-1}\,\psi(x\,,y) = \varphi(x\,,y)\,, \tag{7}$$

e si voglia calcolare f tale che

$$\overset{*}{f}{}^{n} = \varphi. \tag{8}$$

In virtù delle precedenti considerazioni si potrà estendere a questo caso il procedimento impiegato (§ 2) per risolvere l'analoga equazione (1) allorché φ è di 1° ordine.

Infatti, supponiamo dapprima di ridurre alla forma canonica il gruppo φ a cui appartiene φ, e calcoliamo

$$\theta = \frac{1 + (y-x)\int_0^1 u^{\frac{\alpha}{n}-1}\,\Phi((y-x)u\,|\,x,y)\,du}{(y-x)^{1-\frac{\alpha}{n}}},$$

$\overset{*}{\theta}{}^n$ sarà di ordine α e la sua diagonale sarà $\dfrac{\Gamma^n\left(\frac{\alpha}{n}\right)}{\Gamma(\alpha)}$.

Risolviamo ora l'equazione

$$\varphi - \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma^n\left(\frac{\alpha}{n}\right)}\overset{*}{\theta}{}^n = \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma^n\left(\frac{\alpha}{n}\right)}\overset{*}{\theta}{}^n\overset{*}{g},$$

prendendo g come incognita e ammessa la derivabilità di φ e Φ fino all'ordine voluto dai precedenti teoremi. Sarà

$$f = \frac{\sqrt[n]{\Gamma(\alpha)}}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{n}\right)}\left(\theta + \frac{1}{n}\overset{*}{\theta}\overset{*}{g} + \frac{\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}-1\right)}{1\cdot 2}\overset{*}{\theta}\overset{*}{g}{}^2 + \cdots\right).$$

Così otterremo n soluzioni, giacchè $\sqrt[n]{\Gamma(\alpha)}$ contiene un fattore indeterminato radice n^{esima} dell'unità.

Queste sono tutte permutabili fra loro e con φ. Si tratta anche qui come nel § 3, di sapere se altre soluzioni permutabili con queste possono trovarsi.

9. Se f_1 e f_2 sono due funzioni permutabili di ordine determinato le cui caratteristiche hanno le derivate determinate e finite dell'ordine eguale al minimo intero superiore all'ordine delle funzioni stesse, tali che

$$\overset{*}{f}{}_1^n = \overset{*}{f}{}_2^n,$$

avremo

$$f_1 = \varepsilon f_2,$$

ove ε è una radice n^{esima} dell'unità. Infatti, f_1 e f_2 dovranno essere dello stesso ordine, e chiamate φ_1 e φ_2 le loro caratteristiche dovranno avere

$$\varphi_1^n(x, x) = \varphi_2^n(x, x).$$

quindi

$$\varphi_1(x, x) = \varepsilon\varphi_2(x, x).$$

Ma

$$0 = \overset{*}{f}{}_1^n - \overset{*}{f}{}_2^n = (\overset{*}{f}_1 - \varepsilon_1\overset{*}{f}_2)(\overset{*}{f}_1 - \varepsilon_2\overset{*}{f}_2)\cdots(\overset{*}{f}_1 - \varepsilon_n\overset{*}{f}_2),$$

ove $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ sono le n radici dell'unità.

Se supponiamo $\varepsilon = \varepsilon_1$, i binomî $f - \varepsilon_2 f_2, \cdots, f_1 - \varepsilon_n f_2$ saranno dello stesso ordine di f_1 e f_2, e per conseguenza in virtù di quanto si è stabilito nel § 7, dovrà risultare

$$f_1 = \varepsilon f_2.$$

10. La questione che ci eravamo proposta precedentemente (§§ 3, 8) resta risoluta in virtù di questa proposizione, cioè che col cambiare nella maniera indicata $\lambda(\eta)$ si giunge sempre alle stesse soluzioni delle (1), giacché esse risultano sempre funzioni di ordine determinato $1/n$ con le caratteristiche derivabili e le loro potenze n^{esime} di composizione sono eguali fra loro. Lo stesso si dica per le soluzioni di (8).

11. Se f_1 e f_2 sono due funzioni permutabili di ordine determinato e

$$\overset{*}{f}{}_1^{m} = \overset{*}{f}{}_2^{n},$$

avremo

$$\overset{*}{f}{}_1^{mq} = \overset{*}{f}{}_2^{nq},$$

q essendo un numero intero qualunque. Reciprocamente se questa eguaglianza è soddisfatta sarà verificata l'eguaglianza

$$\overset{*}{f}{}_1^{m} = \varepsilon \overset{*}{f}{}_2^{n},$$

ove ε è una radice q^{esima} dell'unità. Noi scriveremo

$$f_1 = \overset{*}{f}{}_2^{m/n},$$

e evidentemente scrivendo questa eguaglianza noi includeremo in f_1 un fattore indeterminato radice dell'unità.

Dato f_2, per calcolare f_1 basterà calcolare dapprima con le regole date (§§ 2, 3 e 8)

$$\overset{*}{f}{}_2^{1/n},$$

quindi

$$\left(\overset{*}{f}{}_2^{1/n}\right)^m.$$

Tutto il calcolo algebrico ordinario delle potenze frazionarie si può senz'altro applicare alle potenze fratte di composizione.

12. Nella espressione

$$\overset{*}{f}{}^{m/n},$$

supponiamo f di ordine determinato α, cioè

$$f = (y - x)^{\alpha - 1} G(x, y),$$

avremo allora che $\overset{*}{f}{}^{m/n}$ sarà di ordine $\alpha m/n$, cioè

$$\overset{*}{f}{}^{m/n} = (y - x)^{\frac{\alpha m}{n} - 1} L(x, y),$$

con

$$L(x, x) = (G(x, x))^{m/n} \frac{\Gamma^{m/n}(\alpha)}{\Gamma\left(\frac{m\alpha}{n}\right)}.$$

La potenza fratta di composizione $\overset{*}{f}{}^{m/n}$ è determinata a meno di un fattore eguale ad una radice dell'unità. Noi potremo far scomparire questa indeterminazione allorché le diagonali saranno tutte positive.

Sia f una funzione di un ordine determinato α la cui diagonale sia positiva

$$\overset{*}{f}{}^{m/n} = (y-x)^{\frac{m\alpha}{n}-1} L\left(x, y \,\middle|\, \frac{m}{n}\right),$$

prendendo positiva la diagonale di questa funzione.

Supponiamo che facendo tendere il numero m/n verso un numero positivo razionale β, $L(x, y \mid m/n)$ tenda uniformemente verso $L(x, y \mid \beta)$, e facendolo tendere verso un numero qualunque irrazionale $z > 0$, tenda uniformemente verso un limite determinato e finito $L(x, y \mid z)$.

Scriveremo

$$\overset{*}{f}{}^{z} = (y-x)^{\alpha z-1} L(x, y \mid z),$$

e lo designeremo col nome di *potenza irrazionale di composizione d'ordine z.*

Sarà

$$L(x, x \mid z) = G(x, x)^{z} \frac{\Gamma^{z}(\alpha)}{\Gamma(z\alpha)}.$$

Se $|G(x, y)| < M$ sarà

$$|L(x, y \mid z)| < M^{z} \frac{\Gamma^{z}(\alpha)}{\Gamma(z\alpha)}.$$

Tutto il calcolo algebrico delle potenze con esponenti commensurabili o incommensurabili positivi è estensibile al caso delle potenze di composizione, e per conseguenza

$$\overset{*}{f}{}^{z} \overset{*}{f}{}^{z_1} = \overset{*}{f}{}^{z+z_1}$$

$$\left(\overset{*}{f}{}^{z}\right)^{z_1} = \overset{*}{f}{}^{z z_1}$$

allorché i numeri z e z_1 sono numeri positivi qualsiasi (19).

13. Allorché noi conosciamo

$$\overset{*}{f}{}^{z} = (y-x)^{\alpha z-1} L(x, y \mid z),$$

qualunque sia il numero positivo z, noi siamo in grado di calcolare $\overset{*}{\varphi}{}^{z}$, essendo

$$\varphi = \overset{*}{f} + \overset{**}{f\psi},$$

ove ψ è una funzione qualsiasi di ordine superiore ad un numero positivo.

(19) Il calcolo effettivo di $\overset{*}{f}{}^{z}$ non può farsi se non ricorrendo alla teoria dei *logaritmi di composizione*. Esso è effettivamente eseguito nel Cap. VIII, § 8.

Avremo infatti

$$\overset{*}{\varphi}{}^z = \overset{*}{f}{}^z + z\overset{*}{f}{}^z\overset{*}{\psi} + \frac{z(z-1)}{1\cdot 2}\overset{*}{f}{}^z\overset{*}{\psi}{}^2 + \cdots$$

e la serie è sempre uniformemente convergente (§ 6).

Si riconosce immediatamente che, dall'essere $\overset{*}{f}{}^z$ una funzione analitica di z, segue che tale è ancora $\overset{*}{\varphi}{}^z$, e, dall'essere $\overset{*}{f}{}^z$ intera, che tale è $\overset{*}{\varphi}{}^z$.

14. Come per esempio trattiamo il caso di funzioni appartenenti al gruppo del ciclo chiuso.

L'unità appartiene al gruppo del ciclo chiuso e avremo se z è positivo

$$\overset{*}{1}{}^z = \frac{(y-x)^{z-1}}{\Gamma(z)},$$

onde $\overset{*}{1}{}^z$ *sarà una funzione intera di* z.

Sia ora $\varphi(y-x)$ una funzione di primo grado derivabile. Se $\varphi(0) = 1$, sarà

$$\varphi(y-x) = 1 + \overset{*}{1}\overset{*}{\varphi}{}',$$

ove $\overset{*}{\varphi}{}'$ denota la derivata di φ. Per conseguenza

$$\overset{*}{\varphi}{}^z = \overset{*}{1}{}^z + z\overset{*}{1}{}^z\overset{*}{\varphi}{}' + \frac{z(z-1)}{1\cdot 2}\overset{*}{1}{}^z\overset{*}{\varphi}{}'^2 + \cdots$$

$\overset{*}{\varphi}{}^z$ risulterà quindi una funzione intera di z.

15. Nel § 11 del Chap. II dell'opera citata (*Leçons sur les fonctions de lignes*) abbiamo mostrato come dalla risoluzione dell'equazione binomia

$$\overset{*}{F}{}^n = \Phi \tag{9}$$

si possa passare alla risoluzione di una equazione

$$F(\overset{*}{F}_1, \overset{*}{F}_2) = 0 \tag{10}$$

dedotta da una equazione

$$F(z_1, z_2) = 0,$$

tale che la funzione implicita $z_2(z_1)$ abbia un punto critico in $z_1 = 0$. Ora nella trattazione era sempre supposto che Φ fosse una funzione di ordine tale che la soluzione della (9) fosse finita, cioè F risultasse di 1° ordine o di ordine superiore, e lo stesso si dica per la soluzione della (10). Tali limitazioni possono adesso togliersi, giacché abbiamo imparato a calcolare soluzioni delle (9) di ordine fratto.

Analoga osservazione può farsi per la risoluzione di equazioni integro-differenziali ottenuta mediante l'applicazione del teorema del § 2 del Cap. X dell'opera ora citata. Il campo di applicazione del teorema stesso viene quindi esteso al caso in cui risultino soluzioni di ordine fratto.

Capitolo III.

Potenze nulle e negative di composizione - Frazioni di composizione - Limiti di funzioni permutabili.

1. Come in aritmetica si introducono le frazioni, e le potenze negative dei numeri interi, così nel campo delle presenti ricerche conviene introdurre le frazioni di composizione e le potenze negative di composizione. Per giungere ad esse si possono seguire varii procedimenti prendendo per guida quelli che sogliamo usare in aritmetica per ottenere le frazioni.

Fissiamo le idee: In aritmetica (nel campo dei numeri interi) si può passare dalla moltiplicazione per 2 alla divisione per 2, chiamando questa operazione la ricerca (quando è possibile) di un numero che, moltiplicato per 2, riproduce il numero dato. Ma la operazione di divisione per 2 si può intendere come una moltiplicazione introducendo l'ente $1/2$, e chiamando divisione per 2 la moltiplicazione per $1/2$. L'ente $1/2$ ha così un senso formale, ma tosto che lo moltiplichiamo per un numero pari qualsiasi $2n$ il risultato n cessa di essere formale.

In modo analogo si può introdurre un ente la cui composizione con $\overset{*}{f}\overset{*}{\varphi}$ dia per risultato φ. È evidente che esso avrà un carattere formale analogo a quello della frazione precedentemente considerata, ma tale carattere si perde allorché lo componiamo con una funzione qualsiasi di tipo $\overset{*}{f}\overset{*}{\psi}$, ottenendosi per risultato ψ.

In questa maniera però, come in aritmetica non si otterrebbero che le inverse dei numeri interi, così nel campo della composizione si avrebbero soltanto frazioni speciali. Per conseguenza onde ottenere subito quelle più generali seguiremo un'altra via. Precisiamone senz'altro il principio.

In aritmetica si può ancora giungere alle frazioni con una estensione del campo dei numeri introducendole, dopo i numeri interi, come nuovi enti dei quali si definiscono l'equivalenza e tutte le operazioni che si eseguiscono tra di loro e coi numeri interi. Se non usciamo dal campo dei numeri interi questi enti sono formali, ma tutti i calcoli e tutte le proporzioni in cui essi figurano perdono, quando si voglia, il carattere puramente formale, purché si moltiplichino per un conveniente numero intero, e rappresentano effettive relazioni tra numeri interi.

Noi opereremo precisamente nello stesso modo per introdurre le frazioni di composizione, e se hanno un carattere formale, può anche per esse ripetersi quello che sopra si è detto, cioè si possono comporre queste frazioni con una conveniente funzione in modo da far perdere a tutti i risultati il carattere formale, ottenendo relazioni tra funzioni.

2\. Ma prima ancora noi dobbiamo introdurre l'elemento corrispondente a quello che in aritmetica costituisce l'unità di cui, nel campo della composizione, non siamo ancora in possesso.

Sia $f(x,y)$ una funzione appartenente ad un gruppo di funzioni permutabili. È ben noto che cosa si intenda per comporre una funzione del gruppo con f [20]. Comporla con $\overset{*}{f}{}^{-1}$ si intenderà fare l'operazione inversa, cioè trovare una funzione che composta con f riproduca la funzione data. Se ora componiamo la funzione prima con f e poi con $\overset{*}{f}{}^{-1}$ ciò equivale a mantenere la funzione inalterata. Ora

$$\overset{*}{f}\overset{*}{f}{}^{-1} = \overset{*}{f}{}^{0}$$

sarà un nuovo ente che noi introdurremo nel gruppo definendolo in modo che *composto con qualsiasi funzione del gruppo la mantiene inalterata.* È questo l'elemento che corrisponde all'unità.

Le proprietà di $\overset{*}{f}{}^{0}$ sono date da

$$\overset{*}{f}\overset{*}{f}{}^{0} = f \quad , \quad (\overset{*}{f}{}^{0})^{m} = \overset{*}{f}{}^{0} \quad , \quad (\overset{*}{f}{}^{0})^{-1} = \overset{*}{f}{}^{0} \quad , \quad \overset{*}{f}{}^{0} = \overset{*}{\varphi}{}^{0},$$

essendo f e φ funzioni appartenenti al gruppo, ed essendo a una costante

$$(a\overset{*}{f}{}^{0})(\overset{*}{f}) = af$$

$$(a\overset{*}{f}{}^{0} + b\overset{*}{f})(c\overset{*}{f}{}^{0} + d\overset{*}{\varphi}) = ac\overset{*}{f}{}^{0} + ad\varphi + bcf + bd\overset{*}{f}\overset{*}{\varphi}\,.$$

Di qui si ricava che $a\overset{*}{f}{}^{0} + b\overset{*}{f}$ non ha che un senso formale, ma esso lo perde acquistandone uno effettivo, purché venga composto con una funzione qualunque del gruppo.

L'introduzione della $\overset{*}{f}{}^{0}$ semplifica molto le formule che abbiamo dato nei lavori pubblicati fin qui sulla teoria delle funzioni permutabili (cfr. op. cit. p. 138). Inoltre permette di considerare, per esempio una serie

$$\mathrm{F}\,|\,[\overset{*}{f}]\,| = \overset{*}{f}{}^{0} + f + \frac{\overset{*}{f}{}^{2}}{2\,!} + \frac{\overset{*}{f}{}^{3}}{3\,!} + \cdots$$

per cui si ha il teorema d'addizione integrale

$$\mathrm{F}\,|\,[\overset{*}{f} + \overset{*}{\varphi}]\,| = \overset{*}{\mathrm{F}}\,|\,[\overset{*}{f}]\,|\,\overset{*}{\mathrm{F}}\,|\,[\overset{*}{\varphi}]\,|\,,$$

che ha una forma più semplice di quella data a p. 159 dell'opera citata.

Inoltre si può mettere in luce il periodo di $\mathrm{F}\,|\,[\overset{*}{f}]\,|$, giacché si ha

$$\mathrm{F}\,|\,[\overset{*}{f} + 2\pi i\overset{*}{f}{}^{0}]\,| = \mathrm{F}\,|\,[\overset{*}{f}]\,|\,,$$

cioè $\mathrm{F}\,|\,[\overset{*}{f}]\,|$ ha il periodo $2\pi i\overset{*}{f}{}^{0}$.

(20) Cfr. Cap. I, § 1.

3. Passiamo adesso alle vere e proprie frazioni di composizione. Consideriamo un insieme di funzioni permutabili di ordini determinati. Denoteremo queste funzioni con $f, \varphi, \psi, \cdots, f_1, \varphi_1, \psi_1, \cdots, f_2, \varphi_2, \psi_2 \cdots$ tali che le loro combinazioni lineari siano pure di ordini determinati, ed inoltre tali che presa una qualunque di esse il cui ordine superi quello dell'altra, si possa trovare sempre una ed una sola funzione del gruppo che composta con questa riproduca la prima.

Per esempio un insieme di funzioni di questa natura sarà quello che potrà formarsi partendo da una funzione del 1° ordine e facendone le potenze intere e frazionarie e componendole e sommandole fra loro dopo averle moltiplicate per delle costanti.

Noi diremo che $\overset{*}{f}/\overset{*}{\varphi}$ *è la frazione di composizione appartenente al gruppo, avente per numeratore* f *e per denominatore* φ.

Stabiliremo poi

$$\frac{\overset{*}{f}}{\overset{*}{f^0}} = f,$$

e

$$\frac{\overset{*}{f_1}}{\overset{*}{\varphi_1}} = \frac{\overset{*}{f_2}}{\overset{*}{\varphi_2}},$$

quando

$$\overset{*}{f_1}\overset{*}{\varphi_2} = \overset{*}{\varphi_1}\overset{*}{f_2}.$$

Si può di qui ricavare la proposizione che *due frazioni di composizione eguali ad una terza sono eguali fra loro.*

Infatti se

$$\frac{\overset{*}{f_1}}{\overset{*}{\varphi_1}} = \frac{\overset{*}{f_2}}{\overset{*}{\varphi_2}}, \qquad \frac{\overset{*}{f_1}}{\overset{*}{\varphi_1}} = \frac{\overset{*}{f_3}}{\overset{*}{\varphi_3}},$$

sarà

$$(1) \qquad \overset{*}{f_1}\overset{*}{\varphi_2} = \overset{*}{f_2}\overset{*}{\varphi_1}, \qquad\qquad (2) \qquad \overset{*}{f_1}\overset{*}{\varphi_3} = \overset{*}{f_3}\overset{*}{\varphi_1},$$

d'onde componendo ambo i membri della (1) con φ_3

$$\overset{*}{f_1}\overset{*}{\varphi_2}\overset{*}{\varphi_3} = \overset{*}{f_2}\overset{*}{\varphi_1}\overset{*}{\varphi_3} = \overset{*}{f_2}\overset{*}{\varphi_3}\overset{*}{\varphi_1}.$$

Ma in virtù della (2)

$$\overset{*}{f_1}\overset{*}{\varphi_2}\overset{*}{\varphi_3} = \overset{*}{\varphi_2}\overset{*}{f_1}\overset{*}{\varphi_3} = \overset{*}{\varphi_2}\overset{*}{f_3}\overset{*}{\varphi_1},$$

quindi

$$\overset{*}{f_2}\overset{*}{\varphi_3}\overset{*}{\varphi_1} = \overset{*}{\varphi_2}\overset{*}{f_3}\overset{*}{\varphi_1}$$

da cui segue per la ipotesi generale che abbiamo fatta precedentemente

$$\overset{*}{\varphi_2}\overset{*}{f_3} = \overset{*}{f_2}\overset{*}{\varphi_3},$$

cioè

$$\frac{\dot f_2}{\dot\varphi_2} = \frac{\dot f_3}{\dot\varphi_3}\,.$$

Dalla definizione data si riconosce facilmente che $\dot f/\dot\varphi = \dot f\dot\psi/\dot\varphi\dot\psi$.

4. Abbiamo adesso tre casi da distinguere. 1° Supponiamo in $(\dot f/\dot\varphi)$ f di ordine superiore a φ. Allora, supposte soddisfatte le condizioni stabilite, noi potremo (ved. § 3) calcolare ψ tale che

$$\dot f = \dot\varphi\dot\psi\,,$$

e siccome questa eguaglianza potrà scriversi

$$\dot f\dot\varphi^\circ = \dot\varphi\dot\psi$$

così sarà

$$\frac{\dot f}{\dot\varphi} = \frac{\dot\psi}{\dot\varphi^\circ} = \psi\,.$$

2° Se invece f è di ordine inferiore a φ sarà (sempre supponendo soddisfatte le anzidette condizioni)

$$\varphi = \dot f\dot\psi,$$

e quindi

$$\dot\varphi\dot\psi^\circ = \dot f\dot\psi\,,$$

onde

$$\frac{\dot f}{\dot\varphi} = \frac{\dot\psi^\circ}{\dot\psi}\,.$$

3° Finalmente supponiamo f e φ dello stesso ordine. Il rapporto delle loro caratteristiche sarà costante, e denotandolo con a,

$$f - a\varphi = \psi,$$

sarà di ordine determinato superiore a φ. Allora

$$\psi = \dot\varphi\dot\theta,$$

e quindi

$$f = a\varphi + \dot\varphi\dot\theta\,.$$

Ne segue

$$\dot f\dot\varphi^\circ = (a\dot\varphi^\circ + \dot\theta)\,\dot\varphi\,,$$

e finalmente

$$\frac{\dot f}{\dot\varphi} = a\dot\varphi^\circ + \theta\,.$$

5. *Piu frazioni di composizione si possono sempre ridurre ad avere per denominatore comune una funzione di ordine non inferiore ai loro denominatori.*

Infatti se si hanno

$$\frac{\overset{*}{f}_1}{\overset{*}{\varphi}_2}, \quad \frac{\overset{*}{f}_2}{\overset{*}{\varphi}_2},$$

e φ è di ordine superiore e φ_1 e φ_2, sarà

$$\varphi = \overset{*}{\varphi}_1 \overset{*}{\psi}_1 = \overset{*}{\varphi}_2 \overset{*}{\psi}_2,$$

quindi

$$\frac{\overset{*}{f}_1}{\overset{*}{\varphi}_1} = \frac{\overset{*}{f}_1 \overset{*}{\psi}_1}{\overset{*}{\varphi}} \quad , \quad \frac{\overset{*}{f}_2}{\overset{*}{\varphi}_2} = \frac{\overset{*}{f}_2 \overset{*}{\psi}_2}{\overset{*}{\varphi}}.$$

Se φ fosse di ordine eguale ad uno o ad ambedue i denominatori si avrebbe

$$\varphi = \overset{*}{\varphi}_1 (a\overset{*}{\varphi}{}^\circ + \overset{*}{\psi}_1)$$

$$\varphi = \overset{*}{\varphi}_2 (b\overset{*}{\varphi}{}^\circ + \overset{*}{\psi}_2)$$

con a e b costanti, una delle quali potrebbe essere nulla. Quindi

$$\frac{\overset{*}{f}_1}{\overset{*}{\varphi}_1} = \frac{a\overset{*}{f}_1 + \overset{*}{f}_1 \overset{*}{\psi}_1}{\overset{*}{\varphi}}$$

$$\frac{\overset{*}{f}_2}{\overset{*}{\varphi}_2} = \frac{b\overset{*}{f}_2 + \overset{*}{f}_2 \overset{*}{\psi}_2}{\overset{*}{\varphi}}.$$

Un modo di ridurre più frazioni di composizione

$$\frac{\overset{*}{f}_1}{\overset{*}{\varphi}_1}, \quad \frac{\overset{*}{f}_2}{\overset{*}{\varphi}_2}, \quad \frac{\overset{*}{f}_3}{\overset{*}{\varphi}_3}, \ldots$$

allo stesso denominatore è di scrivere le loro equivalenti

$$\frac{\overset{*}{f}_1 \overset{*}{\varphi}_2 \overset{*}{\varphi}_3 \cdots}{\overset{*}{\varphi}_1 \overset{*}{\varphi}_2 \overset{*}{\varphi}_3 \cdots}, \quad \frac{\overset{*}{f}_2 \overset{*}{\varphi}_1 \overset{*}{\varphi}_3 \cdots}{\overset{*}{\varphi}_1 \overset{*}{\varphi}_2 \overset{*}{\varphi}_3 \cdots}, \quad \frac{\overset{*}{f}_3 \overset{*}{\varphi}_1 \overset{*}{\varphi}_2 \cdots}{\overset{*}{\varphi}_1 \overset{*}{\varphi}_2 \overset{*}{\varphi}_3 \cdots}.$$

6. Se riduciamo più frazioni di composizione ad un denominatore comune, e costruiamo una frazione di composizione che ha il denominatore comune e il numeratore è ottenuto con la somma o sottrazione dei vari numeratori, la frazione ottenuta è indipendente dal denominatore scelto, *secondo la definizione data precedentemente di equivalenza.*

Infatti se si ha

$$\frac{\overset{*}{f}_1}{\overset{*}{\varphi}_1} = \frac{\overset{*}{f}_2}{\overset{*}{\varphi}_2} \quad , \quad \frac{\overset{*}{\psi}_1}{\overset{*}{\varphi}_1} = \frac{\overset{*}{\psi}_2}{\overset{*}{\varphi}_2},$$

sarà

$$\frac{\overset{*}{f}_1 \pm \overset{*}{\psi}_1}{\overset{*}{\varphi}_1} = \frac{\overset{*}{f}_2 \pm \overset{*}{\psi}_2}{\overset{*}{\varphi}_2} \quad \text{giacché } \overset{*}{f}_1 \overset{*}{\varphi}_2 \pm \overset{*}{\psi}_1 \overset{*}{\varphi}_2 = \overset{*}{f}_2 \overset{*}{\varphi}_1 \pm \overset{*}{\psi}_2 \overset{*}{\varphi}_1.$$

L'operazione indicata precedentemente si chiama sommare o sottrarre le frazioni di composizione.

Si vede di qui che tutte le regole dell'aritmetica relative alla somma o alla sottrazione delle frazioni sono estendibili a quelle di composizione.

7. *Moltiplicare una frazione di composizione per una costante consiste nel moltiplicare il numeratore per quella costante, lasciando inalterato il denominatore.*

Comporre più frazioni di composizione significa formare una frazione di composizione che ha per numeratore la risultante dei numeratori e per denominatore la risultante dei denominatori.

Le proprietà associativa e commutativa si estendono al caso di composizione di frazioni, e si riconosce che il risultato si mantiene equivalente sostituendo alle frazioni componenti frazioni equivalenti.

Una funzione f è equivalente alla frazione

$$\frac{\overset{*}{f}}{\overset{*}{f^{0}}},$$

quindi

$$\overset{*}{f}\,\frac{\overset{*}{\psi}}{\overset{*}{\varphi}} = \frac{\overset{*}{f}}{\overset{*}{f^{0}}}\,\frac{\overset{*}{\psi}}{\overset{*}{\varphi}} = \frac{\overset{*}{f}\overset{*}{\psi}}{\overset{*}{f^{0}}\overset{*}{\varphi}} = \frac{\overset{*}{f}\overset{*}{\psi}}{\overset{*}{\varphi}}, \tag{3}$$

otteniamo in tal modo la composizione di una funzione con una frazione di composizione e si riconosce subito che anche per tale composizione sussiste la proprietà commutativa.

8. Se componiamo m frazioni equivalenti $\overset{*}{f}/\overset{*}{\varphi}$, il risultato si scriverà

$$\left(\frac{\overset{*}{f}}{\overset{*}{\varphi}}\right)^{m} \quad \text{si avrà evidentemente} \quad \left(\frac{\overset{*}{f}}{\overset{*}{\varphi}}\right)^{m} = \frac{\overset{*}{f^{m}}}{\overset{*}{\varphi^{m}}}.$$

La stessa formula si estenderà per definizione al caso di m eguale ad una frazione o ad un numero incommensurabile.

9. Dalle (3) si ricava

$$\overset{*}{f}\,\frac{\overset{*}{\psi}}{\overset{*}{f}} = \frac{\overset{*}{f}\overset{*}{\psi}}{\overset{*}{f}} = \frac{\overset{*}{\psi}}{\overset{*}{f^{0}}} = \psi.$$

Quindi componendo una frazione di composizione col suo denominatore si trova il numeratore, ossia *ogni frazione di composizione si può considerare come il risultato della operazione inversa della composizione compiuta sul numeratore mediante il denominatore*, e se adoperiamo l'esponente -1 per indicare, come precedentemente, l'operazione inversa, avremo

$$\frac{\overset{*}{\psi}}{\overset{*}{f}} = \overset{*}{\psi}\overset{*}{f}^{-1}.$$

Così anche

$$\frac{\overset{*}{f}{}^0}{\overset{*}{f}} = \overset{*}{f}{}^0 \overset{*}{f}{}^{-1},$$

e estendendo la proprietà che la composizione con $\overset{*}{f}{}^0$ non altera l'elemento su cui si opera, potremo scrivere

$$\frac{\overset{*}{f}{}^0}{\overset{*}{f}} = \overset{*}{f}{}^{-1}.$$

Ora (vedi § 8)

$$(f^{-1})^m = \left(\frac{\overset{*}{f}{}^0}{\overset{*}{f}}\right)^m = \frac{\overset{*}{f}{}^0}{\overset{*}{f}{}^m} = (f^m)^{-1}$$

che potremo anche scrivere

$$\overset{*}{f}{}^{-m}.$$

In generale $(\overset{*}{f}{}^h)^m = \overset{*}{f}{}^{hm}$ qualunque siano h ed m positivi, negativi o nulli.

10. Vogliasi ora trovare la frazione di composizione che composta con $\overset{*}{\psi}/\overset{*}{\theta}$ produce $\overset{*}{f}/\overset{*}{\varphi}$. Avremo evidentemente per soluzione

$$\frac{\overset{*}{f}\overset{*}{\theta}}{\overset{*}{\varphi}\overset{*}{\psi}};$$

ossia

$$\left(\frac{\overset{*}{f}}{\overset{*}{\varphi}}\right)\left(\frac{\overset{*}{\psi}}{\overset{*}{\theta}}\right)^{-1} = \frac{\overset{*}{f}}{\overset{*}{\varphi}}\,\frac{\overset{*}{\theta}}{\overset{*}{\psi}},$$

e anche

$$\frac{\left(\frac{\overset{*}{f}}{\overset{*}{\varphi}}\right)}{\left(\frac{\overset{*}{\psi}}{\overset{*}{\theta}}\right)} = \frac{\overset{*}{f}\overset{*}{\theta}}{\overset{*}{\varphi}\overset{*}{\psi}}.$$

11. Riassumendo, la teoria aritmetica delle frazioni può trasportarsi nel campo della composizione.

Gli elementi

$$\frac{\overset{*}{f}}{\overset{*}{\psi}} \quad , \quad \overset{*}{f}{}^{-1} \quad , \quad \overset{*}{f}{}^0$$

possono includersi nel campo di un gruppo di funzioni permutabili. *Essi non hanno più il significato di funzioni nel senso ordinario, ma tutte le operazioni colle loro proprietà associative, commutative, distributive possono estendersi agli elementi stessi.* Perciò possono chiamarsi essi pure *funzioni appartenenti al gruppo delle funzioni permutabili date*, e ad essi possiamo estendere il concetto di ordine, cioè se $\overset{*}{f}$ è di ordine m, e

$$\overset{*}{\varphi}\overset{*}{f}$$

è di ordine $n < m$ si dirà che φ è dell'ordine negativo

$$n - m.$$

Evidentemente se φ è di ordine positivo m, $\overset{*}{\varphi}{}^{-1}$ sarà di ordine $-m$, e il teorema che la risultante di due funzioni di dati ordini ha per ordine la somma degli ordini delle componenti, si estende al caso degli ordini negativi. Si estende anche facilmente il concetto di ordine superiore ad un ordine dato negativo nel caso in cui l'ordine non sia determinato, cioè se $\overset{*}{\varphi}\overset{*}{f}$ non fosse di ordine determinato, ma fosse di un ordine superiore ad $n < m$, si direbbe che φ è di ordine superiore ad $n - m$.

12. Come abbiamo detto precedentemente (§ 1), potrebbe parere che in tal modo non si sia fatto che una teoria puramente formale; però questo non è il caso in quantoché gli elementi introdotti, pur essendo formali, cessano di essere tali, per acquistare il senso di funzioni ordinarie, ogni qualvolta si compongano con una funzione di un ordine convenientemente elevato. Così, per esempio, se si ha una somma

$$\overset{*}{f}{}^{0} + \overset{*}{f}{}^{-m} + \frac{\overset{*}{f}}{\overset{*}{\varphi}} + \frac{\overset{*}{\psi}}{\overset{*}{\theta}},$$

basterà comporla con $\overset{*}{f}{}^{m}\,\overset{*}{\varphi}\,\overset{*}{\theta}{}^{k}$ perché divenga una funzione ordinaria.

13. Vogliamo dare subito un esempio ed una applicazione di questo concetto.

Consideriamo un seguito infinito di funzioni

$$f_1(x, y)\ ,\ f_2(x, y)\ , \cdots , f_m(x, y)\ , \cdots \tag{4}$$

appartenenti ad un gruppo di funzioni permutabili. Per semplicità supponiamo ridotto il gruppo alla forma canonica.

Quando è che diremo che esse tendono verso un limite?

La questione non è semplice e noi esamineremo varii casi.

1° Siano le funzioni (4) definite nel campo

$$a \leq x \leq y \leq b,$$

e siano di ordine positivo. Esse tenderanno uniformemente verso una funzione $f(x, y)$ di ordine maggiore o eguale ad 1, se, preso comunque ε, si potrà trovare n tale che

$$|f_m(x, y) - f(x, y)| < \varepsilon, \tag{5}$$

purché m sia maggiore di n [21].

Si riconosce immediatamente che $f(x, y)$ appartiene anch'essa al gruppo delle funzioni permutabili.

(21) È evidente che la condizione (5) porta come conseguenza che l'ordine positivo delle $f_m(x, y)$ deve essere uguale o superiore ad 1.

2° Essendo soddisfatte tutte le altre condizioni precedenti all'infuori della (5), le funzioni (4) tenderanno verso la funzione $f(x, y)$ di ordine maggiore o eguale ad α (essendo $0 < \alpha < 1$), se

$$(y-x)^{1-\alpha}\,|f_m(x, y)-f(x, y)| < \varepsilon.$$

Si riconosce anche in questo caso che $f(x, y)$ appartiene al gruppo delle funzioni permutabili.

Sia ora φ una funzione di ordine determinato positivo. Consideriamo

$$\overset{*}{\varphi}\overset{*}{f_1}\,,\ \overset{*}{\varphi}\overset{*}{f_2}\,,\cdots$$

esse tenderanno verso la funzione limite

$$\psi = \overset{*}{f}\overset{*}{\varphi},$$

quindi potremo dire

$$f = \frac{\overset{*}{\psi}}{\overset{*}{\varphi}}\,.$$

Questa proprietà serve ad estendere il concetto di limite come vedremo nel paragrafo seguente.

14. Siano

$$f_1\,, f_2\,, f_3\,,\cdots$$

delle funzioni del gruppo di ordine negativo nullo o positivo, ma tali che gli ordini stessi siano tutti superiori ad un numero negativo $-n$. Sia φ una funzione del gruppo di ordine determinato positivo superiore ad n. Le funzioni

$$\overset{*}{\varphi}\overset{*}{f_1}\,,\ \overset{*}{\varphi}\overset{*}{f_2}\,,\ \overset{*}{\varphi}\overset{*}{f_3}\,,\cdots \tag{6}$$

saranno tutte di ordini positivi. Se esse tendono, secondo i criterii sopra stabiliti, verso una funzione di ordine positivo

$$\psi(x, y)$$

chiameremo limite di $f_1\,, f_2\,, f_3\,,\cdots$ la frazione di composizione

$$\frac{\overset{*}{\psi}(x, y)}{\overset{*}{\varphi}(x, y)}\ [22].$$

Per giustificare questa definizione basta provare che il detto limite è indipendente da φ. Infatti invece di φ prendiamo φ' di ordine superiore ad n. Avremo

$$\overset{*}{\varphi'}\overset{*}{f_1}\,,\ \overset{*}{\varphi'}\overset{*}{f_2}\,,\ \overset{*}{\varphi'}\overset{*}{f_3}\,,\cdots \tag{6'}$$

(22) Evidentemente deve supporsi che ψ sia tale che corrisponda alle condizioni poste nel § 3 per la definizione di frazione.

Due casi possono presentarsi: o queste funzioni hanno un limite ψ', o non esiste limite. Nel primo caso avremo che

$$\overset{*}{\varphi}(\overset{*}{\varphi'}\overset{*}{f_1}),\ \overset{*}{\varphi}(\overset{*}{\varphi'}\overset{*}{f_2}),\cdots$$

avranno per limite $\varphi\psi'$.

Nello stesso modo

$$\overset{*}{\varphi'}(\overset{*}{\varphi}\overset{*}{f_1}),\ \overset{*}{\varphi'}(\overset{*}{\varphi}\overset{*}{f_2}),\cdots$$

avranno per limite $\varphi'\psi$. Ma, per le proprietà associativa e commutativa,

$$\varphi(\varphi' f_1) = \varphi'(\varphi f_1) \quad , \quad \varphi(\varphi' f_2) = \varphi'(\varphi f_2),\cdots$$

quindi

$$\varphi\psi' = \varphi'\psi$$

che porta come conseguenza

$$\frac{\psi}{\varphi} = \frac{\psi'}{\varphi'}\,.$$

Il caso che l'insieme delle funzioni (6′) non abbia limite, mentre lo ha l'insieme delle (6), può presentarsi benissimo.

Ne diamo qui un esempio. Sia

$$f_n(y-x) = \operatorname{sen} n \cos n(y-x) + \cos(y-x).$$

Le funzioni

$$f_1, f_2, f_3, \cdots, f_n, \cdots$$

non ammettono alcun limite per $n=\infty$. Ma formiamo

$$\overset{*}{f_n}\overset{*}{1} = \frac{1}{n}\operatorname{sen} n \operatorname{sen} n(y-x) + \operatorname{sen}(y-x).$$

Questa avrà per limite per $n=\infty$

$$\operatorname{sen}(y-x) = \varphi,$$

quindi, in virtù della precedente definizione,

$$\lim_{n=\infty} f_n = \overset{*}{\varphi}\overset{*}{1}{}^{-1} = \cos(y-x).$$

Secondo dunque la definizione data si avrebbe un limite per l'insieme delle funzioni f_n che non sussisterebbe secondo la definizione ordinaria di limite.

15. Secondo la definizione adesso data di limite noi possiamo esprimere $\overset{*}{f}{}^0$ come un limite.

Prendiamo $\overset{*}{f}{}^{1/n}$ con n intero e positivo, avremo

$$\overset{*}{f}\overset{*}{f}{}^{1/n} = \overset{*}{f}{}^{(n+1)/n},$$

quindi nella ipotesi che, per n tendente all'∞, $\overset{*}{f}{}^{n+1/n}$ tenda verso f (vedi §§ 13, 14), avremo

$$\lim_{n=\infty} \overset{*}{f}{}^{1/n} = \overset{*}{f}{}^0.$$

Noi abbiamo veduto che

$$\overset{*}{1}{}^{z} = \frac{(y-x)^{z-1}}{\Gamma(z)},$$

perciò potremo considerare

$$\overset{*}{1}{}^{0} = \lim_{z=0} \frac{1}{\Gamma(z)(y-x)^{1-z}}.$$

Ma $\overset{*}{f}{}^{0}$ si può ottenere come limite in altri infiniti modi.

Supponiamo che il gruppo sia stato ridotto alla forma canonica, e riprendiamo le formule del § 8 del Cap. I. Ponendo

$$\lambda(\xi) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} h e^{-h^2 \xi^2},$$

la (2) del detto capitolo diverrà

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} h e^{-h^2 (y-x)^2} + \int_0^{y-x} \frac{2h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 \xi^2} \Phi(\xi \mid x, y) \, d\xi.$$

Questa funzione è permutabile con una funzione $\varphi(x, y)$ del gruppo. Eseguendo la composizione avremo

$$\int_x^y \varphi(\xi, y) \frac{2h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 (\xi-x)^2} d\xi + \int_x^y \varphi(\xi, y) d\xi \int_0^{\xi-x} \frac{2h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 \eta^2} \Phi(\eta \mid x, \xi) \, d\eta =$$

$$= \int_0^{y-x} \varphi(x+\zeta, y) \frac{2h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 \zeta^2} d\zeta + \int_0^{y-x} \frac{2h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 \eta^2} d\eta \int_\eta^{y-x} \varphi(x+\zeta, y) \Phi(\eta \mid x, x+\zeta) \, d\zeta.$$

Passando al limite per $h = \infty$ otteniamo

$$\varphi(x, y) + \int_x^y \varphi(\xi, y) \Phi(0 \mid x, \xi) \, d\xi.$$

Ciò prova che

$$\Phi(0 \mid x, y)$$

è una funzione permutabile appartenente al gruppo. Apparterrà dunque al gruppo anche la funzione

$$\psi_h(x, y) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} h e^{-h^2 (y-x)^2} + \int_0^{y-x} \frac{2h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 \xi^2} \Phi(\xi \mid x, y) \, d\xi - \Phi(0 \mid x, y),$$

e avremo

$$\lim_{h=\infty} (\overset{*}{\varphi} \overset{*}{\psi}_h) = \varphi(x, y),$$

onde

$$\lim_{h=\infty} \overset{*}{\psi}_h = \overset{*}{f^\circ},$$

denotando con f una funzione qualsiasi appartenente al gruppo.

In modo analogo potrebbero anche calcolarsi come limite $f^{-1}, f^{-2}, \ldots$

16. Vogliamo fare un'ultima applicazione, al caso delle serie, di ciò che è stato detto alla fine del § 12.

Abbiasi la serie

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \cdots$$

il cui raggio di convergenza sia R.

Sostituiamo a z

$$\Psi = \mathrm{A}\,(\overset{*}{\mathrm{F}}{}^\circ + \mathrm{F}),$$

e consideriamo le potenze come operazioni di composizioni.

Dovremo sostituire

$$\overset{*}{\Psi}{}^m = \mathrm{A}^m \left(\mathrm{F}^\circ + m\mathrm{F} + \frac{m\,(m-1)}{2!}\,\overset{*}{\mathrm{F}}{}^2 + \cdots\right)$$

a z^m.

La serie sarà convergente se esisterà un limite per la somma dei primi m termini, quando m cresce indefinitamente.

Componiamo $\overset{*}{\Psi}{}^m$ con una funzione di ordine determinato positivo

$$\varphi\,(x\,,y) = f\,(x\,,y)\,(y-x)^{\alpha-1},$$

ove

$$|f\,(x\,,y)| < \mathrm{N}.$$

Supponiamo F di ordine determinato positivo λ, e chiamiamo M un numero maggiore del massimo modulo della sua caratteristica; sarà

$$|\overset{*}{\mathrm{F}}{}^h| \quad < \mathrm{M}^h\,(y-x)^{h\lambda-1}$$

$$|\overset{*}{\mathrm{F}}{}^h\,\overset{*}{\varphi}| < \mathrm{M}^h\,\mathrm{N}\,(y-x)^{h\lambda+\alpha-1}$$

$$|\overset{*}{\Psi}{}^m\,\overset{*}{\varphi}| < \mathrm{A}^m\,\mathrm{N}\,(y-x)^{\alpha-1}\left(1 + m\mathrm{M}\,(y-x)^\lambda + \frac{m\,(m-1}{2!}\,(y-x)^{2\lambda} + \cdots\right) =$$

$$= \mathrm{A}^m\,\mathrm{N}\,(y-x)^{\alpha-1}\,(1 + \mathrm{M}\,(y-x)^\lambda)^m.$$

Dunque per la convergenza della serie

$$a_0\,\overset{*}{\Psi}{}^\circ + a_1\,\Psi + a_2\,\overset{*}{\Psi}{}^2 + \cdots$$

sarà sufficiente che

$$|\mathrm{A}\,(1 + \mathrm{M}\,(y-x)^\lambda)| < \mathrm{R}.$$

17. Nel § 3 abbiamo posto come condizioni alle funzioni del gruppo che si consideravano di essere di ordini determinati e tali che anche le loro combinazioni lineari fossero di ordini determinati, ed inoltre che prese due funzioni, l'una di ordine superiore all'altra, questa composta con una ed una

sola funzione riproducesse la prima. Ora alcune di queste restrizioni possono togliersi senza che cessino di esser vere alcune delle proposizioni stabilite. Così noi potremo supporre che i soli denominatori soddisfino alle condizioni precedenti. La proposizione fondamentale che due frazioni di composizione eguali ad una terza sono eguali fra loro seguiterà a sussistere, e così le operazioni di somma, sottrazione, moltiplicazione per una costante, e composizione delle frazioni di composizione colle loro proprietà varranno sempre. Non potrà dirsi lo stesso per la divisione, a meno che anche il numeratore della frazione divisore non soddisfi, come i denominatori, alle precedenti condizioni.

La estensione che adesso abbiamo fatta appare necessaria, giacchè, anche partendo da un insieme di funzioni del gruppo che godono delle proprietà stabilite al § 3, se si introducono nel gruppo delle funzioni limiti, queste (come si riconosce facilmente) possono non più soddisfare alla condizione di essere di un ordine determinato.

Si può anche estendere (con lievi e semplici modificazioni delle proposizioni enunciate) il campo delle considerazioni al caso in cui le funzioni del gruppo dalle quali si parte, possano essere di ordine non determinato purché siano di ordine superiore ad un numero positivo, ed inoltre i denominatori siano tali che una funzione qualunque del gruppo, la quale, rapporto ad un denominatore, sia di ordine non inferiore ad un numero determinato positivo, possa ottenersi dal denominatore stesso in un sol modo componendolo con un'altra funzione del gruppo.

18. Abbiamo accennato alla fine del capitolo precedente (§ 15) alla estensione del campo di applicazione del teorema del § 2, Cap. X, e delle considerazioni del § 11 del Cap. XI dell'opera più volte citata (*Leçons sur les fonctions de lignes*), in seguito all'introduzione delle funzioni di ordine fratto. Analoga cosa si può dire adesso in virtù della introduzione di frazioni di composizione, e delle funzioni di ordine negativo appartenenti ad un gruppo di funzioni permutabili. Ad equazioni algebriche o differenziali, le cui soluzioni hanno dei *poli*, corrispondono delle equazioni integro-differenziali *le cui soluzioni possono esprimersi mediante funzioni di ordine negativo.*

CAPITOLO IV.

Progressioni di composizione – Logaritmi di composizione.

1. Sia $\varphi(x, y)$ una funzione di ordine determinato positivo. Consideriamo la successione

$$\ldots \overset{*}{\varphi}{}^{-3}, \overset{*}{\varphi}{}^{-2}, \overset{*}{\varphi}{}^{-1}, \overset{*}{\varphi}{}^{0}, \varphi, \overset{*}{\varphi}{}^{2}, \overset{*}{\varphi}{}^{3}, \ldots$$

Diremo che essa costituisce una *progressione di composizione* avente per *ragione* φ.

Gli esponenti si diranno i *logaritmi di composizione* delle varie potenze di composizione e φ se ne dirà la *base*. Scriveremo

$$n = \overset{*}{\log}_{\varphi} \overset{*}{\varphi}^{n},$$

con n positivo o negativo.

Tutta la teoria aritmetica dei logaritmi è evidentemente estensibile a quelli di composizione ora introdotti. Così *il logaritmo della risultante di più funzioni è la somma dei logaritmi delle funzioni componenti, ecc.*

Analogamente la progressione di composizione gode di proprietà analoghe alle progressioni geometriche. In particolare

$$\overset{*}{\varphi}^{0} + \varphi + \overset{*}{\varphi}^{2} + \cdots + \overset{*}{\varphi}^{n} = \frac{\overset{*}{\varphi}^{0} - \overset{*}{\varphi}^{n+1}}{\overset{*}{\varphi}^{0} - \varphi}.$$

3. Mediante la inserzione di medii si può passare a logaritmi frazionarii. Inseriamo, mediante il calcolo di $\overset{*}{\varphi}^{1/m}$, m medii fra due elementi della progressione; otterremo

$$\ldots \overset{*}{\varphi}^{-1} \ldots \overset{*}{\varphi}^{-(2/m)}, \overset{*}{\varphi}^{-(1/m)}, \overset{*}{\varphi}^{0} \overset{*}{\varphi}^{1/m}, \overset{*}{\varphi}^{2/m}, \ldots, \varphi, \overset{*}{\varphi}^{m+1/m}, \ldots, \overset{*}{\varphi}^{2} \ldots$$

che potrà considerarsi come una nuova progressione di composizione avente per ragione $\overset{*}{\varphi}^{1/m}$, e potremo scrivere

$$\frac{h}{m} = \overset{*}{\log}_{\varphi} \overset{*}{\varphi}^{h/m},$$

con h e m numeri interi.

In generale, se r è un numero positivo o negativo razionale o irrazionale, porremo

(1) $$r = \overset{*}{\log}_{\varphi} \overset{*}{\varphi}^{r},$$

e a questi logaritmi di composizione potremo estendere le proprietà dei logaritmi aritmetici.

4. Ci farà comodo di scrivere le potenze di composizione sotto la forma

$$\overset{*}{\varphi}^{r} = \overset{*}{\varphi}^{r\overset{*}{\varphi}^{0}},$$

e quindi di scrivere invece della (1)

$$r\overset{*}{\varphi}^{0} = \overset{*}{\log}_{\varphi} \overset{*}{\varphi}^{r\overset{*}{\varphi}^{0}} = \overset{*}{\log}_{\varphi} \overset{*}{\varphi}^{r}.$$

5. In tal modo noi possiamo, partendo da una base φ e considerandone tutte le potenze reali, avere i logaritmi espressi mediante numeri reali moltiplicati per $\overset{*}{\varphi}^{0}$; ma senza un passo ulteriore non ci sarà possibile di ricavare un

$$\overset{*}{\log}_{\varphi} \psi$$

se ψ, pur essendo permutabile con φ, non è una potenza di φ. Questo ulteriore passo non si potrà fare senza la introduzione del *concetto fondamentale della base neperiana.*

CAPITOLO V.

Base neperiana dei logaritmi di composizione - Logaritmi neperiani di composizione - Estensione della teoria dei logaritmi di composizione.

1. Prendiamo la funzione

$$e\overset{*}{f}{}^{\circ} = \overset{*}{e}\,;$$

avremo

$$\overset{*}{e}{}^{z} = e^{z}\overset{*}{f}{}^{\circ},$$

e quindi

$$\frac{d}{dz}\overset{*}{e}{}^{z} = e^{z}\overset{*}{f}{}^{\circ} = \overset{*}{e}{}^{z}.$$

A cagione di questa proprietà, noi chiameremo $\overset{*}{e}$ la *base dei logaritmi neperiani di composizione.*

Avremo evidentemente

$$\overset{*}{e}{}^{z} = \overset{*}{f}{}^{\circ}\left(1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^2}{3!} + \cdots\right),$$

e, in virtù della convenzione fatta nel Capitolo precedente,

$$\overset{*}{e}{}^{z} = \overset{*}{e}{}^{z\overset{*}{f}{}^{\circ}} = (z\overset{*}{f}{}^{\circ})^{\circ} + z\overset{*}{f}{}^{\circ} + \frac{(z\overset{*}{f}{}^{\circ})^2}{2!} + \frac{(z\overset{*}{f}{}^{\circ})^3}{3!} + \cdots.$$

2. Analogamente, *per definizione*, porremo

$$\overset{*}{e}{}^{\Phi} = \overset{*}{\Phi}{}^{\circ} + \Phi + \frac{\overset{*}{\Phi}{}^{2}}{2!} + \frac{\overset{*}{\Phi}{}^{3}}{3!} + \cdots = \Psi, \tag{1}$$

e scriveremo

$$\Phi = \overset{*}{\log}_{\overset{*}{e}} \Psi,$$

o anche, più semplicemente,

$$\Phi = \overset{*}{l}\,\Psi.$$

Con la introduzione di questi nuovi concetti noi riusciremo a risolvere il problema che ci siamo proposti alla fine del Capitolo precedente.

3. Cominciamo perciò dal risolvere la questione: dato Ψ mediante l'equazione precedente determinare Φ.

Avremo

$$\overset{*}{e}{}^{z\Phi} = \overset{*}{\Psi}{}^{z},$$

quindi, derivando rispetto a z,

$$\frac{d\overset{*}{\Psi}{}^{z}}{dz} = \overset{*}{e}{}^{z\Phi}\,\overset{*}{\Phi} = \overset{*}{\Psi}{}^{z}\,\overset{*}{\Phi}\,,$$

d'onde

$$\overset{*}{\Psi}{}^{-z}\frac{d\overset{*}{\Psi}{}^{z}}{dz} = \Phi = \overset{*}{l}\Psi\,. \tag{3}$$

Siamo giunti così alla formula molto semplice (3) per ricavare $\overset{*}{l}\Psi$ allorché si conosce $\overset{*}{\Psi}{}^{z}$. Però, con quello che abbiamo fin qui detto, la validità della formula è subordinata al sapere *a priori* che esiste il $\overset{*}{l}\Psi$.

4. Ma supponiamo, ora, che ci sia data una funzione qualunque ψ del gruppo e ammettiamola, per semplicità, di ordine determinato α.

Supponiamo inoltre (vedi Cap. II, § 12) che, avendo calcolato $\overset{*}{\psi}{}^{z}$, questa risulti data da

$$(y-x)^{\alpha z-1}\,G\,(x\,,y\,|\,z)\,, \tag{2}$$

ove G sia una funzione analitica di z.

Calcoliamo

$$\frac{d\overset{*}{\psi}{}^{z}}{dz}\,;$$

essa risulterà

$$\alpha\,(y-x)^{\alpha z-1}\,G\,(x\,,y\,|\,z)\log(y-x) + (y-x)^{\alpha z-1}\,G'\,(x\,,y\,|\,z)\,,$$

denotando con G' la derivata di G rispetto a z [23].

Ne segue che

$$\frac{d\overset{*}{\psi}{}^{z}}{dz}$$

non sarà di ordine determinato; però potremo considerare la frazione di composizione (vedi Cap. III, § 17)

$$\overset{*}{\psi}{}^{-z}\frac{d\overset{*}{\psi}{}^{z}}{dz} = \Theta. \tag{3'}$$

È facile dimostrare che Θ è indipendente da z. Infatti abbiamo

$$\overset{*}{\psi}{}^{z+\varepsilon} - \overset{*}{\psi}{}^{z} = \overset{*}{\psi}{}^{z}\,(\overset{*}{\psi}{}^{\varepsilon} - \overset{*}{\psi}{}^{0})\,.$$

Ora, $\overset{*}{\psi}{}^{\varepsilon} - \overset{*}{\psi}{}^{0}$ è indipendente da z; dal che discende subito la proposizione enunciata.

(23) A scanso di equivoci teniamo presente che con $\log A = lA$ noi intendiamo di rappresentare il logaritmo neperiamo del numero A.

Dalla (3') segue

$$\frac{d\overset{*}{\psi}{}^z}{dz} = \overset{*}{\psi}{}^z\,\Theta,$$

quindi

$$\frac{d^2\overset{*}{\psi}{}^z}{dz^2} = \overset{*}{\psi}{}^z\,\overset{*}{\Theta}{}^2$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{d^h\overset{*}{\psi}{}^z}{dz^h} = \overset{*}{\psi}{}^z\,\Theta^h.$$

Ma

$$\overset{*}{\psi}{}^z + \frac{d\overset{*}{\psi}{}^z}{dz} + \frac{1}{2!}\frac{d^2\overset{*}{\psi}{}^z}{dz^2} + \cdots + \frac{1}{h!}\frac{d^h\overset{*}{\psi}{}^z}{dz^h} + \cdots,$$

se la serie è convergente nel cerchio di raggio 1 il cui centro è z, ha per somma

$$\overset{*}{\psi}{}^{z+1},$$

quindi

$$\overset{*}{\psi}{}^{z+1} = \overset{*}{\psi}{}^z\left(\overset{*}{\Theta}{}^0 + \overset{*}{\Theta} + \frac{\overset{*}{\Theta}{}^2}{2!} + \frac{\overset{*}{\Theta}{}^3}{3!} + \cdots\right),$$

e per conseguenza

$$\psi = \overset{*}{\Theta}{}^0 + \Theta + \frac{\overset{*}{\Theta}{}^2}{2!} + \frac{\overset{*}{\Theta}{}^3}{3!} + \cdots,$$

da cui segue

$$\Theta = \overset{*}{l}\,\psi.$$

Basterà dunque sapere che $\overset{*}{\psi}{}^z$ può porsi sotto la forma (2) e che essa è una funzione analitica intera di z per concludere che esiste il $\overset{*}{l}\psi$ e che esso si può ottenere mediante la formula (3').

5. Come esempio noi vogliamo calcolare

$$\overset{*}{l}\,1,$$

ricordando che l'unità appartiene al gruppo del ciclo chiuso (cfr. Cap. I, § 11).

Noi abbiamo trovato (Cap. II, § 14).

$$\overset{*}{1}{}^z = \frac{1}{\Gamma(z)}(y-x)^{z-1}.$$

Ora è ben noto che $1/\Gamma(z)$ è una funzione intera; quindi potremo senz'altro applicare il procedimento precedente, e avremo

$$\frac{d\overset{*}{1}{}^z}{dz} = \frac{1}{\Gamma(z)}(y-x)^{z-1}\log(y-x) - \frac{1}{\Gamma^2(z)}(y-x)^{z-1}\,\Gamma'(z) = \Theta(x,y\,|\,z), \tag{4}$$

e

$$\overset{*}{l}\,1 = \overset{*}{\Theta}\,\overset{*}{1}{}^{-z}. \tag{5}$$

Pel teorema precedente, dovrà il secondo membro essere indipendente da z. Facciamo quindi $z = 1$; si otterrà

$$\Theta = \log(y - x) - \Gamma'(1).$$

Ora

$$C = -\Gamma'(1) = -\int_0^\infty e^{-x} \log x \, dx = 0{,}57721 \cdots \qquad \text{(costante di Eulero),}$$

quindi

$$\overset{*}{l}\,1 = \frac{\overset{*}{\overbrace{\log(y - x) + C}}}{\overset{*}{1}} . \tag{6}$$

6. Il teorema generale del § precedente conduce a riconoscere che l'espressione (5) deve essere indipendente da z. Ma *a priori* la cosa non risulta immediatamente quando si osservi a primo aspetto la espressione (5); quindi, dato l'interesse e la curiosità del risultato passiamo a verificarlo direttamente. La espressione (5) non può mettersi sotto una forma analitica, e, come è noto, ha un puro significato simbolico; però noi possiamo applicare un principio generale (cfr. Cap. III, § 12), mediante il quale qualunque espressione del tipo stesso perde il significato simbolico per divenire una funzione ordinaria. Se dunque

$$\overset{*}{\Theta}\,\overset{*}{1}^{-z}$$

ha un significato puramente simbolico,

$$(\overset{*}{\Theta}\,\overset{*}{1}^{-z})\,\overset{*}{1}$$

è una funzione ordinaria. Basterà dunque verificare direttamente, sopra questa funzione ordinaria, che essa è indipendente da z.

Ora

$$(\overset{*}{\Theta}\,\overset{*}{1}^{-z})\,\overset{*}{1} = \overset{*}{\Theta}\,\overset{*}{1}^{1-z}.$$

Ma

$$\Theta = \frac{1}{\Gamma(z)} (y - x)^{z-1} \log(y - x) - \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} \overset{*}{1}^{z};$$

quindi

$$\overset{*}{\Theta}\,\overset{*}{1}^{1-z} = \frac{1}{\Gamma(z)\,\Gamma(1 - z)} \int_x^y \frac{\log(\xi - x)\, d\xi}{(\xi - x)^{1-z} (y - \xi)^z} - \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} .$$

Abbiamo

$$\int_x^y \frac{\log(\xi - x)\, d\xi}{(\xi - x)^\beta (y - \xi)^\alpha} = -\frac{\partial}{\partial\beta} \int_x^y \frac{d\xi}{(y - \xi)^\alpha (\xi - x)^\beta} =$$

$$= -\frac{\partial}{\partial\beta} \left[\frac{1}{(y - x)^{\alpha+\beta-1}} \frac{\Gamma(1 - \alpha)\,\Gamma(1 - \beta)}{\Gamma(2 - \alpha - \beta)} \right] .$$

Questa espressione si calcola senza alcuna difficoltà. Facendo poi $\alpha = z$, $\beta = 1 - z$, si ottiene

$$\int_x^y \frac{\log(\xi - x)\, d\xi}{(y-\xi)^z (\xi - x)^{1-z}} = \Gamma(z)\,\Gamma(1-z)\left\{\log(y-x) + \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} - \Gamma'(1)\right\},$$

da cui finalmente si ricava

$$\overset{*}{\Theta}\, 1^{1-z} = \log(y-x) + C$$

che coincide col risultato (6) precedentemente ottenuto (cfr. Cap. VIII, § 6).

7. Verifichiamo ora che, sostituendo

$$\overset{*}{l}\, 1 = \Phi$$

nella serie (1) al posto di Φ, otteniamo l'*unità* come somma della serie.

Abbiamo infatti, posto

$$\overset{*}{1}{}^z = \frac{1}{\Gamma(z)}(y-x)^{z-1} = \Theta(x, y \mid z)$$

$$\frac{d\Theta}{dz} = \overset{*}{\Theta}\overset{*}{\Phi}$$

$$\frac{d^2\Theta}{dz^2} = \overset{*}{\Theta}\overset{*}{\Phi}{}^2$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{d^h\Theta}{dz^h} = \overset{*}{\Theta}\overset{*}{\Phi}{}^h,$$

e quindi

$$\overset{*}{\Theta}\left(\overset{*}{\Phi}{}^0 + \overset{*}{\Phi} + \frac{\overset{*}{\Phi}{}^2}{2!} + \frac{\overset{*}{\Phi}{}^3}{3!} + \cdots\right) = \Theta + \frac{d\Theta}{dz} + \frac{1}{2!}\frac{d^2\Theta}{dz^2} + \cdots.$$

Ora, Θ è una *funzione intera*; per conseguenza

$$\overset{*}{\Theta}\left(\overset{*}{\Phi}{}^0 + \overset{*}{\Phi} + \frac{\overset{*}{\Phi}{}^2}{2!} + \cdots\right) = \Theta(x, y \mid z+1),$$

onde

$$\overset{*}{\Phi}{}^0 + \Phi + \frac{\overset{*}{\Phi}{}^2}{2!} + \cdots = \frac{\overset{*}{\Theta}(x, y \mid z+1)}{\overset{*}{\Theta}(x, y \mid z)} = 1.$$

8. Nel § 2 abbiamo stabilito la definizione di $\overset{*}{l}\Psi$. È facile verificare le proprietà fondamentali seguenti:

(7) $\overset{*}{l}(\overset{*}{\Psi}\overset{*}{\Theta}) = \overset{*}{l}\Psi + \overset{*}{l}\Theta$, (8) $\overset{*}{e}{}^{\varphi+\chi} = (\overset{*}{e}{}^{\varphi})(\overset{*}{e}{}^{\chi})$

(7′) $\overset{*}{l}\left(\dfrac{\overset{*}{\Psi}}{\overset{*}{\Theta}}\right) = \overset{*}{l}\Psi - \overset{*}{l}\Theta$, (8′) $\overset{*}{e}{}^{\varphi-\chi} = \dfrac{\overset{*}{e}{}^{\varphi}}{\overset{*}{e}{}^{\chi}}$

(7″) $\overset{*}{l}(\overset{*}{\Psi}{}^m) = m\overset{*}{l}\Psi$, (8″) $(\overset{*}{e}{}^{\varphi})^m = \overset{*}{e}{}^{m\varphi}$

(7‴) $\overset{*}{l}(c\Theta) = \overset{*}{l}c\overset{*}{\Theta}{}^0 + \overset{*}{l}\Theta$, (8‴) $\overset{*}{e}{}^{c\overset{*}{\Phi}{}^0+\Phi} = e^c\,\overset{*}{e}{}^{\Phi}$, ove m è numero intero o frazionario; ed al limite le formule precedenti varranno anche per m incommensurabile. c denota una costante.

È evidente che

$$\overset{*}{e}^{2\pi n i \overset{*}{f}{}^{0}} = \overset{*}{f}{}^{0}$$

allorché n è un numero intero. Ne segue che $\overset{*}{l}f$ è individuato a meno di un termine additivo $2\pi n i \overset{*}{f}{}^{0}$ nello stesso modo che il logaritmo neperiano di un numero A è individuato a meno del termine $2\pi n i$. Per conseguenza le formule (7), (7′), (7″), (7‴) e le analoghe vanno interpretate in modo simile a quello col quale si interpretano le corrispondenti formule della ordinaria teoria dei logaritmi.

Supponiamo ora m complesso. Noi estenderemo, *per definizione*, la formula (8″) al caso di m complesso; e siccome il secondo membro, in virtù della (1), è rappresentato dalla serie

$$(m\overset{*}{\varphi})^{0} + m\varphi + \frac{(m\overset{*}{\varphi})^{2}}{2\,!} + \cdots$$

che ha un senso ben determinato, così resta definito il primo membro.

Supponiamo ora $\overset{*}{e}^{\varphi} = \Psi$; sarà quindi definito

$$\overset{*}{\Psi}{}^{m}$$

per m complesso, e sarà

$$\overset{*}{\Psi}{}^{m} = \overset{*}{e}^{m\overset{*}{l}\Psi}.$$

Evidentemente siccome $\overset{*}{e}^{\varphi}$ non cambia aggiungendo a φ il termine $2\pi n i \overset{*}{\varphi}{}^{0}$, così $(\overset{*}{e}^{\varphi})^{m}$ è determinato a meno del fattore $e^{2\pi m n i}$.

Per definizione noi stabiliremo anche la formula seguente:

$$(\overset{*}{e}^{\varphi})^{\theta}\ \overset{*}{e}^{\overset{*}{\varphi}\overset{*}{\theta}},$$

nella ipotesi che φ e θ siano funzioni permutabili. Siccome il secondo membro ha un senso conosciuto, così resta definito il primo membro; e, se

$$\overset{*}{e}^{\varphi} = \Psi,$$

resterà definito

$$\overset{*}{\Psi}{}^{\theta},$$

e precisamente avremo

(9) $$\overset{*}{\Psi}{}^{\theta} = \overset{*}{e}^{\overset{*}{\theta}\overset{*}{l}\Psi}.$$

Anche in questo caso, analogamente ai precedenti, $\overset{*}{\Psi}{}^{\theta}$ sarà determinato a meno del fattore di composizione $\overset{*}{e}^{2\pi n i \theta}$.

Scriviamo

(10) $$\overset{*}{\Psi}{}^{\theta} = \chi,$$

noi porremo per definizione

(11) $$\theta = \overset{*}{\log}_{\Psi}\chi$$

e lo chiameremo il *logaritmo di composizione di* χ *e base* Ψ.

Dalle (9) e (10) segue

$$\overset{\circ}{\theta}\,\overset{*}{l}\,\Psi = \overset{*}{l}\chi,$$

e quindi per le (11)

$$\overset{*}{\log}_{\Psi}\chi = \frac{\overset{*}{l}\chi}{\overset{*}{l}\Psi}. \tag{12}$$

Naturalmente conviene, affinché il secondo membro abbia un significato, non solo che possano trovarsi i logaritmi neperiani di composizione di χ e Ψ, ma che la frazione che comparisce al secondo membro abbia un senso. Sotto queste condizioni il problema propostoci alla fine del Capitolo precedente resta risoluto. Per ciò che riguarda il fatto che abbia un senso la frazione di composizione del secondo membro della relazione (12) rimandiamo al prossimo Capitolo.

9. Sia

$$\Psi = \overset{*}{f}{}^{\circ} + f,$$

ove f è una funzione di ordine positivo superiore ad un dato numero, la serie

$$f - \frac{\overset{*}{f}{}^{2}}{2} + \frac{\overset{*}{f}{}^{3}}{3} - \dots$$

sarà una serie convergente (ved. Cap. II, § 6) e avremo

$$\overset{*}{l}\Psi = f - \frac{\overset{*}{f}{}^{2}}{2} + \frac{\overset{*}{f}{}^{3}}{3} - \dots .$$

Ciò si verifica immediatamente ricorrendo alla formula (1).

Se

$$\Psi = a\overset{*}{f}{}^{\circ} + f,$$

ove a è una costante, avremo

$$\overset{*}{l}\Psi = la\cdot\overset{*}{f}{}^{\circ} + \frac{f}{a} - \frac{\overset{*}{f}{}^{2}}{2a^{2}} + \cdots$$

e, se

$$\psi = \theta^{\alpha}\,(a\overset{*}{f}{}^{\circ} + \overset{*}{f}), \tag{13}$$

sarà

$$\overset{*}{l}\psi = \alpha\overset{*}{l}\theta + la\overset{*}{f}{}^{\circ} + \frac{f}{a} - \frac{\overset{*}{f}{}^{2}}{2a^{2}} + \cdots . \tag{14}$$

Ne segue che, *se noi conosciamo il logaritmo neperiano di composizione di una funzione* θ *di un gruppo, mediante la formula* (14) *potremo calcolarlo per tutte le funzioni del gruppo della forma* (13) che ne costituiscono una classe molto estesa (cfr. Cap. III, § 3).

10. Vogliamo dar subito una applicazione di questo risultato.

Si debba calcolare il logaritmo neperiano di composizione di una frazione qualunque, appartenente al gruppo del ciclo chiuso, del primo ordine e derivabile.

Sia $F(y-x)$ questa funzione; e supponiamo, per semplicità, $F(0) = 1$. Avremo

$$F = \overset{*}{1}(\overset{*}{F}{}^{\circ} + \overset{*}{F}{}'),$$

ove F' denota la derivata di F.

Applicando dunque le formule (14) e (6), avremo:

$$\overset{*}{l}F = \left(\overbrace{\log(y-x) + C}^{*}\right)\overset{*}{1}{}^{-1} + F' - \frac{\overset{*}{F}{}'^{2}}{2} + \frac{\overset{*}{F}{}'^{3}}{3} - \cdots$$

11. Supponiamo, ora, che si voglia avere il logaritmo di composizione di F a base 1.

Formalmente potremo scrivere

$$\overset{*}{\log}_1 F = \frac{\overset{*}{l}F}{\overset{*}{l}1} = \frac{\overset{*}{1}\overset{*}{l}F}{\overset{*}{1}\overset{*}{l}1} = \frac{\overset{*}{1}\overset{*}{l}F}{\overbrace{(\log(y-x)+C)}^{*}} = \overset{*}{F}{}^{\circ} + \frac{\overset{*}{F}{}'\overset{*}{1} - \frac{\overset{*}{F}{}'^{2}\overset{*}{1}}{2} + \frac{\overset{*}{F}{}'^{3}\overset{*}{1}}{3} - \cdots}{\overbrace{(\log(y-x)+C)}^{*}}.$$

Ciò porta, come conseguenza, a risolvere una equazione integrale di prima specie avente per nucleo $\log(y-x) + C$ (cfr. Cap. VI, § 5).

Siamo così condotti ad una nuova classe di equazioni integrali che conviene studiare e che formerà il soggetto del Capitolo seguente.

12. Ma il precedente problema non è che un caso particolare di una questione molto più generale.

Dalla (12) abbiamo, se ψ e χ sono funzioni permutabili,

$$\overset{*}{\log}_{\psi}\chi = \frac{\overset{*}{l}\chi}{\overset{*}{l}\psi};$$

e, se $\overset{*}{\psi}{}^{z}$ è dato dalla formula (2), sarà

$$\overset{*}{\log}_{\psi}\chi = \frac{\overset{*}{l}\chi\,\overset{*}{\psi}{}^{z}}{\overbrace{\left[\alpha(y-x)^{\alpha z-1}G(x,y\,|\,z)\log(y-x) + (y-x)^{\alpha z-1}G'(x,y\,|\,z)\right]}^{*}};$$

avremo dunque da risolvere nuove equazioni integrali di prima specie il cui nucleo involve dei termini logaritmici. Anche questa questione generale sarà trattata nel seguente Capitolo.

13. Facciamo ancora una osservazione prima di chiudere questo Capitolo: cioè analoghe estensioni a quelle a cui abbiamo accennato nel § 15 del Cap. II, e nel § 18 del Cap. III, si possono fare colla introduzione dei logaritmi di composizione.

CAPITOLO VI.

Risoluzione di una nuova classe di equazioni integrali – Applicazioni a varii problemi della teoria dei logaritmi di composizione.

1. Abbiamo veduto, alla fine del Capitolo precedente, la necessità di risolvere delle equazioni integrali (tipo VOLTERRA) il cui nucleo contenga un termine con un fattore logaritmico.

Queste equazioni integrali non rientrano nelle classi finora studiate, e costituiscono quindi una classe nuova. Noi la esamineremo in questo Capitolo.

Le equazioni, che prenderemo a considerare dapprima, saranno della forma seguente:

$$\int_0^x f(\xi) \left\{ (x-\xi)^{\alpha-1} \sum_0^n {}_k M_k \log^{n-k}(x-\xi) + (x-\xi)^\alpha F(\xi, x) \right\} d\xi = \varphi(x)$$

(ove supporremo $0 < \alpha < \infty$; le M_k, quantità costanti; e $F(\xi, x)$ finita, continua e derivabile [24]; la $f(\xi)$ è la funzione incognita.

2. Cominceremo dall'esaminare il caso in cui l'equazione precedente si riduca a

$$(1) \qquad \int_0^x f(\xi) \{ \log(x-\xi) + C \} d\xi = \varphi(x),$$

ove C denota la costante di EULERO (ved. Cap. V, § 5).

Questa equazione potremo anche scriverla

$$(1') \qquad \int_0^x f(\xi) \left(\frac{d}{d\alpha} \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} (x-\xi)^{\alpha-1} \right) \right)_{\alpha=1} d\xi = \varphi(x).$$

Consideriamo quindi dapprima l'equazione

$$(2) \qquad \int_0^x f(\xi) \frac{1}{\Gamma(\alpha)} (x-\xi)^{\alpha-1} d\xi = \psi(x, \alpha)$$

con $1 \leq \alpha$. Ponendo

$$\varphi(x, \alpha) = \frac{\partial \psi(x, \alpha)}{\partial \alpha}:$$

sarà

$$\varphi(x) = \varphi(x, 1).$$

(24) Con $\log^m(x-\xi)$ intendiamo qui e nel seguito $(\log(x-\xi))^m$, ossia la potenza m^{esima} di $\log(x-\xi)$.

La funzione

$$\lambda(x, y) = \int_0^\infty \frac{1}{\Gamma(1+\zeta)} (y-x)^\zeta \, d\zeta$$

è una funzione finita e continua. Moltiplichiamo ambo i membri della (2) per $\lambda(x, y)\, dx$, e integriamo fra 0 e y. Si avrà

$$\int_0^y \psi(x, \alpha)\, \lambda(x, y)\, dx = \int_0^y \lambda(x, y)\, dx \int_0^x f(\xi) \frac{1}{\Gamma(\alpha)} (x-\xi)^{\alpha-1} d\xi =$$

$$= \int_0^y f(\xi)\, d\xi \int_\xi^y \lambda(x, y) \frac{1}{\Gamma(\alpha)} (x-\xi)^{\alpha-1} dx =$$

$$= \int_0^y f(\xi)\, d\xi \int_0^\infty d\zeta \int_\xi^y \frac{1}{\Gamma(\zeta+1)} (y-x)^\zeta \frac{1}{\Gamma(\alpha)} (x-\xi)^{\alpha-1} dx =$$

$$= \int_0^y f(\xi)\, d\xi \int_0^\infty \frac{1}{\Gamma(\zeta+\alpha+1)} (y-\xi)^{\zeta+\alpha} d\zeta,$$

e, derivando rispetto ad α,

$$\int_0^y \varphi(x, \alpha)\, \lambda(x, y)\, dx = \int_0^y f(\xi)\, d\xi \frac{\partial}{\partial\alpha} \int_0^\infty \frac{1}{\Gamma(\zeta+\alpha+1)} (y-\xi)^{\zeta+\alpha} d\zeta. \tag{3}$$

Ora

$$\int_0^\infty \frac{1}{\Gamma(\zeta+\alpha+1)} (y-\xi)^{\zeta+\alpha} d\xi = \int_\alpha^\infty \frac{1}{\Gamma(\zeta+1)} (y-\xi)^\zeta d\zeta;$$

quindi

$$\frac{\partial}{\partial\alpha} \int_0^\infty \frac{1}{\Gamma(\zeta+\alpha+1)} (y-\xi)^{\zeta+\alpha} d\zeta = -\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} (y-\xi)^\alpha.$$

La (3) potrà dunque scriversi

$$\int_0^y f(\xi) \frac{(y-\xi)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} d\xi = -\int_0^y \varphi(x, \alpha)\, \lambda(x, y)\, dx,$$

e, facendo $\alpha = 1$,

$$\int_0^y f(\xi)(y-\xi)\, d\xi = -\int_0^y \varphi(x)\, \lambda(x, y)\, dx =$$

$$= -\int_0^y \varphi(x)\, dx \int_0^\infty \frac{1}{\Gamma(1+\zeta)} (y-x)^\zeta d\zeta.$$

Derivando due volte rispetto ad y, risulterà finalmente

$$f(y) = -\frac{d^2}{dy^2} \int_0^y \varphi(x)\, dx \int_0^\infty \frac{1}{\Gamma(1+\zeta)} (y-x)^\zeta d\zeta. \tag{4}$$

3. Consideriamo la funzione

$$\lambda(x, y \mid z) = \int_0^\infty \frac{1}{\Gamma(1+\zeta+z)} (y-x)^{z+\zeta} d\zeta. \tag{5}$$

Avremo

$$\lambda(x, y \mid z) \log(y-x) = \int_0^\infty \frac{1}{\Gamma(1+\zeta+z)} (y-x)^{z+\zeta} \log(y-x)\, d\zeta =$$

$$= -\frac{(y-x)^z}{\Gamma(1+z)} + \int_0^\infty \frac{\Gamma'(1+\zeta+z)}{\Gamma^2(1+\zeta+z)} (y-x)^{z+\zeta} d\zeta$$

e, facendo $z = 0$,

$$\lambda(x, y \mid 0) \log(y-x) = -1 + \int_0^\infty \frac{\Gamma'(1+\zeta)}{\Gamma^2(1+\zeta)} (y-x)^\zeta d\zeta,$$

il che prova che $\lambda(x, y \mid 0)$ *è infinitesimo di ordine logaritmico per* $y = x$.

Dalle (5) segue

$$-\frac{\partial\lambda(x, y \mid z)}{\partial x} = \frac{\partial\lambda(x, y \mid z)}{\partial y} = \int_0^\infty \frac{z+\zeta}{\Gamma(1+z+\zeta)} (y-x)^{z+\zeta-1} d\zeta = \lambda(x, y \mid z-1),$$

e facendo $z = 0$

$$-\frac{\partial\lambda(x, y \mid 0)}{\partial x} = \frac{\partial\lambda(x, y \mid 0)}{\partial y} = \int_0^\infty \frac{\zeta}{\Gamma(1+\zeta)} (y-x)^{\zeta-1} d\zeta,$$

d'onde

$$(y-x)\log^2(y-x) \frac{\partial\lambda(x, y \mid 0)}{\partial y} = \int_0^\infty \frac{\zeta}{\Gamma(1+\zeta)} (y-x)^\zeta \log^2(y-x)\, d\zeta =$$

$$= -\int_0^\infty (y-x)^\zeta \log(y-x) \left(\frac{1}{\Gamma(1+\zeta)} - \frac{\zeta\Gamma'(1+\zeta)}{\Gamma^2(1+\zeta)} \right) d\zeta =$$

$$= 1 + \int_0^\infty (y-x)^\zeta \frac{d}{d\zeta} \left(\frac{1}{\Gamma(1+\zeta)} - \frac{\zeta\Gamma'(1+\zeta)}{\Gamma^2(1+\zeta)} \right) d\zeta.$$

Ciò prova che $\lambda(x, y \mid -1) = \frac{\partial\lambda(x, y \mid 0)}{\partial y}$ *diventa infinito dello stesso ordine di* $\frac{1}{(y-x)\log^2(y-x)}$ *per* $x = y$.

4. Riprendiamo la formula (4), dai risultati precedenti si riconosce che le operazioni di derivazione indicati nel secondo membro delle formule stesse non possono eseguirsi sotto il segno. Ma la formula (4) può facilmente trasformarsi.

Abbiamo infatti

$$\int_0^y \varphi(x)\,dx \int_0^\infty \frac{1}{\Gamma(1+\zeta)}(y-x)^\zeta\,d\zeta = \int_0^y \varphi(x)\,\lambda(x, y \mid 0)\,dx =$$

$$= -\int_0^y \varphi(x)\,\frac{\partial\lambda(x, y \mid 1)}{\partial x}\,dx = \varphi(0)\int_0^\infty \frac{1}{\Gamma(2+\zeta)}\,y^{\zeta+1}\,d\zeta + \int_0^y \varphi'(x)\,\lambda(x, y \mid 1)\,dx,$$

quindi

$$\frac{d}{dy}\int_0^y \varphi(x)\,dx \int_0^\infty \frac{1}{\Gamma(1+\zeta)}(y-x)^\zeta\,d\zeta = \varphi(0)\int_0^\infty \frac{y^\zeta}{\Gamma(1+\zeta)}\,d\zeta + \int_0^y \varphi'(x)\,\lambda(x, y \mid 0)\,dx =$$

$$= \varphi(0)\int_0^\infty \frac{y^\zeta\,d\zeta}{\Gamma(1+\zeta)} + \varphi'(0)\int_0^\infty \frac{y^{\zeta+1}\,d\zeta}{\Gamma(2+\zeta)} + \int_0^y \varphi''(x)\,\lambda(x, y \mid 1)\,dx.$$

Se $\varphi(0) = 0$, sarà

$$\frac{d^2}{dy^2}\int_0^y \varphi(x)\,dx \int_0^\infty \frac{1}{\Gamma(1+\zeta)}(y-x)^\zeta\,d\zeta = \varphi'(0)\int_0^\infty \frac{y^\zeta\,d\zeta}{\Gamma(1+\zeta)} + \int_0^y \varphi''(x)\,\lambda(x, y \mid 0)\,dx.$$

Abbiamo dunque in questo caso le tre formule equivalenti

$$\text{(I)} \qquad f(y) = -\frac{d^2}{dy^2}\int_0^y \varphi(x)\,dx \int_0^\infty \frac{(y-x)^\zeta}{\Gamma(1+\zeta)}\,d\zeta =$$

$$\text{(I')} \qquad = -\frac{d}{dy}\int_0^y \varphi'(x)\,dx \int_0^\infty \frac{(y-x)^\zeta}{\Gamma(1+\zeta)}\,d\zeta =$$

$$\text{(I'')} \qquad = -\varphi'(0)\int_0^\infty \frac{y^\zeta\,d\zeta}{\Gamma(1+\zeta)} - \int_0^y \varphi''(x)\,dx \int_0^\infty \frac{(y-x)^\zeta}{\Gamma(1+\zeta)}\,d\zeta.$$

5. Dalla formula

$$\text{(6)} \qquad \int_x^y \frac{(\xi-x)^{\alpha-1}(y-\xi)^{\beta-1}}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)}\,d\xi = \frac{(y-x)^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha+\beta)}$$

segue, con una integrazione rispetto a β ed una derivazione rispetto ad α,

$$\text{(7)} \qquad \int_x^y \frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{(\xi-x)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right)d\xi \int_\beta^\infty \frac{(y-\xi)^{\beta'-1}}{\Gamma(\beta')}\,d\beta' = -\frac{(y-x)^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha+\beta)}\,.$$

Se in questa facciamo $\alpha = \beta = 1$, si ha

$$\int_x^y (\log(\xi-x) + C)\,d\xi \int_0^\infty \frac{(y-\xi)^\beta}{\Gamma(1+\beta)}\,d\beta = -(y-x).$$

In virtù della (7), l'equazione integrale

$$(1'') \qquad \int_0^x f(\xi) \frac{d}{d\alpha}\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)}(x-\xi)^{\alpha-1}\right) d\xi = \varphi(x)$$

si trasforma nell'altra

$$(8) \qquad -\int_0^y \frac{(y-\xi)^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha+\beta)} f(\xi)\, d\xi = \int_0^y \varphi(x)\, dx \int_\beta^\infty \frac{(y-x)^{\beta'-1}}{\Gamma(\beta')}\, d\beta',$$

e, facendo $\alpha = \beta = 1$, la (8) diviene

$$(8') \qquad -\int_0^y (y-\xi) f(\xi)\, d\xi = \int_0^y \varphi(x)\, dx \int_0^\infty \frac{(y-x)^\beta}{\Gamma(\beta+1)}\, d\beta.$$

La (8) ci dà subito la soluzione della (1''); e la (8') la soluzione, già ottenuta (4), della (1').

6. Ma la formula (7) e il metodo adoperato adesso per la risoluzione dell'equazione integrale (1'') ci offrono immediatamente delle notevoli estensioni.

Dalle (6) si ricava infatti la relazione

$$\int_x^y \frac{(\xi-x)^{\alpha-1}(y-\xi)^{\beta-1}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} e^{h(\alpha+\beta-1)}\, d\xi = \frac{(y-x)^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha+\beta)} e^{h(\alpha+\beta-1)},$$

ove h è una costante arbitraria.

Derivando rispetto ad α, e moltiplicando per $d\beta$ e integrando fra β e ∞, si trova

$$\int_x^y e^{h\alpha} \frac{(\xi-x)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\left(\log(\xi-x) + h - \frac{\Gamma'(\alpha)}{\Gamma(\alpha)}\right) d\xi \int_\beta^\infty \frac{(y-\xi)^{\beta'-1} e^{h(\beta'-1)}}{\Gamma(\beta')}\, d\beta' =$$

$$= -\frac{(y-x)^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha+\beta)} e^{h(\alpha+\beta-1)},$$

donde, dividendo per $e^{h\alpha}$,

$$(9) \qquad \int_x^y \frac{(\xi-x)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\left(\log(\xi-x) + h - \frac{\Gamma'(\alpha)}{\Gamma(\alpha)}\right) d\xi \int_\beta^\infty \frac{(y-\xi)^{\beta'-1} e^{h(\beta'-1)}}{\Gamma(\beta')}\, d\beta' =$$

$$= -\frac{(y-x)^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha+\beta)} e^{h(\beta-1)}.$$

Se poniamo $\alpha = \beta = 1$ questa formula diviene

$$\int_x^y (\log(\xi-x) + h + C)\, d\xi \int_1^\infty \frac{(y-\xi)^{\beta'-1} e^{h(\beta'-1)}}{\Gamma(\beta')}\, d\beta' = -(y-x),$$

o anche, ponendo $h + C = M$,

$$(10) \qquad \int_x^y (\log(\xi - x) + M)\, d\xi \int_0^\infty \frac{(y-\xi)^\beta e^{(M-C)\beta}}{\Gamma(\beta+1)}\, d\beta = -(y-x).$$

Ciò premesso, consideriamo l'equazione integrale

$$(11) \qquad \int_0^x f(\xi)\{\log(x-\xi) + M\}\, d\xi = \varphi(x).$$

Moltiplicando ambo i membri per

$$dx \int_0^\infty \frac{(y-x)^\beta e^{(M-C)\beta}}{\Gamma(\beta+1)}\, d\beta,$$

e integrando fra o e y, l'equazione (11) diviene, in virtù della (10),

$$\int_0^y \varphi(x)\, dx \int_0^\infty \frac{(y-x)^\beta e^{(M-C)\beta}}{\Gamma(\beta+1)}\, d\beta =$$

$$= \int_0^y dx \int_0^\infty \frac{(y-x)^\beta e^{(M-C)\beta}}{\Gamma(\beta+1)}\, d\beta \int_0^x f(\xi)\{\log(x-\xi) + M\}\, d\xi =$$

$$= \int_0^y f(\xi)\, d\xi \int_\xi^y \{\log(x-\xi) + M\}\, dx \int_0^\infty \frac{(y-x)^\beta e^{(M-C)\beta}}{\Gamma(\beta+1)}\, d\beta = -\int_0^y (y-\xi) f(\xi)\, d\xi.$$

Derivando due volte rispetto ad y, si trova

$$f(y) = -\frac{d^2}{dy^2} \int_0^y \varphi(x)\, dx \int_0^\infty \frac{(y-x)^\beta e^{(M-C)\beta}}{\Gamma(\beta+1)}\, d\beta.$$

7. Posto

$$\mu(x, y \mid z) = \int_0^\infty \frac{(y-x)^{\beta+z} e^{(M-C)(\beta+z)}}{\Gamma(\beta+z+1)}\, d\beta = \int_z^\infty \frac{(y-x)^\beta e^{(M-C)\beta}}{\Gamma(\beta+1)}\, d\beta,$$

si hanno per questa funzione, delle proprietà perfettamente analoghe a quelle riscontrate per $\lambda(x, y \mid z)$. Mettiamo in luce in particolare le seguenti:

$$-\frac{\partial \mu(x, y \mid z+1)}{\partial x} = \frac{\partial \mu(x, y \mid z+1)}{\partial y} = \mu(x, y \mid z)\, e^{M-C}$$

$$\frac{\partial \mu}{\partial z} = -\frac{(y-x)^z e^{(M-C)z}}{\Gamma(z+1)}$$

$$\mu(x, y \mid z)_{x=y} = 0 \quad \text{se } z \geq 0.$$

8. Quindi

$$\int_0^y \varphi(x)\,\mu(x\,,y\,|\,0)\,dx = -\int_0^y \varphi(x)\,e^{-M+C}\frac{\partial}{\partial x}\,\mu(x\,,y\,|\,1)\,dx =$$

$$= \varphi(0)\,e^{-M+C}\,\mu(0\,,y\,|\,1) + \int_0^y \varphi'(x)\,e^{-M+C}\,\mu(x\,,y\,|\,1)\,dx$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\int_0^y \varphi(x)\,\mu(x,y\,|\,0)\,dx = \varphi(0)\,e^{-M+C}\,\mu(0\,,y\,|\,0) + \int_0^y \varphi'(x)\,e^{-M+C}\,\mu(x\,,y\,|\,0)\,dx =$$

$$= \varphi(0)\,e^{-M+C}\,\mu(0\,,y\,|\,0) + \varphi'(0)\,e^{-2M+2C}\,\mu(0\,,y\,|\,1) +$$

$$+ \int_0^y \varphi''(x)\,e^{-2M+2C}\,\mu(x\,,y\,|\,1)\,dx.$$

Se $\varphi(0) = 0$, si ha

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}\int_0^y \varphi(x)\,\mu(x,y\,|\,0)\,dx = \varphi'(0)\,e^{-2M+2C}\,\mu(0,y\,|\,0) + \int_0^y \varphi''(x)\,e^{-2M+2C}\,\mu(x,y\,|\,0)\,dx.$$

Dunque *l'equazione integrale*

$$\int_0^x f(\xi)\,\{\log(x-\xi) + M\}\,d\xi = \varphi(x) \tag{11}$$

si risolve mediante una delle tre formule equivalenti:

$$f(y) = -\frac{d^2}{dy^2}\int_0^y \varphi(x)\,dx\int_0^\infty \frac{(y-x)^\beta\,e^{(M-C)\beta}}{\Gamma(\beta+1)}\,d\beta \tag{II}$$

$$= -\frac{d}{dy}\int_0^y \varphi'(x)\,dx\int_0^\infty \frac{(y-x)^\beta\,e^{(M-C)(\beta-1)}}{\Gamma(\beta+1)}\,d\beta \tag{II'}$$

$$= -\varphi'(0)\int_0^\infty \frac{y^\beta\,e^{(M-C)(\beta-2)}}{\Gamma(\beta+1)}\,d\beta - \int_0^y \varphi''(x)\,dx\int_0^\infty \frac{(y-x)^\beta\,e^{(M-C)(\beta-2)}}{\Gamma(\beta+1)}\,d\beta, \tag{II''}$$

ove $C = -\dfrac{\Gamma'(0)}{\Gamma(0)}$.

Esse comprendono come casi particolari le (I), (I'), (I'').

La formula (9) ci offre anche la soluzione dell'equazione integrale

$$\int_0^x f(\xi)\,\{\log(x-\xi) + M\}\,(x-\xi)^{\alpha-1}\,d\xi = \varphi(x) \tag{12}$$

con $0 < \alpha < \infty$, rispetto alla funzione incognita $f(\xi)$.

Infatti, dalla (9), facendo $\beta = 1$, e

$$h = \frac{\Gamma'(\alpha)}{\Gamma(\alpha)} + M,$$

segue

$$(13) \qquad \int_x^y (\xi - x)^{\alpha - 1} (\log(\xi - x) + M)\, d\xi \int_1^\infty \frac{(y-\xi)^{\beta - 1} e^{h(\beta - 1)}}{\Gamma(\beta)} d\beta = -\frac{(y-x)^\alpha}{\alpha};$$

quindi l'equazione integrale (12), ripetendo il procedimento adoperato nel § 6, si trasforma nell'altra

$$(14) \qquad -\int_0^y \frac{(y-\xi)^\alpha}{\alpha} f(\xi)\, d\xi = \int_0^y \varphi(x)\, dx \int_0^\infty \frac{(y-x)^\beta e^{h\beta}}{\Gamma(\beta+1)} d\beta$$

che si sa risolvere rispetto alla funzione incognita $f(\xi)$ vedi Cap. II, § 7).

10. Deriviamo ora la relazione (9) rispetto ad α. Avremo

$$(15) \qquad \int_x^y \frac{(\xi - x)^{\alpha - 1}}{\Gamma(\alpha)} \left\{ \log^2(\xi - x) + \left(h - 2\frac{\Gamma'(\alpha)}{\Gamma(\alpha)}\right)\log(\xi - x) + \right.$$

$$\left. + \left(2\left(\frac{\Gamma'(\alpha)}{\Gamma(\alpha)}\right)^2 - h\frac{\Gamma'(\alpha)}{\Gamma(\alpha)} - \frac{\Gamma''(\alpha)}{\Gamma(\alpha)}\right)\right\} d\xi \int_\beta^\infty \frac{(y-\xi)^{\beta' - 1} e^{h(\beta' - 1)}}{\Gamma(\beta')} d\beta' =$$

$$= -\frac{(y-x)^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha+\beta)}\left(\log(y-x) - \frac{\Gamma'(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}\right) e^{h(\beta - 1)},$$

e sommandola membro a membro colla (9), dopo averne moltiplicati ambo i membri per una costante k, si ha

$$(16) \qquad \int_x^y \frac{(\xi - x)^{\alpha - 1}}{\Gamma(\alpha)} \left\{ \log^2(\xi - x) + \left(h + k - 2\frac{\Gamma'(\alpha)}{\Gamma(\alpha)}\right)\log(\xi - x) + \right.$$

$$\left. + \left(hk - (h+k)\frac{\Gamma'(\alpha)}{\Gamma(\alpha)} + 2\left(\frac{\Gamma'(\alpha)}{\Gamma(\alpha)}\right)^2 - \frac{\Gamma''(\alpha)}{\Gamma(\alpha)}\right)\right\} d\xi \times$$

$$\times \int_\beta^\infty \frac{(y-\xi)^{\beta'-1} e^{h(\beta'-1)}}{\Gamma(\beta')} d\beta' = -\frac{(y-x)^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha+\beta)}\left\{\log(y-x) + \left(k - \frac{\Gamma'(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}\right)\right\} e^{h(\beta-1)}.$$

Ponendo $\beta = 1$ e calcolando h e k in modo che si abbia

$$h + k = 2\frac{\Gamma'(\alpha)}{\Gamma(\alpha)} + M_1$$

$$hk = M_1 \frac{\Gamma'(\alpha)}{\Gamma(\alpha)} + \frac{\Gamma''(\alpha)}{\Gamma(\alpha)} + M_2,$$

ove M_1 e M_2 sono due costanti arbitrarie date, l'equazione precedente diviene

$$\int_x^y (\xi - x)^{\alpha - 1} \{\log^2(\xi - x) + M_1 \log(\xi - x) + M_2\} d\xi \int_1^\infty \frac{(y-\xi)^{\beta - 1} e^{h(\beta - 1)}}{\Gamma(\beta)} d\beta =$$

$$= - \frac{(y-x)^\alpha}{\alpha} \left\{ \log(y-x) + \left(k - \frac{\Gamma'(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1)}\right)\right\} = - \frac{(y-x)^\alpha}{\alpha} \{\log(y-x) + m_1\},$$

ove si è posto

$$m_1 = k - \frac{\Gamma'(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1)} .$$

Per mezzo di questa formula, e applicando il procedimento dei §§ 6 e 8, l'equazione integrale

$$\int_0^x f(\xi)\{\log^2(x-\xi) + M_1 \log(x-\xi) + M_2\}(x-\xi)^{\alpha-1} d\xi = \varphi(x)$$

si trasforma nell'altra

$$-\int_0^y \frac{(y-\xi)^\alpha}{\alpha}\{\log(y-\xi) + m_1\} f(\xi) d\xi = \int_0^y \varphi(x) dx \int_0^\infty \frac{(y-x)^\beta e^{h\beta} d\beta}{\Gamma(\beta+1)} .$$

Ora questa equazione non è altro che una equazione (12) che si sa già risolvere, trasformandola in una equazione del tipo (14).

11. Nuovamente derivando l'equazione (15) e sommando membro a membro colla equazione stessa dopo averne moltiplicati ambo i membri per una costante, si giunge ad una relazione del tipo

$$(16') \quad \int_x^y (\xi - x)^{\alpha-1}\{\log^3(\xi - x) + M_1 \log^2(\xi - x) + M_2 \log(\xi - x) + M_3\} d\xi \times$$

$$\times \int_0^\infty \frac{(y-\xi)^\beta e^{h\beta} d\beta}{\Gamma(\beta+1)} = - \frac{(y-x)^\alpha}{\alpha}\{\log^2(y-x) + m_1 \log(y-x) + m_2\},$$

e, così procedendo di seguito, si trova in generale

$$(16'') \qquad \int_x^y (\xi - x)^{\alpha - 1} \sum_0^n {}_k M_k \log^{n-k}(\xi - x) d\xi \int_0^\infty \frac{(y-\xi)^\beta e^{h\beta} d\beta}{\Gamma(\beta+1)} =$$

$$= - \frac{(y-x)^\alpha}{\alpha} \sum_0^{n-1} {}_k m_k \log^{n-1-k}(y-x),$$

ove i coefficienti m_k ed h si calcolano allorché i coefficienti M_k sono dati, essendo poi in particolare $M_0 = m_0$.

Per mezzo di questa formula l'equazione integrale

$$(17) \qquad \int_0^x f(\xi)(x-\xi)^{\alpha-1} \sum_{k}^{n} {}_{0}\, M_k \log^{n-k}(x-\xi)\, d\xi = \varphi(x)$$

si trasforma nell'altra

$$(17') \qquad -\int_0^y f(\xi) \frac{(y-\xi)^\alpha}{\alpha} \sum_{0}^{n-1}{}_k m_k \log^{n-k-1}(y-\xi)\, d\xi = \int_0^y \varphi(x)\, dx \int_0^\infty \frac{(y-x)^\beta e^{h\beta}\, d\beta}{\Gamma(\beta+1)}.$$

Ripetendo la trasformazione n volte, si giunge ad eliminare i logaritmi dal nucleo dell'equazione integrale fino a ridurre questa ad una equazione del tipo (14) che si risolve con i metodi noti. Il procedimento adoperato ci prova (mentre ci dà la soluzione delle equazioni integrali considerate) che *questa soluzione è unica e determinata.* Questa proposizione è di speciale interesse (cfr. Cap. III, § 17; e Cap. V, § 8).

12. Anziché la (17), consideriamo l'equazione integrale

$$\int_0^x f(\xi) \left\{ (x-\xi)^{\alpha-1} \sum_{0}^{n}{}_k M_k \log^{n-k}(x-\xi) + (x-\xi)^\alpha F(\xi, x) \right\} d\xi = \varphi(x),$$

con $F(\xi, y)$ finita e continua. Applicando la solita trasformazione, l'equazione precedente diviene

$$-\int_0^y f(\xi) \left\{ \frac{(y-\xi)^\alpha}{\alpha} \sum_{0}^{n-1}{}_k m_k \log^{n-k-1}(y-\xi) + (y-\xi)^{\alpha+1} \Phi(\xi, y) \right\} d\xi =$$

$$= \int_0^y \varphi(x)\, dx \int_0^\infty \frac{(y-x)^\beta e^{h\beta}\, d\beta}{\Gamma(\beta+1)},$$

ove

$$\Phi(\xi, y) = \int_0^\infty \frac{(y-\xi)^\beta e^{h\beta}\, d\beta}{\Gamma(\beta+1)} \int_0^1 \zeta^\alpha (1-\zeta)^\beta F(\xi, \xi + (y-\xi)\zeta)\, d\zeta.$$

Per semplicità consideriamo come esempio il caso in cui $\alpha = 1$, $n = 1$: cioè il caso in cui si ha l'equazione integrale

$$\int_0^x f(\xi) \{ \log(x-\xi) + M + (x-\xi) F(\xi, x) \} d\xi = \varphi(x).$$

La trasformazione generale la riconduce a

$$-\int_0^y f(\xi) \left\{ (y-\xi) - (y-\xi)^2 \int_0^\infty \frac{(y-\xi)^\beta e^{(M-C)\beta}\, d\beta}{\Gamma(\beta+1)} \times \right.$$

$$\left. \times \int_0^1 \zeta (1-\zeta)^\beta F(\xi, \xi + (y-\xi)\zeta)\, d\zeta \right\} d\xi = \int_0^y \varphi(x)\, dx \int_0^\infty \frac{(y-x)^\beta e^{(M-C)\beta}\, d\beta}{\Gamma(\beta+1)},$$

e, derivando due volte rispetto ad y,

$$(18) \qquad -f(y)+\int_0^y f(\xi)\,d\xi\,\frac{d^2}{dy^2}\int_0^\infty \frac{(y-\xi)^{\beta+2}\,e^{(M-C)\beta}\,d\beta}{\Gamma(\beta+1)}\times$$

$$\times\int_0^1 \zeta(1-\zeta)^\beta\,F(\xi,\xi+(y-\xi)\zeta)\,d\zeta=\frac{d^2}{dy^2}\int_0^y \varphi(x)\,dx\int_0^\infty\frac{(y-x)^\beta\,e^{(M-C)\beta}\,d\beta}{\Gamma(\beta+1)}\,.$$

La funzione

$$\Psi(\xi,y)=\frac{d^2}{dy^2}\int_0^\infty\frac{(y-\xi)^{\beta+2}\,e^{(M-C)\beta}\,d\beta}{\Gamma(\beta+1)}\int_0^1\zeta(1-\zeta)^\beta\,F(\xi,\xi+(y-\xi)\zeta)\,d\zeta,$$

è finita e continua nell'ipotesi che $\frac{\partial F(\xi,y)}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 F(\xi,y)}{\partial y^2}$ siano finite e continue. Ma essa costituisce il nucleo della equazione integrale (18) di seconda specie. Dunque questa equazione si risolverà con i metodi ordinarii ben noti.

13. Come applicazione proponiamoci di risolvere adesso il problema che abbiamo posto alla fine del Capitolo precedente (§ 11), quello cioè di determinare

$$\overset{*}{\log}_1 F$$

essendo F una funzione appartenente al gruppo del ciclo chiuso, e $F(0)=1$.

Abbiamo trovato

$$\overset{*}{\log}_1 F=\overset{*}{F}{}^0+\frac{F'\overset{*}{1}-\frac{\overset{*}{F}{}'^2\overset{*}{1}}{2}+\frac{\overset{*}{F}{}'^3\overset{*}{1}}{3}-\cdots}{\overbrace{(\log(y-x)+C)}^{*}}\,.$$

Posto dunque

$$\overset{*}{F}{}'\overset{*}{1}-\frac{\overset{*}{F}{}'^2\overset{*}{1}}{2}+\frac{\overset{*}{F}{}'^3\overset{*}{1}}{3}-\cdots=\varphi(y-x),$$

bisognerà risolvere l'equazione integrale

$$\int_x^y f(\xi-x)(\log(y-\xi)+C)\,d\xi=\varphi(y-x),$$

ossia

$$\int_0^x f(\xi)(\log(x-\xi)+C)\,d\xi=\varphi(x).$$

Osserviamo che $\varphi(0)=0$, e

$$\varphi'=F'-\frac{\overset{*}{F}{}'^2}{2}+\frac{\overset{*}{F}{}'^3}{3}-\cdots;$$

quindi, applicando la formula (I'), si avrà

$$f(y-x)=-\frac{\partial}{\partial y}\int_x^y\left(F'(\xi-x)-\frac{\overset{*}{F}{}'^2(\xi-x)}{2}+\frac{\overset{*}{F}{}'^3(\xi-x)}{3}-\cdots\right)\times d\xi\int_0^\infty\frac{(y-\xi)^\zeta}{\Gamma(1+\zeta)}\,d\zeta,$$

e finalmente

$$(19)\quad \overset{*}{\log}_1 F = \overset{*}{F}{}^{o} - \frac{\partial}{\partial y}\int_x^y \left(F'(\xi - x) - \frac{\overset{*}{F}{}'^2(\xi - x)}{2} + \frac{\overset{*}{F}{}'^3(\xi - x)}{3} - \cdots\right) \times d\xi \int_0^\infty \frac{(y-\xi)^\zeta}{\Gamma(1+\zeta)} d\zeta.$$

Possiamo quindi ottenere (mediante la formula precedente) *il logaritmo di composizione a base unitaria di qualsiasi funzione derivabile del I° ordine a caratteristica unitaria appartenente al gruppo del ciclo chiuso.*

14. La formula (19) può ancora scriversi:

$$\overset{*}{\log}_1 F = \overset{*}{F}{}^{o} - \frac{\partial}{\partial y}\int_0^\infty \left(\overset{*}{F}{}' - \frac{\overset{*}{F}{}'^2}{2} + \frac{\overset{*}{F}{}'^3}{3} - \cdots\right) \overset{*}{1}{}^{\zeta+1}\, d\zeta,$$

e quindi

$$\overset{*}{l} F = \overset{*}{l}\, 1 \left(\overset{*}{F}{}^{o} - \frac{\partial}{\partial y}\int_0^\infty \left(\overset{*}{F}{}' - \frac{\overset{*}{F}{}'^2}{2} + \frac{\overset{*}{F}{}'^3}{3} - \cdots\right) \overset{*}{1}{}^{\zeta+1}\, d\zeta\right).$$

Se Φ appartiene pure al gruppo del ciclo chiuso e $\Phi(0) = 1$, sarà

$$\overset{*}{l} \Phi = \overset{*}{l}\, 1 \left(\overset{*}{\Phi}{}^{o} - \frac{\partial}{\partial y}\int_0^\infty \left(\overset{*}{\Phi}{}' - \frac{\overset{*}{\Phi}{}'^2}{2} + \frac{\overset{*}{\Phi}{}'^3}{3} - \cdots\right) \overset{*}{1}{}^{\zeta+1}\, d\zeta\right),$$

onde

$$\overset{*}{\log}_F \Phi = \frac{\overset{*}{\Phi}{}^{o} - \frac{\partial}{\partial y}\int_0^\infty \left(\overset{*}{\Phi}{}' - \frac{\overset{*}{\Phi}{}'^2}{2} + \frac{\overset{*}{\Phi}{}'^3}{3} - \cdots\right) \overset{*}{1}{}^{\zeta+1}\, d\zeta}{\overset{*}{F}{}^{o} - \frac{\partial}{\partial y}\int_0^\infty \left(\overset{*}{F}{}' - \frac{\overset{*}{F}{}'^2}{2} + \frac{\overset{*}{F}{}'^3}{3} - \cdots\right) \overset{*}{1}{}^{\zeta+1}\, d\zeta}.$$

Le considerazioni svolte valgono nella ipotesi che sia $F(0) = 1$. Se $F(0) = A \gtrless 1$, $A \gtrless 0$, allora

$$\overset{*}{l} F = \overset{*}{l}\, 1 + l A \cdot \overset{*}{F}{}^{o} + \frac{F'}{A} - \frac{\overset{*}{F}{}'^2}{2A^2} + \cdots;$$

quindi, volendo ottenere

$$\overset{*}{\log}_1 F,$$

basterà che applichiamo il calcolo precedente ed inoltre che sappiamo calcolare

$$\frac{l A \cdot \overset{*}{F}{}^{o}}{\overset{*}{l}\, 1} = \frac{l A\, \overset{*}{1}}{(\overset{*}{\widetilde{\log (y-x)}} + C)}:$$

ossia, siccome lA è una costante, sarà sufficiente calcolare

$$\frac{\overset{*}{1}}{\left(\overbrace{\log(y-x)+C}^{*}\right)}\,.$$

Ora, per fare questo calcolo, basterà ottenere

$$\psi = \frac{\overset{*}{1}{}^{2}}{\left(\overbrace{\log(y-x)+C}^{*}\right)}\,,$$

e quindi avremo

$$\frac{\overset{*}{1}}{\left(\overbrace{\log(y-x)+C}^{*}\right)} = \overset{*}{\psi}\,\overset{*}{1}{}^{-1}.$$

Ma dalla (I'') si ricava

$$\psi = -\int_0^\infty \frac{(y-x)^\zeta\, d\zeta}{\Gamma(1+\zeta)}\,,$$

onde

$$\frac{lA\cdot \overset{*}{F}{}^{0}}{\overset{*}{l}1} = -lA\int_0^\infty \frac{(y-x)^\zeta\, d\zeta}{\Gamma(1+\zeta)}\,\overset{*}{1}{}^{-1}$$

che dovremo considerare come una frazione di composizione non riducibile a forma intera, giacché l'ordine del numeratore è inferiore a quello del denominatore (vedi il § 13).

Se $A = 0$, il calcolo si fa pure facilmente ricorrendo alla formula (13) del Capitolo V.

Supponiamo che si voglia

$$\overset{*}{\log}_A F,$$

essendo $A \gtrless 0$ $A \lesseqgtr 1$.

Siccome

$$\overset{*}{l}A = lA\,\overset{*}{1}{}^{0} + \overset{*}{l}1 = \left(\overbrace{\log(y-x) + C + lA}^{*}\right)\overset{*}{1}{}^{-1},$$

basterà evidentemente che applichiamo la formula (II'') anziché la formula (I'').

15. Noi abbiamo dato due risoluzioni dirette dell'equazione (1) (vedi §§ 2, 5) le quali sono indipendenti dai principii della teoria delle potenze e dei logaritmi di composizione che svolgiamo in questa Memoria. Ma noi vogliamo adesso esporre una soluzione della equazione stessa che si appoggia su questi principii. Essa è semplicissima e fu per noi il punto di partenza da cui discesero come conseguenza gli altri metodi.

Però noi consideriamo un caso molto più generale e riprendiamo perciò le considerazioni del § 12 del Capitolo II, e del § 4 del Capitolo IV.

Sia $\psi = (y-x)^{\alpha-1} G(x,y)$ una funzione di un gruppo di un ordine determinato α, e sia

$$\overset{*}{\psi}{}^{z} = (y-x)^{\alpha z-1} G(x,y\,|\,z)$$

con $G(x,y\,|\,z)$ funzione intera di z.

Se supponiamo $|\,G(x,y)\,| < M$, e z reale e positivo, sappiamo che

$$|\,G(x,y\,|\,z)\,| < M^{z}\,\frac{\Gamma^{z}(\alpha)}{\Gamma(z\alpha)};$$

quindi l'integrale

$$\Theta_1(x,y\,|\,z) = \int_z^\infty (y-x)^{\alpha\zeta-1} G(x,y\,|\,\zeta)\,d\zeta = \int_0^\infty (y-x)^{\alpha(\zeta+z)-1} G(x,y\,|\,\zeta+z)\,d\zeta$$

è convergente ed è una funzione intera di z.

Ora

$$\overset{*}{\psi}{}^{\lambda}\,\overset{*}{\psi}{}^{\mu} = \overset{*}{\psi}{}^{\lambda+\mu};$$

quindi

$$\int_x^y (\xi-x)^{\alpha\lambda-1} G(x,\xi\,|\,\lambda)\,(y-\xi)^{\alpha\mu-1} G(\xi,y\,|\,\mu)\,d\xi = (y-x)^{\alpha(\lambda+\mu)-1} G(x,y\,|\,\lambda+\mu),$$

da cui segue

$$(20)\qquad \int_x^y \frac{\partial}{\partial\lambda}\{(\xi-x)^{\alpha\lambda-1} G(x,\xi\,|\,\lambda)\}\,d\xi \int_\mu^\infty (y-\xi)^{\alpha\zeta-1} G(\xi,y\,|\,\zeta)\,d\zeta =$$
$$= -(y-x)^{\alpha(\lambda+\mu)-1} G(x,y\,|\,\lambda+\mu),$$

e per conseguenza

$$(20')\qquad \int_x^y \frac{\partial^k}{\partial\lambda^k}\{(\xi-x)^{\alpha\lambda-1} G(x,\xi\,|\,\lambda)\}\,d\xi \int_\mu^\infty (y-\xi)^{\alpha\zeta-1} G(\xi,y\,|\,\zeta)\,d\zeta =$$
$$= -\frac{\partial^{k-1}}{\partial\lambda^{k-1}}\{(y-x)^{\alpha(\lambda+\mu)-1} G(x,y\,|\,\lambda+\mu)\}.$$

Finalmente

$$(20'')\qquad \int_x^y \sum_0^n{}_k\, M_k\,\frac{\partial^k}{\partial\lambda^k}\{(\xi-x)^{\alpha\lambda-1} G(x,\xi\,|\,\lambda)\}\,d\xi \int_\mu^\infty (y-\xi)^{\alpha\zeta-1} G(\xi,y\,|\,\zeta)\,d\zeta =$$
$$= -\sum_0^n M_k\,\frac{\partial^{k-1}}{\partial\lambda^{k-1}}\{(y-x)^{\alpha(\lambda+\mu)-1} G(x,y\,|\,\lambda+\mu)\}.$$

Abbiamo anche

$$\overset{*}{\psi}{}^{\lambda}\,\overset{*}{\psi}{}^{\mu_1+\mu_2+\cdots+\mu_n} = \overset{*}{\psi}{}^{\lambda+\mu_1+\mu_2+\cdots+\mu_n},$$

d'onde

$$(21)\qquad \int_x^y \frac{\partial^n}{\partial\lambda^n}\{(\xi-x)^{\alpha\lambda-1}G(x,\xi\,|\,\lambda)\}\,d\xi\times$$

$$\times\int_{\mu_1}^{\infty}d\zeta_1\int_{\mu_2}^{\infty}d\zeta_2\cdots\int_{\mu_n}^{\infty}d\zeta_n\,(y-\xi)^{\alpha(\zeta_1+\zeta_2+\cdots+\zeta_n)-1}G(\xi,y\,|\,\zeta_1+\zeta_2\cdots+\zeta_n)=$$

$$=(-1)^n(y-x)^{\alpha(\lambda+\mu_1+\cdots+\mu_n)-1}G(x,y\,|\,\lambda+\mu_1+\cdots+\mu_n).$$

Le formule (20) e (20'') comprendono come casi particolari le formule precedenti (9) e (16''); basta prendere

$$\psi(x,y)=\mathrm{A},$$

ove A è una costante. Infatti

$$\overset{*}{\psi}{}^z=\mathrm{A}^z\,\frac{(y-x)^{z-1}}{\Gamma(z)}\,.$$

16. Le formule (20), (20'), (20''), (21) servono per risolvere nuove equazioni integrali.

Come esempio consideriamo l'equazione integrale

$$(22)\qquad \int_0^x f(\xi)\,\frac{\partial^n}{\partial\lambda^n}\{(x-\xi)^{\alpha\lambda-1}G(\xi,x\,|\,\lambda)\}\,d\xi=\varphi(x).$$

In virtù della (21), essa si trasforma nell'equazione integrale

$$(23)\qquad (-1)^n\int_0^y f(\xi)\,(y-\xi)^{\alpha(\lambda+\mu_1+\cdots+\mu_n)-1}G(\xi,y\,|\,\lambda+\mu_1+\cdots+\mu_n)\,d\xi=$$

$$=\int_0^y\varphi(x)\,dx\int_{\mu_1}^{\infty}d\zeta_1\int_{\mu_2}^{\infty}d\zeta_2\cdots\int_{\mu_n}^{\infty}d\zeta_n\,(y-x)^{\alpha(\lambda+\mu_1+\cdots+\mu_n)-1}\times G(x,y\,|\,\lambda+\zeta_1+\cdots+\zeta_n).$$

Prendiamo $\lambda=\mu_1=\mu_2=\mu_n=1$. Le (22) e (23) divengono rispettivamente

$$(22')\qquad \int_0^x f(\xi)\,(x-\xi)^{\alpha-1}\Big\{\alpha^n\log^n(x-\xi)G(\xi,x\,|\,1)+n\alpha^{n-1}\log^{n-1}(x-\xi)G'(\xi,x\,|\,1)+$$

$$+\frac{n(n-1)}{2}\,\alpha^{n-2}\log^{n-2}(x-\xi)\,G''+\cdots+G^{(n)}(\xi,x\,|\,1)\Big\}\,d\xi=\varphi(x),$$

ove $G^{(h)}(\xi,x\,|\,1)=\left(\dfrac{\partial^h G(\xi,x\,|\,\lambda)}{\partial\lambda^h}\right)_{\lambda=1}$; e

$$(23')\qquad (-1)^n\int_0^y f(\xi)\,\overset{*}{\psi}{}^{n+1}(\xi,y)\,d\xi=$$

$$=\int_0^y\varphi(x)\,dx\int_1^{\infty}d\zeta_1\int_1^{\infty}d\zeta_2\cdots\int_1^{\infty}d\zeta_n\,(y-x)^{\alpha(1+\zeta_1+\cdots+\zeta_n)-1}\times G(x,y\,|\,1+\zeta_1+\cdots\zeta_n).$$

Da questa si calcola immediatamente $f(y)$ allorché si sa risolvere l'equazione integrale

$$\int_0^y \theta(\xi)\,\psi(\xi, y)\,d\xi = \rho(y).$$

17. Invece dell'equazione (22), noi possiamo considerare

$$(24) \qquad \int_x^y f(x, \xi) \frac{\partial^n}{\partial \lambda^n} \{(y - \xi)^{\alpha\lambda - 1}\, G(\xi, y \mid \lambda)\}\, d\xi = \varphi(x, y),$$

essendo φ una funzione appartenente al gruppo. Essa può scriversi

$$(24') \qquad \overset{*}{f}\, \frac{\partial^n}{\partial \lambda^n} \overset{*}{\psi}{}^{\lambda} = \varphi.$$

Posto

$$\int_{\mu_1}^{\infty} d\zeta_1 \int_{\mu_2}^{\infty} d\zeta_2 \cdots \int_{\mu_n}^{\infty} d\zeta_n\, (y - x)^{\alpha(\zeta_1 + \cdots + \zeta_n) - 1}\, G(x, y \mid \zeta_1 + \cdots + \zeta_n) =$$

$$= \int_0^{\infty} d\zeta_1 \int_0^{\infty} d\zeta_2 \cdots \int_0^{\infty} d\zeta_n\, (y - x)^{\alpha(\zeta_1 + \cdots + \zeta_n + \mu_1 + \cdots + \mu_n) - 1} \times$$

$$\times G(x, y \mid \zeta_1 + \cdots + \zeta_n + \mu_1 + \cdots + \mu_n) = \Theta_n(x, y \mid \mu_1 + \cdots + \mu_n);$$

l'equazione (21) si scriverà (essendo $\mu = \mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_n$)

$$(25) \qquad \frac{\partial^n \overset{*}{\psi}{}^{\lambda}}{\partial \lambda^n}\, \overset{*}{\Theta}_n(x, y \mid \mu) = (-1)^n\, \overset{*}{\psi}{}^{\lambda + \mu},$$

e la formula risolutiva della (24')

$$(26) \qquad f = (-1)^n\, \overset{*}{\varphi} \overset{*}{\Theta}_n\, \overset{*}{\psi}{}^{-(\lambda + \mu)}$$

18. Tenendo presente (vedi Cap. V, § 4) che

$$\frac{\partial^n \overset{*}{\psi}{}^{\lambda}}{\partial \lambda^n} = \overset{*}{\psi}{}^{\lambda}\, \overset{*}{\rho}{}^{n},$$

ove

$$\rho = l\psi,$$

la (25) ci dà

$$\overset{*}{\psi}{}^{\lambda}\, \overset{*}{\rho}{}^{n}\, \overset{*}{\Theta}_n = (-1)^n\, \overset{*}{\psi}{}^{\lambda + \mu},$$

e quindi

$$\Theta_n(x, y \mid \mu) = (-1)^n\, \overset{*}{\psi}{}^{\mu}\, (\overset{*}{l}\psi)^{-n}.$$

In particolare

$$\Theta_1(x, y \mid \mu) = -\overset{*}{\psi}{}^{\mu}\, (\overset{*}{l}\psi)^{-1}$$

$$\Theta_1(x, y \mid 1) = -\overset{*}{\psi}\, (\overset{*}{l}\psi)^{-1}.$$

19. Sia ora

$$F = \overset{*}{\psi}^z (a\overset{*}{f}^0 + \overset{*}{f}),$$

essendo $\overset{*}{f}$ una funzione di ordine positivo superiore ad un dato numero.

Abbiamo (vedi Cap. V, § 9)

$$\overset{*}{l}F = z\overset{*}{l}\psi + la\overset{*}{f}^0 + \frac{f}{a} - \frac{\overset{*}{f}^2}{2a^2} + \cdots,$$

d'onde

$$\overset{*}{\log}_\psi F = \frac{\overset{*}{l}F}{\overset{*}{l}\psi} = zF^0 - la\,\overset{*}{\Theta}_1(x\,,y\,|\,1)\,\overset{*}{\psi}^{-1} -$$

$$-\left(\frac{\overset{*}{f}}{a} - \frac{\overset{*}{f}^2}{2a^2} + \frac{\overset{*}{f}^3}{3a^3} - \cdots\right)\overset{*}{\Theta}_1(x\,,y\,|\,1)\,\overset{*}{\psi}^{-1}.$$

Questa formula risolve uno dei problemi fondamentali della teoria dei logaritmi di composizione (vedi Cap. V, § 12).

20. Prima di abbandonare queste considerazioni vogliamo esporre un altro metodo per risolvere la seguente equazione integrale

$$\overset{**}{f\psi}\overset{*}{\rho} = \varphi, \tag{27}$$

che si ricava dalla (24') facendo $n = \lambda = 1$ e nella quale prendiamo f come incognita

Dalla (27) si ha

$$\overset{**}{f\psi}\overset{*}{\rho}^2 = \overset{*}{\varphi}\overset{*}{\rho}$$

$$\overset{**}{f\psi}\overset{*}{\rho}^3 = \overset{*}{\varphi}\overset{*}{\rho}^2$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\overset{**}{f\psi}\overset{*}{\rho}^m = \overset{*}{\varphi}\overset{*}{\rho}^{m-1},$$

d'onde

$$\overset{**}{f\psi}\left(z\overset{*}{\rho} + \frac{z^2}{2!}\overset{*}{\rho}^2 + \frac{z^3}{3!}\overset{*}{\rho}^3 + \cdots\right) = \overset{*}{\varphi}\left(z\overset{*}{\rho}^0 + \frac{z^2}{2!}\overset{*}{\rho} + \frac{z^3}{3!}\overset{*}{\rho}^2 + \cdots\right),$$

ossia

$$\overset{**}{f\psi}\,(\overset{*}{e}^{z\overset{*}{\rho}} - \overset{*}{\psi}^0) = \overset{*}{\varphi}\left(z\overset{*}{\rho}^0 + \frac{z^2}{2!}\overset{*}{\rho} + \frac{z^3}{3!}\overset{*}{\rho}^2 + \cdots\right),$$

che si scriverà

$$\overset{**}{f\psi}\,(\overset{*}{\psi}^z - \overset{*}{\psi}^0) = \overset{*}{\varphi}\left(z\overset{*}{\rho}^0 + \frac{z^2}{2!}\overset{*}{\rho} + \frac{z^3}{3!}\overset{*}{\rho}^2 + \cdots\right).$$

Componendo con ψ

$$\overset{**}{f\psi}^2\,(\overset{*}{\psi}^z - \overset{*}{\psi}^0) = \overset{*}{\varphi}\left(z\,(\overset{*}{\psi}^z)_{z=1} + \frac{z^2}{2}\left(\frac{d\overset{*}{\psi}^z}{dz}\right)_{z=1} + \frac{z^3}{3!}\left(\frac{d\overset{*}{\psi}^z}{dz^2}\right)_{z=1} + \cdots\right) =$$

$$= \overset{*}{\varphi}\left(-\int_z^\infty \overset{*}{\psi}^\zeta\, d\zeta + \int_1^\infty \overset{*}{\psi}^\zeta\, d\zeta\right).$$

Facendo tendere z verso l'∞ si trova al limite,

$$-\overset{*}{f}\overset{*}{\psi}^2 = \overset{*}{\varphi}\int_1^\infty \overset{*}{\psi}^\zeta d\zeta.$$

Da cui finalmente

$$f = -\overset{*}{\varphi}\int_1^\infty \overset{*}{\psi}^\zeta d\zeta\, \overset{*}{\psi}^{-2}$$

che è equivalente alla soluzione (26).

Capitolo VII.

Funzioni di composizione - Derivate ed integrali di composizione.

1\. Noi esporremo in questo Capitolo le considerazioni fondamentali su questo argomento e svilupperemo specialmente quelle che hanno attinenza col soggetto che trattiamo delle potenze e dei logaritmi di composizione, rimandando ad un'altra Memoria uno svolgimento più diffuso e completo dell'argomento stesso.

2\. Abbiasi un elemento analitico col centro $z = 0$,

$$\sum_{1}^{\infty}{}_m\, a_m z^m, \tag{1}$$

convergente entro un cerchio di raggio R. Se $F(x, y)$ è una funzione finita e continua,

$$\sum_{1}^{\infty}{}_m\, a_m \overset{*}{F}{}^m$$

sarà una funzione pure finita e continua permutabile con F. Noi la chiameremo una *funzione razionale intera di composizione di* F.

Consideriamo ora

$$\sum_{0}^{p}{}_m\, b_m z^{-m}.$$

Essa avrà un polo di ordine p, se $b_m \gtrless 0$. Se ammettiamo F derivabile, avranno un senso, secondo le definizioni del Capitolo III, l'espressione

$$\sum_{0}^{p}{}_m\, b_m \overset{*}{F}{}^{-m}$$

e l'altra

$$\sum_{1}^{\infty}{}_m\, a_m \overset{*}{F}{}^m + \sum_{0}^{p}{}_m\, b_m \overset{*}{F}{}^{-m}.$$

Questa si dirà una *funzione razionale di composizione con un polo d'ordine p*.

Se supponiamo n intero e positivo, potremo pure calcolare

$$\sum_1^\infty {}_m a_m \overset{*}{\mathrm{F}}{}^{m/n} + \sum_0^p {}_m b_m \overset{*}{\mathrm{F}}{}^{-m/n}.$$

Essa sarà una funzione irrazionale di composizione allorché esiste almeno un termine con esponente frazionario.

Consideriamo

$$\overset{*}{l}\mathrm{F}.$$

Noi non sappiamo ancora, se esista il $\overset{*}{l}\mathrm{F}$ corrispondente ad una funzione qualsiasi finita e continua F (cfr. il Capitolo seguente). Però, se il detto logaritmo di composizione esiste, allorché F è incluso in certo campo funzionale, noi lo chiameremo una *funzione logaritmica di composizione.*

Le somme, le risultanti di composizione e i rapporti di composizione di più funzioni di composizione, li consideriamo come *nuove funzioni di composizione.*

3. Rappresenteremo le diverse funzioni di composizione col simbolo

$$\overset{*}{\Phi}(\mathrm{F})$$

F si chiamerà *l'argomento della funzione* Φ.

Se $\overset{*}{\Psi}(\mathrm{F})$ è una funzione di composizione, e $\overset{*}{\mathrm{F}}(\Phi)$ è un'altra funzione di composizione, potremo ottenere

$$\overset{*}{\Psi}(\overset{*}{\mathrm{F}}(\overset{*}{\Phi}))$$

che chiameremo una *funzione di funzione di composizione.*

4. Abbiamo così il modo di definire varie classi di funzioni di composizione. Nuove funzioni si potrebbero ottenere come limiti uniformi delle precedenti facendo tendere i parametri che essi contengono verso dati valori. Ma noi vogliamo procedere a stabilire una definizione generale di *funzione di composizione* la quale comprenda tutte le classi stesse come casi particolari. La via che terremo per raggiungere questo scopo consisterà nello stabilire due proprietà fondamentali comuni a tutte le funzioni fino ad ora esaminate, e ad assumere le proprietà stesse come quelle che definiscono in generale tutte le funzioni di composizione.

La prima di queste proprietà è, che *tutte le funzioni precedentemente ottenute sono permutabili colla funzione che costituisce l'argomento*; andremo a stabilire nel paragrafo seguente la seconda proprietà fondamentale.

5. Ritorniamo ad una funzione di composizione razionale e intera

$$\overset{*}{\Phi}(\mathrm{F}) = \sum_1^\infty {}_m a_m \overset{*}{\mathrm{F}}{}^m.$$

Formiamo

$$\overset{*}{\Phi}(\mathrm{F} + \varepsilon f) - \overset{*}{\Phi}(\mathrm{F}),$$

ove ε è un numero e f una funzione permutabile con F.

Per ε tendente a zero, questa espressione tende a zero; e

$$\frac{\overset{*}{\Phi}(\mathrm{F} + \varepsilon f) - \overset{*}{\Phi}(\mathrm{F})}{\varepsilon \overset{*}{f}}.$$

per ε tendente a zero, tende verso un limite che è facile calcolare, ed è

$$\sum_{1}^{\infty}{}_m\, m a_m \overset{*}{\mathrm{F}}{}^{m-1}.$$

Esso è quindi indipendente da f. Si chiamerà la *derivata di composizione di* Φ rispetto ad F.

La regola per calcolare questa derivata consiste nel derivare la serie (1) rispetto a z, e sostituire, alle potenze di z, le potenze di composizione di F. Quindi la regola è la stessa che si tiene per calcolare la derivata ordinaria purché si sostituiscano alle potenze ordinarie quelle di composizione.

Giovandoci del concetto di limite stabilito precedentemente (Cap. III, §§ 13, 14) potremo estendere in modo identico il concetto di derivata di composizione alle funzioni razionali di composizione aventi poli, alle funzioni irrazionali di composizione, e a tutte quelle che da esse si possono ottenere mediante operazioni di somme, di composizioni, di rapporti di composizione e di funzioni di funzioni di composizione. Le regole per eseguire le derivate di composizione saranno le stesse di quelle che si applicano per le derivazioni ordinarie, salvo a sostituire alle operazioni ordinarie di moltiplicazione e di potenza e di rapporto quelle di composizione.

Potremo estendere lo stesso concetto di derivata anche alle funzioni logaritmiche di composizione. Se vogliamo ottenere la derivata di composizione di $\overset{*}{l}\mathrm{F}$, basterà osservare che

$$\overset{*}{e}{}^{\overset{*}{l}\mathrm{F}} = \mathrm{F},$$

e quindi si troverà

$$\frac{d\overset{*}{l}\mathrm{F}}{d\overset{*}{\mathrm{F}}} = \mathrm{F}^{-1}.$$

Potremo dunque generalizzare le regole precedenti, per eseguire le derivate di composizione, anche ad espressioni contenenti dei logaritmi di composizione.

Evidentemente in tutti i casi considerati, se l'incremento dato alla funzione F è εf, permutabile con F, e si fa tendere poi ε a zero, il limite del rapporto di composizione, che ha per numeratore l'incremento della funzione di composizione, e per denominatore εf, *risulterà indipendente da* f. Questa proprietà è la *seconda proprietà fondamentale* che cercavamo.

Per rappresentare la derivata di composizione della funzione Φ dell'argomento F faremo uso del simbolo

$$\text{(I)} \qquad \frac{d\overset{*}{\Phi}}{d\overset{*}{F}}\,.$$

6. Premesso questo, passiamo a stabilire la definizione generale di funzione di composizione.

Sia $\Phi(x, y)$ una funzione che *dipende da tutti i valori della funzione* $F(\xi, \eta)\, x \leq \xi \leq \eta \leq y$, nel senso che si dà a questa denominazione nella *teoria delle funzioni di linee*, per modo che potremo scrivere, con i simboli di questa teoria

$$\Phi = \Phi \left| \left[F(\overset{\eta}{\underset{x}{\xi}}, \overset{y}{\underset{\xi}{\eta}}) \right] \right|$$

e possa $F(x, y)$ variare in un certo campo funzionale per il quale ammetteremo che, se vi sono incluse f e φ, vi sia anche inclusa $af + b\varphi$ [25]. *Le funzioni* Φ *ed* F *siano permutabili*. Supporremo di più la *continuità*: cioè, se ad $F(x, y)$ corrisponde $\Phi(x, y)$, e ad $F_1(x, y)$, corrisponde $\Phi_1(x, y)$, Φ tenda uniformemente verso Φ_1, allorché F tende uniformemente verso F_1.

Oltre a ciò ammetteremo che, nel senso che si dà a questa operazione nella *teoria delle funzioni di linee*, la Φ possa differenziarsi rispetto ad F, ottenendone i differenziali successivi primo, secondo, ecc., fino a quell'ordine che sarà necessario considerare.

Sostituiamo $F(\xi, \eta)$ con

$$F(\xi, \eta) + \varepsilon f(\xi, \eta)$$

permutabile con $F(\xi, \eta)$, e indichiamo con $\Phi'(x, y)$ ciò che diviene $\Phi(x, y)$. Formiamo il rapporto di composizione

$$\frac{\overset{*}{\Phi}{}' - \overset{*}{\Phi}}{\varepsilon \overset{*}{f}}\,,$$

e facciamo tendere il numero ε verso zero. *Se esiste un limite indipendente da* f, *diremo che* Φ *è una funzione di composizione dell'argomento* F e la rappresenteremo sempre col simbolo $\overset{*}{\Phi}(F)$ sopra adoperato. Il suddetto limite se ne dirà la *derivata di composizione* e si indicherà col simbolo introdotto precedentemente

$$\frac{d\overset{*}{\Phi}}{d\overset{*}{F}}\,.$$

Al pari delle derivate ordinarie anche la derivata di composizione può intendersi come *un vero e proprio rapporto di composizione*, ed il numeratore ed il denominatore costituiranno rispettivamente i *differenziali della funzione e del suo argomento*.

(25) Essendo a e b dei parametri indipendenti da x e y variabili in certi intervalli [nota dell'A.].

Due sono dunque le proprietà fondamentali delle funzioni di composizione: 1° *La permutabilità della funzione col suo argomento;* 2° *la indipendenza della derivata dal differenziale dell'argomento* (cfr. § 9).

7. Proviamo, adesso, che *la derivata è anche essa una funzione di composizione di* F.

Se denotiamo con Ψ la derivata $d\overset{*}{\Phi}/d\overset{*}{F}$ potremo dapprima riconoscere che

$$\Psi = \Psi \mid [F(\overset{\eta}{\underset{x}{\xi}}; \overset{y}{\underset{\xi}{\eta}})] \mid .$$

Mostriamo poi che a Ψ appartengono le due precedenti proprietà fondamentali che servono a caratterizzare una funzione di composizione.

Infatti la prima delle due proprietà fondamentali vale per la derivata Ψ, giacché essa è permutabile con F.

Passiamo a provare che si verifica anche la seconda proprietà. Osserviamo perciò che si ha

$$\overset{*}{\Phi}(F + \varepsilon_1 f_1) - \overset{*}{\Phi}(F) = \varepsilon_1 \overset{*}{f_1} \overset{*}{\Psi} + \varepsilon_1 h_1 ,$$

ove f_1 è permutabile con F, e h_1 tende a zero con ε_1.

Sia f_2 pure permutabile con F, e si formi

$$\overset{*}{\Phi}(F + \varepsilon_1 f_1 + \varepsilon_2 f_2) - \overset{*}{\Phi}(F + \varepsilon_1 f_1) - \overset{*}{\Phi}(F + \varepsilon_2 f_2) + \overset{*}{\Phi}(F) =$$

$$= \varepsilon_1 \overset{*}{f_1} \{ \overset{*}{\Psi} \mid [F + \varepsilon_2 f_2] \mid - \overset{*}{\Psi} \mid [F] \mid \} + \varepsilon_1 (h_1' - h_1''),$$

ove h_1' e h_1'' si annullano rispettivamente con ε_1 e con ε_2.

Siccome, per le ipotesi precedentemente fatte, Ψ è differenziabile secondo le regole delle funzioni di linee, si potrà scrivere

$$\Psi \mid [F + \varepsilon_2 f_2] \mid - \Psi \mid [F] \mid = \varepsilon_2 \theta_1 + \varepsilon_2 h_2 , \tag{2}$$

in cui h_2 va a zero con ε_2. Se ammettiamo l'esistenza del differenziale terzo nel senso delle funzioni di linee, potremo scrivere

$$\overset{*}{\Phi}(F + \varepsilon_1 f_1 + \varepsilon_2 f_2) - \overset{*}{\Phi}(F + \varepsilon_1 f_1) - \overset{*}{\Phi}(F + \varepsilon_2 f_2) + \overset{*}{\Phi}(F) = \varepsilon_1 \varepsilon_2 \overset{*}{f_1} \overset{*}{\theta}_1 + \varepsilon_1 \varepsilon_2 h'',$$

in cui h'' va a zero con ε_1 e con ε_2.

Quindi

$$\lim_{\substack{\varepsilon_1 = 0 \\ \varepsilon_2 = 0}} \frac{\overset{*}{\Phi}(F + \varepsilon_1 f_1 + \varepsilon_2 f_2) - \overset{*}{\Phi}(F + \varepsilon_1 f_1) - \overset{*}{\Phi}(F + \varepsilon_2 f_2) + \overset{*}{\Phi}(F)}{\varepsilon_1 \varepsilon_2} = \overset{*}{f_1} \overset{*}{\theta}_1 . \tag{2}$$

Ma il primo membro è simmetrico rispetto a f_1 e f_2; onde potrà porsi anche sotto la forma $\overset{*}{f_2} \overset{*}{\theta}_2$, e quindi

$$\overset{*}{f_1} \overset{*}{\theta}_1 = \overset{*}{f_2} \overset{*}{\theta}_2 .$$

Presi f_1 e f_2 di ordine determinato, dovrà essere

$$(4) \qquad \theta_1 = \overset{*}{f_2}\overset{*}{\theta}_{12}$$

$$(4') \qquad \theta_2 = \overset{*}{f_1}\overset{*}{\theta}_{12},$$

ossia il limite (3) si scriverà

$$\overset{*}{f_1}\overset{*}{f_2}\overset{*}{\theta}_{12}.$$

Ora Ψ è indipendente da f_1; quindi θ_1 è pure indipendente da f_1. A cagione della (4), risulterà θ_{12} indipendente da f_1. Per la stessa ragione, in virtù della (4') dovrà θ_{12} essere indipendente da f_2. Dunque θ_{12} è indipendente da f_1 e f_2.

Ritorniamo ora alla (2). Tenendo conto della (4), sarà

$$\Psi \,|\, [f + \varepsilon_2 f_2] \,| - \Psi \,|\, [F] \,| = \varepsilon_2 \overset{*}{f_2}\overset{*}{\theta}_{12} + \varepsilon_2 h_2,$$

e per conseguenza

$$\lim_{\varepsilon_2 = 0} \frac{\overset{*}{\Psi} \,|\, [F + \varepsilon_2 f_2] \,| - \overset{*}{\Psi} \,|\, [F] \,|}{\varepsilon_2 \overset{*}{f_2}} = \theta_{12}$$

con θ_{12} indipendente da f_2, il che dimostra che $\Psi = \dfrac{d\overset{*}{\Phi}}{d\overset{*}{F}}$ gode anche della seconda proprietà fondamentale e quindi si è provato che essa è una funzione di composizione di F.

Allorché esistono le successive derivate di composizione di Φ, queste si denoteranno rispettivamente con

$$\frac{d^2\overset{*}{\Phi}}{d\overset{*}{F}{}^2}, \frac{d^3\overset{*}{\Phi}}{d\overset{*}{F}{}^3}, \ldots$$

e *saranno tutte funzioni di composizione di* F *nel senso stabilito precedentemente.*

8. Passiamo adesso ad esporre alcune osservazioni che serviranno a chiarire e completare i concetti che abbiamo finora stabiliti.

Cominciamo dal notare che conviene sempre individuare il campo funzionale nel quale si ammette variabile l'argomento delle funzioni di composizione che si vogliono esaminare.

Così, per esempio, consideriamo

$$(5) \qquad \int_x^y F(x, \xi)\, \Omega(y - \xi)\, d\xi,$$

e riguardiamola come dipendente da tutti i valori di $F(\xi, \eta)$, $x \leq \xi \leq \eta \leq y$ nel senso della teoria delle funzioni di linee. Finché la funzione appartiene al gruppo del ciclo chiuso, la espressione (5) ci darà una funzione di composizione di F; al di fuori di questo campo, non più.

Infatti, se prendiamo

$$F(x, \xi) = F(\xi - x),$$

la funzione (5) sarà permutabile con F; mentre, in generale, se $F(x, \xi)$ non appartiene al gruppo del ciclo chiuso, tale permutabilità non sussiste. Dunque la prima delle proprietà fondamentali (§ 6) è verificata soltanto se F appartiene al gruppo del ciclo chiuso e quindi dovrà supporsi variabile entro questo campo funzionale l'argomento F.

9. Potremmo chiederci se, nel definire una funzione di composizione (§ 6), sia necessario di enunciare esplicitamente la condizione che abbiamo posto per la derivata: *di essere indipendente dal differenziale dell'argomento* (2ª condizione), o se essa possa invece discendere come una conseguenza di *permutabilità fra la funzione ed il suo argomento* (1ª condizione); ma è facile riconoscere che le due proprietà sono indipendenti, nel senso che può esistere la permutabilità fra funzione e argomento, senza che la derivata risulti indipendente dal differenziale dell'argomento. Per averne un esempio consideriamo l'espressione

$$\int_x^y F(x, \xi)\, \Omega(\xi - x)\, d\xi \tag{6}$$

come dipendente da F.

Se prendiamo F appartenente al gruppo del ciclo chiuso, cioè

$$F(x, \xi) = F(\xi - x),$$

l'espressione precedente diviene

$$\int_0^{y-x} F(\eta)\, \Omega(\eta)\, d\eta,$$

cioè conduce ad una funzione che appartiene pure al gruppo del ciclo chiuso ed è quindi permutabile con F. *La prima proprietà fondamentale* (§ 6) *è dunque soddisfatta.*

Diamo ora ad $F(y - x)$ l'incremento $\varepsilon f(y - x)$. L'incremento dell'espressione (6) risulta

$$\varepsilon \int_0^{y-x} f(\eta)\, \Omega(\eta)\, d\eta.$$

Per calcolare il rapporto di composizione fra l'incremento ora ottenuto e l'incremento dell'argomento F, basterà risolvere l'equazione integrale

$$\varepsilon \int_0^{y-x} f(\eta)\, \Omega(\eta)\, d\eta = \varepsilon \int_x^y f(y - \xi)\, \psi(\xi - x)\, d\xi.$$

La soluzione ψ ci darà il cercato rapporto.

Ora, derivando ambo i membri rispetto ad y, si ha

$$f(y-x)\,\Omega(y-x) = f(0)\,\psi(y-x) + \int_x^y f'(y-\xi)\,\psi(\xi-x)\,d\xi\,,$$

ossia

$$f(x)\,\Omega(x) = f(0)\,\psi(x) + \int_0^x f'(x-\xi)\,\psi(\xi)\,d\xi,$$

ed evidentemente la soluzione ψ dipende da f.

Ne segue che *la 2ª condizione fondamentale* del § 6 (cioè che la derivata di composizione sia indipendente dal differenziale dell'argomento) *non è soddisfatta*, sebbene lo sia *la prima*, cioè la condizione di permutabilità fra funzione e argomento.

10. La importanza di questa seconda condizione consiste nell'essere essa *invariantiva per le successive operazioni che fanno passare dalla funzione alle sue successive derivate*: ossia, che, se è verificata nel primo passaggio dalla funzione alla derivata prima, sussiste anche in tutti i successivi passaggi alle altre derivate. Tale è il significato del teorema del § 7.

Riconosciutane così la importanza, vogliamo darne una nuova dimostrazione pel caso particolare in cui il campo funzionale dell'argomento sia quello del ciclo chiuso.

Supponiamo di far corrispondere, ad ogni funzione F del ciclo chiuso, un'altra funzione Φ, pure appartenente al gruppo del ciclo chiuso, in modo da ottenere secondo la definizione generale (§ 6) una funzione di composizione $\overset{*}{\Phi}(\mathrm{F})$. Consideriamo

$$\frac{d\overset{*}{\Phi}}{d\overset{*}{\mathrm{F}}} = \psi:$$

ψ apparterrà anch'essa al gruppo del ciclo chiuso, e sarà indipendente da $d\mathrm{F}$ (seconda proprietà fondamentale del § 6).

Secondo la teoria delle funzioni di linee, sarà

$$\delta\Phi = \int_0^x \Phi'(x\,,\xi)\,\delta\mathrm{F}(\xi)\,\delta\xi = \int_0^x \psi(x-\xi)\,\delta\mathrm{F}(\xi)\,d\xi\,,$$

e quindi

$$\Phi'(x\,,\xi) = \psi(x-\xi)\,.$$

Se passiamo alle derivate funzionali seconde, si avrà

$$\delta\Phi'(x\,,\xi) = \delta\psi(x-\xi) = \int_0^x \Phi''(x-\xi\,,\eta)\,\delta\mathrm{F}(\eta)\,d\eta\,.$$

Ora, in virtù della simmetria delle derivate seconde (vedi op. cit. *Leçons sur les fonctions de lignes*, Chap. II, § 4), risulterà

$$\Phi''(x-\xi\,,\eta) = \Phi''(x-\xi\,,\eta)\,,$$

ossia, ammettendo l'esistenza delle derivate di Φ'',

$$\frac{\partial\Phi''}{\partial x} = -\frac{\partial\Phi''}{\partial\xi} = -\frac{\partial\Phi''}{\partial\eta},$$

e per conseguenza

$$\Phi''(x-\xi,\eta) = \Phi''(x-\eta,\xi) = \Phi''(x-\xi-\eta),$$

onde

$$\delta\psi(x-\xi) = \int_0^x \Phi''(x-\xi-\eta)\,\delta F(\eta)\,d\eta.$$

Ne segue

$$\frac{\partial}{\partial x}\int_0^x \Phi''(x-\xi-\eta)\,\delta F(\eta)\,d\eta + \frac{\partial}{\partial\xi}\int_0^x \Phi''(x-\xi-\eta)\,\delta F(\eta)\,d\eta = 0,$$

e quindi, eseguendo le derivazioni,

$$\Phi''(-\xi)\,\delta F(x) = 0 \qquad (\xi > 0).$$

Avremo dunque

$$\Phi''(x-\xi-\eta) = 0$$

per η compreso fra $x-\xi$ e x, da cui segue

$$\delta\psi(x-\xi) = \int_0^{x-\xi} \Phi''(x-\xi-\eta)\,\delta F(\eta)\,d\eta;$$

il che dimostra il teorema, giacchè la equazione precedente si potrà scrivere

$$\delta\psi = \overset{*}{\Phi}{}''\delta\overset{*}{F}$$

e quindi

$$\frac{d\overset{*}{\psi}}{d\overset{*}{F}} = \Phi'',$$

cioè il rapporto

$$\frac{d\overset{*}{\psi}}{d\overset{*}{F}}$$

sarà indipendente dal differenziale che comparisce al denominatore.

11. Se Φ è una funzione di composizione di F la operazione di *derivazione di composizione* può ottenersi mediante una derivazione eseguita nel senso ordinario.

Infatti,

$$\lim_{\varepsilon=0}\frac{\overset{*}{\Phi}(F+\varepsilon f) - \overset{*}{\Phi}(F)}{\varepsilon\overset{*}{f}}$$

deve essere indipendente da f, purché questa funzione sia permutabile con F.

Se prendiamo $f = \overset{*}{F}{}^{\circ}$, si avrà

$$\frac{\overset{*}{\Phi}(F + \varepsilon\overset{*}{F}{}^{\circ}) - \overset{*}{\Phi}(F)}{\varepsilon\overset{*}{F}{}^{\circ}} = \frac{\overset{*}{\Phi}(F + \varepsilon\overset{*}{F}{}^{\circ}) - \overset{*}{\Phi}(F)}{\varepsilon}$$

onde

$$\frac{d\overset{*}{\Phi}}{d\overset{*}{F}} = \lim_{\varepsilon = 0} \frac{\overset{*}{\Phi}(F + \varepsilon\,\overset{*}{F}{}^{\circ}) - \overset{*}{\Phi}(F)}{\varepsilon} = \left(\frac{d\overset{*}{\Phi}(F + z\overset{*}{F}{}^{\circ})}{dz}\right)_{z=0};$$

la qual formula riconduce la derivazione di composizione ad una derivazione ordinaria.

12. Consideriamo

$$\overset{*}{\Phi}(F_2) - \overset{*}{\Phi}(F_1),$$

ove F_2 e F_1 sono permutabili. Per la formula di Lagrange, avremo

$$\overset{*}{\Phi}(F_2) - \overset{*}{\Phi}(F_1) = \left(\frac{d\overset{*}{\Phi}(F_1 + z(F_2 - F_1))}{dz}\right)_{z=\theta},$$

ove θ è un numero compreso fra 0 e 1.

Da questa formula segue

$$\overset{*}{\Phi}(F_2) - \overset{*}{\Phi}(F_1) = (\overset{*}{F}_2 - \overset{*}{F}_1)\left(\frac{d\overset{*}{\Phi}}{d\overset{*}{F}}\right)_{F = F_1 + \theta(F_2 - F_1)}, \tag{7}$$

o anche, posto $F_2 = F_1 + f$,

$$\overset{*}{\Phi}(F_1 + f) = \overset{*}{\Phi}(F_1) + \overset{*}{f}\left(\frac{d\overset{*}{\Phi}}{d\overset{*}{F}}\right)_{F = F_1 + \theta f},$$

ove F_1 e f sono permutabili.

Ne segue una formula analoga a quella di TAYLOR, ammessa l'esistenza delle successive derivate di composizione, e cioè

$$\overset{*}{\Phi}(F_1 + f) = \overset{*}{\Phi}(F_1) + \overset{*}{f}\left(\frac{d\Phi}{dF}\right)_{F=F_1} + \frac{\overset{*}{f}{}^2}{2!}\left(\frac{d^2\overset{*}{\Phi}}{d\overset{*}{F}{}^2}\right)_{F=F_1} + \cdots$$

$$+ \cdots + \frac{\overset{*}{f}{}^m}{m!}\left(\frac{d^m\overset{*}{\Phi}}{d\overset{*}{F}{}^m}\right)_{F=F_1} + \frac{\overset{*}{f}{}^{m+1}}{(m+1)!}\left(\frac{d^{m+1}\overset{*}{\Phi}}{d\overset{*}{F}{}^{m+1}}\right)_{F=F_1+\theta_m f},$$

essendo f permutabile con F_1 e θ_m un numero compreso fra 0 e 1.

13. Dalla formula (7) segue, ammessa la continuità di $d\overset{*}{\Phi}/d\overset{*}{F}$,

$$\lim_{F_1 = F_2} \frac{\overset{*}{\Phi}(F_2) - \overset{*}{\Phi}(F_1)}{\overset{*}{F}_2 - \overset{*}{F}_1} = \left(\frac{d\overset{*}{\Phi}}{d\overset{*}{\Phi}}\right)_{F=F_1},$$

supponendo che le funzioni F_1 e F_2 siano permutabili.

Supponiamo $F(x, y \mid s)$ dipendente dal parametro s in modo tale che per tutti i valori di s compresi in un certo intervallo, le F risultino funzioni appartenenti ad uno stesso gruppo di funzioni permutabili. Si potrà considerare

$$\overset{*}{\Phi}(F(x, y \mid s))$$

come una funzione di s. Avremo, per la (7),

$$\frac{\overset{*}{\Phi}(F(x, y \mid s_0 + h)) - \overset{*}{\Phi}(x, y \mid s_0))}{h} = \frac{\overset{*}{F}(x, y \mid s_0 + h) - \overset{*}{F}(x, y \mid s_0)}{h} \left(\frac{d\overset{*}{\Phi}}{d\overset{*}{F}}\right)_{F=F_1+\theta(F_2-F_1)},$$

ove si è supposto $F_1 = F(x, y \mid s_0)$, $F_2 = F(x, y \mid s_0 + h)$ e θ compreso fra o e 1.

Ammessa la derivabilità di F rispetto ad s, e passando al limite per h tendente a zero, otterremo

$$\text{(8)} \qquad \frac{d\overset{*}{\Phi}(F)}{ds} = \frac{d\overset{*}{F}}{ds} \frac{d\overset{*}{\Phi}}{dF}.$$

14. Dalla formula (7) segue che, se

$$\frac{d\overset{*}{\Phi}}{d\overset{*}{F}} = 0,$$

qualunque sia F nel campo che si considera, Φ è indipendente da F: cioè, è eguale ad una funzione fissa determinata appartenente al gruppo di funzioni permutabili nel quale è compreso il campo funzionale entro cui è variabile l'argomento F. Per conseguenza, se $\overset{*}{\Phi}_1(F)$ e $\overset{*}{\Phi}_2(F)$ hanno la stessa derivata di composizione, esse debbono differire per una funzione fissa determinata appartenente al gruppo delle funzioni permutabili a cui appartiene F.

15. Passiamo adesso alla *integrazione di composizione.*

Abbiasi una funzione di composizione $\overset{*}{\Phi}(F)$, e consideriamo la funzione

$$F(x, y \mid s)$$

tale che, per tutti i valori di s compresi entro certi limiti $a\,b$, $F(x, y \mid s)$ appartenga sempre allo stesso gruppo di funzioni permutabili. Supponiamo, dapprima, che Φ e F siano di ordine positivo.

Formiamo, con una operazione di composizione,

$$\overset{*}{\Phi}(F(x, y \mid s)) \frac{\partial \overset{*}{F}(x, y \mid s)}{\partial s},$$

e supponiamo che questa espressione, considerata come funzione di s, sia integrabile.

Calcoliamo

$$\text{(9)} \qquad \int_a^b \overset{*}{\Phi}(F(x, y \mid s)) \frac{\partial \overset{*}{F}(x, y \mid s)}{\partial s} ds.$$

Questo integrale si otterrà dividendo l'intervallo $a\,b$ in n parti $h_1, h_2, \cdots, h_n$, quindi formando

$$F(x, y \mid a + h_1 + h_2 + \cdots + h_r) = F_r \quad , \quad F(x, y \mid a) = F_0 ,$$

$$\lim \sum_{0}^{n-1}{}_r \overset{*}{\Phi}(F_r)(\overset{*}{F}_{r+1} - \overset{*}{F}_r) , \tag{10}$$

passando al limite nell'ultima somma col far tendere indefinitivamente verso zero tutti gli intervalli $h_1, h_2, \cdots, h_n$ e crescendone nel tempo indefinitivamente il numero.

Se Φ o F fossero di ordine negativo, potremmo operare analogamente, purché si applicassero le regole per il passaggio al limite di espressioni di ordine negativo (vedi Cap. III, §§ 13 e 14).

16. Poniamo $F(x, y \mid a) = F_A$, $F(x, y \mid b) = F_B$. Noi scriveremo l'integrale (9) sotto la forma

$$\int_s \overset{*}{\Phi}(F)\, d\overset{*}{F} = \int_a^b \overset{*}{\Phi}(F)\, d\overset{*}{F} ,$$

oppure

$$\int_{F_A}^{F_B} \overset{*}{\Phi}(F)\, d\overset{*}{F} . \tag{11}$$

Per giustificare la notazione (11), bisogna provare che, presa un'altra funzione

$$F'(x, y \mid s')$$

tale che per tutti i valori di s' compresi fra a' e b' ci dia un insieme di funzioni appartenenti allo stesso gruppo precedente di funzioni permutabili, mentre $F'(x, y \mid a') = F_A$, $F'(x, y \mid b') = F_B$, si trova, per

$$\int_{a'}^{b'} \overset{*}{\Phi}(F'(x, y \mid s')) \frac{\partial F'(x, y \mid s')}{\partial s'} ds' , \tag{9'}$$

lo stesso risultato (9).

A tal fine consideriamo

$$F(x, y \mid u, v),$$

e immaginiamo u e v come le coordinate dei punti di un piano. Per tutti i valori di u e v corrispondenti ai punti di una certa area σ e del suo contorno S supponiamo che F risulti una funzione appartenente ad uno stesso gruppo di funzioni permutabili. Formiamo

$$\int_S \overset{*}{\Phi}(F)\, d\overset{*}{F} = \int_S \overset{*}{\Phi}(F) \frac{d\overset{*}{F}}{dS} dS = \int_S \overset{*}{\Phi}(F) \left(\frac{\partial \overset{*}{F}}{\partial u} \frac{du}{dS} + \frac{\partial \overset{*}{F}}{\partial v} \frac{dv}{dS} \right) dS$$

Se nessuna singolarità sussiste nell'interno del campo σ, in virtù della formula (8), avremo

$$\int_S \overset{*}{\Phi}(F)\left(\frac{\partial \overset{*}{F}}{\partial u}\frac{du}{dS}+\frac{\partial \overset{*}{F}}{\partial v}\frac{dv}{dS}\right)dS=\int_\sigma \left\{\frac{\partial}{\partial v}\left(\overset{*}{\Phi}(F)\frac{\partial \overset{*}{F}}{\partial u}\right)-\frac{\partial}{\partial u}\left(\overset{*}{\Phi}(F)\frac{\partial \overset{*}{F}}{\partial v}\right)\right\}d\sigma=$$

$$=\int_\sigma \left\{\frac{\partial}{\partial v}\overset{*}{\Phi}(F)\frac{\partial \overset{*}{F}}{\partial u}-\frac{\partial}{\partial u}\overset{*}{\Phi}(F)\frac{\partial \overset{*}{F}}{\partial v}\right\}d\sigma=\int_\sigma \frac{d\overset{*}{\Phi}}{d\overset{*}{F}}\left(\frac{\partial \overset{*}{F}}{\partial v}\frac{\partial \overset{*}{F}}{\partial u}-\frac{\partial \overset{*}{F}}{\partial u}\frac{\partial \overset{*}{F}}{\partial v}\right)d\sigma=0.$$

Sarà dunque

$$\int_S \overset{*}{\Phi}(F)\,d\overset{*}{F}=0. \tag{12}$$

Da questa formula risulta che, se si può passare dalla $F(x, y \mid s)$ alla $F'(x, y \mid s')$ con continuità senza che F e $\Phi(F)$ traversino delle singolarità, i due integrali (9) e (9') risultano eguali.

17. Considerando F_A fisso e F_B variabile,

$$\int_{F_A}^{F_B} \overset{*}{\Phi}(F)\,d\overset{*}{F}$$

risulta una funzione di composizione di F_B. Chiamandola $\psi(F_B)$, sarà

$$\frac{d\overset{*}{\psi}}{d\overset{*}{F}_B}=\overset{*}{\Phi}(F_B)\,.$$

Per integrare le funzioni di composizione razionali o irrazionali considerate precedentemente, basta applicare le ordinarie regole di integrazione e sostituire alle potenze ordinarie quelle di composizione.

È evidente che si potranno considerare delle *equazioni differenziali di composizione* esaminando le relazioni fra funzioni di composizione e le loro derivate dei varii ordini.

È pure evidente che si potranno considerare funzioni di composizione di più argomenti e le loro derivate.

18. Si riconosce facilmente l'analogia fra la teoria che abbiamo svolta e la teoria delle funzioni di variabili complesse. La seconda condizione, posta per la derivata di composizione di una funzione di composizione nel § 6, corrisponde evidentemente alla condizione che la derivata di una funzione di variabile complessa z sia indipendente dalla direzione in cui si sposta nel piano complesso l'indice della variabile complessa z (condizione di monogeneità). Tanto l'una quanto l'altra delle due condizioni si conservano nelle derivazioni successive (teorema del § 7).

Inoltre la formula (12) corrisponde al teorema di CAUCHY; ed evidentemente si può stabilire, come condizione perché una funzione sia di composizione, che venga verificata la formula (12), il che stabilisce un teorema reciproco analogo al noto teorema di MORERA, inverso di quello di CAUCHY.

Capitolo VIII.

Applicazione della integrazione di composizione ai logaritmi di composizione e alle potenze di composizione.

1, Abbiamo veduto che

$$\frac{d\overset{*}{l}\mathrm{F}}{d\overset{*}{\mathrm{F}}} = \overset{*}{\mathrm{F}}^{-1},$$

onde

$$\overset{*}{l}\mathrm{F} = \int_{\overset{*}{\mathrm{F}}^{0}}^{\mathrm{F}} \overset{*}{\mathrm{F}}^{-1}\, d\overset{*}{\mathrm{F}}.$$

Potremo anche porre

$$\overset{*}{l}\mathrm{F} = \lim_{n=\infty} \frac{\overset{*}{\mathrm{F}} - \overset{*}{\mathrm{F}}^{0}}{n} \left\{ \frac{1}{\overset{*}{\mathrm{F}}^{0}} + \frac{1}{\overset{*}{\mathrm{F}}^{0} + \frac{\overset{*}{\mathrm{F}} - \overset{*}{\mathrm{F}}^{0}}{n}} + \frac{1}{\overset{*}{\mathrm{F}}^{0} + \frac{2(\overset{*}{\mathrm{F}} - \overset{*}{\mathrm{F}}^{0})}{n}} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\overset{*}{\mathrm{F}}^{0} + \frac{3(\overset{*}{\mathrm{F}} - \overset{*}{\mathrm{F}}^{0})}{n}} + \cdots + \frac{1}{\overset{*}{\mathrm{F}}} \right\} = (\overset{*}{\mathrm{F}} - \overset{*}{\mathrm{F}}^{0}) \int_0^1 \frac{dz}{\overset{*}{\mathrm{F}}^{0} + z(\overset{*}{\mathrm{F}} - \overset{*}{\mathrm{F}}^{0})};$$

o anche

$$\overset{*}{\mathrm{F}}\overset{*}{l}\mathrm{F} = (\overset{*}{\mathrm{F}} - \overset{*}{\mathrm{F}}^{0}) \int_0^1 \frac{\overset{*}{\mathrm{F}}\, dz}{\overset{*}{\mathrm{F}}^{0} + z(\overset{*}{\mathrm{F}} - \overset{*}{\mathrm{F}}^{0})} .$$

Ora

$$\frac{\overset{*}{\mathrm{F}}}{\overset{*}{\mathrm{F}}^{0} + z(\overset{*}{\mathrm{F}} - \overset{*}{\mathrm{F}}^{0})} = \frac{1}{1-z}\left(\mathrm{F} - \frac{z}{1-z}\overset{*}{\mathrm{F}}^{2} + \frac{z^2}{(1-z)^2}\overset{*}{\mathrm{F}}^{3} - \cdots\right).$$

Si tratta quindi di vedere se l'integrale

$$\int_0^1 \frac{dz}{1-z}\left(\mathrm{F} - \frac{z}{1-z}\overset{*}{\mathrm{F}}^{2} + \frac{z^2}{(1-z)^2}\overset{*}{\mathrm{F}}^{3} - \cdots\right) \tag{1}$$

è un integrale convergente.

2. Noi dimostreremo, a questo proposito, alcune proposizioni.

Lemma I. – *Abbiasi l'equazione integrale*

$$f(x, y) + \int_x^y f(x, \xi)\, \mathrm{F}(\xi, y)\, d\xi = \Phi(x, y).$$

Se le funzioni finite e continue $F(x, y)$ *e* $\Phi(x, y)$ *tendono uniformemente verso le funzioni, pure finite e continue,* $F_1(x, y)$ *e* $\Phi_1(x, y)$, $f(x, y)$ *tenderà uniformemente verso la soluzione dell'equazione integrale*

$$f_1(x, y) + \int_x^y f_1(x, \xi) F_1(\xi, y) d\xi = \Phi_1(x, y). \tag{2}$$

Infatti, l'equazione (2) avrà una soluzione finita e determinata. Inoltre sarà

$$f(x, y) - f_1(x, y) + \int_x^y \left\{ f(x, \xi) - f_1(x, \xi) \right\} F(\xi, y) d\xi =$$

$$= \Phi(x, y) - \Phi_1(x, y) + \int_x^y f_1(x, \xi)(F_1(\xi, y) - F(\xi, y)) d\xi,$$

onde $f(x, y) - f_1(x, y)$ si ridurrà, in valore assoluto, uniformemente tanto piccola quanto ci piace, purché $|F_1(x, y) - F(x, y)|$ e $|\Phi_1(x, y) - \Phi(x, y)|$ siano inferiori a dati valori in tutto il campo in cui si considerano.

LEMMA II. - *Abbiasi l'equazione integrale*

$$f(x, y | z) + \int_x^y f(x, \xi | z) F(\xi, y | z) d\xi = \Phi(x, y | z) \quad , \quad a < x < y < b,$$

e supponiamo che, per z *compreso fra* m *e* n, *sia*

$$|F(x, y | z)| < M,$$

mentre, scelto ε *piccolo ad arbitrio, si possa trovare* α *tale che per* $n - \alpha < z \leq n$

$$|\Phi(x, y | z)| < \varepsilon;$$

avremo che $f(x, y | z)$ *tende uniformemente, per* $z = n$, *verso zero.*

La dimostrazione di questo lemma si fa facilmente ricorrendo alla soluzione dell'equazione integrale.

LEMMA III. - *Abbiasi l'equazione integrale*

$$f(x, y | z) + \int_x^y f(x, \xi | z) F(\xi, y | z) d\xi = \Phi(x, y | z) \quad , \quad a < x < y < b,$$

e supponiamo che, per z *compreso fra* m *e* n, *sia*

$$|F(x, y | z)| < M \quad , \quad |\Phi(x, y | z)| < N.$$

Inoltre

$$\lim_{z=n} F(x, y | z) = G(x, y) \quad , \quad \lim_{z=n} \Phi(x, y | z) = \Gamma(x, y),$$

ove G *e* Γ *sono funzioni continue (si esclude il valore* $x = y$).

Abbiasi poi che, scelto ε *piccolo ad arbitrio, si possa trovare* α *tale che, per* $n-\alpha<z<n$, *sia (comunque si prendano* x, y)

$$\int_x^y |\mathrm{F}(\xi, y \mid z)-\mathrm{G}(\xi, y)|\, d\xi<\varepsilon \quad , \quad \int_x^y |\Phi(x, \xi \mid z)-\Gamma(x, \xi)|\, d\xi<\varepsilon ;$$

sarà, allora,

$$\lim_{z=n} f(x, y \mid z)=g(x, y) \qquad (\text{escluso } x=y),$$

ove $g(x, y)$ *è la soluzione dell'equazione integrale*

$$g(x, y)+\int_x^y g(x, \xi)\, \mathrm{G}(\xi, y)\, d\xi=\Gamma(x, y).$$

Infatti, posto

$$\begin{aligned}
f(x, y \mid z)-g(x, y) &= \lambda(x, y \mid z) \\
\mathrm{F}(x, y \mid z)-\mathrm{G}(x, y) &= \mathrm{L}(x, y \mid z) \\
\Phi(x, y \mid z)-\Gamma(x, y) &= \mathrm{P}(x, y \mid z),
\end{aligned}$$

sarà

$$\lambda(x, y \mid z)+\int_x^y \lambda(x, \xi \mid z)\, \mathrm{G}(\xi, y)\, d\xi=\mathrm{P}(x, y \mid z)-\int_x^y f(x, \xi \mid z)\, \mathrm{L}(\xi, y \mid z)\, d\xi.$$

Ora

$$|f(x, \xi \mid z)|<\mathrm{N} e^{\mathrm{M}(b-a)};$$

quindi,

$$|\lambda(x, y \mid z)|<|\mathrm{P}(x, y \mid z)|+\mathrm{N} e^{\mathrm{M}(b-a)} \int_x^y |\mathrm{L}(\xi, y \mid z)|\, d\xi+$$

$$+e^{\mathrm{M}(b-a)} \int_x^y |\mathrm{P}(x, \xi \mid z)|\, d\xi+\mathrm{N} e^{2 \mathrm{M}(b-a)} \int_x^y d\eta \int_x^\eta |\mathrm{L}(\xi, \eta \mid z)|\, d\xi .$$

Perciò, se

$$n-\alpha<z<n,$$

sarà

$$|\lambda(x, y \mid z)|<|\mathrm{P}(x, y \mid z)|+\varepsilon \mathrm{N} e^{\mathrm{M}(b-a)}+\varepsilon e^{\mathrm{M}(b-a)}+\varepsilon(b-a) \mathrm{N} e^{2 \mathrm{M}(b-a)}:$$

e quindi

$$\lim_{x=n} f(x, y \mid z)=g(x, y),$$

escluso il caso di $x=y$.

3. Teorema I. – *Sia* $\mathrm{F}(x, y)$ *una funzione finita continua e derivabile,* $a \leq x \leq y \leq b$, *e*

$$\frac{\partial \mathrm{F}(x, y)}{\partial x}=\mathrm{F}_1(x, y) \quad , \quad \frac{\partial \mathrm{F}(x, y)}{\partial y}=\mathrm{F}_2(x, y) \quad , \quad \frac{\partial^2 \mathrm{F}(x, y)}{\partial x\, \partial y}=\mathrm{F}_{12}(x, y)$$

$$\mathrm{F}(x, x)=1 \quad , \quad \mathrm{F}_1(x, x)=\mathrm{F}_2(x, x)=0,$$

(*ossia* F *abbia la forma canonica*, Cap. I, § 8) *mentre* F_1, F_2, F_{12} *sono finite e continue. Avremo*

$$\text{(I)}\qquad zF - z^2\overset{*}{F}{}^2 + z^3\overset{*}{F}{}^3 - \ldots = ze^{-z(y-x)} + \frac{\Phi(x, y \mid z)}{z},$$

e, mentre z *varia fra* $h > 0$ *e* ∞, Φ *si conserverà sempre inferiore ad un valore finito.*

Osserviamo innanzi tutto che

$$z^2 F - z^3\overset{*}{F}{}^2 + z^4\overset{*}{F}{}^3 - \ldots = \Theta(x, y \mid z)$$

verifica l'equazione integrale

$$\text{(3)}\qquad \Theta(x, y \mid z) + z\int_x^y \Theta(x, \xi \mid z)\, F(\xi, y)\, d\xi = z^2 F(x, y).$$

Poniamo

$$\text{(I')}\qquad \Theta(x, y \mid z) = z^2 e^{-z(y-x)} + \Phi(x, y \mid z),$$

e

$$F(x, y) = 1 + G(x, y).$$

La (3) si scriverà

$$\text{(4)}\qquad \Phi(x, y \mid z) + z\int_x^y \Phi(x, \xi \mid z)\, d\xi = \Lambda(x, y \mid z),$$

ove

$$\text{(5)}\qquad \Lambda(x, y \mid z) = z^2 G(x, y) - z\int_x^y \Phi(x, \xi \mid z)\, G(\xi, y)\, d\xi - z^3\int_x^y e^{-z(\xi - x)}\, G(\xi, y)\, d\xi.$$

Risolvendo l'equazione integrale (4) rispetto a $\Phi(x, y \mid z)$, si trova

$$\text{(6)}\qquad \Phi(x, y \mid z) = \Lambda(x, y \mid z) - z\int_x^y \Lambda(x, \xi \mid z)\, e^{-z(y-\xi)}\, d\xi.$$

Poniamo

$$z\int_x^y e^{-z(\xi - x)} f(\xi, y)\, d\xi = \Omega \mid [f(x, y)] \mid$$

$$z\int_x^y f(x, \xi)\, e^{-z(y-\xi)}\, d\xi = \Omega' \mid [f(x, y)] \mid.$$

Sarà

$$\Omega\Omega' \mid [f(x, y)] \mid = \Omega'\Omega \mid [f(x, y)] \mid.$$

Sostituendo per Λ la sua espressione (5), la (6) si scriverà

$$\text{(7)}\quad \Phi(x, y \mid z) + z\int_x^y \Phi(x, \xi \mid z)\, G(\xi, y)\, d\xi - z^2\int_x^y e^{-z(y-\xi)}\, d\xi \int_x^\xi \Phi(x, \eta \mid z)\, G(\eta, \xi)\, d\eta =$$

$$= z^2 \{ G(x, y) - \Omega \mid [G(x, y)] \mid - \Omega' \mid [G(x, y)] \mid + \Omega'\Omega \mid [G(x, y)] \mid \}.$$

Ora

$$z\int_x^y e^{-z(y-\xi)}d\xi\int_x^\xi \Phi(x,\eta|z)\,G(\eta,\xi)\,d\eta = z\int_x^y \Phi(x,\eta|z)\,d\eta\int_\eta^y G(\eta,\xi)\,e^{-z(y-\xi)}\,d\xi =$$

$$=\int_x^y \Phi(x,\eta|z)\,\Omega'\,|\,[G(\eta,y)]\,|\,d\eta,$$

quindi la (7) si potrà mettere sotto la forma

$$(7') \qquad \Phi(x,y|z)+\int_x^y \Phi(x,\xi|z)\,H(\xi,y|z)\,d\xi = S(x,y|z),$$

ove

$$H(x,y|z) = zG(x,y) - z\Omega'\,|\,[G(x,y)]\,|$$

$$S(x,y|z) = zH(x,y|z) - z\Omega\,|\,[H(x,y|z)]\,|.$$

Ma

$$(8) \qquad H(x,y|z) = zG(x,y) - z\Omega'\,|\,[G(x,y)]\,| = \Omega'\left|\left[\frac{\partial G(x,y)}{\partial y}\right]\right| =$$

$$= z\int_x^y F_2(x,\xi)\,e^{-z(y-\xi)}\,d\xi$$

$$(9) \qquad S(x,y|z) = zH(x,y|z) - z\Omega\,|\,[H(x,y|z)]\,| = -\Omega\left|\left[\frac{\partial H(x,y|z)}{\partial x}\right]\right| =$$

$$= -z^2\int_x^y e^{-z(\xi-x)}\,d\xi\int_\xi^y F_{12}(\xi,\eta)\,e^{-z(y-\eta)}\,d\eta.$$

Siano ora M_2 e M_{12} due numeri rispettivamente più grandi dei massimi valori assoluti di $F_2(x,y)$ e $F_{12}(x,y)$. Se, $z>0$, $y-x>0$, avremo

$$|H(x,y|z)| < M_2(1-e^{-z(y-x)}) < M_2$$

$$|S(x,y|z)| < M_{12}(1-e^{-z(y-x)}-2(y-x)\,e^{-z(y-x)}) < M_{12}.$$

Dalla (7') segue dunque

$$\Phi(x,y|z) < M_{12}\,e^{M_2(b-a)}.$$

Ma in virtù della formula (I')

$$zF - z^2\overset{*}{F}{}^2 + z^3\overset{*}{F}{}^3 - \cdots = \frac{\Theta(x,y|z)}{z} = ze^{-z(y-x)} + \frac{\Phi(x,y|z)}{z},$$

il teorema è perciò dimostrato.

Osservazione. - Le condizioni $F_1(x\,x) = F_2(x\,x) = 0$ si potrebbero togliere, ed il precedente teorema seguiterebbe a sussistere.

TEOREMA II. - *Supposte soddisfatte le condizioni del teorema precedente, e supponendo inoltre che*

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2},\quad \frac{\partial^2 F}{\partial y^2},\quad \frac{\partial^3 F}{\partial x\,\partial y^2},\quad \frac{\partial^3 F}{\partial x^2\,\partial y}$$

siano finite e continue, ed i loro valori assoluti siano inferiori ad M, *avremo, per* $y > x$,

$$\lim_{z=\infty} \Phi(x, y \mid z) = -\frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y} + \int_x^y \frac{\partial^2 F(x, \xi)}{\partial x \partial \xi} \Psi(\xi, y) \, d\xi,$$

ove

$$\Psi(x, y) = F_2 - \overset{*}{F}{}^2_2 + \overset{*}{F}{}^3_2 - \cdots$$

e per $y = x$

$$\lim_{z=\infty} \Phi(x, y \mid z) = 0.$$

Riprendiamo infatti l'equazione (8). Avremo

$$H(x, y \mid z) = F_2(x, y)(1 - e^{-z(y-x)}) - z\int_x^y (F_2(x, y) - F_2(x, \xi)) \, e^{-z(y-\xi)} d\xi =$$

$$= F_2(x, y)(1 - e^{-z(y-x)}) + \theta M \int_x^y z(y - \xi) \, e^{-z(y-\xi)} d\xi,$$

ove θ è un numero compreso fra -1 e $+1$. Quindi

$$| H(x, y \mid z) - F_2(x, y) | < M e^{-z(y-x)} + \frac{M}{z}.$$

Ne segue

$$(10) \qquad \left\{ \begin{aligned} & \lim_{z=\infty} H(x, y \mid z) = F_2(x, y) \\ & \int_x^y | H(\xi, y \mid z) - F_2(\xi, y) | \, d\xi < \frac{M}{z} + \frac{M(b-a)}{z}. \end{aligned} \right.$$

Abbiamo poi

$$z \int_\xi^y F_{12}(\xi, \eta) \, e^{-z(y-\eta)} d\eta = F_{12}(\xi, y)(1 - e^{-z(y-\xi)}) - z\int_\xi^y (F_{12}(\xi, y) -$$

$$- F_{12}(\xi, \eta)) \, e^{-z(y-\eta)} d\eta = F_{12}(\xi, y)(1 - e^{-z(y-\xi)}) +$$

$$+ \theta' M \int_\xi^y z(y - \eta) \, e^{-z(y-\eta)} d\eta = F_{12}(\xi, y)(1 - e^{-z(y-\xi)}) + \frac{\theta'' M}{z},$$

ove θ' e θ'' sono numeri compresi fra -1 e $+1$.

Ora dalla equazione (9) segue, tenendo conto del calcolo precedente,

$$S(x, y \mid z) = -z \int_x^y e^{-z(\xi-x)} \left\{ F_{12}(\xi, y)(1 - e^{-z(y-\xi)}) + \frac{\theta'' M}{z} \right\} d\xi =$$

$$= -F_{12}(x, y)(1 - e^{-z(y-x)}) + \frac{\theta''' M}{z} + \theta^{IV} z(y - x) \, e^{-z(y-x)} M_{12} + \frac{\theta^{V} M}{z},$$

indicando sempre con θ''', θ^{IV}, θ^{V} dei numeri compresi fra -1 e $+1$. Quindi

$$|S(x,y\,|\,z) + F_{12}(x,y)| < M_{12}\,e^{-z(y-x)} + M_{12}\,z\,(y-x)\,e^{-z(y-x)} + \frac{2M}{z},$$

da cui segue

$$(11)\qquad \begin{cases} \lim\limits_{z=\infty} S(x,y\,|\,z) = -F_{12}(x,y) \\ \displaystyle\int_x^y |S(x,\xi\,|\,z) + F_{12}(x,\xi)|\,d\xi < \frac{2(M_{12}+M)}{z}\,. \end{cases}$$

Applichiamo ora il lemma III alla equazione integrale (7′), tenendo presenti le formule (10) e (11); risulterà

$$\lim_{z=\infty} \Phi(x,y\,|\,z) = \varphi(x,y) \qquad \text{per } y > x$$

ove $\varphi(x,y)$ è la soluzione dell'equazione integrale

$$\varphi(x,y) + \int_x^y \varphi(x,\xi)\,F_2(\xi,y)\,d\xi = -F_{12}(x,y),$$

e per conseguenza, per $y > x$,

$$\lim_{z=\infty} \Phi(x,y\,|\,z) = \varphi(x,y) = -F_{12}(x,y) +$$

$$+\int_x^y F_{12}(x,\xi)\,\{F_2(\xi,y) - \overset{*}{F}{}_2^2(\xi,y) + \cdots\}\,d\xi.$$

Per $y = x$ abbiamo che la funzione $G(x,y)$ del § 3 si annulla e perciò si annullano pure $H(x,y\,|\,z)$ e $S(x,y\,|\,z)$, quindi in virtù delle (7′) anche $\Phi(x,y\,|\,z)$, e per conseguenza

$$\lim_{z=\infty} \Phi(x,y\,|\,z) = 0, \qquad\qquad \text{per } y = x,$$

il che dimostra il teorema.

4. Dal teorema I segue, sotto le condizioni stabilite, il che

$$\lim_{z=+\infty} (zF - z^2\,\overset{*}{F}{}^2 + z^3\,\overset{*}{F}{}^3 - \cdots)$$

è zero se $y > x$, ed è ∞ se $y = x$. Inoltre, finché $f(x,y)$ è superiore ad una quantità positiva, sarà

$$\lim_{z=+\infty} (zF + z^2\,\overset{*}{F}{}^2 + z^3\,\overset{*}{F}{}^3 + \cdots) = \infty.$$

Tali proprietà fanno avvicinare la serie molto generale (I) alla serie esponenziale. Intanto il teorema I (vedi *Osservazione* al detto teorema) serve a risolvere la questione della convergenza dell'integrale (1). L'essere F ridotta alla *forma canonica* (Cap. I, § 8), o anche semplicemente l'essere $F(x, x) = 1$, *basta a farci riconoscere che il detto integrale è convergente*, e quindi

$$\text{(11)} \qquad \overset{*}{F} l \overset{*}{F} = (\overset{*}{F} - \overset{*}{F}{}^0) \int_0^1 \frac{dz}{1-z} \left(\overset{*}{F} - \frac{z}{1-z} \overset{*}{F}{}^2 + \frac{z^2}{(1-z)^2} \overset{*}{F}{}^3 - \cdots \right).$$

In virtù dell'interesse presentato dal teorema I, ci sia permesso di darne nel paragrafo seguente una nuova dimostrazione valevole in un caso particolare (caso polinomiale del ciclo chiuso), la quale ci ha fatto intuire nel corso di queste ricerche il risultato generale, ed è perciò abbastanza significativa.

5. La serie

$$zF - z^2 \overset{*}{F}{}^2 + z^3 \overset{*}{F}{}^3 - \cdots$$

è soluzione dell'equazione integrale

$$\text{(12)} \qquad \rho(x, y \mid z) + z \int_x^y \rho(x, \xi \mid z) F(\xi, y) \, d\xi = zF(x, y).$$

Supponiamo che F appartenga al gruppo del ciclo chiuso, e sia

$$F(x, y) = 1 + \alpha_1 (y - x) + \alpha_2 (y - x)^2 + \cdots + \alpha_n (y - x)^n.$$

Anche $\rho(x, y \mid z)$ apparterrà al gruppo del ciclo chiuso, e potrà scriversi $\rho(y - x \mid z)$, onde l'equazione (12) diverrà

$$\text{(13)} \quad \rho(x, z) + z \int_0^x \{1 + \alpha_1 (x - \xi) + \alpha_2 (x - \xi)^2 + \cdots + \alpha_n (x - \xi)^n\} \rho(\xi, z) \, d\xi =$$
$$= z(1 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \cdots + \alpha_n x^n).$$

Questa equazione integrale si trasforma nell'equazione differenziale

$$0 = \frac{\partial^{n+1} \rho(x, z)}{\partial x^{n+1}} + z \frac{\partial^n \rho(x, z)}{\partial x^n} + z\alpha_1 \frac{\partial^{n-1} \rho(x, z)}{\partial x^{n-1}} + 2 z\alpha_2 \frac{\partial^{n-2} \rho(x, z)}{\partial x^{n-2}} +$$
$$+ \cdots + n! \, \alpha_n z \rho(x, z)$$

onde

$$\rho(x, z) = Ce^{\lambda x} + C_1 e^{\lambda_1 x} + \cdots + C_n e^{\lambda_n x},$$

ove $C, C_1, C_2, \cdots, C_n$; $\lambda, \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ sono indipendenti da x. Ora

$$\text{(14)} \qquad \left\{ \begin{array}{l} \lambda + \lambda_1 + \cdots + \lambda_n = -z \\ \lambda\lambda_1 + \lambda_1 \lambda_2 + \cdots + \lambda_{n-1} \lambda_n = z\alpha_1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \lambda\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n = (-1)^n n! \, z\alpha_n \end{array} \right.$$

$$
(15)\qquad \left\{
\begin{aligned}
C &= -\frac{\lambda}{\left(1-\frac{\lambda_1}{\lambda}\right)\left(1-\frac{\lambda_2}{\lambda}\right)\cdots\left(1-\frac{\lambda_n}{\lambda}\right)}\\
C_1 &= -\frac{\lambda_1^{n+1}}{(\lambda_1-\lambda)(\lambda_1-\lambda_2)\cdots(\lambda_1-\lambda_n)}\\
C_n &= -\frac{\lambda_n^{n+1}}{(\lambda_n-\lambda)(\lambda_n-\lambda_1)\cdots(\lambda_n-\lambda_{n-1})}
\end{aligned}
\right.
$$

Se z cresce indefinitivamente per valori positivi, dalle (14) si ricava che una sola delle radici, per esempio λ, tenderà assintoticamente verso $-z$, e le altre si manteranno finite, quindi, per le (15), C tenderà assintoticamente verso z, e $C_1, C_2, \cdots, C_n$ tenderanno verso zero, come $1/z$: onde la forma assintotica di ρ sarà

$$ze^{-zx} + \frac{\Phi(x, y \mid z)}{z}$$

con $\Phi(x, y \mid z)$ finita. È questa la forma che risulta dal teorema generale I.

6. Applichiamo ora, come esempio, la formula (II) per ottenere nuovamente l'espressione, già ricavata per altra, via di $\overset{*}{1}\,\overset{*}{l}\,1$ (cfr. Cap. V, § 5).

Posto

$$f(y-x) = \int_0^1 \frac{dz}{1-z}\left(1 - \frac{z}{1-z}(y-x) + \frac{1}{2!}\frac{z^2}{(1-z)^2}(y-x)^2 - \cdots\right) =$$

$$= \int_0^1 e^{-\frac{z}{1-z}(y-x)} \frac{dz}{1-z},$$

si avrà, in virtù della (II),

$$\overset{*}{1}\,\overset{*}{l}\,1 = (\overset{*}{1} - \overset{*}{1}{}^{\circ})\overset{*}{f}.$$

Ora

$$
(16)\qquad \left\{
\begin{aligned}
f(x) &= \int_0^1 e^{-\frac{z}{1-z}x} \frac{dz}{1-z},\\
f'(x) &= \int_0^1 -\frac{z}{(1-z)^2} e^{-\frac{z}{1-z}x} dz\\
f(x) - f'(x) &= \int_0^1 e^{-\frac{z}{1-z}x} \frac{1}{(1-z)^2} dz = \frac{1}{x},
\end{aligned}
\right.
$$

quindi

$$
(17)\qquad f(x) = e^x \int_x^\infty \frac{e^{-\xi}\, d\xi}{\xi} = -\log x + e^x \int_x^\infty \log \xi\, e^{-\xi}\, d\xi,
$$

da cui segue

$$(\overset{*}{1}-\overset{*}{1}{}^{\circ})\overset{*}{f}=-\int_0^x \log \xi\, d\xi+\int_0^x e^{\eta}\, d\eta \int_\eta^\infty \log \xi e^{-\xi}\, d\xi+\log x-e^x\int_x^\infty \log \xi e^{-\xi}\, d\xi=$$

$$=\log x-\int_0^\infty \log \xi e^{-\xi}\, d\xi=\log x-\Gamma'(1)=\log x+\mathrm{C},$$

ove C denota la costante di EULERO. Si ritrova quindi il risultato

$$\overset{*}{1}\,\overset{*}{l}\,1=\log x+\mathrm{C}.$$

7. Riprendiamo ora la formula generale (II) e osserviamo che essa ci dà il modo di calcolare

$$\overset{*}{\mathrm{F}}\, l\, \overset{*}{\mathrm{F}}$$

essendo F e le sue derivate prime e la derivata seconda mista finite e continue ed $\mathrm{F}(x, x)=1$.

Avremo infatti, a cagione della (I),

$$\frac{1}{1-z}\left(\mathrm{F}-\frac{z}{1-z}\overset{*}{\mathrm{F}}{}^2+\frac{z^2}{(1-z)^2}\overset{*}{\mathrm{F}}{}^3-\cdots\right)=$$

$$=\left(\frac{z}{1-z}\mathrm{F}-\frac{z^2}{(1-z)^2}\overset{*}{\mathrm{F}}{}^2+\frac{z^3}{(1-z^3)}\overset{*}{\mathrm{F}}{}^3-\cdots\right)\frac{1}{z}=$$

$$=\left(\frac{z}{1-z}e^{-\frac{z}{1-z}(y-x)}+\frac{\Phi\left(x, y\,\middle|\,\frac{z}{1-z}\right)}{\left(\frac{z}{1-z}\right)}\right)\frac{1}{z}=\frac{1}{1-z}e^{-\frac{z}{1-z}(y-x)}+\Psi(x, y|z)(1-z),$$

ove $\Psi(x, y|z)$ è sempre finita e continua. Quindi, tenendo presente le (16) e (17).

$$\int_0^1 \frac{dz}{1-z}\left(\mathrm{F}-\frac{z}{1-z}\overset{*}{\mathrm{F}}{}^2+\frac{z^2}{(1-z)^2}\overset{*}{\mathrm{F}}{}^3-\cdots\right)=\int_0^1 e^{-\frac{z}{1-z}(y-x)}\frac{dz}{1-z}+$$

$$+\int_0^1 \Psi(x, y|z)(1-z)\, dz=-\log(y-x)+e^{y-x}\int_{y-x}^\infty \log \xi e^{-\xi}\, d\xi+\theta(x, y),$$

ove $\theta(x, y)$ è una funzione finita e continua. Ne segue

$$(\overset{*}{\mathrm{F}}-\overset{*}{\mathrm{F}}{}^{\circ})\int_0^1 \frac{dz}{1-z}\left(\overset{*}{\mathrm{F}}-\frac{z}{1-z}\overset{*}{\mathrm{F}}{}^2+\frac{z^2}{(1-z)^2}\overset{*}{\mathrm{F}}{}^3-\cdots\right)=$$

$$=\log(y-x)-e^{y-x}\int_{y-x}^\infty \log \xi e^{-\xi}\, d\xi-\theta(x, y)+$$

$$+\int_x^y \mathrm{F}(x, \xi)\left\{-\log(y-\xi)+e^{y-\xi}\int_{y-\xi}^\infty \log \eta e^{-\eta}\, d\eta+\theta(\xi, y)\right\} d\xi=$$

$$=\log(y-x)+\chi(x, y),$$

ove $\chi(x, y)$ è una funzione finita e continua.

Si avrà dunque il teorema:

Se F (x, y) *è tale che* F $(x, x) = 1$, *sarà*

$$\overset{*}{F}\, \overset{*}{l}\, F = \log(y - x) + \chi(x, y),$$

ove $\chi(x, y)$ *è una funzione finita e continua.*

La funzione $\chi(x, y)$ si potrà calcolare ottenendo dapprima Φ per mezzo della risoluzione di una equazione integrale (cfr. la formula (7')). e quindi ricavando Ψ e θ come è indicato precedentemente.

Non è dunque necessario conoscere $\overset{*}{F}{}^z$ per poter calcolare $\overset{*}{F}\, \overset{*}{l}\, F$, ma *questo calcolo può farsi operando direttamente sulla funzione data* F (cfr. Cap. V, § 4).

8. Ma può aggiungersi ancora qualche cosa di più, e cioè che non solo non è necessario conoscere $\overset{*}{F}{}^z$ per ottenere $\overset{*}{F}\, \overset{*}{l}\, F$, ma che invece per mezzo di questo ultimo elemento, può calcolarsi $\overset{*}{F}{}^z$, quando sia data F.

Infatti, noto $\overset{*}{F}\, \overset{*}{l}\, F$, potremo ottenere

$$\overset{*}{F}(\overset{*}{l}\, F)^2 \quad , \quad \overset{*}{F}(\overset{*}{l}\, F)^3 \quad , \quad \overset{*}{F}(\overset{*}{l}\, F)^4 \cdots,$$

e quindi applicando la formula (ved. Cap. V, § 8)

$$\overset{*}{F}{}^{z+1} = F + \frac{z\, \overset{*}{F}\, \overset{*}{l}\, F}{1!} + \frac{z^2\, \overset{*}{F}(\overset{*}{l}\, F)^2}{2!} + \frac{z^3\, \overset{*}{F}(\overset{*}{l}\, F)^3}{3!} + \cdots,$$

potremo avere $\overset{*}{F}{}^{z+1}$ *espresso mediante una serie di potenze di* z *con sole operazioni fatte sopra* F (cfr. Cap II, § 12).

Si verifica dunque, per le potenze di composizione, il fatto analogo a quello che si ha per le potenze ordinarie, cioè che, per ottenere le prime in generale, conviene passare attraverso ai logaritmi di composizione, come per ottenere in generale le altre conviene passare attraverso i logaritmi dell'algebra ordinaria.

Questa è una nuova conferma della utilità di introdurre i logaritmi di composizione.

INDICE

VIII.

METODI DI CALCOLO DEGLI ELEMENTI DI TIRO PER ARTIGLIERIA AERONAUTICA

«Rendiconti Istituto Centrale Aeronautico», vol. V, 1916.

INTRODUZIONE.

1. Il problema balistico speciale che si trattava di risolvere consisteva nella costruzione di Tavole di tiro pel cannone da 65 montagna piazzato sopra un dirigibile, nella ipotesi che gli angoli di tiro fossero variabili in depressione fra 30° e 90° e le differenze di quota dell'*origine* per rapporto al *bersaglio*, supposto al livello del mare, fossero variabili fra 500^m e 2500^m.

Dato questo dislivello, doveva tenersi conto della diversa densità dell'aria nei varii punti della traiettoria.

Per risolvere questo problema fu studiato un metodo generale di calcolo che può applicarsi in tutti i casi analoghi in cui abbiano da determinarsi elementi di tiro per artiglieria aeronautica e che qui esporremo.

Non era il caso di adoperare, senza notevoli modificazioni, il metodo approssimato d'integrazione del SIACCI, giacché esso presuppone una traiettoria sufficientemente tesa rispetto ad una corda orizzontale. Data la grande depressione del tiro che si trattava di studiare, le condizioni erano quindi molto lontane dal caso tipico del SIACCI. Fu perciò essenzialmente modificato il metodo stesso; ma fu conservato l'artifizio del SIACCI di introdurre una pseudo-velocità, artifizio che risultò molto vantaggioso anche nel caso attuale.

2. La presente memoria è divisa in sette capitoli: nei primi due si pongono le equazioni differenziali del problema generale e le corrispondenti formule integrali. Nel terzo capitolo si applicano i metodi approssimati, facendo, man mano, uso degli speciali artifizi immaginati.

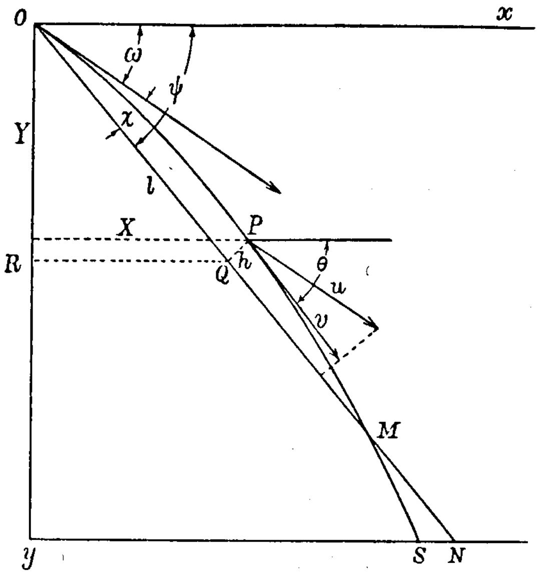
Per maggior chiarezza, in questo capitolo e nei tre capitoli successivi, ci siamo riferiti al problema speciale valendoci dei dati relativi al cannone da 65 e conducendo il calcolo in modo che l'errore finale negli alzi non superasse un millesimo; *ma il metodo impiegato è valido in generale*, purché le traiettorie siano sufficientemente tese, anzi gli abachi I e II sono applicabili in generale, quando il parametro α che individua le diverse curve sia variabile entro i limiti 0,5 e 1,5. Qualora in altri casi esso esca da questi limiti basterà estendere gli abachi o costruirne dei nuovi in modo del tutto analogo.

Nel capitolo quarto si espongono i metodi per la effettiva costruzione delle traiettorie e nel capitolo quinto si espone quello per il calcolo del tempo.

Nel capitolo sesto si procede al computo effettivo delle tavole di tiro. In tal modo viene svolto in tutti i suoi particolari il procedimento per giungere alle tavole finali. Noi riteniamo che il metodo generale esposto così, per via di esemplificazione, possa essere facilmente applicato in tutti quei casi in cui si debba adoperarlo.

L'ultimo capitolo (settimo) è dedicato allo studio delle variazioni e delle correzioni; in esso sono contemplate le variazioni provenienti da cambiamenti della velocità iniziale, dell'angolo di proiezione e di un coefficiente speciale, che abbiamo indicato con β, nella cui espressione figurano il coefficiente balistico e il coefficiente di forma.

Quest'ultima trattazione è fatta dal punto di vista generale e le formule ottenute sono di immediata e pratica applicazione [1].



ω – valore assoluto dell'angolo di proiezione, cioè angolo che la velocità iniziale forma con l'orizzonte;

ψ – angolo che una corda OMN della traiettoria forma con l'orizzonte;

θ – angolo che la tangente alla traiettoria in un punto qualunque P forma con l'orizzonte;

$\psi - \theta = \rho$;

$\psi - \omega = \chi$;

l – proiezione OQ dell'arco OP della traiettoria sulla corda OMN;

x e y linee coordinate rispettivamente orizzontale e verticale condotte dall'origine O nel piano della traiettoria, e X , Y coordinate del punto P.

(1) Debbo in prima linea ringraziare la sig.na dott. ELENA FREDA per il valido aiuto portatomi; ebbi pure efficace aiuto per i calcoli dal prof. BIANCHI e dai S. T. PARAZZOLI e ANDREOLI.

CAPITOLO I.

Equazioni differenziali del moto.

1. Se si denota con p il peso del proiettile, con v la sua velocità e con $f(v)$ la *ritardazione*, le equazioni differenziali del moto sono:

$$(\mathrm{A}) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{p}{g}\frac{d(v\cos\theta)}{dt} &= -\frac{p}{g}f(v)\cos\theta\,, \\ \frac{p}{g}\frac{d(v\,\mathrm{sen}\,\theta)}{dt} &= -\frac{p}{g}f(v)\,\mathrm{sen}\,\theta + p\,. \end{aligned} \right.$$

Da queste equazioni segue

$$\frac{p}{g}\frac{d(v\cos\theta)}{dt}\cos\psi + \frac{p}{g}\frac{d(v\,\mathrm{sen}\,\theta)}{dt}\,\mathrm{sen}\,\psi =$$

$$= -\frac{p}{g}f(v)(\cos\theta\cos\psi + \mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\psi) + p\,\mathrm{sen}\,\psi\,.$$

Siccome ψ è costante rispetto al tempo, avremo

$$\frac{p}{g}\frac{d(v\cos\rho)}{dt} = -\frac{p}{g}f(v)\cos\rho + p\,\mathrm{sen}\,\psi\,.$$

2. Sia u un vettore parallelo alla direzione della tangente iniziale alla traiettoria che ha la stessa proiezione del vettore v sulla corda OMN.

Avremo

$$u\cos\chi = v\cos\rho\,.$$

Chiameremo u la *pseudo-velocità*, facendo uso della stessa denominazione usata dal SIACCI per denotare una analoga quantità. La equazione precedente diverrà:

$$\frac{p}{g}\frac{d(u\cos\chi)}{dt} = -\frac{p}{g}f(v)\frac{u\cos\chi}{v} + p\,\mathrm{sen}\,\psi\,,$$

ossia, poiché l'angolo χ è costante rispetto al tempo,

$$(1) \qquad \frac{du}{dt} = -f(v)\frac{u}{v} + g\frac{\mathrm{sen}\,\psi}{\cos\chi}\,.$$

Ora dalle equazioni (A) si ricava, moltiplicandone ambo i membri rispettivamente per v sen θ, v cos θ e quindi sottraendo membro a membro,

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{g\cos\theta}{v}\,, \qquad \text{cioè} \qquad dt = \frac{v\,d\theta}{g\cos\theta}\,,$$

e per conseguenza

$$(2) \qquad g\,du = -\left(f(v)\frac{u}{\cos\theta} - \frac{g\,\mathrm{sen}\,\psi\cdot v}{\cos\chi\cos\theta}\right)d\theta =$$

$$= -\left(f(v)\frac{1}{\cos\theta} - \frac{g\,\mathrm{sen}\,\psi}{\cos\rho\cos\theta}\right)u\,d\theta\,.$$

D'altra parte abbiamo:

$$\frac{dX}{dt} = v \cos\theta \quad , \quad \frac{dY}{dt} = v \operatorname{sen}\theta ,$$

$$l = X\cos\psi + Y\operatorname{sen}\psi ,$$

da cui segue

$$\frac{dl}{dt} = v\cos\rho = u\cos\chi ,$$

$$dt = \frac{dl}{u\cos\chi} , \tag{3}$$

e, a cagione della (1),

$$u\,du = \left(-f(v)\frac{u}{v} + g\frac{\operatorname{sen}\psi}{\cos\chi}\right)\frac{dl}{\cos\chi} = \left(-f(v)\frac{\cos\rho}{\cos\chi} + g\frac{\operatorname{sen}\psi}{\cos\chi}\right)\frac{dl}{\cos\chi} . \tag{4}$$

3. Ora, se denotiamo con δ_y la densità dell'aria nel punto P, con i il *coefficiente di forma*, con C il *coefficiente balistico*, con F (v) la *funzione resistente*, abbiamo

$$f(v) = \frac{\delta_y i}{C} F(v) ,$$

e le formule (2) e (4) diventano

$$\frac{g\,du}{u} = -\left(\frac{\delta_y i}{C}\frac{F(v)}{F(u)}\frac{F(u)}{\cos\theta} - \frac{g\operatorname{sen}\psi}{\cos\rho\cos\theta}\right)d\theta =$$

$$= -\left(\frac{\delta_y i}{C}\frac{F(v)}{F(u)}\frac{\cos\rho}{\operatorname{sen}\psi}F(u) - g\right)\frac{d\theta\operatorname{sen}\psi}{\cos\rho\cos\theta} ,$$

$$u\,du = \left(-\frac{\delta_y i}{C}\frac{F(v)}{F(u)}\frac{\cos\rho}{\cos\chi}F(u) + g\frac{\operatorname{sen}\psi}{\cos\chi}\right)\frac{dl}{\cos\chi} =$$

$$= -\left(\frac{\delta_y i}{C}\frac{F(v)}{F(u)}\frac{\cos\rho}{\operatorname{sen}\psi}F(u) - g\right)\frac{dl\cdot\operatorname{sen}\psi}{\cos^2\chi} .$$

Poniamo

$$\beta = \frac{\delta_y}{\delta_z}\frac{F(v)}{F(u)}\frac{\cos\rho}{\cos\chi} = \frac{\delta_y}{\delta_z}\frac{F(v)}{F(u)}\frac{u}{v} ,$$

ove δ_z denota la densità dell'aria nel punto Q. Allora le formule precedenti divengono

$$\frac{g\,du}{u} = -\left(\beta\frac{\delta_z i}{C}\frac{\cos\chi}{\operatorname{sen}\psi}F(u) - g\right)\frac{d\theta\operatorname{sen}\psi}{\cos\rho\cos\theta} ,$$

$$u\,du = -\left(\beta\frac{\delta_z i}{C}\frac{\cos\chi}{\operatorname{sen}\psi}F(u) - g\right)\frac{dl\operatorname{sen}\psi}{\cos^2\chi} ,$$

da cui segue

$$\operatorname{sen}\psi\,dl = \frac{-\cos^2\chi\cdot u\,du}{\beta\frac{\delta_z i}{C}\frac{\cos\chi}{\operatorname{sen}\psi}F(u) - g} ,$$

$$\frac{\operatorname{sen}\psi\,d\theta}{\cos\rho\cos\theta} = \frac{-g\,du}{u\left(\beta\frac{\delta_z i}{C}\frac{\cos\chi}{\operatorname{sen}\psi}F(u) - g\right)} ,$$

e finalmente dalla formula (3)

$$dt = -\frac{\cos\chi}{\operatorname{sen}\psi}\frac{du}{\left(\beta\frac{\delta_z i}{C}\frac{\cos\chi}{\operatorname{sen}\psi}F(u)-g\right)}.$$

4. Poniamo

$$\beta\frac{\delta_z i}{C}\frac{\cos\chi}{\operatorname{sen}\psi} = \alpha\,;$$

$$l\operatorname{sen}\psi = z\,.$$

z denoterà la proiezione OR del segmento OQ sopra la verticale y. Allora le formule precedenti si scrivono:

$$dz = \frac{-\cos^2\chi\cdot u\,du}{\alpha F(u)-g},$$

$$\frac{\operatorname{sen}\psi\,d\theta}{\cos\rho\cos\theta} = \frac{-g\,du}{u(\alpha F(u)-g)},$$

$$dt = -\frac{\cos\chi}{\operatorname{sen}\psi}\frac{du}{\alpha F(u)-g}.$$

5. Posto

(5) $$\Omega = \log\frac{\cos\rho}{\cos\theta}\frac{\cos\omega}{\cos\chi},$$

abbiamo, differenziando,

$$d\Omega = \frac{\operatorname{sen}\psi\,d\theta}{\cos\rho\cos\theta}.$$

Quindi

(6) $$\left\{\begin{aligned} dz &= -\cos^2\chi\frac{u\,du}{\alpha F(u)-g},\\ d\Omega &= -g\frac{du}{u(\alpha F(u)-g)} = \frac{g}{\cos^2\chi}\frac{dz}{u^2},\\ dt &= -\frac{\cos\chi}{\operatorname{sen}\psi}\frac{du}{\alpha F(u)-g} = \frac{1}{\cos\chi\operatorname{sen}\psi}\frac{dz}{u}.\end{aligned}\right.$$

Capitolo II.

Integrazione delle equazioni del moto.

1. Se denotiamo con v_0 la velocità iniziale del proiettile, dalle formule (6) risulterà, osservando che z, Ω, t sono zero all'origine,

(7) $$\left\{\begin{aligned} z &= -\cos^2\chi\int_{v_0}^{u}\frac{u\,du}{\alpha F(u)-g},\\ \Omega &= -g\int_{v_0}^{u}\frac{du}{u(\alpha F(u)-g)} = \frac{g}{\cos^2\chi}\int_0^z\frac{dz}{u^2},\\ t &= -\frac{\cos\chi}{\operatorname{sen}\psi}\int_{v_0}^{u}\frac{du}{\alpha F(u)-g} = \frac{1}{\cos\chi\operatorname{sen}\psi}\int_0^z\frac{dz}{u}.\end{aligned}\right.$$

Dalla formula (5) segue

$$\frac{\cos\omega}{\cos\chi}\,e^{-\Omega}=\frac{\cos\theta}{\cos\rho}=\frac{\cos(\psi-\rho)}{\cos\rho}=\cos\psi+\operatorname{tg}\rho\operatorname{sen}\psi\,;$$

quindi

$$\operatorname{tg}\rho=\frac{\cos\omega}{\cos\chi\operatorname{sen}\psi}\,e^{-\Omega}-\operatorname{cotg}\psi\,.$$

Ma, se chiamiamo h la distanza PQ, abbiamo

$$dh=\operatorname{tg}\rho\,dl\,,$$

per conseguenza

$$dh=\left(\frac{\cos\omega}{\cos\chi\operatorname{sen}\psi}\,e^{-\Omega}-\operatorname{cotg}\psi\right)dl=$$

$$=-\frac{\cos\omega\cos\chi}{\operatorname{sen}^2\psi}\,e^{-\Omega}\,\frac{u\,du}{\alpha\,F(u)-g}-\operatorname{cotg}\psi\,dl\,,$$

da cui segue

$$(7')\qquad\left\{\begin{aligned}k=h+l\operatorname{cotg}\psi&=-\frac{\cos\omega\cos\chi}{\operatorname{sen}^2\psi}\int_{v_0}^{u}\frac{e^{-\Omega}\,u\,du}{\alpha\,F(u)-g}\,,\\ h&=-\frac{\cos\omega\cos\chi}{\operatorname{sen}^2\psi}\int_{v_0}^{u}\frac{e^{-\Omega}\,u\,du}{\alpha\,F(u)-g}-l\operatorname{cotg}\psi\,.\end{aligned}\right.$$

2. Poichè X e Y sono le coordinate del punto P, sarà

$$X=l\cos\psi+h\operatorname{sen}\psi=(h+l\operatorname{cotg}\psi)\operatorname{sen}\psi=k\operatorname{sen}\psi\,,$$

$$Y=z-h\cos\psi=\frac{z}{\operatorname{sen}^2\psi}-(h+l\operatorname{cotg}\psi)\cos\psi=\frac{z}{\operatorname{sen}^2\psi}-k\cos\psi\,,$$

ed infatti, essendo $l=\dfrac{z}{\operatorname{sen}\psi}$, sarà

$$\frac{z}{\operatorname{sen}^2\psi}-\frac{l\cos^2\psi}{\operatorname{sen}\psi}=z\,.$$

3. Le diverse formule che abbiamo trovato possono tutte riassumersi nel quadro seguente:

TABELLA I.

$$\text{(I)}\qquad z=-\cos^2\chi\int_{v_0}^{u}\frac{u\,du}{\alpha\,F(u)-g}=-\cos^2\chi\int_{v_0}^{u}\Phi(\alpha,u)\,du\,,$$

$$\text{(II)}\qquad \Omega=\frac{g}{\cos^2\chi}\int_{0}^{z}\frac{dz}{u^2}\,,$$

$$\text{(III)}\qquad k=\frac{\cos\omega}{\operatorname{sen}^2\psi\cos\chi}\int_{0}^{z}e^{-\Omega}\,dz\,,$$

Segue: TABELLA I.

(IV) $$h = k - l \operatorname{cotg} \psi \,,$$

(V) $$\begin{cases} X = k \operatorname{sen} \psi \,, \\ Y = \dfrac{z}{\operatorname{sen}^2 \psi} - k \cos \psi \,, \end{cases}$$

(VI) $$t = \frac{1}{\operatorname{sen} \psi \cos \chi} \int_0^z \frac{dz}{u} \,,$$

(VII) $$\alpha = \beta \frac{\delta_z i}{C} \frac{\cos \chi}{\operatorname{sen} \psi} \,,$$

(VIII) $$\beta = \frac{\delta_y}{\delta_z} \frac{F(v)}{F(u)} \frac{u}{v} \,\text{(2)} \,,$$

(IX) $$\Phi(\alpha, u) = \frac{u}{\alpha F(u) - g} \,.$$

Esse sono perfettamente rigorose, ma, per poterle applicare, converrà fare alcune particolari ipotesi che ci condurranno ad una soluzione approssimata del problema.

CAPITOLO III.

Soluzione approssimata.

1. Se la corda OMN coincide con la linea di sito o è una corda della traiettoria che taglia la traiettoria stessa in M prima del punto di arrivo S, la quantità β ha il valore 1 all'origine; quindi, se si percorre la traiettoria, β diminuisce ed è minore di 1 nel punto in cui la tangente alla traiettoria è parallela ad OMN. Riprende il valore 1 prima che si giunga al punto M, ed in M è maggiore di 1 e tale si conserva fino al punto di arrivo S. Il parametro β oscilla dunque intorno al valore 1 ed evidentemente se ne discosta tanto meno quanto più è tesa la traiettoria. Noi lo assumeremo, in vista che le traiettorie nel nostro caso sono molto tese, eguale ad 1 (3). Avremo dunque dalla (VII)

(8) $$\alpha = \frac{\delta_z i}{C} \frac{\cos \chi}{\operatorname{sen} \psi} \,.$$

(2) Nel metodo del SIACCI pure comparisce un parametro analogo all'attuale β, ma esso ne differisce essenzialmente anche perché vi figura un fattore in più analogo all'inverso del $\cos \chi$.

(3) I valori finali del calcolo possono correggersi, tenendo conto dei risultati delle esperienze di tiro, col prendere un valore medio di β diverso dall'unità. In vista di tale correzione nel Capitolo VII sono state calcolate le variazioni di tutti gli elementi per una variazione di β.

2. Nel caso poi del cannone da 65 montagna assumeremo come dati sperimentali ormai noti:

v_0, velocità iniziale del proiettile all'uscita della bocca $= 345$ (metro/secondo),

$$i = 0{,}715,$$
$$C = 1{,}06.$$

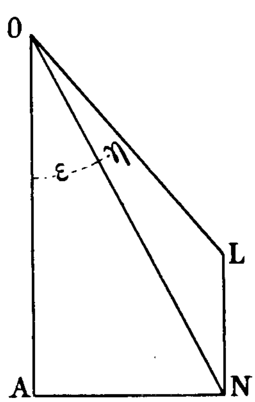
Da un computo preliminare della questione si può poi ritenere che, assumendo per le diverse quote fra 500^m e 2500^m gli angoli ψ e χ secondo la tabella II, si può essere sicuri che ci riferiamo sempre a corde OMN, le quali tagliano le corrispondenti traiettorie prima dei punti di arrivo nel piano di quota zero (livello del mare) (4).

Del resto si è avuta la conferma a posteriori che questa previsione era giustificata perché le h risultarono, per ogni traiettoria, in parte positive e in parte negative (vedi Cap. IV, § 5) (5).

(4) Inoltre i punti di arrivo sono poco discosti dai punti M di incontro delle traiettorie con le corde, in modo tale che si ha approssimativamente un compenso fra i valori di β inferiori ad 1 ed i valori superiori ad 1.

È da notare che il metodo potrebbe applicarsi (sebbene con minore approssimazione) anche se ON non tagliasse la traiettoria, ma formasse con la verticale un angolo di poco inferiore a quello formato dalla linea di sito con la verticale stessa.

(5) Per giungere ad una tabella di valori di angoli ψ e χ analoga alla tabella II, si possono seguire vie diverse. Per esempio si potrebbe dapprima supporre l'angolo $\chi = 0$; allora la linea di riferimento OMN non taglierebbe la traiettoria in M, ma le sarebbe tangente in O, cioè O ed M verrebbero a coincidere. In questo caso β sarebbe 1 all'origine e poi sempre maggiore di 1, onde prendendo $\beta = 1$, non si prenderebbe un valore medio di β. Tuttavia si avrebbe anche in questo modo una traiettoria approssimata. Se non bastasse contentarsi di questa traiettoria si potrebbe riguardarla come una prima approssimazione, e da essa ricavare valori di ψ e χ tali da esser sicuri di riferirsi ad una retta OMN che tagli effettivamente la traiettoria, e quindi procedere con questi dati ad una seconda approssimazione. È evidente che, se l'angolo di proiezione è molto vicino a 90°, l'errore che si commette prendendo $\chi = 0$ è piccolo; quindi, mentre ci si potrebbe contentare di prendere $\chi = 0$ per angoli di proiezione vicini a 90°, l'approssimazione sarebbe insufficiente per angoli di proiezione minori. Per uno qualunque ω di questi basterebbe però assumere il valore di χ eguale all'angolo di elevazione corrispondente ad un angolo di proiezione maggiore di ω per esser sicuri di riferirsi ad una retta OMN che tagli la traiettoria.



Ma per avere la tabella II non ricorremmo ai precedenti artifici. La desumemmo da un calcolo approssimato dell'ing. ZONA eseguito per suggerimento del sig. maggiore CROCCO al fine di ottenere l'ordine di grandezza delle elevazioni, onde formarsi un concetto delle dimensioni da darsi agli apparecchi di puntamento. Ecco come fu eseguito il calcolo:

Sia ON la linea di sito, ε il valore assoluto dell'angolo di sito, OA $= q$ la quota dell'origine rispetto al punto di arrivo. Sarà

$$ON = \frac{OA}{\operatorname{sen} \varepsilon}.$$

Se la linea ON fosse orizzontale, le ordinarie tavole di tiro del cannone da 65 montagna (N. 139) ci darebbero il tempo t nel quale il proiettile raggiungerebbe il punto N. Durante

TABELLA II.

QUOTE m.							
2500	$\psi =$	79°.37′.20″	69°.12′	58°.41′.20″	48°. 2′.40″	36°.57′.20″	(6)
	$\chi =$	1 . 2 .20	2 .12	3 .36 .20	5 .22 .40	8 .22 .20	
		Traiettoria 1_a	2_a	3_a	4_a	5_a	
2000	$\psi =$	79°.42′.40″	69°.22′.40″	59°. 4′	48°.33′.20″	37°.48′	26°.25′.20″
	$\chi =$	0 .47 .40	1 .42 .40	2 .34	3 .58 .20	6 . 3	9 .50 .20
		Traiettoria 1_b	2_b	3_b	4_b	5_b	6_b
1500	$\psi =$	79°.48′	69°.34′.40″	59°.18′.40″	49°	38°.30′.40″	27°.37′.20″
	$\chi =$	0 .33	1 . 9 .40	1 .53 .40	2 .45	4 . 5 .40	6 .32 .20
		Traiettoria 1_c	2_c	3_c	4_c	5_c	6_c
1000	$\psi =$	79°.52′	69°.48′	59°.34′.40″	49°.22′.40″	39°. 5′.20′	28°.36′
	$\chi =$	0 .22	0 .33	1 . 9 .40	1 .42.40	2 .30 .20	3 .51
		Traiettoria 1_d	2_d	3_d	4_d	5_d	6_d
500	$\psi =$	79°.56′	69°.52′	59°.49′.20″	49°.42′.40″	39°.34′.40″	29°.22′.40″
	$\chi =$	0 .11	0 .22	0 .29 .20	0 .47 .40	1 . 9 .40	1 .42 .40
		Traiettoria 1_e	2_e	3_e	4_e	5_e	6_e

questo tempo il proiettile cade di $s = 1/2\, g t^2$. Riportando verticalmente NL $= s$, l'angolo NOL $= \eta$ ci darà l'ordine di grandezza dell'elevazione.

In tal modo fu ottenuta la tabella seguente:

QUOTE	$q = 2500$	2000	1500	1000	500
$\varepsilon = 80°$	$\eta = 1°.25'$	$\eta = 1°.\ 5'$	$\eta = 0°.45'$	$\eta = 0°.30'$	$\eta = 0°.15'$
70	3	2 .20	1 .35	0 .45	0 .30
60	4 .55	3 .30	2 .35	1 .35	0 .40
50	7 .20	5 .25	3 .45	2 .20	1 .5
40	11 .25	8 .15	5 .35	3 .25	1 .35
30	19 .30	13 .25	8 .55	5 .15	2 .20

Gli angoli ψ e χ della tabella II vennero calcolati prendendo

$$\psi = \varepsilon - \frac{4}{15}\eta \quad , \quad \chi = \eta - \frac{4}{15}\eta ,$$

in modo da esser sicuri di riferirsi a corde OMN che secano la traiettoria prima dei punti di arrivo.

(6) La traiettoria corrispondente non fu calcolata perché non necessaria.

3. Fu quindi cercato di procedere alla costruzione effettiva delle 29 traiettorie corrispondenti ai dati precedenti.

Le differenze $\psi - \chi$ sono evidentemente i valori assoluti degli angoli di proiezione, quindi le traiettorie da costruirsi corrispondono ai dati seguenti:

TABELLA III.

Quota m.	Angolo di proiezione $\omega = \psi - \chi$					
2500	78°.35′ Traiettoria 1_a	67° 2_a	55°.5′ 3_a	42°.40′ 4_a	28°.35′ 5_a	—
2000	78°.55′ Traiettoria 1_b	67°.40′ 2_b	56°.30′ 3_b	44°.35′ 4_b	31°.45′ 5_b	16°.35′ 6_a
1500	79°.15′ Traiettoria 1_c	68°.25′ 2_c	57°.25′ 3_c	46°.15′ 4_c	34°.25′ 5_c	21°.5′ 6_c
1000	79°.30′ Traiettoria 1_d	69°.15′ 2_d	58°.25′ 3_d	47°.40′ 4_d	36°.35′ 5_d	24°.45′ 6_d
500	79°.45′ Traiettoria 1_e	69°.30′ 2_e	59°.20′ 3_e	48°.55′ 4_e	38°.25′ 5_e	27°.40′ 6_e

4. Tenendo conto delle varie densità dell'aria fra le quote zero e 2500 sul livello del mare (secondo la Tabella IV del corso di balistica esterna del colonnello BIANCHI) [7], dei valori delle costanti i e C e degli angoli ψ e χ, fu riconosciuto che il parametro α varia entro limiti compresi fra 0,5 e 1,5.

Fu quindi costruito un *Abaco* rappresentante le curve

$$\Phi = \Phi(\alpha, u)$$

valendosi dei valori di F (u) ricavati dalla tabella VI del sopra citato corso. In ciascuna di queste curve il parametro α si suppone costante, e si passa

(7) Ing. GIOVANNI BIANCHI, *Corso teorico-pratico di balistica esterna*, Torino 1910, tavole numeriche, pag. 7.

dall'una curva alla successiva aumentando α di 0,05. Le 21 curve costruite corrispondono ai valori α:

TABELLA IV

$A_1 = 0,50$	$A_{12} = 1,05$
$A_2 = 0,55$	$A_{13} = 1,10$
$A_3 = 0,60$	$A_{14} = 1,15$
$A_4 = 0,65$	$A_{15} = 1,20$
$A_5 = 0,70$	$A_{16} = 1,25$
$A_6 = 0,75$	$A_{17} = 1,30$
$A_7 = 0,80$	$A_{18} = 1,35$
$A_8 = 0,85$	$A_{19} = 1,40$
$A_9 = 0,90$	$A_{20} = 1,45$
$A_{10} = 0,95$	$A_{21} = 1,50$
$A_{11} = 1,00$	

Le ascisse delle curve sono i valori u, le ordinate sono i valori Φ.

La u si ammise variabile fra un valore massimo di 350 comune a tutte le curve (che corrisponde all'estremo a sinistra) a un valore minimo diverso per ciascuna curva (che corrisponde all'estremo a destra), giacché a seconda della quota e dell'angolo di proiezione un calcolo preventivo approssimato permise di riconoscere *a priori* fino a qual punto sarebbe stato necessario prolungare ciascuna delle curve per l'uso che doveva farsene.

La tavola 1ª rappresenta il detto Abaco.

5. Un secondo Abaco fu costruito eseguendo le integrazioni grafiche delle curve precedenti in modo da ottenere le curve aventi per equazioni

$$G = \int_{345}^{u} \Phi(\alpha, u)\, du .$$

Si ottennero quindi 21 curve in ciascuna delle quali il parametro α è costante, mentre esso varia da curva a curva di 0,05, in modo che α prende successivamente i valori $A_1, A_2, A_3, \ldots$ indicati precedentemente nella Tabella IV.

Le ascisse delle curve sono i valori u, le ordinate sono i valori G.

Le u sono variabili fra il massimo comune di 345 (estremo a sinistra) ed un minimo variabile da curva a curva (estremo a destra) che il calcolo preliminare di cui facemmo cenno ci permise di riconoscere necessario per l'impiego pratico dell'Abaco.

Questo Abaco è riprodotto nella tavola 2ª.

Le curve sono indicate con i numeri progressivi $1, \cdots, 21$, la prima corrispondendo al valore 0,5 di α e l'ultima al valore 1,50.

CAPITOLO IV.

Costruzione delle traiettorie.

1. Premesso quanto è sopra, venne proceduto alla costruzione effettiva delle 29 traiettorie corrispondenti alle diverse quote dell'origine comprese fra 500 m. e 2500 m. i punti di arrivo essendo al livello del mare, mentre gli angoli ψ e χ sono quelli indicati nella Tabella II.

A tal fine per ciascuna traiettoria si cominciò dal computo delle relazioni fra z e u desunte dalla formula (I).

Se fosse stato possibile supporre α costante (densità dell'aria costante) sarebbe bastato interpolare fra le curve dell'Abaco II quelle che corrispondono ai valori stessi di α relativi alle varie traiettorie, ma α è variabile in quanto è variabile il fattore δ_z (densità dell'aria) nella formula (8).

2. Venne quindi impiegato l'artifizio seguente.

Fissati i valori di ψ e χ desunti dalla Tabella II, si variò δ_z per variazioni di altitudini decrescenti di 100 in 100 metri secondo la tavola IV dell'opera citata BIANCHI e si ebbero i successivi valori $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ di α, desunti dalla formula (8), i quali risultarono sempre crescenti e compresi fra i limiti 0,5 e 1,5. Quindi si aggrupparono tali valori attorno a quelli $A_1, A_2, A_3, \cdots$ della Tabella IV, in modo che attorno ad ognuno di questo ultimi risultassero aggruppati quelli dei valori $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots$ i quali ne differissero o in eccesso o in difetto non più di 0,025.

Supponiamo che in tal modo risultassero gli aggruppamenti seguenti:

$$\left|\begin{array}{c|c|c|c|c} A_p & A_{p+1} & A_{p+2} & & A_g \\ \alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_{q-1} & \alpha_q, \alpha_{q+1}, \cdots, \alpha_{r-1} & \alpha_r, \alpha_{r+1}, \cdots, \alpha_{s-1} & ,\cdots, & \alpha_v, \cdots, \alpha_n \end{array}\right| .$$

Si sostituì allora approssimativamente ai valori $\alpha_1, \cdots, \alpha_{q-1}$ il valore A_p, ai valori $\alpha_q, \cdots, \alpha_{r-1}$ il valore A_{p+1} e così di seguito in modo che mentre z variava fra zero e una quota intermedia z_1 compresa fra $100(q-1)$ metri e $100q$ metri il valore di α si assumeva eguale ad A_p, mentre z variava fra z_1 e una quota z_2 compresa fra $100(r-1)$ metri e $100r$ metri, α si assumeva eguale ad A_{p+1}, e così di seguito [8]; quindi, per ottenere la relazione richiesta fra z e u, ci si valse della formula [vedi formula (I)]

$$\frac{z}{\cos^2 \chi} = -\int_{v_0}^{u} \Phi(A_p, u)\, du$$

per z compreso tra zero e z_1.

Tale relazione si otteneva evidentemente percorrendo la curva p dell'Abaco II. Supponiamo che in tal modo si avesse per $z = z_1$, $u = u_1$.

Allora, per ottenere la relazione fra z e u per z compreso fra z_1 e z_2, si adoperava la formula [v. formula (I)]

$$\frac{z}{\cos^2 \chi} = -\left\{ \int_{v_0}^{u_1} \Phi(A_p, u)\, du + \int_{u_1}^{u} \Phi(A_{p+1}, u)\, du \right\}.$$

ossia

$$\frac{z}{\cos^2 \chi} = -\left\{ \int_{v_0}^{u} \Phi(A_{p+1}, u)\, du + \int_{v_0}^{u_1} \Phi(A_p, u)\, du - \int_{v_0}^{u_1} \Phi(A_{p+1}, u)\, du \right\}.$$

Ora

$$\int_{v_0}^{u_1} \Phi(A_p, u)\, du - \int_{v_0}^{u_1} \Phi(A_{p+1}, u)\, du = h_1 \text{ [9]}$$

è il salto di ordinata nel passaggio dalla curva p alla curva $p+1$ corrispondente all'ascissa u_1, quindi

$$\frac{z}{\cos^2 \chi} = -h_1 - \int_{v_0}^{u} \Phi(A_{p+1}, u)\, du .$$

D'altra parte il valore $\int_{v_0}^{u} \Phi(A_{p+1}, u)\, du$ si desume percorrendo la curva $p+1$, perciò basta introdurre la correzione costante h_1 per avere la relazione fra z e u mentre z varia fra z_1 e z_2. Così si procedeva di seguito percorrendo successivamente, nella maniera indicata, i diversi tratti delle

(8) La quota intermedia z_1 era presa approssimativamente eguale al valore di z corrispondente al valore $A_p + 0{,}025$ per α; la quota z_2 approssimativamente corrispondente al valore $A_{p+1} + 0{,}025$ per α e così di seguito. Ecco come, dopo vari tentativi, la sig.$^{\text{na}}$ FREDA calcolò le quote intermedie $z_1, z_2, \cdots$

$$z_1 = 100\,(q-1) + 100\,\frac{(A_p + 0{,}025) - \alpha_{q-1}}{\alpha_q - \alpha_{q-1}},$$

$$z_2 = 100\,(r-1) + 100\,\frac{(A_{p+1} + 0{,}025) - \alpha_{r-1}}{\alpha_r - \alpha_{r-1}}, \cdots.$$

(9) h_1 e i salti analoghi sono sempre negativi.

curve $p+2$, $p+3$, $\cdots$, dell'Abaco, introducendo man mano in ogni tratto le correzioni costanti analoghe alla precedente (10).

(10) Diamo qui un esempio del modo tenuto nel fare questo calcolo:

Quota 1500 m.

$$\text{Traiettoria } 6_c \begin{cases} \psi = 27^\circ.37'.20'' \\ \chi = 6\ .32\ .20 \end{cases}$$

z	$\alpha = \dfrac{\delta_z\, i}{C} \dfrac{\cos\chi}{\operatorname{sen}\psi}$	A	$\dfrac{z}{\cos^2\chi}$	Salti delle ordinate nel passaggio da una curva alla successiva nell'Abaco II	$\dfrac{z}{\cos^2\chi}$ corretto tenendo conto dei salti	u
0	$\alpha_0 = 1{,}2767$	$A_{17} = 1{,}30$	0			345 (letti su la curva 17)
100	$\alpha_1 = 1{,}2899$		101,2			336,18
200	$\alpha_2 = 1{,}3032$		202,8			328,57
300	$\alpha_3 = 1{,}3165$		304,0			321,75
			$\dfrac{z_1}{\cos^2\chi} = 368{,}0$	passaggio dalla curva 17 alla curva 18 $h_1 = -16{,}8$		
					$\dfrac{z}{\cos^2\chi} + h_1$	
400	$\alpha_4 = 1{,}3299$	$A_{18} = 1{,}35$	405,2		388,4	315,71 (letti su la curva 18)
500	$\alpha_5 = 1{,}3432$		506,4		489,6	310,20
600	$\alpha_6 = 1{,}3561$		608,0		591,2	305,38
700	$\alpha_7 = 1{,}3688$		709,2		692,4	301,24
			$\dfrac{z_2}{\cos^2\chi} = 759{,}6$	passaggio dalla curva 18 alla curva 19 $h_2 = -37{,}6$ $h_1 + h_2 = -54{,}4$	742,8	
					$\dfrac{z}{\cos^2\chi} + h_1 + h_2$	
800	$\alpha_8 = 1{,}3812$	$A_{19} = 1{,}40$	810,4		756,0	297,43 (letti su la curva 19)
900	$\alpha_9 = 1{,}3934$		912,0		857,6	293,95
1000	$\alpha_{10} = 1{,}4052$		1013,2		958,8	290,88
1100	$\alpha_{11} = 1{,}4165$		1114,4		1060,0	288,06
			$\dfrac{z_3}{\cos^2\chi} = 1195{,}1$	passaggio dalla curva 19 alla curva 20 $h_3 = -64{,}0$ $h_1 + h_2 + h_3 = -118{,}4$	1140,8	
					$\dfrac{z}{\cos^2\chi} + h_1 + h_2 + h_3$	
1200	$\alpha_{12} = 1{,}4276$	$A_{20} = 1{,}45$	1215,6		1097,2	285,48 (letti su la curva 20)
1300	$\alpha_{13} = 1{,}4382$		1317,2		1198,8	282,93
1400	$\alpha_{14} = 1{,}4484$		1418,4		1300,0	280,56
1500	$\alpha_{15} = 1{,}4581$		1519,6		1401,2	278,37

3. Bisognava però esser sicuri che l'errore che si commetteva fosse compreso entro i limiti tali che l'errore finale nelle tavole di tiro risultasse inferiore a un millesimo.

A tal fine fu cercato l'errore che non si doveva oltrepassare nel computo di u e, interpolando fra le curve dell'Abaco II delle curve intermedie, e ripetendo il calcolo nelle condizioni più sfavorevoli, si giunse ad essere assicurati che l'errore che si commetteva col metodo impiegato era inferiore al limite richiesto.

4. Nelle tabelle seguenti indichiamo per le diverse traiettorie i valori così ottenuti per u e z.

TABELLA V — A)

Quota 2500 m.

z	*u*				
	Traiettoria 5_a $\psi = 36°.57'.20''$ $\chi = 8.22.20$	4_a $\psi = 48°.\ 2'.40''$ $\chi = 5.22.40$	3_a $\psi = 58°.41'20''$ $\chi = 3.36.20$	2_a $\psi = 69°.12'$ $\chi = 2.12$	1_a $\psi = 79°.37'.20''$ $\chi = 1.\ 2.20$
0	345	345	345	345	345
100	339,74	341,23	341,95	342,40	342,87
200	334,74	337,63	339,07	339,95	340,83
300	330,30	334,26	336,40	337,66	338,87
400	326,25	331,12	333,90	335,50	336,97
500	322,35	328,18	331,58	333,48	335,10
600	318,67	325,44	329,38	331,56	333,23
700	315,33	322,80	327,18	329,74	331,18
800	312,33	320,20	324,98	327,94	329,62
900	309,62	317,84	322,95	326,18	327,95
1000	307,00	315,58	320,98	324,44	326,38
1100	304,52	313,49	319,17	322,74	324,88
1200	302,26	311,58	317,48	321,14	323,40
1300	300,23	309,74	315,90	319,64	321,96
1400	298,35	307,92	314,32	318,25	320,56
1500	296,53	306,27	312,74	316,86	319,18
1600	294,75	304,68	311,23	315,52	317,83
1700	293,15	303,24	309,82	314,18	316,56
1800	291,68	301,90	308,52	312,87	315,36
1900	290,24	300,58	307,30	311,65	314,25
2000	288,85	299,35	306,20	310,50	313,15
2100	287,59	298,17	305,10	309,42	312,06
2200	286,33	297,03	304,00	308,43	311,02
2300	285,15	295,95	302,93	307,48	310,02
2400	284,06	294,92	301,87	306,53	309,05
2500	283,02	294,00	300,90	305,58	308,09

TABELLA V — B)

Quota 2000 m.

z	u					
	Traiettoria 6^b $\psi=26°.25'.20''$ $\chi=9.50.20$	5_b $\psi=37°.48'$ $\chi=6.3$	4_b $\psi=48°.33'.20''$ $\chi=3.58.20$	3_b $\psi=59°.4'$ $\chi=2.34$	2_b $\psi=69°.22'.40''$ $\chi=1.42.40$	1_b $\psi=79°.42'.40''$ $\chi=0.47.40$
0	345	345	345	345	345	345
100	336,43	339,60	340,98	341,95	342,39	342,49
200	329,02	334,34	337,33	338,98	339,95	340,05
300	322,01	329,63	333,77	336,12	337,55	337,76
400	315,95	325,31	330,35	333,20	335,16	335,57
500	310,62	321,37	327,17	330,53	332,77	333,48
600	305,87	317,74	324,17	328,02	330,53	331,57
700	301,59	314,19	321,44	325,70	328,37	329,74
800	297,84	310,96	318,90	323,55	326,42	327,94
900	294,50	308,13	316,43	321,45	324,57	326,15
1000	291,30	305,57	314,05	319,40	322,80	324,36
1100	288,40	303,13	311,84	317,42	321,07	322,65
1200	285,80	300,83	309,77	315,52	319,35	321,06
1300	283,30	298,70	307,87	313,78	317,67	319,56
1400	280,95	296,75	306,15	312,15	316,09	318,18
1500	278,69	294,97	304,49	310,65	314,61	316,88
1600	276,59	293,30	302,90	309,22	313,25	315,60
1700	274,55	291,70	301,40	307,83	311,97	314,34
1800	272,60	290,15	299,96	306,47	310,81	313,08
1900	270,70	288,68	298,65	305,17	309,66	311,82
2000	268,92	287,34	297,45	303,96	308,52	310,66

TABELLA V — C)

Quota 1500 m.

z	u					
	Traiettoria 6_c $\psi=27°.37'.20''$ $\chi=6.32.20$	5_c $\psi=38°.30'.40''$ $\chi=4.5.40$	4_c $\psi=49°$ $\chi=2.45$	3_c $\psi=59°.18'.40''$ $\chi=1.53.40$	2_c $\psi=69°.34'.40''$ $\chi=1.9.40$	1_c $\psi=79°.48'$ $\chi=.33$
0	345	345	345	345	345	345
100	336,18	339,30	340,61	341,45	341,93	342,38
200	328,57	334,10	336,58	338,16	339,09	339,95
300	321,75	329,07	332,84	335,11	336,43	337,54
400	315,71	324,50	329,43	332,20	333,95	335,14
500	310,20	320,33	326,10	329,41	331,57	332,76
600	305,38	316,54	322,83	326,70	329,27	330,52
700	301,24	313,10	319,83	324,07	327,00	328,36
800	297,43	309,80	317,13	321,65	324,75	326,42
900	293,95	306,76	314,65	319,44	322,67	324,55
1000	290,88	304,08	312,37	317,40	320,76	322,84
1100	288,06	301,64	310,17	315,50	318,95	321,15
1200	285,48	299,45	308,02	313,67	317,30	319,53
1300	282,93	297,35	306,07	311,87	315,74	317,93
1400	280,56	295,38	304,25	310,13	314,18	316,33
1500	278,37	293,52	302,58	308,50	312,72	314,83

TABELLA V — D)

Quota 1000 m.

z	u					
	Traiettoria 6_d $\psi=28°.36'$ $\chi=3.51$	5_d $\psi=39°.5'.20''$ $\chi=2.30.20$	4_d $\psi=49°.22'.40''$ $\chi=1.42.40$	3_d $\psi=59°.34'.40''$ $\chi=1.9.40$	2_d $\psi=69°.48'$ $\chi=33$	1_d $\psi=79°.52'$ $\chi=22$
0	345	345	345	345	345	345
100	336,27	338,85	340,17	340,97	341,78	341,93
200	327,97	333,32	335,75	337,37	338,61	339,09
300	321,10	328,35	331,72	334,02	335,58	336,44
400	314,93	323,60	327,98	330,93	332,74	333,94
500	309,57	319,15	324,61	328,04	330,09	331,63
600	305,12	315,17	321,40	325,33	327,63	329,37
700	300,79	311,57	318,40	322,72	325,34	327,13
800	296,98	308,43	315,47	320,21	323,23	324,96
900	293,60	305,55	312,83	317,85	321,20	322,87
1000	290,54	302,95	310,42	315,63	319,33	320,94

TABELLA V — E)

Quota 500 m.

z	u					
	Traiettoria 6_e $\psi=29^{\circ}.22'.40''$ $\chi=1.42.40$	5_e $\psi=39^{\circ}.34'.40''$ $\chi=1.9.40$	4_e $\psi=49^{\circ}.42'.40''$ $\chi=47.40$	3_e $\psi=59^{\circ}.49'.20''$ $\chi=29.20$	2_e $\psi=69^{\circ}.52'$ $\chi=22$	1_e $\psi=79^{\circ}.56'$ $\chi=11$
0	345	345	345	345	345	345
100	335,88	338,45	340,15	340,97	341,45	341,90
200	327,98	332,56	335,74	337,30	338,08	338,81
300	321,10	327,34	331,39	333,83	334,96	335,80
400	314,96	322,45	327,36	330,42	331,93	332,93
500	309,37	317,97	323,68	327,22	329,19	330,28

5. Ottenute queste relazioni vennero calcolate le Ω mediante la formula (II) e le quadrature vennero eseguite con metodo aritmetico per trapezi, le cui altezze rispetto a z fossero di 100 m. Di seguito fu calcolato, con una nuova analoga quadratura, k (formula (III)).

In ambedue queste operazioni venne calcolato l'errore che fu trovato inferiore al limite prescelto.

Ottenuto k si ebbero poi, mediante le formule (IV) e (V) della Tabella I, h, X, Y ed in particolare venne sempre verificato che i valori iniziali di h per ogni traiettoria erano positivi ed i valori finali erano negativi (vedi Cap. III, § 2).

Seguono le tabelle dei valori di h, X, Y corrispondenti alle z di ognuna delle 29 traiettorie.

TABELLA VI — A)

Quota 2500 m.

Traiettoria 1_a $\begin{cases} \psi = 79^{\circ}.37'.20'' \\ \chi = 1\ .\ 2\ .20 \end{cases}$

z	h	X	Y
0	0	0	0
100	+ 1,76	20,04	99,68
200	3,35	39,92	199,40
300	4,77	59,64	299,14
400	6,02	79,18	398,91
500	7,10	98,56	498,72
600	8,00	117,76	598,55
700	8,74	136,80	698,42
800	9,30	155,67	798,33
900	9,68	174,36	898,26
1000	9,91	192,90	998,22
1100	9,95	211,26	1098,21
1200	9,82	229,45	1198,23
1300	9,52	247,47	1298,29
1400	9,05	265,32	1398,37
1500	8,40	283,00	1498,49
1600	7,59	300,51	1598,63
1700	6,60	317,85	1698,81
1800	5,44	335,03	1799,02
1900	4,11	352,03	1899,26
2000	2,60	368,87	1999,53
2100	+ 0,93	385,54	2099,83
2200	— 0,91	402,04	2200,16
2300	— 2,92	418,38	2300,52
2400	— 5,10	434,55	2400,92
2500	— 7,45	450,55	2501,35

Traiettoria 2_a $\begin{cases} \psi = 69^{\circ}.12' \\ \chi = 2\ .12 \end{cases}$

z	h	X	Y
0	0	0	0
100	+ 3,93	41,66	98,61
200	7,49	82,96	197,34
300	10,67	123,92	296,21
400	13,48	164,54	395,21
500	15,91	204,78	494,35
600	17,96	244,69	593,62
700	19,64	284,23	693,03
800	20,93	323,42	792,57
900	21,84	362,26	892,24
1000	22,38	400,74	992,05
1100	22,53	438,86	1092,00
1200	22,29	476,62	1192,08
1300	21,68	514,03	1292,30
1400	20,68	551,08	1392,66
1500	19,30	587,77	1493,15
1600	17,54	624,11	1593,77
1700	15,39	660,09	1694,53
1800	12,87	695,71	1795,43
1900	9,97	730,96	1896,46
2000	6,68	765,89	1997,63
2100	+ 3,02	800,46	2098,93
2200	— 1,02	834,65	2200,36
2300	— 5,43	868,51	2301,93
2400	— 10,22	902,01	2403,63
2500	— 15,38	935,17	2505,46

TABELLA VI — A)

Quota 2500 m.

Traiettoria 3_a $\begin{cases} \psi = 58^{\circ}.41'.20'' \\ \chi = 3.36.20'' \end{cases}$

z	h	X	Y
0	0	0	0
100	+ 7,05	66,85	96,34
200	13,40	133,14	193,04
300	19,17	198,86	290,04
400	24,23	264,02	387,41
500	28,62	328,61	485,13
600	32,24	392,61	583,19
700	35,39	456,05	681,61
800	37,75	518,90	780,38
900	39,43	581,16	879,51
1000	40,43	642,85	978,99
1100	40,74	703,94	1078,83
1200	40,37	764,45	1179,02
1300	39,31	824,38	1279,57
1400	37,55	883,71	1380,49
1500	35,12	942,46	1481,75
1600	31,99	1000,6	1583,38
1700	28,17	1058,2	1685,36
1800	23,67	1115,2	1787,70
1900	18,49	1171,6	1890,39
2000	12,61	1227,4	1993,45
2100	+ 6,05	1282,6	2096,86
2200	— 1,18	1337,3	2200,61
2300	— 9,09	1391,3	2304,72
2400	— 17,67	1444,8	2409,18
2500	— 26,94	1497,7	2514,00

Traiettoria 4_a $\begin{cases} \psi = 48^{\circ}.\ 2'.40'' \\ \chi = 5.22.40 \end{cases}$

z	h	X	Y
0	0	0	0
100	+ 12,10	98,90	91,91
200	23,07	196,96	184,75
300	32,91	294,18	278,00
400	41,59	390,54	372,19
500	49,11	486,03	467,17
600	55,46	580,65	562,92
700	60,62	674,39	659,47
800	64,60	767,25	756,81
900	67,37	859,22	854,96
1000	68,95	950,29	953,90
1100	69,31	1040,5	1053,66
1200	68,46	1129,7	1154,23
1300	66,40	1218,1	1255,61
1400	63,11	1305,6	1357,81
1500	58,61	1392,1	1460,82
1600	52,88	1477,8	1564,65
1700	45,94	1562,5	1669,29
1800	37,78	1646,3	1774,74
1900	28,40	1729,2	1881,01
2000	17,81	1811,3	1988,09
2100	+ 6,00	1892,4	2095,99
2200	— 7,00	1972,6	2204,68
2300	— 21,21	2052,0	2314,18
2400	— 36,61	2130,4	2424,48
2500	— 53,21	2208,0	2535,57

TABELLA VI — A)

Quota 2500 m.

Traiettoria 5_a $\begin{cases} \psi = 36^\circ.57'.20'' \\ \chi = \ \ 8\ .22\ .20 \end{cases}$

z	h	X	Y
0	0	0	0
100	+ 23,44	147,01	81,27
200	44,76	292,75	164,23
300	63,93	437,19	248,91
400	80,91	580,31	335,34
500	95,65	722,10	423,57
600	108,14	862,52	513,59
700	118,33	1001,6	605,44
800	126,21	1139,2	699,14
900	131,75	1275,5	794,72
1000	134,94	1410,3	892,17
1100	135,76	1543,7	991,51
1200	134,19	1675,7	1092,77
1300	130,23	1806,2	1195,93
1400	123,88	1935,3	1301,01
1500	115,12	2063,0	1408,01
1600	103,97	2189,2	1516,92
1700	90,39	2314,0	1627,77
1800	74,43	2437,3	1740,52
1900	56,06	2559,2	1855,20
2000	35,30	2679,6	1971,79
2100	+ 12,14	2798,6	2090,30
2200	— 13,38	2916,2	2210,69
2300	— 41,30	3032,3	2333,00
2400	— 71,57	3147,0	2457,19
2500	— 104,22	3260,3	2583,28

TABELLA VI — B)

Quota 2000 m.

Traiettoria 1_b $\begin{cases} \psi = 79^\circ.42'.40'' \\ \chi = \quad 47.40 \end{cases}$

z	h	X	Y
0	0	0	0
100	+ 1,33	19,46	99,76
200	2,49	38,76	199,55
300	3,49	57,89	299,38
400	4,32	76,86	399,23
500	4,98	95,67	499,11
600	5,48	114,31	599,02
700	5,80	132,79	698,96
800	5,96	151,09	798,94
900	5,95	169,24	898,94
1000	5,77	187,21	998,97
1100	5,43	205,03	1099,03
1200	4,91	222,67	1199,12
1300	4,22	240,15	1299,25
1400	3,36	257,46	1399,40
1500	2,34	274,60	1499,58
1600	+ 1,14	291,58	1599,80
1700	− 0,22	308,39	1700,04
1800	− 1,76	325,03	1800,31
1900	− 3,46	341,51	1900,62
2000	− 5,33	357,82	2000,95

Traiettoria 2_b $\begin{cases} \psi = 69^\circ.22'.40'' \\ \chi = \quad 1.42.40 \end{cases}$

z	h	X	Y
0	0	0	0
100	+ 3,01	40,45	98,93
200	5,66	80,57	198,01
300	7,95	120,34	297,20
400	9,87	159,77	396,52
500	11,43	198,87	495,97
600	12,62	237,61	595,56
700	13,44	276,01	695,27
800	13,89	314,07	795,11
900	13,96	351,77	895,08
1000	13,67	389,13	995,19
1100	13,00	426,13	1095,42
1200	11,95	462,78	1195,79
1300	10,53	499,09	1296,29
1400	8,73	535,04	1396,93
1500	6,56	570,64	1497,69
1600	4,01	605,89	1598,59
1700	+ 1,09	640,79	1699,62
1800	− 2,20	675,34	1800,77
1900	− 5,87	709,54	1902,07
2000	− 9,91	743,40	2003,49

TABELLA VI — B)

Quota 2000 m.

Traiettoria 3_b $\begin{cases} \psi = 59^\circ.\ 4' \\ \chi = \ \ 2\ .34 \end{cases}$

z	h	X	Y
0	0	0	0
100	+ 4,91	64,14	97,48
200	9,20	127,76	195,27
300	12,86	190,82	293,39
400	15,88	253,34	391,84
500	18,26	315,31	490,61
600	20,00	376,73	589,72
700	21,08	437,58	689,16
800	21,51	497,88	788,94
900	21,28	557,61	889,06
1000	20,40	616,78	989,51
1100	18,85	675,38	1090,31
1200	16,65	733,41	1191,44
1300	13,78	790,88	1292,92
1400	10,24	847,77	1394,74
1500	6,04	904,08	1496,90
1600	+ 1,17	959,85	1599,40
1700	— 4,36	1014,0	1702,24
1800	— 10,55	1069,8	1805,42
1900	— 17,41	1123,7	1908,95
2000	— 24,93	1177,1	2012,81

Traiettoria 4_b $\begin{cases} \psi = 48^\circ.33'.20'' \\ \chi = \ \ 3\ .58\ .20 \end{cases}$

z	h	X	Y
0	0	0	0
100	+ 8,73	94,85	94,22
200	16,39	188,89	189,15
300	22,98	282,13	284,79
400	28,47	374,55	381,16
500	32,85	466,13	478,26
600	36,11	556,88	576,10
700	38,24	646,78	674,69
800	39,24	735,84	774,03
900	39,09	824,03	874,13
1000	37,79	911,35	974,99
1100	35,33	997,81	1076,62
1200	31,71	1083,40	1179,01
1300	26,93	1168,12	1282,18
1400	20,98	1251,96	1386,11
1500	13,86	1334,93	1490,83
1600	+ 5,57	1417,01	1596,31
1700	— 3,89	1498,23	1702,57
1800	— 14,52	1578,56	1809,61
1900	— 26,31	1658,03	1917,41
2000	— 39,27	1736,61	2025,99

TABELLA VI — B)

Quota 2000 m.

Traiettoria 5_b $\begin{cases} \psi = 37^{\circ}.48' \\ \chi = 6\ .\ 3 \end{cases}$

z	h	X	Y
0	0	0	0
100	+ 16,33	138,93	87,10
200	30,73	276,67	175,72
300	43,14	413,20	265,91
400	53,53	548,49	357,70
500	61,87	682,52	451,11
600	68,12	815,27	546,17
700	72,26	946,72	642,90
800	74,25	1076,86	741,33
900	74,08	1205,67	841,47
1000	71,73	1333,15	943,32
1100	67,18	1459,28	1046,92
1200	60,43	1584,06	1152,25
1300	51,45	1707,48	1259,35
1400	40,62	1829,54	1368,19
1500	26,84	1950,23	1478,79
1600	+ 11,18	2069,56	1591,17
1700	— 6,71	2187,51	1705,30
1800	— 26,81	2304,11	1821,18
1900	— 49,14	2419,34	1938,83
2000	— 73,71	2533,20	2058,24

Traiettoria 6_b $\begin{cases} \psi = 26^{\circ}.25'.20'' \\ \chi = 9\ .50\ .20 \end{cases}$

z	h	X	Y
0	0	0	0
100	+ 36,85	217,65	67,00
200	69,35	433,37	137,89
300	97,37	647,09	212,80
400	120,72	858,73	291,89
500	139,30	1068,25	375,25
600	152,98	1275,59	463,00
700	161,66	1480,70	555,23
800	165,26	1683,56	652,00
900	163,71	1884,12	753,39
1000	156,93	2082,36	859,46
1100	144,91	2278,25	970,23
1200	127,56	2471,79	1085,77
1300	104,86	2662,94	1206,09
1400	76,81	2851,71	1331,21
1500	43,36	3038,08	1461,17
1600	+ 4,50	3222,04	1595,97
1700	— 39,76	3403,60	1735,61
1800	— 89,46	3582,73	1880,11
1900	—144,59	3759,46	2029,49
2000	—205,16	3933,75	2183,73

TABELLA VI — C)

Quota 1500 m.

Traiettoria 1_e $\begin{cases} \psi = 79°.48' \\ \chi = \quad 33 \end{cases}$

z	h	X	Y
0	0	0	0
100	+ 0,90	18,87	99,84
200	1,64	37,59	199,71
300	2,21	56,15	299,61
400	2,63	74,55	399,53
500	2,88	92,79	499,49
600	2,97	110,87	599,47
700	2,90	128,79	699,49
800	2,66	146,88	799,53
900	2,26	164,14	899,60
1000	1,69	181,57	999,70
1100	0,95	198,84	1099,83
1200	+ 0,05	215,94	1199,99
1300	— 1,02	233,42	1300,18
1400	— 2,25	249,66	1400,40
1500	— 3,65	266,28	1500,65

Traiettoria 2_e $\begin{cases} \psi = 69°.34'.40'' \\ \chi = \ 1 .\ 9 .40 \end{cases}$

z	h	X	Y
0	0	0	0
100	+ 1,99	39,10	99,31
200	3,63	77,87	198,73
300	4,92	116,31	298,28
400	5,86	154,42	397,96
500	6,44	192,20	497,75
600	6,67	229,64	597,67
700	6,53	266,75	697,72
800	6,03	303,51	797,90
900	5,17	339,94	898,20
1000	3,95	376,03	998,62
1100	2,36	411,77	1099,18
1200	+ 0,40	447,17	1199,86
1300	— 1,92	482,23	1300,67
1400	— 4,61	516,94	1401,61
1500	— 7,66	551,31	1502,67

TABELLA VI — C)

Quota 1500 m.

Traiettoria 3_e $\begin{cases} \psi = 59°.18'.40'' \\ \chi = 1.53.40 \end{cases}$

z	h	X	Y
0	0	0	0
100	+ 3,55	62,40	98,19
200	6,49	124,27	196,69
300	8,82	185,62	295,50
400	10,52	246,43	394,63
500	11,60	306,70	494,08
600	12,05	366,44	593,85
700	11,87	425,62	693,94
800	11,04	484,26	794,37
900	9,57	542,34	895,12
1000	7,46	599,87	996,19
1100	4,69	656,83	1097,61
1200	+ 1,28	713,24	1199,35
1300	— 2,78	769,10	1301,42
1400	— 7,50	824,38	1403,83
1500	— 12,87	879,11	1506,57

Traiettoria 4_e $\begin{cases} \psi = 49° \\ \chi = 2.45 \end{cases}$

z	h	X	Y
0	0	0	0
100	+ 5,86	91,35	96,16
200	10,70	181,93	192,98
300	14,50	272,35	290,49
400	17,26	360,73	388,68
500	18,95	448,94	487,57
600	19,57	536,33	587,16
700	19,10	622,91	687,47
800	17,53	708,65	788,50
900	14,86	793,57	890,25
1000	11,08	877,64	992,73
1100	6,18	960,87	1095,95
1200	+ 0,17	1043,3	1200,11
1300	— 6,96	1124,8	1304,57
1400	— 15,23	1205,5	1409,99
1500	— 24,62	1285,3	1516,15

Tabella VI — C)

Quota 1500 m.

Traiettoria 5_c $\begin{cases} \psi = 38^\circ.30'.40'' \\ \chi = 4.5.40 \end{cases}$

z	h	X	Y
0	0	0	0
100	+ 10,60	132,27	91,71
200	19,40	263,41	184,82
300	26,34	393,40	279,39
400	31,40	522,22	375,43
500	34,53	649,83	472,98
600	35,70	776,23	572,07
700	34,88	901,39	672,71
800	32,06	1025,3	774,91
900	27,20	1147,9	878,72
1000	20,30	1269,3	984,12
1100	11,34	1389,4	1091,13
1200	+ 0,29	1508,2	1199,77
1300	— 12,84	1625,7	1310,05
1400	— 28,05	1741,9	1421,95
1500	— 45,36	1856,8	1535,49

Traiettoria 6_c $\begin{cases} \psi = 27^\circ.37'.20'' \\ \chi = 6.32.20 \end{cases}$

z	h	X	Y
0	0	0	0
100	+ 22,86	201,71	79,75
200	41,91	401,63	162,87
300	57,03	599,75	249,47
400	68,07	795,97	339,69
500	74,91	990,25	433,63
600	77,47	1182,5	531,36
700	75,63	1372,8	632,99
800	69,32	1561,0	738,58
900	58,48	1747,0	848,18
1000	43,07	1931,0	961,84
1100	+ 23,03	2112,8	1079,60
1200	— 1,67	2292,4	1201,48
1300	— 31,07	2469,9	1327,53
1400	— 65,20	2645,2	1457,77
1500	— 104,05	2818,3	1592,19

TABELLA VI — D)

Quota 1000 m.

Traiettoria 1_d $\begin{cases} \psi = 79°.52' \\ \chi = \quad 22 \end{cases}$

z	h	X	Y
0	0	0	0
100	+ 0,57	18,44	99,90
200	0,99	36,72	199,83
300	1,25	54,85	299,78
400	1,35	72,82	399,76
500	1,29	90,63	499,77
600	1,08	108,29	599,81
700	0,70	125,78	699,88
800	+ 0,14	143,12	799,98
900	— 0,57	160,30	900,10
1000	— 1,44	177,31	1000,25

Traiettoria 2_d $\begin{cases} \psi = 69°.48' \\ \chi = \quad 33 \end{cases}$

z	h	X	Y
0	0	0	0
100	+ 0,86	37,60	99,70
200	1,38	74,88	199,52
300	1,56	111,84	299,46
400	1,40	148,49	399,52
500	0,90	184,81	499,69
600	+ 0,06	220,81	599,98
700	— 1,14	256,48	700,39
800	— 2,69	291,82	800,93
900	— 4,59	326,83	901,58
1000	— 6,84	361,51	1002,36

Traiettoria 3_d $\begin{cases} \psi = 59°.34'.40'' \\ \chi = \quad 1 . 9 .40 \end{cases}$

z	h	X	Y
0	0	0	0
100	+ 2,05	60,51	98,96
200	3,52	120,51	198,22
300	4,40	179,99	297,77
400	4,67	238,96	397,64
500	4,33	297,39	497,81
600	3,37	355,30	598,29
700	+ 1,80	412,68	699,09
800	— 0,40	469,52	800,20
900	— 3,23	525,81	901,64
1000	— 6,68	581,57	1003,38

TABELLA VI — D)

Quota 1000 m.

Traiettoria 4_d $\begin{cases} \psi = 49^\circ.22'.40'' \\ \chi = 1.42.40 \end{cases}$

z	h	X	Y
0	0	0	0
100	+ 3,45	88,40	97,75
200	5,92	176,05	196,15
300	7,38	262,94	295,20
400	7,84	349,06	394,90
500	7,26	434,40	495,27
600	5,64	518,94	596,33
700	+ 2,97	602,69	698,07
800	— 0,76	685,63	800,49
900	— 5,57	767,76	903,63
1000	— 11,45	849,06	1007,45

Traiettoria 5_d $\begin{cases} \psi = 39^\circ.\ 5'.20'' \\ \chi = 2.30.20 \end{cases}$

z	h	X	Y
0	0	0	0
100	+ 6,10	126,94	95,27
200	10,48	252,80	191,87
300	13,10	377,56	289,83
400	13,94	501,18	389,18
500	12,95	623,65	489,95
600	10,08	744,94	592,18
700	+ 5,33	865,05	695,86
800	— 1,33	983,94	801,03
900	— 9,93	1101,6	907,71
1000	— 20,49	1218,1	1015,90

Traiettoria 6_d $\begin{cases} \psi = 28^\circ.36' \\ \chi = 3.51 \end{cases}$

z	h	X	Y
0	0	0	0
100	+ 12,37	189,34	89,14
200	21,33	377,03	181,27
300	26,72	563,02	276,54
400	28,40	747,24	375,07
500	26,30	929,65	476,91
600	20,32	1110,2	582,16
700	+ 10,36	1288,8	690,90
800	— 3,63	1465,6	803,19
900	— 21,71	1640,3	919,06
1000	— 43,94	1813,1	1038,58

TABELLA VI — E)

Quota 500 m.

Traiettoria 1_e $\begin{cases} \psi = 79^{\circ}.56' \\ \chi = \quad 11 \end{cases}$

z	*h*	X	Y
0	0	0	0
100	+ 0,25	18,00	99,94
200	0,35	35,85	199,94
300	0,29	53,54	299,95
400	+ 0,08	71,08	399,99
500	— 0,29	88,47	500,05

Traiettoria 2_e $\begin{cases} \psi = 69^{\circ}.52' \\ \chi = \quad 22 \end{cases}$

z	*h*	X	Y
0	0	0	0
100	+ 0,51	37,15	99,82
200	0,70	73,98	199,76
300	0,54	110,50	299,81
400	+ 0,05	146,71	399,98
500	— 0,78	182,59	500,27

Traiettoria 3_e $\begin{cases} \psi = 59^{\circ}.49'.20'' \\ \chi = \quad 29\ .20 \end{cases}$

z	*h*	X	Y
0	0	0	0
100	+ 0,70	58,76	99,65
200	0,83	117,02	199,58
300	+ 0,37	174,78	299,81
400	— 0,66	232,04	400,33
500	— 2,29	288,79	501,15

Traiettoria 4_e $\begin{cases} \psi = 49^{\circ}.42'.40'' \\ \chi = \quad 47\ .40 \end{cases}$

z	*h*	X	Y
0	0	0	0
100	+ 1,35	85,80	99,13
200	1,76	170,88	198,86
300	+ 1,20	255,22	299,22
400	— 0,35	338,81	400,23
500	— 2,89	421,64	501,87

Traiettoria 5_e $\begin{cases} \psi = 39^{\circ}.34'.40'' \\ \chi = \quad 1\ .\ 9\ .40 \end{cases}$

z	*h*	X	Y
0	0	0	0
100	+ 2,37	122,49	98,17
200	3,10	243,93	197,61
300	+ 2,15	364,30	298,34
400	— 0,52	483,58	400,40
500	— 4,94	601,74	503,81

Traiettoria 6_e $\begin{cases} \psi = 29^{\circ}.22'.40'' \\ \chi = \quad 1\ .42\ .40 \end{cases}$

z	*h*	X	Y
0	0	0	0
100	+ 4,53	179,86	96,05
200	5,90	358,16	194,86
300	+ 3,97	534,85	296,54
400	— 1,37	709,86	401,19
500	— 10,22	883,16	508,91

6. Poterono quindi essere tracciate tutte le traiettorie corrispondenti alle varie quote e ai varî angoli ψ e χ.

Nella tavola 3ª si riproducono le traiettorie stesse.

Capitolo V.

Calcolo del tempo.

1. Dalla formula (VI), mediante quadratura aritmetica con trapezî di altezza 100 rispetto a z, furono calcolati i tempi. Si riconobbe che l'errore era inferiore a 6/100 di secondo e quindi i valori sufficientemente esatti.

2. La tabella seguente indica i valori ottenuti.

Tabella VII — A)

Quota 2500 m.

z	t				
	Traiettoria 1ª $\psi=79^{\circ}.37'.20''$ $\chi=1\ .\ 2.20$	2ª $\psi=69^{\circ}.12'$ $\chi=2\ .12$	3ª $\psi=58^{\circ}.41'.20''$ $\chi=3\ .36\ .20$	4ª $\psi=48^{\circ}.\ 2'.40''$ $\chi=50\ .22\ .40$	5ª $\psi=36^{\circ}.57'.20''$ $\chi=8\ .22\ .20$
	sec.	sec.	sec.	sec.	sec.
0	0	0	0	0	0
100	0,30	0,31	0,34	0,39	0,49
200	0,59	0,63	0,69	0,79	0,99
300	0,89	0,94	1,03	1,19	1,50
400	1,19	1,26	1,38	1,60	2,01
500	1,49	1,58	1,74	2,01	2,53
600	1,80	1,90	2,09	2,42	3,05
700	2,11	2,22	2,45	2,84	3,58
800	2,41	2,55	2,81	3,26	4,12
900	2,72	2,88	3,17	3,68	4,66
1000	3,03	3,21	3,53	4,11	5,20
1100	3,35	3,54	3,90	4,54	5,75
1200	3,66	3,87	4,27	4,97	6,31
1300	3,97	4,20	4,64	5,41	6,86
1400	4,29	4,54	5,01	5,84	7,43
1500	4,61	4,88	5,39	6,28	7,99
1600	4,93	5,22	5,76	6,72	8,56
1700	5,25	5,56	6,14	7,17	9,13
1800	5,57	5,90	6,52	7,61	9,71
1900	5,89	6,24	6,90	8,05	10,29
2000	6,22	6,58	7,28	8,50	10,87
2100	6,54	6,93	7,66	8,95	11,45
2200	6,87	7,28	8,05	9,41	12,04
2300	7,20	7,63	8,44	9,86	12,62
2400	7,53	7,97	8,82	10,32	13,21
2500	7,86	8,32	9,21	10,78	12,81

TABELLA VII — B)

Quota 2000 m.

z	t					
	Traiettoria 1_b $\psi=79^\circ.42'.40''$ $\chi=$ 47 .40	2_b $\psi=69^\circ.22.'40''$ $\chi=$ 1 .42 .40	3_b $\psi=59^\circ.4'$ $\chi=$ 2 .34	4_b $\psi=48^\circ.33'.30''$ $\chi=$ 3 .58.20	5_b $\psi=37^\circ.48'$ $\chi=$ 6. 3	6_b $\psi=26^\circ.25'.20''$ $\chi=$ 9 .50 .20
	sec.	sec.	sec.	sec.	sec.	sec.
0	0	0	0	0	0	0
100	0,30	0,31	0,34	0,39	0,48	0,67
200	0,59	0,62	0,68	0,78	0,97	1,36
300	0,89	0,94	1,03	1,18	1,46	2,06
400	1,20	1,26	1,38	1,59	1,96	2,77
500	1,50	1,58	1,73	1,99	2,47	3,50
600	1,81	1,90	2,08	2,40	2,98	4,24
700	2,11	2,22	2,44	2,82	3,50	4,99
800	2,42	2,55	2,80	3,23	4,03	5,75
900	2,73	2,88	3,16	3,65	4,56	6,52
1000	3,05	3,21	3,53	4,08	5,09	7,30
1100	3,36	3,54	3,89	4,51	5,63	8,09
1200	3,68	3,87	4,26	4,94	6,17	8,89
1300	3,99	4,21	4,63	5,37	6,72	9,70
1400	4,31	4,55	5,01	5,81	7,27	10,51
1500	4,63	4,88	5,38	6,25	7,83	11,32
1600	4,95	5,23	5,76	6,69	8,39	12,14
1700	5,28	5,57	6,14	7,13	8,95	12,97
1800	5,60	5,91	6,51	7,57	9,51	13,80
1900	5,92	6,26	6,90	8,02	10,08	14,64
2000	6,25	6,60	7,28	8,47	10,65	15,48

TABELLA VII — C)

Quota 1500 m.

z	t					
	Traiettoria 1_c $\psi=79^\circ.48'$ $\chi=$ 33	2_c $\psi=69^\circ.34'.40''$ $\chi=$ 1 . 9 .40	3_c $\psi=59^\circ.18'40''$ $\chi=$ 1 .53 .40	4_c $\psi=49^\circ$ $\chi=$ 2 .45	5_c $\psi=38^\circ.30'.40''$ $\chi=$ 4 . 5 .40	6_c $\psi=27^\circ.37'.20''$ $\chi=$ 6 .32 .20
	sec.	sec.	sec.	sec.	sec.	sec.
0	0	0	0	0	0	0
100	0,30	0,31	0,34	0,39	0,47	0,64
200	0,59	0,62	0,68	0,78	0,95	1,29
300	0,89	0,94	1,03	1,18	1,43	1,96
400	1,19	1,26	1,38	1,58	1,93	2,64
500	1,50	1,58	1,73	1,98	2,43	3,33
600	1,81	1,90	2,08	2,39	2,93	4,04
700	2,12	2,23	2,44	2,80	3,44	4,75
800	2,43	2,56	2,80	3,22	3,96	5,48
900	2,74	2,89	3,16	3,64	4,48	6,21
1000	3,05	3,22	3,53	4,06	5,01	6,95
1100	3,36	3,55	3,90	4,49	5,54	7,70
1200	3,68	3,88	4,27	4,92	6,08	8,46
1300	4,00	4,22	4,64	5,35	6,62	9,22
1400	4,32	4,56	5,01	5,78	7,16	9,99
1500	4,65	4,90	5,39	6,22	7,71	10,77

TABELLA VII — D)

Quota 1000 m.

z	t					
	Traiettoria 1_d ψ=79°.52′ χ= 22	2_d ψ=69°.48′ χ= 33	3_d ψ=59°.34′.40″ χ= 1 . 9 .40	4_d ψ=49°.22′.40″ χ= 1 .42 .40	5_d ψ=39°. 5′.20″ χ= 2 .30 .20	6_d ψ=28°.36′ χ= 3 .51
	sec.	sec.	sec.	sec.	sec.	sec.
0	0	0	0	0	0	0
100	0,30	0,31	0,34	0,38	0,46	0,61
200	0,59	0,62	0,68	0,78	0,94	1,25
300	0,89	0,94	1,02	1,17	1,42	1,89
400	1,20	1,26	1,37	1,57	1,91	2,55
500	1,50	1,58	1,73	1,97	2,40	3,22
600	1,81	1,91	2,08	2,38	2,90	3,91
700	2,12	2,23	2,44	2,79	3,41	4,60
800	2,43	2,56	2,80	3,21	3,92	5,30
900	2,74	2,89	3,16	3,63	4,43	6,01
1000	3,06	3,22	3,53	4,05	4,96	6,73

E)

Quota 500 m.

z	t					
	Traiettoria 1_e ψ=79°.56′ χ= 11	2_e ψ=69°.52′ χ= 22	3_e ψ=59°.49′.20″ χ= 29 .20	4_e ψ=49°.42′.40″ χ= 47 .40	5_e ψ=39°.34′.40″ χ= 1 . 9 .40	6_e ψ=29°.22′.40″ χ= 1 .42 .40
	sec.	sec.	sec.	sec.	sec.	sec.
0	0	0	0	0	0	0
100	0,30	0,31	0,34	0,38	0,46	0,60
200	0,59	0,62	0,68	0,77	0,93	1,21
300	0,89	0,94	1,02	1,16	1,40	1,84
400	1,20	1,26	1,37	1,56	1,89	2,48
500	1,51	1,58	1,72	1,96	2,38	3,14

3. Volendo desumere da questi valori le *durate*, convenne fare un calcolo successivo, giacché la tabella precedente dà i valori di t corrispondenti alle diverse z, cioè $t = t(z)$.

Bisognava invece ricavare il valore del tempo corrispondente al valore di Y relativo alla quota q dell'origine sul livello del mare per ciascun tiro.

A tal fine, siccome si ha dalle tabelle

$$Y = Y(z),$$

e abbiamo adesso calcolato

$$t = t(z),$$

bastava prendere nella tabella VI i due valori di z, z_1, z_2, a cui corrispondono i valori Y_1 e Y_2 di Y fra i quali è compresa la quota q, quindi nella tabella VII i valori t_1 e t_2 corrispondenti a z_1 e z_2; e si aveva la durata data dalla formula

$$\tau = t_1 + \frac{(t_2 - t_1)(q - Y_1)}{Y_2 - Y_1}.$$

Si calcolarono così le durate secondo la tabella VIII.

CAPITOLO VI.

Tavole di tiro.

1. Ottenute le traiettorie (vedi Cap. IV) le differenze $\psi - \chi$ davano gli angoli di proiezione. Tagliando le traiettorie con la orizzontale alla quota o, si avevano le gittate e dalle quote dell'origine e dalle gittate si avevano gli angoli di sito.

In balistica ci si riferisce sempre all'orizzonte nella misura degli angoli di sito, di proiezione e di tiro, prendendo negativi quelli in depressione. Nel caso che noi studiamo si hanno sempre tiri con forti depressioni ed è quindi più comodo riferirsi nella misura degli angoli alla verticale diretta dall'alto al basso, anziché alla orizzontale. Chiameremo quindi, nel seguito del presente scritto, *angoli di sito colla verticale*, e *angoli di proiezione e di tiro colla verticale* gli angoli formati dalle linee di sito, di proiezione o di tiro colla verticale diretta dall'alto in basso [11].

Si ha così la tabella IX.

(11) Quando fosse necessario potrebbero specificarsi colle denominazioni di *angoli di sito, di proiezione* e *di tiro coll'orizzontale* quelli ordinarî.

TABELLA VIII.

QUOTA			Durata	QUOTA			Durata
m.			sec.	m.			sec.
2500	$\psi = 79°.37'.20''$ $\chi = 1 . 2 .20$	1_a	7,86	1500 (segue)	$\psi = 38°.30'.40''$ $\chi = 4 . 5 .40$	5_c	7,54
	$\psi = 69 .12$ $\chi = 2 .12$	2_a	8,30		$\psi = 27 .37 .20$ $\chi = 6 .32 .20$	6_c	10,24
	$\psi = 58 .41 .20$ $\chi = 3 .36 .20$	3_a	9,16				
	$\psi = 48 . 2 .40$ $\chi = 5 .22 .40$	4_a	10,63	1000	$\psi = 79°.52'.00''$ $\chi = 22$	1_d	3,06
	$\psi = 36 .57 .20$ $\chi = 8 .22 .20$	5_a	13,42		$\psi = 69 .48$ $\chi = 33$	2_d	3,21
					$\psi = 59 .34 .40$ $\chi = 1 . 9 .40$	3_d	3,52
2000	$\psi = 79°.42'.40''$ $\chi = 47 .40$	1_b	6,25		$\psi = 49 .22 .40$ $\chi = 1 .22 .40$	4_d	4,02
	$\psi = 69 .22 .40$ $\chi = 1 .42 .40$	2_b	6,59		$\psi = 39 . 5 .20$ $\chi = 2.30 .20$	5_d	4,88
	$\psi = 59 .4$ $\chi = 2 .34$	3_b	7,23		$\psi = 28 .36$ $\chi = 3 .51$	6_d	6,49
	$\psi = 48 .33 .20$ $\chi = 3 .58 .20$	4_b	8,36				
	$\psi = 37 .48$ $\chi = 6 .3$	5_b	10,37	500	$\psi = 79°.56'.00''$ $\chi = 11$	1_e	1,51
	$\psi = 26 .25 .20$ $\chi = 9 .50 .20$	6_b	14,47		$\psi = 69 .52$ $\chi = 22$	2_e	1,58
					$\psi = 59 .49 .20$ $\chi = 29 .20$	3_e	1,72
1500	$\psi = 79°.48'.00''$ $\chi = 33$	1_c	4,65		$\psi = 49 .42 .40$ $\chi = 47 .40$	4_e	1,95
	$\psi = 69 .34 .40$ $\chi = 1 . 9 .40$	2_c	4,89		$\psi = 39 .34 .40$ $\chi = 1 . 9 .40$	5_e	2,36
	$\psi = 59 .18 .40$ $\chi = 1 .53 .40$	3_c	5,37		$\psi = 29 .22 .40$ $\chi = 1 .42 .40$	6_e	3,09
	$\psi = 49$ $\chi = 2 .45$	4_c	6,15				

TABELLA IX.

Quota	Angolo di sito colla verticale	Gittata	Angolo di proiezione colla verticale	Angolo d'elevazione in gradi	Angolo d'elevazione in millesimi	Durata
m.		m.				sec.
500	10°.2'	88,50	10°.15'	0°.13'	3,7	1,51
	20 .3	182,50	20 .30	0 ,27	7,8	1,58
	29 .59	288,50	30 .40	0 41	11,9	1,72
	40 .2	420	41 .5	1 .3	18,3	1,95
	50 .6	598	51 .35	1 .29	25,9	2,36
	60 .5	869	62 .20	2 .15	39,3	3,09
1000	10 .2	177	10 .30	0 .28	8,1	3,06
	19 .49	360,50	20 .45	0 .56	16,2	3,21
	30 .5	579,50	31 .35	1 .30	26,2	3,52
	40 .9	843,50	42 .20	2 .11	38,1	4,02
	50 .15	1202	53 .25	3 .10	55,3	4,88
	60 .23	1758,50	65 .15	4 .52	84,9	6,49
1500	10 .3	266	10 .45	0 .42	12,2	4,65
	20 .8	550	21 .35	1 .27	25,3	4,89
	30 .17	876	32 .35	2 .18	40,1	5,37
	40 .19	1273	43 .45	3 .26	59,9	6,15
	50 .31	1821	55 .35	5 .4	88,4	7,54
	60 .57	2701	68 .55	7 .58	139,0	10,24
2000	10 .8	357,50	11 .5	0 .57	16,7	6,25
	20 .22	742,50	22 .20	1 .58	34,3	6,59
	30 .21	1171	33 .30	3 .9	55,0	7,23
	40 .41	1719	45 .25	4 .44	82,6	8,36
	51 .6	2478	58 .15	7 .9	124,8	10,37
	61 .46	3725	73 .25	11 .39	203,2	14,47
2500	10 .13	450,50	11 .25	1 .12	20,9	7,86
	20 .28	933	23 .0	2 .32	44,2	8,30
	30 .48	1490,50	34 .55	4 .7	71,8	9,16
	41 .8	2183,50	47 .20	6 .12	108,2	10,63
	51 .52	3185,50	61 .25	9 .33	166,7	13,42

2. Con questi dati vennero costruiti i grafici seguenti:

1°) Degli alzi in rapporto agli angoli di sito colla verticale e alla quota (Tav. 4ª).

2°) Delle durate in funzione degli angoli di sito colla verticale e della quota (Tav. 5ª).

3. Dai detti grafici, con semplice interpolazione, vennero ricavate le tavole di tiro che sono anch'esse riportate qui di seguito. In esse H indica l'alzo in millesimi (cioè in lunghezza di arco di cerchio di raggio 1000) e τ la durata in secondi.

Angolo di sito colla verticale / Quota	1°		2°		3°		4°		5°		6°		7°		8°		9°		10°	
	H	τ	H	τ	H	τ	H	τ	H	τ	H	τ	H	τ	H	τ	H	τ	H	τ
metri	mill.mi	secondi	mill.mi	secondi	mill.mi	secondi	mill.mi	secondi	mill.mi	secondi	mill.mi	secondi	mill.mi	secondi	mill.mi	secondi	mill.mi	secondi	mill.mi	secondi
500	0	1,5	1	1,5	1	1,5	1	1,5	2	1,5	2	1,5	3	1,5	3	1,5	3	1,5	4	1,5
600	0	1,8	1	1,8	1	1,8	1	1,8	2	1,8	3	1,8	3	1,8	4	1,8	4	1,8	4	1,8
700	0	2,1	1	2,1	1	2,1	2	2,1	3	2,1	3	2,1	4	2,1	4	2,1	5	2,1	5	2,1
800	1	2,4	2	2,4	2	2,4	2	2,4	3	2,4	4	2,4	4	2,4	5	2,4	6	2,4	6	2,4
900	1	2,7	2	2,7	2	2,7	2	2,7	4	2,7	4	2,7	5	2,7	6	2,7	6	2,7	7	2,7
1000	1	3,0	2	3,0	2	3,0	3	3,0	4	3,0	5	3,0	5	3,0	6	3,0	7	3,0	8	3,0
1100	1	3,3	2	3,3	3	3,3	3	3,3	4	3,3	5	3,3	6	3,3	7	3,3	8	3,4	9	3,4
1200	1	3,6	2	3,6	3	3,6	3	3,6	5	3,6	6	3,7	7	3,7	8	3,7	9	3,7	10	3,7
1300	1	3,9	2	3,9	3	3,9	4	3,9	5	3,9	6	4,0	7	4,0	8	4,0	9	4,0	10	4,0
1400	1	4,2	2	4,2	4	4,2	4	4,2	5	4,3	7	4,3	8	4,3	9	4,3	10	4,3	11	4 3
1500	1	4,5	2	4,5	4	4,5	5	4,6	6	4,6	7	4,6	8	4,6	10	4,6	11	4,6	12	4,6
1600	1	4,8	2	4,8	4	4,8	5	4,9	7	4,9	8	4,9	9	4,9	10	4,9	12	4,9	13	5,0
1700	1	5,1	2	5,1	4	5,2	5	5,2	7	5,2	8	5,2	10	5,2	11	5,2	13	5,2	14	5,3
1800	1	5,4	3	5,5	4	5,5	6	5,5	7	5,5	9	5,5	10	5,5	12	5,5	13	5,6	15	5,6
1900	2	5,7	3	5,8	5	5,8	6	5,8	8	5,8	9	5,8	11	5,8	13	5,9	14	5,9	16	5,9
2000	2	6,0	3	6,1	5	6,1	7	6,1	8	6,1	10	6,2	12	6,2	13	6,2	15	6,2	17	6,2
2100	2	6,3	3	6,4	5	6,4	7	6,4	9	6,4	10	6,5	12	6,5	14	6,5	16	6,5	17	6,6
2200	2	6,7	3	6,7	5	6,7	7	6,7	9	6,7	11	6,8	13	6,8	15	6,8	16	6,8	18	6,9
2300	2	7,0	4	7,0	6	7,0	8	7,0	9	7,1	11	7,1	13	7,1	15	7,1	17	7,2	19	7,2
2400	2	7,3	4	7,3	6	7,3	8	7,3	10	7,4	12	7,4	14	7,4	16	7,5	18	7,5	20	7,5
2500	2	7,6	4	7,6	6	7,6	8	7,7	10	7,7	12	7,7	14	7,7	16	7,8	18	7,8	20	7,8

Angolo di sito colla verticale / Quota	11°		12°		13°		14°		15°		16°		17°		18°		19°		20°	
	H	τ	H	τ	H	τ	H	τ	H	τ	H	τ	H	τ	H	τ	H	τ	H	τ
metri	mill.mi	secondi	mill.mi	secondi	mill.mi	secondi	mill.mi	secondi	mill.mi	secondi	mill.mi	secondi	mill.mi	secondi	mill.mi	secondi	mill.mi	secondi	mill.mi	secondi
500	4	1,5	5	1,5	5	1,5	5	1,5	6	1,5	6	1,5	7	1,5	7	1,6	7	1,6	8	1,6
600	5	1,8	6	1,8	6	1,8	6	1,8	7	1,8	7	1,9	8	1,9	8	1,9	9	1,9	9	1,9
700	6	2,1	7	2,1	7	2,1	8	2,1	8	2,1	9	2,2	9	2,2	10	2,2	11	2,2	11	2,2
800	7	2,4	8	2,4	8	2,5	9	2,5	10	2,5	10	2,5	11	2,5	11	2,5	12	2,5	13	2,5
900	8	2,8	9	2,8	9	2,8	10	2,8	11	2,8	12	2,8	12	2,8	13	2,8	14	2,9	15	2,9
1000	9	3,1	10	3,1	11	3,1	11	3,1	12	3,1	13	3,1	14	3,1	15	3,2	15	3,2	16	3,2
1100	10	3,4	11	3,4	12	3,4	12	3,4	13	3,4	14	3,5	15	3,5	16	3,5	17	3,5	18	3,5
1200	11	3,7	12	3,7	13	3,7	13	3,7	15	3,7	16	3,8	17	3,8	18	3,8	19	3,8	20	3,9
1300	12	4,0	13	4,0	14	4,0	15	4,1	16	4,1	17	4,1	18	4,1	19	4,1	20	4,2	22	4,2
1400	12	4,3	14	4,4	15	4,4	16	4,4	17	4,4	19	4,4	20	4,5	21	4,5	22	4,5	23	4,5
1500	13	4,7	15	4,7	16	4,7	17	4,7	19	4,7	20	4,8	21	4,8	22	4,8	24	4,9	25	4,9
1600	14	5,0	16	5,0	17	5,0	18	5,0	20	5,1	21	5,1	23	5,1	24	5,1	25	5,2	27	5,2
1700	15	5,3	17	5,3	18	5,3	19	5,4	21	5,4	22	5,4	24	5,4	25	5,5	27	5,5	28	5,5
1800	16	5,6	18	5,6	19	5,7	21	5,7	22	5,7	24	5,8	25	5,8	27	5,8	29	5,9	30	5,9
1900	17	5,9	19	5,9	20	6,0	22	6,0	23	6,0	25	6,1	27	6,1	28	6,1	30	6,2	32	6,2
2000	18	6,3	20	6,3	22	6,3	23	6,4	25	6,4	27	6,4	28	6,4	30	6,5	32	6,5	34	6,6
2100	19	6,6	21	6,6	23	6,6	24	6,7	26	6,7	28	6,7	30	6,8	32	6,8	34	6,9	35	6,9
2200	20	6,9	22	6,9	24	7,0	25	7,0	28	7,0	30	7,1	31	7,1	33	7,2	35	7,2	37	7,2
2300	21	7,2	23	7,3	25	7,3	27	7,3	29	7,4	31	7,4	33	7,4	35	7,5	37	7,5	39	7,6
2400	22	7,6	24	7,6	26	7,6	28	7,7	30	7,7	32	7,7	35	7,8	37	7,8	39	7,9	41	7,9
2500	22	7,9	25	7,9	27	8,0	29	8,0	31	8,0	34	8,1	36	8,1	38	8,2	41	8,2	43	8,3

Angolo di sito colla verticale / Quota	21°		22°		23°		24°		25°		26°		27°		28°		29°		30°	
	H	τ	H	τ	H	τ	H	τ	H	τ	H	τ	H	τ	H	τ	H	τ	H	τ
metri	mill.mi	secondi	mill.mi	secondi	mill.mi	secondi	mill.mi	secondi	mill.mi	secondi	mill.mi	secondi	mill.mi	secondi	mill.mi	secondi	mill.mi	secondi	mill.mi	secondi
500	8	1,6	8	1,6	9	1,6	9	1,6	10	1,6	10	1,7	10	1,7	11	1,7	11	1,7	12	1,7
600	10	1,9	10	1,9	11	2,0	11	1,9	12	2,0	12	2,0	13	2,0	13	2,0	14	2,0	15	2,1
700	12	2,2	12	2,2	13	2,3	14	2,3	14	2,3	15	2,3	15	2,4	16	2,4	17	2,4	18	2,4
800	14	2,6	14	2,6	15	2,6	16	2,6	16	2,7	17	2,7	18	2,7	19	2,7	20	2,8	21	2,8
900	15	2,9	16	2,9	17	3,0	18	2,9	19	3,0	20	3,0	21	3,0	21	3,1	22	3,1	23	3,1
1000	17	3,2	18	3,3	19	3,3	20	3,3	21	3,4	22	3,4	23	3,4	24	3,4	25	3,5	26	3,5
1100	19	3,6	20	3,6	21	3,7	22	3,6	23	3,7	24	3,7	25	3,8	27	3,8	28	3,8	29	3,9
1200	21	3,9	22	3,9	23	4,0	24	4,0	25	4,0	27	4,1	28	4,1	29	4,1	30	4,2	31	4,2
1300	23	4,2	24	4,3	25	4,3	26	4,3	28	4,4	29	4,4	30	4,5	31	4,5	33	4,6	34	4,6
1400	25	4,6	26	4,6	27	4,7	28	4,7	30	4.8	31	4,8	32	4,8	34	4,9	35	4,9	37	5,0
1500	27	4,9	28	5,0	29	5,1	30	5,0	32	5,1	33	5,1	35	5,2	36	5,2	38	5,3	40	5,4
1600	28	5,2	30	5,3	31	5,4	33	5,3	34	5,4	36	5,5	37	5,5	39	5,6	41	5,7	43	5,7
1700	30	5,6	32	5,6	33	5,7	35	5,7	37	5,8	38	5,8	40	5,9	42	6,0	44	6,0	45	6,1
1800	32	5,9	34	6,0	35	6,1	37	6,0	39	6,1	40	6,2	42	6,3	44	6,3	46	6,4	48	6,5
1900	34	6,3	35	6,3	37	6,4	39	6,4	41	6,5	43	6,6	45	6,6	47	6,7	49	6,8	51	6,8
2000	35	6,6	37	6,7	39	6,8	41	6,7	43	6,8	45	6,9	47	7,0	50	7,0	52	7,1	54	7,2
2100	37	7,0	39	7,0	41	7,1	43	7,1	46	7,2	48	7,3	50	7,3	52	7,4	55	7,5	57	7,6
2200	39	7,3	41	7,4	44	7,5	46	7,4	48	7,5	50	7,6	53	7,7	55	7,8	57	7,9	60	7,9
2300	41	7,6	44	7,7	6	7,8	48	7,8	50	7,9	53	8,0	55	8,0	58	8,1	60	8,2	63	8,3
2400	43	8,0	46	8,0	48	8,2	50	8,1	53	8,3	56	8,3	58	8,4	61	8,5	63	8,6	66	8,7
2500	45	8,3	48	8,4	50	8,5	53	8,5	55	8,6	58	8,7	60	8,8	63	8,9	66	9,0	69	9,1

Angolo di sito colla verticale / Quota	31°		32°		33°		34°		35°		36°		37°		38°		39°		40°	
	H	τ	H	τ	H	τ	H	τ	H	τ	H	τ	H	τ	H	τ	H	τ	H	τ
metri	mill.mi	secondi	mill.mi	secondi	mill.mi	secondi	mill.mi	secondi	mill.mi	secondi	mill.mi	secondi	mill.mi	secondi	mill.mi	secondi	mill.mi	secondi	mill.mi	secondi
500	12	1,7	13	1,8	13	1,8	14	1,8	15	1,8	15	1,8	16	1,9	17	1,9	17	1,9	18	2,0
600	15	2,1	16	2,1	17	2,1	17	2,1	18	2,2	19	2,2	20	2,3	20	2,3	21	2,3	22	2,4
700	18	2,5	19	2,5	20	2,5	21	2,5	22	2,6	22	2,6	23	2,7	24	2,7	25	2,7	26	2,8
800	21	2,8	22	2,9	23	2,9	24	2,9	25	3,0	26	3,0	27	3,0	28	3,1	29	3,1	30	3,2
900	24	3,2	25	3,2	26	3,3	27	3,3	28	3,3	29	3,4	30	3,4	32	3,5	33	3,5	34	3,6
1000	27	3,6	28	3,6	29	3,6	31	3,7	32	3,7	33	3,8	34	3,8	35	3,9	37	3,9	38	4,0
1100	30	3,9	31	4,0	32	4,0	34	4,1	35	4,1	36	4,2	38	4,2	39	4,3	41	4,3	42	4,4
1200	33	4,3	34	4,4	35	4,4	37	4,5	38	4,5	40	4,6	41	4,6	43	4,7	45	4,8	46	4,8
1300	36	4,7	37	4,7	38	4,8	40	4,8	42	4,9	43	5,0	45	5,0	47	5,1	49	5,2	51	5,3
1400	38	5,0	40	5,1	42	5,1	43	5,2	45	5,3	47	5,4	49	5,4	51	5,5	53	5,6	55	5,7
1500	41	5,4	43	5,5	45	5,5	47	5,6	49	5,7	50	5,8	52	5,8	55	5,9	57	6,0	59	6,1
1600	44	5,8	46	5,9	48	5,9	50	6,0	52	6,1	54	6,2	56	6,2	59	6,3	61	6,4	63	6,5
1700	47	6,2	49	6,2	51	6,3	54	6,4	56	6,5	58	6,6	60	6,7	63	6,8	65	6,9	68	7,0
1800	50	6,5	52	6,6	55	6,7	57	6,8	59	6,9	61	7,0	64	7,1	67	7,2	69	7,3	72	7,4
1900	53	6,9	55	7,0	58	7,1	60	7,2	63	7,3	65	7,4	68	7,5	71	7,6	73	7,7	76	7,8
2000	56	7,3	59	7,4	61	7,5	64	7,6	66	7,7	69	7,8	72	7,9	75	8,0	77	8,1	80	8,3
2100	59	7,7	62	7,8	64	7,9	67	8,0	70	8,1	72	8,2	75	8,3	78	8,4	81	8,6	84	8,7
2200	62	8,1	65	8,1	67	8,2	70	8,4	73	8,5	76	8,6	79	8,7	82	8,8	85	9,0	88	9,1
2300	65	8,4	68	8,5	71	8,6	73	8,7	76	8,9	79	9,0	82	9,1	85	9,3	89	9,4	92	9,6
2400	68	8,8	71	8,9	74	9,0	77	9,1	80	9,3	82	9,4	86	9,5	89	9,7	92	9,8	96	10,0
2500	71	9,2	74	9,3	77	9,4	80	9,5	83	9,7	86	9,8	89	9,9	93	10,1	96	10,3	100	10,4

Quota \ Angolo di sito colla verticale	41°		42°		43°		44°		45°		46°		47°		48°		49°		50°	
	H	τ	H	τ	H	τ	H	τ	H	τ	H	τ	H	τ	H	τ	H	τ	H	τ
metri	mill.mi	secondi	mill.mi	secondi	mill.mi	secondi	mill.mi	secondi	mill.mi	secondi	mill.mi	secondi	mill.mi	secondi	mill.mi	secondi	mill.mi	secondi	mill.mi	secondi
500	19	2,0	20	2,0	20	2,0	21	2,1	22	2,1	22	2,2	23	2,2	24	2,3	25	2,3	26	2,4
600	23	2,4	24	2,4	25	2,5	25	2,5	26	2,6	27	2,6	28	2,7	29	2,7	31	2,8	32	2,8
700	27	2,8	28	2,9	29	2,9	30	3,0	31	3,0	32	3,1	34	3,1	35	3,2	36	3,3	37	3,3
800	31	3,2	33	3,3	34	3,3	35	3,4	36	3,5	37	3,5	39	3,6	40	3,7	42	3,8	43	3,8
900	35	3,7	37	3,7	38	3,8	39	3,8	41	3,9	42	4,0	44	4,1	45	4,2	47	4,3	49	4,3
1000	40	4,1	41	4,1	42	4,2	44	4,3	46	4,3	47	4,4	49	4,5	51	4,6	53	4,7	55	4,8
1100	44	4,5	45	4,6	47	4,6	49	4,7	51	4,8	53	4,9	55	5,0	57	5,1	59	5,2	61	5,4
1200	48	4,9	50	5,0	52	5,1	54	5,2	56	5,3	58	5,4	60	5,5	63	5,6	65	5,7	67	5,9
1300	53	5,3	55	5,4	57	5,5	59	5,6	61	5,7	64	5,8	66	6,0	68	6,1	71	6,2	74	6,4
1400	57	5,8	59	5,9	62	6,0	64	6,1	66	6,2	69	6,3	72	6,5	74	6,6	77	6,7	80	6,9
1500	61	6,2	64	6,3	66	6,4	69	6,5	71	6,6	74	6,8	77	6,9	80	7,1	83	7,2	87	7,4
1600	66	6,6	69	6,8	71	6,9	74	7,0	77	7,1	80	7,3	83	7,4	86	7,6	90	7,8	93	8,0
1700	70	7,1	73	7,2	76	7,4	79	7,5	82	7,6	85	7,8	89	7,9	92	8,1	96	8,3	100	8,5
1800	75	7,5	78	7,7	81	7,8	84	7,9	87	8,1	91	8,3	95	8,4	98	8,6	102	8,8	106	9,0
1900	79	8,0	82	8,1	86	8,3	89	8,4	92	8,6	96	8,8	100	8,9	104	9,1	108	9,3	113	9,5
2000	84	8,4	87	8,6	90	8,7	94	8,9	97	9,1	102	9,2	106	9,4	110	9,6	114	9,8	119	10,1
2100	88	8,9	91	9,0	95	9,2	99	9,4	102	9,5	107	9,7	111	9,9	116	10,1	121	10,4	126	10,6
2200	92	9,3	96	9,5	99	9,7	104	9,8	107	10,0	112	10,2	117	10,5	122	10,7	127	10,9	133	11,2
2300	96	9,7	100	9,9	104	10,1	108	10,3	112	10,5	117	10,7	123	11,0	128	11,2	134	11,4	140	11,7
2400	100	10,2	104	10,4	108	10,6	113	10,8	117	11,0	122	11,2	128	11,4	134	11,7	140	11,9	146	12,2
2500	104	10,6	108	10,8	112	11,0	117	11,2	122	11,4	128	11,7	134	11,9	140	12,1	146	12,4	153	12,8

CAPITOLO VII.

Variazioni e correzioni.

1. Conviene adesso dare le formule generali che esprimono le variazioni degli elementi delle traiettorie per variazioni degli elementi fondamentali.

Questi sono:

1) la velocità iniziale v_0;
2) l'angolo di proiezione ω;
3) il coefficiente di forma i;
4) il coefficiente balistico C.

Osserviamo innanzi tutto che dalla formula (VII) abbiamo

$$\alpha = \beta \frac{\delta_z i}{C} \frac{\cos\chi}{\operatorname{sen}\psi} = \left(\frac{\beta i}{C}\right) \delta_z \frac{\cos\chi}{\operatorname{sen}\psi};$$

e perciò nell'espressione di α comparisce il fattore

$$\frac{\beta i}{C}.$$

Si potrà dunque prescindere da variazioni di i e di C e considerare invece variazioni del coefficiente β.

Ricordiamo a questo proposito che i calcoli precedenti vennero condotti nella ipotesi approssimativa di $\beta = 1$: quindi i risultati che si otterranno serviranno ancora a riconoscere le variazioni negli elementi delle traiettorie allorché si prendano per β i valori diversi da 1, ma poco discosti dall'unità, cioè quali correzioni si apportino correggendo il valore del paramentro β (vedi Cap. III, § 1).

2. In ultima analisi noi consideriamo le variazioni:

1) della velocità iniziale v_0;
2) dell'angolo di proiezione ω;
3) del coefficiente β.

3. *Variazione della velocità iniziale* v_0 – Cominciamo dallo stabilire alcune formule che applicheremo al caso particolare. Abbiansi le equazioni differenziali

$$\frac{du}{dz} = H(u), \quad \frac{dU'}{dz} = H_1(u), \quad \frac{dU''}{dz} = H_2(u), \cdots, \frac{dU^{(n)}}{dz} = H_n(u).$$

Variamo le equazioni precedenti nell'ipotesi che i valori iniziali di u, $U', U'', \cdots, U^{(n)}$ per $z = 0$ variino di $\delta v_0, \delta V'_0, \cdots, \delta V_0^{(n)}$. Avremo

$$\frac{d\delta u}{dz} = \frac{dH}{du}\delta u \quad , \quad \frac{d\delta U^{(r)}}{dz} = \frac{dH_r}{du}\delta u;$$

quindi

$$\frac{d\,\delta u}{\delta u} = \frac{d\mathrm{H}}{du}\,dz = \frac{d\mathrm{H}}{\mathrm{H}}, \tag{8'}$$

$$d\,\delta\mathrm{U}^{(r)} = \frac{d\mathrm{H}_r}{\mathrm{H}}\,\delta u. \tag{8''}$$

Dalla prima delle equazioni precedenti segue integrando

$$\log \delta u = \log \mathrm{H} + c,$$

e passando dai logaritmi ai numeri

$$\delta u = e^c\,\mathrm{H},$$

ove c è una costante, e perciò

$$\delta u = \frac{\mathrm{H}(u)}{\mathrm{H}(v_o)}\,\delta v_o. \tag{9}$$

Dalla (8'') si deduce

$$d\,\delta\mathrm{U}^{(r)} = \frac{d\mathrm{H}_r}{\mathrm{H}(v_o)}\,\delta v_o,$$

e integrando

$$\delta\mathrm{U}^{(r)} = \frac{\mathrm{H}_r(u) - \mathrm{H}_r(v_o)}{\mathrm{H}(v_o)}\,\delta v_o + \delta\mathrm{V}_o^{(r)}. \tag{9'}$$

Se le $\delta\mathrm{V}_o^{(r)}$ sono nulle, si ha

$$\left\{\begin{aligned} \delta u &= \frac{\mathrm{H}(u)}{\mathrm{H}(v_o)}\,\delta v_o, \\ \delta\mathrm{U}^{(r)} &= \frac{\mathrm{H}_r(u) - \mathrm{H}_r(v_o)}{\mathrm{H}(v_o)}\,\delta v_o. \end{aligned}\right. \tag{9''}$$

Applichiamo adesso questi risultati generali alle formule della Tabella I. Esse si possono scrivere

$$du = -\frac{1}{\cos^2\chi\,\Phi(\alpha, u)}\,dz,$$

$$dk = \frac{\cos\omega}{\operatorname{sen}^2\psi\cos\chi}\,e^{-\Omega}\,dz,$$

$$dt = \frac{1}{\operatorname{sen}\psi\cos\chi}\,\frac{1}{u}\,dz.$$

Avremo dunque, applicando le (9'').

$$\delta u = \frac{\Phi(\alpha, v_o)}{\Phi(\alpha, u)}\,\delta v_o,$$

$$\delta k = \frac{\cos\omega\cos\chi}{\operatorname{sen}^2\psi}\,(1 - e^{-\Omega})\,\Phi(\alpha, v_o)\,\delta v_o,$$

$$\delta t = \frac{\cos\chi}{\operatorname{sen}\psi}\left(\frac{1}{v_o} - \frac{1}{u}\right)\Phi(\alpha, v_o)\,\delta v_o,$$

e dalle (V) si ricaverà

$$\delta X = \frac{\cos\omega \cos\chi}{\text{sen}\,\psi} (1 - e^{-\Omega}) \Phi(\alpha, v_0) \delta v_0,$$

$$\delta Y = -\frac{\cos\omega \cos\chi \cos\psi}{\text{sen}^2\psi} (1 - e^{-\Omega}) \Phi(\alpha, v_0) \delta v_0.$$

4. *Variazioni dell'angolo di proiezione* ω *e del coefficiente* β. — Per lo studio di queste variazioni noi faremo uso di uno speciale artificio che ci renderà estremamente semplice il calcolo.

Osserviamo che l'angolo di proiezione è dato da

$$\omega = \psi - \chi. \tag{10}$$

Noi abbiamo dunque da variare β e ω, mentre abbiamo a nostra disposizione nelle formule le tre quantità β, χ, e ψ, le quali compariscono in

$$\alpha = \beta \frac{\delta_z i}{C} \frac{\cos\chi}{\text{sen}\,\psi}.$$

Potremo dunque immaginare di variare β e ω senza alterare α cambiando convenientemente χ e ψ.

Riprendiamo ora le formule (7), (7') e le formule delle Tabella I. Potremo scrivere

$$\Omega = -g \int_{v_0}^{u} \frac{du}{u(\alpha F(u) - g)}, \tag{11}$$

$$\frac{\beta\,\text{sen}\,\psi}{\cos\omega} k = -\left(\frac{\cos\chi}{\text{sen}\,\psi}\beta\right) \int_{v_0}^{u} \frac{e^{-\Omega} u\,du}{\alpha F(u) - g}, \tag{12}$$

$$\frac{\beta}{\cos\omega} X = -\left(\frac{\cos\chi}{\text{sen}\,\psi}\beta\right) \int_{v_0}^{u} \frac{e^{-\Omega} u\,du}{\alpha F(u) - g}, \tag{13}$$

$$Y = \xi - \eta, \tag{14}$$

ove

$$\xi = \frac{z}{\text{sen}^2\psi} = -\frac{\cos^2\chi}{\text{sen}^2\psi} \int_{v_0}^{u} \frac{u\,du}{\alpha F(u) - g}, \tag{15}$$

$$\eta = k\cos\psi = X \frac{\cos\psi}{\text{sen}\,\psi} = X \cot g\,\psi, \tag{16}$$

e per conseguenza

$$\beta^2 \xi = -\left(\frac{\cos\chi}{\text{sen}\,\psi}\beta\right)^2 \int_{v_0}^{u} \frac{u\,du}{\alpha F(u) - g}. \tag{17}$$

Se prendiamo la pseudo–velocità u come variabile indipendente e variamo β, ψ e χ senza variare

(18) $$\frac{\beta \cos \chi}{\operatorname{sen} \psi},$$

α non varierà [12] e quindi non varieranno i secondi membri delle equazioni (11), (12), (13), (17). Rimarranno dunque inalterati

$$\frac{\beta \operatorname{sen} \psi}{\cos \omega} k \quad , \quad \frac{\beta X}{\cos \omega} \quad , \quad \beta^2 \xi ,$$

e per conseguenza anche

$$\log \left[\beta \frac{\operatorname{sen} \psi}{\cos \omega} k\right] \quad , \quad \log \left[\frac{\beta X}{\cos \omega}\right] \quad , \quad \log [\beta^2 \xi] ,$$

ossia

$$\delta \log \left[\beta \frac{\operatorname{sen} \psi}{\cos \omega} k\right] = \delta \log \left[\frac{\beta X}{\cos \omega}\right] = \delta \log [\beta^2 \xi] = 0 .$$

Eseguendo le variazioni si ha dunque:

$$\frac{\delta\beta}{\beta} + \frac{\cos \psi}{\operatorname{sen} \psi} \delta\psi + \frac{\operatorname{sen} \omega}{\cos \omega} \delta\omega + \frac{\delta k}{k} = 0 ,$$

$$\frac{\delta\beta}{\beta} + \frac{\delta X}{X} + \frac{\operatorname{sen} \omega}{\cos \omega} \delta\omega = 0 ,$$

$$2 \frac{\delta\beta}{\beta} + \frac{\delta\xi}{\xi} = 0 ,$$

da cui segue

(19) $$\delta k = - k \left\{ \frac{\delta\beta}{\beta} + \frac{\delta\psi}{\operatorname{tg} \psi} + \operatorname{tg} \omega \, \delta\omega \right\} ,$$

(20) $$\delta X = - X \left\{ \frac{\delta\beta}{\beta} + \operatorname{tg} \omega \, \delta\omega \right\} ,$$

$$\delta\xi = - 2 \xi \frac{\delta\beta}{\beta} .$$

Abbiamo poi dalla (16)

$$\frac{\delta\eta}{\eta} = \frac{\delta X}{X} - \frac{1}{\operatorname{sen} \psi \cos \psi} \delta\psi ,$$

$$\delta\eta = \delta X \operatorname{cotg} \psi - \frac{X}{\operatorname{sen}^2 \psi} \delta\psi ,$$

(12) La (I) della Tabella I, ci dà

$$\frac{z}{\cos^2 \chi} = - \int_{v_0}^{u} \frac{u \, du}{\alpha F(u) - g} ,$$

cambiando χ varia z quindi anche δ_z la quale alla sua volta comparisce nell'espressione

$$\alpha = \beta \frac{\delta_z i}{C} \frac{\cos \chi}{\operatorname{sen} \psi} ,$$

perciò, se si mantiene costante $\beta \cos \chi / \operatorname{sen} \psi$, α viene effettivamente a variare, ma le variazioni di α dovute a questi cambiamenti di δ_z sono trascurabili e perciò non ne teniamo conto.

quindi [vedi (14)]

$$\delta Y = \delta\xi - \delta\eta = -2\xi\frac{\delta\beta}{\beta} - \operatorname{cotg}\psi\,\delta X + \frac{X}{\operatorname{sen}^2\psi}\,\delta\psi = \tag{21}$$

$$= -2(Y + X\operatorname{cotg}\psi)\frac{\delta\beta}{\beta} + X\operatorname{cotg}\psi\left(\frac{\delta\beta}{\beta} + \operatorname{tg}\omega\,\delta\omega\right) + \frac{X}{\operatorname{sen}^2\psi}\,\delta\psi =$$

$$= -(2Y + X\operatorname{cotg}\psi)\frac{\delta\beta}{\beta} + X\operatorname{cotg}\psi\operatorname{tg}\omega\cdot\delta\omega + \frac{X}{\operatorname{sen}^2\psi}\,\delta\psi\,.$$

Dalla (10) segue

$$\delta\psi - \delta\chi = \delta\omega\,,$$

e per essere l'espressione (18) costante

$$\frac{\delta\beta}{\beta} - \operatorname{tg}\chi\,\delta\chi - \operatorname{cotg}\psi\delta\psi = 0\,.$$

Da queste due equazioni si ricava

$$\delta\psi = \frac{\cos\chi\operatorname{sen}\psi}{\cos\omega}\,\frac{\delta\beta}{\beta} + \frac{\operatorname{sen}\chi\operatorname{sen}\psi}{\cos\omega}\,\delta\omega\,,$$

onde, sostituendo nelle (19) e (21), si hanno le formule

$$\delta k = -k\left(1 + \frac{\cos\chi\cos\psi}{\cos\omega}\right)\frac{\delta\beta}{\beta} - k\,\frac{\operatorname{sen}\psi\cos\chi}{\cos\omega}\,\delta\omega\,, \tag{22}$$

$$\delta X = -X\frac{\delta\beta}{\beta} - X\operatorname{tg}\omega\cdot\delta\omega\,, \tag{23}$$

$$\delta Y = (X\operatorname{tg}\omega - 2Y)\frac{\delta\beta}{\beta} + X\,\delta\omega\,, \tag{24}$$

che ci danno le variazioni delle coordinate delle traiettorie in funzione delle variazioni di β e ω.

Dalle (7) si ha

$$\beta t = -\frac{\cos\chi}{\operatorname{sen}\psi}\,\beta\int_{v_0}^{u}\frac{du}{\alpha F(u) - g}\,;$$

quindi il secondo membro non varia se α si mantiene costante.

Dunque

$$\delta\log(\beta t) = 0\,,$$

ossia

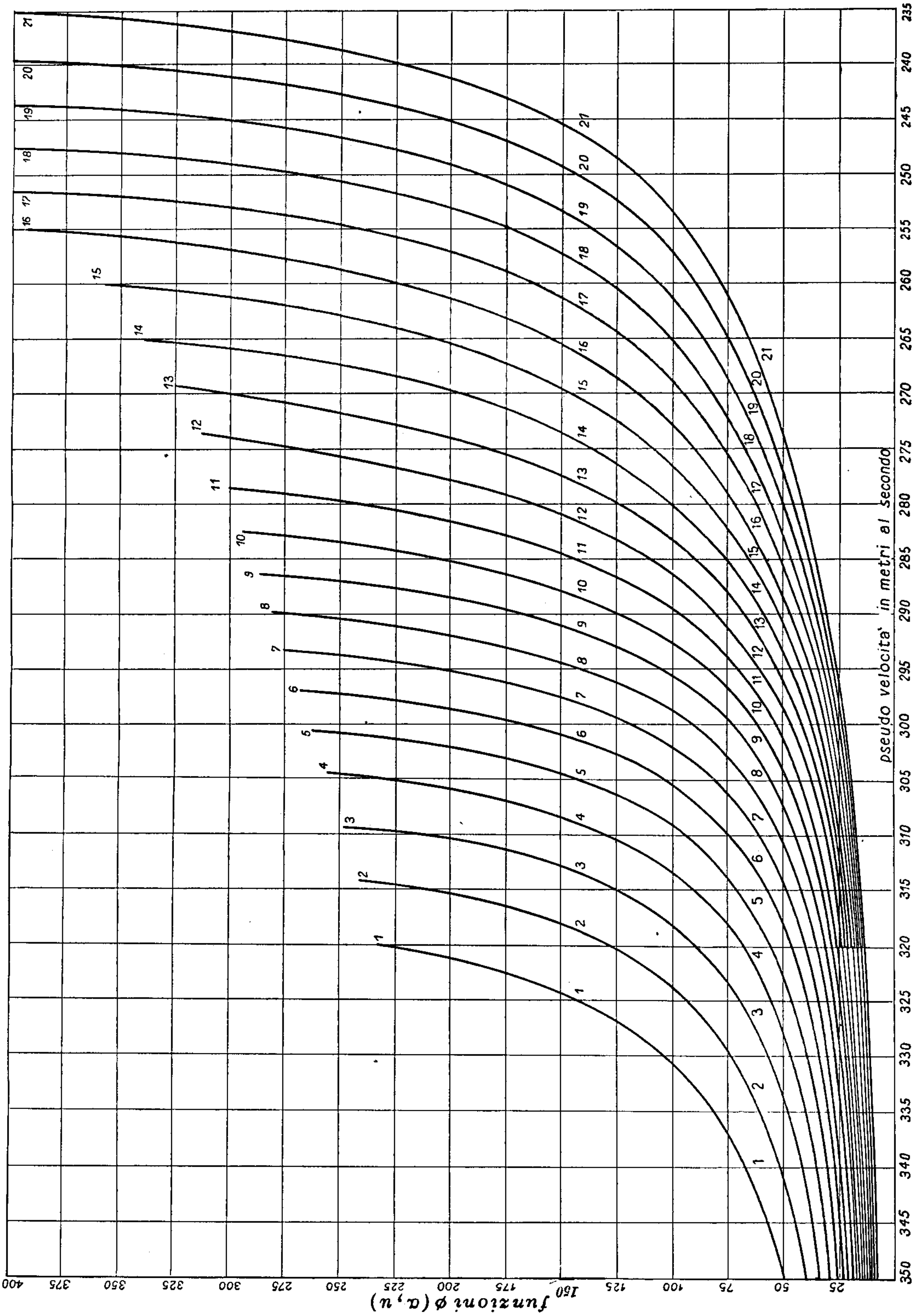
$$\frac{\delta t}{t} + \frac{\delta\beta}{\beta} = 0\,,$$

da cui segue

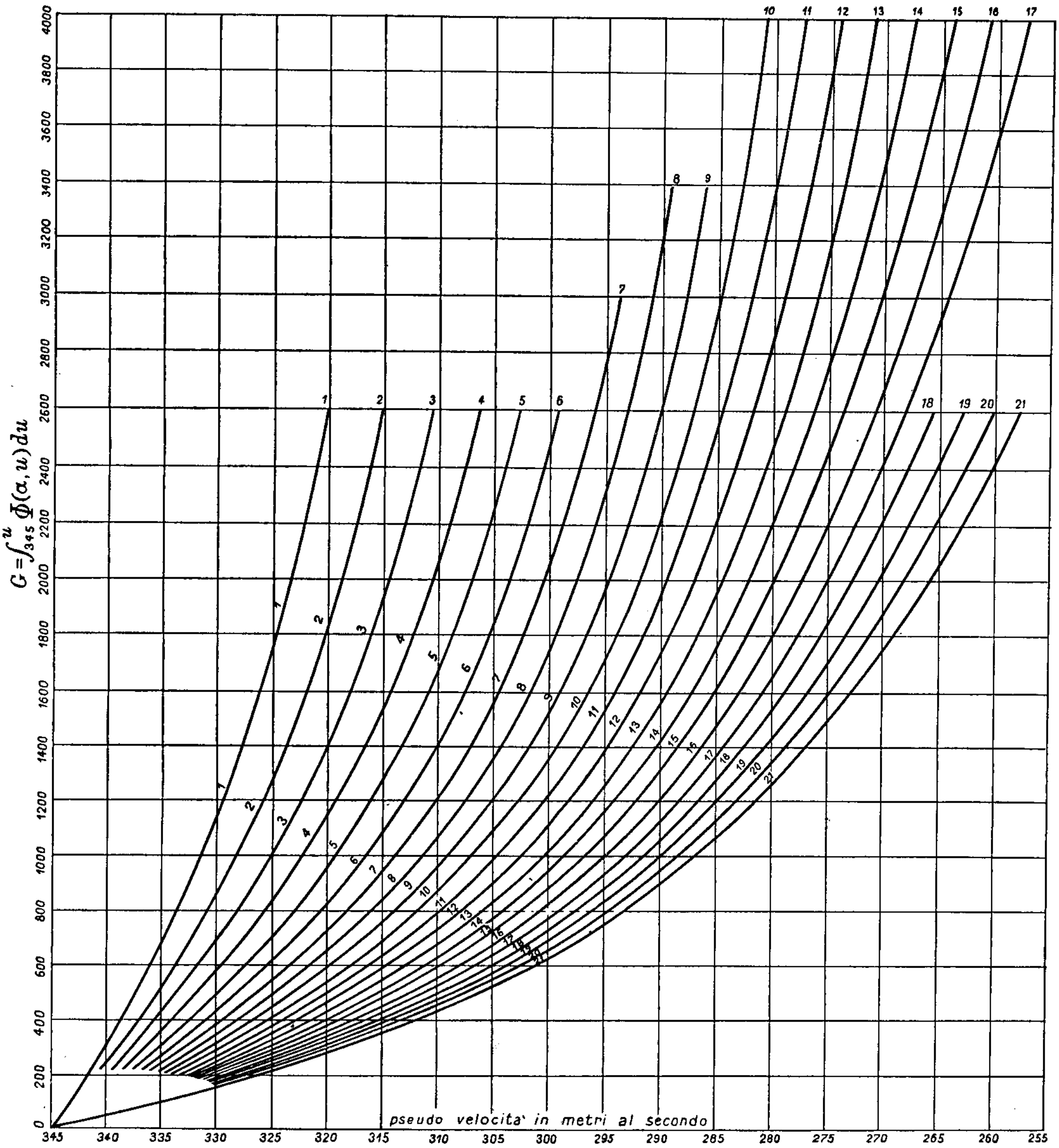
$$\delta t = -t\,\frac{\delta\beta}{\beta}\,.$$

Quest'ultima formula ci fornisce la variazione del tempo corrispondente alle precedenti variazioni nella traiettoria.

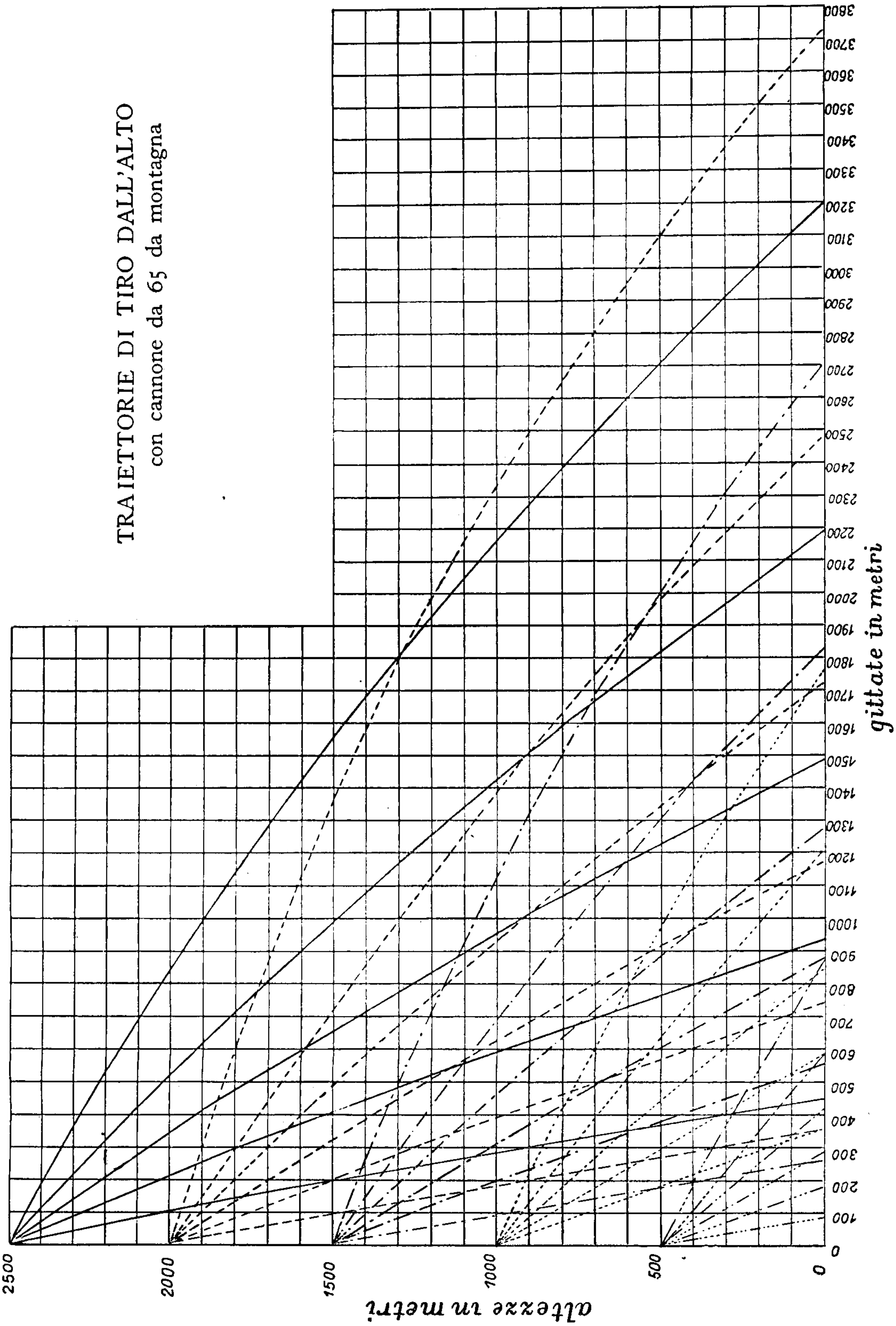
ABACO I°


pseudo velocita' in metri al Secondo
funzioni ø (α, u)
235
240
245
250
255
260
265
270
275
280
285
290
295
300
305
310
315
320
325
330
335
340
345
350
400
375
350
325
300
275
250
225
200
175
150
125
100
75
50
25

ABACO II°



$G = \int_{345}^{u} \Phi(\alpha, u)\, du$
0
200
400
600
800
1000
1200
1400
1600
1800
2000
2200
2400
2600
2800
3000
3200
3400
3600
3800
4000
345
340
335
330
325
320
315
310
305
300
295
290
285
280
275
270
265
260
255
pseudo velocita' in metri al secondo
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20
21


TRAIETTORIE DI TIRO DALL'ALTO
con cannone da 65 da montagna
gittate in metri
altezze in metri
3800
3700
3600
3500
3400
3300
3200
3100
3000
2900
2800
2700
2600
2500
2400
2300
2200
2100
2000
1900
1800
1700
1600
1500
1400
1300
1200
1100
1000
900
800
700
600
500
400
300
200
100
0
2500
2000
1500
1000
500
0

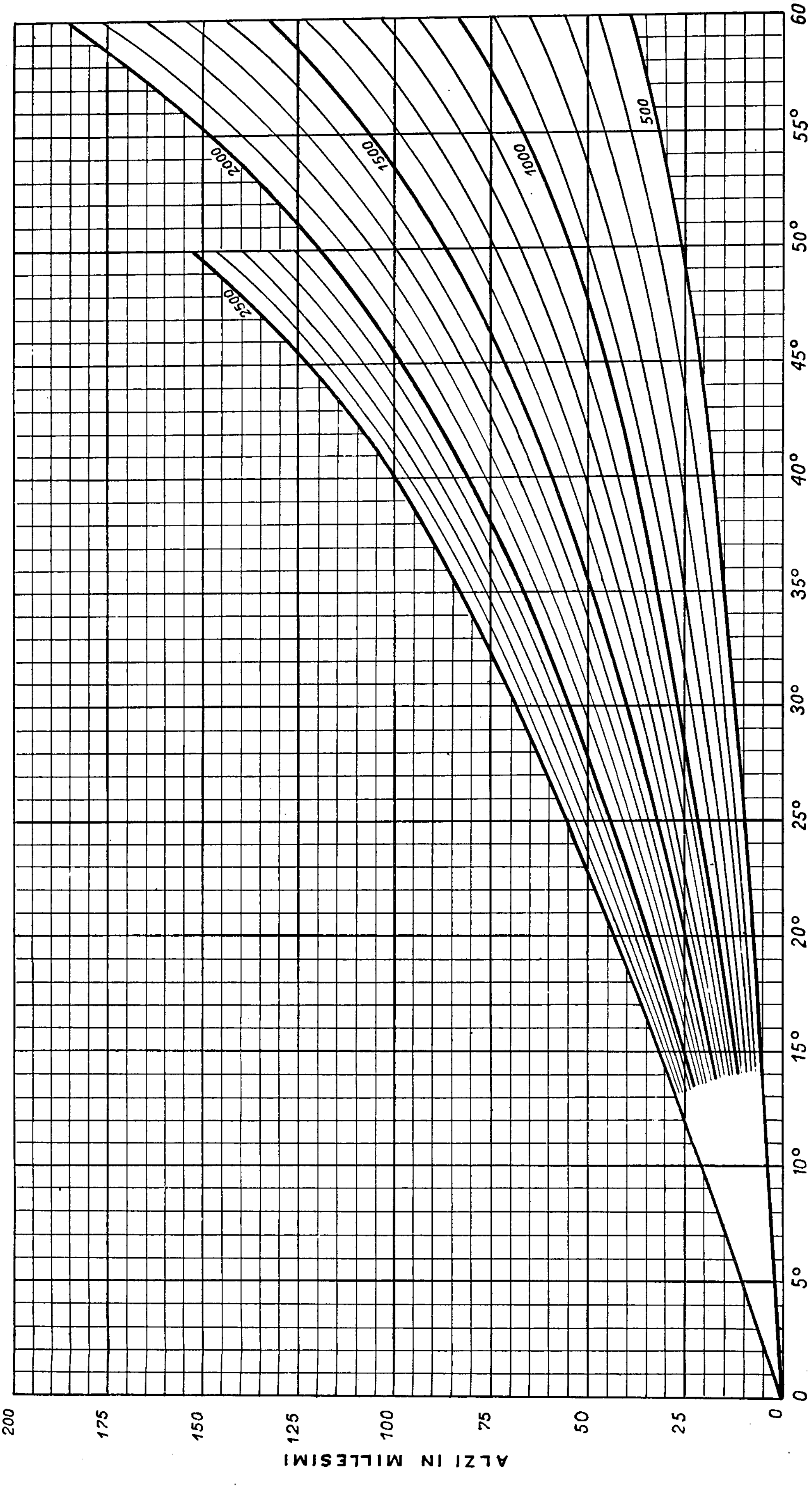


Grafico degli alzi ed angoli di sito colla verticale per il tiro dall'alto (cannone da 65 da montagna).

IX.

THE GENERALIZATION OF ANALYTIC FUNCTIONS (*)

« Rice Institute Pamphlet », vol. IV, 1917; pp. 53–101.

INTRODUCTION.

The generalization which is treated in the following pages has already been the subject of several investigations of mine, in the first place in several notes, published in the " Rendiconti " of the Reale Accademia dei Lincei, then in an extended memoir which appeared in the " Acta Mathematica. " Several of the lectures which I read at Stockholm were also devoted to this subject. And it is now my purpose, in returning to it, to consider the general case in some detail, beginning with the first foundations. In treating the general case it is necessary to consider certain elements, which I have called functions of hyperspaces, and which represent extensions of the functions of curves that I have already treated several times, in particular, in a recent course at the Sorbonne.

A space of n dimensions contains spaces of $0, 1, 2, \cdots, n-1$ dimensions, and for that reason we consider functions of these spaces. We shall begin by extending to these functions the fundamental concepts of continuity and differentiation, and we shall consider the condition that a function be of the first degree. This condition depends upon an extension of STOKES's theorem. We shall then consider a relation between these functions analogous to that of monogeneity, which for functions in the ordinary sense was established by CAUCHY. This leads to new types of equations with functional derivatives, which present analogies with the equation of LAPLACE.

We can separate the functions with which we are dealing into elementary and otherwise. The former have interesting properties and applications. A certain operation of composition turns out to possess quite curious arithmetical properties.

We shall finally develop the operations of differentiation and integration, and the extension of CAUCHY'S theorem in complete generality.

(*) Due conferenze tenute all'inaugurazione del Rice Institute, tradotte dall'italiano dal professore GRIFFITH CONRAD EVANS.

FIRST LECTURE

1. General observations on hyperspaces. — 2. General formulae for matrices, and relations between the direction cosines of hyperspaces. — 3. Functions of hyperspaces and their derivatives. — 4. Extension of STOKES's theorem. — 5. Conditions which the derivatives of functions of hyperspaces must satisfy, and formulae for the transformation of coördinates. — 6. Isogeneity. — 7. Conditions for isogeneity.

1. GENERAL OBSERVATIONS ON HYPERSPACES.

1. A hyperspace (space of n dimensions) will be characterized by the multiplicity of values of n independent variables $x_1, x_2, \cdots, x_n$. A hyperspace S_r of r dimensions ($r < n$), contained in it, will correspond to the multiplicity of values which the $x_1, x_2, \cdots, x_n$ assume when they are constrained by $n - r$ independent relations, or in other words, when they depend on r independent variables $\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_r$ to which they are bound by the n relations

$$(1) \qquad \left\{ \begin{array}{l} x_1 = x_1(\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_r) \\ x_1 = x_2(\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_r) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n = x_n(\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_r). \end{array} \right.$$

We assume the differentiability of the preceding relations, and obtain

$$(2) \qquad dx_i = \sum_1^r {}_s \frac{\partial x_i}{\partial \omega_s} d\omega_s \qquad (i = 1, 2, \cdots, n).$$

2. Let us consider the matrix

$$(3) \qquad \left\| \begin{array}{c} \frac{\partial x_1}{\partial \omega_1}, \frac{\partial x_2}{\partial \omega_1}, \cdots, \frac{\partial x_n}{\partial \omega_1} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{\partial x_1}{\partial \omega_r}, \frac{\partial x_2}{\partial \omega_r}, \cdots, \frac{\partial x_n}{\partial \omega_r} \end{array} \right\|$$

Let Δ^2 be the square of this matrix, and let us assume that if the sign of Δ is given at one point, it is fixed by continuity at all other points. When the sign of Δ is given we shall say that the *direction* of the hyperspace S_r is fixed. The quantity

$$dS_r = \Delta \, d\omega_1 \, d\omega_2 \cdots d\omega_r$$

will be called the *element of the hyperspace.*

Let us take a minor determinant of the matrix (3)

$$\Delta_{i_1, i_2, \dots, i_r} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_{i_1}}{\partial \omega_1}, & \frac{\partial x_{i_2}}{\partial \omega_1}, & \dots, & \frac{\partial x_{i_r}}{\partial \omega_1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial x_{i_1}}{\partial \omega_r}, & \frac{\partial x_{i_2}}{\partial \omega_r}, & \dots, & \frac{\partial x_{i_r}}{\partial \omega_r} \end{vmatrix}$$

and write

$$\alpha_{i_1 i_2, \dots, i_r} = \frac{\Delta_{i_1 i_2, \dots, i_r}}{\Delta} . \tag{4}$$

The $\alpha_{i_1 i_2, \dots, i_r}$ will not change if we substitute for the $\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_r$ other variables bound by arbitrary relations to the first, and their signs will change only if we change the sign of the hyperspace; we shall call them the *direction cosines* of the hyperspace. We see at once that they must satisfy the relation

$$\Sigma_i \, \alpha^2_{i_1 i_2, \dots, i_r} = 1 , \tag{A}$$

in which Σ_i denotes summation extended over all the combinations of the indices i_1, i_2, i_n.

3. If a space S_{n-r} has a point in common with S_r, and the direction cosines of S_{n-r} are denoted by $\beta_{h_1, \dots, h_{n-r}}$, we shall say that the two hyperspaces are normal to each other when we have the relation

$$\alpha_{i_1 i_2, \dots, i_r} = \beta_{h_1 h_2, \dots, h_{n-r}} ,$$

where all the i's are different from the h's, and the series of numbers $i_1 i_2, \cdots, i_r, h_1, h_2, \cdots, h_{n-r}$ is a permutation of the numbers $1, 2, \cdots, n$, which is always odd or always even.

4. Whatever l may be, we can write

$$d\omega_l = \Sigma_i \, A_{i_1 i_2, \dots, i_{r-1}} \frac{d(x_{i_1}, x_{i_2}, \cdots, x_{i_{r-1}})}{d(\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_{l-1}, \omega_{l+1}, \cdots, \omega_r)} \quad (l = 1, 2, \cdots, r), \tag{5}$$

in which the sum is extended over all the combinations of the indices $i_1, i_2, \cdots, i_{r-1}$, and the A's are certain, in part indeterminate, infinitesimal parameters. In fact if we form the matrix of the coefficients of the A's, among its minors will be found the $(r-1)$ th powers of the minors of the matrix (3), and so not all the minors of that matrix can be zero. If we substitute the values (5) in the equations (2) we obtain

$$dx_s = -\Sigma_i \frac{d(x_s, x_{i_1}, \cdots, x_{i_{r-1}})}{d(\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_r)} A_{i_1 i_2, \dots, i_{r-1}} \tag{6}$$

Hence if $a_{i_1, i_2, \dots, i_{r-1}} = -\Delta A_{i_1 i_2, \dots, i_{r-1}}$ we shall have

$$dx_s = \Sigma_i \, a_{i_1 i_2, \dots, i_{r-1}} \alpha_{s i_1 i_2, \dots, i_{r-1}} . \tag{7}$$

5. Besides the equations (A) the α satisfy other relations, which we shall find in the next section.

2. General formulae about matrices. Relations between the direction cosines of a hyperspace.

1. We shall establish in this section several fundamental formulae regarding the minors of matrices, which we shall often have occasion to use.

Let us consider the two matrices

$$(1) \quad \left\| \begin{matrix} a_{11}, a_{12}, \cdots, a_{1n} \\ a_{21}, a_{22}, \cdots, a_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{r1}, a_{r2}, \cdots, a_{rn} \end{matrix} \right\| \qquad\qquad (2) \quad \left\| \begin{matrix} a_{11}, a_{12}, \cdots, a_{1n} \\ a_{21}, a_{22}, \cdots, a_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{p1}, a_{p2}, \cdots, a_{pn} \end{matrix} \right\|$$

the first with r rows, and the second with p rows, $(n > r \geq p)$, both however with the same elements. Let us write

$$\left| \begin{matrix} a_{1i_1} \, a_{1i_2}, \cdots, a_{1i_r} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{ri_1} \, a_{ri_2}, \cdots, a_{ri_r} \end{matrix} \right| = A_{i_1 i_2, \dots, i_r}, \qquad \left| \begin{matrix} a_{1h_1} \, a_{1h_2}, \cdots, a_{1h_p} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{ph_1} \, a_{ph_2}, \cdots, a_{ph_p} \end{matrix} \right| = B_{h_1 h_2, \dots, h_p},$$

and consider

$$\Delta_s = \left| \begin{matrix} a_{si_1} \, a_{si_2}, \cdots, a_{si_{r+1}} \\ a_{1i_1} \, a_{1i_2}, \cdots, a_{1i_{r+1}} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{ri_1} \, a_{ri_2}, \cdots, a_{ri_{r+1}} \end{matrix} \right| = 0 \qquad (s = 1, 2, \cdots, p).$$

We shall have

$$0 = \sum_1^p {}_s \frac{\partial B_{h_1 h_2, \dots, h_p}}{\partial a_{sh_1}} \Delta_s =$$

$$= - \sum_1^p {}_s \frac{\partial B_{h_1 h_2, \dots, h_p}}{\partial a_{sh_1}} \sum_1^{r+1} {}_t (-1)^t a_{si_t} A_{i_1, \dots, i_{t-1} i_{t+1}, \dots, i_{r+1}} =$$

$$= - \sum_1^{r+1} {}_t A_{i_1, \dots, i_{t-1} i_{t+1}, \dots, i_{r+1}} \sum_1^p {}_s (-1)^s a_{si_t} \frac{\partial B_{h_1, \dots, h_p}}{\partial a_{sh_1}} .$$

From this it follows that

$$\sum_1^{r+1} {}_t (-1)^t A_{i_1, \dots, i_{t-1} i_{t+1}, \dots, i_{r+1}} B_{i_t h_2, \dots, h_p} = 0 . \tag{3}$$

2. This is the formula which we wished to obtain. In particular, if we take as identical the two matrices (1) and (2), we shall have

$$(3') \qquad \sum_{1}^{r+1}{}_t (-1)^t A_{i_1,\ldots,i_{t-1} i_{t+1},\ldots,i_{r+1}} A_{i_t h_2,\ldots,h_r} = 0 \text{ [1]}.$$

Among these equations let us notice specially the following, from which the others all follow:

$$(4) \qquad 0 = A_{i_1 i_2 h_1,\ldots,h_{r-2}} A_{i_3 i_4 h_1,\ldots,h_{r-2}} + A_{i_4 i_2 h_1,\ldots,h_{r-2}} A_{i_1 i_3 h_1,\ldots,h_{r-2}} + \\ + A_{i_1 i_4 h_1,\ldots,h_{r-2}} A_{i_4 i_2 h_1,\ldots,h_{r-2}} \text{ [2]}.$$

3. From the preceding formulae we see that the direction cosines of a hyperspace must satisfy the relations

$$(B) \qquad \sum_{1}^{r+1}{}_s (-1)^s \alpha_{i_1 i_2,\ldots,i_{s-1} i_{s+1},\ldots,i_{r+1}} \alpha_{i_s h_2,\ldots,h_r} = 0 .$$

3. Functions of hyperspaces and their derivatives [3].

1. A variable φ will be said to be a *function of the hyperspace* S_r (of r dimensions) or a function of *order* r, if to every possible hyperspace with fixed direction correspond a value of φ. This correspondence will be denoted by means of the symbol $\varphi = \varphi \mid [S_r] \mid$. We shall assume that we are dealing only with closed hyperspaces S_r [4].

Let us take a point P of S_r and through it draw a hyperspace S_{n-r} normal to S_r, taking in S_{n-r} a small neighbourhood s of P. If we make P describe all the points of S_r we shall generate a portion of n-dimensional space, which we shall call a neighbourhood of S_r. While P is describing S_r any other point P′ of s describes a new hyperspace S'_r, which we shall say belongs to the neighbourhood of S_r. The function $\varphi \mid [S_r] \mid$ will be said to be continuous if, when we take a quantity σ arbitrarily small, we can find a neighbourhood of S_r such that

$$\operatorname{mod} [\varphi \mid [s'_r] \mid - \varphi \mid [s_r] \mid] < \sigma ,$$

where S'_r belongs to that neighbourhood.

Besides the continuity of $\varphi \mid [S_r] \mid$ let us admit also the following property. Let us pass from the hyperspace S_r to the hyperspace S'_r by giv-

(1) Vedi ANTONELLI: *Nota sulle relazioni indipendenti, ecc.* «Ann. Scuola Normale sup. di Pisa», Vol. III, p. 71 e seg.).

(2) *Ibid.*, p. 73.

(3) Vedi la mia Nota I: *Sulle funzioni dipendenti da linee*, «Atti R. Acc. Lincei», Vol. III, fasc. 9.

(4) Vedi BETTI: *Sopra gli spazii di un numero qualunque di dimensioni*, «Ann. Mat. pura e appl.», II, 4, 1870, p. 140.

ing to each point of S_r a displacement ε which varies continuously from point to point. The displacement ε generates a hyperspace S_{r+1} of $r+1$ dimensions, of amplitude say, σ. We shall assume that we can make $\{\varphi \mid [S'_r] \mid - \varphi \mid [S_r] \mid\}$ less than a number chosen arbitrarily small, provided σ be less than some value σ_0.

2. With this understood, take in S_r a neighbourhood s of a point P, and give to s a displacement δx_i parallel to x_i. Let us denote by $\delta\varphi$ the corresponding variation of φ, and let us suppose that the value

$$\lim_{\substack{s=0 \\ \delta x_i = 0}} \frac{\delta\varphi}{s \cdot \delta x_i} = \varphi'_{x_i} \qquad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

exists. We shall call this *the derivative of* φ *with respect to* x_i *at the point* P. With the assumption that the ratio which appears in the left-hand member approaches its limit uniformly, with respect to all possible points P and hyperspaces S_r, and that this limit is continuous, we can easily verify the fact that if we give to every point of S_r a displacement of components $\delta x_1, \delta x_2, \cdots, \delta x_n$, the corresponding variation of φ is given, except for infinitesimals of higher order, by the formula

$$(1) \qquad \delta\varphi = \int_{S_r} \sum_{1}^{n}{}_i \, \varphi'_{x_i} \, \delta x_i \, dS_r \, .$$

3. Let us find out now what conditions the φ'_{x_i} must satisfy. If the displacements are such as to carry the space S_r into itself, the quantity $\delta\varphi$ must vanish. Hence we must have $\delta\varphi = 0$ if we take (see § 1, form. 7)

$$\delta x_i = \sum_h a_{h_1 h_2, \cdots, h_{r-1}} \, \alpha_{ih_1, \cdots, h_{r-1}}$$

whatever the quantities a may be. Hence

$$0 = \int_{S_r} \Sigma_h \, \alpha_{h_1 h_2, \cdots, h_{r-1}} \sum_{1}^{n}{}_i \, \varphi'_{x_i} \, \alpha_{ih_1, \cdots, h_{r-1}} \, dS_r \, ,$$

and from this we have

$$(2) \qquad \sum_{1}^{n}{}_i \, \varphi'_{x_i} \, \alpha_{ih_1, \cdots, h_{r-1}} = 0$$

for every possible combination of the indices $h_2, \cdots, h_{r-1}$.

4. Since now the α satisfy the relations § 2, (B), we have

$$\sum_{1}^{r+1}{}_t (-1)^t \, \alpha_{q_t h_1, \cdots, h_{r-1}} \, \alpha_{q_1, \cdots, q_{t-1} q_{t+1}, \cdots, q_{r+1}} = 0 \, .$$

If we multiply this by an undetermined parameter $\lambda_{q_1 q_2,\ldots,q_{r+1}}$ which satisfies the condition that it changes sign for every transposition of the indices, we shall have

$$0 = \Sigma_q \lambda_{q_1 q_2,\ldots,q_{r+1}} \sum_1^{r+1}{}_t (-1)^t \alpha_{q_t h_1,\ldots,h_{r-1}} \alpha_{q_1,\ldots,q_{t-1} q_{t+1},\ldots,q_{r+1}} =$$

$$= \sum_1^n{}_i \Sigma_q \lambda_{iq_1,\ldots,q_r} \alpha_{q_1,\ldots,q_r} \alpha_{ih_1,\ldots,h_{r-1}}$$

and subtracting this from equation (2),

$$0 = \sum_1^n{}_i \{ \varphi'_{x_i} - \Sigma_q \lambda_{iq_1,\ldots,q_r} \alpha_{q_1 q_2,\ldots,q_r} \} \alpha_{ih_1,\ldots,h_{r-1}}$$

whence

$$\varphi'_{x_i} = \Sigma_q \lambda_{iq_1,\ldots,q_r} \alpha_{q_1 q_2,\ldots,q_r} \text{ (5)} . \tag{3}$$

From this it follows that

$$\delta\varphi = \int_{S_r} \sum_1^n{}_i \Sigma_q \lambda_{iq_1,\ldots,q_r} \alpha_{q_1 q_2,\ldots,q_r} \delta x_i \, dS_r =$$

$$= \int_{S_r} \Sigma_q \lambda_{q_1 q_2,\ldots,q_{r+1}} \left\{ \sum_1^{r+1} (-1)^{t-1} \alpha_{q_1 q_2,\ldots,q_{t-1} q_{t+1},\ldots,q_{r+1}} \right\} dS_r .$$

Consider now the elements dS_r and suppose drawn through every point of it a segment of components $\delta x_1, \cdots, \delta x_n$. The locus of these segments will be a space S_{r+1} of $r+1$ dimensions. If the equations of the hyperspace S_r are

$$x_i = x_i(\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_r) \qquad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

the equations of the hyperspace S_{r+1} will be

$$x_i = x_i(\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_r) + \omega_{r+1} \delta x_i \qquad (i = 1, 2, \cdots, n).$$

Let us form the matrix

$$\left\| \begin{matrix} \dfrac{\partial x_i}{\partial \omega_1}, & \dfrac{\partial x_2}{\partial \omega_1}, & \cdots, & \dfrac{\partial x_n}{\partial \omega_1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial x_1}{\partial \omega_r}, & \dfrac{\partial x_2}{\partial \omega_r}, & \cdots, & \dfrac{\partial x_n}{\partial \omega_r} \\ \delta x_1, & \delta x_2, & \cdots, & \delta x_n \end{matrix} \right\| . \tag{4}$$

Let us denote its square by Δ^2_{r+1}, and the square or the matrix obtained from it by taking away the last line by Δ^2_r. We shall have

$$\Delta^2_{r+1} = \Delta^2_r \left\{ \Sigma_q \sum_1^{r+1}{}_t (-1)^{t-1} \alpha_{q_1,\ldots,q_{t-1} q_{t+1},\ldots,q_{r+1}} \delta x_{q_t} \right\}^2 .$$

(5) See my Note II: *Sulle funzioni dipendenti da linee*, « Atti della R. Acc. dei Lincei », Vol. III, fasc. 10.

We can fix the direction of S_{r+1} with respect to S_r in such a way that

$$\Delta_{r+1} = (-1)^r \Delta_r \sqrt{\left\{ \Sigma_q \sum_{1}^{r+1}{}_t (-1)^{t-1} \alpha_{q_1,\ldots,q_{t-1}q_{t+1},\ldots,q_{r+1}} \delta x_{q_t} \right\}^2},$$

where the sign of the radical is taken as positive. If now we denote the direction cosines of S_{r+1} by $\beta_{q_1 q_2,\ldots,q_{r+1}}$, which are calculated from the matrix (4), we shall have finally

$$\delta\varphi = \int_{S_{r+1}} \Sigma_q \lambda_{q_1 q_2,\ldots,q_{r+1}} \beta_{q_1 q_2,\ldots,q_{r+1}} dS_{r+1}.$$

Hence if S_r is a movable hyperspace which passes from S'_r to S''_r, thus generating a S_{r+1}, we shall have

$$\varphi \mid [S''_r \mid - \varphi \mid [S'_r] \mid = \int_{S_{r+1}} \Sigma_q \lambda_{q_1 q_2,\ldots,q_{r+1}} \beta_{q_1 q_2,\ldots,q_{r+1}} dS_{r+1}. \tag{5}$$

It is well to note explicitly that besides varying from point to point of the total hyperspace (of n dimensions), the parameters λ may also vary for one and the same point according to the hyperspace to which they refer, and even for the same hyperspace one set of λ's may be substituted for another provided the relations (3) are always satisfied.

5. A function $\varphi \mid [S_r] \mid$ will be said to be *regular* (or *simple*) when the following condition is satisfied. Let S'_r and S''_r be two hyperspaces having a common portion s, whose direction is different according as it is considered as belonging to the first or the second hyperspace. Denote by S'''_r the hyperspace which we get by taking away s from the combination of S'_r and S'''_r and fix as its direction the direction of those two hyperspaces. We impose the condition

$$\varphi \mid [S'''_r] \mid = \varphi \mid [S'_r] \mid + \varphi \mid [S''_r] \mid.$$

When φ is regular it follows immediately that if S_r decreases indefinitely in amplitude

$$\lim \varphi \mid [S_r] \mid = 0. \tag{C}$$

We have then immediately the further property that if S_r and S'_r are two hyperspaces with a common point P, whose elements at P are contained in a single S_{r+1}, of $r+1$ dimensions,

$$\Sigma_q (\lambda_{q_1 q_2,\ldots,q_{r+1}} - \lambda'_{q_1 q_2,\ldots,q_{r+1}}) \beta_{q_1 q_2,\ldots,q_{r+1}} = 0, \tag{6}$$

where λ and λ' are the parameters which correspond to $\varphi \mid [S_r] \mid$ and $\varphi \mid [S'_r] \mid$ at the point P, and the β's are the direction cosines of S_{r+1}.

Upon this basis let us consider a hyperspace S_r passing through the point P, whose element at P is defined by the equations

$$dx_i = \sum_1^r {}_s\, a_{is}\, d\omega_s \qquad (i = 1, 2, \cdots, n),$$

and let $S_r^{(i_1,\cdots,i_r)(h_1,\cdots,h_p)}$ denote hyperspaces passing through P defined by the equations

$$dx_{i_s} = a_{i_s,s}\, d\omega_s + \sum_1^p {}_t\, a_{i_s,k_t}\, d\omega_{h_t} \qquad \begin{cases} s = 1, 2, \cdots, r \\ s \neq h_1, h_2, \cdots, h_p . \end{cases}$$

$$dx_{i_v} = \sum_1^p {}_t\, a_{i_v,h_t}\, d\omega_{h_t} \qquad (v = h_1, h_2, \cdots, h_p, r+1, \cdots, n).$$

In particular let us consider the hyperspaces $S^{(i_1,\cdots,i_{s-1}\,i_{s+1},\cdots,i_{r+1})}$ and $S_r^{(i_1,\cdots,i_{t-1}i_{t+1},\cdots,i_{r+1})}$ whose elements at P are contained in a hyperspace of $r+1$ dimensions, of which the direction cosines β are zero, except $\beta_{i_1\, i_2,\cdots,i_{r+1}} = 1$. By means of (6), we have

$$\lambda^{(i_1,\cdots,i_{s-1}\,i_{s+1},\cdots,i_{r+1})}_{i_1\, i_2,\cdots,i_{r+1}} = \lambda^{(i_1,\cdots,i_{t-1}\,i_{t+1},\cdots,i_{r+1})}_{i_1\, i_2,\cdots,i_{r+1}},$$

where the indices $i_1\, i_2, \cdots, i_r$ denote the parameters λ corresponding to the hyperspace $S_r^{(i_1,\cdots,i_n)}$. Therefore we can suppress the indices and write simply

$$\lambda^{(i_1,\cdots,i_{s-1}\,i_{s+1},\cdots,i_{r+1})}_{i_1\, i_2,\cdots,i_{r+1}} = \Lambda_{i_1\, i_2,\cdots,i_{r+1}} . \tag{7}$$

6. Two hyperspaces $S_r^{(i_1,\cdots,i_r)(h_1,\cdots,h_{p-1})}$ and $S_r^{(i_1,\cdots,i_r)(h_1,\cdots,h_p)}$ have elements at P which are contained in a S_{r+1}, whose element at P is defined by the equations

$$dx_{i_s} = a_{i_s,s}\, d\omega_s + \sum_1^p {}_t\, a_{i_s,h_t} d\omega_{h_t} \qquad \begin{cases} s = 1, 2, \cdots, r \\ s \neq h_1, h_2, \cdots, h_p \end{cases}$$

$$dx_{i_{h_p}} = a_{i_{h_p},h_p} d\omega_{r+1} + \sum_1^p {}_t\, a_{i_{h_p},h_t} d\omega_{h_t}$$

$$dx_{i_v} = \sum_1^p {}_t\, a_{i_v,h_t} d\omega_{h_t} \qquad (v = h_1, h_2, \cdots, h_{p-1}, r+1, \cdots, n).$$

Hence, if we denote by β the direction cosines of S_{r+1} and by $\alpha^{(i_1,\cdots,i_r)(h_1,\cdots,h_p)}$ the direction cosines of $S_r^{(i_1,\cdots,i_r)(h_1,\cdots,h_p)}$, we shall have

$$\frac{\beta_{i_{h_p}\, m_1\, m_2,\cdots,m_r}}{\alpha^{(i_1,\cdots,i_r)(h_1,\cdots,h_p)}_{m_1\, m_2,\cdots,m_r}} = \varkappa,$$

where $\varkappa$ is independent of the indices $m_1, m_2, \cdots, m_r$, and all the β's are zero, in the indices of which i_{h_p} is missing. From this it follows by reason of (6) that

$$\Sigma_m \left(\lambda^{(i_1,\cdots,i_r)(h_1,\cdots,h_p)}_{i_{h_p} m_1,\cdots,m_r} - \lambda^{(i_1,\cdots,i_r)(h_1,\cdots,h_{p-1})}_{i_{h_p} m_1,\cdots,m_r}\right) \alpha^{(i_1,\cdots,i_r)(h_1,\cdots,h_p)}_{m_1,\cdots,m_r} = 0,$$

where the index $(i_1, \cdots, i_r)(h_1, \cdots, h_p)$, affixed to the λ, means that refers to the hyperspace having the same index. We have then

$$\Sigma_m \lambda^{(i_1,\cdots,i_r)(h_1,\cdots,h_p)}_{i_{h_p} m_1,\cdots,m_r} \alpha^{(i_1,\cdots,i_r)(h_1,\cdots,h_p)}_{m_1,\cdots,m_r} = \Sigma_m \lambda^{(i_1,\cdots,i_r)(h_1,\cdots,h_{p-1})}_{i_{h_p} m_1,\cdots,m_r} \alpha^{(i_1,\cdots,i_r)(h_1,\cdots,h_p)}_{m_1,\cdots,m_r},$$

in which, by means of (3), we can substitute for the $\lambda^{(i_1,\cdots,i_r)(h_1,\cdots,h_p)}_{i_{h_p} m_1,\cdots,m_r}$ the $\lambda^{(i_1,\cdots,i_r)(h_1,\cdots,h_{p-1})}_{i_{h_p} m_1,\cdots,m_r}$, and consequently, the $\Lambda_{i_{h_p} m_1,\cdots,m_r}$ of formula (7).

We observe however that the hyperspace $S_r^{(i_1,\cdots,i_r)(i_1,\cdots,i_p)}$ is nothing but the hyperspace S_r, and therefore we can take for the λ's belonging to this space, at the point P, the λ's without index of formula (6). We have then the theorem.

If φ is a regular function of the hyperspace S_r, contained in a hyperspace S_n, there exist for every point of S_n a system of values which can be considered as the parameters $\lambda_{i_1 i_2,\cdots,i_{r+1}}$ for all the hyperspaces S_r which pass through that point.

7. From the equations (5) (C), assuming that $\varphi | [S_r] |$ is regular we get,

$$(5') \qquad \varphi | [S_r] | = \int_{S_{r+1}} \Sigma_q \Lambda_{q_1 q_2,\cdots,q_{r+1}} \beta_{q_1 q_2,\cdots,q_{r+1}} dS_{r+1}.$$

Here S_{r+1} is an arbitrary hyperspace of $r + 1$ dimensions, whose boundary is S_r. If S_{r+1} grows indefinitely smaller about a point P, by writing

$$S_{r+1} = \int_{S_{r+1}} dS_{r+1}$$

we shall have

$$\lim \frac{\varphi | [S_r] |}{S_{r+1}} = \Sigma_q \Lambda_{q_1 q_2,\cdots,q_{r+1}} \beta_{q_1 q_2,\cdots,q_{r+1}} = \frac{d\varphi}{dS_{r+1}}$$

where the β are the direction cosines of S_{r+1} at P.

Let us take $S_{r+1} = S_{r+1}^{(i_1 i_2,\cdots,i_{r+1})}$ such that at P all the direction cosines β shall be zero except $\beta_{i_1 i_2,\cdots,i_{r+1}} = 1$. We shall have

$$\lim \frac{\varphi | [S_r] |}{S_{r+1}^{(i_1 i_2,\cdots,i_{r+1})}} = \Lambda_{i_1 i_2,\cdots,i_{r+1}}.$$

Therefore we shall write

$$\Lambda_{i_1 i_2,\cdots,i_{r+1}} = \frac{\partial\varphi}{\partial(x_{i_1} x_{i_2}, \cdots, x_{i_{r+1}})},$$

and define this quantity as the *derivative of* φ *with respect to* $x_{i_1} x_{i_2}, \cdots, x_{i_{r+1}}$. What relation must these derivatives satisfy? Before proceeding to the search for these relations, it will be necessary to give an extension of STOKES's theorem, a subject which is dealt with in the next section.

4. Extension of Stokes's theorem.

1. Let $L_{i_1 i_2, \ldots, i_r}$ be functions of the points of the hyperspace S_n, such that every transposition of the indices creates a change of sign, and form the expression

$$M_{i_1 i_2, \ldots, i_{r+1}} = \sum_{1}^{r+1}{}_s (-1)^{s-1} \frac{\partial L_{i_1, \ldots, i_{s-1} i_{s+1}, \ldots, i_{r+1}}}{\partial x_{i_s}}. \tag{1}$$

Let S_{r+1} be a hyperspace, of $r+1$ dimensions, bounded by a set of hyperspaces S_r, let its direction cosines be $\alpha_{i_1 i_2, \ldots, i_{r+1}}$, and form the expression

$$\int_{S_{r+1}} \Omega \, d S_{r+1},$$

putting

$$\Omega = \Sigma_i \, M_{i_1 i_2, \ldots, i_{r+1}} \alpha_{i_1 i_2, \ldots, i_{r+1}}.$$

If the equations of S_{r+1} are

$$x_i = x_i(\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_{r+1}) \qquad (i = 1, 2, \cdots, n),$$

we shall have

$$\Omega \, d S_{r+1} = \Sigma_i \, M_{i_1 i_2, \ldots, i_{r+1}} \frac{d(x_{i_1}, x_{i_2}, \cdots, x_{i_{r+1}})}{d(\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_{r+1})} d\omega_1 d\omega_2, \cdots, d\omega_{r+1} =$$

$$= \Sigma_i \sum_{1}^{n}{}_s \frac{\partial L_{i_1, \ldots, i_{s-1} i_{s+1}, \ldots, i_{r+1}}}{\partial x_{i_s}} \frac{d(x_{i_s}, x_{i_1}, \cdots, x_{i_{s-1}}, x_{i_{s+1}}, \cdots, x_{i_{r+1}})}{d(\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_{r+1})} d\omega_1 d\omega_2, \cdots, d\omega_{r+1} =$$

$$= \Sigma_i \frac{d(L_{i_1, \ldots}, x_{i_1}, x_{i_2}, \cdots, x_{i_r})}{d(\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_{r+1})} d\omega_1 d\omega_2, \cdots, d\omega_{r+1} =$$

$$= \Sigma_i \sum_{1}^{r+1}{}_t (-1)^{t-1} \frac{\partial L_{i_1, \ldots, i_r}}{\partial \omega_t} \frac{d(x_1, \cdots, x_{i_r})}{d(\omega_1, \cdots, \omega_{t-1}, \omega_{t+1}, \cdots, \omega_{r-1})} d\omega_1 d\omega_2, \cdots, d\omega_{r+1}.$$

Hence

$$\int_{S_{r+1}} \Omega \, d S_{r+1} =$$

$$= \int_{S_r} \Sigma_i \sum_{1}^{r+1}{}_t L_{i_1 i_2, \ldots, i_r} \frac{d(x_{i_1} x_{i_2}, \cdots, x_{i_r})}{d(\omega_i, \cdots, \omega_{t-1} \omega_{t+1}, \cdots, \omega_{r+1})} d\omega_i, \cdots, d\omega_{t-1} d\omega_{t+1}, \cdots, d\omega_{r+1}.$$

We can make the hyperspace S depend on r independent parameters $\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2, \cdots, \bar{\omega}_r$, whence we shall have

$$\int_{S_{r+1}} \Omega d S_{r+1} = \int_{S_r} \Sigma_i L_{i_1 i_2, \ldots, i_r} \frac{d(x_{i_1}, x_{i_2}, \cdots, x_{i_r})}{d(\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2, \cdots, \bar{\omega}_r)} d\bar{\omega}_1 d\bar{\omega}_2, \cdots, d\bar{\omega}_r.$$

From this comes the formula

$$(2) \qquad \int_{S_{r+1}} \Sigma_i M_{i_1 i_2, \ldots, i_{r+1}} \alpha_{i_1 i_2, \ldots, i_{r+1}} dS_{r+1} = \int_{S_r} \Sigma_i L_{i_1 i_2, \ldots, i_r} \beta_{i_1 i_2, \ldots, i_r} dS_r,$$

where the β's are the direction cosines of the hyperspace S_r.

2. From these formulae it follows that if

$$\int_{S_r} \Sigma_i L_{i_1 i_2, \ldots, i_r} \beta_{i_1 i_2, \ldots, i_r} dS_r = 0,$$

for every closed hyperspace S_r in the region S_n, the necessary and sufficient conditions that must be satisfied are

$$(3) \qquad M_{i_1 i_2, \ldots, i_{r+1}} = \sum_{1}^{r+1}{}_s (-1)^{s-1} \frac{\partial L_{i_1, \ldots, i_{s-1} i_{s+1}, \ldots, i_{r+1}}}{\partial x_{i_s}} = 0$$

for every combination of the indices $i_1 i_2, \cdots, i_{r+1}$.

5. Conditions which the derivatives of functions of hyperspaces must satisfy. Formulae for the change of coördinates.

1. Let $\varphi | [S_r] |$ be regular, and return to formula (5′) of section 3. Since the integral which appears in the righthand member does not change when S_{r+1} changes, provided the boundary S_r does not change, we must have

$$\int_{S_{r+1}} \Sigma_q \Delta_{q_1 q_2, \ldots, q_{r+1}} \beta_{q_1 q_2, \ldots, q_{r+1}} dS_{r+1} = 0$$

when the integration is extended over any closed hyperspace S_{r+1}. Hence the necessary and sufficient conditions which the Λ must satisfy in order to be the derivatives of a regular function of hyperspaces S_r (see section 4, article 2) is

$$(D) \qquad \sum_{1}^{r+2} (-1)^{s-1} \frac{\partial \Lambda_{i_1, \ldots, i_{s-1} i_{s+1}, \ldots, i_{r+2}}}{\partial x_{i_s}} = 0$$

for every possible combination of the indices $i_1 i_2, \cdots, i_{r+2}$. We can write these equations, making use of the symbols of section 3, article 7, in the form

$$(D') \qquad \sum_{1}^{r+2}{}_s (-1)^{s-1} \frac{\partial}{\partial x_{i_s}} \frac{\partial \varphi}{\partial(x_{i_1}, \cdots, x_{i_{s-1}} x_{i_{s+1}}, \cdots, x_{i_{r+2}})} = 0.$$

We shall call these conditions the *conditions of integrability*.

2. Consider now the formulae for change of variable, transforming the variables $x_1, x_2, \cdots, x_n$ into $x'_1, x'_2, \cdots, x'_n$ by means of the relations

$$x'_i = x'_i(x_1, x_2, \cdots, x_n) \qquad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

such that

$$\frac{d(x'_1, x'_2, \cdots, x'_n)}{d(x_1, x_2, \cdots, x_n)}$$

is always finite and different from zero. Let us consider two regions which correspond in a one-to-one manner, S_n and S'_n, one belonging to the first set of variables, the other to the second. Let S_{r+1} be a hyperspace, bounded by S_r and contained in S_n, and let S'_{r+1}, bounded by S'_r, correspond to it in S'_n. If we suppose that S_{r+1} is given by the equations

$$x_i = x_i(\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_{r+1}) \qquad (i = 1, 2, \cdots, n),$$

we shall have

$$\varphi\,|\,[S_r]\,| = \int\limits_{S_{r+1}} \Sigma_i \frac{\partial\varphi}{\partial(x_{i_1}, x_{i_2}, \cdots, x_{i_{r+1}})} \frac{d(x_{i_1}, \cdots, x_{i_{r+1}})}{d(\omega_1, \cdots, \omega_{r+1})} d\omega_1\, d\omega_2, \cdots, d\omega_{r+1} =$$

$$= \int\limits_{S_{r+1}} \Sigma_i \frac{\partial\varphi}{\partial(x_{i_1}, \cdots, x_{i_{r+1}})} \Sigma_h \frac{d(x_{i_1}, \cdots, x_{i_{r+1}})}{d(x'_{h_1}, \cdots, x'_{h_{r+1}})} \frac{d(x'_{h_1}, \cdots, x'_{h_{r+1}})}{d(\omega_1, \cdots, \omega_{r+1})} d\omega_1, \cdots, d\omega_{r+1} =$$

$$= \int\limits_{S_{r+1}} \Sigma_h \frac{d(x'_{h_1}, \cdots, x'_{h_{r+1}})}{d(\omega_1, \cdots, \omega_{r+1})} \Sigma_i \frac{\partial\varphi}{\partial(x_{i_1}, \cdots, x_{i_{r+1}})} \frac{d(x_{i_1}, \cdots, x_{i_{r+1}})}{d(x'_{h_1}, \cdots, x'_{h_{r+1}})} d\omega_1, \cdots, d\omega_{r+1} =$$

$$= \int\limits_{S'_{r+1}} \Sigma_h \beta'_{h_1, \cdots, h_{r+1}} \left(\Sigma_i \frac{\partial\varphi}{\partial(x_{i_1}, \cdots, x_{i_{r+1}})} \frac{d(x_{i_1}, \cdots, x_{i_{r+1}})}{d(x'_{h_1}, \cdots, x'_{h_{r+1}})}\right) dS'_{r+1}$$

where the β' denote the direction cosines of S'_{r+1}.

If we write

$$\Lambda'_{h_1 h_2, \cdots, h_{r+1}} = \Sigma_i \frac{\partial\varphi}{\partial(x_{i_1}, \cdots, x_{i_{r+1}})} \frac{d(x_{i_1}, \cdots, x_{i_{r+1}})}{d(x'_{h_1}, \cdots, x'_{h_{r+1}})}$$

we shall have

$$\varphi\,|\,[S_r]\,| = \varphi\,|\,[S'_r]\,| = \int\limits_{S'_{r+1}} \Sigma_h \Lambda'_{h_1 h_2, \cdots, h_{r+1}} \beta'_{h_1 h_2, \cdots, h_{r+1}} dS'_{r+1},$$

whence

$$\Lambda'_{h_1, \cdots, h_{r+1}} = \frac{\partial\varphi}{\partial(x'_{h_1} x'_{h_2}, \cdots, x'_{h_{r+1}})} .$$

The desired formulae for the transformation of coördinates become then

$$(1) \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial(x'_{h_1} x'_{h_2}, \cdots, x'_{h_{r+1}})} = \Sigma_i \frac{\partial\varphi}{\partial(x_{i_1} x_{i_2}, \cdots, x_{i_{r+1}})} \frac{d(x_{i_1} x_{i_2}, \cdots, x_{i_{r+1}})}{d(x'_{h_1} x'_{h_2}, \cdots, x'_{h_{r+1}})} .$$

3. If we multiply the preceding equations by

$$\frac{d\,(x_{s_{r+2}}\,x_{s_{r+3}},\cdots,x_{s_n})}{d\,(x'_{h_{r+2}}\,x_{h_{r+3}},\cdots,x_{h_n})}$$

and add them, for all values of the h's, we shall have

$$\Sigma_h \frac{\partial\varphi}{\partial\,(x'_{h_1}\,x'_{h_2},\cdots,x'_{h_{r+1}})}\,\frac{d\,(x_{s_{r+2}}\,x_{s_{r+3}},\cdots,x_{s_n})}{d\,(x'_{h_{r+2}}\,x'_{h_{r+3}},\cdots,x'_{h_n})} = \frac{\partial\varphi}{\partial\,(x_{s_1}\,x_{s_2},\cdots,x_{s_{r+1}})}\,\frac{d\,(x_1\,x_2,\cdots,x_n)}{d\,(x'_1\,x'_2,\cdots,x'_n)}$$

where

$$(h_1\,,h_2\,,\cdots,h_{r+1}\,,h_{r+2}\,,\cdots,h_n) \equiv (s_1\,,s_2\,,\cdots,s_{r+1}\,,s_{r+2}\,,\cdots,s_n) \equiv (1\,,2,\cdots,n),$$

the notation being used to denote the fact that the groups of the h's and of the s's are two even permutations of the first m integers. Hence

$$(2)\quad \frac{\partial\varphi}{\partial\,(x_{s_1}\,x_{s_2},\cdots,x_{s_{r+1}})} = \frac{1}{\dfrac{d\,(x_1\,,x_2\,,\cdots,x_n)}{d\,(x'_1\,x'_2\,,\cdots,x'_n)}}\,\Sigma_h \frac{\partial\varphi}{\partial\,(x'_{h_1}\,x'_{h_2},\cdots,x'_{h_{r+1}})}\,\frac{d\,(x_{s_{r+2}}\,x_{s_{r+3}},\cdots,x_{s_n})}{d\,(x'_{h_{r+2}}\,x'_{h_{r+3}},\cdots,x'_{h_n})}\,.$$

4. By means of the equations (D′), which are satisfied by the functions $\dfrac{\partial\varphi}{\partial\,(x_{s_1}\,,\cdots,x_{s_{r+1}})}$, and the analogous equations satisfied by the functions $\dfrac{\partial\varphi}{\partial\,(x'_{h_1}\,,\cdots,x'_{h_{r+1}})}$, we obtain the theorem:

If the quantities $a_{i_1 i_2,\cdots,i_{r+1}}$ *(which change sign for every transposition in the indices) satisfy the equations*

$$(3)\qquad \sum_{1}^{r+2}{}_s\,(-1)^{s-1}\,\frac{\partial a_{i_1,\cdots,i_{s-1}\,i_{s+1},\cdots,i_{r+2}}}{\partial x_{i_s}} = 0$$

the quantities $a'_{h_1 h_2,\cdots,h_{r+1}}$ *given by the formulae*

$$a'_{h_1 h_2,\cdots,h_{r+1}} = \frac{1}{\dfrac{d\,(x'_1\,,\cdots,x'_n)}{d\,(x_1\,,\cdots,x_n)}}\,\Sigma_i\, a_{i_1 i_2,\cdots,i_{r+1}}\,\frac{d\,(x'_{h_{r+2}}\,x'_{h_{r+3}},\cdots,x'_{h_n})}{d\,(x_{i_{r+2}}\,x_{i_{r+3}},\cdots,x_{i_n})}$$

$$(i_1\,,i_2\,,\cdots,i_n) \equiv (h_1\,,h_2\,,\cdots,h_n) \equiv (1\,,2\,,\cdots,n)$$

will satisfy the analogous equations

$$(3')\qquad \sum_{1}^{r+2}{}_s\,(-1)^{s-1}\,\frac{\partial a'_{h_1,\cdots,h_{s-1}\,h_{s+1},\cdots,h_{r+2}}}{\partial x'_{h_s}} = 0.$$

5. Let us write $\dfrac{\partial\varphi}{\partial\,(x_{i_1}\,,\cdots,x_{i_{r+1}})} = a_{i_1,\cdots,i_{r+1}}\,.$

We wish to show that if the following conditions are satisfied

$$(4)\qquad \sum_{1}^{r+2}(-1)^s\,a_{i_1,\cdots,i_{s-1}\,i_{s+1},\cdots,i_{r+2}}\,a_{i_s\,h_1,\cdots,h_r} = 0$$

and we make a change of variables from the $x_1, x_2, \cdots, x_n$ to the $x'_1, x'_2, \cdots, x'_n$, we shall obtain the result that the quantities

$$a'_{h_1,\cdots,h_{r+1}} = \frac{\partial\varphi}{\partial(x'_{h_1}, \cdots, x'_{h_{r+1}})}$$

will satisfy the analogous equations

$$\sum_{1}^{r+2}{}_s (-1)^s a'_{h_1,\cdots,h_{s-1}\,h_{s+1},\cdots,h_{r+2}}\, a'_{h_s\,i_1,\cdots,i_r} = 0. \tag{4'}$$

In fact if we have the relations (4), the $a_{i_1,\cdots,i_{r+1}}$ will be minor determinants of a matrix

$$\left\| \begin{matrix} A_{1,1} & , A_{1,2} & ,\cdots, A_{1,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{r+1,1} & , A_{r+1,2} & ,\cdots, A_{r+1,n} \end{matrix} \right\|,$$

that is, we can write

$$a_{i_1,\cdots,i_{r+1}} = \left| \begin{matrix} A_{1,i_1} & ,\cdots, A_{1,i_{r+1}} \\ \cdots & \cdots \\ A_{r+1,i_1} & ,\cdots, A_{r+1,i_{r+1}} \end{matrix} \right|.$$

If we write

$$\frac{\partial x_s}{\partial x'_i} = B_{is}$$

we shall have, by means of (1), the equations

$$a'_{h_1,\cdots,h_{r+1}} = \Sigma_i \left| \begin{matrix} A_{1,i_1} & ,\cdots, A_{1,i_{r+1}} \\ \cdots & \cdots \\ A_{r+1,i_1} & ,\cdots, A_{r+1,i_{r+1}} \end{matrix} \right| \left| \begin{matrix} B_{h_1 i_1} & ,\cdots, B_{h_1, i_{r+1}} \\ \cdots & \cdots \\ B_{h_{r+1}, i_1} & ,\cdots, B_{h_{r+1}, i_{r+1}} \end{matrix} \right|$$

that is, if we define $\sum_{1}^{\infty}{}_s A_{is} B_{hs} = C_{ih}$, the relations

$$a'_{h_1,\cdots,h_{r+1}} = \left| \begin{matrix} C_{1,h_1} & ,\cdots, C_{1,h_{r+1}} \\ C_{r+1,h_1} & ,\cdots, C_{r+1,h_{r+1}} \end{matrix} \right|.$$

In other words, the quantities $a'_{h_1,\cdots,h_{r+1}}$ are minor determinants of the matrix

$$\left\| \begin{matrix} C_{11} & , C_{12} & ,\cdots, C_{1n} \\ C_{21} & , C_{22} & ,\cdots, C_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ C_{r+1,1} & , C_{r+1,2} & ,\cdots, C_{r+1,n} \end{matrix} \right\|$$

and so the equations (4′) will be satisfied.

When the equations (4) are satisfied, the function $\varphi\,|\,[S_r]\,|$ is said to be *elementary* (see §§ 10, 14).

6. Isogeneity [6].

1. Two complex functions f, φ, of hyperspaces S_r, which are *regular*, are said to be *isogenous* if in every point of the total hyperspace S_n, the ratio

$$\frac{\dfrac{d\varphi}{dS_{r+1}}}{\dfrac{df}{dS_{r+1}}}$$

is independent of the hyperspace S.

Separating the real and imaginary parts, let us write

$$\frac{\partial f}{\partial (x_{i_1} x_{i_2}, \cdots, x_{i_{r+1}})} = p_{i_1, \cdots, i_{r+1}} + i q_{i_1, \cdots, i_{r+1}} = p_{\mathrm{I}} + i q_{\mathrm{I}},$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial (x_{i_1} x_{i_2}, \cdots, x_{i_{r+1}})} = \omega_{i_1, \cdots, i_{r+1}} + i \chi_{i_1, \cdots, i_{r+1}} = \bar{\omega}_{\mathrm{I}} + i \chi_{\mathrm{I}},$$

where I denotes the set of indices $i_1 i_2, \cdots, i_{r+1}$, that is, $\mathrm{I} \equiv (i_1, \cdots, i_{r+1})$. The necessary and sufficient condition in order that f and φ be isogenous may be written

$$\frac{\bar{\omega}_{\mathrm{I}} + i\chi_{\mathrm{I}}}{p_{\mathrm{I}} + i q_{\mathrm{I}}} = \frac{\bar{\omega}_{\mathrm{H}} + i\chi_{\mathrm{H}}}{p_{\mathrm{H}} + i q_{\mathrm{H}}}, \tag{1}$$

where $\mathrm{H} \equiv (h_1 h_2, \cdots, h_{r+1})$ is another arbitrary combination of the indices. From the preceding equations we find

$$\left\{ \begin{aligned} \bar{\omega}_{\mathrm{I}} p_{\mathrm{H}} - \bar{\omega}_{\mathrm{H}} p_{\mathrm{I}} &= \chi_{\mathrm{I}} q_{\mathrm{H}} - \chi_{\mathrm{H}} q_{\mathrm{I}}, \\ \bar{\omega}_{\mathrm{I}} q_{\mathrm{H}} - \bar{\omega}_{\mathrm{H}} q_{\mathrm{I}} &= \chi_{\mathrm{H}} p_{\mathrm{I}} - \chi_{\mathrm{I}} p_{\mathrm{H}}. \end{aligned} \right. \tag{2}$$

2. Let us write

$$p_{\mathrm{I}} p_{\mathrm{H}} + q_{\mathrm{I}} q_{\mathrm{H}} = \mathrm{E}_{\mathrm{I,H}},$$

$$p_{\mathrm{I}} q_{\mathrm{H}} - p_{\mathrm{H}} q_{\mathrm{I}} = \mathrm{D}_{\mathrm{I,H}}.$$

Among the E's and D's we shall have the relations

$$\mathrm{D_{IH}}\, \mathrm{E_{LK}} + \mathrm{D_{HK}}\, \mathrm{E_{LI}} + \mathrm{D_{KI}}\, \mathrm{E_{LH}} = 0, \tag{3}$$

$$\begin{vmatrix} \mathrm{E_{IH}} & \mathrm{E_{IL}} \\ \mathrm{E_{KH}} & \mathrm{E_{KL}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} p_{\mathrm{I}} p_{\mathrm{H}} + q_{\mathrm{I}} q_{\mathrm{H}} & p_{\mathrm{I}} p_{\mathrm{L}} + q_{\mathrm{I}} q_{\mathrm{L}} \\ p_{\mathrm{K}} p_{\mathrm{H}} + q_{\mathrm{K}} q_{\mathrm{H}} & p_{\mathrm{K}} p_{\mathrm{L}} + q_{\mathrm{K}} q_{\mathrm{L}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} p_{\mathrm{I}} & q_{\mathrm{I}} \\ p_{\mathrm{K}} & q_{\mathrm{K}} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} p_{\mathrm{H}} & q_{\mathrm{H}} \\ p_{\mathrm{L}} & q_{\mathrm{L}} \end{vmatrix} = \mathrm{D_{IK}}\, \mathrm{D_{HL}}$$

(6) See my note: *Sopra una estensione della teoria di Riemann sulle funzioni di variabile complessa*, «Atti della R. Acc. dei Lincei», Vol. III, fasc. 10.

whence

$$E_{IH}\,E_{KL} - E_{KH}\,E_{IL} = D_{IK}\,D_{HL}\,. \tag{4}$$

3. If we solve the equations (2) for $\bar{\omega}_I$ and χ_I, we shall have

$$\bar{\omega}_I = \frac{E_{IH}\,\chi_I - E_{II}\,\chi_H}{D_{HI}} \quad , \quad \chi_I = \frac{E_{IH}\,\bar{\omega}_I - E_{II}\,\bar{\omega}_H}{D_{IH}}\,.$$

Since, however, the first member of these equations does not depend on H, we must have

$$\bar{\omega}_I = \frac{E_{IH}\,\chi_I - E_{II}\,\chi_H}{D_{HI}} = \frac{E_{IK}\,\chi_I - E_{II}\,\chi_K}{D_{KI}} =$$

$$= \frac{(E_{IH}\,\chi_I - E_{II}\,\chi_H)\,E_{IK} - (E_{IK}\,\chi_I - E_{II}\,\chi_K)\,E_{IH}}{D_{HI}\,E_{IK} - D_{KI}\,E_{IH}} = \frac{E_{IH}\,\chi_K - E_{IK}\,\chi_H}{D_{HK}}\,.$$

In a similar way we can operate on the expression for χ_I, and therefore whatever H and K may be we have the formulae

$$\bar{\omega}_I = \frac{E_{IH}\,\chi_K - E_{IK}\,\chi_H}{D_{HK}} \quad , \quad \chi_I = \frac{E_{IH}\,\bar{\omega}_K - E_{IK}\,\bar{\omega}_H}{D_{KH}}\,. \tag{E}$$

4. From the preceding formulae it follows that

$$D_{HK}\,\bar{\omega}_I = E_{IH}\,\chi_K - E_{IK}\,\chi_H\,,$$

$$D_{KI}\,\bar{\omega}_H = E_{HK}\,\chi_I - E_{HI}\,\chi_K\,,$$

$$D_{IH}\,\bar{\omega}_K = E_{KI}\,\chi_H - E_{KH}\,\chi_I\,,$$

hence, whatever I , H , K may be, we have the formula

$$D_{HK}\,\bar{\omega}_I + D_{KI}\,\bar{\omega}_H + D_{IH}\,\bar{\omega}_K = 0, \tag{F}$$

and similarly, $D_{HK}\,\chi_I + D_{KI}\,\chi_H + D_{IH}\,\chi_K = 0$.

5. Let us return to the equations (E); from them it follows that

$$\Theta_{IL} = \frac{1}{D_{IL}}\begin{vmatrix} \bar{\omega}_I & \chi_I \\ \bar{\omega}_L & \chi_L \end{vmatrix} = \frac{\chi_K\,E_{IH} - \chi_H\,E_{IK}}{D_{IL}\,D_{HK}}\,\chi_L - \frac{\chi_K\,E_{LH} - \chi_H\,E_{LK}}{D_{IL}\,D_{HK}}\,\chi_I = \tag{5}$$

$$= \frac{E_{IH}\,\chi_K\,\chi_L - E_{IK}\,\chi_H\,\chi_L + E_{LK}\,\chi_H\,\chi_I - E_{LH}\,\chi_K\,\chi_I}{D_{IL}\,D_{HK}}\,.$$

If we interchange I with H and L with K the last member of this equation will not change. Hence we shall have

$$\frac{1}{D_{IL}}\begin{vmatrix} \bar{\omega}_I & \chi_I \\ \bar{\omega}_L & \chi_L \end{vmatrix} = \frac{1}{D_{HK}}\begin{vmatrix} \bar{\omega}_H & \chi_H \\ \bar{\omega}_K & \chi_K \end{vmatrix}\,. \tag{6}$$

In other words, the quantities Θ_{IL} are independent of I and L, and so we can denote them all by Θ.

If in (5) we put $I = H$, $L = K$, we shall have

$$(7) \qquad \Theta = \frac{E_{II}\chi_L^2 - 2E_{IL}\chi_I\chi_L + E_{LL}\chi_I^2}{D_{IL}^2} = \frac{(p_I\chi_L - p_L\chi_I)^2 + (q_I\chi_L - q_L\chi_I)^2}{D_{IL}^2}$$

formulae which show that Θ is a *positive* quantity. If in (5) we interchange $\overline{\omega}$ and χ, and p and q, the Θ not will change, and we shall have for Θ the alternative expression

$$(5') \qquad \Theta = \frac{E_{IH}\overline{\omega}_K\overline{\omega}_L - E_{IK}\overline{\omega}_H\overline{\omega}_L + E_{LK}\overline{\omega}_H\overline{\omega}_I - E_{LH}\omega_K\omega_I}{D_{IL}D_{HK}}.$$

If we write $\varphi = \varphi_1 + i\varphi_2$ and make use of our symbols $I, H, \cdots$, we can write

$$\omega_I = \overline{\omega}_{i_1,\ldots,i_{r+1}} = \frac{\partial\varphi_1}{\partial(x_{i_1}, x_{i_2}, \cdots, x_{i_{r+1}})} = \frac{\partial\varphi_1}{\partial(x_I)},$$

$$\chi_1 = \chi_{i_1,\ldots,i_{r+1}} = \frac{\partial\varphi_2}{\partial(x_{i_1}, x_{i_2}, \cdots, x_{i_{r+1}})} = \frac{\partial\varphi_2}{\partial(x_I)},$$

where (x_I) is a substitute for $(x_{i_1}, x_{i_2}, \cdots, x_{i_{r+1}})$, i.e.

$$(x_I) \equiv (x_{i_1}, x_{i_2}, \cdots, x_{i_{r+1}}).$$

The expression for Θ can now be written

$$(G) \quad \Theta = \frac{E_{IH}\dfrac{\partial\psi}{\partial(x_I)}\dfrac{\partial\psi}{\partial(x_L)} - E_{IK}\dfrac{\partial\psi}{\partial(x_H)}\dfrac{\partial\psi}{\partial(x_K)} + E_{LK}\dfrac{\partial\psi}{\partial(x_H)}\dfrac{\partial\psi}{\partial(x_I)} - E_{LH}\dfrac{\partial\psi}{\partial(x_K)}\dfrac{\partial\psi}{\partial(x_I)}}{D_{IL}D_{HK}}$$

where in place of ψ we can put either φ_1 or φ_2.

6. We know that the quantities $\overline{\omega}$ and χ must satisfy the following equations (see section 5, article 1)

$$\sum_1^{r+2}{}_s (-1)^{s-1}\frac{\partial}{\partial x_s}\overline{\omega}_{i_1,\ldots,i_{s-1}i_{s+1},\ldots,i_{r+2}} = 0 \quad , \quad \sum_1^{r+2}{}_s (-1)^{s-1}\frac{\partial}{\partial x_s}\chi_{i_1,\ldots,i_{s-1}i_{s+1},\ldots,i_{r+2}}$$

and therefore, from (E), we have the following equations

$$(H) \quad \left\{ \begin{aligned} &\sum_1^{r+2}{}_s (-1)^{s-1}\frac{\partial}{\partial x_s}\left\{\frac{\chi_K E_{i_1,\ldots,i_{s-1}i_{s+1},\ldots,i_{r+2},H} - \chi_H E_{i_1,\ldots,i_{s-1}i_{s+1},\ldots,i_{r+2},K}}{D_{HK}}\right\} = 0 \\ &\sum_1^{r+2}{}_s (-1)^{s-1}\frac{\partial}{\partial x_s}\left\{\frac{\overline{\omega}_K E_{i_1,\ldots,i_{s-1}i_{s+1},\ldots,i_{r+2},H} - \overline{\omega}_H E_{i_1,\ldots,i_{s-1}i_{s+1},\ldots,i_{r+2},K}}{D_{HK}}\right\} = 0 \end{aligned} \right.$$

or, by reason of (H) and (F), φ_1 and φ_2 must satisfy the equations

$$(H') \quad \sum_1^{r+2}{}_s (-1)^{s-1}\frac{\partial}{\partial x_s}\left[\frac{E_{i_1,\ldots,i_{s-1}i_{s+1},\ldots,i_{r+2},H}\dfrac{\partial\psi}{\partial(x_K)} - E_{i_1,\ldots,i_{s-1}i_{s+1},\ldots,i_{r+2},K}\dfrac{\partial\psi}{\partial(x_H)}}{D_{HK}}\right] = 0$$

$$(F') \qquad D_{HK}\frac{\partial\psi}{\partial(x_I)} + D_{KI}\frac{\partial\psi}{\partial(x_H)} + D_{IH}\frac{\partial\psi}{\partial(x_K)} = 0.$$

7. Conversely it can be shown that if $\psi\,|\,[S_r]\,|$ is a real regular function and satisfies the preceding equations, it may be considered as the real part of a function $\psi + i\theta$ isogenous to f. In fact, by means of (H′) we can write

$$\frac{E_{I,H}\dfrac{\partial\psi}{d(x_K)} - E_{I,K}\dfrac{\partial\psi}{\partial(x_H)}}{D_{HK}} = \frac{\partial\theta_{H,K}}{\partial(x_I)}$$

where $(x_I) = (x_{i_1}, \cdots, x_{i_{s-1}}\, x_{i_{s+1}}, \cdots, x_{i_{r+2}})$. But from (F′) and (3) it follows that the first member of the preceding equations is independent of H and K, hence we can take the θ_{HK} as independent of their subscripts and write them all equal to θ, so that

$$\frac{E_{IH}\dfrac{\partial\psi}{\partial(x_K)} - E_{IK}\dfrac{\partial\psi}{\partial(x_H)}}{D_{HK}} = \frac{\partial\theta}{\partial(x_I)}\,.$$

And now if from these equations we follow the inverse procedure to that of articles 1, 2, 3, we find that the ratio

$$\frac{\dfrac{\partial(\psi + i\theta)}{\partial(x_I)}}{p_I + iq_I}$$

is independent of the indices (I), so that $\psi + i\theta$ is isogenous to f. The equations (H′) and (F′) operate in our case in the same way as the equation $\Delta^2 = 0$ in the theory of Riemann.

7. Conditions for isogeneity.

1. If we take arbitrarily a regular function of hyperspaces S_r it will not always be possible to associate with it an isogenous function. In order for that it is necessary that certain conditions be satisfied. In fact if $F\,|\,[S_r]\,|$ is a regular function to which $\Phi\,|\,[S_r]\,|$ is isogenous, and we write

$$\frac{\partial F}{\partial(x_{i_1}, \cdots, x_{i_{r+1}})} = p_{i_1,\cdots,i_{r+1}}\ , \qquad \frac{\partial\Phi}{\partial(x_{i_1}, \cdots, x_{i_{r+1}})} = \overline{\omega}_{i_1,\cdots,i_{r+1}}\,,$$

we must have

$$\frac{\overline{\omega}_{i_1,\cdots,i_{r+1}}}{p_{i_1,\cdots,i_{r+1}}} = \varphi$$

where φ is independent of the indices $i_1, \cdots, i_{r+1}$, Hence it follows that

$$\overline{\omega}_{i_1,\cdots,i_{r+1}} = \varphi p_{i_1,\cdots,i_{r+1}}$$

so that

$$0 = \sum_1^{r+2}{}_s(-1)^s \frac{\partial\overline{\omega}_{i_1,\cdots,i_{s-1}\,i_{s+1},\cdots,i_{r+2}}}{\partial x_{i_s}} = \sum_1^{r+2}{}_s(-1)^s \frac{\partial(\varphi p_{i_1,\cdots,i_{s-1}\,i_{s+1},\cdots,i_{r+2}})}{\partial x_{i_s}} =$$

$$= \sum_1^{r+2}{}_s(-1)^s\, p_{i_1,\cdots,i_{s-1}\,i_{s+1},\cdots,i_{r+1}} \frac{\partial\varphi}{\partial x_{i_s}}$$

From this we conclude that *it is necessary and sufficient in order that there may exist a function isogenous to* F | [S_r] | *that the system of simultaneous linear differential equations*

$$(1) \qquad \sum_{1}^{r+2}{}_s (-1)^s p_{i_1,\dots,i_{s-1}\, i_{s+1},\dots,i_{r+2}} \frac{\partial\varphi}{\partial x_{i_s}} = 0$$

admit solutions.

It is for this reason that in § 9 we shall study systems of differential equations of this form. In the meantine let us observe that the equations (1) may in some cases be incompatible. Thus, if we have in four dimensions the regular function F| [S_1] |, the equations (1) become

$$-p_{23}\frac{\partial\varphi}{\partial x_1} + p_{13}\frac{\partial\varphi}{\partial x_2} - p_{12}\frac{\partial\varphi}{\partial x_3} = 0,$$

$$-p_{34}\frac{\partial\varphi}{\partial x_2} + p_{24}\frac{\partial\varphi}{\partial x_3} - p_{23}\frac{\partial\varphi}{\partial x_4} = 0,$$

$$-p_{41}\frac{\partial\varphi}{\partial x_3} + p_{31}\frac{\partial\varphi}{\partial x_4} - p_{34}\frac{\partial\varphi}{\partial x_1} = 0,$$

$$-p_{12}\frac{\partial\varphi}{\partial x_4} + p_{42}\frac{\partial\varphi}{\partial x_1} - p_{41}\frac{\partial\varphi}{\partial x_2} = 0,$$

and these equations will be incompatible unless

$$p_{12}\,p_{34} + p_{13}\,p_{42} + p_{14}\,p_{23} = 0.$$

2. We now proceed to prove the following theorem:

The necessary and sufficient condition in order that equations (1) *admit a common solution* φ *is that we can write*

$$(2) \qquad p_{i_1,\dots,i_{r+1}} = \sum_{1}^{r+1}{}_s (-1)^s \frac{\partial\varphi}{\partial x_{i_s}} \frac{\partial\psi}{\partial(x_{i_1},\dots,x_{i_{s-1}} x_{i_{s+1}},\dots,x_{i_{r+1}})}$$

where ψ *is a regular function of hyperspaces.*

Let us write

$$\frac{\partial\psi}{\partial(x_{i_1},\dots,x_{i_r})} = q_{i_1,\dots,i_r}.$$

It is easy to show that if the equations

$$(2') \qquad p_{i_1,\dots,i_{r+1}} = \sum_{1}^{r+1}{}_s (-1)^s \frac{\partial\varphi}{\partial x_{i_s}} q_{i_1,\dots,i_{s-1}\, i_{s+1},\dots,i_{r+1}}$$

are satisfied, the equations (1) will also be satisfied. In fact, we shall have

$$\sum_{1}^{r+2}{}_t (-1)^t p_{i_1,\dots,i_{t-1}\, i_{t+1},\dots,i_{r+2}} \frac{\partial\varphi}{\partial x_{i_t}} =$$

$$= \sum_{1}^{r+2}{}_t \sum_{1}^{r+2\,(t)}{}_s (-1)^{s'+t} \frac{\partial\varphi}{\partial x_{i_s}} \frac{\partial\varphi}{\partial x_{i_t}} q_{i_1,\dots,i_{s-1}\, i_{s+1},\dots,i_{t-1}\, i_{t+1},\dots,i_{r+2}},$$

in which $\sum_{1}^{r+2}{}_s^{(t)}$ is extended over all the values of the index s from 1 to $r+2$, the value t excepted, and s' should be taken equal to s or to $s-1$ according as $s<t$ or $s>t$. Hence the left-hand member of the equation is zero, and the equations (1) are satisfied. From (2') it also follows easily that

$$\sum_{1}^{r+2}{}_s (-1)^s \frac{\partial p_{i_1,\dots,i_{s-1}\, i_{s+1},\dots,i_{r+2}}}{\partial x_{i_s}} = 0 .$$

Thus we have shown that our condition is sufficient. To show that it is also necessary, let us execute a change of variables, instead of $x_1, x_2, \dots, x_n$ taking $x'_1 = \varphi, x'_2 = x_2; \dots, x'_n = x_n$. If we prime the letters which refer to the new variables, we shall have

1st) if $$i_1, i_2, \dots, i_r \neq 1$$

$$q_{i_1,\dots,i_r} = q'_{i_1,\dots,i_r} + \sum_{1}^{r}{}_t (-1)^{t-1} q'_{1\, i_1,\dots,i_{t-1}\, i_{t+1},\dots,i_r} \frac{\partial \varphi}{\partial x_{i_t}} ,$$

2d) if $$i_h = 1$$

$$q_{i_1,\dots,i_r} = \sum_{1}^{r}{}_s (-1)^{s-1} q'_{1\, i_1,\dots,i_{s-1}\, i_{s+1},\dots,i_r} \frac{\partial \varphi}{\partial x_{i_s}} = (-1)^{h-1} q'_{1\, i_1,\dots,i_{h-1}\, i_{h+1},\dots,i_r} \frac{\partial \varphi}{\partial x_{i_h}} .$$

Supposing momentarily that $i_1, \dots, i_{r+1} \neq 1$ we shall have

$$p_{i_1,\dots,i_{r+1}} = \sum_{1}^{r+1}{}_s (-1)^s \frac{\partial \varphi}{\partial x_{i_s}} q'_{i_1,\dots,i_{s-1}\, i_{s+1},\dots,i_{r+1}} +$$

$$+ \sum_{1}^{r+1}{}_s (-1)^s \frac{\partial \varphi}{\partial x_{i_s}} \sum_{1}^{r+1}{}_t^{(s)} (-1)^{t'} q'_{1\, i_1,\dots,i_{t-1}\, i_{t+1},\dots,i_{s-1}\, i_{s+1}\, i_{r+1}} \frac{\partial \varphi}{\partial x_{i_t}} ,$$

where $t' = \begin{cases} t-1 \\ t \end{cases}$ according as $\begin{cases} t<s \\ t>s. \end{cases}$

Hence

$$p_{i_1,\dots,i_{r+1}} = \sum_{1}^{r+1}{}_s (-1)^s q'_{i_1,\dots,i_{s-1}\, i_{s+1},\dots,i_{r+1}} \frac{\partial \varphi}{\partial x_{i_s}} . \tag{3}$$

If we suppose instead that some one of the indices of p is equal to 1, say $i_1 = 1$, we shall have

$$p_{1\, i_2,\dots,i_{r+1}} = -\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} q'_{i_2,\dots,i_{r+1}} - \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \sum_{2}^{r+1}{}_t (-1)^t q'_{1\, i_2,\dots,i_{t-1}\, i_{t+1},\dots,i_{r+1}} \frac{\partial \varphi}{\partial x_{i_t}} + \tag{3'}$$

$$+ \sum_{2}^{r+1}{}_s (-1)^s q'_{1\, i_2,\dots,i_{s-1}\, i_{s+1},\dots,i_{r+1}} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \frac{\partial \varphi}{\partial x_{i_s}} = -\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} q'_{i_2,\dots,i_{r+1}} .$$

We shall show that (3) is a consequence of (3'). In fact, from (3') we have

$$q'_{i_2,\dots,i_{r+1}} = -\frac{p_{1\, i_2,\dots,i_{r+1}}}{\left(\dfrac{\partial \varphi}{\partial x_1}\right)} ,$$

so that (3) becomes

$$p_{i_1,\dots,i_{r+1}} = -\sum_{1}^{r+1}{}_s (-1)^s \frac{p_{1\, i_1,\dots,i_{s-1},\, i_{s+1},\dots,i_{r+1}}}{\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_1}} \frac{\partial\varphi}{\partial x_{i_s}},$$

and if we put $i_0 = 1$, this gives us

$$\sum_{0}^{r+1}{}_s (-1)^s p_{i_0 i_1,\dots,i_{s-1}\, i_{s+1},\dots,i_r} \frac{\partial\varphi}{\partial x_{i_s}} = 0,$$

an equation which is identically true.

We must now prove that the functions

$$q'_{i_2,\dots,i_{r+1}} = -\frac{p_{1\, i_2,\dots,i_{r+1}}}{\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_1}}$$

satisfy the conditions of integrability (see section 5, article 1), assuming therein that φ is constant.

We have in fact (see section 5, article 3)

$$p'_{1\, i_2,\dots,i_{r+1}} = \frac{1}{\dfrac{d(\varphi, x_2, \dots, x_n)}{d(x_1, x_2, \dots, x_n)}} \Sigma_h\, p_{h_1 h_2,\dots,h_{r+1}} \frac{d(x_{i_{r+2}}, \dots, x_{i_n})}{d(x_{h_{r+2}}, \dots, x_{h_n})},$$

where

$$(h_1, h_2, \dots, h_{r+1}, h_{r+2}, \dots, h_n) \equiv (1, i_2, \dots, i_{r+1}, i_{r+2}, \dots, i_n) \equiv (1, 2, \dots, n)$$

so that

$$p'_{1\, i_2,\dots,i_{r+1}} = \frac{p_{1\, i_2,\dots,i_{r+1}}}{\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_1}\right)}.$$

If $i_1, i_2, \dots, i_{r+1} \neq 1$, we have (see section 5, article 3)

$$p'_{i_1,\dots,i_{r+1}} = \frac{1}{\dfrac{d(\varphi, x_2, \dots, x_n)}{d(x_1, x_2, \dots, x_n)}} \Sigma_h\, p_{h_1,\dots,h_{r+1}} \frac{d(x_{i_{r+2}}, \dots, x_{i_n})}{d(x_{h_{r+2}}, \dots, x_{h_n})} =$$

$$= \frac{1}{\dfrac{d\varphi}{dx_1}} \sum_{0}^{r+1}{}_s (-1)^s p_{i_0 i_1,\dots,i_{s-1}\, i_{s+1},\dots,i_{r+1}} \frac{\partial\varphi}{\partial x_{i_s}} = 0.$$

And so if we apply the theorem of section 5, article 3, we shall have

$$0 = \sum_{2}^{r+1}{}_s (-1)^s \frac{\partial}{\partial x_{i_s}} \left[\frac{p_{1, i_2,\dots,i_{s-1}\, i_{s+1},\dots,i_{r+1}}}{\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_1}\right)} \right] = \sum_{2}^{r+1}{}_s (-1)^s \frac{\partial}{\partial x_{i_s}} q'_{i_2,\dots,i_{s-1}\, i_{s+1},\dots,i_{r+1}}.$$

The functions q' then satisfy the conditions of integrability, and it will be possible to determine a function ψ which satisfies equations (2). Thus it is shown that the given condition is necessary.

3. Given the F for which (1) is satisfied, the ψ which satisfies (2) is not determined. We shall see how all the ψ's which satisfy (2) may be found when one of them, ψ_1, is known. If ψ_1 and ψ satisfy (2), and we write

$$\psi - \psi_1 = \psi_2 \quad , \quad \frac{\partial \psi_2}{\partial (x_{i_1}, \cdots, x_{i_r})} = q^{(2)}_{i_1,\ldots,i_r}$$

we shall have

$$0 = \sum_1^{r+1}{}_s (-1)^s \frac{\partial \varphi}{\partial x_{i_s}} q^{(2)}_{i_1,\ldots,i_r},$$

and therefore

$$q^{(2)}_{i_1,\ldots,i_r} = \sum_1^{r}{}_s (-1)^s \frac{\partial \varphi}{\partial x_{i_s}} \frac{\partial \Theta}{\partial (x_{i_1}, \cdots, x_{i_{s-1}} x_{i_{s+1}}, \cdots, x_{i_r})},$$

in which $\Theta \mid [S_{r-1}] \mid$ is arbitrary.

SECOND LECTURE

8. Expressions for isogenous functions. — 9. Auxiliary remarks on systems of simultaneous differential equations. — 10. On the elementary functions. — 11. Composition of functions of hyperspaces. — 12. New considerations with reference to the relation of isogeneity. — 13. Differentiation and integration. — 14. Isogeneity of order r.

8. Expressions for isogenous functions.

1. If $F \mid [S_r] \mid$ and $\Phi \mid [S_r] \mid$ are isogenous, it follows from what has been shown in the preceding section that we can write

$$\frac{\partial F}{\partial (x_{i_1}, \cdots, x_{i_{r+1}})} = p_{i_1,\ldots,i_{r+1}} = \sum_1^{r+1}{}_s (-1)^s \frac{\partial f}{\partial x_{i_s}} \frac{\partial \psi}{\partial (x_{i_1}, \cdots, x_{i_{s-1}} x_{i_{s+1}}, \cdots, x_{i_{r+1}})},$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial (x_{i_1}, \cdots, x_{i_{r+1}})} = \overline{\omega}_{i_1,\ldots,i_{r+1}} = \sum_1^{r+1}{}_s (-1)^s \frac{\partial \varphi}{\partial x_{i_s}} \frac{\partial \psi}{\partial (x_{i_1}, \cdots, x_{i_{s-1}} x_{i_{s+1}}, \cdots, x_{i_{r+1}})},$$

where $\psi \mid [S_{r-1}] \mid$ is regular and φ is a function of f; and we know that the ratio $\dfrac{\overline{\omega}_{i_1,\ldots,i_{r+1}}}{p_{i_1,\ldots,i_{r+1}}}$ (independent of the indices) is equal to $d\varphi/df$.

2. Let us write

$$L_{i_1,\ldots,i_{r+1}} = f \frac{\partial \psi}{\partial (x_{i_1}, \cdots, x_{i_r})}.$$

It follows that

(1) $$p_{i_1,\ldots,i_{r+1}} = \sum_1^{r+1}{}_s (-1)^s \frac{\partial L_{i_1,\ldots,i_{s-1} i_{s+1},\ldots,i_{r+1}}}{\partial x_{i_s}}.$$

If now S_{r+1} is a space of $r+1$ dimensions whose boundary is S_r, we shall have

$$F\,|\,[S_r]\,| = \int\limits_{S_{r+1}} \Sigma_i\, p_{i_1,\ldots,i_{r+1}}\, \alpha_{i_1,\ldots,\,i_{r+1}}\, dS_{r+1},$$

where the $a_{i_1,\ldots,\,i_{r+1}}$ are the direction cosines of S_{r+1}. And if we substitute for the p's their values (1) and apply the extension of STOKES's theorem (see Section 4), we shall have

$$F\,|\,[S_r]\,| = \int\limits_{S_r} f\,\frac{d\psi}{dS_r}\, dS_r, \tag{2}$$

and similarly,

$$\Phi\,|\,[S_r]\,| = \int\limits_{S_r} \varphi\,\frac{d\psi}{dS_r}\, dS_r. \tag{2'}$$

3. Conversely, if F and Φ are given by the preceding formulae, with $\varphi = \varphi(f)$, the F and Φ must be isogenous.

9. Auxiliary remarks on systems of simultaneous differential equations.

1. Consider the system of differential equations

$$H_{i_1 i_2,\ldots,i_{r+2}} = \sum_{1}^{r+2}{}_s\, (-1)^s\, A_{i_1,\ldots,i_{s-1}\, i_{s+1},\ldots,i_{r+2}}\, \frac{\partial\varphi}{\partial x_{i_s}} = 0, \tag{1}$$

whose coefficients satisfy the conditions

$$\sum_{1}^{r+2}{}_s\, (-1)^s\, A_{i_s h_1,\ldots,h_{r+1}}\, A_{i_1,\ldots,i_{s-1} i_{s+1},\ldots,\,i_{r+2}} = 0, \tag{2}$$

and are such that they change sign with every transposition of the indices. With this convention, if we have an H with two of its indices equal, its value must be zero.

2. Among the A's, one at least must be different from zero. If $A_{i_1 i_2,\ldots,i_{r+1}}$ is such a one, *all the equations* (1) *will follow from the equations* (*independent among themselves*).

$$H_{i_1,\ldots,i_{r+1} h_1} = 0\,,\; H_{i_1,\ldots,i_{r+1} h_2} = 0\,,\cdots,\; H_{i_1,\ldots,i_{r+1}\, h_{n-r-1}} = 0\,, \tag{3}$$

in which none of the $h_1, h_2, \cdots, h_{n-r-1}$ *is equal to another, or to an* i.

Let us take, in fact, the system

$$H_{i_1,\ldots,i_{r+1} k_1} = 0\,,\; H_{i_1,\ldots,i_{r+1} k_2} = 0\,,\cdots,\; H_{i_1,\ldots,i_{r+1}\, k_{r+2}} = 0\,, \tag{4}$$

where the k_s are arbitrary. If a k_s is equal to one of the i_l, the corresponding equation will be an identity; otherwise, it will be one of the equations (3). The equations (4) can be written in the form

$$A_{i_1,\dots,i_{r+1}} \frac{\partial \varphi}{\partial x_{k_s}} + \sum_{1}^{r+1}{}_l (-1)^l A_{k_s i_1,\dots,i_{l-1} i_{l+1},\dots,i_{r+1}} \frac{\partial \varphi}{\partial x_{i_l}} = 0 .$$

If we multiply each one by $(-1)^s A_{k_1,\dots,k_{s-1} k_{s+1},\dots,k_{r+2}}$ and add them together for all values of the subscript s from 1 to $r+2$, we shall have

$$A_{i_1,\dots,i_{r+1}} \sum_{1}^{r+2}{}_s (-1)^s A_{k_1 k_2,\dots,k_{s-1} k_{s+1},\dots,k_{r+2}} \frac{\partial \varphi}{\partial x_{k_s}} +$$

$$+ \sum_{1}^{r+1}{}_l (-1)^l \frac{\partial \varphi}{\partial x_{i_l}} \sum_{1}^{r+2}{}_s A_{k_s i_1,\dots,i_{l-1} i_{l+1},\dots,i_{r+2}} A_{k_1,\dots,k_{s-1} k_{s+1},\dots,k_{r+2}} = 0 ,$$

whence

$$\sum_{1}^{r+2}{}_s (-1)^s A_{k_1 k_2,\dots,k_{s-1} k_{s+1},\dots,k_{r+2}} \frac{\partial \varphi}{\partial x_{k_s}} = H_{k_1,\dots,k_{r+2}} = 0 ,$$

so that the theorem is proved.

3. Now let us form the alternating function of Poisson

$$(H_{i_1 i_2,\dots,i_{r+2}} , H_{h_1 h_2,\dots,h_{r+2}})$$

taking $i_1 = h_1$, $i_2 = h_2$, $\cdots$, $i_{r+1} = h_{r+1}$ and writing $h_{r+2} = i_{r+3}$, we shall have

$$(H_{h_1,\dots,h_{r+2}} , H_{i_1,\dots,i_{r+2}}) =$$

$$= \sum_{1}^{r+2}{}_t \sum_{1}^{r+2}{}_s (-1)^{s+t} \left(A_{h_1,\dots,h_{s-1} h_{s+1},\dots,h_{r+2}} \frac{\partial A_{i_1,\dots,i_{t-1} i_{t+1},\dots,i_{r+2}}}{\partial x_{h_s}} \frac{\partial \varphi}{\partial x_{i_t}} \right) -$$

$$- \sum_{1}^{r+2}{}_s (-1)^{s+t} \left(A_{i_1,\dots,i_{s-1} i_{s+1},\dots,i_{r+2}} \frac{\partial A_{h_1,\dots,h_{t-1} h_{t+1},\dots,h_{r+2}}}{\partial x_{i_s}} \frac{\partial \varphi}{\partial x_{h_t}} \right) =$$

$$= \sum_{1}^{r+1}{}_t \sum_{1}^{r+1}{}_s (-1)^{s+t} \frac{\partial (A_{i_1,\dots,i_{r+1}} A_{i_1,\dots,i_{s-1} i_{s+1},\dots,i_{t-1} i_{t+1},\dots,i_{r+3}})}{\partial x_{i_s}} \frac{\partial \varphi}{\partial x_{i_t}} -$$

$$- \sum_{1}^{r+2}{}_s (-1)^s \frac{\partial A_{h_1,\dots,h_{s-1} h_{s+1},\dots,h_{r+2}}}{\partial x_{i_s}} \sum_{1}^{r+2}{}_t (-1)^t A_{i_1,\dots,i_{t-1} i_{t+1},\dots,i_{r+3}} \frac{\partial \varphi}{\partial x_{h_t}} +$$

$$+ \sum_{1}^{r+2}{}_s (-1)^s \frac{\partial A_{i_1,\dots,i_{s-1} i_{s+1},\dots,i_{r+2}}}{\partial x_{i_s}} \sum_{1}^{r+2}{}_t (-1)^t A_{h_1,\dots,h_{t-1} h_{t+1},\dots,h_{r+2}} \frac{\partial \varphi}{\partial x_{h_t}} +$$

$$+ \sum_{1}^{r+2}{}_t (-1)^{t+r+2} \frac{\partial (A_{i_1,\dots,i_{r+1}} A_{i_1,\dots,i_{t-1} i_{t+1},\dots,i_{r+2}})}{\partial x_{i_{r+2}}} \frac{\partial \varphi}{\partial x_{i_t}} -$$

$$- \sum_{1}^{r+2}{}_t (-1)^{t+r+2} \frac{\partial (A_{i_1,\dots,i_{r+1}} A_{h_1,\dots,h_{t-1} h_{t+1},\dots,h_{r+2}})}{\partial x_{i_{r+2}}} \frac{\partial \varphi}{\partial x_{h_t}} +$$

$$+\sum_{1}^{r+2}{}_s(-1)^{s+r+2}\frac{\partial(A_{i_1,\dots,i_{r+1}}A_{h_1,\dots,h_{s-1}\,h_{s+1},\dots,h_{r+2}})}{\partial x_{h_s}}\frac{\partial\varphi}{dx_{i_{r+2}}}-$$

$$-\sum_{1}^{r+2}{}_s(-1)^{s+r+2}\frac{\partial(A_{i_1,\dots,i_{r+1}}A_{i_1,\dots,i_{s-1}\,i_{s+1},\dots,i_{r+2}})}{\partial x_{i_s}}\frac{\partial\varphi}{\partial x_{h_{r+2}}}.$$

If we write

$$\sum_{1}^{r+2}{}_s(-1)^s\frac{\partial A_{h_1,\dots,h_{s-1}\,h_{s+1},\dots,h_{r+2}}}{\partial x_{h_s}}=L_{h_1,\dots,h_{r+2}},$$

we shall have

$$(H_{h_1,\dots,h_{r+2}},H_{i_1,\dots,i_{r+2}})=A_{i_1,\dots,i_{r+1}}\sum_{1}^{r+3}{}_s(-1)^s L_{i_1,\dots,i_{s-1}\,i_{s+1},\dots,i_{r+3}}\frac{\partial\varphi}{\partial x_{i_r}}+$$

$$+\sum_{1}^{r+3}{}_s(-1)^s\frac{\partial A_{i_1,\dots,i_{r+1}}}{\partial x_{i_s}}H_{i_1,\dots,i_{s-1}\,i_{s+1},\dots,i_{r+3}}+L_{i_1,\dots,i_{r+2}}H_{i_1,\dots,i_{r+1}\,i_{r+3}}-$$

$$-L_{i_1,\dots,i_{r+1}\,i_{r+3}}H_{i_1,\dots,i_{r+2}}.$$

Hence to the system (1) we must add the equations

$$\sum_{1}^{r+1}{}_s(-1)^s L_{i_1,\dots,i_{s-1}\,i_{s+1},\dots,i_{r+3}}\frac{\partial\varphi}{\partial x_{i_t}}=0$$

so that *if the conditions*

$$L_{i_1,\dots,i_{r+2}}=\sum_{1}^{r+2}{}_s(-1)^s\frac{\partial A_{i_1,\dots,i_{s-1}\,i_{s+1},\dots,i_{r+2}}}{\partial x_{h_s}}=0$$

are satisfied for every combination of the indices $i_1,\dots,i_{r+2}$, the *system* (1) *will be complete.*

4. From this it follows that the equations (1) of section 7 will form a complete system whenever, in addition to the conditions if integrability (see section 5, article 1), the functions p satisfy also the following conditions:

$$(5)\qquad \sum_{1}^{r+2}{}_s(-1)^s p_{i_1,\dots,i_{s-1}\,i_{s+1},\dots,i_{r+2}}\,p_{i_s h_1,\dots,h_r}=0.$$

Hence for *elementary* functions (see section 5, article 5) the system of equations (1) of section 7 is *complete.*

10. The elementary functions.

1. Let us suppose that the function $F|[S_r]|$ is regular and elementary, so that the system (1) of section 7, or the equivalent system (3) of section 9, is complete. There will exist then $r+1$ independent integrals

$$\varphi,\varphi_1,\dots,\varphi_r.$$

Hence the ratio

$$\theta = \frac{p_{i_1,\cdots,i_r}}{\left(\dfrac{d(\varphi,\varphi_1,\cdots,\varphi_r)}{d(x_{i_1},\cdots,x_{i_{r+1}})}\right)} = \frac{\left(\dfrac{dF}{d(x_{i_1},\cdots,x_{i_{r+1}})}\right)}{\left(\dfrac{d(\varphi,\varphi_1,\cdots,\varphi_r)}{d(x_{i_1},\cdots,x_{i_{r+1}})}\right)}$$

will be independent of the subscripts $i_1,\cdots,i_r$, and we shall have

$$p_{i_1,\cdots,i_{r+1}} = \theta\,\frac{d(\varphi,\varphi_1,\cdots,\varphi_r)}{d(x_{i_1},\cdots,x_{i_{r+1}})}\,.$$

But we must have

$$\sum_{1}^{r+2}{}_s(-1)^s\,\frac{\partial p_{i_1,\cdots,i_{s-1}\,i_{s+1},\cdots,i_{r+2}}}{\partial x_{i_s}} = 0,$$

so that

$$\sum_{1}^{r+2}{}_s(-1)^s\,\frac{\partial\theta}{\partial x_{i_s}}\,\frac{d(\varphi,\varphi_1,\cdots,\varphi_r)}{d(x_{i_1},\cdots,x_{i_{s-1}}\,x_{i_{s+1}},\cdots,x_{i_{r+2}})} = 0,$$

and consequently

$$\sum_{1}^{r+2}{}_s(-1)^s\,p_{i_1,\cdots,i_{s-1}\,i_{s+1},\cdots,i_{r+2}}\,\frac{\partial\theta}{\partial x_{i_s}} = 0\,.$$

The quantity θ will therefore be a function of $\varphi_0,\varphi_1,\cdots,\varphi_r$, and if we write $\frac{\partial\varphi_0}{\partial\varphi} = \theta$, we shall have

$$p_{i_1,\cdots,i_{r+1}} = \frac{\partial\varphi_0}{\partial\varphi}\,\frac{d(\varphi,\varphi_1,\cdots,\varphi_r)}{d(x_{i_1},\cdots,x_{i_{r+1}})} = \frac{d(\varphi_0,\varphi_1,\cdots,\varphi_r)}{d(x_{i_1},\cdots,x_{i_{r+1}})}\,.$$

We have therefore the following theorem:

If F *is an elementary function, it follows that*

$$\frac{\partial F}{\partial(x_{i_1},\cdots,x_{i_{r+1}})} = \frac{d(\varphi_0,\varphi_1,\cdots,\varphi_r)}{d(x_{i_1},\cdots,x_{i_{r+1}})} = p_{i_1,\cdots,i_{r+1}}$$

where $\varphi_0,\varphi_1,\cdots,\varphi_r$ *are independent integrals of the complete system*

$$\sum_{1}^{r+2}{}_s(-1)^s\,p_{i_1,\cdots,i_{s-1}\,i_{s+1},\cdots,i_{r+2}}\,\frac{\partial\varphi}{\partial x_{i_s}} = 0\,. \qquad (1)$$

2. Conversely, *if we take* $r+1$ *functions* $\varphi_0,\varphi_1,\cdots,\varphi_r$ *and write*

$$\frac{d(\varphi_0,\varphi_1,\cdots,\varphi_r)}{d(x_{i_1},\cdots,x_{i_{r+1}})} = p_{i_1,\cdots,i_{r+1}},$$

the quantities $p_{i_1,\cdots,i_{r+1}}$ *will be the derivatives of an elementary function.* In fact, they will satisfy the conditions of integrability, and also the conditions (5) of the preceding section (see section 5, article 5).

We shall say that the functions $\varphi_0,\varphi_1,\cdots,\varphi_r$ are *conjugate* to the function F, and that F is conjugate to them.

3. If Φ is isogenous to F, and we write

$$\frac{\partial \Phi}{\partial (x_{i_1}, \cdots, x_{i_{r+1}})} = \overline{\omega}_{i_1, \ldots, i_{r+1}},$$

we must have

$$\frac{\overline{\omega}_{i_1, \ldots, i_{r+1}}}{p_{i_1, \ldots, i_{r+1}}} = \psi,$$

ψ being an integral of equation (1). Hence ψ must be a function of $\varphi_0, \varphi_1, \cdots, \varphi_r$. If we take $\psi = \partial\lambda/\partial\varphi$, we shall have

$$\overline{\omega}_{i_1, \ldots, i_{r+1}} = \frac{\partial \lambda}{\partial \varphi} \frac{d(\varphi, \varphi_1, \cdots, \varphi_r)}{d(x_{i_1}, \cdots, x_{i_{r+1}})} = \frac{d(\lambda, \varphi_1, \cdots, \varphi_r)}{d(x_{i_1}, \cdots, x_{i_{r+1}})},$$

from which we deduce the theorem:

All the functions isogenous to an elementary function are themselves elementary.

4. If we apply to the elementary functions the formula (2), section 8, relative to the possibility of defining isogenous functions, we have

$$\text{(2)} \qquad F \mid [S_r] \mid = \int_{S_r} \varphi \frac{d(\varphi_0, \varphi_1, \cdots, \varphi_r)}{d(\omega_1, \cdots, \omega_r)} d\omega_1, \cdots, d\omega_r,$$

where

$$x_1 = x_1(\omega_1, \cdots, \omega_r), x_2 = x_2(\omega_1, \cdots, \omega_r), \cdots, x_n = x_n(\omega_1, \cdots, \omega_r),$$

the equations of the hyperspace S_r.

11. The composition of functions of hyperspaces.

1. The results which we have obtained in the preceding section can be expressed in a different form by means of special symbols. That is what we shall do in this section, after having proved a fundamental theorem.

Let $F \mid [S_r] \mid$ and $\Phi \mid [S_{t-r}] \mid$ be two regular functions of hyperspaces, and write

$$\frac{\partial F}{\partial (x_{h_1}, \cdots, x_{h_{r+1}})} = p_{h_1, \ldots, h_{r+1}} \quad , \quad \frac{\partial \varphi}{\partial (x_{h_{r+2}}, \cdots, x_{h_{t+2}})} = q_{h_{r+2}, \ldots, h_{t+2}}.$$

$$\text{(1)} \qquad m_{i_1, \ldots, i_{t+2}} = \Sigma_h (-1)^{\binom{h_1, \ldots, h_{t+2}}{i_1, \ldots, i_{t+2}}} p_{h_1, \ldots; h_{r+1}} q_{h_{r+2}, \ldots, t+2},$$

in which $h_1, \cdots, h_{t+2}$ is a permutation of $i_1, \cdots, i_{t+2}$; the sum Σ_h is extended over all the combinations of the $t+2$ subscripts $i_1, \cdots, i_{t+2}$, $r+1$ at a time; and the symbol $(-1)^{\binom{h_1, \ldots, h_{t+2}}{i_1, \ldots, i_{t+2}}}$ represents $+1$ or -1, according as the substitution which appears in the exponent is even or odd.

2. We shall show that *there exists a regular function* $\Psi \mid [S_{t+1}] \mid$, *such that*

$$\frac{\partial \Psi}{\partial (x_{i_1}, \ldots, x_{i_{t+2}})} = m_{i_1, \ldots, i_{t+2}}.$$

In fact, the quantities m satisfy the conditions of integrability (section 5, article 1); that is,

$$\sum_1^{t+3} (-1)^s \frac{\partial m_{i_1, \ldots, i_{s-1}\, i_{s+1}, \ldots, i_{t+3}}}{\partial x_{i_s}} =$$

$$= \sum_1^{t+3}{}_s (-1)^s \Sigma_h (-1)^{\binom{h_1, \ldots, h_{t+2}}{i_1, \ldots, i_{s-1}\, i_{s+1}, \ldots, i_{t+3}}} \frac{\partial}{\partial x_{i_s}} (p_{h_1, \ldots, h_{r+1}}\, q_{h_{r+2}, \ldots, h_{t+3}}) = 0.$$

3. To represent the fact that the relation (1) holds among the three functions F, Φ, Ψ we shall write

$$\Psi \equiv (F, \Phi).$$

We have immediately

$$(F, \Phi) \equiv (-1)^{(r+1)(t-r+1)} (\Phi, F).$$

If $\Theta \mid [S_{v-t}] \mid$ is a regular function, and we write

$$\frac{\partial \Theta}{\partial (x_{h_{t+3}}, \ldots, x_{h_{v+3}})} = n_{h_{t+3}, \ldots, h_{v+3}}$$

$$l_{i_1, \ldots, i_{v+3}} = \Sigma_h (-1)^{\binom{h_1, \ldots, h_{v+3}}{i_1, \ldots, i_{v+3}}} p_{h_1, \ldots, h_{r+1}}\, q_{h_{r+2}, \ldots, h_{t+2}}\, n_{h_{t+3}, \ldots, h_{v+3}}$$

$$= \Sigma_h (-1)^{\binom{h_1, \ldots, h_{v+3}}{i_1, \ldots, i_{v+3}}} m_{h_1, \ldots, h_{t+2}}\, n_{h_{t+3}, \ldots, h_{v+3}},$$

it follows that there exists a function $\Lambda \mid [S_{v+2}] \mid$ which is regular, and such that

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial (x_{i_1}, \ldots, x_{i_{v+3}})} = l_{i_1, \ldots, i_{v+3}}.$$

We shall write

$$\Lambda = (F, \Phi, \Theta).$$

And in general if the functions $F^{(t)} \mid [S_{r_t}] \mid$ are regular, we shall understand by

$$M \equiv (F^{(1)}, F^{(3)}, \ldots, F^{(k)}) \tag{2}$$

a regular function of hyperspaces S_R, $R = \sum_1^k r_t + k$, obtained as follows:

$$\Phi_2 \equiv (F^{(1)}, F^{(2)}), \Phi_3 \equiv (\Phi_2, F^{(3)}), \ldots, M = (\Phi_{k-1} F^{(k)}).$$

We shall say that M is *composed* of the functions $F^{(1)}, F^{(2)}, \ldots, F^{(k)}$ and we shall call the operation denoted by (2) the *composition* of the functions $F^{(1)}, F^{(2)}, \ldots, F^{(k)}$. The operation of *composition* of the functions $F^{(s)}$ evidently possesses the *associative* property. Inversion of the elements of M can only produce changes in sign in the result.

The $F^{(s)}$ will be spoken of as the *divisors* of M. If M has no other divisors but itself, it will be spoken of as *prime*. If two functions have no *divisor* in common, they will be said to be *mutually prime*.

4. Without stopping to develop the theory of divisibility in the present sense, we can give directly a few of its properties and apply them to the results of the preceding sections. Thus, every regular function, which is not prime, can be decomposed into prime divisors, and this decomposition can be effected in more than one way. If a function divides one of the divisors of a function, it divides the function itself.

Two functions F and Φ will be isogenous when

$$F \equiv (\Psi, f) \quad , \quad \Phi = (\Psi, \varphi),$$

where f, φ are point functions and f is a function of φ. If F and Φ are isogenous, so will be also the functions

$$(F, \Theta) \text{ and } (\Phi, \Theta).$$

No function is isogenous to a prime function; in order that a function may be found isogenous to a given function it is necessary and sufficient that the given function should admit a divisor which is a point function. That is, it is necessary for it to have the form $F \equiv (\Psi, f)$ with f a point function.

An elementary function is obtained by the composition of point functions, etc., etc.

12. New considerations with reference to the relation of isogeneity.

1. So far we have been considering isogeneity between functions of hyperspaces of the same number of dimensions. We are now to generalize this relation so that it will apply to hyperspaces of different dimensions. Let us consider the two regular functions $\Phi \mid [S_r] \mid$, $\Psi \mid [S_t] \mid$, with $r > t$, and write

$$\frac{\partial \Phi}{\partial (x_{i_1}, \ldots, x_{i_{r+1}})} = a_{i_1, \ldots, i_{r+1}} \quad , \quad \frac{\partial \Psi}{\partial (x_{i_1}, \ldots, x_{i_{t+1}})} = b_{i_1, \ldots, i_{t+1}} .$$

We shall say that Φ and Ψ are isogenous when the following conditions are satisfied:

$$\text{(1)} \qquad \sum_{1}^{r+2}{}_s (-1)^s a_{i_1, \ldots, i_{s-1}\, i_{s+1}, \ldots, i_{r+2}}\, b_{i_s h_1, \ldots, h_t} = 0 .$$

In the case where r is equal to t, these equations imply that the functions not only are isogenous in our first sense, but also that they are elementary. Conversely, if two elementary functions of hyperspaces of the same number of dimensions are isogenous in the sense of section 6, they are also in the present sense.

2. It is easy to show that *every function which admits* Φ *as divisor is isogenous to* Ψ. In fact, if we take

$$c_{i_1, \ldots, i_{v+2}} = \Sigma_h (-1)^{\binom{h_1, \ldots, h_{v+2}}{i_1, \ldots, i_{v+2}}} a_{h_1, \ldots, h_{r+1}} a_{i_{r+2}, \ldots, i_{v+2}},$$

we shall have

$$\sum_{1}^{v+3}{}_s (-1)^s c_{i_1, \ldots, i_{s-1} i_{s+1}, \ldots, i_{v+3}} b_{i_s h_1, \ldots, h_t} = 0,$$

which proves the theorem.

3. We can now generalize a theorem given in section 7, article 2. We have:

The necessary and sufficient condition that $\varphi \mid [S_r] \mid$ *shall be isogenous to the elementary function* $\Psi \mid [S_{r-t}] \mid$, *is that*

$$\Phi \mid [S] \mid = (\Psi, \Theta). \tag{2}$$

That the condition is sufficient can be shown without any difficulty. In order to show that it is also necessary, let us write

$$\frac{d\Phi}{d(x_{i_1}, \cdots, x_{i_{r+1}})} = a_{i_1, \ldots, i_{r+1}} \quad , \quad \frac{d\Psi}{d(x_{i_1}, \cdots, x_{i_{r-t+1}})} = b_{i_1, \ldots, i_{r-t+1}},$$

$$\frac{d\Theta}{d(x_{i_1}, \cdots, x_{i_t})} = c_{i_1, \ldots, i_t},$$

$$b_{i_1, \ldots, i_{r-t+1}} = \frac{d(\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_{r-t+1})}{d(x_{i_1}, x_{i_2}, \cdots, x_{i_{r-t+1}})}.$$

We shall show that if (1) is true, (2) is also true; that is, that

$$a_{i_1, \ldots, i_{r+1}} = \Sigma_h (-1)^{\binom{h_1, \ldots, h_{r+1}}{i_1, \ldots, i_{r+1}}} b_{h_1, \ldots, h_{r-t+1}} c_{h_{r-t+2}, \ldots, h_{r+1}}. \tag{2'}$$

For this purpose let us make a change of variable, taking instead of $x_1, x_2, \cdots, x_n$ the new variables $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_{t+1}, x_{t+2}, \cdots, x_n$. If we indicate with a prime the symbols that belong with the new variables, we shall have

(i) If $h_{r-t+2}, h_{r-t+3}, \cdots, h_r \neq \varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_{r-t+1}$, then

$$c_{h_{r-t+2}, \ldots, h_r} = c'_{h_{r-t+2}, \ldots, h_r} +$$

$$+ \Sigma_h (-1)^{\binom{h_{p_1}, \ldots, h_{p_t}}{h_{r-t+2}, \ldots, h_{r+1}}} c'_{h_{p_1}, \ldots, h_{p_v} l_1, \ldots, l_s} \frac{d(\varphi_{l_1}, \cdots, \varphi_{l_s})}{d(x_{h_{p_{v+1}}}, \cdots, x_{h_{p_{t-1}}})},$$

in which $l_1, \cdots, l_s$ are s of the numbers $1, 2, \cdots, r-t+1$, and $h_{p_1}, \cdots, h_{p_t}$ is a permutation of the numbers $h_{r-t+2}, \cdots, h_{r+1}$.

(ii) If one of the numbers $h_{r-t+2}, \cdots, h_r$ is equal to one of the numbers $1, 2, \cdots, t+1$, then

$$c_{h_{r-t+2},\cdots,h_r} = \Sigma_h (-1)^{\binom{h_{p_1},\cdots,h_{p_{t-1}}}{h_{r-t+2},\cdots,h_r}} c'_{h_{p_1},\cdots,h_{p_v} l_1,\cdots,l_s} \frac{d(\varphi_{l_1},\cdots,\varphi_{l_s})}{d(x_{h_{p_{v+1}}},\cdots,x_{h_{p_{t-1}}})}.$$

Equation (2′) will then become

$$(2'') \qquad a_{i_1,\cdots,i_{r+1}} = \Sigma_h (-1)^{\binom{h_1,\cdots,h_{r+1}}{i_1,\cdots,i_{r+1}}} b_{h_1,\cdots,h_{r-t+1}} c'_{h_{r-t+2},\cdots,h_{r+1}} +$$

$$+\Sigma_h(-1)^{\binom{h_1,\cdots,h_{r+1}}{i_1,\cdots,i_{r+1}}} \frac{d(\varphi_1,\cdots,\varphi_{r-t+1})}{d(x_{h_1},\cdots,x_{h_{r-t+1}})} \Sigma_h(-1)^{\binom{h_{p_1},\cdots,h_{p_t}}{h_{r-t+2},\cdots,h_{r+1}}} c'_{h_{p_1},\cdots,h_{p_v} l_1,\cdots,l_s} \frac{d(\varphi_{l_1},\cdots,\varphi_{l_s})}{d(x_{h_{p_{v+1}}},\cdots,x_{h_{p_t}})},$$

in which the first sum is extended over all the possible combinations of the indices $h_{r-t+2}, \cdots, h_{r+1}$ which do not contain any of the numbers $1, 2, \cdots, r-t+1$. The second sum may be rewritten in the form

$$\Sigma (-1)^{\binom{h_{p_1},\cdots,h_{p_{r+1}}}{i_1,\cdots,i_{r+1}}} c'_{h_{p_1},\cdots,h_{p_v} l_1,\cdots,l_s}$$

$$\Sigma (-1)^h_{p_i} \frac{d(\varphi_1,\cdots,\varphi_{r-t+1})}{d(x_{h_1},\cdots,x_{h_{r-t+1}})} \frac{d(\varphi_{l_1},\cdots,\varphi_{l_s})}{d(x_{h_{p_{v+1}}},\cdots,x_{h_{p_{t-1}}})},$$

whence it vanishes. The equation (2″) reduces then to

$$(2''') \qquad a_{i_1,\cdots,i_{r+1}} = \Sigma (-1)^{\binom{h_1,\cdots,h_{r+1}}{i_1,\cdots,i_{r+1}}} b_{h_1,\cdots,h_{r-t+1}} c'_{h_{r-t+2},\cdots,h_{r+1}}.$$

In particular we have

$$a_{1,2,\cdots,t+1,i_{t+2},\cdots,i_{r+1}} = b_{1,2,\cdots,t+1} c'_{i_{t+2},\cdots,i_{r+1}}$$

so that

$$(3) \qquad c'_{i_{t+2},\cdots,i_{r+1}} = \frac{a_{1,2,\cdots,t+1,i_{t+2},\cdots,i_{r+1}}}{\left\{\dfrac{d(\varphi_1,\cdots,\varphi_{t+1})}{d(x_1,\cdots,x_{i_{t+1}})}\right\}}.$$

Now by following a process analogous to that of section 7, article 2, it is easy to show that all the equations (2‴) are a consequence of these last equations (3). And so it is sufficient for us to show that the quantities c', obtained from (3), satisfy the conditions of integrability. We have in fact

$$a'_{1,\cdots,t+1,i_{t+2},\cdots,i_{r+1}} = \frac{a_{1,\cdots,t+1,i_{t+2},\cdots,i_{r+1}}}{\dfrac{d(\varphi_1,\cdots,\varphi_{t+1})}{d(x_1,\cdots,x_{t+1})}},$$

while a' will be zero if it has less than $t+1$ of its subscripts taken from the numbers $1, 2, \cdots, t+1$. If we apply then a process of reasoning analogous to the of section 7, article 2, we find that the conditions of integrability will be satisfied for the quantities c'.

13. Differentiation and integration.

1. If two functions $F\,|\,[S_n]\,|$, $\Phi\,|\,[S_r]\,|$ are regular and isogenous, we know that the ratio

$$\varphi = \frac{\left(\dfrac{d\Phi}{dS_{r+1}}\right)}{\left(\dfrac{dF}{dS_{r+1}}\right)}$$

will be independent of the hyperspace S_{r+1}, and will depend merely upon the point of the space at which the derivative is taken. The quantity φ will then be a point function for the total space of n dimensions. We shall denote it with the symbol $d\Phi/dF$ and call it the *derivative of* Φ *with respect to* F.

As a fundamental theorem it can be shown that *the derivative of* Φ *with respect to* F *is isogenous to both of the functions* Φ *and* F. The proof of this theorem comes immediately from formula (1) of section 7, with reference to the definition given in the preceding section.

2. Consider now a point function f isogenous to a regular function $F\,|\,[S_r]\,|$. By fixing the direction of the hyperspace S_{r+1} (see section 1, article 2) the quantity dF/dS_{r+1} will be defined (see section 3, article 7), and hence the quantity

$$\int\limits_{S_{r+1}} f\,\frac{dF}{dS_{r+1}}\,dS_{r+1}$$

will also be defined. This integral we shall represent by the symbol

$$\int\limits_{S_{r+1}} f\,dF\,.$$

Changing the direction of the hyperspace will change the sign of the integral.

We shall suppose that the hyperspace S_{r+1} is closed and forms the boundary of a hyperspace S_{r+2} immersed in a portion of the total hyperspace S_n throughout which f and F have no singularities. It follows that

$$\int\limits_{S_{r+1}} f\,dF = \int\limits_{S_{r+1}} f\Sigma\,\frac{dF}{d(x_{i_1},\cdots,x_{i_{r+1}})}\,\alpha_{i_1,\cdots,i_{r+1}}\,dS_{r+1} = \int\limits_{S_{r+1}} f\Sigma\,p_{i_1,\cdots,i_{r+1}}\,\alpha_{i_1,\cdots,i_{r+1}}\,dS_{r+1}\,,$$

where the $a_{i_1,\ldots,i_{r+1}}$ are the direction cosines of the hyperspace S_{r+1}. If we choose properly the direction of the hyperspace S_{r+2} and apply the generalization of STOKES'S theorem (see section 4) we shall have

$$\int\limits_{S_{r+1}} f dF = \int\limits_{S_{r+2}} \Sigma\beta_{i_1,\ldots,i_{r+2}} \Sigma(-1)^{s-1} \frac{\partial(f p_{i_1,\ldots,i_{s-1}i_{s+1},\ldots,i_{r+2}})}{\partial x_{i_s}} dS_{r+2} =$$

$$= \int\limits_{S_{r+2}} \Sigma\beta_{i_1,\ldots,i_{r+2}} \left\{ \Sigma(-1)^s p_{i_1,\ldots,i_{s-1}i_{s+1},\ldots,i_{r+2}} \frac{\partial f}{\partial x_{i_s}} + \right.$$

$$\left. + f\Sigma(-1)^{s-1} \frac{\partial p_{i_1,\ldots,i_{s-1}\, i_{s+1},\ldots,i_{r+2}}}{\partial x_{i_s}} \right\} dS_{r+2} = 0.$$

Hence we have the theorem expressed by the formula

$$(1) \qquad \int\limits_{S_{r+1}} f dF = 0.$$

If, instead of a single hyperspace S_{r+1} we have the hyperspaces $S_{r+1}^{(i)}$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ which bound à space S_{r+2} within which there are no singularities for f or F, we shall have the formula:

$$(1') \qquad \sum_1^n{}_i \int\limits_{S_{r+1}^{(i)}} f dF = 0,$$

in which the directions of the hyperspaces $S_{r+1}^{(i)}$ are all to be chosen with reference to the conventions adopted for the generalization of STOKES'S theorem.

The theorem enunciated in the formulae (1) *and* (1′) *is the direct extension of* CAUCHY'S *theorem.*

3. Let us take away from the total hyperspace all those portions in which either f or F have singularities, and then introduce cuts in such a way that every closed hyperspace S_{r+1} may be taken as the complete boundary of a hyperspace S_{r+2}.

Take two hyperspaces S_r^0, S_r' such that a hyperspace S_{r+1} can be drawn to have them for its boundary, and choose the positive direction of S_r^0 and the negative direction of S_r' so as to correspond by the theorem of STOKES'S to one direction of the hyperspace S_{r+1}. With the direction of S_{r+1} fixed in this way, the integral

$$(2) \qquad \int\limits_{S_{r+1}} f dF$$

will be determined.

It is easy to show that the value of the integral (2) will not depend on the hyperspace S_{r+1}, but merely on S_r^0 and S_r. In fact if S_{r+1}' is another hyperspace which has these same two spaces for its boundary, the totality of S_{r+1} and S'_{r+1} will form a closed hyperspace, and from the hypotheses that we have made, we shall have

$$\int_{S_{r+1}+S'_{r+1}} f dF = 0,$$

from which the desired property follows.

Therefore the integral (2) can be indicated by the expression

$$\int_{S_r^0}^{S'_r} f dF. \tag{2'}$$

By changing the direction of S_{r+1} we change the sign of the integral; hence we may write

$$\int_{S_r^0}^{S'_r} f dF = -\int_{S'_r}^{S_r^0} f dF. \tag{3}$$

4. If we keep fixed the hyperspace S_r^0 and vary S'_r, the integral (2′) may be regarded as a function (regular) of S'_r, and we can write

$$\int_{S_r^0}^{S'_r} f dF = \Phi \,|\, [S'_r] \,|. \tag{4}$$

The function Φ *will be isogenous to* F *and we shall have*

$$\frac{d\Phi}{dF} = f, \tag{5}$$

that is to say, *the two operations of integration and differentiation are mutually inverse.*

14. Isogeneity of order r.

1. A system of elementary functions will be said to have isogeneity of order r when all the functions of order greater than or equal to r, which are obtained from the system by means of composition (see section 11), vanish, while there is at least one function of order $r-1$ which does not vanish. All the elementary functions $\Phi \,|\, [S_t] \,|$ of the system must depend on certain functions $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_k, \cdots$ in such a way (see section 10) that

$$\frac{\partial \Phi}{\partial (x_{i_1}, \cdots, x_{i_{t+1}})} = \frac{d(\varphi_{l_1}, \cdots, \varphi_{l_{t+1}})}{d(x_{i_1}, \cdots, x_{i_{t+1}})}, \quad \Phi \equiv (\varphi_{l_1}, \varphi_{l_2}, \cdots, \varphi_{l_{t+1}}).$$

2. We have immediately the following theorems:

The necessary and sufficient condition for isogeneity of order r that is

$$\frac{d(\varphi_{l_1}, \cdots, \varphi_{l_{r+1}})}{d(x_{i_1}, \cdots, x_{i_{r+1}})} = 0 \tag{1}$$

for every possible combination of the numbers $l_1, \cdots, l_{r+1}, i_1, \cdots, i_{r+1}$.

A function of order $r - 1$ is always isogenous to any other function of the system.

In fact from (1) it follows that every function of order $r - 1$ is isogenous to the functions of order zero of the system, that is, to the functions φ_s. We shall have then

$$q_{i_s h_1, \cdots, h_t} = \frac{\partial \Phi}{\partial(x_{i_s} x_{h_1}, \cdots, x_{h_t})} = \sum_1^{t+1}{}_u (-1)^{u-1} \frac{\partial \varphi_{l_u}}{\partial x_{i_s}} \frac{d(\varphi_{l_1}, \cdots, \varphi_{l_{u-1}} \varphi_{l_{u+1}} \varphi_{l_{t+1}})}{d(x_{h_1}, \cdots, x_{h_t})} =$$

$$= \sum_1^{t+1}{}_u (-1)^{u-1} \frac{\partial \varphi_{l_u}}{\partial x_{i_s}} \mathrm{N}_u .$$

And if we let $\psi \mid [\mathrm{S}_{r-1}] \mid$ represent one of the functions of order $r - 1$ of the system, and write

$$\frac{\partial \psi}{\partial(x_{i_1}, \cdots, x_{i_r})} = p_{i_1, \cdots, i_r},$$

we shall have

$$\sum_1^{r+1}{}_s (-1)^s p_{i_1, \cdots, i_{s-1} i_{s+1}, \cdots, i_{r+1}} q_{i_s h_1, \cdots, h_t} =$$

$$= \sum_1^{t+1}{}_u (-1)^{u-1} \mathrm{N}_u \sum_1^{r+1}{}_s (-1)^s p_{i_1, \cdots, i_{s-1} i_{s+1}, \cdots, i_{r+1}} \frac{\partial \varphi_{l_u}}{\partial x_{i_s}} .$$

Every function of order $r - 1$ admits as divisor another function of the system of lower order (see section 11, article 3).

3. Let us consider specially the functions of the system of order zero; that is, the functions $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_k, \cdots$. By means of the equations (1) we know *there must be r of them, $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_r$, independent, of which all the others are functions*, and conversely, that *every function of $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_r$ will be an elementary function in the system, and will be of order zero.*

If we take two functions Φ and Φ of order $r - 1$, they will be isogenous, and we shall have the relation

$$\frac{d\Phi}{d\mathrm{F}} = \varphi(\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_r). \tag{2}$$

Further, if we take an arbitrary function φ of order zero, that is a function of $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_r$, we shall have

$$\int_{\mathrm{S}_r} \varphi d\mathrm{F} = 0, \tag{3}$$

where S_r is the complete boundary of a space S_{r+1} within which φ and F have no singularities. If we have

$$F \equiv (\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_r),$$

then (3) can be written in the form

$$\int_{S_r} \varphi \frac{d(\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_r)}{d(\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_r)} d\omega_1, d\omega_2, \cdots, d\omega_r = 0,$$

$\omega_1, \cdots, \omega_r$ being the parameters of the hyperspace S_r (see section 1, articles 1, 2). If we take

$$\frac{d\varphi_t}{d\omega_s} d\omega_s = d_s \varphi_t,$$

we shall have

$$\int_{S_r} \varphi \begin{vmatrix} d_1 \varphi_1\, d_2 \varphi_1, \cdots, d_r \varphi_1 \\ d_1 \varphi_2\, d_2 \varphi_2, \cdots, d_r \varphi_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ d_1 \varphi_r\, d_2 \varphi_r, \cdots, d_r \varphi_r \end{vmatrix} = 0,$$

which is but a *generalization of* CAUCHY'S *theorem* (see the preceding section) put in a different form for the case of the elementary functions.

If S_r is not closed, but is bounded by two hyperspaces S^0_{r-1} and S_{r-1} of which the first is fixed and the second variable, we shall have defined the expression

$$\Phi \,|\, [S_{r-1}] \,| = \int_{S^0_{r-1}}^{S_{r-1}} \varphi \begin{vmatrix} d_1 \varphi_1, \cdots, d_r \varphi_1 \\ \cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots \\ d_1 \varphi_r, \cdots, d_r \varphi_r \end{vmatrix}.$$

X.

ON THE THEORY OF WAVES AND GREEN'S METHOD (*).

« Rice Institute Pamphlet », vol. IV, 1917; pp. 102–117.

SECTION I.

Let a homogeneous liquid be subjected to certain forces and let it occupy a domain S. Let this domain be limited by a frontier σ which is composed partly of a set ω' of rigid boundaries, and partly of a free surface ω, where the pressure is P.

Let us suppose that the state of equilibrium is stable. We shall study the small oscillations of the fluid when it is displaced from the state of equilibrium.

The hydrodynamical equations of Lagrange are

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{d^2 x}{dt^2}\cdot\frac{\partial x}{\partial x_0}+\frac{d^2 y}{dt^2}\cdot\frac{\partial y}{\partial x_0}+\frac{d^2 z}{dt^2}\cdot\frac{\partial z}{\partial x_0}&=\frac{\partial}{\partial x_0}\left(V-\frac{P}{\rho}\right)\\ \frac{d^2 x}{dt^2}\cdot\frac{\partial x}{\partial y_0}+\frac{d^2 y}{dt^2}\cdot\frac{\partial y}{\partial y_0}+\frac{d^2 z}{dt^2}\cdot\frac{\partial z}{\partial y_0}&=\frac{\partial}{\partial y_0}\left(V-\frac{P}{\rho}\right)\\ \frac{d^2 x}{dt^2}\cdot\frac{\partial x}{\partial z_0}+\frac{d^2 y}{dt^2}\cdot\frac{\partial y}{\partial z_0}+\frac{d^2 z}{dt^2}\cdot\frac{\partial z}{\partial z_0}&=\frac{\partial}{\partial z_0}\left(V-\frac{P}{\rho}\right)\end{aligned}\right.$$

where x, y, z denote the coordinates of points of the fluid at time t; x_0, y_0, z_0 the initial coordinates; V the potential function, P the pressure, ρ the density.

2. Let x_0, y_0, z_0 be the coordinates which correspond to the state of stable equilibrium, ξ, η, ζ the components of displacement of each particle with respect to its position of equilibrium.

Then

$$x = x_0 + \xi \quad , \quad y = y_0 + \eta \quad , \quad z = z_0 + \zeta .$$

(*) Conferenza tenuta all'inaugurazione del Rice Institute, tradotta dal francese dal professore PERCY JOHN DANIELL.

If we consider the displacements as infinitesimals of the first order and if we neglect terms of order higher than the first, the equations (1) become

$$\begin{cases} \dfrac{d^2 \xi}{dt^2} = \dfrac{\partial}{\partial x_0}\left(V - \dfrac{P}{\rho}\right) \\ \dfrac{d^2 \eta}{dt^2} = \dfrac{\partial}{\partial y_0}\left(V - \dfrac{P}{\rho}\right) \\ \dfrac{d^2 \zeta}{dt^2} = \dfrac{\partial}{\partial z_0}\left(V - \dfrac{P}{\rho}\right). \end{cases}$$

For simplification the indices o are suppressed and z, y, x denote the coordinates of each particle in the position of equilibrium.

Then

$$(2) \qquad \begin{cases} \dfrac{d^2 \xi}{dt^2} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(V - \dfrac{P}{\rho}\right) \\ \dfrac{d^2 \eta}{dt^2} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(V - \dfrac{P}{\rho}\right) \\ \dfrac{d^2 \zeta}{dt^2} = \dfrac{\partial}{\partial z}\left(V - \dfrac{P}{\rho}\right). \end{cases}$$

The condition of incompressibility can be written as

$$(3) \qquad \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} = 0.$$

On account of (2) we can put

$$\xi = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \quad , \quad \eta = \frac{\partial \Phi}{\partial y} \quad , \quad \zeta = \frac{\partial \Phi}{\partial z},$$

Φ being the potential of displacement.

Then the equations (2) become

$$(4) \qquad \frac{d^2 \Phi}{dt^2} - V + \frac{P}{\rho} = c,$$

where c is constant with respect to x, y, z, but may vary with t.

The equation (3) becomes

$$\Delta^2 \Phi = 0.$$

At points of the liquid where it touches the rigid boundary

$$\xi \cos nx + \eta \cos ny + \zeta \cos nz = 0,$$

if n denotes the normal to the boundary.

This condition becomes

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0.$$

3. Let us return to the equation (4). If we put

$$V - \frac{P}{\rho} + c = H,$$

the equation (4) becomes

$$(4') \qquad \frac{d^2\Phi}{dt^2} = \mathrm{H}.$$

The free surface of the fluid has been denoted by ω. Let us suppose that the potential function V and the pressure P, which correspond to each particle of fluid belonging to ω are functions of the coordinates of the point occupied by the particle independently of the form of the liquid. If this hypothesis is not correct, since the displacements are infinitesimal, we can neglect the variations produced by the changes in form of the fluid so that we can always proceed as if the hypothesis were correct.

In the state of equilibrium H is constant on ω. Therefore the equation of this surface will be

$$\mathrm{H} = \mathrm{H}_0 = \text{constant}.$$

Let us now calculate H when a point of the surface ω is displaced when ξ, η, ζ are the components of displacement.

If we neglect infinitesimals of a higher order that the first,

$$\mathrm{H} = \mathrm{H}_0 + \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial x}\xi + \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial y}\eta + \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial z}\zeta.$$

Then, putting $\lambda^2 = \left(\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial z}\right)^2$,

$$(5) \qquad \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial x} = \lambda \cos nx \quad , \quad \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial y} = \lambda \cos ny \quad , \quad \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial z} = \lambda \cos nz,$$

when n is the normal to the surface ω.

Then

$$\mathrm{H} = \mathrm{H}_0 + \lambda(\xi \cos nx + \eta \cos ny + \zeta \cos nz) = \mathrm{H}_0 + \lambda \frac{\partial \Phi}{\partial n};$$

combining this with equation (4')

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = \mathrm{H}_0 + \lambda \frac{\partial \Phi}{\partial n}$$

or

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = \lambda \frac{\partial \Phi}{\partial n},$$

since Φ is determinate except for a quantity which is constant with respect to the time.

Let us take the normal n as directed toward the interior of the fluid, and let us suppose that $\mathrm{V} - \mathrm{P}/\rho$ increases on moving ω and following the positive direction of n.

Then when n is positive,

$$\partial \mathrm{H}/\partial n > 0,$$

or by virtue of the equations (5)

$$\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial n} = \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial x}\cos nx + \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial y}\cos ny + \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial z}\cos nz = \lambda,$$

it follows that $\lambda > 0$.

The problem of waves can be presented in the following manner.

4. To determine a function Φ regular within the domain S which satisfies the equation

$$\Delta^2 \Phi = 0 \tag{A}$$

within S and which in the part ω' of the boundary satisfies the condition

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0 \tag{B}$$

and in the part ω satisfies the condition

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = \lambda \frac{\partial \Phi}{\partial n}, \tag{C}$$

where λ is a positive quantity independent of the time, and n is the normal to the boundary directed toward the interior of the domain S.

SECTION 2.

1. We can make a comparison between the problem we are about to consider and that of the vibrations of elastic media, and other problems of mathematical physics. The problem of the vibrations of elastic media is based upon the equation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \alpha^2 \Delta^2 u. \tag{6}$$

The problem of the propagation of heat in the case of varying temperature leads to the equation

$$\frac{\partial V}{\partial t} = a \Delta^2 V. \tag{7}$$

The problems of potential and of stationary temperatures in isotropic bodies depend upon the equation of Laplace

$$\Delta^2 W = 0. \tag{8}$$

These three equations are respectively of *hyperbolic*, *parabolic*, and *elliptic* types.

The question we have considered in section 1 belongs to the elliptic type on account of the equation (A) of section 1, which is the equation of Laplace; but it is the condition which must be satisfied on the surface ω of the boundary which leads to the essential difference between this problem and the problems of potential and stationary temperatures. In fact, in the problems of potential the conditions at the boundary are reduced to that of giving the values of the unknown function or of its normal derivative; in those of stationary temperatures a linear relation between the unknown function and its normal derivative is known. But in the case of waves the condition at the boundary (equation (C) of section 1) introduces a new variable, the time, which makes the problem one of four variables. In respect to the number of variables the problem of waves is similar to the problems of vibrations and varying temperatures. It differs from them, however, because equations (6) and (7) have real characteristics. There are no real characteristics in the problem of the waves of liquids. We shall give a theorem in section 3 which will show the difference, from a physical standpoint, between waves in elastic media and waves in liquids.

2. There are two general methods in which the different problems we are investigating can be treated.

That of the separation of variables consists in separating the time from the space variables.

Let us put in the equation (6)

$$U = \sin mt \cdot u\,(x\,,y\,,z)\,, \tag{9}$$

where m is a constant.

The equation becomes

$$m^2\,u + \alpha^2\,\Delta^2\,u = 0\,, \tag{10}$$

where the time has disappeared. If, for example, on the boundary $U = 0$, u must be taken $= 0$ there. We are led to find values of m for which the previous equation has solutions which are not identically zero (special solutions). The general solution is obtained by forming an infinite series of solutions of the form (9) multiplied by arbitrary constants of such values that U and $\partial U/\partial t$ for $t = 0$ have the values of the given functions of $x\,,y\,,z$.

The question of determining the special solutions has been resolved by POINCARÉ; the theory of integral equations has been used and Mr. HILBERT, Mr. SCHMIDT, and others have founded the theory of series of special solutions.

Similarly an analogous process can be employed for equation (7) if we put $V = e^{-mt}\,v\,(x\,,y\,,z)$; that is to say, by separating the time from the variables $x\,,y\,,z$.

Equation (7) reduces then to

$$mv + a\Delta^2 v = 0\,,$$

which is extactly analogous to equation (10).

3. The same method of the separation of the variables can be applied to the problem of waves in liquids.

If we put $\Phi = \sin mt\,\varphi\,(x\,,y\,,z)$ equation (A) of section 1 becomes

$$\Delta^2\,\varphi = 0\,,$$

equation (B) is

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0\,,$$

and equation (C) must be replaced by

$$m^2 \varphi + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0.$$

Here again the values of m corresponding to solutions φ which are not identically zero (special solutions) must be found.

By series of special solutions the general solution can be obtained. To calculate the values of m the method of POINCARÉ with those of integral equations can be used.

4. But we wish to set aside the process of the separation of variables and to pass on to the other general method. It is the method which is connected with the ideas which GREEN used for the first time for the equation of LAPLACE and which, little by little, has been also used for other types of equations. By this point of view KIRCHHOFF arrived at his celebrated formula which expresses the principle of HUYGHENS. He applied GREEN's method to equation (6).

BETTI has also applied an analogous method to equation (7).

We wish to show that a general formula can be found in the case of waves of fluids of a type which presents some analogies to these formulae. I have had occasion to mention this formula without giving any development from it in my lectures at Stockholm. We shall now develop it and demonstrate in detail some applications of it.

SECTION 3.

1. We shall begin by demonstrating in this paragraph some general theorems.

FIRST THEOREM. – *If Φ is the function which satisfies the conditions* (A), (B), (C) *of section 1, it is determinate if the values Φ_0, $(\partial\Phi/\partial t)_0$ of Φ and $\partial\Phi/\partial t$ for $t = 0$ on the surface ω are known.*

DEMONSTRATION. – Let Φ_1, Φ_2 be two functions which satisfy the conditions to which Φ is subjected.

Their difference $\Phi_3 = \Phi_1 - \Phi_2$ also satisfies the equations (A), (B), (C) and further we have

$$(\Phi_3)_0 = 0 \qquad \left(\frac{\partial \Phi_3}{\partial t}\right)_0 = 0$$

for $t = 0$ on the surface ω.

Let us now calculate

$$\Omega = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_\omega \frac{1}{\lambda} \left(\frac{\partial \Phi_3}{\partial t}\right)^2 d\omega.$$

On account of equation (C) we shall have

$$\Omega = \int_\omega \frac{1}{\lambda}\left(\frac{\partial\Phi_3}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial^2\Phi_3}{\partial t^2}\right)d\omega = \int_\omega \left(\frac{\partial\Phi_3}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial\Phi_3}{\partial n}\right)d\omega.$$

But on ω'

$$\frac{\partial\Phi_3}{\partial n} = 0$$

and therefore

$$\Omega = \int_\sigma \left(\frac{\partial\Phi_3}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial\Phi_3}{\partial n}\right)\partial\sigma.$$

Applying a well-known transformation,

$$-\Omega = \int_S \left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial\Phi_3}{\partial t}\cdot\frac{\partial\Phi_3}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial\Phi_3}{\partial t}\cdot\frac{\partial\Phi_3}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial\Phi_3}{\partial t}\cdot\frac{\partial\Phi_3}{\partial z}\right)dS + \int_S \frac{\partial\Phi_3}{\partial t}\Delta^2\Phi_3 dS.$$

The third term $= 0$; then

$$-\Omega = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int_S \left\{\left(\frac{\partial\Phi_3}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi_3}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi_3}{\partial z}\right)\right\}dS$$

and it follows that

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left[\int_\omega \frac{1}{\lambda}\left(\frac{\partial\Phi_3}{\partial t}\right)^2 d\omega + \int_S \left\{\left(\frac{\partial\Phi_3}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi_3}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi_3}{\partial z}\right)^2\right\}dS\right] = 0.$$

Integrating with respect to the time,

$$(11) \qquad \int_\omega \frac{1}{\lambda}\left(\frac{\partial\Phi_3}{\partial t}\right)^2 d\omega + \int_S \left\{\left(\frac{\partial\Phi_3}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi_3}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi_3}{\partial z}\right)^2\right\}dS = c,$$

where c is constant with respect to the time.

Then, if $(\Phi_3)_0 = 0$ for $t = 0$ on ω, since $\partial\Phi_3/\partial n = 0$ on ω', $(\Phi_3)_0$ must be zero in the domain S. Consequently, the second integral in the formula (11) will be 0 for $t = 0$. In the same way, since $(\partial\Phi_3/\partial t)_0 = 0$, the first integral will be 0 for $t = 0$. It follows that $c = 0$, and the conclusion can be drawn that Φ_3 will be 0 for every value of t and therefore $\Phi_1 = \Phi_2$.

2. SECOND THEOREM. – *If at a certain instant the molecules belonging to a part of the domain* S *are not displaced from the position of equilibrium, any molecule of the fluid is not displaced from the position of equilibrium.*

DEMONSTRATION. – If ξ, η, ζ are 0 in any part of S, Φ will be constant in this part, and since it is an harmonic function regular in S, it will be everywhere constant. Consequently ξ, η, ζ will be 0 at all points of S.

THIRD THEOREM. – *If a certain instant the molecules belonging to a part of the domain* S *are not displaced from the position of equilibrium and have no velocity, the fluid will remain always in the position of equilibrium.*

DEMONSTRATION. – If ξ, η, ζ and $\frac{d\xi}{dt}, \frac{d\eta}{dt}, \frac{d\zeta}{dt}$ are 0 in one part of the domain S at a certain instant, Φ and $d\Phi/dt$ will be constant in this part and therefore they will be constant in the whole domain S at the same instant. By virtue of the first theorem they will be constant in S at every instant and consequently the liquid will have no motion.

3. These propositions show us the essential difference which exists between waves in liquids and waves in elastic media. In elastic media the motion is propagated with a certain velocity from one part to another; in liquids the motion reaches the whole mass contemporaneously, at least when the fluid does not remain in a constant state of equilibrium. In the case of liquids there is no propagation of motion and consequently one cannot speak of the velocity of propagation.

SECTION 4.

1. Let Φ and Ψ be two functions which satisfy the conditions (A), (B), (C) of section 1.

By virtue of GREEN's theorem

$$\int_\sigma \left(\varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n}\right) d\sigma = 0,$$

on account of (B)

$$\int_\omega \left(\varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n}\right) d\omega = 0.$$

Using (C) this becomes

$$\int_\omega \left(\Phi \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \Psi \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}\right) \frac{1}{\lambda} d\omega = 0. \tag{12}$$

Let us now suppose that

$$\Psi = \frac{1}{r} + \chi,$$

where r denotes the distance between a point A (x_0, y_0, z_0) interior to the domain S and a point (x, y, z) and where χ is a regular function. Then the preceding formulae are no longer valid for they presuppose that ψ is regular in the domain S. In this case formula (12) must be replaced by

$$4\pi\Phi_A + \int_\omega \left(\Phi \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \Psi \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}\right) \frac{1}{\lambda} d\omega = 0, \tag{12'}$$

where Φ_A denotes the value of Φ at the point A.

Then

$$4\pi\varphi_A = -\frac{\partial}{\partial t} \int_\omega \left(\varphi \frac{\partial \psi}{\partial t} - \psi \frac{\partial \varphi}{\partial t}\right) \frac{1}{\lambda} d\omega.$$

Integrating between the limits 0 and t_1, we obtain

$$4\pi \int_0^{t_1} \varphi_A \, dt = -\int_\omega \left\{ \varphi_1 \left(\frac{\partial \psi}{\partial t}\right)_1 - \psi_1 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)_1 \right\} \frac{1}{\lambda} d\omega + \int_\omega \left\{ \varphi_0 \left(\frac{\partial \psi}{\partial t}\right)_0 - \psi_0 \left(\frac{\partial \psi}{\partial t}\right)_0 \right\} \frac{1}{\lambda} d\omega$$

where φ_1, ψ_1, $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)_1$, $\left(\frac{\partial \psi}{\partial t}\right)_1$, denote the functions φ, ψ and the derivatives $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$, $\frac{\partial \psi}{\partial t}$ for $t = t_1$, while φ_0, ψ_0, $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)_0$, $\left(\frac{\partial \psi}{\partial t}\right)_0$ denote the same quantities for $t = t_0$. Let us now suppose that ψ_1 and $(d\psi/dt)_1$ are 0 on ω.

Then

$$\text{(D)} \qquad \Phi(x_0, y_0, z_0, t_1) = \frac{1}{4\pi} \frac{d}{dt_1} \int_\omega \left\{ \varphi_0 \left(\frac{\partial \psi}{\partial t}\right)_0 - \psi_0 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)_0 \right\} \frac{1}{\lambda} d\omega .$$

The above formula gives us a knowledge of Φ at every point in S and for every value of t when the values of φ_0, $(\partial\varphi/\partial t)_0$ are known on ω. (Compare with the first theorem of section 3).

It is necessary to calculate further the function Ψ and consequently χ. This function plays, in this case, *a part which can be compared with that played by* GREEN'*s function.*

It must be remarked that ψ_0 and $(d\psi/dt)_0$ should depend on t_1 since ψ_1 and $(d\psi/dt)_1$ should be 0. The variable t_1 appears then in the second member of the equation (D) because it is contained in ψ_0 and $(d\psi/dt)_0$.

SECTION 5.

In this paragraph we shall give some applications of the fundamental formula (D) of the preceding paragraph. Let us suppose that S is a sphere of radius R and that ω is the surface of the sphere in such a way that there are no rigid boundaries.

Let us put

$$\psi = a_0 + \frac{(t_1 - t)^2}{2!} a_2 + \frac{(t_1 - t)^4}{4!} a_4 + \cdots ,$$

$a_0, a_2, a_4, \cdots$, being coefficients independent of t_1 and t. We shall have

$$\psi_1 = a_0 \quad , \quad \left(\frac{d\psi}{dt}\right)_1 = 0 .$$

But

$$\psi = \frac{1}{r} + \chi .$$

$$\therefore a_0 = \frac{1}{r_A} + (\chi)_1 ,$$

and since a_0 should be 0 on ω and χ should be a regular and harmonic function if we use the method of images we obtain

$$(\chi)_1 = -\frac{R}{l} \frac{1}{r_{A'}} ,$$

where A′ denotes the image point of A with respect to the sphere, $r_{A'}$ is the distance of the point A′ from the point (x, y, z), l is the distance from the center of the sphere to the point A.

Then

$$a_0 = \frac{1}{r_A} - \frac{R}{l} \frac{1}{r_{A'}} .$$

Let ρ be the radius vector, the pole being at the center of the sphere; then

$$\frac{\partial\psi}{\partial n} = -\frac{\partial\psi}{\partial\rho} = -\frac{\partial a_0}{\partial\rho} - \frac{(t_1-t)^2}{2!}\frac{\partial a_2}{\partial\rho} - \frac{(t_1-t)^4}{4!}\frac{\partial a_4}{\partial\rho}, \cdots$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = a_2 + \frac{(t_1-t)^2}{2!}a_4 + \cdots.$$

Consequently on the surface ω, i.e. for $\rho = R$,

$$-\lambda\frac{\partial a_0}{\partial\rho} = a_2 \quad , \quad -\lambda\frac{\partial a_2}{\partial\rho} = a_4 \quad , \quad -\lambda\frac{\partial a_4}{\partial\rho} = a_6, \cdots.$$

Since a_0 is known, the regular harmonic functions $a_2, a_4, a_6, \cdots$, must be determinate when their values on the boundary of the sphere are known.

Let us begin by transforming the expression for a_0. Let us denote by γ the angle between the lines joining the center of the sphere to the points A and (x, y, z).

Then

$$a_0 = \frac{1}{(l^2+\rho^2-2l\rho\cos\gamma)^{1/2}} - \frac{R}{l}\,\frac{1}{\left(\frac{R^4}{l^2}+\rho^2-2\frac{R^2}{l}\rho\cos\gamma\right)^{1/2}}$$

or

$$\frac{\rho}{R}\frac{\partial a_0}{\partial\rho} = \frac{\rho}{R}\frac{\partial}{\partial\rho}\left[\frac{1}{(l^2+\rho^2-2l\rho\cos\gamma)^{1/2}}\right] - \frac{\rho}{R}\frac{\partial}{\partial\rho}\left[\frac{R}{l}\cdot\frac{1}{\left(\frac{R^4}{l^2}+\rho^2-2\frac{R^2}{l}\rho\cos\gamma\right)^{1/2}}\right]$$

is a harmonic function which is equal to $\partial a_0/\partial\rho$ on the surface of the sphere; but it is not regular in the interior of the sphere. In fact, the first term of the second member becomes infinite for $\rho = l$, $\gamma = 0$. Then to calculate a_2 we cannot take the previous expression and multiply it by $-\lambda$, for a_2 must be regular in the interior of the sphere. But the following artifice may be used to calculate a_2.

Let us transform the first term of the second member by a transformation of reciprocal radii with respect to the sphere and let us multiply by R/ρ. The expression remains harmonic, possesses the same values on the boundary of the sphere, but becomes regular in the interior. To make the transformation of reciprocal radii it is sufficient to replace ρ by R^2/ρ. Thus the first term of the previous expression becomes

$$-R^2\frac{R^2-l\rho\cos\gamma}{(l^2\rho^2-R^4-2lR^2\rho\cos\gamma)^{3/2}}.$$

The second term equals

$$\frac{\rho l(l\rho-R^2\cos\gamma)}{(R^4+l^2\rho^2-2lR^2\rho\cos\gamma)^{3/2}}$$

It is found then that

$$a_2 = -\lambda\frac{l^2\rho^2-R^4}{(R^4+l^2\rho^2-2l\rho R^2\cos\gamma)^{3/2}}.$$

In calculating $a_4, a_6, \cdots$, there are no more difficulties and

$$a_4 = -\lambda^2\frac{\rho}{R}\frac{\partial}{\partial\rho}\left[\frac{R^4-l^2\rho^2}{(R^4+l^2\rho^2-2l\rho R^2\cos\gamma)^{3/2}}\right] = -\frac{\lambda^2}{R}\frac{\partial}{\partial\log\rho}\left[\frac{R^4-l^2\rho^2}{(R^4+l^2\rho^2-2l\rho R^2\cos\gamma)^{3/2}}\right].$$

In general,

$$a_{2n} = (-1)^{n-1} \frac{\lambda^n}{R^{n-1}} \frac{\partial^{n-1}}{\partial (\log \rho)^{n-1}} \left[\frac{R^4 - l^2 \rho^2}{(R^4 + l^2 \rho^2 - 2 l \rho R^2 \cos \gamma)^{3/2}} \right] .$$

Consequently,

$$\Psi = a_0 + \sum_1^\infty (-1)^{n-1} \frac{\lambda^n}{R^{n-1}} \frac{\partial^{n-1}}{\partial (\log \rho)^{n-1}} \left[\frac{R^4 - l^2 \rho^2}{(R^4 + l^2 \rho^2 - 2 l \rho R^2 \cos \gamma)^{3/2}} \right] \frac{(t_1 - t)^{2n}}{2n!} .$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = - \sum_1^\infty (-1)^{n-1} \frac{\lambda^n}{R^{n-1}} \frac{\partial^{n-1}}{\partial (\log \rho)^{n-1}} \left[\frac{R^4 - l^2 \rho^2}{(R^4 + l^2 \rho^2 - 2 l \rho R^2 \cos \gamma)^{3/2}} \right] \frac{(t_1 - t)^{2n-1}}{(2n-1)!} .$$

In order to calculate the formula (D) of section 4 it is necessary to evaluate ψ_0 and $(d\psi/dt)_0$, that is to say, to put $t = 0$ in the previous series. Further it is the values at the surface of the sphere which have to be found. Finally, this expression must be derived with respect to t_1.

Let us then adopt polar coordinates and put

$$x = \rho \sin \theta \cos \varphi \quad , \quad y = \rho \sin \theta \sin \varphi \quad , \quad z = \rho \cos \theta ,$$

$$x_0 = l \sin \theta_0 \cos \varphi_0 \quad , \quad y_0 = l \sin \theta_0 \sin \varphi_0 \quad , \quad z = l \cos \theta_0 .$$

Then $\cos \gamma = \cos \varphi \cos \varphi_0 + \sin \varphi \sin \varphi_0 \cos (\theta - \theta_0)$.

Let us write

$$\Theta (l , \theta_0 , \varphi_0 , \theta , \varphi , t) =$$

$$= \sum_1^\infty (-1)^{n-1} \frac{\lambda^{n-1}}{R^{n-1}} \frac{\partial^{n-1}}{\partial (\log l)^{n-1}} \left[\frac{R^2 - l^2}{(R^2 + l^2 - 2 R l \cos \gamma)^{3/2}} \right] \frac{t^{2n-1}}{(2n-1)!} .$$

Formula (D) can be written

$$(\mathrm{D}_a) \qquad \Phi (l , \theta_0 , \varphi_0 , t) = \frac{R}{\gamma \pi} \int_\omega \varphi_0' (\theta , \varphi) \Theta (l , \theta_0 , \varphi_0 , \theta , \varphi , t) \sin \theta d\theta \, d\varphi +$$

$$+ \frac{R}{\gamma \pi} \frac{d}{dt} \int_\omega \varphi_0 (\theta , \varphi) \Theta (l , \theta_0 , \varphi_0 , \theta , \varphi , t) \sin \theta d\theta \, d\varphi ,$$

where for simplification we have written

$$\Phi_0 (\theta , \varphi) = \varphi_0 (R , \theta , \varphi , t) , t = 0$$

$$\Phi_0' (\theta , \varphi) = \left\{ \frac{d}{dt} \varphi_0 (R , \theta , \varphi , t) \right\} , t = 0 .$$

The formula we have been seeking to find is the general formula in the case of the sphere.

If, instead of a sphere, the liquid occupies a hemisphere and the diametral plane constitutes the rigid boundary so that the curved surface is free, the method of images will provide the solution in a similar manner. The same holds in the case where the liquid occupies a section of a sphere between two rigid diametral planes the angle between which equals π/n, where n is an integer.

XI.

RAPPORTO PRELIMINARE

SULLA TERZA CONFERENZA DEL CONSIGLIO INTERNAZIONALE DI RICERCHE

TENUTA A BRUXELLES DAL 18 AL 28 LUGLIO 1919 (*)

« Rend. Acc. Lincei », ser. 5ª, vol. XXVIII, 1° sem. 1919; pp. 437-452.

La terza Conferenza si riunì a Bruxelles dal 18 al 28 luglio 1919 nello splendido palazzo delle Accademie. L'Accademia Reale delle Scienze offrì alla Conferenza la più grande ospitalità, e ricevimenti in onore dei delegati ebbero luogo da parte delle autorità politiche del Belgio e di quelle cittadine di Bruxelles.

Alla seduta inaugurale intervenne S. M. il Re del Belgio.

Il Ministro della Pubblica Istruzione ed il Vice-Direttore delle Classi di Scienze e dell'Accademia rivolsero delle allocuzioni ai delegati, esprimendo loro il compiacimento di riceverli.

Presiedette la Conferenza il Professorè LACROIX in sostituzione del Prof. PICARD, assente per le proprie condizioni di salute, e funzionò da Ufficio di Presidenza il Comitato esecutivo, composto dal dott. CAMPBELL (in sostituzione del dott. HALE, trattenuto in America), LECOINTE, VOLTERRA e SCHUSTER nella qualità di segretario generale.

Presero parte alle sedute, come Delegati italiani: VOLTERRA, NASINI, REINA, RICCÒ, FANTOLI e PALAZZO. Gli altri Delegati, nominati dall'Accademia, non poterono intervenire per ragioni d'ufficio o private.

Parecchie sedute plenarie vennero dedicate alla elaborazione dello Statuto del Consiglio Internazionale di Ricerche. Esso venne definitivamente approvato nella seduta del 28 luglio nella forma che qui si riporta:

(*) Si pubblica il presente « Rapporto » a testimonianza di un'importante attività svolta dal VOLTERRA durante e dopo la prima guerra mondiale; attività che si esplicò fra l'altro con una missione da lui compiuta in Inghilterra e in Francia quale capitano del genio dal 24 aprile al 10 maggio 1917, e sulla quale egli ebbe a stendere una Relazione riservata, per il Ministero per le Armi e Munizioni [N.d.R.].

STATUTO

DEL CONSIGLIO INTERNAZIONALE DI RICERCHE

I. - Scopo del Consiglio Internazionale.

1. Il Consiglio Internazionale di Ricerche ha per scopo:

a) di coordinare l'attività internazionale nei varî rami della scienza e delle sue applicazioni;

b) di promuovere, secondo l'articolo 1° delle deliberazioni di Londra (ottobre 1918), la creazione d'Associazioni o d'Unioni internazionali giudicate utili al progresso delle scienze;

c) di rivolgere l'attività scientifica internazionale nei domini dove non esistono Associazioni competenti;

d) di mettersi, con mezzi appropriati, in rapporto coi Governi dei paesi aderenti per raccomandare lo studio di questioni che sono di sua competenza.

II. - Sede.

2. La sede legale del Consiglio Internazionale di Ricerche è fissata a Bruxelles, dove avranno luogo le Assemblee generali e dove saranno conservati gli Archivi.

I doni e i legati saranno ricevuti e amministrati secondo la legislazione belga.

III. - Ammissioni.

3. Potranno partecipare alla fondazione del Consiglio Internazionale di Ricerche e delle Associazioni che si annodano ad esso, o potranno ulteriormente aderirvi, i seguenti paesi: Belgio, Brasile, Stati Uniti, Francia, Italia, Regno Unito della Gran Bretagna e Irlanda, Australia, Canadà, Nuova Zelanda, Africa del Sud, Grecia, Giappone, Polonia, Portogallo, Romania, Serbia.

Quando un'Associazione sarà costituita, le nazioni non comprese nella enumerazione precedente, ma che hanno le condizioni volute dall'art. 1 delle deliberazioni della Conferenza di Londra, potranno esservi ammesse, sia dietro loro richiesta, sia dietro proposta d'uno dei paesi che fanno parte dell'Associazione. Questa richiesta o questa proposta sarà sottoposta all'Associazione interessata, che deciderà dietro una maggioranza dei tre quarti dei voti dell'insieme dei paesi già associati.

Un paese può aderire al Consiglio Internazionale di Ricerche o alle Associazioni che ad esso si rannodano, sia per mezzo della sua Accademia Nazionale, sia per mezzo del suo proprio Consiglio di Ricerche, sia per mezzo d'altre istituzioni o gruppi d'istituzioni nazionali simili, o per mezzo del suo Governo.

5. Gli Statuti delle Associazioni in relazione col Consiglio Internazionale di Ricerche dovranno essere approvati da questo.

IV. - Amministrazione del Consiglio.

6. I lavori del Consiglio sono diretti dall'Assemblea generale, formata dall'insieme di Delegati accreditati a questo scopo dai paesi aderenti.

7. Vi è un Comitato esecutivo che gestisce gli affari del Consiglio nello spazio di tempo fra due Assemblee generali, secondo le deliberazioni prese nella sessione precedente. Questo Comitato è composto di cinque membri, eletti dall'Assemblea generale.

8. L'ufficio del Comitato esecutivo comprende un Presidente, due Vice-presidenti e un Segretario generale; durano in carica fino alla fine della seconda Assemblea generale che segue quella della loro elezione. In via eccezionale, la carica del Presidente e d'uno dei Vice-presidenti, eletti alla fondazione del Consiglio, scade alla fine della prima Assemblea generale che segue quella della loro elezione. I membri uscenti sono rieleggibili.

9. Il Segretario generale tiene la corrispondenza e amministra le entrate, e s'occupa della preparazione e della distribuzione delle pubblicazioni decise dall'Assemblea generale.

10. Il Comitato esecutivo può scegliere nuovi membri per i posti che si rendessero vacanti nel suo seno.

Ogni persona nominata in queste circostanze rimane in carica fino alla riunione dell'Assemblea generale seguente, la quale deve procedere ad una elezione definitiva. Essa ha le funzioni di colui che sostituisce.

V. – Attribuzioni del Comitato esecutivo.

11. Nell'intervallo fra due Assemblee generali, il Comitato esecutivo può sottomettere alcune proposte all'approvazione degli Enti che hanno aderito al Consiglio; è obbligato a farlo quando la richiesta viene da un terzo dei voti dei paesi che fanno parte dell'Associazione.

12. Il Comitato esecutivo può nominare Commissioni speciali per lo studio di questioni della competenza del Consiglio Internazionale di Ricerche; i loro membri non sono necessariamente scelti fra i Delegati presso il Consiglio stesso. Queste Commissioni speciali, alla lor volta, possono, per cooptazione, associarsi nuovi membri, su maggioranza dei due terzi dei voti di quelli che le compongono.

13. Il Comitato esecutivo deve presentare un annuo rapporto all'Ente d'ogni paese aderente al Consiglio.

Questi rapporti sono mandati anche ai Delegati all'Assemblea generale precedente.

VI. – Assemblee generali.

14. Il Consiglio si riunisce, di regola, ogni tre anni in Assemblea generale ordinaria.

Se la data di questa riunione non è stata determinata dall'Assemblea generale precedente, verrà fissata dal Comitato esecutivo e comunicata ai diversi Enti quattro mesi in anticipo.

15. In casi speciali, ottenuto il consenso del Comitato esecutivo, il Presidente può convocare un'Assemblea generale straordinaria; è obbligato a convocarla dietro domanda d'un terzo dei voti dei paesi aderenti.

16. I Delegati dei diversi paesi presso l'Assemblea generale sono eletti dagli Enti aderenti al Consiglio Internazionale di Ricerche.

17. Il Presidente del Comitato esecutivo può, di sua iniziativa, invitare uomini di scienza, non delegati, ma appartenenti ai paesi aderenti, ad assistere con voto consultivo, alle sedute dell'Assemblea generale.

I membri delle Commissioni speciali, nominate all'art. 12, hanno diritto di assistere, nelle stesse condizioni, alle sedute dell'Assemblea generale in cui vengono trattate le questioni che rientrano nelle loro attribuzioni.

18. L'ordine del giorno d'una sessione è fissato dal Comitato esecutivo e comunicato almeno quattro mesi prima dell'apertura della sessione stessa.

Ogni questione non messa all'ordine del giorno può venire presa in considerazione con l'assenso preventivo della metà almeno dei voti dei paesi rappresentati all'Assemblea generale.

VII. - Stato finanziario e diritto di voto.

19. Il Comitato esecutivo prepara un preventivo finanziario ogni anno del periodo compreso fra due sessioni.

Una Commissione finanziaria, nominata dall'Assemblea generale, è incaricata dello studio di quel preventivo finanziario e della verifica dei conti dell'esercizio precedente.

Su queste due questioni presenta rapporti distinti che sono sottoposti all'Assemblea generale.

In seguito a quest'esame finanziario il Consiglio fissa il tasso della parte contributiva unitaria.

La quota dovuta da un paese e il numero corrispondente dei voti che gli sono attribuiti sono regolati secondo la seguente tabella:

Popolazione del paese	N. dei voti	N. delle parti unitarie contributive
Meno di 5 milioni abit.	1	1
Da 5 a 10 » »	2	2
» 10 a 15 » »	3	3
» 15 a 20 » »	4	5
» 20 in più	5	8.

Gli abitanti delle colonie e dei protettorati d'un paese sono inclusi nella popolazione del paese stesso, se questo lo desidera, e dietro le indicazioni del suo Governo.

Ogni Dominio (Africa del Sud, Australia, Canadà, Nuova Zelanda) ha un numero di voti corrispondente alla sua popolazione e fissati secondo la tabella precedente.

La quota unitaria fissata durante il primo periodo della Convenzione non può oltrepassare 250 franchi all'anno. In ogni paese l'autorità che aderisce al Consiglio è responsabile del pagamento della quota.

20. Le rendite del Consiglio provenienti dalle contribuzioni dei diversi paesi sono devolute alle spese dell'Ufficio.

Quelle provenienti da doni sono utilizzate dal Consiglio Internazionale di Ricerche, tenendo conto dei desideri espressi dai donatori.

Ogni paese che si dimetta dal Consiglio Internazionale di Ricerche cede, per questo fatto, i suoi diritti all'attivo dell'Associazione.

21. Nelle Assemblee generali le deliberazioni concernenti le questioni d'ordine scientifico sono prese a maggioranza dei voti di tutti i delegati presenti. Per le questioni d'ordine amministrativo e per le questioni miste il voto ha luogo per Stato, secondo il numero dei voti d'ogni Stato, come è stabilito dall'art. 19.

Se c'è dubbio per la categoria in cui dev'essere messa una questione da discutere, il Presidente decide.

Nelle Commissioni le decisioni sono prese a maggioranza dei voti dei membri che la compongono e non dei paesi.

In tutti i casi, se c'è parità di voti, quello del Presidente ha la prevalenza.

22. Per le questioni amministrative messe all'ordine del giorno, un paese che non è rappresentato può mandare per scritto il suo voto al Presidente. Per essere valido il voto dev'essere ricevuto avanti lo spoglio dello scrutinio.

VIII. - Durata della Convenzione e modificazioni.

23. La presente convenzione entrerà in vigore il 1° gennaio 1920 a condizione che tre, almeno, dei paesi, accennati all'art. 3, vi abbiano aderito.

Sarà valida fino al 31 dicembre 1931. Dopo questa data, sarà rinnovata per un altro periodo di dodici anni con il consenso dei paesi aderenti.

24. Non potrà farsi alcun cambiamento ai termini della presente Convenzione senza l'approvazione dei due terzi dei voti dei paesi interessati.

25. Il testo francese servirà esclusivamente per l'interpretazione da dare ai varî articoli della Convenzione.

La sede legale dell'Ufficio Internazionale di Ricerche risulta quindi Bruxelles.

Presso l'Accademia si terranno le riunioni generali e quelle periodiche del Comitato esecutivo; ivi verranno tenuti i documenti amministrativi e gli Archivi. Inoltre l'Accademia avrà la gestione degli eventuali doni.

Il Segretariato generale sarà nella città dove risiede il Segretario generale.

Al Comitato esecutivo venne affidato l'incarico di rivolgere gl'inviti di adesione agli Stati neutri. Quanto alla Czeco-Slovacchia, Cina e Siam, fu stabilito d'invitarli subito a far parte dell'Associazione, avendo tali Stati dichiarata la guerra agl'Imperi Centrali.

Venne deliberato ad unanimità di riconfermare il Comitato esecutivo, trasformandolo da provvisorio in definitivo. Esso resta quindi così costituito:

E. PICARD, Presidente.
SCHUSTER, Segretario.
HALE, LECOINTE, VOLTERRA.

Còmpito del Comitato esecutivo sarà di sottoporre gli Statuti all'approvazione delle Accademie, Consigli Nazionali di Ricerche e Governi, giacché le varie deliberazioni furono tutte prese *ad referendum*.

Il Consiglio Internazionale di Ricerche si considererà definitivamente costituito allorché si sarà ottenuta l'adesione di tre paesi fondatori. Esso comincerà a funzionare dal 1° gennaio 1920. Il Comitato esecutivo dovrà poi negoziare l'adesione alle varie Unioni, ciascuna delle quali sarà autonoma, in modo tale che ogni singolo paese sarà libero di aderire a quelle Unioni che sceglierà.

Dopo i ringraziamenti del Prof. P. PELSENEER per aver prescelto il Belgio come sede legale dell'Associazione, il Prof. C. FLAHAULT invitava i delegati di tutte le nazioni aderenti al Consiglio Internazionale di Ricerche d'intervenire all'apertura dell'Università di Strasburgo, da effettuarsi l'11 o il 12 novembre prossimo.

Le Unioni che definitivamente furono stabilite sono: la Unione Astronomica, la Geodetica e Geofisica, e quella di Chimica pura ed applicata. Le altre Unioni si trovano ancora in uno stato di preparazione.

UNIONE ASTRONOMICA

Numerosi furono gli astronomi convenuti e parecchie sedute furono dedicate alla costituzione dell'Unione, che adottò il seguente:

STATUTO

DELL'UNIONE ASTRONOMICA INTERNAZIONALE (1)

I. - Scopo dell'Unione e condizioni di ammissione.

1. L'Unione ha lo scopo:

a) di facilitare le relazioni fra gli astronomi dei diversi paesi, quando sia utile o necessario ricorrere ad una operazione internazionale;

b) di favorire lo studio dell'astronomia in tutti i suoi rami.

2. L'Ammissione d'uno Stato all'Unione è subordinata alle condizioni fissate dallo Statuto del Consiglio Internazionale di Ricerche.

II. - Comitati nazionali.

3. Un Comitato Nazionale viene costituito in ciascuno dei paesi aderenti all'Unione; esso è creato tanto per l'iniziativa della sua Accademia Nazionale, o del suo Consiglio Nazionale di Ricerche, o d'altre Istituzioni o gruppi d'Istituzioni Nazionali simili, quanto per quella del suo Governo.

4. I Comitati Nazionali hanno il còmpito di facilitare e coordinare, nei loro territorii rispettivi, lo studio dei diversi rami dell'Astronomia, considerata principalmente dal punto di vista internazionale.

Ogni Comitato Nazionale, sia solo, che in accordo con uno o più altri Comitati Nazionali, ha il diritto di sottomettere all'Unione le questioni da discutersi e che rientrano nella competenza di quest'ultima.

I Comitati nazionali scelgono i delegati incaricati di rappresentarli alle Assemblee dell'Unione.

III. - Amministrazione dell'Unione.

5. I lavori dell'Unione sono diretti dall'Assemblea generale dei Delegati.

6. L'Ufficio dell'Unione comprende un Presidente, cinque Vice-presidenti, al massimo, e un Segretario generale eletti dall'Assemblea generale; restano in carica fino al termine della seconda Assemblea generale seguente quella della loro elezione. In via eccezionale il Presidente e tre dei Vice-presidenti (estratti a sorte) eletti alla fondazione dell'Unione scadono di carica alla fine dell'Assemblea generale ordinaria che segue quella della loro elezione. Questo ufficio forma il Comitato esecutivo dell'Unione.

I membri uscenti di carica sono rieleggibili.

I cinque Vice-presidenti sono scelti in modo da rappresentare i differenti rami dell'Astronomia.

Il Comitato esecutivo provvederà ai posti che si renderanno vacanti nel suo seno. Ogni persona scelta in queste condizioni resta in carica fino alla riunione dell'Assemblea generale seguente, la quale procederà allora a un'elezione definitiva. Il membro così scelto adempie il mandato di colui che sostituisce.

(1) Gli Statuti delle altre Unioni sono molto simili a questo e perciò non li abbiamo riportati in questo Resoconto preliminare.

Esiste, inoltre, un Ufficio amministrativo che, sotto la direzione del Segretario generale dell'Unione, s'occupa della corrispondenza, amministra le rendite, assicura la conservazione degli Archivi, e la preparazione e distribuzione di pubblicazioni approvate dalla Assemblea generale.

IV. - COMMISSIONI.

7. L'Unione nomina delle Commissioni per lo studio di determinati soggetti d'Astronomia, per l'incoraggiamento d'imprese collettive, e per l'esame di questioni di convenzione e di standardizzazione.

Queste Commissioni presentano relazioni intorno ai lavori di cui sono incaricate.

8. Il Presidente e i membri di ognuna di queste Commissioni sono eletti dall'Assemblea generale su proposta del Comitato esecutivo dell'Unione. Durano in carica fino alla fine dell'Assemblea generale ordinaria seguente e sono rieleggibili.

Quando una Commissione consta di membri in parte nominati dall'Unione astronomica e in parte da un'altra Unione che si riannoda al Consiglio Internazionale di Ricerche, ha la facoltà di eleggersi il Presidente.

Le Commissioni stabiliscono i propri regolamenti d'ordine interno; possono associarsi per cooptazione, e a maggioranza dei due terzi dei voti, nuovi membri appartenenti ai paesi rappresentati dall'Unione e che non sono necessariamente Delegati.

9. Dietro approvazione del Comitato esecutivo una Commissione può avere le sue proprie pubblicazioni e affidare una parte qualsiasi dei suoi lavori a istituzioni nazionali o anche a privati.

V. - ASSEMBLEE GENERALI.

10. L'Unione si aduna, di regola, ogni tre anni in Assemblea generale ordinaria.

Se la data e il luogo non sono stati indicati dall'Assemblea generale precedente, saranno fissati dal Comitato esecutivo e comunicati agli Enti, che aderiscono al Consiglio, almeno quattro mesi in anticipo.

11. In casi speciali, il Presidente può convocare un'Assemblea generale straordinaria col consenso del Comitato esecutivo; è obbligato a convocarla su domanda di un terzo dei voti dei paesi aderenti.

12. Tutti i membri dei Comitati Nazionali possono assistere alle riunioni dell'Assemblea generale, ma solo con voto consultivo.

Il Presidente dell'Unione può invitare uomini di scienza, non delegati, ma appartenenti a paesi aderenti, ad assistere alle sedute dell'Assemblea generale, a titolo consultivo. I membri non delegati delle Commissioni, accennate all'art. 8, hanno il diritto d'assistere alle sedute stesse dell'Assemblea generale in cui sono discusse le questioni rientranti nelle loro attribuzioni, e a titolo consultivo.

13. L'ordine del giorno d'una sessione è fissato dal Comitato esecutivo e comunicato, almeno quattro mesi prima dell'apertura di questa sessione. Ogni questione non messa all'ordine del giorno può essere presa in considerazione con l'assenso preventivo della metà, almeno, dei voti dei paesi rappresentati all'Assemblea generale.

VI. - STATO FINANZIARIO O DIRITTO DI VOTO.

14. Il Comitato esecutivo prepara un preventivo finanziario ogni anno del periodo compreso fra due sessioni. Una Commissione finanziaria, nominata dall'Assemblea generale, è incaricata dello studio di quel preventivo e della verifica dei conti dell'esercizio precedente. Su queste due questioni presenta rapporti distinti che sono sottoposti all'Assemblea generale.

In seguito a quest'esame finanziario, l'Unione fissa il tasso della parte contributiva unitaria.

La quota dovuta da un paese e il numero corrispondente dei voti che gli sono attribuiti sono regolati dalla seguente tabella:

Popolazione del paese	N. dei voti	N. delle parti unitarie contributive
Meno di 5 milioni abitanti	1	1
Da 5 a 10 » »	2	2
» 10 a 15 » »	3	3
» 15 a 20 » »	4	5
» 20 in più	5	8.

Gli abitanti delle Colonie e dei Protettorati d'un paese sono inclusi nella popolazione del paese stesso, se questo lo desidera e dietro le indicazioni del suo Governo.

Ogni Dominio (Africa del Sud, Australia, Canadà, Nuova Zelanda) ha un numero di voti corrispondenti alla sua popolazione e fissati dalla tabella precedente.

La quota unitaria, fissata durante il primo periodo della Convenzione, non potrà sorpassare 1500 franchi francesi annui.

15. Le rendite dell'Unione provenienti da contribuzioni dei diversi paesi sono devolute al pagamento:

1) delle spese di pubblicazione e spese accessorie d'amministrazione;

2) delle spese di redazione e di discussione delle osservazioni, includendovi anche la rimunerazione degli assistenti.

Le entrate provenienti da doni sono utilizzate dall'Unione, tenendo conto dei desideri espressi dai donatori.

Ogni paese che si ritiri dall'Unione, cede, per tal fatto, i suoi diritti all'attivo dell'Associazione.

16. Nelle Assemblee generali, le deliberazioni concernenti le questioni d'ordine scientifico sono prese a maggioranza dei voti di tutti i Delegati presenti. Per le questioni d'ordine amministrativo e per le questioni miste, il voto ha luogo per Stato, secondo l'articolo 14.

Se c'è dubbio sulla categoria in cui dev'essere messa una questione, il Presidente decide.

Nelle Commissioni le decisioni sono prese a maggioranza dei membri che le compongono e non dei paesi.

In tutti i casi, se c'è parità di voti, decide quello del Presidente.

17. Per le questioni amministrative, messe all'ordine del giorno, un paese che non è rappresentato può mandare per scritto il suo voto al Presidente. Per essere valido, questo voto dev'essere ricevuto avanti lo spoglio dello scrutinio.

VII. - Regolamenti interni.

18. L'Assemblea generale può stabilire regolamenti interni, concernenti sia la condotta dei lavori, sia i doveri generali che incombono ai membri del Comitato, sia in generale ogni oggetto non previsto dallo Statuto.

Nello stesso modo, ogni Commissione può elaborare regolamenti per la condotta dei propri lavori. Prima d'entrare in vigore, questi regolamenti devono essere approvati dall'Assemblea generale. Nessuno d'essi può contenere regole contrarie ai termini della presente Convenzione.

VIII. - Durata della Convenzione e modificazioni.

19. La presente Convenzione è valida fino al 31 dicembre 1931. Dopo questa data sarà rinnovata per un altro periodo di dodici anni con il consenso dei paesi aderenti.

20. Non potrà farsi alcun cambiamento ai termini della presente Convenzione senza l'approvazione dei due terzi dei voti dei paesi interessati.

21. Il testo francese servirà esclusivamente per l'interpretazione da dare ai vari articoli della Convenzione.

Dopo un lungo dibattito sopra il modo di dividere l'Unione Astronomica in Sezioni, prevalse il partito di indicare i principali problemi di studio e di nominare per ciascuno di essi una particolare Commissione.

Vennero così formate trentadue Commissioni, delle quali qui si riporta l'elenco:

1ª Relatività,
2ª Riedizione di opere antiche,
3ª Nozioni, Unità e Economia delle pubblicazioni,
4ª Efemeridi,
5ª Analisi di Lavori e Bibliografia,
6ª Telegrammi astronomici,
7ª Astronomia dinamica e Tavole astronomiche,
8ª Astronomia meridiana (incluso lo studio della Rifrazione),
9ª Ricerche ottiche teoriche e applicate relative all'Astronomia e allo studio fisico degli istrumenti,
10ª Radiazione solare,
11ª Spettri-Elio-Registratori delle velocità,
12ª Atmosfera solare,
13ª Spedizioni astronomiche, eclissi, ecc.,
14ª Campioni di lunghezza d'onda e Tavole di Spettri solari,
15ª Rotazione solare,
16ª Osservazioni fisiche di pianeti,
17ª Nomenclatura lunare,
18ª Longitudine con telegrafia senza fili,
19ª Variazione delle Latitudini,
20ª Piccoli pianeti,
21ª Comete,
22ª Stelle filanti,
23ª Carta del Cielo,
24ª Parallassi stellari,
25ª Fotometria stellare,
26ª Stelle doppie,
27ª Stelle variabili,
28ª Nebulose,
29ª Classificazione spettrale delle stelle,
30ª Velocità radiale,
31ª Ora,
32ª Riforma del Calendario.

L'Ufficio di Presidenza venne così costituito:

Presidente: BAILLAUD;
Vicepresidenti: HALE, DYSON, LECOINTE, RICCÒ (un quinto posto di Vicepresidente venne per ora tenuto sospeso);
Segretario: FOWLER (Imperial College London S.W.F.).

L'Unione comincerà a funzionare dal 1° gennaio 1920.

Per desiderio espresso dai delegati presenti, e su proposta dei delegati italiani, venne, ad unanimità, deliberato di tenere il primo Congresso dell'Unione a Roma nel 1922.

Uno degli argomenti di studio è quello che si riferisce alla variazione delle latitudini.

Le osservazioni e gli studi riferentisi a tale problema erano sussidiati in passato dalla Associazione Geodetica Internazionale, che a proprie spese provvedeva al funzionamento degli Osservatorii astronomici distribuiti lungo il parallelo di 39°8'.

Volendosi ora passare tale servizio all'Unione astronomica, la Commissione sopra indicata venne costituita da astronomi e geodeti.

UNIONE GEODETICA E GEOFISICA

Venne stabilito di dividere l'Unione nelle seguenti Sezioni:

1ª Geodesia,
2ª Meteorologia,
3ª Magnetismo terrestre ed elettricità atmosferica,
4ª Sismologia,
5ª Vulcanologia,
6ª Oceanografia fisica.

In alcune sedute generali venne discusso ed approvato lo Statuto di tutta l'Unione.

In tali sedute venne anche costituito l'Ufficio di Presidenza dell'Unione, che risultò così composto:

Presidente: LALLEMAND;
Vicepresidenti: I Presidenti delle singole Sezioni;
Segretario: LYONS, Director of Science Museum, South-Kensington, London.

Speciale importanza ebbe la seduta riferentesi alla Sezione Geodetica, la quale venne definitivamente costituita, nominando il seguente Ufficio di Presidenza:

Presidente: Maggiore BOWIE,
Vicepresidente: REINA,
Segretario: Col. PERRIER,

ed iniziando la discussione di varii argomenti scientifici.

Attesa la comunanza dei problemi della Sezione Geodetica con quelli dell'Unione astronomica, venne dai componenti la Sezione unanimemente espresso il voto che il prossimo Congresso geodetico abbia luogo a Roma, unitamente a quello dell'Unione astronomica.

Particolari deliberazioni non furono prese per le altre Sezioni, la cui costituzione definitiva fu rimandata alla prossima Assemblea.

Solo si procedette alla costituzione provvisoria degli Uffici di Presidenza, che risultarono così formati:

Sezione di Meteorologia.

Presidente: SHAW,
Vicepresidente: ANGOT,
Segretario: MARVIN.

Sezione di Magnetismo terrestre ed elettricità atmosferica.

Presidente: TANAKADATE,
Vicepresidente: CHREE,
Segretario: BAUER.

Sezione di Sismologia.

Avendo il Prof. SCHUSTER presentato un Ordine del giorno chiedente di rimandare la costituzione della Sezione alla prossima Assemblea generale in vista della incertezza circa l'antica Associazione Internazionale di Sismologia, che dipendeva da una convenzione diplomatica, si decise di soprassedere nella costituzione dell'Ufficio di Presidenza.

Sezione di Vulcanologia.

Questa non era compresa nell'ordine del giorno distribuito all'inizio dei lavori.

Si convenne però dai Delegati competenti di addivenire alla costituzione della Sezione, attribuendole i seguenti scopi:

1) facilitare e coordinare le relazioni fra scienziati che studiano i fenomeni vulcanici e fenomeni connessi;

2) provocare studi sistematici sul dinamismo dei vulcani e sulla costituzione dei loro prodotti, considerati dal punto di vista fisico e chimico;

3) provocare la creazione di laboratori internazionali nelle vicinanze dei grandi vulcani attivi;

4) incoraggiare tutte le ricerche concernenti il vulcanismo nello spazio e nel tempo;

5) creare una pubblicazione periodica consacrata alle questioni riguardanti il Vulcanismo e comprendenti la Bibliografia.

L'Ufficio di Presidenza venne così costituito:

Presidente: RICCÒ,
Vice presidente: WASHINGTON,
Segretario: MALLADRA.

All'Ufficio venne ancora aggregato un Comitato esecutivo composto da:

PALAZZO, SABATINI, TANAKADATE.

Unanimemente venne espresso il voto che un Istituto vulcanologico Internazionale possa sorgere a Napoli.

Sezione di Oceanografia fisica.

Anche questa Sezione non era stata prevista nell'ordine del giorno distribuito all'inizio dei lavori. Avuto riguardo all'intima connessione fra lo studio delle maree e delle correnti marine con gli studi geodetici, si deliberò di includere anche questa Sezione nella Unione Geodetica e Geofisica.

Tenuto però presente che una gran parte della Oceanografia è dedicata allo studio biologico dei mari, si convenne di prendere disposizioni perché le due parti della Oceanografia potessero tenere unitamente le loro riunioni.

In vista di ciò, l'Ufficio di Presidenza fu costituito come segue:

Presidente delle due Sezioni fisica e biologica: PRINCIPE DI MONACO,
Vice presidente: LAMB (per la parte fisica),
Segretario: MAGRINI (per la parte fisica),
Segretario: JUBIN (per la parte biologica).

Venne costituita una Commissione per lo studio delle maree, a far parte della quale, come delegati italiani, furono designati:

l'Ammiraglio MARCHINI,
il Comand. ALESSIO,
il Prof. MAGRINI.

UNIONE DI CHIMICA PURA E APPLICATA

Lo Statuto per questa Unione fu studiato nella Conferenza interalleata delle Associazioni di Chimica pura ed applicata, tenuta a Londra dal 14 al 18 luglio 1919, ove erano rappresentati il Belgio, gli Stati Uniti d'America, la Francia, il Regno Unito della Gran Bretagna e Irlanda e l'Italia.

L'Unione fu istituita valendosi dei legami di stima e di amicizia formatisi durante la guerra fra i popoli alleati, per organizzare una cooperazione permanente fra le Associazioni di Chimica, coordinare i loro mezzi scientifici e tecnici e contribuire in tal modo al progresso di tutti i rami della Chimica.

Lo Statuto, preparato a Londra, fu approvato a Bruxelles in seguito ad alcune modificazioni introdotte, che gli dettero un carattere analogo a quello dei precedenti Statuti.

UNIONE D'INGEGNERIA

Furono tenute due sedute, in gran parte dedicate allo studio delle seguenti proposte, presentate dal Delegato italiano Prof. Fantoli:

1) formazione di un organo centrale di cooperazione tecnica, avente per scopo precipuo quello di promuovere la formazione di Associazioni internazionali specializzate, fra Società nazionali ed Istituti affini di uno stesso ramo nel vastissimo dominio della tecnica;

2) fondazione d'un Istituto internazionale di bibliografia e documentazione tecnica, sede Bruxelles.

Tali concetti furono unanimemente accolti e, per trasmetterli al Consiglio, chiarirli ed interpretarli, venne nominato un Comitato provvisorio così costituito:

Presidente: OTLET,
Vicepresidenti: FANTOLI e DE CHARDONNET,
Segretario GÉRARD.

UNIONE MATEMATICA

Tenne tre sedute, la prima delle quali dedicata alla preparazione di uno Statuto provvisorio in armonia con quello del Consiglio Nazionale di Ricerche.

Vennero poi formulati vari voti relativi alla bibliografia e alla preparazione di un Congresso Internazionale da tenersi a Strasburgo.

Venne nominato un Comitato provvisorio, così costituito:

Presidenti d'onore: LAMB, PICARD, VOLTERRA,
Presidente: DE LA VALLÉE POUSSIN,
Vicepresidente: JOUNG,
Segretari: DE DONDER, KOENIGS, PETROVITCH, REINA.

Altri Delegati del Comitato provvisorio: DE MOULIN, DE RUYTS GLAISHER, STUYVAERT, PARENTY.

UNIONE FISICA

Poco numerosi furono i fisici intervenuti a Bruxelles.

Come Delegati italiani erano presenti Volterra e Palazzo.

Venne proposto di dedicare cure particolari allo sviluppo della Bibliografia fisica, tenendo conto delle trattative in corso fra i Direttori del « Journal de Physique », del « Nuovo Cimento » e dei redattori dei « Science Abstracts ».

Fu proposto di chiedere sovvenzioni per procedere alla riedizione ed al completamento delle Tavole di MARIE.

Dietro proposta del Delegato VOLTERRA, che si rese interprete del voto dell'Accademia dei Lincei, venne deciso di includere nell'ordine del giorno della prossima riunione dei fisici la questione delle unità di misura.

UNIONE DI RADIOTELEGRAFIA SCIENTIFICA

Lo scopo dell'Unione di cui furono gettate le basi a Bruxelles, sarà quello di promuovere lo studio scientifico della Radiotelegrafia, di iniziare ed organizzare ricerche colla cooperazione dei diversi paesi e provvedere alla loro unione scientifica ed alla loro pubblicazione, e di facilitare la costituzione di metodi comuni di ricerche e il confronto e la standardizzazione degli strumenti di misura.

UNIONE BIBLIOGRAFICA

Ebbe luogo una sola seduta sotto la Presidenza di LA FONTAINE, direttore dell'Ufficio internazionale di Bibliografia a Bruxelles. Il compito era assai facilitato dalla esistenza di un « Progetto d'Unione », già stampato e distribuito al Congresso.

Tale progetto venne discusso ed approvato con lievi modificazioni ad alcuni articoli.

I Delegati furono invitati ad una interessante visita all'Istituto Internazionale di Bibliografia.

UNIONE BIOLOGICA

Scarsi furono gl'intervenuti. Dal Prof. NASINI venne presentato l'ordine del giorno proposto dall'Accademia dei Lincei, esprimente il voto che la Sezione concentrasse la sua attenzione, anzi tutto, sulle questioni di Genetica e di Eugenetica, provocando ricerche ed iniziative che tendessero: 1° a perfezionare le conoscenze sulle leggi dell'eredità ed il miglioramento della specie e delle razze vegetali e animali; 2° a concorrere al miglioramento dello sviluppo fisico e mentale della razza umana.

L'Unione costituì le seguenti Sezioni:

1. Biologia generale,
2. Fisiologia,
3. Zoologia,
4. Botanica,
5. Scienze mediche,
6. Biologia applicata.

Sezione dei Brevetti.

Venne espresso il voto di organizzare internazionalmente i brevetti d'invenzione sulle basi seguenti:

a) riconoscimento all'inventore di un diritto completo e di lunga durata;

b) deposito unico delle domande di brevetto;

c) esame preliminare;

d) organizzazione della documentazione dei brevetti in correlazione con quella della letteratura scientifica e tecnica;

e) creazione d'un ufficio internazionale di brevetti, incaricato della triplice funzione di registrare il deposito, di procedere ad un esame preliminare e di organizzare la documentazione dei brevetti;

f) cooperazione di questo Ufficio col Consiglio Internazionale di Ricerche;

g) stabilimento della sua sede in un centro internazionale.

Nella seduta di chiusura del Congresso, il Presidente Prof. LACROIX riassunse con grande lucidità i risultati dei lunghi e faticosi lavori compiuti dalla Conferenza, che fanno sperare fin da ora in una proficua opera del Consiglio Internazionale di Ricerche. Venne, però, riconosciuto da tutti la necessità della cooperazione dei Consigli Nazionali di Ricerche che in alcuni paesi già esistono e funzionano, mentre in altri sono in via di preparazione. Per la pronta e definitiva costituzione dei Consigli Nazionali di Ricerche venne formulato un voto dal Delegato inglese Prof. TURNER, il quale venne appoggiato dal Delegato americano Maggiore BOWIE ed approvato per acclamazione da tutti i presenti.

NASINI
RICCÒ (2)
REINA
FANTOLI
PALAZZO
VOLTERRA (relatore).

(2) Il prof. ANNIBALE RICCÒ, caduto ammalato a Roma mentre vi era stato chiamato per prender parte ad una Commissione governativa antisismica, cessava di vivere il 23 settembre. La sua inattesa scomparsa priva l'astrofisica italiana del suo rappresentante più eminente.

E. M.

XII.

FUNCTIONS OF COMPOSITION (*).

«The Rice Institute Pamphlet», vol. VII, october 1920, n° 4; pp. 181–251.

FIRST LECTURE

1. Introduction. — 2. Composition, Permutability, Integral Powers of Composition, the Closed-cycle Group. — 3. Object of the Lectures. — 4. Fractional Powers of Composition, Incommensurable Powers, Fractional and Incommensurable Orders of Functions of Composition of a Group.

1. – INTRODUCTION.

1. We call to mind the solutions of the simplest integral equations. In this connection two functions $f(x)$ and $F(x, y)$, which are limited and continuous, are supposed to be given, and we wish to determine $\varphi(x)$ so as to satisfy an equation

$$f(x) = \varphi(x) + \int_0^x \varphi(\xi) F(\xi, x) d\xi. \tag{1}$$

The solution is given by the formula

$$\varphi(x) = f(x) + \int_0^x f(\xi) S(\xi, x) d\xi, \tag{2}$$

where

$$S(x, y) = -F(x, y) + F_2(x, y) - F_3(x, y) + \cdots \tag{3}$$

with

$$F_2(x, y) = \int_x^y F(x, \xi) F(\xi, y) d\xi \tag{4}$$

$$F_3(x, y) = \int_x^y F_2(x, \xi) F(\xi, y) d\xi. \tag{5}$$

. . . .

(*) Three lectures delivered at the Rice Institute in the autumn of 1919 by Senator Vito Volterra, Professor of Mathematical Physics and Celestial Mechanics, and Dean of the Faculty of Sciences of the University of Rome.

Translated from the Italian by Dr. Hubert Evelyn Bray, of the Rice Institute.

The series (3) is uniformly convergent, and defines a function $S(x, y)$ which may be regarded as the first example of a *function of composition* of $F(x, y)$. It is obtained by operations to be performed on $F(x, y)$ and changes when that function changes. And it can therefore be regarded as entering into the class spoken of as *functions depending on other functions*, or *functions of curves*. The equations (4), (5),$\cdots$ give us moreover the first examples of the operation of *composition of functions*, and of *powers of composition*.

Formula (5) may also be written in the form

$$F_3(x, y) = \int_x^y F(x, \xi) F_2(\xi, y) d\xi, \tag{5'}$$

and by a comparison of the formulae (5) and (5') the following equation

$$\int_x^y F_2(x, \xi) F(\xi, y) d\xi = \int_x^y F(x, \xi) F_2(\xi, y) d\xi$$

is obtained. Thus we have a first example of *permutable functions*.

Upon these elementary considerations is founded the theory of composition of functions and the permutability of functions. We pass then to give the corresponding general definitions and fundamental properties.

2. - Composition - Permutability - Integral Powers of Composition - Group of the Closed Cycle.

2. The composition of two integrable functions $f(x, y)$, $\varphi(x, y)$ is the operation

$$\int_x^y f(x, \xi) \varphi(\xi, y) d\xi.$$

It is understood that these functions remain in the field of real variables, and it will be assumed that $y > x$. If the result of the operation is $\psi(x, y)$, the relation will be written in the form

$$\psi = \overset{*}{f} \overset{*}{\varphi}.$$

If f and φ are equal, we may write

$$\overset{*}{f}{}^2 = \overset{*}{f} \overset{*}{f}$$

and also

$$\overset{*}{f}{}^3 = \overset{*}{f}{}^2 \overset{*}{f} = \overset{*}{f} \overset{*}{f}{}^2.$$

. . . .

In general, when m and n are integers

$$\overset{*}{f}{}^{m+n} = \overset{*}{f}{}^{m} \overset{*}{f}{}^{n},$$

$\overset{*}{f}{}^{m}$ being spoken of as the *integral power of composition of degree m.* If a, b, c, $\cdots$ are constants, the quantities

$$af \, , \, b\varphi \, , \, c\psi \, , \, \cdots$$

are the products of constants into the functions f, φ, ψ, $\cdots$ and the equation

$$(a\overset{*}{f})\,(b\overset{*}{\varphi})\,(c\overset{*}{\psi})\cdots = abc\cdots \overset{*}{f}\overset{*}{\varphi}\overset{*}{\psi}\cdots$$

is satisfied.

3. The operation of composition is *associative*, and if the functions happen to be permutable, also *commutative*: it is always *distributive* (1).

4. Given the series

$$a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \cdots$$

which is supposed to be convergent for $|z| < \mathrm{R}$, the series

$$a_1 \overset{*}{f} + a_2 \overset{*}{f}{}^2 + a_3 \overset{*}{f}{}^3 + \cdots$$

is uniformly convergent whatever may be the modulus of the function f, this function being limited; the function defined by the series is permutable with f. The theorem may be extended to power series in more than one variable (2).

5. If m is an integer and the relation

$$\psi(x, y) = (y - x)^m f(x, y)$$

is valid, $f(x, y)$ being limited and continuous, and $f(x, x)$ always different from zero, the function $\psi(x, y)$ is said to be of *order* $m + 1$.

The resultant of composition of two functions of order m and n respectively is of order $m + n$, and the power of composition of degree m of a function of order n is of order mn.

6. Knowing a function φ of order 1 permutable with ψ of order m, it is possible to calculate a function θ of the first order whose m^{th} power of

(1) V. VOLTERRA, *Leçons sur les fonctions de lignes*, Paris, Gauthier-Villars (1913), Chap. IX, §§ 1–5. [Vedi anche, qui e nel seguito, in questo vol. VII, pp. 198–202].

(2) V. VOLTERRA, loc. cit. Chap. IX, § 10.

composition is ψ, provided that ψ and φ have limited derivatives up to and including the m^{th} order. In this case then we write:

$$\theta = \overset{*}{\psi}{}^{1/m}\ (3).$$

7. Let $\alpha(x)$ and $\beta(x)$ be two functions, limited and continuous, which do not vanish, and write

$$\frac{dx}{\alpha(x)\,\beta(x)} = dx_1\,,$$

from which x_1 and x are determined as functions of each other:

$$x_1 = \lambda(x) \quad , \quad x = \mu(x_1)\,.$$

Form then the function $\alpha(x)\,\beta(y)\,f(x\,,y)$ and write it as a function of $x_1\,,y_1\,,$ that is,

$$f_1(x_1\,,y_1) = \alpha(x)\,\beta(y)\,f(x\,,y)\,.$$

If now we write, by means of the change of variable given above,

$$\frac{1}{\alpha(x)} = \alpha_1(x_1) \quad , \quad \frac{1}{\beta(x)} = \beta_1(x_1)\,,$$

we shall have the equations

$$\frac{dx_1}{\alpha_1(x_1)\,\beta_1(x_1)} = dx\,,$$

$$f(x\,,y) = \alpha_1(x_1)\,\beta_1(y_1)\,f_1(x_1\,,y_1)\,.$$

If again we apply the same transformation to $\varphi(x\,,y)$, and obtain thereby $\varphi_1(x_1\,,y_1)$; and if we let $\xi = \mu(\xi_1)$, we shall have

$$\alpha(x)\,\beta(y)\int_x^y f(x\,,\xi)\,\varphi(\xi\,,y)\,d\xi = \int_{x_1}^{y_1} \alpha(x)\,\beta(y)\,f(x\,,\xi)\,\varphi(\xi\,,y)\,\alpha(\xi)\,\beta(\xi)\,d\xi_1 =$$

$$= \int_{x_1}^{y_1} f_1(x_1\,,\xi_1)\,\varphi_1(\xi_1\,,y_1)\,d\xi_1\,.$$

From this equation we deduce that *the resultant of the composition of two transformed functions is the transform of the resultant of the two functions themselves*, and hence that *a power of composition of a transformed function is the transform of the power of composition of the function itself*, and finally, that *the transformation does not alter the property of permutability*, that is to say, *it transforms a group of permutable functions into a new group of permutable functions.*

(3) V. Volterra, loc cit., Chap. XI ,§ 8.

8. Given a function $F(x, y)$ of order 1 all the functions which are permutable with it can be found. For this purpose the question may first be reduced to the case in which

$$(1) \qquad F(x, x) = 1 \quad , \quad \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{x=y} = \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{x=y} = 0 .$$

In fact, if $F(x, y)$ does not happen to satisfy these conditions, it may be reduced to one that does by means of a transformation of the type just considered [4]. We shall say that a function F which satisfies (1) is reduced to *canonical form*. On the assumption that the function F is limited and continuous with its derivatives of the first two orders, the solution of the problem is then given by the formula

$$(2) \qquad \lambda(y-x) + \int_0^{y-x} \lambda(\xi)\, \Phi(\xi \mid x, y)\, d\xi ,$$

in which λ is an arbitrary function, and Φ can be calculated from F and its derivatives of the first two orders [5].

9. Another fundamental property of permutability is expressed in the following theorem: *Two functions permutable with a third are permutable with each other.* We omit the proof of this theorem, referring merely to the paper of Professor VESSIOT [6].

10. A group of permutable functions is characterized by a function of the first order of which the first and second partial derivatives exist and are finite. Consequently when we consider a group of permutable functions, *we shall always assume that there is known to us a function of the first order which has finite derivatives of the first and second orders and belongs to the group.* This function shall be spoken of as the *fundamental function of the group.* When a fundamental function of the group has the canonical form, we shall speak of the group as a *canonical group.*

11. A remarkable group, of permutable functions, is the so-called *closed-cycle group* [7], which is made up of functions of the form

$$f(y-x).$$

Unity belongs to this group, and it is deduced immediately that

$$\overset{*}{1}{}^{m} = \frac{1}{(m-1)!}(y-x)^{m-1} .$$

(4) V. VOLTERRA, loc. cit., Chap. XI, §§ 1, 2.

(5) V. VOLTERRA, loc. cit., Chap. XI, p. 162.

(6) VESSIOT, *Sur les fonctions permutables et les groupes continus de transformations fonctionelles linéaires*, «Comptes rendus Ac. Sc. de Paris», 1912, p. 682.

(7) V. VOLTERRA, loc. cit., Chap. VII.

3. – Plan of the Lectures.

12. On the basis of these general ideas it is the plan of the following lectures to develop a complete theory of permutable functions and their properties, analogous to the usual algebra and analysis.

In the first place, we observe that the operation of composition of permutable functions is analogous to multiplication, in common with which it possesses the commutative, distributive and associative properties. The algebra of permutable functions has already been studied by Professor Evans (*).

Now if we follow the historic development of the usual analytic theories, we see first unfolded the theory of *integral powers*, then *fractional* and *negative* powers. Afterwards comes the theory of *logarithms*, which barely precedes the *infinitesimal calculus*. In fact the very definition of logarithm as given by Napier involves implicitly the idea of *derivative*. And finally comes the *general theory of functions*, which crowns the whole structure. We observe that at first the name *function* was applied to powers, and then gradually extended its significance to cover the modern interpretation.

We shall follow the same road in the theory of functions of composition, and since we have already discussed the integral powers, we shall proceed first to treat the *fractional*, then the *negative powers of composition* and then the *logarithms of composition*. This leads us to the *differential and integral calculus of composition*, of which we shall give the foundations and the elementary applications to the logarithms of composition. And we shall develop in its principal lines the *theory of functions of composition*.

In this way it will appear clearly that the logical process which serves as a guide in our path is the one that reproduces the evolution of ordinary analysis in its development from the finite to the infinite.

4. – Fractional Powers of Composition – Incommensurable Powers – Fractional and Incommensurable Orders of Functions of a Group.

13. If φ is of the first order and we propose to ourselves the problem of finding a function f which will satisfy the equation.

$$\overset{*}{f^{n}} = \varphi , \tag{1}$$

we cannot find a solution in terms of a function which remains finite. The problem however can be solved by means of a function which becomes infinite but remains integrable.

(*) «Memorie Acc. Lincei», ser. 5, vol. VIII, 1911; «Rend. Circolo Mat. di Palermo», vol. XXXIV, 1912. [N.d.R.].

To be convinced at once of this possibility it is sufficient to call to mind the first result which was known about integral equations, namely the solution of the integral equation of ABEL:

$$f(x) = \int_0^x \varphi(\xi) \frac{1}{\sqrt{x-\xi}} d\xi ,$$

which is

$$\varphi(x) = \frac{1}{\pi} \frac{d}{dx} \int_0^x f(\xi) \frac{1}{\sqrt{x-\xi}} d\xi ,$$

since

$$\int_x^y \frac{1}{\sqrt{y-\xi}} \frac{1}{\sqrt{\xi-x}} d\xi = \pi .$$

If we write down the function

$$F(x, y) = \frac{1}{\sqrt{y-x}} ,$$

we shall evidently have

$$\overset{*}{F}{}^2 = \pi$$

and thus we see that the square of the function $1/\sqrt{y-x}$, which becomes infinite for $x = y$, is nevertheless a constant.

We now proceed to show that if $\psi_1(x, y)$ is a function of the first order, and if

$$\theta(x, y) = \frac{\psi_1(x, y)}{(y-x)^{(n-1)/n}} ,$$

then $\overset{*}{\theta}{}^n$ is of the first order.

In fact, we shall have

$$\overset{*}{\theta}{}^2 = \frac{\psi_2(x, y)}{(y-x)^{(n-2)/n}} ,$$

where

$$\psi_2(x, y) = \int_0^1 \frac{\psi_1(x, x+(y-x)\eta)\, \psi_1(x+(y-x)\eta, y)}{\eta^{(n-1)/n}(1-\eta)^{(n-1)/n}} d\eta ,$$

and consequently ψ_2 remains finite like ψ_1 and is continuous, and of the first order. Similarly it is evident that

$$\overset{*}{\theta}{}^3 = \frac{\psi_3(x, y)}{(y-x)^{(n-3)/n}} ,$$

where $\psi_3(x, y)$ is a function of the first order, and so on; whence it follows that the function

$$\overset{*}{\theta}{}^n = \psi_n(x, y)$$

is a function of the first order.

It is evident that if ψ_1 possesses finite and continuous derivatives up to a certain order, the same is true for $\psi_2, \psi_3, \cdots, \psi_n$.

14. Let us assume that the function θ is permutable with φ, and that φ and ψ_n possess finite and continuous first derivatives. In this case it is possible to calculate in a simple manner the function f which satisfies (1).

In the first place we may point out that ψ_n must be permutable with φ, for we have the equation

$$\overset{*}{\theta}{}^n \overset{*}{\varphi} = \overset{*}{\theta}{}^{n-1} \overset{*}{\varphi} \overset{*}{\theta} = \overset{*}{\theta}{}^{n-2} \overset{*}{\varphi} \overset{*}{\theta}{}^2 = \cdots = \overset{*}{\varphi} \overset{*}{\theta}{}^n .$$

It follows that

$$\varphi(x, x) = C\, \psi_n(x, x),$$

C being a constant [8], and hence, since φ and ψ_n possess finite and continuous first derivatives, that the function

$$\varphi(x, y) - C\, \psi_n(x, y)$$

approaches zero as x approaches y to the same order as $y - x$ or higher order.

The function g which satisfies the integral equation

$$\varphi(x, y) = C\, \psi_n(x, y) + \int_x^y C\, \psi_n(x, \xi)\, g(\xi, y)\, d\xi \tag{2}$$

is finite and continuous, since $\psi_n(x, x) \neq 0$. We can then write explicitly

$$f(x, y) = \sqrt[n]{C} \left\{ \theta + \frac{1}{n} \overset{*}{\theta} \overset{*}{g} + \frac{\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n} - 1\right)}{1.2} \overset{*}{\theta} \overset{*}{g}{}^2 + \cdots \right\}. \tag{3}$$

We see immediately that we have

$$f(x, y) = \frac{G(x, y)}{(y - x)^{(n-1)/n}},$$

where $g(x, y)$ is of the first order and such that

$$G(x, x) = \frac{\sqrt[n]{\varphi(x, x)}}{\Gamma(1/n)}.$$

And since we can take any one of n values for the n^{th} root of C we can obtain by means of the procedure (3) n solutions.

15. Let φ be reduced to the canonical form F. Then θ may be obtained from (2), § 8 by writing

$$\lambda = \eta^{(1/n) - 1}. \tag{4}$$

(8) V. Volterra, loc. cit., Chap. XI, p. 3.

In fact we shall have

$$\theta = \frac{1 + (y-x)\int_0^1 u^{(1/n)-1}\,\Phi((y-x)u \mid x, y)\,du}{(y-x)^{(n-1)/n}},$$

in which the numerator is of the first order. It will be differentiable if Φ is differentiable, and thus will have determinate derivatives provided that F has such, up to and including the third order. In this case we shall have

$$C = \Gamma^{-n}\left(\frac{1}{n}\right).$$

If instead of (4) we write the equation

$$\lambda = \eta^{\frac{1}{n}-1}\,\mu(\eta),$$

where $\mu(\eta)$ is an analytic function which does not vanish for $\eta = 0$, we shall obtain another formula for θ which may be used in the formulae (5) and (3); and thus a θ may be determined in an infinite variety of ways.

It may be asked if in this way we obtain always merely the same solutions upon substitution in (3). At present we content ourselves with the observation that all such solutions are permutable among themselves.

16. The formulae which we have given lead us necessarily to extend the notion of order.

If $\varphi(x, y)$ is of the first order, and if

$$f(x, y) = (y-x)^\alpha\,\varphi(x, y),$$

the function f will be said to be of determinate order $\alpha + 1$. Thus the functions θ and f of the preceding sections are of order $1/n$. In the above definition, the function $\varphi(x, y)$ is said to be the *characteristic* of $f(x, y)$, and $\varphi(x, x)$ its *diagonal.*

If we have a function

$$f(x, y) = (y-x)^\alpha\;\varphi(x, y),$$

in which $\varphi(x, y)$ is finite and continuous, and further, $\varphi(x, x) = 0$, we say that f is of *order higher than* $\alpha + 1$. In this way we may obtain functions however which are of on determinate order whatever; for example the function

$$(y-x)^{n-1}\,\log(y-x)\,\varphi(x, y),$$

where $\varphi(x, y)$ is of the first order, is of order higher than $n - \varepsilon$ where ε is arbitrarily small, and yet has no determinate order.

If $\psi(x, y)$ and $\varphi(x, y)$ do not have determinate orders, but the function

$$\frac{\psi(x, y)}{(y-x)^\alpha\,\varphi(x, y)}$$

is always less than some determinate number, with α positive, it will be said that $\psi(x, y)$ with respect to $\varphi(x, y)$ is of order not less than α. The operations of composition will be applicable to functions whose order is greater than a positive number, and we shall consider such functions.

In order to obtain a function of determinate order r belonging to a group of permutable functions, it is sufficient to substitute in (2), § 8:

$$\lambda(\eta) = \eta^{r-1}\mu(\eta),$$

where μ is bounded and does not have o as a limiting value as η approaches o.

If two functions are of determinate orders α *and* β *their resultant is of order* $\alpha+\beta$. In fact if φ_1 and φ_2 are of the first order, we may write

$$f_1 = (y-x)^{\alpha-1}\varphi_1(x,y),$$

$$f_2 = (y-x)^{\beta-1}\varphi_2(x,y),$$

$$\overset{*}{f_1}\overset{*}{f_2} = (y-x)^{\alpha+\beta-1}\times\int_0^1 \eta^{\alpha-1}(1-\eta)^{\beta-1}\varphi_1(x, x+(y-x)\eta)\,\varphi_2(x+(y-x)\eta, y)\,d\eta,$$

whence if we substitute

$$\psi(x,y) = \int_0^1 \eta^{\alpha-1}(1-\eta)^{\beta-1}\varphi_1(x, x+(y-x)\eta)\,\varphi_2(x+(y-x)\eta, y)\,d\eta,$$

we shall have

$$\overset{*}{f_1}\overset{*}{f_2} = (y-x)^{\alpha+\beta-1}\psi(x,y),$$

in which

$$\psi(x,x) = \varphi_1(x,x)\,\varphi_2(x,x)\,\frac{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)},$$

so that ψ will be of the first order. By the same procedure, it may be shown that *if one of the functions is of order higher than* α, *and if the other is of order* β *or higher, then the resultant is of order higher than* $\alpha+\beta$.

The function ψ may be differentiated to whatever order φ_1 and φ_2 are both differentiable. It may further be noted that the theorem does not demand that f_1 and f_2 be permutable.

If a function is of order r, *its* n^{th} *power will be of order* nr; and if we denote the respective characteristics of the function and its power by $G(x,y)$ and $L(x,y)$ we shall have

$$L(x,x) = \frac{\Gamma^n(r)}{\Gamma(nr)}\,G^n(x,x).$$

If the function were of order higher than r its n^{th} power would be of order higher than nr.

17. If

$$\varphi(x,y) = f(x,y)\,(y-x)^{\alpha-1},$$

with $|f(x, y)| < M$ and $\alpha > 0$, we obtain in the case that m is an integer, the inequality

$$|\overset{*}{\varphi}{}^m| < M^m \frac{\Gamma^m(\alpha)}{\Gamma(m\alpha)} (y - x)^{m\alpha - 1}.$$

Hence *if the series*

$$\sum_1^\infty a_m z^m$$

is convergent for values of z of absolute value less than a certain quantity, the series

$$\sum_1^\infty a_m \overset{*}{\varphi}{}^m$$

is convergent whatever may be the modulus of the function $f(x, y)$ provided that it is finite (compare § 4).

18. Given f of order $n + \alpha$ with $0 < \alpha < 1$, and n a positive integer, and given ψ of order $n + \alpha + \beta$, or higher order, with $\beta > 0$, we proceed to treat the problem of calculating φ so that the equation

$$\overset{*}{f}\overset{*}{\varphi} = \psi \tag{5}$$

will be satisfied. This problem can be solved by a method analogous to that which I gave in my « Leçons sur les équations intégrales et intégro-différentielles », Chap. II, 3, p. 60 (9).

In fact, if we write

$$(y - x)^{-\alpha} = \theta(x, y),$$

we shall have

$$\overset{*}{\theta}\overset{*}{f}\overset{*}{\varphi} = \psi.$$

Now θ is of order $1 - \alpha$, and so $\overset{*}{\theta}\overset{*}{f} = g$ will be of order $n + 1$, and $K = \overset{*}{\theta}\overset{*}{\psi}$ will be of order $n + 1 + \beta$ or of higher order.

The equation

$$\overset{*}{g}\overset{*}{\varphi} = K$$

is solved at once by differentiating it $n + 1$ times with respect to x, and thus reducing it to an equation of the second kind. Evidently φ will result of order β or less than β. In order to apply the method it is necessary to admit when f and ψ are of determinate orders, that their characteristics should have finite derivatives of the $n + 1^{\text{th}}$ order.

It is not necessary that the given functions f and φ should be permutable. If, however, they are permutable it may be deduced that φ will be permutable with them. If they are not permutable, the equation

$$\overset{*}{\varphi}\overset{*}{f} = \psi \tag{5'}$$

(9) Paris, Gauthier-Villars, 1913.

is distinct from (5), and can be solved by forming the integral equation

$$\overset{*}{\varphi}\overset{*}{f}\overset{*}{\theta} = \overset{*}{\psi}\overset{*}{\theta},$$

in which $\overset{*}{f}\overset{*}{\theta}$ will be of order $n+1$. By means of $n+1$ differentiations it could be reduced to an equation of the second kind.

The equations (5) and (5′) each admit a single solution.

Consider the equation

$$\overset{*}{f_1}\overset{*}{\varphi_1} = \psi_1, \tag{6}$$

where

$$f_1 = f + \overset{*}{f}\overset{*}{\chi} \quad , \quad \psi_1 = \psi + \overset{*}{\psi}\overset{*}{\rho},$$

and assume that f and ψ have the same properties as before, while χ and ρ are functions of higher order than some positive number.

The solution φ_1 of (6) in which f_1 and ψ_1 are supposed given, can be solved by first solving (5), and then taking

$$\varphi_1 = \varphi + \overset{*}{\varphi}\overset{*}{\rho} - (\overset{*}{\varphi} + \overset{*}{\varphi}\overset{*}{\rho})\overset{*}{\chi} + (\overset{*}{\varphi} + \overset{*}{\varphi}\overset{*}{\rho})\overset{*}{\chi}{}^2 - \cdots,$$

which series will always be uniformly convergent. *In this case also there will be a unique solution.*

The functions f_1 and ψ_1 are respectively of the same orders as the functions f and ψ, but it is not necessary that they satisfy the conditions imposed on f and ψ with respect to the differentiability of their characteristics.

19. Suppose that we are given a function

$$\varphi(x, y) = (y - x)^{\alpha - 1}\psi(x, y) \tag{7}$$

of determinate order α, and that we wish to calculate the function f, such that

$$\overset{*}{f}{}^n = \varphi. \tag{8}$$

By virtue of the preceding considerations it is possible to extend to this case the procedure followed (§ 14) in solving the analogous equation (1) in which φ is of the first order.

In fact, if we suppose that the group to which φ belongs is first reduced to the canonical form and if we calculate the function

$$\theta = \frac{1 + (y - x)\int_0^1 u^{(\alpha/n) - 1}\,\Phi[(y - x)u \mid x, y]\,du}{(y - x)^{1 - (\alpha/n)}},$$

$\overset{*}{\theta}{}^n$ will be of order α and its diagonal will be

$$\frac{\Gamma^n\left(\dfrac{\alpha}{n}\right)}{\Gamma(\alpha)}.$$

Now if we solve the equation

$$\varphi - \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma^n\left(\frac{\alpha}{n}\right)} \overset{*}{\theta}{}^n = \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma^n\left(\frac{\alpha}{n}\right)} \overset{*}{\theta}{}^n \overset{*}{g},$$

regarding g as unknown and assuming the existence of the derivatives of φ and Φ, of the orders demanded by the preceding theorems, f will be given by the formula

$$f = \frac{\sqrt[n]{\Gamma(\alpha)}}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{n}\right)} \left(\theta + \frac{1}{n} \overset{*}{\theta} \overset{*}{g} + \frac{\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n} - 1\right)}{1 \cdot 2} \overset{*}{\theta} \overset{*}{g}{}^2 + \cdots \right).$$

We shall thus obtain n solutions, since $\sqrt[n]{\Gamma(\alpha)}$ contains an n^{th} root of unity as an indeterminate factor.

These solutions are all permutable with each other and with φ. We have to determine, as in § 15, whether it is possible to find other solutions permutable with these.

20. If f_1 and f_2 are two permutable functions of determinate orders and if the characteristic of each possesses a finite and determinate derivative of an order equal to the integer next larger than the order of the respective function, and if

$$\overset{*}{f}{}_1^n = \overset{*}{f}{}_2^n,$$

then we shall have

$$f_1 = \varepsilon f_2,$$

where ε is an n^{th} root of unity. In fact f_1 and f_2 will be necessarily of the same order, and if we represent their characteristics by φ_1 and φ_2, we shall have necessarily

$$\varphi_1^n(x, x) = \varphi_2^n(x, x),$$

and therefore

$$\varphi_1(x, x) = \varepsilon\, \varphi_2(x, x).$$

But

$$0 = \overset{*}{f}{}_1^n - \overset{*}{f}{}_2^n = (\overset{*}{f}_1 - \varepsilon_1 \overset{*}{f}_2)(\overset{*}{f}_1 - \varepsilon_2 \overset{*}{f}_2) \cdots (\overset{*}{f}_1 - \varepsilon_n \overset{*}{f}_2),$$

where $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ are the n^{th} roots of unity.

If we assume $\varepsilon = \varepsilon_1$, the binomial expressions $f_1 - \varepsilon_2 f_2, f_1 - \varepsilon_n f_2$ will be of the same order as f_1 and f_2 and consequently, by the results obtained in § 18, it follows that

$$f_1 = \varepsilon f_2.$$

21. The question which we raised previously (§§ 15, 19) is now answered in view of this proposition, that is, by changing $\lambda(\eta)$ in the manner indicated we obtain always the same solution of (1) since the results are always functions of determinate order $1/n$ whose characteristics possess derivatives

and whose n^{th} powers of composition are equal to each other. The same is true of the solutions of (8).

22. If f_1 and f_2 are two permutable functions of determinate order and

$$\overset{*}{f}{}_1^{n} = \overset{*}{f}{}_2^{m},$$

it follows that

$$\overset{*}{f}{}_1^{nq} = \overset{*}{f}{}_2^{mq},$$

q being any integer whatever. Conversely, if the last equation is satisfied, the equation

$$\overset{*}{f}{}_1^{n} = \varepsilon \overset{*}{f}{}_2^{m}$$

will be true, ε being one of the q^{th} roots of unity. We shall write

$$f_1 = \overset{*}{f}{}^{m/n},$$

and obviously, in writing this equation we shall include in the symbol f_1 an undetermined root of unity.

Given f_2, in order to calculate f_1 it will be sufficient to calculate first, by the rules given in §§ 14, 15 and 19 the function

$$\overset{*}{f}{}_2^{1/n},$$

from which we obtain

$$(\overset{*}{f}{}_2^{1/n})^m.$$

The whole of the ordinary algebra of fractional powers can be applied without change to fractional powers of composition.

23. In the expression

$$\overset{*}{f}{}^{m/n},$$

if we suppose that f is of a determinate order α, i.e.,

$$f = (y - x)^{\alpha - 1}\, G(x, y),$$

it then follows that $\overset{*}{f}{}^{m/n}$ will be of order $\alpha m/n$, or

$$\overset{*}{f}{}^{m/n} = (y - x)^{\frac{\alpha m}{n} - 1}\, L(x, y),$$

and

$$L(x, x) = [G(x, x)]^{m/n} \, \frac{\Gamma^{m/n}(\alpha)}{\Gamma\left(\dfrac{m\alpha}{n}\right)}.$$

The fractional power $\overset{*}{f}{}^{m/n}$ is determined to within a factor equal to a root of unity. We shall be able to do away with this indeterminateness when the diagonals are all positive.

If f is a function of determinate order α whose diagonal is positive

$$\overset{*}{f}^{m/n} = (y-x)^{\frac{m\alpha}{n}-1} \mathrm{L}\left(x\,,y)\,\middle|\,\frac{m}{n}\right),$$

and the diagonal of this function is also positive.

Let us suppose that as we make the number m/n approach a positive rational number β, $\mathrm{L}(x\,,y\,|\,m/n)$ tends uniformly toward $\mathrm{L}(x\,,v\,|\,\beta)$; and that as m/n approaches any irrational number $z > 0$ $\mathrm{L}(x\,,y\,|\,m/n)$ tends uniformly toward a determinate finite limit $\mathrm{L}(x\,,y\,|\,z)$.

We shall write

$$\overset{*}{f}^{z} = (y-x)^{\alpha z - 1} \mathrm{L}(x\,,y\,|\,z)\,,$$

and refer to this function as an *irrational power of composition of order z.*

We shall have

$$\mathrm{L}(x\,,x\,|\,z) = \mathrm{G}(x\,,x)^z \frac{\Gamma^z(\alpha)}{\Gamma(\alpha z)}.$$

If $|\,\mathrm{G}(x\,,y)\,| < \mathrm{M}$, we shall have

$$|\,\mathrm{L}(x\,,y\,|\,z) < \mathrm{M}^z \frac{\Gamma^z(\alpha)}{\Gamma(z\alpha)}.$$

All of the algebraic calculus of powers with commensurable or incommensurable positive exponents is extensible to the case of powers of composition, and consequently

$$\overset{*}{f}^{z} \overset{*}{f}^{z_1} = \overset{*}{f}^{z+z_1},$$

$$(\overset{*}{f}^{z})^{z_1} = \overset{*}{f}^{z z_1},$$

the numbers z and z_1 being any positive numbers whatever (10).

24. When we know the function

$$\overset{*}{f}^{z} = (y-x)^{\alpha z - 1} \mathrm{L}(x\,,y\,|\,z)\,,$$

for any positive value of z whatever we are in a position to calculate the function $\overset{*}{\varphi}^{z}$, where φ is given by the equation

$$\varphi = f + \overset{**}{f\psi},$$

and where ψ is any function of an order greater than a certain positive number.

We shall have in fact

$$\overset{*}{\varphi}^{z} = \overset{*}{f}^{z} + z\overset{*}{f}^{z}\,\overset{*}{\psi} + \frac{z(z-1)}{1.2}\overset{*}{f}^{z}\,\overset{*}{\psi}^{2} + \cdots,$$

and the series is always uniformly convergent (§ 17).

(10) The actual calculation of $\overset{*}{f}^{z}$ cannot be carried our without recourse to the theory of *logarithms of composition*. It is done in Lecture III, § 25. We may add at the outset the following statement of a fundamental property: $\overset{*}{f}^{z}$ is an entire function of z.

It is seen immediately that from the fact that $\overset{*}{f}{}^z$ is an analytic function of z it follows that $\overset{*}{\varphi}{}^z$ is also analytic, and that since $\overset{*}{f}{}^z$ is an entire function so also is $\overset{*}{\varphi}{}^z$.

25. As an example let us treat the case of functions which belong to the closed cycle group.

Unity belongs to the closed-cycle group and if z is positive we have

$$\overset{*}{1}{}^z = \frac{(y-x)^{z-1}}{\Gamma(z)},$$

and therefore $\overset{*}{1}{}^z$ *is an entire function of* z.

Now let $\varphi(y-x)$ be a function of the first order possessing a derivative. If $\varphi(0) = 1$, then

$$\varphi(y-x) = 1 + \overset{*}{1}\overset{*}{\varphi}{}'$$

where $\overset{*}{\varphi}{}'$ denotes the derivative of φ. Consequently

$$\overset{*}{\varphi}{}^z = \overset{*}{1}{}^z + z\,\overset{*}{1}{}^z\overset{*}{\varphi}{}' + \frac{z(z-1)}{1.2}\,\overset{*}{1}{}^z\overset{*}{\varphi}{}'^2 + \cdots$$

and therefore $\overset{*}{\varphi}{}^z$, thus obtained, is an entire function of z.

SECOND LECTURE

1. Introduction. — 2. Zero and Negative Powers of Composition – Fractions of Composition. — 3. Progressions of Composition – Logarithms of Compositions. — 4. Naperian Logarithms of Composition, Extension of Logarithms of Composition.

1. – Introduction.

1. If we have the relation

$$\overset{*}{f}\overset{*}{\varphi} = \psi$$

(in which we suppose f, φ, ψ to lie in the field of permutable functions) and if we consider the operation of composition as analogous to multiplication, we can write, *by analogy*,

$$(1)\qquad \varphi = \frac{\overset{*}{\psi}}{\overset{*}{f}}, \qquad\qquad (1')\qquad f = \frac{\overset{*}{\psi}}{\overset{*}{\varphi}},$$

and also

$$(2)\qquad \varphi = \overset{*}{\psi}\overset{*}{f}{}^{-1}, \qquad\qquad (2')\qquad f = \overset{*}{\psi}\overset{*}{\varphi}{}^{-1},$$

and we can regard the symbols (1), (2), (1′), (2′) as *representative* of the operations whereby we solve the integral equation

$$\psi = \int_x^y f(x, \xi)\,\varphi(\xi, y)\,d\xi,$$

in which we are to regard φ and f successively as the unknown function.

We observe that if f is of order m and φ of order n, ψ will be of order $m+n$, m and n being positive numbers. Hence $m < m+n > n$.

If then we write the symbol

$$\frac{\overset{*}{\Phi}}{\overset{*}{F}} \quad \text{or} \quad \overset{*}{\Phi}\overset{*}{F}^{-1},$$

where Φ and F are permutable functions, it will have no meaning if the order of Φ is less or equal to the order of F.

A great difficulty arises if we wish to give a meaning, in general, to the symbol in question.

But it is to be remembered that an analogous difficulty arises in the elements of arithmetic if we restrict ourselves to the field of integers. If we write

$$2 \times 3 = 6,$$

we can represent division of 6 by 3 or by 2, by the symbols

$$2 = \frac{6}{3} = 6 \times 3^{-1} \quad , \quad 3 = \frac{6}{2} = 6 \times 2^{-1}.$$

But until we leave the field of integers the symbols

$$\frac{3}{5} \quad , \quad \frac{1}{4}$$

have no meaning.

In arithmetic we can introduce the number $1/2 = 2^{-1}$ by defining multiplication of an even number by $1/2$ as equivalent to dividing it by 2. Similarly we could define the symbol f^{-1} by the property that

$$\overset{*}{F}\overset{*}{f}^{-1} = \varphi,$$

provided that

$$\overset{*}{F} = \overset{*}{\varphi}\overset{*}{f}.$$

But just as, by this procedure, we should obtain in arithmetic only the reciprocals of the integers, so, in the field of composition we should obtain only special functions of composition. Consequently, in order to obtain readily more general functions, we follow another course, the principle of which we will now explain.

2. In arithmetic we can arrive at the fractional numbers by an extension of the number field, introducing them, after the integers, as new quantities for which we define equivalence and all the operations which can be performed on them in combination with each other and with integers. Unless we depart from the field of integers these quantities have only formal significance. But all the calculations and all the propositions in which they are involved cease to be purely formal, whenever we desire, provided that we multiply by a suitable integer. They then represent actual relations between integers.

We shall follow precisely this method in order to introduce fractions of composition, and they will be formal in character, but the remark which we have just made applies to them, namely, that they can be combined by composition with a convenient function in such a way that the results cease to be formal and represent actual relations between functions.

2. – Zero and Negative Powers of Composition – Fractions of Composition.

3. First we must introduce the element which corresponds to unity in arithmetic but which, in the field of composition, we do not yet possess in a perfectly clear and simple manner. Let us return, therefore, to the simpler integral equation considered in the first lecture and let us write it in the form

$$f(x,y) = \varphi(x,y) + \int_x^y \varphi(x,\xi)\,F(\xi,y)\,d\xi,$$

in which the given functions are assumed to be permutable. In the notation of composition we can write

$$f = \varphi + \overset{*}{\varphi}\overset{*}{F},$$

and the solution

$$\varphi = f - \overset{*}{f}\overset{*}{F} + \overset{*}{f}\overset{*}{F}{}^2 - \overset{*}{f}\overset{*}{F}{}^3 + \cdots$$

In the lectures which I gave at the Sorbonne (« Fonctions de lignes », Chap. IX) these formulae were written

$$f = \overset{*}{\varphi}(1 + \overset{*}{F})$$

and

$$\varphi = \overset{*}{f}(1 - \overset{*}{F} + \overset{*}{F}{}^2 - \overset{*}{F}{}^3 + \cdots)$$
$$= \frac{\overset{*}{f}}{\overset{*}{1} + \overset{*}{F}}.$$

In other words we had, by definition,

$$\overset{*}{\varphi}(1 + \overset{*}{F}) = \varphi + \overset{*}{\varphi}\overset{*}{F}.$$

Unity, in this case, functioned in such a way that when combined by composition with φ it gave φ as a result.

On the other hand, if we combine φ with 1, giving to 1 its ordinary meaning, we have

$$\overset{*}{\varphi}\overset{*}{1} = \int_x^y \varphi(x,\xi)\,d\xi,$$

which is different from φ. Therefore unity sometimes means the element which composed with a given function reproduces that function and sometimes it has its ordinary significance. To avoid confusion we agree to state explicitly on each occasion which meaning we wish to attribute to unity. In order to remove all uncertainty we will use two different symbols for the two meanings [11].

4. Let $f(x, y)$ be a function belonging to a group of permutable functions. We know what is meant by composition of a function of the group with f [12]. By composition with $\overset{*}{f}{}^{-1}$ we mean performing the inverse operation, that is, finding a function which, operated upon by f, will reproduce the given function. If then we compose the first function with f and then with $\overset{*}{f}{}^{-1}$, this is equivalent to leaving the function unaltered. Then

$$\overset{*}{f}\overset{*}{f}{}^{-1} = \overset{*}{f}{}^{\circ}$$

will be a new entity which we shall introduce into the group, defining it as that element which *composed with any other function of the group* leaves it unaltered. It is this element which corresponds to unity.

The properties of $\overset{*}{f}{}^{\circ}$ are given by

$$\overset{*}{f}\overset{*}{f}{}^{\circ} = f \quad , \quad (\overset{*}{f}{}^{\circ})^{m} = \overset{*}{f}{}^{\circ} \quad , \quad (\overset{*}{f}{}^{\circ})^{-1} = \overset{*}{f}{}^{\circ} \quad , \quad \overset{*}{f}{}^{\circ} = \overset{*}{\varphi}{}^{\circ},$$

f and φ being functions which belong to the group. And if a is a constant

$$(a\overset{*}{f}{}^{\circ})(\overset{*}{f}) = af\,.$$

$$(a\overset{*}{f}{}^{\circ} + b\overset{*}{f})(c\overset{*}{f}{}^{\circ} + d\varphi) = ac\overset{*}{f}{}^{\circ} + ad\,\varphi + bcf + bd\overset{*}{f}\overset{*}{\varphi}\,.$$

Hence it turns out that $a\overset{*}{f}{}^{\circ} + b\overset{*}{f}$ has only a formal meaning by itself but acquires an actual meaning provided that it is combined with any function of the group.

The introduction of the element $\overset{*}{f}{}^{\circ}$ greatly simplifies the formulae which I have given in previously published works on the theory of permutable functions (cfr. loc. cit., p. 138). In addition let us consider, for example, the series

$$\mathrm{F}\,|\,[\overset{*}{f}]\,| = \overset{*}{f}{}^{\circ} + f + \frac{\overset{*}{f}{}^{2}}{2!} + \frac{\overset{*}{f}{}^{3}}{3!} + \cdots,$$

which satisfies the addition theorem

$$\mathrm{F}\,|\,[\overset{*}{f} + \overset{*}{\varphi}]\,| = \overset{*}{\mathrm{F}}\,|\,[\overset{*}{f}]\,|\,\overset{*}{\mathrm{F}}\,|\,[\overset{*}{\varphi}]\,|,$$

a form of statement which is much simpler than that given on page 159 of the work cited.

(11) Evans has removed this ambiguity by another method. [Loc. cit. First Lecture, § 12].

(12) Cf. Lecture I, § 2.

Besides this we can show more clearly the period of $F\,|\,[\overset{*}{f}]\,|$ since we have the relation

$$F\,|\,[\overset{*}{f} + 2\,\pi\, i\overset{*}{f}{}^{\circ}]\,| = F\,|\,[\overset{*}{f}]\,|,$$

that is to say $F\,|\,[\overset{*}{f}]\,|$ has the period $2\,\pi\, i\overset{*}{f}{}^{\circ}$.

5. We will proceed now to the study of fractions of composition in the strict sense of the term. Let us consider a set of permutable functions of determinate orders. We will denote these functions by $f, \varphi, \psi, \cdots$; $f_1, \varphi_1, \psi_1, \cdots, f_2, \varphi_2, \psi_2, \cdots$ and suppose that linear combinations of them are likewise of determinate orders and also that if we take any one of them which is of higher order than a second it is always possible to find one and only one function of the group which, when composed with the second, will give the first.

For example, a set of functions of this nature would be that which could be generated by taking a function of the first order, forming its integral and fractional powers, forming products of composition of these powers and adding together constant multiples of these results.

We shall say that $\overset{*}{f}/\overset{*}{\varphi}$ *is the fraction of composition belonging to the group and having f for its numerator and φ for its denominator.*

We shall say that

$$\frac{\overset{*}{f}}{\overset{*}{f}{}^{\circ}} = f,$$

and that

$$\frac{\overset{*}{f_1}}{\overset{*}{\varphi_1}} = \frac{\overset{*}{f_2}}{\overset{*}{\varphi_2}},$$

whenever

$$\overset{*}{f_1}\overset{*}{\varphi_2} = \overset{*}{f_2}\overset{*}{\varphi_1}.$$

From this we can infer the proposition that two fractions of composition which are equal to a third are equal to each other.

In fact, if

$$\frac{\overset{*}{f_1}}{\overset{*}{\varphi_1}} = \frac{\overset{*}{f_2}}{\overset{*}{\varphi_2}} \quad , \quad \frac{\overset{*}{f_1}}{\overset{*}{\varphi_1}} = \frac{\overset{*}{f_3}}{\overset{*}{\varphi_3}},$$

it follows that

$$(1) \qquad \overset{*}{f_1}\overset{*}{\varphi_2} = \overset{*}{f_2}\overset{*}{\varphi_1}, \qquad\qquad (2) \qquad \overset{*}{f_1}\overset{*}{\varphi_3} = \overset{*}{f_3}\overset{*}{\varphi_1},$$

and therefore, composing both members of (1) with φ_3,

$$\overset{*}{f_1}\overset{*}{\varphi_2}\overset{*}{\varphi_3} = \overset{*}{f_2}\overset{*}{\varphi_1}\overset{*}{\varphi_3} = \overset{*}{f_2}\overset{*}{\varphi_3}\overset{*}{\varphi_1}.$$

But by equation (2)

$$\overset{*}{f_1}\overset{*}{\varphi_2}\overset{*}{\varphi_3} = \overset{*}{\varphi_2}\overset{*}{f_1}\overset{*}{\varphi_3} = \overset{*}{\varphi_2}\overset{*}{f_3}\overset{*}{\varphi_1},$$

therefore

$$\overset{*}{f}_2 \overset{*}{\varphi}_3 \overset{*}{\varphi}_1 = \overset{*}{\varphi}_2 \overset{*}{f}_3 \overset{*}{\varphi}_1 ,$$

and from this it follows, by the general hypothesis that we made previously,

$$\overset{*}{\varphi}_2 \overset{*}{f}_3 = \overset{*}{f}_2 \overset{*}{\varphi}_3 ,$$

that is to say,

$$\frac{\overset{*}{f}_2}{\overset{*}{\varphi}_2} = \frac{\overset{*}{f}_3}{\overset{*}{\varphi}_3} .$$

From the definitions which we have given it is easily seen that $\dfrac{\overset{*}{f}}{\overset{*}{\varphi}} = \dfrac{\overset{*}{f}\overset{*}{\psi}}{\overset{*}{\varphi}\overset{*}{\psi}}$.

6. We have now to distinguish between three cases:

(i) In the expression $\overset{*}{f}/\overset{*}{\varphi}$ suppose that f is of higher order than φ. Then, assuming that the conditions which we have stated (§ 5) are satisfied, we can calculate a function ψ such that

$$f = \overset{*}{\varphi}\overset{*}{\psi} ,$$

and we thus have

$$\frac{\overset{*}{f}}{\overset{*}{\varphi}} = \frac{\overset{*}{\psi}}{\overset{*}{\varphi}{}^{\circ}} = \psi .$$

(ii) Again, if f is of lower order than φ, then (supposing always that the aforesaid conditions are satisfied)

$$\varphi = \overset{*}{f}\overset{*}{\psi}$$

and therefore

$$\overset{*}{\varphi}\overset{*}{\psi}{}^{\circ} = \overset{*}{f}\overset{*}{\psi} ,$$

whence it follows that

$$\frac{\overset{*}{f}}{\overset{*}{\varphi}} = \frac{\overset{*}{\psi}{}^{\circ}}{\overset{*}{\psi}} .$$

(iii) Finally suppose that f and φ are of the same order. The ratio of their characteristics will be constant. If we denote this constant by a, the function

$$\psi = f - a\varphi$$

will have a definite order greater than that of φ. Then we can write

$$\psi = \overset{*}{\varphi}\overset{*}{\theta} ,$$

and therefore

$$f = a\varphi + \overset{*}{\varphi}\overset{*}{\theta} .$$

Consequently

$$\overset{*}{f}\overset{*}{\varphi}{}^{\circ} = (a\overset{*}{\varphi}{}^{\circ} + \theta)\, \overset{*}{\varphi} ,$$

and finally

$$\frac{\overset{*}{f}}{\overset{*}{\varphi}} = a\, \overset{*}{\varphi}{}^{\circ} + \theta .$$

7. *Two or more fractions of composition can always be reduced to a common denominator which is a function whose order is not less than the order of any of the denominators.*

In fact, if we are given

$$\frac{\overset{*}{f}_1}{\overset{*}{\varphi}_1} \quad , \quad \frac{\overset{*}{f}_2}{\overset{*}{\varphi}_2};$$

and if φ is of higher order than φ_1 and φ_2 then

$$\overset{*}{\varphi} = \varphi_1 \overset{*}{\psi}_1 = \overset{*}{\varphi}_2 \overset{*}{\psi}_2$$

and therefore

$$\frac{\overset{*}{f}_1}{\overset{*}{\varphi}_1} = \frac{\overset{*}{f}_1 \overset{*}{\psi}_1}{\overset{*}{\varphi}} \quad , \quad \frac{\overset{*}{f}_2}{\overset{*}{\varphi}_2} = \frac{\overset{*}{f}_2 \overset{*}{\psi}_2}{\overset{*}{\varphi}}.$$

If the order of φ were equal to that of one or both of the given denominators, we should have

$$\varphi = \overset{*}{\varphi}_1 (a \overset{*}{\varphi}{}^{\circ} + \psi_1)$$

$$\varphi = \overset{*}{\varphi}_2 (b \overset{*}{\varphi}{}^{\circ} + \psi_2)$$

where a and b are constants, one of which might be zero. Therefore

$$\frac{\overset{*}{f}_1}{\overset{*}{\varphi}_1} = \frac{a \overset{*}{f}_1 + \overset{*}{f}_1 \overset{*}{\psi}_1}{\overset{*}{\varphi}},$$

$$\frac{\overset{*}{f}_2}{\overset{*}{\varphi}_2} = \frac{b \overset{*}{f}_2 + \overset{*}{f}_2 \overset{*}{\psi}_2}{\overset{*}{\varphi}}.$$

A method of reducing several fractions of composition

$$\frac{\overset{*}{f}_1}{\overset{*}{\varphi}_1} \quad , \quad \frac{\overset{*}{f}_2}{\overset{*}{\varphi}_2} \quad , \quad \frac{\overset{*}{f}_3}{\overset{*}{\varphi}_3}, \ldots,$$

to the same denominator is to write the equivalent fractions

$$\frac{\overset{*}{f}_1 \overset{*}{\varphi}_2 \overset{*}{\varphi}_3 \cdots}{\overset{*}{\varphi}_1 \overset{*}{\varphi}_2 \overset{*}{\varphi}_3 \cdots} \quad , \quad \frac{\overset{*}{f}_2 \overset{*}{\varphi}_1 \overset{*}{\varphi}_3 \cdots}{\overset{*}{\varphi}_2 \overset{*}{\varphi}_1 \overset{*}{\varphi}_3 \cdots} \quad , \quad \frac{\overset{*}{f}_3 \overset{*}{\varphi}_1 \overset{*}{\varphi}_2 \cdots}{\overset{*}{\varphi}_3 \overset{*}{\varphi}_1 \overset{*}{\varphi}_2 \cdots}; \ldots$$

8. If we reduce several fractions of composition to a common denominator and form a fraction of composition which has this denominator and whose numerator is obtained from the various numerators by the operations of addition or subtraction, the fraction obtained is independent of the choice of the denominator, *according to the definition of equivalence which has been given.*

In fact, if we have

$$\frac{\overset{*}{f}_1}{\overset{*}{\varphi}_1} = \frac{\overset{*}{f}_2}{\overset{*}{\varphi}_2} \quad , \quad \frac{\overset{*}{\psi}_1}{\overset{*}{\varphi}_1} = \frac{\overset{*}{\psi}_2}{\overset{*}{\varphi}_2},$$

then

$$\frac{\overset{*}{f}_1 \pm \overset{*}{\psi}_1}{\overset{*}{\varphi}_1} = \frac{\overset{*}{f}_2 \pm \overset{*}{\psi}_2}{\overset{*}{\varphi}_2},$$

since

$$\overset{*}{f}_1 \overset{*}{\varphi}_2 \pm \overset{*}{\psi}_1 \overset{*}{\varphi}_2 = \overset{*}{f}_2 \overset{*}{\varphi}_1 \pm \overset{*}{\psi}_2 \overset{*}{\varphi}_1 .$$

The operation here indicated is called the addition or subtraction of fractions of composition.

Thus it is seen that all the rules of arithmetic relative to the addition or subtraction of fractions are extensible to fractions of composition.

9. *The multiplication of a fraction of composition by a constant consists in multiplying the numerator by the constant, leaving the denominator unaltered.*

The composition of several fractions of composition signifies the formation of a fraction of composition which has for its numerator the resultant of their numerators and for its denominator the resultant of their denominators.

The associative and commutative properties hold in the case of composition of fractions, and it is seen that the results remain equivalent if equivalent fraction are substituted for the fractions composed.

A function f is equivalent to the fraction

$$\frac{\overset{*}{f}}{\overset{*}{f^{\circ}}},$$

hence

$$f \cdot \frac{\overset{*}{\psi}}{\overset{*}{\varphi}} = \frac{\overset{*}{f}}{\overset{*}{f^{\circ}}} \cdot \frac{\overset{*}{\psi}}{\overset{*}{\varphi}} = \frac{\overset{*}{f}\overset{*}{\psi}}{\overset{*}{f^{\circ}}\overset{*}{\varphi}} = \frac{\overset{*}{f}\overset{*}{\psi}}{\overset{*}{\varphi}} . \tag{3}$$

We obtain in this way the composition of a function with a fraction of composition and we see immediately that for this kind of composition also the commutative properly holds.

10. If we compose m equivalent fractions $\overset{*}{f}/\overset{*}{\varphi}$ the result is written in the form

$$\left(\frac{\overset{*}{f}}{\overset{*}{\varphi}}\right)^m \text{ and we have evidently } \left(\frac{\overset{*}{f}}{\overset{*}{\varphi}}\right)^m = \frac{\overset{*}{f^m}}{\overset{*}{\varphi^m}} .$$

The same formula will be extended, by definition, to the case in which m is equal to a fraction or to an incommensurable number.

11. From (3) we obtain

$$\overset{*}{f} \frac{\overset{*}{\psi}}{\overset{*}{f}} = \frac{\overset{*}{f}\overset{*}{\psi}}{\overset{*}{f}} = \frac{\overset{*}{\psi}}{\overset{*}{f^{\circ}}} = \psi .$$

Therefore, by composing a fraction of composition with its denominator we obtain the numerator, or, *every fraction of composition may be regarded* *as the result of the operation inverse to composition applied to the numerator by means of the denominator*, and if we adopt the exponent -1 to indicate, as we have done previously, the inverse operation, we have

$$\frac{\overset{*}{\psi}}{\overset{*}{f}} = \overset{*}{\psi}\overset{*}{f}^{-1},$$

and, by making an extension of the property that composition by $\overset{*}{f}{}^{0}$ does not alter the element upon which it operates, we can write

$$\frac{\overset{*}{f}{}^{0}}{\overset{*}{f}} = \overset{*}{f}^{-1}.$$

Now (see § 10)

$$(\overset{*}{f}^{-1})^{m} = \left(\frac{\overset{*}{f}{}^{0}}{\overset{*}{f}}\right)^{m} = \frac{\overset{*}{f}{}^{0}}{\overset{*}{f}{}^{m}} = (\overset{*}{f}{}^{m})^{-1},$$

which we can also write in the form

$$\overset{*}{f}^{-m}.$$

In general $(\overset{*}{f}{}^{h})^{m} = \overset{*}{f}{}^{hm}$ whether h, or m, is positive, negative or zero.

12. We wish now to find the fraction of composition which, when composed with $\overset{*}{\psi}/\overset{*}{\theta}$, will give $\overset{*}{f}/\overset{*}{\varphi}$. We have evidently as a solution

$$\frac{\overset{*}{f}\,\overset{*}{\theta}}{\overset{*}{\varphi}\,\overset{*}{\psi}},$$

or

$$\left(\frac{\overset{*}{f}}{\overset{*}{\varphi}}\right)\left(\frac{\overset{*}{\psi}}{\overset{*}{\theta}}\right)^{-1} = \frac{\overset{*}{f}}{\overset{*}{\varphi}} \cdot \frac{\overset{*}{\theta}}{\overset{*}{\psi}},$$

and also

$$\frac{\left(\dfrac{\overset{*}{f}}{\overset{*}{\varphi}}\right)}{\left(\dfrac{\overset{*}{\psi}}{\overset{*}{\theta}}\right)} = \frac{\overset{*}{f}\,\overset{*}{\theta}}{\overset{*}{\varphi}\,\overset{*}{\psi}}.$$

13. These results are summarized in the statement that the arithmetic theory of fractions can be carried over to the field of composition.

The elements

$$\frac{\overset{*}{f}}{\overset{*}{\psi}}\ ,\quad \overset{*}{f}^{-1}\ ,\quad \overset{*}{f}{}^{0},$$

can be included in the field of a group of permutable functions. *They no longer have the significance of functions in the ordinary sense, but all the operations together with their associative, commutative and distributive properties can be extended to these elements.* However for this reason they can be called *func-*

tions belonging to the given group of permutable functions, and we are able to extend to these elements also the concept of order, that is to say, if $\overset{*}{f}$ is of order m, and

$$\overset{*}{\varphi}\overset{*}{f}$$

s of order $n < m$ we shall say that φ has the negative order

$$n - m .$$

Evidently if φ is of positive order p, $\overset{*}{\varphi}^{-1}$ will be of order $-p$ and the theorem, that the order of the resultant of two functions of given orders is equal to the sum of the orders of the components, is extended to the case of negative orders. We also extend easily the concept of an order greater than a given negative order to the case in which the order is not determined, that is, if $\overset{*}{\varphi}\overset{*}{f}$ is not of determined order but is of an order greater than $n < m$ we shall say that φ is of higher order than $n - m$.

14. As we have said (§ 1), it might seem as if we have constructed in this way a purely formal theory; but this is not the case in view of the fact that the elements which have been introduced, formal though they are, cease to be such by acquiring the significance of ordinary functions whenever they are composed with a function of sufficiently high order. Thus, for example, if we have the sum

$$\overset{*}{f} + \overset{*}{f}^{-m} + \frac{\overset{*}{f}}{\overset{*}{\varphi}} + \frac{\overset{*}{\psi}^h}{\overset{*}{\theta}^h},$$

it is sufficient to compose it with $\overset{*}{f}^m \overset{*}{\varphi} \overset{*}{\theta}^h$ in order to convert it into an ordinary function.

3. – Progressions of Composition – Logarithms of Composition.

15. Let $\varphi(x, y)$ be a function of determinate finite order and let us consider the sequence

$$\cdots \overset{*}{\varphi}^{-3}, \overset{*}{\varphi}^{-2}, \overset{*}{\varphi}^{-1}, \overset{*}{\varphi}^{0}, \varphi, \overset{*}{\varphi}^{2}, \overset{*}{\varphi}^{3}, \cdots$$

We shall say that this constitutes a *progression of composition* having the ratio φ.

The exponents will be called the *logarithms of composition* of the various powers of composition and φ will be called the *base*. We shall write

$$n = \overset{*}{\log}_{\varphi} \overset{*}{\varphi}^n ,$$

n being positive or negative.

The whole of the arithmetic theory of logarithms is evidently extensible to the logarithms of composition now introduced. Thus *the logarithm of the resultant of several functions is the sum of the logarithms of the component functions, etc.*

The progression of composition possesses properties analogous to those of geometrical progressions. In particular

$$\overset{*}{\varphi}{}^{0} + \varphi + \overset{*}{\varphi}{}^{2} + \cdots + \overset{*}{\varphi}{}^{n} = \frac{\overset{*}{\varphi}{}^{0} - \overset{*}{\varphi}{}^{n+1}}{\overset{*}{\varphi}{}^{0} - \overset{*}{\varphi}}\,.$$

16. By inserting means we can pass to fractional logarithms. Let us insert, by calculating $\overset{*}{\varphi}{}^{1/m}$, m means between two elements of the progression; we obtain the sequence

$$\ldots \overset{*}{\varphi}{}^{-1} \ldots \overset{*}{\varphi}{}^{-\frac{2}{m}},\ \overset{*}{\varphi}{}^{-\frac{1}{m}},\ \overset{*}{\varphi}{}^{0},\ \overset{*}{\varphi}{}^{1/m},\ \overset{*}{\varphi}{}^{2/m},\ldots,\ \varphi,\ \overset{*}{\varphi}{}^{\frac{m+1}{m}},\ldots,\ \overset{*}{\varphi}{}^{2},\ldots,$$

which can be regarded as a new progression of composition having $\overset{*}{\varphi}{}^{1/m}$ as its ratio, and we can write

$$\frac{h}{m} = \overset{*}{\log}_{\varphi} \overset{*}{\varphi}{}^{h/m}\,,$$

h and m being whole numbers.

In general, if ν is a positive o negative number, rational or irrational, we can write

$$(1) \qquad \nu = \overset{*}{\log}_{\varphi} \overset{*}{\varphi}{}^{\nu}\,,$$

and to these logarithms of composition we can extend the properties of arithmetic logarithms.

17. It will be convenient to write powers of composition in the form

$$\overset{*}{\varphi}{}^{\nu} = \overset{*}{\varphi}{}^{\nu\overset{*}{\varphi}{}^{0}},$$

and therefore to write instead of (1)

$$\nu\overset{*}{\psi}{}^{0} = \overset{*}{\log}_{\varphi} \overset{*}{\varphi}{}^{\nu\overset{*}{\varphi}{}^{0}} = \overset{*}{\log}_{\varphi} \overset{*}{\varphi}{}^{\nu}.$$

In this way, starting with a base φ and considering all of its real powers, we can express the logarithms as real numbers multiplied by $\overset{*}{\varphi}{}^{0}$; but unless we take a further step in the theory it will not be possible to obtain

$$\overset{*}{\log}_{\varphi} \psi\,,$$

except when ψ, besides being permutable with φ, is a power of φ. This further step cannot be taken until we have introduced the *fundamental concept of the naperian base*. The complete construction of the theory is thus less easy than it may have seemed at first sight. It is necessary to introduce into the field of composition the fruitful concept, discovered three hundred years ago by Lord NAPIER, of the base of natural logarithms, in order to extend the theory within the limits in which it can be formulated effectually.

4. – Naperian Logarithms of Composition – Extension of the Theory of Logarithms of Composition.

18. Consider the function

$$e\overset{*}{f}{}^{\circ} = \overset{*}{e}\,.$$

We have

$$\overset{*}{e}{}^{z} = e^{z}\overset{*}{f}{}^{\circ},$$

and therefore

$$\frac{d}{dz}\overset{*}{e}{}^{z} = e^{z}\overset{*}{f}{}^{\circ} = \overset{*}{e}{}^{z}.$$

On account of this property we shall call $\overset{*}{e}$ the *base of naperian logarithms of composition.*

We have evidently

$$\overset{*}{e}{}^{z} = \overset{*}{f}{}^{\circ}\left(1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots\right),$$

and, by virtue of the convention made in the preceding section,

$$\overset{*}{e}{}^{z} = \overset{*}{e}{}^{z\overset{*}{f}{}^{\circ}} = (z\overset{*}{f})^{\circ} + z\overset{*}{f}{}^{\circ} + \frac{(z\overset{*}{f}{}^{\circ})^2}{2!} + \frac{(z\overset{*}{f}{}^{\circ})^3}{3!} + \cdots$$

19. Analogously, *by definition,* we can write

$$\overset{*}{e}{}^{\Phi} = \overset{*}{\Phi}{}^{\circ} + \Phi + \frac{\overset{*}{\Phi}{}^{2}}{2!} + \frac{\overset{*}{\Phi}{}^{3}}{3!} + \cdots = \Psi, \tag{1}$$

and we shall write

$$\Phi = \log_{\overset{*}{e}}\overset{*}{}\,\Psi$$

or, more simply

$$\Phi = \overset{*}{l}\,\Psi.$$

With the introduction of this new concept we shall be able to solve the problem proposed in § 17.

20. For this purpose we begin by solving the problem: given Ψ to determine Φ satisfying the preceding equation.

We shall have

$$\overset{*}{e}{}^{z\Phi} = \overset{*}{\Psi}{}^{z},$$

whence, differentiating with regard to z,

$$\frac{d\overset{*}{\Psi}{}^{z}}{dz} = \overset{*}{e}{}^{z\Phi}\,\overset{*}{\Phi} = \overset{*}{\Psi}{}^{z}\,\overset{*}{\Phi},$$

and therefore

$$\overset{*}{\Psi}{}^{-z}\,\frac{d\,\overset{*}{\Psi}{}^{z}}{dz} = \Phi = \overset{*}{l}\,\Psi\,. \tag{2}$$

We have arrived therefore at the very simple formula (2) for finding $l\overset{*}{\Psi}$ when $\overset{*}{\Psi}{}^z$ is known. However, as we have said before, the validity of the formula is subject to the knowledge *a priori* that $l\overset{*}{\Psi}$ exists.

21. But let us suppose now that we are given any function ψ whatever of the group, and let us assume, for simplicity, that it has a determinate order α.

We suppose also (see Lecture I, § 23) that, having calculated $\overset{*}{\psi}{}^z$, the result is expressed by

(3) $$(y-x)^{\alpha z-1}\,G(x,y\mid z),$$

where G is an analytic function of z [13].

Let us calculate

$$\frac{d\overset{*}{\psi}{}^z}{dz}.$$

We obtain

$$\alpha(y-x)^{\alpha z-1}G(x,y\mid z)\log(y-x)+(y-x)^{\alpha z-1}G'(x,y\mid z),$$

where G′ denotes the derivative of G with respect to z [14].

It follows that

$$\frac{d\overset{*}{\psi}{}^z}{dz}$$

is not of determinate order; we therefore consider the fraction of composition

(2′) $$\overset{*}{\psi}{}^{-z}\frac{d\overset{*}{\psi}{}^z}{dz}=\Theta.$$

It is easy to show that Θ is independent of z. In fact, we have

$$\overset{*}{\psi}{}^{z+\varepsilon}-\overset{*}{\psi}{}^z=\overset{*}{\psi}{}^z(\overset{*}{\psi}{}^\varepsilon-\overset{*}{\psi}{}^0).$$

Now $\overset{*}{\psi}{}^\varepsilon-\overset{*}{\psi}{}^0$ is independent of z; our statement is theorefore proved.

From (2′) it follows that

$$\frac{d\overset{*}{\psi}{}^z}{dz}=\overset{*}{\psi}{}^z\Theta,$$

therefore

$$\frac{d^2\overset{*}{\psi}{}^z}{dz^2}=\overset{*}{\psi}{}^z\Theta^2,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{d^h\overset{*}{\psi}{}^z}{dz^h}=\overset{*}{\psi}{}^z\Theta^h.$$

(13) This is always the case in consequence of a general theorem to which we have referred previously in Lecture I, § 23. See Lecture III, § 25.

(14) To avoid misunderstanding we recall that by log A $= l$A we mean the naperian logarithm of the number A.

But the series

$$\overset{*}{\psi}{}^{z} + \frac{d\overset{*}{\psi}{}^{z}}{dz} + \frac{1}{2!}\frac{d^2\overset{*}{\psi}{}^{z}}{dz^2} + \cdots + \frac{1}{h!}\frac{d^h\overset{*}{\psi}{}^{z}}{dz^h} + \cdots,$$

if convergent in the unit circle with center at z, has for its sum

$$\overset{*}{\psi}{}^{z+1},$$

hence

$$\overset{*}{\psi}{}^{z+1} = \overset{*}{\psi}{}^{z}\left(\overset{*}{\Theta}{}^{0} + \Theta + \frac{\overset{*}{\Theta}{}^{2}}{2!} + \frac{\overset{*}{\Theta}{}^{3}}{3!} + \cdots\right),$$

and consequently

$$\psi = \overset{*}{\Theta}{}^{0} + \Theta + \frac{\overset{*}{\Theta}{}^{2}}{2!} + \frac{\overset{*}{\Theta}{}^{3}}{3!} + \cdots,$$

from which it follows that

$$\Theta = \overset{*}{l}\psi.$$

In order, therefore, to conclude that $\overset{*}{l}\psi$ exists and can be obtained from the formula (2′) it is sufficient to know that $\overset{*}{\Psi}{}^{z}$ can be put in the form (3) and that this expression represents an entire function of z.

22. As an example we will calculate

$$\overset{*}{l}\,1,$$

recalling the fact that unity belongs to the closed-cycle group (cf. Lecture I, § 11).

We found (Lecture I, § 25)

$$\overset{*}{1}{}^{z} = \frac{1}{\Gamma(z)}(y-x)^{z-1}.$$

But it is well known that $1/\Gamma(z)$ is an entire function; hence we can apply the foregoing procedure and we shall have

$$\frac{d\overset{*}{1}{}^{z}}{dz} = \frac{1}{\Gamma(z)}(y-x)^{z-1}\log(y-x) - \frac{1}{\Gamma^2(z)}(y-x)^{z-1}\Gamma'(z) = \Theta(x, y \mid z), \tag{4}$$

and

$$\overset{*}{l}\,1 = \overset{*}{\Theta}\,\overset{*}{1}{}^{-z}. \tag{5}$$

By the preceding theorem the right-hand member of (5) is independent of z. We therefore put $z = 1$; and obtain

$$\Theta = \log(y-x) - \Gamma'(1).$$

But

$$C = -\Gamma'(1) = -\int_0^\infty e^{-x}\log x\,dx = 0.57721\cdots \qquad \text{(Euler's constant)},$$

therefore

$$\overset{*}{l}_1 = \frac{\widetilde{\log(y-x) + C}^{*}}{\overset{*}{1}}. \tag{6}$$

23. The general theorem of § 21 enables us to see that the expression (5) must be independent of z. But *a priori* the fact cannot be inferred immediately on seeing the expression (5) for the first time. For the sake of the interesting and curious nature of the result we will verify it directly. The expression cannot be put in an analytical form; in fact, as we have noted, it has a purely symbolic meaning; we can however apply the general principle (cf. § 14) by means of which any expression of this kind loses its purely symbolic meaning and becomes an ordinary function. Although

$$\overset{*}{\Theta}\,\overset{*}{1}^{-z}$$

has a purely symbolic meaning,

$$(\overset{*}{\Theta}\,\overset{*}{1}^{-z})\,\overset{*}{1}$$

is an ordinary function. It will be sufficient then to show directly that this ordinary function is independent of z.

Now

$$(\overset{*}{\Theta}\,\overset{*}{1}^{-z})\,\overset{*}{1} = \overset{*}{\Theta}\,\overset{*}{1}^{1-z}.$$

But

$$\Theta = \frac{1}{\Gamma(z)}(y-x)^{z-1}\log(y-x) - \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}\overset{*}{1}^{z};$$

and therefore

$$\overset{*}{\Theta}\,\overset{*}{1}^{1-z} = \frac{1}{\Gamma(z)\,\Gamma(1-z)}\int_x^y \frac{\log(\xi-x)\,d\xi}{(\xi-x)^{1-z}(y-\xi)^z} - \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}.$$

We have

$$\int_x^y \frac{\log(\xi-x)\,d\xi}{(z-x)^{\beta}(y-\xi)^{\alpha}} = -\frac{\partial}{\partial\beta}\int_x^y \frac{d\xi}{(y-\xi)^{\alpha}(\xi-x)^{\beta}} =$$

$$= -\frac{\partial}{\partial\beta}\left[\frac{1}{(y-x)^{\alpha+\beta-1}}\,\frac{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(1-\beta)}{\Gamma(1-\alpha-\beta)}\right].$$

This expression can be calculated without difficulty. Thus, putting $\alpha = z$, $\beta = 1 - z$, we obtain

$$\int_x^y \frac{\log(\xi-x)\,d\xi}{(y-\xi)^z(\xi-x)^{1-z}} = \Gamma(z)\,\Gamma(1-z)\left\{\log(y-x) + \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} - \Gamma'(1)\right\},$$

from which, finally, we find that

$$\overset{*}{\Theta}\,\overset{*}{1}^{1-z} = \log(y-x) + C,$$

which coincides with the result (6) obtained before [15].

24. We now show that, if we substitute for Φ

$$\overset{*}{l}\,1 = \Phi$$

in the series (1), we obtain unity as the sum of the series. In fact, if we put

$$\overset{*}{1}{}^{z} = \frac{1}{\Gamma(z)}(y-x)^{z-1} = \Theta(x\,,y\,|\,z)$$

we obtain

$$\frac{d\Theta}{dz} = \overset{*}{\Theta}\overset{*}{\Phi}$$

$$\frac{d^2\Theta}{dz^2} = \overset{*}{\Theta}\overset{*}{\Phi}{}^2$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{d^h\Theta}{dz^h} = \overset{*}{\Theta}\overset{*}{\Phi}{}^h,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

and therefore

$$\overset{*}{\Theta}\left(\overset{*}{\Phi}{}^{0} + \Phi + \frac{\overset{*}{\Phi}{}^2}{2\,!} + \frac{\overset{*}{\Phi}{}^3}{3\,!} + \cdots\right) = \Theta + \frac{d\Theta}{dz} + \frac{1}{2\,!}\,\frac{d^2\Theta}{dz^2} + \cdots$$

Now Θ is an *entire function*; consequently

$$\overset{*}{\Theta}\left(\overset{*}{\Phi}{}^{0} + \Phi + \frac{\overset{*}{\Phi}{}^2}{2\,!} + \cdots\right) = \Theta(x\,,y\,|\,z+1),$$

whence

$$\overset{*}{\Phi}{}^{0} + \Phi + \frac{\overset{*}{\Phi}{}^2}{2\,!} + \cdots = \frac{\Theta(x\,,y\,|\,z+1)}{\Theta(x\,,y\,|\,z)} = 1\,.$$

25. In § 19 we stated the definition of $\overset{*}{l}\Psi$. It is easy to verify the following properties:

(7) $\quad \overset{*}{l}(\overset{*}{\Psi}\overset{*}{\Theta}) = \overset{*}{l}\Psi + \overset{*}{l}\Theta,$ $\qquad$ (8) $\quad \overset{*}{e}{}^{\varphi+\chi} = (\overset{*}{e}{}^{\varphi})(\overset{*}{e}{}^{\chi}),$

(7′) $\quad \overset{*}{l}\left(\dfrac{\Psi}{\overset{*}{\Theta}}\right) = \overset{*}{l}\Psi - \overset{*}{l}\Theta,$ $\qquad$ (8′) $\quad \overset{*}{e}{}^{\varphi-\chi} = \dfrac{\overset{*}{e}{}^{\varphi}}{\overset{*}{e}{}^{\chi}},$

(7″) $\quad \overset{*}{l}(\overset{*}{\Psi}{}^{m}) = m\overset{*}{l}\Psi,$ $\qquad$ (8″) $\quad (\overset{*}{e}{}^{\varphi})^{m} = \overset{*}{e}{}^{m\varphi},$

(7‴) $\quad \overset{*}{l}(c\,\Theta) = \overset{*}{l}c\,\overset{*}{\Theta}{}^{0} + \overset{*}{l}\Theta,$ $\qquad$ (8‴) $\quad \overset{*}{e}{}^{c\,\Phi^{0}+\Phi} = e^{c}\,\overset{*}{e}{}^{\Phi},$

where m is an integer or a fraction; and in the limit these formulae will be valid for incommensurable values of m. c denotes a constant.

(15) This result is met with in the calculation which is carried out in an entirely different manner in the last lecture, § 23.

It is evident that

$$\overset{*}{e}^{2\pi n i \overset{*}{f}{}^{0}} = \overset{*}{f}{}^{0},$$

when n is an integer. It follows that $\overset{*}{l}f$ is determined except for an additive term $2\pi n i \overset{*}{f}{}^{0}$ in the same way that the naperian logarithm of a number A is determined except for the term $2\pi n i$. Consequently the formulae (7), (7′), (7″), (7‴) and the corresponding ones opposite will be interpreted in a manner similar to that in which the analogous formulae are interpreted in the ordinary theory of logarithms.

Suppose now that m is complex. We will extend the formula (8″), *by definition*, to this case; and since the second member, by virtue of (1), is represented by the series

$$(m\overset{*}{\varphi})^{0} + m\varphi + \frac{(m\overset{*}{\varphi})^{2}}{2\,!} + \cdots,$$

which has a definite meaning, the definition of the first member is established.

Suppose now that $\overset{*}{e}^{\varphi} = \Psi$; then

$$\overset{*}{\Psi}{}^{m}$$

is defined for complex values of m, and we have

$$\overset{*}{\Psi}{}^{m} = \overset{*}{e}^{m\overset{*}{l}\Psi}.$$

Evidently, inasmuch as $\overset{*}{e}^{\varphi}$ is unchanged by adding to φ the term $2\pi n i\, \overset{*}{\varphi}{}^{0}$, $(\overset{*}{e}^{\varphi})^{m}$ is determined except for the factor $e^{2\pi m n i}$.

By definition we establish also the following formula:

$$(\overset{*}{e}^{\varphi})^{\theta} = \overset{***}{e^{\varphi\theta}},$$

under the hypothesis that φ and θ are permutable functions. Since the second member has a known meaning, the same is true of the first member; and if

$$\overset{*}{e}^{\varphi} = \Psi,$$

then the definition of

$$\overset{*}{\Psi}{}^{\theta}$$

is established, and we have precisely

$$\overset{*}{\Psi}{}^{\theta} = \overset{***}{e^{\theta l \Psi}}. \tag{9}$$

Also in this case, analogously with the preceding one, $\overset{*}{\Psi}{}^{\theta}$ is determined except for the factor of composition $\overset{*}{e}^{2\pi n i \theta}$.

If we write

$$\overset{*}{\Psi}{}^{\theta} = \chi, \tag{10}$$

we can write, by way of definition,

$$\theta = \overset{*}{\log}_{\Psi}\,\chi, \tag{11}$$

and we shall call θ the *logarithm of composition of χ to base* Ψ.

From (9) and (10) it follows that

$$\overset{*}{\theta}\overset{*}{l}\Psi = \overset{*}{l}\chi,$$

and therefore, by (11).

$$\overset{*}{\log}_{\Psi}\,\chi = \frac{\overset{*}{l}\chi}{\overset{*}{l}\Psi}. \tag{12}$$

Of course it is necessary, in order that the second member may have a meaning, not only that it be possible to find the naperian logarithms of composition of χ and Ψ, but also that the fraction which appears in the second member have a meaning. If these conditions are satisfied, then the problem proposed in § 17 is solved.

26. If

$$\Psi = \overset{*}{f}{}^{\circ} + f,$$

where f is a function whose order is positive and greater than a certain given number, then the series

$$f - \frac{\overset{*}{f}{}^{2}}{2} + \frac{\overset{*}{f}{}^{3}}{3} - \cdots$$

is convergent (see Lecture I, § 17), and we have

$$\overset{*}{l}\Psi = f - \frac{\overset{*}{f}{}^{2}}{2} + \frac{\overset{*}{f}{}^{3}}{3} - \cdots$$

This can be verified immediately by returning to formula (1).

If

$$\Psi = a\overset{*}{f}{}^{\circ} + f,$$

where a is a constant, we have

$$\overset{*}{l}\Psi = \overset{*}{l}a\cdot f^{\circ} + \frac{f}{a} - \frac{\overset{*}{f}{}^{2}}{2a^{2}} + \cdots,$$

and, if

$$\psi = \theta^{\alpha}\,(a\overset{*}{f}{}^{\circ} + \overset{*}{f}), \tag{13}$$

then

$$\overset{*}{l}\Psi = a\overset{*}{l}\theta + la\overset{*}{f}{}^{\circ} + \frac{f}{a} - \frac{\overset{*}{f}{}^{2}}{2a^{2}} + \cdots \tag{14}$$

It follows that, *if we know the naperian logarithm of composition of a function θ of a group, then, by using formula* (14) *we can calculate that of every function of the group of the form* (13). These form a very extensive class of functions (cf. Lecture II, § 5).

27. We will now give an application of this result:

To calculate the naperian logarithm of composition of any function belonging to the clossed-cycle group, possessing a derivative and having the order 1.

Let $F(y-x)$ be this function, and suppose, for simplicity, that $F(0)=1$. We have

$$F = \overset{*}{1}\,(\overset{*}{F}{}^{\circ} + \overset{*}{F}{}'),$$

where F' denotes the derivative of F.

Therefore, applying formulae (14) and (6), we obtain

$$\overset{*}{l}F = \overbrace{(\log(y-x)+C)}^{*}\,\overset{*}{1}{}^{-1} + F' - \frac{\overset{*}{F}{}'^{2}}{2} + \frac{\overset{*}{F}{}'^{3}}{3} - \cdots.$$

28. Let us suppose now that it is desired to obtain the logarithm of composition of F to base 1.

Formally we can write:

$$\overset{*}{\log}_1 F = \frac{\overset{*}{l}F}{\overset{*}{l}1} = \frac{\overset{*}{1}\,\overset{*}{l}\overset{*}{F}}{\overset{*}{1}\,\overset{*}{l}\overset{*}{1}} \; \frac{\overset{*}{1}\,\overset{*}{l}F}{\overbrace{(\log(y-x)+C)}^{*}} = \overset{*}{F}{}^{\circ} + \frac{\overset{*}{F}{}'\,\overset{*}{1} - \frac{\overset{*}{F}{}'^{2}\,\overset{*}{1}}{2} + \frac{\overset{*}{F}{}'^{3}\,\overset{*}{1}}{3} - \cdots}{\overbrace{(\log(y-x)+C)}^{*}}.$$

This brings us, consequently, to the solution of an integral equation of the first kind having as its kernel $\log(y-x)+C$. (Cf. § 6).

We are thus led to a new class of integral equations which it will be convenient to study and which will form the subject of the sections which follow.

29. The preceding problem is only a particular case of a much more general question.

From (12), if ψ and χ are permutable functions, we have

$$\overset{*}{\log}_{\psi}\chi = \frac{\overset{*}{l}\chi}{\overset{*}{l}\psi};$$

and, if $\overset{*}{\psi}{}^{z}$ is given by formula (3),

$$\overset{*}{\log}_{\psi}\chi = \frac{\overset{*}{l}\chi\,\overset{*}{\psi}{}^{z}}{\overbrace{[\alpha(y-x)^{\alpha z-1}G(x,y\,|\,z)\log(y-x) + (y-x)^{\alpha z-1}G'(x,y\,|\,z)]}^{*}};$$

and we shall therefore have to solve new integral equations of the first kind whose kernels involve logarithmic terms.

30. As we foresaw, especially in the last section, we are confronted with the necessity of solving certain integral equations (of Volterra type) whose kernels contain a term having a logarithmic factor.

This is a new class of integral equations to the solution of which we cannot apply directly the known methods of procedure. We shall not stop to solve the general problem but treat a single example to indicate the method which is convenient to use.

Let us try then to solve the integral equation

$$\int_0^x f(\xi)\,[\log(x-\xi)+C]\,d\xi = \varphi(x), \tag{15}$$

where C denotes EULER's constant.

Multiplying both members by $\nu(x, y)$, a finite continuous function, and integrating from o to y, we have

$$\int_0^y \nu(x, y)\,dx \int_0^x f(\xi)\,[\log(x-\xi)+C]\,d\xi = \tag{16}$$

$$= \int_0^x f(\xi)\,d\xi \int_\xi^y [\log(x-\xi)+C]\,\nu(x, y)\,dx = \int_0^y \varphi(x)\,\nu(x, y)\,dx\,.$$

If we can obtain $\nu(x, y)$ in such a manner that

$$\int_x^y [\log(x-\xi)+C]\,\nu(x, y)\,dx = (y-\xi)^\alpha,$$

where α is any positive number, the problem will be solved, for the equation (16) can be written

$$\int_0^y f(\xi)\,(y-\xi)^\alpha\,d\xi = \int_0^y \varphi(x)\,\nu(x, y)\,dx,$$

and this equation belongs to a well-known class of integral equations. Now, if we take the well-known formula in the theory of the EULER Integral:

$$\int_\xi^y \frac{(x-\xi)^{\alpha-1}\,(y-x)^{\beta-1}}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)}\,dx = \frac{(y-\xi)^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha+\beta)},$$

we observe that the second member is a function of α and β. If we integrate with respect to β and differentiate with respect to α, we obtain

$$\int_\xi^y \frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{(x-\xi)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right)dx \int_{\beta'}^\infty \frac{(y-x)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}\,d\beta = -\frac{(y-\xi)^{\alpha+\beta'-1}}{\Gamma(\alpha+\beta)},$$

and if we put $\alpha = \beta' = 1$, we have

$$\int_\xi^y (\log(x-\xi)+C)\,dx \int_0^\infty \frac{(y-x)^\beta}{\Gamma(\beta+1)}\,d\beta = -(y-\xi).$$

We can therefore take for $\nu(x, y)$ the function

$$\nu(x, y) = -\int_0^\infty \frac{(y-x)^\beta}{\Gamma(\beta+1)}\,d\beta.$$

The formula giving the solution of the integral equation (15) is therefore:

$$(16') \qquad f(x) = -\frac{d^2}{dx^2}\int_0^x \varphi(\xi)\, d\xi \int_0^\infty \frac{1}{\Gamma(1+\zeta)} (x-\xi)^\zeta\, d\zeta.$$

In a similar manner the integral equations are treated upon which depend various problems in the determination of logarithms of composition.

31. As an application let us consider the solution of the problem proposed in § 28, that is, to determine

$$\overset{*}{\log}_1 \overset{*}{F}$$

where F is a function which belongs to the closed-cycle group and $F(0) = 1$.

We found

$$\overset{*}{\log}_1 F = \overset{*}{F}{}^0 + \frac{\overset{*}{F}{}' \overset{*}{1} - \dfrac{\overset{*}{F}{}'^2 \overset{*}{1}}{2} + \dfrac{\overset{*}{F}{}'^3 \overset{*}{1}}{3} - \cdots}{\overset{*}{\widehat{(\log(y-x)+C)}}}.$$

Hence if we put

$$\overset{*}{F}{}' \overset{*}{1} - \frac{\overset{*}{F}{}'^2 \overset{*}{1}}{2} + \frac{\overset{*}{F}{}'^3 \overset{*}{1}}{3} - \cdots = \varphi(y-x),$$

we shall have to solve the integral equation

$$\int_x^y f(\xi - x)(\log(y-\xi) + C)\, d\xi = \varphi(y-x),$$

or, changing variables,

$$\int_0^x f(\xi)(\log(x-\xi) + C)\, d\xi = \varphi(x).$$

If we observe that $\varphi(0) = 0$, then

$$\varphi' = F' - \frac{\overset{*}{F}{}'^2}{2} + \frac{\overset{*}{F}{}'^3}{3} - \cdots,$$

and therefore, applying formula (16′), we have

$$f(y-x) = -\frac{\partial}{\partial y}\int_x^y \left[F'(\xi - x) - \frac{\overset{*}{F}{}'^2(\xi-x)}{2} + \frac{\overset{*}{F}{}'^3(\xi-x)}{3} - \cdots\right] d\xi \int_0^\infty \frac{(y-\xi)^\zeta}{\Gamma(1+\zeta)}\, d\zeta,$$

and finally

$$\overset{*}{\log}_1 F = \overset{*}{F}{}^0 - \frac{\partial}{\partial y}\int_x^y \left[F'(\xi - x) - \frac{\overset{*}{F}{}'^2(\xi-x)}{2} + \frac{\overset{*}{F}{}'^3(\xi-x)}{3} - \cdots\right] d\xi \int_0^\infty \frac{(y-\xi)^\zeta}{\Gamma(1+\zeta)}\, d\zeta.$$

Therefore, by using the preceding formula, *we can obtain the logarithm of composition to base unity of any differentiable function of the first order which has its characteristic equal to unity and belongs to the closed-cycle group.*

THIRD LECTURE

1. INTRODUCTION.

1. At the beginning of the first lecture we considered a particular function of composition which we expressed in the form

$$S(x, y) = -F(x, y) + \overset{*}{F}{}^2(x, y) - \overset{*}{F}{}^3(x, y) + \cdots,$$

and which, we said, belonged to the general class of functions which depend on other functions, i.e., to the class of *functions of lines*. We can obtain a more complete formula, according to the notation which we have been using, by adding a term to the right-hand member and writing instead of S the function.

$$\frac{\overset{*}{F}{}^0}{F^0 + F} = \overset{*}{F}{}^0 - F + \overset{*}{F}{}^2 - F^3 + \cdots$$

We shall extend this concept and examine in this lecture *general functions of composition.*

2. – FUNCTIONS OF COMPOSITION – DERIVATIVES AND INTEGRALS OF COMPOSITION.

2. We shall develop in particular those ideas which are connected with the subject which we have been treating, i.e. with the subject of powers and logarithms of composition, reserving for another memoir a more thorough and complete development of the subject in general.

3. If we have an analytic element

$$\sum_{0}^{\infty}{}_m\, a_m z^m, \tag{1}$$

with center $z = 0$, convergent within circle a radius R. Then, if the function $F(x, y)$ is finite and continuous, the function

$$\sum_{0}^{\infty}{}_m\, a_m \overset{*}{F}{}^m$$

is also finite and continuous and permutable with F. We shall call it a *rational entire function of composition of* F.

Now consider the expression

$$\sum_{1}^{p}{}_m\, b_m z^{-m}.$$

This has a pole of order p if $b_p \gtrless 0$. If we assume that F possesses a derivative, then, according to the definition given in the preceding lecture, the expressions

$$\sum_{0}^{p}{}_m b_m \overset{*}{F}^{-m}$$

and

$$\sum_{1}^{\infty}{}_m a_m \overset{*}{F}^{m} + \sum_{0}^{p}{}_m b_m \overset{*}{F}^{-m}$$

have a meaning. The latter will be called a *rational function of composition having a pole of order p.*

If we suppose n to be positive we can calculate also the expression

$$\sum_{1}^{\infty}{}_m a_m \overset{*}{F}^{m/n} + \sum_{0}^{p}{}_m b_m \overset{*}{F}^{-(m/n)}.$$

This is an irrational function of composition if it contains at least one term having a fractional exponent.

Let us consider

$$\overset{*}{l}\,F.$$

We do not yet know whether, corresponding to any finite continuous function F, the function $\overset{*}{l}F$ exists (cf. the preceding lecture). However, if the logarithm of composition exists when F belongs to a certain functional field we shall call it a *logarithmic function of composition.*

The sums, the resultants of composition and the ratios of composition of several functions of composition will be regarded as *new functions of composition.*

4. We shall represent the various functions of composition by means of the symbol.

$$\overset{*}{\Phi}\,(F).$$

F will be called the *argument of the function* Φ.

If $\overset{*}{\Psi}(F)$ is a function of composition, and $\overset{*}{F}(\Phi)$ is another function of composition, we can obtain

$$\overset{*}{\Psi}(\overset{*}{F}(\Phi)),$$

which will be called a *function of a function of composition.*

5. We thus have the means of defining various classes of functions of composition. We should be able to obtain new functions as uniform limits of those previously obtained by making the parameters which they contain approach given values. But we will proceed now to establish a general definition of the term *function of composition* which will include as particular cases all these classes. The method which we shall adopt to

attain this end consists in stating two fundamental properties common to all the functions hitherto examined, and in assuming these properties as those which define, in general, all functions of composition.

The first of these properties is this, that *all the functions previously examined are permutable with the function which constitutes the argument*; we proceed to formulate in the following paragraph the second fundamental property.

6. Let us return to the rational entire function of composition

$$\overset{*}{\Phi}(\mathrm{F}) = \sum_{1}^{\infty}{}_m a_m \overset{*}{\mathrm{F}}{}^m .$$

If we form the expression

$$\overset{*}{\Phi}(\mathrm{F}+\varepsilon f) - \overset{*}{\Phi}(\mathrm{F}) ,$$

where ε is a number and f is function permutable with F, then as ε approaches zero the expression approaches zero; moreover

$$\frac{\overset{*}{\Phi}(\mathrm{F}+\varepsilon f) - \overset{*}{\Phi}(\mathrm{F})}{\varepsilon \overset{*}{f}}$$

approaches a limit which is easily calculated, namely

$$\sum_{1}^{\infty}{}_m m\, a_m \overset{*}{\mathrm{F}}{}^{m-1} .$$

This expression is thus independent of f. It is called *the derivative of composition of* Φ *with respect to* F.

The rule for calculating the derivative consists in differentiating the series (1) with respect to z and substituting for the powers of z powers of composition of F. Hence the rule is the same as the one for calculating the ordinary derivative provided that instead of the ordinary powers we use powers of composition.

It is easy, in this manner, to extend the concept of the derivative of composition to rational functions of composition having poles, to irrational functions of composition and to all those which can be obtained from these by the operations of addition, composition, forming ratios of composition and forming functions of functions of composition. The rules for finding derivatives of composition are the same as those which are applied in ordinary differentiation except that instead of the ordinary operations of multiplication, raising to powers and forming ratios, we substitute the corresponding operations of composition.

We can extend this concept of the derivative also to logarithmic functions of composition. If we wish to obtain the derivative of composition of $\overset{*}{l}\mathrm{F}$, it is sufficient to observe that

$$\overset{*}{e}{}^{\overset{*}{l}\mathrm{F}} = \mathrm{F} ,$$

and thus we find that

$$\frac{d\overset{*}{l}\mathrm{F}}{d\overset{*}{\mathrm{F}}} = \overset{*}{\mathrm{F}}^{-1}.$$

We can therefore generalize the foregoing rule for finding the derivative of composition also to expressions containing logarithms of composition.

Evidently, in all the cases considered, if the increment given to the function F is εf, a function permutable with F, and if ε is made to approach zero, then the limit of the ratio of composition which has for its numerator the increment of the function of composition and for its denominator εf will be *independent of f*. This is the *second fundamental property* which we were seeking.

To represent the derivative of composition of the function Φ of the argument F we shall use the symbol

$$\frac{d\overset{*}{\Phi}}{d\overset{*}{\mathrm{F}}}. \tag{1}$$

7. With these introductory notions let us proceed to state the general definition of the term function of composition.

Let $\Phi(x, y)$ be a function which *depends on all the values of the function* $\mathrm{F}(\xi, \eta)$, $x \leq \xi \leq \eta \leq y$, in the sense in which these terms are used in the *theory of functions of lines*, so that we can write, in the notation of that theory

$$\Phi = \Phi \left| [\mathrm{F}(\overset{\eta}{\underset{x}{\xi}}, \overset{y}{\underset{\xi}{\eta}})] \right|,$$

and let us suppose that $\mathrm{F}(x, y)$ can vary in a certain functional field for which it is assumed that, if f and φ are contained in it; $af + b\varphi$ is also contained in it, a and b being parameters which are independent of x and y and which vary over a certain interval. *Let the functions* Φ *and* F *be permutable.* We will further assume that they are *continuous*, that is to say, if $\Phi(x, y)$ corresponds to $\mathrm{F}(x, y)$ and $\Phi_1(x, y)$ corresponds to $\mathrm{F}_1(x, y)$, Φ approaches Φ_1 uniformly when F approaches F_1 uniformly.

Besides this we will assume that, in the sense in which the operation is carried out in the *theory of functions of lines*, Φ can be differentiated with respect to F, so that it will be possible to obtain its successive derivatives to any order that it may be necessary to consider.

Let us substitute for $\mathrm{F}(\xi, \eta)$

$$\mathrm{F}(\xi, \eta) + \varepsilon f(\xi, \eta),$$

which is permutable with $\mathrm{F}(\xi, \eta)$, and indicate by $\Phi'(x, y)$ the corresponding value of $\Phi(x, y)$, and let us form the ratio of composition

$$\frac{\overset{*}{\Phi}{}' - \overset{*}{\Phi}}{\varepsilon \overset{*}{f}},$$

and let ε approach zero. *If there exists a limit of this ratio, independent of f, we shall say that Φ is a function of composition of the argument* F and we shall represent it always by the symbol $\overset{*}{\Phi}(\mathrm{F})$ which we adopted previously. The limit in question will be called the *derivative of composition* and will be indicated by the symbol, already introduced,

$$\frac{d\overset{*}{\Phi}}{d\overset{*}{\mathrm{F}}}.$$

Like the ordinary derivative the derivative of composition can be regarded as an *actual ratio of composition*, and the numerator and denominator constitute respectively the *differential of the function and the differential of the argument.*

The two fundamental properties of functions of composition are therefore: (1) *The function is permutable with its argument*; (2) *the derivative is independent of the differential of the argument* (cf. § 10).

8. Let us prove now that *the derivative is also a function of composition of* F.

If we denote by Ψ the derivative $d\overset{*}{\Phi}/d\overset{*}{\mathrm{F}}$ we can state first that

$$\Psi = \Psi \left| \left[\mathrm{F} \left(\overset{\eta}{\underset{x}{\xi}}, \overset{y}{\underset{\xi}{\eta}} \right) \right] \right|.$$

We will show that Ψ possesses the two fundamental properties which serve to characterize a function of composition.

The first of these fundamental properties holds for the derivative Ψ, since it is permutable with F.

Let us proceed to prove that the second property also holds. It is to be noted, then, that we have

$$\overset{*}{\Phi}(\mathrm{F} + \varepsilon_1 f_1) - \overset{*}{\Phi}(\mathrm{F}) = \varepsilon_1 \overset{*}{f_1} \overset{*}{\Psi} + \varepsilon_1 h_1,$$

where f_1 is permutable with F and h_1 approaches zero with ε_1.

Let f_2 be a function also permutable with F_1 and form the expression

$$\overset{*}{\Phi}(\mathrm{F} + \varepsilon_1 f_1 + \varepsilon_2 f_2) - \overset{*}{\Phi}(\mathrm{F} + \varepsilon_1 f_1) - \overset{*}{\Phi}(\mathrm{F} + \varepsilon_2 f_2) + \overset{*}{\Phi}(\mathrm{F}) =$$

$$= \varepsilon_1 \overset{*}{f_1} \{ \overset{*}{\Psi} \,|\, [\mathrm{F} + \varepsilon_2 f_2] \,| - \overset{*}{\Psi} \,|\, [\mathrm{F}] \,| \} + \varepsilon_1 (h_1' - h_1''),$$

where h_1' and h_1'' become zero with ε_1 and ε_2 respectively.

Since Ψ, by the hypothesis which we have made, is differentiable according to the rule for functions of lines we can write

$$\Psi \,|\, [\mathrm{F} + \varepsilon_2 f_2] \,| - \Psi \,|\, [\mathrm{F}] \,| = \varepsilon_2 \theta_1 + \varepsilon_2 h_2 \tag{2}$$

where h_2 approaches zero with ε_2. If then we assume the existence of the third differential, in the sense of the theory of functions of lines, we can write

$$\overset{*}{\Psi}(\mathrm{F} + \varepsilon_1 f_1 + \varepsilon_2 f_2) - \overset{*}{\Phi}(\mathrm{F} + \varepsilon_1 f_1) - \overset{*}{\Phi}(\mathrm{F} + \varepsilon_2 f_2) + \overset{*}{\Phi}(\mathrm{F}) = \varepsilon_1 \varepsilon_2 \overset{*}{f_1} \theta_1 + \varepsilon_1 \varepsilon_2 h_1'',$$

where h'' approaches zero with ε_1 and ε_2.

Hence

$$(3) \qquad \lim_{\substack{\varepsilon_1=0\\ \varepsilon_2=0}} \frac{\overset{*}{\Phi}(F+\varepsilon_1 f_1+\varepsilon_2 f_2)-\overset{*}{\Phi}(F+\varepsilon_1 f_1)-\overset{*}{\Phi}(F+\varepsilon_2 f_2)+\overset{*}{\Phi}(F)}{\varepsilon_1\varepsilon_2}=\overset{*}{f_1}\overset{*}{\theta}_1.$$

But the first member is symmetrical with respect to f_1 and f_2; it can therefore be put in the form $\overset{*}{f_2}\overset{*}{\theta}_2$, and therefore

$$\overset{*}{f_1}\overset{*}{\theta}_1=\overset{*}{f_2}\theta_2.$$

Assuming f_1 and f_2 to be of determinate orders it necessarily follows that

$$(4) \qquad \theta_1=\overset{*}{f_2}\overset{*}{\theta}_{12}$$

$$(4') \qquad \theta_2=\overset{*}{f_1}\overset{*}{\theta}_{12}$$

so that the limit (3) will be equal to

$$f_1\overset{*}{f_2}\theta_{12}.$$

Now Ψ is independent of f_1, therefore θ_1 is also independent of f_1. On account of (4) it follows that θ_{12} is independent of f_1. By the same reasoning, on account of (4'), θ_{12} must be independent of f_2. Hence θ_{12} is independent of f_1 and f_2.

Now consider again equation (2). In view of (4) we can write

$$\Psi\,|\,[F+\varepsilon_2 f_2]\,|-\Psi\,|\,[F]\,|=\varepsilon_2\overset{*}{f_2}\overset{*}{\theta}_{12}+\varepsilon_2 h_2,$$

and consequently

$$\lim_{\varepsilon_2=0}\frac{\Psi\,|\,[F+\varepsilon_2 f_2]\,|-\Psi\,|\,[F]\,|}{\varepsilon_2\overset{*}{f_2}}=\theta_{12},$$

θ_{12} being independent of f_2. We have thus shown that $\Psi=\dfrac{d\overset{*}{\Phi}}{d\overset{*}{F}}$ possesses also the second fundamental property and it is therefore proved that Ψ is a function of composition of F.

When the successive derivatives of composition of Φ exist they will be denoted by

$$\frac{d^2\overset{*}{\Phi}}{d\overset{*}{F}{}^2},\ \frac{d^3\overset{*}{\Phi}}{d\overset{*}{F}{}^3},\ldots$$

and *they will all be functions of composition of* F *in the sense already stated.*

9. We will proceed now to set forth certain observations which will serve to make clear and complete the concepts which we have so far formulated.

We will begin by noting that it is always desirable to specify the functional field of variation for the argument of the function of composition which is being examined.

Thus, for example, consider the expression

$$\int_x^y F(x, \xi)\, \Omega(y - \xi)\, d\xi, \tag{5}$$

and regard it as dependent on all the values ef $F(\xi, \eta)$, $x \leq \xi \leq \eta \leq y$, in the sense of the theory of functions of lines. Provided that the function F belongs to the closed-cycle group the expression (5) represents a function of composition of F; such is not the case otherwise.

In fact, if we take

$$F(x, \xi) = F(\xi - x),$$

the function (5) will be permutable with F; whereas, in general, if $F(x, \xi)$ does not belong to the closed-cycle group the condition of permutability is not satisfied. Therefore the first fundamental property (§ 7) holds only if F belongs to the closed-cycle group and therefore the argument will have to be supposed to range over this field.

10. The question might be asked whether, in defining a function of composition (§ 7), it was necessary to state explicitly the condition which we have imposed upon the derivative: *that it be independent of the differential of the argument* (second condition), or whether this condition might be, on the other hand, a necessary consequence of the condition of the *permutability of the function with its argument* (first condition); but it easy to see that the two properties are *independent*, in the sense that it is possible for a function to be permutable with its argument without the necessity of its derivative being independent of the differential of the argument. As an example let us consider the expression

$$\int_x^y F(x, \xi)\, \Omega(\xi - x)\, d\xi \tag{6}$$

as dependent on F.

If we suppose F to belong to the closed-cycle group, that is to say,

$$F(x, \xi) = F(\xi - x),$$

the preceding expression becomes

$$\int_0^{y-x} F(\eta)\, \Omega(\eta)\, d\eta,$$

and we have here a function which belongs to the closed-cycle group. It is therefore permutable with F. *The first fundamental property* (§ 7) *is therefore satisfied.*

Now let the increment $\varepsilon f(y - x)$ be added to $F(y - x)$. The increment of the expression (6) is

$$\varepsilon \int_0^{y-x} f(\eta)\, \Omega(\eta)\, d\eta.$$

In order to calculate the ratio of composition of this increment and the increment of the argument F it is sufficient to solve the integral equation

$$\varepsilon \int_0^{y-x} f(\eta)\, \Omega(\eta)\, d\eta = \varepsilon \int_x^y f(y-\xi)\, \psi(\xi - x)\, d\xi.$$

The solution ψ will be the required ratio.

Now, differentiating both members with regard to y, we have

$$f(y-x)\, \Omega(y-x) = f(0)\, \psi(y-x) + \int_x^y f'(y-\xi)\, \psi(\xi - x)\, d\xi,$$

or

$$f(x)\, \Omega(x) = f(0)\, \psi(x) + \int_0^x f'(x-\xi)\, \psi(\xi)\, d\xi,$$

and it is evident that the solution ψ depends on f.

It follows that the second fundamental condition of § 7 (namely that the derivative of composition be independent of the differential of the argument) *is not satisfies*, although the first condition, that of the permutability of the function with its argument, is satisfied.

11. The importance of this second condition consists in its being *invariant to the successive operations of passing from the function to its successive derivatives*: in other words, if the condition is satisfied in passing from the function to its first derivative it will also be satisfied in the successive passages to the other derivatives. This is the significant fact concerning the theorem of § 8.

In recognition of its importance we will give another proof of this fact for the particular case in which the functional field of the argument is that of the closed cycle.

Suppose then that to every function F of the closed cycle another function Φ, also belonging to the closed-cycle group, is made to correspond in such a way that, according to the general definition of § 7, Φ is a function of composition Φ (F).

Consider the function

$$\frac{d\overset{*}{\Phi}}{d\overset{*}{F}} = \psi;$$

ψ belongs also the closed-cycle group and is independent of dF (according to the fundamental property of § 7).

According to the theory of functions of lines,

$$\delta\Phi = \int_0^x \Phi'(x, \xi)\, \delta F(\xi)\, d\xi = \int_0^x \psi(x-\xi)\, \delta F(\xi)\, d\xi,$$

and therefore

$$\Phi'(x, \xi) = \psi(x - \xi).$$

If we pass to the second functional derivative, we obtain

$$\delta\Phi'(x, \xi) = \delta\psi(x - \xi) = \int_0^x \Phi''(x - \xi, \eta)\, \delta F(\eta)\, d\eta.$$

But by virtue of the symmetry of the second derivative (see loc. cit., *Leçons sur les fonctions de lignes*, Chap. II, § 4), it follows that

$$\Phi''(x - \xi, \eta) = \Phi''(x - \eta, \xi)$$

or, assuming the existence of the derivatives of Φ'',

$$\frac{\partial \Phi''}{\partial x} = -\frac{\partial \Phi''}{\partial \xi} = -\frac{\partial \Phi''}{\partial \eta},$$

and consequently

$$\Phi''(x - \xi, \eta) \equiv \Phi''(x - \eta, \xi) \equiv \Phi''(x - \xi - \eta);$$

therefore

$$\delta\psi(x - \xi) = \int_0^x \Phi''(x - \xi - \eta)\, \delta F(\eta)\, d\eta.$$

It follows that

$$\frac{\partial}{\partial x}\int_0^x \Phi''(x - \xi - \eta)\, \delta F(\eta)\, d\eta + \frac{\partial}{\partial \xi}\int_0^x \Phi''(x - \xi - \eta)\, \delta F(\eta)\, d\eta = 0,$$

and therefore, performing the differentiation,

$$\Phi''(-\xi)\, \delta F(x) = 0 \qquad (\xi > 0).$$

We have then

$$\Phi''(x - \xi - \eta) = 0$$

when η lies between $x - \xi$ and x, from which it follows that

$$\delta\psi(x - \xi) = \int_0^{x-\xi} \Phi''(x - \xi - \eta)\, \delta F(\eta)\, d\eta;$$

and this shows that our theorem is true, since the equation can be written

$$\delta\psi = \overset{*}{\Phi}''\, \delta \overset{*}{F},$$

and therefore

$$\frac{d\overset{*}{\Psi}}{d\overset{*}{F}} = \Phi'';$$

that is to say, the ratio

$$\frac{d\overset{*}{\Psi}}{d\overset{*}{F}}$$

is independent of the differential appearing in the denominator.

12. If Φ is a function of composition of F the operation *differentiation of composition* can be carried out by means of differentiation, as applied in the ordinary sense.

In fact,

$$\lim_{\varepsilon=0} \frac{\overset{*}{\Phi}(F+\varepsilon f)-\overset{*}{\Phi}(F)}{\varepsilon \overset{*}{f}}$$

must be independent of f, since this function is permutable with F. If we take $f=\overset{*}{F}{}^{\circ}$, we have

$$\frac{\overset{*}{\Phi}(F+\varepsilon \overset{*}{F}{}^{\circ})-\overset{*}{\Phi}(F)}{\varepsilon \overset{*}{F}{}^{\circ}} = \frac{\overset{*}{\Phi}(F+\varepsilon \overset{*}{F}{}^{\circ})-\Phi(F)}{\varepsilon},$$

therefore

$$\frac{d\overset{*}{\Phi}}{d\overset{*}{F}} = \lim_{\varepsilon=0} \frac{\overset{*}{\Phi}(F+\varepsilon \overset{*}{F}{}^{\circ})-\overset{*}{\Phi}(F)}{\varepsilon} = \left(\frac{d\overset{*}{\Phi}(F+z\overset{*}{F}{}^{\circ})}{dz}\right)_{z=0};$$

and by this formula differentiation of composition is reduced to ordinary differentiation.

13. Let us consider the expression

$$\overset{*}{\Phi}(F_2)-\overset{*}{\Phi}(F_1),$$

where F_1 and F_2 are permutable. By LAGRANGE's formula we can write

$$\overset{*}{\Phi}(F_2)-\overset{*}{\Phi}(F_1) = \left(\frac{d\Phi[F_1+z(F_2-F_1)]}{dz}\right)_{z-\theta};$$

where θ is a number which lies between 0 and 1.

By this formula it follows that

$$\overset{*}{\Phi}(F_2)-\overset{*}{\Phi}(F_1) = (\overset{*}{F}_2-\overset{*}{F}_1)\left(\frac{d\overset{*}{\Phi}}{d\overset{*}{F}}\right)_{F=F_1+\theta(F_2-F_1)}, \tag{7}$$

or, if we put $F_2=F_1+f$,

$$\overset{*}{\Phi}(F_1+f) = \overset{*}{\Phi}(F_1)+\overset{*}{f}\left(\frac{d\overset{*}{\Phi}}{d\overset{*}{F}}\right)_{F=F_1+\theta f},$$

where F_1 and f are permutable.

There follows a formula analogous to TAYLOR's formula in which the existence of the successive derivatives of composition is assumed, namely.

$$\overset{*}{\Phi}(F_1+f) = \overset{*}{\Phi}(F_1)+\overset{*}{f}\left(\frac{d\overset{*}{\Phi}}{d\overset{*}{F}}\right)_{F=F_1}+\frac{\overset{*}{f}{}^2}{2!}\left(\frac{d^2\overset{*}{\Phi}}{d\overset{*}{F}{}^2}\right)_{F=F_1}+\cdots$$

$$\cdots+\frac{\overset{*}{f}{}^m}{m!}\left(\frac{d^m\overset{*}{\Phi}}{d\overset{*}{F}{}^m}\right)_{F=F_1}+\frac{\overset{*}{f}{}^{m+1}}{(m+1)!}\left(\frac{d^{m+1}\overset{*}{\Phi}}{d\overset{*}{F}{}^{m+1}}\right)_{F=F_1+\theta_m f},$$

f being permutable with F_1 and θ_m lying between 0 and 1.

14. From formula (7), assuming the continuity of $d\overset{*}{\Phi}/d\overset{*}{F}$,

$$\lim_{F_1=F_2} \frac{\overset{*}{\Phi}(F_2)-\overset{*}{\Phi}(F_1)}{\overset{*}{F}_2-\overset{*}{F}_1} = \left(\frac{d\overset{*}{\Phi}}{d\overset{*}{F}}\right)_{F=F_1},$$

where the functions F_1 and F_2 are supposed to be permutable.

Let us suppose that $F(x, y \mid s)$ depends on the parameter s in such a way that for all values of s lying in a certain interval the function F obtained belongs to a certain group of permutable functions. We can then consider

$$\Phi(F(x, y \mid s))$$

as a function of s. By equation (7) we have

$$\overset{*}{\Phi}(F(x, y \mid s_0+h)) - \overset{*}{\Phi}(F(x, y \mid s_0)) =$$

$$= \frac{\overset{*}{F}(x, y \mid s_0+h) - \overset{*}{F}(x, y \mid s_0)}{h} \left(\frac{d\overset{*}{\Phi}}{d\overset{*}{F}}\right)_{F=F_1+\theta(F_2-F_1)},$$

where it is supposed that $F_1 = F(x, y) \mid s_0)$, $F_2 = F(x, y \mid s_0 + h)$ and θ lies between 0 and 1.

Assuming the existence of the derivative of F with regard to S, and passing to the limit as h tends toward zero, we obtain

$$\frac{d\overset{*}{\Phi}(F)}{ds} = \frac{d\overset{*}{F}}{ds} \frac{d\overset{*}{\Phi}}{d\overset{*}{F}}. \tag{8}$$

15. From formula (7) it follows that if, for every function F of the field we are considering,

$$\frac{d\overset{*}{\Phi}}{d\overset{*}{F}} = 0,$$

then Φ is independent of F: that is to say, Φ is equal to a fixed determinate function belonging to the group of permutable functions, which contains the field of functions over which the argument F ranges. Consequently, if $\overset{*}{\Phi}_1(F)$ and $\overset{*}{\Phi}_2(F)$ have the same derivative of composition they can differ only by a fixed determinate function which belongs to the group of permutable functions to which F belongs.

16. We proceed now to the subject of *integration of composition*. Let there be given a function of composition $\overset{*}{\Phi}(F)$, and let us consider the function

$$F(x, y \mid s)$$

such that, for all values of s lying between certain limits a and b, $F(x, y \mid s)$ belongs always to the same group of permutable functions. Let us suppose that Φ and F are of positive order.

We now form the expression

$$\overset{*}{\Phi}(F(x, y \mid s)) \frac{\partial \overset{*}{F}(x, y \mid s)}{\partial s}$$

by composition; and, assuming that as a function of s, it is integrable, we calculate the integral

(9) $$\int_a^b \overset{*}{\Phi}(\mathrm{F}(x,y \mid s)) \frac{\partial \overset{*}{\mathrm{F}}(x,y \mid s)}{\partial s} ds,$$

This is obtained by dividing the interval ab into n parts, $h_1, h_2, \cdots, h_n$, then forming

$$\mathrm{F}_\nu = \mathrm{F}(x,y \mid a + h_1 + h_2 + \cdots + h_\nu) \quad , \quad \mathrm{F}_0 = \mathrm{F}(x,y \mid a)$$

(10) $$\lim \sum_0^{n-1}{}_\nu \overset{*}{\Phi}(\mathrm{F}_\nu)(\overset{*}{\mathrm{F}}_{\nu+1} - \overset{*}{\mathrm{F}}_\nu),$$

and passing to the limit in the final sum by making all the intervals $h_1, h_2, \cdots, h_n$ tend toward zero, at the same time increasing the number of intervals indefinitely.

17. Let us put $\mathrm{F}(x,y) \mid a) = \mathrm{F_A}$, $\mathrm{F}(x,y \mid b) = \mathrm{F_B}$. We will write the integral (9) in the form

$$\int_s \overset{*}{\Phi}(\mathrm{F})\, d\overset{*}{\mathrm{F}} = \int_a^b \overset{*}{\Phi}(\mathrm{F})\, d\overset{*}{\mathrm{F}},$$

or in the form

(11) $$\int_{\mathrm{F_A}}^{\mathrm{F_B}} \overset{*}{\Phi}(\mathrm{F})\, d\overset{*}{\mathrm{F}}.$$

To justify the notation (11) it is necessary to prove that, if we take another function

$$\mathrm{F}'(x,y \mid s'),$$

which for the totality of values of s' lying between a' and b' represents a set of functions belonging to the same group of permutable functions as before, then, provided that $\mathrm{F}'(x,y)\, a') = \mathrm{F_A}$, $\mathrm{F}'(x,y \mid b') = \mathrm{F_B}$, we obtain for the integral

(9') $$\int_{a'}^{b'} \overset{*}{\Phi}(\mathrm{F}'(x,y \mid s')) \frac{\partial \overset{*}{\mathrm{F}}'(x,y \mid s')}{\partial s'} ds',$$

the same result (9) [16].

(16) For an example of two such functions $\mathrm{F}(x,y \mid s)$ and $\mathrm{F}'(x,y \mid s')$ we can take

$$\mathrm{F}(x,y) \mid s) = 1 + s(y-x) + s^2(y-x)^2$$

$$\mathrm{F}'(x,y \mid s') = 1 + (s'-2)(s'-1)\cos(y-x) + (y-x)^2(s'-1)^3 + (y-x)(s'-1),$$

and $a = 0$, $b = 1$, $a' = 1$, $b' = 2$. We then have

$$\mathrm{F}(x,y \mid 0) = \mathrm{F}^1(x,y \mid 1) = 1\,;\ \mathrm{F}(x,y \mid 1) = \mathrm{F}'(x,y \mid 2) = 1 + (y-x) + (y-x)^2.$$

For this purpose consider

$$F(x, y \mid u, v),$$

and let us regard u and v as the coordinates of points of a plane. For all the values of u and v corresponding to points of a certain area σ and of its contour S let us suppose that F is a function belonging to a given group of permutable functions. Let us form the integral

$$\int_S \overset{*}{\Phi}(F)\, d\overset{*}{F} = \int_S \overset{*}{\Phi}(F) \frac{d\overset{*}{F}}{dS}\, dS = \int_S \overset{*}{\Phi}(F) \left(\frac{\partial \overset{*}{F}}{\partial u} \frac{du}{dS} + \frac{\partial \overset{*}{F}}{\partial v} \frac{dv}{dS} \right) dS.$$

If no singularity exists in the interior of the region σ, by virtue of formula (8), we shall have

$$\int_S \overset{*}{\Phi}(F) \left(\frac{\partial \overset{*}{F}}{\partial u} \frac{du}{dS} + \frac{\partial \overset{*}{F}}{\partial v} \frac{dv}{dS} \right) dS = \int_\sigma \left\{ \frac{\partial}{\partial v} \left(\overset{*}{\Phi}(F) \frac{\partial \overset{*}{F}}{\partial u} \right) - \frac{\partial}{\partial u} \left(\overset{*}{\Phi}(F) \frac{\partial \overset{*}{F}}{\partial v} \right) \right\} d\sigma =$$

$$= \int_\sigma \left\{ \frac{\partial}{\partial v} \overset{*}{\Phi}(F) \frac{\partial \overset{*}{F}}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial u} \overset{*}{\Phi}(F) \frac{\partial \overset{*}{F}}{\partial v} \right\} d\sigma = \int_\sigma \frac{d\overset{*}{\Phi}}{d\overset{*}{F}} \left(\frac{\partial \overset{*}{F}}{\partial v} \frac{\partial \overset{*}{F}}{\partial u} - \frac{\partial \overset{*}{F}}{\partial u} \frac{\partial \overset{*}{F}}{\partial v} \right) d\sigma = 0.$$

It follows therefore that

$$\int_S \overset{*}{\Phi}(F)\, d\overset{*}{F} = 0. \tag{12}$$

From this formula we deduce the result that, if it is possible to pass from $F(x, y \mid s)$ to $F'(x, y \mid s')$ continuously without allowing F and $\overset{*}{\Phi}(F)$ to traverse any singularities, then the two integrals (9) and (9′) lead to the same result.

18. Regarding F_A as fixed and F_B as variable, the integral

$$\int_{F_A}^{F_B} \overset{*}{\Phi}(F)\, d\overset{*}{F}$$

represents a function of composition of F_B. If we call it $\overset{*}{\Psi}(F_B)$, we shall have

$$\frac{d\overset{*}{\Psi}}{d\overset{*}{F}_B} = \overset{*}{\Phi}(F_B).$$

In order to integrate the rational or irrational functions of composition which we have considered previously it is sufficient to apply the ordinary rules of integration and to substitute powers of composition for the ordinary ones.

It is possible, evidently, to consider *differential equations of composition* by examining the relations between functions of composition and their derivatives of various orders.

It is also possible, evidently, to consider functions of composition and the derivatives of functions of composition of several arguments.

19. It is easy to recognize the analogy between the theory which we have developed and the theory of functions of complex variables. The second condition imposed upon the derivative of composition of a function of composition (§ 7) corresponds evidently to the condition that the derivative of a function of the complex variable z be independent of the direction in which the point representing the variable z is displaced in the complex plane (condition of monogeneity). Each of these conditions is preserved in successive differentiations (theorem of § 8).

Furthermore, formula (12) corresponds to CAUCHY's Theorem, and evidently we can state that a necessary condition that a function be a function of composition is that it satisfy formula (12), thus establishing a reciprocal theorem analogous to the well-known theorem of MORERA, the converse of CAUCHY's Theorem.

3. – APPLICATION OF INTEGRATION OF COMPOSITION TO LOGARITHMS OF COMPOSITION AND POWERS OF COMPOSITION.

20. We have seen that

$$\frac{d\overset{*}{l}\,\mathrm{F}}{d\overset{*}{\mathrm{F}}} = \overset{*}{\mathrm{F}}^{-1};$$

hence

$$\overset{*}{l}\,\mathrm{F} = \int_{\overset{*}{\mathrm{F}}^{0}}^{\mathrm{F}} \overset{*}{\mathrm{F}}^{-1}\, d\overset{*}{\mathrm{F}}.$$

We can also put

$$\overset{*}{l}\mathrm{F} = \lim_{n=\infty} \frac{\overset{*}{\mathrm{F}} - \overset{*}{\mathrm{F}}{}^{0}}{n} \left\{ \frac{1}{\overset{*}{\mathrm{F}}{}^{0}} + \frac{1}{\overset{*}{\mathrm{F}}{}^{0} + \dfrac{\overset{*}{\mathrm{F}} - \overset{*}{\mathrm{F}}{}^{0}}{n}} + \frac{1}{\overset{*}{\mathrm{F}}{}^{0} + \dfrac{2(\overset{*}{\mathrm{F}} - \overset{*}{\mathrm{F}}{}^{0})}{n}} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\overset{*}{\mathrm{F}}{}^{0} + \dfrac{3(\overset{*}{\mathrm{F}} - \overset{*}{\mathrm{F}}{}^{0})}{n}} + \cdots + \frac{1}{\overset{*}{\mathrm{F}}} \right\} = (\overset{*}{\mathrm{F}} - \overset{*}{\mathrm{F}}{}^{0}) \int_{0}^{1} \frac{dz}{\overset{*}{\mathrm{F}}{}^{0} + z(\overset{*}{\mathrm{F}} - \overset{*}{\mathrm{F}}{}^{0})};$$

or

$$\overset{*}{\mathrm{F}}\overset{*}{l}\mathrm{F} = (\overset{*}{\mathrm{F}} - \overset{*}{\mathrm{F}}{}^{0}) \int_{0}^{1} \frac{\overset{*}{\mathrm{F}}\, dz}{\overset{*}{\mathrm{F}}{}^{0} + z(\overset{*}{\mathrm{F}} - \overset{*}{\mathrm{F}}{}^{0})}.$$

Now

$$\frac{\overset{*}{\mathrm{F}}}{\overset{*}{\mathrm{F}}{}^{0} + z(\overset{*}{\mathrm{F}} - \overset{*}{\mathrm{F}}{}^{0})} = \frac{1}{1-z}\left(\mathrm{F} - \frac{z}{z-1}\overset{*}{\mathrm{F}}{}^{2} + \frac{z^2}{(1-z)^2}\overset{*}{\mathrm{F}}{}^{3} - \cdots\right).$$

We are thus led to inquire whether the integral

$$\int_{0}^{1} \frac{dz}{1-z}\left(\mathrm{F} - \frac{z}{1-z}\overset{*}{\mathrm{F}}{}^{2} + \frac{z^2}{(1-z)^2}\overset{*}{\mathrm{F}}{}^{3} - \cdots\right)$$

is convergent. The proof of the convergence depends on the following theorems which we will state without proof (*).

21. THEOREM I. - Let $F(x, y)$ *be a finite continuous differentiable function,* $a \leq x \leq y \leq b$, and let

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = F_1(x,y) \quad , \quad \frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = F_2(x,y) \quad , \quad \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y} = F_{12}(x,y),$$

$$F(x,x) = 1 \quad , \quad F_1(x,x) = F_2(x,x) = 0$$

(in other words we suppose that F has the canonical form, Lecture I, § 10) and let F_1, F_2, F_{12} be *finite and continuous. Then*

$$zF - z^2 \overset{*}{F}{}^2 + z^3 \overset{*}{F}{}^3 - \cdots = ze^{-z(y-x)} + \frac{\Phi(x,y \mid z)}{z}, \tag{I}$$

and when z varies from $h > 0$ *to* ∞, Φ *will remain less than a certain finite number.*

Note: The condition $F_1(x,x) = F_2(x,x) = 0$ can be removed and the theorem will still be true.

THEOREM II. - *If the conditions of the preceding theorem are satisfied, and if the functions*

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \quad , \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \quad , \quad \frac{\partial^3 F}{\partial x \partial y^2} \quad , \quad \frac{\partial^3 F}{\partial x^2 \partial y},$$

are finite and continuous and their absolute values are less than M, *then for* $y > x$

$$\lim_{z=\infty} \Phi(x,y \mid z) = \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y} + \int_x^y \frac{\partial^2 F(x,\xi)}{\partial x \partial \xi} \Psi(\xi,y)\, d\xi,$$

where

$$\Psi(x,y) = F_2 - \overset{*}{F}{}_2^2 + \overset{*}{F}{}_2^3 - \cdots,$$

and for $y = x$

$$\lim_{z=\infty} \Phi(x,y \mid z) = 0.$$

22. From Theorem I it follows, under the conditions imposed, that the expression

$$\lim_{z=+\infty} (zF - z^2 \overset{*}{F}{}^2 + z^3 \overset{*}{F}{}^3 - \cdots)$$

is equal to zero for $y > x$ and is infinite for $y = x$. Furthermore, if $F(x,y)$ is greater than a certain positive quantity,

$$\lim_{z=+\infty} (zF + z^2 \overset{*}{F}{}^2 + z^3 \overset{*}{F}{}^3 + \cdots) = \infty.$$

(*) Vedi la dimostrazione in questo vol.: VII, pp. 198-202 [N.d.R.].

These properties show the close connection between the very general serie (I) and the exponential series. Moreover, Theorem I (see the remark at the end of the theorem) serves to answer the question concerning the convergence of the integral (1). The fact that F is reduced to the *canonical form* (Lecture I, § 10) or even simply the fact that $F(x, x) = 1$ *suffices to show that the integral in question is convergent,* and therefore

$$\text{(II)} \qquad \overset{*}{F}\overset{*}{l}F = (\overset{*}{F} - \overset{*}{F}{}^{0})\int_0^1 \frac{dz}{1-z}\left(\overset{*}{F} - \frac{z}{1-z}\overset{*}{F}{}^2 + \frac{z^2}{(1-z)^2}\overset{*}{F}_3 - \cdots\right).$$

23. As an example we will now apply formula (II) in order to obtain the expression, already found in another way, for $1\overset{*}{l}\overset{*}{1}$ (cf. Lecture II, § 22).

Putting

$$f(y-x) = \int_0^1 \frac{dz}{1-z}\left(1 - \frac{z}{1-z}(y-z) + \frac{z^2}{(1-z)^2}\frac{(y-x)^2}{2!} - \cdots\right) =$$

$$= \int_0^1 e^{-\frac{z}{1-z}(y-x)}\frac{dz}{1-z},$$

we have by virtue of (II)

$$\overset{*}{1}\overset{*}{l}1 = (\overset{*}{1} - \overset{*}{1}{}^{0})\overset{*}{f}.$$

But

$$\left\{\begin{aligned} f(x) &= \int_0^1 e^{-\frac{z}{1-z}x}\frac{dz}{1-z}, \\ f'(x) &= \int_0^1 -\frac{z}{(1-z)^2}e^{-\frac{z}{1-z}x}\,dz, \\ f(x) - f'(x) &= \int_0^1 e^{-\frac{z}{1-z}x}\frac{1}{(1-z)^2}\,dz = \frac{1}{x}, \end{aligned}\right.$$

therefore

$$\text{(17)} \qquad f(x) = e^x\int_x^\infty \frac{e^{-\xi}d\xi}{\xi} = -\log x + e^x\int_x^\infty \log\xi e^{-\xi}\,d\xi,$$

from which it follows that

$$(\overset{*}{1} - \overset{*}{1}{}^{0})\overset{*}{f} = -\int_0^x \log\xi\,d\xi + \int_0^x e^\eta\,d\eta\int_\eta^\infty \log\xi e^{-\xi}\,d\xi =$$

$$= \log x - \int_0^\infty \log\xi e^{-\xi}\,d\xi = \log x - \Gamma'(1) = \log x + C,$$

where C denotes EULER's constant. We thus find again the result

$$\overset{*}{1}\overset{*}{l}1 = \log x + C.$$

24. Returning now to the general formula (II) we observe that it gives us a method of calculating

$$\overset{*}{F}\overset{*}{l}F\,,$$

where F, its first derivatives and its second mixed derivative are finite and continuous and also $F(x, x) = 1$.

We have in fact, by reason of (I),

$$\frac{1}{1-z}\left(F - \frac{z}{1-z}\overset{*}{F}{}^2 + \frac{z^2}{(1-z)^2}\overset{*}{F}{}^3 - \dots\right) =$$

$$= \left(\frac{z}{1-z}F - \frac{z^2}{(1-z)^2}\overset{*}{F}{}^2 + \frac{z^3}{(1-z)^3}\overset{*}{F}{}^3 - \dots\right)\frac{1}{z} =$$

$$= \left(\frac{z}{1-z}e^{-\frac{z}{1-z}(y-x)} + \frac{\Phi\left(x, y \,\middle|\, \frac{z}{1-z}\right)}{\left(\frac{z}{1-z}\right)}\right)\frac{1}{z} =$$

$$= \frac{1}{1-z}e^{-\frac{z}{1-z}(y-x)} + \Psi(x, y \mid z)(1-z)\,,$$

where $\Psi(x, y) \mid z)$ is always finite and continuous. Hence, making use of (16) and (17),

$$\int_0^1 \frac{dz}{1-z}\left(F - \frac{z}{1-z}\overset{*}{F}{}^2 + \frac{z^2}{(1-z)^2}\overset{*}{F}{}^3 - \dots\right) =$$

$$= \int_0^1 e^{-\frac{z}{1-z}(y-x)}\frac{dz}{1-z} + \int_0^1 \Psi(x, y \mid z)(1-z)\,dz =$$

$$= -\log(y-x) + e^{y-x}\int_{y-x}^{\infty} \log\xi e^{-\xi}\,d\xi + \theta(x, y),$$

where $\theta(x, y)$ is finite and continuous. It follows that

$$(\overset{*}{F} - \overset{*}{F}{}^0)\int_0^1 \frac{dz}{1-z}\left(\overset{*}{F} - \frac{z}{1-z}\overset{*}{F}{}^2 + \frac{z^2}{(1-z)^2}\overset{*}{F}{}^3 - \dots\right) =$$

$$= \log(y-x) - e^{y-x}\int_{y-x}^{\infty} \log\xi e^{-\xi}\,d\xi - \theta(x, y) +$$

$$+ \int_x^y F(x, \xi)\left\{-\log(y-\xi) + e^{y-\xi}\int_{y-\xi}^{\infty} \log\eta e^{-\eta}\,d\eta + \theta(\xi, y)\right\}d\xi =$$

$$= \log(y-x) + \chi(x, y),$$

where χ is finite and continuous.

We therefore have the theorem: *If* $F(x, y)$ *is such that* $F(x, x) = 1$, *then*

$$\overset{*}{F}\overset{*}{l}F = \log(y - x) + \chi(x, y),$$

where $\chi(x, y)$ *is a finite and continuous function.*

The function $\chi(x, y)$ can be calculated by obtaining first Φ as the solution of a certain integral equation and then finding Ψ and θ in the manner indicated above.

It is unnecessary, therefore, to know $\overset{*}{F}^z$ in order to be able to calculate $\overset{*}{F}\overset{*}{l}F$, and *the calculation can be carried out by operating directly on the given function* F (cf. Lecture II, § 21).

25. In this connection one other fact should be added; not only is it unnecessary to know $\overset{*}{F}^z$ in order to obtain $\overset{*}{F}\overset{*}{l}F$, but, on the other hand, by means of the latter it is possible to calculate $\overset{*}{F}^z$ when $\overset{*}{F}$ is given.

In fact, when $\overset{*}{F}\overset{*}{l}F$ is known, we can obtain

$$\overset{*}{F}(\overset{*}{l}\overset{*}{F})^2, \overset{*}{F}(\overset{*}{l}F)^3, \overset{*}{F}(\overset{*}{l}F)^4\cdots,$$

and therefore, by applying the formula (see Lecture II, § 25),

$$\overset{*}{F}^{z+1} = F + \frac{z\overset{*}{F}\overset{*}{l}F}{1!} + \frac{z^2\overset{*}{F}(\overset{*}{l}F)^2}{2!} + \frac{z^3\overset{*}{F}(\overset{*}{l}F)^3}{3!} + \cdots,$$

we can obtain $\overset{*}{F}^{z+1}$, expressed in terms of a series of powers of z by means of operations performed of F alone (see Lecture I, § 23). The power series thus obtained for $\overset{*}{F}^{z+1}$ is always an *entire function*.

We have here verified, in the case of powers of composition, a fact which corresponds to one which we meet with in the case of ordinary powers, namely, that in order to obtain the former in general, it is convenient to use logarithms of composition, just as in order to obtain the latter in general it is convenient to use the logarithms of ordinary algebra.

This is another confirmation of the utility of introducing logarithms of composition.

XIII.

PIETRO BLASERNA

« Procès-verbaux des séances du Comité international des poids et mesures », ser. 2ª, vol. VIII, 1920; pp. 105-108.

En acceptant l'invitation de M. le Secrétaire du Comité, j'ai pris l'engagement d'accomplir une tâche dont je suis très honoré. Je retracerai sommairement la vie de mon illustre prédécesseur, PIETRO BLASERNA, et les services qu'il a rendus à la science.

Il a appartenu à notre Comité depuis l'année 1897 jusqu'au jour de sa mort, et il en est devenu le Secrétaire en 1901.

Le général RICCI, le père SECCHI, GOVI, BRIOSCHI, FERRARIS, l'avaient précédé, soit comme délégués italiens à la Commission internationale du Mètre, à partir de l'année 1870, soit comme membres du Comité à partir de sa constitution en 1875.

Puisque l'occasion s'en présente, qu'il me soit permis d'ajouter que les Italiens avaient pris part active aux opérations sur les unités de mesures bien des années auparavant.

En septembre 1798, lorsque le Directoire invita les pays étrangers à collaborer dans la question du Mètre, et lorsque le premier congrès siégea à Paris, 5 délégués parmi les 10 étrangers appartenaient aux diverses régions de l'Italie. Je suis fier de rappeler ce souvenir, qui montre l'intérêt provoqué chez nous dès les premiers jours par le problème des mesures, et qui ne s'est jamais démenti depuis lors. Les travaux des savants que j'ai rappelés, et spécialement le zèle du dernier Secrétaire du Comité, P. BLASERNA, en sont la preuve la plus évidente.

Lorque BLASERNA fut nommé membre du Comité international des Poids et Mesures, sa réputation était déjà grande dans le monde scientifique.

Il était né le 29 février 1836, à Fiumicello, petit village italien situé dans un territoire qui faisait, jusqu'à ces derniers temps, partie de l'Autriche. Il fit ses premières études à Gorizia, d'où il passa à Vienne comme élève de la Faculté philosophique. En 1859, il se rendit à Paris, où il fréquenta, pendant deux années, le laboratoire de physique du Collège de France, qui était alors dirigé par REGNAULT.

Ce n'est qu'en 1861 qu'il revint en Italie. Il fut chargé d'un cours de physique à Florence, et deux ans après, devint professeur ordinaire à Palerme.

En 1870, après que Rome fut occupée par le Gouvernement italien, le Président du Conseil, QUINTINO SELLA, voulut réorganiser tous les établissements scientifiques de la capitale. Aidé par BRIOSCHI, commissaire pour l'Instruction publique, il chercha à attirer à Rome les savants les plus distingués de la Péninsule. C'est ainsi que CREMONA et CANNIZZARO y devinrent professeurs de mathématique et de chimie. BLASERNA y fut appelé, en 1872, pour la physique.

Tout était à faire et organiser dans la nouvelle Université en ce qui concernait les études de physique. Il fallait d'abord construire un nouveau laboratoire et, ensuite, instituer des cours pratiques élémentaires et supérieurs, ainsi que des cours théoriques. Cette tâche fut accomplie par BLASERNA avec succès. L'Institut de Physique, bâti à Panisperna, sous sa direction et suivant les plans qu'il avait conçus, devint un centre d'études très important et très fréquenté.

Pendant les cinquante dernières années, l'Institut de Physique de Rome joua un rôle de jour en jour plus grand dans la vie scientifique italienne. BLASERNA, qui était très bon professeur, se réserva l'enseignement de la Physique générale, confiant les exercices pratiques à ses assistants. Il institua, en outre, un cours de physique complémentaire, qui fut professé d'abord par ALFONSO SELLA et, après sa mort, par M. CORBINO. BELTRAMI, dont le nom est universellement connu, enseigna dans l'Institut de Physique pendant dix années la physique mathématique. J'ai eu l'honneur de remplacer BELTRAMI lorsqu'il mourut en 1900.

L'Institut de Physique de Rome fut toujours ouvert par BLASERNA avec la plus large hospitalité à tous les savants italiens et étrangers. Il devint le centre des réunions de la Société italienne de Physique et du séminaire mathématique. BLASERNA s'intéressa jusqu'à ses derniers jours à ces institutions scientifiques. Il les aidait de toutes ses forces, et il prenait une part active à leurs séances et aux discussions qu'on y tenait. Dans sa longue carrière, BLASERNA eut un grand nombre d'élèves qui ont occupé et qui occupent à présent les chaires de nos Universités: MACALUSO, CANTONE, GRIMALDI, CARDANI, SELLA, PALAZZO, MENGARINI, MAIORANA, BLANC, POCHETTINO sont des noms assez connus, qui donnent de l'éclat à son école.

La constitution d'une grande Université n'était pas le seul but que QUINTINO SELLA s'était proposé de poursuivre à Rome pour le progrès intellectuel du pays.

L'Italie, tout en ayant un grand nombre d'académies locales, n'avait pas une Académie nationale. SELLA comprit la nécessité d'en créer une dans la capitale, pour donner une nouvelle impulsion au mouvement scientifique, afin d'honorer et récompenser les savants les plus distingués. C'est pourquoi il rétablit l'ancienne Académie des Lincei, fondée en 1603. Elle avait un passé illustre, pouvant compter GALILÉE parmi ses premiers associés.

En l'élevant au rang d'Académie nationale, SELLA obtint un résultat de grande conséquence pour l'avancement des sciences en Italie.

BLASERNA fut parmi ceux qui contribuèrent le plus à réaliser la conception de SELLA, et l'on peut affirmer qu'il consacra toute sa vie à consolider et perfectionner cette noble institution.

D'abord Secrétaire de l'Académie, il en devint Vice-Président en 1900 et Président en 1904. Deux fois, l'Académie le confirma dans cette charge.

Les premières recherches de BLASERNA se rapportent aux courants de induction et aux extra-courants. Il se proposait de vérifier la théorie par l'expérience. Mais, à cette époque, les idées n'étaient pas suffisamment avancées. Il rencontra de grandes difficultés, qui ne lui permirent pas d'arriver à des résultats définitifs. Et, en effet, ils ne furent obtenus que beaucoup plus tard, lorsque les conceptions de MAXWELL se furent répandues et après les expériences de HERTZ.

BLASERNA avait une oreille musicale exquise. Mais il ne se limita pas à être amateur de musique, il employa aussi cette qualité exceptionnelle pour ses recherches d'acoustique. L'Ouvrage: *Théorie du son dans ses rapports avec la musique*, fut le fruit de ses études sur ce sujet.

En outre, il s'occupa très activement, avec la collaboration des meilleurs musiciens, de la question du diapason normal. Il institua dans son laboratoire de Rome un bureau international, consacré aux recherches se rapportant à ce problème.

Une question pratique, celle de la construction des amphithéâtres, l'occupa beaucoup, et l'amena à approfondir l'étude arithmétique de certaines fonctions qui se rattachent aux fonctions eulériennes. Il consacra plusieurs travaux au développement complet de ses recherches.

Les questions d'astrophysique, de géophysique et de météorologie appelèrent plusieurs fois l'attention de BLASERNA.

Pendant son séjour à Palerme, il examina, à l'occasion de l'éclipse du 22 décembre 1870, la polarisation de la couronne solaire. En 1879, il étudia l'éruption de l'Etna. Il s'occupa des glaces polaires, des glaciers des Alpes et de la période glaciaire.

La sismologie lui est redevable de plusieurs travaux. Il dirigea l'organisation des laboratoires géodynamiques en Italie, et fit de longues études sur les constructions antisismiques.

Enfin, il organisa une étude systématique, qui fut poursuivie pendant plusieurs années, sur l'efficacité des tirs des canons contre la grêle. Le résultat complètement négatif qu'il assura fit abandonner une méthode sur laquelle on avait fondé de vaines espérances.

BLASERNA fut nommé sénateur relativement jeune, et pendant les longues années dans lesquelles il siégea à la Haute Chambre italienne, il prit une part active aux discussions, particulièrement à celles consacrées aux questions scientifiques, à l'enseignement, aux finances et à l'organisation militaire, dans laquelle il avait une compétence spéciale.

Lorsqu'il fut question de l'emploi du télégraphe sans fil, il joua un rôle important dans les débats parlementaires.

M. MARCONI, qui était très jeune au moment où il fit paraître ses premières inventions, rappelle toujours avec quel enthousiasme le vieux BLASERNA l'encouragea dans ses recherches, dont il reconnut l'importance bien avant que la plupart des autres physiciens y donnassent leur attention.

BLASERNA était en effet l'ami des jeunes gens qui avaient des idées nouvelles. Et avec une précieuse intuition, il savait démêler les bonnes idées des idées fausses. Doué de beaucoup de bon sens et d'une extraordinaire finesse d'esprit, il jugeait avec justesse les hommes et les choses.

Il sut s'attirer ainsi d'habiles collaborateurs. Il leur rendait justice. Il ne convoitait pas les découvertes qu'ils faisaient. Il n'éprouva jamais des sentiments de jalousie.

Quoique dans une haute position, il n'eut pas d'ennemis et, jusqu'aux derniers jours de sa vie, il fut entouré de la sympathie, du respect et du dévouement universels.

XIV.

SUR L'ENSEIGNEMENT DE LA PHYSIQUE MATHÉMATIQUE ET DE QUELQUES POINTS D'ANALYSE

Conferenza Generale al «Congrès International des Mathématiciens», Strasburgo, 24 Settembre 1920. - «Comptes rendus du Congrès», pp. 81-97.

Dans les Congrès précédents de Mathématiciens, qui ont eu lieu en France et en Italie, j'ai eu l'honneur de prononcer des Conférences Générales. Je me suis occupé alors de questions historiques et j'ai essayé de fixer l'évolution qui a eu lieu en Italie dans l'analyse et dans l'ensemble des recherches mathématiques pendant ces dernières années. Permettez-moi de quitter les questions historiques dans la conférence que j'ai l'honneur de faire aujourd'hui, et de m'occuper d'une question d'enseignement. A l'époque actuelle on doit, semble-t-il, regarder l'avenir plus que le passé.

Je désire parler de l'enseignement de la physique mathématique et de questions qui s'y rattachent spécialement au point de vue de la partie analytique de cette science.

Les travaux faits depuis un siècle et demi permettent d'unifier et systématiser des recherches qui forment un tout organique, qu'on pourrait appeler *Physique analytique*. C'est le pendant de la *Mécanique analytique*. Dans celle-ci le rôle principal est joué par les équations aux dérivées ordinaires, tandis que dans la physique analytique l'instrument dont on fait le plus d'usage est constitué par les équations aux dérivées partielles.

Je consacrerai cette confèrence à l'exposition du programme, qu'à mon avis il serait utile de développer. Je pense qu'un cours de physique analytique s'impose comme s'est imposé un cours de mathématiques générales et un cours de mécanique analytique. Ce cours servira à donner l'ensemble de connaissances indispensables aux chapitres plus modernes et aux développements futurs de la physique mathématique. Les notions qu'on pourra y puiser se trouvent éparses un peu partout, mais il y a peut-être œuvre nouvelle à faire dans leur exposition, quelques idées directrices permettant de relier entre eux les divers sujets abordés de manière qu'ils ne soient pas séparés les uns des autres.

L'homogénéité qu'on obtient ainsi amène à laisser de côté certaines branches de la science qui nous occupe; c'est pourquoi, je l'avoue dès maintenant, un cours de cette sorte ne sera pas un cours complet de physique mathématique. Nous verrons tout à l'heure quelles questions ne rentrent point dans le cadre que nous allons déterminer et quels avantages on trouve à les placer dans un autre.

A quel moment historique peut-on placer la création de la physique mathématique, et quels ont été les besoins qui l'ont fait naître ?

On peut rappeler à ce propos que la dynamique s'est constituée dans la période de la Renaissance, et que le calcul infinitésimal est intimement lié à sa création et à son développement. On s'en rendra compte si l'on songe que c'est l'invention de la poudre qui a donné lieu aux problèmes de la balistique. Les anciens n'avaient pas besoin de la dynamique, c'est pourquoi ils l'ont laissée de côté et n'ont pas cru nécessaire d'approfondir les lois du mouvement.

Mais lorsque le développement de l'artillerie fit voir la nécessité d'étudier le mouvement des corps pesants, les méthodes infinitésimales furent dès le premier moment employées par GALILÉE pour ces études. Ensuite les lois de la dynamique et les premiers exemples d'intégration des équations différentielles ordinaires furent l'œuvre de NEWTON. Plus tard encore la mécanique analytique et le calcul des variations ont été créés par LAGRANGE.

On peut fixer dans la seconde moitié de l'avant-dernier siècle et le commencement du siècle passé l'époque où la physique mathématique commence sa grandiose évolution.

Il serait naturellement possible de faire remonter plus haut les origines de la Physique mathématique. Si l'on voulait se donner la peine de fouiller dans l'histoire des mathématiques, on pourrait trouver à presque toutes les époques, même en des temps très reculés, la trace de questions de physique traitées par les mathématiques, et qu'on pourrait ainsi considérer en un sens général comme rentrant dans le domaine de la physique mathématique; mais ces essais n'ont rien de systématique, et ce n'est qu'au moment où d'ALEMBERT, FOURIER, POISSON, CAUCHY commencèrent à faire un usage courant des équations aux dérivées partielles, que la période vraiment féconde de la physique mathématique est commencée.

Je viens de prononcer le mot: équations différentielles aux dérivées partielles. En effet, le développement de cette branche de l'analyse et de tout ce qui s'y rapporte a constitué le plus puissant instrument qui a servi au développement théorique de l'élasticité, de l'acoustique, de l'hydrodynamique, de l'optique, de l'électricité, de la propagation de la chaleur.

C'est justement dans les premières années du siècle passé que le besoin d'approfondir ces différents chapitres de la physique par le moyen de l'analyse s'est fait le plus sentir.

L'art de la construction rendait nécessaire d'approfondir la connaissance de la résistance des matériaux: il s'agissait, tout en assurant la solidité, de réaliser la plus grande économie possible des matériaux. Les grandes constructions en fer, les constructions de grandes machines ne devaient tarder à commencer. La nécessité de prévoir par le calcul les dimensions des différentes pièces et de connaître les lois qui règlent l'élasticité des corps se faisaient sentir. Les premiers essais de GALILÉE sur la flexion des poutres, les idées de BOYLE sur les propriétés élastiques des gaz, les études d'EULER amenèrent peu à peu à la théorie générale de l'élasticité.

De même l'usage toujours plus répandu des machines à feu rendait nécessaire le perfectionnement des méthodes de détermination de la température, de la conductibilité et de la capacité calorifique des corps. Les questions de géophysique s'imposaient aussi. L'ensemble de ces recherches devait aboutir d'un côté, sous l'impulsion des conceptions de SADI CARNOT, à la thermodynamique, de l'autre côté à la théorie de la propagation de la chaleur. Celle-ci, qui n'avait été précédée que par des timides essais de LAMBERT, a été l'œuvre de FOURIER. Elle constitue même aujourd'hui, après un si grand nombre de découvertes et de travaux, le plus bel édifice de toute la physique mathématique. C'est le modèle sur lequel les autres théories classiques furent édifiées. Nous l'aurons toujours présent à l'esprit au cours de cette conférence.

Mais je crois que la poussée la plus active qui ait agi sur le développement de la physique mathématique est due à l'énorme extension acquise par la théorie et les applications pratiques de l'électricité. Il n'est pas nécessaire de rappeler ici le rôle que joue l'électricité dans toute la vie moderne. De quelque côté que l'on tourne les yeux on voit cette énergie de la nature nous aider dans tous les moments et dans toutes les circonstances de la vie. Ce n'est pourtant qu'après que COULOMB eut donné les lois fondamentales de l'électrostatique et que VOLTA eut inventé la pile en 1800, que les applications de l'électricité se suivirent les unes les autres avec une vitesse toujours croissante. Or la plupart des découvertes de l'électricité, ayant eu une double source expérimentale et mathématique, furent l'œuvre des savants, et les applications résultèrent la plupart du temps des travaux théoriques. C'est pourquoi d'importants développements analytiques se suivirent les uns les autres jusqu'à conduire à la théorie électromagnétique de la lumière par laquelle l'optique devint un chapitre de l'électrodynamique.

J'ai dit tout à l'heure que la dynamique n'a commencé son existence que le jour où les artilleurs ont posé le problème des trajectoires des projectiles. Aurions-nous une physique mathématique aussi avancée, si l'électrotechnique n'avait eu toujours de nouvelles questions à poser aux mathématiciens ? On peut aller plus loin: la dynamique est devenue la base des théories cosmogoniques lorsque NEWTON conçut le problème du mouvement des planètes comme un grand problème de balistique. De même l'électricité est en train de devenir, par les travaux des physiciens modernes, la base de toutes les théories moléculaires et atomiques, et par suite la base de la constitution de l'univers.

Quoique de date assez récente le développement de la physique mathématique peut être partagé en trois phases.

Son premier âge, qui comprend les dernières années du dix-huitième siècle et les premières années du dix-neuvième, est son âge héroïque. C'est certainement dans cette période que se placent les œuvres fondamentales qui ont donné la première impulsion à toutes les recherches ultérieures, qui ont marqué la physionomie à cette branche de la philosophie naturelle.

C'est à la période suivante, qui se place au milieu du siècle passé, que revient l'honneur d'avoir perfectionné les différents chapitres qui avaient été créés, et l'honneur bien plus grand d'en avoir relié quelques–uns entre eux et d'avoir énoncé de nouveaux principes généraux. Il va sans dire qu'entre la première et la seconde période il n'y a pas de ligne nette de démarcation. Les travaux de MAXWELL, de Lord KELVIN, de STOKES, de HELMHOLTZ, de RIEMANN, de KIRCHOFF, de LAMÉ, de DE SAINT–VENANT, de MOSSOTTI et de BETTI sont trop étroitement liés à ceux de leurs prédécesseurs LAPLACE, LAGRANGE, AMPÈRE, GREEN, FOURIER, POISSON, CAUCHY, GAUSS, pour qu'il soit possible de les en séparer.

On peut répéter des considérations analogues si l'on passe à une époque plus récente. Tout essai de démarcation serait encore plus difficile, parce que les travaux récents nous touchent de plus près et étant ainsi plus rapprochés de nous, la perspective est plus difficile à saisir. Cependant si l'on compare les œuvres de POINCARÉ sur la physique mathématique à celles des savants que je viens de nommer, on s'aperçoit qu'elles s'en détachent nettement. C'est pourquoi il faut dire qu'une troisième période débute à peu près à l'époque où POINCARÉ a commencé ses cours et ses travaux de physique mathématique. En effet, à ce moment les idées de MAXWELL, tout en présentant encore des difficultés, avaient fait leur chemin et commençaient à devenir classiques; les principes généraux de la thermodynamique étaient désormais acquis à la science. En même temps l'analyse, grâce à une critique délicate, réformait des démonstrations qui n'étaient plus suffisantes et cherchait de nouvelles bases pour les anciennes et les nouvelles théories. Une période féconde de préparation était close, et une nouvelle phase, marquée par les découvertes sur les ondulations électriques, les rayons X, le radium, la théorie des électrons, la relativité, commençait.

A l'aube du nouveau siècle, POINCARÉ inaugurait à Paris le Congrès des physiciens par une conférence devenue classique, dans laquelle il montrait le rôle de la physique mathématique, ses limites et toute l'importance que cette branche de la philosophie naturelle a eu dans le passé et celle qu'elle allait avoir dans l'avenir. C'était en même temps une récapitulation du travail passé et un programme pour le travail futur.

Cet aperçu très simple nous a déja rendu compte, et des raisons pour lesquelles la physique mathématique classique s'est constituée et des branches qu'elle comprend, et enfin des moyens analytiques qu'elle utilise.

Nous avons déjà dit que l'ensemble des notions qu'on pourra puiser dans le cours, dont nous traçons ici le programme, n'est pas nouveau; mais il est important de les disposer de la manière la plus économique et la plus systématique possible.

Et voyons d'abord quelles notions y trouveront place. Elles sont de deux sortes, notions physiques et notions mathématiques.

Examinons quelles branches de la physique doivent être exposées. Nous les avons déjà nommées, mais il sera utile de les rappeler: c'est la propagation de la chaleur, l'élasticité, l'acoustique, l'optique, l'électricité et le magnétisme, l'hydrodynamique, en y comprenant aussi la théorie générale du potentiel.

D'autre part, nous pouvons énumérer les notions analytiques qui seront nécessaires: ce sont d'abord les équations différentielles ordinaires et aux dérivées partielles, puis les équations intégrales et intégro–différentielles, enfin des relations d'un type plus général.

Ces différentes théories physiques et mathématiques sont si étroitement liées les unes aux autres qu'il est impossible de les séparer, sans danger de faire perdre l'unité à un organisme créé par un long effort. On aperçoit d'abord des liens historiques, ensuite des liens intimes entre les pensées fondamentales et directrices qui ont enfanté ces différentes théories. Ils s'entrelacent de telle sorte que tout en voyant la nécessité de les démêler on comprend qu'il ne faut rien couper. Comment faire pour vaincre ces difficultés?

Rappelons ce qu'on fait ordinairement dans les cours et dans les traités. Les cours de physique mathématique sont en général de type monographique. En effet, dans cet enseignement on ne cherche pas généralement à donner une idée d'ensemble sur les différents sujets, mais on approfondit un chapitre spécial. C'est un exemple qu'on montre à l'esprit des élèves; s'ils peuvent s'approprier les méthodes qu'on expose, on est d'avis qu'ils sont capables d'étudier après par eux–mêmes les autres chapitres. Si les élèves peuvent suivre plusieurs cours, ils voient défiler sous leurs yeux les unes après les autres les différentes parties de la physique mathématique. C'est ainsi qu'on a des cours d'optique, des cours d'élasticité, des cours d'électricité, etc.

Tout cela est très utile, mais de cette manière, si chaque chapitre est très convenablement approfondi, on perd évidemment de vue l'ensemble et l'unité de la physique analytique.

Il y a aussi une autre méthode. On peut d'abord exposer les notions analytiques en développant la théorie des équations aux dérivées partielles, leurs procédés d'intégration, les équations intégrales et les théories qui résultent de leur étude, et qui en constituent la continuation logique. On peut traiter ensuite les développements en séries et les fonctions spéciales qu'on emploie dans la physique mathématique, Ce n'est qu'après avoir donné les instruments qu'il faut employer, qu'on attaque les problèmes qui se présentent en physique et qu'on cherche à les résoudre.

Il va sans dire que cette voie présente des avantages considérables. C'est en effet la voie la plus méthodique, où l'on va du connu à l'inconnu, rien n'étant imprévu. Mais elle n'est pas sans inconvénients, quoiqu'on puisse admettre qu'un bon élève, qui a pleine confiance dans son maître, sera persuadé que tout ce qu'il lui expose sera utile dans la suite, et qu'il ne se perd pas dans des questions théoriques trop subtiles. Si l'élève ne comprend pas la raison d'être des théories qu'il voit développer devant ses yeux, s'il ne se rend pas compte des causes profondes qui ont amené à créer les différents procédés, à bâtir les théories mathématiques, et à faire des classification qui lui paraissent artificielles, ou à se créer des difficultés qu'il ne se serait jamais proposées, il est soutenu par la foi qu'à la fin de la pièce, en voyant le dénouement, il comprendra le rôle joué par chaque sujet particulier.

Vous vous doutez déjà que tout en comprenant les avantages qu'on peut en tirer, je suis loin d'être favorable à cette méthode. Nous touchons là à une question générale de la pédagogie des sciences. A mon avis, l'idéal serait de suivre justement la voie opposée. On ne peut pas s'assimiler complètement une branche quelconque des sciences, si on n'a eu l'occasion de voir les principales difficultés qui se sont opposées à son développement, et si on ne connaît pas la raison intime pour laquelle on a suivi une direction plutôt qu'une autre. Or, s'il n'est pas possible de parcourir la voie historique, car elle est trop longue, s'il n'est pas possible de partir des questions pratiques qui se sont peu à peu imposées et qui ont amené aux développements théoriques, s'il est aussi impossible de suivre les essais qu'on a fait étape par étape jusqu'au moment où l'on a établi d'une manière définitive les méthodes classiques, il faut cependant s'approcher autant que possible de cet idéal.

Je reviens au grand ouvrage de LAGRANGE, le meilleur modèle que l'on connaisse d'un traité scientifique. Dans sa mécanique analytique, il n'aborde pas son sujet, en considérant l'un après l'autre les différents problèmes de la mécanique comme on faisait avant lui et il n'emploie pas des méthodes différentes pour les diverses questions. En outre, il ne commence pas par l'étude des questions analytiques et il ne prépare pas tout d'abord le lecteur en exposant des théories sur les équations différentielles et sur leur intégration.

Mais après un court et merveilleux aperçu historique où sont mis en lumière les points les plus saillants dans l'évolution des principes de la mécanique et des étapes par lesquelles ces principes sont passés, LAGRANGE arrive très rapidement aux équations générales qui embrassent les différentes questions, soit de la statique, soit de la dynamique. Toutes les questions sont reliées par ces équations qui résument en elles-mêmes les principes, et les questions peuvent se grouper et s'analyser par ces équations. La mécanique est ainsi réduite à leur étude, car en s'y attachant, on envisage en même temps tous les problèmes à la fois, c'est pourquoi il n'est pas nécessaire d'employer une analyse propre à chaque question, ni de répéter pour chaque sujet des considérations qui ont été déja faites, ni d'emprunter la solution d'un problème particulier à la solution d'un autre problème.

Ayant en vue ce modèle on peut se demander s'il est possible de s'en rapprocher lorsqu'on traite le sujet beaucoup plus difficile et plus compliqué de la physique mathématique.

A mon avis cela est possible, si l'on se borne aux branches de la physique mathématique que j'ai rappelées, les équations aux dérivés partielles qui s'y rapportent établissant entre elles un lien qui présente beaucoup d'analogie avec celui des équations générales de la mécanique analytique.

Ainsi se justifie la limitation du sujet à laquelle j'ai fait allusion tout à l'heure et on aperçoit en même temps l'unité de la discipline dont il s'agit et son parallélisme avec la mécanique analytique, qui justifie la dénomination choisie de physique analytique.

Donc, à côté des deux méthodes que j'ai rappelées précédemment, il en apparaît une troisième dont je viens d'esquisser les lignes générales. Je vais maintenant entrer au cœur de mon sujet.

Il est d'abord possible d'obtenir très rapidement les équations de la propagation de la chaleur, de l'élasticité des corps solides et fluides, de leurs mouvements vibratoires et les équations des mouvements non tourbillonnaires des liquides et de fixer les problèmes qui s'ensuivent. Je n'entrerai pas dans les détails sur ce point, mais par exemple pour la théorie de la propagation de la chaleur, on passe aisément des lois de la propagation uniforme de la chaleur dans une paroi d'épaisseur finie à un élément infiniment petit. En élasticité il suffit d'établir les conséquences de la loi de HOOKE.

Pour les équations générales de l'électrostatique et de l'électromagnétisme, la question est moins facile. Bien des difficultés se présentent. Trop de conceptions se sont suivies tout à fait différentes les unes des autres; la conception des fluides électriques, par exemple, celle des déplacements électriques et ainsi de suite. La plupart du temps ces conceptions sont contradictoires entre elles. Elles ont apporté des mots qui, ayant un sens déterminé lorsqu'ils se rapportent à une certaine théorie, perdent toute signification lorsqu'on les transporte dans une autre. Cependant ces mots sont restés les uns auprès des autres, aussi bien ceux qui sont toujours vivants que ceux qui sont morts. Cela constitue une complication qu'on ne peut pas dominer sans rappeler sommairement les phases par lesquelles sont passées les différentes théories. Aussi n'est-ce qu'en suivant une rapide exposition de type historique analogue à celle de LAGRANGE, et qui aboutisse aux principes généraux, que l'on peut arriver d'une manière claire aux équations fondamentales des phénomènes électriques.

On arrive ainsi à écrire les équations différentielles générales des différentes disciplines envisagées, soit les équations qu'on appelle indéfinies, soit celles qui sont valables aux frontières du temps et de l'espace, et c'est ainsi que l'on peut mettre en équation les différents problèmes que pose la physique.

La première partie du cours se termine à ce moment. On s'aperçoit que des questions de nature très différente au point de vue physique amènent à des équations identiques ou analogues dans le domaine analytique.

On se rend compte ainsi de l'avantage de les traiter simultanément, en établissant des principes uniformes, des méthodes et des théorèmes généraux qui valent pour toutes. D'autres principes ou méthodes s'appliquent différemment selon les différents types dans lesquels on peut classer les équations. De même on peut se persuader de la remarquable économie obtenue par le plan de l'ouvrage. En même temps les analogies analytiques font prévoir des analogies cachées d'une portée beaucoup plus grande et qui dépassent le domaine de l'analyse.

Mais avant de quitter cette partie préliminaire il me faut dire quelques mots sur une question que j'ai passé sous silence jusqu'ici. Peut-être sera-t-on surpris que je n'en aie pas encore parlé, car beaucoup y attachent une grande importance. Et ceux qui m'ont suivi jusqu'ici ont probablement l'envie de me demander: Ferez-vous usage des vecteurs, ou ne vous en servirez-vous pas? J'espère ne pas trop choquer en disant que je donne un intérêt secondaire à ce sujet. Je pense qu'il est à peu près indifférent pour les théories générales et l'explication des méthodes d'intégration d'employer la méthode des vecteurs, ou celle des coordonnées, ou les deux simultanément. En considérant les vecteurs eux-mêmes au lieu de les définir constamment par leurs composantes on n'acquiert pas une puissance analytique nouvelle. Je pense que si j'écrivais mon traité en faisant usage de coordonnées, il n'y aurait pas plus de difficultés à le traduire dans le langage des vecteurs ou vice versa qu'à le traduire en anglais.

Toujours est-il que le langage des vecteurs offre des avantages formels et conceptuels considérables. Il est d'abord plus simple et plus concis. Des opérations quelquefois très longues se réalisent par les vecteurs en un trait de plume. Ce qui est plus important encore, on n'abandonne jamais l'entité même que l'on calcule. Mais il est évidemment inutile de continuer cette discussion. L'usage des vecteurs s'est maintenant répandu, et je n'hésiterai pas à les employer dès le début.

Je crois nécessaire de faire ici une autre remarque fondamentale. Dans les questions dont nous venons de parler, on peut se passer des hypothèses moléculaires ou atomiques et supposer dès le premier abord que les phénomènes se passent dans un milieu continu. Ce n'est qu'une première approximation que l'on fait, mais qui rend compte d'un grand nombre de phénomènes.

La physique mathématique ainsi conçue peut être nommée physique du continu. Cette observation amène à donner une importance spéciale à la forme du domaine et de ses frontières, c'est pourquoi c'est au moment même où se termine la première partie du cours que trouveraient place les considérations topologiques. Elles seront appliquées et employées plus tard.

Ayant tout ramené à des équations linéaires à trois ou à quatre variables indépendantes, il faut commencer par classer ces équations.

A mon avis il n'y a qu'un moyen pour obtenir leur classification logique; c'est d'envisager leurs caractéristiques.

On tombe ainsi sur les trois types fondamentaux elliptique, hyperbolique et parabolique, c'est-à-dire sur les types à caractéristiques réelles, imaginaires ou multiples.

La classification en types des équations conduit à la classification des problèmes que l'on doit se poser, car sans même aborder la question des théorèmes d'existence, on réussit facilement à établir quels éléments peuvent servir à déterminer les solutions, et en outre dans quelles régions de l'espace et pour quelles valeurs du temps elles sont ainsi définies. Des questions concernant le passé ou l'avenir que M. APPELL a si bien discuté trouveraient place ici. La classification de ces problèmes, mise en relation avec les questions physiques d'où proviennent les équations, porte une nouvelle lumière sur celle-ci.

Nous avons tous entendu avec le plus grand plaisir la belle conférence de Sir JOSEPH LARMOR. Il s'est élevé aux plus hautes conceptions philosophiques. On avait l'impression que tout l'ensemble de nos considérations analytiques se matérialisaient et venaient à acquérir une sorte de réalité qui les rendaient intuitives. Pendant qu'il prononçait sa conférence, je traduisais ses paroles dans un autre langage. Ne croyez pas que je traduisais en italien ce qu'il disait en anglais, mais je traduisais dans le langage des caractéristiques ce qu'il nous représentait par des images si frappantes, qui nous faisaient saisir la manière de se produire des phénomènes.

Mais il faut étudier la classification des types de problèmes avec le soin le plus attentif, car il faut se méfier d'un parallélisme trop parfait entre ceux-ci et les types des équations différentielles. On court le risque de se tromper si l'on classe exclusivement d'après le type des équations différentielles correspondantes les problèmes envisagés. Sans entrer dans les détails, ce qui nous entraînerait trop loin, il suffit de considérer des exemples qui sont très frappants.

Nous avons appris ces jours-ci par une profonde conférence de M. HADAMARD que des problèmes se rattachant à des équations de type hyperbolique peuvent se présenter d'une manière analogue à ceux qu'on trouve en étudiant l'équation de LAPLACE. Les travaux sur ce sujet sont classiques et je n'ajouterai rien à ce qu'il nous a exposé si bien. Mais je me permets seulement d'illustrer ce que j'ai dit tout à l'heure par un autre exemple.

Prenons le problème des seiches dans les lacs. Il dépend de l'équation de LAPLACE, cependant il admet des solutions périodiques dont les périodes sont les racines d'une équation transcendante. Comment se fait-il qu'un problème dépendant de l'équation fondamentale elliptique donne lieu à des solutions analogues à celles des questions de vibrations qui dépendent des équations hyperboliques ?

Il suffit d'examiner les conditions à la surface libre du liquide pour reconnaître que le type de solution, loin de se rattacher à l'équation differentielle indéfinie, découle des conditions au contour. Le problème plus compliqué des marées donne lieu à des considérations analogues.

On voit donc que les types des solutions sont la conséquence d'un complexe de circonstances où les équations différentielles indéfinies ne jouent pas toujours le rôle principal.

Je crois aussi qu'une distinction importante entre les différentes équations différentielles peut s'obtenir en envisageant leurs relations et leur dépendance des problèmes du calcul des variations. On n'insistera jamais assez sur l'intérêt qu'on doit attacher au développement de ce point.

Je voudrais à ce propos revenir encore une fois sur la conférence de Sir JOSEPH LARMOR. Il nous a montré la liaison entre le principe de HAMILTON et les actions à distance. Les paroles si profondes qu'il a prononcées sur ce sujet nous ouvrent de nouveaux horizons sur les liaisons entre le calcul des variations et les équations de la physique mathématique.

Dès qu'on aborde la question des caractéristiques on est amené d'une manière fort naturelle à considérer des espaces à quatre dimensions. En effet, dans le cas des corps à une seule dimension, les caractéristiques sont des lignes. Elles sont des surfaces pour les corps à deux dimensions et des espaces à trois dimensions faisant partie d'un espace à quatre dimensions, lorsqu'on considère des corps à trois dimensions, car il faut envisager, outre les trois coordonnées, une quatrième coordonnée: le temps qui joue un rôle analogue aux trois premières. Le passage d'un type d'équation à un autre s'obtient d'ailleurs d'une manière immédiate, en considérant des valeurs imaginaires du temps. Ici l'introduction des vecteurs à quatre dimensions, ainsi que l'extension des opérations fondamentales des vecteurs à l'hyperespace devient une nécessité et en même temps elle est facile et intuitive.

Les changements de coordonnées, les transformations de LORENTZ, la cinématique einsteinienne se présentent ainsi d'une manière si naturelle que quelques-unes des difficultés de la théorie de la relativité (au moins de la première relativité) sont complètement supprimées. On peut aussi ajouter que tout ce chapitre subsiste indépendamment du substratum philosophique de la relativité, et si par hasard cette théorie devait être abandonnée, ce chapitre resterait dans toute son intégrité.

Comme on a établi une classification des équations différentielles et des problèmes fondamentaux, il faut établir une classification des procédés d'intégrations.

Ils peuvent à mon avis être distribués en trois catégories. La méthode de GREEN, celle des caractéristiques et celle des solutions simples de FOURIER. Pour éviter tout malentendu je préciserai tout de suite que l'on doit considérer les trois méthodes que je viens de nommer comme des procédés typiques, mais que dans les questions particulières on peut employer des méthodes mixtes qui tiennent des trois types à la fois.

En introduisant la phrase: méthode de GREEN, nous en élargissons l'acception ordinaire, car non seulement nous entendons par là la méthode d'intégration de l'équation de LAPLACE pour différentes conditions au contour, mais aussi les méthodes analogues d'intégration des équations de type elliptique (comme par exemple celle de BETTI pour les équations de l'élasticité) et même celles des équations de type hyperbolique et parabolique, où l'on emploie explicitement les caractéristiques. Aussi les formules relatives aux vibrations qui se rattachent à celle de KIRCHHOFF rentreraient-elles dans le domaine des méthodes de GREEN. Au fond, la méthode de GREEN se rapporte à l'usage des solutions fondamentales, dans tous les cas où l'on n'emploie pas explicitement les caractéristiques.

La méthode des caractéristiques n'est réellement qu'une modification de celle de GREEN, mais, à mon avis, il est utile de distinguer les deux procédés l'un de l'autre. L'intérêt de la notion des caractéristiques est tellement grand, elles jouent un rôle tellement important dans l'intégration des équations, qu'une séparation s'impose qui n'est pas artificielle, mais qui correspond à quelque chose de substantiel.

Enfin la méthode de FOURIER comprend toutes celles où l'on fait usage de solutions simples, et l'on obtient la solution générale moyennant de séries de ces solutions.

Les différentes méthodes étant ainsi classées, on peut procéder à leur développement. Il faut d'abord, pour employer les méthodes de GREEN et des caractéristiques, chercher un théorème de réciprocité. Il n'y a pas de difficulté à l'obtenir en général et à éclaircir la signification qu'il prend dans les différentes branches de la physique, ce qui éclaire l'ensemble de la théorie.

Je prends la permission, à ce propos, de rappeler un résultat récent qui se rapporte au phénomène de HALL. C'est justement un théorème de réciprocité qui, interprété dans cette théorie, nous révèle une propriété remarquable des courants produits dans une lame de bismuth assujettie à l'action d'un champ magnétique. Supposons qu'on fasse entrer le courant par un point A et sortir par un point B et que l'on détermine la différence de potentiel en deux points C et D. Intervertissons et faisons entrer le courant par C et sortir par D. Pour que l'on trouve la même différence de potentiel en A et B qu'auparavant, il faut invertir le champ magnétique. Ce théorème a servi à M. CORBINO pour obtenir beaucoup de résultats pratiques se rapportant aux actions des champs magnétiques sur les courants.

Puisque je parle de ce problème, il est intéressant de remarquer que dans ce cas se présentent des problèmes mixtes par rapport aux conditions au contour, que l'on peut résoudre par une méthode que j'ai donnée depuis plusieurs années. Elle ne s'étend pas au delà des domaines à deux dimensions. Mais par une méthode très ingénieuse fondée sur des principes différents, M. BRILLOUIN a donné la solution générale dans le cas des espaces à un nombre de dimensions quelconque.

Mais la partie la plus difficile et la plus délicate de l'intégration consiste dans la recherche des solutions fondamentales. Leur calcul et la détermination de leurs propriétés, leur classification, les types différents qu'on peut obtenir, mis en comparaison avec les différents types d'équations différentielles, et les différents types de problèmes auxquels ils se rapportent, ainsi que leurs significations physiques, tout cela constitue un ensemble de notions d'un intérêt très grand et l'exposition d'un champ de recherches assez vaste et qui a donné lieu à de grandes difficultés analytiques.

Depuis la simple expression de l'inverse de la distance entre deux points, qui constitue l'intégrale fondamentale de l'équation de LAPLACE, jusqu'à l'intégrale fondamentale pour la double réfraction, donnée, il y a peu d'années, par M. ZEILON, il y a un grand chemin parcouru, où les difficultés se rencontrent à chaque pas.

Je serais tenté d'entrer dans quelques détails sur ce sujet, mais le temps me manque. Je noterai seulement qu'on ne peut se dispenser de parler des différentes sortes de singularités que l'on rencontre dans les intégrales fondamentales, car ce n'est que par un usage très avisé de toutes leurs singularités que l'on réussit à tirer tout le parti possible de leur emploi.

Je citerai à propos des solutions polydromes celles de la double réfraction; et pour le cas des équations de type parabolique, la solution fondamentale de l'équation de la propagation de la chaleur.

Il faut quelquefois savoir rejeter celles dont la polydromie rend impossible l'usage et les remplacer par d'autres adroitement trouvées, tandis que dans d'autres cas, c'est leur polydromie qui est la source des résultats les plus cachés et les plus féconds.

A mon avis, l'étude des solutions fondamentales est bien loin d'être épuisée; au contraire, quoique on les ait employées à tout instant, on ne les a pas considérées suffisamment dans leur ensemble et on n'a pas encore assez systématisé leur étude générale.

Cela tient, bien probablement, comme je l'ai dit ailleurs, à la méthode qu'on a suivi la plupart du temps en physique mathématique, d'en étudier séparément les différentes branches, sans les envisager les unes à côté des autres dans leur ensemble, comme un corps de doctrines.

D'autre part, des recherches purement analytiques s'éloignent trop souvent des applications qu'il faut avoir en vue. En perdant le contact avec la réalité on n'est plus alimenté par la source la plus riche de découvertes.

Les solutions fondamentales étant trouvées, il faut les employer en tenant compte des théorèmes de réciprocité. On tombe ainsi sur des formules générales qui ont un grand intérêt au point de vue physique. Au point de vue analytique elles ne résolvent pas complètement les problèmes posés, mais elles amènent à d'autres questions, qu'on peut classer comme un autre type de problèmes de la physique, et où il faut faire intervenir un nouvel instrument: les équations intégrales ou même des équations d'un type plus compliqué. Je suis d'avis qu'on doit réserver peu à peu en chemin les questions qui appartiennent au nouveau domaine au delà des équations différentielles et consacrer ensuite une partie du cours à leur étude.

Je serai bref sur le développement de la méthode des caractéristiques. Comme elle se rattache étroitement à la méthode de GREEN, beaucoup de ce que nous avons déjà exposé s'y rapporte.

Je rappellerai à ce propos la première solution donnée par M. PICARD de l'équation des télégraphistes en employant la méthode des caractéristiques. Elle a été le point de départ d'un grand nombre de recherches et elle a eu et conserve un grand intérêt au point de vue théorique et des applications.

Il ne faut pas séparer la méthode des caractéristiques de quelques procédés particuliers qui constituent un des côtés les plus élégants de la physique mathématique. On peut citer comme type la méthode des images. Elle fut découverte par Lord KELVIN pour donner une forme simple et intuitive à la solution du problème de POISSON de l'induction électrique des sphères, mais Sir GEORGE GABRIEL STOKES la fit passer bientôt en hydrodynamique. Ensuite elle s'introduisit dans la théorie du magnétisme, et, plus tard dans la théorie des vibrations.

C'est peut-être un des exemples les plus concluants de l'utilité de considérer simultanément les trois types d'équations. On y voit d'une manière extrêmement frappante les modifications que doit subir une même idée fondamentale pour se plier aux nécessités analytiques des différents cas. Les particularités et le rôle des caractéristiques y apparaît très clairement. C'est aussi un exercice très instructif sur la métrique des espaces hyperboliques, qui est si étroitement rattachée aux considérations aboutissant à la relativité.

Dans le même ordre de considérations rentrent les transformations des équations en elles-mêmes. Celle par rayons vecteurs réciproques n'est pas applicable seulement au cas de l'équation de LAPLACE, mais aussi à d'autres équation elliptiques, et à des équations hyperboliques. Pour celles-ci on a des transformations où interviennent le temps et l'espace, comme dans la transformation de LORENTZ, et jouant un rôle qui n'est pas encore exploité.

En arrivant enfin à la méthode des solutions simples nous avons un vaste domaine à envisager, car depuis la série de FOURIER jusqu'aux nouvelles séries de fonctions orthogonales, bien des théories parmi les plus modernes y rentrent. Il suffit de rappeler les recherches de POINCARÉ sur les équations de la physique mathématique, et les résultats fondamentaux, obtenus par M. PICARD, qui se rattachent étroitement à la théorie des équations intégrales.

Je crois que la deuxième partie du cours doit se borner à ce que nous venons de résumer rapidement. Nous avons laissé de côté tous les détails, c'est pourquoi nous n'avons pas parlé d'une foule de questions d'un très grand intérêt. C'est ainsi que nous n'avons pas parlé des distinctions à faire dans les différents problèmes suivant la connexion des domaines envisagés. Néanmoins je crois que le caractère de cette seconde partie du cours résulte assez clairement de ce qui précède.

Si dans la première partie, en prenant comme point de départ les problèmes physiques, nous avons obtenu les équations différentielles, dans la seconde partie nous avons classé ces équations et exposé les méthodes générales d'intégration. En les envisageant toutes en même temps nous avons pu synthétiser, ce qui a simplifié l'exposition et a donné une organicité à un ensemble de doctrines dont l'unité doit toujours être relevée.

Mais au point où nous sommes arrivés bien des problèmes physiques ne sont pas encore résolus complètement, et bien des questionst restent posées; l'analyse qui a été développée n'est pas suffisante à elle seule pour les résoudre tous. Elle ne peut pas être séparée d'une analyse qui la complète et l'intègre et qui s'impose dès le premier abord. Et il s'agit bien réellement ici non point d'une méthode mais d'une analyse nouvelle.

Les théorèmes d'existence, la résolution définitive des problèmes par les conditions au contour et un grand nombre d'autres questions du même genre, nécessitent un calcul où l'on envisage à la fois toutes les valeurs de certaines fonctions dans un certain domaine; d'autres problèmes dépendent de la forme du domaine que l'on considère, ou de sa frontière. Toutes ces questions ainsi que celles réservées dans la deuxième partie du cours et qui dépendent de la résolution des équations intégrales devraient être étudiées dans la troisième partie.

Le concept directeur serait donc la notion de fonctions dépendant de toutes les valeurs d'autres fonctions. Au fond, les intégrales des équations aux dérivées partielles dépendent d'une part des variables indépendantes, mais elles dépendent d'autre part de fonctions arbitraires. Et, en effet, dès que l'on a eu besoin dans l'analyse d'envisager les intégrales des équations aux dérivées partielles, on a rencontré les fonctions arbitraires. Quel rôle jouent les valeurs des fonctions arbitraires? Ne sont-elles pas un nombre infini et continu de variables indépendantes, dont dépendent les intégrales? C'est d'une manière inconsciente qu'ils ont joué ce rôle, jusqu'au jour où a vu qu'il fallait créer une analyse spéciale, propre à ce genre de questions. Permettez-moi de rappeler les paroles suivantes par lesquelles j'ai débuté en 1887 mes recherches sur les fonctions qui dépendent d'autres fonctions ou les fonctions de lignes: « Dans beaucoup de questions de physique et de mécanique et dans l'intégration des équations aux dérivées partielles, il faut considérer des quantités qui dépendent de toutes les valeurs d'une ou de plusieurs fonctions d'une variable. C'est ainsi, par exemple, que la température dans un point d'une plaque conductrice dépend de toutes les valeurs de la température au contour, le déplacement infiniment petit d'une surface flexible et inextensible dépend des projections sur une certaine direction des déplacements des points du contour ».

D'autre part, puisque la physique mathématique que nous développons est justement celle du continu, et puisque ce continu est variable il est évident que l'on ne peut pas se passer de considérer un continu comme élément variable. On pourrait objecter que la séparation de la seconde et de la troisième partie de notre cours n'est pas philosophique, parce qu'il ne faudrait pas séparer, les uns des autres, les différents types de fonctions et qu'il serait utile d'attaquer directement les questions par la nouvelle analyse; mais la même objection pourrait s'élever contre la distinction entre le calcul différentiel et le calcul intégral, distinction qui toutefois se perpétue à cause des avantages bien connus qu'elle porte.

Tout en n'étant pas un traité sur les fonctions qui dépendent d'autres fonctions, mais un chapitre consacré à leurs applications à la physique analytique, la troisième partie devrait, à mon avis, commencer par en exposer les conceptions fondamentales. On passerait ensuite au procédé général de passage du fini à l'infini dans cet ordre de questions. Il se réduit pratiquement à deux règles fondamentales qui consistent d'abord à remplacer un nombre fini d'indices par une ou plusieurs variables continues, en second lieu à remplacer les sommes faites par rapport à ces indices par des intégrales.

Rien de plus simple que ces règles qui amènent de tout problème ordinaire de l'algèbre et du calcul différentiel et intégral à des problèmes de plus en plus difficiles et qui conduisent aussi des solutions des problèmes ordinaires aux solutions des nouveaux problèmes, ainsi que de théorèmes ou propriétés connues à des principes nouveaux. On peut ainsi passer des équations algébriques aux équations intégrales du type le plus général qui se distinguent par l'existence ou non de points exceptionnels, d'où leur classification indiquée par M. PICARD en équations de première, de seconde et de troisième espèce à limites fixes et variables.

Les équations différentielles ordinaires amènent par le même procédé d'extension aux équations intégro-différentielles ordinaires, tandis que les équations aux dérivées partielles peuvent se généraliser en trois directions en conduisant, soit à des équations intégro-différentielles aux dérivées partielles, soit à des équations aux dérivées fonctionnelles du type des équations aux différentielles totales, soit à des équations aux dérivées fonctionnelles proprement dites.

Les applications des équations intégrales linéaires aux théorèmes d'existence et à la résolution définitive des problèmes posés par les méthodes de GREEN et des caractéristiques, ainsi que leur emploi dans les développements en série et dans la théorie des solutions simples sont tellement classiques qu'il n'est pas nécessaire d'y insister ici.

D'autre part, les études sur les équations aux dérivées fonctionnelles développées par MM. HADAMARD et PAUL LÉVY et qui se rapportent aux fonctions de GREEN sont parmi les résultats modernes qui ont le plus frappé et intéressé.

C'est aussi dans cette dernière partie que trouverait place l'étude des modifications qu'il faut apporter aux théories classiques si l'on veut en corriger les solutions, en tenant compte de l'hérédité.

Mais je crois pouvoir me dispenser d'insister sur ces recherches ici, surtout dans l'Université de Strasbourg où elles sont si bien représentées par MM. FRÉCHET et PÉRÈS.

La troisième partie du cours pourrait être limitée à ce que je viens de dire. Elle serait la dernière partie du cours. Il est bien facile maintenant de faire l'énumération des branches de la physique mathématique qui n'ont pas été comprises dans notre étude; il est aussi facile, après ce que nous avons dit, de comprendre les raisons par lesquelles elles sont restées en dehors.

La Thermodynamique pure se développe sans qu'on ait besoin d'approfondir la théorie des équations aux dérivées partielles; aussi ne rentre-t-elle pas dans la physique analytique; la capillarité qui est une branche assez limitée de la physique emploie des méthodes particulières. Mais il y a un domaine extrêmement vaste qui embrasse les théories les plus modernes et les plus intéressantes et qui reste aussi en dehors du cadre que nous avons esquissé. On pourrait l'appeler la physique de la probabilité. Ses méthodes, qui ont été créées par MAXWELL, sont bien des méthodes analytiques de la plus haute portée et de la plus grande difficulté; mais ce sont des méthodes très différentes de celles que nous avons considérées précédemment. Elle ne rentre pas dans la physique du continu, c'est pourquoi, par l'esprit qui l'anime et par les procédés qu'elle emploie, elle constitue un organisme distinct de celui dont nous avons étudié les méthodes. Il suffit de lire les ouvrages que M. BOREL et M. LANGEVIN lui ont consacré, pour s'en persuader.

La constitution systématique d'une physique de la probabilité marque une profonde transformation dans la philosophie naturelle car elle fait découler l'ordre du désordre, et les lois ne dérivent que du défaut de lois. La physique de la probabilité bouleverse toutes les méthodes de la physique analytique et elle entre dans certains cas bien plus intimement dans l'essence même de la matière et des phénomènes en donnant des résultats plus rapprochés de la réalité.

La physique analytique tout en n'étant pas vieillie, et tout en étant bien loin d'être une des branches sèches du grand arbre des mathématiques, n'est pourtant plus jeune. C'est justement à cause de cela qu'elle est mûre pour sa systématisation et son unification. Avant les derniers progrès il n'aurait pas été possible d'atteindre ce but faute de pouvoir, par exemple, dénombrer et préciser les postulats qu'elle implique, ou démontrer exactement certaines propositions nécessaires, ou affirmer avec précision jusqu'à quel point elle représente la réalité et quelles sont ses limites. La voie que nous avons adoptée amène à ces résultats, qui ont un intérêt philosophique considérable.

Méme en consacrant tous les efforts pour s'approprier et faire avancer la physique de la probabilité, il est indispensable que les physiciens, les mathématiciens, les ingénieurs connaissent les principes fondamentaux de la physique analytique. Comment porter à la connaissance d'un public si nombreux un ensemble si vaste de notions? Il faut bien distinguer ici un cours qu'on livre au public comme ouvrage imprimé et un cours qu'on expose oralement. Dans un cours constituant un traité, on pourrait développer avec tous les détails le programme que je viens d'exposer rapidement; dans un cours professé, il vaudrait mieux se borner aux points essentiels.

Il faut un art très fin pour atteindre ces deux buts. Pour écrire un traité (comme pour professer un cours) ne suffit pas la connaissance scientifique du sujet, mais il faut aussi un certain sens artistique. Les livres qui ont traversé les siècles sont des œuvres d'art autant que des œuvres de sciences. EUCLIDE qui a systématisé et unifié la géométrie créée par ses devanciers, était un savant, mais il possédait le même goût artistique qui a rendu célèbres HOMÈRE et PHIDIAS.

XV.

OSSERVAZIONI SUL METODO DI DETERMINARE LA VELOCITÀ DEI DIRIGIBILI

« Rassegna marittima aeron. ill. », anno II, dic. 1920; pp. 5–8.

Sia V la velocità dell'aereonave, v la velocità del vento; il vettore risultante V^1 sarà la velocità effettiva con cui l'aeromobile percorre la rotta. L'angolo $\widehat{VV^1} = \gamma$ sarà l'angolo di deriva e l'angolo $\widehat{V^1 v} = \alpha$ l'angolo del vento colla direzione della rotta.

Avremo poi:

$$V^1 = V\cos\gamma + v\cos\alpha \quad , \quad k = \frac{v}{V} = \frac{\operatorname{sen}\gamma}{\operatorname{sen}\alpha} .$$

Da queste formule si ricava:

$$\operatorname{sen}\gamma = k\operatorname{sen}\alpha \quad , \quad \cos\gamma = \sqrt{1 - k^2\operatorname{sen}^2\alpha} \quad , \quad \cos\alpha = \sqrt{1 - k^{-2}\operatorname{sen}^2\gamma} .$$

Supponiamo che durante il tempo dt si percorra lo spazio ds. Sarà:

$$dt = \frac{ds}{V^1} = \frac{ds}{V\cos\gamma + v\cos\alpha} = \frac{(V\cos\gamma - v\cos\alpha)\, ds}{V^2\cos^2\gamma - v^2\cos^2\alpha} =$$

$$= \frac{(V\cos\gamma - v\cos\alpha)\, ds}{V^2(\cos^2\gamma - k^2\cos^2\alpha)} = \frac{(V\cos\gamma - v\cos\alpha)\, ds}{V^2(1 - k^2)} = \frac{\cos\gamma - k\cos\alpha}{V(1 - k^2)}\, ds$$

e quindi, se nel tempo t si percorre lo spazio s in generale curvilineo,

$$t = \int \frac{\cos\gamma - k\cos\alpha}{V(1 - k^2)}\, ds .$$

Nell'ipotesi che il vento si mantenga costante (in grandezza e direzione) la formula precedente diviene:

$$t = \frac{1}{V(1 - k^2)} \int (\cos\gamma - k\cos\alpha)\, ds = \frac{1}{V(1 - k^2)} \left\{ \int \cos\gamma\, ds - k \int \cos\alpha\, ds \right\} .$$

Se prendiamo l'asse x parallelo alla direzione del vento e proiettiamo il cammino percorso AB lungo x in $A^1 B^1 = x$, avremo:

$$x = \int \cos\alpha\, ds,$$

quindi

$$t = \frac{1}{V(1 - k^2)} \left\{ \int \cos\gamma\, ds - kx \right\} .$$

Se il percorso è in circuito chiuso, cioè A coincide con B e A^1 con B^1, sarà $x = 0$ e risulterà:

$$t = \frac{1}{V(1-k^2)}\int \cos\gamma\, ds = \frac{1}{V(1-k^2)}\int\sqrt{1-k^2\operatorname{sen}^2\alpha}\, ds\,.$$

La velocità media con la quale l'aeromobile percorre la rotta sarà:

$$W = \frac{s}{t} = \frac{V(1-k^2)\,s}{\Theta},$$

posto

$$\Theta = \int \cos\gamma\, ds = \int\sqrt{1-k^2\operatorname{sen}\alpha}\, ds\,.$$

Ne segue che il rapporto fra la velocità media con cui si percorre la rotta e la velocità propria dell'aeromobile sarà:

$$\frac{W}{V} = \frac{(1-k^2)\,s}{\Theta} = \Omega\,.$$

Vogliamo ora dimostrare che questo rapporto è sempre minore di 1 nell'ipotesi che la velocità del vento sia inferiore a quella propria dell'aeromobile, cioè $k < 1$. Infatti:

$$\Omega = \frac{(1-k^2)\,s}{\Theta} = \sqrt{1-k^2}\,\frac{s\sqrt{1-k^2}}{\int\sqrt{1-k^2\operatorname{sen}^2\alpha}\, ds} = \sqrt{1-k^2}\,\frac{\int\sqrt{1-k^2}\, ds}{\int\sqrt{1-k^2\operatorname{sen}^2\alpha}\, ds}\,.$$

Ma:

$$\sqrt{1-k^2} < \sqrt{1-k^2\operatorname{sen}^2\alpha} < 1\,,$$

quindi

$$\frac{\int\sqrt{1-k^2}\, ds}{\int\sqrt{1-k^2\operatorname{sen}^2\alpha}\, ds} < 1\,,$$

e

$$\Omega = \sqrt{1-k^2}\,\frac{\int\sqrt{1-k^2}\, ds}{\int\sqrt{1-k^2\operatorname{sen}^2\alpha}\, ds} < 1\,,$$

ossia

$$\frac{W}{V} = \Omega < 1\,.$$

Se dunque noi misuriamo la velocità media di un circuito chiuso qualsiasi noi otteniamo sempre una velocità inferiore a quella propria dell'aeromobile, sebbene il vento talvolta aiuti la rotta, talvolta si opponga al moto e talora prenda di traverso.

* * *

Facciamo alcuni casi particolari:

Supponiamo dapprima che il circuito percorso sia una poligonale ABCDE $= s_1\, s_2\, s_3\, s_4\, s_5$.

Denotiamo i valori di α lungo i lati con $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$ e i valori dell'angolo di deriva con $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4, \gamma_5$. Sarà:

$$\frac{W}{V} = \frac{(1-k^2)\,s}{\Sigma \cos\gamma_i\, s_i} = \frac{(1-k^2)\,s}{\Sigma\, s_i \sqrt{1-k^2 \operatorname{sen}^2 \alpha_i}}\,.$$

Supponiamo che la poligonale si riduca ai due lati sovrapposti AB e BA. Avremo:

$$W = \frac{s}{t} < V,$$

cioè, posto AB $= l$ e denotando con t' e t'' i tempi con i quali si percorrono i tratti AB e BA,

$$W = \frac{2l}{t'+t''} = \frac{l}{\left(\frac{t'+t''}{2}\right)} < V.$$

Dunque se si divide il percorso l per la media dei tempi nei quali si percorre l nel verso diretto e nel verso opposto, si trova sempre una velocità inferiore a quella propria dell'aeromobile, a meno che il vento non sia nettamente nullo.

Avremo poi che gli *angoli di deriva nei due percorsi, diretto e inverso, saranno eguali.*

Denotandoli con γ, risulterà:

$$\frac{l}{t'} = V\cos\gamma + v\cos\alpha \qquad \frac{l}{t''} = V\cos\gamma - v\cos\alpha\,,$$

quindi

$$\frac{1}{2}\left(\frac{l}{t'} + \frac{l}{t''}\right) = V\cos\gamma\,,$$

ossia la media delle velocità con le quali si percorrono i due tratti, diretto ed inverso, è eguale alla velocità propria dell'aeromobile moltiplicata per il coseno dell'angolo di deriva.

Nella misura della velocità propria di un aeromobile allorché il vento è di traverso, il che avverrà nella maggior parte dei casi, converrà misurare gli angoli di deriva nei due periodi diretto e inverso. Questi angoli dovranno differire poco fra loro. Se ne farà la media e converrà introdurre una correzione dovuta alla deriva dividendo la media delle due velocità nei due percorsi pel coseno dell'angolo medio di deriva.

Affinché questa correzione abbia un significato, bisognerà che il cammino percorso sia sensibilmente rettilineo e l'angolo di deriva si mantenga costante, il che ci avvertirà che il vento si è mantenuto costante.

Possiamo anche ricavare la velocità e la direzione del vento dalla velocità nei due cammini, diretto e inverso, e dall'angolo di deriva.

Infatti dalle equazioni:

$$\frac{l}{t'} = V\cos\gamma + v\cos\alpha \quad , \quad \frac{l}{t''} = V\cos\gamma - v\cos\alpha$$

segue

$$V = \frac{1}{2\cos\gamma}\left(\frac{l}{t'} + \frac{l}{t''}\right) \quad , \quad v = \frac{1}{2\cos\alpha}\left(\frac{l}{t'} - \frac{l}{t''}\right),$$

quindi

$$k = \frac{v}{V} = \frac{\cos\gamma}{\cos\alpha}\,\frac{t''-t'}{t''+t'} = \frac{\cos\gamma}{\sqrt{1-k^{-2}\,\mathrm{sen}^2\gamma}}\,\frac{t''-t'}{t''+t'},$$

da cui si deduce:

$$\sqrt{k^2-\mathrm{sen}^2\gamma} = \cos\gamma\,(t''-t')\,(t''+t')^{-1},$$

$$k = \sqrt{\mathrm{sen}^2\gamma + \cos^2\gamma\,(t''-t')^2\,(t''+t')^{-2}}$$

e quindi

$$v = V\sqrt{\mathrm{sen}^2\gamma + \cos^2\gamma\,(t''-t')^2\,(t''+t')^{-2}} =$$

$$= \frac{l\,(t''+t')}{2\,t'\,t''\cos\gamma}\sqrt{\mathrm{sen}^2\gamma + \cos^2\gamma\,(t''-t')^2\,(t''+t')^{-2}}$$

ossia

$$v = \frac{l}{2\,t'\,t''}\sqrt{(t''+t')^2\,\mathrm{tg}^2\gamma + (t''-t')^2}.$$

Abbiamo poi (*)

$$\mathrm{sen}\,\alpha = \frac{\mathrm{sen}\,\gamma}{k} = \frac{\mathrm{sen}\,\gamma}{\sqrt{\mathrm{sen}^2\gamma + \cos^2\gamma\,(t''-t')^2\,(t''+t')^{-2}}} = \frac{(t''+t'')\,\mathrm{sen}\,\gamma}{\sqrt{(t''+t')^2\,\mathrm{tg}^2\gamma + (t''-t')^2}}.$$

* * *

Supponiamo che il circuito percorso sia un cerchio di raggio R. In tale ipotesi avremo:

$$\Theta = \int\sqrt{1-k^2\,\mathrm{sen}^2\alpha}\,ds = \mathrm{R}\int_0^{2\pi}\sqrt{1-k^2\,\mathrm{sen}^2\alpha}\,d\alpha.$$

Ora:

$$\int_0^{2\pi}\sqrt{1-k^2\,\mathrm{sen}^2\alpha}\,d\alpha = 4\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-k^2\,\mathrm{sen}^2\alpha}\,d\alpha = 4\,\mathrm{E}$$

(integrale ellittico di 2ª specie),

quindi

$$\Theta = 4\,\mathrm{RE} \quad , \quad t = \frac{4\,\mathrm{RE}}{V\,(1-k^2)},$$

onde

$$V = \frac{4\,\mathrm{RE}}{t\,(1-k^2)}.$$

* * *

Supponiamo che l'aeromobile percorra successivamente le due rotte M_1N_1, M_2N_2, ed il vento sia lo stesso, in modo che la sua velocità sia rappresentata da v. L'asse dell'aeromobile sia rappresentato da V' quando percorre la prima rotta e da V'' quando percorre la seconda.

(*) Si è semplificata la scrittura di queste formule e nelle formule seguenti è stata corretta qualche materiale svista dell'originale [N.d.R.].

I due vettori v saranno equipollenti, mentre se i due vettori V' e V'' denotano la velocità propria dell'aeromobile avranno direzioni diverse, ma avranno lo stesso modulo V se la velocità propria dell'aeromobile V si è mantenuta della stessa grandezza, allorché si percorrono le due rotte.

Prendiamo la direzione geografica SN (sud-nord) e rappresentiamo gli angoli nel modo seguente:

$$\widehat{(M_1 N_1)\cdot(SN)} = \theta_1 \qquad \widehat{(M_2 N_2)\cdot(SN)} = \theta_2$$

$$\widehat{\overline{V^1}\cdot(\overline{SN})} = \chi_1 \qquad \widehat{\overline{V^2}\cdot(\overline{SN})} = \chi_2$$

$$\widehat{\overline{v}\cdot(\overline{SN})} = \rho \qquad \widehat{\overline{v}\cdot(\overline{SN})} = \rho .$$

Denotiamo finalmente con V_1 e V_2 le velocità con le quali l'aeromobile percorre effettivamente le due rotte, con γ_1 e γ_2 i due angoli di deriva, con α_1 e α_2 gli angoli che il vento forma con le due rotte e con θ l'angolo formato dalle due rotte.

Avremo

$$\gamma_1 = \theta_1 - \chi_1 \tag{1}$$

$$\gamma_2 = \theta_2 - \chi_2 \tag{2}$$

$$\alpha_1 = \rho - \theta_1 \tag{a}$$

$$\alpha_2 = \rho - \theta_2 \tag{a'}$$

$$\theta = \theta_2 - \theta_1 = \alpha_1 - \alpha_2 \tag{3}$$

$$\frac{v}{V} = \frac{\operatorname{sen}\gamma_1}{\operatorname{sen}\alpha_1} = \frac{\operatorname{sen}\gamma_2}{\operatorname{sen}\alpha_2} \tag{4}$$

$$V_1 = V\cos\gamma_1 + v\cos\alpha_1 \qquad V_2 = V\cos\gamma_2 + v\cos\alpha_2 . \tag{5}$$

Dalle (4) si ricava:

$$v = V\frac{\operatorname{sen}\gamma_1}{\operatorname{sen}\alpha_1} = V\frac{\operatorname{sen}\gamma_2}{\operatorname{sen}\alpha_2} , \tag{b}$$

quindi le (5) diventano:

$$V_1 = V(\cos\gamma_1 + \operatorname{sen}\gamma_1 \operatorname{cotg}\alpha_1) \qquad V_2 = V(\cos\gamma_2 + \operatorname{sen}\gamma_2 \operatorname{cotg}\alpha_2) . \tag{5'}$$

Ma dalle (4) si ha anche:

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha_1}{\operatorname{sen}\alpha_2} = \frac{\operatorname{sen}\gamma_1}{\operatorname{sen}\gamma_2} \quad , \quad \frac{\operatorname{sen}\alpha_2}{\operatorname{sen}\alpha_1} = \frac{\operatorname{sen}\gamma_2}{\operatorname{sen}\gamma_1}$$

e in virtù delle (3)

$$\alpha_1 = \theta + \alpha_2 \quad , \quad \alpha_2 = \alpha_1 - \theta ,$$

quindi

$$\frac{\operatorname{sen}\gamma_1}{\operatorname{sen}\gamma_2} = \frac{\operatorname{sen}(\theta + \alpha_2)}{\operatorname{sen}\alpha_2} = \operatorname{sen}\theta \operatorname{cotg}\alpha_2 + \cos\theta$$

$$\frac{\operatorname{sen}\gamma_2}{\operatorname{sen}\gamma_1} = \frac{\operatorname{sen}(\alpha_1 - \theta)}{\operatorname{sen}\alpha_1} = \cos\theta - \operatorname{sen}\theta \operatorname{cotg}\alpha_1 ,$$

da cui segue:

$$\text{cotg}\,\alpha_2 = \left[\frac{\text{sen}\,\gamma_1}{\text{sen}\,\gamma_2} - \cos\theta\right]\frac{1}{\text{sen}\,\theta} \tag{c}$$

$$\text{cotg}\,\alpha_1 = \left[\cos\theta - \frac{\text{sen}\,\gamma_2}{\text{sen}\,\gamma_1}\right]\frac{1}{\text{sen}\,\theta} \tag{c'}$$

e sostituendo nelle (5')

$$V_1 = V\left[\cos\gamma_1 + \text{sen}\,\gamma_1\left[\cos\theta - \frac{\text{sen}\,\gamma_2}{\text{sen}\,\gamma_1}\right]\frac{1}{\text{sen}\,\theta}\right] = \tag{6}$$

$$= \frac{V(\cos\gamma_1\,\text{sen}\,\theta + \text{sen}\,\gamma_1\cos\theta - \text{sen}\,\gamma_2)}{\text{sen}\,\theta} = \frac{V(\text{sen}\,[\theta+\gamma_1] - \text{sen}\,\gamma_2)}{\text{sen}\,\theta} =$$

$$= \frac{2\,V\,\text{sen}\left[\dfrac{\theta+\gamma_1-\gamma_2}{2}\right]\cos\left[\dfrac{\theta+\gamma_1+\gamma_2}{2}\right]}{\text{sen}\,\theta}$$

$$V_2 = V\left[\cos\gamma_2 + \text{sen}\,\gamma_2\left[\frac{\text{sen}\,\gamma_1}{\text{sen}\,\gamma_2} - \cos\theta\right]\frac{1}{\text{sen}\,\theta}\right] = \tag{7}$$

$$= \frac{V(\cos\gamma_2\,\text{sen}\,\theta - \cos\theta\,\text{sen}\,\gamma_2 + \text{sen}\,\gamma_1)}{\text{sen}\,\theta} = \frac{V(\text{sen}\,[\theta-\gamma_2] + \text{sen}\,\gamma_1)}{\text{sen}\,\theta} =$$

$$= \frac{2\,V\,\text{sen}\left[\dfrac{\theta-\gamma_2+\gamma_1}{2}\right]\cos\left[\dfrac{\theta-\gamma_2-\gamma_1}{2}\right]}{\text{sen}\,\theta}.$$

Dalle formule (6) e (7) si ricava:

$$V = \frac{V_1\,\text{sen}\,\theta}{2\,\text{sen}\,\dfrac{\theta+\gamma_1-\gamma_2}{2}\cos\dfrac{\theta+\gamma_1+\gamma_2}{2}} = \tag{8}$$

$$= \frac{V_2\,\text{sen}\,\theta}{2\,\text{sen}\,\dfrac{\theta-\gamma_2+\gamma_1}{2}\cos\dfrac{\theta-\gamma_2-\gamma_1}{2}}.$$

Ora dalle (1), (2) e (3) segue:

$$\theta+\gamma_1-\gamma_2 = \theta_2-\theta_1+\theta_1-\chi_1-\theta_2+\chi_2 = \chi_2-\chi_1$$

$$\theta+\gamma_1+\gamma_2 = \theta_2-\theta_1+\theta_1-\chi_1+\theta_2-\chi_2 = 2\,\theta_2-\chi_1-\chi_2$$

$$\theta-\gamma_1-\gamma_2 = \theta_2-\theta_1-\theta_1+\chi_1-\theta_2+\chi_2 = \chi_1+\chi_2-2\,\theta_1;$$

quindi le (8) diventano:

$$V = \frac{V_1\,\text{sen}\,(\theta_2-\theta_1)}{2\,\text{sen}\left[\dfrac{\chi_2-\chi_1}{2}\right]\cos\left[\theta_2-\dfrac{\chi_1+\chi_2}{2}\right]} = \tag{A}$$

$$= \frac{V_2\,\text{sen}\,(\theta_2-\theta_1)}{2\,\text{sen}\left[\dfrac{\chi_2-\chi_1}{2}\right]\cos\left[\theta_1-\dfrac{\chi_1+\chi_2}{2}\right]}.$$

Volendo dunque ottenere la velocità propria dell'aeromobile conoscendo la velocità con cui sono percorse le due rotte, basterà determinare le direzioni geografiche delle rotte stesse, che si rilevano dalla carta, e gli angoli di rotta desunti dalle indicazioni della bussola previa applicazione dell'ammontare della variazione (somma algebrica della declinazione magnetica locale e della deviazione).

Il controllo della costanza del vento sui due percorsi si avrà colla eguaglianza dei due valori di V dati dal secondo e dal terzo membro della (A).

Sarà anche possibile ottenere la direzione e la grandezza del vento, giacché dalle formule (c) e (c') potremo avere gli angoli α_1 e α_2 e quindi dalle (a) e (a') avremo ρ in due modi.

Applicando poi la (b) si otterrà la velocità v del vento pure in due modi.

Anche queste determinazioni che ci danno in più modi i valori di v e di ρ possono servire a controllare la costanza del vento nei due percorsi.

XVI.

FUNZIONI DI LINEE

EQUAZIONI INTEGRALI E INTEGRO-DIFFERENZIALI (*).

« Anales de la Sociedad Científica Argentina », t. XCII, p. 31 y siguientes.

I.

FUNZIONI DI LINEA. CALCOLO DELLE VARIAZIONI. DERIVATE DELLE FUNZIONI DI LINEA. DIFFERENZIALE. SVILUPPO ANALOGO A QUELLO DI TAYLOR.

Ho immaginato da prima, nel 1883, quando ho cominciato a dare una forma concreta alle mie idee, il concetto di funzione che dipende da tutti i valori di un'altra funzione, considerandola come limite di una funzione di più variabili quando il numero di queste cresce indefinitamente in maniera continua. Una curva può essere generata come limite di una linea poligonale; analogamente, una funzione delle ordinate dei suoi vertici diventa al limite una funzione delle infinite ordinate di tutti i punti della curva.

In tal modo sono arrivato, mediante un passaggio al limite, dalle funzioni di un numero finito a quelle di un numero infinito e continuo di variabili e si comprende, quindi, perché ho fatto uso indifferentemente fino dai miei primi lavori della locuzione *quantità che dipendono da tutti i valori di una o più funzioni* o dell'altra, più semplicè, di *funzioni di linee.*

Ero compreso dalla necessità di considerare le funzioni di linee, poiché molti fenomeni naturali conducono all'esame di quantità che dipendono da un numero infinito di variabili. Anche molti problemi di analisi portano alle stesse quantità.

Il loro concetto e la loro definizione si presentavano dunque naturalmente, ed io ho pensato che sarebbe stato utile di studiarle in modo particolare. Essi dovevano costituire una categoria di enti di cui si sarebbe potuto ottenere delle proprietà comuni e che si potevano considerare nel loro insieme.

(*) Conferencia dada por el ilustre matemático en Buenos Aires, durante el congreso científico internacional americano, celebrado en homenaje al primer centenario de mayo, en 1910, en el que el sabio conferenciante, senador del reino de Italia y presidente de la Facultad de matemáticas de Roma, asistió como delegado de esta última. Debemos justificar la demora en la publicación de este trabajo, haciendo presente que él debía formar parte de las publicaciones oficiales del indicado Congreso, lo que no fué posible verificar por razones no imputables ciertamente a la comisión encargada de ellas. Por esto, por ser de quien es, lo publicamos hoy en los *Anales* de la Sociedad. (*N. de la D.*)

Ma un semplice concetto generale e una definizione non hanno interesse filosofico e matematico, se non si dà il modo di applicare loro il calcolo. Ciò che m'imposi fin da principio fu di creare un'analisi capace di abbracciare le proprietà delle funzioni di linee e le loro rappresentazioni e di costituire un calcolo che desse il modo di porre esattamente i problemi che le concernono e di ottenerne delle rigorose soluzioni.

C'era un esempio nel calcolo delle variazioni, perché questo celebre calcolo studia i problemi dei massimi e dei minimi degli integrali definiti, e gl'integrali definiti possono essere studiati come quantità che dipendono da tutti i valori delle funzioni che compaiono sotto il segno d'integrazione.

Per darne un esempio, esaminiamo il problema della brachistocrona. Il tempo della caduta di un grave si esprime con un integrale definito che è una funzione della linea che il corpo è obbligato a percorrere. La soluzione di questo problema consiste nello studiare questa linea come l'incognita e a determinarla con la condizione che il tempo sia un minimo.

Ma il calcolo delle variazioni, come l'ha concepito LAGRANGE, e come è stato sviluppato in seguito, è limitato a una classe speciale di problemi, e in tal modo il calcolo delle variazioni ordinario non ci fa uscire dal campo delle equazioni differenziali e altre questioni non rientrano nel suo dominio classico.

Se si fosse voluto conservare tutta la sua generalità alla categoria degli enti che si presentano, l'esempio del calcolo delle variazioni non sarebbe stato sufficiente. Era necessario uscirne completamente e creare nuovi elementi, propri a un'analisi generale.

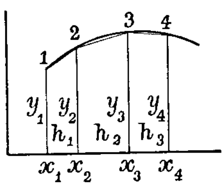


Fig. 1.

Bisognava, prima di tutto, che estendessi il concetto della derivazione alle nuove funzioni.

Poiché una funzione di n variabili ha n derivate parziali, una funzione di un numero infinito di variabili deve originare un numero infinito di derivate parziali. Infatti, consideriamo una linea L avente per equazione $y=f(x)$ ed una linea poligonale inscritta $1, 2, 3, 4, \cdots, n$.

Le n ordinate dei vertici siano $y_1, y_2, \cdots, y_n$.

Si ha da principio una funzione $F(y_1, y_2, \cdots, y_n)$.

Se gl'intervalli $h_1, h_2, \cdots$ decrescono indefinitamente, mentre il loro numero cresce indefinitamente, la linea poligonale tende verso la curva e la funzione F delle n variabili tende verso una funzione della linea L, cioè verso una quantità che dipende da tutti i valori della funzione $y=f(x)$. Noi la indicheremo con

$$\Phi \,|\, [f(x_a^b)] \,|$$

oppure con

$$\Phi \,|\, [L_a^b] \,| ,$$

essendo ab l'intervallo in cui la funzione $f(x)$ è definita.

Per calcolare le n derivate parziali di F si cambia ogni variabile y_i separatamente e si calcola il rapporto della variazione di F e dell'accrescimento di y_i. Il limite di questo rapporto è la derivata parziale

$$Y_i(y_1, y_2, \cdots, y_n) = \frac{\partial F}{\partial y_i}.$$

Nella stessa maniera, supponendo sempre continua la funzione f, cambiamo la curva L in un intorno h del punto ξ da una parte della curva primitiva e supponiamo che i cambiamenti delle ordinate siano più piccoli di ε.

Calcoliamo ora il rapporto della variazione di Φ e dell'area σ, compresa tra la curva primitiva e la curva deformata.

Supponendo che il rapporto tra la variazione di Φ e l'area σ compresa fra la curva primitiva e la curva cambiata abbia un limite, quando si facciano diminuire indipendentemente h e ε, si dirà che questo limite è la derivata di Φ per rapporto a f nel punto ξ.

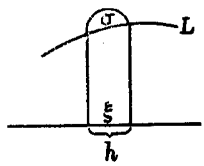


Fig. 2.

Questo limite sarà evidentemente una quantità che dipende dalla curva L e dal punto ξ e perciò si potrà rappresentare con

$$\Phi' \,|\, [f(x_a^b), \xi] \,| = Y(\xi),$$

e bisognerà considerare Φ' come una funzione ordinaria dell'ascissa ξ.

Fin dal principio si rivela una regola che è la chiave di un gran numero di nuovi risultati, e che si enuncia nel modo seguente: gli indici $1, 2, \cdots, n$ si cambiano in tutti i valori d'una variabile continua; perciò gli n indici che compariscono in $y_1, y_2, \ldots, y_n$ diventano tutti i valori di x in $f(x)$, e gli n indici delle derivate parziali

$$Y_1, Y_2, \cdots, Y_n$$

diventano tutti i valori della variabile ξ.

Si potrà dunque chiamare x la variabile che serve a enumerare le infinite variabili indipendenti e ξ la variabile che serve a enumerare le infinite derivate.

Mi sono trattenuto minutamente su questi punti fondamentali, perché sono la base di tutti gli svolgimenti successivi.

Tuttavia, per completare bisognerà aggiungere molte considerazioni. Bisognerà notare che l'esistenza di F può essere qualche volta subordinata ad alcune condizioni, alle quali f deve soddisfare. Per esempio, la definizione di F può implicare la condizione che f sia derivabile fino a un certo ordine e che i valori di f e delle sue derivate siano compresi tra certi numeri. Queste condizioni limitano il campo funzionale nel quale F è definita. Nello stesso modo, per la continuità di F e per la sua derivabilità, alcune condizioni possono essere necessarie in rapporto alle derivate di f. Noi non entreremo in quest'ordine di considerazioni che ci condurrebbe troppo lontano.

Nell'analisi ordinaria si passa dalle derivate parziali $Y_1, Y_2 \cdots Y_n$ al differenziale totale

$$dF = Y_1 dy_1 + Y_2 dy_2 + \cdots + Y_n dy_n ; \tag{1}$$

bisogna nello stesso modo calcolare l'elemento analogo per Φ, cioè, determinare la variazione Φ quando la curva L diventa L', in modo che le variazioni di tutte le ordinate y siano infinitamente piccole del primo ordine e che si trascurino, nel calcolo della variazione di Φ, le quantità infinitamente piccole dell'ordine superiore.

Per calcolare questa variazione, si osserva ch'essa si può ottenere sovrapponendo un seguito di modificazioni successive della curva, rappresentate nelle figure 3, 4, 5, 6, e prendendo le aree tratteggiate infinitamente piccole d'ordine superiore alle altre aree comprese tra le due curve.

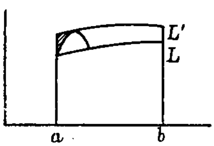


Fig. 3.

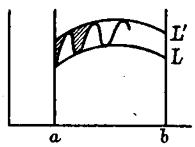


Fig. 4.

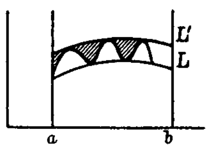


Fig. 5.

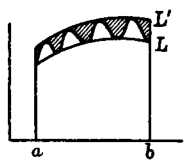


Fig. 6.

Soddisfatte alcune condizioni, si trova che la variazione di Φ si esprime con

$$\delta\Phi = \int_a^b \Phi' \,|\, [f(x_a^b), \xi] \,|\, \delta f(\xi) \, d\xi . \tag{1'}$$

La somma che si trovava nel differenziale (1) è qui sostituita con un integrale.

Questa formula è più generale di quella che si ha nel calcolo classico delle variazioni. Ma avendo sott'occhio le formule di questo calcolo, si vede che è molto interessante esaminare anche altri casi, cioè quelli in cui $\delta\Phi$ è espresso, oltre che dall'integrale precedente, da altri termini della forma

$$\Sigma A_i \, \delta f(x_i) , \tag{1''}$$

oppure

$$\Sigma A_i \, \delta f(x_i) + \Sigma B_i \, \delta f'(x_i) + \Sigma C_i \, \delta f''(x_i) + \cdots , \tag{1'''}$$

essendo x_i punti compresi tra a e b (gl'indici indicano le derivazioni). Ho chiamato punti eccezionali i punti x_i.

Bisogna ora passare alle rappresentazioni analitiche delle funzioni di linea.

Quella che ho data fin dal mio primo lavoro è l'estensione della formula di TAYLOR.

Essendo soddisfatte alcune condizioni, lo sviluppo è il seguente:

$$\Phi \,|\, [f(x_a^b)] \,| = A + \int_a^b F(\xi_1) f(\xi_1) d\xi_1 + \frac{1}{2!}\int_a^b\int_a^b F(\xi_1, \xi_2) f(\xi_1) f(\xi_2) d\xi_1 d\xi_2 + \cdots \tag{2}$$

$$+ \frac{1}{n!}\int_a^b \cdots \int_a^b F(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n) f(\xi_1) \cdots f(\xi_n) d\xi_1 \cdots d\xi_n + \cdots$$

Il passaggio dalla formula di TAYLOR per una funzione di n variabili, alla presente, consiste nel sostituire le somme semplici, doppie, ecc. con gl'integrali semplici, doppi, ecc.

Una nuova regola si presenta ora secondo le formule (1′) e (2): Come gli n indici diventano tutti i valori di una variabile, così le somme si trasformano in integrali. Questa regola, e l'altra che ho data precedentemente, sono le due principali regole che bisogna sempre applicare.

Se prendiamo un numero finito di termini della serie (2), per esempio m termini, troviamo un'espressione P_m che si può considerare come il limite di un polinomio ordinario di grado m.

Devo aggiungere che la formula (2) rappresenta solo uno sviluppo speciale delle funzioni di linee. Ve ne sono altri, trovati molto dopo, per le funzioni lineari, dal signor HADAMARD.

Nelle prime Note, da me pubblicate nel 1887, si trovano già posti tutti i principî del calcolo delle funzioni di linee, ed erano sufficienti per poter passare alle applicazioni che desideravo sviluppare poco a poco, pur lasciando ad altro momento la cura d'approfondire i fondamenti.

II.

EQUAZIONI INTEGRALI GENERALI. EQUAZIONI LINEARI.

Il problema fondamentale dell'algebra è la soluzione delle equazioni. Se si hanno le n relazioni

$$\begin{cases} F_1(y_1, y_2, \cdots, y_n) = z_1, \\ F_2(y_1, y_2, \cdots, y_n) = z_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ F_n(y_1, y_2, \cdots, y_n) = z_n, \end{cases} \tag{3}$$

cioè

$$F_i(y_1, y_2, \cdots, y_n) = z_i \qquad (i = 1, 2, \cdots, n), \tag{3'}$$

calcolare i valori di $y_1, y_2, \cdots, y_n$ che soddisfano alle relazioni precedenti, dati $z_1, z_2, \cdots, z_n$.

Se si passa dal finito all'infinito e si applica la regola che ho data, di sostituire le funzioni di n variabili con una quantità che dipende da tutti i valori di un'altra funzione $f(\xi)$, e se si sostituisce l'indice con tutti i valori di una variabile x, l'equazione (3') diventa:

$$(3'') \qquad \Phi \mid [f(\xi_a^b), x] \mid = \varphi(x).$$

$f(\xi)$ è una funzione incognita, $\varphi(x)$ è una funzione data.

Bisogna adesso distinguere parecchi casi.

Il caso che si avvicina al caso algebrico è quello in cui Φ corrisponde ad un polinomio, cioè un'espressione del tipo P_m (vedi paragrafo precedente) e il caso più semplice è quello in cui Φ è di primo grado. Se non ci sono punti eccezionali Φ ha la forma

$$\int_a^b f(\xi) \, F(x, \xi) \, d\xi.$$

Si cade allora nelle equazioni integrali lineari

$$(4) \qquad \int_a^b f(\xi) \, F(x, \xi) \, d\xi = \varphi(x) \qquad \text{(equazione di 1}^a\text{ specie);}$$

ma, se c'è il punto eccezionale x, allora si ha:

$$(4') \qquad \int_a^b f(\xi) \, F(x, \xi) \, d\xi + A_1 f(x) + A_2 f'(x) + \cdots + A_n f^{(n)}(x) = \varphi(x).$$

Allorché

$$A_2 = \ldots = A_n = 0,$$

e

$$A_1 = 1,$$

si trova

$$(4'') \qquad \int_a^b f(\xi) \, F(x, \xi) \, d\xi + f(x) = \varphi(x) \qquad \text{(equazione di 2}^a\text{ specie).}$$

Se

$$A_1 = \lambda(x),$$

si trova un'equazione che appartiene alla categoria, chiamata di terza specie dal signor PICARD:

$$(4''') \qquad \int_a^b f(\xi) \, F(x, \xi) \, d\xi + \lambda(x) f(x) = \varphi(x).$$

Infine, quando esistono tutti i termini, l'equazione è nello stesso tempo un'equazione integrale e un'equazione differenziale e bisogna classificarla tra le equazioni integro–differenziali.

Il caso (4'') in cui il limite superiore b è uguale a x non differisce essenzialmente dal caso in cui b è costante. Per risolvere questi due casi basta applicare il metodo del passaggio dal finito all'infinito nella soluzione ordinaria dei sistemi d'equazioni algebriche di primo grado, ottenuta con la regola dei determinanti. Ciò mi ha condotto alla soluzione nel caso del limite superiore variabile, in cui bisogna considerare il solo determinante che è al numeratore, essendo uguale all'unità quello del denominatore.

Il signor FREDHOLM ha esaminato più tardi in modo analogo il caso in cui il denominatore non è l'unità.

Il caso dell'equazione (4) in cui b è costante si distingue da quello in cui è variabile, perché in quest'ultimo caso si può ricondurlo alla prima specie con una derivazione.

Il caso generale (3″) dà luogo a classificazioni analoghe. Basta per questo differenziare l'equazione (3″). Si troverà allora

$$\delta\Phi \mid [f(x_a^b), x] \mid = \delta\varphi(x). \tag{5}$$

Se consideriamo quest'equazione, prendendo per incognita δf, essa risulta lineare, e perciò, quando prende una delle forme da noi considerate, le si possono applicare l'analisi e la classificazione precedente.

Per risolvere allora l'equazione (3″) si procede come per il caso del sistema (3), cioè si parte da una soluzione corrispondente ad una certa funzione data $\varphi(x)$ e si cercano le soluzioni $f(x)$ che corrispondono ad altre forme di $\varphi(x)$ sufficientemente vicine alla forma primitiva.

Si può dimostrare l'esistenza e l'unicità della soluzione mediante uno svolgimento in serie analogo a quello di TAYLOR. Il determinante dell'equazione lineare (5) fa da determinante funzionale.

Ho svolto questo metodo in una Nota pubblicata nel 1906 nei *Comptes Rendus* e che è stata riprodotta nelle mie lezioni di Stoccolma.

III.

EQUAZIONI INTEGRO-DIFFERENZIALI.

Veniamo adesso alle equazioni integro-differenziali.

Chiameremo in generale *equazione integro-differenziale* qualsiasi relazione che implica operazioni di derivazione e d'integrazione definita effettuate sulla funzione o sulle funzioni incognite. Si dirà che sono equazioni integro-differenziali ordinarie, se tutte le derivazioni sono effettuate rispetto alla variabile indipendente.

Questa definizione è molto generale e, sotto un certo punto di vista, una definizione formale. Si possono classificare le equazioni integro-differenziali? Poiché non vi è forse ancora una classificazione completamente soddisfacente di tutte le equazioni differenziali, non ci penseremo per ora. Ma considereremo alcune equazioni integro-differenziali a causa delle loro applicazioni.

Le equazioni integro-differenziali alle derivate parziali corrispondono ai casi in cui le derivazioni sono eseguite rispetto a più variabili indipendenti.

Indicheremo le principali categorie che si presentano in varî problemi della meccanica e della fisica matematica.

Considererò solo quelle lineari. Bisogna distinguere da principio l'equazione a limiti variabili e quelle a limiti costanti.

Consideriamo le prime. Fra queste si presenta in prima linea una equazione che s'avvicina all'equazione di LAPLACE. È l'equazione seguente:

$$(8) \qquad \frac{\partial^2 u(x,y,z,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y,z,t)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u(x,y,z,t)}{\partial z^2} + \int_0^t \left\{ \frac{\partial^2 u(x,y,z,t)}{\partial x^2} f(t,\tau) + \cdots \right\} d\tau = \theta(x,y,z,t).$$

L'equazione a limiti costanti corrispondente è della forma:

$$(8') \qquad \frac{\partial^2 u(x,y,z,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y,z,t)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u(x,y,z,t)}{\partial z^2} + \int_0^1 \left\{ \frac{\partial^2 u(x,y,z,t)}{\partial x^2} f(t,\tau) + \cdots \right\} d\tau = \theta(x,y,z,t).$$

Queste due equazioni tipiche sono equazioni ellittiche. Si possono trasformare facilmente in equazioni iperboliche cambiando dei segni nei termini che sono al di fuori degl'integrali. A queste equazioni si possono avvicinare altre di tipo parabolico e anche sistemi d'equazioni. Infine si può cambiare il numero delle variabili indipendenti. Il metodo generale per trattare tutte queste equazioni è sempre lo stesso, cioè bisogna prima considerare delle equazioni aggiunte, poi bisogna ottenere una formula di reciprocità tra le soluzioni delle equazioni date e quelle delle equazioni aggiunte, analoga al teorema di GREEN. Bisogna in seguito calcolare delle soluzioni fondamentali delle equazioni aggiunte. La loro introduzione nella formula precedente conduce a nuove formule che esprimono i valori delle incognite stesse e delle loro derivate al contorno del campo o in una parte del contorno. L'uso delle funzioni analoghe a quelle di GREEN serve ad eliminare, nelle formule, elementi al contorno e che non sono caratteristici.

In una parola, il processo fondamentale di GREEN e quelli che ne derivano più o meno direttamente nel caso delle equazioni iperboliche e paraboliche possono trasportarsi, dal caso fondamentale delle equazioni di LAPLACE e delle altre equazioni alle derivate parziali, alle differenti equazioni integro–differenziali che noi abbiamo considerato. Ci sono molte difficoltà di particolari; e la difficoltà più grande è quella di determinare la funzione fondamentale, e per ottenerla conviene applicare il processo del passaggio dal finito all'infinito, che anche in questo caso conduce alla risoluzione della questione come in tutte le precedenti.

Così s'abbraccia un vasto insieme d'equazioni integro–differenziali. Come vedremo adesso, queste equazioni hanno speciale interesse dal punto di vista delle applicazioni alla fisica.

Ciò che caratterizza quest'insieme d'equazioni è che la variabile t, che si riferisce all'integrazione o che serve a enumerare le equazioni, è completamente distinta dalle variabili della derivazione.

Ma in un'altra classe, che ha molto interesse per le applicazioni, la stessa variabile comparisce anche come variabile di derivazione. Come equazione tipica di questa classe noi scriviamo:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + \int_0^t \frac{\partial^2 u(x,\tau)}{\partial x^2} \varphi(t,\tau)\, d\tau .$$

Per questa equazione il metodo della separazione delle variabili o delle soluzioni semplici (FOURIER) conduce alle soluzioni più utili nella fisica.

IV.

SUNTO DEI DIFFERENTI PROBLEMI CONSIDERATI. LA TEORIA DELLA PERMUTABILITÀ DI PRIMA E DI SECONDA SPECIE.

Dal complesso delle considerazioni precedenti si manifestano due grandi classi di problemi:

1° Il problema delle equazioni integrali nel senso più generale;

2° Il problema generale delle equazioni integro-differenziali.

Per queste ultime si vede anche che sono applicabili i due grandi metodi delle soluzioni fondamentali (GREEN) e delle soluzioni semplici (FOURIER).

Sarebbe impossibile non parlare in questo momento di un metodo e di una specie di calcolo che ha servito con grande utilità per la soluzione dei problemi che abbiamo esaminato e che ha mostrato risorse veramente eccezionali a questo rapporto. Voglio parlare del metodo delle *funzioni permutabili*.

Ma se da una parte ha servito alla soluzione di molti problemi, dall'altra, per il suo sviluppo, ha condotto a proporne altri e a generare una nuova classe di questioni.

Il fondamento della teoria delle funzioni permutabili consiste nell'operazione di composizione, e vi sono due specie di composizioni:

$$\int_x^y f(x,\xi)\,\varphi(\xi,y)\,d\xi, \tag{9'}$$

che si dice una composizione di prima specie, e

$$\int_0^1 f(x,\xi)\,\varphi(\xi,y)\,d\xi, \tag{9''}$$

che si dice una composizione di seconda specie.

Ora f e φ sono permutabili di prima specie se l'espressione (9′) non cambia sostituendola con l'altra

$$\int_x^y \varphi(x,\xi)\,f(\xi,y)\,d\xi,$$

e sono permutabili di seconda specie se l'espressione (9'') è uguale a

$$\int_0^1 \varphi(x, \xi) f(\xi, y)\, d\xi .$$

Le operazioni di composizione sono associative, e, se le funzioni sono permutabili, anche permutative. Somme di funzioni permutabili sono permutabili. Se si opera la composizione su funzioni uguali si ottengono funzioni che si possono chiamare potenze di composizione.

I due teoremi fondamentali sono i seguenti:

Se in una serie di potenze di una variabile, convergente in un certo campo, si moltiplica ogni potenza della variabile per la potenza di composizione corrispondente, della prima specie d'una funzione finita, si trova sempre una funzione intera.

Se in una serie d'una variabile, che è il rapporto di due funzioni intere, si moltiplica ogni potenza per la potenza di composizione corrispondente di seconda specie di una funzione finita, si trova sempre il rapporto di due funzioni intere.

Su questi due teoremi e sulla loro generalizzazione, si può far basare la soluzione delle equazioni integrali lineari e delle equazioni integro-differenziali lineari.

V.

APPLICAZIONI. FUNZIONI ANALITICHE DI PIÙ VARIABILI. RELAZIONI CON ALTRE TEORIE ANALITICHE E GEOMETRICHE. MECCANICA DELL'EREDITÀ.

Termineremo con un brevissimo sunto delle applicazioni dei differenti tipi di teorie svolte e dei punti loro di contatto con altre teorie.

Devo menzionare dapprima un'applicazione delle funzioni di linee alla teoria delle funzioni analitiche di parecchie variabili.

Quando si applica l'integrazione alle funzioni di più variabili, i campi d'integrazione sono limitati, nel caso più semplice, da linee, ed in generale da superficie o da iperspazi. Ora i risultati delle integrazioni non dipendono che dai contorni dei campi d'integrazione, e perciò l'integrazione delle funzioni di più variabili conduce alle funzioni di linee o, in generale, a funzioni di superficie e di iperspazi.

In questo modo si possono sviluppare certi capitoli relativi alle funzioni di più variabili, applicando il teorema di CAUCHY generalizzato, e riferendosi alla connessione degli spazi. Io ho dato un sunto di queste questioni in alcuni lavori che ho riepilogato in una delle mie lezioni a Stoccolma.

Le ricerche del signor HILBERT non sono che un caso particolare di quelle che si riferiscono al passaggio dal finito all'infinito di cui abbiamo trattato fin dal principio. Infatti, se esaminiamo lo sviluppo analogo a quello del TAYLOR, abbiamo già visto che ogni termine è paragonabile a un polinomio omogeneo d'un grado determinato.

Esaminiamo il termine di secondo grado.

Un problema fondamentale era di trasportare la teoria dalle forme quadratiche al caso delle forme–limite così formate. La soluzione di questa questione e l'applicazione ai problemi degli sviluppi in serie e a questioni di fisica matematica è stata l'opera del signor HILBERT e della sua scuola.

L'applicazione delle equazioni integrali alle equazioni, alle derivate parziali di tipo iperbolico e parabolico, e ai problemi di geometria che si riferiscono, ha mostrato anche la portata dei procedimenti che risultano dalle questioni che noi abbiamo trattato.

Passerò ora ai problemi di meccanica e di fisica.

Mi permetterò di dire qualche parola intorno alla meccanica che ha avuto il nome di *meccanica ereditaria*. Nei problemi corrispondenti si tiene conto di tutti gli stati passati per determinare gli stati attuali di un sistema, pensando che ogni azione esercitata ha lasciato un ricordo che non può essere trascurato, ma che a poco a poco si cancella. La discussione filosofica sulla esistenza delle vere azioni ereditarie si presenta con molto interesse. Ma qualunque sia il risultato di questa discussione, esiste una necessità pratica di esaminare le questioni dell'elasticità, del magnetismo e dell'elettricità tenendo conto delle azioni ereditarie. In un gran numero di casi che spessissimo si presentano, non si può trascurare l'eredità senza cadere in grandi inesattezze.

Ora si vede subito che se il valore d'una certa quantità, per esempio una deformazione, dipende da tutti i valori presi da un'altra quantità, per esempio la forza esercitata a partire da un certo istante fino all'istante attuale, si cade necessariamente in una quantità che è una funzione di linea. Perciò l'analisi di queste funzioni è la sola che si possa applicare per risolvere i differenti problemi che si presentano su questo soggetto.

Le equazioni integro–differenziali alle derivate parziali che noi abbiamo considerato precedentemente corrispondono appunto a questi problemi e in questa maniera, se si suppone in una prima approssimazione che l'eredità sia lineare, cioè che si possa applicare il principio della sovrapposizione degli effetti dovuti a differenti cause, si può trasportare l'analisi dei problemi non ereditari nel campo dei problemi ereditari.

Ora si presenta una circostanza favorevole. Si può stabilire un principio che è valevole per tutte le azioni ereditarie, quello che ho chiamato il *principio del ciclo chiuso* e che si enuncia nei termini seguenti: le leggi ereditarie non cambiano col tempo, se tutte le azioni periodiche producono effetti periodici.

È vera anche la proposizione reciproca.

Poiché in natura i fenomeni ereditari si presentano in modo che le cause periodiche conducono a effetti periodici, in tutti i calcoli si ha una grande semplificazione, poiché i nuclei che compariscono come conseguenza del ciclo chiuso sono funzioni permutabili.

Applicando l'analisi e l'algebra di queste funzioni, le soluzioni divengono facilissime e si possono facilmente usare nella pratica.

XVII.

FLOW OF ELECTRICITY IN A MAGNETIC FIELD

« University of California Publications in Mathematics », vol. 1, 1921; pp. 249–320.

FIRST LECTURE

SECTION 1. – Theory of electrical phenomena. SECTION 2. – Electrons. SECTION 3. – Electron theory of metals. SECTION 4. – The problem of flow of electricity in a plane, homogeneous, isotropic metal plate kept at a constant temperature and subject to the action of a uniform magnetic field perpendicular to it. SECTION 5. – Mathematical theory in relation to the preceding problem: general formulae. SECTION 6. – Characteristics of the problem. SECTION 7. – Point electrodes. SECTION 8. – Other general formulae. SECTION 9. – The principle of reciprocity.

SECTION 1.

In historical order, the first theory of electrical phenomena may be characterized by the name of COULOMB. This theory assumes the real existence of particular, imponderable substances called electricity, and the instant action at a distance (actio in distans) of such substances, an action analogous to that between masses in the theory of gravitation.

A new theory of electricity corresponds to the general energetical tendencies of the second half of the last century; it is characterized by the names of FARADAY, MAXWELL, HERTZ, HEAVISIDE. This theory does not admit the real existence of particular substances forming electricity; it denies the possibility of immediate action at a distance. According to this theory, the actions between electrified bodies are exercised by means of ether, in which the presence of these bodies determines particular deformations and perturbations; electrical actions propagate themselves in ether with the velocity of light. In the MAXWELL–HERTZ theory the electric charge has a purely mathematical definition; it loses the physical concrete meaning attributed to it by the old theory. Among the advantages of MAXWELL'S theory, must be remembered that of having connected two parts of physics, electricity and optics, which before were always considered completely distinct.

Already in the last years of the nineteenth century the deeper study of already known phenomena and of new ones, led physicists to a new theory of electrical phenomena, i.e., the electron theory [1] which has been considerably developed in these first years of present century. This new theory takes from the older one the notion of the real existence of a particular *substratum* of electrical phenomena to which it attributes an atomistic structure, and on the other hand it holds from MAXWELL'S theory the principle of action by means of a medium and the general form of equations. The modifications that these undergo in the new theory, though of an important intrinsic meaning, are externally very slight.

SECTION 2.

We shall recall some experimental facts that led physicists to the notion of elementary electric charges, or electric corpuscles, or electrons.

HELMHOLTZ was the first to observe that the laws of electrolysis given by FARADAY lead to the conclusion that to the atomistic structure of matter corresponds an atomistic structure of electricity. In fact, according to these laws, the electric charge that is carried by a monovalent atom in electrolysis always retains the same absolute value; and the one carried by a bivalent atom always retains the double absolute value, etc. This law is very easily explained, if one considers that each atom of matter transfers in electrolysis a whole number, equal to the valency, of elementary electric charges.

Researches on the electrical conductivity of gases have demonstrated, in a clear and suggestive manner, the existence of atoms of electricity [2]. For instance, under the action of ROENTGEN rays, or of radio-active substances, gases acquire, together with conductivity, the property of condensing more easily the supersaturated vapor of water; the condensation takes place in the form of electrified drops, of which it has been possible to measure the charge. For this latter either the same value of the charge carried by a monovalent atom in electrolysis has been found or a multiple of that value (between 4 and 5×10^{-10} electrostatic units C.G.S.).

Among the other experimental researches that led to the acceptance of the granular structure of electricity and the determination of the value of the elementary electric charge, we note those on the cathode rays, those on the emission of electrified particles from bodies brought to an incandescent state or exposed to ultra-violet radiations, those on the phenomena of radio-activity and on the ZEEMANN effect.

It will be observed, that while in a whole series of phenomena the existence of negative, free electrons (not bound to ordinary matter) has been demonstrated, the same can not be said for positive electrons.

Lastly we note that the hypothesis of bodies containing electrons of different distribution and mobility, according to the substance of which they are formed, has been able to eliminate the difficulties that arose in MAXWELL'S theory concerning the propagation of light in material media.

SECTION 3.

To explain the different phenomena, different properties have been attributed to electrons (concerning especially their degrees of freedom) according to the nature of the substances in which they are found. It will suffice to give a short explanation of the electronic theory of metals.

To explain the conductivity of metals, it is assumed that their atoms emit with facility electrified corpuscles. According, then, to the electron theory, in metals there are not only, as in insulators, bound electrons, that follow the molecules or the atoms in their thermal oscillations and that only separate from them under particular actions, but also free electrons that move in the inter-molecular or inter-atomic spaces, with a movement analogous to that of the molecules of a gas.

Concerning the movement of these electrons, there are two different ways of viewing the question: the electron theory of metals may be developed on the assumption of RIECKE, DRUDE, LORENTZ [3] that a free electron effects a great number of collisions with molecules or with the neutral atoms before uniting again with a charge of contrary sign; or one may assume, as J. J. THOMSON proposes [4], that the electron emitted by an atom is instantly captured by the nearest atoms. We shall retain the first point of view, which is more generally adopted. We shall thus be able to assume that in a metal an equilibrium of temperature between molecules and electrons is reached and to these latter the formulae of the ordinary kinetic theory may be applied.

Let us suppose that, at the absolute temperature T, the positive and negative electrons per cubic centimeter are respectively N_1 and N_2, U_1 and U_2 are the average velocities of agitation, in all directions, of the two kinds of electrons; e stands for the absolute value of the charge of a positive or negative electron. The average free path l_1 of the positive electrons will be the average of the free paths traveled between two collisions, by these electrons; the average interval of time between two collisions will be represented by $T_1 = \frac{l_1}{U_1}$; l_2 and T_2 will have a similar meaning for the negative electrons.

Having once reached the thermal equilibrium, the average kinetic energy of all the electrons will be equal to that of a gas molecule at the same absolute temperature; we shall then have according to the kinetic theory $\frac{m_1 U_1^2}{2} = \frac{m_2 U_2^2}{2} = \alpha T$. ($\alpha$ is a universal constant; m_1, m_2 the masses of the electrons of the two kinds).

Let us now consider a conductor in which an electric field X parallel to the axis x has been created; let us suppose that X does not appreciably affect U_1, U_2, l_1, l_2. This field will communicate the acceleration eX/m_1 to a positive electron in the direction of the said axis. At the end of its free path, therefore, the electron will have acquired, in the direction x, an excess of velocity (above the velocity of agitation U_1 existing even before the creation of the electric field) $\frac{eX}{m_1} T_1 = \frac{eXl_1}{m_1 U_1}$; in the collision that ends the free path the electron loses this excess of velocity. We may, therefore, say that owing to the field X during a free path a positive electron acquires in the direction x an average excess of velocity $W_1 = \frac{1}{2} \frac{eXl_1}{m_1 U_1} = eX \frac{l_1 U_1}{4\alpha T}$. The excess of velocity that an electron acquires in a given direction when subject to a unit force having the same direction, is called the mobility of the electron. Calling V_1 the mobility of a positive electron, we shall have $V_1 = \frac{l_1}{2m_1 U_1} = \frac{l_1 U_1}{4\alpha T}$. In the same way, for a negative electron we shall have $W_2 = -\frac{1}{2} \frac{eXl_2}{m_2 U_2} = -eX \frac{l_2 U_2}{4\alpha T}$; $V_2 = \frac{l_2}{2m_2 U_2} = \frac{l_2 U_2}{4\alpha T}$. Under the action of the electric field, there will be added to the disorderly movement of the electrons a movement of the positive electrons in the direction of the field and of the negative electrons in the opposite direction. Because of this movement, the unit of surface perpendicular to the axis x will be crossed in the unit of time by the quantity of electricity: $eN_1 W_1 - eN_2 W_2 = e^2 X (N_1 V_1 + N_2 V_2)$. Denoting by j the density of current we shall have: $j = e^2 (N_1 V_1 + N_2 V_2) X$. This equation expresses OHM'S law. Denoting by σ the electric conductivity of the metal we obtain: $\sigma = e^2 (N_1 V_1 + N_2 V_2) = \frac{e^2}{2} \left(\frac{N_1 l_1}{m_1 U_1} + \frac{N_2 l_2}{m_2 U_2}\right) = \frac{e^2}{4\alpha T} \cdot (N_1 l_1 U_1 + N_2 l_2 U_2)$.

We will limit ourselves to these short notes on the general part of the electronic theory of metals, in order to consider some particular problems that, owing to this theory, it has been possible to solve.

SECTION 4.

Among the phenomena which the electronic theory has been able to explain and often to foresee, there is a whole class of phenomena that take place when a conductor is traversed by an electric or thermal current and is subject to the action of a magnetic field. These lectures will treat especially of the results of researches on conductors traversed by an electric current and subject to the action of a magnetic field.

Let us consider a plane, homogeneous, isotropic, metal plate subject to the action of a uniform magnetic field H normal to it. We shall refer the points of the plate to the axes x, y, which form together with the direction H an orthogonal right-handed system. Let us denote with X, Y the components of the electric force (parallel to the axes) of potential V; with j_x, j_y the components of the density of current; with $d\xi_1/dt$, $d\eta_1/dt$, $d\xi_2/dt$, $d\eta_2/dt$ the components of the velocities of the electrons of the two kinds (these velocities are added to those of agitation that exist also without the action of the electric field and of the magnetic field). e, N_1, N_2, V_1, V_2 will keep the meaning they had before.

The components of the density of current will now be given by the formulae

$$(1) \qquad j_x = e\left(N_1 \frac{d\xi_1}{dt} - N_2 \frac{d\xi_2}{dt}\right) \quad ; \quad j_y = e\left(N_1 \frac{d\eta_1}{dt} - N_2 \frac{d\eta_2}{dt}\right).$$

A positive electron that moves in the direction l with the velocity V is equivalent to an element of current (having the same direction) if the product of i, intensity of current, by dl, length of the element, be equal to ev. If, therefore, the direction l form with the magnetic field H an angle θ, the electron is subject to an electromagnetic force, perpendicular to L and to H and having the direction indicated by the well known rule of the three fingers of the left hand; the intensity of this force is given by $ev\mathrm{H}\sin\theta$.

If the plate be kept at a constant temperature, every electron is subject only to the electric force depending on the distribution of the potential and to the electromagnetic force produced by the movement of the electron in the magnetic field.

The velocities of electrons will therefore be determined by the formulae:

$$(2) \qquad \begin{cases} \dfrac{d\xi_1}{dt} = eV_1\left(X - H\dfrac{d\eta_1}{dt}\right), & \dfrac{d\xi_2}{dt} = eV_2\left(X - H\dfrac{d\eta_2}{dt}\right) \\[2ex] \dfrac{d\eta_1}{dt} = eV_1\left(Y - H\dfrac{d\xi_1}{dt}\right), & \dfrac{d\eta_2}{dt} = eV_2\left(Y + H\dfrac{d\xi_2}{dt}\right). \end{cases}$$

In these formulae, in place of X, Y we can put $-(dV/dx)$, $-(dV/dy)$.

Let us solve the equations (2) with respect to $d\xi_1/dt$, $d\eta_1/dt$, $d\xi_2/dt$, $d\eta_2/dt$, and let us substitute the expressions thus obtained in the equations (1); then we shall have:

$$(3) \qquad j_x = -K\left(\frac{dV}{dx} - \lambda\frac{dV}{dy}\right), \quad j_y = -K\left(\frac{dV}{dy} + \lambda\frac{dV}{dx}\right)$$

where

$$K = e^2\left(\frac{N_1 V_1}{1 + e^2 V_1^2 H^2} + \frac{N_2 V_2}{1 + e^2 V_2^2 H^2}\right); \lambda = \frac{\Sigma}{K}; \Sigma = e^3 H\left(\frac{N_1 V_1^2}{1 + e^2 H^2 V_1^2} + \frac{N_2 V_2^2}{1 + e^2 H^2 V_2^2}\right).$$

The flow of current through every closed line that forms the complete boundary of a portion of the plate free from electrodes, must be zero; we therefore have

$$\frac{dj_x}{dx} + \frac{dj_y}{dy} = 0.$$

We deduce this equation from (3), remembering that the potential V must (as is the case when the magnetic field is missing) satisfy the condition $\Delta_2 V = 0$.

If the plate be insulated, the components of the density of current in the direction of the normal to the free boundary must be zero, likewise the component of the density of current in the direction of the normal to a line of flow.

Bearing in mind (3) and indicating with t and n the tangent and the normal respectively to a line of flow, or to the insulator boundary (t, n and the direction H form a right-handed system) we deduce from the boundary conditions

$$\frac{dV}{dn} + \lambda \frac{dV}{dt} = 0.$$

Therefore, if l be a direction forming with n an angle β, so that $tg\beta = \lambda$, (the positive direction l should be included in the right angle formed by the positive direction n and t) we have: $(dV/dl) = \sigma$ (Fig. 1).

Therefore, the condition to which V must answer in the interior of the plate, is the same one we should have without the magnetic field; for the condition $(dV/dn) = \sigma$, that we should have along the insulated boundary without the field, we must substitute instead the condition $(dV/dl) = \sigma$, if the field exists.

If along parts of the boundary there are electrodes of a negligible resistance, the potential V will have to assume determined constant values along them.

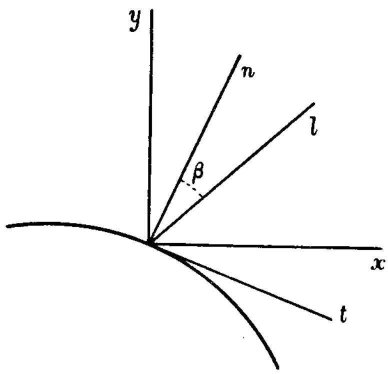


Fig. 1.

We may also conclude, that under the action of the magnetic field either the lines of flow, or the equipotential lines, or both the two systems of lines, are deformed so that the line of flow and the equipotential line passing through a given point of the plate, are no longer perpendicular to one another, as is the case when the magnetic field is missing, but form instead an angle $\beta/2 - \beta$. The value of β depends on the nature of the metal and on the intensity of the magnetic field. For bismuth β can exceed 10°.

Limiting our researches to the variation of potential produced by the magnetic field, i.e., to the determination of the HALL effect, it will be sufficient to consider the function $v = V - V_0$ (V_0 represents the potential when there is no magnetic field). We have already seen that, by indicating with t and n the tangent and the normal to a line of flow or to the insulator boundary, we find $\frac{dV}{dn} = \lambda \frac{dV}{dt}$; as $\frac{dV_0}{dn} = \sigma$, we shall also have $\frac{dV}{dn} = - \lambda \frac{dV}{dt}$. Bearing in mind also (3) we obtain:

$$j_t = - K (1 + \lambda^2) \frac{dV}{dt}.$$

From this equation and from the preceding one we deduce $\frac{dv}{dn} = \frac{\lambda}{K(1+\lambda^2)} j_t$.

Let us consider the case in which the lines of flow do not change under the action of the magnetic field; in this case, whatever the value of the field may be, the normal n to the line of flow that passes through a point of the plate, coincides with the tangent to the equipotential line, corresponding to the zero field, that passes through the same point. If s be an equipotential line, when the magnetic field does not exist and A and B be two points along it, by integrating the last equation along s, between A and B, we shall have $V_A - V_B = \frac{\lambda}{K(1+\lambda^2)} \int_A^B j_t \, ds = \frac{\lambda}{K(1+\lambda^2)} J$, in which J is the ratio between the intensity of the total current flowing in the plate and the thickness of this latter. From the last equation we see that between two points of the boundary that are at the same potential when the magnetic field is zero, we must observe, under the action of a magnetic field, a constant HALL effect, however the said points may be chosen. In the case we are considering, the last equation determines completely the HALL effect.

SECTION 5.

Starting from the laws of which we have been speaking, I shall develop the mathematical theory of the propagation of electric currents in a plate under the action of a magnetic field [6].

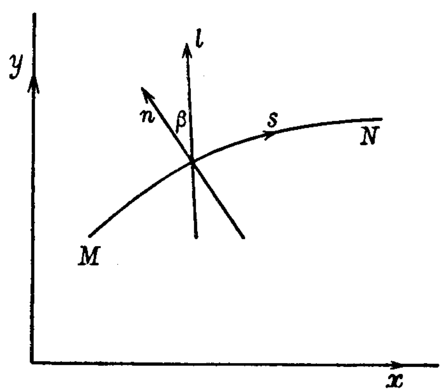


Fig. 2.

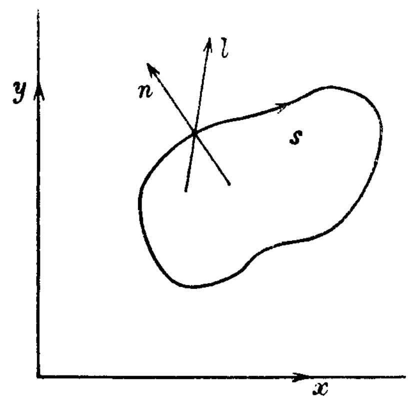


Fig. 3.

We shall now begin, and in the following lessons continue, the explanation of such a theory. The theoretical results have led to several experimental researches, of which we shall also speak.

Let us begin by establishing some fundamental formulae, which are to be used through all the following exposition (Fig 2).

Let s be any curve whatever, in the interior or including part or the whole of the boundary of the plate; let n be its normal so directed as to make the pair of orthogonal directions s, n, congruent in the plane to the pair x, y.

From the formulae (3) of Section 4, it follows that the flow of electricity through ds will be expressed by:

$$j_n\, ds = (j_x \cos nx + j_y \cos ny)\, ds = -\mathrm{K}\left(\frac{\delta \mathrm{V}}{\delta n} + \lambda \frac{\delta \mathrm{V}}{\delta s}\right) ds = \frac{-\mathrm{K}}{\cos\beta}\, \frac{\delta \mathrm{V}}{\delta l}\, ds,$$

where l is a direction forming the angle β with n.

The flow across MN, that is to say across the whole line s, will be:

$$(4)\qquad \int_s j_n\, ds = -\mathrm{K}\int_0 \frac{d\mathrm{V}}{dn}\, ds - \lambda\mathrm{K}\,(\mathrm{V_N} - \mathrm{V_M}) = \frac{-\mathrm{K}}{\cos\beta}\int_s \frac{\delta \mathrm{V}}{\delta l}\, ds.$$

We find, analogously, the other formula:

$$(5)\qquad \int_s \mathrm{V} j_n\, ds = -\mathrm{K}\int_s \mathrm{V}\frac{\delta \mathrm{V}}{\delta n}\, ds - \frac{\lambda\mathrm{K}}{2}(\mathrm{V_N^2} - \mathrm{V_M^2}) = \frac{-\mathrm{K}}{\cos\beta}\int_s \mathrm{V}\frac{\delta \mathrm{V}}{\delta l}\, ds.$$

For the validity of these formulae we have only to admit V to be finite all along s; and its first derivatives to be finite, or infinite of an order inferior to a number smaller than one. (Here and henceforward in defining the order of infinity of a function in a given point, we shall take as fundamental infinity the inverse of the distance to the same point) (Fig. 3).

Let ut suppose that the curve s is closed (Fig. 3). Then V being single valued, since we assume that in no region of the plate electromotive forces are acting, the formulae (4) and (5) become

$$(\mathrm{A})\qquad \int_s j_n\, ds = -\mathrm{K}\int_s \frac{d\mathrm{V}}{\delta n}\, ds = \frac{-\mathrm{K}}{\cos\beta}\int_s \frac{\delta \mathrm{V}}{\delta l}\, ds,$$

$$(\mathrm{B})\qquad \int_s \mathrm{V} j_n\, ds = -\mathrm{K}\int_s \mathrm{V}\frac{\delta \mathrm{V}}{\delta n}\, ds = \frac{-\mathrm{K}}{\cos\beta}\int_s \mathrm{V}\frac{\delta \mathrm{V}}{\delta l}\, ds.$$

SECTION 6.

Let us suppose that the current enters through the portion AB of the boundary, by means of an electrode of negligible resistance, and goes out through the portion CD of the boundary, which also forms an electrode of negligible resistance, whereas the portions BC and AD are insulated (Fig. 4).

We shall have, then, along AB and CD respectively, $\mathrm{V} = \mathrm{C_1}$, $\mathrm{V} = \mathrm{C_2}$ ($\mathrm{C_1}, \mathrm{C_2}$ being constants); and along BC and AD $(\delta\mathrm{V}/\delta l) = 0$.

For points of the plate in the interior of the curve σ, V will be regular and harmonic. Now, if we call s the whole boundary and assume as verified the above mentioned condition about the order of

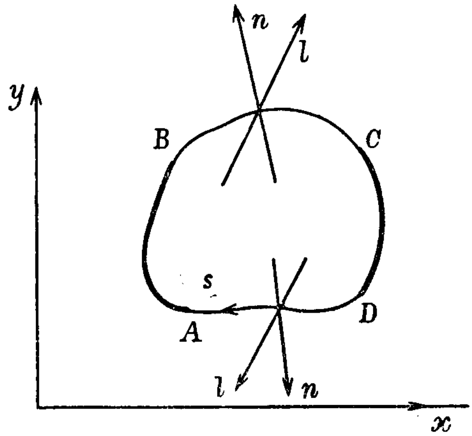


Fig. 4.

infinity of the derivatives of V along s, we shall have, by reason of (B),

$$\int_{AB} V j_n \, ds + \int_{CD} V j_n \, ds = -K \int_s V \frac{\delta V}{\delta n} ds,$$

because $\frac{\delta V}{\delta l} = \frac{j_n \cos \beta}{-K}$ is null on BC and AD. Then

$$C_1 \int_{AB} j_n \, ds + C_2 \int_{CD} j_n \, ds = -K \int_s V \frac{\delta V}{\delta n} ds.$$

Let us call J the ratio between the intensity of the total current flowing in the plate and the thickness of this latter; we have:

$$J = \int_{CD} j_n \, ds = \int_{AB} j_n \, ds$$

and also

$$(C_2 - C_1) J = -K \int_s V \frac{\delta V}{\delta n} ds$$

and according to the well known divergence theorem in harmonic functions:

$$(C_1 - C_2) J = K \int_\sigma \Delta V \, \delta\sigma.$$

It follows from this equation that, if $C_1 = C_2 = 0$, V must be zero at every point of σ; and, consequently, that only one solution for V may correspond to given values of C_1, C_2. We, therefore, have the theorem: *When the constant values of the potential along the electrodes* AB *and* CD *are known, the distribution of currents in the plate is fully determined.*

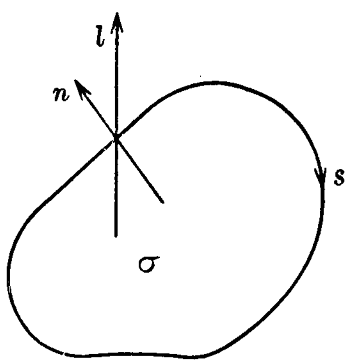


Fig. 5.

In like manner we see that, if $J = 0$, V must be constant; and therefore the distribution of current is determined also if the intensity of the total current flowing in the plate be known.

The preceding theorem may easily be extended. Let σ be an area (Fig. 5) in the interior of which the harmonic function V is regular, and let s be its boundary. In consequence of (B), we shall have (if on the boundary V be finite and its derivatives be finite also or infinite of orders inferior to a number smaller than 1):

$$\int_s V \frac{\delta V}{\delta l} ds = \cos \beta \int_s V \frac{\delta V}{\delta n} ds = \cos \beta \int_s \Delta V \, d\sigma.$$

Hence, if V be zero in some portions of the boundary and $\delta V / \delta l$ zero in (Fig. 5) the other portions of it, V must be zero in σ; and therefore if V be known in certain portions of the boundary and $\delta V/\delta l$ be known in the other portions of it, V must be determined in σ. If only $\delta V/\delta l$ be known along the whole boundary, V is determined except for an additive constant. (A) gives us the condition with which $\delta V/\delta l$ must comply: (A') $\int\limits_s \frac{\delta V}{\delta l} ds = 0$.

SECTION 7.

Let us now suppose that the current enters into the plate and comes out of it through two point electrodes A and B (Fig 6). Let us then go back to the formula (A) and suppose at first that the curve s is the curve s_a which surrounds the point A (Fig. 6). If we call J the ratio between the intensity of the current and the thickness of the plate, and suppose n to be directed externally to the area which s_a encloses, we shall have:

$$J = \int\limits_{s_a} j_n\, ds_a = -K \int\limits_{s_a} \frac{\delta V}{\delta n} ds_a;$$

whereas, if we call s_b a curve surrounding the point B and n the normal external to the area which s_b encloses, we shall have:

$$J = \int\limits_{s_b} j_n\, ds_b = -K \int\limits_{s_b} \frac{\delta V}{\delta n} \delta s_b.$$

If, however, we take a line s_c including both A and B or excluding both, we shall have:

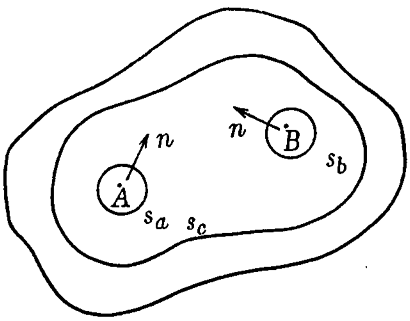


Fig. 6.

$$0 = \int\limits_{s_c} j_n\, ds_c = -K \int\limits_{s_c} \frac{\delta V}{\delta n} ds_c.$$

In the above-mentioned hypothesis, according to what is done in the ordinary case when there is no magnetic field, we shall assume:

$$(6) \qquad V = \frac{J}{2\pi K}(\log r_B - \log r_A) + W,$$

W being harmonic and regular, and r_A, r_B being the distances between the generic point xy and A and B respectively. On the boundary of the area of the plate the condition:

$$(7) \qquad \frac{\delta V}{\delta l} = 0$$

must be fulfilled; which is the same as the condition:

$$(7_1) \qquad \frac{\delta W}{\delta l} = \frac{\delta}{\delta l}\left(\frac{J}{2\pi K}(\log r_B - \log r_A)\right).$$

Thus the problem of the distribution of currents is brought back to the determination of the harmonic regular function W, the values $\delta W/\delta l$ of which are known on the boundary, being given by (7_1). It is easy to see that the condition (A^1) of Section 6, $\int_s \frac{\delta V}{\delta l} ds = 0$, is fulfilled. W will therefore be determined but for an arbitrary additive constant, which had evidently no influence on the law of the distribution of currents.

Let us now suppose that the current enters through a point electrode A and comes out through an electrode BC, placed on the boundary and of negligible resistance; and let us give to J the usual meaning. In this case (Fig. 7), according to what we have already seen in Section 6, we have:

$$V = \frac{-J}{2\pi K} \log r_A + W,$$

where W is a function harmonic and regular in the interior of σ. Along the free and insulated portion BCD of the boundary we must have:

$$\frac{\delta W}{\delta l} = \frac{\delta}{\delta l}\left[\frac{J}{2\pi K} \log r_A\right]$$

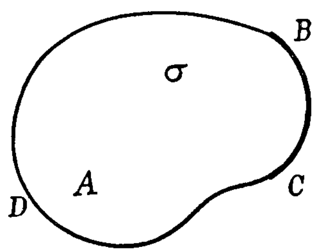


Fig. 7.

and, along BC,

$$W = C + \frac{J}{2\pi K} \log r_A,$$

where C is the constant value that V is to assume along the electrode BC. Hence, if the function W be finite and its derivatives along s be finite or infinite of an order inferior to a number smaller than l, this function will be determined within σ (see Section 6) and therefore the law of the distribution of currents will be determined also.

We shall assume, as is generally done, that, if a current of intensity I comes out through an electrode, the fact may also be described by saying that a current of intensity $-$ I enters through it. Let J be the ratio between the intensity of the current (positive or negative) that penetrates into the plate through the point electrode and the thickness of the plate. In the neighborhood of the electrode, the potential will be:

$$V = \frac{-J}{2\pi K} \log r + W,$$

where r is the distance from the generic point xy to the electrode and W is a function harmonic and regular in the neighborhood of the same point.

The portion of potential:

$$\frac{-J}{2\pi K} \log r = \frac{J}{2\pi K} \log \frac{1}{r}$$

will be called potential of the electrode and will be the logarithmic potential of a point, the mass of which is $J/2\pi K$.

SECTION 8.

Let us now fix some other fundamental formulae, to be added to those which we found in Section 5.

Let us see what happens when we invert the sense of the magnetic field, that is to say change H into $-$H. In order to distinguish one case from the other, we shall say that in the former the magnetic field is *direct*, in the latter the magnetic field is *inverted*. From the expressions given in Section 4 for K and λ, it follows that, when the field is inverted, K remains unchanged, whereas the sign of λ is changed, which is the same as saying that the sign of the angle β is changed; consequently, instead of the direction l we must consider the direction symmetric to it (Fig. 8) with respect to the normal n, which new direction we shall call l_1. If we give an index 1 to all the elements corresponding to this case, we shall have the formulae:

$$j_{1x} = -K\left(\frac{\delta V_1}{\delta x} + \lambda \frac{\delta V_1}{\delta y}\right), \qquad j_{1y} = -K\left(\frac{\delta V_1}{\delta y} - \lambda \frac{\delta V_1}{\delta x}\right)$$

and also

$$\frac{\delta V_1}{\delta l_1} = 0$$

along the portions of the boundary that are free and insulated.

Let now s be any closed line whatever, in the interior or reaching the boundary of the plate; let n be the normal to s, directed as we explained in Section 5. We shall have

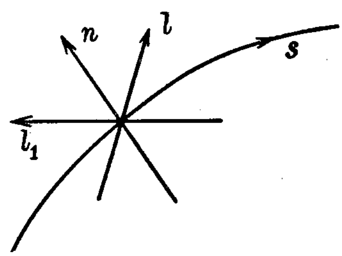


Fig. 8.

$$V_1 j_n - V j_{1n} = V_1 (j_x \cos nx + j_y \cos ny) -$$
$$- V(j_{1x} \cos nx + j_{1y} \cos ny) =$$
$$= -K\left[V_1\left(\frac{\delta V}{\delta n} + \lambda \frac{\delta V}{\delta s}\right) - V\left(\frac{\delta V_1}{\delta n} - \lambda \frac{\delta V_1}{\delta s}\right)\right] =$$
$$= -K\left(V_1 \frac{\delta V}{\delta n} - V \frac{\delta V_1}{\delta s}\right) - \lambda K \frac{\delta W}{\delta s} = \frac{-K}{\cos\beta} = \left(V_1 \frac{\delta V}{\delta l} - V \frac{\delta V_1}{\delta l_1}\right)$$

and integrating along the whole line s:

$$\text{(C)} \quad \int_s (V_1 j_n - V j_{1n}) ds = -K \int_s \left(V_1 \frac{\delta V}{\delta n} - V \frac{\delta V_1}{\delta n}\right) ds = \frac{-K}{\cos\beta} \int_s \left(V_1 \frac{\delta V}{\delta l} - V \frac{\delta V_1}{\delta l_1}\right) ds,$$

which is one of the formulae that we wanted to establish. This formula may be extended. In fact, let us denote by S not merely one closed curve but a number of closed curves bounding a field σ' internal to the area σ of the plate. As the above formula is true for every closed curve, it will be true also if we substitute the curves S for the single curve s; hence if V and

V_1 be regular in the interior of the area σ', we shall have, by taking n external to the field σ':

$$\text{(D)} \qquad \int_s (V_1 j_n - V j_{1n})\,\delta \int = \frac{-K}{\cos\beta}\int_s \left(V_1 \frac{\delta V}{\delta l} - V \frac{\delta V_1}{\delta l_1}\right) ds = 0,$$

since according to GREEN'S theorem, we have

$$\int_s \left(V_1 \frac{\delta V}{\delta n} - V \frac{\delta V_1}{\delta n}\right) ds = 0.$$

Let us suppose S to be formed by the two systems of closed curves S' and S''; then the formula (D) may be written also as:

$$\text{(D')} \qquad \frac{1}{\cos\beta}\int_{S''} \left(V_1 \frac{\delta V}{\delta l} - V \frac{\delta V_1}{\delta l_1}\right) dS' + \int_{S''} \left(V_1 \frac{\delta V}{\delta n} - V \frac{\delta V_1}{\delta n}\right) dS'' = 0.$$

The formulae (D) and (D'), which we have thus found, are extensions of GREEN'S theorem.

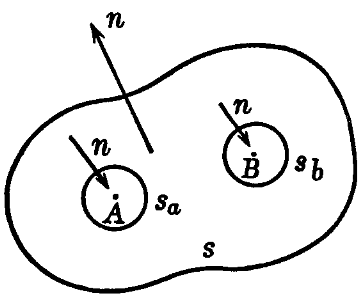


Fig. 9.

Let us now proceed to some applications of the preceding formulae. Let us take V as given by (6) with the condition (7); let us suppose S' to be formed by the boundary s of σ, and S'' to consist of two circles s_a and s_b having their centres in A and B. Let us suppose (Fig. 9) V regular in the interior of σ. The area σ' will be obtained by subtracting from σ the areas enclosed within s_a and s_b; σ' will therefore be limited by s, s_a, s_b. In V and V_1, being regular, we may apply (D'); and remembering that, on s, $(\delta V/\delta n) = 0$, we shall have:

$$\frac{-1}{\cos\beta}\int_s V \frac{\delta V_1}{\delta l_1} ds + \int_{s_a}\left(V_1 \frac{\delta V}{\delta n} - V\frac{\delta V_1}{\delta n}\right) ds_a + \int_{s_b}\left(V_1 \frac{\delta V}{\delta n} - V\frac{\delta V_1}{\delta n}\right) ds_b = 0.$$

But if we make the circles s_a and s_b grow indefinitely smaller, we see that

$$\lim \int_{s_a}\left(V_1 \frac{\delta V}{\delta n} - V\frac{\delta V_1}{\delta n}\right) ds_a = \frac{J}{K} V_{1A} \quad , \quad \lim \int_{s_b}\left(V_1 \frac{\delta V}{\delta n} - V\frac{\delta V_1}{\delta n}\right) ds_b = \frac{-J}{K} V_{1B},$$

where V_{1A} and V_{1B} denote the values of V_1 at the points A and B; hence

$$V_{1A} - V_{1B} = \frac{K}{J\cos\beta}\int_s V \frac{\delta V_1}{\delta l_1} ds.$$

From this formula the following proposition is deduced: *If the distribution of currents in a plate be known, when the current enters through* A *and goes out through* B *and the magnetic field is direct, the difference of the values* *of a harmonic regular function in the points* A *and* B *may be determined provided its derivative be known at the boundary in the direction l.*

It is evident that also another proposition subsists with it, i. e.: *If the distribution of currents in a plate be known, when the current enters through* A *and goes out through* B, *and the magnetic field is inverted, the difference of the values of a harmonic regular function in the points* A *and* B *may be determined provided its derivative be known at the boundary in the direction l.*

In other words, the potential V, corresponding to the *direct magnetic field* and to the pair of point electrodes A and B, is a *function analogous to* GREEN'S in the case when *the values of the derivative of a harmonic regular function* are known on the boundary in the direction l_1; whereas the potential corresponding to the *inverted magnetic field* and to the pair of point electrodes A and B, is a *function analogous to* GREEN'S in the case when the *values of the derivative of a harmonic regular function* are known on the boundary in the direction l.

Let us now consider the case when the current enters through a point electrode A and goes out through an electrode BC placed on the boundary and of negligible resistance (Section 7, Fig. 7); let us suppose the electrode BC to be at potential zero. Let V_1 be a function harmonic and regular within σ. Let us take the boundary s of the plate as S′, and a circle s_a having its centre in A as S″.

Applying the formula (D′) we shall obtain:

$$\frac{1}{\cos\beta}\int_{BCD} V\frac{\delta V_1}{\delta l_1}ds - \frac{1}{\cos\beta}\int_{BC} V_1\frac{\delta V}{\delta l}ds - \int_{s_a}\left(V_1\frac{\delta V}{\delta n} - V\frac{\delta V_1}{\delta n}\right)ds_a = 0$$

and, making the circle s_a grow indefinitely smaller,

$$V_{1A} = \frac{K}{J\cos\beta}\int_{BCD} V\frac{\delta V_1}{\delta l_1}ds - \frac{K}{J\cos\beta}\int_{BC} V_1\frac{\delta V}{\delta l}ds.$$

Hence, *if the distribution of currents be known when the current enters through* A *and goes out through the electrode* BD *and the magnetic field is direct, the value of a harmonic regular function in* A *may be determined provided its value be known along* BC *and the value of its derivative be known along* ADC *in the direction l.*

The analogous proposition subsists when the magnetic field is inverted.

SECTION 9.

Let us now take V as given by (6) with the condition (7), and V as given by

$$V_1 = \frac{J_1}{2\pi k}(\log r_{B_1} - \log r_{A_1}) + W_1,$$

where W is a function harmonic and regular within σ; let A_1 and B_1 be two new points chosen in this field (Fig. 10); along the boundary s of σ let us have $\delta V_1/\delta l_1 = 0$.

Let us suppose S′ to be the boundary s and S″ the system of four circles $s_a, s_b, s_{a_1}, s_{b_1}$, having their respective centres in A, B, A_1 and B_1. The area σ' will be obtained by subtracting from σ the areas enclosed within the four circles (Fig. 10). In σ', V and V_1 are regular; then applying the (D′) and remembering that on s $\frac{\delta V}{\delta l} = \frac{\delta V_1}{\delta l_1} = 0$, we shall obtain:

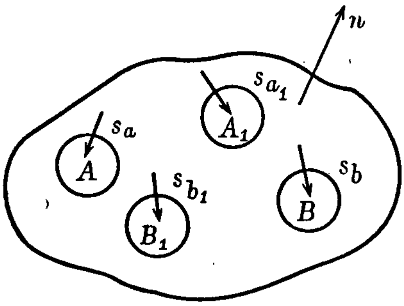


Fig. 10.

$$\int_{s_a}\left(V_1 \frac{\delta V}{\delta n} - V \frac{\delta V_1}{\delta n}\right) ds_a + \int_{s_b}\left(V_1 \frac{\delta V}{\delta n} - V \frac{\delta V_1}{\delta n}\right) ds_b + \int_{s_{a_1}}\left(V_1 \frac{\delta V}{\delta n} - V \frac{\delta V_1}{\delta n}\right) ds_{a_1} +$$

$$+ \int_{s_{b_1}}\left(V_1 \frac{\delta V}{\delta n} - V \frac{\delta V_1}{\delta n}\right) ds_{b_1} = 0.$$

Now, making the four circles grow indefinitely smaller, we easily have

$$\lim \int_{s_a}\left(V_1 \frac{\delta V}{\delta n} - V \frac{\delta V_1}{\delta n}\right) ds_a = \frac{J}{K} V_{1A} \quad ; \quad \lim \int_{s_b}\left(V_1 \frac{\delta V}{\delta n} - V \frac{\delta V_1}{\delta n}\right) ds_b = \frac{-J}{K} V_{1B}$$

$$\lim \int_{s_{a_1}}\left(V_1 \frac{\delta V}{\delta n} - V \frac{\delta V_1}{\delta n}\right) ds_{a_1} = \frac{-J_1}{K} V_{A_1} \quad ; \quad \lim \int_{s_{b_1}}\left(V_1 \frac{\delta V}{\delta n} - V \frac{\delta V_1}{\delta n}\right) ds_{b_1} = \frac{-J_1}{K} V_{B_1},$$

hence

$$J\,(V_{1B} - V_{1A}) = J_1\,(V_{B_1} - V_{A_1});$$

and, if J and J_1 be equal:

$$V_{1B} - V_{1A} = V_{B_1} - V_{A_1}\,.$$

From which the following law of reciprocity is deduced: *If under the action of a certain magnetic field a current of given intensity passes through a conducting plate, entering through the point* A *and going out through the point* B, *and a difference of potential be obtained in two points* A_1, B_1, *the same difference will be obtained between the potentials of the points* A *and* B *when a current of the same intensity is caused to enter through* A_1 *and to go out through* B_1 *and the magnetic field is inverted.*

We shall demonstrate in the third lecture that, by the same principle of reciprocity now established, the condition of homogeneity may be omitted.

Let us suppose that on the boundary of the plate, there are the electrodes $A_1 B_1$, $A_2 B_2$, $A_3 B_3$, $A_4 B_4$, $\cdots$ of negligible resistance and that the other portions of the boundary are free and insulated. Let us suppose moreover that no electrode exists in the interior. Let $J^{(1)}$, $J^{(2)}$, $J^{(3)}$, $J^{(4)}$, $\cdots$ be the ratios between (Fig. 11) the intensities of the currents entering through these electrodes and the thickness of the plate, $C^{(1)}$, $C^{(2)}$, $C^{(3)}$, $C^{(4)}, \cdots$ the values of the potential V along the electrodes when the magnetic field is direct. Let $J_1^{(1)}$, $J_1^{(2)}$, $J_1^{(3)}$, $J_1^{(4)}, \cdots, C_1^{(1)}$, $C_1^{(2)}$, $C_1^{(3)}$, $C_1^{(4)}$, V_1 be the corresponding quantities when the magnetic field is inverted. It is obvious that we shall have:

$$\Sigma_k J^{(k)} = \Sigma_h J_1^{(h)} = 0$$

a result which we might also have obtained from the formula (A).

Let us now apply the formula (D), taking the boundary s of the plate as S. We shall have

$$0 = \Sigma_h \int_{A_h B_h} (V_1 j_n - V j_{1n})\, ds = \Sigma_h (C^{(h)} J_1^{(h)} - C_1^{(h)} J^{(h)})$$

hence

$$\Sigma_h C_1^{(h)} J^{(h)} = \Sigma_h C^{(h)} J_1^{(h)}.$$

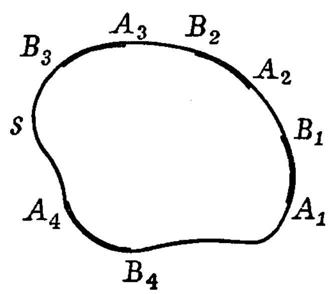


Fig. 11.

If the $J^{(h)}$'s are all zero, except $J^{(1)}$ and $J^{(2)}$, and the $J_1^{(h)}$ be also all zero except $J_1^{(3)}$ and $J_1^{(4)}$, we shall have:

$$J^{(1)} = J^{(2)} = I \qquad J_1^{(3)} = -J_1^{(4)} = I_1$$

hence:

$$(C_1^{(1)} - C_1^{(2)})\, J = (C^{(3)} - C^{(4)})\, J_1$$

and, if $J = J_1$,

$$C_2^{(1)} - C_1^{(2)} = C^{(3)} - C^{(4)}.$$

These formulae express new theorems of reciprocity, the interpretation of which is easy.

Let us finally suppose that, the magnetic field being direct, there are besides the electrodes $A_1, B_1, A_2, B_2, \cdots$ the boundary, some internal point electrodes $M^{(1)}, M^{(2)}, M^{(3)}, \cdots$; let us call $J^{(1)}, J^{(2)}, J^{(3)}$ the ratios between the intensities of the currents which these electrodes admit into the plate and the thickness of this latter. And let us give an analogous meaning to $M_1^{(1)}, M_1^{(2)}, M_1^{(3)}, \cdots, J_1^{(1)}, J_1^{(2)}, J_1^{(3)}$, in the case of the inverted magnetic field. We shall have then:

$$\Sigma_h J^{(h)} + \Sigma_k I^{(k)} = \Sigma_h J_1^{(h)} + \Sigma_{k_1} I_1^{(k_1)} = 0$$

and

$$\Sigma_h C_1^{(h)} J^{(h)} + \Sigma_k V_1^{(k)} I^{(k)} = \Sigma_h C^{(h)} J_1^{(h)} + \Sigma_{k_1} V^{(k_1)} I_1^{(k_1)},$$

where $V_1^{(k)}$ is the value of the potential V_1 in the point $M^{(k)}$ and $V^{(k_1)}$ the value of the potential V in the point $M_1^{(h_1)}$.

From the last formula theorems of reciprocity analogous to that already stated may be likewise deduced.

SECOND LECTURE

SECTION 1. - The fundamental function. SECTION 2. - Circular plate: two principles of images. SECTION 3. - The principle of point electrodes at the boundary. SECTION 4. - Cyclic plates. SECTION 5. - The problem of linear electrodes of a negligible resistence, situated at the boundary.

SECTION 1.

Let us denote by V′ the conjugate function of V: then we have

$$\frac{\delta V}{\delta x} = \frac{\delta V'}{\delta y} \quad ; \quad \frac{\delta V}{\delta y} = \frac{\delta V'}{\delta x} .$$

The equations (3) of Section 4 of the preceding lecture will then become

$$(3') \qquad j_x = -K \frac{\delta (V + \lambda V')}{\delta x} \quad ; \quad j_y = -K \frac{\delta (V + \lambda V')}{\delta y} .$$

If we put $V + \lambda V' = U$, we shall have

$$(3'') \qquad j_x = -K \frac{\delta U}{\delta x} \quad ; \quad j_y = -K \frac{\delta U}{\delta y} .$$

The function U will satisfy, first, the condition $\Delta_2 U = 0$ at every point of the plate and, second, the condition $(\delta U/\delta n) = 0$ at every point of the insulated boundary.

Therefore the distribution of current in the plate happens as if there were no magnetic field, but as if the potential were U instead of V, and the conductivity were K. As K for a given value of the field is constant, the lines of flow are independent of K.

We shall call U the *fundamental function of the distribution of current in the plate* or, *more simply,* the fundamental function. U coincides with the *potential* only if the magnetic field be null. When we know the potential V we can have U by the operation

$$(E) \qquad U = V + \lambda V' = \frac{V \cos \beta + V' \sin \beta}{\cos \beta} .$$

Now let us resolve the problem of the *calculation of the potential when the fundamental function is known.*

Let U′ be the conjugate function of U; we shall have

$$(8) \qquad U' = V' - \lambda V .$$

Then, from the formula (E), we have

$$(E') \qquad V = \frac{U - \lambda V}{1 + \lambda^2} = (U \cos \beta - U' \sin \beta) \cos \beta .$$

The proposed problem is thus solved.

The preceding formulae easily provide us with *the condition which the fundamental function must fulfill all along the edge of the electrodes of negligible resistance*. Let s be a portion of one of these edges. At every point of s we shall have

$$V = (U \cos \beta - U' \sin \beta) \cos \beta = \text{constant},$$

$$0 = \frac{\delta V}{\delta s} = \left(\frac{\delta U}{\delta s} \cos \beta - \frac{\delta U'}{\delta s} \sin \beta\right) \cos \beta = \left(\frac{\delta U}{\delta s} \cos \beta + \frac{\delta U}{\delta n} \sin \beta\right) \cos \beta.$$

Assuming then $\beta < (\pi/2)$, the condition will be

$$\frac{\delta U}{\delta s} \cos \beta + \frac{\delta U}{\delta n} \sin \beta = \frac{\delta U}{\delta \beta} = 0;$$

β is a line which forms with the tangent t and with the normal n to the arc s the same angles which l forms respectively with n and with t (Fig. 12).

From the preceding consideration it follows that in the case of the homogeneous plate placed in a uniform magnetic field the distribution of currents depends on four harmonic functions V, V', U, U' connected by the relations previously established. The lines $V =$ const. give us the *equipotential lines*, the lines $U' =$ const. give us the lines of flow; therefore the function U'/K may be considered as the *function of the currents*.

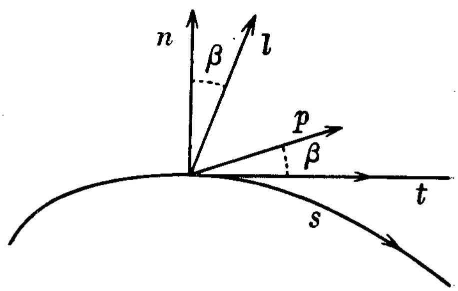


Fig. 12.

We can easily relate among themselves the functions U, U', V, V' by means of functions of a complex variable.

Indeed, if we put $x + iy = z$, $U + iU' = f(z)$, $V + iV' = \varphi(z)$, we shall have

$$(E'') \qquad f(z) = \frac{e^{-i\beta}}{\cos \beta} \varphi(z).$$

The conjugate function of $\log r_A$ is θ_A, where we denote by θ_A the angle that the radius vector which has its origin in A forms with a fixed direction; $(-m/2\pi)\,\theta_A$ is the potential of a vortex situated in A and having the moment m. (We suppose that the axes x, y are situated as in figure 2 of Section 5 of the first lecture and that the angle θ_A is measured in the sense of the rotation by which the positive direction x may reach the positive direction y; also we assume that a vortex having a positive moment rotates in the sense opposite to that just mentioned). Then, if we have in A a point electrode through which the current I enters, putting $I = \nu J$ (ν thickness of the plate), the corresponding potential will be $(-J/2\pi K) \log r_A$ and the corresponding fundamental function will be $\frac{-J}{2\pi K}(\log r_A + \lambda\theta_A) = \frac{J}{2\pi K} \log \frac{1}{r_A} - \frac{\lambda J}{2\pi K}\theta_A$.

Therefore we can say that the *fundamental function corresponding to a point electrodė* A, *through which the current of intensity* I *enters, is the logarithmic potential of a mass* $J/2\pi K$ *and of a vortex having the moment* $\lambda J/K$, *both situated in the point* A.

This result may be stated by saying that the action of the magnetic field on the distribution of currents consists in modifying the conductivity, which becomes equal to K, and in modifying the fundamental function by adding to each point electrode, through which the current of intensity I enters, a vortex having the moment $\lambda J/K$; the normal derivative of the fundamental function remains zero at every point of the insulated edge of the plate. (The addition of the vortex by the action of the magnetic field appears quite natural if we think of the deflection of the movement of electrons, in the neighbourhood of the electrode, produced by the same field).

The function θ_A is many valued and therefore the fundamental function U is also many valued; U has the electrodes as branch points. Thus, the potential is a single valued function becoming logarithmically infinite at the point electrodes, whereas the fundamental function has the same points as points of logarithmic infinity and as branch points.

SECTION 2.

Now, let us suppose that the plate is circular and that the current enters and goes out through internal point electrodes. We shall calculate the effect of the boundary C (that consists in annulling the normal derivative of the fundamental function), by adding masses and vortices situated in the inverse points (images) of the electrodes, with respect to the circumference C (Fig. 13).

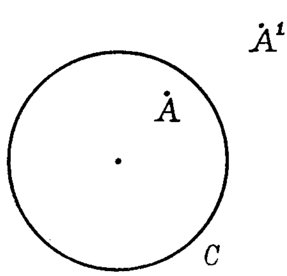


Fig. 13.

Let A_1 be the inverse point of the electrode A. If we put in A_1 the mass $J/2\pi K$ the logarithmic potential of the two masses $J/2\pi K$ situated in A and A_1 will have along C the normal derivative equal to $-J/2\pi KR$, R being the radius of C; and, if we put in A_1 a vortex having the moment $-\lambda J/K$, the potential of the two vortices $-\lambda J/K$ and $\lambda J/K$ situated in A_1 and A will have the normal derivative zero at the boundary.

Bearing in mind that the algebraic sum of the intensities of the currents which enter through the various internal electrodes is zero, we shall obtain for the fundamental function the following expression:

$$U = -\Sigma \frac{J}{2\pi K} \{\log r_A + \log r_{A_1} + \lambda\theta_A - \lambda\theta_{A_1}\}, \tag{9}$$

the sum being extended to all the internal electrodes.

The same expression can be written:

$$U = -\Sigma \frac{J}{2\pi K} (\log r_A + \lambda\theta_A) + \varphi,$$

where

$$\varphi = -\Sigma \frac{J}{2\pi K} (\log r_{A_1} - \lambda\theta_{A_1}):$$

evidently φ is regular within the area occupied by the plate, because all the points where it becomes infinite and the branch points are external of this area.

The result now obtained can be thus expressed: The distribution of the currents, which enter and go out through point electrodes in a circular plate subject to a magnetic field, is identical with the distribution that we should have if the plate were indefinitely extended, if the magnetic field were suppressed, and if the following conditions were fulfilled: the addition of a vortex having the moment $\lambda J/K$ to each electrode through which the current $I = \nu J$ enters (ν thickness of the plate); the addition in the inverse point of each internal electrode, of an image electrode traversed by the same current I and of a vortex, the image of the internal vortex and having the moment $-\lambda J/K$.

The formula (9) gives us the fundamental function of the distribution of currents; and from this, bearing in mind the rule (E′), we can obtain the expression of the potential.

The conjugate function of U is

$$U' = -\Sigma \frac{J}{2\pi K} (\theta_A + \theta_{A_1} - \lambda \log r_A + \lambda \log r_{A_1});$$

therefore we shall have

$$(10) \qquad V = \frac{U - \lambda U'}{1 + \lambda^2} = -\Sigma \frac{J}{2\pi K} \left(\log r_A + \frac{1 - \lambda^2}{1 + \lambda^2} \log r_{A_1} - \frac{2\lambda}{1 - \lambda^2} \theta_{A_1}\right).$$

Now, as $\lambda = \log \beta$ we have

$$\frac{1 - \lambda^2}{1 + \lambda^2} = \cos 2\beta_1, \qquad \frac{2\lambda}{1 + \lambda^2} = \sin 2\beta,$$

hence

$$(10') \qquad V = -\Sigma \frac{J}{2\pi K} (\log r_A + \cos 2\beta \log r_{A_1} - \sin 2\beta\theta_{A_1}).$$

This formula can be written in the following manner:

$$(10'') \qquad V = -\Sigma \frac{J}{2\pi K} \log r_A + \varphi,$$

where

$$(10_a) \qquad \varphi = -\Sigma \frac{J}{2\pi K} (\cos 2\beta \cdot \log r_{A_1} - \sin 2\beta \cdot \theta_{A_1}).$$

The first term of (10″) is the potential of the electrodes; the second term φ is a function regular within the area occupied by the plate, because the infinities and branch points are external.

The result now obtained can be stated in this way: *If in a circular plate, subject to a magnetic field, the currents enter and go out through point electrodes, we shall obtain the potential by adding to that of each electrode where the intensity of current is* $I = \nu J$ *the potential of an image electrode, situated in the inverse point and traversed by the current* $I \cos 2\beta$, *and the potential of a vortex situated in the same inverse point and having the moment* $- J \sin 2\beta/K$.

Thus, in the case in which the plate is subject to the magnetic field, we have *two different principles of images*; one of these concerns the distribution of currents and therefore the *fundamental function*, the other concerns the *electric potential.*

The same results can be easily obtained by using the functions of complex variables introduced in Section 1. Let us suppose that a and a' are the values of the complex variable $z = x + iy$ in two points inverse to each other with respect to a circle; that M and m are real constants and that $\Sigma M = 0$; then along the circumference that limits the said circle the real part of the function

$$e^{im} \Sigma M \log (z - a) - e^{-im} \Sigma M \log (z - a') \tag{11}$$

and the imaginary part of the function

$$e^{im} \Sigma M \log (z - a) + e^{-im} \Sigma M \log (z - a') \tag{11'}$$

are constant.

Now, if we denote with a the values of the complex variable z corresponding to the point electrodes, the potential of these latter is the real part of the function

$$\varphi = - \Sigma \frac{J}{2 \pi K} \log (z - a);$$

according to the formula (E''), the corresponding fundamental function will be the real part of $f = \dfrac{-e^{-i\beta}}{\cos\beta} \Sigma \dfrac{J}{2\pi K} \log (z - a)$.

According to what we have said before, since along the circular boundary of the plate U' must be constant (see section 1), the fundamental function U will be the real part of

$$F = - \Sigma \frac{J}{2 \pi K \cos\beta} [e^{-i\beta} \log (z - a) + e^{-i\beta} \log (z - a')];$$

and, owing to the formula (E''), the electric potential will be the real part of

$$\Phi = - \Sigma \frac{J}{2 \pi K} [\log (z - a) + e^{ri\beta} \log (z - a')].$$

From the two last formulae we can easily deduce the formulae (9) and (10). Hitherto we have supposed the electrodes to be internal, now let us suppose that they are at the boundary. It will be sufficient to suppose, in the formulae (9) and (10), that the points A and A_1 coincide, that is it will be sufficient to put

$$\log r_A = \log r_{A_1}, \qquad \theta_A = \theta_{A_1}.$$

Therefore we shall have

$$U = -\Sigma \frac{J}{\pi K} \log r_A \quad ; \quad V = -\Sigma \frac{J}{\pi K} (\cos\beta \log r_A - \sin\beta\theta_A)\cos\beta .$$

These formulae show us that, if the point electrodes be at the boundary, the magnetic field does not alter the distribution of currents, but alters the electric potential.

In the case of two electrodes A and B the formulae (9) and (10) become

$$U = \frac{J}{2\pi K}\left[\log\left(\frac{r_B r_{B_1}}{r_A r_{A_1}}\right) + \lambda\,(\Omega_{AB} - \Omega_{A_1 B_1})\right],$$

$$V = \frac{J}{2\pi K} - \log\frac{r_B r_{B_1}}{r_A r_{A_1}} \frac{-J}{\pi K} \sin\beta\left[\log\left(\frac{r_{B_1}}{r_{A_1}}\right)\sin\beta + \Omega_{A_1 B_1}\cos\beta\right],$$

where Ω_1, Ω_2 are the angles under which the points A, B and A_1, B_1 are seen from a generical point xy.

If the two electrodes are on the boundary, we have

$$U = \frac{J}{\pi K}\log\frac{r_B}{r_A} \quad , \quad V = \frac{J}{\pi K}\left(\cos\beta\cdot\log\frac{r_B}{r_A} - \sin\beta\Omega_{AB}\right)\cos\beta .$$

We have thus completely solved the problem of the flow of electricity under the action of the magnetic field, in the case of a circular plate; therefore we are able to solve the same problem in all the cases in which the area occupied by the plate can be conformally represented in a circle.

From this result we can immediately deduce a consequence; in fact, if we know the law of the distribution of currents in an acyclic plate, provided only with point electrodes and not subject to the magnetic field, we are able to make the conformal representation of the area occupied by the plate in a circle, and therefore we are also able to determine the distribution of currents and the potential when the currents enter and go out through any point electrodes and the plate is subject to the magnetic field.

Section 3.

Let us consider the case in which the point electrodes are on the boundary, then, provided the plate be acyclic whatever form it may have, the distribution of currents is not altered by the action of the magnetic field.

This result, obtained in the case of the circle (Section 2) and extended to the case of a generical acyclic field by means of the conformal representation, can be also deduced from the conditions that U must fulfill (Section 1). In fact, if the plate be acyclic and the point electrodes are on the boundary, U is a single valued function, at the boundary $(\delta U/\delta n) = 0$, in the neighborhood of an electrode U must be the sum of a logarithmic term and of a regular part, and lastly if, by means of an arc of any curve, we separate from the plate the region occupied by the electrode, we must have $\int_\Sigma \frac{\delta U}{\delta n} d\Sigma = -\frac{J}{K}$

(where J is the ratio between the intensity of the current which flows through the electrode and the thickness of the plate). Then, if the intensity of the total current be not altered, U can differ from the electric potential corresponding to the case in which the magnetic field is zero, only by a constant factor of proportionality, equal to the ratio between the conductivity of the plate before the action of the magnetic field, and K.

We will call this proposition *the principle of the point electrodes at the boundary.* Evidently, if the plate be not acyclic, we cannot represent its area conformally in a circle and we cannot say that U must be a single valued function; therefore the demonstration which we have given does not hold good in this case, and in fact, as we shall see in the following paragraph, the preceding proposition generally is not true, when the plate is not acyclic. From what we have previously said, we can deduce that, *if we know the law of the distribution of currents in a generical acylic plate, provided with an arbitrary number of point electrodes situated at the boundary when the magnetic field does not exist, we have immediately* U *and, by applying the formula* (E′) *of Section 1, we can calculate the electric potential* V, *when the magnetic field exists.*

For instance, if a rectangular plate be not subject to a magnetic field, we we can express (according to BETTI'S calculation) [1] the distribution of currents when the electrodes are in the middle points of two opposite sides, by means of the elliptic function Δam; then, by applying the preceding results we are able to solve the analogous problem, when the plate is subject to a magnetic field.

Let us consider an acyclic plate traversed by currents of given intensities entering and going out through point electrodes situated at the boundary, let us suppose that these intensities remain constant before and after the creation of the magnetic field. Let us denote respectively with u and with U the fundamental function when the magnetic field does not exist and when it exists; then we have $U = su$, where s is the ratio between the conductivity of the plate (without the magnetic field) and K. Let us denote with u' the conjugate function of the harmonic function u; by applying the formula (E′) we shall have: $V = s\,\frac{u - \lambda u'}{1 + \lambda^2}$.

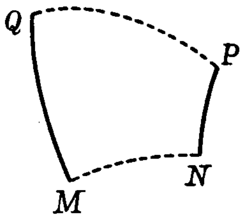


Fig. 14.

Without the magnetic field, let MN and QP be lines of flow, MQ and NP equipotential lines (Fig. 14). We shall have

$$U_M = U_2 \quad , \quad U_N = U_{P_1} \quad , \quad U'_M = U'_2 = U'_P$$

and hence

$$V_M = V_N + V_P - V_2 = 0$$

we can then state the following theorem: *When the point electrodes are on the boundary, if we consider a quadrangle formed by lines of flow and equipotential lines corresponding to the value zero of the magnetic field, and if we determine*

(1) BETTI, «Opere», vol. II, p. 267.

the values of the electric potential in the four vertices when the magnetic field exists, the difference of the values in two adjacent vertices is equal to the difference in the other two vertices.

This proposition, which we will call *the theorem of the four vertices,* can be easily verified experimentally.

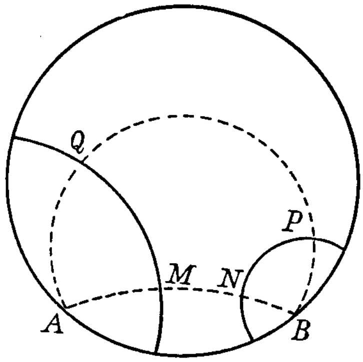


Fig. 15.

Let us consider the particular case of a circular plate in which the currents enter and go out through the point electrodes A and B situated at the boundary. Let MN and QP be circles passing through A and B, MQ and NP circles orthogonal to the preceding. Whatever the intensity of the magnetic field may be for the quadrangle formed by these circles we have

$$V_M - V_N + V_P - V_2 = 0.$$

SECTION 4.

Various results among those that we have considered hold good in both the cases of an acyclic and of a cyclic plate; others hold good only in the case of an acyclic plate (we have explicitly declared this, when we stated those results).

The formulae and the theorems of reciprocity, stated in the last paragraph of the first lecture, evidently hold good also in the case of a cyclic plate; but in this case they may assume a different aspect because the portions of the boundary where the potential is constant may be constituted by some of the whole closed curves which form the total boundary of the cyclic area occupied by the plate. Let us suppose the plate to be bounded by the closed curves $s'_1, s'_2, \cdots, s'_n$ and $s''_1, s''_2, \cdots, s''_m$; let us assume the first contours to be insulated, the second kept at a constant potential. We shall call S′ the system of all the contours s'_r, S″ the system of all the contours s''_i; we shall exclude, for the sake of simplicity, the existence of point electrodes.

With the direct magnetic field let $C^{(1)}, C^{(2)}, \cdots, C^{(m)}$ be the values of the potential V along $s''_1, s''_2, \cdots, s''_m$; with the inverted magnetic field let $C_1^{(1)}, C_1^{(2)}, \cdots, C_1^{(m)}$ be the values of the potential V_1, along the same curves. Let us denote by $J^{(1)}, J^{(2)}, \cdots, J^{(m)}$ the ratios between the intensities of the currents which enter, through the lines $s_1^{('')}, s''_2, \cdots, s''_m$, in the plate and the thickness of this latter; let $J_1^{(1)}, J_1^{(2)}, \cdots, J_1^{(m)}$ have the same meaning when the magnetic field is inverted. By applying the results of Section 9 of the first lecture, we shall have:

$$\Sigma_k J^{(k)} C_1^{(k)} = \Sigma_k J_1^{(k)} C^{(k)}.$$

If we consider $s''_1, s''_2, \cdots, s''_m$ as edges of electrodes of negligible resistance, we can easily deduce, from the preceding formula, the principles of reciprocity (analogous to those stated in the first lecture) in the case in which the currents enter into the plate through internal electrodes having a finite area and a negligible resistance.

Now let us consider the case of the direct magnetic field and let us apply the formula (E) (Section 1) in order to pass from the potential V to the fundamental function U. We shall have:

$$\text{(12)} \qquad U = V + \lambda V'.$$

If we draw a closed contour s in the area occupied by the plate and denote by $s''_\alpha, s''_\beta, \cdots, s''_s$ the curves s'' within s, we have

$$\int_s \frac{\delta V'}{\delta s} ds = -\int_s \frac{\delta V}{\delta n} ds = \frac{1}{K}(J^{(\alpha)} + J^{(\beta)} + \cdots + J^{(s)});$$

therefore we say that V' is a many valued function, that the closed curves enclosing curves s'' are the cycles, and that the numbers $J^{(\alpha)}/K$ are the cyclic constants.

As V is a single valued function, (see first lecture, Section 5) U will have the same sort of multiplicity as V', except that the cyclic constants will be changed in the ratio λ. By applying the formulae (A) and (B) obtained in the Section 5 of the first lecture, we deduce (see first lecture, Section 6)

$$\Sigma_k J^{(k)} = 0, \quad \Sigma_k J^{(k)} C^{(k)} = K \int_\sigma \Delta V \, d\sigma.$$

From the last equation we deduce that, if $J^{(k)}$ be zero along some of the lines s''_h and $C^{(h)}_1$ be zero along the remaining lines s''_k, V must be zero; and, if all the J's be zero, V must be constant. We can therefore state that the knowledge of $J^{(h)}$ determines V except for a constant and the knowledge of some values of $J^{(h)}$ and of the remaining values of $C^{(h)}$ determines V completely.

Let us suppose that in the plate there are no insulated edges s'_h and that all values of $C^{(h)}$ are known; then V will be determined and independent of K. Whereas, if all values of $J^{(h)}$ be known, V will vary inversely as K. Lastly, if $C^{(h)}$ be known for some of the lines s''_h and $J^{(h)}$ be known for the other lines s''_h, V will depend on K. From what we have said we can deduce *that if each of the various curves which form the boundary has a constant and unalterable potential, the electric potential* V *will not depend on the magnetic field, but this latter will alter the fundamental function* U *and therefore also the distribution of the currents.*

It follows that, in this case if we know the distribution of currents without the magnetic field, and therefore the potential V (with or without the field), we shall be able to calculate, by means of the formula (E), the alteration of the distribution of the currents caused by the magnetic field.

Likewise we shall have similar results by supposing known and inalterable the $J^{(h)}$.

These results agree perfectly with those obtained by Professor CORBINO in the case of a plate bounded by two closed curves kept at constant potentials [4]. Let us consider the particular case in which the two closed curves are concentric circumferences having the radii R_1 and R_2. Then we shall have

$$V = \frac{(C^{(1)} - C^{(2)}) \log r + C^{(2)} \log R_1 - C^{(1)} \log R_2)}{\log R_1 - \log R_2} \quad , \quad V' = \frac{(C^{(1)} - C^{(2)})}{\log R_1 - \log R_2} \theta ,$$

$$U = \frac{(C^{(1)} - C^{(2)}) (\log r + \lambda\theta)}{\log R_1 - \log R_2} + C,$$

where r and θ are the polar coordinates of the points of the circular ring which constitutes the plate (having taken as origin the centre of the ring) and C is a constant.

If the current enters through the externalcircle of radius R_1 and its intensity be $I = \nu J$ (ν thickness of the plate) we shall have

$$V = \frac{J}{2\pi K} \log r \quad , \quad V^1 = \frac{J}{2\pi K} \theta \quad , \quad U = \frac{J}{2\pi K} (\log r + \lambda\theta).$$

The results obtained at the beginning of this paragraph can be extended. Let us suppose we have a cyclic plate bounded by the closed curves $s_1, s_2, \cdots, s_n$. Without making any hypothesis about the values of the potential corresponding to these curves, or the way in which point or linear electrodes are situated along them, we shall indicate with $J_1, J_2, \cdots, J_n$ the ratios between the intensities of the currents which across the said curves penetrate into the plate and the thickness of this latter. Let $M_1, M_2, \cdots, M_m$ be internal point electrodes; let $I_1, I_2, \cdots, I_m$ be the ratios between the intensities of the currents which enter through these electrodes and the thickness of the plate. We shall have $\sum_1^n{}_h J_h + \sum_1^m{}_k I_k = 0$, and, if a closed line s within the plate enclose the lines $s_\alpha, s_\beta, \cdots, s_\tau$ and the points $M_A, M_B, \cdots, M_{t_1}$, then

$$\int \frac{\delta V'}{\delta s} ds = -\int \frac{\delta V}{\delta n} ds = \frac{1}{K} (J_\alpha + J_\beta + \cdots + J_\tau + I_a + I_b + \cdots + I_t).$$

This proves that V', and therefore U, is a many-valued function, unless $J_1, J_2, \cdots, J_n, I_1, I_2, \cdots, I_m$ be all zero.

We can then enunciate the theorem: *The necessary and sufficient condition that the fundamental function be uniform is that no internal electrodes exist and that the total quantity of electricity which enters through the electrodes distributed along each closed curve making part of the boundary be zero.*

Whereas, in the case in which the area occupied by the plate is acyclic, *it is sufficient, for the uniformity of the fundamental function, that no internal point electrodes exist; while owing to the presence of these electrodes the fundamental function becomes many-valued.*

Let us make an application of the results now obtained. Let us suppose that the area is cyclic and that electrodes are punctiform and distributed along the curves $s_1, s_2, \cdots, s_n$ which form the boundary. Let $i_p^{(1)}, i_p^{(2)}, \cdots, i_p^{(h_s)}$ be the ratios between the intensities of the currents which enter through the electrodes distributed along the curve s_p and the thickness of the plate; then the necessary and sufficient condition, in order that the fundamental function be single-valued, is that $\sum_{1}^{p}{}_t\, i_p^{(t)} = 0$, $(p = 1, 2, \cdots, n)$. Now, if the fundamental function be single-valued, by repeating a *reasoning* made at the beginning of the preceding paragraph, we shall be able to demonstrate that the magnetic field does not alter the distribution of currents, while, if the same function be many-valued, we shall see that the action of the

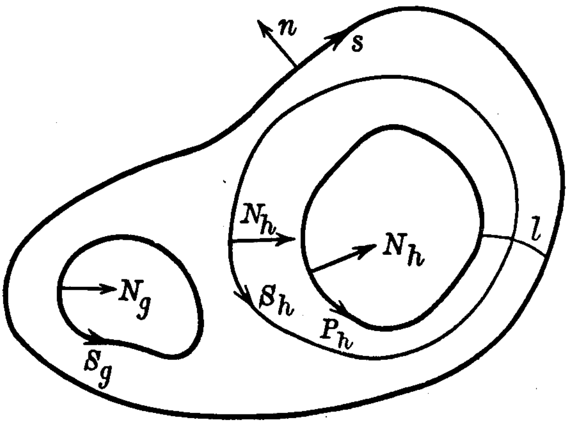


Fig. 16.

magnetic field will have to change the distribution of currents, because without the fundamental function coincides with the potential and therefore is single-valued.

We shall have thus the following theorem: *If the plate be cyclic and all the electrodes be point electrodes and situated on the boundary, the action of the magnetic field changes the distribution of currents unless the sum of the intensities of the currentes, which penetrate through the electrodes placed on each closed curve that forms part of the boundary, is zero.*

When the preceding condition is fulfilled and one knows the law of the distribution of currents without the magnetic field, one can, by means of the formula (E′), calculate the potential corresponding to a given magnetic field and therefore one can completely solve the problem.

It remains to consider the case in which the above mentioned condition is not fulfilled.

Let us denote by s_1 the closed curve which forms the outer boundary of the cyclic plate, with $s_2, s_3, \ldots, s_n$ the closed curves that form the inner boundaries. Let us trace a curve l which joins s_1 with s_h without meeting other parts of the boundary and let us imagine that along l there is an electromotive force having the value l and directed in the sense in which the arc s_h increases. Supposing that the plate is not subject to the magnetic field, the electric potential φ_h will be a regular and harmonic function within the area occupied by the plate and will have a discontinuity l along l. Moreover we shall have

$$\frac{\delta\varphi_h}{\delta n} = \frac{\delta\varphi_h}{\delta n_2} = \cdots = 0 \quad , \quad \int_{s_h} \frac{\delta\varphi_h}{\delta s_h} ds_h = -1 \quad , \quad \int_{s_g} \frac{\delta\varphi_h}{\delta s_g} ds_g = 0 \quad , \quad 1 < g \lesseqgtr h.$$

We can also consider φ_h as a finite, continuous and many-valued function, in the area σ when there is no cut l; the cycles of this function enclose s_h and its cyclic constant is -1. The functions $\varphi_2, \varphi_3, \cdots$ will only depend on the geometrical form of the field σ, and we will call them the *elementary*

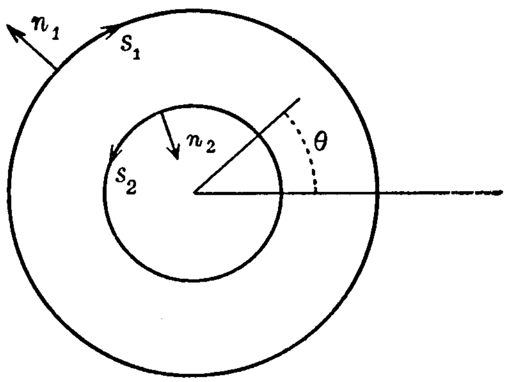


Fig. 17.

cyclic potentials of σ. We will indicate by $\varphi'_2, \varphi'_3, \cdots$ the conjugate functions of φ_2, φ_3 (2).

Now let us suppose that every electromotive force in the interior of the plate is taken away; let us call W the electric potential without the magnetic field (but reduced in the ratio between the conductivity of the plate before the action of the same field and K), when the currents enter and go out through point electrodes disposed along the various closed contours which form the boundary; let us call V the electric potential with the magnetic field, U the fundamental function.

(2) The elementary cyclic potentials are considered in classical hydrodynamics in order to obtain the irrotational motions of a fluid in a cyclic space bounded by rigid walls. They correspond in the theory of elasticity to the *distortions*. Let $\Psi_2, \Psi_3, \cdots, \Psi_n$ be regular harmonic functions; let each of these functions Ψ_h be zero along all the lines $s_1, s_2, \cdots, s_n$ excepted, s_h, where Ψ_h has the value 1. If we know $\Psi_2, \Psi_3, \cdots, \Psi_{4n}$ we shall be able to obtain (by combining them linearly with constant coefficients) the function φ'_2 and then we shall be able to calculate the functions φ_h. The knowledge of the φ_h or of the Ψ_h is therefore analytically equivalent.

Let I_h be the algebraic sum of the intensities of the currents which enter and go out through the electrodes distributed along s_h; let us put $I_h = \nu J_h$ (ν thickness of the plate). If S_h be a line which encloses only s_h, we shall have

$$J_h = K\int_{S_h} \frac{\delta V}{\delta N_h} dS_h = K\int_{S_h} \frac{\delta W}{\delta N_h} dS_h = -K\int_{S_h} \frac{\delta V'}{\delta S_h} dS_h = -K\int_{S_h} \frac{\delta W'}{\delta S_h} dS_h,$$

where V′ and W′ are the conjugate functions of V and W. Hence follows (see formula (E))

$$\int_{S_h} \frac{\delta U}{\delta S_h} dS_h = \int_{S_h} \frac{\delta (V + \lambda V')}{\delta S_h} dS_h = \frac{-\lambda J_h}{K}.$$

We can therefore take

$$U = W + \frac{\lambda}{K} \sum_2^n {}_h J_h \varphi_h$$

because the second member of this equation satisfies all the conditions which U must fulfill.

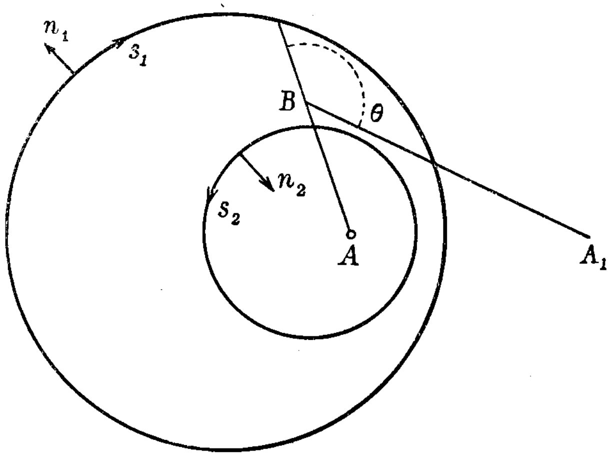


Fig. 18.

In order to obtain W we have only to apply the rule (E′); we shall obtain thereby

$$V = \frac{W - \frac{\lambda^2}{K} \sum_1^n {}_h J_h \varphi'_h - \lambda \left(W' - \frac{1}{K} \sum_2^n {}_h J_h \varphi_h \right)}{1 + \lambda^2}.$$

Therefore: *if one knows the elementary cyclic potentials of the cyclic area occupied by the plate, one can determine the perturbation produced by the magnetic field on the electric currents whatever they may be, provided they enter and go out through point electrodes situated on the boundary.* The two last formulae express *the principle of point electrodes on the boundary* modified for the case of the cyclic plates (see the preceding paragraph).

Let us consider the particular case in which the plate is a ring bounded by two concentric circles. In this case the elementary cyclic potential is $-\theta/2\pi$, where θ is the angle which the vector radius, having its origin in the center of the plate, forms with a fixed direction; the conjugate function of this elementary cyclic potential is $\log r/2\pi$.

Therefore the two last formulae become

$$U = W - \frac{\lambda}{2\pi K} J_2 \theta \quad , \quad V = \frac{W - \frac{\lambda^2}{2\pi K} J_2 \log r - \lambda\left(W' + \frac{1}{2\pi K}\theta\right)}{1+\lambda^2} .$$

If the two circles be not concentric we take the points A and A_1, *images* of each other with respect to the two circles contemporaneously, and the elementary cyclic potential will be $-\theta/2\pi$, where θ is the supplement of the angle under which from the generical point B of the plate one sees the segment AA_1; the conjugate function will be $\frac{1}{2\pi} \log \frac{AB}{A_1 B}$.

Section 5.

We shall now pass to the solution of the problem in the case in which the electrodes, supposed to be of negligible resistance, constitute portions of the boundary. Therefore let us go back to the conditions examined in Section 6 of the first lecture.

Let us suppose that we have been able to make the conformal representation of the acyclic area σ in a parallelogram *abcd* of the plane $\xi\eta$ in such a way that $b\hat{a}d = \frac{\pi}{2} - \beta$. Let us suppose also that the sides *ab* and *cd* are parallel to the axis η and that *db* and AB, *bc* and BC, *cd* and CD, *da* and DA correspond respectively to each other.

Let us take the function

$$V = M\xi + N,$$

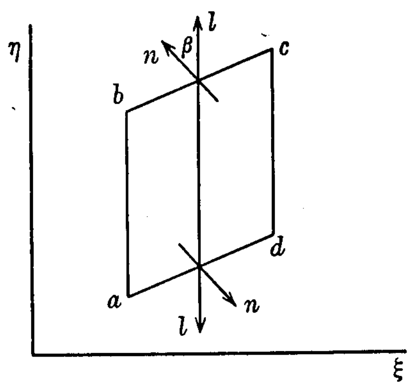


Fig. 19.

where M and N are two constants, and let us consider V as function of ξ and η. V will be constant along the sides *ab* and *cd* and will satisfy the condition $(\delta V/\delta\eta) = 0$ along *bc* and *ad*. It is easy to see that along *bc* and *ad* the direction η and $-\eta$ form respectively the angle β with the external normals n to the same sides.

Let us now consider ξ as function of x and y and let us refer the function V to points of the area σ in the plane xy. V will result harmonic and regular, will be constant along the portions AB and CD of the boundary and along the portions BC and AD will satisfy the condition $(\delta V/\delta l) = 0$.

Making use of the arbitrariness of the constants M and N, we shall be able to reduce the values of V along AB and CD to the given values, and therefore V will be the required potential. It is easy to recognize the order of *infinity* of the derivatives of ξ (with respect to x and y) in the angular points of the boundary.

Let us now suppose σ to be a square. Let us begin by taking on the real axis of the complex plane z two points a and $-a$ and let us put

$$(13) \qquad Z = \int_0^z (a^2 - z^2)^{\nu - 1}\, dz \qquad\qquad (13') \qquad Z_1 = \int_0^z (a^2 - z^2)^{\mu - 1}\, dz\,.$$

While z moves in the half plane corresponding to the positive coefficient of the imaginary part of z, Z and Z_1 move respectively in the two isosceles triangles ABC, $A_1 B_1 C_1$ the angles at the base of which have respectively

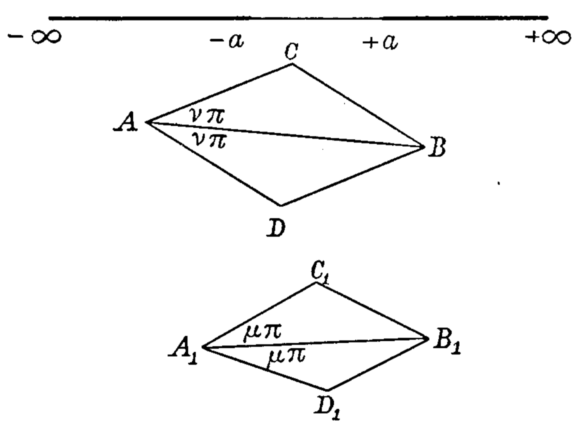


Fig. 20.

the amplitudes $\nu\pi$ and $\mu\pi$. Therefore, applying the principle of symmetry, we see that, while z moves in the whole plane, sectioned by the two *cuts* $-a - \infty$ and $+a + \infty$, Z and Z_1, move respectively in the two rhombs ABCD and $A_1 B_1 C_1 D_1$. Taking the first rhomb becomes a square, and taking $\mu = \frac{1}{\Psi} - \frac{\beta}{2\pi}$ the second rhomb becomes a parallelogram having an angle equal to $(\pi/2) - \beta$. By means of the rotation $Z_1' = Z_1\, e^{i\left(\frac{1}{2} - \mu\right)\pi}$ one transforms the second rhomb so that it has a couple of sides parallel to an axis, that is one reduces this rhomb to be in the condition of the parallelogram represented in the figure 19. The conformal representation of the square in the parallelogram which we have thus obtained solves the problem of *determining the potential and the distribution of currents in a square plate subject to a magnetic field when two opposite sides of the plate are electrodes of negligible resistance through which the current enters and goes out, and the other two sides are free and insulated.*

It is obvious that, having taken $\nu = (1/\Psi)$, the integral (13) is elliptic, and in fact, if we put $a^2 z^2 = X^4$ and we take $a = 1$, we have

$$Z = \int_0 \frac{dz}{(a^2 - r^2)^{3/4}} = 2 \int_1^x \frac{dx}{\sqrt{1 - x^4}} .$$

In the first paragraph of the following lecture we shall study the case of linear electrodes of negligible resistance, situated at the boundary of a circular plate.

THIRD LECTURE

SECTION 1. - The problem of the flow of electricity, under the action of magnetic field, in a circular plate, provided with a linear electrode of negligible resistance, situated on the boundary and with point electrodes. SECTION 2. - The problem of the flow of electricity in a curved and non-homogeneous plate subject to the action of a non-uniform magnetic field; general formulae and results. SECTION 3. - Comparison between the problem relative to the plane homogeneous plate and uniform magnetic field and the problem relative to the curved and non-homogeneous plate and the non-uniform field. SECTION 4. - The theorem of reciprocity in the case of the curved and non-homogeneous plate subject to the action of a non-uniform magnetic field.

SECTION 1.

Let us consider a circular plate (3) in which the current enters through an internal point electrode and goes out through a linear electrode, of negligible resistance, situated along the arc BC of the boundary (see Fig. 21).

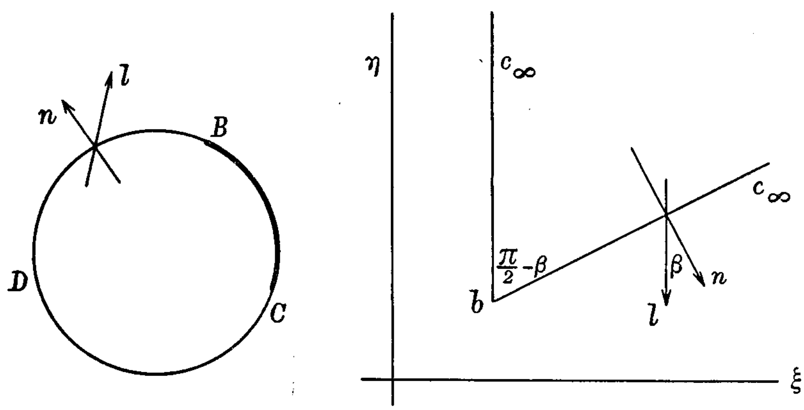


Fig. 21.

In this case, for studying the flow of electricity under the action of the magnetic field, it will be sufficient to determine a regular, harmonic func-

(3) CORBINO, « Nuovo Cimento », 1911, vol. I, p. 397.

tion W, its value along the arc BC and the value of $\delta W/\delta l$ along the arc CDB being known (see Section 7 of the first lecture). Let us represent conformally the circle in an angle of the plane $\xi\eta$ having the amplitude $(\pi/2) - \beta$ (Fig. 21), in such a way that the side bc corresponds to the arc BDC, the vertex b corresponds to B and the point at infinity c_∞ to the point C. Let us transfer to the angular figure the values of W; then $\delta W/\delta l$ will be known on the two sides of the angle and, as it is harmonic, we shall be able to determine its values within the angle and therefore we shall be also able to calculate W.

Evidently, we should have the same result if a side of the angle were parallel to and corresponded to the arc CC and the other inclined side corresponded to the arc BDC, and if we considered $\delta W/\delta\xi$ instead of $\delta W/\delta\eta$.

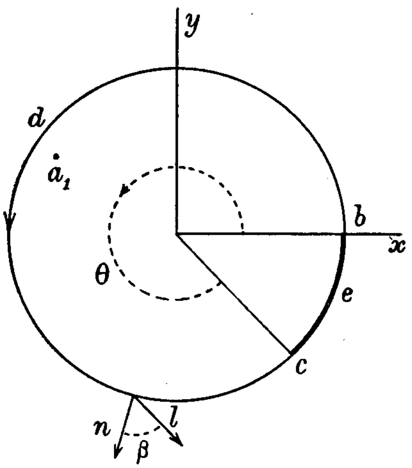


Fig. 22.

But, in the case that we are considering, it is useful to employ the functions of a complex variable which we introduced in Section 1 of the preceding lecture.

The case in which $\beta = \frac{n-2}{n}\pi$ is particularly interesting, because in this case, by a convenient conformal representation and by the application of the two principles of images (see Section 2 of the preceding lecture), we can obtain the solution more simply.

By means of the function

$$Z = \frac{z e^{-\frac{i\theta}{2}} - e^{\frac{i\theta}{2}}}{z - 1}$$

we can represent the area within a circle situated in the plane z, having the centre in the origin and the radius equal to 1 (Fig. 22), in the half-plane $Z = X + iY$ corresponding to the positive values of Y. If we consider the points of the circumference of the circle (for which $z = e^{i\omega}$), we find for Z

$$Z = \frac{\sin\frac{\omega - \theta}{2}}{\sin\frac{\omega}{2}};$$

therefore these points correspond to the points of the real axis in the plane Z, and more precisely, the portion of the circumference for which $0 < \omega < \theta$ corresponds to the negative real semiaxis and the portion of the circumference for which $\omega < \theta < 2\pi$ corresponds to the positive real semiaxis.

Let us suppose $\theta < \mu < 1$ and let us put $S = Z^\mu$; thus we obtain the conformal representation of the semiplane Z, corresponding to the positive values of Y (Fig 23), in an angle having the amplitude $\pi\mu$, of the plane S (Fig. 24), in such a way that the positive real semiaxis of Z corresponds to the positive real semiaxis of S and the negative real semiaxis of Z corresponds to the side $\gamma\beta_\infty$ (Fig. 24) of the angle $\pi\mu$; then, by putting

$$(14) \qquad S = \left(\frac{Ze^{-\frac{i\theta}{2}} - e^{\frac{i\theta}{2}}}{z - 1} \right)^{\mu},$$

we shall represent the circle (Fig. 22) in the angle (Fig. 24). By putting

$$z = re^{iw} \quad , \quad S = \xi + i\eta = se^{i\varphi}$$

for $0 < w < \theta$, $r = 1$, we shall have

$$S = \left(\frac{\sin \frac{w-\theta}{2}}{\sin \frac{w}{2}} \right)^{\mu} e^{i\mu\pi} \qquad \text{that is } \xi = \left(\frac{\sin \frac{w-\theta}{2}}{\sin \frac{w}{2}} \right)^{\mu}, \quad \varphi = \mu\pi$$

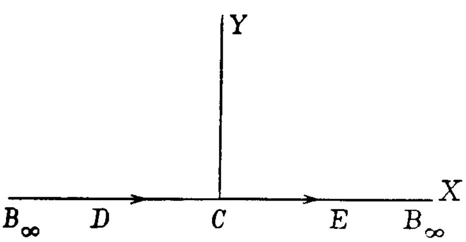


Fig. 23.

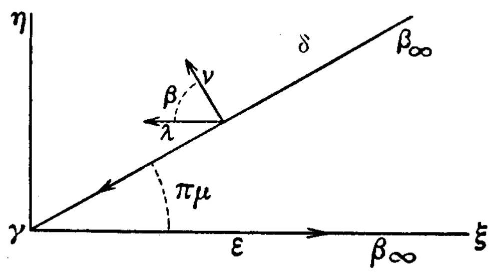


Fig. 24

and for $\theta < w < 2\pi$, $r = 1$ we shall have

$$S = \left(\frac{\sin \frac{w-\theta}{2}}{\sin \frac{w}{2}} \right)^{\mu}, \qquad \text{that is } \xi = \left(\frac{\sin \frac{w-\theta}{2}}{\sin \frac{w}{2}} \right)^{\mu}, \quad Y = 0.$$

Differentiating the two equations

$$S = \left(\frac{\sin \frac{\theta - w}{2}}{\sin \frac{w}{2}} \right)^{\mu}, \qquad \xi = \left(\frac{\sin \frac{w-\theta}{z-\theta}}{\sin \frac{w}{2}} \right)^{\mu}$$

with respect to S and ξ respectively, we find

$$1 = \frac{d}{dw} \left(\frac{\sin \frac{\theta - w}{2}}{\sin \frac{w}{2}} \right)^{\mu} \frac{dw}{dS} = -\frac{\mu}{2} \frac{\sin \frac{\theta}{2}}{\left(\sin \frac{\theta - w}{2}\right)^{1-\mu} \left(\sin \frac{w}{2}\right)^{1+\mu}} \frac{dw}{dS},$$

$$1 = \frac{d}{dw} \left(\frac{\sin \frac{w-\theta}{2}}{\sin \frac{w}{2}} \right)^{\mu} \frac{dw}{d\xi} = \frac{\mu}{2} \frac{\sin \frac{\theta}{2}}{\left(\sin \frac{w-\theta}{2}\right)^{1-\mu} \left(\sin \frac{w}{2}\right)^{1+\mu}} \frac{dw}{d\xi};$$

that is

(15) $$\frac{dw}{dS} = \frac{-2}{\mu} \frac{\left(\sin\frac{\theta - w}{2}\right)^{1-\mu}\left(\sin\frac{w}{2}\right)^{1+\mu}}{\sin\frac{\theta}{2}}, \qquad 0 < w < \theta$$

(15′) $$\frac{dw}{d\xi} = \frac{2}{\mu} \frac{\left(\sin\frac{w-\theta}{2}\right)^{1-\mu}\left(\sin\frac{w}{2}\right)^{1+\mu}}{\sin\frac{\theta}{2}}, \qquad 0 < w < 2\pi .$$

Now, let $w(z) = u + iv$ be a function regular within the circle and along its boundary. By inverting (14) we can have z as function of S, and by substituting the expression thus obtained in the preceding function, we shall obtain

$$w(z(S)) = w_1(S),$$

which will be regular in the interior and on the boundary of the angle j (Fig. 24).

Let us calculate

(16) $$u_2 + iv_2 = w_2(S) = \frac{dw_1}{dS} = \frac{du}{d\xi} + i\frac{dv}{d\xi}$$

and for this purpose let us suppose that u is known along the arc ceb as function of w. Let us denote by $L(w)$ this function and by $L'(w)$ its derivative with respect to w. Further let l be a direction which forms the angle $\beta = \frac{\pi}{2} - \pi\mu$ with the external normal n to the circle and let $\mu(w)$ be the derivative du/dl. Then, owing to (15′) along the positive semiaxis ξ, that is along the side $\gamma\varepsilon\beta_\infty$ of the angle $\pi\mu$ (Fig. 24) we shall have

$$u_2 = \frac{\delta u}{\delta\xi} = \frac{\delta u}{\delta w}\frac{dw}{d\xi} = L'(w)\frac{2}{\mu}\frac{\sin\left(\frac{w-\theta}{2}\right)^{1-\mu}\left(\sin\frac{w}{2}\right)^{1+\mu}}{\sin\frac{\theta}{2}}$$

and along the side $j\delta\beta\infty$ of the same angle, denoting with λ a direction which forms the angle β with the normal ν, we shall have

$$u_2 = \frac{\delta u}{\delta\xi} = -\frac{\delta u}{\delta\lambda} = -\frac{\delta u}{\delta l}\left(-\frac{dw}{dS}\right) = -\mu(w)\frac{2}{\mu}\frac{\left(\sin\frac{\theta-w}{2}\right)^{1-\mu}\left(\sin\frac{w}{2}\right)^{1+\mu}}{\sin\frac{\theta}{2}}.$$

If in (16) we substitute for S the value (14), we obtain

$$w_2(S(z)) = u_2(x_1 y) + iv_2(x_1 y);$$

u_2 along the arc bdc will be equal to

$$-\frac{2}{\mu}\mu(w)\frac{\left(\sin\frac{\theta-w}{2}\right)^{1-\mu}\left(\sin\frac{w}{2}\right)^{1+\mu}}{\sin\frac{\theta}{2}}$$

and along the arc *ceb* will be equal to

$$\frac{2}{\mu}\,L'(w)\,\frac{\sin\left(\frac{w-\theta}{2}\right)^{1-\mu}\left(\sin\frac{w}{2}\right)^{1+\mu}}{\sin\frac{\theta}{2}}\,.$$

Thus we know at the boundary of the circle the values of the real part u_2 of the function $w_2\,(S\,(z))$ and therefore, by applying a well known formula, we can easily calculate w_2 in the circle. The formula which we employ is

$$w_2\,(S\,(z)) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u_2\,(w)\,\frac{e^{iw}+z}{e^{iw}-z}\,dw + iC\,,$$

where we denote with u_2 the values of u at the boundary of the circle and with C a real constant.

Then, since for $z = 1$ w_2 must be zero, we shall have

$$w_2(S(z)) = -\frac{1}{\pi\mu}\int_0^{\theta} M_{(w)}\,\frac{\left(\sin\frac{\theta-w}{2}\right)^{1-\mu}\left(\sin\frac{w}{2}\right)^{1+\mu}}{\sin\frac{\theta}{2}}\left(\frac{e^{iw}+z}{e^{iw}-z}-\frac{e^{iw}+1}{e^{iw}-1}\right)dw +$$

$$+\frac{1}{\pi\mu}\int_0^{2\pi} L'(w)\,\frac{\left(\sin\frac{w-\theta}{2}\right)^{1-\mu}\left(\sin\frac{w}{2}\right)^{1+\mu}}{\sin\frac{\theta}{2}}\left(\frac{e^{iw}+z}{e^{iw}-z}-\frac{e^{iw}+1}{e^{iw}-1}\right)dw\,.$$

But from formula (14) we deduce

$$\frac{dS}{dz} = 2\,\mu i e^{\frac{i\theta}{2}(1-\mu)}\,\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{(z-e^{i\theta})^{(1-\mu)}\,(z-1)^{1+\mu}}$$

and therefore with single operations we are able to calculate

$$\frac{dw}{dz} = \frac{dw}{dS}\,\frac{dS}{dz} = w_2\,(S\,(z))\,\frac{dS}{dz}\,;$$

we obtain

$$(17)\qquad \frac{dw}{dZ} = \frac{2}{\pi}\,\frac{e^{i\frac{\theta}{2}(1-\mu)}}{(z-e^{i\theta})^{1-\mu}\,(z-1)^{\mu}}\left\{\int_0^{\theta} M\,(w)\,\frac{\left(\sin\frac{\theta-w}{2}\right)^{1-\mu}\left(\sin\frac{w}{2}\right)^{\mu} e^{\frac{iw}{2}}}{z-e^{iw}}\,dw\,-\right.$$

$$\left.-\int_0^{2\pi} L'\,(w)\,\frac{\left(\sin\frac{w-\theta}{2}\right)^{1-\mu}\left(\sin\frac{w}{2}\right)^{\mu} e^{\frac{iw}{2}}}{z-e^{iw}}\,dw\right\}.$$

Now, by an integration, we shall calculate w except for a constant, and, by separating the real part from the imaginary part, we shall have the harmonic function u, leaving a constant that will be easily determined.

Therefore, if along the arc bdc we know $\delta u/\delta l$, and along the arc ceb we know u, we are able to calculate the harmonic function u within the circle. According to what we have stated in Section 7 of the first lecture, we can say that the problem of the *distribution of currents in a circular plate, when the current enters through one or even through several internal point electrodes and goes out through a linear electrode, of negligible resistance, situated along an arc of the boundary,* can be completely solved by the preceding formulae.

The integration with respect to z that we have to make for obtaining from (17), w, can be calculated by elementary function when $\mu = 1/n$, n being a whole number. But in this case the method of the images permits us to obtain the solution more easily, as we shall now see.

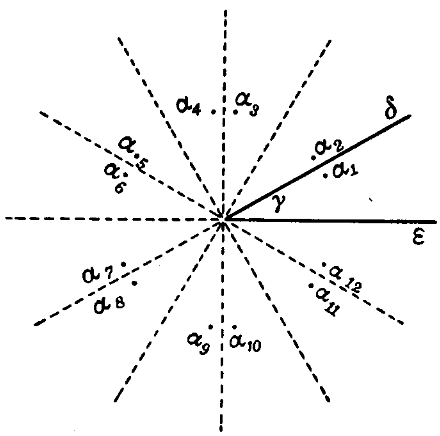


Fig. 25.

Let α_1 be a point in the interior of the angle $dj\Sigma$ (Fig. 24) having the amplitude $\pi\mu = (\pi/n)$ (n, whole number).

Let us complete the division of the plane in angles all equal to π/n and let us consider the successive images $\alpha_2, \alpha_3, \cdots, \alpha_n$ of the point α_1 with respect to the various sides of the angles (see Fig. 25); in this figure we have taken $n=6$, $\beta = 60°$. The smallest value of n is 2, in which case we have $\beta = 0$.

Let us consider the two functions of the complex variable S

$$(18) \qquad \Phi = \sum_1^n {}_h\, e^{\frac{-2(h-1)\pi i}{n}} \left[\log(S - \alpha_{2h-1}) - e^{\frac{-2\pi i}{n}} \log(S - \alpha_{2h})\right]$$

$$(18') \qquad F = \sum_1^n {}_h\, e^{\frac{-2(h-1)\pi i}{n}} \left[e^{\frac{\pi i}{n}} \log(S - \alpha_{2h-1}) - e^{\frac{-\pi i}{n}} \log(S - \alpha_{2h})\right],$$

which are connected by the relation

$$(18'') \qquad F = e^{\frac{\pi i}{n}} \varphi$$

and let us study their properties. We can easily recognize that each term of these functions does not vary by changing h in $h + n$. In fact, since after $2n$ reflections the images reproduce themselves, we have

$$\alpha_g = \alpha_{g+2n}$$

and also

$$e^{\frac{-2(h+n-1)\pi i}{n}} = e^{\frac{-2(h-1)\pi i}{n}}.$$

We can therefore substitute in any term h' for h, without altering its value, provided we have $h' \equiv h \pmod{n}$.

Now let us observe that α_{2h-1} and α_{2k} are images each of the other with respect to the side $j\Sigma$ when $2h-1+2k=2n+1$ and that α_{2h-1} and $\alpha_{2k'}$ are images each of the other with respect to the side jd when $2h-1+2k'=2n+3$. From the two last equations we obtain

$$k = n - h + 1 \quad , \quad k' = n - h + 2.$$

Let us consider now the two following terms of the sum (18):

$$e^{\frac{-2(h-1)\pi i}{n}} \log(z - \alpha_{2h-1})$$

and

$$-e^{\frac{-2(k-1)\pi i}{n}} e^{\frac{-2\pi i}{n}} \log(z - \alpha_{2k}) = -e^{\frac{-2(h-1)\pi i}{n}} \log(z - \alpha_{2k});$$

their sum will be

$$e^{\frac{-2(h-1)\pi i}{n}} \log(z - \alpha_{2h-1}) - e^{\frac{-2(h-1)\pi i}{n}} \log(z - \alpha_{2k})$$

and will have its real part constant along the side $j\Sigma$ (see Section 2 of the second lecture).

Thus, the terms of Φ can be coupled in such a way that the real part of the sum of each couple is constant along $j\Sigma$; therefore along this side the real part of Φ is also constant.

Let us consider the two terms of the sum (18′):

$$e^{\frac{-2(h-1)\pi i}{n}} e^{\frac{\pi i}{n}} \log(S - \alpha_{2h-1})$$

and

$$e^{\frac{-2(k'-1)\pi i}{n}} e^{\frac{-\pi i}{n}} \log(S - \alpha_{2k'}) = e^{\frac{-2(k-1)\pi i}{n}} e^{\frac{-\pi i}{n}} \log(S - \alpha_{2k'});$$

their sum will be

$$e^{\frac{-(2h-3)\pi i}{n}} \log(S - \alpha_{2h-1}) - e^{\frac{-(2h-3)\pi i}{n}} \log(S - \alpha_{2k'})$$

and will have this real part constant along the side $j\delta$. We can thus couple the terms of F in such a way that the real part of the sum of each couple is constant along $j\delta$; therefore also F will have the real part constant along this side.

Now let us take

$$\varphi = \frac{-J}{2\pi k}\Phi \tag{19}$$

$$f = \frac{-J}{2\pi k_i \sin\frac{\pi}{n}} F. \tag{19′}$$

Evidently φ will have the real part constant along the side $j\Sigma$ and f will have the imaginary part constant along $j\delta$, that is the normal derivative of the real part of f will be zero along $j\delta$.

But we can easily verify, owing to (18″) that we have $f = \frac{e^{-i\beta}}{\cos\beta}\varphi$ when we take $\beta = \left(\frac{n-2}{2n}\right)\pi$. Therefore, if we assume the real part of φ as electric potential, the real part of f will be the corresponding fundamental function (Section I of the second lecture). Let us separate in f and φ the real from the imaginary part, by writing

$$\varphi = V + iV' \quad , \quad f = U + iU' ;$$

then V and U are respectively the electric potential and the fundamental function corresponding to the distribution of the current in an indefinite plate bounded by the two radii $j\Sigma$ and $j\delta$ and subject to the action of a magnetic field, when the current of intensity $I = \nu J$ (ν thickness of the plate) enters through the point α_1 and goes out through an indefinite electrode of negligible resistance placed along the side $i\Sigma$, when the side bdc is insulated and the angle β is equal to $\left(\frac{n-2}{2n}\right)\pi$.

Now let us put in (19) and (19′) (see formula (14))

$$S = \left(\frac{ze^{-\frac{i\theta}{2}} - e^{\frac{i\theta}{2}}}{z-1}\right)^{\frac{1}{n}};$$

we shall thus obtain the conformal representation of the angle $\Sigma j\delta$ (Fig. 25) in the circle (Fig. 22). To the point α_1 will correspond a point a_1 in the interior of the circle; a_1 and α_1 will be connected by the relation

$$\left(\frac{a_1 e^{-\frac{i\theta}{2}} - e^{\frac{i\theta}{2}}}{a_1 - 1}\right)^{\frac{1}{n}} = \alpha_1$$

and therefore the complex numbers $\alpha_1, \alpha_3, \alpha_5, \cdots, \alpha_{2n-1}$ will be the n values of

$$\sqrt[n]{\frac{a_1 e^{-\frac{i\theta}{2}} - e^{\frac{i\theta}{2}}}{a-1}}$$

while $\alpha_2, \alpha_4, \cdots, \alpha_{2n}$ will be the number conjugates of the preceding, that is the n values of

$$\sqrt[n]{\frac{a'_1 e^{\frac{i\theta}{2}} - e^{-\frac{i\theta}{2}}}{a'_1 - 1}},$$

having denoted with a'_1 the complex number conjugate to a_1. Therefore: *If we have*

$$\beta = \frac{n-2}{2M}\pi \quad , \quad S = \left(\frac{ze^{-\frac{i\theta}{2}} - e^{\frac{i\theta}{2}}}{z-1}\right)\frac{1}{n}$$

and if the φ_{2h-1} *and the* α_{2h} *denote respectively the* n *values of*

$$\sqrt[n]{\frac{a_1 e^{-\frac{i\theta}{2}} - e^{\frac{i\theta}{2}}}{a_1 - 1}} \quad \text{and} \quad \sqrt[n]{\frac{a_1' e^{\frac{i\theta}{2}} - e^{-\frac{i\theta}{2}}}{a_1' - 1}}$$

(a' being the conjugate of a), *the real parts of*

$$\varphi = \frac{-J}{2\pi K}\sum_1^n{}_h e^{\frac{-2(h-1)\pi i}{n}}\left[\log(S-\alpha_{2h-1}) - e^{\frac{-2\pi i}{n}}\log(S-\alpha_{2h})\right] \quad \text{and}$$

$$= \frac{-J}{2\pi K i \sin\frac{\pi}{n}}\sum_1^n{}_h e^{\frac{-2(h-1)\pi i}{n}}\left[e^{\frac{\pi i}{n}}\log(S-\alpha_{2h-1}) - e^{\frac{-\pi i}{n}}\log(S-\alpha_{2h})\right]$$

are respectively the electric potential and the fundamental function of the distribution of currents under the action of the magnetic field in a circle having the radius equal to 1 (Fig. 22), *when the current enters through an internal point electrode a and goes out through a linear electrode, of negligible resistance, placed along the arc bec of the boundary, while the part bdc of the same boundary is insulated.*

Now let us suppose that the point electrode a_1 *coincides with a point of the arc bdc of the boundary*; then we shall have $\alpha_{2h-1} = \alpha_{2h}$ and, if we put $a_1 = e^{iw}$ with $w < \theta$, these numbers α will be the n values of

$$\sqrt[n]{\frac{e^{i\left(a-\frac{\theta}{2}\right)} - e^{i\frac{\theta}{2}}}{e^{iw}-1}}$$

that is the n values of

$$\left(\frac{\sin\frac{\theta-w}{2}}{\sin\frac{w}{2}}\right)^{\frac{1}{n}} e^{\frac{(2h-1)\pi i}{n}}$$

for $h = 1, 2, \cdots, n$, therefore we shall have

$$f = \frac{-J}{\pi K}\sum_1^n{}_h e^{\frac{-2(h-1)\pi i}{n}}\log\left[S - \sqrt[n]{\frac{\sin\frac{\theta-w}{2}}{\sin\frac{w}{2}}}\, e^{\frac{(2h-1)\pi i}{n}}\right]$$

$$\varphi = -i\frac{J\sin\frac{\pi}{n}}{\pi K}\sum_1^n{}_h e^{\frac{-(2h-1)\pi i}{n}}\log\left[S - \sqrt[n]{\frac{\sin\frac{\theta-w}{2}}{\sin\frac{w}{2}}}\, e^{\frac{(2h-1)\pi i}{n}}\right],$$

where we have to take for $\sqrt[n]{\frac{\sin\frac{\theta-w}{2}}{\sin\frac{w}{2}}}$ the positive value and we must always suppose the expression $\left(\frac{ze^{-\frac{i\theta}{2}} - e^{\frac{i\theta}{2}}}{z-1}\right)^{\frac{1}{n}}$ substituted for S.

SECTION 2.

We will now study the case in which the plate is not plane and the magnetic field is not uniform.

Let us subdivide the plate into infinitesimal elements. We can consider each of these elements as plane and subject to a uniform field, and therefore we can apply to it the fundamental formulae found in the case of a plane plate subject to the action of a uniform magnetic field; we may conveniently develop these formulae by using curvilinear coordinates.

Then, by passing through an element to the contiguous element, we shall be able to state the relations which are to be verified on the whole surface and from these relations we shall deduce the general differential equations and the boundary conditions.

Let us consider an infinitesimal, plane element of the plate, adiacent to a point A, and let us remember the equations (3)

$$j_x = -K\left(\frac{\delta V}{\delta x} - \lambda\frac{\delta V}{\delta y}\right) \quad ; \quad j_y = -K\left(\frac{\delta V}{\delta y} + \lambda\frac{\delta V}{\delta x}\right).$$

Let ds be a linear element passing through A and dn the corresponding element of normal; let ds and dn be situated as we have said in Section 5 of the first lecture; then we shall have:

$$\frac{dx}{ds} = \frac{dy}{dn} \quad , \quad \frac{dy}{ds} = -\frac{dx}{dn}$$

$$j_n = j_x\frac{dx}{dn} + j_y\frac{dy}{dn} = -K\left(\frac{\delta V}{\delta n} + \lambda\frac{\delta V}{\delta s}\right),$$

where j_n denotes the densitý of the current normal to ds. By employing a system of curvilinear coordinates u and v, we shall have

$$(20) \qquad j_n = -K\left[\frac{\delta V}{\delta u}\frac{\delta u}{\delta n} + \frac{\delta V}{\delta v}\frac{\delta v}{\delta n} + \lambda\left(\frac{\delta V}{\delta n}\frac{\delta u}{\delta s} + \frac{\delta V}{\delta v}\frac{\delta v}{\delta s}\right)\right].$$

(Let us regard positive directions of the curves $V = const.$ and $u = const.$, as the directions in which u and v increase respectively. We shall make the convention that the rotation of the positive direction of the line $v = const.$ towards the positive direction of the line $u = const.$, through the angle smaller than β, has the same sense as the rotation of $90°$ by which the positive direction of the line s can reach the positive direction of the line n; moreover we shall here and in what follows, take for $\sqrt{EG - F^2}$ the positive value).

Now, if the square of the linear element be

$$ds^2 = E\,du^2 + 2\,F\,du\,dv + G\,dv^2$$

we have

$$(a) \qquad \begin{cases} \dfrac{\delta u}{\delta n} = -\dfrac{1}{\sqrt{EG - F^2}}\left(F\dfrac{\delta u}{\delta s} + G\dfrac{\delta v}{\delta s}\right) \\[2ex] \dfrac{\delta v}{\delta u} = \dfrac{1}{\sqrt{EG - F^2}}\left(E\dfrac{\delta u}{\delta s} + F\dfrac{\delta v}{\delta s}\right) \end{cases}$$

$$(a_1)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\delta u}{\delta s} &= \frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\left(F\frac{\delta u}{\delta n}+G\frac{\delta v}{\delta n}\right)\\ \frac{\delta v}{\delta s} &= -\frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\left(E\frac{\delta u}{\delta n}+F\frac{\delta v}{\delta n}\right);\end{aligned}\right.$$

and the equation (20) becomes

$$(20')\qquad j_n = -K\left[\frac{E\frac{\delta V}{\delta v}-F\frac{\delta V}{\delta u}}{\sqrt{EG-F^2}}+\lambda\frac{\delta V}{\delta u}\right]\frac{\delta u}{\delta s}+K\left[\frac{G\frac{\delta V}{\delta u}-F\frac{\delta V}{\delta v}}{\sqrt{EG-F^2}}-\lambda\frac{\delta V}{\delta v}\right]\frac{\delta v}{\delta s}\,.$$

Let us suppose the line s to coincide with the line u = *const.*; then the preceding equation will become

$$(21)\qquad j_{nu} = K\left[\frac{G\frac{\delta V}{\delta u}-F\frac{\delta V}{\delta v}}{\sqrt{EG-F^2}}-\lambda\frac{\delta V}{\delta u}\right]\frac{1}{\sqrt{G}}$$

where j_{nu} is the density of the current normal to the element of the line u = *const.* Analogously we shall obtain

$$(21'_1)\qquad j_{nv} = -K\left[\frac{E\frac{\delta V}{\delta v}-F\frac{\delta V}{\delta u}}{\sqrt{EG-F^2}}+\lambda\frac{\delta V}{\delta v}\right]\frac{1}{\sqrt{E}}$$

($\sqrt{G}$ and $\sqrt{E}$ have to be taken with the positive sign).

All the preceding formulae hold good for an infinitesimal plane element: now if *the plate be curved and be placed in an uniform or non-uniform magnetic field,* the preceding formulae hold good for each infinitesimal element of the surface, we have only to suppose that K and $\lambda = \operatorname{tg}\beta$ change from element to element; in other words, the preceding formulae will hold good in the more general case of a metallic plate, of any form, situated in any magnetic field, provided K and λ be considered as known functions of u and v. In order to obtain the values of these functions in a point of the plate it is sufficient to substitute in the formulae (see Section 4 of the first lecture):

$$K = e^2\left(\frac{N_1 v_1}{1+e^2 v_1^2 H^2}+\frac{N_2 v_2}{1+e^2 v_2^2 H^2}\right)\quad,\qquad \lambda = \frac{\Sigma}{K}\,,$$

$$\Sigma = e^3 H\left(\frac{N_1 v_1^2}{1+e^2 v_1^2 H^2}+\frac{N_2 v_2^2}{1+e^2 v_2^2 H^2}\right)$$

for H the component of the magnetic field in the direction of the normal to the plate; this component will vary from point to point of the plate because the angle that the normal forms which the direction of the magnetic field and the intensity of this latter vary.

(We do not take into account, here, the secondary actions by which a plate loses the character of isotropy, with respect to its eletrical conductivity, when it is subject to the action of a magnetic field, the direction of which does not coincide, in every point, with the normal to the plate [see fourth lecture, Section 1]. We observe only that the perturbations caused by these *secondary actions do not take place when the magnetic field is perpendicular to the plate at every point of this latter).*

From the formula (20′) which holds good on all the surface, we obtain

$$(22)\qquad \int_s j_n\, ds = \int_s \left\{ -K\left[\frac{E\frac{\delta V}{\delta v} - F\frac{\delta V}{\delta u}}{\sqrt{EG-F^2}} + \lambda\frac{\delta V}{\delta u}\right]\frac{\delta u}{\delta s} + \right.$$

$$\left. + K\left[\frac{G\frac{\delta V}{\delta u} - F\frac{\delta V}{\delta v}}{\sqrt{EG-F^2}} - \lambda\frac{\delta V}{\delta v}\right]\frac{\delta v}{\delta s}\right\} ds\,.$$

If s be a closed line which encloses no electrode, the first member of the preceding equation is zero and therefore

$$(23)\qquad -K\left[\frac{E\frac{\delta V}{\delta v} - F\frac{\delta V}{\delta n}}{\sqrt{EG-F^2}} + \lambda\frac{\delta V}{\delta u}\right] du + K\left[\frac{G\frac{\delta V}{\delta u} - F\frac{\delta V}{\delta v}}{\sqrt{EG-F^2}} - \lambda\frac{\delta V}{\delta v}\right] dv$$

must be an exact differential; calling it dW, we shall have

$$(24)\qquad \left\{\begin{aligned} -\sqrt{G}\, j_{nu} &= -K\left[\frac{G\frac{\delta V}{\delta u} - F\frac{\delta V}{\delta v}}{\sqrt{E-GF^2}} - \lambda\frac{\delta V}{\delta v}\right] = -\frac{\delta W}{\delta v} \\ \sqrt{E}\, j_{nu} &= -K\left[\frac{E\frac{\delta V}{\delta v} - F\frac{\delta V}{\delta u}}{\sqrt{EG-F^2}} + \lambda\frac{\delta V}{\delta u}\right] = \frac{\delta W}{\delta u}\,. \end{aligned}\right.$$

Therefore V must fulfil the differential equation

$$(F)\quad \frac{\delta}{\delta u}\left\{K\left[-\frac{G\frac{\delta V}{\delta u} - F\frac{\delta V}{\delta v}}{\sqrt{EG-F^2}} - \lambda\frac{\delta V}{\delta v}\right]\right\} + \frac{\delta}{\delta v}\left\{K\left[\frac{E\frac{\delta V}{\delta v} - F\frac{\delta V}{\delta u}}{\sqrt{EG-F^2}} + \lambda\frac{\delta V}{\delta u}\right]\right\} = 0\,.$$

By solving the equation (24) with respect to $\delta V/\delta u$ and $\delta V/dv$ we obtain

$$-\frac{1}{K(1+\lambda^2)}\left[\frac{G\frac{\delta W}{\delta u} - F\frac{\delta W}{\delta v}}{\sqrt{EG-F^2}} + \lambda\frac{\delta W}{\delta v}\right] = \frac{\delta V}{\delta v}\,,$$

$$\frac{-1}{K(1+\lambda^2)}\left[\frac{E\frac{\delta W}{\delta v} - F\frac{\delta W}{\delta u}}{\sqrt{EG-F^2}} - \lambda\frac{\delta W}{\delta u}\right] = -\frac{\delta V}{\delta u}\,;$$

therefore W fulfills the differential equation

$$(G)\qquad \frac{\delta}{\delta u}\left\{\frac{1}{K(1+\lambda^2)}\left[\frac{G\frac{\delta W}{\delta u} - F\frac{\delta W}{\delta v}}{\sqrt{EG-F^2}} + \lambda\frac{\delta W}{\delta v}\right]\right\} +$$

$$+ \frac{\delta}{\delta v}\left\{\frac{1}{K(1+\lambda^2)}\left[\frac{E\frac{\delta W}{\delta v} - F\frac{\delta W}{\delta u}}{\sqrt{EG-F^2}} - \lambda\frac{\delta W}{\delta u}\right]\right\} = 0\,.$$

Now let us suppose that in the formula (22) the integration is extended to an open line s. Owing to (24), we shall have

$$\int_s j_n \, ds = \int_s dW = W_2 - W_1 ,$$

where W_1 and W_2 are respectively the values of W at the origin and at the extreme of the arc s.

Therefore *along the insulated portions of the boundary (as along each line of flow),* W *will be constant, while along all the electrodes of negligible resistance V will be constant.*

If we suppose that in the interior of the plate there are no electromotive forces, V *will be a single-valued function, while* W *will become many-valued if we go along any closed curve which encloses some electrodes through which a total quantity of electricity different from zero enters into the plate.* (We shall say that some electrodes are enclosed by the curve if they be on the same side of the said curve).

If the plate be acyclic and all the electrodes be at the boundary, W will be evidently single-valued.

We shall call W *the function of currents.* In the case in which K and λ are constant, for a given value of H, we have $W = KU'$, where U' is the conjugate function of the *fundamental function U.* (see Section 1 of the second lecture).

The expression for j_n (formula (20′)) can be transformed in various ways. In fact, by using (24), we can write

$$(20'') \qquad j_n = \frac{\delta W}{\delta s}$$

whereas, by applying (α'), we have

$$(20''') \quad j_n = -K \left\{ \left(\frac{\delta V}{\delta n} - \frac{\lambda\left(E\frac{\delta V}{\delta v} - F\frac{\delta V}{\delta u}\right)}{\sqrt{EG - F^2}} \right) \frac{\delta u}{\delta n} + \left(\frac{\delta V}{\delta v} + \frac{\lambda\left(G\frac{\delta V}{\delta u} - F\frac{\delta V}{\delta v}\right)}{\sqrt{EG - F^2}} \right) \frac{\delta v}{\delta n} \right\}.$$

Lastly, bearing in mind the formula (20″), that is, $j_n = \frac{\delta W}{\delta u}\frac{\delta u}{\delta s} + \frac{\delta W}{\delta v}\frac{\delta v}{\delta s}$ and (α'), we find

$$(20'''') \quad j_n = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \left\{ \left(F\frac{\delta W}{\delta u} - E\frac{\delta W}{\delta v} \right) \frac{\delta u}{\delta n} + \left(G\frac{\delta W}{\delta u} - F\frac{\delta W}{\delta v} \right) \frac{\delta v}{\delta n} \right\}.$$

Bearing in mind (24), the formulae (21) and (21′) can also be written in this way

$$(21') \qquad j_{nu} = \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\delta W}{\delta v} \quad , \quad j_{nu} = \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\delta W}{\delta u} .$$

Let us call j_u and j_v the orthogonal projections of the density of the current in the directions of the lines $u = const.$ and $v = const.$; we may obtain their values by supposing that n coincides successively with the directions of the lines $u = const.$ and $v = const.$; we shall have

$$(25)\quad j_u = \frac{-K}{\sqrt{G}}\left(\frac{\delta V}{\delta v} + \lambda\frac{G\frac{\delta V}{\delta n} - F\frac{\delta V}{\delta v}}{\sqrt{EG-F^2}}\right)\ ;\ j_v = \frac{-K}{\sqrt{E}}\left(\frac{\delta V}{\delta u} - \lambda\frac{E\frac{\delta V}{\delta v} - F\frac{\delta V}{\delta u}}{\sqrt{EG-F^2}}\right).$$

By employing the function W, the preceding formulae become

$$(25')\qquad j_u = \frac{1}{\sqrt{G}}\left(\frac{G\frac{\delta V}{\delta n} - F\frac{\delta W}{\delta v}}{\sqrt{EG-F^2}}\right)\quad ;\quad j_v = \frac{1}{\sqrt{E}}\left(\frac{F\frac{\delta W}{\delta u} - E\frac{\delta W}{\delta v}}{\sqrt{EG-F^2}}\right).$$

Lastly, let us consider the components of density of the current parallel to the direction of the lines $u = const.$ and $v = const.$; we obtain the formulae

$$(26)\qquad \left\{\begin{aligned} i_u &= -\frac{K\sqrt{G}}{EG-F^2}\left(E\frac{\delta V}{\delta v} - F\frac{\delta V}{\delta u} + \lambda\sqrt{EG-F^2}\,\frac{\delta V}{\delta n}\right)\\ i_v &= \frac{-K\sqrt{E}}{EG-F^2}\left(G\frac{\delta V}{\delta n} - F\frac{\delta V}{\delta v} - \lambda\sqrt{EG-F^2}\,\frac{\delta V}{\delta v}\right),\end{aligned}\right.$$

which, by employing the function W, become

$$(26')\qquad i_u = \frac{\sqrt{G}}{\sqrt{EG-F^2}}\,\frac{\delta W}{\delta u}\quad ,\quad i_v = \frac{-\sqrt{E}}{\sqrt{EG-F^2}}\,\frac{\delta W}{\delta v}\ .$$

From any one of these groups of formulae we obtain the square of the density of current, that is

$$(27)\qquad \left\{\begin{aligned} j^2 &= K^2(1+\lambda^2)\left[\frac{E\left(\frac{\delta V}{\delta v}\right)^2 - 2F\frac{\delta V}{\delta u}\frac{\delta V}{\delta v} + G\left(\frac{\delta V}{\delta u}\right)^2}{EG-F^2}\right]\\ j^2 &= \frac{E\left(\frac{\delta W}{\delta v}\right)^2 - 2F\frac{\delta W}{\delta u}\frac{\delta W}{\delta v} + G\left(\frac{\delta W}{\delta u}\right)^2}{EG-F^2}\ .\end{aligned}\right.$$

These formulae, by using the symbol of the differential parameter of the first order, become

$$(27')\qquad \left\{\begin{aligned} j^2 &= K^2(1+\lambda^2)\,\Delta_1 V\\ j^2 &= \Delta_1 W.\end{aligned}\right.$$

From the expressions that we have obtained for j_n we can deduce other forms for the condition $j_n = 0$ which has to be fulfilled along the insulated portions of the boundary. For instance, by using the formula (20‴) we can write the said condition in this way:

$$\left(\frac{\delta V}{\delta u} - \lambda\frac{E\frac{\delta V}{\delta v} - F\frac{\delta V}{\delta u}}{\sqrt{EG-F^2}}\right)\frac{\delta u}{\delta n} + \left(\frac{\delta V}{\delta v} + \lambda\frac{G\frac{\delta V}{\delta u} - F\frac{\delta V}{\delta v}}{\sqrt{EG-F^2}}\right)\frac{\delta v}{\delta n} = 0.$$

SECTION 3.

When the plate is homogeneous and the magnetic field H is zero, we have $K = \text{const.}$ and $\lambda = 0$; and the equations (F) and (G) of the preceding paragraph become

$$(\beta) \qquad \begin{aligned} &\frac{\delta}{\delta u}\left\{\frac{G\dfrac{\delta V}{\delta u} - F\dfrac{\delta V}{\delta v}}{\sqrt{EG - F^2}}\right\} + \frac{\delta}{\delta v}\left\{\frac{E\dfrac{\delta V}{\delta v} - F\dfrac{\delta V}{\delta u}}{\sqrt{EG - F^2}}\right\} = 0, \\ &\frac{\delta}{\delta u}\left\{\frac{G\dfrac{\delta W}{\delta u} - F\dfrac{\delta W}{\delta v}}{\sqrt{EG - F^2}}\right\} + \frac{\delta}{\delta v}\left\{\frac{E\dfrac{\delta W}{\delta v} - F\dfrac{\delta W}{\delta u}}{\sqrt{EG - F^2}}\right\} = 0, \end{aligned}$$

and can also be written, by using the symbol of the differential parameter of the second order, in this way

$$(\beta') \qquad \Delta_2 V = 0 \quad , \quad \Delta_2 W = 0.$$

Therefore V and W, in this case, are two harmonic functions on the surface, as we could also have foreseen. Moreover the equations (24) become

$$(j) \qquad \frac{G\dfrac{\delta V}{\delta u} - F\dfrac{\delta V}{\delta v}}{\sqrt{EG - F^2}} = \frac{\delta\dfrac{W}{K}}{\delta v} \quad , \quad \frac{E\dfrac{\delta V}{\delta v} - F\dfrac{\delta V}{\delta u}}{\sqrt{EG - F^2}} = -\frac{\delta\dfrac{W}{K}}{\delta u}.$$

The condition (β') are the necessary and sufficient conditions in order that V and W be harmonic on the surface; the conditions (j) are the necessary and sufficient conditions in order that $V + i\dfrac{W}{K}$ be a complex variable on the surface (1).

Now, when $K\lambda$ is not constant, the equations (F) and (G) are essentially different from (β) and therefore V and W are not harmonic on the surface. In the case of the plane and homogeneous plate subject to the action of a uniform magnetic field, we saw in the preceding lectures that the potential V was harmonic, as it was without the magnetic field; for only the condition which V must fulfill along the insulated portions of the boundary changes. Whereas, in the case of the curved and non-homogeneous plate, subject to the action of a non-uniform magnetic field, the action of the magnetic field alters (as we have just now seen) not only the condition which the potential must fulfill along the free and insulated boundary, but also the nature of the potential in all the area occupied by the plate.

We can say, summarizing the results obtained, that when we pass from the case of the plane plate and of the uniform field at the case of the curved homogeneous or non-homogeneous plate of the uniform or non-uniform magnetic field, we pass (from the analytical point of view) from LAPLACE'S equation to new equations of different character (the equations (F) and (G)). Only two of the four functions considered in the first case (*potential, fundamental function* and their *conjugate functions*) remain also in the second case:

the *potential* and the function that we have called *function of the currents.* But the one and the other lose the character of harmonic functions on the surface occupied by the plate, and this is the reason for which the other two functions cease to subsist; in fact, as the potential V and the function of the currents W are not harmonic (that is have not zero the second differential parameter) but instead fulfill the equations (F) and (G), the conjugate functions of V and W, in the sense of the theory of the functions of complex variables on a surface, cannot exist.

From all we have now said, we can deduce that the principle of the point electrodes at the boundary exists no more in the general case of the curved non-homogeneous plate, subject to the action of a non-uniform magnetic field; the same can be said for the principle that the potential remains unaltered, under the action of the field, in the case of a cyclic plate, when the lines which form the boundary are electrodes of negligible resistance, kept at a constant potential. On the contrary, we shall see, in the following paragraph, that *principle of reciprocity* (see the Section 9 of the first lecture) holds good also in the general case just said.

SECTION 4.

From the formula (20′) of Section 2, denoting by V_1 an arbitrary function and by S the boundary (formed by one or several lines) of a part of the plate, and supposing V and V_1 to be regular, we deduce

$$(28)\quad \left\{\begin{aligned} &\int_s V_1 j_n\, dS = \int_S \left\{ -KV_1 \left[\frac{E\dfrac{\delta V}{\delta v} - F\dfrac{\delta V}{\delta u}}{\sqrt{EG-F^2}} + \lambda \frac{\delta V}{\delta u} \right] \frac{\delta u}{\delta s} + \right.\\ &\qquad \left. + KV_1 \left[\frac{G\dfrac{\delta V}{\delta u} - F\dfrac{\delta V}{\delta v}}{\sqrt{EG-F^2}} - \lambda \frac{\delta V}{\delta v} \right] \frac{\delta v}{\delta s} \right\} dS = \\ &= \int_\sigma \frac{K}{\sqrt{EG-F^2}} \left\{ G \frac{\delta V}{\delta u}\frac{\delta V}{\delta u} - F\left(\frac{\delta V_1}{\delta u}\frac{\delta V}{\delta v} + \frac{\delta V}{\delta u}\frac{\delta V_1}{\delta v} \right) + E \frac{\delta V}{\delta v}\frac{\delta V_1}{\delta v} + \right.\\ &\qquad \left. + \lambda \left(\frac{\delta V}{\delta u}\frac{\delta V_1}{\delta u} - \frac{\delta V_1}{\delta u}\frac{\delta V}{\delta v} \right) \right\} d\sigma . \end{aligned}\right.$$

(We suppose the normal n drawn towards the interior of σ and thus we fix implicitly the direction s).

Let us denote with $\Delta_1 VV_1$ the *intermediate* or mixed *differential parameter* of the functions V and V_1, that is let us put [(4)]:

$$\Delta_1 VV_1 = \frac{G\dfrac{\delta V}{\delta u}\dfrac{\delta V_1}{\delta u} - F\left(\dfrac{\delta V_1}{\delta u}\dfrac{\delta V}{\delta v} + \dfrac{\delta V}{\delta u}\dfrac{\delta V_1}{\delta v} \right) + E\dfrac{\delta V}{\delta v}\dfrac{\delta V_1}{\delta v}}{EG - F^2}$$

(4) BELTRAMI, *Delle variabili complesse sopra una superficie qualunque*, « Opere », vol. I, p. 318.

and let us consider the determinant

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\delta V}{\delta u}, & \dfrac{\delta V}{\delta v} \\ \dfrac{\delta V_1}{\delta u}, & \dfrac{\delta V_1}{\delta v} \end{vmatrix} = \frac{d\,(V\,V_1)}{d\,(u_1\,v)}.$$

We can immediately recognize that $\Delta_1 VV_1$ is symmetrical with respect to V and V_1 and that the determinant $\delta\,(VV_1)/d\,(uv)$ changes sign by exchanging V with V_1.

The equation (28) can be written thus:

$$\text{(L)} \qquad \int\limits_{S} V_1 j_n\, dS = \int\limits_{\sigma} K\left(\Delta_1 VV_1 + \frac{\lambda}{\sqrt{EG - F^2}}\,\frac{d\,(V_1\,V_1)}{d\,(uv)}\right) d\sigma.$$

Now let us suppose V_1 to be the electric potential when the magnetic field is inverted; let us denote with j_{1n} the corresponding density of current normal to S: since on reversal of the field K remains unaltered and λ changes only in sign, together with the formula (L) we shall have the other

Hence

$$\text{(M)} \qquad \int\limits_{s} (V j_{1n} - V_1 j_n)\, dS = 0.$$

If we compare the formula (D) (see Section 8 of the first lecture) with the formula (M), we recognize that from the latter we can deduce the same consequences which we have deduced from the former, and in particular the *theorems of reciprocity* (see Section 9 of the first lecture). For instance, let us suppose that with the direct magnetic field the current of intensity $I = \nu J$ (ν thickness of the plate) enters through the point electrode A and goes out through the point electrode B, and with the inverted field the current $I_1 = \nu J_1$ enters and goes out respectively through the two point electrodes A_1 and B_1. Let us suppose S to be formed by boundary s of the plate and by the four geodetical circumferences s_a, s_b, s_{a_1}, s_{b_1}, having the center s in A, B, A_1 and B_1. We shall suppose that, at least when these circumferences are sufficiently small, if j_n be drawn from the inside towards the outside of the same circumferences, j_n is positive along s_a, negative along s_b and j_{1n} is positive along s_a, and negative along s_b; moreover we shall suppose that, along s_a, s_b, s_{a_1}, and s_{b_1}, V and V_1 are finite or infinite of an order smaller than 1. Since on s j_n and j_{1n} are void, we shall have

$$\int\limits_{s_a} j_{1n}\, V ds_a + \int\limits_{s_b} j_{1n} V ds_b + \int\limits_{s_{a_1}} j_{1n} V ds_{a_1} + \int\limits_{s_{b_1}} j_{1n} V ds_{b_1} -$$

$$- \int\limits_{s_a} j_n\, V_1\, ds_a - \int\limits_{s_b} j_n\, V_1\, ds_b - \int\limits_{s_{a_1}} j_n\, V_1\, ds_a - \int\limits_{s_{b_1}} j_n\, V_1\, ds_{b_1} = 0.$$

If we pass the limit, making the four geodetical circles grow indefinitely smaller, we obtain

$$J_1\,(V_{A_1} - V_{B_1}) = J\,(V_{1A} - V_{1B})$$

and hence, if $J_1 = J$,

$$V_{A_1} - V_{B_1} = V_{1A} - V_{1B}.$$

In an analogous manner, *all the theorems of reciprocity* (relative to internal electrodes of finite areas and negligible resistances or to electrodes situated at the boundary and also of negligible resistances) *can be extended from the case of the plane and homogeneous plate situated in a uniform field, to the case of the curved homogeneous or non-homogeneous plate, situated in a uniform or non-uniform field.*

The equation (M) can also be written in this way

$$\int_S \left(V \frac{\delta W_1}{\delta s} - V_1 \frac{\delta W}{\delta s}\right) dS = 0$$

therefore $V dW_1 - V_1 dW$ *will be an exact differential*: this will be another manner of expressing the theorem of reciprocity.

From the formula (20′), denoting with S the boundary (formed by one or several curves) of a part σ of the plate, we can deduce the other formula

$$\text{(H)} \qquad \int_s V j_n \, dS = \int \sigma K \Delta_1 V d\sigma,$$

which can also be written

$$\text{(H}'\text{)} \qquad \int_S V \frac{\delta W}{\delta s} dS = \int_\sigma K \Delta_1 V d\sigma,$$

or also

$$\text{(H}''\text{)} \qquad \int_S V j_n \, dS = \int_\sigma \frac{1}{K(1+\lambda^2)} j^2 \, d\sigma,$$

or also

$$\text{(H}'''\text{)} \qquad \int_S V j_n \, dS = \int_\sigma \frac{1}{K(1+\lambda^2)} \Delta_1 W d\sigma.$$

The first members of the preceding equations are proportional to the quantity of energy which, in the unity of time, penetrates in the area σ through its boundary S. (The factor of proportionality is the thickness ν of the plate). If σ be infinitely small, $\frac{\nu}{K(1+\lambda^2)} j^2$ is the quantity of heat that, for JOULES' effect, is developed by the current in each element of surface of the plate.

From the formula (H′) we can also deduce that, if V be zero along a certain part of the boundary S and W be constant along the other parts, V is zero within the area σ. Therefore, if some portions of the boundary be electrodes of negligible resistance, where either the value of the potential or the intensity of the current which penetrates in the plate is known, and if the other portions of the boundary be free and insulated, the distribution of the currents will be determined (see first lecture, Section 6).

FOURTH LECTURE

SECTION 1. - The problem of the flow of electricity in a non-homogeneous anisotropic conductor, kept at constant temperature and subject to the action of a non-uniform magnetic field. SECTION 2. - Generalization of the principle of reciprocity. SECTION 3. - On the change of resistance of a conductor subject to the action of a magnetic field. SECTION 4. - The electromagnetic phenomena that can be observed when a disc traversed by a radial current is placed in a uniform magnetic field. SECTION 5. - A reversible generator for steady currents founded on the action of magnetic field on the electrons of conductors placed in the same field. SECTION 6. - Experimental verifications of the theorem of reciprocity in the different cases. SECTION 7. - A consequence of the theorem of reciprocity. SECTION 8 - An application of the principle of the point electrodes at the boundary. SECTION 9. - Experimental tests of the theory of flow of electricity in a circular plate perpendicular to the lines of force of a uniform magnetic field.

SECTION 1.

We shall now speak of the generalization to the case of a three-dimensional conductor of the problem previously considered, of the flow of electricity in a plate under the action of a magnetic field. This generalization was made, in 1916, by Miss FREDA [1].

The experimental results that have been obtained by studying the properties of a conductor placed in a magnetic field have led physicists to make the hypothesis that the field determines a transitory alteration of the specific properties of the substances subject to its action. According to this hypothesis the substance also if homogeneous and isotropic without the field, under the action of the latter acquires electrical properties different in different points, if the field is not uniform, and different in the different directions that pass through a point according to the angle that the same directions form with that of the field.

If we do not exclude this hypothesis, in order to study analytically the flow of electric currents in a three-dimensional medium subject to any magnetic field, it is necessary to consider media that are heterogeneous and anisotropic.

(The said hypothesis on the other hand does not introduce difficulties in the case of a plate coincident with an equipotential surface of the magnetic field, because then, for reasons of symmetry, the plate will remain homogeneous and isotropic under the action of the field if it was such before the creation of this latter; we have only to consider, in the formulae which we have already seen, N_1, N_2, v_1, v_2 as functions of the absolute value of H).

Let x, y, z be three axes that form an orthogonal right-handed system Let $d\xi_1/dt$, $d\eta_1/dt$, $d\zeta_1/dt$, $d\xi_2/dt$, $d\eta_2/dt$, $d\zeta_2/dt$ be the components of the velocities of a positive electron and of a negative electron the charges of which have both the absolute value e. Let N_1, N_2 be the numbers of positive electrons and of negative electrons per cubic centimeter of the conductor. The components j_x, j_y, j_z of the density of current are expressed in terms of the components of the velocities of the electrons by the equations:

$$(29)\quad j_x = e\left(N_1 \frac{d\xi_1}{dt} - N_2 \frac{d\xi_2}{dt}\right); j_y = e\left(N_1 \frac{d\eta_1}{dt} - N_2 \frac{d\eta_2}{dt}\right); j_z = e\left(N_1 \frac{d\zeta_1}{dt} - N_2 \frac{d\zeta_2}{dt}\right).$$

Let $eE_{1x}, eE_{1y}, eE_{1z}, eE_{2x}, eE_{2y}, eE_{2z}$ be the components of the total electromotive forces acting respectively on a positive electron and on a negative electron; let H_x, H_y, H_z be the components of the magnetic field. Let $X = -\frac{\delta V}{\delta x}, Y = -\frac{\delta V}{\delta y}, Z = -\frac{\delta V}{\delta z}$ be the components of the electric force which admits the potential V.

According to OHM'S law for anisotropic media, the components of the velocities of the electrons of the two kinds are expressed, by linear equations, in terms of the components of the total electromotive forces which act on the same electrons. We have therefore

$$(30)\quad \begin{cases} \frac{d\xi_1}{dt} = e(a_{11}E_{1x} + a_{12}E_{1y} + a_{13}E_{1z}) \\ \frac{d\eta_1}{dt} = e(a_{21}E_{1x} + a_{22}E_{1y} + a_{23}E_{1z}) \\ \frac{d\zeta_1}{dt} = e(a_{31}E_{1x} + a_{32}E_{1y} + a_{33}E_{1z}) \end{cases} \qquad (31)\quad \begin{cases} \frac{d\xi_2}{dt} = -e(b_{11}E_{2x} + b_{12}E_{2y} + b_{13}E_{2z}) \\ \frac{d\eta_2}{dt} = -e(b_{21}E_{2x} + b_{22}E_{2y} + b_{23}E_{2z}) \\ \frac{d\zeta_2}{dt} = -e(b_{31}E_{2x} + b_{32}E_{2y} + b_{33}E_{2z}). \end{cases}$$

The experimental results that induce us to infer an alteration of the specific properties of a conductor caused by the magnetic field induce us also to infer that this alteration does not depend on the sense of the field. We shall therefore assume that the coefficients N_1, N_2, a_{mn}, b_{mn} (which characterize the specific properties of the metal) can eventually depend, not only on x, y, z, but also on H_x, H_y, H_z, but do not vary when we change the sign of all three components of the field.

As the conductor is kept at a constant temperature, the total electromotive force that acts upon an electron is the resultant of the electric force depending on the distribution of the potential and of the electromotive force caused by the movement of the electron in the field. We therefore have

$$(32)\quad \begin{cases} E_{1x} = X + H_y \frac{d\zeta_1}{dt} - H_z \frac{d\eta_1}{dt} \\ E_{1y} = Y + H_z \frac{d\xi_1}{dt} - H_x \frac{d\zeta_1}{dt} \\ E_{1z} = Z + H_x \frac{d\eta_1}{dt} - H_y \frac{d\xi_1}{dt} \end{cases} \qquad (33)\quad \begin{cases} E_{2x} = X + H_y \frac{d\zeta_2}{dt} - H_z \frac{d\eta_2}{dt} \\ E_{2y} = Y + H_z \frac{d\xi_2}{dt} - H_x \frac{d\zeta_2}{dt} \\ E_{2z} = Z + H_x \frac{d\eta_2}{dt} - H_y \frac{d\xi_2}{dt}. \end{cases}$$

By means of the equations (30) (31) (32) (33), $d\xi_1/dt$, $d\eta_1/dt$, $d\zeta_1/dt$, $d\xi_2/dt$, $d\eta_2/dt$ $d\zeta_2/dt$ can be expressed as linear functions of X, Y, Z. We obtain thus the equations:

$$(34)\quad \begin{cases} \dfrac{d\xi_1}{dt} = e\,(\alpha_{11}\,X + \alpha_{12}\,Y + \alpha_{13}\,Z) \\ \dfrac{d\eta_1}{dt} = e\,(\alpha_{21}\,X + \alpha_{22}\,Y + \alpha_{23}\,Z) \\ \dfrac{d\zeta_1}{dt} = e\,(\alpha_{31}\,X + \alpha_{32}\,Y + \alpha_{33}\,Z) \end{cases} \qquad (35)\quad \begin{cases} \dfrac{d\xi_2}{dt} = -e\,(\beta_{11}\,X + \beta_{12}\,Y + \beta_{13}\,Z) \\ \dfrac{d\eta_2}{dt} = -e\,(\beta_{21}\,X + \beta_{22}\,Y + \beta_{23}\,Z) \\ \dfrac{d\zeta_2}{dt} = -e\,(\beta_{31}\,X + \beta_{32}\,Y + \beta_{33}\,Z). \end{cases}$$

The coefficients α_{rs}, β_{rs} are functions of the components of the magnetic field and of the coefficients a_{rs} or of the coefficients b_{rs} respectively; for the sake of brevity we do not transcribe their expressions.

By means of the equations (23) (34) (35), j_x, j_y, j_z can be expressed as functions of the derivatives of the potential V. We have

$$(36)\quad \begin{cases} j_x = -e^2\left[(N_1\,\alpha_{11} + N_2\,\beta_{11})\dfrac{\delta V}{\delta x} + (N_1\,\alpha_{12} + N_2\,\beta_{12})\dfrac{\delta V}{\delta y} + (N_1\,\alpha_{13} + N_2\,\beta_{13})\dfrac{\delta V}{\delta z}\right] \\ j_y = -e^2\left[(N_1\,\alpha_{21} + N_2\,\beta_{21})\dfrac{\delta V}{\delta x} + (N_1\,\alpha_{22} + N_2\,\beta_{22})\dfrac{\delta V}{\delta y} + (N_1\,\alpha_{23} + N_2\,\beta_{23})\dfrac{\delta V}{\delta z}\right] \\ j_z = -e^2\left[(N_1\,\alpha_{31} + N_2\,\beta_{31})\dfrac{\delta V}{\delta x} + (N_1\,\alpha_{32} + N_2\,\beta_{32})\dfrac{\delta V}{\delta y} + (N_1\,\alpha_{33} + N_2\,\beta_{33})\dfrac{\delta V}{\delta z}\right]. \end{cases}$$

The condition

$$(37)\qquad \frac{\delta j_x}{\delta x} + \frac{\delta j_y}{\delta y} + \frac{\delta j_z}{\delta z} = 0$$

gives us the differential equation that V must fulfill. If n is the normal at any point of the free surface of the conductor, from the condition $j_n = 0$ we deduce a boundary condition for V. If along the surface of the conductor there be electrodes of negligible resistance kept at constant potentials V_1, V_2, we have also for V the conditions $V = V_1$ along a part of the boundary $V = V_2$ along another part of the boundary.

Now let us suppose that the conductor is homogeneous and isotropic when the field does not exist; that the field is uniform and has the lines of force parallel to the axis z. Then, if the magnetic field does not alter the specific properties of the conductor, the equations (36) become

$$(36')\quad j_x = -K\left(\frac{\delta V}{\delta x} - \lambda\frac{\delta V}{\delta y}\right) \;;\; j_y = -K\left(\lambda\frac{\delta V}{\delta x} + \frac{\delta V}{\delta y}\right) \;;\; j_z = -\sigma\frac{\delta V}{\delta z}\,.$$

(K and λ have the same values they had in the formulae (3) of the first lecture; σ is given by the formula $\sigma = e^2(N_1 v_1 + N_2 v_2)$).

SECTION 2.

From the formulae (36) and (37) of the preceding paragraph, Miss FREDA has deduced that, if the coefficients a_{rs}, b_{rs} of the equations (30) and (31) satisfy the conditions

$$(38) \qquad a_{rs} = a_{sr}\,, \qquad b_{rs} = b_{sr}\,,$$

we have

$$(39) \qquad \int_s (V_1 j_n - V j_{1\,n})\, dS = 0\,.$$

(We denote with V, j, V_1, j_1 the potential and the density of current when the field is direct and when the field is inverted, with S the complete boundary of the conductor or of a part of it).

The formula (39) is perfectly analogous to the formula (D) of the first lecture. From the formula (39), by specifying conveniently the boundary S, Miss FREDA has stated (analogously to what we have already seen in the case of a plate) that my theorem of reciprocity holds good also in the case of a non-uniform magnetic field and of a non-homogeneous anisotropic conductor for which the conditions (38) are satisfied.

The four electrodes of the conductor can be point electrodes (in the interior or at the boundary) or else laminar, situated at the boundary and of negligible resistance, or else three-dimensional, situated in the interior and of negligible resistance.

If the magnetic field be zero, the necessary and sufficient condition in order that the equation (39) may be fulfilled is

$$(38') \qquad N_1 a_{rs} + N_2 b_{rs} = N_1 a_{sr} + N_2 b_{sr}\,.$$

If we consider the physical meaning of the coefficients a_{rs}, b_{rs} of the formulae (30) and (31) we see that the formulae (38) express some elementary laws of reciprocity. For instance, the property expressed by the formula $a_{12} = a_{21}$ can be thus translated in words:

The component, parallel to the axis y, of the velocity that a positive electron acquires when subject to an electromotive force equal to 1 and parallel to the axis x, is equal to the component, parallel to the axis x, of the velocity that the same electron acquires when subject to an electromotive force equal to 1 and parallel to the axis y.

My theorem of reciprocity in the case of anisotropic conductors is, then, a consequence of these elementary laws of reciprocity.

MAXWELL, speaking of the flow of electricity in an anisotropic medium (not subject to the action of a magnetic field) says that in every case of aelotropy (with the possible exception of magnets) we can grant that the determinant of the coefficients, in the equations that express the components of the electric current linearly in terms of the components of the electromotive force, is a symmetrical determinant [2].

If we refer to the electronic theory, this hypothesis of MAXWELL'S is equivalent to the conditions (38′).

If not only the conditions (38′) but also (38) be satisfied in every case of aeolotropy, the same generality holds good for my theorem of reciprocity. We can however easily determine a case in which the conditions (38) are certainly satisfied. Among others there is the case, the most interesting here, of a conductor that is isotropic without the magnetic field and that acquires a temporary aeolotropy only under the action of the field. To state this it is sufficient to bear in mind that for evident reasons of symmetry, all the directions, passing through a point P of the conductor and tangent to the equipotential surface that passes through P, are equivalent from the electromagnetic point of view.

SECTION 3.

As is known, the conductors show, under the action of a magnetic field, a change of resistance. The experimental researches on this phenomenon are very numerous; but the results obtained and the empirical formulae proposed by the various experimenters to represent the phenomenon are often discordant and even incompatible among themselves. This depends in part, as will be seen from what we shall say in this paragraph, on not having clearly defined what we mean by change of resistance produced by the field.

One result with reference to which the said experimental researches may be said to be concordant is the following: the ferromagnetic substances (iron, nickel, cobalt) show an increase of resistance parallel to the magnetic lines of force and a decrease in the perpendicular direction; the diamagnetic substances, among which bismuth has the first place, show an increase of resistance in all directions (different in the different directions); for all the other substances the change of resistance is very slight.

To explain these experimental results the hypothesis has been made that the field causes a real and true temporary alteration of the specific properties of the conducting substances subject to its action. The theoretical researches that have been made in order to give an explanation of the said results, taking as basis not the hypothesis above alluded to, but the laws of the movement of electricity, in a conductor subject to the action of a magnetic field, are few compared with the experimental researches.

Miss FREDA after having briefly examined these theoretical researches proposed to herself the problem of stating what the electronic theory, to which in these lectures we have referred, predicts about the experimental results that can be interpreted as a change of electric resistance caused by the magnetic field; whether there are or not phenomena that the theory does not foresee and to explain which it will be necessary to introduce the hypothesis of an alteration of specific properties produced by the field in the conductors subject to its action [3]. We shall briefly resume the results of this research.

Let us again consider the formulae (36′) of the first paragraph, formulae that hold good in the case of a conductor which remains homogeneous and isotropic also under the action of a uniform magnetic field H. Let P be a point of the conductor; when this conductor is not subject to the action of a magnetic field, let l_0 be the line of flow passing through P, let j_0 be the density of current, V_0 the potential in P, c_0 the specific conductivity of the substance (c_0 and σ have the same value). We shall have $j_0 = -c_0 \frac{\delta V_0}{\delta l_0}$. Let now l be the line of flow passing through P when the conductor is subject to the action of the magnetic field; let j and V be the values of the density of current and of the potential at the point P. From the equations (36)′ we can easily deduce

$$(40)\quad j = \left\{ K(1+\lambda^2) + [\sigma - K(1+\lambda^2)] \times \frac{K(1+\lambda^2)\cos^2 lz}{K(1+\lambda^2)\cos^2 lz + \sigma(1-\cos^2 lz)} \right\} \frac{\delta V}{\delta l} = -c\frac{\delta V}{\delta l}.$$

It will be plainly seen, that unless $\cos^2 lz = 0$, in which case we have $c = c_0$, we always have $c < c_0$.

Therefore *the present theory predicts, for a homogeneous isotropic conductor kept at a constant temperature and subject to the action of a uniform magnetic field, an apparent increase of specific resistance in all directions, that of the magnetic lines of force excepted, in this direction the theory does not foresee an apparent alteration of the specific resistance.*

K, σ, λ^2 do not vary when we change H to $-$H; then the apparent specific conductivity c does not vary by inverting the magnetic field, if $\cos^2 lz$ does not vary. (This condition is satisfied, for instance, in the case of a plane plate situated in a transverse magnetic field and in the case of a wire situated any way in the field). c, for a conductor of arbitrary form, will be different generally in the different points, because it depends on $\cos^2 lz$. The dependence of c on $\cos^2 lz$ shows us that the theory foresees an apparent aelotropy of the conductor. (That is shown, moreover, also by the equations (36′)).

Let us consider a conductor in which, *with or without the action of the field, the lines of flow remain the same, and at every point of these lines the value of the density of current remains the same if we leave unaltered the total current flowing in the conductor.*

From what we have previously seen we can deduce that, *if the conditions now stated be fulfilled, the difference of potential between two points of a same line of flow l increases under the action of the field, if l be not parallel to the axis z; only in this latter case the difference of potential remains constant. The increase of the said difference of potential can be interpreted as an increase of the total resistance of the conductor.*

The said conditions (invariability of the lines of flow and of the density of current) are satisfied, as we can easily prove in the case of a conductor in which the lines of flow are straight lines parallel to the axis z, when $H = 0$. Then the theory does not foresee an apparent increase of the total resistance of such a conductor.

The same conditions are also verified in the case of a plate provided, along the boundary, with point electrodes and subject to the action of a uniform magnetic field normal to it (second lecture, Section 3). Besides in this case the apparent specific conductivity c, corresponding to a given value of H, is constant at every point of any line of flow (because at every point we have $\cos lz = 0$), and does not depend on the sense of the field. In this case the ratio of the values that the difference of potential between two points of a same line of flow, and not coincident with the electrodes, assumes before and after the creation of the magnetic field is equal to the ratio of the specific resistance $1/c_0$ that the plate has without the field and of the apparent specific resistance $1/c$ determined with the field. Therefore, for a plate placed in a transverse magnetic field and provided with point electrodes at the boundary, the theory predicts an apparent increase $\Delta\sigma$ of the total resistance; the ratio between $\Delta\sigma$ and the resistance σ_0 without the field depends only on the intensity of this latter and on the specific properties of the conducting substance; this ratio does not vary by changing H to $-$H. The same can be said for a rectilinear metallic wire, inclined with respect to the lines of force of the magnetic field. (Also in this case, $\cos lz$ is constant at every point of the conductor).

In a plate placed transversally in the field but not provided with point electrodes situated at the boundary (for instance in a rectangular plate provided along two opposite sides with electrodes of negligible resistance) under the action of the field not only the distribution of the potential changes, but also that of the current.

If we consider, in this case, the ratio of the value that the difference of potential, between two points of the same line of flow or between two electrodes of negligible resistance, assumes for $(H) = 0$, and for $(H) > 0$ we find that the ratio depends not only on the apparent increase of specific resistance of which we have already spoken, but also on the altered distribution of currents; in this case the ratio $\Delta\sigma/\sigma_0$ will depend generally not only on the specific properties of the conducting substance and on the intensity of the field, but also on the form and on the dimensions of the plate and on the position of the electrodes.

The preceding observations may partly explain the divergences of the results obtained by the physicists who have measured in different conditions the change of resistance of a conductor in the field.

Another fact, to explain which has been introduced the hypothesis of an alteration of specific properties caused by the field in the conductors subject to its action, is the law of dependence of the CORBINO effect (see the next paragraph) on the intensity of the field. But Miss FREDA has remarked that the dependence of the CORBINO effect on H is measured by the factor $\lambda = \operatorname{tg} \beta$; that λ increases more slowly than H, and that, therefore, theory and experiments (as far as the metals that conduct themselves like bismuth are concerned) agree, at least qualitatively.

From all that we have seen in this paragraph it follows that by confining ourselves to the consideration of the substances only which conduct themselves like bismuth, we can assert that *the theory of flow of electricity perpendicularly to the magnetic lines of force agrees, at least qualitatively, with the phenomena interpretable as a change of resistance that the experiments have verified.*

To be able to say whether there is or is not the said agreement also from the quantitative point of view and therefore whether the hypothesis that we have already several times mentioned in this paragraph is necessary or not would require having the exact values of v_1, v_2, N_1, N_2, but for the present we can not say that we have them.

Whereas, if we consider the case in which the flow of electricity takes place parallel to the lines of force of the field, we must admit that the theory does not foresee the increase of resistance that the experiments have verified. It is not easy to decide whether that depends on a real alteration of the properties of the conductors determined by the field, or on the fact that the conditions supposed in the theory are verified only approximately in the experiments, or on the superposition of other phenomena to those that the theory considers.

We shall, lastly, observe that all these results hold good only on the hypothesis that the mobility of the positive electrons is not zero.

SECTION 4.

We shall now speak of various experiments which are applications or verifications of some points of the theory previously stated.

We shall begin by remembering in this paragraph some results (obtained already in 1911 by Professor CORBINO) relative to the flow of electricity in a metallic plate bounded by two concentric circles, provided along these circles with two electrodes of negligible resistance and subject to the action of a uniform magnetic field [4]. The same results could also be deduced from what we have said in the second lecture on the cyclic plates.

Professor CORBINO found that, if the plate is perpendicular to the direction of the magnetic field, under the action of the latter the equipotential lines remain circles having their centres in the centre of the plate; whereas the lines of flow, which are radial without the magnetic field, become, under the action of this latter, logarithmic spirals. We can therefore consider the disc as traversed by radial currents and by circular currents. These circular currents enable the disc to induce a current in a concentric circular coil, in the instant in which we open or close the circuit of which the disc itself forms a part. The inductive action is evidently proportional to the intensity of the circular current; this intensity will be easily determined if we bear in mind the theory explained in the preceding lecture. As the lines of flow form the angle β with the concentric circles which coincide with the equipotential lines, the intensity of the circular current will be $I \operatorname{tg}\beta = \frac{\Sigma}{K} I$, if I be the intensity of the total current flowing in the plate. Then the inductive action (CORBINO effect) is proportional to (Σ/K) I (the factor of proportionality depends on the dimensions of the plate). This action has been effectively proved and measured by Professor CORBINO for bismuth, and by ADAMS and CHAPMAN [5] for many other metals. It we assume that the current is carried only by negative electrons, we have $\frac{\Sigma}{K} = ev_2 H = -\frac{e\tau_2}{2m_2}$ H (v_2 is the mobility, m_2 the mass of the negative electrons; τ_2 average interval of time between two collisions). In this hypothesis from the measure of the CORBINO effect, the value of τ_2 can be deduced. That has been done for many metals by ADAMS and CHAPMAN and by other physicists.

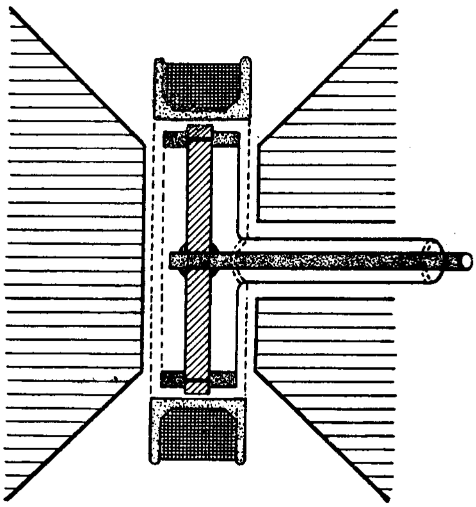


Fig. 26.

A metallic disc trasversed by a radial current, as we have seen, under the action of the magnetic field is transformed into a particular magnetic shell perpendicular to the lines of force of the field and produces thus a slight alteration of this latter; reciprocally the creation of the field should create a radial electromotive force in the disc.

Let us suppose, lastly, that the disc traversed by a radial current is suspended in such way that its plane forms with the magnetic lines of force an angle α. In such conditions an electromagnetic couple tends to turn the disc; it can easily be verified that the moment of this couple is proportional to I tgβ sin 2α.

These two last theoretical predictions were also experimentally verified in 1911, by Professor CORBINO.

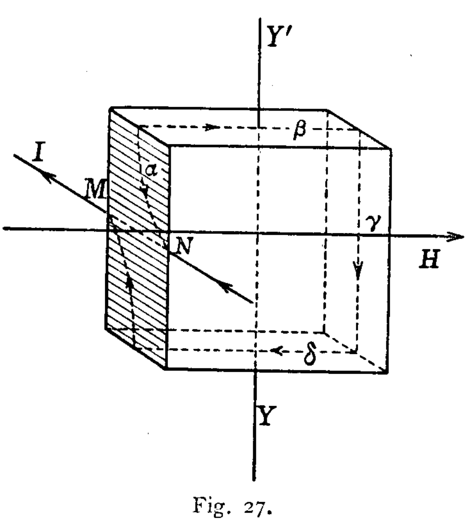


Fig. 27.

SECTION 5.

With the phenomena mentioned in the preceding paragraph are connected some other experiments made in 1915 by Professors CORBINO and TRABACCHI [6]. Let us consider a rectangular prismatic surface (Fig. 27), the faces of which are thin metallic plates; α is of bismuth, β, γ and δ of copper.

Two copper wires are soldered in the middle points M and N of the bismuth plate; through these wires a current I can be sent in the plate. Let us suppose that the prismatic surface, which can rotate about the axis YY′, is placed in a uniform magnetic field perpendicular to the bismuth plate. Then the current I will be partially distorted and a part of it will flow in the prismatic surface $\alpha\beta\gamma\delta$ transforming this surface into a magnetic shell which will tend to turn in the field about the axis YY′. If θ be the angle that

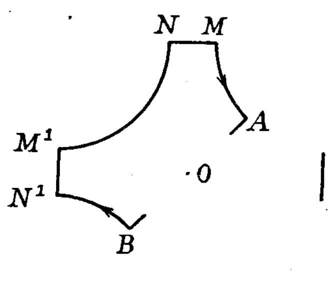


Fig. 28.

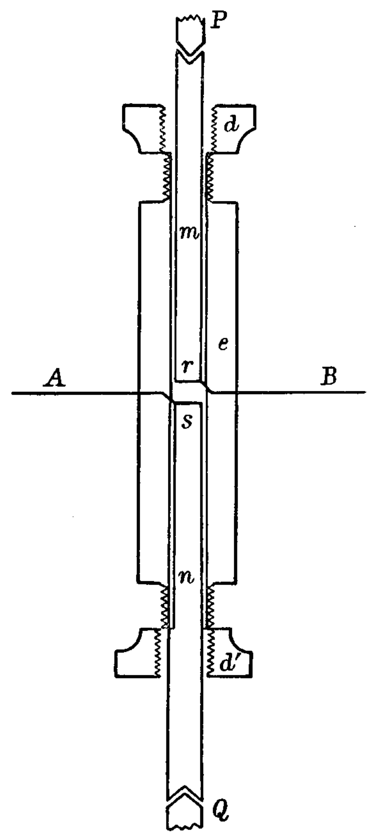


Fig. 29.

the axis of the prism bounded by $\alpha\beta\gamma\delta$ forms with H in a phase of the rotation, the component of the field perpendicular to the bismuth plate will be $H \sin \theta$; the intensity i of the distorted current can be said to be proportional approximately to $IH \sin \theta$. The moment of the couple acting on the prismatic surface will be proportional to $iH \sin \theta$; its approximate value will be then (except for a constant factor) $IH^2 \sin^2 \theta$.

If another identical prismatic surface can be rotated about the same axis YY′ and is turned 90° form the first prismatic surface, this second surface will be acted on by a couple the moment of which will be approximately proportional to $IH^2 \cos^2 \theta$. Then the rigid system of the two prismatic surfaces will be acted on by a couple the moment of which will be proportional to IH for any value of θ.

The Figure 28 represents the intersection of the two prismatic surfaces with a plane which cuts them in half and is perpendicular to the axis. YY′, NM, N′M′ are the intersections with the two bismuth plates. The electrical connections are made by the wires AM, NM′, M′B; the ends A and B are soldered respectively to the upper half *m* and to the lower half *n* of the axis of the apparatus (Fig. 29); the said wires are situated in a plane perpendicular to the axis of rotation YY′. The two halves *mn* of this axis are metallic, joined together mechanically but insulated electrically from each other; they are connected through the points of support PQ to the source of electricity.

According to what we have said, the system of the two prismatic surfaces represents a model of an armature which turns uniformly (with a constant couple proportional to the square of the magnetic field) when we send in it a steady current through two "fixed" contacts (P *and* Q). Vice-versa *by turning the armature in the field with a constant velocity we can produce a steady constant electromotive force between the points* P *and* Q *without sliding contacts.* Lastly, *by holding fast the armature in a* FERRARIS *rotary field we obtain between the same two fixed points* P *and* Q *a steady and constant electromotive force. The apparatus acts, therefore, as an armature provided with* PACINOTTI *collector and with brushes situated in such a way that the straight line passing through them is perpendicular to the exterior field however this field or the armature may turn.*

For the details of the experiments which have made it possible to verify these properties we refer to the memoir cited at the beginning of this paragraph. The apparatus described cannot have any practical utilization because of the slight magnitude of the described phenomena, but is interesting on account of its properties which we have noted.

SECTION 6.

We shall speak now in these last paragraphs of the experiments which have been made with the actual object of testing some points of the theory developed in the preceding lectures. We shall begin with the experimental verifications of my theorem of reciprocity.

Dr. TASCA BORDONARO, in 1915, verified this theorem first in the case of a bismuth plane plate situated in a uniform magnetic field normal to it [7] and afterwards in the case of a bismuth plane plate coincident with an equipotential surface of a non-uniform magnetic field [8]. We shall briefly relate the conditions in which these experiments were made and the results obtained.

The magnetic field was produced by the large WEISS electromagnet of the Physical Institute of Rome. In order to obtain a uniform magnetic field, the electromagnet was provided with cylindrical pole pieces having a diameter of 10 centimeters. (When the pole faces were 1.4 centimeters apart, by sending in the electromagnet a current of 4 amperes a field of about 6700 gausses was obtained).

The plate had the form indicated in Fig. 30; it was provided, in the points indicated in the figure, with point electrodes obtained by soldering at the said points four thin copper wires. (These wires were protected by rubber tubes to prevent their touching the pole faces of the electromagnet). To avoid the thermoelectric forces, the plate was enveloped in cotton. By means of two convenient interrupters it was possible to connect two electrodes A and B of the plate with the poles of a battery of accumulators and two other electrodes C and D with a HARTMAN and BRAUN galvanometer provided with movable coils, and vice-versa. In the circuit of the battery and of the plate was inserted a high resistance in order to maintain constant the current when the electrodes A and B were exchanged with the electrodes C and D. As the current in the plate was interrupted soon after the reading of the impulsive deflection of the galvanometer, it was possible to avoid the influence of the thermoelectric phenomena which accompany the HALL effect. The zero of the galvanometer was observed after the creation of the magnetic field. The following are the results obtained by Dr. TASCA with a field of 6000 gausses and a current in the plate of 0.2 amperes:

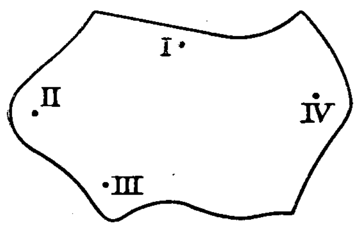


Fig. 30.

	Direct field	Inverted field
$V_{II} - V_{IV}$	420	104
$V_{I} - V_{III}$	104	420.5

(The differences of potential were measured by means of the corresponding deflections of the galvanometer expressed in millimeters. It is understood that when the difference of potential was measured between II and IV the current entered and went out through I and III, and vice-versa).

These results show clearly the law of reciprocity to be verified, as theory requires, only when, by exchanging the electrodes, the field is also inverted; the asymmetry of the effect without the inversion of the field is very remarkable.

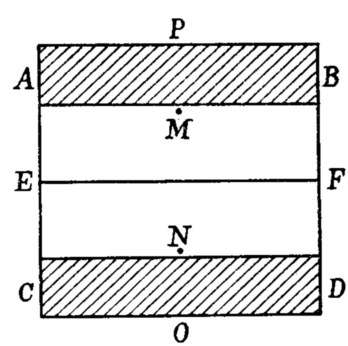


Fig. 31.

Dr. TASCA afterwards substituted for the plate represented in the Fig. 30 a rectangular bismuth plate (Fig. 31) provided with copper electrodes of negligible resistance soldered along the two longest opposite sides and with two thin copper wires soldered in the middle points of the two free sides. The results obtained are the following:

	Direct field	Inverted field
$V_E - V_F$	51.5	54.5
$V_P - V_Q$	54	51

Also in this case the theorem of reciprocity is completely confirmed.

Dr. TASCA has made the following observation on the mechanism by which the law of reciprocity is maintained in the case of wide copper electrodes: the copper electrodes P and Q, when the current enters and goes out through them, cause the recombination of the charges which owing to HALL effect, reach the free edges; P and Q thus diminish this effect. Whereas, when the current enters and goes out through the point electrodes E and F, the copper electrodes P and Q absorb a good part of the current; the current which flows in bismuth is therefore only a part of the total current sent into the plate and thus the HALL effect is diminished also in this case. Theory demonstrates and experiments confirm that the diminution is identical in the two cases; we could not have foreseen intuitively this result.

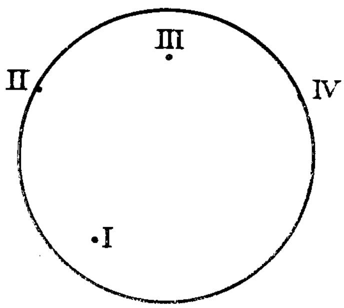


Fig. 32.

Dr. TASCA has lastly tested my theorem of reciprocity in the case of a plane bismuth plate situated along an equipotential surface of a non-uniform magnetic field (see third lecture, Section 4); the latter was obtained by providing the WEISS electromagnet with pole pieces having the form of truncated cones and terminating with circles of 5 millimeters diameter; in those conditions the intensity of the magnetic field assumed values extremely different in the different points, from some hundred of units to about 15000 units.

The plate, being circular in form and provided with point electrodes asymmetrically soldered (Fig. 32), was situated along the equatorial plane of the electromagnet; for evident reasons of symmetry, this plane is an equipotential surface of the magnetic field.

In this case the following experimental results were obtained:

	Direct field	Inverted field
$V_I - V_{III}$	256	21
$V_{II} - V_{IV}$	20	256

The action of the field is very remarkable; in fact the value of the difference of potential by exchanging only the electrodes passes from 256 to 20, but by inverting the field we have again the original value.

In the study of the problem of which we have spoken in the preceding lectures I had not taken into account the secondary actions for which a conductor loses the character of isotropy, with respect to its electrical conductivity when it is subject to the action of a magnetic field; but I remarked that the perturbations caused by these secondary actions do not take place when the magnetic field is perpendicular to the plate at every point of this latter. (Third lecture, Section 2).

It is for this reason that Dr. TASCA in his experiments tested my theorem of reciprocity only in the case of a plate placed along an equipotential surface of the field.

In 1916, Miss FREDA, starting from the theoretical results obtained by her (see Section 1 and 2 of this lecture) was able to remove this restriction, and wished to verify experimentally that my theorem of reciprocity holds good also when the plate is situated in any way in a uniform or non-uniform magnetic field. For this verification (as for those of which we shall speak shortly) the same electromagnet was used that had already served for Dr. TASCA, with the same pole pieces, having the form of cylinders or of truncated cones, capable of producing respectively a uniform or a non-uniform field.

The experimental arrangement adopted was the same of which we have already spoken with reference to the experiments of Dr. TASCA.

For the said verification, a bismuth disc was used of diameter cm. 4,5 and of thickness 2 mm., provided with four point electrodes ABCD asymmetrically situated.

Let us denote with d the least distance between the pole pieces, with I the intensity of the current in the electromagnet, with i the intensity of the total current in the conductor.

With a uniform field, for $d = 5$ cm., $\mathrm{I} = 5$ amperes, $i = 0.2$ amperes, having placed the disc in such a way that its plane forms an angle of about 45° with the lines of force of the field, the following results were found:

	Direct field	Inverted field	Without field
$V_A - V_B$	26	53	38
$V_C - V_D$	53.5	26	38.5

With a non-uniform magnetic field, for $d = 2.6$ cm., $\mathrm{I} = 6.3$ amperes, $i = 2$ amperes, having placed the disc in such manner that its plane forms an acute angle with the equatorial plane of the electromagnet, these results have been obtained:

	Direct field	Inverted field	Without field
$V_A - V_B$	18	71.5	38
$V_C - V_D$	71.5	18.5	38.5

According to the theoretical results summarized in the Section 2 of this lecture, my theorem of reciprocity can be extended to the case of a three-dimensional conductor, isotropic without the magnetic field. Miss FREDA wished to verify experimentally this result obtained by her. She employed for this verification a bismuth prism having as base a square, with the side of 1.5 cm and having the height of 6 cm. The prism was provided with electrodes, situated in any way along its surface (Fig. 33) or with point electrodes and laminar copper electrodes of negligible resistance (Fig. 34). The following results were obtained by using the four point electrodes ABCD (Fig. 33) with a uniform magnetic field, for $d = 3.4$ cm., $I = 7.8$ amperes, $i = 0.43$ amperes, the prism having been placed with its lateral faces inclined with respect to the lines of force of the field:

	Direct field	Inverted field	Without field
$V_A - V_B$	411	421	395.5
$V_C - V_D$	421	411.5	395.5

With a non-uniform magnetic field, for $d = 1.8$ cm., $I = 7.8$ amperes, $i = 0.58$ amperes, by using the four electrodes H′B′C′D′ (Fig. 33) the differences of potential had these values:

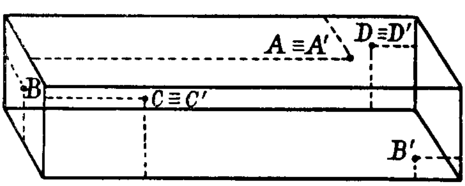


Fig. 33.

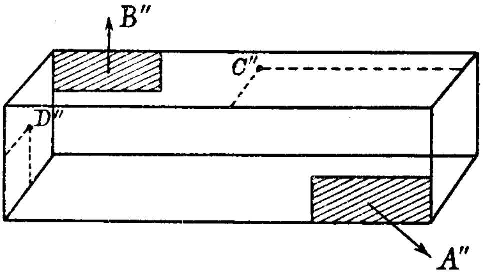


Fig. 34.

	Direct field	Inverted field	Without field
$V_{A'} - V_{B'}$	20	13.5	15
$V_{C'} - V_{D'}$	13.5	20.5	15.5

(In this experiment the face provided with the electrodes B′ C′ and the opposite face provided with the electrode D′ were parallel to the equatorial plane of the electromagnet).

After having soldered to the prism the two laminar electrodes A″, B″, the theorem of reciprocity was tested by using these electrodes and the point electrodes C″ D″ (Fig. 34). Then, with a non-uniform magnetic field, for $d = 1.8$. cm., $I = 7.7$ amperes, $i = 0.59$ amperes, having placed the prism in such a manner that the faces provided with the laminar electrodes were inclined with respect to the equatorial plane of the electromagnet, the following results were obtained:

	Direct field	Inverted field	Without field
$V_{A''} - V_{B''}$	383	387	367.5
$V_{C''} - V_{D''}$	387	383	367

As we see, in the case of the prism the action of the field is less remarkable than in the case of the disc, but the theorem of reciprocity is always verified.

Miss FREDA wished then to show if this theorem held good for a piece of bismuth crystal (obtained artificially) of a quite irregular form and provided with four point electrodes asymmetrically soldered along its surface. (It is to be remarked that if a negative result had been obtained with or without the action of the magnetic field the existence would have been proved of cases of aeolotropy for which the conditions (38) or (38′) of the Section 2 are not fulfilled). The following are the values obtained for the differences of potential with the cylindrical pole pieces, for $d = 4.8$ cm., $I = 7$ amperes, $i = 0.31$ ampere and for any position of the crystal:

	Direct field	Inverted field	Without field
$V_A - V_B$	104	157	119
$V_C - V_D$	156.5	104	119

The values obtained with the non-uniform field, for $d = 2$ cm., $I = 7$ amperes, $i = 0.37$ ampere, the crystal being placed in an arbitrary position in the field are the following:

	Direct field	Inverted field	Without field
$V_A - V_B$	115	215	136
$V_C - V_D$	215	114.5	136.5

As we see, also in the case of the crystal the theorem of reciprocity is completely verified.

In all these tests of the theorem of reciprocity not only the experiments of which we have shown the results have been made, but many other experiments by either exchanging the electrodes with each other, or by changing the position of the conductor in the field. The action of this latter was more or less remarkable in the various cases, but the agreement with the theory was always equally good.

SECTION 7.

We shall now speak of a consequence of my theorem of reciprocity stated and verified by Professors CORBINO and TRABACCHI [9].

Let us consider a disc in which the current enters and goes out through two concentric circular electrodes of negligible resistance; the lines of flow will be radial without the magnetic field, but will become logarithmic spirals under the action of this latter. Let us suppose the disc cut along two of these spirals; then the distribution of the currents is not altered and therefore we can limit ourselves to consider only the plate that we have detached (Fig. 35) and that has its free boundary formed by spirals. If the magnetic field be inverted the lines of flow will undergo a marked deformation, whereas the specific resistance of the metal will maintain the same value. It would seem that the remarkable alteration of the lines of flow which takes place on reversal of the field had to be accompanied by a change of the total resistance of the plate, that is by a change of the ratio between the difference of potential of the two electrodes and the intensity of the current flowing in the plate. When the experiment was made, however, a negative result was obtained.

This result could neither have been foreseen nor explained, intuitively; whereas we can easily demonstrate that it is a consequence of my theorem of reciprocity. In fact, let ABCD be four point electrodes placed on the wide

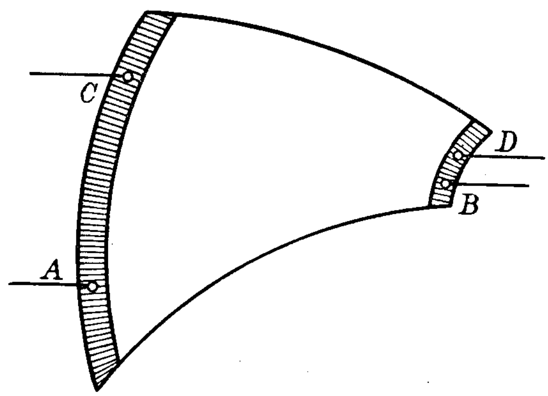


Fig. 35.

copper electrodes of the plate (Fig. 35). The theorem of reciprocity, which holds good also for large electrodes of negligible resistance, can be applied to the points ABCD; therefore the difference of potential, that we have between C and D when the field is direct and the current enters and goes out through A and B, must be equal to the difference of potential that we have between A and B when the field is inverted and the same current enters and goes out through C and D. But the said differences of potential (between C and D, between A and B) both coincide with the difference of potential that we have, respectively in the two cases, between the large electrodes of negligible resistance; therefore *the inversion of the field* (however the distribution of the lines of flow may be altered by this inversion) *can not change the total resistance of a plate in which the current enters and goes out through electrodes of negligible resistance.*

Miss FREDA has extended this result to the case of a three dimensional conductor provided with electrodes of negligible resistance and has verified it in the case of the bismuth prism provided with laminar electrodes, represented in Fig. 34 [1].

SECTION 8.

Professor CORBINO, in his memoir cited in the first lecture, has observed that, if a rectangular plate be provided along two opposite sides AB and CD with electrodes of negligible resistance P and Q (Fig. 31), owing to the presence of these electrodes, the free sides AC and BD of the plate are short-circuited. Then the Hall effect, owing to the presence of electrodes of negligible resistance, undergoes a remarkable diminution which rapidly increases as one goes from the center of the plate (points E and F) towards the electrodes.

Dr. TASCA [7] measured this diminution using the same rectangular bismuth plate (Fig. 31) with which we had tested the theorem of reciprocity (Section 6). The plate had the side AB 52 mm. long and the side AC 22 mm long. With a uniform field of 6000 units, sending the current through P and Q, Dr. TASCA obtained $V_E - V_F = 52.5$; taking off P and Q and sending the current through the point electrodes M and N, he obtained $V_E - V_F = 318$. As we see the depression of the HALL effect caused by the electrodes of negligible resistance was in this case very remarkable. With a square bismuth plate Dr. TASCA observed a smaller, but always observable diminution.

In Section 4 of the first lecture we have stated that, if the lines of flow do not vary under the action of the field, by considering two points A and B at the boundary and at the same potential when the magnetic field is zero, we have $V_A - V_B = \frac{\lambda}{K(1+\lambda^2)}$; then the HALL effect in this case depends only on the intensity of the field, on the intensity of the current flowing in the plate, and on the nature of the metal by which this latter is formed. Therefore, bearing in mind *the principle of the point electrodes at the boundary, we can* state that *if the current enters and goes out through point electrodes situated at the boundary of the plate, the* HALL *effect* (difference of potential between two points of the boundary at the same potential when $H = 0$) *depends neither on the form nor on the dimensions of the plate, nor on the position of the electrodes, nor of the points between which the effect is measured, but only on the intensity of the field, on the intensity of the current and on the nature of the metal.*

On the other hand, for a plate provided with electrodes of negligible resistance the HALL effect depends on the form and on the dimensions of the plate, on the nature and on the position of the electrodes and on the position of the points between which the effect is measured. This observation can partly explain the divergences of the results obtained by the various physicists in the measure of the HALL effect.

On this basis Dr. TASCA has proposed to designate by *normal* HALL *effect* the effect measured using point electrodes at the boundary. He has observed that from the historical point of view it is to be remarked that the condition of the point electrodes on the boundary corresponds to the primitive arrangement of HALL. This arrangement was afterwards abandoned by physicists because they thought the conditions were theoretically simpler with the rectangle provided with large electrodes.

SECTION 9.

In Section 2 of the second lecture we have studied the flow of electricity in a circular plate subject to the action of a uniform magnetic field normal to it. According to the results then stated, we can say that in the case in which the plate is provided with two point electrodes A and B the potential V is given by the formula

$$V = \frac{-J}{2\pi K}\left(\log\frac{r_A}{r_B} + \cos 2\beta \log\frac{r_{A_1}}{r_{B_1}} - \sin 2\beta\Omega\right);$$

A_1 and B_1 are the inverse points of A and B with respect to the circumference that forms the boundary of the plate; Ω is the angle under which the points A_1 and B_1 are seen from a generical point.

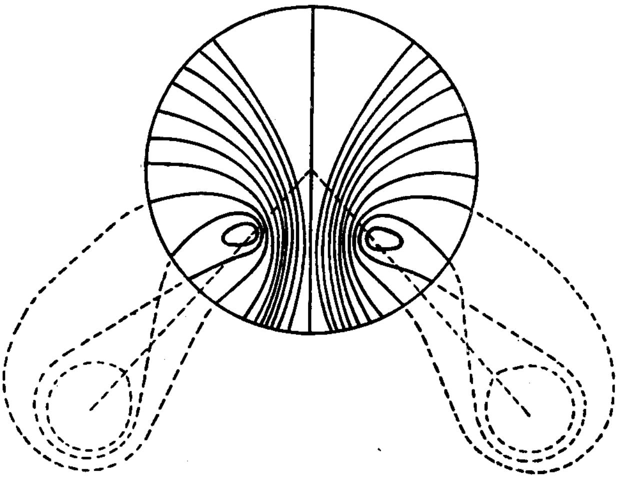


Fig. 36.

In 1915 Miss ALIMENTI considered the problem of constructing the equipotential lines corresponding to the preceding formula, in the case in which the electrodes are situated in the middle points of two perpendicular radii of the plate. She observed, therefore, that the electric field corresponding to the potential V can be considered as resulting from the superposition of three electric fields, the potentials V_1, V_2, V_3 of which are given (neglecting a constant factor common to all three) by the formulae:

$$V_1 = \log\frac{r_A}{r_B} \quad , \quad V_2 = \cos 2\beta \log\frac{r_{A_1}}{r_{B_1}} \quad , \quad V_3 = \sin 2\beta\Omega .$$

By combining the curves $V_1 =$ const. (circles orthogonal to that passing through A and B) with the curves $V_2 =$ const. (circles orthogonal to that passing through A_1 and B_1), Miss ALIMENTI obtained the curves $V_1 + V_2 =$ const. represented in the Figure 36; by combining these latter with the curves

$V_3 = \text{const.}$ (circles passing through A and B) she obtained the curves $V_1 + V_2 + V_3 = \text{const.}$, that is the curves $V = \text{const.}$ represented in the Figure 37. As other phenomena (ETTINGSHAUSEN, NERNST, etc.) superpose themselves on the phenomena which the theory considers, it would have been difficult to verify experimentally the form of the curves $V = \text{const.}$ Therefore Miss ALIMENTI verified otherwise some points of the theory.

The difference of the potential between two points I and II of a circular plate, perpendicular to the lines of force of a uniform magnetic field H and provided with two point electrodes A and B, is given by the formula:

$$\delta = V_I - V_{II} = \frac{-J}{2\pi K}\left\{\left(\log\frac{r_{A_I}}{r_{B_I}} - \log\frac{r_{A_{II}}}{r_{B_{II}}}\right) + \right.$$

$$\left. + \cos 2\beta\left(\log\frac{r_{A_I}\,{}^{I}}{r_{B_I}\,{}^{I}} - \log\frac{r_{A_I}\,{}^{II}}{r_{A_I}\,{}^{II}}\right) - \sin 2\beta\,(\Omega_I - \Omega_{II})\right\}.$$

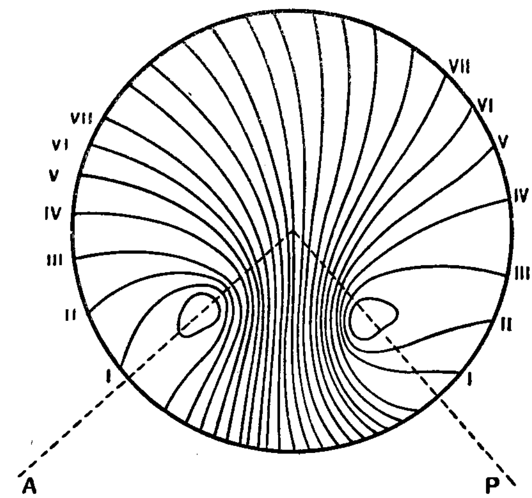


Fig. 37.

Let us denote with V′ the potential corresponding to the inverted field; let us put $\delta' = V' - V'_{II}$; since on reversal of the field only the sign of β changes, we shall have $\frac{\delta - \delta'}{2} = \frac{-J}{2\pi K}\sin 2\beta\,(\Omega_I - \Omega_{II})$.

(The values of v_1, v_2, N_1, N_2 in the expressions of β and K may depend on the absolute value of H, but not on its sign; therefore these values do not change on reversal of the field (see Section 1 of this lecture)).

Miss ALIMENTI has remarked that $(\delta - \delta')/2$ must have the following properties:

ς — It must have a maximum corresponding to the two points at the extremes of the diameter perpendicular to the straight line which passes through A and B; for two points, however situated on this diameter, δ and δ' must have equal absolute values but contrary signs.

σ — It must be zero for two points however situated on the same arc of a circle passing through A_1 and B_1; i.e., the inversion of the field must leave unaltered the difference of potential between two points situated in the said manner.

θ — It must be constant for two points however chosen on two circles both passing through A and B. Miss ALIMENTI verified experimentally the two last properties (σ and θ) and *then the theorem of the four vertices* (see second lecture, Section 3) in the particular case of a circular plate.

For making the experimental tests, she used a bismuth disc situated perpendicularly to the lines of force of a uniform magnetic field, obtained by means of an electromagnet. The difference of potential between two points was measured by means of the corresponding deflexion (expressed in mm) of a galvanometer connected with the same points.

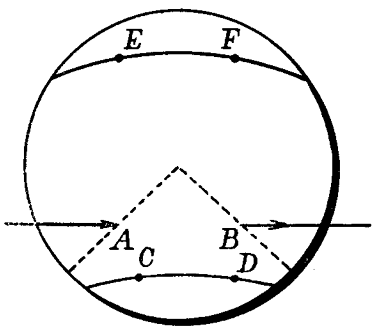


Fig. 38.

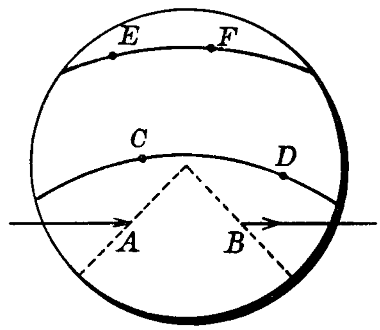


Fig. 39.

In the first experiment six thin copper wires were soldered to the plate in the points A, B, C, D, E, F, (Fig. 38); the points A and B, through which the current entered in the plate, were situated in the middle points of two perpendicular radii; the points C, D and E, F coincided, respectively, whith two generical points of two circles passing through the inverse points of A and B. In these conditions the following results were obtained:

Points connected with the galvanometer	δ	δ'	$\frac{\delta - \delta'}{2}$
C D	532	532	0
D E	325	280	22.5
C F	420	375	22.5

The values of the first line confirm the property σ; those of the second and of the third line confirm the property θ.

In a second experiment, the points C and D were placed on another circular arc passing through the inverse points of A and B (Fig. 39); then, for $\delta\delta'$ and $(\delta - \delta')/2$ these values were obtained:

Points connected with the galvanometer	δ	δ'	$\frac{\delta - \delta'}{2}$
C D	458	458	0
E F	253	253	0
D E	342	246	48
C F	435	339	48
C E	227	108	59.5
D F	116	—3	59.5

The values of the two first lines confirm also in this case the property σ; the values of the third and of the fourth line, of the fifth and of the sixth line, confirm the property θ.

Let us observe that, when the point electrodes A and B are at the boundary, the points A_1 and B_1 coincide with A and B; the circles passing through A and B coincide with the lines of flow (with or without the magnetic field).

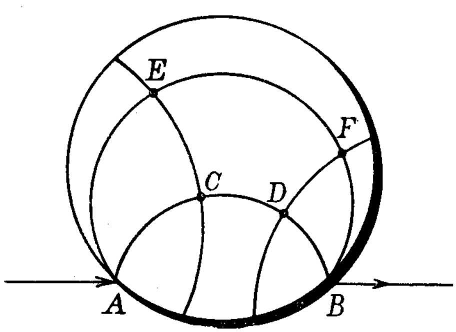


Fig. 40.

Now let us consider the results of the third experiment made by Miss ALIMENTI. She placed the points A, B, C, D, E, F, as is indicated in Figure 40, that is, the points A and B were at the boundary, the points C, D, E, F coincided with the vertices of a quadrilateral formed by two circles passing through A and B (lines of flow) and by two other circles orthogonal to the first (equipotential lines corresponding to the value zero of the magnetic field); thus she could also test the *theorem of the four vertices* (see second lecture, Section 3), in the case of a circular plate. These are the results obtained:

Points connected with the galvanometer	Difference of potential without the field	δ	δ'	$\bar{\delta}$ corrected	$\bar{\delta}'$ values	$\frac{\delta - \delta'}{2} = \frac{\bar{\delta} - \bar{\delta}'}{2}$
C E	—7	41	55	$41 + 7 = 48$	$-55 + 7 = -48$	48
D F	2	50	46	$50 - 2 = 48$	$-46 - 2 = -48$	48

The slight differences of potential existing between C and E, and between D and F without the magnetic field, show that the equipotential lines were not constructed with a perfect exactness; therefore the values of δ and δ' have been corrected, taking into account the said differences of potential and the sense of the deflections of the galvanometer. The corrected values of δ and δ' confirm the *theorem of the four vertices*; the values of $(\delta - \delta')/2$ confirm the property θ; we have the confirmation of this latter also without correcting the values of δ and δ', and it must be so because this property is independent of the position of the points C, D, and E, F, situated respectively on two circles passing through A and B.

All these experimental results, together with that of which we have spoken in the preceding paragraphs, constitute a completely satisfying confirmation of the theory developed in these lectures.

BIBLIOGRAPHY.

[1] ELENA FREDA, « Rendiconti Accademia dei Lincei », 2° sem. 1916, p. 28, p. 60.
[2] MAXWELL, *A Treatise on Electricity and Magnetism*, sec. 297, p. 346; sec. 303, p. 350. Oxford, Clarendon Press, 1873.
[3] ELENA FREDA, « Rend. Acc. dei Lincei », 2° sem. 1916, p. 104, p. 142; Nuovo Cimento, 1916, XII, p. 177.
[4] CORBINO, « Nuovo Cimento », 1911, t. I, p. 397.
[5] ADAMS and CHAPMAN, « Phil. Mag. », 1914, Vol. XXVIII, p. 692. KEITH K. SMITH, « Physical Review », 1916, Vol. VIII, p. 402.
[6] CORBINO and TRABACCHI, « Nuovo Cimento », 1915, t. IX, p. 80.
[7] TASCA BORDONARO, « Rend. Acc. dei Lincei », 1° sem. 1915, p. 336.
[8] TASCA BORDONARO, « Rend. Acc. dei Lincei », 1° sem. 1915, p. 709.
[9] CORBINO and TRABACCHI, « Nuovo Cimento », 1915, t. IX, p. 118.
[10] ADALGISA ALIMENTI, « Nuovo Cimento », 1915, t. IX, p. 109; 1916, t. XI, p. 217.

XVIII.

RELAZIONE AL PROGETTO DI LEGGE SUI PROVVEDIMENTI PER LA RICERCA E LA UTILIZZAZIONE DELLE SOSTANZE RADIOATTIVE (*)

«Atti Parlamentari Senato del Regno», Legislatura XXVI, 1ª Sessione 1921, vol. I, n. 4-A; pp. 1-2.

ONOREVOLI SENATORI. — La maravigliosa scoperta del Radio ha trasformato i concetti scientifici sulla costituzione della materia e ha dato origine a un nuovo ramo della filosofia naturale. Ma le applicazioni pratiche della scoperta non sono state di minore importanza delle sue conseguenze teoriche ed hanno commosso altrettanto profondamente l'intera umanità.

Tutti sanno quale interesse ha avuto nella medicina e nella chirurgia l'impiego del Radio e come, in seguito al suo uso, la cura e il trattamento di varie malattie vennero completamente trasformati. L'umanità attende dal radio il pronto sollievo di atroci sofferenze e la conservazione di esistenze preziose.

La estrema rarità e il conseguente elevato costo di questa sostanza (oggi ha oltrepassato il prezzo di 5 milioni il grammo) rendono necessaria una speciale cura per la conservazione delle più piccole quantità di essa, spingono a farne ricerca ovunque si speri trovarne anche una minima traccia. Nel tempo stesso per impedirne la dispersione è stato cercato di non fare impiego diretto di questa materia, sibbene della *emanazione*, sostanza in cui essa si trasforma.

Durante la guerra, si è resa anche più manifesta l'utilità pratica del Radio, e l'Ufficio invenzioni e ricerche, creato per gli studi scientifici e tecnici di guerra, avendo riconosciuto la presenza di materiali radiferi (autunite) in una cava del Piemonte e della emanazione in numerose sorgenti naturali, fra le quali quella di Ischia, ch'è la più ricca del mondo, iniziò delle ricerche nelle

(*) Questa breve Relazione viene qui pubblicata quale indice della elevata attività parlamentare svolta dal VOLTERRA. Da essa, e da altra pubblicata nei medesimi «Atti Parlamentari», vol. I, n. 4-C, p. 1, appare l'apporto da lui dato alla preparazione del Progetto legislativo per incrementare e regolamentare l'utilizzazione delle sostanze radioattive in Italia. Il VOLTERRA, sin dai primi tempi della scoperta del radio, aveva compreso l'enorme importanza ch'essa avrebbe avuto in molti campi ed aveva propugnato l'emanazione di un'apposita legge, alla redazione della quale aveva dedicato lunghi e pazienti studi relativi anche a delicati problemi giuridici. Come già è stato ricordato nella Biografia (pag. XXXI del vol. primo di queste «Opere»), nel 1918 egli aveva organizzato, insieme con la Signora CURIE, le ricerche e gli studi del materiale radioattivo in Italia [N. d. R.].

quali gli scienziati e i tecnici italiani furono aiutati dalla stessa illustre scopritrice del radio, la signora CURIE, volonterosamente venuta in Italia. Dopo la guerra, presso il Ministero dell'agricoltura, fu costituita una Commissione reale, la quale continuò le ricerche, iniziate dall'Ufficio invenzioni, e preparò un progetto per la ricerca, la utilizzazione e il controllo delle sostanze radioattive. In seguito a questi lavori, fu presentato al Parlamento, nella passata Legislatura, un analogo progetto di legge, il quale venne discusso e profondamente esaminato dall'Ufficio centrale del Senato. Esso suggerì molte opportune e provvide modificazioni.

Intanto la Legislatura si chiudeva ed appena apertasi l'attuale veniva, dal Governo, presentato il disegno di legge che ci sta ora dinanzi e nel quale venne fatto tesoro delle osservazioni della precedente Commissione.

La vostra Commissione è pienamente favorevole al disegno stesso, giacché i provvedimenti legislativi in esso contenuti dànno garanzia per la ricerca e la conservazione in Italia dell'utilissima e rara sostanza, e l'Istituto, di cui si propone la costituzione, si ritiene capace di esercitare con efficacia tutte le diverse funzioni che gli sono attribuite per la ricerca, la coltivazione, l'acquisto, la vendita e l'utilizzazione delle sostanze radio-attive.

La vostra Commissione ha introdotto solo due lievi modificazioni al disegno di legge: l'una, all'art. 6, proponendo di togliere le parole « fra funzionari dello Stato e », giacché è già altrove specificamente indicato un certo numero di funzionari, chiamati a far parte della Commissione che deve reggere l'Istituto, e perciò è bene che i quattro membri, i quali debbono esser nominati con decreto Reale, siano liberamente scelti fra cultori delle scienze fisiche, chimiche, mineralogiche, geologiche, radiologiche e giuridiche. L'altra, all'art. 12, proponendo nell'ultimo comma di sostituire alle parole « Istituti di chimica generale » semplicemente le parole « Istituti di chimica » giacché, in taluni casi, può essere più utile affidare le misure sulla radio-attività ed altre ricerche di indole chimica sui materiali radio-attivi ad Istituti di chimica industriale o ad altri Istituti di chimica applicata, anziché ad Istituti di chimica generale.

La vostra Commissione vi propone dunque di dare il suffragio favorevole, colla persuasione che i provvedimenti, contenuti nel presente disegno di legge, siano utili per il nostro paese.

XIX.

RELAZIONE (*) SULL'INSEGNAMENTO DELLA DINAMICA NELLE SCUOLE INDUSTRIALI

« Rivista d'ottica e meccanica di precisione », N. 1, 1921; pp. 4-31.

La trattazione della dinamica si può compiere in diversi modi, di cui citiamo i principali:

I) Partire dapprima da alcune definizioni e da alcuni postulati fondamentali e mediante l'applicazione dell'analisi matematica stabilire le equazioni che corrispondono ai casi più generali. Studiare poi le equazioni differenziali generali e trasformarle, ponendole sotto quelle forme che sono più opportune per la loro trattazione; finalmente svolgere in una maniera sistematica i metodi di integrazione e di risoluzione delle equazioni stesse ed applicarli man mano in maniera uniforme ai problemi particolari.

II) Sempre partendo da definizioni e postulati fondamentali giovarsi nella trattazione di procedimenti geometrici ed analitici ad un tempo, di immagini e di rappresentazioni sull'andamento dei fenomeni del moto e adottare metodi diversi per lo svolgimento dei varî casi che si presentano, onde ottenere le soluzioni più rapide, più semplici e più suggestive in ogni singolo caso.

III) Svolgere la meccanica come un capitolo della fisica, non limitandosi ad una pura trattazione logica e matematica, ma verificando e illustrando i risultati del calcolo mediante opportune esperienze e anche, quando l'occasione se ne presenti, sostituendo ai calcoli stessi, talora lunghi e faticosi, esperienze ed induzioni più facili e più intuitive.

IV) Fondere sempre i metodi deduttivo, sperimentale ed induttivo, avendo in vista, più che lo svolgimento di un capitolo della fisica, una preparazione ai varî rami delle scienze tecniche. Con tale finalità le esperienze, i calcoli, i problemi vengono tutti orientati verso la tecnica e predisposti per le applicazioni più o meno immediate che dovranno farsene.

La prima trattazione, che costituisce la *meccanica analitica*, è informata ai concetti svolti per la prima volta dal Lagrange, il quale ha così creato una scienza nuova ed ha innalzato il più perfetto monumento che esista nel campo delle matematiche.

È evidente però che nell'insegnamento, anche universitario, essa non sarebbe atta a presentare per la prima volta la meccanica a giovani allievi,

(*) Relazione letta nella seduta del 2 giugno 1920 del Convegno didattico indetto dal Consiglio superiore d'istruzione industriale.

sia pure forniti di ampia cultura analitica. Nell'insegnamento universitario si segue ordinariamente il secondo modo di trattazione. E la maggior parte dei libri più celebri e più proficuamente usati si inspirano a questo concetto, anche quando intendono svolgere la meccanica come parte introduttiva agli altri rami della fisica matematica.

La meccanica viene in tal modo presentata come una scienza deduttiva e schiettamente matematica, la quale ha bisogno di definizioni e postulati nuovi, oltre quelli geometrici. Anziché con prove dirette, le verifiche dei postulati si fanno riconoscendo a posteriori la concordanza dei risultati del calcolo colla realtà dei fenomeni naturali.

Non è da nascondersi che l'insegnamento della meccanica presenta in generale gravi difficoltà al maestro, lo studio di essa gravi difficoltà agli allievi.

Come lo dimostra lo sviluppo storico, per gettare le basi di questa scienza fu necessario fare un enorme passo innanzi oltre il campo della geometria. Per chi è abituato ai soli concetti geometrici è difficile orientarsi nel nuovo campo: il riscontro fra il modo di prodursi dei fenomeni naturali ed i risultati del calcolo, fra i concetti analitici e i concetti fisici, dà occasione ad un rude lavoro per i docenti e i discenti che vogliono approfondire seriamente questo ramo di studî. Tutti ricordano le difficoltà incontrate a questo riguardo durante la carriera di studente, e chi ha avuto occasione di insegnare la meccanica non può dimenticare la fatica sostenuta nel preparare un efficace corso di lezioni.

Se questa trattazione appare come la più conveniente nell'insegnamento universitario e filosofico, certo essa non si presta nell'insegnamento tecnico e secondario.

Il terzo modo di trattazione è quello seguito ordinariamente nei trattati di fisica e nei corsi sia secondarî sia universitarî della fisica stessa. Infatti il primo capitolo di ogni corso di fisica è consacrato alla meccanica dei solidi, dei liquidi e dei gas, e ciò non soltanto per l'importanza che ha la meccanica per se stessa, quanto perché di solito si cerca di ricondurre ogni fenomeno fisico ad un fenomeno di moto di masse visibili o di masse nascoste, e di dare, quando è possibile, modelli meccanici dei varî fenomeni naturali.

Questo modo di trattazione presenta vantaggi e si adatta con modificazioni più o meno grandi alle menti e alle cognizioni matematiche degli allievi. Ma nella pratica attuazione si riscontra che la maggior parte dei trattati sono inquinati da errori e inesattezze di linguaggio e di concetto da lungo tempo penetrati e che si tramandano per eredità da libro a libro, da corso a corso e vanno purtroppo perpetuandosi. Tale inconveniente anziché nascosto va palesato per eliminarlo una buona volta.

Il quarto modo di trattazione si accosta molto al secondo e gli è strettamente affine. Ne differisce per la finalità, in quanto che, mentre nei corsi di fisica si tratta di preparare i giovani e di aprire la loro mente ai concetti sempre più complessi e difficili dei varii rami della fisica, cominciando dal far comprendere quelli infinitamente più semplici della meccanica, col quarto metodo si tratta di fornire agli allievi la base su cui poggiano tutte o quasi tutte le applicazioni tecniche e pratiche.

Non vi è bisogno che io dica che per l'insegnamento nelle scuole di cui noi adesso ci occupiamo, la quarta specie di trattazione (quella che è denominata *meccanica tecnica*) appare la più utile a seguire. Essa può essere anche introdotta vantaggiosamente nelle stesse scuole d'applicazione per gl'ingegneri.

Ed infatti, come ho già detto per la terza specie di trattazione, anche la quarta può adattarsi e piegarsi, con le opportune modificazioni, a giovani di diversa cultura e maturità. Tutto consiste nello stabilire l'opportuno equilibrio fra l'intuizione e la deduzione secondo la mentalità degli scolari a cui si deve impartire l'insegnamento.

La meccanica tecnica è quella che si insegna in generale all'estero tanto nei politecnici di grado superiore (pari alle nostre scuole d'applicazione) quanto nelle scuole politecniche di grado inferiore (pari ai nostri istituti industriali), fatta naturalmente la dovuta ed equa proporzione nelle due sorta di scuole.

E questa trattazione venne adottata per i politecnici in seguito a lunghissime discussioni, a numerose prove ed esperimenti; la meccanica tecnica non prevalse se non dopo molte lotte.

Ne abbiamo istruttivi esempi anche in scuole Italiane. Ricordo a questo proposito l'antico ordinamento dell'Istituto Tecnico di Firenze che successe all'Istituto da cui uscivano la maggior parte di coloro che esercitavano la professione di ingegnere in Toscana. Anche quando Firenze fece parte dello Stato Italiano, dall'Istituto, che aveva un ordinamento suo proprio, uscivano allievi della sezione di meccanica e costruzione che esercitavano le funzioni di veri e proprî ingegneri. Essi acquistavano la cultura tecnica e in modo speciale apprendevano la meccanica seguendo corsi del tipo di quello indicato.

Ho creduto di dilungarmi alquanto sulla distinzione dei varî sistemi coi quali si può presentare l'insegnamento della meccanica, ed anche in seguito entrerò nell'esame minuto di alcune altre questioni particolari, perché io ritengo che lo studio della meccanica, ed in genere di tutte le materie teoriche, abbia nelle nostre scuole industriali una notevole importanza; si pensi infatti che già esce da queste scuole un numero ragguardevole di tecnici che esercitano, specialmente nelle industrie, le funzioni vere e proprie di ingegnere e tale numero tende ad aumentare. È opportuno incoraggiare questa tendenza anche per l'avvenire perché serve a sfollare le nostre scuole d'applicazione troppo piene di allievi e risponde al bisogno di avere due specie di ingegneri con un grado diverso di cultura.

* * *

Non tutti sono concordi sul momento più adatto, o, per dir più precisamente, sull'anno di corso in cui deve insegnarsi la meccanica, tanto nella scuola degl'ingegneri, quanto negli istituti industriali. Esistono a questo proposito due tendenze opposte: l'una che vorrebbe differirne lo studio, l'altra che vorrebbe affrettarlo il più possibile. Vi sono buone ragioni così per l'una, come per l'altra tesi.

Non vi è dubbio che quanto più grande è la cultura matematica tanto più è facile e proficuo lo studio della meccanica, così nelle scuole superiori, come in quelle secondarie.

Ma d'altro lato è utilissimo principiare il più presto possibile l'insegnamento veramente tecnico, applicativo e pratico tanto nelle une che nelle altre scuole. E siccome il fondamento di tutti gli studi tecnici è la meccanica, così quanto più tardi si comincia ad insegnare questa materia tanto più ristretti risultano necessariamente i limiti degli insegnamenti tecnici. E non è chi non veda il danno che ciò produce quando si pensi che il campo pratico e tecnico aumenta di estensione di giorno in giorno. La elettrotecnica è un corso oggi indispensabile, ma che è nato ieri soltanto. E domani saranno altrettanto indispensabili corsi di aerotecnica che soltanto adesso si cominciano timidamente ad impartire in alcuni politecnici.

Per parte mia vari anni fa mi sono ascritto fra coloro che desideravano che la meccanica si insegnasse il più presto possibile nelle scuole d'applicazione per gl'ingegneri e proposi, credo per primo, che venisse trasportata nel 2° anno del corso universitario. Si incontrarono dapprima molte difficoltà ed opposizioni specialmente da parte dei professori di meccanica; giacché è evidente che, per facilitare l'insegnamento, esiste nei maestri la tendenza a richiedere la massima cultura possibile degli allievi. Ma adesso quasi tutti gli insegnanti si sono piegati alle nuove disposizioni e con opportuni accordi coi professori di matematica le cose vanno assestandosi e procedono sempre meglio.

Per ciò che si riferisce agli istituti industriali mi sembra che al fine di correggere, per quanto è possibile, nel futuro gli inconvenienti prodotti dallo stabilire il corso di meccanica al principio dell'Istituto stesso, si potrebbe procedere in tre modi:

1° Coll'intensificare l'insegnamento delle matematiche nelle scuole tecniche e nelle altre scuole preparatorie all'Istituto.

2° Coll'estendere l'obbligo degli esami di ammissione agli istituti industriali, oltre che ai giovani provenienti dal ginnasio anche a quelli provenienti dalle altre scuole, pretendendo da tutti una cultura matematica seria e tale da non obbligare l'insegnante dell'istituto a ripetere la materia che si svolge nelle scuole preparatorie.

3° Col mantenere continui rapporti fra il corso di matematica e quello di meccanica negli istituti industriali.

A chiarimento di quanto ho detto sopra osservo che un tempo (quaranta o cinquant'anni fa) si riusciva ad insegnare nelle scuole tecniche tutta la geometria piana e solida e tutta l'algebra fino alle equazioni di 2° grado, nozioni che si esigevano ed erano difatti possedute da coloro che si ammettevano agli istituti tecnici. Come mai ora non si riesce a raggiungere nelle scuole tecniche e negli istituti di primo grado che una cultura matematica tanto più bassa ? Anche senza arrivare a pretendere quanto si richiedeva cinquanta anni fa, non si può tenere l'insegnamento ad un livello più alto ? A mio avviso è necessario fare questo tentativo e non mi sembra impossibile raggiungere l'intento.

Non entro in particolari sulla questione degli esami di ammissione, osservo solo che il compito di scegliere gli allievi e di vagliarli dovrebbe spettare agli insegnanti che si dispongono a riceverli negli istituti industriali.

Credo poi che lo stringere legami sempre più intimi e, direi quasi, fondere l'insegnamento della matematica con quello della meccanica sia fonte di grandi vantaggi. A mio modo di vedere quanto più si desumono gli esempî della matematica nel campo della meccanica, tanto maggiori vantaggi si ottengono.

Però sebbene la tendenza a mantenere nel primo anno di corso degli istituti industriali l'insegnamento della meccanica mi sembri giustificata dalle molte buone ragioni che ho esposto, pure sono propenso ad ammettere che in pratica possa, nel momento attuale, ritenersi necessario avere un primo anno preparatorio nella scuola industriale e cominciare la meccanica dopo quest'anno. In tal caso gli esami di ammissione al vero e proprio corso tecnico sarebbero gli esami finali dell'anno preparatorio.

Qualunque sia la decisione da prendere circa l'anno di corso in cui deve principiare la meccanica nelle scuole industriali, tenendo conto che la dinamica debba, come è naturale, seguire la statica e la cinematica, alle quali vengono rispettivamente consacrati tre mesi e due mesi dell'anno scolastico, ammetterò che gli allievi che incominciano questo capitolo della meccanica, abbiano le nozioni di matematiche che si insegnano nelle scuole tecniche, riprese, ripetute e completate nel corso di matematica dell'istituto industriale, sappiano risolvere ed impiegare le equazioni di 2° grado e posseggano le nozioni fondamentali di trigonometria.

Quanto alle aree delle figure ed ai volumi, conviene ammettere che gli alunni sappiano calcolarli praticamente, giacché tale parte della geometria si insegna fino dalle scuole elementari ove pure si impara il sistema metrico.

Qualche nozione di calcolo grafico sarebbe a mio avviso utilissima. La parte elementare di esso è semplice, tanto che non vi è disegnatore mediocre che non sappia praticamente fare un calcolo grafico di aree. Come vedremo anche in seguito i metodi grafici sono importanti per un gran numero di operazioni da farsi sui diagrammi, per il calcolo dei lavori meccanici, dei momenti, ecc.

Mi sembra poi che non sia da trascurare fin da principio l'uso di qualche procedimento meccanico come l'impiego del planimetro.

Oltre a ciò nei corsi di statica e di cinematica gli allievi hanno avuto occasione di acquistare il concetto dei vettori e della loro composizione, della rappresentazione geometrica delle funzioni più elementari e anche in modo semplice e intuitivo il concetto di velocità e di accelerazione che apre loro la mente ai più elementari concetti infinitesimali. La nozione di baricentro e di momento statico completa poi quella di area e volume delle figure. D'altra parte gli esercizi numerici e pratici debbono avere addestrato gli allievi in tutti i capitoli svolti della matematica. E come ho già detto precedentemente è bene che il professore di matematica sia sempre d'accordo col professore di meccanica e scelga i proprî esempi e la maggior parte degli esercizi in modo concreto nel campo della meccanica. In questa maniera sarà possibile effettuare, come dicevo prima, una vera fusione dei due insegnamenti con loro mutuo vantaggio.

Da quanto ho esposto or ora si rileva il grado di maturità che deve presumersi negli allievi i quali incominciano a studiare la dinamica; si può dire che esso non differisce molto da quello dei licenziati dal liceo, naturalmente per quanto riguarda la matematica. Bisogna evidentemente tener conto della maturità che risulta dalla maggior età dei giovani del liceo e dal corredo di tutte le altre cognizioni che servono a sviluppare ed aprire la loro mente.

Ma un seguito di lezioni di dinamica di altezza non molto inferiore a quelle che si svolgono nei corsi stessi di fisica generale universitarî mi sembra che possa impartirsi agli allievi degli istituti industriali dando loro beninteso l'orientazione tecnica di cui ho parlato precedentemente.

* * *

Per quanto riguarda la definizione dei corpi della natura, quella di punto materiale, le più elementari considerazioni sui vincoli naturali, è evidente che converrà partire da esempî pratici che si possono osservare dappertutto intorno a noi ed insistere più specialmente sopra gli esempî tratti dai meccanismi di cui possono mostrarsi i modelli.

Giacché mi si presenta l'occasione, mi si permetta di fare una osservazione di indole generale. Desidererei che nell'insegnamento della dinamica (e lo stesso conviene dire, sebbene in misura minore, delle altre parti della meccanica) si presentasse sempre agli allievi qualche cosa di concreto ed essi avessero sempre dinanzi agli occhi o qualche apparecchio o qualche meccanismo o anche qualche modello sia pure schematico, ma pur sempre rispondente a realtà. Anche se ciò non è assolutamente necessario e se si può fare sulla lavagna una dimostrazione con lettere e con figure geometriche, è bene, dal punto di vista didattico, che l'allievo non perda mai il contatto cogli oggetti concreti e, meglio ancora, coi meccanismi. Quindi lo ripeto: che l'insegnante abbia per quanto è possibile sotto mano macchine ed apparecchi.

Si raggiunge con ciò a mio avviso un triplice vantaggio:

1° Il professore e gli allievi non sono spinti ad astrarre troppo e vi è sempre qualche cosa che li riconduce o li richiama al mondo reale. È bene che la mente dell'ingegnere e tanto più quella del tecnico non sia abituata ad astrarre e schematizzare eccessivamente e che non si nasconda la difficoltà e la complessità di ogni questione pratica. L'allievo si abitua così a riconoscere che quando si fa un calcolo si trascurano sempre moltissime cose e che se ciò è lecito al matematico, anzi è per lui una necessità, altrimenti non potrebbe servirsi del calcolo, l'ingegnere e l'uomo pratico invece non devono perdere di vista il problema in tutto il suo insieme.

Ecco quanto io dicevo a questo proposito in un'altra occasione [1].

« Il matematico isola ciascun fatto naturale e giunge ad analizzarlo trascurando gli altri; mentre l'ingegnere deve abituarsi ad affrontare i fatti nel loro insieme e nella loro complessità. Facoltà preziosa per il primo è l'abito dell'astrazione, mentre fonte di successo per il secondo è saper vedere le cose dal lato pratico e reale ».

2° Dal punto di vista didattico e direi anche mnemonico, è bene che, per quanto ciò è possibile, ad ogni teorema e ad ogni dimostrazione vi sia un richiamo a qualche oggetto concreto che abbia direttamente colpito l'allievo. Ciò facilita il ricordo di molti fatti e ognuno ha osservato che ci rammentiamo spesso di certe formule o di certi risultati perché ad essi è legata la memoria di un oggetto o di una giovevole esperienza.

È anzi sotto questo punto di vista che l'insegnamento sperimentale è specialmente giovevole: le esperienze di scuola, diceva un illustre Maestro, non provano e non dimostrano nulla (talvolta sono dei veri trucchi); esse riescono però utili perché fanno ricordare le leggi fisiche.

Domando a voi tutti: non avete più impressi nella mente i corsi di fisica che quelli di matematica in virtù della parte che ha l'esperienza nei primi?

3° L'impiego di un apparecchio, di un modello, di una macchina fornisce in certi casi lo spunto ad un esercizio numerico pratico, o a qualche misura: e imparare a misurare, a scegliere da sè le unità più convenienti deve essere un esercizio da non trascurarsi mai, anzi da eseguirsi con costanza ed assiduità. Oltre a ciò in molti casi si potrà sostituire ad una dimostrazione o ad un calcolo una esperienza con vantaggio per la rapidità e l'intuizione. Proprio in ciò consistono l'intima essenza ed il vantaggio del metodo che ho fin da principio chiamato della *meccanica tecnica*.

Per dare un esempio facciamo adesso una breve incursione in un campo che tratteremo poi.

La forza viva di un corpo che ruota intorno ad un asse è

$$\frac{1}{2} I\omega^2$$

essendo I il momento d'inerzia, ω la velocità angolare.

Se dunque torciamo un filo a cui è sospeso un grave, poiché il lavoro delle forze per pari torsione sarà sempre il medesimo (e ciò è evidente anche senza conoscere le leggi della elasticità) se una volta I è il momento d'inerzia del corpo sospeso, ed un'altra volta è I' e lasciamo oscillare il sistema abbandonandolo in quiete, avremo

$$I\omega^2 = I'\omega'^2$$

ove ω e ω' denotano le velocità angolari nei due casi per pari spostamento. Ne segue:

$$\frac{I}{I'} = \frac{\omega'^2}{\omega^2},$$

(1) Discorso del Senatore V. VOLTERRA pronunziato al Senato nella tornata del 19 giugno 1906 sulla fondazione di un politecnico nella città di Torino.

onde, se T e T' sono le durate di ciascuna oscillazione nei due casi, avremo

$$\frac{I}{I'} = \frac{T^2}{T'^2} = \frac{n'^2}{n^2}$$

essendo n' ed n i numeri delle oscillazioni compiute nei due casi in uno stesso tempo. La formula precedente serve per confrontare un momento di inerzia noto, per esempio di un sottile anello, con un momento incognito, che si potrà, così ottenere senza ricorrere a procedimenti di calcolo integrale. È questo un esercizio che si suol fare in molti corsi di fisica (v. Fig. 1).

È certo che impartendosi l'insegnamento in questa guisa sono necessari degli apparecchi di dimostrazione per scuola e tutta una collezione di modelli e di meccanismi; ma io sono persuaso della loro necessità. Del resto l'insieme di apparecchi di meccanica che si trovano in tutti i gabinetti di fisica non è molto grande e le maggiori spese che dovrebbero farsi sono a mio avviso largamente compensate dai vantaggi che ne acquista l'insegnamento. Tanto maggior profitto si avrà se i modelli potranno esser costruiti dagli allievi stessi nell'officina.

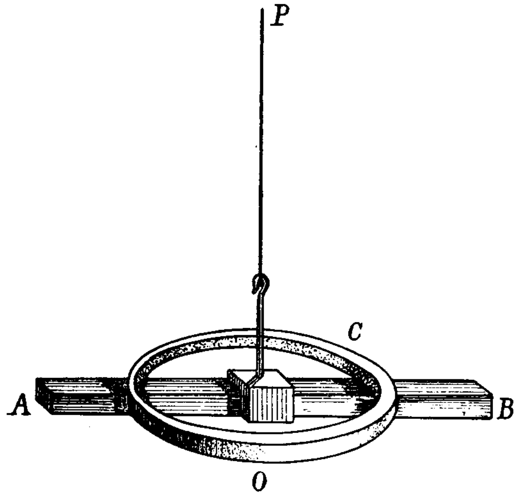


Fig. 1.

* * *

Uno dei punti che secondo me dovrà essere maggiormente curato dall'insegnante è il collegamento del concetto di forza già introdotto e sviluppato nella statica con il concetto di forza quale risulta in seguito alle leggi fondamentali della dinamica.

La questione è molto delicata ed è necessario qui dissipare equivoci che facilmente possono prodursi nelle menti ancora inesperte degli allievi. Purtroppo non tutti i libri di fisica e di meccanica facilitano la delucidazione di questo argomento; talora anzi ciò che in alcuni di essi si legge, rende la questione più oscura, talora quello che si insegna serve a impedire di chiarirla mai più o rende necessario un lungo sforzo per comprenderla esattamente.

Sono in fondo da collegarsi opportunamente e anche opportunamente da distinguersi, la composizione delle forze di cui si è parlato in statica, la composizione dei movimenti di cui si è parlato in cinematica e la composizione dei moti provocati da più cause agenti contemporaneamente. Conviene ben precisare che cosa si intenda per le dette cause e ciò che si debba ritenere per loro azione simultanea.

Bisogna anche avere riguardo ad una grossa difficoltà che si presenta subito alla mente dei giovani. In statica si parla di forze applicate ad un punto matematico; si compongono, si trasportano, ecc. Ma in dinamica si deve sempre aver presente l'accelerazione che queste forze imprimono o imprimerebbero se si staccassero le particelle su cui esse sono applicate. Anzi il modo di confrontare le forze in dinamica consiste nel confrontare le accelerazioni che esse inducono o indurrebbero nelle suddette circostanze. Se le particelle su cui sono applicate sono infinitamente piccole, queste accelerazioni sono dunque sempre infinitamente grandi. Che cosa significa il loro confronto ? Di qui un seguito di considerazioni estremamente delicate che non conviene fare troppo diffusamente a giovani inesperti. Per questo fino dal principio della statica conviene esporre qualche considerazione che tolga a priori tali dubbi, mostrando che col supporre delle forze applicate ad un punto si considerano le cose in via approssimata e solo per semplicità di trattazione.

Se, come appare conveniente, si segue il procedimento classico, è necessario ben precisare che cosa sono le tre leggi del moto le quali in sè contengono e definizioni e postulati. È riguardo a questi punti di estrema difficoltà che principalmente si manifesta la necessità di un buono, semplice e chiaro libro di testo. Gli allievi non debbono in alcun modo impiegare troppo tempo nella discussione dei principî, ma debbono averli chiari. Troppe parole degli insegnanti molto spesso non fanno che confondere la mente.

Nello sviluppo storico della scienza, anzi nella evoluzione del pensiero umano noi abbiamo due fasi: la scienza antica e quella moderna. L'antica aveva costituito la statica come una dottrina completa e perfetta al pari della geometria. La scienza moderna si inizia nel periodo del Rinascimento con la dinamica, quando questa fu resa necessaria dai nuovi problemi della balistica.

In fondo le difficoltà di cui parlavo sopra non sono che l'effetto lontano, ma tuttora vivo della saldatura di questi due grandi periodi storici nella evoluzione della cultura universale.

* * *

A questo punto trovano posto le nozioni di massa, di peso e le misure delle forze, di densità, di peso specifico e la questione delle unità di misura e delle unità del sistema C. G. S. Ciò porta a numerosi esercizi numerici che vorrei non fossero scompagnati da veri e proprî esempî pratici di pesate e desiderei se ne prendesse occasione per misurare forze, pressioni, ecc. mediante dinamometri.

Credo che adesso convenga ricordare sotto l'aspetto dinamico quanto è già stato svolto sulla gravità nelle lezioni di cinematica, fare uso della macchina di ATWOOD ed accennare alla legge della gravitazione universale. Deve seguire il capitolo della forza centrifuga, che va collegato alle nozioni già avute in cinematica sulla accelerazione centripeta.

Oltre agli apparecchi semplici che si impiegano in tutti i corsi di fisica e che valgono ad illustrare la forza centrifuga, a mio avviso si dovrebbero mostrare i vari tipi di regolatori a forza centrifuga, anche a costo di dare qualche notizia preventiva su argomenti speciali che verranno in seguito trattati nella meccanica applicata.

Il programma in questo luogo parla del moto centrale. Con ciò si intende ordinariamente il moto di un punto attratto da un centro fisso. Son di parere che questa trattazione dovrebbe limitarsi a ben poco. La legge di attrazione newtoniana si può dare in luogo opportuno come esempio di forza variabile; ma ogni trattazione del problema del moto dei corpi celesti uscirebbe dal quadro di un corso di meccanica tecnica. Tutto al più una applicazione o un esercizio sulla forza centrifuga e centripeta potrebbe dare argomento (se il tempo lo permettesse) ad un accenno sul meccanismo del sistema planetario.

Piuttosto, benché il programma non lo accenni, sarebbe opportuno svolgere il caso del moto sopra il piano inclinato, ed in generale di quello vincolato e più specialmente il caso del moto con un solo grado di libertà. Esso si presta ad illustrare ed a commentare le leggi dinamiche ed a ricordare brevemente la teoria del pendolo esposta già nella cinematica in relazione colla dottrina del moto armonico; e sarà utile in dinamica prendere occasione dalla teoria del pendolo per parlare degli orologi, delle misure del tempo, dei contatori, ecc.

Nello studio elementare della dinamica ritengo convenga, per quanto è possibile, limitarsi nelle dimostrazioni al caso di un sol grado di libertà ed affermare che si possono estendere i principî già riconosciuti ai casi più complessi. In tal modo si danno esempî semplici ma istruttivi di dimostrazioni valide in casi particolari senza esporre le dimostrazioni generali spesso troppo complicate e difficili. Valga questa osservazione per quanto diremo in seguito trattando dei principî generali della dinamica ed in particolare di quello del d'ALEMBERT.

Nel programma non si parla della forza di attrito, ma io ritengo fermamente che si dovrebbe darne un cenno in occasione del problema del moto sopra un piano inclinato, tanto più che ciò si presta facilmente ad esperienze elementari. La conoscenza anche molto sommaria dell'attrito è veramente indispensabile. Come si fa ad illustrare in seguito il principio della conservazione dell'energia, il principio della impossibilità del moto perpetuo se non si dà sin dall'inizio qualche nozione sulle forze passive ?

D'altra parte non è forse bene (in piena correlazione con quanto è stato detto precedentemente) che i giovani si abituino a ritenere la maggior parte dei risultati della meccanica razionale come leggi approssimate non foss'altro perché si trascura l'attrito ? Anzi, io andrei tanto in là da ritener necessario che questo concetto fondamentale venisse richiamato dall'insegnante con cura assidua, ogni qualvolta mostrasse qualche meccanismo o esponesse qualche esempio pratico.

Un argomento che suscita in generale vivo interesse nella scolaresca e si riferisce ad applicazioni moderne sarebbe quello della trottola o del giroscopio.

Certo la teoria del giroscopio è molto complicata, ed è impossibile trattarla in maniera non solo completa, ma appena sufficiente dal punto di vista matematico, ad allievi forniti di cultura tanto elementare come quelli degli istituti industriali. Nondimeno qui può supplire la parte sperimentale; e le esperienze col giroscopio sono tante, così belle e suggestive ed interessano in modo così grande gli allievi che mi sembrerebbe utile dedicarvi qualche tempo. Gli apparecchi che servono a dimostrazione del giroscopio sono ora assai comuni e d'altra parte nelle officine delle scuole potrebbero anche essere facilmente costruiti. Basta una semplice ruota di bicicletta per avere un giroscopio che si presti a moltissime dimostrazioni. Dirò a questo proposito che nelle scuole inglesi non si manca mai di fare dimostrazioni di questo genere, in ogni corso, anche elementare, di meccanica. *(Il conferenziere ha qui ripetuto*

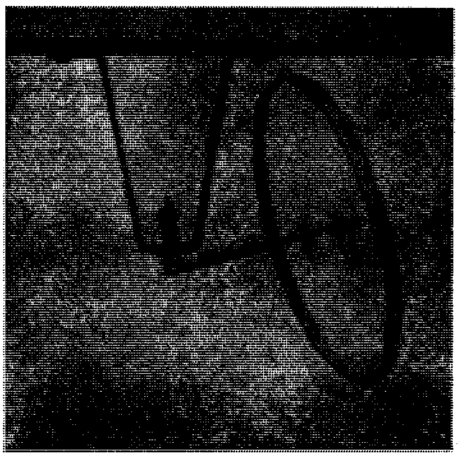


Fig. 2.

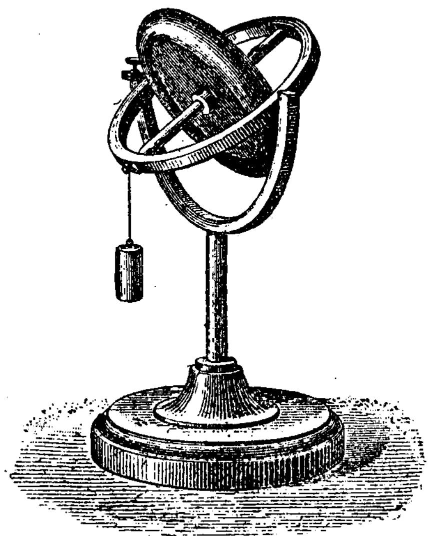


Fig. 3.

qualche esperienza col giroscopio fatto con una ruota di bicicletta (v. Fig. 2) *e con un altro giroscopio da dimostrazione* (v. Fig. 3).

È ben noto che le applicazioni moderne di questo apparecchio sono numerosissime e vanno di giorno in giorno moltiplicandosi. Gli stabilizzatori giroscopici delle torpedini e dei bastimenti, le bussole giroscopiche, gli apparecchi giroscopici usati nel volo sono altrettante applicazioni della teoria suddetta.

Ma riguardo ad essa ritengo che convenga svolgerla appresso come illustrazione dei varî principî della meccanica.

*
* *

La parte relativa al lavoro conviene sia sviluppata il più possibile. Cominciando dai casi più semplici in cui la forza è costante ed il cammino è nello stesso senso o nel senso opposto della forza, conviene poi passare ai casi via via più complicati; caso di forza costante e di spostamento rettilineo non avente la direzione della forza; poi spostamento curvilineo, infine caso di forza variabile. La gravità, allorché si tratta di moti verticali o lungo un piano inclinato, la tensione di una molla ed il lavoro impiegato nello stirarla o comprimerla offrono esempi suggestivi che si prestano tanto a numerosi esercizi quanto a grafici e calcoli grafici. La teoria delle proiezioni che è stata svolta ed applicata in cinematica può essere di valido aiuto: così le cognizioni di trigonometria e più specialmente la determinazione delle aree quando si faccia uso dei diagrammi.

La teoria del lavoro favorisce numerose incursioni nel campo della meccanica applicata.

Mi si permetta a questo proposito un'altra osservazione di carattere generale, analoga ad altre che ho già fatto precedentemente.

L'insegnamento della meccanica è indubbiamente arido e ho già osservato che la parte sperimentale serve a togliere un poco di questa aridità. Ma spesso i giovani hanno la tendenza a disprezzare gl'insegnamenti di carattere teorico, perché ritengono che non abbiano applicazioni, tanto che concentrano tutta la stima, l'attenzione e l'interesse negli insegnamenti pratici. Ora, per quanto è possibile, è bene persuadere gli allievi della utilità della parte teorica senza la quale non potranno apprendere, con la dovuta profondità, le applicazioni. Per coltivare questa persuasione mi sembra conveniente fare, ogni volta se ne presenti l'opportunità, una incursione preventiva nei campi pratici che verranno svolti di poi. Valga questa osservazione di carattere generale a giustificare una volta per tutte ciò che ho adesso proposto e qualche altro futuro suggerimento dello stesso genere.

Esposto il concetto del lavoro, si può procedere a stabilire il principio delle forze vive e mi pare, a questo proposito, che si debba cominciare dal caso di un punto libero soggetto alla gravità. Richiamandosi alle formule della caduta dei gravi è facile dimostrare che il lavoro della gravità eguaglia la variazione della forza viva tanto nel moto discendente che ascendente. Conviene poi passare al caso di una forza variabile applicata ad un punto materiale dividendo la traiettoria che esso percorre in tanti intervalli parziali in ciascuno dei quali la forza può supporsi costante. È facile così stabilire il teorema delle forze vive; e da questo caso a quello di un sistema meccanico generale il passo è molto più breve di quanto possa a primo aspetto sembrare.

Data l'importanza del principio delle forze vive, è indubbiamente necessario enunciarlo in generale e dimostrarlo in modo completo col suddetto procedimento infinitesimale. Tale procedimento del resto non deve riuscire nuovo agli allievi, giacché fu certo impiegato anche in cinematica; d'accordo col professore di matematica, deve essere stato anche applicato nel corso di geometria per completare le nozioni sulle aree e per dare qualche indicazione sulla determinazione grafica delle aree stesse.

D'altra parte, come vedremo in seguito a proposito dei momenti d'inerzia, il procedimento infinitesimale anche in casi complessi può essere adoperato con tale arte da nasconderne completamente tutte le difficoltà.

Non resta adesso che applicare il principio delle forze vive al caso della traslazione, della rotazione ed in generale al caso di un meccanismo qualunque, fermandosi in modo speciale sopra i sistemi meccanici aventi un grado solo di libertà ed esaminando, allorché il moto è stazionario, il lavoro motore ed il lavoro resistente.

Stabilito il principio delle forze vive, converrà passare al principio della conservazione dell'energia, esaminandolo dapprima in casi particolari ed enunciandolo poi come un principio generale della natura.

A questo punto trovan posto molte considerazioni fra le più interessanti del corso di meccanica: l'accenno al principio che nelle macchine ciò che si guadagna in forza si perde in velocità; il concetto di energia; il principio della sua conservazione; il concetto del potenziale; il principio della impossibilità del moto perpetuo.

E ritengo utile che tutte queste diverse considerazioni siano enunciate e spiegate. Infatti il principio che « quanto si guadagna in forza si perde in velocità » dà un'idea suggestiva del principio delle velocità virtuali, offre l'occasione di un ritorno alle macchine semplici, svolto nella statica e conduce ad un rapido accenno sul regime statico e dinamico delle macchine; il principio della conservazione dell'energia deve essere sempre presente allo spirito di ogni tecnico; e così l'impossibilità del moto perpetuo deve essere inculcata per dissipare errori tanto comuni e che non cessano mai dal ripetersi. Sono questi principî che formeranno (ed il professore non dovrà scordarsi di dirlo), la base del futuro corso di termodinamica; mentre il concetto del potenziale ricavato dall'energia sarà uno dei fondamenti del prossimo studio della elettrotecnica.

* * *

La determinazione della forza viva di un corpo rotante intorno ad un asse conduce evidentemente al concetto del momento d'inerzia.

Se il corpo è costituito dai punti materiali di masse $m_1, m_2, \cdots, m_n$ distanti di $r_1, r_2, \cdots, r_n$ dall'asse di rotazione, la forza viva è

$$\frac{1}{2} m_1 r_1^2 \omega^2 + \frac{1}{2} m_2 r_2^2 \omega^2 + \cdots + \frac{1}{2} m_n r_n^2 \omega^2 =$$

$$= \frac{1}{2} (m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \cdots + m_n r_n^2) \omega^2 = \frac{1}{2} \mathrm{I} \omega^2 ,$$

dove ω rappresenta la velocità angolare.

Il momento d'inerzia è quindi

$$\mathrm{I} = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \cdots + m_n r_n^2 .$$

Un corpo deve considerarsi come l'aggregato di tante particelle e perciò una somma analoga alla precedente ci darà il momento d'inerzia di ogni corpo.

La determinazione dei momenti d'inerzia richiede, nella maggior parte dei casi, operazioni di calcolo integrale che naturalmente oltrepassano le cognizioni matematiche limitate degli allievi; quindi conviene in generale dare i risultati soltanto. Del resto in pratica ci si serve di tavole e di manuali tutte le volte che si abbia bisogno di determinare un momento d'inerzia. Ad ogni modo, come esercizio, si possono calcolare in scuola senza bisogno di ricorrere alle formule del calcolo integrale i momenti d'inerzia di una massa distribuita in un sottile anello, di un'asticella sottilissima parallela all'asse e anche di un'asticella sottilissima normale all'asse, riconducendo quest'ultimo caso, come mostreremo adesso, alla determinazione del volume di una piramide a base quadrata.

Abbiasi una piramide con la base quadrata di lato a e con l'altezza a. Dividiamola in tante fette sottilissime, ciascuna di altezza h, parallele alla base. Se la sezione dista dal vertice di x, la sua area sarà x^2 e quindi il volume della fetta sarà $x^2 h$.

D'altra parte abbiasi un'asticella di lunghezza a disposta parallelamente all'altezza della piramide ed appoggiata al prolungamento della base di questa. Se prolunghiamo lo strato piano delimitante la fetta precedentemente considerata della piramide, questa staccherà nell'asticella una fetta F pure di altezza h che disterà dall'estremo superiore dell'asticella della distanza x. Se l'asticella è omogenea e ha la massa M, la massa della fetta F sarà $h/a\,\mathrm{M}$ ed il suo momento d'inerzia rispetto ad un'asse che passa per l'estremo superiore dell'asticella ed è normale a questa, risulterà:

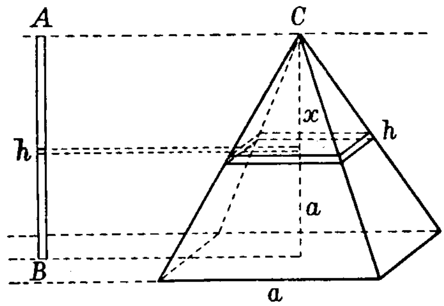


Fig. 4.

$$\frac{h}{a}\mathrm{M}x^2 = \left(\frac{\mathrm{M}}{a}\right) hx^2 .$$

Dunque il momento d'inerzia della fetta F dell'asticella sta al volume della fetta corrispondente della piramide nel rapporto costante M/a. Ma il momento d'inerzia di tutta l'asticella è la somma dei momenti d'inerzia di tutte le parti F in cui può dividersi e il volume della piramide è la somma dei volumi di tutte le fette corrispondenti in cui può dividersi. Ne segue che il momento d'inerzia di tutta l'asticella sta al volume della piramide nel rapporto M/a, cioè

$$\frac{\text{Mom. inerzia}}{\text{Vol. piramide}} = \frac{\mathrm{M}}{a} .$$

Ma il volume totale della piramide è eguale $\frac{1}{3} a^2 \times a = \frac{1}{3} a^3$, e perciò

$$\text{Mom. inerzia} = \frac{\mathrm{M}}{a} \cdot \frac{1}{3} a^3 = \frac{1}{3} \mathrm{M}a^2 .$$

Ho desiderato esporre in particolare questo procedimento tipico che non è altro che una integrazione che si esprime con la formula

$$\int_0^x x^2\,dx = \frac{1}{3}x^3,$$

giacché altri procedimenti della stessa specie conviene impiegare in varî capitoli della meccanica.

Ed è altrettanto facile, se non addirittura più facile, trovare il momento d'inerzia di un disco rispetto ad un suo diametro.

Prendiamo un quadrante. Per simmetria il momento d'inerzia rispetto al diametro OA sarà lo stesso che il momento rispetto al diametro ortogonale OB. Sia una striscia CD del quadrante parallela ad OA. In virtù di quanto abbiamo adesso calcolato, il suo momento d'inerzia rispetto ad OB sarà (v. Fig. 5):

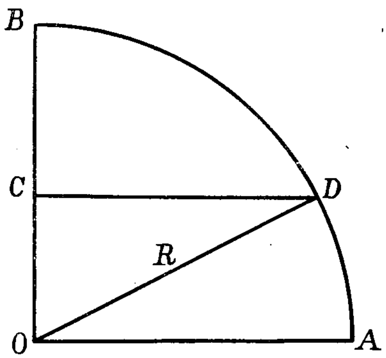


Fig. 5.

$$\frac{1}{3}m\overline{CD}^2,$$

se m ne è la massa. Rispetto ad OA (siccome tutti i suoi punti distano da OA di OC) il suo momento d'inerzia sarà

$$m\overline{OC}^2.$$

Triplichiamo il primo ed aggiungiamolo al secondo, avremo

$$m(\overline{CD}^2 + \overline{OC}^2) = m\overline{OD}^2 = mR^2$$

denotando con R il raggio. E se sommiamo questi valori per tutte le striscie CD otterremo

$$MR^2,$$

essendo M la massa del quadrante. Ma noi abbiamo triplicato i primi e aggiunti i secondi, dunque noi abbiamo trovato il quadruplo del momento I che cerchiamo: quindi

$$I = \frac{1}{4}MR^2,$$

ed evidentemente la stessa relazione passerà fra la massa dell'intero disco e il suo momento d'inerzia rispetto ad un suo diametro. Sommando i momenti d'inerzia rispetto a due diametri avremo quello rispetto all'asse e perciò questo sarà

$$I = \frac{1}{2}MR^2.$$

In fondo il procedimento precedente appartiene al tipo del metodo degli indivisibili, ma è ben naturale che per ottenere il mezzo più appropriato per dimostrare a giovani menti un risultato, conviene ritornare ai procedimenti rudimentali impiegati dai primi pionieri del calcolo. La mente dei giovani allievi e le loro disposizioni di spirito saranno sempre più vicine a quelle di costoro, che alle menti più evolute di quelli che senza difficoltà maneggiano l'istrumento del calcolo moderno.

Una volta ottenuto il momento d'inerzia dell'asticella e del disco, con metodo analogo potrebbero calcolarsi il momento d'inerzia del rettangolo, del parallelepipedo rettangolo, del cilindro, della sfera, insomma di tutti i corpi di cui, in pratica, si utilizza il momento di inerzia.

Le considerazioni precedenti relative all'impiego del calcolo infinitesimale e all'ordine degli studi matematici e di applicazione mi suggeriscono alcune osservazioni che mi permetto formulare.

Vi sono due modi per giungere ad impossessarsi delle matematiche. Studiarle sistematicamente cominciando dalla parte astratta e poi discendere alle applicazioni; è allora soltanto che si comprende la importanza della parte teorica e preliminare svolta. Questa è la via maestra didattica, facile e piana che presenta minori difficoltà al professore, annoia un pò l'allievo, ma rende il corso, almeno per i più abili, privo di eccessive difficoltà. Ovvero inversa mente riconoscere per via pratica (per esempio esaminando i problemi che si presentano in meccanica) il bisogno di approfondire questioni, per cui necessita il calcolo, cercare con tentativi e con artifizi di risolverle, infine sistematizzare, a poco a poco, i metodi creati, onde procurarsi l'istrumento atto in ogni caso a fornire prontamente la soluzione. È una via aspra e scabrosa, ma per i giovani d'ingegno essa è certamente la via più suggestiva e, come quella che più si accosta al cammino storico seguito dai vari inventori, la più adatta a far risaltare l'importanza e la fecondità del calcolo matematico.

La mia simpatia è per questo procedimento didattico, ma non me ne nascondo le difficoltà, specialmente quando l'insegnamento è svolto ad una scolaresca numerosa e conviene economizzare tempo e forze per ottenere il massimo rendimento.

Tuttavia mi sembra che a tal procedimento si ispiri l'ordinamento delle scuole industriali, tanto in Italia che fuori, se non totalmente, almeno in parte. I risultati già conseguiti sono altamente apprezzabili. Speriamo che ancora più cospicui se ne otterranno in avvenire. Ad ogni modo queste osservazioni possono dare nuova luce sulle ragioni che hanno condotto ai programmi degli istituti industriali e specialmente possono dissipare certe censure loro rivolte.

* * *

Una delle questioni poste riguarda le leggi più generali della dinamica dal principio del d'ALEMBERT a quello di HAMILTON.

Come leggi generali della dinamica nel senso più lato mi sembra che si debbano intendere:

1° le leggi fondamentali del moto;
2° il principio del d'ALEMBERT;
3° Il principio del moto del baricentro;

4° il principio delle aree e della quantità di moto;
5° il principio delle forze vive;
6° il principio di HAMILTON, principio della minima azione ecc.

Procediamo ad una distinzione fra questi diversi principî. Da tutto quanto è detto precedentemente, risulta intanto che le leggi fondamentali del moto (1°) debbano essere enunciate e discusse.

Non vi ha dubbio che il principio delle forze vive (5°) deve essere pure svolto come è detto diffusamente di sopra.

Restano gli altri principî. A mio avviso conviene pure enunciare il principio del d'ALEMBERT (2°) sia per la sua semplicità, sia per l'impiego che può farsene nella meccanica applicata. Si deve prendere come esempio tipico di partenza il pendolo composto, che può trattarsi elementarmente. È bene osservare che riferendosi alla trattazione del pendolo composto, si fa un ritorno all'inizio di quel processo storico di evoluzione della dinamica che fece capo al principio del d'ALEMBERT. Inoltre il pendolo composto, con la ricerca della sua lunghezza ridotta, offre un'applicazione dello studio precedentemente fatto dei momenti d'inerzia. Dal caso particolare del pendolo composto, in cui il principio del d'ALEMBERT si presenta sotto forma molto semplice, si può passare ad enunciare il principio sotto forma generale.

Quanto al principio del moto del baricentro (3°) ritengo che convenga semplicemente esporlo senza dimostrazione, illustrandolo però con esempi fra cui è ben noto quello di una bomba che scoppia, mentre il suo baricentro persevera nel suo moto, ed altri analoghi.

Conviene pure enunciare il principio delle aree (4°) sotto forma di legge che regola la coppia di quantità di moto, senza dimostrarlo, ma corredandolo di illustrazioni e d'esempi.

Alcuni anni or sono la cosidetta *caduta del gatto* ha offerto occasione ad esposizioni del principio delle aree, semplici, elementari, e veramente suggestive, che possono essere prese come modello.

I principî fondamentali della meccanica, aree e forza viva, nonché i concetti fondamentali del moto relativo, trovano poi la più bella illustrazione nelle interessanti esperienze col giroscopio e nelle sue applicazioni; e sono sommamente utili e suggestivi quei ragionamenti di carattere intuitivo, mediante i quali ci si può render conto, senza alcun calcolo, dei fenomeni che si osservano nel giroscopio. Mi riferivo precisamente a questo per ciò che ho precedentemente detto intorno a questo apparecchio.

Ma tacerei completamente in un corso elementare del principio di HAMILTON (6°) e di quello della minima azione. Infine, io non sopprimerei la teoria dell'urto, ma mi riferirei all'esposizione più semplice e classica dell'urto centrale come applicazione dei principî fondamentali della meccanica.

*
* *

Ritengo con questo di avere risposto ai vari quesiti e di avere illustrato il programma che mi sembra predisposto con giusto equilibrio. Ma non posso terminare senza esprimere il voto che sia presto pubblicato un trattato di meccanica per le scuole industriali, limitato intanto alla parte teorica. Più di qualunque suggerimento, l'aver sottomano un buon libro di testo è ciò che può facilitare l'opera dell'insegnante e il lavoro dello studente. E mi permetto di raccomandare che si pensi ad un libro originale, non ad una traduzione di altri libri scritti per lo svolgimento di altri programmi e specialmente per allievi di altre scuole e di altri paesi, che hanno un'altra cultura ed anche una diversa mentalità dai nostri.

Prendere un libro già esistente e cercare di adattarlo a scopi diversi da quelli per cui fu originalmente scritto, conduce sempre a qualche cosa di inorganico e di non rispondente perfettamente al fine perseguito, anche se il libro è buono.

Fare un libro per le scuole è cosa molto difficile; non si tratta di scrivere solo un'opera scientifica, come quando si redige una memoria, ma bisogna fare un'opera d'arte. Senza attitudini artistiche, non credo che si possa compiere opera utile e durevole. Ed il libro deve essere scritto da chi abbia il pieno possesso della materia, deve essere tutto d'un getto, ed allorché la evoluzione della scienza lo abbia reso vecchio, e non sia quindi più adatto ai tempi, bisogna buttarlo via e non rafforzarlo, altrimenti, molto spesso un bel libro diventa un'opera mostruosa.

Libri di algebra, di geometria, di calcolo possono non invecchiare. EUCLIDE gode della giovinezza eterna degli Dei. L'opera di LEGENDRE è pur sempre giovane, i libri di algebra di EULERO e di BERTRAND sono migliori di molti libri recenti. Ma EUCLIDE doveva essere uno scienziato ed un artista degno del genio greco come OMERO, FIDIA o APELLE. LEGENDRE, EULERO, BERTRAND furono matematici di primo ordine, non mediocri professori.

Se i buoni libri di matematica non invecchiano o invecchiano poco, perché in matematica le nozioni col tempo vanno accumulandosi e ben poco o quasi nulla v'è da buttar via, sorte diversa tocca ai libri di fisica e di meccanica.

Il progresso stesso della scienza rende inservibili, dopo pochi anni, ottimi libri di testo, che, come ho detto precedentemente, conviene con coraggio e senza pietà dimenticare, per sostituirli con altri, rispondenti ai nuovi tempi, ai nuovi bisogni, alle nuove scoperte.

Mi auguro che un uomo di scienza, di mente alta e comprensiva, fornito di doti artistiche e di piena conoscenza dei fini delle scuole e della mentalità degli allievi, sorga in Italia per dotare oggi di un buon libro di meccanica i nostri Istituti Industriali, destinati a contribuire così efficacemente all'avvenire della Patria.

XX.

DISCORSO INAUGURALE DELLA « INTERNATIONAL ASTRONOMICAL UNION » (*)

« Transactions of the Internat. Astron. Un. », vol. I, 1922; pp. 127–131.

Nel maggio 1917, allorché la guerra infieriva di più in Europa e da circa tre anni ogni lavoro scientifico collettivo era cessato, mentre l'attività intellettuale era pressoché interamente rivolta ad opere tecniche di guerra, molti scienziati e varie Accademie si trovarono concordi nel pensare che conveniva riprendere, se non in tutto, almeno in parte l'interrotto lavoro, onde non andassero perduti, per mancanza di continuità, frutti preziosi di lunghe precedenti fatiche.

Di lavoro collettivo è maggiormente sentito il bisogno in quelle scienze che, o sono più progredite, o abbracciano un campo più vasto di ricerche, come l'astronomia, la geodesia, la fisica terrestre; d'altra parte i fenomeni naturali, così in cielo come in terra, proseguivano imperturbabili nel loro corso, non perturbati almeno dalle umane vicende, elementi infinitesimi nella evoluzione dell'Universo. Urgeva quindi che non si lasciassero sfuggire delle osservazioni e dei dati mai più possibili a ritrovarsi.

I viaggi, non lieti nè esenti da pericoli in quell'ora, non impedirono che pochi volenterosi, rappresentanti di Accademie europee, si ritrovassero in Londra e gettassero un seme che doveva poscia fruttificare. Se non completo, certo abbozzato nel suo principio, nacque allora ciò che poi, mercè la spinta che venne d'America, doveva dare origine, nel settembre successivo, al primo schema del Consiglio Internazionale di Ricerche, il quale, nel dicembre dello stesso anno, assumeva forma più precisa nella riunione di Parigi, ove, al Comitato esecutivo allora eletto, si dava il mandato di preparare un Congresso di Delegati. Questo aveva luogo in Bruxelles nel luglio del 1919 ed ivi erano stabiliti gli statuti dell'Unione Astronomica e Geodetico-Geofisica in uno con lo statuto del Consiglio Internazionale di Ricerche, che abbraccia tutte le unioni dei vari rami di scienza e li armonizza fra loro.

Mi sia permesso di ricordare oggi, con sentimenti di riconoscenza e con vivo rimpianto, due italiani, i professori RICCÒ e REINA, che presero parte alle riunioni di Parigi e di Bruxelles e che scomparvero a poca distanza l'uno dall'altro dopo il ritorno in Patria, e mi si consenta di mandare un reverente

(*) Discorso tenuto in Campidoglio – nella sala degli Orazi e Curiazi – il 2 maggio 1922, alla presenza del re d'Italia, del principe ereditario e del cardinale Maffi.

saluto a chi non è di persona qui presente, ma è col pensiero fra noi, al Presidente del Comitato Esecutivo, prof. PICARD, ed ai Membri dello stesso Comitato, professori HALE e LECOINTE, che tanto operarono a vantaggio delle nostre Unioni.

Sono poi certo di interpretare il sentimento di tutti i Delegati inviando l'augurio di sollecita guarigione a S.A.S. il Principe di Monaco, che fu impedito da circostanza di salute di presiedere la Sezione dedicata alla Oceanografia, a quella scienza cioè che tanto deve alla sua opera personale e al contributo della sua munificenza.

L'idea di tenere contemporaneamente e nello stesso luogo le Assemblee delle due Unioni Astronomica e Geodetico–Geofisica, a cagione delle loro affinità e dei numerosi comuni problemi, sorse a Bruxelles ed il compianto prof. RICCÒ propose Roma come sede della prima Assemblea.

Ringrazio le Presidenze delle due Unioni di avere accolta questa proposta e ringrazio vivamente quanti sono qui intervenuti; li ringrazio a nome della R. Accademia dei Lincei che, nella sua qualità di Accademia Nazionale Italiana, promosse, secondo le norme statutarie, la riunione attuale e, a partire da domani, potrà accogliere i Delegati nel suo palazzo, e li ringrazio a nome degli Scienziati italiani che vedono con gioia ed orgoglio adunati nella Capitale del nostro Paese tanti illustri rappresentanti della Scienza mondiale, ai quali cordialmente dò in loro nome il benvenuto, con l'auspicio che il lavoro dei giorni futuri contribuisca efficacemente al progresso delle discipline che noi tutti coltiviamo.

Grave lavoro invero è quello che ci sta dinanzi: ponderosi problemi abbisognano di sollecita soluzione; altre questioni non ancora mature attendono che dopo lungo, indefesso studio si pongano le basi atte a fornire i dati per risolverle. Basta gettare uno sguardo sull'insieme dei nostri lavori, alle Commissioni costituite, alle Sezioni in cui si divide il Congresso, alle relazioni che verranno lette dai Delegati e poi sottoposte alla discussione, per comprendere quanto vasto sia il complesso delle ricerche che l'Assemblea dovrà esaminare.

Non entrano forse tutti i fenomeni del Cielo e della Terra, ad eccezione di quelli della vita, nel campo dell'Astronomia, della Geodesia e della Geofisica ? E per studiarli non è forse necessario porre a contributo le scienze più diverse dalle speculazioni teoriche delle Matematiche, particolari della Meccanica celeste, passando attraverso alla Fisica ed alla Chimica, fino a giungere alle Scienze naturali e geografiche, legate alla Oceanografia ed alla Vulcanologia ?

È un singolare conflitto, senza dubbio angoscioso, quello che si combatte nell'animo degli uomini di scienza fra la specializzazione, indispensabile per approfondire i singoli argomenti, e la universalità delle cognizioni, necessarie per abbracciare con una sintesi l'insieme delle discipline che si coltivano. Senza l'una si fa spesso opera superficiale ed incompleta, senza l'altra si è sovente sviati dalla ricerca feconda.

Con l'armonica fusione di numerose intelligenze, le quali siano educate a discipline diverse, ma mirino ad uno stesso ideale, con l'unione di forze di differente natura, ma concorrenti ad un fine comune cioè con la larga cooperazione dei cultori di varie scienze, si attenua il conflitto cui adesso accennavo e si vincono quelle difficoltà contro le quali una singola mente, fosse pure altissima, ma isolata, lotterebbe invano.

Le Unioni fondate nel 1919 a Bruxelles, la loro convocazione nella odierna Assemblea, sono la estrinsecazione di questo concetto, il quale ha condotto ad una forma di Congresso che si differenzia in modo essenziale da tutti quelli passati. Questo infatti diversamente dagli altri è disciplinato da un preventivo programma ben determinato sopra questioni precisate in uno studio preliminare, il quale si concreta in relazioni fatte conoscere in tempo agli speciali Delegati scelti fra le persone più competenti, relazioni che debbono essere la base delle loro discussioni.

Tale sistema, che appare il più pratico ed il più rapido, per condurre a termine efficacemente un grande lavoro collettivo e preparare il lavoro futuro, lo vedremo adesso alla prova. Dei risultati a cui esso condurrà potremo parlare soltanto quando le nostre fatiche di questi giorni saranno finite. Certo la speranza ci arride che potremo fare opera feconda ed utile, e che lo spirito scientifico il quale ci anima, mentre aiuterà ed organizzerà il lavoro in comune, non lederà le iniziative individuali, nè impedirà gli sforzi singoli che sono pur sempre la fonte dei pensieri più originali.

Ho detto opera utile e feconda e debbo aggiungere con mire pratiche e ad un tempo ideali e teoriche, giacché, se da un lato siamo sollecitati da questioni urgenti sulle misure geodetiche e sopra problemi di immediata applicazione in oceanografia, in meteorologia ed in vulcanologia e siamo spinti da una giustificata curiosità di scoprire il mistero pieno di speranze e di promesse che si cela a pochi metri sotto i nostri piedi, molti di noi hanno gli occhi rivolti a ciò che è più remoto e lontano, a ciò che avviene o più propriamente avvenne a miliardi di chilometri di distanza.

Ma è fatale che nel campo della ricerca scientifica si unisca l'infinitamente grande con l'infinitamente piccolo e l'applicazione con lo studio più astratto, giacché è il mutuo influsso che esercitano fra di loro i più svariati pensieri ciò che maggiormente eccita la ricerca e la fa progredire. Così l'analisi spettrale che indaga la composizione delle stelle, delle nebulose e del sole, serve ad alzare il velo che ci copre i misteri dell'atomo. La meccanica dei mondi che si formano e si disfanno e la meccanica intermolecolare hanno punti di contatto; le leggi della probabilità si applicano alla meccanica celeste ed alla meccanica delle particelle dei gas. La spettroscopia, che ha rivelato per la prima volta l'elio nel sole, lo ha fatto ritrovare in terra in tal copia che esso serve già alle applicazioni pratiche della navigazione aerea.

Così si formano, si intrecciano, si annodano, si intessono mille fili, talora palesi, spesso nascosti, che collegano i vari rami del sapere, che influiscono sopra la formazione dei concetti scientifici, e che incessantemente agiscono sulla loro evoluzione.

Il distrigare questo viluppo è opera della critica filosofica delle scienze, la quale forse non è mai stata, come oggi, così acuta e così perspicace, mentre è fondata saldamente sopra i dati storici che si vanno scoprendo e scrutando.

È mai possibile dubitare dell'utilità e della importanza speculativa della astronomia, a meno di non ricorrere a volgari paradossi ?

Anche senza ritornare alle eloquenti pagine sempre fresche e vive che scrisse il POINCARÉ, volgiamo gli occhi d'attorno e guardiamo qual'è oggi il sostegno su cui cerca appoggiarsi una delle speculazioni più recenti o almeno che più recentemente si è sparsa nel mondo ed ha suscitato un interesse vivo ed universale che è forse senza esempio nella storia. Intendo parlare della così detta teoria della relatività e delle sue verifiche astronomiche costituenti appunto quel sostegno a cui adesso alludevo.

L'essere riuscita a togliere una difficoltà che non si sapeva superare nella spiegazione del meccanismo planetario, ha fatto più in favore delle ipotesi relativistiche che tutte le numerose e spesso vane discussioni che si sono agitate intorno ad esse.

Da che questa teoria, suscitando tanta curiosità, ha oltrepassato la cerchia di coloro che si occupano di questioni scientifiche, vien fatto spesso di sentir domandare ai matematici di professione: credete voi alla relatività o non siete relativisti ?

Nessuno è meno adatto di un matematico, in quanto è matematico, a dare una risposta. Infatti, dal punto di vista matematico, ossia logico, la teoria della relatività è perfetta come è perfetta la ordinaria teoria Newtoniana, come sarebbe matematicamente perfetta qualsiasi altra appoggiata sopra postulati non contraddittorî e che fosse costruita colle regole della logica.

È ben nota la definizione, più esatta che umoristica, sebbene di aspetto paradossale, che il RUSSEL ha dato della matematica: la scienza della quale non si ha mai bisogno di sapere se quello che si dice è vero e neppure di sapere di che cosa si parla, il che significa in termini meno enigmatici che la matematica è un mezzo, uno strumento inconscio dell'opera che produce e della funzione che compie.

Ma, allorché si applica la matematica alla scienza della natura, delle infinite costruzioni tutte egualmente vere della matematica, conviene scegliere quella o quelle che ci descrivono più semplicemente i fatti naturali, o ce li rappresentano con maggiore approssimazione, o che li fanno prevedere con più sicurezza. E nella maggior parte dei casi si fa prima questo schema o questa armatura matematica e poi si vede se essa si adatta più o meno bene ai fatti della natura, e se ci accorgiamo che l'armatura non corrisponde come si desidera, noi ne costituiamo un'altra e buttiamo via la prima, o anche la conserviamo insieme alla nuova, perché in certi casi può farci ancora comodo.

È dunque vero in gran parte ciò che alcuni pensatori dicono, che l'uomo crea con la propria immaginazione il soggetto delle sue speculazioni, ma è pur vero che tale creazione diviene feconda allorché la si cimenta con i fatti. In ciò sta il successo della scienza sperimentale, che, nel maggior numero dei casi, serve a mettere a prova, a posteriori, quello che si è costruito già con il pensiero.

Ricordo a questo proposito quanto in questi giorni ha scritto l'illustre Segretario perpetuo dell'Accademia di Parigi, confrontando l'opera di BURIDANO con l'opera di GALILEO. Quello che al primo mancava, l'altro l'ha dato: la riprova, con l'esperienza, delle speculazioni astratte sul moto. E consiste in questo appunto l'essenza del passaggio della scienza del Medio Evo a quella Moderna.

Orbene se la Relatività concorda con qualche fatto ribelle alla teoria Newtoniana e se analoghe concordanze si ripeteranno, mentre si verificheranno i fatti nuovi che essa prevede, questa teoria costituirà un'armatura matematica che si adatterà meglio ai fenomeni dell'Astronomia e delle altre scienze della natura e quindi potrà preferirsi all'altra. Essa raccoglie, rinnovellandoli, il concetto Lagrangiano trasformante la meccanica in una geometria dell'iperspazio, le idee di BELTRAMI e CLIFFORD sulla influenza della curvatura spaziale nell'andamento dei fenomeni e le speculazioni di RIEMANN sulla possibilità d'uno spazio finito a curvatura costante.

Allorché nel 1919 fu proposto a Bruxelles che una sezione del congresso di Roma venisse consacrata allo studio delle questioni della relatività nel campo astronomico, non tutti certo s'immaginavano il cammino che sarebbe stato compiuto in questi tre anni per le verifiche avvenute in seguito all'eclisse Solare del 1919.

Ora nella storia della scienza non è la prima volta che l'astronomia serve di controllo e di verifica. Senza l'astronomia la velocità di propagazione della luce non sarebbe stata scoperta.

L'astronomia colle immense distanze di cui può disporre, colle masse enormi dei corpi celesti di cui può giovarsi, con i periodi di secoli nei quali ha accumulato le sue ininterrotte osservazioni, con la meravigliosa precisione dei suoi istrumenti, può moltiplicare i tenui effetti di cause trascurabili nelle condizioni che ordinariamente si presentano nei fenomeni terrestri. L'astronomia per dir così, vede in grande, è come una lente che ingigantisce elementi microscopici della natura onde fin da quando si è dubitato della curvatura dello spazio si è sempre sospettato che essa sarebbe stata eventualmente rivelata da fenomeni astronomici. La nuova teoria della relatività se va acquistando credito lo deve principalmente all'antica scienza astronomica che le ha prestato l'ausilio della sua nobile tradizione e di una tecnica che si affina costantemente e che ringiovanisce ogni giorno sotto l'influsso dei nuovi trovati.

Le parole che adesso ho dedicato alla relatività non debbono però dar luogo ad una inesatta valutazione della parte che le spetta nel programma del Congresso. Pur suscitando tanto interesse, questa dottrina è lungi dall'assorbire la nostra attività.

Le teorie intorno alla relatività e più specialmente la questione della sua verifica nel campo di Giove saranno il tema di lavoro d'una delle Commissioni della Unione Astronomica. Ma moltissime altre Commissioni attenderanno in seno al Congresso, a lavori d'indole astronomica occupandosi dei problemi solari, dei corpi del sistema planetario, delle stelle e della carta fotografica del cielo; una Commissione studierà l'impiego della telegrafia senza fili, che va acquistando di giorno in giorno maggiore importanza per le questioni astronomiche. La riforma del calendario, che è specialmente richiesta dalle camere di commercio, giacché gli uomini d'affari risentono più degli strumenti e di altri i difetti degli attuali calendari, le ricerche relative allo studio fisico degli strumenti ed altri importanti problemi completano il quadro del lavoro astronomico.

Di non minore importanza appaiono i lavori della Unione geodetico–geofisica. Giacché oltre alle questioni sulle carte geografiche, sul Geoide, sugli strumenti, grandiosi disegni di operazioni internazionali sono stati proposti dai geodeti i quali desiderano collegare fra loro numerose triangolazioni di regioni diverse: e qui ricorderò il collegamento dell'arco di meridiano dal Capo di Buona Speranza al Cairo con la rete europea attraverso le coste Africane del Mediterraneo.

I vari Comitati nazionali sismologici sentono la necessità che i lavori che essi compiono in tutto il globo possano sempre meglio e più agevolmente compararsi gli uni con gli altri, d'onde il bisogno di stabilire scale internazionali per esprimere l'intensità delle perturbazioni sismiche, di organizzare il servizio telegrafico e radio–telegrafico delle informazioni, di registrare uniformemente le ampiezze dei movimenti di varia natura della crosta terrestre e di preparare una fitta rete di osservazioni per lo studio della propagazione delle onde sismiche.

La sezione di Oceanografia ha un vasto programma innanzi a sè. Tre grandi Commissioni sono state costituite le quali si sono ripartite gli studi dei mari: una è la Commissione dell'Atlantico, la seconda del Pacifico, la terza del Mediterraneo; e ad esse hanno aderito i vari paesi rivieraschi.

Mi sia permesso di ricordare a proposito dell'ultima, che essa si è riunita fin dal 1914 a Roma sotto gli auspici del nostro Comitato Talassografico e che numerosi lavori furono recentemente compiuti nell'estremo Mediterraneo orientale.

Alla Sezione oceanografica spetta poi un compito di una importanza eccezionale: lo studio delle maree e di tutto quanto si collega a questo grandioso fenomeno.

Se la terra e il mare sono l'oggetto delle ricerche dei geodeti, dei sismologi e degli oceanografi, l'atmosfera è riservata ai meteorologi, le cui osservazioni rimontano ad antica data, mentre nuovi problemi sorgono loro dinanzi ad ogni istante. Lo studio dell'alta atmosfera, dei suoi movimenti e della sua composizione suscita un interesse sempre crescente ed il problema delle previsioni assume ogni giorno aspetti diversi, onde l'attività dei Membri della Sezione di Meteorologia dovrà essere intensa per espletare il programma che essi hanno stabilito.

Al Magnetismo ed alla Elettricità terrestre è stata dedicata una Sezione del Congresso alla quale è deferito l'esame dei miglioramenti da introdursi nelle osservazioni magnetiche, lo studio delle aurore boreali e l'indagine complessiva dei fenomeni terrestri ed atmosferici di natura elettrica, nei quali numerosi elementi e dati ancora ignoti eccitano curiosità ed interesse.

Infine in questo Congresso vi sarà da costituire ed organizzare la sezione di vulcanologia, che interessa in modo speciale il nostro Paese, vero laboratorio naturale dei fenomeni vulcanici, i quali, per la loro spaventosa grandiosità, per il loro terribile mistero ed anche per la possibilità non lontana di applicazioni atte a volgere al bene forze apportatrici finora soltanto di devastazione e di rovina, hanno richiamato l'attenzione di tutti gli uomini.

Tale nelle grandi linee il programma di lavoro dell'attuale Congresso, la cui inaugurazione è resa particolarmente solenne dall'Augusto regale intervento.

Come nei terribili anni di guerra S.M. il Re fu sempre presente nelle aspre e gloriose imprese militari, così ora al riprendersi delle civili opere di pace è presente ad ogni più alta impresa scientifica. A Lui quanti siamo qui intervenuti ci inchiniamo riconoscenti, traendo dalla odierna cerimonia nuovo fervore al lavoro che ci accingiamo ad intraprendere.

XXI.

SUR LES FONCTIONS PERMUTABLES

« Bull. Soc. Mathématique de France », t. LII, 1923; pp. 548–568.

1. Soit une expression [1]

$$\overset{*}{1}{}^{\circ} + F(x, y),$$

où F est une fonction finie et continue de premier ordre ou d'ordre supérieur et $\overset{*}{1}{}^{\circ}$ dénote la puissance de composition zéro de l'unité que l'on peut remplacer par la puissance de composition zéro d'une fonction quelconque de x, y.

Φ étant permutable avec F, on aura

$$\Phi(\overset{*}{1}{}^{\circ} \pm \overset{*}{F}) = \Phi \pm \overset{*}{\Phi}\overset{*}{F}.$$

Si

$$|F| < M \quad , \quad |\Phi| < N \quad , \quad |y - x| \leqq 1,$$

il viendra

$$|\overset{*}{\Phi}(\overset{*}{1}{}^{\circ} + \overset{*}{F})| < N(1 + M).$$

On pourra exprimer cette propriété d'une manière symbolique en écrivant

$$|\overset{*}{1}{}^{\circ} \pm F| < 1 + M.$$

n étant entier et positif, formons

$$(\overset{*}{F}{}^{\circ} \pm \overset{*}{F})^n = \overset{*}{F}{}^{\circ} \pm nF + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}\overset{*}{F}{}^2 \pm \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}\overset{*}{F}{}^3 \cdots + (\pm 1)^n \overset{*}{F}{}^n;$$

on aura de même

$$|(\overset{*}{F}{}^{\circ} \pm \overset{*}{F})^n| < (1 + M)^n.$$

2. Supposons que la série

$$|a_0| + |a_1| R + |a_2| R^2 + \cdots$$

ait pour rayon de convergence l'∞, la fonction

$$\sigma(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots$$

sera une fonction entière.

(1) VOLTERRA et PÉRÈS, *Leçons sur la composition et les fonctions permutables*. Paris, Gauthier-Villars, 1924, Chap. I, § 8. [Vedi anche la Memoria VII in questo vol.: pp. 142-143] (N.d.R.).

Si nous prenons

$$\overset{*}{\Phi} \{ \overset{*}{F}{}^{\circ} + a_1 z (\overset{*}{F}{}^{\circ} \pm \overset{*}{F}) + a_2 z^2 (\overset{*}{F}{}^{\circ} \pm \overset{*}{F})^2 + \cdots \}$$

cette expression sera aussi une fonction entière de z, et nous pourrons dire d'une manière symbolique que

$$\Theta = \overset{*}{F}{}^{\circ} + a_1 z (\overset{*}{F}{}^{\circ} \pm F) + a_2 z^2 (\overset{*}{F}{}^{\circ} \pm \overset{*}{F})^2 + \cdots$$

est une série entière de z; x, y étant quelconques.

La série précédente s'écrira aussi

$$\Theta = \sigma(z) \overset{*}{F}{}^{\circ} + \overset{*}{\Psi}(z \mid F),$$

où $\overset{*}{\Psi}(z \mid F)$ est une fonction de composition de F du même ordre que F ou d'ordre supérieur (2). En outre $\overset{*}{\Psi}(z \mid F)$ pour toute valeur déterminée de z sera finie et continue.

Prenons maintenant, m étant un nombre réel quelconque,

$$\overset{*}{\Theta}{}^{m} = \sigma^m(z) \left[\overset{*}{F}{}^{\circ} + \frac{m_1}{\sigma} \overset{*}{\Psi}(z \mid F) + \frac{m_2}{\sigma^2} \overset{*}{\Psi}{}^2 (z \mid F) + \cdots \right] = \sigma^m(z)\, \Omega_m ,$$

où

$$m_h = \frac{m(m-1)\cdots(m-h+1)}{h!} .$$

Si l'on limite z dans un domaine fini qui ne contient pas de racines de l'équation

$$(1) \qquad \sigma(z) = 0,$$

la série Ω_m sera uniformément convergente (3). Donc Ω_m sera une fonction uniforme de z dont les points singuliers à distance finie ne pourront être que les racines de l'équation (1).

3. Soit $m = -1$ et

$$\sigma(z) = 1 - z.$$

On aura

$$(2) \qquad \frac{\overset{*}{F}{}^{\circ}}{\overset{*}{F}{}^{\circ} + z(\overset{*}{F} - \overset{*}{F}{}^{\circ})} = \frac{1}{1-z}\left[\overset{*}{F}{}^{\circ} - \frac{z}{1-z} \overset{*}{F} + \left(\frac{z}{1-z}\right)^2 \overset{*}{F}{}^2 - \cdots \right].$$

Si $F = 1$,

$$(2') \qquad \frac{\overset{*}{1}{}^{\circ}}{\overset{*}{1}{}^{\circ} + z(\overset{*}{1} - \overset{*}{1}{}^{\circ})} = \frac{1}{1-z}\left[\overset{*}{1}{}^{\circ} - \frac{z}{1-z} + \left(\frac{z}{1-z}\right)^2 (y-x) - \left(\frac{z}{1-z}\right)^3 \frac{(y-x)^2}{1\cdot 2} + \cdots \right]$$

(2) *Ouvrage cité* (Chap. X et Chap. I, § 10). [In questo vol.: VII, p. 127].

(3) *Ouvrage cité* (Chap. II, § 2). [In questo vol: VII, p. 127].

ou, ce qui est équivalent,

$$(2'') \qquad \frac{\overset{*}{1}}{\overset{*}{1}{}^{\circ}+z(\overset{*}{1}-\overset{*}{1}{}^{\circ})}=\frac{1}{1-z}\left[1-\frac{z}{1-z}(y-x)+\left(\frac{z}{1-z}\right)^2\frac{(y-x)^2}{1\cdot 2}-\right.$$

$$\left.-\left(\frac{z}{1-z}\right)^3\frac{(y-x)^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\cdots\right]=\frac{z}{1-z}e^{-\frac{z(y-x)}{1-z}}.$$

C'est une fonction uniforme ayant pour singularité essentielle le point $z=1$.

4. Nous aurons un second exemple en prenant $\sigma(z)=1-z$ et remplaçant m par $m-1$:

$$(3) \qquad [\mathrm{F}^{\circ}+z(\overset{*}{\mathrm{F}}-\overset{*}{\mathrm{F}}{}^{\circ})]^{m-1}=(1-z)^{m-1}\left[\overset{*}{\mathrm{F}}{}^{\circ}+(m-1)\frac{z}{1-z}\mathrm{F}+\frac{(m-1)(m-2)}{1\cdot 2}\left(\frac{z}{1-z}\right)^2\overset{*}{\mathrm{F}}{}^2\cdots\right].$$

Si $\mathrm{F}=1$, on trouvera

$$(3') \qquad \overset{*}{1}\,[\overset{*}{1}{}^{\circ}+z(\overset{*}{1}-\overset{*}{1}{}^{\circ})]^{m-1}=$$

$$=(1-z)^{m-1}\left[1+(m-1)\frac{z}{1-z}y-x+\frac{(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 1\cdot 2}\left(\frac{z}{1-z}\right)^2(y-x)^2+\cdots\right]=$$

$$=(1-z)^{m-1}\,\mathrm{P}_m\,.$$

P_m est une fonction uniforme de z ayant pour singularité le point $z=1$. Posons

$$\frac{z}{1-z}(y-x)=\nu,$$

il sera

$$(\mathrm{A}) \qquad \mathrm{P}_m(\nu)=1+(m-1)\nu+\frac{(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 1\cdot 2}\nu^2+$$

$$+\frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 1\cdot 2\cdot 3}\nu^3+\cdots$$

5. On vérifie facilement la relation

$$(\mathrm{B}) \qquad \frac{d}{d\nu}\left[\nu\left(\frac{d\mathrm{P}_m}{d\nu}+\mathrm{P}_m\right)\right]=m\mathrm{P}_m.$$

Posons

$$(4) \qquad \mathrm{P}_m(\nu)=e^{-\nu}\,p_{1-m}(-\nu),$$

d'où

$$(5) \qquad \mathrm{P}'_m(\nu)=-e^{-\nu}\,[p'_{1-m}(-\nu)+p_{1-m}(-\nu)]\,.$$

Remplaçant P_m par l'expression (4) dans l'équation (B) on trouve

$$\frac{d}{d\nu}\left\{\nu\left[\frac{dp_{1-m}(\nu)}{d\nu}+p_{1-m}(\nu)\right]\right\}=(1-m)\,p_{1-m}(\nu),$$

c'est-à-dire que $p_{1-m}(\nu)$ et $\mathrm{P}_{1-m}(\nu)$ satisfont la même équation différentielle.

Mais

$$p_{1-m}(0) = P_{1-m}(0) = 1 \quad ; \quad p'_{1-m}(0) = P'_{1-m}(0) = -m,$$

donc

$$p_{1-m}(\nu) = P_{1-m}(\nu).$$

Les équations (4) et (5) deviennent donc

(C)
$$P_m(\nu) = e^{-\nu} P_{1-m}(-\nu) =$$
$$= e^{-\nu}\left[1 + m\nu + \frac{m(m+1)}{1\cdot 2\cdot 1\cdot 2}\nu^2 + \frac{m(m+1)(m+2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 1\cdot 2\cdot 3}\nu^3 + \cdots\right],$$

(6)
$$P'_m(\nu) = -e^{-\nu}\left[P'_{1-m}(-\nu) + P_{1-m}(-\nu)\right].$$

Supposons $1 > m > 0$, $1 > \nu > 0$; on voit immédiatement que $P_m(\nu)$ est positive et décroît lorsque ν croît. Par suite:

(7)
$$1 > P_m(\nu) > 0.$$

Mais remarquons que

$$P_{1-m}(-\nu) = 1 + \sum_1^n {}_h \frac{m(m+1)\cdots(m+h-1)}{(h!)^2}\nu^h +$$
$$+ \frac{m(m+1)\cdots(m+n-1)}{n!}\sum_{n+1}^{\infty}{}_k \frac{(m+n)\cdots(m+k-1)}{(n+1)(n+2)\cdots k}\frac{\nu^k}{k!} < 1 +$$
$$+ \sum_1^n {}_h \frac{m(m+1)\cdots(m+h-1)}{(h!)^2}\nu^h + \frac{m(m+1)\cdots(m+n-1)}{n!}\left[e^{\nu} - \sum_1^n {}_k \frac{\nu^k}{k!}\right].$$

Par suite:

$$P_m(\nu) = e^{-\nu} P_{1-m}(-\nu) < \frac{m(m+1)\cdots(m+n-1)}{n!} + Q_n(\nu)e^{-\nu},$$

où $Q_n(\nu)$ est un polynome de degré n rationnel et entier. Or en prenant n suffisamment grand on pourra réduire

$$\frac{m(m+1)\cdots(m+n-1)}{n!} < \frac{\varepsilon}{2},$$

ε étant une quantité positive quelconque.

Cela posé, on pourra prendre ν suffisamment grand de manière que

$$Q_n(\nu)e^{-\nu} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Par suite il sera

(8)
$$P_m(\nu) < \varepsilon.$$

Donc (9)

(9)
$$\lim_{\nu=+\infty} P_m(\nu) = 0.$$

On déduit des formules (6) et (B)

$$P'_m(\nu) = -e^{-\nu}(1-m)\left[1 + \frac{m}{1\cdot 2}\nu + \frac{m(m+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 1\cdot 2}\nu^2 + \cdots\right],$$

d'où

$$|\nu P'_m(\nu)| = e^{-\nu}(1-m)\left[\nu + \frac{m}{1\cdot 2}\nu^2 + \frac{m(m+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 1\cdot 2}\nu^3 + \cdots\right] <$$
$$< e^{-\nu}(1-m)(e^{\nu}-1) < 1-m.$$

Donc $P'_m(\nu)$ est fini et pour $\nu = +\infty$ il est infiniment petit d'un ordre non inférieur au premier.

Mais, par un procédé analogue à celui par lequel nous avons démontré la relation (9), on pourrait prouver que

$$\lim_{\nu=+\infty} [\nu P'_m(\nu)] = 0 \tag{10}$$

et par suite $P'_m(\nu)$ est infiniment petit d'ordre supérieur à $1/\nu$ pour $\nu = \infty$.

6. Les séries précédentes peuvent être employées de plusieurs manières. Je me suis déjà servi de la formule (2) pour calculer $\overset{*}{F} \overset{*}{l} F$ (4).

Tâchons maintenant d'employer la formule (3) pour un autre but.

Il est connu que certaines questions que l'on sait traiter lorsqu'on envisage des fonctions de premier ordre ou même de second ordre n'ont pas encore été résolues pour des fonctions d'ordre supérieur.

C'est ainsi, par exemple, que l'on sait trouver toutes les fonctions permutables avec une fonction de premier ordre ou de second ordre (5); mais si l'on pose le même problème pour les fonctions de troisième ordre ou d'ordre supérieur, on ne sait pas le résoudre, excepté dans le cas des fonctions analytiques.

Or si, étant donnée une fonction d'un certain ordre entier et positif n, il était possible de calculer sa racine $n^{\text{ième}}$ de composition (6), on saurait calculer le groupe des fonctions permutables avec celle-ci et par suite on aurait un groupe de fonctions permutables avec la fonction donnée.

Nous allons montrer dans les paragraphes suivants une voie qui peut conduire à la détermination des racines $n^{\text{ièmes}}$ de fonctions données.

7. Il est évident que

$$\frac{d}{dz}[\overset{*}{F}{}^{\circ} + z(\overset{*}{F} - \overset{*}{F}{}^{\circ})]^m = m(\overset{*}{F} - \overset{*}{F}{}^{\circ})[\overset{*}{F}{}^{\circ} + z(\overset{*}{F} - \overset{*}{F}{}^{\circ})]^{m-1};$$

c'est pourquoi, m étant positif, et z étant réel et $1 > z \geqq 0$,

$$[\overset{*}{F}{}^{\circ} + z(\overset{*}{F} - \overset{*}{F}{}^{\circ})]^m - \overset{*}{F}{}^{\circ} = m\int_0^z (\overset{*}{F} - \overset{*}{F}{}^{\circ})[\overset{*}{F}{}^{\circ} + z(\overset{*}{F} - \overset{*}{F}{}^{\circ})]^{m-1}\,dz =$$

$$= m\int_0^z (\overset{*}{F} - \overset{*}{F}{}^{\circ})(1-z)^{m-1}\Big[\overset{*}{F}{}^{\circ} + (m-1)\frac{z}{1-z}\overset{*}{F} +$$

$$+ \frac{(m-1)(m-2)}{1\cdot 2}\left(\frac{z}{1-z}\right)^2 \overset{*}{F}{}^2 + \cdots\Big]\,dz =$$

(4) *Loc. cit.*, Chap. X, § 21 [In questo vol.: VII, p. 196]. M. PÉRÈS s'est aussi servi d'un procédé analogue dans le cas d'une équation intégrale de première espèce. On pourrait la tirer comme cas particulier des formules que je donne dans ce Mémoire (Cf. PÉRÈS, *Sur les transformations qui conservent la composition*, « Bulletin de la Société math. », t. XLVII, § 10-11).

(5) *Loc. cit.*, Chap. III. [In queste « Opere »: vol. terzo, XXVI, p. 331 e XXIX, p. 366].

(6) *Loc. cit.*, Chap. V.

$$= -m\int_0^z (1-z)^{m-1}\,dz\,\overset{*}{F}{}^0 + m\int_0^z (1-z)^{m-1} \times$$

$$\times\left\{\left[F + (m-1)\frac{z}{1-z}\overset{*}{F}{}^2 + \frac{(m-1)(m-2)}{1\cdot 2}\left(\frac{z}{1-z}\right)^2\overset{*}{F}{}^3 + \cdots\right] -\right.$$

$$\left.-\left[(m-1)\frac{z}{1-z}F + \frac{(m-1)(m-2)}{1\cdot 2}\left(\frac{z}{1-z}\right)^2\overset{*}{F}{}^2 + \cdots\right]\right\}dz,$$

et, puisque

$$m\int_0^z (1-z)^{m-1}\,dz\,\overset{*}{F}{}^0 = \overset{*}{F}{}^0 - (1-z)^m\,\overset{*}{F}{}^0,$$

il sera

$$\text{(I)}\qquad [\overset{*}{F}{}^0 + z(\overset{*}{F} - \overset{*}{F}{}^0)]^m = m\int_0^z (1-z)^{m-1} \times$$

$$\times\left\{\left[F + (m-1)\frac{z}{1-z}F^2 + \frac{(m-1)(m-2)}{1\cdot 2}\left(\frac{z}{1-z}\right)^2\overset{*}{F}{}^3 + \cdots\right] -\right.$$

$$\left.-\left[(m-1)\frac{z}{1-z}F + \frac{(m-1)(m-2)}{1\cdot 2}\left(\frac{z}{1-z}\right)^2\overset{*}{F}{}^2 + \cdots\right]\right\}dz + (1-z)^m\,\overset{*}{F}{}^0,$$

d'où l'on tire (au moins formellement), en faisant $z = 1$,

$$\text{(II)}\qquad \overset{*}{F}{}^m = m\int_0^1 (1-z)^{m-1} \times$$

$$\times\left\{\left[F + (m-1)\frac{z}{1-z}F^2 + \frac{(m-1)(m-2)}{1\cdot 2}\left(\frac{z}{1-z}\right)^2\overset{*}{F}{}^3 + \cdots\right] -\right.$$

$$\left.-\left[(m-1)\frac{z}{1-z}F + \frac{(m-1)(m-2)}{1\cdot 2}\left(\frac{z}{1-z}\right)^2\overset{*}{F}{}^2 + \cdots\right]\right\}dz.$$

8. Les séries qui apparaissent dans l'intégrale du second membre sont uniformément convergentes si

$$(a)\qquad 0 \leqq z < 1 - \varepsilon \quad , \quad a \leqq x \leqq y \leqq b,$$

a et b étant les limites entre lesquelles peuvent varier x et y, et ε est une quantité aussi petite que l'on veut.

On pourra écrire l'intégrale qui apparaît dans le second membre de la formule (I) sous la forme

$$(6)\qquad \varphi(z\,|\,x, y) = m\int_0^z (1-z)^{m-1}\,\Phi(z\,|\,x, y)\,dz,$$

où $\varphi(z\,|\,x, y)$ est une fonction finie et continue, et l'on aura

$$[\overset{*}{F}{}^0 + z(\overset{*}{F} - \overset{*}{F}{}^0)]^m = (1-z)^m\,\overset{*}{F}{}^0 + \varphi(z\,|\,x, y).$$

Soit $m = (p/q)$, cette fraction rationnelle étant réduite à sa plus simple expression.

Il sera

$$(\mathrm{I}_a) \qquad [\overset{*}{\mathrm{F}}{}^{\circ} + z(\overset{*}{\mathrm{F}} - \overset{*}{\mathrm{F}}{}^{\circ})]^{p} = [(1-z)^{p/q}\,\overset{*}{\mathrm{F}}{}^{\circ} + \varphi(z \mid x, y)]^{q},$$

d'où l'on tire

$$(\mathrm{I}_b) \qquad p(1-z)^{p-1}\,\mathrm{F} + \frac{p(p-1)}{1\cdot 2}\,z(1-z)^{p-2}\,\overset{*}{\mathrm{F}}{}^{2} + \cdots + z^{p}\,\overset{*}{\mathrm{F}}{}^{p} =$$

$$= q(1-z)^{\frac{p(q-1)}{q}}\,\varphi + \frac{q(q-1)}{1\cdot 2}(1-z)^{\frac{p(q-2)}{q}}\,\overset{*}{\varphi}{}^{2} + \cdots + \overset{*}{\varphi}{}^{q}(z \mid x, y).$$

Supposons maintenant que

$$(b) \qquad m\int_0^1 (1-z)^{m-1}\,\Phi(z \mid x, y)\,dz$$

soit convergente. Il représentera une fonction

$$\varphi(x, y)$$

et l'on aura

$$(c) \qquad \varphi(x, y) = \lim_{z=1} \varphi(z \mid x, y).$$

Or il serait suffisant que l'intégrale (b) fût uniformément convergente, c'est-à-dire que la limite (c) eût lieu uniformément pour toutes les valeurs de x, y qui satisfont aux relations (a) pour déduire de la relation (c) que toutes les puissances entières de composition de $\varphi(z \mid x, y)$ tendent pour $z = 1$ vers les puissances de composition de $\varphi(x, y)$ ayant le même exposant.

En général cette convergence uniforme ne subsiste pas, mais elle n'est pas nécessaire pour la vérification de la propriété précédente. Il suffit par exemple que l'intégrale (b) converge uniformément pour

$$a \leqq x < y - \eta \leqq b - \eta,$$

η étant une quantité arbitraire, et que

$$|\varphi(z \mid x, y)|$$

soit inférieure à une quantité finie M ou même à $\mathrm{M}/(y-x)^{h}$, h étant < 1.

9. Nous dirons que *l'intégrale* (b) *et ses puissances entières sont convergentes régulièrement* lorsque $\varphi(z \mid x, y)$ et ses puissances entières tendent, pour $z = 1$, vers $\varphi(x, y)$ et les puissances de $\varphi(x, y)$ ayant le même exposant.

Supposons que cette condition soit satisfaite, et revenons à l'équation (I_b). Lorsque z tend vers 1, on aura

$$\overset{*}{\mathrm{F}}{}^{p} = \lim_{z=1} \overset{*}{\varphi}{}^{q}(z \mid x, y) = \overset{*}{\varphi}{}^{q}(x, y).$$

Donc

$$\varphi(x, y) = \overset{*}{\mathrm{F}}{}^{p/q}.$$

On pourra étendre, sous certaines conditions, ce résultat au cas où p/q tend vers un nombre irrationnel (7).

Mais arrêtons-nous au cas de m rationnel.

Si l'intégrale (b) et ses puissances entières sont *convergentes régulièrement* la formule (II) sera valable.

De même si *a priori* on sait que $\overset{*}{\mathrm{F}}{}^m$ existe et que

$$\overset{*}{\mathrm{F}}{}^m = \lim_{z=1} \{ [\overset{*}{\mathrm{F}}{}^0 + z(\overset{*}{\mathrm{F}} - \overset{*}{\mathrm{F}}{}^0)]^{p/q} - (1-z)^{p/q}\, \overset{*}{\mathrm{F}}{}^0 \},$$

la limite de $\varphi(z \mid x, y)$ existera et elle donnera l'expression de $\overset{*}{\mathrm{F}}{}^m$ par la formule (II).

Mais dans beaucoup de cas il suffira de vérifier que l'intégrale (II) est convergente.

On calculera alors $\varphi(x, y)$ et l'on tâchera de vérifier *a posteriori* que sa puissance $m^{\text{ième}}$ reproduit F. C'est ce que nous verrons dans les exemples suivants.

Dans tous les cas où la formule (II) sera valable, si F est d'ordre entier et positif n on pourra calculer en se servant de cette formule la racine $n^{\text{ième}}$ de F en prenant

$$m = \frac{1}{n}$$

et, par suite, on aura résolu le problème posé dans le paragraphe 6.

10. Montrons dans deux cas particuliers que l'intégrale (II) est convergente et retrouvons ainsi des résultats connus.

Posons d'abord

$$\mathrm{F} = 1 \quad , \quad 1 > m > 0 \quad , \quad u = y - x > 0$$

et la formule (II) deviendra

$$\text{(II')} \qquad \overset{*}{1}{}^m = m \int_0^1 (1-z)^{m-1} \times \Bigg\{ \Bigg[1 + (m-1) \frac{z}{1-z} \overset{*}{1}{}^2 + \frac{(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2} \left(\frac{z}{1-z}\right)^2 \overset{*}{1}{}^3 + \cdots \Bigg] - \Bigg[(m-1) \frac{z}{1-z} + \frac{(m-1)(m-2)}{1 \cdot z} \left(\frac{z}{1-z}\right)^2 \overset{*}{1}{}^2 + \cdots \Bigg] \Bigg\} dz,$$

d'où [*voir* formule (A)]

$$\text{(II'')} \qquad \overset{*}{1}{}^m = m \int_0^1 (1-z)^{m-1} \left\{ \mathrm{P}_m(\nu) - \frac{z}{1-z} \mathrm{P}'_m(\nu) \right\} dz.$$

(7) *Loc. cit.*, Chap. V, § 7. [In questo vol.: VII, p. 140].

Or si $u > 0$ cette intégrale est convergente parce que $P_m(\nu)$ est fini et [*voir* formule (10)]

$$\left|\frac{z}{1-z} P'_m(\nu)\right| = \left|\frac{1}{u} \nu P'_m(\nu)\right| < \frac{1-m}{u}.$$

Donc, d'après ce que nous avons dit dans le paragraphe 7, tâchons d'employer l'égalité (II″) pour calculer $\overset{*}{1}{}^m$.

11. Pour sommer les séries et calculer les intégrales, posons

$$f(u) = \int_0^1 (1-z)^{m-1} P_m(\nu)\, dz. \tag{11}$$

On aura

$$f'(u) = \int_0^1 (1-z)^{m-1} \frac{z}{1-z} P'_m(\nu)\, dz. \tag{12}$$

Donc

$$\overset{*}{1}{}^m = m\,[f(u) - f'(u)]. \tag{II‴}$$

L'équation (12) s'écrit:

$$f'(u) = \int_0^1 (1-z)^{m-2} P'_m(\nu)\, dz - \int_0^1 (1-z)^{m-1} P'_m(\nu)\, dz,$$

par suite

$$uf'(u) = \int_0^1 (1-z)^m \frac{d}{dz} P_m(\nu)\, dz - u\int_0^1 (1-z)^{m-1} P'_m(\nu)\, dz.$$

En intégrant par parties la première intégrale on trouve

$$uf'(u) = -1 + m\int_0^1 (1-z)^{m-1} P_m(\nu)\, dz - u\int_0^1 (1-z)^{m-1} P'_m(\nu)\, dz,$$

d'où

$$u\,[f(u) - f'(u)] = 1 - mf(u) + u\int_0^1 (1-z)^{m-1} [P'_m(\nu) + P_m(\nu)]\, dz,$$

et en dérivant par rapport à u

$$\frac{d}{du}\{u\,[f(u) - f'(u)\} = -mf'(u) + \int_0^1 (1-z)^{m-1} \frac{d}{du}\{u[P'_m(\nu) + P_m(\nu)]\}\, dz =$$

$$= -mf'(u) + \int_0^1 (1-z)^{m-1} \frac{d}{d\nu}\{\nu\,[P'_m(\nu) + P_m(\nu)]\}\, dz.$$

Tenons compte maintenant de l'équation (B).

On aura

$$\frac{d}{du}\{u[f(u)-f'(u)]\} = -mf'(u) + \int_0^1 (1-z)^{m-1}\, m P_m(\nu)\, dz =$$

$$= m[f(u)-f'(u)].$$

Cette équation peut s'écrire

$$\frac{\frac{d}{du}\{u[f(u)-f'(u)]\}}{u[f(u)-f'(u)]} = \frac{m}{u}. \tag{13}$$

En l'intégrant on trouve, en vertu de l'équation (II''),

$$\overset{*}{1}{}^m = m[f(u)-f'(u)] = m C u^{m-1}, \tag{14}$$

C étant une quantité constante.

12. Pour calculer la constante C, remarquons que l'on tire de l'équation précédente

$$f(u) = C_1 e^u - C e^u \int_0^u e^{-\xi} \xi^{m-1} d\xi.$$

Si nous faisons dans la formule (11) $u = 0$ nous obtenons

$$f(0) = \int_0^1 (1-z)^{m-1} dz = \frac{1}{m};$$

donc

$$C_1 = \frac{1}{m}$$

et

$$f(u) = e^u \left\{ \frac{1}{m} - C \int_1^0 e^{-\xi} \xi^{m-1} d\xi \right\}. \tag{15}$$

Or [formule (11)],

$$f(u) = \int_0^\alpha (1-z)^{m-1} P_m(\nu)\, dz + \int_\alpha^1 (1-z)^{m-1} P_m(\nu)\, dz,$$

α étant un nombre compris entre 0 et 1.

Par suite, en vertu de l'équation (7),

$$f(u) < \frac{1}{m}[1-(1-\alpha)^m] + \int_\alpha^1 (1-z)^{m-1} P_m(\nu)\, dz.$$

En prenant α suffisamment petit on pourra rendre le premier terme aussi petit que l'on veut. α étant fixé, en augmentant u on pourra rendre aussi petit que l'on veut le second terme à cause de (9). Nous aurons donc

$$\lim_{u=\infty} f(u) = 0$$

et en vertu de (15)

$$\frac{1}{m} - C\int_0^\infty e^{-\xi}\xi^{m-1}\,d\xi = 0\,.$$

On tire de là

$$m\,C = \frac{1}{\int_0^\infty e^{-\xi}\xi^{m-1}\,d\xi} = \frac{1}{\Gamma(m)}\,.$$

L'équation (14) devient finalement

$$\text{(III)}\qquad \overset{*}{1}{}^{m} = \frac{u^{m-1}}{\Gamma(m)}\ ^{(8)}.$$

13. Passons au second exemple. C'est pourquoi revenons à la formule (II) et posons-y

$$F = (y - x)\quad,\quad m = \frac{1}{2}\quad,\quad y - x = u\,.$$

La formule (II) s'écrira

$$(16)\qquad (y \overset{*}{-} x)^{1/2} = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{(1-z)^{1/2}}\,\times$$

$$\times\left\{\left[u - \frac{1}{2}\left(\frac{z}{1-z}\right)\frac{u^3}{3!} + \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}}{2!}\left(\frac{z}{1-z}\right)^2\frac{u^5}{5!} + \cdots +\right.\right.$$

$$\left. + (-1)^h\,\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdots\frac{(2h-1)}{2}}{h!}\left(\frac{z}{1-z}\right)^h\frac{u^{2h+1}}{(2h+1)!} + \cdots\right] -$$

$$-\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{z}{1-z}\right)u + \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}}{2!}\left(\frac{z}{1-z}\right)^2\frac{u^3}{3!} + \cdots +\right.$$

$$\left.\left. + (-1)^h\,\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdots\frac{(2h-1)}{2}}{h!}\left(\frac{z}{1-z}\right)^h\frac{u^{2h-1}}{(2h-1)!} + \cdots\right]\right\}dz\,.$$

Nous verrons que les intégrales sont convergentes.

Soit

$$\mathfrak{M}(u\,,z) = u - \frac{1}{2}\left(\frac{z}{1-z}\right)\frac{u^3}{3!} + \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}}{2!}\left(\frac{z}{1-z}\right)^2\frac{u^5}{5!} + \cdots +$$

$$+ (-1)^h\,\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdots\frac{2h-1}{2}}{h!}\left(\frac{z}{1-z}\right)^h\frac{u^{2h+1}}{(2h+1)!} + \cdots,$$

(8) *Loc. cit.*, Chap. I, § 9. [In questo vol.: VII, p. 140].

l'équation précédente deviendra

$$(16') \qquad (y \overset{*}{-} x)^{1/2} = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{(1-z)^{1/2}}\left[\mathfrak{M}(u,z) - \frac{\partial^2 \mathfrak{M}(u,z)}{\partial u^2}\right] dz.$$

Or,

$$\frac{\partial \mathfrak{M}(u,z)}{\partial u} = 1 - \frac{1}{2^2}\left(\frac{z}{1-z}\right)u^2 + \frac{1}{2^4}\left(\frac{z}{1-z}\right)^2 \frac{u^4}{(2!)^2} + \cdots +$$

$$+ (-1)^h \frac{1}{2^{2h}}\left(\frac{z}{1-z}\right)^h \frac{u^{2h}}{(h!)^2} + \cdots$$

et, en posant

$$(17) \qquad u\sqrt{\frac{z}{1-z}} = \nu,$$

on aura

$$(\mathrm{D}) \qquad \frac{\partial \mathfrak{M}(u,z)}{\partial u} = 1 - \left(\frac{\nu}{2}\right)^2 + \frac{1}{(2!)^2}\left(\frac{\nu}{2}\right)^4 - \cdots + \frac{(-1)^h}{(h!)^2}\left(\frac{\nu}{2}\right)^{2h} + \cdots = J_0(\nu),$$

qui est la fonction de BESSEL d'ordre zéro (9).

De l'équation (7) on tire

$$(17') \qquad \frac{\partial \nu}{\partial u} = \sqrt{\frac{z}{1-z}}.$$

Donc

$$\frac{\partial}{\partial u}\left[\sqrt{\frac{1-z}{z}}\int_0^\nu J_0(\nu)\,d\nu\right] = \sqrt{\frac{1-z}{z}}\,J_0(\nu)\frac{\partial \nu}{\partial u} = J_0(\nu),$$

d'où l'on déduit

$$\mathfrak{M}(u,z) = \sqrt{\frac{1-z}{z}}\int_0^\nu J_0(\nu)\,d\nu$$

et la formule (16') deviendra

$$(16'') \qquad (y \overset{*}{-} x)^{1/2} = \frac{1}{2}\int_0^1 \left[\frac{1}{\sqrt{z}}\int_0^\nu J_0(\nu)\,d\nu - \frac{1}{\sqrt{1-z}}\frac{\partial J_0(\nu)}{\partial u}\right] dz.$$

Mais à cause de (17')

$$\frac{\partial J_0(\nu)}{\partial u} = J_0'(\nu)\sqrt{\frac{z}{1-z}} = \frac{\nu}{u} J_0'(\nu).$$

L'équation (16'') s'écrit donc

$$(y \overset{*}{-} x)^{1/2} = \frac{1}{2}\int_0^1 \left[\frac{1}{\sqrt{z}}\int_0^\nu J_0(\nu)\,d\nu - \frac{1}{\sqrt{1-z}}\,\frac{\nu}{u}\,J_0'(\nu)\right] dz.$$

(9) TODHUNTER, *An elem. Treat. on Laplace's functions, Lamé's functions, Bessel's functions*, p. 284.

En appliquant aux deux termes du second membre des intégrations par parties il viendra

$$(y \overset{*}{-} x)^{1/2} = \left[\sqrt{z}\int_0^{\nu} J_0(\nu)\,d\nu\right]_{z=0}^{z=1} + \left[\sqrt{1-z}\,\frac{\nu}{u}\,J_0'(\nu)\right]_{z=0}^{z=1} -$$

$$-\int_0^1 \left[\sqrt{z}\,\frac{d}{dz}\int_0^{\nu} J_0(\nu)\,d\nu + \frac{\sqrt{1-z}}{u}\,\frac{d}{dz}[\nu J_0'(\nu)]\right] dz.$$

Or,

$$\left[\sqrt{z}\int_0^{\nu} J_0(\nu)\,d\nu\right]_{z=0}^{z=1} = \int_0^{\infty} J_0(\nu)\,d\nu = 1 \ ^{(10)}$$

$$\left[\sqrt{1-z}\,\frac{\nu}{u}\,J_0'(\nu)\right]_{z=0}^{z=1} = [\sqrt{z}\,J_0'(\nu)]_{z=0}^{z=1} = 0 \ ^{(11)},$$

c'est pourquoi, étant $\dfrac{\sqrt{1-z}}{u} = \dfrac{\sqrt{z}}{\nu}$,

$$(y \overset{*}{-} x)^{1/2} = 1 - \int_0^1 \sqrt{z}\left[\frac{d}{dz}\int_0^{\nu} J_0(\nu)\,d\nu + \frac{1}{\nu}\,\frac{d}{dz}[\nu J_0'(\nu)]\right] dz.$$

Mais

$$\frac{d}{dz}\cdot dz = \frac{d}{d\nu}\cdot d\nu,$$

donc, puisque pour $z = 1$ on a $\nu = \infty$,

$$(y \overset{*}{-} x)^{1/2} = 1 - \int_0^{\infty} \sqrt{z}\left[\frac{d}{d\nu}\int_0^{\nu} J_0(\nu)\,d\nu + \frac{1}{\nu}\,\frac{d}{d\nu}[\nu J_0'(\nu)]\right] d\nu =$$

$$= 1 - \int_0^{\infty} \sqrt{z}\left[J_0(\nu) + \frac{1}{\nu}\,\frac{d}{d\nu}[\nu J_0'(\nu)]\right] d\nu.$$

En rappelant que la fonction de BESSEL J_0 vérifie l'équation différentielle [12]

(E) $$J_0(\nu) + \frac{1}{\nu}\,\frac{d}{d\nu}[\nu J_0'(\nu)] = 0,$$

on aura finalement

$$(y \overset{*}{-} x)^{1/2} = 1 \ ^{(13)},$$

ce qui prouve en même temps la convergence des intégrales de la formule (16).

(10) TODHUNTER, *An elem. Treat. on Laplace's functions, Lamé's functions, Bessel's functions*, p. 361.
(11) *Ibid.*, Chap. XXXIII.
(12) *Ibid.*, p. 284.
(13) VOLTERRA et PÉRÈS, *Ouvrage cité*, p. 10. [In questo vol.: VII, p. 140].

14. Il est intéressant, dans le cas précédemment considéré, de voir le résultat auquel on est conduit directement par la formule (3).

Si dans cette formule nous prenons $m = 3/2$, $F = (y - x)$, elle devient, par un calcul très simple,

$$\{ \overset{*}{1}{}^{\circ} + z [(y \overset{*}{-} x) - \overset{*}{1}{}^{\circ}] \}^{1/2} =$$

$$= (1 - z)^{1/2} \overset{*}{1}{}^{\circ} + \sqrt{z} \left[\sum_1^\infty {}_h (-1)^{h-1} \frac{1}{2^{2(h-1)} [(h-1)!]^2} \frac{\nu^{2h-1}}{(2h-1)2h} \right],$$

où l'on a posé $\nu = \sqrt{\frac{z}{1-z}}\, u$ [*voir* formule (17)].

Or [*voir* (D)]

$$\frac{1}{v} \int_0^\nu d\eta \int_0^\eta J_0(\xi)\, d\xi = \sum_1^\infty {}_h (-1)^{h-1} \frac{1}{2^{2(h-1)} [(h-1)!]^2} \frac{\nu^{2h-1}}{(2h-1)2h},$$

donc la formule précédente s'écrira

$$\{ \overset{*}{1}{}^{\circ} + z [(y \overset{*}{-} x) - \overset{*}{1}{}^{\circ}] \}^{1/2} = (1 - z)^{1/2} \overset{*}{1}{}^{\circ} + \frac{\sqrt{z}}{\nu} \int_0^\nu d\eta \int_0^\eta J_0(\xi)\, d\xi;$$

à la limite, pour $z = 1$, $\nu = \infty$, on trouvera

$$(y \overset{*}{-} x)^{1/2} = \lim_{\nu=\infty} \frac{1}{\nu} \int_0^\nu d\eta \int_0^\eta J_0(\xi)\, d\xi = \int_0^\infty J_0(\xi)\, d\xi = 1.$$

15. On peut étendre ce résultat à l'opération générale d'extraction de la racine carrée de composition d'une fonction de second ordre.

Soit F de second ordre, alors

$$F = (y - x) f_0(x, y) = u f_0(x, u),$$

où $f_0(x, y)$ est une fonction de premier ordre, et

$$\overset{*}{F}{}^h = \frac{u^{2h-1}}{(2h-1)!} f_{h-1}(x, y),$$

où f_{h-1} est une fonction de premier ordre qu'on calcule très facilement [14].

Si dans la formule (3) nous prenons $m = 3/2$ elle s'écrira

$$[\overset{*}{1}{}^{\circ} + z (\overset{*}{F} - \overset{*}{1}{}^{\circ})]^{1/2} = (1 - z)^{1/2} \overset{*}{1}{}^{\circ} +$$

$$+ z^{1/2} \sum_1^\infty {}_h (-1)^{h-1} \frac{1}{2^{2(h-1)} [(h-1)!]^2} \frac{\nu^{2h-1}}{(2h-1)2h} f_{h-1},$$

où $\nu = \sqrt{\frac{z}{1-z}}\, u$ [*voir* (17)].

(14) VOLTERRA et PÉRÈS, *Ouvrage cité*, Chap. I, § 11.

Posons

$$\text{(D')}\qquad J(\nu \mid x, y) = \sum_0^\infty {}_h (-1)^h \frac{\nu^{2h}}{2^{2h}(h!)^2} f_h(x, y)$$

et regardons ν, x, y comme des variables indépendantes. On voit immédiatement que

$$\frac{1}{\nu}\int_0^\nu d\eta \int_0^\eta d\xi \, J(\xi \mid x, y) = \sum_1^\infty {}_h (-1)^{h-1} \frac{1}{2^{2(h-1)}[(h-1)!]^2} \frac{\nu^{2h-1}}{(2h-1)2h} f_{h-1};$$

donc

$$[\overset{*}{1}{}^\circ + z(\overset{*}{F} - \overset{*}{1}{}^\circ)]^{1/2} = (1-z)^{1/2}\,\overset{*}{1}{}^\circ + \frac{\sqrt{z}}{\nu}\int_0^\nu d\eta \int_0^\eta J(\xi \mid x, y)\, d\xi.$$

À la limite,

$$\overset{*}{F}{}^{1/2} = \lim_{\nu=\infty} \frac{1}{\nu}\int_0^\nu d\eta \int_0^\eta J(\xi \mid x, y)\, d\xi.$$

Si l'intégrale

$$\int_0^\infty J(\xi \mid ,x y)\, d\xi$$

est convergente, il viendra

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{1}{\nu}\int_0^\nu d\eta \int_0^\eta J(\xi \mid x, y)\, d\xi = \int_0^\infty J(\xi \mid x, y)\, d\xi;$$

on pourra donc énoncer le résultat suivant:

Si

$$F^h = \frac{(y-x)^{2h-1}}{(2h-1)!} f_{h-1}(x, y),$$

F *étant d'ordre supérieur au premier, on aura*

$$\text{(IV)}\qquad F^{1/2} = \int_0^\infty J(\xi \mid x, y)\, d\xi,$$

où

$$\text{(V)}\qquad J(\xi \mid x, y) = \sum_0^\infty {}_h (-1)^h \frac{\left(\frac{\xi}{2}\right)^{2h}}{(h!)^2} f_h(x, y),$$

lorsque d'une manière quelconque on pourra s'assurer (§ 7) *que* $\overset{*}{F}{}^{1/2}$ *existe et que*

$$\lim_{z=1} \{[\overset{*}{1}{}^\circ + z(\overset{*}{F} - \overset{*}{1}{}^\circ)]^{1/2} - (1-z)^{1/2}\, 1^\circ\} = \overset{*}{F}{}^{1/2}.$$

Il est évident que la formule (IV) est valable dans le cas où $f_0(x, y)$ serait de second ordre ou d'ordre supérieur. Alors les fonctions $f_h(x, y)$ seraient aussi d'ordre supérieur.

16. On peut obtenir le même résultat en employant la formule (II). Remarquons en effet qu'en posant

$$(\mathrm{D}'_1) \qquad \bar{\mathrm{J}}(\xi \mid x, y) = \sum_0^\infty (-1)^h \frac{\left(\frac{\xi}{2}\right)^{2h}}{(h!)^2} f_{h-1}(x, y),$$

où $f_{-1}(x, y)$ est une fonction arbitraire, on a

$$(\mathrm{E}') \qquad \frac{d}{d\xi}\left(\xi \frac{d\bar{\mathrm{J}}}{d\xi}\right) + \xi \bar{\mathrm{J}} = 0,$$

d'où l'on tire

$$\frac{d\bar{\mathrm{J}}}{d\xi} = -\frac{1}{\xi}\int_0^\xi \xi \mathrm{J}(\xi)\, d\xi = -\int_0^\xi \mathrm{J}(\xi)\, d\xi + \frac{1}{\xi}\int_0^\xi d\eta \int_0^\eta \mathrm{J}(\xi)\, d\xi,$$

c'est pourquoi si l'intégrale (IV) est convergente

$$(18) \qquad \lim_{\xi=\infty} \frac{d\bar{\mathrm{J}}}{d\xi} = -\int_0^\infty \mathrm{J}(\xi)\, d\xi + \int_0^\infty \mathrm{J}(\zeta)\, d\zeta = 0.$$

Soit

$$\mathfrak{M}(u, z \mid x, y) = \sum_0^\infty {}_h (-1)^h \frac{1}{2^{2h}(h!)^2}\left(\frac{z}{1-z}\right)^h \frac{u^{2h+1}}{2h+1} f_h,$$

$$\overline{\mathfrak{M}}(u, z \mid x, y) = \sum_0^\infty {}_h (-1)^h \frac{1}{2^{2h}(h!)^2}\left(\frac{z}{1-z}\right)^h \frac{u^{2h+1}}{2h+1} f_{h-1},$$

la formule (II) deviendra, en prenant $m = 1/2$,

$$\overset{*}{\mathrm{F}}{}^{1/2} = \frac{1}{2}\int_0^1 (1-z)^{1/2}\left[\mathfrak{M} - \frac{\partial^2 \overline{\mathfrak{M}}}{\partial u^2}\right] dz$$

et en observant que

$$\frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial u} = \mathrm{J}(\nu \mid x, y) \quad , \quad \frac{\partial \overline{\mathfrak{M}}}{\partial u} = \bar{\mathrm{J}}(\nu \mid x, y)$$

on arrivera par des calculs analogues à ceux du paragraphe 11 et en tenant compte des égalités (E') et (18) à la formule (IV).

17. Il est très facile de généraliser les résultats précédents à l'extraction de la racine $n^{\text{ième}}$ de composition d'une fonction d'ordre n.

Soit

$$\mathrm{F} = (y - x)^{n-1} f_0(x, y) = u^{n-1} f_0(x, y),$$

où $f_0(x, y)$ est une fonction finie et continue.

On aura

$$\overset{*}{\mathrm{F}}{}^h = \frac{u^{nh-1}}{(nh-1)!} f_{h-1},$$

où f_{h-1} est finie et continue.

En employant la formule (3) où l'on remplace m par $(1/n)+1$ on aura

$$(19)\qquad [\overset{*}{\mathrm{F}} + z(\overset{*}{\mathrm{F}} - \overset{*}{\mathrm{F}}{}^{\circ})]^{1/n} - (1-z)^{1/n}\,\mathrm{F}^{\circ} = z^{1/n}\,\Psi(\nu \mid x, y),$$

en prenant

$$\Psi(\nu \mid x, y) = \sum_{1}^{\infty} (-1)^{h-1} \frac{(n-1)(2n-1)\cdots[(h-1)n-1]}{n^{h-1}(h-1)!\,(nh)!}\,\nu^{nh-1} f_{h-1}.$$

Si donc on peut s'assurer que $\overset{*}{\mathrm{F}}{}^{1/n}$ existe et que le premier membre de l'équation (19) tend vers $\overset{*}{\mathrm{F}}{}^{1/n}$ pour $z=1$ on aura l'expression asymptotique

$$\overset{*}{\mathrm{F}}{}^{1/n} = \Psi_{\nu=\infty}(\nu \mid x, y)$$

que l'on peut mettre aussi d'une infinité de manières sous forme d'une intégrale, par exemple

$$\mathrm{F}^{1/n} = \int_{0}^{\infty} \chi(\nu \mid x, y)\, d\nu,$$

où

$$\chi(\nu \mid x, y) = \sum_{1}^{\infty} (-1)^{h-1} \frac{(n-1)(2n-1)\cdots[(h-1)n-1]}{n^{h}\,h!\,(nh-2)}\,\nu^{nh-2} f_{h-1}.$$

18. Dans les formules précédentes on trouve souvent des intégrales de séries. Dans ces cas on a évidemment à faire avec des limites doubles. Or la nature de la question est telle que les deux limites ne sont pas invertibles, mais il faudra d'abord sommer les séries qui figurent sous les intégrales et après en intégrer les sommes.

Il est nécessaire de faire cette remarque pour ne pas tomber dans des erreurs grossières. En effet les séries sont des séries de puissances et les limites des intégrales sont 0 et ∞; donc l'intégrale appliquée à chaque terme amène à une intégrale qui n'est pas convergente tandis que l'intégration appliquée à la somme est convergente.

19. Si n est un nombre entier, on vérifie facilement que toute fonction permutable avec $\overset{*}{\mathrm{F}}{}^{1/n}$ est permutable avec F, parce qu'une fonction permutable avec une fonction donnée est permutable avec toutes ses puissances de composition entières et positives.

La proposition réciproque est-elle vraie ?

C'est-à-dire, les fonctions permutables avec F le sont-elles aussi avec $\overset{*}{\mathrm{F}}{}^{1/n}$?

Nous n'avons pas de démonstrations à ce sujet.

Mais fixons notre attention sur les formules (*b*) et (*c*). La fonction (*b*) est évidemment permutable avec toutes les fonctions permutables avec F. Si cette propriété se conserve à la limite [voir (*c*)], $\overset{*}{\mathrm{F}}{}^{1/n}$ sera aussi permutable avec toutes les fonctions permutables avec F.

XXII.

MOUVEMENT D'UN FLUIDE EN CONTACT AVEC UN AUTRE ET SURFACES DE DISCONTINUITÉ

«Comptes Rendus Ac. des Sciences», t. CLXXVII, 1923; pp. 569-571.

En prenant l'occasion de l'intéressante communication de M. HADAMARD sur les surfaces de discontinuité dans les fluides, je prends la liberté de faire connaître des cas de mouvements des liquides que je crois nouveaux. Ce sont des cas dans lesquels il y a une surface qui sépare un liquide en mouvement d'un fluide en repos (c'est-à-dire une surface de discontinuité) sans que le mouvement du liquide soit parallèle à un plan. Jusqu'à présent je n'ai vu traité la question précédente, qu'on appelle des *jets liquides*, que lorsque le mouvement du liquide est plan. Dans cette hypothèse, si l'on suppose en outre le mouvement stationnaire et sans tourbillons, on a un potentiel de vitesse qui dépend de deux variables et qui est la partie réelle d'une fonction de variable complexe. Le succès de la méthode dépend de l'emploi de la théorie des fonctions et de la représentation conforme. Lorsqu'on veut examiner des cas généraux il est nécessaire d'abandonner ces méthodes et de suivre des méthodes nouvelles.

Soit σ la surface de séparation de deux fluides F_1 et F_2, l'un étant en repos, l'autre n'ayant pas de tourbillons et étant incompressible.

Si n est la normale à σ, le potentiel de vitesse V de ce dernier vérifiera sur σ les conditions

$$\frac{\partial V}{\partial n} = 0 \quad , \quad \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2 = 2P + h ,$$

P étant la différence entre le potentiel des forces et le rapport entre la pression et la densité, et h une constante. Dans tout le domaine occupé par F_2, on aura

$$\Delta V = 0 .$$

Prenons un système de coordonnées curvilignes orthogonales ρ_1, ρ_2, ρ_3 telles que l'équation de σ soit $\rho_3 = \text{constante} = \rho_0$ et soit

$$ds^2 = H_1^2\, d\rho_1^2 + H_2^2\, d\rho_2^2 + H_3^2\, d\rho_3^2$$

le carré de l'élément linéaire de l'espace. On aura sur σ

$$(1) \qquad \frac{1}{H_1^2}\left(\frac{\partial V}{\partial \rho_1}\right)^2 + \frac{1}{H_2^2}\left(\frac{\partial V}{\partial \rho_2}\right)^2 = 2P + h \quad , \quad \frac{\partial V}{\partial \rho_3} = 0 ,$$

P étant une fonction donnée de ρ_1 et ρ_2. Supposons qu'on sache intégrer l'équation (1), alors on connaît une fonction $\nu_0(\rho_1 \rho_2)$ qui la satisfait. V sera déterminé par les conditions

$$V = \nu_0 \quad , \quad \frac{\partial V}{\partial \rho_3} = 0$$

qui se vérifient sur σ. En effet toute fonction harmonique est définie si l'on connaît sur une surface ses valeurs et celles de sa dérivée normale.

De cette manière est défini un mouvement, *au moins dans le voisinage de* σ, où cette surface est une surface de discontinuité. Le problème est séparé en deux parties: d'abord déterminer ν_0 et après déterminer V.

Considérons un point matériel M, ayant l'unité de masse, contraint à rester sur la surface σ sans frottement et sujet à des forces dont le potentiel est P.

On sait que le mouvement de M est connu si l'on sait intégrer l'équation (1) et réciproquement. On aura donc la proposition suivante: *si l'on sait résoudre le problème du mouvement d'un point matériel contraint à rester sur la surface* σ *sans frottement et sujet à des forces dont le potentiel est* P, *on connaîtra un jet liquide ayant* σ *comme surface de discontinuité.* Il faut bien s'entendre sur ce point: que l'on aura un mouvement qui existera dans le voisinage de σ.

Pour calculer V, ν_0 étant obtenu, on pourra poser

$$V = \nu_0 + \rho\nu_1(\rho_1, \rho_2) + \rho^2 \nu_2(\rho_1, \rho_2) + \rho^3 \nu_3(\rho_1, \rho_2) + \cdots, \tag{2}$$

où $\rho = \rho_3 - \rho_0$, ν_1 étant nul et $\nu_2, \nu_3, \cdots$ pouvant être déterminés de proche en proche. L'existence du mouvement sera assurée où la série précédente et son prolongement seront valables.

Mais même en ne faisant pas ce calcul on peut avoir des propositions comme les suivantes:

Les lignes de courant sur σ *sont les trajectoires du point* M et, si P est négligeable et la pression est constante, *les lignes de courant sur* σ *sont des lignes géodésiques de cette surface et les molécules liquides les parcourent avec vitesse constante.*

Il est intéressant d'examiner des cas dans lesquels on peut calculer ν_0 et l'on peut avoir une idée du mouvement et de la forme approximative des frontières rigides qui limitent le liquide sans besoin de calculer V par un développement en série.

Par exemple si σ est une surface de révolution, et P est constant sur les parallèles, on peut déterminer ν_0 par des quadratures en employant la méthode de HAMILTON–JACOBI. On trouve ainsi que le mouvement du liquide est résultant d'un mouvement symétrique par rapport à l'axe de révolution de σ et d'une *circulation* autour de cet axe. Dans ce dernier mouvement chaque molécule tourne autour de l'axe sans qu'on ait des tourbillons. On trouve dans ce cas que le liquide est limité: 1° par la surface de révoluton σ qui constitue la surface de discontinuité séparant le liquide d'un fluide en repos; 2° par une paroi rigide qui est aussi une surface de révolution; 3° par des surfaces par lesquelles entre et sort le liquide.

Lorsque l'épaisseur de la couche liquide comprise entre σ et la paroi rigide est mince, on peut calculer la forme de la paroi rigide d'une manière approximative avec beaucoup de facilité.

Le cas où σ est une sphère a un intérêt particulier. Alors on peut faire les calculs, même si l'on ne suppose pas que la couche soit mince, sans besoin de recourir à la série (2), par un procédé où l'on emploie la transformation par rayons réciproques et une formule que j'ai donnée en 1894 [1].

On peut expliquer, par ces procédés, certaines particularités qu'on remarque lorsqu'un entonnoir rempli de liquide se vide.

(1) *Esercizi di Fisica Matematica*, « Rivista di Matematica », 1894, pp. 1–14 [in queste « Opere »: vol. secondo, IV, pp. 74–86].

XXIII.

DISCORSO PRESIDENZIALE DEL 1924

« Rendic. delle sedute solenni della R. Acc. dei Lincei »,
vol. III, 1916–28; pp. 517–522.

Sire, Graziosa Regina, Altezza Reale,

Al momento di inaugurare questa seduta generale, a cui la R. Accademia Nazionale dei Lincei chiama i suoi membri da ogni parte d'Italia, il nostro primo pensiero si rivolge con devozione e riconoscenza agli amati Sovrani ed a S. A. R. il Principe di Piemonte, che con la loro augusta presenza accrescono la solennità dell'annuale cerimonia consacrata a dar pubblica notizia dell'attività accademica.

Ma esporre, sia pure con un rapido cenno, l'attività della nostra Accademia, significa fare una sintesi del lavoro scientifico italiano. Infatti, gran parte di quanto il pensiero della Nazione produce nei diversi rami delle scienze, fa capo all'Accademia dei Lincei la quale, mediante le sue pubblicazioni, lo diffonde largamente in tutto il mondo.

I lavori che si raccolgono rivelano le iniziative che sorgono, ragguagliano delle novità che si manifestano e segnalano gli studi che si proseguono. La produzione accademica può dunque giustamente considerarsi come un indice dell'attività che si esplica fra noi nel campo delle varie scienze, indice divenuto più significativo dacché le condizioni determinatesi dopo la guerra fecero maggiormente convergere, soprattutto nell'ambito delle scienze matematiche e naturali, l'operosità dei nostri studiosi verso l'Accademia dei Lincei, quantunque essa abbia dovuto temporaneamente limitare, per ragioni economiche, le proprie pubblicazioni.

Per fortuna la necessità di queste restrizioni va scomparendo perché l'Accademia, non indietreggiando dinanzi a penosi sacrifizi, ha cercato di uscire, con energia e con prontezza, dalla difficile situazione in cui si trovava, ed oggi sono lieto di assicurare che gli sforzi compiuti furono coronati di successo, onde è lecito sperare che il nostro sodalizio possa accogliere un numero di lavori di giorno in giorno maggiore e portarli più rapidamente innanzi al pubblico. Noi abbiamo fiducia che in tal modo l'opera nostra divenga più fervida e ad un tempo più agile.

Ma il nostro Istituto non mira soltanto a farsi centro di diffusione della scienza.

Le grandi Accademie Europee antiche di circa tre secoli (la nostra ha il vanto di averle tutte precorse) e le nuove, sorte recentemente in America ad immagine delle loro consorelle del vecchio continente, non solo diffondono rapidamente le scoperte e le idee originali, ma anche si fanno interpreti della opinione pubblica scientifica, fondano sotto i loro auspici ed amministrano moderne istituzioni, come i laboratori nazionali, e promuovono feconde ed utili intraprese di carattere internazionale.

L'Accademia dei Lincei si è messa essa pure su questa via, favorendo accordi con gli altri paesi e con accademie straniere, dando vita a nuove istituzioni, come le Unioni ed i Comitati nazionali, incoraggiando speciali ricerche e assecondando iniziative quale quella della Ecologia agraria, e perciò confida che la cerchia della sua influenza si allarghi e si affermi utilmente in nuovi campi.

Il ricordo della sua origine vetusta, le nobili tradizioni dei suoi fondatori e di coloro che or sono dieci lustri la rinnovellarono, la visione degli alti destini a cui la patria è chiamata, non possono che infonderle nuova energia per proseguire nel suo cammino.

Se volgiamo un rapido sguardo alle opere presentate all'Accademia nel periodo trascorso dalla nostra ultima riunione generale, è facile riconoscere che fra tutte le altre scienze, tiene il primo posto, per numero di Memorie, la Biologia. È inutile ricordare l'interesse sommo che l'intera Umanità ripone nell'insieme delle discipline ragruppate sotto questa denominazione, sia per il loro alto valore filosofico, sia per l'interesse delle loro pratiche applicazioni. Certo è ragione di compiacimento vedere affermarsi fra noi un rilevante nucleo di giovani scienziati che si consacrano con entusiasmo al progresso di tali studi.

Seguono la Chimica, la quale alle ricerche teoriche accoppia le indagini volte al perfezionamento delle industrie, richiesto nel nostro paese con così viva insistenza, e la Matematica, la quale non ha perduto in Italia l'alta e nobile posizione conquistata con sforzi lunghi e perseveranti.

Ma non altrettanto copiosa ci appare la produzione nel campo della Fisica e in quello pure vastissimo della Geofisica e delle scienze affini ed ausiliarie; né può dirsi più abbondante la mèsse delle ricerche nel campo dell'Astronomia.

Non dubitiamo che tali fatti siano transitori e dovuti a cause accidentali. Il nostro paese ha luminosamente provato da secoli il genio meraviglioso della stirpe per le scienze fisiche ed astronomiche e oggi, come sempre, va superbo di cultori egregi di queste discipline.

Del resto il loro studio si impone. Infatti i grandi problemi teorici che nell'ora presente predominano sugli altri e si contendono quasi la universale attenzione riguardano, da un lato la costituzione degli atomi della materia, dall'altro la forma ed il meccanismo dell'universo siderale. Sembrano essi stare ai due poli estremi della ragione umana, giacché il primo scruta l'infinitamente piccolo, l'altro tenta di dominare l'infinitamente grande. Nondimeno fisici ed astronomi, giovandosi di mezzi e di strumenti affini e spesso insieme collaborando, avanzano risolutamente e rapidamente nella soluzione di queste intricate questioni.

Io lancio l'augurio che agli scienziati italiani siano serbati nuovi e splendidi allori in questi campi, memori di antiche e recenti glorie. Fu qui in Roma che un astronomo rivolse per la prima volta lo spettroscopio alle stelle e a Torino un fisico tracciò per primo la via per giungere a contare le molecole dei corpi.

Ma l'entusiasmo e il genio stesso non bastano. Il genio non può distendere le ali, l'entusiasmo non può prendere il suo slancio se i mezzi di studio non corrispondono alle esigenze della scienza moderna e se non si provvede a creare un ambiente nel quale possano formarsi sin dai giovani anni i nuovi cultori delle discipline scientifiche.

È urgente dare il massimo incremento ai mezzi già esistenti nel nostro paese e procurarne dei nuovi. Questo intento devesi tenacemente perseguire con la coscienza che così facendo si contribuirà a conservare alla patria l'alta posizione intellettuale dalla quale non decadde nemmeno nei più tristi tempi.

A questo fine potrà cooperare efficacemente il Consiglio Nazionale di Ricerche, costituito recentemente, sotto gli auspici della nostra Accademia, e destinato non solo a stringere rapporti con le Unioni internazionali scientifiche, ma anche ad organizzare i Comitati nazionali delle varie scienze e a distribuire loro i mezzi finanziari. I suoi benefici effetti si avvertiranno ancora maggiormente quando sarà integrato, come in Inghilterra, in Francia ed in America, da appositi Istituti di carattere pratico e sperimentale.

Al Consiglio Nazionale di Ricerche fa riscontro l'Unione Accademica, fondata contemporaneamente, i cui scopi ed i cui lavori si ricollegano alle opere che nobilmente prosegue la Classe di Scienze morali.

Mentre la Classe di Scienze fisiche esplica principalmente la sua operosità dando sollecite notizie di scoperte e di ricerche originali mediante i suoi agili Rendiconti, la classe di scienze morali cura con particolare zelo la pubblicazione delle insigni e poderose collezioni dei monumenti antichi e delle notizie degli scavi, le quali forniscono ampio ed elaborato ragguaglio delle nuove scoperte che si fanno dagli archeologi, anche fuori del patrio suolo, rievocanti la storia, le istituzioni, l'arte e la vita del passato. In quest'anno esse si sono arricchite delle importanti Memorie sugli scavi di Caulonia e sulle scoperte romane.

Si può affermare che, nel campo degli studi archeologici ed antiquari, la nostra Accademia esercita veramente un'alta funzione accentratrice e coordinatrice che si andrà sviluppando sempre più in avvenire.

I volumi dei Rendiconti e delle Memorie della Classe di Scienze morali raccolgono intanto gli scritti filologici, giuridici, storici e riferiscono le dotte discussioni che hanno luogo nelle sue sedute: fra le ultime debbo segnalare quella importantissima di scienza politica, avente per tema: « I poteri finanziari dei due rami del Parlamento ».

Se nel campo di queste scienze non tutti i più importanti studi confluiscono nelle pubblicazioni della nostra Accademia, ciò forse si deve, fra le altre cause, alla più larga possibilità di portare innanzi al pubblico i risultati di tali ricerche con altri mezzi e con altre pubblicazioni di cui è sufficientemente dotato il nostro paese.

La nuova Unione Accademica Nazionale, della quale ho fatto cenno poc'anzi, coordina le iniziative dell'Accademia dei Lincei con quelle che ci vengono dalle consorelle di Torino e di Venezia e le porta alle riunioni internazionali. In quella della Unione Accademica Internazionale, che ebbe luogo recentemente a Bruxelles, i delegati italiani presentarono saggi e riferirono sui lavori preparatori per le edizioni delle *Inscriptiones christianae urbis Romae*, del *Corpus vasorum antiquorum*, della *Carta archeologica d'Italia*, pubblicata per cura della nostra Accademia, e finalmente, nel campo filologico, sull'opera monumentale del *Dizionario del latino medioevale.*

Il quadro rapidamente delineato dell'operosità accademica rappresenta il prodotto delle forze intime del nostro sodalizio; ma altre forme di attività sono collegate al contributo che ci proviene dal di fuori e che fortunatamente tende a divenire sempre più cospicuo.

Infatti, il desiderio di aiutare la scienza si accentua e si diffonde, reso forse più vivo dal timore che alte e nobili intelligenze sfuggano al fascino degli studi richiamate ad altre attività dal miraggio di lauti e rapidi profitti; e questo stato d'animo ha creato un complesso di tendenze che il sociologo deve analizzare ed il giurista interpretare.

Innanzi tutto è di grande soddisfazione vedere che, oltre alla munificenza regale e alla liberalità del Governo, la generosità privata contribuisce ad istituire premi ed incoraggiamenti per gli studiosi. In questo solo anno: una personalità, la quale volle conservare l'incognito, fondò il premio «Maria Bianca» di 25.000 lire per incoraggiare studi sulle malattie infettive, e l'importante istituto di Igiene, Previdenza ed Assistenza Sociale, per iniziativa del suo benemerito fondatore prof. ETTORE LEVI, stabilì due premi rispettivamente di 15 e di 10.000 lire per studi di igiene sulle città italiane e per un'opera sul cancro. Inoltre il nostro illustre Socio BATTISTA GRASSI ci ha proposto di costituire con la somma di oltre 80.000 lire, raccolta nella sottoscrizione in suo onore, un fondo destinato a promuovere e premiare ricerche nel campo degli studi zoologici per le malattie parassitarie degli animali e delle piante.

Il Principe CAETANI ha poi completata la cospicua donazione a favore degli studi orientali con la offerta della sua ricca biblioteca.

Indipendentemente da queste private iniziative, che è nostro debito segnalare all'universale gratitudine, bisogna qui ricordare una nuova proposta, la quale, ispirandosi sempre al concetto di venire in aiuto della scienza, cerca raggiungere lo scopo per altre vie. Essa fu profondamente e brillantemente discussa, or sono pochi giorni, in queste stesse sale, ed ebbe al di fuori larga eco. La proposta parte dalla Società delle Nazioni e mira a creare una proprietà scientifica destinata ad assicurare parte dei benefici industriali a vantaggio degli uomini di scienza, i quali donano al mondo idee generatrici di pratiche ed utili invenzioni.

La maggioranza dell'Accademia, pur attraverso riserve sulla difficoltà dell'attuazione, riconobbe l'equità e la giustizia del concetto fondamentale.

Ora, questo movimento non rivela forse una sollecitudine diffusa nella odierna società per l'interesse della scienza ed una preoccupazione per i suoi futuri destini ?

Mi resta ora far parola di quella funzione dell'Accademia che si esplica con il conferimento dei vari premi il cui giudizio è a lei deferito.

Prego il Socio CHIOVENDA, relatore della Commissione giudicatrice del Concorso al Premio Reale di Scienze giuridiche e politiche di voler riferire sull'esito del Concorso stesso. (*Segue la lettura della relazione*).

La Commissione per il premio Reale di Geologia e Mineralogia, composta dei Soci: ARTINI, DE STEFANI, CANAVARI, PARONA, VIOLA, rivolse specialmente la sua attenzione su tre dei cinque concorrenti, i proff. ALOISI, FABIANI e PANICHI e riconobbe in tutti buona preparazione scientifica ed ottimo metodo di studio, in modo da ritenere che essi potranno dare alle scienze ulteriori ed interessanti contributi. Nelle condizioni però presenti, la Commissione espresse unanime il parere che a nessuno di essi per maturità di studi ed importanza di risultati, potesse essere conferito il premio Reale, tenuto specialmente conto dell'altissimo valore morale che ha questo ambito riconoscimento.

Per il premio di fondazione Santoro destinato a scoperte e invenzioni d'ingegni italiani in quelle scienze donde vengono maggiori benefici all'agricoltura, all'industria e al benessere sociale, la Commissione composta dei Soci: GRASSI, MARCHIAFAVA, NASINI, DE MARCHI, MAIORANA, prescelse il prof. GAETANO FICHERA per il suo lungo, perseverante lavoro intorno alla genesi del cancro a cui egli, guidato da alti ideali umanitari, ha consacrato per 17 anni la sua attività scientifica.

I premi del Ministero della Pubblica Istruzione, destinati ad incoraggiare e promuovere il progresso degli studi fra gl'insegnanti delle scuole medie governative, vennero divisi, per le scienze fisiche e chimiche fra i proff. BONACINI, MAGINI, CALCAGNI e QUARTAROLI; e, per le scienze filologiche, fra i proff. CASTIGLIONI, LAVAGNINI, ROSTAGNI e STEINER.

Il Comitato Talassografico aveva deferito alla Reale Accademia dei Lincei il giudizio sul concorso indetto dal Comitato stesso per un trattato di Meteorologia e Oceanografia per gli Istituti nautici. La Commissione all'uopo nominata, pur riconoscendo che a nessuno dei concorrenti potesse conferirsi il premio, propose nondimeno che ai candidati: FABRIS, MARINI e PLATANIA fosse concesso un incoraggiamento per il merito dei lavori da essi presentati.

Il premio Alfonso Sella è destinato ogni anno al più meritevole fra gli aiuti ed assistenti dei laboratori Universitari italiani di fisica. La Commissione unanime concluse il suo giudizio coll'assegnare il premio al dott. ADINOLFI dell'Università di Napoli.

Tutte le proposte delle varie Commissioni furono approvate dall'Accademia.

Non posso dar termine alle mie parole senza rivolgere un mesto saluto alla memoria dei Soci che ci hanno lasciato per sempre.

Degli stranieri dobbiamo deplorare la perdita di: THAYER, illustre storico degli Stati Uniti, e di OMORI, celebre geofisico Giapponese conoscitore profondo della Sismologia Italiana. Dei Soci Nazionali la morte ci ha rapito: PIO FOÀ, patologo dottissimo, anima ardente di patriota, apostolo di opere volte al progresso dell'Igiene sociale; PASQUALE LEONARDI CATTOLICA, valente idrografo, marinaio valoroso e uomo di Stato; PASQUALE DEL GIUDICE, grande mente di giurista e gran cuore d'italiano; ed infine, in questi ultimi giorni, CORRADO SEGRE, insigne geometra, autore di geniali scoperte la cui fama è sparsa in tutto il mondo matematico.

Grande è il dolore che lascia in noi la loro scomparsa; ma ci conforta il pensiero che l'opera loro, nella parte più proficua al progresso del sapere, si perpetua assorbita nel seno della scienza stessa. E la scienza, non solo ha la virtù della immortalità, ma con energia sempre ringiovanita si espande ognora di più, e le sue manifestazioni si fanno di giorno in giorno più intense coll'assidua preparazione dello sviluppo avvenire e col richiamo alle glorie del passato.

Ne dà oggi magnifico esempio l'Inghilterra, la quale convoca nel prossimo luglio l'intero mondo scientifico per rievocare una data memoranda, il giorno della nascita di Lord KELVIN. All'appello della Royal Society di Londra rispondono gl'Istituti scientifici di tutte le nazioni civili.

Il grande fisico vedeva la luce allorché brillava del suo massimo splendore il genio di ANDREA MARIA AMPÈRE, del quale la Francia ha recentemente commemorato le insigni scoperte con solennità pari alla fama. Nell'epoca stessa stava per spegnersi fra noi il grandissimo precursore di questi grandi, ALESSANDRO VOLTA.

L'Italia si prepara sin da ora con operosa devozione a ricordare degnamente il primo centenario della scomparsa del suo immortale figlio. Sotto gli auspici dell'Accademia dei Lincei e del R. Istituto Lombardo si pubblica la edizione nazionale, criticamente elaborata, delle opere complete del sommo scienziato; il secondo volume contenente Memorie sulla scoperta della pila è uscito pochi mesi or sono; la monumentale pubblicazione sarà terminata per il 1927, data della ricorrenza centenaria.

VOLTA, AMPÈRE, Lord KELVIN sono tre nomi che bastano da soli a riempire di gloria tutto un secolo: ad essi sono collegati quei meravigliosi progressi della elettricità che hanno completamente trasformato la vita moderna, e che conducono a rinnovare gli stessi concetti fondamentali sul meccanismo della natura.

Alla loro memoria s'inchina pertanto riverente e riconoscente l'intera Umanità; l'Italia, che si gloria di aver dato i natali all'iniziatore del grandioso movimento, trae dalla celebrazione del memorabile anniversario i più sicuri auspici per l'avvenire.

XXIV.

DISCORSO PRESIDENZIALE DEL 1925

« Rend. delle sedute solenni della R. Acc. dei Lincei », vol. III, 1916–28; pp. 567–573.

Sire, Graziosa Regina,

La cerimonia di oggi, che costituisce la maggiore annuale solennità per la nostra Accademia, assume questa volta un carattere più augusto per la ricorrenza del venticinquesimo anniversario del regno di V.M., che tanto interessamento ha sempre dimostrato per il nostro sodalizio e per il progresso della scienza italiana. Pertanto ai sentimenti di riconoscenza manifestati gli anni scorsi per l'ambito intervento regale, l'Accademia è lieta di aggiungere le proprie felicitazioni ed i propri auguri per l'avvenimento che gli Italiani celebrano con reverente ed affettuoso omaggio.

Il quarto di secolo che si chiude richiama in questo momento l'attenzione degli Italiani, i quali rievocano i grandi fatti di cui furono testimoni e, mentre si rallegrano di veder compiuta per virtù delle armi l'unità della patria, si augurano che l'avvenire consolidi, nella pace, i risultati conseguiti con così dura e lunga lotta ed a prezzo di tanti sacrifici.

Ma, se il ricordo degli avvenimenti politici e militari è ciò che di più vivo rimane nella memoria del popolo italiano, gli uomini di scienza non possono dimenticare quel movimento scientifico e filosofico che ha avuto parte tanto cospicua nel preparare quei gloriosi eventi. Infatti l'insieme di originali pensieri, di studi severi, di profonde ricerche che caratterizza tale attività ha, pur con opera lenta e silenziosa, influito più d'ogni altra cosa a plasmare l'anima della nazione, ha facilitato l'applicazione di quei mezzi tecnici e scientifici a cui si deve in massima parte la ricchezza e la prosperità del paese, ed ha altresì efficacemente agito sulla condotta e sull'esito della guerra.

Non è certo qui il momento adatto per illustrare questo movimento culturale e morale degli anni appartenenti ad un così recente passato, né tanto meno di giudicarlo alla luce proveniente dai nuovi orizzonti che oggi si schiudono al pensiero scientifico universale.

Ma è per noi ragione di grande compiacenza il constatare che a quel movimento la nostra Accademia prese larga parte. Quegli anni, infatti, costituiscono per il nostro sodalizio un periodo di operosità raccolta, ma fervida ed intensa.

L'Accademia comprese esser necessario trovare i mezzi e le vie, sia per rendere note e diffondere largamente le nuove scoperte ed i nuovi ritrovati in ogni campo del sapere, sia per contribuire e rendere possibili pubblicazioni di grande entità e di gran costo, che soverchiano le risorse, tanto dei singoli studiosi, quanto delle private imprese. I principali sforzi dei dirigenti l'Accademia in quegli anni furono perciò rivolti a rendere rapide e facili le pubblicazioni, ad accrescerne, oltreché l'estensione, l'importanza e l'interesse. Gli scopi a cui essi miravano vennero raggiunti.

Se scorriamo infatti gli Atti della Classe di Scienze fisiche ne vediamo in poco più di un decennio triplicarsi la mole e nel tempo stesso possiamo riconoscere che non vi fu argomento scientifico di qualche novità od interesse, dalla telegrafia senza fili agli studi sulla malaria, dal calcolo assoluto alla spettroscopia solare, dalla radioattività alla dinamica dei velivoli o per la prima volta resi noti o, per lo meno, sviluppati nei nostri rendiconti.

In quei medesimi anni l'Accademia pose termine ad una superba pubblicazione da lungo tempo auspicata ed attesa, che onora tutta la patria in uno dei suoi più grandi genî: la riproduzione cioè del Codice Atlantico di Leonardo. Inoltre diede maggiore impulso alla poderosa serie dei « *Monumenti Antichi* » che raccolsero, fra gli altri, i cospicui risultati degli scavi fatti in Creta dalla Spedizione italiana e le celebri scoperte archeologiche in Sicilia e in Sardegna.

Un'altra opera monumentale compiuta sotto gli auspici dell'Accademia e che venne ultimata nei primi anni del secolo fu la « *Forma Urbis* », lavoro fondamentale per gli studi di topografia e archeologia dell'antica Roma.

Devesi infine ricordare che quattro Soci Lincei: l'astronomo SCHIAPARELLI, il matematico CERRUTI, FAVARO, l'insigne cultore di storia delle scienze e l'illustre filologo DEL LUNGO lavorarono lunghi anni, per incarico del Governo, all'edizione nazionale delle opere di GALILEO, il più bel monumento che la patria risorta potesse erigere alla memoria di quel Grande.

Nel riandare a quegli anni d'intenso fervore intellettuale e di feconda produzione scientifica, che segnano in Italia l'inizio del secolo ed il principio del regno della M. V., si resta colpiti da un fatto il quale richiama l'attenzione dello studioso di storia delle scienze e della cultura.

Esso si manifesta col rapido progredire e moltiplicarsi in ogni ramo dello scibile di libere Associazioni, affini ma indipendenti dalle antiche Accademie, non legate agli Istituti di Istruzione, esenti da ogni ingerenza dello Stato e di carattere scientificamente democratico raggruppanti i cultori delle varie discipline. Non si può studiare l'evoluzione della cultura in quegli anni senza prendere in esame l'opera loro vasta, profonda e complessa, feconda di risultati, ricca di promesse, indice di progresso intellettuale. Molte di esse servirono a diffondere ed a divulgare la scienza in virtù della loro influenza anche fuori dei consueti ambienti dei dotti: a tutte giovò l'essere largamente aperte a quelli che vi accorrevano, tanto da porre al fianco dei vecchi campioni della scienza i giovani, all'inizio della loro carriera.

Ora, la nostra Accademia ebbe la visione sicura del vantaggio derivante da queste nuove istituzioni. Fedele al programma di promuovere quanto è di giovamento alla scienza ed alla patria, secondò il libero sviluppo delle giovani energie di questi istituti, nei quali, lungi dal trovare pericolosi concorrenti, ebbe sempre ausilio potente ai suoi nobili ed elevati fini.

Un altro aspetto del movimento cui ho ora accennato ci è offerto da quel rapido succedersi di riunioni e di congressi scientifici che caratterizzano quello stesso periodo, e che giovarono, forse più di ogni altra cosa, alla penetrazione della scienza in ogni strato sociale. Orbene la nostra Accademia favorì anche questa manifestazione di attività intellettuale, offrendo nelle superbe sale, che il governo del Re volle sede a noi riserbata, cordiale ospitalità ai dotti più volte convenuti da ogni parte del mondo.

Se finora vi ho accennato a ciò che può dirsi la fisonomia esteriore del movimento scientifico recente, più interessante ancora è il rievocare il lavoro intimo che nei vari campi del sapere si operò presso di noi. È un capitolo di storia della scienza che onora il nostro paese e che efficacemente contribuì a fargli acquistare credito e simpatia nel mondo. Noi non siamo ricchi di prodotti naturali né di quelle energie che rapidamente possono utilizzarsi come energie meccaniche o industriali, ma siamo ricchi di energie intellettuali; il genio artistico, letterario, scientifico dei maggiori esponenti della nostra stirpe ci hanno resi chiari e famosi nel mondo e ci hanno assicurata la considerazione e la riconoscenza anche dei popoli più lontani. Del contributo che l'ingegno italiano ha dato al progresso del sapere in questo periodo noi abbiamo due documenti significativi nelle pubblicazioni riassuntive fatte quasi contemporaneamente intorno al 1910 dalla nostra antica Accademia e dalla giovane Società Italiana per il Progresso delle Scienze. Tali pubblicazioni, lette e citate continuamente in Italia e fuori, ci offrono, come in un quadro sintetico, la visione di tutto un complesso organico di ricerche e di studi.

La conflagrazione mondiale sospese per noi, come per ogni altro paese d'Europa, questo grande movimento; ma allorché V. M. nei santi nomi della libertà e della giustizia bandì la guerra insieme con i nostri alleati, l'Italia era moralmente pronta.

Il ricordo glorioso dei combattenti resterà perennemente nell'animo degli Italiani, e la loro opera ed il loro eroismo saranno sempre ricordati con onore e gratitudine.

Ma vi fu anche un'opera oscura e paziente che richiedeva il sacrificio di ogni ora e più ancora il sacrificio d'ogni pensiero: l'abbandono cioè di quanto la mente vagheggiava intorno a nuove verità per ricondurla a ciò che era pratico ed urgente. Quest'opera fu compiuta con pertinacia, con coraggio e con fede dagli scienziati italiani. Essa si esplicò in tutti quei rami in cui scienza e tecnica guerresca erano insieme riuniti, fra i disagi ed i pericoli del fronte, sul mare e nell'aria, come si esplicò negli uffici e nelle officine. L'insieme di quest'opera, che man mano si coordinò ed armonizzò nelle sue parti, è prova palese dell'alto grado che la scienza italiana aveva saputo raggiungere.

Terminata la guerra, l'Italia va a poco a poco riprendendo il ritmo ordinato del suo lavoro scientifico: di anno in anno si accrescono, come dissi in occasione della precedente adunanza, i contributi arrecati dagli studiosi nostri nei vari rami del sapere; gli Atti accademici si rinvigoriscono per l'af-flusso di rapporti sulle più svariate ricerche; l'Italia torna ad essere meta prediletta di convegni scientifici internazionali.

Le pubblicazioni accademiche di quest'anno accentuano tale ripresa. Mentre i nostri Atti vanno aumentando di mole si fa anche più varia la messe delle Memorie presentate. A lavori di matematica, di biologia, di fisica, di chimica che riflettono le più moderne ed interessanti questioni, si accompagnano, ad esempio, memorie di geofisica, come quelle relative ai risultati della Crociera italiana nello Stretto di Messina. Le scoperte di Baia e di Selinunte, poi, attestano quanto fruttuose siano state le più recenti ricerche dei nostri archeologi.

È mio dovere inoltre ricordare altri fatti, i quali documentano l'incremento odierno della nostra Accademia. Fra pochi giorni accoglieremo, in questo palazzo, il celebre Museo Astronomico Copernicano, affidatoci dal Governo; esso sarà da noi custodito con cura religiosa, ma nello stesso tempo aperto agli studiosi che potranno ammirare ed esaminare la preziosa raccolta di libri, manoscritti, documenti, di globi e di istrumenti antichi del più alto interesse scientifico. La nostra Biblioteca si viene di giorno in giorno ampliando e se ne sta iniziando una più agevole sistemazione mediante un ben meditato piano di lavori da effettuarsi a grado a grado.

Anche quest'anno sono lieto di segnalare l'Istituzione di nuovi premi dovuti alla privata generosità. In primo luogo ricordo che il compianto Collega GRASSI destinò il fondo sottoscritto in suo onore ad un premio perpetuo per studi sulla parassitologia. Il fondo stesso è stato ora notevolmente aumentato per il contributo del Governo Argentino, desideroso di mostrare la sua stima e la sua gratitudine per le scoperte del nostro grande naturalista. Esprimo la riconoscenza dell'Accademia per questa munifica elargizione.

L'Istituto d'Igiene Sociale, diretto dal prof. ETTORE LEVI, ha voluto aggiungere ai premi stabiliti lo scorso anno due nuove medaglie destinate a ricompensare studi d'indole bio-antropologica. Questo Istituto, che compie già opera così utile, acquista in tal modo un nuovo titolo di benemerenza.

Infine, con intendimento di contribuire al progresso scientifico del paese mediante uno studio di larghe proporzioni, al quale dovranno esser chiamati soltanto Italiani, i tre Istituti di emissione (Banca d'Italia, Banco di Napoli e Banco di Sicilia) hanno messo a disposizione dell'Accademia la somma di lire centomila, già versata, per la istituzione di un premio da assegnarsi ad un'opera intorno alle conseguenze economiche finanziarie e sociali della guerra europea. Ai tre Istituti, ed in modo speciale al nostro illustre Collega BONALDO STRINGHER, che si fece propugnatore della nobile e generosa proposta, mando a nome dell'Accademia i più vivi ringraziamenti.

I premi, dovuti alla munificenza della M. V., da conferirsi quest'anno, riguardavano la chimica e la filosofia. Prego il prof. BRUNI di voler riferire sul primo concorso. (*Segue la lettura della relazione*).

Quanto al premio reale di filosofia, il giudizio venne rinviato al prossimo anno, a cagione di difficoltà sorte durante i lavori della Commissione.

Il dott. MOND istituì fin dal 1908 in onore di Stanislao Cannizzaro un premio internazionale per gli studi di chimica. Prego il Socio BRUNI di voler riferire sul conferimento di questo premio. (*Segue la lettura della relazione*).

Le Commissioni all'uopo nominate riferirono alle classi sui premi ministeriali. Giudicati migliori fra i concorrenti ai premi del Ministero dell'Istruzione furono SANSONE, LEVI e PORLEZZA per le scienze matematiche e fisiche; CASTALDI e FERUGLIO per le scienze naturali; PICOTTI, GALLO e VACCARI per le scienze storiche e filologiche; PINO-BRANCA, SAITTA e CENTO per quelle filosofiche e morali.

Nel concorso ai premi del Ministero della Marina vennero preferiti i lavori matematici dei professori BURNENGO e MAZZONI.

Il vincitore del concorso al premio Alfonso Sella, fra gli assistenti degli Istituti italiani di Fisica, fu il dottore RONCHI dell'Università di Firenze

Avanti di cedere la parola al Socio BRUGI è mio triste dovere ricordare i nomi dei Colleghi che la morte ci tolse quest'anno.

Noi perdemmo sei fra i nostri Soci Stranieri: l'economista ALFREDO MARSHALL, uno dei più illustri dell'Inghilterra; UGO VON SEELIGER, la cui grande opera abbraccia quasi tutti i rami dell'astronomia; il matematico CARLO NEUMANN, appartenente alla più pura scuola classica fisico-matematica; il filologo LUIGI HAVET, chiaro latinista francese; EUGENIO WARMING, celebre cultore di geografia botanica; ALBERTO HALLER, dottissimo chimico caduto vittima dell'amore alla scienza per una disgrazia di laboratorio.

Mancarono ai vivi quattordici Soci Nazionali: CARLO PUINI, conoscitore profondo delle lingue e della storia dell'estremo Oriente; IGNAZIO GIORGI, storico, filologo ed erudito; CARLO FERRARIS, uomo politico, economista e giurista eminente; MAFFEO PANTALEONI, economista e sociologo che lascia fama imperitura di sommo maestro; PIETRO CARDANI, autore di pregevoli lavori in vari rami della fisica; il naturalista CARLO DE STEFANI, geniale illustratore della Geologia italiana; LUIGI PIGORINI, instauratore in Italia di una nuova scienza, la paleetnologia, ed al quale Roma deve il Museo Preistorico ed Etnografico; GIACOMO LUMBROSO, valoroso egittologo e inoltre storico dell'Italia medioevale e moderna: ARISTIDE STEFANI, apprezzatissimo per i suoi lavori sul cuore e sul sistema nervoso; GUGLIELMO KOERNER, autore di classiche e fondamentali scoperte nella chimica organica; lo zoologo CARLO EMERY, noto per le numerose sue ricerche sugli insetti e sui pesci; GUIDO BANTI, illustre patologo fiorentino, scopritore di un morbo che porta il suo nome e del quale ha trovato la cura, acquistando fama di grande scienziato e di benefattore dell'umanità; GAETANO GAGLIO, osservatore acuto ed infaticabile delle reazioni esercitate dai farmachi sugli organismi e delle sostanze che questi spontaneamente generano. L'ultimo a lasciarci fu GIOVANNI BATTISTA GRASSI, insigne indagatore dei più riposti segreti del mondo animale, cui è dovuta universale gratitudine soprattutto per i suoi celebri studi sulle anopheles, la fillossera, i murenoidi. Con noi lo piangono gli umili abitatori delle campagne e delle paludi, infestate dalla malaria, i quali lo videro consacrare fin le estreme sue energie per proteggerli contro il morbo fatale.

Il cuore ci lagrima nel rievocare tanti nomi gloriosi di amici e colleghi scomparsi, ma nel ricordare anche con una sola parola l'opera di ciascuno, restiamo compresi di riconoscenza ed ammirazione verso la loro memoria.

Se questa lunga rievocazione di uomini insigni rivela maggiormente la nobiltà della nostra Accademia, essa ci induce anche a meditare sull'alto dovere che c'incombe di mantenere questo sodalizio e, per riflesso, l'intera vita scientifica italiana all'altezza dell'antica tradizione. Nel concetto originario, che risale ai suoi stessi fondatori, l'Accademia doveva riunire i più eletti fra quanti dedicavano intera la vita alla scienza, facendo di essa il loro apostolato. Le insigni pubblicazioni del periodo iniziale si ispirano effettivamente a tale concetto; ma, come abbiamo testé dimostrato, ad esso risponde ugualmente tutta l'attività scientifica italiana di questo primo quarto di secolo. Ho cercato darne un'idea menzionando alcune opere di fondamentale importanza pubblicate nel nostro paese. Ma un'altra ancora, pari per mole e valore alle massime degli ultimi tempi, deve essere ricordata: il *Corpus Nummorum Italicorum*, cui V.M. ha dedicato le sue amorevoli e dotte cure, acquistandosi giusta fama di insigne cultore degli studi storici. L'Accademia, allorché chiese a V.M. l'alto onore di accordarle il Suo patronato, intese di porre la M. V. al di sopra, ma non al di fuori, dell'Accademia stessa, che Vi considera anche nel campo scientifico come *princeps* nel più nobile significato della voce latina. Possano queste parole, che partono dal cuore degli scienziati italiani, tornar gradite all'animo della M. V. in questi giorni nei quali salgono a Lei tante voci riverenti da ogni parte d'Italia.

XXV.

IN MEMORIA DI CORNELIA FABRI

«Arti grafiche», Ravenna 1925.

Sugli studi di CORNELIA all'Università, siamo lieti e onorati di pubblicare l'autorevolissimo giudizio di un suo professore, l'illustre senatore VITO VOLTERRA, ora Presidente della R. Accademia Nazionale dei Lincei a Roma:

«Conservo vivissima memoria della Signorina CORNELIA FABRI, mia Allieva all'Università di Pisa intorno al 1890, la prima, e forse la migliore, fra le molte allieve che ebbi in seguito a Torino e a Roma. Ricordo che il suo esame di laurea fu un avvenimento per l'Università di Pisa, non solo in quanto per la prima volta veniva ivi ad addottorarsi una donna, ma anche perché la prova fu sostenuta in modo ammirevole dalla candidata, che riportò i pieni voti assoluti e la lode. In quell'occasione l'Illustre Preside della facoltà di Scienze, professore ANTONIO PACINOTTI, pronunzió elevate ed opportune parole, rilevando tutta l'importanza dell'avvenimento, e prevedendo l'aprirsi di una nuova èra con l'entrata nel campo della scienza, di eminenti personalità femminili.

Durante la precedente carriera universitaria, CORNELIA FABRI fu sempre in prima linea fra i suoi compagni di studio, fra i quali si annoveravano alcuni che dovevano farsi un nome illustre nelle Matematiche.

Posseggo nella mia biblioteca otto scritti della FABRI i quali si riferiscono all'Alta Analisi Matematica, alla Meccanica e più specialmente all'Idraulica.

Nel 1887 avevo dato alla luce i miei primi lavori sulle funzioni dipendenti da altre funzioni e le funzioni di linee. Nel 1890 avevano già richiamato l'attenzione, ma senza essere ancora seguiti da studi originali di altri matematici. CORNELIA FABRI fu la prima a dimostrare fiducia in quelle idee ed alla loro importanza per il progresso della Scienza, pubblicando due Memorie intorno ad esse, a Torino e a Venezia. Dopo 30 anni, ora che quelle idee sono penetrate nel campo delle Matematiche, ripenso con vivissima commozione e profonda riconoscenza a chi per prima ebbe fiducia in esse, e divise con me le ansie per la loro riuscita.

Nella memoria *Sopra alcune proprietà generali delle funzioni che dipendono da altre funzioni e da linee* pubblicata nel 1890 negli «Atti della R. Accademia di Scienze» di Torino, l'illustre scienziata ha esteso gli sviluppi, analoghi a quelli del TAYLOR, che io avevo dato per funzioni dipendenti dalle funzioni di una variabile, a quelle dipendenti da una funzione di più variabili. Inoltre, ed in ciò consiste la parte più originale del lavoro, essa ha considerato le funzioni di linee di 2°, di 3° e di grado superiore, analogamente a quelle che io avevo chiamate funzioni di 1° grado. Con una combinazione di esse, è riuscita ad ottenere nuovi sviluppi analoghi a quelli di TAYLOR e di MACLAURIN.

Non dubito che queste eleganti ricerche, se saranno riprese e continuate, condurranno a nuovi ed interessanti risultati. La loro estensione al caso di funzioni di iperspazi è opera della stessa autrice, la quale ne fece l'oggetto di una Memoria dal titolo *Sopra le funzioni di iperspazi*, pubblicata a Venezia negli «Atti del R. Istituto Veneto di Lettere, Scienze ed Arti», tomo IV, serie VII. Questa estensione offre non poche difficoltà, onde l'esser riuscita a superarle maestrevolmente, valendosi di complessi mezzi analitici, mostra in CORNELIA FABRI una padronanza dell'analisi, ed una virtuosità nel calcolo, che solo pochi possono raggiungere.

Ma i lavori più importanti dell'illustre scomparsa sono indubbiamente quelli d'Idraulica.

Essa ha dedicato 4 memorie alla Teoria dei moti vorticosi, o, per dir meglio, all'estensione di quella teoria che ordinariamente si chiama dei vortici.

Tutti conoscono i classici lavori di HELMHOLTZ, di Lord KELVIN, di KIRCHOFF, di STOKES e di molti altri su questo soggetto. Il BELTRAMI fra gli altri aveva fatto nella sua *Cinematica dei fluidi* uno studio completo della decomposizione in moti elementari dello spostamento e della deformazione di una particella fluida, tenendo conto dei termini del 1° ordine. CORNELIA FABRI è andata più innanzi, esaminando le parti di ordine superiore trascurate nelle precedenti trattazioni.

L'autrice mostra che possono studiarsi ed estendersi, per ciascuna di queste parti, le decomposizioni già escogitate per quelle del 1° ordine, e che esse conducono alla scoperta di nuovi ed interessanti moti delle particelle fluide. Ma inoltre essa nota che conviene esaminare separatamente il caso delle parti di ordine dispari, e il caso di quelle di ordine pari; giacché, mentre dalle prime risultano dei moti che possono considerarsi come *rotazioni*, per i quali ogni punto ha una velocità angolare proporzionale ad una potenza della sua distanza da un punto fisso dell'asse di rotazione, dalle seconde risultano invece dei moti comparabili a *flessioni* per i quali ogni punto ha una velocità di flessione proporzionale ad una potenza della sua distanza da un punto fisso dell'asse di flessione.

In tutta questa teoria cinematica, svolta con semplicità, eleganza e vera genialità, l'autrice non fu preceduta che dal celebre fisico americano ROWLAND e dal nostro BOGGIOLERA, i quali per altro non sono andati a fondo alle ricerche stesse.

Infatti il ROWLAND non ha considerato tutti i termini di un dato grado, né si è occupato di ricercare il significato cinematico dei moti che prese a studiare. Ma è appunto tale significato, riconosciuto dalla FABRI, che dà rilievo e perspicuità alla ricerca. D'altra parte il BOGGIOLERA ha ristretto le sue ricerche alle sole parti del 2° ordine, mentre essa non ha posto alcun limite ai suoi calcoli. Può quindi affermarsi con sicurezza che il lavoro di CORNELIA

FABRI costituisce opera schiettamente originale, propria a mettere in chiara luce le doti singolari del suo ingegno acuto e profondo. Un estratto di questo lavoro, che costituisce la dissertazione di laurea della giovane matematica, è comparso nel 1892 negli «Annali della R. Scuola Normale Superiore di Pisa», giacché il suo direttore, l'illustre geometra ENRICO BETTI, volle restasse un ricordo dell'eminente allieva di quella Università, nell'importante pubblicazione promossa dal celebre Istituto Pisano.

Non è qui il caso di entrare in particolari sulla Memoria esaminata, né di mostrare con quale destrezza analitica sono in essa studiati, oltre i moti vorticosi di ordine superiore, anche le corrispondenti linee vorticose ed i vorticoidi, e sono estese le analogie elettro ed idrodinamiche.

Due anni dopo, cioè nel 1894, venne letto nella «R. Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna» un secondo lavoro di CORNELIA FABRI, avente per titolo *I moti vorticosi di ordine superiore al 1° in relazione alle equazioni pel movimento dei fluidi viscosi* il quale contiene importanti applicazioni degli studi precedenti.

In esso l'autrice oltrepassa il campo cinematico entro il quale si era limitata nelle sue primitive ricerche, e penetra nel vero e proprio campo della dinamica dei fluidi, occupandosi in modo particolare di quelli viscosi che suppone incompressibili. Come essa osserva, tale trapasso doveva apparire naturale a chi poneva mente che, per tener conto della viscosità, si debbono aggiungere alle equazioni Euleriane dell'idrodinamica alcuni termini formati con le derivate seconde delle componenti della velocità, i quali, trovandosi nella parte di 2° grado degli sviluppi in serie di TAYLOR, delle componenti suddette, dovevano necessariamente aver relazione con quei moti, studiati nella precedente Memoria, allorché si erano esaminati i termini di 2° grado di quegli sviluppi.

I teoremi a cui essa perviene sono di notevole interesse ed eleganza, giacché collegano la viscosità dei fluidi colla flessione delle loro particelle e mostrano l'oggettiva esistenza dei moti stessi di flessione e la loro intrinseca importanza.

Questo lavoro venne inserito anche nel giornale «Il Nuovo Cimento», serie III, vol. 36, 1894, e ad esso nella stessa effemeride fece seguito un altro, l'anno successivo, col titolo *I moti vorticosi di ordine superiore in relazione alle equazioni pel movimento dei fluidi viscosi compressibili.* (Nota di CORNELIA FABRI).

Il precedente scritto si riferiva, come abbiamo esplicitamente detto, ai fluidi incompressibili; in questo ultimo, invece, vengono esaminati i fluidi perfettamente elastici. S'incontrano così nuove e maggiori difficoltà che nel caso precedente, giacché le espressioni delle componenti le forze d'attrito risultano più complicate, e la densità e la pressione debbono collegarsi mediante la legge di BOYLE. Nondimeno la FABRI scopre eleganti teoremi, come quello affermante una relazione fra il potenziale delle forze d'attrito ed il potenziale di flessione, e stabilisce le notevoli proposizioni con le quali termina la sua Memoria, proposizioni impossibili a riprodursi qui, perché converrebbe entrare in particolari troppo tecnici.

Restano ancora due lavori di CORNELIA FABRI, l'uno: *Brevi considerazioni intorno alle nuove discipline per la chiusa del fiume Montone*, l'altro: *Cloche-Signal electrique installé par M. l'abbé Ravaglia dans le port de Ravenne*; il primo dei quali è un notevole contributo a studi di idraulica pratica, e l'altro è la descrizione di un ingegnoso apparecchio immaginato dal parroco RAVAGLIA.

L'attività scientifica di CORNELIA FABRI, così intensa durante la sua carriera universitaria e negli anni che seguirono la sua laurea dal 1892 al 1895, dovette ben presto arrestarsi a cagione della sua non florida salute.

Lo sforzo compiuto in quel periodo per condurre a termine le opere poderose che abbiamo ricordato fu forse troppo grande per l'energia di una donna? Certo è che dopo il 1895 non comparve più alcuno scritto di lei.

Non sta a me parlare della santissima vita che essa condusse. Gli ultimi suoi anni furono consacrati tutti alla famiglia e alle opere di pietà, ed in esse si esaltarono e rifulsero maggiormente le nobili virtù che essa possedeva.

La vidi per l'ultima volta nell'autunno del 1905 quando feci con mia moglie un viaggio a Ravenna. Fui accolto nella casa avita dove molti anni prima ero stato ospite del padre, professore RUGGIERO FABRI, uomo appassionato degli studi, il quale aveva indirizzato la figlia alle discipline scientifiche, guidata nei primi passi della sua carriera e seguita a Pisa durante i suoi studi universitari.

Vuota era la casa per i lutti domestici, ma la illuminava il buono e dolce sorriso di CORNELIA e GIULIA FABRI e la rendeva gradita la schietta ed amabile ospitalità delle due sorelle.

L'improvvisa ed inaspettata notizia della morte dell'eminente matematica mi colpì dolorosamente.

Se è raro e triste per un maestro il commemorare l'allievo dal quale invece attende il postumo ricordo, debbo però esprimere a Lei i sensi della mia riconoscenza per avermi dato modo di scrivere queste parole, modesto ma devoto omaggio alla memoria di una donna che si è tanto elevata al disopra delle altre per le qualità della mente e del cuore ».

INDICE

FINITO DI STAMPARE NELLA
TIPOGRAFIA DELL'ACCADEMIA
NAZIONALE DEI LINCEI IN ROMA
NEL LUGLIO 1960