VITO VOLTERRA

OPERE MATEMATICHE

Memorie e Note

PUBBLICATE A CURA DELL'ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
COL CONCORSO
DEL CONSIGLIO NAZIONALE DELLE RICERCHE

Volume terzo
1900-1913

ROMA
ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
1957

OPERE MATEMATICHE
DI VITO VOLTERRA

COMITATO PER L'EDIZIONE DELLE OPERE MATEMATICHE
DI
VITO VOLTERRA

VITO VOLTERRA

OPERE MATEMATICHE

Memorie e Note

PUBBLICATE A CURA DELL'ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
COL CONCORSO
DEL CONSIGLIO NAZIONALE DELLE RICERCHE

Volume terzo
1900-1913

ROMA
ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
1957

MEMORIE E NOTE

I.

BETTI, BRIOSCHI, CASORATI, TROIS ANALYSTES ITALIENS ET TROIS MANIÈRES D'ENVISAGER LES QUESTIONS D'ANALYSE (*)

«Compte rendu du deuxième Congrès intern. des mathématiciens, Paris 1900», Parigi (1902), pp. 43-57.

Dans l'automne de l'année 1858, trois jeunes géomètres italiens partaient ensemble pour un voyage scientifique.

Leur but était de visiter les Universités de France et d'Allemagne, d'entrer en rapport avec les savants les plus remarquables, d'en connaître les idées et les aspirations scientifiques et, en même temps, de répandre leurs travaux.

Ce voyage entrepris par BETTI, BRIOSCHI et CASORATI marque une date qu'il est bon de rappeler. L'Italie allait devenir une nation. Elle entre à partir de cette époque dans le courant des grands travaux scientifiques et, par un nombre de travailleurs toujours croissant, apporte sa contribution à l'œuvre commune.

Dans ce jour où tant de mathématiciens se réunissent en inaugurant un échange fécond d'idées, j'aime à rappeler ce souvenir.

Il serait impossible de comprendre et de suivre les progrès de l'Analyse en Italie, dans la seconde moitié du XIX[e] siècle, sans connaître à fond l'œuvre poursuivie avec patience et avec énergie pendant un grand nombre d'années par les trois géomètres dont je viens de rappeler les noms, secondés par les efforts de leurs meilleurs élèves.

C'est à leur enseignement, à leurs travaux, au dévouement infatigable avec lequel ils poussaient les élèves et les jeunes savants vers les recherches scientifiques, à l'influence qu'ils ont exercée dans l'organisation des hautes études, aux rapports qu'ils ont établis entre notre patrie et l'étranger que nous devons d'avoir vu naître en Italie une jeune école d'analystes.

Et cependant il suffit de lire un seul Mémoire de chacun de ces mathématiciens pour se convaincre tout de suite que leurs facultés naturelles étaient bien différentes. Leurs vies se sont écoulées en des milieux divers, de façons aussi très diverses, et leurs esprits ont acquis des orientations presque opposées. Ils ont été dès lors amenés, par une foule de circonstances, à regarder l'Analyse sous des points de vue très dissemblables. Mais de cette manière leur œuvre, dans son ensemble, a été bien plus utile et bien plus

(*) Traduzione italiana (con lievissime modificazioni di forma) in V. VOLTERRA, *Saggi Scientifici*, Bologna, Zanichelli, s. d. (1920), pp. 35-54. In questa traduzione l'Autore aggiunge alcune note a pié di pagina, che qui si riproducono in parentesi a graffa { }. [N. d. R.].

complète, car ils ont fait converger des courants et des tendances différentes sur les jeunes savants italiens, en pénétrant de plusieurs côtés dans leurs esprits et en faisant ressortir en eux toutes les espèces de talent géométrique.

BETTI, BRIOSCHI, CASORATI ont disparu maintenant à peu de distance l'un de l'autre, mais leur souvenir reste toujours et les germes qu'ils ont semés ont produit leurs fruits.

Nous gardons en Italie des sentiments de douce affection et une gratitude sans bornes pour ces maîtres bien-aimés et, puisque l'un de nous avait eu l'honneur d'être appelé à parler dans cette réunion, j'ai cru interpréter les sentiments de tous en évoquant leurs images.

Cette tâche n'est pas aisée, mais je compte pour la faciliter sur les sentiments de vénération dont je suis animé, et aussi, Messieurs et chers Confrères, sur votre bienveillance.

Aucun de ceux qui ont pris part au Congrès de Zurich ne pourra jamais oublier la figure de BRIOSCHI. Ses cheveux blancs et son grand âge ne s'accordaient pas avec l'éclat de ses yeux qui gardaient des éclairs de jeunesse, et avec son infatigable activité. Mais ce contraste représente d'une manière frappante son individualité, car il a été toujours jeune par son caractère et toujours mûr par son esprit.

Né dans l'ancienne capitale de la Lombardie (*) qui allait devenir le centre industriel le plus important et le plus riche de l'Italie, il fut d'abord ingénieur; mais, attiré vers les Mathématiques pures, il acquit dès son jeune âge une connaissance presque complète des œuvres classiques et, âgé de vingt-cinq ans, fut appelé à l'Université de Pavie comme titulaire de la chaire de Mécanique.

Dès cette époque commencèrent sa production scientifique et son influence dans l'enseignement. Elles ne cessèrent que le jour de sa mort.

Après la constitution du royaume d'Italie on a une nouvelle phase de la vie de BRIOSCHI, car son activité se tourna vers les affaires politiques où il joua depuis lors un rôle important. Il abandonna l'Université et, devinant l'avenir industriel de sa patrie, il fonda l'École Polytechnique dont il fut l'organisateur et dont il resta le directeur pendant toute sa vie.

Mais il continua toujours par ses Ouvrages scientifiques, par son rôle de Directeur des « Annali di Matematica », par celui de Président de l'*Accademia dei Lincei*, à diriger le mouvement mathématique en Italie, tandis qu'il remplissait ses fonctions de sénateur, faisait partie d'un grand nombre de commissions parlementaires, et s'occupait aussi de travaux publics et de l'art de l'ingénieur. Activité rare et phénoménale qu'on a peine à concevoir et qui nous frappe d'admiration!

(*) {FRANCESCO BRIOSCHI nacque il 22 dicembre 1824 e morì il 13 dicembre 1897. Le sue Opere furono pubblicate da uno speciale comitato in 5 volumi. Milano, Hoepli, 1901–1909}.

La vie de BETTI fut calme, autant que celle de BRIOSCHI fut agitée.

BETTI naquit (*) en Toscane dans un petit village sur la montagne, où les habitants simples et adroits ont un esprit très fin et un goût naturel pour l'Art et la Poésie.

Il perdit son père pendant qu'il était enfant, et ce fut sa mère qui soigna son éducation. Élève de MOSSOTTI à l'Université de Pise, il commença par devenir professeur dans un petit lycée de Toscane, et c'est seulement à l'âge de trente-quatre ans qu'il obtint une chaire à l'Université, et, sept ans après, la direction de cette École Normale supérieure de Pise dont l'organisation est à peu près celle de l'École Normale supérieure de Paris.

BETTI n'aimait pas, comme BRIOSCHI, les charges de la vie publique. Il fut élu député et nommé sénateur; mais il ne prit jamais, comme son collègue, une part active aux mouvements politiques.

Lorsqu'il était à Rome sous-secrétaire d'État pour l'Instruction publique, il regrettait toujours la vie de professeur, le calme de la petite ville de Pise, les mois passés à la campagne dans une douce méditation ou dans des entretiens, toujours remplis de mots spirituels, avec ses amis et avec ses élèves.

BETTI, en dehors des affections familiales, n'aima qu'une chose: les recherches scientifiques entreprises dans un but philosophique.

Il les aima en effet pour elles-mêmes, sans songer aux satisfactions de amour-propre qu'elles pouvaient lui donner, sans songer non plus aux effets qu'elles pouvaient produire dans le monde savant ni à l'importance qu'elles pouvaient avoir dans l'enseignement.

Lorsqu'il avait satisfait le besoin d'arriver aux vérités les plus cachées, lorsqu'il les avait reliées entre elles et avait créé dans son esprit un système où elles ressortaient des principes les plus simples, tout était fait pour BETTI. Il n'aimait même pas, dans bien des cas, exposer ses résultats au public, ou, s'il en commençait la rédaction, il s'arrêtait souvent parce que de nouvelles idées le tentaient, et il lui était pénible de ne pas suivre l'inspiration du moment.

On voit à l'Académie des Beaux-Arts de Florence une statue ébauchée par MICHEL-ANGE. La figure de saint Mathieu sort à peine du marbre; mais les lignes principales sont arrêtées. Cette ébauche avait satisfait le grand artiste, qui, voyant que son idée pouvait être réalisée, ne voulut plus continuer son travail.

On peut comparer bien des travaux de BETTI, et peut-être les plus beaux, à l'ébauche de MICHEL-ANGE.

L'esprit de CASORATI était d'une nature différente: il vécut et travailla presque exclusivement pour ses élèves et pour son école.

Ses travaux en effet ont presque tous ce cachet spécial qui révèle que le but de l'auteur était d'éclaircir quelque point obscur, ou de cor-

(*) {ENRICO BETTI nacque il 21 ottobre 1823 e morì l'11 agosto 1892. Le sue Opere matematiche furono pubblicate dall'Accademia dei Lincei in 2 volumi. Milano, Hoepli, 1903-1915}.

riger quelque résultat, ou d'exposer d'une manière critique un corps de doctrines.

Mais quelle originalité dans la critique, quel talent dans l'exposition de une théorie, qui devenait une nouvelle théorie en vertu du point de vue d'où CASORATI l'envisageait, combien de résultats nouveaux et complètement inattendus ressortaient d'une simple erreur qu'il corrigeait!

Sa vie s'écoula presque exclusivement à Pavie, sa ville natale (*). Il était fils d'un médecin, qui était aussi professeur à l'Université de Pavie, et étudia, dans cette Université, sous la direction de BORDONI et de BRIOSCHI dont il devint l'assistant.

CASORATI parcourut ensuite tous les grades universitaires en échangeant la chaire de Géodésie contre celle d'Algèbre et enfin celle-ci contre la chaire d'Analyse infinitésimale qu'il garda jusqu'à sa mort.

Les travaux qu'il publiait et ses cours, qui étaient très suivis et très écoutés, avaient toujours des rapports entre eux; quelquefois même, s'il abandonnait un travail pour en entreprendre un autre, il changeait soudainement le sujet de son cours.

C'est pourquoi, dans son esprit, il n'y avait pas de distinction entre l'œuvre du professeur et l'œuvre du savant, qui s'accordaient ensemble d'une manière admirable et féconde.

Il suffit d'avoir exposé en peu de mots la vie des trois géomètres et leurs tendances pour comprendre quelle différence il y avait entre eux, et combien étaient dissemblables les mécanismes de leurs intelligences.

Aussi ont-ils été conduits à envisager l'Analyse en général et chaque question particulière de façons bien diverses.

On pourrait suivre la trace de leurs esprits dans toutes les branches des Mathématiques et montrer que cette diversité se révèle à chaque pas de leurs recherches. Mais il serait trop difficile d'envisager du même coup toute leur œuvre, tandis qu'il est bien plus aisé d'avoir égard à une branche spéciale où ces trois géomètres ont laissé des traces profondes.

La théorie qui a eu le plus grand développement dans les derniers temps est sans aucun doute la théorie des fonctions.

On pourrait même appeler notre siècle, au point de vue des Mathématiques, le *siècle de la Théorie des fonctions*, comme le XVII^e^ siècle pourrait être désigné par le nom de *siècle du Calcul infinitésimal*.

En effet, nous avons assisté à ce fait: toutes les branches de l'Analyse ont conduit au progrès de cette théorie, et en même temps c'est de la théorie des fonctions que les Mathématiques ont tiré leurs plus puissantes ressources. Nous avons même pu voir s'accomplir un phénomène très singulier: certaines théories et certaines méthodes de la Géométrie synthétique, qui devaient

(*) {FELICE CASORATI nacque il 17 dicembre 1835 e morì l'11 settembre 1890}. Le sue Opere matematiche furono pubblicate dall'Unione Matematica Italiana in 2 volumi. Roma, Ediz. Cremonese. [N. d. R.].

leur origine à une sorte de réaction contre l'esprit analytique, se sont peu à peu rapprochées de la théorie des fonctions et enfin se sont liées intimement à elle dans les idées fondamentales et dans les applications.

Il existe bien des travaux historiques et critiques sur la théorie des fonctions. Les plus savants géomètres ont donné sur elle des essais précieux, riches des plus intéressantes notices.

Mais jetons un coup d'œil d'en haut sur le chemin parcouru, envisageant dans son ensemble le développement de la théorie.

Nous distinguons tout de suite trois phases différentes qui marquent presque trois périodes distinctes.

D'abord s'élaborent des théories particulières. C'est leur développement qui montre la nécessité de créer une théorie générale des fonctions transcendantes et des fonctions algébriques, qui embrasse tous les cas connus et en prévoit de nouveaux. Dans cette phase on ne connaît pas encore de méthodes uniformes. Chaque question qui se présente, on doit tâcher de la résoudre: voilà ce qui s'impose. Les méthodes, il faut les créer chaque fois et à chaque pas. De longs calculs sont nécessaires et les pensées qui sont renfermées dans les formules ne se dégagent que peu à peu.

Les grands noms d'EULER, de JACOBI, d'ABEL peuvent être pris pour personnifier cette période héroïque où la théorie des fonctions elliptiques a été créée dans ses parties essentielles, et où ont été marquées les lignes principales où devaient se développer un jour les fonctions abéliennes.

Mais à cette période de découvertes merveilleuses, où ce qui domine est la curiosité d'arriver en possession de vérités inattendues qui se dévoilent soudainement à travers de longs calculs et des inductions audacieuses, succède bientôt une phase où l'esprit philosophique a le dessus et où s'impose la nécessité de la recherche d'une méthode générale et puissante qui embrasse et renferme tout dans un cadre unique en constituant un corps de doctrine.

Cette phase est marquée par les œuvres immortelles de CAUCHY, de WEIERSTRASS et de RIEMANN qui sont remontés aux sources mêmes des conceptions fondamentales pour accomplir leur tâche. C'est dans cette période grandiose que les idées remplacent peu à peu les calculs.

Il y a enfin une dernière phase où les théories trouvent leurs plus importantes et leurs plus fécondes applications, les formes les plus appropriées à leur diffusion, et restent fixées dans un cadre didactique, après avoir été passées en revue et discutées par le plus fin esprit critique qui ait jamais dominé la Science.

Ces trois phases, dont nous avons tâché de donner les principaux caractères, correspondent à peu près à trois périodes successives dans l'histoire de la théorie des fonctions, mais elles correspondent aussi à trois manières d'envisager les questions d'Analyse; et certains géomètres restent attachès à l'une ou à l'autre en vertu même des qualités les plus intimes de leurs esprits.

BRIOSCHI, ingénieur et homme pratique, habitué à voir le but que l'on poursuit et à ne pas trop s'inquiéter des méthodes, est resté toujours fidèle à la direction classique et aux procédés d'EULER et de JACOBI.

Pour son activité infatigable les longs calculs ne sont pas une gêne. Son esprit habitué à démêler les choses les plus inextricables de la vie réelle voit à travers une forêt de calculs comme à travers un cristal limpide.

BELTRAMI a dit de lui dans son langage fleuri que je m'efforce de traduire:

« Ses formules agiles et pénétrantes remplissent comme un trésor inépuisable tous ses travaux, et c'est par là qu'il acquit la réputation d'une virtuosité sans égale dans l'Analyse la plus raffinée. . .

« Comme un habile musicien fait ressortir la mélodie qui marche tranquille et sereine au milieu des notes et des modulations qui se porsuivent et s'entrelacent, de la même manière BRIOSCHI faisait jaillir le résultat analytique qu'il cherchait d'un appareil de symboles formidable et artificiel, mais plein d'élégance et de symétrie artistique ».

C'est à cause de cela qu'il est resté complètement étranger à tout le mouvement qui s'est développé peu à peu et qui caractérise le passage de la première à la seconde phase. Je dirai même qu'il le dédaignait un peu. Combien de fois l'ai-je entendu se plaindre des mathématiciens modernes, qui n'ont plus l'habitude de faire de longs calculs, et combien de fois suis-je resté surpris en entendant des louanges pour un travail, ou pour certaine partie d'un travail, parce qu'il contenait des calculs bien faits.

Nous voyons ainsi BRIOSCHI traduire et populariser en Italie le *Traité des fonctions elliptiques* de CAYLEY et, même dans un Ouvrage sur les fonctions hyperelliptiques qu'il composait et imprimait lorsque la mort l'a fauché, il ne s'éloignait pas des méthodes qu'il avait préférées depuis le commencement de sa carrière.

Nous avons déjà signalé que BETTI était d'une nature différente, je dirai même opposée à celle de BRIOSCHI. Ce qui manque à l'un, l'autre le possède. Si on les avait réunis, on aurait eu un esprit complet.

Le désir d'un but à atteindre n'empêchait pas BETTI de voir ce qui l'entourait et de s'attarder à mi-chemin pour trouver des rapports et des comparaisons avec bien d'autres choses.

Cette sorte de paresse toscane, qui n'est pas de la paresse intellectuelle, faisait qu'il aimait plutôt penser que travailler d'une manière mécanique.

C'est pourquoi ces longs calculs, que le rude Lombard aimait, lui étaient insupportables. Bien souvent ils l'auraient conduit à des fautes sans le flair mathématique très fin qu'il possédait. Son esprit large et cultivé aimait plutôt les systèmes philosophiques.

Par l'ensemble de ces circonstances, il est aisé de comprendre qu'il se rattache à la seconde phase dont nous avons parlé. Mais ce qu'il y a de vraiment singulier, je dirai plutôt de merveilleux dans l'Œuvre de BETTI, c'est qu'il peut rattacher son nom aux deux grandes méthodes qui ont divisé le champ de la théorie des fonctions, qu'on a même montrées parfois en opposition l'une avec l'autre.

C'est par sa propre initiative, sans connaître le grand travail que WEIERSTRASS porsuivait en silence, qu'il parvint d'emblée, par un vrai coup de génie, à l'un des points fondamentaux de cette théorie: la décomposition des fonctions entières en facteurs primaires.

Il publia, en 1862, le Mémoire (*) qui contient ce résultat et ses applications aux fonctions eulériennes, trigonométriques et elliptiques, et c'est seulement quinze ans après qu'il sut que WEIERSTRASS possédait une théorie complète des facteurs primaires.

Mais BETTI, depuis l'époque où il avait commencé l'impression de son Mémoire, n'avait plus pensé à son théorème. Le Mémoire était resté inachevé et oublié par l'auteur même, et un nouvel ordre d'idées lui avait fait changer complètement la direction de ses études.

RIEMANN était venu en Italie, et s'était lié pendant son séjour à Pise d'une amitié très intime et très affectueuse avec BETTI. Celui-ci embrassa ses idées et depuis cette époque ses travaux se ressentent tous de l'influence directe de RIEMANN.

BETTI n'a publié qu'une petite partie de ce qu'il a produit dans cette direction. Bien des choses sont restées toujours inédites. Entre autres, il essaya une théorie nouvelle des fonctions elliptiques en l'établissant sur leur construction par des propriétés qui les caractérisent au contour du parallélogramme des périodes.

C'est peut-être le dernier pas qu'on puisse faire dans cette direction et, quoique la méthode soit très artificielle, ce qui fait qu'elle ne se prête pas à une exposition didactique, il serait intéressant qu'elle fût connue.

Il est très singulier de voir un seul esprit concevoir l'une après l'autre deux théories si différentes et ne pas s'attacher à l'une plutôt qu'à l'autre. Il abandonne la première pour la seconde qu'il ne publie même pas. Toujours est-il que l'empreinte du vrai génie se montre dans cette richesse d'idées. Malheureusement pour sa renommée, son insouciance pour tout ce qui n'était pas la satisfaction intime d'une découverte nouvelle fit tomber dans l'oubli des résultats du plus haut intérêt et en rapport avec des conceptions nouvelles qui n'étaient pas encore prêtes à devenir courantes.

Cependant ce fait singulier a une explication. Il touche aux sources mêmes des deux célèbres méthodes, et on pourrait dire qu'on a par là une confirmation de leur origine différente.

En effet, si nous pénétrons le sens intime des méthodes de RIEMANN, nous voyons que ce qui les caractérise est leur liaison avec les conceptions fondamentales de la Physique.

Les méthodes de RIEMANN représentent le transport des procédés de la théorie de l'électricité dans celle des fonctions d'une variable complexe.

Or, BETTI était autant mathématicien que physicien théorique et sa pensée a été toujours dirigée vers les phénomènes naturels.

Nous savons que, pour bien des mathématiciens, les théories deviennent plus fécondes lorsqu'on attache aux formules des significations qui dépassent

(*) {*La teorica delle funzioni ellittiche*. « Ann. di mat. pura ed applicata », § I, tomi III e IV; « Opere matematiche » di E. BETTI, p. 228, tomo I}.

le sens purement analytique. Pour certains esprits les formules représentent des faits géométriques qui leur donnent une représentation concrète. D'autres savants sont amenés à rattacher, autant qu'il est possible, aux résultats analytiques des phénomènes physiques qui les caractérisent en leur donnant une netteté qu'ils n'auraient pas par eux-mêmes.

Ceux qui ont connu BETTI, non seulement par ses travaux, mais aussi par sa conversation, savent que s'il parlait Mathématiques, bien souvent il pensait Physique. Comme un de ces éclairs qui dans la nuit révèlent le chemin qu'on parcourt, quelquefois un mot qui lui échappait révélait soudainement cette disposition naturelle de son esprit.

BETTI était donc tout préparé pour suivre et pour embrasser les méthodes de RIEMANN avec l'enthousiasme qu'il mettait en toute chose.

Une sorte de réaction lui fit abandonner les procédés qu'il avait d'abord suivis et qui l'avaient conduit aux remarquables résultats dont nous avons parlé.

Nous sommes sûrs maintenant que ces procédés étaient plus féconds et plus appropriés à l'application qu'il avait en vue aux fonctions elliptiques, mais BETTI ne s'en aperçut pas.

Il avait été conduit tout d'abord à les suivre par le tour qu'avait pris son esprit en conséquence de ses premières études. C'est l'Algèbre en effet qui avait formé, pendant presque une dizaine d'années, le sujet de ses recherches et, s'il est possible de caractériser par un mot sa première théorie des fonctions transcendantes, c'est en l'appelant une *théorie de type algébrique*. Mais lorsque son tempérament de physicien prit le dessus sous l'influence de RIEMANN, l'initiation algébrique n'eut plus de prise sur lui et sa vraie nature et ses facultés s'épanchèrent librement dans un champ sans limites.

L'esprit critique de CASORATI, son amour pour l'enseignement, sa tendance aux applications, rattachent son nom à la troisième phase dont nous avons parlé.

Il commença, en 1868, son grand Ouvrage sur les fonctions de variables complexes dont le premier volume seulement a paru (*). Ce volume renferme une Introduction historique et critique d'un grand intérêt dont la lecture aura toujours un charme spécial.

On y découvre toute la puissance d'assimilation de son esprit, tout l'enthousiasme que les grands travaux d'ABEL, de JACOBI, de CAUCHY, de RIEMANN et de WEIERSTRASS avaient fait naître en lui. Et la conception nette de leurs découvertes et l'enthousiasme pour leur génie se transmettent irrésistiblement au lecteur. C'est peut-être de là que vient le caractère suggestif du Livre.

Il a servi plus que tout autre travail à divulguer et à populariser en Italie les conceptions fondamentales de la théorie des fonctions, parce que presque toutes les difficultés s'évanouissent en le lisant.

(*) {*Teorica delle funzioni di variabile complessa* esposta dal dott. FELICE CASORATI. Pavia, 1868}.

On ne saurait donc assez insister pour montrer le rôle qu'il a joué en Italie.

Combien de jeunes mathématiciens, chez nous, ont été enflammés par la lecture de ce Livre, et ont été poussés par CASORATI vers l'idéal le plus élevé de la Science!

Et à ce propos je vais noter une chose qu'il serait impossible de passer sous silence.

Il y a en Italie une école de géomètres dont l'originalité, la profondeur, l'ampleur des vues, la variété des résultats acquis à la Science, ont mérité tous les éloges.

Cette école a toujours préféré les méthodes synthétiques aux méthodes analytiques, c'est pourquoi un esprit superficiel pourrait croire qu'elle s'est développée à part sans ressentir l'influence d'autres écoles ni des pensées qui se rattachent aux questions d'Analyse. Cela n'est pas exact, et celui qui s'occupera un jour de l'histoire des Mathématiques en Italie dans notre siècle, ne devra pas négliger l'influence que les analystes et les géomètres purs ont exercée les uns sur les autres.

Influence profonde qui se révèle de jour en jour plus grande! Pour la montrer par un seul des traits qui la caractérisent, il me suffira de rappeler que les idées de RIEMANN ont joué un rôle fondamental dans les travaux des géomètres italiens. Or, si BETTI a introduit chez nous ces idées, on doit au Livre de CASORATI d'avoir pénétré partout et en particulier d'avoir attiré l'attention de nos géomètres purs.

C'est donc dans un cercle bien plus large et qu'on n'aurait pas même pu soupçonner au premier abord que cet Ouvrage a étendu son influence.

Si ce Livre révèle dans son Auteur des qualités d'écrivain de premier ordre, un ensemble de publications qui se rattachent à une idée que CASORATI n'a jamais abandonnée, et sur laquelle il n'a pas cessé de revenir jusqu'à ses derniers jours, montre sa profondeur et son originalité.

Frappé par la proposition de JACOBI sur l'impossibilité des fonctions à trois périodes distinctes, il tâche d'en construire avec un nombre quelconque de périodes en envisageant des fonctions à un nombre infini de valeurs.

C'est par là qu'il cherche à obtenir l'inversion directe de intégrales abéliennes.

Malheureusement cette tâche, n'a pas été accomplie et il s'est limité aux études préliminaires sur les surfaces de RIEMANN avec un nombre infini de feuillets et sur leur connexion.

Nous espérons que ces études préparatoires ne seront pas perdues.

Il serait impossible de suivre CASORATI dans les nombreuses questions qu'il a traitées en des Notes qui se succédèrent pendant toute sa vie. Il nous suffit de remarquer que presque toutes les questions vitales de la théorie des fonctions ont été abordées ou perfectionnées par lui et que nul point de son œuvre scientifique ne doit être négligé.

Si ce qui précède permet de concevoir les rapports mutuels des trois géomètres dont nous avons parlé, nous n'avons pu donner une idée exacte de la place absolue que chacun d'eux a dans le monde savant et dans l'histoire de la Science. Les travaux de BRIOSCHI en Algèbre et en Mécanique; ceux de BETTI en Algèbre et en Physique mathématique; ceux de CASORATI sur les équations différentielles, sortent, en effet, du cadre dans lequel nous sommes restés jusqu'à présent; mais ce sont toujours les caractères que nous avons reconnus qui dominent ces Ouvrages.

Nous voyons, en effet, BETTI être un des premiers qui aient compris, développé et systématisé les idées nouvelles de GALOIS, ces idées qui ont transformé l'Algèbre et sont en train de transformer l'Analyse.

Nous le voyons aussi donner pour la première fois une méthode génerale pour l'intégration des équations de l'élasticité, et bien des questions particulières de Mécanique fécondées par son esprit puissant conduisent à des thèories générales et à des vues nouvelles sur la conception philosophique des phénomènes de la nature.

BRIOSCHI commence sa longue carrière par l'étude d'une question de la théorie de la chaleur; il publie ensuite son célèbre *Traité sur les déterminants.* On lui est redevable d'avoir développé les théories des invariants et des covariants des Formes algébriques en faisant des applications très variées de ces théories générales.

Il comprend l'importance du Mémoire de GAUSS sur la théorie des surfaces, à une époque où ce Travail était encore negligé et il s'occupe des théories modernes de la Géométrie.

Dans la Mécanique, il étudie les questions de statique, il s'occupe de l'intégration des équations différentielles par la méthode de JACOBI, et consacre à l'équilibre et au mouvement des fluides des travaux devenus classiques.

Mais son penchant naturel vers les calculs et sa disposition à perfectionner des théories connues se montrent toujours soit par les méthodes qu'il préfère, soit par les questions particulières et par les applications auxquelles il donne le plus grand prix et dont il fait le plus grand cas.

Nous voyons enfin CASORATI, par une simple interprétation du calcul des différences finies, donner une théorie nouvelle des équations différentielles linéaires, théorie qui relie ensemble et met dans leur vrai jour bien des faits qui ne paraissaient pas avoir de rapports entre eux.

Il approfondit l'étude des équations différentielles algébriques et consacre aux formes différentielles, à la Géométrie analytique et à la Géométrie infinitésimale des articles qui ont fait beaucoup de bruit et excité beaucoup d'intérêt et où il aborde des questions vitales dans l'enseignement de l'Analyse.

Mais l'on ne pourrait pas terminer ce rapide aperçu sur tant de travaux, sans parler d'un problème célèbre où BETTI et BRIOSCHI ont acquis une renommée dès leur jeune âge, en montrant au monde mathématique tout leur talent.

J'entends parler de la résolution de l'équation du cinquième degré.

A ce souvenir, notre pensée se tourne naturellement vers le glorieux vieillard, honneur de la France et de notre siècle, auquel du profond de notre âme, avec des sentiments de respect, d'admiration et de gratitude nous envoyons un salut, qui réunit, j'en suis sûr, dans un élan unique, le cœur de tous les mathématiciens qui se trouvent ici.

Il a acquis une gloire immortelle par la résolution de ce problème, et son nom gardera sa célébrité dans les siècles qui viendront.

Autour de la figure de M. HERMITE qui se dresse au premier plan, on peut grouper trois mathématiciens: BETTI, BRIOSCHI et KRONECKER.

Le premier a été un précurseur qui a poussé bien loin ses recherches, mais qui, faute d'un pas à faire, n'a pas atteint le but.

BRIOSCHI, peu après la découverte de M. HERMITE et en même temps que KRONECKER, a apporté une telle lumière dans la questions qu'elle en a été presque renouvelée.

On voit poindre à cet instant de leur carrière ces différences des caracteres de BETTI et de BRIOSCHI qui devaient jouer un si grand rôle dans toute leur vie scientifique. On voit dans tout leur jour la tendance de BETTI à aborder des questions nouvelles, et la faculté de BRIOSCHI de les perfectionner.

Et c'est par là que je terminerai.

Je terminerai en associant les noms de BETTI et de BRIOSCHI si chers à l'Italie au nom de M. HERMITE si cher à la France.

Ma pensée revient à l'épisode par lequel j'ai commencé: au voyage de 1858, cette mémorable année où les grandes découvertes dont nous venons de parler ont été enfantées et qui marque le commencement de la tendre amitié entre les savants qui venaient d'Italie et celui qu'ils allaient chercher en France, amitié qui a duré quarante ans et qui a été toujours raffermie par le même dévouement à la Science, par la même confiance dans les hautes destinées de l'Humanité.

Que cette noble amitié soit le symbole des liaisons de fraternité qui réunissent les deux pays !

II.

SUR LES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

«Compte rendu du deuxième Congrès intern. des mathématiciens, Paris 1900» Parigi, 1902, pp. 377-378.

Tout le monde connaît le théorème de POISSON sur la fonction potentielle. Si ρ désigne la densité d'un corps fini S, et r la distance d'un point a, b, c de S au point x, y, z, et si l'on pose

$$V = \int_\varrho \frac{\rho\, dS}{r},$$

on a

$$\text{(A)} \qquad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -4\pi\rho,$$

si le point x, y, z fait partie de l'espace S.

(La densité ρ doit satisfaire à certaines conditions peu restrictives et très connues).

Ce théorème a été étendu sans difficultés à d'autres équations et à des systèmes d'équations differentielles du type elliptique.

Mais comment peut s'étendre ce théorème aux équations différentielles du type hyperbolique?

Soit x, y, z un point intérieur à l'espace S. Conduisons, en prenant le point x, y, z pour sommet, un cône de révolution ayant l'axe parallèle à x et dont l'ouverture soit de 45°. Soit S' la partie de S comprise à l'intérieur de l'une des nappes du cône. Si nous remplaçons V par

$$V' = \int_\varrho \frac{\rho\, dS'}{r'},$$

où

$$r' = \sqrt{(x-a)^2 - (y-b)^2 - (z-c)^2},$$

on aura

$$\text{(B)} \qquad \frac{\partial^2 V'}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 V'}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 V'}{\partial z^2} = 2\pi\rho.$$

De même, si nous appelons S'' la partie de l'espace S extérieure aux deux nappes du cône et si nous posons

$$V'' = \int_\varrho \frac{\rho\, dS''}{r''} \log \frac{r''^2}{\sqrt{(y-b)^2 + (z-c)^2}},$$

où

$$r'' = \sqrt{(y-b)^2 + (z-c)^2 - (x-a)^2},$$

on aura

$$\text{(C)} \qquad \frac{\partial^2 V''}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 V''}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 V''}{\partial z^2} = -2\pi^2 \rho .$$

Les théorèmes renfermés dans les formules (B) et (C) se déduisent aisément des formules (E) et (F') que j'ai données dans mon Mémoire *Sur les vibrations des corps élastiques isotropes* (« Acta math. », t. XVIII) (*). Elles peuvent aussi s'obtenir directement et ells peuvent s'étendre à d'autres équations et à des systèmes du même type.

Les formules (E) et (F') conduisent aussi à des résultats qui généralisent les théorèmes bien connus sur les discontinuités des dérivées des fonctions potentielles des surfaces et sur les discontinuités des fonctions potentielles des doubles couches.

Ces résultats comprennent des propriétés intéressantes que M. LEVI-CIVITA a obtenues directement par une voie différente [*Sopra una classe d'integrali dell'equazione* $A^2 \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}$ « Nuovo Cimento », 4e série, t. IV; 1897) (**)].

(*) In queste « Opere »: vol. secondo, III, pp. 19-73.
(**) « Opere matematiche »; Bologna, Zanichelli; vol. primo (1954), XVII, pp. 305-309.

III.

SUI TENTATIVI DI APPLICAZIONE DELLE MATEMATICHE ALLE SCIENZE BIOLOGICHE E SOCIALI (*)

«Annuario della R. Università di Roma», 1901–02, pp. 3–28.

ANATOLE FRANCE, quell'acuto e geniale filosofo e romanziere, delizia di tanti delicati lettori, racconta questo aneddoto.

Alcuni anni fa, dice, visitavo in una grande città d'Europa le gallerie di storia naturale insieme con uno dei conservatori, il quale mi descriveva con la maggior compiacenza gli animali fossili.

Egli mi istruì benissimo fino ai terreni pliocenici; ma, allorché ci trovammo dinanzi ai primi vestigi dell'uomo, volse la testa ed alle mie domande rispose che quella non era la sua vetrina.

Sentii la mia indiscrezione. Non bisogna mai domandare ad uno scienziato i segreti dell'universo che non sono nella sua vetrina.

Se ad uno spirito fine, ma paradossale, come ANATOLE FRANCE, è permesso concludere dalla sua ingenua avventura che gli scienziati sono la gente meno curiosa del mondo, e che per ciascuno di essi ciò che si trova fuori della propria vetrina non lo interessa, noi ci guarderemo bene dal trarre una simile conseguenza; ma considereremo piuttosto quel fatto come un simbolo che rappresenta la naturale e spesso giustificata ritrosìa che hanno coloro che si dedicano agli studi di esporre idee ed affermazioni fuori del campo in cui si svolgono di solito i loro pensieri ed in cui si aggira la loro attività scientifica.

Ma negli uomini di scienza la curiosità è ben grande di guardar fuori e lontano; vivo è il desiderio di frugare nella vetrina degli altri per ben conoscere il valore della propria, ed il fare talvolta un inventario comune fra colleghi vince quel riserbo che tratteneva l'amico di ANATOLE FRANCE dinanzi ad un estraneo.

(*) Discorso inaugurale per l'anno accademico 1901–1902 della R. Università di Roma, ripubblicato in: «Giornale degli Economisti», serie 5ª, vol. XXIII, 1901, pp. 436–458; «La Revue du Mois», Paris, t. I, 1906 (trad. franc. di L. ZORETTI), pp. 1–20; «Archivio di Fisiologia», vol. III, Firenze, 1906, pp. 175–191; «Saggi scientifici», Bologna, Zanichelli, 1920, pp. 1–33. In queste successive ristampe figurano, con qualche inessenziale modificazione di forma, di cui è sembrato inutile tener conto, una breve aggiunta al testo del discorso e taluni interessanti complementi alle note a pie' di pagina. Questa aggiunta e questi complementi si son qui riprodotti, rinchiudendoli in parentesi a graffe { }. [N. d. R.].

Ed in chi si è dedicato agli studi di matematiche tale curiosità e simile desiderio son molto maggiori che non in coloro che si occupano di altre discipline.

Il matematico si trova in possesso di uno strumento mirabile e prezioso, creato dagli sforzi accumulati per lungo andare di secoli dagli ingegni più acuti e dalle menti più sublimi che sian mai vissute. Egli ha, per così dire, la chiave che può aprire il varco a molti oscuri misteri dell'Universo, ed un mezzo per riassumere in pochi simboli una sintesi che abbraccia e collega vasti e disparati risultati di scienze diverse.

Mentre egli impiega la propria vita e le forze del suo ingegno nell'affinare e perfezionare i suoi metodi, e nel renderli adatti e pronti ad ogni più delicata ricerca e ad una sempre più vasta comprensione di fatti, è di continuo premuto da un'onda crescente di studiosi che lo richiedono di aiuto e spesso sperano da lui più di quanto egli non possa.

È dato solo a rari spiriti, altamente speculativi, spaziare nella sfera dei numeri e degli enti astratti della geometria e della logica, restando indifferenti ed estranei a tutto ciò che si agita, vive e si trasforma d'intorno, lavorando, come diceva JACOBI, al solo fine della gloria del pensiero umano.

È naturale invece nei più il desiderio di volger la mente fuori della cerchia della pura analisi matematica; d'informarsi, di comparare la riuscita dei vari mezzi di cui essa dispone, e classificarli in vista delle loro applicazioni, onde poter rivolgere la propria attività a perfezionare i più utili, a rafforzare i più deboli, a crearne dei più potenti.

Ma è intorno a quelle scienze nelle quali le matematiche solo da poco tempo hanno tentato d'introdursi, le scienze biologiche e sociali, che è più intensa la curiosità, giacché è forte il desiderio di assicurarsi se i metodi classici, i quali hanno dato così grandi risultati nelle scienze meccanico–fisiche, sono suscettibili di essere trasportati con pari successo nei nuovi ed inesplorati campi che si dischiudono loro dinanzi.

Signori, è cedendo al fascino di esporvi l'impressione che un matematico può provare dinanzi ad alcuni di questi nuovi tentativi, messi a confronto colle classiche applicazioni delle matematiche, che io, vinta la naturale ritrosia, mi permetto di escire dall'àmbito de' miei studi, chiedendo però il vostro compatimento se non mi sarà dato altro che brevemente aggirarmi in un campo limitato impari certo al soggetto, il quale collegato strettamente ai più grandi problemi della filosofia e della storia delle scienze, sarebbe per sé tanto vasto.

Il seguire infatti e comparare gli antichi e nuovi cammini che le matematiche han tenuto, infiltrandosi nei vari rami dello scibile; il veder l'effetto che in essi si è suscitato e quello che le matematiche per naturale reazione han risentito; lo sviscerare le mutue relazioni che ne sono nate, mentre offrirebbe un quadro grandioso ed una superba sintesi di una gran parte del lavoro compiuto dall'umano pensiero, e darebbe una guida nel suo futuro progredire, sarebbe argomento d'immane studio assai superiore alle mie forze.

Allorché ARAGO settant'anni fa leggeva all'Accademia di Parigi quella sua memorabile vita di FRESNEL, che riassumeva le cognizioni dell'ottica ai suoi tempi, egli chiedeva ai suoi uditori, come in altra occasione FONTENELLE, tanta attenzione quanta ne occorre per tener dietro all'intreccio di un romanzo; io desidero di non chiedere di più a voi, e a soddisfare questo desiderio consacrerò i miei sforzi.

Prima di ogni altra cosa credo necessario chiarire un punto molto delicato attinente al nostro soggetto.

Dalle matematiche alcuni si aspettano troppo poco, ed altri troppo, e ciò spiega la fredda diffidenza di alcuni, l'entusiasmo caldo di altri per le nuove loro applicazioni.

Se è vero il detto, che esse non rendono altro che ciò che loro si dà, e che l'analisi nulla aggiunge di essenziale ai postulati che costituiscono il substrato di ogni svolgimento matematico, d'altra parte è pur noto che le matematiche son la strada maestra per giungere alle leggi generali e la guida più sicura per immaginare nuove ipotesi, ossia per cangiare e perfezionare quegli stessi postulati che formano la base di ogni singola trattazione; giacché offrono il mezzo più squisito per saggiarli, portandoli dal campo dell'astrazione a quello della realtà. Ed invero, nulla meglio del calcolo permette di compararne esattamente le conseguenze più lontane coi dati delle osservazioni e delle esperienze.

Ma la storia della scienza è pronta ancora a dimostrarci qualche cosa di più, e ad indicarci una più efficace e diretta cooperazione delle matematiche alla percezione e comprensione della natura.

Allorché col calcolo veniamo a stabilire l'andamento preciso di due fenomeni, in apparenza diversi, e troviamo una identità nel modo col quale essi avvengono, o, come si dice, troviamo che son regolati dalle stesse equazioni, non vi è spesso che un sol passo per concludere che i due fatti costituiscono due apparenze di un fatto solo.

Tale e non altro fu il procedimento col quale il MAXWELL giunse a riconoscere che le perturbazioni elettro–magnetiche e la luce sono una stessa cosa; scoperta che aprì la via alle memorabili ricerche di HERTZ, che cambiaron faccia alla fisica, e ispirarono le pratiche invenzioni di FERRARIS e di MARCONI.

Nessuno può quindi dire al geometra a quali ampi orizzonti condurrà lo stretto e spinoso sentiero che il calcolo gli fa seguire.

Avrebbe forse sospettato lo stesso LAGRANGE, allorché ideava la meccanica analitica, che egli non solo creava un potente metodo ed una guida sicura in ogni più difficile questione della scienza del moto e dell'equilibrio, ma che le sue formule sarebbero divenute un giorno, nelle mani di uomini di genio come MAXWELL e HELMHOLTZ, così comprensive da abbracciare e dominare tutti i fenomeni del mondo fisico?

Eppure se tanta è la importanza dell'analisi, è necessario limitarne al suo giusto grado la portata.

Disgraziatamente i matematici di professione sono separati dal resto del mondo da una barriera di simboli, che danno un certo aspetto di mistero alle loro elucubrazioni ed alle opere loro, tanto che i non iniziati ai segreti del calcolo e dell'algebra si fanno talora l'illusione, che i loro mezzi siano di una natura diversa da quelli di cui il comune ragionamento dispone.

È un errore analogo a quello che fan molti sulla potenza delle macchine delle quali è celato ed oscuro il meccanismo.

Ebbene, come già ebbi a dire in altra occasione, fra il ragionamento grossolano, che anche a chi è ignaro del calcolo pur fa prevedere in molti casi l'andamento di certi fenomeni ed il meccanismo delle forze che li governano, ed il ragionamento sottile del geometra che, da un insieme artifizioso di simboli algebrici, in una maniera che spesso desta meraviglia anche nei più esercitati e rotti alle disquisizioni analitiche, giunge al risultato che precisa l'andamento degli stessi fenomeni naturali, non corre quel divario che a tutta prima parrebbe. Anzi, se esaminiamo le cose con accuratezza, si vedrà che quest'ultimo sottile procedimento non è altro in sostanza che il primo rozzo ragionamento più perfezionato ed affinato. Ed oltre a ciò si può dire che nella mente del geometra quel primo rozzo ragionamento ha preceduto il calcolo e lo ha guidato, indicandogli su per giù dove doveva arrivare e quanto gli era permesso tentare.

In certo modo esso rappresenta la greggia armatura su cui l'intero edificio analitico è costruito. Ma, quando noi vediamo il lavoro compiuto, ci troviamo in presenza di un monumento magnifico che è già stato spogliato di tutti i ponti e i sostegni. I puntelli che hanno servito a reggere le cupola in costruzione sono spariti, ed essa appare agli occhi meravigliati di chi la guarda come un miracolo di costruzione.

Non con soverchie speranze quindi, né avendo nell'animo illusioni spesso dannose, ma nemmeno con indifferenza, deve essere accolto ogni nuovo tentativo di sottoporre al calcolo fatti di qualsiasi specie.

Il passaggio di una scienza dall'epoca che dirò prematematica a quella in cui essa tende a divenir matematica, resta caratterizzato da ciò: che gli elementi, che essa studia, vengono esaminati in modo quantitativo anziché qualitativo; onde in questa transizione le definizioni che richiamano soltanto alla mente l'idea degli elementi stessi con una immagine più o meno vaga, cedono man mano il posto a quelle definizioni o a quei principii che li determinano, offrendo invece il modo di misurarli.

Quale importanza per esempio nella meccanica Newtoniana viene ad avere il primitivo concetto di forza espresso nei termini: « la forza è la causa di moto », di fronte alle due prime leggi che non dànno in fondo altra cosa che il modo di misurarla? Tanto poco, che in alcuni moderni tentativi di rifacimento della meccanica la stessa parola forza, quest'ultimo residuo verbale di personificazione nel mondo inorganico, poté essere soppressa, soli restando a sostuitirla quegli elementi che combinati ne dànno la grandezza.

In virtù di questo classico ricordo e di mille altri analoghi, che facilmente potrebbero citarsi, salutiamo con gioia il tentativo di GALTON di misurare numericamente certi elementi della teoria dell'evoluzione organica, come la eredità e la variazione (1).

Forse il GALTON in questa via non ha mosso che un primo, incerto e debole passo. Forse sono da accogliersi le critiche rivolte ai suoi risultati e molto dovremo cambiare in ciò che egli ha fatto; ma dobbiamo pur riconoscere che l'alba di un nuovo giorno appare col sorgere del metodo da lui inaugurato.

Però, il tradurre nel linguaggio dell'artimetica o della geometria i fatti della natura, è piuttosto schiudere il varco alle matematiche che non porre in opra lo strumento dell'analisi.

Lo studiare le leggi con cui variano gli enti suscettibili di misura, l'idealizzarli, spogliandoli di certe proprietà o attribuendone loro alcune in modo assoluto, e lo stabilire una o più ipotesi elementari che regolino il loro variare simultaneo e complesso; ciò segna il momento in cui veramente si gettano le basi sulle quali potrà costruirsi l'intero edificio analitico.

Ed è allora che si vede rifulgere tutta la potenza dei metodi, che la matematica largamente pone a disposizione di chi sa usarli.

I cultori della economia politica, per esempio, hanno potuto sperimentare, sebbene questa scienza sia solo all'inizio di una tal via, con quale semplicità di mezzi essa conduca a rappresentare, come in un quadro, il meccanismo che vincola fra loro gli elementi del mondo economico, e come il calcolo algebrico esprima la grandezza dei cambiamenti di ciascuno col mutare di alcuni di essi o delle condizioni in cui si trovano; mentre la economia prematematica non raggiunse mai la visione completa del quadro o solo adombrò vagamente alcune di quelle relazioni.

Plasmare dunque concetti in modo da potere introdurre la misura; misurare quindi; dedurre poi delle leggi; risalire da esse ad ipotesi; dedurre da queste, mercè l'analisi, una scienza di enti ideali, sì, ma rigorosamente logica; confrontare poscia colla realtà; rigettare o trasformare, man mano che nascono contraddizioni fra i risultati del calcolo ed il mondo reale, le ipotesi fondamentali che han già servito; e giungere così a divinare fatti ed analogie nuove, o dallo stato presente arrivare ad argomentare quale fu il passato e che cosa sarà l'avvenire; ecco, nei più brevi termini possibili, riassunto il nascere e l'evolversi di una scienza avente carattere matematico.

Il cammino è lungo, ed è aspro, ed è sparso di difficoltà. Si pensi che i più remoti vestigi della civiltà umana ci tramandano tracce non dubbie di misure astronomiche fatte da popoli primitivi; eppure la meccanica celeste

(1) *Natural Inheritance* by FRANCIS GALTON, London 1889. – {In un corto, ma molto interessante articolo del DAVENPORT, nel quale è esposta la storia di questi studi (« Science », N. S. XII, n. 310) egli osserva che il GALTON è stato principalmente spinto verso le sue ricerche dai lavori del QUETELET}.

non conta nemmeno tre secoli di vita. Qual meraviglia dunque se ancora limitati di fronte ai desideri, alle speranze, alle immoderate richieste, sono i risultati che il calcolo ha potuto ottenere in quelle scienze che erano pur ieri nel periodo prematematico e che lottano ancora oggi per escirne?

Ma vediamo senz'altro in azione questi metodi dell'analisi e miriamoli alle prese colle nuove questioni nelle quali hanno tentato di introdursi.

Fra le scienze fisiche ve ne è una che fu sempre a capo di tutte le altre, che le altre guidò, mentre queste vennero man mano imitandola e prendendola come esempio.

È questa scienza la meccanica, ed essa costituisce, insieme alla geometria, se non la più brillante, certo la parte più solida e sicura delle conoscenze di cui la mente umana si gloria.

Ora, non fra le biologiche, ma fra le scienze sociali, possiamo trovare un ramo di ricerche, la economia pura, che si è venuta foggiando sulla meccanica ed ha impiegato anch'essa i suoi procedimenti, si è giovata dei suoi metodi ed è pervenuta a risultati analoghi.

La meccanica, al pari di tutte le altre scienze fisiche e della economia, deve il successo all'uso dei metodi infinitesimali, i quali costituiscono l'ausilio analitico più delicato e ad un tempo più potente che sia stato mai immaginato.

Non è facile cosa, né sarebbe breve, lo spiegare l'essenza dell'analisi infinitesimale, anche spogliandola di tutto ciò che non è necessario, e mettendo a nudo lo scheletro su cui è costruita questa superba e nobile creazione di LEIBNITZ e di NEWTON. Né mi ci proverò. Dirò solo che i fenomeni naturali, di qualunque specie siano, a primo aspetto si presentano con una apparenza complessa. Ciò che avviene oggi è frutto di tutto quello che si è verificato nel passato; i cambiamenti che hanno luogo in un punto dello spazio sono dipendenti e legati a quelli che avvengono in tutti gli altri luoghi. Il voler scoprire ad un tempo tutti questi vincoli nascosti sì, ma di cui si palesano le conseguenze; il volerli abbracciare con uno sguardo solo e il dominarli tutti, sembra, al primo momento, opera non solo difficile ma impossibile, sebbene essa appaia necessaria se vogliamo formarci un'idea completa dei fenomeni stessi.

In qual modo il metodo infinitesimale riesce a districarsi da un simile viluppo che preme da ogni parte e sembra soffocare ogni sforzo diretto ad escirne?

Immaginiamo il succedersi degli eventi in un tempo infinitamente piccolo ed in uno spazio pure infinitesimo. Diviene allora possibile scindere nei mutamenti degli elementi variabili le parti predominanti dalle altre trascurabili di fronte a queste, e, se ci è concesso misurare le prime o stabilire fra loro delle relazioni, resta possibile risalire, mediante questi dati, da ciò che ha luogo in un certo istante e in una certa plaga, a quello che avverrà col proceder del tempo per tutto, fin dove cioè le leggi elementari trovate restano soddisfatte.

Fissare tali leggi elementari si chiama porre le equazioni differenziali; risalire da esse di passo in passo, calcolando ogni singolo elemento, si chiama integrarle. Quest'ultima operazione il geometra può da solo eseguirla, anche se ignora, come spesso avviene, la questione concreta a cui mirano e a cui serviranno le sue formule, nello stesso modo che l'oscuro e paziente minatore, perduto nelle viscere della terra, arricchisce l'umanità di immani tesori di energia, mentre ignora se il combustibile, che egli penosamente cava dal suolo, servirà a dar vita ad un'industria, o farà splendere di mille faci le nostre notti, o spingerà la nave nei mari lontani.

È in virtù del calcolo infinitesimale, che possiamo, per esempio, seguire il moto degli astri, enunciar la legge con cui vibra la corda di un'arpa, e calcolare gli effetti delle più potenti macchine, ed è pure con questo mezzo che le equazioni differenziali della economia poterono esser poste.

Un confronto fra la meccanica e l'economia pura si presenta facilmente. Immaginiamo perciò di cogliere le impressioni che un cultore della meccanica può risentire nello studio della economia (2).

Il concetto dell'*homo œconomicus* che ha dato luogo a tante discussioni, che ha suscitato così grandi difficoltà e che tuttora trova delle menti ribelli ad accettarlo, riesce al nostro meccanico così naturale, che egli prova una vera sorpresa dell'altrui diffidente meraviglia suscitata da questo essere ideale e schematico. Egli vede nell'*homo œconomicus* un concetto analogo a quelli che per una lunga consuetudine gli son divenuti famigliari. Egli è avvezzo infatti ad idealizzare le superficie ritenendole senza attrito, i fili ammettendoli inestendibili, i corpi solidi supponendoli indeformabili, ed è solito a sostituire ai fluidi della natura i liquidi ed i gas perfetti.

E non solo ha l'abitudine di tutto ciò, ma sa il vantaggio che recano questi concetti.

Se il cultore della meccanica procede innanzi, si accorge, che tanto nella sua scienza che in quella economica tutto si riduce ad un giuoco di tendenze e di vincoli, questi limitanti l'azione delle prime, che per reazione generano delle tensioni. Da questo insieme nasce talora l'equilibrio, talora il moto, d'onde una statica ed una dinamica e nell'una e nell'altra scienza.

Noi abbiamo già accennato alle vicende che l'idea di forza ha avuto in meccanica; dalle vette della metafisica essa è discesa nel campo degli enti

(2) Cfr. *Principii di economia pura* per MAFFEO PANTALEONI. Firenze 1894. Vedi *Mathematical investigations in the Theory of value and prices* by Dr. IRVING FISHER («Trans. of the Connecticut Academy», Vol. IX. July 1892). Una esposizione del modello meccanico immaginato da FISHER è stata fatta dal Col. BARONE nel Vol. VIII, Serie 2ª del «Giornale degli Economisti». Come appendice all'opera del FISHER si trova una bibliografia degli scrittori matematico-economici. {Nella «Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften» (Leipzig, Teubner) PARETO ha pubblicato nel 1902 un interessante articolo: *Anwendungen der Mathematik auf Nationalöconomie*, ove si trovano riassunte le idee fondamentali, le diverse teorie ed i principali risultati sopra questo soggetto, insieme con una ricca bibliografia}.

misurabili. Così in economia non è più ora il momento di parlare col JEVONS della espressione matematica delle quantità non misurabili (3). Lo stesso PARETO sembra rinunziare all'idea di Ofelimità, che era la pietra angolare del suo primitivo edificio (4) e viene a concetti puramente quantitativi colle sue curve di indifferenza che corrispondono così bene alle curve di livello e alle superficie equipotenziali della meccanica (5).

Le teorie molecolari ed atomiche inducono a concepire discontinua l'intima costituzione dei corpi; LAMÈ, CAUCHY e tutti coloro che stabilirono la teoria matematica dell'elasticità, la cui grande portata e le continue applicazioni pratiche si rivelano ogni giorno, poterono raggiunger lo scopo solo passando, con un vero tratto di genio, dal discontinuo al continuo. Ora, analogamente a quanto fecero i creatori della teoria della elasticità, e FOURIER in quella del calore, gli economisti suppongono che le quantità di beni di cui ciascuno può disporre, le quali di natura loro sarebbero discontinue, varino per gradi continui.

Finalmente il nostro meccanico ravvisa nel processo logico per ottenere le condizioni dell'equilibrio economico, lo stesso ragionamento che egli fa per stabilire il principio dei lavori virtuali, e, allorché si trova dinanzi alle equazioni differenziali dell'economia, prova il desiderio di applicarvi per primo quei metodi di integrazione che ben conosce alla prova (*).

Noi abbiamo così veduto una disciplina, la quale fa parte di quelle dette morali, che, pur conservando la sua schietta originalità, si va assimilando i metodi matematici, e nel breve periodo trascorso dalla comparsa delle opere del WHEWELL, del COURNOT, del GOSSEN e del WALRAS (6) ad oggi, ne ha

(3) *The Theory of political Economy* by W. STANLEY JEVONS. London 1888. - {È interessante seguire l'origine e il corso delle idee di JEVONS, che possono riattaccarsi a quelle di LAPLACE e di BERNOUILLI e, secondo il PANTALEONI, agli studi fatti da JEVONS sotto la direzione di DE MORGAN (cfr. *Contributo alla teoria del riparto delle spese pubbliche*, inserito negli *Scritti varii di Economia politica* sopra citati)}.

(4) VILFREDO PARETO, *Cours d'économie politique professé à l'Université de Lausanne*. Lausanne 1896.

(5) *Sunto di alcuni capitoli di un nuovo trattato di economia politica* del Prof. PARETO. «Giornale degli Economisti», Serie II, Anno XI, Vol. XX. - {Vedere anche l'articolo sopra citato della «Encyklopädie der Math. Wiss», §§ 3, 4 e l'appendice al *Manuale di Economia* pubblicato dal PARETO (Milano, Soc. ed. libraria, 1906)}.

(*) {Vedi AMOROSO LUIGI, *Sulle analogie fra l'equilibrio meccanico e l'equilibrio economico* (Modena, 1910); *Contributo alla teoria matematica della dinamica economica* (Roma, 1912)}.

(6) Le memorie più antiche di economia politica di questi autori sono:

WHEWELL WILLIAM, *Mathematical Exposition of some Doctrines of Pol. Econ.* «Cambridge Phil. Trans.», Vol. VIII, 1829; COURNOT ANTOINE AUGUSTIN, *Recherches sur les Principes Mathématiques de la Théorie des richesses*, 1838; GOSSEN HERMANN HEINRICH, *Entwickelung der Gesetze des menschlichen Verkehrs und der darausfliessenden Regeln für menschliches Handeln*, Braunschweig 1854; WALRAS MARIE ESPRIT LÉON, *Eléments d'économie politique pure ou théorie de la richesse sociale*, Paris 1874; LEONE WALRAS è figlio di WALRAS ANTOINE AUGUSTE pure economista, autore dell'opera: *De la nature de la richesse et de l'origine de la valeur*. Paris 1831.

posto a largo contributo le teorie. Non altrettanto avanzate, sebbene di non minore interesse, ci appaiono le applicazioni delle matematiche alle scienze biologiche.

Esiste, è vero, in Germania una scuola capitanata da un uomo di grande ingegno, la quale ha preso il nome di scuola biomeccanica, ma non ci sembra per ora di ravvisare in essa quelle caratteristiche che rivelano l'inizio di un periodo veramente matematico (7).

Vi sono pure dei rami della fisiologia, come l'ottica fisiologica, l'acustica fisiologica, nei quali degli uomini come l'HELMHOLTZ hanno portato tutto il contributo, non solo del loro genio, ma della loro cultura universale in larga parte matematica (8); vi è anche ciò che si può chiamare una termodinamica fisiologica (9); vi sono gli studi classici dei WEBER sulla circolazione del sangue, ossia sul moto dei fluidi nei vasi elastici e contrattili, e gli studi meccanico-fisiologici sul camminare, correre e saltare (10), e molti altri dei quali mi permetto non far cenno, e in tutti questi l'applicazione del calcolo è molto avanzata ed è feconda di utilissimi risultati; ma queste mirabili e spesso mature ricerche appaiono piuttosto appartenere ai vari rami della fisica matematica e della meccanica, che non ad un campo nuovo ove le matematiche abbian trovato un'applicazione originale.

Per questa sola ragione, lasciandole da parte, veniamo senz'altro a quei tentativi che sono, è vero, appena iniziati, ma che attaccano delle questioni nuove proprie alla biologia.

I risultati loro non hanno ancora raggiunto quel grado di sicurezza che si manifesta nelle ricerche sopra ricordate. Perciò esse sollevano ancora dei dubbi, ma, non fosse che per questa ragione, solleticano maggiormente la curiosità.

Questi tentativi riguardano le questioni della classificazione e dell'evoluzione, questioni del resto fra loro strettamente legate, tanto che le teorie genetiche tendono a far dipendere l'una dall'altra.

Basta l'esame più superficiale per accorgersi subito che gli studi matematici iniziati in questo campo presentan tutti le caratteristiche proprie ad

(7) Vedi: WILHELM ROUX, *Gesammelte Abhandlungen über Entwickelungsmechanik der Organismen*, Leipzig 1895.

(8) HELMHOLTZ HERMANN, *Handbuch der physiologischen Optik*, Hamburg 1894; *Die Lehre von den Tonempfindungen als physiol. Grundlage für die Theorie der Musik*, Braunschweig 1877.

(9) Cfr. *Les transformations d'énergie dans l'organisme* par ANDRÉ BROCA, « Rapports présentés au congrès international de Physique réuni à Paris en 1900 », T. III. Paris 1900.

(10) *Théorie der durch Wasser oder andere inkompressibele Flüssigkeiten in elastischen Röhren fortgepflanzten Wellen von* WILHELM WEBER, « Berichte d. k. Sächs. Ges. d. Wiss., math. phys. Klasse », XVIII, 1866. Cfr. la mem. di E. H. WEBER, *Ueber die Anwendung der Wellenlehre auf die Lehre vom Kreislaufe des Blutes und insbesondere auf die Pulslehre* (Ibid. 1850); *Mechanik der menschlichen Gehwerkzeuge. Eine anatomisch-physiologische Untersuchung* von W. WEBER und E. WEBER, 1836. - {Questi studi furono preceduti da una lunga serie di lavori fra i quali sono memorabili le profonde ricerche del BORELLI (*De motu animalium*, Roma 1630). - Riguardo alla Scuola detta Iatromatematica, a capo della quale fu il BORELLI, vedi, per esempio, la *Storia della Medicina* dello SPRENGEL, Venezia, 1814}.

un primo stadio di ricerche o piuttosto ad un periodo di orientamento, ed infatti troviamo che soli vi dominano il metodo dell'analogia matematica e quello statistico fondato sul calcolo delle probabilità e sulla teoria degli errori.

Anzi, gli studi della scuola, che possiam chiamare biometrica, non sono da separarsi dalle classiche ricerche statistiche proprie ai fenomeni sociali.

Il metodo dell'analogia in fisica matematica non è certamente nuovo.

Sono passate oggi molte illusioni sul modo di dare una spiegazione meccanica dell'Universo. Ora, se la fiducia di spiegare tutti i fenomeni fisici con leggi simili a quella della gravitazione universale o con un unico meccanismo, è venuta a svanire, andò concretandosi, quasi a compenso di tutto questo edificio di speranze che stava crollando, l'idea dei modelli meccanici, i quali, se non soddisfano chi cerca sistemi nuovi di filosofia naturale, contentano provvisoriamente coloro, che, più modesti, si appagano di ogni analogia e specialmente di ogni analogia matematica che valga a dissipare un poco le tenebre avvolgenti tanti fatti naturali.

Un modello meccanico di un fenomeno è infatti un apparecchio, il quale viene architettato senza preoccuparsi se nella sua essenza abbia rapporto alcuno col fenomeno stesso; ma è costruito con la sola condizione che, quando sia posto in moto, certe sue parti si spostino o mutino seguendo le stesse leggi con cui cambiano altrettanti elementi variabili nel fenomeno: elementi che si assumono quali parametri fondamentali di esso.

L'esperienza ci insegna che i modelli furono utili e servirono, come servon tuttora, ad orientarci nei campi della scienza più nuovi, più oscuri e nei quali si cerca a tentoni la via.

Si deve dunque accogliere l'ardito tentativo del più illustre astronomo dei nostri giorni, lo SCHIAPARELLI, di costruire un modello geometrico atto allo studio delle forme organiche e della loro evoluzione [11], con quel medesimo interesse con cui sono accettati e studiati i modelli meccanici di MAXWELL e di BOLTZMANN della induzione elettrica e dei cicli termici [12]; tanto più che non gravi difficoltà si opporrebbero a trasformare il modello stesso dello SCHIAPARELLI da geometrico in meccanico, rendendolo così ancor più intuitivo.

È necessario pertanto distinguere nell'opera dell'astronomo italiano, onde bene afferrarla, due parti: quella che concerne la vera e propria rappresentazione geometrica delle variazioni del mondo organico, da quella relativa ad una ipotesi, se non interamente nuova, almeno esposta sotto forma nuova, giacché l'autore vi ha applicato il suo modello cimentandolo subito alla prova.

Anche coloro che sono appena iniziati alle più elementari nozioni di geometria sanno che le linee si classificano; che abbiamo per esempio la retta,

(11) *Studio comparativo tra le forme organiche naturali e le forme geometriche pure* del Prof. SCHIAPARELLI, Milano Hoepli, 1898.

(12) Cfr. {ANTONIO GARBASSO, *Fisica d'oggi, filosofia di domani*, Milano 1910}. – *Vorlesungen über Maxwells Theorie der Elektricität und des Lichtes* von Dr. LUDWIG BOLTZMANN, Leipzig 1891.

il cerchio, e che le curve appartenenti alla famiglia delle coniche si distinguono nella ellisse, nell'iperbole e nella parabola. Lo SCHIAPARELLI ha cercato di stabilire un parallelo fra il modo col quale possono classificarsi le curve appartenenti ad una stessa famiglia e un sistema qualunque di enti della natura organica aventi certi caratteri comuni e raccolti sotto una medesima divisione, sia poi questa designata col nome di ordine, di classe, di regno.

Tutte le curve di una stessa famiglia soddisfano, al pari degli esseri organizzati, alla legge di correlazione fra le parti, e ciascuna dipende dai valori di certi parametri che possono supporsi individuare un punto, onde il passaggio da una forma ad un'altra può caratterizzarsi col movimento di questo.

Se si ammette che la natura degli esseri organici possa individuarsi mediante analoghi parametri, l'ipotesi di DARWIN sulla trasformazione delle specie trova una immagine o un modello in un simile movimento rispondente in modo poco meno che esclusivo alla legge della selezione naturale, fondata sulla lotta per l'esistenza.

Ma lo SCHIAPARELLI ravvisa nel mondo inorganico, come in quello organico, una legge generale che lo induce a modificare l'edifizio Darwiniano aggiungendovi una nuova ipotesi, con che giunge a ciò che chiama il principio della evoluzione regolata o a tipi fissi.

Nel regno inorganico egli vede infatti emergere dal fondo generale dei fenomeni, una spiccata tendenza alla creazione di tipi specifici ben determinati e distinti l'uno dall'altro, le cui serie o classi procedono per differenze notabili e non per gradazioni insensibili, e questa stessa tendenza gli apparisce ancor più manifesta nel regno organico. Quindi, nel suo schema geometrico, egli pone in evidenza delle serie discrete di punti i quali corrispondono alle forme che sono predestinate a dare il tipo di quelle specie, che per un complesso di circostanze a noi ignote, son le sole possibili. Colla nuova ipotesi il moto che rappresenta la evoluzione cessa dall'esser libero come nella ipotesi pura Darwiniana; ma resta vincolato da questi punti fissi, l'allontanamento dai quali ingenererebbe delle speciali reazioni paragonabili alle forze elastiche.

Queste considerazioni sulla questione più vitale e più moderna che agiti le menti sono così intimamente collegate al modello geometrico, che non si saprebbe immaginare alcun modo di esprimerle senza ricorrere al linguaggio che esso spontaneamente offre.

Basterebbe questa sola circostanza per rendere il tentativo dello SCHIAPARELLI meritevole della più alta considerazione, giacché non è poca cosa l'offrire ad una scienza un linguaggio, specialmente quando esso ha le sue scaturigini da una fonte sì pura come quella geometrica. Quante teorie son passate, e per i più son sepolte nell'oblio; pur di loro resta ancora un vestigio che dimostra che non passarono inutili sulla terra. È sufficiente che esse abbiano foggiato un termine solo del nostro linguaggio, perché possa dirsi che una lontana scintilla della loro esistenza anima anche oggi la gran fiaccola del sapere, onde qualche cosa di loro, attraversando i secoli, vive sempre utilmente.

L'opera dello SCHIAPARELLI però, più che risolvere, apre ed aggiunge una nuova e particolare questione alle tante che già tengono il campo della biologia; ora anche i più accaniti avversari della scuola biometrica non posson negare che questa si è prefissa di dar risposta alle innumerevoli domande ed ai mille problemi che son nati e si affollano in seguito ai concepimenti grandiosi di LAMARCK, GEOFFROY SAINT-HILAIRE e DARWIN, partendo da osservazioni e misure e giovandosi per discuterle o di metodi già noti, o di nuovi metodi che essa va creando. L'opposizione contro di essa mira piuttosto a colpire le applicazioni, forse troppo particolari che sono state fatte e alcuni risultati, che non il metodo matematico per se stesso, il quale ne forma la base. Ma è appunto questo che noi desideriamo oggi porre in evidenza (13).

Nessuno meglio del PEARSON ha mostrato le ragioni per cui la nuova via fu tentata, e nessun altro ne ha più nettamente delineato lo scopo e indicata la portata (14).

È necessario, secondo il PEARSON, liberare la mente, nello stato presente delle nostre cognizioni, dall'idea di un meccanismo della eredità e rinunciare alla speranza di ottenere una relazione matematica fra ogni singolo genitore ed ogni singolo discendente. Le cause dell'eredità, naturale nei casi speciali, sono talmente complesse da non ammettere una esatta trattazione. Si deve quindi incominciare dall'esame in massa di un numero grandissimo di casi, discendendo soltanto poi di mano in mano a classi sempre più limitate; e non si deve mai stabilire regole generali desumendole da singoli esempi. In altri termini bisogna procedere coi metodi statistici, non con la considerazione di casi tipici. Ciò forse può scoraggiare oggi il medico pratico a cui interessa, per esempio, l'eredità morbosa in una speciale famiglia molto più che una media ed una probabilità riguardante un'intiera classe di persone. Ma d'altra parte tutto dimostra che nello studio dell'eredità, come in quello della variazione, ci troviamo di fronte ad un numero grandissimo di piccole cause che agiscono tutte contemporaneamente, nè queste cause è possibile sceverare.

(13) Per la bibliografia vedi: GEORG DUNCKER, *Die Methode der Variationsstatistick.* «Archiv für Entwicklungsmechanik der Organismen di W. ROUX», VIII, 1899; C. B. DAVENPORT, *Statistical methods.* New-Jork 1899; Cfr. *Las Matématicas y la Biologia* por ANGEL GALLARDO. «Anales de la Sociedad Cientifica Argentina», t. LI, Buenos Aires 1901; *I metodi somatometrici in Zoologia* di G. CATTANEO. «Riv. di biologia generale», aprile-maggio 1901.

Vedi gli articoli del prof. CAMERANO negli «Atti dell'Acc. di Torino», 1900-01 {e quelli del Prof. ANDRES nei «Rend. Ist. Lomb.», 1897-1901. – J. LUDWIG ha pubblicato nei tomi XLIII e XLIX della «Zeitschrift für Math. und Physik» estese bibliografie sugli studi biometrici. A cominciare dall'anno 1901 è comparso il giornale «Biometrika», il cui scopo è quello di raccogliere e diffondere le ricerche biometriche («Biometrika. A Journal for the Statistical Study of biological Problems». Founded by W. R. F. WELDON, FRANCIS GALTON and KARL PEARSON. Edited by KARL PEARSON, Cambridge, University Press)}.

(14) *Mathematical Contributions to the Theory of Evolution. III. Regression, Heredity and Panmixia* by KARL PEARSON, «Phil. Transactions of the R. Society of London S. A.», Vol. 189, London 1897.

Quindi per orientarsi non vi è altro mezzo che ricorrere a quei procedimenti, che in tutte le questioni analoghe han giovato in modo così manifesto: ai procedimenti cioè fondati sul calcolo delle probabilità.

È questo il ramo delle matematiche più singolare e curioso. Se analizziamo un giudizio quasiasi della nostra mente noi possiamo esser certi di trovarci sempre, più o meno nascosto, un computo di probabilità. Si potrebbe dire in certo modo che l'uomo più semplice, il quale attende al mattino il levar del sole, deve la sua fiducia di veder sorgere il giorno, ad un'applicazione incosciente del teorema dei grandi numeri di BERNOUILLI. Tuttavia la scienza delle probabilità è la sola parte delle matematiche i cui principii non son posti rigorosamente e son tuttora aperti alla critica ed alla discussione.

Su qual solida base giace per esempio la proposizione fondamentale della teoria degli errori? Eppure tutti ci credono, disse un giorno il LIPPMANN al POINCARÉ, perché gli sperimentatori si immaginano che essa sia un teorema di matematiche, mentre i matematici ritengono che sia un fatto sperimentale.

Ma qualsiasi fiducia noi riponiamo nelle sue basi, è indubitato che la teoria delle probabilità ha reso e rende a tutte le scienze incalcolabili ed incontestati benefici.

L'enumerarli soltanto, come il discutere le questioni generali e le apparenti contraddizioni a cui abbiamo ora accennato, ci porterebbe troppo lontano.

Vediamo piuttosto, senza scendere a nessun particolare, con un esempio, come la nuova scuola tratta uno dei problemi che essa ha preso ad esaminare.

Immaginiamo un gran numero di individui di una certa specie. Se le loro forme si aggrupperanno o addenseranno attorno ad un tipo medio, avremo che, man mano che ci discosteremo da questo, gli individui si faranno più rari. Il GALTON rappresenta ciò graficamente misurando un organo e costruendo la curva che esprime la relazione che passa fra la grandezza di esso e la maggiore o minore abbondanza corrispondente di individui. Si trova così una linea che i geometri chiamano curva degli errori o della frequenza, e che i cultori della statistica denominano del QUETELET. Un tale insieme di individui prende il nome di gruppo monomorfico.

Però può avvenire, per un certo insieme di esseri, che costruendo la curva come abbiam detto, essa non risulti una linea di frequenza: ciò significa che gli individui, anziché attorno ad uno, si addensano attorno a due o a più tipi distinti, ossia che la curva può decomporsi in due o più curve di frequenza. Il gruppo si chiama allora dimorfico o polimorfico [15].

La scomposizione di un gruppo polimorfico in quelli elementari che lo costituiscono, divien così una questione puramente geometrica che il PEARSON ha in parte risoluto, ed essa corrisponde alla discriminazione di una specie

(15) Cfr. *Materials for the Study of Variation treated with especial regard to Discontinuity in the Origin of Species* by WILLIAM BATESON. London 1894.

nelle sue varietà [16]. Se possiamo seguire una tale decomposizione col tempo e vedere come avviene il passaggio di un gruppo da monomorfico a polimorfico o viceversa, e anche semplicemente se possiamo scoprire la tendenza alla decomposizione o alla ricomposizione, avremo colto con esatti particolari un dato elementare e fondamentale della evoluzione, da cui le questioni di variazione e di regressione, di continuità o discontinuità nelle specie, riceveranno un lume inatteso.

Ma vi ha di più: una curva di frequenza, pur conservandosi tale, può assumere forme diverse, o, come si dice, possono cambiare i parametri che la individuano. Il riconoscere le variazioni dei parametri corrispondenti ad un gruppo ed ai suoi sottogruppi nelle successive generazioni, le correlazioni fra i parametri corrispondenti ad organi diversi, costituisce già al giorno d'oggi un capitolo esteso e complesso nel quale le sottili considerazioni di LAPLACE e di BRAVAIS [17] sulle probabilità trovano importanti applicazioni.

È in questo modo che possono stabilirsi definizioni matematiche degli elementi fondamentali della scienza dell'eredità e della selezione, così secolare come periodica, onde questi concetti appaiono escire dalla nebbia in cui si trovano avvolti e delinearsi precisi e determinati nella nostra mente.

{Si sono già ottenuti in questo campo sopra soggetti di varia natura risultati altamente interessanti. Così, per esempio, PEARSON ha trovato che i caratteri morali si trasmettono ereditariamente colla stessa intensità di quelli fisici [18]. Egli ha pure scoperto che le razze civili sono più variabili di quelle selvagge [19]. DAVENPORT ha studiato la filogenia e la distribuzione geografica di certi animali [20], DUNCKER, la simmetria degli animali aventi simmetria bilaterale [21], DE VRIES gli ibridi e le mostruosità nei vegetali [22], LUDWIG i caratteri specifici di varie specie vegetali [23]; e si potrebbero citare una gran

(16) *Contributions to the Mathematical Theory of Evolution* by KARL PEARSON, « Phil. Trans. of the R. Society of London (A) », vol. 185, London 1895. – La soluzione data dal PEARSON vale solo per la decomposizione di un gruppo dimorfico; {il prof. DE HELGUERO ha dato un'interessante semplificazione del metodo di PEARSON (« Biometrika », IV, 1, 2 giugno 1905)}.

(17) *Analyse mathématique sur les probabilités des erreurs de situation d'un point* par A. BRAVAIS, « Mémoires présentés par divers savants à l'Académie Royale des Sciences de l'Institut de France », T. IX, Paris 1846.

(18) {*On the inheritance of the mental and moral Characters in Man and its Comparaison with the inheritance of the Physical Characters.* « The HUXLEY lecture for 1903 »}.

(19) {*The Chames of Death and other Studies in evolution,* 2 vol., London, Arnold}.

(20) {*Quantitative Studies in the Evolution of Pecten.* « Proc. of the Amer. Accademy of Arts and Sc. ». *Companion of some Pectens from the East and the West Coats of the U.S.* reprinted from the Mark Anniversary, 1903, ecc.}.

(21) {*Symmetrie and Asymmetrie bei bilateralen Thieren* in « Arch. Entw.-mech. », XVII, 533-682}.

(22) {*Sur la loi de disjonction des hybrides.* « Comptes Rendus de l'Ac. des Sc. de Paris », 26 marzo 1900; *Sur l'origine expérimentale d'une nouvelle espèce végétale,* ibidem, 1900; *La loi de* MENDEL *et les caractères constants des hybrides,* ibidem, 2 febbr. 1903; *Die Mutationslehre,* Leipzig, Veit, 1902, 2 vol. ecc.}.

(23) {*Beiträge zur Phytarithmetik,* « Bot. Centralbl. », LXXI, 1897. *Ueber Variationskurven,* ibidem, LXXV, 1898; *Variationstatistische Probleme und Materialen.* « Biom. », I, 11-29, 316-318, ecc.}.

quantità di altre notevoli ricerche per le quali rimando alle speciali bibliografie [24]}.

Signori, il mio dire è già stato abbastanza lungo, e, sebbene io non sia riescito che a sfiorare qualche punto soltanto dell'ampio argomento, è pur tempo che io chiuda e riassuma.

Nella vasta congerie di fatti che si presentavano, due più che altro, i più salienti, ho cercato di mettere in luce. I grandi passi, cioè, fatti dall'economia politica negli ultimi tempi, da che quel ramo di essa, che CARTESIO e LAGRANGE non esiterebbero a chiamare economia analitica, è stato costituito come un corpo a sé di scienza; e l'inizio ancor più recente e più timido della biologia a ricerche quantitative e statistiche.

Fanno riscontro nel campo delle matematiche ai nuovi studi economici i procedimenti infinitesimali, che gli economisti impiegano già con mano sicura; ed al nuovo indirizzo della biologia i metodi dei grandi numeri e del calcolo delle probabilità, metodi che una intera scuola ha adesso rinnovellati.

Col primo di questi potenti e mirabili strumenti la nostra mente spinge acutamente lo sguardo a scrutare i misteri dell'infinitamente piccolo; coll'altro invece mira da lunge, cercando di abbracciare gli ampii contorni di una massa infinitamente grande di fatti.

Nello stesso modo che il microscopio ed il telescopio hanno svelato allo istologo ed all'astronomo due mondi in cui l'occhio non era penetrato, così questi metodi matematici aprono al pensiero orizzonti nuovi e sconosciuti; come quei due apparecchi ottici, così questi due strumenti dell'analisi si differenziano fra loro in parte, ed in parte si rassomigliano. Ma vi è una cosa che rende il giuoco di essi di gran lunga più meraviglioso di quello d'ogni immaginabile sistema di lenti, ed è che ambedue riescono a mostrare soltanto ciò che è utile vedere, e più che altro servono a nascondere tutto il superfluo che confonderebbe lo sguardo.

L'accennarvi ancora le speranze, forse i sogni dell'avvenire coll'impiego di altri metodi, simili per esempio a quelli energetici, non ancora tentati in modo positivo nelle scienze sociali e biologiche, mi condurrebbe fuori del terreno in cui desidero rimanere.

Porrò quindi fine alle mie parole terminando con un augurio.

Se gettiamo lo sguardo sul nascere e sullo svolgersi dei pensieri più originali e più fecondi, che hanno trasformato e vivificato l'umano sa-

(24) {Negli ultimi anni gli studi relativi a questo argomento furono molto numerosi ed il citarli in particolare escirebbe fuori dell'indole di questo articolo. Oltre al periodico già citato (« Biometrika », Cambridge), al « Journal of Genetics » (edited by W. BATESON and R. C. PUNNETT, Cambridge), a « The Eugenics Review » (London) e ad altri, la fonte più completa a cui ricorrere per indagini bibliografiche è l'« International Catalogue of Scientific Literature », che si pubblica dall'Internat. Council presso la Royal Society di Londra. Vedi i Vol. L. (Biologia generale), M. (Botanica), N. (Zoologia), P. (Antropologia), Q. (Fisiologia), ai Cap. Variazione, Evoluzione, Metodi ed apparecchi (Pesi e misure, biometrici), ecc.}.

pere, riconosciamo subito qual parte cospicua di essi è dovuta al genio italiano.

Senza abbandonare quei rami di scienza di cui oggi abbiamo discorso, ricorderò che fu GIOVANNI CEVA nel diciassettesimo secolo che per primo concepì e propugnò i concetti e i principii di cui si vale oggi la economia [25], e che per trovare i più lontani vestigi del calcolo delle probabilità è d'uopo risalire ad un commentatore di DANTE del quattordicesimo secolo [26].

E da quelle epoche lontane si svolge attraverso i secoli fino ad oggi, la serie di coloro che presso di noi condussero al movimento moderno nel quale l'Italia prende sì larga parte.

Così nei momenti più belli della vita italiana, come nei periodi più tristi vediamo qualche cosa che si erge al disopra di tutte le tempeste e che sfida maestosa i contrarii elementi: è il limpido e luminoso pensiero italiano che non si è mai offuscato né si è affievolito mai e che, fulgido astro, ha spinto lontano i suoi raggi pel mondo.

Che questi raggi splendano sempre più vividi, ecco l'augurio che prorompe spontaneo dal mio cuore.

(25) CEVA GIOVANNI (n. 1647 o 1648, m. 1734) matematico ed ingegnere idraulico. Il titolo della sua opera economica è il seguente: *De re nummaria quoad fieri potuit geometrice tractata, ad illustrissimos et excellentissimos dominos Praesidem, Quaestoremque huius arciducalis Caesaraei Magistratus.* Mantuae 1711.

Cfr. l'articolo del Prof. PANTALEONI su GIOVANNI CEVA nel Dictionary of Political Economy edited by R. H. INGLIS PALGRAVE. London 1894.

(26) *Comedia di Dante degli Allagherii col commento di Jacopo della Lana bolognese.* Bologna 1866, Vol: II, pp. 64, 65. *L'ottimo Commento della Divina Commedia* testo inedito d'un contemporaneo di DANTE citato dagli Accademici della Crusca. Pisa 1827–29, T. II, pp. 74, 75. Cfr. *Histoire des Sciences mathématiques en Italie* par GUILLAUME LIBRI. Paris 1838, T. II, p. 188.

IV.

SUR LA STRATIFICATION D'UNE MASSE FLUIDE EN ÉQUILIBRE

«Acta mathematica», t. 27 - NIELS HENRIK ABEL in memoriam - 1903, pp. 105-124.

1. ABEL a été amené par un problème de mécanique à envisager pour la première fois la question de l'inversion des intégrales définies. En effet c'est le problème des *tautochrones* généralisé qui l'a conduit, par un vrai coup de génie, à sa célèbre formule d'inversion qui se trouve dans le mémoire qu'il a publié en 1823 sous le titre: *Solution de quelques problèmes à l'aide d'intégrales définies* (1). Cette formule qui correspond à un cas très-particulier d'inversion a reçu bien d'applications dans beaucoup de questions de physique mathématique, de mécanique et d'analyse. LIOUVILLE peu de temps après ABEL, et sans connaître son résultat, a tâché de résoudre une classe intéressante de questions par l'invention d'un nouveau calcul qu'il appelait des différentielles à indices quelconques.

Mais les formules de LIOUVILLE ne sont que des transformations de celle D'ABEL.

On a donné après un grand nombre de démonstrations du résultat trouvé par ABEL, et on en a multiplié les applications; cependant rien de réellement nouveau, n'a été fait, par rapport à la question de l'inversion, jusqu'à l'année 1884. M. SONINE a donné dans les «Acta Mathematica» une nouvelle formule. M. SONINE envisage aussi un cas particulier d'inversion, mais sa formule n'est pas une transformation de celle qui avait été donnée par ABEL, mais c'est une vraie généralisation de cette formule.

Dans quelques travaux que j'ai publiés en 1896 et 1897 (2) j'ai donné la solution de la question générale de l'inversion des intégrales définies. Cette solution peut s'obtenir en supposant seulement certaines conditions peu

(1) «Magazin for Naturvidenskaberne», Aargang I, Bind 2, Christiania 1823; «Oeuvres», Christiania 1881, T. 1er, page 11. Voir aussi le Mémoire: *Résolution d'un problème de Mécanique*, «Journ. f. d. reine und ang. Math.», her. v. CRELLE, Bd. 1, Berlin 1826; «Oeuvres», Christiania 1881. T. 1er page 97.

(2) *Sulla inversione degli integrali definiti.* Nota I, II, III, IV «Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino», 1896; *Sulla inversione degli integrali definiti.* «Rend. della R. Accademia dei Lincei», Roma 1896; *Sulla inversione degli integrali multipli*, Ibid. 1896; *Sopra alcune questioni di inversioni di integrali definiti.* «Annali di Matematica», Milano 1897. [In queste «Opere»: vol. secondo, XVIII (pp. 216-254), XIX (pp. 255-262), XX (pp. 263-275), XXII (pp. 279-313)].

restrictives sur la continuité et sur l'ordre d'infini des fonctions qui paraissent dans les calculs.

Cependant il y a des cas pratiques dans lesquels ces conditions ne sont pas vérifiées, et il faut alors recourir à des artifices particuliers, quelquefois très-pénibles pour arriver au but. Dans cette Note j'envisage précisément un de ces cas qui ressort d'une question de mécanique céleste. Le problème se réduit à la détermination d'une fonction inconnue qui paraît sous une intégrale définie, tout à fait comme dans le problème des courbes tautochrones étudié par ABEL. Mais, si l'on veut résoudre ce cas dans toute sa généralité, il faut imaginer des méthodes nouvelles.

2. Je vais maintenant éclaircir en quelques mots la question de mécanique céleste à laquelle je me rapporte.

Le problème de l'équilibre d'une masse fluide hétérogène qui tourne autour d'un axe avec une vitesse uniforme, joue un rôle très important dans l'astronomie théorique, parce que c'est le fondement du calcule de la figure des corps célestes.

Un examen approfondi des stratifications qui sont compatibles avec l'équilibre n'est pas très avancé, et presque tous les résultats rigoureux qu'on a là–dessus sont des résultats negatifs. Cependant même des résultats négatifs ont un grand intérêt dans ce genre de recherches. Pour mettre cela en pleine lumière, il suffit de remarquer que, même dans le cas des fluides homogènes, on ne possède pas des méthodes directes par lesquelles on peut déterminer des figures d'équilibre. Les calculs classiques de MAC–LAURIN et de JACOBI, par exemple, ne sont que des vérifications que les ellipsoïdes peuvent être des figures d'équilibre. C'est pourquoi il y a un vrai intérêt à établir que certaines formes ou certaines stratifications sont impossibles. Mais dans la plupart des cas ces propositions négatives ne s'obtiennent qu'avec beaucoup d'effort.

Entre toutes ces propositions il y en a une qu'il est intéressant de mettre hors de doute d'une manière rigoureuse et complète. Rapportons nous aux méthodes de MAC LAURIN et de JACOBI. Leurs succès ressort de la forme extrêmement simple du potentiel d'un ellipsoïde homogène. Or l'expression du potentiel reste aussi simple lorsque l'ellipsoïde étant hétérogène est stratifié par couches homothétiques et concentriques. Il s'agit donc de vérifier s'il y a des figures d'équilibre des fluides ainsi stratifiés.

Au premier abord, cette question semble déjà tranchée d'une maniere négative par les remarquables résultats de M. HENRY et de M. POINCARÉ; mais puisque ces auteurs se rapportent à une masse discontinue, on comprend, si on regarde plus de près, que la proposition n'est pas encore complète (3).

Le but de ce mémoire est d'établier d'une manière générale cette proposition négative. C'est la généralité qu'on laisse à la densité qui engendre la

(3) Voir la Ière Note à la fin du Mémoire.

difficulté de la question [4]. En effet on ne peut pas employer les procédés de M. HENRY et de M. POINCARÉ, et dès qu'on impose à la densité la seule condition d'être une fonction intégrable, on tombe sur un problème d'inversion qui n'est soluble que par des méthodes nouvelles.

Nous partagerons notre recherche en trois parties. Dans le premier paragraphe nous établirons la relation (A) fondamentale entre deux fonctions inconnues. En utilisant cette relation nous envisagerons dans le second paragraphe le cas de l'ellipsoïde de révolution, et dans le troisième paragraphe celui de l'ellipsoïde à trois axes inégaux.

I.

1. Soient $2a$, $2b$, $2c$ les axes d'un ellipsoïde. Si on le rapporte à ses axes principaux, son équation sera

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1\,. \tag{1}$$

Chaque ellipsoïde interne homothétique et concentrique aura pour équation

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1-h \qquad (0<h<1). \tag{2}$$

Si la matière qui remplit l'ellipsoïde est stratifiée par couches homothétiques et concentriques, la densité ρ sera une fonction de h. Nous supposerons que $\rho(h)$ soit une fonction positive finie et intégrable. Dans cette hypothèse, l'ensemble des valeurs de h pour lesquelles $\rho(h)$ est continue, est condensé dans toute partie du domaine $(0\,,\,1)$.

A cause de la définition de la densité on a que la masse d'une portion quelconque de l'ellipsoïde, et sa fonction potentielle ne changeront pas en changeant les valeurs de $\rho(h)$ dans les points où cette fonction n'est pas continue, pourvu qu'elle reste toujours intégrable.

C'est pourquoi nous pourrons changer d'une manière arbitraire les valeurs données de la densité $\rho(h)$ dans les points où elle est discontinue en conservant pour cette fonction la propriété d'être intégrable, et on pourra remplacer la primitive expression de la densité par la nouvelle expression.

Cela posé, il est connu que la fonction potentielle dans tout point $x\,,y\,,z$ qui fait partie de la masse de l'ellipsoïde est donnée par

$$V=\pi abc\int_0^\infty \varphi(\mu)\frac{d\lambda}{\sqrt{D}}$$

où

$$\mu=1-\frac{x^2}{a^2+\lambda}-\frac{y^2}{b^2+\lambda}-\frac{z^2}{c^2+\lambda}\,,\qquad D=(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda) \tag{3}$$

$$\varphi(\mu)=\int_0^\mu \rho(\mu)\,d\mu\,.$$

(4) Voir la II$^{\text{ème}}$ et la III$^{\text{ème}}$ Note à la fin du Mémoire.

2. Supposons maintenant que l'ellipsoïde tourne avec une vitesse angulaire constante ω autour de l'axe z. Il faut distinguer deux cas: celui où l'on peut trouver deux nombres h_0 et h_1 tels que

$$0 < h_0 < h_1 < 1,$$

$\rho(h)$ étant constant pour toutes les valeurs de h comprises entre h_0 et h_1; et le cas où cette condition n'est pas verifiée.

Dans le premier cas on peut démontrer que l'équilibre de la masse fluide n'est pas possible, en réduisant ce cas à celui envisagé par M. POINCARÉ. En effet, si l'équilibre était possible, il subsisterait même en retranchant la portion de fluide comprise entre la surface libre et l'ellipsoïde qui correspond au paramètre h_0. Alors on trouverait un fluide dont la partie externe est homogène et en même temps est comprise entre deux ellipsoïdes qui ne sont pas homofocaux. Cette condition est incompatible avec l'équilibre (5).

3. Nous allons donc envisager le second cas. La fonction potentielle de l'attraction newtonienne et de la force centrifuge est donnée par

$$W = V + \frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2).$$

Pour l'équilibre il faut que W soit constante sur les surfaces où la densité est constante. Il faudra donc que l'on ait

$$W = \psi(h),$$

c'est pourquoi on aura l'équation

$$\text{(A)} \qquad \pi abc \int_0^\infty \varphi(\mu) \frac{d\lambda}{\sqrt{D}} = -\frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2) + \psi(h).$$

4. Il est facile de démontrer que si $\omega \lesseqgtr 0$ l'éllipsoïde ne peut pas se réduire à une sphère.

En effet pour $a = b = c$, on aurait

$$\mu = 1 - \frac{x^2 + y^2 + z^2}{a^2 + \lambda} \qquad h = 1 - \frac{x^2 + y^2 + z^2}{a^2}$$

c'est pourquoi V et ψ seraient des fonctions de $x^2 + y^2 + z^2$.

Écrivons maintenant l'équation (A) sous la forme

$$V - \psi = -\frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2).$$

Cette équation serait absurde si $V - \psi$ était une fonction de $x^2 + y^2 + z^2$.

Il faut donc envisager deux cas:

1er cas $\qquad a = b \gtrless c,$

2ème cas $\qquad a \gtrless b.$

(5) « Journal de Mathématiques » fondé par J. LIOUVILLE, IV Série, T. VI, 1890, page 69.

II.

1. Soit $a = b$. En posant $x^2 + y^2 = r^2$ nous aurons

$$(1) \qquad \begin{cases} \mu = 1 - \dfrac{r}{a^2+\lambda} - \dfrac{z^2}{c^2+\lambda'}, \\ h = 1 - \dfrac{r^2}{a^2} \qquad - \dfrac{z^2}{c^2}, \end{cases}$$

d'où

$$\mu = \frac{\lambda}{c^2+\lambda} - \frac{(a^2-c^2)\lambda}{a^2(a^2+\lambda)(c^2+\lambda)} r^2 + \frac{c^2}{c^2+\lambda} h .$$

L'équation (A) s'écrira

$$\pi^2 a^2 c \int_0^\infty \varphi\left(\frac{\lambda}{c^2+\lambda} - \frac{(a^2-c^2)\lambda}{a^2(a^2+\lambda)(c^2+\lambda)} r^2 + \frac{c^2}{c^2+\lambda} h\right)\frac{d\lambda}{\sqrt{D}} = -\frac{\omega^2}{2} r^2 + \psi(h),$$

et si nous dérivons par rapport à r^2, on aura, puisque ρ est intégrable,

$$-\pi^2 c \int_0^\infty \rho\left(\frac{\lambda}{c^2+\lambda} - \frac{(a^2-c^2)\lambda}{a^2(a^2+\lambda)(c^2+\lambda)} r^2 + \frac{c^2}{c^2+\lambda} h\right)\frac{(a^2-c^2)\lambda}{(a^2+\lambda)(c^2+\lambda)\sqrt{D}} d\lambda = -\frac{\omega^2}{2} .$$

Posons

$$(2) \qquad \pi^2 c\rho = \chi,$$

l'équation précédente deviendra

$$(3) \qquad \int_0^\infty \chi(\mu) \frac{\lambda d\lambda}{(a^2+\lambda)^2 (c^2+\lambda)^{3/2}} = \frac{\omega^2}{2(a^2-c^2)} .$$

χ est une fonction positive. On en tire

$$a > c$$

c'est à dire l'axe de rotation est le petit axe de l'éllipsoïde.

2. En posant (*)

$$(4) \qquad \frac{r^2}{a^2+\lambda} + \frac{z^2}{c^2+\lambda} = \xi \quad , \quad \frac{r^2}{(a^2+\lambda)^2} + \frac{z^2}{(c^2+\lambda)^2} = \Theta$$

on aura

$$\mu = 1 - \xi,$$

$$(5) \qquad \frac{\partial\lambda}{\partial\xi} = -\frac{1}{\Theta} \quad , \quad \frac{\partial\lambda}{\partial r^2} = \frac{1}{(a^2+\lambda)\Theta} \quad , \quad \frac{\partial\lambda}{\partial z^2} = \frac{1}{(c^2+\lambda)\Theta} .$$

(*) Le formule (5) sono un caso particolare delle formule (3 bis) dell'Art. III. [N. d. R.].

Prenons dans le premier membre de l'équation (3) pour variable d'intégration ξ au lieu de λ; cette équation s'écrira

$$\int_0^{\frac{r^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}} \chi(1-\xi)\frac{\lambda}{(a^2+\lambda)^2(c^2+\lambda)^{3/2}\Theta}\,d\xi = \frac{\omega^2}{2(a^2-c^2)}.$$

Si nous dérivons par rapport à r^2 et à z^2 en remarquant que la quantité sous l'intégrale s'annule à la limite supérieure, nous aurons

$$(6)\qquad \int_0^{\frac{r^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}} \chi(1-\xi)\frac{\partial}{\partial r^2}\left[\frac{\lambda}{(a^2+\lambda)^2(c^2+\lambda)^{3/2}\Theta}\right]d\xi = 0,$$

$$(6')\qquad \int_0^{\frac{r^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}} \chi(1-\xi)\frac{\partial}{\partial z^2}\left[\frac{\lambda}{(a^2+\lambda)^2(c^2+\lambda)^{3/2}\Theta}\right]d\xi = 0.$$

Or, par des calculs qui ne présentent pas de difficultés, on trouve, ayant égard aux relations (5),

$$\frac{\partial}{\partial r^2}\left[\frac{\lambda}{(a^2+\lambda)^2(c^2+\lambda)^{3/2}\Theta}\right]$$

$$= -\frac{\partial}{\partial\xi}\left[\frac{\lambda}{(a^2+\lambda)^{3/2}(c^2+\lambda)^{3/2}\Theta}\right]\frac{1}{(a^2+\lambda)^{3/2}} - \frac{3}{2}\,\frac{\lambda}{(a^2+\lambda)^{3/2}(c^2+\lambda)^{3/2}\Theta}\cdot\frac{1}{(a^2+\lambda)^{5/2}\Theta},$$

$$\frac{\partial}{\partial z^2}\left[\frac{\lambda}{(a^2+\lambda)^2(c^2+\lambda)^{3/2}\Theta}\right]$$

$$= -\frac{\partial}{\partial\xi}\left[\frac{\lambda}{(a^2+\lambda)^{1/2}(c^2+\lambda)^{5/2}\Theta}\right]\frac{1}{(a^2+\lambda)^{3/2}} - \frac{3}{2}\,\frac{\lambda}{(a^2+\lambda)^{1/2}(c^2+\lambda)^{5/2}\Theta}\cdot\frac{1}{(a^2+\lambda)^{5/2}\Theta}.$$

En remplaçant dans les équations (6) et (6′) les premiers membres des équations précédentes par les seconds membres, et en faisant des intégrations par parties, on peut écrire les équations (6) et (6′) sous la forme

$$(6_a)\qquad \int_0^{\frac{r^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}} f(\xi)\frac{\partial}{\partial\xi}\left[\frac{\lambda}{(a^2+\lambda)^{3/2}(c^2+\lambda)^{3/2}\Theta}\right]d\xi = 0,$$

$$(6'_a)\qquad \int_0^{\frac{r^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}} f(\xi)\frac{\partial}{\partial\xi}\left[\frac{\lambda}{(a^2+\lambda)^{1/2}(c^2+\lambda)^{5/2}\Theta}\right]d\xi = 0,$$

où l'on a posé

$$(7_a)\qquad f(\xi) = -\chi(1-\xi)\frac{1}{(a^2+\lambda)^{3/2}} + \frac{3}{2}\int_0^{\xi}\chi(1-\xi)\frac{1}{(a^2+\lambda)^{5/2}\Theta}\,d\xi.$$

3. Supposons maintenant $z = 0$, et posons

$$\frac{r^2}{a^2} = y \quad , \quad \frac{a^2 - c^2}{a^2} = \varepsilon .$$

En vertu des équations (4) nous aurons

$$\lambda = a^2 \frac{y - \xi}{\xi} \quad , \quad a^2 + \lambda = a^2 \frac{y}{\xi} \quad , \quad c^2 + \lambda = a^2 \frac{y - \varepsilon\xi}{\xi} \quad , \quad \Theta = \frac{a^2 y}{\xi^2},$$

et par suite les relations (6_a), ($6'_a$) et (7_a) deviendront, pour $z = 0$,

$$(6_b) \qquad \int_0^y f(\xi) \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{y - \xi}{(y - \varepsilon\xi)^{3/2}} d\xi = 0 ,$$

$$(6'_b) \qquad \int_0^y f(\xi) \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{y - \xi}{(y - \varepsilon\xi)^{5/2}} d\xi = 0,$$

$$(7_b) \qquad f(\xi) = \left[- \chi(1 - \xi)\, \xi^{3/2} + \frac{3}{2} \int_0^\xi \chi(1 - \xi)\, \xi^{1/2} d\xi \right] \frac{1}{a^3 y^{3/2}} ,$$

ou même

$$(6_c) \qquad \int_0^y \psi(\xi) \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{y - \xi}{(y - \varepsilon\xi)^{3/2}} d\xi = 0,$$

$$(6'_c) \qquad \int_0^y \psi(\xi) \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{y - \xi}{(y - \varepsilon\xi)^{5/2}} d\xi = 0,$$

$$(7_c) \qquad \psi(\xi) = - \chi(1 - \xi)\, \xi^{3/2} + \frac{3}{2} \int_0^\xi \chi(1 - \xi)^{1/2} d\xi .$$

Il est évident que $\psi(\xi)$ et $\chi(1 - \xi)$ sont des fonctions continues pour les mêmes valeurs de ξ.

4. Cela posé, dérivons l'équation (6_b) par rapport à y ; $\bar{y}$ étant une valeur de y pout laquelle $f(y)$ est continue, on aura

$$- \psi(\bar{y}) \frac{1}{\bar{y}^{3/2}(1 - \varepsilon)^{3/2}} + \int_0^{\bar{y}} \psi(\xi) \frac{\partial}{\partial \xi} \left\{ \frac{- \frac{1}{2}\bar{y} + \frac{3}{2}\xi - \varepsilon\xi}{(\bar{y} - \varepsilon\xi)^{5/2}} \right\} d\xi = 0.$$

Ajoutons cette équation à l'équation ($6'_b$) après l'avoir multipliée par $3/2 - \varepsilon$. On trouvera

$$- \psi(\bar{y}) \frac{1}{\bar{y}^{3/2}(1 - \varepsilon)^{3/2}} + \int_0^{\bar{y}} \psi(\xi) \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\bar{y}(1 - \varepsilon)}{(\bar{y} - \varepsilon\xi)^{5/2}} d\xi = 0 ,$$

d'où

$$(8) \qquad \frac{1}{\bar{y}^{5/2}(1 - \varepsilon)^{5/2}} \psi(\bar{y}) = \int_0^{\bar{y}} \psi(\xi) \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{1}{(\bar{y} - \varepsilon\xi)^{5/2}} d\xi .$$

L'expression

$$\int_0^y \psi(\xi) \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{1}{(y-\varepsilon\xi)^{5/2}} d\xi$$

est une fonction continue de la variable y pour toute valeur y comprise entre 0 et 1. Donc en vertu de la relation (8) on pourra rendre continue la fonction $\psi(y)$ en changeant ses valeurs dans les points de discontinuité. On ne pourra avoir d'exception que pour la valeur $y = 0$.

De même, à cause des relations (7_ε) et (2), $\chi(1-\xi)$ et $\rho(1-\xi)$ deviendront des fonctions continues (excepté tout au plus pour $\xi = 0$) en changeant leurs valeurs dans les points de discontinuité. Par suite, en prenant garde à ce que nous avons remarqué au 1er §, nous pouvons supposer que $\rho(1-\xi)$, $\chi(1-\xi)$ et $\psi(\xi)$ soient des fonctions continues. Tout au plus elles pourraient n'avoir pas une valeur déterminée pour $\xi = 0$.

5. La fonction $1/(y-\varepsilon\xi)^{5/2}$ croît lorsqu'on fait croître ξ entre 0 et y; par conséquent $\partial/\partial\xi \; 1/(y-\varepsilon\xi)^{5/2}$ est positive. C'est pourquoi

$$\int_0^y \psi(\xi) \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{1}{(y-\varepsilon\xi)^{5/2}} d\xi = \psi_1 \int_0^y \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{1}{(y-\varepsilon\xi)^{5/2}} d\xi = \psi_1 \frac{1-(1-\varepsilon)^{5/2}}{y^{5/2}(1-\varepsilon)^{5/2}}$$

en désignant par ψ_1 une valeur comprise entre la limite supérieure et la limite inférieure des valeurs de $\psi(\xi)$, ξ étant comprise entre 0 et y.

L'équation (8) deviendra donc

$$\psi(y) = \psi_1 (1-(1-\varepsilon)^{5/2}).$$

Il est facile de démontrer que cette équation ne peut être vérifiée que si les valeurs $\psi(y)$ sont nulles.

En effet, si $\psi(y)$ n'est pas nul, on tire de l'équation précédente

$$\frac{\psi(y)}{\psi_1} = 1-(1-\varepsilon)^{5/2}.$$

Le second membre étant positif, on peut remplacer $\psi(y)$ et ψ_1 par leurs valeurs absolues, et l'on a

$$\frac{|\psi(y)|}{|\psi_1|} = 1-(1-\varepsilon)^{5/2}.$$

Soit M la limite supérieure des valeurs absolues de $\psi(y)$, y étant comprise entre 0 et 1.

On aura

$$\frac{|\psi(y)|}{M} \leqq 1-(1-\varepsilon)^{5/2}.$$

Mais $\psi(y)$ peut s'approcher de M autant que l'on veut, de sorte que le premier membre étant proche de l'unité autant que l'on veut, l'équation précédente est absurde.

6. $\psi(\xi)$ étant nul, on tire de l'équation (7_c)

$$\chi(1-\xi)\,\xi^{3/2} = \frac{3}{2}\int_0^{\xi} \chi(1-\xi)\,\xi^{1/2}\,d\xi.$$

χ est donc une fonction dérivable par rapport à ξ pour $0<\xi<1$. Par la dérivation on trouve

$$\chi'(1-\xi)=0$$

d'où l'on déduit que χ et ρ sont constantes. Cette condition est incompatible avec l'hétérogénéité de l'ellipsoïde et cela démontre que lorsque l'ellipsoïde est un ellipsoïde hétérogène de révolution, par rapport à l'axe de rotation, l'équilibre n'est pas possible.

III.

1. Envisageons maintenant le cas où $a \lesseqgtr b$. En posant $r^2 = x^2 + y^2$, on aura, à cause de l'équation (2) du 1er Article,

$$x^2 = \frac{a^2 b^2}{a^2 - b^2}\left(\frac{r^2}{b^2} - h + \frac{z^2}{c^2}\right),$$

$$y^2 = \frac{a^2 b^2}{b^2 - a^2}\left(\frac{r^2}{a^2} - h + \frac{z^2}{c^2}\right),$$

et par suite, en vertu de la formule (3),

$$(1)\qquad \mu = 1 - \frac{\lambda}{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)}r^2 - \frac{a^2 b^2}{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)}h - \left(\frac{1}{1+\frac{\lambda}{c^2}} - \frac{1}{\left(1+\frac{\lambda}{a^2}\right)\left(1+\frac{\lambda}{b^2}\right)}\right)\frac{z^2}{c^2}.$$

Dérivons maintenant la relation (A) par rapport à z^2. On trouvera, à cause de l'équation précédente,

$$(2)\qquad \int_0^{\infty} \varphi'(\mu)\frac{d\lambda}{\sqrt{D}}\left(\frac{1}{1+\frac{\lambda}{c^2}} - \frac{1}{\left(1+\frac{\lambda}{a^2}\right)\left(1+\frac{\lambda}{b^2}\right)}\right) = 0.$$

Supposons que c ne soit pas la plus petite des trois quantités a, b, c. Puisque λ est une quantité positive, on aurait

$$\frac{1}{1+\frac{\lambda}{c^2}} > \frac{1}{\left(1+\frac{\lambda}{a^2}\right)\left(1+\frac{\lambda}{b^2}\right)},$$

c'est à dire

$$\frac{1}{1+\frac{\lambda}{c^2}} - \frac{1}{\left(1+\frac{\lambda}{a^2}\right)\left(1+\frac{\lambda}{b^2}\right)} > 0.$$

Tous les facteurs qui paraissent sous la dernière intégrale (2) seraient donc des quantités positives et par suite l'équation (2) ne serait pas possible. Il faut donc que c soit plus petite que a et b. L'ellipsoïde sera à trois axes inégaux, et l'on pourra arranger les trois quantités a, b, c par ordre de grandeur en écrivant

$$a > b > c\,.$$

2. Dérivons maintenant l'équation (A) par rapport à r^2. En prenant garde à l'équation (1) nous aurons

$$\pi a b c \int_0^\infty \varphi'(\mu) \frac{\lambda d\lambda}{(a^2+\lambda)^{3/2}(b^2+\lambda)^{3/2}(c^2+\lambda)^{1/2}} = \frac{\omega^2}{2}\,. \tag{3}$$

Posons

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda} + \frac{y^2}{b^2+\lambda} + \frac{z^2}{c^2+\lambda} = \xi.$$

En regardant λ comme une fonction de ξ, x^2, y^2, z^2, définie par l'équation précédente, on trouvera

$$\frac{\partial\lambda}{\partial\xi} = -\frac{1}{\Omega}\,, \quad \frac{\partial\lambda}{\partial x^2} = \frac{1}{(a^2+\lambda)\,\Omega}\,, \quad \frac{\partial\lambda}{\partial y^2} = \frac{1}{(b^2+\lambda)\,\Omega}\,, \quad \frac{\partial\lambda}{\partial z^2} = \frac{1}{(c^2+\lambda)\,\Omega}\,, \tag{3$^{\text{bis}}$}$$

où l'on suppose

$$\Omega = \frac{x^2}{(a^2+\lambda)^2} + \frac{y^2}{(b^2+\lambda)^2} + \frac{z^2}{(c^2+\lambda)^2}\,.$$

Pour calculer l'intégrale qui paraît dans l'équations (3), prenons ξ comme variable d'intégration au lieu de λ, nous aurons

$$\int_0^{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}} \chi(1-\xi) \frac{\lambda}{(a^2+\lambda)^{3/2}(b^2+\lambda)^{3/2}(c^2+\lambda)^{1/2}\,\Omega}\, d\xi = \frac{\omega^2}{2} \tag{3'}$$

étant

$$\chi(1-\xi) = \pi a b c\, \varphi'(\mu).$$

Dérivons l'équation (3') par rapport à x^2, y^2, z^2. Puisque à la limite supérieure de l'intégrale on a $\lambda = 0$, nous trouverons

$$\int_0^{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}} \chi(1-\xi) \frac{\partial H}{\partial x^2}\, d\xi = 0\,, \quad \int_0^{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}} \chi(1-\xi) \frac{\partial H}{\partial y^2}\, d\xi = 0, \tag{4}$$

$$\int_0^{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}} \chi(1-\xi) \frac{\partial H}{\partial z^2}\, d\xi = 0,$$

ayant posé

$$H = \frac{\lambda}{(a^2+\lambda)^{3/2}(b^2+\lambda)^{3/2}(c^2+\lambda)^{1/2}\,\Omega}\,.$$

Or, on trouve par des calculs très-simples,

$$\frac{\partial H}{\partial x^2} = -\frac{\partial}{\partial \xi}\left[\frac{\lambda}{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)^{3/2}(c^2+\lambda)^{1/2}\,\Omega}\right]\frac{1}{(a^2+\lambda)^{3/2}} - \frac{3}{2}\,\frac{\lambda}{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)^{3/2}(c^2+\lambda)^{1/2}\,\Omega}\cdot\frac{1}{(a^2+\lambda)^{5/2}}$$

$$\frac{\partial H}{\partial y^2} = -\frac{\partial}{\partial \xi}\left[\frac{\lambda}{(b^2+\lambda)^{5/2}(c^2+\lambda)^{1/2}\,\Omega}\right]\frac{1}{(a^2+\lambda)^{3/2}} - \frac{3}{2}\,\frac{\lambda}{(b^2+\lambda)^{5/2}(c^2+\lambda)^{1/2}\,\Omega}\cdot\frac{1}{(a^2+\lambda)^{5/2}}$$

$$\frac{\partial H}{\partial z^2} = -\frac{\partial}{\partial \xi}\left[\frac{\lambda}{(b^2+\lambda)^{3/2}(c^2+\lambda)^{3/2}\,\Omega}\right]\frac{1}{(a^2+\lambda)^{3/2}} - \frac{3}{2}\,\frac{\lambda}{(b^2+\lambda)^{3/2}(c^2+\lambda)^{3/2}\,\Omega}\cdot\frac{1}{(a^2+\lambda)^{5/2}}$$

C'est pourquoi (*) les équations (4) s'écriront, par des intégrations par parties,

$$(4_1)\quad\left\{\begin{aligned}
&\int_0^{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}} f(\xi)\,\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\lambda}{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)^{3/2}(c^2+\lambda)^{1/2}\,\Omega}\right)d\xi = 0,\\
&\int_0^{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}} f(\xi)\,\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\lambda}{(b^2+\lambda)^{5/2}(c^2+\lambda)^{1/2}\,\Omega}\right)d\xi = 0,\\
&\int_0^{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}} f(\xi)\,\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\lambda}{(b^2+\lambda)^{3/2}(c^2+\lambda)^{3/2}\,\Omega}\right)d\xi = 0,
\end{aligned}\right.$$

où l'on a posé

$$f(\xi) = -\chi(1-\xi)\,\frac{1}{(a^2+\lambda)^{3/2}} + \frac{3}{2}\int_0^{\xi}\chi(1-\xi)\,\frac{1}{(a^2+\lambda)^{5/2}}\,d\xi.$$

3. Supposons maintenant $y = z = 0$, et posons

$$\frac{x^2}{a^2} = u \quad,\quad \varepsilon_1 = \frac{a^2-b^2}{a^2} \quad,\quad \varepsilon_2 = \frac{a^2-c^2}{a^2}.$$

Il viendra

$$\lambda = a^2\,\frac{u-\xi}{\xi} \quad,\quad a^2+\lambda = a^2\,\frac{u}{\xi} \quad,\quad b^2+\lambda = a^2\,\frac{u-\varepsilon_1\xi}{\xi} \quad,\quad c^2+\lambda = a^2\,\frac{u-\varepsilon_2\xi}{\xi},$$

$$\Omega = \frac{\xi^2}{a^2\,u},$$

et les équations (4_1), s'écriront

$$(4')\qquad \int_0^u \psi(\xi)\,\frac{\partial}{\partial \xi}\left[\frac{u-\xi}{(u-\varepsilon_1\xi)^{3/2}(u-\varepsilon_2\xi)^{1/2}}\right]d\xi = 0,$$

$$(4'')\qquad \int_0^u \psi(\xi)\,\frac{\partial}{\partial \xi}\left[\frac{u-\xi}{(u-\varepsilon_1\xi)^{5/2}(u-\varepsilon_2\xi)^{1/2}}\right]d\xi = 0,$$

(*) Nel caso $a = b$ le formule (4_1) si riducono alle (6_a) e $(6'_a)$ dell'Art. II. [N. d. R.].

$$(4''') \qquad \int_0^u \psi(\xi) \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{u-\xi}{(u-\varepsilon_1 \xi)^{3/2} (u-\varepsilon_2 \xi)^{3/2}} \right] d\xi = 0 ,$$

où

$$(5) \qquad \psi(\xi) = -\chi(1-\xi)\, \xi^{3/2} + \frac{3}{2} \int_0^\xi \chi(1-\xi)\, \xi^{1/2}\, d\xi .$$

Dérivons (4') par rapport à u; $\bar{u}$ étant un point de continuité de ψ, on aura

$$0 = -\psi(\bar{u}) \frac{1}{\bar{u}^2 (1-\varepsilon_1)^{3/2} (1-\varepsilon_2)^{1/2}}$$

$$+ \int_0^{\bar{u}} \chi(\xi) \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{1}{(\bar{u}-\varepsilon_1 \xi)^{3/2} (\bar{u}-\varepsilon_2 \xi)^{1/2}} - \frac{3}{2} \frac{\bar{u}-\xi}{(\bar{u}-\varepsilon_1 \xi)^{5/2} (\bar{u}-\varepsilon_2 \xi)^{1/2}} - \frac{1}{2} \frac{\bar{u}-\xi}{(\bar{u}-\varepsilon_1 \xi)^{2/3} (\bar{u}-\varepsilon_2 \xi)^{3/2}} \right] d\xi .$$

Ajoutons (4'') et (4''') après avoir multiplié par 3/2 et 1/2 respectivement. On obtiendra

$$(6) \qquad \psi(\bar{u}) \frac{1}{\bar{u}^2 (1-\varepsilon_1)^{3/2} (1-\varepsilon_2)^{1/2}} = \int_0^{\bar{y}} \psi(\xi) \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{1}{(\bar{u}-\varepsilon_1 \xi)^{3/2} (\bar{u}-\varepsilon_2 \xi)^{1/2}} \right] d\xi .$$

En répétant la discussion que nous avons faite dans l'Art. précédent, on trouve qu'on peut toujours supposer que les fontions $\chi(1-\xi)$, $\rho(1-\xi)$, $\psi(\xi)$ soient continues pour $0 < \xi < 1$.

Or $\frac{1}{(u-\varepsilon_1 \xi)^{3/2} (u-\varepsilon_2 \xi)^{1/2}}$ est une fonction croissante par rapport à ξ, étant $0 \leqq \xi \leqq u$; par suite l'équation (6) s'écrira

$$\psi(u) \frac{1}{u^2 (1-\varepsilon_1)^{3/2} (1-\varepsilon_2)^{1/2}} = \psi_1 \int_0^\xi \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{1}{(u-\varepsilon_1 \xi)^{3/2} (u-\varepsilon_2 \xi)^{1/2}} \right] d\xi ,$$

où ψ_1 est une valeur comprise entre la limite supérieure et la limite inférieure des valeurs de $\psi(\xi)$, étant $0 < \xi < u$.

On tire de là

$$\psi(u) = \psi_1 (1 - (1-\varepsilon_1)^{3/2} (1-\varepsilon_2)^{1/2}).$$

Il n'y a maintenant qu'à répéter les considérations faites à la fin de l'Art. II pour voir que $\psi(u) = 0$, et par suite p est une quantité constante.

Donc, même si l'ellipsoïde est à trois axes inégaux, l'équilibre n'est pas possible lorsqu'il est hétérogène.

NOTE Ière.

On peut montrer d'une manière très simple que les raisonnements qu'on fait dans le cas de l'ellipsoïde discontinu, c'est à dire formé par un nombre fini de couches homogènes de densités différentes superposées les unes aux autres, ne peuvent pas s'appliquer, en général, au cas de l'ellipsoïde continu. Pour cela nous allons donner une démonstration directe, fort-simple, de la proposition qu'un ellipsoïde discontinu formé par n couches homogènes limitées par des ellipsoïdes homothétiques et concentriques, ne peut pas être en équilibre lorsqu'il tourne avec une vitesse constante autour d'un axe. On verra tout de suite que cette démonstration élémentaire ne peut pas s'étendre au cas où le nombre des couches augmente indéfiniment jusqu'à former un ellipsoïde continu.

On peut réduire le cas général où l'on a n couches au cas où l'ellipsoïde n'est formé que de deux couches. En effet supposons qu'il y ait équilibre pour l'ellipsoïde à n couches. Il y aura toujours équilibre en retranchant un nombre quelconque de couches extérieures, car ces couches n'exercent aucune attraction à l'intérieur.

Il y aura donc équilibre si l'ellipsoïde est réduit aux deux couches les plus internes ou même au noyau central. Mais le noyau étant en équilibre, l'équilibre subsisterait même si les deux couches avaient la même densité du noyau. Il faudrait donc que la fonction potentielle d'une masse remplissant la couche extérieure avec une densité égale à la différence des densités des deux couches fût constante sur la surface externe. Or cela est contraire aux propriétés de la fonction potentielle des couches ellipsoïdiques.

NOTE IIème.

Lorsqu'on suppose que la densité, à partir d'une certaine profondeur jusqu'au centre de l'ellipsoïde, va toujours en croissant ou en décroissant, alors les développements analytiques que nous avons donnés auparavant ne sont plus nécessaires pour la démonstration. Par des calculs très-simples on peut arriver au but. On peut même l'atteindre sans recourir à des calculs, mais par une discussion élémentaire.

En effet il suffit de remarquer que la masse fluide se maintient en équilibre en retranchant toute la partie extérieure et en gardant seulement celle renfermée à l'intérieur d'un ellipsoïde E concentrique et homothétique à l'ellipsoïde primitif, où la densité croît ou décroît toujours du centre jusqu'à la périphérie.

Cela posé décomposons cette masse M par un ellipsoïde homothétique et concentrique E′ en deux parties. Celle interne M′ se maintient d'elle-même en équilibre par la rotation ω. Or on voit tout de suite qu'en prenant une masse M″ homothétique à M′ de sorte que M′ et M″ aient la même densité aux points qui se correspondent par homothétie, cette masse sera en équilibre en tournant avec la même vitesse angulaire ω autour de l'axe qui correspond par homothétie à l'axe de rotation M′. Si nous prenons maintenant M″ de manière qu'elle occupe l'espace renfermé dans un ellipsoïde E″ égal à E, nous aurons les deux masses M et M″ qui sont renfermées à l'intérieur de deux ellipsoïdes égaux et sont en équilibre en tournant avec la même vitesse angulaire autour de deux axes correspondants.

Si nous prenons une troisième ellipsoïde E‴ égale à E et à E″ et y renfermons une masse M‴ dont la densité en chaque point soit la différence des densités correspondantes de M et de M′, cette masse sera en équilibre d'elle-même étant en repos. Or la masse M‴ a en tout point une densité positive, c'est pourquoi on voit aisément que l'équilibre n'est pas possible.

NOTE IIIème.

Je vais exposer une nouvelle démonstration de l'incompatibilité de l'équilibre d'une masse tournant uniformément, avec sa stratification par ellipsoïdes homothétiques et concentriques. Je dirai après pourquoi je ne l'ai pas préférée à celle que j'ai donnée dans le cours du travail précédent.

Partons de l'équation (A) (Art. Ier) qu'on peut écrire

$$V = -\frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2) + \psi(h),$$

d'où l'on tire

$$\text{(B)} \qquad \Delta^2 V = -2\omega^2 + \frac{\partial^2 \psi}{\partial h^2}\Delta h + \frac{\partial \psi}{\partial h}\Delta^2 h,$$

étant

$$\Delta^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad , \quad \Delta = \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^2.$$

Or par le théorème de POISSON

$$\Delta^2 V = -4\pi\rho(h),$$

et à cause de l'équation (2) du 1er Article

$$\Delta h = \quad 4\left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}\right),$$

$$\Delta^2 h = -2\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right).$$

Donc, afin que l'équation (B) soit satisfaite, il faut que

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial h^2} = 0$$

d'où l'on tire, en vertu de l'équation (B), que la densité doit être constante.

Cette démonstration est très-simple; mais elle suppose que le théorème de POISSON soit vérifié et pour cela il ne suffit pas que la densité soit une fonction intégrable. C'est pourquoi nous avons préféré la démonstration que nous avons donnée précédemment, quoique plus compliquée, à celle que nous venons d'exposer.

Cependant il faut remarquer qu'en suivant cette voie, on peut arriver à une conclusion plus générale.

En effet, par cette méthode, on peut démontrer le théorème suivant: *Soit une masse fluide d'une forme et d'une constitution quelconque, pourvu que la densité soit telle que le théorème de Poisson soit applicable. Si dans le domaine d'un point où le fluide est hétérogène et continu, les surfaces où la densité a des valeurs constantes sont des parties de quadriques homothétiques et concentriques, ou des parties de quadriques homofocales, la masse fluide ne sera pas en équilibre si elle tourne uniformément autour d'un axe quelconque.*

NOTE IVème.

Nous avons supposé dans le 1er § que la rotation de l'ellipsoïde eût lieu autour de l'un des axes. Il est aisé de prouver que cette hypothèse n'est pas une restriction, car si l'axe de rotation aurait pour équation

$$\frac{x - x_0}{\alpha} = \frac{y - y_0}{\beta} = \frac{z - z_0}{\gamma},$$

α, β, γ étant les cosinus de direction de l'axe, il faudrait remplacer, dans l'équation (A), le terme $-\frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2)$ par

$$-\frac{\omega^2}{2}\{(x - x_0)^2(\beta^2 + \gamma^2) + (y - y_0)^2(\gamma^2 + \alpha^2) + (z - z_0)^2(\alpha^2 + \beta^2)$$

$$-2(y - y_0)(z - z_0)\beta\gamma - 2(z - z_0)(x - x_0)\gamma\alpha - 2(x - x_0)(y - y_0)\alpha\beta\}.$$

Or puisque le premier membre de l'équation (A) et $\psi(h)$ ne changent pas, en changeant le signe des quantités x, y, z, il faut que l'on ait

$$\frac{x_0}{\alpha} = \frac{y_0}{\beta} = \frac{z_0}{\gamma}$$

et que deux des cosinus α, β, γ soient nuls.

V.

COMMEMORAZIONE DEL SOCIO STRANIERO G. G. STOKES (*)

« Rend. Acc. Lincei », s. 5ª, vol. XII_1, 1902_1, pp. 174-179.

La cattedra fondata a Cambridge da ENRICO LUCAS nel 1662 su cui salirono primo BARROW e secondo NEWTON [1] resta oggi, dopo circa due secoli, ancora una volta vuota per la morte di GIORGIO GABRIELE STOKES.

Il rimpianto per la perdita del venerato vegliardo, che suscitò tanto affetto e tanta ammirazione, si diffonde dalla sua patria in tutto il mondo civile. Mentre i suoi concittadini tributano alla sua memoria i più grandi onori, primo fra tutti quello di stimare la sua carriera scientifica così elevata da potersi paragonare alla carriera del suo grande predecessore, noi, che, pur lontani ammirammo le sue scoperte e lo avemmo Socio di questa Accademia, sentiamo il dovere di commemorarne le opere, invero degne di esser prese a modello di ogni trattazione scientifica, e la vita, grande esempio di virtù e di generosità.

Chiamato a parlare di lui fra voi, illustri Colleghi, mi sforzerò di tratteggiare brevemente, come il tempo limitato permette e le mie forze consentono, la sua nobile figura [2].

Egli nacque il 13 agosto 1819 a Skreen nella contea di Sligo in Irlanda. Suo padre fu il reverendo GABRIELE STOKES e sua madre ELISABETTA era figlia del rettore di Kilrea, GIOVANNI HAUGHTON.

Educato dapprima a Dublino ed a Bristol, passò poi nel collegio Pembroke di Cambridge. Era trascorso allora un ventennio appena, dacché gli estremi vestigi della così detta ultima scuola Newtoniana erano scomparsi. Il genio di NEWTON, dopo aver sparsa tanta luce e data così potente spinta alle ricerche scientifiche, aveva tenuto ancora avvinti i geometri della sua

(*) Letta davanti alla Classe di Scienze Fis., Mat. e Nat. nella Seduta del 1° marzo 1903.

(1) I professori Lucasiani furono: BARROW (1664–1669); NEWTON (1669–1702); WHISTON (1702–1711); SAUNDERSON (1711–1739); COLSON (1739–1760); WARING (1760–1798); MILNER (1798–1820); WOODHOUSE (1820–1822); TURTON (1822–1826); AIRY (1826–1828); BABBAGE (1828–1839); KING (1839–1849); STOKES (1849–1903).

(2) Mi sono giovato dei bellissimi studii sulle opere di STOKES pubblicati da Lord KELVIN nel n. 12 febbraio 1903 della Rivista inglese « Nature » e da J. J. THOMSON nel n. 12 febbraio 1903 della « Cambridge Review ». La « Nature ha pubblicato altri articoli su STOKES il 12 febbraio 1903 e l'8 giugno 1899 in occasione del suo giubileo, e il « Times » del 2 e 3 febbraio 1903 contiene due articoli sulla vita di STOKES.

patria ai suoi metodi ed alla sua tradizione in un'epoca nella quale già altri metodi più potenti si erano sviluppati e diffusi in Europa. Ma, allorché STOKES incominciò gli studî universitarî nel 1837, quel fatale isolamento che per circa un secolo aveva conservato i matematici inglesi lontani dal movimento della scienza continentale era finito.

STOKES insieme con AIRY, SYLVESTER, GREEN, CAYLEY, WILLIAM THOMSON, MAXWELL ed altri sommi, che si succedettero nei collegi inglesi nella prima metà del secolo scorso, mostrarono all'Europa attonita di qual mirabile slancio fosse capace ancora il genio britannico e quali sublimi altezze potesse raggiungere nei campi più ardui dell'analisi, della fisica matematica e della geometria.

L'esame più elevato che si dà a Cambridge si chiama il Mathematical Tripos. WORDSWORTH [3] ci racconta la origine curiosa di questo nome, e BALL [4] ne rifà la storia rivelando tutta l'importanza di questa prova suprema universitaria nello sviluppo delle matematiche in Inghilterra.

Colui che riesce primo prende nella classificazione il nome di *Senior Wrangler*. STOKES fu *Senior Wrangler* nel 1841 contro formidabili competitori come CAYLEY e ADAMS.

Quattro anni dopo il *Second Wrangler* era un altro giovane irlandese, allievo del Collegio di Peterhouse: WILLIAM THOMSON. La reciproca stima, la eguale tendenza verso i più alti problemi della fisica e della matematica univano questi due uomini, dall'epoca in cui si trovavano ambedue a Cambridge, fino al momento in cui la morte venne a spezzare questo loro nobile legame.

Lo stesso lord KELVIN ci narra i ricordi della loro giovanile amicizia. Verso il 1840 nessun gabinetto di fisica, dice lord KELVIN, esisteva nel collegio di Pembroke; dal 1840 al 1843 il primo laboratorio di fisica delle Università della Gran Bretagna era nelle camere abitate dal giovane STOKES.

Lord KELVIN ha rievocato in questi stessi giorni le conversazioni sulla chimica stellare che i due amici tenevano passeggiando nei pressi dei collegi di Cambridge verso il 1852. Il grande superstite attesta ancora una volta che il suo compagno gli suggerì allora una delle più geniali e feconde idee della fisica, la spiegazione cioè del rapporto esistente fra le linee brillanti e le strie di assorbimento delle sostanze. Questa nuova affermazione del più illustre scienziato oggi vivente è l'ultima parola che possa dirsi sulla dibattuta questione, perché la bocca di STOKES è ormai muta, né più gli è dato modestamente rifiutare la priorità dell'idea fondamentale che domina l'analisi degli astri [5].

(3) *Origin and history of the mathematical tripos*, Cambridge 1880.

(4) *A hystory of the study of mathematics at Cambridge*, Cambridge 1889.

(5) Indipendentemente dallo STOKES, che non pubblicò le sue idee, i principii dell'analisi spettrale vennero stabiliti, come è ben noto a tutti da KIRCHHOFF e BUNSEN. Cfr. KIRCHHOF, *Zur Geschichte der Spectral-Analyse und der Analyse der Sonnenatmosphäre*. « Pogg.

STOKES fu eletto Fellow di Pembroke, ma nel 1857 dové abbandonare il Collegio a cagione del suo matrimonio con Maria Robinson, giacché gli statuti di quell'epoca imponevano ai Fellows il celibato. Però, venute in vigore le nuove disposizioni che toglievano tal vincolo, fu rieletto, e nell'agosto scorso egli divenne Master che è il più alto grado nell'Istituto. Dal 1849 egli era professore Lucasiano e nel 1851 entrò a far parte della Società Reale di cui tre anni dopo fu Segretario e poscia per un quinquennio Presidente. Rappresentò al Parlamento l'Università di Cambridge e nel 1889 i lunghi servigi da lui resi alla scienza gli valsero di essere creato Baronetto.

L'ultimo premio, che coronò una vita consacrata a studî tanto fecondi, fu la solenne celebrazione del cinquantesimo anniversario della sua nomina a professore Lucasiano. I memorabili giorni del giugno 1899 in cui, alla presenza di tutte le Autorità accademiche di Cambridge e delle rappresentanze delle Università e dei corpi scientifici di ogni parte del mondo, ebbero luogo le splendide onoranze, sono a tutti presenti e l'eco dei dotti discorsi e delle comunicazioni scientifiche fatte in quella occasione non è scomparsa (6).

In questi ultimi anni Stokes, rimasto vedovo, viveva con la figlia e col genero, quando la morte lo colse, il 1° febbraio scorso, carico di anni e di gloria.

Funerali solenni a cui si associarono le istituzioni e le più alte personalità scientifiche dell'Inghilterra ebbero luogo a Cambridge, ed egli ora riposa nel cimitero di Mill Road, mentre molti chiedono più degno posto per la sua salma nella vecchia Abazia di Westminster.

L'opera scientifica di STOKES può dirsi quella di un perfetto fisico matematico. La sua attività non si svolse in tutti i rami della scienza, ma egli sviscerò alcuni dei più importanti capitoli lasciandovi impronta imperitura.

Provetto conoscitore del calcolo e cultore profondo della più squisita analisi geometrica, appresa specialmente nelle opere immortali degli analisti francesi, seppe conciliare le indagini sperimentali colla ricerca matematica, e, se i risultati di questa furon guida alle prime, alla loro volta i problemi della fisica ispirarono le sue investigazioni analitiche, tanto che una mirabile armonia regna nelle pagine che STOKES ci ha lasciato, armonia che risponde al perfetto accordo delle facoltà speculative del suo spirito.

Annalen », Bd. 118; 1862. Lord KELVIN manifestò nella allocuzione letta alla Associazione Britannica nel 1871 le idee espostegli da STOKES nel 1852 (*Report of the fortyfirst meeting of the British Association for the advancement of science*; held at Edinburgh in August 1871, p. XCV). STOKES rifiutò in una lettera inserita nella « Nature » (6 gennaio 1876) alcun diritto alla scoperta. Egli si esprime così: « I have never attempted to claim for myself any part of KIRCHHOFF's admirable discovery, and cannot help thinking that some my friends have been over zealous in my cause ».

(6) *Memoirs presented to the Cambridge philosophical Society on the occasion of the jubilee of Sir George Gabriel Stokes. Bart. Hon. LL. D., Hon. Sc. D. Lucasian Professor*. Cambridge at the University Press, 1900.

Questa rara dote e il genio solido e pratico ereditario nella razza anglosassone, tennero lo STOKES lontano da un pericolo che ha minacciato anche grandi cultori della fisica matematica: quello cioè di lasciarsi trascinare fuori dal campo dei problemi fisici, presi a indagare, dall'attrattiva di sottili disquisizioni geometriche o di sviluppi di calcolo eleganti e difficili. L'abile analista, che cede a questo allettamento, diviene spesso lo schiavo della propria abilità. Allora mentre ammiriamo la maestria colla quale supera ardue difficoltà, dobbiamo sovente deplorare che la simmetria delle formule non risponda alla loro pratica applicazione o i risultati analitici non si prestino ad un riscontro sperimentale.

Da un tale difetto sono ben lungi le opere di STOKES, né esse mai rivelano un'analisi matematica che si spinge oltre i confini del quadro tracciato dalla questione naturale. Lord KELVIN ha espresso con una frase comprensiva questo pensiero, dicendo esser la matematica, per STOKES, un aiuto, non lui esser servo della matematica, e la stella che guidò il suo pensiero essere stata sempre la filosofia naturale.

Le ricerche di STOKES si riferiscono principalmente alla idrodinamica, all'equilibrio ed al moto dei corpi elastici, all'ottica, alla variazione della gravità sulla superficie terrestre.

Egli principiò collo studio del moto stazionario dei fluidi incompressibili, colle indagini sull'attrito interno dei fluidi in moto e sul moto dei solidi nei fluidi.

Le ricerche classiche di DIRICHLET non erano in quell'epoca ancora pubblicate, ed i celebri lavori di HELMHOLTZ sui vortici dovevano ancora farsi lungamente attendere. Lo STOKES si occupò del teorema di LAGRANGE che conteneva in germe la teoria dei vortici, precedette i suoi contemporanei nello studio del moto dei solidi nei fluidi, in particolare dei solidi di forma sferica, nel qual caso applicò felicemente il metodo delle immagini di THOMSON; ottenne finalmente la bella e feconda soluzione del problema dei movimenti di un fluido in una scatola rettangolare. L'attrito interno dei fluidi lo occupò a lungo. Trovò le equazioni fondamentali in maniera indipendente dalle ipotesi molecolari, che avevano invece guidato prima di lui NAVIER e POISSON, e ne fece importanti applicazioni al moto di una sfera nell'aria ed al problema del pendolo.

Altri lavori idrocinetici, in particolare quelli magnifici sulle onde, meriterebbero di essere ricordati se il tempo ce lo concedesse.

Ma le memorie che maggiormente hanno contribuito alla fama dello STOKES furono quelle di ottica. Nella sua teoria dinamica della diffrazione, scritta fino dal 1849, mostrò la piena padronanza della teoria analitica delle equazioni differenziali della fisica matematica. Questa teoria oggi ha fatto grandi passi e si è in parte rinnovellata, ma si rifletta che i celebri lavori del KIRCHHOFF sui raggi luminosi, che tanto hanno contribuito al suo progresso, non vennero alla luce che trentacinque anni dopo il lavoro del fisico inglese. La teoria della diffrazione è seguita da abili esperienze, e l'autore vi tratta la questione tanto dibattuta nell'ottica, e prima e dopo di lui, del piano di polarizzazione

Il magistrale lavoro sul cambiamento di rifrangibilità della luce, in cui vengono stabilite le leggi della fluorescenza, resta monumento perenne del genio di STOKES. Il modo ammirabile con cui egli ha concepite le esperienze, le ha eseguite e discusse, costituirà un modello difficilmente superato dai fisici.

Su altri lavori di ottica pur notevoli, come quello dei colori delle lamine sottili, non mi è concesso fermarmi perché l'ora incalza.

Classici ormai sono divenuti i teoremi di STOKES sulla gravità. Alle varie ipotesi di CLAIRAUT e LAPLACE relative alla costituzione interna della terra, mediante le quali essi pervenivano a stabilire le relazioni della gravità nei vari punti della superficie terrestre, egli sostituì la sola ipotesi che questa sia una superficie di livello.

La grande memoria sui valori critici delle somme di serie periodiche, tratta con grande maestria una delle più delicate e difficili questioni di analisi strettamente legata ad una classe estesa di problemi sul calore, la elettricità, la idrodinamica. Il lavoro poi sul calcolo numerico di una classe di integrali definiti e di serie infinite è un esempio di straordinaria abilità nel volgere ed impiegare le teorie analitiche a sussidio di questioni pratiche di fisica.

Sebbene numerosi, i lavori pubblicati da STOKES non sono che una parte della sua opera scientifica. Molti risultati egli non ha stampati mai, come la scoperta sull'analisi spettrale di cui già parlammo, come il teorema celebre, che porta il suo nome, sulla trasformazione degli integrali, il quale gli procurò negli anni giovanili il premio SMITH. La sua produzione anteriore al 1854 è la più importante, nondimeno egli continuò, anche recentemente le comunicazioni ai periodici scientifici, fra cui è da segnalare l'ultima, sui raggi RÖNTGEN, fatta nel 1896, allorché questa scoperta scosse il mondo scientifico. Gran parte della sua attività, a partire dal 1854, epoca in cui fu eletto segretario della Società Reale, venne spesa per aiutare gli altri nelle loro ricerche e nei loro studî. Il meraviglioso disinteresse, la sublime generosità con cui egli metteva a disposizione l'alto ingegno per altrui profitto, non erano pareggiate che dalla sicurezza dei suoi apprezzamenti e dalla libertà del suo pensiero privo di ogni pregiudizio scientifico.

È perciò che STOKES lascia, insieme all'alta sua fama di scienziato, larga eredità di affetti e lungo rimpianto come benefattore dei molti che ebbero da lui incoraggiamento, consiglio ed aiuto.

Sulle ridenti e verdi rive del Cam, giace la tranquilla città universitaria, piccola per estensione, ma grande perché ivi coll'andar dei secoli si è maturato gran parte del pensiero scientifico della vecchia Inghilterra. Colà in mezzo ad istituzioni e a costumi medioevali, l'arringo è aperto alle idee più moderne, e lo spirito conservatore, le antiche tradizioni e i ricordi si rafforzano accoppiandosi ad una larga libertà di pensiero. Nei vetusti e gloriosi Collegi di Cambridge vive ed è tuttora fresco il ricordo di NEWTON, ed il suo grande spirito sembra aleggiare nelle gotiche sale in mezzo a tanti celebri maestri ed allievi.

Fra questi, e allievo e maestro dell'antica Università, campeggerà sempre nella sua serena, nobile e maestosa figura GIORGIO GABRIELE STOKES.

VI.

SUL NUMERO DEI COMPONENTI INDIPENDENTI DI UN SISTEMA

« Rend. Acc. Lincei », ser. 5ª, vol. XII, 1903₂, pp. 417–419.

1. Per applicare la *regola delle fasi* è necessario calcolare il numero dei componenti e il numero delle fasi di un dato sistema.

Per il calcolo del primo numero non ho veduto nei trattati indicata nessuna regola pratica generale. Avendone esposta una semplice nelle mie lezioni mi permetto di porla a cognizione dei chimici, colla speranza di risparmiar loro dei calcoli nei vari casi, talora complicati, che si presentano in pratica.

2. Si abbia un certo numero di corpi di determinata composizione chimica, ciascuno dei quali possa prendersi in quantità arbitraria. Esiste allora un numero che esprime quanti sono gli elementi semplici, componenti i detti corpi, le cui masse possono prendersi arbitrariamente e, determinate le quali, restano definite le masse di tutti gli altri elementi costituenti il sistema.

Il problema che si tratta risolvere è di determinare questo numero che si chiama il *numero dei componenti indipendenti*.

3. Ecco ora la regola che si può applicare.

Denotiamo con $P_1, P_2, \cdots, P_n$ i simboli degli elementi semplici che costituiscono gli m corpi del sistema, e siano

$$\begin{array}{l} P_1^{\alpha_1'}, P_2^{\alpha_2'}, \cdots, P_n^{\alpha_n'} \\ P_1^{\alpha_1''}, P_2^{\alpha_2''}, \cdots, P_n^{\alpha_n''} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ P_1^{\alpha_1^{(m)}}, P_2^{\alpha_2^{(m)}}, \cdots, P_n^{\alpha_n^{(m)}} \end{array}$$

le formole chimiche degli m corpi composti.

Supporremo che se un elemento non entra nella composizione di uno dei corpi si prenda eguale a 0 l'esponente corrispondente all'elemento nella formula di quel corpo.

Si costruisca la matrice

$$\left\| \begin{array}{l} \alpha_1', \alpha_2', \cdots, \alpha_n' \\ \alpha_2'', \alpha_2'', \cdots, \alpha_n'' \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \alpha_1^{(m)}, \alpha_2^{(m)}, \cdots, \alpha_n^{(m)} \end{array} \right\| .$$

Se fra i sottodeterminanti di ordine h della matrice ve ne è uno almeno diverso da zero, mentre non si può formare alcun sottodeterminante di ordine superiore ad h, o se possono formarsene sono tutti nulli, h è il numero dei componenti indipendenti del sistema.

In pratica dunque, dopo scritta la matrice, si cominceranno ad estrarre i sottodeterminanti di ordine massimo; se fra questi ve ne è uno almeno diverso da zero, il loro ordine darà il numero dei componenti indipendenti. Se invece sono tutti nulli, si passerà a quelli di ordine inferiore di un'unità. Se fra questi ve ne è uno almeno diverso da zero il loro ordine darà il numero dei componenti indipendenti; ma se sono tutti nulli bisognerà passare a quelli di ordine inferiore, e così di seguito finché non si giunga ad un primo sottodeterminante diverso da zero: il suo ordine sarà eguale al numero dei componenti indipendenti.

4. Diamo alcuni esempî di applicazione di questa regola.

1° Supponiamo di avere *acqua* e *acido solforico*

FORMULE

Acqua	H^2O	$= H^2S^0O^1$
Acido solforico	H^2SO^4	$= H^2S^1O^4$

MATRICE

$$\left\| \begin{matrix} 2, & 0, & 1 \\ 2, & 1, & 4 \end{matrix} \right\|$$

I sottodeterminanti di ordine 2 sono differenti da zero, dunque *il numero dei componenti indipendenti è 2.*

2° *Carbonato di calcio, ossido di calcio, anidride carbonica.*

FORMULE

Carbonato di calcio	$CaCO^3$	$= Ca^1C^1O^3$
Ossido di calcio	CaO	$= Ca^1C^0O^1$
Anidride carbonica	CO^2	$= Ca^0C^1O^2$

MATRICE

$$\left\| \begin{matrix} 1, & 1, & 3 \\ 1, & 0, & 1 \\ 0, & 1, & 2 \end{matrix} \right\|$$

Il determinante del terzo ordine è nullo; *i sottodeterminanti del secondo ordine non sono nulli,* dunque *il numero dei componenti indipendenti è 2.*

3° *Acido solforico, mercurio, solfato mercurico, acqua, anidride solforosa.*

FORMULE

Acido solforico	H^2SO^4	$= H^2S^1O^4Hg^0$
Mercurio	Hg	$= H^0S^0O^0Hg^1$
Solfato mercurico	$HgSO^4$	$= H^0S^1O^4Hg^1$
Acqua	H^2O	$= H^2S^0O^1Hg^0$
Anidride solforosa	SO^2	$= H^0S^1O^2Hg^0$

MATRICE

$$\begin{Vmatrix} 2, & 1, & 4, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 1 \\ 0, & 1, & 4, & 1 \\ 2, & 0, & 1, & 0 \\ 0, & 1, & 2, & 0 \end{Vmatrix}$$

Esistono sottodeterminanti del quarto ordine diversi da zero, dunque *il numero dei componenti indipendenti è 4.*

4° *Nitrato di sodio, acido solforico, solfato acido di sodio, acido nitrico.*

FORMULE

Nitrato di sodio	$NaNO^3$	$= H^0Na^1N^1O^3S^0$
Acido solforico	H^2SO^4	$= H^2Na^0N^0O^4S^1$
Solfato acido di sodio	$NaHSO^4$	$= H^1Na^1N^0O^4S^1$
Acido nitrico	HNO^3	$= H^1Na^0N^1O^3S^0$

MATRICE

$$\begin{Vmatrix} 0, & 1, & 1, & 3, & 0 \\ 2, & 0, & 0, & 4, & 1 \\ 1, & 1, & 0, & 4, & 1 \\ 1, & 0, & 1, & 3 & 0 \end{Vmatrix}$$

Tutti i sottodeterminanti del quarto ordine sono nulli, quelli del terzo no, dunque, *il numero dei componenti indipendenti è 3.*

VII.

SUR LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DU TYPE PARABOLIQUE

«Comptes rendus Ac. Sc. de Paris», vol. CXXXIX, 1904_2, pp. 956–959.

Les théories des équations différentielles aux dérivées partielles des types elliptique et hyperbolique sont très avancées et ont atteint désormais une forme classique. Je citerai les travaux de M. PICARD sur les équations du type elliptique et, entre les plus récents travaux sur les équations du type hyperbolique, ceux de MM. HADAMARD, COULON et D'ADHÉMAR. Pour le type hyperbolique, on sait que c'est la méthode de RIEMANN et la notion des caractéristiques, développée par DU BOIS-REYMOND et M. DARBOUX, qui a permis de relier par quelques formules générales tous les résultats.

L'étude des équations du type parabolique n'est pas si avancée que celle des équations des autres types. Cependant l'équations différentielle de la propagation de la chaleur est du type parabolique et elle a été le sujet d'un grand nombre de recherches depuis les anciens travaux de FOURIER, de POISSON, de LAPLACE, jusqu'aux travaux récents de M. BOUSSINESQ et de M. APPELL.

Mais, en se bornant même à l'équation de la propagation de la chaleur à deux variables indépendantes, il n'y a pas jusqu'à présent de formules générales capables de faire ressortir toutes les particularités de l'intégration.

On sait, par exemple, que l'une des variables indépendantes joue un rôle tout à fait différent de l'autre et POISSON a beaucoup insisté sur ce point en montrant que la même intégrale peut s'exprimer moyennant deux fonctions arbitraires ou une seule fonction arbitraire.

Or la méthode des caractéristiques qui a eu tant de succès dans le cas des équations du type hyperbolique semble, au premier abord, impuissante à éclaircir ces questions fondamentales par rapport aux équations du type parabolique.

Voici, maintenant, la cause de cette difficulté. On a toujours conçu la méthode de RIEMANN comme bornée au domaine des variables réelles. Au contraire, pour approfondir avec succès les questions dont nous venons de parler, il faut commencer par étendre la méthode aux variables complexes et ensuite l'appliquer ainsi généralisée.

Je vais montrer l'avantage que l'on peut tirer de cette idée en étudiant l'équation différentielle

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{\partial u}{\partial x} = f(x, z). \tag{1}$$

Nous supposerons que l'on puisse regarder u et f comme des fonctions de la variable réelle z et de $x = \xi + i\eta$ et que ces fonctions n'aient pas de singularités dans le domaine où on les envisage. En écrivant $u(z, \xi, \eta)$, $f(z, \xi, \eta)$ ce domaine sera à trois dimensions et il sera défini par les trois coordonnées réelles z, ξ, η.

En priant le lecteur de faire la figure, menons une droite mm' parallèle à l'axe z dans le plan ξz et une surface régulière σ limitée par cette droite et par deux lignes MNP et M'N'P', les points M, P, M', P' étant sur mm'. Nous regarderons la ligne $s \equiv$ MNP P' N' M' comme le contour de la surface σ.

ψ étant une solution de l'équation (1) et ψ_1 une solution de l'équation adjointe

$$\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \frac{\partial v}{\partial x} = f_1(x, z),$$

posons

$$u = \psi_1 \frac{\partial \psi}{\partial z} - \psi \frac{\partial \psi_1}{\partial z} \quad , \quad v = i\left(\psi_1 \frac{\partial \psi}{\partial z} - \psi \frac{\partial \psi_1}{\partial z}\right) \quad , \quad w = \psi\psi_1 .$$

En choisissant convenablement la direction de la normale n à la surface σ, on aura par le théorème de Stokes

$$\int_\sigma \left[\left(\frac{\partial w}{\partial \eta} - \frac{\partial v}{\partial z}\right)\cos n\xi + \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right)\cos n\eta + \left(\frac{\partial v}{\partial \xi} - \frac{\partial u}{\partial \eta}\right)\cos nz\right] d\sigma$$

$$= \int_s (u d\xi + v d\eta + w dz),$$

c'est-à-dire

$$\frac{1}{i}\int_\sigma [\psi_1 f(x, z) - \psi f_1(x, z)] \frac{\partial x}{\partial n} d\sigma$$

$$= \int_L \left[\left(\psi_1 \frac{\partial \psi}{\partial z} - \psi \frac{\partial \psi_1}{\partial z}\right)dx + \psi\psi_1 dz\right] + \int_{L'} \left[\left(\psi_1 \frac{\partial \psi}{\partial z} - \psi \frac{\partial \psi_1}{\partial z}\right)dx + \psi\psi_1 dz\right]$$

$$+ \int_P^{P'} \psi\psi_1 dz + \int_{M'}^{M} \psi\psi_1 dz,$$

où L désigne la courbe MNP et L' la courbe P' N' M'.

Les équations de la droite mm' étant $\xi = x_0$, $\eta = 0$, soit A un point ayant pour coordonnées $\xi = x_1 > x_0$, $\eta = 0$, $z = z_1$. Si la droite aa' parallèle à z menée par A ne rencontre pas la surface σ, nous pourrons prendre

$$(2) \qquad \psi_1 = e^{-\frac{(z - z_1)^2}{4(x_1 - x)}} (x_1 - x)^{-1/2} \quad , \quad f_1 = 0.$$

Cette fonction est polydrome, c'est pourquoi deux cas pourront se présenter:

1° La droite aa' est entourée par la surface σ;

2° Elle n'est pas entourée par cette surface.

Dans le *premier* cas, si l'on prend les valeurs de ψ_1 positives sur la partie MM' du contour, elles seront négatives le long de PP'. Dans le *second* cas, si l'on prend les valeurs de ψ_1 positives sur MM', elles seront aussi positives sur PP'.

Cela posé, déplaçons le point A sur AA_0 parallèle à l'axe ξ en l'approchant indéfiniment du point A_0 de la ligne mm'. Supposons qu'en se déplaçant la droite aa' ne rencontre pas la surface σ. On voit aisément que les intégrales

$$\int_P^{P'} \psi\psi_1\, dz \quad , \quad \int_{M'}^{M} \psi\psi_1\, dz$$

tendront vers zéro, vers $\pm\, 2\sqrt{\pi}\,\psi(x_0, z_1)$, ou vers $\pm \sqrt{\pi}\,\psi(x_0, z_1)$; c'est pourquoi, en désignant par ε un facteur numérique qu'on peut déterminer facilement, on aura

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} &\varepsilon \sqrt{\pi}\,\psi(x_0, z_1) \\ &= \lim \left\{ \int_L \left[\left(\psi_1 \frac{\partial\psi}{\partial z} - \psi \frac{\partial\psi_1}{\partial z}\right) dx + \psi\psi_1\, dz\right] \right. \\ &\left. + \int_{L'} \left[\left(\psi_1 \frac{\partial\psi}{\partial z} - \psi \frac{\partial\psi_1}{\partial z}\right) dx + \psi\psi_1\, dz\right] + i \int_\sigma \psi_1 f \frac{\partial x}{\partial n}\, d\sigma \right\}. \end{aligned}\right.$$

Cette formule est très générale et en la spécialisant elle donne lieu à bien des applications. Si L' est une ligne appartenant au plan parallèle à $\xi\eta$ mené par A, on a

$$\lim \int_{L'} \left(\psi_1 \frac{\partial\psi}{\partial z} - \psi \frac{\partial\psi_1}{\partial z}\right) dx = 0,$$

c'est pourquoi la seconde intégrale du second membre disparaît. Si $f = 0$ la troisième intégrale aussi s'annule et la formule devient

$$(4)\qquad \varepsilon \sqrt{\pi}\,\psi(x_0, z_1) = \lim \left\{ \int_L \left[\left(\psi_1 \frac{\partial\psi}{\partial z} - \psi \frac{\partial\psi_1}{\partial z}\right) dx + \psi\psi_1\, dz\right] \right\}.$$

Si l'on est dans le second cas, ou peut réduire la ligne L' à un point, et même alors la seconde intégrale du second membre de l'équation (3) disparaît.

On a supposé que la droite mm' est située dans le plan ξz, mais on peut, par une translation, transporter les axes coordonnés, où l'on veut, de manière que cette condition n'est pas nécessaire. Donc x_0 peut être aussi un nombre complexe.

La valeur de ε dans la formule (4) dépend de la position du point A_0 par rapport au segment MP. Si A_0 est extérieur au segment MP, $\varepsilon = \pm\, 2$ dans le *premier* cas, et $\varepsilon = 0$ dans le *second* cas. Si A_0 est intérieur au segment MP, $\varepsilon = 0$ dans le premier cas, $\varepsilon = \pm\, 2$ dans le second cas.

La formule (4) renferme les intégrales connues de l'équation étudiée. Elle réunit sous une expression unique des résultats qui paraissaient n'avoir pas de rapport directs entre eux et explique bien des faits. Tout résulte de la polydromie de l'intégrale (2). Or cette polydromie ne pouvait jouer son rôle, si l'on n'étendait pas d'abord la méthode aux variables complexes.

VIII.

NOTE ON THE APPLICATION OF THE METHOD OF IMAGES TO PROBLEMS OF VIBRATIONS

« Proc. of the London Math. Soc. », Ser. 2, vol. 2, 1904, pp. 327–331.

Lord KELVIN'S method of images has yielded the solution of a large number of problems in electrostatics, in the theory of steady electric currents, in hydrodynamics (STOKES, HICKS). It has also been applied with success to problems of elastic equilibrium by BETTI, CERRUTI, SOMIGLIANA, and others. In all these cases the partial differential equations that are involved are of *elliptic* type. Applications of the method have been made also by BETTI to problems of the conduction of heat involving differential equations of *parabolic* type. I propose now to explain an application of the method to a question concerning the vibrations of elastic bodies in which, naturally, the differential equations are of *hyperbolic* type (1).

The result to which I wish to call especial attention is that in this latter case the application of the method of successive images leads to solutions containing a finite number of terms—not to infinite series—even in the case where the number of images is infinite. This result may seem somewhat paradoxical, but it will be shown to depend upon the fact that it is not necessary to use all the images of the infinite train, but only, in each case, a finite number of them. The reason for this simplification is to be sought in the fact that the characteristic surfaces of the partial differential equations of hyperbolic type are real, and thus the property in question is bound up with the hyperbolic character of the equations, and is, consequently, capable of a very wide application.

In my paper in the « Acta Mathematica », t. XVIII (*), there was given the solution of the following problem among others:

In the differential equation of vibrating membranes, viz.,

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2},$$

(1) M. HADAMARD in a very interesting paper published in the « Bulletin de la Société Mathématique de France », has also utilised the method of images in a problem of vibrations, but he has not called attention to the point which is chiefly emphasised in the present note.

(*) In queste « Opere »: vol. secondo, III, pp. 19–73 [N. d. R.].

consider x, y, t as Cartesian coordinates of a point in a space of three dimensions, and let the values of w and its normal derivative $\partial w/\partial n$ be given on a surface σ in this space. It is required to determine, whenever possible, the value of w.

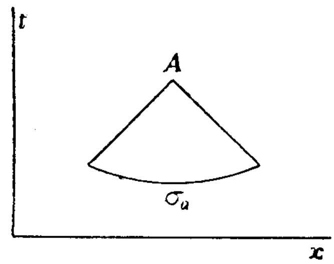


Fig. 1.

The solution is as follows:–With any point A (x_1, y_1, t_1) of the space as vertex draw a right circular cone of vertical angle 90° with its axis parallel to the axis of t. Let that sheet of the cone – the "inferior" sheet, say – in which $t < t_1$ cut out on the surface σ a portion σ_a, as in fig. 1. Let a positive quantity r be determined by the equation

$$r^2 = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2.$$

Then w is expressed by the formula

$$\text{(A)} \quad w(x_1, y_1, t_1) = \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial t_1}\int_{\sigma_a} \frac{1}{\sqrt{\{(t_1 - t)^2 - r^2\}}} \left\{\cos(n, t) - \frac{t_1 - t}{r}\cos(n, r)\right\} w\, d\sigma_a$$

$$+ \frac{1}{2\pi}\int_{\sigma_a} \frac{1}{\sqrt{\{(t_1 - t)^2 - r^2\}}} \left[\frac{\partial w}{\partial t}\cos(n, t) - \left\{\frac{\partial w}{\partial x}\cos(n, x) + \frac{\partial w}{\partial y}\cos(n, y)\right\}\right] d\sigma_a .$$

If the surface σ is the plane of (x, y), this formula reduces to that of POISSON.

Now suppose that the surface σ is formed by that portion of the plane of (x, y) which is defined by $x > 0$ and that portion of the plane of (t, y) which is defined by $t > 0$. Tehn σ_a may be bounded by a circle in the plane of (x, y), or it may be bounded partly by an arc of a circle in the plane of (x, y) and partly by an arc of an hyperbola in the plane of (t, y). The latter case is represented in Fig. 2, which shows the trace of the cone and planes upon the plane of (x, t). The surface σ consists of a portion σ'_a bounded by a circle, and a portion σ''_a bounded by an hyperbola. The formula (A) becomes

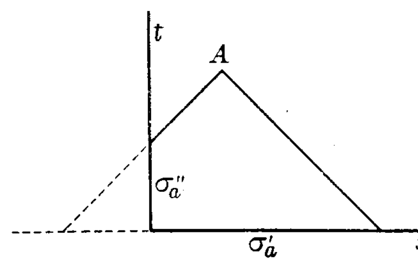


Fig. 2.

$$\text{(B)} \qquad w(x_1, y_1, t_1) = \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial t_1}\int_{\sigma'_a} \frac{1}{\sqrt{(t_1^2 - r^2)}}\, w\, d\sigma'_a + \frac{1}{2\pi}\int_{\sigma'_a} \frac{1}{\sqrt{(t_1^2 - r^2)}}\frac{\partial w}{\partial t}\, d\sigma'_a$$

$$- \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial t_1}\int_{\sigma''_a} \frac{1}{\sqrt{\{(t_1 - t)^2 - r^2\}}}\frac{t_1 - t}{r}(\cos n, r)\, w\, d\sigma''_a - \frac{1}{2\pi}\int_{\sigma''_a} \frac{1}{\sqrt{\{(t_1 - t)^2 - r^2\}}}\frac{\partial w}{\partial x}\, d\sigma''_a .$$

The values of w and $\partial w/\partial t$ on σ'_a are arbitrary, but those of w and $\partial w/\partial x$ on σ''_a cannot be given arbitrarily; if the values of either w or $\partial w/\partial x$ on σ''_a

are given, those of the other are determined thereby. We must therefore seek to eliminate from the formula (B) either the values of w or those of $\partial w/\partial x$ on the surface σ_a'', as is done in analogous cases where the methods of GREEN are employed. For this purpose we may have recourse to the method of images. Suppose, in fact, that, as shown in Fig. 3, A′ is the optical image of the point A in the plane of (y, t).

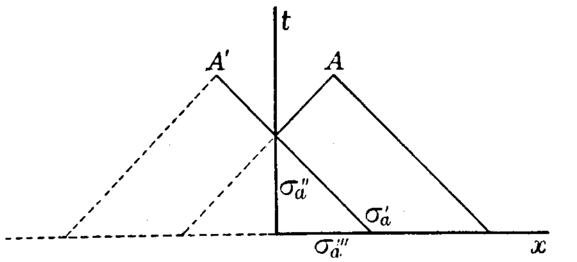


Fig. 3.

The inferior sheet of a cone drawn from A′ in the same way as the former cone was drawn from A will cut out on the plane of (h, t) an area σ_a'' bounded by an arc of an hyperbola, and it it will cut out on the plane of (x, y) an area σ_a''' bounded by an arc of a circle, and we shall have the formula

(C) $$0=\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial t_1}\int_{\sigma_a'''}\frac{1}{\sqrt{(t_1^2-r'^2)}}\,w\,d\sigma_a'''+\frac{1}{2\pi}\int_{\sigma_a'''}\frac{1}{\sqrt{(t_1^2-r'^2)}}\frac{\partial w}{\partial t}\,d\sigma_a'''$$

$$+\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial t_1}\int_{\sigma_a''}\frac{1}{\sqrt{\{(t_1-t)^2-r'^2\}}}\frac{t_1-t}{r}\cos(n, r)\,w\,d\sigma_a''-\frac{1}{2\pi}\int_{\sigma_a''}\frac{1}{\sqrt{\{(t_1-t)^2-r'^2\}}}\frac{\partial w}{\partial x}\,d\sigma_a'',$$

where

$$r'^2=(x+x_1)^2+(y-y_1)^2.$$

By adding the formulæ (B) and (C) we eliminate w; by subtracting (C) from (B) we eliminate $\partial w/\partial x$. Thus the method of images leads easily to the desired result.

We proceed to consider successive images. Suppose that the surface σ is formed by the strip σ' of the plane of (x, y) defined by $a > x > 0$, and by the two half planes $(x = 0, t > 0)$ and $(x = a, t > 0)$, denoted respectively by σ'' and σ'''. It is clear that, if the cone with its vertex at A cuts out on σ' the area σ_a', and on σ'' and σ''' the areas σ_a'' and σ_a''' bounded by arcs of hyperbolas, the formula (A) becomes

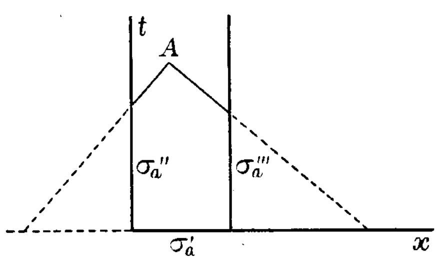


Fig. 4.

$$w(x_1, y_1, t_1) = \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial t_1}\int\limits_{\sigma_a} \frac{1}{\sqrt{(t_1^2 - r^2)}} w\, d\sigma_a + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\sigma_a} \frac{1}{\sqrt{(t_1^2 - r^2)}} \frac{\partial w}{\partial t} d\sigma'_a$$

$$-\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial t_1}\int\limits_{\sigma''_a} \frac{1}{\sqrt{\{(t_1 - t)^2 - r^2\}}} \frac{t_1 - t}{r} \cos(n, r)\, w\, d\sigma''_a - \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\sigma''_a} \frac{1}{\sqrt{\{(t_1 - t)^2 - r^2\}}} \frac{\partial w}{\partial x} d\sigma''_a$$

$$-\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial t_1}\int\limits_{\sigma'''_a} \frac{1}{\sqrt{\{(t_1 - t)^2 - r^2\}}} \frac{t_1 - t}{r} \cos(n, r)\, w\, d\sigma'''_a + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\sigma'''_a} \frac{1}{\sqrt{\{(t_1 - t)^2 - r^2\}}} \frac{\partial w}{\partial x} d\sigma'''_a .$$

In this formula the values of w and $\partial w/\partial x$ on σ''_a and σ'''_a are not independent, and the method of images can be used to eliminate either of them. For this purpose we must take the images of A with respect to the planes σ'' and σ''', the images of these images with respect to the same planes, and so on indefinitely. The number of images which are obtained in this way is, of course, infinite, but it is important to observe that it is not necessary to use them all. A finite number of them suffices for the solution of the problem.

With each of the images as vertex draw a cone of vertical angle 90° and with its axis parallel to the axis of t, and take the inferior sheets of these cones. If the vertex of any one is at a distance from σ'' or σ''' which exceeds t_1, that one does not cut these half planes, and it may be omitted. It is clear that the values of w or of $\partial w/\partial x$ on σ''_a and σ'''_a can be eliminated from the preceding formulæ by taking account of those images only which are at a less distance than t_1 from σ'' and σ'''.

We conclude from this argument that the method of images does not in this case lead to infinite series, but to solutions with a finite number of terms. In place of the three planes σ'', σ' and σ''' we might have five, of which four are perpendicular to σ and cut it in a rectangle. If w vanishes on the four planes perpendicular to σ, we have the well known problem of the vibrations of a rectangular membrane, and we have a solution of this problem by means of definite integrals without having to introduce any infinite series.

IX.

SUR LES FONCTIONS QUI DÉPENDENT D'AUTRES FONCTIONS

«Comptes Rendus Ac. des Sciences», vol, CXLII, 1906, pp. 691–695.

Dans une série de travaux que j'ai publiés il y a déjà quelque temps, j'ai envisagé les quantités qui dependent de toutes les valeurs d'une fonction ou de plusieurs fonctions dans certains domaines.

L'exemple le plus simple qu'on peut donner est celui d'une intégrale définie d'une fonction, car elle dépend des valeurs de la fonction qu'on intègre entre les limites de l'intégrale. Mais un grand nombre d'exemples sont donnés par les questions de Physique mathématique. C'est ainsi que la température dans un point d'un corps dépend de toutes les valeurs de la température au contour du domaine occupé par le corps. Le potentiel d'un fluide homogène et incompressible dans un point déterminé dépend de la forme de la masse fluide et, par suite, si l'équation de la surface du fluide a le second membre nul, le potentiel dépend des valeurs de la fonction qui paraît au premier membre. Il est évident que les fonctions dont nous parlons n'ont rien à faire avec les ordinaires fonctions de fonctions.

J'ai donné des applications de ce concept dans quelques questions d'analyse. J'ai tâché en effet de l'employer dans l'étude des fonctions analytiques de plusieurs variables. Toute opération algébrique ou de dérivation appliquée à ces fonctions conduit à de nouvelles fonctions analytiques, mais les opérations d'intégration nous amènent à des fonctions qui dépendent des contours des domaines d'intégration et par conséquent à des quantités qui dépendent d'autres fonctions.

Lorsqu'on veut étendre les méthodes de HAMILTON et de JACOBI sur les questions de la Mécanique aux systèmes continus et aux problèmes de la Physique mathématique, on est aussi amené d'une manière toute naturelle à ces concepts.

Les problèmes qui présentent le plus d'intérêt sont ceux où les fonctions dont dépendent les quantités qu'on envisage sont inconnues, et il faut les déterminer par des propriétés de ces quantités. Les problèmes du calcul des variations nous en offrent les premiers exemples et aussi les plus simples. Mais il y aussi d'autres questions qui s'y rapportent. Ce sont les problèmes de l'inversion, et en particulier ceux des intégrales définies où les fonctions inconnues paraissent sous les intégrales.

C'est en poursuivant ce but, et en vue du problème général dont j'ai parlé que j'ai étudié il y a quelques années ce problème dans le cas le plus simple possible, celui où le déterminant fondamental est égal à sa diagonale [1]. M. FREDHOLM, dans un remarquable travail, a étudié le problème dans le cas où le déterminant est quelconque en arrivant à des résultats du plus grand intérêt et M. HILBERT vient de reprendre la question en y faisant des applications très étendues.

Le concept que nous avons exposé des fonctions qui dépendent d'une autre fonction ou de plusieurs fonctions se rattache directement à la définition de fonctions donnée par Dirichlet. La critique de cette définition a donné lieu à bien des discussions parmi lesquelles celles toutes récentes de M. PIERRE BOUTROUX sont très intéressantes. Il est évident que le concept

(1) *Sulla inversione degli integrali definiti.* «Atti R. Acc. di Torino», 1896, Nota I [in queste «Opere»: vol. secondo, XVIII, pp. 216–225] § 3 et Notes suivantes.

est attaché à celui de loi physique, mais je n'entrerai pas dans cette question, je remarquerai seulement qu'en posant successivement certaines conditions et certaines limitations on peut passer du concept de fonction tel que l'a posé DIRICHLET à celui de fonction analytique. Il est inutile de rappeler ces conditions qui sont bien connues et qui se rapportent à la continuité, à l'existence des dérivées, etc.

On peut proceder de la même manière dans le cas des fonctions qui dépendent de toutes les valeurs d'une fonction ou de plusieurs fonctions.

Envisageons le cas le plus simple, celui d'une quantité F qui dépend des valeurs d'une fonction continue $f(x)$ définie pour les valeurs de x comprises entre a et b. Il n'y a pas de difficulté à étendre le concept de continuité à la variable F. Supposons maintenant qu'on parte d'une fonction initiale $f(x)$ et qu'on la change en la remplaçant par $f(x) + \varepsilon\varphi(x)$ où ε est une quantité infiniment petite. On peut tâcher de calculer la variation de F.

Sous certaines conditions la partie du premier ordre, par rapport à ε, de cette variation, peut s'exprimer par une intégrale définie

$$\varepsilon \int_a^b \varphi(\xi_1)\, F'(\xi_1)\, d\xi_1 .$$

La fonction $F'(\xi_1)$ joue le rôle de première dérivée. Elle est indépendante de $\varphi(\xi)$, mais elle dépend, en général, de toutes les valeurs de $f(x)$ c'est pourquoi on peut tâcher de trouver la variation de $F'(\xi_1)$ lorsqu'on remplace $f(x)$ par $f(x) + \varepsilon\varphi(x)$. Si l'on néglige les parties qui sont infiniment petites d'un ordre supérieur à ε, sous certaines conditions on trouve que cette variation est donnée par

$$\varepsilon \int_a^b \varphi(\xi_2)\, F''(\xi_1, \xi_2)\, d\xi_2 .$$

$F''(\xi_1, \xi_2)$ joue le rôle de première dérivée de $F'(\xi_1)$ et de seconde dérivée de F. Elle est indépendante de $\varphi(x)$, mais dépend de toutes les valeurs de $f(x)$. Elle est une fonction symétrique de ξ_1 et ξ_2. On peut aussi calculer la troisième dérivée qui s'exprime par une fonction $F'''(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ symétrique et ainsi de suite.

Cela posé on peut se proposer de développer la valeur de F qui correspond à $f(x) + \varepsilon\varphi(x)$ dans une série de puissances de ε. Sous certaines conditions qui sont semblables à celles qu'on a pour la série ordinaire de Taylor on trouve

$$F = F_0 + \varepsilon \int_a^b \varphi(\xi_1)\, F'(\xi_1)\, d\xi_1 + \frac{1}{2}\, \varepsilon^2 \int_a^b\!\!\int_a^b F''(\xi_1, \xi_2)\, d\xi_1\, d\xi_2$$

$$+ \frac{1}{3!}\, \varepsilon^2 \int_a^b\!\int_a^b\!\int_a^b F'''(\xi_1, \xi_2, \xi_3)\, \varphi(\xi_1)\, \varphi(\xi_2)\, \varphi(\xi_3)\, d\xi_1\, d\xi_2\, d\xi_3 + \cdots$$

$$+ \frac{1}{n!}\, \varepsilon^n \int_a^b \cdots \int_a^b F^{(n)}(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)\, \varphi(\xi_1)\, \varphi(\xi_2) \cdots \varphi(\xi_n)\, d\xi_1 \cdots d\xi_n + \cdots,$$

où $F^{(n)}(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$ est une fonction symétrique des n variables $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$, indépendante de $\varphi(x)$. Après cela, en faisant $\varepsilon = 1$, on peut éliminer cette quantité.

Il faut remarquer que les fonctions qui dépendent d'une autre fonction et qui ont cette représentation analytique sont tout à fait spéciales et qu'on peut en envisager de plus générales ayant aussi des représentations analytiques. Les différents termes du second membre constituent des fonctions de différents degrés et l'on peut envisager F comme une quantité qui dépend de φ par une relation analytique du même type, par exemple des fonctions transcendantes.

Pour montrer le parti qu'on peut tirer dans certains cas du développement, je vais en faire une application à l'un des problèmes dont j'ai parlé.

Supposons qu'on écrive l'équation suivante

$$\vartheta\psi(x) = \varepsilon\varphi(x)\,\alpha + \varepsilon\int_a^b \varphi(\xi_1)\,F'(\xi_1, x)\,d\xi_1$$

$$+ \frac{1}{2}\varepsilon^2\int_a^b\int_a^b F''(\xi_1, \xi_2, x)\,\varphi(\xi_1)\,\varphi(\xi_2)\,d\xi_1\,d\xi_2 + \cdots$$

$$+ \frac{1}{n!}\varepsilon^n\int_a^b\cdots\int_a^b F^{(n)}(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n, x)\,\varphi(\xi_1)\cdots\varphi(\xi_n)\,d\xi_1, \cdots, d\xi_n + \cdots,$$

α étant une quantité donnée et $\psi(x)$ étant connue pour les valeurs de x comprises entre a et b, tandis que $\varphi(x)$ est une fonction inconnue.

Le cas le plus simple est celui où $F'', F''', \cdots, F^{(n)}, \cdots$ sont nulles, c'est-à-dire où l'on a

$$\vartheta\psi(x) = \varepsilon\varphi(x)\,\alpha + \varepsilon\int_a^b \varphi(\xi_1)\,F'(\xi_1, x)\,d\xi_1.$$

C'est le cas de l'inversion qui a été envisagé par M. FREDHOLM et par moi-même lorsque la limite supérieure de l'intégrale est égale à x. Dans un cours que je viens de faire à l'Université de Stockholm j'ai montré que l'on peut résoudre le problème général de déterminer $\varphi(x)$. Ce problème correspond à la détermination de la racine d'une équation transcendante et se résout par une simple remarque. Il suffit de développer $\varepsilon\varphi(x)$ suivant les puissances de ϑ en supposant qu'à $\vartheta = 0$ corresponde $\varepsilon = 0$.

C'est pourquoi calculons

$$\left\{\frac{d[\varepsilon\varphi(x)]}{d\vartheta}\right\}_{\vartheta=0} = \left\{\frac{d(\varepsilon\varphi)}{d\vartheta}\right\}_0 \quad , \quad \left\{\frac{d^2[\varepsilon\varphi(x)]}{d\vartheta^2}\right\}_{\vartheta=0} = \left\{\frac{d^2(\varepsilon\varphi)}{d\vartheta^2}\right\}_0, \cdots$$

On trouve alors

$$(1) \qquad \psi(x) = \left\{\frac{d[\varepsilon\varphi(x)]}{d\vartheta}\right\}_0 \alpha + \int_a^b \left\{\frac{d[\varepsilon\varphi(\xi_1)]}{d\vartheta}\right\}_0 F'(\xi_1, x)\,d\xi_1.$$

Si nous pouvons invertir cette formule, ce qui arrivera par exemple si le déterminant n'est pas nul, on trouvera

$$(2)\qquad \left\{\frac{d[\varepsilon\varphi(x)]}{d\vartheta}\right\}_0 = \beta\psi(x) + \int_a^b \psi(\eta_1)\,\Phi'(\eta_1, x)\,dy_1 .$$

En dérivant une fois encore on a

$$0 = \left\{\frac{d^2\,\varepsilon\varphi(x)}{d\vartheta^2}\right\}_0 \alpha + \int_a^b \frac{d^2[\varepsilon\varphi(\xi_1)]}{d\vartheta_2}\,F'(\xi_1, x)\,d\xi_1$$

$$+ \int_a^b\int_a^b F''(\xi_1, \xi_2, x)\left\{\frac{d[\varepsilon\varphi(\xi_1)]}{d\vartheta}\right\}_0\left\{\frac{d[\varepsilon\varphi(\xi_2)]}{d\vartheta}\right\}_0 d\xi_1\,d\xi_2,$$

d'où l'on tire aisément, par la formule (2),

$$\left\{\frac{d^2[\varepsilon\varphi(x)]}{d\vartheta^2}\right\}_0 = \int_a^b\int_a^b \Phi''(\eta_1, \eta_2, x)\,\psi(\eta_1)\,\psi(\eta_2)\,d\eta_1\,d\eta_2 .$$

De même, on peut calculer $\left\{\frac{d^3[\varepsilon\varphi(x)]}{d\vartheta^3}\right\}$ et ainsi de suite, de sorte qu'on aura

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} &\varepsilon\varphi(x) = \vartheta\psi(x)\,\beta + \vartheta\int_a^b \psi(\eta_1)\,\Phi'(\eta_1, x)\,d\eta_1 \\ &+ \frac{1}{2}\vartheta^2\int_a^b\int_a^b \Phi''(\eta_1, \eta_2, x)\,\psi(\eta_1)\,\psi(\eta_2)\,d\eta_1\,d\eta_2 + \cdots \\ &+ \frac{1}{n!}\vartheta^n\int_a^b\cdots\int_a^b \Phi^{(n)}(\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n, x)\,\psi(\eta_1)\cdots\psi(\eta_n)\,d\eta\cdots d\eta_n + \cdots \end{aligned}\right.$$

où $\Phi^{(n)}(\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n, x)$ est une fonction symétrique de $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n$. *La solution est donc une fonction de même nature que celle dont on est parti.* Nous n'entrerons pas ici dans les détails relatifs au domaine de convergence, à l'unicité et à la vérification directe de la formule que nous venons de donner, mais elle peut s'étendre à bien d'autres cas de représentations analytiques. C'est pourquoi il faut la regarder comme le premier pas dans cet ordre de recherches. Les quantités ε, ϑ ne sont que des quantités auxiliaires, on peut les faire disparaître dans les formules (1) et (3), en les prenant égales à l'unité.

X.

LEÇONS SUR L'INTÉGRATION DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

Professées à Stockholm (Février, Mars 1906) sur l'invitation de S. M. le Roi de Suède. Nouveau tirage. Paris, Hermann, 1912 (*).

PRÉFACE À LA NOUVELLE IMPRESSION.

Les exemplaires, qu'on avait tirés en 1906 à Upsal, de mes leçons de Stockholm, étaient épuisés depuis quelques années. C'est pourquoi j'ai été heureux de pouvoir autoriser MM. HERMANN et fils à en exécuter un nouveau tirage par procédé anastatique. J'aurais bien désiré d'en faire une nouvelle édition avec des additions, mais en ce moment, étant très absorbé par d'autres travaux, je n'aurais pas le temps de m'en occuper. J'ai ajouté, aux corrections qui sont placées à la fin du volume, quelques notes bibliographiques, qui pourront compenser, dans une certaine mesure, les additions que je n'ai pas fait dans le texte. J'espère qu'on voudra bien me pardonner si dans les citations il y a des omissions involontaires.

Beaucoup des sujets qui sont traités dans cet ouvrage ont fait des progrès depuis l'époque où ces leçons ont paru. En particulier, la théorie des fonctions qui dépendent d'autres fonctions a progressé grâce à mes propres travaux et à ceux de MM. HADAMARD, FRÉCHET, PAUL LÉVY, et d'autres auteurs. Pour l'exposition de ces recherches, il aurait fallu de très longs développements.

Dans l'introduction se trouve cette remarque: « L'étude des équations du type parabolique n'est pas si avancée que celle des équations des autres types ». C'était vrai en 1906, ce n'est plus exact aujourd'hui. Il y a maintenant beaucoup de travaux modernes sur les équations du type parabolique d'un grand intérêt, soit au point de vue de l'analyse pure, soit à celui des applications à la théorie de la chaleur et de la viscosité. Je suis heureux que les leçons 10 et 11 consacrées à ce sujet, aient donné une impulsion aux recherches des géomètres dans cette direction.

Ariccia, Août 1912.

(*) Si è ritenuto opportuno pubblicare di queste Lezioni la seconda edizione, che differisce dalla prima (Upsal, Almqvist & Sviksell, 1906) per l'aggiunta della Prefazione, per qualche complemento alle bibliografie e per talune correzioni, di cui, naturalmente, si è tenuto conto. [N. d. R.].

1ère leçon.

INTRODUCTION.

1. Le cours que je ferai se rapportera à quelques points de la théorie des équations différentielles de la physique mathématique. On sait que la physique mathématique traverse une période de crise. On abandonne certaines idées pour en suivre de nouvelles. Tous ceux, par exemple, qui ont lu les éloquentes pages que M. POINCARÉ a consacré à cette question et ceux qui ont pris connaissance de l'état actuel de la science dans le bel ouvrage de M. PICARD, sont renseignés d'une manière fort claire là-dessus. Mais, même si certains concepts que nous avons maintenant sur la nature des phénomènes naturels et quelques principes fondamentaux devaient être ébranlés par de nouveaux faits et de nouvelles découvertes, une partie de la physique mathématique a bien des chances de se sauver du naufrage. Elle représente en effet, peut-être d'une manière grossière, mais certainement d'une manière très-simple, une grande partie des faits naturels connus, les relie ensemble et a une utilité pratique hors de toute discussion.

L'histoire des sciences nous offre l'exemple de théories analytiques de certains phénomènes qui ont été créées sous l'influence de certains principes et qui ont résisté à la chute de ces principes. Pour n'en citer qu'un seul, parmi la foule de ceux qui se présentent, il suffit de rappeler la théorie des instruments optiques qui se conserve dans ses lignes générales, tandis que les principes de l'optique ont subi tant d'évolutions.

2. Les théories de la propagation de la chaleur, de l'hydrodynamique, de l'élasticité, des forces newtoniennes et de l'électromagnétisme peuvent être aujourd'hui traitées sous un point de vue commun, de sorte qu'elles peuvent constituer un seul chapitre d'analyse. On peut systématiser les méthodes qu'on emploie et classifier tous les faits qui s'y rapportent par la classification des équations différentielles dont ils dépendent. Cela conduit à envisager trois *types* d'équations différentielles qu'on a l'habitude d'appeler *elliptique*, *hyperbolique* et *parabolique* et des *types mixtes*.

Lorsqu'on étudie les choses sous cet aspect une seule formule est capable de nous révéler sous une forme unique des propriétés qui se rapportent à des phénomènes en apparence divers entre eux. Quelquefois l'analogie est une simple analogie analytique, quelquefois elle va bien au delà.

Supposons maintenant pour un instant que la base des faits physiques sur laquelle pose l'édifice analytique vienne manquer, ou qu'on la néglige. Cet édifice est tellement solide et utile par lui-même qu'il continuerait à subsister comme un des plus beaux chapitres de l'analyse.

3. Le point de départ de toutes les considérations dont nous venons de parler est d'envisager un ensemble continu ou un *domaine* à une, deux ou trois dimensions. A chaque point du domaine correspond une quantité sca-

laire ou un vecteur ou plusieurs quantités scalaires et plusieurs vecteurs liés par les équations différentielles. Ces quantités sont quelquefois constantes par rapport au temps et quelquefois variables. Dans ce cas on a en général un grand avantage en considérant les temps comme une nouvelle coordonnée.

Tout le monde sait que les idées des physiciens ont toujours oscillé entre le concept d'un milieu continu, siège de tous les phénomènes par lequel on tâche de supprimer toute action à distance, et le concept fondé sur l'hypothèse des molécules séparées et des actions à distance.

Il ne faut pas croire que nos considérations soient liées forcément au premier concept. Elles correspondent aussi à l'autre. Il suffit pour cela de rappeler que CAUCHY, POISSON, FOURIER, LAPLACE, qui suivaient les idées qu'on appelle maintenant de la mécanique physique, c'est à dire au fond le second sistème, ont été les premiers à découvrir les équations différentielles qui forment la base des théories analytiques. Il leur a fallu, pour y parvenir, faire un passage à la limite qui les a amené du discontinu au continu. Mais une fois cette limite franchie, les deux conceptions au point de vue analytique se mèlent dans la plupart des cas.

4. Je n'aurai pas le temps de traiter d'une manière complète le chapitre d'analyse dont je viens de parler. Je toucherai seulement à quelques points, qui me semblent avoir un certain intérét et que je crois nouveaux. Le rôle que certaines solutions polydromes jouent dans les différents cas, voilà un point que je tâcherai d'examiner avec quelque détail. Nous envisagerons ces solutions dans les différents types d'équations et pour nous familiariser avec elles nous étudierons d'abord les solutions polydromes dans le cas de l'équilibre élastique. Elles nous conduisent à des résultats pratiques et frappants qu'on peut montrer par des modèles matériels qui nous dévoilent leur vrai caractère et leur importance. Le cas d'équilibre des corps élastiques à connexion multiple, non assujettis à des forces externes, est en dépendance étroite avec les solutions polydromes, et nous offre de nouveaux problèmes de la théorie de l'élasticité.

5. La théorie des fonctions est liée aux problèmes de physique mathématique qui dépendent de l'équation de LAPLACE à deux variables. Si l'on envisage, par exemple, un voile liquide incompressible infiniment mince qui est en mouvement, tout théorème de la théorie des fonctions peut être interprété comme un theorème relatif au mouvement. Réciproquement toute propriété du mouvement peut être interprétée comme un théorème de la théorie des fonctions. On obtient cette relation par les fonctions conjuguées qu'il faut regarder comme la partie réelle et le coefficient de l'imaginaire dans la théorie des fonctions et en hydrodynamique comme le potentiel de vitesse et la fonction qui définit les lignes des courants.

Mais cela est borné au cas de deux dimensions. Comment généraliser la chose au cas d'un nombre quelconque de dimensions? Je montrerai que la théorie des fonctions conjuguées peut s'étendre au cas général par l'introduction d'un nouveau concept analytique sur lequel je reviendrai tout à l'heure. Cela nous amènera à exposer certaines vues nouvelles sur la théorie générérale des fonctions.

6. Par rapport aux équations du type hyperbolique j'exposerai d'abord, sans entrer dans les détails, quelques résultats que j'ai trouvés et publiés il y a quelques temps et qui plus recemment ont été étendus et complétés par d'autres géométres.

Ensuite je tâcherai de montrer le rôle bien singulier que joue le principe des images. La mémorable méthode de LORD KELVIN peut être employée quelquefois même dans ce cas et amène à des résultats plus simples que dans celui des équations du type elliptique. L'influence de la réalité des caractéristiques se révèle par là d'une manière frappante.

Il y a un mémoire très-profond de WEIERSTRASS sur l'intégration des équations différentielles linéaires aux dérivées partielles où il expose une méthode par laquelle il intègre quelques équations du type hyperbolique. M^{me} KOWALEWSKI a appliqué dans un travail sur l'optique la méthode de WEIERSTRASS, mais, sans s'en douter, elle avait à faire avec des fonctions polydromes, c'est pourquoi la methode ne l'a pas amenée au résultat qu'elle cherchait. J'entrerai dans la discussion de cette question et du rôle de la solution polydrome. Je n'ai connu aucun géomètre, après M^{me} KOWALEWSKI, qui ait employé la méthode de WEIERSTRASS et elle paraît comme une méthode à part qui n'est pas reliée aux autres. Je serai heureux de montrer qu'elle se rattache d'une manière très-simple à la méthode de KIRCHHOFF. Or, puisque les méthodes de KIRCHHOFF, de GREEN et de RIEMANN ont des rapports étroits entre elles, toutes ces différentes méthodes restent reliées ensemble.

7. Les dernières leçons seront consacrées aux équations différentielles du type parabolique. Leur étude n'est pas si avancée que celle des équations des autres types. Au premier abord il ne semble pas que la méthode des caractéristiques, qui a donné les résultats les plus généraux dans le cas hyperbolique, puisse conduire à embrasser tous les résultats connus lorsqu'on l'applique aux équations du type parabolique. Nous montrerons où est la difficulté. On a toujours conçu la méthode de RIEMANN comme bornée au domaine des variables réelles. Au contraire pour approfondir avec succès la question des équations du type parabolique, il faut commencer par étendre la méthode aux variables complexes et ensuite l'employer ainsi généralisée.

Comme application des formules qu'on a dans les cas des équations du type parabolique j'exposerai la solution d'un problème qui se rapporte aux oscillations des fluides incompressibles. J'aurai ainsi l'occasion de dire quelques mots par rapport à cette question générale qui d'un côté est liée aux équations du type elliptique et d'un autre côté à bien des rapports avec les problèmes des ondes qu'on étudie par des équations du type hyperbolique. Je donnerai à ce propos une formule analogue à celle ordinaire de GREEN qui contient une fonction analogue à celle qu'on appelle fonction de GREEN.

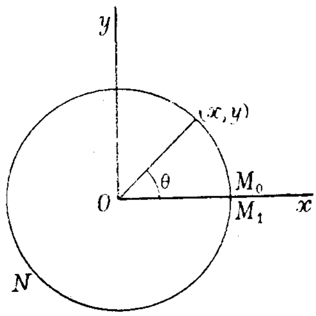
8. Voilà le programme du cours. Cependant je n'ai pas encore parlé d'une manière explicite d'une question dont j'aurai l'occasion de traiter avec quelque détail. Nous avons vu que dans nos considérations nous prenons comme fondement un continu à un certain nombre de dimensions, dans lequel on envisage des quantités scalaires ou des vecteurs. Supposons que nous ayons une quantité scalaire qui soit une fonction des points d'un domaine à trois dimensions, et pour fixer les idées supposons que ce soit la température des points d'une surface. Aura-t-on examiné d'une manière complète la question en envisageant cette quantité scalaire comme une fonction de trois variables, c'est à dire des coordonnées des différents points de la surface et du temps? Il est facile de se convaincre que, si nous pouvons changer arbitrairement la température au contour du corps, la température dépendra aussi de toutes les valeurs de la fonction qui exprime la température au contour. De même le potentiel d'un corps déformable dépendra de la forme du corps. On est par là amené d'une manière fort naturelle, et l'on peut même dire qu'on est forcé d'envisager non seulement les fonctions qui dépendent d'un certain nombre de variables, mais aussi celles qui dépendent de la forme de certaines lignes et de certaines surfaces et de toutes les valeurs de certaines fonctions. Nous aurons l'occasion de parler de ce concept et de développer quelques idées sur ces fonctions et sur leur inversion, lorsque nous entrerons dans le sujet dont nous avons touché au § 5.

2ième leçon.

1. Envisageons dans un plan les axes coordonnés x, y et la fonction $\theta = \operatorname{arc\,tg}(y/x)$.

θ est l'angle que le rayon vecteur fait avec l'axe x. Partons d'un point M_0 situé sur l'axe x, et, après avoir parcouru un cycle $M_0 N M_1$ autour de l'origine, revenons au point de départ M_1.

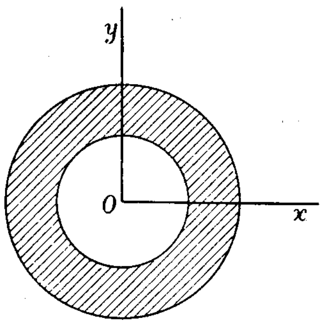
En prenant les valeurs de θ qui se suivent avec continuité, la valeur θ_1 qu'on trouve en M_1 après avoir parcouru le cycle est égale à la valeur initiale augmentée de 2π. Voilà un exemple très-simple d'une fonction *polydrome*.



Les dérivées partielles $\frac{\partial\theta}{\partial x} = -\frac{y}{x^2+y^2}$, $\frac{\partial\theta}{\partial y} = \frac{x}{x^2+y^2}$ ainsi que les dérivées successives sont finies continues et monodromes excepté à l'origine. C'est pourquoi dans un domaine S qui ne comprend pas l'origine les dérivées $\partial\theta/\partial x$, $\partial\theta/\partial y$ seront regulières ainsi que leurs dérivées successives.

2. Rappellons un théorème de calcul intégral qu'on appelle théorème de GAUSS.

Soit S *un domaine à trois dimensions,* X , Y , Z *trois fonctions monodromes finies et continues qui ont des dérivées monodromes finies et continues. On a*



$$\int_S \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \right) dS$$

$$= \int_\sigma (X \cos nx + Y \cos ny + Z \cos nz)\, d\sigma$$

σ *étant le contour du domaine* S, n *la normale à* σ *dirigée vers l'extérieur du domaine* S.

Rappelons aussi le théorème de STOKES. σ *étant une surface ayant pour contour* s *et* X , Y , Z *étant des fonctions monodromes finies et continues dont les dérivées sont aussi monodromes finies et continues, on a*

$$\int_\sigma \left\{ \left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} \right) \cos nx + \left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} \right) \cos ny + \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right) \cos nz \right\} d\sigma$$

$$= \pm \int_s (X\, dx + Y\, dy + Z\, dz)$$

n *étant la normale à* σ. *On peut faire l'intégration sur le contour* s *dans une direction telle que l'intégrale du second membre soit précédée du signe* $+$

3. Un domaine à trois dimensions est *acyclique* ou *à connexion simple* si toute ligne fermée que l'on peut tirer à l'intérieur peut se réduire infiniment petite par une déformation continue sans sortir du domaine.

Si cette condition n'est pas vérifiée, le domaine est *cyclique* ou à *connexion multiple.* Supposons que par une coupure transversale un espace cyclique devienne acyclique, on dit alors que cette *connexion est double.* Si l'espace cyclique devient acyclique lorsqu'on fait deux coupures, on dit que la *connexion est triple,* et ainsi de suite. Dans tout domaine acyclique une ligne fermée peut être regardée comme le contour d'une surface située à l'intérieur du domaine.

4. Dans la théorie de l'élasticité on peut envisager un milieu continu et l'on peut supposer qu'il existe un *état naturel* où il n'y a aucune tension interne. Déplaçons infiniment peu les points du milieu, et soient, u , v , w les composantes des déplacements, alors la déformation du milieu est définie par les quantités que les Anglais appellent *strains*

$$\gamma_{11} = \frac{\partial u}{\partial x} \quad , \quad \gamma_{22} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad , \quad \gamma_{33} = \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$\gamma_{32} = \gamma_{23} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \quad , \quad \gamma_{13} = \gamma_{31} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \quad , \quad \gamma_{21} = \gamma_{12} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \, .$$

Il peut y avoir déplacement sans déformation lorsque ces quantités sont nulles.

Le potentiel des forces élastiques relatif à chaque élément dS du milieu déformé s'exprime par

$$F(\gamma_{11}, \gamma_{22}, \gamma_{33}, \gamma_{23}, \gamma_{31}, \gamma_{12})\, dS$$

où F est un polynome homogène de 2^d degré par rapport à $\gamma_{11}, \gamma_{22}, \gamma_{33}, \gamma_{23}, \gamma_{31}, \gamma_{12}$ qui est toujours négatif et s'annulle seulement lorsque toutes les quantités γ_{rs} sont nulles.

La tension dans chaque point est caractérisée par les quantités

$$t_{11} = \frac{\partial F}{\partial \gamma_{11}} \quad , \quad t_{22} = \frac{\partial F}{\partial \gamma_{22}} \quad , \quad t_{33} = \frac{\partial F}{\partial \gamma_{33}}$$

$$t_{32} = t_{23} = \frac{\partial F}{\partial \gamma_{23}} \quad , \quad t_{13} = t_{31} = \frac{\partial F}{\partial \gamma_{31}} \quad , \quad t_{21} = t_{12} = \frac{\partial F}{\partial \gamma_{12}},$$

que les Anglais appellent *streis.*

La *tension unitaire* qui s'exerce sur chaque élément d'aire $d\sigma$ du milieu a pour composantes

$$T_x = t_{11} \cos nx + t_{12} \cos ny + t_{13} \cos nz$$

$$T_y = t_{21} \cos nx + t_{22} \cos ny + t_{23} \cos nz$$

$$T_z = t_{31} \cos nx + t_{32} \cos ny + t_{33} \cos nz,$$

n étant la normale de l'élément $d\sigma$.

Si X, Y, Z sont les composantes des forces extérieures unitaires qui s'exercent sur chaque élément dS du corps élastique, et T_x, T_y, T_z les composantes de la tension unitaire qui s'exerce sur chaque élément du contour, les équations de l'équilibre élastique sont

$$(1)\ \left\{\begin{aligned} X &= \frac{\partial t_{11}}{\partial x} + \frac{\partial t_{12}}{\partial y} + \frac{\partial t_{13}}{\partial z} \\ Y &= \frac{\partial t_{21}}{\partial x} + \frac{\partial t_{22}}{\partial y} + \frac{\partial t_{23}}{\partial z} \\ Z &= \frac{\partial t_{31}}{\partial x} + \frac{\partial t_{32}}{\partial y} + \frac{\partial t_{33}}{\partial z} \end{aligned}\right. \qquad (2)\ \left\{\begin{aligned} T_x &= t_{11} \cos nx + t_{12} \cos ny + t_{13} \cos nz \\ T_y &= t_{21} \cos nx + t_{22} \cos ny + t_{23} \cos nz \\ T_z &= t_{31} \cos nx + t_{32} \cos ny + t_{33} \cos nz, \end{aligned}\right.$$

où n est la normale au contour dirigée vers l'intérieur du corps.

Lorsque le corps est isotrope et homogène on a

$$F = \frac{1}{2} L\theta^2 + K\psi,$$

en ayant posé

$$\theta = \gamma_{11} + \gamma_{22} + \gamma_{33} \quad , \quad \psi = \gamma_{11}^2 + \gamma_{22}^2 + \gamma_{33}^2 + \frac{1}{2}(\gamma_{23}^2 + \gamma_{31}^2 + \gamma_{12}^2):$$

c'est pourquoi

$$\begin{aligned} t_{11} &= L\theta + 2\,K\gamma_{11} \qquad & t_{23} &= K\gamma_{23} \\ t_{22} &= L\theta + 2\,K\gamma_{22} & t_{31} &= K\gamma_{31} \\ t_{33} &= L\theta + 2\,K\gamma_{33} & t_{12} &= K\gamma_{12}. \end{aligned}$$

L et K sont des quantités constantes et négatives, θ est la *dilatation cubique.*

Les équations (1) deviennent alors

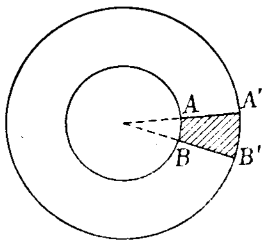
$$(1')\qquad \begin{cases} X = K\Delta^2 u + (L+K)\dfrac{\partial\theta}{\partial x} \\ Y = K\Delta^2 v + (L+K)\dfrac{\partial\theta}{\partial y} \\ Z = K\Delta^2 w + (L+K)\dfrac{\partial\theta}{\partial z}, \end{cases}$$

le symbole Δ^2 représentant l'opération

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

5. Ayant rappelé ces notions fondamentales nous voulons montrer que la théorie de l'élasticité pour les corps ayant une forme cyclique se présente d'une manière différente que pour les corps acycliques, et cela tient au rôle que les solutions polydromes jouent dans la question.

On énonce en général le théorème qu'*un corps élastique qui n'est pas soumis à des actions externes est en équilibre*, et on tire de là que *les forces externes étant données la déformation du corps est connue*. Or ces propositions ne sont exactes que si le corps a une connexion simple.



Pour montrer qu'il y a des cas où elles ne se vérifient pas, envisageons un *anneau*. Retranchons une tranche radiale AA', BB' très mince, et soudons les deux bouts AA' et BB'. Le corps après la soudure sera soumis à des tensions internes et cependant il ne supportera aucune action extérieure.

On pourrait soupçonner que quelque discontinuité ou quelque singularité s'est produite dans la déformation à l'endroit où l'on a fait la soudure; mais on peut démontrer qu'il n'y a aucune singularité de cette sorte, de manière que si l'on voulait trouver l'endroit où l'on a fait la soudure par quelque particularité de la déformation il serait impossible de la retrouver.

On peut se demander à quoi tient la contradiction entre les propositions précédentes et le résultat que nous venons d'examiner.

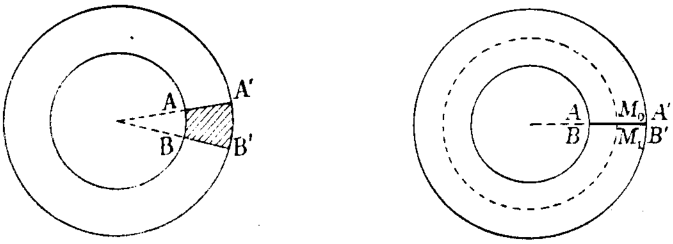
Le nœud de la question est dans l'application du théorème de GAUSS. En effet pour démontrer les propositions que nous avons énoncées tout à l'heure on suppose que dans les équations (1) et (2) $X = Y = Z = T_x = T_y = T_z = 0$, on multiplie les deux membres des équations (1) respectivement par u, v, w, qu'on somme, qu'on intègre et transforme par le théorème de GAUSS. On tire de là que

$$\int_S F dS = 0,$$

S étant l'espace occupé par le corps élastique; d'où l'on déduit

$$\gamma_{11} = \gamma_{22} = \gamma_{33} = \gamma_{23} = \gamma_{31} = \gamma_{12} = 0,$$

c'est à dire que si les forces extérieures sont nulles il n'y a pas de déformation. Or nous avons remarqué que pour appliquer le théorème de GAUSS il faut que toutes les fonctions qu'on emploient soient monodromes. Montrons que dans le cas de l'anneau les composantes des déplacements u, v, w sont polydromes.



En effet examinons les déplacements après la soudure. Les points de AA′ ne se seront pas déplacés tandis que les points de BB′ se seront déplacés de la largeur de la fissure qu'on a faite. C'est pourquoi si nous partons d'un point M_0 de AA′, parcourons un cycle à l'intérieur de l'anneau et prenons les valeurs des déplacements qui se suivent avec continuité, nous revenons au point de départ de l'autre coté M_1 de la coupure avec des valeurs des déplacements différents des valeurs qu'on avait au point de départ. C'est un cas de polydromie analogue à celui que nous avons envisagé dans le premier paragraphe.

On tire de là deux conséquences:

La première est que pour rendre exactes les deux propositions qu'on a énoncées il faut ajouter la condition que les déplacements soient monodromes.

La seconde conséquence est qu'il faut reposer la question:

Quand est-ce que les déplacements peuvent être polydromes?

6. Dans les considérations que nous venons de faire nous nous sommes laissés conduire par l'intuition; mais il serait dangereux de continuer de la sorte. En effet par intuition on serait amené à penser que le même résultat qu'on a obtenu dans le cas de l'anneau on pourrait l'obtenir dans le cas d'un corps acyclique quelconque en y retranchant une tranche très-mince et en soudant les faces de la coupure. Or dans ce cas, par cette opération, la déformation du corps ne serait pas régulière, c'est pourquoi tout se présenterait d'une manière différente, que dans le cas de l'anneau.

Nous allons démontrer que si l'on suppose que la déformation est régulière, c'est à dire que si γ_{11}, γ_{22}, γ_{33}, γ_{23}, γ_{31}, γ_{12} sont des fonctions finies monodromes et continues et que leurs dérivées sont aussi finies continues et monodromes, la polydromie des deplacements ne peut se présenter que si le corps a une forme cyclique.

Il suffit de trouver des formules par lesquelles on puisse calculer u, v, w en connaissant les quantités γ_{rs}.

Soit s une ligne, et désignons par A_0 et A_1 ses points extremes. Soient $\gamma_{rs}^{(0)}$ et $\gamma_{rs}^{(1)}$ les valeurs de γ_{rs} aux points A_0 et A_1, $x_0 y_0 z_0$ les coordonnées de A_0, $x_1 y_1 z_1$ les coordonnées de A_1. Les valeurs de u, v, w au point A_1 seront données par les formules

$$\text{(I)}\qquad u_1 = u_0 + \frac{1}{2}(\gamma_{21}^{(0)} + r_0)(y_1 - y_0) + \frac{1}{2}(\gamma_{31}^{(0)} - q_0)(z_1 - z_0)$$

$$+ \int_s \Big\{ \Big[\gamma_{11} + (y_1 - y)\frac{\partial \gamma_{11}}{\partial y} + (z_1 - z)\frac{\partial \gamma_{11}}{\partial z}\Big]\frac{dx}{ds}$$

$$+ \Big[(y_1 - y)\Big(\frac{\partial \gamma_{12}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{22}}{\partial x}\Big) + \Big(\frac{z_1 - z}{2}\Big)\Big(\frac{\partial \gamma_{21}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{31}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{23}}{\partial x}\Big)\Big]\frac{dy}{ds}$$

$$+ \Big[\Big(\frac{y_1 - y}{2}\Big)\Big(\frac{\partial \gamma_{21}}{\partial z} + \frac{\partial y_{31}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{23}}{\partial x}\Big) + (z_1 - z)\Big(\frac{\partial \gamma_{13}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{33}}{\partial x}\Big)\Big]\frac{dz}{ds}\Big\} ds$$

$$\text{(I')}\qquad v_1 = v_0 + \frac{1}{2}(\gamma_{32}^{(0)} + p_0)(z_1 - z_0) + \frac{1}{2}(\gamma_{12}^{(0)} - r_0)(x_1 - x_0)$$

$$+ \int_s \Big\{ \Big[\Big(\frac{z_1 - z}{2}\Big)\Big(\frac{\partial \gamma_{32}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{12}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{31}}{\partial y}\Big) + (x_1 - x)\Big(\frac{\partial \gamma_{21}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{11}}{\partial y}\Big)\Big]\frac{dx}{ds}$$

$$+ \Big[\gamma_{22} + (z_1 - z)\frac{\partial \gamma_{22}}{\partial z} + (x_1 - x)\frac{\partial \gamma_{22}}{\partial x}\Big]\frac{dy}{ds}$$

$$+ \Big[(z_1 - z)\Big(\frac{\partial \gamma_{23}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{33}}{\partial y}\Big) + \Big(\frac{x_1 - x}{2}\Big)\Big(\frac{\partial \gamma_{32}}{\partial x} + \frac{\partial x_{12}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{31}}{\partial y}\Big)\Big]\frac{dz}{ds}\Big\} ds$$

$$\text{(I'')}\qquad w_1 = w_0 + \frac{1}{2}(\gamma_{13}^{(0)} + q_0)(x_1 - x_0) + \frac{1}{2}(\gamma_{23}^{(0)} - p_0)(y_1 - y_0)$$

$$+ \int_s \Big\{ \Big[(x_1 - x)\Big(\frac{\partial \gamma_{31}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{11}}{\partial z}\Big) + \Big(\frac{y_1 - y}{2}\Big)\Big(\frac{\partial \gamma_{13}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{23}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{12}}{\partial z}\Big)\Big]\frac{dx}{ds}$$

$$+ \Big[\Big(\frac{x_1 - x}{2}\Big)\Big(\frac{\partial \gamma_{13}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{23}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{12}}{\partial z}\Big) + (y_1 - y)\Big(\frac{\partial \gamma_{32}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{22}}{\partial z}\Big)\Big]\frac{dy}{ds}$$

$$+ \Big[\gamma_{33} + (x_1 - x)\frac{\partial \gamma_{33}}{\partial x} + (y_1 - y)\frac{\partial \gamma_{33}}{\partial y}\Big]\frac{dz}{ds}\Big\} ds,$$

où u_0, v_0, w_0 sont les valeurs de u, v, w au point A_0 et p_0, q_0, r_0 sont égales aux valeurs des différences

$$\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y}\ ,\quad \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z}\ ,\quad \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}$$

au point A_0.

On le vérifie aisément en faisant les dérivées de u_1, v_1, w_1 par rapport à x_1, y_1, z_1.

Il faut maintenant chercher les conditions pour la monodromie.

Supposons que la ligne s se réduise à un cycle fermé. Si le corps élastique occupe une région acyclique, on pourra regarder s comme le contour d'une surface σ situé à l'intérieur du corps; c'est pourquoi les intégrales qui paraissent dans les formules précédentes pourront se transformer par le théorème de STOKES et elles s'écriront

$$\int\limits_\sigma \left\{ \left[\frac{y_1 - y}{2} B - \frac{z_1 - z}{2} C\right] \cos nx + \left[(z_1 - z) F + \frac{y_1 - y}{2} A\right] \cos ny + \left[(y_1 - y) G + \frac{z_1 - z}{2} A\right] \cos nz \right\} d\sigma$$

$$\int\limits_\sigma \left\{ \left[(z_1 - z) E + \frac{x_1 - x}{2} B\right] \cos nx + \left[\frac{z_1 - z}{2} C - \frac{x_1 - x}{2} A\right] \cos ny + \left[(x_1 - x) G + \frac{z_1 - z}{2} B\right] \cos nz \right\} d\sigma$$

$$\int\limits_\sigma \left\{ \left[(y_1 - y) E + \frac{x_1 - x}{2} C\right] \cos nx + \left[(x_1 - x) F + \frac{y_1 - y}{2} C\right] \cos ny + \left[\frac{x_1 - x}{2} A - \frac{y_1 - y}{2} B\right] \cos nz \right\} d\sigma ,$$

oú n est la normale à σ et

$$A = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \gamma_{31}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{12}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{23}}{\partial x}\right) - 2\frac{\partial^2 \gamma_{11}}{\partial z\, \partial y} \qquad E = \frac{\partial^2 \gamma_{32}}{\partial y\, \partial z} - \frac{\partial^2 \gamma_{22}}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{33}}{\partial y^2}$$

$$B = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \gamma_{12}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{23}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{31}}{\partial y}\right) - 2\frac{\partial^2 \gamma_{22}}{\partial x\, \partial z} \qquad F = \frac{\partial^2 \gamma_{31}}{\partial z\, \partial x} - \frac{\partial^2 \gamma_{33}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{11}}{\partial z^2}$$

$$C = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \gamma_{23}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{31}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{12}}{\partial z}\right) - 2\frac{\partial^2 \gamma_{33}}{\partial y\, \partial x} \qquad G = \frac{\partial^2 \gamma_{12}}{\partial x\, \partial y} - \frac{\partial^2 \gamma_{11}}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{22}}{\partial x^2}.$$

Mais par un théorème de DE SAINT VENANT on a

$$A = B = C = D = E = F = 0\,;$$

c'est pourquoi les intégrales des formules (I) (I') (I'') s'annulleront, et on aura

$$u_1 = u_0 \quad , \quad v_1 - v_0 \quad , \quad w_1 = w_0 ,$$

ce qui prouve que si la forme du corps est acyclique et la déformation régulière, les déplacements sont monodromes. Mais si le corps est cyclique, le cycle fermé s n'est pas en général le contour d'une surface σ appartenant à la région occupée par le corps, et par suite on ne peut pas en général appliquer le théorème de STOKES et enfin les déplacements peuvent être polydromes.

7. On peut résumer les résultats qu'on vient d'obtenir en énonçant les propositions suivantes.

Un corps élastique ayant une forme acyclique et une déformation régulière peut être amené à l'état naturel par des déplacements finis continus et monodromes.

Si le corps élastique a une forme cyclique, cela n'est pas toujours possible, et pour l'amener à l'état naturel il sera nécessaire quelquefois de faire des coupures et de retrancher des parties du corps.

Un corps élastique fini ayant une forme acyclique et n'étant pas sujet à des forces extérieures est à l'état naturel si la déformation ne peut cesser d'être régu-

lière, mais, si le corps est cyclique, le corps peut être à l'état de tension, même si n'existent pas des actions extérieures.

Les forces extérieures étant connues, la déformation régulière d'un corps acyclique est connue, mais celle d'un corps cyclique n'est pas connue. Elle est connue seulement *dans le cas où l'on sait d'avance que le corps élastique peut être amené à l'état naturel par des déplacements monodromes.*

3ième leçon.

1. Lorsque le corps est cyclique, on peut le réduire acyclique en faisant des coupures. Les formules (I) (I') (I'') donnent aisément la loi des discontinuités des déplacements le long des coupures. Les valeurs des déplacements d'un côté d'une coupure étant u_α, v_α, w_α et celles de l'autre côté étant u_β, v_β, w_β on a

$$(3) \qquad \left\{ \begin{aligned} u_\beta - u_\alpha &= l + ry - qz \\ v_\beta - v_\alpha &= m + pz - rx \\ w_\beta - w_\alpha &= n + qx - py, \end{aligned} \right.$$

$l, m, n, p, q, r,$ étant des quantités constantes pour chaque coupure.

A chaque coupure correspondent donc 6 valeurs constantes qu'on peut appeler les constantes de la coupure, et l'on a le théorème:

Un corps élastique cyclique étant déformé regulièrement, la déformation est déterminée par les forces extérieures et les constantes de chaque coupure.

On voit par là que les problèmes de l'élasticité pour les corps cycliques se présentent d'une manière fort différente que pour les corps acycliques.

2. Les formules (3) montrent très–facilement la signification mécanique des constantes de chaque coupure. En effet supposons que nous fassions effectivement les coupures dans le corps cyclique déformé de manière qu'il puisse reprendre l'état naturel, et s'il est nécessaire retranchons les parties surabondantes du corps.

Alors les formules (3) nous montrent que *les molécules situées des deux cotés de chaque coupure, et qui adhéraient auparavant, ont été séparées par un déplacement relatif qui résulte d'une translation et d'une rotation. Cette translation et cette rotation son égales pour tous les couples de molécules qui adhéraient le long de la coupure.*

Si l'on prend pour centre de réduction l'origine, les constantes de la coupure sont les composantes de la translation et de la rotation par rapport aux axes coordonnés.

Réciproquement pour déformer le corps cyclique on pourra faire les coupures qui le rendent acyclique. Ensuite, l'on pourra déplacer les deux faces de chaque coupure de manière que le déplacement relatif de tous les couples de molécules qui se trouvent vis à vis soit résultant de la même rotation et de la même translation. Enfin on pourra souder entre elles les faces en rentranchant ou en ajoutant la matière qui sera nécessaire.

Nous appelons cette opération une *distorsion* du corps et les 6 constantes de chaque coupure les *caractéristiques* de chaque distorsion.

Les formules (I) (I') (I'') conduisent aussi immédiatement à un autre résultat.

Prenons deux coupures qui peuvent se réduire l'une à l'autre par une transformation continue, alors *les caractéristiques des deux coupures sont égales entre elles.*

On voit par là que les caractéristiques d'une distorsion ne dépendent pas des coupures que l'on a faites, mais de la déformation du corps et de sa nature géométrique. *Le nombre des distorsions indépendantes d'un corps est égal à l'ordre de la connexion diminué d'une unité.*

3. Une question qui se pose naturellement est la suivante: *Peut-on choisir toutes les caractéristiques d'une manière arbitraire?*

On démontre en général que les caractéristiques des distorsions étant données d'une manière arbitraire, le problème de la déformation du corps peut être ramené à un problème ordinaire de l'équilibre où le corps n'est assujetti à aucune distorsion mais seulement à des forces données.

Nous laisserons de côté ce théorème général, et nous envisagerons un cas particulier. Soit σ une aire finie du plan xz qui ne rencontre pas l'axe z. Faisons tourner le plan autour de cet axe et en même temps déformons et déplaçons l'aire σ dans le plan de manière qu'elle ne rencontre jamais l'axe z et qu'elle revienne à la forme et à la position initiale après avoir fait un tour.

L'aire σ décrit un volume à connexion double qu'on peut supposer rempli d'une substance élastique isotrope; l, m, n, p, q, r étant des constantes, posons

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} u &= \frac{1}{2\pi}\left\{(l - qz + ry)\operatorname{arco\,tg}\frac{y}{x} + \frac{1}{2}\left(-m - pz - \frac{rK}{L+2K}x\right)\log(x^2+y^2)\right\} \\ v &= \frac{1}{2\pi}\left\{(m - rx + pz)\operatorname{arco\,tg}\frac{y}{x} + \frac{1}{2}\left(l - qz - \frac{rK}{L+2K}y\right)\log(x^2+y^2)\right\} \\ w &= \frac{1}{2\pi}\left\{(n - py + qx)\operatorname{arco\,tg}\frac{y}{x} + \frac{1}{2}(px + qy)\log(x^2+y^2)\right\}. \end{aligned}\right.$$

On vérifie aisément que ces fonctions satisfont les équations (1') et en même temps, à cause de la polydromie de la fonction arco tg y/x (voir 2ième Leçon, § 1), qu'elles sont polydromes et correspondent à la distorsion la plus générale du corps; l, m, n, p, q, r sont les caractéristiques de la distorsion. Il est facile de calculer les tensions qui agissent sur la surface libre du corps.

4. Le problème fondamental de la théorie des *distorsions* des corps élastiques ayant une forme cyclique est de déterminer la déformation du corps lorsque les caractéristiques des distorsions sont données.

Nous allons calculer l'énergie d'un corps élastique qui n'est assujetti à aucune action externe et dont les distorsions sont connues.

L'énergie est donnée par

$$E = -\int_S F dS = -\frac{1}{2}\int_S (t_{11}\gamma_{11} + t_{22}\gamma_{22} + t_{33}\gamma_{33} + t_{23}\gamma_{23} + t_{31}\gamma_{31} + t_{12}\gamma_{12}) dS$$

où S est le volume du corps.

On peut maintenant transformer cette intégrale en employant le théorème de GAUSS, mais il faut prendre garde que u, v, w sont des fonctions polydromes. C'est pourquoi l'application directe du théorème ne peut pas se faire comme nous avons déjà vu dans la leçon précédente.

5. Pour pouvoir appliquer le théorème de GAUSS il faut commencer par sectionner le volume S de sorte qu'il devienne acyclique, et il faut ensuite regarder les deux faces de chaque coupure comme faisant partie du contour du corps.

On trouve alors, en désignant par $\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_n$ les coupures, que la transformation de l'intégrale conduit à la formule suivante

$$E = \frac{1}{2}\sum_1^n \int_{\sigma_i} \{ X_i(u_\alpha^{(i)} - u_\beta^{(i)}) + Y_i(v_\alpha^{(i)} - v_\beta^{(i)}) + Z_i(w_\alpha^{(i)} - w_\beta^{(i)}) \} d\sigma_i$$

$$= \frac{1}{2}\sum_1^n \Big\{ l_i \int_{\sigma_i} X_i d\sigma_i + m_i \int_{\sigma_i} Y_i d\sigma_i + n_i \int_{\sigma_i} Z_i d\sigma_i + p_i \int_{\sigma_i} (Y_i z - Z_i y) d\sigma_i$$

$$+ q_i \int_{\sigma_i} (Z_i x - X_i z) d\sigma_i + r_i \int_{\sigma_i} (X_i y - Y_i x) d\sigma_i \Big\}$$

où $u_\alpha^{(i)}, v_\alpha^{(i)}, w_\alpha^{(i)}$; $u_\beta^{(i)}, v_\beta^{(i)}, w_\beta^{(i)}$, sont les valeurs des composantes des déplacements des deux côtés de la coupure σ_i ; $l_i, m_i, n_i, p_i, q_i, r_i$ sont les caractéristiques de la distorsion relatives à la coupure σ_i ; et X_i, Y_i, Z_i sont les composantes de la tension unitaire qui s'exerce sur chaque élément d'aire de la même coupure.

Posons

$$L_i = \int_{\sigma_i} X_i d\sigma_i \qquad M_i = \int_{\sigma_i} Y_i d\sigma_i \qquad N_i = \int_{\sigma_i} Z_i d\sigma_i$$

$$P_i = \int_{\sigma_i} (Y_i z - Z_i y) d\sigma_i \qquad Q_i = \int_{\sigma_i} (Z_i x - X_i z) d\sigma_i \qquad R_i = \int_{\sigma_i} (X_i y - Y_i x) d\sigma_i ,$$

on aura

$$E = \frac{1}{2}\sum_1^n {}_i (L_i l_i + M_i m_i + N_i n_i + P_i p_i + Q_i q_i + R_i r_i).$$

Si l'on compose les tensions qui sont appliquées sur la coupure σ_i, en prenant pour centre de réduction l'origine, on trouve que L_i, M_i, N_i sont les composantes de la force résultante et P_i, Q_i, R_i les composantes de la couple résultante.

On peut écrire la formule précédente d'une manière plus simple en appelant $s_1, s_2, \cdots, s_{6n}$ les quantités $l_i, m_i, n_i, p_i, q_i, r_i$ et $E_1, E_2, \cdots, E_{6n}$ les quantités correspondantes $L_i, M_i, N_i, P_i, Q_i, R_i$; elle devient en effet

$$E = \frac{1}{2} \sum_{1}^{6n} E_i s_i .$$

Supposons que les quantités $s_1, s_2, \cdots, s_{6n}$ soient nulles excepté $s_h = 1$. Appelons E_{ih} les valeurs correspondantes des coefficients E_i. Lorsque $s_1, s_2, \cdots, s_{6n}$ sont quelconques on aura

$$E_i = \sum_{1}^{6n} E_{ih}\, s_h ,$$

c'est pourquoi

$$E = \frac{1}{2} \sum_{1}^{6n}{}_i \sum_{1}^{6n}{}_h E_{ih}\, s_i\, s_h .$$

6. Nous allons démontrer maintenant une propriété fondamentale des coefficientes E_{ih}, et nous nous permettons à ce propos de faire quelques remarques générales.

GREEN a démontré par l'application du théorème de GAUSS un théorème fondamental dans la théorie du potentiel. Mais le théorème de GREEN n'est pas borné au cas du potentiel, il peut s'étendre à un nombre considérable de cas. J'ai démontré qu'il peut s'étendre à tous les problèmes qui dépendent du calcul des variations.

Même le problème de l'élasticité, comme tout probleme de mécanique, se rattache à une question de calcul de variation, c'est pourquoi on a le théorème analogue à celui de GREEN pour l'élasticité. Il a été donné pour la première fois par BETTI qui en a fait des applications remarquables pour l'intégration des problèmes de l'équilibre élastique. CERRUTI, BOUSSINESQ, SOMIGLIANA ont continué par le chemin qui avait été tracé par BETTI.

Or si les déplacements sont polydromes, puisque le théorème de GAUSS ne peut plus s'appliquer, le théorème de BETTI n'est plus applicable. Nous allons voir cependant qu'on peut reprendre, même dans ce cas, l'idée fondamentale de GREEN, et l'on est amené par là à une loi de réciprocité fort intéressante.

Supposons que nous appliquons successivement au corps élastique deux distorsions caractérisées par les valeurs $s'_1, s'_2, \cdots, s'_{6n}$ et $s''_1, s''_2, \cdots, s''_{6n}$ des caractéristiques. Soient γ'_{rs} et γ''_{rs} les valeurs des γ_{rs} correspondant aux deux déformations, F' et F'' les valeurs du potentiel élastique.

On aura, par un théorème bien connu d'algèbre,

$$\int_S \Sigma \frac{\partial F'}{\partial \gamma'_{rs}} \gamma''_{rs}\, dS = \int_S \Sigma \frac{\partial F''}{\partial \gamma''_{rs}} \gamma'_{rs}\, dS$$

et si nous transformons ces intégrales, après avoir réduit acyclique le volume S par les coupures, en regardant toujours les faces des coupures comme faisant partie du contour du volume S, on trouve

$$\sum_{1}^{6n} E_i'' s_i' = \sum_{1}^{6n} E_i' s_i'' ,$$

E_i'' et E_i' étant les valeurs des quantités E_i correspondant aux deux distorsions. On tire de là

$$\sum_{1}^{6n}{}_i \sum_{1}^{6n}{}_h E_{ih}\, s_i' s_h'' = \sum_{1}^{6n}{}_i \sum_{1}^{6n}{}_h E_{ih}\, s_i'' s_h'$$

et puisque les quantités s_i' et s_i'' sont arbitraires, on doit avoir

$$E_{ih} = E_{hi} .$$

Cette propriété réciproque des coefficients E_{ih} peut s'interpréter de plusieurs manières et conduit à des théorèmes mécaniques qu'on énonce facilement.

On peut appeler l'ensemble de la force ayant pour composantes L_i, M_i, N_i et de la couple ayant pour composantes P_i, Q_i, R_i *l'effort total* appliqué à la coupure σ_i et l'on peut appeler toutes les quantités $E_1, E_2, \cdots, E_{6n}$ les *caractéristiques des efforts*.

On a alors que *si deux systèmes de distorsions engendrent deux systèmes d'efforts, la somme des produits des caractéristiques des efforts du premier système multipliées par les caractéristiques des distorsions du second système est égale à la somme des produits des caractéristiques des efforts du second système multipliées par les caractéristiques des distorsions du premier système.*

Lorsque les quantités $s_1, s_2, \cdots, s_{6n}$ sont nulles excepté $s_h = 1$ la distorsion peut s'appeler une *distorsion élémentaire d'ordre h*. E_{ih} est l'effort d'ordre i engendré par la distorsion élémentaire d'ordre h. E_{hh} est l'effort conjugué de la distorsion élémentaire. Le théorème précédent peut donc s'énoncer en disant que *l'effort d'ordre i engendré par la distorsion élémentaire d'ordre h est égal à l'effort d'ordre h engendré par la distorsion élémentaire d'ordre i.*

4ième leçon.

1. Nous avons démontré dans la leçon précédente que la même distorsion exécutée sur deux coupures qui peuvent se réduire l'une à l'autre par une déformation continue engendre la même déformation du corps.

Les deux coupures peuvent s'appeler à cause de cela des *coupures équivalentes*. Le théorème qu'on vient de rappeler peut être complété en démontrant que les efforts dans les coupures équivalentes sont égaux. Prenons en effet la partie du corps entre deux coupures équivalentes. Les tensions qui sollicitent les élémentes des coupures doivent se faire équilibre. On tire de là tout de suite l'égalité des deux efforts.

Donc les efforts dépendent, comme les distorsions, de la nature géométrique du corps et de la déformation.

Le problème que l'on peut se proposer est d'étudier les propriétés des efforts et de les déterminer, les distorsions étant données.

Nous allons voir que l'on peut obtenir des théorèmes généraux sans intégrer directement les équations de l'élasticité.

2. Supposons que nous ayons un solide de révolution qui ait une connexion double; il peut être engendré par la révolution d'une aire plane simplement connexe autour d'un axe du plan qui ne la rencontre pas, ou il peut être engendré par la rotation d'une aire doublement connexe limitée par l'axe. Supposons que le solide soit rempli d'une substance électrique dont la constitution soit symétrique par rapport à l'axe.

L'énergie du système est donnée par

$$E = \frac{1}{2}\sum_1^6\sum_1^6 E_{ih}\, s_i\, s_h$$

où

$$s_1 = l \quad , \quad s_2 = m \quad , \quad s_3 = n \quad , \quad s_4 = p \quad , \quad s_5 = q \quad , \quad s_6 = r.$$

Cette expression peut se comparer à la force vive d'un liquide indéfini sans tourbillons à l'intérieur duquel se trouve un corps solide symétrique, et l'on peut répéter dans ce cas des raisonnements tout à fait semblables à ceux que l'on fait dans cette question d'hydrodynamique. On trouve par là, en vertu de la symétrie, qu'on peut toujours choisir l'origine en un point de l'axe de symétrie de manière que l'expression de E devienne

$$E = \frac{1}{2}\{E_{11}(s_1^2 + s_2^2) + E_{33}\, s_3^2 + E_{44}(s_4^2 + s_5^2) + E_{66}\, s_6^2\}$$

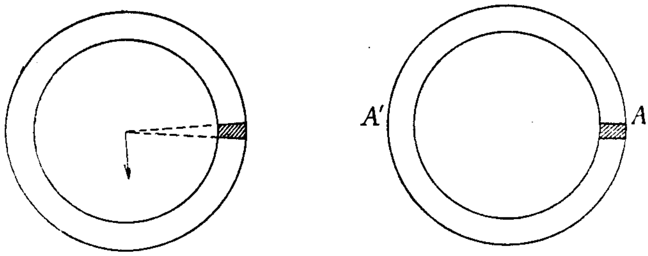
L'origine s'appelle le *point central de l'axe de symétrie.*

Les quantités E_{ih} sont nulles lorsque i et h ne sont pas égaux; c'est pourquoi on a le théorème:

Dans un corps symétrique qui a une connexion double chaque distorsion élémentaire engendre un seul effort qui est l'effort conjugué, le centre de réduction étant dans le point central de l'axe de symétrie.

Donc si la distorsion est due à une translation relative des molécules des deux faces de la coupure, l'effort total engendré est une force qui passe par le point central, et si la distorsion est une rotation, l'effort total est une couple.

Revenons à l'exemple primitif des distorsions. Prenons un anneau symétrique, retranchons une mince tranche radiale, et soudons les deux bouts. On serait facilement amené à croire que les faces de la soudure sont sollicitées par une traction, mais si nous réfléchissons que le déplacement relatif des molécules situées d'un côté de la coupure par rapport à celles situées de l'autre côté est dû à une rotation autour de l'axe de symétrie, on tire du théorème précédent que l'effort est une couple ayant pour axe l'axe de symétrie. Mais si la résultante des tensions qui s'exercent sur les faces de la soudure est une couple, il faut qu'une partie de la soudure soit comprimée et qu'une partie soit tendue, et même que *la somme des efforts de traction égalise la somme des efforts de compressione.*



On arrive par là à un résultat qui est inattendu.

Supposons maintenant que la même tranche retranchée ait une largeur uniforme. La distorsion consiste alors dans une translation, et l'effort est une force normale à l'axe de symétrie et qui le rencontre au point central. Même dans ce cas une partie de la soudure est comprimée et une partie supporte une traction, mais si nous envisageons l'énergie du système, on a aisément que dans le cas de la fissure radiale la partie comprimée est la partie interne de la soudure et la partie externe supporte la traction, tandis qu'on a le contraire si la fissure est de largeur uniforme.

Appliquons maintenant le théorème des coupures équivalentes. On en tire que si la fissure est radiale toute section de l'anneau supporte, d'une maniere symétrique, la compression et la traction, mais dans le cas de la fissure uniforme dans la région A′ de l'anneau opposée à la soudure A les choses sont renversées, et une section en A′ supporte dans la partie interne la compression et dans la partie externe la traction.

Voilà que par la considération de l'énergie du système déformé on tire un grand nombre de propriétés sans intégrer les équations de l'équilibre élastique.

3. Il est intéressant cependant d'approfondir le cas de l'anneau symétrique isotrope en étudiant en détail les déformations produites par les distorsions. Il faut pour cela intégrer effectivement les équations de l'équilibre et il est nécessaire de partir des formules (4) que nous avons données dans la précédente leçon.

Nous envisageons un cylindre creux symétrique isotrope, nous prenons l'origine dans le centre de symétrie, et faisons coïncider l'axe z avec l'axe de symétrie. Les déplacements donnés par les formules (4) de la leçon précédente correspondent à la distorsion la plus générale ayant pour caractéristiques l, m, n, p, q, r; mais si nous calculons les tensions qui sollicitent le corps, nous voyons que pour obtenir ce cas d'équilibre il faut supposer que les surfaces latérales et les bases du cylindre soient sollicitées par des tensions. Or nous voulons envisager le cas où le cylindre est déformé par la distorsion et n'est pas assujétti à des actions externes. Il faut donc éliminer les tensions superficielles.

Représentons par T l'ensemble de ces tensions. Supposons maintenant que le cylindre primitif n'ayant pas de distorsions soit soumis à l'action des tensions — T, c'est à dire des tensions égales et contraires aux tensions T. Soient u', v', w' les déplacements qu'on trouve. En prenant les différences

$$u - u' \quad , \quad v - v' \quad , \quad w - w'$$

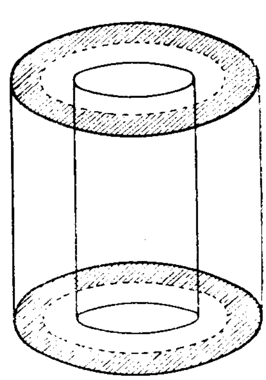
on aura des déplacements qui correspondent à la distorsion du corps, mais en même temps les tensions au contour auront été éliminées. On voit par là que l'élimination des tensions au contour est un problème ordinaire de l'équilibre élastique qu'on peut tâcher de résoudre par les méthodes ordinaires.

Dans les formules (4) nous avons 6 constantes arbitraires qui correspondent aux six distorsions élémentaires. On peut simplifier beaucoup le problème en envisageant séparément chaque distorsion élémentaire. On voit par la symétrie que les distorsions d'ordre 1 et 2 se ramènent l'une à l'autre et de même celles d'ordre 4 et 5. Il suffit donc d'envisager les distorsions d'ordre

$$2 , 3 , 5 , 6.$$

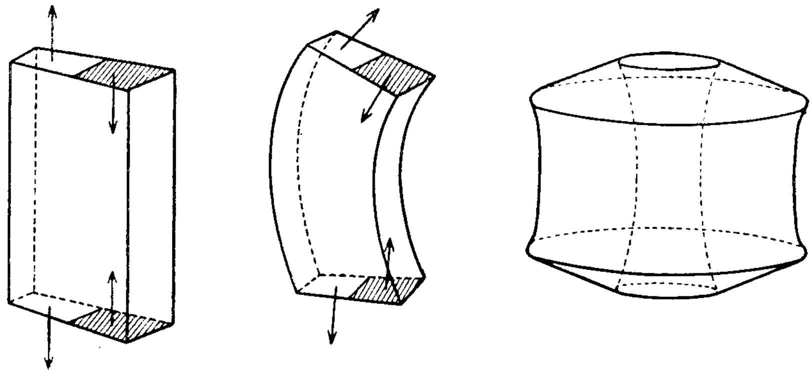
Commençons par celles d'ordre 6 et 2. La distorsion d'ordre 6 correspond évidemment à la *fissure radiale* et celle d'ordre 2 à la *fissure de largeur uniforme*.

Dans le cas de la distorsion d'ordre 6 on élimine très aisément, en vertu de la symétrie, les tensions latérales, et l'on trouve qu'après la distorsion le corps garde sa forme cylindrique régulière et les bases gardent leur distance initiale si on les comprime dans la région (interne) que nous avons laissée en blanc et si on exerce une traction dans la région (externe) que nous avons hachée. Appelons T l'ensemble de ces tensions. Il n'y a plus de difficulté alors à déterminer la forme du corps lorsqu'il est complètement libre et qu'aucune force ne s'exerce sur les bases. En effet il suffit d'envisager un cylindre à l'état naturel et de chercher la déformation lorsqu'on le sollicite par les tensions — T. La forme que le corps prendra sera celle que nous cherchons. Prenons une tranche radiale du cylindre: la partie en blanc supportera une traction, la partie hachée une compression; c'est pourquoi cette tranche subira une flexion.



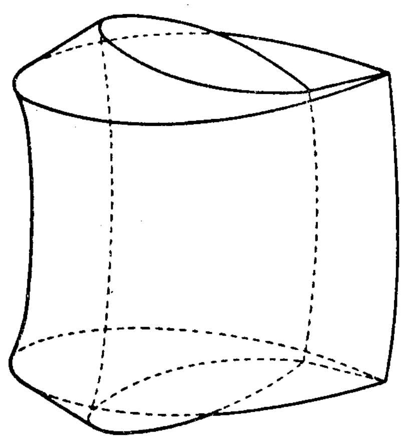
Chaque tranche du cylindre se déformant par une flexion pareille le cylindre prendra la forme indiquée par la figure voisine, c'est à dire que le bord interne se soulèvera, le bord externe s'abaissera tandis que la surface latérale externe deviendra concave, et la surface latérale interne convexe.

J'ai voulu vérifier par l'expérience ce résultat, et j'ai pris un gros cylindre creux de caoutchouc, j'y ai fait une fissure radiale, et j'ai soudé les deux faces de la fissure. La forme prise par le corps a été celle que le calcul avait prévue, et l'on a pu même vérifier par des mesures que les résultats des



calculs étaient exacts. On pouvait aussi remarquer que la partie interne de la soudure était comprimée et que la partie externe supportait un effort de traction. A cause de cet effort la soudure ne résistait pas, c'est pourquoi pour garder la forme j'en ai pris le modèle en plâtre que je vous montre. L'endroit de la coupure est parfaitement visible.

Quelquefois il arrive que l'on veut rétrécir un tube, mais si l'on retranche une tranche radiale du tube et que l'on soude les deux faces, le tube prend sa forme cylindrique. Les forgerons et tous ceux qui ont essayé cette opération connaissent très-bien ce résultat que maintenant la théorie des solutions polydromes explique parfaitement.

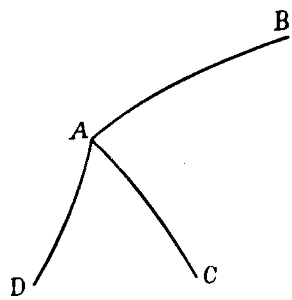


4. Quelle est maintenant la forme du cylindre lorsqu'on fait la fissure de largeur uniforme, c'est à dire lorsqu'on fait une distorsion d'ordre 2?

On peut procéder tout à fait de la même manière que dans le cas précédent. On peut commencer par éliminer les tensions latérales et après les tensions sur les bases. La forme prise par le corps est même plus compliquée que dans le cas précédent. Elle est représentée par la figure ci-jointe, et voici un plâtre qui est le modèle d'un cylindre de caoutchouc qui a supporté une distorsion d'ordre 2. Même dans ce cas l'expérience a vérifié complètement les résultats du calcul.

Je n'entre pas dans les détails sur les distorsions d'ordre 5 et d'ordre 3. La première peut se déduire de celle d'ordre 2 par des intégrations simples, et la dernière peut se calculer directement sans difficulté. Cette distorsion s'obtient en faisant glisser les deux faces de la coupure, l'une par rapport à l'autre, dans la direction de l'axe du cylindre et en les soudant ensuite.

Nous avons dit (§ 1) qu'on peut se proposer le problème de déterminer les efforts lorsqu'on connaît les distorsions d'un corps cyclique. Avant de laisser ce sujet nous voulons indiquer en peu de mots comment on peut traiter cette question dans le cas général d'un corps cyclique formé par un nombre quelconque de verges droites ou courbes très-minces soudées à leurs bouts en plusieurs noeuds.



Soit AB l'une des verges, les efforts dans toutes les sections de la verge seront égaux. Prenons l'origine comme centre de réduction, et désignons par

$$X_1^{(ab)}, X_2^{(ab)}, X_3^{(ab)}, X_4^{(ab)}, X_5^{(ab)}, X_6^{(ab)}$$

les caractéristiques des efforts correspondantes aux sections de la verge.

Soient $x_1^{(a)}, x_2^{(a)}, x_3^{(a)}, x_4^{(a)}, x_5^{(a)}, x_6^{(a)}$ les composantes de la translation et de la rotation qui ont conduit la molécule A de l'état naturel à l'état actuel et $x_1^{(b)}, x_2^{(b)}, x_3^{(b)}, x_4^{(b)}, x_5^{(b)}, x_6^{(b)}$ les quantités analogues relatives à la molécule B.

Soient $e_1^{(ab)}, e_2^{(ab)}, e_3^{(ab)}, e_4^{(ab)}, e_5^{(ab)}, e_6^{(ab)}$ les caractéristiques de la distorsion qu'on a appliquée à une section de la verge AB. On aura des relations linéaires

$$x_r^{(a)} - x_r^{(b)} = e_r^{(ab)} = \sum_1^6 H_{ri} X_i^{(ab)} \qquad (r = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$$

et les coefficients constants H_{ri} dépendront de la forme initiale et de la constitution de la verge.

En même temps si nous prenons toutes les verges qui aboutissent au point A et qui sont soudées ensemble dans ce point on doit avoir pour l'équilibre

$$X_i^{(ab)} + X_i^{(ac)} + X_i^{(ad)} + \cdots = 0 \quad (i = 1, 2, 3, 4, 5, 6).$$

On a donc six équations pour chaque noeud et six équations pour chaque verge.

Ces équations sont tout à fait semblables aux équations de KIRCHHOFF pour les courants électriques dans les fils; seulement elles sont sextuplées. On peut développer une théorie du même type que celle de KIRCHHOFF où les caractéristiques des distorsions remplacent les forces électromotrices et les caractéristiques des efforts les intensités des courants.

BIBLIOGRAPHIE.

RIEMANN-WEBER, *Die Partiellen Diff.-gleich. der Math Physik.*, 1 vol.
LOVE, *Math. Theory of elasticity.*
WEINGARTEN, « Rendiconti della R. Accademia dei Lincei », série V, vol. X.
VOLTERRA, « Rendiconti della R. Accademia dei Lincei », ser. V, vol. XIV, 1° sem., fasc. 3, 4, 8, 12; 2° sem., fasc. 7 [in questo vol.: XII].
MAGGI, « Rendiconti della R. Accademia dei Lincei », serie V, vol. XIV, 2° sem.
TIMPE, *Inaugural-Dissertation.* Göttingen. (Leipzig 1905).
CESARO, *Sulle formule del Volterra fondamentali nella teoria delle distorsioni elastiche.* (« Rend. R. Accademia di Napoli », 1906; « Nuovo Cimento », 5ª serie, t. XII).
ALMANSI, *Sopra una classe particolare di deformazioni a spostamenti polidromi dei solidi cilindrici* (« Rend. R. Accademia dei Lincei », 5ª serie, t. XVI).
— *Sulle deformazioni a spostamenti polidromi dei solidi cilindrici.* (« Rend. R. Istituto Lombardo », 5ª Serie, t. XL).
VOLTERRA, *Nuovi studii sulle distorsioni dei solidi elastici.* (« Rend. R. Accad. dei Lincei », vol. XV, 4° Sem., serie 5ª, fasc. 10); *Sull'equilibrio dei corpi elastici più volte connessi.* (« Nuovo Cimento », 5ª Serie, t. XII); *Sur l'équilibre des corps élastiques multiplement connexes.* (« Annales de l'Ecole Normale supérieure » (3), XXIV, 1907) [in questo vol.: XII].

MM. ROLLA, CORBINO et TRABACCHI ont fait des vérifications expérimentales de la théorie des distorsions par des méthodes optiques en observant la biréfringeance produite dans un cylindre creux de gélatine assujetti à des distorsions. Voici l'indication de leurs travaux:

L. ROLLA, *Esperienze illustrative per la teoria del Volterra su l'equilibrio dei corpi elastici più volte connessi.* (« Rend. R. Accad. dei Lincei », 5ª série, t. XVI).
O. M. CORBINO, *Le tensioni create in un corpo elastico dalle distorsioni di Volterra e la conseguente doppia rifrazione accidentale.* (« Rend. Accad. dei Lincei », vol. XVIII, 1ª Serie, 1909).
G. C. TRABACCHI, *I fenomeni di doppia rifrazione accidentale prodotti dalle tensioni create in un corpo elastico dalle distorsioni di Volterra.* (« Rend. Accad. dei Lincei », volume XVIII, 1° Sem. 1909).

Une exposition de ces recherches se trouve dans: Lectures delivered at the celebration of the twentieth anniversary of the foundation of Clark University by VITO VOLTERRA, Deuxième leçon, § IX. [In questo vol.: XXXI].

5ième leçon.

1. Nous avons étudié dans les leçons précédentes les solutions des équations de l'élasticité qui appartiennent au type elliptique, et nous avons envisagé particulièrement les solutions polydromes et le rôle qu'elles jouent dans la théorie. Le cas de l'élasticité nous offre le meilleur exemple pour trouver leur interprétation et leur utilité pratique.

Nous voulons pénétrer aujourd'hui plus profondément dans l'étude des solutions des équations du type elliptique, mais pour cela nous laisserons de côté le cas de l'élasticité, et nous envisagerons le cas le plus simple possible, celui de l'équation de LAPLACE qui correspond à la théorie du potentiel.

Ont peut considérer l'équation de LAPLACE relative à un nombre quelconque de variables

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad , \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \quad , \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_4^2} = 0 \, , \text{ etc.}$$

Le cas devient de plus en plus compliqué, mais bien des théorèmes s'étendent sans aucune difficulté de proche en proche. Par exemple le théorème de GREEN, avec toutes ses conséquences et toutes ses applications. Il est utile, je puis dire même indispensable, pour cette étude d'introduire le langage emprunté à la théorie des espaces à plusieurs dimensions. C'est seulement un langage, mais il est un instrument très–puissant pour énoncer des théorèmes, et il amène par l'induction à trouver des propositions nouvelles. Je citerai dans cette direction les études de Ch. BJERKNES qui correspondent au mouvement d'une ellipsoide à n dimensions dans un fluide à n dimensions.

2. Cependant dès les premiers pas dans les recherches dont je viens de parler on a l'impression qu'il y a une lacune à combler, c'est a dire que quelque chose manque.

Je vais citer un seul exemple. Les domaines à deux dimensions ont une seule sorte de connexion; les domaines à trois dimensions ont deux sortes de connexions. En effet nous avons déjà distingué les espaces cycliques et les espaces acycliques, et nous avons vu quel rôle joue la cyclicité dans le cas de l'élasticité. Mais prenons le volume compris entre deux sphères concentriques. Il est acyclique, c'est à dire que tout cycle formé par une ligne fermée peut se réduire aussi petit que l'on veut par une déformation continue, sans sortir de l'espace, mais la même propriété ne se vérifie pas pour toute surface fermée, car une surface menée entre les deux sphères ne peut pas être réduite aussi petite que l'on veut sans sortir de l'espace renfermé entre les deux sphères. Il y a donc deux sortes de connexions dans le cas de trois dimensions, on les appelle *connexion linéaire* ou cyclicité et *connexion superficielle*, mais on connaît une seule sorte de polydromie. Si le nombre des dimensions augmente, on a plusieurs sortes de connexions toujours plus compliquées, mais à cela ne correspondent pas plusieurs sortes de polydromies.

Le cas de deux variables est étroitement lié à la théorie des fonctions. En effet par la séparation de la partie imaginaire dans une fonction d'une variable complexe on trouve deux fonctions de deux variables qui satisfont à l'équation de LAPLACE. Réciproquement toute fonction de deux variables qui satisfait à l'équation de LAPLACE possède une fonction conjuguée, et en ajoutant la première à la fonction conjuguée multipliée par $i = \sqrt{-1}$ on trouve une fonction d'une variable complexe.

L'existence de la fonction conjuguée et la liaison avec la théorie des fonctions engendrent un ensemble de propriétés dans le cas de deux variables qui manquent dans le cas d'un nombre plus grand de variables et ce sont ces propriétés pourtant qui conduisent dans le cas de deux variables aux propositions les plus importantes et les plus cachées de la théorie.

On est amené par là à soupçonner que la lacune dont j'ai parlé tout à l'heure pourrait être comblée en étendant au cas de plusieurs variables la théorie des fonctions conjuguées.

Je consacrerai cette leçon et la suivante à donner un aperçu de quelques recherches qu'on a faites à ce sujet qui conduisent à deux branches différentes provenant cependant d'une même source.

3. Rappelons les propriétés des fonctions conjuguées dans le cas de deux variables.

Si la fonction u satisfait à l'équation de LAPLACE $\Delta^2 u = 0$ en posant

$$\frac{\partial u}{\partial x} = X \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial y} = Y$$

on trouve

$$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x}$$

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} = 0 .$$

C'est pourquoi

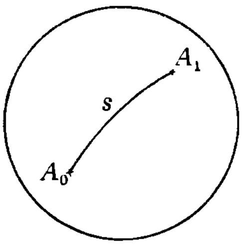
$$X dx + Y dy \quad , \quad Y dx - X dy$$

sont des différentielles exactes.

Envisageons les fonctions dans une aire σ à connexion simple, où X , Y sont finies, continues et monodromes. Calculons

$$u = u_0 + \int_{A_0}^{A_1} (X dx + Y dy) \quad , \quad v = v_0 + \int_{A_0}^{A_1} (Y dx - X dy) ,$$

les intégrales étant étendues à une ligne s qui en partant du point A_0 aboutit au point A_1, où u_0 est la valeur de u dans le point A_0 et v_0 est une quantité constante. On a que les intégrales ne dépendent pas de la ligne s pourvu que A_0 et A_1 ne changent pas et u est la valeur de la fonction u dans le point A_1 et v est la valeur de la fonction conjuguée dans le même point. L'aire étant à connexion simple, si le point A_1, coïncide avec A_0 les intégrales sont nulles, c'est pourquoi u et v sont des fonctions monodromes, mais si l'aire σ est à connexion multiple u et v peuvent être polydromes.



La dérivée de u dans une direction quelconque ξ est égale à la dérivée de v dans la direction normale η, si les directions ξ , η sont orientées l'une par rapport à l'autre comme x et y.

En calculant $u + iv = f$, on obtient une fonction de la variable complexe $x + iy$.

4. Passons maintenant au cas de trois variables.

Soit u une fonction qui satisfait à l'équation de LAPLACE; posons

$$\frac{\partial u}{\partial x} = X \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial y} = Y \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial z} = Z ;$$

on aura évidemment

$$(1)\qquad \frac{\partial Z}{\partial y}-\frac{\partial Y}{\partial z}=0\quad,\quad \frac{\partial X}{\partial z}-\frac{\partial Z}{\partial x}=0\quad,\quad \frac{\partial Y}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial y}=0\,;$$

$$(2)\qquad \frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}=0.$$

La propriété caracterisée par les équations (1) peut s'énoncer en disant que le *curls* du vecteur ayant pour composantes X, Y, Z est nul et la propriété caractérisée par l'équation (2) en disant que la *divergence* du vecteur est nulle.

5. Cela posé, soit S un domaine ayant une connexion simple linéaire et aussi une connexion superficielle simple. Toute ligne fermée sera le contour d'une surface renfermeé dans le domaine et toute surface fermée sera le contour d'un volume aussi renfermé dans le domaine. C'est pourquoi en employant le théorème de STOKES on trouvera

$$(3)\qquad \int_s (X dx + Y dy + Z dz) = 0,$$

l'intégrale étant étendue à une ligne fermée s, et en appliquant le théorème de GAUSS on aura

$$(4)\qquad \int_\sigma (X\cos nx + Y\cos ny + Z\cos nz)\, d\sigma = 0$$

où cette intégrale est étendue à une surface fermée quelconque.

On tire de l'équation (3) que si l'on étend l'intégrale à une ligne s' qui en partant d'un point A_0 aboutit à un point A_1 la valeur de l'intégrale dépendra seulement des points A_0 et A_1, et ne dépendra pas de la ligne comprise entre ces points.

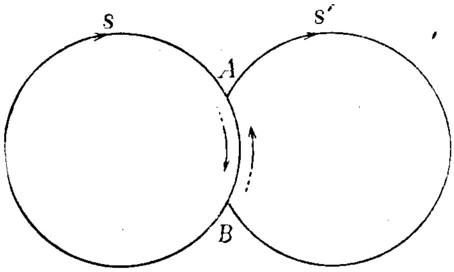
Si nous appelons u_0 la valeur de u au point A_0 on aura

$$u = u_0 + \int_{s'} (X dx + Y dy + Z dz)$$

u étant la valeur de la fonction au point A_1. Envisageons maintenant l'intégrale (4), mais supposons qu'elle ne soit pas étendue à une surface fermée, mais à une surface ouverte. Pour déterminer la direction de la normale n à la surface nous convenons que, le bord de la surface ayant une direction déterminée personnifiée par une poupée qui regarde la surface, n soit dirigée de droite à gauche de la poupée. Cela posé on tire, tout de suite de l'équation (4) que la valeur de l'intégrale étendue à la surface ouverte ne dépend pas de la surface où l'on a calculé l'intégrale, mais de son bord. C'est pourquoi l'intégrale étendue à une ligne conduit à une fonction des points de l'espace: c'est à dire à la fonction primitive, et de même l'intégrale étendue à une surface conduit à une fonction des lignes de l'espace.

Il n'y a pas de difficulté à concevoir des fonctions de lignes comme on conçoit des fonctions ordinaires, c'est à dire les fonctions des points. En effet, si l'on regarde tous les points de l'espace, et si l'on suppose qu'à chaque point correspond la valeur d'une quantité, on a une fonction des points de l'espace, c'est à dire une fonction ordinaire de trois variables. Mais toutes les lignes forment aussi des éléments géométriques de l'espace, et l'on peut évidemment concevoir une quantité qui a une valeur correspondant à chaque ligne. Voilà donc une fonction des lignes.

Celle que nous avons trouvée n'est qu'une fonction particulière. Elle correspond à des lignes fermées, elle est continue et elle a aussi une autre propriété intéressante. Soient s et s' deux lignes fermées qui ont un arc commun AB. Si on doit parcourir l'arc AB en directions contraires en supposant qu'il appartienne aux deux lignes, on pourra retrancher AB et obtenir une courbe s'' dont la direction même sera déterminée. On écrira



$$s'' = s + s' .$$

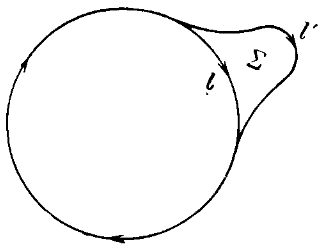
Soit V la fonction des lignes que nous avons trouvée, et désignons par V, V', V'', les valeurs correspondant aux lignes s, s', s'' il est évident que

$$V'' = V' + V .$$

C'est pourquoi l'on peut appeler la fonction des lignes, que nous avons trouvée, une *fonction de premier degré.*

6. Elle a été obtenue par un procédé d'intégration; il est facile d'y appliquer un procédé inverse qu'on peut appeler un procédé de dérivation.

Revenons à une fonction ordinaire des points de l'espace. Pour la dériver il suffit de déplacer le point indice de la fonction dans une certaine direction, de calculer le rapport entre la variation de la fonction et le déplacement, et d'en déterminer la limite lorsque le déplacement devient infiniment petit.



De même prenons la fonction des lignes que nous avons trouvée. Déplaçons en l' un arc l de la ligne, et cherchons la variation correspondante de la fonction. A cause des propriétés que nous avons trouvées cette variation sera la valeur de la fonction correspondant à la ligne formée par les arcs l' et l en supposant que l'on invertisse la direction dans laquelle on doit parcourir l'arc l. Elle pourra donc s'exprimer par

$$W = \int_{\Sigma} (X \cos nx + Y \cos ny + \cos nz)\, d\Sigma ,$$

Σ étant une surface ayant pour contour les lignes l et l' ; n sa normale prise dans la direction qu'on a établie précédemment.

Supposons maintenant que la surface Σ en décroissant infiniment d'une manière régulière tende vers un point M; on aura

$$\lim \frac{W}{\Sigma} = X \cos nx + Y \cos ny + Z \cos nz$$

en prenant les valeurs de X, Y, Z qui correspondent au point M.

On peut appeler lim (W/V) la dérivée de V par rapport à Σ, et l'on peut la représenter par $dV/d\Sigma$. Il est évident que le signe dont la dérivée est affectée n'est déterminé que lorsqu'on connaît la direction positive de la normale à la surface Σ. Prenons la dérivée de V par rapport à une surface Σ normale à l'axe X en M, on aura

$$\frac{dV}{d\Sigma} = X.$$

De même, si Σ_1 et Σ_2 sont des surfaces normales aux axes Y et Z, on aura

$$\frac{dV}{d\Sigma_1} = Y \quad , \quad \frac{dV}{d\Sigma_2} = Z ;$$

c'est pourquoi l'on peut désigner X , Y , Z par les symboles

$$\frac{\partial V}{\partial (yz)} , \frac{\partial V}{\partial (zx)} , \frac{\partial V}{\partial (xy)} .$$

Revenons maintenant à la fonction primitive u. Nous avons

$$\frac{\partial u}{\partial x} = X \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial y} = Y \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial z} = Z ;$$

donc

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial (yz)} \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial V}{\partial (zx)} \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial V}{\partial (xy)}$$

ou en général, n étant la normale à la surface Σ,

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial V}{\partial \Sigma} .$$

On tire de là qu'en dérivant la fonction des lignes V par rapport à une certaine surface et en dérivant la fonction u par rapport à la normale à cette surface on trouve la même valeur. Donc la fonction u et la fonction V ont une relation réciproque tout à fait analogue à celle des deux fonctions coniuguées dans le cas de deux variables. C'est pourquoi dans le cas de trois variables, pour arriver à une fonction conjuguée de la fonction potentielle, il faut introduire les fonctions des lignes.

7. On pourrait penser que ce nouveau concept est tout à fait abstrait, mais nous voulons montrer bien au contraire qu'il correspond à des concepts réels et à des vues pratiques.

Il suffit pour cela d'envisager un champ électromagnétique constant. Supposons que nous ayons un pôle magnétique unitaire qui se déplace en prenant toutes les positions possibles dans un certain domaine externe à toute masse magnétique, électrique et à tout courant électrique. Le potentiel du champ par rapport au pôle sera une fonction qui vérifie l'équation de LAPLACE, c'est à dire une *fonction harmonique*.

Mais évidemment on pourra aussi penser avoir un courant électrique unitaire qui parcourt un circuit fermé et qui se déplace en prenant toutes les positions et les formes possibles dans le même domaine. Il est bien naturel que nous calculons le potentiel du champ par rapport au courant électrique. On aura par là une idée complète de la nature électromagnétique du champ, mais en même temps nous aurons envisagé une fonction des lignes fermées du domaine. Il est facile de démontrer par un calcul très simple que cette fonction des lignes, c'est à dire le potentiel du champ par rapport au courant, est justement la fonction conjuguée que nous avons introduite tout à l'heure.

On a donc que le nouveau concept a une base réelle et se présente même comme un élément nécessaire à envisager dans les théories de la physique mathématique.

8. Les fonctions conjuguées ordinaires qui se présentent dans le cas de deux variables peuvent s'obtenir en particularisant celles que nous venons de définir. Il suffit en effet d'envisager un champ électromagnétique à deux variables. Alors il faut remplacer le pôle magnétique par un pôle logaritmique et le courant électrique par un point tourbillon et le passage est déjà fait.

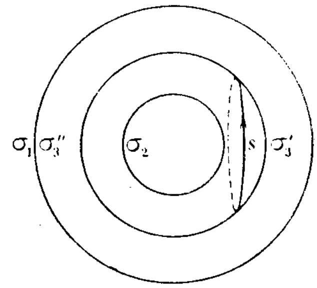
Il y a aussi un autre cas particulier qui présente beaucoup d'intérêt. C'est celui des potentiels symétriques. Dans ce cas il suffit de considérer les valeurs de la fonctions conjuguée correspondant aux lignes circulaires normales à l'axe de symétrie et ayant le centre sur l'axe même. On arrive par là à des fonctions ordinaires qu'on appelle les fonctions associées que KIRCHHOFF avait introduites en partant de concepts tout à fait différents.

6ième leçon.

1. Jusqu'à présent nous avons envisagé les fonctions des lignes qui s'obtiennent comme des fonctions conjuguées des fonctions qui satisfont à l'équation de LAPLACE; mais on peut généraliser la chose. Soient X , Y , Z trois fonctions quelconques définies dans un espace S dont la connexion linéaire et la connexion superficielle sont simples, et supposons qu'elles soient finies, monodromes et continues, et que leurs dérivées aussi soient finies, continues et monodromes. Si l'on a

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = 0$$

on pourra toujours par le procédé que nous avons indiqué précédemment calculer une fonction des lignes de l'espace. C'est pourquoi la condition pour l'existence de la fonction des lignes est la condition (2). Les conditions (1) ne sont pas nécessaires pour son existence. Elles sont nécessaires pour qu'elle soit la fonction conjuguée d'une fonction harmonique. Or, l'espace ayant les deux connexions simples, on peut calculer la valeur de la fonction des lignes pour chaque ligne fermée de l'espace dont la direction est connue, et pour chaque ligne on trouve une seule valeur. Envisageons maintenant un espace S dont la connexion superficielle ne soit pas simple, par exemple compris entre deux sphères concentriques σ_1 et σ_2. Conduisons une surface σ_3 comprise entre les deux et traçons, une ligne fermée s qui partage σ_3 en deux parties σ_3' et σ_3''.



Ayant fixé la direction de la ligne s on pourra calculer la valeur de la fonction correspondante à la ligne s de deux manières en formant

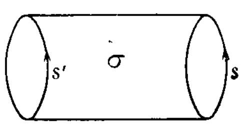
$$\int_{\sigma_3'} (X \cos n'x + Y \cos n'y + Z \cos n'z)\, d\sigma_3' \tag{4}$$

et

$$\int_{\sigma_3''} (X \cos n''x + Y \cos n''y + Z \cos n''z)\, d\sigma_3'', \tag{5}$$

n' étant la normale à σ_3' et n'' la normale à σ_3''. Les deux normales ont évidemment la direction opposée, c'est à dire que si l'une est dirigée vers l'intérieur de σ_3 l'autre est dirigée vers la partie externe. Faisons maintenant la différence des deux intégrales. On aura l'intégrale étendue à toute la surface σ_3, et on devra prendre la normale dirigée constamment dans la même direction. Mais σ_3 à elle seule ne limite pas un volume renfermé dans S, c'est pourquoi la dernière intégrale pourra n'être pas nulle et par suite les intégrales (4) et (5) pourront être différentes.

On voit donc que dans ce cas la valeur de la fonction des lignes n'est pas déterminée pour chaque ligne.

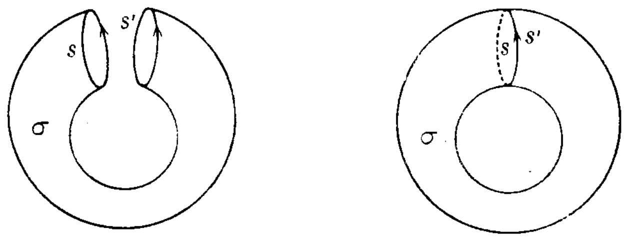


On peut se faire une idée de la polydromie d'une fonction des lignes aussi d'une autre manière.

Pour avoir la différence des valeurs de la fonction correspondante à deux lignes s, s', on peut déplacer la ligne s d'une manière continue de sorte qu'elle vienne coïncider en position et direction avec la ligne s'. Soit σ la surface engendrée par ce déplacement, V' la valeur de la fonction correspondante à la ligne s' et V la valeur correspondante à la ligne s. On aura

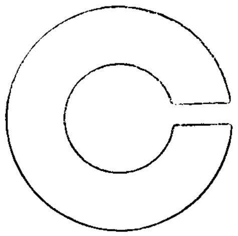
$$V' - V = \int_\sigma (X \cos nx + Y \cos ny + Z \cos nz)\, d\sigma,$$

n étant la normale à la surface σ dirigée par rapport à la direction de s' de la manière que nous avons indiquée dans le § 5 de la 5$^{\text{ième}}$ leçon. Déplaçons maintenant s' en lui faisant engendrer un tube de manière que s' se rapproche indéfiniment de s jusqu'à coïncider avec s. σ deviendra une surface fermée. Si le domaine où nous envisageons les choses a la connexion superficielle simple, σ sera le contour d'un espace interne au domaine et par suite en appliquant le théorème de GAUSS on aura que l'intégrale étendue à σ sera nulle, d'où l'on tire que les deux valeurs V' et V seront égales. Mais,



si le domaine a une connexion superficielle multiple, σ n'est pas toujours le contour d'un espace interne au domaine et par suite les deux valeurs peuvent résulter différentes. Dans ce cas donc, si une ligne fermée en décrivant un tube revient à sa position initiale, en prenant des valeurs de la fonction qui se suivent avec continuité, on peut retourner avec une valeur différente de celle du départ. Par conséquent la polydromie pour les fonctions des lignes ne tient pas à la cyclicité, c'est à dire à la connexion linéaire, mais à la connexion superficielle.

2. Nous avons vu que, pour rendre acyclique un espace cyclique, il faut faire une coupure ou plusieurs coupures. Qu'est-ce qu'il faut faire pour transformer un espace qui a une connexion superficielle multiple en un espace qui a une connexion simple?



Envisageons l'espace compris entre deux sphères concentriques. Imaginons un tube infiniment mince qui réunit la grande sphère à la sphère interne. Par ce tube la connexion superficielle devient simple.

Il y a d'autres cas où il faut un plus grand nombre de tubes pour obtenir la réduction. L'ordre de la connexion superficielle est mesuré par le nombre des tubes plus 1. A chaque tube correspond une constante spéciale pour la fonction des lignes obtenue par intégration, comme à chaque coupure correspond une constante pour une fonction ordinaire obtenue par intégration dans un espace cyclique.

Si l'on cherche la fonction conjuguée de la fonction harmonique $\log(x^2 + y^2)/2$ dans le cas de deux variables on trouve la fonction polydrome arc $\operatorname{tg}(y/x)$. De même si l'on cherche la fonction des lignes conjuguée de la fonction harmonique $1/\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)}$ on trouve une fonction des lignes polydrome.

3. On a calculé une fonction en regardant chaque ligne comme le contour d'une surface. Si l'espace est cyclique il y a des lignes qui ne forment le contour d'aucune surface. On peut trouver les différences des valeurs correspondantes à ces lignes, mais nous n'insisterons pas ci–dessus.

Il y aussi une autre manière pour calculer des fonctions des lignes de premier degré. Nous dirons en peu de mots en quoi elle consiste.

L'équation (2) étant satisfaite on peut trouver trois fonctions Z_1, Z_2, Z_3 de x, y, z telles que

$$X = \frac{\partial Z_2}{\partial z} - \frac{\partial Z_3}{\partial y},$$

$$Y = \frac{\partial Z_3}{\partial x} - \frac{\partial Z_1}{\partial z},$$

$$Z = \frac{\partial Z_1}{\partial y} - \frac{\partial Z_2}{\partial x}.$$

Alors, si s est une ligne qui forme le contour de la surface σ ayant pour normale n, on a par le théorème de STOKES

$$\int_\sigma (X \cos nx + Y \cos ny + Z \cos nz)\, ds = \int_s (Z_1\, dx + Z_2\, dy + Z_3\, dz)$$

en choisissant convenablement la direction de la ligne s. On voit par là que la fonction d'une ligne peut se calculer par une intégrale étendue à la ligne même.

Nous avons fait usage précédemment du langage des champs vectoriels; on peut y revenir pour donner une image visible et frappante des concepts que nous avons introduits.

Lorsqu'un champ scalaire est divisé en lames infiniment minces telles que chacune correspond au même accroissement de la quantité scalaire, la fonction scalaire dans un point quelconque sert à dénombrer les lames comprises entre ce point et un point fixe.

Envisageons maintenant un champ solénoidal divisé en tubes équivalents infiniment minces. Dans ce cas, pour connaître la nature du champ, il faut savoir dénombrer les tubes qui passent à l'intérieur de toute ligne fermée. Voilà le concept de fonction de ligne de premier degré qui surgit. Si le champ est en même temps solénoidal et scalaire, le nombre des lames comprises entre un point fixe et le point variable et le nombre des tubes compris dans une ligne variable forment des fonctions conjuguées.

4. Nous nous sommes bornés jusqu'à présent au cas de trois variables; mais on peut généraliser les concepts que nous venons d'exposer au cas d'un nombre quelconque de variables.

Dans un espace à n dimensions on peut imaginer des points, des espaces à une dimension, des espaces à deux dimensions, des espaces à trois dimensions etc. et des espaces à $n-1$ dimensions, c'est pourquoi l'on peut imaginer des fonctions des points, c'est à dire des fonctions ordinaires de n variables, des fonctions des espaces à une dimension, des fonctions des espaces à deux dimensions etc. et enfin des fonctions des espaces à $n-1$ dimensions.

Si ces espaces sont fermées et si nous définissons une direction des espaces, on peut concevoir les fonctions des espaces à r dimensions *de premier degré*, c'est à dire, si S_r et S'_r sont deux espaces fermés à r dimensions ayant une partie commune qui a deux directions différentes selon qu'on la regarde comme appartenant à S_r ou à S'_r, retranchons cette partie et envisageons l'espace S''_r formé avec les parties résiduelles. La fonction qu'on envisage sera de premier degré si, les valeurs correspondantes à S_r, S'_r, S''_r étant V, V', V'', on a

$$V'' = V' + V.$$

Les fonctions de premier degré des espaces à r dimensions peuvent se calculer par des intégrations étendues à des espaces à $r+1$ dimensions, et l'on peut former des dérivées de ces fonctions tout à fait analogues aux dérivées des fonctions des lignes que nous avons envisagées.

De cette manière dans un espace à n dimensions on peut obtenir des fonctions conjuguées de $(n-1)/2$ types différents, si n est un nombre impair et de $n/2$ types, si n est pair. En effet à une fonction des espaces à r dimensions $(r < n-1)$ on peut faire correspondre comme fonction conjuguée une fonction des espaces a $n-r-2$ dimensions.

Dans un espace à deux dimensions on a une seule sorte de fonctions conjuguées, c'est à dire que les fonctions conjuguées à des fonctions harmoniques des points sont aussi des fonctions des points.

Dans un espace à 3 dimensions les fonctions conjuguées à des fonctions harmoniques des points sont des fonctions des lignes, comme nous venons de voir. Dans un espace à 4 dimensions les fonctions conjuguées à des fonctions harmoniques des points sont des fonctions des espaces à deux dimensions, mais l'on peut avoir aussi des fonctions conjuguées à des fonctions des espaces à une dimension qui sont aussi des fonctions de la même nature.

Dans un espace à 5 dimensions les fonctions harmoniques des points sont conjuguées à des fonctions des espaces à trois dimensions, et l'on peut avoir des fonctions des espaces à une dimension conjuguées à des fonctions des espaces à deux dimensions. Ainsi de suite avec la règle que nous avons exposée précédemment.

On arrive par là à une théorie générale des fonctions conjuguées où les fonctions harmoniques ordinaires à n variables se présentent comme un cas très–particulier. Il est bon de remarquer que dans les hyperespaces d'un nombre n pair de dimensions il y a des fonctions conjuguées d'ordre $(n-1)/2$ qui correspondent aux mêmes hyperespaces.

La connexion de plus en plus compliquée des espaces à n dimensions joue un rôle très important et est étroitement liée aux différentes espèces des polydromies des fonctions, comme nous avons pu constater dans le cas de trois variables. Ces polydromies se présentent comme une extension de celles qu'on a dans les cas des intégrales Abeliennes.

5. On peut envisager ces recherches comme une généralisation de l'étude des fonctions conjuguées, c'est à dire de la partie réelle et de la partie imaginaire d'une fonction d'une variable complexe considérées séparément.

Mais si nous voulons pervenir à une vraie extension de la théorie des fonctions, c'est à dire de l'ensemble des deux fonctions conjuguées, l'une étant multipliée par $\sqrt{-1}$, il faut changer le point de vue, mais les mêmes concepts que nous avons exposés en sont toujours la base, c'est pourquoi nous avons dit dans la leçon précédente, qu'il y avait deux branches d'études qui provenaient d'une même source. Comme j'ai annoncé dans la première leçon je n'abandonnerai pas ce sujet sans avoir donné aussi un aperçu de ces recherches qui sont liées à la théorie des fonctions d'un côté et aux équations qui paraissent dans la physique mathématique d'un autre côté.

6. Si nous envisageons un plan et deux quantités complexes F et Φ qui sont des fonctions des points du plan, la condition pour que F soit une fonction de Φ est qu'en déplaçant le point indice M dans une direction quelconque MM′ et, en calculant le rapport $\Delta F/\Delta\Phi$ des variations des deux fonctions, la limite du rapport, lorsque MM′ devient infiniment petit, ne dépend pas de la direction du déplacement mais soit une nouvelle fonction du point indice. CAUCHY employait dans ce cas le mot de *fonction monogène*.

Or une extension n'est pas possible dans l'espace, car si nous posons la même condition que nous venons d'indiquer dans le cas où le point indice au lieu de se déplacer dans un domaine à deux dimensions peut se déplacer dans un domaine à trois dimensions, on trouve qu'elle conduit à la même relation entre F et Φ et l'on trouve la même chose dans le cas d'un espace à plusieurs dimensions.

Mais nous avons vu que dans les espaces à trois dimensions et à plusieurs dimensions le concept des fonctions ordinaires, c'est à dire des fonctions des points, n'est qu'un cas particulier du concept général de fonctions, car il y a les fonctions des lignes et en général les fonctions des hyperespaces. Si nous appliquons maintenant la condition que nous avons posée tout à l'heure pour F et Φ, mais en supposant que les fonctions soient des fonctions du nouveau genre que nous avons introduites, toute difficulté disparait, et l'on peut étendre à un espace d'un nombre quelconque de dimensions la liaison de monogénéité de CAUCHY, c'est à dire on peut étendre la théorie des fonctions au cas d'un domaine quelconque en trouvant quelque chose de nouveau. Faute du concept des fonctions des lignes et des hyperespaces la base où fonder la théorie manquait complétement. D'autre part il fallait bien penser qu'il aurait été nécessaire de tomber là dessus, si l'on voulait étendre la théorie des fonctions, car si l'opération de l'intégration dans le cas des fonctions d'une variable ne fait pas sortir du domaine des fonctions de la même nature, l'intégration des fonctions de plusieurs variables, c'est à dire l'intégration multiple qui est étendue à des domaines à plusieurs dimensions dont les limites sont des lignes ou des surfaces etc., devait nous amener au nouveau concept que nous avons introduit.

7. Envisageons donc dans un espace à trois dimensions deux fonctions complexes de premier degré des lignes, et soient F et Φ leurs valeurs correspondantes à une ligne L. Déformons un arc AB de L, et désignons par ΔF et $\Delta\Phi$ les variations de F et de Φ. Si en diminuant indéfiniment la déformation et la distance entre B et le point fixe A, le rapport

$$\frac{\Delta\Phi}{\Delta F}$$

tend vers une limite qui dépend seulement du point A, on pourra dire qu'entre les variables complexes Φ et F passe une liaison tout à fait analogue à celle de monogénéité de CAUCHY.

On peut exprimer cette condition d'une autre manière en faisant usage des notations que nous avons introduites. Calculons

$$\frac{d\Phi}{d\Sigma} : \frac{dF}{d\Sigma} = f, \tag{6}$$

Σ étant une surface quelconque, f doit avoir une valeur indépendante de la direction de la surface Σ, c'est à dire doit être une fonction des points de l'espace.

Décomposons maintenant Φ et F et leurs dérivées dans les parties réelles et imaginaires en posant

$$F = F_1 + iF_2 \quad , \quad \Phi = \Phi_1 + i\Phi_2 \quad , \quad i = \sqrt{-1}\,,$$

$$\frac{dF}{d(y,z)} = p_1 + ip_2 \quad , \quad \frac{dF}{d(z,x)} = q_1 + iq_2 \quad , \quad \frac{dF}{d(x,y)} = r_1 + ir_2\,;$$

$$\frac{d\Phi}{d(y,z)} = \omega_1 + i\omega_2 \quad , \quad \frac{d\Phi}{d(z,x)} = \chi_1 + i\chi_2 \quad , \quad \frac{d\Phi}{d(x,y)} = \rho_1 + i\rho_2\,;$$

la condition (6) pourra s'écrire

$$\frac{\omega_1 + i\omega_2}{p_1 + ip_2} = \frac{\chi_1 + i\chi_2}{q_1 + iq_2} = \frac{\rho_1 + i\rho_2}{r_1 + ir_2} = f \tag{7}$$

et l'on tire de là que Φ_1 et Φ_2 doivent vérifier les mêmes équations, c'est à dire

$$D_1 \frac{d\Psi}{d(y,z)} + D_2 \frac{d\Psi}{d(z,x)} + D_3 \frac{d\Psi}{d(x,y)} = 0$$

$$0 = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\varepsilon_{12}\frac{d\Psi}{d(x,y)} - \varepsilon_{13}\frac{d\Psi}{d(z,x)}}{D_1}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\varepsilon_{23}\frac{d\Psi}{d(y,z)} - \varepsilon_{21}\frac{d\Psi}{d(x,y)}}{D_2}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\varepsilon_{31}\frac{d\Psi}{d(z,x)} - \varepsilon_{32}\frac{d\Psi}{d(y,z)}}{D_3}\right), \tag{8}$$

où Ψ' peut être remplacé par Φ_1 et Φ_2 et l'on a

$$\varepsilon_{11} = p_1^2 + p_2^2 \quad , \quad \varepsilon_{22} = q_1^2 + q_2^2 \quad , \quad \varepsilon_{33} = r_1^2 + r_2^2 ,$$

$$\varepsilon_{23} = \varepsilon_{32} = q_1 r_1 + q_2 r_2 \quad , \quad \varepsilon_{31} = \varepsilon_{13} = r_1 p_1 + r_2 p_2 \quad , \quad \varepsilon_{12} = \varepsilon_{21} = p_1 q_1 + p_2 q_2 .$$

$$D_1 = q_2 r_1 - r_2 q_1 \quad , \quad D_2 = r_2 p_1 - p_2 r_1 \quad , \quad D_3 = p_2 q_1 - q_2 p_1 .$$

L'équation (8) remplace dans ce cas l'équation de LAPLACE et a bien des propriétés communes avec elle.

8. On peut écrire l'équation (6) sous la forme

$$\frac{d\Phi}{dF} = f. \tag{9}$$

Les fonctions Φ et F peuvent s'appeler *isogènes*. Il est évident que deux fonctions des lignes qui sont isogènes avec une troisième sont isogènes entre elles. De même une fonction des points φ peut s'appeler aussi isogène avec F si

$$\frac{dF}{d(y,z)} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{dF}{d(z,x)} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{dF}{d(x,y)} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0. \tag{10}$$

Elle sera isogène avec toutes les fonctions des lignes isogènes avec F. On démontre aussi facilement que f est isogène avec F, et réciproquement que si la fonction des points f est isogène avec la fonction des lignes F, on peut trouver une fonction Φ telle que l'égalité (9) soit vérifiée.

Toutes les fonctions des points qui sont isogènes avec F peuvent s'appeler isogènes entre elles. Puisqu'elles doivent vérifier l'équation (10) on en tire que deux d'entre elles sont indépendantes et les autres en sont des fonctions. Soient φ_1 et φ_2 des fonctions indépendantes. À cause de l'équation (10) on pourra toujours écrire

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{dF}{d(y,z)} &= \varphi_3 \begin{vmatrix} \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial y} , & \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial z} \\ \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial y} , & \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial z} \end{vmatrix} = X , \\ \frac{dF}{d(z,x)} &= \varphi_3 \begin{vmatrix} \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial z} , & \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x} \\ \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial z} , & \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial x} \end{vmatrix} = Y , \\ \frac{dF}{d(x,y)} &= \varphi_3 \begin{vmatrix} \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x} , & \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial y} \\ \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial x} , & \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial y} \end{vmatrix} = Z , \end{aligned} \right. \tag{11}$$

où φ_3 est une fonction des points isogène aux autres, c'est à dire

$$\varphi_3 = \varphi_3(\varphi_1 , \varphi_2).$$

Supposons que le domaine à trois dimensions que nous envisageons ait une connexion superficielle simple et que dans ce domaine les fonctions que nous considérons n'aient pas de singularités, alors pour avoir la valeur de la fonction F correspondante à une certaine ligne il suffira de regarder cette ligne comme le contour d'une surface σ et de former

$$F = \int_\sigma (X \cos nx + Y \cos ny + Z \cos nz)\, d\sigma .$$

Soient u, v des coordonnées curvilignes de la surface. On aura

$$d\sigma \cos nx = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial y}{\partial u}, & \dfrac{\partial z}{\partial u} \\ \dfrac{\partial y}{\partial v}, & \dfrac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} du\, dv ;$$

$$d\sigma \cos ny = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial z}{\partial u}, & \dfrac{\partial x}{\partial u} \\ \dfrac{\partial z}{\partial v}, & \dfrac{\partial x}{\partial v} \end{vmatrix} du\, dv ;$$

$$d\sigma \cos nz = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u}, & \dfrac{\partial y}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x}{\partial v}, & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} du\, dv .$$

C'est pourquoi l'intégrale précédente pourra s'écrire

$$(12) \qquad F = \int_\sigma \varphi_3 \begin{vmatrix} \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial u}, & \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial v} \\ \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial u}, & \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial v} \end{vmatrix} du\, dv = \int_\sigma \varphi_3\, d\varphi_1\, d\varphi_2 .$$

On voit par là que tout ensemble de fonctions isogènes des lignes et des points dans un espace à trois dimensions ressort des fonctions de deux variables complexes et de leurs intégrales, comme tout ensemble de fonctions monogènes dans un espace à deux dimensions ressort des fonctions d'une variable complexe et de leurs intégrales.

Si la surface σ dans l'intégrale (12) est une surface fermée, l'intégrale devient nulle. Cette propriété n'est autre chose que la theorie de CAUCHY pour les fonctions de deux variables telle que M. POINCARÉ l'a donnée.

Si l'espace n'a pas une connexion superficielle simple, ou si les fonctions qui paraissent dans les formules ont des singularités, l'intégrale peut n'être nulle. Il faut alors remplacer la surface σ par un ensemble de surfaces qui forment le contour complet d'un domaine à trois dimensions où les fonctions n'ont pas de singularités.

9. φ_4 étant une fonction de φ_1 et φ_2 telle que

$$\frac{\partial \varphi_4}{\partial \varphi_1} = \varphi_3(\varphi_1, \varphi_2),$$

les équations (11) s'écrivent

$$\frac{dF}{d(y,z)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi_4}{\partial y}, & \frac{\partial\varphi_4}{\partial z} \\ \frac{\partial\varphi_2}{\partial y}, & \frac{\partial\varphi_2}{\partial z} \end{vmatrix}$$

$$\frac{dF}{d(z,x)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi_4}{\partial z}, & \frac{\partial\varphi_4}{\partial x} \\ \frac{\partial\varphi_2}{\partial z}, & \frac{\partial\varphi_2}{\partial x} \end{vmatrix}$$

$$\frac{dF}{d(x,y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi_4}{\partial x}, & \frac{\partial\varphi_4}{\partial y} \\ \frac{\partial\varphi_2}{\partial x}, & \frac{\partial\varphi_2}{\partial y} \end{vmatrix}$$

et l'équation (12) deviendra

$$F = \int_\sigma d\varphi_4\, d\varphi_2,$$

d'où l'on tire que F peut s'obtenir par φ_4 et φ_2 ou qu'elle est composée par ces deux fonctions qu'on peut appeler des diviseurs de F. On peut écrire

$$F = (\varphi_4\, \varphi_2).$$

La décomposition de F en ses diviseurs peut se faire d'une infinité de manières. Les diviseurs sont isogènes avec F et deux fonctions isogènes des lignes ont toujours un diviseur commun. Les diviseurs étant des fonctions des points, on peut les appeler élémentaires.

7ième leçon.

1. La théorie qu'on vient d'exposer se rapporte au cas des fonctions de deux variables, et elle a l'avantage qu'on peut l'exposer sans recourir aux espaces à plus de trois dimensions. Mais si l'on se borne à ces espaces, on n'a pas évidemment une théorie complète; et l'on voit la nécessité d'étendre tous les concepts à l'espace à n dimensions. Il n'est pas difficile de le faire. Mais par là la théorie se développe d'une manière inattendue. C'est à dire qu'on ne trouve pas seulement la théorie des fonctions de plusieurs variables complexes et de leurs intégrales, mais quelque chose aussi de beaucoup plus général. En effet toute fonction complexe de premier degré d'une ligne peut être attachée par la liaison d'isogénéité à un ensemble d'autres fonctions des lignes et à des fonctions de deux variables complexes indépendantes, et peut se décomposer en facteurs élémentaires. La même chose ne se présente pas, lorsqu'on envisage une fonction des hyperespaces de $r < n$ dimensions dans un hyper-

espace de $n > 3$ dimensions. Pour ces fonctions aussi il y a, comme dans le cas des fonctions des lignes dans l'espace à trois dimensions, une décomposition en fonctions d'un ordre plus simple qui présente des caractères arithmétiques analogues à la décomposition d'un nombre en facteurs premiers. Mais dans le cas des hyperespaces cette décomposition ne peut pas être poussée toujours jusqu'à arriver aux fonctions des points, c'est à dire que tous les diviseurs premiers de la fonction peuvent être aussi des fonctions des hyperspaces. Or, pour qu'une fonction soit liable à une autre par la liaison d'isogénéité il est nécessaire et suffisant qu'elle ait un diviseur élémentaire, c'est à dire un diviseur qui soit une fonction des points. Il faut donc poser des conditions spéciales avant de pouvoir établir la liaison d'isogénéité, et même après avoir établi cette liaison on a une théorie bien plus générale que celle qui ressort des fonctions de plusieurs variables et de leurs intègrales. Ce cas se rapporte seulement à l'ensemble des fonctions des hyperespaces dont tous les diviseurs sont des diviseurs élémentaires.

Lorsqu'on envisage des espaces ayant un nombre de dimensions toujours croissant, les différentes sortes de connexions possibles augmentent toujours. LISTING, BETTI, POINCARÉ les ont étudiées. Elles jouent un rôle fondamental dans les théories précedentes, car elles déterminent les différentes sortes de polydromies des fonctions des hyperespaces. Dans le cas des fonctions d'une seule variable complexe on n'a qu'une seule sorte de polydromie qui ressort de la cyclicité, mais dans les cas précédents leur nombre est toujours plus élevé. La théorie des intégrales Abéliennes ne présente que le premier cas de cette théorie générale.

2. Les fonctions des lignes et des hyperespaces nous conduisent naturellement à dire quelques mots sur d'autres études très voisines qui ont bien des rapports avec des questions de la physique mathématique.

Soient x, y, z les coordonnées des points de l'espace. Une ligne est déterminée par deux équations $y = f(x)$, $z = \varphi(x)$. Donc une quantité qui dépend d'une ligne peut être envisagée comme une quantité qui dépend des fonctions $f(x)$ et $\varphi(x)$.

Il est donc tout naturel d'envisager les quantités qui dépendent de toutes les valeurs q'une fonction ou plusieurs fonctions prennent dans certains domaines. C'est un concept qui se présente dans un grand nombre de cas. Le plus simple est celui d'une intégrale définie. La valeur de l'intégrale définie entre certaines limites dépend de toutes les valeurs de la fonction entre ces limites. La physique mathématique nous offre les exemples les plus frappants. Par exemple la température en un point d'une lame qui est chauffée au bord dépend de toutes les valeurs de la température au bord de la lame. Les fonctions des lignes et des hyperespaces rentrent évidemment dans ce concept.

Il est bien clair que lorsqu'on parle d'une quantité qui dépend de toutes les valeurs d'une ou de plusieurs variables on entend quelque chose de bien différent d'une fonction de fonction.

3. La définition que nous venons de donner est analogue à la définition de fonction ordinaire due à DIRICHLET, d'après laquelle on dit qu'une variable est fonction d'une autre variable si à chaque valeur de cette quantité, entre des limites données, correspond une valeur de la première quantité. Nous n'entrerons pas dans les discussions très–importantes, qui se rapportent à cette définition. Il est bien évident qu'on a été amené à la donner par le concept fondamental de loi physique. M. BOUTROUX tout récemment a approfondi la question d'une manière fort intéressante. Mais en posant certaines conditions on peut passer du concept de fonction tel que l'a posé DIRICHLET à celui de fonction analytique. Il est inutile de rappeler ces conditions qui sont bien connues et qui se rapportent à la continuité, à l'existence des dérivées, etc.

On peut procéder de la même manière dans le cas des fonctions qui dépendent de toutes les valeurs d'une fonction ou de plusieurs fonctions.

Envisageons le cas le plus simple, celui d'une quantité F qui dépend de toutes les valeurs d'une fonction continue $f(x)$ définie pour toutes les valeurs de x comprises entre a et b. Il n'y a pas de difficulté à étendre le concept de continuité à la quantité F. Supposons maintenant qu'on part d'une fonction initiale $f(x)$, et qu'on la change en la remplaçant par $f(x) + \varepsilon\varphi(x)$ ou ε est une quantité infiniment petite. On peut tâcher de calculer la variation de F. Sous certaines conditions la partie du premier ordre de cette variation peut s'exprimer par une intégrale définie

$$\varepsilon \int_a^b \varphi(\xi_1)\, F'(\xi_1)\, d\xi_1 .$$

La fonction $F'(\xi_1)$ joue le rôle de première dérivée. Elle est indépendante de $\varphi(x)$, mais elle dépend en général de toutes les valeurs de $f(x)$, c'est pourquoi on peut tâcher de trouver la variation de $F'(\xi_1)$, lorsqu'on remplace $f(x)$ par $f(x) + \varepsilon\varphi(x)$. Si l'on néglige les parties qui sont infiniment petites d'ordre supérieur à ε, sous certaines conditions, on trouve que cette variation est donnée par

$$\varepsilon \int_a^b \varphi(\xi_2)\, F''(\xi_1, \xi_2)\, d\xi_2 .$$

$F''(\xi_1\, \xi_2)$ joue le rôle de première dérivée de $F'(\xi)$ et de seconde dérivée de F. Elle est indépendante de $\varphi(x)$, mais dépend de toutes les valeurs de $f(x)$. Elle est une fonction symétrique de ξ_1 et ξ_2.

On peut aussi procéder au calcul de la troisième dérivée qui s'exprime par une fonction $F'''(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ symétrique et ainsi de suite.

Cela posé, on peut se proposer de développer la valeur de F qui correspond à $f(x) + \varphi\varepsilon(x)$ dans une série de puissances de ε. Sous certaines conditions qui sont tout à fait semblables à celles qu'on a pour la série ordinaire de TAYLOR on trouve

$$(13)\quad \left\{\begin{aligned} F = {} & F_0 + \varepsilon\int_a^b \varphi(\xi_1) F'(\xi_1)\,d\xi_1 + \frac{1}{2}\varepsilon^2 \int_a^b\!\!\int_a^b F''(\xi_1,\xi_2)\varphi(\xi_1)\varphi(\xi_2)\,d\xi_1\,d\xi_2 \\ & + \frac{1}{3!}\varepsilon^3\int_a^b\!\!\int_a^b\!\!\int_a^b F'''(\xi_1,\xi_2,\xi_3)\varphi(\xi_1)\varphi(\xi_2)\varphi(\xi_3)\,d\xi_1\,d\xi_2\,d\xi_3 \\ & + \cdots + \frac{1}{n!}\varepsilon^n\int_a^b\cdots\int_a^b F^{(n)}(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n)\varphi(\xi_1)\varphi(\xi_2)\cdots\varphi(\xi_n)\,d\xi_1\,d\xi_2\cdots d\xi_n + \cdots, \end{aligned}\right.$$

où $F^{(n)}(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$ est une fonction symétrique des n variables, $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$, indépendante de $\varphi(x)$.

En prenant $\varepsilon = 1$ on passe facilement à une série analogue à celle de MAC LAURIN.

4. On pourrait prendre comme définition d'une quantité F qui dépend de la fonction $\varphi(x)$ définie pour les valeurs x comprises entre a et b l'expression précédente où l'on fait $\varepsilon = 1$, en supposant que la série soit convergente. Ce serait une définition analytique d'une fonction qui dépend d'une autre fonction, et l'on pourrait en étudier le domaine de convergence. Les différents termes représenteraient des fonctions de différents degrés.

Cependant de cette manière on n'envisagerait pas le cas le plus général.

5. Lorsque F dépend de toutes les valeurs d'une fonction ou de plusieurs fonctions, que celles-ci sont inconnues, et qu'il faut les déterminer, étant données certaines propriétés de F, alors on tombe sur les problèmes les plus intéressants de la théorie. Le calcul des variations n'est que le premier exemple d'une recherche de ce genre.

Mais prenons le cas qui correspond à la formule (13), et supposons que nous écrivions

$$(14)\quad \left\{\begin{aligned} \vartheta\Psi(x) = {} & \varepsilon\varphi(x)\alpha + \varepsilon\int_a^b \varphi(\xi_1)F'(\xi_1,x)\,d\xi_1 + \frac{1}{2}\varepsilon^2\int_a^b\!\!\int_a^b F''(\xi_1,\xi_2,x)\varphi(\xi_1)\varphi(\xi_2)\,d\xi_1\,d\xi_2 \\ & + \cdots + \frac{1}{n!}\varepsilon^n\int_a^b\cdots\int_a^b F^{(n)}(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n,x)\varphi(\xi_1)\cdots\varphi(\xi_n)\,d\xi_1\cdots d\xi_n, \end{aligned}\right.$$

α étant une quantité donnée et $\Psi(x)$ étant définie pour les valeurs de x comprises entre a et b.

Le cas le plus simple est celui où F'', F''', $\cdots$, $F^{(n)}$, $\cdots$, sont nulles, c'est à dire où l'on a

$$(15)\qquad \vartheta\Psi(x) = \varepsilon\varphi(x)\alpha + \varepsilon\int_a^b \varphi(\xi_1)F'(\xi_1,x)\,d\xi_1;$$

c'est le cas de l'inversion des fonctions de premier degré qui est le cas envisagé par M. FREDHOLM et par moi même lorsque la limite supérieure est égale à x.

Le problème d'invertir une fonction générale de la forme (14) par rapport à l'inversion de la formule (15) n'est que le problème général de l'inversion d'une fonction transcendante par rapport à l'inversion d'une fonction de premier degré. Nous voulons montrer que le cas général peut être résolu.

6. En effet pour obtenir $\varphi(x)$ exprimée par $\Psi(x)$, c'est à dire pour invertir la formule (14), il suffit de tâcher de développer $\varepsilon\varphi(x)$ dans une série de puissances de ϑ.

C'est pourquoi calculons

$$\left(\frac{d(\varepsilon\varphi)}{d\vartheta}\right)_{\vartheta=0} = \left(\frac{d(\varepsilon\varphi)}{d\vartheta}\right)_0, \quad \left(\frac{d^2(\varepsilon\varphi)}{d\vartheta^2}\right)_{\vartheta=0} = \left(\frac{d^2(\varepsilon\varphi)}{d\vartheta^2}\right)_0, \quad \left(\frac{d^3(\varepsilon\varphi)}{d\vartheta^3}\right)_{\vartheta=0} = \left(\frac{d^3(\varepsilon\varphi)}{d\vartheta^3}\right)_0 \cdots$$

On trouve

$$\Psi(x) = \left(\frac{d[\varepsilon\varphi(x)]}{d\vartheta}\right)_0 \alpha + \int_a^b \left(\frac{d[\varepsilon\varphi(\xi_1)]}{d\vartheta}\right)_0 F'(\xi_1, x)\, d\xi_1 .$$

Si nous pouvons invertir cette formule, ce qui arrive par exemple lorsque le déterminant n'est pas nul, on trouve

$$\left\{\frac{d[\varepsilon\varphi(x)]}{d\vartheta}\right\}_0 = \Psi(x)\,\beta + \int_a^b \Psi(\eta_1)\,\Phi'(\eta_1, x)\, d\eta_1 . \tag{16}$$

En dérivant une fois encore on a

$$0 = \left\{\frac{d^2[\varepsilon\varphi(x)]}{d\vartheta^2}\right\}_0 \alpha + \int_a^b \left\{\frac{d^2[\varepsilon\varphi(\xi_1)]}{d\vartheta^2}\right\}_0 F'(\xi_1, x)\, d\xi_1$$

$$+ \int_a^b\int_a^b F''(\xi_1, \xi_2, x) \left\{\frac{d[\varepsilon\varphi(\xi_1)]}{d\vartheta}\right\}_0 \left\{\frac{d[\varepsilon\varphi(\xi_2)]}{d\vartheta}\right\}_0 d\xi_1\, d\xi_2$$

c'est à dire

$$\left\{\begin{aligned} &\left\{\frac{d^2[\varepsilon\varphi(x)]}{d\vartheta^2}\right\}_0 \alpha + \int_a^b \left\{\frac{d^2[\varepsilon\varphi(\xi_1)]}{d\vartheta^2}\right\}_0 F'(\xi_1, x)\, d\xi_1 \\ &= -\int_a^b\int_a^b F''(\xi_1, \xi_2, x) \left\{\frac{d[\varepsilon\varphi(\xi_1)]}{d\vartheta}\right\}_0 \left\{\frac{d[\varepsilon\varphi(\xi_2)]}{d\vartheta}\right\}_0 d\xi_1\, d\xi_2 \\ &= \int_a^b\int_a^b \Phi_1(\eta_1, \eta_2, x)\, \Psi(\eta_1)\, \Psi(\eta_2)\, d\eta_1\, d\eta_2 \end{aligned}\right. \tag{17}$$

en remplaçant $\left\{\frac{d[\varepsilon\varphi(\xi_1)]}{d\vartheta}\right\}_0, \left\{\frac{d[\varepsilon\varphi(\xi_2)]}{d\vartheta}\right\}_0$ par les valeurs données par la formule (16). Si l'on invertit la dernière formule en employant une formule analogue à la formule (16) on trouve

$$\left\{\frac{d^2[\varepsilon\varphi(x)]}{d\vartheta^2}\right\}_0 = \int_a^b\int_a^b \Phi''(\eta_1, \eta_2, x)\,\Psi(\eta_1)\,\Psi(\eta_2)\,d\eta_1\,d\eta_2 .$$

De même on trouve

$$\left\{\frac{d^3[\varepsilon\varphi(x)]}{d\vartheta^3}\right\}_0 = \int_a^b\int_a^b\int_a^b \Phi'''(\eta_1, \eta_2, \eta_3, x)\,\Psi(\eta_1)\,\Psi(\eta_2)\,\Psi(\eta_3)\,d\eta_1\,d\eta_2\,d\eta_3$$

et ainsi de suite, de sorte qu'on aura

$$\left[\frac{d(\varepsilon\varphi)}{d\vartheta}\right]_0 \vartheta + \frac{1}{2}\left[\frac{d^2(\varepsilon\varphi)}{d\vartheta^2}\right]_0 \vartheta^2 + \frac{1}{3!}\left[\frac{d^3(\varepsilon\varphi)}{d\vartheta^3}\right]_0 \vartheta^3 + \cdots = \varepsilon\varphi(x) = \vartheta\Psi(x)\,\beta$$

$$+ \vartheta\int_a^b \Psi(\eta_1)\,\Phi'(\eta_1, x)\,d\eta_1 + \frac{1}{2}\vartheta^2\int_a^b\int_a^b \Phi''(\eta_1, \eta_2, x)\,\Psi(\eta_1)\,\Psi(\eta_2)\,d\eta_1\,d\eta_2$$

$$+ \cdots + \frac{1}{n!}\vartheta^n\int_a^b \cdots \int_a^b \Phi^{(n)}(\eta_1, \cdots, \eta_n, x)\,\Psi(\eta_1), \cdots, \Psi(\eta_n)\,d\eta_1 \cdots d\eta_n + \cdots$$

Il faudra établir les conditions de convergence de la série précédente et son domaine de validité. On peut regarder $\Phi^{(n)}$ comme une fonction symétrique de $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n$. Nous n'entrerons pas dans les détails par rapport à la vérification de la formule que nous avons donnée, ni sur la question de l'unicité de la solution.

7. Je ne puis terminer cet argument sans toucher à la question des méthodes qu'on appelle de JACOBI–HAMILTON. Les mémoires de HAMILTON publiés en 1834 et 1835 on été le point de départ d'un grand nombre de travaux qui sont parmi les plus beaux de la mécanique analytique. JACOBI est le premier qui en ait fait ressortir tout l'intérêt. Le principe d'abord limité aux questions mécaniques à été étendu aux problèmes des isopérimètres et enfin à tous les problèmes du calcul des variations relatifs aux intégrales simples. On peut regarder la plupart des problèmes de la physique mathématique comme ressortant des questions du calcul des variations relatives aux intégrales multiples, et il est par suite intéressant d'étendre les mêmes méthodes à ces cas. Pour atteindre le but il suffit de remarquer que la méthode JACOBI–HAMILTON est fondée sur le concept d'envisager l'intégrale simple dont on veut annuler la variation comme une fonction des limites de l'intégrale et des valeurs arbitraires des fonctions inconnues aux limites. Donc pour étendre la même méthode au cas des intégrales multiples il faut les regarder comme dèpendantes des lignes ou des surfaces ou des hyperspaces qui limitent les intégrales données et de toutes les valeurs des fonctions inconnues au contour. C'est pourquoi les concepts que nous avons introduits sont nécessaires pour étendre les méthodes JACOBI–HAMILTON aux problèmes de la physique mathématique.

BIBLIOGRAPHIE.

PICARD, *Traité d'analyse.*
— *Mémoire sur la théorie des fonctions algébriques.* « Journ. des Math. pures et appliquées », 1889.
POINCARÉ, *Sur les résidues des intégrales doubles.* « Acta Math. », T. 9.
LISTING, *Der census räumlicher complexe.* « Abh. K. Gesellsch. d. Wiss. zu Göttingen », 1862.
BETTI, *Sugli spazii di un numero qualunque di dimensioni.* « Annali di Mat. », T. IV.
POINCARÉ, *Analysis situs.* « Journ. de l'École Polyt. », 1895.
VOLTERRA, *Sopra le funzioni che dipendono da altre funzioni.* « Rend. Acc. Lincei », 1887 [in queste « Opere »: vol. primo, XVII, pp. 294–314].
— *Sopra le funzioni dipendenti da linee.* Ibid. [ibid., XVIII, pp. 31:-328].
— *Delle variabili complesse negli iperspazii.* Ibid., 1889 [ibid., XXIII, pp. 403–419].
— *Sulle funzioni coniugate,* Ibid [ibid., XXIV, pp. 420–432].
— *Sulle funzioni di iperspazi e sui loro parametri diff.*, Ibid. [ibid., XXV, pp. 433–443].
— *Sulle equazioni differenziali che provengono da questioni di calcolo delle variazioni.* Ibid., 1890 [ibid., XXVII, pp. 454–463].
— *Sopra una estensione delle teorie Jacobi–Hamilton del calcolo delle variazioni.* Ibid. [ibid., XXVIII, pp. 464–475].
— *Sulle variabili complesse negli iperspazii,* Ibid. [ibid., XXIX pp, 476–487].
— *Sur une généralisation de la théorie des variables imaginaires,* « Acta Mathematica », 1889 [ibid., XXII, pp. 363–402].
— *Sulla inversione degli integrali definiti.* Note I, II, III, IV, « Atti della R. Accademia di Torino », 1896 [in queste « Opere »: vol. secondo, XVIII, pp. 216–254].
— *Sulla inversione degli integrali definiti.* « Rend. Acc. Lincei », 1896 [ibid., XIX, pp. 255–262].
— *Sulla inversione degli integrali multipli.* Ibid [ibid., XX, pp. 263–275].
— *Sopra alcune questioni di inversione di integrali definiti.* « Annali di Mat. », 1897 [ibid., XXII, pp. 279-313].
— *Sur les fonctions qui dépendent d'autres fonctions.* « C. R. Ac. des Sciences », 19 Mars 1906 [in questo vol.: IX, pp. 59–62].
La continuation de mes travaux sur ce sujet se trouve dans les « Rendiconti dell'Accademia dei Lincei », vol. XVIII, série 5ª, 1° sem., fasc. 4, 5, 2° sem., fasc. 9, 12; vol. XIX, série 5ª, 1° sem., fasc. 3, 4, 5, 7, 8; vol. XX, série 5ª, 1° sem., fasc. 2, 5, 8, 2° sem. fasc. 3; vol. XXI, série 5ª, 2° sem., fasc. 1; « Acta Mathematica », t. XXXV. « Lectures Clark University » et forme le sujet de deux volumes sous presse de la Collection BOREL (Gauthier–Villars). Voir aussi deux articles que j'ai publiés dans la « Revue du Mois », mars et mai 1912.

8ième leçon.

1. Il est bien souvent nécessaire de revenir sur la signification des mots dont on fait un usage continuel dans la science. C'est leur sort d'évoluer et par suite de se transformer et de se plier à tant d'exigences différentes que non seulement le sens primitif est quelquefois presque complètement évanoui, mais que la signification actuelle est très–difficile à découvrir lorsqu'on pense à la chercher. C'est ce qui arrive par rapport à la *théorie générale des ondes.* Tout le monde en parle et tous parlent de son influence,

en l'opposant à d'autres systèmes. Mais les limites en sont elles-marquées, et peut-on établir sous quelles conditions une classe de phénomènes s'explique par le système des ondes? Nous n'entrerons pas dans la discussion de ces questions qui mériteraient une étude approfondie; nous dirons seulement qu'une grande classe de phénomènes peuvent se grouper au point de vue analytique sous une même catégorie bien définie, car leurs équations différentielles du type hyperbolique ont des propriétés communes qui ressortent principalement de l'existence de caractéristiques réelles.

On envisage par là une grande partie des phénomènes qu'on à l'habitude de regarder comme dépendant du système des ondes, mais on ne peut pas dire que sous cette classe d'équations différentielles on ait groupé tous les phénomènes qui se relient à la théorie des ondes. On peut citer, par exemple, les ondes des liquides incompressibles et pesants qui dépendent d'équations d'une autre nature. (Voir 11ème leçon). Toujours est-il que l'étude des équations différentielles dont nous venons de parler forme une théorie que l'on peut envisager à part et approfondir par des méthodes générales qu'on est en train de perfectionner peu à peu. Par rapport à ces équations il faut dire qu'elles ont marqué le plus grand triomphe de la physique mathématique, car c'est l'analogie entre les équations des vibrations des corps élastiques et celles des champs électrodynamiques qui ont conduit a la théorie électromagnétique de la lumière et aux expériences de HERTZ.

2. Nous envisageons dans cette leçon quelques équations qui rentrent dans cette catégorie, et nous examinons les plus simples. Elles peuvent servir à nous montrer d'une manière claire, sans entrer dans les détails, les propriétés principales et la portée des méthodes qu'on a tâché d'employer pour leur étude. Considérons les équations

$$(1)\qquad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0\quad,\quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}=0\,,$$

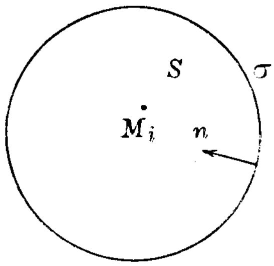
$$\frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial x_3^2}-\frac{\partial^2 v}{\partial x_4^2}=0\cdots$$

La première est celle qu'on appelle des cordes vibrantes, la seconde est celle des membranes vibrantes, la troisième des corps vibrants, etc. et l'on peut les comparer avec les équations de LAPLACE à deux, trois, quatre variables indépendantes que nous avons déjà envisagées dans les leçons précédentes. On peut passer des unes aux autres par des transformations très-simples. C'est ainsi qu'en remplaçant dans la seconde par exemple z par iz, elle devient l'équation de LAPLACE à trois variables. Bien des propriétés peuvent se déduire par cette simple transformation.

3. Nous voulons d'abord comparer deux formules qui nous montreront tout de suite le caractère des équations (1) et celui de l'équation de LAPLACE. Le cas le plus frappant et en même temps le plus simple est relatif à trois

variables, et l'on peut même considérer le cas plus général où le second membre n'est pas nul. Soit u une fonction qui vérifie l'équation

$$\text{(I)} \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = f(x, y, z)$$



et supposons qu'elle soit finie, continue et monodrome dans un domaine S limité par un contour σ. Supposons que la fonction f soit aussi finie, continue et monodrome. La formule de GREEN donne la valeur de u, dans un point M_i de coordonnées x_1, y_1, z_1 interne au domaine, exprimée par les valeurs de u et de la dérivée de u par rapport à la normale au contour. Voici la formule

$$\text{(2)} \qquad u(x_1, y_1, z_1) = -\frac{1}{4\pi}\int_\sigma \left(u \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} - \frac{\partial u}{\partial n} \cdot \frac{1}{r}\right) d\sigma - \frac{1}{4\pi}\int_S f \frac{1}{r}\, dS$$

où $r = \sqrt{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 + (z_1 - z)^2}$, x, y, z étant les coordonnées du point indice des intégrations. On suppose que la normale n soit dirigée vers la partie externe du domaine S. Si le point de coordonnées x_1, y_1, z_2 au lieu d'être un point interne M_i est un point externe M_e, la formule précédente devient

$$\text{(3)} \qquad 0 = -\frac{1}{4\pi}\int_\sigma \left(u \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} - \frac{\partial u}{\partial n} \frac{1}{r}\right) d\sigma - \frac{1}{4\pi}\int_S f \frac{1}{r}\, dS.$$

On peut par une simple transformation écrire la formule (2) d'une autre manière. Intégrons et dérivons successivement le second membre par rapport à z_1. On aura

$$\text{(2')} \qquad u(x_1, y_1, z_1) = \frac{\partial}{\partial z_1}\left\{-\frac{1}{4\pi}\int_\sigma \left(u \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \frac{\partial u}{\partial n} \varphi\right) d\sigma - \frac{1}{4\pi}\int_S f\varphi\, dS\right\}$$

où l'on a posé

$$\text{(4)} \qquad \varphi = \log\left(\frac{z_1 - z}{\sqrt{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2}} + \sqrt{\frac{(z_1 - z)^2}{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2} + 1}\right);$$

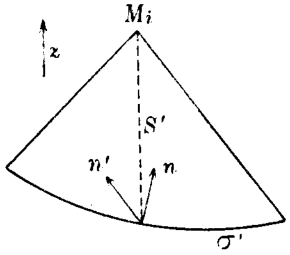
de même la formule (3) pourra s'écrire

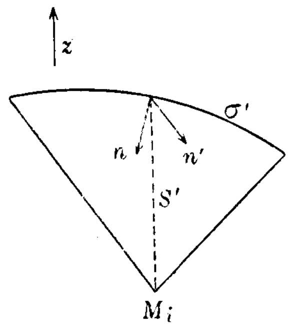
$$\text{(3')} \qquad 0 = \frac{\partial}{\partial z_1}\left\{-\frac{1}{4\pi}\int_\sigma \left(u \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \frac{\partial u}{\partial n} \varphi\right) d\sigma - \frac{1}{4\pi}\int_S f\varphi\, dS\right\}.$$

4. Indiquons maintenant la formule analogue à la formule (2') pour l'équation

$$\text{(II)} \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = f(x, y, z).$$

Menons un cône de révolution à 45° ayant pour axe une droite parallèle à l'axe z et pour sommet le point M_i dont les coordonnées sont x_1, y_1, z_1, et appelons σ' une surface simplement connexe découpée par le cône





et ayant pour contour la ligne d'intersection avec le cône. Soit S' l'espace compris entre le cône et la surface, n étant la normale à la surface dirigée vers l'intérieur de l'espace S', soient $\cos nx$, $\cos ny$, $\cos nz$ les cosinus des angles qu'elle forme avec les axes coordonnés.

Nous appelons (avec M. D'ADHÉMAR) *conormale* la direction n' telle que

$$\cos n'x = -\cos nx \quad , \quad \cos n'y = -\cos ny \quad , \quad \cos n'z = \cos nz.$$

On aura alors

$$(5) \qquad v(x_1, y_1, z_1) = \frac{\partial}{\partial z_1}\left\{-\frac{1}{2\pi}\int_{\sigma'}\left(v\frac{\partial\varphi'}{\partial n'} - \frac{\partial v}{\partial n'}\varphi'\right)d\sigma' - \frac{1}{2\pi}\int_{S'}\varphi' f dS'\right\}$$

où

$$(6) \qquad \varphi' = \log\left(\frac{z_1 - z}{\sqrt{(x_1-x)^2+(y_1-y)^2}} + \sqrt{\frac{(z_1-z)^2}{(x_1-x)^2+(y_1-y)^2} - 1}\right)$$

en supposant v et f finies, continues et monodromes, et x, y, z étant les coordonnées du point indice des intégrations.

5. Les deux formules (2′) et (5) sont tout à fait correspondantes l'une à l'autre. C'est en les comparant et en remarquant leurs différences qu'on pourra se faire une idée des analogies et en même temps des propriétés différentes des équations (I) et (II). D'abord on remarquera que dans la formule (2′) la surface σ et l'espace S renferment le point où l'on détermine la fonction u, tandis que dans la formule (5) paraissent seulement les valeurs de v et de la dérivée conormale le long de la surface σ' découpée par le cône et les valeurs de f à l'intérieur de S'. Dans la formule (2′) les espaces où l'on calcule les intégrales sont toujours les mêmes quel que soit M_i. Dans la formule (5) ils changent en déplaçant M_i. Les cônes de révolution à 45° ayant l'axe parallèle à z jouent donc dans ce cas un rôle considérable. Ils sont en effet les cônes caractéristiques.

En général lorsqu'on envisage une équation linéaire à coefficients constants de $2^{\text{ème}}$ ordre

$$\sum_{1}^{n}{}_{r} \sum_{1}^{n}{}_{s} a_{rs} \frac{\partial^2 u}{\partial x_r \partial x_s} + \sum_{1}^{n}{}_{i} b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + ku = 0,$$

les surfaces ayant pour équations dans l'hyperespace $x_1, x_2, \cdots, x_n$

$$\sum_{1}^{n}{}_{r} \sum_{1}^{n}{}_{s} A_{rs} (x_r - x_r^0)(x_s - x_s^0) = 0,$$

où cette forme quadratique est la forme quadratique réciproque de la forme quadratique précédent, et $x_1^0, \cdots, x_n^0$ sont des quantités constantes, s'appellent les cônes caractéristiques.

Or par rapport à l'équation (I) les cônes ont pour équation

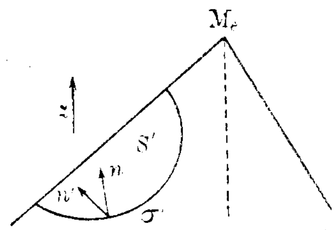
$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = 0,$$

c'est pourquoi ils sont imaginaires, tandis que pour l'équation (II) les cônes sont représentés par

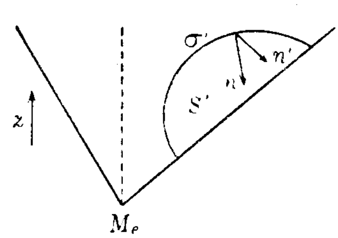
$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 - (z - z_0)^2 = 0 .$$

Ils sont réels et sont justement les cônes de révolution à 45° que nous avons envisagés.

6. Une autre particularité qu'il faut mettre en évidence est que dans la formule (2') les valeurs u et $\partial u/\partial n$ au contour ne sont pas indépendantes entre elles. Si les valeurs de u sont données, les valeurs de $\partial u/\partial n$ sont déterminées aussi.



La chose est bien différente dans le cas de la formule (5). Pour certaines surfaces σ les valeurs de v et de $\partial v/\partial n$ sont indépendantes, tandis que pour d'autres surfaces ou certaines parties d'une surface elles sont indépendantes et pour d'autres ne le sont pas. Nous aurons l'occasion de revenir su ce point.



7. On peut chercher une formule qui corresponde à la formule (3') et il est bien facile de la trouver.

Soit σ' una surface interne au cône, et soit S' un domaine compris entre σ' et la surface du cône, mais supposons que le sommet M_e du cône soit un point externe au domaine S'.

On aura alors

$$(7) \qquad 0 = \frac{\partial}{\partial z_1}\left\{ -\frac{1}{2\pi}\int_{\sigma'}\left(u\frac{\partial \varphi'}{\partial n'} - \frac{\partial u}{\partial n'}\varphi'\right)d\sigma - \frac{1}{2\pi}\int_{S'}\varphi' f dS' \right\}$$

où n' représente toujours la conormale de la surface σ'.

8. En calculant la dérivée par rapport à z_1 qui parait dans le second membre de l'équation (2′) on revient à la formule originaire (2).

Le calcul analogue dans la formule (5) n'est pas aussi simple, parce qu'une variation des coordonnées x_1, y_1, z_1 du point M_i change la surface σ' découpée par le cône caractéristique. C'est pourquoi il est évident que la dérivation ne peut pas être faite directemente sous les integrales. La dérivée peut cependant se calculer très facilement dans le second et dans le troisième terme du second membre et par là la formule (5) peut s'écrire de la manière suivante

$$(5') \quad \left\{ \begin{aligned} v(x_1, y_1, z_1) &= \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial z_1}\int_{\sigma'}\frac{1}{\sqrt{(z_1-z)^2-(x_1-x)^2-(y_1-y)^2}} \\ &\cdot\left(\cos nz - \frac{z_1-z}{(x_1-x)^2+(y_1-y)^2}\left[(x-x_1)\cos nx + (y-y_1)\cos ny\right]\right)v\,d\sigma' \\ &+ \frac{1}{2\pi}\int_{\sigma'}\frac{1}{\sqrt{(z_1-z)^2-(x_1-x)^2-(y_1-y)^2}}\frac{\partial v}{\partial n'}d\sigma' \\ &- \frac{1}{2\pi}\int_{S'}\frac{1}{\sqrt{(z_1-z)^2-(x_1-x)^2-(y_1-y)^2}}f dS'. \end{aligned} \right.$$

La formule (7) peut se transformer de même. Dans ce cas le premier membre est nul.

9. Revenons maintenant à la formule (2). Le second membre peut se décomposer en deux termes. La première intégrale étendue à la surface σ exprime évidemment une fonction harmonique, c'est à dire qui vérifie l'équation de LAPLACE à l'intérieur de S, c'est pourquoi si l'on prend

$$W(x_1, y_1, z_1) = \int \frac{f dS}{r}$$

on a

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial z_1^2} = -4\pi f(x_1, y_1, z_1),$$

formule qui correspond à un théorème célèbre de POISSON. De même prenons la formule (5′) et considérons la dernière partie du second membre, c'est à dire

$$W'(x_1, y_1, z_1) = \int_{S'}\frac{f dS'}{\sqrt{(x_1-x)^2-(y_1-y)^2-(z_1-z)^2}}.$$

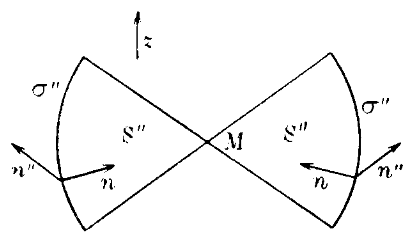
Puisque, comme on le vérifie facilement, la première partie du second membre satisfait à l'équation (II) où l'on suppose nul le second membre, on voit tout de suite que

$$\frac{\partial^2 W'}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 W'}{\partial y_1^2} - \frac{\partial^2 W'}{\partial z_1^2} = -2\pi f(x_1, y_1, z_1).$$

On a par là un théorème qui a bien des rapports avec celui de POISSON. Dans le cas de POISSON l'intégrale doit être étendue toujours au même espace S, dans le théorème que nous venons d'énoncer l'intégrale est étendue à la partie d'un espace qui est intérieur au cône caractéristique ayant pour sommet le point x_1, y_1, z_1.

Par la formule (2) on peut facilement déduire les discontinuités relatives aux dérivées des potentiels des surfaces et les discontinuités des potentiels des doubles couches. On obtient des formules semblables en employant la formule (5′) d'une manière analogue.

10. Nous avons jusqu'à présent envisagé l'espace interne au cône, mais pour l'espace externe au cône on peut établir de nouvelles formules qui n'ont pas de correspondantes dans le cas de l'équation de LAPLACE.



Menons le cône caractéristique ayant pour sommet le point M de coordonnées x_1, y_1, z_1.

Soit σ'' une surface externe au cône et découpée par le cône, et supposons que S'' soit un domaine externe au cône limité par σ'' et par la surface du cône. n étant la normale à la surface σ'' dirigée vers l'intérieur de S'', appelons n'' la conormale. Posons pour simplifier

$$\rho = \sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2},$$

$$\cos n\rho = \frac{x-x_1}{\rho}\cos nx + \frac{y-y_1}{\rho}\cos ny.$$

Enfin supposons que dans le domaine S'', v et f soient finies, continues et monodromes. Alors on aura

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} v(x_1, y_1, z_1) = & -\frac{1}{2\pi^2}\int_{\sigma''}\frac{\cos n\rho}{\rho\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2-(z-z_1)^2}}\, v\, d\sigma'' \\ & -\frac{1}{2\pi^2}\frac{\partial}{\partial z_1}\int_{\sigma''}\frac{1}{\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2-(z-z_1)^2}}\log\left(\frac{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2-(z-z_1)^2}{\rho}\right) \\ & \cdot\left(\cos nz - \frac{z_1-z}{\rho}\cos n\rho\right) v\, d\sigma'' - \frac{1}{2\pi^2}\int_{\sigma''}\frac{1}{\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2-(z-z_1)^2}} \\ & \cdot\log\left(\frac{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2-(z-z_1)^2}{\rho}\right)\frac{\partial v}{\partial n''}\, d\sigma'' + \frac{1}{2\pi^2}\int_{S''}\frac{1}{\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2-(z-z_1)^2}} \\ & \cdot\log\left(\frac{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2-(z-z_1)^2}{\rho}\right) f\, dS'', \end{aligned}\right.$$

où x, y, z sont les coordonnées du point indice des intégrations. Si nous écrivons dans le cas de l'espace externe une expression tout à fait analogue à celle qui parait dans le second membre de l'équation (5) ou (5'), on ne trouve pas la valeur de v au sommet du cône, mais une valeur nulle. On a donc:

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned} 0 = \frac{\partial}{\partial z_1}\int_{\sigma''} & \frac{1}{\sqrt{(x_1-x)^2+(y_1-y)^2-(z_1-z)^2}} \\ & \cdot\left(\cos nz\,\frac{z_1-z}{(x_1-x)^2+(y_1-y)^2}\,[(x-x_1)\cos nx+(y-y_1)\cos ny]\right)v d\sigma'' \\ & + \int_{\sigma''}\frac{1}{\sqrt{(x_1-x)^2+(y_1-y)^2-(z_1-z)^2}}\frac{\partial v}{\partial n''}d\sigma'' - \int_{S''}\frac{1}{\sqrt{(x_1-x)^2+(y_1-y)^2-(z_1-z)^2}} f dS''. \end{aligned}\right.$$

11. Particularisons maintenant les formules générales. On peut commencer par supposer $f = 0$. Il est évident alors que dans les formules précédentes tous les termes où parait cette quantité s'évanouissent. Elles se rapportent alors aux intégrales de l'équations

$$\text{(III)}\qquad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}=0.$$

C'est pourquoi les formules (5') (9) (8) deviennent des formules correspondantes, mais d'une nature complètement différente, aux formules bien connues des fonctions harmoniques, c'est à dire des intégrales de l'équation de LAPLACE. Elles s'écriront alors

$$(10)\quad \left\{\begin{aligned} v(x_1, y_1, z_1) = \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial z_1}\int_{\sigma'} & \frac{1}{\sqrt{(z_1-z)^2-\rho^2}}\left(\cos nz - \frac{z_1-z}{\rho}\cos n\rho\right)v d\sigma' \\ & + \frac{1}{2\pi}\int_{\sigma'}\frac{1}{\sqrt{(z_1-z)^2-\rho^2}}\frac{\partial v}{\partial n'}d\sigma'. \end{aligned}\right.$$

$$(11)\quad 0 = \frac{\partial}{\partial z_1}\int_{\sigma''}\frac{1}{\sqrt{(z_1-z)^2-\rho^2}}\left(\cos nz - \frac{z_1-z}{\rho}\cos n\rho\right)d\sigma'' + \frac{1}{2\pi}\int_{\sigma''}\frac{1}{\sqrt{(z_1-z)^2-\rho^2}}\frac{\partial v}{\partial n''}d\sigma''.$$

$$(12)\quad \left\{\begin{aligned} v(x_1, y_1, z_1) &= -\frac{1}{2\pi^2}\int_{\sigma''}\frac{\cos n\rho}{\rho\sqrt{\rho^2-(z-z_1)^2}}v d\sigma'' \\ & - \frac{1}{2\pi^2}\frac{\partial}{\partial z_1}\int_{\sigma''}\frac{1}{\sqrt{\rho^2-(z-z_1)^2}}\log\left(\frac{\rho^2-(z-z_1)^2}{\rho}\right)\left(\cos nz - \frac{z_1-z}{\rho}\cos n\rho\right)v d\sigma'' \\ & - \frac{1}{2\pi^2}\int_{\sigma''}\frac{1}{\sqrt{\rho^2-(z-z_1)^2}}\log\left(\frac{\rho^2-(z-z_1)^2}{\rho}\right)\frac{\partial v}{\partial n''}d\sigma''. \end{aligned}\right.$$

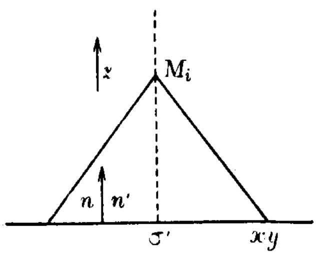
12. On peut ensuite particulariser la forme des surfaces σ' et σ''. Supposons d'abord que la surface σ' soit le plan coordonné xy, et supposons $z_1 > z = 0$.

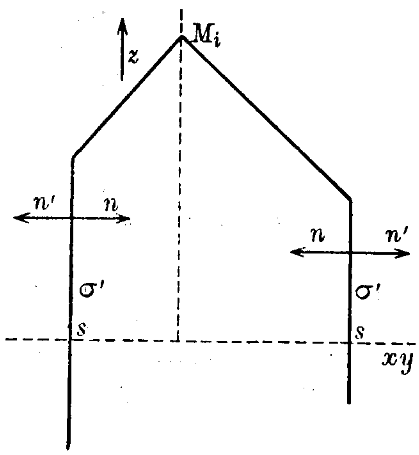
Alors la formule (10) devient

$$(13)\quad \left\{\begin{aligned} v(x_1, y_1, z_1) = {} & \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial z_1}\int_{\sigma'} \frac{1}{\sqrt{(z_1-z)^2-(x_1-x)^2-(y_1-y)^2}}\, v d\sigma' \\ & + \frac{1}{2\pi}\int_{\sigma'} \frac{1}{\sqrt{(z_1-z)^2-(x_1-x)^2-(y_1-y)^2}}\, \frac{\partial v}{\partial z}\, d\sigma', \end{aligned}\right.$$

car la normale n et la conormale n' coïncident avec z.

Dans ce cas, v et $\partial v/\partial z$ sont indépendants entre eux (voir § 6). Cette formule nous donne l'intégrale générale de l'équation (III) sous une forme bien connue qu'on appelle de POISSON-PARSEVAL.





On trouve une formule tout à fait analogue si l'on suppose que le point M_i soit au-dessous du plan xy.

Supposons maintenant que la surface σ' devienne un cylindre indéfini γ ayant les génératrices parallèles à l'axe z et aussi que la coordonnée z_1 du point M_i soit supérieure aux coordonnées z des points de γ. Enfin supposons que v soit nulle pour toutes les valeurs de z inférieures à une certaine limite $-Z$.

Dans ce cas la formule (10) deviendra

$$(14)\quad v(x_1, y_1, z_1) = \frac{1}{2\pi}\int_s ds \left\{\frac{\delta}{\delta n}\int_\varrho^\infty v(x, y, z_1-\xi)\frac{d\xi}{\sqrt{\xi^2-\rho^2}} - \frac{\partial}{\partial n}\int_\varrho^\infty v(x, y, z_1-\xi)\frac{d\xi}{\sqrt{\xi^2-\rho^2}}\right\},$$

où l'on suppose que

$$\rho = \sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2},$$

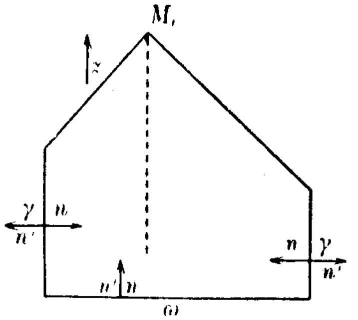
s étant l'intersection du cylindre γ avec un plan parallèle au plan xy, et x, y étant les coordonnées des points de la ligne s.

Par rapport aux dérivées normales représentées par les symboles $\partial/\partial n$ et $\delta/\delta n$ nous convenons que si f est une fonction de x, y, ρ et que si l'on regarde ces quantités comme des variables indépendantes

$$\frac{\partial f}{\partial n} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial n} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial n},$$

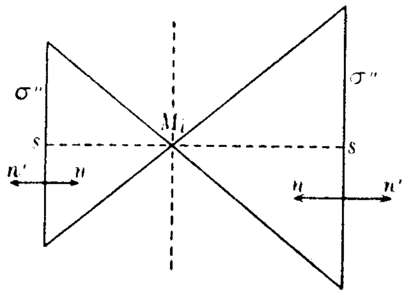
$$\frac{\delta f}{\delta n} = \frac{\partial f}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial n}.$$

Dans ce cas les valeurs de v et de la dérivée normale de v sur le cylindre ne sont pas indépendantes entre elles.



13. On peut enfin imaginer un cas mixte des deux précédents où la surface σ' est constituées en partie par un cylindre γ et en partie par un plan parallèle au plan xy. Alors le second membre de la formule (10) est constitué de deux parties dont l'une a la forme du second membre de l'équation (14) et l'autre celle du second membre de l'équation (13). Sur γ les valeurs de v et de la dérivée normale ne sont pas indépendantes, tandis qu'elles sont indépendantes sur le plan ω.

14. Les formules (8) et (9) peuvent aussi se particulariser en supposant que σ'' se réduise à une surface cylindrique ayant les génératrices parallèles à l'axe z, et alors elles deviennent respectivement



$$(15)\qquad 0 = \int_s ds \left\{ \frac{\partial}{\partial n}\int_{-\rho}^{\rho} v(x, y, z_1 - \xi)\frac{d\xi}{\sqrt{\rho^2-\xi^2}} - \frac{\delta}{\delta n}\int_{-\rho}^{\rho} v(x, y, z_1 - \xi)\frac{d\xi}{\sqrt{\rho^2-\xi^2}} \right\}$$

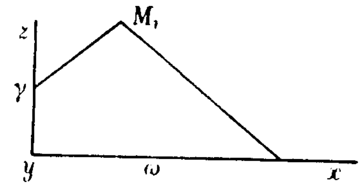
$$(16)\qquad \left\{ \begin{aligned} v(x_1, y_1, z_1) = \frac{1}{2\pi^2}\int_s ds \Bigg\{ & \frac{\partial}{\partial n}\int_{-\rho}^{\rho} v(x, y, z_1 - \xi)\log\left(\frac{\rho^2-\xi^2}{\rho}\right)\frac{d\xi}{\sqrt{\rho^2-\xi^2}} \\ & - \frac{\delta}{\delta n}\int_{-\rho}^{\rho} v(x, y, z_1 - \xi)\log\left(\frac{\rho^2-\xi^2}{\rho}\right)\frac{d\xi}{\sqrt{\rho^2-\xi^2}} \Bigg\}. \end{aligned} \right.$$

Dans ce cas v et $\partial v/\partial n$ ne sont pas indépendants.

9ième leçon.

1. Dans le § 13 nous avons envisagé le cas mixte où sur ω les valeurs de v et de $\partial v/\partial n$ sont indépendantes entre elles, tandis qu'elles ne sont pas indépendantes sur la surface cylindrique γ. Sur cette surface il suffit de donner les valeurs de v ou de $\partial v/\partial n$ pour déterminer $v(x_1, y_1, z_1)$. Il faut donc tâcher

d'éliminer les valeurs de $\partial v/\partial n$ ou de v sur γ. On peut atteindre le but dans certains cas très–aisément, et nous allons les approfondir pour montrer que la célèbre méthode des images découverte par LORD KELVIN pour l'intégration de l'équation de LAPLACE peut être aussi employée quelquefois pour les équations analogues ayant les cônes caractéristiques réels. On trouve par là un résultat complètement inattendu, c'est à dire que lorsqu'on enviage les équations à caractéristiques réelles, même dans le cas où l'on a un nombre infini d'images, la solution peut ne pas être données par des séries infinies, mais par un nombre fini de termes. Ce résultat semble au premier abord paradoxal, mais il tient à ce que dans chaque cas le nombre des images dont on a besoin est fini en vertu de la réalité des cônes caractéristiques.



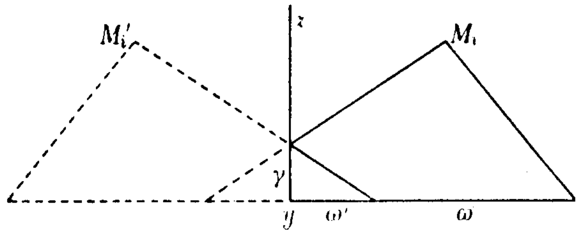
Supposons que la surface cylindrique γ se réduise au plan $yz\,(z > 0)$ et ω au plan $xy\,(x > 0)$, c'est à dire que ω soit un segment d'un cercle et γ un segment d'hyperbole.

Dans ce cas la formule (5′) s'écrit

$$(17)\quad \left\{\begin{aligned} v(x_1, y_1, z_1) = {} & \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial z_1}\int_\omega \frac{1}{\sqrt{z_1^2-\rho^2}}\, v d\omega + \frac{1}{2\pi}\int_\omega \frac{1}{\sqrt{z_1^2-\rho^2}}\frac{\partial v}{\partial z}\, d\omega \\ & -\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial z_1}\int_\gamma \frac{1}{\sqrt{(z_1-z)^2-\rho^2}}\frac{z_1-z}{\rho}\cos(n\rho)\, v d\gamma - \frac{1}{2\pi}\int_\gamma \frac{1}{\sqrt{(z_1-z)^2-\rho^2}}\frac{\partial v}{\partial x}\, d\gamma. \end{aligned}\right.$$

Or pour éliminer les valeurs de v ou de $\partial v/dx$ sur γ on peut se servir de la méthode des images.

Soit M_i' l'image optique du point M_i réfléchi par le plan yz. Menons le cône caractéristique qui a pour sommet M_i'. Il découpera sur le plan yz le segment d'hyperbole γ et sur la partie du plan $xy\,(x > 0)$ un segment de cercle ω'. Si nous appliquons la formule (7), transformée convenablement,



à l'ensemble des surfaces ω' et γ on trouvera

$$(18)\quad \left\{\begin{aligned} 0 = {} & \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial z_1}\int_{\omega'} \frac{1}{\sqrt{z_1^2-\rho'^2}}\, v d\omega' + \frac{1}{2\pi}\int_{\omega'} \frac{1}{\sqrt{z_1^2-\rho'^2}}\frac{dv}{dz}\, d\omega' \\ & + \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial z_1}\int_\gamma \frac{1}{\sqrt{(z_1-z)^2-\rho^2}}\frac{z_1-z}{\rho}\cos(n\rho)\, v d\gamma \\ & - \frac{1}{2\pi}\int_\gamma \frac{1}{\sqrt{(z_1-z)^2-\rho^2}}\frac{dv}{dx}\, d\gamma, \end{aligned}\right.$$

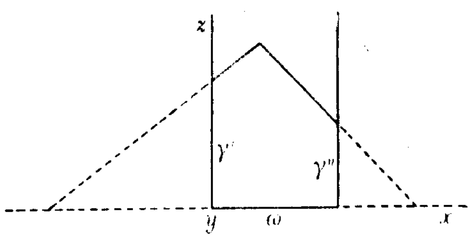
où

$$\rho'^2 = (x_1 + x)^2 + (y_1 - y)^2.$$

En ajoutant les deux formules (17) et (18) on élimine v dans l'intégrale étendue à γ, et par soustraction on élimine $\partial v/\partial x$. La méthode des images conduit donc bien aisément au résultat qu'on cherchait. Passons maintenant au cas des images successives. Admettons que la surface γ soit constituée par les segments d'hyperboles γ' et γ'' découpés par la nappe inférieure du cône ayant pour sommet M_i sur les demiplans $x = 0$, $x = a$ $(a > 0)$ qui sont au-dessus du plan xy. Soit ω la partie de la bande du plan xy comprise entre les plans $x = 0$, $x = a$ et renfermée à l'intérieur du cône.

Dans ce cas la formule (5') s'écrit

$$\begin{aligned} v(x_1, y_1, z_1) = {} & \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial z_1} \int\limits_{\omega} \frac{1}{\sqrt{z_1^2 - \rho^2}} v\, d\omega + \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\omega} \frac{1}{\sqrt{z_1^2 - \rho^2}} \frac{\partial v}{\partial z} d\omega \\ & - \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial z_1} \int\limits_{\gamma'} \frac{1}{\sqrt{(z_1 - z)^2 - \rho^2}} \frac{z_1 - z}{\rho} \cos(n\rho)\, v\, d\gamma' - \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\gamma'} \frac{1}{\sqrt{(z_1 - z)^2 - \rho^2}} \frac{\partial v}{\partial x} d\gamma' \\ & - \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial z_1} \int\limits_{\gamma''} \frac{1}{\sqrt{(z_1 - z)^2 - \rho^2}} \frac{z_1 - z}{\rho} \cos(n\rho)\, v\, d\gamma'' + \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\gamma''} \frac{1}{\sqrt{(z_1 - z)^2 - \rho^2}} \frac{\partial v}{\partial x} d\gamma''. \end{aligned}$$



Dans cette formule les valeurs de v et de $\partial v/\partial x$ sur γ' et γ'' ne sont pas indépendantes, c'est pourquoi l'on peut tâcher d'employer la méthode des images pour éliminer les unes ou les autres.

A cet effet prenons les images de M_i par rapport aux plans γ' et γ'' et ensuite les images de ces images par rapport aux mêmes plans, et ainsi de suite indéfiniment. Le nombre des images qu'on obtient est évidemment infini, mais il est intéressant de remarquer qu'il n'est pas nécessaire de les employer toutes, car un nombre fini d'entre elles suffit pour la solution du problème. Menons les cônes caractéristiques dont les sommets sont les images que nous avons construites, et envisageons les nappes inférieures de ces cônes, c'est à dire celles qui sont dirigées du côté négatif de l'axe z. Tous les cônes dont les sommets ont une distance des plans γ' et γ'' supérieure à z, ne rencontrent ces plans qu'au-dessous du plan ω c'est pourquoi il n'est pas nécessaire de les envisager. Il est clair donc qu'on pourra éliminer les valeurs de v et de $\partial v/\partial x$ sur γ' et γ'' en faisant usage seulement des images qui sont à une distance de ces plans inférieure à z_1. En employant donc dans ce cas la méthode des images, on ne trouvera pas des séries infinies, mais la solution du problème sera donnée par un nombre fini de termes.

Au lieu des trois plans ω, γ', γ'' on peut en avoir cinq, dont quatre sont perpendiculaires au plan xy et le rencontrent en formant les côtés d'un rectangle. La solution s'obtient toujours de la même manière par un nombre fini de termes. Si v s'annulle sur les quatre plans perpendiculaires à xy on obtient une solution du problème bien connu des vibrations d'une membrane plane, fixée dans un cadre rectangulaire sans avoir besoin de recourir, à des séries, mais par des intégrales définies.

2. On peut chercher à étendre les résultats que nous avons indiqués au cas des équations (1) à quatre, cinq, etc. variables. Il suffit pour cela d'envisager des hyperespaces à $4, 5, \cdots$ dimensions. Les cônes caractéristiques ont $3, 4, \cdots$ dimensions. Au lieu des surfaces σ', σ'' il faut envisager des espaces à $3, 4, \cdots$ dimensions. Tout cela se conçoit très-bien. Mais si l'on passe de trois à quatre variables on arrive à un résultat inattendu, c'est à dire que les choses au lieu de se compliquer deviennent à un certain point de vue plus simples. En effet, on trouve des formules où la valeur de l'intégrale au sommet du cône dépend seulement des valeurs de la même fonction et de ses dérivées dans les intersections des cônes caractéristiques avec les espaces analogues aux surfaces σ' et σ''. Il n'y a pas deux formules des types (2) et (8), mais une seule formule.

En général, le cas de deux variables excepté, les choses se présentent d'une manière différente si l'on a un nombre pair ou si l'on a un nombre impair de variables, et le cas le plus simple est celui d'un nombre pair. Tout cela lorsque les équations ont une forme aussi simple que les équations (1). Si les équations avaient, par exemple, des termes de premier ordre la chose changerait.

3. Nous n'entrerons pas dans les détails sur ce sujet qui sont très-compliquées. Nous renvoyons pour cela aux travaux de M. TEDONE, de M. COULON, de M. D'ADHÉMAR et de M. HADAMARD. Je rapporterai seulement les formules qu'on a dans le cas de quatre variables et qui ont été données pour la première fois par KIRCHHOFF, qui en a déduit avec rigueur le principe de HUYGHENS.

Ecrivons l'équation à quatre variables sous la forme

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \tag{19}$$

et envisageons x, y, z comme les coordonnées des points de l'espace à 3 dimensions; t peut être envisagée comme une quatrième variable, qui dans les questions de la physique mathématique est le temps.

σ étant le contour de l'espace S à l'intérieur duquel se trouve un point M_1 de coordonnées x_1, y_1, z_1, on a

$$v(x_1, y_1, z_1, t) = \frac{1}{4\pi} \int_\sigma \left\{ \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{v(x, y, z, t-r)}{r}\right) - \frac{\delta}{\delta n}\left(\frac{v(x, y, z, t-r)}{r}\right) \right\} d\sigma,$$

où $r = \sqrt{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 + (z_1 - z)^2}$, n est la normale interne à la surface σ et les symboles $\partial f/\partial n$ et $\delta f/\delta n$ représentent par rapport à une fonction $f(x, y, z, r)$

$$\frac{\partial f}{\partial n} = \frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial n} \quad , \quad \frac{\delta f}{\delta n} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial n} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial n} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial n}$$

en regardant x, y, z, r comme des variables indépendantes. Si la surface σ se réduit à une sphère ayant pour centre le point M_1, la formule précédente se particularise et devient l'intégrale générale de l'équation (19) donnée par POISSON.

4. Le succès de la méthode de KIRCHHOFF est dû à l'emploi des méthodes de GREEN et à l'existence de l'intégrale

$$\frac{f(r \pm t)}{r} \tag{20}$$

de l'équation (19), où f est une fonction arbitraire. Pour toutes les équations pour lesquelles existent des intégrales de la même nature, qui n'ont d'autres points singuliers que $r = 0$, on peut procéder par des méthodes analogues à celles de KIRCHHOFF.

Voyons si l'équation à trois variables qu'on peut écrire

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$$

possède une intégrale de la forme précédente, c'est à dire de la forme $\vartheta f(\rho \pm t)$ où ϑ est une quantité indépendante de t,

$$\rho = \sqrt{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2}$$

et f est une fonction arbitraire. En posant

$$x_1 - x = \rho \cos \alpha \quad , \quad y_1 - y = \rho \sin \alpha$$

on trouve l'intégrale

$$\frac{A \sin \frac{1}{2}\alpha + B \cos \frac{1}{2}\alpha}{\sqrt{r}} f(\rho \pm t). \tag{21}$$

Il paraît donc tout naturel que, même dans ce cas, on puisse employer cette intégrale en suivant les méthodes de KIRCHHOFF. Mais il est facile de se persuader que l'intégrale précédente est polydrome. Or les méthodes de KIRCHHOFF étant fondées sur celles de GREEN c'est à dire sur le théorème de GAUSS, dont nous avons parlé dans la deuxième leçon, on ne peut pas les employer dans ce cas.

Il faut donc recourir à d'autres méthodes ou à d'autres intègrales dans le cas de l'équation à trois variables, et cela explique pourquoi les résultats étaient plus simples et aussi plus faciles à trouver dans le cas de quatre variables que dans celui de trois variables. C'est pourquoi le cas de 4 variables a été le premier à être résolut après celui tout à fait élémentaire de deux variables. Nous voyons quel rôle joue la polydromie des intégrales dans le cas des équations à caractéristiques réelles par l'exemple très simple que nous avons envisagé.

5. WEIERSTRASS a découvert une méthode pour donner l'intégrale générale des équations et des systèmes d'équations aux dérivées partielles à coefficients constants. Cette méthode a paru maintenant dans les œuvres de WEIERSTRASS; mais dès l'année 1881 il l'avait communiquée à M^me^ KOWALEWSKI, qui chercha à l'employer pour intégrer les équations des vibrations de la lumière dans les milieux biréfringents.

Supposons que

$$\vartheta(u, v, w) = t \tag{22}$$

soit l'équation d'une surface fermée telle que toute droite qui part de l'origine ne la rencontre que dans un seul point, et supposons qu'on ait

$$\vartheta(\mathrm{K}x, \mathrm{K}y, \mathrm{K}z) = \mathrm{K}\vartheta(x, y, z).$$

Par

$$\int f(u, v, w)\, d\omega$$

représentons une intégrale étendue à l'espace renfermé entre deux surfaces (22) correspondantes aux valeurs t_0 et t de t, dont la première est constante.

Les formules fondamentales découvertes par WEIERSTRASS sont les suivantes.

Si

$$\mathrm{F}(x, y, z, t) = \mathrm{D}_t \int \varphi(u, v, w) f(x+u, y+v, z+w)\, d\omega \tag{23}$$

on a

$$\left\{\begin{aligned}
\mathrm{D}_x \mathrm{F} &= \mathrm{D}_t^2 \int \varphi \frac{\partial \vartheta}{\partial u} f(x+u, y+v, z+w)\, d\omega - \mathrm{D}_t \int \frac{\partial \varphi}{\partial u} f(x+u, y+v, z+w)\, d\omega \\
\mathrm{D}_y \mathrm{F} &= \mathrm{D}_t^2 \int \varphi \frac{\partial \vartheta}{\partial v} f(x+u, y+v, z+w)\, d\omega - \mathrm{D}_t \int \frac{\partial \varphi}{\partial v} f(x+u, y+v, z+w)\, d\omega \\
\mathrm{D}_z \mathrm{F} &= \mathrm{D}_t^2 \int \varphi \frac{\partial \vartheta}{\partial w} f(x+u, y+v, z+w)\, d\omega - \mathrm{D}_t \int \frac{\partial \varphi}{\partial w} f(x+u, y+v, z+w)\, d\omega \\
\mathrm{D}_t \mathrm{F} &= \mathrm{D}_t^2 \int \varphi f(x+u, y+v, z+w)\, d\omega,
\end{aligned}\right. \tag{24}$$

où D_α est le symbole de dérivation par rapport à α. On calcule de même les dérivées successives de F, et l'on tâche de prendre ϑ et φ de manière que les dérivées d'un certain ordre vérifient une relation linéaire à coefficients constants. On trouve alors une intégrale de l'équation ayant la forme (23) avec la fonction arbitraire f. De là on passe à l'intégrale générale. La méthode est analogue dans le cas des systèmes d'équations différentielles.

Or envisageons la fonction

$$\psi(u, v, w, t) = \varphi(u, v, w)\, \Phi(t - \vartheta),$$

où Φ est une fonction arbitraire. On aura les formules suivantes

$$(24')\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial\psi}{\partial u} &= -\varphi\frac{\partial\vartheta}{\partial u}\Phi'(t-\vartheta)+\frac{\partial\varphi}{\partial u}\Phi(t-\vartheta)\\ \frac{\partial\psi}{\partial v} &= -\varphi\frac{\partial\vartheta}{\partial v}\Phi'(t-\vartheta)+\frac{\partial\varphi}{\partial v}\Phi(t-\vartheta)\\ \frac{\partial\psi}{\partial w} &= -\varphi\frac{\partial\vartheta}{\partial w}\Phi'(t-\vartheta)+\frac{\partial\varphi}{\partial w}\Phi(t-\vartheta)\\ \frac{\partial\psi}{\partial t} &= \quad\varphi\Phi'(t-\vartheta). \end{aligned}\right.$$

Comparons les trois premières équations (24) et les trois premières équations (24'). Les coefficientes de f sous les intégrales des égalités (24) sont égaux et de signe contraire aux coefficients de Φ et Φ' dans les égalités (24'). On ne trouve pas de changement de signe en comparant la dernière des équations (24) avec la dernière des équations (24').

On en déduit bien aisément la propriété suivante. Posons

$$\frac{\partial^n\psi}{\partial u^{h_1}\partial v^{h_2}\partial w^{h_3}\partial t^{h_4}} = \psi_{h_1h_2h_3h_4}\quad,\quad \frac{\partial^n F}{\partial x^{h_1}\partial y^{h_2}\partial z^{h_3}\partial t^{h_4}} = F_{h_1h_2h_3h_4}$$

ou $n = h_1 + h_2 + h_3 + h_4$, on aura

$$F_{h_1h_2h_3h_4} = D_t^{n+1}\int P_n f(x+u\,,y+v\,,z+w)\,d\omega$$

$$+ D_t^n\int P_{n-1}f(x+u\,,y+v\,,z+w)d\omega+\cdots+D_t^{h_4+1}\int P_{h_4}f(x+u\,,y+v\,,z+w)\,d\omega,$$

$$\psi_{h_1h_2h_3h_4} = (-1)^{n-h_4}\{P_n\Phi^{(n)}(t-\vartheta)+P_{n-1}\Phi^{(n-1)}(t-\vartheta)+\cdots+P_{h_4}\Phi^{(h_4)}(t-\vartheta)\}$$

et par suite, si l'équation différentielle à coefficients constants

$$(25)\qquad \Sigma A_{h_1h_2h_3h_4}\frac{\partial^n V}{\partial x^{h_1}\partial y^{h_2}\partial z^{h_3}\partial t^{h_4}} = 0$$

possède une intégrale

$$(26)\qquad F(x\,,y\,,z\,,t) = D_t\int\varphi(u\,,v\,,w)f(x+u\,,y+v\,,z+w)\,d\omega$$

f étant une fonction arbitraire, l'équation

$$(25')\qquad \Sigma(-1)^{n-h_4}A_{h_1h_2h_3h_4}\frac{\partial^n V}{\partial u^{h_1}\partial v^{h_2}\partial w^{h_3}\partial t^{h_4}} = 0$$

aura l'intégrale

$$(26')\qquad \psi(u\,,v\,,w\,,t) = \varphi(u\,,v\,,w)\,\Phi(t-\vartheta),$$

ou Φ est une fonction arbitraire. Réciproquement si l'équation (25') possède l'intégrale (26'), Φ étant une fonction arbitraire, l'équation (25) aura l'intégrale (26).

L'intégrale (26') a la forme de l'intégrale (20), c'est pourquoi en comptant sur les singularités de φ pour $u = v = w = 0$, on peut passer de la méthode de WEIERSTRASS à celle de KIRCHHHOFF, c'est à dire des intégrales générales du type POISSON à des formules qui les comprennent.

Le même résultat peut s'établir pour les systèmes d'équations différentielles.

Je possédais en 1892 ce théorème lorsque j'étudiais le mémoire de M^me^ KOWALEWSKI sur la propagation de la lumière dans les cristaux. Puisqu'elle avait cru obtenir par la méthode de WEIERSTRASS les intégrales générales des équations de l'optique, je croyais posséder la méthode pour parvenir aux formules analogues à celles de KIRCHHOFF et pour pouvoir établir le principe de HUYGHENS pour les milieux biréfringents. Mais l'emploi de la méthode conduisait à des résultats paradoxaux. D'où provenaient-ils? En voici la raison. Les fonctions qui dans ce cas remplacent φ dans les formules sont des fonctions polydromes du même genre que la fonction polydrome que nous avons trouvée dans le § 18. Il n'était pas facile de s'en apercevoir, car ces fonctions sont très compliquées, et elles avaient été étudiées depuis LAMÉ sans que cette propriété ressortit. C'est pourquoi ni la méthode de WEIERSTRASS ni celle de KIRCHHOFF n'étaient applicables et les formules de M^me^ KOWALEWSKI ne donnaient pas les intégrales de l'optique. Voilà encore une fois que la rôle des fonctions polydromes ressort dans cette question d'analyse et de physique mathématique.

BIBLIOGRAPHIE.

KIRCHHOFF, *Zur Theorie der Lichtstrahlen* (« Sitzb. d. Ak. d. Wiss », Berlin 1882).

KOWALEWSKI, *Ueber die Brechung des Lichtes in cristallinischen Mitteln.* « Acta Math. », 1885.

WEIERSTRASS, Werke. Bd. I.

VOLTERRA, *Sul principio di Huyghens.* « Nuovo Cimento », 1893 [in queste « Opere »: vol. primo, XXXVI, pp. 580–599].

— *Sulle onde cilindriche dei mezzi isotropi.* « Rend. Lincei », 1892 [ibid.: XXV, pp. 568–579].

— *Sulle vibrazioni luminose nei mezzi isotropi.* Ibid. [ibid.: XXXIV, pp. 599–567].

— *Sur les vibrations dans les milieux biréfringents.* « Acta Math. », 1892 [ibid.: XXXIII, pp. 514–558].

— *Sulle vibrazioni dei corpi elastici.* « Rend. Lincei », 1893 [in queste « Opere »: vol. secondo, I, pp. 1–9].

— *Sulla integrazione delle equazioni differenziali del moto di un corpo elastico isotropo.* Ibid. 1893 [ibid.: II, pp. 10–18].

— *Sur les vibrations des corps élastiques isotropes.* « Acta math. », 1894 [ibid.: III, pp. 19–73].

— *Sur les équations aux dérivées partielles.* « II congrès des mathématiciens », 1900 [in questo vol.: II, pp. 12–13].

— *Note on the application of the method of imagines to problems of vibrations.* « London Math. Soc. », 1904 [ibid.: VIII, pp. 55–58].

TEDONE, *Sulle dimostr. della formula che rappresenta analiticamente il principio di Huyghens.* « Rend. Acc. Lincei », 1896.

— *Sulle vibrazioni dei corpi elastici.* Ibid.

— *Sull'int. dell'equazione* $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \sum_1^m \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i^2} = 0$. « Annali di Mat. », 1898.

— *Su di un sistema generale di equazioni che si può integrare col metodo delle caratteristiche.* Ibid.

COULON, *Sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre par la méthode des caractéristiques.* Thèse 1902.

D'ADHÉMAR, *Sur une classe d'équations aux dérivées partielles du second ordre, du type hyperbolique à 3 ou 4 variables indépendantes*, Thèse 1904.

HADAMARD, *Leçons sur la propagation des ondes et les équations de l'hydrodinamique*, Paris 1903.

— *Recherches sur les solutions fondamentales et l'intégration des équations linéaires aux dérives partielles*, « Ann. de l'Ecole normale de Paris », 1903–1905.

— *Théorie des équations linéaires hyperboliques et le problème de Cauchy* (« Acta Mathematica », vol. XXXI). *Sur l'intégrale résiduelle.* (« Bulletin de la Société Math. de France », vol. XXVIII).

Dans une note que j'ai présentée aù Congrés des Mathématiciens en 1908 (V. VOLTERRA, *Sull'applicazione del principio delle immagini alle equazioni di tipo iperbolico* (« Atti del IV Congresso internazionale dei Matematici », vol. II, Sezione I, Analisi, Roma 1909), j'ai étendu le principe des images, pour les équations hyperboliques, du cas des plans au cas des hyperboloïdes.

10ième leçon.

1. Nous avons jusqu'à présent examiné quelques équations du type elliptique et du type hyperbolique. Nous parvenons maintenant aux équations du type parabolique.

L'équation de la propagation de la chaleur appartient à ce type. FOURIER, POISSON, LAPLACE, pour ne citer que les plus anciens, ont consacré de profondes études à cette équation. Tout le monde sait que les méthodes introduites par FOURIER sont devenues classiques et ont formé le point de départ, la base et le modèle de bien des recherches de l'analyse et de la physique mathématique.

Plus récemment on a introduit dans la théorie de la propagation de la chaleur des méthodes qui se rattachent à celles de GREEN. BETTI a consacré un très beau mémoire à cette étude, sans cependant recourir à la notion des caractéristiques. APPEL et BOUSSINESQ ont profondément examiné par des concepts plus modernes encore bien des questions qui s'y rapportent.

Mais à mon avis pour les équations du type parabolique on n'est pas si avancé que pour les équations des autres types que nous avons examinées dans les leçons précédentes.

2. Nous allons envisager l'équation la plus simple possible

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}. \tag{1}$$

Le rôle des deux variables t et z est très–différent, ce qu'on comprend dès le premier abord, car l'équation différentielle est de premier ordre par rapport à t et de deuxième ordre par rapport à z.

POISSON a bien mis en lumière ce fait par un résultat sur lequel il a insisté beaucoup en y revenant plusieurs fois dans ses différents ouvrages.

Nous allons l'exposer en empruntant à peu près les termes de son livre sur la théorie mathématique de la chaleur.

Si nous essayons de développer u dans une série de puissance de $t-h$, h étant une quantité constante, nous trouvons, en calculant de proche en proche les coefficients,

$$(2)\qquad u=\varphi(z)+(t-h)\frac{d^2\varphi}{dz^2}+\frac{1}{2}(t-h)^2\frac{d^4\varphi}{dz^4}+\cdots+\frac{1}{n!}(t-h)^n\frac{d^{2n}\varphi}{dz^{2n}}+\cdots,$$

où φ représente une fonction arbitraire. Si l'on fait $t=h$, on a

$$u=\varphi(z).$$

$\varphi(z)$ est donc la fonction à laquelle se réduit u pour $t=h$. Au contraire si nous développons u par les puissances de $z-k$, on trouvera par la même méthode

$$(3)\qquad \begin{cases} u=\psi(t)+\dfrac{(z-k)^2}{2!}\dfrac{d\psi}{dt}+\dfrac{(z-k)^2}{4!}\dfrac{d^2\psi}{dt^2}+\cdots+\dfrac{(z-k)^{2n}}{(2n)!}\dfrac{d^n\psi}{dt^n}+\cdots \\ \cdots+(z-k)\Psi(t)+\dfrac{(z-k)^3}{3!}\dfrac{\partial\Psi}{dt}+\cdots+\dfrac{(z-k)^{2n+1}}{(2n+1)!}\dfrac{d^n\Psi}{dt^n}+\cdots, \end{cases}$$

où $\psi(t)$ et $\Psi(t)$ sont des fonctions arbitraires.

En faisant $z=k$ on trouve

$$u=\psi(t)\quad,\quad \frac{\partial u}{\partial z}=\Psi(t);$$

donc $\psi(t)$ et $\Psi(t)$ représentent les valeurs de u et $\partial u/\partial z$ pour $z=k$.

Or il est facile de prouver que la même intégrale peut se mettre sous la forme (2) ou la forme (3). Il suffit pour cela de développer $\varphi(z)$ dans une série de puissances de $z-k$ et $\psi(t)$ et $\Psi(t)$ en des séries de puissances de $t-h$.

En posant

$$\varphi(z)=a_0+a_1(z-k)+\frac{a_2}{1\cdot 2}(z-k)^2+\cdots+\frac{a_n}{n!}(z-k)^n+\cdots,$$

on trouvera en comparant les coefficients dans les formules (2) et (3)

$$\psi(t)=a_0+a_2(t-h)+\frac{a_4}{2!}(t-h)^2+\cdots+\frac{a_{2n}}{n!}(t-h)^n+\cdots$$

$$\Psi(t)=a_1+a_3(t-h)+\frac{a_5}{2!}(t-h)^2+\cdots+\frac{a_{2n+1}}{n!}(t-h)^n+\cdots.$$

On voit donc que la même intégrale peut s'écrire avec une ou avec deux fonctions arbitraires de deux manières complètement équivalentes.

POISSON a ensuite transformé les deux intégrales en les exprimant par des intégrales définies. Il écrit l'intégrale (2) sous la forme

$$(2')\qquad u(z,t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)\frac{e^{-\frac{(\xi-z)^2}{4(t-h)}}}{\sqrt{t-h}}d\xi$$

et l'intégrale (3) sous la forme

$$(3') \quad u(z,t) = \gamma \int_{-\infty}^{\infty} \psi\left(t + \frac{(z-k)^2}{4(c+i\xi)}\right) \frac{e^{i\xi}\, d\xi}{\sqrt{c+i\xi}} + \frac{1}{2}\gamma(z-k) \int_{-\infty}^{\infty} \Psi\left(t + \frac{(z-k)^2}{4(c+i\xi)}\right) \frac{e^{i\xi}\, d\xi}{\sqrt{(c+i\xi)^3}},$$

où

$$\frac{1}{\gamma} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\xi}\, d\xi}{\sqrt{c+i\xi}},$$

c étant une constante réelle qui n'est pas nulle.

Après POISSON, SCHLAEFLI est revenu là dessus en exprimant les mêmes intégrales sous des formes différentes dans un très beau mémoire inséré dans le T. 72 du Journal de CRELLE.

3. Cela posé voyons ce qu'on peut tirer des méthodes qui ont été les plus puissantes dans le cas des équations que nous avons envisagées dans les leçons précédentes. Il est évident que ces méthodes sont celles de GREEN, mais où l'on introduit la notion des caractéristiques par les méthodes de RIEMANN.

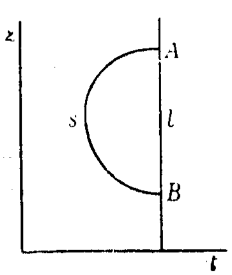
Il n'y a pas de difficultés à procéder par une voie tout à fait analogue dans notre cas.

On peut évidemment commencer par envisager une équation plus générale de l'équation (1), c'est à dire

$$(1') \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{\partial u}{\partial t} = f(z,t).$$

Les caractéristiques de l'équation (1') sont des lignes parallèles l'axe z (voir la leçon 8ième § 5).

Prenons la direction de l'axe t de la gauche à la droite. Alors chaque caractéristique partage le plan en deux domaines qu'on peut appelér le domaine de gauche et celui de droite.



Il est facile de démontrer le théorème:

Soit s une courbe ouverte dont les deux bouts A, B *se trouvent sur une caractéristique, et qui renferme avec cette caractéristique une aire σ située à gauche de celleci. Si nous connaissons u sur s et $f(z,t)$ à l'intérieur de l'aire σ, u sera déterminée dans tous les points de σ.*

La démonstration est très–simple et du même type des démonstrations des théorèmes analogues qu'on a dans les autres théories. En effet, si u_1 et u_2 sont des fonctions qui vérifient l'équation (1') et qui prennent les mêmes valeurs sur s, on calcule leur différence $u_3 = u_1 - u_2$ qui vérifiera l'équation (1) et qui sera nulle sur s.

Par les transformations bien connues des intégrales on tire de là que

$$o = \int_\sigma u_3 \left(\frac{\partial^2 u_3}{\partial z^2} - \frac{\partial u_3}{\partial t} \right) d\sigma = -\frac{1}{2} \int_l u_3^2 \, dl - \int_\sigma \left(\frac{\partial u_3}{\partial z} \right)^2 d\sigma ,$$

où l est la partie de la caractéristique comprise entre les points A, B.

C'est pourquoi u_3 sera nulle dans l'aire σ et par suite $u_1 = u_2$. Donc il n'y a pas deux fonctions différentes qui satisfont aux conditions que nous avons posées, et on a par là la démonstration du théorème que nous avons énoncé.

Il faut maintenant remarquer que les raisonnements que nous venons de faire ne pourraient pas être répétés si l'on supposait que la courbe s était à droite de la ligne caractéristique, et par suite il n'y a pas une symétrie des propriétés des intégrales de l'équation différentielle des deux côtés de chaque caractéristiques, comme d'autre part il était facile de prévoir.

4. On peut donner une formule tout à fait analogue à la formule de Green en envisageant avec l'équation (1') son adjointe

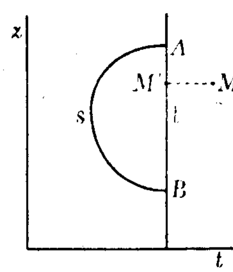
$$\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \frac{\partial v}{\partial t} = g(z, t). \tag{4}$$

Alors en trouve

$$-\int_\sigma (vf - ug)\, d\sigma = \int_s \left[\left(v \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) \cos nz - uv \cos nt \right] ds + \int_l uv\, dl , \tag{5}$$

n étant la normale à la ligne s dirigée vers l'intérieur de σ.

Or la fonction qui joue le rôle principal dans cette théorie est, comme il est bien connu, l'intégrale suivante de l'équation (4) où l'on suppose $g = o$



$$v = \frac{1}{2\sqrt{\pi}\sqrt{t_1 - t}} e^{-\frac{(z - z_1)^2}{4(t_1 - t)}} ,$$

$t_1 > t$ et z_1 étant des valeurs constantes. Le radical est supposé positif. Prenons le point M_1, de coordonnées t_1, z_1 à droite de la caractéristique l. Remplaçons cette valeur de v dans l'équation où l'on suppose $g = o$ puis faisons approcher M_1 de la ligne caractéristique.

A ce point il faut rappeler un théorème bien connu d'analyse. F (z) étant une fonction continue et finie et $z'' > z'$ on a

$$\lim_{t_1 = t} \int_{z'}^{z''} \frac{1}{\sqrt{t_1 - t}} e^{-\frac{(z - z_1)^2}{4(t_1 - t)}} \mathrm{F}(z)\, dz = \begin{cases} \mathrm{F}(z_1)\, 2\sqrt{\pi} \\ o . \end{cases} \tag{I}$$

Il faut prendre la second membre égal à $2\sqrt{\pi}\,\mathrm{F}(z_1)$ si z_1 est comprise entre z' et z'', et il faut le prendre égal o si z_1 n'est pas comprise entre les valeurs z' et z''.

On suppose que le radical qui paraît sous l'intégrale soit positif. S'il était négatif le second membre changerait de signe.

Deux cas pourront donc se présenter. Si le point M_1 s'approche d'un point M compris entre A et B on aura

$$\lim \int_l uv\, dl$$

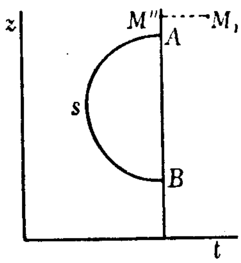
égale à la valeur de la fonction u dans le point M'. Si au contraire il s'approche d'un point M'' qui n'est pas compris entre A et B la même limite est nulle.

On tire de là les deux formules suivantes

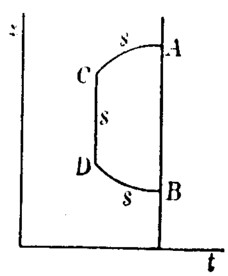
$$-\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_s \frac{e^{-\frac{(z_1-z)^2}{4(t_1-t)}}}{\sqrt{t_1-t}}\left\{\left[\frac{\partial u}{\partial z} - u\,\frac{z_1-z}{2(t_1-t)}\right]\cos nz - u\cos nt\right\} ds$$

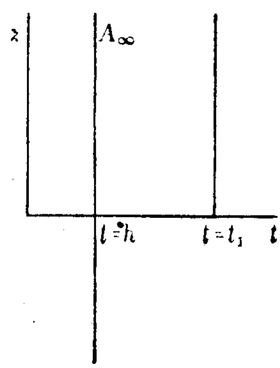
(6)
(6')
$$-\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_\sigma \frac{e^{-\frac{(z_1-z)^2}{4(t_1-t)}}}{\sqrt{t_1-t}}\, f d\sigma = \begin{Bmatrix} u\,(z_1\,,\,t_1) \\ 0 \end{Bmatrix},$$

où $t = t_1$ est l'équation de la caractéristique l. Le premier cas se présente lorsque le point $z_1\,,\,t_1$ est compris entre A et B et le second cas lorsqu'il est externe.



Dans cette formule, comme dans toutes les formules analogues que l'on trouve par les procédés de Green (cfr. le § 3 de la 8ième leçon), la valeur de l'intégrale au point $z_1\,,t_1$ est donnée par les valeurs de l'intégrale même et de ses dérivées sur la ligne s. Or, comme nous avons vu (§ 3), il est nécessaire de connaître les seules valeurs de u sur l pour la déterminer dans σ, c'est pourquoi il y a dans la formule précédente la quantité $\partial u/\partial z$ qu'il faut éliminer. Elle s'élimine d'elle-même sur tout partie CD de la ligne s qui est un segment de droite parallèle à l'axe z, car sur CD

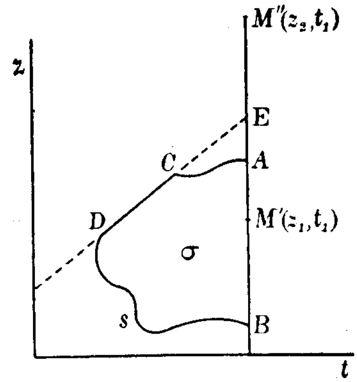




on a $\cos nz = 0$. Ainsi, si les points A , B s'éloignent indéfiniment dans la direction positivé et négative de z de manière que la ligne s devienne la parallèle $t = h$ à l'axe z, la quantité $\partial u/\partial z$ est complètement éliminée.

Alors si nous posons dans la formule (6) $f = 0$ elle devient la formule (2') de POISSON. En effet elle exprime la valeur de u par les valeurs de cette intégrale pour $t = h$.

5. Les valeurs de $\partial u/\partial z$ sur s peuvent s'éliminer aussi en d'autres cas. Nous allons démontrer qu'elles peuvent s'éliminer sur toute partie CD de s qui est un segment de ligne droite telle que toute l'aire σ est située d'un coté de cette droite. Prenons en effet le point M'' symétrique du point M' par rapport au point E. M' étant interne au segment AB, M'' sera externe. C'est pourquoi, si z_1, t_1 sont les coordonnées de M' et z_2, t_1 celles de M'', en remplaçant dans la formule (6) z_1 par z_2 on passe à la formule (6').



Le premier membre peut se décomposer en deux parties, l'intégrale qui est étendue à CD et toute la partie résiduelle. En appelant I cette dernière, on aura

$$I' - \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{CD} \frac{e^{-\frac{(z_1-z)^2}{4(t_1-t)}}}{\sqrt{t_1-t}} \left\{ \left[\frac{\partial u}{\partial z} - u \frac{z_1 - z}{2(t_1-t)} \right] \cos nz - u \cos nt \right\} ds = u(z_1, t_1)$$

$$I'' - \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{CD} \frac{e^{-\frac{(z_1-z)^2}{4(t_1-t)}}}{\sqrt{t_1-t}} \left\{ \left[\frac{\partial u}{\partial z} - u \frac{z_2 - z}{2(t_1-t)} \right] \cos nz - u \cos nt \right\} ds = 0,$$

où I' et I'' sont les valeurs de I si l'on se rapporte respectivement aux points M' et M''. Ajoutons la première équation à la seconde après avoir multiplié celle-ci par une quantité constante $-e^c$. Le second membre sera $u(z_1, t_1)$ et dans le premier membre le coefficient de $\partial u/\partial z$ sous l'intégrale deviendra

$$\left(e^{-\frac{(z_1-z)^2}{4(t_1-t)}} - e^{-\frac{(z_2-z)^2}{4(t_1-t)}+c} \right) \frac{\cos nz}{\sqrt{t_1-t}} \, ds.$$

Pour éliminer $\partial u/\partial z$ le long de l'intégrale étendue à CD il suffit d'annuler ce coefficient. Posons donc

$$\frac{(z_1-z)^2}{4(t_1-t)} = \frac{(z_2-z)^2}{4(t_1-t)} - c.$$

On tire de là en appelant z_e la coordonnée du point E et h la longueur M'M''

$$\frac{z_e - z}{t_1 - t} = \frac{2c}{h}.$$

Mais la droite CD passe par le point E; c'est pourquoi son équation est

$$\frac{z_e - z}{t_1 - t} = \alpha,$$

α étant une quantité constante.

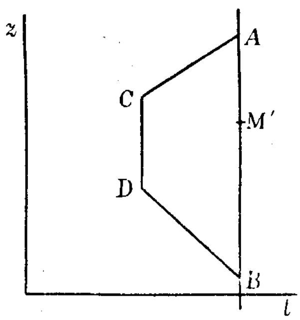
Il suffit donc de prendre

$$c = \frac{h\alpha}{2}$$

pour faire l'élimination de $\partial u/\partial z$.

La méthode qu'on a suivie est bien une méthode des images, car on peut appeler le point M'' l'image du point M' par rapport au point E.

Si la ligne s est formée de plusieurs droites on peut appliquer dans certains cas le principe des images successives pour éliminer $\partial u/\partial z$ sur toute la ligne s.



Soit s formée par trois droites AC, CD, DB dont CD est parallèle à z, alors la méthode peut servir pour tout point M' d'une manière très simple. L'on trouve dans ce cas un nombre infini d'images.

6. Ce que nous avons exposé jusqu'ici nous prouve qu'une méthode tout à fait analogue à celle qu'on emploie dans le cas des équations du type hyperbolique peut être aussi employée dans celui des équations du type parabolique, en tenant compte des lignes caractéristiques.

Cependant nous pouvons bien facilement nous convaincre que par cette méthode on n'épuise pas les propriétés les plus importantes de l'équation (1'), et que la méthode même est impuissante à nous en dévoiler les plus cachées.

En effet nous avons montré dès le 2ième paragraphe le résultat obtenu par POISSON, c'est à dire que l'intégrale générale de l'équation (1) peut s'exprimer par une fonction arbitraire ou par deux fonctions arbitraires. Or la formule (6) peut nous conduire à l'intégrale (2), comme nous avons déjà vu, mais elle ne nous amène pas à l'intégrale (3). Même en tâchant de faire coïncider la ligne s avec l'axe des z on n'arrive pas à cette formule.

On serait conduit à cette conclusion, que les équations du type parabolique n'offrent pas de prise aux méthodes modernes d'une manière complète, et que par exemple les anciennes méthodes de POISSON nous disent davantage. Il semble donc que les méthodes modernes peuvent nous donner l'explication d'un gran nombre de faits, mais tous les faits connus semblent ne pas ressortir d'elles.

Malgré cela nous allons voir que cette impuissance n'est qu'apparente et que nous pouvons réunir dans un ensemble unique tous les faits et par une seule formule embrasser toutes les formules connues. Pour rejoindre le but il n'y a qu'à aborder les nouvelles méthodes avec une conception nouvelle, c'est a dire en les étendant aux variables complexes, ce qu'on n'avait pas fait jusqu'à présent. L'équation (1') se prête avec beaucoup de facilité à cette généralisation, car elle n'à que deux variables z et t, et si nous posons $t = x + iy$ en regardant x, y, z comme les coordonnées des points de l'espace, on pourra se servir des images géométriques dans un domaine à trois dimensions.

Envisageons une fois encore la fonction qui joue le rôle principal dans ces recherches, c'est à dire

$$(7) \qquad \frac{e^{-\frac{(z_1-z)^2}{4(t_1-t)}}}{\sqrt{t_1-t}}\,.$$

Nous verrons dans la leçon suivante que c'est la polydromie de cette fonction qui a l'importance la plus grande dans tous les résultats que nous allons obtenir. Cette fonction est en effet polydrome par rapport à la variable t. Or cette polydromie ne peut pas ressortir si on n'envisage pas t comme une variable complexe. C'est pourquoi toute la théorie que nous avons développée qui était bâtie en dehors de cette propriété était justement incomplète.

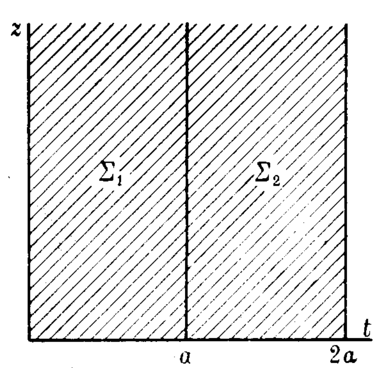
11ième leçon.

1. La première question qui se pose est de voir si l'on peut étendre dans les intégrales de l'équation (1′) de la leçon 10ième la variabilité de t, c'est à dire si l'on peut la regarder comme un nombre complexe. A cet effet considérons les intégrales de l'équation (1) qui est plus simple que l'autre. Il est facile de démontrer, et d'autre part la chose est connue, qu'elles ne sont pas en général des fonctions analytiques de t.

Pour s'en persuader d'une manière tout à fait élémentaire prenons la fonction

$$u(z,t) = z\int_0^t \varphi(\xi)\, e^{-\frac{z^2}{4(t-\xi)}} (t-\xi)^{-\frac{3}{2}}\, d\xi,$$

où $\varphi(\xi)$ est une fonction finie et intégrable. Si $\varphi(\xi)$ est définie dans le domaine $(0, a)$ on voit aisément que $u(z,t)$ est définie pour toutes les valeurs positives de z à l'intérieur de la bande Σ_1 limitée par l'axe t, l'axe z et la droite $t = a$.



On vérifie qu'à l'intérieur de ce domaine $u(z,t)$ est une fonction continue, que les dérivées $\partial^2 u/\partial z^2$ et $\partial u/\partial t$ sont déterminées et que l'on a

$$(1) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial u}{\partial t}\,.$$

Cela posé, si nous prolongeons $\varphi(\xi)$ entre a et $2a$, alors $u(z,t)$ pourra se prolonger à l'intérieur de la bande Σ_2 comprise entre l'axe t et les droites $t = a$, $t = 2a$.

Dans le domaine formé par l'ensemble des points internes aux bandes Σ_1 et Σ_2, $u(z,t)$ sera continue et vérifiera l'équation (1). Mais puisque le prolongement de $\varphi(\xi)$ peut se faire avec la seule condition qu'elle soit finie et intégrable et que d'autre part elle est tout à fait arbitraire, il s'en suit que les valeurs de u en Σ_2 pourront être changées, celles en Σ_1 restant toujours les mêmes.

Si par exemple nous prenons d'abord $\varphi(\xi) = 0$ dans l'intervalle $(a, 2a)$ et après $\varphi(\xi) = 1$, les valeurs de $u(z, t)$ en Σ_2 seront changées. Cela prouve que $u(z, t)$ n'est pas en général une fonction analytique de t.

2. Il faudra donc poser comme une condition nouvelle que l'intégrale de l'équation (1) soit une fonction analytique de t; et de même si nous envisageons l'équation (1'), il faudra poser deux conditions, c'est à dire que f et u soient des fonctions analytiques de $t = x + iy$.

Supposons aussi, en ayant égard à l'équation adjointe (4), que g et v soient des fonctions analytiques de $t = x + iy$.

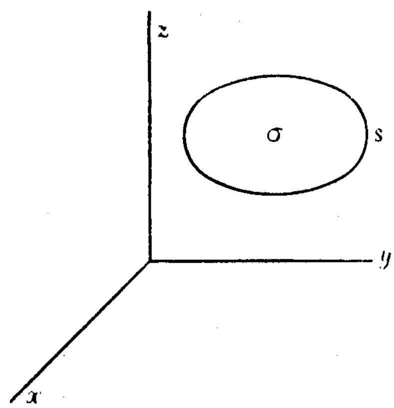
Nous écrirons alors

$$u(z, t) = u(x, y, z) \qquad f(z, t) = f(x, y, z)$$

$$v(z, t) = v(x, y, z) \qquad g(z, t) = g(x, y, z)$$

et l'on regardera x, y, z comme les coordonnées des points de l'espace. Il est évident que u, v, f, g seront en général des quantités complexes et on aura

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial x} = -i\frac{\partial u}{\partial y} \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial x} = -i\frac{\partial v}{\partial y}\,. \tag{8}$$



Posons

$$X = v\frac{\partial u}{\partial z} - u\frac{\partial v}{\partial z} \quad , \quad Y = i\left(v\frac{\partial u}{\partial z} - u\frac{\partial v}{\partial z}\right) \quad , \quad Z = uv$$

et, en prenant une surface σ ayant deux faces distinctes et pour contour la ligne s, appliquons le théorème de STOKES (2ième leçon § 2) en supposant que toutes les quantités précédentes soient finies, continues et monodromes sur la surface σ.

On aura

$$(9)\qquad \left\{\begin{aligned} &\int_\sigma \left\{\left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}\right)\cos nx + \left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}\right)\cos ny + \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right)\cos nz\right\} d\sigma \\ &\qquad\qquad = \int_s \left(X dx + Y dy + Z dz\right). \end{aligned}\right.$$

Or on a bien aisément en vertu des relations (8) et des équations (1′) et (4)

$$\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} = -ivf + iug$$

$$\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} = vf - ug$$

$$\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} = 0;$$

par suite l'égalité (9) deviendra

$$\frac{1}{i}\int_\sigma (vf - ug)(\cos nx + i \cos ny)\, d\sigma = \int_s \left[\left(v\frac{\partial u}{\partial z} - u\frac{\partial v}{\partial z}\right)(dx + idy) + uv\, dz\right],$$

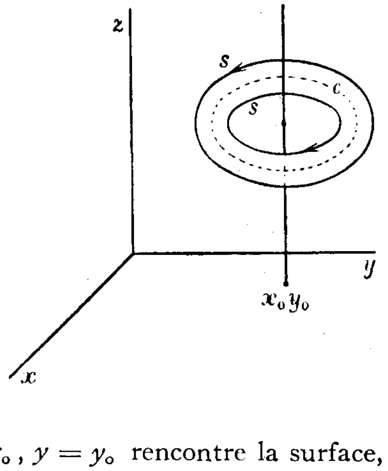
c'est à dire

$$(10)\qquad \frac{1}{i}\int_\sigma (vf - ug)\frac{\partial t}{\partial n}\, d\sigma = \int_s \left[\left(v\frac{\partial u}{\partial z} - u\frac{\partial v}{\partial z}\right)dt + uv\, dz\right].$$

3. Cela posé supposons que dans tout le domaine à trois dimensions que nous envisageons u, f soient finies, continues et monodromes. Prenons

$$(11)\qquad v = \frac{e^{-\frac{(z-z_1)^2}{4(t-t_0)}}}{\sqrt{t_0 - t}}, \quad g = 0,$$

étant $t_0 = x_0 + iy_0$.



Si la droite $x = x_0$, $y = y_0$ rencontre la surface, σ, la formule (10) n'est pas applicable, car pour $x = x_0$, $y = y_0$ la fonction v a une singularité. Mais elle n'est pas applicable en d'autres cas où la même droite ne rencontre pas la surface. En effet supposons que la surface soit limitée par deux lignes, et qu'en conséquence le contour s soit formé de deux parties, et supposons aussi que la droite $x = x_0, y = y_0$ passe au milieu du bord interne de la surface, et que par suite on puisse parcourir sur la surface un cycle fermé c autour de la droite. Même dans ce cas la formule ne sera pas applicable, car v sera polydrome sur la surface à cause du radical qui paraît dans le dénominateur. En parcourant le cycle c et en prenant les valeurs de v qui se suivent avec continuité on reviendra au point de départ avec la valeur initiale changée de signe.

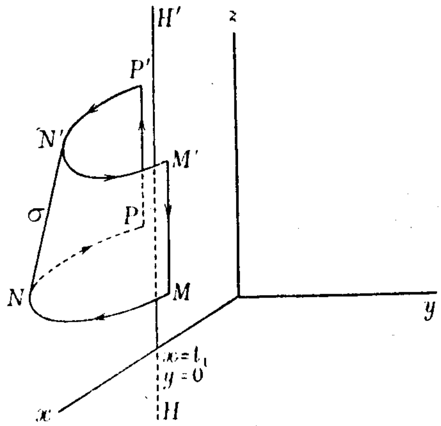


Fig. *a*.

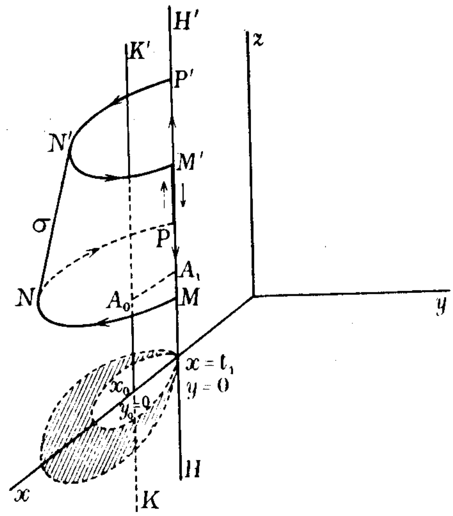


Fig. *b*.

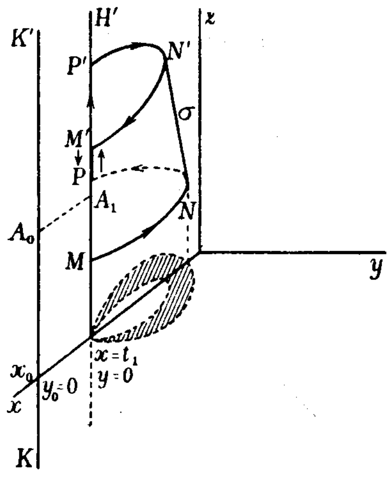


Fig. *b'*.

Donc la formule (10) n'est applicable, en prenant v donné par la formule (11), que si aucun cycle fermé sur la surface n'entoure la droite $x = x_0, y = y_0$ et si en même temps cette droite ne rencontre pas la surface.

Le contour étant formé par une seule ligne continue et fermée, il suffit évidemment de la seconde condition, pour que la première soit aussi satisfaite.

4. Prenons maintenant (fig. *a*) un contour s formé par une seule ligne continue, constituée par la courbe MNP et par la courbe M′ N′ P′ reliées entre elles par les droites PP′ et MM′ parallèles à l'axe z.

La ligne MNPP′ N′ M′ M sera une ligne continue. Les flèches indiquent comment il faut la parcourir. Supposons que nous menions une surface σ ayant pour contour cette ligne, et ensuite faisons approcher les deux bords MM′ et PP′ d'une même droite HH′ du plan xz parallèle à l'axe z de manière qu'ils se disposent le long de cette droite. Mais en même temps supposons que si certaines parties des deux bords se superposent, comme il arrive dans la fig. *b*, les deux bords restent toujours distingués comme les bords d'une coupure, et qu'on doive les parcourir en sens opposé. La même chose est indiquée dans la fig. *b′* où les dispositions sont changées. Les flèches désignent toujours la manière de parcourir le contour. On peut donc regarder toujours la surface σ comme limitée par un contour formé par la ligne continue et fermée MNPP′N′M′M.

La ligne HH′ ayant pour équation

$$x = x_1 \quad , \quad y = 0 \, ,$$

menons une droite parallèle KK′ dans le plan xz ayant pour équation

$$x = x_0 > x_1 \quad , \quad y = y_0 = 0$$

qui ne rencontre pas la surface σ. Alors on pourra appliquer la formule (10), et l'on trouvera en remarquant que $g = 0$

$$\int_{\mathrm{MNP}} \left| \left(v_{A_0} \frac{\partial u}{\partial z} - u \frac{\partial v_{A_0}}{\partial z} \right) dt + u v_{A_0} dz \right| + \int_{\mathrm{P'N'M'}} \left| \left(v_{A_0} \frac{\partial u}{\partial z} - u \frac{\partial v_{A_0}}{\partial z} \right) dt + u v_{A_0} dz \right|$$

$$+ \int_{\mathrm{PP'}} u v_{A_0} dz + \int_{\mathrm{M'M}} u v_{A_0} dz = \frac{1}{i} \int_{\sigma} v_{A_0} f \frac{\partial t}{\partial n} d\sigma \, ,$$

où l'on a désigné par v_{A_0} la fonction $\dfrac{e^{-\frac{(z-z_1)^2}{4(x_0-t)}}}{\sqrt{x_0 - t}}$, A_0 étant le point de coordonnées $x_0 , 0 , z_1$.

5. On peut maintenant distinguer deux cas. Projetons la surface σ sur le plan xy. Dans les figures nous avons désigné la projection par l'aire hachée. Le point x_0, 0 du plan xy peut se trouver entouré par la projection (fig. *b*) ou peut ne pas être entouré par elle (fig. *b′*).

Puisque la fonction v est polydrome et qu'elle change de signe en parcourant un cycle autour de la droite $x = x_0$, $y = 0$, les choses seront différentes dans les deux cas. Les valeurs de v dans les points de la droite H H′ sont réelles. Prenons ces valeurs positives sur P′P, alors

dans *le premier cas* les valeurs de v seront nègatives sur MM',
dans *le second cas* les valeurs de v seront positives sur MM'.

Or déplaçons le point A_0 sur $A_0 A_1$ parallèle à l'axe x en l'approchant indéfiniment du point A_1 sur la droite HH', et supposons que la droite KK' se déplace avec A_0 en restant parallèle à l'axe z, et supposons aussi qu'en se déplaçant elle ne rencontre jamais la surface σ.

Cherchons les limites de

$$\int_{PP'} u v_{A_0}\, dz \quad , \quad \int_{MM'} u v_{A_0}\, dz .$$

Il suffit pour cela de faire usage de la formule (I) qu'on a déjà employée dans le § 4 de la 10ième leçon. Puisque v_{A_0} est positif sur PP' on aura

$$\lim \int_{PP'} u v_{A_0}\, dz = 2 \sqrt{\pi}\, u\,(t_1\,,\,z_1)\,,$$

si le point A_1 est compris entre les points P, P' et si le segment PP' a la direction positive de l'axe z. On aura au contraire

$$\lim \int_{PP'} u v_{A_0}\, dz = -\, 2 \sqrt{\pi}\, u\,(t_1\,,\,z_1)\,,$$

si le point A_1 est compris entre les points P, P' et si le segment PP' a la direction négative de l'axe z. Enfin on aura

$$\lim \int_{PP'} u v_{A_0}\, dz = 0\,,$$

si le point A_1 est externe au segment PP'. (C'est le dernier cas qui se présente dans les figures b et b', mais on imagine tout de suite comment il faudrait dessiner les figures pour que les autres cas se présentent).

Les trois formules précédentes peuvent se réunir en une seule en représentant par le symbole (p) le numéro $\pm$ 1 selon que le segment A_1P a la direction positive ou négative de z. On aura alors

$$\lim \int_{PP'} u v_{A_0}\, dz = [(p') - (p)] \sqrt{\pi}\, u\,(t_1\,,\,z_1).$$

Si nous étendons la signification du symbole (p), et si nons supposons qu'il représente 0, si A_1 coïncide avec P, alors la formule précédente nous donne la limite de l'intégrale même dans le cas où A_1 coïncide avec l'un des points P ou P'.

Passons maintenant à

$$\lim \int_{M'M} u v_{A_0}\, dz\,;$$

si le point $x_0\,,\,0$ est entouré par la projection (1er cas), on a que v_{A_0} est négatif sur MM', c'est pourquoi

$$\lim \int_{M'M} u v_{A_0}\, dz = -\, [(m) - (m')] \sqrt{\pi}\, u\,(t_1\,,\,z_1).$$

Si le point x_0, o n'est pas entouré par la projection ($2^{\text{ième}}$ cas) v_{A_0} est positif sur MM' et par suite

$$\lim \int_{M'M} u v_{A_0} dz = [(m) - (m')] \sqrt{\pi}\, u(t_1, z_1).$$

Les deux formules peuvent se réunir en une seule en indiquant par le symbole (e) le numero ± 1 selon que la projection entoure ou n'entoure pas le point x_0, o et l'on aura

$$\lim \int_{M'M} u v_{A_0} dz = -(e)\,[(m) - (m')].$$

Donc

$$\lim \left[\int_{PP'} u v_{A_0} dz + \int_{M'M} u v_{A_0} dz \right] = \{[(p') - (p)] + (e)\,[(m') - (m)]\} \sqrt{\pi}\, u(t_1, z_1),$$

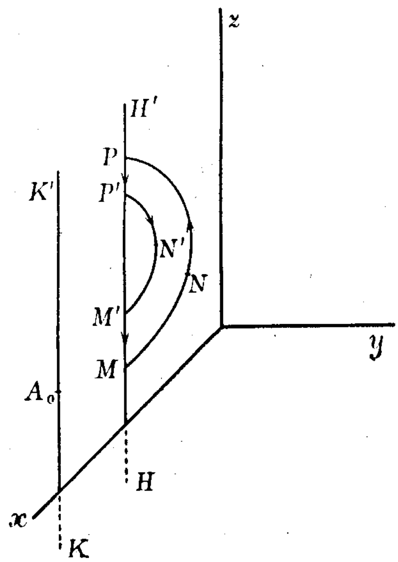
d'où l'on tire, en posant

$$\{[(p') - (p)] + (e)\,[(m') - (m)]\} \sqrt{\pi} = h,$$

$$\text{(II)} \quad \left\{ \begin{aligned} hu(t_1 z_1) = \lim \Bigg(& \frac{1}{i} \int_\sigma v_{A_0} f \frac{\partial t}{\partial n} d\sigma - \int_{MNP} \left[\left(v_{A_0} \frac{\partial u}{\partial z} - u \frac{\partial v_{A_0}}{\partial z} \right) dt + u v_{A_0} dz \right] \\ & - \int_{P'N'M'} \left[\left(v_{A_0} \frac{\partial u}{\partial z} - u \frac{\partial v_{A_0}}{\partial z} \right) dt + u v_{A_0} dz \right] \Bigg). \end{aligned} \right.$$

Cette formule est la plus générale possible et comprend toutes les autres. Il n'y a qu'à la particulariser pour déduire toutes les formules de la théorie.

5. Supposons d'abord que le second cas se présente. Alors on peut très bien imaginer que les lignes MNP et M'N'P' appartiennent au plan xz de manière que σ soit une partie du plan, et l'on peut supposer que la ligne M'N'P' se rétrécisse indéfiniment de sorte quelle se réduise à un point. Alors dans la formule (II) l'intégrale étendue à M'N'P' s'annulle, et elle conduit aux formules (6) et (6') dont la première nous amène à la formule (2') de POISSON.



6. Soit M'N'P' une courbe appartenant au plan parallèle à xy mené par A_0, alors on démontre facilement que la limite de l'intégrale étendue à la ligne M'N'P' dans la formule (II) est nulle. En même temps on a $(m') = (p') = 0$,

par suite la formule (II) devient

$$[(p) + (e)(m)]\sqrt{\pi}\,u(t_1, z_1) = \lim\left\{\int_{MNP}\left[\left(v_{A_0}\frac{\partial u}{\partial z} - u\frac{\partial v_{A_0}}{\partial z}\right)dt + uv_{A_0}dz\right]\right.$$
$$\left. - \frac{1}{i}\int_\sigma v_{A_0} f \frac{\partial t}{\partial n} d\sigma\right\}.$$

Si M et P coïncident on a $(m) = (p)$, donc

$$(m)[1 + (e)]\sqrt{\pi}\,u(t_1, z_1) = \lim\left\{\int_{MNP}\left[\left(v_{A_0}\frac{\partial u}{\partial z} - u\frac{\partial v_{A_0}}{\partial z}\right)dt + uv_{A_0}dz\right]\right.$$
$$\left. - \frac{1}{i}\int_\sigma v_{A_0} f \frac{\partial t}{\partial n} d\sigma\right\}.$$

Dans le second cas où $(e) = -1$ le premier membre est toujours nul. Envisageons le second cas où $(e) = 1$. Alors

$$2(m)\sqrt{\pi}\,u(t_1, z_1) = \lim\left\{\int_{MNP}\left[\left(v_{A_0}\frac{\partial u}{\partial z} - u\frac{\partial v_{A_0}}{\partial z}\right)dt + uv_{A_0}dz\right] - \frac{1}{i}\int_\sigma v_{A_0} f \frac{\partial t}{\partial n} d\sigma\right\}.$$

Supposons maintenant que la courbe MNP appartienne à un plan parallèle à xy, alors $dz = 0$ sur la courbe, et l'on a

$$2(m)\sqrt{\pi}\,u(t_1 . z_1) = \lim\left\{\int_{MNP}\left[\left(v_{A_0}\frac{\partial u}{\partial z} - u\frac{\partial v_{A_0}}{\partial z}\right)dt\right] - \frac{1}{i}\int_\sigma v_{A_0} f \frac{\partial t}{\partial n} d\sigma\right\}.$$

Si $f = 0$ la formule se réduit encore et devient

$$2(m)\sqrt{\pi}\,u(t_1, z_1) = \lim\left\{\int_{MNP}\left(v_{A_0}\frac{\partial u}{\partial z} - u\frac{\partial v_{A_0}}{\partial z}\right)dt\right\}.$$

Enfin si nous prenons pour MNP un cercle ayant le centre sur l'axe x la formule précédente devient la formule (3') de POISSON.

De même les formules de SCHLAEFLI peuvent se déduire comme cas particuliers de celles que nous avons données.

Il faut remarquer que toutes ces formules se rattachent au premier cas, c'est à dire à celui où la projection de la surface σ entoure le point x_0, 0. Or cela ne peut arriver que si l'on suppose que la courbe MNM' n'appartient pas au plan xz. Il fallait donc sortir des valeurs réelles de t pour trouver ces formules, et c'est justement ce que nous avons fait. Ce n'est qu'en sortant du domaine réel et en pénétrant dans le domaine complexe que la polydromie de la fonction (7) a pu jouer son rôle, car la polydromie ne ressort qu'en parcourant des cycles autour de la droite KK'. Nous avons mis en lumière qu'à cette polydromie se rattache tout le succès de la méthode nouvelle qu'on a employée.

8. Nous finirons en donnant une application de la formule de POISSON, ce qui nous amènera à revenir sur un point auquel nous avons touché dans la 8ième leçon (§ 1). Nous avons dit qu'il y avait des problèmes de la théorie des

ondes qui ne ressortent pas des équations du type hyperbolique. Ce sont les problèmes des ondes des liquides incompressibles. Si l'on envisage le cas le plus général des petites vibrations des liquides assujettis à des forces quelconques ayant un potentiel, on trouve que le problème se réduit à trouver une fonction V harmonique dans le domaine S occupé par le liquide qui le long de la surface libre ω du liquide vérifie l'équation

$$-\alpha \frac{\partial V}{\partial n} = \frac{\partial^2 V}{\partial t^2}$$

et sur les parois rigides σ qui renferment le liquide vérifie l'équation $\partial V/\partial n = 0$, n étant la normale au contour dirigée vers l'intérieur de l'espace S, α une quantité positive, t le temps.

Le problème dépend de l'équation différentielle de LAPLACE

$$\Delta^2 V = 0,$$

car V doit être harmonique. Il est donc rattaché à une équation du type elliptique. Ce sont les conditions le long de la partie ω du contour qui déterminent le caractère ondulatoire du mouvement.

Or on démontre que V est déterminée si l'on connait les valeurs V_0 et $(\partial V/\partial t)_0 = V'_0$ de V et de $\partial V/\partial t$ sur ω pour $t = 0$. On peut aussi donner une méthode générale pour résoudre le problème. Soit $U_A(x, y, z, t)$ une fonction harmonique régulière de x, y, z dans le domaine S, excepté dans le point A de coordonnées x_1, y_1, z_1 où l'on a

$$U_A(x, y, z, t) = \frac{1}{r_A} + W_A(x, y, z, t), \; r_A = \sqrt{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 + (z_1 - z)^2},$$

$W_A(x, y, z, t)$ étant une fonction régulière. Si nous supposons que sur ω soit vérifiée l'égalité

$$-\alpha \frac{\partial U_A}{\partial n} = \frac{\partial^2 U_A}{\partial t^2}$$

et sur σ

$$\frac{\partial U_A}{\partial n} = 0$$

et pour $t = t_1$ sur ω U_A et $\partial U_A/\partial t$ soient nulles, alors on aura

$$(12) \qquad V(x_1 y_1 z_1 t_1) = -\frac{1}{4\pi} \frac{d}{dt_1} \int_\omega \left[(U_A)_0 \left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)_0 - V_0 \left(\frac{\partial U_A}{\partial t}\right)_0 \right] \frac{1}{\alpha} d\omega,$$

(U_A) et $(\partial U_A/\partial t)_0$ désignant les valeurs de U_A et $\partial U_A/\partial t$ pour $t = 0$. Cette formule sert pour reconduire le problème de déterminer V à celui de trouver U_A, c'est à dire à déterminer une fonction qui à certains points de vue est analogue à la fonction de GREEN.

9. Mais laissons de côté la théorie générale qui nous conduirait trop loin, et envisageons le cas où le liquide occupe un domaine sphérique et où ω est toute la surface de la sphère. Supposons aussi que α soit constante de sorte

que l'on puisse prendre $\alpha = 1$. Alors sur la surface de la sphère on aura $\partial V/\partial r = \partial^2 V/\partial t^2$, r étant le rayon vecteur conduit par le centre de la sphère. Posons $\log r = \rho$, et supposons que le rayon de la sphère soit égal 1. Alors l'équation précédente pourra s'écrire

$$\frac{\partial V}{\partial \rho} = \frac{\partial^2 V}{\partial t^2}. \tag{13}$$

Cela posé, r, θ, φ étant les coordonnées polaires, soient $V_0(r, \theta, \varphi)$ et $V'_0(r, \theta, \varphi)$ les fonctions harmoniques à l'interieur de la sphère qui sur la surface de la sphère deviennent égales aux valeurs V_0 et V'_0 données de V et de $\partial V/\partial t$ pour $t = 0$ sur la surface même. On pourra aussi les considérer comme des fonctions de ρ, θ, φ et l'on écrira $V_0(\rho, \theta, \varphi)$, $V'_0(\rho, \theta, \varphi)$. Regardons θ et φ comme des quantités constantes, et déterminons par la formule de POISSON l'intégrale de l'équation (13) qui pour $t = 0$ se réduit à $V_0(\rho, \theta, \varphi)$ et dont la dérivée par rapport à t pour $t = 0$ se réduit $V'_0(\rho, \theta, \varphi)$. Appelons cette intégrale $V(\rho, \theta, \varphi, t)$. On voit facilement qu'elle est la fonction qu'on veut déterminer.

En effet on aura

$$\Delta^2 \frac{\partial V}{\partial \rho} = \frac{\partial^2 \Delta^2 V}{\partial t^2}. \tag{14}$$

Mais

$$\Delta^2 \frac{\partial V}{\partial \rho} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 (r^2 \Delta^2 V)}{\partial \rho},$$

par suite l'équation (14) s'écrit

$$\frac{\partial (r^2 \Delta^2 V)}{\partial \rho} = \frac{\partial^2 (r^2 \Delta^2 V)}{\partial t^2}. \tag{15}$$

Or $r^2 \Delta^2 V$ pour $t = 0$ devient $r^2 \Delta^2 V_0 = 0$ et $\partial (r^2 \Delta^2 V)/\partial t$ pour $t = 0$ devient $r^2 \Delta^2 V'_0 = 0$: par suite $r^2 \Delta^2 V = 0$. Donc V est harmonique, vérifie l'équation $-\partial V/\partial t = \partial^2 V/\partial t^2$ à la surface de la sphère et en même temps V et $\partial V/\partial t$ pour $t = 0$ prennent à la surface de la sphère les valeurs données, comme il fallait démontrer. Il est facile de vérifier que V est régulière au centre de la sphère. Le problème est donc résolu.

On pourrait aussi se servir de cette méthode pour calculer la fonction U_A analogue à la fonction de GREEN et calculer ensuite V par la formule (12).

BIBLIOGRAPHIE.

POISSON, *Théorie mathématique de la chaleur*, Chapitre VI, Paris 1835.

SCHLAEFLI, *Über die partielle Differentialgl.* $\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$. «Journal de Crelle», T. 72.

BETTI, *Sopra la determinazione delle temperature nei corpi solidi omogenei*, «Memorie della Soc. Italiana delle Scienze (detta dei XL)», ser. III, T. I, P. II.

APPELL, *Sur l'equation* $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial z}{\partial y} = 0$, «Journ. de Math.», T. VIII, ser. 4.

VOLTERRA, *Sur les équations différentielles du type parabolique*, «Comptes rendus des Séances de l'Ac. des Sciences», 5 Déc. 1904 [in questo vol.: VII, pp. 52–54].

BERNSTEIN SERGE, *Sur les équations aux dérivées partielles du type elliptique.* («C. R. de l'Académie des Sciences», t. 140).

HOLMGREN E., *Om Cauchys Problem vid de lineära partiella differentialekuationerna of 2: dra ordningen* («Archiv för Matematik, Astronomi och Fysik», vol. II); *Sur une application de l'équation intégrale de M. Volterra* (Ibid., vol. III).

— *Sur l'équation de la propagation de la chaleur* (Ibid., vol. IV); *Sur les équations aux dérivées partielles du type parabolique* (Ibid., vol. VII).

LEVI EUGENIO ELIA, *Sull'equazione del calore* («Rend. R. Acc. dei Lincei», vol. XVII, 2° sem.).

— *Sull'equazione del calore* («Annali di Mat.», vol. XIV, série 5ª).

— *Sul problema di Fourier* («Atti della R. Acc. di Torino», vol. XLIII).

HADAMARD J., *Sur la solution fondamentale des équations aux dérivées partielles du type parabolique* («C. R. de l'Académie des Sciences», t. 152).

BLOCK H., *Sur les équations aux dérivées partielles du type parabolique* («Arkiv for Matematik, Astronomi och Fysik», vol. VI); *Sur les équations linéaires aux dérivées partielles à caracteristiques multiples* (Ibid., vol. VII).

GEVREY M., *Sur les équations aux dérivées partielles du type parabolique* («C.R.», t. CLII).

— *Sur l'analycité des solutions de certaines équations aux dérivées partielles* («C. R.», t. CLII).

Il faut aussi ajouter les travaux qui se rapportent aux fluides visqueux de OOSEN, PICCIATI, BOGGIO, etc.

Dans mon cours de l'Université de Rome en 1909-10 j'ai calculé effectivement la fonction U_A (11ᵉ leçon, § 14) dans le cas de la sphère de rayon R et de α constant, en faisant usage de la méthode des images. C'est pourquoi je développe U_A dans une série

$$U_A = a_0 + \frac{(t_1 - t)^2}{1 \cdot 2} a_2 + \frac{(t_1 - t)^4}{4!} a_4 + \cdots.$$

On trouve:

$$a_0 = \frac{1}{r_A} - \frac{R}{l} \frac{1}{r_{A'}},$$

$r_{A'}$, étant la distance du point x, y, z au point image A′ de A par rapport à la sphère, l la distance de A du centre. On a après:

$$-\alpha \frac{\partial a_0}{\partial \rho} = a_2 \quad , \quad -\alpha \frac{\partial a_2}{\partial \rho} = a_4 \cdots$$

ρ étant le rayon vecteur.

La méthode des images donne aussi la solution si le fluide occupe l'espace compris dans une demisphère, le plan diamétral étant rigide, et en d'autres cas analogues, faciles à reconnaître.

NOTE ADDITIONNELLE À LA 5ième LEÇON.

COMMUNICATION FAITE LE SOIR DU 2 MARS.

1. Rappelons la formule bien connue de trigonométrie

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha;$$

on peut en tirer que si

$$\sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha = \text{const.} \tag{1}$$

on doit avoir

$$\alpha + \beta = \text{const.}$$

Posons maintenant

$$\alpha = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} \qquad \beta = \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{1 - y^2}};$$

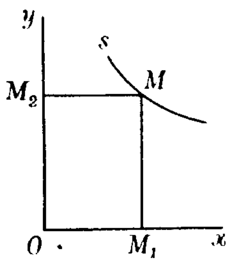
l'équation (1) s'écrira

$$x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}=\text{const.} \tag{2}$$

Donc si cette égalité est vérifiée on doit avoir

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}+\int_0^y \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}=\text{const.} \tag{3}$$

Rapportons-nous à deux axes coordonnés x, y, et soit s un arc de la courbe ayant pour équation (2), M un point de la courbe, M_1 et M_2 ses projections sur les axes; alors OM_1 et OM_2 seront les amplitudes des deux intégrales qui paraissent dans la formule (3).



Le théorème de trigométrie peut s'énoncer en disant: *si on déplace le point* M *sur la courbe s, la somme dex intégrales*

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\quad , \quad \int \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}},$$

étendues respectivement à OM_1 *et* OM_2 *est constante.*

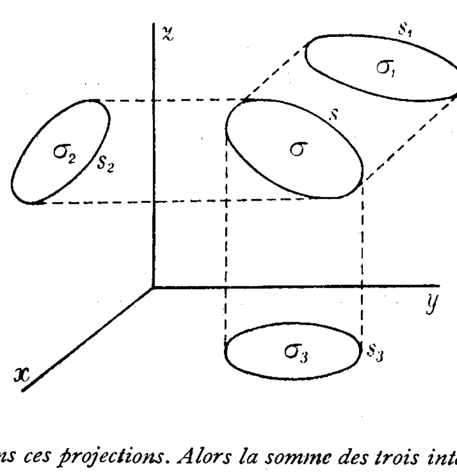
2. Passons à une extension de ce théorème au cas de trois variables. *Envisageons les trois intégrales*

$$\iint_{\sigma_1}\frac{dy\,dz}{\sqrt{\frac{b_2}{\lambda}z^2-\frac{b_3}{\lambda}y^2+\beta_1}}\quad,\quad \iint_{\sigma_2}\frac{dz\,dx}{\sqrt{\frac{b_3}{\mu}x^2-\frac{b_1}{\mu}z^2+\beta_2}}\quad,\quad \iint_{\sigma_2}\frac{dx\,dy}{\sqrt{\frac{b_1}{\nu}y^2-\frac{b_2}{\nu}x^2+\beta_3}} \tag{2}$$

où b_1, b_2, b_3; β_1, β_2, β_3; λ, μ, ν *sont des quantités constantes et* $\lambda+\mu+\nu=0$. *Prenons la surface algébrique ayant pour équation par rapport aux axes coordonnés* x, y, z

$$\lambda x\sqrt{\frac{b_2}{\lambda}z^2-\frac{b_3}{\lambda}y^2+\beta_1}+\mu y\sqrt{\frac{b_3}{\mu}x_2-\frac{b_1}{\mu}z^2+\beta_2}+\nu z\sqrt{\frac{b_1}{\nu}y^2-\frac{b_2}{\nu}x^2+\beta_3}=\text{const.} \tag{5}$$

et menons une ligne quelconque s fermée sur cette surface. Soient s_1, s_2, s_3 *les projections de cette ligne sur les plans coordonnées, et supposons que nous étendions les trois intégrales* (4) *aux aires*



σ_1, σ_2, σ_3 *renfermées dans ces projections. Alors la somme des trois intégrales* (4) *ne changera pas en déplaçant et en déformant la ligne s sur la surface* (5).

La démonstration de ce théorème ne présente pas de difficultés. Il donne évidemment une extension du théorème élémentaire de trigonométrie par l'emploi des fonctions de lignes. Le remarque la plus intéressante à faire est que la surface algébrique constitue une liaison algébrique entre les trois ligne dont dépendent les trois intégrales. Ce théorème peut bien se généraliser.

Voir VOLTERRA, *Un teorema sugli integrali multipli.* « Atti della R. Accad. di Torino », 1897. [In queste « Opere »: vol. II, XXV, pp. 329–335].

TABLE

XI.

L'ECONOMIA MATEMATICA ED IL NUOVO MANUALE DEL PROF. PARETO

«Giornale degli economisti», Roma, serie II, vol. XXXII, 1906, pp. 296-301.

Il volume piccolo di mole ma di non comune importanza pubblicato dal prof. PARETO col titolo *Manuale di economia politica* può essere esaminato da vari punti di vista e giudicato in varie maniere; anzi sarebbe cosa sommamente utile porre a raffronto i varî giudizi che di esso possono dare i diversi studiosi, ai quali l'opera interessa e che appartengono a scuole differenti ed hanno indirizzi e scopi diversi nei loro studî. Io mi auguro che questo stesso giornale voglia accogliere nelle sue pagine più di una recensione del libro del PARETO, giacché una sola persona potrebbe ben difficilmente esaurire tutto quanto è utile dire ai cultori della economia politica intorno all'opera stessa.

Io me ne occuperò dal punto di vista matematico, esponendo le impressioni che un cultore dell'analisi prova nella lettura del trattato, precisamente come un analista può esprimere un giudizio intorno ad un'opera di fisica matematica.

Il PARETO è stato uno di quegli scienziati che, come il CROCE giustamente osserva, hanno maggiormente contribuito a rendere la economia una scienza pura dandole il carattere delle scienze naturali e fisico matematiche. Gli studi di economia, dice il CROCE, sono venuti compiendo in questi ultimi tempi un doppio movimento. Da una parte hanno procurato di liberarsi dal fardello di tutte le questioni d'indole pratica o politica restringendosi alla semplice considerazione della realtà effettuale; dall'altra si sono sempre più disinteressati dalla discussione intorno alla *natura* dei fatti economici e alle relazioni fra essi e gli altri aspetti della realtà rinserrandosi nell'ambito dei *fenomeni* e professando di non volerli in alcun modo trascendere. Col primo movimento gli studi di economia hanno acquistato sempre più carattere teoretico o scientifico che voglia dirsi. Col secondo si sono avvicinati al tipo delle *scienze naturali* con l'annesso complemento della trattazione matematica, o, come si dice, dell'applicazione delle matematiche ai problemi economici.

La economia matematica col risolvere rigorosamente dei problemi ben determinati ed in un campo i cui limiti sono nettamente definiti deve offrirci una base di dati positivi, sui quali poter appoggiare con sicurezza il giudizio intorno alla via pratica da seguire nelle varie circostanze.

Ma essa lascia sempre aperta la discussione intorno alle grandi questioni di indole morale e politica, a cui i detti risultati dovranno applicarsi.

Una tal cosa non è propria solo della economia matematica, ma può ripetersi per ogni altra applicazione pratica delle matematiche. Io credo che non sarà mai di troppo l'insistere sopra questo carattere di realatività ed il lumeggiarlo onde impedire che abbiano da nascere illusioni sulla portata e sul significato delle applicazioni delle matematiche; illusioni che potrebbero compromettere il loro valore di fronte al pubblico che se ne interessa.

Il prof. BOREL esprime con grande chiarezza delle idee molto giuste su questo punto in un interessante articolo pubblicato recentemente nella « Revue du Mois » (fasc. 4°, 1906). Dopo aver riconosciuto che il valore pratico del calcolo delle probabilità è relativo, trova che il problema pratico da risolvere è semplificato dal calcolo soltanto nei suoi termini, ma non è modificato nella sua essenza e soggiunge: « Non è inutile osservare che questo carattere relativo non è speciale all'applicazione delle matematiche alle probabilità; lo si ritrova in tutte le applicazioni pratiche delle matematiche, benché vi sia talora la tentazione di attribuire loro un valore assoluto.

« Io desidero di illuminare una sala: mi si danno gli elementi necessari per calcolare il costo della illuminazione a gas e a luce elettrica. Con calcoli più o meno lunghi trovo che spenderò 30 franchi al mese col gas e 32 franchi colla elettricità. Questo risultato preciso sarà uno degli elementi della mia decisione: io sono meglio informato che se conoscessi soltanto il prezzo del metro cubo di gas e quello dell'ettowatt-ora, ma il calcolo non si impone sulla mia decisione.

« Non è necessario moltiplicare gli esempi per renderci conto della parte che ha il calcolo nella vita pratica; esso mette sotto una forma più facile ad afferrare certi elementi delle nostre decisioni; sostituisce certi dati più o meno complessi con un picciol numero di semplici numeri.

« Vi sono nondimeno dei casi in cui il calcolo sembra bastare a fissare la nostra decisione; ma ciò dipende dal fatto che noi avevamo già stabilito dapprima una certa regola di condotta: così nell'esempio della illuminazione a gas o ad elettricità, se ho deciso, prima di fare il calcolo, di scegliere l'illuminazione più a buon mercato il calcolo m'impone la scelta del gas, ma se avessi deciso di scegliere l'elettricità purché la spesa supplementare non oltrepassasse i 5 franchi al mese, lo stesso calcolo m'imporrebbe la scelta della elettricità.

« L'intervento del calcolo nelle decisioni della vita pratica dà troppo spesso luogo ad uno dei due giudizi estremi: per gli uni è assurdo di mescolare il calcolo ad una decisione di cui certi elementi non sono esprimibili con cifre; per gli altri le cifre hanno una virtù magica che rende infallibili tutti quelli che lo impiegano secondo le regole ».

Queste parole, che ci è sembrato utile citare testualmente a proposito di studi che hanno dato luogo a tante discussioni ed a tante critiche, spero che faranno meditare tanto coloro che hanno fede di trovare nella economia matematica la soluzione di ogni questione economica, quanto quelli che la guardano con sospetto perché non offre loro tutto ciò che essi chiedono. Un tal sospetto ed una tal fede debbono fondersi nel sentimento che i metodi matematici servono ad una esplorazione, forse ristretta, ma quel che è certo sicura di un campo ben definito della scienza ed è perciò che la trattazione sistematica della economia con questi mezzi costituisce un passo ed un progresso che non deve trascurarsi.

Ma affinché questa trattazione possa dirsi pienamente giustificata e possa condurre ai risultati sicuri a cui si mira, è necessario prima di tutto che i problemi possano esser posti in maniera ben definita e siano appoggiati a definizioni ed a postulati che nulla di vago contengano e inoltre bisogna che nessun elemento fra quanti sono presi in considerazione e trattati come quantità possa sfuggire alla misura.

Una lacuna in quest'ultimo senso si poteva riscontrare in quasi tutte le passate trattazioni matematiche della economia, non esclusa quella contenuta nel «Cours d'Économie politique» pubblicato dallo stesso PARETO a Losanna nel 1896. Infatti la *ofelimità* che era l'elemento che veniva posto a base di tutta la trattazione e che veniva considerato come una funzione suscettibile di derivazione e di tutte le altre operazioni dell'analisi, sfuggiva alle misure dirette.

Il PARETO con raro coraggio e dando prova di quella onestà scientifica che è propria di chi ama nobilmente e disinteressatamente il vero e la scienza, ha riconosciuto questa lacuna nell'opera propria.

Egli dice infatti (pag. 156) che fu comune errore del prof. IRWING FISHER e suo il credere che nel caso generale si potesse dedurre dai fenomeni dell'equilibrio economico il valore dell'*ofelimità*. Egli quindi riprende la trattazione matematica da un altro punto di vista.

Una tale evoluzione delle idee del PARETO non è recente. Essa appare già nel «Sunto di alcuni capitoli di un nuovo trattato di economia politica» pubblicato alcuni anni fa in questo stesso giornale (s. II, Anno XI, vol. XX) ed è messa in ben chiara luce nel capitolo consacrato alle «Anwendungen der Mathematik auf Nationalökonomie» della «Enciclopedia delle scienze matematiche» pubblicata a Lipsia. Ivi il PARETO stesso ha posto a riscontro due metodi: quello fondato sul concetto di *ofelimità* e quello fondato sul concetto delle *linee di indifferenza*.

È sopra quest'ultimo concetto che la trattazione matematica del presente manuale è svolta. Abbiansi due beni economici X, Y le cui rispettive quantità sono x, y. Supponiamo che il possesso delle quantità $x+dx$, $y+dy$ di questi beni sia equivalente al possesso delle quantità, x, y allorché,

$$f_1(x, y)\,dx + f_2(x, y)\,dy = 0 \tag{1}$$

È questa l'equazione differenziale di quella che il PARETO chiama linea di indifferenza. Ora il binomio che costituisce il primo membro ammette infiniti fattori integranti e perciò esisteranno infinite equazioni equivalenti alla precedente della forma

$$dF(x, y) = 0.$$

Di qui risulta la indeterminazione della funzione F.

La *ofelimità* è una di queste funzioni F. Dunque, sebbene gli elementi che compariscono nella equazione (1) siano suscettibili di misura sperimentalmente, essi in generale non sono sufficienti ad individuare la *ofelimità*.

Il passaggio dal caso di due soli beni al caso di tre o più beni e la relativa discussione meriterebbero un esame più minuto di quello contenuto nel manuale. Infatti è noto che mentre una espressione differenziale binomia

$$Xdx + Ydy$$

ammette sempre infiniti fattori integranti, una espressione analoga trinomia o con un numero maggiore di termini può non ammetterli.

Ora un tale esame il PARETO fa nel citato «Sunto di alcuni capitoli, ecc.», non operando direttamente sulla espressione differenziale, ma in maniera equivalente, e siccome ci sembra che esso abbia importanza e sia del tipo caratteristico di quegli interessanti ragionamenti che si fanno operando sui cicli chiusi nella energetica, avremmo desiderato di vederlo riprodotto.

Ma è d'altra parte da osservare che nel caso in cui ciascun coefficiente dei differenziali è funzione della sola variabile corrispondente, caso che il PARETO mette particolarmente in evidenza, esso non è in alcun modo necessario, essendo cosa del tutto ovvia la esistenza dei fattori integranti in questo caso.

La parte del manuale ove i simboli matematici sono impiegati è ristretta nella Appendice che costituisce un complesso di poche pagine, ma ad ogni modo i calcoli sono spinti sotto un certo aspetto più innanzi di quello che il PARETO avesse fatto in altre sue opere. E ci auguriamo che essi lo siano di giorno in giorno sempre di più, e che siano il più possibile applicati a casi pratici, onde rifulgano i loro vantaggi e la loro utilità. Sarà questo il mezzo migliore e più persuasivo affinché essi si diffondano e siano apprezzati convenientemente.

Ma non deve ritenersi che la parte matematica dell'opera sia solo quella in cui si fa uso dei simboli dell'algebra e del calcolo. Sono i concetti ed i processi dimostrativi e logici quelli che formano l'essenza del metodo matematico e perciò si può dire che questo informi l'opera del PARETO fino dal terzo capitolo in cui egli introduce il concetto generale dell'equilibrio economico.

I processi geometrici sono impiegati infatti su larga scala in tutta l'opera e le rappresentazioni grafiche facilitano la comprensione di questioni che si presentano a primo aspetto difficili e spinose. Noi citiamo come particolarmente interessanti quelle che riguardano gli studi sulla popolazione al Cap. VII.

L'impiego di questi metodi geometrici, pur conservando il carattere elevato e rigoroso alle considerazioni svolte dall'autore, rendono accessibile lo svolgimento delle idee più sottili e delle conclusioni anche a coloro che non sono avvezzi all'algoritmo algebrico ed ai simboli del calcolo infinitesimale e non possiamo quindi che augurarci che l'opera del prof. PARETO sia diffusa presso tutti coloro a cui interessano le discipline economiche.

XII.

PROPOSTA DI UNA ASSOCIAZIONE ITALIANA PER IL PROGRESSO DELLE SCIENZE

«Atti del Congresso dei Naturalisti Italiani. Milano 1906»; *Saggi scientifici*, Bologna Zanichelli (s. d.) [1920], pp. 81–95.

Ho creduto che l'attuale Congresso dei naturalisti Italiani, al quale hanno fatto adesione illustri Accademie e numerose Società anche non schiettamente naturalistiche, potesse offrire la migliore occasione per presentare una proposta che a mio parere dovrà suscitare l'interesse di tutti gli scienziati in genere: quella cioè di una Associazione italiana per il progresso delle scienze.

Non si tratta di fondare una Associazione nuova per l'Italia, giacché, come avrò occasione di accennare, l'Associazione stessa ha già lungamente fiorito presso di noi, anzi possiede una storia gloriosa. Ma, a mio giudizio, non conviene risuscitare immutata la vecchia istituzione colle sue antiche tradizioni, sebbene nobili ed altissime. Si dovrebbe invece ricostituire sopra nuove basi una Associazione che ha avuto vita floridissima e che da un trentennio ormai tace.

Non ritengo necessario spender molte parole per dimostrarne la utilità. Esporrò solo alcuni dati i quali sono molto più eloquenti di qualunque discorso e mostrano come le Nazioni più innanzi nella civiltà hanno sentito da lunghi anni il bisogno di fondare e di conservare poi gelosamente delle Associazioni per l'avanzamento delle scienze dalle quali ritraggono non dubbio vantaggio.

La Società britannica per l'avanzamento delle scienze rimonta al 1831, anno in cui fu fondata dal BREWSTER. Essa conta 4500 membri. L'Associazione francese ha una data più recente, e venne fusa con l'Associazione scientifica di Francia che era stata già creata nel 1864 dal LE VERRIER. Essa pubblica dei resoconti a partire dal 1872. L'America possiede fino dal 1853 una Unione per il progresso delle scienze e delle arti, la quale dà alla luce un rapporto annuale. Esiste una analoga associazione in Australia che conta circa 1000 soci e si riunisce in congresso ogni due anni. La Germania ha costituito dal 1822 la Società dei Medici e Naturalisti ai quali si sono uniti i matematici ed altri scienziati. Nel 1904 la Società accoglieva 2910 membri. Ma la più antica associazione di questo genere appartiene alla Svizzera. La sua origine rimonta al 1815 ed oggi essa conta 800 soci; pubblica degli atti dal 1816, dei resoconti dal 1879 e delle memorie dal 1829.

Il più celebre di tutti questi sodalizi è senza dubbio l'Associazione britannica, sia per il gran numero di soci che ne fanno parte, sia per la ricchezza di mezzi di cui può disporre, sia finalmente per l'importanza dei risultati conseguiti con lungo, perseverante e non interrotto lavoro. Le sue solenni riunioni, che hanno luogo ogni anno in una città del Regno Unito o delle colonie, manifestano l'energia, l'intelligenza e tutte le nobili qualità che fanno la grandezza del popolo inglese.

Non è certamente qui il caso di parlare dei risultati conseguiti dalla Associazione britannica. Mi basti ricordare gli studi sulla questione delle unità assolute compiuti per sua iniziativa, i quali hanno condotto a conseguenze di somma importanza ed utilità nel campo teorico ed in quello pratico.

* * *

L'Italia ha seguìto fin dalla sua origine il movimento iniziatosi sui primi del secolo scorso con i congressi degli scienziati. La prima riunione di scienziati europei ebbe luogo in Svizzera nel 1816 per iniziativa del farmacista M. GASSE di Ginevra, e nel 1839 il primo Congresso degli scienziati italiani aveva luogo in Pisa. Fu il principe CARLO BONAPARTE, figlio di LUCIANO, che, preso d'ammirazione pel Congresso tenutosi in Friburgo nel 1838, ottenne dal Granduca di Toscana che ne fosse tenuto uno in Pisa nell'anno successivo.

La storia di questo congresso è stata narrata da varii autori ed ha un notevole interesse. Abbiamo di esso una relazione ufficiale scritta da GAETANO SAVI; una del CORRIDI, che ne fu il segretario generale; più recentemente ELISA TACCHI [1] ha pubblicato uno studio accurato e diligente prendendo occasione dallo scritto del prof. BACCI intitolato: « Una miscellanea di stampe sul primo congresso degli scienziati in Pisa » [2]. Le relazioni ufficiali non riflettono che i risultati scientifici conseguiti, ma dall'articolo ora ricordato e da tutte le memorie dell'epoca risulta appieno l'importanza politica del congresso, l'entusiasmo e le speranze che suscitò una riunione di cultori di scienze in Italia quando l'Italia non esisteva ancora come nazione, le diffidenze che destò nei governi di allora, le inquietudini della polizia. Il generale RADETZKY scriveva: « I dotti riuniti in Pisa si sono imposti la maggior riserbatezza nel parlare per non compromettere con imprudenze e indiscrezioni l'avvenire di una istituzione destinata a travagliare gli animi in segreto per gettare le fondamenta dell'opera infernale della rigenerazione italiana ».

Non mi addentrerò nei particolari del congresso, rimandando chi amasse conoscerli all'articolo citato, ad un bel lavoro del prof. LINAKER [3] e ad altri scritti speciali, ma non ho voluto passare sotto silenzio e nascondere che la questione politica, che allora padroneggiava, e ben giustamente, gli animi degli

(1) TACCHI ELISA, *Il primo Congresso degli Scienziati Italiani in Pisa.* « Studi storici », vol. XII (1903).

(2) O. BACCI, *Una miscellanea di stampe del primo Congresso degli Scienziati in Pisa* (1839). Raccolta di Studi critici dedicata a A. D'ANCONA. Firenze, Barbera, 1901.

(3) A. LINAKER, *I Congressi degli Scienziati e i Congressi pedagogici Italiani. Memorie e speranze.* « Rassegna Nazionale », vol. III (1880).

italiani e compenetrava ogni manifestazione di vita civile, dominava nascostamente quella riunione scientifica.

Questo fatto non ho voluto nasconderlo giacché deve ricercarsi in esso una delle cause principali della rapida decadenza dei congressi degli scienziati italiani dopo che l'Italia cessò di essere una aspirazione ed un sogno e divenne una realtà.

Il successivo congresso si tenne a Torino l'anno seguente, cioè nel 1840. Nel 1841 ebbe luogo a Firenze (4), nel 1842 a Padova, nel 1843 a Lucca, nel 1844 a Milano, nel 1845 a Napoli, nel 1846 a Genova, nel 1847 a Venezia e fu il nono congresso. Il decimo doveva aver luogo a Bologna, ma ben tre lustri s'interposero fra il nono e il decimo congresso che si riunì nel 1861 a Firenze in occasione della Esposizione italiana. Roma fu sede dell'undecimo convegno che si tenne nel 1872 e l'ultima riunione ebbe luogo nel 1875 a Palermo. Da quell'epoca i congressi sono cessati e non se ne parlò più.

Questi congressi degli scienziati italiani furono sempre frequentatissimi; circa 421 membri intervennero al primo del 1839 in Pisa, 500 a quello di Lucca, al congresso di Milano del 1844 i presenti erano 1159, e si pensi alle difficoltà di comunicazioni e di viaggi in quell'epoca. Trovo finalmente inscritti 788 scienziati all'ultimo congresso di Palermo.

Dei risultati scientifici molti in più occasioni han parlato e non è qui il momento di citarli né di discuterli. Però per dimostrare l'interesse che suscitarono non può tacersi che fin dalla loro origine richiamarono anche l'attenzione degli scienziati stranieri, e mi basti a titolo d'esempio di ricordare che una delle più celebri scoperte del matematico JACOBI, quella del principio dell'ultimo moltiplicatore, venne divulgata dal suo autore nel congresso di Lucca del 1843 (5).

Non pertanto al Congresso di Roma del 1872 l'idea di chiudere la serie delle riunioni degli scienziati italiani era nell'animo di molti. Riporterò le parole con le quali l'illustre MAMIANI inaugurò il successivo congresso quello di Palermo:

« Due anni or sono, egli diceva, parevano gli scienziati italiani disposti a smettere questa nobile usanza dell'adunarsi in congresso generale in qualche città illustre di fama e di studi. Le cagioni che si allegavano voi le sapete,

(4) E. MICHEL, *Il terzo Congresso degli Scienziati Italiani in Firenze 1841*. « La Rassegna Nazionale », vol. 163 (16 ottobre 1908).

(5) Gli atti di questi Congressi vennero volta a volta stampati. Per la parte dei risultati matematici in essi contenuti, il prof. CERRUTI ha scritto un importante studio. {*Le matematiche pure e miste nei primi dodici Congressi della Società italiana per il progresso delle scienze*, « Atti della Società italiana per il Progresso delle Scienze », vol. I, Roma 1908. [N. d. R.]}. Per la parte chimica, vedi: *La chimica nei Congressi degli Scienziati Italiani* per EMANUELE PATERNÒ, « Atti della Società Italiana per il Progresso delle Scienze », vol. I, Roma 1908.

Vedi anche per la storia dei Congressi stessi: SPINGARDI A., *Le medaglie dei Congressi degli Scienziati Italiani*, Rivista Italiana di Numismatica XV (1902) *Medaglie commemorative degli XI Congressi degli Scienziati Italiani* raccolte e riprodotte per cura di G. ARDIZZONE, con prefazione del Prof. A. GARBASSO, Firenze, 1914.

né giova di riandarle. Ma il singolar fatto fu questo, che, accolti essi in adunanza copiosa e fiorita nelle stanze del Campidoglio e consigliandosi sulla opportunità di abolire per sempre i congressi generali, ne uscì in iscambio una conferma impensata e solenne. Il che a mio giudizio non accadeva senza una ispirazione degli animi malconscia di sé, ma pur saggia e previdente. E di vero, potevasi egli interrompere una istituzione nata più che altro a testificare e riconfermare l'amicizia e parentela dei nostri popoli, la storia loro scambievole e la devozione ardente nella patria comune, potevasi, dico, interromperla non avendo ancor visitata Palermo, capo di quest'isola incantevole, di questa terra la più preziosa e la più lucente di tutto il Mediterraneo, la quale in ogni tempo insegnava all'Italia come si odia e come si spezza il giogo degli stranieri? ».

Dopo il felice esito del Congresso di Palermo non si sarebbe aspettata davvero la fine delle riunioni degli scienziati italiani, tanto più che un nuovo elaborato regolamento fu discusso e approvato, e ne resultò una nuova costituzione della Società. Il regolamento peraltro non venne applicato mai e il Congresso di Palermo fu realmente l'ultimo, giacché un trentennio è passato e l'Associazione Italiana per il progresso delle scienze non si fece mai viva, né di fatto esiste.

*
* *

Si tratta ora di cercare di ricostituirla sopra nuove basi. Come ho già detto, un gran numero di persone la ritiene utile ed è in ciò confortata dal luminoso esempio di quello che si fa all'estero. Del resto si può dir male dei Congressi, ma essi rappresentano un bisogno dell'epoca presente, e quanto più essi sono comprensivi, tanto più rispondono di fatto alle esigenze moderne, correggendo la tendenza alla eccessiva specializzazione, riunendo cultori di ricerche diverse, incoraggiando e spronando gli studiosi di una disciplina col mostrar loro quello che si fa nelle altre e quali sono i bisogni delle varie scienze, quali gli aiuti reciproci che esse possono prestarsi.

Il momento per tale ricostituzione sembra a molti di noi oggi opportuno per le ragioni che mi permetto brevemente di esporre.

È indubitato, come ho già avuto occasione di dimostrare, che il pensiero politico dominava nascosto le riunioni degli scienziati italiani fino a che l'Italia non fu costituita. La ragione politica, che aveva ad esse procurato dapprima vita rigogliosa, fu poi fonte di decadenza ed un segno evidente ce lo danno le parole stesse del MAMIANI che ho testè citate.

Ora lunghi anni sono trascorsi e la tradizione antica è ormai interrotta. Il rapido sviluppo intellettuale odierno dell'Italia è una garanzia che l'altissimo concetto dell'avanzamento e della divulgazione della scienza, concetto dominante nelle analoghe Società degli altri paesi, può bastare a dar vita e mantenere la nuova Associazione.

Ma un grave pericolo poteva sovrastare all'Associazione stessa, pericolo, agli occhi di molti, tale da comprometterne seriamente tutto l'edifizio.

Questo pericolo, però, ritengo che nelle condizioni attuali sia scongiurato. È certo che, se l'Associazione si costituirà, essa sarà composta in gran parte d'insegnanti. La scienza da noi, come del resto in Francia ed anche in Germania, è scienza ufficiale e sono vere eccezioni coloro che si occupano seriamente di studi scientifici senza appartenere al mondo dei professori. Ora un Congresso in gran parte formato di insegnanti universitari e di scuole secondarie, sarebbe stato fatalmente condotto, alcuni anni fa, ad occuparsi, non solo di questioni scientifiche, ma anche di questioni riguardanti i professori come corpo che impartisce l'insegnamento e riceve i suoi mezzi di sussistenza dallo Stato. Di qui l'esame degli ordinamenti scolastici e quello delle condizioni morali ed economiche del corpo insegnante. Dirò, senza tante ambagi, che se tali scottanti questioni fossero cominciate ad infiltrarsi nelle discussioni del nuovo sodalizio, dati gl'interessi che le questioni stesse toccano, le passioni che suscitano, esse avrebbero presto e facilmente preso il sopravvento sopra molte delle vere e proprie questioni scientifiche, e dilagando ed imponendosi avrebbero seriamente potuto compromettere l'avvenire della istituzione, distogliendola dai suoi veri scopi e rendendola forse non simpatica a quella grande maggioranza della parte colta del paese che giustamente desidera assistere a puri dibattiti scientifici.

Fortunatamente però, come ho già detto, un tale pericolo è ai miei occhi scomparso. Esistono già più Associazioni, quelle dei professori di Scuole secondarie e quella recentemente formatasi dei professori di Università, le prime delle quali hanno svolta una azione morale e politica che ha già condotto a nuove leggi per le Scuole secondarie e a nuove ancora condurrà. Quanto all'ultima, la sua azione sta già esplicandosi e svolgendosi rapidamente.

L'esistenza di queste Associazioni, già costituite ed operanti per loro conto con fini e con mezzi chiari e ben determinati, toglie completamente il pericolo che l'Associazione per l'avanzamento delle scienze possa essere distratta dai suoi veri fini e dai veri e propri interessi scientifici.

* * *

Resta a dire brevemente su quali basi si ritiene più opportuno fondare la nuova Associazione.

La scelta, come base, delle Accademie scientifiche esistenti in Italia, che era quella dell'antica istituzione, sarebbe opportuna in quanto darebbe la sicurezza di poter contare sopra ottimi elementi, ma darebbe luogo, come è facile accorgersi, a gravi inconvenienti. In primo luogo la base stessa sarebbe ristretta e avrebbe un carattere per dir così scientificamente aristocratico. Invece più che altro deve cercarsi che la nuova Associazione abbia una larga base, che possa stendere le sue radici liberamente in tutto il paese e abbracciare tutti coloro che volenterosi amano la scienza; sia quelli che hanno direttamente portato ad essa un contributo, sia quelli che desiderano solamente impadronirsi di quanto altri hanno scoperto. In una parola la nuova Associazione deve essere scientificamente democratica. Si corre, è vero, qualche rischio seguendo questo concetto, ma val la pena di correrlo per fare cosa giovane, vitale e moderna, purché il coraggio e la buona volontà non manchino.

Del resto, che cosa è che costituisce l'intima virtù delle analoghe Associazioni straniere? È che esse sono largamente aperte e che, in quei giorni in cui si riuniscono a Congresso, sono posti a fianco il vecchio campione della scienza che ha conquistato una fama sicura e durevole, e il giovane che fa i primi passi; quegli che s'interessa solo per proprio diletto delle ricerche scientifiche, e quegli che ne fa oggetto del culto più ardente di tutta la vita.

Ora è certo che sono già sorte da per tutto e per quasi tutte le discipline delle Società speciali aventi questo tipo democratico e moderno la cui azione si esplica parallelamente ed accanto alle antiche e celebri Accademie.

È sembrato a molti di noi che appoggiandosi a queste forze vigorose la nuova Associazione sorgerebbe vitale e robusta. La compartecipazione poi delle antiche e celebri Accademie non farebbe che accrescerne il decoro.

Però queste varie Società costituiscono degli organismi fra loro eterogenei con ordinamenti amministrativi diversi; ed è cosa buona ed utile che ciascuna seguiti a conservare la propria completa autonomia ed individualità e possa continuare ad esercitare la propria azione nell'ambito in cui questa si è sempre svolta, pur contribuendo alla creazione della nuova Associazione.

Per tutte queste ragioni storiche e di opportunità io vi presento il seguente ordine del giorno, il quale mi sembra possa contemperare gl'interessi di varia natura che ho avuto l'onore di esporvi:

« 1° Tutti i membri delle Società scientifiche rappresentate al Congresso sono senz'altro membri della Associazione per il progresso delle scienze.

« Sarà sufficiente soltanto che essi dichiarino di accettare di farne parte. Nessuna spesa importa tale accettazione. Il regolamento stabilirà le modalità di ulteriori ammissioni.

« 2° L'Associazione terrà Congressi periodici in epoche da stabilirsi ed in località pure da stabilirsi.

« Coloro che intendono di partecipare a tali riunioni pagheranno una somma che sarà da fissarsi per regolamento.

« 3° Il Congresso si dividerà in sezioni ed in sottosezioni, ciascuna delle quali corrisponderà ad una singola disciplina o ad un gruppo di discipline rappresentate dalle singole Società.

« Sarà dato modo a ciascuna Società che lo creda opportuno di organizzare delle sedute speciali per i propri membri durante il Congresso e indipendenti da quelle generali.

« 4° Una Commissione verrà nominata per studiare sulle basi precedenti uno Statuto ed un regolamento da sottoporsi all'esame delle varie Società, e da approvarsi nella prima riunione dell'Associazione per il progresso delle scienze, che avrà luogo in una città e in un'epoca che la detta Commissione stabilità.

« La Commissione stessa fungerà da Comitato ordinatore del futuro Congresso. Ogni singola Società si incaricherà delle comunicazioni ufficiali fra i suoi membri e questo Comitato » (6).

(6) Quest'ordine del giorno fu approvato. Una Commissione venne nominata secondo il n. 4, la cui opera ebbe compimento nell'anno successivo [1907] in Parma colla fondazione della *Società Italiana per il progresso delle Scienze*, e col suo primo congresso.

XIII.

SUR L'ÉQUILIBRE DES CORPS ÉLASTIQUES MULTIPLEMENT CONNEXES

«Annales sc. de l'Éc. Norm. Sup.», ser. 3ª, t. XXIV, 1907, pp. 401–518.

Introduction.

J'ai consacré ce Mémoire à une étude systématique de l'équilibre des corps élastiques multiplement connexes.

Dans le premier Chapitre, je montre qu'il y a des cas d'équilibre pour les corps à connexion multiple qui ne se présentent pas pour les corps à connexion simple. Le point de départ de ces recherches est le groupe de formules (I), (I'), (I'') du premier Chapitre. Lorsqu'on déforme un corps élastique on peut calculer, par ces formules, les déplacements en connaissant les éléments caractéristiques de la déformation. Les formules (I), (I'), (I'') caractérisent la polydromie des déplacements et montrent qu'un corps élastique multiplement connexe, à déformation régulière, peut garder la déformation étant en équilibre, sans l'action de forces extérieures. On obtient ces états d'équilibre par des opérations que j'ai appelées des *distorsions*.

Dans le deuxième Chapitre j'aï étudié les éléments qui caractérisent les distorsions.

La composition des tensions, qui sollicitent les éléments d'un corps élastique, sur lequel on a fait une ou plusieurs distorsions, donne lieu aux *efforts* que j'ai étudiés dans le Chapitre III. On peut exprimer l'énergie de déformation du corps élastique par les caractéristiques des distorsions et par celle des efforts ou par des formes bilinéaires de deux différentes espèces de caractéristiques. J'ai donné aussi dans ce Chapitre deux propositions fondamentales: le *théorème de réciprocité* pour les efforts et le *théorème des coupures équivalentes*.

Le Chapitre IV est consacré à l'étude des corps élastiques multiplement connexes et symétriques par rapport à un axe. La symétrie simplifie l'expression de l'énergie et de cette expression simplifiée on peut tirer plusieurs théorèmes très singuliers sur la distribution des efforts.

Dans le Chapitre V j'ai commencé des applications particulières afin de comparer les résultats du calcul à ceux de l'expérience et je les ai continuées dans les Chapitres VI et VII.

J'ai envisagé un cylindre creux qui est un corps à connexion double et j'ai calculé les formes qu'il doit prendre en l'assujettissant aux six distorsions élémentaires. On peut dessiner ces formes et les comparer avec celles qu'un gros cylindre creux de caoutchouc prend effectivement. Les dessins dont je viens de parler et les photographies du cylindre sont reproduits dans ces Chapitres.

Enfin, dans les Chapitres VIII et IX, j'ai étudié le problème suivant: *Déterminer les efforts en connaissant les distorsions d'un système formé par plusieurs parties déformables reliées rigidement entre elles.*

On arrive par là à un théorie du même type que celle de KIRCHHOFF sur la distribution des courants électriques dans les fils.

Les sept premiers Chapitres sont l'ensemble de quelques Articles que j'ai publiés à plusieurs reprises dans les «Comptes rendus de l'Académie des Lincei» (*). J'y ai ajouté les deux derniers Chapitres qui sont inédits.

J'ai aussi ajouté trois Notes: la première renferme une démonstration des formules (I), (I'), (I'') donnée par CESÀRO, après la publication de mes résultats; dans la seconde j'ai exposé les élégantes expériences faites par M. ROLLA dans le laboratoire de Physique de l'Université de Gènes, dirigé par M. GARBASSO. Par des expériences très ingénieuses d'Optique faites sur un cylindre creux de gélaine on peut distinguer les partie comprimées et celles dilatées lorsqu'on assujettit le cylindre à des distorsions. La troisième Note se rapporte à une méthode que M. ALMANSI vient de publier pour déterminer les déformations des cylindres à connexion multiple.

Je dois remercier MM. les professeurs ALESSANDRINI et TRANQUILLI pour la traduction française de ce Mémoire; MM. les professeurs SELLA, PITTARELLI, ZAMBIASE pour les expériences, les dessins et les photographies et M. l'ingénieur JONA pour les modèles en caoutchouc.

CHAPITRE I.

Théorèmes généraux sur l'équilibre (**).

I.

1. M. WEINGARTEN a publié une Note intéressante [1]: *Sur la théorie de l'élasticité.* Il a remarqué qu'il peut exister des cas dans lesquels un corps élastique tout en n'étant sujet à aucune action extérieure, c'est-à-dire sans être sujet ni aux forces extérieures agissant sur ses points intérieurs, ni aux forces extérieures agissant sur sa surface, peut cependant ne pas se trouver à l'état naturel, mais être dans un état de tension qui varie d'une façon continue et régulière d'un point à l'autre.

Il est facile de trouver des cas pratiques de corps dans ces conditions. Par exemple, un anneau auquel on a supprimé une tranche trés mince transversale et dont on a ensuite ressoudé les deux extrémités.

(*) Queste Note del VOLTERRA trovasi elencate nella Bibliografia, alla fine della presente Memoria (pp. 241-242). Ad evitare inutili ripetizioni tali Note non sono state pubblicate in queste «Opere». [N.d.R.].

(**) Traduzione, con lievissime modificazioni di forma, della Nota: *Un teorema sulla teoria della elasticità.* «Rend. Acc. Lincei», s. 5^a, vol. XIV_1 1905_1, pp. 127-137. [N.d.R.].

(1) *Sur les surfaces de discontinuité dans la théorie de l'élasticité des corps solides,* «Rend. R. Acc. Lincei», 5^e série, Vol. X, 1^{er} sem. 1901.

2. Dans la Note de M. WEINGARTEN il y a une question qui reste en suspens. En dehors des anneaux et des autres corps qui occupent des espaces multiplement connexes peut-il exister des corps simplement connexes qui se trouvent dans les conditions précédentes?

A première vue, la question n'est pas facile à résoudre; mais intuitivement on serait porté à donner une réponse affirmative. En effet, on serait porté à croire que, même dans les cas de corps simplement connexes, en produisant une fente et en y introduisant à force un élément cunéiforme, ou même en ressoudant les deux surfaces de la fente, on pourrait obtenir des états d'équilibre sans forces extérieures, dans lesquels la tension et la déformation varient sans discontinuité et régulièrement d'un point à un autre comme dans les corps à connexion multiple. M. WEINGARTEN a donné des conditions qui devraient se vérifier dans ces cas, si toutefois ceux-ci existent.

3. Dans ce Chapitre nous démontrerons, à l'aide d'une simple observation analytique, l'impossibilité de ces cas lorsqu'on admet que les éléments caractéristiques de la déformation (2) et leurs dérivées premières et secondes sont continus.

Ceci établit un étroit rapport entre la question d'élasticité et une question analogue d'hydrodynamique.

Le théorème d'hydrodynamique auquel nous nous rapportons est le suivant:

Un fluide incompressible fini qui se trouve renfermé entre des parois rigides et fixes, et dans lequel n'existent pas des tourbillons doit rester en repos si l'espace qu'il occupe est simplement connexe (acyclique); au contraire il peut être en mouvement si l'espace occupé est multiplement connexe (cyclique) (3).

Voici maintenant les propriétés analogues pour l'élasticité.

Nous dirons que la déformation d'un corps élastique est régulière si les six caractéristiques de la déformation sont fonctions finies, continues et monodromes, ayant aussi les dérivées du premier et du second ordre finies, continues et monodromes.

Nous pourrons alors énoncer le théorème suivant:

Si un corps élastique occupe un espace fini simplement connexe (acyclique) et subit des déformations régulières, il se trouvera à l'état naturel, quand il est en équilibre et il n'est pas sujet à des forces extérieures.

(2) Nous appelons *éléments caractéristiques d'une déformation* les *six déformations élémentaires*, c'est-à-dire les *trois dilatations* et les *trois glissements* (voir CLEBSCH, *Théorie de l'élasticité des corps solides*, traduite par de SAINT-VENANT et FLAMANT, p. 46 et suivantes). Les caractéristiques de la déformation correspondent aussi au *strain* selon la nomenclature des Anglais.

(3) La connexion des espaces à trois dimensions est de deux sortes: *connexion superficielle* ou *périphaxie* et *connexion linéaire* ou *cyclose*. La connexion qui nous intéresse est la cyclose (voir J. CLERK MAXWELL, *Traité d'électricité et de magnétisme*, traduit par G. SELIGMANN-LUI, t. I, p. 18 et suivantes).

2. Dans la Note de M. WEINGARTEN il y a une question qui reste en suspens. En dehors des anneaux et des autres corps qui occupent des espaces multiplement connexes peut-il exister des corps simplement connexes qui se trouvent dans les conditions précédentes?

A première vue, la question n'est pas facile à résoudre; mais intuitivement on serait porté à donner une réponse affirmative. En effet, on serait porté à croire que, même dans les cas de corps simplement connexes, en produisant une fente et en y introduisant à force un élément cunéiforme, ou même en ressoudant les deux surfaces de la fente, on pourrait obtenir des états d'équilibre sans forces extérieures, dans lesquels la tension et la déformation varient sans discontinuité et régulièrement d'un point à un autre comme dans les corps à connexion multiple. M. WEINGARTEN a donné des conditions qui devraient se vérifier dans ces cas, si toutefois ceux-ci existent.

3. Dans ce Chapitre nous démontrerons, à l'aide d'une simple observation analytique, l'impossibilité de ces cas lorsqu'on admet que les éléments caractéristiques de la déformation (2) et leurs dérivées premières et secondes sont continus.

Ceci établit un étroit rapport entre la question d'élasticité et une question analogue d'hydrodynamique.

Le théorème d'hydrodynamique auquel nous nous rapportons est le suivant:

Un fluide incompressible fini qui se trouve renfermé entre des parois rigides et fixes, et dans lequel n'existent pas des tourbillons doit rester en repos si l'espace qu'il occupe est simplement connexe (acyclique); au contraire il peut être en mouvement si l'espace occupé est multiplement connexe (cyclique) (3).

Voici maintenant les propriétés analogues pour l'élasticité.

Nous dirons que la déformation d'un corps élastique est régulière si les six caractéristiques de la déformation sont fonctions finies, continues et monodromes, ayant aussi les dérivées du premier et du second ordre finies, continues et monodromes.

Nous pourrons alors énoncer le théorème suivant:

Si un corps élastique occupe un espace fini simplement connexe (acyclique) et subit des déformations régulières, il se trouvera à l'état naturel, quand il est en équilibre et il n'est pas sujet à des forces extérieures.

(2) Nous appelons *éléments caractéristiques d'une déformation* les *six déformations élémentaires*, c'est-à-dire les *trois dilatations* et les *trois glissements* (voir CLEBSCH, *Théorie de l'élasticité des corps solides*, traduite par de SAINT-VENANT et FLAMANT, p. 46 et suivantes). Les caractéristiques de la déformation correspondent aussi au *strain* selon la nomenclature des Anglais.

(3) La connexion des espaces à trois dimensions est de deux sortes: *connexion superficielle* ou *périphaxie* et *connexion linéaire* ou *cyclose*. La connexion qui nous intéresse est la cyclose (voir J. CLERK MAXWELL, *Traité d'électricité et de magnétisme*, traduit par G. SELIGMANN-LUI, t. I, p. 18 et suivantes).

2. Dans la Note de M. WEINGARTEN il y a une question qui reste en suspens. En dehors des anneaux et des autres corps qui occupent des espaces multiplement connexes peut-il exister des corps simplement connexes qui se trouvent dans les conditions précédentes?

A première vue, la question n'est pas facile à résoudre; mais intuitivement on serait porté à donner une réponse affirmative. En effet, on serait porté à croire que, même dans les cas de corps simplement connexes, en produisant une fente et en y introduisant à force un élément cunéiforme, ou même en ressoudant les deux surfaces de la fente, on pourrait obtenir des états d'équilibre sans forces extérieures, dans lesquels la tension et la déformation varient sans discontinuité et régulièrement d'un point à un autre comme dans les corps à connexion multiple. M. WEINGARTEN a donné des conditions qui devraient se vérifier dans ces cas, si toutefois ceux-ci existent.

3. Dans ce Chapitre nous démontrerons, à l'aide d'une simple observation analytique, l'impossibilité de ces cas lorsqu'on admet que les éléments caractéristiques de la déformation (2) et leurs dérivées premières et secondes sont continus.

Ceci établit un étroit rapport entre la question d'élasticité et une question analogue d'hydrodynamique.

Le théorème d'hydrodynamique auquel nous nous rapportons est le suivant:

Un fluide incompressible fini qui se trouve renfermé entre des parois rigides et fixes, et dans lequel n'existent pas des tourbillons doit rester en repos si l'espace qu'il occupe est simplement connexe (acyclique); au contraire il peut être en mouvement si l'espace occupé est multiplement connexe (cyclique) (3).

Voici maintenant les propriétés analogues pour l'élasticité.

Nous dirons que la déformation d'un corps élastique est régulière si les six caractéristiques de la déformation sont fonctions finies, continues et monodromes, ayant aussi les dérivées du premier et du second ordre finies, continues et monodromes.

Nous pourrons alors énoncer le théorème suivant:

Si un corps élastique occupe un espace fini simplement connexe (acyclique) et subit des déformations régulières, il se trouvera à l'état naturel, quand il est en équilibre et il n'est pas sujet à des forces extérieures.

(2) Nous appelons *éléments caractéristiques d'une déformation* les *six déformations élémentaires*, c'est-à-dire les *trois dilatations* et les *trois glissements* (voir CLEBSCH, *Théorie de l'élasticité des corps solides*, traduite par de SAINT-VENANT et FLAMANT, p. 46 et suivantes). Les caractéristiques de la déformation correspondent aussi au *strain* selon la nomenclature des Anglais.

(3) La connexion des espaces à trois dimensions est de deux sortes: *connexion superficielle* ou *périphaxie* et *connexion linéaire* ou *cyclose*. La connexion qui nous intéresse est la cyclose (voir J. CLERK MAXWELL, *Traité d'électricité et de magnétisme*, traduit par G. SELIGMANN-LUI, t. I, p. 18 et suivantes).

Au contraire:

Un corps élastique en équilibre, qui occupe un espace fini multiplement connexe (cyclique), pourra ne pas être à l'état naturel, c'est-à-dire pourra se trouver dans un état de tension, même quand il n'est sujet à des forces extérieures, sa déformation étant régulière.

Cette proposition établit une différence essentielle entre les propriétés des corps élastiques qui occupent des espaces simplement connexes (acycliques) et celles des corps qui occupent des espaces multiplement connexes (cycliques).

Si nous nous rapportons aux cas pratiques déjà rappelés, ce que nous venons de dire signifie que dans le cas de la connexion simple, l'introduction d'une couche cunéiforme ou la suppression d'une tranche très mince suivie de la soudure des surfaces de la fente, engendre toujours dans le système élastique une déformation irrégulière ou des lacunes; tandis que la propriété contraire peut se vérifier quand la connexion est multiple.

En général, nous pourrons affirmer que, s'il existe un corps qui n'est pas sujet à des actions extérieures et qui est dans un état de tension, il doit, ou occuper un espace multiplement connexe, ou avoir en quelque région une déformation irrégulière.

Dans ce Chapitre, le deuxième Article sera consacré à la démonstration de la proposition énoncée et le suivant à des exemples analytiques relatifs aux corps élastiques multiplement connexes qui se trouvent dans un état de tension tout en n'étant soumis à des forces extérieures.

II.

1. Représentons par $\gamma_{11}, \gamma_{22}, \gamma_{33}, \gamma_{23}, \gamma_{31}, \gamma_{12}$ six fonctions des variables x, y, z monodromes, finies, continues et ayant aussi les dérivées du premier et du second ordre monodromes, finies et continues dans un domaine à trois dimensions S simplement connexe. Menons dans l'intérieur du domaine S une ligne régulière s, représentons ses coordonnées par x, y, z et appelon x_0, y_0, z_0; x_1, y_1, z_1 celles des extrémités A_0 et A_1.

La direction positive de s soit de A_0 à A_1. Les valeurs des quantités γ_{is} en A_0 et A_1 soient représentées respectivement par $\gamma_{is}^{(0)}$ et $\gamma_{is}^{(1)}$. Supposons $\gamma_{rs} = \gamma_{sr}$. Posons:

$$
\text{(I)} \qquad \begin{aligned}
u = u_0 &+ \frac{1}{2}(\gamma_{21}^{(0)} + r_0)(y_1 - y_0) + \frac{1}{2}(\gamma_{31}^{(0)} - q_0)(z_1 - z_0) \\
&+ \int_s \left\{ \left[\gamma_{11} + (y_1 - y)\frac{\partial \gamma_{11}}{\partial y} + (z_1 - z)\frac{\partial \gamma_{11}}{\partial z} \right] \frac{dx}{ds} \right. \\
&+ \left[(y_1 - y)\left(\frac{\partial \gamma_{12}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{22}}{\partial x} \right) + \left(\frac{z_1 - z}{2} \right)\left(\frac{\partial \gamma_{21}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{31}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{23}}{\partial x} \right) \right] \frac{dy}{ds} \\
&+ \left. \left[\left(\frac{y_1 - y}{2} \right)\left(\frac{\partial \gamma_{21}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{31}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{23}}{\partial x} \right) + (z_1 - z)\left(\frac{\partial \gamma_{13}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{33}}{\partial x} \right) \right] \frac{dz}{ds} \right\} ds,
\end{aligned}
$$

$$(\mathrm{I}') \qquad v = v_0 + \frac{1}{2}(\gamma_{32}^{(0)} + p_0)(z_1 - z_0) + \frac{1}{2}(\gamma_{12}^{(0)} - r_0)(x_1 - x_0)$$

$$+ \int_s \left\{ \left[\left(\frac{z_1 - z}{2}\right)\left(\frac{\partial \gamma_{32}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{12}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{31}}{\partial y}\right) + (x_1 - x)\left(\frac{\partial \gamma_{21}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{11}}{\partial y}\right)\right] \frac{dx}{ds} \right.$$

$$+ \left[\gamma_{22} + (z_1 - z)\frac{\partial \gamma_{22}}{\partial z} + (x_1 - x)\frac{\partial \gamma_{22}}{\partial x}\right] \frac{dy}{ds}$$

$$\left. + \left[(z_1 - z)\left(\frac{\partial \gamma_{23}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{33}}{\partial y}\right) + \left(\frac{x_1 - x}{2}\right)\left(\frac{\partial \gamma_{32}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{12}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{31}}{\partial y}\right)\right] \frac{dz}{ds} \right\} ds,$$

$$(\mathrm{I}'') \qquad w = w_0 + \frac{1}{2}(\gamma_{13}^{(0)} + q_0)(x_1 - x_0) + \frac{1}{2}(\gamma_{23}^{(0)} - p_0)(y_1 - y_0)$$

$$+ \int_s \left\{ \left[(x_1 - x)\left(\frac{\partial \gamma_{31}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{11}}{\partial z}\right) + \left(\frac{y_1 - y}{2}\right)\left(\frac{\partial \gamma_{13}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{23}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{12}}{\partial z}\right)\right] \frac{dx}{ds} \right.$$

$$+ \left[\left(\frac{x_1 - x}{2}\right)\left(\frac{\partial \gamma_{13}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{23}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{12}}{\partial z}\right) + (y_1 - y)\left(\frac{\partial \gamma_{32}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{22}}{\partial x}\right)\right] \frac{dy}{ds}$$

$$\left. + \left[\gamma_{33} + (x_1 - x)\frac{\partial \gamma_{33}}{\partial x} + (y_1 - y)\frac{\partial \gamma_{33}}{\partial y}\right] \frac{dz}{ds} \right\} ds,$$

où $u_0, v_0, w_0, p_0, q_0, r_0$ sont des quantités constantes.

Cherchons les conditions afin que u, v, w ne dépendent pas de la ligne d'intégrations s, mais seulement des deux extrémités A_0 et A_1, c'est-à-dire, en supposant A_0 fixe, cherchons les conditions afin que u, v, w soient des fonctions de x_1, y_1, z_1.

2. A cet effet, il suffit de supposer la ligne s fermée en faisant coïncider les points A_0 et A_1 et déterminer les conditions afin que les intégrales étendues à la ligne s soient nulles.

Le théorème de STOKES, lorsque la ligne s est fermée, transforme ces intégrales en

$$\int_\sigma \left\{ \left(\left(\frac{y_1 - y}{2}\right) B - \frac{z_1 - z}{2} C\right) \cos nx + \left[(z_1 - z) F + \frac{y_1 - y}{2} A\right] \cos ny \right.$$

$$\left. + \left[(y_1 - y) G + \frac{z_1 - z}{2} A\right] \cos nz \right\} d\sigma,$$

$$\int_\sigma \left\{ \left[(z_1 - z) E + \frac{x_1 - x}{2} B\right] \cos nx + \left(\frac{z_1 - z}{2} C - \frac{x_1 - x}{2} A\right) \cos ny \right.$$

$$\left. + \left[(x_1 - x) G + \frac{z_1 - z}{2} B\right] \cos nz \right\} d\sigma,$$

$$\int_\sigma \left\{ \left[(y_1 - y) E + \frac{x_1 - x}{2} C\right] \cos nx + \left[(x_1 - x) F + \frac{y_1 - y}{2} C\right] \cos ny \right.$$

$$\left. + \left(\frac{x_1 - x}{2} A - \frac{y_1 - y}{2} B\right) \cos nz \right\} d\sigma,$$

où σ est une surface ayant pour contour s et se trouvant dans l'intérieur du domaine S; n dénote la normale à σ tracée dans une direction convenable et

$$A = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \gamma_{31}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{12}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{23}}{\partial x}\right) - 2\frac{\partial^2 \gamma_{11}}{\partial z \partial y} \quad , \quad E = \frac{\partial^2 \gamma_{32}}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 \gamma_{22}}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{33}}{\partial y^2},$$

$$B = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \gamma_{12}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{23}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{31}}{\partial y}\right) - 2\frac{\partial^2 \gamma_{22}}{\partial x \partial z} \quad , \quad F = \frac{\partial^2 \gamma_{13}}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 \gamma_{33}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{11}}{\partial z},$$

$$C = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \gamma_{23}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{31}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{12}}{\partial z}\right) - 2\frac{\partial^2 \gamma_{33}}{\partial y \partial x} \quad , \quad G = \frac{\partial^2 \gamma_{21}}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \gamma_{11}}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{22}}{\partial x^2}.$$

Il s'ensuit que les conditions nécessaires et suffisantes pour que u, v, w soient indépendants de la ligne s d'intégration sont:

$$\text{(II)} \qquad A = B = C = E = F = G = 0.$$

3. Supposons que les conditions précédentes soient vérifiées; u, v, w seront des fonctions de x_1, y_1, z_1.

Pour calculer leurs dérivées par rapport à x_1, y_1, z_1, il faut remarquer que ces quantités paraissent explicitement sous le signe d'intégration et qu'elles sont en même temps les coordonnées d'une extrémité de la ligne d'intégration. Cette observation étant faite, les règles ordinaires du calcul conduisent aisément aux formules

$$(1) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x_1} = \gamma_{11}^{(1)} \quad , \quad \dfrac{\partial v}{\partial y_1} = \gamma_{22}^{(1)} \quad , \quad \dfrac{\partial w}{\partial z_1} = \gamma_{33}^{(1)}, \\[2ex] \dfrac{\partial v}{\partial z_1} + \dfrac{\partial w}{\partial y_1} = \gamma_{23}^{(1)} \quad , \quad \dfrac{\partial w}{\partial x_1} + \dfrac{\partial u}{\partial z_1} = \gamma_{31}^{(1)} \quad , \quad \dfrac{\partial u}{\partial y_1} + \dfrac{\partial v}{\partial x_1} = \gamma_{12}^{(1)}. \end{cases}$$

On tire de là que, lorsque les quantités γ_{rs} satisfont les conditions (II), on peut trouver les trois fonctions u, v, w qui vérifient les équations (1), c'est-à-dire que l'on peut considerer les quantités γ_{rs} comme les six caractéristiques de la déformation d'un milieu élastique. La proposition réciproque se vérifie immédiatement.

4. Les formules (I), (I'), (I'') sont utiles et intéressantes puisque chacune d'elles donne le moyen d'obtenir par une simple quadrature une des composantes du déplacement étant donné les caractéristiques de la déformation.

KIRCHHOFF [4] et LOVE [5] ont calculé chacune des dérivées de u, v, w par des quadratures analogues. On peut à l'aide d'intégrations faciles passer des formules de KIRCHHOFF et LOVE aux (I), (I'), (I''). Dans celles-ci paraissent les six constantes arbitraires $u_0, v_0, w_0, p_0, q_0, r_0$, c'est-à-dire les valeurs des composantes du déplacement dans le point A_0 et celles des com-

(4) *Mechanik*, XXVII Vorl., § 4.
(5) *Math. Theory of elasticity*, Vol. I, § 66.

posantes du vecteur, appelé par MAXWELL *rotation*. Les égalités (II) ne sont que les formules très connues de SAINT-VENANT.

5. Les équations (II) expriment les conditions afin que les valeurs de u, v, w, données par les formules (I), (I'), (I'') soient indépendantes de la ligne d'intégration quand l'espace S est simplement connexe: mais, si l'espace S est multiplement connexe, ces valeurs peuvent dépendre de la ligne d'intégration tout en étant satisfaites les conditions (II). Rappelons, en effet, que l'on a démontré l'indépendance de la ligne sur les valeurs de u, v, w dans le paragraphe 2 où l'espace a été supposé simplement connexe, en observant que chaque ligne fermée s de l'espace peut être regardée comme le contour d'une surface σ appartenant au même espace. Mais, si l'espace est multiplement connexe, ce fait ne se vérifie plus pour chaque ligne s et l'on voit alors que les valeurs de u, v, w peuvent dépendre de la ligne d'intégration. Nous avons donc le théorème suivant:

Un corps élastique qui occupe un espace simplement connexe et dont la déformation est régulière peut toujours être amené à son état naturel à l'aide de dèplacements finis, continus et monodromes de ses points.

Au contraire, nous pouvons dire:

Si un corps élastique occupe un espace multiplement connexe et si sa déformation est régulière, les déplacements des points ne sont pas nécessairement monodromes.

Réduisons simplement connexe l'espace cyclique moyennant un système de coupures. Alors les déplacements qui correspondent à la déformation donnée peuvent être regardés, dans l'espace sectionné, comme des fonctions finies continues et monodromes, mais leurs valeurs peuvent ne pas se rattacher avec continuité suivant lesdites coupures. Lorsque cela arrive, si l'on veut ramener le corps à l'état naturel, il faut, ou supprimer la connexion de la matière suivant les coupures et y produire des fissures, ou retrancher de la matière, ou faire glisser les deux surfaces de la fente l'une sur l'autre (*voir* les exemples de l'Article suivant).

6. Rappelons maintenant la démonstration que l'on fait [6] pour prouver qu'un corps élastique qui n'est pas sujet aux forces extérieures se trouve à l'état naturel. Elle présuppose implicitement que les points du corps élastique subissent des déplacements finis, continus et monodromes et que la déformation du système est régulière. C'est pourquoi, si l'on sait que la déformation est régulière, que le corps occupe un espace simplement connexe et qu'il n'est pas soumis à des forces extérieures, on peut conclure que le système ne devra pas être sujet à aucune tension intérieure. Mais, si le corps occupe un espace multiplement connexe, la déformation régulière pourra coexister avec une polydromie des déplacements et alors le corps pourra être dans un état de tension, même s'il n'est pas sujet à des forces extérieures.

(6) Voir par exemple CLEBSCH, op. cit., p. 132 et suiv.

C'est par là qu'on tire le théorème que nous avons énoncé à l'Article I.

7. On peut déduire facilement de ce théorème un corollaire intéressant: *Lorsque l'on connaît les forces extérieures qui agissent sur un corps élastique, la dèformation est individualisée si l'espace occupé par le corps est simplement connexe; mais elle n'est pas déterminée si le même espace est multiplement connéxe à moins qu'on ne sache,* a priori, *que le système peut être ramené à l'état naturel par des déplacements finis, continus et monodromes.*

Là démonstration de ce corollaire découle immédiatement de celle du théorème que l'on vient de rappeler.

Donc la théorie mathématique de l'élasticité doit être modifiée dans le cas des corps qui occupent des espaces multiplement connexes, car cette théorie est entièrement appuyée sur le fait général que les forces extérieures déterminent la déformation du corps. Voilà l'intèrêt de la proposition que nous venons d'énoncer. La théorie ordinaire reste le même dans le cas des corps qui occupent des espaces simplement connexes, ou même quand on sait, *a priori*, que le système peut être ramené à l'état naturel par le moyen de déplacements monodromes.

8. Il est facile de tirer des formules (I), (I'), (I'') la nature des discontinuités que présentent les déplacements u, v, w, suivant les coupures qui rendent l'espace occupé par le corps simplement connexe. Appelons u_α, v_α, w_α les valeurs d'un côté de ces sections, u_β, v_β, w_β les valeurs de l'autre côté et posons

$$u_\beta - u_\alpha = \mathrm{U} \quad , \quad v_\beta - v_\alpha = \mathrm{V} \quad , \quad w_\beta - w_\alpha = \mathrm{W}.$$

En indiquant par l, m, n, p, q, r six quantités constantes suivant chaque section, nous avons

$$\text{(III)} \qquad \mathrm{U} = l + ry - qz \quad , \quad \mathrm{V} = m + pz - rx \quad , \quad \mathrm{W} = n + qx - py,$$

comme M. WEINGARTEN avait trouvé d'une autre façon.

Dans le cas, donc, d'un corps multiplement connexe à chacune des coupures, qui servent à réduire l'espace simplement connexe, on peut faire correspondre six constantes qui individualisent la polydromie des déplacements calculés par les formules (I), (I'), (I'').

Ces constantes, par analogie à ce que l'on fait dans la théorie des fonctions, peuvent s'appeler *les six constantes de chaque coupure.*

La proposition fondamentale de la théorie de l'élasticité doit s'énoncer alors dans les termes suivants:

Si un corps élastique occupe un espace multiplement connexe et si sa déformation est régulière, celle-ci sera déterminée par les forces extérieures et par les six constantes relatives à chacune des coupures qui servent à réduire l'espace simplement connexe.

III.

Exemple I.

1. Posons

$$\begin{aligned}
\gamma_{11} &= \frac{\beta x^2 - \alpha y^2}{x^2 + y^2} + \frac{\beta}{2} \log (x^2 + y^2) \quad , & \gamma_{23} &= 2\gamma \frac{yz}{x^2+y^2}, \\
\gamma_{22} &= \frac{\beta y^2 - \alpha x^2}{x^2 + y^2} + \frac{\beta}{2} \log (x^2 + y^2) \quad , & \gamma_{31} &= 2\gamma \frac{xz}{x^2+y^2}, \\
\gamma_{33} &= \gamma \log (x^2 + y^2) \quad , & \gamma_{12} &= 2(\alpha+\beta) \frac{xy}{x^2+y^2}
\end{aligned}$$

où α, β, γ sont des quantités constantes.

Il est facile de vérifier que les équations (II) de de SAINT-VENANT sont satisfaites. Ces fonctions n'ont d'autres singularités que pour $x = y = 0$, c'est-à-dire suivant l'axe coordonné z.

En excluant donc ce lieu singulier par un cylindre ayant pour axe z, dans tout l'espace restant ces quantités pourront être interprétées comme les caractéristiques d'une déformation régulière T.

On calcule facilement les composantes u, v, w des déplacements correspondants. Elles seront données (à moins d'un déplacement rigide arbitraire) par les formules

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned}
u &= \alpha y \operatorname{arc\,tang} \frac{y}{x} + \frac{\beta}{2} x \log (x^2 + y^2), \\
v &= -\alpha x \operatorname{arc\,tang} \frac{y}{x} + \frac{\beta}{2} y \log (x^2 + y^2), \\
w &= \gamma z \log (x^2 + y^2).
\end{aligned}\right.$$

Les fonction u et v sont polydromes et l'axe de diramation est l'axe z.

2. Cela posé, imaginons un corps isotrope homogène C qui occupe un espace S limité par deux cylindres de révolution σ_1 et σ_2 qui ont pour axe z et dont les rayons sont R_1 et R_2 et par deux plans normaux à l'axe z. Si l'on suppose nulles les forces extérieures, les équations indéfinies de l'équilibre,

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned}
K\Delta^2 u + (L+K) \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) &= 0, \\
K\Delta^2 v + (L+K) \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) &= 0, \\
K\Delta^2 w + (L+K) \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) &= 0,
\end{aligned}\right.$$

seront satisfaites par les fonctions (2) quand est vérifiée l'équation

$$K\alpha + (L + 2K)\beta + (L+K)\gamma = 0,$$

qui, à son tour, sera satisfaite en prenant

$$\gamma = 0 \quad , \quad \beta = -\alpha \frac{K}{L + 2K}.$$

Le calcul des forces extérieures agissant sur la surface ne présente pas de difficultés. Su la surface σ_1 nous trouvons une tension uniforme normale à σ_1 dirigée vers l'intérieur de la masse, donnée par

$$T_{\sigma_1} = \alpha (L + K)\left(1 + \frac{2K}{L + 2K} \log R_1\right)$$

et de même sur σ_2 une tension normale uniforme et dirigée vers l'intérieur de la masse, donnée par

$$T_{\sigma_2} = \alpha (L + K)\left(1 + \frac{2K}{L + 2K} \log R_2\right),$$

tandis que sur les deux bases normales à z nous trouvons les tensions normales dirigées toujours vers l'intérieur

$$T_\omega = \frac{\alpha L}{L + 2K}(L + 3K + 2K \log r)$$

où r désigne la distance de l'axe z.

3. Imaginons maintenant un corps fictif de même nature que le corps C et qui occupe le même espace, mais qui se trouve à l'état naturel. Sans lui ôter la connexion, sollicitons-le moyennant les forces $T_{\sigma_1}, T_{\sigma_2}$ et T_ω agissant sur les surfaces latérales et sur les bases. Indiquons avec u', v', w' les composantes correspondantes du déplacement. Celles-ci seront des fonctions finies, continues et monodromes, et, si nous prenons

$$u'' = u - u' = \alpha\left[\quad y \operatorname{arc\,tang} \frac{y}{x} - \frac{1}{2}\frac{K}{L + 2K} x \log (x^2 + y^2)\right] - u',$$

$$v'' = v - v' = \alpha\left[- x \operatorname{arc\,tang} \frac{y}{x} - \frac{1}{2}\frac{K}{L + 2K} y \log (x^2 + y^2)\right] - v',$$

$$w'' = w - w' = - w',$$

nous obtenons un système de déplacements du corps C qui ne sont pas zéro et sont différents d'un déplacement rigide. Aux déplacement u'', v'', w'' correspond une déformation différente de zéro et régulière et par conséquence une tension intérieure; mais les forces extérieures sont nulles. Si nous indiquons avec γ'_{is} les caractéristiques de la déformation Γ' correspondante aux déplacements u', v', w', celles de la déformation Γ'' correspondante à u'', v'', w'' sont

$$\gamma''_{is} = \gamma_{is} - \gamma'_{is}.$$

4. Les fonctions u'', v'', w'' sont polydromes ainsi que u, v, w et elles ont pour axe de polydromie l'axe z. Appelons $u''_\alpha, v''_\alpha, w''_\alpha$ les valeurs de u'', v'', w'' dans un point situé sur le plan xz du côté positif de l'axe x. Partant de ce point, parcourons un cycle autour de l'axe z et prenons les valeurs successives

de u'', v'', w'' qui se suivent avec continuité. Indiquons avec $u''_\beta, v''_\beta, w''_\beta$ les valeurs par lesquelles on revient au point de départ, nous aurons

$$u''_\beta - u''_\alpha = 0 \quad , \quad v''_\beta - v''_\alpha = -2\pi\alpha x \quad , \quad w''_\beta - w''_\alpha = 0.$$

5. Il s'ensuit que, si α est positif, l'état de déformation régulière Γ'' du corps peut s'obtenir en prenant le corps qui occupe dans l'état naturel le cylindre creux précédemment considéré, en y faisant ensuite une coupure suivant le plan xz du côté positif de l'axe x et, enfin, en plaçant entre les deux parois de la coupure une couche très mince dont l'épaisseur varie proportionnellement à la distance de l'axe.

Si α est négatif, pour obtenir l'état de tension correspondant, il faut, au contraire, supprimer suivant le plan xz du côté des x positives une tranche très mince, dont l'épaisseur varie proportionnellement à la distance de l'axe, et souder ensuite les deux surfaces de la fente.

Exemple II.

6. Posons

$$\gamma_{11} = 0 \quad , \quad \gamma_{22} = 0 \quad , \quad \gamma_{33} = 0,$$

$$\gamma_{23} = \frac{\alpha x}{x^2+y^2} \quad , \quad \gamma_{31} = -\frac{\alpha y}{x^2+y^2} \quad , \quad \gamma_{12} = 0.$$

Les équations (II) de de SAINT-VENANT sont satisfaites et les précédentes fonctions n'ont d'autre singularité que suivant l'axe z.

Les déplacements correspondants seront (à moins d'un déplacement rigide)

$$(4) \qquad u = 0 \quad , \quad v = 0 \quad , \quad w = \alpha \operatorname{arc\,tang} \frac{y}{x};$$

w résulte donc polydrome et a pour axe de diramation l'axe z.

Imaginons un corps homogène et isotrope qui occupe le même espace formé par le cylindre creux S, comme dans l'exemple précédent. Les déplacements (4) satisfont les équations (3) et les forces extérieures agissant sur les surfaces latérales σ_1 et σ_2 deviennent nulles, tandis que celles agissant sur les bases ont respectivement pour composantes sur l'une d'elles

$$X_\omega = -\frac{\alpha K y}{x^2+y^2} \quad , \quad Y_\omega = \frac{\alpha K x}{x^2+y^2} \quad , \quad Z_\omega = 0,$$

sur l'autre

$$X'_\omega = \frac{\alpha K y}{x^2+y^2} \quad , \quad Y'_\omega = -\frac{\alpha K x}{x^2+y^2} \quad , \quad Z'_\omega = 0.$$

Prenons maintenant un corps fictif de la même substance à l'état naturel, qui occupe le cylindre creux S et sans supprimer la connexion assujettissons-le aux forces de torsion précédentes qui agissent sur les deux bases.

Appelons u', v', w' les déplacements qui en dérivent. Ceux-ci sont des fonctions finies, continues et monodromes et, si l'on pose

$$u'' = -u' \quad , \quad v'' = -v' \quad , \quad w'' = w - w',$$

à ces déplacements correspond un état de tension intérieure du corps, tandis que toutes les forces extérieures sont nulles. La déformation sera évidemment régulière.

7. Il est facile de voir comment peut se produire cet état de tension. On prend le corps à l'état naturel qui occupe l'espace renfermé dans le cylindre creux S, on le coupe suivant le plan xz du côté positif de l'axe z, on fait ensuite glisser légèrement les deux surfaces de la coupure l'une par rapport à l'autre parallèlement à l'axe z de manière que le cylindre prenne une forme légèrement hélicoidale. Cela fait, on soude les deux parties l'une à l'autre selon les points qui se trouvent en face.

Les deux bases acquièrent ainsi une dentelure suivant le plan xz du côté des x positives; mais elle est infiniment petite et, sans déranger les conditions du système, nous pouvons imaginer de la supprimer en aplanissant les bases mêmes.

NOTE AU CHAPITRE I.

CESÀRO a donné une démonstration [7] très simple des formules (I), (I'), (I''). La voici: Soient u, v, w les composantes du déplacement du point (x, y, z) et

$$(1) \qquad a = \frac{\partial u}{\partial x} \quad , \quad b = \frac{\partial v}{\partial y} \quad , \quad c = \frac{\partial w}{\partial z} \, ,$$

$$(2) \qquad f = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right) \quad , \quad g = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) \quad , \quad h = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right).$$

Nous supposerons que a, b, c, f, g, h et leurs dérivées premières et secondes soient des fonctions finies, continues et monodromes.

Ces conditions peuvent n'être pas vérifiées par u, v, w et par les composantes de la rotation

$$(3) \qquad p = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right) \quad , \quad q = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) \quad , \quad r = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right).$$

Pour calculer u dans un point M quelconque partons de la formule

$$u = u_0 + \int \left(\frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz\right),$$

u_0 étant la valeur de u dans un point arbitraire M_0, et l'intégrale étant étendue à une ligne qui va du point M_0 au point M_1.

Donc

$$u = u_0 + \int (a\,dx + h\,dy + q\,dz) + \int (q\,dz - r\,dy).$$

(7) « Comptes rendus de la R. Accademia delle Scienze fisiche e matematiche de Naples », juillet e août 1906.

Pour faire paraître dans la seconde intégrale les caractéristiques de la déformation nous pourrons écrire

$$\int (q\,dz - r\,dy) = \int [r d(y_1 - y) - q d(z_1 - z)]$$

$$= q_0(z_1 - z_0) - r_0(y_1 - y_0) + \int [(z_1 - z)\,dq - (y_1 - y)\,dr].$$

Or

(4) $$\frac{\partial q}{\partial x} = \frac{\partial a}{\partial z} - \frac{\partial g}{\partial x} \quad , \quad \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\partial a}{\partial y} \quad , \quad \frac{\partial q}{\partial y} = \frac{\partial h}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial y}, \ldots$$

Par suite

(5) $$u = u_0 + q_0(z_1 - z_0) - r_0(y_1 - y_0) + \int (\xi\,dx + \eta\,dy + \zeta\,dz),$$

où

$$\xi = a + (y_1 - y)\left(\frac{\partial a}{\partial y} - \frac{\partial h}{\partial x}\right) + (z_1 - z)\left(\frac{\partial a}{\partial z} - \frac{\partial g}{\partial x}\right),$$

$$\eta = h + (y_1 - y)\left(\frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial b}{\partial x}\right) + (z_1 - z)\left(\frac{\partial h}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial x}\right),$$

$$\zeta = g + (y_1 - y)\left(\frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial x}\right) + (z_1 - z)\left(\frac{\partial g}{\partial z} - \frac{\partial c}{\partial x}\right).$$

Les formules (5) et les formules analogues qui donnent v et w coïncident avec les formules (I), (I'), (I'') du Chapitre I, mais les formules (5) ont une forme plus simple et plus symétrique.

CESÀRO, dans son Mémoire, étend les formules et les théorèmes que je viens de donner dans le Chapitre I au cas d'un espace non euclidien.

CHAPITRE II.

Les distorsions (*).

I.

1. Dans le Chapitre précédent j'ai montré que les corps élastiques occupant des espaces plusieurs fois connexes peuvent se trouver dans des états d'équilibre bien différents de ceux qu'on a quand les corps élastiques occupent des espaces simplement connexes. Dans ces nouveaux états d'équilibre on a une déformation intérieure régulière du corps, sans toutefois que celui-ci soit sollicité par des forces extérieures.

Imaginons qu'on mène les coupures qui rendent simplement connexe l'espace occupé par le corps. A chacune d'elles correspondent six constantes que nous avons appelées les *constantes de la coupure*. Il est facile d'établir la signification mécanique de ces constantes au moyen des formules (III) du Chapitre précédent.

(*) Traduzione, con lievissime modificazioni di forma, della Nota: *Sull'equilibrio dei corpi elastici più volte connessi*. « Rend. Acc. Lincei », s. 5ª, vol. XIV_1, 1905_1, pp. 193-202. [N.d.R.].

En effet, exécutons matériellement les coupures suivant lesdites sections et laissons le corps reprendre son état naturel. Si, en reprenant cet état, certaines parties du corps viennent à se superposer entre elles, supprimons les parties excédentes. Alors les formules (III) déjà rappelées nous montrent que les parcelles placées des deux côtés d'une même section et qui, avant la coupure, étaient en contact subissent, par le fait même de la coupure, un déplacement résultant d'une translation et d'une rotation égales pour tous les couples de parcelles adjacentes à une même section.

En prenant l'origine pour centre de réduction, les trois composantes de la translation et les trois composantes de la rotation, suivant les axes coordonnés, sont les six caractéristiques de la coupure.

Réciproquement, si le corps élastique multiplement connexe est pris à l'état naturel, on pourra, pour l'amener à l'état de tension, exécuter l'opération inverse, c'est-à-dire le sectionner afin de le rendre simplement connexe, déplacer ensuite les deux parties de chaque coupure, l'une par rapport à l'autre, de manière que les déplacements relatifs des différents couples de parcelles (qui adhéraient entre elles et que la coupure a séparées) soient résultantes des translations et des rotations égales; rétablir enfin la connexion et la continuité suivant chaque coupure, en retranchant ou en ajoutant la matière nécessaire et en ressoudant les parties entre elles. L'ensemble de ces opérations relative à chaque coupure peut s'appeler une *distorsion* du corps et les six constantes de chaque coupure peuvent s'appeler les *caractéristiques de la distorsion*.

Dans un corps élastique multiplement connexe, dont la déformation est régulière et qui a subi un certain nombre de distorsions, l'inspection de la déformation ne peut en aucune manière révéler les endroits où les coupures et les distorsions qui s'ensuivent se sont produites, et cela en vertu de la régularité elle-même. On peut dire en outre que les six caractéristiques de chaque distorsion ne sont pas des éléments dépendant du lieu où la coupure a été exécutée.

En effet, le même procédé qui nous a servi à établir les formules (III) prouve que, si l'on prend dans le corps deux coupures qu'on peut transformer l'une dans l'autre par une déformation continue, les constantes relatives à l'une des coupures sont égales aux constantes relatives à l'autre.

Il s'ensuit que les caractéristiques d'une distorsion ne sont pas des éléments spécifiques de chaque coupure, mais qu'elles dépendent exclusivement de la nature géométrique de l'espace occupé par le corps et de la déformation régulière à laquelle il est assujetti.

Le nombre des distorsions indépendantes auxquelles un corps élastique peut être soumis est évidemment égal à l'ordre de la connexion de l'espace occupé par le corps moins 1.

En conformité de ce que nous avons trouvé, deux coupures qu'on peut par une déformation continue transformer l'une dans l'autre s'appellent *équivalentes*. Nous dirons aussi qu'une distorsion est connue quand les caractéristiques et la coupure relative ou une autre coupure équivalente seront données.

2. Cela posé, deux questions se présentent naturellement, à savoir:

1° A des distorsions arbitrairement choisies correspondra-t-il toujours un état d'équilibre et une déformation régulière du corps si l'on suppose nulles les actions extérieures ?

2° Les distorsions étant connues, quel est cet état de déformation?

Pour relier ces problèmes à d'autres déjà connus nous démontrerons le théorème suivant:

Si dans chaque corps élastique isotrope plusieurs fois connexe on prend un ensemble arbitraire de distorsions, on pourra calculer un nombre infini de déformations régulières du corps qui correspondent à ces distorsions et qui sont équilibrées par des forces extérieures superficielles (que nous indiquons avec T) *ayant la résultante nulle et le moment nul par rapport à un axe quelconque.*

Dès lors, pour reconnaitre si dans un corps isotrope les distorsions données correspondent à un état d'équilibre, les forces extérieures ètant nulles, il suffira de voir si les forces extérieures T changées de signe et appliquées au contour du corps, quand celui-ci n'est sujet à aucune distorsion, déterminent un état de déformation régulière équilibrant les forces elles-mêmes. Si l'on peut calculer effectivement cet état de déformation, le problème concernant l'équilibre du corps soumis aux distorsions données sera résolu.

En effet, appelons Γ la déformation relative aux distorsions données et aux forces extérieures T trouvées, qui agissent sur la surface, et Γ' la déformation déterminée par ces forces extérieures changées de signe quand le corps ne subit aucune distorsion. La déformation Γ'' qui résulte de Γ et Γ' correspondra aux distorsions données et aux forces extérieures nulles.

Les questions sont ainsi ramenées à voir si la déformation Γ' existe et à la trouver. Elles se réduisent donc à des problèmes d'élasticité où les distorsions ne paraissent pas, c'est-à-dire à des problèmes ordinaires d'élasticité.

Mais les forces extérieures T, agissant sur la surface, en vertu du théorème énoncé sont telles que si le corps est rigide elles s'équilibrent; il s'ensuit qu'elles satisfont aux conditions fondamentales nécessaires pour l'existence de la déformation Γ'.

Or tout dernièrement on a beaucoup avancé par des méthodes nouvelles dans l'étude du théorème d'existence pour les questions d'élasticité, c'est pourquoi on peut dire que, sauf certaines conditions relatives à la forme géométrique de l'espace occupé par le corps élastique (conditions que nous ne préciserons pas ici), Γ' et Γ'' existeront toujours.

Ces réserves faites, on pourra donc répondre affirmativement à la première question dans le cas des corps isotropes.

La seconde question posée est relative au cas où le corps n'est pas sujet aux actions extérieures; mais elle peut se généraliser et l'on peut supposer les distorsions données et le corps sollicité par des forces extérieures déterminées. Alors, si le corps est isotrope, il suffit pour la résolution du problème de superposer à la déformation Γ déterminée par les distorsions et par les forces extérieures T, la déformation déterminée par les forces extérieures données et par les forces extérieures — T qui agissent sur la surface dans l'hypothèse que les distorsions manquent.

Le théorème énoncé sert d'une certaine façon à éliminer les distorsions dans tous les cas d'isotropie, en y substituant des forces extérieures superficielles, et c'est pour cette raison qu'il rapporte les questions qui se rattachent aux distorsions à des questions ordinaires d'élasticité.

Si le corps est anisotrope on voit facilement que l'état de déformation Γ est équilibré par des forces extérieures agissant sur la surface et par des forces extérieures agissant sur l'intérieur du corps. Il est donc facile, même dans ce cas, d'éliminer les distorsions et de rapporter les différentes questions qui peuvent se présenter aux problèmes ordinaires de l'équilibre des corps élastiques.

L'article II est consacré à la démonstration du théorème ci-dessus énoncé et l'article III à l'examen d'un cas particulier.

II.

1. Pour démontrer le théorème énoncé à l'article précédent il faut avant tout établir certaines formules préliminaires (8).

En désignant par r la distance entre deux points (x, y, z) et (ξ, η, ζ) posons avec SOMIGLIANA (9):

$$
\begin{aligned}
u_1 &= \frac{1}{r} + \frac{\alpha}{2}\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}, & v_1 &= \frac{\alpha}{2}\frac{\partial^2 r}{\partial x \partial y}, & w_1 &= \frac{\alpha}{2}\frac{\partial^2 r}{\partial x \partial z},\\
u_2 &= \frac{\alpha}{2}\frac{\partial^2 r}{\partial y \partial x}, & v_2 &= \frac{1}{r} + \frac{\alpha}{2}\frac{\partial^2 r}{\partial y^2}, & w_2 &= \frac{\alpha}{2}\frac{\partial^2 r}{\partial y \partial z},\\
u_3 &= \frac{\alpha}{2}\frac{\partial^2 r}{\partial z \partial x}, & v_3 &= \frac{\alpha}{2}\frac{\partial^2 r}{\partial z \partial y}, & w_3 &= \frac{1}{r} + \frac{\alpha}{2}\frac{\partial^2 r}{\partial z^2}.
\end{aligned}
$$

Les précédentes fonctions n'ont d'autre singularité que pour $x = \xi$, $y = \eta$, $z = \zeta$ et sont symétriques par rapport aux couples de variables $x, \xi; y, \eta; z, \zeta$.

Si $\alpha = -\frac{L + K}{L + 2K}$ chaque groupe de trois fonction u_s, v_s, w_s vérifie dans tout l'espace (excepté le lieu singulier rappelé plus haut) les équations différentielles (3) du chapitre précédent et celles qu'on en peut tirer en y substituant ξ, η, ζ à x, y, z. Alors u_s, v_s, w_s peuvent être regardés comme les composantes des déplacements des points d'un milieu élastique isotrope et homogène non sujet aux forces extérieures appliquées sur l'intérieur du milieu, soit qu'on considère ces composantes comme fonctions de x, y, z ou de ξ, η, ζ.

(8) J'ai exposé ces formules pour la première fois à Pisa dans mes *Leçons sur la théorie de l'élasticité*, 1892; elles ont déjà été citées par M. le professeur LAURICELLA dans sa dissertation (« Ann. Scuola Norm. di Pisa, 1894).

(9) « Annali di Mat. », 2e serie, t. XVII.

Prenons un élément de surface $d\Sigma$ passant par le point ξ, η, ζ, dont la normale soit n. Désignons par X_s, Y_s, Z_s les composantes de la tension unitaire (correspondante aux déplacements u_s, v_s, w_s) qui est exercée suivant Σ, par la région du milieu élastique placée du côté d'où sort la normale n sur la région placée du côté où entre la même normale.

Le calcul de X_s, Y_s, Z_s ne présente aucune difficulté. Si maintenant u_0, v_0, w_0 sont des intégrales des équations différentielles (3) du Chapitre précédent, régulières dans le domaine S limité par une surface Σ, et si X_0, Y_0, Z_0 sont les composantes de la tension correspondante, agissant sur la surface, les formules de SOMIGLIANA donnent:

$$(1)\qquad \frac{1}{4\pi K}\int_\Sigma (X_0 u_1 + Y_0 v_1 + Z_0 w_1)\, d\Sigma + \frac{1}{4\pi K}\int_\Sigma (X_1 u_0 + Y_1 v_0 + Z_1 w_0)\, d\Sigma = u_0(x, y, z),$$

$$(1')\qquad \frac{1}{4\pi K}\int_\Sigma (X_0 u_2 + Y_0 v_2 + Z_0 w_2)\, d\Sigma + \frac{1}{4\pi K}\int_\Sigma (X_2 u_0 + Y_2 v_0 + Z_2 w_0)\, d\Sigma = v_0(x, y, z),$$

$$(1'')\qquad \frac{1}{4\pi K}\int_\Sigma (X_0 u_3 + Y_0 v_3 + Z_0 w_3)\, d\Sigma + \frac{1}{4\pi K}\int_\Sigma (X_3 u_0 + Y_3 v_0 + Z_3 w_0)\, d\Sigma = w_0(x, y, z),$$

en supposant que le point x, y, z soit intérieur au domaine S et ξ, η, ζ, représentent les coordonnées des points de la surface Σ. Dans le calcul de X_s, Y_s, Z_s on doit supposer que la normale est dirigée de l'extérieur à l'intérieur du domaine S.

Au contraire, si le point x, y, z est extérieur au domaine, les seconds membres des équations précèdentes sont nuls.

2. Posons maintenant dans les formules précédentes

$$(2)\qquad u_0 = l + ry - qz \quad , \quad v_0 = m + pz - rx \quad , \quad w_0 = n + qx - py,$$

où l, m, n, p, q, r sont des quantités constantes. Les équations (3) du Chapitre précédent seront satisfaites et X_0, Y_0, Z_0 résulteront nulles.

Il arrivera alors que les intégrales

$$U = \frac{1}{4\pi K}\int_\Sigma (X_1 u_0 + Y_1 v_0 + Z_1 w_0)\, d\Sigma,$$

$$V = \frac{1}{4\pi K}\int_\Sigma (X_2 u_0 + Y_2 v_0 + Z_2 w_0)\, d\Sigma,$$

$$W = \frac{1}{4\pi K}\int_\Sigma (X_3 u_0 + Y_3 v_0 + Z_3 w_0)\, d\Sigma$$

seront respectivement égales à $l + ry - qz$, $m + pz - rx$, $n + qx - py$ si le point x, y, z est intérieur à l'espace S et seront nulles si le point est extérieur [10]. Enfin on voit tout de suite, qu'en calculant

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \Gamma_{11} \quad , \quad \frac{\partial V}{\partial y} = \Gamma_{22} \quad , \quad \frac{\partial W}{\partial z} = \Gamma_{33} ,$$

$$\frac{\partial V}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial y} = \Gamma_{23} \quad , \quad \frac{\partial W}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial z} = \Gamma_{31} \quad , \quad \frac{\partial U}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial x} = \Gamma_{12} ,$$

les quantités Γ_{rs} seront nulles soit que x , y , z soit intérieur ou extérieur à l'espace S.

Nous pouvons donc conclure que les intégrales U , V , W sont discontinues en traversant la surface Σ, tandis que les fonctions Γ_{rs} n'ont pas de discontinuités. En appelant U_i , V_i , W_i les valeurs de U , V , W suivant Σ du côté intérieur et U_e , V_e , W_e leurs valeurs du côté extérieur, nous avons

$$U_i - U_e = l + ry - qz ,$$
$$V_i - V_e = m + pz - rx ,$$
$$W_i - W_e = n + qx - py .$$

3. Cela posé, partageons la surface Σ en deux parties σ et σ' et posons:

$$(3) \qquad \left\{ \begin{aligned} u &= \frac{1}{4\pi K} \int_\sigma (X_1 u_0 + Y_1 v_0 + Z_1 w_0)\, d\sigma , \\ v &= \frac{1}{4\pi K} \int_\sigma (X_2 u_0 + Y_2 v_0 + Z_2 w_0)\, d\sigma , \\ w &= \frac{1}{4\pi K} \int_\sigma (X_3 u_0 + Y_3 v_0 + Z_3 w_0)\, d\sigma ; \end{aligned} \right.$$

et

$$(3') \qquad \left\{ \begin{aligned} u' &= \frac{1}{4\pi K} \int_{\sigma'} (X_1 u_0 + Y_1 v_0 + Z_1 w_0)\, d\sigma' , \\ v' &= \frac{1}{4\pi K} \int_{\sigma'} (X_2 u_0 + Y_2 v_0 + Z_2 w_0)\, d\sigma' , \\ w' &= \frac{1}{4\pi K} \int_{\sigma'} (X_3 u_0 + Y_3 v_0 + Z_3 w_0)\, d\sigma' . \end{aligned} \right.$$

Il est facile de voir que $u , v , w ; u' , v' , w'$ jouissent des propriétés suivantes:

1° Dans tous les points de l'espace, excepté la surface σ, les fonctions u , v , w sont finies, continues, monodromes, ayant des dérivées d'ordre quelconque;

(10) En égalant dans les deux membres des équations précédentes les coefficients de l , m , n , p , q , r on trouve des relations intégrales analogues aux formules de GAUSS dans la théorie du potentiel. Cfr. le Mémoire cité de M. LAURICELLA, Chap. III, § 3.

2° Les fonctions u, v, w satisfont les équations (3) du Chapitre précédent, excepté la surface σ. On peut donc les regarder comme les composantes des déplacements d'un milieu élastique isotrope homogène, non sujet aux forces extérieures;

3° u', v', w' jouissent des mêmes propriétés que u, v, w si σ' est substituée à σ;

4° Enfin nous aurons

$$U = u + u' \quad , \quad V = v + v' \quad , \quad W = w + w'$$

Or u', v', w' sont continues suivant σ tandis que U, V, W sont discontinues, donc u, v, w auront suivant σ la même discontinuité que U, V, W. Calculons maintenant

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \gamma_{11} \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \gamma_{22} \quad , \quad \frac{\partial w}{\partial z} = \gamma_{33} ,$$

$$\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = \gamma_{23} \quad , \quad \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = \gamma_{31} \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \gamma_{12} ,$$

$$\frac{\partial u'}{\partial x} = \gamma'_{11} \quad , \quad \frac{\partial v'}{\partial y} = \gamma'_{22} \quad , \quad \frac{\partial w'}{\partial z} = \gamma'_{33} ,$$

$$\frac{\partial v'}{\partial z} + \frac{\partial w'}{\partial y} = \gamma'_{23} \quad , \quad \frac{\partial w'}{\partial x} + \frac{\partial u'}{\partial z} = \gamma'_{31} \quad , \quad \frac{\partial u'}{\partial y} + \frac{\partial v'}{\partial x} = \gamma'_{12} .$$

Nous aurons

$$\gamma_{rs} + \gamma'_{rs} = \Gamma_{rs} = 0 .$$

Mais les fonctions γ'_{rs} se conservent régulières [11] en traversant la surface σ (excepté tout au plus le contour de σ), donc les fonctions γ_{rs} jouiront aussi de la même propriété.

En substituant dans les formules (3) à u_0, v_0, w_0 les valeurs (2) et en ordonnant les seconds membres relativement à l, m, n, p, q, r, on arrive au thèorème suivant:

Soit donnée une surfase σ. Posons

$$\text{(I)} \quad \left\{ \begin{aligned} & A^{(\sigma)}_{i1} = \frac{1}{4\pi K}\int_\sigma X_i \, d\sigma \quad , \quad A^{(\sigma)}_{i2} = \frac{1}{4\pi K}\int_\sigma Y_i \, d\sigma \quad , \quad A^{(\sigma)}_{i3} = \frac{1}{4\pi K}\int_\sigma Z_i \, d\sigma , \\ & B^{(\sigma)}_{i1} = \frac{1}{4\pi K}\int_\sigma (\zeta Y_i - \eta Z_i)\, d\sigma \quad , \quad B^{(\sigma)}_{i2} = \frac{1}{4\pi K}\int_\sigma (\xi Z_i - \zeta Y_i)\, d\sigma \quad , \\ & B^{(\sigma)}_{i3} = \frac{1}{4\pi K}\int_\sigma (\eta X_i - \xi Y_i)\, d\sigma . \end{aligned} \right.$$

$$\text{(II)} \quad \left\{ \begin{aligned} u &= A^{(\sigma)}_{11} l + A^{(\sigma)}_{12} m + A^{(\sigma)}_{13} n + B^{(\sigma)}_{11} p + B^{(\sigma)}_{12} q + B^{(\sigma)}_{13} r , \\ v &= A^{(\sigma)}_{21} l + A^{(\sigma)}_{22} m + A^{(\sigma)}_{23} n + B^{(\sigma)}_{21} p + B^{(\sigma)}_{22} q + B^{(\sigma)}_{23} r , \\ w &= A^{(\sigma)}_{31} l + A^{(\sigma)}_{32} m + A^{(\sigma)}_{33} n + B^{(\sigma)}_{31} p + B^{(\sigma)}_{32} q + B^{(\sigma)}_{33} r , \end{aligned} \right.$$

(11) Voir le Chap. I, Art. I, § 3.

l, m, n, p, q, r étant des quantités arbitraires. On peut regarder u, v, w comme les composantes du déplacement d'un milieu élastique indefini, isotrope et homogène, et à déformation règulière dans tout l'espace excepté tout au plus le contour L de σ. Ce milieu est soustrait aux forces extérieures et est en équilibre; en même temps les déplacements u, v, w sont discontinus suivant σ. Ces discontinuités sont individualisées par les équations

$$(4)\qquad \begin{cases} u_i - u_e = l + ry - qz\,, \\ v_i - v_e = m + pz - rx\,, \\ w_i - w_e = n + qx - py\,, \end{cases}$$

où u_e, v_e, w_e désignent les valeurs de u, v, w du coté d'où sort la normale à la surface σ et u_i, v_i, w_i les valeurs du côté où la même normale entre.

On tire de cette proposition que, en partant des caractéristiques de la déformation précédente et en calculant au moyen des formules (I), (I'), (I'') du Chapitre précédent, les quantités u, v, w, celles-ci résulteront polydromes quand la surface σ sera ouverte. La ligne ou les lignes de diramation seront formées du contour L de σ et la polydromie sera individualisée par les formules (4).

4. Supposons maintenant un corps S, $n+1$ fois connexe. Menons n coupures qui le rendent simplement connexe.

Appelons $\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_n$ les n surfaces formées desdites coupures prolongées de quelque façon que ce soit en dehors de S. Posons:

$$(\mathrm{II}')\qquad \begin{cases} u = \sum_1^n{}_i \left(A_{11}^{(\sigma_i)} l_i + A_{12}^{(\sigma_i)} m_i + A_{13}^{(\sigma_i)} n_i + B_{11}^{(\sigma_i)} p_i + B_{12}^{(\sigma_i)} q_i + B_{13}^{(\sigma_i)} r_i\right), \\ v = \sum_1^n{}_i \left(A_{21}^{(\sigma_i)} l_i + A_{22}^{(\sigma_i)} m_i + A_{23}^{(\sigma_i)} n_i + B_{21}^{(\sigma_i)} p_i + B_{22}^{(\sigma_i)} q_i + B_{23}^{(\sigma_i)} r_i\right), \\ w = \sum_1^n{}_i \left(A_{31}^{(\sigma_i)} l_i + A_{32}^{(\sigma_i)} m_i + A_{33}^{(\sigma_i)} n_i + B_{31}^{(\sigma_i)} p_i + B_{32}^{(\sigma_i)} q_i + B_{33}^{(\sigma_i)} r_i\right), \end{cases}$$

$$\gamma_{11} = \frac{\partial u}{\partial x} \qquad \gamma_{22} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \gamma_{33} = \frac{\partial w}{\partial z}\,,$$

$$\gamma_{23} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \quad , \quad \gamma_{31} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \quad , \quad \gamma_{12} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\,;$$

où $l_i, m_i, n_i, p_i, q_i, r_i$ sont des constantes arbitraires; la déformation $\Gamma \equiv (\gamma_{11}, \gamma_{22}, \gamma_{33}, \gamma_{23}, \gamma_{31}, \gamma_{12})$ sera régulière au dedans de S et correspondra à des distorsions arbitraires faites suivant lesdites coupures.

Si l'on calcule les forces extérieures agissant sur l'intérieur du corps, on trouve qu'elles sont nulles, mais en général les forces agissant sur le contour du corps S ne seront pas nulles. Or le corps est en équilibre, c'est pourquoi ces forces doivent avoir leur résultante nulle et leur moment nul relativement à un axe quelconque.

Le théorème énoncé à l'article I est donc démontré.

III.

1. Soit une surface σ simplement connexe et finie située dans le plan xz et qui ne rencontre pas l'axe z. Pendant que le plan xz tourne, autour de z, supposons que σ se déforme et se déplace dans le plan d'une manière quelconque sans jamais rencontrer z, mais supposons que, après un tour complet, elle revienne sur sa configuration primitive. Par ce mouvement, l'aire σ engendre un solide annulaire deux fois connexe enchainé à l'axe z. Soit-il rempli de matière élastique isotrope et homogène. Assujettissons-le à la distorsion la plus générale suivant une coupure formée par un plan passant par z et étudions la déformation de ce corps.

2. On sait que les intégrales des équations (3) du Chapitre précédent doivent être des fonctions bi-harmoniques, c'est-à-dire doivent satisfaire la double équation de LAPLACE $\Delta^2\Delta^2 = 0$.

Or, si l, m, n, p, q, r sont des constantes arbitraires, les fonctions

$$\frac{1}{2\pi}(l - qz + ry)\,\mathrm{arc\,tang}\,\frac{y}{x},$$

$$\frac{1}{2\pi}(m - rx + pz)\,\mathrm{arc\,tang}\,\frac{y}{x}.$$

$$\frac{1}{2\pi}(n - py + qx)\,\mathrm{arc\,tang}\,\frac{y}{x}$$

sont bi-harmoniques et elles ont la polydromie correspondant à une distorsion ayant pour caractéristiques l, m, n, p, q, r.

Mais les fonctions précédentes ne satisfont pas les équations indéfinies de l'élasticité dans le cas de l'isotropie.

Prenons donc

$$u = \frac{1}{2\pi}(l - qz + ry)\,\mathrm{arc\,tang}\,\frac{y}{x} + \lambda,$$

$$v = \frac{1}{2\pi}(m - rx + pz)\,\mathrm{arc\,tang}\,\frac{y}{x} + \mu,$$

$$w = \frac{1}{2\pi}(n - py + qx)\,\mathrm{arc\,tang}\,\frac{y}{x} + \nu,$$

et déterminons les fonctions monodromes λ, μ, ν de manière que les expressions de u, v, w ainsi obtenues satisfassent les équations (3).

Posons:

$$\lambda = (a\,x + b\,y + c\,z + e\,)\log(x^2 + y^2),$$

$$\mu = (a'\,x + b'\,y + c'\,z + e'\,)\log(x^2 + y^2),$$

$$\nu = (a''x + b''y + c''z + e'')\log(x^2 + y^2),$$

Les constantes a, b, c, e ; a', b', c', e' ; a'', b'', c'', e'' se calculent facilement et l'on trouve

$$
\text{(III)} \quad \left\{
\begin{aligned}
u &= \frac{1}{2\pi}\left[(l - qz + ry) \operatorname{arc\,tang} \frac{y}{x} + \frac{1}{2}\left(-m - pz - \frac{rK}{L+2K}\, x\right) \log (x^2+y^2)\right], \\
v &= \frac{1}{2\pi}\left[(m - rx + pz) \operatorname{arc\,tang} \frac{y}{x} + \frac{1}{2}\left(\ \ l - qz - \frac{rK}{L+2K}\, y\right) \log (x^2+y^2)\right], \\
w &= \frac{1}{2\pi}\left[(n - py + qz) \operatorname{arc\,tang} \frac{y}{x} + \frac{1}{2}(px + qy) \log (x^2+y^2)\right] \cdot
\end{aligned}
\right.
$$

Il est facile de reconnaître que la déformation correspondante est régulière et qu'on peut obtenir aisément les tensions agissant sur la surface.

Donc, pour le corps en question, on peut calculer la déformation Γ et les forces T de l'article I, quelle que soit la distorsion à laquelle le corps ait été assujetti.

3. Les formules que nous avons données à l'article III du Chapitre précédent ont été déduites comme un cas particulier des précédentes expressions. En effet les formules (2) du Chapitre cité s'obtiennent quand $\gamma = 0$ en prenant

$$l = m = n = p = q = 0 \quad , \quad r = 2\pi\alpha ,$$

et les formules (4) du même Chapitre en posant

$$l = m = p = q = r = 0 \quad , \quad n = 2\pi\alpha .$$

Capitre III.

Les efforts (*).

I.

1. Dans les Chapitres précédents j'ai montré que les lois de l'équilibre des corps solides élastiques occupant des espaces plusieurs fois connexes (cycliques) sont bien différentes de celles des solides élastiques occupant des espaces simplement connexes (acycliques) pourvu qu'on admette dans les deux cas les déformations régulières.

En effet, si l'espace occupé par le solide est cyclique, on peut déterminer un état de tension dans le corps même à défaut de forces extérieures en l'assujettissant à des distorsions. Mais il n'en est pas de même quand le corps occupe un espace acyclique. C'est pourquoi, dans le cas d'un corps élastique occupant un espace cyclique, nous aurons à résoudre une série de problèmes nouveaux très intéressants qui ne se présentent pas dans l'autre

(*) Traduzione, con lievissime modificazioni di forma, della Nota: *Sulle distorsioni dei solidi elastici più volte connessi*. « Rend. Acc. Lincei », s. 5^a, vol. XIV_1, 1905_1, pp. 351-356. [N.d.R.]

cas et qui consistent à calculer les etats de tension des corps dus à des distorsions données.

Pour faciliter la résolution de ces problèmes nous exposerons brièvement dans ce Chapitre quelques considérations génerales qui permettront de les transformer facilement.

2. Calculons tout d'abord l'énergie d'un solide élastique soumis à des distorsions données.

Représentons par $t_{11}, t_{22}, t_{33}, t_{23}, t_{31}, t_{12}$ les caractéristiques de la tension d'un solide élastique déformé (le *stress* selon la dénomination des Anglais) et par $\gamma_{11}, \gamma_{22}, \gamma_{33}, \gamma_{23}, \gamma_{31}, \gamma_{12}$ les caractéristiques de la déformation (le *strain*).

Si nous appelons φ le potentiel élastique unitaire, φ sera une fonction homogène du second degré des quantités γ_{rs} et nous aurons

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\gamma_{rs}} = t_{rs} \quad , \quad \varphi = \frac{1}{2}\Sigma\, t_{rs}\,\gamma_{rs}\,;$$

l'énergie du système sera donc

$$E = -\frac{1}{2}\int_S \Sigma\, t_{rs}\,\gamma_{rs}\,dS\,,$$

S représentant l'espace occupé par le solide.

Supposons S multiplement connexe (cyclique) et la déformation régulière. Imaginons tracées les coupures $\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_n$ qui rendent S simplement connexe. Au moyen de simples intégrations et en représentant par u, v, w les composantes des déplacements des points du solide élastique à partir de l'état naturel, nous aurons

$$\begin{aligned}
(1) \qquad E = \frac{1}{2}\int_S \Big[& u\left(\frac{\partial t_{11}}{\partial x} + \frac{\partial t_{12}}{\partial y} + \frac{\partial t_{13}}{\partial z}\right) + v\left(\frac{\partial t_{21}}{\partial x} + \frac{\partial t_{22}}{\partial y} + \frac{\partial t_{23}}{\partial z}\right) \\
& + w\left(\frac{\partial t_{31}}{\partial x} + \frac{\partial t_{32}}{\partial y} + \frac{\partial t_{33}}{\partial z}\right)\Big]\, dS \\
+ \frac{1}{2}\int_\sigma & [u\,(t_{11}\cos nx + t_{12}\cos ny + t_{13}\cos nz) + v\,(t_{21}\cos nx + t_{22}\cos ny + t_{23}\cos nz) \\
& + w\,(t_{31}\cos nx + t_{32}\cos ny + t_{33}\cos nz)]\, d\sigma \\
+ \frac{1}{2}\sum_1^n{}_i \int_{\sigma_i} & [(u_\alpha - u_\beta)(t_{11}\cos \nu_i x + t_{12}\cos \nu_i y + t_{13}\cos \nu_i z) \\
+ & \quad (v_\alpha - v_\beta)(t_{21}\cos \nu_i x + t_{22}\cos \nu_i y + t_{23}\cos \nu_i z) \\
+ & \quad (w_\alpha - w_\beta)(t_{31}\cos \nu_i x + t_{32}\cos \nu_i y + t_{33}\cos \nu_i z)]\, d\sigma_i\,,
\end{aligned}$$

où σ est le contour de S, n la normale à σ dirigée vers l'intérieur de S, ν_i la normale à σ_i ; $u_\alpha, v_\alpha, w_\alpha$ les valeurs de u, v, w sur σ_i du côté adjacent à la région où entre ν_i et $u_\beta, v_\beta, w_\beta$ les valeurs de l'autre côté.

Appelons $l_i, m_i, n_i, p_i, q_i, r_i$ les six caractéristques de la distorsion relative à la coupure σ_i et représentons par X_i, Y_i, Z_i les composantes de la tension unitaire qui sollicite chaque élément de la section σ_i. Les forces extérieures étant nulles, on aura par des intégrations par parties:

$$E = \frac{1}{2}\sum_1^n{}_i \int_{\sigma_i} [(l_i + r_i y - q_i z) X_i + (m_i + p_i z - r_i x) Y_i + (n_i + q_i x - p_i y) Z_i] d\sigma_i$$

$$= \frac{1}{2}\sum_1^n{}_i \left[l_i \int_{\sigma_i} X_i d\sigma_i + m_i \int_{\sigma_i} Y_i d\sigma_i + n_i \int_{\sigma_i} Z_i d\sigma_i \right.$$

$$\left. + p_i \int_{\sigma_i} (Y_i z - Z_i y) d\sigma_i + q_i \int_{\sigma_i} (Z_i x - X_i z) d\sigma_i + r_i \int_{\sigma_i} (X_i y - Y_i x) d\sigma_i \right].$$

Si l'on pose:

$$L_i = \int_{\sigma_i} X_i d\sigma_i \quad , \quad M_i = \int_{\sigma_i} Y_i d\sigma_i \quad , \quad N_i = \int_{\sigma_i} Z_i d\sigma_i ,$$

$$P_i = \int_{\sigma_i} (Y_i z - Z_i y) d\sigma_i \quad , \quad Q_i = \int_{\sigma_i} (Z_i x - X_i z) d\sigma_i ,$$

$$R_i = \int_{\sigma_i} (X_i y - Y_i x) d\sigma ,$$

on trouvera

$$E = \frac{1}{2}\sum_1^n{}_i (L_i l_i + M_i m_i + N_i n_i + P_i p_i + Q_i q_i + R_i r_i) .$$

Désignons par $s_1, s_2, \cdots, s_{6n}$ les $6n$ caractéristiques des distorsions et par $E_1, \cdots, E_{6n}$ les coefficients qui dans l'expression précédente leur correspondent. Nous aurons alors

$$E = \frac{1}{2}\sum_1^{6n}{}_i E_i s_i .$$

3. Nous appellerons *distorsion élémentaire* la distorsion qui correspond aux quantités $s_i = 0$, excepté une qui a pour valeur l'unité.

Supposons que cette dernière soit s_h et appelons E_{ih} les valeurs correspondantes des coefficients E_i. On reconnait immédiatement que, si les valeurs des caractéristiques des distorsions sont $s_1, \cdots, s_{6n}$, on a

$$E_i = \sum_1^{6n}{}_h E_{ih} s_h ,$$

et, par conséquent,

$$E = \frac{1}{2}\sum_1^{6n}{}_i \sum_1^{6n}{}_h E_{ih} s_i s_h .$$

(*) { Si, outre les distortions, existent des forces extérieures appliquées au corps élastique et nous désignons par $\rho X dS$, $\rho Y dS$, $\rho Z dS$ les forces de masse et par $X_\sigma d_\sigma$, $Y_\sigma d_\sigma$, $Z_\sigma dS$ les tensions superficielles, on aura

$$\frac{\partial t_{11}}{\partial x} + \frac{\partial t_{12}}{\partial y} + \frac{\partial t_{13}}{\partial z} = \rho X \quad , \quad \frac{\partial t_{21}}{\partial x} + \frac{\partial t_{22}}{\partial y} + \frac{\partial t_{23}}{\partial z} = \rho Y ,$$

$$\frac{\partial t_{31}}{\partial x} + \frac{\partial t_{32}}{\partial y} + \frac{\partial t_{33}}{\partial z} = \rho Z ,$$

$$t_{11} \cos nx + t_{12} \cos ny + t_{13} \cos nz = X_\sigma \quad , \quad t_{21} \cos nx + t_{22} \cos ny + t_{23} \cos nz = Y_\sigma ,$$

$$t_{31} \cos nx + t_{32} \cos ny + t_{33} \cos nz = Z_\sigma ;$$

et l'énergie du système s'obtiendra en ajoutant au second membre de l'équation précedente l'expression

$$\int_S \rho (Xu + Yv + Zw) dS + \int_\sigma (X_\sigma u + Y_\sigma v + Z_\sigma w) d\sigma \} .$$

4. Il est facile d'établir la signification des quantités E_i et E_{ik}.

A cet effet, observons que L_i, M_i, N_i sont les composantes de la force résultante et P_i, Q_i, R_i les composantes du couple résultant des tensions qui agissent sur la section σ_i quand on prend pour centre de réduction l'origine des axes.

Nous pourrons donc appeler les coefficients $L_i, M_i, N_i, P_i, Q_i, R_i$ les *efforts qui sollicitent la section* σ_i, ou en général nous dirons que $E_1, E_2, \cdots, E_{6n}$ *sont les efforts correspondants à la distorsion* $s_1, s_2, \cdots, s_{6n}$. La quantité E_{ik} s'appellera l'*effort d'ordre i, induit par la distorsion élémentaire d'ordre h.* Plus simplement encore les coefficients E_{ih} pourront s'appeler les *coefficients des efforts.*

II.

1. GREEN a démontré, par l'application du théorème de GAUSS, une proposition fondamentale dans la théorie du potentiel. Par le même procédé, BETTI a découvert un théorème analogue pour l'élasticité [12]. Mais, si le potentiel est polydrome, le théorème de GREEN n'est pas applicable. De même le théorème de BETTI n'est pas applicable si les déplacements sont polydromes. Nous allons voir cependant que, même dans ce cas, on peut reprendre l'idée fondamentale et l'on est amené par là à une loi de réciprocité fort intéressante.

(*) In questa pagina e nelle due seguenti si inseriscono tra parentesi a graffa talune postille che il VOLTERRA comunicò al prof. J. PÉRÈS in una sua lettera dell'11 ottobre 1938. [N. d. R.].

(12) *Teoria della elasticità* («Nuovo Cimento», 1872-1873).

Envisageons deux distorsions $s_1, s_2, \cdots, s_{6n}$ et $s'_1, s'_2, \cdots, s'_{6n}$ appliquées successivement à un corps élastique S multiplement connexe qui n'est pas soumis à des forces extérieures. Soient $\gamma_{rs}, \gamma'_{rs}$ les caractéristiques des deux déformations différentes qui s'ensuivent et u, v, w; u', v', w' les composantes respectives des déplacements.

On trouve facilement

$$\int_S \Sigma \frac{\partial\varphi}{\partial\gamma_{rs}} \gamma'_{rs}\, dS = \int_S \Sigma \frac{\partial\varphi}{\partial\gamma'_{rs}} \gamma_{rs}\, dS,$$

où φ' représente la fonction φ dans laquelle on a substitué les quantités γ'_{rs} aux γ_{rs}.

On tire de là:

$$\begin{aligned}
&\sum_1^n{}_i \int_{\sigma_i} [(u'_\alpha - u'_\beta)(t_{11}\cos\nu_i x + t_{12}\cos\nu_i y + t_{13}\cos\nu_i z)\\
&+ \qquad (v'_\alpha - v'_\beta)(t_{21}\cos\nu_i x + t_{22}\cos\nu_i y + t_{23}\cos\nu_i z)\\
&+ \qquad (w'_\alpha - w'_\beta)(t_{31}\cos\nu_i x + t_{32}\cos\nu_i y + t_{33}\cos\nu_i z)]\, d\sigma_i\\
&= \sum_1^n{}_i \int_{\sigma_i} [(u_\alpha - u_\beta)(t'_{11}\cos\nu_i x + t'_{12}\cos\nu_i y + t'_{13}\cos\nu_i z)\\
&+ \qquad (v_\alpha - v_\beta)(t'_{21}\cos\nu_i x + t'_{22}\cos\nu_i y + t'_{23}\cos\nu_i z)\\
&+ \qquad (w_\alpha - w_\beta)(t'_{31}\cos\nu_i x + t'_{32}\cos\nu_i y + t'_{33}\cos\nu_i z)]\, d\sigma_i,
\end{aligned}$$

où les notations sont les mêmes que celles déjà employées dans la formule (1). Donc

$$(2) \qquad \sum_1^{6n}{}_i E'_i s_i = \sum_1^{6n}{}_i E_i s'_i.$$

{Si, outre les deux distorsions appliquées dans les deux cas, on a appliqué dans le premier cas au corps élastique les forces de masse $\rho X dS$, $\rho Y dS$, $\rho Z dS$ et les tensions superficielles $X_\sigma d\sigma$, $Y_\sigma d\sigma$, $Z_\sigma d\sigma$ et dans le second cas les forces de masse $\rho X' dS$, $\rho Y' dS$, $\rho Z' dS$ et les tensions superficielles $X'_\sigma d\sigma$, $Y'_\sigma d\sigma$, $Z'_\sigma d\sigma$, il faudra remplacer l'équation (2) par

$$\begin{aligned}
&\sum_1^{3n} E'_i s_i + \int_S \rho\,(X' u + Y' v + Z' w)\, dS + \int_\sigma (X'_\sigma u + Y'_\sigma v + Z'_\sigma w)\, d\sigma\\
&= \sum_1^{3n} E_i s'_i + \int_S \rho\,(X u' + Y v' + Z w')\, dS + \int_\sigma (X_\sigma u' + Y_\sigma v' + Z_\sigma w')\, d\sigma \}.
\end{aligned}$$

En conséquence, { lorsqu'il n'y a que les distorsions et les forces manquent }, nous avons le théorème suivant:

Si dans un corps élastique multiplement connexe deux systèmes de distorsions engendrent deux systèmes d'efforts, la somme des produits des efforts *du premier système de distorsions par les caractéristiques du second système est égale au produit des efforts du second système de distorsions par les caractéristiques du premier système.*

{ Si les distorsions manquent et il n'y a que les forces on retrouve le théorème de BETTI. Si dans le premier cas les forces manquent et dans le second cas manquent les distorsions on a le théorème de COLONNETTI (*) }.

2. De l'égalité (2), en tenant compte que $s_1, s_2, \cdots, s_{6n}, s'_1, s'_2, \cdots, s'_{6n}$ sont des quantités arbitraires, on tire

$$E_{ih} = E_{hi}, \tag{3}$$

pour toutes les valeurs des indices i et h. Réciproquement de ces égalités découle, comme conséquence, l'équation (2). Le théorème de réciprocité que nous venons de donner pourra donc s'énoncer de la manière suivante:

L'effort d'ordre i induit par la distorsion élémentaire d'ordre h est égal à l'effort d'ordre h induit par la distorsion élémentaire d'ordre i.

Par cet énoncé le théorème prend une forme semblable au théorème fondamental de l'induction électrostatique.

Plus simplement encore le théorème peut s'énoncer:

Les coefficients des efforts ne changent pas de valeur par une transposition des indices.

3. Étant données les nombreuses applications du théorème de réciprocité il ne sera pas inutile de l'examiner encore sous un autre point de vue.

Prenons deux sections quelconques σ_1 et σ_2 du corps élastique, les deux sections pouvant aussi coincider.

Exécutons tout d'abord une distorsion, consistant dans une translation relative T_1 suivant la direction h_1, des éléments des deux faces de la coupure σ_1. Déterminons ensuite la projection S_2 suivant la direction h_2 de la résultante des tensions qui sollicitent la section σ_2.

Exécutons enfin, au lieu de la précédente distorsion, une autre distorsion qui consistera dans une translation T_2 suivant la direction h_2 des éléments des deux faces de la coupure σ_2 et déterminons la projection σ_1 suivant h_1 de la résultante des efforts qui sollicitent la section σ_1.

Le théorème de réciprocité nous donne

$$S_2 T_2 = S_1 T_1$$

et, par suite,

$$\frac{S_2}{T_1} = \frac{S_1}{T_2},$$

{ (*) M. COLONNETTI a enoncé et démontré ce théorème en 1912 directement et d'une manière indépendante des propositions précedentes. Ce n'est que la première de ces propositions que j'avais donnée dans le present mémoire et dans mes notes antécédentes de l'Academie des Lincei. M. COLONNETTI a appelé son théorème le *second principe* de réciprocité et il en a fait un grand nombre d'applications }.

c'est-à-dire *les projections des deux efforts suivant les directions des deux translations sont proportionnelles aux valeurs des translations ellesmêmes.*

On obtient un théorème tout à fait analogue en substituant à la translation T_1 une rotation T_1 autour de la ligne droite h_1, pourvu qu'on remplace la projection S_1 de la résultante des tensions qui sollicitent les éléments de σ_1 par le moment de ces tensions par rapport à la ligne droite h_1.

Enfin avec de semblables substitutions pour T_2 et S_2, on obtient un nouveau théorème analogue aux deux premiers.

Ces trois propositions sont équivalentes au théorème de réciprocité que nous avons déjà énoncé de diverses manières dans le paragraphe précédent.

III.

1. En vertu de l'égalité (3) on a

$$E_i = \frac{\partial E}{\partial s_i},$$

et, si l'on appelle e_{ih} les coefficients de la forme réciproque de l'expression

$$\Sigma_i \Sigma_h E_{ih} s_i s_h,$$

nous pourrons exprimer d'une autre façon l'énergie du système moyennant la formule

$$E = \frac{1}{2} \Sigma_i \Sigma_h e_{ih} E_i E_h .$$

2. Dans le Chapitre précédent nous avons démontré que, étant donné une déformation d'un système multiplement connexe, les distorsions qui correspondent à ses coupures équivalentes sont égales.

Nous voulons maintenant compléter cette proposition et prouver que les efforts qui correspondent à des coupures équivalentes sont aussi égaux.

En effet, envisageons la section σ_1. Par définition on peut la réduire à une section équivalente σ_2 au moyen d'une déformation continue. Pendant qu'on effectue cette réduction la surface σ_1 engendre un solide S_1 qui constitue une partie du corps élastique S.

Le solide S_1 sera limité par σ_1, σ_2 et par une surface latérale ω. Nous pouvons alors imaginer S_1 en équilibre sous la seule action des tensions qui agissent sur σ_1 et σ_2. De là résulte l'egalité des efforts.

On en conclut que les efforts, comme les distorsions, ne sont pas des éléments spécifiques de chaque coupure, mais qu'ils dépendent exclusivement de la nature géométrique de l'espace occupé par le corps et de la déformation régulière dont le corps est affecté.

Le premier problème fondamental que nous pourrons nous proposer dans l'étude des solides élastiques plusieurs fois connexes sera le suivant:

Les 6 n distorsions étant données, déterminer les 6 n efforts en supposant nulles les forces extérieures.

Cette question revient à déterminer les cofficients des efforts.

CHAPITRE IV.

Distorsions et efforts dans un corps cyclique symétrique (*).

I.

1. En partant des principes que nous avons établis dans le Chapitre précédent, nous étudierons dans celui–ci un cas particulier de distorsions. Nous verrons comment ces principes nous permettent d'approfondir le mécanisme des distorsions et nous révèlent des faits qui sont bien loin de ceux qu'on aurait pu prévoir, *a priori*, en examinant intuitivement la question. On, atteindra le but sans recourir à l'intégration des équations différentielles, mais à l'aide d'une discussion élémentaire de l'expression de l'énergie d'un système élastique qui a subi des distorsions données.

Pour donner brièvement une idée des résultats, revenons à l'exemple d'où nous sommes partis au Chapitre I.

Nous avons supposé de supprimer dans un anneau une tranche très mince transversale qui varie en èpaisseur proportionnellement à la distance de l'axe de symétrie; ensuite, nous avons supposé de rapprocher les deux faces de la coupure et de les souder. Le corps abandonné à lui–même cesse d'être à l'état naturel. Il prend un état de déformation régulière et ses éléments sont sollicités par des forces élastiques. On peut donc se demander quelles sont les actions qui s'exercent sur les faces soudées. Il semblerait évident qu'elles devraient être tendues, mais la chose n'est pas ainsi. Il y a toujours une partie tendue et une partie comprimée; de plus « la somme des forces de tension est égale à la somme des forces de compression ».

Le présent Chapitre est consacré à ce théorème et à d'autres analogues qui jettent un jour inattendu sur la distribution des efforts élastiques engendrés dans les corps par les distorsions.

2. Donnons tout d'abord quelques définitions. Dans le Chapitre précédent, nous avons exprimé l'énergie élastique d'un corps sujet à des distorsions par la formule

$$E = \frac{1}{2} \sum_{1}^{6n}{}_i E_i s_i ,$$

où les efforts sont représentés par E_i et les caractéristiques des distorsions par s_i. Nous appellerons E_i l'effort conjugué à la caractéristiques s_i de la distorsion.

(*) Traduzione, con lievissime modificazioni di forma, della Nota: *Sulle distorsioni dei corpi elastici simmetrici*. « Rend. Acc. Lincei », s. 5ª, vol. XIV_1, 1905_1, pp. 431–438. [N. d. R.].

Le centre de réduction étant choisi, la distorsion appliquée à chaque coupure peut être décomposée en une translation et en une rotation relative des éléments des faces de la coupure. Faisons usage du même centre de réduction et composons les actions qui sollicitent les éléments d'une face de la même coupure comme si elles étaient appliquées aux points d'un système rigide. On trouve ainsi une force résultante et un couple résultant. Cette force et ce couple constituent l'effort total appliqué à la section (voir Chap. précédent, Art. I, § 4).

En vertu de la précédente définition, les composantes, suivant les axes coordonnés, de la force résultante sont les efforts conjugués des projections correspondantes de la translation; et les composantes du couple résultant sont les efforts conjugués des projections correspondantes de la rotation.

Si la distorsion est élémentaire, une seule des caractéristiques et, par conséquent, une seule des précédentes projections sera différente de zero; alors la composante de la force ou la composante du couple qui est conjuguée à cette caractéristique pourra s'appeler l'*effort conjuguè à la distorsion élémentaire*.

3. Un solide de révolution peut être engendré par la révolution d'une surface plane connexe (surface génératrice) autour d'une ligne droite de son plan. Soit n l'ordre de connexion de la surface génératrice. Si l'axe de rotation lui est extérieur, l'ordre de connexion du solide est $n + 1$; mais, si l'axe constitue une partie du contour de la surface génératrice, l'ordre de connexion du solide est égal à n.

Réduisons simplement connexe la surface génératrice moyennant $n - 1$ coupures linéaires. Par la rotation, ces coupures engendrent autant de surfaces qui peuvent être considérées comme des sections du solide. Dans le second cas, ces sections suffisent pour rendre le solide simplement connexe, tandis que dans le premier cas, pour obtenir la connexion simple, il faut faire encore une coupure transversale, par exemple une coupure qui coincide avec une des positions que la surface génératrice prend pendant qu'elle tourne autour de l'axe.

Cette dernière coupure, ou toute coupure équivalente, s'appellera de *première espèce*; chacune des autres, ou une coupure équivalente, s'appellera de *seconde espèce*.

Soit un solide symétrique deux fois connexe: deux cas peuvent se présenter: 1° la surface engendrée est simplement connexe et extérieure à l'axe de symétrie; 2° la surface engendrée est deux fois connexe et en partie limitée par l'axe de symétrie.

Pour réduire le solide simplement connexe, nous ferons dans le premier cas une coupure de première espèce, et dans le second cas une coupure de seconde espèce, et nous dirons, dans le premier cas, que le corps est *deux fois connexe de première espèce*, et dans le seconde cas, qu'il est *deux fois connexe de seconde espèce*.

II.

1. Étudions maintenant les distorsions d'un corps élastique symétrique deux fois connexe de première espèce. Dans cette étude, nous admettrons que la symétrie n'est pas seulement limitée à la forme, mais dans l'hypothèse de l'anisotropie qu'elle subsiste aussi relativement à la constitution du corps élastique.

Supposons que la distorsion soit exécutée sur une coupure σ faite suivant une des positions que la surface génératrice prend dans la rotation.

Plaçons l'origine en un point de l'axe de symétrie et prenons cet axe comme axe z.

L'énergie du système sera exprimée par la formule (voir Chapitre précédent, Art. I, § 3)

$$(1) \qquad \mathrm{E} = \frac{1}{2} \sum_{1}^{6}{}_i \sum_{1}^{6}{}_h \mathrm{E}_{ih}\, s_i s_h ,$$

où

$$s_1 = l \quad , \quad s_2 = m \quad , \quad s_3 = n \quad , \quad s_4 = p \quad , \quad s_5 = q \quad , \quad s_6 = r$$

désignent les caractéristiques de la distorsion, selon les notations employées dans le Chapitre précédent.

Cela posé, observons que, à cause de la symétrie, l'énergie du système ne changera pas si, au lieu d'appliquer la distorsion à la section primitive σ, nous l'appliquons à une autre section qui forme avec la première un angle θ quelconque.

Or, les deux sections étant équivalentes, l'énergie du systéme sera la même, soit que nous appliquions au systéme, suivant la section σ, la distorsion

$$s_1 \,,\, s_2 \,,\, s_3 \,,\, s_4 \,,\, s_5 \,,\, s_6 ,$$

soit que nous appliquions, suivant la même section, la distorsion

$$s'_1 = s_1 \cos\theta + s_2 \sin\theta \quad , \quad s'_2 = -s_1 \sin\theta + s_2 \cos\theta \quad , \quad s'_3 = s_3 ,$$
$$s'_4 = s_4 \cos\theta + s_5 \sin\theta \quad , \quad s'_5 = -s_4 \sin\theta + s_5 \cos\theta \quad , \quad s'_6 = s_6 .$$

En d'autres termes,

$$(2) \qquad \mathrm{E} = \frac{1}{2} \sum_{1}^{6}{}_i \sum_{1}^{6}{}_h \mathrm{E}_{ih}\, s'_i s'_h$$

devra être indépendante de θ, c'est-à-dire

$$\frac{d\mathrm{E}}{d\theta} = 0.$$

Mais

$$\frac{ds'_1}{d\theta} = s'_2 \quad , \quad \frac{ds'_2}{d\theta} = -s'_1 \quad , \quad \frac{ds'_3}{d\theta} = 0 ,$$

$$\frac{ds'_4}{d\theta} = s'_5 \quad , \quad \frac{ds'_5}{d\theta} = -s'_4 \quad , \quad \frac{ds'_6}{d\theta} = 0 ,$$

donc

$$0 = \frac{dE}{d\theta} = (E_{11} - E_{22}) s'_1 s'_2 + E_{12} (s'^2_2 - s'^2_1) + E_{13} s'_2 s'_3 - E_{23} s'_1 s'_3$$
$$+ (E_{44} - E_{55}) s'_4 s'_5 + E_{45} (s'^2_5 - s'^2_4) + E_{46} s'_5 s'_6 - E_{56} s'_4 s'_6$$
$$+ (E_{14} - E_{25}) (s'_2 s'_4 + s'_1 s'_5) + (E_{24} + E_{15}) (s'_2 s'_5 - s'_4 s'_1)$$
$$+ E_{16} s'_2 s'_6 - E_{26} s'_1 s'_6 + E_{34} s'_3 s'_5 - E_{35} s'_3 s'_4 .$$

Or, les quantités $s'_1 , s'_2 , s'_3 , s'_4 , s'_5 , s'_6$ sont arbitraires; il s'ensuit que

$$E_{11} = E_{22} \quad , \quad E_{44} = E_{55} \quad , \quad E_{14} = E_{25} \quad , \quad E_{24} = -E_{15} ,$$
$$E_{12} = E_{13} = E_{23} = E_{45} = E_{46} = E_{56} = E_{16} = E_{26} = E_{34} = E_{35} = 0.$$

Par conséquent, l'expression (2) se réduira à

$$E = \frac{1}{2} [E_{11} (s_1^2 + s_2^2) + E_{33} s_3^2 + E_{44} (s_4^2 + s_5^2) + E_{66} s_6^2$$
$$+ 2 E_{14} (s_1 s_4 + s_2 s_5) + 2 E_{24} (s_2 s_4 - s_1 s_5) + 2 E_{36} s_3 s_6].$$

Prenons le plan xz comme plan de la section σ et envisageons la distorsion d'ordre 6, c'est-à-dire la distorsion due à une rotation relative des éléments des deux faces de la coupure σ autour de l'axe z.

Il est évident que la déformation du corps résultera symétrique par rapport au plan xz et, par conséquent, l'ellipsoïde d'élasticité et la surface directrice [13] dans chaque point de σ auront le plan xz pour plan de symétrie.

En d'autres termes, les actions élastiques qui s'exercent sur les éléments de σ devront être normales à σ. En composant ces actions et en prenant l'origine pour centre de réduction, on ne pourra obtenir qu'une résultante normale à σ (ayant la direction y) et un couple résultant dont l'axe est parallèle à σ. Il s'ensuit que

$$E_{16} = E_{36} = E_{56} = 0 ,$$

c'est pourquoi

$$E = \frac{1}{2} [E_{11} (s_1^2 + s_2^2) + E_{33} s_3^2 + E_{44} (s_4^2 + s_5^2) + E_{66} s_6^2 \tag{3}$$
$$+ 2 E_{14} (s_1 s_4 + s_2 s_5) + 2 E_{24} (s_2 s_4 - s_1 s_5)].$$

(13) Voir CLEBSCH, loc. cit., Chap. I, § 6.

De la même manière, envisageons la distorsion élémentaire d'ordre 2, c'est-à-dire la distorsion due à une translation relative des éléments des deux faces de la coupure σ, parallèlement à l'axe y. L'ellipsoide d'élasticité et la surface directrice résulteront symétriques par rapport au plan xz en chaque point de σ. C'est pourquoi, à l'aide d'un raisonnement analogue à celui que nous venons de faire, on tire

$$E_{12} = E_{32} = E_{52} = 0 .$$

Mais

$$E_{14} = E_{52} ,$$

donc

$$(4) \qquad E = \frac{1}{2} [E_{11} (s_1^2 + s_2^2) + E_{33} s_3^2 + E_{44} (s_4^2 + s_5^2) + E_{66} s_6^2 + 2 E_{24} (s_2 s_4 - s_1 s_5)].$$

Observons maintenant que le coefficient $E_{11} = E_{22}$ ne peut pas être nul, autrement l'énergie due à une distorsion élémentaire d'ordre 1 ou d'ordre 2 serait nulle, ce qui est absurde.

Il s'ensuit que, en composant toutes les actions qui sollicitent σ, en vertu de la distorsion élémentaire d'ordre 2, on doit obtenir une résultante différente de zero dont la ligne d'action rencontre l'axe z en un point Ω. En effet, toutes ces actions sont équivalentes à la force E_{22} appliquée à l'origine et au couple ayant pour moment E_{24} et pour axe x.

Mais, si nous prenons le centre de réduction dans le point Ω, nous aurons $E_{24} = 0$ et, par suite,

$$(5) \qquad E = \frac{1}{2} [E_{11} (s_1^2 + s_2^2) + E_{33} s_3^2 + E_{44} (s_4^2 + s_5^2) + E_{66} s_6^2] .$$

2. Étudions maintenant les distorsions des corps symétriques multiplement connexes de seconde espèce. Supposons que les distorsions soient appliquées à une coupure de seconde espèce symétrique par rapport à l'axe de symétrie du corps.

L'énergie du systéme aura toujours la forme (1) et, si nous prenons comme axe z l'axe de symétrie, l'expression de cette énergie ne doit point changer si nous faisons tourner dans leur plan les axes x, y d'un angle θ. Donc, même dans ce cas, l'expression (2) doit résulter indépendante de θ et E doit prendre la forme (3). Mais, en vertu de la symétrie, E ne doit pas varier si l'on change s_6, lorsqu'on suppose $s_1 = s_2 = s_4 = s_5 = 0$; donc $E_{36} = 0$. Même si l'on change entre eux les axes x, y, l'énergie E ne variera pas, c'est-à-dire la quantité E doit se conserver la même, si l'on substitue en même temps s_1 à s_2 et s_4 à $-s_5$. Il en résulte que $E_{14} = 0$ et, par conséquent, l'énergie E doit avoir la forme (4).

Un raisonnement analogue à celui que l'on a fait dans le paragraphe précédent prouve que, en choisissant convenablement l'origine en un point Ω, on peut rendre E_{24} égal à zero. Par conséquent, même dans le cas où la double connexion est de seconde espèce, l'expression de l'énergie peut se réduire à la formule (5).

Le point Ω s'appellera *le point central de l'axe de symétrie.*

3. La formule (5), quand on tient compte du principe des coupures équivalentes, renferme le théoreme suivant:

Dans un corps élastique symétrique deux fois connexe, chaque distorsion élementaire engendre le seul effort conjugué, quand on prend le centre de réduction dans le point central de l'axe de symétrie.

De ce théorème dècoule le corollaire suivant:

L'effort total engendré par une distorsion, consistant en une translation relative des éléments des faces de la coupure, est une force dont la ligne d'action passe par le point central de l'axe de symétrie.

L'effort total engendré par une distorsion, consistant en une rotation relative des éléments des faces de la coupure autour d'un axe passant par le point central de l'axe de symetrie, est un couple.

Il serait ensuite facile de démontrer que:

Si le corps élastique a un plan de symétrie normal à l'axe de symétrie, le point central est le lieu d'intersection de l'axe de symétrie avec le plan de symétrie.

4. Examinons le cas où la double connexion est de première espèce et la distorsion d'ordre 6. Alors l'effort est réduit à un couple ayant pour axe l'axe de symétrie. Donc, si nous considérons les actions élastiques qui sollicitent une face de la coupure, leur résultante est nulle. De là le théorème énoncé dans le § 1 de l'Article I. Il est facile de compléter ce théorème en montrant que, par rapport à l'axe de symétrie, le moment des forces de tension surpasse celui des forces de compression et précisément de la quantité E_{66}.

D'une manière analogue supposons que la coupure soit faite suivant le plan xz et considérons la distorsion d'ordre 2. L'effort induit sera une force normale à la coupure dont la ligne d'action rencontrera l'axe de symétrie. Donc, dans ce cas aussi doivent exister des éléments des faces de la coupure qui sont comprimés tandis que les autres sont tendus.

Revenant à l'exemple du paragraphe 1, nous pouvons énoncer la proposition suivante:

Si nous supprimons dans l'anneau (au lieu d'une tranche proportionnelle en largeur à la distance de l'axe de symétrie) une tranche de largeur uniforme et si nous soudons ensuite les faces de la fente, quelques parties de ces faces seront tendues et d'autres comprimées. Les tensions surpasseront les pressions (et précisément de E_{11}), *mais le moment des premières sera égal au moment des secondes par rapport à l'axe de symétrie.*

On déduit très facilement des résultats précédents que, si l'on supprime dans l'anneau une tranche dont l'épaisseur est donnée par

$$s_2 - s_6 x,$$

en appelant x la distance de l'axe de symétrie, en soudant ensuite les faces de la fente, on engendre un effort normal à la section dont la ligne d'action est éloignée de l'axe de symétrie de

$$h = \frac{s_6}{s_2} \frac{E_{66}}{E_{11}} .$$

On voit ainsi que, en choisissant convenablement le rapport s_6/s_2, on peut faire en sorte que cette ligne d'action soit à une distance quelconque de l'axe de symétrie.

Dans le premier Chapitre nous avons examiné la distorsion qui consiste à faire glisser les deux faces de la coupure l'une relativement à l'autre dans le sens de l'axe de symétrie, de manière à donner à l'anneau une forme legèrement hélicoidale et, ensuite, à souder entre elles les deux faces.

Cette distorsion correspond à une distorsion d'ordre 3. En conséquence, l'effort correspondant a pour ligne d'action l'axe de symétrie; c'est pourquoi les éléments d'une face de la coupure seront tirés les uns dans le sens où l'on a fait le glissement, les autres dans le sens opposé; de plus, le moment des premières actions sera égal à celui des autres par rapport à un axe normal à la section et qui rencontre l'axe de symétrie.

Nous ne nous arrêterons pas à discuter d'autres cas particuliers qui ne sont pourtant pas sans intérêt, mais qui donnent lieu à des considérations et à des conclusions analogues à celle que nous venons de développer et de formuler.

CHAPITRE V.

Cylindre creux de révolution. – Distorsion d'ordre 6 (*).

I.

1. Un des résultats auxquels je suis arrivé dans le Chapitre précédent a été le suivant:

Soit un anneau symétrique relativement à un axe (fig. 1). Retranchons en AA′ BB′ une mince tranche dont la largeur varie proportionnellement à la distance de l'axe (nous appellerons cette opération *faire une fissure radiale*). Rapprochons ensuite les faces AA′ et BB′ de la fissure, soudons-les et laissons l'anneau libre.

Les faces soudées ne sont pas simplement tendues, mais en partie tendues et en partie comprimées et la somme des forces de compression est égale à la somme des forces de tension (voir Chap. IV, Art. I, § 1, Art. II, § 4).

(*) Traduzione, con lievissime modificazione di forma, della Nota: *Contributo allo studio delle distorsioni dei solidi elastici.* «Rend. Acc. Lincei», s. 5ª, vol. XIV_1, 1905_1, pp. 641-654. [N. d. R.].

En retranchant en AA′ BB′ (fig. 2) une tranche mince à faces parallèles et équidistantes de l'axe de l'anneau (*fissure uniforme*) on trouverait encore, après avoir soudé les deux faces et abandonné le corps à lui-même, que les faces sont en partie tendues et en partie comprimées. Toutefois les conditions du corps en équilibre sont essentiellement différentes dans les deux cas (Chap. IV, Art. II, § 4).

Dans le premier cas, l'état de déformation du corps est symétrique, relativement à l'axe, en sorte que l'on aurait obtenu le même état en exécutant la même fissure radiale en une autre section axiale quelconque de l'anneau [par exemple, en celle diamétralement opposée C′C (fig. 1)] et en

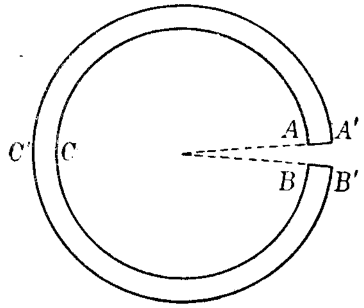


Fig. 1.

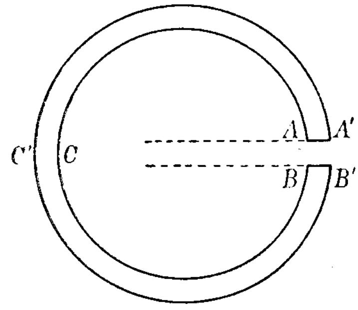


Fig. 2.

soudant ensuite les faces. Dans le second cas, pour obtenir le même état de déformation en opérant une distorsion dans la région diamétralement opposée à AA′ BB′, on aurait dû faire une coupure en CC′ et interposer entre les faces de la coupure un coin d'épaisseur uniforme (voir le principe des coupures équivalentes; Chap II, Art. I, § 1).

De plus, la distribution des efforts est tout à fait différente dans les deux cas.

Dans le premier, si nous examinons les actions que AA′ exerce sur BB′ après la soudure et si nous composons entre eux tous les efforts de compression et ensuite tous ceux de tension, nous obtenons que la ligne d'action de la résultante des premiers efforts est située vers la région intérieure de l'anneau, c'est-à-dire du côté AB, et la ligne d'action de la résultante des autres efforts vers la région extérieure, c'est-à-dire du côté A′B′. En vertu de la symétrie on trouverait un résultat analogue en chaque section axiale de l'anneau.

En effet, nous avons trouvé (voir Chap. IV, Art. II, § 4) que la résultante des efforts de tension est égale en intensité à celle des efforts de compression, mais que le moment de la première résultante relativement à l'axe de symétrie surpasse le moment de l'autre résultante.

Au contraire, en faisant, dans le second cas, une semblable composition, on a que la ligne d'action de la résultante des efforts de compression qui agissent sur la face BB′, après la soudure, est située vers la région extérieure de l'anneau, c'est-à-dire du côté A'B' : tandis que la ligne d'action des efforts de tension est située vers la région intérieure, c'est-à-dire du côté AB. Mais on trouve le contraire du côté opposé CC'; la ligne d'action de la résultante des efforts de compression est ici située du côté intérieur, vers C, et la ligne d'action de la résultante des tensions est du côté opposé, vers C'.

En effet, nous avons démontré (Chap. IV, Art. II, § 4) que dans le cas d'une coupure uniforme, en chaque section transversale de l'anneau, les efforts de tension surpassent ceux de compression et la résultante des uns et des autres rencontre orthogonalement l'axe de symétrie de l'anneau.

En d'autres termes, dans le cas de la fissure radiale, les fibres circulaires étirées de l'anneau se trouvent principalement vers la région extérieure et celles comprimées vers la région intérieure et cela tout le long de l'anneau. Au contraire, dans le cas de la fissure uniforme, les fibres circulairès, du côté droit de l'anneau, sont principalement étirées dans la région extérieure; le contraire arrive du côté gauche de l'anneau.

Les résultats que nous venons d'énoncer se déduisent facilement soit du principe des coupures équivalentes, soit de la loi de composition des efforts (voir les Chapitres précédents). Par l'intuition on arriverait difficilement, *a priori*, à ces résultats; ils nous semblent inattendus. On peut se rendre compte de cela en remarquant que l'expérience quotidienne nous habitue à prévoir les déformations des corps, lorsqu'ils sont assujettis à des efforts extérieurs connus. Mais dans le cas présent, aucun effort extérieur n'est exercé sur le corps élastique: les efforts qui le sollicitent sont intérieurs et, pour ainsi dire, cachés à l'observateur, en sorte qu'ils figurent, en même temps que la déformation, comme les inconnues du problème.

2. Pour avoir la confirmation expérimentale de quelques-uns des résultats obtenus j'ai opéré sur des solides de caoutchouc, avec lesquels il est facile d'obtenir des déformations très sensibles.

Pour faire une comparaison entre les résultats du calcul et les expériences, je commencerai, dans ce Chapitre, par approfondir le premier exemple développé dans le Chapitre I, c'est-à-dire le cas correspondant à la distorsion d'ordre 6 (voir Chap. IV) due à une fissure radiale en un cylindre creux de révolution, cas qui présente les moindres difficultés au point de vue analytique. Les distorsions des autres ordres seront examinées dans les Chapitres suivants.

II.

1. Les formules (2), du Chapitre I, dans lesquelles on suppose $\gamma = 0$, expriment les déplacements correspondant à une distorsion d'ordre 6 (fissure radiale) quand le cylindre est sujet respectivement à des actions uniformes, suivant les surfaces cylindriques qui forment le contour latéral du corps, et à des tensions qui en sollicitent les bases. On élimine facilement les pre-

mières en composant les déplacements (2) dudit Chapitre avec les déplacements

$$u = \lambda \frac{x}{r^2} + \mu x \quad , \quad v = \lambda \frac{y}{r^2} + \mu y \quad ; \quad w = 0,$$

et en choisissant convenablement les constantes λ et μ.

En opérant ainsi, on arrive aux déplacements

$$(\mathrm{I}) \quad \left\{ \begin{aligned} u = &-\alpha \Big[\; y \operatorname{arc\,tang} \frac{y}{x} - \frac{1}{2} \frac{K}{L + 2K} x \log r^2 \\ &+ \frac{L + K}{L + 2K} R_1^2 R_2^2 \frac{\log R_1^2 - \log R_2^2}{R_1^2 - R_2^2} \frac{x}{r^2} \\ &+ \frac{x}{2} \left(1 + \frac{K}{L + 2K} \frac{R_1^2 \log R_1^2 - R_2^2 \log R_2^2}{R_1^2 - R_2^2} \right) \Big], \\ v = &-\alpha \Big[-x \operatorname{arc\,tang} \frac{y}{x} - \frac{1}{2} \frac{K}{L + 2K} y \log r^2 \\ &+ \frac{L + K}{L + 2K} R_1^2 R_2^2 \frac{\log R_1^2 - \log R_2^2}{R_1^2 - R_2^2} \frac{y}{r^2} \\ &+ \frac{y}{2} \left(1 + \frac{K}{L + 2K} \frac{R_1^2 \log R_1^2 - R_2^2 \log R_2^2}{R_1^2 - R_2^2} \right) \Big], \\ w = &\; 0, \end{aligned} \right.$$

qui correspondent à l'hypothèse d'une distorsion (d'ordre 6) due à une fissure radiale, dont l'ouverture angulaire est $2\pi\alpha$, pendant que le corps est sollicité par les seules actions agissant sur les deux bases. Ces actions maintiennent lesdites bases planes et à la distance primitive [14].

On peut facilement calculer les six caractéristiques des tensions (*strain*) qui correspondent aux déplacements (I) et l'on a

$$(1) \qquad t_{11} = \frac{\alpha (L + K) K}{L + 2K} \left[\log r^2 + \frac{2y^2}{r^2} - \frac{R_1^2 R_2^2 (\log R_1^2 - \log R_2^2)}{R_1^2 - R_2^2} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{2x^2}{r^4} \right) - \frac{R_1^2 \log R_1^2 - R_2^2 \log R_2^2}{R_1^2 - R_2^2} \right],$$

$$(2) \qquad t_{22} = \frac{\alpha (L + K) K}{L + 2K} \left[\log r^2 + \frac{2x^2}{r^2} - \frac{R_1^2 R_2^2 (\log R_1^2 - \log R_2^2)}{R_1^2 - R_2^2} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{2y^2}{r^4} \right) - \frac{R_1^2 \log R_1^2 - R_2^2 \log R_2^2}{R_1^2 - R_2^2} \right],$$

$$(3) \qquad t_{33} = \frac{\alpha L K}{L + 2K} \left(1 + \log r^2 - \frac{R_1^2 \log R_1^2 - R_2^2 \log R_2^2}{R_1^2 - R_2^2} \right),$$

(14) Dans ces formules, comme dans les suivantes, les logarithmes sont népériens.

(4) $t_{23} = 0$,

(5) $t_{31} = 0$,

(6) $$t_{12} = -\frac{2\alpha(L+K)K}{L+2K}\frac{xy}{r^2}\left[1 - \frac{R_1^2 R_2^2(\log R_1^2 - \log R_2^2)}{R_1^2 - R_2^2}\frac{1}{r^2}\right].$$

Les égalités $t_{23} = 0$ et $t_{31} = 0$ prouvent que les forces agissent normalement aux bases.

Cette action sur les bases, rapportée à l'unité de surface, doit être considérée comme positive lorsqu'elle est dirigée de l'extérieur vers l'intérieur du cylindre et comme négative dans le cas contraire. Voici son expression

(II) $$P_\omega = t_{33} = \frac{\alpha LK}{L+2K}\left(1 + \log r^2 - \frac{R_1^2 \log R_1^2 - R_2^2 \log R_2^2}{R_1^2 - R_2^2}\right).$$

Nous avons donc le théorème suivant:

Un cylindre creux de révolution, qui a subi une distorsion (*d'odre* 6) *due à une fissure radiale d'ouverture* $2\pi\alpha$, *maintient ses bases planes et à leur distance primitive à l'aide de forces normales agissant sur les mêmes bases. Ces forces sont données par la formule précédents* (II) *dans laquelle* R_1 *et* R_2 *représentent les rayons des surfaces cylindriques latérales et* r *la distance de l'axe aux diffèrents points des bases.*

2. Cela posé, calculons les actions qui s'exercent sur les éléments de la section σ du cylindre. Cette section est faite avec la moitié du plan détaché de l'axe du cylindre qui forme, avec le plan xz, l'angle β.

Les équations (1), (2) et (6) nous fournissent tout de suite les composantes suivant les axes de l'action unitaire relative à chaque élément de la section. Ces composantes sont

$$-F\sin\beta \quad , \quad F\cos\beta \quad , \quad 0,$$

dans lesquelles

$$F = -\frac{2\alpha(L+K)K}{L+2K}\left[1 + \log r - \frac{R_1^2 R_2^2(\log R_1 - \log R_2)}{R_1^2 - R_2^2}\frac{1}{r^2} - \frac{R_1^2 \log R_1 - R_2^2 \log R_2}{R_1^2 - R_2^2}\right].$$

Ce qui prouve que chaque élément de σ est sollicité par une force normale de grandeur unitaire F.

Un calcul élémentaire nous donne

$$\int_{R_2}^{R_1} F\,dr = 0.$$

Il s'ensuit que, en composant toutes les actions qui s'exercent sur les éléments de σ, on trouve une force résultante nulle.

Ce résultat vérifie, dans le cas particulier que nous traitons, le théorème général démontré dans le Chapitre précédent, § 6.

En effet, il prouve que la somme des compressions qui agissent sur σ est égale, en valeur absolue, à la somme des tensions. Cette condition devra évidemment continuer à subsister, même quand nous ne solliciterons plus les bases du cylindre creux, au moyen des forces P_ω.

On peut calculer facilement le moment des actions qui sollicitent les éléments de σ par rapport à l'axe z. En indiquant par h la hauteur du cylindre, ce moment sera

$$h\int_{R_2}^{R_1} rF\,dr = -\frac{2\alpha(L+K)K}{L+2K}\left[\frac{R_1^2-R_2^2}{4}-\frac{R_1^2R_2^2(\log R_1-\log R_2)^2}{R_1^2-R_2^2}\right]h.$$

3. Posons

$$(7)\qquad f(r) = 1+\log r - \frac{R_1^2R_2^2(\log R_1-\log R_2)}{R_1^2-R_2^2}\frac{1}{r^2}-\frac{R_1^2\log R_1-R_2^2\log R_2}{R_1^2-R_2^2}.$$

La fonction $f(r)$ est croissante, et, puisque

$$\int_{R_2}^{R_1} f(r)\,dr = 0,$$

il résulte que l'équation

$$f(r)=0$$

a une seule racine ρ_1 comprise entre R_2 et R_1, et que $f(r)$ est négative pour les valeurs de r comprises entre R_2 et ρ_1 et positive pour les valeurs comprises entre ρ_1 et R_1.

Cela prouve que les fibres circulaires du cylindre, ayant pour axe l'axe du cylindre et dont le rayon est compris entre R_2 et ρ_1, sont comprimées, tandis que celles dont le rayon est compris entre ρ_1 et R_1 sont tendues. Les fibres neutres ont pour rayon ρ_1.

De l'équation $f(r)=0$ on tire

$$\log\frac{\rho_1}{\sqrt{R_1R_2}} = \frac{\frac{R_1}{R_2}\log\frac{R_1}{R_2}}{\frac{R_1^2}{R_2^2}-1}\,\frac{R_1R_2}{\rho_1^2}+\frac{\frac{R_1^2}{R_2^2}\log\sqrt{\frac{R_1}{R_2}}-\log\sqrt{\frac{R_2}{R_1}}}{\frac{R_1^2}{R_2^2}-1}-1;$$

et, en posant

$$\frac{R_1}{R_2}=\varepsilon\quad,\quad \log\frac{\rho_1}{\sqrt{R_1R_2}}=\varphi,$$

nous aurons

$$(8)\qquad \varphi = \frac{\varepsilon\log\varepsilon}{\varepsilon^2-1}e^{-2\varphi}+\frac{1}{2}\frac{\varepsilon^2+1}{\varepsilon^2-1}\log\varepsilon-1.$$

Soit

$$\gamma = 1-\frac{1}{\varepsilon}=\frac{R_1-R_2}{R_1},$$

nous aurons $0 < \gamma < 1$. Dans l'expression (8) développons en série, suivant les puissances ascendantes de γ, le coefficient de $e^{-2\varphi}$ et les termes successifs. Nous obtiendrons

$$\varphi(\gamma) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{6}\gamma^2 + \cdots\right)e^{-2\varphi} - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3}\gamma^2 + \cdots\right),$$

d'où l'on a

$$\varphi(0) = 0 \quad , \quad \varphi'(0) = 0 \quad , \quad \varphi''(0) = \frac{1}{12}.$$

donc

$$\varphi(\gamma) = \frac{1}{24}\gamma^2 + \cdots$$

et

$$\frac{\rho_1}{\sqrt{R_1 R_2}} = e^{\varphi(\gamma)} = 1 + \frac{1}{24}\gamma^2 + \cdots,$$

c'est-à-dire, en négligeant les puissances de $(R_1 - R_2)/R_1$ supérieures à la seconde,

$$\rho_1 = \sqrt{R_1 R_2}\left[1 + \frac{1}{24}\left(\frac{R_1 - R_2}{R_1}\right)^2\right].$$

Si l'épaisseur du cylindre creux est petite relativement aux rayons, et si le rapport de l'épaisseur au rayon extérieur est envisagé comme une quantité du premier ordre, le rayon des fibres neutres sera donné par

$$\rho_1 = \sqrt{R_1 R_2}$$

en négligeant les quantités du second ordre.

4. De la formule (7) et de l'équation

$$0 = 1 + \log \rho_1 - \frac{R_1^2 R_2^2 (\log R_1 - \log R_2)}{R_1^2 - R_2^2}\,\frac{1}{\rho_1^2} - \frac{R_1^2 \log R_1 - R_2^2 \log R_2}{R_1^2 - R_2^2},$$

on tire

$$f(r) = \log\frac{r}{\rho_1} + \frac{R_1^2 R_2^2 \log\dfrac{R_1}{R_2}}{R_1^2 - R_2^2}\left(\frac{r^2 - \rho_1^2}{r^2 \rho_1^2}\right).$$

Considérons $(R_1 - R_2)/R_1 = \gamma$ comme une quantité très petite du premier ordre. Par des calculs faciles, en posant $r = \rho_1 + \xi$ et en négligeant les quantités du second ordre, nous obtenons

$$f(r) = \frac{2\xi}{\sqrt{R_1 R_2}}\left[1 - \frac{1}{4}\,\frac{R_1 - R_2}{\left(\dfrac{R_1 + R_2}{2}\right)}\right].$$

C'est pourquoi

$$F = -\frac{2\alpha(L + K)K}{L + 2K}\,\frac{2\xi}{\sqrt{R_1 R_2}}\left[1 - \frac{1}{4}\,\frac{R_1 - R_2}{\left(\dfrac{R_1 + R_2}{2}\right)}\right].$$

Soit E le module d'élasticité et η le coefficient de POISSON. Nous aurons

$$\frac{(L+K)K}{L+2K} = -\frac{E}{4(1-\eta^2)}$$

et, si nous appelons θ l'ouverture angulaire de la coupure radiale, α sera ègal à $\theta/(2\pi)$; donc

$$\text{(III)} \qquad F = \frac{E}{(1-\eta^2)} \frac{\theta}{2\pi} \frac{\xi}{\rho}\left(1 - \frac{1}{4}\frac{s}{\rho}\right),$$

où ρ est la moyenne (arithmétique ou géométrique) des rayons et s la différence des rayons, c'est-à-dire l'épaisseur du cylindre creux.

5. Passons maintenant à examiner la loi de distribution des forces P_ω sur les bases du cylindre.

Posons

$$\text{(9)} \qquad \psi(r) = 1 + \log r^2 - \frac{R_1^2 \log R_1^2 - R_2^2 \log R_2^2}{R_1^2 - R_2^2};$$

par un calcul élémentaire on démontre que

$$\text{(10)} \qquad \int_{R_2}^{R_1} r\psi(r)\, dr = 0,$$

il s'ensuit que l'équation $\psi(r) = 0$ devra avoir une racine comprise entre R_1 et R_2, et, comme $\psi(r)$ est une fonction croissante, cette racine sera unique. En l'appelant ρ_2 nous aurons que $\psi(r)$ sera négative si la variable r est comprise entre R_2 et ρ_2, et positive si r est comprise entre ρ_2 et R_1.

Il est facile de montrer que $\rho_2 > (R_1 + R_2)/2$.

Nous avons, en effet,

$$\text{(11)} \qquad 1 + \log \rho_2^2 - \frac{R_1^2 \log R_1^2 - R_2^2 \log R_2^2}{R_1^2 - R_2^2} = 0,$$

d'où

$$\log \frac{2\rho_2}{R_1 + R_2} = \frac{R_2^2 \log \dfrac{R_1}{R_2}}{R_1^2 - R_2^2} + \log \frac{R_1}{R_1 + R_2} - \frac{1}{2} + \log 2$$

et, en posant

$$\frac{R_1}{R_2} = \varepsilon \quad , \quad \log \frac{2\rho_2}{R_1 + R_2} = \chi(\varepsilon),$$

$$\chi(\varepsilon) = \frac{\log \varepsilon}{\varepsilon^2 - 1} + \log \frac{\varepsilon}{\varepsilon + 1} - \frac{1}{2} + \log 2,$$

il s'ensuit

$$\chi'(\varepsilon) = \frac{\varepsilon - \dfrac{1}{\varepsilon} - 2\log\varepsilon}{\dfrac{1}{\varepsilon}(\varepsilon^2 - 1)^2} = \frac{\tilde{\omega}(\varepsilon)}{\dfrac{1}{\varepsilon}(\varepsilon^2 - 1)^2}.$$

Si l'on écrit, comme nous avons fait précédemment (§ 3), $\gamma = 1 - 1/\varepsilon$ et, si l'on développe le logarithme et, ensuite, $\chi'(\varepsilon)$ en série suivant les puissances de γ, on a

$$(12) \qquad \chi'(\varepsilon) = \frac{\left(\frac{1}{3}\gamma^3 + \cdots\right)(1-\gamma)^3}{\gamma^2(2-\gamma)^2} = \frac{1}{12}\gamma + \cdots,$$

où les termes qui suivent le premier contiennent des puissances supérieures de la variable γ. On en déduit

$$\chi'(\varepsilon)_{\varepsilon=1} = 0 \quad , \quad \chi(\varepsilon)_{\varepsilon=1} = 0.$$

Mais

$$\tilde{\omega}'(\varepsilon) = \left(1 - \frac{1}{\varepsilon}\right)^2,$$

c'est pourquoi $\tilde{\omega}(\varepsilon)$ et, par conséquent, $\chi'(\varepsilon)$ sont positives pour $\varepsilon > 1$. Donc $\chi(\varepsilon)$ pour $\varepsilon > 1$ est une fonction croissante. Mais $\lim_{\varepsilon=1} \chi(\varepsilon) = 0$ donc

$$\log \frac{2\rho_2}{R_1 + R_2} > 0,$$

ou bien

$$\rho_2 > \frac{R_1 + R_2}{2}.$$

Comme $\chi(\varepsilon)_{\varepsilon=1} = 0$, de la formule (12) on tire

$$\chi(\varepsilon) = \frac{1}{24}\gamma^2 + \cdots,$$

et, par suite,

$$\frac{2\rho_2}{R_1 + R_2} = e^{\frac{1}{24}\gamma^2 + \cdots} = 1 + \frac{1}{24}\gamma^2 + \cdots,$$

d'où

$$\rho_2 = \frac{R_1 + R_2}{2}\left[1 + \left(\frac{R_1 - R_2}{R_1}\right)^2\right],$$

en négligeant, dans l'expression de ρ_2, des puissances de $(R_1 - R_2)/R_1$ supérieures à la seconde.

Nous pouvons donc conclure que le cercle qui sépare la région tendue de la région comprimée en chaque base a pour rayon la moyenne arithmétique des rayons extrêmes, à moins de quantités du second ordre.

6. Des équations (9) et (11) il résulte que

$$\psi(r) = 2 \log \frac{r}{\rho_2},$$

donc, pour la formule (II),

$$P_\omega = \frac{2\alpha LK}{L + 2K} \log \frac{r}{\rho_2}$$

et, en introduisant le module d'élasticité, le coefficient de POISSON et l'ouverture angulaire θ de la fissure radiale (voir § 4)

$$(\mathrm{II}') \qquad P_\omega = -\frac{E\eta}{1-\eta^2}\frac{\theta}{2\pi}\log\frac{r}{\rho_2}\,.$$

On tire de là que, pour maintenir planes et à la distance primitive les deux bases du cylindre, il faut les comprimer dans la région comprise entre les cercles de rayons R_2 et ρ_2 et les étirer dans la région comprise entre les cercles de rayons ρ_2 et R_1.

De la formule (10) on déduit que la somme algébrique de toutes les forces agissant sur une bande radiale prise sur une des bases est égale à zero; c'est-à-dire que la résultante des tensions a la même intensité que la résultante des pressions. L'ensemble donc de toutes les forces agissant sur la bande radiale équivaut à un couple.

En posant $r = \rho_2 + \xi$ nous aurons $|\xi/\rho_2| < 1$ étant $\rho_2 > (R_1 + R_2)/2$ (voir § 5). Il sera donc possible de développer la fonction $\log(r/\rho_2)$ en série, suivant les puissances de ξ/ρ_2 et la formule (II') s'écrira

$$P_\omega = -\frac{E\eta}{1-\eta^2}\frac{\theta}{2\pi}\left(\frac{\xi}{\rho_2} - \frac{1}{2}\frac{\xi^2}{\rho_2^2} + \frac{1}{3}\frac{\xi^3}{\rho_2^3} + \cdots\right).$$

Si l'épaisseur du cylindre est petite, en négligeant les termes du second ordre, nous aurons

$$(\mathrm{II}'') \qquad P_\omega = -\frac{E\eta}{1-\eta^2}\frac{\theta}{2\pi}\frac{\xi}{\rho_2}\,.$$

III.

1. Supposons maintenant de ne plus soumettre les deux bases du cylindre aux actions P_ω mais de les laisser libres et voyons la forme que prendra le cylindre en vertu de la seule distorsion, quand aucune force extérieure ne le sollicite.

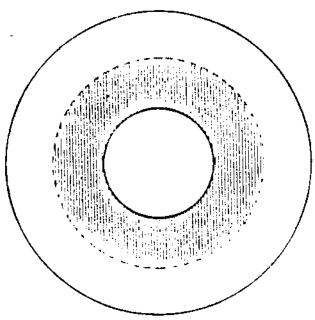


Fig. 3.

Pour cet effet, il suffira d'appliquer les principes généraux que nous avons énoncés dans le Chapitre II, Article I, paragraphe 2, c'est-à-dire qu'il faudra superposer à la déformation (1) celle due aux forces $-P_\omega$ qui agissent sur les bases du cylindre. Mais la déformation (1) conserve au corps la forme cylindrique de révolution, il suffira donc d'examiner la déformation que subit un cylindre sujet, sur les deux bases, aux actions $-P_\omega$.

La figure 3 représente une des bases du cylindre.

Le grand cercle et le petit cercle sont les deux bords de la base: le cercle pointillé est la ligne de séparation de la région qui doit être tendue par les forces — P_ω (elle a été hachée) d'avec la région qui doit être comprimée par les forces — P_ω (elle a été laissée en blanc).

Considérons maintenant (fig. 4) une tranche longitudinale ABCDEFGH infiniment mince du cylindre creux et imaginons-la détachée du reste du corps. D'après ce que nous avons trouvé dans le paragraphe 6 de l'article précédent la somme des compressions agissant sur la base supérieure ABCD sera égale à la somme des tensions; il en sera de même pour la base inférieure EFGH, donc les deux bases seront respectivement sollicitées par les couples P_1, $-P_1$; P_2, $-P_2$.

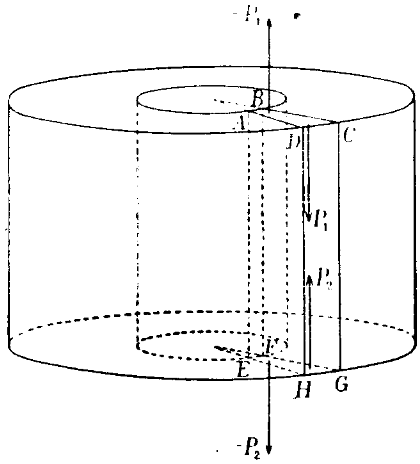


Fig. 4.

Il s'énsuit que la tranche fléchira de manière que les génératrices de la face DCGH se courberont et prendront une forme concave. Les génératrices de la face ABFE se courberont également mais en devenant convexes. En même temps, la région de la base supérieure ABCD adjacente à AB se soulèvera et la région de la même base adjacente à CD s'abaissera. L'inverse aura lieu pour la base inférieure.

Il est facile de calculer, au moyen des formules ordinaires de la flexion, le soulèvement, l'abaissement et la flèche de flexion relative à la tranche considérée. Reportons-nous au plan normal à l'axe conduit par le milieu de l'axe même; nous aurons:

Soulèvement des points de la base supérieure:

$$w' = -\frac{1}{E}(-P_\omega)\frac{h}{2} = -\frac{\eta}{1-\eta^2}\,\frac{\theta}{2h}\,\frac{\xi h}{2\rho_2}\,; \tag{13}$$

Abaissement des points de la base inférieure:

$$w'' = -\frac{1}{E}(-P_\omega)\frac{h}{2} = -\frac{\eta}{1-\eta^2}\,\frac{\theta}{2\pi}\,\frac{\xi h}{2\rho_2}\,; \tag{13'}$$

Flèche de flexion:

$$g = -\frac{P_\omega}{E\xi}\,\frac{h^2}{8} = \frac{\eta}{1-\eta^2}\,\frac{\theta}{2\pi}\,\frac{h^2}{8\rho_2}\,; \tag{14}$$

où h représente la hauteur du cylindre.

On aurait le même résultat pour toute autre bande longitudinale infiniment mince du cylindre, en la supposant séparée du reste du corps. La liaison mutuelle des différentes bandes changera lesdits soulèvements et abaissements en les rapetissant et surtout en diminuant la flèche de flexion; mais la marche de la déformation restera évidemment inaltérée et les corrections à faire dans les valeurs trouvées seront d'autant plus petites que le cylindre sera plus bas et que l'épaisseur, relativement aux rayons des bases, sera plus petite (15).

Le cylindre primitif, représenté par la figure 5, prendra donc, en vertu de la distorsion, la forme représentée par la figure 6, où l'on a exagéré les déformations pour les rendre plus visibles.

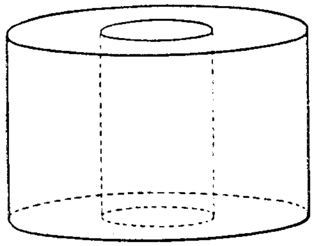


Fig. 5.

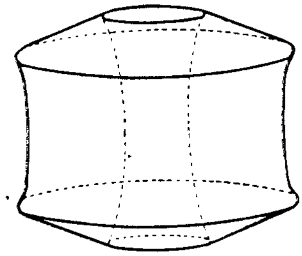


Fig. 6.

Selon les formules (13), (13'), (14) et en prenant $\rho_2 = (R_1 + R_2)/2$ la hauteur totale de la surface latérale qui limite le solide intérieurement serait, après la distorsion, égale à

$$h + \frac{\eta}{1-\eta^2}\,\frac{\theta}{2\pi}\,\frac{R_1 - R_2}{R_1 + R_2}\,h\,,$$

et la hauteur totale de la surface latérale qui limite le solide extérieurement deviendrait

$$h - \frac{\eta}{1-\eta^2}\,\frac{\theta}{2\pi}\,\frac{R_1 - R_2}{R_1 + R_2}\,h\,.$$

D'où la différence de hauteur des deux surfaces qui limitent intérieurement et extérieurement le cylindre serait

(15) $$H = \frac{2\eta}{1-\eta^2}\,\frac{\theta}{2\pi}\,\frac{R_1 - R_2}{R_1 + R_2}\,h\,,$$

et la flèche de flexion serait

(16) $$g = \frac{\eta}{1-\eta^2}\,\frac{\theta}{2\pi}\,\frac{h^2}{4(R_1 + R_2)}\,.$$

2. J'ai fait l'expérience avec un cylindre creux de caoutchouc des dimensions suivantes:

$$R_1 = 28^{mm}\quad,\quad R_2 = 12^{mm}\quad,\quad h = 28^{mm},$$

et j'ai fait une coupure radiale de 68°30'.

(15) On peut obtenir ce résultat avec beaucoup de facilité; il suffit de mettre en équation le problème moyennant les équations de l'élasticité transformées en coordonnées cylindriques.

Aprés la distorsion toutes les particularités prévues par le calcul se manifestèrent; la différence de hauteur des surfaces qui limitaient intérieurement et extérieurement le solide fut mesurée et trouvée égale à $2^{mm},1$;

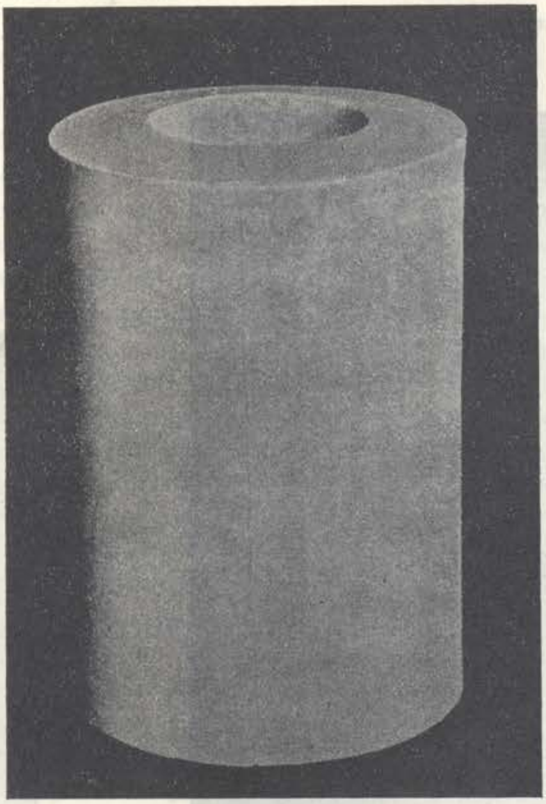


Fig. 7.

la longueur de la flèche de flexion était de $0^{mm},35$. Après avoir fait le calcul au moyen des formules (15) et (16) et pris $\eta = 1/2$, j'obtins

$$H = \text{différence de hauteur} = 2^{mm},6,$$

$$g = \quad \text{flèche de flexion} \quad = 0^{mm},53.$$

L'accord entre le calcul et les mesures directes est donc très satisfaisant.

M. Jona, ingénieur de Milan, eut l'amabilité de faire préparer à l'établissement Pirelli un cylindre creux de caoutchouc des dimensions suivantes:

$$R_1 = 5^{cm} \quad , \quad R_2 = 2^{cm},95 \quad , \quad h = 13^{cm}.$$

Il y fit exécuter une coupure radiale d'une largeur angulaire de 78°. Comme la soudure tendait à s'ouvrir, pour fixer la forme du solide déformé, j'en fis prendre une empreinte en plâtre, laquelle est reproduite photographiquement dans la figure 7.

Ce solide montre manifestement toutes les particularités que le calcul avait prévues, c'est-à-dire l'allongement intérieur, le raccourcissement

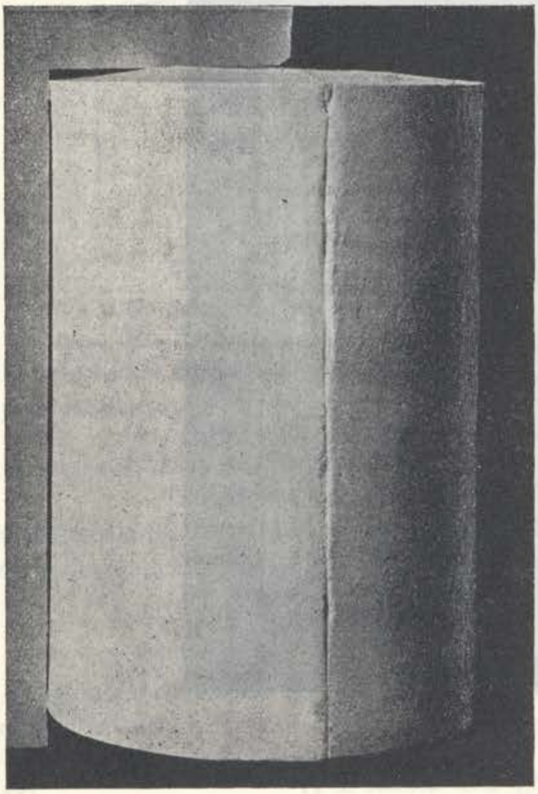


Fig. 8.

Fig. 9.

extérieur et la flexion latérale comme l'indique la figure 8. Pour rendre plus évident le phénomène on a fait la photographie du cylindre avec une équerre appliquée contre lui du côté gauche. Dans les figures 7 et 8 on voit très bien l'endroit où furent exécutées la coupure et par suite la soudure.

La figure 9 représente la photographie de l'empreinte en plâtre de l'âme du cylindre. Ayant placé du côté gauche une régle, la courbure intérieure devient clairement visible.

A cause de la grande hauteur de ce cylindre par rapport aux rayons de la base les formules (15) et (16) ne sont pas applicables à ce cas.

Chapitre VI.

Cylindres creux de révolution. Distorsion d'ordre 2 (*).

I.

1. Dans le Chapitre précédent j'ai tout d'abord indiqué (Art. I, § 1) les conditions essentiellement différentes qui se présentent quand, dans un cylindre creux, on opère une distorsion due à une coupure radiale (distorsion d'ordre 6) ou à une coupure uniforme (distorsion d'ordre 1). J'ai ensuite approfondi le premier cas et j'ai montré que le corps, après la distorsion, ne conserve pas sa forme cylindrique: le bord intérieur des deux bases s'enfle en se soulevant, tandis que le bord extérieur se contracte et la partie moyenne du cylindre se rétrècit (voir les figures 6, 7, 8, 9 du Chapitre précédent). Les déformations qui se produisent dans le cas d'une coupure uniforme sont plus sensibles et plus singulières encore, puisque le corps cesse d'être symétrique après la distorsion. Je me propose de développer ce cas dans le présent Chapitre, bien que les calculs soient assez compliqués. Comme dans le cas précédent les résultats prévus par le calcul sont si bien confirmés par l'expérience que le cas lui-même constitue un exemple instructif dans le domaine de l'élasticité. En effet la seule intuition, sans être guidée par le calcul ou par les expériences, n'aurait pas pu faire prévoir, même d'une manière grossière et qualitative, quelle est la déformation produite dans le corps par la distorsion.

On arrive ainsi au très curieux résultat suivant: si dans un anneau symétrique ayant la forme d'un cylindre creux on supprime une tranche, il est impossible, en ressoudant les faces de la coupure, de conserver à l'anneau une forme cylindrique. En effet, si l'on fait une coupure radiale, le corps prend la forme indiquée à la figure 6 du Chapitre précédent; si la coupure est uniforme, le corps cesse d'être symétrique et prend la forme indiquée à la figure 15 du présent Chapitre.

Moyennant une coupure qu'on peut considérér comme résultant d'une coupure ou d'un coin radial et d'une coupure ou d'un coin à faces parallèles on arrive toujours à un état de déformation où la symétrie par rapport a l'axe est perdue.

Dans la pratique les forgerons qui doivent restreindre un tube en lui ôtant une tranche opèrent tout d'abord une coupure radiale: ensuite, avant de rapprocher les faces de la coupure, ils en liment la partie intérieure de façon à les faire appliquer exactement l'une contre l'autre et cela avec le

(*) Traduzione, con lievissime modificazioni di forma, della Nota: *Sulle distorsioni generate da tagli uniformi.* « Rend. Acc. Lincei », s. 5ª, vol. XIV_2, 1905_2, pp. 329-342. [N. d. R.].

plus petit effort possible [16]. Finalement, ils les soudent. Mais, alors, la coupure n'étant plus radiale, le tube ne conserve pas la forme d'un solide de révolution.

2. Reprenons la figure 2 du Chapitre précédent et cherchons les formules relatives à la fissure uniforme.

Supposons que l'axe z soit l'axe de symétrie et que la coupure ait été exécutée suivant le plan xz, du côté positif de l'axe x. En faisant, dans les formules du paragraphe 2 de l'Article III du Chapitre II,

$$l = n = p = q = r = 0,$$

nous aurons

$$u = -\frac{1}{2}\frac{m}{2\pi}\log(x^2+y^2) \quad , \quad v = \frac{m}{2\pi}\operatorname{arc\,tang}\frac{y}{x}. \tag{1}$$

Ces formules correspondent à la coupure uniforme d'ampleur m. Cependant le corps sera sujet à des tensions superficielles qui s'équilibrent entre elles (voir Art. I du Chap. II).

Représentons respectivement par R_2 et R_1 le rayon intérieur et le rayon extérieur du cylindre creux qui constitue l'anneau. Par un calcul facile nous trouverons les six caractéristiques de la déformation et des tensions, lesquelles seront nulles sur les deux bases; tandis que les tensions unitaires agissant sur les surfaces latérales seront parallèles à l'axe x et respectivement égales à $Km/(\pi R_1)$ sur la surface extérieure et à $-Km/(\pi R_2)$ sur la surface intérieure.

Il faut maintenant éliminer ces tensions latérales. On peut opérer à ce but de la manière suivante: Faisons abstraction de la coordonnée z et, à la place du corps en question, substituons une lame élastique limitée par deux cercles de rayons R_2 et R_1. Commençons par éliminer les tensions agissant sur la circonférence intérieure C_2. Supposons pour cela que la lame ne soit pas limitée par la circonférence extérieure C_1 mais qu'elle s'étende indéfiniment dans toutes les directions, extérieurement à C_2. Alors la question se présente d'une manière parfaitement analogue à un problème sur un milieu élastique extérieur à une sphère que j'ai résolu dans un

(16) Pour nous former une idée de la grandeur de ces actions, supposons que notre cylindre creux soit un anneau d'acier symétrique à section rectangulaire dont le diamètre moyen soit de 5^{cm} et l'épaisseur de 1^{cm}. Appliquons la formule (III) du Chapitre précédent en prenant $E = 19549$ (kg par millimètre carré; WERTHEIM) $\eta = 0{,}3$, $\rho = 2{,}5$, $s = 1$. Prenons également $\theta/2\pi = 1/360$ (en supposant que l'ampleur angulaire de la fissure radiale soit de 1^{o}), $\xi = 0{,}5$ afin de calculer la pression dans les régions adjacentes à la surface extérieure. On obtiendra $F = 10{,}7$, c'est-à-dire que la pression ou la tension calculées seront de $10^{kg},7$ par millimètre carré et pour chaque degré d'ampleur angulaire de la fissure radiale faite dans l'anneau. On obtient ces efforts quand on suppose les bases sollicitées par des actions qui les conservent planes et à la distance primitive. En calculant ces actions au moyen des formules (II'') du Chapitre précédent, on trouve qu'elles prennent aux bords des bases la valeur de $3^{kg},6$ par millimètre carré.

cours donné à Pise en 1893 et que le professeur TEDONE[17] a repris récemment.

En d'autre termes nous éliminerons les tensions en C_2 si nous composons les déplacements (1) avec les déplacements

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} u' &= \frac{m}{2\pi}\,\frac{L+3K}{L+2K}\left[\log r + \frac{L+K}{2(L+3K)}(r^2-R_2^2)\frac{\partial^2 \log r}{\partial x^2}\right],\\ v' &= \frac{m}{2\pi}\,\frac{L+K}{2(L+2K)}(r^2-R_2^2)\frac{\partial^2 \log r}{\partial x\,\partial y},\end{aligned}\right.$$

dans lesquels $r=\sqrt{x^2+y^2}$ et L et K désignent les constantes de l'élasticité, comme dans les Chapitres précédents.

Mais en composant les tensions qui agissaient précédemment sur C_1 en vertu des déplacements (1), avec les tensions engendrées en C_1 par les déplacements (2), on trouve sur C_1 les tensions de composantes

$$-\frac{mK(L+K)}{\pi(L+2K)}\,\frac{R_1^2-R_2^2}{R_1^3}\cos 2\theta,$$

$$-\frac{mK(L+K)}{\pi(L+2K)}\,\frac{R_1^2-R_2^2}{R_1^3}\sin 2\theta,$$

où $\theta = \text{arc tang}\, y/x$, c'est-à-dire θ représente l'angle que le rayon vecteur forme avec l'axe x.

Or ces dernières tensions peuvent être éliminées, ou par le moyen des déplacements

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} u'' &= \frac{2A}{4K(L+K)}[(3L+5K)y^2+(L-K)x^2],\\ v'' &= \frac{2A}{4K(L+K)}(L+3K)xy,\end{aligned}\right.$$

ou par les déplacements

$$(3')\quad \left\{\begin{aligned} u''' &= B\frac{\partial^2 \log r}{\partial x^2},\\ v''' &= B\frac{\partial^2 \log r}{\partial x\,\partial y},\end{aligned}\right.$$

en choisissant convenablement les constantes A et B, ou par une combinaison linéaire des deux.

Nous pouvons maintenant nous servir du caractère arbitraire de cette combinaison linéaire pour que les déplacements résultants des déplacements représentés par les formules (1), (2), (3), (3') engendrent des tensions nulles non seulement sur C_1 mais aussi sur le cercle C_2. De cette manière on arrive facilement aux formules

(17) «Comptes rendus du Cercle mathématique de Palerme», t. XVII, 1903, p. 259.

$$
(\mathrm{I}) \quad \left\{
\begin{aligned}
\mathrm{U} &= \frac{m}{2\pi}\left\{\frac{\mathrm{K}}{\mathrm{L}+2\mathrm{K}}\log r + \frac{\mathrm{L}+\mathrm{K}}{2(\mathrm{L}+2\mathrm{K})}\left(r^2 - \frac{\mathrm{R}_1^2\mathrm{R}_2^2}{\mathrm{R}_1^2+\mathrm{R}_2^2}\right)\frac{\partial^2 \log r}{\partial x^2}\right.\\
&\quad \left. + \frac{1}{2(\mathrm{L}+2\mathrm{K})(\mathrm{R}_1^2+\mathrm{R}_2^2)}[(3\mathrm{L}+5\mathrm{K})y^2 + (\mathrm{L}+\mathrm{K})x^2]\right\},\\
\mathrm{V} &= \frac{m}{2\pi}\left\{\operatorname{arc\,tang}\frac{y}{x} + \frac{\mathrm{L}+\mathrm{K}}{2(\mathrm{L}+2\mathrm{K})}\left(r^2 - \frac{\mathrm{R}_1^2\mathrm{R}_2^2}{\mathrm{R}_1^2+\mathrm{R}_2^2}\right)\frac{\partial^2 \log r}{\partial x\,\partial y}\right.\\
&\quad \left. - \frac{\mathrm{L}+3\mathrm{K}}{(\mathrm{L}+2\mathrm{K})(\mathrm{R}_1^2+\mathrm{R}_2^2)}xy\right\}.
\end{aligned}
\right.
$$

3. Si aux formules précédentes on ajoute

$$(\mathrm{I}') \qquad \mathrm{W} = 0,$$

on obtient les composantes des déplacements dus à une distorsion engendrée par une fissure uniforme d'ampleur m dans l'hypothèse que les deux bases soient sollicitées par des forces capables de les conserver planes et à leur distance primitive.

Il est facile de calculer les caractéristiques des tensions qui correspondent à ces déplacements. Elles sont données par les formules suivantes:

$$
(4) \quad
\begin{aligned}
t_{11} &= \frac{m\mathrm{K}}{\pi}\left\{\frac{\mathrm{L}}{\mathrm{L}+2\mathrm{K}}x\left(\frac{1}{r^2} + \frac{2}{\mathrm{R}_1^2+\mathrm{R}_2^2}\right) + \frac{\mathrm{K}}{\mathrm{L}+2\mathrm{K}}\frac{\partial \log r}{\partial x}\right.\\
&\quad + \frac{\mathrm{L}+\mathrm{K}}{2(\mathrm{L}+2\mathrm{K})}\left[2x\frac{\partial^2 \log r}{\partial x^2} + \left(r^2 - \frac{\mathrm{R}_1^2\mathrm{R}_2^2}{\mathrm{R}_1^2+\mathrm{R}_2^2}\right)\frac{\partial^3 \log r}{\partial x^3}\right]\\
&\quad \left. + \frac{\mathrm{L}-\mathrm{K}}{(\mathrm{L}+2\mathrm{K})(\mathrm{R}_1^2+\mathrm{R}_2^2)}x\right\},
\end{aligned}
$$

$$
(5) \quad
\begin{aligned}
t_{22} &= \frac{m\mathrm{K}}{\pi}\left\{\frac{\mathrm{L}}{\mathrm{L}+2\mathrm{K}}x\left(\frac{1}{r^2} - \frac{2}{\mathrm{R}_1^2+\mathrm{R}_2^2}\right) + \frac{x}{x^2+y^2}\right.\\
&\quad + \frac{\mathrm{L}+\mathrm{K}}{2(\mathrm{L}+2\mathrm{K})}\left[2y\frac{\partial^2 \log r}{\partial x\,\partial y} + \left(r^2 - \frac{\mathrm{R}_1^2\mathrm{R}_2^2}{\mathrm{R}_1^2+\mathrm{R}_2^2}\right)\frac{\partial^3 \log r}{\partial x\,\partial y^2}\right]\\
&\quad \left. - \frac{\mathrm{L}+3\mathrm{K}}{(\mathrm{L}+2\mathrm{K})(\mathrm{R}_1^2+\mathrm{R}_2^2)}x\right\},
\end{aligned}
$$

$$
(6) \quad t_{33} = \frac{m\mathrm{KL}}{\pi(\mathrm{L}+2\mathrm{K})}x\left(\frac{1}{r^2} - \frac{2}{\mathrm{R}_1^2+\mathrm{R}_2^2}\right),
$$

$$
(7) \quad
\begin{aligned}
t_{12} &= \frac{m\mathrm{K}}{2\pi}\left\{\frac{\mathrm{K}}{\mathrm{L}+2\mathrm{K}}\frac{\partial \log r}{\partial y} - \frac{y}{x^2+y^2} + \frac{\mathrm{L}+\mathrm{K}}{2(\mathrm{L}+2\mathrm{K})}\right.\\
&\quad \times\left[2y\frac{\partial^2 \log r}{\partial x^2} + 2x\frac{\partial^2 \log r}{\partial x\,\partial y} + 2\left(r^2 - \frac{\mathrm{R}_1^2\mathrm{R}_2^2}{\mathrm{R}_1^2+\mathrm{R}_2^2}\right)\frac{\partial^3 \log r}{\partial x^2\,\partial y}\right]\\
&\quad \left. + \frac{2(\mathrm{L}+\mathrm{K})}{(\mathrm{L}+2\mathrm{K})(\mathrm{R}_1^2+\mathrm{R}_2^2)}y\right\},
\end{aligned}
$$

$$
(8) \quad t_{23} = t_{31} = 0.
$$

De ces formules on tire

$$t_{11}x + t_{12}y = \frac{mK}{\pi}\,\frac{L+K}{L+2K}\,\frac{(r^2-R_1^2)(r^2-R_2^2)}{R_1^2+R_2^2}\,\frac{\partial^2 \log r}{\partial x^2},$$

$$t_{21}x + t_{22}y = \frac{mK}{\pi}\,\frac{L+K}{L+2K}\,\frac{(r^2-R_1^2)(r^2-R_2^2)}{R_1^2+R_2^2}\,\frac{\partial^2 \log r}{\partial x\,\partial y},$$

quantités qui s'annulent pour $r = R_1$, $r = R_2$. On vérifie ainsi que les actions extérieures s'annulent sur les surfaces latérales du cylindre creux.

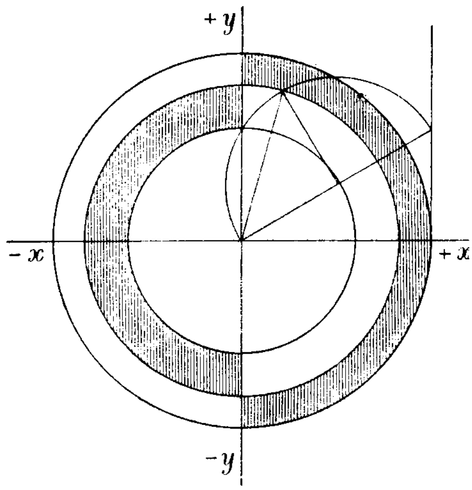


Fig. 10.

On a ensuite comme valeur de la dilatation cubique

$$\Theta = \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} = \frac{mK}{\pi(L+2K)}\,x\left(\frac{1}{r^2} - \frac{2}{R_1^2+R_2^2}\right).$$

Nous pouvons donc établir la division entre la partie dilatée et la partie comprimée du corps élastique.

Menons à cet effet la ligne

$$r = \sqrt{\frac{R_1^2+R_2^2}{2}},$$

laquelle est la circonférence intermédiaire de la figure 10 comprise entre les deux circonférences extrêmes de rayons R_1 et R_2. Traçons ensuite l'axe des y.

Ces deux lignes divisent la couronne circulaire en quatre régions que nous avons distinguées dans la figure 1 par des teintes claires et foncées. Les régions claires représentent les projections sur le plan xy des parties dilatées du corps élastique et les régions obscures les projections, sur le même plan, des parties comprimées.

Dans la figure on a indiqué la construction à faire pour obtenir la circonférence intermédiaire. Elle est tellement évidente qu'elle ne demande aucune explication.

II.

1. Passons maintenant à la détermination de la forme prise par le corps élastique après la distorsion en supposant toujours que les deux bases soient maintenues planes et à leur distance primitive.

Il suffira pour cela de voir comment se déforment les bases. Au moyen des formules (1) nous pouvons calculer les valeurs de U et V sur les circonférences σ_1 et σ_2 qui forment le contour primitif des deux bases et ont respectivement pour rayons R_1 et R_2.

En représentant ces valeurs par les mêmes lettres U et V auxquelles on a ajouté les indices σ_1 et σ_2 nous aurons

$$U_{\sigma_1} = \frac{m}{2\pi}\left(\frac{K}{L+2K}\log R_1 + \frac{L+K}{L+2K}\,\frac{R_1^2}{R_1^2+R_2^2} - \frac{R_1^2}{R_1^2+R_2^2}\cos 2\theta\right),$$

$$V_{\sigma_1} = \frac{m}{2\pi}\left(\theta - \frac{R_1^2}{R_1^2+R_2^2}\sin 2\theta\right),$$

$$U_{\sigma_2} = \frac{m}{2\pi}\left(\frac{K}{L+2K}\log R_2 + \frac{L+K}{L+2K}\,\frac{R_2^2}{R_1^2+R_2^2} - \frac{R_2^2}{R_1^2+R_2^2}\cos 2\theta\right),$$

$$V_{\sigma_2} = \frac{m}{2\pi}\left(\theta - \frac{R_2^2}{R_1^2+R_2^2}\sin 2\theta\right).$$

Les déplacements U_{σ_1} et V_{σ_1} peuvent être décomposés en trois déplacements élémentaires (*a*), (*b*), (*c*) ayant respectivement pour composantes

$$(a)\qquad \begin{cases} U'_{\sigma_1} = \dfrac{mK}{2\pi(L+2K)}\left(\log R_1 - \dfrac{R_1^2}{R_1^2+R_2^2}\right), \\ V'_{\sigma_1} = 0, \end{cases}$$

$$(b)\qquad \begin{cases} U''_{\sigma_1} = \dfrac{m}{\pi}\,\dfrac{R_1^2}{R_1^2+R_2^2}\sin^2\theta, \\ V''_{\sigma_1} = -\dfrac{m}{\pi}\,\dfrac{R_1^2}{R_1^2+R_2^2}\sin\theta\cos\theta, \end{cases}$$

$$(c)\qquad \begin{cases} U'''_{\sigma_1} = 0, \\ V'''_{\sigma_1} = \dfrac{m}{2\pi}\theta. \end{cases}$$

Le premier déplacement (*a*) consiste dans une translation parallèle à l'axe x, et par suite il ne change pas la forme de la circonférence σ_1.

On a ensuite

$$U''_{\sigma_1}\cos\theta + V''_{\sigma_1}\sin\theta = 0,$$

$$U''_{\sigma_1}\sin\theta - V''_{\sigma_1}\cos\theta = \frac{m}{\pi}\,\frac{R_1^2}{R_1^2+R_2^2}\sin\theta.$$

Cela prouve que par le second déplacement (b) chaque point de la circonference σ_1 se déplace tangentiellement à la circonférence même de la quantité

$$\frac{m}{\pi}\,\frac{R_1^2}{R_1^2+R_2^2}\sin\theta\,.$$

Dans ce second déplacement les points de la circonférence σ_1 restent toujours sur elle, à moins de quantités du second ordre qu'on peut négliger.

En vertu du troisième déplacement (c) chaque point de la circonférence σ_1 se meut parallèlement à l'axe y d'une quantité proportionnelle à l'arc du cercle σ_1, compris entre l'origine des arcs et le point lui-même.

On voit donc que, si l'on néglige les quantités du deuxième ordre, la forme du cercle σ_1, après la déformation, s'obtiendra en ne tenant compte que du seul déplacement (c).

On peut décomposer les déplacements U_{σ_2}, V_{σ_2} d'une manière analogue. On obtient ainsi les trois déplacements élémentaires suivants:

$$(a')\qquad \begin{cases} U'_{\sigma_2} = \dfrac{mK}{2\pi(L+2K)}\left(\log R_2 - \dfrac{R_2^2}{R_1^2+R_2^2}\right), \\ V'_{\sigma_2} = 0\,, \end{cases}$$

$$(b')\qquad \begin{cases} U''_{\sigma_2} = \dfrac{m}{\pi}\,\dfrac{R_2^2}{R_1^2+R_2^2}\sin^2\theta\,, \\ V''_{\sigma_2} = -\dfrac{m}{\pi}\,\dfrac{R_1^2}{R_1^2+R_2^2}\sin\theta\cos\theta\,, \end{cases}$$

$$(c')\qquad \begin{cases} U'''_{\sigma_2} = 0\,, \\ V'''_{\sigma_2} = \dfrac{m}{2\pi}\,\theta\,. \end{cases}$$

Pour obtenir la forme prise par σ_2, après la déformation, on pourra négliger les déplacements (a') et (b') et ne tenir compte que du troisième déplacement (c') parfaitement analogue au déplacement précédent (c).

Les deux déplacements (a) et (a') consistent en deux translations. Leur différence sera

$$\delta = \frac{mK}{2\pi(L+2K)}\left(\log\frac{R_1}{R_2} - \frac{R_1^2-R_2^2}{R_1^2+R_2^2}\right).$$

En posant $(R_1 - R_2)/R_1 = \gamma$ et en développant l'expression précédente suivant les puissances de γ on obtient

$$\delta = \frac{mK}{2\pi(L+2K)}\left(\frac{1}{3}\gamma^3 + \cdots\right),$$

c'est-à-dire en introduisant le module d'élasticité E et le coefficient de

POISSON η (voir Chapitre précédent, § 6) on a

$$\delta = \frac{m}{2\pi} \frac{(1-2\eta)}{2(1-\eta)} \left(\frac{1}{3}\gamma^3 + \cdots\right);$$

donc, si l'épaisseur de l'anneau est petite relativement à son rayon extérieur, la différence δ des deux translations est négligeable.

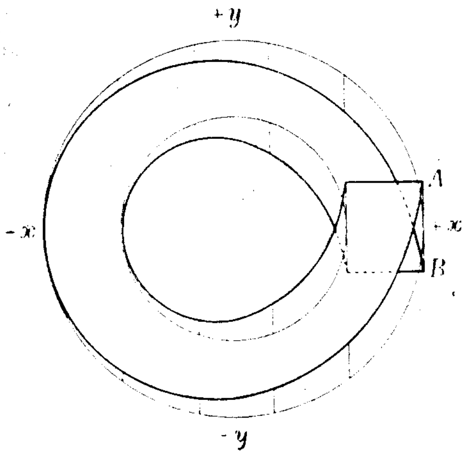


Fig. 11.

Dans la figure 11 nous avons construit le contour des bases déformées, en prenant comme origine des arcs des deux cercles σ_1 et σ_2 leur point de rencontre avec le côté négatif de l'axe x. Les deux circonférences représentées par des lignes minces sont les contours primitifs des deux bases. Les deux lignes plus fortes représentent les contours des bases déformées. Les traits rectilignes sont les déplacements que les points du contour ont subis en vertu des déplacements (c) et (c'). Le trait AB représente l'ampleur de la coupure. La différence δ a été négligée.

2. La formule (6) donne la caractéristique t_{33}. En introduisant le module d'élasticité et le coefficient de POISSON elle s'écrira

$$t_{33} = -\frac{m}{2\pi} \frac{E\eta}{1-\eta^2} x \left(\frac{1}{r^2} - \frac{2}{R_1 + R^2}\right).$$

En tenant compte de cette formule et des précédents résultats nous pourrons énoncer le théorème suivant:

Un cylindre creux de révolution, qui a subi une distorsion (*d'ordre* 2) *due à une fissure uniforme, conserve ses bases planes et à leur distance primitive en les assujetissant à des forces normales données par*

$$P = -\frac{m}{2\pi} \frac{E\eta}{1-\eta^2} x \left(\frac{1}{r^2} - \frac{2}{R_1^2 - R_2^2}\right),$$

où l'on envisage comme positives les actions dirigées vers l'interieur du corps et comme négatives celles dirigées dans le sens opposé. En même temps les bases se déforment selon les lois établies précédemment (voir fig. 11).

La figure 10 peut donc s'interpréter d'une autre manière. En supposant que la couronne circulaire représente une des bases dans sa forme primitive, la région foncée représentera la partie de la base, qui, après la distorsion, devra être comprimée du côté extérieur et la région claire indiquera la partie qui devra être étirée de l'extérieur afin de conserver les bases planes et à la distance primitive.

III.

1. La figure 12 représente le cylindre avant la distorsion et la figure 13 le même cylindre après la distorsion quand les bases sont conservées planes et à la distance primitive.

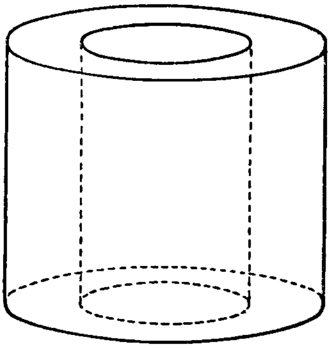


Fig. 12.

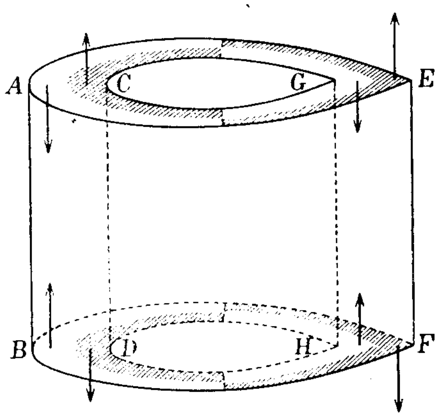


Fig. 13.

Les bases elles-mêmes sont divisées en quatre régions respectivement claires et foncées. Les régions foncées sont celles comprimées de l'extérieur et les régions claires celles tendues. Le sens de ces actions extérieures s'obtient en intervertissant la direction des flèches tracées dans la figure.

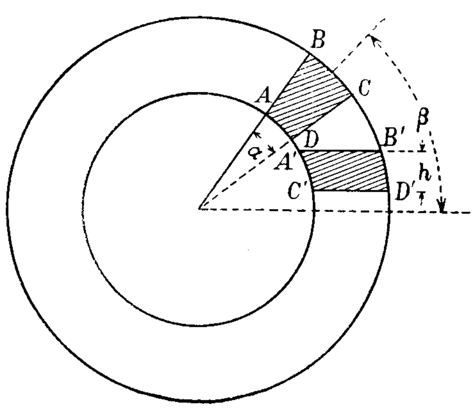


Fig. 14.

Il est facile de composer ces actions agissant sur les bases.

Considérons tout d'abord sur une des bases une bande radiale ABCD d'une ouverture angulaire α et dont la ligne médiane forme avec l'axe x un angle β (voir fig. 14).

Calculons la résultante des actions P agissant sur la bande ABCD.

Par un simple calcul on obtient

$$-\frac{m}{\pi}\,\frac{E\eta}{1-\eta^2}\,\frac{(R_1-R_2)^2\,a}{3\,(R_1^2+R_2^2)\,(R_1+R_2)}\cos\beta\left(\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\frac{\alpha}{2}}\right),$$

où a représente la surface de la bande.

Si la bande est infiniment mince on pourra substituer l'unité au rapport $\sin(\alpha/2)/(\alpha/2)$ et l'on obtiendra

$$-\frac{m}{\pi}\,\frac{E\eta}{1-\eta^2}\,\frac{(R_1-R_2)^2}{3\,(R_1^2+R_2^2)\,(R_1+R_2)}\,a\cos\beta\,.$$

En posant

$$-\frac{m}{\pi}\,\frac{E\eta}{1-\eta^2}\,\frac{(R_1-R_2)^2}{3\,(R_1^2+R_2^2)\,(R_1+R_2)}=M\,,$$

on aura pour expression de l'action résultante

$$M\,a\cos\beta\,,$$

c'est-à-dire l'action résultante sera proportionnelle a la surface de la bande infiniment mince et au cosinus de l'angle qu'elle forme avec l'axe x.

Considérons maintenant dans la couronne circulaire une bande A'B'C'D' d'epaisseur h, comprise entre deux droites parallèles à l'axe x. La résultante des forces P agissant sur A'B'C'D' sera

$$-\frac{m}{2\pi}\,\frac{E\eta}{1-\eta^2}\left(\log\frac{R_1}{R_2}-\frac{R_1^2-R_2^2}{R_1^2+R_2^2}\right)h$$

c'est-à-dire que cette résultante sera proportionnelle à l'épaisseur de la bande.

Si nous développons l'expression précédente suivant les puissances de γ (cfr. Art. II, § 1) nous obtiendrons

$$-\frac{m}{2\pi}\,\frac{E\eta}{1-\eta^2}\left(\frac{1}{3}\gamma^3+\cdots\right)h\,.$$

En supposant l'anneau mince et en négligeant les puissances de γ supérieures à la première, cette expression aussi bien que celle de M deviennent des quantités négligeables et l'expression de P peut s'écrire

$$P=\frac{2m}{\pi}\,\frac{E\eta}{1-\eta^2}\,\frac{\xi}{R_1^2+R_2^2}\cos\theta\,,$$

le rayon vecteur étant

$$r=\sqrt{\frac{R_1^2+R_2^2}{2}}+\xi\,,$$

et appelant θ l'angle que le rayon vecteur forme avec l'axe x.

Dans cette hypothèse chaque bande radiale des bases peut être regardée approximativement comme sujette à un couple.

2. Cherchons maintenant la forme que prend le cylindre quand on n'assujettit plus les bases aux actions P, mais qu'on les laisse libres; c'est-à-dire cherchons la forme que prend le cylindre en vertu de la seule distorsion quand aucune force extérieure ne le sollicite.

Il suffira pour cela d'appliquer les principes que nous avons établis au Chapitre II, Article I, paragraphe 2 (voir aussi le Chapitre précédent, Art. III) et d'étudier ensuite la déformation d'un corps ayant, à l'état naturel, la forme représentée par la figure 13 et sujet sur les deux bases aux actions — P. Il faudra donc supposer que le corps est tendu dans les régions foncées des bases et qu'il est, au contraire, comprimé dans les regions claires. En d'autres termes, il faudra supposer que les bases sont sujettes aux forces représentées par les flèches dans la figure 13.

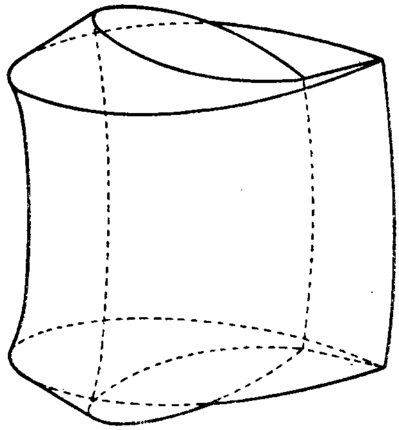


Fig. 15.

Nous pouvons procéder ici de la même façon qu'au Chapitre précédent (cfr. Art. III) et supposer que le corps soit divisé en tranches radiales. Les couples agissant sur les bases feront fléchir les tranches situées à gauche de manière à soulever le bord intérieur en C et l'abaisser en D (voir fig. 13) tandis qu'elles abaisseront le bord extérieur en A et le soulèveront en B. En même temps les génératrices AB se courberont et prendront une forme concave, tandis que les génératrices CD deviendront convexes. Le contraire se vérifiera à droite; mais, si l'on tient compte de la résistance présentée par l'arête EF, la courbure des génératrices EF et GH sera moins sensible.

Le corps prendra donc la forme représentée dans la figure 15 où les déformations ont été exagérées afin de les rendre plus visibles.

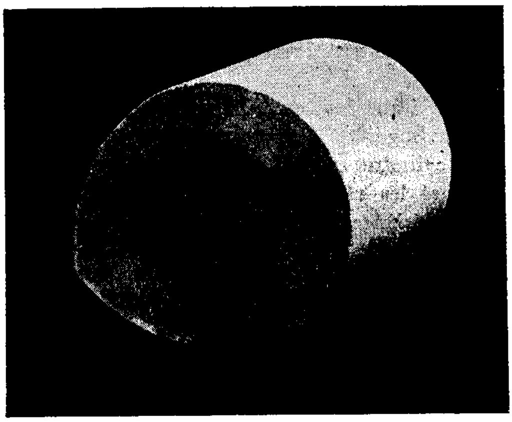


Fig. 16.

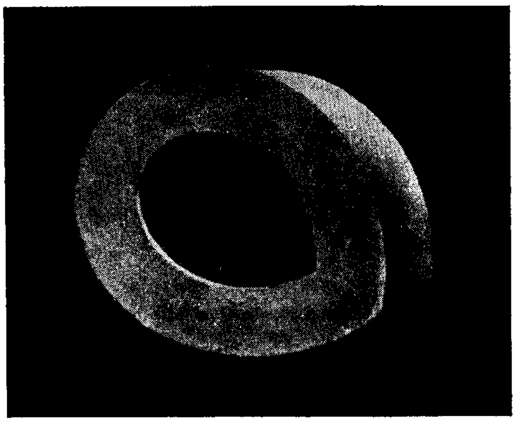


Fig. 17.

Grâce à l'amabilité de M. JONA, ingénieur de la Maison Pirelli de Milan, j'ai pu confronter les résultats du calcul et de l'expérience.

Il me procura un gros cylindre creux de caoutchouc de $7^{cm},7$ de hauteur environ et dont les rayons, intérieur et extérieur, étaient respectivement de $2^{cm},95$ et 5^{cm}; il fit couper dans le cylindre une tranche à faces parallèles de l'épaisseur de $2^{cm},3$ et fit souder ensuite les faces de la fente. Le cylindre fut lié fortement au moyen d'une ficelle et quand on le délia il tendit à s'ouvrir suivant la soudure, du côté intérieur, tandis que les deux bords extérieurs de la soudure étaient fortement comprimés l'un contre l'autre. Ainsi était vérifiée l'exactitude des prévisions du calcul sur la distribution des tensions le long de la coupure. Comme le cylindre laissé à lui-même tendait à s'ouvrir, j'en fis faire le moule en plâtre afin d'en conserver la forme. Les figures 16 et 17 en reproduisent les photographies en deux positions différentes. En les comparant avec la figure 15 on voit leur parfaite analogie avec la forme indiquée par les calculs.

NOTES AUX CHAPITRES V ET VI

1. M. ROLLA, docteur en sciences physiques, a cherché à vérifier les résultats trouvés dans les Chapitres précédents. Il s'est proposé de trouver une méthode de vérification qu'on pourrait montrer dans un cours de leçons. A cet effet, il a employé une méthode optique.

M. ROLLA a fait ses recherches dans le laboratoire de Physique de l'Université de Gênes dirigé par M. le professeur GARBASSO, et il les a publiées dans les «Comptes rendus de l'Académie des Lincei» (t. XVI, 1er semestre 1907). Nous allons exposer dans cette Note les recherches de M. ROLLA.

La substance choisie fut la gélatine et la déformation fut déterminée en observant la biréfringence produite, que l'on pouvait compenser par une méthode bien connue, avec une lame de la même substance déformable d'une manière connue.

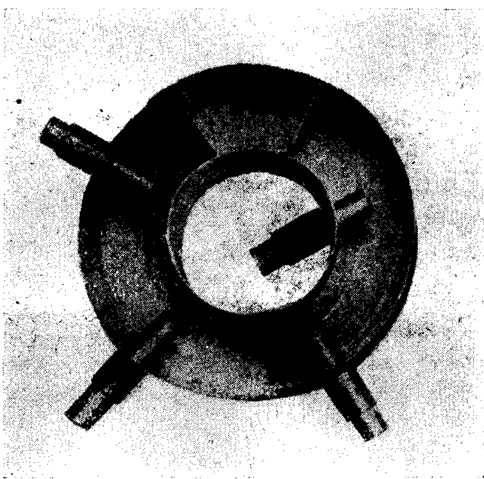


Fig. 18.

2. Dans les deux Chapitres précédents, j'ai envisagé les distorsions d'ordre 6 et 2 d'un cylindre creux de révolution et j'ai comparé les résultats du calcul avec ceux de l'expérience. La méthode optique permet à son tour d'établir la comparaison, mais dans des conditions plus semblables à l'hypothèse du calcul.

La gélatine, tout d'abord, fut coulée dans un moule cylindrique en fer-blanc haut de 6^{cm} et dont le rayon extérieur est de 5^{cm} et l'intérieur de 2^{cm}. Le moule avait une fissure radiale d'environ 56^{o} et était muni de quatre petits cylindres mobiles en cuivre jaune, rangés de manière à pouvoir obtenir dans le cylindre de gélatine solidifiée quatre trous pénétrant jusqu'à la moitié de son épaisseur. Trois de ces trous doivent s'ouvrir sur la face extérieure de cylindre et le quatrième sur la face intérieure (fig. 18).

La position et la direction des trous sont calculées de façon que, les faces de la fente [18] une fois soudées, deux des trous extérieurs soient en ligne droite et que le troisième corresponde à celui de l'intérieur.

Aux bases du cylindre, après avoir soudé la fissure, on voit clairement (fig. 19) les déformation que mes calculs avaient prévues.

Si maintenant on soude soigneusement les deux bases sur toute leur surface à deux plateaux de bois, de manière qu'elles restent planes et à la distance primitive, les phénomènes de double réfraction accidentelle doivent apparaître.

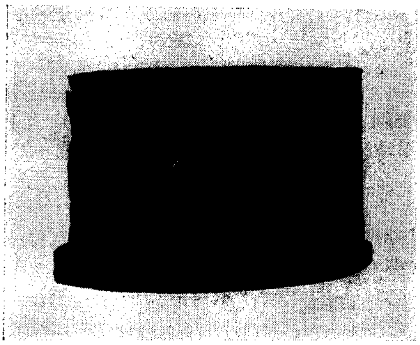


Fig. 19.

En effet, à la lumière rouge, entre deux nicols croisés, on observe facilement que la lumière, à travers les deux trous extérieurs, ne s'éteint pas et n'a même pas un minimum d'intensité. Au contraire, si l'on observe la lumière à travers le trou extérieur et son correspondant intérieur, la gélatine se montre isotrope. En défonçant un des trous, c'est-à-dire en observant à travers un seul trou, au moyen de l'analyseur, la lumière polarisée, la biréfringence revient.

Tout ceci est parfaitement conforme à la théorie. En effet, les deux régions respectivement comprimées et dilatées sont symétriques, relativement à l'axe du cylindre creux, et elles sont séparées par un cylindre coaxial ayant pour rayon la moyenne arithmétique

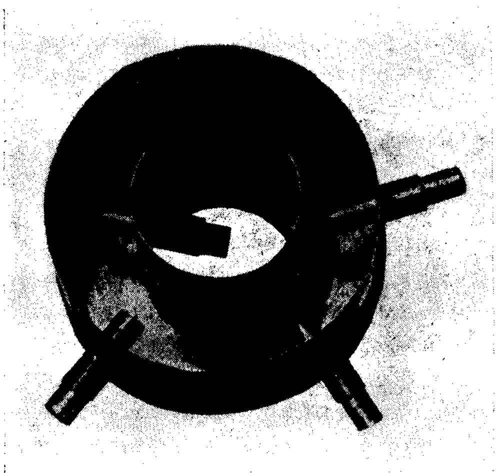


Fig. 20.

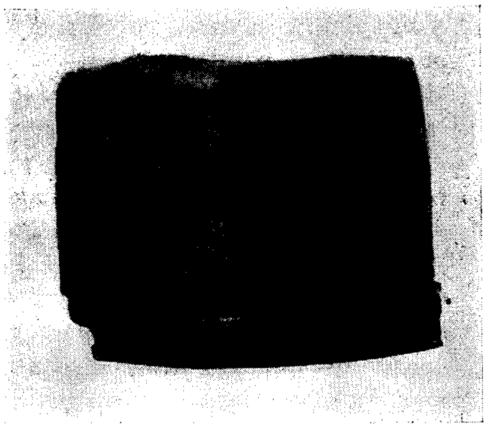


Fig. 21.

des rayons extrêmes du cylindre primitif. La nature de la déformation peut être reconnue à l'aide de la méthode du paragraphe 2, mais elle se montre toujours conforme à la déformation prévue.

(18) Pour faire la soudure, on enduit les faces de la coupure d'un peu de gélatine fondue et on les fait ensuite adhérer, par un moyen quelconque, par exemple en y appuyant quelque objet, jusqu'à ce que la gélatine soit solidifiée. L'adhésion s'opère rapidement, étant donnée la grande viscosité de la gélatine préparée selon la méthode indiquée au paragraphe 2.

3. L'expérience, dans le cas de la coupure uniforme, est tout à fait semblable à celle que nous venons de decrire, quoique les résultats soient différents. Le moule (fig. 20) a une fissure de 6^{cm} et quatre petits cylindres disposés comme précédemment. Après la soudure des faces de la fente, le cylindre prend la forme représentée par la figure 21.

La distribution des tensions et des compressions se déduit immédiatement en soudant les bases aux deux plateaux de bois, comme dans le cas précédent, et en observant, avec un nicol, la lumière polarisée qui traverse les différentes régions du cylindre.

En observant la lumière à travers les trous extérieurs, la gélatine se montre isotrope; en l'observant à travers un trou extérieur et un intérieur, elle se montre biréfrigente au plus haut degré; enfin, en l'observant à travers un seul trou, la biréfrigence reste toujours très évidente. Dans ce dernier cas, il est facile d'établir le signe de la déformation.

4. Les expériences décrites peuvent être rendues visibles à un nombreux auditoire au moyen d'un appareil de projection et, pour cette raison, conviennent très bien aux démonstrations des cours.

CHAPITRE VII.

Cylindre creux de révolution. Distorsions d'ordre 1, 3, 4, 5 (*).

I.

1. Dans les deux Chapitres précédents, j'ai considéré les distorsions d'un cylindre creux de révolution dues à une coupure radiale et à une coupure à faces parallèles, c'est-à-dire les distorsions d'ordre 6 et d'ordre 2. Maintenant, pour considérer toutes les distorsions possibles, nous devons examiner celles d'ordre 1, 3, 4, 5.

Mais les distorsions d'ordre 1 peuvent être ramenées à celles d'ordre 2 par un simple changement d'axes coordonnés. De même, les distorsions d'ordre 4 et 5 se transforment l'une dans l'autre par un changement analogue d'axes. Il ne reste donc à étudier que les distorsions d'ordre 3 et 4. Observons d'abord que le calcul de la déformation du cylindre a été exécuté en éliminant toutes les actions le long des surfaces latérales et en ne conservant que les actions sur les bases. Or, dans les formules que j'ai données au Chapitre I sur les distorsions d'ordre 3, les actions latérales ont déjà été éliminées. Il ne reste donc plus qu'à approfondir le cas des distorsions d'ordre 4.

Nous montrerons, dans ce Chapitre, que ce cas peut être ramené à celui de la distorsion d'ordre 2 [19]. Nous pourrons alors dire que le problème de la déformation d'un cylindre creux de révolution qui a subi la distorsion la plus générale et qui n'est sollicité qu'aux bases est résolu.

(*) Traduzione, con lievissime modificazioni di forma, della Nota: *Nuovi studii sulle distorsioni dei solidi elastici*, « Rend. Acc. Lincei », s. 5°, vol. XV, 1906 (1° sem.). [N. d. R.].

(19) La méthode suivie est analogue à celle employée par la professeur ALMANSI dans son Mémoire: *Sur la déformation des cylindres sollicités latéralement* (« Comptes rendus de la R. Acad. des Lincei », séances des 5 et 19 mai 1901).

Pour obtenir la forme que prend le cylindre, en vertu de la seule distorsion, sans qu'il existe de sollicitations extérieures, il faut éliminer les sollicitations aux bases. On peut faire cette élimination d'une manière approximative, comme nous avons déjà vu dans les cas que nous avons traités dans les Chapitres précédents.

2. Dans les formules trouvées à l'article III du Chapitre II, faisons successivement

$$l = n = p = q = r = 0$$

et

$$l = m = n = q = r = 0;$$

nous obtiendrons respectivement pour les seconds membres les valeurs suivantes:

$$(1)\qquad \left\{\begin{array}{l} -\dfrac{1}{4\pi} m \log(x^2 + y^2), \\ \dfrac{1}{2\pi} m \operatorname{arc\,tang} \dfrac{y}{x}, \\ 0, \end{array}\right.$$

$$(2)\qquad \left\{\begin{array}{l} -\dfrac{1}{4\pi} pz \log(x^2 + y^2), \\ \dfrac{1}{2\pi} pz \operatorname{arc\,tang} \dfrac{y}{x}, \\ \dfrac{1}{2\pi} py \operatorname{arc\,tang} \dfrac{y}{x} + \dfrac{1}{4\pi} px \log(x^2 + y^2). \end{array}\right.$$

Les formules (1) donnent les déplacements correspondant à une distorsion d'ordre 2 et les formules (2) les déplacements correspondant à une distorsion d'ordre 4. Il est facile maintenant de reconnaître que les deux premières expressions (2) peuvent se tirer des expressions correspondantes (1) en multipliant ces dernières par $(p/m)\,z$. D'autre part, dans le Chapitre précédent (art. I, § 2), où nous avons envisagé la fissure uniforme, nous avons montré que, dans le cas d'un cylindre creux de révolution dont les surfaces latérales ont les rayons R_1 et R_2, on peut éliminer les tensions le long des surfaces latérales en ajoutant aux expressions (1) respectivement les quantités

$$(3)\qquad \left\{\begin{array}{l} u' + Au'' + Bu''', \\ v' + Av'' + Bv''', \\ 0, \end{array}\right.$$

et en choisissant convenablement les constantes A et B. Cherchons donc à éliminer les tensions latérales dans le cas de la distorsion d'ordre 4 en prenant les composantes des déplacements donnés par

$$(4)\quad \begin{cases} u = \dfrac{p}{m} z\left[-\dfrac{1}{4\pi} m \log(x^2+y^2) + u' + Au'' + Bu'''\right] = zU\,, \\ v = \dfrac{p}{m} z\left(\dfrac{1}{2\pi} m \operatorname{arc\,tang} \dfrac{y}{x} + v' + Av'' + Av'''\right) = zV\,, \\ w = -\dfrac{1}{2\pi} py \operatorname{arc\,tang} \dfrac{y}{x} + \dfrac{1}{4\pi} px \log(x^2+y^2) + \Phi(x,y) = W + \Phi(x,y), \end{cases}$$

où $\Phi\,(x\,,y)$ est une fonction régulière, inconnue, qu'on doit déterminer.

En substituant p à la lettre m dans les formules (I) du dernier Chapitre, on obtiendra

$$(5)\quad \begin{cases} U = \dfrac{p}{2\pi}\left\{\dfrac{K}{L+2K}\log r + \dfrac{L+K}{2(L+2K)}\left(r^2 - \dfrac{R_1^2 R_2^2}{R_1^2+R_2^2}\right)\dfrac{\partial^2 \log r}{\partial x^2} \right. \\ \qquad \left. + \dfrac{1}{2(L+2K)(R_1^2+R_2^2)}\left[(3L+5K)y^2 + (L+K)x^2\right]\right\}, \\ V = \dfrac{p}{2\pi}\left[\operatorname{arc\,tang}\dfrac{y}{x} + \dfrac{L+K}{2(L+2K)}\left(r^2 - \dfrac{R_1^2 R_2^2}{R_1^2+R_2^2}\right)\dfrac{\partial^2 \log r}{\partial x\,\partial y} \right. \\ \qquad \left. - \dfrac{L+3K}{(L+2K)(R_1^2+R_2^2)} xy\right]. \end{cases}$$

Ensuite, en posant $r^2 = x^2 + y^2$, nous aurons

$$(5')\qquad W = -\frac{1}{2\pi} py \operatorname{arc\,tang}\frac{y}{x} + \frac{1}{2\pi} px \log r\,.$$

3. Si nous remplaçons les expressions (4) dans les équations indéfinies de l'équilibre élastique

$$K\Delta^2 u + (L+K)\frac{\partial\theta}{\partial x} = 0\,,$$

$$K\Delta^2 v + (L+K)\frac{\partial\theta}{\partial y} = 0\,,$$

$$K\Delta^2 w + (L+K)\frac{\partial\theta}{\partial z} = 0\,,$$

où

$$\theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\,,$$

on voit aisément que les deux premières équations sont satisfaites. La troisième équation devient

$$(6)\qquad K\Delta^2\Phi + (L+K)\left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y}\right) = 0\,.$$

Appelons $t_{11}\,, t_{22}\,, t_{33}\,, t_{23}\,, t_{31}\,, t_{12}$ les caractéristiques des tensions correspondant aux déplacements (4). On vérifie facilement que, suivant les surfaces latérales du cylindre creux, on a

$$t_{11}\cos nx + t_{12}\cos ny + t_{13}\cos nz = 0\,,$$

$$t_{21}\cos nx + t_{22}\cos ny + t_{23}\cos nz = 0\,,$$

$$t_{31}\cos nx + t_{32}\cos ny + t_{33}\cos nz$$
$$= \left(U + \frac{\partial W}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)\cos nx + \left(V + \frac{\partial W}{\partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)\cos ny,$$

où n désigne le normale au contour. Dès lors, afin que les déplacements (4) correspondent à des tensions latérales nulles, il sera nécessaire et suffisant que

$$\left(U + \frac{\partial W}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)\cos nx + \left(V + \frac{\partial W}{\partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)\cos ny = 0. \tag{7}$$

II.

1. En vertu des formules (6) et (7) de l'article précédent, le problème que nous nous sommes proposé revient à déterminer la fonction $\Phi(x, y)$ dans l'espace ω compris entre deux circonférences σ_1 et σ_2 de rayons R_1 et R_2 ayant le centre dans l'origine. La fonction Φ satisfait, dans ce champ, à l'équation différentielle

$$\Delta^2 \Phi = -\frac{L + K}{K}\left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y}\right) \tag{6'}$$

et, au contour, à la condition

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = -\frac{\partial W}{\partial n} - (U\cos nx + V\cos ny). \tag{7'}$$

Or, par des calculs faciles, on transforme l'égalité (6') en

$$\Delta^2 \Phi = -p\,\frac{L + K}{\pi(L + 2K)}\,x\left(\frac{1}{r^2} - \frac{2}{R_1^2 + R_2^2}\right), \tag{6''}$$

et les conditions (7') en

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial n} &= -\frac{p}{2\pi}\left(\frac{L + 3K}{L + 2K}\log R_1 + 1 - \frac{K}{L + 2K}\,\frac{R_1^2}{R_1^2 + R_2^2}\right)\cos\theta, \quad \text{sur } \sigma_1,\\ \frac{\partial \Phi}{\partial n} &= -\frac{p}{2\pi}\left(\frac{L + 3K}{L + 2K}\log R_2 + 1 - \frac{K}{L + 2K}\,\frac{R_2^2}{R_1^2 + R_2^2}\right)\cos\theta, \quad \text{sur } \sigma_2,\end{aligned}\right. \tag{7''}$$

où

$$\cos\theta = \cos nx.$$

On vérifie facilement que

$$\int_\omega \Delta^2 \Phi\, d\omega + \int_{\sigma_1} \frac{\partial \Phi}{\partial n}\, d\sigma_1 + \int_{\sigma_2} \frac{\partial \Phi}{\partial n}\, d\sigma_2 = 0$$

quand on suppose la normale n dirigée vers l'intérieur du champ ω. En effet, les trois intégrales de la formule précédente sont nulles, prises séparément. Il s'ensuit que les conditions (6') et (7') sont compatibles entre elles.

2. Si l'on fait

$$\Phi = -\frac{p}{2\pi}\,\frac{L + K}{L + 2K}\left(\log r - \frac{1}{2}\,\frac{r^2}{R_1^2 + R_2^2}\right)x + \Psi, \tag{8}$$

l'équation (6'') se transformera en

$$\Delta^2 \Psi' = 0,$$

et les conditions (7'') deviendront respectivement

$$\frac{\partial \Psi'}{\partial n} = -\frac{p}{2\pi}\frac{K}{L+2K}\left(1 + 2\log R_1 + \frac{3L+K}{2K}\frac{R_1^2}{R_1^2+R_2^2}\right)\cos\theta \quad , \quad \text{sur } \sigma_1,$$

$$\frac{\partial \Psi'}{\partial n} = -\frac{p}{2\pi}\frac{K}{L+2K}\left(1 + 2\log R_2 + \frac{3L+K}{2K}\frac{R_2^2}{R_1^2+R_2^2}\right)\cos\theta \quad , \quad \text{sur } \sigma_2.$$

Donc

$$\Psi' = Mx + N\frac{x}{r^2},$$

M et N étant des constantes. Celles-ci peuvent se calculer facilement, et l'on trouve

$$(9) \qquad \Psi' = -\frac{p}{2\pi}\frac{Kx}{L+2K}\left[\left(\frac{3}{2}\frac{L+K}{K} + \frac{R_1^2\log R_1^2 - R_2^2\log R_2^2}{R_1^2-R_2^2}\right)\right.$$
$$\left. + \frac{R_1^2R_2^2}{r}\left(\frac{\log R_1^2 - \log R_2^2}{R_1^2-R_2^2} + \frac{3L+K}{2K}\frac{1}{R_1^2+R_2^2}\right)\right],$$

d'où, en combinant les formules (5'), (8) et (9), on tire facilement la valeur de w.

3. En tenant compte des formules (4) et (5), nous aurons donc

$$(A) \quad \left\{\begin{aligned}
u = {} & \frac{pz}{2\pi}\left\{\frac{K}{L+2K}\log r + \frac{L+K}{2(L+2K)}\left(r^2 - \frac{R_1^2R_2^2}{R_1^2+R_2^2}\right)\frac{\partial^2\log r}{\partial x^2}\right. \\
& \left. + \frac{1}{2(L+2K)(R_1^2+R_2^2)}[(3L+5K)y^2 + (L+K)x^2]\right\}, \\
v = {} & \frac{pz}{2\pi}\left[\operatorname{arc\,tang}\frac{y}{x} + \frac{L+K}{2(L+2K)}\left(r^2 - \frac{R_1^2R_2^2}{R_1^2+R_2^2}\right)\frac{\partial^2\log r}{\partial x\,\partial y}\right. \\
& \left. - \frac{L+3K}{(L+2K)(R_1^2+R_2^2)}xy\right|, \\
w = {} & -\frac{py}{2\pi}\operatorname{arc\,tang}\frac{y}{x} \\
& - \frac{px}{2\pi}\frac{K}{L+2K}\left[\frac{3}{2}\frac{L+K}{K} + \frac{R_1^2\log R_1^2 - R_2^2\log R_2^2}{R_1^2-R_2^2} - \log r\right. \\
& + \frac{R_1^2R_2^2}{r^2}\left(\frac{\log R_1^2 - \log R_2^2}{R_1^2-R_2^2} + \frac{3L+K}{2K}\frac{1}{R_1^2+R_2^2}\right) \\
& \left. - \frac{1}{2}\frac{L+K}{K}\frac{r^2}{R_1^2+R_2^2}\right|,
\end{aligned}\right.$$

d'où l'on tire

$$
\text{(B)} \qquad \left\{
\begin{aligned}
t_{33} &= \frac{p\,\mathrm{KL}}{\pi(\mathrm{L}+2\,\mathrm{K})}\,xz\left(\frac{1}{r^2}-\frac{2}{\mathrm{R}_1^2+\mathrm{R}_2^2}\right),\\
t_{13} &= 2\,\mathrm{K}\left(\mathrm{U}+\frac{\partial w}{\partial x}\right),\\
t_{23} &= 2\,\mathrm{K}\left(\mathrm{V}+\frac{\partial w}{\partial y}\right).
\end{aligned}
\right.
$$

Ainsi se trouvent déterminées les tensions agissant sur les deux bases.

III.

1. Pour obtenir pratiquement une distorsion d'ordre 4, il suffit de faire, dans le cylindre creux, une fissure cunéiforme, comme il est indiqué dans la figure 22, de manière que les deux faces de la fissure se rencontrent suivant un rayon d'une des deux bases (axe x). Cela fait, on rapproche les deux faces de la fissure et on les soude. Si les deux faces de la fissure sont également inclinées sur la base, la forme que le solide déformé prend après la soudure est symétrique par rapport à un plan perpendiculaire à la base.

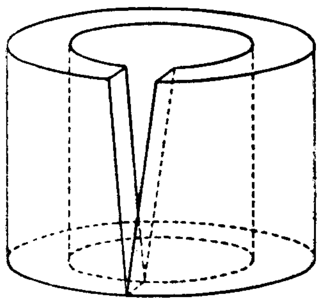


Fig. 22.

En s'appuyant sur les résultats que nous venons de trouver, et en employant des raisonnements analogues à ceux qui ont été faits dans les deux Chapitres précédents, on pourrait se faire une idée approchée de la forme que le cylindre prend lorsqu'il est soumis à la seule distorsion d'ordre 4, c'est-à-dire lorsqu'on suppose d'éliminer les tensions aux bases. Mais nous supprimons cette discussion, et nous nous bornons à donner (figg. 23 et 24) l'image d'un cylindre de caoutchouc qui a subi la distorsion d'ordre 4.

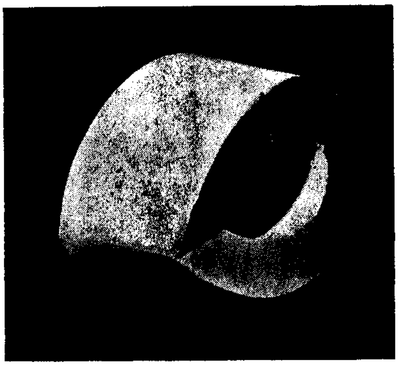


Fig. 23.

Les deux photographies (figg 23 et 24) du moule en plâtre du solide déformé vu de deux côtés différents montrent clairement la forme des deux bases. L'arête correspond à la soudure. Le cylindre de caoutchouc mesurait avant la distorsion $10^{\mathrm{cm}},6$ de diamètre extérieur, 6^{cm} de diamètre intérieur et $5^{\mathrm{cm}},9$ de hauteur. L'ouverture angulaire de la fissure cunéiforme était d'environ 38°.

2. Pour compléter les images des six distorsions élémentaires d'un cylindre creux de révolution, nous reproduisons ici les photographies des moules en plâtre de trois gros tubes de caoutchouc qui ont subi respectivement les distorsions d'ordres 1, 3, 5.

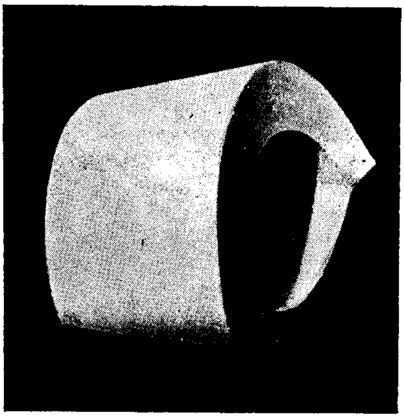


Fig. 24.

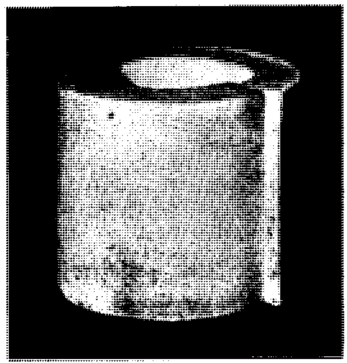


Fig. 25.

La figure 25 se rapporte à la distorsion d'ordre 1 d'un cylindre creux. Elle a été obtenue en faisant une coupure axiale (plan x, z du côté positif de l'axe x) et en faisant ensuite glisser les deux faces de la coupure l'une sur l'autre dans une direction normale à l'axe du cylindre (axe z).

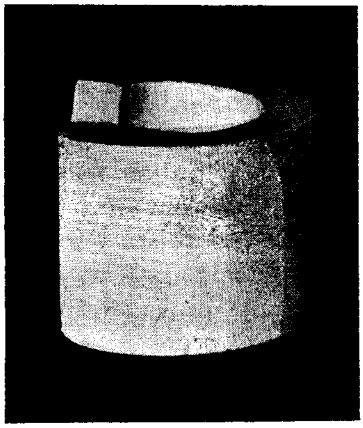


Fig. 26.

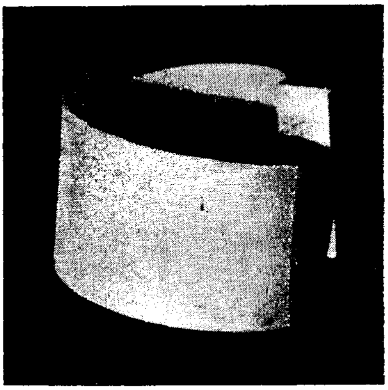


Fig. 27.

La figure 26 se rapporte à la distorsion d'ordre 3 (cf. Chap. I, Art. III, § 7). Le cylindre a été coupé comme dans le cas précédent et l'on a fait ensuite glisser les deux faces de la coupure l'une par rapport à l'autre dans le sens de l'axe du cylindre (axe z).

Enfin, la figure 27 représente un cylindre creux qui a subi une distorsion d'ordre 5. Après avoir fait la coupure, on a tourné les deux faces l'une par rapport à l'autre autour de la perpendiculaire (axe y) aux deux faces menée par le milieu de l'axe du cylindre. L'origine est donc située au milieu de l'axe du cylindre. Nous faisons observer que, pour rendre plus facile la construction du modèle de la distorsion d'ordre 4, nous avons choisi l'origine au centre d'une des bases.

NOTE AUX CHAPITRES V, VI, VII.

1\. M. ALMANSI a consacré deux Notes [20] à l'étude des déformations régulières des cylindres, lorsque les déplacements sont polydromes.

L'axe z étant parallèle aux génératrices du cylindre, M. ALMANSI envisage, dans la première Note, le cas où les caractéristiques des tensions sont indépendantes de z, tandis que, dans la seconde Note, il envisage le cas général.

2\. Soit un cylindre élastique à l'état naturel. Supposons de le déformer par des forces agissant sur les bases, et supposons aussi que, en composant les forces agissant sur chaque base, on trouve la force résultante nulle et le couple résultant nul. M. ALMANSI appelle alors la déformation du cylindre une déformation du type D_0. Il remarque que dans le problème de DE SAINT-VENANT on trouve la déformation d'un cylindre sollicité par des forces données, agissant sur les bases en négligeant une déformation du type D_0. Or, dans le problème de DE SAINT-VENANT, on envisage seulement le cas où les déplacements sont monodromes. M. ALMANSI se propose le problème suivant: *Étant donné un cylindre élastique homogène et isotrope multiplement connexe qui n'est pas sollicité par des forces extérieures, déterminer la déformation plus générale du cylindre en négligeant une déformation du type* D_0.

3\. Il commence par démontrer le théorème suivant: *Dans le cas envisagé on peut toujours représenter les caractéristiques des tensions par des fonctions linéaires de z.*

Prenons pour axes x et y les axes principaux d'inertie d'une section normale du cylindre; alors il démontre *qu'on peut calculer, dans le cas envisagé, les caractéristiques des tensions par les formules*

$$
\begin{aligned}
t_{11} &= z\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}, & t_{31} &= -\eta\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial W}{\partial y},\\
t_{22} &= z\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}, & t_{32} &= -\eta\frac{\partial U}{\partial y} - \frac{\partial W}{\partial x},\\
t_{12} &= -z\frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial y} - \frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial y}, & t_{33} &= \eta\,(z\Delta^2 U + \Delta^2 V),
\end{aligned}
$$

où η *désigne le coefficient de* POISSON (voir Chap. V) *et* U, V, W *ne dépendent pas de z et sont des fonctions régulières et bi-harmoniques des variables x et y* (voir Chap. II, Art. III, § 2).

Entre les fonctions U *et* W *doivent exister les relations suivantes:*

$$
\frac{\partial\Delta^2 W}{\partial x} = (1-\eta)\frac{\partial\Delta^2 U}{\partial y}, \qquad \frac{\partial\Delta^2 W}{\partial y} = -(1-\eta)\frac{\partial\Delta^2 U}{\partial x}.
$$

(20) *Sopra una classe particolare di deformazioni a spostamenti polidromi dei solidi cilindrici* («Rend. d. R. Accademia dei Lincei», Gennaio 1907).

Sulle deformazioni a spostamenti polidromi dei solidi cilindrici («Rend. d. R. Istituto Lombardo», 1907).

Soit σ la base du cylindre et supposons que le contour de cette base soit formé par plusieurs lignes fermées $s_1, s_2, \cdots, s_n$. Sur chaque ligne s_i on doit avoir

$$U = a_i x + b_i y + c_i \quad , \quad V = g_i x + h_i y + l_i ,$$

$$\frac{\partial U}{\partial \nu} = \frac{\partial (a_i x + b_i y + c_i)}{\partial \nu} \quad , \quad \frac{\partial V}{\partial \nu} = \frac{\partial (g_i x + h_i y + l_i)}{\partial \nu} ,$$

$$W = \eta (a_i y - b_i x + k_i) ,$$

où les quantités $a_i, b_i, c_i, g_i, h_i, l_i$ sont des constantes et ν désigne la normale à la ligne s_i dirigée intérieurement à l'aire σ.

4. Si la fonction U est nulle, alors les caractéristiques des tensions sont indépendantes de z. Dans ce cas, on a

$$\Delta^2 W = \text{const.},$$

et les caractéristiques des tensions sont données par les formules

$$t_{11} = \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \quad , \quad t_{31} = \frac{\partial W}{\partial y} ,$$

$$t_{22} = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \quad , \quad t_{32} = -\frac{\partial W}{\partial y} ,$$

$$t_{12} = -\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} \quad , \quad t_{33} = \eta \Delta^2 V.$$

CHAPITRE VIII.

Système cyclique d'éléments élastiques pliables.

I.

1. A la fin du Chapitre III, j'ai énoncé dans les termes suivants le *problème fondamental* qui se présente dans la théorie des distorsions des corps solides élastiques multiplement connexes: *Étant données les distorsions du système élastique, déterminer les efforts.* Je vais exposer dans ce Chapitre les principes de la solution de ce problème dans un cas qui présente un intérêt spécial [21].

2. Pour fixer les idées considérons une verge rectiligne dont les dimensions transversales soient très petites relativement à la longueur.

Envisageons les particules A et B qui forment les extrémités de la petite verge. Par A et B nous entendrons les deux *troncs* extrêmes de la petite verge ayant la hauteur du même ordre de grandeur que les dimensions transversales.

Quand le corps se déforme les déplacements relatifs de A et B sont, en général, très grands relativement à la déformation pure des particules

(21) Voir CLEBSCH, loc. cit., Chap. VIII.

elles-mêmes et de tout autre élément du corps dont les dimensions soient du même ordre que les dimensions transversales de la petite verge.

Nous pouvons donc considérer A et B approximativement comme deux éléments rigides dont le déplacement relatif sera résultant d'une translation et d'une rotation. Nous supposerons aussi que les déplacements relatifs de A et B soient tels qu'on puisse négliger les puissances supérieures aux premières des composantes des dites rotations et translations.

3. Admettons maintenant que les forces extérieures agissant à l'intérieur de la verge soient négligeables. Supposons que les forces extérieures soient appliquées seulement aux particules A et B, et que le système soit en équilibre. Dans cette hypothèse imaginons une section transversale quelconque σ divisant la petite verge en deux parties S_a et S_b dont la première contienne la particule A et l'autre la particule B, et composons les actions que la partie S_b exerce sur la partie S_a suivant σ, en prenant comme centre de réduction un point quelconque O. Il est évident que, en maintenant ce point fixe et en changeant n'importe comment la section σ, la force et le couple résultants sont indépendants de la section. Ils seront aussi respectivement égaux à la force et au couple résultants qu'on obtiendra en composant les forces appliquées en B, et seront égaux et contraires à la force et au couple qu'on trouvera en composant les forces appliquées en A, O étant toujours le centre de réduction.

4. Supposons, pour rendre le cas plus simple, que la petite verge soit isotrope et qu'à l'état naturel elle ait la forme d'un cylindre de révolution de hauteur l et de rayon R.

Prenons l'origine O dans le centre de la base adjacente à la particule A et pour axe z l'axe du cylindre. En choisissant l'origine O pour centre de réduction, représentons par

$$X_1^{(ab)},\ X_2^{(ab)},\ X_3^{(ab)}$$

les composantes de la force résultante des actions extérieures appliquées en B, et par

$$X_4^{(ab)},\ X_5^{(ab)},\ X_6^{(ab)}$$

les composantes du couple résultant.

Désignons par

$$x_1^{(a)},\ x_2^{(a)},\ x_3^{(a)}$$

les composantes de la translation subie par A à partir de l'état naturel, et par

$$x_4^{(a)},\ x_5^{(a)},\ x_6^{(a)}$$

les composantes de la rotation subie par la même particule. Soient

$$x_1^{(b)},\ x_2^{(b)},\ x_3^{(b)},\ x_4^{(b)},\ x_5^{(b)},\ x_6^{(b)}$$

les quantités analogues pour la particule B. Les composantes de la translation et de la rotation de B relativement à A seront respectivement

$$x_1^{(b)}-x_1^{(a)}\ ;\ x_2^{(b)}-x_2^{(a)}\ ,\ x_3^{(b)}-x_3^{(a)}\quad ;\quad x_4^{(b)}-x_4^{(a)}\ ,\ x_5^{(b)}-x_5^{(a)}\ ,\ x_6^{(b)}-x_6^{(a)}.$$

Entre les forces $X_i^{(ab)}$ et les quantités $x_i^{(b)}-x_i^{(a)}$ existeront les relations suivantes:

$$(\mathrm{A})\quad\begin{cases} x_1^{(b)}-x_1^{(a)}=\dfrac{1}{\mathrm{E}}\,\dfrac{l^2}{\mu}\left(-\,X_5^{(ab)}+\dfrac{2}{3}\,X_1^{(ab)}\,l\right),\\ x_2^{(b)}-x_2^{(a)}=\dfrac{1}{\mathrm{E}}\,\dfrac{l^2}{\mu}\left(\quad X_4^{(ab)}+\dfrac{2}{3}\,X_2^{(ab)}\,l\right),\\ x_3^{(b)}-x_3^{(a)}=0; \end{cases}$$

$$(\mathrm{A}')\quad\begin{cases} x_4^{(b)}-x_4^{(a)}=\dfrac{1}{\mathrm{E}}\,\dfrac{l}{\mu}\,(2\,X_4^{(ab)}+X_2^{(ab)}\,l),\\ x_5^{(b)}-x_5^{(a)}=\dfrac{1}{\mathrm{E}}\,\dfrac{l}{\mu}\,(2\,X_5^{(ab)}-X_1^{(ab)}\,l),\\ x_6^{(b)}-x_6^{(a)}=\dfrac{2\,(1+\eta)}{\mathrm{E}}\,\dfrac{l}{\mu}\,X_6^{(ab)}, \end{cases}$$

où E dénote le module d'élasticité, η la constante d'élasticité déjà introduite dans les précédents Chapitres; $\mu=\pi\mathrm{R}^4/2$ est le moment d'inertie de la section circulaire de la petite verge relativement à son centre. Dans les formules précédentes, on a supposé que les forces $X_i^{(ab)}$ soient du même ordre de grandeur et on a négligé les termes d'ordre supérieur à ceux qui y figurent [22].

5. Ces formules prouvent que, si l'on choisit arbitrairement les trois composantes de la rotation relative de B par rapport à A et les deux composantes de la translation relative dans le sens normal à la petite verge, on peut toujours trouver des forces extérieures capables de les engendrer; la translation relative dans le sens de l'axe de la petite verge est, au contraire, de l'ordre des quantités négligeables.

Mais il serait facile de modifier un peu les conditions du système de manière à rendre même possible une translation relative dans le sens de l'axe. Supposons en effet que les forces extérieures soient appliquées à deux petits coulants capables de glisser le long du cylindre dans le sens longitudinal et maintenus contre le cylindre par deux ressorts tels que les efforts, du même ordre de grandeur que ceux qui produisent les flexions et les torsions de la petite verge, induisent dans les deux coulants des déplacements relatifs dans le sens de l'axe et de même ordre de grandeur que les premiers. Si l'on suppose les deux coulants situés aux extrémités de la petite

(22) On peut obtenir les formules précédentes de plusieurs manières, par exemple en employant la méthode de DE SAINT-VENANT. (Voir KIRCHHOFF, *Vorl. über Math. Physik*; *Mechanik*, 27, 28 Vorl.).

verge et si on les appelle A et B, les formules (A) et (A′) ne sont pas altérées. La troisième formule seule doit être remplacée par cette autre

$$x_3^{(b)} - x_3^{(a)} = m\,X_3^{(ab)}, \tag{1}$$

où m est une quantité positive du même ordre de grandeur que les coefficients des quantités $X_i^{(ab)}$ dans les formules précédentes.

6. L'énergie élastique du système déformé est

$$H = \frac{1}{2}\sum_1^6{}_i\,(x_i^{(b)} - x_i^{(a)})\,X_i^{(ab)} = \frac{1}{E}\,\frac{l}{\mu}\Big[\frac{1}{3}(X_1^{(ab)}\,l)^2 + \frac{1}{3}(X_2^{(ab)}\,l)^2 + \frac{m}{2}(X_3^{(ab)})^2$$
$$+ (X_4^{(ab)})^2 + X_5^{(ab)})^2 + (1+\eta)(X_6^{(ab)})^2 - X_1^{(ab)}\,X_5^{(ab)}\,l + X_2^{(ab)}\,X_4^{(ab)}\,l\Big],$$

laquelle est une forme définie positive si m est différent de zéro. Mais si m est nul (comme dans le cas où manquent les coulants) H est une forme positive qui peut s'annuler sans que soit nul $X_3^{(ab)}$. Mais afin que H soit nulle il est nécessaire que $X_1^{(ab)}$, $X_2^{(ab)}$, $X_4^{(ab)}$, $X_5^{(ab)}$, $X_6^{(ab)}$ soient nuls. *Il suffit donc qu'une seule des quantités* $x_i^{(b)} - x_i^{(a)}$ *soit différente de zero pour que* H *le soit aussi.*

II.

1. On peut imaginer un nombre infini d'autres cas où des corps à formes très variées ont des propriétés analogues à celles que nous venons d'examiner. La petite verge avec ou sans coulants peut être regardée comme le cas typique. Désirant nous placer à un point de vue général nous envisagerons des corps auxquels nous *attribuerons d'une manière absolue* certaines propriétés. Ces propriétés seront les mêmes que nous avons vues se vérifier approximativement dans le cas examiné à l'Article précédent:

1° il existe deux particules A et B du corps que nous appellerons *extrémités* dont les déformations sont négligeables par rapport aux translations et aux rotations relatives qu'elles subissent;

2° si l'on suppose les actions extérieures appliquées seulement aux extrémités A et B et le corps en équilibre, les composantes des translations et des rotations de B par rapport à A peuvent être représentées linéairement au moyen des composantes de la force et du couple résultants des actions extérieures appliquées en B;

3° l'énergie élastique du système déformé (toujours positive) ne peut s'annuler que dans le cas où toutes les composantes de la translation et de la rotation relatives de B par rapport à A sont nulles.

Nous appellerons les corps qui ont lesdites propriété *éléments élastiques pliables* et nous les distinguerons en deux catégories:

1) *éléments élastiques librement pliables*, c'est-à-dire tels que, si l'on choisit arbitrairement les trois composantes de la translation et les trois composantes de la rotation d'une extrémité par rapport à l'autre on pourra

toujours trouver les actions extérieures capables de les engendrer (type: la petite verge avec les coulants);

2) *éléments élastiques pliables mais soumis à des liens* tels que les composantes de la rotation et de la translation d'une extrémité par rapport à l'autre soient liées par une ou plusieurs relations linéaires (type: la petite verge simple).

2. Nous indiquerons l'élément élastique pliable par AB et les composantes de la force et du couple résultants des actions extérieures appliquées en B par

$$X_1^{(ab)}, X_2^{(ab)}, X_3^{(ab)} \quad ; \quad X_4^{(ab)}, X_5^{(ab)}, X_6^{(ab)}. \tag{2}$$

En vertu de l'équilibre les composantes de la force et du couple résultants des actions extérieures appliquées en A seront

$$-X_1^{(ab)}, \quad -X_2^{(ab)}, \quad -X_3^{(ab)} \quad ; \quad -X_4^{(ab)}, \quad -X_5^{(ab)}, \quad -X_6^{(ab)},$$

que nous représenterons respectivement par

$$X_1^{(ba)}, X_2^{(ba)}, X_3^{(ba)} \quad ; \quad X_4^{(ba)}, X_5^{(ba)}, X_6^{(ba)}.$$

Si l'on imagine une section quelconque transversale σ qui divise le corps en deux parties S_b et S_a dont la première possède l'*extrémité* B et la seconde l'*extrémité* A, les quantités (2) seront les composantes de la force et du couple résultants qu'on obtiendra en composant les actions que la partie S_b exerce sur S_a suivant σ [23]. Dans toutes ces compositions des forces on devra supposer de choisir toujours le même centre de réduction et admettre qu'il soit l'origine des axes coordonnés.

Les quantités (2) s'appelleront *les caractéristiques des efforts* ou simplement les *efforts* qui sollicitent l'élément AB. Désignons par $x_1^{(a)}, x_2^{(a)}, x_3^{(a)}$ les composantes de la translation, par $x_4^{(a)}, x_5^{(a)}, x_6^{(a)}$ les composantes de la rotation de l'*extrémité* A.

Nous appellerons ces quantités les *caractéristiques du déplacement* du point A.

Indiquons les quantités analogues pour l'*extrémité* B par $x_1^{(b)}, x_2^{(b)}, x_3^{(b)}$; $x_4^{(b)}, x_5^{(b)}, x_6^{(b)}$.

Les relations linéaires qui lient les déplacements relatifs des deux extrémités aux efforts s'écriront en général

$$x_i^{(b)} - x_i^{(a)} = \sum_1^6 {}_s A_{is}^{(ab)} X_s^{(ab)} \qquad (i = 1, 2, \cdots, 6), \tag{3}$$

et l'on aura évidemment

$$A_{is}^{(ab)} = A_{is}^{(ba)}.$$

(23) Si le corps est multiplement connexe (voir, par exemple, Art. V, § 3), alors la section σ qui divise le corps en deux parties pourra être formée de plusieurs parties distinctes.

3. Les quantités $A_{is}^{(ab)}$ ne dépendront que de la nature du corps et de sa position par rapport aux axes. Elles s'appelleront les *constantes directes de l'élément.* Il est facile de voir les valeurs qu'elles prendront si l'on change la position du corps par rapport aux axes. A cet effet, supposons connues les *constantes* précédentes quand le corps est rapporté à un certain système d'axes et supposons de changer les axes. Des équations très connues de la Statique nous donnent les relations existant entre les forces $X_s^{(ab)}$ et les quantités analogues qu'on trouve si l'on change les directions des axes et l'origine qui est le centre de réduction des forces. De même, des formules élémentaires de Cinématique nous donnent les relations qui existent entre les quantités $x_i^{(a)}$ et $x_i^{(b)}$ et les quantités analogues rapportées aux nouveaux axes et au nouveau centre de reduction.

De simples opérations de substitution dans les formules (3) suffisent donc pour avoir les relations linéaires qui existent entre les coefficients $A_{is}^{(ab)}$ et les coefficients correspondants relatifs au nouveau système des axes.

4. Si l'élément élastique est librement pliable, les égalités (3) seront invertibles et nous aurons

$$(3') \qquad X_s^{(ab)} = \sum_1^6 a_{is}^{(ab)} (x_i^{(b)} - x_i^{(a)}).$$

La détermination des coefficients $a_{is}^{(ab)}$ et de leurs variations, si les axes changent, ne présente aucune difficulté.

Nous appellerons les coefficients $a_{is}^{(ab)}$ les *constantes inverses* de l'élément AB.

Lorsque l'élément élastique pliable est soumis à des liens, il est impossible d'invertir les équations (3).

5. L'énergie élastique du système déformé sera donnée par

$$H = \frac{1}{2} \sum_1^6{}_i X_i^{(ab)} (x_i^{(b)} - x_i^{(a)}) = \frac{1}{2} \sum_1^6{}_i \sum_1^6{}_s A_{is}^{(ab)} X_i^{(ab)} X_s^{(ab)}.$$

La forme précédente sera donc une *forme positive* et elle sera *définie si le système élastique est librement pliable; au contraire elle ne sera pas définie si le système est pliable*, mais *soumis à des liens.*

Dans le premier cas nous aurons encore

$$H = \frac{1}{2} \sum_1^6{}_i \sum_1^6{}_s a_{is}^{(ab)} (x_i^{(b)} - x_i^{(a)}) (x_s^{(b)} - x_s^{(a)}).$$

III.

1. Les considérations préliminaires exposées dans les Articles précédents nous serviront de base dans l'étude des distorsions d'un système cyclique composé de plusieurs éléments pliables. Imaginons en effet d'unir entre eux un nombre quelconque d'éléments élastiques pliables, *unissant entre*

eux rigidement les extrémités, de manière à former un ensemble *cyclique* dont toutes les parties soient à l'état naturel. Étudions l'effet des distorsions dans ce système.

2. Pour fixer les idées, supposons d'avoir quatre verges minces, rectilignes. Réunissons leurs extrémités deux à deux en les fixant rigidement dans quatre dés ou étaux à main de manière que les verges forment les côtés d'un quadrilatère ABDC et les quatre dés, ou étaux à main, les quatre sommets, comme il est indiqué dans la figure 28.

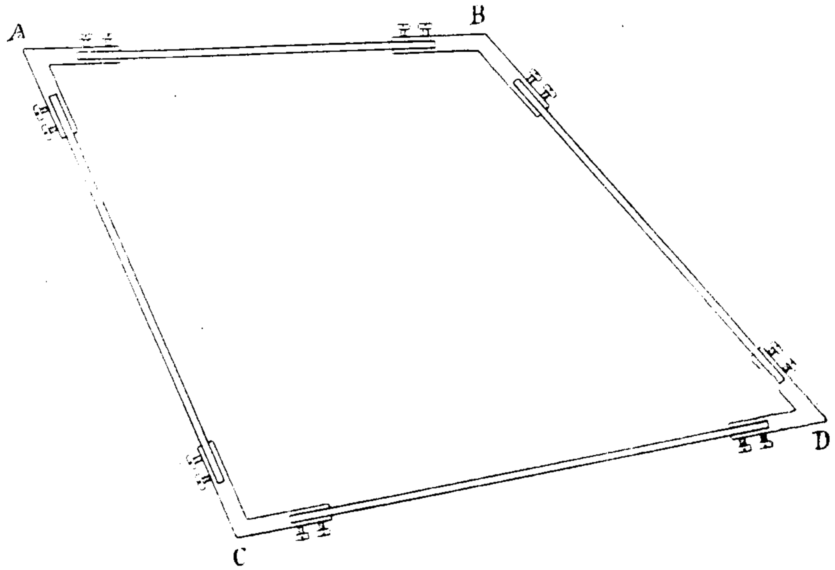


Fig. 28.

On fait ensuite une coupure dans un des côtés et l'on exécute suivant la coupure une distorsion. Voyons comment le système se déforme et quels efforts sont induits.

3. Admettons, en général, que les éléments élastiques pliables reliés entre eux soient n et que les extrémités soient unies rigidement en m nœuds. Supposons, en outre, que le système soit soustrait à toute action extérieure.

Considérons tout d'abord un élément quelconque unissant les nœuds A et B et dont les extrémités soient A et B. Indiquons cet élément par AB.

En faisant usage des mêmes notations que nous avons employées dans l'Article précédent nous aurons que, si l'élément n'a subi aucune distorsion, subsisteront les relations suivantes:

$$x_i^{(b)} - x_i^{(a)} = \sum_1^6{}_s A_{is}^{(ab)} X_i^{(ab)} \qquad (i = 1, 2, \cdots, 6). \tag{3}$$

Mais si l'élément a subi une distorsion de caractéristiques $\alpha_1^{(ab)}$, $\alpha_2^{(ab)}$, $\alpha_3^{(ab)}$, $\alpha_4^{(ab)}$, $\alpha_5^{(ab)}$, $\alpha_6^{(ab)}$, les équations précédentes devront être remplacées par

$$\text{(I)} \qquad x_i^{(b)} - x_i^{(a)} - \alpha_i^{(ab)} = \sum_1^6{}_s \mathrm{A}_{is}^{(ab)} \mathrm{X}_i^{(ab)} \qquad (i = 1, 2, \cdots, 6).$$

Si donc, en général, on exécute une distorsion en chaque élément, *on aura six équations analogues aux précédentes pour chaque élément.*

Considérons maintenant un nœud, que nous indiquerons par la lettre A, où aboutissent et sont unies rigidement les extrémités A des éléments AB, AC, AD, . . .

Pour l'équilibre nous aurons les six équations

$$\text{(II)} \qquad \mathrm{X}_i^{(ab)} + \mathrm{X}_i^{(ac)} + \mathrm{X}_i^{(ad)} + \cdots = 0 \qquad (i = 1, 2, \cdots, 6).$$

On aura donc, pour chaque nœud, six équations analogues aux précédentes.

4. *Supposons connues les constantes de chaque élément* et *les caractéristiques de chaque distorsion*, c'est-à-dire tous les coefficients $\mathrm{A}_{is}^{(ab)}$ et toutes les caractéristiques $\alpha_i^{(ab)}$, et supposons inconnues les composantes des translations et des rotations de chaque extrémité et les efforts qui sollicitent chaque élément. Nous aurons $6n + 6m$ inconnues qui vérifieront les $6n + 6m$ équations linéaires (I) et (II).

Observons toutefois que dans ce système six équations découlent des autres. En effet, en ajoutant membre à membre toutes les égalités (II) qui correspondent à un même indice i, nous obtiendrons le premier membre identiquement nul, parce que chaque terme $\mathrm{X}_i^{(ab)}$ qui paraît dans une équation est éliminé par le terme $\mathrm{X}_i^{(ba)}$ qui paraît dans une autre. Ce résultat s'explique facilement, car il est évident que les trois composantes de la translation et les trois composantes de la rotation d'un nœud sont arbitraires.

5. Nous démontrerons maintenant le théorème fondamental suivant: *Dans tout système cyclique d'élements élastiques pliables, si les constantes de chaque élément et les distorsions exécutées en chacun d'eux sont connues, les translations et les rotations relatives de tous les nœuds seront déterminées ainsi que les efforts qui sollicitent tous les éléments du système qui sont librement pliables.*

Pour simplifier, supposons nulles les trois composantes de la translation et les trois composantes de la rotation correspondant à un nœud choisi arbitrairement. Supposons encore que, à un même système de valeurs des caractèristiques $\alpha_i^{(ab)}$ et des coefficients $\mathrm{A}_{is}^{(ab)}$ correspondent deux systèmes de valeurs des quantités $x_i^{(a)}$ et $\mathrm{X}_i^{(ab)}$ que nous dénoterons respectivement par $\bar{x}_i^{(a)}$ et $\overline{\mathrm{X}}_i^{(ab)}$; $\bar{\bar{x}}_i^{(a)}$ et $\overline{\overline{\mathrm{X}}}_i^{(ab)}$. Écrivons

$$\bar{\bar{x}}_i^{(a)} - \bar{x}_i^{(a)} = \xi_i^{(a)},$$

$$\overline{\overline{\mathrm{X}}}_i^{(ab)} - \overline{\mathrm{X}}_i^{(ab)} = \Xi_i^{(ab)}.$$

Ces quantités vérifieront les équations

$$(4) \qquad \xi_i^{(b)} - \xi_i^{(a)} = \sum_1^6{}_s A_{is}^{(ab)} \Xi_s^{(ab)},$$

$$(5) \qquad \Xi_i^{(ab)} + \Xi_i^{(ac)} + \Xi_i^{(ad)} + \cdots = 0.$$

Multiplions les deux membres de l'équation (4) par $\Xi_i^{(ab)}$ et les deux membres de l'équation (5) par $\xi_i^{(a)}$, et ajoutons membre à membre toutes les équations que nous venons d'obtenir. Le premier membre résultera identiquement nul, d'où

$$\sum_{ab} \sum_1^6{}_i \sum_1^6{}_s A_{is}^{(ab)} \Xi_i^{(ab)} \Xi_s^{(ab)} = 0.$$

Par $\sum_{ab}$ on doit entendre une somme de n termes relatifs à tous les éléments élastiques constituant le système.

Mais chaque forme

$$\sum_1^6{}_i \sum_1^6{}_s A_{is}^{(ab)} \Xi_i^{(ab)} \Xi_s^{(ab)}$$

est positive; donc, en vertu des équations précédentes, nous aurons

$$(6) \qquad \sum_1^6{}_i \sum_1^6{}_s A_{is}^{(ab)} \Xi_i^{(ab)} \Xi_s^{(ab)} = 0,$$

et, par conséquent,

$$\xi_i^{(b)} - \xi_i^{(a)} = 0,$$

d'où

$$\xi_i^{(a)} = 0 \quad \text{et} \quad \bar{\bar{x}}_i^{(a)} = \bar{x}_i^{(a)}.$$

Donc, dans les deux solutions, les composantes des translations et des rotations des nœuds ne peuvent pas différer entre elles.

De la formule (6) on tire que, si l'élément AB est librement pliable, les quantités $\Xi_i^{(ab)}$ doivent être nulles et, par suite, $\bar{\bar{X}}_i^{(ab)} = \bar{X}_i^{(ab)}$. Par conséquent, les efforts relatifs à l'élément (AB), s'il est librement pliable, ne peuvent pas différer entre eux dans les deux solutions.

Le théorème énoncé est donc démontré.

6. Du théorème précédent découle immédiatement le corollaire suivant: *Dans un système cyclique d'éléments élastiques librement pliables et dont on connaît les constantes, les efforts sont déterminés par les distorsions et l'on peut les obtenir en résolvant un système d'équations du premier degré.*

En supposant toujours que les éléments soient librement pliables, nous avons trouvé que les formules (4) et (5) n'ont d'autres solutions que $\xi_i^{(a)} = 0$,

$\Xi_i^{(ab)} = 0$ si nous admettons que, pour un nœud donné, les quantités ξ soient nulles.

Cela prouve que les équations (I) et (II) sont entre elles toujours compatibles de quelque façon qu'on prenne les $\alpha_i^{(ab)}$, d'où:

Dans un système cyclique d'éléments élastiques librement pliables, les distorsions peuvent être choisies d'une façon complètement arbitraire.

7. Si les éléments élastiques ne sont pas tous librement pliables, les formules (4) et (5) peuvent admettre des solutions où les inconnues $\Xi_i^{(ab)}$ ne sont pas toutes nulles. Il peut même se rencontrer des cas où les formules (4) et (5) ne sont satisfaites que par des valeurs nulles des quantités $\Xi_i^{(ab)}$. Dans le premier cas, les distorsions ne peuvent pas être choisies arbitrairement, tandis que, dans le second cas, les distorsions sont arbitraires. En outre, dans le premier cas, les efforts ne sont pas déterminés, tandis qu'ils le sont dans le second.

On voit tout de suite que si les éléments élastiques sont de simples verges rectilignes nous aurons respectivement le second ou le premier cas, suivant que le système est ou n'est pas statiquement déterminé.

IV.

1. Les équations (I) et (II) présentent d'étroites analogies avec les équations de KIRCHHOFF sur la propagation des courants dans un système de fils conducteur formant un réseau: mais dans notre cas les équations de KIRCHHOFF sont sextuplées. Les composantes des efforts figurent dans les èquations (I) et (II) comme des éléments analogues aux intensités des courants; les composantes de translations et des rotations des nœuds, comme les éléments analogues des potentiels électriques aux nœuds du réseau: les *caractéristiques des distorsions* remplacent les *forces électromotrices*. Les relations (I) remplacent l'équation qui exprime la loi d'OHM. Les constantes des éléments élastiques ont le même rôle des inverses des résistances électriques.

2. Cette analogie une fois établie, il est facile d'examiner des cas qui se présentent d'une manière analogue au pont de WHEATSTONE dans l'étude de l'électricité et d'en profiter pour déterminer des constantes des éléments élastiques.

3. Le *principe des coupures équivalentes* (Chap. II, Art. 1, § 1) permet de substituer une distorsion faite dans une section donnée, par une autre exécutée dans une section obtenue de la première par une déformation continue.

On comprend qu'en pratique, on aura un moyen simple d'obtenir des distorsions dans un système cyclique d'éléments pliables, en les exécutant aux nœuds, ce qu'on peut faire par la manière même avec laquelle on attache entre elles les extrémités des éléments.

V.

1. Avant de passer au Chapitre suivant, où nous nous proposons de traiter un cas particulier, nous voulons démontrer le théorème général suivant et quelques autres propositions:

Les constantes directes $A_{is}^{(ab)}$ (voir Art. II) *de chaque élément vérifient les équations*

$$A_{is}^{(ab)} = A_{si}^{(ab)}.$$

En effet, supposons qu'aux *efforts* $X_i^{(ab)}$ correspondent les déplacements $x_i^{(a)}$ et $x_i^{(b)}$ $(i = 1, 2, \cdots, 6)$ des extrémités A et B de l'élément AB et qu'aux *efforts* $\Xi_i^{(ab)}$ correspondent les déplacements $\xi_i^{(a)}$ et $\xi_i^{(b)}$ $(i = 1, 2, \cdots, 6)$. Nous appellerons *première* e *seconde* déformation les deux différentes déformations que subit l'élément AB.

Considérons la quantité

$$\sum_1^6{}_i\, (x_i^{(b)} - x_i^{(a)})\, \Xi_i^{(ab)}.$$

Elle est le travail que les tensions engendrant la seconde déformation de l'élément AB exécutent en vertu de la première déformation de l'élément. La quantité

$$\sum_1^6{}_i\, (\xi_i^{(b)} - \xi_i^{(a)})\, X_i^{(ab)}$$

est le travail que les tensions engendrant la première déformation de l'élément AB exécutent en vertu de la seconde déformation.

Mais, en vertu d'un principe général d'élasticité [théorème de BETTI (voir Chap. III, Art. II, § 1)] que nous étendons aux corps élastiques pliables, ces deux travaux sont égaux et, par conséquent,

$$\sum_1^6{}_i\, (x_i^{(b)} - x_i^{(a)})\, \Xi_i^{(ab)} = \sum_1^6{}_i\, (\xi_i^{(b)} - \xi_i^{(a)})\, X_i^{ab}$$

ou

$$\sum_1^6{}_i \sum_1^6{}_s A_{is}^{(ab)} X_s^{(ab)} \Xi_i^{(ab)} = \sum_1^6{}_i \sum_1^6{}_s A_{is}^{(ab)} \Xi_s^{(ab)} X_i^{(ab)};$$

c'est pourquoi

$$A_{is}^{(ab)} = A_{si}^{(ab)}.$$

En passant des constantes directes aux inverses $a_{is}^{(ab)}$ (Art. II, § 4), on trouve évidemment vérifiée la relation analogue

$$a_{is}^{(ab)} = a_{si}^{(ab)}.$$

2. Lorsqu'on a n éléments élastiques pliables $A_1 A_2$, $A_2 A_3$, $\cdots$, $A_n A_{n+1}$, on peut les unir les uns aux autres de manière, que, deux éléments consécutifs $A_{i-1} A_i$, $A_i A_{i+1}$, aient les extrémités A_i communes attachées rigidement entre elles. On obtiendra ainsi un élément élastique unique $A_1 A_{n+1}$. On appellera cette liaison *une composition par série des éléments donnés* et l'élément obtenu *élément composé par série.*

Appelons $A_{is}^{(a_h a_{h+1})}$ les constantes directes de chaque élément composant $A_h A_{h+1}$ et $A_{is}^{(a_1 a_{n+1})}$ les constantes directes de l'élément composé se rapportant toujours au même système d'axes. En vertu des équations (3) nous aurons

$$A_{is}^{(a_1 a_{n+1})} = \sum_1^n {}_h A_{is}^{(a_h a_{h+1})},$$

c'est-à-dire:

Les constantes directes de l'élément composé par série s'obtiendront en ajoutant les constantes correspondantes des éléments composants.

Ce théorème correspond à la proposition que l'on rencontre dans la théorie de la conduction électrique, c'est-à-dire que la résistance de plusieurs conducteurs disposés en série est la somme des résistances électriques de chaque conducteur (voir § 1 de l'Art. précédent).

3. La liaison de plusieurs éléments élastiques pliables pour former un élément composé peut aussi se faire d'une autre manière. En effet, prenons n éléments pliables $(AB)_1$, $(AB)_2$, $\cdots$, $(AB)_n$ ayant à l'état naturel les mêmes extrémités A et B et supposons de lier rigidement entre elles les n extrémités qui sont en A, ainsi que les n extrémités qui sont en B. Cette liaison se dira une *composition par dérivation* ou *en parallèle des éléments donnés.* L'élément composé AB s'appellera *élément composé par dérivation.*

Supposons que chaque élément composant soit librement pliable et appelons $a_{is}^{(AB)_h}$ les constantes inverses de chacun d'eux, $a_{is}^{(AB)}$ les constantes inverses de l'élément composé; à cause des équations (3') nous aurons

$$a_{is}^{(AB)} = \sum_1^n {}_h a_{is}^{(AB)_h},$$

c'est-à-dire:

Les constantes inverses de l'élément composé par dérivation s'obtiendront en ajoutant les constantes correspondantes des éléments composés.

Ce théorème correspond aussi à un théorème sur la conduction électrique. En effet, la conductibilité électrique d'un conducteur formé par la réunion de plusieurs conducteurs disposés en parallèle est la somme des conductibilités de chaque conducteur composant.

CHAPITRE IX.

Système cyclique plan d'éléments élastiques pliables.

I.

1. Quand un élément élastique pliable AB est plan et sujet à des forces situées dans son plan, si l'on prend celui–ci comme premier plan coordonné on aura que les trois caractéristiques des efforts

$$X_3^{(ab)}, X_4^{(ab)}, X_5^{(ab)}$$

seront nulles. De même, les caractéristiques des déplacements des extrémités

$$x_3^{(a)}, x_4^{(a)}, x_5^{(a)} \quad ; \quad x_3^{(b)}, x_4^{(b)}, x_5^{(b)}$$

seront nulles.

Pour simplifier, représentons par x, y les axes coordonnés, par $X^{(ab)}$, $Y^{(ab)}$, $M^{(ab)}$ les caractéristiques $X_1^{(ab)}$, $X_2^{(ab)}$, $X_6^{(ab)}$ des efforts, et par $x^{(a)}, y^{(a)}, r^{(a)}$ les caractéristiques $x_1^{(a)}, x_2^{(a)}, x_6^{(a)}$ des déplacements de l'extrémité A. En même temps indiquons par $x^{(b)}$, $y^{(b)}$, $r^{(b)}$ les quantités correspondantes $x_1^{(b)}$, $x_2^{(b)}$, $x_6^{(b)}$.

2. Cela posé, démontrons le théorème suivant:

Si un élément élastique pliable et plan AB *est sollicité par des forces situées dans son plan, on pourra toujours trouver dans ce même plan un couple d'axes orthogonaux x, y tels que*

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} x^{(b)} - x^{(a)} &= \lambda X^{(ab)}, \\ y^{(b)} - y^{(a)} &= \mu Y^{(ab)}, \\ r^{(b)} - r^{(a)} &= \nu M^{(ab)}. \end{aligned} \right.$$

En effet, nous aurons, en général

$$(2) \qquad \left\{ \begin{aligned} x^{(b)} - x^{(a)} &= a_{11} X^{(ab)} + a_{12} Y^{(ab)} + a_{13} M^{(ab)}, \\ y^{(b)} - y^{(a)} &= a_{21} X^{(ab)} + a_{22} Y^{(ab)} + a_{23} M^{(ab)}, \\ r^{(b)} - r^{(a)} &= a_{31} X^{(ab)} + a_{32} Y^{(ab)} + a_{33} M^{(ab)}, \end{aligned} \right.$$

étant $a_{rs} = a_{sr}$.

En transportant l'origine au point de coordonnées ξ, η, sans altérer la direction des axes, et en distinguant par un suffixe les quantités relatives au nouveau système d'axes, nous aurons

$$\begin{aligned} x_1^{(b)} - x_1^{(a)} &= x^{(b)} - x^{(a)} + \eta\,(r^{(b)} - r^{(a)}), \\ y_1^{(b)} - y_1^{(a)} &= y^{(b)} - y^{(a)} - \xi\,(r^{(b)} - r^{(a)}), \\ r_1^{(b)} - r_1^{(a)} &= r^{(b)} - r^{(a)}, \end{aligned}$$

$$X_1^{(ab)} = X^{(ab)},$$
$$Y_1^{(ab)} = Y^{(ab)},$$
$$M_1^{(ab)} = M^{(ab)} - X^{(ab)}\eta + Y^{(ab)}\xi;$$

par suite, les formules (2) deviendront

$$(2') \quad \left\{ \begin{aligned} x_1^{(b)} - x_1^{(a)} &= (a_{11} + 2\eta a_{31} + \eta^2 a_{33})\, X_1^{(ab)} \\ &+ (a_{12} + \eta a_{32} - \xi a_{31} - \xi\eta a_{33})\, Y_1^{(ab)} + (a_{13} + \eta a_{33})\, M_1^{(ab)}, \\ y_1^{(b)} - y_1^{(a)} &= (a_{21} - \xi a_{31} + \eta a_{23} - \xi\eta a_{33})\, X_1^{(ab)}, \\ &+ (a_{22} - 2\xi a_{23} + \xi^2 a_{33})\, Y_1^{(ab)} + (a_{23} - \xi a_{33}) M_1^{(ab)}, \\ r_1^{(b)} - r_1^{(a)} &= (a_{31} + \eta a_{33})\, X_1^{(ab)} + (a_{32} - \xi a_{33})\, Y_1^{(ab)} + a_{33}\, M_1^{(ab)}. \end{aligned} \right.$$

Il suffira donc de prendre

$$\eta = -\frac{a_{13}}{a_{33}} \quad , \quad \xi = \frac{a_{23}}{a_{33}},$$

ce qui est toujours possible si $a_{33} \gtrless 0$, afin que les équations précédentes deviennent

$$(2'') \quad \left\{ \begin{aligned} x_1^{(b)} - x_1^{(a)} &= \frac{a_{11}\, a_{33} - a_{13}^2}{a_{33}}\, X_1^{(ab)} + \frac{a_{12}\, a_{33} - a_{23}\, a_{13}}{a_{33}}\, Y_1^{(ab)}, \\ y_1^{(b)} - y_1^{(a)} &= \frac{a_{12}\, a_{33} - a_{13}\, a_{23}}{a_{33}}\, X_1^{(ab)} + \frac{a_{22}\, a_{33} - a_{23}^2}{a_{33}}\, Y_1^{(ab)}, \\ r_1^{(b)} - r_1^{(a)} &= a_{33}\, M_1^{(ab)}. \end{aligned} \right.$$

Si a_{33} était nul, a_{13} et a_{23} seraient aussi nuls (Chap. VIII, Art. II, § 1, 3ᵉ propriété), et alors les formules (2) auraient originairement la forme (2'').

En changeant maintenant l'orientation des axes, c'est-à-dire en les choisissant comme axes principaux de la conique

$$(a_{11}\, a_{33} - a_{13}^2)\, x^2 + 2\,(a_{12}\, a_{33} - a_{23}\, a_{13})\, xy + (a_{22}\, a_{33} - a_{23}^2)\, y^2 = a_{33},$$

nous pourrons réduire les formules (2'') à la forme (1).

3. Nous appellerons *centre de l'élément élastique* l'origine des axes x, y pour lesquels sont vérifiées les formules (1) et ces axes eux-mêmes seront les *axes principaux de l'élément.* Les coefficients λ et μ s'appelleront les *coefficients de traction* et ν le *coefficient de flexion.*

Il est facile de démontrer le théorème suivant:

Si l'élément élastique admet deux axes de symétrie, ceux-ci sont les axes principaux de l'élément.

Il est aussi facile de calculer les *constantes d'un élément* relativement à des axes quelconques quand on connaît les *coefficients de traction et de flexion.*

Désignons par ξ et η les coordonnées du centre de l'élément relativement aux axes x, y et par x', y' les axes principaux. Le Tableau des cosinus des deux systèmes d'axes soit

	x'	y'
x	α	β
y	γ	δ

et λ et μ soient les coefficients de traction par rapport aux axes x' et y'. Alors les formules (2) relativement aux axes x, y prendront la forme

$$(3) \quad \begin{cases} x^{(b)} - x^{(a)} = (\lambda\alpha^2 + \mu\beta^2 + \nu\eta^2)\,X^{(ab)} \\ \qquad + (\lambda\gamma\alpha + \mu\beta\delta - \nu\xi\eta)\,Y^{(ab)} - \nu\eta\,M^{(ab)} \\ y^{(b)} - y^{(a)} = (\lambda\alpha\gamma + \mu\beta\delta - \nu\xi\eta)\,X^{(ab)} \\ \qquad + (\lambda\gamma^2 + \mu\delta^2 + \nu\xi^2)\,Y^{(ab)} + \nu\xi M^{(ab)}, \\ r^{(b)} - r^{(a)} = -\nu\eta\,X^{(ab)} + \nu\xi\,Y^{(ab)} + \nu M^{(ab)}, \end{cases}$$

ou encore, en appelant θ l'angle $\widehat{xx'}$, c'est-à-dire en faisant

$$\alpha = \cos\theta \quad , \quad \beta = -\sin\theta,$$

$$\gamma = \sin\theta \quad , \quad \delta = \cos\theta,$$

on aura

$$(3') \quad \begin{cases} x^{(b)} - x^{(a)} = (\lambda\cos^2\theta + \mu\sin^2\theta + \nu\eta^2)\,X^{(ab)} \\ + [(\lambda - \mu)\sin\theta\cos\theta - \nu\xi\eta]\,Y^{(ab)} - \nu\eta\,M^{(ab)}, \\ y^{(b)} - y^{(a)} = [(\lambda - \mu)\sin\theta\cos\theta - \nu\xi\eta]\,X^{(ab)} \\ + (\lambda\sin^2\theta + \mu\cos^2\theta + \nu\xi^2)\,Y^{(ab)} + \nu\xi M^{(ab)}, \\ r^{(b)} - r^{(a)} = -\nu\eta\,X^{(ab)} + \nu\xi\,Y^{(ab)} + \nu\,M^{(ab)}. \end{cases}$$

4. Soient n éléments plans $A_1A_2, A_2A_3, \cdots, A_nA_{n+1}$, et supposons de les lier rigidement entre eux deux à deux par les extrémités communes $A_2, A_3, \cdots, A_n$, c'est-à-dire supposons de les composer en série (voir Chap. VIII, Art. V).

Marquons par un indice i les quantités $\lambda, \mu, \nu, \xi, \eta, \theta$ lorsqu'elles se rapportent à l'élément $i^{ième}$. Alors les formules relatives à l'élément plan engendré moyennant la liaison des éléments donnés seront

$$x^{(A_{n+1})} - x^{(A_1)} = \sum_1^n{}_i (\lambda_i \cos^2\theta_i + \mu_i \sin^2\theta_i + \nu_i \eta_i^2)\, X^{(A_1 A_{n+1})}$$

$$+ \sum_1^n{}_i [(\lambda_i - \mu_i) \sin\theta_i \cos\theta_i - \nu_i \xi_i \eta_i]\, Y^{(A_1 A_{n+1})}$$

$$- \sum_1^n{}_i \nu_i \eta_i M^{(A_1 A_{n+1})},$$

$$y^{(A_{n+1})} - y^{(A_1)} = \sum_1^n{}_i [(\lambda_i - \mu_i) \sin\theta_i \cos\theta_i - \nu_i \xi_i \eta_i]\, X^{(A_1 A_{n+1})}$$

$$+ \sum_1^n{}_i (\lambda_i \sin^2\theta_i + \mu_i \cos^2\theta_i + \nu_i \xi_i^2)\, Y^{(A_1 A_{n+1})}$$

$$+ \sum_1^n{}_i \nu_i \xi_i M^{(A_1 A_{n+1})},$$

$$r^{(A_{n+1})} - r^{(A_1)} = -\sum_1^n{}_i \nu_i \eta_i X^{(A_1 A_{n+1})} + \sum_1^n{}_i \nu_i \xi_i Y^{(A_1 A_{n+1})} + \sum_1^n{}_i \nu_i M^{(A_1 A_{n+1})}.$$

Mais si les axes x, y sont les axes principaux de l'élément composé $A_1 A_{n+1}$ on aura

$$\sum_1^n{}_i \nu_i \xi_i = 0 \quad , \quad \sum_1^n{}_i \nu_i \eta_i = 0,$$

$$\sum_1^n{}_i (\lambda_i - \mu_i) \sin\theta_i \cos\theta_i - \nu_i \xi_i \eta_i = 0.$$

En outre, les coefficients de traction et les coefficients de flexion seront respectivement

$$\Lambda = \sum_1^n{}_i (\lambda_i \cos^2\theta_i + \mu_i \sin^2\theta_i + \nu_i \eta_i^2),$$

$$M = \sum_1^n{}_i (\lambda_i \sin^2\theta_i + \mu_i \cos^2\theta_i + \nu_i \xi_i^2),$$

$$N = \sum_1^n{}_i \nu_i,$$

d'où découlent les théorèmes suivants:

Le centre d'un élément composé est le centre de gravité des centres des éléments composants si l'on suppose qu'en chacun d'eux soit concentrée une masse égale au coefficient de flexion.

Par le centre de l'élément composé en série, conduisons des segments unitaires normaux aux axes de chaque élément composant et concentrons, à l'extrémité de chacun d'eux, une masse égale au coefficient correspondant de traction, et en même temps considérons les masses égales aux coefficients de flexion de chaque élément composant, concentrées dans les centres respectifs. Les axes d'inertie de ce système de masses sont les axes principaux de l'élément composé et les moments principaux d'inertie en sont les coefficients de traction.

Le coefficient de flexion de l'élément composé en série est la somme des coefficients de flexion de chaque élément composant.

II.

1. Considérons maintenant un corps élastique plan quelconque deux fois connexe et assujettissons-le à des distorsions qui le conservent plan. Si les axes x, y sont situés dans le même plan et si nous indiquons les six caractéristiques des distorsions par l, m, n, p, q, r, nous aurons (voir Chap. III)

$$n = p = q = 0$$

et, en représentant les efforts par L, M, N, P, Q, R, on aura

$$\mathrm{N} = \mathrm{P} = \mathrm{Q} = 0,$$

tandis que les relations entre les caractéristiques et les efforts deviendront (voir Chap. III, Art. II, § 3)

$$\begin{aligned}
\mathrm{L} &= \mathrm{E}_{11}\, l + \mathrm{E}_{12}\, m + \mathrm{E}_{16}\, r,\\
\mathrm{M} &= \mathrm{E}_{21}\, l + \mathrm{E}_{22}\, m + \mathrm{E}_{26}\, r,\\
\mathrm{N} &= \mathrm{E}_{61}\, l + \mathrm{E}_{62}\, m + \mathrm{E}_{66}\, r.
\end{aligned}$$

En transportant l'origine au point de coordonnées ξ, η sans altérer la direction des axes, nous aurons

$$\begin{aligned}
\mathrm{L}_1 &= \mathrm{E}_{11}\, l_1 + \mathrm{E}_{12}\, m_1 + (\mathrm{E}_{16} - \mathrm{E}_{11}\,\eta + \mathrm{E}_{12}\,\xi)\, r_1,\\
\mathrm{M}_1 &= \mathrm{E}_{21}\, l_1 + \mathrm{E}_{22}\, m_1 + (\mathrm{E}_{26} - \mathrm{E}_{21}\,\eta + \mathrm{E}_{22}\,\xi)\, r_1,\\
\mathrm{R}_1 &= (\mathrm{E}_{61} - \mathrm{E}_{11}\,\eta + \mathrm{E}_{21}\,\xi)\, l_1 + (\mathrm{E}_{62} - \mathrm{E}_{12}\,\eta + \mathrm{E}_{22}\,\xi)\, m_1\\
&\quad + (\mathrm{E}_{66} - 2\,\mathrm{E}_{16}\,\eta + 2\,\mathrm{E}_{26}\,\xi + 2\,\mathrm{E}_{11}\,\eta^2 - 4\,\mathrm{E}_{12}\,\xi\eta + 2\,\mathrm{E}_{22}\,\xi^2)\, r,
\end{aligned}$$

où $\mathrm{L}_1 = \mathrm{L}, \mathrm{M}_1 = \mathrm{M}, \mathrm{R}_1$; $l_1, m_1, r_1 = r$ sont les efforts et le caractéristiques relatives au nouveau système d'axes.

Mais nous pouvons choisir les coordonnées ξ et η de façon que les coefficients de r_1 dans les expressions de L_1 et M_1 s'annulent, par suite s'annuleront aussi les coefficients de l_1 et m_1 dans l'expression de R_1.

En orientant ensuite convenablement les axes nous pourrons réduire les relations entre les caractéristiques et les efforts aux formes suivantes:

$$L = E_{11}\, l,$$

$$M = E_{22}\, m,$$

$$R = E_{66}\, r,$$

c'est-à-dire:

Étant donné un système plan deux fois connexe assujetti à des distorsions qui le conservent plan, il existe dans le même plan un système d'axes tels, que, relativement à ce système, chaque distorsion élémentaire produit le seul effort conjugué.

2. Supposons maintenant que le système plan deux fois connexe soit formé d'éléments pliables $A_1 A_2, A_2 A_3, \cdots, A_n A_1$ liés rigidement entre eux deux à deux par les extrémités communes, c'est-à-dire soit obtenu par une composition par série, et que dans l'état naturel la première et la dernière extrémité A_1 viennent coincider et se lier rigidement.

Pour obtenir les axes dont on a parlé dans le précédent paragraphe, il suffira d'appliquer les règles données dans le § 4 de l'Article précédent pour trouver le centre et les axes principaux de l'élément composé par série des élément $A_1 A_2, A_2 A_3, \cdots, A_n A_1$. Les trois coefficients des efforts s'obtiendront en calculant les inverses des coefficients de traction et du coefficient de flexion de l'élément composé.

3. Nous avons comparé dans le Chapitre précédent (Art. IV) la théorie des distorsions d'un système constitué d'éléments élastiques pliables à la théorie de KIRCHHOFF sur la propagation des courants dans les fils. Les résultats que nous venons d'obtenir jettent une novelle lumière sur les rapports qui existent entre les deux théories.

En effet, le théorème que nous avons démontré dans le § 4 de l'Article précédent, c'est-à-dire: *Le coefficient de flexion du circuit composé est la somme des coefficients de flexion de chaque élément*, correspond à cette proposition: *La résistance électrique d'un circuit est la somme des résistances de toutes les parties qui, disposées en séries, forment le circuit lui-même* (voir Chap. VIII, Art. V, § 2). Mais la règle pour obtenir les coefficients de traction est bien plus compliquée et n'a pas sa correspondante dans la théorie de la conduction électrique. En outre, la considération du centre et des axes principaux, qui est fondamentale dans la présente théorie, manque complètement dans la théorie électrique.

III.

1. Dans l'Article I nous avons traité le cas d'un système plan d'éléments élastiques pliables disposés en série, et nous avons déterminé les axes et les coefficients de traction et de flexion de l'élément composé, en connaissant les axes et les coefficients analogues des éléments composants.

Nous nous proposons maintenant de résoudre la même question en étudiant une composition d'éléments en parallèle (par dérivation) (voir Chap. précédent, Art. V, § 3).

2. En supposant un élément plan librement pliable, nous aurons, en nous rapportant à ses axes principaux [voir formule (1), Art. I]

$$X^{(ab)} = \frac{1}{\lambda}(x^{(b)} - x^{(a)}),$$

$$Y^{(ab)} = \frac{1}{\mu}(y^{(b)} - y^{(a)}),$$

$$M^{(ab)} = \frac{1}{\nu}(r^{(b)} - r^{(a)}).$$

A l'aide de calculs très simples on trouve que si les axes principaux x', y' forment, avec les axes x, y des angles dont le Tableau des cosinus est

	x'	y'
x	α	β
y	γ	δ

et si le centre de l'élément a les coordonnées ξ, η, les formules qui expriment les efforts moyennant les déplacements seront

$$X^{(ab)} = \left(\frac{1}{\lambda}\alpha^2 + \frac{1}{\mu}\beta^2\right)(x^{(b)} - x^{(a)}) + \left(\frac{1}{\lambda}\alpha\gamma + \frac{1}{\mu}\beta\delta\right)(y^{(b)} - y^{(a)})$$
$$+ \left(\frac{1}{\lambda}\eta\alpha - \frac{1}{\mu}\xi\beta\right)(r^{(b)} - r^{(a)}),$$

$$Y^{(ab)} = \left(\frac{1}{\lambda}\alpha\gamma + \frac{1}{\mu}\beta\delta\right)(x^{(b)} - x^{(a)}) + \left(\frac{1}{\lambda}\gamma^2 + \frac{1}{\mu}\delta^2\right)(y^{(b)} - y^{(a)})$$
$$+ \left(\frac{1}{\lambda}\eta\gamma - \frac{1}{\mu}\xi\delta\right)(r^{(b)} - r^{(a)}),$$

$$M^{(ab)} = \left(\frac{1}{\lambda}\eta\alpha - \frac{1}{\mu}\xi\beta\right)(x^{(b)} - x^{(a)}) + \left(\frac{1}{\lambda}\eta\gamma - \frac{1}{\mu}\xi\delta\right)(y^{(b)} - y^{(a)})$$
$$+ \left(\frac{1}{\nu} + \frac{1}{\lambda}\eta^2 + \frac{1}{\mu}\xi^2\right)(r^{(b)} - r^{(a)}).$$

3. Composons en parallèle les n éléments $(AB)_1, (AB)_2, \cdots, (AB)_n$. En marquant les quantités relatives à l'élément $(AB)_h$ par un indice h, nous aurons par rapport à l'élément composé les formules suivantes:

$$X^{(ab)} = \sum_1^n {}_h \left(\frac{1}{\lambda_h}\alpha_h^2 + \frac{1}{\mu_h}\beta_h^2\right)(x^{(b)} - x^{(a)})$$
$$+ \sum_1^n {}_h \left(\frac{1}{\lambda_h}\alpha_h\gamma_h + \frac{1}{\mu_h}\beta_h\delta_h\right)(y^{(b)} - y^{(a)}) + \sum_1^n {}_h \left(\frac{1}{\lambda_h}\eta_h\alpha_h - \frac{1}{\mu_h}\xi_h\beta_h\right)(r^{(b)} - r^{(a)}),$$

$$Y^{(ab)} = \sum_1^n {}_h \left(\frac{1}{\lambda_h}\alpha_h\gamma_h + \frac{1}{\mu_h}\beta_h\delta_h\right)(x^{(b)} - x^{(a)})$$
$$+ \sum_1^n {}_h \left(\frac{1}{\lambda_h}\gamma_h^2 + \frac{1}{\mu_h}\delta_h^2\right)(y^{(b)} - y^{(a)}) + \sum_1^n {}_h \left(\frac{1}{\lambda_h}\eta_h\gamma_h - \frac{1}{\mu_h}\xi_h\delta_h\right)(r^{(b)} - r^{(a)}),$$

$$M^{(ab)} = \sum_1^n {}_h \left(\frac{1}{\lambda_h}\eta_h\alpha_h - \frac{1}{\mu_h}\xi_h\beta_h\right)(x^{(b)} - x^{(a)})$$
$$+ \sum_1^n {}_h \left(\frac{1}{\lambda_h}\eta_h\gamma_h - \frac{1}{\mu_h}\xi_h\delta_h\right)(y^{(b)} - y^{(a)}) + \sum_1^n {}_h \left(\frac{1}{\nu_h} + \frac{1}{\lambda_h}\eta_h^2 + \frac{1}{\mu_h}\xi_h^2\right)(r^{(b)} - r^{(a)}).$$

De ces formules découle le théorème suivant:

Par un point arbitraire conduisons des segments unitaires parallèles aux axes, et, à l'extrémité de chacun d'eux, concentrons une masse égale à l'inverse du coefficient correspondant. Les axes d'inertie de cet ensemble de masses sont parallèles aux axes principaux de l'élément composé et les moments principaux d'inertie sont les inverses $1/\lambda$ *et* $1/\mu$ *des coefficients de traction.*

En considérant ces axes d'inertie comme axes coordonnés, les coefficients de $r^{(b)} - r^{(a)}$ *dans les expressions de* $X^{(ab)}$ *el* $Y^{(ab)}$ *seront respectivement égaux aux coordonnées* η *et* ξ *du centre de l'élément composé multipliées par* $1/\lambda$ *et* $-1/\mu$.

Bibliographie

Aux Travaux cités dans le Mémoire il faut ajouter:

MAGGI, *Sull'interpretazione del nuovo teorema di Volterra sulla teoria dell'elasticità* («Rend. Acc. dei Lincei», vol. XIV, 2° sem.).

TIMPE [24], *Probleme der Spannungsverteilung in ebenen Systemen einfach gelöst mit Hilfe der Airyschen Function.* [*Inaugural Dissertation, Göttingen* (Leipzig 1905). «Zeitschrift für Math. und Phys.», Bd. LII; Voir «Rend. Acc. dei Lincei», vol. XV, 1^er^ sem., p. 521].

WEINGARTEN, *Sulle superficie di discontinuità nella teoria della elasticità dei corpi solidi* («Rend. R. Accademia dei Lincei», 5^e^ série, t. X).

VOLTERRA, *Un teorema sulla teoria della elasticità* (Ibid., 5^e^ série, t. XIV); *Sull'equilibrio dei corpi elastici più volte connessi* (Ibid., 5^e^ série, t. XIV); *Sulle distorsioni dei solidi elastici più volte connessi* (Ibid., 5^e^ série, t. XIV); *Sulle distorsioni dei corpi elastici simmetrici* (Ibid. 5^e^ série, t. XIV); *Contributo allo studio delle distorsioni dei solidi elastici*

(24) J'ai eu connaissance de la dissertation de M. TIMPE après la publication de mon Mémoire: *Sulle distorsioni generate da tagli uniformi.* M. TIMPE avait résolu par des méthodes différentes un problème qui est traité dans ce Mémoire et d'autres analogues.

(Ibid., 5e série t. XIV); *Sulle distorsioni generate da tagli uniformi* (Ibid., 5e série, t. XIV); *Nuovi studi sulle distorsioni dei solidi elastici* (Ibid., 5e série, t. XV); *Sull'equilibrio dei corpi elastici più volte connessi* (« Nuovo Cimento » 5e série, t. X, XI); *Leçons sur l'intégration des équations différentielles aux dérivées partielles, professées à Stockholm* (Upsal, 1906 [in questo vol.: X, pp. 63–141], Leçons 1, 2, 3, 4).

CESÀRO, *Sulle formole del Volterra fondamentali nella teoria delle distorsioni elastiche* (« Rend. R. Accademia di Napoli », 1906; « Nuovo Cimento », 5e série, t.XII).

ROLLA, *Esperienze illustrative per la teoria del Volterra su l'equilibrio dei corpi elastici più volte connessi* (« Rend. R. Accademia dei Lincei », 5e série, t. XVI).

ALMANSI, *Sopra una classe particolare di deformazioni a spostamenti polidromi dei solidi cilindrici* (« Rend. R. Istituto Lombardo », 5e série, t. XL).

TABLE DES CHAPITRES

XIV.

IL MOMENTO SCIENTIFICO PRESENTE E LA NUOVA SOCIETÀ ITALIANA PER IL PROGRESSO DELLE SCIENZE (*)

« Rivista di Scienza » [poi « Scientia »]; anno I (1907), vol. II, pp. 225–237).

È trascorso ormai più che un trentennio dacché in Palermo si tenne l'ultimo Congresso degli Scienziati Italiani. Come la mitica valchirie, la nobile istituzione dopo il lungo sonno si desta e saluta il sole nuovo che le splende dinanzi.

Nel periodo da allora trascorso le condizioni materiali e morali d'Italia si sono profondamente modificate, mentre il pensiero scientifico universale si è svolto e maturato in modo rapido e sicuro. L'insieme dei fatti scientifici nuovi manifestatisi in questo pur così breve lasso di tempo ha rinnovellato, in una con le abitudini della vita, l'indirizzo generale della cultura, ed ha sviluppato e consolidato un sentimento tutto nuovo, moderno e originale, che chiamerei sentimento scientifico, il quale domina beneficamente la nostra epoca, come altre forme non meno universali di sentimento hanno dominato in epoche passate. Questo sentimento, che ormai pervade ogni manifestazione di vita sociale, patrimonio così dei grandi come degli umili, è frutto della genialità degli spiriti più eletti a cui si devono le grandi scoperte e le grandi idee, e della feconda attività della intera società odierna, che indefessamente le applica. Alla sua opera animatrice si deve oggi il risveglio delle più sane e vitali energie. È desso il giovine eroe al cui appello risorge anche l'antica nostra Associazione.

Si può affermare che il concetto della scienza ed il valore di essa presso il pubblico sono oggi profondamente cambiati rispetto solo ad un mezzo secolo fa.

Infatti le più moderne scoperte, quelle stesse a cui la maggior parte della nostra generazione ha assistito, furono viste da tutti (a differenza di quel che avveniva più frequentemente pel passato) nascere e svilupparsi nei gabinetti scientifici e di qui diffondersi nelle officine e invadere il campo della vita pratica.

(*) Quest'articolo riproduce integralmente, salvo i ringraziamenti di prammatica, il discorso con cui il presidente VITO VOLTERRA ha inaugurato il I Congresso della Società italiana per il progresso delle Scienze (« Atti della S.I.P.S. », I Riunione, Parma, 1907, pp. 3–14). Questo stesso discorso fu poi ripubblicato dall'Autore anche nei Suoi *Saggi Scientifici* (Bologna, Zanichelli [1920]), pp. 97–117. [N.d.R.].

Perciò il momento storico che attraversiamo ci colpisce con lo spettacolo della moltitudine che, affascinata da quelle invenzioni, che in poco tempo furono fonte di tanto benessere e di tanta ricchezza e influirono così profondamente sui costumi e sulla coscienza sociale, cerca di impossessarsi delle verità scientifiche nel loro insieme, conoscerle nei particolari e, quel che più preme, attende dalla scienza il progresso materiale e morale.

È forse questo stato d'animo di attesa, caratteristico dell'epoca presente, ciò che più alimenta il sentimento a cui ho alluso.

Cercherò di caratterizzare quanto ho affermato con un confronto a tutti famigliare: il confronto che si può istituire fra lo sviluppo delle macchine a vapore e quello delle macchine elettriche.

Storicamente l'uso delle prime ha preceduto l'uso delle altre; infatti il diffondersi delle applicazioni pratiche elettriche e il conseguente trasporto dell'energia è, come tutti sanno, opera dell'ultimo trentennio.

WATT e STEPHENSON erano due pratici, che col loro genio sono assurti dall'officina all'accademia delle scienze ed all'alta industria; essi attestano che, almeno nel periodo eroico di creazione delle macchine a fuoco, fonte dei più ingegnosi e famosi trovati fu l'officina stessa. Solo in seguito la scienza, scrutando il funzionamento delle macchine industriali, costruì quel mirabile monumento che accoglie tutti i fenomeni della natura e li domina con i concetti della termodinamica.

Fu il contrario per l'elettricità.

La pila già pronta per le sue svariate applicazioni procede direttamente dal laboratorio di fisica dell'Università di Pavia. FARADAY col principio dell'induzione getta le basi di tutte le applicazioni elettriche, dalla dinamo al telefono. L'anello di PACINOTTI, il campo rotante di GALILEO FERRARIS, la scoperta delle onde elettriche sono frutto di studi dei gabinetti scientifici.

In breve, mentre la scoperta delle macchine termiche fu il punto di partenza di tante ricerche teoriche, fu invece la elettrodinamica teorica che direttamente creò le varie e meravigliose applicazioni della elettricità.

In questo caso, come in tanti altri, la storia delle parole riassume e rispecchia quella di una lunga e lenta evoluzione di idee. Così la temperatura, che originariamente fu una vaga e rozza espressione delle condizioni atmosferiche, a poco a poco si concretò e determinò scientificamente, fino ad esser concepita dalla termodinamica come il fattore integrante d'una espressione differenziale. Invece il concetto di potenziale, che con i sottili procedimenti del calcolo integrale LAPLACE creò in meccanica celeste, fecondato poscia dalla mente di GAUSS, trapiantato dal genio di GREEN nel campo della elettrostatica, introdotto da KIRCHHOFF in elettrodinamica, doveva venire ai nostri giorni, col nome di voltaggio, trasportato dalle bocche dei più umili lavoratori in ogni più lontana e remota plaga, fin dove una lampadina elettrica brilla la notte in un povero villaggio.

Così, discendendo in ogni categoria di persone ed ovunque diffondendosi, giovandoci ed aiutandoci in ogni circostanza dell'esistenza, ravvivando ed intensificando tutta la nostra vita, le applicazioni elettriche ci mostrano ad ogni istante (come nulla potè più assiduamente ed efficacemente farlo finora) la potenza della ricerca scientifica e la utilità delle più astratte meditazioni.

Mentre in tal modo si è stabilita una corrente continua che unisce la vita pratica e quella scientifica, per naturale corrispondenza e per virtù intima di cose, coloro che fanno professione di scienza si sono sentiti attratti verso la moltitudine degli uomini; la loro esistenza non resta chiusa nei laboratori e nei gabinetti di studio, essi si sentono costretti a porsi in contatto intimo e quotidiano con la società ed a partecipare alla vita che agita il mondo.

Così anche la fisionomia dello scienziato moderno si è grandemente mutata rispetto a quella del dotto di pochi anni fa.

La mente, per stabilire un confronto che caratterizzi due tipi spiccatamente opposti, si volge verso due uomini sommi, i quali hanno abbracciato con il loro genio tutto il mondo fisico: GAUSS e LORD KELVIN.

L'uno che meditò solitario cinquanta anni, non avvicinato né avvicinabile, nella modesta Gottinga, dando alla luce solo ciò che ritenne compiuto e perfetto, mentre serbò gelosamente celati, o confidò in segreto a stretti amici, i pensieri più nuovi ed originali, che più tardi suscitarono tanto clamore e tanta rivoluzione d'idee; l'altro, il maggiore scienziato oggi vivente, che portò la feconda multiforme sua attività nei due mondi e che ardimentoso affrontò e divulgò le più originali e singolari teorie che si presentarono al suo genio, mentre la sua vita, mescolata sempre al grandioso movimento moderno dell'Inghilterra, fu aperta all'universale ammirazione.

Eppure, quanti punti di contatto fra i due scienziati! Se LORD KELVIN unì l'Europa e l'America col telegrafo transatlantico, GAUSS per primo immaginò il telegrafo elettrico che collegò il suo osservatorio col gabinetto di fisica dell'amico WEBER. La limpida geometrica eleganza della teoria delle immagini di LORD KELVIN è solo paragonabile alla armoniosa divina bellezza delle proprietà dei numeri che GAUSS scoprì.

Non la forma del genio dunque, ma il carattere e più che altro l'ambiente diverso in cui vissero fu l'origine di tanta differenza.

L'intima connessione della scienza con la vita pratica non ha peraltro diminuito il carattere maestoso e solenne di quella, carattere che nutre ed avviva quello che già ho chiamato sentimento scientifico.

Quei moderni portentosi ed immani edifici, non fumanti e strepitosi come le antiche officine, bensì luminosi e tranquilli, ove le dinamo, giganteschi monumenti dell'epoca presente, compiono rapide e silenziose l'opera loro, rievocano per l'augusta, solenne ed austera grandiosità i monumenti di una altra epoca: le vetuste cattedrali che ergono al cielo le loro mirabili guglie. Sotto le aeree arcate, che l'arte del medio-evo elevò, l'anima si riempie di una commozione solenne che ci fa sentire le aspirazioni ed i palpiti dei lontani secoli. Una commozione altrettanto grande e profonda invade chi penetra nel loco sacro dell'industria moderna ed ei sente suscitarsi nel cuore un'onda di fiero compiacimento e un sentimento di serena fiducia che gli fa guardare sicuro in faccia all'avvenire.

Del recente movimento della scienza verso le pratiche applicazioni l'Italia forse si giovò meglio di ogni altro paese, ond'è che quel sentimento scientifico a cui poc'anzi alludevo, sebbene qui più tardi che altrove sviluppato, fa sotto i nostri occhi sempre più rapidi e lusinghieri progressi.

Era, non son molti anni, ben triste la nostra condizione economica; ma per virtù di uomini e di cose essa risorse in modo mirabile ed inaspettato: una fonte inattesa di ricchezza scaturì abbondante dall'industria che si credeva negata al nostro paese dalla stessa natura.

Allorché all'Esposizione di Torino del 1884 vennero alla luce i primi trasformatori elettrici, quegli apparecchi, che furono paragonati all'organo rudimentale di ogni meccanismo, la leva, il seme da cui doveva nascere tanta ricchezza era gettato: la energia che i nostri monti e i nostri fiumi serbavano si riversò nel piano e animò mille operose officine e penetrò benefica nelle nostre città.

I fili che vediamo stendersi come in una rete sopra le nostre abitazioni e slanciarsi lontani sono il documento più eloquente della nostra prosperità economica. Nella solitaria campagna romana essi corrono paralleli ai superbi acquedotti. Al genio di LORD KELVIN, che li mirò in un fulgente crepuscolo, essi parlarono un linguaggio altrettanto solenne quanto le maestose vestigia dell'antica potenza dell'Urbe.

Ho cercato fin qui di descrivervi nei brevi confini che mi erano concessi e nel modo che le mie forze consentivano l'effetto che il mondo moderno ha risentito dal recente sviluppo scientifico ed ho brevemente accennato alla evoluzione che lo scienziato ha subìto; ma ho potuto mettere in luce (e solo fuggevolmente) un lato appena del gran quadro che le scienze presentano: quello che può considerarsi come il lato esteriore; l'interiore, che senza dubbio offre il maggiore interesse, è rimasto così completamente nascosto.

Eppure il valore della scienza non consiste solo nella sua pratica utilità né la forza di essa ed il suo punto di appoggio stanno solo nel pubblico che si giova dei suoi risultati e ne intuisce con ammirazione le vive sorgenti.

Il valore della scienza, che ha ispirato tanti profondi pensieri e tante pagine eloquenti al POINCARÉ, si rivela eziandio con altre forme ancor più nobili ed elevate: si rivela per gli stessi intimi caratteri del lavoro scientifico, per le soddisfazioni che esso procura. Nella pura e disinteressata ricerca della verità, che ne è il fine supremo, la gioia maggiore pel sereno ricercatore sta nell'apprendere, non nel sapere.

Ma non è mio compito di parlarvi del movimento interiore delle scienze. Le conferenze generali che vi terranno chiari scienziati, le quali toccheranno i tre grandi rami delle scienze fisico-chimiche, di quelle biologiche e delle sociali; i discorsi di apertura dei presidenti delle singole sezioni, i rapporti sui progressi dei vari capitoli delle diverse discipline, le comunicazioni originali e le discussioni; insomma l'intero lavoro del presente Congresso, quello solo potrà presentarvi lo spettacolo di quanto vive e palpita nell'interno del mondo scientifico; vi mostrerà quali sono i misteri che febbrilmente si cerca di svelare, le vittorie conseguite, le delusioni sofferte, che per quanto crudeli, non debbono dissimularsi.

Il momento attuale non sarebbe nemmeno opportuno per uno sguardo sintetico sulle varie discipline: troppe positive e fondamentali scoperte si vanno rapidamente accumulando ed attendono di essere classificate, connesse tra loro ed organizzate, mentre una critica profonda, acuta e, direi quasi, spietata, scrutando e analizzando ogni singolo atto del pensiero ed ogni forma di speculazione, mina tanti sistematici edifici che ieri sembravano ancora dover sfidare i secoli, oggi formano grandi e sparse rovine, su cui vi è già chi cerca sollecito di ricostruire.

Ma non mi è possibile di passare sotto silenzio e di non ricordare ciò che ogni attento osservatore conosce già per propria esperienza: cioè che quasi tutte le discipline scientifiche traversano oggi una grande crisi, crisi delle condizioni in cui si elaborano, crisi del pensiero filosofico che le informa.

Si manifesta la prima con un singolare contrasto: mentre da un lato il bisogno di raggiungere un'abilità tecnica rende necessaria la specializzazione e la divisione del lavoro scientifico, giacché una intera vita è in taluni casi appena sufficiente per acquistare quelle attitudini senza le quali nessun progresso positivo è possibile; dall'altro le diverse discipline si sono talmente compenetrate, che non si comprende al dì d'oggi come si possa avanzare nell'una senza conoscerne, e profondamente conoscerne, molte altre e non quelle sole che si ritenevano or son pochi anni affini, ma anche delle nuove, rivelatesi ora strettamente connesse. Il lavoro collettivo che si manifesta più intenso e diffuso nelle scienze maggiormente progredite, come l'astronomia, la creazione di grandi scuole che si aggruppano attorno ad uomini di genio, come avviene nei paesi più avanzati, tendono bensì a coordinare e disciplinare le individuali energie, ma l'equilibrio da cui solo potrà scaturire benefica quella economia degli sforzi a cui tutti aspiriamo, è ben lungi dall'essere raggiunto.

Ciò però non costituisce che uno degli aspetti con cui si manifesta la crisi a cui abbiamo accennato; l'altro, che interessa il pensiero filosofico, impressiona e colpisce ancor maggiormente.

Che le ipotesi siano un mezzo e non un fine nella scienza, che si possa abbandonare domani quella che oggi fidenti abbracciamo, è antica persuasione; tanto antica che già per gli astronomi greci ogni ipotesi cosmica era accettabile, purché potesse servire a calcolare la posizione degli astri.

Ma il periodo storico attuale si differenzia da quelli che precedettero perché, non solo le singole ipotesi, ma anche i grandi principii, taluni dei quali non si discutevano più ed erano universalmente accettati e quasi come dogmi insegnati, sono divenuti subitamente oggetto di discussione e di critica, mentre vecchi sistemi, che sembravano da lungo tempo e per sempre seppelliti, ad un tratto inaspettatamente risorgono.

Forse agli occhi dei nostri posteri il momento storico attuale apparirà come a noi quello del Rinascimento, in cui il concetto del sistema del mondo cambiò la base stessa su cui era poggiato.

Centro del movimento critico moderno, il quale ha condotto all'attuale periodo di perturbazione, è stato indubbiamente negli ultimi anni la matematica.

È appena un secolo – osservava acutamente il MITTAG LEFFLER, scrivendo le belle pagine dedicate alla memoria di ABEL – che questo grande analista proclamò apertamente essere la matematica fine sufficiente a sé medesima e portare il suo ideale in sé stessa. E pure, può aggiungersi, non vi è secolo in cui la matematica si sia più largamente diffusa al di fuori dei limiti della sua intrinseca attività ed abbia fecondato campi così lontani dal proprio, mentre suscitava una nuova e fiorente filosofia.

La matematica, ripiegandosi su sé medesima, come pensava ABEL, onde constituire prima e consolidare poi quella teoria delle funzioni e quella geometria che furon il fondamento delle ricerche degli ultimi anni, condusse a tal perfezione l'analisi del pensiero con l'esame assiduo e profondo dei propri concetti e dei mezzi di cui dispone, che questi acquistarono tanta acutezza, flessibilità e potenza da penetrare e commuovere tutta la speculazione scientifica e filosofica.

È così, per citare un solo esempio famoso, che uno scritto di carattere schiettamente geometrico del BELTRAMI, il quale attingeva le sue origini alle ricerche di GAUSS, di LOBATSCHEWSKI e di RIEMANN sulla geometria non euclidea, fu di tanto universale importanza da rischiarare di novella luce la teoria della conoscenza e i fondamenti della logica stessa.

La critica moderna dei matematici è penetrata trionfalmente nelle scienze fisiche e vi ha determinato nuove correnti di pensiero.

La meccanica fu la via attraverso la quale il nuovo indirizzo penetrò. Non è nuova del resto per questa scienza la funzione che ha così esercitato.

Ma un fatto capitale è pure intervenuto che tende a mutare la posizione stessa di questa disciplina nel campo delle scienze fisiche.

Noi tutti della nostra generazione (possiamo apertamente dirlo) fummo educati con quei principii che un moderno vocabolo chiama meccanicisti; ed infatti, che tutti i fenomeni, almeno quelli studiati dalla fisica, potessero ricondursi a fenomeni di moto e tutti rientrare nell'orbita della meccanica classica, era un dogma a cui ogni scuola si inchinava e la cui origine si perde nella lontana filosofia Cartesiana.

Ma un poco per volta le teorie meccaniciste si sono trasformate; le difficoltà si sono accumulate; le idee iniziatesi con RANKINE, così strenuamente sostenute dal MACH (il quale però occupa una posizione distinta da tutti nella filosofia delle scienze), proseguite da OSTWALD, dal DUHEM e da altri, si son fatte strada; e molti han combattuto sotto l'insegna che portava il motto celebre: guerra contro la mitologia meccanica.

La energetica si formò ed essa classificò la meccanica a lato delle altre scienze fisiche e non più base comune di queste. Una nuova comune base si costituì poggiata su principii più larghi e più comprensivi.

Quest'orientamento di idee, oggetto di tante dispute e discussioni di matematici e di naturalisti, non rappresenta però il limite estremo a cui si è pervenuti. La critica dei fisici matematici, che ci appare come la osservazione ultramicroscopica, rispetto a quella ordinaria del microscopio, scruta ora e discute questi stessi principii dei quali è giunta a diffidare.

In verità i concetti moderni sulla costituzione elettrica della materia, mentre sotto un certo aspetto appaiono connessi alle idee atomiche e cinetiche, e come un ritorno a principii simili a quelli dell'antica meccanica fisica, portano d'altra parte sui concetti di massa e d'inerzia, posti da NEWTON a base di tutta la filosofia naturale, sul principio di relatività e sugli altri fondamenti una profonda rivoluzione; talché ben si comprende come molti possan sospettare che i principii stessi, dominanti un mezzo secolo fa, mal resistano alla bufera che sembra travolgerli.

Questa crisi si riverbera su tutte le scienze della natura; ed intanto, così in cielo come in terra, mille cose si rivelano che la filosofia non sognava: dall'azione della luce sul movimento degli astri, alle nuove fonti del calore terrestre.

Se si riflette inoltre che a poco a poco le teorie che han per fondamento la emissione sembrano risorgere, mentre pochi anni fa unica vittoriosa padrona nel campo dei fenomeni che si propagano a distanza era la teoria ondulatoria, il sentimento di sorpresa si accresce ancora, vedendo accanto a così nuove e inattese speculazioni apparire, non meno inattesi, antichi concetti, come spettri sorgenti da sepolcri ritenuti ormai chiusi.

Forse ancor più che nella fisica stessa la rivoluzione delle idee si manifesta nella scienza sorella: la chimica; ove i nuovi concetti sulla costituzione dell'atomo da molti sostenuti e i dubbi che altri invece manifestano sulla sua stessa esistenza, trasformano e sconvolgono le antiche e classiche teorie; ove il sogno degli alchimisti risorge pieno di tanti misteri e di tante promesse; ove un nuovo fiorente ramo, la fisico-chimica, ricco di risultati e di speranze è spuntato.

Nel vergine campo della fisico-chimica si sono incontrate le più opposte tendenze ed è ben difficile stabilire a quale di esse si debbano i risultati di maggiore interesse. Infatti, se da un lato le teorie schiettamente cinetiche originarono le scoperte di VAN DER WAALS, dell'ARRHENIUS e di tanti ancora, d'altro canto la energetica ha qui trovato non da distruggere o mutare, ma da edificare fruttuosamente ed in questo campo il suo benefico influsso si è fatto profondamente sentire.

Vi è un tipo caratteristico di ragionamento che non esiterei a chiamare energetico. Potente e fecondo, rimonta con le sue origini a CARNOT ed al suo memorabile ciclo; esso domina sovrano in tutta la fisico–chimica teorica, e le dottrine che ad esso si inspirano hanno avuto le più importanti conseguenze. Ma le applicazioni di questo ragionamento di tipo energetico si sono estese molto più lontano ed in scienze diverse e non potrei non ricordare che il risultato a mio avviso più caratteristico e suggestivo della economia matematica, cioè la dimostrazione generale che la equazione differenziale dell'equilibrio economico è illimitatamente integrabile, può fondarsi sopra di esso. È da presumere e da sperare che ben altri risultati ancora possano ricavarsene.

Questo accenno mi condurrebbe naturalmente a parlare dell'influenza che esercitano i metodi matematici sulle scienze morali e delle trasformazioni ed innovazioni che vi determinano, ma in tal modo varcherei i limiti che mi sono prefisso.

E questi limiti mi consentono solo di affermare fuggevolmente che la giovane fisico–chimica, di cui abbiamo discorso, ha apportato alla fisiologia un contributo di fatti nuovi, origine di un nuovo indirizzo di idee.

Ed a proposito delle scienze biologiche dirò soltanto di volo della grande crisi che colpisce i concetti fondamentali della vita, della evoluzione, della eredità e che ha portato tanta perturbazione nella dottrina del Darwinismo, il quale dopo esser stato la guida delle menti per un mezzo secolo, ora, dopo le più recenti ricerche del DE VRIES e di altri botanici e zoologi, sembra perdere non certo l'importanza, ma forse la preponderanza che un tempo gli era riconosciuta.

Diversi sono i fattori che hanno cooperato e cooperano a questa trasformazione di pensiero, né io posso nemmeno accennarli; ma certo la osservazione attinta a tutte le sorgenti della scienza e della pratica, i nuovi metodi sperimentali della chimica fisiologica e, non ultimi, quelli della biometria (fonte sempre più apprezzata di risultati positivi e di leggi ben definite e sicure) preparano per le discipline biologiche una nuova era.

E mi sembra di vedere delinearsi ancor vaghi e lontani dei metodi che forse un giorno potranno avere una larga applicazione.

Il concetto di funzione, che dominò la matematica nell'ultimo secolo, si è esteso, ed a questa estensione si riattaccano nuove questioni che condussero ad utili risultati. Già si intravede, come osserva il PICARD, che dipendentemente da essa possa costituirsi una meccanica della ereditarietà, la quale, contrapponendosi a quella classica, riesca a rappresentare con maggior precisione i fenomeni elastici, magnetici e gli altri, in cui la isteresi ha sì grande importanza.

A quale avvenire, io mi domando, questa meccanica potrebbe essere un giorno destinata, se riuscisse a penetrare nel campo dei fenomeni biologici?

Ma non è prudente fare alcuna profezia. La storia della scienza insegna che è bastata talora la scoperta di un tenue fatto positivo nuovo per sconvolgere tutte le previsioni che sembravano meglio fondate. Le estrapolazioni in un campo in cui le leggi sono incerte od ignote è un pericolo al quale io intendo sfuggire.

Ma è pur tempo che io chiuda il mio dire e che riassuma il mio pensiero.

Due fatti ho voluto mettervi contemporaneamente dinanzi agli occhi: l'avvicinamento tra il pubblico e gli uomini di scienza, dovuto allo stato d'animo che nell'uno e negli altri ingenera il sentimento scientifico dominante nel mondo odierno; e la grande crisi che agita oggi tanti rami del sapere. All'uno ed all'altro di essi corrispondono nuovi bisogni della umana società, bisogni cui ogni paese civile deve soddisfare se non vuole che si arresti o languisca la propria vita intellettuale e che si inaridiscano le fonti della propria prosperità.

La crisi interiore che agita e trasforma tante dottrine rende necessaria l'ampia, libera e diretta discussione fra gli studiosi, determina in essi l'urgenza di manifestarsi personalmente i pensieri che li occupano, i dubbi che li tormentano, le difficoltà che li arrestano, le speranze che li sospingono. I libri e le memorie non servono, né mai potranno servire a tal fine; il bisogno sta precisamente nel dire e nell'apprendere quello che non si osa ancora di pubblicare o che non si pubblicherà mai.

Le antiche accademie sono un campo troppo chiuso, gli istituti di insegnamento hanno già altri intenti determinati, le singole società scientifiche sono un terreno troppo ristretto per prestarsi a questi scopi; essi, solo possono conseguirsi in seno ad una vasta associazione che raccolga i cultori di tutte le discipline, qual'è quella che noi oggi inauguriamo.

D'altra parte ogni giorno vediamo moltiplicarsi le opere e le riviste scientifiche che si rivolgono al gran pubblico, il quale accorre sempre più frequente e curioso alle conferenze ed alle lezioni popolari.

Ma, come nasca e si formi il pensiero scientifico e come l'idea dapprima vaga si determini e si concreti nella mente dello studioso, questo nessun libro potrà mai dire, nessun discorso potrà mai rappresentare, nel modo stesso che le preparazioni di un museo zoologico non potranno mai darci l'idea della vita.

Ebbene, tutto ciò che il pubblico non può apprendere né da libri né da discorsi, si paleserà quando esso assista e si mescoli alle discussioni degli uomini di scienza, giacché son le dispute spontanee e vivaci, che mostrano sotto la luce più naturale e più vera il germogliare e l'esplicarsi di quei pensieri che di solito un troppo sapiente artificio divulga.

Non questo solo però il paese richiede alla istituzione che sorge; non la sola soddisfazione della curiosità di sapere, ma proficuo incoraggiamento e sprone ad ogni fecondo studio e ad ogni nuova e vitale ricerca. Gli uomini dedicati alle industrie, ai commerci, alle pratiche professioni, innumerevoli richieste hanno ogni dì da rivolgere alla scienza, la quale è di continuo premuta da un'onda crescente di persone che sperano da lei la soluzione dei nuovi problemi che lor si affacciano complessi e incalzanti e la invocano vittoriosa delle difficoltà ognora risorgenti.

Solo dinanzi ad una Associazione come la nostra, la quale, aperta e liberale, accoglie le più diverse categorie di uomini, tali questioni, che tanto interessano la scienza e la pratica, potranno essere efficacemente poste, giacché il porle soltanto richiede necessaria la cooperazione delle varie tendenze. Ai laboratori e agli istituti scientifici spetterà poi il compito di maturarle e risolverle.

È perciò che con viva e sincera fede, con caldo entusiasmo, il Comitato ha promosso la nuova Associazione e vi ha qui convocati e gode ora nel vedere quanto numerosi siate convenuti, dalle scuole, dai laboratorii, dalle pratiche occupazioni.

Eguale ardore anima tutti per la nascente Società, che coi nostri voti consacriamo a grandi e nobili fini; con eguale speranza ci arridono le sue sorti; il suo avvenire ci appare legato all'avvenire stesso della patria che sicura muove verso i suoi alti destini.

Nel terminare, il pensiero mi corre spontaneo al raffronto cui poc'anzi accennai fra l'epoca presente e il periodo del Rinascimento. Allora, nel mirabile rinnovellarsi di tutte le attività intellettuali, l'Italia divenne il centro del pensiero scientifico universale. Io lancio oggi l'augurio che sorte non meno grande ci sia riserbata, oggi che il sorgere ed il plasmarsi della schietta e genuina anima italiana ha ravvivato tutto il nostro pensiero e ci ha restituita l'antica patria.

XV.

LE MATEMATICHE IN ITALIA NELLA SECONDA METÀ DEL SECOLO XIX

« Atti del IV Congr. internaz. dei Mat., (Roma, 6–11 aprile 1908), vol. I, pp. 55–65 (*).

Nel novembre dell'anno 1860 un giovane trentenne saliva per primo la cattedra di geometria superiore nell'antica Università di Bologna.

Era l'anno medesimo in cui tante memorabili imprese ricostituivano la nazione e tanti inaspettati avvenimenti rinnovavano tutta la vita italiana. Ma l'eco degli strepiti della guerra ed il clamore che suscitava il costituirsi del nuovo regno non coprivano la voce di LUIGI CREMONA, il quale dalla cattedra bolognese esponeva il largo programma, che egli stesso e la scuola che prese il nome da lui dovevano svolgere e svolsero, e le nobili parole pronunziate nella sua prolusione volarono e si ripercossero per tutta Italia.

È con un sentimento di soddisfazione che oggi, trascorso un mezzo secolo, misurando il cammino percorso, possono rievocarsi gli alti eccitamenti che il CREMONA allora rivolgeva ai giovani scienziati italiani. All'appello del nuovo professore rispondevano i sentimenti ed i voti universali in Italia; liete speranze arridevano negli animi nei quali il compiacimento per la Patria novellamente e faticosamente conquistata si associava alla aspirazione verso i più elevati ideali scientifici [1].

Il BETTI aveva inaugurato in Pisa, pochi mesi prima, con eguali propositi, il suo insegnamento di alta analisi e geometria. A Pavia, quasi contemporaneamente, il BRIOSCHI iniziava il corso di analisi superiore e lo stesso insegnamento a Napoli EMANUELE FERGOLA incominciava pure in quell'anno, mentre il BATTAGLINI dava principio alle sue nuove lezioni di geometria superiore.

L'Italia ebbe allora chiara coscienza che un'alta missione intellettuale le spettava per le sue antiche tradizioni e per il posto che nuovamente veniva ad occupare nel mondo civile.

Il MATTEUCCI, fisico di grande ingegno, che consacrò i suoi ultimi anni alla organizzazione degli studi italiani, negli albori del nuovo regno, preparando gli ordinamenti scolastici, diceva al Parlamento che una nazione la

(*) Questo stesso discorso fu ripubblicato in « Nuova Antologia », ser. 5ª, vol. CXXXV, 1908, pp. 385–395 e in *Saggi Scientifici* (Bologna, Zanichelli [1920]), pp. 55–79. [N.d.R.].

(1) Prolusione al corso di geometria superiore letta nell'Università di Bologna nel novembre 1860 da LUIGI CREMONA (« Il Pilitecnico », 1861).

quale vuol essere libera e grande non vive soltanto di soldati e di strade ferrate, e che male si intenderebbe l'Italia risorta a nazione se, nelle arti, nelle lettere e nelle scienze, non ripigliasse quel posto che l'aveva distinta altre volte.

E QUINTINO SELLA, che forse meglio di ogni altro raccolse nella sua grande anima i sentimenti della parte più eletta della nazione, e meglio comprese quali gravi doveri morali incombessero all'Italia il giorno in cui compì la sua grande opera politica prendendo possesso della città eterna, al MOMMSEN, che gli diceva che a Roma non si sta senza avere propositi cosmopoliti, rispondeva: « Sì, un proposito cosmopolita non possiamo non averlo a Roma: quello della scienza »; e solennemente dinanzi al Parlamento affermava: « L'Italia ha un debito d'onore verso l'umanità. . . la scienza per noi a Roma è un dovere supremo ».

Nessuna meraviglia dunque se, nel seguire lo svolgimento delle scienze, si osserva una trasformazione improvvisa nel pensiero italiano, dovuta al rapido suo progredire e diffondersi, ed ai nuovi caratteri di cui si riveste e si arricchisce negli anni che seguono il periodo del risorgimento politico.

Presentare nei brevi termini che mi sono concessi lo sviluppo delle matematiche in Italia negli ultimi anni, ecco il còmpito che mi sono oggi prefisso.

Di vari elementi bisogna tener conto per ben comprendere quali furono i fattori che contribuirono al recente sviluppo degli studi di noi e per ben sceverare la parte che ciascuno di essi ha avuta.

Dobbiamo prima aver riguardo ai caratteri propri del genio italiano rivelatisi in una lunga e non interrotta tradizione che, movendo dalle scuole dell'antichità, giunge fino al nostro secolo; esaminare poi l'effetto prodotto dai nuovi metodi di insegnare e di apprendere, e la proficua emulazione che sortì dal cozzare delle opposte tendenze. Infine è d'uopo vedere l'influenza che le scoperte dei matematici stranieri ebbero su di noi, l'azione che esercitò il carattere sempre più universale acquistato dalla scienza e la feconda virtù dei rapporti internazionali ognor più stretti e delle correnti sempre più vive di pensiero che si stabilirono.

* * *

Con una di quelle frasi scultorie proprie del suo stile concettoso il BELTRAMI così giudica un libro del CESÀRO: « Al libro spetta davvero il requisito dell'italianità, vale a dire di quel *quid* che risulta dal connubio della serietà coll'agilità della parola e del pensiero, cioè dell'elaborazione artistica del materiale scientifico » (2).

(2) Queste parole sono tolte da una lettera che il BELTRAMI scrisse al CESÀRO. Esse vennero riportate nella biografia del CESÀRO che il prof. ALFREDO PERNA pubblicò nel volume XLV del « Giornale di matematiche » di BATTAGLINI, diretto dal prof. A. CAPELLI (Napoli, 1907).

Nessuna parola più efficacemente ed in modo più sobrio e preciso potrebbe caratterizzare la produzione matematica italiana non solo recente ma di tutti i tempi.

Il sentimento artistico, inteso nel suo significato più alto e comprensivo, ha avuto ed ha una gran parte nelle scoperte geometriche. Si comprende quindi come la matematica, la scienza che non solo è la più pura e la più ideale, ma è la più schiettamente artistica delle scienze, abbia potuto trovare, sino dalle epoche lontane, un terreno favorevole per svilupparsi in Italia, ove il genio artistico è innato nelle genti, e ben si comprende il carattere della opera matematica prodotta dagli ingegni italiani, carattere che si ravviserà nelle varie scuole e nelle diverse tendenze che avremo occasione di esaminare.

Uscirei dai limiti che mi sono prescritto se io volessi seguire la tradizione in tutto il suo lungo cammino, dall'epoca classica, attraverso il medio evo, il rinascimento, fino ad ora, o se anche solo mi soffermassi alla prima metà del secolo scorso, la quale segna forse il periodo più triste e più oscuro. Triste ed oscuro periodo, nel quale le discordie intestine quasi si rispecchiano nelle intransigenze e nelle intolleranze scientifiche.

È nota, per quanto ne ha scritto il LORIA, la storia della scuola matematica che imperò a Napoli al principio del secolo XIX. In essa, uomini che pure erano di ingegno, avversarono le grandi scoperte di LAGRANGE e quanto era moderno e nuovo nella scienza, stimando opera meritoria il ricondurla indietro di parecchi secoli. È stato molte volte ripetuto che al BATTAGLINI, prima del 1860, non venne affidato nessun pubblico insegnamento; in un concorso egli era rimasto soccombente e la ragione fu che nella trattazione del tema si era inspirato alle nuove feconde idee del SALMON, anzichè agli antichi metodi di NEWTON.

Si racconta poi, e mi permetto di ripeterlo come un indice dei tempi, che in Toscana verso il 1835 un cultore di diritto ecclesiastico (studioso anche di lingue orientali) ed un algebrista chiesero le rispettive cattedre dell'Università. Nell'assegnarle vennero per errore scambiate; il matematico fu nominato professore di gius canonico e il giurista ebbe l'algebra. Le proteste degli interessati a nulla valsero perchè i «motupropri» di nomina erano ormai firmati e non si volle mutarli. Il matematico rinunziò, ma il giureconsulto orientalista insegnò algebra, ripetendo a memoria il FRANCOEUR, per tutta la vita.

Nondimeno sarebbe cosa ingiusta il tacere che in questo intervallo di tempo luminosi sprazzi di luce di tratto in tratto si manifestarono in Italia; nomi illustri ed opere ben conosciute lo attestano. Il mio collega prof. CERRUTI, nella passata riunione della Società italiana per il progresso delle scienze, ha lumeggiato con rara maestria questo periodo ed ha illustrato alcune importanti ricerche che vi si compirono od iniziarono [3].

(3) *Le matematiche pure e miste nei primi dodici Congressi della Società italiana per il progresso delle scienze*, per il prof. V. CERRUTI («Atti della Società Italiana per il progresso delle Scienze», Congresso di Parma, settembre 1907).

Ciò che mancava in quel primo cinquantennio il CREMONA lo nota con sagacia e lo enuncia con rude franchezza nella sua celebre prolusione. I retrivi ordinamenti delle nostre scuole ed il piccol numero delle cattedre impedivano che si allargasse il campo della istruzione universitaria e che si atterrassero le colonne d'Ercole dei programmi ufficiali. I nobili sforzi di uomini egregi riescivano il più sovente infruttuosi perché mancanti di ogni connessione fra loro e perché avversati spesso dai Governi del tempo, pei quali l'ignoranza pubblica era valido sostegno al potere.

Fu primo e luminoso pensiero del Governo nazionale la istituzione delle cattedre speciali di insegnamento superiore delle matematiche, cattedre che affidò agli uomini illustri di cui facemmo i nomi, ai quali, man mano, altri non meno illustri seguirono. Così d'un tratto un nuovo ambiente si formò ed un'èra nuova ebbe principio.

I professori, nel pieno vigore della loro produzione intellettuale e del loro entusiasmo per la ricerca scientifica, erano chiamati ad insegnare ciò che essi medesimi giorno per giorno studiavano e scoprivano; gli allievi dovevano assistere alla creazione della scienza con tutte le sue lotte, le sue difficoltà, i suoi pentimenti, le sue crisi, le sue dolci vittorie, e dovevano essi stessi, alla loro volta, lavorare accanto ed insieme agli uomini di genio che li avevano iniziati.

Le scuole che in tal modo si formarono e che valsero, per la connessione degli sforzi e per la continuità degli intenti, non solo a far risplendere gli ingegni meglio dotati, ma anche a rendere proficua l'opera di menti meno elevate, possono facilmente riconoscersi; è poi agevole in esse scoprire e seguire l'origine e la filiazione dei vari e più importanti pensieri.

* * *

ENRICO BETTI, a Pisa, ed EUGENIO BELTRAMI, prima a Pavia e poi a Roma, furono per circa un trentennio i due campioni della fisica matematica in Italia.

Di ingegno e di coltura diversa (già maestro il primo nelle teorie algebriche e scopritore originale l'altro nel campo geometrico, prima ancora che si consacrassero alle applicazioni dell'analisi ai problemi fisici), salirono in alta fama anche in questo ramo di studi, del quale svolsero, nella loro lunga carriera, quasi tutte le parti più astratte e teoriche, lasciandovi l'impronta del loro genio.

Le ricerche che il BETTI, parallelamente con i suoi corsi, sviluppò sul potenziale, sulla elasticità e sul calore non possono considerarsi staccate le une dalle altre, giacchè un unico pensiero le guida, pensiero che passò da lui a quelli che lo seguirono, e, man mano, andò affinandosi e completandosi sino a raggiungere gli ultimi e più perfetti risultati.

I concetti ed i metodi fondamentali di GREEN e di GAUSS avevano aperto la via maestra per la integrazione generale della equazione di LAPLACE, base della teoria del potenziale; scopo del BETTI fu di trasportare gli stessi metodi, prima nel campo della scienza dell'equilibrio elastico, poi in quella del calore.

Coi lavori del BETTI, come ben mostrò il MARCOLONGO in un suo succoso riassunto storico [(4)], si inaugura una nuova e lunga serie di ricerche schiettamente italiane sulla integrazione delle equazioni dell'elasticità, tanto che se GALILEO per il primo adombrò i problemi dell'equilibrio dei corpi elastici, fu merito dei geometri italiani, a più di due secoli di distanza, di aver largamente contribuito a svolgere la teoria generale di quelle equazioni nelle quali NAVIER aveva rappresentato e, per dir così, racchiuso tutto il meccanismo del fenomeno.

Al brillante esordire del BETTI nella questione col teorema di reciprocità e colle sue larghe e fondamentali applicazioni, le quali gettano le basi di tutto il metodo, seguono a breve intervallo le ricerche del CERRUTI e la scoperta delle formule del SOMIGLIANA.

Il MARCOLONGO, il TEDONE ed altri svolgono numerose questioni ed intanto si iniziano parallelamente a questi studi, mercè le ricerche di ALMANSI, LAURICELLA, LEVI–CIVITA, BOGGIO, quelli sulla doppia equazione di LAPLACE.

Infine si distaccano e si differenziano, per la irriduttibile ed essenziale diversità della questione rivelata dalle qualità delle caratteristiche, i problemi generali di vibrazione da quelli di equilibrio ed assurgono anche questi ad una trattazione sistematica.

Di diversa natura furono le ricerche del BELTRAMI anche in quello stesso campo nel quale il BETTI aveva mietuto così largamente e con tanto frutto.

Per ben seguire il filo ininterrotto di idee che guidò il BELTRAMI in tutta la sua carriera scientifica, bisogna risalire alle prime ricerche di lui che si riferiscono alla teoria delle superficie, alla loro rappresentazione, e si svolsero intorno ai parametri differenziali ed alle variabili complesse; ricerche tra cui brillano, per importanza e per originalità, le Memorie relative alla geometria non euclidea, colle quali il BELTRAMI mirò a dare un substrato reale alle idee di GAUSS e di LOBATSCHEWSKI e quelle celebri Memorie che commentarono e interpretarono le teorie di RIEMANN sugli spazi curvi.

Queste dottrine sullo spazio destarono nuove curiosità negli uomini di scienza e furono l'origine di un nuovo indirizzo di pensiero. È egli possibile accertare, ed in qual modo, se lo spazio abbia o no una curvatura?

L'idea di ricorrere all'esame dei fenomeni naturali che potessero rivelarla venne spontanea. Il BELTRAMI può ascriversi fra coloro che concepirono il disegno di stabilire in maniera sistematica una teoria dei fenomeni fisici nella ipotesi di una curvatura dello spazio, e ciò spiega la transizione di questo grande matematico dal terreno delle ricerche analitico–geometri-

(4) *Progressi e sviluppo della teoria matematica della elasticità in Italia* (*1870–1907*), del prof. ROBERTO MARCOLONGO («Nuovo Cimento», ser. V, t. XIX).

che in quello della fisico-matematica, giacchè la evoluzione del suo genio resta dominata da questo alto pensiero.

Ma un lungo periodo di preparazione e di orientamento precede in lui la esplicazione del pensiero stesso, ed a questo periodo si deve una larga produzione di lavori che si riattaccano a ricerche classiche sopra vari campi della meccanica e della fisica. Ciascuno di essi porta per sè un contributo scientifico e rifulge per la squisita fattura e per la limpida trattazione, talché la loro importanza si manifesta grandissima, non solo per il contenuto, ma anche perché s'imposero come modello di eleganza ai geometri italiani. Fu detto che la robusta prosa del CARDUCCI insegnò l'arte di esprimere i propri pensieri a tutta una generazione di scrittori. Io mi domando se in modo analogo gli scritti del BELTRAMI non valsero a foggiare ciò che chiamerei lo stile matematico della nuova generazione in Italia, la quale si inspirò alla sua arte finissima di svolgere pensieri e calcoli e di fondere mirabilmente gli uni con gli altri.

Con ciò che ho detto fin qui, ed anche se aggiungessi quanto fecero ERNESTO PADOVA, il CESÀRO e gli altri che, seguendo le orme del BELTRAMI, si occuparono di analoghi problemi, non avrei dato che una idea ben incompleta dei lavori italiani nel campo fisico-matematico.

Le ricerche di meccanica, in cui fra gli altri SIACCI e MORERA rivolsero i loro studi ai metodi di JACOBI, di LIE e di MAYER, le applicazioni delle teorie dei gruppi di trasformazione al potenziale, dei quali si occupò il LEVI-CIVITA, i lavori sulla meccanica celeste, sulla dinamica dei sistemi ed in particolare dei fluidi, e sulla statica, in cui spiccano, oltre i nomi già ricordati, quelli del CHELINI e del TURAZZA e più recentemente del PADELLETTI e del MAGGI, e tanti altri studi sarebbe eziandio necessario analizzare per potere indicare e raccogliere, se non coordinare, il lavoro dell'ultimo cinquantennio in questo ramo delle matematiche. Nè con ciò sarebbe esaurito quanto converrebbe esporre, chè le ricerche fisico-matematiche dalla regione più astratta ed analitica di grado in grado si prolungano quasi con continuità fino a quella della fisica. Io non estenderò la mia analisi a questo intero campo, ma non mi è possibile lasciare senza ricordo le scoperte di GALILEO FERRARIS, la cui sorgente va cercata nella più pura concezione geometrica, e che nondimeno ebbero tanta importanza nella pratica e dettero origine ad una fiorente scuola di studi elettrotecnici, nella quale divenne nobile tradizione il fondarsi sopra solide e sicure basi matematiche.

* * *

Ebbi già occasione, in uno dei passati congressi, di parlare del BRIOSCHI, del BETTI e del CASORATI e di porre in luce il modo diverso col quale ognuno di essi concepì la teoria delle funzioni analitiche (5). I loro metodi si collegano

(5) *Betti, Brioschi, Casorati, trois analystes Italiens et trois manières d'envisager les questions d'analyse*, par M. VITO VOLTERRA (« Compte-rendu du 2me Congrès international des mathématiciens », Paris, Gauthier Villars, 1902); [in questo vol.: I, pp. 1-11].

alle tre grandi fasi che, nella sua maestosa evoluzione, questa dottrina, vera dominatrice delle matematiche del secolo XIX, attraversò. Il rivolgersi di ciascuno di questi grandi maestri verso uno degli aspetti col quale la teoria delle funzioni si è presentata, fu una conseguenza delle qualità stesse più salienti del loro spirito, delle loro intime disposizioni naturali, e le attitudini da essi prese di fronte alla teoria stessa si rispecchiano in tutti gli altri atteggiamenti della loro vita scientifica.

Questo io cercai dimostrare otto anni fa e non voglio adesso ripetermi. Parlai allora della feconda virtù che ebbero gli scritti e le lezioni di questi tre matematici sui giovani italiani, molti dei quali, divenuti alla lor volta maestri, consacrarono gran parte della loro attività alla teoria delle funzioni ed a tutte le altre dottrine direttamente ad essa collegate, sia nel campo delle equazioni differenziali ed integrali, sia in quello delle applicazioni alla geometria ed alla meccanica; tentai pure in quella occasione rilevare in qual modo si esplicò e si esercitò in Italia l'influenza delle opere di ABEL e di JACOBI e dei concetti fondamentali posti da CAUCHY, da WEIERSTRASS e da RIEMANN.

È sempre presente a noi la memoria di quel periodo, ormai classico, nel quale la teoria delle funzioni si plasmò nella forma che essa ha assunto e conserva, e vivo si mantiene il ricordo degli anni, pieni di intenso fervore, nei quali si conobbero in Italia, esposti dalla bocca stessa del suo scopritore, i fondamentali teoremi del MITTAG-LEFFLER, e in cui le lezioni che l'HERMITE dettava a Parigi si spargevano ed erano lette e ripetute, mentre dalla Germania tornavano coloro che, ascoltati il WEIERSTRASS e il KLEIN, diffondevano le loro scoperte. Intanto i grandi lavori di POINCARÈ e di PICARD, di FUCHS e di NEUMANN aprivano vasti orizzonti e spingevano i nostri geometri verso nuovi problemi.

Il solo accenno di quanto fecero il DINI, il BIANCHI, il PINCHERLE, il PASCAL, il MORERA, il CESÀRO, il TONELLI, il VIVANTI e molti altri ancora, che lavorarono con tanto successo, mi condurrebbe assai lontano.

Del resto i risultati di cui dovrei parlare, ben conosciuti ed ormai entrati a far parte del patrimonio comune matematico, si riattaccano e si intrecciano colle insigni scoperte che i più illustri matematici stranieri fecero nello stesso tempo, tanto che i risultati italiani non potrebbero considerarsi da soli, ma bisognerebbe esaminarli fusi nella grande corrente che sospinse e trascinò il pensiero matematico dell'ultimo secolo.

Ma, senza intrattenermi ulteriormente sulla teoria delle funzioni analitiche, sulla loro estensione e sugli studi affini, e non accennando nemmeno alle tante dottrine di cui è ricca l'algebra, nelle quali BRIOSCHI, BETTI, BELLAVITIS, TRUDI, FAÀ DI BRUNO prima, e più recentemente il CAPELLI, il PASCAL, il BAGNERA si segnalarono, nè sulla scienza dei numeri, che il GENOCCHI, il BIANCHI, il CESÀRO, il TORELLI coltivarono con tanto amore, mi sia dato parlare di un ramo di ricerche fiorito presso di noi in disparte dal grande movimento che agitò tutta la matematica in Europa, rimasto qualche anno alquanto dimenticato, ma che recentemente suscitò un po' dappertutto interesse e curiosità.

Intendo dire di quelle ricerche non molto vaste, sebbene irte di sempre nuove difficoltà, aride spesso, ma pur ricche di risultati attraenti per il loro aspetto talora paradossale; di quelle ricerche, cioè, sopra le funzioni di variabili reali e le più riposte singolarità loro, che efficacemente furon chiamate gli studi sulle deformità e le mostruosità della matematica, in cui l'aiuto delle leggi, per dir così, fisiologiche della geometria viene a mancare, e non solo ogni intuizione fa difetto, ma tutte le facili e seducenti previsioni inducono il più spesso in errore.

In ogni vasto giardino, nel quale antiche piante secolari, ricche e rigogliose culture, richiamano sole l'attenzione di chi l'osserva per la prima volta, esiste un cantuccio solitario, una serra nascosta, ove l'abile giardiniere sceglie e cura alcune piante singolarissime, nelle quali il suo occhio esperto ha ravvisato delle variazioni e dei caratteri particolari. Nel campo delle ricerche matematiche quel riposto cantuccio con quelle delicate culture è rappresentato dagli studi a cui adesso ho accennato. Ma son quelle umili pianticelle che probabilmente un giorno daranno belle e nuove varietà e che arricchiranno il giardino di forme rare e preziose; nello stesso modo quei sottili e minuti studi sono destinati a dar vita a nuovi concetti e ad imprevedute applicazioni.

Fu il DINI che introdusse e diffuse in Italia l'amore per queste ricerche colle sue opere, e più ancora, con l'efficace ed originale suo insegnamento. Chi ha subìto il fascino delle sue lezioni, nelle quali tanti astrusi pensieri divengono per incanto facili e chiari, risentirà per tutta la vita viva simpatia verso le ricerche stesse.

WIEIERSTRASS e RIEMANN, movendo da idee che si erano un poco alla volta infiltrate nell'analisi, le avevano iniziate, GIORGIO CANTOR aveva fatto strabiliar tutti colle sue inattese rivelazioni, il DU BOIS-REYMOND era penetrato addentro a molti oscuri problemi ed il DARBOUX aveva scoperto tante belle ed originali proposizioni. Il DINI, coordinando questo insieme di dottrine, arricchendole di nuove verità, ebbe il coraggio di portarle in Italia nella scuola all'inizio stesso degli studi di analisi infinitesimale e come base di essi. Ardita impresa dei suoi anni giovanili, mercè la quale il suo insegnamento acquistò un colorito nuovo, mentre le antiche teorie venivano come vivificate da un soffio di freschezza e di gioventù.

Attratta da questi studi, si formò in Italia una scuola di matematici che consacrarono le forze del loro ingegno allo sviluppo di queste dottrine ed apportarono loro importanti risultati.

E presero gli studi stessi doppia direzione fra noi: l'una condusse lo ASCOLI, l'ARZELÀ ed altri a ricerche concrete sopra le serie, i limiti e la teoria delle funzioni; l'altra mirò, col PEANO e colla scuola che ebbe l'impulso da lui, a dare una base sempre più solida ai concetti fondamentali, si fuse con quelle dottrine che approfondivano la critica dei postulati e si spinse di giorno in giorno in regioni sempre più astratte, acquistando un carattere vieppiù filosofico.

* * *

Ed ora che ho accennato nel mio rapido esame a queste ultime ricerche, nelle quali domina sovrano ciò che il KLEIN chiama lo spirito aritmetico, mi sia concesso passare nel campo che ordinariamente suol chiamarsi degli studi geometrici.

Passaggio invero che alcuni anni fa in Italia sarebbe apparso, più che il trascorrere da uno ad un altro ordine di discipline, il varcare i confini di due accampamenti l'un contro l'altro armato. Singolare situazione questa di combattimento, manifestatasi fra noi forse con maggiore intensità che altrove e il cui studio offre argomento ad interessanti e curiose considerazioni.

Analisi e geometria, che furon ritenuti e impiegati come due termini opposti, non possono, né per la loro origine, né per la loro storia, né per la natura loro, farsi corrispondere a concetti che si eliminino e si escludano a vicenda; dirò anzi che non possono porsi a confronto, come non può stabilirsi un rapporto fra il colore ed il volume, fra il peso e la forma dei corpi.

I nomi di analisti e geometri dettero origine a quelle singolari classificazioni o, per dir meglio, a quelle strane confusioni che tanto meravigliano chi, dal di fuori, guarda lo svolgimento degli studi italiani. Una semplice comunanza del linguaggio che adoperavano fece raggruppare insieme cultori di materie essenzialmente diverse, mentre vennero separati fra loro matematici miranti ad un fine comune e che, pel contenuto delle loro opere, non avevano ragione di distinguersi, ma che solo per l'aspetto dei procedimenti impiegati potevano apparire differenti.

Si direbbe quindi che un grande equivoco abbia presieduto a certe lotte di scuole, per quanto certamente vi abbiano anche contribuito il persistere di antiche consuetudini e quelle reazioni che si manifestano verso i metodi quando tendono a varcare certi limiti.

Ma queste lotte, feconde e generose lotte, che giovarono eccitando gli animi e spingendo le ricerche lungo le diverse vie solo in apparenza divergenti per cui la scienza progredisce, sono ormai, come il mio amico SEGRE dimostrò nel suo bel discorso letto all'ultimo Congresso, un ricordo del passato [(6)].

La figura del CREMONA predomina e campeggia in tutto lo svolgimento degli studi geometrici in Italia: all'impulso primitivo che essi ebbero da lui, si deve il rapido loro sviluppo ed al suo insegnamento, che fu un apostolato, la larga simpatia che incontrarono e la diffusione che ebbero.

Gli elementi della geodesia, della fisica-matematica e dell'analisi infinitesimale, sebbene in modo ristretto e limitato, erano tuttavia materie di insegnamento nelle nostre Università, anche nella prima metà dello scorso

(6) *La geometria d'oggidì e i suoi legami coll'analisi*, per C. SEGRE, in «Verhandlungen des dritten internationalen Mathematiker-Kongresses» (Leipzig. B. G. Teubner, 1905).

secolo, ma nelle Università stesse, in nessun modo si accoglievano le dottrine della geometria superiore, le quali invece fiorivano nelle scuole straniere. Ebbene, poco più di quarant'anni eran trascorsi dal giorno in cui il CREMONA aveva principiato il suo insegnamento, ed il KLEIN poteva attestare che l'Italia era divenuta il centro proprio della ricerca geometrica.

Il CREMONA si riattacca direttamente allo CHASLES e per esso al PONCELET, nel primo periodo della sua produzione scientifica, poi si fan più stretti i rapporti suoi col PLÜCKER, col MÖBIUS e principalmente collo STEINER. I suoi lavori sulla teoria delle curve e delle superficie sono opere ormai classiche, e la dottrina delle trasformazioni (che a buon diritto presero il nome di cremoniane) fu da lui stesso fondata allorché pose il problema della trasformazione razionale in tutta la sua generalità.

Il VERONESE, il BERTINI, il DE PAOLIS, il CAPORALI, il GUCCIA, il MONTESANO, suoi diretti discepoli, ed altri, come il MARTINETTI e il DEL RE, che indirettamente a lui si collegano, sebbene distinti fra loro da indirizzi diversi, formano una schiera di valorosi geometri che resero celebre la sua scuola.

Seguendo il programma di Erlangen (7) che, in base al fecondo concetto di gruppo, è riescito a classificare le teorie antiche e moderne della geometria e le ha coordinate secondo un piano sistematico, mostrando i vari indirizzi sotto un punto di vista comune, sarebbe facile situare nel grande schema l'opera del CREMONA e quelle dei suoi continuatori ed allievi ed in generale dei diversi geometri italiani. Ma il tempo non mi consente di farlo ed io, dovrò quindi limitarmi ad un breve cenno su alcuni indirizzi e tendenze.

Il concetto generale degli spazi a più dimensioni era stato largamente sviluppato, ed, in Italia, il BELTRAMI con gli studi generali della curvatura ed il BETTI con quelli della connessione, lo avevano reso abbastanza famigliare, allorché il VERONESE iniziò le sue ricerche in questo campo. Ora, ciò che distingue l'opera sua da quella dei predecessori è il carattere schiettamente geometrico che il VERONESE diede alla sua trattazione, carattere che si manifesta nella generazione stessa degli spazi e nelle applicazioni che egli ne ha fatte.

L'ulteriore sviluppo di questi studi in Italia e la nuova direzione che presero sono merito principalmente del SEGRE col primitivo indirizzo delle sue ricerche, ed a lui vanno uniti il DEL PEZZO, il FANO ed altri. Al SEGRE poi nella seconda fase della sua carriera scientifica, in cui si riattaccò alla grande opera del NOETHER, si deve l'inizio di quel complesso di lavori con i quali il CASTELNUOVO, l'ENRIQUES, il SEVERI, il DE FRANCHIS ottennero i loro importanti risultati sulla teoria delle superficie, di cui i più recenti si collegano alle scoperte del PICARD sulle funzioni algebriche e rientrano per questa via nell'orbita della teoria delle funzioni.

(7) È il programma pubblicato dal prof. FELIX KLEIN, in occasione del suo ingresso nella Facoltà filosofica e nel Senato dell'Università di Erlangen, col titolo: *Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen* (Erlangen, A. Deichert, 1872). Una buona traduzione italiana ne fu fatta dal prof. GINO FANO e venne inserita nel t. XVII, ser. II, degli « Annali di Matematica pura ed applicata ».

Numerosi furono in Italia i cultori della teoria delle forme algebriche, a capo dei quali possono porsi il BATTAGLINI e il D'OVIDIO, che seguirono gl'indirizzi di CAYLEY, SYLVESTER, GORDAN, e interpretarono geometricamente i risultati dell'algebra. I molteplici lavori di varia indole e in diverse direzioni di CAPELLI e PASCAL, del GERBALDI, del MAISANO e del BERZOLARI, di ARMENANTE e del PITTARELLI e di altri ancora provano la larga e feconda attività di questa scuola.

Infine non potrei dimenticare l'indirizzo (che dominò costantemente nella seconda metà del secolo scorso) di risalire verso i fondamenti della geometria sviscerandoli ed assoggettandoli ad una critica profonda, la cui influenza si ripercuote in vario modo anche nell'insegnamento elementare. Questa tendenza si manifesta in un gran numero di ricerche e di libri e sistematicamente si esplica in varie opere, fra cui mi restringo a citare quelle del DE PAOLIS, del VERONESE e dell'ENRIQUES.

Ma un'altra specie di ricerche geometriche di diversa natura fu pur coltivata e rigogliosamente prospera in Italia. Intendo parlare di quella geometria che fu detta infinitesimale, la quale si innalzò sulla base delle scoperte di MONGE e di GAUSS e, mercè una lunga serie di lavori fra i quali primeggia recentemente l'opera del DARBOUX, ha fornito aiuti potenti e metodi fecondi alla dottrina delle equazioni differenziali ed ha arricchito di belle e fondamentali interpretazioni la teoria delle funzioni, mentre è stata di valido aiuto nelle ricerche di fisica–matematica e di meccanica.

Già parlando del BELTRAMI accennai ai suoi primi lavori in questo campo di studi, nel quale il DINI iniziò pure la sua carriera scientifica, ma prima di tutti era stato il BRIOSCHI a diffondere fra noi le feconde idee di GAUSS afferrandone tutta l'importanza, merito questo grandissimo che non deve andare dimenticato.

Le ricerche più moderne del BIANCHI che tanti importanti e geniali contributi portò alla teoria delle superficie applicabili ed a quasi tutti i rami della geometria differenziale, quelle del RICCI che ha introdotto procedimenti nuovi ed infine le belle memorie del CESÀRO sulla geometria intrinseca, nonché i lavori degli allievi loro, costituiscono un insieme ricco ed armonico di studi che fanno nobile riscontro alle opere di pura geometria e di geometria algebrica di cui ho innanzi parlato.

* * *

La corsa veloce attraverso il campo di idee e di studi che io volevo percorrere è giunta al suo termine. Come in ogni rapido viaggio, fu possibile cogliere solo l'aspetto di quelle cose che passarono a volo dinanzi. Insieme colla immagine di esse rimane quindi il rammarico di averne tralasciate molte e di avere osservato in modo fuggitivo quanto sarebbe stato degno di esame accurato e profondo. Ma io spero che la regione percorsa possa avere lasciato nel suo insieme l'impressione di essere rigogliosa e fertile e di promettere un fecondo avvenire.

L'Italia nel giovanile ed ardito suo slancio verso i nuovi ideali non scordò le regole del passato: gli studi di storia delle matematiche si svolsero accanto alla produzione originale. La pubblicazione del Bollettino del BUONCOMPAGNI e del LORIA che raccolse le ricerche storiche, mentre i periodici del TORTOLINI, del BRIOSCHI, del BATTAGLINI e del GUCCIA riunivano le ricerche originali, provano l'interesse che suscitano presso di noi le antiche opere.

Ma vi fu una grandiosa impresa di ricostruzione storica che deve essere ricordata con onore speciale. Per un sentimento di alto dovere e come un pegno di gratitudine di tutta la nazione risorta verso colui che insegnò a leggere in caratteri matematici entro il libro della natura, la nuova Italia volle la pubblicazione critica e completa delle opere di GALILEO, impresa nobile e vasta, per la quale si rese necessaria la rievocazione di tutta una epoca e di tutto un mondo, e che si compì sotto gli alti auspici di S. M. il RE, grande e munifico sempre nel promuovere e nell'incoraggiare quanto torna a vantaggio e a decoro della Patria. Il nome del FAVARO, che diresse il lavoro e gli consacrò le amorose cure di lunghi anni, resta legato a questa insigne pubblicazione.

Ho in principio indicato le influenze didattiche che presiedettero il nascere e lo svilupparsi del brillante periodo di ricerche degli ultimi anni. Oggi, col sorgere del nuovo secolo, nuovi bisogni si fanno sentire che determinano più moderni orientamenti dei nostri istituti scolastici ed in special modo delle scuole degli ingegneri; scuole per lunga e costante tradizione collegate presso di noi colle Facoltà di scienze. I problemi, i quali interessano tutta la compagine delle discipline matematiche e che oggi si impongono ed urge risolvere, rendono il momento attuale paragonabile a quello trascorso or sono cinquant'anni, allorché i nostri studi si costituirono nell'assetto attuale.

Ma è con sicura fede che guardiamo in faccia all'avvenire, sperando nel costante ed armonico sviluppo del pensiero matematico italiano unito con quello delle altre nazioni, giacché non dubitiamo che gli stessi elevati propositi, congiunti alla esatta intuizione dei bisogni più vivi della nazione, guideranno oggi, come inspirarono mezzo secolo fa, gli uomini al cui senno sono affidate le sorti e l'avvenire della Patria.

XVI.

SULL'APPLICAZIONE DEL METODO DELLE IMMAGINI ALLE EQUAZIONI DI TIPO IPERBOLICO

«Atti del IV Congresso int. dei Mat.», Roma, 1908, vol. II, pp. 90–93.

1. In una Nota pubblicata nei «Proceedings of the London Mathematical Society» (1904) (*) e nelle *Lezioni* che ho svolte nel 1906 all'Università di Stoccolma (**), ho mostrato come il principio delle immagini potesse applicarsi alla equazione fondamentale a tre variabili di tipo iperbolico, cioè alla equazione

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = 0, \tag{1}$$

ma tale applicazione venne limitata al caso di immagini rispetto a piani paralleli all'asse z. Ora è interessante osservare che per la equazione di tipo iperbolico si può stabilire un principio il quale ha un grado di generalità equivalente a quello delle immagini nel caso dell'equazione di tipo ellitico. Ciò si ottiene mediante una semplice osservazione geometrica che esporrò in questa Nota, rimandando ad una Memoria estesa che sto preparando lo svolgimento della teoria.

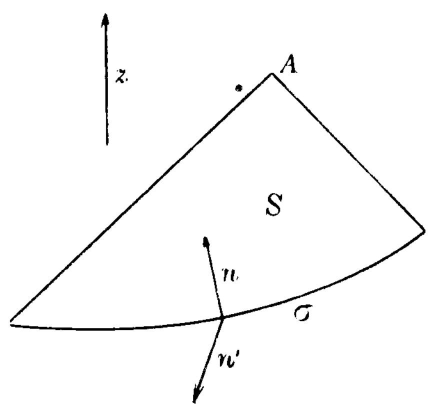


Fig. 1.

2. Già da varî anni in alcune Note pubblicate nei «Rendiconti dell'Accademia dei Lincei» [1], i cui risultati vennero sviluppati in una Memoria inserita negli «Acta Mathematica» [2], ho introdotto la nozione dei coni caratteristici relativi alle equazioni (1) e ad altre equazioni di tipo iperbolico. Per le (1) essi sono i coni di rivoluzione aventi l'asse parallelo all'asse z ed una apertura di 90°. Conduciamo per un punto A il cono caratteristico e sia σ una superficie la quale limiti una porzione di spazio S interna ad una falda del cono ed adiacente al vertice.

(*) In questo vol.: VIII, pp. 55–58.
(**) In questo vol.: X, pp. 63–141.
(1) «Rend. Acc. Lincei», 1892 [in queste «Opere»: vol. primo, XXXIV, XXXV, pp. 559–579].
(2) «Acta Mathematica», tomo XVIII, 1894 [in queste «Opere»: vol. secondo, III, pp. 19–73].

Ho dato una formula mediante la quale si può esprimere il valore $w(x_1, y_1, z_1)$ al vertice A del cono (vedi fig. 1) mediante i valori di w e della derivata normale interna $\partial w/\partial n$ nei punti $x\, y\, z$ della superficie σ. La formula è la seguente:

$$(2) \qquad w(x_1, y_1, z_1) = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial z_1} \int_\sigma \frac{1}{\sqrt{(z_1 - z)^2 - r^2}} \left(\cos nz - \frac{z_1 - z}{r} \cos nr\right) w\, d\sigma$$

$$- \frac{1}{2\pi} \int_\sigma \frac{1}{\sqrt{(z_1 - z)^2 - r^2}} \mathrm{W}\, d\sigma,$$

in cui

$$r = \sqrt{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2} \quad , \quad \mathrm{W} = - \frac{\partial w}{\partial z} \cos nz + \frac{\partial w}{\partial x} \cos nx + \frac{\partial w}{\partial y} \cos ny.$$

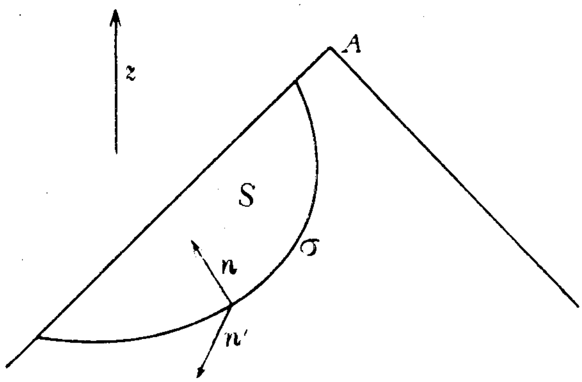


Fig. 2.

Se n' forma cogli assi angoli i cui coseni sono $-\cos nx$, $\cos ny$, si dice, secondo il sig. D'ADHÉMAR che n' è la *conormale*; quindi $\mathrm{W} = \partial w/\partial n'$.

Se lo spazio S compreso fra la superficie σ ed il cono non è adiacente al vertice (vedi fig. 2), oppure se lo spazio S è esterno al cono (vedi fig. 3), allora nel primo membro della formula (2) deve sostituirsi o al valore $w(x_1, y_1, z_1)$. La formula che così si ottiene la denoteremo con (2').

3. Noti w e $\partial w/\partial n$ su σ è noto $\partial w/\partial n'$ e reciprocamente noti w e $\partial w/\partial n'$ resta conosciuto $\partial w/\partial n$, quindi è cosa equivalente dare gli uni o gli altri valori. Ora non sempre è necessario conoscere w e $\partial w/\partial n'$ sopra σ perchè w sia determinato in A. Si possono infatti dimostrare i teoremi seguenti:

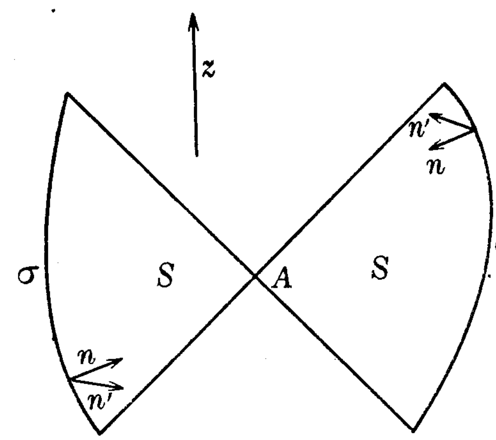


Fig. 3.

1° *Sia nota w sopra σ. Per determinare w al vertice* A *del cono non è necessario conoscere $\partial w/\partial n'$ in quelle parti di σ la cui normale interna forma con z un angolo compreso fra 45° e 90°, ammesso che nelle parti rimanenti di σ la derivata $\partial w/\partial n'$ sia conosciuta.*

2° *Sia* M *un punto regolare di* σ *in cui la normale interna forma con* z *un angolo compreso fra* 45° *e* 135°, *si potrà prendere un intorno* μ *di* M *appartenente a* σ *tale che conoscendo* w *su* μ, *e* w *e* $\partial w/\partial n$ *sulla parte rimanente di* σ, w *sia determinato in* A.

Tralasceremo di dare la dimostrazione di questi teoremi. Da essi si ricava facilmente che, se una parte connessa σ' di σ è costituita da un piano o da una iperboloide equilatera avente per asse z, ed in σ' la normale interna forma con z un angolo compreso fra 45° e 135°, basta la conoscenza di w sopra σ' (purché nella parte rimanente di σ si conoscano w e $\partial w/\partial n$) affinché w risulti determinato al vertice A.

Bisogna dunque cercare di eliminare $\partial w/\partial n$ su σ' nella formula (2). Questo risultato si ottiene impiegando il metodo delle immagini.

4. Usando una denominazione analoga a quella di *conormale*, chiameremo *codistanza* dei punti (x_1, y_1, z_1), (x, y, z) la quantità

$$\sqrt{(x_1-x)^2+(y_1-y)^2-(z_1-z)^2}$$

supposta reale e presa positivamente. In altri termini la *conormale* e la *codistanza* corrispondono alla *normale* e alla *distanza* nella metrica individuata dal quadrato dell'elemento lineare

$$dx^2+dy^2-dz^2.$$

Preso un piano Δ conduciamo da un punto A la conormale al piano. Se questa lo incontra in un punto B prolunghiamola di BA' eguale ad AB; A' si dirà la *coimmagine* di A. Ora noi abbiamo facilmente che *le codistanze di* A *ed* A' *da uno stesso punto qualsiasi del piano sono eguali*. Questa sola proprietà non basterebbe ad ottenere la eliminazione desiderata. Ma ne abbiamo ancora un'altra, cioè:

I coni caratteristici relativi ai punti A *ed* A' *si tagliano lungo il piano* Δ; ed infatti i punti di questa intersezione hanno codistanze nulle tanto da A quanto da A'.

Le due proprietà combinate insieme conducono alla eliminazione desiderata in casi analoghi a quelli trattati nella citata Nota dei « Proceedings » di Londra impiegando un procedimento analogo a quello ivi usato nel caso di piani la cui normale interna formi con z un angolo compreso fra 45° e 135°.

5. Similmente supponiamo di avere una iperboloide equilatera

$$x^2+y^2-z^2=\pm a^2. \tag{3}$$

Preso un punto A di coordinate x_1, y_1, z_1 si dirà *coimmagine* di A il punto A' di coordinate

$$x_1'=\frac{\pm a^2 x_1}{x_1^2+y_1^2-z_1^2}\quad,\quad y_1'=\frac{\pm a^2 y_1}{x_1^2+y_1^2-z_1^2}\quad,\quad z_1'=\frac{\pm a^2 z_1}{x_1^2+y_1^2-z_1^2}.$$

È facile vedere come si può costruire il punto A' quando sia noto A e questo sia esterno o interno al cono assintotico della iperboloide (3).

Per i punti A ed A′ valgono le due proprietà seguenti:

Le codistanze di A *ed* A′ *dai punti della iperboloide* (3) *stanno in un rapporto costante.*

I coni caratteristici di A *ed* A′ *si tagliano lungo l'iperboloide* (3).

Anche in questo caso i punti della intersezione hanno codistanze nulle tanto da A quanto da A′.

Giovandosi di questi due teoremi e delle formule (2) e (2′) è possibile estendere le precedenti eliminazioni dal caso del piano a quello dell'iperboloide equilatera, il cui asse sia parallelo a z.

6. Nella Memoria citata dei « Proceedings » di Londra, ho applicato il metodo delle immagini successive nel caso di più piani paralleli a z. Si comprende come tale procedimento possa estendersi anche al caso in cui si abbiano piani non paralleli a z, o si abbiano più iperboloidi equilateri coll'asse parallelo a z, o piani ed iperboloidi.

Ho osservato nella citata Memoria quale semplificazione si abbia nel caso iperbolico per rapporto al caso ellittico allorché si hanno infinite immagini, giacché non è necessario tener conto nelle formule che di un numero finito di esse. Le stesse osservazioni sono estensibili ai casi generali che abbiamo preso in esame.

Non vi è il tempo in una breve Comunicazione di una sezione del Congresso di sviluppare tutte le conseguenze che possono trarsi dal principio che abbiamo stabilito sia per rapporto alla equazione di tipo iperbolico che abbiamo considerata, sia per rapporto ad altre equazioni dello stesso tipo più complesse; ci basti di aver posto il principio che spero di avere agio presto di sviluppare.

XVII.

SULLE EQUAZIONI INTEGRO-DIFFERENZIALI.

« Rend. Acc. Lincei », Ser. 5ª, vol. XVIII$_1$, 1909$_1$, pp. 167-174.

1. Nello studio generale di varie classi di problemi d'isteresi, che si può affrontare partendo dai concetti di *funzioni dipendenti da altre funzioni* (1), si è condotti ad equazioni che hanno un tipo misto, cioè in parte quello delle equazioni differenziali a derivate parziali ed in parte quello delle equazioni integrali. Mi permetto perciò di chiamarle *equazioni integro-differenziali*. La natura dei problemi d'isteresi porta ad equazioni ricollegantisi con equazioni integrali con limiti variabili, ma l'analisi stessa potrebbe anche essere estesa ad altri casi.

In questa Nota non mi occuperò che di una equazione integro-differenziale che può assumersi come il tipo delle equazioni stesse nel caso ellittico e la cui trattazione insegna la via da seguire in altri casi più complessi, come appunto le ricerche sulla equazione di LAPLACE insegnarono ad integrare le equazioni di tipo ellitico più complicato. Mi riserbo in lavori successivi di trattare casi di equazioni integro-differenziali di tipo iperbolico e parabolico, e quelli in cui una stessa variabile comparisce come variabile di derivazione e fra le variabili d'integrazione.

2. L'equazione che considererò sarà la seguente:

$$\text{(I)}\qquad \frac{\partial^2 u(x,y,z,t)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u(x,y,z,t)}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u(x,y,z,t)}{\partial z^2}$$
$$+\int_0^t\left\{\frac{\partial^2 u(x,y,z,\tau)}{\partial x^2}f(t,\tau)+\frac{\partial^2 u(x,y,z,\tau)}{\partial y^2}\varphi(t,\tau)\right.$$
$$\left.+\frac{\partial^2 u(x,y,z,\tau)}{\partial z^2}\psi(t,\tau)\right\}d\tau=0,$$

che si potrà anche scrivere per semplicità:

$$\text{(I)}\qquad \Delta^2 u(t)+\int_0^t\left\{\frac{\partial^2 u(\tau)}{\partial x^2}f(t,\tau)+\frac{\partial^2 u(\tau)}{\partial y^2}\varphi(t,\tau)+\frac{\partial^2 u(\tau)}{\partial z^2}\psi(t,\tau)\right\}d\tau=0,$$

in cui u denota una funzione monodroma finita e continua ed avente le derivate prime e seconde rispetto ad x, y, z monodrome finite e continue in

(1) « Rend. Acc. dei Lincei », vol. III, 1887 [in queste « Opere »: vol. primo, XVII, pp. 294-314].

un campo S a tre dimensioni i cui punti hanno le coordinate x, y, z e per tutti i valori di t compresi fra o e $T > o$, mentre $f(t, \tau)$, $\varphi(t, \tau)$, $\psi(t, \tau)$ sono funzioni finite e continue delle variabili t, τ per valori compresi fra o e T.

3. Cominciamo dal dimostrare che, *se al contorno σ di* S, *u è nota per tutti i valori di t compresi fra* o e T, *la u è nota, entro* S, *per tutti i valori di t, compresi fra gli stessi limiti.*

Infatti se u è nulla lungo σ per i valori di t compresi fra o e T, dalla (I) segue

$$\text{(II)} \qquad \int_S \Delta u(t)\, dS + \int_0^t d\tau \int_S \left\{ \frac{\partial u(t)}{\partial x} \frac{\partial u(\tau)}{\partial x} f(t, \tau) + \frac{\partial u(t)}{\partial y} \frac{\partial u(\tau)}{\partial y} \varphi(t, \tau) + \frac{\partial u(t)}{\partial z} \frac{\partial u(\tau)}{\partial z} \psi(t, \tau) \right\} dS = 0,$$

ove

$$\Delta u(t) = \left(\frac{\partial u(x, y, z, t)}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u(x, y, z, t)}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u(x, y, z, t)}{\partial z}\right)^2.$$

Sia M una quantità maggiore del limite superiore di

$$\int_S \Delta u(t)\, dS$$

per tutti i valori di t compresi fra o e T; poiché

$$\int_S \left(\left| \frac{\partial u(t)}{\partial x} \right| - \left| \frac{\partial u(\tau)}{\partial x} \right| \right)^2 dS \geq 0$$

avremo evidentemente

$$\int_S \left| \frac{\partial u(t)}{\partial x} \frac{\partial u(\tau)}{\partial x} \right| dS < M$$

ed in modo analogo

$$\int_S \left| \frac{\partial u(t)}{\partial y} \frac{\partial u(\tau)}{\partial y} \right| dS < M \quad , \quad \int_S \left| \frac{\partial u(t)}{\partial z} \frac{\partial u(\tau)}{\partial z} \right| dS < M.$$

Quindi se $|f(t, \tau)| < N/3$ e così pure $|\varphi(t, \tau)| < N/3$, $|\psi(t, \tau)| < N/3$, in virtù della (II) sarà

$$\text{(1)} \qquad \int_S \Delta u(t)\, dS < MNt$$

e per conseguenza

$$\text{(1')} \qquad \int_S \Delta u(\tau)\, dS < MN\tau.$$

Ma

$$\int_S \left(\sqrt{\tau} \left| \frac{\partial u(t)}{\partial \xi} \right| - \sqrt{t} \left| \frac{\partial u(\tau)}{\partial \xi} \right| \right)^2 dS \geq 0,$$

in cui ξ rappresenta una qualunque delle tre variabili x, y, z. Perciò a cagione delle (1) e (1') segue

$$\int_S \left| \frac{\partial u(t)}{\partial \xi} \frac{\partial u(\tau)}{\partial \xi} \right| dS < MN t^{1/2} \tau^{1/2},$$

onde, tenendo presente la (II), resulta

$$\int_S \Delta u(t)\, dS < \frac{2}{3} MN^2 t^2.$$

Così procedendo ed osservando in generale che

$$\int_S \left(\tau^{n/2} \left| \frac{\partial u(t)}{\partial \xi} \right| - t^{n/2} \left| \frac{\partial u(\tau)}{\partial \xi} \right| \right)^2 dS \geq 0,$$

si trova facilmente che

$$\int_S \Delta u(t)\, dS < \frac{M(2Nt)^{n-1}}{n!}$$

qualunque sia il numero intero n. Ne segue che $u(x, y, z, t)$ è sempre nulla. Da questa proprietà discende immediatamente il teorema enunciato al principio di questo paragrafo.

4. Chiameremo *equazione aggiunta* della (I) l'equazione

$$\text{(I')} \qquad \Delta^2 v(t) + \int_t^\theta \left(\frac{\partial^2 v(\tau)}{\partial x^2} f(\tau, t) + \frac{\partial^2 v(\tau)}{\partial y^2} \varphi(\tau, t) + \frac{\partial^2 v(\tau)}{\partial z^2} \psi(\tau, t) \right) d\tau = 0$$

in cui θ è compresa fra t e T.

Poniamo

$$H_\sigma = \int_0^\theta dt \int_\sigma \left(v(t) \frac{\partial u(t)}{\partial n} - u(t) \frac{\partial v(t)}{\partial n} \right) d\sigma$$

$$+ \int_0^\theta dt \int_t^\theta d\tau \int_\sigma \left\{ \left(v(\tau) \frac{\partial u(t)}{\partial x} - u(t) \frac{\partial v(\tau)}{\partial x} \right) f(\tau, t) \cos nx \right.$$

$$+ \left(v(\tau) \frac{\partial u(t)}{\partial y} - u(t) \frac{\partial v(\tau)}{\partial y} \right) \varphi(\tau, t) \cos ny$$

$$\left. + \left(v(\tau) \frac{\partial u(t)}{\partial z} - u(t) \frac{\partial v(\tau)}{\partial z} \right) \psi(\tau, t) \cos nz \right\} d\sigma$$

ove n denota la normale al contorno σ diretta verso l'esterno dello spazio S.

La H_σ *dipenderà dalle due funzioni* u e v e sarà una funzione nel senso ordinario della variabile θ. Per mettere in evidenza questo scriveremo

$$H_\sigma([u, v], \theta).$$

Dalle equazioni (I) e (I') segue facilmente la relazione

(III) $$H_\sigma([u, v], \theta) = 0$$

che corrisponde al lemma di GREEN e vale se anche v e le sue derivate prime e seconde rispetto a x, y, z, sono monodrome finite e continue.

Chiamando $H'_\sigma([u, v], \theta)$ il primo termine di H_σ cioè

$$\int_0^\theta dt \int_\sigma \left(v(t) \frac{\partial u(t)}{\partial n} - u(t) \frac{\partial v(t)}{\partial n}\right) d\sigma$$

e chiamando $H''_\sigma([u, v], \theta)$ la parte residua avremo evidentemente

$$H_\sigma([u, v], \theta) = H'_\sigma([u, v], \theta) + H''_\sigma([u, v], \theta).$$

5. È ora possibile costruire una soluzione della equazione aggiunta (I') la quale in un punto (che può supporsi essere l'origine) diviene infinita dello stesso ordine della inversa della distanza da questo punto.

Poniamo

$$f(t, \tau) = F_{1,0,0}(t, \tau) \quad , \quad \varphi(t, \tau) = F_{0,1,0}(t, \tau) \quad , \quad \psi(t, \tau) = F_{0,0,1}(t, \tau)$$

$$F_{h,k,l}(t, \tau) = \int_\tau^t \sum_{i+j+g=\varrho} F_{h-i,k-j,l-g}(t, \xi)\, F_{i,j,g}(\xi, \tau)\, d\xi$$

in cui la somma $\sum_{i+j+g=\varrho}$ si intende estesa a tutti i valori interi di i, j, g la cui somma è costante ed uguale a ρ, mentre si suppone che una F con indici negativi sia nulla. Si vede facilmente che, se $1 \leq \rho < h + k + l$, $F_{h,k,l}$ è indipendente da ρ.

Pongasi inoltre

$$\Phi\left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r} \,\middle|\, \tau, t\right)$$

$$= \sum_1^\infty{}_n \frac{(-1)^n}{n!\, 2^{2n}} \sum_{h+k+l=n} F_{h,k,l}(\tau, t) \sum_0^h{}_\alpha \sum_0^k{}_\beta \sum_0^l{}_\gamma (-1)^{\alpha+\beta+\gamma}$$

$$\times \frac{(2(\alpha+\beta+\gamma))!}{(\alpha+\beta+\gamma)!} \frac{(2h)!\,(2k)!\,(2l)! \left(\frac{x}{r}\right)^{2\alpha} \left(\frac{y}{r}\right)^{2\beta} \left(\frac{z}{r}\right)^{2\gamma}}{(2\alpha)!\,(2\beta)!\,(2\gamma)!\,(h-\alpha)!\,(k-\beta)!\,(l-\gamma)!}$$

supponendo $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

La serie precedente è uniformemente convergente, derivabile rispetto a x, y, z; e la funzione

(2) $$V(x, y, z) \mid t, \theta) = \frac{1}{r}\left(1 + \int_t^\theta \Phi\left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r} \,\middle|\, \tau, t\right) d\tau\right)$$

sarà la funzione cercata, come può direttamente verificarsi.

6. Se l'origine è esterna al campo S si potrà applicare la (III) sostituendo V a v, altrimenti se l'origine è interna, bisogna escludere l'origine stessa con un contorno e chiamandolo ω la (III) si scriverà

$$\text{(III')} \qquad H_\sigma([u, V], \theta) + H_\omega([u, V], \theta) = 0.$$

Preso il contorno ω sferico con raggio evanescente avremo al limite

$$\lim H'_\omega([u, V], \theta) = -4\pi \int_0^\theta u_0(t) \left[1 + \int_t^\theta S(\tau, t)\, d\tau\right] dt$$

$$\lim H''_\omega([u, V], \theta) = -4\pi \int_0^\theta u_0(t)\, dt \int_t^\theta T(\tau, t)\, d\tau,$$

avendo posto per semplicità

$$u_0(t) = u(0, 0, 0, t).$$

Ora

$$S(\tau, t) = -T(\tau, t) = \sum_1^\infty {}_n \frac{n!}{(2n)!} (-1)^n \sum_{h+k+l=n} \frac{(2h)!\,(2k)!\,(2l)!}{h!\,k!\,l!} F_{h,k,l}(\tau, t),$$

quindi

$$\text{(3)} \qquad \lim H_\omega([u, V], \theta) = -4\pi \int_0^\theta u_0(t)\, dt.$$

Si può ottenere questo risultato anche in altro modo ricorrendo alla seguente formula, di cui tralascio la dimostrazione

$$\int_\sigma \frac{\partial V(t)}{\partial n} d\sigma + \int_t^\theta d\tau \int_\sigma \left(\frac{\partial V(\tau)}{\partial x} f(\tau, t) \cos nx + \frac{\partial V(\tau)}{\partial y} \varphi(\tau, t) \cos ny \right.$$
$$\left. + \frac{\partial V(\tau)}{\partial z} \psi(\tau, t) \cos nz\right) d\sigma = -4\pi.$$

Dalle (III') e (3) si deduce

$$\text{(A)} \qquad u_0(\theta) = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial\theta} H_\sigma([u, V], \theta).$$

7. Se w è una soluzione della (I'), regolare entro S, sarà, per la (III),

$$H_\sigma([u, w], \theta) = 0,$$

quindi

$$\text{(A')} \qquad u_0(\theta) = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial\theta} H_\sigma([u, V + w], \theta)$$

e se $V + w$ sarà nulla lungo σ, nel secondo membro della equazione (A') compariranno i soli valori di $u(t)$ lungo σ per i valori di t compresi fra 0 e θ, onde la (A') risolverà il problema di *determinare* $u_0(\theta)$ *quando si conosce* $u(t)$ *lungo* σ *per* t *compreso fra* 0 e θ.

Nel caso, per esempio, in cui σ fosse un piano, w si otterrebbe immediatamente col metodo delle immagini.

La formula (A) corrisponde invece al *teorema* di GREEN, giacchè esprime $u_0(\theta)$ *per mezzo dei valori di* $u(t)$ *e delle sue derivate prime lungo* σ *per* t *compreso fra* o *e* θ.

8. Se, anziché avere la (I), si avesse l'equazione

$$(\mathrm{I}_a) \qquad \Delta^2 u(t) + \int_0^t \left\{ \frac{\partial^2 u(\tau)}{\partial x^2} f(t,\tau) + \frac{\partial^2 u(\tau)}{\partial y^2} \varphi(t,\tau) + \frac{\partial^2 u(\tau)}{\partial z^2} \psi(t,\tau) \right\} d\tau = \chi(x,y,z,t)$$

poniamo

$$\int_0^\theta dt \int_S v(t)\,\chi(x,y,z,t)\,dS = \mathrm{K}([\chi, v], \theta),$$

allora le (A) e (A') dovrebbero essere rispettivamente sostituite dalle

$$(\mathrm{B}) \qquad u_0(\theta) = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial\theta}\{\mathrm{H}_\sigma([u, \mathrm{V}], \theta) - \mathrm{K}([\chi, \mathrm{V}], \theta)\}$$

$$(\mathrm{B}') \qquad u_0(\theta) = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial\theta}\{\mathrm{H}_\sigma([u, \mathrm{V}+w], \theta) - \mathrm{K}([\chi, \mathrm{V}+w], \theta)\}.$$

Sarebbe facile ricavare da queste formule un teorema analogo a quello del POISSON.

9. Prima di chiudere questa Nota mi permetto di aggiungere alcune osservazioni.

Consideriamo il sistema di equazioni differenziali simultanee

$$\Delta^2 u_1 = 0$$

$$a_{21}\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + b_{21}\frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} + c_{21}\frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} + \Delta^2 u_2 = 0$$

$$a_{31}\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + b_{31}\frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} + c_{31}\frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} + a_{32}\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + b_{32}\frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} + c_{32}\frac{\partial^2 u_2}{\partial z^2} + \Delta^2 u_3 = 0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

L'equazione (I) può considerarsi come il caso limite del sistema precedente quando il numero delle incognite e delle equazioni cresce indefinitamente [2].

Il sistema aggiunto del precedente sarà

$$\Delta^2 v_1 + a_{21}\frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2} + b_{21}\frac{\partial^2 v_2}{\partial y^2} + c_{21}\frac{\partial^2 v_2}{\partial z^2} + a_{31}\frac{\partial^2 v_3}{\partial x^2} + b_{31}\frac{\partial^2 v_3}{\partial y^2} + c_{31}\frac{\partial^2 v_3}{\partial z^2} + \cdots = 0$$

$$\Delta^2 v_2 + a_{32}\frac{\partial^2 v_3}{\partial x^2} + b_{32}\frac{\partial^2 v_3}{\partial y^2} + c_{32}\frac{\partial^2 v_3}{\partial z^2} + \cdots = 0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

(2) Cfr. la prima mia Memoria: *Sulla inversione degli integrali definiti*, § 3, « Atti della R. Accademia di Torino », 1896 [in queste « Opere »: vol. secondo, XVIII, pp. 216-225].

e la soluzione fondamentale è facile a calcolarsi ed al limite conduce alla (2).

10. Poniamo

$$u(x, y, z, t) + \int_0^t u(x, y, z, \tau) f(t, \tau)\, d\tau = \mathrm{U}(x, y, z, t)$$

$$u(x, y, z, t) + \int_0^t u(x, y, z, \tau)\, \varphi(t, \tau)\, d\tau = \mathrm{V}(x, y, z, t)$$

$$u(x, y, z, t) + \int_0^t u(x, y, z, \tau)\, \psi(t, \tau)\, d\tau = \mathrm{W}(x, y, z, t).$$

Invertendo, con i metodi che detti per la risoluzione delle equazioni integrali, le formule precedenti, si ha

$$\begin{aligned} u(x, y, z, t) &= \mathrm{U}(x, y, z, t) + \int_0^t \mathrm{U}(x, y, z, \tau) f'(t, \tau)\, d\tau \\ &= \mathrm{V}(x, y, z, t) + \int_0^t \mathrm{V}(x, y, z, \tau)\, \varphi'(t, \tau)\, d\tau \\ &= \mathrm{W}(x, y, z, t) + \int_0^t \mathrm{W}(x, y, z, \tau)\, \psi'(t, \tau), d\tau, \end{aligned} \tag{4}$$

mentre la (I) si potrà scrivere

$$\frac{\partial^2 \mathrm{U}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathrm{V}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathrm{W}}{\partial z^2} = 0; \tag{5}$$

quindi la (I) può ricondursi ad *un sistema simultaneo di due equazioni integrali* (4) *e della equazione differenziale* (5) *colle tre incognite* U, V, W.

È bene a questo proposito osservare che le equazioni stesse in generale non possono separarsi, e che *il problema della risoluzione delle equazioni integro-differenziali costituisce in generale un problema essenzialmente distinto dai problemi delle equazioni differenziali e da quelli ordinarii delle equazioni integrali.*

XVIII.

SULLE EQUAZIONI DELLA ELETTRODINAMICA

« Rend. Acc. Lincei », ser. 5ª, vol. XVIII₁, 1909₁, pp. 203–211.

Art. 1. – La isteresi.

1. Hertz ha stabilito, come equazioni fondamentali della elettrodinamica dei sistemi in quiete, le seguenti [1]:

$$
\text{(I)}\quad \begin{cases} A\dfrac{\partial L}{\partial t} = \dfrac{\partial Z}{\partial y} - \dfrac{\partial Y}{\partial z} \\ A\dfrac{\partial M}{\partial t} = \dfrac{\partial X}{\partial z} - \dfrac{\partial Z}{\partial x} \\ A\dfrac{\partial N}{\partial t} = \dfrac{\partial Y}{\partial x} - \dfrac{\partial X}{\partial y} \end{cases}
\qquad
\text{(I')}\quad \begin{cases} A\dfrac{\partial X}{\partial t} = \dfrac{\partial M}{\partial z} - \dfrac{\partial N}{\partial y} - 4\pi A u \\ A\dfrac{\partial Y}{\partial t} = \dfrac{\partial N}{\partial x} - \dfrac{\partial L}{\partial z} - 4\pi A v \\ A\dfrac{\partial Z}{\partial t} = \dfrac{\partial L}{\partial y} - \dfrac{\partial M}{\partial x} - 4\pi A w \end{cases}
$$

in cui

$$
\text{(II)}\quad \begin{cases} X = \varepsilon_{11} X + \varepsilon_{12} Y + \varepsilon_{13} Z \\ Y = \varepsilon_{21} X + \varepsilon_{22} Y + \varepsilon_{23} Z \\ Z = \varepsilon_{31} X + \varepsilon_{32} Y + \varepsilon_{33} Z \end{cases}
\qquad
\text{(II')}\quad \begin{cases} L = \mu_{11} L + \mu_{12} M + \mu_{13} N \\ M = \mu_{21} L + \mu_{22} M + \mu_{23} N \\ N = \mu_{31} L + \mu_{32} M + \mu_{33} N \end{cases}
$$

$$
\text{(III)}\quad \begin{cases} u = \lambda_{11}(X - X') + \lambda_{12}(Y - Y') + \lambda_{13}(Z - Z') \\ v = \lambda_{21}(X - X') + \lambda_{22}(Y - Y') + \lambda_{23}(Z - Z') \\ w = \lambda_{31}(X - X') + \lambda_{32}(Y - Y') + \lambda_{33}(Z - Z'). \end{cases}
$$

In queste equazioni è ben noto il significato delle varie lettere, e cioè X, Y, Z; X , Y , Z; u, v, w sono rispettivamente le componenti della polarizzazione, della forza e della corrente elettrica; mentre L, M, N; L , M , N sono rispettivamente le componenti della polarizzazione e della forza magnetica; e X′, Y′, Z′ quelle della forza elettromotrice.

2. Le equazioni (II), (II′) e (III) discendono dalla ipotesi che lo stato attuale della polarizzazione elettrica e della corrente elettrica dipendano dallo stato attuale della forza elettrica; e, analogamente, lo stato attuale della polarizzazione magnetica dipenda dallo stato attuale della forza magnetica.

Ora, la teoria precedente non dà che una prima approssimazione dell'andamento dei fenomeni, giacché essa esclude i fenomeni d'isteresi. Questi ultimi conducono a ritenere che lo stato attuale della polarizzazione magnetica non dipenda soltanto dalla forza magnetica attuale, ma da tutta la sua storia anteriore, ossia che la polarizzazione magnetica in un punto dipenda,

(1) « Wiedemann's Annalen », 40, p. 577.

oltre che dalla forza magnetica attuale in quel punto, anche da tutti i valori che precedentemente all'istante attuale ha avuto la forza magnetica nel punto stesso. In modo analogo può dirsi per la polarizzazione elettrica riguardo alla forza elettrica.

Volendo dunque avere una approssimazione successiva e tener conto della isteresi converrà introdurre nei secondi membri delle equazioni (II) e (II') dei termini di correzione e scrivere

$$(\mathrm{II}_a)\quad \begin{cases} \mathcal{X}(t) = \varepsilon_{11}\,X(t) + \varepsilon_{12}\,Y(t) + \varepsilon_{13}\,Z(t) + F_1 \left| [X(\tau), Y(\tau), Z(\tau)] \right|_{-\infty}^{t} \\ \mathcal{Y}(t) = \varepsilon_{21}\,X(t) + \varepsilon_{22}\,Y(t) + \varepsilon_{23}\,Z(t) + F_2 \left| [X(\tau), Y(\tau), Z(r)] \right|_{-\infty}^{t} \\ \mathcal{Z}(t) = \varepsilon_{31}\,X(t) + \varepsilon_{32}\,Y(t) + \varepsilon_{33}\,Z(t) + F_3 \left| [X(\tau), Y(\tau), Z(\tau)] \right|_{-\infty}^{t} \end{cases}$$

in cui F_1, F_2, F_3 denotano delle quantità che dipendono da tutti i valori di $X(\tau), Y(\tau), Z(\tau)$ corrispondenti a valori dell'argomento τ da $-\infty$ a t, cioè corrispondenti a tutti i tempi anteriori all'istante t. In modo analogo si scriverà

$$(\mathrm{II}'_a)\quad \begin{cases} \mathcal{L}(t) = \mu_{11}\,L(t) + \mu_{12}\,M(t) + \mu_{13}\,N(t) + \Phi_1 \left| [L(\tau), M(\tau), N(\tau)] \right|_{-\infty}^{t} \\ \mathcal{M}(t) = \mu_{21}\,L(t) + \mu_{22}\,M(t) + \mu_{23}\,N(t) + \Phi_2 \left| [L(\tau), M(\tau), N(\tau)] \right|_{-\infty}^{t} \\ \mathcal{N}(t) = \mu_{31}\,L(t) + \mu_{32}\,M(t) + \mu_{33}\,N(t) + \Phi_3 \left| [L(\tau), M(\tau), N(\tau)] \right|_{-\infty}^{t}. \end{cases}$$

Noi ricorriamo in tal modo al concetto che abbiamo introdotto e sviluppato nel 1887 col nome di *funzioni dipendenti da altre funzioni* (2) facendo uso della relativa notazione. Ammesse soddisfatte le condizioni volute potremo sviluppare ciascuna funzione F_i in una serie infinita di termini ciascuno dei quali ha la forma

$$\int_{-\infty}^{t} \cdots \int_{-\infty}^{t} G_i(\tau'_1 \cdots \tau'_k \,|\, \tau''_1 \cdots \tau''_k \,|\, \tau'''_1 \cdots \tau'''_e)\, X(\tau'_1) \cdots$$
$$\cdots X(\tau'_k)\, Y(\tau''_1) \cdots Y(\tau''_k)\, Z(\tau'''_1) \cdots Z(\tau'''_e)\, d\tau' \cdots d\tau'''_e$$

e la cosa analoga potrà dirsi per ciascuna Φ_i.

Ora se noi ammettiamo come postulato che gli effetti della sovrapposizione di forze elettriche o di forze magnetiche si sommino, cioè supponiamo

$$F_i \left| [X(\tau) + X'(\tau), Y(\tau) + Y'(\tau), Z(\tau) + Z'(\tau)] \right|_{-\infty}^{t}$$
$$= F_i \left| [X(\tau), Y(\tau), Z(\tau)] \right|_{-\infty}^{t} + F_i \left| [Y'(\tau), Y'(\tau), Z'(\tau)] \right|_{-\infty}^{t},$$

(2) « Rend. Acc. dei Lincei », vol. III, 1887 [in queste « Opere »: vol. primo, XVII, pp. 294–314].

$$\Phi_i \Big| [\mathrm{L}(\tau) + \mathrm{L}'(\tau), \mathrm{M}(\tau) + \mathrm{M}'(\tau), \mathrm{N}(\tau) + \mathrm{N}'(\tau)] \Big|_{-\infty}^{t}$$

$$= \Phi_i \Big| [\mathrm{L}(\tau), \mathrm{M}(\tau), \mathrm{N}(\tau)] \Big|_{-\infty}^{t} + \Phi_i \Big| [\mathrm{L}'(\tau), \mathrm{M}'(\tau), \mathrm{N}'(\tau)] \Big|_{-\infty}^{t}$$

dovremo avere

$$\mathrm{F}_i = \int_{-\infty}^{t} \{\mathrm{X}(\tau)\,\varphi_{i1}(t,\tau) + \mathrm{Y}(\tau)\,\varphi_{i2}(t,\tau) + \mathrm{Z}(\tau)\,\varphi_{i3}(t,\tau)\}\,d\tau$$

$$\Phi_i = \int_{-\infty}^{t} \{\mathrm{L}(\tau)\,\psi_{i1}(t,\tau) + \mathrm{M}(\tau)\,\psi_{i2}(t,\tau) + \mathrm{N}(\tau)\,\psi_{i3}(t,\tau)\}\,d\tau$$

onde le (II_a) (II'_a) diverranno

$$(\mathrm{II}_b) \quad \left\{ \begin{aligned} X(t) &= \varepsilon_{11}\,\mathrm{X}(t) + \varepsilon_{12}\,\mathrm{Y}(t) + \varepsilon_{13}\,\mathrm{Z}(t) \\ &+ \int_a^t (\mathrm{X}(\tau)\,\varphi_{11}(t,\tau) + \mathrm{Y}(\tau)\,\varphi_{12}(t,\tau) + \mathrm{Z}(\tau)\,\varphi_{13}(t,\tau))\,d\tau \\ Y(t) &= \varepsilon_{21}\,\mathrm{X}(t) + \varepsilon_{22}\,\mathrm{Y}(t) + \varepsilon_{23}\,\mathrm{Z}(t) \\ &+ \int_a^t (\mathrm{X}(\tau)\,\varphi_{21}(t,\tau) + \mathrm{Y}(\tau)\,\varphi_{22}(t,\tau) + \mathrm{Z}(\tau)\,\varphi_{23}(t,\tau))\,d\tau \\ Z(t) &= \varepsilon_{31}\,\mathrm{X}(t) + \varepsilon_{32}\,\mathrm{Y}(t) + \varepsilon_{33}\,\mathrm{Z}(t) \\ &+ \int_a^t (\mathrm{X}(\tau)\,\varphi_{31}(t,\tau) + \mathrm{Y}(\tau)\,\varphi_{32}(t,\tau) + \mathrm{Z}(\tau)\,\varphi_{33}(t,\tau))\,d\tau \end{aligned} \right.$$

$$(\mathrm{II}'_b) \quad \left\{ \begin{aligned} L(t) &= \mu_{11}\,\mathrm{L}(t) + \mu_{12}\,\mathrm{M}(t) + \mu_{13}\,\mathrm{N}(t) \\ &+ \int_a^t (\mathrm{L}(\tau)\,\psi_{11}(t,\tau) + \mathrm{M}(\tau)\,\psi_{12}(t,\tau) + \mathrm{N}(\tau)\,\psi_{13}(t,\tau))\,d\tau \\ M(t) &= \mu_{21}\,\mathrm{L}(t) + \mu_{22}\,\mathrm{M}(t) + \mu_{23}\,\mathrm{N}(t) \\ &+ \int_a^t (\mathrm{L}(\tau)\,\psi_{21}(t,\tau) + \mathrm{M}(\tau)\,\psi_{22}(t,\tau) + \mathrm{N}(\tau)\,\psi_{23}(t,\tau))\,d\tau \\ N(t) &= \mu_{31}\,\mathrm{L}(t) + \mu_{32}\,\mathrm{M}(t) + \mu_{33}\,\mathrm{N}(t) \\ &+ \int_a^t (\mathrm{L}(\tau)\,\psi_{31}(t,\tau) + \mathrm{M}(\tau)\,\psi_{32}(t,\tau) + \mathrm{N}(\tau)\,\psi_{33}(t,\tau))\,d\tau \end{aligned} \right.$$

in cui deve supporsi che il limite inferiore a degli integrali sia $-\infty$.

Se noi supponiamo che le forze elettriche e magnetiche anteriori ad un dato istante t_0 siano trascurabili, allora basterà prendere il limite inferiore a dei precedenti integrali eguale a t_0.

Sostituendo alle equazioni (II) e (II′) le precedenti equazioni (II_b) e (II'_b) si vede subito che le equazioni (I) e (I′) indefinite dei campi elettromagnetici divengono delle equazioni *integro-differenziali* (3).

Dal punto di vista analitico il tipo delle equazioni non cambierebbe se anche alle (III) si sostituissero delle relazioni integrali di forma analoga alle relazioni (II_b) e (II'_b).

Art. II. - I COEFFICIENTI.

1. Nelle equazioni (II_b) e (II'_b) figurano scritte esplicitamente le sole variabili t, τ, ma dovremo tener presente che X, Y, Z; L, M, N; X, Y, Z; L, M, N sono funzioni anche di x, y, z. In generale anche i coefficienti ε_{rs}, μ_{rs} saranno funzioni di x, y, z e così pure i coefficienti φ_{rs} e ψ_{rs}; solo nel caso di un mezzo omogeneo potremo ritenere i detti coefficienti indipendenti da x, y, z.

Quando si passa da un mezzo ad un altro, lungo la superficie limite avranno luogo delle equazioni di condizione che possono senz'altro aversi col mezzo tenuto da HERTZ nel § 8 della citata Memoria a cui rimandiamo.

2. Supposto il limite inferiore degl'integrali finito nelle (II_b) e (II_b') potremo invertire le equazioni stesse coi metodi che detti per la risoluzione delle equazioni integrali (4), essendo il determinante delle ε_{rs} e delle μ_{rs} diverso da zero, e potremo quindi esprimere le componenti della forza elettrica per mezzo delle componenti della polarizzazione elettrica e le componenti della forza magnetica per mezzo delle componenti della polarizzazione magnetica.

3. È facile trovare il significato dei coefficienti φ_{rs} e ψ_{rs}. Così

$$\varphi_{11}(t,\tau)\,d\tau \quad , \quad \varphi_{21}(t,\tau)\,d\tau \quad , \quad \varphi_{31}(t,\tau)\,d\tau$$

rappresentano le componenti della polarizzazione elettrica indotta al tempo t da una forza elettrica unitaria che ha agito nella direzione x nell'intervallo di tempo $(\tau, \tau+d\tau)$.

4. Nella ipotesi che le componenti della forza elettrica e della forza magnetica si mantengano sempre inferiori a limiti finiti, nel caso di $a = -\infty$, nelle (II_b) e (II'_b) converrà ammettere che i coefficienti φ_{rs} e ψ_{rs} siano infinitesimi per $\tau = -\infty$, e più precisamente supporremo

$$(1) \qquad |\varphi_{rs}(t,\tau)| < \frac{B}{(t-\tau)^{1+\varepsilon}} \quad , \quad |\psi_{rs}(t,\tau)| < \frac{B'}{(t-\tau)^{1+\varepsilon'}}$$

con $\varepsilon > 0$, $\varepsilon' > 0$ e B e B′ costanti finite positive.

(3) « Rend. Acc. Lincei », 7 e 21 febbraio 1909 [in questo vol.: XVII, pp. 269–275].

(4) « Rend. Acc. Lincei », 1896, *Sulla inversione degli integrali definiti*, § 5, [in queste « Opere »: vol. secondo, XIX, pp. 255–262].

Art. III. - Condizione del cappio chiuso.

1. Consideriamo un punto F dello spazio avente le coordinate X , Y , Z ed un altro punto P avente le coordinate $\mathit{X}, \mathit{Y}, \mathit{Z}$. Spostandosi F con continuità si sposterà P con continuità ed ambedue i punti descriveranno due linee.

Supponiamo ora che *ogni qualvolta* F *descrive periodicamente una traiettoria chiusa*, P *descriva pure periodicamente e con lo stesso periodo una traiettoria chiusa*; in altri termini *se* X (τ) , Y (τ) , Z (τ) *sono funzioni periodiche qualunque di* τ, $\mathit{X}(t)$, $\mathit{Y}(t)$, $\mathit{Z}(t)$ *siano pure funzioni periodiche collo stesso periodo di* t (5).

2 Chiameremo questa condizione la *condizione del cappio chiuso per la polarizzazione elettrica*, ed andremo a ricavarne le conseguenze.

Riprendiamo la prima delle (II_b) e supponiamo Y = Z = 0 e X periodica col periodo T > 0. Avremo

$$\mathit{X}(t+\mathrm{T}) = \varepsilon_{11}\,\mathrm{X}(t+\mathrm{T}) + \int_{-\infty}^{t+\mathrm{T}} \mathrm{X}(\tau)\,\varphi_{11}(t+\mathrm{T}\,,\tau)\,d\tau$$

e in virtù della condizione del cappio chiuso

$$\mathit{X}(t) = \varepsilon_{11}\,\mathrm{X}(t) + \int_{-\infty}^{t+\mathrm{T}} \mathrm{X}(\tau)\,\varphi_{11}(t+\mathrm{T}\,,\tau)\,d\tau\,;$$

quindi

$$\int_{-\infty}^{t} \mathrm{X}(\tau)\,\varphi_{11}(t\,,\tau)\,d\tau = \int_{-\infty}^{t+\mathrm{T}} \mathrm{X}(\tau)\,\varphi_{11}(t+\mathrm{T}\,,\tau)\,d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{t} \mathrm{X}(\tau)\,\varphi_{11}(t+\mathrm{T}\,,\tau+\mathrm{T})\,d\tau)\,.$$

Siccome X (τ) è una funzione periodica arbitraria col periodo T, così dall'equazione precedente segue

$$\varphi_{11}(t\,,\tau) + \sum_{1}^{\infty}{}_n\,\varphi_{11}(t\,,\tau - n\mathrm{T}) = \varphi_{11}(t+\mathrm{T}\,,\tau+\mathrm{T}) + \sum_{0}^{\infty}{}_n\,\varphi_{11}(t+\mathrm{T}\,,\tau - n\mathrm{T})$$

in cui τ è compreso fra t e $t - \mathrm{T}$.

Le due serie, saranno convergenti in virtù delle (1) e avremo

$$\left|\sum_{1}^{\infty}{}_n\,\varphi_{11}(t\,,\tau - n\mathrm{T})\right| < \frac{\mathrm{B}}{\mathrm{T}^{1+\varepsilon}} \sum_{1}^{\infty}{}_n \frac{1}{n^{1+\varepsilon}}$$

(5) Naturalmente dovremo ammettere che la periodicità abbia luogo dal tempo $-\infty$, ossia dovremo supporre nelle (II_b) il limite inferiore $-\infty$. Se il limite inferiore fosse finito dovrebbero supporsi X (t) , Y (t) , Z (t) nulle pei valori di τ inferiori ad un dato limite, il che sarebbe in contradizione colla ipotesi della periodicità.

$$\left|\sum_{0}^{\infty}{}_n \varphi_{11}(t+T, \tau - nT)\right| < \frac{B}{T^{1+\varepsilon}} \sum_{1}^{\infty}{}_n \frac{1}{n^{1+\varepsilon}};$$

quindi

$$\varphi_{11}(t, \tau) = \varphi_{11}(t+T, \tau+T) + \frac{2B\eta}{T^{1+\varepsilon}} \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\varepsilon}},$$

ove η è un numero compreso fra $+1$ e -1.

Se $\lambda < T - (t - \tau)$, avremo che $T - \lambda$ sarà positivo e $\tau + \lambda$ sarà compreso fra $t + \lambda$ e $t + \lambda - (T - \lambda)$, perciò nella equazione precedente si potrà cambiare t, τ, T rispettivamente in $t + \lambda, \tau + \lambda, T - \lambda$ e avremo

$$\varphi_{11}(t, \tau) - \varphi_{11}(t+\lambda, \tau+\lambda) = \left(\frac{2B\eta}{T^{1+\varepsilon}} - \frac{2B\eta'}{(T-\lambda)^{1+\varepsilon}}\right) \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\varepsilon}},$$

essendo η' un numero compreso fra $+1$ e -1.

Siccome questa equazione vale comunque grande sia T, così dovrà essere

$$\varphi_{11}(t, \tau) = \varphi_{11}(t+\lambda, \tau+\lambda)$$

qualunque sia λ e perciò $\varphi_{11}(t, \tau)$ sarà una funzione della differenza $t - \tau$.

Nello stesso modo si dimostra che *tutte le* φ_{rs} *sono funzioni di* $t - \tau$. Analogamente *se la condizione del cappio chiuso varrà per la polarizzazione magnetica i coefficienti* φ_{rs} *saranno funzioni di* $t - \tau$.

3. Se ora ci riferiamo al significato trovato precedentemente per i coefficienti φ_{rs}, ψ_{rs}, potremo dire: *la condizione del cappio chiuso per la polarizzazione elettrica (o magnetica) significa che la polarizzazione elettrica (o magnetica) indotta dopo un dato tempo da una data forza elettrica (o magnetica) che ha agito durante un intervallo di tempo dt è invariabile qualunque sia l'istante in cui la forza elettrica (o magnetica) ha agito.*

Questa condizione può chiamarsi *la invariabilità dell'isteresi elettrica (o magnetica)* attraverso il tempo, e perciò essa può considerarsi come una conseguenza della condizione del cappio chiuso.

4. Supponiamo ora reciprocamente che la condizione della invariabilità della isteresi elettrica sia soddisfatta, cioè i coefficienti φ_{rs} siano funzioni di $t - \tau$.

Dalle (II_b) segue, se le (1) son soddisfatte,

$$\mathcal{X}(t+T) = \varepsilon_{11} X(t+T) + \varepsilon_{12} Y(t+T) + \varepsilon_{13} Z(t+T)$$

$$+ \int_{-\infty}^{t+T} (X(\tau)\varphi_{11}(t+T-\tau) + Y(\tau)\varphi_{12}(t+T-\tau) + Z(\tau)\varphi_{13}(t+T-\tau))\, d\tau$$

$$= \varepsilon_{11} X(t+T) + \varepsilon_{12} Y(t+T) + \varepsilon_{13} Z(t+T)$$

$$+ \int_{t}^{-\infty} (X(\tau+T)\varphi_{11}(t-\tau) + Y(\tau+T)\varphi_{12}(t-\tau) + Z(\tau+T)\varphi_{13}(t-\tau))\, d\tau;$$

quindi se X , Y , Z saranno periodiche col periodo T, anche $X(t)$ sarà periodica collo stesso periodo, e similmente si prova la periodicità di $Y(t)$ e $Z(t)$; mentre analoga dimostrazione si potrà fare pel magnetismo.

Dunque *la condizione della invariabilità della isteresi elettrica (o magnetica) porta come conseguenza quella del cappio chiuso della polarizzazione elettrica (o magnetica).*

Art. IV. – Il caso statico e l'equazione integro-differenziale di tipo ellittico.

1. Consideriamo ora il caso più semplice, cioè che il mezzo non sia conduttore e che le quantità L, M, N; X, Y, Z varîno col tempo così lentamente da poter trascurare $\partial L/\partial t, \partial M/\partial t, \partial N/\partial t$; $\partial X/\partial t, \partial Y/\partial t, \partial Z/\partial t$ (*caso statico*).

Avremo allora

$$\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} = 0 \quad , \quad \frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} = 0 \quad , \quad \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z} = 0 \quad , \quad \frac{\partial L}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial x} = 0 \quad , \quad \frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y} = 0$$

ossia

$$X = \frac{\partial V}{\partial x} \quad , \quad Y = \frac{\partial V}{\partial y} \quad , \quad Z = \frac{\partial V}{\partial z}$$

$$L = \frac{\partial W}{\partial x} \quad , \quad M = \frac{\partial W}{\partial y} \quad , \quad N = \frac{\partial W}{\partial z} \,.$$

2. Supponiamo che le ε_{rs}, φ_{rs} siano indipendenti da x, y, z. Prendiamo per assi coordinati gli assi principali della quadrica

$$(2) \quad \varepsilon_{11} x^2 + \varepsilon_{22} y^2 + \varepsilon_{33} z^2 + (\varepsilon_{23} + \varepsilon_{32}) yz + (\varepsilon_{31} + \varepsilon_{13}) zx + (\varepsilon_{12} + \varepsilon_{21}) xy = 1 \,.$$

Se questi coincidono cogli assi della quadrica

$$(3) \quad \varphi_{11} x^2 + \varphi_{22} y^2 + \varphi_{33} z^2 + (\varphi_{23} + \varphi_{32}) yz + (\varphi_{31} + \varphi_{13}) zx + (\varphi_{12} + \varphi_{21}) xy = 1$$

qualunque siano i valori di t e τ, le (II_b) diverranno

$$\left\{ \begin{aligned} X &= \varepsilon_{11} \frac{\partial V(t)}{\partial x} + \int_a^t \frac{\partial V(\tau)}{\partial x} \varphi_{11}(t, \tau)\, d\tau \\ Y &= \varepsilon_{22} \frac{\partial V(t)}{\partial y} + \int_a^t \frac{\partial V(\tau)}{\partial y} \varphi_{22}(t, \tau)\, d\tau \\ Z &= \varepsilon_{33} \frac{\partial V(t)}{\partial z} + \int_a^t \frac{\partial V(\tau)}{\partial z} \varphi_{33}(t, \tau)\, d\tau \end{aligned} \right.$$

e perciò se

$$\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}=0$$

si avrà, supposto $a=t_0=0$,

$$\varepsilon_{11}\frac{\partial^2 V(t)}{\partial x^2}+\varepsilon_{22}\frac{\partial^2 V(t)}{\partial y^2}+\varepsilon_{33}\frac{\partial^2 V(t)}{\partial z^2}$$

$$+\int_0^t\left(\frac{\partial^2 V(\tau)}{\partial x^2}\varphi_{11}+\frac{\partial^2 V(\tau)}{\partial y^2}\varphi_{22}+\frac{\partial^2 V(\tau)}{\partial z^2}\varphi_{33}\right)d\tau=0\,,$$

la quale con un cambiamento lineare nelle variabili x, y, z si riduce all'equazione integro-differenziale

$$\Delta^2 V(t)+\int_0^t\left(\frac{\partial^2 V(\tau)}{\partial x^2}f(t,\tau)+\frac{\partial^2 V(\tau)}{\partial y^2}\varphi(t,\tau)+\frac{\partial^2 V(\tau)}{\partial z^2}\psi(t,\tau)\right)d\tau=0\,,$$

di cui abbiamo dato il tipo del processo d'integrazione in una Nota precedente (6). Non si incontrerebbero maggiori difficoltà se la quadrica (3) avesse assi variabili con τ e l.

3. Scopo principale della presente Nota è stato quello di mettere in luce l'origine della precedente equazione integro–differenziale. Nello stesso tempo l'analisi impiegata nella Nota citata prova che, anche lasciando del tutto arbitrarie le funzioni che individuano l'isteresi, si può procedere a trattazioni sistematiche, senza che le questioni abbiano un grado di indeterminatezza o presentino difficoltà tali da essere inadeguate ai mezzi analitici di cui oggi possiamo disporre.

Come nelle varie questioni di fisica matematica e di meccanica analitica conviene lasciare, finché è possibile, indeterminati i coefficienti, salvo poi fissarli nelle questioni concrete, così in modo analogo appare qui conveniente di lasciare indeterminate le funzioni sopra ricordate, risolvendo le questioni colla maggior generalità possibile, salvo poi fissare le funzioni stesse caso per caso o anche cercar di determinarle, desumendole dal confronto delle formule risolutive con i risultati dell'osservazione. In tal modo si rivela il carattere proprio dei metodi che si riattaccano al concetto di funzioni dipendenti da altre funzioni a cui appartengono quelli impiegati nelle questioni delle equazioni integrali (7) e delle equazioni integro–differenziali.

(6) « Rend. Acc. dei Lincei », sedute 7 e 21 febbraio 1909 [in questo vol.: XVII, pp. 269–275].

(7) « Comptes rendus Acad. Sc. Paris », vol. CXLII, 1906, p. 696 [in questo vol.: IX, pp. 59–62].

XIX.

ALCUNE OSSERVAZIONI SOPRA PROPRIETÀ ATTE AD INDIVIDUARE UNA FUNZIONE

« Rend. Acc. Lincei », ser. 5ª, vol. $XVIII_1$, 1909_1; pp. 263–266.

1. INSIEME CORRISPONDENTE AD UN PUNTO. – Abbiasi un campo finito a due dimensioni [1] limitato da un contorno. Ad ogni punto A interno al campo faremo corrispondere un insieme di elementi interni al campo stesso. Lo diremo l'*insieme corrispondente al punto* A e lo denoteremo con E (A).

Questo insieme potrà essere costituito da un numero finito di punti o di linee o di aree o anche da un insieme enumerabile di tutti questi elementi o di parte di essi.

2. MASSA DELL'INSIEME CORRISPONDENTE AL PUNTO A. – Supponiamo distribuita in E (A) una massa e questa sia tale che ogni elemento di E (A) abbia una massa o una densità positiva in modo che, se il punto A' appartiene ad E (A), la massa contenuta entro ogni cerchio avente per centro A' sia un numero diverso da zero, finito e positivo. Denoteremo con M (A) la massa totale distribuita in E (A). Potrà darsi che un medesimo punto B appartenga contemporaneamente, tanto all'insieme corrispondente ad un punto A, quanto all'insieme corrispondente ad un punto A'. La massa o la densità distribuita in B, considerato come appartenente ad E (A), sarà in generale diversa dalla massa o densità distribuita in B considerato come appartenente ad E (A').

3. POTENZIALE DI UNA FUNZIONE u SULLA MASSA M (A). – Sia $u(x, y)$ una funzione qualsiasi finita e assolutamente continua in tutto il campo σ; ammetteremo che, operando su $u(x, y)$ come sopra una funzione potenziale, si possa calcolarne il potenziale sulla massa M (A) mediante somme o integrali estesi agli elementi costituenti l'insieme E (A). Lo chiameremo il *potenziale della funzione u sulla massa* M (A) e lo indicheremo con $P[u, M(A)]$.

4. CONNESSIONE. — Preso un punto A consideriamo un punto A' appartenente ad E (A), quindi un punto A'' appartenente ad E (A'), poi un punto A''' appartenente ad E (A'') e così di seguito.

(1) È evidente che le osservazioni seguenti possono estendersi al caso di campi di un numero qualunque di dimensioni.

I punti $A, A', A'', A''', \cdots$ diremo che formano un *seguito di punti connessi*.

Diremo poi che *un punto* A *è connesso col contorno di* σ, se, scelto un numero ε comunque piccolo, potremo sempre trovare un seguito finito di punti $A, A', A'', A''', \cdots$ connessi, uno dei quali dista da un punto del contorno meno di ε.

5. TEOREMA I. – *La funzione u assolutamente continua e finita nel campo σ è determinata quando:* 1° *in ogni punto* A *interno al campo si conosce*

$$\frac{1}{M(A)} P[u, M(A)] - u(A);$$

2° *si conoscono i valori della funzione u al contorno del campo*; 3° *tutti i punti interni al campo sono connessi col contorno.*

Per dimostrare questo teorema basterà dimostrare che, se u è nulla al contorno, e per i punti interni si ha

$$\frac{1}{M(A)} P[u, M(A)] - u(A) = 0, \tag{1}$$

u è nulla internamente al campo. Infatti se, sotto queste condizioni, u non fosse sempre nulla internamente al campo, dovrebbe avere nell'interno almeno un massimo o un minimo diversi da zero. Per fissare le idee supponiamo che nel punto interno A si abbia un massimo G. Allora u dovrà avere il valore G in tutti i punti di E (A), perché se, in un punto B di E (A), u avesse un valore G' inferiore a G, si potrebbe trovare un cerchio ω avente per centro B nei punti del quale u sarebbe inferiore a $(G'+G)/2$. La porzione della massa M (A) contenuta entro ω deve essere per dato diversa da zero, finita e positiva; chiamandola m avremmo per conseguenza

$$\frac{1}{M(A)} P[u, M(A)] < G - \frac{G-G'}{2}\frac{m}{M}$$

e quindi, essendo $u(A) = G$, la (1) non potrebbe sussistere.

Ora, se u assume il valore G in tutti i punti di E (A), e se A′ appartiene ad E (A), u dovrà avere il valore G in tutti i punti di E (A′) e così, se A″ appartiene a questo insieme, u dovrà avere il valore G in tutti i punti di E (A″) e così di seguito.

Ora se ogni punto A interno è connesso col contorno, scelto ε piccolo ad arbitrio potremo trovare un punto interno che dista da un punto del contorno meno di ε ed in cui u assume il valore G. Ne segue, per la continuità uniforme di u, che G deve essere minore di qualunque quantità assegnabile, e perciò l'esistenza del massimo interno al campo è impossibile.

TEOREMA II. – *La funzione u finita e assolutamente continua nel campo σ è determinata quando per ogni punto* A *interno al campo si conosce*

$$\frac{1}{\alpha M(A)} P[u, M(A)] - u(A),$$

essendo α un coefficiente il cui limite inferiore è maggiore di 1.

Proviamo che se la (2) è nulla, u deve esser sempre nulla. Infatti se u in A avesse un valore G diverso da zero, dovrebbe esistere un punto A′ appartenente ad E (A) in cui u avrebbe un valore assoluto eguale o superiore ad $\alpha' \mid G \mid$, rappresentando con α' il limite inferiore di α; e di qui si ricava che dovrebbe esistere un punto A″ appartenente ad E (A′) in cui u assumerebbe un valore assoluto, eguale o superiore ad $\alpha'^2 \mid G \mid$ e così di seguito, indefinitamente. Dunque esisterebbero valori di u tali che il loro valore assoluto sarebbe tanto grande quanto ci piace.

TEOREMA III. – *Due funzioni finite e continue assolutamente nel campo* σ, *tali che calcolando in ogni punto interno*

$$\frac{1}{\alpha M(A)} P[u, M(A)] - u(A)$$

si trova per ambedue lo stesso valore, debbono essere eguali fra loro in qualche punto interno o del contorno del campo, se il limite superiore di α *è minore di* 1.

Mi risparmio di dare la dimostrazione ben facile di questa proposizione.

6. ESEMPIO. – Supponiamo che E (A) sia una circonferenza C_A avente il centro in A e la densità con cui è distribuita la massa sia 1. Allora il teorema I del § 5 diverrà: *La funzione u assolutamente continua nel campo σ è determinata quando:* 1° *si conosce per ogni punto* A *interno al campo la differenza fra il valore medio di u sopra C_A e il valore al centro;* 2° *si conoscono i valori di u al contorno del campo:* 3° *tutti i punti interni al campo sono connessi col contorno.*

Supposto ora che il teorema di esistenza delle funzioni armoniche valga pel campo σ, avremo in particolare la proposizione: *se la differenza fra il valore medio di u sopra C_A e il valore al centro sarà nulla, la funzione sarà armonica.*

7. Già da vario tempo ero in possesso delle precedenti osservazioni che non avevo però reso note; mi sono permesso di pubblicarle avendo letto la interessante Nota del prof. E. LEVI inserita in questi Rendiconti: *Sopra una proprietà caratteristica delle funzioni armoniche* (2). Se si suppone la condizione della continuità assoluta della funzione u, affinché possa dirsi che essa è armonica, non è necessario sapere che il suo valore in ogni punto è la media dei valori che assume sopra *tutte* le circonferenze interne al campo e aventi il centro in quel punto; basta sapere che la proprietà sussiste per *una sola* di dette circonferenze, purché esista la connessione col contorno. Ma è da osservare che in tal modo la condizione posta della continuità non può togliersi, anche supponendo la integrabilità di u lungo le circonferenze

(2) Il dott UMBERTO CRUDELI mi comunica che, indipendentemente dalle mie antecedenti ricerche, egli era giunto a dimostrare lo stesso teorema del LEVI ricorrendo alla considerazione di massimi o minimi interni, ma con condizioni più restrittive di quelle poste dal LEVI.

C_A e la integrabilità superficiale. Ciò caratterizza la differenza che passa colla proposizione del LEVI.

Si può riconoscere facilmente questo con un esempio. Supponendo che r rappresenti la distanza del centro da un punto generico, prendiamo una funzione u eguale a $-\log r$ in tutti i punti della corona circolare compresa fra la circonferenza C di raggio 1 e quella C′ concentrica di raggio $1/4$, esclusi però i punti di quest'ultima circonferenza. Si prenda quindi come valore di u in un punto qualsiasi A della circonferenza C′ o interno ad essa il valore medio che assume u in una circonferenza C_A avente il centro in quel punto e giacente internamente alla corona circolare. D'altra parte ad ogni punto A interno alla corona si può far corrispondere una circonferenza C_A avente il centro in quel punto e giacente internamente alla corona stessa (ma non avente nell'interno il cerchio C′) in modo che tutti i punti interni alla corona siano connessi coi punti della circonferenza C di raggio 1 che forma il contorno dell'intero campo circolare che si considera.

Avremo allora: 1° u sarà compreso fra 0 e $\log 4$; 2° la differenza fra il valore medio di u in C_A e il valore di u in A sarà nulla; 3° tutti i punti A, interni a C, saranno connessi col contorno, e nondimeno la funzione u non sarà armonica perché si annullerà al contorno C e non sarà nulla nell'interno del campo. È evidente che u sarà discontinua, e che si potrà limitarne la discontinuità solo ai punti della circonferenza C′.

Farò per ultimo osservare che le considerazioni svolte nel § 5, hanno relazione da un lato col calcolo delle differenze finite, mentre d'altro lato sono intimamente collegate colle questioni delle equazioni integrali; in particolare il Teorema I è collegato coi casi in cui il determinante si annulla.

XX.

SULLE EQUAZIONI INTEGRO-DIFFERENZIALI DELLA TEORIA DELL'ELASTICITÀ

« Rend. Acc. Lincei » ser. 5^a, vol. $XVIII_2$, 1909_2; pp. 295-301.

1. Come ha osservato il sig. PICARD nel suo bell'articolo su: *La mécanique classique et ses approximations successives* (1), la meccanica può distinguersi in *meccanica della ereditarietà* ed in *meccanica della non ereditarietà*. Quest'ultima contempla il caso in cui l'avvenire di un sistema non dipende in un dato istante che dal suo stato attuale o tutto al più dallo stato infinitamente vicino che precede; la prima riguarda invece quei casi in cui ogni azione lascia una eredità nel sistema e lo stato attuale dipende da tutta la storia precedente.

Appartiene alla meccanica della non ereditarietà il problema fondamentale dell'astronomia. Le questioni da lungo tempo studiate di *isteresi*, di *elasticità susseguente* (elastische Nachwirkung), di *trainage*, rientrano nella meccanica della ereditarietà o per dir meglio nella fisica della ereditarietà.

Il signor PAINLEVÉ nell'interessante capitolo dell'opera: *De la méthode dans les Sciences* (2) dedicato alla meccanica, afferma che, sotto un certo aspetto, i problemi di natura ereditaria non sono che apparenti e che una più perfetta conoscenza della costituzione dei corpi potrebbe eliminarli riconducendoli alla forma non ereditaria; ma qualunque sia l'opinione che si possa avere a questo proposito, resta il fatto che la loro considerazione nel momento attuale è necessaria.

Le equazioni che reggono alcuni di questi problemi sono note da lungo tempo. Così citerò quelle della elasticità susseguente nel caso della isotropia che il BOLTZMANN (3) stabiliva partendo da concetti empirici e che con nuove vedute vennero poi ritrovate dal WIECHERT (4).

Però per lo studio generale delle equazioni stesse mancava fino a questi ultimi tempi una analisi che permettesse di trattarle in modo completo.

(1) « Rivista di Scienza », vol. 1°, Bologna 1907.

(2) Paris, Alcan, 1909,

(3) *Zur Theorie der elastischen Nachwirkung*. « Wien. Ber. », *70*, S. 275-306, 1874; « Pogg. Ann. Erg. », 2,. Bd. 7, S. 624, 1876; « Wiss. Abh. », I Bd., S. 616; cfr. anche O. E. MEYER, « Pogg. Ann. », *154*, S. 360.

(4) *Gesetze der elastischen Nachwirkung*. « Wied. Ann. », Bd. 50, S. 335.

Accennerò brevemente alla ragione di questo fatto. I problemi della meccanica e della fisica matematica non ereditaria, in virtù della loro natura, vengono a dipendere da equazioni differenziali ordinarie o a derivate parziali; i dati iniziali sono, come è ben noto, le costanti arbitrarie o le funzioni arbitrarie che nascono nella integrazione delle equazioni stesse. Invece per la trattazione dei problemi della fisica matematica ereditaria l'analisi delle equazioni differenziali non è più sufficiente. Siccome lo stato attuale del sistema dipende dalla sua storia anteriore, così, se questa è individuata da tutti i valori che certi parametri hanno assunto durante un intervallo di tempo, è necessario evidentemente considerare delle *quantità che dipendono da tutti i valori di questi parametri considerati come funzioni del tempo*. Si è così condotti a quegli elementi dell'analisi che ho presi in considerazione e studiati in miei precedenti lavori, ed i metodi che è necessario seguire sono quindi i metodi che si applicano agli elementi stessi.

Tutti questi metodi hanno un unico punto di partenza, cioè il concetto fondamentale del calcolo integrale che consiste in quel passaggio al limite con cui dalla somma di un numero finito di termini si è condotti all'integrale. È così che nel mio primo lavoro del 1887 ho ottenuto lo sviluppo in serie analoga a quelle di TAYLOR di una quantità che dipende da tutti i valori di una funzione in un dato intervallo [5]. Si parta dalla serie ordinaria di potenze di più variabili e si faccia crescere indefinitamente il numero di queste. Sotto certe condizioni i termini di primo grado dànno luogo al limite ad un integrale semplice, quelli di secondo grado ad un integrale doppio, i termini di terzo ad un integrale triplo, e così via di seguito, e si giunge alle serie di cui sopra è parola.

Tale sviluppo di una quantità che dipende da tutti i valori di una funzione porge facilmente una classificazione analoga a quella delle funzioni dei varî gradi, e ci conduce ad un gran numero di questioni [6], prima fra tutte a quella della risoluzione delle equazioni integrali lineari che appare come la naturale estensione della risoluzione dei sistemi di equazioni di primo grado, cioè come il caso limite della risoluzione di uno di tali sistemi quando il numero delle equazioni e delle incognite cresce indefinitamente. È infatti questo il concetto che fino da principio ho posto a base della risoluzione delle equazioni integrali e che mi ha servito nel caso che ho trattato e di cui poi si sono valsi gli autori che hanno continuato negli studii delle equazioni integrali di mano in mano più complicate [7]. Ma per approfondire i problemi della fisica matematica ereditaria la sola considerazione delle equazioni integrali non basta, giacché i problemi si presentano in generale sotto una forma più complessa ed hanno un tipo che non è prettamente quello

(5) *Sopra le funzioni che dipendono da altre funzioni*. Nota I. « Rend. Acc. Lincei », 1887_2, vol. III_2, § 3. [In queste « Opere »: vol. primo, XVII, pp. 294–392].

(6) Cfr. « Comptes Rendus des Seances de l'Académie des Sciences », vol. 142, p. 691, 1er Sem. 1906_1. [In questo vol.: IX, pp. 59–62].

(7) *Sulla inversione degli integrali definiti*, Nota I. « Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino », vol. XXXI, 1896. [In queste «Opere»: vol. secondo, XVIII, pp. 216–225].

delle equazioni integrali, come non è quello delle equazioni differenziali, sibbene un tipo misto. Per questa ragione ho chiamato le equazioni che così si trovano *equazioni integro-differenziali*, nome che pone in luce questa loro doppia natura, ed ho indicato in una Nota, pubblicata in questi Rendiconti, il principio con cui esse possono trattarsi quando siano di tipo ellittico (8).

Ho osservato nella Nota suddetta che in generale il problema della risoluzione delle equazioni integro-differenziali costituisce un problema essenzialmente distinto dai problemi delle equazioni differenziali e da quelli ordinari delle equazioni integrali, tanto che una nuova analisi è necessaria per la loro trattazione, analisi che risulta dal connubio dei principî che servono alle due classi di questioni. Essa consiste nel considerare una equazione integro-differenziale come il caso limite di un sistema di equazioni a derivate parziali il cui numero cresca indefinitamente.

Però vi sono dei casi in cui i metodi corrispondenti alle equazioni differenziali ed alle equazioni integrali possono, per dir così, staccarsi ossia applicarsi l'uno successivamente all'altro. In questi casi la questione non è più essenzialmente distinta dalle due questioni parziali e non costituisce, come nel caso generale, un problema nuovo dell'analisi.

A mettere in luce questo punto è molto opportuno trattare la questione ereditaria nel caso della elasticità. In questa Nota mi permetto di porre i principî generali riserbandomi di applicarli in un lavoro successivo.

Faccio uso senz'altro della denominazione di *ereditarietà* che è la più opportuna di tutte e tralascio le altre denominazioni. In una Nota precedente (9) in cui ho considerato le relazioni fra le equazioni integro-differenziali e la elettrodinamica ho usato la parola isteresi. Essa può dar luogo a delle ambiguità giacché varii autori l'hanno usata con diverso significato. Io mi riattaccavo al senso generale attribuitole da WARBURG (10) e certamente escludevo dalle mie considerazioni la così detta isteresi elettrotecnica; così, per citare fra gli altri un solo fatto, la magnetizzazione permanente esce dal quadro delle considerazioni che io svolgevo. Io ho inteso (per fissare le cose colla maggior precisione) tanto nella Nota ora citata che nella presente, di riferirmi al caso il più semplice della *ereditarietà* che può denotarsi col nome di *ereditarietà lineare*, in quanto gli elementi che individuano la storia anteriore del sistema si ammette che figurino linearmente nelle formule. Dal punto di vista analitico si ha così il vantaggio di trattare sempre equazioni di tipo lineare a cui è particolarmente dovuta la semplicità della soluzione.

2. Prese come equazioni indefinite fondamentali dell'equilibrio elastico le consuete equazioni

(8) « Rend. Acc. dei Lincei », ser. 5ª, vol. XVIII₁ 1909₁, pp. 167-174 [in questo vol.: XVII, pp. 269-275].

(9) « Rend. Acc. dei Lincei », ser. 5ª, vol. XVIII₁, 1909₁, pp. 203-211 [in questo vol.: XVIII, pp. 276-283].

(10) *Rapports présentés au Congrès international de Physique*, vol. II, p. 512. Paris 1900.

$$\text{(I)}\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial t_{11}}{\partial x}+\dfrac{\partial t_{12}}{\partial y}+\dfrac{\partial t_{13}}{\partial z}=\rho\,X \\[2mm] \dfrac{\partial t_{21}}{\partial x}+\dfrac{\partial t_{22}}{\partial y}+\dfrac{\partial t_{23}}{\partial z}=\rho\,Y \\[2mm] \dfrac{\partial t_{31}}{\partial x}+\dfrac{\partial t_{32}}{\partial y}+\dfrac{\partial t_{33}}{\partial z}=\rho\,Z \end{cases}$$

$$\text{(II)}\qquad \begin{cases} t_{11}\cos nx+t_{12}\cos ny+t_{13}\cos nz=X_\sigma \\ t_{21}\cos nx+t_{22}\cos ny+t_{23}\cos nz=Y_\sigma \\ t_{31}\cos nx+t_{32}\cos ny+t_{33}\cos nz=Z_\sigma , \end{cases}$$

nelle quali le t_{rs} costituiscono le caratteristiche della tensione, cioè lo *stress*, mentre ρX, ρY, ρZ; X_σ, Y_σ, Z_σ sono rispettivamente le componenti delle forze di massa e delle tensioni superficiali, ed n è la normale interna al contorno, potremo stabilire come relazioni che definiscono le condizioni di ereditarietà in ogni istante t

$$\text{(III)}\qquad t_{is}(t)=\sum_{hk} a_{is|hk}\,\gamma_{hk}(t)+\int_{t_0}^{t}\sum_{hk}\varphi_{is|hk}(t,\tau)\,\gamma_{hk}(\tau)\,d\tau,$$

ove le γ_{hk} costituiscono le caratteristiche della deformazione, cioè lo *strain*. Le somme che figurano nelle eguaglianze precedenti sono estese a tutte le combinazioni con ripetizione di h e k $(h, k = 1, 2, \cdots, 6)$. Con t_0 si denota l'istante anteriormente al quale la ereditarietà è trascurabile. In generale ammetteremo che i coefficienti $a_{is|hk}$ siano funzioni delle coordinate x, y, z dei punti del corpo elastico e così pure le $\varphi_{is|hk}$ siano funzioni delle stesse quantità, oltre che delle variabili t, v, messe specialmente in evidenza nelle formule (III), e solo nel caso della omogeneità le ammetteremo indipendenti dalle coordinate stesse.

Allorché si trascurano i termini integrali le equazioni precedenti esprimono la legge di HOOKE generalizzata; i termini integrali costituiscono in prima approssimazione la correzione dovuta alla ereditarietà quando si ammetta che tali condizioni consistano nell'aggiunta di funzioni dipendenti da tutti i valori di τ compresi fra t_0 e t, che inoltre esse siano sviluppabili in serie analoghe a quelle di TAYLOR e finalmente che si possano trascurare nei detti sviluppi tutti i termini non lineari nelle γ_{rs}. Le (III) esprimono le relazioni più generali della *ereditarietà lineare elastica*.

Per tutto ciò che si riferisce alla risoluzione di queste equazioni integrali, al significato dei coefficienti $\varphi_{is|hk}$, al *principio del cappio chiuso* mi riferisco completamente a quanto fu detto nel caso analogo della elettrodinamica nella mia Nota già citata [11].

(11) « Rend. Acc. dei Lincei », serie 5ª, vol. XVIII₁, pp. 203-211, Art. II e III [in questo vol.: XVIII, pp. 276-283].

Denotando con u, v, w le componenti dello spostamento dei punti del corpo elastico avremo:

$$\text{(IV)}\quad \begin{cases} \gamma_{11} = \dfrac{\partial u}{\partial x} \quad , & \gamma_{22} = \dfrac{\partial v}{\partial y} \quad , & \gamma_{33} = \dfrac{\partial w}{\partial z} \\ \gamma_{23} = \dfrac{\partial v}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial y} \quad , & \gamma_{31} = \dfrac{\partial w}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial z} \quad , & \gamma_{12} = \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$$

onde le (I) costituiranno delle equazioni *integro-differenziali* per rapporto alle u, v, w.

3. Lo studio di queste equazioni si fa accoppiandole ad altre equazioni pure integro-differenziali che chiameremo *aggiunte*. Esse sono

$$\text{(I')}\quad \begin{cases} \dfrac{\partial t'_{11}}{\partial x} + \dfrac{\partial t'_{12}}{\partial y} + \dfrac{\partial t'_{13}}{\partial z} = \rho X' \\ \dfrac{\partial t'_{21}}{\partial x} + \dfrac{\partial t'_{22}}{\partial y} + \dfrac{\partial t'_{23}}{\partial z} = \rho Y' \\ \dfrac{\partial t'_{31}}{\partial x} + \dfrac{\partial t'_{32}}{\partial y} + \dfrac{\partial t'_{33}}{\partial z} = \rho Z' \end{cases}$$

$$\text{(II')}\quad \begin{cases} t'_{11} \cos nx + t'_{12} \cos ny + t'_{13} \cos nz = X'_\sigma \\ t'_{21} \cos nx + t'_{22} \cos ny + t'_{23} \cos nz = Y'_\sigma \\ t'_{31} \cos nx + t'_{32} \cos ny + t'_{33} \cos nz = Z'_\sigma \end{cases}$$

$$\text{(III')}\quad t'_{is}(t) = \sum_{hk} a_{hk|is} \gamma'_{hk}(t) + \int_{t_0}^{T} \sum_{hk} \varphi_{hk|is}(\tau, t)\, \gamma'_{hk}(\tau)\, d\tau$$

$$\text{(IV')}\quad \begin{cases} \gamma'_{11} = \dfrac{\partial u'}{\partial x} \quad , & \gamma'_{22} = \dfrac{\partial v'}{\partial y} \quad , & \gamma'_{33} = \dfrac{\partial w'}{\partial z} \\ \gamma'_{23} = \dfrac{\partial v'}{\partial z} + \dfrac{\partial w'}{\partial y} \quad , & \gamma'_{31} = \dfrac{\partial w'}{\partial x} + \dfrac{\partial u'}{\partial z} \quad , & \gamma'_{12} = \dfrac{\partial u'}{\partial y} + \dfrac{\partial v'}{\partial x} . \end{cases}$$

La ragione di questo collegamento risiede nella esistenza di un teorema di reciprocità fra le soluzioni dei due sistemi di equazioni integro-differenziali, che è la base di tutto il metodo di integrazione.

Infatti può dimostrarsi facilmente che

$$\text{(1)}\quad \int_{t_0}^{T} \left\{ \int_S (\rho X u' + \rho Y v' + \rho Z w')\, dS + \int_\sigma (X_\sigma u' + Y_\sigma v' + Z_\sigma w')\, d\sigma \right\} dt$$

$$= \int_{t_0}^{T} \left\{ \int_S (\rho X' u + \rho Y' v + \rho Z' w)\, dS + \int_\sigma (X'_\sigma u + Y'_\sigma v + Z'_\sigma w)\, d\sigma \right\} dt.$$

Il teorema racchiuso nella formula precedente corrisponde al teorema del BETTI, come la formula (III) della mia Nota sulle equazioni integro-differenziali corrisponde al lemma di GREEN.

4. Un'altra formula fondamentale che può dedursi dalle (I), (II), (III), (IV) è la seguente:

$$
(2) \qquad \int_S (\rho X u + \rho Y v + \rho Z w)\, dS + \int_\sigma (X_\sigma u + Y_\sigma v + Z_\sigma w)\, d\sigma
$$

$$
= - \int_S \sum_{is} \sum_{hk} a_{is|hk}\, \gamma_{hk}(t)\, \gamma_{is}(t)\, dS - \int_{t_0}^{t} d\tau \int_S \sum_{is} \sum_{hk} \varphi_{is|hk}(t, \tau)\, \gamma_{is}(t)\, \gamma_{hk}(\tau)\, dS .
$$

Supposti durante l'intervallo di tempo (t_0 T) nulle le forze di massa e nullo il trinomio $X_\sigma u + Y_\sigma v + Z_\sigma w$, il secondo membro si annullerà. Ora la forma quadratica

$$
(3) \qquad \sum_{is} \sum_{hk} a_{is|hk}\, \gamma_{hk}(t)\, \gamma_{is}(t)
$$

potrà ricondursi alla forma

$$
\sum_{rl} e_{rl}\, g_{rl}^2(t)
$$

passando con una sostituzione ortogonale dalle sei quantità $\gamma_{rl}(t)$ alle $g_{rl}(t)$. Supponiamo che la forma (3) sia definita, allora le e_{rl} saranno tutte dello stesso segno e non nulle. Otterremo quindi una equazione della forma

$$
\int_S \sum_{rl} e_{rl}\, g_{rl}^2(t)\, dS + \int_{t_0}^{t} d\tau \int_S \sum_{is} \sum_{hk} \psi_{is|hk}(t, \tau)\, g_{is}(t)\, g_{hk}(\tau)\, dS = 0 .
$$

Se le $\varphi_{is|hk}$ saranno finite e continue, tali saranno le $\psi_{is|hk}$, onde in questa ipotesi, applicando lo stesso procedimento che ho tenuto nel § 3 della mia Nota sulle equazioni integro-differenziali, potrà dimostrarsi che le $g_{rl}(t)$ e quindi le $\gamma_{is}(t)$ saranno nulle in tutto l'intervallo di tempo (t_0 T).

Ne segue che, sotto le indicate condizioni, *note le forze di massa e gli spostamenti superficiali (oppure le tensioni superficiali) durante un certo intervallo di tempo, la deformazione del corpo sarà determinata in tutto l'intervallo stesso.*

Le applicazioni dei risultati precedenti verranno fatte in una prossima Nota.

XXI.

EQUAZIONI INTEGRO-DIFFERENZIALI DELLA ELASTICITÀ NEL CASO DELLA ISOTROPIA

« Rend. Acc. Lincei », ser. 5ª, vol. $XVIII_2$, 1909_2; pp. 577-586.

1. Nel caso della isotropia è facile vedere la forma che assumono le equazioni della ereditarietà per i corpi elastici. Riferendosi alle equazioni (III) della mia Nota: *Equazioni integro-differenziali della teoria dell'elasticità* [1] si avrà che le equazioni stesse non debbono alterarsi cambiando verso a ciascuno degli assi coordinati. Osservando i cambiamenti di segno che in tal modo vengono ad assumere le t_{rs} e le γ_{rs}, si vede subito quali sono i termini che debbono eliminarsi nei secondi membri delle (III). Ma queste equazioni non debbono alterarsi scambiando gli assi fra loro, quindi dovremo avere

$$(1)\quad \begin{cases} t_{rr} = L\theta(t) + 2\,K\gamma_{rr}(t) + \int_{t_0}^{t} (\varphi(t,\tau)\,\theta(\tau) + 2\,\psi(t,\tau)\,\gamma_{rr}(\tau))\,d\tau \\ t_{rs} = h\gamma_{rs}(t) + \int_{t_0}^{t} \chi(t,\tau)\,\gamma_{rs}(\tau)\,d\tau, \qquad r \gtrless s \\ \theta = \gamma_{11} + \gamma_{22} + \gamma_{33}. \end{cases}$$

Dando ora agli assi una orientazione arbitraria, le equazioni debbono pure rimanere inalterate, e di qui si conclude che $K = h$, $\psi = \chi$, e perciò

$$(2)\qquad t_{rs} = K\gamma_{rs}(t) + \int_{t_0}^{t} \psi(t,\tau)\,\gamma_{rs}(\tau)\,d\tau, \qquad r \gtrless s\ [2].$$

Nel caso delle omogeneità (che noi appunto considereremo) L e K saranno costanti e φ e ψ indipendenti da x, y, z. Ammetteremo L e K dello stesso segno.

Le equazioni integro-differenziali nelle componenti degli spostamenti u, v, w risulteranno quindi

(1) « Rend. Acc. dei Lincei », seduta del 7 novembre 1909. [In questo vol.: XX, pp. 288-293].

(2) Cfr. BOLTZMANN, *Zur theorie der elastischen Nachwirkung*. « Pogg. Ann. Erg. », Bd. 7, S. 624, 1876.

$$
(3)\quad \left\{
\begin{aligned}
& K\Delta^2 u(t) + (L+K)\frac{\partial\theta(t)}{\partial x} \\
& \quad + \int_{t_0}^{t}\left[\psi(t,\tau)\,\Delta^2 u(\tau) + (\varphi(t,\tau)+\psi(t,\tau))\frac{\partial\theta(\tau)}{\partial x}\right]d\tau = \rho X(t) \\
& K\Delta^2 v(t) + (L+K)\frac{\partial\theta(t)}{\partial y} \\
& \quad + \int_{t_0}^{t}\left[\psi(t,\tau)\,\Delta^2 v(\tau) + (\varphi(t,\tau)+\psi(t,\tau))\frac{\partial\theta(\tau)}{\partial y}\right]d\tau = \rho Y(t) \\
& K\Delta^2 w(t) + (L+K)\frac{\partial\theta(t)}{\partial z} \\
& \quad + \int_{t_0}^{t}\left[\psi(t,\tau)\,\Delta^2 w(\tau) + (\varphi(t,\tau)+\psi(t,\tau))\frac{\partial\theta(\tau)}{\partial z}\right]d\tau = \rho Z(t).
\end{aligned}
\right.
$$

2. Dalle equazioni precedenti segue facilmente

$$
(4)\quad (L+2K)\,\Delta^2\theta(t) + \int_{t_0}^{t}(\varphi(t,\tau)+2\psi(t,\tau))\,\Delta^2\theta(\tau)\,d\tau
= \frac{\partial(\rho X)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho Y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho Z)}{\partial z},
$$

$$
(5)\quad \left\{
\begin{aligned}
& K\Delta^2\tilde\omega_1(t) + \int_{t_0}^{t}\psi(t,\tau)\,\Delta^2\tilde\omega_1(\tau)\,d\tau = \frac{\partial(\rho Z)}{\partial y} - \frac{\partial(\rho Y)}{\partial z} \\
& K\Delta^2\tilde\omega_2(t) + \int_{t_0}^{t}\psi(t,\tau)\,\Delta^2\tilde\omega_2(\tau)\,d\tau = \frac{\partial(\rho X)}{\partial z} - \frac{\partial(\rho Z)}{\partial x} \\
& K\Delta^2\tilde\omega_3(t) + \int_{t_0}^{t}\psi(t,\tau)\,\Delta^2\tilde\omega_3(\tau)\,d\tau = \frac{\partial(\rho Y)}{\partial x} - \frac{\partial(\rho X)}{\partial y}
\end{aligned}
\right.
$$

ove

$$
\tilde\omega_1 = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\ ,\quad \tilde\omega_2 = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\ ,\quad \tilde\omega_3 = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}.
$$

Quindi, mediante la risoluzione di equazioni integrali, potremo calcolare $\Delta^2\theta(t)$, $\Delta^2\tilde\omega_1(t)$, $\Delta^2\tilde\omega_2(t)$, $\Delta^2\tilde\omega_3(t)$.

3. Per esprimere con semplicità la risoluzione di queste equazioni integrali e di altre analoghe, che avremo occasione di considerare in seguito, rappresentiamo l'operazione con cui si passa dalla f alla φ

$$
(6)\quad Kf(t) + \int_{t_0}^{t}\psi(t,\tau)\,f(\tau)\,d\tau = \varphi(t)
$$

mediante

$$(\mathrm{I}) \qquad \varphi = \mathrm{A}_1 f$$

e inversamente scriviamo

$$(\mathrm{I}') \qquad f = \mathrm{A}_1^{-1} \varphi .$$

Quest'ultima operazione consiste nella risoluzione della equazione integrale precedente, la quale si fa colle regole note che ho dato nei miei lavori sulla risoluzione delle equazioni integrali.

Analogamente l'operazione corrispondente a

$$(7) \qquad (\mathrm{L} + 2\,\mathrm{K}) f(t) + \int_{t_0}^{t} [\varphi(t, \tau) + 2\,\psi(t, \tau)] f(\tau)\, d\tau = \varphi(t)$$

denotiamola con A_2, cioè scriviamo

$$(\mathrm{II}) \qquad \varphi = \mathrm{A}_2 f \quad , \quad f = \mathrm{A}_2^{-1} \varphi .$$

4. Le (4) e (5) allora si scriveranno

$$(4') \qquad \mathrm{A}_2 \Delta^2 \theta = \frac{\partial(\rho \mathrm{X})}{\partial x} + \frac{\partial(\rho \mathrm{Y})}{\partial y} + \frac{\partial(\rho \mathrm{Z})}{\partial z}$$

$$(5') \qquad \left\{ \begin{aligned} \mathrm{A}_1 \Delta^2 \tilde{\omega}_1 &= \frac{\partial(\rho \mathrm{Z})}{\partial y} - \frac{\partial(\rho \mathrm{Y})}{\partial z} \\ \mathrm{A}_1 \Delta^2 \tilde{\omega}_2 &= \frac{\partial(\rho \mathrm{X})}{\partial z} - \frac{\partial(\rho \mathrm{Z})}{\partial x} \\ \mathrm{A}_1 \Delta^2 \tilde{\omega}_3 &= \frac{\partial(\rho \mathrm{Y})}{\partial x} - \frac{\partial(\rho \mathrm{X})}{\partial y} \end{aligned} \right.$$

e quindi

$$(4'') \qquad \Delta^2 \theta = \mathrm{A}_2^{-1} \left(\frac{\partial(\rho \mathrm{X})}{\partial x} + \frac{\partial(\rho \mathrm{Y})}{\partial y} + \frac{\partial(\rho \mathrm{Z})}{\partial z} \right)$$

$$(5'') \qquad \left\{ \begin{aligned} \Delta^2 \tilde{\omega}_1 &= \mathrm{A}_1^{-1} \left(\frac{\partial(\rho \mathrm{Z})}{\partial y} - \frac{\partial(\rho \mathrm{Y})}{\partial z} \right) \\ \Delta^2 \tilde{\omega}_2 &= \mathrm{A}_1^{-1} \left(\frac{\partial(\rho \mathrm{X})}{\partial z} - \frac{\partial(\rho \mathrm{Z})}{\partial x} \right) \\ \Delta^2 \tilde{\omega}_3 &= \mathrm{A}_1^{-1} \left(\frac{\partial(\rho \mathrm{Y})}{\partial x} - \frac{\partial(\rho \mathrm{X})}{\partial y} \right). \end{aligned} \right.$$

Dalle (3) segue

$$\mathrm{K} \Delta^4 u(t) + \int_{t_0}^{t} \psi(t, \tau)\, \Delta^4 u(\tau)\, d\tau$$

$$= \Delta^2 (\rho \mathrm{X}) - (\mathrm{L} + \mathrm{K}) \frac{\partial \Delta^2 \theta(t)}{\partial x} - \int_{t_0}^{t} (\varphi(t, \tau) + \psi(t, \tau)) \frac{\partial \Delta^2 \theta(\tau)}{\partial x}\, d\tau$$

ossia

$$\mathrm{A}_1 \Delta^4 u = \Delta^2 (\rho \mathrm{X}) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial(\rho \mathrm{X})}{\partial x} + \frac{\partial(\rho \mathrm{Y})}{\partial y} + \frac{\partial(\rho \mathrm{Z})}{\partial z} \right) + \mathrm{A}_1 \frac{\partial \Delta^2 \theta}{\partial x}$$

e come questa se ne hanno altre due analoghe. Da esse, tenendo conto della (4''), segue

$$(8)\qquad \begin{cases} \Delta^4 u = A_1^{-1}\,\Delta^2(\rho X) + (A_2^{-1} - A_1^{-1})\,\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial(\rho X)}{\partial x} + \dfrac{\partial(\rho Y)}{\partial y} + \dfrac{\partial(\rho Z)}{\partial z}\right) \\ \Delta^4 v = A_1^{-1}\,\Delta^2(\rho Y) + (A_2^{-1} - A_1^{-1})\,\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial(\rho X)}{\partial x} + \dfrac{\partial(\rho Y)}{\partial y} + \dfrac{\partial(\rho Z)}{\partial z}\right) \\ \Delta^4 w = A_1^{-1}\,\Delta^2(\rho Z) + (A_2^{-1} - A_1^{-1})\,\dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{\partial(\rho X)}{\partial x} + \dfrac{\partial(\rho Y)}{\partial y} + \dfrac{\partial(\rho Z)}{\partial z}\right). \end{cases}$$

È dunque possibile trasformare le equazioni integro-differenziali (3) nelle equazioni differenziali precedenti in cui i secondi membri sono funzioni note.

Nel caso in cui manchino le forze di massa, le (4''), (5''), (8) si riducono a

$$\Delta^2\theta = \Delta^2\tilde{\omega}_1 = \Delta^2\tilde{\omega}_2 = \Delta^2\tilde{\omega}_3 = \Delta^4 u = \Delta^4 v = \Delta^4 w = 0.$$

Sotto un certo aspetto quindi la forma integro-differenziale delle equazioni dell'elasticità nel caso ereditario non è che apparente, quando si tratta di corpi isotropi. Le condizioni che legano fra loro le u, v, w conservano però sempre la forma integro-differenziale e così pure le condizioni al contorno, quando si suppongono date le tensioni.

5. Le relazioni corrispondenti alle (1) e (2) per le equazioni *aggiunte* saranno

$$(1')\qquad t'_{rr} = L\theta'(t) + 2K\gamma'_{rr}(t) + \int_t^T (\varphi(\tau,t)\,\theta'(t) + 2\psi(\tau,t)\,\gamma'_{rr}(\tau))\,d\tau$$

$$(2')\qquad t'_{rs} = K\gamma_{rs}(t) + \int_t^T \psi(\tau,t)\,\gamma'_{rs}(\tau)\,d\tau\,, \qquad r \gtrless s$$

e le *equazioni aggiunte* risulteranno, posto $\theta' = \gamma'_{11} + \gamma'_{22} + \gamma'_{33}$,

$$(3')\qquad \begin{cases} K\Delta_2 u'(t) + (L+K)\dfrac{\partial\theta'(t)}{\partial x} \\ \qquad + \displaystyle\int_t^T \left(\psi(\tau,t)\,\Delta^2 u'(\tau) + (\varphi(\tau,t) + \psi(\tau,t))\,\dfrac{\partial\theta'(\tau)}{\partial x}\right) d\tau = \rho X' \\ K\Delta^2 v'(t) + (L+K)\dfrac{\partial\theta'(t)}{\partial y} \\ \qquad + \displaystyle\int_t^T \left(\psi(\tau,t)\,\Delta^2 v'(\tau) + (\varphi(\tau,t) + \psi(\tau,t))\,\dfrac{\partial\theta'(\tau)}{\partial y}\right) d\tau = \rho Y' \\ K\Delta^2 w'(t) + (L+K)\dfrac{\partial\theta'(t)}{\partial z} \\ \qquad + \displaystyle\int_t^T \left(\psi(\tau,t)\,\Delta^2 w'(t) + (\varphi(\tau,t) + \psi(\tau,t))\,\dfrac{\partial\theta'(\tau)}{\partial z}\right) d\tau = \rho Z'. \end{cases}$$

Se si suppongono nulle X', Y', Z', risulterà evidentemente, anche per le equazioni aggiunte,

$$\Delta^2 \theta' = \Delta^2 \tilde{\omega}'_1 = \Delta^2 \tilde{\omega}'_2 = \Delta^2 \tilde{\omega}'_3 = \Delta^4 u' = \Delta^4 v' = \Delta^4 w' = 0$$

in cui

$$\tilde{\omega}'_1 = \frac{\partial w'}{\partial y} - \frac{\partial v'}{\partial z} \quad , \quad \tilde{\omega}'_2 = \frac{\partial u'}{\partial z} - \frac{\partial w'}{\partial x} \quad , \quad \tilde{\omega}'_3 = \frac{\partial v'}{\partial x} - \frac{\partial u'}{\partial y} .$$

6. Sempre supponendo $X' = Y' = Z' = 0$, avremo immediatamente delle soluzioni particolari delle (3′)

1° Se F è armonica, avremo la soluzione

$$u' = \frac{\partial F}{\partial x} \quad , \quad v' = \frac{\partial F}{\partial y} \quad , \quad w' = \frac{\partial F}{\partial z} ; \tag{9}$$

2° Se F_1, F_2, F_3 sono armoniche potrà ottenersi la soluzione

$$u' = \frac{\partial F_2}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial y} \quad , \quad v' = \frac{\partial F_3}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial z} \quad , \quad w' = \frac{\partial F_1}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial x} ; \tag{10}$$

3° Se Φ_1, Φ_2, Φ_3 sono biarmoniche e le tre derivate parziali di

$$\Delta^2 \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} + \frac{\partial \Phi_3}{\partial z} \right)$$

rispetto ad x, y, z sono indipendenti da t, vi sarà la soluzione

$$\left\{ \begin{aligned} u &= \alpha(T, t) \Delta^2 \Phi_1 + \beta(T, t) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} + \frac{\partial \Phi_3}{\partial z} \right) \\ v &= \alpha(T, t) \Delta^2 \Phi_2 + \beta(T, t) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} + \frac{\partial \Phi_3}{\partial z} \right) \\ w &= \alpha(T, t) \Delta^2 \Phi_3 + \beta(T, t) \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} + \frac{\partial \Phi_3}{\partial z} \right) \end{aligned} \right. \tag{11}$$

quando si prendano α e β tali che sia soddisfatta la condizione integrale

$$\begin{aligned} (L + 2K)\beta(T, t) + \int_t^T [\varphi(\tau, t) + 2\psi(\tau, t)] \beta(T, \tau) d\tau \\ + (L + K)\alpha(T, t) + \int_t^T [\varphi(\tau, t) + \psi(\tau, t)] \alpha(T, t) d\tau = 0. \end{aligned} \tag{12}$$

7. Prendiamo ora $F = 1/r$, in cui r denota la distanza di un polo O, di coordinate ξ, η, ζ, dal punto generico x, y, z e consideriamo le (9) come soluzioni delle equazioni aggiunte con i secondi membri nulli. Le γ'_{rs} saranno indipendenti da t, e sarà $\theta' = 0$, quindi avremo

$$u' = \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \quad , \quad v' = \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} \quad , \quad w' = \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} .$$

$$t'_{11} = 2\,M(T\,,t)\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x^2}\,,\quad t'_{22} = 2\,M(T\,,t)\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y^2}\,,\quad t'_{33} = 2\,M(T\,,t)\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z^2}$$

$$t'_{23} = 2\,M(T\,,t)\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y\,\partial z}\,,\quad t'_{31} = 2\,M(T\,,t)\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z\,\partial x}\,,\quad t'_{12} = 2\,M(T\,,t)\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x\,\partial y}$$

$$X'_\sigma = 2\,M(T\,,t)\frac{d}{dn}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}\,,\quad Y'_\sigma = 2\,M(T\,,t)\frac{d}{dn}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y}\,,\quad Z'_\sigma = 2\,M(T\,,t)\frac{d}{dn}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}\,,$$

in cui si è posto

$$M(T\,,t) = K + \int_t^T \psi(\tau\,,t)\,d\tau\,.$$

Queste formule differiscono da quelle che si hanno impiegando la prima soluzione ausiliaria del BETTI, in quanto che alla costante K è sostituita M che è funzione di T e t.

Applicando la formula (1) della Nota precedente ed escludendo il polo O, interno ad S, mediante una sfera avente il centro O, facendo infine tendere indefinitamente a zero il raggio della sfera, si trova al limite

$$\int_{t_0}^T \left\{ \int_\sigma \Sigma X_\sigma(t)\,u'\,d\sigma + \int_S \Sigma \rho X(t)\,u'\,dS - \int_\sigma \Sigma X'_\sigma\,u(t)\,d\sigma \right\} dt$$

$$= \int_{t_0}^T \left\{ \frac{16}{3}\pi M(T\,,t)\,\theta(\xi\,,\eta\,,\zeta\,,t) \right.$$

$$\left. + \frac{4}{3}\pi\,(t_{11}(\xi\,,\eta\,,\zeta,t) + t_{22}(\xi\,,\eta\,,\zeta\,,t) + t_{33}(\xi\,,\eta\,,\zeta\,,t)) \right\} dt.$$

Derivando ambo i membri rispetto a T, con facili trasformazioni di integrali, si ha

$$(13) \qquad \int_\sigma \Sigma X_\sigma \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}\,d\sigma + \int_\sigma \Sigma \rho X \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}\,dS - \int_\sigma \Sigma A_1\,u\cdot\frac{d}{\partial n}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}\,d\sigma = 4\,\pi\,A_2\,\theta$$

o anche

$$(13') \quad \int_\sigma \Sigma A_2^{-1}\,X_\sigma\cdot\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}\,d\sigma + \int_S \Sigma A_2^{-1}\,(\rho X)\cdot\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}\,dS - \int_\sigma \Sigma A_2^{-1}\,A_1\,u\cdot\frac{d}{dn}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}\,d\sigma = 4\pi\theta.$$

8. Se nelle (10) prendiamo $F_1 = 1/r$, $F_2 = 0$, $F_3 = 0$, con procedimento del tutto analogo, si giunge alla formula

$$(14)\qquad \int_\sigma \left(Z_\sigma \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} - Y_\sigma \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} \right) d\sigma + \int_S \left(\rho Z \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} - \rho Y \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} \right) dS$$

$$- \int_\sigma \left\{ \left(\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y\, \partial x} \cos nz - \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z\, \partial x} \cos ny \right) A_1 u \right.$$

$$+ \left(- \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x\, \partial z} \cos nx - 2 \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y\, \partial z} \cos ny + \left(\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z^2} \right) \cos nz \right) A_1 v$$

$$\left. + \left(\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y\, \partial x} \cos nx + \left(\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z^2} \right) \cos ny + 2 \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y\, \partial z} \cos nz \right) A_1 w \right\} d\sigma$$

$$= 4\pi\, A_1\, \bar{\omega}_1 (\xi, \eta, \zeta, t),$$

che si trasforma nell'altra

$$(14')\qquad \int_\sigma \left(A_1^{-1} Z_\sigma \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} - A_1^{-1} Y_\sigma \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} \right) d\sigma + \int_S \left(A_1^{-1} (\rho Z) \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} - A_1^{-1} (\rho Y) \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} \right) dS$$

$$- \int_\sigma \left\{ \left(\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y\, \partial x} \cos nx - \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z\, \partial x} \cos ny \right) u \right.$$

$$+ \left(- \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z\, \partial x} \cos nx - 2 \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y\, \partial z} \cos ny + \left(\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z^2} \right) \cos nz \right) v$$

$$\left. + \left(\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y\, \partial x} \cos nx + \left(\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z^2} \right) \cos ny + 2 \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y\, \partial z} \cos nz \right) w \right\} d\sigma$$

$$= 4\pi\, \bar{\omega}_1 (\xi, \eta, \zeta, t).$$

Come questa formula se ne hanno altre due analoghe.

9. – Confrontando le varie formule che abbiamo ora trovate colle ordinarie *equazioni del* B*ETTI* (3) relative all'equilibrio elastico, troviamo che esse hanno la stessa forma di queste, soltanto le componenti degli spostamenti, delle rotazioni, delle forze e la dilatazione vanno nelle prime assoggettate alle operazioni funzionali A_1, A_2 o alle loro inverse. Bastano dunque le ordinarie formule del BETTI in unione con queste operazioni funzionali per trattare le equazioni integro-differenziali della elasticità nel caso della isotropia.

Chiamiamo $A_1 u$, $A_1 v$, $A_1 w_1$; $A_1 \bar{\omega}_1$, $A_1 \bar{\omega}_2$, $A_1 \bar{\omega}_3$; $A_2 \theta$ rispettivamente gli *pseudospostamenti*, le *pseudorotazioni* e la *pseudodilatazione*; allora la (13), la (14) e le sue analoghe potranno interpretarsi mediante il teorema:

(3) E. BETTI, *Teoria della elasticità*, « Nuovo Cimento », 1872-73.

Per passare dal caso della non ereditarietà a quello della ereditarietà, nel caso di corpi solidi elastici isotropi, basterà sostituire nelle formule del BETTI, *relative all'equilibrio elastico, agli spostamenti, alle rotazioni ed alla dilatazione, rispettivamente gli pseudospostamenti, le pseudorotazioni e la pseudodilatazione.*

10. Prendiamo nelle formule (11), analogamente a quanto fa il SOMIGLIANA [4], nel caso non ereditario,

$$\Phi_1 = \frac{r}{2} \quad , \quad \Phi_2 = 0 \quad , \quad \Phi_3 = 0 ,$$

otterremo allora

$$u' = \alpha \frac{1}{r} + \frac{\beta}{2} \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} \quad , \quad v' = \frac{\beta}{2} \frac{\partial^2 r}{\partial x \, \partial y} \quad , \quad w' = \frac{\beta}{2} \frac{\partial^2 r}{\partial x \, \partial z}$$

e se scegliamo $\alpha(\mathrm{T}, t)$ in modo che

$$\mathrm{K}\alpha(\mathrm{T}, t) + \int_t^{\mathrm{T}} \psi(\tau, t)\, \alpha(\mathrm{T}, \tau)\, d\tau = 1 \tag{15}$$

e poniamo

$$\mathrm{N}(\mathrm{T}, t) = \mathrm{K}\beta(\mathrm{T}, t) + \int_t^{\mathrm{T}} \psi(\tau, t)\, \beta(\mathrm{T}, \tau)\, d\tau , \tag{16}$$

avremo

$$\mathrm{X}'_\sigma = \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} + \mathrm{N}(\mathrm{T}, t) \left(\frac{\partial}{\partial n} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} - 2 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \cos nx \right)$$

$$\mathrm{Y}'_\sigma = \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} \cos nx - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \cos ny + \mathrm{N}(\mathrm{T}, t) \left(\frac{\partial}{\partial n} \frac{\partial^2 r}{\partial x \, \partial y} - 2 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \cos ny \right)$$

$$\mathrm{Z}'_\sigma = \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} \cos nx - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \cos nz + \mathrm{N}(\mathrm{T}, t) \left(\frac{\partial}{\partial n} \frac{\partial^2 r}{\partial x \, \partial z} - 2 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \cos nz \right) .$$

Ciò premesso applichiamo la (1) della Nota precedente e, come di solito, escludiamo il polo O con una sfera il cui raggio si faccia tendere a zero indefinitamente. Al limite avremo:

$$\int_{t_0}^{\mathrm{T}} dt \left\{ \int_\sigma \Sigma \mathrm{X}_\sigma u' \, d\sigma + \int_{\mathrm{S}} \Sigma \rho \, \mathrm{X} u' \, d\mathrm{S} - \int_\sigma \Sigma \mathrm{X}'_\sigma u \, d\sigma \right\} = -4\pi \int_{t_0}^{\mathrm{T}} u(\xi, \eta, \zeta, t)\, dt ,$$

e, derivando rispetto a T,

$$\begin{aligned} & -4\pi\, u(\xi, \eta, \zeta, \mathrm{T}) \\ & = \frac{d}{d\mathrm{T}} \int_{t_0}^{\mathrm{T}} dt \left\{ \int_\sigma \Sigma \mathrm{X}_\sigma u' \, d\sigma + \int_{\mathrm{S}} \Sigma \rho \, \mathrm{X} u' \, d\mathrm{S} - \int_\sigma \Sigma \mathrm{X}'_\sigma u \, d\sigma \right\} . \end{aligned} \tag{17}$$

(4) SOMIGLIANA, *Sulle equazioni dell'elasticità*, « Annali di Matematica », ser. II, t. XVI.

11. Riprendiamo ora l'equazione (6), moltiplichiamone ambo i membri per $\alpha(\mathrm{T}, t)$ e integriamo fra t_0 e T. Con ben note trasformazioni, e tenendo conto della (15), si avrà

$$\int_{t_0}^{\mathrm{T}} \alpha(\mathrm{T}, t)\, \varphi(t)\, dt$$

$$= \int_{t_0}^{\mathrm{T}} \mathrm{K}\alpha(\mathrm{T}, t) f(t)\, dt + \int_{t_0}^{\mathrm{T}} \alpha(\mathrm{T}, t)\, dt \int_{t_0}^{t} \psi(t, \tau) f(\tau)\, d\tau$$

$$= \int_{t_0}^{\mathrm{T}} f(t) \left\{ \mathrm{K}\alpha(\mathrm{T}, t) + \int_{t}^{\mathrm{T}} \alpha(\mathrm{T}, \tau)\, \psi(\tau, t)\, d\tau \right\} dt = \int_{t_0}^{\mathrm{T}} f(t)\, dt,$$

quindi derivando e tenendo presente la (I')

$$\frac{d}{d\mathrm{T}} \int_{t_0}^{\mathrm{T}} \alpha(\mathrm{T}, t)\, \varphi(t)\, dt = f(\mathrm{T}) = \mathrm{A}_1^{-1}\, \varphi(\mathrm{T}). \tag{18}$$

Ma dalla (12) segue, tenendo conto della (15),

$$(\mathrm{L} + 2\mathrm{K})(\alpha(\mathrm{T}, t) + \beta(\mathrm{T}, t)) \tag{15'}$$

$$+ \int_{t}^{\mathrm{T}} (\varphi(\tau, t) + 2\psi(\tau, t))(\alpha(\mathrm{T}, \tau) + \beta(\mathrm{T}, \tau))\, d\tau = 1,$$

dunque, seguendo un procedimento analogo a quello ora impiegato e servendosi della notazione (II), potremo scrivere

$$\frac{d}{d\mathrm{T}} \int_{t_0}^{\mathrm{T}} (\alpha(\mathrm{T}, t) + \beta(\mathrm{T}, t))\, \varphi(t)\, dt = \mathrm{A}_2^{-1}\, \varphi(\mathrm{T}),$$

donde per la (18)

$$\frac{d}{d\mathrm{T}} \int_{t_0}^{\mathrm{T}} \beta(\mathrm{T}, t)\, \varphi(t)\, dt = (\mathrm{A}_2^{-1} - \mathrm{A}_1^{-1})\, \varphi(\mathrm{T}). \tag{18'}$$

Dalle (16) e (6) poi segue

$$\int_{t_0}^{\mathrm{T}} \mathrm{N}(\mathrm{T}, t) f(t)\, dt = \int_{t_0}^{\mathrm{T}} \beta(\mathrm{T}, t) \left\{ \mathrm{K} f(t) + \int_{t_0}^{t} \psi(t, \tau) f(\tau)\, d\tau \right\} dt$$

$$= \int_{t_0}^{\mathrm{T}} \beta(\mathrm{T}, t)\, \varphi(t)\, dt,$$

quindi applicando la (18') e la (I)

$$\frac{d}{d\mathrm{T}} \int_{t_0}^{\mathrm{T}} \mathrm{N}(\mathrm{T}, t)\, \varphi(t)\, dt = (\mathrm{A}_2^{-1} - \mathrm{A}_1^{-1})\, \mathrm{A}_1 f(t) \tag{18''}$$

$$= \mathrm{A}_2^{-1} \mathrm{A}_1 f(t) - f(t) = (\mathrm{A}_2^{-1} \mathrm{A}_1 - 1) f(t).$$

Riassumendo le formule (18), (18'), (18''), si ha dunque

$$
\text{(III)}\qquad\left\{\begin{aligned}
&\frac{d}{dT}\int_{t_0}^{T}\alpha(T\,,t)\,F(t)\,dt = A_1^{-1}\,F(T)\\
&\frac{d}{dT}\int_{t_0}^{T}\beta(T\,,t)\,F(t)\,dt = (A_2^{-1}-A_1^{-1})\,F(T)\\
&\frac{d}{dT}\int_{t_0}^{T}N(T\,,t)\,F(t)\,dt = (A_2^{-1}A_1-1)\,F(T)
\end{aligned}\right.
$$

in cui $F(t)$ è una funzione arbitraria.

12. Possiamo ora applicare le (III) per eseguire le derivate rispetto a T che compariscono nella formula (17), e questa allora si scriverà

$$
\begin{aligned}
(17')\qquad -4\pi u(\xi\,,\eta\,,\zeta\,,t) = &\int_\sigma\left\{\frac{1}{r}A_1^{-1}X_\sigma+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}(A_2^{-1}-A_1^{-1})X_\sigma\right.\\
&\left.+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 r}{\partial x\,\partial y}(A_2^{-1}-A_1^{-1})Y_\sigma+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 r}{\partial x\,\partial z}(A_2^{-1}-A_1^{-1})Z_\sigma\right\}d\sigma\\
+\int_S\left\{\frac{1}{r}A_1^{-1}(\rho X)\right.&+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}(A_2^{-1}-A_1^{-1})(\rho X)+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 r}{\partial x\,\partial y}(A_2^{-1}-A_1^{-1})(\rho Y)\\
&\left.+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 r}{\partial x\,\partial z}(A_2^{-1}-A_1^{-1})(\rho Z)\right\}dS\\
-\int_\sigma\left\{\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}u\right.&+\left(\frac{\partial}{\partial n}\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}-2\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}\cos nx\right)(A_2^{-1}A_1-1)\,u\\
+\left(\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}\cos nx-\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}\cos ny\right)v&+\left(\frac{\partial}{\partial n}\frac{\partial^2 r}{\partial x\,\partial y}-2\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}\cos ny\right)(A_2^{-1}A_1-1)\,v\\
+\left(\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}\cos nx-\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}\cos ny\right)w&\left.+\left(\frac{\partial}{\partial n}\frac{\partial^2 r}{\partial x\,\partial y}-2\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}\cos nz\right)(A_2^{-1}A_1-1)\,w\right\}d\sigma.
\end{aligned}
$$

Come la formula precedente ci dà u, così possono ottenersi altre due formule che esprimono analogamente v e w. Si vede dunque che il caso ereditario della elasticità può trattarsi pur lasciando completamente indeterminate le funzioni $\varphi(t\,,\tau)$, $\psi(t\,,\tau)$ ed a questo proposito può ripetersi quanto avemmo occasione già di dire nel caso della elettrodinamica [5].

(5) *Sulle equazioni della elettrodinamica*, § 3, «Rend. Acc. dei Lincei» ser. 5ª, vol. XVIII₁, 1909₁, pp. 203–211 [in questo vol.: XVIII, pp. 276–283].

XXII.

SOLUZIONE DELLE EQUAZIONI INTEGRO-DIFFERENZIALI DELL'ELASTICITÀ NEL CASO DI UNA SFERA ISOTROPA

« Rend. Acc. Lincei », ser. 5ª, vol. XIX₁, 1910₁; pp. 107–114.

§ 1. — La funzione intera V $(z \mid x, y)$.

Abbiasi la funzione continua $S_0(x, y)$ definita per i valori di x, y tali che

$$0 < x < y < a$$

e sia

$$| S_0(x, y) | < M.$$

Si costruiscano col processo iterativo che ho dato per la risoluzione delle equazioni integrali [1] le funzioni $S_i(x, y)$ definite da

$$S_i(x, y) = \int_x^y S_{j-1}(x, \xi)\, S_{i-j}(\xi, y)\, d\xi . \tag{1}$$

Avremo

$$| S_i(x, y) | < \frac{M^{n+1}(y-x)^n}{n!},$$

quindi la funzione

$$V(z \mid x, y) = \sum_0^\infty {}_n \frac{z^{n+1}}{(n+1)!} S_n(x, y) \tag{I}$$

sarà una funzione olomorfa di z in tutto il piano complesso.

Teorema I. – *Qualunque sia il numero positivo* α *avremo*

$$\lim_{|z|=\infty} \frac{V(z \mid x, y)}{e^{\alpha |z|}} = 0 .$$

Infatti

$$| V(z \mid x, y) | \leq \sum_0^\infty {}_n \frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!} \frac{M^{n+1}(y-x)^n}{n!}$$

$$= \sum_0^{m-1} {}_n \frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!} \frac{M^{n+1}(y-x)^n}{n!} + \sum_0^\infty {}_n \frac{|z|^{m+n+1}}{(m+n+1)!} \frac{M^{m+n+1}(x-y)^{m+n+1}}{(m+n)!} .$$

(1) *Sulla inversione degli integrali definiti*, « Rend. Acc. dei Lincei », vol. V, 1896, pp. 177–185. [In queste « Opere »: vol. secondo, XIX, pp. 255–262].

Ora scelto ε comunque piccolo potremo determinare m in modo che si abbia

$$\frac{M^{m+n+1}(y-x)^{m+n+1}}{(m+n)!} < \varepsilon\alpha^{m+n+1} \qquad (n=0,1,2,\cdots,\infty)$$

quindi

$$|V(z|x,y)| < \sum_0^{m-1}{}_n \frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!}\frac{M^{n+1}(y-x)^n}{n!} + \varepsilon\sum_0^{\infty}{}_n \frac{|z|^{m+n+1}}{(m+n+1)!}\alpha^{m+n+1},$$

d'altra parte

$$e^{\alpha|z|} = \sum_0^{\infty}{}_n \frac{|\alpha z|^n}{n!} > \sum_0^{\infty}{}_n \frac{|z|^{m+n+1}}{(m+n+1)!}\alpha^{m+n+1}$$

e per conseguenza

$$\frac{|V(z|x,y)|}{e^{\alpha|z|}} < \varepsilon + \frac{\sum_0^{m-1}{}_n \frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!}\frac{M^{n+1}(y-x)^n}{n!}}{\sum_0^{\infty} \frac{|z|^{m+n+1}\alpha^{m+n+1}}{(m+n+1)!}}$$

$$< \varepsilon + \frac{\sum_0^{m-1}{}_n \frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!}\frac{M^{n+1}(y-x)^n}{n!}}{\frac{|z|^{m+1}\alpha^{m+1}}{(m+1)!}}.$$

Ma noi possiamo prendere $|z|$ così grande che l'ultimo termine

$$\frac{\sum_0^{m-1}{}_n \frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!}\frac{M^{n+1}(y-x)^n}{n!}}{\frac{|z|^{m+1}\alpha^{m+1}}{(m+1)!}} = \sum_0^{m-1} \frac{(m+1)!}{|z|^{m-n}}\frac{M^{n+1}(y+x)^n}{n!(n+1)!\alpha^{m+1}}$$

si riduca minore di una quantità piccola ad arbitrio e perciò col crescere indefinito di $|z|$ la quantità $V(z)|x,y)/e^{\alpha|z|}$ tenderà a zero.

COROLLARIO. - *Posto* $V(\log\rho/r|x,y)$ *con* ρ *e* r *reali e positivi, se* ρ *cresce indefinitamente (oppure tende a* 0), V *si manterrà finita, oppure diverrà infinita di ordine inferiore a qualsiasi potenza positiva di* ρ *(oppure di* $1/\rho$)

§ 2. - IL TEOREMA D'ADDIZIONE DELLA FUNZIONE $V(z|x,y)$.

Si eseguisca il prodotto

$$V(z|x,\xi)\,V(u|\xi,y);$$

avremo

$$=\sum_0^{\infty}{}_n\sum_0^{n}{}_i \frac{z^{i+1}u^{n+1-i}}{(i+1)!(n+1-i)!} S_i(x,\xi)\,S_{n-i}(\xi,y),$$

quindi

$$\int_x^y V(z \mid x, \xi)\, V(u \mid \xi, y)\, d\xi = \sum_0^\infty S_{n+1}(x, y) \sum_0^n \frac{z^{i+1}\, u^{n+i-1}}{(i+1)!\,(n+1-i)!}$$

$$= \sum_0^\infty {}_n S_n(x, y) \frac{(z+u)^{n+1}}{(n+1)!} - \sum_0^\infty {}_n S_n(x, y) \frac{z^{n+1}}{(n+1)!} - \sum_0^\infty {}_n S_n(x, y) \frac{u^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Tenendo dunque presente la (I) avremo il

TEOREMA II. – *La funzione olomorfa* $V(z \mid x, y)$ *gode del seguente teorema di addizione*

$$\text{(A)} \qquad V(z+u \mid x, y) - V(z \mid x, y) - V(u \mid x, y) = \int_x^y V(z \mid x, \xi)\, V(u \mid \xi, y)\, d\xi .$$

Posto

$$\frac{\partial V(z \mid x, y)}{\partial z} = V'(z \mid x, y) \quad , \quad \frac{\partial^2 V(z \mid x, y)}{\partial z^2} = V''(z \mid x, y), \cdots$$

si hanno le formule che si deducono facilmente dalla (A)

$$\text{(2)} \qquad V'(z+u \mid x, y) - V'(z \mid x, y)$$

$$= \int_x^y V'(z \mid x, \xi)\, V(u \mid \xi, y)\, d\xi = \int_x^y V'(z \mid \xi, y)\, V(u \mid x, \xi)\, d\xi$$

$$\text{(3)} \qquad V^{(i+h+1)}(z+u \mid x, y) = \int_x^y V^{(i)}(z \mid x, \xi)\, V^{(h)}(u \mid \xi, y)\, d\xi \qquad (i, h = 1, 2, 3, \cdots)$$

$$\text{(4)} \qquad V'(z \mid x, y) - V'(0 \mid x, y)$$

$$= \int_x^y V(z \mid x, \xi)\, V'(0 \mid \xi, y)\, d\xi = \int_x^y V(z \mid \xi, y)\, V'(0 \mid x, \xi)\, d\xi$$

$$\text{(4')} \qquad V'(z \mid x, y) - S_0(x, y)$$

$$= \int_x^y V(z \mid x, \xi)\, S_0(\xi, y)\, d\xi = \int_x^y V(z \mid \xi, y)\, S_0(x, \xi)\, d\xi .$$

Reciprocamente può dimostrarsi che il teorema d'addizione (A) individua le funzioni del tipo (I).

§ 3. – SOLUZIONE DI UNA EQUAZIONE INTEGRO-DIFFERENZIALE AUSILIARIA.

Abbiasi l'equazione integro-differenziale

$$\text{(B)} \qquad y \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} + c f(x, y) + \int_0^x S_0(\xi, x) f(\xi, y)\, d\xi = \varphi(x, y)$$

in cui f è la funzione incognita, finita e continua per x compreso fra 0 ed a ed y compreso fra 0 e b; c è un coefficiente costante positivo, $S_o(\xi, x)$ e $\varphi(x, y)$ sono funzioni note, finite e continue. Moltiplicando ambo i membri per $V(z \mid x, x_1)$ e integrando fra 0 e x_1 risulterà

$$\int_0^{x_1}\left[y\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} + cf(x,y)\right]V(z \mid x, x_1)\,dx$$

$$+\int_0^{x_1} V(z \mid x, x_1)\,dx\int_0^x S_o(\xi, x)f(\xi, y)\,d\xi = \int_0^{x_1}\varphi(x,y)\,V(z \mid x, x_1)\,dx\,.$$

Ma

$$\int_0^{x_1} V(z \mid x, x_1)\,dx\int_0^x S_o(\xi, x)f(\xi, y)\,d\xi$$

$$=\int_0^{x_1} f(\xi, y)\,d\xi\int_\xi^{x_1} V(z \mid x, x_1)\,S_o(\xi, x)\,dx\,,$$

quindi, tenendo conto della (4'),

$$\int_0^{x_1}\left[\left(y\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} + cf(x,y)\right)V(z \mid x, x_1) + f(x,y)\,V'(z \mid x, x_1)\right]dx$$

$$-\int_0^{x_1} S_o(x, x_1)f(x,y)\,dx = \int_0^{x_1}\varphi(x,y)\,V(z \mid x, x_1)\,dx\,.$$

Il secondo integrale del primo membro si potrà ricavare dalla (B), onde la equazione precedente potrà scriversi

$$y\frac{\partial f(x_1,y)}{\partial y}\,cf(x_1, y) + \int_0^{x_1}\left[\left(y\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} + cf(x,y)\right)V(z \mid x, x_1)\right.$$

$$\left.+ f(x,y)\,V'(z \mid x, x_1)\right]dx = \varphi(x_1, y) + \int_0^{x_1}\varphi(x,y)\,V(z \mid x, x_1)\,dx\,.$$

Posto $z = \log(y/y_1)$ sarà $V'(z \mid x, x_1) = y\partial V(z \mid x, x_1)/\partial y$, perciò moltiplicando ambo i membri della equazione precedente per y^{c-1} essa si scriverà

$$\frac{\partial}{\partial y}(y^c f(x_1, y)) + \int_0^{x_1}\frac{\partial}{\partial y}(y^c\,V(z \mid x, x_1)\,f(x,y))\,dx$$

$$= \left[\varphi(x_1, y) + \int_0^{x_1}\varphi(x,y)\,V(z \mid x, x_1)\,dx\right]y^{c-1}.$$

Moltiplichiamo ora ambo i membri della equazione precedente per dy ed integriamo fra 0 ed y_1. Tenendo conto del corollario stabilito nel § 1, avremo

$$y_1^c f(x_1, y_1) = \int_0^{y_1} y^{c-1}\left[\varphi(x,y) + \int_0^{x_1}\varphi(x,y)\,V(z \mid x, x_1)\,dx\right]dy$$

o anche

$$(C) \qquad f(x, y) = \frac{1}{y^c}\int_0^y y^{c-1}\left[\varphi(x, \eta) + \int_0^x \varphi(\xi, \eta) V\left(\log\frac{\eta}{y} \mid \xi, x\right)d\xi\right]d\eta .$$

Dunque, se la (B) ammette una soluzione finita e continua, questa sarà data dalla (C) e reciprocamente può facilmente riconoscersi che la (C) è finita e continua e soddisfa la (B). Però se togliamo la condizione alla f di esser finita per $y = 0$, la soluzione generale della (B) sarà la somma di due termini, il primo dei quali sarà la espressione (C), ed il secondo sarà

$$F(x, y) = \left(\frac{y_0}{y}\right)^c \left[\psi(x) + \int_0^x \psi(\xi) V\left(\log\frac{y_0}{y} \mid \xi, x\right)d\xi\right],$$

in cui $\psi(x)$ è una funzione arbitraria, mentre si ha

$$F(x, y_0) = \psi(x).$$

Per le applicazioni che dovremo fare basterà valerci della espressione (C).

§ 4. – Problema della sfera elastica isotropa nel caso ereditario.

In una Nota testè pubblicata [2] ho espresso, nel caso ereditario, le componenti degli spostamenti dei punti di un corpo elastico isotropo mediante le forze di massa, le tensioni superficiali, e gli spostamenti superficiali.

Noi vogliamo ora, pel caso della sfera, eliminare nella soluzione le tensioni superficiali, esprimendo la soluzione stessa mediante gli spostamenti superficiali [3]. Quanto alle forze di massa le supporremo nulle, giacchè sarà facile ricondurre il caso generale a questo caso particolare. La eliminazione potrà farsi anche senza ricorrere alle formule suddette, ma direttamente.

Supposte nulle le forze di massa, le (3) della Nota citata al principio di questo paragrafo, si scriveranno

$$(II) \qquad \begin{cases} \Delta^2 u = \dfrac{\partial\vartheta}{\partial x} \\ \Delta^2 v = \dfrac{\partial\vartheta}{\partial y} \\ \Delta^2 w = \dfrac{\partial\vartheta}{\partial z}, \end{cases}$$

avendo posto, secondo le notazioni adoperate nella Nota suddetta,

$$\vartheta = (1 - A_1^{-1} A_2)\,\theta .$$

(2) *Equazioni integro-differenziali della elasticità nel caso della isotropia*, « Rend. Acc. dei Lincei » seduta del 19 dicembre 1909. [In questo vol.: XXI, pp. 294-303].

(3) *Sulle equazioni integro-differenziali della teoria della elasticità*, § 4, « Rend. Acc. dei Lincei », seduta del 7 novembre 1909. [In questo vol.: XX, pp. 288-293].

Avremo poi

$$\Delta^2 \vartheta = 0 .$$

In conseguenza di un teorema del prof. ALMANSI (4), da lui impiegato per la soluzione del problema ordinario della sfera elastica, sarà dunque

$$(5) \qquad \left\{ \begin{aligned} u &= U + (r^2 - R^2) \frac{\partial f}{\partial x} \\ v &= V + (r^2 - R^2) \frac{\partial f}{\partial y} \\ w &= W + (r^2 - R^2) \frac{\partial f}{\partial z} , \end{aligned} \right.$$

ove U , V , W , f sono funzioni armoniche, $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, R è una costante, e

$$(6) \qquad \frac{1}{2} f + r \frac{\partial f}{\partial r} = \frac{1}{4} \vartheta .$$

Posta l'origine nel centro della sfera elastica di raggio R, le funzioni U , V , W saranno determinate entro la sfera quando si conosceranno gli spostamenti al contorno.

Scriviamo

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} = \Theta ,$$

avremo allora, in virtù delle (5),

$$\theta = \Theta + 2 r \frac{\partial f}{\partial r} ,$$

quindi

$$(7) \qquad \vartheta = (1 - A_1^{-1} A_2)\left(\Theta + 2 r \frac{\partial f}{\partial r}\right)$$

ed eliminando ϑ fra la (6) e la (7), resulterà

$$f + (1 + A_1^{-1} A_2) r \frac{\partial f}{\partial r} = \frac{1}{2} (1 - A_1^{-1} A_2) \Theta ,$$

da cui segue

$$(8) \qquad r \frac{\partial f}{\partial r} + A_1 (A_1 + A_2)^{-1} f = \frac{1}{2} (A_1 + A_2)^{-1} (A_1 - A_2) \Theta .$$

Poniamo, supponendo per semplicità $t_0 = 0$,

$$A_1 (A_1 + A_2)^{-1} f = c f (t , r) + \int_0^t S_0 (\tau , t) f (\tau , r) d\tau$$

$$\frac{1}{2} (A_1 + A_2)^{-1} (A_1 - A_2) \Theta = \Phi (t , r) .$$

(4) *Sulla deformazione della sfera elastica.* «Memorie della Acc. delle Scienze di Torino», anno 1896-97.

Avremo poi

$$\Delta^2 \vartheta = 0 .$$

In conseguenza di un teorema del prof. ALMANSI (4), da lui impiegato per la soluzione del problema ordinario della sfera elastica, sarà dunque

$$(5) \qquad \begin{cases} u = \mathrm{U} + (r^2 - \mathrm{R}^2)\dfrac{\partial f}{\partial x} \\ v = \mathrm{V} + (r^2 - \mathrm{R}^2)\dfrac{\partial f}{\partial y} \\ w = \mathrm{W} + (r^2 - \mathrm{R}^2)\dfrac{\partial f}{\partial z} , \end{cases}$$

ove U , V , W , f sono funzioni armoniche, $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, R è una costante, e

$$(6) \qquad \frac{1}{2} f + r \frac{\partial f}{\partial r} = \frac{1}{4} \vartheta .$$

Posta l'origine nel centro della sfera elastica di raggio R, le funzioni U , V , W saranno determinate entro la sfera quando si conosceranno gli spostamenti al contorno.

Scriviamo

$$\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x} + \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial y} + \frac{\partial \mathrm{W}}{\partial z} = \Theta ,$$

avremo allora, in virtù delle (5),

$$\theta = \Theta + 2 r \frac{\partial f}{\partial r} ,$$

quindi

$$(7) \qquad \vartheta = (1 - \mathrm{A}_1^{-1} \mathrm{A}_2)\left(\Theta + 2 r \frac{\partial f}{\partial r}\right)$$

ed eliminando ϑ fra la (6) e la (7), resulterà

$$f + (1 + \mathrm{A}_1^{-1} \mathrm{A}_2) r \frac{\partial f}{\partial r} = \frac{1}{2} (1 - \mathrm{A}_1^{-1} \mathrm{A}_2)\, \Theta ,$$

da cui segue

$$(8) \qquad r \frac{\partial f}{\partial r} + \mathrm{A}_1 (\mathrm{A}_1 + \mathrm{A}_2)^{-1} f = \frac{1}{2} (\mathrm{A}_1 + \mathrm{A}_2)^{-1} (\mathrm{A}_1 - \mathrm{A}_2)\, \Theta .$$

Poniamo, supponendo per semplicità $t_0 = 0$,

$$\mathrm{A}_1 (\mathrm{A}_1 + \mathrm{A}_2)^{-1} f = c f (t , r) + \int_0^t \mathrm{S}_0 (\tau , t) f (\tau , r)\, d\tau$$

$$\frac{1}{2} (\mathrm{A}_1 + \mathrm{A}_2)^{-1} (\mathrm{A}_1 - \mathrm{A}_2)\, \Theta = \Phi (t , r) .$$

(4) *Sulla deformazione della sfera elastica.* « Memorie della Acc. delle Scienze di Torino », anno 1896-97.

Avremo poi

$$\Delta^2 \vartheta = 0 .$$

In conseguenza di un teorema del prof. ALMANSI (4), da lui impiegato per la soluzione del problema ordinario della sfera elastica, sarà dunque

$$(5) \qquad \left\{ \begin{aligned} u &= U + (r^2 - R^2) \frac{\partial f}{\partial x} \\ v &= V + (r^2 - R^2) \frac{\partial f}{\partial y} \\ w &= W + (r^2 - R^2) \frac{\partial f}{\partial z} , \end{aligned} \right.$$

ove U , V , W , f sono funzioni armoniche, $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, R è una costante, e

$$(6) \qquad \frac{1}{2} f + r \frac{\partial f}{\partial r} = \frac{1}{4} \vartheta .$$

Posta l'origine nel centro della sfera elastica di raggio R, le funzioni U , V , W saranno determinate entro la sfera quando si conosceranno gli spostamenti al contorno.

Scriviamo

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} = \Theta ,$$

avremo allora, in virtù delle (5),

$$\theta = \Theta + 2 r \frac{\partial f}{\partial r} ,$$

quindi

$$(7) \qquad \vartheta = (1 - A_1^{-1} A_2) \left(\Theta + 2 r \frac{\partial f}{\partial r} \right)$$

ed eliminando ϑ fra la (6) e la (7), resulterà

$$f + (1 + A_1^{-1} A_2) r \frac{\partial f}{\partial r} = \frac{1}{2} (1 - A_1^{-1} A_2) \Theta ,$$

da cui segue

$$(8) \qquad r \frac{\partial f}{\partial r} + A_1 (A_1 + A_2)^{-1} f = \frac{1}{2} (A_1 + A_2)^{-1} (A_1 - A_2) \Theta .$$

Poniamo, supponendo per semplicità $t_0 = 0$,

$$A_1 (A_1 + A_2)^{-1} f = c f (t , r) + \int_0^t S_0 (\tau , t) f (\tau , r) \, d\tau$$

$$\frac{1}{2} (A_1 + A_2)^{-1} (A_1 - A_2) \Theta = \Phi (t , r) .$$

(4) *Sulla deformazione della sfera elastica*. «Memorie della Acc. delle Scienze di Torino», anno 1896-97.

$S_0(r, t)$ e $\Phi(t, r)$ saranno funzioni che si calcolano facilmente e che quindi possono supporsi note e inoltre sarà

$$c = \frac{K}{L + 3K}.$$

Nelle formule precedenti f e Φ vanno considerate come funzioni di t, del raggio vettore r e dei due angoli polari, avendo cambiato le coordinate cartesiane x, y, z in quelle polari. Però, per semplicità, sono state scritte solo esplicitamente le due variabili t e r.

La (8) si scriverà dunque

$$r \frac{\partial f(t, r)}{\partial r} + cf(t, r) + \int_0^t S_0(\tau, t) f(\tau, r)\, d\tau = \Phi(t, r).$$

Posto poi

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= f_1 \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= f_2 \\ \frac{\partial f}{\partial z} &= f_3 \end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial x} &= \varphi_1 \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y} &= \varphi_2 \\ \frac{\partial \Phi}{\partial z} &= \varphi_3 \end{aligned}\right.$$

per una formula del prof. ALMANSI (5) avremo

$$r \frac{\partial f_i(t, r)}{\partial r} + (c + 1) f_i(t, r) + \int_0^t S_0(\tau, t) f_i(\tau, r)\, d\tau = \varphi_i(t, r) \qquad (i = 1, 2, 3).$$

Applichiamo ora la (C). Si avrà

$$f_i = \frac{1}{r^{c+1}} \int_0^r \rho^c \left[\varphi_i(t, \rho) + \int_0^t \varphi_i(\tau, \rho)\, V\left(\log \frac{\rho}{r} \,\middle|\, \tau, t\right) d\tau \right] d\rho \qquad (i = 1, 2, 3),$$

e quindi

(III) $\quad u = U + (r^2 - R^2) f_1, \; v = V + (r^2 - R^2) f_2, \; w = W + (r^2 - R^2) f_3$

saranno determinate completamente.

(5) Loco cit., § 2.

XXIII.

QUESTIONI GENERALI SULLE EQUAZIONI INTEGRALI ED INTEGRO-DIFFERENZIALI

« Rend. Acc. Lincei », ser. 5ª, vol. XIX₁, 1910₁, pp. 169-180.

§ 1. - Funzioni permutabili e loro composizione.

1. Due funzioni finite e continue $F_1(x, y)$ e $F_2(x, y)$ tali che

$$\text{(A)} \qquad \int_x^y F_1(x, \xi) F_2(\xi, y) d\xi = \int_x^y F_2(x, \xi) F_1(\xi, y) d\xi ,$$

si diranno *permutabili* e l'operazione precedente si dirà la loro *composizione*. $F_1(x, y)$, $F_2(x, y)$ si chiameranno *componenti* e l'integrale ottenuto *risultante*.

Denoteremo la funzione *risultante* con

$$F_1 F_2(x, y) \quad \text{o} \quad F_2 F_1(x, y),$$

e più semplicemente con $F_1 F_2$ o $F_2 F_1$ quando non vi sia dubbio che possa nascere confusione col prodotto delle due funzioni.

2. Teorema I. - *Dato un sistema di funzioni permutabili fra loro, tutte le funzioni che possono ottenersene per composizione sono permutabili fra loro e colle funzioni date e l'operazione di composizione gode delle stesse due proprietà commutativa ed associativa della moltiplicazione.*

Date le funzioni $F_1(x, y)$, $F_2(x, y)$, $\cdots$, $F_n(x, y)$ permutabili, si intenderà con $F_1 F_2 \cdots F_n(x, y)$ ciò che si trova componendo F_1 con F_2, quindi componendo la risultante con F_3, poscia componendo la nuova risultante ottenuta con F_4 e così via di seguito. Per i teoremi enunciati l'ordine con cui si prendono $F_1, F_2, \cdots, F_n$ (*componenti*) non altera il valore della loro *risultante* $F_1 F_2 \cdots F_n(x, y)$. Questa, quando non possa nascere confusione, si denoterà ancora più semplicemente con $F_1 F_2 \cdots F_n$.

Se le componenti $F_1, F_2, \cdots, F_n$ sono eguali fra loro $F_1 F_2 \cdots F_n(x, y)$ si denoterà con $F_1^n(x, y)$ o più semplicemente con F_1^n. Il nuovo simbolo soddisfarà alle stesse leggi delle potenze.

3. Teorema II. - *Tutte le funzioni ottenute per somma e per sottrazione da funzioni permutabili sono permutabili fra loro e colle funzioni primitive e per comporre dei polinomii i cui termini siano funzioni permutabili basterà applicare la regola dei prodotti dei polinomii.*

XXIII.

QUESTIONI GENERALI SULLE EQUAZIONI INTEGRALI ED INTEGRO-DIFFERENZIALI

« Rend. Acc. Lincei », ser. 5ª, vol. XIX_1, 1910_1, pp. 169-180.

§ 1. - Funzioni permutabili e loro composizione.

1. Due funzioni finite e continue $F_1(x, y)$ e $F_2(x, y)$ tali che

$$\text{(A)} \qquad \int_x^y F_1(x, \xi) F_2(\xi, y) d\xi = \int_x^y F_2(x, \xi) F_1(\xi, y) d\xi,$$

si diranno *permutabili* e l'operazione precedente si dirà la loro *composizione*. $F_1(x, y)$, $F_2(x, y)$ si chiameranno *componenti* e l'integrale ottenuto *risultante*.

Denoteremo la funzione *risultante* con

$$F_1 F_2(x, y) \quad \text{o} \quad F_2 F_1(x, y),$$

e più semplicemente con $F_1 F_2$ o $F_2 F_1$ quando non vi sia dubbio che possa nascere confusione col prodotto delle due funzioni.

2. Teorema I. - *Dato un sistema di funzioni permutabili fra loro, tutte le funzioni che possono ottenersene per composizione sono permutabili fra loro e colle funzioni date e l'operazione di composizione gode delle stesse due proprietà commutativa ed associativa della moltiplicazione.*

Date le funzioni $F_1(x, y)$, $F_2(x, y)$, $\cdots$, $F_n(x, y)$ permutabili, si intenderà con $F_1 F_2 \cdots F_n(x, y)$ ciò che si trova componendo F_1 con F_2, quindi componendo la risultante con F_3, poscia componendo la nuova risultante ottenuta con F_4 e così via di seguito. Per i teoremi enunciati l'ordine con cui si prendono $F_1, F_2, \cdots, F_n$ (*componenti*) non altera il valore della loro *risultante* $F_1 F_2 \cdots F_n(x, y)$. Questa, quando non possa nascere confusione, si denoterà ancora più semplicemente con $F_1 F_2 \cdots F_n$.

Se le componenti $F_1, F_2, \cdots, F_n$ sono eguali fra loro $F_1 F_2 \cdots F_n(x, y)$ si denoterà con $F_1^n(x, y)$ o più semplicemente con F_1^n. Il nuovo simbolo soddisfarà alle stesse leggi delle potenze.

3. Teorema II. - *Tutte le funzioni ottenute per somma e per sottrazione da funzioni permutabili sono permutabili fra loro e colle funzioni primitive e per comporre dei polinomii i cui termini siano funzioni permutabili basterà applicare la regola dei prodotti dei polinomii.*

XXIII.

QUESTIONI GENERALI SULLE EQUAZIONI INTEGRALI ED INTEGRO-DIFFERENZIALI

« Rend. Acc. Lincei », ser. 5ª, vol. XIX$_1$, 1910$_1$, pp. 169–180.

§ 1. – Funzioni permutabili e loro composizione.

1. Due funzioni finite e continue $F_1(x, y)$ e $F_2(x, y)$ tali che

$$\text{(A)} \qquad \int_x^y F_1(x, \xi) F_2(\xi, y) d\xi = \int_x^y F_2(x, \xi) F_1(\xi, y) d\xi,$$

si diranno *permutabili* e l'operazione precedente si dirà la loro *composizione*. $F_1(x, y)$, $F_2(x, y)$ si chiameranno *componenti* e l'integrale ottenuto *risultante*.

Denoteremo la funzione *risultante* con

$$F_1 F_2 (x, y) \quad \text{o} \quad F_2 F_1 (x, y),$$

e più semplicemente con $F_1 F_2$ o $F_2 F_1$ quando non vi sia dubbio che possa nascere confusione col prodotto delle due funzioni.

2. Teorema I. – *Dato un sistema di funzioni permutabili fra loro, tutte le funzioni che possono ottenersene per composizione sono permutabili fra loro e colle funzioni date e l'operazione di composizione gode delle stesse due proprietà commutativa ed associativa della moltiplicazione.*

Date le funzioni $F_1(x, y)$, $F_2(x, y)$, $\cdots$, $F_n(x, y)$ permutabili, si intenderà con $F_1 F_2 \cdots F_n (x, y)$ ciò che si trova componendo F_1 con F_2, quindi componendo la risultante con F_3, poscia componendo la nuova risultante ottenuta con F_4 e così via di seguito. Per i teoremi enunciati l'ordine con cui si prendono $F_1, F_2, \cdots, F_n$ (*componenti*) non altera il valore della loro *risultante* $F_1 F_2 \cdots F_n (x, y)$. Questa, quando non possa nascere confusione, si denoterà ancora più semplicemente con $F_1 F_2 \cdots F_n$.

Se le componenti $F_1, F_2, \cdots, F_n$ sono eguali fra loro $F_1 F_2 \cdots F_n (x, y)$ si denoterà con $F_1^n (x, y)$ o più semplicemente con F_1^n. Il nuovo simbolo soddisfarà alle stesse leggi delle potenze.

3. Teorema II. – *Tutte le funzioni ottenute per somma e per sottrazione da funzioni permutabili sono permutabili fra loro e colle funzioni primitive e per comporre dei polinomii i cui termini siano funzioni permutabili basterà applicare la regola dei prodotti dei polinomii.*

§ 2. – Funzioni permutabili con una costante. Estensione della composizione.

4. Teorema III. – *Tutte le funzioni permutabili con una costante sono della forma* $F(y-x)$.

Che le funzioni della detta forma siano permutabili con una costante è evidente. Che non ve ne siano altre si riconosce osservando che, se [vedi form. (A)]

$$\int_x^y F(x,\xi)\,d\xi = \int_x^y F(\xi,y)\,d\xi = \Phi(x,y),$$

sarà

$$-\frac{\partial\Phi}{\partial x} = \frac{\partial\Phi}{\partial y} = F(x,y)$$

e quindi Φ, ed in conseguenza F, saranno funzioni di $y-x$.

Noi escluderemo per adesso dalle nostre considerazioni tali funzioni.

5. Se a è un parametro indipendente da x e y intenderemo con $aF_i(x,y)$ il prodotto di a per la funzione $F_i(x,y)$ e avremo che $aF_i(x,y)$, $bF_s(x,y)$ saranno permutabili. Componendole otterremo $abF_i\,F_s(x,y)$, quindi potremo dire che *combinando linearmente delle funzioni permutabili, moltiplicate per coefficienti costanti, otterremo delle funzioni permutabili, la cui composizione si otterrà colla regola del prodotto dei polinomii.*

6. Se a e b sono costanti, le funzioni

$$\theta(x,y) = a + F_i(x,y) \quad \text{e} \quad \psi(x,y) = b + F_s(x,y)$$

non apparterranno all'insieme delle funzioni permutabili colle funzioni date. Però noi estenderemo l'operazione della composizione scrivendo

$$\theta F_r(x,y) = F_r\,\theta(x,y) = aF_r(x,y) + F_r\,F_i(x,y)$$

$$\psi\theta(x,y) = \theta\psi(x,y) = ab + aF_s(x,y) + bF_i(x,y) + F_i\,F_s(x,y)$$

e, se non potrà nascere confusione, sostituiremo anche a $F_r\,\theta(x,y)$, $\theta\psi(x,y)$ rispettivamente $F_r\,\theta$, $\theta\psi$. Con questa estensione le proprietà precedentemente enunciate della composizione restano sempre soddisfatte.

§ 3. – Serie di funzioni permutabili.

7. Teorema IV. – *Abbiasi la serie di potenze*

$$\sum_0^\infty{}_{i_1} \sum_0^\infty{}_{i_2} \cdots \sum_0^\infty{}_{i_n} a_{i_1 \ldots i_n} z_1^{i_1} z_2^{i_2} \cdots z_n^{i_n} \tag{1}$$

delle variabili complesse $z_1, z_2, \cdots, z_n$ *la quale sia convergente per* $|z_1| < R_1$, $|z_2| < R_2, \cdots, |z_n| < R_n$. *Se noi sostituiamo a* $z_1, z_2, \cdots, z_n$ *rispettivamente le* *funzioni permutabili* $F_1(x, y), F_2(x, y), \cdots, F_n(x, y)$, *e intendiamo che i simboli di prodotti e di potenze applicate a queste funzioni rappresentino le operazioni di composizione, otterremo una serie convergente. Se* $a_{00\ldots0}$ *sarà nulla, la somma delle serie sarà una funzione di* x, y *permutabile colle funzioni date.*

8. È da notare come questo teorema ci offra un mezzo di passare dalla serie (1), convergente in generale quando i moduli di $z_1, z_2, \cdots, z_n$ sono inferiori a certi limiti, ad un'altra convergente comunque grandi siano i valori assoluti di $F_1, F_2, \cdots, F_n$, purchè finiti; esso poi ci permette di estendere le espressioni di funzioni permutabili e ci dà nuovi modi per eseguire le operazioni di composizione.

Abbiasi infatti una espressione analitica qualsiasi

$$F(z_1, z_2, \cdots, z_n) \tag{2}$$

la quale sia sviluppabile in una serie di potenze e positive di $z_1, z_2, \cdots, z_n$ convergente in un certo intorno di $z_1 = z_2 = \cdots = z_n = 0$; noi intenderemo con

$$\mathbf{F}(F_1, F_2, \cdots, F_n) \tag{3}$$

ciò che si trova sostituendo nella serie alle $z_1, z_2, \cdots, z_n$ le $F_1, F_2, \cdots, F_n$ e supponendo che i simboli di prodotti e di potenze rappresentino operazioni di composizione.

Restano così definite, per esempio, le espressioni

$$\frac{F_1}{a - F_1} = \frac{F_1}{a} + \frac{F_1^2}{a^2} + \frac{F_1^3}{a^3} + \cdots$$

$$\sqrt{a + F_1} = \sqrt{a}\left(1 + \frac{1}{2}\frac{F_1}{a} + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - 1\right)}{1 \cdot 2}\frac{F_1^2}{a^2} + \cdots\right)$$

in cui le potenze di F_1 rappresentano operazioni di composizione applicate ad F_1 e si suppone fissato il segno di $\sqrt{a}$.

Così pure resta definito un prodotto infinito

$$F_1\left(1 - \frac{F_1^2}{1}\right)\left(1 - \frac{F_1^2}{4}\right)\left(1 - \frac{F_1^2}{9}\right)\cdots$$

Se avremo poi due espressioni analitiche

$$\mathbf{F}(F_1, F_2, \cdots, F_n) \quad , \quad \mathbf{\Phi}(F_1, F_2, \cdots, F_n)$$

della natura sopra considerata la loro composizione si farà colle regole con cui si fa il prodotto ordinario delle due espressioni analitiche stesse. Così la risultante di $\sqrt{a+F_1}$ con $\sqrt{b+F_2}$ potrà scriversi $\sqrt{(a+F_1)(b+F_2)}$, quando si fissino convenientemente i segni. Inoltre tutte quelle trasformazioni che non alterano una espressione analitica potranno essere eseguite sopra una espressione (3). Così componendo $F_2/(a+F_1)$ con $a+F_1$ otterremo

$$\frac{F_2}{a+F_1}(a+F_1)=F_2\,.$$

§ 4. – Risoluzione generale di equazioni integrali.

9 Abbiasi una funzione analitica del tipo (1)

$$F(z_1\,,z_2\,,\cdots,z_n). \tag{1'}$$

Scriviamo l'equazione

$$F(z_1\,,z_2\,,\cdots,z_n)=0. \tag{4}$$

Consideriamo z_n come funzione implicita di $z_1\,,z_2\,,\cdots,z_{n-1}$ e supponiamo che un ramo di z_n si annulli per $z_1=z_2=\cdots=z_{n-1}=0$ e che questo punto non sia un punto di diramazione del ramo stesso. Allora potremo sviluppare questo ramo nell'intorno di $z_1=z_2=\cdots=z_{n-1}=0$ in una serie

$$z_n=\sum_0^\infty{}_{i_1}\sum_0^\infty{}_{i_2}\cdots\sum_0^\infty{}_{i_{n-1}} b_{i_1\ldots i_{n-1}}z_1^{i_1}z_2^{i_2}\cdots z_{n-1}^{i_{n-1}} \tag{5}$$

essendo $b_{0\ldots0}=0$.

Sostituiamo ora nella (4) a $z_1\,,z_2\,,\cdots,z_n$ le $F_1\,,F_2\,,\cdots,F_n$, secondo quanto dicemmo nel § precedente. Se consideriamo F_n come incognita, avremo una equazione integrale in cui i valori della F_n non compariranno linearmente. Se ora nella (5) sostitueremo a $z_1\,,z_2\,,\cdots,z_{n-1}$ le $F_1\,,F_2\,,\cdots,F_{n-1}$ otterremo una serie convergente ed essa sarà soluzione della equazione integrale.

È notevole osservare che, *mentre la serie* (5) *esprime la soluzione dell'equazione* (4) *solo quando i moduli di* $z_1\,,z_2\,,\cdots,z_{n-1}$ *sono al disotto di certi limiti, la serie*

$$\sum_0^\infty{}_{i_1}\sum_0^\infty{}_{i_2}\cdots\sum_0^\infty{}_{i_{n-1}} b_{i_1\ldots i_{n-1}}F_1^{i_1}\cdots F_{n-1}^{i_{n-1}}(x\,,y)\,,$$

ci darà la soluzione dell'equazione integrale $\mathbf{F}(F_1\,,F_2\,,\cdots,F_n)=0$ *comunque grandi siano i moduli delle funzioni* $F_1\,,F_2\,,\cdots,F_{n-1}$, *purchè siano finiti.*

Così, per esempio, se si vuol trovare la funzione $S(x\,,y)$ quando si conosca $R(x\,,y)$ data da

$$R(x\,,y)=S(x\,,y)+\frac{S^2(x\,,y)}{2!}+\frac{S^3(x\,,y)}{3!}+\cdots+\frac{S^n(x\,,y)}{n!}+\cdots$$

in cui

$$S^n(x\,,y)=\int_x^y S^{n-1}(x\,,\xi)\,S(\xi\,,y)\,d\xi$$

si otterrà

$$S(x\,,y)=R(x\,,y)-\frac{1}{2}R^2(x\,,y)+\frac{1}{3}R^3(x\,,y)-\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}R^n(x\,,y)+\cdots$$

ove

$$R^n(x,y) = \int_x^y R^{n-1}(x,\xi)\,R(\xi,y)\,d\xi$$

e non dovremo porre alcuna limitazione per i valori assoluti di $S(x,y)$, $R(x,y)$, purchè siano finiti.

10. Supponiamo in particolare che la (1') sia un polinomio razionale e intero in z_n di grado m, in modo che l'equazione (4) sia di grado m, allora ponendo $F_n = f$, l'equazione integrale si scriverà

$$(a_m + \Phi_m) f^m + (a_{m-1} + \Phi_{m-1}) f^{m-1} + \cdots + (a_1 + \Phi_1) f = \Phi_0$$

in cui $\Phi_0, \Phi_1, \cdots, \Phi_m$ sono funzioni permutabili fra loro e colle $F_1, F_2, \cdots, F_n$, e $a_1, a_2, \cdots, a_m$ sono costanti. Ammetteremo $a_1 \lesseqgtr 0$ per escludere la diramazione, come abbiamo detto precedentemente. Chiameremo la precedente equazione integrale una equazione integrale di grado m e ne avremo la soluzione colla regola precedentemente data, mediante uno sviluppo in serie, sempre convergente, che sarà una funzione permutabile colle funzioni date. È evidente che allo sviluppo in serie potremo sostituire come equivalente una espressione analitica qualunque che conduca allo stesso sviluppo.

La teoria può facilmente estendersi ai sistemi di equazioni.

§ 5. - EQUAZIONI INTEGRALI DI 1° E 2° GRADO.

11. Supponiamo che l'equazione integrale sia di primo grado, cioè

$$f(x,y) + \int_x^y \Phi_1(x,\xi) f(\xi,y)\,d\xi = \Phi_0(x,y)$$

con Φ_0 e Φ_1 funzioni permutabili.

La soluzione sarà

$$f(x,y) = \frac{\Phi_0(x,y)}{1+\Phi_1(x,y)} = \Phi_0(x,y) - \Phi_0\,\Phi_1(xy) + \Phi_0\,\Phi_1^2(x,y) - \cdots$$

Se $\Phi_0 = \Phi_1$ otteniamo il *primo* ed il *secondo principio* per la risoluzione delle equazioni integrali lineari cioè il *principio di convergenza* ed il *principio di reciprocità* che abbiamo svolto in Memorie precedenti [1], partendo dal concetto che le equazioni integrali possono riguardarsi come il caso limite di equazioni in cui il numero delle incognite e delle equazioni cresce indefinitamente.

(1) *Sulla inversione degli integrali definiti.* «Atti R. Acc. di Torino», vol. 31, 1896; «Rend. Acc. dei Lincei», vol. V, 1° sem. 1896; «Annali di Matematica», 1897. [In queste «Opere»: vol. secondo, XVIII (pp. 216-254), XIX (pp. 255-262), XX (pp. 263-275), XXII (pp. 279-313)].

12. Consideriamo l'equazione integrale di 2° grado, cioè

$$a_1 f(x,y) + \int_x^y \Phi_1(x,\xi) f(\xi,y)\,d\xi + a_2 \int_x^y f(x,\xi) f(\xi,x)\,d\xi$$

$$+ \int_x^y \Phi_2(x,\xi)\,d\xi \int_\xi^y f(\xi,\xi_1) f(\xi_1,y)\,d\xi_1 = \Phi_0(x,y)$$

in cui a_1, a_2 sono costanti e $\Phi_0(x,y)$, $\Phi_1(x,y)$, $\Phi_2(x,y)$ sono funzioni permutabili, $a_1 \gtreqless 0$.

La soluzione sarà

$$f = \frac{-(a_1 + \Phi_1) + \sqrt{(a_1 + \Phi_1)^2 - 4(a_2 + \Phi_2)\Phi_0}}{2(a_2 + \Phi_2)},$$

di cui è facile dare lo sviluppo in serie di potenze di Φ_0, Φ_1, Φ_2, nel quale le potenze stesse ed i prodotti di esse debbono denotare operazioni di composizione.

Avremo bisogno di ricorrere ad equazioni integrali di grado superiore in alcuni problemi di ereditarietà.

§ 6. – Estensione del Teorema IV. Teorema generale sulle equazioni integro-differenziali.

13. Teorema V. – *Abbiasi la serie di potenze, come nel teorema IV,*

$$(6) \qquad \sum_{0}^{\infty}{}_{i_1} \sum_{0}^{\infty}{}_{i_2} \cdots \sum_{0}^{\infty}{}_{i_n} a_{i_1 \ldots i_n} z_1^{i_1} z_2^{i_2}, \cdots, z_n^{i_n} = \mathrm{F}(z_1, z_2, \cdots, z_n).$$

Sostituiamo a $z_1, z_2, \cdots, z_2$ *le* $z_1 \mathrm{F}_1, z_2 \mathrm{F}_2, \cdots, z_n \mathrm{F}_n$ *in cui* $z_1, z_2, \cdots, z_n$ *sono parametri indipendenti dalle variabili* x, y *e intendiamo che i simboli di prodotto e di potenza applicati alle* $\mathrm{F}_1, \mathrm{F}_2, \cdots, \mathrm{F}_n$ *rappresentino le operazioni di composizione. Otterremo una serie di potenze di* $z_1, z_2, \cdots, z_n$ *convergente qualunque siano i moduli di questi parametri.*

Denoteremo questa funzione intera di $z_1, z_2, \cdots, z_n$ con

$$\mathrm{F}(z_1 \mathrm{F}_1, z_2 \mathrm{F}_2, \cdots, z_n \mathrm{F}_n)$$

o anche con

$$\mathrm{F}(z_1, z_2, \cdots, z_n \mid x, y).$$

14. Consideriamo ora una relazione algebrica fra $z_1, z_2, \cdots, z_n$, la funzione (6) e le derivate di questa funzione fino ad un certo ordine, che scriveremo

$$\Phi\left(z_1, z_2, \cdots, z_n \,\middle|\, \mathrm{F} \,\middle|\, \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial z_1}, \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial z_2} \cdots \frac{\partial^{p_1+\cdots+p_n} \mathrm{F}}{\partial z_1^{p_1} \cdots \partial z_n^{p_n}} \cdots\right) = 0.$$

Sostituiamo rispettivamente a $z_1, z_2, \cdots, z_n$, F le $z_1 \xi_1, z_2 \xi_2, \cdots, z_n \xi_n$, f/ξ_0, essendo $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$ dei parametri indipendenti da $z_1, z_2, \cdots, z_n$.

L'equazione precedente diverrà

$$\Phi\left(z_1, z_2, \cdots, z_n \,\middle|\, \frac{f}{\xi_0} \,\middle|\, \frac{1}{\xi_0 \xi_1} \frac{\partial f}{\partial z_1}, \frac{1}{\xi_0 \xi_2} \frac{\partial f}{\partial z_2}, \cdots, \frac{1}{\xi_0 \xi_1^{p_1} \ldots \xi_n^{p_n}} \frac{\partial^{p_1+\cdots+p_n}}{\partial z_1^{p_1} \ldots \partial z_n^{p_n}}, \cdots\right) = 0$$

la quale sarà soddisfatta da $f = \xi_0 \, F(z_1 \xi_1, z_2 \xi_2, \cdots, z_n \xi_n)$

Riducendola a forma intera assumerà l'espressione

$$\Psi\left(z_1, z_2, \cdots, z_n \,|\, \xi_0, \xi_1, \cdots, \xi_n \,|\, f \,|\, \frac{\partial f}{\partial z_1}, \frac{\partial f}{\partial z_2}, \cdots, \frac{\partial^{p_1+\cdots+p_n} f}{\partial z_1^{p_1} \ldots \partial z_n^{p_n}}, \cdots\right) = 0 .$$

Adesso sostituiamo a $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$ le $F_1, F_2, \cdots, F_n$ e a ξ_0 sostituiamo una costante o una funzione F_0 permutabile colle funzioni precedenti, in modo che f resulti anch'essa permutabile colle funzioni stesse, e consideriamo i prodotti e le potenze di $F_0, F_1, \cdots, F_n, f$ e delle derivate di f come operazioni di composizione; l'equazione resulterà identicamente soddisfatta, onde avremo il

TEOREMA VI. - *L'equazione integro-differenziale*

$$\Psi\left(z_1, z_2, \cdots, z_n \,|\, F_0, F_1, \cdots, F_n \,|\, f \,|\, \frac{\partial f}{\partial z_1}, \frac{\partial f}{\partial z_2}, \cdots, \frac{\partial^{p_1+\cdots+p_n} f}{\partial z_1^{p_1} \ldots \partial z_n^{p_n}}, \cdots\right) = 0$$

è soddisfatta dalla funzione intera $f(z_1, z_2, \cdots, z_n \,|\, x, y)$ *permutabile con* $F_1, F_2, \cdots, F_n$.

15. Evidentemente il precedente teorema può estendersi ai sistemi di equazioni integro-differenziali; così prendiamo, per esempio, le funzioni

$$\xi \operatorname{sn}(\xi z) \quad , \quad \xi \operatorname{cn}(\xi z) \quad , \quad \xi \operatorname{dn}(\xi z)$$

e sviluppiamole in serie di potenze intere e positive di z le quali, come è ben noto, saranno convergenti nell'intorno di $z = 0$. Negli sviluppi sostituiamo a ξ una funzione $S(x, y)$ e consideriamo le successive potenze di S come le resultanti delle operazioni di composizione eseguite su S stessa.

Otterremo in tal modo tre *trascendenti intere* di z, funzioni inoltre di x, y, che potremo denotare con

$$\varphi_1(z \,|\, x, y) \quad , \quad \varphi_2(z \,|\, x, y) \quad , \quad \varphi_3(z \,|\, x, y),$$

le quali soddisfaranno alle equazioni integro-differenziali

$$\frac{d\varphi_1(z \,|\, x, y)}{dz} = \int_x^y \varphi_2(z \,|\, x, \xi)\, \varphi_3(z \,|\, \xi, y)\, d\xi$$

$$\frac{d\varphi_2(z \,|\, x, y)}{dz} = -\int_x^y \varphi_3(z \,|\, x, \xi)\, \varphi_1(z \,|\, \xi, y)\, d\xi$$

$$\frac{d\varphi_3(z \,|\, x, y)}{dz} = -k^2 \int_x^y \varphi_1(z \,|\, x, \xi)\, \varphi_2(z \,|\, \xi, y)\, d\xi$$

in cui k è il modulo delle funzioni ellittiche.

§ 7. – TEOREMI DI ADDIZIONE INTEGRALI. RELAZIONI FUNZIONALI.

16. In una Nota precedente [2] ho costruito la funzione intera

$$\mathrm{V}(z \mid x, y) = \mathrm{S}z + \frac{\mathrm{S}^2 z^2}{1 \cdot 2} + \frac{\mathrm{S}^3 z^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \cdots \tag{7}$$

in cui $\mathrm{S}, \mathrm{S}^2, \mathrm{S}^3, \cdots$ hanno lo stesso significato come nel precedente paragrafo ed ho dimostrato che la detta funzione possiede il teorema d'addizione integrale

$$\begin{aligned} &\mathrm{V}(z + u \mid x, y) \\ &= \mathrm{V}(z \mid x, y) + \mathrm{V}(u \mid x, y) + \int_x^y \mathrm{V}(z \mid x, \xi)\, \mathrm{V}(u \mid \xi, y)\, d\xi, \end{aligned} \tag{8}$$

del quale mi sono valso per risolvere il problema della sfera elastica isotropa nel caso ereditario.

Questo teorema può dedursi dal teorema d'addizione della funzione esponenziale. Posto infatti

$$\mathrm{V}(z) = e^z - 1 = z + \frac{z^2}{1 \cdot 2} + \frac{z^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \cdots, \tag{9}$$

avremo

$$\mathrm{V}(z + u) = \mathrm{V}(z) + \mathrm{V}(u) + \mathrm{V}(z)\, \mathrm{V}(u),$$

onde, sostituendo nella serie (9) a z successivamente $z\mathrm{S}_1(x, y)$, $u\mathrm{S}_2(x, y)$ e $z\mathrm{S}_1(x, y) + u\mathrm{S}_2(x, y)$, e considerando le potenze e i prodotti di S_1 e S_2 come operazioni di composizione, otterremo la funzione intera del tipo (7) ed il teorema d'addizione integrale

$$\begin{aligned} &\mathrm{V}[z\mathrm{S}_1(x, y) + u\mathrm{S}_2(x, y)] \\ &= \mathrm{V}(z\mathrm{S}_1(x, y)) + \mathrm{V}(u\mathrm{S}_2(x, y)) + \mathrm{V}(z\mathrm{S}_1)\, \mathrm{V}(u\mathrm{S}_2). \end{aligned}$$

Se $\mathrm{S}_1 = \mathrm{S}_2 = \mathrm{S}$ avremo il teorema d'addizione integrale (8).

17. Si comprende facilmente come analoghi teoremi integrali possano ottenersi partendo da funzioni olomorfe nell'intorno del punto $z_1 = z_2 = \cdots = z_n = 0$ le quali posseggano teoremi d'addizione. Così, per esempio, è facile vedere i teoremi d'addizione integrali che si hanno partendo dalle funzioni ellittiche $\mathrm{sn}\, z$, $\mathrm{cn}\, z$, $\mathrm{dn}\, z$.

Similmente qualsiasi relazione tra funzioni olomorfe nell'intorno del punto $z_1 = z_2 = \cdots = z_n = 0$ conduce a relazioni integrali. Prendiamo per

(2) « Rend. R. Accad. dei Lincei ». Seduta del 6 febbraio 1910. [In questo vol.: XXII, pp. 304-310].

esempio la ordinaria funzione σ, cioè [3]

$$\sigma u = u + * - \frac{g_2 u^5}{2^4 \cdot 3 \cdot 5} - \frac{g_3 u^7}{2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7} - \frac{g_2^2 u^9}{2^9 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7} - \frac{g_2 g_3 u^{11}}{2^7 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11} - \cdots$$

e sostituiamo ad u la $uS(x, y)$ considerando le potenze di S come rappresentanti operazioni di composizione. Otterremo la funzione intera $F(u \mid x, y)$ e la equazione a tre termini condurrà alla relazione integrale

$$\int_x^y \mathbf{F}(u+u_1 \mid x, \xi) d\xi \int_\xi^y \mathbf{F}(u-u_1 \mid \xi, \xi_1) d\xi_1 \int_{\xi_1}^y \mathbf{F}(u_2+u_3 \mid \xi_1, \xi_2) \mathbf{F}(u_2-u_3 \mid \xi_2, y) d\xi_2$$

$$+ \int_x^y \mathbf{F}(u+u_2 \mid x, \xi) d\xi \int_\xi^y \mathbf{F}(u-u_2 \mid \xi, \xi_1) d\xi_1 \int_{\xi_1}^y \mathbf{F}(u_3+u_1 \mid \xi_1, \xi_2) \mathbf{F}(u_3-u_1 \mid \xi_2, y) d\xi_2$$

$$+ \int_x^y \mathbf{F}(u+u_3 \mid x, \xi) d\xi \int_\xi^y \mathbf{F}(u-u_3 \mid \xi, \xi_1) d\xi_1 \int_{\xi_1}^y \mathbf{F}(u_1+u_2 \mid \xi_1, \xi_2) \mathbf{F}(u_1-u_2 \mid \xi_2, y) d\xi_2 = 0.$$

Il teorema IV ed il teorema V e le loro conseguenze possono estendersi anche a casi di funzioni non permutabili e ad altri casi di cui ci occuperemo in altri lavori.

§ 8. - PERMUTABILITÀ E COMPOSIZIONE DI 2ª SPECIE.

18. Supponiamo che le funzioni finite e continue $F_i(x, y)$, $(i = 1, 2, \cdots, n)$, siano tali che

$$\text{(B)} \qquad \int_0^1 F_i(x, \xi) F_s(\xi, y) d\xi = \int_0^1 F_s(x, \xi) F_i(\xi, y) d\xi .$$

Anche questa proprietà potrà chiamarsi *permutabilità* delle funzioni $F_1, \cdots, F_n$, soltanto per distinguerla dalla permutabilità considerata nei precedenti paragrafi, la diremo *permutabilità di 2ª specie*, riserbando a quella precedentemente considerata il nome di *permutabilità di 1ª specie* o semplicemente di *permutabilità* come abbiamo detto fin qui. E così l'operazione (B) si potrà dire *composizione di 2ª specie* ed il risultato ottenuto *risultante di 2ª specie*.

Per distinguere la risultante di 2ª specie da quella precedentemente considerata, porremo due punti sopra le funzioni; quindi il risultato dell'operazione (B) si indicherà con $\ddot{F}_i \ddot{F}_s (x, y)$ o semplicemente con $\ddot{F}_i \ddot{F}_s$; componendo m funzioni eguali ad $F_1(x, y)$ la *risultante* si rappresenterà con $\ddot{F}_1^m (x, y)$ o con $\ddot{F}_1^m$.

(3) WEIERSTRASS, *Formeln und Lehrsätze zum Gebrauche der elliptischen. Fuctionen* Gottingen 1885, Art. 5, ser. 6.

Se si eccettua il teorema III, tutte le proprietà enunciate nei §§ 1 e 2 sono senz'altro estensibili alla composizione di 2ª specie.

19. TEOREMA VII. - *Siano le* m_{is} $(i, s = 1, 2, \cdots, n)$ *delle costanti finite. Si formi*

$$m'_{is} = \frac{1}{n} \sum_{1}^{n}{}_h \, m_{ih} \, m_{hs} \,, \; m''_{is} = \frac{1}{n} \sum_{1}^{n}{}_h \, m'_{ih} m_{hs} \,, \cdots, m^{(p)}_{is} = \frac{1}{n} \sum_{1}^{n} m^{(p-r)}_{ih} \, m^{(r)}_{hs}, \cdots$$

La funzione ottenuta per prolungamento analitico in tutto il piano complesso dell'elemento individuato nell'intorno di $z = 0$ *dalla serie*

$$f_{is}(z) = c_1 \, m_{is} \, z + c_2 \, m'_{is} \, z^2 + c_3 \, m''_{is} \, z^3 + \cdots$$

sarà una funzione olomorfa se $f(z) = c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + \cdots$ *è olomorfa in tutto il piano complesso; e sarà meromorfa (o olomorfa) se* $f(z)$ *è meromorfa.*

Questo teorema può dedursi dal teorema di HADAMARD [4] osservando che le radici delle equazioni di 1° grado $x_{is} - \frac{z}{n} \sum_{1}^{n}{}_h \, m_{ih} \, x_{hs} = z m_{is}$ sono sviluppabili nell'intorno di $z = 0$ nelle serie $x_{is} = m_{is} \, z + m'_{is} \, z^2 + m''_{is} \, z^3 + \cdots$

TEOREMA VIII. - *Se*

$$f(z) = c_1 \, z + c_2 z^2 + c_3 \, z^3 + \cdots$$

è una funzione olomorfa in tutto il piano complesso, la funzione

$$f(z \mid x, y) = c_1 \, \mathrm{S} z + c_2 \, \ddot{\mathrm{S}}^2 z^2 + c_3 \, \ddot{\mathrm{S}}^3 z^3 + \cdots, \tag{10}$$

in cui S *è una funzione di* x, y *finita e continua, sarà pure una funzione olomorfa di* z *in tutto il piano complesso. Essa si denoterà anche con* $f(\ddot{\mathrm{S}} z)$.

TEOREMA IX. - *Se*

$$f(z) = c_1 \, z + c_2 z^2 + c_3 \, z^3 + \cdots \tag{11}$$

è una funzione meromorfa, la funzione ottenuta per prolungamento analitico in tutto il piano complesso dell'elemento individuato nell'intorno di $z = 0$ *dalla serie*

$$f(z \mid x, y) = c_1 \, \mathrm{S} z + c_2 \, \ddot{\mathrm{S}} \, z^2 + c_3 \, \ddot{\mathrm{S}}^3 z^3 + \cdots \tag{12}$$

resulterà pure una funzione meromorfa (o olomorfa) di z.

I teoremi VIII e IX sono stati ottenuti come casi limiti dal teorema VII, quando si supponga n, i, s, crescenti indefinitamente, in modo da passare dalle somme agli integrali, ma possono darsi dei teoremi stessi anche delle dimostrazioni dirette molto semplici. Ci risparmiamo quella del teorema VIII. Quella del teorema IX può aversi nel modo seguente, che ci fornisce nel

(4) « Acta Mathem. », T. 22; vedi BOREL, « Bull. Soc. Math. », T. 26; PINCHERLE, « Rend. R. Acc. di Bologna », nuova serie, t. III, 1899.

tempo stesso la espressione analitica della (12) valida in tutto il piano complesso.

Supponiamo per semplicità che i poli $b_1, b_2, \cdots$ della (11) siano semplici. In virtù del teorema di MITTAG-LEFFLER potremo scrivere

$$f(z) = \Sigma_i\, m_i \left[\frac{z}{b_i - z} - \frac{z}{b_i} - \frac{z^2}{b_i^2} - \cdots - \frac{z^{h_i}}{b_i^{h_i}}\right] + \mathrm{P}_0(z),$$

in cui $\mathrm{P}_0(z)$ è una funzione olomorfa in tutto il piano complesso.

Poniamo ora la soluzione dell'equazione

$$(13) \qquad \mathrm{S}(x, y) = \mathrm{F}(z \mid x, y) - z \int_0^1 \mathrm{F}(z \mid x, \xi)\, \mathrm{S}(\xi, y)\, d\xi$$

sotto la forma

$$(14) \qquad \mathrm{F}(z \mid x, y) = \frac{\mathrm{H}(z \mid x, y)}{\mathrm{D}(z)}$$

in cui il numeratore ed il denominatore sono funzioni intere di z e $\mathrm{D}(z)$ è il determinante [5].

Potremo prendere le h_i tali che le due serie

$$\Sigma_i\, m_i \left[\frac{z}{b_i - z} - \frac{z}{b_i} - \frac{z^2}{b_i^2} - \cdots - \frac{z^{h_i}}{b_i^{h_i}}\right],$$

$$\Sigma_i\, m_i \left[\frac{\frac{z}{b_i}\mathrm{H}\left(\frac{z}{b_i} \middle| x, y\right)}{\mathrm{D}\left(\frac{z}{b_i}\right)} - \frac{z}{b_i}\mathrm{S} - \frac{z^2}{b_i^2}\ddot{\mathrm{S}}^2 - \cdots - \frac{z^{h_i}\ddot{\mathrm{S}}^{h_i}}{b_i^{h_i}}\right]$$

siano contemporaneamente uniformemente convergenti nell'intorno di ogni valore di z che non sia della forma $b_i a_s$, in cui $a_1, a_2, \cdots$ denotano le radici di $\mathrm{D}(z) = 0$.

Ne segue che la funzione

$$(15) \qquad \Sigma_i\, m_i \left[\frac{\frac{z}{b_i}\mathrm{H}\left(\frac{z}{b_i} \middle| x, y\right)}{\mathrm{D}\left(\frac{z}{b_i}\right)} - \frac{z}{b_i}\mathrm{S} - \frac{z^2}{b_i^2}\ddot{\mathrm{S}}^2 - \cdots - \frac{z^{h_i}\ddot{\mathrm{S}}^{h_i}}{b_i^{h_i}}\right] + \mathrm{P}_0(\ddot{\mathrm{S}}z)$$

non sarà altro che la funzione $f(z \mid x, y)$. La (15) sarà in generale meromorfa, ed i suoi poli non potranno essere che nei punti $b_i a_s$.

20. È facile dedurre dalle equazioni differenziali, dai teoremi d'addizione, dalle relazioni algebriche e funzionali, a cui soddisfa un insieme di funzioni (11), delle equazioni integro-differenziali, dei teoremi di addizione integrali, e delle relazioni funzionali per le funzioni corrispondenti (15), in modo analogo a quanto facemmo nei paragrafi precedenti.

(5) Vedi FREDHOLM, *Sur une classe d'équations fonctionnelles*, « Acta Math. », t. 27.

In particolare, se partiamo dalle funzioni ellittiche, otterremo tre funzioni meromorfe $\psi_1(z \mid x, y)$, $\psi_2(z \mid x, y)$, $\psi_3(z \mid x, y)$ le quali soddisfano le equazioni integro-differenziali

$$\frac{d\psi_1(z \mid x, y)}{dz} = \int_0^1 \psi_2(z \mid x, \xi)\, \psi_3(z \mid \xi, y)\, d\xi$$

$$\frac{d\psi_2(z \mid x, y)}{dz} = -\int_0^1 \psi_3(z \mid x, \xi)\, \psi_1(z_1 \mid \xi, y)\, d\xi$$

$$\frac{d\psi_3(z \mid x, y)}{dz} = -k^2 \int_0^1 \psi_1(z \mid x, \xi)\, \psi_2(z \mid \xi, y)\, d\xi$$

e posseggono dei teoremi di addizione integrali ben facili ad ottenersi.

Le trascendenti ellittiche, al pari di altre trascendenti, possono quindi condurre a varii tipi di nuove trascendenti, le une olomorfe e le altre meromorfe, le quali soddisfano ad equazioni integro-differenziali e posseggono teoremi d'addizione integrali.

XXIV.

DEFORMAZIONE DI UNA SFERA ELASTICA SOGGETTA A DATE TENSIONI, NEL CASO EREDITARIO

« Rend. Acc. Lincei », ser. 5ª, vol. XIX₁, 1910₁; pp. 239–243

§ 1. – Risoluzione d'una equazione integrale di 2° grado.

1. Poniamo, facendo uso di una notazione adottata in precedenti lavori,

$$M_1 f = m_1 f(y) + \int_0^y f(x)\, \mu_1(x, y)\, dx$$

$$M_2 f = m_2 f(y) + \int_0^y f(x)\, \mu_2(x, y)\, dx$$

e supponiamo che le due funzioni finite e continue μ_1 e μ_2 siano permutabili [1], cioè si abbia,

$$\int_x^y \mu_1(x, \xi)\, \mu_2(\xi, y)\, d\xi = \int_x^y \mu_2(x, \xi)\, \mu_1(\xi, y)\, d\xi .$$

Poniamo poi

$$X_1 f = x_1 f(y) + \int_0^y f(x)\, \xi_1(x, y)\, dx$$

$$X_2 f = x_2 f(y) + \int_0^y f(x)\, \xi_2(x, y)\, dx ,$$

e cerchiamo di determinare i parametri x_1, x_2 e le funzioni ξ_1 e ξ_2 in modo tale che

$$(X_1 + X_2) f = M_1 f ,$$
$$X_1 X_2 f = M_2 f .$$

2. Dovremo avere

$$x_1 + x_2 = m_1 \quad , \quad x_1 x_2 = m_2$$
$$\xi_1(x, y) + \xi_2(x, y) = \mu_1(x, y)$$
$$x_1 \xi_2(x, y) + x_2 \xi_1(x, y) + \xi_1 \xi_2(x, y) = \mu_2(x, y) ;$$

(1) Vedi la mia Nota: *Questioni generali sulle equazioni integrali ed integro-differenziali.* « Rend. Acc. dei Lincei », seduta del 20 febbraio 1910. [In questo vol.: XXIII, pp. 311–322].

quindi x_1 e x_2 saranno le radici della equazione di secondo grado

$$x^2 - m_1 x + m_2 = 0,$$

mentre ξ_1 e ξ_2 soddisfaranno alle equazioni integrali di 2° grado

$$\int_x^y \xi_i(x,\zeta)\,\xi_i(\zeta,y)\,d\zeta - \int_x^y \xi_i(x,\zeta)\,\mu_1(\zeta,y)\,d\zeta$$
$$+ (x_i - x_s)\,\xi_i(x,y) = -\mu_2(x,y) + x_i\,\mu_1(x,y)$$

ove i ed s rappresentano i numeri 1 e 2, oppure 2 e 1 rispettivamente.

Supponiamo le radici x_1 e x_2 diverse fra loro: allora applicando la regola data nella Nota precedentemente citata, avremo che $\xi_1(x,y)$, $\xi_2(x,y)$ si otterranno prendendo successivamente il segno + e il segno — nella formula

$$\frac{1}{2}\mu_1(x,y) = \frac{\sqrt{m_1^2 - 4m_2}}{2} \sum_1^\infty{}_n \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\cdots\left(\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!} \left(\frac{2m_1\mu_1 + \mu_1^2 - 4\mu_2}{m_1^2 - 4m_2}\right)^n.$$

Le potenze e i prodotti delle μ_1 e μ_2 nella serie suddetta debbono considerarsi come operazioni di composizione. In virtù della teoria generale, avremo che *la serie stessa sarà sempre uniformemente convergente.*

§ 2. – Risoluzione di una equazione integro-differenziale ausiliaria.

3. Abbiasi l'equazione integro-differenziale

$$z^2 \frac{\partial^2 f(y,z)}{\partial z^2} + z\mathrm{M}_1 \frac{\partial f(y,z)}{\partial z} + \mathrm{M}_2 f(y,z) = \varphi(y,z) \tag{1}$$

in cui $\varphi(y,z)$ è una funzione finita e continua.

Essa potrà ancora scriversi

$$z\frac{\partial}{\partial z}\left[z\frac{\partial f(y,z)}{\partial z} + \mathrm{X}_1 f(y,z)\right] + \mathrm{X}_2\left[z\frac{\partial f(y,z)}{\partial z} + \mathrm{X}_1 f(y,z)\right] = \varphi(y,z);$$

e perciò, applicando i risultati ottenuti in una Nota precedente [2], ne otterremo la soluzione finita e continua, calcolando dapprima:

$$\Psi(x,z) = \frac{1}{z^{\alpha_1}}\int_0^z \zeta^{x_1 - 1}\left[\varphi(x,\zeta) + \int_0^x \varphi(\xi,\zeta)\,\mathrm{V}_1\left(\log\frac{\zeta}{z} \,|\, \xi, x\right)d\xi\right]d\zeta \tag{2}$$
$$- \frac{1}{z^{\alpha_2}}\int_0^z \zeta^{x_2 - 1}\left[\varphi(x,\zeta) + \int_0^x \varphi(\xi,\zeta)\,\mathrm{V}_2\left(\log\frac{\zeta}{z} \,|\, \xi, x\right)d\xi\right]d\zeta,$$

quindi costruendo:

$$f(y,z) = (\mathrm{X}_2 - \mathrm{X}_1)^{-1}\,\Psi(y,z), \tag{3}$$

(2) « Rend. Acc. del Lincei », ser. 5ª, vol XIX₁ 1910₁; pp. 107–114. [In questo vol.: XXII, pp. 304–310].

in cui si intende che

$$V_1(z \mid x, y) = \sum_1^\infty {}_n \frac{z^n}{n!} \xi_1^n(x, y)$$

$$V_2(z \mid x, y) = \sum_1^\infty {}_n \frac{z^n}{n!} \xi_2^n(x, y),$$

mentre le potenze di ξ_1 e ξ_2 denotano risultati di operazioni di composizione.

§ 3. — Sfera elastica isotropa nel caso ereditario.

4. Facciamo uso delle notazioni introdotte nella Nota: *Equazioni integro-differenziali della elasticità nel caso della isotropia* (3) e poniamo (4)

$$\text{(4)} \qquad \begin{cases} U = xt_{11} + yt_{12} + zt_{13} \\ V = xt_{21} + yt_{22} + zt_{23} \\ W = xt_{31} + yt_{32} + zt_{33} \end{cases}$$

$$\Theta = 2(A_1 - A_2)\,\theta .$$

Nella ipotesi che non esistano forze di massa, avremo

$$\Delta^2 t_{11} = \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} \qquad \Delta^2 t_{23} = \frac{\partial^2 \Theta}{\partial y\, \partial z}$$

$$\Delta^2 t_{22} = \frac{\partial^2 \Theta}{\partial y^2} \qquad \Delta^2 t_{31} = \frac{\partial^2 \Theta}{\partial z\, \partial x}$$

$$\Delta^2 t_{33} = \frac{\partial^2 \Theta}{\partial z^2} \qquad \Delta^2 t_{12} = \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x\, \partial y}$$

quindi

$$\Delta^2 U = \frac{\partial}{\partial x}\left(x \frac{\partial \Theta}{\partial x} + y \frac{\partial \Theta}{\partial y} + z \frac{\partial \Theta}{\partial z} - \Theta\right)$$

$$\Delta^2 V = \frac{\partial}{\partial y}\left(x \frac{\partial \Theta}{\partial x} + y \frac{\partial \Theta}{\partial y} + z \frac{\partial \Theta}{\partial z} - \Theta\right)$$

$$\Delta^2 W = \frac{\partial}{\partial z}\left(x \frac{\partial \Theta}{\partial x} + y \frac{\partial \Theta}{\partial y} + z \frac{\partial \Theta}{\partial z} - \Theta\right)$$

e per conseguenza

$$\text{(5)} \qquad \begin{cases} U = U_1 + (r^2 - R^2)\dfrac{\partial f}{\partial x}, \\ V = V_1 + (r^2 - R^2)\dfrac{\partial f}{\partial y}, \\ W = W_1 + (r^2 - R^2)\dfrac{\partial f}{\partial z}, \end{cases}$$

(3) « Rend. Acc. dei Lincei », ser. 5ª, vol. XVIII₂, 1909₂; pp. 577–586. [In questo vol.: XXI, pp. 294–303].

(4) Cfr. ALMANSI, « Memorie della R. Acc. di Torino », 1897.

ove $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, R è una costante e U_1, V_1, W_1, f sono funzioni armoniche, mentre

$$(6) \qquad r\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{2}f = \frac{1}{4}\left(x\frac{\partial \Theta}{\partial x} + y\frac{\partial \Theta}{\partial y} + z\frac{\partial \Theta}{\partial z} - \Theta\right) = \frac{1}{4}\left(r\frac{\partial \Theta}{\partial r} - \Theta\right).$$

5. Se l'origine è nel centro della sfera elastica di raggio R, le funzioni U_1, V_1, W_1 saranno determinate quando si conoscano le tensioni che sollecitano la sfera al contorno. Tenendo poi conto che dalle (5) e (4) e dalle relazioni che legano le tensioni alle deformazioni, si ha

$$(7) \qquad \frac{\partial U_1}{\partial x} + \frac{\partial V_1}{\partial y} + \frac{\partial W_1}{\partial z} + 2r\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z}$$

$$= t_{11} + t_{22} + t_{33} = (3\,A_2 - 4\,A_1)\,\theta = \frac{1}{2}(A_1 - A_2)^{-1}(3\,A_2 - 4\,A_1)\,\Theta,$$

colla eliminazione di Θ fra questa ultima relazione e la (6) risulterà che f dovrà soddisfare l'equazione integro-differenziale

$$(8) \qquad r^2\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} - A_3\left(r\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{2}f\right) = \frac{1}{2}\left(\Theta_1 - r\frac{\partial \Theta_1}{\partial r}\right)$$

in cui

$$\Theta_1 = \frac{\partial U_1}{\partial x} + \frac{\partial V_1}{\partial y} + \frac{\partial W_1}{\partial z}$$

$$A_3 = (A_1 - A_2)^{-1}(3\,A_2 - 4\,A_1).$$

L'equazione integro-differenziale (8) rientra nel caso contemplato nel paragrafo precedente, quindi si potrà calcolare f, ottenuta la quale si avranno U, V, W.

Ciò fatto si troverà θ dalla relazione (vedi form. 7))

$$\theta = (3\,A_2 - 4\,A_1)^{-1}\left(\Theta_1 + 2r\frac{\partial f}{\partial r}\right)$$

e poiché le (4) possono scriversi

$$\begin{aligned} x(A_2 - 2\,A_1)\,\theta + A_1(2\,x\gamma_{11} + y\gamma_{12} + z\gamma_{13}) &= U \\ y(A_2 - 2\,A_1)\,\theta + A_1(x\gamma_{21} + 2\,y\gamma_{22} + z\gamma_{23}) &= V \\ z(A_2 - 2\,A_1)\,\theta + A_1(x\gamma_{31} + y\gamma_{32} + 2\,z\gamma_{33}) &= W \end{aligned}$$

potremo ricavare immediatamente i trinomi

$$2\,x\gamma_{11} + y\gamma_{12} + z\gamma_{13} \quad , \quad x\gamma_{21} + 2\,y\gamma_{22} + z\gamma_{23} \quad , \quad x\gamma_{31} + y\gamma_{32} + 2\,z\gamma_{33}$$

dai quali, col metodo dato dal prof. ALMANSI (5), si calcoleranno gli spostamenti allorché si conoscerà lo spostamento e la rotazione della particella che giace al centro della sfera.

6. Nei problemi relativi alla Terra, allorché si vuol tener conto della sua elasticità, non vi ha dubbio che i fenomeni ereditari debbono avere una influenza non trascurabile. L'analisi precedente offre il mezzo di calcolare

(5) Vedi Memoria citata precedentemente.

in modo completo gli effetti della ereditarietà, qualunque sia la scelta che si faccia della legge di ereditarietà, purché si supponga la *ereditarietà lineare*. Si noti che le operazioni a cui si deve ricorrere sono sviluppi in serie i cui termini sono ottenuti con operazioni di composizione e quindi sono in generale rapidamente convergenti, giacché, nella operazione di composizione, ogni potenza ed ogni composizione di più funzioni conduce ad una quantità il cui ordine di grandezza è affetto da un divisore eguale al fattoriale relativo all'esponente o al numero delle funzioni che si compongono.

XXV.

OSSERVAZIONI SULLE EQUAZIONI INTEGRO-DIFFERENZIALI ED INTEGRALI

« Rend. Acc. Lincei », ser. 5ª, vol. XIX, 1910_1, pp. 361-362.

1. Mi permetto in questa breve Nota di applicare (come esempio) i metodi dati nel mio precedente lavoro: *Questioni generali sulle equazioni integrali ed integro-differenziali* (1) alla equazione integro-differenziale

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{A}) \qquad 0 = {} & \frac{\partial^2 u(x,y,z \mid \theta,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y,z \mid \theta,t)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u(x,y,z \mid \theta,t)}{\partial z^2} \\
& + \int_t^\theta \left\{ \frac{\partial^2 u(x,y,z \mid \theta,\tau)}{\partial x^2} f(\tau,t) + \frac{\partial^2 u(x,y,z \mid \theta,\tau)}{\partial y^2} \varphi(\tau,t) \right. \\
& \left. + \frac{\partial^2 u(x,y,z \mid \theta,\tau)}{\partial z^2} \psi(\tau,t) \right\} d\tau
\end{aligned}
$$

a cui ho già consacrato una Memoria precedente (*).

2. Cominciamo dal considerare l'equazione differenziale

$$\frac{\partial^2 \mathrm{U}}{\partial x^2}(1+z_1) + \frac{\partial^2 \mathrm{U}}{\partial y^2}(1+z_2) + \frac{\partial^2 \mathrm{U}}{\partial z^2}(1+z_3) = 0 .$$

Pongasi

$$1 + z_1 = \frac{1}{1-\zeta_1} \quad , \quad 1 + z_2 = \frac{1}{1-\zeta_2} \quad , \quad 1 + z_3 = \frac{1}{1-\zeta_3}$$

cioè, supposto $|\zeta_i| < 1$,

$$\zeta_i = z_i - z_i^2 + z_i^3 - z_i^4 + \cdots$$

La (A) possiederà l'integrale particolare

$$\mathrm{U} = \frac{\zeta}{\sqrt{x^2(1-\zeta_1) + y^2(1-\zeta_2) + z^2(1-\zeta_3)}}$$

in cui ζ è un parametro qualsiasi indipendente da x, y, z.

(1) « Rend. R. Acc. dei Lincei », seduta del 20 febbraio 1910 [in questo vol.: XXIII, pp. 311-322].

(*) In questo vol.: XVII, pp. 269-275. [N. d. R.].

Per valori di $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$ con modulo sufficientemente piccolo avremo lo sviluppo convergente

$$U = \frac{\zeta}{r}\left\{1 + \sum_1^\infty {}_n \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)\cdots\left(\frac{1}{2}+n-1\right)}{n!}\left[\left(\frac{x}{r}\right)^2\zeta_1 + \left(\frac{y}{r}\right)^2\zeta_2 + \left(\frac{z}{r}\right)\zeta_3\right]^n\right\}$$

ove

$$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

3. Supponiamo ora che le funzioni $f(t,\tau)$, $\varphi(t,\tau)$, $\psi(t,\tau)$ siano fra loro permutabili e che $\chi(t,\tau)$ sia pure permutabile colle funzioni stesse; allora le regole date nel lavoro citato precedentemente ci permettono di ottenere la soluzione fondamentale della (A) nel modo seguente.

Poniamo (denotando col simbolo di potenze le operazioni di composizione)

$$F(\tau,t) = f(\tau,t) - f^2(\tau,t) + f^3(\tau,t) - \cdots$$

$$\Phi(\tau,t) = \varphi(\tau,t) - \varphi^2(\tau,t) + \varphi^3(\tau,t) - \cdots$$

$$\Psi(\tau,t) = \psi(\tau,t) - \psi^2(\tau,t) + \psi^3(\tau,t) - \cdots$$

$$\Theta(x,y,z\,|\,\tau,t) = \left(\frac{x}{r}\right)^2 F(\tau,t) + \left(\frac{y}{r}\right)^2 \Phi(\tau,t) + \left(\frac{z}{r}\right)^2 \Psi(\tau,t).$$

La soluzione cercata della (A) sarà data da

(1) $$u(x,y,z\,|\,\theta,t)$$

$$= \frac{1}{r}\left\{\chi(\theta,t) + \sum_1^\infty {}_n \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)\cdots\left(\frac{1}{2}+n-1\right)}{n!}\int_t^\theta \chi(\theta,\tau)\,\Theta^n(x,y,z\,|\,\tau,t)\,d\tau\right\}.$$

La convergenza delle serie considerate sussiste qualunque sia la grandezza dei valori assoluti delle funzioni f, φ, ψ, χ, purché essi siano finiti.

Si vede facilmente che la espressione precedente soddisfarà la (A) anche se $\chi = 1$.

4. Nella Nota *Sulle equazioni integro-differenziali* (2) abbiamo data la soluzione fondamentale della equazione (A) senza fare l'ipotesi della permutabilità delle funzioni f, φ, ψ; essa si riduce facilmente alla (1) quando queste funzioni siano permutabili.

A questo proposito ricordiamo quanto fu osservato nel § 7 della Nota citata al principio di questa, cioè che i teoremi IV e V della Nota stessa e le loro conseguenze possono estendersi anche al caso di funzioni non permutabili e quindi la risoluzione generale delle equazioni integrali ed integro–

(2) « Rend. R. Acc. dei Lincei », seduta del 21 febbraio 1909 [in questo vol.: XX, pp. 288–293].

differenziali può estendersi anche al caso in cui si abbia da che fare con funzioni non permutabili. Così, per esempio, se avremo l'equazione integrale (3)

$$a_m f^m + z_m \int_x^y \Phi_m(x, \xi) f^m(\xi, y)\, d\xi + a_{m-1} f^{m-1}$$

$$+ z_{m-1} \int_x^y \Phi_{m-1}(x, \xi) f^{m-1}(\xi, y)\, d\xi + \cdots$$

$$+ a_1 f + z_1 \int_x^y \Phi_1(x, \xi) f(\xi, y)\, d\xi = z_0 \Phi_0(x, y),$$

in cui le potenze di f denotano operazioni di composizione, se sviluppiamo f in serie di potenze di $z_0, z_1, \cdots, z_m$, lo sviluppo sarà valido qualunque sia il modulo di questi parametri ed il valore assoluto delle costanti $a_1, \cdots, a_m$ e delle funzioni $\Phi_0, \Phi_1, \cdots, \Phi_m$ (anche se queste funzioni non saranno permutabili fra loro) purché i valori stessi siano finiti e $a_1 \gtrless 0$. Quando $\Phi_0, \Phi_1, \cdots, \Phi_m$ saranno permutabili, la soluzione assumerà la forma semplice che discende dallo sviluppo in serie della radice d'una equazione algebrica.

5. L'operazione di composizione è estendibile al caso di funzioni di $2n$ variabili. Così potrà considerarsi l'integrale

$$\int_{\alpha_1}^{\beta_1} d\xi_1, \cdots, \int_{\alpha_n}^{\beta_n} d\xi_n\, F_1(x_1, \cdots, x_n | \xi_1, \cdots, \xi_n) F_2(\xi_1, \cdots, \xi_n | y_1, \cdots, y_n) d\xi_1 \cdots d\xi_n .$$

Supponiamo che

$$\alpha_1 = x_1, \alpha_2 = x_2, \cdots, \alpha_h = x_h, \alpha_{h+1} = 0, \alpha_{h+2} = 0, \cdots, \alpha_n = 0$$

$$\beta_1 = y_1, \beta_2 = y_2, \cdots, \beta_h = y_h, \beta_{h+1} = 1, \beta_{h+2} = 1, \cdots, \beta_n = 1 .$$

Se il detto integrale sarà eguale a

$$\int_{\alpha_1}^{\beta_1} d\xi_1, \cdots, \int_{\alpha_n}^{\beta_n} d\xi_n\, F_2(x_1, \cdots, x_n | \xi_1, \cdots, \xi_n) F_1(\xi_1 \cdots, \xi_n | y_1, \cdots, y_n) d\xi_1 \cdots d\xi_n ,$$

F_1 e F_2 saranno permutabili.

Se $h \gtrless 1$ si potranno estendere a questo caso le proposizioni date per la composizione di prima specie.

Sotto questo punto di vista la teoria svolta per l'equazione integro-differenziale (A) può estendersi al caso in cui in essa figuri un integrale multiplo anziché semplice.

(3) Cfr. Nota citata, § 4, p. 173 [p. 324 di questo volume].

XXVI.

SOPRA LE FUNZIONI PERMUTABILI

«Rend. Acc. Lincei», ser. 5ª, vol. XIX_1, 1910_1, pp, 425-437.

§ 1. - IL PROBLEMA FONDAMENTALE.

1. Ho chiamato *funzioni permutabili* (1) due funzioni finite e continue tali che

$$\int_x^y F(x, \xi)\, \Phi(\xi, y)\, d\xi = \int_x^y \Phi(x, \xi)\, F(\xi, y)\, d\xi.$$

Supponendo ora

$$0 \leq x \leq y \leq a$$

e $F(x, x) \gtrless 0$, per x compreso fra 0 e a, proponiamoci il problema di cercare tutte le funzioni $\Phi(x, y)$ permutabili con $F(x, y)$.

2. Eseguiamo un cambiamento di variabili ponendo

$$x = f(x_1) \quad , \quad y = f(y_1) \quad , \quad \xi = f(\xi_1),$$

con $f'(\xi_1)$ sempre positivo, in modo che le dette equazioni possano invertirsi univocamente. Avremo

$$\int_{x_1}^{y_1} F(x_1, \xi_1)\, \Phi(\xi_1, y_1) f'(\xi_1)\, d\xi_1 = \int_{x_1}^{y_1} \Phi(x_1, \xi_1)\, F(\xi_1, y_1) f'(\xi_1)\, d\xi_1$$

quindi, ponendo

$$(3) \qquad \begin{cases} \pm \sqrt{f'(x_1) f'(y_1)}\, \Phi(x_1, y_1) = \Phi_1(x_1, y_1), \\ \pm \sqrt{f'(x_1) f'(y_1)}\, F(x_1, y_1) = F_1(x_1, y_1), \end{cases}$$

sarà

$$\int_{x_1}^{y_1} F_1(x_1, \xi_1)\, \Phi_1(\xi_1, y_1)\, d\xi_1 = \int_{x_1}^{y_1} \Phi_1(x_1, \xi_1)\, F_1(\xi_1, y_1)\, d\xi_1.$$

Ora prendendo

$$f'(x_1) = \frac{\pm 1}{F(x_1, x_1)}$$

potremo scegliere i segni in modo che $f'(x_1)$ risulti positivo e $F_1(x_1, x_1) = 1$.

(1) Vedi la Nota del 20 febbraio 1910: *Questioni generali sulle equazioni integrali ed integro-differenziali* [in questo vol.: XXIII, pp. 311-322]. Ivi ho distinto le permutabilità di 1ª e 2ª specie. In questa Nota mi occuperò della permutabilità di 1ª specie che ho anche chiamato semplicemente permutabilità.

Si potrà dunque, con una conveniente trasformazione di variabili e di funzioni, ridurre la ricerca al caso in cui $F(x, x) = 1$.

3. Premessa questa riduzione, si ponga, supponendo $\alpha(x) \gtrless 0$, per x compreso fra 0 e a,

$$(3) \qquad \begin{cases} F(x, y) \dfrac{\alpha(x)}{\alpha(y)} = F'(x, y) \\ \Phi(x, y) \dfrac{\alpha(x)}{\alpha(y)} = \Phi'(x, y). \end{cases}$$

È evidente che, se F e Φ sono permutabili, lo saranno pure $F'(x, y)$ e $\Phi'(x, y)$. Ciò posto scriviamo

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial x} = F_1(x, y) \quad , \quad \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} = F_2(x, y)$$

$$\frac{\partial F'(x, y)}{\partial x} = F'_1(x, y) \quad , \quad \frac{\partial F'(x, y)}{\partial y} = F'_2(x, y).$$

Avremo facilmente che

$$F'_1(x, x) = F_1(x, x) + \frac{\alpha'(x)}{\alpha(x)}.$$

quindi, preso

$$\alpha(x) = e^{-\int F_1(x, x)\, dx},$$

risulterà

$$F'_1(x, x) = 0.$$

Ma

$$F'(x, x) = 1,$$

quindi sarà anche

$$F'_2(x, x) = 0.$$

Ne segue che, *con una nuova trasformazione, potremo ricondurci al caso in cui si cerchino le funzioni permutabili con* $F(x, y)$, *essendo*

$$(4) \qquad F(x, x) = 1 \quad , \quad F_1(x, x) = 0 \quad , \quad F_2(x, x) = 0.$$

4. Supposte soddisfatte le (4) poniamo

$$(\mathrm{I}') \qquad \int_x^y F(x, \xi)\, \Phi(\xi, y)\, d\xi = \int_x^y \Phi(x, \xi)\, F(\xi, y)\, d\xi = \Psi(x, y);$$

avremo $\Psi(x, x) = 0$, e

$$(5) \qquad \frac{\partial \Psi(x, y)}{\partial y} = \Phi(x, y) + \int_x^y \Phi(x, \xi)\, F_2(\xi, y)\, d\xi$$

$$(6) \qquad \frac{\partial \Psi(x, y)}{\partial x} = -\Phi(x, y) + \int_x^y F_1(x, \xi)\, \Phi(\xi, y)\, d\xi.$$

Scriviamo poi

$$F_2(x,y) - F_2^2(x,y) + F_2^3(x,y) - \cdots = f_2(x,y),$$

$$F_1(x,y) + F_1^2(x,y) + F_1^3(x,y) + \ldots = f_1(x,y),$$

ove le potenze denotano operazioni di composizione.

Si avrà

$$(5') \qquad \Phi(x,y) = \frac{\partial \Psi(x,y)}{\partial y} - \int_x^y \frac{\partial \Psi(x,\xi)}{\partial \xi} f_2(\xi,y)\, d\xi$$

$$(6') \qquad \Phi(x,y) = -\frac{\partial \Psi(x,y)}{\partial x} - \int_x^y f_1(x,\xi) \frac{\partial \Psi(\xi,y)}{\partial \xi}\, d\xi,$$

quindi sottraendo

$$\frac{\partial \Psi(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial \Psi(x,y)}{\partial y} + \int_x^y \left[f_1(\xi,y) \frac{\partial \Psi(\xi,y)}{\partial \xi} - \frac{\partial \Psi(x,\xi)}{\partial \xi} f_2(\xi,y) \right] d\xi = 0$$

e con integrazioni per parti, tenendo conto che

$$\Psi(x,x) = \Psi(y,y) = f_1(x,x) = f_2(y,y) = 0,$$

si avrà

$$(\mathrm{A}) \qquad \frac{\partial \Psi(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial \Psi(x,y)}{\partial y} + \int_x^y [\Psi(x,\xi) g_{12}(\xi,y) - \Psi(\xi,y) g_{21}(x,\xi)]\, d\xi = 0$$

ove

$$g_{12}(x,y) = \frac{\partial f_2(x,y)}{\partial x} \quad , \quad g_{21}(x,y) = \frac{\partial f_1(x,y)}{\partial y}.$$

Ne segue che, *il problema di trovare le funzioni permutabili con* $F(x,y)$ *è ricondotto a risolvere l'equazione integro-differenziale* (A).

§ 2. - Soluzione dell'equazione integro-differenziale (A).

5. Posto

$$\int_x^y [\Psi(x,\xi) g_{12}(\xi,y) - \Psi(\xi,y) g_{21}(x,\xi)]\, d\xi = \lambda(x,y),$$

la (A) si scriverà

$$\frac{\partial \Psi(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial \Psi(x,y)}{\partial y} + \lambda(x,y) = 0.$$

Sia

$$u = \frac{y-x}{2} \quad , \quad v = \frac{y+x}{2};$$

Scriviamo poi

$$F_2(x,y) - F_2^2(x,y) + F_2^3(x,y) - \cdots = f_2(x,y),$$

$$F_1(x,y) + F_1^2(x,y) + F_1^3(x,y) + \ldots = f_1(x,y),$$

ove le potenze denotano operazioni di composizione.

Si avrà

$$\Phi(x,y) = \frac{\partial \Psi(x,y)}{\partial y} - \int_x^y \frac{\partial \Psi(x,\xi)}{\partial \xi} f_2(\xi,y)\, d\xi \tag{5'}$$

$$\Phi(x,y) = -\frac{\partial \Psi(x,y)}{\partial x} - \int_x^y f_1(x,\xi) \frac{\partial \Psi(\xi,y)}{\partial \xi}\, d\xi, \tag{6'}$$

quindi sottraendo

$$\frac{\partial \Psi(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial \Psi(x,y)}{\partial y} + \int_x^y \left[f_1(\xi,y) \frac{\partial \Psi(\xi,y)}{\partial \xi} - \frac{\partial \Psi(x,\xi)}{\partial \xi} f_2(\xi,y) \right] d\xi = 0$$

e con integrazioni per parti, tenendo conto che

$$\Psi(x,x) = \Psi(y,y) = f_1(x,x) = f_2(y,y) = 0,$$

si avrà

$$\frac{\partial \Psi(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial \Psi(x,y)}{\partial y} + \int_x^y [\Psi(x,\xi) g_{12}(\xi,y) - \Psi(\xi,y) g_{21}(x,\xi)]\, d\xi = 0 \tag{A}$$

ove

$$g_{12}(x,y) = \frac{\partial f_2(x,y)}{\partial x} \quad , \quad g_{21}(x,y) = \frac{\partial f_1(x,y)}{\partial y}.$$

Ne segue che, *il problema di trovare le funzioni permutabili con* $F(x,y)$ *è ricondotto a risolvere l'equazione integro-differenziale* (A).

§ 2. – Soluzione dell'equazione integro-differenziale (A).

5. Posto

$$\int_x^y [\Psi(x,\xi) g_{12}(\xi,y) - \Psi(\xi,y) g_{21}(x,\xi)]\, d\xi = \lambda(x,y),$$

la (A) si scriverà

$$\frac{\partial \Psi(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial \Psi(x,y)}{\partial y} + \lambda(x,y) = 0.$$

Sia

$$u = \frac{y-x}{2} \quad , \quad v = \frac{y+x}{2};$$

Scriviamo poi

$$F_2(x,y) - F_2^2(x,y) + F_2^3(x,y) - \cdots = f_2(x,y),$$

$$F_1(x,y) + F_1^2(x,y) + F_1^3(x,y) + \ldots = f_1(x,y),$$

ove le potenze denotano operazioni di composizione.

Si avrà

$$(5') \qquad \Phi(x,y) = \frac{\partial \Psi(x,y)}{\partial y} - \int_x^y \frac{\partial \Psi(x,\xi)}{\partial \xi} f_2(\xi,y)\, d\xi$$

$$(6') \qquad \Phi(x,y) = -\frac{\partial \Psi(x,y)}{\partial x} - \int_x^y f_1(x,\xi) \frac{\partial \Psi(\xi,y)}{\partial \xi}\, d\xi,$$

quindi sottraendo

$$\frac{\partial \Psi(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial \Psi(x,y)}{\partial y} + \int_x^y \left[f_1(\xi,y) \frac{\partial \Psi(\xi,y)}{\partial \xi} - \frac{\partial \Psi(x,\xi)}{\partial \xi} f_2(\xi,y) \right] d\xi = 0$$

e con integrazioni per parti, tenendo conto che

$$\Psi(x,x) = \Psi(y,y) = f_1(x,x) = f_2(y,y) = 0,$$

si avrà

$$(A) \qquad \frac{\partial \Psi(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial \Psi(x,y)}{\partial y} + \int_x^y [\Psi(x,\xi) g_{12}(\xi,y) - \Psi(\xi,y) g_{21}(x,\xi)]\, d\xi = 0$$

ove

$$g_{12}(x,y) = \frac{\partial f_2(x,y)}{\partial x} \quad , \quad g_{21}(x,y) = \frac{\partial f_1(x,y)}{\partial y}.$$

Ne segue che, *il problema di trovare le funzioni permutabili con* $F(x,y)$ *è ricondotto a risolvere l'equazione integro-differenziale* (A).

§ 2. – Soluzione dell'equazione integro-differenziale (A).

5. Posto

$$\int_x^y [\Psi(x,\xi) g_{12}(\xi,y) - \Psi(\xi,y) g_{21}(x,\xi)]\, d\xi = \lambda(x,y),$$

la (A) si scriverà

$$\frac{\partial \Psi(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial \Psi(x,y)}{\partial y} + \lambda(x,y) = 0.$$

Sia

$$u = \frac{y-x}{2} \quad , \quad v = \frac{y+x}{2};$$

considerando Ψ come funzione di u e v l'equazione precedente diverrà

$$\frac{\partial \Psi}{\partial v} + \lambda(x, y) = 0$$

onde

$$\Psi(x, y) = \theta(u) - \int_u^v \lambda(\zeta - u, \zeta + u)\, d\zeta,$$

in cui θ è una funzione arbitraria che si annulla per $u = 0$.

Ne segue che

$$\text{(A}'\text{)} \qquad \Psi(x, y) = \theta(u) - \int_u^v d\zeta \int_{\zeta-u}^{\zeta+u} [\Psi(\zeta - u, \xi) g_{12}(\xi, \zeta + u) - \Psi(\xi, \zeta + u) g_{21}(\zeta - u, \xi)]\, d\xi.$$

6. Dimostriamo ora il teorema: *Scelta la funzione* θ, *la funzione* Ψ *è determinata*, ossia *se* $\theta = 0$ *anche* $\Psi = 0$.

Il procedimento che può tenersi per tale dimostrazione è analogo a quello che ho impiegato in casi simili di equazioni integrali ed integro-differenziali [2].

Infatti sia $\theta = 0$ e $|\Psi(x, y)| < M$, mentre $|g_{12}| < N$ e $|g_{21}| < N$. Dalla (A′) risulterà

$$|\Psi(x, y)| < 2MN(y - x)x,$$

e per conseguenza

$$|\Psi(x, y)| < 2MN(y - x)a,$$

da cui segue

$$|\Psi(x, y)| < 2MN^2 a \int_u^v d\zeta \int_{\zeta-u}^{\zeta+u} [(\xi - \zeta + u) + (\zeta + u - \xi)]\, d\xi < 4MN^2 a^2 \frac{(y-x)^2}{1 \cdot 2}.$$

Così proseguendo si dimostra che

$$|\Psi(x, y)| < 2^h MN^h a^h \frac{(y-x)^h}{h!},$$

qualunque sia il numero intero e positivo h, e quindi $\Psi(x, y) = 0$.

7. Passiamo adesso alla effettiva risoluzione dell'equazione integrale (A). Consideriamo la serie

$$(7) \qquad \sum_1^\infty \Psi_n(\eta \mid x, y),$$

(2) Cfr. *Sulla inversione degli integrali definiti*, «Atti Acc. di Torino», 1896. Nota I, § 2. [In queste «Opere»: vol. secondo, XVIII, pp. 216–225]. *Sulle equazioni integro-differenziali*, «Rend. Acc. dei Lincei», febbraio 1909, § 3. [In questo vol.: XVII, pp. 269–275].

i cui termini sono ottenuti colla operazione ricorrente

$$(8)\qquad \Psi_n(\eta \mid x, y) = \int_u^v d\zeta \int_\eta^{2u} [\Psi_{n-1}(\eta \mid \zeta + u - \xi, \zeta + u) g_{21}(\zeta - u, \zeta + u - \xi)$$

$$- \Psi_{n-1}(\eta \mid \zeta - u, \xi + \zeta - u) g_{12}(\xi + \zeta - u, \zeta + u)] \, d\xi,$$

$$\Psi_1 = 1.$$

Si dimostra facilmente che

$$\Psi_n(\eta \mid x, y) < \frac{[2 \mathrm{N} a (y - x - \eta)]^{n-1}}{(n-1)!}$$

e quindi la serie (7) è uniformemente convergente.

Si formi poi

$$(\mathrm{B})\qquad \Psi(x, y) = \int_0^{2u} \psi(\eta) \sum_1^\infty \Psi_n(\eta \mid x, y) \, d\eta ;$$

essa sarà la soluzione della (A'), quando si prenda

$$\theta(u) = \int_0^{2u} \psi(\eta) \, d\eta .$$

Per mezzo della (5') o della (6') otterremo poi Φ.

Si verifica senza alcuna difficoltà che, sostituendo la espressione (B) nella (A'), questa resta identicamente soddisfatta. Inoltre, percorrendo in senso inverso il cammino fatto per ottenere dalla (1) la (A'), si dimostra pure facilmente che F e Φ sono permutabili.

§ 3. - Teoremi sulle funzioni permutabili.

8. Dalla (B) segue

$$\lim_{y=x} \frac{\Psi(x, y)}{y - x} = \psi(0) = \text{cost.}$$

Ma dalla (I') si ha

$$\lim_{y=x} \frac{\Psi(x, y)}{y - x} = \lim_{y=x} \frac{\int_x^y \mathrm{F}(x, \xi) \, \Phi(\xi, y) \, d\xi}{y - x} = \Phi(x, x),$$

quindi sarà

$$\Phi(x, x) = \text{cost.}$$

Questa proprietà vale per le funzioni $\mathrm{F}(x, y)$ e $\Phi(x, y)$ che abbiamo ottenute per mezzo delle trasformazioni (2) e (3) in modo da ridurre la F a soddisfare alle condizioni (4). Ora, se vogliamo tornare alle funzioni primitive, dovremo dividere ambedue per la stessa funzione $(\alpha(x)/\alpha(y))\sqrt{f'(x)f'(y)}$, quindi potremo enunciare il

TEOREMA I. - *Se* $\Phi(x, y)$ *è una funzione permutabile con* $\mathrm{F}(x, y)$ *tale che* $\mathrm{F}(x, x) \gtrless 0$, avremo

$$\frac{\Phi(x, x)}{\mathrm{F}(x, x)} = \text{cost.}$$

9. TEOREMA II. - *Se le funzioni permutabili* $\mathrm{F}(x, y)$ e $\Psi(x, y)$, *aventi le derivate determinate e finite, sono tali che*

$$\mathrm{F}(x, x) \gtrless 0 \quad , \quad \Psi(x, x) = 0,$$

si potrà determinare la funzione $\Phi(x, y)$, *permutabile con esse, in modo che*

$$\mathrm{F}\Phi(x, y) = \Psi(x, y)\,^{(3)}.$$

Infatti, posto

$$\int_x^y \Phi(x, \xi)\,\mathrm{F}(\xi, y)\,d\xi = \Psi(x, y),$$

derivando rispetto al y (4), otterremo l'equazione di seconda specie

$$\mathrm{F}(y, y)\,\Phi(x, y) + \int_x^y \Phi(x, \xi)\,\mathrm{F}_2(\xi, y) = \Psi_2(x, y), \tag{9}$$

in cui

$$\mathrm{F}_2(x, y) = \frac{\partial \mathrm{F}(x, y)}{\partial y} \quad , \quad \Psi_2(x, y) = \frac{\partial \Psi(x, y)}{\partial y}.$$

Valendosi della trasformazione indicata nel § 1, art. 2, si potrà supporre per semplicità $\mathrm{F}(y, y) = 1$, e allora l'equazione integrale (9) si risolverà per mezzo della relazione (vedi § 1, art. 4)

$$\Phi(x, y) = \Psi_2(x, y) - \int_x^y \Psi_2(x, \xi) f_2(\xi, y)\,d\xi, \tag{10}$$

mentre avremo (5)

$$f_2(x, y) - \mathrm{F}_2(x, y) + \int_x^y \mathrm{F}_2(x, \xi) f_2(\xi, y)\,d\xi = 0. \tag{11}$$

Mostriamo che la $\Phi(x, y)$ data dalla (10) è permutabile con $\mathrm{F}(x, y)$.

(3) Vedi la notazione adottata per la composizione di due funzioni permutabili: *Questioni generali sulle equazioni integrali ed integro-differenziali*, § 1. [In questo vol.: XXIII, pp. 311-322].

(4) Cfr. per la risoluzione delle equazioni integrali di 1ª specie la Nota *Sulla inversione degli integrali definiti.* « Rend. Acc. dei Lincei », 1896, § 4. [In queste « Opere »: vol. secondo, XIX, pp. 255-262].

(5) Cfr. Nota precedente § 2. *Sopra alcune questioni di inversione di integrali definiti*, « Annali di Mat. », 1897, § 10: principio di reciprocità. [In queste « Opere »: vol. secondo XXII, pp. 279-313].

Moltiplicando ambo i membri della (9) per dy, integrando fra x e y e tenendo presente che $\Psi(x, x) = 0$ si avrà che

$$\int_x^y \Phi(x, \xi) \, F(\xi, y) \, d\xi = \Psi(x, y). \tag{12}$$

Formiamo ora

$$\int_x^y F(x, \xi) \, \Phi(\xi, y) \, d\xi,$$

sostituendo a $\Phi(\xi, \eta)$ il valore dato dalla (10), e osserviamo che in virtù della permutabilità di F e Ψ si ha

$$\int_x^y F(x, \xi) \, \Psi(\xi, y) \, d\xi = \int_x^y \Psi(x, \xi) \, F(\xi, y) \, d\xi$$

e quindi, con una derivazione rispetto ad y,

$$\int_x^y F(x, \xi) \, \Psi_2(\xi, y) \, d\xi = \int_x^y \Psi(x, \xi) \, F_2(\xi, y) \, d\xi + \Psi(x, y), \tag{13}$$

giacché per ipotesi $F(y, y) = 1$, $\Psi(y, y) = 0$.

Si avrà in conseguenza

$$\int_x^y F(x, \xi) \, \Phi(\xi, y) \, d\xi$$

$$= \Psi(x, y) + \int_x^y \Psi(x, \xi) \, F_2(\xi, y) \, d\xi - \int_x^y F(x, \xi) \, d\xi \int_\xi^y \Psi_2(\xi, \eta) f_2(\eta, y) \, d\eta$$

e con facili trasformazioni di calcolo, impiegando le relazioni (13) e (11) si otterrà

$$\int_x^y F(x, \xi) \, \Phi(\xi, y) \, d\xi = \Psi(x, y),$$

da cui segue, a cagione della (12), la permutabilità delle funzioni F e Φ e quindi delle funzioni Ψ e Φ.

OSSERVAZIONE. - Dalla relazione (10) si deduce facilmente che, se Ψ e F avranno le derivate determinate e finite di ordine n, Φ avrà le derivate di ordine $n - 1$ pure determinate e finite.

10. Una funzione $\Psi(x, y)$ che, al pari della $F(x, y)$, è tale che $\Psi(x, x) \gtrless 0$, si dirà di *primo ordine*, mentre se sarà $\Psi(x, x) = 0$ si dirà di *ordine superiore al primo*. In virtù del teorema I avremo che una funzione permutabile con una funzione di 1° ordine, o è di 1° ordine, o è di ordine superiore al primo. Supponiamo che si presenti questo caso e suppo-

niamo che esistano le derivate successive di Ψ e siano determinate e finite; allora si potrà porre, in virtù del teorema II,

$$FF_1(x, y) = \Psi(x, y),$$

in cui F_1 è permutabile con F. Se F_1 sarà di primo ordine, Ψ si dirà di *secondo ordine*; se F_1 sarà di secondo ordine, Ψ si dirà di *terzo ordine*, e così di seguito; se F_1 sarà di ordine $n - 1$, Ψ si dirà di *ordine n*; e Ψ si dirà di *ordine superiore ad n* se F_1 sarà di ordine superiore ad $n - 1$.

11. Ci limitiamo ad enunciare senza dimostrazione i teoremi seguenti:

TEOREMA III. - *Se le funzioni di primo ordine* $F_1, F_2, \ldots, F_g$ *sono permutabili fra loro e colla funzione* Ψ *di ordine n, avremo*

$$\Psi(x, y) = F_1^{\alpha_1} F_2^{\alpha_2} \cdots F_g^{\alpha_g} \Phi((xy) \tag{14}$$

in cui $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_g$ *sono numeri interi positivi soggetti alla sola condizione*

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_g = n - 1$$

e Φ *è di primo ordine e permutabile colle* $F_1, F_2, \ldots, F_g$.

Reciprocamente, se Ψ *può mettersi sotto la forma precedente, essa è di ordine n.*

TEOREMA IV. — *Se la funzione* $\Psi(x, y)$, *permutabile colla funzione di primo ordine* $F_1(x, y)$, *è tale che il*

$$\lim_{y=x} \frac{\Psi(x, y)}{(y - x)^{n-1}}$$

è finito e diverso da zero, $\Psi(x, y)$ *sarà di ordine n.*

TEOREMA V. - *Se la funzione* $\Psi(x, y)$, *permutabile colla funzione di primo ordine* $F_1(x, y)$, è *di ordine n, sarà*

$$\frac{1}{[F_1(x, x)]^n} \lim \frac{\Psi(x, y)}{(y - x)^{n-1}} = \text{cost.} \lesseqgtr 0 .$$

OSSERVAZIONE. - Supponendo che Ψ abbia la forma (14), posto

$$\frac{F_2(x, x)}{F_1(x, x)} = c_2, \frac{F_3(x, x)}{F_1(x, x)} = c_3, \cdots, \frac{F_g(x, x)}{F_1(x, x)} = c_g, \frac{\Phi(x, x)}{F_1(x, x)} = c,$$

la costante che figura nel teorema precedente sarà

$$\frac{c_2^{\alpha_2} c_3^{\alpha_3} \cdots c_g^{\alpha_g} c}{(n - 1)!} .$$

12. Sia $\Psi(x, y)$ una funzione permutabile colla funzione di primo ordine $F(x, y)$ e supponiamo che ambedue queste funzioni abbiano le derivate successive determinate e finite.

Poniamo la costante $\Psi(x, x)/F(x, x) = c_1$ (vedi teorema I) e consideriamo

$$\Psi(x, y) - c_1 F(x, y);$$

questa funzione sarà permutabile con $F(x, y)$ e sarà di ordine superiore al primo, quindi (teorema II)

$$\Psi(x, y) = c_1 F(x, y) + \int_x^y F(x, \xi) \Phi_1(\xi, y) d\xi,$$

in cui Φ_1 è permutabile colle funzioni precedenti.

Applicando alla Φ_1 la formula ora trovata per Ψ potremo scrivere

$$\Psi(x, y) = c_1 F(x, y) + c_2 F^2(x, y) + \int_x^y F^2(x, \xi) \Phi_2(\xi, y) d\xi,$$

in cui c_2 è una quantità costante; così procedendo innanzi troveremo il

TEOREMA VI. - *Se la funzione* $\Psi(x, y)$ *è permutabile colla funzione di primo ordine* $F(x, y)$, *e queste funzioni hanno le derivate successive determinate e finite, sarà*

$$\Psi(x, y) = c_1 F(x, y) + c_2 F^2(x, y) + \cdots + c_n F^n(x, y)$$
$$+ \int_x^y F^n(x, \xi) \Phi_n(\xi, y) d\xi,$$

in cui le potenze denotano operazioni di composizione, e la funzione Φ_n *è permutabile colle funzioni date.*

Se col crescere indefinito di n l'ultimo termine tenderà a zero, $\Psi(x, y)$ sarà rappresentata dalla serie

$$\sum_{1}^{\infty}{}_n\, c_n F^n(x, y).$$

13. La formula (B) dà le funzioni di secondo ordine e di ordine superiore al secondo permutabili con $F(x, y)$, quindi per ottenere tutte le funzioni permutabili con $F(x, y)$ basterà aggiungere alla espressione (B) $c_1 F(x, y)$ con c_1 costante arbitraria. Si può dunque fare a meno della risoluzione della (5) o della (6), come è indicato alla fine del § 2.

§ 4. - FUNZIONI PERMUTABILI COLL'UNITÀ.

14. Riprendiamo le formule del § 1, supponendo $F(x, y) = F(y - x)$ e $F(0) = 1$, $F'(0) = 0$.

Avremo

$$f_2(x, y) = - f_1(x, y) = f(y - x)$$
$$g_{12}(x, y) = g_{21}(x, y) = -f'(y - x).$$

Applicando dunque la (8) del § 2, risulterà

$$\Psi_1 = 1 \, , \Psi_2 = 0 \, , \Psi_3 = 0 \, , \cdots , \Psi_n = 0 \, , \cdots$$

e quindi

$$\Psi = \theta\,(y - x) \quad , \quad \Phi = \Phi\,(y - x)\,.$$

Le considerazioni svolte nel § 1 mostrano che Φ dovrà avere la stessa forma anche se non si verificherà la condizione $F'(0) = 0$. Si ritrova così il gruppo di tutte le funzioni permutabili fra loro e con una costante, ossia permutabili coll'unità (6).

15. Considereremo in questo § le funzioni di questo gruppo soltanto. Posto $y - x = u$, le funzioni stesse si scriveranno come funzioni di u e la composizione di due di esse Φ e Ψ ci darà

$$\Phi\Psi\,(u) = \int_0^u \Phi\,(u - v)\,\Psi\,(v)\,dv = \int_0^u \Phi\,(v)\,\Psi\,(u - v)\,dv\,.$$

Posto $\Phi\,(0) = c$, $\Psi\,(0) = c'$, avremo

$$\frac{d}{du}\,(\Phi\Psi\,(u)) = c\,\Psi\,(u) + \Psi\Phi'\,(u) = c'\,\Phi\,(u) + \Phi\Psi'\,(u)\,,$$

da cui si ricava

(15) $$\frac{d}{du}\,(\Phi^n\,(u)) = c\,\Phi^{n-1}\,(u) + \Phi^{n-1}\,\Phi'\,(u) = (c + \Phi')\,\Phi^{n-1}\,,$$

(15') $$\frac{d^m}{du^m}\,(\Phi^n\,(u)) = (c + \Phi')^m\,\Phi^{n-m} \qquad \text{per} \quad n > m\,,$$

(15'') $$\frac{d^n}{du^n}\,(\Phi^n\,(u)) = (c + \Phi')^n - c^n\,.$$

16. Queste formule servono per risolvere immediatamente il problema seguente:

Data la funzione $F\,(u)$ *di ordine* n, *tale che*

$$F\,(0) = 0 \quad , \quad F'\,(0) = 0\,, \cdots , F^{(n-2)}\,(0) = 0 \quad , \quad F^{(n-1)}\,(0) = 1\,,$$

risolvere l'equazione integrale

(16) $$\Phi^n\,(u) = F\,(u)\,.$$

Osserviamo che

$$\lim_{u=0} \frac{F\,(u)}{u^{n-1}} = \frac{1}{(n-1)\,!}$$

(6) *Questioni generali sulle equazioni integrali ed integro-differenziali*, § 2 [in questo vol.: XXIII, pp. 311-322].

e pel teorema V

$$\lim_{u=0} \frac{F(u)}{u^{n-1}} = \frac{c^n}{(n-1)!},$$

avendo posto $\Phi(0) = c$. Ne segue che c è una radice n^{esima} dell'unità. Prendiamo $c = 1$; le soluzioni che corrispondono agli altri valori di c si otterranno, come vedremo, immediatamente.

Deriviamo ora l'equazione (16) n volte rispetto ad u. In virtù della (15'') otterremo l'equazione integrale

$$(1 + \Phi')^n - 1 = f(u),$$

ove con $f(u)$ si è denotata la derivata n^{esima} di $F(u)$.

Per risolvere questa equazione integrale basterà applicare le regole generali che abbiamo date per la risoluzione delle equazioni integrali di grado n [7]. Scriviamo perciò l'equazione algebrica

$$(1 + z_2)^n - 1 = z_1 .$$

Avremo

$$z_2 = -1 + \sqrt[n]{1 + z_1} .$$

Prendendo il radicale in modo che per $z_1 = 0$ sia $z_2 = 0$, e sviluppando in serie, si avrà

$$z_2 = \sum_1^\infty {}_h \frac{\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n} - 1\right) \cdots \left(\frac{1}{n} - h + 1\right)}{h!} z_1^h .$$

La funzione Φ' sarà quindi data dalla serie *convergente uniformemente*

$$\Phi'(u) = \sum_1^\infty {}_h \frac{\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n} - 1\right) \cdots \left(\frac{1}{n} - h + 1\right)}{h!} f^h(u),$$

in cui le potenze denotano operazioni di composizione. Ne segue la soluzione generale

$$\Phi(u) = \varepsilon\left(1 + \int_0^u \sum_1^\infty {}_h \frac{\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n} - 1\right) \cdots \left(\frac{1}{n} - h + 1\right)}{h!} f^h(v)\, dv\right),$$

ove ε rappresenta una radice n^{esima} qualunque dell'unità.

17. Se noi non poniamo la condizione che $\Phi(u)$ sia finita, l'equazione (16) può risolversi anche quando $F(u)$ sia di ordine inferiore ad n.

Per vederlo in un caso molto semplice consideriamo l'equazione integrale

(17) $$\Phi^2(u) = F(u)$$

(7) Cfr. Nota prec. citata, § 4.

con $F(u)$ di primo ordine. Poniamo

$$F_1(u) = \int_0^u d\xi \int_0^{u-\xi} \frac{F(u-\xi-\eta)}{\xi^{1/2}\,\eta^{1/2}}\,d\eta .$$

$F_1(u)$ sarà di secondo grado. Risolviamo colla regola data nell'Art. precedente l'equazione integrale

$$\Phi_1^2(u) = F_1(u);$$

la soluzione della (17) sarà data dalla funzione

$$\Phi(u) = \frac{2}{\pi}\,\frac{d}{du}\int_0^u \frac{\Phi_1(v)\,dv}{(u-v)^{1/2}},$$

la quale diviene infinita d'ordine $1/2$ per $u = 0$.

XXVII.

ESPACIO, TIEMPO Y MASA

SEGUN LAS IDEAS MODERNAS

CONFERENCIA LEÍDA EN EL SALÓN DE ACTOS EN LA ESCUELA INDUSTRIAL DE LA NACIÓN EL 16 DE JULIO DE 1910 (1)

«Anales de la Sociedad Científica Argentina», t. LXIX, págs. 223–243 (*).

I.

Todos sabemos que en estos momentos atravesamos una profunda crisis en el campo de las investigaciones y disciplinas científicas.

El actual período histórico se diferencia de los precedentes en que no sólo algunas hipótesis, sino que también grandes principios – de los cuales algunos universalmente aceptados, no se discutían ya – han sido súbitamente objeto de nuevas discusiones y críticas, mientras viejos sistemas que se reputaban definitivamente desestimados, resurgen de repente.

Puede decirse que hemos presenciado el progreso y difusión de una nueva disciplina en casi todos los campos de las ciencias físicas y biológicas: la *energética*, la que ha conmovido el antiguo fundamento mecánico de los fenómenos naturales creado por la filosofía cartesiana. Hemos visto también nacer nuevas ramas vigorosas de ciencias, como la físico–química, las cuales han dado lugar a las más opuestas tendencias. Al mismo tiempo hemos asistido al descubrimiento de innumerables hechos en los clásicos campos de la ciencia, y tanto en el cielo como en la tierra, han sido reveladas muchas cosas que la filosofía no sospechaba siquiera, desde las nuevas fuentes del calor terrestre hasta la acción de la luz sobre los astros, desde las ondas eléctricas hasta la disociación de los átomos.

Las nuevas orientaciones de la actividad científica, los nuevos hallazgos, sus interesantes aplicaciones, han dado lugar a controversias entre matemáticos, físicos y naturalistas; pero en los últimos tiempos se produjo algo

(1) Versión del italiano por el ingeniero S. E. BARABINO.

(*) Questa conferenza fu tenuta a Buenos Aires in occasione del Congresso scientifico internazionale americano, indetto per la celebrazione del primo centenario della Rivoluzione argentina di Maggio. In quella stessa occasione – precisamente il 15 luglio 1910 – il VOLTERRA tenne un'altra conferenza (dal titolo *Funzioni di linee, equazioni integrali e integrodifferenziali*), della quale soltanto undici anni dopo fu pubblicato un riassunto, in italiano, negli «Anales de la Sociedad Cientifica Argentina», t. XCII, 1921, pp. 31–43. Poiché il contenuto sostanziale di tale riassunto – di carattere discorsivo e occasionale – è largamente implicito in Memorie e Note, che già hanno trovato posto in questi primi tre volumi delle «Opere», si è ritenuto superfluo ripubblicarlo. [N. d. R.].

muy fundamental que ocasionó una grave revolución en el pensamiento crítico moderno. Esta perturbación constituye la preocupación dominante en los sabios de hoy día, y es precisamente de esto de lo que voy a hablaros.

II.

Los conceptos fundamentales de la filosofía natural son indiscutiblemente los de *espacio, tiempo* y *materia*. Para convencerse de ello, basta pensar que todas las medidas se resuelven en la determinación de estos tre elementos, y que todas las unidades de medida pueden hacerse depender de las fundamentales, tiempo, espacio y masa; y basta reflexionar que no se alcanza ninguna ley cuantitativa, ni una concepción exacta del mundo, sin la medida; y no puede hacerse ninguna aplicación de las matemáticas – instrumento poderoso y delicado de la mente humana – si las entidades examinadas no entran en el campo de las commensurables.

Ahora bien, estos tres conceptos fundamentales han sufrido en los últimos tiempos una transformación grandísima. Las ideas corrientes hoy se diferencian notablemente de las que hasta hace poco se aceptaban, y principios que parecían no poder removerse del sitio en que los colocara NEWTON, son objeto de una crítica implacable, y admirable a la vez, que los quebranta por completo.

III.

Empecemos por examinar cuáles han sido los factores que impusieron este orden de ideas, comenzando por estudiar del modo más breve posible, por falta de tiempo, la evolución de la teoría de las ondas, los fundamentos de las modernas teorías electrodinámicas y especialmente las consecuencias a que ha conducido recientemente el concepto de los electrones.

Si examinamos el desarrollo de la teoría de las ondas veremos que, a medida que este estudio ha ido extendiéndose bajo la denominación de teoría ondulatoria, se han abarcado categorias más amplias de fenómenos, su sentido se ha hecho más vago, perdiendo fatalmente aquella determinación que inicialmente tenía.

HUYGHENS empieza su tratado sobre la luz observando que el sonido se propaga, alrededor del punto donde se produce, por medio del aire, cuerpo impalpable e invisible, con igual velocidad en todo sentido, por cuya razón deben formarse superficies esféricas cada vez mayores, las cuales llegan a herir nuestro oído; y agrega que la luz debe llegarnos, igualmente, de los cuerpos luminosos, mediante un movimiento impreso a una materia, el éter, el cual debe a su vez propagarse análogamente mediante superficies esféricas, que deben llamarse *ondas esféricas*, por el estilo de las que se forman en el agua cuando se arroja una piedra en ella.

Lo dicho no deja duda alguna sobre la significación que HUYGHENS daba a la teoría de las ondulaciones. En el concepto general de los fenómenos luminosos le precedieron CARTESIO, HOOKE y otros, pero fué él quien aplicó la palabra *onda*. De modo que con esta sola palabra ha coligado tres clases de fenómenos esencialmente distintos entre sí, es decir, los fenómenos visibles en la superficie de los líquidos, los ocultos en el interior de los flúidos elásticos y, merced a una atrevida hipótesis, los luminosos. La fuerza de una tal coligación debida al empleo acertado de la palabra *onda* es uno de los hechos más memorables en la historia de las ciencias y un ejemplo típico que conviene hacer conocer.

Al crear HUYGHENS la locución *sistema de las ondas*, se refería tan sólo a los flúidos, es decir a los líquidos y gases; limitación que se mantuvo por algún tiempo, pero que dió lugar a insuperables dificultades, pues no era exacto comparar el mecanismo de la propagación de la luz con el del sonido, siendo así que los fenómenos de la polarización de la luz no son compatibles con los movimientos de los gases. Por lo demás, en el sonido no hay ningún fenómeno de polarización.

El doctor YOUNG no consiguió vencer la dificultad; FRESNEL, con un rasgo verdaderamente genial, la superó después de largos años de trabajo y meditación, estableciendo que las vibraciones luminosas deben ser transversales y no longitudinales. Los flúidos elásticos gaseosos no son capaces de transmitir sino vibraciones longitudinales, luego la teoría de las ondas limitada a los flúidos no puede abarcar los fenómenos luminosos. Se hizo necesario ampliarla considerablemente de manera que la teoría de las ondulaciones comprendiera todos los fenómenos de los pequeños movimientos de los cuerpos flúidos y sólidos de modo tal que todo fenómeno que pueda explicarse mediante tales movimientos queda comprendido en esta teoría.

Desde este punto de vista se han desarrollado los célebres trabajos de CAUCHY, LAMÉ, GREEN, NEUMANN, STOCKES, KIRCHHOFF y otros geómetras y físicos que han estudiado en sus diversos aspectos la teoría de los pequeños movimientos. De este modo la teoría elástica de la luz se formó y desarrolló de una manera admirable, mediante el análisis matemático más profundo.

Pero, ¿ qué se entiende por *onda*, en vista de que la simple semejanza entre la de los flúidos y la de los sólidos da lugar, como vimos, a dificultades?

Si examinamos un cuerpo de tres dimensiones, *isótropo*, es decir, igualmente constituído en todos sus sentidos, cualquier perturbación longitudinal o transversal, limitada inicialmente entre dos esferas concéntricas, se propaga con velocidad uniforme conservándose siempre entre dos esferas concéntricas.

La onda esférica simple es, pues, una perturbación que pasa sin dejar rastro tras de sí.

Pero si examinamos un medio isótropo de dos dimensiones, por ejemplo una membrana elástica, no pueden conseguirse ondas circulares que pasen sin dejar tras de sí perturbaciones.

Análogamente, en todo medio elástico que posea una resistencia de rozamiento, las ondas esféricas dejan trazas de su paso. Es, pues, natural, espontánea, la distinción entre ondas con y sin residuo. Para estas vale el *principio* de HUYGHENS en su primitivo concepto. Para las otras, no, pues hay que modificar al respecto la forma del principio mismo, o decir, con HADAMARD, que tal principio no subsiste.

Establecido así este punto fundamental, apresurémonos en esta breve noticia histórica a alcanzar el período que pueden caracterizar los dos grandes nombres de MAXWELL y HERTZ.

IV.

Me falta tiempo para indicar aquí cómo se han llegado a coligar entre sí los fenómenos eléctricos con los luminosos. Por una sucesión de esfuerzos, a partir de FARADAY, que han conducido a las bellas experiencias de RIGHI, se llegó a ello y, preciso es convenir, que la parte más brillante de todas estas investigaciones estaba reservada al análisis matemático.

En efecto, las analogías analíticas descubiertas por MAWXELL entre las ecuaciones diferenciales del campo eléctrico-dinámico y las de la óptica, han precedido á todos los otros resultados y dieron lugar a las investigaciones experimentales.

MAXWELL creó así la teoría electromagnética de la luz, monumento grandioso cuya importancia sólo puede equipararse a la de los magnos sistemas de la filosofía natural. HERTZ la comparó con un puente magnífico que une dos campos de la física antes completamente separados.

La impresión que produce este resultado, aun a *prima facie*, es grandísima; pero si se examina más de cerca y se reflexiona, se descubre que la revolución causada por la teoría de MAXWELL todavía es mayor aún de lo que pudo creerse al principio.

En efecto, los fenómenos electromagnéticos no entran en la teoría general de los fenómenos elásticos, y es por esto que la teoría electromagnética de la luz ha hecho retirar la óptica del campo de la elasticidad.

Las palabras, sin embargo, no han cambiado, y se sigue hablando de *vibraciones*, *ondas*, etc.; pero su sentido primitivo ha sido modificado, quedándole tan sólo la interpretación analítica. Como lo ha demostrado magistralmente HERTZ, no hay sino vectores variables con el tiempo y la posición, vinculados por ecuaciones diferenciales.

En otros términos: la teoría de las ondas aplicada a los fenómenos electromagnéticos, en los que se incluye los luminosos, ha perdido su base mecánica.

Lo que queda como vínculo entre los varios fenómenos que entran en la teoría de las ondas, es una ligazón analítica que sólo las ecuaciones pueden explicar, pues tanto las vibraciones de los cuerpos elásticos como las electromagnéticas, dependen de ecuaciones diferenciales, llamadas por los geómetras de *tipo hiperbólico*, las cuales tienen propiedades bien netas y definidas. En efecto, lo que domina la teoría analítica son las características reales propias de las ecuaciones diferenciales hiperbólicas, cuya interpretación desde el punto de vista físico puede hacerse de una manera completa y plenamente lúcida. Pero debe agregarse que, en tal caso, del campo de la teoría de las ondas quedan eliminadas las que el mismo HUYGHENS había tomado como tipo, más aún, que habían dado nombre a las demás; en una palabra, que eran las generadoras de toda la familia: quiero decir que se eliminan las ondas líquidas.

Estas, en efecto, no dependen de ecuaciones de tipo hiperbólico, ni sus leyes de propagación son semejantes a las elásticas y electromagnéticas. Siguen otras leyes, reveladas y enunciadas por la hidrodinámica.

Singular contraste que, en verdad, no es el primero, ni será el último en la historia de la ciencia, y que es un ejemplo típico de la evolución del lenguaje científico.

V.

Las ecuaciones establecidas por HERTZ como base de la electrodinámica constituyen, por una parte, la síntesis de un gran número de teorías y, por la otra, han marcado nuevos rumbos a las subsiguientes investigaciones. Ellas compendian las leyes de la electrostática y del magnetismo, las de las acciones ponderomotrices de las corrientes, las de la inducción electrodinámica y, en fin, de la óptica.

Si se quisiera enunciar en pocas palabras lo que las mismas ecuaciones nos expresan, se podría decir que el estado de un campo electromagnético está definido en cada instante y lugar por dos vectores que nos dan respectivamente las fuerzas eléctricas y magnéticas. La variación de cada uno de estos elementos se puede calcular mediante el valor de los elementos mismos en los alrededores de los puntos que se consideran. Es de este modo que el estado futuro depende del presente con normas perfectamente determinadas.

Pero las ecuaciones de que hemos hablado se refieren a los medios inmóviles. Las mayores dificultades se presentaron cuando se quiso pasar al caso de un sistema en movimiento. Poco tiempo después de haber publicado HERTZ su primer memorable trabajo sobre electrodinámica, dió a luz otra memoria titulada *La electrodinámica de los sistemas en movimiento*, en la que establecía un postulado fundamental, sumamente simple, mediante el cual podía efectuarse el paso del reposo al movimiento.

Establecido dicho postulado, era fácil para los matemáticos deducir de las conocidas ecuaciones de la electrodinámica de los sistemas en reposo la de los sistemas en movimiento, lo que ocurrió en realidad, dándonos el sistema de ecuaciones de HERTZ para los cuerpos en movimiento.

Antes de pasar adelante hubo que someter estas ecuaciones a un examen minucioso y profundo para ver si correspondían a los hechos que la observación revelaba, como se hace en general en todas las investigaciones físico-matemáticas. En primer término, la inducción nos conduce a las leyes elementales con las que se desea caracterizar el fenómeno (en nuestro caso el postulado que acabamos de enunciar); luego, con un proceso deductivo en el que interviene con toda su eficacia el medio matemático, se reconstituye el fenómeno y se estudian sus particularidades; por fin, las previsiones del cálculo le someten a un control experimental - directo o indirecto - lo que constituye la verificación de que trataremos en seguida.

Ahora, los principios de la conservación de la electricidad y del magnetismo son comprobados por las ecuaciones de HERTZ; y lo mismo ocurre con los de la conservación de la energía y de la acción y reacción; pero si confrontamos los resultados a que conducen las ecuaciones de HERTZ referentes a la óptica con los que da la observación directa, nos encontramos en completa discrepancia. En efecto, dichas ecuaciones no concuerdan con las experiencias de FIZEAU que prueban el arrastre parcial de las ondas luminosas, o, lo que es lo mismo, de las ondas eléctricas transversales.

Esta fué la causa por la cual el postulado y las ecuaciones de HERTZ fueron abandonados.

VI.

Actualmente existe otra teoría, la más universalmente aplicada al estudio y explicación de los fenómenos de la electrodinámica de la óptica en los cuerpos en movimiento, la establecida y desarrollada por LORENTZ, quien partió de algunos postulados elementales que expresó en forma analítica, mediante las ecuaciones que llevan su nombre.

Si analizamos estas ecuaciones, como hicimos con las de HERTZ, llegamos a la conclusión de que no existe ninguna contradicción con los principios de la conservación de la electricidad, del magnetismo y de la energía. Además, en cuanto los fenómeno ópticos podemos decir que el de ZEEMAN, por lo menos en su forma más simple y primitiva, fué previsto por el mismo LORENTZ, siendo, tal vez éste, el primer triunfo notable de su teoría.

Los fenómenos luminosos de los cuerpos en movimiento (a cuya prueba no resistió la teoría de HERTZ), dieron lugar a un gran número de estudios e investigaciones que condujeron precisamente a los grandes e importantes resultados a que aludí al comenzar esta conferencia, dando origen a las nuevas vistas sobre los fundamentales conceptos de *espacio* y *tiempo*.

¿ Es posible evidenciar el movimiento absoluto mediante fenómenos ópticos o electromagnéticos? Esta es la cuestión que se impuso desde el primer momento.

Primero se reconoció que la teoría de LORENTZ explica bien todos los hechos; pero si se quiere que los fenómenos ópticos no estén influenciados por el movimiento de la tierra, hay que despreciar en las fórmulas, términos del orden del cuadrado de la aberración (es decir del orden $1/108$).

La memorable experiencia realizada por MICHELSON y MORLEY, cuyas condiciones debían hacer sensibles los términos del orden del cuadrado de la aberración, dió resultados negativos, contrariamente a lo que la teoría de LORENTZ, y demás teorías ópticas, hacían prever. Entonces LORENTZ imaginó una hipótesis suplementaria: según ella todos los cuerpos sufrían - en el sentido del movimiento de la tierra - un acortamiento de $1/(20 \times 10^9)$ en su longitud.

Esta hipótesis impresionó extraordinariamente; muchos fueron los incrédulos al principio, pero paulatinamente han ido modificándose las ideas y la crítica hizo en este sentido grandes progresos. El postulado de la relatividad, vinculado a la transformación de LORENTZ, es decir, el principio según el cual no puede llegarse al conocimiento del movimiento absoluto, ha sido aceptado casi por todos.

Pasaremos a desarrollar este argumento; pero, abandonando el estudio original de LORENTZ, nos colocaremos en el punto de vista de EINSTEIN, o, mejor aún, nos apoyaremos directamente en las más recientes consideraciones de MINKOWSKY, quien consiguió construir sobre una base geométrica la moderna teoría del espacio y del tiempo, cuya primera exposición figura en una memoria que publicó en las actas de la academia de Gotinga, expuesta más tarde, en forma más simple y divulgativa, en una memorable conferencia que pronunció ante el *Congreso de médicos y naturalistas alemanes* en 1908, pocos meses antes de morir. El fin prematuro de este joven e ilustre sabio ha malogrado el conjunto de ideas que se había formado sobre este punto, ideas que pensaba hacer públicas oportunamente, de las quales sólo nos queda la iniciación.

Antes de abandonar las ecuaciones de LORENTZ y su confrontación con los hechos reales, hemos de referirmos al punto *débil* de toda su teoría. Vimos ya que las ecuaciones de HERTZ correspondían al principio dela acción y reacción. No puede decirse lo mismo de las ecuaciones de LORENTZ: discrepancia que en esta grandiosa concepción queda aún sin resolver.

VII.

Muchos de vosotros habréis leído, ciertamente, una novela inglesa que tuvo en Europa mucho éxito, suscitando un sentimiento de viva curiosidad; me refiero a *El viaje en el tiempo*, novela de WELLS, inteligencia aguda, bizarra y nutrida de una seria cultura.

Podemos cambiar de posición en la superficie terrestre, bajar a sus profundidades, elevarnos en la atmósfera, en una palabra, podemos cambiar de posición en el espacio.

Según WELLS, un inventor ha ideado una máquina singular mediante la cual podemos retroceder en el tiempo recorriendo las épocas pasadas, pero conservando siempre en el espacio la misma posición, y así, con la misma máquina, invirtiendo su marcha, se puede proseguir y penetrar en los tiempos futuros, con la rapidez que a uno plazca, manteniéndose siempre en la misma posición en el espacio. Los que le circundan la ven desaparecer porque la máquina lo conduce a otros tiempos, anteriores o posteriores y puede ver todo lo que ha sucedido en el pasado, todo lo que sucederá en el porvenir.

El tiempo, pues, está considerado por WELLS como otra coordenada que habrá que agregar a las tres que determinan nuestra posición en el espacio, y yo, respecto a este elemental concepto, sólo puedo repetir lo que él le hace decir al imaginario protagonista de su historia, en sus disputas o conversaciones con sus contradictores o amigos. Por otra parte, es éste un concepto familiar desde hace mucho tiempo a las matemáticas, tanto que, poco antes, hablando de las ecuaciones diferenciales que se refieren a las vibraciones elásticas y a las oscilaciones eléctricas (que clasifiqué en el tipo de las *hiperbólicas*), dije que el vínculo entre los hechos y la teoría estaba formado por algunos elementos llamados *características*. No habrían podido imaginar y tratar tales elementos los matemáticos si no hubieran tenido la visión de que el tiempo podía considerarse como una cuarta coordenada.

Pero ¿ es posible separar los conceptos de espacio y tiempo? Todo lugar es observado en cierto tiempo y cada tiempo está determinado en un lugar dado; luego el espacio y el tiempo están ligados indisolublemente en nuestro espíritu y en todas nuestras acciones.

Supongamos, como es costumbre en geometría, que fijamos la posición de un punto mediante sus tres coordenadas x, y, z. Llamando t el tiempo, un punto del espacio, considerado en un instante dado, estará determinado por los valores x, y, z y t. A este conjunto de cuatro valores le llamaremos un *punto del mundo*; y a la totalidad de los valores que pueden tener x, y, z y t, *Universo.*

Si seguimos una partícula de materia en el infinito subseguirse de los acontecimientos, es decir, en todos los tiempos que fueron y en todos los que han de venir, tendremos una línea que depende de todos los valores posibles de x, y, z y t relativos a dicha partícula determinada. MINKOWSKY concibe una linea tal, a la que denomina *línea universal*, como la imagen del curso perpetuo de la vida de aquella partícula sustancial en el Universo, y, a este mismo tales como al conjunto de las líneas universales relativas a todas las partículas sustanciales existentes.

Ahora bien: en todo lo dicho he empleado términos propios de la geometria, tales como punto, línea, etc.; pero debe entenderse que tal lenguaje se refiere a un espacio que no es el de tres, sino el de cuatro dimensiones. En efecto, si un punto del mundo está individualizado por los cuatro parámetros x, y, z, y t, y el Universo por todo el conjunto de valores de los mismos, quiere decir que el universo de MINSKOWSKY es un espacio de cuatro dimensiones.

Esto no crea dificultades a los matemáticos, que están habituados a tratar las cuestiones geométricas en los espacios de cuatro, de cinco, de un número cualquiera de dimensiones, con la misma facilidad y desenvoltura que en el ordinario de tres. El lenguaje geométrico, más bien, es un medio de facilitar las investigaciones y descubrimientos, así como el de enunciar simple y claramente los resultados obtenidos.

Lo que se observa en el espacio de tres dimensiones, según MINKOWSKY, no es más que la sombra o la proyección de un espacio con una dimensión más, o, mejor aún, una sección de este mismo espacio.

Pero, si queremos vulgarizar los conceptos mismos y volverlos intuitivos, poniéndolos al alcance de todos, es menester recurrir a un artificio que ha servido con notables ventajas en otras circunstancias. HELMHOLTZ y CLIF-

FORD, queriendo aclarar elementalmente el concepto de curvatura del espacio, imaginaron seres de dos dimensiones y de una. El primero, por ejemplo, ideó un ser sumamente chato que podía resbalar sobre una superficie; el segundo, forjó un ser vermiforme que podía escurrirse a lo largo de una línea. El ser chato de HELMHOLTZ tiene dos dimensiones y como suponemos que no puede salir de una determinada superficie, el espacio que puede recorrer debe ser también de dos dimensiones. Análogamente, el ser vermiforme de CLIFFORD tiene una dimensión y el espacio que anda, una sola también.

Ahora bien, ¿ qué será para el Universo de MINKOWSKY el ente chato ?

Si caracterizamos cada partícula material que puede concebirse por medio de las dos coordenadas relativas a su espacio de dos dimensiones y el tiempo en que se las considera, tendremos que su universo será evidentemente de tres dimensiones. Análogamente el universo del ser vermiforme tendrá dos dimensiones.

Si nos limitamos, pues, a estos seres más simples que nosotros, tendremos universos más simples que, siendo representables por espacios a tres o dos dimensiones, nos darán inmediata y directamente la visión de la marcha de sus eventos, mientras las construcciones geométricas que podremos formar en estos universos serán perfectamente apreciadas por nuestros sentidos. Sólo después, con un esfuerzo mental de abstracción y generalización, podremos pasar de estos espacios a nuestro universo de cuatro dimensiones y formarnos un hábito intelectual capaz de concebir los eventos en el espacio mismo.

Más aún, si principiamos por el ser más simple, como su universo tiene dos dimensiones, podremos trazar efectivamente todas las operaciones geométricas a que nos hemos referido, en una hoja de papel, facilitando muchísimo de este modo las operaciones mismas y teniéndolas constantemente a la vista, completamente materializadas y concretas.

Para familiarizarnos con estos conceptos, consideramos la posición de una dimensión, caracterizada por una coordenada x (por ejemplo, su distancia a un punto dado), mientras el tiempo quedará determinado por otra coordenada t, por consiguiente la imagen del Universo nos será dada por el plano xt. Si la partícula está en reposo, su imagen estará representada por una recta paralela a t, la que nos indicará que, con el cambiar de los tiempos, la posición, o sea, la coordenada x, no cambia. Si la partícula se moviera, su imagen sería una línea, que expresaría como con el cambiar de los tiempos cambiaría x, esto es, su posición en el espacio. Si el movimiento fuera uniforme la línea sería una recta, cuya mayor o menor inclinación respecto del eje de los tiempos, indicaría una mayor o menor velocidad; y que ésta será igual a 1 cuando estuviera igualmente inclinada respecto de los ejes.

Con referencia a cuanto hemos dicho precedentemente, para tener en un instante la imagen o la sombra de lo que ocurre en su espacio, el gusano deberá hacer una sección de estas varias líneas con una recta perpendicular al tiempo y que diste del eje tanto cuento es el tiempo transcurrido. Tales secciones nos darán las posiciones de la partícula que se observa.

Cada partícula sustancial estando caracterizada por un punto en el eje de las x, por cada uno de estos puntos pasará una línea universal de MINKOWSKY que nos dirá la historia o la vida de la partícula. El Universo es el conjunto de estas líneas que se aproximan o se alejan sin intersecarse jamás, puesto que cada partícula sustancial conserva su propia individualidad.

Para el ente vermiforme todas las leyes de la naturaleza se reducen á las mutuas relaciones entre estas líneas, puesto que ellas resumen para él todos los eventos pasados, presentes y futuros del Universo.

Si deseamos pasar al universo del ser chato tendremos que considerar dos ejes de espacio x, y, y un eje del tiempo; y en el universo de tres dimensiones referidas a x, y, t podremos razonar análogamente a lo que hemos hacho hasta aquí. En fin, con un esfuerzo agregamos una dimensión ulterior y llegaremos a nuestro universo y a nuestras leyes físicas.

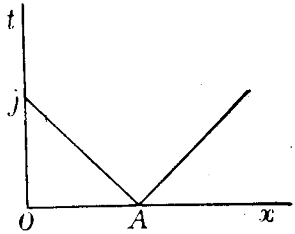


Fig. 1.

Pasemos, ahora, al mecanismo de la propagación de las ondas luminosas o, lo que es lo mismo para nosotros, electromagnéticas.

Tomemos un centro luminoso A (fig. 1) en el universo de dos dimensiones, y supongamos que las unidades de tiempo y longitud se hayan elegido de modo que la velocidad de propagación de la luz sea unitaria. Por A tracemos dos líneas igualmente inclinadas con respecto a los ejes x, t. Las ondas que parten de A y se propagan, tanto de un lado como del otro, son sin residuo; si trazamos desde A dos rectas igualmente inclinadas sobre los ejes, nos darán luego, todos los puntos del universo iluminados por un rayo nacido en dicho centro luminoso.

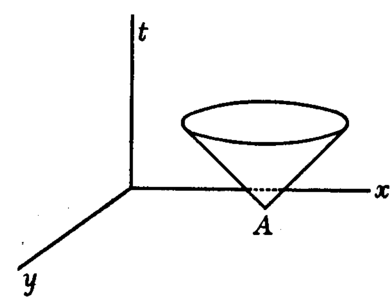


Fig. 2.

Si consideremos, en cambio, el universo de tres dimensiones y un centro luminoso A (fig. 2), trazando el cono cuyo vértice es A, cuyo eje es paralelo a t y cuya generatriz está inclinada 45° respecto del eje t, obtendremos en él la imagen de la onda; pero como ésta es de las que dejan residuo, toda la región interna del cono nos indicará la parte iluminada por el rayo partido de A.

Las rectas y el cono trazados en las dos figuras precedentes, no son sino la línea y la superficie características de las cuales hablamos anteriormente.

En fin, queriendo pasar a las ondas luminosas de nuestro espacio, sería necesario imaginar un universo de cuatro dimensiones; y puesto que, como hemos dicho, en este caso las ondas no dejan residuo, el mecanismo de su propagación se aproximará al indicado para el universo de dos dimensiones.

VIII.

Entraremos, ahora, a considerar el movimiento relativo.

¿ Qué transformación deberá hacerse, si el observador se mueve con velocidad uniforme ?

Bastará evidentemente, según los principios de la mecánica newtoniana, cambiar el eje de las t por otro inclinado t', conservando el mismo eje x, en la hipótesis más simple del universo de dos dimensiones. En efecto, todos los puntos A de velocidad uniforme igual, estarán representados por una paralela a t y, por consiguiente, parecerán inmóviles al observador. Por otra parte, es sabido que las ecuaciones de la mecánica newtoniana no se modifican cambiando las coordenadas x, t en $x - at, t$, lo cual, según los principios geométricos, equivale a cambiar los ejes x, t por los x, t'.

Pero consideremos la propagación de la luz, para lo cual recordemos las características que hemos considerado anteriormente. Siendo unitaria la velocidad de la luz, ellas constituirán las bisectrices i, j, de los ángulos formados por los ejes.

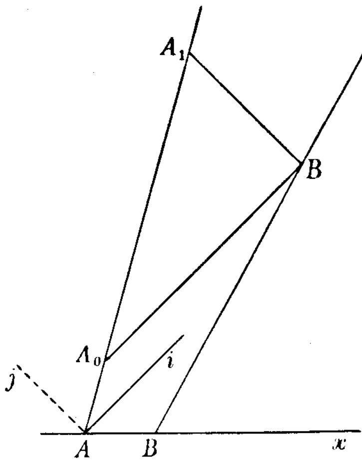


Fig. 3.

Establezcamos, ahora, como postulado, en virtud de las leyes ópticas de que hemos hablado ya, que la velocidad de la luz no debe cambiar cualquiera sean los sistemas de referencia.

Es evidente que tal postulado está en contradicción con el principio de relatividad newtoniana, pues al no ser ya las rectas i, j las bisectrices de los ángulos de los ejes x, t', la velocidad de la luz respecto del nuevo sistema de referencia habrá cambiado. ¿ Cómo, pues, se deberá transformar el principio de relatividad, queriendo eliminar esta contradicción ?

Se ve inmediatamente que cambiando el eje t por el t' habrá que sustituir el x por el x' de modo que las rectas i, j se conserven bisectrices de los ángulos de los ejes t', x', lo que equivale a hacer una transformación tal que el binomio $x^2 - t^2$ se cambia en $x'^2 - t'^2$.

Del mismo modo puede reconocerse, pasando del universo de dos dimensiones al de cuatro, que mientras el grupo de transformaciones que representa el principio de relatividad newtoniana es el que cambia a x, y, z, t en $x - at$, $y - bt$, $z - ct, t$, el postulado fundamental que hemos establecido se verificará reemplazando dicho grupo por el otro que cambia la espresión cuadrática $x^2 + y^2 + z^2 - t^2$ en sí misma.

Ahora bien : es precisamente este grupo de transformaciones el que no cambia las ecuaciones de LORENTZ de las que nos ocupamos anteriormente.

Existen, pues, dos principios diversos de relatividad: uno, propio de la mecánica newtoniana; el otro, de la electrodinámica lorentziana. Están en contradicción, por lo que, si aceptamos el segundo, tendremos que modificar los principios de la mecánica para ponerlos de acuerdo con dicho principio. Es lo que muchos autores (en primera línea POINCARÉ y MINKOWSKY) han tratado de hacer.

El nuevo principio de relatividad establece una ligazon más intima entre el espacio y el tiempo, pues éstos no pueden en manera alguna modificarse sin que la alteración de uno no influya sobre el otro; y, en efecto, el cambio del eje de los tiempos importa la alteración de la dirección del eje de los espacios.

De este conjunto de conceptos, mediante un fácil desarrollo geométrico, se deduce la contracción lorentziana de que hablamos precedentemente.

Las consideraciones expuestas nos conducen a la importante cuestión de la *contemporaneidad de los acontecimientos*.

¿ Cuándo pueden decirse contemporáneos dos hechos que acontecen en puntos diversos ?

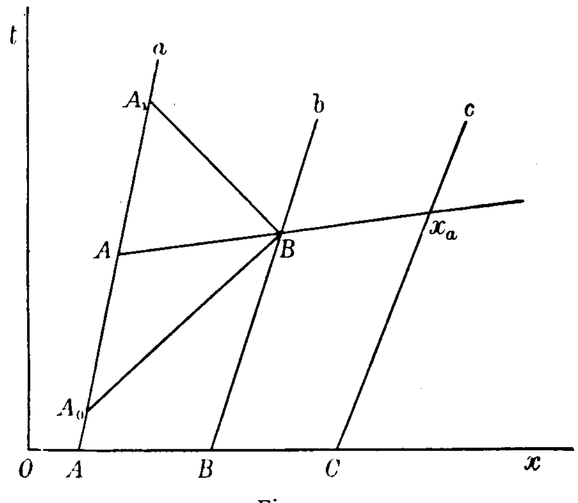


Fig. 4.

La crítica moderna, basada en la teoría que hemos expuesto, responde de una manera nueva y singular a esta fundamental pregunta.

Sean A, B, C, puntos que se mueven según una recta Ox. Según MINKOWSKY las imágenes en el universo de dos dimensiones serán rectas a, b, c. Tracemos las características i, j, las cuales – como hemos visto – representan la propagación de la luz. Supongamos, ahora, que cada observador posea un reloj cuya marcha sea uniforme.

Para arreglar los relojes consideramos como normal el del observador A. Cuando éste se halla en A_0, en el instante t_0, hace una señal luminosa que el segundo observador nota cuando se halla en B. Éste devuelve la señal al primer observador, el cual la percibe cuando ya se halla en A_1, en el instante t_1. Las rectas A_0B i BA_1 deben ser respectivamente paralelas a las i y j.

Supóngase que en el momento en que el segundo observador B recibe la señal su reloj marca el tiempo $(t_0+t_1)/2$ se tendrá que la recta AB (siendo A punto medio del segmento A_0 A_1), y por consecuencia todas las rectas a ella paralelas, representan puntos de contemporaneidad respecto del reloj normal A.

Ahora, se reconoce fácilmente que si se considera a a como la dirección del eje de los tiempos, la recta AB es la dirección del eje de los espacios (según la construcción que hicimos antes). Luego, si tomamos como reloj normal el de B, los puntos de contemporaneidad estarán determinados por las rectas paralelas a x_b, es decir, a aquella recta que forma el eje de los espacios cuando se considera a b como eje de los tiempos. Pero las direcciones x_a, x_b no coinciden, pues los ángulos $\widehat{x_a x_b}$ y $\widehat{ab}$ deben ser iguales, como es fácil probarlo.

De ello deducimos que fenómenos, contemporáneos respecto del primer reloj, no lo son ya respecto del segundo.

Como conclusión podemos decir:

1° Que la velocidad de la luz representa el límite de las velocidades posibles, puesto que el eje de los espacios y el de los tiempos, por necesidad, siempre deben estar situados respectivamente dentro de los ángulos $\widehat{xi}$ y $\widehat{ti}$;

2° Que dos acontecimientos cualesquiera podrán considerarse como contemporáneos, siempre que correspondan a dos puntos A, B, del universo, tales que la recta AB tenga respecto del eje de las x una inclinación menor de 45°.

Es inútil aplicar estos conceptos al universo de 4 dimensiones, en el que conservan formas análogas a las del de dos dimensiones, y por lo tanto, un pequeño esfuerzo de imaginación basta para que podamos situarlos en este espacio más extenso.

Es también inútil insistir sobre la originalidad de estos resultados y sobre la profunda revolución que causan en las ideas de espacio y tiempo a que estamos habituados. En efecto, destruyen los conceptos del *antes* y *después* reduciéndolos a algo que depende de nosotros mismos.

IX.

No podríamos terminar estas consideraciones generales sobre la mudanza ocasionada en los conceptos fundamentales por las más modernas teorías de la física sin hablar de la cuestión de la *masa*, que mencionamos al comenzar.

Por otra parte, todos conocemos la teoría de los electrones y de la masa electromagnética a la que está vinculado el nombre de ABRAHAM.

No me detendré a esponer aquí en detalle cuales fueron las razones que condujeron a establecer la teoría de los electrones. Los fenómenos eléctricos y las memorables leyes de FARADAY hicieron establecer que a cada átomo de los cuerpos se asociaba una carga eléctrica de magnitud independiente de la del átomo mismo y que sólo dependía de su valencia.

Los fenómenos de la conducción en los gases y sus leyes condujeron a la hipótesis de la yonización, y las célebres experiencias de J. J. THOMSON confirmaron por una vía completamente diversa, la individualidad de aquella carga eléctrica asociada a los átomos de los cuerpos y sugerida por los fenómenos electrolíticos. Finalmente, el estudio de las descargas eléctricas en los gases enrarecidos condujeron a la hipótesis electrónica, esto es, que los rayos catódicos están constituídos por un cúmulo de corpúsculos electrizados negativamente que parten del cátodo con grandísima velocidad. Las desviaciones que sufren en un campo eléctrico y en un campo magnético permitieron calcular la relación entre la carga de cada uno y su masa; relación obtenida y confirmada también por otros medios, que resultó independiente de la naturaleza del gas enrarecido y de la de los electrodos.

Ahora bien, la misma relación entre la carga y la masa en los corpúsculos electrizados, sugerida por los fenémenos de la electrólisis, resultaba mucho más pequeña para el hidrógeno que tiene el menor peso atómico. Se trataba, pues, de determinar la causa que influía sobre la notable diferencia que existe en los dos casos. Las experiencias de LENARD y una larga discusión hicieron necesaria la hipótesis de que la carga eléctrica de cada corpúsculo era la misma en ambos casos; pero que la masa de los corpúsculos catódicos era mucho menor que la de los átomos materiales, como para compensar el valor que se hallaba en la relación mencionada.

Pero entonces se interpuso un nuevo orden de ideas de muchísima importancia al que queremos referirnos más especialmente, el que surgió de la consideración de la masa electromagnética.

Las célebres experiencias de ROWLAND confirmadas por ROENTGEN, CREMIEUX, PONDER, han probado que una carga eléctrica en movimiento es comparable con una corriente eléctrica, engendrando por tanto un campo magnético. Basta esta simple consideración para que los principios energéticos nos hagan pronto prever que un cuerpo electrizado en movimiento se comporta como si su masa fuera mayor. En efecto, el trabajo por realizar para variar la velocidad debe ser igual al incremento de la fuerza viva, es decir, al trabajo que debería realizarse si no estuviera electrizado, más el necesario para cambiar el campo magnético. Un cuerpo electrizado presenta, por consiguiente, respecto del mismo no electrizado, una inercia mayor y, por ende, un aumento aparente de su masa.

Ahora bien, los corpúsculos catódicos estando electrizados negativamente y en movimiento deberán tener por lo menos una parte de su masa de origen electromagnético. Surgió entonces esta idea atrevida: ¿ no tendrá tal vez tal origen la masa total de los mismos corpúsculos (ya reconocida tenuísima respecto de las masas atómicas) ? Obsérvese que en tal caso se quitaba a dichos corpúsculos toda consistencia material considerándolas, por tanto, como simples cargas eléctricas.

Sería muy largo exponer las razones que militaron en favor de esta hipótesis, aceptada universalmente, que dió origen al concepto del *electrón* o sea del átomo de electricidad constituido por una simple carga eléctrica negativa, sin algún substrato material. Como consecuencia se dedujo que los rayos catódicos están constituidos por electrones móviles con una velocidad (medida directamente por VIECHERT) de un tercio aproximadamente de la de la luz; y que los electrones asociados a los átomos materiales constituyen los *yones* negativos, reconocidos en los fenómenos electrolíticos y en las descargas de los gases y, por fin, que la electricidad está constituida por estos átomos, es decir, por esas porciones elementales definidas respecto de las cuales todas las cargas son múltiples según números enteros.

Pero los electrones no son emitidos tan sólo por el cátodo en los tubos vacíos, son emitidos también por el radio, constituyendo los rayos llamados β.

El primero que calculó la masa aparente de un electrón para diversas velocidades, fundándose en la hipótesis de que toda ella sea de origen electromagnético, fué ABRAHAM en 1902, que pudo reconocer la existencia de dos masas especiales: la longitudinal, esto es, en el sentido del movimiento, y la transversal, en sentido normal al mismo.

Las experiencias de KAUFMANN, hechas en el mismo período de tiempo, sobre los rayos β y su desvío obtenido mediante campos eléctricos y magnéticos, confirmaron la hipótesis electromagnética de la masa.

Aquí conviene ligar la cuestión que tratamos con la desarrollada antes relativa a la contracción debida, según LORENTZ, al movimiento.

ABRAHAM suponía que el electrón era esférico, invariable, no sometido, por lo tanto, a la contracción lorentziana, lo que importaba establecer que la observación de los fenómenos ópticos debía revelar el movimiento absoluto de la tierra; pero hemos demostrado ya que las experiencias han dado resultado negativo, tanto que fuimos conducidos a establecer el postulado de la relatividad, es decir, a enunciar la imposibilidad de reconocer el movimiento absoluto.

Dicho postulado, como vimos, conduce a la contracción lorentziana; el electrón, pues, no es rígido, como lo suponía ABRAHAM; de manera que si es esférico estando en reposo, se deforma puesto en movimiento; y entonces, calculando la ley de la dependencia de su masa relativamente a su velocidad, se halla un resultado diferente del obtenido por ABRAHAM.

Era necesario establecer sobre bases experimentales cual de las dos teorías, de ABRAHAM y LORENTZ, aplicadas al electrón, daba resultados aceptables. KAUFMANN se impuso esta delicada tarea estudiando las desviaciones de los rayos β para diversas velocidades sometidas a la acción de campos electroestáticos y electromagnéticos. Sus experiencias, admirables por su finura y precisión, complementadas con cálculos laboriosos y difíciles, condujeron a resultados que confirmaban las teorías de ABRAHAM.

Pero, en seguida, en 1908, BÜCHERER, empleando un método sumamente ingenioso, sometió las fórmulas de ABRAHAM y LORENTZ a sus proprias experiencias, resultando que las primeras daban errores sistemáticos, mientras las lorentzianas daban resultados completamente exactos.

La teoría de LORENTZ obtuvo, pues, un nuevo triunfo y el postulado fundamental de la relatividad una nueva confirmación.

El principio de la masa electromagnética, establecido como base de la inercia, y las teorías electrónicas han conducido a nuevas y singulares teorías, en las cuales el gran físico inglés J. J. THOMSON introdujo geniales y atrevidas hipótesis.

¿ Puede representarse la materia con un modelo electromagnético ? Los átomos ¿ están constituídos por una nebulosa positiva en la que están sumergidos uno o más electrones negativos? Los fenómenos químicos e hiperquímicos ¿ pueden explicarse mediante la colisión catastrófica de estos mundos eléctricos infinitesimales? Los fenómenos de radioactividad ¿ son debidos a la liberación de los electrones de esos microcosmos ?

Arduas y fundamentales cuestiones que, por cierto, no trataré de solucionar, ni siquiera de predecir cómo serán resueltas en el porvenir, pero que fácil es suponer deberán pasar por estados provisionales.

La gloriosa historia de la ciencia nos enseña que ésta avanza merced a una continua, incesante y más o menos rápida sucesión de hipótesis y teorías que se desvanecen unas después de otras, dejando tan sólo un breve recuerdo; pero cuya acción es fecunda, útil. Son ellas las que clasifican y vinculan los diversos fenómenos naturales; son ellas las que crean el lenguaje científico; ellas las que tienen la virtud de dirigir a los hombres de ciencia en el camino de los descubrimientos de nuevos hechos y que los conocimientos humanos se enriquezcan con nuevos resultados positivos y aplicaciones admirables.

XXVIII.

EQUAZIONI INTEGRO-DIFFERENZIALI CON LIMITI COSTANTI

« Rend. Acc. Lincei », ser. 5^a, vol. XX_1, 1911_1, pp. 95-99.

1. Nella mia prima Nota sulle equazioni integro-differenziali [1], in cui ho considerato la equazione integro-differenziale

$$(I) \qquad \Delta^2 u(t) + \int_0^t \left\{ \frac{\partial^2 u(\tau)}{\partial x^2} f(t,\tau) + \frac{\partial^2 u(\tau)}{\partial y^2} \varphi(t,\tau) + \frac{\partial^2 u(\tau)}{\partial z^2} \psi(t,\tau) \right\} d\tau = 0,$$

ho accennato alla possibilità di estendere l'analisi ad equazioni integro-differenziali con limiti costanti. Mi permetto qui di trattare questo argomento, valendomi dei principii esposti in alcune Note nelle quali ho introdotto la considerazione delle funzioni permutabili e delle operazioni di composizione [2]. Già in una di queste Note avevo avuto occasione di studiare equazioni integro-differenziali con limiti costanti, le quali conducono ad una classe di trascendenti uniformi che comprendono le funzioni ellittiche, ma in tali equazioni compariva una sola variabile di derivazione, e quindi esse dal lato differenziale potevano compararsi alle equazioni differenziali ordinarie. In questa Nota considererò invece delle equazioni integro-differenziali con limiti costanti, le quali dal lato differenziale possono, al pari della (I), compararsi alle equazioni a derivate parziali.

2. Consideriamo la equazione integro-differenziale

$$(II) \qquad \sum_1^p {}_i \frac{\partial^2 u(x_1, x_2, \cdots, x_p \mid t)}{\partial x_i^2} + \int_0^1 \sum_1^p {}_i \frac{\partial^2 u(x_1, x_2, \cdots, x_p \mid \tau)}{\partial x_i^2} f_i(t,\tau)\, d\tau = 0 .$$

Come equazione aggiunta assumeremo

$$(II') \qquad \sum_1^p {}_i \frac{\partial^2 v(x_1, x_2, \cdots, x_p \mid t)}{\partial x_i^2} + \int_0^1 \sum_1^p {}_i \frac{\partial^2 v(x_1, x_2, \cdots, x_p \mid \tau)}{\partial x_i^2} f_i(\tau, t)\, d\tau = 0,$$

(1) « Rend. Acc. dei Lincei », 21 febbraio 1909, § 1. [In questo vol.: XVII, pp. 269-275].

(2) « Rend. Acc. dei Lincei », 20 febbraio 1910. *Questioni generali sulle equazioni integrali ed integro-differenziali.* [In questo vol.: XXIII, pp. 311-322]. Ibid., *Sopra le funzioni permutabili*, 17 aprile 1910. [In questo vol.: XXVI, pp. 331-342].

ed avremo il teorema di reciprocità espresso dalla formula

$$(\mathrm{III}) \qquad 0 = \mathrm{K}_\sigma([u, v]) = \int_0^1 dt \left\{ \int_\sigma \left(v(t) \frac{\partial u(t)}{\partial n} - u(t) \frac{\partial v(t)}{\partial n} \right) d\sigma \right.$$

$$\left. + \int_0^1 d\tau \int_\sigma \sum_1^p{}_i \left(v(t) \frac{\partial u(\tau)}{\partial x_i} - u(\tau) \frac{\partial v(t)}{\partial x_i} \right) f_i(t, \tau) \cos n x_i \, d\sigma \right\}$$

ove σ è il contorno di un iperspazio S_p nel campo $x_1, x_2, \cdots, x_p$ e n ne è la normale esterna.

3. Si tratta ora di trovare la soluzione fondamentale dell'equazione aggiunta, e a tal fine sostituiamo $z f_i(t, \tau)$ a $f_i(t, \tau)$, onde le (II) e (II') diverranno

$$(\mathrm{II}_a) \qquad \sum_1^p{}_i \frac{\partial^2 u(x_1, x_2, \cdots, x_p \mid t)}{\partial x_i^2} + z \int_0^1 \sum_1^p{}_i \frac{\partial^2 u(x_1, x_2, \cdots, x_p \mid \tau)}{\partial x_i^2} f_i(t, \tau) \, d\tau = 0$$

$$(\mathrm{II}'_a) \qquad \sum_1^p{}_i \frac{\partial^2 v(x_1, x_2, \cdots, x_p \mid t)}{\partial x_i^2} + z \int_0^1 \sum_1^p{}_i \frac{\partial^2 v(x_1, x_2, \cdots, x_p \mid \tau)}{\partial x_i^2} f_i(\tau, t) \, d\tau = 0.$$

Ripetendo dei calcoli analoghi a quelli eseguiti per ottenere la funzione fondamentale nella prima delle Note precedentemente citate [3] noi avremo come funzione fondamentale della (II'_a), nella ipotesi $p > 2$,

$$(1) \qquad \mathrm{V}(x_1, x_2, \cdots, x_p \mid t)$$

$$= \mathrm{F}(t) r^{2-p} + \int_0^1 \sum_1^\infty{}_m \frac{(-1)^m \mathrm{F}(\xi) z^m d\xi}{2 \cdot 4 \cdots 2m \cdot (4-p)(6-p) \cdots (2(m+1)-p)}$$

$$\times \sum_{h_1 + \cdots + h_p = m} \frac{\partial^{2m} r^{2(m+1)-p}}{\partial x_1^{2h_1} \cdots \partial x_p^{2h_p}} \mathrm{F}_{h_1, \cdots, h_p}(\xi, t),$$

ove $\mathrm{F}(t)$ è una funzione arbitraria, e

$$r = \sqrt{\sum_1^p{}_i (x_i - a_i)^2},$$

$$f_1(t, \tau) = \mathrm{F}_{1,0,\cdots,0}(t, \tau), \; f_2(t, \tau) = \mathrm{F}_{0,1,\cdots,0}(t, \tau), \cdots, f_p(t, \tau) = \mathrm{F}_{0,0,\cdots,1}(t, \tau),$$

$$\mathrm{F}_{h_1, h_2, \cdots, h_p}(t, \tau) = \int_0^1 \sum_{q_1 + q_2 + \cdots + q_p = \varrho} \mathrm{F}_{q_1, q_2, \cdots, q_p}(t, \xi) \, \mathrm{F}_{h_1 - q_1, h_2 - q_2, \cdots, h_p - q_p}(\xi, \tau) \, d\xi.$$

(3) « Rend. Acc. Lincei, 21 febbraio 1909 [in questo vol.: XVII, pp. 269–275], § 5.

La somma $\sum_{q_1+q_2+\cdots+q_p=\varrho}$ si intende estesa a tutti i valori interi di $q_1, q_2, \cdots, q_p$ la cui somma è costante ed eguale a ρ mentre si suppone che una F con indici negativi sia nulla.

La serie (1) sarà convergente finché $|z|$ sarà inferiore ad un dato limite.

Ciò premesso supponiamo che $f_1, f_2, \cdots, f_p$ siano funzioni fra loro permutabili di 2ª specie (4). Allora, facendo uso della notazione, usata nella Nota ora citata, per denotare la operazione di composizione di seconda specie, potremo scrivere

$$F_{h_1,h_2,\cdots,h_p}(t, \tau) = N_{h_1,h_2,\cdots,h_p} \ddot{f}_1^{h_1} \ddot{f}_2^{h_2} \cdots \ddot{f}_p^{h_p}(t, \tau),$$

in cui $N_{h_1,h_2\cdots h_p}$ è un numero facilmente calcolabile mediante $h_1, h_2, \cdots, h_p$. Avremo quindi che la (1) potrà scriversi

$$\text{(1')} \qquad V(x_1, x_2, \cdots, x_p \mid t)$$

$$= F(t) r^{2-p} + \int_0^1 \sum_1^\infty{}_m \frac{(-1)^m F(\xi) z^m d\xi}{2\cdot 4\cdots 2m\cdot(4-p)(6-p)\cdots(2(m+1)-p)}$$

$$\times \sum_{h_1+\cdots+h_p=m} N_{h_1,\cdots,h_p} \frac{\partial^{2m} r^{2(m+1)-p}}{\partial x_1^{2h_1}\cdots\partial x_p^{2h_p}} \ddot{f}_1^{h_1} \cdots \ddot{f}_p^{h_p}(\xi, t).$$

4. Prendiamo ora l'equazione differenziale

$$\sum_1^p{}_i \frac{\partial^2 W}{\partial x_i^2} + z \sum_1^p{}_i m_i \frac{\partial^2 W}{\partial x_i^2} = 0.$$

Purché $|z|$ sia inferiore ad un certo limite, la soluzione fondamentale potrà scriversi

$$W = Cr^{2-p} + \sum_1^\infty{}_m \frac{(-1)^m \dot{C} z^m}{2\cdot 4\cdots 2m'\cdot(4-p)(6-p)\cdots(2(m+1)-p)}$$

$$\times \sum_{h_1+\cdots+h_p=m} N_{h_1,\cdots,h_p} \frac{\partial^{2m} r^{2(m+1)-p}}{\partial x_1^{2h_1}\cdots\partial x_p^{2h_p}} m_1^{h_1} \cdots m_p^{h_p},$$

ove C denota una costante arbitraria.

Ma questa stessa soluzione può mettersi anche sotto la forma

$$W = \frac{C}{\left(\sum_1^p{}_i \frac{(x_i - a_i)^2}{1 + z m_i}\right)^{(p-2)/2}},$$

(4) « Rend. Acc. Lincei », 20 febbraio 1910; *Questioni generali sulle equazioni integrali ed integro-differenziali* [in questo vol.: XXIII, pp. 311-322], § 8.

e, se supponiamo $p = 2q$ con $q > 1$ e intero, avremo

$$W = \frac{C}{\left(\sum_1^{2q}{}_i \frac{(x_i - a_i)^2}{1 + zm_i}\right)^{q-1}},$$

ossia W sarà razionale in z, e potrà ancora scriversi

$$W = \frac{C}{r^{2q-2}} \frac{[(1 + zm_1)(1 + zm_2)\cdots(1 + zm_{2q})]^{q-1}}{\left\{1 + \sum_1^{2q}{}_i \frac{(x_i - a_i)^2}{r^2}[(1 + zm_1)\cdots(1 + zm_{i-1})(1 + zm_{i+1})\cdots(1 + zm_{2q}) - 1]\right\}^{q-1}}.$$

5. Da quanto è ora stato ottenuto si deduce il modo seguente per calcolare la richiesta funzione fondamentale della equazione aggiunta (II'_a).

Sia $f^{(1)}_{1,2,\ldots,2q}(t, \tau)$ la somma algebrica delle funzioni $f_1(t, \tau)$, $f_2(t, \tau)$, $\cdots$, $f_{2q}(t, \tau)$. Denotiamo con $f^{(2)}_{1,2,\ldots,2q}(t, \tau)$ la somma algebrica delle funzioni ottenute componendo due a due le funzioni stesse, con $f^{(3)}_{1,2,\ldots,2q}(t, \tau)$ la somma algebrica delle funzioni ottenute componendole tre a tre e così di seguito.

Formiamo

$$zf^{(1)}_{1,2,\ldots,2q}(t, \tau) + z^2 f^{(2)}_{1,2,\ldots,2q}(t, \tau) + \cdots + z^{2q} f^{(2q)}_{1,2,\ldots,2q}(t, \tau) = \chi(t, \tau),$$

quindi

$$(q-1)\chi(t, \tau) + \frac{(q-1)(q-2)}{1 \cdot 2}\ddot{\chi}^2(t, \tau)$$

$$+ \frac{(q-1)(q-2)(q-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3}\ddot{\chi}^3(t, \tau) + \cdots + \ddot{\chi}^{q-1}(t, \tau) = \Lambda(t, \tau)$$

e

$$F(t) + \int_0^1 F(\xi)\Lambda(\xi, t)\,d\xi = \Phi(t).$$

Si calcoli poi

$$zf^{(1)}_{1,2,\ldots,i-1,i+1,\ldots,2q}(t, \tau) + z^2 f^{(2)}_{1,2,\ldots,i-1,i+1,\ldots,2q}(t, \tau) + \cdots$$

$$+ z^{2q} f^{(2q-2)}_{1,2,\ldots,i-1,i+1,\ldots,2q}(t, \tau) = \Psi_i(t, \tau),$$

$$\sum_1^{2q}{}_i \frac{(x_i - a_i)^2}{r^2}\Psi_i(t, \tau) = \Psi(t, \tau),$$

$$(q-1)\Psi(t, \tau) + \frac{(q-1)(q-2)}{1 \cdot 2}\ddot{\Psi}^2(t, \tau)$$

$$+ \frac{(q-1)(q-2)(q-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3}\ddot{\Psi}^3(t, \tau) + \cdots + \ddot{\Psi}^{q-1}(t, \tau) = \Theta(t, \tau),$$

e si risolva l'equazione integrale

$$(2) \qquad V(t) + \int_0^1 V(\xi)\, \Theta(\xi, t)\, d\xi = \Phi(t).$$

$V(t)$ così ottenuto sarà evidentemente funzione anche di $x_1, x_2, \cdots, x_{2q}$ e di z, e coinciderà colla (1'). Inoltre essa sarà una *funzione meromorfa di* z la cui espressione verrà ottenuta come rapporto di due funzioni olomorfe di z.

6. Dalla (II') segue:

$$\int_\sigma \frac{\partial V(t)}{\partial n}\, d\sigma + \int_0^1 d\tau \int_\sigma \Sigma\, \frac{\partial V(\tau)}{\partial x_i} f_i(\tau, t) \cos nx_i\, d\sigma$$

$$= -2q(2q-2)\frac{(2\pi)^q}{2\cdot 4\cdots 2q} F(t),$$

supponendo che il polo $(a_1, a_2, \cdots, a_{2q})$ sia interno all'iperspazio limitato dal contorno σ. Questa formula vale prendendo per V l'espressione meromorfa che si ricava dalla equazione integrale (2), comunque grande sia $|z|$, esclusi i valori di z che annullano il determinante della equazione integrale.

Prendendo nella (III) $v = V$ ed escludendo il polo mediante uno spazio sferico che si fa tendere a zero, si trova al limite

$$K_\sigma([u, V]) = 2q(2q-2)\frac{(2\pi)^q}{2\cdot 4\cdots 2q}\int_0^1 F(t)\, u_0(t)\, dt,$$

ove $u_0(t)$ denota il valore di $u(x_1, \cdots, x_{2q} \mid t)$ al polo. Da questa formula si ricava subito $u_0(t)$, essendo $F(t)$ una funzione arbitraria.

XXIX.

CONTRIBUTO ALLO STUDIO DELLE FUNZIONI PERMUTABILI

« Rend. Acc. Lincei », ser. 5ª, vol. XX_1, 1911_1, pp. 296-304.

§ 1. - Osservazioni sulla composizione.

1. La operazione di *composizione* (composizione di prima specie) delle due funzioni finite e continue f e φ,

$$\int_x^y f(x,\xi)\,\varphi(\xi,y)\,d\xi,$$

si può evidentemente considerare indipendentemente dalla permutabilità delle due funzioni [1]. Rappresentandone il resultato col simbolo $f\varphi(x,y)$ o più semplicemente col simbolo $f\varphi$, avremo che se f e φ non saranno permutabili $f\varphi$ sarà diverso da φf.

La operazione stessa gode in generale della proprietà associativa. Infatti

$$\int_x^y f(x,\xi)\,d\xi\int_\xi^y \varphi(\xi,\eta)\,\psi(\eta,y)\,d\eta=\int_x^y \psi(\eta,y)\,d\eta\int_x^\eta f(x,\xi)\varphi(\xi,\eta)\,d\xi.$$

Potremo dunque enunciare il teorema: *Siano o no permutabili le funzioni* f, φ, ψ, *avremo sempre*

$$(f\varphi)\,\psi=f\,(\varphi\psi)\,.$$

2. Da questa proposizione discende immediatamente l'altra che enunciammo in una precedente Nota [2], cioè che *tutte le funzioni ottenute per composizione da più funzioni permutabili sono permutabili fra loro e colle funzioni date.*

Infatti, se f, φ, ψ sono permutabili, avremo

$$(f\varphi)\,\psi=f\,(\varphi\psi)=f\,(\psi\varphi)=(f\psi)\,\varphi=(\psi f)\,\varphi=\psi\,(f\varphi)\,.$$

(1) Cfr. *Questioni generali sulle equazioni integrali ed integro-differenziali.* « Rend. Acc. dei Lincei », seduta del 20 febbraio 1910, § 1. [In questo vol.: XXIII, pp. 311-322].

(2) Ibid.

§ 2. – Risoluzione di equazioni integrali.

1. Se f e φ sono funzioni derivabili, ed inoltre sono rispettivamente funzioni di ordini m ed n [3] con $m > n$, l'equazione integrale di prima specie

$$f(x, y) = \int_x^y \psi(x, \xi)\, \varphi(\xi, y)\, d\xi \tag{1}$$

ammette un'unica soluzione che è la soluzione dell'equazione integrale di seconda specie

$$f_n(x, y) = \psi(x, y)\, \varphi_{n-1}(y, y) + \int_x^y \psi(x, \xi)\, \varphi_n(\xi, y)\, d\xi, \tag{2}$$

ove si è scritto in generale

$$f_p(x, y) = \frac{\partial^p f(x, y)}{\partial y^p} \quad , \quad \varphi_p(x, y) = \frac{\partial^p \varphi(x, y)}{\partial y^p}.$$

Ciò si riconosce immediatamente derivando n volte l'equazione (1) e tenendo conto che

$$\varphi_p(y, y) = 0 \quad , \quad \text{se } p < n - 1 \quad , \quad \varphi_{n-1}(y, y) \gtrless 0$$

$$f_p(x, x) = 0 \quad , \quad \text{se } p \leq n - 1$$

ed osservando inoltre che, ogni funzione che soddisfa la (1) deve verificare la (2) e reciprocamente.

2. Dimostriamo ora che *se f e φ sono permutabili, ψ è permutabile con ambedue queste funzioni.*

Infatti la (1) si potrà scrivere

$$f = \psi\varphi$$

quindi

$$\varphi f = \varphi(\psi\varphi) = (\varphi\psi)\varphi \tag{3}$$

$$f\varphi = (\psi\varphi)\varphi. \tag{4}$$

Ma per ipotesi $\varphi f = f\varphi$, onde, se risolviamo la equazione (3) considerando $\varphi\psi$ come incognita, troveremo, in virtú di quanto è detto precedentemente, la stessa soluzione che risolvendo la (4) in cui si consideri $\psi\varphi$ come incognita.

(3) Nella presente Nota supporremo sempre, senza ripeterlo esplicitamente ogni volta, che le funzioni che si considerano siano finite e continue e così le derivate loro di cui si deve tener conto. Per la definizione di *ordine* di una funzione, vedi: *Sopra le funzioni permutabili.* « Rend. Acc. dei Lincei », seduta del 17 aprile 1910, § 3. [In questo vol.: XXVI, pp. 331–342].

Ne segue che

$$\varphi\psi = \psi\varphi$$

onde φ e ψ sono permutabili ed in conseguenza sono pure permutabili f e ψ.

3. È facile riconoscere che, risolvendo la (1), *la soluzione* ψ *sarà di ordine* $m - n$. Quindi, se i numeri m ed n saranno primi fra loro, colla risoluzione di successive equazioni integrali potremo sempre trovare funzioni di primo ordine permutabili con f e con φ.

4. In modo perfettamente analogo a quanto si è fatto precedentemente si dimostra che, *se* f *e* φ *sono funzioni permutabili di ordini rispettivamente* m *ed* n *con* $m > np$, *e se*

$$f = \psi\varphi^p ,$$

ψ *è permutabile con* f *e* φ.

§ 3. – RICERCA DI TUTTE LE FUNZIONI PERMUTABILI CON UNA FUNZIONE DI 2° ORDINE.

1. Supponendo $f(x, y)$ di 2° ordine e nota per tutti i valori di x, y, tali che

$$a \leq x \leq y \leq b ,$$

proponiamoci di trovare tutte le funzioni $\varphi(x, y)$ con essa permutabili.

Con un procedimento analogo a quello che abbiamo tenuto in una Nota precedente (4) potremo ricondurre il problema al caso in cui si abbia

$$f(x, x) = 0 \quad , \quad f_1(x, x) = -1 \quad , \quad f_2(x, x) = 1$$
$$f_{11}(x, x) = 0 \quad , \quad f_{12}(x, x) = 0 \quad , \quad f_{22}(x, x) = 0,$$

avendo posto

$$f_1(x, y) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \quad , \quad f_2(x, y) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$$

$$f_{11}(x, y) = \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} \quad , \quad f_{12}(x, y) = \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} \quad , \quad f_{22}(x, y) = \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2} .$$

2. Scriviamo

$$\Phi(x, y) = \int_x^y f(x, \xi) \varphi(\xi, y) d\xi = \int_x^y \varphi(x, \xi) f(\xi, y) d\xi . \tag{5}$$

(4) *Sopra le funzioni permutabili.* « Rend. Acc. dei Lincei », seduta 17 aprile 1910, § 1. [In questo vol.: XXVI, pp. 331–342].

Avremo

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = \varphi(x, y) + \displaystyle\int_x^y f_{11}(x, \xi)\, \varphi(\xi, y)\, d\xi \\[2ex] \dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = \varphi(x, y) + \displaystyle\int_x^y \varphi(x, \xi)\, f_{22}(\xi, y)\, d\xi \end{cases}$$

e, ponendo

$$f_{11}(x, y) - f_{11}^2(x, y) + f_{11}^3(x, y) - \cdots = F_{11}(x, y),$$

$$f_{22}(x, y) - f_{22}^2(x, y) + f_{22}^3(x, y) - \cdots = F_{22}(x, y),$$

ove le potenze denotano operazioni di composizione, sarà

$$(6) \qquad \begin{cases} \varphi(x, y) = \dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \displaystyle\int_x^y F_{11}(\xi, x)\, \frac{\partial^2 \Phi(\xi, y)}{\partial \xi^2}\, d\xi \\[2ex] \varphi(x, y) = \dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - \displaystyle\int_x^y F_{22}(\xi, y)\, \frac{\partial^2 \Phi(x, \xi)}{\partial \xi^2}\, d\xi . \end{cases}$$

Ora

$$F_{11}(x, x) = 0 \quad , \quad F_{22}(x, x) = 0,$$

quindi, posto

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F_{11}(x, y)}{\partial y} = \lambda_{11}(x, y) \\[1ex] \dfrac{\partial^2 F_{11}(x, y)}{\partial y^2} = \mu_{11}(x, y) \\[1ex] \dfrac{\partial F_{22}(x, y)}{\partial x} = \lambda_{22}(x, y) \\[1ex] \dfrac{\partial^2 F_{22}(x, y)}{\partial x^2} = \mu_{22}(x, y) \end{cases} \qquad \begin{cases} \lambda_{11}(x, x) = \lambda_1(x) \\[1ex] \mu_{11}(x, x) = \mu_1(x) \\[1ex] \lambda_{22}(x, x) = \lambda_2(x) \\[1ex] \mu_{22}(x, x) = \mu_2(x) \end{cases}$$

e, osservando che $\Phi(x, y)$ è di ordine superiore al secondo e perciò

$$\left(\frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial y}\right)_{x=y} = 0,$$

le (6) si trasformeranno facilmente, mediante integrazioni per parti, nelle equazioni seguenti

$$\varphi(x, y) = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \lambda_1(x)\, \Phi(x, y) - \int_x^y \mu_{11}(x, \xi)\, \Phi(\xi, y)\, d\xi$$

$$\varphi(x, y) = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \lambda_2(y)\, \Phi(x, y) - \int_x^y \mu_{22}(\xi, y)\, \Phi(x, \xi)\, d\xi .$$

Sottraendo si avrà

$$(A) \qquad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + (\lambda_2(y) + \lambda_1(x))\,\Phi(x\,,y)$$

$$+ \int_x^y [\mu_{11}(x\,,\xi)\,\Phi(\xi\,,y) - \mu_{22}(\xi\,,y)\,\Phi(x\,,\xi)]\,d\xi = 0\,.$$

Dunque $\Phi(x\,,y)$ deve soddisfare l'equazione integro-differenziale (A).

3. Poniamo

$$g(x\,,y) = -(\lambda_2(y) + \lambda_1(x))\,\Phi(x\,,y)$$

$$-\int_x^y [\mu_{11}(x\,,\xi)\,\Phi(\xi\,,y) - \mu_{22}(\xi\,,y)\,\Phi(x\,,\xi)]\,d\xi\,;$$

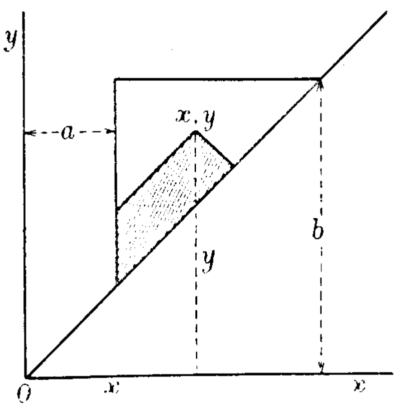
la (A) si scriverà

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = g(x\,,y)\,,$$

d'onde

$$\Phi(x\,,y) = \psi(y - x) + \theta(x + y) + \frac{1}{2}\int_{\Lambda_{x,y}} g(\xi\,,\eta)\,d\xi\,d\eta$$

ove ψ e θ denotano due funzioni arbitrarie, e con $\int_{\Lambda_{x,y}}$ si intende l'integrale esteso allo spazio $\Lambda_{x,y}$ compreso fra la bisettrice degli assi $x\,,y$, le due rette inclinate di 45° sugli assi coordinati condotte per il punto $x\,,y$ e la retta parallela all'asse y che ne dista di a. Lo spazio $\Lambda_{x,y}$ è lo spazio tratteggiato indicato nella figura.



Ma, se facciamo $x = y$, abbiamo

$$\Phi(x\,,y) = 0 \quad \text{e} \quad \int_{\Lambda_{x,y}} g(\xi\,,\eta)\,d\xi\,d\eta = 0\,,$$

quindi

$$\psi(0) + \theta(2\,x) = 0\,,$$

ossia θ deve essere una costante eguale a $-\psi(0)$.

Se dunque prendiamo ψ in modo che si annulli per $x = y$, avremo

$$(A') \qquad \Phi(x\,,y) = \psi(y - x) + \frac{1}{2}\int_{\Lambda_{x,y}} g(\xi\,,\eta)\,d\xi\,d\eta\,,$$

e per conseguenza si potrà sostituire all'equazione integro-differenziale (A) l'equazione integrale (A').

4. Si riconosce facilmente che, nota $\psi(y-x)$, la funzione Φ è determinata dalla (A'), ossia se $\psi(y-x)$ è nulla, anche Φ è nulla. Ciò si ottiene impiegando metodi analoghi a quelli che abbiamo adoperato in circostanze simili in precedenti Memorie (5).

La risoluzione della equazione integrale (A') non presenta difficoltà. La funzione $\Phi(x, y)$ è di terzo ordine o di ordine superiore al terzo, quindi dovremo prendere anche $\psi(y-x)$ di terzo ordine o di ordine superiore al terzo. Si dimostra che, assumendo in tal maniera $\psi(y-x)$, la funzione Φ, ottenuta risolvendo l'equazione integrale (A'), soddisfa le (5) ed è dello stesso ordine di $\psi(y-x)$. Risolvendo una delle (5) si otterranno tutte le funzioni permutabili con $f(x, y)$. In particolare prendendo $\psi(y-x)$ del terzo ordine, $\varphi(x, y)$ risulterà del primo ordine.

Il problema di ottenere tutte le funzioni permutabili con una funzione del secondo ordine è quindi risoluto.

5. Se $f(x, y)$ è della forma $f(y-x)$, allora

$$\lambda_{11}(x, y) = -\lambda_{22}(x, y) = \lambda(y-x),$$

per conseguenza

$$\lambda_1(x) = -\lambda_2(y) = \lambda(0).$$

Inoltre

$$\mu_{11}(x, y) = \mu_{22}(x, y) = \mu(y-x).$$

Ne segue che

$$g(x, y) = \int_x^y [\mu(y-\xi)\Phi(x, \xi) - \mu(\xi - x)\Phi(\xi, y)]\, d\xi,$$

onde l'equazione integrale (A') è soddisfatta prendendo

$$\Phi(x, y) = \psi(y-x).$$

Se ne deduce che tutte le funzioni permutabili con $f(y-x)$ appartengono al gruppo delle funzioni permutabili coll'unità.

§ 4. — Risoluzione dell'equazione integrale

(I) $$\int_x^y \varphi(x, \xi)\varphi(\xi, y)\, d\xi = \psi(x, y)$$

OVE ψ È UNA FUNZIONE DATA DEL 2° ORDINE E φ È INCOGNITA.

1. Poniamo

$$x = f(x_1) \quad , \quad y = f(y_1) \quad , \quad \xi = f(\xi_1)$$

(5) *Sopra le funzioni permutabili.* « Rend. Acc. dei Lincei », seduta 17 aprile 1910, § 2. [In questo vol.: XXVI, pp 331–342].

24

con $f'(\xi_1)$ sempre positivo, in modo che le precedenti equazioni possano invertirsi univocamente ed avere

$$x_1 = f_1(x) \quad , \quad y_1 = f_1(y_1) \quad , \quad \xi_1 = f_1(\xi).$$

Colla precedente sostituzione si otterrà

$$(7) \qquad \int_{x_1}^{y_1} \varphi(x_1, \xi_1)\, \varphi(\xi_1, y_1) f'(\xi_1)\, d\xi_1 = \psi(x_1, y_1).$$

Sia

$$\sqrt{f'(x_1) f'(y_1)}\, \varphi(x_1, y_1) = \varphi_1(x_1, y_1)$$

$$\sqrt{f'(x_1) f'(y_1)}\, \psi(x_1, y_1) = \psi_1(x_1, y_1).$$

La equazione (7) si scriverà

$$\int_{x_1}^{y_1} \varphi_1(x_1, \xi_1)\, \varphi_1(\xi_1, y_1)\, d\xi_1 = \psi_1(x_1, y_1).$$

Supponiamo ora che

$$\lim_{y=x} \frac{\psi(x,y)}{x-y} = \lambda^2(x).$$

Potremo assumere $\lambda(x)$ diverso da zero e positivo. Ma

$$\lim_{y_1=x_1} \frac{x-y}{y_1-x_1} = f'(x_1) = \frac{1}{f_1'(x)},$$

quindi

$$\lim_{y_1=x_1} \frac{\psi_1(x_1, y_1)}{y_1-x_1} = \left(\frac{\lambda(n)}{f_1'(n)}\right)^2,$$

onde, preso $f_1'(x) = \lambda(x)$, avremo

$$\lim_{y_1=x_1} \frac{\psi_1(x_1, y_1)}{y_1-x_1} = 1.$$

Potremo dunque, con una conveniente trasformazione di variabili e di funzioni, ricondurre la equazione (I) al caso in cui sia

$$\lim_{y=x} \frac{\psi(x,y)}{y-x} = 1.$$

Noi ammetteremo quindi soddisfatta senz'altro questa condizione.

2. Ciò premesso calcoliamo, col procedimento indicato nel paragrafo precedente, una funzione $\theta(x, y)$ di primo ordine permutabile con $\psi(x, y)$. È facile riconoscere, da quanto si è trovato nel detto paragrafo, che $\theta(x, x)$ dovrà essere una costante diversa da zero. Moltiplicando quindi $\theta(x, y)$ per un fattore costante, potremo ricondurci al caso in cui $\theta(x, x) = 1$.

Supponiamo che $\psi(x, y)$ e $\theta(x, y)$ ammettano le derivate seconde e poniamo

$$\frac{\partial\theta(x,y)}{\partial y} = \theta_2(x,y) \quad , \quad \frac{\partial^2\theta(x,y)}{\partial y^2} = \theta_{22}(x,y) \quad , \quad \frac{\partial^2\psi(x,y)}{\partial y^2} = \psi_{22}(x,y)$$

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial^2\theta^2(x,y)}{\partial y^2} = \theta_2(x,y) + \theta(x,y)\,\theta_2(y,y) + \int_x^y \theta(x,\xi)\,\theta_{22}(\xi,y)\,d\xi = \lambda(x,y) \\ &\frac{\partial^2(\psi(x,y) - \theta^2(x,y))}{\partial y^2} = \psi_{22}(x,y) - \lambda(x,y) = \mu(x,y)\,. \end{aligned}\right.$$

Risolviamo ora l'equazione integrale

$$\mu(x,y) = \chi(x,y) + \int_x^y \chi(x,\xi)\lambda(\xi,y)\,d\xi, \tag{8}$$

considerando $\chi(x, y)$ come funzione incognita, e formiamo la serie (la quale per princìpi noti [6] sappiamo esser convergente)

$$\varphi(x,y) = \theta(x,y) + \frac{1}{2}\theta\chi(x,y) \tag{II}$$

$$+ \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{1\cdot 2}\theta\chi^2(x,y) + \cdots + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\cdots\left(\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!}\theta\chi^n(x,y) + \cdots$$

ove con $\theta\chi^n(x, y)$ si intende il risultato di una operazione di composizione.

Si dimostra facilmente che $\pm\varphi(x, y)$ verifica l'equazione (I).

Infatti, integrando due volte la (8), si ricava che

$$\psi(x,y) = \theta^2(x,y) + \int_x^y \chi(x,\xi)\,\theta^2(\xi,y)\,d\xi\,.$$

χ è per conseguenza permutabile con θ e con ψ (vedi § 2). Ne segue, componendo la serie (II) con se stessa,

$$\varphi^2(x,y) = \theta^2 + \theta^2\chi = \psi(x,y).$$

§ 5. – Osservazioni.

1. Si riconosce facilmente che, se $\varphi_1(x, y)$ e $\varphi_2(x, y)$ sono due funzioni permutabili tali che

$$\int_x^y \varphi_1(x,\xi)\,\varphi_1(\xi,y)\,d\xi = \psi(x,y),$$

$$\int_x^y \varphi_2(x,\xi)\,\varphi_2(\xi,y)\,d\xi = \psi(x,y),$$

(6) Vedi la Nota citata precedentemente: *Questioni generali sulle equazioni integrali ed integro-differenziali*, § 3. [In questo vol.: XXIII, pp. 311–322].

essendo ψ una funzione di 2° ordine, deve aversi o

$$\varphi_1(x, y) = \varphi_2(x, y)$$

oppure

$$\varphi_1(x, y) = -\varphi_2(x, y)$$

2. Consideriamo l'equazione integrale

$$\varphi^n(x, y) = \psi(x, y), \tag{9}$$

ove φ è la incognita e il simbolo di potenza denota un'operazione di composizione, mentre la funzione data ψ è di ordine np multiplo dell'intero n. Con una trasformazione analoga a quella fatta nel § precedente potremo ricondurci al caso in cui

$$\lim_{y=x} \frac{\psi(x, y)}{(y-x)^{np-1}} = 1.$$

Se conosciamo una funzione $\theta(x, y)$ di ordine p permutabile con $\psi(x, y)$ e tale che

$$\lim_{y=x} \frac{\theta^n(x, y)}{(y-x)^{pn-1}} = 1,$$

risolviamo l'equazione integrale

$$\psi(x, y) - \theta^n(x, y) = \int_x^y \chi(x, \xi)\, \theta^n(\xi, y)\, d\xi$$

nella ipotesi che le funzioni θ e ψ posseggano le derivate di ordine n^{esimo}. Calcolata la funzione incognita χ, avremo che la funzione

$$\theta(x, y) + \frac{1}{n}\theta\chi(x, y)$$

$$+ \frac{\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}-1\right)}{1\cdot 2}\theta\chi^2(x, y) + \cdots + \frac{\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}-1\right)\cdots\left(\frac{1}{n}-q+1\right)}{q!}\theta\chi^q(x, y) + \cdots$$

soddisfarà l'equazione (9).

3. Quando $\psi(x, y)$ è della forma $\psi(y-x)$, potremo prendere

$$\theta(x, y) = \frac{[(np-1)!]^{1/n}}{(p-1)!}(y-x)^{p-1}.$$

Nella ipotesi $p = 1$, si ricade nella soluzione data in una Nota precedente [7].

(7) *Sopra le funzioni permutabili.* « Rend. Acc. Lincei », seduta 17 aprile 1910, § 4. [In questo vol.: XXVI, pp. 331-342].

ed avremo

$$C = A\Lambda B\,,$$

ove il secondo membro denota il prodotto delle tre sostituzioni $A\,,\Lambda\,,B$.

Ne segue che la condizione necessaria e sufficiente per la permutabilità di seconda specie delle funzioni (I) e (II) è espressa da

$$A\Lambda B = B\Lambda A\,. \tag{5}$$

2. Ciò premesso osserviamo che la relazione precedente è equivalente all'altra

$$(\Lambda A)\,(\Lambda B) = (\Lambda B)\,(\Lambda A)\,, \tag{5'}$$

dunque, *condizione necessaria e sufficiente per la permutabilità di seconda specie di* F *e* Φ *è che le sostituzioni* ΛA *e* ΛB *siano fra loro permutabili.*

Nella ipotesi in cui B si riduca all'identità, cioè

$$B = \begin{Vmatrix} 1\,, 0\,, \cdots, 0 \\ 0\,, 1\,, \cdots, 0 \\ \cdots\cdots\cdots \\ 0\,, 0\,, \cdots, 1 \end{Vmatrix} = 1$$

e quindi

$$\Phi(x\,,y) = \sum_1^n{}_i f_i(x)\,\varphi_i(y) \tag{6}$$

la condizione precedente si riduce a

$$A\Lambda = \Lambda A\,,$$

ossia che *le sostituzioni* Λ *e* A *siano fra loro permutabili*, mentre se $\Lambda = 1$ essa diviene

$$AB = BA\,,$$

ossia che *siano permutabili le sostituzioni* B *ed* A.

3. Ho studiato la questione della permutabilità delle sostituzioni nei Preliminari della seconda parte della mia Memoria: *Sui fondamenti della teoria delle equazioni differenziali lineari* (2).

Rimando quindi alla suddetta Memoria per la trattazione del problema di trovare tutte le sostituzioni permutabili con una data sostituzione. Perciò *nota la funzione* (II) *potremo avere tutte le funzioni della forma* (I) *permutabili di 2ª specie con essa.*

4. Nella Memoria adesso citata (3) ho dimostrato il teorema seguente: *La condizione necessaria e sufficiente affinché le sostituzioni permutabili con una data sostituzione siano permutabili fra loro è che i divisori elementari della*

(2) «Memorie della Società Italiana delle Scienze (detta dei XL)», ser. III, tomo XII. [In queste «Opere»: vol. secondo, XXX, pp. 383–451].

(3) Preliminari, § 6.

ed avremo

$$C = A\Lambda B\,,$$

ove il secondo membro denota il prodotto delle tre sostituzioni A, Λ, B.

Ne segue che la condizione necessaria e sufficiente per la permutabilità di seconda specie delle funzioni (I) e (II) è espressa da

$$(5) \qquad A\Lambda B = B\Lambda A\,.$$

2. Ciò premesso osserviamo che la relazione precedente è equivalente all'altra

$$(5') \qquad (\Lambda A)(\Lambda B) = (\Lambda B)(\Lambda A)\,,$$

dunque, *condizione necessaria e sufficiente per la permutabilità di seconda specie di* F *e* Φ *è che le sostituzioni* ΛA *e* ΛB *siano fra loro permutabili.*

Nella ipotesi in cui B si riduca all'identità, cioè

$$B = \begin{vmatrix} 1, 0, \cdots, 0 \\ 0, 1, \cdots, 0 \\ \cdots\cdots\cdots \\ 0, 0, \cdots, 1 \end{vmatrix} = 1$$

e quindi

$$(6) \qquad \Phi(x, y) = \sum_1^n {}_i f_i(x)\,\varphi_i(y)$$

la condizione precedente si riduce a

$$A\Lambda = \Lambda A\,,$$

ossia che *le sostituzioni* Λ *e* A *siano fra loro permutabili*, mentre se $\Lambda = 1$ essa diviene

$$AB = BA\,,$$

ossia che *siano permutabili le sostituzioni* B *ed* A.

3. Ho studiato la questione della permutabilità delle sostituzioni nei Preliminari della seconda parte della mia Memoria: *Sui fondamenti della teoria delle equazioni differenziali lineari* (2).

Rimando quindi alla suddetta Memoria per la trattazione del problema di trovare tutte le sostituzioni permutabili con una data sostituzione. Perciò *nota la funzione* (II) *potremo avere tutte le funzioni della forma* (I) *permutabili di 2ª specie con essa.*

4. Nella Memoria adesso citata (3) ho dimostrato il teorema seguente: *La condizione necessaria e sufficiente affinché le sostituzioni permutabili con una data sostituzione siano permutabili fra loro è che i divisori elementari della*

(2) «Memorie della Società Italiana delle Scienze (detta dei XL)», ser. III, tomo XII. [In queste «Opere»: vol. secondo, XXX, pp. 383-451].

(3) Preliminari, § 6.

sostituzione data siano potenze di basi tutte differenti fra loro. Quando questa condizione è verificata ho chiamato la sostituzione *elementare.*

Ne segue che *la condizione necessaria e sufficiente affinché tutte le funzioni* (I) *permutabili colla* (II) *siano permutabili fra loro è che il prodotto delle sostituzioni* ΛB *sia elementare.*

5. Vogliamo dare subito una applicazione dei precedenti risultati ad una questione di equazioni integrali.

Supponiamo ΛB *elementare* e siano $F_0, F_1, F_2, \cdots, F_m$, $m+1$ funzioni della forma (I) permutabili di 2ª specie con (II): esse saranno permutabili fra loro.

Proponiamoci il problema di *trovare una funzione* F, *avente la forma* (I) *e permutabile con* (II), *la quale verifichi l'equazione integrale di grado m*

$$\text{(III)} \qquad \ddot{F}_0 \ddot{F}^m + \ddot{F}_1 \ddot{F}^{m-1} + \ddot{F}_2 \ddot{F}^{m-2} + \cdots + \ddot{F}_{m-1} \ddot{F} + F_m = 0 .$$

Posto

$$F_h = \sum_1^n{}_i \sum_1^n{}_s \, a_{is}^{(h)} f_i(x) \, \varphi_s(y) ,$$

$$A_h = \begin{Bmatrix} a_{11}^{(h)}, a_{12}^{(h)}, \cdots, a_{1n}^{(h)} \\ a_{21}^{(h)}, a_{22}^{(h)}, \cdots, a_{2n}^{(h)} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}^{(h)}, a_{n2}^{(h)}, \cdots, a_{nn}^{(h)} \end{Bmatrix},$$

dovremo avere

$$\text{(III}_a\text{)} \qquad (\Lambda A_0)(\Lambda A)^m + (\Lambda A_1)(\Lambda A)^{m-1} + (\Lambda A_2)(\Lambda A)^{m-2} + \cdots$$
$$+ (\Lambda A_{m-1})(\Lambda A) + \Lambda A_m = 0.$$

Ora, riducendo le sostituzioni $\Lambda A_0, \Lambda A_1, \cdots, \Lambda A_m, \Lambda A$, alla *forma normale* [4] potremo scrivere

$$\Lambda A_h = T^{-1} \left\{ \overline{\prod_1^p{}_g R_{h,g}} \right\} T,$$

$$\Lambda A = T^{-1} \left\{ \overline{\prod_1^p{}_g R_g} \right\} T,$$

(4) *Sui fondamenti della teoria delle equazioni differenziali lineari.* Parte prima. «Memorie della Società Italiana delle Scienze (detta dei XL)», ser. III, vol. VI. [In queste «Opere»; vol. primo, XV, pp. 209-290], Preliminari, § 2. Vedi anche Parte seconda (prec. citata), Preliminari, § 6.

ove

$$R_{h,g} = \begin{Vmatrix} \alpha_{h,g}^{(1)}, & 0 & , 0 & , \cdots, 0 \\ \alpha_{h,g}^{(2)}, & \alpha_{h,g}^{(1)} & , 0 & , \cdots, 0 \\ \alpha_{h,g}^{(3)}, & \alpha_{h,g}^{(2)} & , \alpha_{h,g}^{(1)} & , \cdots, 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{h,g}^{(\chi_g)}, & \alpha_{h,g}^{(\chi_g - 1)}, & \alpha_{h,g}^{(\chi_g - 2)}, & \cdots, \alpha_{h,g}^{(1)} \end{Vmatrix}$$

$$R_g = \begin{Vmatrix} \alpha_g^{(1)} & , 0 & , 0 & , \cdots, 0 \\ \alpha_g^{(2)} & , \alpha_g^{(1)} & , 0 & , \cdots, 0 \\ \alpha_g^{(3)} & , \alpha_g^{(2)} & , \alpha_g^{(1)} & , \cdots, 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_g^{(\chi_g)}, & \alpha_g^{(\chi_g - 1)}, & \alpha_g^{(\chi_g - 2)}, & \cdots, \alpha_g^{(1)} \end{Vmatrix},$$

mentre

$$\chi_1 + \chi_2 + \cdots + \chi_p = n,$$

e T è una sostituzione a determinante diverso da zero. Ne segue

$$(7) \qquad R_{0,g} R_g^m + R_{1,g} R_g^{m-1} + R_{2,g} R_g^{m-2} + \cdots + R_{m-1,g} R_g + R_{m,g} = 0,$$

$$(g = 1, 2, \ldots, p).$$

Potremo dunque prendere $\alpha_g^{(1)}$ eguale ad una qualunque delle radici della equazione algebrica di grado m

$$(8) \qquad \alpha_{0,g}^{(1)} x^m + \alpha_{1,g}^{(1)} x^{m-1} + \alpha_{2,g}^{(1)} x^{m-2} + \cdots + \alpha_{m-1,g}^{(1)} x + \alpha_{m,g}^{(1)} = 0.$$

Ottenuto $\alpha_g^{(1)}$, i valori di $\alpha_g^{(2)}, \alpha_g^{(3)}, \cdots, \alpha_g^{(\chi_g)}$, tali che la (7) sia soddisfatta, si calcoleranno risolvendo successive equazioni lineari.

Le diverse sostituzioni ΛA, e quindi le diverse A, che verificano la (III$_a$) si avranno dunque mediante la risoluzione di equazioni algebriche (8) di grado m e di equazioni lineari, e a seconda delle combinazioni delle varie radici delle equazioni (8) si otterranno altrettante soluzioni.

Ad ogni sostituzione A che verifica la (III$_a$) corrisponderà una funzione F che soddisfa l'equazione integrale (III).

6. Sia ora $\Psi(x, y)$ una funzione qualunque permutabile di 2ª specie con la (II). Poniamo

$$e_{rs} = \int_0^1 \int_0^1 \Psi(x, y) \varphi_r(x) f_s(y)\, dx\, dy,$$

$$E = \begin{Vmatrix} e_{11}, & e_{12}, & \cdots, & e_{1n} \\ e_{21}, & e_{22}, & \cdots, & e_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ e_{n1}, & e_{n2}, & \cdots, & e_{nn} \end{Vmatrix}.$$

In virtù della permutabilità avremo

$$\int_0^1 \Psi(x,\xi)\,\Sigma_i\,\Sigma_s\, b_{is} f_i(\xi)\,\varphi_s(y)\,d\xi = \int_0^1 \Psi(\xi, y)\,\Sigma_i\,\Sigma_s\, b_{is} f_i(x)\,\varphi_s(\xi)\,d\xi,$$

quindi

$$\int_0^1\!\!\int_0^1 \varphi_h(x) f_r(y)\,dx\,dy \int_0^1 \Psi(x,\xi)\,\Sigma_i\,\Sigma_s\, b_{is} f_i(\xi)\,\varphi_s(y)\,d\xi$$

$$= \int_0^1\!\!\int_0^1 \varphi_h(x) f_r(y)\,dx\,dy \int_0^1 \Psi(\xi, y)\,\Sigma_i\,\Sigma_s\, b_{is} f_i(x)\,\varphi_s(\xi)\,d\xi\,,$$

vale a dire

$$\Sigma_i\,\Sigma_s\, b_{is} \int_0^1\!\!\int_0^1 \Psi(x,\xi)\,\varphi_h(x) f_i(\xi)\,dx\,d\xi \int_0^1 \varphi_s(y) f_r(y)\,dy$$

$$= \Sigma_i\,\Sigma_s\, b_{is} \int_0^1 \varphi_h(x) f_i(x)\,dx \int_0^1\!\!\int_0^1 \Psi(\xi, y)\,\varphi_s(\xi) f_r(y)\,d\xi\,dy,$$

d'onde

$$\mathrm{EB\Lambda} = \mathrm{\Lambda BE}. \tag{9}$$

Scriviamo

$$\Psi(x,y) = \Sigma_h\,\Sigma_k\, m_{hk} f_h(x)\,\varphi_k(y) + \Theta(x,y)$$

colla condizione

$$\int_0^1\!\!\int_0^1 \Theta(x,y)\,\varphi_r(x) f_s(y)\,dx\,dy = 0 \qquad (r, s = 1, 2, \cdots, n).$$

Posto

$$\mathrm{M} = \begin{vmatrix} m_{11}, m_{12}, \cdots, m_{1n} \\ m_{21}, m_{22}, \cdots, m_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ m_{n1}, m_{n2}, \cdots, m_{nn} \end{vmatrix},$$

sarà

$$\mathrm{E} = \mathrm{\Lambda M \Lambda}.$$

Quindi, in virtù della (9),

$$(\mathrm{\Lambda M})(\mathrm{\Lambda B}) = (\mathrm{\Lambda B})(\mathrm{\Lambda M}),$$

onde la funzione

$$\Sigma_h\,\Sigma_k\, m_{hk} f_h(x)\,\varphi_k(y)$$

sarà permutabile colla (II) e perciò anche Θ sarà permutabile colla (II), cioè

$$\int_0^1 \Theta(x,\xi)\,\Sigma_i\,\Sigma_s\, b_{is} f_i(\xi)\,\varphi_s(y)\,d\xi = \int_0^1 \Sigma_i\,\Sigma_s\, b_{is} f_i(x)\,\varphi_s(\xi)\,\Theta(\xi, y)\,d\xi.$$

Moltiplicando per $f_h(y)\,dy$ e integrando fra 0 e 1 si avrà

$$\int_0^1 f_h(y)\,dy\int_0^1 \Theta(x,\xi)\,\Sigma_i\Sigma_s b_{is} f_i(\xi)\,\varphi_s(y)\,d\xi$$

$$=\Sigma_i\Sigma_s b_{is} f_i(x)\int_0^1\!\!\int_0^1 \Theta(\xi,y)\,\varphi_s(\xi) f_h(y)\,d\xi\,dy=0,$$

ovvero

$$\Sigma_i\Sigma_s b_{is}\lambda_{sh}\int_0^1\Theta(x,\xi) f_i(\xi)\,d\xi=0 \qquad (i=1,2,\cdots,n).$$

Ne segue, supposto il determinante della sostituzione BΛ diverso da zero,

$$\int_0^1\Theta(x,\xi) f_i(\xi)\,d\xi=0 \qquad (i=1,2,\cdots,n). \tag{10}$$

In modo perfettamente analogo si ha

$$\int_0^1\Theta(\xi,y)\,\varphi_i(\xi)\,d\xi=0 \qquad (i=1,2,\cdots,n). \tag{10'}$$

Ora la funzione più generale che soddisfa le (10) e (10') è [5]

$$\Theta(x,y)=\Omega(x,y)-\sum_1^n{}_i\sum_1^n{}_s\,\mu_{is}\,\varphi_s(y)\int_0^1\Omega(x,\xi) f_i(\xi)\,d\xi \tag{11}$$

$$-\sum_1^n{}_i\sum_1^n{}_s\,\mu_{is} f_i(x)\int_0^1\Omega(\xi,y)\,\varphi_s(\xi)\,d\xi$$

$$+\Sigma_h\Sigma_k f_h(x)\,\varphi_k(y)\,\Sigma_i\Sigma_s\,\mu_{ik}\,\mu_{hs}\int_0^1\!\!\int_0^1\Omega(\xi,\eta)\,\varphi_s(\xi) f_i(\eta)\,d\xi\,d\eta,$$

ove

$$\begin{Bmatrix}\mu_{11}, & \mu_{12}, & \cdots, & \mu_{1n}\\ \mu_{21}, & \mu_{22}, & \cdots, & \mu_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \mu_{n1}, & \mu_{n2}, & \cdots, & \mu_{nn}\end{Bmatrix}=\Lambda^{-1}$$

e $\Omega(x,y)$ è una funzione arbitraria. Prendendo dunque la funzione più generale della forma (I) permutabile di 2ª specie con (II), ottenuta colla regola delle sostituzioni permutabili, e aggiungendovi la (11) si otterrà la funzione più generale $\Psi'(x,y)$ permutabile con (II).

(5) Cfr. LAURICELLA: *Sopra alcune equazioni integrali.* « Rend. Accad. Lincei », seduta 7 giugno 1908.

7. Ritornando alla equazione integrale (III) di grado m, osserviamo che, se alla soluzione F, avente la forma (I), aggiungiamo la funzione Θ otterremo sempre, in virtù delle relazioni (10) e (10'), una funzione che soddisfa l'equazione integrale stessa, ed avremo così la funzione più generale permutabile con la (II) che vi soddisfa.

8. Se prendiamo

$$f_i(x) = \varphi_i(x) \qquad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

e supponiamo che queste funzioni siano normalizzate, sarà $\Lambda = \mathrm{I}$ e

$$\Phi(x, y) = \sum_1^n {}_i \sum_1^n {}_s \, b_{is} f_i(x) f_s(y),$$

$$\mathrm{F}(x, y) = \sum_1^n {}_i \sum_1^n {}_s \, a_{is} f_i(x) f_s(y).$$

Quando le funzioni $f_1, f_2, \cdots, f_n$ fanno parte di un sistema normalizzato $f_1, f_2, \cdots, f_N$ (essendo $N > n$), otterremo delle funzioni Θ che verificano le (10) e (10') prendendo

$$\Theta = \sum_{n+1}^N {}_i \sum_{n+1}^N {}_s \, q_{is} f_i(x) f_s(y),$$

ove le q_{is} sono costanti arbitrarie. È facile estendere il risultato al caso $N = \infty$.

9. Mi sono permesso di presentare le precedenti osservazioni in occasione della pubblicazione dei risultati eleganti e di notevole interesse dovuti al prof. SINIGAGLIA.

Mi sembra che, ponendo in luce il collegamento della questione delle funzioni permutabili di 2ª specie con quella della permutabilità delle sostituzioni, si riconosca la vera natura del problema e si possa penetrare nella sua intima essenza. Nel tempo stesso possono così anche ottenersi varie estensioni e delle applicazioni del problema medesimo come abbiamo veduto nel § 5.

Vi è poi da osservare che i metodi che servono per le funzioni permutabili di 1ª specie sono diversi da questi, applicabili alle funzioni permutabili di 2ª specie.

XXXI.

SOPRA UNA PROPRIETÀ GENERALE DELLE EQUAZIONI INTEGRALI ED INTEGRO-DIFFERENZIALI

« Rend. Acc. Lincei », ser. 5ª, vol. XX_2, 1911_2; pp. 79–88.

1. In alcuni precedenti lavori ebbi più volte occasione di mostrare come da equazioni differenziali ordinarie o a derivate parziali si potesse pervenire a equazioni integro-differenziali con limiti costanti o con limiti variabili, passando dalle soluzioni delle une a quelle delle altre (1). Mi permetto qui di esporre su questo soggetto le considerazioni generali che mi hanno guidato nella trattazione di quei varii casi, ponendo a riscontro il passaggio a equazioni aventi limiti costanti coll'analogo passaggio a equazioni con limiti variabili e la natura diversa delle soluzioni che si trovano nell'uno e nell'altro caso.

2. Abbiansi le quantità finite

$$m_{hk}\,,\; n_{hk}\,,\; p_{hk}\,,\; q_{hk}\,,\cdots \qquad (h\,,k = 1\,,2\,,\cdots,g)$$

le quali siano fra loro permutabili, cioè tali che siano verificate le eguaglianze

$$\sum_1^g{}_l\, m_{hl}\, n_{lk} = \sum_1^g{}_l\, n_{hl}\, m_{lk}\,,$$

$$\sum_1^g{}_l\, n_{hl}\, p_{lk} = \sum_1^g{}_l\, p_{hl}\, n_{lk}\,,$$

$$\sum_1^g{}_l\, p_{hl}\, m_{lk} = \sum_1^g{}_l\, m_{hl}\, p_{lk}$$

per tutte le combinazioni due a due delle $m_{hk}\,,\, n_{hk}\,,\, p_{hk}\,,\, q_{hk}\,,\cdots$

Scriveremo le espressioni precedenti coi simboli $(m\,,\,n)_{hk} = (n\,,\,m)_{hk}$, $(n\,,\,p)_{hk} = (p\,,\,n)_{hk}$, $(p\,,\,m)_{hk} = (m\,,\,p)_{hk} \cdots$ e analogamente scriveremo $(m\,,\,n\,,\,p)_{hk} = ((m\,,\,n)\,,\,p)_{hk}$ e così di seguito. Porremo poi

$$(m\,,\,m)_{hk} = (m^2)_{hk}$$

(1) *Questioni generali sulle equazioni integrali ed integro-differenziali.* « Rend. Acc. dei Lincei », vol. XIX_1, ser. 5ª, 1910_1 [in questo vol.: XXIII, pp. 311–322] § 8; *Equazioni integro-differenziali con limiti costanti* ... Ibid., vol. XX_1 ser. 5ª, 1911_1. [In questo vol.: XXVIII, pp. 359–363].

ed in generale, se α è il numero delle m contenute nella parentesi, scriveremo

$$(m\,,\,m\,,\cdots,\,m)_{hk}=(m^{\alpha})_{hk}$$

in modo che il significato della espressione

$$(m^{\alpha}\,,\,n^{\beta}\,,\,p^{\gamma}\,,\,q^{\delta}\,,\,\cdots)_{hk}\,,$$

in cui $\alpha\,,\,\beta\,,\,\gamma\,,\,\delta\,,\cdots$ sono numeri interi, resta perfettamente definito.

3. Ciò premesso, siano

$$\Sigma_{\alpha}\,\Sigma_{\beta}\,\Sigma_{\gamma}\,\Sigma_{\delta}\,\cdots\,a_{\alpha,\beta,\gamma,\delta,\ldots}\,z^{\alpha}\,u^{\beta}\,v^{\gamma}\,w^{\delta}\,\cdots$$

$$\Sigma_{\alpha}\,\Sigma_{\beta}\,\Sigma_{\gamma}\,\Sigma_{\delta}\,\cdots\,b_{\alpha,\beta,\gamma,\delta,\ldots}\,z^{\alpha}\,u^{\beta}\,v^{\gamma}\,w^{\delta}\,\cdots$$

delle *funzioni intere* qualsiasi delle variabili complesse, $z\,,\,u\,,\,v\,,\,w\,,\cdots$ con $a_{0,0,0\ldots}=b_{0,0,0\ldots}=0$. Poniamo

$$\frac{\Sigma_{\alpha}\,\Sigma_{\beta}\,\Sigma_{\gamma}\,\Sigma_{\delta}\,\cdots\,a_{\alpha,\beta,\gamma,\delta,\ldots}\,z^{\alpha}\,u^{\beta}\,v^{\gamma}\,w^{\delta}\,\cdots}{1+\Sigma_{\alpha}\,\Sigma_{\beta}\,\Sigma_{\gamma}\,\Sigma_{\delta}\,\cdots\,b_{\alpha,\beta,\gamma,\delta,\ldots}\,z^{\alpha}\,u^{\beta}\,v^{\gamma}\,w^{\delta}\,\cdots}$$
$$=\Sigma_{\alpha}\,\Sigma_{\beta}\,\Sigma_{\gamma}\,\Sigma_{\delta}\,\cdots\,c_{\alpha,\beta,\gamma,\delta,\ldots}\,z^{\alpha}\,u^{\beta}\,v^{\gamma}\,w^{\delta}\,\cdots$$

Evidentemente, mentre gli sviluppi che compariscono al numeratore ed al denominatore sono validi qualunque siano i valori di $z\,,\,u\,,\,v\,,\,w\,,\cdots$ l'ultimo sviluppo varrà, in generale, soltanto finché i moduli di queste variabili saranno inferiori a dati limiti.

Costruiamo poi le funzioni

$$\Phi_{hk}(z\,,u\,,v\,,w,\cdots)=\Sigma_{\alpha}\,\Sigma_{\beta}\,\Sigma_{\gamma}\,\Sigma_{\delta}\cdots a_{\alpha,\beta,\gamma,\delta,\ldots}(m^{\alpha}\,n^{\beta}\,p^{\gamma}\,q^{\delta}\cdots)_{hk}\,z^{\alpha}\,u^{\beta}v^{\gamma}w^{\delta}\cdots \tag{1}$$

$$\Psi_{hk}(z\,,u\,,v\,,w,\cdots)=\Sigma_{\alpha}\,\Sigma_{\beta}\,\Sigma_{\gamma}\,\Sigma_{\delta}\cdots b_{\alpha,\beta,\gamma,\delta,\ldots}(m^{\alpha}\,n^{\beta}\,p^{\gamma}\,q^{\delta}\cdots)_{hk}\,z^{\alpha}\,u^{\beta}v^{\gamma}w^{\delta}\cdots \tag{2}$$

$$\mathrm{F}_{hk}(z\,,u\,,v\,,w,\cdots)=\Sigma_{\alpha}\,\Sigma_{\beta}\,\Sigma_{\gamma}\,\Sigma_{\delta}\cdots c_{\alpha,\beta,\gamma,\delta,\ldots}(m^{\alpha}\,n^{\beta}\,p^{\gamma}\,q^{\delta}\cdots)_{hk}\,z^{\alpha}\,u^{\beta}v^{\gamma}w^{\delta}\cdots \tag{3}$$

Avremo i teoremi seguenti:

1° *Le funzioni* $\Phi_{hk}(z\,,u\,,v\,,w\,,\cdots)$, $\Psi_{hk}(z\,,\,u\,,\,v\,,\,w\,,\cdots)$ *sono funzioni intere delle variabili complesse* $z\,,\,u\,,\,v\,,\,w\,,\cdots$

2° *La funzione* $\mathrm{F}_{hk}(z\,,\,u\,,\,v\,,\,w\,,\cdots)$ *è il rapporto di due funzioni intere delle variabili* $z\,,\,u\,,\,v\,,\,w\,,\cdots$

3° $\Phi_{hk}\,,\,\Psi_{hk}\,,\,\mathrm{F}_{hk}$ *sono permutabili colle* $m_{hk}\,,\,n_{hk}\,,\,p_{hk}\,,\,q_{hk}\,,\cdots$

Per dimostrare la prima proposizione basta osservare che, scelti arbitrariamente i numeri positivi $\mathrm{R}_1\,,\,\mathrm{R}_2\,,\,\mathrm{R}_3\,,\,\mathrm{R}_4\,,\cdots$, potremo trovare un numero positivo M tale che

$$|\,a_{\alpha,\beta,\gamma,\delta,\cdots}\,|<\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{R}_1^{\alpha}\,\mathrm{R}_2^{\beta}\,\mathrm{R}_3^{\gamma}\,\mathrm{R}_4^{\delta}\cdots}\,.$$

Siano ora $m_1\,,\,m_2\,,\,m_3\,,\,m_4\,,\cdots$ rispettivamente i limiti superiori dei valori assoluti delle

$$g m_{hk}\,,\,g n_{hk}\,,\,g p_{hk}\,,\,g q_{hk}\,,\cdots\qquad(h\,,\,k=1\,,\,2\,,\cdots,g);$$

sarà

$$|a_{\alpha,\beta,\gamma,\delta,\ldots}(m^\alpha n^\beta p^\gamma q^\delta \cdots)_{hk}| < \frac{M}{\left(\frac{R_1}{m_1}\right)^\alpha \left(\frac{R_2}{m_2}\right)^\beta \left(\frac{R_3}{m_3}\right)^\gamma \left(\frac{R_4}{m_4}\right)^\delta \cdots}$$

quindi la serie (1) è convergente finché

$$|z| < \frac{R_1}{m_1} \quad , \quad |u| < \frac{R_2}{m_2} \quad , \quad |v| < \frac{R_3}{m_3} \quad , \quad |w| < \frac{R_4}{m_4}, \cdots$$

e, poiché R_1, R_2, R_3, R_4, $\cdots$ possono scegliersi tanto grandi quanto si vuole, così la serie (1) sarà una funzione intera. Nello stesso modo si dimostra che la serie (2) è pure intera.

Per dimostrare la seconda proposizione si consideri il sistema di equazioni algebriche lineari

$$\text{(A)} \qquad X_{hk} + \sum_{1}^{g}{}_l \Psi_{hl} X_{lk} = \Phi_{hk} \qquad (h, k = 1, 2, \cdots, g).$$

Esso evidentemente è soddisfatto se alle incognite X_{hk} noi sostituiamo le F_{hk}. Ma se risolviamo il sistema algebrico precedente (A) noi troviamo che le X_{hk} si esprimono come rapporti di polinomii razionali e interi nelle Φ_{hk} e Ψ_{hk}, quindi come rapporti di funzioni intere nelle $z, u, v, w, \cdots$ Il denominatore comune di questi rapporti non è identicamente nullo, giacché esso si riduce eguale all'unità per $z = u = v = w = \cdots = 0$. La 2ª proposizione è dunque dimostrata.

La terza proposizione risulta immediatamente osservando che le Φ_{hk}, Ψ_{hk}, F_{hk} sono serie i cui termini sono permutabili colle m_{hk}, n_{hk}, p_{hk}, q_{hk}, $\cdots$

4. Seguendo il concetto fondamentale che ho posto a base di tutti gli studî sulle equazioni integrali ed integro-differenziali, si ha che facendo crescere indefinitamente il numero g, mentre m_1, m_2, m_3, m_4, $\cdots$ si mantengono finiti, si passa facilmente dalle quantità m_{hk}, n_{hk}, p_{hk}, q_{hk}, $\cdots$ alle funzioni finite e continue permutabili di *seconda specie* (2) $S_1(x, y)$, $S_2(x, y)$, $S_3(x, y)$, $S_4(x, y)$, $\cdots$ tali cioè che

$$\ddot{S}_i \ddot{S}_h(x, y) = \ddot{S}_h \ddot{S}_i(x, y) = \int_0^1 S_i(x, \xi) S_h(\xi, y)\, d\xi = \int_0^1 S_h(x, \xi) S_i(\xi, y)\, d\xi$$

e nel caso limite i teoremi del § precedente conducono alle seguenti proposizioni:

1° *Le funzioni*

$$\Phi(z, u, v, w, \cdots | x, y) = \Sigma_\alpha \Sigma_\beta \Sigma_\gamma \Sigma_\delta \cdots a_{\alpha,\beta,\gamma,\delta,\ldots} \ddot{S}_1^\alpha \ddot{S}_2^\beta \ddot{S}_3^\gamma \ddot{S}_4^\delta \cdots z^\alpha u^\beta v^\gamma w^\delta \cdots$$

$$\Psi(z, u, v, w, \cdots | x, y) = \Sigma_\alpha \Sigma_\beta \Sigma_\gamma \Sigma_\delta \cdots b_{\alpha,\beta,\gamma,\delta,\ldots} \ddot{S}_1^\alpha \ddot{S}_2^\beta \ddot{S}_3^\gamma \ddot{S}_4^\delta \cdots z^\alpha u^\beta v^\gamma w^\delta \cdots$$

sono funzioni intere delle variabili complesse $z, u, v, w, \cdots$

(2) *Questioni generali sulle equazioni integrali ed integro-differenziali*, precedentemente citata, § 8.

2° *La funzione*

$$F(z,u,v,w,\cdots|x,y)=\Sigma_\alpha\,\Sigma_\beta\,\Sigma_\gamma\,\Sigma_\delta\cdots c_{\alpha,\beta,\gamma,\delta\ldots}\,\ddot{S}_1^\alpha\,\ddot{S}_2^\beta\,\ddot{S}_3^\gamma\,\ddot{S}_4^\delta\cdots z^\alpha u^\beta v^\gamma w^\delta\cdots$$

è il rapporto di due funzioni intere di $z, u, v, w, \cdots$

3° *Le*

$$\Phi(z,u,v,w,\cdots|x,y),\ \Psi(z,u,v,w,\cdots|x,y),\ F(z,u,v,w,\cdots|x,y),$$

considerate come funzioni di x, y, *sono funzioni permutabili di* 2^a *specie colle* $S_1(x,y), S_2(x,y), S_3(x,y), S_4(x,y)\cdots$

Finalmente la funzione $F(z,u,v,w,\cdots,|x,y)$ potrà ottenersi risolvendo l'equazione integrale

$$\text{(A')}\qquad F(z,u,v,w,\cdots|x,y)$$
$$+\int_0^1\Psi(z,u,v,w,\cdots|x,\xi)\,F(z,u,v,w,\cdots|\xi,y)\,d\xi$$
$$=\Phi(z,u,v,w,\cdots|x,y).$$

5. Supponiamo ora di avere un sistema di equazioni algebriche o differenziali di un ordine qualsiasi

$$(4)\quad g_s\Big(z,z_1,z_2,\cdots,u,u_1,u_2,\cdots,v,v_1,v_2,\cdots,w,w_1,w_2,\cdots,\mathcal{F}_1,\mathcal{F}_2,\cdots$$
$$\cdots\frac{\partial^{\lambda+\lambda_1+\cdots+\mu+\mu_1\cdots}\mathcal{F}_h}{\partial z^\lambda\,\partial z_1^{\lambda_1}\cdots\partial u^\mu\,\partial u_1^{\mu_1}\cdots}\cdots\Big)=0\qquad(s=1,2,\cdots,r),$$

ove $z, z_1, z_2, \cdots, u, u_1, u_2, \cdots$ figurano come variabili indipendenti di derivazione, $v, v_1, v_2, \cdots, w, w_1, w_2, \cdots$ come parametri, $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \cdots$ come funzioni incognite e supponiamo, per semplicità, che i primi membri siano polinomii razionali e interi delle diverse quantità che vi entrano.

Ammettiamo che esistano delle soluzioni $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \cdots$ che si annullino nel punto $z=u=v=w=\cdots=0$, regolari nell'intorno di questo punto e che siano esprimibili mediante *rapporti di funzioni intere* delle variabili indipendenti $z, u, \cdots$ e dei parametri $v, w, \cdots$, mentre le altre variabili e gli altri parametri $z_1, z_2, \cdots, u_1, u_2, \cdots, v_1, v_2, \cdots, w_1, w_2, \cdots$ variano entro campi determinati.

Tali soluzioni patranno scriversi

$$\mathcal{F}_s=\frac{\Sigma_\alpha\,\Sigma_\beta\,\Sigma_\gamma\,\Sigma_\delta\cdots a^{(s)}_{\alpha,\beta,\gamma,\delta\ldots}\,z^\alpha u^\beta v^\gamma w^\delta\cdots}{1+\Sigma_\alpha\,\Sigma_\beta\,\Sigma_\gamma\,\Sigma_\delta\cdots b^{(s)}_{\alpha,\beta,\gamma,\delta\ldots}\,z^\alpha u^\beta v^\gamma w^\delta\cdots}$$
$$=\Sigma_\alpha\,\Sigma_\beta\,\Sigma_\gamma\,\Sigma_\delta\cdots c^{(s)}_{\alpha,\beta,\gamma,\delta\ldots}\,z^\alpha u^\beta v^\gamma w^\delta,\cdots,$$

ove l'ultimo sviluppo sarà, in generale, valido finché i moduli di $z, u, v, w, \cdots$ saranno inferiori a dati limiti, mentre gli sviluppi del numeratore e denominatore denotano funzioni intere.

Se prendiamo le espressioni

$$\mathfrak{f}_s = \Sigma_\alpha \Sigma_\beta \Sigma_\gamma \Sigma_\delta \cdots c^{(s)}_{\alpha,\beta,\gamma,\delta \ldots} (z\xi_1)^\alpha (u\xi_2)^\beta (v\xi_3)^\gamma (w\xi_4)^\delta \cdots,$$

in cui $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, \cdots$ sono parametri costanti diversi o eguali fra loro, esse verificheranno delle relazioni che si dedurranno immediatamente dalle (4) e potranno ridursi a forma razionale e intera che scriveremo

$$G_s \Big(z, z_1, \cdots, u, u_1, \cdots, v, v_1, \cdots, w, w_1, \cdots, \mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2, \cdots$$
$$\cdots \frac{\partial^{\lambda+\lambda_1+\cdots+\mu+\mu_1+\cdots} \mathfrak{f}_h}{\partial z^\lambda \partial z_1^{\lambda_1} \ldots \partial u^\mu \partial u_1^{\mu_1}, \ldots} \cdots, \xi_1, \xi_2, \xi_3, \cdots \Big) = 0.$$

Ciò premesso costruiamo le funzioni

$$F_s(z, \cdots, u, \cdots | x, y) = \Sigma_\alpha \Sigma_\beta \Sigma_\gamma \Sigma_\delta \cdots c^{(s)}_{\alpha,\beta,\gamma,\delta \ldots} z^\alpha u^\beta v^\gamma w^\delta \ldots \ddot{S}_1^\alpha \ddot{S}_2^\beta \ddot{S}_3^\gamma \ddot{S}_4^\delta \cdots$$

ove $S_1, S_2, S_3, S_4, \cdots$ sono funzioni permutabili di seconda specie. Esse saranno, in virtù delle precedenti proposizioni, rapporti di funzioni intere delle $z, u, v, w, \cdots$ e verificheranno le relazioni

$$G_s \Big(z, z_1, \cdots, u, u_1, \cdots, v, v_1, \cdots, w, w_1, \cdots, \ddot{F}_1, \ddot{F}_2$$
$$\cdots \frac{\partial^{\lambda+\lambda_1+\cdots+\mu+\mu_1\cdots} \ddot{F}_h}{\partial z^\lambda \partial z_1^{\lambda_1} \ldots \partial u^\mu \partial u_1^{\mu_1}, \ldots} \cdots, \ddot{S}_1, \ddot{S}_2, \ddot{S}_3, \cdots \Big) = 0,$$

ove il doppio punto situato sopra alle $S_1, S_2, S_3, S_4, \cdots, F_1, F_2, \cdots$ e alle loro derivate denota che i simboli di operazioni di potenza e moltiplicazione ad esse applicate, che figurano nelle espressioni delle G_s, vanno interpretati come operazioni di composizione.

Se inizialmente la condizione che le $\mathfrak{F}_s$ si annullino per $z = u = v = w = \cdots = 0$ non fosse soddisfatta, basterebbe moltiplicare le $\mathfrak{F}_s$ per dei parametri per ottenerla verificata.

Analogamente, se nel punto $z = u = v = w = \cdots = 0$ qualche denominatore delle $\mathfrak{F}_s$ si annullasse, basterebbe fare un cambiamento di variabili $z' = z - a_1$, $u' = u - a_2$, $v' = v - a_3$, $w' = w - a_4, \cdots$ perché nell'intorno del punto $z' = u' = v' = w' = \cdots = 0$ le $\mathfrak{F}_s$ fossero regolari.

6. Noi possiamo quindi enunciare la proposizione generale seguente: *Ad ogni problema algebrico o differenziale, la cui soluzione conduce a funzioni esprimibili come rapporti di funzioni intere di un certo numero di variabili, corrisponde un problema integrale o integro-differenziale la cui soluzione è pure esprimibile mediante rapporti di funzioni intere delle stesse variabili.*

I due problemi possono dirsi *correlativi* e *dalla soluzione dell'uno si può passare a quella dell'altro.*

La generalità di questa proposizione è facile a riconoscersi. Per persuadersene basta pensare alla vasta serie di problemi (come quelli che s'incontrano nella teoria delle funzioni ellittiche, abeliane ecc.) che conducono a funzioni espresse come rapporti di funzioni intere.

Noi abbiamo accennato già in precedenti Memorie a due esempî: uno il quale porta ad una nuova classe di trascendenti meromorfe che comprende le funzioni ellittiche [3], l'altro alla determinazione della soluzione fondamentale di una equazione integro-differenziale a limiti costanti ottenuta come estensione della equazione di LAPLACE [4].

Nel primo esempio si partiva da un sistema di equazioni differenziali ordinarie le cui soluzioni (funzioni ellittiche) erano rapporti di funzioni intere della variabile indipendente.

Nel secondo esempio si partiva da una equazione alle derivate parziali e si considerava la soluzione come rapporto di due funzioni intere di un certo numero di parametri.

È facile riconoscere quale posizione assume il problema della risoluzione delle equazioni integrali lineari nel campo generale di questioni abbracciato dalla proposizione precedente. Esso rappresenta il caso più elementare che possa presentarsi, ossia esso è il *correlativo* del problema della risoluzione di una equazione algebrica di 1° grado, il quale evidentemente conduce ad una funzione *meromorfa* dei suoi coefficienti. Infatti se abbiamo l'equazione

$$(v + v_1)\,\mathfrak{F} = w \tag{5}$$

la soluzione sarà

$$\mathfrak{F} = \frac{w}{v + v_1}$$

e supponendo $v_1 \gtrless 0$ il problema correlativo sarà

$$v_1\,\mathrm{F}(x\,,y) + v\int_0^1 \mathrm{F}(x\,,\xi)\,\mathrm{S}_1(\xi\,,y)\,d\xi = w\,\mathrm{S}_2(x\,,y)$$

ove S_1 e S_2 sono funzioni permutabili di seconda specie [5].

Si rifletta ora a tutto l'insieme dei problemi i quali conducono a soluzioni rapporti di funzioni intere in confronto al problema (5) e si avrà il grado di generalità delle questioni integrali e integro-differenziali che scaturiscono dalla precedente proposizione generale in confronto al problema delle equazioni integrali lineari.

7. Ritorniamo alla considerazione delle quantità.

$$m_{hk}\;,\; n_{hk}\;,\; p_{hk}\;,\; q_{hk}\;,\;\cdots$$

e supponiamo ora

$$k > h$$

(3) *Questioni generali sulle equazioni integrali ed integro-differenziali*, precedentemente citata, § 8.

(4) *Equazioni integro-differenziali con limiti costanti*, precedentemente citata.

(5) Il caso in cui S_2 e F sono indipendenti da x segue immediatamente dalla risoluzione dell'equazione precedente, come è ben noto.

e alla permutabilità intesa nel senso esaminato nel § 2 sostituiamo l'altra condizione

$$(6) \qquad \sum_{h+1}^{k-1}{}_l\, m_{hl}\, n_{lk} = \sum_{h+1}^{k-1}{}_l\, n_{hl}\, m_{lk}\,,$$

e le analoghe per tutte le combinazioni due a due delle m_{hk}, n_{hk}, p_{hk}, q_{hk}, $\cdots$

Per denotare le espressioni (6) faremo uso dei simboli

$$[m\,,\,n]_{hk} = [n\,,\,m]_{hk}\,,$$

ossia sostituiremo alle parentesi tonde del § 2 le parentesi quadre. Scriveremo

$$[[m\,,\,n]\,,\,p]_{hk} = [m\,,\,n\,,\,p]_{hk}\,.$$

$$[m\,,\,m]_{hk} = [m^2]_{hk}\,,$$

e così di seguito.

Se ora noi costruiamo le funzioni

$$\varphi_{hk}(z\,,u\,,v\,,w\,,\cdots) = \Sigma_\alpha \Sigma_\beta \Sigma_\gamma \Sigma_\delta \cdots a_{\alpha,\beta,\gamma,\delta,\ldots}\,[m^\alpha n^\beta p^\gamma q^\delta \cdots]_{hk}\, z^\alpha u^\beta v^\gamma w^\delta \cdots$$

$$\psi_{hk}(z\,,u\,,v\,,w\,,\cdots) = \Sigma_\alpha \Sigma_\beta \Sigma_\gamma \Sigma_\delta \cdots b_{\alpha,\beta,\gamma,\delta,\ldots}\,[m^\alpha n^\beta p^\gamma q^\delta \cdots]_{hk}\, z^\alpha u^\beta v^\gamma w^\delta \cdots$$

$$f_{hk}(z\,,u\,,v\,,w\,,\cdots) = \Sigma_\alpha \Sigma_\beta \Sigma_\gamma \Sigma_\delta \cdots c_{\alpha,\beta,\gamma,\delta,\ldots}\,[m^\alpha n^\beta p^\gamma q^\delta \cdots]_{hk}\, z^\alpha u^\beta v^\gamma w^\delta \cdots$$

avremo che *esse saranno funzioni intere di* $z\,,u\,,v\,,w\,,\cdots$ *e saranno permutabili, nel senso ora considerato, con* m_{hk}, n_{hk}, p_{hk}, q_{hk}, $\cdots$

Che φ_{hk} e ψ_{hk} siano funzioni intere è ovvio. Che lo sia anche f_{hk} si dimostra osservando che le equazioni

$$(B) \qquad x_{hk} + \sum_{h+1}^{k-1}{}_l\, \psi_{hl}\, x_{lk} = \varphi_{hk}$$

sono soddisfatte prendendo $x_{hk} = f_{hk}$ e che risolvendo le (B) rispetto alle x_{hk} si esprimono queste quantità mediante polinomî razionali ed interi nelle φ_{hk} e ψ_{hk}.

8. Nel caso adesso contemplato, con un passaggio al limite analogo a quello a cui abbiamo accennato nel § 4, si passa dalle quantità m_{hk}, n_{hk}, p_{hk}, q_{hk}, $\cdots$ alle funzioni finite e continue permutabili di 1ª specie [(6)] $s_1(x\,,y)$, $s_2(x\,,y)$, $s_3(x\,,y)$, $s_4(x\,,y)$, $\cdots$, cioè tali che

$$\int_x^y s_i(x\,,\xi)\, s_h(\xi\,,y)\, d\xi = \int_x^y s_h(x\,,\xi)\, s_i(\xi\,,y)\, d\xi\,,$$

e la proposizione del § precedente nel caso limite diviene:

(6) *Questioni generali sulle equazioni integrali ed integro-differenziali*, precedentemente citata, § 1.

Le funzioni

$$\varphi(z\,,u\,,w\,,\cdots|\,x\,,y)=\Sigma_\alpha\,\Sigma_\beta\,\Sigma_\gamma\,\Sigma_\delta\cdots a_{\alpha,\beta,\gamma,\delta,\ldots}\,s_1^\alpha\,s_2^\beta\,s_3^\gamma\,s_4^\delta\cdots z^\alpha\,u^\beta\,v^\gamma\,w^\delta\cdots$$

$$\psi(z\,,u\,,w\,,\cdots|\,x\,,y)=\Sigma_\alpha\,\Sigma_\beta\,\Sigma_\gamma\,\Sigma_\delta\cdots b_{\alpha,\beta,\gamma,\delta,\ldots}\,s_1^\alpha\,s_2^\beta\,s_3^\gamma\,s_4^\delta\cdots z^\alpha\,u^\beta\,v^\gamma\,w^\delta\cdots$$

$$f(z\,,u\,,w\,,\cdots|\,x\,,y)=\Sigma_\alpha\,\Sigma_\beta\,\Sigma_\gamma\,\Sigma_\delta\cdots c_{\alpha,\beta,\gamma,\delta,\ldots}\,s_1^\alpha\,s_2^\beta\,s_3^\gamma\,s_4^\delta\cdots z^\alpha\,u^\beta\,v^\gamma\,w^\delta\cdots$$

(*in cui i simboli di potenza e di moltiplicazione applicate alle* s_1, s_2, s_3, s_4, $\cdots$ *denotano operazioni di composizione di* 1^a *specie*) *sono funzioni intere delle variabili complesse* z, u, v, w, $\cdots$ *e, considerate come funzioni di* x, y, *sono funzioni permutabili di* 1^a *specie colle* $s_1(x\,,y)$, $s_2(x\,,y)$, $s_3(x\,,y)$, $s_4(x\,,y)$, $\cdots$

Inoltre la funzione $f(z\,,u\,,v\,,w\,,\cdots|\,x\,,y)$ potrà ottenersi risolvendo l'equazione integrale

$$\text{(B}')\qquad f(z\,,u\,,v\,,w\,,\cdots|\,x\,,y)$$

$$+\int_x^y\psi(z\,,u\,,v\,,w\,,\cdots|\,x\,,\xi)\,f(z\,,u\,,v\,,w\,,\cdots|\,\xi\,,y)\,d\xi$$

$$=\varphi(z\,,u\,,y\,,w\,,\cdots|\,x\,,y).$$

9. Riprendiamo le equazioni (4) e costruiamo le funzioni

$$f_s(z\cdots u\cdots|\,x\,,y)=\Sigma_\alpha\,\Sigma_\beta\,\Sigma_\gamma\,\Sigma_\delta\cdots c^{(s)}_{\alpha,\beta,\gamma,\delta,\ldots}\,z^\alpha\,u^\beta\,v^\gamma\,w^\delta\cdots s_1^\alpha\,s_2^\beta\,s_3^\gamma\,s_4^\delta\cdots,$$

ove le operazioni applicate alle s_1, s_2, s_3, s_4, $\cdots$ debbono intendersi operazioni di composizione di 1^a specie. Esse saranno funzioni intere delle z, u, v, w, $\cdots$ e verificheranno le relazioni

$$\mathrm{G}_s\Big(z\,,z_1\,,\cdots,u\,,u_1\,,\cdots,v\,,v_1\,,\cdots,w\,,w_1\,,\cdots,\dot f_1\,,\dot f_2\,,\cdots$$

$$\cdots\frac{\partial^{\lambda+\lambda_1+\cdots+\mu+\mu_1\cdots}\dot f_h}{\partial z^\lambda\,\partial z_1^{\lambda_1}\cdots\partial u^\mu\,\partial u_1^{\mu_1}\cdots}\cdots\dot s_1\,,\dot s_2\,,\dot s_3\,,\cdots\Big)=0\,,$$

ove il punto segnato sopra alle s_1, s_2, s_3, s_4, $\cdots$, f_1, f_2, $\cdots$ e alle loro derivate denota che i simboli delle operazioni di potenza e moltiplicazione da applicarsi a queste funzioni nelle espressioni G_s significano operazioni di composizione di 1^a specie.

10. Il teorema del § 6 può quindi essere completato nella maniera seguente:

Ad ogni problema algebrico o differenziale, la sui soluzione conduce a funzioni esprimibili come rapporti di funzioni intere di un certo numero di variabili, corrisponde (*oltre al problema correlativo già considerato nel* § 6) *un secondo problema correlativo integrale o integro-differenziale la cui soluzione è data da funzioni intere delle stesse variabili.*

Anche per questo nuovo problema correlativo *la soluzione può ricavarsi da quella del problema primitivo.*

Le relazioni che passano fra il problema primitivo (problema algebrico o differenziale) e i due problemi correlativi risultano ben chiare da tutto l'insieme della teoria che abbiamo svolta.

L'ultima proposizione, riguardante l'esistenza del 2° problema correlativo le cui soluzioni sono funzioni intere, si può considerare come dipendente da un teorema generale che ho dato nella mia Nota: *Questioni generali sulle equazioni integrali ed integro-differenziali* [7] e sotto questo aspetto essa può essere estesa, giacché *si può togliere la restrizione che il problema primitivo dia soluzioni che siano rapporti di funzioni intere, ma basta che esse siano funzioni regolari nell'intorno del punto* $z = u = v = w = \cdots = 0$.

Però per lo scopo, che avevamo in vista, di mettere in raffronto il passaggio a equazioni integrali o integro-differenziali con limiti costanti con quello a equazioni integrali o integro-differenziali con limiti variabili, e di considerare in un unico insieme i tre problemi: quello primitivo ed i due correlativi, conveniva procedere come abbiamo qui fatto.

11. Nel § 6 abbiamo accennato che le funzioni ellittiche, in virtù del 1° problema correlativo conducono ad una nuova classe di trascendenti meromorfe. In virtù del 2° problema correlativo esse conducono anche ad una nuova classe di trascendenti olomorfe. Di ambedue abbiamo brevemente parlato nella Nota precedentemente citata [8] e così dei corrispondenti *teoremi di addizione integrale* a cui esse soddisfano.

Come è stato detto nel § 6, mediante il primo problema correlativo, si passa da una equazione differenziale del tipo di LAPLACE ad una equazione integro-differenziale a limiti costanti di cui si può calcolare la soluzione fondamentale. Per mezzo del 2° problema correlativo si può ottenere la soluzione fondamentale di una equazione analoga integro-differenziale a limiti variabili.

Ma qui torna in acconcio osservare che, mentre pel passaggio al 1° problema correlativo, conviene partire da una equazione del tipo di LAPLACE con un numero pari di variabili maggiore di due, onde poter operare sopra una soluzione esprimibile come rapporto di funzioni intere, tale restrizione non è più necessaria nell'altro caso in virtù di quanto è stato osservato alla fine del § precedente. (Si cfr. la Nota: *Osservazioni sopra le equazioni integro-differenziali ed integrali*) [9].

Tralasceremo in questa Nota di parlare della estensione delle considerazioni svolte al caso di composizioni relative ad integrali multipli, di cui un breve cenno fu dato nella Nota suddetta [10], e delle varie applicazioni delle considerazioni stesse. Ci basti ricordare l'impiego del 2° problema correlativo per la soluzione dei problemi naturali di carattere ereditario.

(7) § 6.

(8) §§ 6, 8.

(9) « Rend. Acc. dei Lincei », vol. XIX, ser. 5ª, 1° sem., 3 aprile 1910. [In questo, vol.: XXV, pp. 328-330].

(10) § 5.

XXXII.

DREI VORLESUNGEN ÜBER NEUERE FORTSCHRITTE DER MATHEMATISCHEN PHYSIK (*)

gehalten im September 1909 an der Clark–University
„Archiv der Mathematik und Physik", III R., Bd. XXII, 1914, pp. 97-181.

VORREDE.

Die folgenden drei Vorlesungen sind in Worcester, Mass., bei Gelegenheit der Feier des zwanzigsten Jahrestags der Gründung der Clark-Universität gehalten worden.

Ich spreche dem Lehrkörper der Clark–Universität meinen vollen Dank für die Ehre aus, die man mir durch die Aufforderung erwiesen hat, vor den bei dieser Gelegenheit versammelten Mathematikern und Physikern einige Fragen der mathematischen Physik zu behandeln.

Bei diesen Vorlesungen habe ich nur die Entwicklung einiger Grundgedanken der mathematischen Physik im Auge gehabt und nur einzelne Punkte näher ausgeführt, die meine eigenen Untersuchungen betreffen. Die interessanten Vorlesungen des Herrn WEBSTER über mathematische Physik an der Clark-Universisät enthoben mich der Notwendigkeit, allgemeine Sätze zu wiederholen, die er in systematischer Weise in seinen Vorlesungen gegeben hat.

Ich drücke Herrn Dr. ERNST LAMLA meinen herzlichsten Dank aus für die Sorgfalt und den Eifer, mit welchem er an der Übersetzung meines Werkes gearbeitet hat (**).

(*) È questa la traduzione di *Trois leçons sur quelques progrès récents de la Physique mathématique* in *Lectures delivered at the celebration of the twentieth Anniversary of the Foundation of Clark-University*, Worcester, Mass., September 7–11, 1909, «Clark–University», 1912, pp. 1-82. — In luogo del testo originale si pubblica questa traduzione, perché l'Autore vi ha introdotto qualche aggiunta. [N. d. R.].

(**) VORWORT DES ÜBERSETZERS. Die vorliegende deutsche Ausgabe ist gegenüber der amerikanischen (Clark-University 1912) durch eine Reihe von Zusätzen des Verfassers vermehrt worden. Dadurch ist der Wert der Vorlesungen wesentlich erhöht worden, der vor allen Dingen darin liegt, dass sie eine grössere Reihe von Problemen der modernen mathematischen Physik klar und knapp zeichnen, die Lösungsmethoden, soweit sie bekannt sind, andeuten und darüber hinaus zu neuen Forschungen anregen. — An einigen wenigen Stellen sind für die deutsche Ausgabe mit Genehmigung des Verfassers einige nicht wesentliche Änderungen vorgenommen worden. ERNST LAMLA.

INHALT

ERSTE VORLESUNG.

ZWEITE VORLESUNG.

DRITTE VORLESUNG.

Erste Vorlesung.

1. Analysis und mathematische Physik.

Fragt man einen Mathematiker, ob er einen Unterschied mache zwischen der Elastizitätstheorie und der elektrodynamischen Theorie, so wird er die Frage verneinen; denn die Art der Differentialgleichungen, denen er begegnet, und die Methoden zur Lösung der sich darbietenden Probleme, stimmen in beiden Fällen genau überein.

Andrerseits hat die Übereinstimmung der analytischen Beziehungen auf einfache und natürliche Weise zu einem Übergang von der Theorie der Elastizität zur elektromagnetischen Lichttheorie geführt, und diese hat nach sehr vielem Hin- und Hertasten für den Fall bewegter Körper die klassische Form angenommen, die Lorentz ihr gegeben hat.

Ich zögere nicht, diese ganz und gar moderne Geistesbewegung mit dem philosophischen Geist in Zusammenhang zu bringen, der aus dem grossen Werk von Lagrange erstanden ist.

Lagrange hat die Mechanik auf eine einzige Formel zurückgeführt. Ebenso haben die Schöpfer der hauptsächlichsten Theorien der mathematischen Physik, z. B. Fourier, die verschiedenen Phänomene als abhängig dargestellt von einer gewissen Zahl von Hauptgleichungen, die alle möglichen Fälle umfassen, und sie haben die meisten Schwierigkeiten auf analytische Schwierigkeiten zurückgeführt.

So haben in der Tat, wie schon so oft wiederholt worden ist, die Wurzeln für die grössten Entdeckungen der Analysis in Problemen der Naturwissenschaften gelegen. Zugleich kann man sagen, dass jede Vervollkommnung der analytischen Methoden zum Fortschritt der mathematischen Physik beigetragen hat.

Manche Köpfe haben das Bedürfnis, bei jeder analytischen Untersuchung durch eine Interpretation unterstützt zu werden, die den Inhalt ihres Denkens mit konkreten Erscheinungen verknüpft. Und andrerseits, wie viele Ergebnisse, die die blosse Rechnung unbewusst und mechanisch gewonnen hat, und die, vom algebraischen Standpunkte aus betrachtet, uns so gut wie gar nichts sagen, gewinnen plötzlich grosses Interesse und ungeahnte Bedeutung, sobald man ihnen eine physikalische Deutung gibt!

2. Zusammenhang zwischen der Maxwellschen Theorie und der Variationsrechnung.

Es dürfte nicht nötig sein, Beispiele anzuführen, um die allbekannte Wahrheit zu beweisen, die ich soeben ausgesprochen habe; aber ich kann nicht umhin, einen typischen Fall auseinanderzusetzen, der uns zur Einführung sehr nützlich sein und uns zugleich zur Betrachtung der Variationsrechnung führen wird, von der wir in dieser Vorlesung zu sprechen haben werden.

Wir werden sehen, dass ein grundlegender Gedanke und eine berühmte Theorie MAXWELLS in dem Ausdruck für die Variation eines dreifachen Integrals enthalten sind; man muss nur gelernt haben, aus dieser elementaren Formel alles herauszulesen, was in ihr verborgen steckt.

Ich berechne die Variation des dreifachen Integrals

$$(1)\qquad P = \int_S F\left(V, \frac{\partial V}{\partial x_1}, \frac{\partial V}{\partial x_2}, \frac{\partial V}{\partial x_3}, x_1, x_2, x_3\right) dx_1\, dx_2\, dx_3,$$

wobei x_1, x_2, x_3 die kartesischen Koordinaten sind und V eine Funktion von x_1, x_2, x_3 bedeutet. Ich setze voraus, dass sich erstens die Funktion V unendlich wenig ändert, und dass sich zweitens der Raum S, der von der Fläche σ begrenzt wird, unendlich wenig verschiebt und deformiert.

Um diese Variation zu berechnen, genügt es, nach dem von LAGRANGE in der Hydrodynamik gegebenen Vorbild jeden einzelnen materiellen Punkt durch Parameter, die unabhängig sind von der Deformation, zu kennzeichnen. Diese Parameter seien u_1, u_2, u_3. Setzt man

$$D = \frac{d(x_1, x_2, x_3)}{d(u_1, u_2, u_3)},$$

$$V_1 = \frac{\partial V}{\partial x_1} = \frac{d(V, x_2, x_3)}{d(x_1, x_2, x_3)} = \frac{1}{D} \cdot \frac{d(V, x_2, x_3)}{d(u_1, u_2, u_3)},$$

$$V_2 = \frac{\partial V}{\partial x_2} = \frac{d(V, x_3, x_1)}{d(x_1, x_2, x_3)} = \frac{1}{D} \cdot \frac{d(V, x_3, x_1)}{d(u_1, u_2, u_3)},$$

$$V_3 = \frac{\partial V}{\partial x_3} = \frac{d(V, x_1, x_2)}{d(x_1, x_2, x_3)} = \frac{1}{D} \cdot \frac{d(V, x_1, x_2)}{d(u_1, u_2, u_3)},$$

so erhält man, da ja $dS = dx_1\, dx_2\, dx_3 = D\, du_1\, du_2\, du_3$ ist,

$$P = \int_S F(V, V_1, V_2, V_3, x_1, x_2, x_3)\, D\, du_1\, du_2\, du_3,$$

und folglich

$$\delta P = \int_S \left\{ \frac{\partial F}{\partial V} \delta V + \sum_{\lambda=1}^{3} \frac{\partial F}{\partial V_\lambda} \delta V_\lambda + \sum_{\lambda=1}^{3} \frac{\partial F}{\partial x_\lambda} \delta x_\lambda + F \cdot \frac{\delta D}{D} \right\} D\, du_1\, du_2\, du_3 .$$

Nun ist $\delta D = \left(\frac{\partial \delta x_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \delta x_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \delta x_3}{\partial x_3} \right) \cdot D$;

$$\delta V_1 = \frac{1}{D} \frac{d(\delta V, x_2, x_3)}{d(u_1, u_2, u_3)} + \frac{1}{D} \cdot \frac{d(V, \delta x_2, x_3)}{d(u_1, u_2, u_3)} + \frac{1}{D} \frac{d(V, x_2, \delta x_3)}{d(u_1, u_2, u_3)} - \frac{1}{D^2} \cdot \frac{d(V, x_2, x_3)}{d(u_1, u_2, u_3)} \cdot \delta D$$

$$= \frac{d(\delta V, x_2, x_3)}{d(x_1, x_2, x_3)} + \frac{d(V, \delta x_2, x_3)}{d(x_1, x_2, x_3)} + \frac{d(V, x_2, \delta x_3)}{d(x_1, x_2, x_3)} - \frac{\delta D}{D} \cdot \frac{d(V, x_2, x_3)}{d(x_1, x_2, x_3)}$$

$$= \frac{\partial \delta V}{\partial x_1} + \frac{d(V, \delta x_2)}{d(x_1, x_2)} + \frac{d(V, \delta x_3)}{d(x_1, x_3)} - \frac{\partial V}{\partial x_1} \cdot \frac{\delta D}{D} =$$

$$= \frac{\partial \delta V}{\partial x_1} + \frac{\partial V}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial \delta x_2}{\partial x_2} - \frac{\partial V}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial \delta x_2}{\partial x_1} + \frac{\partial V}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial \delta x_3}{\partial x_3} - \frac{\partial V}{\partial x_3'} \cdot \frac{\partial \delta x_3}{\partial x_1}$$

$$- \frac{\partial V}{\partial x_1}\left(\frac{\partial \delta x_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \delta x_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \delta x_3}{\partial x_3}\right);$$

da nun $\partial V/\partial x_1 = V_1$ usf., so wird

$$\delta V_1 = \frac{\partial \delta V}{\partial x_1} - V_1 \frac{\partial \delta x_1}{\partial x_1} - V_2 \frac{\partial \delta x_2}{\partial x_1} - V_3 \frac{\partial \delta x_3}{\partial x_1},$$

$$\delta V_1 = \frac{\partial \delta V}{\partial x_1} - \sum_{\varkappa=1}^{3} V_\varkappa \cdot \frac{\partial \delta x_\varkappa}{\partial x_1},$$

und allgemein

$$\delta V_\lambda = \frac{\partial \delta V}{\partial x_\lambda} - \sum_\varkappa V_\varkappa \cdot \frac{\partial \delta x_\varkappa}{\partial x_\lambda}.$$

Durch Einsetzen erhält man nun

$$\delta P = \int_S \left\{ \frac{\partial F}{\partial V} \delta V + \sum_\lambda \frac{\partial F}{\partial V_\lambda} \cdot \frac{\partial \delta V}{\partial x_\lambda} - \sum_\lambda \sum_\varkappa \frac{\partial F}{\partial V_\lambda} V_\varkappa \frac{\partial \delta x_\varkappa}{\partial x_\lambda} \right.$$

$$\left. + \sum_\lambda \frac{\partial F}{\partial x_\lambda} \delta x_\lambda + F \cdot \sum_\lambda \frac{\partial \delta x_\lambda}{\partial x_\lambda} \right\} dS.$$

Partielle Integration liefert

$$\int_S \sum_\lambda \frac{\partial F}{\partial V_\lambda} \cdot \frac{\partial \delta V}{\partial x_\lambda} dS = -\int_\sigma \delta V \cdot \sum_\lambda \frac{\partial F}{\partial V_\lambda} \cos(n, x_\lambda)\, d\sigma$$

$$-\int_S \delta V \cdot \sum_\lambda \frac{\partial}{\partial x_\lambda}\left(\frac{\partial F}{\partial V_\lambda}\right) \cdot dS.$$

Hierbei ist n innere Normale der den Raum S begrenzenden Fläche σ. Hiernach ergibt sich

$$\delta P = \int_S \left\{ \frac{\partial F}{\partial V} - \sum_\lambda \frac{\partial}{\partial x_\lambda}\left(\frac{\partial F}{\partial V_\lambda}\right)\right\} \delta V \cdot dS - \int_\sigma \delta V \cdot \sum_\lambda \frac{\partial F}{\partial V_\lambda} \cos(n, x_\lambda)\, d\sigma$$

$$+ \int_S \left\{ \sum_\lambda \frac{\partial F}{\partial x_\lambda} \delta x_\lambda - \sum_\varkappa \sum_\lambda V_\varkappa \frac{\partial F}{\partial V_\lambda} \frac{\partial \delta x_\varkappa}{\partial x_\lambda} + F \cdot \sum_\lambda \frac{\partial \delta x_\lambda}{\partial x_\lambda} \right\} dS.$$

An Stelle der Verrückungen $\delta x_1, \cdots$ sollen jetzt die Komponenten der Rotation jedes Teilchens des Mediums

$$p_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \delta x_3}{\partial x_2} - \frac{\partial \delta x_2}{\partial x_3}\right), \quad p_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \delta x_1}{\partial x_3} - \frac{\partial \delta x_3}{\partial x_1}\right), \quad p_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \delta x_2}{\partial x_3} - \frac{\partial \delta x_1}{\partial x_2}\right)$$

und die Deformationsgrössen eingeführt werden:

$$\gamma_{11} = \frac{\partial \delta x_1}{\partial x_1}, \quad \gamma_{22} = \frac{\partial \delta x_2}{\partial x_2}, \quad \gamma_{33} = \frac{\partial \delta x_3}{\partial x_3},$$

$$\gamma_{23} = \frac{\partial \delta x_3}{\delta x_2} + \frac{\partial \delta x_2}{\partial x_3}, \quad \gamma_{31} = \frac{\partial \delta x_1}{\partial x_3} + \frac{\partial \delta x_3}{\partial x_1}, \quad \gamma_{12} = \frac{\partial \delta x_2}{\partial x_1} + \frac{\partial \delta x_1}{\partial x_2}.$$

Durch Einführung dieser Grössen kann man die Doppelsumme

$$R = -\sum_{\varkappa}\sum_{\lambda} V_{\varkappa} \frac{\partial F}{\partial V_{\lambda}} \frac{\partial \delta x_{\varkappa}}{\partial x_{\lambda}}$$

in Ausdruck für δP umformen. Man kann R in drei einfache Summen zerlegen, in denen bzw. $\lambda - \varkappa = 0, 1$ oder -1 ist. Es wird (wenn $x_4 = x_1$ ist usf.)

$$R = -\sum_{\alpha=1}^{3} V_{\alpha} \frac{\partial F}{\partial V_{\alpha}} \cdot \frac{\partial \delta x_{\alpha}}{\partial x_{\alpha}} - \sum_{\alpha=1}^{3} V_{\alpha+2} \frac{\partial F}{\partial V_{\alpha+1}} \cdot \frac{\partial \delta x_{\alpha+2}}{\partial x_{\alpha+1}} - \sum_{\alpha=1}^{3} V_{\alpha+1} \frac{\partial F}{\partial V_{\alpha+2}} \cdot \frac{\partial \delta x_{\alpha+1}}{\partial x_{\alpha+2}} .$$

Nun ist

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \delta x_{\alpha+2}}{\partial x_{\alpha+1}} - \frac{\partial \delta x_{\alpha+1}}{\partial x_{\alpha+2}}\right) = p_{\alpha},$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \delta x_{\alpha+2}}{\partial x_{\alpha+1}} + \frac{\partial \delta x_{\alpha+1}}{\partial x_{\alpha+2}}\right) = \frac{1}{2}\gamma_{\alpha+1\,\alpha+2},$$

daher

$$R = -\sum_{\alpha} V_{\alpha} \frac{\partial F}{\partial V_{\alpha}} \gamma_{\alpha\alpha} - \sum_{\alpha} \left\{ V_{\alpha+2} \frac{\partial F}{\partial V_{\alpha+1}} \left(\frac{1}{2}\gamma_{\alpha+1,\alpha+2} + p_{\alpha}\right) + V_{\alpha+1} \frac{\partial F}{\partial V_{\alpha+2}} \left(\frac{1}{2}\gamma_{\alpha+1,\alpha+2} - p_{\alpha}\right) \right\}.$$

Führt man jetzt die Abkürzungen ein

$$M_1 = \frac{\partial F}{\partial V_3} V_2 - \frac{\partial F}{\partial V_2} V_3,$$

$$M_2 = \frac{\partial F}{\partial V_1} V_3 - \frac{\partial F}{\partial V_3} V_1,$$

$$M_3 = \frac{\partial F}{\partial V_2} V_1 - \frac{\partial F}{\partial V_1} V_2;$$

$$t_{11} = F - V_1 \frac{\partial F}{\partial V_1} \quad ; \quad t_{23} = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial F}{\partial V_3} V_2 + \frac{\partial F}{\partial V_2} V_3\right),$$

$$t_{22} = F - V_2 \frac{\partial F}{\partial V_2} \quad ; \quad t_{31} = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial F}{\partial V_1} V_3 + \frac{\partial F}{\partial V_3} V_1\right),$$

$$t_{33} = F - V_3 \frac{\partial F}{\partial V_3} \quad ; \quad t_{12} = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial F}{\partial V_2} V_1 + \frac{\partial F}{\partial V_1} V_2\right),$$

so wird

$$R = \sum_{\lambda} \{(t_{\lambda\lambda} - F)\gamma_{\lambda\lambda} + t_{\lambda,\lambda+1}\gamma_{\lambda,\lambda+1} + M_{\lambda} p_{\lambda}\}.$$

Setzt man endlich noch

$$W_1 = \frac{\partial F}{\partial V} - \sum_{\lambda} \frac{\partial}{\partial x_{\lambda}}\left(\frac{\partial F}{\partial V_{\lambda}}\right),$$

$$W_2 = \Sigma \frac{\partial F}{\partial x_{\lambda}} \cos(n, x),$$

$$X_1 = \frac{\partial F}{\partial x_1} \quad , \quad X_2 = \frac{\partial F}{\partial x_2} \quad , \quad X_3 = \frac{\partial F}{\partial x_3},$$

so nimmt δP die Gestalt an:

$$\delta P = \int_S W_1 \, \delta V \, dS - \int_\sigma W_2 \, \delta V \, d\sigma$$

$$+ \int_S \sum_\lambda \{X_\lambda \, \delta x_\lambda + M_\lambda \, p_\lambda + t_{\lambda\lambda} \, \gamma_{\lambda\lambda} + t_{\lambda,\lambda+1} \, \gamma_{\lambda,\lambda+1}\} \, dS.$$

$$\delta P = A_1 + A_2 + A_3,$$

wo

$$A_1 = \int_S W_1 \, \delta V \, \delta S - \int_\sigma W_2 \, \delta V \, d\sigma,$$

$$A_2 = \int_S (X_1 \, \delta x_1 + X_2 \, \delta x_2 + X_3 \, \delta x_3 + M_1 \, p_1 + M_2 \, p_2 + M_3 \, p_3) \, dS,$$

$$A_3 = \int_S (t_{11} \, \gamma_{11} + t_{22} \, \gamma_{22} + t_{33} \, \gamma_{33} + t_{23} \, \gamma_{13} + t_{31} \, \gamma_{31} + t_{12} \, \gamma_{12}) \, dS.$$

Die durchgeführte Rechnung ist eine der elementaren Operationen der Variationsrechnung.

In Worten lässt sich die gewonnene Formel folgendermassen ausprechen: Die Variation des dreifachen Integrals kann als Summe von drei Ausdrücken angesehen werden. Der erste (A_1) hängt von der Variation der Funktion V ab; den zweiten (A_2) kann man deuten als Arbeit, die bei der Verschiebung und Drehung der Teilchen des Mediums geleistet wird; der dritte Ausdruck (A_3) endlich kann als Arbeit gedeutet werden, die zur Deformation des Mediums selbst verwandt wird.

Jedesmal, wenn A_1 und A_2 null sind, kann δP der Arbeit elastischer Kräfte gleichgesetzt werden, und daher charakterisiert die Gesamtheit der Grössen t_{11}, t_{22}, t_{33}, t_{23}, t_{31}, t_{12} den Spannungszustand.

Nehmen wir nun an, dass P die Energie NEWTONscher Kräfte ist, z. B. die elektrostatische Energie eines Mediums, so verschwinden A_1 und A_2. Es genügt hierfür, P durch den wohl bekannten Ausdruck zu ersetzen

$$\int_S V\rho \, dS - \frac{1}{8\pi} \int_S (\operatorname{grad} V)^2 \, dS,$$

wo V das Potential und ρ die Dichte der Massenverteilung bezeichnet. Berechnet man die Spannung, so findet man die MAXWELLschen Spannungen, d. h.

$$t_{11} = \frac{1}{8\pi} (\operatorname{grad} V)^2 - \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 \quad , \quad t_{23} = -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial V}{\partial y} \frac{\partial V}{\partial z},$$

$$t_{22} = \frac{1}{8\pi} (\operatorname{grad} V)^2 - \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 \quad , \quad t_{31} = -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial V}{\partial z} \frac{\partial V}{\partial x},$$

$$t_{33} = \frac{1}{8\pi} (\operatorname{grad} V)^2 - \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2 \quad , \quad t_{12} = -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial V}{\partial x} \frac{\partial V}{\partial y}.$$

Die Formel (1) ist weit allgemeiner und umfasst, wie man leicht sieht, auch andere Theorien, von denen die MAXWELLsche nur ein besonderer Fall ist [1].

Indes will ich diese Untersuchungen nicht weiter verfolgen; denn gar viele Probleme haben wir noch zu besprechen, bei denen die Variationsrechunng eine grosse Rolle spielen wird. Ich habe die vorstehenden Fragen nur berührt, um eine, wie mir scheint, sehr lehrreiche Nutzanwendung der Gedanken zu geben, die ich oben in allgemeiner Form ausgesprochen habe.

3. Herleitung der elektrodynamischen Gleichungen aus der Variationsrechnung.

Ich habe soeben von den Methoden der Mechanik gesprochen. Sehr viele Fortschritte in diesem grundlegenden Zweig der mathematischen Physik verdanken wir HAMILTON. Ich brauche nur daran zu erinnern, dass sich jede Frage der Mechanik, sobald nur ein Potential vorhanden ist, durch das HAMILTONsche Prinzip auf eine Aufgabe der Variationsrechnung zurückführen lässt. Zwei Prinzipien gehen daraus hervor: das Prinzip der stationären Wirkung und das Prinzip der variierenden Wirkung [2]. Es erscheint überflüssig, noch ausdrücklich auf die bedeutsame Rolle hinzuweisen, die das zweite Prinzip bei allen folgenden Untersuchungen gespielt hat. Das Genie eines Mathematikers wie JACOBI hat hier Spuren hinterlassen, die niemals wieder untergehen werden können.

Auch die Gleichungen für das elastische Gleichgewicht können auf eine Minimumaufgabe zurückgeführt werden, wenn man der zuerst von GREEN angewandten Methode folgt. Ebenso kann die Theorie der Schwingungen elastischer Körper in das Gebiet der Variationsrechnung hinübergespielt werden, wenn man das Potential der elastischen Kräfte und die lebendige Kraft der Schwingungsbewegung ins Auge fasst.

Ich werde jetzt auf dieselbe Frage für den Fall der Elektrodynamik näher eingehen.

Es gibt wohl bekannte Untersuchungen hierüber, und es gibt klassische Vorlesungen und Abhandlungen (ich will hier nur die von BOLTZMANN erwähnen), wo diese Ableitung vorgenommen worden ist. In gewissen besonderen Fällen ergibt sich die Herleitung fast unmittelbar. Worauf ich besonders hinweisen möchte, ist die Tatsache, dass man im allgemeinen Fall (ich nehme an, dass das Medium in Ruhe ist) auf unendlich viele Arten zum Ziel gelangen kann, d. h., dass eine grosse Freiheit in der Wahl der Pro-

(1) Vgl. MAXWELL, *Traité d'Électricité et de Magnétisme*. 1ère partie, chap. 5; 4ème partie, chap. 11. Siehe auch E. BELTRAMI, *Sulla rappresentazione delle forze newtoniane per mezzo di forze elastiche.* « Rend. del R. Istituto Lombardo » (2) 17, 581. 1884.

(2) Vgl. z. B. *Handbuch der theoretischen Physik* von W. THOMSON und P. G. TAIT. Übers. von H. HELMHOLTZ und G. WERTHEIM, Braunschweig 1874. Band I, erster Teil. §§ 318–320.

bleme der Variationsrechnung besteht, die zu den ins Auge gefassten allgemeinen Beziehungen führen. Später werde ich etwas ausführlicher auf die Anwendungen dieses Gedankens eingehen.

Ich beschränke mich darauf, einer der Wege aufzuzeigen, die man einschlagen kann (3). Wir setzen

$$\xi_r = \frac{d}{dt}\sum_s \varepsilon_{rs} X_s - \frac{\partial L_{r+1}}{\partial x_{r+2}} + \frac{\partial L_{r+2}}{\partial x_{r+1}} + 4\pi \sum_h \partial_{rh} X_h ,$$

$$\eta_r = \frac{d}{dt}\sum_s \mu_{rs} L_s - \frac{\partial X_{r+2}}{\partial x_{r+1}} + \frac{\partial X_{r+1}}{\partial x_{r+2}} ,$$

$$u_r = \frac{d}{dt}\sum_s \varepsilon_{rs} Y_s - \frac{\partial M_{r+1}}{\partial x_{r+2}} + \frac{\partial M_{r+2}}{\partial x_{r+1}} - 4\pi \sum_h \partial_{rh} Y_h ,$$

$$v_r = \frac{d}{dt}\sum_s \mu_{rs} M_s - \frac{\partial Y_{r+2}}{\partial x_{r+1}} + \frac{\partial Y_{r+1}}{\partial x_{r+2}} ,$$

wobei die Indices die Werte 1, 2, 3 annehmen können und die Koeffizienten ε_{rs}, μ_{rs}, ∂_{rs}, den Bedingungen genügen:

$$\varepsilon_{rs} = \varepsilon_{sr} \quad , \quad \mu_{rs} = \mu_{sr} \quad , \quad \partial_{rs} = \partial_{sr} .$$

Man sehe nunmehr x_1, x_2, x_3 als kartesische Koordinaten der Punkte eines Raumes S an und betrachte die beiden Integrale

$$\int_{t_0}^{t_1} dt \int_S \sum_r (\xi_r \, \delta Y_r + \eta_r \, \delta M_r) \, dS$$

und

$$-\int_{t_0}^{t_1} dt \int_S \sum_r (X_r \, \delta u_r + L_r \, \delta v_r) \, dS .$$

Die Differenz beider hängt, wie leicht zu zeigen ist, nur von den Werten der Funktionen X_r, Y_r, L_r, M_r an den Grenzen der Integrale ab. Es ist nämlich diese Differenz

$$D = \int_{t_0}^{t_1} dt \int dS \sum_r (\xi_r \, dY_r + X_r \, \delta u_r + \eta_r \, \delta M_r + L_r \, \delta v_r) .$$

Nun ist

$$\sum_r (\xi_r \, \delta Y_r + X_r \, \delta u_r)$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\sum_r \sum_s \varepsilon_{rs} X_s \, \delta Y_r\right) + \sum_r \left(\frac{\partial L_{r+1}}{\partial x_r} \delta Y_{r+2} + X_{r+2} \frac{\partial \delta M_{r+1}}{\partial x_r}\right)$$

$$- \sum_r \left(\frac{\partial L_{r+2}}{\partial x_r} \delta Y_{r+1} + X_{r+1} \frac{\partial \delta M_{r+2}}{\partial x_r}\right)$$

(3) V. VOLTERRA, *Sopra le equazioni fondamentali della elettrodinamica.* « Rend. Acc. dei Lincei » (4) **7** (1. Sem.), 177, 1891. « Nuovo Cimento » (3) **29**, 147, 1891. [In queste « Opere »: vol. primo, XXXI, pp. 496–501; XXXII, pp. 502–513].

und

$$\sum_r (\eta_r\,\delta M_r + L_r\,\delta v)$$

$$= \frac{d}{dt}\Big(\sum_r \sum_s \mu_{rs}\,L_s\,\delta M_r\Big) + \sum_r \Big(\frac{\partial X_{r+2}}{\partial x_r}\,\delta M_{r+1} + L_{r+1}\,\frac{\partial \delta Y_{r+2}}{\partial x_n}\Big)$$

$$- \sum_r \Big(\frac{\partial X_{r+1}}{\partial x_r}\,\delta M_{r+2} + L_{r+2}\,\frac{\partial \delta Y_{r+1}}{\partial x_r}\Big).$$

Daher wird

$$D = \int_{t_0}^{t_1} dt \int dS \left\{ \begin{array}{c} \dfrac{d}{dt} \sum_r \sum_s (\varepsilon_{rs}\,X_s\,\delta Y_r + \mu_{rs}\,L_s\,\delta M_r) \\ + \sum_r \dfrac{\partial}{\partial x_r}(L_{r+1}\,\delta Y_{r+2} - L_{r+2}\,\delta Y_{r+1} + X_{r+2}\,\delta M_{r+1} - X_{r+1}\,\delta M_{r+2}) \end{array} \right\}.$$

In der Tat erhält man nunmehr

$$D = \Big[\int_S dS \sum_r \sum_s (\varepsilon_{rs}\,X_s\,\delta Y_r + \mu_{rs}\,L_s\,\delta M_r)\Big]_{t=t_1}$$

$$- \Big[\int_S dS \sum_r \sum_s (\varepsilon_{rs}\,X_s\,\delta Y_r + \mu_{rs}\,L_s\,\delta M_r)\Big]_{t=t_0}$$

$$+ \int_{t_0}^{t_1} dt \sum_r \int_\sigma (L_{r+1}\,\delta Y_{r+2} - L_{r+2}\,\delta Y_{r+1} + X_{r+2}\,\delta M_{r+1} - X_{r+1}\,\delta M_{r+2}) \cos(nx_r)\,d\sigma,$$

wenn $d\sigma$ ein Element der Grenzfläche des Raumes S, n die äussere Normale ist.

Damit ist die Behauptung bewiesen.

Wir nehmen an, dass

$$a = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix} \gtrless 0,$$

$$b = \begin{vmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{13} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \beta_{23} \\ \beta_{31} & \beta_{32} & \beta_{33} \end{vmatrix} \gtrless 0$$

ist, wobei $\alpha_{rs} = \alpha_{rs}$, $\beta_{rs} = \beta_{sr}$ $(s, r = 1, 2, 3)$ Funktionen von x_1, x_2, x_3 sind, und setzen

$$a_{rs} = \frac{\partial \log a}{\partial \alpha_{rs}} \quad , \quad b_{rs} = \frac{\partial \log b}{\partial \beta_{rs}},$$

$$\sum_s a_{rs}\,u_s = Z_r \quad , \quad \sum_s b_{rs}\,v_s = N_r.$$

Man erhält hieraus

$$\sum_r \sum_s \alpha_{\varkappa r}\,a_{rs}\,u_s = \sum_s \alpha_{\varkappa r}\,Z_r;$$

da

$$\sum_r \alpha_{\varkappa r}\, a_{rs} = \begin{cases} 0\,, & \text{wenn } \varkappa \neq s \\ 1\,, & \text{,, } \quad \varkappa = s\,, \end{cases}$$

so wird

$$u_s = \sum_r \alpha_{sr}\, Z_r$$

und daher

$$\sum_s \alpha_{rs}\, \delta Z_s = \delta u_r \quad ; \quad \sum_s \beta_{rs}\, \delta N_s = \delta v_r\,.$$

Betrachtet man nun das Integral

$$\int_{t_0}^{t_1} dt \int_S \Big[\sum_r \sum_s (\alpha_{rs}\, X_r\, \delta Z_s + \beta_{rs}\, L_r\, \delta N_s)\, dS$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} dt \int_S \sum_r (X_r\, \delta u_r + L_r\, \delta v_r)\, dS\,,$$

so wird dieses nach dem eben bewiesenen Satz gleich dem Integral

$$-\int_{t_0}^{t_1} dt \int_S \sum_r (\xi_r\, \delta Y_r + \eta_r\, \delta M_r)\, dS\,,$$

vermehrt um Glieder, die von den Funktionswerten an den Integralgrenzen abhängen.

Diese Relation führt uns sofort auf die gesuchten Aufgaben der Variationsrechnung. Man braucht nämlich nur

$$Z_r = X_r \quad , \quad N_r = L_r$$

anzusetzen und findet daraus durch Nullsetzen der Variation von

$$P = \int_{t_0}^{t_1} \frac{1}{2}\, dt \int_S \sum_r \sum_s (\alpha_{rs}\, X_r\, X_s + \beta_{rs}\, L_r\, L_s)\, dS$$

die Gleichungen

$$\xi_r = 0 \quad , \quad \eta_r = 0\,;$$

das sind aber die Gleichungen der Elektrodynamik für ruhende Körper.

Da die Grössen α_{rs} und β_{rs} völlig unbestimmt und willkürlich sind, ist es auf unendlich viele Arten möglich, die Gleichungen der Elektrodynamik auf ein Problem der Variationsrechnung zurückzuführen.

Ich muss noch hinzufügen, dass die Mittel, die ich hier besprochen habe, nicht die einzigen sind, die zum Ziele führen, sondern dass es auch noch andere gibt.

4. Die Bedeutung der im 3. Kapitel gegebenen Ableitungen und Folgerungen daraus.

In der Geschichte der Untersuchungen über die elektrodynamischen Gleichungen hat die oben beschriebene Zurückführung grosse Wichtigkeit erlangt; wir werden jetzt einige Anwendungen kennen lernen.

a) Zunächst ist die Möglichkeit vorhanden, mechanische Erklärungen oder mechanische Modelle für die Elektrodynamik zu geben.

Durch die energetischen Prinzipien ist nämlich die Bestimmung des kinetischen Potentials bei jeder physikalischen Aufgabe mit einem Problem der Variationsrechnung verknüpft. Nun kann man den Ausdruck für das kinetische Potential in zwei Summanden zerlegen, deren Differenz die Gesamtenergie des Systems darstellt; der erste Ausdruck ist ein Polynom zweiten Grades aus den ersten zeitlichen Ableitungen der Parameter, die den Zustand des Systems bestimmen, während der zweite von diesen Ableitungen unabhängig ist. Daraus ergibt sich sofort eine mechanische Deutung, denn man kann die Gleichungen auf solche vom LAGRANGEschen Typus zurückführen.

In unserem Fall gibt es unendlich viele Deutungen, und das ist nicht überraschend. Wir wissen seit POINCARÉ, dass, sobald eine mechanische Erklärung einer Erscheinung existiert, es unendlich viele solche Erklärungen gibt.

Man kann sehr wohl den vorstehenden Entwicklungen viele Theorien anschliessen, z. B. die Theorie der Wirbelatome von Lord KELVIN und die so berühmten und wichtigen Theorien von JOSEPH LARMOR [(4)].

Ganz kürzlich haben E. und F. COSSERAT [(5)] in einem interessanten Buch Fragen behandelt, die mit dem hier Gesagten in Verbindung stehen.

b) Indes wollen wir diese Überlegungen beiseite lassen und beachten, dass die Zurückführung auf eine Frage der Variationsrechnung ebenso für analytische Zwecke angewandt werden kann wie die Transformation der Gleichungen in krummlinige Koordinaten. Zu diesem Zweck braucht nur an die von JACOBI zuerst angegebene Methode zur Transformation des Differentialparameters zweiter Ordnung erinnert zu werden. Durch ein ganz entsprechendes Verfahren haben mehrere Autoren die Gleichungen der Elastizität in krummlinige Koordinaten umgeformt, und durch dasselbe Verfahren ist es BELTRAMI sogar gelungen, sich von den Bedingungen freizumachen, denen die Koeffizienten des Quadrats des Linienelements im euklidischen Raum genügen müssen [(6)].

Auf diese Weise wird die Grundlage für eine Optik in solchen Räumen gelegt, die nicht das Krümmungsmass Null haben.

(4) LARMOR, *Aether and Matter*. Cambridge 1900.

(5) E. et F. COSSERAT, *Théorie des corps déformables*. Paris 1909.

(6) E. BELTRAMI, *Sulle equazioni generali dell'elasticità*. «Ann. di Mat.» (2) **10**, 188, 1880, 82.

Aber die Transformation, von der die Rede ist, kann auch noch nach andern Verfahren vorgenommen werden, die schneller und kürzer zum Ziele führen; deshalb will ich den eingeschlagenen Weg nicht weiter verfolgen.

c) Gehen wir von den oben angegebenen Formeln [7] aus, so finden wir durch sehr einfache Rechnungen folgende Umformung des Ausdrucks

$$\sum_r \left(\xi_r \frac{dY_r}{dt} + \eta_r \frac{dM_r}{dt}\right).$$

Nach S. 397 ist, wenn man das Symbol δ durch d/dt ersetzt,

$$\sum_r \left(\xi_r \frac{dY_r}{dt} + X_r \frac{du_r}{dt} + \eta_r \frac{dM_r}{dt} + L_r \frac{dv_r}{dt}\right)$$
$$= \frac{d}{dt}\left\{\sum_r \sum_s \left(\varepsilon_{rs} X_r \frac{dY_s}{dt} + \mu_{rs} L_r \frac{dM_s}{dt}\right)\right\} + A,$$

wobei

$$A = \sum_r \frac{\partial}{\partial x_r}\left\{L_{r+1} \frac{dY_{r+2}}{dt} - L_{r+2} \frac{dY_{r+1}}{dt} + X_{r+2} \frac{dM_{r+1}}{dt} - X_{r+1} \frac{dM_{r+2}}{dt}\right\}.$$

Um zu der gesuchten Formel zu gelangen, subtrahiere man auf beiden Seiten der Gleichung

$$\sum_r \left(X_r \frac{du_r}{dt} + L_r \frac{dv_r}{dt}\right).$$

Dann wird die rechte Seite der Gleichung gleich $C_1 + C_2 + A$; dabei ist

$$C_1 = \frac{d}{dt}\left(\sum_r \sum_s \varepsilon_{rs} X_r \frac{dY_s}{dt}\right) - \sum_r X_r \frac{du_r}{dt}.$$

Entnimmt man $\sum_s \varepsilon_{rs} (dY_s/dt)$ aus dem Ausdruck für u_r (S. 397), so wird

$$C_1 = \sum_r \frac{d}{dt}\left\{X_r u_r + X_r\left(\frac{\partial M_{r+1}}{\partial x_{r+2}} - \frac{\partial M_{r+2}}{\partial x_{r+1}}\right) + 4\pi \sum_h \partial_{rh} X_r Y_h\right\} - \sum_r X_r \frac{du_r}{dt}$$

oder

$$C_1 = \sum_r u_r \frac{dX_r}{dt} + \sum_r \frac{d}{dt}\left\{X_r\left(\frac{\partial M_{r+1}}{\partial x_{r+2}} - \frac{\partial M_{r+2}}{\partial x_{r+1}}\right) + 4\pi \sum_h \partial_{rh} X_r Y_h\right\}.$$

Da nun $Z_r = X_r$ nach S. 399, so folgt nach S. 399 $u_r = \sum_s \alpha_{rs} X_s$,

$$\sum_r u_r \frac{dX_r}{dt} = \sum_r \sum_s d_{rs} X_s \frac{dX_r}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt}\left(\sum_r \sum_s \alpha_{rs} X_r X_s\right).$$

Daher

$$C_1 = \frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{2}\sum_r \sum_s \alpha_{rs} X_r X_s + \sum_r X_r\left(\frac{\partial M_{r+1}}{\partial x_{r+2}} - \frac{\partial M_{r+2}}{\partial x_{r+1}}\right) + 4\pi \sum_r \sum_h \partial_{rh} X_r Y_h\right\}.$$

Entsprechendes ergibt sich für

$$C_2 = \frac{d}{dt}\left(\sum_r \sum_s \mu_{rs} L_r \frac{dM_s}{dt}\right) - \sum_r L_r \frac{dv_r}{dt}.$$

(7) S. Anm. (3).

Daher erhält man

$$
(2) \qquad \sum_r \left(\xi_r \frac{dY_r}{dt} + \eta_r \frac{dM_r}{dt}\right)
$$

$$
= \frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{2}\sum_r \sum_s (\alpha_{rs} X_r X_s + \beta_{rs} L_r L_s) - \sum_r \left[L_r\left(\frac{\partial Y_{r+1}}{\partial x_{r+2}} - \frac{\partial Y_{r+2}}{\partial x_{r+1}}\right)\right.\right.
$$

$$
\left.\left. - X_r\left(\frac{\partial M_{r+1}}{\partial x_{r+2}} - \frac{\partial M_{r+2}}{\partial x_{r+1}}\right)\right] + 4\pi \sum_r \sum_h \partial_{rh} X_r Y_h\right\} + A,
$$

also ein vollständiges Differential nach der Zeit und eine Summe von Ausdrücken, die Ableitungen nach den Koordinaten sind, nämlich

$$
A = \sum_r \frac{\partial}{\partial x_r}\left(L_{r+1}\frac{dY_{r+2}}{dt} - L_{r+2}\frac{dY_{r+1}}{dt} + X_{r+2}\frac{dM_{r+1}}{dt} - X_{r+1}\frac{dM_{r+2}}{dt}\right).
$$

Sind daher die Gleichungen

$$
\xi_r = 0 \quad , \quad \eta_r = 0
$$

erfüllt und werden im Unendlichen die Grössen X_r, Y_r, L_r, M_r unendlich klein von passender Ordnung, so wird das über den ganzen Raum erstreckte Integral des Ausdrucks (2) verschwinden. Daraus findet man durch Integration nach t

$$
\int\left\{\frac{1}{2}\sum_r \sum_s (\alpha_{rs} X_r X_s + \beta_{rs} Y_r Y_s) - \sum_r \left[L_r\left(\frac{\partial Y_{r+1}}{\partial x_{r+2}} - \frac{\partial Y_{r+2}}{\partial x_{r+1}}\right)\right.\right.
$$

$$
\left.\left. - X_r\left(\frac{\partial M_{r+1}}{\partial x_{r+2}} - \frac{\partial M_{r+2}}{\partial x_{r+1}}\right)\right] + 4\pi \sum_r \sum_h \partial_{rh} X_h Y_r\right\} dS = \text{Const.},
$$

wo das Integral über den ganzen Raum zu erstrecken ist.

Wir sind so zu einem invarianten Integral gelangt. Es gibt eine andere, sogar noch weit merkwürdigere Beziehung, die man nach dem gleichen Verfahren herleiten kann.

Wir werden in der folgenden Vorlesung Gelegenheit haben, von der Entwicklung des GREENschen Satzes zu sprechen.

Der Inhalt dieses bemerkenswerten Satzes, der die fruchtbarste Grundlage für die analytische Entwicklung fast aller Zweige der mathematischen Physik gewesen ist, besteht in einer wechselseitigen Beziehung zwischen zwei Lösungen desselben Systems von Differentialgleichungen. Ich habe früher einmal gezeigt [(8)], dass alle Gleichungen, die von Aufgaben der Variationsrechnung herrühren, auf einen Reziprozitätssatz führen können, der dem GREENschen Satz entspricht. Ich will ihn für unseren Fall wirklich herleiten. Es mögen zwei Wertsysteme für die Grössen X_r, Y_r, L_r, M_r, ξ_r, η_r, u_r betrachtet und durch Anhängen von einem bzw. zwei Strichen

(8) V. VOLTERRA, *Sulle equazioni differenziali che provengono da questioni di calcolo delle variazioni.* « Rend. Acc. Lincei » (4) **6** (1. Sem.), 43, 1890. [In queste « Opere »: vol. primo, XXVII, pp. 454-463].

unterschieden werden. Ist

$$X'_r = Z'_r \quad , \quad X''_r = Z''_r ,$$

$$L'_r = N'_r \quad , \quad L''_r = N''_r ,$$

$$\xi'_r = \eta'_r = \xi''_r = \eta''_r = 0,$$

so findet man durch Anwendung derselben Transformationen, von denen wir bereits Gebrauch gemacht haben,

$$\frac{d}{dt}\int_S \left\{ \sum_r \sum_s \left[\varepsilon_{rs} (X'_s Y''_r - X''_s Y'_r) + \mu_{rs} (L'_s M''_r - L''_s M'_s) \right] \right\} dS$$

$$= \int_\sigma \sum_r (Y''_{r+1} L'_{r+2} - Y''_{r+2} L'_{r+1} - Y'_{r+1} L''_{r+2} + Y'_{r+2} L''_{r+1}$$

$$- M''_{r+1} X'_{r+2} + M''_{r+2} X'_{r+1} + M'_{r+1} X''_{r+2} - M'_{r+2} X''_{r-1}) \cos(n, x_r)\, d\sigma .$$

Hierbei ist, wie früher, $d\sigma$ ein Element der Grenzfläche von S und n die äussere Normale von $d\sigma$. Die Gleichung stellt nun gerade die reziproke Beziehung dar, die wir im Auge hatten. Man kann sie mit der vergleichen, die BETTI für den Fall der Elastizität als eine Erweiterung der GREENschen Formel gegeben hat, und von der wir in der nächsten Vorlesung sprechen werden.

Wir gehen nunmehr zu einem Punkte über, der meiner Ansicht nach viel des Interessanten und Anregenden bietet; denn man kann ein ganzes Gebiet völlig neuer Untersuchungen daran anschliessen.

Wir wollen noch einmal auf die Mechanik und das HAMILTONsche Prinzip zurückkommen und uns an die Frage erinnern, auf die es führt. Man hat ein Integral

$$P = \int_{t_0}^{t_1} f\left(x_1, x_2, \cdots, x_n, \frac{dx_1}{dt}, \cdots, \frac{dx_n}{dt}\right) dt ,$$

in dem die Funktionen $x_1, x_2, \cdots, x_n$ von t, die Koordinaten des Systems, erscheinen. Man muss die Variation von P gleich null setzen, unter der Voraussetzung, dass man $x_1, x_2, \cdots, x_n$ unendlich kleine Variationen erteilt. Man kommt auf gewöhnliche Differentialgleichungen zweiter Ordnung, denen $x_1, \cdots, x_n$ genügen müssen. Wir nehmen an, dass die willkürlichen Konstanten bestimmt werden können, sobald man die Werte der Funktionen $x_1, x_2, \cdots, x_n$ für die Zeiten t_0 und t_1 kennt.

Betrachtet man P als Funktion der Werte von $x_1, x_2, \cdots, x_n$ für die obere Grenze des Integrals, so hat man also eine Funktion von n Variabeln. Die Theorie von HAMILTON und JACOBI, die CLEBSCH, MAYER und sehr viele andere vervollkommnet haben, ist aufgebaut auf der Auffindung der Beziehungen zwischen dieser Funktion von mehreren Variabeln und den Integralen der Differentialgleichungen, die dem Problem der Variationsrechnung entsprechen, und der Beziehung zwischen diesen Integralen und der partiellen

Differentialgleichung, der jene Funktion von mehreren Variabeln genügen muss.

Nach dieser Vorbemerkung wollen wir uns der Fragen der mathematischen Physik erinnern, die wir oben betrachtet haben. Was können wir jetzt darüber Neues aussagen?

Alles kann auch hier auf Fragen der Variationsrechnung zurückgeführt werden; aber man hat es nicht mehr mit einer endlichen Zahl von Variabeln zu tun wie in der klassischen Mechanik, wo die Anzahl der Koordinaten des Systems endlich ist. Man muss vielmehr eine stetige Gesamtheit von Koordinaten betrachten. In der Tat ist ja das Medium, in dem die Erscheinung sich abspielt, ein Kontinuum, und jedem Punkt des Mediums entsprechen Parameter, die den physikalischen Zustand dieses Punktes bestimmen, ebenso wie in der klassischen Mechanik die Koordinaten die Lage der verschiedenen bewegten Punkte charakterisieren.

Blicken wir auf die Formeln zurück, denen wir begegnet sind, so werden wir bemerken, dass in den Aufgaben der mathematischen Physik Integrale erscheinen, die an die Stelle der in der gewöhnlichen Mechanik auftretenden Summen treten.

Andererseits drängt sich die Erkenntnis der Verallgemeinerung und Erweiterung auf, und man übersieht, dass man ein ganz neues Feld von Untersuchungen vor sich hat, für welche durch die JACOBI-HAMILTONsche Theorie in der Mechanik das Vorbild geliefert wird, und bei welchen jedes analytische Ergebnis eine physikalische Bedeutung hat.

5. ERWEITERUNG DES FUNKTIONSBEGRIFFS.

Wir werden sehen, welchen Schwierigkeiten man begegnet, wenn man den geschilderten Weg einschlägt. Wir wollen eine Frage von noch allgemeinerem Charakter in Angriff nehmen als die, auf die man durch die oben erwähnte Verallgemeinerung stossen würde [(9)].

Bei den einfachen Integralen gibt es zwei Grenzen; geht man zu Doppelintegralen über, so werden die Grenzen von Linien gebildet, und wenn man zu mehrfachen Integralen mit einer noch grösseren Zahl von Variabeln kommt, so wird der Integrationsbereich von mehrdimensionalen Flächen oder Räumen begrenzt.

Für den Fall einfacher Integrale kommen die Werte einer gewissen Zahl von Parametern an den Grenzen des Integrals in Betracht, und das Integral selbst muss als Funktion dieser Werte angesehen werden. Ganz anders ist es, wenn man zu mehrfachen Integralen übergeht. In diesem Falle hat man es mit den Werten gewisser Funktionen an der Grenze des

(9) V. VOLTERRA, *Sopra una estensione della teoria* JACOBI–HAMILTON *del calcolo delle variazioni*. « Rend. Acc. Lincei » (4) **6** (1. Sem.), 127, 1890. [In queste « Opere »: vol. primo, XXVIII, pp. 464–475].

Integrationsbereichs zu tun, und man muss das Integral als eine Grösse ansehen, die von allen Werten dieser Funktion auf der Grenze abhängt. Die Art der Abhängigkeit ändert sich also vollkommen, und es ist verständlich, dass man auf Beziehungen trifft, die eine völlig neue Bedeutung haben, abgesehen von den gewöhnlichen, die den Zusammenhang zwischen Funktionen und Variabeln zum Ausdruck bringen.

Aber ich füge hinzu, dass man notwendig diesen Schritt tun und diese Gedanken aufnehmen, d. h., den gewöhnlichen Begriff der Funktion erweitern muss, wenn anders man nicht für immer darauf verzichten will, die fruchtbarsten und allgemeinsten Schöpfungen der Mechanik in klarer und strenger Weise auf die mathematische Physik allgemein zu übertragen.

Der Weg, den man in letzter Zeit in Richtung der angedeuteten Ausdehnung der Funktionentheorie und ihrer Anwendung zurückgelegt hat, ist sehr bedeutend, seit man die Grundgedanken und die Methoden erweitert hat. Aber vieles bleibt noch von der Zukunft zu erhoffen [10].

Gestatten Sie mir, daran zu erinnern, dass ich seit langem den Begriff der von allen Werten einer Funktion oder von der Gestalt einer Linie oder Fläche abhängigen Grössen eingeführt habe, und dass ich versucht habe, dafür allgemein die analytische Entwicklung anzugeben, die im Grunde nur eine Erweiterung der Entwicklung einer analytischen Funktion ist, d. h. der TAYLORschen Entwicklung [11].

Wir werden in der letzten Vorlesung Gelegenheit haben, hierauf zurückzukommen. Ein bestimmtes Integral

$$\Phi(x) = \int_a^b f(\xi)\, F(x, \xi)\, d\xi,$$

bei dem unter dem Integralzeichen $f(\xi)$ auftritt, liefert eine lineare Abhängigkeit der Funktionen $f(\xi)$ und $\Phi(x)$ von einander und entspricht dem Falle der Funktionen ersten Grades.

Das Problem der Umkehrung bestimmter Integrale oder, wie man es später genannt hat, das Problem der Auflösung linearer Integralgleichungen, entspricht der algebraischen Lösung von Gleichungssystemen ersten Grades.

Ich bin in der Tat von der Anschauung ausgegangen, dass eine Integralgleichung den Grenzfall eines Systems von Gleichungen ersten Grades mit unendlich vielen Unbekannten darstellt, und ich habe die Lösung für den Fall erhalten, dass die unendliche Determinante, die den Nenner bildet, gleich 1 ist. FREDHOLM hat später die Lösung für beliebige Werte der Determinante gegeben. Ich und SCHMIDT haben auch solche Fälle behandelt,

(10) Vgl. V. VOLTERRA, *Leçons sur les équations intégrales et intégro-différentielles* und *Leçons sur les fonctions de lignes*. Paris 1913, Gauthier-Villars.

(11) V. VOLTERRA, *Sopra le funzioni che dipendono da altre funzioni*. «Rend. Acc. Lincei» (4) **3** (2. Sem.), 97, 141, 153; 1887. [In queste «Opere»: vol. primo, XVII, pp. 294–314]. — V. VOLTERRA, *Sopra le funzioni dipendenti da linee*. «Rend. Acc. Lincei» (4) **3** (2. Sem.), 225, 274; 1887. [In queste «Opere»: vol primo, XVIII, pp. 315–328].

wo die Integralgleichung nicht linear ist. Ganz jüngst habe ich durch Verwendung der Methoden der vertauschbaren Funktionen das Gebiet der Theorie der Integralgleichungen so erweitert, dass die untersuchten allgemeinen Fälle alle früher betrachteten umfassen [12].

All das ist nichts anderes als die algebraische Lösung der Gleichungen ersten Grades, von dem Falle endlich vieler Variabeln auf den Fall unendlich vieler übertragen.

Die neueren Arbeiten von HADAMARD [13] und PAUL LEVY [14] sind eng mit der hier besprochnen Ausdehnung der Funktionentheorie verknüpft. Insbesondere erscheinen auf diese Weise die Eigenschaften der GREENschen Funktionen in ganz neuem Lichte.

Die Aufgabe, die ich soeben über die Ausdehnung der JACOBI-HAMILTONschen Theorie gestellt habe, geht weit über diese Untersuchungen hinaus. Zwischen diesen Untersuchungen und der Erweiterung, von der ich gesprochen habe, besteht dasselbe Verhältnis wie zwischen der algebraischen Lösung der Gleichungen und dem Studium der Differentialgleichungen.

Gar viele Wege stehen offen; doch dieselben allgemeinen Prinzipien, die zur Aufstellung der Grundlagen für die Lösung der Integralgleichungen geführt haben, leisten auch in diesem weit verwickelteren Fall ihre Dienste. Immer liefert der Übergang vom Endlichen zum Unendlichen in der Zahl der unabhängigen Variabeln den Schlüssel zur Lösung der verschiedenen Fragen. Bevor ich den Gegenstand verlasse, möchte ich den Typus der Ergebnisse angeben, auf die man bei dem Versuche stösst, die JACOBI-HAMILTONsche Theorie auf einen besonderen Fall von Doppelintegralen auszudehnen [15].

Die Differentialgleichungen

$$(3) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\frac{d(x_i, x_s)}{d(u, v)} = \frac{\partial H}{\partial p_{is}}, \\ &\sum_h \frac{d(p_{ih}, x_h)}{d(u, v)} = -\frac{\partial H}{\partial x_i}, \end{aligned} \right. \qquad (i = 1, 2, 3)$$

haben eine Gestalt, ähnlich der der kanonischen Gleichungen der Mechanik; man kann sie sehr leicht dadurch herleiten, dass man die Variation des Integrals

$$\iint \left(\Sigma p_{ih} \frac{d(x_i, x_h)}{d u, v)} - H \right) du\, dv$$

gleich Null setzt.

(12) V. VOLTERRA, *Leçons sur les fonctions de lignes*, Kap. 9, 10, 11, 12, 13.

(13) J. HADAMARD, *Mémoire sur le problème d'analyse relatif à l'équilibre des plaques élastiques encastrées*. «Mémoires prés. par divers savants à l'Ac. des Sc. de l'Institut de France», **33**, Nr. 4. 1908.

(14) PAUL LEVY, *Les équations intégro-differentielles définissant des fonctions des lignes*. Diss. 1911.

(15) S. Anm. (3).

Es mögen jetzt π_1, π_2, π_3 drei Funktionen von x_1, x_2, x_3 sein, derart, dass

$$\frac{\partial \pi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \pi_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \pi_3}{\partial x_3} = 0$$

ist.

Das Integral

$$W = \int_\sigma (\pi_1\, dx_2\, dx_3 + \pi_2\, dx_3\, dx_1 + \pi_3\, dx_1\, dx_2),$$

erstreckt über eine Fläche σ, hängt nur von der Randlinie s dieser Fläche σ ab. Ich nenne es eine Funktion ersten Grades der Linie s und schreibe

$$\pi_1 = \frac{dW}{d(x_2, x_3)}, \quad \pi_2 = \frac{dW}{d(x_3, x_1)}, \quad \pi_3 = \frac{dW}{d(x_1, x_2)}.$$

Zwischen den Gleichungen (3) und der Gleichung

$$H\left(\frac{dW}{d(x_2, x_3)}, \frac{dW}{d(x_3, x_1)}, \frac{dW}{d(x_1, x_2)}, \quad x_1, x_2, x_3\right) + h = 0, \tag{4}$$

in der p_{23}, p_{31}, p_{12} durch $dW/d(x_2, x_3)$, $dW/d(x_3, x_1)$, $dW/d(x_1, x_2)$ ersetzt sind, gelten dieselben Beziehungen, die JACOBI zwischen den kanonischen Gleichungen und seiner partielle Differentialgleichung entdeckt hat. Wir sehen, dass durch den Satz, den ich betrachtet habe, ein Schritt getan ist: die kanonischen Gleichungen sind durch partielle Differentialgleichungen ersetzt worden (Gl. (3)), und die partielle Differentialgleichung von JACOBI ist durch die Gleichung (4) ersetzt worden, die man eine funktionale Differentialgleichung nennt. In Betreff der Entwicklungen verweise ich auf die schönen Arbeiten von FRÉCHET (16), der diesen Gedanken in einer bemerkenswerten Abhandlung verallgemeinert und entwickelt hat. Andre Fälle sind in meinen S. 406 erwähnten Vorlesungen über Linienfunktionen behandelt. Die hier auftretenden Gleichungen heissen „Funktionaldifferentialgleichungen".

6. DIE MINKOWSKISCHE WELT.

Die verschiedenen Fragen, die wir behandelt haben, treten in der allgemeinen Wellentheorie wieder auf. Hier muss nun bemerkt werden, dass in anderer Richtung das Studium der Charakteristiken diese Theorie erneuert hat. Man würde die Charakteristiken nicht haben untersuchen hönnen, wenn man nicht darauf gekommen wäre, die Zeit als eine Koordinate anzusehen. Ganz neuerdings ist MINKOWSKI in einer schönen und gehaltvollen

(16) M. FRÉCHET, *Sur une extension de la méthode de* JACOBI–HAMILTON. « Ann. di Matematica » (3), **11**, 187, 1905. Vgl. auch « Ann. de l'Éc. Norm. » (3), **27**, 1910.

Abhandlung [17]) und einem für einen weiteren Kreis bestimmten Vortrag [18] darauf zurückgekommen und hat die Gedanken von LORENTZ und EINSTEIN über die Beziehungen zwischen Raum und Zeit in ganz neuem Lichte erscheinen lassen.

Es ist nich möglich, die Begriffe der Zeit und des Raumes voneinander zu trennen. Ein Ort wird immer zu einer gewissen Zeit beobachtet und eine Zeit wird immer an einem gewissen Ort bestimmt. Wird der Raum auf die Koordinaten x, y, z bezogen und nennt man die Zeit t, so wird ein zu einer gewissen Zeit betrachteter Raumpunkt durch die Gesamtheit der Werte x, y, z, t bestimmt; MINKOWSKI nennt das einen „Weltpunkt". Die Gesamtheit aller möglichen Werte von x, y, z, t stellt die ganze Welt dar. Was wir im dreidimensionalen Raum beobachten, ist nur ein Schatten oder eine Projektion eines Raumes, der eine Dimension mehr besitzt.

Hier liegt eine Schwierigkeit. Will man die ganze Welt umfassen, so muss man einen vierdimensionalen Raum betrachten. Indes kann man diese Schwierigkeit durch ein wohlbekanntes Verfahren beseitigen. Man braucht nur von dem gewöhnlichen Raum eine Dimension abzutrennen und sich ein Flächenwesen vorzustellen, das diesen zweidimensionalen Raum bewohnt. HELMHOLTZ und CLIFFORD haben uns an derartige Vorstellungen gewöhnt und auf diese Weise selbst noch schwierigere und verwickeltere Gedanken anschaulich und verständlich gemacht, nämlich den Begriff der Krümmung des Raumes. Es ist einleuchtend, dass für ein zweidimensionales Wesen die Welt MINKOWSKIs dreidimensional ist, und wenn man noch weiter geht und das wurmförmige Wesen CLIFFORDS, d. h. ein Wesen mit nur einer Ausdehnung, betrachtet, so ist die MINKOWSKIsche Welt für dieses Wesen zweidimensional.

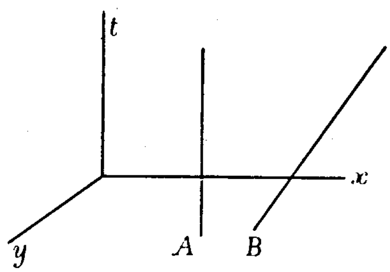


Fig. 1.

Für das Flächenwesen wird die Welt durch den Raum x, y, t dargestellt. Was wird nun der MINKOWSKIsche Beobachter sehen, wenn ein Punkt sich in Ruhe befindet?

Ganz augenscheinlich wird er eine Parallele zur t-Achse sehen. Hat der Punkt umgekehrt eine gleichförmige Bewegung, so wird er eine gegen die t-Achse geneigte gerade Linie sehen. Der Schatten oder die Projektion des bewegten Punktes wird gewonnen, wenn sich der Beobachter mit der xy-Ebene gleichförmig in Richtung der t-Achse bewegt. Die verschiedenen Punkte x, y, in denen die geneigte „Weltlinie" die Ebene schneidet, ergeben die Bewegung des Punktes B.

(17) H. MINKOWSKI, *Die Grundgleichungen für elektromagnetischen Vorgänge in bewegten Körpern.* «Göttinger Nachrichten», 1908, S. 58. Abgedruckt «Math. Annalen», 68, 472, 1910.

(18) H. MINKOWSKI, *Raum und Zeit.* «Jahresber. der D. Math.-Ver.», **18**, 75, 1909.

7. ZWEI–, DREI– UND VIERDIMENSIONALE WELTEN.

Nach diesen Vorbemerkungen wollen wir zur Wellentheorie für ruhende Medien übergehen. Wir werden da neuen Schwierigkeiten begegnen, und es muss von vornherein gesagt werden, dass man gar leicht in Irrtum verfallen könnte, wollte man sich nur durch die einfache Anschauung leiten lassen.

Der Mechanismus der Wellen in elastischen zweidimensionalen Medien ist nämlich sehr verschieden von dem in dreidimensionalen Medien, und wenn man die Theorie der Ausbreitung einer Kreiswelle aufstellt, so hat man damit noch keine Theorie gewonnen, die vergleichbar wäre mit der für die Ausbreitung einer Kugelwelle für dreidimensionale Wesen(19). Um es deutlicher und klarer auszudrücken: das Flächenwesen hat uns gegenüber, die wir dreidimensional sind, eine Dimension verloren, aber dafür hat es umgekehrt an Einfachheit inbezug auf den Mechanismus der Wellenausbreitung eingebüsst.

Augenscheinlich ist dieser Umstand die Ursache einer Schwierigkeit; aber es ist unmöglich, sie zu umgehen, da sie in der Natur begründet liegt. Dieser Umstand ist sehr eigenartig, denn es kommt äusserst selten vor, dass die Dinge durch Weglassung einer Dimension schwieriger und verwickelter werden.

Wollte man dieselbe Einfachheit wie für die Wellen in dreidimensionalen Räumen wiederfinden, so müsste man die Flächenwesen beiseite lassen und zu den Wellen für das wurmförmige oder eindimensionale Wesen übergehen, für welches die MINKOWSKIsche Welt zweidimensional ist.

Kurz gesagt, der Mechanismus der Wellenausbreitung in Räumen mit einer ungeraden Zahl von Dimensionen ist einfacher als in solchen mit einer geraden Zahl von Dimensionen.

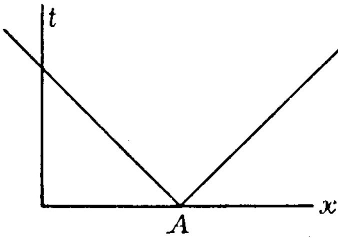


Fig. 2.

Wir wollen jetzt näher auf diese Fragen eingehen. Wir betrachten die Welt des wurmförmigen Wesens, also die xt–Ebene.

Ist A das Zentrum einer Erschütterung in einem isotropen Medium, und ist die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Wellen gleich 1, so ziehen wir durch A die unter 45° gegen die Achsen geneigten, auf der Seite der positiven t gelegenen Strahlen. (Fig. 2).

Für den MINKOWSKIschen Beobachter wird sich jede Erschütterung längs der beiden Geraden ausbreiten, die wir gezogen haben, und ausserhalb ihrer wird keine Erschütterung in seiner Welt vorhanden sein.

(19) V. VOLTERRA, *Sulle vibrazioni luminose nei mezzi isotropi.* « Rend. Acc. Lincei » (5) 1 (2. Sem.), 161, 1892. [In queste « Opere »: vol. primo, XXXIV, pp. 559–567].

Vom analytischen Standpunkt sind die Geraden, die wir gezogen haben, die Charakteristiken der d'ALEMBERTschen Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 .$$

Verschieben wir die x–Achse gleichmässig in der Richtung der t, so bezeichnen die Punkte, in denen die Charakteristiken die x–Achse schneiden, die nacheinander von der Welle erreichten Stellen.

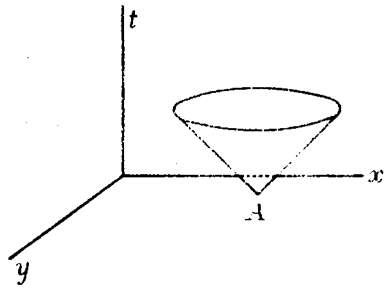


Fig. 3.

Wir kehren zu dem Flächenwesen zurück, für das die MINKOWSKIsche Welt der Raum x, y, t ist. Es sei A wieder ein Erregungszentrum in einem isotropen Medium und die Ausbreitungsgeschwindigkeit gleich eins. (Fig. 3).

Wir zeichnen nach der Seite der positiven t den Kegel, der A zum Scheitel hat, und dessen Erzeugende unter 45° gegen die t–Achse geneigt sind.

Ohne nähere Prüfung könnte man leicht zu dem Analogieschluss verleitet werden, dass sich für den MINKOWSKIschen Beobachter jede Erschütterung längs der Kegelfläche ausbreitet, und dass es ausserhalb dieser Fläche keinerlei Erschütterung in seiner Welt gebe. Aber dem ist in Wahrheit nicht so. Die Erschütterung erfüllt das ganze Innere des Kegels, und ausserhalb ist keine Erregung vorhanden.

Hierin besteht die grössere Kompliziertheit des Mechanismus in diesem Fall im Vergleich zu dem vorher besprochenen.

Wollten wir zu dem nun folgenden, auf dreidimensionale Wesen bezüglichen Fall übergehen, so brauchten wir nur auf die Vorgänge zurückzukommen, die statthaben würden, falls die Erschütterungen einzig und allein auf dem Kegelmantel vorhanden wären, und hätten in der Vorstellung noch eine Dimension mehr hinzuzufügen. Um die beiden verschiedenen Arten der Wellenausbreitung, die wir gefunden haben, zu unterscheiden, werden wir sie mit den Ausdrücken „ Welle ohne Residuum " und „ Welle mit Residuum " bezeichnen.

Der Kegel, den wir soeben betrachtet haben, ist die charakteristische Fläche der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 .$$

In dem folgenden Fall, in dem wir in der Vorstellung eine Dimension hinzugefügt haben, würde man einen Kegel finden, der die charakteristische Hyperfläche der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

ist.

8. VARIATIONSRECHNUNG UND THEORIE DES STOSSES.

Die charakteristischen Linien und Flächen, die wir soeben betrachtet haben, spielen eine Rolle in der Theorie des Stosses oder der Ausbreitung diskontinuierlicher Erregungen. Ich werde die allgemeinen Theorien beiseite lassen, die für den Fall der Hydrodynamik und der Elastizität von HUGONIOT, CHRISTOFFEL, HADAMARD entwickelt worden sind, und mich auf die Aufstellung einer sehr einfachen Beziehung beschränken, die zwischen der Variationsrechnung, der Ausbreitung diskontinuierlicher Erregungen und den charakteristischen Flächen besteht [20].

Ich betrachte den sehr einfachen Fall der Gleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

die den Schwingungen einer Membran entspricht. Das Problem der Variationsrechnung, von dem sie abhängt, besteht in der Nullsetzung der Variation des Integrals

$$V = \iiint \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \right\} dx\, dy\, dt.$$

Wir nehmen jetzt an, dass es im Innern des Raumes x, y, t Flächen gibt, auf denen u stetig ist, seine Ableitungen aber unstetig sein hönnen.

Man kann sich die Fragen vorlegen: Auf welchen Flächen werden die Ableitungen in der Art unstetig sein können, dass die Variation von V immer verschwindet? Welchen Bedingungen werden die Werte der Ableitungen auf den beiden Seiten der Unstetigkeitsflächen genügen müssen?

Die Frage bietet keine Schwierigkeit; man findet, dass die Flächen Einhüllende der charakteristischen Kegel sein müssen.

9. ANISOTROPE MEDIEN.

Was wir über die Wellen gesagt haben, bezieht sich auf isotrope Medien. Die Schwierigkeiten werden ausserordentlich viel grösser, sobald man Wellen in anisotropen Medien ins Auge fasst.

Der Grund ist der, dass die Theorie der Erregungszentren, die wir für isotrope Medien skizziert haben, versagt, wenn man zu zweiachsigen anisotropen Medien übergeht. Es gewährt einen eigenen Reiz, die Arbeiten von LAMÉ über diesen Gegenstand zu verfolgen. Seine Ergebnisse sind analytisch einwandfrei, aber sie können wegen der Singularitäten der Lösung nicht die Theorie des Erregungszentrums geben. Wir wollen die Formeln

(20) V. VOLTERRA, *Sur les vibrations des corps élastiques isotropes.* (Art. 12). « Acta Math. », **18**, 161, 1894. [In queste « Opere »: vol. secondo, III, pp. 19-73].

nehmen, die LAMÉ [21] für das einem bestimmten Punkt entsprechende Erregungszentrum gegeben hat, und durch diesen Punkt die optischen Achsen legen.

Die Komponenten der Verschiebung sind längs der beiden Geraden unendlich, und beim Umkreisen dieser Geraden sind die Verschiebungen vieldeutig, d. h., geht man von einem bestimmten Punkt mit einem gewissen Wert einer der Verschiebungskomponenten auf geschlossener Bahn um die optische Achse herum, so findet man, wenn man immer die stetig aufeinander folgenden Werte der Komponente nimmt und schliesslich zum Ausgangspunkt zurückkehrt, in diesem einen ganz neuen Wert für dieselbe Verschiebungskomponente [22]. Man müsste also annehmen, dass das Medium längs zweier ebenen Bezirke, die zwischen den optischen Achsen genommen sind, derart in Teile zerlegt ist, dass die Teilchen des Mediums auf den beiden Seiten dieser Bezirke unabhängig voneinander schwingen könnten. Das entspricht augenscheinlich nicht der Vorstellung, die wir uns von dem Medium machen, denn es handelt sich um die Vorstellung eines kontinuierlichen Mediums.

LAMÉ hat zu beweisen versucht, dass seine Formeln die einzigen sind, die einem Erregungszentrum in einem doppelbrechenden Medium entsprechen können; daher würde man zu dem Schluss geführt werden, dass es nicht möglich ist, in einem derartigen Medium ein Leuchtzentrum zu finden.

Es ist klar, dass das alles nicht richtig ist, aber man muss die analytischen Ergebnisse interpretieren, um zu verstehen, woher der Widerspruch kommt.

Wir wollen mit der Spezialisierung der Formeln von LAMÉ auf den Fall eines einachsigen Mediums beginnen. Man findet Lösungen, welche längs der ganzen optischen Achse unendlich werden. Das ist eine Singularität, die nicht verträglich ist mit dem Vorhandensein eines einzigen Erregungszentrums. Aber wir wollen noch weiter gehen und auf den Fall des isotropen Mediums spezialisieren. Die Singularität der Verschiebungen, die in der Tatsache besteht, dass sie längs einer Geraden unendlich werden, ist auch jetzt noch vorhanden. Es könnte also kein Leuchtzentrum in einem isotropen Medium geben! Das schliesst augenscheinlich einen Widerspruch ein.

Andererseits wissen wir seit EULER, dass wir durch die Ableitungen der Funktion

$$\frac{f(r+t)}{r},$$

wo r die Entfernung vom Erregungszentrum darstellt, die Schwingungskomponenten ohne jede Singularität berechnen können, ausgenommen für das Zentrum selbst. Die Deutung, die LAMÉ seinen Formeln gegeben hat,

(21) LAMÉ, *Leçons sur la théorie math. de l'élasticité des solides.* 22ème Leçon. Paris 1852.

(22) V. VOLTERRA, *Sur les vibrations lumineuses dans les milieux biréfringents.* «Acta Math.», 16, 153; 1892/93. [In queste «Opere»: vol primo, XXXIII, pp. 514-558].

enthält also einen prinzipiellen Fehler, und dieser besteht in folgendem. LAMÉ wusste nicht, dass der Mechanismus der Wellen derart sein kann, dass die Welle ein Residuum hat, d. h. er vermutete keinen anderen Mechanismus als den, der, wie wir gesehen haben, für isotrope Medien mit einer ungeraden Zahl von Dimensionen vorhanden ist. Deshalb gab er seinen Formeln von Anfang an eine Gestalt, die dem Mechanismus ohne Residuen entsprach, und das musste ihn notwendig zu einem Irrtum führen. Jetzt können wir daraus entnehmen, dass der Mechanismus der Wellen für den Fall dreidimensionale, doppelbrechender, zweiachsiger Medien sich dem Mechanismus der Wellen mit Residuum annähern muss und nicht dem ohne Residuum.

Abgesehen von der hier wiedergegebenen negativen Kritik der LAMÉschen Ergebnisse, ist man kaum weiter gekommen als er, denn die Formeln für das Lichtzentrum in anisotrope zweiachsigen Medien sind noch zu finden. Es ist daran zu erinnern, dass die FRESNELsche Wellenfläche nicht als Folge der von einem Erregungszentrum ausgehenden Wellen gefunden worden ist, sondern man hat sie aus der Fortpflanzung ebener Wellen, und zwar als Einhüllende dieser Wellen hergeleitet. Der Schritt, der zu tun bleibt, ist gross und schwierig, und ich weise gern auf ihn hin, weil es äusserst wichtig wäre, ihn zu tun.

Ein neuer Zweig der Optik würde sich der Lösung dieser Frage anschliessen.

Es ist noch hinzuzufügen, dass man für das anisotrope einachsige Medium das Problem lösen kann.

Ich will in kurzen Worten den Weg dazu angeben.

Die Gleichungen der Optik für anisotrope Medien sind

$$(5) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial W}{\partial y} - b^2 \frac{\partial V}{\partial z} \quad , \quad \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial U}{\partial z} - c^2 \frac{\partial W}{\partial x} ,$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = b^2 \frac{\partial V}{\partial x} - a^2 \frac{\partial U}{\partial y} ,$$

$$(6) \qquad \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} = 0 ,$$

wobei

$$U = \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} \quad , \quad V = \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} \quad , \quad W = \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}$$

ist.

Die Gleichungen kann man zusammenfassen zu einer einzigen, der man eine völlig symmetrische Gestalt geben kann. Setzen wir

$$\frac{b^2 + c^2}{bc} = A_1 \quad , \quad \frac{c^2 + a^2}{ca} = A_2 \quad , \quad \frac{a^2 + b^2}{ab} = A_3 ;$$

$$t = x_1 \sqrt{-1} \quad , \quad \frac{x}{\sqrt{bc}} = x_2 \quad , \quad \frac{y}{\sqrt{ca}} = x_3 \quad , \quad \frac{z}{\sqrt{ab}} = x_4 ,$$

so ist die fragliche Gleichung die folgende:

$$
(7)\qquad \left\{
\begin{aligned}
&\Omega f = \frac{\partial^4 f}{\partial x_1^4} + \frac{\partial^4 f}{\partial x_2^4} + \frac{\partial^4 f}{\partial x_3^4} + \frac{\partial^4 f}{\partial x_4^4} + A_1\left(\frac{\partial^4 f}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{\partial^4 f}{\partial x_3^2 \partial x_4^2}\right)\\
&\quad + A_2\left(\frac{\partial^4 f}{\partial x_1^2 \partial x_3^2} + \frac{\partial^4 f}{\partial x_2^2 \partial x_4^2}\right) + A_3\left(\frac{\partial^4 f}{\partial x_1^2 \partial x_4^2} + \frac{\partial^4 f}{\partial x_2^2 \partial x_2^3}\right) = 0 .
\end{aligned}
\right.
$$

Die Komponenten der Verschiebung müssen den Gleichungen genügen

$$\Omega u = 0 \quad , \quad \Omega v = 0 \quad , \quad \Omega w = 0 ,$$

und umgekehrt können alle Integrale der optischen Gleichungen in der Form geschrieben werden

$$
(8)\qquad \left\{
\begin{aligned}
u &= \frac{\partial^2 F_1}{\partial t^2} - a^2 \Delta^2 F_1 + \frac{\partial}{\partial x}\left(a^2 \frac{\partial F_1}{\partial x} + b^2 \frac{\partial F_2}{\partial y} + c^2 \frac{\partial F_3}{\partial z}\right),\\
v &= \frac{\partial^2 F_2}{\partial t^2} - b^2 \Delta^2 F_2 + \frac{\partial}{\partial y}\left(a^2 \frac{\partial F_1}{\partial x} + b^2 \frac{\partial F_2}{\partial y} + c^2 \frac{\partial F_3}{\partial z}\right),\\
w &= \frac{\partial^2 F_3}{\partial t^2} - c^2 \Delta^2 F_3 + \frac{\partial}{\partial z}\left(a^2 \frac{\partial F_1}{\partial x} + b^2 \frac{\partial F_2}{\partial y} + c^2 \frac{\partial F_3}{\partial z}\right),
\end{aligned}
\right.
$$

wobei

$$
(9)\qquad F_1 = \frac{\partial f_2}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial y} \quad , \quad F_2 = \frac{\partial f_3}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial z} \quad , \quad F_3 = \frac{\partial f_1}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial x}
$$

ist.

f_1, f_2, f_3 sind drei Integrale der Gleichung

$$\Omega f = 0 .$$

In der Tat, setzt man die vorstehenden Ausdrücke in Gleichung (6) ein, so findet man, dass sie befriedigt wird, und setzt man sie in die Gleichungen (5) ein, so nehmen diese die Gestalt an

$$
(10)\qquad \frac{\partial \Omega f_2}{\partial z} - \frac{\partial \Omega f_3}{\partial y} = 0 \quad , \quad \frac{\partial \Omega f_3}{\partial x} - \frac{\partial \Omega f_1}{\partial z} = 0 \quad , \quad \frac{\partial \Omega f_1}{\partial y} - \frac{\partial \Omega f_2}{\partial x} = 0 .
$$

Genügen daher f_1, f_2, f_3 der Gleichung (7), so werden die vorstehenden Gleichungen und daher auch die Gleichungen (5) befriedigt.

Wir wollen nun umgekehrt voraussetzen, dass (5) und (6) befriedigt werden. Wir berechnen zunächst F_1, F_2, F_3 derart, dass die Beziehungen (8) erfüllt sind. Infolge der Beziehung (6) hat man

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}\right) = 0 .$$

Daher kann man F_1, F_2, F_3 so wählen, dass auch die Gleichung

$$\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} = 0$$

erfüllt wird.

Darauf berechnen wir f_1, f_2, f_3 so, dass die Gleichungen (9) befriedigt werden. Man erhält dann die Gleichungen (10) und infolgedessen

$$\Omega f_1 = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad , \quad \Omega f_2 = \frac{\partial \varphi}{\partial y} \quad , \quad \Omega f_3 = \frac{\partial \varphi}{\partial z} .$$

Ist daher

$$\Omega \Phi = \varphi ,$$

so kann man f_1, f_2, f_3 durch

$$f_1 = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \quad , \quad f_2 = \frac{\partial \Phi}{\partial y} \quad , \quad f_3 = \frac{\partial \Phi}{\partial z}$$

ersetzen, und diese neuen Funktionen befriedigen die Gleichung (7).

Wenn wir nun voraussetzen, dass das Medium einachsig ist, d. h. $b = c$, so zerfällt die Gleichung $\Omega f = 0$ in zwei Gleichungen vom Typus der LAPLACEschen Gleichung, von der man zum retardierten Potential übergehen kann; deshalb kann man in diesem Fall ohne Schwierigkeit das Problem des Lichtzentrums lösen.

Ist nämlich $b = c$, so erhält man

$$A_1 = 2 \quad , \quad A_2 = A_3 = \frac{a^2 + b^2}{ab}$$

und

$$\Omega f = \left[\frac{1}{a}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\right) + \frac{1}{b}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_4^2}\right)\right] \cdot \left[a\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\right) + b\left(\frac{\partial^2}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_4^2}\right)\right] f$$

$$= \left[b^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + a^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + a^2 \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\right] \left[b^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + b^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + b^2 \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\right].$$

Die Lösungen der Gleichung

$$\Omega f = 0$$

sind die Lösungen der Gleichungen

$$b^2 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right) - \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0 ,$$

$$b^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + a^2 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right) - \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0 ,$$

und die Lösungen der Gleichungen (5) und (6) vereinfachen sich in diesem Fall sehr.

Man kann die hier mögliche Zerlegung mit dem Zerfall der Wellenfläche in Kugel und Ellipsoid vergleichen [(23)].

Betrachten wir einmal die Wellenfläche für den allgemeinen Fall. Jeder Schnitt durch eine der Symmetrie– (oder Koordinaten–) ebenen zerfällt in einen Kreis und eine Ellipse. Diesem Zerfall entspricht eine analoge Zerlegung der Gleichung (7), wenn man zylindrische Wellen parallel zu den Koordinatenachsen betrachtet. Setzen wir nämlich voraus, dass f von x_4 unabhängig ist, so erhält Gleichung (7) die Gestalt

$$0 = \Omega f \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{b}{c}\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{a}{c}\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{c}{b}\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{c}{a}\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\right) f$$

$$= \left(b^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + a^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\right)\left(c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\right).$$

(23) Ich habe diese Frage in meiner Vorlesung über mathematische Physik an der Universität Rom i. J. 1901 behandelt.

Das Problem der Fortpflanzung zylindrischer Wellen parallel zu den Koordinatenachsen kann man daher restlos behandeln [24].

10. Einführung symmetrischer Gleichungen.

Bei den vorstehenden Betrachtungen haben wir gelegentlich t durch $x\sqrt{-1}$ ersetzt und auf diese Weise eine Symmetrie in den Gleichungen erzielt, die vorher nicht vorhanden war. Da sich hier Gelegenheit bietet, wollen wir ein paar Worte über die Einführung imaginärer Grössen in die mathematische Physik sagen, ohne auf irgendwelche Einzelheiten einzugehen, die uns gar zu weit ablenken könnten.

Man braucht gar nicht erst bis zu den Schwingungen in anisotropen Medien zu gehen, um ein dem angegebenen ähnliches Ergebnis zu finden. Die LAPLACEsche Gleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

nimmt die Form an

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \tag{11}$$

wenn man z durch it ersetzt.

Auch in der Potentialtheorie selbst ist es zuweilen nützlich, reelle Massen durch solche zu ersetzen, die sich in imaginären Punkten befinden und dasselbe Potential haben [25].

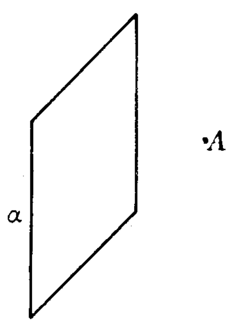


Fig. 4.

Ist A ein beliebiger Punkt und α eine beliebige Ebene (Fig. 4), so kann man Massen m und eine Doppelschicht μ in imaginären Gebieten von α finden mit demselben Potential wie die Masseneinheit in A.

Ist V die Potentialfunktion, die von Massen M herrührt, so findet man daher nach dem GAUSSschen Satz, dass der Wert von V im Punkt A dem Potential der Massen M auf die Massen m und die Doppelschicht μ gleich ist.

Auf solche Weise kann man, wenn man auf α den Wert von V und der normalen Ableitung von V kennt, den Wert von V in A finden und das allgemeine Integral der LAPLACEschen Gleichung berechnen, aus dem dann das allgemeine Integral der Gleichung (11) zu entnehmen ist.

Durch ein entsprechendes Verfahren kann man auch ein symmetrisches Potential berechnen, wenn man seine Werte auf der Symmetrieachse kennt,

(24) Vgl. die zweite Vorlesung, Kap. 18.

(25) V. VOLTERRA, *Esercizi di fisica matematica.* « Rivista di Mat. », **4**, 1. 1894. [In queste « Opere »: vol. secondo, IV, pp. 74–86].

ohne dass man auf die Entwicklung in Reihen zurückgeht. Ein interessantes Ergebnis findet man, wenn man das Prinzip der Abbildungen von der LAPLACEschen Gleichung auf die Gleichung (11) überträgt.

Dazu braucht man nur die durch das Linienelement

$$dx^2 + dy^2 + dz^2$$

bestimmte Metrik durch die andere zu ersetzen, die durch das Linienelement

$$dt^2 - dx^2 - dy^2$$

bestimmt wird.

Die Bilder in Bezug auf Kugeln werden zu Bildern in bezug auf gleichseitige Hyperboloide, und darauf kann man eine Theorie der Wellenlehre aufbauen [26].

11. TRANSFORMATION DER LORENTZSCHEN GLEICHUNGEN DURCH MINKOWSKI UND FOLGERUNGEN DARAUS.

Man verdankt MINKOWSKI eine Transformation der LORENTZschen Gleichungen der Elektrodynamik derart, dass durch Ersetzung von it durch x_4 den 8 Grundgleichungen eine symmetrische Gestalt gegeben wird [27].

Dadurch findet er das LORENTZsche Theorem der Relativität und — das liegt in diesen Betrachtungen — die analytische Grundlage für seine tiefgründigen Ansichten über Raum und Zeit.

Wir wollen ihm nicht auf dem analytischen Wege folgen, sondern vielmehr versuchen, seine Grundgedanken in fast anschaulicher Darstellung und in sehr elementarer Gestalt zu geben [28].

Wir wollen daher die Betrachtungen wieder aufnehmen, die wir soeben abgebrochen haben, und die uns sehr nützlich sein werden.

Man fasse das wurmförmige Wesen ins Auge, dessen zweidimensionale Welt die xt-Ebene ist; welche Änderung wird man vornehmen müssen, wenn sich der Beobachter selbst mit gleichförmiger Geschwindigkeit bewegt und die relative Bewegung beobachten will?

Augenscheinlich genügt es, nach den NEWTONschen Prinzipien die t-Achse in eine geneigte t'-Achse zu verwandeln und immer dieselbe x-Achse

(26) V. VOLTERRA, *Sull'applicazione del metodo delle imagini alle equazioni di tipo iperbolico.* « Atti del IV Congr. intern. dei Matematici ». Roma 1908. Bd. II, 90, 1909. [In questo vol.: XVI, pp. 265–268].

(27) Vgl. Anm. 17.

(28) Es gibt eine grosse Zahl elementarer Darstellungen dieser Theorie. Ich erwähne z. B. die von G. CASTELNUOVO, *Sulla evoluzione delle misure dello spazio e del tempo.* « Atti della Società Italiana per il progresso delle Scienze ». V. Riunione. Roma, Okt. 1911, S. 47. — Die vollständigte und umfassendste Darstellung der Relativitätstheorie findet sich in dem Buch: MAX LAUE, *Das Relativitätsprinzip*, 2. Auflage, Braunschweig 1913. (Sammlung « Wissenschaft », Bd. 38). Dort werden auch alle bisherigen Arbeiten über diesen Gegenstand zitiert.

beizubehalten. Tatsächlich wird ja jeder Punkt A, der dieselbe gleichförmige Geschwindigkeit besitzt, durch eine Parallele zur t'–Achse dargestellt und erscheint daher ruhend (Fig. 5). Andererseits bleiben die Gleichungen der NEWTONschen Mechanik ungeändert, wenn man die Koordinaten x und t in $x - at$ und t verwandelt; das entspricht nach den Sätzen der analytischen Geometrie einem Übergang vom xt–System zum xt'–System.

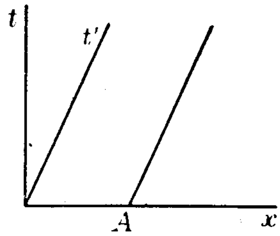


Fig. 5.

Man kann daher den Satz aussprechen: „Das NEWTONsche Relativitätsprinzip besteht in der Möglichkeit, vom xt–System zum xt'–System überzugehen, ohne dabei die Ausdrücke für die Gesetze der Mechanik zu ändern.“ Das hat statt für den Fall der zweidimensionalen MINKOWSKIschen Welt. Für den Fall der vierdimensionalen MINKOWSKIschen Welt lässt sich dasselbe Gesetz dahin aussprechen, dass man vom System x, y, z, t übergehen kann zum System x, y, z, t', d. h. die Gleichungen der NEWTONschen Mechanik sind invariant gegen die Gruppe von Transformationen $x - at$, $y - bt$, $z - ct$, t, wobei a, b, c drei beliebige Konstanten bezeichnen.

Wir wollen jetzt zur Ausbreitung des Lichts übergehen. Die Lichtgeschwindigkeit werde gleich 1 gesetzt. Wir zeichnen die Charakteristiken, von denen wir oben gesprochen haben, d. h., die durch den Anfangspunkt gehenden Winkelhalbierenden i, j, des Winkels zwischen x– und t–Achse (Fig. 6) und stellen das Postulat auf, dass die Geschwindigkeit des Lichts unveränderlich sei, auf welches System auch man immer sich beziehen möge.

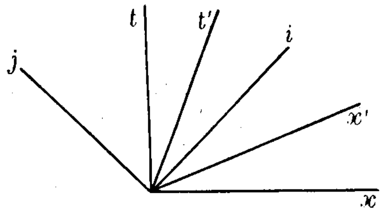


Fig. 6.

Es ist augenscheinlich, dass dieses Postulat im Widerspruch steht mit dem NEWTONschen Relativitätsprinzip, denn da i, j nicht die Winkel zwischen x– und t'–Achse halbieren, wird die Lichtgeschwindigkeit im neuen System einen andern Wert haben.

Wie muss man nun das NEWTONsche Relativitätsprinzip abändern, um diesen Widerspruch zu beseitigen?

Man ersieht sofort, dass man beim Übergang von der t'– zur t–Achse auch die x– in die x'–Achse verwandeln muss, damit die Geraden i, j immer die Gleichung haben

$$x' = \pm t'.$$

Betrachten wir nun ebenso das Flächenwesen und die dreidimensionale MINKOWSKIsche Welt. Wir zeichnen (Fig. 7) den charakteristischen Kegel, der die Gleichung hat

$$x^2 + y^2 - t^2 = 0.$$

Gehen wir von der t–Achse zu einer t'–Achse im Innern des Kegels über, so müssen wir zugleich auch die x– und die y–Achse derart in eine x'–bzw. y'–Achse verwandeln, dass die Gleichung des Kegels auch in Bezug auf die neuen Achsen die Gestalt behält

$$x'^2 + y'^2 - t'^2 = 0.$$

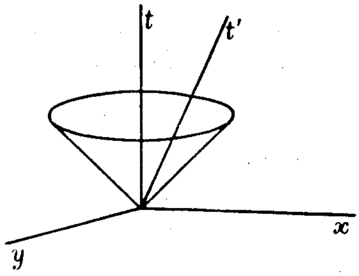


Fig. 7.

Gehen wir schliesslich zu den dreidimensionalen Wesen über, deren Welt vier Dimensionen hat, so haben wir eine derartige Transformation der Koordinaten und der Zeit vorzunehmen, dass die Gleichung

$$x^2 + y^2 + z^2 - t^2 = 0$$

übergeht in

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 - t'^2 = 0.$$

Wir haben also die NEWTONsche Transformationsgrupppe durch eine Gruppe von Transformationen zu ersetzen, die die quadratische Form

$$x^2 + y^2 + z^2 - t^2$$

in sich selbst überführt. Gegen diese Gruppe sind die LORENTZschen Gleichungen invariant.

Wir wollen zu dem einfacheren Fall zurückkehren. Wir zeichnen (Fig. 8) die Hyperbeln mit den Gleichungen

$$x^2 - t^2 = \pm 1.$$

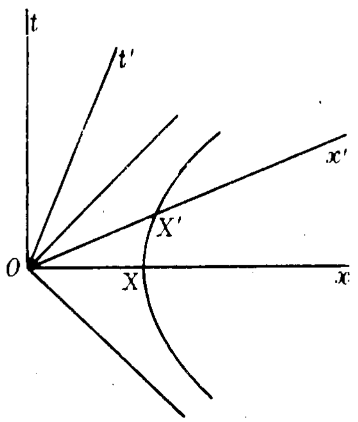


Fig. 8.

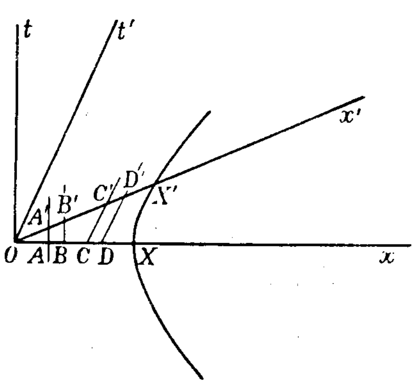


Fig. 9.

Die den verschiedenen Räumen x, x' entsprechenden Längeneinheiten sind die Abschnitte zwischen dem Anfangspunkt und der Kurve, d. h. OX, OX', · · ·

Wir wollen jetzt zwei Strecken AB, CD auf der x–Achse ins Auge fassen, von denen die erste in Ruhe sei (Fig. 9). Diese wird durch einen

Streifen parallel zur t–Achse dargestellt. Die zweite Strecke bewege sich gleichförmig, daher wird sie durch einen gegen die x–Achse geneigten Streifen dargestellt. Zum Vergleich der Längen muss man sich zwei Beobachter denken, deren jeder relativ zu der Strecke ruht, welche er ausmisst.

Für den ersten Beobachter ist t die Zeitachse, x die Raumachse, OX die Längeneinheit. Das Ergebnis seiner Messung ist daher die Masszahl AB/OX.

Für den zweiten Beobachter ist t' parallel zum Streifen CD die Zeitachse, x die Raumachse, OX′ die Längeneinheit. Als Resultat seiner Messung ergiebt sich daher C′D′/OX′.

Die beiden Strecken sind gleich, wenn AB/OX = C′D′/OX′ ist.

Hätte aber der erste Beobachter beide Messungen vorgenommen, so hätte er als Verhältnis der beiden Strecken gefunden

$$\frac{\mathrm{CD}}{\mathrm{AB}} = \sqrt{1 - a^2}\,,$$

wenn a die Bewegungsgeschwindigkeit der Strecke ist. Daraus ergibt sich als Folgerung die LORENTZ–Kontraktion bewegter Körper.

Durch die vorstehenden Betrachtungen werden wir auf die Frage nach der Gleichzeitigkeit von Ereignissen geführt. Es seien A, B, C Punkte, die in gleichförmiger Bewegung längs einer Geraden x begriffen seien.

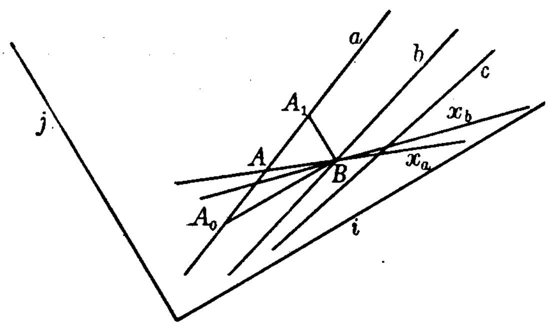


Fig. 10.

Die MINKOWSKIschen Abbilder in der zweidimensionalen Welt sind drei Gerade a, b, c. (Fig. 10).

Wir zeichnen die Charakteristiken i, j, die die Ausbreitung des Lichtes darstellen. Angenommen nun, jeder Beobachter besitze eine Uhr mit ganz gleichförmigem Gang. Um die Uhren zu regulieren, legen wir die Uhr des Beobachters A zugrunde. Wenn er sich zu der Zeit t_0 in A_0 befindet, gebe er ein Lichtsignal ab, das den zweiten Beobachter in B trifft. Dort wird das Signal des ersten Beobachters reflektiert und trifft diesen in A zur Zeit t_1. Die Geraden A_0B und BA_1 sind zu i bzw. j parallel.

Es werde nun das Übereinkommen getroffen, dass in dem Augenblick, wo der zweite Beobachter das Signal empfängt, die Uhr des B die Zeit $(t_0 + t_1)/2$ anzeigen soll.

Daher enthalten die Gerade AB und alle ihr parallelen Geraden „ Orte der Gleichzeitigkeit " in bezug auf die Uhr des A. Man sieht nun sehr leicht, dass die Gerade AB die Richtung der Raumachse angibt, wenn man a als Richtung der Zeitachse annimmt.

Daraus ist zu schliessen, dass, wenn man die Uhr des B den Messungen zugrunde legt, die Orte der Gleichzeitigkeit durch Geraden parallel zu x_b gebildet würden, d. h. zu der Raumachse, die einer in der Richtung b gewählten Zeitachse entspricht. Aber die Richtungen x_a und x_b fallen nicht zusammen, da der Winkel (x_a, x_b) gleich dem Winkel (a, b) ist. Daher sind solche Ereignisse, die in Bezug auf die erste Uhr gleichzeitig sind, in bezug auf die zweite Uhr nicht gleichzeitig. Man könnte so zwei ganz beliebige Ereignisse, die zwei Punkten A und B entsprechen, als gleichzeitig ansehen, vorausgesetzt nur, dass die Gerade AB um weniger als 45° gegen die x–Achse geneigt ist.

Wir haben von der LORENTZ–Transformation und der LORENTZ–Kontraktion gesprochen. Zum Schluss wollen wir noch die Beziehungen berühren, die zwischen dieser Transformation und den Fragen der Variationsrechnung bestehen, welche den Gegenstand eines Teils dieser Vorlesung gebildet haben.

Wir haben die Herleitung der elektrodynamischen Gleichungen aus den Aufgaben der Variationsrechnung für den Fall ruhender Systeme gezeigt. Aber LORENTZ hat gezeigt, dass man für den Fall bewegter Körper ein ähnliches Ergebnis erhalten kann; POINCARÉ (29) ist darauf zurückgekommen und hat bewiesen, dass die LORENTZ–Transformation die Eigenschaft hat, den Ausdruck, der bei den Aufgaben der Variationsrechnung unter dem Integral erscheint, unverändert zu erhalten; d. h., die sogenannte „ Wirkung " ändert sich bei einer LORENTZ–Transformation nicht. So liefert das Prinzip der kleinsten Wirkung die Erklärung für den Erfolg jener Transformation.

Zweite Vorlesung.

12. EINLEITUNG.

Es wäre interessant, eine allgemeine vergleichende Geschichte der Forschungen der mathematischen Physik entwickeln zu können, d. h. eine Geschichte des Ursprungs und der Entwicklung der verschiedenen Gedanken, die in diesem Zweig der Wissenschaft einander gefolgt sind. Wir besitzen geschichtliche Darstellungen, die grossen wissenschaftlichen und philosophischen Wert haben; aber sie beziehen sich im allgemeinen auf irgend ein spezielles Kapitel.

Der berühmte Verfasser der „Mechanik in ihrer Entwicklung ", E. MACH, der ausgezeichnete Philosoph, der mächtig zur modernen Entwicklung der Philosophie der Wissenschaften beigetragen hat, hat uns Abhandlungen geschenkt, die das grösste Interesse besitzen.

(29) H. POINCARÉ, *Sur la dynamique de l'électron.* «Circ. mat. Pal.», **21**, 129, 1906.

TODHUNTER und PEARSON haben eine sehr wertvolle Geschichte der Untersuchungen über die Elastizität veröffentlicht, in der die Fortschritte dieser Theorie mit grösster Sorgfalt und Ausführlichkeit klargelegt werden, und auch andre Schriftsteller haben einzelne Punkte beleuchtet; aber im ganzen bliebe doch meiner Meinung nach noch viel zu sagen.

Es wäre lehrreich, den nimmer ruhenden Kampf zu verfolgen zwischen den Emissions- und den Undulationstheorien, zwischen den atomistischen und den antikorpuskularen Theorien, zwischen den mechanischen Erklärungen der Erscheinungen und den empirischen Theorien, und es wäre nützlich, die Stellung zu untersuchen, die die verschiedenen Geister gegenüber der Frage der Fernwirkung und der Nahewirkung eingenommen haben.

Der Krieg gegen die „mechanische Mythologie", die Entstehung und die Wandlungen der Energetik sind Merksteine auf dem Wege wissenschaftlichen Fortschritts, die man mit grossem Gewinn einer nochmaligen Betrachtung unterziehen könnte. Solche Studien würden den Geist der verschiedenen Schulen, man könnte sagen, der einzelnen Rassen klar und scharf hervortreten lassen. Man würde endlich noch erkennen, wie sich manchmal daneben, manchmal vorauseilend und am häufigsten hinterher die mathematische Analysis allmählich entwickelt. Aber hierzu mangelt uns die Zeit, und es wäre für mich zu schwierig, selbst nur im Abriss ein Bild von diesen geistigen Strömungen zu geben die seit mehr als einem Jahrhundert mit so grossem Erfolg zur Förderung des wissenschaftlichen Geistes und zu zahlreichen praktischen Anwendungen beigetragen haben.

Ich werde mich bei diesen Vorlesungen in engen Grenzen halten und nur einen besondern Zweig ins Auge fassen, und auch diesen nur von einem bestimmten Gesichtspunkt aus.

Ich werde mich darauf beschränken, einige Punkte aus der Entwicklung der Elastizitätstheorie zu behandeln, die aber doch sehr treffende Beispiele für einige der eben erwähnten Fragen abgeben können.

Zugleich werde ich einerseits an die vorhergehende Vorlesung anknüpfen, weil gerade die Elastizitätstheorie eine Zeitlang die Wellentheorie beherrscht hat, und andrerseits wird das, was ich sagen will, eine Einleitung in die folgende Vorlesung sein, teils in Bezug auf die analytischen Methoden, teils in Bezug auf die physikalischen Gedanken, die dem Ganzen zugrunde liegen.

Ich habe soeben von dem grossen Werk von TODHUNTER und PEARSON gesprochen. Mein kurzer Abriss wird zwar nichts mit dieser ins Einzelne gehenden Geschichte zu tun haben; aber andrerseits sind bei der Anlage jenes Werkes die neuesten Arbeiten nicht berücksichtigt, und gerade mit diesen will ich mich heute hauptsächlich beschäftigen.

13. ALTE UND NEUE PROBLEME DER ELASTIZITÄTSTHEORIE.

Seit GALILEI, der zum erstenmal die Frage nach der Biegung eines Balkens gestellt hat, hat man immer versucht, die Mathematik auf die Probleme der Elastizität anzuwenden.

Man hatte dabei keine theoretischen Fragen im Auge und war weit entfernt von dem Gedanken, auf diese Weise die Grundlagen der modernen Optik vorzubereiten; man war durch praktische Fragen, die das Gebiet der Baukunst betrafen, auf diese Aufgaben geführt worden.

Nach sehr vielen Versuchen ist es gelungen, die allgemeinen Gleichungen für das Gleichgewicht und die Bewegung elastischer Körper aufzustellen. Das sogenannte HOOKEsche Gesetz ist die Grundlage gewesen, aber man hat den ursprünglichen Ausdruck dafür erst umformen müssen, um es auf den allgemeinen Fall anwenden zu können. Wir werden dieses Gesetz in der nächsten Vorlesung näher kennen lernen.

Wir wollen uns jetzt auf die Feststellung beschränken, dass das Verdienst, eine allgemeine Gleichung gewonnen zu haben, NAVIER gebührt, aber man muss zu seinem Namen noch die Namen von LAMÉ, CAUCHY, POISSON, GREEN u. a. m. hinzufügen.

Ich möchte noch bemerken, dass diese Forscher Gleichungen aufgestellt haben, die in erster Annäherung ganz allgemein allen Problemen entsprechen, die sich überhaupt darbieten können, und das hängt wieder, wie schon in der ersten Vorlesung gesagt, mit dem philosophischen Geist zusammen, der schon in der klassischen Mechanik herrschte.

Jeder kennt den Unterschied, den POISSON zwischen der analytischen und der physikalischen Mechanik gemacht hat, welche er jener gegenüberstellte. Die von LAGRANGE eingeführten Zwangskräfte herrschen in jener; die Spannungen sind von diesem Standpunkt aus Zwangskräfte. Demgegenüber sind sie nach POISSON das Ergebnis molekularer Wirkungen. Die Materie ist kontinuierlich für die analytische Mechanik, für die physikalische Mechanik ist sie diskontinuierlich und aus Teilchen zusammengesetzt.

LAPLACE hat den Vorschlag gemacht, die verschiedenen Theorien auf der Grundlage der Molekularhypothese und der Fernwirkung aufzubauen, und POISSON hat diesen Grundgedanken ausgeführt.

Man kann sich der Erkenntnis nicht verschliessen, dass die Elastizitätstheorie aus diesen erwähnten Theorien zuerst hervorgegangen ist. Tatsächlich sind NAVIER und seine Nachfolger von Molekularhypothesen ausgegangen, und durch Grenzübergang und Ersetzung der Summen durch Integrale sind sie zu den Differentialgleichungen gelangt. Erst später hat man die Methoden der analytischen Mechanik und der Energetik angewandt, um die allgemeinen Elastizitätsgleichungen zu erhalten.

POISSON und CAUCHY nahmen an, dass die wirkenden Kräfte Zentralkräfte seien. Auf Grund dieser Annahme kommt man, wie wohl bekannt ist, zu Ergebnissen, die mit den Beobachtungen in Widerspruch stehen. Will man daher die Methoden der physikalischen Mechanik befolgen, so muss man die Hypothese der Zentralkräfte aufgeben und annehmen, dass die inneren Kräfte von der Stellung der Molekeln abhängen. Auf diese Weise kann man dasselbe Ergebnis erhalten wie bei Zugrundelegung der Hypothese der kontinuierlichen Raumerfüllung und bei Anwendung der allgemeinen Grundsätze der Energetik.

Man hat auch Versuche gemacht, die Hypothese der Zentralkräfte mit den Ergebnissen der Beobachtung in Einklang zu setzen, und zwar dadurch, dass man die Bewegung der Molekeln berücksichtigte; aber ich will darauf nicht weiter eingehen. Im Anschluss an die Auseinandersetzung in der ersten Vorlesung muss ich hinzufügen, dass, wenn man die Fernwirkungen durch elastische Wirkungen zwischen benachbarten Teilchen zu erklären sucht, wie es MAXWELL getan hat, man vom ersten Augenblick an die Elastizitätstheorie auf den Methoden der analytischen Mechanik aufbauen muss, weil sonst die Fernwirkung, die auf der einen Seite beseitigt wird, auf der andern wiederescheinen würde.

14. ELASTIZITÄT UND RAUMKRÜMMUNG.

Ich habe vom HOOKEschen Gesetz gesprochen. Dieses Gesetz führt auf eine lineare Beziehung zwischen der Deformation und der Spannung, und darauf beruht der ganze analytische Erfolg der Elastizitätstheorie. Es ist, wie wir sehen werden, gelungen, die Differentialgleichungen in Integralgleichungen überzuführen, und in einigen Fällen ist man dadurch zu Ergebnissen von grosser Wichtigkeit gelangt. Auch die so gefundenen Integralgleichungen sind linear.

Aber das HOOKEsche Gesetz ist nur ein Annäherungsgesetz. Über diesen Punkt werden wir in der folgenden Vorlesung ausführlicher sprechen. Vorläufig kann man darüber Folgendes sagen: Versucht man, sich von den Gliedern höherer Ordnung Rechenschaft abzulegen, d. h. setzt man voraus, dass zwischen Deformation und Spannung keine einfache lineare, sondern eine verwickeltere Beziehung besteht, so sind die Differentialgleichungen nicht mehr linear, und die klassischen analytischen Methoden können nicht mehr unmittelbar angewandt werden.

Ich habe in der vorhergehenden Vorlesung von der Transformation der Elastizitätsgleichungen gesprochen und habe gesagt, man könne sogar annehmen, dass der Raum ein von Null verschiedenes Krümmungsmass habe.

Man braucht dazu nur die Bedingungen wegzulassen, denen die Koeffizienten des Quadrats des Linienelements genügen müssen, damit der Raum euklidisch sei. BELTRAMI, CESÀRO, PADOVA und andere Geometer haben die Frage in dieser Art angefasst (30).

Man hoffte, von hier aus durch Vergleich der Beobachtungen einiger Erscheinungen mit den Ergebnissen der Rechnung Aufschluss über das Krümmungsmass unseres Raumes zu gewinnen. Dieses Problem war das Hauptziel, das sich BELTRAMI im letzten Teil seiner wissenschaftlichen Laufbahn gesteckt hatte. Deshalb hat er die Theorie mehrerer physikalischer Erscheinungen in gekrümmten Räumen aufgestellt. Indes hat man daraus irgend ein positives Ergebnis nicht gewinnen können. KLEIN hat in Bezug

(30) Vgl. Anm. (6).

hierauf die Bemerkung gemacht, dass, wenn unser Raum wirklich eine Krümmung besässe, diese so klein sein würde, dass die den gewöhnlichen Elastizitätsgleichungen hinzuzufügenden Korrektionsglieder höchst wahrscheinlich von den Gliedern völlig verdeckt werden würden, die man vernachlassigt, um die Gleichungen linear zu machen. Immerhin haben die Versuche BELTRAMIS, eine mathematische Physik für Medien mit Raumkrümmung aufzustellen, ein Interesse, das über die blosse analytische Merkwürdigkeit hinausgeht. Vielleicht liegen darin Geheimnisse der Natur verborgen.

15. METHODEN ZUR INTEGRATION DER DIFFERENTIALGLEICHUNGEN.

Wir wollen jetzt zu der Frage nach der Integration der Elastizitätsgleichungen übergehen, mit der wir uns eingehend beschäftigen werden. Zunächst müssen wir einige Unterscheidungen treffen. Auf die eine Seite haben wir die Probleme des Gleichgewichts zu stellen, auf die andere die der Bewegung. Die Differentialgleichungen, die man in den beiden Fällen findet, gehören verschiedenen Typen an. Die ersten gehören zum elliptischen, die andern zum hyperbolischen Typus. Um an Beispielen den Unterschied zwischen den beiden Typen zu zeigen, betrachte ich die LAPLACEsche Gleichung, die elliptischen Typus hat,

$$\Delta^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

und die Gleichung der verzögerten Potentiale dreier Variabeln, die vom hyperbolischen Typus ist,

$$\Box u = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 .$$

Wir haben schon in der vorigen Vorlesung gesehen, dass man von dem einen Typus zum andern dadurch übergehen kann, dass man die Zeit als imaginäre Koordinate ansieht.

Im Hinblick auf die funktionalen Eigenschaften bestehen die wesentlichen Merkmale der beiden Typen in Folgendem: Im ersten (elliptischen) Fall bestimmen die Werte von u auf der Umrandung eines gewissen Feldes die Werte im Innern, und eine Unstetigkeit oder Singularität auf dem Rande pflanzt sich nicht ins Innere fort. Im zweiten Fall muss der durch die Variabeln x, y, t bestimmte Raum in Bezug auf jeden inneren Punkt A durch denjenigen charakteristischen Kegel in drei Bezirke I, II, III geteilt werden, der seine Spitze in A hat (Fig. 11). Zeichnet man eine Fläche, für die A ein innerer Punkt ist, so wird diese durch den Kegel in drei Teile 1, 2, 3 geteilt. Der Wert von u im Scheitel des Kegels kann aus den

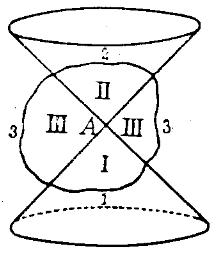


Fig. 11.

Werten von u und seinen Ableitungen auf einem der drei Teile 1, 2, 3 berechnet werden (31).

Ausserdem pflanzen sich Singularitäten auf der Oberfläche ins Innere fort.

Diese Eigenschaften bleiben erhalten, wenn man von den betrachteten einfachen Gleichungen zu den Gleichungssystemen übergeht, welche die Gesetze des Gleichgewichts und der Bewegung elastischer Körper angeben.

Was die allgemeinen Methoden zur Integration der Differentialgleichungen anbetrifft, so kann man sie in zwei grosse Klassen einordnen: solche, die sich mehr oder weniger unmittelbar dem Grundgedanken von GREEN anschliessen, und die der einfachen Lösungen, die von FOURIER stammen.

Man kann die ersten Methoden unterscheiden in reine Methoden, bei denen der unveränderte GREENsche Gedankengang allein hinreichend ist, und in solche Methoden, bei denen der ursprüngliche GREENsche Gedanke durch die offene oder versteckte (KIRCHHOFF) Einführung eines neuen Gedankens weiter entwickelt worden ist, nämlich durch die Einführung der Charakteristiken. Jene Methoden werden für die elliptischen, diese für die hyperbolischen Gleichungen benutzt.

Es ist schliesslich noch hinzuzufügen, dass in letzter Zeit alle diese Methoden durch die Verwendung der Integralgleichungen einen neuen Aufschwung gewonnen haben. Der Übertragungsgedanke ist Ursache dafür gewesen, dass diese Methoden auch auf ein neues Gebiet übertragen worden sind, von dem in der letzten Vorlesung die Rede sein soll.

16. ENTWICKLUNG DER GREENSCHEN METHODE.

Wir wollen uns zunächst an die GREENsche Methode halten und ihre Entwicklung verfolgen. Ich will mit ein paar Worten die aufeinanderfolgenden Hauptpunkte der Entwicklung beschreiben. Zuerst hatte man die reine, auf die LAPLACEsche Gleichung angewandte GREENsche Methode.

Zwei beliebige reguläre Funktionen, die der Gleichung $\Delta^2 u = 0$ genügen, erfüllen ein allgemeines Reziprozitätsgesetz. Nimmt man eine dieser Funktionen gleich der Fundamentallösung $1/r$, wobei r die Entfernung zwischen einem festen und einem veränderlichen Punkt ist, so gelingt es, eine harmonische Funktion im Innern eines Feldes zu bestimmen, sobald man auf der Umrandung die Werte der Funktion und ihrer normalen Ableitungen kennt. Die letzteren verschwinden bei Einführung der GREENschen Funktion.

Der nächste Schritt, der mit einem Schlage die GREENsche Methode erweitert und die Fruchtbarkeit seines Gedankens in ganz neuem Lichte gezeigt hat, stammt von BETTI. Er hat nämlich die GREENsche Methode auf ein elastisches Feld übertragen bei dem man nicht mehr eine einzelne

(31) V. VOLTERRA, *Sur les vibrations des corps élastiques isotropes*. «Acta Math.», **18**, 161, 1894. [In queste «Opere»: vol. secondo, III, pp. 19-73].

Differentialgleichung, sondern ein System von Differentialgleichungen hat [32]. BETTI hat zuerst das Reziprozitätstheorem durch folgenden Satz erweitert:

„Wenn zwei Systeme von äusseren Kräften zwei Systeme von Verschiebungen an einem elastischen Körper bestimmen, so ist die Arbeit, welche das erste Kraftsystem leistet, wenn es dem Körper die zweite Verschiebung erteilt, gleich der Arbeit, die das zweite Kraftsystem bei Eintritt der ersten Verschiebung an dem Körper leistet".

Nachdem dieser Satz entdeckt war, hatte man ihn zur Bestimmung der Werte der Verschiebungen im Innern des Körpers anzuwenden, wenn auf der Umrandung die Werte der Verschiebungen selbst oder die Spannungen gegeben und die inneren Massenkräfte bekannt waren.

Zwei Wege boten sich zur Lösung dieser Aufgabe für den Fall isotroper Körper dar; den einen hat BETTI zuerst eingeschlagen, den andern hat SOMIGLIANA später betreten. BETTI eliminierte zunächst die Massenkräfte, was keine Schwierigkeit bot. Er hat dann vier Fundamentallösungen berechnet, die ihm zur Bestimmung der Dilatation und der drei Rotationskomponenten jedes Teilchens des elastischen Mediums als Funktionen der Verschiebungen und der Spannungen an der Umrandung gedient haben. Er hat dann gezeigt, dass man von hier aus die inneren Verschiebungen finden kann.

Obschon dieses Verfahren einfach ist, so ist es doch nicht unmittelbar zu nennen. SOMIGLIANA hat dem gegenüber einen unmittelbaren Weg eingeschlagen; er hat nämlich Fundamentallösungen bestimmt, die ihm unter Anwendung des Reziprozitätsgesetzes zur Bestimmung der Verschiebungen ohne den Umweg über die Dilatation und die Rotationen gedient haben [33].

Es hat keine Schwierigkeit, zwischen den Ergebnissen von BETTI und denen von SOMIGLIANA die Brücke zu schlagen und zu zeigen, dass sich die einen aus den andern herleiten lassen.

Eine andere, ganz ähnliche Erweiterung der GREENschen Methode, die an ein sehr modernes Problem anknüpft, bezieht sich auf die verallgemeinerte LAPLACEsche Gleichung, d. h. auf die Gleichung $\Delta^2 \Delta^2 = 0$ und allgemein $\Delta^2 \Delta^2 \cdots \Delta^2 = 0$.

Wir werden in kurzem die Wichtigkeit dieses Problems kennen lernen.

Wir haben schon gesagt, dass durch die Auffindung der GREENschen Formel zur Lösung der LAPLACEschen Gleichung das Problem der Bestimmung einer harmonischen Funktion bei gegebenen Randwerten noch nicht gelöst ist. Die GREENsche Formel löst das Problem, wenn auf der Umrandung die Werte der Funktion und der normalen Ableitung bekannt sind. Die letzteren werden, wie schon gesagt, durch die GREENsche Funktion eliminiert. Ebenso werden im Elastizitätsprobleme die Werte der Verschiebungen oder

(32) E. BETTI, *Teoria della elasticità.* «Nuovo Cimento» (2), **7–8**, 5; 69; 158; 357. 1872; **9**, 34; **10**, 58, 1873.

(33) C. SOMIGLIANA, *Sulle equazioni della elasticità.* «Annali di Mat.» (2), **17**, 37, 1889/90.

die Drucke an der Umrandung durch entsprechende Funktionen eliminiert. Ihre Bestimmung lässt sich vollständig vornehmen für den Fall der Kugel und, wenn man das zweidimensionale Problem betrachtet, für den Fall des Kreises. Deshalb nehmen das Problem der Kugel und das des Kreises im Felde dieser Fragen eine bevorzugte Stellung ein. Die Fälle der Eben und der Geraden können als Grenzfälle angesehen werden. Dasselbe lässt sich für den Fall der verallgemeinerten LAPLACEschen Gleichung wiederholen.

17. UNTERSUCHUNGEN VON KIRCHHOFF, HUYGENS UND POISSON.

Wir wollen jetzt zu den Anwendungen der GREENschen Methode auf die Gleichungen vom hyperbolischen Typus übergehen und uns zuerst an die Arbeiten von KIRCHHOFF [34] halten.

Der Fall, den er behandelt hat, ist der der Gleichung

$$\Box u = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0,$$

d. h. der Fall des verzögerten Potentials mit 4 Variabeln.

Der Raum, mit dem er es zu tun hat, ist ein vierdimensionaler Raum, der, wie wir in der ersten Vorlesung gesehen haben, die MINKOWSKIsche Welt bildet; aber bei seiner Methode treten die auf die Überwelt bezüglichen Betrachtungen nicht als solche hervor. Er beginnt mit dem Reziprozitätssatz und nimmt darauf als Fundamentallösung die EULERsche Lösung, die die Form $f(r+t)/r$ hat. Von hier aus gelangt er zum Ziele, so dass seine Methode deswegen erfolgreich ist, weil dieses Integral besteht. Wie in der ersten Vorlesung bemerkt, ist die Existenz dieses Integrals mit der Tatsache verknüpft, dass die Kugelwelle für den Fall eines isotropen dreidimensionalen Mediums eine Welle ohne Residuum ist.

Die KIRCHHOFFsche Formel hat den Schlüssel zum HUYGENSschen Prinzip gegeben. Zwar wurde dieses Prinzip auch vor KIRCHHOFF angewandt, aber man verband keinen ganz exakte Begriff damit. Tatsächlich haben auch die Erörterungen und Streitigkeiten über dieses Prinzip erst nach der Entdeckung jener Formel aufgehört.

Bei dieser Gelegenheit ist es interessant, auf eine Frage zurückzukommen, über die ein heftiger Streit zwischen FRESNEL und POISSON geführt worden ist. Wir wollen sogleich mit einigen Worten darauf eingehen. Zuvor aber müssen wir von einer berühmten, von POISSON entdeckten Formel sprechen. Wenn der betrachtete Raum sphärisch ist und der Pol sich im Mittelpunkte der Kugel befindet, so führt die GREENsche Formel auf einen wohlbekannten Satz von GAUSS, welcher besagt, dass für jede harmonische Funktion der Wert im Mittelpunkte der Kugel gleich dem Mittel aus ihren

(34) G. KIRCHHOFF, *Zur Theorie der Lichtstrahlen.* « Sitz.-Ber, d. Akad. d. Wiss. », zu Berlin 1882 (2 Sem.), S. 641.

Werten auf der Kugeloberfläche ist. Wenden wir ebenso die KIRCHHOFFsche Formel auf den Fall einer Kugel an, und befindet sich der Pol im Mittelpunkte, so erhalten wir das allgemeine Integral der Gleichung $\square u = 0$, das POISSON längst vor der KIRCHHOFFschen Formel gegeben hatte [35]. POISSON hat dieses Integral nach ganz anderen Methoden erhalten, Methoden, die man heute fast ganz aufgegeben hat, die aber doch ein grosses Interesse besitzen; denn sie sind ausserordentlich fruchtbar gewesen und haben ihm die Integration einer grossen Zahl von Differentialgleichungen ermöglicht. Die POISSONsche Methode bestand darin, dass er das allgemeine Integral der Gleichung $\square u = 0$ in eine Reihe von Potenzen von t entwickelte und darauf die Reihe durch bestimmte Integrale summierte. Will man heutzutage das POISSONsche Integral erhalten, so kann man unmittelbar aufs Ziel losgehen ohne den Umweg über die KIRCHHOFFsche Formel, und es ist auch ebensowenig nötig, POISSON zu folgen. Die neueren Abhandlungen geben tatsächlich sehr elegante und sehr einfache Methoden, durch die alles auf die Aufsuchung des d'ALEMBERTschen Integrals der Gleichung für schwingende Saiten zurückgeführt wird. Alles, was mit der Gleichung $\square u = 0$ in Beziehung steht, ist in dem POISSONschen Integral enthalten, und wenn man darin zu lesen versteht, so sieht man darin selbst ganz klar und deutlich das HUYGENSsche Prinzip in seiner vollen Allgemeinheit erscheinen.

Das hat BELTRAMI [36] in einer seiner schönen Abhandlungen gezeigt; er hat dort bewiesen, dass POISSON vom analytischen Standpunkte aus alles besass, was nötig war, um in den Geist jenes Prinzips einzudringen.

POISSON selbst dagegen glaubte nicht daran, wie sein Streit mit FRESNEL beweist, der in ausgedehntem Masse das HUYGENSsche Prinzip in intuitiver Weise anwandte, ohne dafür einem vollständigen Beweis zu haben, wenn schon er es in klarer und treffender Darstellung rechtfertigte.

Das ist ein Beispiel dafür, dass das geistige Auge des Physikers durch die unmittelbare, nicht auf Beweis beruhende Erkenntnis der Erscheinungen weiter reicht als das des Mathematikers. Aber solche Intuition kann auch gefährlich sein.

Tatsächlich würde man in Irrtum verfallen, wenn man die gleichen intuitiven Betrachtungen auf die entsprechende Gleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

anwenden wollte. Wie wir in der ersten Vorlesung gezeigt haben, besitzt in diesem Falle die Welle Residuen, und das HUYGENSsche Prinzip gilt nicht, wenigstens nicht in der klassischen Form, wie HUYGENS es ausgesprochen hat.

(35) POISSON, *Sur l'intégration de quelques équations linéaires aux différences partielles, et particulièrement de l'équation générale du mouvement des fluides élastiques.* « Mém. de l'Acad. des Sc. de l'Institut de France ». **3**, 121, 1818.

(36) E. BELTRAMI, *Sul principio di Huygens.* « Rend. Ist. Lombardo » (2). **22**, 428. 1889.

18. Die Charakteristiken.

Wollen wir die Entwicklung der Grundvorstellungen von GREEN weiter verfolgen, so müssen wir von der Gleichung $\square u = 0$ mit vier Variabeln zu der Gleichung mit drei Variabeln übergehen. Dieser Übergang stellt, wie er auch immer auf den ersten Anblick scheinen möge, einen Schritt vorwärts dar, denn der Fall dreier Variabeln ist schwieriger als der Fall von vier Variablen.

Die GREENsche Methode könnte, so wie sie KIRCHHOFF für die hyperbolischen Gleichungen umgestaltet hat, auch auf die Gleichung mit drei Variabeln

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

angewandt werden, aber man müsste ein Fundamentalintegral finden, dessen Natur von dem von KIRCHHOFF verwandten EULERschen Integral gänzlich verschieden ist.

Das Integral, das an die Stelle des EULERschen treten muss, ist dadurch komplizierter als dieses, dass es bestimmte Integrale enthält. Ich will das Endergebnis aussprechen, das man auf diesem Wege findet [37].

Fassen wir die dreidimensionale MINKOWSKIsche Welt ins Auge und betrachten wir einen beliebigen Zylinder, dessen Erzeugende parallel zur t-Achse sind (Fig. 12). Wir nehmen einen Punkt im Innern des Zylinders und zeichnen den charakteristischen Kegel, dessen Mantel den Zylinder längs einer Linie s schneidet. Man kann den Wert des Integrals für den Scheitel des Kegels durch die Werte ausdrücken, die des Integral und seine normale Abgeleitete auf dem Teil der Zylinderoberfläche von der Linie s bis ins Unendliche besitzt.

Andererseits haben wir soeben von dem allgemeinen POISSONschen Integral gesprochen. Man kann es durch die Annahme spezialisieren, dass es unabhängig von z sei.

Es gibt alsdann das allgemeine Integral der Gleichung $\square u = 0$ mit drei Variabeln an und wird PARSEVALsches Integral genannt. Betrachten wir die dreidimensionale MINKOWSKIsche Welt und den charakteristischen Kegel eines Punktes (Fig. 13). Der Kegel schneidet die xy-Ebene in einem Kreise. Die PARSEVALsche Formel liefert den Wert des Integrals im Scheitel des Kegels ausgedrückt durch die Werte, die das Integral selbst und seine normale Abgeleitete auf dem Kreise besitzt.

Bei Vereinigung der beiden Formeln wird man auf die Aufgabe geführt, das Integral zu bestimmen, wenn man den Wert des Integrals selbst und den seiner normalen Ableitung auf einer durch den Kegel begrenzten Fläche

(37) V. VOLTERRA, *Sulle vibrazioni luminose nei mezzi isotropi.* « Rend. Acc. dei Lincei » (5) 1 (2 Sem.), 161, 1892. [In queste « Opere »: vol. primo, XXXIV, pp. 559-567]. (Vgl. Anm. 19).

σ kennt, die aus einem zylindrischen und einem ebenen Teile besteht (Fig. 14), oder die ganz allgemein irgendwie gestaltet ist (Fig. 15).

Zur Lösung dieser Aufgabe ist die reine GREENsche Methode ebenso unzureichend wie die GREEN–KIRCHHOFFsche. Ich habe da zu anderen

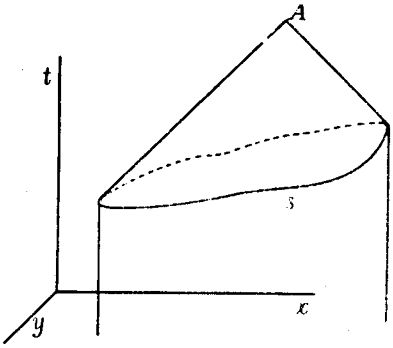


Fig. 12.

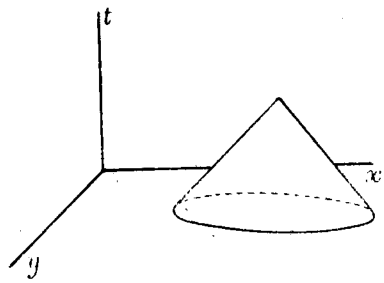


Fig. 13.

Methoden greifen müssen, d. h. ich habe von vornherein die Hauptrolle dem charakteristischen Kegel zugewiesen, der in den Ergebnissen hervortrat, ohne in den Rechnungen zu erscheinen [38]. Um nun dem charakteristischen Kegel diese grundlegende Bedeutung zuzuteilen, war es zweckmässig, sich den von RIEMANN im Fall zweier Variabeln angewandten Methoden anzunähern.

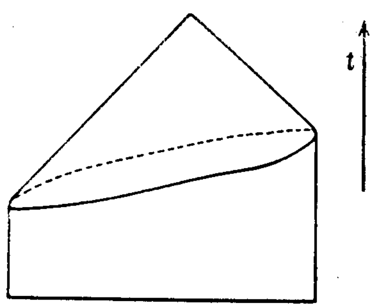


Fig. 14.

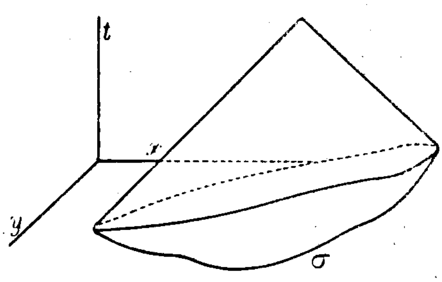


Fig. 15.

Die Methode der Charakteristiken, von der wir eben gesprochen haben, stellt die letzte Phase in der Entwicklung des ursprünglichen Gedankens dar. Man muss auch bei dieser Methode einen Reziprozitätssatz verwenden und sich einer Lösung bedienen, die die Rolle der Fundamentallösung spielt.

(38) V. VOLTERRA, « Rend. Linc. » (5), **1**, 265 (1892) und **2**, 389, 549, 1893 [in queste « Opere »: vol. primo, XXXV, pp. 568–579 e vol. secondo, I–II, pp. 1–18]; « Acta math. », **18**, 161, 1894 [in queste « Opere »: vol. secondo, III, pp. 19–73]; *Leçons sur l'intégration des équations diff.* gehalten in Stockholm 1912, 8. Vorl. [In questo vol.; X, pp. 63–141].

Für den Fall der Gleichung $\square\, u = 0$ mit drei Variabeln wird die Lösung so gewählt, dass in der Reziprozitätsformel alle über die charakteristische Fläche erstreckten Glieder verschwinden, und dass nur ein über σ und ein über die Parallele zur t-Achse durch den Kegelscheitel erstrecktes Integral übrig bleibt.

Das zweite der beiden Integrale schafft man durch Differentiation weg, und der Wert im Scheitel erscheint am Schluss der Rechnung [39].

HADAMARD hat dieses Verfahren umgestaltet. Er macht von einer Funktion Gebrauch, die bei unmittelbarer Anwendung auf unendliche Ausdrücke führen würde. Aber es ist ihm geglückt, diese auf sehr geschickte und sehr elegante Weise durch einen von ihm entdeckten Kunstgriff zum Verschwinden zu bringen [40].

19. Untersuchungen von Tedone, Love und Somigliana über Schwingungen elastischer Körper.

Die eben auseinandergesetzten Verfahren beziehen sich auf den Fall der Gleichung für das verzögerte Potential; will man aber das vollständige Problem ins Auge fassen, das sich in der Elastizitätslehre darbietet, so muss man auch die Systeme der Differentialgleichungen in Betracht ziehen, die die Gesetze für die Schwingungen elastischer Körper enthalten. Es ist daher nötig, einen ähnlichen Übergang zu machen, wie ihn BETTI vorgenommen hat, als er die GREENsche Methode von der LAPLACEschen Gleichung auf das System der Gleichungen für das Gleichgewicht elastischer Körper übertrug. Für den Fall ebener Systeme, für die die MINKOWSKIsche Welt dreidimensional ist, ist der Hauptweg immer durch die Methode der Charakteristiken vorgezeichnet. Aber in dem Fall, dass die MINKOWSKIsche Welt vierdimensional ist, ist es nicht nötig, diese Methode anzuwenden. Wollte man sie befolgen, so würde man sich unnötige Mühe machen.

Ich will den Grund dafür aufzeigen und dazu für einen Augenblick annehmen, dass wir die KIRCHHOFFsche Formel nach der Methode der Charakteristiken finden wollten. Für eine intuitive Behandlung genügt es, Fig. 15 vorzunehmen und sie dadurch in einen vierdimensionalen Raum zu versetzen, dass man allen ihren Teilen eine Dimension zufügt.

Bei diesem Übergang wird nun die Betrachtung von σ zwecklos, denn der Integralwert für den Kegelscheitel hängt nur von den Werten ab, die das Integral uns seine Ableitungen auf dem der Linie s entsprechenden Schnitt annehmen. Darum ist es nicht notwendig, ein Verfahren anzuwenden, bei dem σ und S in Betracht gezogen werden.

TEDONE hat gezeigt, dass σ tatsächlich herausfällt, und zwar dadurch, dass er die KIRCHHOFFsche Formel nach der Methode der Charakteristiken

(39) Die so gefundene Formel umfasst alle früheren. Vgl. D'ADHÉMAR, « Journ. de Math. » (5), **10**, 131, 1094.

(40) J. HADAMARD, « Acta Math. », **31**, 333, 1908.

allgemein mehrfach zusammenhängend ist. Die Ursache dieses Unterschieds liegt in Folgendem.

Wenn keine Wirbel vorhanden sind, so gibt es ein Geschwindigkeitspotential. Nun kann dieses Potential im Falle eines mehrfachen Zusammenhanges vieldeutig sein, im Falle des einfachen Zusammenhanges muss es aber eindeutig sein, vorausgesetzt, dass die Geschwindigkeitskomponenten der Flüssigkeitsteilchen regulär sind.

Ganz entsprechende Eigentümlichkeiten finden wir für das Gleichgewicht elastischer Körper. Bevor wir hierauf näher eingehen, müssen wir festsetzen, was man unter „regulärer Deformation" eines elastischen Körpers versteht. Wenn die Elemente, die die Deformation bestimmen, innerhalb eines bestimmten Gebiets eindeutige, endliche und stetige Funktionen sind und in dem Gebiet auch eindeutige, endliche und stetige Ableitungen erster und zweiter Ordnung besitzen, so sagt man, in diesem Gebiet sei die Deformation regulär. Man kann Formeln aufstellen, mit deren Hilfe man aus der Deformation die Verschiebungen der Punkte des elastischen Körpers ermittelt. Wenn nun die Deformation regulär ist und der Körper einen einfach zusammenhängenden Raum einnimmt, so sind die Verschiebungen, eindeutige Funktionen; ist hingegen der Raum mehrfach zusammenhängend, so können sich die Verschiebungen mehrdeutig ergeben.

Man kann für diesen kinematischen Satz über die Deformation eine mechanische Deutung geben, und zwar folgendermassen: Ist ein elastischer Körper von einfach zasammenhängender Gestalt keinen äusseren Einwirkungen unterworfen, so muss er sich im natürlichen Zustand befinden, falls die Deformation regulär ist. Dagegen kann sich ein mehrfach zusammenhängender Körper in einem Spannungszustand befinden, selbst wenn die Deformation regulär und der Körper keinen äusseren Kräften unterworfen ist.

Es gibt daher für mehrfach zusammenhängende Körper Gleichgewichtsfälle, die für andere Körper nicht bestehen. In diesen Fällen wird die Spannung nicht durch äussere Kräfte hervorgebracht. Sie kann dadurch erhalten werden, dass man Distorsionen anwendet. Es ist ja wohl bekannt, dass ein mehrfach zusammenhängender Körper zerschnitten werden kann, ohne dass er dadurch in verschiedene Teile zerfällt. Nachdem wir den Körper durchgeschnitten haben, verschieben wir bei jedem Schnitt die beiden Schnittflächen gegeneinander, so dass die relativen Verschiebungen der verschiedenen Teilchenpaare (die vorher zusammenhielten, und die der Schnitt getrennt hat) sich aus gleichen Rotationen und Translationen zusammensetzen.

Schliesslich stellen wir den Zusammenhang und die Stetigkeit dadurch wieder her, dass wir, wo es nötig ist, Materie wegnehmen oder zufügen und die Teile unter sich wieder verbinden. Alle für jeden Schnitt vorgenommenen Operationen heissen zusammen eine Distorsion. Ist diese einmal ausgeführt worden, so ist die Deformation längs des Schnittes regulär ebenso wie in jedem anderen Teile des Körpers, so dass es unmöglich ist, den Ort zu finden, wo der Schnitt geführt worden ist, wenn man ihn an irgend einer allgemein mehrfach zusammenhängend ist. Die Ursache dieses Unterschieds liegt in Folgendem.

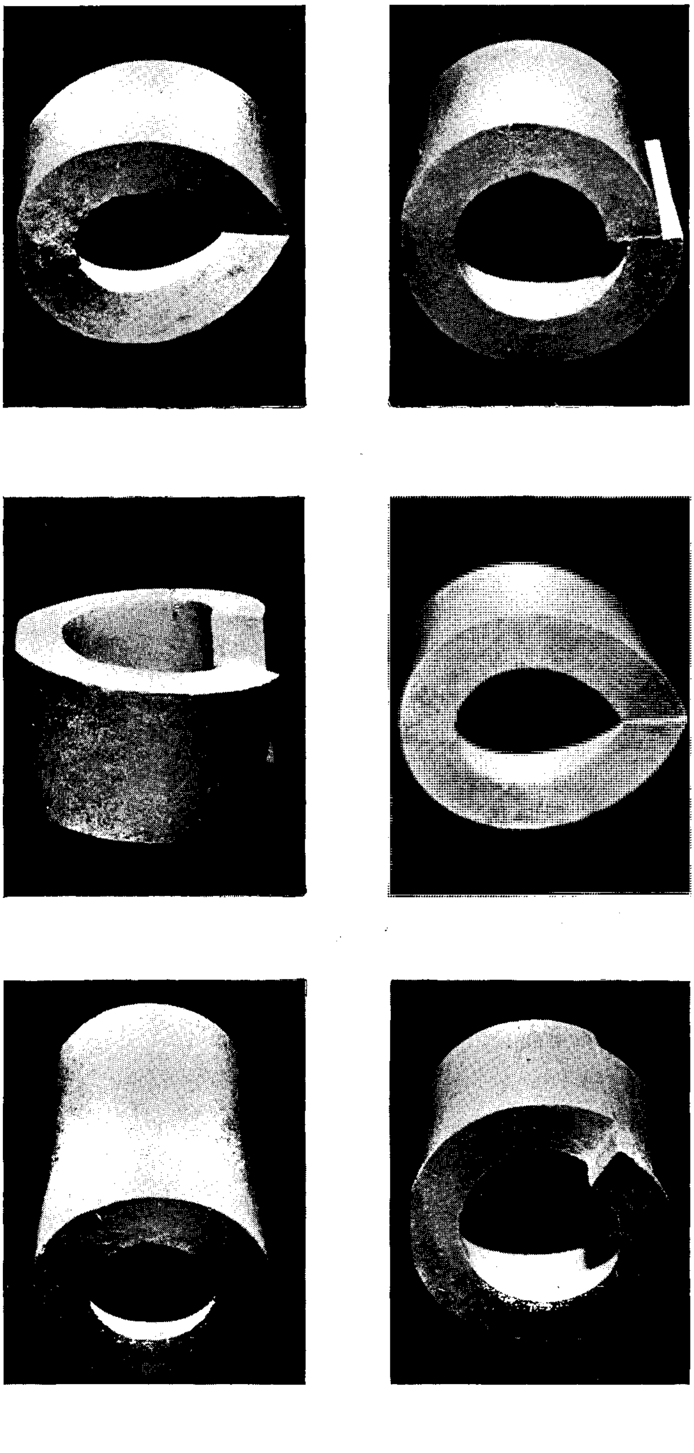
Wenn keine Wirbel vorhanden sind, so gibt es ein Geschwindigkeitspotential. Nun kann dieses Potential im Falle eines mehrfachen Zusammenhanges vieldeutig sein, im Falle des einfachen Zusammenhanges muss es aber eindeutig sein, vorausgesetzt, dass die Geschwindigkeitskomponenten der Flüssigkeitsteilchen regulär sind.

Ganz entsprechende Eigentümlichkeiten finden wir für das Gleichgewicht elastischer Körper. Bevor wir hierauf näher eingehen, müssen wir festsetzen, was man unter „regulärer Deformation" eines elastischen Körpers versteht. Wenn die Elemente, die die Deformation bestimmen, innerhalb eines bestimmten Gebiets eindeutige, endliche und stetige Funktionen sind und in dem Gebiet auch eindeutige, endliche und stetige Ableitungen erster und zweiter Ordnung besitzen, so sagt man, in diesem Gebiet sei die Deformation regulär. Man kann Formeln aufstellen, mit deren Hilfe man aus der Deformation die Verschiebungen der Punkte des elastischen Körpers ermittelt. Wenn nun die Deformation regulär ist und der Körper einen einfach zusammenhängenden Raum einnimmt, so sind die Verschiebungen, eindeutige Funktionen; ist hingegen der Raum mehrfach zusammenhängend, so können sich die Verschiebungen mehrdeutig ergeben.

Man kann für diesen kinematischen Satz über die Deformation eine mechanische Deutung geben, und zwar folgendermassen: Ist ein elastischer Körper von einfach zasammenhängender Gestalt keinen äusseren Einwirkungen unterworfen, so muss er sich im natürlichen Zustand befinden, falls die Deformation regulär ist. Dagegen kann sich ein mehrfach zusammenhängender Körper in einem Spannungszustand befinden, selbst wenn die Deformation regulär und der Körper keinen äusseren Kräften unterworfen ist.

Es gibt daher für mehrfach zusammenhängende Körper Gleichgewichtsfälle, die für andere Körper nicht bestehen. In diesen Fällen wird die Spannung nicht durch äussere Kräfte hervorgebracht. Sie kann dadurch erhalten werden, dass man Distorsionen anwendet. Es ist ja wohl bekannt, dass ein mehrfach zusammenhängender Körper zerschnitten werden kann, ohne dass er dadurch in verschiedene Teile zerfällt. Nachdem wir den Körper durchgeschnitten haben, verschieben wir bei jedem Schnitt die beiden Schnittflächen gegeneinander, so dass die relativen Verschiebungen der verschiedenen Teilchenpaare (die vorher zusammenhielten, und die der Schnitt getrennt hat) sich aus gleichen Rotationen und Translationen zusammensetzen.

Schliesslich stellen wir den Zusammenhang und die Stetigkeit dadurch wieder her, dass wir, wo es nötig ist, Materie wegnehmen oder zufügen und die Teile unter sich wieder verbinden. Alle für jeden Schnitt vorgenommenen Operationen heissen zusammen eine Distorsion. Ist diese einmal ausgeführt worden, so ist die Deformation längs des Schnittes regulär ebenso wie in jedem anderen Teile des Körpers, so dass es unmöglich ist, den Ort zu finden, wo der Schnitt geführt worden ist, wenn man ihn an irgend einer



Singularität in der Deformation zu erkennen versucht. Die Deformation ist sonach überall regulär, aber die Verschiebungen besitzen längs des Schnitts eine Unstetigkeit, und das bedeutet vom analytischen Standpunkte eine Vieldeutigkeit der Verschiebungen.

Da eine Distorsion durch eine Schraubenbewegung der Teilchenpaare gegeneinander bestimmt wird, die vor dem Schnitt zusammenhingen, und da ja jede Schraubenbewegung in drei Translationen und drei Rotationen in Richtung der Koordinatenachsen zerlegt werden kann, so wird man jede Distorsion durch sechs Elemente bestimmen können, die den drei Translationen und den drei Rotationen entsprechen. Ist eins dieser Elemente gleich eins und sind die andern gleich null, so hat man eine „elementare Distorsion". Auf Tafel I sind Gipsmodelle der Gestalten abgebildet, die dicke Kautschukringe annehmen, wenn man sie den sechs elementaren Distorsionen unterwirft.

Vergleicht man sie mit den Ergebnissen der Rechnung, so bestätigen Messung und Beobachtung alle Einzelheiten, die die Rechnung vorausgesagt hatte. Wir werden sogleich von einer experimentellen Bestätigung sprechen, die eine noch weit grössere Genauigkeit besitzt.

Wir haben gesehen, dass sich das GREENsche Reziprozitätsprinzip auf die Elastizitätstheorie übertragen lässt, und dass es zu dem BETTIschen Satz führt. Dieser Satz gilt nicht mehr, wenn die Verschiebungen infolge von Distorsionen vieldeutig werden, aber man erhält dann ein neues Reziprozitätsprinzip von ganz anderem Aussehen, welches die gesamte Theorie beherrscht.

Um dieses zu finden, setzen wir die Spannungen zusammen, die auf die Elemente einer Schnittfläche nach Vornahme der Distorsion ausgeübt werden. Man wird als Resultante eine Kraft und ein Kräftepaar erhalten. Man nennt das die „Distorsionsdyname" [46], die auf die Schnittfläche ausgeübt wird. Zerlegt man die Kraft und das Kräftepaar nach den Koordinatenrichtungen, so erhält man sechs Elemente, die jede Distorsionsdyname bestimmen, ebenso wie jede Distorsion durch sechs Elemente bestimmt wird. Ist der Körper $(n+1)$–fach zusammenhängend, so kann man n Schnitte vornehmen, und folglich hat man $6n$ Bestimmungsgrössen für die Dynamen: $S_1, S_2, \cdots, S_6$ und $6n$ Bestimmungsgrössen für die Distorsionen $s_1, s_2, \cdots, s_{6n}$. Diese Grössen entsprechen sich gegenseitig, d. h. S_i entspricht s_i, wenn man als entsprechende Elemente die Komponenten von Kräften und Translationen, von Kräftepaaren und Rotationen in Bezug auf die gleiche Richtung und denselben Schnitt ansieht. Nun kann man die charakteristischen Bestimmungsstücke der Distorsionsdynamen durch die der Distorsionen linear ausdrücken:

$$S_i = \sum_h E_{ih}\, s_h\,.$$

(46) « effort de distorsion ».

Die Koeffizienten E_{ik} sind symmetrisch, d. h. $E_{ik} = E_{ki}$. Hierin besteht das Reziprozitätstheorem. Schliesslich kann man auch noch eine mechanische Deutung dafür gewinnen.

Die Grundaufgabe der Theorie der Distorsionen besteht in der Bestimmung der Distorsionsdynamen, wenn die Distorsionen bekannt sind. Das eben ausgesprochene Reziprozitätstheorem beschränkt die Zahl der Unbekannten bei dem Problem erheblich.

Einer der Fälle, in denen die Grundaufgabe gelöst werden kann, ist der, dass der Körper aus einem Gitter gerader oder krummliniger Stäbe oder aus Spiralfedern gebildet wird. Die Theorie, die man hierüber entwickeln kann, entspricht der KIRCHHOFFschen über die Verteilung elektrischer Ströme in leitenden Drähten, aber die Zahl der Gleichungen und der Unbekannten ist versechsfacht.

21. Experimentelle Bestätigungen der Elastizitätstheorie.

Ich will die Theorie der Distorsionen nicht verlassen, ohne von neuerdings gemachten Anwendungen zur experimentellen Bestätigung der theoretischen Gesetze der Elastizität zu sprechen.

Man stösst auf zwei verschiedene Schwierigkeiten, wenn man die Elastizitätstheorie experimentell bestätigen will. Einerseits ist es fast unmöglich, die äusseren Wirkungen auf die Oberfläche in stetiger Weise zu verteilen, ohne bei gar zu einfachen Fällen stehen zu bleiben.

Andererseits ist die experimentelle Bestätigung unvollständig, wenn man sich darauf beschränkt, nur die sichtbare Deformation des Körpers zu bestimmen, denn am interessantesten ist es gerade, die von der Rechnung vorausgesagte Verteilung der inneren Spannung zu bestätigen.

Die erste Schwierigkeit kann man dadurch umgehen, dass man jede äussere Einwirkung vermeidet und den Körper Distorsionen unterwirft. Dann wird die Deformation einzig und allein durch die Wirkungen hervorgerufen, die die verschiedenen Körperteile aufeinander ausüben. Die andere Schwierigkeit verschwindet, wenn man einen durchsichtigen elastischen Körper, etwa Gelatine, verwendet. Die auftretende Doppelbrechung zeigt die Verteilung der inneren Spannung an.

CORBINO und TRABACCHI haben diesen Gedanken mit grossem Erfolg verwirklicht (47). Sie verwandten einen Hohlzylinder aus Gelatine von geringer Höhe, an dem sie dadurch Distorsionen erzeugten, dass sie Stücke mit radial gerichteten oder parallelen Grenzflächen herausschnitten und nachher die Schnittflächen wieder zusammenbrachten und verschmolzen.

(47) O. M. CORBINO, *Le tensioni create in un corpo elastico dalle distorsioni di* VOLTERRA *e la conseguente doppia rifrazione accidentale.* « Rend. Acc. dei Lincei » (5), **18** (1 Sem.), 437, 1909. G. C. TRABACCHI, *I fenomeni di doppia rifrazione accidentale prodotti dalle tensioni create in un corpo elastico dalle distorsioni di* VOLTERRA. « Rend. Acc. dei Lincei » (5), **18** (1 Sem.), 444, 1909.

Sie beobachteten den Zylinder im polarisierten Licht, das sich in Richtung der Zylinderachse fortpflanzt, durch einen Analysator.

Die Versuchsanordnung ist in Fig. 16 skizziert. B ist eine Schale, in welche die den Distorsionen unterworfenen Gelatinezylinder gesetzt werden; P ist ein schwarzer Spiegel, der als Polarisator dient und ein Bündel pola-

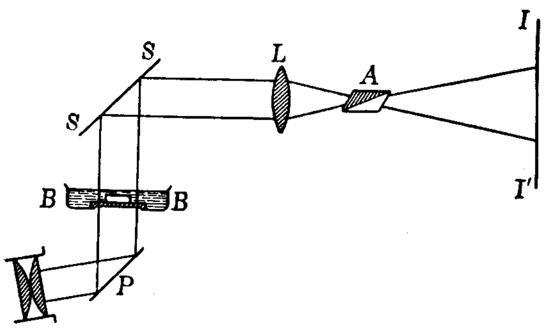


Fig. 16.

risierten Lichts vertikal emporsendet. Nachdem das Lichtbündel den Zylinder durchsetzt hatte, wurde es durch den gewöhnlichen Spiegel S in horizontale Richtung gebracht, durch eine Linse L gesammelt und auf eine photographische II' Platte geworfen. In A war ein Nicol angebracht, das als Analysator diente.

Tafel II enthält die Photographien bei gekreuzten Nicols. Fig. 17 bezieht sich auf einen Zylinder, aus dem ein Sektor mit radial gerichteten Grenzflächen herausgeschnitten worden war. Man erhält ein schwarzes Kreuz und einen weissen Kreis. Das Bild ändert sich nicht, wenn man den Zylinder um seine Achse dreht. Die schwarzen Linien des Kreuzes entsprechen immer den Hauptebenen der gekreuzten Polarisatoren.

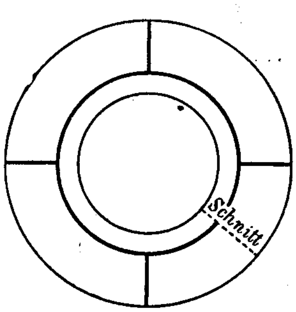


Fig. 17 *a*.

Andrerseits hat CORBINO auf Grund der Theorie der Doppelbrechung und der Theorie der Distorsionen die Intensität J der verschiednen Lichtstrahlen berechnet, die aus dem Gelatinezylinder herauskommen. Für J = 0 erhält man die Gleichung der schwarzen Linien. Man findet so drei Linien, nämlich die beiden Arme des Kreuzes und einen Kreis, dessen Radius

$$r = R_1 R_2 \sqrt{\frac{\log R_1^2 - \log R_2^2}{R_1^2 - R_2^2}}.$$

ist, wobei R_1 den äussern, R_2 den innern Radius des Hohlzylinders bedeutet. (Fig. 17 *a*). Daher kann die experimentelle Nachprüfung sehr streng vorgenommen werden, und man findet Werte, die mit grosser Genauigkeit mit den durch die Rechnung gelieferten zusammenfallen.

Die Figuren 18 und 19 auf Tafel II entsprechen der Distorsion, die durch Herausnahme eines Stücks mit parallelen Grenzflächen verursacht wird.

In diesem Fall ändert sich das Bild des Zylinders mit dem Winkel, den der Schnitt mit einer Hauptebene der Polarisatoren bildet.

Ist die Schnittebene parallel zu einer Hauptebene, so erhält man das in Fig. 18 dargestellte Bild; ist sie unter 45° dagegen geneigt, so erhält man das Bild in Fig. 19.

Dagegen zeigt im ersten Fall die Rechnung, dass die schwarzen Linien aus dem Schnitt selbst und einer Kurve bestehen, die in Fig. 18 *a* gezeichnet ist, und die in Polarkoordinaten r, θ die Gleichung hat

$$r^2 = \frac{1+e^2}{2e^2} R_1^2 \left[\sqrt{\cos^2 2\theta + (1+2\cos\theta)\cdot\frac{4e^2}{(1+e^2)^2}} - \cos 2\theta \right],$$

wobei e gleich dem Verhältnis R_1/R_2 ist.

Berechnet man ebenso im zweiten Fall die Beschaffenheit der schwarzen Linien, so findet man die Fig. 19 *a*. Der Vergleich zwischen den Figuren 18 und 18 *a*, 19 und 19 *a* zeigt eine vollkommene Übereinstimmung. Und

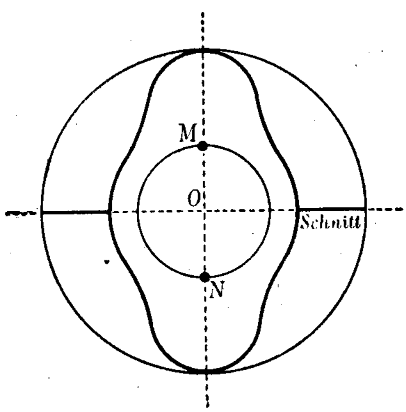


Fig. 18 *a*.

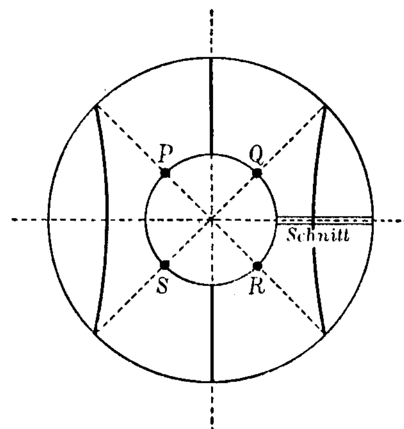


Fig. 19 *a*.

selbst wenn man den qualitativen und quantitativen Vergleich der Ergebnisse der Beobachtung mit denen der Rechnung weiter treibt bis zu den kleinsten Eigentümlichkeiten, wie sie etwa in der Existenz der schwarzen Punkte M, N, P, Q, R, S zum Ausdruck kommen, so findet man immer die wollkommenste Übereinstimmung. Diese ganz neuen Ergebnisse beweisen vollständig und schlagend, mit welch hohem Grade der Genauigkeit die mathematische Theorie der Elastizität alle Erscheinungen voraussagt. Zugleich erkennt man die praktische Bedeutung der modernen Methoden der Analysis und der geometrischen Ideen und Begriffe, wie die des Begriffs mehrfach zusammenhängender Räume.

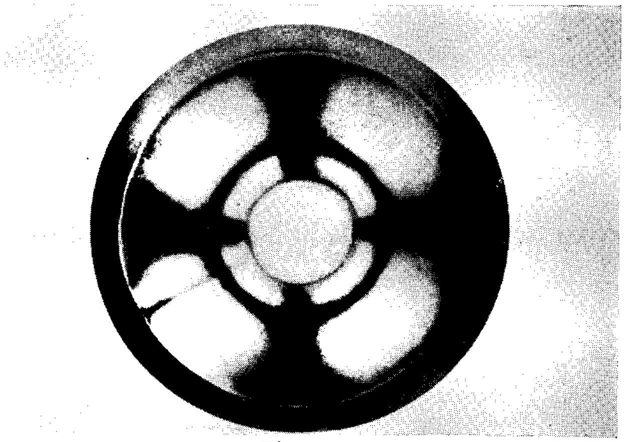


Fig. 17.

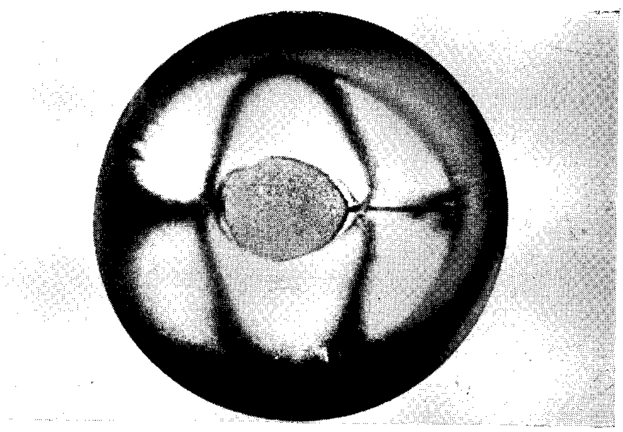


Fig. 18.

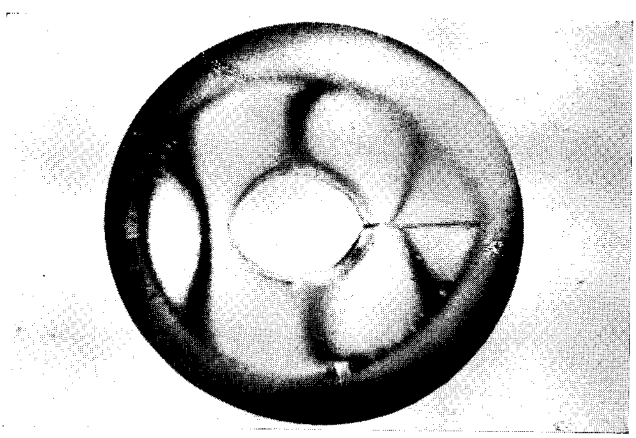


Fig. 19.

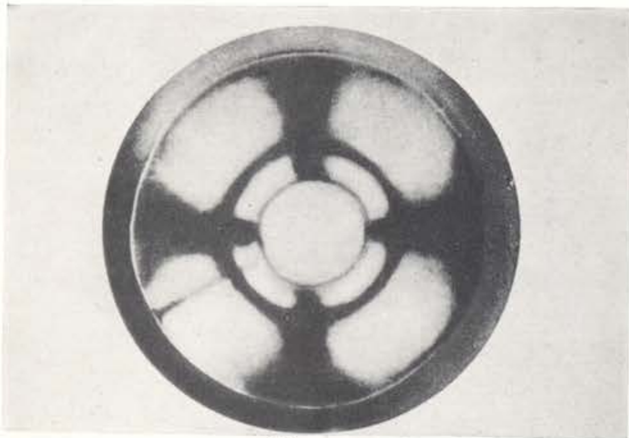


Fig. 17.

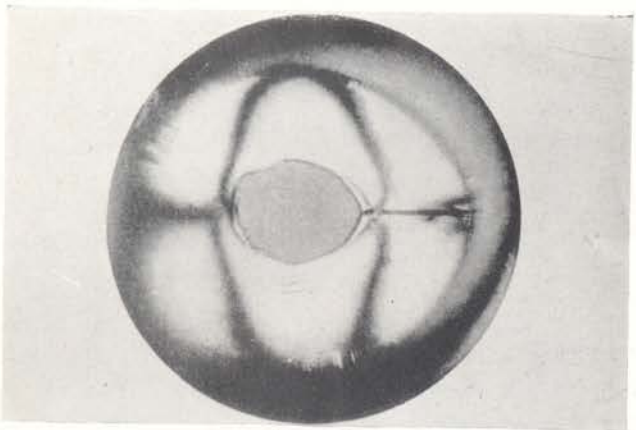


Fig. 18.

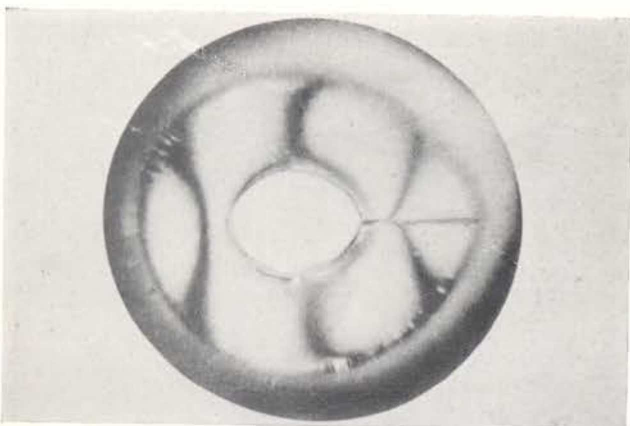


Fig. 19.

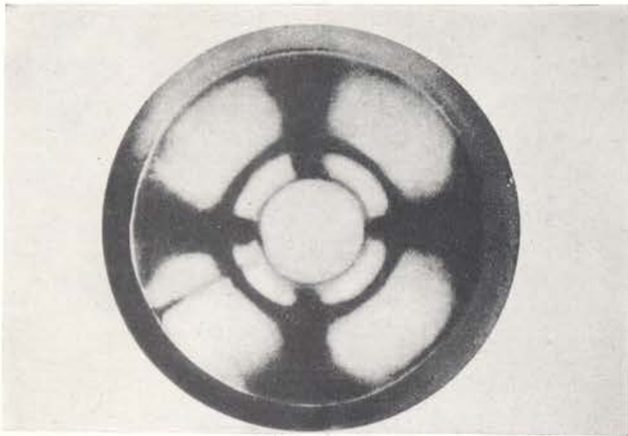


Fig. 17.

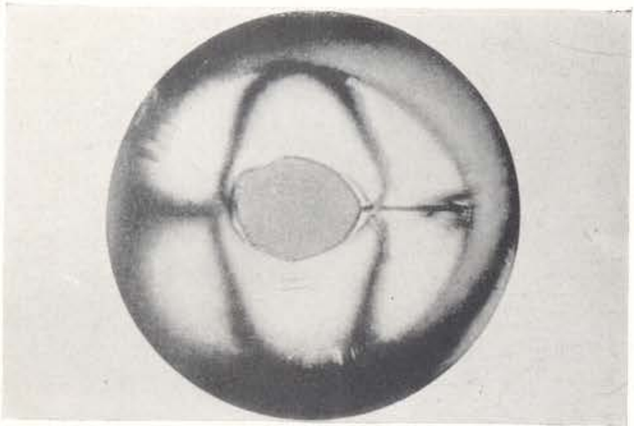


Fig. 18.

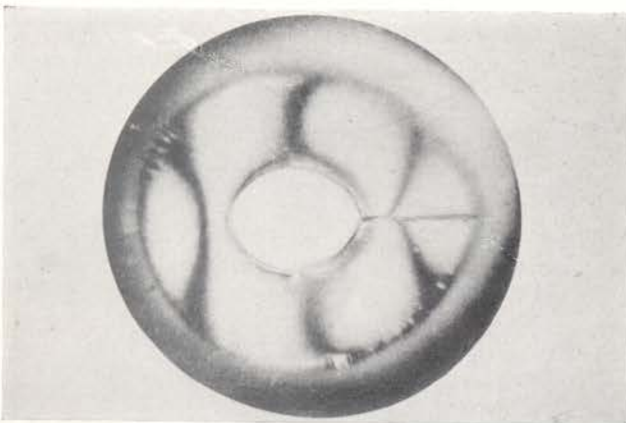


Fig. 19.

22. Die Gleichung $\triangle^2 \triangle^2 u = 0$.

In Kap. 16 haben wir bereits die verallgemeinerte LAPLACEsche-Gleichung betrachtet. Sie spielt in der Elastizitätstheorie eine bedeutende Rolle und ist in letzter Zeit Gegenstand einer grossen Zahl von Untersuchungen gewesen. Die Akademie der Wissenschaften in Paris hat die Wichtigkeit des eingehenden Studiums dieser Gleichung erkannt und den VAILLANT-Preis für 1907 auf die Behandlung dieser Gleichung ausgesetzt.

Nehmen wir an, dass ein elastischer Körper keinen Massenkräften unterworfen ist, so genügen die Komponenten der Verschiebungen der Gleichung $\triangle^2 \triangle^2 u = 0$. Das ist hinreichend, um das Band aufzuzeigen, das zwischen dieser Gleichung und der Elastizitätstheorie besteht. Andrerseits lässt sich die Theorie des Gleichgewichts elastischer Platten ohne weiteres auf die genannte Gleichung für zwei Variable zurückführen. Für das Studium der Gleichung bieten sich mehrere Wege dar. Auf der einen Seite liefert die Anwendung der GREENschen Methode, von der wir schon gesprochen haben, ein Mittel, um viele Fragen zu lösen. Man könnte auch die Integralgleichungen verwenden, wie LAURICELLA gezeigt hat, und wie wir sogleich sehen werden. Aber es gibt noch eine andre Methode, mit deren Hilfe man jede biharmonische Funktion (d. h, jede Funktion, die der Gleichung $\triangle^2 \triangle^2 u = 0$ genügt), als abhängig von zwei harmonischen Funktionen darstellen kann. Auch diese letzte Methode hat in ganz überraschender Weise die Lösung mehrerer, auf die Elastizitätstheorie bezüglicher Fragen vereinfacht.

VENSKE hatte über diesen Gegenstand 1891 eine schöne Arbeit veröffentlicht; leider ist sie nicht in allen Teilen exakt [48]. ALMANSI hat die Frage von neuem behandelt [49]. Das Grundprinzip, von dem er ausgeht, lässt sich so aussprechen: jede biharmonische Funktion dreier Variabeln x, y, z lässt sich in zwei Ausdrücke zerlegen nach der Formel

$$\Phi_1 + (ax + by + cz)\Psi_1 \tag{12}$$

oder nach der Formel

$$\Phi_2 + (x^2 + y^2 + z^2)\Psi_2\,, \tag{13}$$

wobei $\Phi_1, \Psi_1, \Phi_2, \Psi_2$ harmonische Funktionen und a, b, c Konstanten sind. Entsprechende Zerlegungen lassen sich für den Fall biharmonischer Funktionen zweier Variabeln vornehmen. Auch GOURSAT ist auf diesen Punkt in einer kurzen Darstellung der Frage zurückgekommen [50].

(48) O. VENSKE, *Zur Integration der Gleichung $\triangle\triangle u = 0$ für ebene Bereiche.* « Göttinger Nachrichten », 1891, S. **27**.

(49) E. ALMANSI, *Sulla integrazione della equazione differenziale $\triangle^{2n} = 0$.* « Annali di Mat. » (3), **2**, 1, 1899.

(50) E. GOURSAT, *Sur l'équation $\triangle\triangle u = 0$.* « Bull. Soc. Math. de France », **26**, 236, 1898.

Das Vorhandensein des linearen oder des quadratischen Faktors in den vorstehenden Formeln erklärt die Leichtigkeit, mit welcher man das Problem der Integration der Gleichung $\Delta^2 \Delta^2 u = 0$ bei gegebnen Randwerten des Integrals und seiner normalen Ableitung für den Fall lösen kann, dass die Umrandung eine Ebene oder eine Kugel ist. Tatsächlich kann man diese Probleme ohne weiteres auf entsprechende Fragen der Theorie der harmonischen Funktionen zurückführen.

Ebenso können die drei Komponenten der Verschiebungen eines isotropen elastischen Körpers auf die Form gebracht werden

$$\Phi_1 + (x^2 + y^2 + z^2)\frac{\partial \Psi}{\partial x}\ ,\ \Phi_2 + (x^2 + y^2 + z^2)\frac{\partial \Psi}{\partial y}\ ,\ \Phi_3 + (x^2 + y^2 + z^2)\frac{\partial \Psi}{\partial z}\ ,$$

wobei die vier Funktionen Φ_1, Φ_2, Φ_3, Ψ harmonische Funktionen sind. ALMANSI hat von hier aus die Lösung des Gleichgewichtsproblems für eine elastische Kugel unmittelbar und fast augenblicklich erhalten [51].

Ein andres interessantes Ergebnis, das sich an die Ausdrücke (12) und (13) anschliesst, ist die Anwendung des Prinzips der Inversion auf biharmonische Funktionen [52]. LEVI-CIVITA hatte es auf anderem Wege für den Fall zweier Variabeln gefunden [53], und MICHELL hat ebenfalls die Frage studiert [54].

Aber die eleganteste und zugleich am tiefsten gehende Anwendung der Formeln (12) und (13) ist von ALMANSI vorgenommen worden. Wir wollen darüber ein paar Worte sagen.

Das Prinzip der konformen Abbildungen liefert bei gegebenen Randwerten die Lösung der LAPLACEschen Gleichung für alle Flächen, die man auf die Fläche eines Kreises abbilden kann. Die entsprechende Frage für die Gleichung $\Delta^2\Delta^2 u = 0$, d. h. die Bestimmung der unbekannten Funktion, wenn man ihre Werte und die Werte ihrer normalen Ableitung auf der Umrandung kennt, ist von ALMANSI für jede Fläche gelöst worden, die man mit Hilfe eines ganzen rationalen Polynoms auf die Fläche eines Kreises abbilden kann [55].

Man brauchte nur den gleichen Weg einzuschlagen, um ein ganz entsprechendes Ergebnis für den Fall des elastischen Gleichgewichts für zwei Variable, also für elastische Membranen zu finden. Das hat BOGGIO in einer interessanten Arbeit getan [56].

(51) E. ALMANSI, *Sulla deformazione della sfera elastica.* «Mem. Acc. di Torino» (2). **47**, 103, 1897.

(52) V. VOLTERRA, *Sulle funzioni poliarmoniche.* «Atti dell'Istituto Veneto» [Bd. 57 der ganzen Folge] (7), **10**, 233, 1898 [in queste «Opere»: vol. secondo, XXXII, pp. 574-575].

(53) T. LEVI-CIVITA, *Sopra una trasformazione in sé stessa della equazione* $\Delta^2\Delta^2 = 0$). «Atti dell'Istituto Veneto» [Bd. 56 der ganzen Reihe], (7), **9**, 1399. 1897/98.

(54) J. H. MICHELL, *The Inversion of Plane Stress.* «Proc. London Math. Soc.» (1), **34**, 134, 1902.

(55) E. ALMANSI, *Sulla ricerca delle funzioni poliarmoniche in un'area piana semplicemente connessa, per date condizioni al contorno.* «Circ. Mat. di Palermo», **13**, 225, 1899.

(56) T. BOGGIO, *Sull'equilibrio delle membrane elastiche piane*». Atti Acc. di Torino», **35**, 219, 1899-1900.

Auf diese Art kann beispielsweise das PASCALsche Problem des Gleichgewichts einer gespannten elastischen Membran, deren Umrandung eine PASCALsche Schnecke ist, gelöst werden.

Diese Ergebnisse erstrecken sich nicht auf den dreidimensionalen Raum, denn es ist wohl bekannt, dass in diesem Raum die konformen Abbildungen auf die Transformationen durch reziproke Radien beschränkt sind; es muss aber bemerkt werden, dass die Methode von ALMANSI auch noch andere als die klassischen Fälle umfasst, wo die Umrandung durch Kreise oder Geraden gebildet wird. Deshalb eröffnet sie ein neues Feld der Untersuchungen.

Wir wollen noch einmal zu der Anwendung der GREENschen Methode auf die Gleichung $\Delta^2 \Delta^2 u = 0$ zurückkehren.

Man kann selbst in diesem Fall eine der GREENschen entsprechende Funktion bilden.

Es ist das eine biharmonische Funktion, wo die Werte der Funktion selbst und die der normalen Ableitung auf dem Rande gewisse Bedingungen erfüllen. LAURICELLA und BOGGIO haben sie in mehreren Fällen verwandt. HADAMARD hat diese Funktion von einem neuen Gesichtspunkt aus betrachtet. Er hat sie als abhängig angesehen von der Gestalt des Randes, d. h. als Funktion der Flächen oder der Linien, die den Rand bilden. Auf diese Weise hat er sich dem Gedankengang angeschlossen, von dem wir in der ersten Vorlesung gesprochen haben; er hat sich das Problem der Maxima und der Minima bei variabler Umrandung vorgelegt. Diese Untersuchung, die auf ganz neue Weise und nach sehr eleganten Methoden durchgeführt ist, bildet einen sehr eigenartigen und sehr anziehenden Teil seiner schönen grundlegenden Arbeit [57].

23. DAS EXISTENZTHEOREM UND DAS FREDHOLMSCHE THEOREM.

Es wäre unmöglich, das Gebiet der Untersuchungen, über die wir bisher gesprochen haben, zu verlassen, ohne eine Frage zu berühren, die in letzter Zeit Gegenstand einer grossen Zahl von Arbeiten gewesen ist.

Es ist das die Frage nach den Existenztheoremen. Diese Theoreme interessieren im allgemeinen Sinne kaum den Physiker, der sich darum nicht kümmert; dagegen werden sie als grundlegend von dem Mathematiker angesehen, der in diesen Theorien Satz für Satz ein festgefügtes logisches Gebäude zu errichten trachtet. Auf den ersten Anblick scheint der Wortlaut der Existenztheoreme diesen Zwiespalt zu rechtfertigen, denn in den meisten Fällen beschränken sie sich auf die Feststellung, dass es unter gewissen Bedingungen Lösungen gibt. Bei näherem Zusehen aber erkennt man, dass

(57) Vgl Anm. (11). Die Arbeit HADAMARDS ist von der Akad. der Wissenschaften preisgekrönt worden ebenso wie die von LAURICELLA, KORN und BOGGIO, die wir später erwähnen werden. - Zu nennen sind hier die Arbeiten von A. HAAR, « Gött. Nachr. », 1907, S. 280; und von ZAREMBA, « Krak. Anz. », 1907, S. 147. Ferner A. KORN, *Über die allgemeine Lösung des biharmonischen Problems in Raume.* « Anz. d. Krakauer Akad. », 1907, S. 837.

man sich sehr oft irrt, wenn man sie nicht gebührend beachtet. Man muss nämlich, um die Beweise zu führen, oft die Lösungen für die allgemeinsten Fälle wirklich bilden. Deshalb sind diese Beweise oft die Quelle von Ergebnissen, die für die Anwendungen von grosser Wichtigkeit sind, und die eine theoretische und praktische Bedeutung haben. Wir werden das einsehen, wenn wir jene Theoreme und die allgemeinen Lösungen zugleich betrachten. Bekanntlich haben diese Fragen viele Schwierigkeiten geboten.

Die Wege, die man in der Elastizitätslehre eingeschlagen hat, nähern sich den bei der LAPLACEschen Gleichung befolgten Wegen. Die Anwendung der NEUMANNschen Methode ist zuerst von LAURICELLA versucht worden, der von den Formeln von SOMIGLIANA ausging [58]. Aber das von ihm gewonnene Ergebnis erfasste wegen der Hypothesen, die er über die Koeffizienten machen musste, nicht das eigentliche Elastizitätsproblem. Später hat er sich immer mehr der endgültigen Lösung der Frage genähert, indem er sich alle Hilfsmittel zu Dienste machte, die ihm die Analysis in den Methoden der sukzessiven Approximationen und der Integralgleichungen darbot.

Durch Anwendung der Methode der sukzessiven Approximationen hat KORN viele Erfolge erzielt [59]. Dieser Mathematiker hat die Lösung in Potenzreihen für einen Parameter entwickelt, der von den Elastizitätskonstanten abhängt, und er hat auf diese Weise das Gleichgewichtsproblem sowohl für den Fall gelöst, dass die Verschiebungen am Rande gegeben sind, als auch für den Fall, dass die Spannungen gegeben sind.

Es ist hier zu bemerken, dass bis jetzt die KORNsche Methode die einzige ist, die im letzten Falle auf eine vollständige Lösung geführt hat. Auch ist die elegante Art und Weise bemerkenswert, wie er die sich darbietende Schwierigkeit zu überwinden verstanden hat.

Schreibt man nämlich die Gleichungen der Elastizität in der Form

$$\Delta^2 u + \mathrm{K} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial x} = 0 \quad , \quad \Delta^2 v + \mathrm{K} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial y} = 0 \quad , \quad \Delta^2 w + \mathrm{K} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial z} = 0 ,$$

$$\theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} ,$$

und setzt man voraus, dass die Spannungen auf dem Rande gegeben sind, so haben die Entwicklungen von u, v, w in Potenzreihen für das Argument K eine wesentlich singuläre Stelle für $\mathrm{K} = 0$. E. und F. COSSERAT hatten diese Eigentümlichkeit für den speziellen Fall der Kugel bereits bemerkt [60].

Um zum Ziel zu gelangen, hat KORN aus diesem Grunde die Potenzreihen in der Umgebung von $\mathrm{K} = 1$ betrachtet.

(58) G. LAURICELLA, *Equilibrio dei corpi elastici isotropi.* « Ann. Scuola Normale superiore di Pisa », **17.** Scienze fisiche e matem., **7.** No. 6, 1895.

(59) A. KORN, *Sur les équations de l'élasticité.* « Ann. de l'Ec. Norm. », **24**, 9, 1907. — A. KORN, *Solution générale du problème d'équilibre dans la théorie de l'élasticité dans le cas ou les efforts sont donnés à la surface.* « Ann. de la Faculté des Sc. de Toulouse » (2), **10**, 165, 1908.

(60) E. und. F. COSSERAT, *Sur la déformation infiniment petite d'un corps élastique soumis à des forces données.* « Comptes Rendus », **133**, 271, 1901.

Seit einigen Jahren ist man mit der Methode der Integralgleichungen an die Fragen herangegangen.

Der von FREDHOLM entwickelte sehr wichtige Grundgedanke hierbei ist der, dass eine in einem zweidimensionalen Bereich definierte harmonische Funktion als Potential einer über die Umrandung verteilten Doppelschicht aufgefasst wird (61). Ist $u(s_1)$ der Wert der harmonischen Funktion für einen Punkt s_1 der Grenze s, und ist $f(s)$ die Dichte der Doppelschicht, so hat man die Beziehung

$$u(s_1) = \pi f(s_1) + \int_s f(s) \cdot \mathrm{F}(s, s_1) \cdot ds,$$

wobei F (s, s_1) eine reguläre Funktion ist, falls die Umrandung regulär ist. Die Bestimmung der Funktion $f(s)$ ist also auf die Lösung der vorstehenden Integralgleichung zurückgeführt. Von dieser Lösung werden wir in der folgenden Vorlesung sprechen. Nach Verfahren, die sich auf denselben Grundsätzen aufbauen, kann man den Fall der Elastizität behandeln. Man wird dadurch auf Systeme von Integralgleichungen geführt. Die wieder erscheinenden Schwierigkeiten kommen von den Unendlichkeitsstellen der Funktionen her, die unter den Integralen auftreten, und sie sind für den Fall, dass die Spannungen gegeben sind, bisher noch nicht überwunden worden.

FREDHOLM, LAURICELLA, BOGGIO und MARCOLONGO haben geistreiche Arbeiten über diesen Gegenstand veröffentlicht, und es muss auch hier an die Namen E. und F. COSSERAT erinnert werden, die zuerst interessante Beziehungen zwischen Integralen aufgestellt haben (62).

Die Gleichung $\Delta^2 \Delta^2 u = 0$ kann nebenfalls nach entsprechenden Methoden gelöst werden. KORN hat die sukzessiven Approximationen verwendet (63), LAURICELLA die Methode der Integralgleichungen (64); es muss aber vorausgesetzt werden, dass der Rand keine singulären Punkte enthält.

Betrachten wir nun den besonderen Fall zweier Variabeln. Wir wollen voraussetzen, dass die Umrandung ein Rechteck ist; es entspricht das dem Problem des Gleichgewichts einer rechteckigen elastischen Platte. Das Problem lässt sich nach den vorstehenden Methoden nicht angreifen. LAURICELLA hat es dadurch gelöst, dass er auf die alten Methoden zurückgriff,

(61) I. FREDHOLM, *Sur une nouvelle méthode pour la résolution du problème de Dirichlet.* « Stockholm Ofv., », **57**, 39, 1900.

(62) Die Literatur über diesen Gegenstand ist sehr ausgedehnt. Die Arbeit von FREDHOLM: *Solution d'un problème fondamental de la théorie de l'élasticité* ist im « Arkiv för Matematik, Astronomi och Fysik », Bd. **2**, No. 1906, veröffentlicht worden. — Betreffs der anderen Autoren verweise ich auf: « Rendiconti Acc. dei Lincei », « Nuovo Cimento », « C. R. de l'Ac. des Sc. », « Ann. de la Faculté des Sc. de Toulouse » usw. — Die allererste Lösung der ersten Randwertaufgabe der Elastizitätstheorie überhaupt findet sich in der Arbeit von A. KORN, *Abhandlungen zur Elastizitätstheorie.* I. *Allgemeine Lösung des elastischen Gleichgewichtsproblems bei gegebenen Verrückungen an der Oberfläche.* «Münch. Ber. », **36**, 37, 1906.

(63) A. KORN, *Sur l'equilibre des plaques élastiques encastrées.* « Ann. de l'Éc. Norm. », **25**, 529, 1908.

(64) G. LAURICELLA, *Sur l'intégration de l'équation relative à l'équilibre des plaques élastiques encastrées.* « Acta Math. », **32**, 201, 1909.

deren sich MATHIEU zum Studium des Gleichgewichts eines rechtwinkligen Prismas bedient hatte. Diese Methoden schliessen sich an die Methoden der einfachen Lösungen an.

24. Die Methode der einfachen Lösungen.

Wir wollen diese Vorlesung damit abschliessen, dass wir ein paar Worte der allgemeinen Methode der einfachen Lösungen widmen, von der wir im letzten Kapitel gesprochen haben, und die ganz kürzlich durch fruchtbare Verwendung der Integralgleichungen erneuert worden ist.

Die ersten Ansätze dazu findet man in den Versuchen, an die Behandlung der partiellen Differentialgleichungen heranzugehen. Für die Gleichung der schwingenden Saiten

$$\frac{\partial u^2}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

wo die Variabeln getrennt sind, hat TAYLOR die Lösung in der Form

$$u = f(t) \cdot \varphi(x)$$

angegeben.

Es ist dies das erste Beispiel für eine einfache Lösung. Die Zusammenstellung einfacher Lösungen vom TAYLORschen Typ hat zur FOURIERschen Reihe geführt. Ich will hier nicht die so wohlbekannte Geschichte dieser Entdeckung wiedergeben, in der physikalische und analytische Gedankengänge sich verschlingen, und in der die berühmten Namen BERNOULLI, D'ALEMBERT, EULER, LAGRANGE erscheinen. Die Methode der einfachen Lösungen, für die wir ein typisches Beispiel gegeben haben, besteht in dem Auffinden partikulärer Lösungen, bei denen alle oder einige Variable getrennt auftreten. Durch Konstruktion einer Reihe von einfachen Lösungen kann man dann mittels Koeffizientenberechnung die allgemeine Lösung erhalten. Diese Methode lässt sich auf die verschiedenen Typen von Differentialgleichungen anwenden, mögen sie nun elliptisch, parabolisch oder hyperbolisch sein.

Um die Vorstellung zu fixieren, wollen wir einmal eine Gleichung der letzten Art betrachten, und zwar im besonderen den Fall der Schwingungen ebener, am Rande eingespannter Membranen. In der dreidimensionalen Welt, die wir betrachten müssen, wollen wir die Zeit t von den Raumkoordinaten x, y trennen und, da die zu integrierende Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \tag{14}$$

lautet, Lösungen der Form

$$u = f(t) \cdot \varphi(x, y)$$

betrachten.

φ muss dann der Gleichung genügen

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \mathrm{K} \cdot \varphi = 0, \tag{15}$$

wobei φ auf dem Rande gleich null und K eine Konstante ist. Zuerst muss man diejenigen Werte K aufsuchen, für die von null verschiedene Lösungen φ existieren. Das sind die Ausnahmewerte. Die Existenz des kleinsten Ausnahmewertes ist von SCHWARZ bewiesen worden, die Existenz aller Ausnahmewerte aber ist in dem grossen Werk von POINCARÉ über die Gleichungen der mathematischen Physik nachgewiesen worden [(65)]. Man kann die Ausnahmewerte als Wurzeln einer transzendenten Gleichung ansehen. Das Prinzip von Lord RAYLEIGH gab zwar einen Überblick über die Art und Weise, wie das Ganze sich abspielt; aber erst die Methoden der Integralgleichungen haben zu den einfachsten und unmittelbarsten Ergebnissen geführt.

Man sieht ja leicht ein, dass man die homogene Differentialgleichung (15) nebst der Randbedingung $\varphi = 0$ durch eine lineare homogene Integralgleichung ersetzen kann. Wie wir in der nächsten Vorlesung sehen werden, ist eine Integralgleichung nichts anderes als der Grenzfall eines Systems linearer algebraischer Gleichungen, wenn die Zahl der Gleichungen und der Unbekannten unbegrenzt wächst. Daher erhält man als Bedingung dafür, dass die lineare homogene Integralgleichung eine von null verschiedene Lösung besitzt, das Verschwinden eines Ausdrucks, den man als Grenzwert der Determinante eines Systems linearer algebraischer Gleichungen ansehen kann. Dieser Ausdruck, den FREDHOLM Determinante genannt hat [(66)], ist eine ganze Funktion von K, und daraus erhält man das Ergebnis, dass die Ausnahmewerte Wurzeln einer transzendenten Gleichung sind [(67)].

Die Werte φ, die die Gleichung (15) befriedigen, und die den Ausnahmewerten von K entsprechen, sind die Ausnahmelösungen. Man muss nun die FOURIERsche Methode verallgemeinern und die allgemeine Lösung durch eine Reihe von Ausnahmelösungen auszudrücken versuchen.

HILBERT [(68)], SCHMIDT [(69)] und andere Autoren haben diese Fragen in allgemeiner Weise behandelt und vertieft. HILBERT hat das Studium der unendlichen Formen, die er auf die kanonische Form zurückgeführt hat, zum Ausgangspunkt genommen. Es ist hier nicht möglich, diese Untersuchungen weiter darzulegen, die ein neue interessantes Kapitel der Analysis bilden.

(65) H. POINCARÉ, *Sur les équations de la Physique mathématique.* «Circolo Mat. di Palermo», **8**, 57, 1894.

(66) J. FREDHOLM, *Sur une classe d'équations fonctionnelles.* « Acta Math. », **27**, 365, 1903.

(67) Das Problem der Schwingungen schwerer Flüssigkeiten (problème des seiches) ist eine ähnliche Frage, die man ebenfalls durch ein auf die Verwendung unendlicher Determinanten führendes Verfahren lösen kann. Ich habe dieses Verfahren ersonnen und in einer Vorlesung vorgetragen, die ich 1898 in Turin vor der Physikalischen Gesellschaft gehalten habe. (Vgl. V. VOLTERRA, *Sul fenomeno delle Seiches*, Conferenza. « Nuovo Cimento (4), **8**, 270, 1898 [in queste « Opere »: vol. secondo, XXVIII, pp. 370-378] und *Leçons sur les équations intégrales et intégro-différentielles*, Kap. III, § 15).

(68) D. HILBERT, *Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen.* « Gött. Nachr. », 1904, S. 49 u. 213; 1905, S. 307; 1906, S. 157 u. 439; 1910, S. 355 u. 595. B. G. Teubner, Leipzig 1912.

(69) E. SCHMIDT, *Zur Theorie der linearen und nichtlinearen Integralgleichungen.* «Math. Ann. », **63**, 433; **64**, 161, 1907. — Vgl. hierzu auch A. KORN, *Freie und erzwungene Schwingungen.* B. G. Teubner, Leipzig 1910.

Dritte Vorlesung.

25. Abhängigkeit des Zustandes von der Vorgeschichte eines elastischen Körpers.

Das Hookesche Gesetz, das die Grundlage der gewöhnlichen mathematischen Theorie der Elastizität bildet, ist nur ein Annäherungsgesetz. Wir haben das schon in der vorigen Vorlesung gestreift. Man kann sich durch eine zweifache Modifikation den Beobachtungsergebnissen anzunähern versuchen. Man kann nämlich zunächst daran denken, dass sich die Elastizitätserscheinungen deshalb vom Hookeschen Gesetz entfernen, weil es Deformation und Spannung in lineare Abhängigkeit von einander setzt, während diese Grössen in Wirklichkeit durch nichtlineare Beziehungen mit einander verknüpft sind.

Aber eine weitergehende Prüfung der Erscheinungen lehrt uns, dass die auf Grund dieses Gedankenganges anzubringenden Modifikationen nicht ausreichend sind; denn das Hookesche Gesetz entfernt sich auch noch aus anderen Gründen von den natürlichen Tatsachen.

Betrachten wir die Erscheinungen der elastischen Nachwirkung. Wird ein elastischer Körper äusseren Kräften unterworfen, so nimmt er keine endgültige Gleichgewichtsgestalt an, sondern er ändert sich langsam und strebt asymptotisch einer gewissen Gestalt zu. Ebenso kehrt der elastische Körper, wenn die äusseren Kräfte aufgehört haben zu wirken, nicht sofort in die natürliche Gestalt zurück, sondern die Gestalt, die er annimmt, ändert sich langsam nach bestimmten Gesetzen.

Diese Erscheinungen beweisen, dass die Deformation in jedem Augenblicke nicht nur von der gegenwärtigen Spannung abhängt, sondern auch von den Spannungen, die in der vorhergehenden Zeit auf den Körper gewirkt haben. Deshalb könnte keine Beziehung, die man als in jedem Augenblick zwischen den gegenwärtigen Werten von Deformation und Spannung bestehend ersinnen könnte, diese Abhängigkeit wirklich darstellen. Man muss daher das Hookesche Gesetz von dem Grundsatz aus modifizieren, dass der gegenwärtige Zustand des elastischen Systems von der Geschichte der Einwirkungen abhängt, denen das System ausgesetzt war.

26. Unterschied zwischen der Mechanik mit und ohne Vererbungserscheinungen.

Bevor wir tiefer in die Frage eindringen, wollen wir ein Wort über den Namen sagen, den man den betrachteten Erscheinungen geben kann. Zunächst ist zu bemerken, dass man ähnlichen Erscheinungen in der Lehre vom Magnetismus, von den Dielektriken und noch in anderen Fällen begegnet. Bezeichnungen wie Hysteresis, traînage u. ä., die manche Autoren angewandt haben, können, wenn man sie auch im allgemeinen Fall gebraucht, zu Missverständnissen Anlass geben. Deshalb wollen wir alle diese Erscheinungen als „Vererbungserscheinungen" [70] bezeichnen. Wir knüpfen damit an die Einteilung der Mechanik in Mechanik mit Vererbung und Mechanik ohne Vererbung an.

PICARD macht in einem schönen Artikel über die klassische Mechanik und ihre sukzessiven Approximationen die Bemerkung, dass man diese Einteilung vornehmen kann [71]. In der Mechanik ohne Vererbung hängt der künftige Zustand eines Systems in einem gegebenen Augenblick nur vom gegenwärtigen Zustand ab oder, allgemeiner gesprochen (da die Kräfte möglicherweise auch von den Geschwindigkeiten abhängen können), von dem gegenwärtigen und dem unmittelbar vorhergehenden Zustand. In der Mechanik mit Vererbung hingegen hinterlässt jede Einwirkung eine bleibende Beeinflussung des Systems, und der gegenwärtige Zustand hängt von der gesamten Vorgeschichte ab.

Es ist augenscheinlich, dass das Grundproblem der Astronomie zur ersten Gruppe gehört, während die im vorigen Paragraphen berührten Fragen zur zweiten gehören. PAINLEVÉ stellt in einem interessanten der Mechanik gewidmeten Kapitel [72] die Behauptung auf, dass die Probleme der Vererbungserscheinungen von einem bestimmten Gesichtspunkte aus nur scheinbare Probleme sind, weil sie nicht als solche auftreten würden, wenn man eine vollkommenere Kenntnis von der Konstitution der Körper hätte. Immerhin ist es im gegenwärtigen Augenblick notwendig, sie zu betrachten und tiefer in sie einzudringen. In gewissen Fällen sind die Gleichungen, auf die sie führen, seit langem bekannt gewesen. Ich brauche hierfür nur an die schöne Arbeit über die Elastizität von BOLTZMANN aus dem Jahre 1874 [73] zu erinnern, in der die Gleichungen unter gewissen Bedingungen von empirischen Gesichtspunkten aus aufgestellt worden sind, und an die später erschienene interessante Arbeit von WIECHERT [74], die auf anderen Grundgedanken beruht. Ich will alsbald sagen, welche Schwierigkeiten sich einem allgemeinen Studium dieser Gleichungen entgegenstellten, und will zeigen, dass es bis in die letzte Zeit hinein keine analytischen Methoden gab, die sie allgemein und vollständig zu behandeln erlaubten.

27. TORSION EINES FADENS.

Um zunächst einmal die Dinge auf elementare Weise zu betrachten, fassen wir die Torsion eines Fadens ins Auge.

Der Torsionswinkel sei ω, das Torsionsmoment M.

(70) « Phénomènes d'hérédité ».

(71) É. PICARD, *La mécanique classique et ses approximations successives*. « Rivista di Scienza » (Bologna) **1**, 4, 1907.

(72) PAINLEVÉ, *De la méthode dans les sciences*. Paris (Alcan) 1909.

(73) L. BOLTZMANN, *Zur Theorie der elastischen Nachwirkung*. « Wiener Ber. », **70**, 275, 1874. « Pogg. Ann. Arg. », Bd. **7**, 634. 1876. « Abhandl. », Bd. I, 616.

(74) E. WIECHERT, *Gesetze der elastischen Nachwirkung für konstante Temperatur*. « Wiedemanns Ann. », **50**, 335 u. **50**, 546, 1893.

In der gewöhnlichen Elastizitätstheorie führt uns das HOOKEsche Gesetz auf die Proportionalität von ω und M.

Das wird durch die Gleichung ausgedrückt

$$\omega = K \cdot M, \tag{16}$$

wobei K ein konstanter Koeffizient ist. Auf diese Weise ist eine in jedem Augenblick bestehende angenäherte Beziehung zwischen Torsion und äusserer Wirkung aufgestellt. Schriebe man allgemein

$$\omega = F(M),$$

wo F eine noch unbekannte Funktion von M ist, so könnte man die Funktion F so bestimmen, dass sich die analytische Darstellung des Phänomens den tatsächlichen Erscheinungen besser annähert. Man könnte beispielsweise die Funktion F in eine Potenzreihe entwickeln,

$$\omega = K \cdot M + K_1 \cdot M^2 + K_2 \cdot M^3 + \cdots,$$

und man könnte eine grössere Annäherung, als Formel (16) sie bietet, dadurch zu erzielen versuchen, dass man eine bestimmte Anzahl von Gliedern berücksichtigt und die Koeffizienten $K, K_1, K_2, \cdots$ nach bekannten Methoden bestimmt. Aber auf diese Weise würde man die Vererbungserscheinungen ausser Betracht lassen; denn sobald man eine Beziehung zwischen der gegenwärtigen Torsion und der gegenwärtigen äusseren Einwirkung aufstellt, kommen dabei die früheren Einwirkungen nicht in Anrechnung.

Will man also, dass ω von der Geschichte des Torsionsmoments M abhängt, so wird man die Gleichung (16) in folgender Weise abändern müssen

$$\omega = KM + \varphi,$$

wobei φ eine von all den Werten abhängige Grösse ist, die M von der Zeit $-\infty$ bis zur Gegenwart angenommen hat. Man kann eine Vereinfachung dadurch erzielen, dass man die vor einer bestimmten Zeit t_0 ausgeübten Wirkungen vernachlässigt; denn dann hängt φ nur von all den Werten ab, die M von der Zeit t_0 bis zur Gegenwart angenommen hat. Stellt man die Zeit als Abszisse und das Torsionsmoment als Ordinate einer Kurve dar, so erhält man ein geometrisches Abbild der Funktion $M(t)$, und man kann daher sagen, dass φ von der Gestalt der erhaltenen Kurve abhängt. Man kommt von hier aus zu einem Gedanken, wie wir ihn ganz ähnlich in der ersten Vorlesung betrachtet haben. Wir brauchen uns nämlich nur daran zu erinnern, dass man, wenn man das Prinzip der variierenden Wirkung erweitern will, ein Doppelintegral als abhängig von der Begrenzungslinie des Integrationsgebiets betrachten muss, allgemein als abhängig von allen Werten, die gewisse Funktionen längs dieser Linie annehmen.

Wir können jetzt das eben Gesagte zu dem in der ersten Vorlesung Auseinandergesetzten in Beziehung setzen.

In Kap. 5 haben wir eine unendliche und stetige Gesamtheit von Variabeln ins Auge gefasst. Wir haben gezeigt, dass diese Betrachtungen der Vorstellung von Grössen entspringen, welche von allen Werten einer oder mehrerer Funktionen abhängen, und wir haben von ihrem Zusammenhang mit den Integralgleichungen gesprochen. Man versteht es daher, dass man durch Anlehnung an jene Theorie zur Lösung der Probleme gelangen wird, die sich in der Mechanik mit Vererbung darbieten.

Aber man kann nunmehr hinzufügen, dass die Integralgleichungen nicht ausreichen, um den allgemeinen Fall der Vererbungsprobleme zu umfassen.

Man muss zu gänzlich neuen und weit verwickelteren Fragen übergehen: ich nenne sie die Probleme der Integraldifferentialgleichungen.

Diese Probleme sind verschieden von denen, welche sich bei der in der ersten Vorlesung (Kap. 4, 5) behandelten Erweiterung der JACOBIschen Gleichung darbieten. Damals haben wir zwischen den Koeffizienten Beziehungen angetroffen, die Differentiale der Linienfunktionen enthielten (Gleichung (4) in Kap. 5), während die Integraldifferentialgleichungen, die wir in den folgenden Kapiteln finden werden, Beziehungen darstellen, die zugleich vom Typ der Differentialgleichungen und der Integralgleichungen sind. Ausserdem ist die Verknüpfung beider Typen derart, dass die bekannten Methoden für Differentialgleichungen und für Integralgleichungen in den allgemeinen Fällen nicht die Lösung liefern, wenn man sie getrennt anwendet. Das Problem der Integraldifferentialgleichungen unterscheidet sich wesentlich von dem der Differential- und dem der Integralgleichungen. Um es zu lösen, muss man beide Methoden durch ein neues analytisches Verfahren verbinden.

28. Analytischer Ausdruck für Grössen, die von allen Werten einer Variabeln abhängen.

Wir wollen jetzt auf die Grösse φ zurückkommen, die von allen Werten $M(t)$ von $t = t_0$ bis zum gegenwärtigen Wert t abhängt. Die erste Frage, die sich aufdrängt, ist offenbar die: Kann man diese Beziehung analytisch zum Ausdruck bringen? Um hierauf die Antwort zu geben, muss man die allgemeine Frage nach der analytischen Darstellung einer Grösse behandeln, die von allen Werten einer Funktion abhängt. (Vgl. Kap. 5). Man stösst so auf ähnliche Schwierigkeiten, wie man sie in der gewöhnlichen Analysis antrifft, wenn man eine Funktion nach DIRICHLETscher Art definiert hat und nun zu ihrem analytischen Ausdruck, etwa der TAYLORschen Reihe, übergehen will. Ich brauche nicht daran zu erinnern, dass man in Bezug auf die Differenzierbarkeit, die Konvergenz und das Restglied Voraussetzungen machen muss, damit die Entwicklung möglich sei.

Ebenso kann man in dem Fall einer Grösse, die von allen Werten einer Funktion abhängt, unter gewissen ähnlichen Voraussetzungen zu einer Entwicklung gelangen, die der TAYLORschen vollkommen ähnlich ist.

Wendet man sie auf die von $M(t)$ abhängige Grösse φ an, so findet man

$$(17) \qquad \varphi = \int_{t_0}^{t} M(\tau)\, \varphi(t, \tau)\, d\tau + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t} d\tau_1 \int_{t_0}^{t} d\tau_2\, M(\tau_1)\, M(\tau_2)\, \varphi(t, \tau_1, \tau_2) + \cdots$$

Bevor wir weiter gehen, wollen wir unsere Aufmerksamkeit auf die Tragweite der eben besprochenen Erweiterung des TAYLORschen Satzes richten. Es ist das nämlich das erste Beispiel für die Anwendung des Überganges zu einer unendlichen stetigen Mannigfaltigkeit von Variabeln einer Funktion und ist infolgedessen der Ausgangspunkt für die folgenden Gedankengänge gewesen. Ich werde zeigen, dass diese Entwicklung nichts anderes ist als der Grenzfall der TAYLORschen Reihe für mehrere Variable, wenn man voraussetzt, dass die Anzahl der Variabeln unbegrenzt wächst. Man wird das leicht einsehen, wenn man den Weg verfolgt, auf dem ich 1887 dorthin gelangt bin (75). Wir zerlegen das Intervall $(t_0 \cdots t)$ in n Teile $h_1, h_2, \cdots, h_n$; es seien

$$\mathrm{M}_1, \mathrm{M}_2, \cdots, \mathrm{M}_n$$

diejenigen Werte von $\mathrm{M}(t)$, die zu den Werten von t innerhalb der Intervalle

$$(t_0, t_0 + h_1), (t_0 + h_1, t_0 + h_1 + h_2), \cdots, (t_0 + h_1 + h_2 + \cdots + h_{n-1}, t)$$

gehören. Wir fassen zunächst eine Funktion von

$$h_1 \mathrm{M}_1, h_2 \mathrm{M}_2, h_3 \mathrm{M}_3, \cdots, h_n \mathrm{M}_n$$

ins Auge, die mit diesen Grössen zugleich verschwindet. Entwickeln wir diese Funktion in eine TAYLORsche Reihe — die Möglichkeit der Entwicklung werde vorausgesetzt —, so finden wir den Ausdruck

$$\sum_i h_i \mathrm{M}_i \mathrm{G}_i + \frac{1}{1 \cdot 2} \sum_i h_i \mathrm{M}_i \sum_k h_k \mathrm{M}_k \mathrm{G}_{ik} + \cdots$$

Wir gehen nun dadurch zur Grenze über, dass wir die Zahl der Intervalle $(h_1 \cdots h_n)$ unbegrenzt wachsen und die Ausdehnung eines jeden unbegrenzt abnehmen lassen. Der erste Ausdruck, der durch eine einfache Summe gebildet wird, gibt im Grenzfall zu einem einfachen Integral Veranlassung; der zweite Ausdruck, welcher durch eine Doppelsumme gebildet wird, im Grenzfall ein Doppelintegral ergibt, und aus den folgenden Summen werden mehrfache Integrale von immer wachsender Ordnungszahl. Man kommt auf diese Weise zu der vorstehenden Entwicklung (17). Das Auseinandergesetzte ist nur das Schema der Schlussweise. Erst durch ziemlich verwickelte Kunstgriffe wird sie vollständing und streng.

Die eben gefundene Entwicklung einer von allen Werten einer Funktion abhängigen Grösse führt leicht zu einer entsprechenden Klassifikation wie bei den Funktionen verschiedenen Grades.

Man braucht hierzu nur die Glieder der Reihe (17) zu sondern, und man erhält augenscheinlich Ausdrücke ersten, zweiten, dritten Grades. Hieran knüpft sich eine grosse Zahl von Fragen, und die interessantesten Aufgaben sind die, bei denen die Funktionen, von denen jene Ausdrücke abhängen,

(75) V. VOLTERRA, *Sopra le funzioni che dipendono da altre funzioni*. Nota I, § 3. « Rend. Acc. dei Lincei » (4), **3**, 97, 1887 [in queste « Opere »: vol. primo, XVII, pp. 294–314]. Vgl. Anm. (11).

unbekannt sind. Durch diese Betrachtungen bin ich seit 1896 (76) auf das Studium der Lösung der Integralgleichungen geführt worden; ich habe dabei einen Gedankengang zugrunde gelegt ähnlich dem, der mich auf die Entwicklung (17) geführt hatte, d. h. ähnlich dem Grundgedanken der Integralrechnung. Wie ich nämlich in meiner ersten Mitteilung von 1896 (77) gezeigt habe, und wie in der ersten Vorlesung zum Ausdruck gebracht ist (s. Kap. 5), ergibt sich ihre Lösung aus der Erweiterung des Verfahrens zur Lösung algebraischer Gleichungen, wenn man voraussetzt, dass die Zahl der Variabeln in derselben Weise unbegrenzt wächst, wie die Zahl der Glieder einer Summe, um ein Integral entstehen zu lassen.

Wir werden das im nächsten Kapitel sehen.

29. Lineare Vererbung. Allgemeine Probleme der Vererbung.

Wenden wir die Entwicklung (17) auf die Grundgleichung der Torsion an, so wird diese

$$\omega = \mathrm{KM}(t) + \int_{t_0}^{t} \mathrm{M}(\tau)\,\varphi(t,\tau)\,dt$$

$$+ \frac{1}{1\cdot 2}\int_{t_0}^{t} d\tau_1 \int_{t_0}^{t} d\tau_2 \mathrm{M}(\tau_1)\,\mathrm{M}(\tau_2)\,\varphi(t,\tau_1,\tau_2) + \cdots$$

Es ist augenscheinlich, dass wir die vollständige Geschichte des Torsionsmoments dann betrachten, wenn wir als untere Grenze der Integrale $t_0 = -\infty$ nehmen.

Wir wollen nun annehmen, man könne in erster Annäherung alle Glieder der Entwicklung (17) für φ bis auf das erste vernachlässigen; dann wird aus der vorstehenden Gleichung die folgende:

$$\omega(t) = \mathrm{KM}(t) + \int_{t_0}^{t} \mathrm{M}(\tau)\,\varphi(t,\tau)\,d\tau\,. \tag{18}$$

Also wird immer noch eine lineare Beziehung die beiden Grössen ω und M miteinander verknüpfen; aber diese Beziehung hat den algebraischen Typus (16) verloren und ist infolge der Vererbung zu einer Beziehung vom integralen Typus geworden. Da die Beziehung linear ist, so kann man sie

(76) V. Volterra, *Sulla inversione degli integrali definiti.* Nota I, II, III, IV. « Atti Torino », **31**, 311, 400, 557, 693, 1896 [in queste « Opere »: vol. secondo, XVIII, pp. 216–254]. — Rend. Acc. Lincei (5) **5** (1 Sem.), 177, 1896 [ibidem, XIX, pp. 255–262]. — *Sulla inversione degli integrali multipli.* Ebenda [ibidem, XX, pp. 263–275]. — *Sopra alcune questioni di inversione di integrali definiti.* « Ann. di Mat. » (2), **25**, 139. 1897 [ibidem, XXII, pp. 279–313].

(77) Vgl. insbesondere § 3 der Nota I: *Sulla inversione degli integrali definiti.* « Atti Torino », **31**, 311, 1896 [in queste « Opere »: vol. secondo, XVIII, pp. 216–225].

vom physikalischen Gesichtspunkt aus dahin deuten, dass die Wirkungen der sich überlagernden Torsionsmomente sich summieren. In der Tat, setzt man diese Eigenschaft voraus, so geht die vorstehende Gleichung daraus als Folgerung hervor. Deshalb bezeichnen wir die betrachtete Vererbung als linear.

Ich will nun die Probleme aufstellen, die auftauchen, sobald die von uns studierte spezielle Frage auf die vorstehende Form gebracht worden ist:

1. Welche Bedeutung hat der Koeffizient $\varphi(t, \tau)$?

2. Wie kann man, wenn die Funktion $\varphi(t, \tau)$ bekannt ist, bei gegebenem $\omega(t)$ das Moment $M(t)$ bestimmen?

3. Wie kann man die Funktion $\varphi(t, \tau)$ bestimmen, wenn man annimmt, sie sei unbekannt?

4. Ist es möglich, die vorstehenden, auf die Torsion bezüglichen Gedankengänge auf den allgemeinen Fall der Elastizität auszudehnen?

5. Ist es möglich, sie auf die magnetischen und dielektrischen Erscheinungen auszudehnen?

6. Welche Erscheinungen gehören in den Bereich der Lösungen, die man findet?

Wir wollen diese verschiedenen Probleme ganz rasch besprechen.

30. Integralgleichungen und Systeme von Gleichungen ersten Grades.

Es hat keine Schwierigkeit, die erste Frage zu beantworten. Man sieht nämlich leicht ein, dass $\varphi(t, \tau)$ die Torsion misst, die zurzeit t durch ein Torsionsmoment veranlasst wird, das gleich der Einheit ist, und das im Zeitintervall $(\tau \cdots \tau + d\tau)$ ausgeübt wird. Deshalb wird man annehmen müssen, dass $\varphi(t, \tau)$ mit wachsender Differenz $t - \tau$ abnimmt. Wir werden auch voraussetzen, dass $\varphi(t, \tau)$ für unendlich grosses $t - \tau$ unendlich klein ist. Ausserdem wollen wir die Annahme machen, dass, wenn $t - \tau$ unendlich gross von erster Ordnung wird, die Funktion $\varphi(t, \tau)$ unendlich klein von der Ordnung $1 + \varepsilon$ wird, wo $\varepsilon > 0$ ist. Dann ist das Integral

$$\int_{t_0}^{t} M(\tau)\, \varphi(t, \tau)\, d\tau$$

konvergent, wenn man die untere Grenze $t_0 = -\infty$ setzt.

Wir wollen $\varphi(t, \tau)$ den V e r e r b u n g s k o e f f i z i e n t e n nennen.

Wir wollen nun zur zweiten der im vorigen Paragraphen aufgestellten Fragen übergehen. Man muss die Gleichung (18) nach M auflösen, also $M(t)$ als unbekannt, alle anderen Grössen als bekannt ansehen. Man erhält eine sogenannte Integralgleichung.

Wir werden zeigen, wie man zu ihrer Auflösung gelangen kann, und dabei die allgemeinen Grundsätze entwickeln, nach denen man alle ähnlichen Integralgleichungen lösen kann. Wie schon im voraufgehenden Kapitel gesagt, entsprechen diese Grundsätze wollkommen denen, die wir zuvor bei der Erweiterung der TAYLORschen Reihenentwicklung verwandt haben. Man hat folgenden Weg einzuschlagen.

Zur Vereinfachung setzen wir $K = 1$. Wir teilen das Intervall (t_0, t) in n Teile $h_1, h_2, \cdots, h_n$; $t_1, t_2, \cdots, t_n$ seien n Werte von t innerhalb dieser Teilintervalle.

Wir schreiben nun die Gleichungen auf

$$(19) \quad \left\{ \begin{aligned} \omega(t_1) &= M(t_1) \\ \omega(t_2) &= h_1 M(t_1) \varphi(t_2, t_1) + M(t_2) \\ \omega(t_3) &= h_1 M(t_1) \varphi(t_3, t_1) + h_2 M(t_2) \varphi(t_3, t_2) + M(t_3), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \omega(t_n) &= h_1 M(t_1) \varphi(t_n, t_1) + h_2 M(t_2) \varphi(t_n, t_2) + \cdots \\ &\qquad + h_{n-1} M(t_{n-1}) \varphi(t_n, t_{n-1}) + M(t_n). \end{aligned} \right.$$

Man hat so ein System von n Gleichungen mit den n Unbekannten $M(t_1), M(t_2), \cdots, M(t_n)$. Es ist klar, dass, wenn wir zur Grenze übergehen und $h_1, h_2, \cdots, h_n$ unbegrenzt abnehmen lassen, die vorstehenden Gleichungen sich auf die Integralgleichung (18) reduzieren. Um also jene Integralgleichung zu lösen, lösen wir zuerst das System algebraischer Gleichungen (19) und gehen danach in der Lösung zur Grenze über, indem wir $h_1, h_2, \cdots, h_n$, unbegrenzt abnehmen lassen. Auf diese Weise wird man sehr leicht die Lösung der Integralgleichung erhalten.

In dem Fall nun, den wir vor Augen haben, tritt ein besonders günstiger Umstand hinzu; die Determinante, die im Nenner erscheint, wird nämlich gleich eins. Deshalb wird die Lösung eine einfache Gestalt haben, denn man braucht nur die Determinanten der Zähler nach den gewöhnlichen Regeln zu berechnen und darauf ihre Grenzwerte zu ermitteln. Augenscheinlich findet man Lösungsformeln folgender Gestalt

$$\begin{aligned} M(t_1) &= \omega(t_1), \\ M(t_2) &= h_1 \omega(t_1) A_{21} + \omega(t_2), \\ M(t_3) &= h_1 \omega(t_1) A_{31} + h_2 \omega(t_2) A_{32} + \omega(t_3), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ M(t_n) &= h_1 \omega(t_1) A_{n1} + h_2 \omega(t_2) A_{n2} + \cdots + h_{n-1} \omega(t_{n-1}) A_{nn-1} + \omega(t_n). \end{aligned}$$

Zur Berechnung der Koeffizienten A_{ik} $(i, k = 1, 2, \cdots, n)$ nehmen wir die Determinanten, welche sie als Funktionen der Grössen $\varphi(t_i, t_k)$ ausdrücken, und trennen beim Aufschreiben die Glieder ersten Grades, zweiten Grades, dritten Grades usw. Man findet so zuerst $\varphi(t_i, t_k)$ und danach einfache Summen, Doppelsummen, dreifache Summen usf. Lassen wir jetzt die Intervalle $h_1, h_2, \cdots, h_n$ unbegrenzt abnehmen, so werden diese verschiedenen Summen beim Grenzübergang einfache, doppelte, dreifache usw. Integrale.

Die Lösungsformel, die man auf diese Weise erhält, ist [78]

$$\mathrm{M}(t) = \omega(t) + \int_{t_0}^{t} \omega(\tau)\, \psi(t, \tau)\, d\tau .$$

Dabei ist

$$\psi(t, \tau) = -\varphi(t, \tau) + \int_{\tau}^{t} \varphi(\tau, \xi)\, \varphi(\xi, t)\, d\xi$$

$$-\int_{\tau}^{t} \varphi(\tau, \xi)\, d\xi \int_{\xi}^{t} \varphi(\xi, \xi_1)\, \varphi(\xi_1, t)\, d\xi_1$$

$$+\int_{\tau}^{t} \varphi(\tau, \xi)\, d\xi \int_{\xi}^{t} \varphi(\xi, \xi_1)\, d\xi_1 \int_{\xi_1}^{t} \varphi(\xi_1, \xi_2)\, \varphi(\xi_2, \xi_1)\, d\xi_2$$

$$- \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Man kann daher den Schluss ziehen, dass die Operation der Auflösung einer Integralgleichung, wie ich sie in meinen Arbeiten über die Inversion bestimmter Integrale gegeben habe, im allgemeinen keine wesentlichen Schwierigkeiten bietet, die grösser wären als bei der Auflösung gewöhnlicher Gleichungen ersten Grades. Betrachten wir die Gleichung vom Typus

$$\mathrm{M}(\Theta) = \omega(\Theta) + \int_{t_0}^{t} \omega(\tau)\, \varphi(\Theta, \tau)\, d\tau \qquad (t_0 \leqq \Theta \leqq t),$$

d. h. die FREDHOLMsche Gleichung [79], bei der die obere Grenze konstant ist, so kann die Auflösung nach einer ähnlichen Methode bewerkstelligt werden. Man ersetzt sie zunächst durch das System

$$\mathrm{M}(t_1) = \omega(t_1) + h_1\, \omega(t_1)\, \varphi(t_1, t_1) + h_2\, \omega(t_2)\, \varphi(t_1, t_2) + \cdots + h_n\, \omega(t_n)\, \varphi(t_1, t_n),$$

$$\mathrm{M}(t_2) = \omega(t_2) + h_1\, \omega(t_1)\, \varphi(t_2, t_1) + h_2\, \omega(t_2)\, \varphi(t_2, t_2) + \cdots + h_n\, \omega(t_n)\, \varphi(t_2, t_n),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\mathrm{M}(t_n) = \omega(t_n) + h_1\, \omega(t_1)\, \varphi(t_n, t_1) + h_2\, \omega(t_2)\, \varphi(t_n, t_2) + \cdots + h_n\, \omega(t_n)\, \varphi(t_n, t_n).$$

Dieses System löst man nach der Methode der Determinanten auf, dann geht man zur Grenze über, indem man die Intervalle $h_1, h_2, \cdots, h_n$ unbegrenzt abnehmen lässt. In diesem Falle muss man sowohl Zähler als auch Nenner berechnen, während im vorigen Fall der Nenner gleich eins war.

Wir haben so das Prinzip für die Lösung linearer Integralgleichungen angegeben. Von hier aus kann man ohne jede Schwierigkeit die zweite der oben aufgestellten Fragen beantworten.

(78) Vgl. V. VOLTERRA, *Leçons sur les équations intégrales et intégro-différentielles*. Kap. II, § 2.

(79) Vgl. Anm. 66.

31. Prinzip des geschlossenen Kreisprozesses.

Wir gehen zur dritten Frage über.

Um tiefer in sie einzudringen, wollen wir mit einigen Vorbetrachtungen beginnen.

In allen Fällen der Hysteresis und allgemein der Vererbungswirkungen spielt die Frage der geschlossenen Kreisprozesse eine sehr wichtige Rolle. Wir wollen das Torsionsmoment M und den Torsionswinkel ω als Abszisse und Ordinate eines Punktes A betrachten. Wir setzen voraus, dass sich M seit der Zeit $-\infty$ periodisch ändert. Ändert sich ω nun auch periodisch, und zwar mit derselben Periode, so wird der Punkt A eine geschlossene Kurve durchlaufen. Ist diese Bedingung erfüllt, so kann man, welches auch immer die Periode des Torsionsmoments sein möge, beweisen, dass $\varphi(t, \tau)$ eine Funktion der Differenz $t-\tau$ sein muss. Umgekehrt, ist $\varphi(t, \tau)$ eine Funktion der Differenz $t-\tau$, so lässt sich zeigen, dass A eine geschlossene Kurve durchläuft, wenn M sich periodisch ändert [80].

Ist nun $\varphi(t, \tau)$ eine Funktion von $t-\tau$, so bedeutet dies, dass die von einem gegebenen Torsionsmoment nach einer bestimmten Zeit veranlasste Torsion nur von der Grösse des verflossenen Zeitintervalls und nicht von dem Zeitpunkt abhängt, in dem das Moment wirkte. Diese Eigenschaft kann die Unveränderlichkeit der Vererbung genannt werden. Man folgert den Satz, dass die Existenz des geschlossenen Kreisprozesses die Unveränderlichkeit der Vererbung als Folge nach sich zieht und umgekehrt. Deshalb kann man die beiden Eigenschaften als gleichwertig ansehen. Ich nenne das vorstehende Theorem das Prinzip des geschlossenen Kreisprozesses.

Wir haben das Prinzip hier in dem besonderen Fall linearer Vererbung angewandt; es ist aber weit allgemeiner [81].

Ist nun $\varphi(t, \tau) = \varphi(t, -\tau)$, so kann man die Integralgleichung

$$\omega(t) = \mathrm{KM}(t) + \int_{t_0}^{t} \mathrm{M}(\tau)\, \varphi(t, \tau)\, d\tau$$

leicht umformen in

$$\omega(t) = \mathrm{KM}(t) + \int_{0}^{t-t_0} \mathrm{M}(t-\xi)\, \varphi(\xi)\, d\xi,$$

(80) V. Volterra, *Sulle equazioni della elettrodinamica.* « Rend. Acc. Lincei » (5), **18**, 203, 1909 (1 Sem.). [in questo vol.: XVIII, pp. 276–283]; V. Volterra, *Sur les équations intégro-différentielles et leurs applications.* « Acta Math. », **35**, 295, 1912. [in questo vol.: XXXV, pp. 487–538].

(81) V. Volterra, *Sui fenomeni ereditarii.* « Rend. Acc. Lincei » (5) **22** (1 Sem.) 9, 1913. [in questo vol.: XL, pp. 597–606]. Vgl. auch Kap. 7 der schon erwähnten *Leçons sur les fonctions de lignes.*

und nach der angegebenen Methode zur Lösung von Integralgleichungen kann man den Nachwirkungskoeffizienten $\varphi(\xi)$ bestimmen, wenn man $M(t)$ und $\omega(t)$ kennt.

Somit ist die dritte Frage gelöst. Für die Probleme, die wir bis jetzt behandelt haben, genügt also die gewöhnliche Analysis der Integralgleichungen.

32. Schwingungen infolge von Torsion. Integraldifferentialgleichungen.

Wir werden alsbald zeigen, dass man zu den Integraldifferentialgleichungen greifen muss, will man die entwickelten speziellen Betrachtungen auf allgemeine Fälle ausdehnen. Bevor wir indes an diese Erweiterung herangehen, ist es nützlich, zunächst Gleichungen dieser Art zu betrachten, ohne das spezielle Problem der Torsion zu verlassen; allerdings werden wir die Torsion nicht mehr vom Standpunkt der Statik aus betrachten, wie wir es bisher getan haben. Wir wollen eine dynamische Frage untersuchen, d. h. die Frage nach den Schwingungen einer Saite. Es ist klar, dass es nach dem D'ALEMBERTschen Prinzip für den Übergang von der Statik zur Dynamik genügt, das Torsionsmoment M durch die Differenz $M - \mu\, \partial^2\omega/\partial t^2$ zu ersetzen, wobei μ eine konstante Grösse ist. Man findet dann

$$\text{(20)} \qquad \omega(t) = K \cdot \left[M(t) - \mu \frac{\partial^2 \omega(t)}{\partial t^2}\right] + \int_{t_0}^{t} \left[M(\tau) - \mu \frac{\partial^2 \omega(\tau)}{\partial \tau^2}\right] \varphi(t, \tau)\, d\tau .$$

Man kann diese Gleichung durch die reziproke ersetzen, die man durch Auflösung der Integralgleichung erhält:

$$M(t) - \mu \frac{\partial^2 \omega(t)}{\partial t^2} = \frac{1}{K}\, \omega(t) + \int_{t_0}^{t} \omega(\tau)\, \chi(t, \tau)\, d\tau .$$

Richten wir unsere Aufmerksamkeit zuerst auf die Natur der eben gefundenen Gleichung. Sie ist zugleich eine Differentialgleichung und eine Integralgleichung; denn nehmen wir $\omega(t)$ als Unbekannte, so erscheint diese Funktion unter einem bestimmten Integral, und sie ist auch zweimal nach t differenziert. Diese Gleichung ist daher vom Typus der Integraldifferentialgleichungen. Man kann aber zeigen, dass man bei dieser besonderen Integraldifferentialgleichung die Ableitungen durch zweimalige Integration nach t wegschaffen und sie so in eine gewöhnliche Integralgleichung umformen kann.

Deswegen kann man diese Gleichung eine scheinbare Integraldifferentialgleichung nennen; denn ihre differentiale Natur kann zum Verschwinden gebracht werden, und ihre Doppelnatur ist infolgedessen keine wesentliche Eigenschaft.

Wir wollen auf diese besondere Gleichung nicht weiter eingehen. Sie kann uns indes dazu dienen, um vom Standpunkt der Physik eine interessante Bemerkung zu machen. Wir haben im voraufgehenden Kapitel gesehen, dass man den Vererbungskoeffizienten durch Auflösung einer Integralgleichung bestimmen kann, die eine statische Beziehung zum Ausdruck bringt. Ebenso ersieht man leicht, dass sich der Vererbungskoeffizient auch auf dynamischem Wege durch Beobachtung der Saitenschwingungen und Auflösung der Integralgleichung (20) nach φ bestimmen lässt, wenn man voraussetzt, dass φ eine Funktion von $t - \tau$ ist (82).

33. Allgemeiner Fall der Elastizität unter Berücksichtigung der Vererbung.

Wir wollen nun zum allgemeinen Problem der Elastizität übergehen, und zwar unter Berücksichtigung der Vererbungserscheinungen (83).

Das HOOKEsche Gesetz stellt lineare Beziehungen auf zwischen den sechs Elementen die die Spannungen in jedem Punkt bestimmen, und den sechs Elementen, die die Deformation bestimmen (vgl. Kap. 14).

Bezeichnen wir diese Elemente mit

$$t_{is} \quad \text{und} \quad \gamma_{is} \qquad (i, s = 1, 2, 3),$$

so erhalten wir die Gleichungen

$$\gamma_{is} = \Sigma \alpha_{is|hk} t_{hk} . \tag{21}$$

Man vernachlässigt so die Vererbungserscheinungen, denn man setzt ja voraus, dass die augenblickliche Deformation nur von den augenblicklichen Spannungen abhängt. Wollen wir uns aber darüber Rechenschaft ablegen, dass irgendeine Spannung in einem Teilchen des elastischen Mediums auf alle künftigen Deformationen ihren Einfluss geltend macht, so wird man, wie wir es in dem speziellen Fall der Torsion getan haben, die vorstehende Gleichung dadurch berichtigen müssen, dass man einen Ausdruck φ_{is} hinzufügt, der von all den Spannungen abhängt, die seit der Zeit $-\infty$ bis zum gegenwärtigen Augenblick auf das Teilchen gewirkt haben. Unter ähnlichen Voraussetzungen, wie wir sie im Fall der Torsion gemacht haben kann man φ_{is} in eine Reihe entwickeln, die ähnlichen Typus wie die TAYLORsche besitzt, und die sich der bereits im Kap. 28 besprochenen Reihe annähert. Man erhält so eine unendliche Summe von Ausdrücken, die nacheinander von einfachen, doppelten, dreifachen usf. Integralen gebildet werden.

Machen wir die Annahme, dass man in dieser Reihe alle Glieder vernachlässigen kann bis auf das erste, d. h. bis auf dasjenige, das die einfachen

(82) V. VOLTERRA, *Vibrazioni elastiche nel caso della eredità.* « Rend. Acc. Lincei » (5), **21** (2. Sem.), 3, 1912 [in questo vol. : XXXVIII, pp. 569-577].

(83) Vgl. V. VOLTERRA, *Sur les équations intégro-differentielles et leurs applications.* « Acta Math. », 35, 295, 1912 [in questo vol.: XXXV, pp. 487-538].

Integrale umfasst, so ist die Beziehung (21) durch die Gleichung zu ersetzen

$$\gamma_{is}(t) = \Sigma\alpha_{is/hk}\, t_{hk}(t) + \int_{-\infty}^{t} \Sigma\varphi_{is/hk}(t, \tau)\cdot t_{hk}(\tau)\, d\tau .$$

Diese Gleichung vereinfacht sich durch die Annahme, dass man alle vor der Zeit t_0 erfolgten Wirkungen vernachlässigen darf. Sie wird dann

$$(22) \qquad \gamma_{is}(t) = \Sigma\alpha_{is/hk}(t) + \int_{t_0}^{t} \Sigma\varphi_{is/hk}(t, \tau)\, t_{hk}(\tau)\, d\tau .$$

Die so am HOOKEschen Gesetz angebrachte Modifikation ändert den Typus der Grundbeziehungen, denn sie verwandelt diese in integrale Beziehungen. Immerhin bleiben die Beziehungen linear, und daher werden wir wie früher die hier betrachtete Vererbung eine lineare Vererbung nennen. Vom Standpunt der Physik ist diese Eigenschaft charakteristisch dafür, dass das Prinzip der Superposition für die Wirkungen der Spannungen gilt, die in allen dem gegenwärtigen voraufgegangenen Zeitpunkten ausgeübt worden sind. Diese Wirkungen werden im Verhältnis der Koeffizienten $\varphi_{is/hk}(t, \tau)$ verkleinert, die man Vererbungskoeffizienten nennen kann. Sie werden im allgemeinen von den Variabeln t und τ und ausserdem von den Raumkoordinaten x, y, z des betrachteten Teilchens abhängen. Es ist klar, dass diese Koeffizienten mit wachsendem $t - \tau$ abnehmen und schliesslich unendlich klein werden müssen, wenn $t - \tau$ unendlich gross wird. Wir wollen voraussetzen, dass, wenn $t - \tau$ unendlich gross erster Ordnung wird, $\varphi_{is/hk}(t, \tau)$ unendlich klein von der Ordnung $1 + \varepsilon$ wird ($\varepsilon > 0$). Die Grundbeziehungen (22) bilden Systeme von Integralgleichungen, und es hat keine Schwierigkeit, sie nach $t_{hk}(t)$ auf dieselbe Weise aufzulösen, wie wir eine einzelne Integralgleichung gelöst haben, d. h. wir haben zuerst die Integrale durch Summen zu ersetzen und dann zur Grenze überzugehen. Es genügt hierfür die Voraussetzung, dass die Determinante D der Grössen $\alpha_{is/hk}$ von Null verschieden ist.

Man drückt so die Spannungen linear durch die Deformationen aus und findet

$$(23) \qquad t_{hk} = \Sigma A_{is/hk}\, \gamma_{is}(t) + \int_{t_0}^{t} \Phi_{is/hk}(t, \tau)\, \gamma_{is}(\tau)\, d\tau .$$

Die Koeffizienten $A_{is/hk}$ sind die Verhältnisse der den Elementen $\alpha_{is/hk}$ der Determinante D zugeordneten Unterdeterminanten zur Determinante D selbst. Die Funktionen $\Phi_{is/hk}(t, \tau)$ werden, ähnlich wie im Kap. 30, aus den Funktionen $\varphi_{is/hk}$ mit Hilfe von Quadraturen berechnet.

Die im Kap. 31 angestellten Betrachtungen sind auf diesen Fall anwendbar, d. h. man kann das Prinzip des geschlossenen Kreisprozesses erweitern.

Es lässt sich nämlich beweisen, dass, wenn jeder periodischen Änderung der Grössen t_{is} periodische Änderungen der Grössen γ_{hk} mit derselben Periode entsprechen sollen, dann die Koeffizienten $\varphi_{is/hk}(t, \tau)$ Funktionen der Differenz $t - \tau$ sein müssen. Man schliesst hieraus, dass die Existenz des geschlossenen Kreisprozesses und der Unveränderlichkeit der Vererbung gleichwertige Eigenschaften sind. Sind die Koeffizienten $\varphi_{is/hk}$ Funktionen von $t - \tau$, so kann man sie leicht berechnen, wenn die Funktionen γ_{hk} und t_{is} durch die Lösung eines Systems von Integralgleichungen ermittelt sind.

Sobald wir die Spannungen t_{hk} durch die Deformationen γ_{is} ausgedrückt haben (Formeln (23)), können wir ohne Schwierigkeit die Gleichgewichtsbedingungen hinschreiben. Es genügt, die unbestimmten Bedingungen für das elastische Gleichgewicht anzuwenden, d. h.

$$(24)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial t_{11}}{\partial x} + \frac{\partial t_{12}}{\partial y} + \frac{\partial t_{13}}{\partial z} &= \rho X, \\ \frac{\partial t_{21}}{\partial x} + \frac{\partial t_{22}}{\partial y} + \frac{\partial t_{23}}{\partial z} &= \rho Y, \\ \frac{\partial t_{31}}{\partial x} + \frac{\partial t_{32}}{\partial y} + \frac{\partial t_{33}}{\partial z} &= \rho Z, \end{aligned}\right.$$

wobei ρ die Dichte und X, Y, Z die Komponenten der Massenkräfte sind. Dazu kommen die Grenzbedingungen

$$(24')\qquad \left\{\begin{aligned} t_{11}\cos(n, x) + t_{12}\cos(n, y) + t_{13}\cos(n, z) &= X_\sigma, \\ t_{21}\cos(n, x) + t_{22}\cos(n, y) + t_{23}\cos(n, z) &= Y_\sigma, \\ t_{31}\cos(n, x) + t_{32}\cos(n, y) + t_{33}\cos(n, z) &= Z_\sigma, \end{aligned}\right.$$

wobei $X_\sigma, Y_\sigma, Z_\sigma$ die Spannungen an der Grenze bedeuten.

Wir drücken jetzt die Grössen γ_{hk} durch die Komponenten der Verschiebung u, v, w aus; man erhält:

$$(24'')\qquad \left\{\begin{aligned} \gamma_{11} &= \frac{\partial u}{\partial x}, & \gamma_{23} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, \\ \gamma_{22} &= \frac{\partial v}{\partial y}, & \gamma_{31} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}, \\ \gamma_{33} &= \frac{\partial w}{\partial z}, & \gamma_{12} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}. \end{aligned}\right.$$

Setzen wir in den Gleichungen (24) und (24') für die Grössen t_{hk} die Ausdrücke (23) ein, und ersetzen wir weiter in den so gefundenen Formeln die Grössen γ_{hk} durch die Ausdrücke (24''), so werden die Beziehungen (24) und (24') zu Integraldifferentialgleichungen; denn die unbekannten Grössen u, v, w erscheinen in diesen Gleichungen unter den Integralen und werden ausserdem nach den Variabeln x, y, z differenziert.

Wir sehen also, wenn man das allgemeine Problem der Elastizität unter Berücksichtigung der Vererbung ins Auge fasst, so wird man auf Integraldifferentialgleichungen geführt. Durch sehr einfache Betrachtungen findet man, dass im Fall eines homogenen und isotropen elastischen Körpers diese

Gleichungen die Form annehmen

$$
(25)\quad \begin{cases}
K\Delta^2 u(t) + (L+K)\dfrac{\partial\theta(t)}{\partial x} \\
\qquad + \displaystyle\int_{t_0}^{t}\left[\psi(t,\tau)\Delta^2 u(\tau) + (\varphi(t,\tau)+\psi(t,\tau))\frac{\partial\theta(\tau)}{\partial x}\right]d\tau = \rho X(t), \\
K\Delta^2 v(t) + (L+K)\dfrac{\partial\theta(t)}{\partial y} \\
\qquad + \displaystyle\int_{t_0}^{t}\left[\psi(t,\tau)\Delta^2 v(\tau) + (\varphi(t,\tau)+\psi(t,\tau))\frac{\partial\theta(\tau)}{\partial y}\right]d\tau = \rho Y(t), \\
K\Delta^2 w(t) + (L+K)\dfrac{\partial\theta(t)}{\partial z} \\
\qquad + \displaystyle\int_{t_0}^{t}\left[\psi(t,\tau)\Delta^2 w(\tau) + (\varphi(t,\tau)+\psi(t,\tau))\frac{\partial\theta(\tau)}{\partial z}\right]d\tau = \rho Z(t).
\end{cases}
$$

Hierbei sind L und K konstante Grössen und

$$\theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}.$$

Die Gleichungen reduzieren sich augenscheinlich auf die wohlbekannten Gleichungen des gewöhnlichen elastischen Gleichgewichts, sobald man die Integralausdrücke weglässt, die wegen der Vererbung auftreten.

Die eben gefundenen Gleichungen entsprechen den statischen Problemen. Sie sind vom elliptischen Typus. Es hat keine Schwierigkeit, die Schwingungsgleichungen zu bestimmen, denn nach dem D'ALEMBERTschen Prinzip braucht man nur die Massenkräfte ρX, ρY, ρZ durch die Differenzen zu ersetzen

$$\rho\left(X - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right) \quad , \quad \rho\left(Y - \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\right) \quad , \quad \rho\left(Z - \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right).$$

Man findet auch in diesem Fall Integraldifferentialgleichungen; aber diese sind jetzt vom hyperbolischen Typus.

34. Die elektromagnetischen Gleichungen mit Berücksichtigung der Vererbung.

Bevor wir in den vorstehenden Untersuchungen weiter fortschreiten, wollen wir das Problem des Elektromagnetismus für ruhende Körper unter Berücksichtigung der Nachwirkung in Angriff nehmen. (5. Frage des Kap. 29).

Wir müssen von den HERTZschen Gleichungen ausgehen, von denen wir in der ersten Vorlesung gesprochen haben [84], d. h. von den Gleichungen

(84) S. Anm. 83.

$$(26) \qquad A\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial t} = \frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}\,, \quad A\frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial t} = \frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}\,, \quad A\frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial t} = \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}$$

$$(26') \qquad \left\{ \begin{aligned} A\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial t} &= \frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial y} - 4\pi A u, \\ A\frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial t} &= \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial z} - 4\pi A v, \\ A\frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial t} &= \frac{\partial L}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial x} - 4\pi A w. \end{aligned} \right.$$

Hierbei sind $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}$; X, Y, Z; u, v, w die Komponenten der elektrischen Verschiebung, der elektrischen Feldstärke und des elektrischen Stromes, während $\mathfrak{L}, \mathfrak{M}, \mathfrak{N}$; L, M, N die Komponenten der magnetischen Verschiebung und der magnetischen Feldstärke sind.

Die gewöhnlichen Bedingungen, die man zu den vorstehenden Gleichungen hinzufügt, sind lineare, ganze algebraische Beziehungen zwischen den Komponenten der elektrischen Feldstärke und der elektrischen Verschiebung und zwischen den Komponenten der magnetischen Feldstärke und der magnetischen Verschiebung. Berücksichtigen wir aber die Vererbung, so muss man diese Beziehungen durch Integralbeziehungen ersetzen, die den eben im Fall der Elastizität betrachteten vollkommen analog sind. Setzen wir die Gültigkeit des Prinzips der Superposition für solche Wirkungen voraus, die von sich überlagernden Ursachen herrühren, so finden wir lineare Integralbeziehungen, und zwar von folgendem Typus:

$$\mathfrak{X}(t) = \varepsilon_{11} X(t) + \varepsilon_{12} Y(t) + \varepsilon_{13} Z(t)$$
$$+ \int_{t_0}^{t} [X(\tau)\varphi_{11}(t,\tau) + Y(\tau)\varphi_{12}(t,\tau) + Z(\tau)\varphi_{13}(t,\tau)]\,d\tau,$$

$$\mathfrak{Y}(t) = \varepsilon_{21} X(t) + \varepsilon_{22} Y(t) + \varepsilon_{23} Z(t)$$
$$+ \int_{t_0}^{t} [X(\tau)\varphi_{21}(t,\tau) + Y(\tau)\varphi_{22}(t,\tau) + Z(\tau)\varphi_{23}(t,\tau)]\,d\tau,$$

$$\mathfrak{Z}(t) = \varepsilon_{31} X(t) + \varepsilon_{32} Y(t) + \varepsilon_{33} Z(t)$$
$$+ \int_{t_0}^{t} [X(\tau)\varphi_{31}(t,\tau) + Y(\tau)\varphi_{32}(t,\tau) + Z(\tau)\varphi_{33}(t,\tau)]\,d\tau.$$

$$\mathfrak{L}(t) = \mu_{11} L(t) + \mu_{12} M(t) + \mu_{13} N(t)$$
$$+ \int_{t_0}^{t} [L(\tau)\psi_{11}(t,\tau) + M(\tau)\psi_{12}(t,\tau) + N(\tau)\psi_{13}(t,\tau)]\,d\tau,$$

$$\mathfrak{M}(t) = \mu_{21} \mathrm{L}(t) + \mu_{22} \mathrm{M}(t) + \mu_{23} \mathrm{N}(t)$$

$$+ \int_{t_0}^{t} [\mathrm{L}(\tau)\, \psi_{21}(t, \tau) + \mathrm{M}(\tau)\, \psi_{22}(t, \tau) + \mathrm{N}(\tau)\, \psi_{23}(t, \tau)]\, d\tau,$$

$$\mathfrak{N}(t) = \mu_{31} \mathrm{L}(t) + \mu_{32} \mathrm{M}(t) + \mu_{33} \mathrm{N}(t)$$

$$+ \int_{t_0}^{t} [\mathrm{L}(\tau)\, \psi_{31}(t, \tau) + \mathrm{M}(\tau)\, \psi_{32}(t, \tau) + \mathrm{N}(\tau)\, \psi_{33}(t, \tau)]\, d\tau.$$

Setzen wir diese Ausdrücke in die HERTZschen Gleichungen (26) und (26′) ein, so finden wir auch in diesem Fall Integraldifferentialgleichungen. Durch Auflösung der vorstehenden Integralgleichungen können wir die elektrische und die magnetische Feldstärke durch die elektrische und die magnetische Verschiebung ausdrücken. Man kann auch das in den vorhergehenden Kapiteln über das Prinzip des geschlossenen Kreisprozesses Gesagte hier wiederholen.

Wir wollen jetzt einen besonderen Fall betrachten, und zwar den Fall der Statik. Das ist der einfachste Fall, der überhaupt vorkommen kann. Hierbei ändern sich

$$\mathfrak{L}, \mathfrak{M}, \mathfrak{N} \quad ; \quad \mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}$$

so langsam, dass man die Grössen

$$\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial t}, \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial t}, \frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial t} \quad : \quad \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial t}, \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial t}, \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial t}$$

vernachlässigen kann; ausserdem ist das Medium nichtleitend. In diesem Fall existiert ein elektrisches und ein magnetisches Potential.

Es sei V das elektrische Potential. Wir wollen voraussetzen, dass die Grössen ε_{rs} und φ_{rs} für $r \gtrless s$ verschwinden.

Man erhält dann die Gleichung

$$\varepsilon_{11} \frac{\partial^2 \mathrm{V}(t)}{\partial x^2} + \varepsilon_{22} \frac{\partial^2 \mathrm{V}(t)}{\partial y^2} + \varepsilon_{33} \frac{\partial^2 \mathrm{V}(t)}{\partial z^2}$$

$$+ \int_{t_0}^{t} \left(\frac{\partial^2 \mathrm{V}(\tau)}{\partial x^2} \varphi_{11}(t, \tau) + \frac{\partial^2 \mathrm{V}(\tau)}{\partial y^2} \varphi_{22}(t, \tau) + \frac{\partial^2 \mathrm{V}(\tau)}{\partial z^2} \varphi_{33}(t, \tau) \right) d\tau = 0,$$

eine Gleichung, die leicht in die folgende übergeführt werden kann

$$(27) \qquad \Delta^2 \mathrm{V}(t) + \int_{t_0}^{t} \left(\frac{\partial^2 \mathrm{V}(\tau)}{\partial x^2} f(t, \tau) + \frac{\partial^2 \mathrm{V}(\tau)}{\partial y^2} \varphi(t, \tau) + \frac{\partial^2 \mathrm{V}(\tau)}{\partial z^2} \psi(t, \tau) \right) d\tau = 0.$$

Vernachlässigt man die Vererbung, so reduziert sich diese Gleichung auf die LAPLACEsche $\Delta^2 \mathrm{V} = 0$.

Wir können die Gleichung (27) als Typus der elliptischen Integraldifferentialgleichungen ansehen, ebenso wie die LAPLACEsche Gleichung den

Typus der elliptischen Differentialgleichungen darstellt. Die Methoden, die man für die Gleichung (27) verwendet, können leicht auf die verwickeltsten Fälle ausgedehnt werden. Wir wollen uns den Grundgedanken dieser Methoden im folgenden Kapitel zuwenden.

35. Erweiterung der Greenschen Methode.

Wir wollen zunächst einmal annehmen, dass die rechte Seite der Gleichung (27) zwar nicht null, aber doch eine gegebene Funktion $F(x, y, z, t)$ ist. Wir wollen die Gleichung dann mit (27′) bezeichnen.

Ist $f = \varphi = \psi$, so kann man die Gleichung schreiben

$$\Delta^2 V(t) + \int_{t_0}^{t} f(t, \tau)\, \Delta^2 V(\tau)\, d\tau = F.$$

Löst man die Integralgleichung nach $\Delta^2 V$, so findet man

$$\Delta^2 V = \varphi(x, y, z, t), \tag{28}$$

wobei φ eine bekannte Funktion ist.

Die Aufgabe lässt sich daher in zwei verschiedene Aufgaben zerlegen, nämlich 1. die Lösung einer Integralgleichung, 2. die Integration der Differentialgleichung (28), d. h. der Poissonschen Gleichung. Die Analysis der Integral- und der Differentialgleichungen reicht daher zur Behandlung der Integraldifferentialgleichung aus, wenn $f = \varphi = \psi$ ist. Diese stellt daher in diesem besonderen Fall kein neues Problem dar. Nehmen wir aber an, dass die Funktionen f, φ und ψ nicht einander gleich sind, so reicht die Lehre von den Integral- und von den Differentialgleichungen nicht zur Lösung des Problems aus, und man muss zur Erreichung dieses Ziels einen neuen Zweig der Analysis entwickeln.

Um in das eben Gesagte noch tiefer einzudringen, kann man das Problem noch auf andere Weise umformen. Wir setzen

$$V(x, y, z, t) + \int_{t_0}^{t} V(x, y, z, \tau) f(t, \tau)\, d\tau = V_1(x, y, z, t),$$

$$V(x, y, z, t) + \int_{t_0}^{t} V(x, y, z, \tau)\, \varphi(t, \tau)\, d\tau = V_2(x, y, z, t),$$

$$V(x, y, z, t) + \int_{t_0}^{t} V(x, y, z, \tau)\, \psi(t, \tau)\, d\tau = V_3(x, y, z, t)$$

und lösen diese Integralgleichungen nach V auf. Nach dem auseinandergesetzten Verfahren erhalten wir

$$V(x,y,z,t) = V_1(x,y,z,t) + \int_{t_0}^{t} V_1(x,y,z,\tau) f_1(t,\tau)\, d\tau$$
$$= V_2(x,y,z,t) + \int_{t_0}^{t} V_2(x,y,z,\tau) \varphi_1(t,\tau)\, d\tau$$
$$= V_3(x,y,z,t) + \int_{t_0}^{t} V_3(x,y,z,\tau) \psi_1(t,\tau)\, d\tau.$$

Dabei können die Funktionen f_1, φ_1, ψ_1 durch Quadraturen berechnet werden. Zugleich erhalten wir

$$\frac{\partial^2 V_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_3}{\partial z^2} = F. \tag{29}$$

Daher lässt sich unsere Integraldifferentialgleichung umformen in zwei Integralgleichungen

$$\left\{\begin{aligned} V_1(x,y,z,t) &+ \int_{t_0}^{t} V_1(x,y,z,\tau) f_1(t,\tau)\, d\tau \\ &= V_2(x,y,z,t) + \int_{t_0}^{t} V_2(x,y,z,\tau) \varphi_1(t,\tau)\, d\tau \\ &= V_3(x,y,z,t) + \int_{t_0}^{t} V_3(x,y,z,\tau) \psi_1(t,\tau)\, d\tau \end{aligned}\right. \tag{30}$$

und in die Gleichung (29). Diese Gleichungen sind simultan und im allgemeinen nicht voneinander trennbar.

Wird aber $f = \varphi = \psi$, so werden V_1, V_2 und V_3 einander gleich; infolgedessen reduziert sich (29) auf die POISSONsche Gleichung, und die Integralgleichungen (30) werden zu Identitäten.

Wir wollen daher annehmen, dass die Funktionen f, φ und ψ nicht einander gleich sind, und wollen ferner annehmen, dass $F = 0$ ist. Wir wollen allgemeine Ergebnisse mitteilen, die sich in diesem Fall finden lassen, und die man mit den Eigenschaften der LAPLACEschen Gleichung vergleichen kann [85]. Zunächst kann man zeigen, dass es im Innern eines Raumes S nur eine einzige Funktion V gibt, die für die Werte con t zwischen t_0 und T ($T > t_0$) bestimmte Werte auf der Umgrenzung des Gebietes S annimmt.

Daher kann man sich die Aufgabe stellen, die Funktion V zu berechnen, wenn ihre Randwerte für die Werte von t zwischen t_0 und T gegeben sind.

(85) V. VOLTERRA, *Sulle equazioni integro-differenziali.* « Rend. Acc. Lincei » (5), **18** (1. Sem.), 167, 1909 [in questo vol.: XVII, pp. 269–275]. — V. VOLTERRA, *Sur les équations intégro-differentielles.* « Acta Math. », **35**, 295, 1912 [in questo vol.: XXXV, pp. 487–538].

Die Analogie, die zwischen diesem Problem und dem gewöhnlichen Problem der LAPLACEschen Gleichung besteht, ist augenscheinlich.

Die Rolle, die der GREENsche Satz spielt, ist wohlbekannt. Er stellt ein Reziprozitätsverhältnis zwischen zwei beliebigen regulären Lösungen der LAPLACEschen Gleichung auf. Man kann nun fragen, ob es für Integraldifferentialgleichung einen entsprechenden Satz gibt. Die Antwort fällt bejahend aus; aber in diesem Fall muss man ein Reziprozitätsverhältnis zwischen einer Lösung der Gleichung (27) und einer Lösung der adjungierten Gleichung

$$(31)\qquad \Delta^2 U(t) + \int_t^\theta \left(\frac{\partial^2 U(\tau)}{\partial x^2} f(\tau, t) + \frac{\partial^2 U(\tau)}{\partial y^2} \varphi(\tau, t) + \frac{\partial^2 U(\tau)}{\partial z^2} \psi(\tau, t)\right) d\tau = 0$$

aufstellen.

Man muss bei dieser Gelegenheit daran erinnern, dass man in der RIEMANNschen Theorie ebenfalls den GREENschen Satz durch Einführung der adjungierten Gleichungen verallgemeinert; aber der Typus der adjungierten Gleichung ist in dem hier betrachteten Fall vollkommen anders.

Die in unserem Falle dem GREENschen Satz entsprechende Reziprozitätsbeziehung zwischen einer regulären Lösung V der Gleichung (27) und einer regulären Lösung U der Gleichung (31) lautet nun folgendermassen:

$$(A)\qquad H_\sigma([V, U], \theta) = 0.$$

Dabei ist

$$H_\sigma([V, U], \theta) = \int_{t_0}^\theta dt \int_\sigma \left(U(t) \frac{\partial V(t)}{\partial n} - V(t) \cdot \frac{\partial U(\tau)}{\partial n}\right) d\sigma$$

$$+ \int_{t_0}^\theta dt \int_t^\theta d\tau \int_\sigma \left\{\left(U(\tau) \frac{\partial V(t)}{\partial x} - V(t) \frac{\partial U(\tau)}{\partial x}\right) f(\tau, t) \cos(n, x)\right.$$

$$+ \left(U(\tau) \frac{\partial V(t)}{\partial y} - V(t) \frac{\partial U(\tau)}{\partial y}\right) \varphi(\tau, t) \cos(n, y)$$

$$\left. + \left(U(\tau) \frac{\partial V(t)}{\partial z} - V(t) \frac{\partial U(\tau)}{\partial z}\right) \psi(\tau, t) \cos(n, z)\right\} d\sigma;$$

n bedeutet die Normale der Umgrenzung.

Um diese Formel anzuwenden, muss man eine Fundamentallösung der adjungierten Gleichung ermitteln, d. h. eine Funktion, die der Gleichung genügt, und die in einem innerhalb des Gebietes S gelegenen Pole unendlich wird. Ich will zeigen, wie sie aus bekannten Fundamentallösungen hergeleitet werden kann. Das wird uns zugleich zeigen, wie die Lösung der Integraldifferentialgleichungen an den Grundgedanken anknüpft, auf dem sich die Auflösung der verschiedenen auf die Integralgleichungen bezüglichen Fragen aufbaut, d. h. den Gedanken, sie als Grenzfall von Systemen linearer Gleichungen anzusehen.

Wir wollen einmal wirklich das System simultaner Differentialgleichungen hinschreiben

$$(32)\quad \begin{cases} \Delta^2 v_1 = 0\,, \\ a_{21}\dfrac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} + b_{21}\dfrac{\partial^2 v_1}{\partial y^2} + c_{21}\dfrac{\partial^2 v_1}{\partial z^2} + \Delta^2 v_2 = 0\,, \\ a_{31}\dfrac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} + b_{31}\dfrac{\partial^2 v_1}{\partial y^2} + c_{31}\dfrac{\partial^2 v_1}{\partial z^2} + a_{32}\dfrac{\partial^2 v_2}{\partial x^2} + b_{32}\dfrac{\partial^2 v_2}{\partial y^2} + c_{32}\dfrac{\partial^2 v_2}{\partial z^2} + \Delta^2 v_3 = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

Es ist leicht ersichtlich, dass die Integraldifferentialgleichung (27) nichts anderes ist als der Grenzfall dieses Systems, wenn man voraussetzt, dass die Zahl der Unbekannten und der Gleichungen ins Unendliche wächst.

Das dem vorstehenden adjungierte System ist

$$(33)\quad \begin{cases} \Delta^2 u_1 + a_{21}\dfrac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + b_{21}\dfrac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} + c_{21}\dfrac{\partial^2 u_2}{\partial z^2} + a_{31}\dfrac{\partial^2 u_3}{\partial x^2} + b_{31}\dfrac{\partial^2 u_3}{\partial y^2} + \\ \qquad\qquad + c_{31}\dfrac{\partial^2 u_3}{\partial z^2} + \cdots = 0\,, \\ \Delta^2 u_2 + a_{32}\dfrac{\partial^2 u_3}{\partial x^2} + b_{32}\dfrac{\partial^2 u_3}{\partial y^2} + c_{32}\dfrac{\partial^2 u_3}{\partial z^2} + \cdots = 0\,. \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

Es ist nun nicht schwer, die Fundamentallösung des Systems (32) oder des Systems (33) zu berechnen, wenn man von der Fundamentallösung $1/r$ der LAPLACEschen Gleichung ausgeht. (r ist dabei die Entfernung zwischen dem Punkt x, y, z und dem Pol). Für das System (32) finden wir so die Lösung

$$v_1 = \frac{1}{r}\,,$$

$$v_2 = -a_{21}\frac{\partial^2 \frac{r}{2}}{\partial x^2} - b_{21}\frac{\partial^2 \frac{r}{2}}{\partial y^2} - c_{21}\frac{\partial^2 \frac{r}{2}}{\partial z^2}\,,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Ebenso erhalten wir die Lösung

$$v_1 = \frac{1}{r}\,,$$

$$v_2 = \frac{1}{r} - a_{21}\frac{\partial^2 \frac{r}{2}}{\partial x^2} - b_{21}\frac{\partial^2 \frac{r}{2}}{\partial y^2} - c_{21}\frac{\partial^2 \frac{r}{2}}{\partial z^2}\,,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Durch Grenzübergang ergibt sich schliesslich die Fundamentallösung der Gleichung (27). Eine entsprechende Rechnung kann man für die Gleichungen (33) anstellen. Und durch einen ganz ähnlichen Grenzübergang ist auch die Reziprozitätsgleichung (A) gefunden. Andererseits kann man sie auch direkt erhalten. Zur Vereinfachung wollen wir die Fundamentallösung der adjungierten Gleichung (31) nicht explizit hinschreiben, sondern sie mit W bezeichnen. Wenn wir dann in der Formel (A) U durch W ersetzen und den Pol aus dem Gebiet durch eine Kugel ausschliessen, deren Radius wir unbegrenzt abnehmen lassen, so gelingt es, den Wert von V in dem innerhalb des Gebietes S gelegenen Pol durch die Werte von V und seinen Ableitungen auf der Umrandung auszudrücken. Die Rechnungen bis zum Auffinden der endgültigen Formel sind sehr verwickelt, aber infolge glücklicher Umstände verschwinden einige Glieder, so dass sich das Ergebnis vereinfacht. Die endgültige Formel lautet

$$\text{(A}'\text{)} \qquad V_0(\theta) = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial\theta} H_\sigma([V, W], \theta).$$

$V_0(\theta)$ stellt dabei den Wert dar, den $V(x, y, z, t)$ annimmt, wenn $t = \theta$ und x, y, z die Koordinaten des Poles sind. Es ist das die Grundformel der ganzen Theorie; sie ist auch leicht auf den Fall der Gleichung auszudehnen, die wir am Anfange des Kapitels 35 mit (27′) bezeichnet haben.

36. Methoden zur Lösung der Integraldifferentialgleichungen der Elastizität unter Berücksichtigung der Vererbungserscheinungen

Wir haben in der zweiten Vorlesung von der Bettischen Methode zur Integration der Differentialgleichungen für das elastische Gleichgewicht (Kap. 16) und von der Kirchhoffschen Methode (Kap. 17) gesprochen. Wir wollen jetzt zeigen, dass sich im Falle der Vererbung ebenso allgemeine Lösungen angeben lassen. Man muss hierfür Methoden anwenden, die eine Verallgemeinerung der eben für die Gleichung (27) entwickelten darstellen, die sich daher aus der Vereinigung der Grundgedanken für die Behandlung der Differential- und Integralgleichungen ergeben.

Wir kehren zu den Beziehungen (23), (24), (24′), (24″) zurück, die die Bedingungen für das elastische Gleichgewicht im Falle der Vererbung ausdrücken. Wollen wir einen grundlegenden Reziprozitätssatz aufstellen, so müssen wir eine Lösung dieser Gleichungen zu einer Lösung eines adjungierten Systems in Beziehung setzen.

Um das adjungierte System zu erhalten, braucht man nur die Gleichung (23) durch die Gleichung

$$t'_{hk} = \Sigma A_{is/hk}\,\gamma'_{si}(t) + \int_t^\tau \Sigma\psi_{is/hk}(t, \tau)\,\gamma'_{is}(\tau)\,d\tau$$

zu ersetzen und die übrigen Gleichungen beizubehalten, d. h. zu schreiben

$$\frac{\partial t'_{11}}{\partial x} + \frac{\partial t'_{12}}{\partial y} + \frac{\partial t'_{13}}{\partial z} = \rho X',$$

$$\frac{\partial t'_{21}}{\partial x} + \frac{\partial t'_{22}}{\partial y} + \frac{\partial t'_{23}}{\partial z} = \rho Y',$$

$$\frac{\partial t'_{31}}{\partial x} + \frac{\partial t'_{32}}{\partial y} + \frac{\partial t'_{33}}{\partial z} = \rho Z';$$

$$t'_{11} \cos(n, x) + t'_{12} \cos(n, y) + t'_{13} \cos(n, z) = X'_\sigma,$$
$$t'_{21} \cos(n, x) + t'_{22} \cos(n, y) + t'_{23} \cos(n, z) = Y'_\sigma,$$
$$t'_{31} \cos(n, x) + t'_{32} \cos(n, y) + t'_{33} \cos(n, z) = Z'_\sigma;$$

$$\gamma'_{11} = \frac{\partial u'}{\partial x} \quad , \quad \gamma'_{23} = \frac{\partial w'}{\partial y} + \frac{\partial v'}{\partial z},$$
$$\gamma'_{22} = \frac{\partial v'}{\partial y} \quad , \quad \gamma'_{31} = \frac{\partial u'}{\partial z} + \frac{\partial w'}{\partial x},$$
$$\gamma'_{33} = \frac{\partial w'}{\partial z} \quad , \quad \gamma'_{12} = \frac{\partial v'}{\partial x} + \frac{\partial u'}{\partial y}.$$

Der Reziprozitätssatz lautet folgendermassen:

$$(\mathrm{B}) \quad \left\{ \begin{aligned} &\int_{t_0}^{T} dt \int_S \rho\,(Xu' + Yv' + Zw')\,dS + \int_\sigma (X_\sigma u' + Y_\sigma v' + Z_\sigma w')\,d\sigma \\ &= \int_{t_0}^{T} dt \int_S \rho\,(X'u + Y'v + Z'w)\,dS + \int_\sigma (X'_\sigma u + Y'_\sigma v + Z'_\sigma w)\,d\sigma. \end{aligned} \right.$$

Hierbei ist S der Raum, in dem die elastischen Kräfte wirken, und σ seine Umgrenzung. Um den Satz zu verwenden, muss man Fundamentallösungen berechnen. Man erhält sie leicht im Falle der Isotropie, wo die Gleichungen die Form (25) annehmen.

Differenziert man nämlich die erste Gleichung des Systems (25) nach x, die zweite nach y, die dritte nach z, so erhält man durch Addition die Beziehung

$$(L + 2K)\,\Delta^2 \beta + \int_{t_0}^{t} (\varphi + 2\psi)\,\Delta^2 \theta\, d\tau = \frac{\partial(\rho X)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho Y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho Z)}{\partial z}.$$

Hieraus kann man durch Auflösen einer Integralgleichung den Wert von $\Delta^2 \theta$ ermitteln. Sind die Massenkräfte null, so ist θ harmonisch.

Ebenso lassen sich durch Auflösen von Integralgleichungen die Werte von

$$\Delta^2\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right) \quad , \quad \Delta^2\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) \quad , \quad \Delta^2\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

ermitteln; man ersieht so, dass

$$\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$$

harmonisch sind, wenn die Massenkräfte null sind.

Hieraus kann man dann die Fundamentallösungen der adjungierten Gleichungen erhalten. Durch Anwendung der Reziprozitätsformel (B) lassen sich sowohl die Dilatation und die Rotation als auch die Komponenten der Verschiebung als Funktionen der Verschiebungen und der Spannungen an der Umgrenzung ausdrücken. Im Falle der Kugel ergeben besondere Methoden die Lösung unmittelbar.

Bevor wir schliessen, wollen wir nur noch ein Wort über den typischen Fall der hyperbolischen Integraldifferentialgleichungen sagen, die der KIRCHHOFFschen Differentialgleichung entsprechen.

Wir betrachten die Gleichung

$$\frac{\partial^2 u(x,y,z,t)}{\partial t^2} - \Delta^2 u(x,y,zt) + \int_{t_0}^{t} \Big[f(t,\tau) \frac{\partial^2 u(x,y,z,\tau)}{\partial x^2}$$

$$+ \varphi(t,\tau) \frac{\partial^2 u(x,y,z,\tau)}{\partial y^2} + \psi(t,\tau) \frac{\partial^2 u(x,y,z,\tau)}{\partial z^2} \Big] d\tau = 0 .$$

Sind die Funktionen f, φ und ψ einander gleich, so kann man ähnlich verfahren wie früher, als wir uns mit dem Problem der Torsionsdynamik beschäftigt haben; sind aber f, φ und ψ nicht einander gleich, so muss man zuerst unmittelbar einen Reziprozitätssatz herleiten. Man muss sodann eine Fundamentallösung berechnen, und zwar gelangt man dazu durch ein besonderes Verfahren, das wir hier nicht entwickeln wollen. Schliesslich kann man durch Einführung der Fundamentalfunktion in die Reziprozitätsformel die Gültigkeit der Formel (A') vom elliptischen auf den hyperbolischen Fall erweitern.

Wir haben hier nur einen ersten kurzen Abriss der Theorie der Integraldifferentialgleichungen gegeben; aber ihr Studium kann weitergeführt werden, und man gelangt zu speziellen Anwendungen und zur vollständigen Lösung der sich darbietenden Probleme. So ist beispielsweise das Problem des Gleichgewichts einer isotropen elastischen Kugel unter Berücksichtigung linearer Vererbung vollständig gelöst. Die Lösung dieses Problems wird durch sehr stark konvergente Reihen gegeben [(86)].

Die Analysis der vertauschbaren Funktionen [(87)] ist ein sehr nützliches Hilfsmittel für alle diese Fragen; wollten wir sie aber darstellen, so würde uns das sehr weit wegführen [(88)]. Deshalb beschränken wir uns hinsichtlich der Vererbungserscheinungen auf die vorstehenden Ergebnisse.

(86) V. VOLTERRA, *Soluzione delle equazioni integro-differenziali dell'elasticità nel caso di una sfera isotropa.* « Rend. Lincei » (5), **19** (1. Sem.), 107, 1910 [in questo vol.: XXII, pp. 304-310]. — V. VOLTERRA, *Deformazione di una sfera elastica, soggetta a date tensioni, nel caso ereditario.* « Rend. Lincei » (5), **19** (1. Sem.), 239, 1910 [in questo vol.: XXIV, pp. 323-327].

(87) Zwei endliche und stetige Funktionen heissen vertauschbar, wenn die Beziehung gilt: $\int_x^y F(x,\xi)\cdot\Phi(\xi,y)\,d\xi = \int_x^y \Phi(x,\xi)\,F(\xi,y)\,d\xi$. « Rend. Lincei » (5), **19** (1. Sem.), 169, 1910 [in questo vol.: XXIII, pp. 311-322].

(88) V. VOLTERRA, *Questioni generali sulle equazioni integrali ed integro-differenziali.* « Rend. Lincei » (5), **19** (1. Sem.), 169, 1910 [in questo vol.: XXIII, pp. 311-322]. — V. VOLTERRA, *Sopra le funzioni permutabili.* Ebenda, S. 425 [in questo vol.: XXVI, pp. 331-342]. — V. VOLTERRA, *Sopra una proprietà generale delle equazioni integrali ed integro-differenziali.* « Rend. Lincei » (5) **20** (2. Sem.), 79, 1911 [in questo vol.: XXXI, pp. 380-388]. — Vgl. auch Anm. 10.

Sie beweisen, dass man mit Hilfe der Theorie der Integraldifferentialgleichungen und der Integralgleichungen die Vererbungserscheinungen analytisch ganz allgemein behandeln kann, ohne irgend eine spezielle Annahme über die Funktionen, die sie bestimmen, d. h. über die Vererbungskoeffizienten zu machen. Es ist wohlbekannt, dass es bei Fragen der mathematischen Physik und der Mechanik von Nutzen ist, die Konstanten so lange wie möglich unbestimmt zu lassen und erst im letzten Augenblicke, wenn man die Formeln auf konkrete Fragen anwendet, Zahlenwerte dafür einzusetzen. Aus diesem Grunde ist die Anwendung der Algebra auf Fragen der Naturwissenschaften immer wichtiger geworden. Ebenso erkennt man, wie vorteilhaft es ist, die oben erwähnten Funktionen unbestimmt zu lassen und die Probleme der Vererbung in der grösstmöglichen Allgemeinheit zu lösen. Man wird die Vererbungskoeffizienten in den speziellen Fällen, die sich darbieten, festlegen können, oder man wird sie sogar durch Vergleich der allgemeinen Formeln mit den Beobachtungsergebnissen bestimmen können. Aus all diesem erklärt sich die wesentliche Bedeutung und der grosse Nutzen der Methoden, die an den Gedanken anknüpfen, Funktionen zu betrachten, die von allen Werten anderer Funktionen abhängen. Denn hieraus fliessen die zur Behandlung der Integral- und der Integraldifferentialgleichungen benutzten Methoden.

Würden diese Methoden fehlen, so wären analytische Entwicklungen über die Vererbung nicht möglich; man müsste vielmehr bei den ersten Schritten stehen bleiben.

Die von uns betrachtete Vererbung ist die lineare. Der „ traînage " und die gewöhnliche Nachwirkung nähern sich dieser Art der Vererbung. Die sogenannte elektrotechnische Hysteresis dagegen wird hiervon nicht umfasst. Um sich hiervon zu überzeugen, braucht man nur die Erscheinung des permanenten Magnetismus zu betrachten; aber es liegt dem nichts im Wege, das Gebiet der Theorie in der Weise zu erweitern, dass man vom linearen Fall ausgeht [(89)]. Somit haben wir auch die sechste der Fragen, die im Kapitel 29 aufgeworfen worden waren, beantwortet.

(89) V. VOLTERRA, *Sur les fonctions qui dépendent d'autres fonctions*. «Comptes Rendus», **142**, 691, 1906 [in questo vol.: IX, pp. 59-62].

XXXIII.

SULLE TEMPERATURE NELL'INTERNO DELLE MONTAGNE

«Nuovo Cimento», ser. 6ª, vol. IV, 1912, pp. 111-126(*).

1. Si suol rappresentare la distribuzione del calore nell'interno della terra con le *superficie isogeotermiche*, luogo dei punti che, ad un dato istante, hanno la stessa temperatura. È probabile che esse, al di là di una certa profondità (1500-2000 m), siano delle superficie piane e parallele o, più esattamente delle sfere concentriche. Tali superficie, man mano che ci si avvicina all'esterno, abbandonano l'aspetto pianeggiante per assumere quelle inflessioni prodotte dai rilievi del suolo e dalla temperatura dell'aria ambiente. In particolare, mentre al disotto di un piano di uniforme temperatura le superficie isotermiche procedono parallele ad esso, a misura che ci avviciniamo all'esterno, al disotto di un massiccio montagnoso invece, tali superficie cessano di essere parallele e pianeggianti per assumere un andamento del tutto irregolare. In altre parole: nella pianura basta la conoscenza del *gradiente termico* (aumento di temperatura corrispondente all'approfondirsi di un metro nell'interno della terra) in un sol punto di essa, per precisare senz'altro la posizione delle isogeotermiche. Le cose non vanno altrettanto semplicemente nelle montagne, a cagione della variabilità del gradiente punto per punto. Tutto questo, nella tacita ipotesi che la terra sia omogenea, conduca ugualmente il calore in tutte le direzioni (isotropa) e che non vi siano nell'interno di essa sorgenti locali di calore di qualsiasi natura.

Appare dunque in linea generale molto difficile l'assegnare la temperatura in ogni luogo di un massiccio montagnoso; eppure questo problema, sia pure trattato sotto forma approssimata, ha una importanza pratica notevole. Esso interessa principalmente l'ingegnere nella escavazione delle gallerie ferroviarie. Infatti, com'è noto, importa conoscere quale temperatura s'incontrerà nei vari punti di una galleria in modo da preparare, al momento opportuno, i mezzi acconci di aereazione perché il lavoro, iniziato, prosegua con la più grande economia di tempo e di denaro. Si sa, a proposito, come alcuni trafori siano riusciti dispendiosi eccessivamente, perché l'alta temperatura, non preveduta a tempo, rese malagevoli i lavori. Per dare un'idea

(*) Conferenza tenuta alla Società di Fisica il 25 marzo 1911. Ringrazio vivamente il dott. PIETRO SENEPA per la redazione della presente conferenza.

delle temperature che s'incontrano nei tunnel, riporto qui sotto la tabella delle osservazioni fatte nel 1870 da GIORDANO [2] nel Moncenisio:

Distanza dall'imbocco sud	Profondità al di sotto della superficie del terreno	Temperatura dell'aria	Temperatura della roccia
500 m	—	10,5° C	14,2° C
1000	520 m	15,3°	17°
2000	—	17,8°	19,5°
3000	—	20,3°	22,8°
4000	—	23°	23,6°
5000	910	24,5°	27,5°
6000	1370	26,8°	28,8°
6450	1690	30,1°	29,5°
6662	—	—	28°
7000	1447	25°	27°

Il traforo ha il punto culminante a 1296 m sul livello del mare, 1609 m al disotto della cresta alpina.

Nel S. Gottardo, l'altezza verticale sopra la galleria è superiore di 100 m a quella che domina il tunnel del Cenisio. Il massimo della temperatura fu trovato di 30,75° C.

2. Le prime ricerche sul gradiente termico si riferiscono al piano; così le più antiche di SAUSSURE e di GENSANNE. Tralascio però di fare una estesa bibliografia dell'argomento che mi porterebbe troppo lontano, per accennare, di volo, alle ricerche più importanti e più recenti [3].

Nel 1857, nel pozzo artesiano di Mondorf nel Lussemburgo, profondo 730 m., WALFERDIN [4] trovò un accrescimento di 1° C ogni 31,04 m di aumento di profondità, ossia, come suol dirsi, un *grado geotermico* di 31,04 m. Le misure di W. THOMSON e SYMONS del 1869 dettero il grado geotermico variabile tra i limiti di 45 e 27 m. La diversità di formazione e di posizione degli strati, la presenza di acqua nei pozzi, han dato spiegazione delle forti divergenze trovate.

Ottimi, dal lato sperimentale, si mostrarono i sondaggi eseguiti a Speremberg in vicinanza di Berlino, inquantoché, un foro profondo 1260 m., si trovò intieramente scavato in un enorme giacimento omogeneo di salgemma [5].

DUNKER, che fece esperienze in questo pozzo, trovò il gradiente termico variabile; al grado geotermico assegnò un valore medio di 32,51 metri.

(2) « Revue de Géologie », t. IX, p. 158.

(3) Per maggiori dettagli bibliografici vedi DE LAPPARENT, *Traité de Géologie*.

(4) Cfr. E. THOMA, *Über das Wärmeleitungsproblem bei wellig begrenzter Oberfläche und dessen Anwendung auf Tunnelbauten*. Karlsruhe 1906.

(5) Cfr. DE LAPPARENT, loc. cit.

Dalle esperienze di Speremberg e da altre, l'autore trasse la formula empirica

$$T = 7{,}10^\circ + 0{,}01298572\ S - 0{,}00000125791\ S^2,$$

che ci dà la temperatura T alla profondità S. Da questa espressione di T, risulterebbe che la temperatura non va uniformemente aumentando con la profondità, ma che a 1621 m raggiunge il massimo di 50,87°, per poi diminuire annullandosi a 3420 m. Tale risultato, in aperta contradizione con la teoria del calore interno terrestre, fu appoggiato da valenti scienziati.

Senonché HENRICH, nel 1876, osservò come i dati di DUNKER, anziché con la formula del medesimo, si comprendono meglio con l'altra:

$$T = 0{,}0077928\ S + 11{,}8277^\circ$$

che dà come grado geotermico il valore costante di 32,27 m.

Estendendo successivamente le ricerche, DUNKER stesso si persuase ad abbandonare la sua formula antica, per assumerne un'altra di tipo lineare come è quella di HENRICH.

Tralascio di parlare di un gran numero di ricerche fatte nelle miniere in Ungheria, in Inghilterra, nelle Indie (6), per concludere che si può ritenere, in base a esperienze le più accreditate in *terreni normali*, cioè esenti da locali perturbazioni, come ogni 36,37 metri si abbia un aumento di 1° C di temperatura. A questo valore del grado geotermico, viene a corrispondere un gradiente di 0,027° C. Così pure si deduce dalla seguente tabella (7).

Località	Profondità del foro	Grado geotermico
Sudenburg	568 m	32,3 m
Sennewitz (Halle)	1084	36,6
Lieth (Altona)	1259	35,9
Artern (Thüringen)	—	37,7
Scarle (Lincoln)	609	37,8
Kertish-Town	307	36,8

Dal lato teorico, è importante una relazione del Comitato dell'Associazione Britannica pubblicata da EVERETT nel 1882. Essa è una particolareggiata analisi critica dell'argomento in questione; così, tra l'altro, viene studiato come il lavoro di escavazione dei pozzi possa alterare, ed in che grado, le misurazioni di temperatura, e come il calore solare e le condizioni geologiche possano influire sulle variazioni del grado geotermico.

Per quel che riguarda le montagne, lo studio delle temperature s'iniziò con la escavazione dei primi grandi trafori alpini. Abbiamo già riportata la tabella delle osservazioni fatte sul Cenisio dal GIORDANO. Esperienze di grande importanza, furono quelle fatte da STAPFF (8) durante la costruzione

(6) THOMA, loc. cit., pag. 11 e seg.
(7) S. ARRHENIUS, *Lehrbuch der kosmischen Physik*. Bd. I, p. 280. Leipzig 1903.
(8) Cfr. THOMA, loc. cit., p. 16.

della galleria del Gottardo. Una formula empirica riassume i risultati: essa dà la temperatura, lungo la galleria, in funzione della distanza nella direzione nord–sud dalla imboccatura di Göschenen, dell'altezza relativa del luogo al disopra di Göschenen. Il grado geotermico, secondo STAPFF, cresce rapidamente con l'aumentare del pendìo del monte da un minimo di 35,53 m, ad un massimo di 63,5. Ma la parte più importante del lavoro di STAPFF è quella ove si mette in relazione la temperatura di un punto interno del monte, sia con la distanza verticale, sia con la più breve distanza del punto medesimo dalla superficie esterna.

3. Vediamo come si dovrebbe impostare la questione delle temperature nell'interno delle montagne, se si volesse applicare la teoria della propagazione del calore.

Rappresentiamoci un monte (fig. 1) (che consideriamo fin d'ora come costituito di roccia omogenea) e supponiamo che la distribuzione delle temperature sia dovuta al solo fenomeno della conduzione, senza che vi siano speciali sorgenti di calore nel monte stesso; supponiamo inoltre che nel massiccio roccioso non vi siano correnti d'acqua, o almeno siano trascurabili, in modo che il calore si trasporti tutto per conduzione termica e non per scorrimento di materia. Immaginiamo di isolare la montagna dal resto della terra per mezzo di una base orizzontale MN e di una superficie laterale verticale PM , QN. Se si conosce l'andamento annuo e giornaliero della temperatura sulla superficie esterna PSQ, sulla base MN e sulle superficie laterali PM e QN e inoltre il coefficiente di conducibilità, il calorico specifico e la densità della roccia, la teoria di FOURIER ci dice che la temperatura in ogni punto e in ogni istante è determinata.

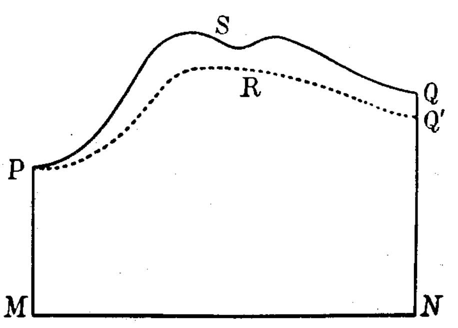


Fig. 1.

Per semplificare il problema, supponiamo di prescindere dalle oscillazioni annue e giornaliere delle temperature, prendendo la media, e di considerare questa come stazionaria. Con ciò il problema è evidentemente semplificato, avendo eliminato il tempo. Supponiamo ancora che attraverso la superficie laterale non vi siano passaggi di calore ossia che approssimativamente, in direzione normale a PM e QN, non vi sia conduzione termica; finalmente che la base della montagna sia presa così profonda, in modo da poter considerare come costante la temperatura lungo MN.

Allora la questione si presenta così: la temperatura T nell'interno del massiccio montagnoso è una funzione armonica la quale è costante lungo la base MN e tale che la derivata normale $\partial T/\partial n$ lungo la superficie laterale PM , QN è nulla. Se si conoscono i valori della temperatura nei punti situati sopra PSQ, e la temperatura costante lungo MN, essa è determinata dovunque all'interno. Ma, pur supponendola costante, sulla base la temperatura è tuttavia di fatto incognita; possiamo però sostituire a questa costante ignota il valore di un'altra costante di possibile diretta determinazione, ad esempio: la media del gradiente su PSQ, o il gradiente medio sulla base della montagna, oppure ancora il gradiente in un punto qualsiasi di PSQ.

In tutti i casi il problema resta sempre completamente determinato, pur rimanendo in generale praticamente insolubile, per le grandi difficoltà che presenta. Esso è del tipo del problema di DIRICHLET, le cui soluzioni (NEUMANN ecc.) appaiono piuttosto soluzioni teoriche che pratiche, allorché si vogliono tradurre in numeri. Ora è appunto la questione numerica e pratica che vogliamo trattare. Se ci riuscirà di trovare un modo per tracciare nell'interno della montagna un seguito di isoterme, avremo raggiunto lo scopo, giacché, sapendo la temperatura spettante ad ognuna di esse, rimarrà senz'altro individuata, punto per punto, la temperatura nell'interno del massiccio.

Ma vediamo di fare ancora un passo che ci semplificherà notevolmente la questione. La fig. 1 ci rappresenti una sezione verticale della montagna passante per l'asse della galleria. Se noi, anziché studiare la conduzione del calore nel massiccio, la studiamo semplicemente nel piano della sezione, supposta staccata dal resto, le linee isoterme verranno in generale modificate. Sarebbe come se si sostituisse alla forma irregolare della montagna, quale è effettivamente, un cilindro avente le generatrici orizzontali e per base la fig. 1.

Tale sostituzione, se non è rigorosa, ci permette però di passare da un problema nello spazio, ad un problema nel piano, talché noi l'accettiamo, tanto più che ha dato in pratica risultati soddisfacenti.

Un'ultima semplificazione si può avere nel modo seguente, col quale al contorno primitivo PSQ, si viene a sostituire una prima linea di livello. Le temperature date lungo la linea PSQ sono in generale variabili da punto a punto; se noi conosciamo il gradiente superficiale nei vari punti, od anche quello medio, potremo abbassare le ordinate della curva PSQ proporzionalmente alla differenza di temperatura fra P e i vari punti di PSQ, in modo da avere la isoterma passante per P. In tal modo il problema così si presenta:

Costruire una funzione armonica di cui si conosce il valore costante lungo la curva nota PRQ, (isoterma passante per P), il valor medio del gradiente sulla linea PRQ, oppure sulla retta MN, mentre si sa che nei tratti PM, QN, la funzione ha la derivata normale nulla e lungo MN è costante.

Anche ridotto sotto questa forma, così semplificata, il problema è sempre assai complesso in quanto che la irregolarità del profilo esterno del monte, e quindi della linea di livello PRQ, costituisce la difficoltà della soluzione.

4. Ecco come è stata proposta una soluzione approssimata dal dottor THOMA [9], la quale fu applicata al Gottardo con un certo successo.

(9) Loc. cit., p. 22 e seg.

Prendiamo la funzione:

$$\vartheta = \frac{1}{2} \log (A + \sqrt{A^2 - 1}) \tag{1}$$

ove

$$A = e^{\frac{2x}{b}} + \sqrt{1 - \left(2 \cos \frac{2y}{b} - e^{\frac{2x}{b}}\right) e^{\frac{2x}{b}}}$$

e b è una costante (*)

Le linee $\vartheta = \text{cost.}$, nel piano xy, sono ondulate così come si vedono nella fig. 2.

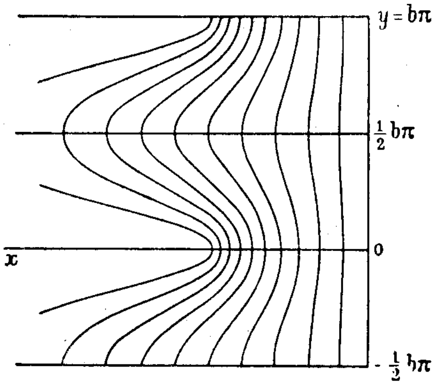


Fig. 2.

L'ampiezza della ondulazione, per un determinato valore di ϑ, è data dalla formula

$$D = b \log \frac{e^{\vartheta} + e^{-\vartheta}}{e^{\vartheta} - e^{-\vartheta}}$$

che ci mostra come per $\vartheta = 0$ questa ampiezza sia infinitamente grande, e come vada diminuendo al crescere di ϑ, per divenire zero quando $\vartheta = \infty$. In tal caso la linea ondulata degenera in una retta parallela all'asse y.

Se vogliamo esprimere ϑ in funzione di D, dalla precedente formula ricaviamo:

$$\vartheta = \frac{1}{2} \log \frac{e^{\frac{D}{b}} + 1}{e^{\frac{D}{b}} - 1} \, . \tag{2}$$

Il calcolo della $\partial\vartheta/\partial x$ lungo le rette

$$y = nb\pi \, ,$$

$$y = \left(n + \frac{1}{2}\right) b\pi$$

(*) La funzione A proposta dal THOMA è la parte reale della funzione analitica w, definita dalla relazione ch $\omega = e^{z/l}$, ove $z = x + iy$. Le due formole del testo ((1) e seg.) sono valevoli solo per i valori $nb\pi$, $(n + 1/2)\, b\pi$ di y, valori che soli intervengono nei calcoli successivi. [N.d.R.].

dà rispettivamente

$$\frac{\partial\vartheta}{\partial x} = \frac{1}{b}\,\frac{e^{\frac{2x}{b}} + e^{\frac{x}{b}}\sqrt{e^{\frac{2x}{b}} - 1}}{e^{\frac{2x}{b}} + e^{\frac{x}{b}}\sqrt{e^{\frac{2x}{b}} - 1} - 1}$$

$$\frac{\partial\vartheta}{\partial x} = \frac{1}{b}\,\frac{e^{\frac{2x}{b}} + e^{\frac{x}{b}}\sqrt{e^{\frac{2x}{b}} + 1}}{e^{\frac{2x}{b}} + e^{\frac{x}{b}}\sqrt{e^{\frac{2x}{b}} + 1} + 1}\,.$$

Al crescere di x tendono queste due espressioni verso il valore comune

$$\lim_{x=\infty}\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial x}\right) = \frac{1}{b} \tag{3}$$

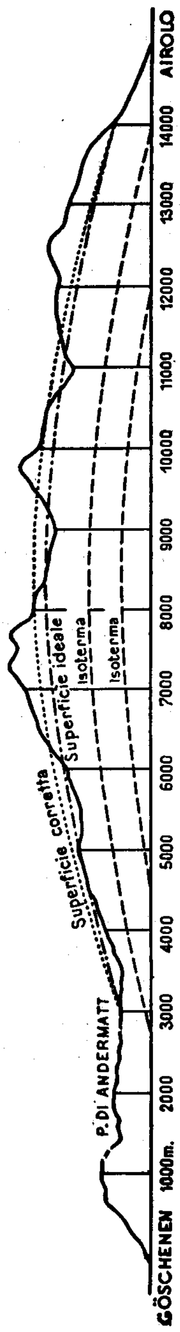
minimo per l'una, massimo per l'altra.

Ora osserviamo che la (1) è una funzione armonica del piano, cioè sodisfa l'equazione $\Delta^2\vartheta = 0$; le linee ondulate $\vartheta = \text{cost.}$ possono quindi rappresentare delle isoterme. Dunque diremo con THOMA:

Se si limita una parte di piano mediante due linee isoterme, delle quali una è ondulata e l'altra è retta, allora la formula (1) *dà per un mezzo omogeneo, qualora siano sodisfatte le condizioni ai limiti, la temperatura nell'interno della superficie.*

Con la funzione (1) si viene così a risolvere il problema enunciato alla fine del n. 3, nel caso particolare in cui la PRQ sia una linea ondulata, in un piano che si prolunga indefinitamente secondo la direzione della base MN. Nel caso del piano limitato osserviamo che alle rette generiche $y = n\pi b$, $y = (n+1)\pi b$ si fa tenere qui il posto di PM, QN della fig. 1. Ed infatti si verifica facilmente che

$$\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial y}\right)_{y=n\pi b} = 0 \quad , \quad \left(\frac{\partial\vartheta}{\partial y}\right)_{y=(n+1)\pi b} = 0\,.$$



PROFILO DEL S. GOTTARDO SECONDO STAPFF

Fig. 3.

Il dott. THOMA ha applicato al Gottardo il risultato della sua teoria, per dedurre la temperatura in ogni punto di quel tratto di tunnel che corre sotto il massiccio principale del monte, tra il pianoro di Andermatt e Airolo. Egli si serve del disegno del monte eseguito da STAPFF sostituendo però al profilo reale un *profilo corretto*, cioè quell'arco di sinusoide che con la parallela all'asse del tunnel, condotta all'altezza di Andermatt, racchiude un'area equivalente a quella compresa tra la stessa parallela e il profilo vero. Calcola così che l'altezza dell'arco di sinusoide deve essere di 1190 metri. Ma al profilo corretto, sopra, a cui la temperatura varia da punto a punto, l'autore per necessità di calcolo sostituisce il *profilo ideale*, disegnando la isoterma 4,82° dedotta mediante il gradiente termico dal suddetto profilo sinusoidale; essa incomincia alla superficie del pianoro di Andermatt e scorre 240 m al disotto del luogo più alto della superficie corretta, ossia 950 m al disopra di Andermatt.

La linea ideale, secondo THOMA, può, con buona approssimazione, essere paragonata ad una linea ondulata. Osserviamo pertanto che, se la (2) è soluzione della equazione differenziale $\Delta^2 \vartheta = 0$, lo è pure

$$\vartheta = \frac{c_1}{2} \log \frac{e^{\frac{D}{b}} + 1}{e^{\frac{D}{b}} - 1} + c_2 \tag{2'}$$

con che si trova

$$\lim_{x=\infty} \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial x} \right) = \frac{c_1}{b} . \tag{3'}$$

Ciò che si è indicato con D, rappresenta la distanza dal più alto punto di una isoterma al punto più basso; per la linea ideale del Gottardo (isoterma $\vartheta = 4{,}82°$ C) si ha dunque D = 950 m. Il gradiente termico a grande profondità, ossia $\lim\limits_{x=\infty} (\partial\vartheta/\partial x)$, lo assumemmo uguale a 0,027° C. D'altra parte nota la lunghezza L del tratto tra Andermatt e Airolo, (12000 m), la relazione

$$b\pi = L \quad \text{ci dà} \quad b = \frac{L}{\pi} .$$

Tutto quindi è noto in maniera da poter determinare, con le equazioni (2') e (3'), i valori delle costanti c_1 e c_2; questo in breve vuol dire la conoscenza della funzione che ci individua, senz'altro, la temperatura in ogni punto (x, y) del piano verticale del monte, passante per l'asse della galleria.

La seguente tabella dà, in particolare, paragonandoli con quelli sperimentali di STAPFF, i risultati ottenuti con la teoria di THOMA, applicata al traforo del Gottardo:

Distanza della imboccatura sud in m	Temp. osservata da STAPFF	Temp. calcolata da THOMA	Differenza media
700–900	13,80° C — 14,96°	15°	0,62°
3500	25,92°	25,98°	0,06°
7700–8000 (cresta)	30,43° — 31,74°	32,49°	1,41°
9500	25,21°	25,98°	0,77°
12000	18,07° — 19,08	15°	—3,5°

L'esempio qui portato presuppone che si possa sostituire il profilo del monte con quello corretto a forma di arco di sinusoide. In linea generale questo può però essere non sempre possibile. Tuttavia THOMA estese il suo metodo al caso più comune del monte di forma qualsiasi.

Tale estensione consiste nello sviluppare la funzione $y = \varphi(x)$, che immaginiamo rappresenti il profilo del monte, in serie di FOURIER. In tale maniera il profilo stesso viene ad essere sostituito dalla sovrapposizione di più linee sinusoidali con periodi ed ampiezze conosciute. Le sinusoidi dovrebbero poi venire sostituite dalle linee ondulate, per ognuna delle quali si calcolerebbe il corrispondente ϑ; la loro somma darebbe la distribuzione delle temperature nell'interno del massiccio montagnoso.

Non vi è chi non veda, però, come tale metodo possa, in generale, condurre ad errori sulla cui entità nulla può essere precisato *a priori*. Talché vien fatto di dubitare se esso risponda alle esigenze pratiche della questione propostaci; elementi di giudizio non se ne hanno in quanto l'autore, per quel che io sappia, non ha sottoposta la soluzione a nessun raffronto numerico con dati di esperienza, salvo nel caso particolare già citato del Gottardo.

Fu l'ing. STELLA professore al Politecnico di Torino che, primo, sollevò dei dubbi intorno al valore del metodo di THOMA, invocando un intervento matematico più efficace.

5. Il procedimento che io propongo di applicare in questo caso non è analitico, ma un processo dirò così fisico, il quale non è utile solo nel problema speciale qui trattato, ma in un gran numero di questioni riferentisi alle funzioni armoniche, alle funzioni di variabile complessa, ed anche alla risoluzione di equazioni algebriche.

Sappiamo che su di una superficie conduttrice omogenea, percorsa da una corrente stazionaria, il potenziale elettrico è una funzione armonica.

Lo studio dirò così aritmetico delle funzioni armoniche può farsi facendo lo studio fisico della distribuzione della corrente.

Supponiamo ora, sopra un foglio sottile di stagnola, di disporre una sbarra d'ottone rettilinea di un certo spessore, avente resistenza elettrica molto bassa e una lamina dello stesso metallo, tagliata in una forma tale, che la porzione del foglio di stagnola compresa fra la sbarra rettilinea, la lamina superiore e gli orli del foglio, costituisca una figura simile alla figura MPRQ'N della fig. 1. Facciamo aderire nel miglior modo possibile le parti di ottone alla stagnola e lasciamo entrare la corrente da MN attraverso la sbarra di ottone ed uscire da PRQ' per la lamina di ottone. Lungo i lati PM, Q'N che costituiscono gli orli della stagnola la derivata normale del potenziale elettrico sarà nulla, e, data la sottigliezza della lamina e la conducibilità grande delle due parti di ottone, potremo supporre, con grande approssimazione, che il potenziale stesso lungo MN e lungo PRQ' sia costante, cioè che queste due linee terminali siano linee di livello.

Sulla stagnola le linee di livello vengono esplorate con due sonde rilegate opportunamente ad un galvanometro.

Esperienze in proposito mostrarono che, adoperando della stagnola sufficientemente sottile (0,025 mm) percorsa da una intensità media di 0,1 Ampère per cm, con un galvanometro HARTMANN & BRAUN rilegato alle sonde attraverso ad una resistenza conveniente, si possono individuare i punti ad ugual potenziale a meno di 0,1 — 0,2 mm.

Volendo, si potrebbe aumentare la sensibilità del metodo sia aumentando la corrente tra le sbarre, sia aumentando la sensibilità del sistema galvanometro–sonde, col diminuire della resistenza in serie. Ma la grande sensibilità, andando a scapito della sveltezza della esperienza conviene invece, accontentandosi di poca precisione, di operare su di una lamina di stagnola sufficientemente estesa. Una volta fissata una delle sonde in un punto della lamina, la linea di livello, passante per questo punto, si disegna senz'altro movendo con continuità l'altra sonda in modo che il galvanometro non venga a spostarsi dalla posizione di equilibrio.

Resta ora da vedere come si possa determinare la temperatura corrispondente alle diverse linee di livello. Fra la temperatura T della montagna e il potenziale V corre una relazione lineare:

$$T = \alpha V + \beta ,$$

ove α, β sono costanti.

Quindi, se lungo PRQ' la temperatura è T_0, e lungo una linea di livello è T_1, e i potenziali sono rispettivamente V_0 e V_1 si ha

$$T_1 - T_0 = \alpha (V_1 - V_0). \tag{4}$$

Il gradiente termico medio su MN sarà

$$\lambda = \frac{1}{s} \int_s \frac{\partial T}{\partial n} ds = \frac{\alpha}{s} \int_s \frac{\partial V}{\partial n} ds ,$$

in cui s è la lunghezza della linea MN. Chiamando r la resistenza elettrica che offre un quadrato della foglia di stagnola al passaggio della corrente attraverso due lati paralleli [10] avremo

$$\frac{\lambda}{r} = \frac{\alpha}{rs} \int_s \frac{\partial V}{\partial n} ds = \frac{\alpha}{s} I$$

essendo I l'intensità della corrente totale.

Dalla equazione precedente si ricava

$$\alpha = \frac{\lambda s}{rI} . \tag{1}$$

Assumendo il gradiente termico medio a grande profondità (dove supponiamo si trovi la linea MN) eguale a 0,027° C per metro si deduce

$$\alpha = 0{,}00027 \frac{s}{rI} ,$$

ove s è misurato in cm.

(10) Evidentemente, lo spessore del foglio di stagnola essendo uniforme, r è indipendente dalla lunghezza del lato del quadrato.

In virtù della (4) sarà quindi

$$T_1 = T_0 + 0{,}00027 \frac{s}{rI} (V_1 - V_0) .$$

Se V è il potenziale elettrico lungo MN, avremo

$$\delta = \frac{V_1 - V_0}{V_2 - V_0} = \frac{V_1 - V_0}{RI} ,$$

essendo R la resistenza dell'intero foglio di stagnola compreso fra MN e PRQ'. Quindi

$$\frac{V_1 - V_0}{I} = R\delta$$

$$T_1 = T_0 + 0{,}00027 \frac{R}{r} \delta s ;$$

δ può essere misurato direttamente con un dispositivo potenziometrico.

Si comprende che questo metodo è suscettibile di modificazione; così si potrebbe fare in modo, regolando convenientemente l'accesso della corrente nella laminetta PSQ', che il potenziale lungo di essa non sia costante, ma che segua la stessa legge di variazione della temperatura del dorso della montagna; allora per PRQ' potrebbe prendersi il profilo vero, senza sostituirvi la isoterma.

Si potrebbe anche regolare la conducibilità della lamina in modo da poter imitare, volendo, la diversa conducibilità al calore dei vari strati del massiccio montagnoso.

Però, quando si voglia estendere questo metodo dal piano allo spazio per risolvere il problema analogo nelle tre dimensioni, ci si imbatte in gravi difficoltà di natura sperimentale. D'altra parte, appaiono alquanto faticosi i metodi teorici di calcolo per assegnare, sia pure approssimativamente, le temperature nell'interno di una montagna, astrazione fatta da particolari ipotesi sulla forma della superficie esterna di essa [11].

(11) Mentre questa conferenza è in corso di stampa il prof. SOMIGLIANA mi fa noto che egli, in unione col dott. VERCELLI, ha presentato all'Accademia di Torino una memoria in cui è esposto un nuovo metodo aritmetico pel calcolo della temperatura nell'interno delle montagne.

XXXIV.

SOPRA EQUAZIONI DI TIPO INTEGRALE

« Proceedings of the fifth intern. Congress of Math. (Cambridge, 22–28, VIII, 1912) » Cambridge, 1913, pp. 403–406.

Lo studio delle *funzioni di linee*, o, come è anche chiamato, dei *funzionali*, che ho cominciato in maniera sistematica dal 1887, mi ha condotto a quello delle equazioni integrali lineari. In virtù dei principii dai quali sono partito, sono stato condotto, per primo, a considerare queste equazioni come il caso limite di equazioni algebriche allorché il loro numero e quello delle incognite crescono indefinitamente. Tale passaggio al limite è analogo a quello fondamentale del calcolo integrale. Ho poi considerato delle equazioni non lineari in una nota pubblicata nel 1906 nei *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences* e dei casi ancora più generali nelle mie lezioni fatte lo scorso inverno alla Sorbona.

Oltre alle equazioni integrali ho studiato le equazioni integro–differenziali dandone la teoria in vari casi, nei quali ho sempre fatto uso del principio da cui ero partito precedentemente. Le ho cioè riguardate come casi limiti di un numero infinitamente crescente di equazioni con un numero pure infinitamente crescente di incognite. Ma io qui desidero di ricordare alcuni teoremi che ho dati recentemente, i quali fanno rientrare tutte le precedenti trattazioni di equazioni integrali e integro–differenziali come casi particolari.

Ho perciò introdotto una speciale operazione che ho chiamato *composizione* che può considerarsi di due tipi diversi, cioè a limiti variabili e a limiti costanti.

Date due funzioni $F_1(x, y)$, $F_2(x, y)$ finite e continue, la composizione a limiti variabili o *composizione di prima specie* consiste nell'operazione

$$\int_x^y F_1(x, \xi) F_2(\xi, y) d\xi, \tag{1}$$

mentre quella a limiti costanti o *composizione di seconda specie* consiste nella operazione

$$\int_p^q F_1(x, \xi) F_2(\xi, y) d\xi, \tag{2}$$

ove p e q sono quantità costanti.

Ora, se scambiando le due funzioni F_1 e F_2 nella prima formula (1) il risultato non cambia, ho detto che F_1 e F_2 sono *permutabili di prima specie*, mentre se il medesimo scambio non altera il risultato della seconda operazione (2) ho chiamato F_1 e F_2 permutabili di seconda specie. Ciò premesso ho dimostrato il teorema che *combinando per somma, per sottrazione o, in generale, combinando linearmente con coefficienti costanti delle funzioni permutabili e combinando mediante composizione delle funzioni permutabili si trovano sempre funzioni permutabili fra loro e colle funzioni primitive.*

Ma le due proprietà più importanti sono le seguenti:

1° Se

$$a_1 x + a_2 y + a_3 z + \cdots + a_{11} x^2 + a_{22} y^2 + a_{12} xy + \cdots + a_{111} x^3 + a_{123} xyz + \cdots \tag{3}$$

è un elemento di una funzione analitica di un numero qualsiasi di variabili e si sostituiscono ad $x, y, z, \cdots$ *le espressioni* $xF_1, yF_2, zF_3, \cdots$ *ove* $F_1, F_2, F_3, \cdots$ *sono funzioni permutabili di prima specie e si interpretano i prodotti e le potenze delle* $F_1, F_2, F_3, \cdots$ *(invece che come operazioni algebriche) come operazioni di composizione di prima specie, la serie che si trova è una funzione intera di* $x, y, z, \cdots$

2° *Se si sostituiscono nella* (3) *a* $x, y, z \cdots$ *le espressioni* $xF_1, yF_2, zF_3, \cdots$ *essendo* $F_1, F_2, F_3, \cdots$ *funzioni permutabili di seconda specie e si interpretano i prodotti e le potenze delle* $F_1, F_2, F_3, \cdots$ *come operazioni di composizione di seconda specie, e, se la serie* (3) *è il rapporto di due funzioni intere, anche la serie che si trova dopo la sostituzione è il rapporto di due funzioni intere di* $x, y, z, \cdots$.

L'origine di questi teoremi va ricercata sempre nello stesso principio che corrisponde al solito passaggio al limite di cui abbiamo parlato. Infatti le operazioni di composizione (1), (2) possono riguardarsi come *operazioni limiti di somme.* Si considerino infatti le quantità

$$m_{ih}\,,\ n_{ih} \qquad (i, h = 1, 2, 3, \cdots, g).$$

Si può dapprima considerare la somma

$$\sum_{i+1}^{h-1}{}_s\, m_{is}\, n_{sh} \tag{4}$$

e la permutabilità di prima specie sarà data da

$$\sum_{i+1}^{s-1}{}_s\, m_{is}\, n_{sh} = \sum_{i+1}^{s-1} n_{is}\, m_{sh}\,. \tag{4'}$$

Se passiamo al limite, coll'analogo procedimento del calcolo integrale, l'operazione (4), dà luogo alla composizione di prima specie e la condizione (4') alla permutabilità di prima specie.

In modo simile la composizione di seconda specie può considerarsi come il limite della operazione

$$\sum_{1}^{g}{}_s\, m_{is}\, n_{sh}\,,$$

e la permutabilità di seconda specie come la condizione limite di

$$\sum_{1}^{g}{}_s\, m_{is}\, n_{sh} = \sum_{1}^{g} n_{is}\, m_{sh}\,.$$

Ora si può cominciare dallo stabilire i due teoremi precedenti per il caso finito, il che non offre difficoltà, e procedere quindi alla loro estensione al caso infinito.

Una volta stabiliti questi teoremi supponiamo che la serie (3) sia soluzione di un problema algebrico o differenziale. Se noi sostituiamo nelle equazioni algebriche o differenziali, ridotte a forma intera, alle lettere $x, y, z, \cdots$ le $xF_1, yF_2, zF_3, \cdots$ e interpretiamo i prodotti e le potenze delle $F_1, F_2, F_3, \cdots$ come composizioni otteniamo equazioni integrali o equazioni integro-differenziali di cui le soluzioni sono immediatamente date per mezzo di funzioni intere o di rapporti di funzioni intere.

Possono perciò enunciarsi i due principii generali:

Ad ogni problema algebrico o differenziale la cui soluzione conduce a funzioni esprimibili mediante funzioni analitiche corrisponde un problema correlativo integrale o integro-differenziale (à limiti variabili, o di prima specie) la cui soluzione è data da funzioni intere.

Ad ogni problema algebrico o differenziale la cui soluzione conduce a funzioni esprimibili come rapporti di funzioni intere di un certo numero di variabili corrisponde un problema integrale o integro-differenziale di seconda specie (a limiti costanti) la cui soluzione è pure esprimibile mediante rapporti di funzioni intere delle stesse variabili.

È facile riconoscere che il problema della risoluzione delle equazioni integrali lineari non è che un caso particolarissimo fra i problemi generali che sono abbracciati dai due principii precedenti.

La teoria delle funzioni permutabili dà luogo a varie questioni che io stesso ho studiato. Essa conduce poi ad un'algebra che il prof. G. C. EVANS ha approfondito in modo molto elegante e che lo ha condotto a resultati molto interessanti. I professori LAURICELLA, VESSIOT, SINIGAGLIA, GIORGI, LALESCO ed altri si sono pure occupati di questioni relative ad essa.

Mi propongo ora di estendere ulteriormente queste considerazioni. Consideriamo un gruppo continuo di funzioni permutabili, per esempio prendiamo

$$f(u \mid x, y)$$

tale che, u_1 e u_2 essendo due valori qualunque di u, si abbia

$$\int_x^y f(u_1 \mid x, \xi) f(u_2 \mid \xi, y)\, d\xi = \int_x^y f(u_2 \mid x, \xi) f(u_1 \mid \xi, y)\, d\xi = f(u_1, u_2 \mid x, y);$$

$f(u_1, u_2 \mid x, y)$ sarà permutabile con $f(u \mid x, y)$, cioè

$$\int_x^y f(u_3 \mid x, \xi) f(u_1, u_2 \mid \xi, y) d\xi = \int_x^y f(u_1, u_2 \mid x, \xi) f(u_3 \mid \xi, y) d\xi = f(u_1, u_2, u_3 \mid x, y),$$

e così di seguito.

Ciò premesso, estendiamo, col solito procedimento del passaggio dal finito all'infinito, un teorema dato precedentemente. A tal fine consideriamo la serie analoga a quella di TAYLOR che ho dato fino dai miei primi lavori, cioè

$$A + \int_a^b F(u_1) f(u_1)\, du_1 + \int_a^b \int_a^b F'(u_1, u_2) f(u_1) f(u_2)\, du_1\, du_2$$

$$+ \int_a^b \int_a^b \int_a^b F''(u_1, u_2, u_3) f(u_1) f(u_2) f(u_3)\, du_1\, du_2\, du_3 + \cdots,$$

ove le funzioni F sono simmetriche. Supponiamo che essa sia convergente allorché

$$|f(u)| < M .$$

Sostituiamo a questa serie l'altra

$$A + \int_a^b F(u_1) f(u_1 \mid x, y)\, du_1 + \int_a^b \int_a^b F'(u_1, u_2) f(u_1, u_2 \mid x, y)\, du_1\, du_2$$

$$+ \int_a^b \int_a^b \int_a^b F''(u_1, u_2, u_3) f(u_1, u_2, u_3 \mid x, y)\, du_1\, du_2\, du_3 + \cdots$$

Questa serie sarà convergente comunque grande sia il modulo di $f(u \mid x, y)$ *purché sia finito.*

È evidente che questo teorema è un'estensione del teorema 1°. È facile vedere delle applicazioni di questo teorema. Consideriamo l'equazione del tipo trascendente

$$(\mathrm{I}a) \qquad \varphi(u \mid x, y) = f(u \mid x, y) + \int_a^b F'(u \mid u_1) f(u_1 \mid x, y)\, du_1$$

$$+ \int_a^b \int_a^b F''(u \mid u_1, u_2) f(u_1, u_2 \mid x, y)\, du_1\, du_2$$

$$+ \int_a^b \int_a^b \int_a^b F'''(u \mid u_1, u_2, u_3) f(u_1, u_2, u_3 \mid x, y)\, du_1\, du_2\, du_3 + \cdots$$

ove $f(u \mid x, y)$ è la incognita.

Supponiamo che l'insieme delle funzioni date $\varphi(u \mid x, y)$ formi un gruppo continuo di funzioni permutabili, cioè

$$\int_x^y \varphi(u_1 \mid x, \xi)\, \varphi(u_2 \mid \xi, y)\, d\xi = \int_x^y \varphi(u_2 \mid x, \xi)\, \varphi(u_1 \mid \xi, y)\, d\xi = \varphi(u_1, u_2 \mid x, y) .$$

Consideriamo d'altra parte l'equazione

$$\varphi(u) = f(u) + \int_a^b F'(u \mid u_1) f(u_1)\, du_1 + \int_a^b \int_a^b F''(u \mid u_1, u_2) f(u_1) f(u_2)\, du_1\, du_2 + \cdots$$

Se il determinante dell'equazione integrale

$$f(u)+\int_a^b F'(u \mid u_1) f(u_1)\, du = \psi(u)$$

è diverso da zero, ho dimostrato che si può dare una soluzione dell'equazione precedente sotto la forma

$$f(u)=\varphi(u)+\int_a^b \Phi'(u \mid u_1)\varphi(u_1)\, du_1+\int_a^b\int_a^b \Phi''(u \mid u_1, u_2)\varphi(u_1)\varphi(u_2)\, du_1\, du_2+\cdots,$$

valido finché il modulo di $\varphi(u)$ è inferiore ad un certo limite. Ne viene che la soluzione della (I a) sarà

$$(\mathrm{I}\, b) \qquad f(u \mid x, y)=\varphi(u \mid x, y)+\int_a^b \Phi'(u \mid u_1)\varphi(u_1 \mid x, y)\, du_1$$

$$+\int_a^b\int_a^b \Phi''(u \mid u_1, u_2)\varphi(u_1, u_2 \mid x, y)\, du_1\, du_2$$

$$+\int_a^b\int_a^b\int_a^b \Phi'''(u \mid u_1, u_2 u_3)\varphi(u_1 u_2 u_3 \mid x, y)\, du_1\, du_2\, du_3+\cdots$$

e non vi sarà più bisogno di alcuna limitazione circa la grandezza del modulo di $\varphi(u \mid x, y)$ purché finito.

È facile riconoscere quali sono le estensioni del teorema 2° e degli altri al caso che abbiamo adesso indicato, e le conseguenze ed applicazioni che possono trarsene.

XXXV.

SUR LES ÉQUATIONS INTÉGRO-DIFFÉRENTIELLES ET LEURS APPLICATIONS

« Acta Mathematica » t. 35, 1912; pp. 295-356.

INTRODUCTION.

Dans beaucoup de questions de Physique mathématique, de Mécanique et d'Analyse il est nécessaire de considérer des relations analytiques qui ont en même temps le caractère des équations intégrales et celui des équations différentielles. Je les ai appelées *équations intégro-différentielles*. Leur résolution constitue en général un problème nouveau de l'analyse, car on ne peut l'aborder qu'en employant des méthodes nouvelles. Nous montrerons en effet qu'il faut appliquer une analyse qui n'est pas celle des équations différentielles ni celle des équations intégrales, mais qui ressort de l'union des conceptions fondamentales qui dominent ces classes de questions. C'est ainsi que dans ce mémoire nous ferons usage en même temps de l'idée de GREEN des *solutions fondamentales* et de celle que j'ai introduite depuis mon premier travail sur l'*inversion des intégrales définies*, c'est à dire de regarder les équations intégrales comme un ensemble infini d'équations algébriques.

Dans ce mémoire j'envisagerai quelques classes d'équations intégro-différentielles en les mettant en rapport avec des problèmes de physique mathématique d'où elles ressortent. Ces questions physiques se rapportent aux problèmes de l'hérédité qui avaient été abordés depuis longtemps sous plusieurs dénominations, mais qui, faute de méthodes analytiques générales, n'avaient pas pu amener à une étude systématique au point de vue mathématique.

Comme M. PICARD a montré dans son intéressant article sur la Mécanique classique et ses approximations successives (1), il faut distinguer la mécanique en deux branches, celle de l'hérédité et celle de la non hérédité. Celle-ci se rapporte aux cas où l'avenir d'un système ne dépend à un instant donné que de son état actuel, ou, d'une manière plus générale (si l'on regarde les forces comme pouvant dépendre aussi des vitesses) de l'état actuel et de l'état infiniment voisin qui précède. La mécanique de l'hérédité correspond au cas où chaque action laisse un héritage dans le système, et l'état actuel

(1) « Rivista di Scienza », vol. 1°. Bologna 1907.

dépend de toute l'histoire précédente. C'est ainsi que le problème fondamental de l'astronomie appartient à la mécanique de la non-hérédité, tandis que les questions d'*hystéresis*, de l'*elastische Nachwirkung*, du *traînage* rentrent dans la mécanique de l'hérédité, ou, plus général, dans la physique d'hérédité.

M. PAINLEVÉ dans le chapitre de l'ouvrage *de la méthode dans les sciences* (2) consacré à la mécanique affirme qu'il n'y a pas de vrais problèmes de nature héréditaire. Ceux qui se présentent sous cet aspect ne seraient, à son avis, que des problèmes destinés à disparaître dès que nos connaisances sur la constitution des corps deviendront plus complètes. Je ne discute pas cette opinion, mais je me limite à remarquer qu'à l'état actuel de nos connaissances scientifiques ces problèmes se présentent effectivement et il est nécessaire de les résoudre.

Dans quelques cas, comme ceux de l'élasticité, les équations dont ils dépendent avaient été posées depuis longtemps, mais comme je viens de dire, l'analyse n'était pas assez avancée pour permettre de les traiter d'une manière générale. On peut se rendre compte facilement de cela. Remarquons en effet que, par leur nature, les problèmes de la physique mathématique et de la mécanique non héréditaire dépendent des équations différentielles ordinaires ou des équations aux dérivées partielles. Les données initiales constituent les constantes arbitraires ou les fonctions arbitraires qui paraissent dans l'intégration. Pour les problèmes de la physique mathématique de l'hérédité, au contraire, l'analyse des équations différentielles n'est plus suffisante. En effet l'état actuel du système dépend de son histoire, et celle-ci est individualisée par toutes les valeurs prises par des paramètres pendant une certaine période de temps, c'est pourquoi il est nécessaire d'envisager des quantités qui dépendent de toutes les valeurs de ces paramètres regardés comme des fonctions du temps. On est amené ainsi aux éléments de l'analyse que j'ai étudiés dans plusieurs travaux et que j'ai appelés des quantités qui dépendent de toutes les valeurs d'une ou de plusieurs fonctions (fonctions des lignes et des hyperespaces). Les méthodes qu'il faudra suivre seront par suite celles qu'on applique à ces éléments.

Toutes ces méthodes ont pour point de départ une conception analogue à la conception fondamentale du calcul intégral c'est à dire au passage à la limite qui amène d'une somme à une intégrale. C'est ainsi que dans mon travail de 1887 (3) j'ai obtenu un développement en série analogue à celui de TAYLOR pour une quantité qui dépend de toutes les valeurs d'une fonction donnée. En effet si l'on part de la série des puissances relative à une fonction de plusieurs variables et l'on fait croître indéfiniment leur nombre, on trouve, sous certaines conditions, que les termes de premier degré amènent à une intégrale simple, ceux de second degré à une intégrale double

(2) Paris, Alcan, 1909.

(3) « Rend. Acc. dei Lincei », vol. III, 1887 [in queste « Opere »: vol. primo, XVII, pp. 294-314]. Voir aussi « Acta Mathematica », vol. XII, 1889 [in queste « Opere »: ibidem, XXII, pp. 363-402].

ceux de troisième degré à une intégrale triple, et ainsi de suite. On arrive par là au développement que j'ai rappelé tout-à-l'heure [4].

Ce développement conduit à une classification analogue à celle des fonctions des différents degrés et à beaucoup de questions dont la résolution des équations intégrales linéaires est en première ligne. Cette question se présente de cette manière comme une extension tout-à-fait naturelle de la résolution des systèmes des équations algébriques de premier degré lorsque le nombre des équations et des inconnues croît indéfiniment. C'est pourquoi je me suis servi de cette idée dès le premier abord pour la résolution des équations intégrales que j'ai envisagées. Les auteurs qui ont approfondi après des équations intégrales de plus en plus compliquées l'ont aussi appliquée [5]. Je l'emploierai aussi pour étudier les problèmes de physique mathématique héréditaire où les équations intégrales ne suffisent plus et il faut passer aux équations intégro-différentielles dont j'ai parlé ci-dessus.

Le présent Mémoire est divisé en trois chapitres. Dans le premier chapitre j'envisage l'équation intégro-differentielle

$$\frac{\partial^2 u(x,y,z,t)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u(x,y,z,t)}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u(x,y,z,t)}{\partial z^2}+\int_{t_0}^{t}\left\{\frac{\partial^2 u(x,y,z,\tau)}{\partial x^2}f(t,\tau)\right.$$
$$\left.+\frac{\partial^2 u(x,y,z,\tau)}{\partial y^2}\varphi(t,\tau)+\frac{\partial^2 u(x,y,z,\tau)}{\partial z^2}\psi(t,\tau)\right\}d\tau=0$$

qu'on peut écrire pour simplifier

$$\text{(A)}\qquad \Delta^2 u(t)+\int_{t_0}^{t}\left\{\frac{\partial^2 u(\tau)}{\partial x^2}f(t,\tau)+\frac{\partial^2 u(\tau)}{\partial y^2}\varphi(t,\tau)+\frac{\partial^2 u(\tau)}{\partial z^2}\psi(t,\tau)\right\}d\tau=0.$$

Je la regarde comme l'équation typique du genre elliptique de la même manière que l'équation de LAPLACE est le type des équations différentielles elliptiques aux dérivées partielles.

Dans le second chapitre j'étudie les problèmes de l'élasticité au point de vue héréditaire et je montre qu'on peut en donner une théorie analytique générale. Le troisième chapitre est consacré à donner un premier aperçu de l'hérédité dans l'électromagnétisme.

Je n'ai abordé dans ce mémoire que l'étude analytique des équations intégro-différentielles de type elliptique. Je consacrerai d'autres travaux à l'étude des équations des autres types. Je me suis limité aussi dans ce premier travail à considérer des cas généraux en laissant de côté toutes les questions de détail et les applications particulières. J'ajouterai enfin que je n'ai envisagé que les équations qui ont des rapports avec l'hérédité et par suite des équations intégro-différentielles ayant les deux limites variables ou une limite variable. Cependant on peut étendre les résultats à des équations ayant les limites constantes.

(4) Voir Chap. II, Art. 1er.

(5) «Comptes rendus des séances de l'Ac. des Sciences.», vol. 142, page 691. 1er Sémestre 1906. [In questo vol.: IX, pp. 56-62].

Je crois que le caractère essentiel et l'utilité des méthodes qui se rattachent à la conception des fonctions qui dépendent d'autres fonctions résultent d'une manière claire et frappante des développements que je vais donner. Ils prouvent en effet que, par la théorie des équations intégro-différentielles qui découle de cette conception, on peut faire l'étude analytique des phénomènes d'hérédité sans particulariser les fonctions qui la caractérisent, c'est à dire les coefficients d'hérédité.

Comme dans les questions ordinaires de physique mathématique il est utile de laisser indéterminées les constantes, autant qu'il est possible, et de ne les fixer numériquement que lorsqu'on applique les formules à des questions concrètes, de même il est utile de laisser indéterminées les susdites fonctions (coefficients d'hérédité) lorsqu'on traite des questions d'hérédité en général et de résoudre les problèmes qui se présentent avec la plus grande généralité possible. On pourra aussi déterminer ces fonctions, lorsqu'elles sont inconnues, en comparant les solutions générales qu'on obtient avec les résultats de l'observation directe.

L'algèbre et l'analyse ordinaire se sont montrées de jour en jour plus utiles dans les applications aux phénomènes naturels où il n'y a que des paramètres variables. L'analyse, où les éléments qui jouent le rôle de variables indépendentes sont des fonctions, va montrer une de ses applications dans les phénomènes de la physique héréditaire.

CHAPITRE I^er^.

L'équation intégro-différentielle.

$$\Delta^2 u(t) + \int_0^t \left\{ \frac{\partial^2 u(\tau)}{\partial x^2} f(t,\tau) + \frac{\partial^2 u(\tau)}{\partial y^2} \varphi(t,\tau) + \frac{\partial^2 u(\tau)}{\partial z^2} \psi(t,\tau) \right\} d\tau = 0 .$$

Art. I^er^. – ÉLÉMENTS CARACTÉRISTIQUES.

1. Si la fonction $u(x, y, z, t)$ est finie et continue à l'intérieur d'un domaine S pour les valeurs de t comprises entre o et T, et les premières et les secondes dérivées de u par rapport à x, y, z sont aussi finies et continues, nous disons que u est ***régulière***.

u étant une solution régulière de l'équation (A), multiplions les deux membres de cette équation par $u(t)$ et intégrons au domaine S. On aura facilement la formule suivante

$$(1) \qquad \int_\sigma u(t) \left\{ \frac{\partial u(t)}{\partial n} + \int_0^t \left\{ \frac{\partial u(\tau)}{\partial x} f(t,\tau) \cos nx + \frac{\partial u(\tau)}{\partial y} \varphi(t,\tau) \cos ny \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{\partial u(\tau)}{\partial z} \psi(t,\tau) \cos nz \right\} d\tau \right\} d\sigma = \int_S \Delta u(t)\, dS + \int_0^t d\tau \int_S \left\{ \frac{\partial u(t)}{\partial x} \frac{\partial u(\tau)}{\partial x} f(t,\tau) \right.$$

$$\left. + \frac{\partial u(t)}{\partial y} \frac{\partial u(\tau)}{\partial y} \varphi(t,\tau) + \frac{\partial u(t)}{\partial z} \frac{\partial u(\tau)}{\partial z} \psi(t,\tau) \right\} dS$$

n étant la normale externe au coutour σ et

$$\Delta u(t) = \left(\frac{\partial u(x,y,z,t)}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u(x,y,z,t)}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u(x,y,z,t)}{\partial z}\right)^2.$$

2. Nous allons démontrer le théorème suivant:

Toute solution régulière u de l'équation (A) *sera déterminée à l'intérieur de* S *pour les valeurs de t comprises entre les limites* o *et* T, *si l'on connaît au contour σ les valeurs de u pour t compris entre* o *et* T.

Supposons que u soit nulle sur σ pour les valeurs de t comprises entre o et T, à cause de l'équation (1) on aura

$$(2) \qquad \int_S \Delta u(t)\, dS + \int_0^t d\tau \int_S \left\{ \frac{\partial u(t)}{\partial x}\frac{\partial u(\tau)}{\partial x} f(t,\tau) + \frac{\partial u(t)}{\partial y}\frac{\partial u(\tau)}{\partial y}\varphi(t,\tau) + \frac{\partial u(t)}{\partial z}\frac{\partial u(\tau)}{\partial z}\psi(t,\tau)\right\} dS = 0.$$

Soit M une quantité plus grande que la limite supérieure de

$$\int_S \Delta u(t)\, dS$$

pour toutes les valeurs de t comprises entre o et T. De la relation

$$\int_S \left(\left|\frac{\partial u(t)}{\partial x}\right| - \left|\frac{\partial u(\tau)}{\partial x}\right|\right)^2 dS \geq 0$$

on tirera

$$\int_S \left|\frac{\partial u(t)}{\partial x}\frac{\partial u(\tau)}{\partial x}\right| dS < M$$

et d'une manière analogue

$$\int_S \left|\frac{\partial u(t)}{\partial y}\frac{\partial u(\tau)}{\partial y}\right| dS < M \quad , \quad \int_S \left|\frac{\partial u(t)}{\partial z}\frac{\partial u(\tau)}{\partial z}\right| dS < M.$$

C'est pourquoi, si

$$|f(t,\tau)| < \frac{N}{3} \quad , \quad |\varphi(t,\tau)| < \frac{N}{3} \quad , \quad |\psi(t,\tau)| < \frac{N}{3},$$

en vertu de l'équation (2), on aura

$$(3) \qquad \int_S \Delta u(t)\, dS < MNt,$$

et par suite

$$(3') \qquad \int_S \Delta u(\tau)\, dS < MN\tau.$$

Mais

$$\int_S \left(\sqrt{\tau}\left|\frac{\partial u(t)}{\partial \xi}\right| - \sqrt{t}\left|\frac{\partial u(\tau)}{\partial \xi}\right|\right)^2 dS \geq 0,$$

où ξ désigne l'une des variables x, y, z. Donc des équations (3) et (3') l'on tirera

$$\int_S \left| \frac{\partial u(t)}{\partial \xi} \frac{\partial u(\tau)}{\partial \xi} \right| dS < \mathrm{MN} t^{1/2} \tau^{1/2}.$$

En employant l'équation (2) on déduit

$$\int_S \Delta u(t)\, dS < \frac{2}{3} \mathrm{MN}^2 t^2. \tag{4}$$

Démontrons maintenant que si l'on a

$$\int_S \Delta u(t)\, dS < \frac{\mathrm{M}(2\,\mathrm{N}t)^{m-1}}{m!},$$

on doit aussi avoir

$$\int_S \Delta u(t)\, dS < \frac{\mathrm{M}(2\,\mathrm{N}t)^{m}}{(m+1)!}. \tag{5}$$

En effet

$$\int_S \left(\tau^{\frac{m-1}{2}} \left| \frac{\partial u(t)}{\partial \xi} \right| - t^{\frac{m-1}{2}} \left| \frac{\partial u(\tau)}{\partial \xi} \right| \right)^2 dS \geq 0$$

et par suite

$$\int_S \left| \frac{\partial u(t)}{\partial \xi} \frac{\partial u(\tau)}{\partial \xi} \right| dS < \frac{\mathrm{M}(2\,\mathrm{N})^{m-1}}{m!} t^{\frac{m-1}{2}} \tau^{\frac{m-1}{2}},$$

d'où l'on tire, à cause de l'équation (2), la relation (5).

On peut donc conclure, en ayant égard aux relations (3) et (4), que l'inégalité (5) est verifiée quel que soit le nombre entier m. Par conséquent u doit être nulle. Puisque l'équation (A) est linéaire le théorème énoncé est démontré.

3. Envisageons l'expression

$$\frac{\partial u(t)}{\partial n} + \int_0^t \left\{ \frac{\partial u(\tau)}{\partial x} f(t,\tau) \cos nx + \frac{\partial u(\tau)}{\partial y} \varphi(t,\tau) \cos ny + \frac{\partial u(\tau)}{\partial z} \psi(t,\tau) \cos nz \right\} d\tau. \tag{6}$$

Si elle est nulle on a l'égalité (2) et par suite l'inégalité (5) quel que soit m, d'où l'on déduit que u doit être constante dans le domaine S et pour les valeurs de t comprises entre o et T.

On pourra donc énoncer le théorème:

Si l'expression (6) *est connue au contour* σ, *pour les valeur de t comprises entre* o *et* T, *la fonction u sera déterminée, à l'intérieur du domaine* S, *à une constante près.*

Art. 2ème. - L'ÉQUATION ADJOINTE ET LE THÉORÈME DE RÉCIPROCITÉ.

1. L'équation

$$(\mathrm{A}') \qquad \Delta^2 v(t) + \int_t^\Theta \left\{ \frac{\partial^2 v(\tau)}{\partial x^2} f(\tau, t) + \frac{\partial^2 v(\tau)}{\partial y^2} \varphi(\tau, t) + \frac{\partial^2 v(\tau)}{\partial z^2} \psi(\tau, t) \right\} d\tau = 0$$

sera désignée par la dénomination *d'équation adjointe* à l'équation (A). Nous supposerons Θ comprise entre t et T.

Posons

$$\mathrm{H}_\sigma = \int_0^\Theta dt \int_\sigma \left(v(t) \frac{\partial u(t)}{\partial n} - u(t) \frac{\partial v(t)}{\partial n} \right) d\sigma$$

$$+ \int_t^\Theta dt \int_0^\Theta d\tau \int_\sigma \left\{ \left(v(\tau) \frac{\partial u(t)}{\partial x} - u(t) \frac{\partial v(\tau)}{\partial x} \right) f(\tau, t) \cos nx \right.$$

$$+ \left(v(\tau) \frac{\partial u(t)}{\partial y} - u(t) \frac{\partial v(\tau)}{\partial y} \right) \varphi(\tau, t) \cos ny$$

$$\left. + \left(v(\tau) \frac{\partial u(t)}{\partial z} \right) - u(t) \frac{\partial v(\tau)}{\partial z} \right) \psi(\tau, t) \cos nz \right\} d\sigma .$$

Il est évident que H_σ *dépendra des fonctions* u et v et en même temps sera une fonction, dans la signification ordinarie, de la variable Θ. C'est pourquoi nous désignerons cette quantité par

$$\mathrm{H}_\sigma([u, v], \Theta).$$

2. En supposant que u, v soient des fonctions régulières on a facilement

$$\int_S dS \int_0^\Theta \left(v(t) \left[\Delta^2 u(t) + \int_0^t \left\{ \frac{\partial^2 u(\tau)}{\partial x^2} f(t, \tau) + \frac{\partial^2 u(\tau)}{\partial y^2} \varphi(t, \tau) + \frac{\partial^2 u(\tau)}{\partial z^2} \psi(t, \tau) \right\} d\tau \right] \right.$$

$$\left. - u(t) \left[\Delta^2 v(t) + \int_t^\Theta \left\{ \frac{\partial^2 v(\tau)}{\partial x^2} f(\tau, t) + \frac{\partial^2 v(\tau)}{\partial y^2} \varphi(\tau, t) + \frac{\partial^2 v(\tau)}{\partial z^2} \psi(\tau, t) \right\} d\tau \right] \right) dt$$

$$= \mathrm{H}_\sigma([u, v], \Theta);$$

u et v étant respectivement des solutions régulières des équations (A) et (A'), on aura donc

$$(\mathrm{I}) \qquad \mathrm{H}_\sigma([u, v], \Theta) = 0.$$

Cette équation exprime le *théorème de réciprocité.*

3. Soit $\mathrm{H}'_\sigma([u, v], \Theta)$ le premier terme de H_σ, c'est à dire posons

$$\mathrm{H}'_\sigma([u, v], \Theta) = \int_0^\Theta dt \int_\sigma \left(v(t) \frac{\partial u(t)}{\partial n} - u(t) \frac{\partial v(t)}{\partial n} \right) d\sigma,$$

et soit $H''_\sigma([u, v], \Theta)$ la partie résiduelle de H'_σ; on aura évidemment

$$H_\sigma([u, v], \Theta) = H'_\sigma([u, v], \Theta) + H''_\sigma([u, v], \Theta)$$

et si u et v sont des solutions régulières des équations (A) et (A'), il sera

$$H'_\sigma([u, v], \Theta) + H''_\sigma([u, v], \Theta) = 0.$$

Art. 3ème. - LES ÉQUATIONS INTÉGRO-DIFFÉRENTIELLES CONSIDÉRÉES COMME UN ENSEMBLE INFINI ET CONTINU D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES.

1. Envisageons le système suivant de m équations différentielles aux dérivées partielles

$$(\mathrm{B})\qquad \left\{\begin{array}{l} \Delta^2 u_1 = 0 \\ a_{21}\dfrac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + b_{21}\dfrac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} + c_{21}\dfrac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} + \Delta^2 u_2 = 0 \\ a_{31}\dfrac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + b_{31}\dfrac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} + c_{31}\dfrac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} + a_{32}\dfrac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + b_{32}\dfrac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} + c_{32}\dfrac{\partial^2 u_2}{\partial z^2} + \Delta^2 u_3 = 0 \\ \dotfill \end{array}\right.$$

L'équation (A) n'est que le cas limite du système précédent, lorsque le nombre des inconnues et des équations croît indéfiniment.

De cette manière pour les équations intégro-différentielles nous posons le même principe que nous avons établi pour les équations intégrales (6).

Le système adjoint du système (B) sera

$$(\mathrm{B}')\qquad \left\{\begin{array}{r} \Delta^2 v_1 + a_{21}\dfrac{\partial^2 v_2}{\partial x^2} + b_{21}\dfrac{\partial^2 v_2}{\partial y^2} + c_{21}\dfrac{\partial^2 v_2}{\partial z^2} + a_{31}\dfrac{\partial^2 v_3}{\partial x^2} + b_{31}\dfrac{\partial^2 v_3}{\partial y^2} + c_{31}\dfrac{\partial^2 v_3}{\partial z^2} + \cdots = 0 \\ \Delta^2 v_2 + a_{32}\dfrac{\partial^2 v_3}{\partial x^2} + b_{32}\dfrac{\partial^2 v_3}{\partial y^2} + c_{32}\dfrac{\partial^2 v_3}{\partial z^2} + \cdots = 0 \\ \Delta^2 v_3 + \cdots = 0 \\ \dotfill \end{array}\right.$$

2. Soient $u_1, u_2, \cdots, u_m$ des intégrales régulières du système (B) et $v_1, v_2, \cdots, v_m$ des intégrales régulières du système (B'). On a évidemment

$$(7)\qquad \int_S \sum_1^m {}_i \left\{ v_i \left[\sum_1^{i-1} {}_h \left(a_{ih}\frac{\partial^2 u_h}{\partial x^2} + b_{ih}\frac{\partial^2 u_h}{\partial y^2} + c_{ih}\frac{\partial^2 u_h}{\partial z^2} \right) + \Delta^2 u_i \right] \right.$$

$$\left. - u_i \left[\sum_{i+1}^m {}_h \left(a_{hi}\frac{\partial^2 v_h}{\partial x^2} + b_{hi}\frac{\partial^2 v_h}{\partial y^2} + c_{hi}\frac{\partial^2 v_h}{\partial z^2} \right) + \Delta^2 v_i \right] \right\} dS = \int_S \sum_1^m {}_i (v_i \Delta^2 u_i - u_i \Delta^2 v_i)\, dS +$$

(6) « Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino », 1896. *Sulla inversione degli integrali definiti.* Nota I, § 3. [In queste « Opere »: vol. secondo, XVIII, pp. 219-220].

$$+\int_S \sum_1^m{}_i \sum_{i+1}^m{}_h \left\{ a_{hi}\left(v_h \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} - u_i \frac{\partial^2 v_h}{\partial x^2}\right) + b_{hi}\left(v_h \frac{\partial^2 u_i}{\partial y^2} - u_i \frac{\partial^2 v_h}{\partial y^2}\right) + c_{hi}\left(v_h \frac{\partial^2 u_i}{\partial z^2} - u_i \frac{\partial^2 v_h}{\partial z^2}\right)\right\} dS$$

$$= \int_\sigma \sum_1^m{}_i \left(v_i \frac{\partial u_i}{\partial n} - u_i \frac{\partial v_i}{\partial n}\right) d\sigma + \int_\sigma \sum_1^m{}_i \sum_{i+1}^m{}_h \left\{ a_{ih}\left(v_h \frac{\partial u_i}{\partial x} - u_i \frac{\partial v_h}{\partial x}\right) \cos nx \right.$$

$$\left. + b_{hi}\left(v_h \frac{\partial u_i}{\partial y} - u_i \frac{\partial v_h}{\partial y}\right) \cos ny + c_{hi}\left(v_h \frac{\partial u_i}{\partial z} - u_i \frac{\partial v_h}{\partial z}\right) \cos nz \right\} d\sigma.$$

Or, toute équation du système (B) est de la forme

$$\sum_1^{i-1}{}_h \left(a_{ih} \frac{\partial^2 u_h}{\partial x^2} + b_{ih} \frac{\partial^2 u_h}{\partial y^2} + c_{ih} \frac{\partial^2 u_h}{\partial z^2}\right) + \Delta^2 u_i = 0, \qquad (i = 1, 2, \cdots, m),$$

et toute équation du système (B′) est de la forme

$$\sum_{i+1}^m{}_h \left(a_{hi} \frac{\partial^2 v_h}{\partial x^2} + b_{hi} \frac{\partial^2 v_h}{\partial y^2} + c_{hi} \frac{\partial^2 v_h}{\partial z^2}\right) + \Delta^2 v_i = 0, \qquad (i = 1, 2, \cdots, m);$$

c'est pourquoi, en vertu de la relation (7), nous aurons

$$0 = \int_\sigma \sum_1^m{}_i \left(v_i \frac{\partial u_i}{\partial n} - u_i \frac{\partial v_i}{\partial n}\right) d\sigma + \int_\sigma \sum_1^m{}_i \sum_{i+1}^m{}_h \left\{ a_{hi}\left(v_h \frac{\partial u_i}{\partial x} - u_i \frac{\partial v_h}{\partial z}\right) \cos nx \right.$$

$$\left. + b_{hi}\left(v_h \frac{\partial u_i}{\partial y} - u_i \frac{\partial v_h}{\partial y}\right) \cos ny + c_{hi}\left(v_h \frac{\partial u_i}{\partial z} - u_i \frac{\partial v_h}{\partial z}\right) \cos nz \right\} d\sigma.$$

En faisant croître indéfiniment le nombre des quantités $u_1, u_2, \cdots, u_m$; v_1, $v_2, \cdots, v_m$, cette relation amène à la limite, par le procédé fondamental du calcul intégral, à l'équation (I) c'est à dire au théorème de réciprocité.

3. Posons

$$r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2},$$

c'est à dire représentons par r la distance entre le *pôle* a, b, c fixe et le point variable x, y, z. Une solution du système (B) sera donnée par

$$u_1 = \frac{1}{r},$$

$$u_2 = -\frac{1}{2}\left(a_{21} \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} + b_{21} \frac{\partial^2 r}{\partial y^2} + c_{21} \frac{\partial^2 r}{\partial z^2}\right),$$

$$u_3 = -\frac{1}{2}\left(a_{31} \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} + b_{31} \frac{\partial^2 r}{\partial y^2} + c_{31} \frac{\partial^2 r}{\partial z^2}\right) + \frac{1}{24}\left(a_{32} a_{21} \frac{\partial^4 r^3}{\partial x^4} + b_{32} b_{21} \frac{\partial^4 r^3}{\partial y^4} + c_{32} c_{21} \frac{\partial^4 r^3}{\partial z^4}\right.$$

$$\left. + (a_{32} b_{21} + b_{32} a_{21}) \frac{\partial^4 r^3}{\partial x^2 \partial y^2} + (a_{32} c_{21} + c_{32} a_{21}) \frac{\partial^4 r^3}{\partial x^2 \partial z^2} + (b_{32} c_{21} + c_{32} b_{21}) \frac{\partial^4 r^3}{\partial y^2 \partial z^2}\right),$$

. . . .

De même une solution du système (B') sera

$$v_m = \frac{1}{r},$$

$$v_{m-1} = -\frac{1}{2}\left(a_{m,m-1}\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} + b_{m,m-1}\frac{\partial^2 r}{\partial y^2} + c_{m,m-1}\frac{\partial^2 r}{\partial z^2}\right),$$

$$v_{m-2} = -\frac{1}{2}\left(a_{m,m-2}\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} + b_{m,m-2}\frac{\partial^2 r}{\partial y^2} + c_{m,m-2}\frac{\partial^2 r}{\partial z^2}\right)$$

$$+ \frac{1}{24}\left(a_{m,m-1}\, a_{m-1,m-2}\frac{\partial^4 r^3}{\partial x^4} + b_{m,m-1}\, b_{m-1,m-2}\frac{\partial^4 r^3}{\partial y^4} + c_{m,m-1}\, c_{m-1,m-2}\frac{\partial^4 r^3}{\partial z^4}\right.$$

$$+ (a_{m,m-1}\, b_{m-1,m-2} + b_{m,m-1}\, a_{m-1,m-2})\frac{\partial^4 r^3}{\partial x^2\,\partial y^2}$$

$$+ (a_{m,m-1}\, c_{m-1,m-2} + c_{m,m-1}\, a_{m-1,m-2})\frac{\partial^4 r^3}{\partial x^2\,\partial z^2}$$

$$\left.+ (b_{m,m-1}\, c_{m-1,m-2} + c_{m,m-1}\, b_{m-1,m-2})\frac{\partial^4 r^3}{\partial y^2\,\partial z^2}\right),$$

. . . .

Les solutions que nous venons de trouver sont partout régulières excepté dans le pôle, où toutes les intégrales deviennent infinies de premier ordre, en prenant r comme infiniment petit fondamental. C'est pourquoi ces solutions constituent les *intégrales fondamentales* des systèmes (B) et (B').

Si l'on fait croître indéfiniment le nombre des équations différentielles qui constituent ces systèmes, en passant à la limite par les procédés du calcul intégral que nous venons de rappeller, on peut obtenir les solutions fondamentales de l'équation intégro-différentielle (A) et de son adjointe, c'est à dire des solutions régulières partout, excepté dans le pôle, où elles deviennent infinies de premier ordre.

Dans l'Art. suivant nous étudiérons la solution fondamentale de l'équation adjointe (A').

Art. 4ème. – La solution fondamentale de l'équation adjointe.

1. Posons

(8) $$f(t,\tau) = F_{1,0,0}(t,\tau)\ ,\quad \varphi(t,\tau) = F_{0,1,0}(t,\tau)\ ,\quad \psi(t,\tau) = F_{0,0,1}(t,\tau),$$

(9) $$F_{h,k,l}(t,\tau) = \int_\tau^t \sum_{i+j+g=\rho} F_{h-i,k-j,l-g}(t,\xi)\, F_{i,j,g}(\xi,\tau)\, d\xi,$$

où $\sum\limits_{i+j+g=\rho}$ est une somme étendue à toutes les valeurs entières de i, j, g dont la somme est égale à ρ. On suppose que toute expression F avec des suffixes négatifs soit nulle et qu'il soit

$$1 \leq \rho < h + k + l.$$

Commençons par démontrer que *la fonction* $F_{h,k,l}$ *est indépendante de* ρ. En effet supposons d'avoir démontré que

$$\int_{\tau}^{t} \sum_{i'+j'+g'=\varrho'} F_{h'-i',k'-j',l'-g'}(t,\xi)\, F_{i',j',g'}(\xi,\tau)\, d\xi = F_{h',k',l'}(t,\tau)$$

soit indépendante de ρ' étant

$$1 \leq \rho' < h' + k' + l'$$

et

$$h' + k' + l' < h + k + l .$$

Nous prouverons que l'expression (9) est indépendante de ρ.

Puisque $\rho = i + j + g < h + k + l$, il sera

$$F_{i,j,g}(\xi,\tau) = \int_{\tau}^{\xi} \sum_{i''+j''+g''=\varrho''} F_{i-i'',j-j'',g-g''}(\xi,\eta)\, F_{i'',j'',g''}(\eta,\tau)\, d\eta ,$$

où

$$1 \leq \rho'' < \rho ,$$

et par suite

$$F_{h,k,l}(t,\tau)$$

$$= \int_{\tau}^{t} \sum_{i+j+g=\varrho} F_{h-i,k-j,l-g}(t,\xi)\, d\xi \int_{\eta} \sum_{i''+j''+g''=\varrho''} F_{i-i'',j-j'',g-g''}(\xi,\eta)\, F_{i'',j'',g''}(\eta,\tau)\, d\eta$$

$$= \int_{\tau}^{t} \sum_{i''+j''+g''=\varrho''} F_{i'',j'',g''}(\eta,\tau)\, d\eta \int_{\eta}^{t} \sum_{i+j+g=\varrho} F_{h-i,k-j,l-g}(t,\xi)\, F_{i-i'',j-j'',g-g''}(\xi,\eta)\, d\xi$$

$$= \int_{\tau}^{t} \sum_{i''+j''+g''=\varrho''} F_{h-i'',k-j'',l-g''}(t,\eta)\, F_{i'',j'',g''}(\eta,\tau)\, d\eta .$$

Or on peut vérifier facilement que pour $h + k + l = 2$, $h + k + l = 3$, la propriété que nous avons énoncée est vérifiée; elle sera donc démontrée pour toutes les valeurs entières de h, k, l.

2. Cela posé écrivons

$$\Phi\left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r} \,\middle|\, \tau, t\right) \tag{10}$$

$$= \sum_{1}^{\infty}{}_{m} \frac{(-1)^m}{m!\,2^{2m}} \sum_{h+k+l=m} F_{h,k,l}(\tau,t) \sum_{0}^{h}{}_{\alpha} \sum_{0}^{k}{}_{\beta} \sum_{0}^{l}{}_{\gamma} (-1)^{\alpha+\beta+\gamma} \frac{(2(\alpha+\beta+\gamma))!}{(\alpha+\beta+\gamma)!} \cdot$$

$$\cdot \frac{(2h)!\,(2k)!\,(2l)!\left(\frac{x}{r}\right)^{2\alpha}\left(\frac{y}{r}\right)^{2\beta}\left(\frac{z}{r}\right)^{2\gamma}}{(2\alpha)!\,(2\beta)!\,(2\gamma)!\,(h-\alpha)!\,(k-\beta)!\,(l-\gamma)!} ,$$

où

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} .$$

La série précédente est uniformément convergente. En effet on voit aisément que

$$\frac{(2(\alpha+\beta+\gamma))!\,\alpha!\,\beta!\,\gamma!}{(\alpha+\beta+\gamma)!\,(2\alpha)!\,(2\beta)!\,(2\gamma)!} \leq \frac{(2(h+k+l))!\,h!\,k!\,l!}{(h+k+l)!\,(2h)!\,(2k)!\,(2l)!}$$

parce-que le premier membre de l'inégalité précédente augmente si l'on ajoute une unité à α ou à β, ou à γ.

En outre

$$\left|\frac{x}{r}\right| \leq 1 \quad , \quad \left|\frac{y}{r}\right| \leq 1 \quad , \quad \left|\frac{z}{r}\right| \leq 1 ,$$

c'est pourquoi il suffira de démontrer la convergence de la série

$$\sum_1^\infty{}_m \frac{(2m)!}{m!\,m!\,2^{2m}} \sum_{h+k+l=m} |F_{h,k,l}(\tau, t)| \sum_0^h{}_\alpha \sum_0^k{}_\beta \sum_0^l{}_\gamma \frac{h!\,k!\,l!}{\alpha!\,(h-\alpha)!\,\beta!\,(k-\beta)!\,\gamma!\,(l-\gamma)!} .$$

Mais

$$\sum_0^h \frac{h!}{\alpha!\,(h-\alpha)!} \sum_0^k \frac{k!}{\beta!\,(k-\beta)!} \sum_0^l \frac{l!}{\gamma!\,(l-\gamma)!} = 2^h\, 2^k\, 2^l = 2^m,$$

donc la série précédente se réduit à

$$(11) \qquad \sum_0^\infty{}_m \frac{(2m)!}{m!\,m!\,2^m} \sum_{h+k+l=m} | F_{h,k,l}(\tau , t) |.$$

Or si

$$| F_{1,0,0} | < M \quad , \quad | F_{0,1,0} | < M \quad , \quad | F_{0,0,1} | < M ,$$

on a

$$| F_{h,k,l}(t , \tau) | < \frac{3^{h+k+l-1}\, M^{h+k+l}\, (t-\tau)^{h+k+l-1}}{(h+k+l-1)!} .$$

En remplaçant $| F_{h,k,l} |$ par le second membre de l'inégalité précédente dans la série (11) on trouve

$$\sum_1^\infty{}_m \frac{(2m)!\, m^3\, 3^{m-1} M^m\, (t-\tau)^{m-1}}{2^m\, m!\, m!\, (m-1)!} .$$

Cette série est convergente et par suite la série (10) est uniformément convergente. On démontre d'une manière tout-à-fait analogue que la série (10) est dérivable par rapport à x , y , z.

3. Soit

$$(12) \qquad V(x , y , z \,|\, t, \Theta) = \frac{1}{r}\left(1 + \int_t^\Theta \Phi\left(\frac{x}{r} , \frac{y}{r} ; \frac{z}{r} \,\middle|\, \tau , t\right) d\tau\right).$$

Nous démontrerons que $V(x , y , z \,|\, t , \Theta)$ est la solution fondamentale de l'équation adjointe, le pôle étant à l'origine.

Remarquons d'abord que

$$\frac{\partial^{2m} r^{2m-1}}{\partial x^{2h}\,\partial y^{2k}\,\partial z^{2l}} = \frac{(2m-1)!\,(2h)!\,(2k)!\,(2l)!}{(m-1)!\,2^{2m-1}\,r} \sum_{0}^{h}{}_{\alpha} \sum_{0}^{k}{}_{\beta} \sum_{0}^{l}{}_{\gamma} \frac{(2(\alpha+\beta+\gamma))!}{(\alpha+\beta+\gamma)!} \cdot$$

$$\cdot \frac{\left(\frac{x}{r}\right)^{2\alpha}\left(\frac{y}{r}\right)^{2\beta}\left(\frac{z}{r}\right)^{2\gamma}(-1)^{\alpha+\beta+\gamma}}{(2\alpha)!\,(2\beta)!\,(2\gamma)!\,(h-\alpha)!\,(k-\beta)!\,(l-\gamma)!}.$$

Par suite nous pouvons écrire

$$(10') \qquad \Phi = r \sum_{1}^{\infty}{}_{m} \frac{(-1)^m}{(2m)!} \sum_{h+k+l=m} \frac{\partial^{2m} r^{2m-1}}{\partial x^{2h}\,\partial y^{2k}\,\partial z^{2l}} F_{h,k,l}(\tau, t).$$

Donc, si nous écrivons pour simplifier $V(t)$ à la place de $V(x, y, z \mid t, \Theta)$, on aura

$$(13) \qquad \Delta^2 V(t) = \int_t^{\Theta} \sum_{1}^{\infty}{}_{m} \frac{(-1)^m}{(2m)!} \sum_{h+k+l=m} \frac{\partial^{2m} \Delta^2 r^{2m-1}}{\partial x^{2h}\,\partial y^{2k}\,\partial z^{2l}} F_{h,k,l}(\tau, t)\, d\tau$$

$$= \int_t^{\Theta} \sum_{1}^{\infty}{}_{m} \frac{(-1)^m}{(2(m-1))!} \sum_{h+k+l=m} \frac{\partial^{2m} r^{2m-3}}{\partial x^{2h}\,\partial y^{2k}\,\partial z^{2l}} F_{h,k,l}(\tau, t)\, d\tau.$$

D'autre part

$$\int_t^{\Theta} \left\{ \frac{\partial^2 V(\tau)}{\partial x^2} F_{1,0,0}(\tau, t) + \frac{\partial^2 V(\tau)}{\partial y^2} F_{0,1,0}(\tau, t) + \frac{\partial^2 V(\tau)}{\partial z^2} F_{0,0,1}(\tau, t) \right\} d\tau$$

$$= \int_t^{\Theta} \left\{ \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x^2} F_{1,0,0}(\tau, t) + \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y^2} F_{0,1,0}(\tau, t) + \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z^2} F_{0,0,1}(\tau, t) \right\} d\tau$$

$$+ \int_t^{\Theta} d\tau \int_{\tau}^{\Theta} \sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m)!} \sum_{h+k+l=m} \left\{ \frac{\partial^{2m+2} r^{2m-1}}{\partial x^{2h+2}\,\partial y^{2k}\,\partial z^{2l}} F_{h,k,l}(\xi, \tau) F_{1,0,0}(\tau, t) \right.$$

$$\left. + \frac{\partial^{2m+2} r^{2m-1}}{\partial x^{2h}\,\partial y^{2k+2}\,\partial z^{2l}} F_{h,k,l}(\xi, \tau) F_{0,1,0}(\tau, t) + \frac{\partial^{2m+2} r^{2m-1}}{\partial x^{2h}\,\partial y^{2k}\,\partial z^{2l+2}} F_{h,k,l}(\xi, \tau) F_{0,0,1}(\tau, t) \right\} d\xi.$$

Or la dernière intégrale double se transforme facilement en

$$\sum_{2}^{\infty}{}_{m} \frac{(-1)^{m-1}}{(2(m-1))!} \sum_{h'+k'+l'=m} \frac{\partial^{2m} r^{2m-3}}{\partial x^{2h'}\,\partial y^{2k'}\,\partial z^{2l'}} \int_t^{\Theta} d\tau \int_{\tau}^{\Theta} \{ F_{h'-1,k',l'}(\xi, \tau) F_{1,0,0}(\tau, t)$$

$$+ F_{h',k'-1,l'}(\xi, \tau) F_{0,1,0}(\tau, t) + F_{h',k',l'-1}(\xi, \tau) F_{0,0,1}(\tau, t) \} \, d\xi.$$

Mais

$$\int_t^\Theta d\tau \int_\tau^\Theta \{ F_{h'-1,k',l'}(\xi,\tau) F_{1,0,0}(\tau,t) + F_{h',k'-1,l'}(\xi,\tau) F_{0,1,0}(\tau,t)$$

$$+ F_{h',k',l'-1}(\xi,\tau) F_{0,0,1}(\tau,t)\} d\xi = \int_t^\Theta d\xi \int_t^\xi F_{h'-1,k',l'}(\xi,\tau) F_{1,0,0}(\tau,t)$$

$$+ F_{h',k'-1,l'}(\xi,\tau) F_{0,1,0}(\tau,t) + F_{h',k',l'=1}(\xi,\tau) F_{0,0,1}(\tau,t)\} d\tau = \int_t^\Theta F_{h',k',l'}(\xi,t) d\xi.$$

Par suite

$$\int_t^\Theta \left\{ \frac{\partial^2 V(\tau)}{\partial x^2} F_{1,0,0}(\tau,t) + \frac{\partial^2 V(\tau)}{\partial y^2} F_{0,1,0}(\tau,t) + \frac{\partial^2 V(\tau)}{\partial z^2} F_{0,0,1}(\tau,t) \right\} d\tau$$

$$= \int_t^\Theta \sum_1^\infty{}_m \frac{(-1)^{m-1}}{(2(m-1))!} \sum_{h+k+l=m} \frac{\partial^{2m} r^{2m-3}}{\partial x^{2h} \partial y^{2k} \partial z^{2l}} F_{h,k,l}(\tau,t) d\tau.$$

En ajoutant l'équation que nous venons de trouver à l'équation (13) et en rappellant les égalités (8) nous aurons

$$\Delta^2 V(t) + \int_t^\Theta \left\{ \frac{\partial^2 V(\tau)}{\partial x^2} f(\tau,t) + \frac{\partial^2 V(\tau)}{\partial y^2} \varphi(\tau,t) + \frac{\partial^2 V(\tau)}{\partial z^2} \psi(\tau,t) \right\} d\tau = 0.$$

La fonction (12) satisfait ainsi à l'équation adjointe, en outre elle est partout régulière, excepté à l'origine, où elle devient infinie de premier ordre. Nous avons donc vérifié directement que *la fonction* $V(x, y, z, | t, \Theta)$ *est la solution fondamentale de l'équation adjointe.*

Art. 5ème. - Propriété de la solution fondamentale de l'équation adjointe.

1. En vertu des formules (12) et (10') nous pouvons écrire

$$(12') \quad V(x,y,z \mid t,\Theta) = \frac{1}{r} + \int_t^\Theta \sum_1^\infty{}_m \frac{(-1)^m}{(2m)!} \sum_{h+k+l=m} \frac{\partial^{2m} r^{m-1}}{\partial x^{2h} \partial y^{2k} \partial z^{2l}} F_{h,k,l}(\tau,t) d\tau$$

et si nous posons

$$r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}$$

nous porterons le pôle dans le point a, b, c.

La formule précédente est équivalente à l'autre

$$(14) \quad V(x,y,z \mid t,\Theta) = \frac{1}{r} + \int_t^\Theta \sum_1^\infty{}_m \frac{(-1)^m}{(2m)!} \sum_{h+k+l=m} \frac{\partial^{2m} r^{2m-1}}{\partial a^{2h} \partial b^{2k} \partial c^{2l}} F_{h,k,l}(\tau,t) d\tau.$$

2. Désignons par σ une surface fermée ayant à l'intérieur le pôle a, b, c, et par n la normale externe à σ. Soit S l'espace renfermé par la surface σ. Nous aurons

$$\int_\sigma \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} d\sigma = -4\pi,$$

$$\int_\sigma \frac{\partial}{\partial n} \frac{\partial^{2m} r^{2m-1}}{\partial a^{2h} \partial b^{2k} \partial c^{2l}} d\sigma = \frac{\partial^{2m}}{\partial a^{2h} \partial b^{2k} \partial c^{2l}} \int_S 2m(2m-1) r^{2m-3} dS,$$

$$\int_\sigma \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial^{2m} r^{2m-1}}{\partial a^{2h} \partial b^{2k} \partial c^{2l}} \cos nx \, d\sigma = \frac{\partial^{2m+2}}{\partial a^{2h+2} \partial b^{2k} \partial c^{2l}} \int_S r^{2m-1} dS,$$

$$\int_\sigma \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial^{2m} r^{2m-1}}{\partial a^{2h} \partial b^{2k} \partial c^{2l}} \cos ny \, d\sigma = \frac{\partial^{2m+2}}{\partial a^{2h} \partial b^{2k+2} \partial c^{2l}} \int_S r^{2m-1} dS,$$

$$\int_\sigma \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial^{2m} r^{2m-1}}{\partial a^{2h} \partial b^{2k} \partial c^{2l}} \cos nz \, d\sigma = \frac{\partial^{2m+2}}{\partial a^{2h} \partial b^{2k} \partial c^{2l+2}} \int_S r^{2m-1} dS.$$

3. Cela posé on aura

$$(15) \qquad \int_\sigma \frac{\partial V(t)}{\partial n} d\sigma = -4\pi$$

$$+ \int_t^\Theta \sum_1^\infty {}_m \frac{(-1)^m}{(2(m-1))!} \sum_{h+k+l=m} \frac{\partial^{2m}}{\partial a^{2h} \partial b^{2k} \partial c^{2l}} \int_S r^{2m-3} dS \cdot F_{h,k,l}(\tau, t) \, d\tau.$$

Calculons maintenant

$$\int_\sigma \left(\frac{\partial V(\tau)}{\partial x} f(\tau, t) \cos nx + \frac{\partial V(\tau)}{\partial y} \varphi(\tau, t) \cos ny + \frac{\partial V(\tau)}{\partial z} \psi(\tau, t) \cos nz \right) d\sigma.$$

On trouvera

$$\frac{\partial^2}{\partial a^2} \int_S \frac{1}{r} dS \cdot F_{1,0,0}(\tau, t) + \frac{\partial^2}{\partial b^2} \int_S \frac{1}{r} dS \cdot F_{0,1,0}(\tau, t) + \frac{\partial^2}{\partial c^2} \int_S \frac{1}{r} dS \cdot F_{0,0,1}(\tau, t)$$

$$+ \sum_1^\infty \frac{(-1)^m}{(2m)!} \sum_{h+k+l=m} \left\{ \frac{\partial^{2m+2}}{\partial a^{2h+2} \partial b^{2k} \partial c^{2l}} \int_S r^{2m-1} dS \int_\tau^\Theta F_{h,k,l}(\xi, \tau) F_{1,0,0}(\tau, t) \, d\xi \right.$$

$$+ \frac{\partial^{2m+2}}{\partial a^{2h} \partial b^{2k+2} \partial c^{2l}} \int_S r^{2m-1} dS \int_\tau^\Theta F_{h,k,l}(\xi, \tau) F_{0,1,0}(\tau, t) \, d\xi$$

$$\left. + \frac{\partial^{2m+2}}{\partial a^{2h} \partial b^{2k} \partial c^{2l+2}} \int_S r^{2m-1} dS \int_\tau^\Theta F_{h,k,l}(\xi, \tau) F_{0,0,1}(\tau, t) \, d\xi \right\}$$

et par suite

$$\int_t^\Theta d\tau \int_\sigma \left\{ \frac{\partial V(\tau)}{\partial x} f(\tau, t) \cos nx + \frac{\partial V(\tau)}{\partial y} \varphi(\tau, t) \cos ny + \frac{\partial V(\tau)}{\partial z} \psi(\tau, t) \cos nz \right\} d\sigma$$

$$= \int_t^\Theta \left\{ \frac{\partial^2}{\partial a^2} \int_S \frac{1}{r} dS \cdot F_{1,0,0}(\tau, t) + \frac{\partial^2}{\partial b^2} \int_S \frac{1}{r} dS \cdot F_{0,1,0}(\tau, t) + \frac{\partial^2}{\partial c^2} \int_S \frac{1}{r} dS \cdot F_{0,0,1}(\tau, t) \right\} d\tau$$

$$+ \int_t^\Theta d\tau \sum_2^\infty {}_m \frac{(-1)^{m-1}}{(2(m-1))!} \sum_{h+k+l=m} \frac{\partial^{2m}}{\partial a^{2h} \partial b^{2k} \partial c^{2l}} \int_S r^{2m-3} dS \left\{ \int_\tau^\Theta \{ F_{h-1,k,l}(\xi, \tau) F_{1,0,0}(\tau, t) \right.$$

$$\left. + F_{h,k-1,l}(\xi, \tau) F_{0,1,0}(\tau, t) + F_{h,k,l-1}(\xi, \tau) F_{0,0,1}(\tau, t) \} d\xi . \right.$$

Mais

$$\int_t^\Theta d\tau \int_\tau^\Theta \{ F_{h-1,k,l}(\xi, \tau) F_{1,0,0}(\tau, t) + F_{h,k-1,l}(\xi, \tau) F_{0,1,0}(\tau, t)$$

$$+ F_{h,k,l-1}(\xi, \tau) F_{0,0,1}(\tau, t) \} d\xi$$

$$= \int_t^\Theta d\xi \int_t^\xi F_{h-1,k,l}(\xi, \tau) F_{1,0,0}(\tau, t) + F_{h,k-1,l}(\xi, \tau) F_{0,1,0}(\tau, t)$$

$$+ F_{h,k,l-1}(\xi, \tau) F_{0,0,1}(\tau, t) \} d\tau = \int_t^\Theta F_{h,k,l}(\xi, t) d\xi .$$

Donc

$$\int_t^\Theta d\tau \int_\sigma \left\{ \frac{\partial V(\tau)}{\partial x} f(\tau, t) \cos nx + \frac{\partial V(\tau)}{\partial y} \varphi(\tau, t) \cos ny + \frac{\partial V(\tau)}{\partial z} \psi(\tau, t) \cos nz \right\} d\sigma$$

$$= \int_t^\Theta \sum_1^\infty \frac{(-1)^{m-1}}{(2(m-1))!} \sum_{h+k+l=m} \frac{\partial^{2m}}{\partial a^{2h} \partial b^{2k} \partial c^{2l}} \int_S r^{2m-3} dS \cdot F_{h,k,l}(\tau, t) d\tau ,$$

d'où l'on tire, en ayant égard à l'équation (15),

$$\text{(II)} \qquad \int_\sigma \left\{ \frac{\partial V(t)}{\partial n} + \int_t^\Theta d\tau \left(\frac{\partial V(\tau)}{\partial x} f(\tau, t) \cos nx + \frac{\partial V(\tau)}{\partial z} \varphi(\tau, t) \cos ny \right. \right.$$

$$\left. \left. + \frac{\partial V(\tau)}{\partial z} \psi(\tau, t) \cos nz \right) \right\} d\sigma = -4\pi .$$

La propriété de $V(x, y, z \mid t, \Theta)$ renfermée dans cette formule est celle que nous voulions obtenir et dont nous ferons usage.

Art. 6ème. – L'ÉQUATION FONDAMENTALE.

1. Si le pôle est externe au domaine S on pourra, dans la formule (I), remplacer v par V car V est régulière dans S, mais, si le pôle est interne, pour appliquer la formule (I) il faudra retrancher du domaine S un domaine

environnant le pôle. Soit ω le contour de ce dernier domaine. L'équation de réciprocité (I) deviendra alors

$$\text{(I')} \qquad H_\sigma([u, V], \Theta) + H_\omega([u, V], \Theta) = 0 .$$

Prenons pour w une sphère ayant le centre dans le pôle, et tâchons de calculer (Voir § 3 Art. 2) $\lim H'_\omega([u, V], \Theta)$ et $\lim H''_\omega([u, V], \Theta)$ en supposant que le rayon de cette sphère devient infiniment petit.

2. Supposons, pour simplifier, que le pôle soit l'origine. On aura

$$\Phi\left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r} \middle| \tau, t\right) = \sum_{1}^{\infty}{}_m \frac{(-1)^m}{m!\, 2^{2m}} \sum_{h+k+l=m} F_{h,k,l}(\tau, t)\, g_{h,k,l}$$

où

$$g_{h,k,l} = (2h)!\,(2k)!\,(2l)! \sum_{0}^{h}{}_\alpha \sum_{0}^{k}{}_\beta \sum_{0}^{l}{}_\gamma (-1)^{\alpha+\beta+\gamma} \frac{(2(\alpha+\beta+\gamma))!}{(\alpha+\beta+\gamma)!} \cdot$$

$$\cdot \frac{\left(\frac{x}{r}\right)^{2\alpha} \left(\frac{y}{r}\right)^{2\beta} \left(\frac{z}{r}\right)^{2\gamma}}{(2\alpha)!\,(2\beta)!\,(2\gamma)!\,(h-\alpha)!\,(k-\beta)!\,(l-\gamma)!} .$$

Or, Ω étant la sphère de rayon 1 ayant le centre à l'origine, on a

$$\int_\Omega \left(\frac{x}{r}\right)^{\alpha 2} \left(\frac{y}{r}\right)^{2\beta} \left(\frac{z}{r}\right)^{2\gamma} d\Omega = \frac{(2\alpha)!\,(2\beta)!\,(2\gamma)!\,(\alpha+\beta+\gamma)!}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!\,(2(\alpha+\beta+\gamma)+1)!} 4\pi,$$

et par suite

$$\int_\Omega g_{h,k,l}\, d\Omega = 4\pi\,(2h)!\,(2k)!\,(2l)! \sum_{0}^{h}{}_\alpha \sum_{0}^{k}{}_\beta \sum_{0}^{l}{}_\gamma \cdot$$

$$\cdot \frac{(-1)^{\alpha+\beta+\gamma}}{[2(\alpha+\beta+\gamma)+1]\,\alpha!\,(h-\alpha)!\,\beta!\,(k-\beta)!\,\gamma!\,(l-\gamma)!} = 4\pi \frac{2^m m!\,(2h)!\,(2k)!\,(2l)!}{h!\,k!\,l!\,1\cdot 3\cdot 5 \cdots (2m+1)} .$$

On déduit de là

$$\int_\Omega \Phi\left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r} \middle| \tau, t\right) d\Omega$$

$$= 4\pi \sum_{1}^{\infty}{}_m \frac{(-1)^m m!}{(2m)!} \sum_{h+k+l=m} \frac{(2h)!\,(2k)!\,(2l)!}{h!\,k!\,l!} F_{h,k,l}(\tau, t) = 4\pi S(\tau, t).$$

En tenant compte de l'ordre de l'infini de V dans le pôle on a facilement

$$\lim H'_\omega([u, V], \Theta) = -\lim \int_0^\Theta dt \int u(t) \frac{\partial V(t)}{\partial n} d\omega = -\lim \int_0^\Theta u_0(t)\, dt \int_\omega \frac{\partial V(t)}{\partial n} d\omega,$$

ayant posé pour simplifier

$$u_0(t) = u(0, 0, 0, t).$$

Dans la formule précédente il faut remplacer $\partial V(t)/\partial n$ par

$$\frac{1}{r^2}\left(1 + \int_t^\Theta \Phi\left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r} \middle| \tau, t\right) d\tau\right)$$

et $d\omega$ par $r^2\, d\Omega$, donc

$$\lim \mathrm{H}'_\omega([u\,,\mathrm{V}]\,,\Theta) = -\int_0^\Theta u_0(t)\,dt\int_\Omega \left\{ 1 + \int_t^\Theta \Phi\left(\frac{x}{r}\,,\frac{y}{r}\,,\frac{z}{r}\,\Big|\, t\,,\tau\right) d\tau \right\} d\Omega$$

$$= -4\pi\int_0^\Theta u_0(t)\left[1 + \int_t^\Theta \mathrm{S}(\tau\,,t)\,d\tau\right] dt.$$

De même on trouve

$$\lim \mathrm{H}''_\omega([u\,,\mathrm{V}]\,,\Theta = -4\pi\int_0^\Theta u_0(t)\,dt\int_t^\Theta \mathrm{T}(\tau\,,t)\,dt\,,$$

et par des procédés analogues à ceux que nous avons appliqués précédemment on peut calculer $\mathrm{T}(\tau\,,t)$. On a ainsi

$$\mathrm{T}(\tau\,,t) = -\sum_1^\infty{}_m \frac{(-1)^m m!}{(2m)!}\sum_{h+k+l=m}\frac{(2h)!\,(2k)!\,(2l)!}{h!\,k!\,l!}\,\mathrm{F}_{h,k,l}(\tau\,,t) = -\mathrm{S}(\tau\,,t).$$

C'est pourquoi

$$\lim \mathrm{H}_\omega([u\,,\mathrm{V}]\,,\Theta)$$

$$= \lim \mathrm{H}'_\omega([u\,,\mathrm{V}]\,,\Theta) + \lim \mathrm{H}''_\omega([u\,,\mathrm{V}]\,,\Theta) = = -4\pi\int_0^\Theta u_0(t)\,dt.$$

En vertu de la formule (I') nous aurons donc

$$4\pi\int_0^\Theta u_0(t)\,dt = \mathrm{H}_\sigma([u\,,\mathrm{V}]\,,\Theta)\,,$$

c'est à dire

$$\text{(III)}\qquad u_0(\Theta) = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial\Theta}\mathrm{H}_\sigma([u\,,\mathrm{V}]\,,\Theta)\,.$$

La formule que nous venons de trouver sera appelée la *formule fondamentale*. Nous avons supprimé les calculs pour déterminer directement $\mathrm{T}(\tau\,,t)$ qui sont assez longs, parce-que dans l'article suivant nous donnerons une autre méthode pour trouver la formule fondamentale.

Art. 7ème. - Deuxième méthode pour obtenir la formule fondamentale.

1. En ayant égard à l'ordre d'infini de V dans le pôle on a évidemment, si le rayon de la sphère ω devient infiniment petit,

$$\text{(16)}\qquad \lim \left\{ \int_\omega \mathrm{V}(t)\frac{\partial u(t)}{\partial n}\,d\omega + \int_t^\Theta d\tau\int_\omega \mathrm{V}(\tau)\left[\frac{\partial u(t)}{\partial x} f(\tau\,,t)\cos nx \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{\partial u(t)}{\partial y}\varphi(\tau\,,t)\cos ny + \frac{\partial u(t)}{\partial z}\psi(\tau\,,t)\cos nz\right] d\omega \right\} = 0$$

$$(17)\qquad \lim\left\{\int_\omega u(t)\frac{\partial V(t)}{\partial n}d\omega+\int_t^\Theta dt\int_\omega u(t)\left[\frac{\partial V(\tau)}{\partial x}f(\tau,t)\cos nx\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{\partial V(\tau)}{\partial y}\varphi(\tau,t)\cos ny+\frac{\partial V(\tau)}{\partial z}\psi(\tau,t)\cos nz\right]d\omega\right\}$$

$$=u_0(t)\int_\omega\left\{\frac{\partial V(t)}{\partial n}+\int_t^\Theta d\tau\left[\frac{\partial V(\tau)}{\partial x}f(\tau,t)\cos nx+\frac{\partial V(\tau)}{\partial y}\varphi(\tau,t)\cos ny\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{\partial V(\tau)}{\partial z}\psi(\tau,t)\cos nz\right]\right\}d\omega=4\pi u_0(t).$$

En effet, à cause de la formule (II),

$$\int_\omega\left\{\frac{\partial V(t)}{\partial n}+\int_t^\Theta d\tau\left[\frac{\partial V(\tau)}{\partial x}f(\tau,t)\cos nx+\frac{\partial V(\tau)}{\partial y}\varphi(\tau,t)\cos ny\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{\partial V(\tau)}{\partial z}\psi(\tau,t)\cos nz\right]\right\}d\omega$$

est indépendent de la grandeur de la sphère ω et est égal à 4π parce-que la normale n est dirigée vers l'intérieur de la sphère.

2. Par l'application des formules (16) et (17) on trouve

$$\lim H_\omega([u,V],\Theta)=-4\pi\int_0^\Theta u_0(t)\,dt$$

et en vertu de la relation

$$(\mathrm{I}')\qquad H_\sigma([u,V],\Theta)+H_\omega([u,V],\Theta)=0$$

on a

$$4\pi\int_0^\Theta u_0(t)\,dt=H_\sigma([u,V],\Theta),$$

d'où découle la *formule fondamentale*

$$(\mathrm{III})\qquad u_0(\Theta)=\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial\Theta}H_\sigma([u,V],\Theta).$$

Art. 8ème. - Remarques sur la formule fondamentale.

1. La formule (III) exprime la valeur de la solution u régulière de l'équation (A) dans un point interne au domaine S par les valeurs de u et de ses dérivées du premier ordre au contour σ de S.

Elle correspond au théorème de GREEN car elle joue par rapport à l'équation (A) le même rôle joué par la formule de GREEN par rapport à l'équation de LAPLACE.

2. Si l'on veut éliminer les dérivées de u au contour σ, remarquons que, w étant une solution régulière de l'équation (A), on aura, en appliquant le théorème de réciprocité,

$$H_\sigma([u\,,w]\,,\Theta)=0\,.$$

C'est pourquoi à cause de la formule fondamentale

$$u_0(\Theta)=\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial\Theta}H_\sigma([u\,,V+w]\,,\Theta)\,. \tag{IV}$$

Si $V+w$ sera nulle sur σ, dans le second membre de l'équation précédente ne paraîtront que les valeurs de u sur σ. Par conséquent l'équation (IV) résoudra le problème de *déterminer la solution regulière u à l'intérieur de* S *pour $t=\Theta$ les valeurs de u étant connues au contour σ pour t comprise entre* o *et* Θ. Par exemple si σ est un plan on peut calculer w par la méthode des images.

3. En multipliant par dS et intégrant, l'équation (A′) amène à l'égalité

$$\int_\sigma\left\{\frac{\partial v(t)}{\partial n}+\int_t^\Theta\left(\frac{\partial v(\tau)}{\partial x}f(\tau\,,t)\cos nx+\frac{\partial v(\tau)}{\partial y}\varphi(\tau\,,t)\cos ny\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{\partial v(\tau)}{\partial z}\psi(\tau\,,t)\cos nz\right)d\tau\right\}d\sigma=0\,,$$

v étant une solution régulière de l'équation adjointe. À cause de l'équation (II) il n'est donc pas possible de trouver une solution v régulière de l'équation adjointe telle que

$$\frac{\partial v(t)}{\partial n}+\int_t^\Theta\left\{\frac{\partial v(\tau)}{\partial x}f(\tau\,,t)\cos nx+\frac{\partial v(\tau)}{\partial y}\varphi(\tau\,,t)\cos ny+\frac{\partial v(\tau)}{\partial z}\psi(\tau\,,t)\cos nz\right\}d\tau$$
$$=\frac{\partial V(t)}{\partial n}+\int_t^\Theta\left\{\frac{\partial V(\tau)}{\partial x}f(\tau,t)\cos nx+\frac{\partial V(\tau)}{\partial y}\varphi(\tau,t)\cos ny+\frac{\partial V(\tau)}{\partial z}\psi(\tau,t)\cos nz\right\}d\tau.$$

Mais si V_A et V_B sont deux solutions fondamentales de l'équation adjointe correspondantes aux pôles A et B internes au domaine S et

$$V_{AB}=V_A-V_B$$

l'équation

$$\frac{\partial v(t)}{\partial u}+\int_t^\Theta\left\{\frac{\partial v(\tau)}{\partial x}f(\tau\,,t)\cos nx+\frac{\partial v(\tau)}{\partial y}\varphi(\tau\,,t)\cos ny+\frac{\partial v(\tau)}{\partial z}\psi(\tau\,,t)\cos nz\right\}d\tau$$
$$=\frac{\partial V_{AB}(t)}{\partial n}+\int_t^\Theta\left\{\frac{\partial V_{AB}(\tau)}{\partial x}f(\tau\,,t)\cos nx+\frac{\partial V_{AB}(\tau)}{\partial y}\varphi(\tau\,,t)\cos ny\right.$$
$$\left.+\frac{\partial V_{AB}(\tau)}{\partial z}\psi(\tau\,,t)\cos nz\right\}d\tau$$

n'est pas impossibile, v étant une solution régulière de l'équation adjointe.

Or

$$H_\sigma([u\,,v]\,,\Theta) = 0$$

$$\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial\Theta} H_\sigma([u\,,V_A]\,,\Theta) = u_A(\Theta)$$

$$\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial\Theta} H_\sigma([u\,,V_B]\,,\Theta) = u_B(\Theta)$$

$u_A(\Theta)$ et $u_B(\Theta)$ étant les valeurs de $u(x\,,y\,,z\,,t)$ dans les points A et B pour $t = \Theta$). C'est pourquoi

$$\text{(V)} \qquad \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial\Theta} H_\sigma([u\,,V_{AB} - v]\,,\Theta) = u_A(\Theta) - u_B(\Theta).$$

Mais

$$H_\sigma([u\,,V_{AB} - v]\,,\Theta)$$

$$= \int_0^\Theta dt \int_\sigma \left\{ \frac{\partial u(t)}{\partial n} + \int_0^t \frac{\partial u(\tau)}{\partial x} f(t\,,\tau)\cos nx + \frac{\partial u(\tau)}{\partial y}\varphi(t\,,\tau)\cos ny \right.$$

$$\left. + \frac{\partial u(\tau)}{\partial z}\psi(t\,,\tau)\cos nz\Big) d\tau \right\}(V_{AB} - v)\,d\sigma;$$

il suffira donc de connaître au contour l'expression

$$\frac{\partial u(t)}{\partial n} + \int_0^t \left(\frac{\partial u(\tau)}{\partial x} f(t\,,\tau)\cos nx + \frac{\partial u(\tau)}{\partial y}\varphi(t\,,\tau)\cos ny + \frac{\partial u(\tau)}{\partial z}\psi(t\,,\tau)\cos nz\right) d\tau,$$

pour les valeurs de t comprises entre o et Θ, pour obtenir, par la formule (V), les différences des valeurs de u dans les différents points de S pour $t = \Theta$. (Voir Art. 1er. § 3).

Art. 9ème. – Remarques générales.

1. Si au lieu de l'équation (A) on avait l'équation intégro-différentielle

$$\text{(A'')} \quad \Delta^2 u(t) + \int_0^t \left\{ \frac{\partial^2 u(\tau)}{\partial x^2} f(t\,,\tau) + \frac{\partial^2 u(\tau)}{\partial y^2}\varphi(t\,,\tau) + \frac{\partial^2 u(\tau)}{\partial z^2}\psi(t\,,\tau) \right\} d\tau = X(x,y,z,t)$$

posons

$$\int_0^\Theta dt \int_S v(t)\,X(x\,,y\,,z\,,t)\,dS = K([X\,,v]\,,\Theta),$$

alors l'équation (III) devrait être remplacée par l'autre

$$u_0(\Theta) = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial\Theta}\{H_\sigma([u\,,V]\,,\Theta) - K([X\,,V]\,,\Theta)\}.$$

On en tire que la fonction

$$-\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial\Theta} K([X\,,V]\,,\Theta)$$

vérifie l'équation (A'') dans le domaine S. On pourrait déduire de là un théorème analogue à celui de POISSON.

2. Soit

$$(18)\qquad \begin{cases} u(x,y,z,t)+\int_0^t u(x,y,z,\tau)f(t,\tau)\,d\tau = \mathrm{U}(x,y,z,t), \\[2ex] u(x,y,z,t)+\int_0^t u(x,y,z,\tau)\varphi(t,\tau)\,d\tau = \mathrm{V}(x,y,z,t), \\[2ex] u(x,y,z,t)+\int_0^t u(x,y,z,\tau)\psi(t,\tau)\,d\tau = \mathrm{W}(x,y,z,t). \end{cases}$$

En résolvant ces équations intégrales on aura

$$(19)\qquad \begin{aligned} u(x,y,z,t) &= \mathrm{U}(x,y,z,t)+\int_0^t \mathrm{U}(x,y,z,\tau)f'(t,\tau)\,d\tau \\ &= \mathrm{V}(x,y,z,t)+\int_0^t \mathrm{V}(x,y,z,\tau)\varphi'(t,\tau)\,d\tau \\ &= \mathrm{W}(x,y,z,t)+\int_0^t \mathrm{W}(x,y,z,\tau)\psi'(t,\tau)\,d\tau, \end{aligned}$$

et l'équation (A) pourra s'écrire

$$(20)\qquad \frac{\partial^2 \mathrm{U}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \mathrm{V}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \mathrm{W}}{\partial z^2}=0\,.$$

Donc l'équation (A) peut être ramenée à *un système constitué de deux équations intégrales simultanées* (19) *et de l'équation différentielle* (20) *avec les trois fonctions inconnues* U, V, W.

On peut remarquer qu'en général ces équations ne peuvent pas se séparer et par suite *le problème de la résolution des équations intégro-différentielles est en général un problème essentiellement distinct des problèmes des équations différentielles et des problèmes des équations intégrales.*

Mais dans quelques cas particuliers la séparation est possible. C'est ainsi que si $f=\varphi=\psi$, on aura

$$\mathrm{U}=\mathrm{V}=\mathrm{W}$$

et l'équation (20) deviendra

$$(20')\qquad \Delta^2 \mathrm{U}=0.$$

La question sera donc ramenée à l'équation différentielle (20') et à la première des équations intégrales (19) ou des équations intégrales (18).

CHAPITRE 2ème.

Théorie mathématique de l'élasticité en ayant égard à l'hérédité.

Art. 1er. – CONSIDÉRATIONS PRÉLIMINAIRES.

1. Envisageons le cas élémentaire de la torsion d'un fil. Soit ω l'angle de torsion et M le moment de torsion. Dans la théorie ordinaire de l'élasticité on regarde, dans l'équilibre, ω proportionnel à M et l'on écrit

$$\omega = \mathrm{K\,M}, \tag{1}$$

K étant un coefficient constant.

Cette équation n'est qu'une équation approximative, car on néglige toute action héréditaire. Si l'on veut tenir compte de l'hérédité, c'est à dire si l'on veut tenir compte que ω dépend de toute l'histoire du moment de torsion, il faudra corriger l'équation (1) en écrivant

$$\omega = \mathrm{K\,M} + \Phi,$$

où Φ est une quantité qui dépend de toutes les valeurs prises par M depuis le temps $-\infty$ jusqu'à l'instant actuel.

Soit t l'instant actuel, en faisant usage d'une notation que nous avons adoptée en plusieurs occasions, nous écrirons

$$\omega(t) = \mathrm{K\,M}(t) + \Phi \left| \left[\mathrm{M} \left(\overset{t}{\underset{-\infty}{\tau}} \right) \right] \right| .$$

Le symbole

$$\Phi \left| \left[\mathrm{M} \left(\overset{t}{\underset{-\infty}{\tau}} \right) \right] \right|$$

désigne une quantité qui dépend de toutes les valeurs prises par la fonction M (τ), τ variant depuis $-\infty$ jusqu'à t.

2. En supposant vérifiées certaines conditions, Φ sera développable dans une série analogue à celle de TAYLOR (7) et l'on aura

$$\omega(t) = \mathrm{K\,M}(t) + \int_{-\infty}^{t} \mathrm{M}(\tau)\,\mathrm{F}(t,\tau)\,d\tau + \frac{1}{1\cdot 2}\int_{-\infty}^{t} \mathrm{M}(\tau_1)\,d\tau_1 \int_{-\infty}^{t} \mathrm{M}(\tau_2)\,\mathrm{F}(t,\tau_1,\tau_2)\,d\tau_2$$

$$+ \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}\int_{-\infty}^{t} \mathrm{M}(\tau_1)\,d\tau_1 \int_{-\infty}^{t} \mathrm{M}(\tau_2)\,d\tau_2 \int_{-\infty}^{t} \mathrm{M}(\tau_3)\,\mathrm{F}(t,\tau_1,\tau_2,\tau_3)\,d\tau_3 + \cdots$$

(7) *Sopra le funzioni che dipendono da altre funzioni.* Nota I, « Rend. Acc. dei Lincei », ser. 4ª, vol. III₂, 1887₂, § 3. [In queste « Opere », vol. primo, XVII, p. 294-302].

Supposons maintenant que tous les termes de la série d'ordre supérieur au premier soient négligeables. On aura alors

$$\omega(t) = \mathrm{KM}(t) + \int_{-\infty}^{t} \mathrm{M}(\tau)\, \mathrm{F}(t, \tau)\, d\tau . \tag{2}$$

Nous dirons dans ce cas que *l'hérédité est linéaire.*

Si l'histoire du fil antérieure à un instant t_0 est négligeable, l'équation précédente pourra s'écrire

$$\omega(t) = \mathrm{KM}(t) + \int_{t_0}^{t} \mathrm{M}(\tau)\, \mathrm{F}(t, \tau)\, d\tau . \tag{2'}$$

En résolvant cette équation intégrale par rapport à $\mathrm{M}(\tau)$ on trouvera

$$\mathrm{M}(t) = \frac{1}{\mathrm{K}}\, \omega(t) + \int_{t_0}^{t} \omega(\tau) f(t, \tau)\, d\tau . \tag{3}$$

3. Les équations (2), (2′), (3) seront les équations fondamentales de l'équilibre élastique de torsion dans le cas de l'hérédité linéaire. Il faut ajouter qu'elles seront valables lorsque l'accélération angulaire de la torsion sera négligeable.

$\mathrm{F}(t, \tau)$ sera le *coefficient d'hérédité.* Voici son interprétation physique: $\mathrm{F}(t, \tau)\, d\tau$ *mesure la torsion induite à l'instant t par un moment de torsion unitaire agissant dans l'intervalle de temps* $(\tau, \tau + d\tau)$. Réciproquement: $f(t, \tau)\, d\tau$ *mesure le moment de torsion à l'instant t qui fait équilibre à une torsion unitaire à laquelle le fil a été assujetti pendant l'intervalle de temps* $(\tau, \tau + d\tau)$.

4. Dans l'hypothèse que la valeur absolue du moment de torsion soit toujours inférieure à une limite finie il faudra admettre que le coefficient d'hérédité soit infiniment petit pour $\tau = -\infty$. Nous supposerons

$$|\mathrm{F}(t, \tau)| < \frac{\mathrm{C}}{(t - \tau)^{1+\varepsilon}} \tag{4}$$

où $\varepsilon > 0$ et C est une constante finie positive.

Art. 2ème. – Principe du cycle fermé.

1. Soit A un point du plan ayant pour coordonnées rectangulaires ω et M. Il décrit une ligne pendant que M et ω varient. Si M et ω sont des fonctions périodiques du temps ayant la même période, cette ligne constitue un cycle fermé. Supposons maintenant que *chaque fois que* M *est une fonction périodique de* τ *avec une certaine période,* ω *soit aussi une fonction périodique de t avec la même période.* Nous désignerons cette condition par *condition du cycle fermé.*

Il est évident qu'il faudra admettre la périodicité depuis le temps $-\infty$ c'est à dire qu'il faudra partir de l'équation (2) où la limite inférieure de l'intégrale est $-\infty$.

2. Soit $T > 0$ la période. Nous aurons

$$\omega(t+T) = KM(t+T) + \int_{-\infty}^{t+T} M(\tau)\, F(t+T, \tau)\, d\tau,$$

et, en vertu de la condition du cycle fermé,

$$\omega(t) = KM(t) + \int_{-\infty}^{t+T} M(\tau)\, F(t+T, \tau)\, d\tau.$$

Par suite

$$\int_{-\infty}^{t} M(\tau)\, F(t, \tau)\, d\tau = \int_{-\infty}^{t+T} M(\tau)\, F(t+T, \tau)\, d\tau = \int_{-\infty}^{t} M(\tau)\, F(t+T, \tau+T)\, d\tau.$$

Puisque $M(\tau)$ est une fonction périodique arbitraire ayant la période T, on déduit de l'égalité précédente

$$F(t, \tau) + \sum_{1}^{\infty}{}_n F(t, \tau - nT) = F(t+T, \tau+T) + \sum_{0}^{\infty}{}_n F(t+T, \tau - nT)$$

où τ est compris entre t et $t - T$.

Les deux séries étant convergentes à cause de la condition (4), il sera

$$\left| \sum_{1}^{\infty}{}_n F(t, \tau - nT) \right| < \frac{C}{T^{1+\varepsilon}} \sum_{1}^{\infty}{}_n \frac{1}{n^{1+\varepsilon}},$$

$$\left| \sum_{0}^{\infty}{}_n F(t+T, \tau - nT) \right| < \frac{C}{T^{1+\varepsilon}} \sum_{1}^{\infty}{}_n \frac{1}{n^{1+\varepsilon}},$$

d'où

$$F(t, \tau) = F(t+T, \tau+T) + \frac{2C\eta}{T^{1+\varepsilon}} \sum_{1}^{\infty}{}_n \frac{1}{n^{1+\varepsilon}}, \tag{5}$$

η étant un nombre compris entre $+1$ et -1.

Soit

$$\vartheta < T - (t - \tau).$$

$T - \vartheta$ sera positif et $\tau + \vartheta$ sera compris entre $t + \vartheta$ et $t + \vartheta - (T - \vartheta)$: c'est pourquoi dans l'équation (5) on pourra remplacer respectivement t, τ, T par $t + \vartheta, \tau + \vartheta, T - \vartheta$. On aura ainsi

$$F(t+\vartheta, \tau+\vartheta) = F(t+T, \tau+T) + \frac{2C\eta'}{(T-\vartheta)^{1+\varepsilon}} \sum_{1}^{\infty}{}_n \frac{1}{n^{1+\varepsilon}} \tag{5'}$$

η' étant un nombre compris entre $+1$ et -1.

En retranchant les équations (5) et (5′) il viendra

$$F(t,\tau) - F(t+\vartheta,\tau+\vartheta) = \left(\frac{2C\eta}{T^{1+\varepsilon}} - \frac{2C\eta'}{(T-\vartheta)^{1+\varepsilon}}\right)\sum_{1}^{\infty}{}_n \frac{1}{n^{1+\varepsilon}}.$$

Or l'équation précédente doit être vérifiée quelque soit la grandeur de T, on aura donc

$$F(t,\tau) = F(t+\vartheta,\tau+\vartheta)$$

quelque soit ϑ.

On tire de là que $F(t,\tau)$ *doit être fonction de la différence* $t-\tau$.

3. Réciproquement on peut démontrer:

Si F *est une fonction de la différence* $t-\tau$, *la condition du cycle fermé sera vérifiée.*

En effet si

$$\omega(t) = KM(t) + \int_{-\infty}^{t} M(\tau)\,F(t-\tau)\,d\tau$$

on aura

$$\omega(t+T) = KM(t+T) + \int_{-\infty}^{T+t} M(\tau)\,F(t+T-\tau)\,d\tau$$

$$= KM(t+T) + \int_{-\infty}^{t} M(\tau+T)\,F(t-\tau)\,d\tau.$$

Donc si $M(\tau)$ est une fonction périodique avec la période T, $\omega(t)$ sera aussi une fonction périodique avec la même période.

4. Si nous nous rapportons à ce que nous avons dit dans le § 3 du 1er article, nous pourrons interpréter la condition que F soit une fonction de $t-\tau$ de la manière suivante: *la torsion induite après un intervalle de temps donné par un moment de torsion est invariable quelque soit l'instant où le moment de torsion a agi.*

Nous appellerons cette condition *l'invariabilité de l'hérédité.*

Les propositions des §§ 2 et 3 nous amènent au théorème suivant:

La condition du cycle fermé porte pour conséquence celle de l'invariabilité de l'hérédité, et réciproquement la condition de l'invariabilité de l'hérédité porte pour conséquence celle du cycle fermé.

Ce théorème sera nommé *principe du cycle fermé.*

Art. 3ème. – DÉTERMINATION DU COEFFICIENT D'HÉRÉDITÉ.

1. La condition du cycle fermé étant vérifiée, et l'histoire du fil antérieure à l'instant o étant négligeable, on aura

$$\omega(t) = KM(t) + \int_{0}^{t} M(\tau)\,F(t-\tau)\,d\tau.$$

Posons $t - \tau = \sigma$, il viendra

$$\omega(t) = \mathrm{K}\,\mathrm{M}(t) + \int_0^t \mathrm{F}(\sigma)\,\mathrm{M}(t-\sigma)\,d\sigma .$$

2. Si nous supposons que $\mathrm{M}(t)$, $d\mathrm{M}(t)/dt$, $d^2\mathrm{M}(t)/dt^2, \cdots d^{n-1}\mathrm{M}(t)/dt^{n-1}$ soient nulles pour $t = 0$, tandis que $d^n\mathrm{M}(t)/dt^n$ ne soit pas nulle pour $t = 0$, on aura

$$\omega^{(n)}(t) = \mathrm{K}\,\mathrm{M}^{(n)}(t) + \int_0^t \mathrm{F}(\sigma)\,\mathrm{M}^{(n)}(t-\sigma)\,d\sigma , \tag{6}$$

d'où l'on tire

$$\mathrm{K} = \frac{\omega^{(n)}(0)}{\mathrm{M}^{(n)}(0)} .$$

Dérivant l'équation intégrale (6), il viendra

$$\omega^{(n+1)}(t) - \mathrm{K}\mathrm{M}^{(n+1)}(t) = \mathrm{M}^{(n)}(0)\,\mathrm{F}(t) + \int_0^t \mathrm{F}(\sigma)\,\mathrm{M}^{(n+1)}(t-\sigma)\,d\sigma .$$

Donc en connaissant $\omega(t)$ et $\mathrm{M}(t)$ on pourra calculer $\mathrm{F}(t)$ par la résolution de l'équation intégrale précédente.

Art. 4ème. – ÉQUATIONS GÉNÉRALES DE L'ÉLASTICITÉ DANS LE CAS DE L'HÉRÉDITÉ LINÉAIRE.

1. Après avoir envisagé, comme exemple, le cas particulier de la torsion nous allons passer au cas général.

Nous prendrons comme équations indéfinies fondamentales de l'équilibre élastique les équations

$$\text{(I)} \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial t_{11}}{\partial x} + \frac{\partial t_{12}}{\partial y} + \frac{\partial t_{13}}{\partial z} &= \rho \mathrm{X} , \\ \frac{\partial t_{21}}{\partial x} + \frac{\partial t_{22}}{\partial y} + \frac{\partial t_{23}}{\partial z} &= \rho \mathrm{Y} , \\ \frac{\partial t_{31}}{\partial x} + \frac{\partial t_{32}}{\partial y} + \frac{\partial t_{33}}{\partial z} &= \rho \mathrm{Z} , \end{aligned} \right.$$

et comme équations au coutour σ du corps élastique

$$\text{(II)} \qquad \left\{ \begin{aligned} t_{11}\cos nx + t_{12}\cos ny + t_{13}\cos nz &= \mathrm{X}_\sigma , \\ t_{21}\cos nx + t_{22}\cos ny + t_{23}\cos nz &= \mathrm{Y}_\sigma , \\ t_{31}\cos nx + t_{32}\cos ny + t_{33}\cos nz &= \mathrm{Z}_\sigma , \end{aligned} \right.$$

où les quantités $t_{is} = t_{si}$ sont les *caractéristiques de la tension* (c'est à dire le *stress*), $\rho\mathrm{X}$, $\rho\mathrm{Y}$, $\rho\mathrm{Z}$; X_σ, Y_σ, Z_σ sont respectivement les composantes des forces de masse et des tensions superficielles, n est la normale interne au contour.

2. Les relations qui définiront à chaque instant les conditions d'hérédité seront

$$\text{(III)} \qquad t_{is}(t) \sum_{hk} a_{is\,|\,hk} \gamma_{hk}(t) + \int_{t_0}^{t} \sum_{hk} \varphi_{is\,|\,hk}(t\,,\tau)\, \gamma_{hk}(\tau)\, d\tau\,,$$

où les quantités $\gamma_{hk} = \gamma_{hk}$ désignent les *caractéristiques de la déformation* (c'est à dire le *strain*). Les sommes qui paraissent dans les égalités précédentes sont étendues à toutes les combinaisons avec repétition de h et k ($h\,,k =$ $= 1\,,2\,,3\,,4\,,5\,,6$). On a supposé que, antérieurement à l'instant t_0 l'hérédité soit négligeable. Les coefficients $a_{is\,|\,hk} = a_{is\,|\,kh} = a_{is\,|\,kh}$ seront en général des fonctions des coordonnées $x\,,y\,,z$ des points du corps élastique. De même $\varphi_{is\,|\,hk} = \varphi_{si\,|\,hk} = \varphi_{is\,|\,kh}$ seront en général des fonctions de $x\,,y\,,z\,,t\,,\tau$. On n'a mis en évidence que ces dernières variables pour simplifier l'écriture des formules. Ce n'est que dans le cas de l'homogénéité que nous supposerons que $a_{is\,|\,hk}\,,\,\varphi_{is\,|\,hk}$ soient indépendantes des coordonnées $x\,,y\,,z$.

3. Lorsqu'on néglige les termes intégraux dans les équations (III) elles expriment la *loi de* HOOKE. Les termes intégraux donnent, dans une première approximation, la correction due à l'hérédité. En effet nous supposerons que la correction totale due à l'herédité s'obtienne en ajoutant des quantités qui dépendent de toutes les valeurs prises par les quantités $\gamma_{hk}(\tau)$ pour les valeurs de τ comprises entre t_0 et t. En outre nous supposerons que ces quantités soient développables en séries analogues à celle de TAYLOR et que dans ces développements on puisse négliger tous les termes qui ne sont pas linéaires par rapport aux fonctions γ_{hk}. C'est pourquoi les équations (III) expriment les relations plus générales de l'***hérédité linéaire élastique***.

Nous admettrons que le déterminant du 6ème ordre formé avec les coefficients $a_{is\,|\,hk}$ ne soit pas nul. Les équations intégrales (III) seront alors résolubles par rapport aux quantités γ_{hk}. En les résolvant on exprimera le *strain* par le *stress*.

Il n'y a aucune difficulté à étendre aux coefficients $\varphi_{is\,|\,hk}(t\,,\tau)$ l'interprétation que nous avons donnée dans le 1er article au coefficient $F(t\,,\tau)$. De même on peut étendre au cas général, que nous considérons maintenant, le principe du cycle fermé que nous avons envisagé avec détail dans le cas particulier de la torsion. Nous appellerons les quantités $\varphi_{is|hk}$ les *coefficients d'hérédité*.

4. Soient $u\,,v\,,w$ les composantes du déplacement des particules du élastique. Nous aurons

$$\text{(IV)} \qquad \begin{cases} \gamma_{11} = \dfrac{\partial u}{\partial x} \quad , & \gamma_{22} = \dfrac{\partial v}{\partial y} \quad , & \gamma_{33} = \dfrac{\partial w}{\partial z} \\[2ex] \gamma_{23} = \dfrac{\partial w}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial z} \quad , & \gamma_{31} = \dfrac{\partial u}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial x} \quad , & \gamma_{12} = \dfrac{\partial v}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y}. \end{cases}$$

Remplaçons dans les équations (I) les quantités t_{is} par les expressions données par les formules (III) et dans ces expressions posons les seconds membres des équations (IV) à la place des quantités γ_{hk}. On obtiendra trois équations *intégro-différentielles*. Elles sont les *équations intégro-différentielles générales de l'élasticité dans le cas de l'hérédité linéaire*.

Leur étude sera le sujet des articles suivants.

Art. 5ème. – ÉQUATIONS ADJOINTES, THÉORÈME DE RÉCIPROCITÉ, CARACTÉRISTIQUES.

1. L'étude des équations intégro-différentielles que nous venons de trouver se fera en les accouplant avec d'autres équations intégro-différentielles qu'on appellera les équations adjointes.

On les obtient en écrivant

$$\text{(I')}\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial t'_{11}}{\partial x} + \dfrac{\partial t'_{12}}{\partial y} + \dfrac{\partial t'_{13}}{\partial z} = \rho X' \\[2mm] \dfrac{\partial t'_{21}}{\partial x} + \dfrac{\partial t'_{22}}{\partial y} + \dfrac{\partial t'_{23}}{\partial z} = \rho Y' \\[2mm] \dfrac{\partial t'_{31}}{\partial x} + \dfrac{\partial t'_{32}}{\partial y} + \dfrac{\partial t'_{33}}{\partial z} = \rho Z' \end{cases}$$

$$\text{(II')}\qquad \begin{cases} t'_{11} \cos nx + t'_{12} \cos ny + t'_{13} \cos uz = X'_\sigma \\ t'_{21} \cos nx + t'_{22} \cos ny + t'_{23} \cos nz = Y'_\sigma \\ t'_{31} \cos nx + t'_{32} \cos ny + t'_{33} \cos nz = Z'_\sigma \end{cases}$$

$$\text{(III')}\qquad t'_{si}(t) = t'_{is}(t) = \sum_{hk} a_{hk\,|\,is}\, \gamma'_{hk}(t) + \int_t^{\mathrm{T}} \sum_{hk} \varphi_{hk\,|\,is}(\tau, t)\, \gamma'_{hk}(\tau)\, d\tau$$

$$\text{(IV')}\qquad \begin{cases} \gamma'_{11} = \dfrac{\partial u'}{\partial x}, \quad \gamma'_{22} = \dfrac{\partial v'}{\partial y}, \quad \gamma'_{33} = \dfrac{\partial w'}{\partial z} \\[2mm] \gamma'_{23} = \gamma'_{32} = \dfrac{\partial w'}{\partial y} + \dfrac{\partial v'}{\partial z}, \quad \gamma'_{31} = \gamma'_{13} = \dfrac{\partial u'}{\partial z} + \dfrac{\partial w'}{\partial x}, \quad \gamma'_{12} = \gamma'_{21} = \dfrac{\partial v'}{\partial x} + \dfrac{\partial u'}{\partial y}. \end{cases}$$

Les trois équations intégro-différentielles auxquelles satisfont u', v', w' qu'on obtient en éliminant γ'_{hk} et t'_{is} des systèmes (I'), (III'), (IV') sont les *équations adjointes*.

2. On déduit facilement des équations (III)

$$\int_{t_0}^{\mathrm{T}} \sum_{is} t_{is}(t)\, \gamma'_{is}(t)\, dt$$

$$= \int_{t_0}^{\mathrm{T}} \sum_{is} \sum_{hk} a_{is\,|\,hk}\, \gamma'_{is}(t)\, \gamma_{hk}(t)\, dt + \int_{t_0}^{\mathrm{T}} dt \int_{t_0}^{t} \sum_{is} \sum_{hk} \varphi_{is\,|\,hk}(t, \tau)\, \gamma'_{is}(t)\, \gamma_{hk}(\tau)\, d\tau$$

$$= \int_{t_0}^{\mathrm{T}} \sum_{hk} \sum_{is} a_{hk\,|\,is}\, \gamma'_{hk}(t)\, \gamma_{is}(t)\, dt + \int_{t_0}^{\mathrm{T}} dt \int_{t}^{\mathrm{T}} \sum_{hk} \sum_{is} \varphi_{hk\,|\,is}(\tau, t)\, \gamma'_{hk}(\tau)\, \gamma_{is}(t)\, d\tau.$$

Mais à cause des équations (III′) on a

$$\int_{t_0}^{T}\sum_{hk}\sum_{is} a_{hk|is}\,\gamma'_{hk}(t)\,\gamma_{is}(t)\,dt+\int_{t_0}^{T}dt\int_{t_0}^{T}\sum_{hk}\sum_{is}\varphi_{hk|is}(\tau,t)\,\gamma'_{hk}(\tau)\,\gamma_{is}(t)\,d\tau$$
$$=\int_{t_0}^{T}\sum_{is} t'_{is}(t)\,\gamma_{is}(t)\,dt\,,$$

donc

$$\int_{t_0}^{T}\sum_{is} t_{is}(t)\,\gamma'_{is}(t)\,dt=\int_{t_0}^{T}\sum_{is} t'_{is}(t)\,\gamma_{is}(t)\,dt$$

et par suite

$$\int_{t_0}^{T}dt\int_{S}\sum_{is} t_{is}(t)\,\gamma'_{is}(t)\,dS=\int_{t_0}^{T}dt\int_{S}\sum_{is} t'_{is}(t)\,\gamma_{is}(t)\,dS\,,$$

S étant l'espace occupé par le corps élastique. Remplaçons maintenant γ'_{is} et γ_{is} par les seconds membres des équations (IV′) et (IV). Par des intégrations par parties l'équation précédente devient

$$\int_{t_0}^{T}dt\Bigg[\int_{S}\Big\{u'\left(\frac{\partial t_{11}}{\partial x}+\frac{\partial t_{12}}{\partial y}+\frac{\partial t_{13}}{\partial z}\right)+v'\left(\frac{\partial t_{21}}{\partial x}+\frac{\partial t_{22}}{\partial y}+\frac{\partial t_{23}}{\partial z}\right)$$
$$+w'\left(\frac{\partial t_{31}}{\partial x}+\frac{\partial t_{32}}{\partial y}+\frac{\partial t_{33}}{\partial z}\right)\Big\}dS$$
$$+\int_{\sigma}\Big\{u'(t_{11}\cos nx+t_{12}\cos ny+t_{13}\cos nz)+v'(t_{21}\cos nx+t_{22}\cos ny+t_{23}\cos nz)$$
$$+w'(t_{31}\cos nx+t_{32}\cos ny+t_{33}\cos nz)\Big\}d\sigma\Bigg]$$
$$=\int_{t_0}^{T}dt\Bigg[\int_{S}\Big\{u\left(\frac{\partial t'_{11}}{\partial x}+\frac{\partial t'_{12}}{\partial y}+\frac{\partial t'_{13}}{\partial z}\right)+v\left(\frac{\partial t'_{21}}{\partial x}+\frac{\partial t'_{22}}{\partial y}+\frac{\partial t'_{33}}{\partial z}\right)$$
$$+w\left(\frac{\partial t'_{31}}{\partial x}+\frac{\partial t'_{32}}{\partial y}+\frac{\partial t'_{33}}{\partial z}\right)\Big\}dS$$
$$+\int_{\sigma}\Big\{u(t'_{11}\cos nx+t'_{12}\cos ny+t'_{13}\cos nz)+v(t'_{21}\cos nx+t'_{22}\cos ny+t'_{23}\cos nz)$$
$$+w(t'_{31}\cos nx+t'_{32}\cos ny+t'_{33}\cos nz)\Big\}d\sigma\Bigg]\,,$$

et en vertu des équations (I), (II), (I′) (II′), l'égalité précédente s'écrira

$$\text{(A)}\qquad \int_{t_0}^{T}dt\Big\{\int_{S}(\rho Xu'+\rho Yv'+\rho Zw')\,dS+\int_{\sigma}(X_\sigma u'+Y_\sigma v'+Z_\sigma w')\,d\sigma\Big\}$$
$$=\int_{t_0}^{T}dt\Big\{\int_{S}(\rho X'u+\rho Y'v+\rho Z'w)\,dS+\int_{\sigma}(X'_\sigma u+Y'_\sigma v+Z'_\sigma w)\,d\sigma\Big\}\cdot$$

Le théorème renfermé dans cette formule est le *théorème de réciprocité.* Il est analogue au théorème de réciprocité que nous avons considéré dans l'article 2ème du premier chapitre et il sera la base des méthodes que nous allons développer. On peut comparer ce théorème avec le théorème de BETTI pour les cas ordinaires de l'élasticité [(8)].

Pour simplifier nous écrirons aussi l'équation (A) sous la forme

$$\text{(A)}\qquad \int_{t_0}^{T} dt \left\{ \int_S \Sigma\rho\, X u'\, dS + \int_\sigma \Sigma X_\sigma u'\, d\sigma \right\} = \int_{t_0}^{T} dt \left\{ \int_S \Sigma\rho\, X' u\, ds + \int_\sigma \Sigma X'_\sigma u\, d\sigma \right\}.$$

3. Par des intégrations par parties on tire des équations (I), (II), (III), (IV), la formule

$$\text{(B)}\qquad \int_S (\rho X u + \rho Y v + \rho Z w)\, dS + \int_\sigma (X_\sigma u + Y_\sigma v + Z_\sigma w)\, d\sigma$$

$$= -\int_S \sum_{is}\sum_{hk} a_{is|hk}\, \gamma_{hk}(t)\, \gamma_{is}(t)\, dS - \int_{t_0}^{T} d\tau \int_S \sum_{is}\sum_{hk} \varphi_{is|hk}(t,\tau)\, \gamma_{is}(t)\, \gamma_{hk}(\tau)\, dS.$$

Supposons que pendant l'intervalle de temps (t_0, T) les forces de masse $\rho X, \rho Y, \rho Z$ et le trinôme $X_\sigma u + Y_\sigma v + Z_\sigma w$ soient nuls, alors le premier membre de l'équation précédente sera nul aussi.

Or par une substitution ortogonale

$$\gamma_{is}(t) = \sum_{rl} c_{rl|is}\, g_{rl}(t)$$

on pourra ramener la forme quadratique

$$\text{(7)}\qquad \sum_{is}\sum_{hk} a_{is|hk}\, \gamma_{hk}(t)\, \gamma_{is}(t)$$

à la forme

$$\sum_{rl} e_{rl}\, g_{rl}^2(t).$$

L'équation (B) deviendra donc

$$\text{(8)}\qquad \int_S \sum_{rl} e_{rl}\, g_{rl}^2(t)\, dS + \int_{t_0}^{t} d\tau \int_S \sum_{is}\sum_{hk} \psi_{is|hk}(t,\tau)\, g_{is}(t)\, g_{hk}(\tau)\, dS = 0,$$

où les coefficients $\psi_{is|hk}$ se calculeront très-facilement moyennant les fonctions $\varphi_{is|hk}$ et les coefficients $c_{rl|is}$. Il est évident que les fonctions $\psi_{is|hk}$ seront finies et continues lorsque $\varphi_{is|hk}$ seront finies et continues. Dans cette hypothèse, et, en supposant aussi que la forme (7) soit une forme définie, c'est à dire que les coefficients e_{rl} soient du même signe et ne soient pas nuls, on pourra déduire de l'équation (8), par le même procédé que nous avons suivi dans

(8) E. BETTI, *Teoria dell'elasticità.* «Nuovo Cimento», 1872-73.

le premier article du chapitre précédent, que les quantités $g_{rl}(t)$, et par suite les quantités $\gamma_{rl}(t)$, seront nulles pour t compris entre t_0 et T.

On tire de là que, sous les conditions que nous venons d'énoncer, *étant connu les forces de masse et les déplacements superficiels* (*ou les tensions superficielles*), *pendant un intervalle de temps, la déformation du corps sera déterminée dans le même intervalle de temps.*

Art. 6ème. – CORPS ÉLASTIQUES ISOTROPES ET HOMOGÈNES.

1. Si le corps élastique qu'on envisage est isotrope les équations (III) ne doivent pas changer si l'on invertit la direction de chacun des axes coordonnés. Par ces changements de direction des axes on a des changements de signe dans les quantités t_{rs} et γ_{rs}. On trouve ainsi très-aisément les termes qu'il faut éliminer dans les seconds membres des équations (III) lorsque le corps est isotrope. Mais les mêmes équations doivent garder toujours la même forme en échangeant les axes entre eux, c'est pourquoi elles seront

$$(9) \qquad t_{rr} = \mathrm{L}\Theta(t) + 2\,\mathrm{K}\,\gamma_{rr}(t) + \int_{t_0}^{t} (\varphi(t,\tau)\,\Theta(\tau) + 2\,\psi(t,\tau)\,\gamma_{rr}(\tau))\,d\tau,$$

$$t_{rs} = h\gamma_{rs}(t) + \int_{t_0}^{t} \chi(t,\tau)\,\gamma_{rs}(\tau)\,d\tau, \qquad r \gtrless s,$$

$$\Theta = \gamma_{11} + \gamma_{22} + \gamma_{33}.$$

Si nous donnons aux axes une orientation arbitraire, les équations précédentes ne doivent pas changer, par suite on doit avoir

$$\mathrm{K} = h \quad , \quad \psi = \chi$$

et en conséquence

$$(9a) \qquad t_{rs} = \mathrm{K}\gamma_{rs}(t) + \int_{t_0}^{t} \psi(t,\tau)\,\gamma_{rs}(\tau)\,d\tau, \qquad r \gtrless s.$$

Le corps élastique étant homogène, L et K seront constants et φ et ψ seront indépendants de x, y, z. Nous supposerons L et K du même signe (voir Art, 4ème, § 2).

2. Donc dans le cas des corps élastiques isotropes et homogènes, en ayant égard à l'hérédité linéaire, on aura les équations [9]

(9) Voir: BOLTZMANN, *Zur Theorie der elastischen Nachwirkung*. « Wien. Ber. », *70*, S. 275–306, 1874; « Pogg. Ann. Erg. », Bd. 7, S. 624, 1876; « Wiss. Abl. », Bd. 1, S. 616. Voir aussi: O. E. MEYER, « Pogg. Ann. », *154*, S. 360; WIECHERT, *Gesetze der elastischen Nachwirkung*.

$$
(10)\qquad \left\{
\begin{aligned}
& K\Delta^2 u + (L+K)\frac{\partial\Theta(t)}{\partial x} \\
& + \int_{t_0}^{t} \left\{ \psi(t,\tau)\,\Delta^2 u(\tau) + (\varphi(t,\tau)+\psi(t,\tau))\frac{\partial\Theta(\tau)}{\partial x} \right\} d\tau = \rho X(t), \\
& K\Delta^2 v + (L+K)\frac{\partial\Theta(t)}{\partial y} \\
& + \int_{t_0}^{t} \left\{ \psi(t,\tau)\,\Delta^2 v(\tau) + (\varphi(t,\tau)+\psi(t,\tau))\frac{\partial\Theta(\tau)}{\partial y} \right\} d\tau = \rho Y(t), \\
& K\Delta^2 w + (L+K)\frac{\partial\Theta(t)}{\partial z} \\
& + \int_{t_0}^{t} \left\{ \psi(t,\tau)\,\Delta^2 w(\tau) + (\varphi(t,\tau)+\psi(t,\tau))\frac{\partial\Theta(\tau)}{\partial z} \right\} d\tau = \rho Z(t).
\end{aligned}
\right.
$$

On déduit facilement de ces équations

$$
(11)\qquad
\begin{aligned}
& (L+2K)\,\Delta^2\Theta(t) + \int_{t_0}^{t} (\varphi(t,\tau)+2\psi(t,\tau))\,\Delta^2\Theta(\tau)\,d\tau \\
& \qquad = \frac{\partial(\rho X)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho Y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho Z)}{\partial z},
\end{aligned}
$$

$$
(12)\qquad \left\{
\begin{aligned}
& K\Delta^2\omega_1(t) + \int_{t_0}^{t}\psi(t,\tau)\,\Delta^2\omega_1(\tau)\,d\tau = \frac{\partial(\rho Z)}{\partial y} - \frac{\partial(\rho Y)}{\partial z}, \\
& K\Delta^2\omega_2(t) + \int_{t_0}^{t}\psi(t,\tau)\,\Delta^2\omega_2(\tau)\,d\tau = \frac{\partial(\rho X)}{\partial z} - \frac{\partial(\rho Z)}{\partial x}, \\
& K\Delta^2\omega_3(t) + \int_{t_0}^{t}\psi(t,\tau)\,\Delta^2\omega_3(\tau)\,d\tau = \frac{\partial(\rho Y)}{\partial x} - \frac{\partial(\rho X)}{\partial y},
\end{aligned}
\right.
$$

où

$$
\omega_1 = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \quad , \quad \omega_2 = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \quad , \quad \omega_3 = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}.
$$

C'est pourquoi par la résolution de ces équations intégrales on pourra calculer

$$
\Delta^2\Theta(t) \quad , \quad \Delta^2\omega_1(t) \quad , \quad \Delta^2\omega_2(t) \quad , \quad \Delta^2\omega_3(t).
$$

3. Pour indiquer la résolution de ces équations intégrales et d'autres équations analogues que nous allons trouver, représentons par

$$
(13)\qquad \varphi = \mathbf{A}_1 f
$$

l'opération

$$
(14)\qquad Kf(t) + \int_{t_0}^{t}\psi(t,\tau)\,f(\tau)\,d\tau = \varphi(t),
$$

qui nous amène de la fonction $f(t)$ à la fonction $\varphi\,(t)$, et écrivons inversement

$$f = \mathbf{A}_1^{-1}\,\varphi\,. \tag{13'}$$

Cette opération désigne la résolution de l'équation intégrale précédente. De même représentons par

$$\varphi = \mathbf{A}_2 f \tag{15}$$

l'opération

$$(\mathrm{L} + 2\,\mathrm{K}) f(t) + \int_{t_0}^{t} \{\varphi\,(t\,,\tau) + 2\,\psi\,(t\,,\tau)\} f(\tau)\, d\tau = \varphi\,(t)$$

et par

$$f = \mathbf{A}_2^{-1}\,\varphi \tag{15'}$$

l'opération inverse.

4. Cela posé les équations (11) et (12) pourront s'écrire

$$\mathbf{A}_2\,\Delta^2\,\Theta = \frac{\partial\,(\rho \mathrm{X})}{\partial x} + \frac{\partial\,(\rho \mathrm{Y})}{\partial y} + \frac{\partial\,(\rho \mathrm{Z})}{\partial z}\,, \tag{11'}$$

$$\left\{\begin{aligned} \mathbf{A}_1\,\Delta^2\,\omega_1 &= \frac{\partial\,(\rho \mathrm{Z})}{\partial y} - \frac{\partial\,(\rho \mathrm{Y})}{\partial z}\,,\\ \mathbf{A}_1\,\Delta^2\,\omega_2 &= \frac{\partial\,(\rho \mathrm{X})}{\partial z} - \frac{\partial\,(\rho \mathrm{Z})}{\partial x}\,,\\ \mathbf{A}_1\,\Delta_2\,\omega_3 &= \frac{\partial\,(\rho \mathrm{Y})}{\partial x} - \frac{\partial\,(\rho \mathrm{X})}{\partial y}\,, \end{aligned}\right. \tag{12'}$$

et par suite on aura

$$\Delta^2\,\Theta = \mathbf{A}_2^{-1}\left(\frac{\partial\,(\rho \mathrm{X})}{\partial x} + \frac{\partial\,(\rho \mathrm{Y})}{\partial y} + \frac{\partial\,(\rho \mathrm{Z})}{\partial z}\right), \tag{11''}$$

$$\left\{\begin{aligned} \Delta^2\,\omega_1 &= \mathbf{A}_1^{-1}\left(\frac{\partial\,(\rho \mathrm{Z})}{\partial y} - \frac{\partial\,(\rho \mathrm{Y})}{\partial z}\right),\\ \Delta^2\,\omega_2 &= \mathbf{A}_1^{-1}\left(\frac{\partial\,(\rho \mathrm{X})}{\partial z} - \frac{\partial\,(\rho \mathrm{Z})}{\partial x}\right),\\ \Delta^2\,\omega_3 &= \mathbf{A}_1^{-1}\left(\frac{\partial\,(\rho \mathrm{Y})}{\partial x} - \frac{\partial\,(\rho \mathrm{X})}{\partial y}\right). \end{aligned}\right. \tag{12''}$$

En appliquant l'opération Δ^2 à la première des équations (10) on trouve

$$\mathrm{K}\Delta^4\,u\,(t) + \int_{t_0}^{t} \psi\,(t\,,\tau)\,\Delta^4\,u\,(\tau)\,d\tau$$

$$= \Delta^2\,(\rho \mathrm{X}) - (\mathrm{L} + \mathrm{K})\,\frac{\partial \Delta^2\,\Theta\,(t)}{\partial x} - \int_{t_0}^{t} (\varphi\,(t\,,\tau) + \psi\,(t\,,\tau))\,\frac{\partial \Delta^2\,\Theta\,(\tau)}{\partial x}\,d\tau\,,$$

c'est à dire, en vertu de l'équation (11'),

$$\mathbf{A}_1\,\Delta^4\,u = \Delta^2\,(\rho \mathrm{X}) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\,(\rho \mathrm{X})}{\partial x} + \frac{\partial\,(\rho \mathrm{Y})}{\partial y} + \frac{\partial\,(\rho \mathrm{Z})}{\partial z}\right) + \mathbf{A}_1\,\frac{\partial \Delta^2\,\Theta}{\partial x}\,.$$

On a aussi deux équations analogues à la précédente.

On en tire, en ayant égard à l'équation (11″),

$$(16)\quad \begin{cases} \Delta^4 u = \mathbf{A}_1^{-1}\,\Delta^2(\rho X) + (\mathbf{A}_2^{-1} - \mathbf{A}_1^{-1})\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial(\rho X)}{\partial x} + \dfrac{\partial(\rho Y)}{\partial y} + \dfrac{\partial(\rho Z)}{\partial z}\right), \\ \Delta^4 v = \mathbf{A}_1^{-1}\,\Delta^2(\rho Y) + (\mathbf{A}_2^{-1} - \mathbf{A}_1^{-1})\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial(\rho X)}{\partial x} + \dfrac{\partial(\rho Y)}{\partial y} + \dfrac{\partial(\rho Z)}{\partial z}\right), \\ \Delta^4 w = \mathbf{A}_1^{-1}\,\Delta^2(\rho Z) + (\mathbf{A}_2^{-1} - \mathbf{A}_1^{-1})\dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{\partial(\rho X)}{\partial x} + \dfrac{\partial(\rho Y)}{\partial y} + \dfrac{\partial(\rho Z)}{\partial z}\right). \end{cases}$$

Il est donc possible de transformer les équations intégro-différentielles (10) dans les équations différentielles précédentes dont les seconds membres sont des fonctions connues.

Si les forces de masse sont nulles, les équations (11″), (12″), (16) deviennent

$$\Delta^2\Theta = \Delta^2\omega_1 = \Delta^2\omega_2 = \Delta^2\omega_3 = \Delta^4 u = \Delta^4 v = \Delta^4 w = 0\,.$$

Donc la forme intégro-différentielle des équations de l'élasticité, dans le cas héréditaire, n'est qu'une forme *apparente* lorsque le corps élastique est isotrope et homogène. Mais il faut remarquer que les relations qui passent entre les composantes des déplacements u, v, w gardent la forme intégro-différentielle, ainsi que les conditions au contour, lorsqu'on suppose que les tensions soient données.

5. Pour les équations adjointes, il faut remplacer les égalités (9), (9 *a*) par

$$(9')\qquad t'_{rr} = L\Theta'(t) + 2\,K\,\gamma'_{rr}(t) + \int_t^T (\varphi(\tau, t)\,\Theta'(\tau) + 2\,\psi(\tau, t)\,\gamma'_{rr}(\tau))\,d\tau\,,$$

$$(9'a)\qquad t'_{rs} = K\gamma'_{rs}(t) + \int_t^T \psi(\tau, t)\,\gamma'_{rs}(\tau)\,d\tau\,, \qquad r \gtrless s\,.$$

Les équations adjointes seront

$$(10')\quad \begin{cases} K\Delta^2 u'(t) + (L+K)\dfrac{\partial\Theta'(t)}{\partial x} \\ \quad + \displaystyle\int_t^T \left(\psi(\tau, t)\,\Delta^2 u'(\tau) + (\varphi(\tau, t) + \psi(\tau, t))\,\dfrac{\partial\Theta'(\tau)}{\partial x}\right) d\tau = \rho X', \\ K\Delta^2 v'(t) + (L+K)\dfrac{\partial\Theta'(t)}{\partial y} \\ \quad + \displaystyle\int_t^T \left(\psi(\tau, t)\,\Delta^2 v'(\tau) + (\varphi(\tau, t) + \psi(\tau, t))\,\dfrac{\partial\Theta'(\tau)}{\partial y}\right) d\tau = \rho Y', \\ K\Delta^2 w'(t) + (L+K)\dfrac{\partial\Theta'(t)}{\partial z} \\ \quad + \displaystyle\int_t^T \left(\psi(\tau, t)\,\Delta^2 w'(\tau) + (\varphi(\tau, t) + \psi(\tau, t))\,\dfrac{\partial\Theta'(\tau)}{\partial z}\right) d\tau = \rho Z', \end{cases}$$

où

$$\Theta' = \gamma'_{11} + \gamma'_{22} + \gamma'_{33}.$$

En supposant

$$X' = Y' = Z' = 0,$$

et en posant

$$\omega'_1 = \frac{\partial w'}{\partial y} - \frac{\partial v'}{\partial z} \quad , \quad \omega'_2 = \frac{\partial u'}{\partial z} - \frac{\partial w'}{\partial x} \quad , \quad \omega'_3 = \frac{\partial v'}{\partial x} - \frac{\partial u'}{\partial y},$$

on aura

$$\Delta^2 \Theta' = \Delta^2 \omega'_1 = \Delta^2 \omega'_2 = \Delta^2 \omega'_3 = \Delta^4 u' = \Delta^4 v' = \Delta^4 w' = 0 .$$

Art. 7ème. - Solutions fondamentales des équations adjointes.

1. Supposons

$$X' = Y' = Z' = 0 .$$

On aura aisément les solutions suivantes des équations adjointes (10').

1) F étant une fonction harmonique il y aura la solution

$$u' = \frac{\partial F}{\partial x} \quad , \quad v' = \frac{\partial F}{\partial y} \quad , \quad w' = \frac{\partial F}{\partial z}. \tag{17}$$

2) F_1, F_2, F_3 étant des fonctions harmoniques il y aura la solution

$$u' = \frac{\partial F_2}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial y} \quad , \quad v' = \frac{\partial F_3}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial z} \quad , \quad w' = \frac{\partial F_1}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial x}. \tag{18}$$

3) Φ_1, Φ_2, Φ_3 étant des fonctions biharmoniques (10) et les dérivées partielles de

$$\Delta^2\left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} + \frac{\partial \Phi_3}{\partial z}\right)$$

par rapport à x, y, z étant indépendantes de t, il y aura la solution

$$\left\{\begin{aligned} u' &= \alpha(T, t)\,\Delta^2 \Phi_1 + \beta(T, t)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} + \frac{\partial \Phi_3}{\partial z}\right), \\ v' &= \alpha(T, t)\,\Delta^2 \Phi_2 + \beta(T, t)\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} + \frac{\partial \Phi_3}{\partial z}\right), \\ w' &= \alpha(T, t)\,\Delta^2 \Phi_3 + \beta(T, t)\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} + \frac{\partial \Phi_3}{\partial z}\right), \end{aligned}\right. \tag{19}$$

où α et β sont des fonctions telles que l'on ait

$$\begin{aligned} (L + 2K)\,\beta(T, t) &+ \int_t^T [\varphi(\tau, t) + 2\psi(\tau, t)]\,\beta(T, \tau)\,d\tau \\ &+ (L + K)\,\alpha(T, t) + \int_t^T [\varphi(\tau, t) + \psi(\tau, t)]\,\alpha(T, \tau)\,d\tau = 0. \end{aligned} \tag{20}$$

(10) Une fonction biharmonique est une fonction qui vérifie l'équation $\Delta^2 \Delta^2 = 0$.

2. Prenons $F = 1/r$, r étant la distance du point (x, y, z) au point (a, b, c) que nous appellerons le *pôle*. La solution (17) nous donnera

$$u' = \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}, \quad v' = \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y}, \quad w' = \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z},$$

$$\Theta' = 0,$$

$$t'_{11} = 2\,M(T, t)\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x^2}, \quad t'_{22} = 2\,M(T, t)\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y^2}, \quad t'_{33} = 2\,M(T, t)\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z^2},$$

$$t'_{23} = 2\,M(T, t)\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y\,\partial z}, \quad t'_{31} = 2\,M(T, t)\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z\,\partial x}, \quad t'_{12} = 2\,M(T, t)\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x\,\partial y},$$

$$X'_\sigma = 2\,M(T, t)\frac{d}{dn}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}, \quad Y'_\sigma = 2\,M(T, t)\frac{d}{dn}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y}, \quad Z'_\sigma = 2\,M(T, t)\frac{d}{dn}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z},$$

où l'on a posé

$$M(T, t) = K + \int_t^T \psi(\tau, t)\,d\tau. \tag{21}$$

Pour distinguer cette solution nous placerons un indice 1 aux lettres u', v', w'; $X'_\sigma, Y'_\sigma, Z'_\sigma$, en les écrivant u'_1, v'_1, w'_1; $X_{\sigma,1}, Y_{\sigma,1}, Z_{\sigma,1}$.

3. Prenons

$$F_1 = \frac{1}{r}, \quad F_2 = 0, \quad F_3 = 0.$$

La solution (18) amènera aux formules suivantes

$$u' = 0, \quad v' = -\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}, \quad w' = \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y},$$

$$\Theta' = 0,$$

$$t'_{11} = 0, \qquad t'_{22} = -2\,M(T, t)\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z\,\partial y}, \quad t'_{33} = \quad 2\,M(T, t)\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y\,\partial z},$$

$$t'_{23} = M(T, t)\left(\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z^2}\right), \quad t'_{31} = \quad M(T, t)\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y\,\partial x}, \quad t'_{12} = -\quad M(T, t)\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial r\,\partial x},$$

$$\left\{\begin{aligned}
X'_\sigma &= M(T, t)\left(-\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z\,\partial x}\cos ny + \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y\,\partial z}\cos nz\right),\\
Y'_\sigma &= M(T, t)\left(-\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z\,\partial x}\cos nx - 2\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y\,\partial z}\cos ny + \left(\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z^2}\right)\cos nz\right),\\
Z'_\sigma &= M(T, t)\left(\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y\,\partial x}\cos nx + \left(\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z^2}\right)\cos ny + 2\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y\,\partial z}\cos nz\right).
\end{aligned}\right.$$

Pour distinguer cette solution nous placerons un indice 2 aux lettres u', v', w'; X'_σ, Y'_σ, Z'_σ en les écrivant u'_2, v'_2, w'_2; $X'_{\sigma,2}$, $Y'_{\sigma,2}$, $Z'_{\sigma,2}$.

On aura évidemment des solutions analogues en prenant successivement

$$F_1 = 0 \quad , \quad F_2 = \frac{1}{r} \quad , \quad F_3 = 0$$

et

$$F_1 = 0 \quad , \quad F_2 = 0 \quad , \quad F_3 = \frac{1}{r} .$$

4. Posons [11] dans les formules (19)

$$\Phi_1 = \frac{r}{2} \quad , \quad \Phi_2 = 0 \quad , \quad \Phi_3 = 0,$$

on aura, en tenant compte de la relation (20),

$$u' = \alpha \frac{1}{r} + \frac{\beta}{2} \frac{\partial^2 x}{\partial r^2} \quad , \quad v' = \frac{\beta}{2} \frac{\partial^2 r}{\partial x \partial y} \quad , \quad w' = \frac{\beta}{2} \frac{\partial^2 r}{\partial x \partial z},$$

$$\Theta' = (\alpha + \beta) \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x},$$

$$\left\{ \begin{aligned} t'_{11} &= (2P + Q + R) \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} + N \frac{\partial^3 r}{\partial x^3}, \\ t'_{22} &= \qquad\quad (Q + R) \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} + N \frac{\partial^3 r}{\partial x \partial y^2}, \\ t'_{33} &= \qquad\quad (Q + R) \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} + N \frac{\partial^3 r}{\partial x \partial z^2}, \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} t'_{23} &= \qquad N \frac{\partial^3 r}{\partial x \partial y \partial z} \\ t'_{31} &= P \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} + N \frac{\partial^3 r}{\partial x^2 \partial z}, \\ t'_{12} &= P \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} + N \frac{\partial^3 r}{\partial x^2 \partial y}, \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} X'_\sigma &= P \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} + N \left(\frac{\partial}{\partial n} \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \cos nx \right), \\ Y'_\sigma &= P \left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} \cos nx - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \cos ny \right) + N \left(\frac{\partial}{\partial n} \frac{\partial^2 r}{\partial x \partial y} - 2 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \cos ny \right), \\ Z'_\sigma &= P \left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} \cos nx - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \cos nz \right) + N \left(\frac{\partial}{\partial n} \frac{\partial^2 r}{\partial z \partial y} - 2 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \cos nz \right), \end{aligned} \right.$$

(11) Comparer: SOMIGLIANA, *Sulle equazioni della elasticità*, « Annali di matematica », ser. II, t. XVI.

où

$$
(22)\qquad \begin{cases} \mathrm{N} = \mathrm{K}\beta(\mathrm{T}, t) + \int_t^{\mathrm{T}} \psi(\tau, t)\, \beta(\mathrm{T}, \tau)\, d\tau, \\ \mathrm{P} = \mathrm{K}\alpha(\mathrm{T}, t) + \int_t^{\mathrm{T}} \psi(\tau, t)\, \alpha(\mathrm{T}, \tau)\, d\tau, \end{cases}
$$

$$
(23)\qquad \begin{cases} \mathrm{Q} = \mathrm{L}\beta(\mathrm{T}, t) + \int_t^{\mathrm{T}} \varphi(\tau, t)\, \beta(\mathrm{T}, \tau)\, d\tau, \\ \mathrm{R} = \mathrm{L}\alpha(\mathrm{T}, t) + \int_t^{\mathrm{T}} \varphi(\tau, t)\, \alpha(\mathrm{T}, \tau)\, d\tau. \end{cases}
$$

Il est évident que N , P , Q , R sont des fonctions de T , t. Nous choisirons, pour simplifier la fonction arbitraire $\alpha(\mathrm{T}, t)$ telle que $\mathrm{P} = 1$. Les fonctions β et N, en vertu des relations (20) et (22), seront déterminées.

Pour distinguer la solution que nous venons de trouver nous placerons un indice 3 aux lettres u', v', w'; X'_σ, Y'_σ, Z'_σ, c'est à dire nous écrirons u'_3, v'_3, w'_3; $X'_{\sigma,3}$, $V'_{\sigma,3}$, $Z'_{\sigma,3}$.

On aura deux solutions analogues à celle-ci en prenant successivement

$$
\Phi_1 = 0 \quad , \quad \Phi_2 = \frac{r}{2} \quad , \quad \Phi_3 = 0 ,
$$

$$
\Phi_1 = 0 \quad , \quad \Phi_2 = 0 \quad , \quad \Phi_3 = \frac{r}{2} \cdot
$$

Art. 8ème. – DÉTERMINATION DE LA DILATATION ET DE LA ROTATION.

1. Il est connu que la dilatation de chaque particule du corps élastique et les composantes de la rotation sont données par

$$
\Theta ; \frac{\omega_1}{2}, \frac{\omega_2}{2}, \frac{\omega_3}{2}.
$$

Nous commencerons par déterminer Θ, ω_1, ω_2, ω_3 moyennant les forces de masse et les composantes des déplacements et des tensions au contour, en appliquant le théorème de réciprocité donné par la formule (A).

2. Employons d'abord pour solution des équations adjointes celle que nous avons trouvée dans le 2ème § de l'article précédent. Le pôle (a, b, c) étant situé à l'intérieur de l'espace occupé par le corps élastique on pourra le retrancher moyennant une sphère ayant le centre dans le pôle. Si l'on fait diminuer indéfiniment le rayon de cette sphère, la formule (A) devien-

dra à la limite

$$(24)\qquad \int_{t_0}^{T}\left\{\int_\sigma \Sigma X_\sigma(t)\, u'_1\, d\sigma + \int_S \Sigma\rho\, X(t)\, u'_1\, dS - \int_\sigma \Sigma X'_{\sigma,1}\, u(t)\, d\sigma\right\} dt$$

$$= \int_{t_0}^{T}\left\{\frac{16}{3}\pi M(T,t)\,\Theta(a,b,c,t) + \frac{4}{3}\pi\,(t_{11}(a,b,c,t) + t_{22}(a,b,c,t) + t_{33}(a,b,c,t))\right\} dt.$$

Le second membre de cette équation, en vertu des formules (9) et (21), s'écrira

$$4\pi\int_{t_0}^{T}\left\{(L + 2K)\,\Theta(t) + \frac{4}{3}\Theta(t)\int_t^T \psi(\tau,t)\,d\tau + \int_{t_0}^{t}\left(\varphi(t,\tau) + \frac{2}{3}\psi(t,t)\right)\Theta(\tau)\,d\tau\right\} dt.$$

Mais

$$\int_{t_0}^{T}\Theta(t)\,dt\int_t^T \psi(\tau,t)\,d\tau = \int_{t_0}^{T} dt\int_{t_0}^{t}\psi(t,\tau)\,\Theta(\tau)\,d\tau,$$

c'est pourquoi l'expression précédente deviendra

$$4\pi\int_{t_0}^{T}\left\{(L + 2K)\,\Theta(t) + \int_{t_0}^{t}(\varphi(t,\tau) + 2\psi(t,\tau))\,\Theta(\tau)\,d\tau\right\} dt = 4\pi\int_{t_0}^{T}\mathbf{A}_2\,\Theta(t)\,dt.$$

Donc, si nous dérivons l'équation (24) par rapport à T et si nous remplaçons T par t, on aura, en ayant égard aux expressions de u'_1, v'_1, w'_1; $X'_{\sigma,1}$, $Y'_{\sigma,1}$, $Z'_{\sigma,1}$, (Art. 7ème, § 2)

$$\int_\sigma \Sigma X_\sigma \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}\,d\sigma + \int_S \Sigma\sigma\, X\,\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}\,dS - 2\int_\sigma \Sigma\mathbf{A}_1\, u\cdot\frac{d}{dn}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial 1}\,d\sigma = 4\pi\,\mathbf{A}_2\,\Theta,$$

ou même

$$(25)\qquad \int_\sigma \Sigma\mathbf{A}_2^{-1}\, X_\sigma\cdot\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}\,d\sigma + \int_S \Sigma\mathbf{A}_2^{-1}(\rho X)\,\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}\,dS$$

$$- 2\int_\sigma \Sigma\mathbf{A}_2^{-1}\,\mathbf{A}_1\, u\cdot\frac{d}{dn}\,\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}\,\partial\sigma = 4\pi\Theta(a,b,c,t).$$

3. Pour solution des équations adjointes prenons maintenant celle que nous avons donnée dans le 3ème § de l'article précédent, et appliquons toujours le théorème de réciprocité. Par un procédé tout-à-fait analogue à celui que nous avons employé dans le § précédent ou trouvera

$$\int_\sigma\left(Z_\sigma\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y} - Y_\sigma\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}\right)d\sigma + \int_S\left(\rho Z\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y} - \rho Y\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}\right)dS$$

$$- \int_\sigma\left\{\left(\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial y\,\partial x}\cos nz - \frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial z\,\partial x}\cos ny\right)\mathbf{A}_1\, u + \right.$$

$$+\left(-\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z\,\partial x}\cos nx - 2\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y\,\partial z}\cos ny + \left(\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z^2}\right)\cos nz\right)\mathbf{A}_1 v$$

$$+\left(\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y\,\partial x}\cos nx + \left(\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z^2}\right)\cos ny + 2\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y\,\partial z}\cos nz\right)\mathbf{A}_1 w \Big\}\, d\sigma$$

$$= 4\pi\,\mathbf{A}_1\,\omega_1(a, b, c, t)\,.$$

Cette équation se transforme immédiatement dans l'autre

$$(26)\quad \int_\sigma \left(\mathbf{A}_1^{-1} Z_\sigma \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} - \mathbf{A}_1^{-1} Y_\sigma \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}\right) d\sigma + \int_S \left(\mathbf{A}_1^{-1}(\rho Z)\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} - \mathbf{A}_1^{-1}(\rho Y)\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}\right) dS$$

$$-\int_\sigma \Big\{\left(\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y\,\partial x}\cos nz - \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z\,\partial x}\cos ny\right) u + \left(-\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z\,\partial x}\cos nx - 2\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y\,\partial z}\cos ny\right.$$

$$\left. + \left(\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y} - \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z^2}\right)\cos nz\right) v + \left(\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y\,\partial x}\cos nx + \left(\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z^2}\right)\cos ny\right.$$

$$\left. + 2\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y\,\partial z}\cos nz\right) w \Big\}\, d\sigma = 4\pi\,\omega_1(a, b, c, t)\,.$$

On a évidemment deux formules analogues à celle que nous venons de trouver qui expriment ω_2 et ω_3.

4. En comparant les formules que nous avons obtenues dans les §§ 2 et 3 avec celles de BETTI pour l'équilibre élastique dans le cas ordinaire (12) on trouve qu'elles ont une forme semblable. Pour passer des unes aux autres il suffit d'appliquer aux déplacements, aux rotations, aux forces et à la dilatation les opérations fonctionelles $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$ ou leurs inverses.

Appelons $\mathbf{A}_1 u$, $\mathbf{A}_1 v$, $\mathbf{A}_1 w$; $\mathbf{A}_1 \omega_{1/2}$, $\mathbf{A}_1 \omega_{2/2}$, $\mathbf{A}_1 \omega_{3/2}$; $\mathbf{A}\,\Theta$ respectivement les *pseudo-déplacements*, les *pseudo-rotations* et la *pseudo-dilatation*, alors on pourra interpréter les formules (25) et (26) et les formules analogues par le théorème suivant:

Lorsqu'on envisage des corps élastiques isotropes et homogènes, pour passer du cas de la non-hérédité à celui de l'hérédité, il suffira de remplacer les déplacements, les rotations et la dilatation par les pseudo-déplacements, les pseudo-rotations et la pseudo-dilatation dans les formules de BETTI *relatives à l'équilibre élastique.*

5. Dans les équations (25) et (26) paraissent les valeurs des tensions et celles des déplacements au contour. Mais pour déterminer la dilatation et les rotations les unes ou les autres de ces valeurs sont superflues. On pourra

(12) Voir la citation faite dans la note de l'article 5éme.

obtenir l'élimination des valeurs superflues par l'emploi des éléments qui jouent un rôle analogue aux fonctions de GREEN (voir Chap. Ier, Art. 9ème, § 2).

Art. 9ème. – DÉTERMINATIONS DES DÉPLACEMENTS.

1. On a les formules

$$\Delta^2 u = \frac{\partial \Theta}{\partial x} + \frac{\partial \omega_2}{\partial z} - \frac{\partial \omega_3}{\partial y},$$

$$\Delta^2 v = \frac{\partial \Theta}{\partial y} + \frac{\partial \omega_3}{\partial x} - \frac{\partial \omega_1}{\partial z},$$

$$\Delta^2 w = \frac{\partial \Theta}{\partial z} + \frac{\partial \omega_1}{\partial y} - \frac{\partial \omega_2}{\partial x},$$

donc, les rotations et la dilatation étant déterminées, on pourra calculer $\Delta^2 u$, $\Delta^2 v$, $\Delta^2 w$.

On déduit facilement des équations (10)

$$\Delta^2 u = \mathbf{A}_1^{-1} (\rho X) + (1 - \mathbf{A}_1^{-1} \mathbf{A}_2) \frac{\partial \Theta}{\partial x},$$

$$\Delta^2 v = \mathbf{A}_1^{-1} (\rho Y) + (1 - \mathbf{A}_1^{-1} \mathbf{A}_2) \frac{\partial \Theta}{\partial y},$$

$$\Delta^2 w = \mathbf{A}_1^{-1} (\rho Z) + (1 - \mathbf{A}_1^{-1} \mathbf{A}_2) \frac{\partial \Theta}{\partial z}.$$

C'est pourquoi en connaissant les forces de masse et ayant déterminé la dilatation, on a aussi une autre manière pour calculer $\Delta^2 u$, $\Delta^2 v$, $\Delta^2 w$.

Mais supposons que les tensions au contour soient données, les déplacements étant inconnus. On démontre aisément, en partant des relations (II), (9), (9 *a*), les formules suivantes

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{1}{2} (\mathbf{A}_1^{-1} X_\sigma + \omega_2 \cos nz - \omega_3 \cos ny + (2 - \mathbf{A}_1^{-1} \mathbf{A}_2)\, \Theta \cos nx),$$

$$\frac{\partial v}{\partial n} = \frac{1}{2} (\mathbf{A}_1^{-1} Y_\sigma + \omega_3 \cos nx - \omega_1 \cos nz + (2 - \mathbf{A}_1^{-1} \mathbf{A}_2)\, \Theta \cos ny),$$

$$\frac{\partial w}{\partial n} = \frac{1}{2} (\mathbf{A}_1^{-1} Z_\sigma + \omega_1 \cos ny - \omega_2 \cos nx + (2 - \mathbf{A}_1^{-1} \mathbf{A}_2)\, \Theta \cos nz).$$

Donc, si l'on connait X_σ, Y_σ, Z_σ et l'on a déterminé Θ, ω_1, ω_2, ω_3, on pourra calculer $\partial u/\partial n$, $\partial v/\partial n$, $\partial w/\partial n$ et par suite on aura u, v, w en connaissant $\Delta^2 u$, $\Delta^2 v$, $\Delta^2 w$.

3. Mais pour calculer directement les déplacements, sans employer les formules qui donnent la dilatation et les rotations, on pourra employer la méthode suivante [13].

Appliquons la formule de réciprocité (A) en prenant pour solution des équations adjointes celle que nous avons donnée dans le 4ème § de l'article 7ème.

(13) Voir la Note au § 4 de l'article 7ème.

Retranchons le pôle (a, b, c) interne à l'espace occupé par le corps élastique moyennant une sphère qu'on faira diminuer indéfiniment. On trouvera à la limite, P étant égal à 1,

$$\int_{t_0}^{T} dt \left\{ \int_{\sigma} \Sigma X_\sigma u'_3 \, d\sigma + \int_{S} \Sigma \rho \, X u'_3 \, dS - \int_{\sigma} \Sigma X'_{\sigma,3} \, u d\sigma \right\} = -4\pi \int_{t_0}^{T} u(a, b, c, t) \, dt,$$

d'où l'on tire, en dérivant par rapport à T,

$$(27) \qquad -4\pi u(a, b, c, T) = \frac{d}{dT} \int_{t_0}^{T} dt \left\{ \int_{\sigma} \Sigma X_\sigma u'_3 \, d\sigma + \int_{S} \Sigma \rho X \, u'_3 \, dS - \int_{\sigma} \Sigma X'_{\sigma,3} \, u d\sigma \right\}.$$

4. Il faut maintenant calculer la dérivée par rapport à T qui paraît dans le second membre. C'est pourquoi nous allons établir quelques formules préliminaires.

Rappelons l'équation (14). Multiplions par $\alpha(T, t) \, dt$ et intégrons entre les limites t_0 et T. Par des transformations très simples, et en ayant égard aux formules (22) où $P = 1$, on aura

$$\int_{t_0}^{T} \alpha(T, t) \varphi(t) \, dt = \int_{t_0}^{T} K\alpha(T, t) f(t) \, dt + \int_{t_0}^{T} \alpha(T, t) \, dt \int_{t_0}^{t} \psi(t, \tau) f(\tau) \, d\tau$$

$$= \int_{t_0}^{T} f(t) \left\{ K\alpha(T, t) + \int_{t}^{T} \alpha(T, \tau) \psi(\tau, t) \, d\tau \right\} dt = \int_{t_0}^{T} f(t) \, dt.$$

Dérivons par rapport à T et faisons usage de l'égalité (13'), il viendra

$$(28) \qquad \frac{d}{dT} \int_{t_0}^{T} \alpha(T, t) \varphi(t) \, dt = f(T) \, \mathbf{A}_1^{-1} \varphi(T).$$

Mais, à cause des équations (20) et (22) où $P = 1$, on a

$$(L + 2K)(\alpha(T, t) + \beta(T, t)) + \int_{t}^{T} (\varphi(\tau, t) + 2\psi(\tau, t))(\alpha(T, \tau) + \beta(T, \tau)) \, d\tau = 1,$$

donc, en suivant un procédé analogue à celui que nous venons d'employer on trouvera

$$\frac{d}{dT} \int_{t_0}^{T} (\alpha(T, t) + \beta(T, t)) \varphi(t) \, dt = \mathbf{A}_2^{-1} \varphi(T),$$

d'où

$$(28') \qquad \frac{d}{dT} \int_{t_0}^{T} (\beta \, T, t) \varphi(t) \, dt = (\mathbf{A}_2^{-1} - \mathbf{A}_1^{-1}) \varphi(T).$$

Les équations (22) et (14) nous donnent

$$\int_{t_0}^{T} N(T, t) f(t) \, dt = \int_{t_0}^{T} \beta(T, t) \left\{ K f(t) + \int_{t_0}^{t} \psi(t, \tau) f(\tau) \, d\tau \right\} dt = \int_{t_0}^{T} \beta(T, t) \varphi(t) \, dt.$$

C'est pourquoi, à cause des équations (28′) et (13),

$$(28'') \qquad \frac{d}{dT}\int_{t_0}^{T} N(T\,,t)\,f(t)\,dt$$

$$= (\mathbf{A}_2^{-1} - \mathbf{A}_1^{-1})\,\mathbf{A}_1 f(t) = \mathbf{A}_2^{-1}\,\mathbf{A}_1 f(t) - f(t) = (\mathbf{A}_2^{-1}\,\mathbf{A}_1 - 1) f(t).$$

En résumant les formules (28), (28′), (28″) on aura donc

$$(29) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\frac{d}{dT}\int_{t_0}^{T} \alpha(T\,,t)\,F(t)\,dt = \mathbf{A}_1^{-1}\,F(T), \\ &\frac{d}{dT}\int_{t_0}^{T} \beta(T\,,t)\,F(t)\,dt = (\mathbf{A}_2^{-1} - \mathbf{A}_1^{-1})\,F(T), \\ &\frac{d}{dT}\int_{t_0}^{T} N(T\,,t)\,F(t)\,dt = (\mathbf{A}_2^{-1}\,\mathbf{A}_1 - 1)\,F(t), \end{aligned} \right.$$

où F (t) est une fonction arbitraire.

5. Pour calculer le second membre de l'équation (27) employons les formules (29). On trouvera alors:

$$(27') \qquad -4\,\pi u\,(a\,,b\,,c\,,t)$$

$$= \int_\sigma \left\{ \frac{1}{r}\,\mathbf{A}_1^{-1}\,X_\sigma + \frac{1}{2}(\mathbf{A}_2^{-1} - \mathbf{A}_1^{-1})\left(\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} X_\sigma + \frac{\partial^2 r}{\partial x\,\partial y} Y_\sigma + \frac{\partial^2 r}{\partial x\,\partial y} Z_\sigma\right)\right\} d\sigma$$

$$+ \int_S \left\{ \frac{1}{r}\,\mathbf{A}_1^{-1}(\rho X) + \frac{1}{2}(\mathbf{A}_2^{-1} - \mathbf{A}_1^{-1})\left(\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}(\rho X) + \frac{\partial^2 r}{\partial x\,\partial y}(\rho Y) + \frac{\partial^2 r}{\partial x\,\partial z}(\rho Z)\right)\right\} dS$$

$$- \int_\sigma \left\{ \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} u + \left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y}\cos nx - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}\cos ny\right) v + \left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}\cos nx - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}\cos nz\right) w\right.$$

$$+ (\mathbf{A}_2^{-1}\,\mathbf{A}_1 - 1)\left[\left(\frac{\partial}{\partial n}\,\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} - 2\,\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}\cos nx\right) u + \left(\frac{\partial}{\partial n}\,\frac{\partial^2 r}{\partial x\,\partial y} - 2\,\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}\cos ny\right) v\right.$$

$$\left.\left. + \left(\frac{\partial}{\partial n}\,\frac{\partial^2 r}{\partial x\,\partial z} - 2\,\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}\cos nz\right) w\right]\right\} d\sigma.$$

Il est évident que nous pourrons obtenir deux formules analogues à la formule précédente pour exprimer v et w.

Art. 10ème. – Remarques générales.

1. Par les formules que nous venons de développer nous avons donné une théorie générale de l'hérédité linéaire élastique dans le cas statique.

Nous avons vu ainsi une application des équations intégro-différentielles. Dans le cas général on ne peut pas séparer la partie intégrale de la partie différentielle, mais cela est possible dans le cas des corps isotropes et homogènes. On peut remarquer que dans ce cas tous les résultats peuvent s'obtenir par les formules ordinaires accouplées aux opérations fonctionelles $\mathbf{A}_1$ et $\mathbf{A}_2$ et à leurs inverses.

2. Nous nous sommes bornés aux formules générales en laissant de côté toute question particulière, mais on pourrait approfondir beaucoup de problèmes spéciaux en arrivant aux formules résolutives finales.

C'est ainsi que dans le cas de la sphère élastique isotrope et homogène le problème peut être résolu complètement par des séries très-rapidement convergentes, en laissant tout-à-fait arbitraires les coefficients d'hérédité.

Ce cas a un intérêt spécial pour les applications. Dans les problèmes relatifs à la terre, lorsqu'on veut tenir compte de son élasticité, les phénomènes héréditaires ne sont pas négligeables. L'analyse que nous indiquons, sans entrer dans aucun détail, donne le moyen de calculer les effets de l'hérédité, pourvu qu'elle soit linéaire.

CHAPITRE 3ème.

Électro-magnétisme en ayant égard á l'hérédité.

Art. 1er. – ÉQUATIONS GÉNÉRALES.

1. HERTZ a établi les équations suivantes pour l'électro-magnétisme dans le cas des systèmes en repos [14]

$$\text{(I)}\quad \begin{cases} A\dfrac{\partial \mathfrak{L}}{\partial t} = \dfrac{\partial Z}{\partial y} - \dfrac{\partial Y}{\partial z} \\[2ex] A\dfrac{\partial \mathfrak{M}}{\partial t} = \dfrac{\partial X}{\partial z} - \dfrac{\partial Z}{\partial x} \\[2ex] A\dfrac{\partial \mathfrak{N}}{\partial t} = \dfrac{\partial Y}{\partial x} - \dfrac{\partial X}{\partial y} \end{cases} \qquad \text{(I')}\quad \begin{cases} A\dfrac{\partial \mathfrak{X}}{\partial t} = \dfrac{\partial M}{\partial z} - \dfrac{\partial N}{\partial y} - 4\pi A u \\[2ex] A\dfrac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial t} = \dfrac{\partial N}{\partial x} - \dfrac{\partial L}{\partial z} - 4\pi A v \\[2ex] A\dfrac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial t} = \dfrac{\partial L}{\partial y} - \dfrac{\partial M}{\partial x} - 4\pi A w \end{cases}$$

où

$$\text{(II)}\quad \begin{cases} \mathfrak{X} = \varepsilon_{11} X + \varepsilon_{12} Y + \varepsilon_{13} Z \\ \mathfrak{Y} = \varepsilon_{21} X + \varepsilon_{22} Y + \varepsilon_{23} Z \\ \mathfrak{Z} = \varepsilon_{31} X + \varepsilon_{32} Y + \varepsilon_{33} Z \end{cases} \qquad \text{(II')}\quad \begin{cases} \mathfrak{L} = \mu_{11} L + \mu_{12} M + \mu_{13} N \\ \mathfrak{M} = \mu_{21} L + \mu_{22} M + \mu_{23} N \\ \mathfrak{N} = \mu_{31} L + \mu_{32} M + \mu_{33} N \end{cases}$$

$$\text{(III)}\quad \begin{cases} u = \vartheta_{11}(X - X') + \vartheta_{12}(Y - Y') + \vartheta_{13}(Z - Z') \\ v = \vartheta_{21}(X - X') + \vartheta_{22}(Y - Y') + \vartheta_{23}(Z - Z') \\ w = \vartheta_{31}(X - X') + \vartheta_{32}(Y - Y') + \vartheta_{33}(Z - Z')\,. \end{cases}$$

(14) « WIEDEMANN'S Annalen », *40*, page 577. Gesammelte Werke. Bd II, page 208.

Dans ces équations $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}$; X, Y, Z; u, v, w désignent respectivement les composantes de la polarisation électrique, de la force électrique et du courant électrique. $\mathfrak{L}, \mathfrak{M}, \mathfrak{N}$; L, M, N désignent respectivement les composantes de la polarisation magnétique et de la force magnétique.

X', Y', Z' sont les composantes de la force électromotrice.

2. Les équations (II), (II′) et (III) se déduisent de l'hypothèse que l'état actuel de la polarisation électrique et du courant électrique dépendent de l'état actuel de la force électrique, ainsi que l'état actuel de la polarisation magnétique dépend de l'état actuel de la force magnétique.

De cette manière on néglige les phénomènes de l'hérédité. Si l'on veut en tenir compte, il faudra admettre que l'état actuel de la polarisation électrique dépende, outre que de la force électrique actuelle, de toute l'histoire antécédente de la force électrique, et l'état actuel de la polarisation magnétique dépende, outre que de la force magnétique actuelle, de toute l'histoire antécédente de la force magnétique.

C'est pourquoi on devra ajouter dans les seconds membres des équations (II) et (II′) des termes de correction et écrire

$$(\text{II}\,a)\quad \begin{cases} \mathfrak{X}(t) = \varepsilon_{11} X(t) + \varepsilon_{12} Y(t) + \varepsilon_{13} Z(t) + F_1 \left| \left[X(\tau), \underset{-\infty}{\overset{t}{Y(\tau)}}, Z(\tau) \right] \right|, \\ \mathfrak{Y}(t) = \varepsilon_{21} X(t) + \varepsilon_{22} Y(t) + \varepsilon_{23} Z(t) + F_2 \left| \left[X(\tau), \underset{-\infty}{\overset{t}{Y(\tau)}}, Z(\tau) \right] \right|, \\ \mathfrak{Z}(t) = \varepsilon_{31} X(t) + \varepsilon_{32} Y(t) + \varepsilon_{33} Z(t) + F_3 \left| \left[X(\tau), \underset{-\infty}{\overset{t}{Y(\tau)}}, Z(\tau) \right] \right|, \end{cases}$$

où F_1, F_2, F_3 désignent des quantités qui dépendent de toutes les valeurs de $X(\tau), Y(\tau), Z(\tau)$ correspondantes aux valeurs de l'argument τ depuis $-\infty$ jusqu'à t [15].

De même on écrira

$$(\text{II}'a)\quad \begin{cases} \mathfrak{L}(t) = \mu_{11} L(t) + \mu_{12} M(t) + \mu_{13} N(t) + \Phi_1 \left| \left[L(\tau), \underset{-\infty}{\overset{t}{M(\tau)}}, N(\tau) \right] \right| \\ \mathfrak{M}(t) = \mu_{21} L(t) + \mu_{22} M(t) + \mu_{23} N(t) + \Phi_2 \left| \left[L(\tau), \underset{-\infty}{\overset{t}{M(\tau)}}, N(\tau) \right] \right| \\ \mathfrak{N}(t) = \mu_{31} L(t) + \mu_{32} M(t) + \mu_{33} N(t) + \Phi_3 \left| \left[L(\tau), \underset{-\infty}{\overset{t}{M(\tau)}}, N(\tau) \right] \right|. \end{cases}$$

Supposons maintenant que les conditions pour que l'on puisse développer chaque fonction F_i dans une série infinie de termes ayant la forme

$$\int_{-\infty}^{t} \cdots \int_{-\infty}^{t} G_i(\tau'_1, \ldots, \tau'_h \mid \tau''_1, \ldots, \tau''_k \mid \tau'''_1, \ldots, \tau'''_l \mid t) \cdot$$
$$\cdot X(\tau'_1) \cdots X(\tau'_h)\, Y(\tau''_1) \cdots Y(\tau''_k)\, Z(\tau'''_1) \cdots Z(\tau'''_l)\, d\tau'_1, \ldots, d\tau'''_l$$

(15) Voir Chap. II, Art. 1^er^, § 1.

soient satisfaites, et supposons aussi que les conditions pour que l'on ait des développements analogues pour les fonctions Φ_i soient vérifies.

Si nous admettons comme postulat que les effets de la superposition des forces électriques et magnétiques se somment, c'est à dire

$$F_i \,|\, [X(\tau) + X'(\tau), Y(\tau) + Y'(\tau), Z(\tau) + Z'(\tau)] \,|$$
$$= F_i \,|\, [X(\tau), Y(\tau), Z(\tau)] \,| + F_i \,|\, [X'(\tau), Y'(\tau), Z'(\tau)] \,|$$

$$\Phi_i \,|\, [L(\tau) + L'(\tau), M(\tau) + M'(\tau), N(\tau) + N'(\tau)] \,|$$
$$= \Phi_i \,|\, [L(\tau), M(\tau), N(\tau)] \,| + \Phi_i \,|\, [L'(\tau), M'(\tau), N'(\tau)] \,|,$$

on aura

$$F_i = \int_{-\infty}^{t} \{ X(\tau)\, \varphi_{i,1}(t,\tau) + Y(\tau)\, \varphi_{i,2}(t,\tau) + Z(\tau)\, \varphi_{i,3}(t,\tau) \}\, d\tau,$$

$$\Phi_i = \int_{-\infty}^{t} \{ L(\tau)\, \psi_{i,1}(t,\tau) + M(\tau)\, \psi_{i,2}(t,\tau) + N(\tau)\, \psi_{i,3}(t,\tau) \}\, d\tau,$$

c'est pourquoi les équations (II *a*) et (II'*a*) deviendront

$$\text{(II } b\text{)} \quad \begin{cases} \mathfrak{X}(t) = \varepsilon_{11} X(t) + \varepsilon_{12} Y(t) + \varepsilon_{13} Z(t) \\ \quad + \int_a^t (X(\tau)\, \varphi_{11}(t,\tau) + Y(\tau)\, \varphi_{12}(t,\tau) + Z(\tau)\, \varphi_{13}(t,\tau))\, d\tau, \\ \mathfrak{Y}(t) = \varepsilon_{21} X(t) + \varepsilon_{22} Y(t) + \varepsilon_{23} Z(t) \\ \quad + \int_a^t (X(\tau)\, \varphi_{21}(t,\tau) + Y(\tau)\, \varphi_{22}(t,\tau) + Z(\tau)\, \varphi_{23}(t,\tau))\, d\tau, \\ \mathfrak{Z}(t) = \varepsilon_{31} X(t) + \varepsilon_{32} Y(t) + \varepsilon_{33} Z(t) \\ \quad + \int_a^t (X(\tau)\, \varphi_{31}(t,\tau) + Y(\tau)\, \varphi_{32}(t,\tau) + Z(\tau)\, \varphi_{33}(t,\tau))\, d\tau, \end{cases}$$

$$\text{(II' } b\text{)} \quad \begin{cases} \mathfrak{L}(t) = \mu_{11} L(t) + \mu_{12} M(t) + \mu_{13} N(t) \\ \quad + \int_a^t (L(\tau)\, \psi_{11}(t,\tau) + M(\tau)\, \psi_{12}(t,\tau) + N(\tau)\, \psi_{13}(t,\tau))\, d\tau, \\ \mathfrak{M}(t) = \mu_{21} L(t) + \mu_{22} M(t) + \mu_{23} N(t) \\ \quad + \int_a^t (L(\tau)\, \psi_{21}(t,\tau) + M(\tau)\, \psi_{22}(t,\tau) + N(\tau)\, \psi_{23}(t,\tau))\, d\tau, \\ \mathfrak{N}(t) = \mu_{31} L(t) + \mu_{32} M(t) + \mu_{33} N(t) \\ \quad + \int_a^t (L(\tau)\, \psi_{31}(t,\tau) + M(\tau)\, \psi_{32}(t,\tau) + N(\tau)\, \psi_{33}(t,\tau))\, d\tau, \end{cases}$$

où la limite inférieure a des intégrales sera $-\infty$. Si nous supposons que l'on puisse négliger l'hérédité antérieure à un instant donnée t_0, alors on pourra prendre la limite inférieure des intégrales égale à t_0.

Si nous remplaçons, dans les équations (I) et (I'), u, v, w; $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}$; $\mathfrak{L}, \mathfrak{M}, \mathfrak{N}$, par leurs valeurs données par les relations (II b), (II' b) et (III) on trouvera des équations *intégro-différentielles*.

L'hérédité, telle que nous venons de l'evisager, est une *hérédité linéaire*. Il faut remarquer à ce propos que l'hystérésis dite électrotechnique ne rentre pas dans l'hérédité linéaire. Il suffit de rappeller la phénomène de la magnétisation permanente pour s'apercevoir qu'elle est en déhors du cadre des phénomènes embrassés par l'hérédité linéaire.

Art. 2ème. - COEFFICIENTS D'HÉRÉDITÉ.

1. Dans les équations (II b) et (II' b) on n'a écrit explicitement que les variables t, τ, mais il faudra se rappeller que $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}$; $\mathfrak{L}, \mathfrak{M}, \mathfrak{N}$; X, Y, Z; L, M, N sont aussi des fonctions de x, y, z. En général les coefficients ε_{rs}, μ_{rs} seront des fonctions de x, y, z ainsi que les coefficients φ_{rs} et ψ_{rs}. Ce n'est que dans le cas où le milieu est homogène que l'on pourra regarder ces coefficients comme indépendants de x, y, z.

Lorsqu'on passe d'un milieu à un autre, sur les surfaces limites il y aura des relations qu'on pourra obtenir par un procédé analogue à celui suivi par HERTZ dans le § 8ème du mémoire que nous avons cité.

2. La limite inférieure des intégrales qui paraissent dans les équations (II b) et (II' b) étant finie, et les déterminants

$$\begin{vmatrix} \varepsilon_{11}, \varepsilon_{12}, \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31}, \varepsilon_{32}, \varepsilon_{33} \end{vmatrix} \quad , \quad \begin{vmatrix} \mu_{11}, \mu_{12}, \mu_{13} \\ \mu_{21}, \mu_{22}, \mu_{23} \\ \mu_{31}, \mu_{32}, \mu_{33} \end{vmatrix}$$

n'étant par nuls, on pourra invertir les équations intégrales (II b) et (II' b) et exprimer les composantes de la force électrique par celles de la polarisation électrique et les composantes de la force magnétique par celles de la polarisation magnétique.

3. Nous appellerons φ_{rs} et ψ_{rs} les *coefficients d'hérédité*. Il est facile de trouver leur interprétation. C'est ainsi que

$$\varphi_{11}(t, \tau)\, d\tau \quad , \quad \varphi_{21}(t, \tau)\, d\tau \quad , \quad \varphi_{31}(t, \tau)\, d\tau$$

sont les composantes de la polarisation électrique, induite à l'instant t, par l'unité de force électrique agissant dans la direction x pendant l'intervalle de temps $(\tau, \tau + d\tau)$; et

$$\psi_{11}(t, \tau)\, d\tau \quad , \quad \psi_{21}(t, \tau)\, d\tau \quad , \quad \psi_{31}(t, \tau)\, d\tau$$

sont les composantes de la polarisation magnétique, induite à l'instant t, par l'unité de force magnétique agissant dans la direction x pendant l'intervalle de temps $(\tau, \tau + d\tau)$.

Nous admettrons que les coefficients d'hérédité φ_{rs}, ψ_{rs} soient infiniment petits pour $t = -\infty$ de telle sorte que

$$|\varphi_{rs}(t,\tau)| < \frac{C}{(t-\tau)^{1+\varepsilon}} \quad , \quad |\psi_{rs}(t,\tau)| < \frac{C'}{(t-\tau)^{1+\varepsilon}}$$

où $\varepsilon > 0$, $\varepsilon' > 0$ et C et C′ sont des quantités constantes positives [16].

4. Il est facile d'étendre au cas que nous envisageons le *principe du cycle fermé* (Chap. 2ème, Art. 2ème) c'est à dire: *Si, toutes les fois que* X, Y, Z; L, M, N, *sont des fonctions périodiques du temps, avec une période quelconque* T, $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}$; $\mathfrak{L}, \mathfrak{M}, \mathfrak{N}$, *sont aussi des fonctions périodiques ayant la même période, alors* φ_{rs}, ψ_{rs} *sont des fonctions de la différence* $t-\tau$; *et réciproquement. Si les coefficients* φ_{rs}, ψ_{rs} *sont des fonctions de la différence* $t-\tau$, *et* X, Y, Z; L, M, N *sont des fonctions périodiques du temps*, $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}$; $\mathfrak{L}, \mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ *seront aussi des fonctions périodiques avec la même période.* Cette proposition peut aussi s'énoncer par les mots: *La condition du cycle fermé et celle de l'invariabilité de l'hérédité sont équivalentes.*

Art. 3ème. - Le cas statique.

1. Envisageons le cas le plus simple où le milieu ne soit pas conducteur et les quantités $\mathfrak{L}, \mathfrak{M}, \mathfrak{N}$; $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}$ changent si lentement qu'on puisse négliger

$$\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial y}, \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial t}, \frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial t} \quad ; \quad \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial t}, \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial y}, \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial z}.$$

On peut appeller ce cas le *cas statique*.

Nous aurons alors

$$\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} = 0 \quad , \quad \frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} = 0 \quad , \quad \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} = 0 ,$$

$$\frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z} = 0 \quad , \quad \frac{\partial L}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial x} = 0 \quad , \quad \frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y} = 0 ,$$

c'est à dire

$$X = \frac{\partial v}{\partial x} \quad , \quad Y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad , \quad Z = \frac{\partial v}{\partial z} ,$$

$$L = \frac{\partial w}{\partial x} \quad , \quad M = \frac{\partial w}{\partial y} \quad , \quad N = \frac{\partial w}{\partial z} .$$

2. Supposons que les coefficients ε_{rs}, φ_{rs} soient indépendants de x, y, z. Prenons les axes coordonnés coïncidents avec les axes de la surface de 2^d

(16) Voir Chap. II, Art. 1er, § 4.

degré

$$(1) \quad \varepsilon_{11} x^2 + \varepsilon_{22} y^2 + \varepsilon_{33} z^2 + (\varepsilon_{23} + \varepsilon_{32}) yz + (\varepsilon_{31} + \varepsilon_{13}) zx + (\varepsilon_{12} + \varepsilon_{21}) xy = 1 .$$

S'ils coïncident avec les axes de la surface

$$(2) \quad \varphi_{11} x^2 + \varphi_{22} y^2 + \varphi_{33} z^2 + (\varphi_{23} + \varphi_{32}) yz + (\varphi_{31} + \varphi_{13}) zx + (\varphi_{12} + \varphi_{21}) xy = 1$$

quels que soient les valeurs de t, τ, les équations (II b) deviendront

$$\left\{ \begin{aligned} \mathfrak{X} &= \varepsilon_{11} \frac{\partial v(t)}{\partial x} + \int_a^t \frac{\partial v(\tau)}{\partial x} \varphi_{11}(t, \tau)\, dt , \\ \mathfrak{Y} &= \varepsilon_{22} \frac{\partial v(t)}{\partial y} + \int_a^t \frac{\partial v(\tau)}{\partial y} \varphi_{22}(t, \tau)\, d\tau , \\ \mathfrak{Z} &= \varepsilon_{33} \frac{\partial v(t)}{\partial z} + \int_a^t \frac{\partial v(\tau)}{\partial z} \varphi_{33}(t, \tau)\, d\tau . \end{aligned} \right.$$

C'est pourquoi étant

$$\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial z} = 4 \pi \rho ,$$

où ρ est une fonction de x, y, z indépendante de t, on aura

$$\varepsilon_{11} \frac{\partial^2 v(t)}{\partial x^2} + \varepsilon_{22} \frac{\partial^2 v(t)}{\partial y^2} + \varepsilon_{33} \frac{\partial^2 v(t)}{\partial z^2}$$

$$+ \int_a^t \left(\frac{\partial^2 v(\tau)}{\partial x^2} \varphi_{11}(t, \tau) + \frac{\partial^2 v(\tau)}{\partial y^2} \varphi_{22}(t, \tau) + \frac{\partial^2 v(\tau)}{\partial z^2} \varphi_{33}(t, \tau) \right) d\tau = 4 \pi \rho .$$

Par un changement des variables x, y, z cette équation peut se réduire à

$$\Delta^2 v(t) + \int_a^t \left(\frac{\partial^2 v(\tau)}{\partial x^2} f(t, \tau) + \frac{\partial^2 v(\tau)}{\partial y^2} \varphi(t, \tau) + \frac{\partial^2 v(\tau)}{\partial z^2} \psi(t, \tau) \right) d\tau = 4 \pi \rho$$

qui est l'équation que nous avons étudiée dans le premier chapitre. (Voir 1e Chap. Art. 10ème).

3. Si les axes de la surface (1) ne coïncident pas avec ceux de la surface (2) les difficultés ne sont pas augmentées.

L'équation intégro-différentielle qu'on trouverait serait

$$\Delta^2 v(t) + \int_a^t \left\{ \frac{\partial^2 v(\tau)}{\partial x^2} f_{11}(t, \tau) + \frac{\partial^2 v(\tau)}{\partial y^2} f_{22}(t, \tau) + \frac{\partial^2 v(\tau)}{\partial z^2} f_{33}(t, \tau) \right.$$

$$\left. + 2 \frac{\partial^2 v(\tau)}{\partial y \partial z} f_{23}(t, \tau) + 2 \frac{\partial^2 v(\tau)}{\partial z \partial x} f_{31}(t, \tau) + 2 \frac{\partial^2 v(\tau)}{\partial x \partial y} f_{12}(t, \tau) \right\} d\tau = 4 \pi \rho .$$

On pourrait étendre facilement la théorie que nous avons exposée dans le premier chapitre à cette équation intégro-différentielle.

Art. $4^{\text{ème}}$. – REMARQUES GÉNÉRALES.

1. Le but principal que nous avons poursuivi dans ce chapitre a été de montrer l'origine des équations intégro-différentielles (A), (A'') du premier chapitre.

Nous ne sommes pas entrés dans aucun problème particulier. Si l'on envisagerait un milieu électrique non isotrope entouré par un conducteur, on aurait facilement une application des résultats principaux que nous avons exposés dans le premier chapitre.

2. Nous nous sommes bornés au cas statique sans développer le cas général, car il aurait fallu sortir du type elliptique des équations intégro-différentielles pour aborder le cas hyperbolique, que nous avons laissé de côté dans ce mémoire. En effet les équations intégro-différentielles qui correspondent aux équations (I), (I'), (II b), (II'b) sont des équations hyperboliques.

3. Dans le $2^{\text{ème}}$ et le $3^{\text{ème}}$ Chapitre nous avons vu que, si nous considérons toute l'histoire d'un système antérieure à l'instant actuel t, les intégrales qui paraissent dans les formules sont étendues depuis la limite $-\infty$ jusqu'à la limite t. C'est pourquoi nous avons négligé, en général, l'hérédité antérieure à un certain instant déterminé pour n'avoir à considérer que des équations intégrales et intégro-différentielles avec des limites finies.

Tout récemment M. G. C. EVANS a envisagé les équations intégrales lorsqu'une des limites est infinie [17]. En appliquant ses résultats il est possible de considérer l'hérédité sans négliger aucune période de l'histoire du système.

(17) *L'equazione integrale di Volterra di seconda specie con un limite dell'integrale infinito.* « Rendiconti della R. Accademia dei Lincei », vol. XX, serie 5^a, 1911 (Trois Notes).

TABLE DES ARTICLES

XXXVI.

L'EVOLUZIONE DELLE IDEE FONDAMENTALI DEL CALCOLO INFINITESIMALE

« La Revue du Mois », Paris 1912; *Leçons sur les fonctions de lignes*, Paris Gauthier-Villars 1913, Chap. I, pp. 1-21; *Saggi scientifici*, Bologna Zanichelli (s. d.) [1920], pp. 159-188 (*).

Mi propongo di esporre in queste pagine alcuni nuovi concetti matematici che si sono principalmente sviluppati in questi ultimi anni ed i metodi analitici che vi si riferiscono. In modo particolare desidero stabilire la derivazione di tali concetti e metodi dalle idee svoltesi nel campo delle matematiche dalle epoche più remote e la loro correlazione con questioni moderne della filosofia naturale. Emergerà così la loro vera situazione nella storia generale delle scienze matematiche e qualche dato, che permetterà di giudicare del loro avvenire.

Comincerò dal notare l'esistenza di un sentimento, che tutti gli analisti provano, pur senza rendersene sempre conto. In uno dei suoi ultimi scritti ENRICO POINCARÉ, studiando la questione dei *quanta*, dopo aver mostrato come non sia possibile far a meno dell'ipotesi che l'energia varii con discontinuità, dice: « Les lois physiques ne seront-elles plus susceptibles d'être exprimées par des équations différentielles? » [1].

Queste parole che racchiudono indubbiamente un senso di rammarico, manifestano lo stato d'animo di ogni matematico, indotto a ritenere che uno strumento ammirabile, quale il calcolo infinitesimale, debba essere abbandonato nello studio di qualche fenomeno. Infatti, dalle età più remote fino ai nostri giorni, l'idea del continuo ha dominato le speculazioni matematiche e tutte le loro applicazioni più interessanti e feconde. Quando le condizioni dei problemi l'hanno permesso, si è sempre cercato di ricondurre (talvolta anche intuitivamente ed incoscientemente), i casi di discontinuità a casi di continuità, con procedimenti, che si potrebbero chiamare di natura statistica; anzi, nella pratica dei calcoli, a volte si è stati indotti, dalla potenza dei metodi infinitesimali, a prescindere dalle concezioni ed ipotesi più probabili, riferentisi alla natura stessa dell'argomento, pur di potervi applicare

(*) Di questa conferenza, tenuta dal VOLTERRA nel 1912 alla Sorbona come lezione introduttiva al Suo corso sulle *funzioni di linee* (e poi ripetuta in quel medesimo anno all'École Polytechnique di Parigi) si è ritenuto opportuno riprodurre qui la traduzione italiana (con lievissime modificazioni formali) da Lui stesso pubblicata fra i Suoi *Saggi scientifici*.

(1) « Comptes rendus », t. 153, p. 1103.

i procedimenti infinitesimali. D'altra parte si è riconosciuto che, volendo rendere rigorose le considerazioni relative a questi metodi, bisognava esaminare prima casi di discontinuità e arrivare dopo al continuo, mediante passaggi al limite, per modo che l'origine delle più importanti proprietà del calcolo infinitesimale è stata l'estensione al calcolo stesso di proprietà conosciute dell'algebra finita e dell'aritmetica. Si è dunque avuta un'azione reciproca; i casi di discontinuità sono stati studiati con metodi infinitesimali e, nello stesso tempo, ogni questione infinitesimale è stata considerata come caso limite di questioni riguardanti il discontinuo. Non occorre moltiplicare gli esempi, per provare ciò che ho detto: se ne trovano le prove più eloquenti nella fisica-matematica, a cui la dottrina sulla costituzione molecolare dei corpi non ha impedito l'uso del calcolo infinitesimale. Infatti il FOURIER, nella teoria del calore, come il CAUCHY ed il POISSON nella elasticità, e tutti i matematici classici partirono dall'ipotesi della discontinuità della materia, ma risolsero i problemi che si erano posti, con l'aiuto delle equazioni differenziali e dei loro integrali; e, anche nelle più recenti applicazioni all'economia politica e alla statistica, si è seguito lo stesso cammino.

* * *

L'uso di quantità infinitamente piccole risale certo alle prime ricerche sistematiche di geometria (2). EUDOSSO di Cnido, che visse nel quarto secolo avanti Cristo, conobbe i metodi infinitesimali e li applicò al teorema sulla eguaglianza di volume delle piramidi che hanno la stessa altezza e basi eguali. Non è infatti possibile (3) dimostrare questa proposizione mediante la decomposizione dell'intero volume in un numero finito di parti, vale a dire in modo simile a quello che si tiene per le aree. EUDOSSO, e forse anche altri prima di lui, comprese che bisognava ricorrere alla decomposizione del volume in un numero infinito di strati infinitamente sottili: ed è questo il primo esempio che si conosca, di metodi infinitesimali. EUCLIDE l'espone nella settima proposizione del dodicesimo libro, ma fa uso del metodo di esaustione; egli riduce il caso del continuo al caso limite d'una somma di un numero finito di termini. Si vede così apparire il primo germe dei metodi moderni del calcolo integrale e del principio di DEDEKIND, che è stato solo parecchi secoli dopo formulato in modo completo ed astratto.

Ma l'applicazione sistematica dei metodi infinitesimali, si trova per la prima volta in ARCHIMEDE, di cui abbiamo potuto penetrare l'intimo pensiero, grazie alla celebre scoperta del HEIBERG (4). Dalla lettera di ARCHIMEDE ad ERATOSTENE si rileva come egli facesse uso per le sue scoperte

(2) Ringrazio il prof. VACCA, dell'Università di Roma, delle notizie storiche che mi ha favorito.

(3) DEHN, *Ueber den Rauminhalt* («Math. Ann.», t. LV, p. 465).

(4) Vedere l'interessante pubblicazione del PAINLEVÉ e del REINACH: *Un traité de Géométrie inédit d'Archimède*, «Revue générale des Sciences», t. XVIII, 1907; *Archimedis, Opera Omnia*. Ed. Heiberg, Vol. II, p. 427. Lipsiae, 1913.

del metodo delle quantità infinitamente piccole, e, solo per esporre i risultati al pubblico, ricorresse al metodo dell'esaustione e a quello delle serie. Basta ricordare le differenti soluzioni ch'egli ha date, allo scopo di trovare l'area della parabola, per riconoscere i principî fondamentali, mediante i quali il calcolo infinitesimale si è sviluppato da quell'epoca remota fino ai nostri giorni. La più elegante e la più suggestiva delle soluzioni è quella che si ottiene, mostrando che un segmento di parabola ed un triangolo rettangolo isoscele (avente la stessa base del segmento e un'altezza doppia) posti l'uno accanto all'altro sul braccio di una leva il cui punto d'appoggio sia nel mezzo, sono in equilibrio, poiché ogni coppia simmetrica di ordinate della parabola ha lo stesso momento della coppia corrispondente del triangolo [(5)]. Non ricorderemo qui i differenti risultati ai quali ARCHIMEDE è stato condotto dall'applicazione dei suoi metodi; basta infatti classificarli, come ora abbiamo fatto, in tre gruppi; quello degli infinitesimi, quello di esaustione ed infine quello delle serie, per veder delinearsi tutte le concezioni fondamentali del calcolo infiniesimale.

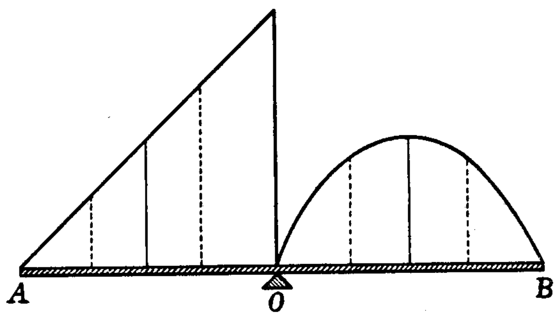
Gli ultimi metodi si riallacciano evidentemente alla teoria dei limiti, che si ritrovano poi negli stadi successivi del calcolo infinitesimale.

* * *

Ma ARCHIMEDE era troppo profondo per essere facilmente compreso: egli gettò sul terreno un seme, che ha impiegato dei secoli per germogliare. I continuatori ed i commentatori di ARCHIMEDE non penetrarono in tutte le sue concezioni, e gli Arabi trovarono più comodo di sviluppare la teoria delle coniche, che non presentava difficoltà così grandi.

Solo durante il Rinascimento si cominciò a comprendere la vera grandezza di ARCHIMEDE e TARTAGLIA [(6)] riprodusse in parte le opere del grande

(5) Basta guardare l'annessa figura, in cui sono segnate punteggiate le ordinate aventi lo stesso momento rispetto al punto d'appoggio O della leva AB, per comprendere la dimostrazione.



(6) TARTAGLIA, *La terza parte del general trattato dei numeri et misure*. Lib. III, Venetia 1560. - Opera Archimedis Syracusani, Venetiis 1543.

geometra, senza forse riuscire ad appropriarsi i suoi metodi infinitesimali. Una conoscenza più profonda di questi si trova, invece, in MAUROLICO [7] e COMMANDINO [8], che, oltre riprodurre le dimostrazioni di ARCHIMEDE, ritrovarono anche quei risultati sul centro di gravità, da lui scoperti, e che erano andati perduti. Ma i veri continuatori ed i primi allievi di ARCHIMEDE, quelli cioè che ne ereditarono lo spirito, furono GALILEO e KEPLERO.

Per studiare con successo i problemi della dinamica, bisogna impiegare metodi infinitesimali, ed infatti la questione più semplice, quella della caduta dei gravi, è stata risoluta dal GALILEI decomponendo il tempo della caduta in piccoli intervalli e considerando il movimento in ogni intervallo, come uniforme [9].

Questo passaggio dei procedimenti infinitesimali della geometria alla meccanica segna una data memorabile e mostra tutta la portata dei metodi stessi. Fra i nomi più specialmente legati ai progressi del calcolo infinitesimale, ricorderò quelli di KEPLERO, CAVALIERI, DESCARTES, FERMAT, TORRICELLI, WALLIS.

KEPLERO ha spinto le quadrature più innanzi di quanto facesse ARCHIMEDE ed è riuscito a calcolare volumi di solidi di rivoluzione e ad integrare funzioni trigonometriche [10]; CAVALIERI, nella sua Geometria degli indivisibili [11], ha reso sistematici i procedimenti infinitesimali ed ha dato la chiave per fare le quadrature più semplici; DESCARTES, FERMAT e TORRICELLI considerarono poi nuovi casi; PASCAL e FERMAT ritornarono al metodo di esaustione, che era stato abbandonato, e dettero così rigore e nuovo sviluppo a tutto un vasto insieme di ricerche.

Anche WALLIS, pur essendo meno rigoroso del suo contemporaneo PASCAL e pur non essendo riuscito al celebre concorso sulla *roulette*, portò un nuovo contributo al calcolo infinitesimale, sia studiando gli integrali, che ora chiamiamo *integrali euleriani*, sia studiando i prodotti infiniti e le serie [12].

* * *

Vediamo dunque che, dopo un periodo di diciassette secoli, durante il quale erano restate nascoste, e come sopite, le idee feconde del calcolo infinitesimale si svegliano e risorgono d'un tratto, prendendo con slancio improvviso, un grande sviluppo; in circa due secoli esse sorpassano notevol-

(7) MAUROLICO, *Admirandi Archimedis Syracusani monumenta omnia mathematica, quae extant, etc.*, p. 177, Panormi 1685 (questa opera è stata scritta nel 1548 ed è stata pubblicata solo dopo la morte dell'autore).

(8) COMMANDINO, *Liber de centro gravitatis solidorum*, Bononiae, 1565 (foglio 42, r.).

(9) GALILEI, *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze*, Leida 1638, p. 171 e sg. (Edizione nazionale, vol. VIII, Firenze 1898).

(10) KEPLERO, *Nova stereometria doliorum Vinariorum*, Lincii 1615 (*Opera omnia*, vol. IV). *De motibus stellae Martis*, Pragae 1609 («Opera omnia», vol. III, p. 390).

(11) CAVALIERI, *Geometria Indivisibilibus continuorum etc.*, Bononiae 1635; *Exercitationes geometricae sex*, Bononiae 1647.

(12) WALLIS, *Arithmetica infinitorum*, Oxonii 1655.

mente i loro limiti primitivi e, quel che è più importante, escono dalla Geometria e creano, mediante la loro penetrazione nella Filosofia naturale, la Scienza moderna.

Si deve ad HUYGENS la continuazione dell'opera del GALILEI, mediante lo studio infinitesimale dei problemi della Dinamica: così le questioni della *catenaria*, della *tautocrona* e lo studio delle leggi fondamentali della Meccanica, costituiscono progressi sempre più cospicui nell'uso dei metodi infinitesimali.

Nello stesso tempo, va sviluppandosi anche l'Analisi pura con l'introduzione dei logaritmi, fatta da NEPER, con l'integrazione per serie che conduce MERCATOR alla serie logaritmica, e con la scoperta dei processi d'integrazione per parti e per sostituzione, fatta da BARROW, movendo da considerazioni geometriche.

Fin qui noi abbiamo seguito lo sviluppo del *calcolo integrale*; il *calcolo differenziale*, invece, parte dal problema delle tangenti che gli antichi avevano già studiato per le spirali e le coniche. Si deve a DESCARTES l'aver concepito la tangente come limite di una secante [13], a TORRICELLI e ROBERVAL l'aver ottenuto le tangenti dalla composizione di movimenti, a FERMAT l'aver considerato quello che noi chiamiamo *rapporto incrementale* [14].

Ai tempi di BARROW già si aveva un metodo generale, e tutto era maturo, perché le operazioni di differenziazione e d'integrazione, considerate come operazioni inverse l'una dell'altra, divenissero le basi di una nuova scienza, che permettesse di risolvere sistematicamente i problemi della Geometria e della Meccanica.

In tal modo sorse il calcolo differenziale ed integrale, che NEWTON eresse a sistema, integrando le equazioni differenziali, per approfondire i problemi che si presentavano nelle applicazioni della sua legge [15] alla Meccanica celeste. LEIBNIZ dette al nuovo calcolo le notazioni che ancora adoperiamo [16].

Come abbiamo visto, il concetto fondamentale del calcolo infinitesimale è il continuo considerato in se stesso, o riguardato come un limite, e le operazioni fondamentali sono l'integrazione, a cui si arriva trasportando il concetto di somma dal finito all'infinito, e la derivazione, che è l'operazione inversa dell'integrazione.

* * *

Arrivati a questo punto, possiamo domandarci: le operazioni di cui abbiamo parlato, sono le sole in cui è eseguibile il passaggio suddetto? Si comprende facilmente che la estensione dal finito all'infinito può farsi, non solamente per la somma, ma anche per altre operazioni, sia per mezzo del

(13) DESCARTES, *La Géometrie*. 1637, trad. latina di Schooten, Amstelædami 1659, p. 43.

(14) FERMAT, *Methodus ad disquirendam maximam et minimam*, (« Oeuvres de Fermat », t. I, p. 133 e t. III, p. 121, Paris 1891-96).

(15) ISAACI NEWTON, *Epistola prior*, 13 junii 1676; *Epistola posterior*, 24 octob. 1676 (*Opuscula, Lausannae et Genevae*, 1744, t. I).

(16) LEIBNIZ, *Nova methodus, etc.* « Acta eruditorum », Lipsiae 1684.

procedimento detto delle serie, sia con un processo simile a quello del calcolo integrale, in cui si considera cioè (a quel modo che faceva GALILEO per studiare la caduta dei gravi) la variazione di una quantità, come l'insieme delle successive variazioni infinitamente piccole, che si ottengono dividendo la variazione totale in intervalli parziali.

Così, per trovare l'integrale di una equazione differenziale ordinaria, in un certo campo, si possono eseguire prima delle operazioni algebriche in intervalli parziali, e poi passare al limite, facendo diminuire indefinitamente la grandezza degli intervalli ed aumentandone indefinitamente il numero. Tale è il metodo di CAUCHY, che ordinariamente si segue per dimostrare l'esistenza degli integrali, parallelamente ai metodi delle serie ed al metodo di PICARD delle approssimazioni successive (17).

Il principio su cui è basato il metodo di CAUCHY, si presta in infiniti modi a ricondurre problemi complicati a problemi più semplici e già risoluti. Per dare un esempio, consideriamo il problema dei tre corpi; e, per semplicità, supponiamo che la massa del terzo corpo C, sia trascurabile rispetto a quelle degli altri due corpi A e B, per modo che il movimento di questi ultimi segua le leggi di KEPLERO; ci resterà allora da determinare soltanto il movimento del terzo corpo C. Ora, in un intervallo di tempo piccolissimo, si può trascurare lo spostamento dei corpi A e B e, per conseguenza, ritenere il moto di C come quello di un corpo attratto da due centri fissi: tale movimento è noto, poiché LEGENDRE ne ha esposta e discussa la soluzione in tutti i suoi particolari. Decomponendo quindi un dato intervallo di tempo in intervalli parziali piccolissimi, potremo decomporre il movimento di C, approssimativamente, in successivi movimenti noti; al limite, facendo diminuire indefinitamente questi intervalli, si avrà il movimento di C in tutto l'intervallo dato.

In prima approssimazione, si potrà anche supporre costante la forza agente su C, durante ogni intervallo parziale di tempo, in ciascuno dei quali C descriverà un arco di parabola; quindi si potrà considerare il moto di C come una successione infinita di movimenti parabolici infinitamente piccoli. Potremo infine supporre che il movimento di C sia uniforme in ogni intervallo parziale di tempo: calcolando di istante in istante la variazione della velocità, si otterrà il movimento come una successione di un numero infinito di movimenti, rettilinei ed uniformi.

* * *

Ritorniamo al passaggio dal finito all'infinito, nella sua applicazione più generale alle operazioni. Abbiamo già fatto parola, accennando all'opera di

(17) CAUCHY, *Exercices d'Analyse et de Physique mathématique*, Paris, t. I, 1840, p. 327; LIPSCHITZ, *Disamina della possibilità di integrare completamente un dato sistema di equazioni differenziali ordinarie*, («Annali di Matematica», II serie, t. II, 1868–1869, p. 288); VOLTERRA, *Sui principii del calcolo integrale* «Giornale di Matematiche», vol. XIX, 1881 [in queste «Opere»: vol. primo, III, pp. 16–48].

WALLIS, dei prodotti infiniti, che si ottengono estendendo il concetto di serie dal caso della somma a quello del prodotto. Nello stesso modo, possiamo trasportare l'idea di integrazione, di cui abbiamo parlato, dal campo della somma a quello del prodotto, ottenendo così l'integrazione logaritmica.

Ma è possibile portare la nostra attenzione su tipi ancor più generali di operazioni, che comprendano la somma e la moltiplicazione; basterà considerare ad esempio la deformazione di una figura piana. I tipi più semplici di tali deformazioni consistono in una dilatazione, o in una contrazione, ottenute moltiplicando le dimensioni della figura, per un certo parametro. La risultante di più deformazioni di questo genere si avrà facendo il prodotto dei parametri che definiscono ogni singola deformazione.

Consideriamo ora la trasformazione lineare più generale di una figura piana. Essa potrà ottenersi, dal punto di vista analitico, mediante una sostituzione lineare sulle coordinate. Eseguendo successivamente più trasformazioni lineari della figura, ossia più sostituzioni lineari sulle coordinate, verremo a fare ciò che comunemente si chiama un *prodotto di sostituzioni*. La ordinaria moltiplicazione, e anche la somma ordinaria rientrano come casi particolari nella moltiplicazione delle sostituzioni.

Moltiplichiamo fra loro infinite sostituzioni lineari di cui ognuna corrisponda ad una trasformazione geometrica infinitamente piccola. Ciò corrisponderà ad un passaggio dal finito all'infinito, analogo a quello che conduce dalla somma di un numero finito di termini ad una integrazione. È evidente anzi, che la ordinaria operazione di integrazione non è che un caso particolare di quella che abbiamo per ultimo definita.

Ora, questa successione infinita di trasformazioni infinitesime corrisponde ad una trasformazione finita, e l'operazione sopra indicata, che ad essa conduce, può chiamarsi l'*integrazione delle sostituzioni lineari*. L'inversa di questa operazione, si potrà denominare la *derivazione delle sostituzioni*; si avrà così un calcolo integrale e differenziale delle sostituzioni, simile in tutto al calcolo integrale e differenziale ordinario.

Questo calcolo corrisponde a quello che in Analisi si chiama l'*integrazione delle equazioni differenziali lineari*, tutta la teoria delle quali può esporsi da questo nuovo punto di vista, coordinando fra loro molti resultati, di cui non apparivano gl'intimi legami. In tal modo, dai teoremi dei residui di CAUCHY si passa ai teoremi di FUCHS, e la teoria algebrica dei divisori elementari, e la geometria delle omografie, si riannodano alla teoria delle equazioni differenziali lineari, mediante un legame analitico, che conduce a nuove proposizioni [18].

(18) Questa teoria è sviluppata nelle seguenti Memorie: VOLTERRA, *Sulle equazioni differenziali lineari*, « Rend. R. Acc. dei Lincei », 15 maggio 1887 [in queste « Opere »: vol. primo, XVI, pp. 291–293]: *Sulla teoria delle equazioni differenziali lineari*, « Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo », t. II, 1888 [ibidem, XX, pp. 351–335]; *Sui fondamenti della teoria delle equazioni differenziali lineari*, « Memorie della Società italiana delle Scienze, detta dei XL », 1ª Parte, 3ª serie, vol. VI, 1887; 2ª Parte 3ª serie, vol. XII, 1899 [in queste « Opere »: vol. primo, XV, pp. 209–290; vol. secondo, XXX, pp. 383–451]; Cfr. SCHLESINGER, *Vorlesungen über lineare Differentialgleichungen*, Leipzig 1908.

* * *

Le dottrine relative al passaggio dal finito all'infinito, dal discontinuo al continuo, ricevono nuovo impulso e sono suscettibili di maggiore estensione, quando il concetto fondamentale che le ispira si trasporti nel campo della teoria delle funzioni.

Prima di accennare a questo argomento, che è il più delicato che io debba trattare, dirò qualche parola sull'idea generale di funzione. Questa idea e quella di legge fisica son nate nel medesimo tempo; d'altro lato, la teoria della dipendenza analitica fra le quantità variabili è derivata naturalmente dal progresso dell'Algebra. Nondimeno tale teoria non si sarebbe potuta costituire in modo completo, né il concetto di funzione si sarebbe potuto ampiamente sviluppare, senza il sussidio di una rappresentazione di valore concreto e di efficacia intuitiva, quale ci viene offerta dalla Geometria analitica. E infatti solo quando lo studio di una curva è stato ricondotto da DESCARTES allo studio della variazione simultanea delle sue coordinate, la teoria delle funzioni si è costituita come elemento necessario per lo sviluppo della scienza.

Ora, come spesso accade, i concetti fondamentali esistevano di già, direi quasi nascosti, e molti casi particolari erano stati studiati completamente, prima che LEIBNIZ [19] pronunciasse la parola *funzione* e prima che alcuno pensasse a considerare, in modo sistematico e generale, la dipendenza fra le quantità che variano simultaneamente, e tanto meno a creare dall'insieme di nozioni, che scaturivano oramai da ogni lato, una speciale dottrina. Il momento in cui tutti questi concetti si riunirono e coordinarono fra loro dando origine ad un nuovo ramo delle Matematiche segna una data memorabile nella storia della Scienza.

Come ho detto, diversi elementi concorsero a creare la teoria delle funzioni. Essi non si sono mai completamente fusi, tanto che, anche nei trattati moderni, è facile riconoscere le suture fra tali materiali eterogenei. Così, per esempio, nonostante i rapporti che si possono continuamente stabilire fra esse, la teoria delle funzioni analitiche, quella delle funzioni nel senso di DIRICHLET, e la teoria geometrica delle funzioni, vengono sviluppate, in generale, con metodi differenti.

Dapprima prevalse l'indirizzo geometrico, perciò non fu necessaria neppure una parola speciale, per designare la funzione; bastavano il linguaggio fornito dalla geometria, il concetto più o meno vago di curva, e la conoscenza delle sue proprietà.

LAGRANGE [20] si pose invece da un punto di vista opposto: egli volle, con uno sforzo ardito, mediante la teoria delle funzioni analitiche, riallacciare il calcolo integrale e differenziale all'algebra, rendendolo indipendente dalla

(19) LEIBNIZ, *Werke*, (Ed. Gerhardt), «Math. Schrift.», vol. V, p. 307).
(20) LAGRANGE, *Théorie des fonctions analytiques*, Paris 1797.

considerazione di quantità infinitamente piccole e dai metodi di passaggio al limite, da cui il calcolo differenziale, come abbiamo visto, era nato. Bisogna quindi, se non si vuol risalire alla scoperta primitiva della serie di potenze di TAYLOR, concepire le funzioni analitiche, partendo dai concetti di LAGRANGE.

Come nei varii rami del calcolo differenziale ed integrale, così anche nella teoria delle funzioni i bisogni e le richieste della fisica e delle scienze naturali hanno contribuito ad orientare le ricerche, ad approfondire ed estendere nuovi concetti destinati a concretarsi e fissarsi in forma matematica.

La storia della rappresentazione delle funzioni arbitrarie è molto conosciuta: esse sono state introdotte non appena si son cominciati a studiare problemi di Fisica matematica, in cui bisognasse integrare delle equazioni alle derivate parziali. I principî fondamentali sono stati stabiliti da D'ALEMBERT, EULERO, BERNOULLI ed infine da FOURIER, ma la teoria è tuttora in via di svolgimento.

Nelle applicazioni fisiche sarebbe stato impossibile limitarsi a considerare funzioni di una sola variabile, e già NEWTON vide l'interesse che poteva avere l'introduzione delle funzioni di più variabili. Le forze e gli elementi, che definiscono le proprietà di un campo fisico, dipendono dalla posizione e, spesso, anche dal tempo; di qui la necessità di considerare funzioni di tre o quattro variabili. Inoltre, se un fenomeno deve riguardarsi come la conseguenza di più cause, i parametri che lo definiscono, saranno funzioni dei parametri che individuano le varie cause. Anche la Geometria, per esempio la Geometria analitica solida, la Geometria dei complessi di curve, e l'Algebra, quando si applichino le sue operazioni a più quantità, conducono spontaneamente alle funzioni di più variabili. La teoria di tali funzioni si è svolta parallelamente a quella delle funzioni di una sola variabile, sia dal punto di vista analitico, sia sotto altri rapporti.

* * *

A questo punto sorse un'idea ben naturale, che altro non è se non l'estensione dei concetti fondamentali del calcolo integrale al campo della teoria delle funzioni, vale a dire un passaggio dal discontinuo al continuo, del tutto simile a quello con cui si passa dalla somma all'integrale e col quale si arriva alle operazioni più generali di integrazione, di cui abbiamo parlato [21].

È possibile nella Filosofia naturale limitarsi alle funzioni di un numero finito di variabili? Evidentemente, quando si studia un fenomeno come conseguenza di un numero finito di cause, si fa una astrazione, poiché si vengono a trascurare degli elementi, che si considerano come piccolissimi, di fronte ad altri preponderanti. In tal modo l'esame del fenomeno è soltanto

(21) Ho introdotto questa idea nel 1887. I primi lavori su tale soggetto sono le mie tre note: *Sopra le funzioni che dipendono da altre funzioni*. « Rend. R. Acc. dei Lincei », 2º semestre, 1887 [in queste « Opere »: vol. primo, XVII, pp. 294-314].

approssimato, onde si intravedono facilmente casi nei quali, per approfondire convenientemente la questione, sarà necessario tener conto di un numero infinito di variabili. Un esempio si presenta subito, esaminando un campo fisico: se supponiamo che varino la posizione ed il tempo, siamo condotti a considerare funzioni di quattro variabili, ma se supponiamo che vari anche il campo riguardato come qualche cosa di continuo, i mutamenti dei fenomeni dipenderanno da una infinità di variabili. Inoltre, se in un dato fenomeno si conserva memoria del passato, il presente viene a dipendere da tutta la storia, e quindi, poiché il tempo è continuo, da un'infinità di elementi o di variabili, che individuano i fatti passati [22].

Non si può asserire che una tale eredità sia stata concepita da LEIBNIZ, il quale tuttavia espone nella sua *Monadologia* considerazioni che possono riferivisi [23]. Egli usa espressioni talmente vaghe, che è ben difficile afferrare in esse il suo pensiero, che abbraccia così il tempo, come lo spazio. Il traduttore tedesco non riesce a riprodurne l'idea, che con una parola: *Nachwirkung*, di cui i fisici moderni hanno fatto largo uso. Il PICARD ha detto su questo argomento parole profonde, distinguendo la Meccanica in due parti ch'egli chiama: la *Meccanica ereditaria* e la *Meccanica non ereditaria* [24]. Per chiarire questa distinzione, basta ricordare i ben noti fenomeni della elasticità studiati da BOLTZMANN [25], nei quali si rivela appunto una specie di eredità lasciata nella forma del corpo da tutte le azioni che lo hanno sollecitato. È evidente che in tal caso la deformazione attuale dipende da una infinità di elementi, caratterizzati dalle forze, (variabili in generale ad ogni istante), che hanno agito sul corpo.

Queste considerazioni si riallacciano a questioni elementari di Geometria, di cui con molto interesse si occuparono i Greci: per esempio, all'antico problema di ZENODORO [26] di cercare fra le curve piane, di data lunghezza, quella che racchiude l'area più grande.

Se si studia, per esempio, il problema degli isoperimetri, si considera cioè un'area piana come dipendente dal contorno, abbiamo una quantità che varia con la forma di una curva, ossia ciò che ho chiamato una *funzione di linea* e che ho studiato in modo sistematico. Poiché una curva si può rappresentare con una ordinaria funzione, l'area può ritenersi come una quantità che dipende da tutti i valori di questa funzione. L'area stessa è quindi una funzione di infinite variabili, e difatti si può considerarla come il limite di una funzione di più variabili, supponendo che il numero di queste

(22) Vedere: VOLTERRA, *Sulle equazioni integro-differenziali della teoria dellaela sticità*, « Rend. Acc. dei Lincei », 2° semestre 1909 [in questo vol.: XX, pp. 288-293].

(23) LEIBNIZ, *La Monadologie* (61) Oeuvres philosophiques de Leibniz, Paris, 1900, p. 716.

(24) *La mécanique classique et ses approximation successives*, « Riv. di Scienza », vol. I, 1907.

(25) BOLTZMANN, *Zur theorie des elastischen Nachwirkung*, « Wien. Berichte ». 1874; « Pogg. Ann. », Bd. 7 1876. Vedere anche, « Wiss, Abh. », I Bd., Leipzig 1909, p. 616.

(26) P. TANNERY, *La Géométrie grecque*, Paris 1887, p. 25.

cresca indefinitamente, allo stesso modo che una curva si può considerare come limite di un poligono, di cui il numero dei lati aumenti all'infinito.

Ma le aree non sono che casi molto particolari. Si possono trovare molti altri esempi di funzioni di linee: basta immaginare una quantità che dipenda, in un modo arbitrariamente dato, dalla forma di una curva, o una quantità che dipenda da tutti i valori di una o più funzioni [(27)]; così l'azione di una corrente elettrica filiforme e flessibile su di un ago magnetico dipende dalla forma del circuito, e per conseguenza è una funzione di linea.

Considerando le funzioni di linee come tipo di tutte le funzioni ad infinite variabili, si hanno molti vantaggi, perché il nome stesso richiama alla mente un'immagine concreta ed offre una rappresentazione intuitiva molto utile. Si capisce come si potrà passare poi allo studio di quantità dipendenti dalla forma di superficie, ed anche (nel caso degli spazi a più dimensioni) di ipersuperficie.

Tutto ciò che abbiamo detto, mostra che, sia dalle questioni geometriche, sia dai problemi della fisica, si è condotti naturalmente a fare, nella teoria delle funzioni, quel passaggio dal finito all'infinito, che abbiamo già visto compiersi a poco a poco, in modo costante, durante parecchi secoli, fino alla costituzione del calcolo infinitesimale.

Ci possiamo qui domandare se non vi sia una via analitica pura, per arrivare alle stesse nuove concezioni. La teoria delle ordinarie funzioni comprende lo studio delle proprietà di ogni quantità, ottenuta mediante operazioni algebriche. Quindi, come ha notato LAGRANGE [(28)], l'Algebra non è che un ramo della teoria delle funzioni; infatti i risultati delle operazioni algebriche sono le funzioni più elementari, considerate dall'Analisi. Allo stesso modo, si può trovare in concetti analitici l'origine della teoria delle quantità, che dipendono da tutti i valori di una o più funzioni di forma variabile. Il cammino da seguire è già tracciato: basta sostituire alle operazioni dell'Algebra, fatte su un numero finito di variabili, operazioni analitiche su di un insieme continuo, ovvero su tutti i valori di una funzione.

Conosciamo di già operazioni di questo genere, per esempio l'integrazione delle sostituzioni o, in generale, delle equazioni differenziali. Ripetendo queste operazioni elementari e combinandole fra loro, si arriverà, evidentemente, a calcolare delle classi speciali di funzioni del nuovo tipo. Generalizzando la frase sopra riferita di LAGRANGE, diremo che tutte queste operazioni e le loro teorie sono comprese nella teoria delle funzioni generalizzate di cui si è detto sopra [(29)]. Si conservano dunque i tre tipi di concezione fondamentale; geometrica, analitica, e il tipo astratto e generale legato all'idea di legge fisica.

(27) VOLTERRA, *Sopra le funzioni dipendenti da linee*, « Rend. R. Acc. dei Lincei », 2° sem. 1887 [in queste « Opere »: vol. primo, XVIII, pp. 315-328].

(28) LAGRANGE, *Leçons sur le calcul des fonctions*, Paris, 1806, Leçon première.

(29) Cfr. *Leçons sur les fonctions de lignes*, Paris, 1913, cap. II.

* * *

Una volta in possesso di questi concetti fondamentali si presentava naturalmente il compito di coordinarli, di rendere sistematiche le ricerche, di studiare i problemi che si riannodano più o meno direttamente alle nuove idee (30). È necessario compiere un tale lavoro, poiché la concezione da cui son nati i nuovi studi s'impone e perché sarebbe impossibile trattare numerose questioni, senza entrare nell'ordine delle idee esposte. Non si possono ancora classificare i vari rami che oggi esistono e che si svilupperanno in questa categoria di studi, ma si possono indicare i principali indirizzi, a cui si è naturalmente e necessariamente condotti dalla corrente costante di idee e di metodi che abbiamo visto svolgersi.

Se una quantità dipende da una linea, possiamo studiare le sue variazioni, corrispondentemente alle modificazioni di essa; se queste modificazioni sono piccole e limitate all'intorno di un punto della curva, arriviamo alla nozione di derivata d'una funzione di linea; se sovrapponiamo più modificazioni nei singoli punti, giungiamo poi a quella di differenziale o variazione. Questa è espressa da un integrale; infatti una funzione di linea può considerarsi come funzione di infinite variabili; la somma che esprime il differenziale di una funzione di più variabili, condurrà quindi, con passaggio al limite, ad un integrale (31).

Si può proseguire lo studio dei successivi differenziali ed arrivare ad uno sviluppo analitico analogo a quello di TAYLOR per le funzioni di più variabili: le somme doppie, triple, ecc., che figurano nella serie ordinaria, vengono sostituite da integrali doppi, tripli, ecc.

Possiamo anche proporci problemi di massimo e minimo, come abbiamo visto pel caso di un'area piana concepita come funzione della linea di lunghezza costante che la racchiude, anzi possiamo in generale studiare i massimi e minimi delle funzioni di linee. Tale studio, che corrisponde a quello delle condizioni in cui si annulla il differenziale, è assai complesso e conduce a questioni di natura molto varia: ponendo il problema sotto la forma più generale, si arriva infatti sia ad equazioni differenziali, sia a relazioni di natura integrale e a relazioni che sono al tempo stesso dei due tipi, o anche più complicate. Il primo caso corrisponde al calcolo delle variazioni, che è la

(30) Ho principiato tali studii fino dall'anno 1883, ma solo nel 1887 ne ho iniziato la pubblicazione in maniera sistematica colla mia prima nota: *Sopra le funzioni che dipendono da altre funzioni* « Rend. R. Acc. dei Lincei », 2° semestre, 1887 [in queste « Opere »: vol. primo, XVII, pp. 294–314], a cui fecero seguito gli altri lavori pubblicati negli stessi Rendiconti fino al 1891 e quello degli « Acta Mathematica » nel 1889. Ho interrotto le pubblicazioni su questi argomenti dal 1891 al 1895 nei quali anni ho dovuto occuparmi di altre ricerche, riprendendole nel 1896 colle note della Accademia di Torino sulla *inversione degli integrali definiti*. Le ho poi ininterrottamente proseguite.

(31) Vedere: *Sopra le funzioni che dipendono da altre funzioni*. 1ª nota, § 2. « Rend. R. Acc. dei Lincei », 2° sem., 1887 [in queste « Opere »: vol. primo, XVII, pp. 295–299].

creazione più grandiosa di LAGRANGE, ma non esaurisce, come abbiamo detto, la questione dei massimi e minimi delle funzioni di linee; ne costituisce bensì un capitolo. Ora, se si pensa che, partendo dalla Meccanica classica, si può cercare di ricondurre le differenti questioni naturali a problemi di massimi e minimi di certe funzioni del tipo generalizzato, corrispondenti all'azione meccanica, si vede delinearsi un vasto campo di ricerche [32].

Abbiamo or ora parlato dello sviluppo di una funzione di linea in una serie di integrali, che corrisponde allo sviluppo di una funzione analitica in una serie di polinomi omogenei, ossia in serie di TAYLOR; se consideriamo i diversi termini di tale sviluppo, si arriva alle forme analitiche di infinite variabili.

Di qui ha preso le mosse una nuova Algebra, che ha già fatto grandi progressi [33]. Possiamo infatti domandarci: a che cosa conduce la corrispondenza fra l'Algebra ordinaria e la nuova Algebra? Si vede facilmente che ogni problema dell'Algebra ordinaria porta ad un nuovo problema, il quale si ottiene passando dal discontinuo al continuo, col processo uniforme precedentemente considerato. Inoltre, nella maggior parte dei casi, la corrispondenza ci addita soluzioni pratiche e feconde, poiché, se i nuovi problemi possono considerarsi come limite dei problemi algebrici ordinari, le loro soluzioni assai spesso non sono che il limite delle soluzioni note dell'algebra. Ciò appunto si verifica allorché si passa dal discontinuo al continuo, nella teoria generale dei sistemi di equazioni algebriche.

La prima e la più elementare questione, che mi si sia naturalmente presentata in questo ordine di idee, nacque dal considerare il primo termine dello sviluppo generalizzato del TAYLOR, di cui sopra ho parlato. Essa può essere enunciata come la risoluzione di infinite equazioni algebriche lineari con un numero infinito di incognite. Il principio generale, ora esposto, ci fornisce immediatamente la soluzione come limite della soluzione algebrica ordinaria, mediante l'impiego di determinati infiniti, ossia applicando ai determinanti lo stesso passaggio dal discontinuo al continuo, che abbiamo visto applicarsi alla somma, al prodotto, alle sostituzioni. La questione comprendeva l'antico problema delle equazioni integrali che ABEL, LIOUVILLE, SONINE e parecchi altri avevano considerato e risoluto con speciali artifizi solo in casi particolari, e per le quali mancava un metodo uniforme e generale per condurne lo studio in modo sistematico; esso è stato trovato il giorno in cui le equazioni integrali sono state poste fra le questioni generali ora accennate e riannodate alle funzioni di linee, ossia il giorno nel quale sono state

(32) Vedere: VOLTERRA, *Sopra un problema di elettrostatica* «Transunti della R. Acc. dei Lincei», 3ª serie, vol. VIII [in queste «Opere»: vol. primo, XI, pp. 188–195]: *Sopra una estensione della teoria Jacobi-Hamilton,* «Rend. R. Acc. dei Lincei», 1° sem., 1890 [in queste «Opere»: vol. primo, XXVIII, pp. 464–475].

(33) Non farò citazioni, poiché la letteratura del soggetto è molto nota e può trovarsi in M. T. LALESCO, *Sur les équations intégrales*, Paris, 1912; G. VIVANTI, *Elementi della teoria delle equazioni integrali lineari*, Milano 1916.

considerate come caso limite di un sistema di equazioni algebriche di primo grado [34].

Mentre l'Algebra procede nell'indirizzo ora esposto, altri rami dell'Analisi si sviluppano nel medesimo senso; basta ricordare la teoria degli integrali delle funzioni di più variabili, che sono, per la loro stessa natura, funzioni del contorno e rientrano quindi nelle funzioni generalizzate, di cui abbiamo parlato. Ma ciò che più interessa, è che la teoria delle equazioni differenziali, per effetto delle stesse idee, può estendersi e raggiungere resultati notevoli di varia natura [35].

* * *

Ponendoci dal punto di vista newtoniano dobbiamo prevedere e seguire l'evoluzione delle cose. L'evoluzione istantanea o elementare è individuata dalla flussione; se questa è conosciuta in ogni istante, ossia se essa dipende esclusivamente in modo noto dalle circostanze esterne, si chiama una *evoluzione forzata*. Tutti gli stati sono determinati a partire da uno stato iniziale conosciuto, mediante la somma o integrale delle infinite evoluzioni elementari.

L'evoluzione degli esseri organici, nelle teorie di LAMARCK e DARWIN, sarebbe del tipo dell'evoluzione forzata. Ma l'evoluzione può anche essere originata da *cause interne*, ed allora sono da distinguersi due tipi: se ad ogni istante essa dipende dalle condizioni attuali, sarà una *evoluzione non ereditaria* e tutti gli stati potranno essere determinati a partire da uno stato dato, mediante l'integrazione delle equazioni differenziali; se invece essa dipende da tutti gli stati attraversati, sarà una *evoluzione ereditaria* e le equazioni differenziali non basteranno più; bisognerà ricorrere alle *equazioni integro-differenziali* ed a quelle alle *derivate funzionali*. È evidente che l'evoluzione forzata differisce da quella interna, anche perché la prima cessa con l'annullarsi delle cause esterne, mentre la seconda no.

I tre tipi di evoluzione possono presentarsi contemporaneamente; così l'oscillazione di una verga può risultare da oscillazioni forzate, da oscillazioni dovute ai suoi propri periodi di vibrazione e, in generale, sarà affetta da azioni di *isteresi* e di *traînage*.

Anche l'evoluzione organica, secondo le più recenti vedute, non può essere dovuta a sole cause esterne, ma probabilmente, poiché si verificano fenomeni di eredità, anche a cause interne. Si arriverà un giorno ad applicare le Matematiche al mondo organico? Se il tipo di evoluzione organica si confermerà quale oggi si crede, l'analisi conveniente per studiarla sarà quella delle equazioni integro-differenziali e delle derivate funzionali, diversa quindi

(34) VOLTERRA, *Sulla inversione degli integrali definiti*, quattro note, « Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino », vol. XXXI, 1896 [in queste « Opere »: vol. secondo, XVIII, pp. 216-254].

(35) Cfr. *Leçons sur les fonctions de lignes* Paris 1913, capitoli III, V e seguenti.

dall'analisi propria della Meccanica celeste. Probabilmente la biometria potrà dare le leggi sulle quali lavoreranno poi i Matematici.

Ma guardiamoci dal passare troppo, pensando all'avvenire, i limiti della Scienza presente, tanto più che sognare l'avvenire, o, per meglio dire, esporre dei sogni sull'avvenire è sempre pericoloso. Torniamo dunque all'eredità nel mondo inorganico, in cui essa ha pure un posto molto importante. Fino a pochi anni fa, mancando un'analisi per trattarle, bisognava abbandonare, non appena poste, le questioni di questo tipo; ma oggi l'analisi è capace di darne soluzioni complete, generali, rigorose, quanto quelle dei problemi in cui non entra l'eredità [36]. La guida per trovarle è sempre la stessa; bisogna ricorrere all'idea semplice e feconda che seguì ARCHIMEDE, studiando, ventidue secoli fa, la quadratura della parabola.

(36) Cfr. *Leçons sur les fonctions de lignes*, capitoli VI, VII, VIII e XIV.

XXXVII.

L'APPLICAZIONE DEL CALCOLO AI FENOMENI DI EREDITÀ

«La Revue du Mois», Paris 1912; *Leçons sur les fonctions de lignes*, Paris Gauthier-Villars 1913, Chap. XIV, pp. 207-225; *Saggi scientifici*, Bologna Zanichelli (s. d.) [1920], pp. 189-218 (*).

La storia della Meccanica ha notevole importanza non solo per se stessa, ma anche come studio della evoluzione del pensiero umano. Infatti i diversi rami delle scienze si valsero bene spesso della Meccanica come guida nel loro sviluppo ed in essa trovarono la fonte di cospicui progressi e di notevoli resultati. Perciò lo studiare lo sviluppo storico dei principî fondamentali di questa disciplina e dei mezzi impiegati per risolverne i maggiori problemi è utile anche dal punto di vista generale e filosofico.

Sarei tentato di seguire lo sviluppo della Meccanica classica, dai primi passi fatti già in età antica fino agli ultimi risultati, ma poiché parecchi autori hanno di recente trattato ampiamente questo argomento, mi limiterò a rimandare agli scritti di PICARD, PAINLEVÉ, VAILATI, DUHEM, VACCA, MACH, ricordando soltanto che i maggiori progressi si dovettero all'opera di LAGRANGE. Questi riuscì a sintetizzare tutti i principi della Meccanica in una formula sola, la quale riconduce i varî problemi alla risoluzione di certe equazioni. Da allora in poi ad ogni progresso compiuto nel loro studio ha corrisposto un progresso nei diversi rami della Meccanica.

Coloro che dopo LAGRANGE hanno portato più larghi contributi alla Meccanica analitica, come HAMILTON, JACOBI ed i loro continuatori, non han fatto che spiegare, perfezionare, allargare i suoi concetti, sviluppare i suoi metodi e trarne nuove applicazioni.

Più tardi però, a fianco della Meccanica analitica di LAGRANGE, altri modi di concepire la meccanica sono sorti e si sono sviluppati, per l'influenza delle nuove scoperte della Fisica. HERTZ ha costruito una Meccanica in relazione con le idee di MAXWELL e di HELMHOLTZ, in cui le forze sono sostituite da vincoli e masse nascoste. Oggi si va costituendo una nuova Meccanica, quella del principio di relatività, in cui i concetti fondamentali di massa, tempo spazio e le loro mutue relazioni sono profondamente modificati e in cui si cerca di costruire a poco a poco sulle nuove basi un insieme

(*) Di questa conferenza tenuta dal VOLTERRA nel 1912 alla Sorbona, come lezione di chiusura al Suo corso sulle *funzioni di linee*, si è ritenuto opportuno riprodurre qui la traduzione italiana (con lievi modificazioni formali) da Lui stesso pubblicata fra i Suoi *Saggi scientifici*.

logico, che possa spiegare i nuovi fatti scoperti dall'esperienza, eliminando le contraddizioni, e che permetta di prevedere altri fatti, da sottoporsi poi alla conferma sperimentale.

Infine ricorderò le mutue relazioni esistenti fra la Meccanica e l'energetica, per le quali si è cercato di ricondurre l'energetica alla Meccanica, ed anche, con tendenza inversa, di considerare quest'ultima come un capitolo della prima. Da tali ricerche è derivato tutto un nuovo insieme di idee filosofiche.

Lasciando da parte, perché estranea al nostro scopo, la Meccanica di HERTZ, quella della relatività e l'energetica, torniamo alla Meccanica classica ed il modo particolare consideriamo la dinamica, il cui principio fondamentale è stato stabilito ed enunciato da D'ALEMBERT. I concetti di accelerazione, di forza, di massa e di vincolo ne dominano tutto lo svolgimento; i tre primi sono sufficienti per stabilire la dinamica dei sistemi liberi, mentre è necessario ricorrere ai principî che regolano l'azione dei vincoli, per trovare le leggi del movimento dei sistemi non liberi.

Per fissare le idee, prendiamo, come problema tipico sui sistemi liberi, quello della Meccanica celeste. Poiché per la legge di NEWTON si conosce la forza che sollecita qualsiasi punto, se ne può dedurre in ogni istante l'accelerazione in funzione della posizione che occupa rispetto al resto del sistema.

Come problema tipico sui sistemi vincolati, prendiamo quello del moto di un corpo rigido; in questo caso alle forze applicate occorre aggiungere forze a due a due eguali e contrarie, che obblighino i punti del sistema a soddisfare alle condizioni dei vincoli, cioè a conservare distanze costanti fra loro, di modo che in qualunque istante l'accelerazione d'ogni punto viene a dipendere dalla forza che è ad esso applicata e dalle forze dovute ai vincoli. Queste sono incognite e non sono, in generale, determinabili in modo completo, ma possono essere eliminate tenendo conto delle condizioni indipendenti, che esprimono l'invariabilità delle distanze.

Parleremo ora dei mezzi analitici che bisogna impiegare per trattare i problemi che così si presentano. NEWTON è stato condotto per la prima volta all'integrazione di equazioni differenziali, allorquando ha cercato di dedurre il movimento dei pianeti dalla legge da lui stabilita; le equazioni differenziali da lui considerate furono equazioni differenziali ordinarie.

La determinazione del movimento e l'integrazione di queste equazioni non formano che un solo problema; e dai tempi di NEWTON fino ad oggi i progressi della Meccanica e della teoria delle equazioni differenziali sono stati simultanei.

Ma fermiamoci un istante a notare, come in ciò che abbiamo detto, sia contenuto un principio del maggiore interesse: perché il movimento sia completamente determinato in tutti i tempi futuri, basta conoscere la posizione attuale del sistema e le velocità attuali dei suoi punti, vale a dire il movimento può essere predetto nell'avvenire, quando è noto il suo stato attuale.

Per esempio, in Astronomia si può calcolare la posizione futura degli astri, se se ne conoscono la configurazione e il movimento presenti.

* * *

Abbiamo parlato fin qui della Meccanica; passiamo ora alla Fisica matematica. Per trovare ricerche veramente utili e feconde in questo ramo di scienza bisogna arrivare a tempi relativamente recenti; infatti si possono considerare come fondatori della Fisica matematica LAPLACE, FOURIER, AMPÈRE, POISSON, GAUSS, GREEN, CAUCHY, MAXWELL. Le teorie della propagazione del calore, dell'elasticità, dell'ottica e dell'elettrodinamica furono costruite, prendendo come modello e come guida la Meccanica, ma le equazioni differenziali ordinarie divennero insufficienti per queste nuove dottrine nelle quali convenne ricorrere alle equazioni alle derivate parziali.

Vediamo di renderci conto delle cause di questo fatto.

Per trattare i problemi di Fisica matematica si suppone che la sede dei fenomeni sia un mezzo continuo; ma questa ipotesi deve essere considerata più come un artificio analitico che come una realtà: in altri termini bisogna immaginare che i fenomeni si verifichino, almeno in modo approssimativo, come se il mezzo che si considera riempisse lo spazio.

Tale è lo spirito dell'ipotesi.

Per stabilire le relazioni fondamentali si può procedere in due modi diversi: o partire dalla costituzione molecolare della materia ed arrivare poi al continuo, con un metodo di tipo statistico, oppure partire direttamente dal continuo. In quest'ultimo caso conviene immaginare che gli elementi infinitamente piccoli, che lo formano e che sono contigui, esercitino gli uni sugli altri azioni reciproche secondo leggi note, ovvero che certi scambi abbiano luogo fra di loro. Allo stesso modo, se il fenomeno non è statico, ma variabile col tempo, bisogna considerare quello che succede, non solo fra gli elementi contigui nello spazio, ma ancora fra elementi contigui nel tempo.

Si arriva così ad equazioni alle derivate parziali, poiché gli elementi che individuano i punti dello spazio e il tempo (e che costituiscono quindi le variabili indipendenti) sono quattro, riducibili a tre nei casi statici o stazionari.

L'ultimo metodo è stato preferito ed usato da molti autori moderni. Come esempio, vediamo in che modo esso possa condurre alle equazioni generali della elasticità. Ricordiamo che ogni mezzo può essere decomposto in elementi infinitamente piccoli, la deformazione dei quali dipende da sei quantità; ricordiamo anche che la legge di CAUCHY sulla trasmissione delle tensioni fra elementi contigui, fa vedere come lo stato di tensione in ogni punto dipenda da sei altre quantità. Basta allora stabilire, mediante la legge di HOOKE, un legame fra le sei deformazioni e le sei tensioni, per avere le equazioni dell'equilibrio elastico; per passare poi da queste alle equazioni del movimento del mezzo, è sufficiente applicare il principio di D'ALEMBERT.

In modo analogo si procede nella elettrodinamica classica. La legge di MAXWELL conduce alle equazioni del campo elettromagnetico legando, da un lato le variazioni della polarizzazione elettrica nel tempo alle variazioni della forza magnetica nello spazio e alle correnti elettriche, e dall'altro riallacciando le variazioni della polarizzazione magnetica nel tempo alle variazioni della forza elettrica nello spazio. Per arrivare ad equazioni differenziali analoghe a quelle delle vibrazioni dei corpi elastici basta stabilire che, in ogni istante, fra la polarizzazione elettrica e la forza elettrica, la polarizzazione magnetica e la forza magnetica, passano delle relazioni lineari.

Nel caso della elasticità, come in quello dell'elettrodinamica, se si conosce in un istante dato lo stato del sistema, resta determinato completamente tutto il suo stato futuro.

Ad analoghe conclusioni si arriva anche nella teoria del calore e nello studio dei fenomeni in cui si deve tener conto, contemporaneamente, delle leggi della elasticità, di quelle della propagazione del calore e della termodinamica.

È così che BJERKNES [1] ha potuto provare che la questione generale dei movimenti dell'atmosfera si può formulare in un modo determinato. Infatti se si conoscessero in un dato istante lo stato di tutta l'atmosfera e le azioni esterne, si potrebbe determinarne lo stato futuro. La previsione del tempo diverrebbe perciò un problema perfettamente risolubile.

Abbiamo così intravisto la estesa classe dei fenomeni, che rientrano nella Meccanica e nella Fisica matematica classiche. Dall'esame fatto scaturiscono due conseguenze d'ordine generale. L'una che un solo strumento analitico è necessario per trattarli: le equazioni differenziali, sia ordinarie, sia alle derivate parziali. L'altra che i fenomeni stessi obbediscono alla legge: lo stato presente determina gli stati che verranno. Questi due fatti, rispettivamente d'ordine matematico e fisico, sono fra loro intimamente legati.

Lascerò da parte le questioni particolari, relative all'estensione del campo in cui il futuro è determinato, quando è noto lo stato presente in una certa regione, questioni che si possono risolvere mediante la teoria delle caratteristiche e dei loro inviluppi [2]; ho voluto solo insistere sul principio che regola i fenomeni considerati. Esso è una conseguenza della concezione, secondo la quale ogni azione si manifesta solo nell'istante in cui agisce, senza lasciare eredità nel futuro, ossia della ipotesi che il sistema non conservi memoria delle azioni, che lo hanno precedentemente sollecitato.

* * *

A questo punto viene fatto di domandarsi se i fenomeni naturali si esplichino realmente così, o se non sia invece da supporre che esista effettivamente una eredità dei fatti passati, in modo che il trascurarla rappresenti

(1) V. BJERKNES and J.-W. SANDSTRÖM, *Dynamic Meteorology and Hydrography*, prima parte; V. BJERKNES, TH HESSELBERG and O. DEVIK, *Dynamic Meteorology and Hydrography*, 2ª parte. Publications of the Carnegie Institution of Washington.

(2) VOLTERRA, *Sur les vibrations des corps élastiques isotropes*, « Acta mathematica », t. XVIII [in queste « Opere »: vol. secondo, III, pp. 19–73]; HADAMARD, *Leçons sur la propagation des ondes et les équations de l'Hydrodynamique* (Paris 1903).

una approssimazione introdotta solo per comodità di studio. Per dare una risposta bisogna esaminare attentamente e discutere i risultati dell'osservazione e dell'esperienza.

Si trova subito una gran quantità di fatti, che sembrano non rientrare nelle teorie di cui ci siamo occupati: essi si sono manifestati prima nella pratica, indipendentemente dalle esperienze dei laboratori, e solo più tardi sono divenuti oggetto di ricerche scientifiche sistematiche.

Tutti gli ingegneri sanno, per esempio, che un ponte costruito da molto tempo non si deforma oggi, sotto l'azione di un carico, come si deformava subito dopo la sua costruzione.

Se si assoggetta l'estremità di una sbarra elastica orizzontale, fissata all'altro estremo, a pesi che vanno dapprima crescendo e poi diminuiscono a poco a poco, il corpo, mentre si va alleggerendo, non riprende le stesse deformazioni per cui è passato mentre lo caricavamo, e non presenta la stessa flessione, in corrispondenza allo stesso peso flettore (3).

Dunque la deformazione attuale non dipende solamente dal carico attuale, ma da tutti i carichi precedenti: sembra perciò che si possa enunciare il principio che ogni azione che si è esercitata lasci un ricordo nel corpo, il quale conserva perciò la memoria di tutti i carichi che ha sopportato.

Anche nel Magnetismo si possono citare fenomeni di *isteresi* e di *traînage*: essi sono stati sottoposti a studio accurato, dato l'interesse che presentano nella elettrotecnica.

I fenomeni nei quali non si considera l'azione ereditaria, si possono raggruppare, secondo la denominazione di PICARD, nella Meccanica e nella Fisica non ereditarie, mentre gli altri si possono comprendere nella Meccanica e nella Fisica ereditarie.

Prima di proseguire, è necessario esaminare una obiezione fondamentale che potrebbe a prima vista distogliere da queste ricerche. In un articolo pubblicato nel volume: *Les Méthodes dans les sciences*, comparso nella bella raccolta *Nouvelle collection scientifique* del BOREL, il PAINLEVÉ si è occupato dei metodi della Meccanica, ed ha detto qualche parola anche intorno all'influenza del passato sull'avvenire dei sistemi materiali (4). Egli nota che lo stato di un corpo materiale in un dato istante dipende, evidentemente, dalle circostanze anteriormente attraversate, ma che, per prevedere gli stati futuri, basta conoscere le condizioni nell'istante considerato, senza sapere come il sistema vi sia stato condotto.

«Toutefois, dans beaucoup d'applications, et notamment quand l'état moléculaire des corps du système intervient d'une façon appréciable dans les phénomènes, il peut être très difficile, il peut même être impossible encore à notre technique expérimentale de déterminer directement avec une précision suffisante les conditions initiales d'un système.

(3) C. CANTONE, *Influenza dei processi di deformazione sulle proprietà elastiche dei corpi* «Nuovo Cimento», 1894-1895.

(4) Prima serie, 2ª edizione, Parigi 1910, pp. 114-115.

«Considérons, par exemple, deux clous sortis identiques de la même fabrique, mais dont l'un a été martelé à plusieurs reprises, tandis que l'autre restait dans un tiroir. Le premier clou n'est pas dans le même état moléculaire que le second, il a subi des déformations permanentes; une étude microscopique suffisamment précise nous le montrerait. Mais si nous ne possédons pas de microscope assez puissant, les deux clous nous sembleront identiques; nous serons incapables de discerner les différences de leur état moléculaire actuel. Qu'on nous dise alors que le premier clou a été martelé et comment il l'a été: nous serons avertis du genre de déformation qu'il a subi; la connaissance du passé du clou supplée provisoirement à l'absence du miscroscope.

«L'histoire d'un corps vient en aide à l'impuissance actuelle de notre technique, ou supprime les complications que cette technique entraînerait. C'est là un stade nécessaire de l'étude moléculaire des corps, mais ce n'est qu'un stade, et il faut se garder de tirer d'une méthode transitoire des conclusions aussi aventureuses qu'injustifiées, et notamment de l'opposer à la doctrine copernicienne».

Esiste dunque una corrente di idee, secondo la quale la Meccanica e la Fisica ereditarie non avrebbero ragione di esistere, potendosi porre come postulato, che lo stato futuro di un sistema qualsiasi dipende solo dal suo stato attuale. PAINLEVÉ e molti altri hanno una vera ripugnanza ad ammettere che un'azione possa avere effetto ereditario, vale a dire un effetto che si manifesti dopo che essa si è esercitata. Ma possiamo dedurre da questo, che si debba abbandonare ogni concetto ereditario e tutta l'analisi che vi si riferisce? O si deve cercare un'altra strada, per lo studio dei problemi di cui ho parlato? Io credo di no, e penso che il trarre simili conseguenze sarebbe un fraintendere il pensiero di PAINLEVÉ. Secondo me, è ragionevole ammettere che i procedimenti della eredità siano i soli possibili, per lo meno allo stato attuale della scienza, per abbracciare i fenomeni di cui abbiamo parlato. Possono esservi delle divergenze di principio, ma credo che tutti debbano essere d'accordo sulla questione pratica e sui metodi da seguire.

È inutile a questo proposito richiamare il ricordo di NEWTON, il matematico e filosofo, che per primo ha trattato in modo sistematico ed analitico le azioni a distanza. Egli ha affermato [5] che sentiva una viva contrarietà ad ammettere che un corpo può agire dove non è; trovava dunque dal punto di vista filosofico una difficoltà fondamentale ad accogliere la concezione delle forze a distanza, che è nondimeno la base dei suoi lavori. Tuttavia egli l'ha introdotta nella filosofia naturale e dopo di lui essa è

(5) *Opera quae exstant omnia*. Comm. illustr. S. HORSLEY, Londini, 1779-85, vol. IV; Lettere al dottore Bentley, pagina 429-442. (Newton a Bentley, letter III. Cambridge, feb. 25, 1693). «That gravity should be innate, inherent and essential to matter, so that one body may act upon another at a distance through a vacuum, without the mediation of any thing else, by and through which their action and force may be conveyed from one to another, is to me so great an absurdity, that I believe no man who has in philosophical matters a competent faculty of thinking, can ever fall into it».

stata universalmente impiegata; i resultati che se ne sono dedotti sono stati in generale verificati dalla osservazione e dall'esperienza.

Sostituiamo ora all'idea di spazio quella di tempo, e potremo ripetere presso a poco, per le forze che si esercitano a distanza nel tempo, quello che si dice per le forze che si esercitano a distanza nello spazio. Si può provare per le une e per le altre una eguale ripugnanza, ma io credo che le une e le altre siano egualmente utili.

Oggi che le concezioni di spazio e di tempo vanno sempre più allacciandosi, il confronto che ho stabilito, mi pare meritevole della più profonda attenzione. Esso mostra il legame che, secondo me, si potrebbe stabilire, anche partendo da concetti recenti, fra le azioni ereditarie e le forze a distanza, che sembrano, a prima vista, non presentare nessun rapporto.

Debbo aggiungere che in tutti i tempi si è cercato di sostituire alle forze a distanza le azioni fra elementi contigui nello spazio. Sono ben note le ricerche classiche del MAXWELL (6), che ha cercato di spiegare le forze newtoniane, mediante le tensioni e le pressioni in un mezzo, come sono anche note le difficoltà, che si sono incontrate, quando si è voluto andare in fondo alla spiegazione. Non ho bisogno di richiamare, a questo proposito, i begli studi di BELTRAMI (7) e di BRILLOUIN (8), ma noterò che, sebbene la quesione sia stata studiata sotto vari rapporti, conviene anche oggidì trattare con il metodo newtoniano la maggior parte dei problemi ordinarii dell'astronomia e della meccanica celeste.

Io credo che, allo stato attuale delle cose, i fenomeni, dei quali abbiamo sopra parlato, non possano considerarsi dal punto di vista matematico, se non facendo uso dell'analisi creata per approfondire lo studio delle azioni ereditarie. Se si cerca infatti di abbandonare i metodi ereditari, si incontrano molte difficoltà. Prendiamo la particella M di un corpo: nell'ipotesi ereditaria, tutte le azioni che essa ha subìto, determinano lo stato presente; quindi anche il futuro dipende da tutto il passato. Sarà possibile sostituire alla conoscenza di tutte le azioni a cui è stata assoggettata la particella, la conoscenza dei valori di un numero finito di parametri? Sarà, in altre parole, sufficiente un numero finito di elementi, per individuare lo stato presente della particella? Non sarà necessario, invece, determinare un numero infinito di parametri per conoscere il suo stato attuale, come lo conosciamo, quando sono date tutte le azioni passate?

Nella teoria del calore, per esempio, si possono dare i valori al contorno di tutte le temperature passate, oppure quelli della temperatura attuale nei diversi punti interni; ma si passa così da una infinità di elementi, che indi-

(6) *Traité d'Èlectricité et de Magnétisme*, traduit par G. SELIGMANN-LUI, t. I, chap. V. Paris 1885.

(7) BELTRAMI, *Sull'interpretazione meccanica delle formole di Maxwell*, «Accademia di Bologna», Memorie, t. VII, 1886.

(8) BRILLOUIN, *Essai sur les lois d'élasticité d'un milieu capable de transmettre des actions en raison inverse du carré de la distance*. «Annales de l'École Normale supérieure», 1877.

viduano un certo stato, ad un'altra infinità di elementi, che pure lo definiscono [9].

Se qualche cosa di analogo si presentasse per ogni particella M del corpo, che sopra abbiamo considerato, si arriverebbe tanto col metodo ereditario, quanto senza questo, a quantità dipendenti da un numero infinito di variabili, e allora quale vantaggio avremmo, abbandonando il metodo ereditario? E sarà in ogni caso possibile di rinunciare ai procedimenti analitici proprii di questo metodo? [10]

Le considerazioni esposte conducono a questioni che sono ben lungi dall'essere risolute, né qui vogliamo approfondirle. Forse un giorno sarà possibile fare a meno di considerare le azioni ereditarie, come sarà possibile che si rinunzi alle forze newtoniane, ma possiamo aspettare prima di pronunciarci su questo, anche se ci sentiamo guidati da una spontanea intuizione.

Ricorderò a tale proposito un celebre fatto storico: GALILEO e molti studiosi del suo tempo combattevano le forze a distanza, che allora chiamavano in modo vago *influenze occulte*. Fra l'altro, non si voleva ammettere l'influenza della luna sulle maree, che pure dal tempo di ERATOSTENE al medio evo era stata varie volte riconosciuta; per por fine alla questione, GALILEO cadde in un errore ben noto sulla teoria delle maree, e solo più tardi KEPLERO e NEWTON han rimessa la questione sulla vera via.

* * *

Come può applicarsi l'analisi allo studio dei fenomeni ereditari? Per semplicità, non porremo qui la questione generale, ma tratteremo un caso speciale assai facile, che richiede soltanto considerazioni di matematica elementare.

(9) Se si caratterizza lo stato del corpo, mediante i valori al contorno delle temperature passate, bisogna conoscere una funzione di 3 variabili: il tempo e i due parametri che individuano i punti al contorno. Se si caratterizza lo stato mediante la temperatura attuale dei vari punti interni, è evidente che si deve ancora conoscere una funzione di 3 variabili: si è avuto quindi un cambiamento solo nell'interpretazione dello stato caratteristico del corpo. Supponiamo trascurabili due dimensioni del corpo, sia questo dunque una linea: supponiamo un estremo a temperatura costante, l'altro a temperatura variabile. Lo stato attuale può essere definito, così da una funzione del tempo che esprima tutti i valori delle temperature passate del secondo estremo, come da tutte le temperature attuali dei punti della linea. Simili esempi sono comunissimi nella teoria delle equazioni alle derivate parziali, i cui integrali possono essere individuati indifferentemente, sia da tutti i valori di certe funzioni arbitrarie, sia da tutti quelli di certe altre funzioni arbitrarie.

(10) Notiamo che alcuni fenomeni, non di natura ereditaria, le cui leggi si esprimono mediante equazioni differenziali, per esempio, la propagazione del calore, possono condurre a questioni che si pongono sotto forma ereditaria e si risolvono con metodi ereditari. Così la relazione che esiste in ogni istante fra il livello del mercurio di un termometro e la temperatura variabile del serbatoio, è data da un'equazione integrale analoga a quella che troveremo fra poco, che lega la torsione e il momento di torsione nel caso ereditario.

Consideriamo la torsione di un filo: sia ω l'angolo di torsione e M il momento di torsione. Nell'ordinaria teoria della elasticità si parte dall'ipotesi che ω sia proporzionale ad M e si scrive

$$\omega = kM \tag{I}$$

dove k è un coefficiente costante; si stabilisce così in ogni istante una relazione fra la torsione e l'azione esterna.

Se si scrivesse in generale

$$\omega = F(M)$$

dove F è simbolo di una funzione, si potrebbe cercare di determinare F, in modo da studiare il fenomeno con maggiore approssimazione.

Supponendo, per esempio, che la funzione sia sviluppabile in serie di potenze, avremo

$$\omega = kM + k_1 M^2 + k_2 M^3 + \cdots$$

In tal modo si trascura sempre il fenomeno ereditario, cioè non si tiene alcun conto delle azioni precedenti, poiché qualunque sia F, essa stabilisce sempre una dipendenza fra la torsione attuale ω e l'azione attuale M.

Se si vuole che ω dipenda da tutta la precedente storia del momento di torsione, bisogna correggere l'equazione (I) scrivendo

$$\omega = kM + \varphi$$

dove φ dipende da tutti i valori presi da M, dai tempi più lontani fino all'istante attuale t.

Denotiamo con $f(\tau)$ la funzione M del tempo τ; secondo il concetto fondamentale di *fenomeno ereditario* consistente nel riguardare lo stato attuale di un sistema come dipendente da tutta la sua storia anteriore, avremo che φ sarà una quantità che dipende da tutti i valori della funzione $f(\tau)$ dal tempo $t = -\infty$ fino a $\tau = t$, se con t denotiamo l'istante attuale. Ciò si scrive, adottando una notazione che ho introdotto fino dal 1887 [11], con la formula

$$\varphi = \varphi\left(\left[f\overset{t}{\underset{-\infty}{(\tau)}} \right]\right)$$

Se si chiama C la curva che ha per equazione $M = f(\tau)$ nell'intervallo $-\infty\, t$, noi potremo anche porre

$$\varphi = \varphi([C])$$

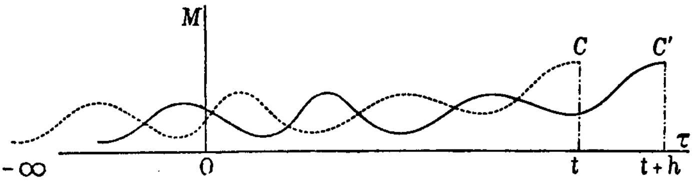
e potremo dire che φ *è una funzione della linea* C.

Ammetteremo il *postulato fondamentale della dissipazione dell'azione ereditaria* che si enuncia nei termini seguenti:

(11) Cfr. *Leçons sur les fonctions de lignes professées à la Sorbonne en 1912*, par V. VOLTERRA, Paris 1913, cap. II. Cfr. pure l'articolo precedente del presente volume di *Saggi scientifici* avente per titolo: *L'evoluzione delle idee fondamentali del calcolo infinitesimale* [in questo vol.: XXXVI, pp. 539-553].

Ogni azione ereditaria svanisce indefinitamente col tempo, il che significa che la eredità dovuta ad una azione esercitata in un dato istante va continuamente ed indefinitamente decrescendo coll'andar del tempo.

È evidente che se noi cambiamo la estrema ascissa t della curva C, o la forma della curva C stessa ossia $f(\tau)$, o contemporaneamente i due elementi, φ in generale cambierà. Diamo a t e a $\varphi(\tau)$ una modificazione simultanea consistente in una traslazione della curva C di una lunghezza h parallelamente all'asse τ; in altri termini sostituiamo alla curva punteggiata C della figura 4, la curva C' a tratto continuo. Se φ non cambia qualunque sia h e qualunque sia f, avremo che φ *sarà un invariante per tutte le traslazioni di* C *nella* direzione dell'asse τ, e quindi φ dipenderà soltanto dai valori di $f(\tau)$ non dal punto t estremità della curva.



Ne segue che φ sarà una *pura funzione della linea*, e dal punto di vista ereditario ciò sarà caratterizzato dal fatto che lo stato in un certo istante non dipenderà dall'istante stesso, ma sarà completamente determinato dal modo con cui si è svolta la storia anteriormente a questo istante, cioè *la legge ereditaria sarà invariabile col tempo*. Noi esprimeremo questo dicendo che in tal caso vi è *invariabilità dell'eredità* e potremo rappresentare il verificarsi di questo caso con la formula

$$\varphi\left(\left[f(\tau \overset{t+h}{\underset{-\infty}{-}} h)\right]\right) = \varphi\left(\left[f(\overset{t}{\underset{-\infty}{\tau}})\right]\right)$$

Supponiamo ora che ogni qualvolta $M = f(\tau)$ è periodica, anche φ considerato come funzione di t sia periodica collo stesso periodo di f. Evidentemente la stessa periodicità sussisterà anche per ω.

Prendiamo un punto A avente per ascissa $M = f(t)$ e per ordinata $\omega = \omega(t)$. Col cambiare di t, A descriverà una curva e tornerà al punto di partenza dopo decorso il periodo che denoteremo con T. Ne segue che A percorrerà un *ciclo chiuso* col periodo T.

Quando questo caso si verifica diremo che è *soddisfatta la condizione del ciclo chiuso col periodo T*.

L'importanza di questa condizione è notevole, giacché nei fenomeni di isteresi magnetica ed elastica i quali costituiscono i fenomeni tipici ereditarii, si verifica appunto la condizione del ciclo chiuso per un periodo arbitrario.

È quindi naturale porsi la domanda: a quale conseguenza questo fatto potrà condurre riguardo alla legge dell'eredità? La risposta è fornita da un teorema generale che ho dimostrato [12] ed è il seguente: *Se la condizione del ciclo chiuso è soddisfatta per tutti i periodi possibili, vi è invariabilità dell'eredità*, e reciprocamente, *se vi è invariabilità dell'eredità, la condizione del ciclo chiuso è verificata per tutti i periodi.*

Ho chiamata questa proposizione, il *principio del ciclo chiuso* e questa denominazione è giustificata da quanto fu detto precedentemente. Analiticamente essa sarà espressa dalla formula già scritta sopra

$$\varphi\left(\left[f\left(\overset{t+h}{\underset{-\infty}{\tau}} - h\right)\right]\right) = \varphi\left(\left[\varphi\left(\overset{t}{\underset{-\infty}{\tau}}\right)\right]\right)$$

e quando una funzione di linea soddisfa a questa condizione diremo che essa appartiene al ciclo chiuso.

Premesse queste considerazioni generali ritorniamo all'equazione già ottenuta

$$\omega = \mathrm{KM} + \varphi$$

Se si possono trascurare le azioni che han preceduto un certo istante t_0 (per esempio in virtù del postulato della dissipazione dell'azione ereditaria), φ dipenderà da tutti i valori presi da M dall'istante t_0 fino a quello t.

Si può ora in prima approssimazione ammettere che φ dipenda da M mediante una relazione lineare, introducendo una ipotesi analoga a quella che abbiamo posta, quando si è ammessa F funzione di primo grado di M. Dal punto di vista fisico, questo equivale a supporre che gli effetti della sovrapposizione dei momenti di torsione, nei tempi passati, si sommino: l'eredità si dice allora lineare [13].

Immaginiamo ora che un momento di torsione unitario sia stato applicato al filo, nell'intervallo infinitamente piccolo dt, compreso fra due istanti infinitamente vicini τ e $\tau + d\tau$; esso avrà prodotto una certa torsione e, poiché l'azione è ereditaria, al tempo t resterà un'azione residua. Designamola con $\varphi(t, \tau)\, d\tau$, allora al tempo t, la torsione $\omega(t)$ sarà data da $k\mathrm{M}(t)$ più la somma di tutti i residui

$$\varphi(t, \tau)\,\mathrm{M}(\tau)\, d\tau$$

dovuti alle azioni precedenti, vale a dire all'eredità. La relazione che ne risulta, è quindi l'equazione integrale

$$\omega(t) = k\mathrm{M}(t) + \int_{-\infty}^{t} \varphi(t, \tau)\,\mathrm{M}(\tau)\, d\tau\,,$$

in cui la funzione $\varphi(t, \tau)$ è il *nucleo coefficiente di eredità.*

Posti i principi precedenti, si presentano molte questioni. Possiamo domandarci: noto il coefficiente di eredità e note le successive torsioni, si possono determinare i momenti di torsione che sono stati applicati? Come si può determinare il coefficiente di eredità quando è incognito?

(12) Cfr. *Leçons* ecc., cap. VII.
(13) Cfr. *Leçons* ecc., cap. VI.

La prima questione si riconduce alla risoluzione di una equazione integrale lineare; infatti quando è trascurabile l'eredità anteriore ad un certo istante, che assumiamo come origine dei tempi, tutto è ridotto alla risoluzione, rispetto a $M(t)$, dell'equazione integrale

$$\omega(t) = kM(t) + \int_0^t \varphi(t, \tau) M(\tau) d\tau .$$

Per risolvere la seconda questione, vale a dire per determinare il coefficiente di eredità, supponiamo che sia soddisfatta la condizione del ciclo chiuso per tutti i periodi. In tale ipotesi il principio del ciclo chiuso ci dice che dovrà verificarsi la condizione dell'invariabilità delle eredità e perciò il coefficiente di eredità non dovrà dipendere che dal tempo trascorso da quando l'azione s'è esercitata, fino all'istante in cui si misura l'eredità che ha lasciata, quindi dovrà essere funzione della sola differenza $t - \tau$ o, come suol dirsi, è un nucleo appartenente al gruppo del cielo chiuso. Ne segue che il coefficiente di eredità si potrà ottenere conoscendo le leggi di variazione dell'angolo e del momento di torsione, mediante la risoluzione di un'equazione integrale dello stesso tipo di quella che abbiamo considerata. Infatti l'equazione:

$$\omega(t) = kM(t) + \int_0^t \varphi(t - \tau) M(\tau) d\tau$$

quando si ponga $t - \tau = \sigma$, viene scritta così,

$$\omega(t) = kM(t) + \int_0^t \varphi(\sigma) M(t - \sigma) d\sigma$$

da cui, se supponiamo che

$$M(t), \frac{dM(t)}{dt}, \frac{d^2 M(t)}{dt^2}, \ldots, \frac{d^{n-1} M(t)}{dt^{n-1}}$$

siano nulle, mentre $d^n M(t)/dt^n$ è diversa da zero, avremo

$$\omega^{(n)}(t) = kM^{(n)}(t) + \int_0^t \varphi(\sigma) M^{(n)}(t - \sigma) d\sigma \tag{II}$$

da cui

$$k = \frac{\omega^{(n)}(0)}{M^{(n)}(0)} .$$

Derivando l'equazione (II) si trova l'equazione integrale

$$\omega^{(n+1)}(t) \mp kM^{(n+1)}(t) = M^{(n)}(0)\, \varphi(t) + \int_0^t \varphi(\sigma) M^{(n+1)}(t - \sigma) d\sigma$$

che determina $\varphi(t)$ in funzione di $\omega(t)$ e di $M(t)$ [14].

(14) VOLTERRA, *Sur les équations intégro-différentielles et leurs applications*, «Acta mathematica», t. XXXV, p. 324 [in questo vol.: XXXV, p. 511].

Il problema finora considerato è un problema statico, ma per passare al problema dinamico corrispondente, quello delle oscillazioni del filo, basta applicare il principio di D'ALEMBERT, sostituendo al momento di torsione la differenza fra questo momento e l'accelerazione di torsione moltiplicata per una costante. L'equazione che così si trova, non è più integrale, ma integro-differenziale ed è della forma

$$\omega(t) = k\left[\mathrm{M}(t) - \mu \frac{d^2\omega}{dt^2}\right] + \int_0^t \left[\mathrm{M}(\tau) - \mu \frac{d^2\omega}{d\tau^2}\right] \varphi(t,\tau)\, d\tau \text{ (15)}.$$

Tale equazione, che può integrarsi, riconducendola ad una equazione integrale, dà anche un nuovo mezzo per calcolare il coefficiente di eredità quando si sia determinata, mediante l'osservazione diretta, la legge di oscillazione. Siamo dunque in possesso di due metodi per calcolarlo: il metodo statico e il dinamico; dal punto di vista pratico, l'ultimo è il più interessante.

Ripetendo per la flessione e la vibrazione di una sbarra quanto si è detto per la torsione di un filo, si arriva ad una equazione integro-differenziale del quarto ordine (16) invece che del secondo: questo caso è stato recentemente sottoposto a ricerche sperimentali dirette, di cui parleremo tra poco.

Nel caso più generale di un corpo elastico qualunque, si presentano maggiori complicazioni analitiche, poiché dallo stesso caso statico si è condotti ad equazioni non integrali, ma integro-differenziali. Per esempio, il problema generale della sfera elastica si risolve facilmente nel caso ereditario e la soluzione si presterà certo alle applicazioni dei problemi della rotazione terrestre (17).

Il principio del ciclo chiuso ha in tutte queste considerazioni una grande importanza, poiché permette di dimostrare che i coefficienti di eredità sono funzioni sulla differenza di due variabili e quindi formano un gruppo di *funzioni permutabili* al quale si dà per questa ragione il nome di *gruppo del ciclo chiuso*. Si può quindi impiegare la teoria della *permutabilità* per risolvere tutti i problemi corrispondenti; si semplificano così notevolmente le soluzioni e si può riuscire ad esprimerle mediante serie rapidamente convergenti e di facile uso nella pratica.

Una analisi analoga si può sviluppare nello studio dell'elettro-magnetismo; si trovano così equazioni integro-differenziali del medesimo tipo delle precedenti, che si trattano con gli stessi procedimenti (18).

(15) Cfr. *Leçons sur les équations intégrales et intégro-différentielles*, p. 139.

(16) Cfr. *Leçons sur les fonctions de lignes*, capitolo VI. Nello stesso Capitolo abbiamo dato un esempio sulla determinazione d'un coefficiente di eredità col metodo dinamico.

(17) Cfr. *Leçons sur les fonctions de lignes*, capitolo IX.

(18) Cfr. *Leçons sur les fonctions de lignes*, capitolo VII.

* * *

Non voglio terminare senza far parola delle applicazioni sperimentali della teoria ereditaria; ricorderò le applicazioni all'acustica fatte dall'insigne fisico americano WEBSTER; desidero anzi parlare della parte più pratica delle sue ricerche. Egli si è proposto questa interessante questione: Quale è la materia migliore per la costruzione dei diapason? Il WEBSTER crede che la scienza non abbia ancora dato una risposta soddisfacente a questa domanda. Una parte della energia di vibrazione del diapason, più grande di quel che ordinariamente si pensi, va dissipata nella sostanza stessa del corpo vibrante, senza essere impiegata per l'emissione del suono.

Il WEBSTER ed il PORTER han cercato dapprima le leggi di questa dissipazione. Si presentavano loro due teorie: quella della viscosità, che è stata esposta dal VOIGT, nel suo trattato sulla fisica dei cristalli, e la teoria ereditaria.

Il metodo sperimentale adottato dai due fisici consiste nello studio dello smorzamento delle vibrazioni trasversali di una sbarra, che vibra normalmente; ogni vibrazione normale ha un decremento diverso, che può misurarsi con processi fotografici; le vibrazioni sono prodotte mediante elettromagneti; la sbarra è sostenuta nel vuoto da sostegni che non danno luogo a dissipazione, situati con tutta l'esattezza possibile ai nodi del corpo vibrante.

Si è fatto uso di una sbarra di acciaio, di una di bronzo e di una lamina di vetro, ognuno dei quali corpi vibrava in tre modi diversi con due, tre o quattro nodi. Lo smorzamento cresce col numero delle vibrazioni, ma non proporzionalmente; sembra anzi che si avvicini ad un limite.

Se si applica la teoria della viscosità, si trova che i decrementi debbono essere proporzionali al quadrato della frequenza; ora, siccome una tal legge non è verificata dalle esperienze del WEBSTER e del PORTER, si è dovuta abbandonare la teoria della viscosità ed impiegare quella dell'eredità. Il WEBSTER ed il PORTER hanno trovato una corrispondenza fra i risultati sperimentali e la teoria, partendo dall'equazione integro-differenziale del quarto ordine, a cui si arriva, tenendo conto dell'eredità nello studio delle vibrazioni trasversali di una sbarra elastica.

Essi hanno determinato ciò che può chiamarsi la « memoria delle sostanze » che hanno sperimentate: sembra, per esempio, che l'acciaio abbia una memoria debolissima.

* * *

Credo di aver dimostrato che le teorie ereditarie, almeno quelle di cui ho parlato, possano essere studiate mediante equazioni integro-differenziali; si può così sviluppare lo studio teorico dell'eredità senza fare alcuna ipotesi speciale sulle funzioni che la caratterizzano, ossia sui coefficienti di eredità. Nelle questioni di Fisica matematica, come in quelle di Meccanica, è utile lasciare, finché si può, indeterminate le costanti, e fissarle numericamente, solo quando si applichino le formole a problemi concreti.

Questa è la ragione per cui l'applicazione dell'Algebra alla filosofia naturale è cresciuta sempre d'importanza. Anche nelle questioni sull'eredità riesce utile lasciare indeterminate le leggi speciali con le quali l'eredità stessa si manifesta, risolvendo i problemi corrispondenti nel modo più generale possibile.

I coefficienti di eredità possono, quando occorra, determinarsi comparando le formule generali coi risultati dell'osservazione e fissandole così nei varî casi particolari che si presentano.

Spero che le considerazioni precedenti siano riuscite a dare un'idea dei caratteri essenziali, dell'utilità e della portata delle funzioni che dipendono da altre funzioni; esse conducono naturalmente alle equazioni integrali ed integro–differenziali e allo studio delle questioni ereditarie. Senza questi procedimenti, lo sviluppo analitico relativo ai casi di eredità non sarebbe possibile, ovvero si dovrebbe arrestare ai primi passi.

XXXVIII.

VIBRAZIONI ELASTICHE NEL CASO DELLA EREDITÀ

« Rend. Acc. Lincei », ser. 5ª, vol. XXI_2, 1912_2; pp. 3–12.

1. I problemi delle vibrazioni di una corda elastica, di una sbarra elastica, in generale di corpi elastici conducono, quando si tenga conto della eredità, ad equazioni integro–differenziali di tipo iperbolico della forma

$$\text{(I)} \qquad \frac{\partial^2 u(z,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(z,t)}{\partial z^2} + \int_{t_0}^{t} \frac{\partial^2 u(z,\tau)}{\partial z^2}\psi(t,\tau)\,d\tau$$

$$\text{(II)} \qquad \frac{\partial^2 u(z,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^4 u(z,t)}{\partial z^4} + \int_{t_0}^{t} \frac{\partial^4 u(z,\tau)}{\partial z^4}\psi(t,\tau)\,d\tau$$

$$\text{(III)} \qquad \frac{\partial^2 u(x,y,z,t)}{\partial t^2} = \Delta^2 u(x,y,z,t) + \int_{t_0}^{t} \Delta^2 u(x,y,z,\tau)\,\psi(t,\tau)\,d\tau\,,$$

in cui t_0 denota un istante anteriormente al quale l'eredità si suppone trascutabile (1).

Fino dalla prima Nota sulle equazioni integro–differenziali ho posto in evidenza equazioni di questa natura (2), accennando a quelle speciali equazioni integro–differenziali nelle quali una stessa variabile comparisce come variabile di derivazione e fra le variabili di integrazione (nelle prime due la seconda variabile di cui è funzione la u, e nella terza equazione la quarta variabile da cui dipende la u).

Esporrò in una prossima Nota altri metodi di analisi. Qui mi permetto di limitarmi ad indicare brevemente i risultati ai quali conduce il metodo della separazione delle variabili, che è il più opportuno impiegare per le applicazioni pratiche a cui sono rivolte queste questioni, cioè a indicare come si possa ricavare le leggi della eredità dalle osservazioni sperimentali.

2. Riprendiamo dapprima la (I). Onde applicare il procedimento analogo a quello che si tiene nel caso ordinario della corda vibrante, poniamo

$$(1) \qquad u(z,t) = \operatorname{sen} m(z+\alpha) f(t)\,,$$

in cui m ed α sono quantità costanti.

(1) Alla equazione integro–differenziale (II), delle vibrazioni di una sbarra elastica, è giunto il prof. WEBSTER nelle sue interessanti ricerche, e me l'ha segnalata.

(2) *Sulle equazioni integro–differenziali*. « Rend. Acc. Lincei », ser. 5ª, vol. XVIII, 1909_1 e p. 167. [In questo vol.: XVII, pp. 269–275].

Avremo che f dovrà soddisfare l'equazione integro-differenziale

$$\frac{d^2 f(t)}{dt^2} + m^2 \left[f(t) + \int_{t_0}^{t} f(\tau)\,\psi(t,\tau)\,d\tau \right] = 0 . \tag{2}$$

Supponendo per semplicità $t_0 = 0$, sia

$$a = \left(\frac{df(t)}{dt} \right) .$$

Con una integrazione avremo

$$\frac{df(t)}{dt} + m^2 \int_0^t f(\tau) \left\{ 1 + \int_\tau^t \psi(\xi,\tau)\,d\xi \right\} d\tau = a ,$$

e ponendo

$$(f(t))_{t=0} = b ,$$

si avrà

$$f(t) + m^2 \int_0^t f(\tau) \left\{ (t-\tau) + \int_\tau^t d\xi \int_\tau^\xi \psi(\eta,\tau)\,d\eta \right\} d\tau = at + b .$$

Scrivendo

$$(t-\tau) + \int_\tau^t d\xi \int_\tau^\xi \psi(\eta,\tau)\,d\eta = \mathrm{F}(t,\tau) ,$$

l'equazione precedente diverrà

$$f(t) + m^2 \int_0^t f(\tau)\,\mathrm{F}(t,\tau)\,d\tau = at + b .$$

3. Ciò premesso sia

$$\mathrm{S}(t,\tau \mid x) = -x\mathrm{F}(t,\tau) + x^2\,\mathrm{F}^2(t,\tau) - x^3\,\mathrm{F}^3(t,\tau) + \cdots , \tag{3}$$

ove $\mathrm{F}^2, \mathrm{F}^3, \cdots$ denotano resultati di operazioni di composizione di prima specie (3), cioè

$$\mathrm{F}^2(t,\tau) = \int_\tau^t \mathrm{F}(t,\xi)\,\mathrm{F}(\xi,\tau)\,d\xi$$

$$\mathrm{F}^3(t,\tau) = \int_\tau^t \mathrm{F}^2(t,\xi)\,\mathrm{F}(\xi,\tau)\,d\xi$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\mathrm{F}^i(t,\tau) = \int_\tau^t \mathrm{F}^{i-j}(t,\xi)\,\mathrm{F}^j(\xi,\tau)\,d\xi \qquad (j = 1, 2, \cdots, i-1)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

(3) *Questioni generali sulle equazioni integrali ed integro-differenziali.* « Rend. Acc. Lincei », ser. 5ª, vol. XIX, 1° sem., 1910. [In questo vol. XXIII, pp. 311-322].

La funzione $S(t, \tau \mid x)$ sarà una funzione intera di x e avremo

$$f(t) = a\left\{t + \int_0^t \tau S(t, \tau \mid m^2)\, d\tau\right\} + b\left\{1 + \int_0^t S(t, \tau \mid m^2)\, d\tau\right\}. \tag{4}$$

Posto

$$t + \int_0^t \tau S(t, \tau \mid x)\, d\tau = S_1(t \mid x),$$

$$1 + \int_0^t S(t, \tau \mid x)\, d\tau = S_2(t \mid x),$$

S_1 e S_2 saranno due trascendenti intere di x e la (4) e la (1) si scriveranno

$$f(t) = aS_1(t \mid m^2) + bS_2(t \mid m^2) \tag{4'}$$

$$u(z, t) = \operatorname{sen} m(z + \alpha)\,[aS_1(t \mid m^2) + bS_2(t \mid m^2)]. \tag{1'}$$

Combinando linearmente un numero infinito di tali soluzioni otterremo (nelle ben note ipotesi di convergenza, continuità e derivabilità della serie) la soluzione della (I)

$$u(z, t) = \sum_0^\infty{}_n \operatorname{sen} m_n(z + \alpha_n)\,[a_n S_1(t \mid m_n^2) + b_n S_2(t \mid m_n^2)],$$

ove

$$u(z, t)_{t=0} = \sum_0^\infty b_n \operatorname{sen} m_n(z + \alpha_n)$$

$$\left(\frac{\partial u(z, t)}{\partial t}\right)_{t=0} = \sum_0^\infty a_n \operatorname{sen} m_n(z + \alpha_n).$$

Nella ipotesi, per esempio, che la corda, di lunghezza l, sia fissa agli estremi, avremo

$$\alpha_n = 0 \quad , \quad m_n = \frac{n\pi}{l}$$

e

$$u(z, t) = \sum_2^\infty{}_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{l} z\right)\left[a_n S_1\left(t \,\middle|\, \frac{n^2\pi^2}{l^2}\right) + b_n S_2\left(t \,\middle|\, \frac{n^2\pi^2}{l^2}\right)\right].$$

4. Consideriamo il caso particolare in cui sia verificato il principio del ciclo chiuso (4).

Posto

$$t - \tau = \xi,$$

sarà

$$\psi(t, \tau) = \psi(t - \tau) = \psi(\xi).$$

(4) *Sulle equazioni della elettrodinamica.* « Rend. Acc. Lincei », ser. V, vol. $XVIII_1$, 1909_1, art. 3 [in questo vol.: XVIII, pp. 276–283]. *Sur les équations intégro-différentielles et leurs applications.* « Acta Mathematica », tome 35, 1912, chapitre II, art. 2ème, [ibidem: XXXV, pp. 487–538].

Quindi

$$(5)\qquad F(t,\tau) = \xi + \int_0^{\xi} d\xi_1 \int_0^{\xi_1} \psi(\xi_2)\, d\xi_2 = F(\xi)$$

$$(6)\qquad \begin{cases} F^2(t,\tau) = \int_0^{\xi} F(\xi_1)\, F(\xi-\xi_1)\, d\xi_1 = F^2(\xi) \\ F^3(t,\tau) = \int_0^{\xi} F^2(\xi_1)\, F(\xi-\xi_1)\, d\xi_1 = F^3(\xi) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ F^i(t,\tau) = \int_0^{\xi} F^j(\xi_1)\, F^{i-j}(\xi-\xi_1)\, d\xi_1 = F^i(\xi), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

$$(7)\qquad S(t,\tau\,|\,x) = -xF(\xi) + x^2 F^2(\xi) - x^3 F^3(\xi) + \cdots = S(\xi\,|\,x),$$

$$(8)\qquad S_1(t\,|\,x) = t + \int_0^t \tau S(t-\tau\,|\,x)\, d\tau = t + \int_0^t (t-\tau)\, S(\tau\,|\,x)\, d\tau,$$

$$(9)\qquad S_2(t\,|\,x) = 1 + \int_0^t S(t-\tau\,|\,x)\, d\tau = 1 + \int_0^t S(\tau\,|\,x)\, d\tau.$$

Supponiamo che manchi l'eredità: sarà allora

$$\psi = 0 \quad , \quad F(\xi) = \xi \quad , \quad S(\xi\,|\,x) = -\sqrt{x}\,\mathrm{sen}\,(\sqrt{x}\,\xi),$$

$$S_1(t\,|\,x) = \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{sen}\,(\sqrt{x}\,t) \quad , \quad S_2(t\,|\,x) = \cos(\sqrt{x}\,t),$$

e la (1') diverrà

$$u(z,t = \mathrm{sen}\, m(z+\alpha)\left[\frac{a}{m}\,\mathrm{sen}\, mt + b\cos mt\right],$$

ossia la soluzione si ridurrà all'integrale particolare di TAYLOR della equazione differenziale dalle corde vibranti. Noi vediamo dunque che, per passare dal caso non ereditario al caso ereditario, basta sostituire alle trascendenti intere trigonometriche sen e cos le nuove trascendenti intere $S_1(t|x), S_2(t|x)$ (5).

5. Passiamo adesso all'equazione integro-differenziale (II). Posto $t_0 = 0$, e

$$u(z,t) = [Ae^{mz}\,\mathrm{sen}\, m(z+\alpha) + Be^{-mz}\,\mathrm{sen}\, m(z+\alpha)]\, f(t)$$

in cui A, B, m, α sono costanti, si trova

$$\frac{d^2 f(t)}{dt^2} + 4m^4\left[f(t) + \int_0^t f(\tau)\,\psi(t,\tau)\, d\tau\right] = 0,$$

(5) Cfr. *Sopra una proprietà generale delle equazioni integrali ed integro-differenziali.* « Rend. Acc. Lincei », ser. 5ª, vol. XX, 2º sem. 1911. [In questo vol.: XXXI, pp. 380-388].

quindi, a e b essendo delle costanti, sarà

$$f(t) = a\mathrm{S}_1(t \mid 4m^4) + b\mathrm{S}_2(t \mid 4m^4).$$

Otteniamo dunque la soluzione

$$u(z, t) = e^{mz} \operatorname{sen} m(z+\alpha)\,[a\mathrm{S}_1(t \mid 4m^4) + b\mathrm{S}_2(t \mid 4m^4)]$$
$$+ e^{-mz} \operatorname{sen} m(z+\alpha)\,[a'\mathrm{S}_1(t \mid 4m^4) + b'\mathrm{S}_2(t \mid 4m^4)],$$

in cui a', b' sono nuove costanti.

Combinando linearmente infinite soluzioni di questa natura otterremo una serie come nel caso precedente.

6. Se nella (III) poniamo

$$u(x, y, z, t) = v(x, y, z) f(t),$$

nella ipotesi $t_0 = 0$, troviamo le equazioni

$$\Delta^2 v + \lambda^2 v = 0 \tag{10}$$

$$\frac{d^2 f}{dt^2} + \lambda^2\left[f(t) + \int_0^t f(\tau)\,\psi(t, \tau)\,d\tau\right] = 0. \tag{11}$$

I *valori eccezionali di* λ per cui la (10) è soddisfatta dipendono, come è ben noto, dalle condizioni al contorno. Essendo λ_i uno di tali *valori eccezionali* e $v_i(x, y, z)$ la *soluzione eccezionale* corrispondente, abbiamo la soluzione della (III)

$$u_i(x, y, z, t) = v_i(x, y, z)\,[a\mathrm{S}_1(t \mid \lambda_i^2) + b\mathrm{S}_2(t \mid \lambda_i^2)],$$

in cui a e b sono quantità costanti.

Combinando linearmente infinite di tali soluzioni, otterremo, anche in questo caso, una soluzione data da una serie.

Se confrontiamo la soluzione adesso trovata e quella ottenuta nel § precedente, con quelle che si hanno nel caso in cui manchi l'eredità, si vede che il passaggio dal caso non ereditario a quello ereditario si ottiene sempre sostituendo alle trascendenti trigonometriche sen e cos le nuove trascendenti intere $\mathrm{S}_1(t \mid x)$, $\mathrm{S}_2(t \mid x)$.

7. Nel caso del ciclo chiuso, dalle (8) e (9) si ricava

$$\frac{d\mathrm{S}_1(t \mid x)}{dt} = \mathrm{S}_2(t \mid x)$$

$$\frac{d\mathrm{S}_2(t \mid x)}{dt} = \mathrm{S}(t \mid x),$$

e dalla (7) (6)

$$x\,\mathrm{F}(\xi) = -\mathrm{S}(x \mid \xi) + \mathrm{S}^2(x \mid \xi) - \mathrm{S}^3(x \mid \xi) + \cdots,$$

(6) *Questioni generali*, ecc., già citato, § 4.

ove gli esponenti denotano operazioni di composizione, cioè

$$S^2(x\,|\,\xi) = \int_0^\xi S(x\,|\,\xi_1)\,S(x\,|\,\xi - \xi_1)\,d\xi_1$$

$$S^3(x\,|\,\xi) = \int_0^\xi S^2(x\,|\,\xi_1)\,S(x\,|\,\xi - \xi_1)\,d\xi_1$$

. . . .

. . . .

Finalmente dalla (5) si ha

$$\frac{d^2 F(\xi)}{d\xi^2} = \psi(\xi).$$

Dunque, *nel caso in cui la condizione del ciclo chiuso sia verificata, si può ricavare il coefficiente di eredità dalla legge di vibrazione.* Per esempio, nel caso della corda elastica, conoscendo il numero dei nodi e la legge di vibrazione di un punto della corda potremo ricavare il coefficiente di eredità.

8. Nel § VII delle lezioni fatte alla Clark University [7] ho mostrato che le oscillazioni di un filo dovuto alla torsione, allorché si tien conto della eredità, dipendono dalla equazione integro-differenziale

$$M(t) - \mu \frac{d^2\omega(t)}{dt^2} = \frac{1}{K}\,\omega(t) + \int_{t_0}^{t} \omega(\tau)\,\chi(t,\tau)\,d\tau,$$

ove $M(t)$ e $\omega(t)$ denotano rispettivamente il momento e l'angolo di torsione, $\chi(t,\tau)$ è il coefficiente di eredità e μ e K sono coefficienti costanti

Considerando le oscillazioni libere (non forzate) del filo, dovremo fare $M(t) = 0$. Ponendo $1/(K\mu) = m^2$, $K\chi(t,\tau) = \psi(t,\tau)$, $t_0 = 0$, l'equazione precedente si scriverà

$$\frac{d^2\omega(t)}{dt^2} + m^2\left[\omega(t) + \int_0^t \omega(\tau)\,\psi(t,\tau)\,d\tau\right] = 0.$$

Si ricade dunque, anche in questo caso, nella equazione integro-differenziale (2). Quindi

$$\omega(t) = a\,S_1\left(t\,\middle|\,\frac{1}{k\mu}\right) + b\,S_2\left(t\,\middle|\,\frac{1}{k\mu}\right),$$

ove b denota la torsione iniziale, e a la velocità angolare iniziale di torsione.

9. Rispetto alle radici della equazione

$$f(t) = 0,$$

(7) Lectures delivered at the celebration of the twentieth anniversary of the foundation of Clark University, Worcester, Mass., September 1909. [In questo vol.: XXXII, pp. 389-476].

essendo $f(t)$ definita dalla equazione

$$\frac{d^2 f(t)}{dt^2} + m^2 \left[f(t) + \int_0^t f(\tau)\, \psi(t, \tau)\, d\tau \right] = 0,$$

è facile dimostrare che, *se* $\psi(t, \tau)$ *è positivo, esiste sempre una radice compresa fra* 0 *e* π/m, supposto m positivo.

Infatti consideriamo l'equazione

$$\frac{d^2 \varphi(t)}{dt^2} + m^2 \varphi(t) = 0$$

che è soddisfatta da

$$\varphi(t) = \operatorname{sen} mt.$$

Si avrà

$$f(t) \frac{d^2 \varphi(t)}{dt^2} - \varphi(t) \frac{d^2 f(t)}{dt^2} = m^2 \varphi(t) \int_0^t \psi(t, \tau) f(\tau)\, d\tau,$$

d'onde

$$\int_0^{\pi/m} \left\{ f(t) \frac{d^2 \varphi(t)}{dt^2} - \varphi(t) \frac{d^2 f(t)}{dt^2} \right\} dt = m^2 \int_0^{\pi/m} \varphi(t)\, dt \int_0^t \psi(t, \tau) f(\tau)\, d\tau,$$

cioè

$$-m \left[f(0) + f\left(\frac{\pi}{m}\right) \right] = m^2 \int_0^{\pi/m} \varphi(t)\, dt \int_0^t \psi(t, \tau) f(\tau)\, d\tau.$$

Se $f(t)$ conservasse lo stesso segno nell'intervallo $(0, \pi/m)$ il primo membro ed il secondo membro risulterebbero di segno contrario (se $f(t)$ non si annullasse in ambedie gli estremi), oppure il primo membro sarebbe nullo senza che lo fosse il secondo (se $f(t)$ si annullasse in ambedue gli estremi) il che è assurdo. Dunque $f(t)$ deve cangiar segno nell'intervallo $(0, \pi/m)$ e per conseguenza $f(t)$ deve avere una radice nell'interno di questo intervallo.

10. Supponiamo soddisfatta la condizione del ciclo chiuso; vogliamo vedere se è possibile un moto periodico. Naturalmente dovremo ammettere che la periodicità abbia luogo dal tempo $-\infty$, ossia dovremo supporre nella (2) il limite inferiore dell'integrale $t_0 = -\infty$ (8). Essa quindi si scriverà

$$\frac{d^2 f(t)}{dt^2} + m^2 \left[f(t) + \int_{-\infty}^t f(\tau)\, \psi(t - \tau)\, d\tau \right] = 0. \tag{12}$$

Per la validità delle formule si porrà

$$|\psi(x)| < \frac{M}{x^{1+\varepsilon}} \qquad (\text{per } x > 0),$$

(8) Cfr. la Nota: *Sulle equazioni della elettrodinamica* già citata, p. 207, nota (1) a piè di pagina [in questo vol.: p. 280, nota (2)].

M ed ε essendo quantità positive.

La (12) può scriversi

$$\frac{d^2 f(t)}{dt^2} + m^2 \left[f(t) + \int_0^\infty f(t-x)\, \psi(x)\, dx \right] = 0. \tag{12'}$$

Dimostreremo adesso il teorema: *se $\psi(x)$ è una funzione positiva decrescente, l'equazione precedente non ammette soluzioni periodiche diverse da zero.* La possibilità quindi di moti periodici resta esclusa da questo teorema, quando si ammetta che i coefficienti di eredità siano positivi e decrescenti.

Supponiamo che l'equazione integro-differenziale (12') abbia una soluzione periodica, di periodo T, sviluppabile in serie di FOURIER uniformemente convergente insieme alle sue derivate prima e seconda. Avremo

$$f(t) = \sum_0^\infty \left[a_n \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi n}{T} t\right) + b_n \cos\left(\frac{2\pi n}{T} t\right)\right], \tag{13}$$

quindi sostituendo nella (12') sarà

$$0 = \sum_0^\infty \left\{ \left[a_n \left(-\frac{4\pi^2 n^2}{T^2} + m^2 + \int_0^\infty \cos\left(\frac{2\pi n}{T} x\right) \psi(x)\, dx \right) \right.\right.$$

$$\left. + b_n \int_0^\infty \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi n}{T} x\right) \psi(x)\, dx \right] \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi n}{T} t\right) + \left[- a_n \int_0^\infty \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi n}{T} x\right) \psi(x)\, dx \right.$$

$$\left.\left. + b_n \left(-\frac{4\pi^2 n^2}{T^2} + m^2 + \int_0^\infty \cos\left(\frac{2\pi n}{T} x\right) \psi(x)\, dx \right)\right] \cos\left(\frac{2\pi n}{T} t\right)\right\},$$

e perciò

$$\left\{ \begin{aligned} & a_n \left(-\frac{4\pi^2 n^2}{T^2} + m^2 + \int_0^\infty \cos\left(\frac{2\pi n}{T} x\right) \psi(x)\, dx \right) \\ & \qquad + b_n \int_0^\infty \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi n}{T} x\right) \psi(x)\, dx = 0, \\ & - a_n \int_0^\infty \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi n}{T} x\right) \psi(x)\, dx \\ & \qquad + b_n \left(-\frac{4\pi^2 n^2}{T^2} + m^2 + \int_0^\infty \cos\left(\frac{2\pi n}{T} x\right) \psi(x)\, dx \right) = 0. \end{aligned} \right. \tag{14}$$

Dalle equazioni precedenti segue che a_n e b_n dovranno esser nulli a meno che il determinante dei loro coefficienti sia nullo, ossia si abbia

$$(15) \qquad 0 = \begin{vmatrix} -\frac{4\pi^2 n^2}{T^2} + m^2 + \int_0^\infty \cos\left(\frac{2\pi n}{T}x\right)\psi(x)\,dx & , & \int_0^\infty \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi n}{T}x\right)\psi(x)\,dx \\ -\int_0^\infty \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi n}{T}x\right)\psi(x)\,dx & , & -\frac{4\pi^2 n^2}{T^2} + m^2 + \int_0^\infty \cos\left(\frac{2\pi n}{T}x\right)\psi(x)\,dx \end{vmatrix}$$

$$= \left[-\frac{4\pi^2 n^2}{T^2} + m^2 + \int_0^\infty \cos\left(\frac{2\pi n}{T}x\right)\psi(x)\,dx\right]^2 + \left[\int_0^\infty \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi n}{T}x\right)\psi(x)\,dx\right]^2.$$

Ma se $\psi(x)$ è positivo e decrescente e $n > 0$,

$$\int_0^T \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi n}{T}x\right)\psi(x)\,dx > 0$$

$$\int_T^{2T} \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi n}{T}x\right)\psi(x)\,dx > 0$$

. . . .

$$\int_{hT}^{(h+1)T} \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi n}{T}x\right)\psi(x)\,dx > 0$$

. . . .,

h essendo un numero intero e positivo qualunque, onde

$$\int_0^\infty \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi n}{T}x\right)\psi(x)\,dx > 0,$$

e per conseguenza l'equazione (15) non può essere soddisfatta. La (12'), dunque, non può ammettere nessuna soluzione periodica all'infuori di $f = 0$.

XXXIX.

ENRICO POINCARÉ

«La Revue du Mois», vol. XV, Paris 1913, pp. 129–154; V. VOLTERRA, J. HADAMARD, P. LANGEVIN, P. BOUTROUX, *H. Poincaré: l'oeuvre scientifique, l'oeuvre philosophique*, Paris Alcan 1914, pp. 3–49; *Book of the opening of the Rice Institute*, vol. III, «The Rice Institute Pamphlet», vol I, 1915, pp. 133–162; V. VOLTERRA, *Saggi scientifici*, Bologna Zanichelli (s. d.) [1920], pp. 121–157 (*).

Un uomo vale tanto più quanto meno apprezza la vita; ma vi è un caso in cui, anche da parte di chi non tema la morte, può giustificarsene l'orrore. Pensiamo ad uno scienziato, il quale abbia concepito delle idee che comprende essere utili e feconde, mentre sente ch'esse sono ancora vaghe e confuse e che a svilupparle è necessario un lungo e paziente lavoro, affinché esse siano comprese, apprezzate ed applicate. Se egli riflette allora, che la morte potrebbe da un istante all'altro annientarle, e che lunghi anni potrebbero ancora trascorrere prima che altri le ritrovasse, si comprende come egli possa attaccarsi appassionatamente alla vita e sentir mescolarsi alla gioia del lavoro il timore d'interromperlo per sempre.

Si può immaginare l'angoscia terribile di ABEL, il quale sentiva avvicinarsi la morte e sapeva che nessuno di quanti lo circondavano comprendeva le sue idee da lui ritenute irreparabilmente perdute. E così si intuisce quali terribili momenti abbia trascorsi GALOIS, prima di recarsi a quel duello dal quale non doveva mai più ritornare, quando si pensi ch'egli non aveva ancora scritto una sola parola sulle sue grandi scoperte.

POINCARÉ è morto nel momento più brillante della sua carriera, nel pieno vigore delle sue facoltà intellettuali, mentre il suo genio, giovane ancora, concepiva idee nuove ed originali. Ha egli avuto coscienza che tutto quanto stava germogliando dal suo potente cervello sarebbe stato distrutto in un solo istante?

Nessuno certo oggi può dirlo; ma io mi auguro per la pace dei suoi ultimi giorni, ch'egli non abbia sentito approssimarsi la morte, sebbene le pagine della sua ultima memoria rivelino tristi presentimenti.

(*) Di questo discorso, letto alla solenne inaugurazione del Rice Institute in Houston, Texas, nel 1912 (e poi ripetutamente pubblicato in francese e in inglese), si è ritenuto opportuno riprodurre qui la traduzione italiana, che il VOLTERRA stesso ne pubblicò nei Suoi *Saggi scientifici*.

Poincaré adesso riposa e forse son queste le sue prime ore di riposo, giacché la ininterrotta attività svolta nelle innumerevoli questioni da lui trattate, nei nuovi campi della scienza da lui esplorati, nella divulgazione delle sue idee, dimostra che durante tutta la vita egli non ha per un solo istante cessato di affaticare il suo cervello.

Da buon soldato è rimasto sulla breccia sino all'estremo respiro. Negli ultimi trent'anni non vi fu nessuna nuova questione, più o meno collegata alle matematiche ch'egli non abbia sottomessa alla sua profonda analisi e che non abbia arricchita di qualche feconda scoperta e di qualche acuta osservazione.

Forse nessun altro scienziato ebbe come lui tanti e così costanti rapporti col mondo scientifico dell'epoca sua.

Fra esso ed Enrico Poincaré esisteva uno scambio continuo, rapido ed intenso di idee, che non si è interrotto mai fino a che il suo cuore non ha cessato di battere; ed è perciò che se si volesse personificare con una figura di scienziato l'ultimo periodo storico della matematica, tutti penserebbero ad Enrico Poincaré, a quest'uomo che fu il più celebre matematico degli ultimi tempi.

E poco a poco egli aveva fatto di sé stesso un tipo di dotto e di filosofo al quale molti matematici del suo tempo, per inconsapevole simpatia, cercavano di avvicinarsi senza raggiungerlo.

* * *

Il movimento scientifico, e nel tempo stesso i rapporti della scienza con la vita, e quelli del pubblico con gli uomini di scienza, sono profondamente cambiati negli ultimi decenni; le cause di ciò sono facili a comprendere, gli effetti ne sono palesi.

Nuove invenzioni, la cui eco si è rapidamente sparsa dappertutto, ed i cui benefici effetti si sono profondamente fatti sentire in una gran cerchia di persone, hanno influito su tutte le manifestazioni della vita. La scienza quindi, e specialmente le matematiche e la fisica, sono andate sempre più divulgandosi, ed il pubblico attende da esse risultati sempre nuovi e sempre più utili. Forse, si è giunti ad avere una fiducia, in queste discipline, superiore alla loro stessa intrinseca potenza.

Lo scienziato, che restava ancor pochi anni fa rinchiuso e quasi nascosto nel suo studio o nel suo laboratorio, viene oggi in contatto continuo con altri dotti e col pubblico; è assalito da ogni parte da richieste e purtroppo è sollecitato a rispondere ancor prima che una esatta risposta sia maturata nel suo pensiero. I congressi e le riunioni scientifiche si sono moltiplicati; alle lezioni accademiche si sono aggiunte le conferenze popolari e dalle une e dalle altre il pubblico attende l'ultima parola della scienza.

Ma non si ha più il tempo di aspettare: la vita moderna affrettata e tumultuosa ha invaso i tranquilli rifugi dei dotti. Mentre nei secoli scorsi si pubblicavano grossi volumi, che sintetizzavano il pensiero di una intera vita di studio, oggi i giornali scientifici domandano comunicazioni su lavori che si vengono svolgendo; i rendiconti delle accademie pubblicano, in succinte note, scoperte appena intraviste, e nei congressi si dà notizia di ciò che non si è ancor fatto, si espone ciò che si spera di trovare, si parla di ciò che non si avrebbe mai coraggio di scrivere.

Questo movimento ha creato uno stato d'animo particolare negli uomini di studio, ne ha trasformato la vita, il modo di lavorare e perfino di pensare.

La vita scientifica moderna, che ho rapidamente tratteggiato, presenta grandi vantaggi in quanto il lavoro va diventando in gran parte collettivo, le energie dei singoli scienziati si sommano, le scoperte s'incalzano, l'emulazione sospinge gli studiosi, il cui numero si accresce di giorno in giorno. Ma quanti inconvenienti di fronte a questi vantaggi! Quanto lavoro sottile e minuzioso si perde! Quella pazienza che per BUFFON si identificava col genio stesso, è forze stata soffocata nel tumulto dell'ora presente?

* * *

POINCARÉ fu uno scienziato moderno in tutta l'estensione del termine. Tutti i congressi e i convegni di studiosi ne intesero la parola; la maggior parte dei giornali scientifici ebbero da lui memorie e scritti; le università di Europa e di America ascoltarono le sue letture e le sue conferenze.

Un lavoro così intenso ed assiduo genera fatalmente in un organismo debole un pericoloso sovraccarico intellettuale: quello che forse ha condotto POINCARÉ alla tomba. Il lavoro scientifico calmo e sereno è invece un riposo per lo spirito, giacché la soddisfazione dei risultati nuovi che si scoprono improvvisamente, come un bel panorama allo svolto d'un sentiero di montagna, è un sollievo alla fatica della ricerca, e le difficoltà sostenute nell'approfondire un problema sono spesso largamente compensate da soluzioni che scaturiscono quando meno ci si pensa.

Questo lavoro, non molestato da estranee sollecitazioni, che EULERO e LAGRANGE hanno conosciuto, può paragonarsi ad un viaggio di piacere in un paese pittoresco, mentre quello imposto dalle conferenze pubbliche e dalle lezioni, o richiesto dai giornali ad epoca fissa, stanca ed irrita come un viaggio lungo e rapido attraverso un paese del quale sfuggono le bellezze e le attrattive.

Io credo che anche uno spirito così riccamente dotato, come quello di POINCARÉ, il quale possedeva tutte le virtuosità dell'uomo di scienza e dell'uomo di lettere, doveva provare un senso di stanchezza, talora una vera spossatezza davanti alla massa di lavoro, che si accumulava senza tregua, per anni ed anni, e che diventava ogni giorno più incalzante ed intenso.

Ma era questa una necessità della vita moderna alla quale uno scienziato celebre, come POINCARÉ, popolare fra i matematici, fisici e filosofi, non poteva sottrarsi. Forse egli ha considerato come un dovere del suo genio verso l'umanità, quello di divulgare i suoi pensieri senza nasconderne alcuno e perciò egli ha prodigato liberalmente le sue idee, anche le più intime e fondamentali, come un gran signore, che essendo possessore d'un immenso patrimonio, è sicuro, per quanto spenda, di non esaurirlo mai.

Il POINCARÉ non ha mai esitato fra il desiderio di far conoscere le sue scoperte ad un largo pubblico ed il timore di esporre risultati prematuri: un intuito eccezionale lo preservava dagli errori. Egli ha sempre comunicato i suoi trovati non celando neppure i suoi metodi, senza lasciarsi allettare da quell'arte sottile ed ingegnosa di esporre i risultati nascondendo la via per la quale ci si è giunti, ch'era così cara agli antichi e che è sempre così tentatrice. Né si è mai fermato a perfezionare le sue scoperte e a dar loro forma sistematica e definitiva.

Eppure, quando si è ottenuto qualche nuovo risultato, è così piacevole fermarsi a considerarlo da ogni lato guardandolo sotto nuovi aspetti, traendone le più variate applicazioni. Ma POINCARÉ ha resistito a tutte queste tentazioni e, sacrificando quelle soddisfazioni dello studioso ad un alto ideale, ha sempre proceduto innanzi. Non venne mai per lui il tempo di occuparsi dei particolari di questioni già trattate; anzi se ne astenne di proposito determinato; l'insieme era tutto, secondo il suo modo di vedere, il particolare non aveva alcun valore.

Questa foga incessante ha dato al suo stile nervoso un'impronta personale che lo caratterizza fra tutti: egli è fra gli scienziati come un impressionista fra gli artisti. Forse perciò è impossibile paragonare POINCARÉ ad altri studiosi anche dei più recenti.

Certo il suo nome non rimane legato alla creazione di teorie universali quali quelle della gravitazione e dell'elettrodinamica, che resero immortali i nomi di NEWTON, di AMPÈRE e di MAXWELL. Nella immensa varietà di metodi ch'egli ha senza posa inventati ed applicati, ve n'è alcuno paragonabile a quelli per cui vanno celebri ARCHIMEDE e LAGRANGE? Ci vorrà molto tempo per mettere in luce tutto quello che è contenuto nelle sue opere e per poter discernere quali siano i germi più fecondi.

Ma, se si domanda sin da oggi, all'indomani della sua morte, a qual livello si deve porre il suo genio, si può rispondere ch'esso raggiunge i culmini ove aleggiano i grandi spiriti dell'umanità. Vi è una analisi, una fisica matematica ed una meccanica di POINCARÉ che non saranno mai dimenticate.

La sua fama durante la vita è stata enorme; pochi uomini di scienza e pochissimi matematici ebbero una celebrità pari alla sua. Si potrebbe trovarne la spiegazione osservando che, come io diceva poco fa, il suo spirito vibrava all'unisono e nella stessa fase con lo spirito della sua epoca. Taluni dei più grandi scienziati hanno lavorato per un impulso interno, senza curarsi di coloro che li circondavano e sono stati disconosciuti, perché il tono della loro voce non si accordava con quello dei loro contemporanei, sicché le note emesse hanno risonato in epoche posteriori.

Non vi è cosa più ardua che prevedere quale sarà la fama avvenire d'uno scienziato, dacché la storia ha dato troppe smentite alle facili previsioni.

Quante volte ciò che ha suscitato ieri l'ammirazione ci è oggi indifferente!

Ma è sicuro che la voce di POINCARÉ si prolungherà nei secoli. Egli ha trattato un numero così grande di questioni che molti dovranno lavorare per sviluppare ciò che egli ha iniziato e per approfondire l'opera sua. Essa sarà una preziosa miniera per i posteri, ed allora soltanto se ne potrà valutare la ricchezza.

* * *

Le precedenti considerazioni valgono a giustificare i criteri che ho seguito in questo studio. Non essendo possibile riassumere in modo adeguato l'intera opera di POINCARÉ e porgere una sintesi completa della sua mente e della sua mirabile attività, io tenterò di mettere in luce un piccolo numero delle sue scoperte, cercando di tracciarne le linee principali e di fissare il posto che occupano nella storia della scienza contemporanea. Chiedo venia se ricordo fatti conosciuti e se accenno a nozioni elementari, giacché non potendo essere completo desidero almeno di essere chiaro.

Spero che si comprenderà la scelta che ho fatta dei lavori di POINCARÉ nell'intento di assumere esempi dai differenti rami delle matematiche, per seguire il corso delle maggiori concezioni uscite dalla sua mente.

* * *

Comincerò da uno studio che, per primo, pose il POINCARÉ in luce fra i matematici e rivelò d'un tratto il suo talento di analista. Intendo parlare della teoria delle equazioni differenziali lineari e delle funzioni fuchsiane [1].

La teoria delle funzioni fu la conquista più importante fatta dall'analisi nel secolo scorso; io non ho esitato nel 1900 al Congresso Matematico di Parigi a chiamare il secolo XIX il secolo della teoria delle funzioni [2]. Ed infatti l'idea intuitiva di funzione, che tutti posseggono ed è strettamente legata al concetto elementare di quantità variabili secondo leggi determinate, si è largamente sviluppata e precisata nel periodo moderno della matematica ed è penetrata poco a poco in tutti i rami di questa scienza.

La nozione di funzione fu accolta dapprima dalla geometria analitica e dall'algebra; LAGRANGE fu il primo a trattarne in generale ed in modo sistematico nella celebre opera sulla teoria delle funzioni analitiche in cui si trovano i germi delle future scoperte [3]. Però per costituire la teoria in modo definitivo e per giungere a riconoscere le proprietà più riposte ed interessanti delle funzioni, fu necessario estendere il campo delle variabili considerando anche i loro valori immaginari e complessi: studiare una funzione senza

(1) Vedi *Oeuvres* de HENRI POINCARÉ, Tome II (il solo pubblicato), Paris, Gauthier Villars 1916.

(2) Vedi BETTI, BRIOSCHI, CASORATI, *troisanalystes italiens et trois manières d'envisager les questions d'analyse* [in questo vol.: I, pp. 1-11].

(3) Vedi Oeuvres de LAGRANGE, T. IX. *Théorie des fonctions analytiques*; T. X, *Calcul des fonctions*, Paris, Gauthier Villars 1881, 1884.

considerarne i valori immaginari e complessi sarebbe in molti casi un voler conoscere un libro guardando quello che è scritto sul dorso senza leggerne i fogli interni. CAUCHY, RIEMANN e WEIERSTRASS ci hanno insegnato a leggere il libro misterioso e col loro genio ce ne hanno svelato i segreti più riposti.

Ma come spesso accade non si può costituire una teoria generale se prima non si è studiato profondamente qualche caso particolare. È sempre necessaria una guida per orientarsi in una regione nuova ed inesplorata. La guida che si ebbe nella teoria delle funzioni fu lo studio particolareggiato delle funzioni ellittiche. A svolgere questo ultimo ramo della analisi si era stati condotti da numerose questioni di algebra, di meccanica, di geometria e di fisica, ed esso veniva subito dopo quello delle funzioni trigonometriche che erano state collegate da EULERO ai logaritmi e alla funzione esponenziale.

La storia delle funzioni ellittiche è ben nota ed è stata ripetutamente scritta costituendo essa un ramo di speciale interesse della storia delle matematiche. Si sa quali sorprese hanno riservato i passi fatti nel suo successivo svolgimento, passi ricollegati ciascuno a qualche meravigliosa scoperta. La teoria generale delle funzioni e tutti i suoi rami particolari svoltisi di poi furono modellati sullo stampo della teoria delle funzioni ellittiche, e così quella delle funzioni fuchsiane che costituisce il ramo più moderno, ne riproduce, secondo il piano immaginato dal POINCARÉ, le linee fondamentali.

I principii sui quali è costituita la teoria delle funzioni ellittiche sono tre: il teorema d'addizione, il principio dell'inversione, e quello della doppia periodicità.

Chiunque conosca gli elementi della trigonometria sa che esistono formule algebriche semplicissime per calcolare il seno e il coseno della somma di due archi mediante i seni e i coseni di questi. Anche il teorema d'addizione delle funzioni ellittiche ha assunto nella sua espressione definitiva una forma analoga. Ma non si è presentato così fin da principio. FAGNANO, geometra italiano di molto ingegno, che viveva in una piccola città delle Marche, lungi da ogni movimento scientifico, lo riconobbe da prima studiando le proprietà della *Lemniscata* di BERNOULLI.

Ma fu necessario il genio di EULERO per porre in luce la vera natura di questa proprietà in tutta la sua estensione.

L'altro principio più nascosto, quello della doppia periodicità, non si rivelò che molto più tardi. La periodicità delle funzioni trigonometriche discende immediatamente dalla loro stessa definizione: la doppia periodicità delle funzioni ellittiche non fu scoperta se non quando ABEL e JACOBI stabilirono il principio della inversione di queste funzioni, vale a dire se non dopo la profonda rivoluzione che essi suscitarono in questo campo di studi. Mentre LEGENDRE credeva che la teoria delle funzioni ellittiche avesse oramai raggiunto la sua massima perfezione, non se ne era ancora iniziata la parte più brillante.

ABEL e JACOBI continuarono poi nella via che avevano tracciato, e andando al di là della teoria delle funzioni ellittiche, costituirono la teoria generale degli integrali delle funzioni algebriche basandola sul teorema di

ABEL che estende il teorema di addizione, sul principio generale dell'inversione che JACOBI portò alla sua massima estensione, sulla periodicità multipla e sull'impiego delle funzioni che vennero chiamate jacobiane.

Un nuovo principio d'inversione, una concezione nuova della periodicità, un tipo rinnovato di funzioni jacobiane vennero in un sol tratto create dal POINCARÉ. In questo consiste sostanzialmente la nuova teoria da lui costituita delle funzioni che volle chiamare fuchsiane, la quale è intimamente legata alla integrazione delle equazioni differenziali lineari.

L'integrazione delle equazioni differenziali è il problema più importante del calcolo infinitesimale dopo quello delle quadrature. Le più semplici di esse sono le equazioni lineari. Ne abbiamo subito un esempio immaginando una relazione di primo grado fra lo spostamento, la velocità e l'accelerazione d'un mobile e supponendo che i coefficienti dell'equazione siano funzioni del tempo. L'equazione particolare così ottenuta è del secondo ordine perché la velocità è la derivata prima, mentre l'accelerazione è la derivata seconda dello spostamento. Si possono però trovare facilmente equazioni differenziali lineari nelle quali compaiono derivate di ordine superiore.

LAGRANGE ed altri matematici le avevano studiate, ma si deve a GAUSS di avere penetrato a fondo le proprietà d'una classe speciale di esse ricollegandola alla sua serie ossia alla *funzione ipergeometrica*. RIEMANN, sia in lavori da lui pubblicati, sia in altri rimasti inediti, era arrivato ancora più lungi e sembra che WEIERSTRASS fosse in possesso di molti resultati che non diede mai alla luce. Ma si deve a FUCHS di aver richiamato l'attenzione del mondo scientifico sul nuovo modo di considerare le equazioni differenziali lineari, con un articolo apparso nel 1866 [4]. Per farsi un'idea del punto a cui giunse FUCHS si può paragonarlo a quello al quale era arrivato LEGENDRE nel campo delle funzioni ellittiche prima che apparissero i lavori di ABEL e di JACOBI.

Per opera del POINCARÉ la teoria degli integrali delle equazioni differenziali lineari ebbe uno svolgimento che può in certo modo aver riscontro con quello della teoria delle funzioni ellittiche dopo LEGENDRE; svolgimento del tutto nuovo, giacché solo un primo passo era stato fatto precedentemente in questa via collo studio della funzione modulare.

Gli integrali delle funzioni algebriche si riproducono con l'aggiunta di costanti allorché si gira intorno ai punti singolari. Da ciò deriva la periodicità delle funzioni ellittiche. In modo analogo l'insieme degli integrali fondamentali di un'equazione differenziale lineare a coefficienti algebrici subisce una trasformazione lineare allorché si gira attorno ad un punto singolare. Occorreva far scaturire da questa notevole proposizione le proprietà delle funzioni che dovevan dedursi dalle equazioni differenziali lineari con un processo simile a quello della inversione degli integrali ellittici.

Se l'equazione è del secondo ordine, il rapporto di due integrali fondamentali subisce una sostituzione lineare allorché si percorre un cammino

(4) «Giornale di Crelle», T. 66.

chiuso attorno ad una singolarità. Dunque la variabile indipendente, considerata come funzione del rapporto di due integrali, deve essere invariante per certe sostituzioni lineari di questo rapporto. La proprietà che conveniva sostituire alla periodicità era così trovata e nel tempo stesso anche il principio d'inversione.

POINCARÉ ha preso come punto di partenza questa idea fondamentale ed interpretando geometricamente le sostituzioni lineari ha cominciato lo studio di quelle fra esse facenti parte di un medesimo gruppo discontinuo. Infatti era evidente che dovevano escludersi i gruppi continui di sostituzioni, perché le funzioni monodrome, invarianti per gruppi continui di sostituzioni della variabile, debbono essere costanti.

È noto dalla geometria che le sostituzioni lineari corrispondono a trasformazioni del piano per raggi vettori reciproci composte con riflessioni. Queste trasformazioni hanno precipua importanza nella geometria non euclidea come vari matematici, tra cui BELTRAMI, hanno dimostrato. POINCARÉ distingue due specie di gruppi: quelli che chiama kleiniani i quali son i gruppi discontinui più generali, e i gruppi fuchsiani.

Questi ultimi lasciano fisso l'asse reale, ma composti con una nuova sostituzione mantengono invariabile un cerchio chiamato da POINCARÉ fondamentale. In tale modo questi riconduce la ricerca di tutti i gruppi discontinui alle possibili divisioni regolari del piano e dello spazio. Egli classifica le sostituzioni fuchsiane in diverse famiglie e calcola tutti i gruppi corrispondenti.

Bisogna ora costruire effettivamente le funzioni che sono invariabili per le sostituzioni di questi gruppi; cioè le funzioni fuchsiane.

JACOBI era giunto, partendo dalle funzioni ellittiche, a costruire la funzione θ ossia quella funzione che venne denominata Jacobiana. Senza essere periodica essa possiede ciò che si è convenuto di chiamare la periodicità di terza specie, perché aumentando la variabile d'un periodo la funzione si riproduce moltiplicata per esponenziali. Ma JACOBI aveva anche mostrato che la maniera più semplice di trattare la teoria delle funzioni ellittiche consiste nel definire dapprima la funzione θ, costruendola mediante una serie, e nel trovarne poi le proprietà con procedimento algebrico. Una volta calcolata la funzione θ, le funzioni doppiamente periodiche, ossia le funzioni ellittiche, si ottengono formando semplici rapporti.

POINCARÉ seguì un cammino analogo per avere le funzioni fuchsiane: cominciò dal calcolare le serie θ–fuchsiane e determinò i cambiamenti ch'esse subiscono per sostituzioni lineari della variabile appartenenti ad un gruppo fuchsiano. Formando poi i rapporti delle funzioni θ–fuchsiane ne riconobbe la invariabilità allorché si assoggetta la variabile indipendente alle sostituzioni del gruppo stesso.

In tal modo vennero ottenute le nuove trascendenti (le funzioni fuchsiane) la cui introduzione nella matematica creò un ramo nuovo dell'analisi. Noi non entreremo in particolari sulle loro proprietà, né sui legami loro colle funzioni abeliane e con altre trascendenti e nemmeno parleremo delle numerose questioni di aritmetica, di algebra e di analisi che più o meno direttamente vi si ricollegano. Ma ci conviene accennare alla connessione fra le funzioni fuchsiane e gli integrali delle equazioni differenziali lineari a coefficienti algebrici.

Il procedimento che il POINCARÉ impiegò per ottenere questa connessione è analogo a quello col quale si collegano gli integrali abeliani alle funzioni θ generalizzate ossia alle θ–abeliane. Perciò egli ricavò le funzioni z–fuchsiane dalle fuchsiane ed espresse mediante queste trascendenti gli integrali che voleva calcolare.

Si è più volte domandato se le funzioni fuchsiane hanno avuto qualche applicazione: ma si può replicare con un'altra domanda: quale importanza deve attribuirsi alle applicazioni d'una teoria matematica? È necessario per saggiare una teoria vederla adoperata in meccanica o in fisica? La teoria delle coniche che i Greci portarono a così mrabile perfezione ebbe forse il suo posto d'onore nella geometria solo il giorno in cui si è creduto che i pianeti descrivessero delle coniche intorno al sole? Non costituiva quella dottrina geometrica un superbo monumento artistico ed una gloria del pensiero umano indipendentemente da ogni sua applicazione?

Ma lasciamo da parte questa discussione che ci porterebbe troppo lungi dalla nostra esposizione, la quale deve abbandonare i lavori di analisi del POINCARÉ, per passare a quelli da lui compiuti in altri rami delle matematiche.

* * *

Vi sono due specie di fisica matematica che per antica consuetudine si considerano costituenti un sol ramo di scienza e s'insegnano di solito nei medesimi corsi, sebbene esse siano intrinsecamente diverse. Anzi quelli che fan più caso dell'una sdegnano un po' l'altra.

Un'analisi sottile e delicata è penetrata in vari rami della fisica cercando risolvere in maniera completamente rigorosa alcuni problemi fondamentali e sforzandosi di stabilire proposizioni (come i teoremi di esistenza) le quali dal punto di vista matematico e logico formano la base delle varie teorie. Quest'analisi può dirsi costituire la fisica matematica della prima specie.

Io credo di non ingannarmi affermando che molti fisici considerano questa flora matematica come piante parassite del grande albero della filosofia naturale. Ma questo disprezzo è esso giustificato? Nell'evoluzione futura della fisica matematica queste ricerche acquisteranno molto probabilmente importanza sempre maggiore.

Se esponete ad un principiante le proposizioni più elementari di EUCLIDE, egli non si meraviglierà certo degli enunciati, tanto grande è la loro semplicità, ma sarà sorpreso della necessità di dimostrarle, non avendo egli ancora raggiunto un grado di maturità sufficiente per dubitarne. Nello stesso modo certi teoremi che si dimostrano in fisica matematica producono in alcuni un'analoga sorpresa.

Noi non conosciamo abbastanza l'evoluzione preeuclidea della geometria, ma vediamo soltanto la geometria greca nel grado di perfezione a cui EU-

CLIDE la condusse. Ora è molto probabile che, nel costituirsi della geometria, si sia attraversato un periodo nel quale un disprezzo analogo a quello cui sopra alludemmo si è manifestato, seguito poi da altri periodi nei quali esso è andato poco a poco scomparendo.

Ma vi è un'altra fisica matematica intimamente e inseparabilmente legata alla considerazione intrinseca dei fenomeni naturali, tanto che non si potrebbe concepire alcun progresso nel loro studio senza l'aiuto portato dall'analisi matematica che ne costituisce l'essenza. È possibile pensare alla teoria elettromagnetica della luce, alle esperienze di HERTZ, al telegrafo senza fili, senza ricordare che fu l'analisi matematica di MAXWELL da cui tutto questo insieme di dottrine, di ricerche e di invenzioni è scaturito?

Il POINCARÉ dominò le due specie di fisica matematica: egli era un analista senza pari e possedeva il genio proprio del fisico. Noi cercheremo fra i suoi lavori la prova di ciò.

La memoria di POINCARÉ del 1894 avente il titolo: *Sulle equazioni della fisica matematica* pubblicata nei Rendiconti di Palermo [5] è uno dei suoi scritti più importanti. L'autore ricorda in una breve introduzione i lavori di alcuni suoi predecessori; ma la questione ha una lunga storia che io riporterò qui succintamente.

Comincio dall'osservare che il lavoro ha un carattere schiettamente analitico e perciò appartiene alla fisica matematica della prima specie. Donde viene infatti l'interesse della ricerca a cui consacrarono i loro sforzi tanti matematici? Nessun fisico avrebbe potuto dubitare che una membrana elastica deve dare una infinità di suoni di differenti altezze costituenti una scala infinita discontinua che dal tono più grave giunge ai toni più acuti. L'esempio dei suoni prodotti da una corda o da una verga elastica era sufficiente per far intuire ciò che si sarebbe trovato passando dal caso di una dimensione a quella di due dimensioni, ed anche ciò che si sarebbe trovato considerando un corpo vibrante a tre dimensioni. Ma per i matematici era necessario dare una prova rigorosa di queste verità e la dimostrazione ne era molto difficile e nascosta. Né si deve credere che la ricerca analitica avesse lo scopo di calcolare effettivamente le altezze dei suoni: ogni applicazione pratica era lungi dal pensiero dei matematici i quali avevano di mira soltanto il lato logico della questione. L'interesse veniva aumentato dalla difficoltà, onde la questione appassionava vivamente le menti dei matematici.

Ci si poteva render conto del resultato a cui si doveva giungere non solamente ricorrendo all'analogia sopra indicata, ma mediante un processo induttivo di singolare importanza filosofica.

LAGRANGE aveva riservato un intero capitolo ed uno dei più belli della sua meccanica analitica alla teoria dei piccoli movimenti [6]. In esso l'autore riesce ad eseguire completamente la integrazione ottenendo formule di mira-

(5) « Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo », T. VIII.

(6) Oeuvres de LAGRANGE, Tome XI, Seconde partie, Section VI. Paris, Gauthier Villars 1888.

bile semplicità. I periodi di vibrazione d'un numero finito di molecole collegate da vincoli arbitrari, e oscillanti attorno ad una posizione di equilibrio, stabile, resultano le radici d'una equazione algebrica.

Ora, ogni sistema continuo può concepirsi come un insieme di infinite molecole disposte in uno spazio a una, due o tre dimensioni; secondoché si consideri una corda, una membrana o un corpo solido. Basta dunque sostituire al numero finito di molecole di LAGRANGE l'insieme adesso considerato, per estendere il suo risultato ai vari casi. Questo processo mostra in modo chiaro e suggestivo l'andamento del fenomeno, ma non costituisce da solo, senza ulteriore sviluppo, una dimostrazione atta a soddisfare i matematici.

La questione analoga a quella della teoria del suono, ora considerata, si presenta in altri casi della fisica matematica: per esempio, nella teoria delle vibrazioni elettromagnetiche ed in quella del calore.

Un solo risultato era stato ottenuto in maniera sicura e completamente soddisfacente fin dal 1885, ed era la dimostrazione analitica dell'esistenza del suono fondamentale ossia del primo armonico, il quale corrisponde alla mancanza di nodi e di linee nodali nella membrana vibrante. Ad esso era giunto SCHWARZ studiando la teoria delle superficie minime, cioè di quelle in cui si dispongono in equilibrio le lamine liquide sottili dotate di tensione superficiale, come quelle d'acqua saponata [7]. Nel problema di calcolo delle variazioni al quale si era così condotti, conveniva distinguere i massimi dai minimi e per conseguenza considerare la questione seguente: una funzione di due variabili si annulla al contorno di un campo a due dimensioni; il rapporto del suo parametro del secondo ordine al suo valore è una costante negativa in tutti i punti del campo. Qual'è il minimo valore assoluto di questo rapporto? Ora poiché il problema dei suoni dovuti alle vibrazioni d'una membrana consiste nel trovare tutti i valori di questo rapporto, così il problema approfondito da SCHWARZ non ne costituisce che un caso particolare.

Si trattava dunque d'andare innanzi e di trovare tutti gli altri valori successivi al minimo di SCHWARZ. PICARD aveva scoperto delle notevolissime proprietà e dimostrato l'esistenza del secondo armonico. POINCARÉ aveva già attaccata la questione in un lavoro pubblicato nel giornale americano di matematica, ma in questo lavoro egli fu ben lungi dall'ottenere la soluzione generale.

Lo scopo venne pienamente raggiunto in quello che ci proponiamo di esaminare.

Il teorema di LANGRANGE faceva intuire che i differenti suoni avrebbero corrisposto alle radici di una funzione trascendente e perciò POINCARÉ si propose la costruzione di una di tali funzioni o per dir meglio cercò provarne l'esistenza. A tal fine egli aggiunse un termine alla sua equazione e così, quella che egli prese a considerare era costituita da tre termini: il primo,

(7) «Acta societatis scientiarum Fennicae», T. XV.

il parametro differenziale di secondo ordine; il secondo, la funzione incognita moltiplicata per una nuova variabile indipendente; l'ultimo, una funzione arbitraria.

Noi chiameremo questa equazione, l'equazione ausiliaria: l'equazione primitiva si otterrà sopprimendone l'ultimo termine. POINCARÉ calcola la funzione arbitraria componendo linearmente le funzioni mediante coefficienti costanti indeterminati e sviluppa la funzione incognita (nulla al contorno) in una serie di potenze della nuova variabile introdotta, resultato che egli raggiunge impiegando le funzioni di GREEN. Egli ottiene così una funzione analitica il cui sviluppo è valido nell'interno d'un cerchio e che può calcolarsi come rapporto di due funzioni, una delle quali (il denominatore) è indipendente dalle variabili d'integrazione. Con un procedimento di mirabile sottigliezza mostra che si posson scegliere i coefficienti indeterminati, di cui parlammo sopra, in modo che queste due funzioni siano intere.

Allora sostituisce alla funzione incognita il rapporto di queste funzioni e dà forma intera alla equazione moltiplicandone ambo i membri per il denominatore. Si vede subito che allorquando questo si annulla l'equazione ausiliaria si riduce all'equazione primitiva; perciò tutte le radici del detto denominatore danno i valori che si cercano. Niente dunque di più semplice di questo processo che si è potuto riassumere così brevemente. Ma quale finezza di pensiero e quale fecondità di risultati in esso si racchiude!

Io non ho esposto che la prima parte della memoria di POINCARÉ: lo studio delle radici, quello delle funzioni che risolvono l'equazione primitiva, le loro proprietà, gli sviluppi che ne seguono, le applicazioni ai problemi acustici e a quelli della teoria del calore, ne costituiscono le parti successive, e formano un insieme di risultati di fondamentale importanza che vennero poi impiegati da altri nello studio di numerosi problemi analoghi.

Questa classica memoria è uno dei più bei monumenti innalzati dal genio di POINCARÉ; però nell'evoluzione successiva della scienza si sono aperte altre vie per studiare gli stessi problemi giovandosi delle equazioni integrali. Noi non entreremo in questi sviluppi, oggi ben conosciuti, ma intraprenderemo l'esame di altre questioni e di altri lavori del POINCARÉ.

* * *

Pochi anni fa, in un certo periodo, si è forse potuto sospettare che le teorie atomiche e corpuscolari declinassero, giacché taluni pensavano di poter tutto spiegare in natura col continuo. In fisica matematica le equazioni differenziali alle derivate parziali dei vari problemi si ottenevano abbandonando le ipotesi molecolari e nella chimica stessa si insinuava l'idea dell'inutilità degli atomi.

Ma le leggere nubi che sembravano offuscare le teorie corpuscolari si dileguarono rapidamente e le teorie stesse sono risorte vittoriose illuminando di più vivida luce l'intero campo della filosofia naturale. Fu anzi necessario sviluppare ulteriormente le vecchie teorie atomiche. L'elettricità si dovette ritenere di natura corpuscolare e, poco a poco, in ogni ramo sono sorti nuovi atomi: così l'energia raggiante diede luogo alla teoria dei *quanta*. I fatti via via scoperti si accordavano mirabilmente colle nuove teorie ed esse divennero alla lor volta sorgente ricca e feconda di altre scoperte, tanto che il credito loro venne aumentando di giorno in giorno. E si fece talmente solido che, quando fatalmente si presentarono delle contraddizioni, non si pensò a liberarsi dai nuovi concetti, ma al contrario non si esitò a sacrificare antichi principî ritenuti per l'innanzi come indiscutibili.

Poco a poco quelle teorie classiche che sembravano poggiate su basi incrollabili furono scosse; la meccanica che, dall'epoca di GALILEO e di NEWTON, si considerava come la scienza più solida è stata sconvolta, ed una nuova meccanica, quella della *relatività*, si è costituita. Ma già oggi la prima forma di essa appare una meccanica invecchiata ed una nuova relatività spunta sull'orizzonte scientifico.

POINCARÉ ebbe larga parte nella trasformazione dell'antica fisica, e nella creazione della più recente. La sua critica e la sua analisi penetrarono e s'infiltrarono nelle concezioni moderne. Egli si appassionò per queste questioni fino agli ultimi suoi giorni e dedicò vari articoli per sviscerarle e talune delle sue ultime conferenze per volgarizzarle. Perciò, come POINCARÉ può annoverarsi fra i creatori della prima specie di fisica matematica, può anche dirsi maestro nella seconda.

* * *

Dopo le scoperte di MAXWELL ed i lavori di HERTZ l'elettrodinamica dei corpi in riposo non presentò più serie difficoltà, mentre quella dei corpi in moto diede luogo a numerose discussioni. L'ipotesi proposta da HERTZ per passare dal caso della quiete a quello del movimento dovette abbandonarsi, perchè in contraddizione coi dati sperimentali, i quali invece confermarono la teoria di LORENTZ.

La celebre scoperta di ZEEMAN fu un brillante trionfo di quest'ultima perché verificò lo sdoppiamento delle righe dello spettro in un campo magnetico che i calcoli di LORENTZ facevano prevedere.

La teoria di LORENTZ fu la sorgente di nuovi concetti, perché diede origine alla *meccanica della relatività*. Infatti una questione fondamentale si presentò subito, se era cioè possibile mettere in evidenza il moto assoluto dei corpi o piuttosto i loro movimenti per rapporto all'etere mediante fenomeni ottici o elettromagnetici. In altri termini si fu condotti a verificare se i fenomeni ottici o elettromagnetici possono servire ad individuare il moto assoluto della terra.

Se si tien conto soltanto della prima potenza dell'aberrazione il moto della terra non ha influenza sui fenomeni stessi come l'esperienza verifica abbastanza facilmente, mentre la teoria di LORENTZ spiega perfettamente questo resultato negativo.

Ma un'esperienza celebre di MICHELSON e MORLEY nella quale si poteva tener conto anche di termini dipendenti dal quadrato dell'aberrazione diede pure, come è ben noto, resultato negativo.

In una memoria classica del 1904 LORENTZ mostrò che si poteva dar ragione anche di questo risultato coll'ipotesi che tutti i corpi siano soggetti ad una contrazione nel senso del moto terrestre (8). Questa memoria fu il punto di partenza delle successive ricerche e dei lavori di POINCARÉ, di EINSTEIN e di MINKOWSKI.

POINCARÉ nel 1905 pubblicò nei Comptes Rendus de l'Académie des Sciences una succinta esposizione delle sue idee mentre un'estesa memoria di lui apparve poco dopo nei Rendiconti di Palermo (9).

Base fondamentale di tutte queste ricerche è la negazione aprioristica di esperienze atte a mettere in evidenza il moto assoluto, ed essa costituisce il *postulato della relatività*. LORENTZ aveva mostrato che quelle trasformazioni alle quali si è dato il suo nome non alterano le equazioni di un mezzo elettromagnetico. Due sistemi: l'uno immobile, l'altro in traslazione, sono così l'immagine esatta l'uno dell'altro, per cui si può imprimere ad ogni sistema un moto traslatorio senza che nessuno dei fenomeni apparenti venga modificato.

Nella teoria di LORENTZ un elettrone sferico si contrae nella direzione del moto e assume la forma di un ellissoide schiacciato longitudinalmente rimanendo invariati gli assi trasversali. POINCARÉ ha trovato la forza che spiega contemporaneamente la contrazione di un asse e la invariabilità degli altri due la quale consiste in una pressione esterna costante agente sull'elettrone deformabile e compressibile; il lavoro di questa forza è proporzionale alla variazione di volume dell'elettrone. In tal modo se l'inerzia e tutte le forze fossero di origine elettromagnetica il postulato della relatività potrebbe essere stabilito rigorosamente.

Ma, secondo LORENTZ, tutte le forze, qualunque ne sia l'origine, sono affette dalla sua trasformazione nello stesso modo delle forze elettro-magnetiche. Come dovremo dunque modificare le leggi della gravitazione in virtù di questa ipotesi?

POINCARÉ trova che la propagazione della gravitazione deve farsi con la velocità della luce, ma si poteva dubitare, in seguito alle classiche ricerche di LAPLACE, che ciò fosse in contraddizione con le osservazioni astronomiche. Questo dubbio può dissiparsi, perché, secondo il POINCARÉ, vi è un compenso che toglie ogni contraddizione. Egli fu così condotto a proporsi ed a risolvere la seguente questione: trovare una legge che mentre soddisfa alla condizione di LORENTZ si riduce alla legge di NEWTON allorché i quadrati delle velocità degli astri sono trascurabili rispetto al quadrato della velocità della luce.

(8) «Amsterdam Proceeding», 1903-1904, p. 809.

(9) *Sur la Dynamique de l'électron* par M. H. POINCARÉ, «Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo», T. 21, 1906.

Tali sono i concetti fondamentali di POINCARÉ che colpirono subito per la loro profondità ed il loro interesse il mondo scientifico. Egli fece uso nella sua trattazione del principio della minima azione e della teoria dei gruppi di trasformazioni giacché le trasformazioni di LORENTZ formano un gruppo [10]. Ci basti di aver ricordati questi concetti. Essi hanno formato l'oggetto di tanti lavori scientifici e di tante conferenze popolari che sono ora universalmente noti e la loro importanza è ovunque apprezzata.

* * *

Noi finiremo coi lavori di meccanica del POINCARÉ, i quali costituiscono la parte della sua opera più difficile ad analizzarsi. Egli si è occupato di quasi tutti i rami della meccanica analitica: dei problemi di stabilità, di meccanica celeste, d'idrodinamica, del potenziale. Il problema dei tre corpi fu oggetto di numerose e celebri sue ricerche che sollevarono una profonda rivoluzione nei metodi classici. È ben noto che la memoria del POINCARÉ *sul problema dei tre corpi e sui problemi della dinamica* fu premiata nel 1889 nel concorso istituito dal re OSCAR di Svezia [11]. Questa memoria fu seguita da poderose opere del POINCARÉ fra cui ricordiamo i tre volumi sui nuovi metodi della meccanica celeste e le sue lezioni della Sorbona [12]. L'ultima opera didattica del POINCARÉ fu consacrata all'esposizione e alla discussione delle diverse ipotesi cosmogoniche [13].

Le idee fondamentali che lo guidarono nei problemi di astronomia matematica furono: la considerazione delle soluzioni periodiche, lo studio delle serie che risolvono il problema dei tre corpi, l'impiego degli invarianti integrali.

Le soluzioni periodiche del problema dei tre corpi si presentano allorché le loro mutue distanze sono funzioni periodiche del tempo. Alla fine di un periodo i tre corpi si trovano nelle stesse condizioni relative iniziali, giacché tutto il sistema non ha fatto che ruotare d'un certo angolo.

Il POINCARÉ è condotto a distinguere tre classi di queste soluzioni considerando le eccentricità e le inclinazioni. Egli esamina anche le soluzioni assintotiche che si avvicinano indefinitamente a quelle periodiche per valori infinitamente grandi, positivi o negativi del tempo.

Gli studi sulle soluzioni periodiche, oltre ad essere di notevole interesse teorico, hanno ancora importanti applicazioni pratiche. È facile comprendere che nei casi reali è poco probabile avere delle condizioni iniziali del moto tali da corrispondere a soluzioni periodiche; nondimeno prendendo una di

(10) Cfr. MARCOLONGO e BURALI FORTI, *Analyse Vectorielle générale* II. *Applications*, Cap. VI, Pavia 1913.

(11) Acta mathematica», T. 13, Stockholm 1890.

(12) *Les méthodes nouvelles de la Mécanique céleste par* H. POINCARÉ, Paris, Gauthier Villars 1892–1899. *Leçons de Mécanique céleste* professées a la Sorbonne par H. POINCARÉ, Paris, Gauthier Villars 1905–1910.

(13) *Leçons sur les hypothèses cosmogoniques* professées à la Sorbonne par H. POINCARÉ, Paris, Hermann 1911.

esse come punto di partenza si può giungere a studiare altre poco diverse dalle periodiche impiegando procedimenti di approssimazioni successive.

È ben noto che una bella applicazione di questo metodo alla teoria della luna era stata già fatta in modo originale da HILL.

La questione della divergenza delle serie della meccanica celeste ha grande importanza e si presentò subito come una delle questioni più interessanti delle matematiche. È possibile impiegare serie divergenti e per mezzo di esse giungere alla soluzione approssimata di problemi pratici? L'esempio della serie di STIRLING fa rispondere affermativamente a questa domanda. Serie analoghe si presentarono in meccanica celeste, ed il POINCARÉ dimostrò che esse possono fornire soluzioni sufficientemente approssimate per i bisogni pratici.

Il celebre teorema sulla non ulteriore esistenza di integrali uniformi, il quale stabilisce che il problema dei tre corpi non ha integrali uniformi, oltre quelli già da lungo tempo conosciuti, è uno dei risultati della teoria del POINCARÉ che ha maggiormente interessato i cultori della meccanica celeste.

Gl'invarianti integrali ebbero parte notevole nell'insieme di ricerche di cui parliamo. Essi sono espressioni (calcolate eseguendo quadrature sulle variabili delle equazioni differenziali) le quali restano costanti. Tali invarianti sono strettamente collegati al problema fondamentale della stabilità.

Ma non sarebbe possibile ricordare tutte queste teorie e tanto meno esporle in maniera succinta, né ci sono qui consentiti troppi lunghi sviluppi. Come noi abbiamo fatto per le memorie di analisi e per quelle di fisica matematica, così anche in meccanica cercheremo di approfondire una ricerca speciale del POINCARÉ atta a svelarci la potenza del suo genio e la sua mirabile originalità.

Quella che sceglieremo si collega da un lato alla idrodinamica, dall'altro alle questioni classiche di meccanica celeste e, come mostrò Sir GIORGIO H. DARWIN, alle più moderne ed interessanti teorie cosmogoniche.

Si tratta del problema dell'equilibrio d'una massa fluida rotante [14], questione che si è presentata fin dall'epoca stessa nella quale venne creata la teoria della gravitazione universale.

MAC LAURIN riconobbe per primo che l'ellissoide di rivoluzione è una forma di equilibrio e questo teorema è forse il più bel risultato apportato alla scienza da questo grande matematico.

JACOBI, con geniale intuizione, dubitò della necessità che la figura di equilibrio d'una massa fluida rotante dovesse essere simmetrica rispetto all'asse di rivoluzione, il che prima di lui era ritenuto come cosa evidente ed ottenne la soluzione del problema di equilibrio mediante ellissoidi a tre assi disuguali.

Ma i risultati di MAC LAURIN e di JACOBI sono soluzioni particolari del problema generale, il quale ne ha infinite altre. Inoltre è da osservare che le

(14) *Sur l'èquilibre d'une masse fluide animée d'un mouvement de rotation* par H. POINCARÉ, «Acta Mathematica», T. VII, Stokholm, 1885.

dette soluzioni si ottengono solo con una verifica a posteriori, mostrando cioè, che allorquando certe condizioni sono soddisfatte, gli ellissoidi verificano le leggi dell'equilibrio.

Prima di giungere alle ricerche del POINCARÉ, ricordiamo che THOMSON e TAIT avevano dimostrato nel loro trattato di filosofia naturale [15] che oltre gli ellissoidi esistono delle forme anulari di equilibrio ed avevano studiato la stabilità della massa fluida sia imponendo certi vincoli (come quello di aver forma simmetrica di rivoluzione, o di aver forma ellissoidale) sia sopprimendo qualsiasi vincolo.

L'idea feconda escogitata dal POINCARÉ fu quella degli *equilibri di biforcazione*. Consideriamo un sistema il cui stato dipenda da un parametro, per esempio una massa fluida animata da un moto di rotazione; in tal caso il parametro sarà la velocità angolare. Supponiamo che ad uno stesso valore di esso corrispondano diversi stati di equilibrio del sistema. Mutando questo valore cambiano pure le configurazioni o le figure di equilibrio e, può avvenire che avvicinandosi ad un certo limite, due di esse vengano a confondersi l'una nell'altra, ossia costituiscano una *forma unita*. Oltrepassando il valore limite possono presentarsi due casi. Le figure di equilibrio spariscono e ciò si esprime con linguaggio algebrico dicendo che divengono imaginarie: questo è il primo caso ed allora la forma unita si chiama una forma limite. Ma può accadere che, oltrepassando il valore limite, le due figure ricompariscano. Questo è il secondo caso ed allora si dice che la forma unita è una *forma di biforcazione*. Supponiamo che si possa rappresentare ogni singola figura di equilibrio con un punto d'un piano le cui coordinate sono il valore del parametro ed una variabile che individua la figura. Se facciamo variare il parametro si otterrà una curva, la quale, nel secondo caso, sarà costituita da due rami intersecantisi nel punto di biforcazione. Ora POINCARÉ ha scoperto un teorema di straordinaria importanza relativo alla stabilità delle figure corrispondenti ai vari punti dei due rami.

Supponiamo che il parametro si annulli nel punto di intersezione; se per i valori negativi di quello vi è stabilità sul primo ramo e instabilità sul secondo, il contrario avverrà per i valori positivi, cioè vi sarà instabilità sul primo ramo e stabilità sull'altro.

Ciò si enuncia dicendo che vi è scambio di stabilità fra i due rami al loro incrocio, e questa proposizione fu chiamata dal POINCARÉ il teorema dello *scambio di stabilità*.

Applichiamo ora questi risultati al problema della rotazione dei fluidi omogenei. Tanto nella soluzione di MAC LAURIN che in quella di JACOBI l'asse di rotazione è sempre l'asse minore dell'ellissoide e perciò i suoi rapporti con gli altri assi sono minori dell'unità, e sono uguali fra loro nel caso di MAC LAURIN, diversi in quello di JACOBI. Se noi prendiamo questi rapporti come coordinate d'un punto del piano, ogni ellissoide sarà individuato da

(15) *Treatise on natural philosophy* by SIR WILLIAM THOMSON and P. G. TAIT, Vol. I, Part. II, Cambridge 1883.

un punto indice ed il loro insieme da una linea. La bisettrice OA degli assi (vedi fig. 1) rappresenterà gli ellissoidi di MAC LAURIN ed il punto A situato all'unità di distanza dagli assi corrisponderà alla forma sferica e quindi ad una velocità angolare nulla. Gli ellissoidi di JACOBI saranno rappresentati da una linea BCD.

Ma POINCARÉ ha trovato nuove figure di equilibrio deformando questi ellissoidi e ne ha calcolato esattamente la forma che, nel caso più semplice, è quella d'una pera (vedi fig. 2) mediante le funzioni di LAMÉ. Si dimostra

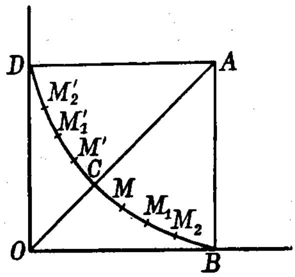


Fig. 1.

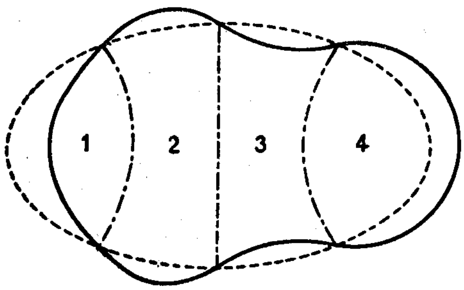


Fig. 2.

che vi sono infiniti ellissoidi di MAC LAURIN corrispondenti ai punti della retta CO per i quali esiste una figura di POINCARÉ infinitamente vicina che è pure figura di equilibrio. Vi sono inoltre un'infinità di punti M, M_1, M_2, $\cdots$ M', M_1', M_2', $\cdots$ della curva per i quali esiste una figura di POINCARÉ vicina che è pure figura di equilibrio.

Esaminiamo ora la stabilità. Gli ellissoidi di MAC LAURIN sono stabili nel tratto AC, instabili in quello CO. Gli ellissoidi di JACOBI sono stabili a partire da C fino al primo punto M o M' per il quale si incontra per la prima volta una figura di POINCARÉ, instabili dopo aver oltrepassati i punti M e M'.

Ciò posto passiamo ad una applicazione di questa teoria. Cito le parole stesse di POINCARÉ (16):

«Consideriamo una massa fluida omogenea animata inizialmente da un moto di rotazione e che lentamente si raffreddi. Se il raffreddamento è molto lento l'attrito interno determina la rivoluzione dell'insieme con la stessa velocità angolare in tutte le sue parti, mentre il momento di rotazione rimane costante.

«Al principio la densità essendo debolissima, la figura della massa è un ellissoide di rivoluzione poco diverso da una sfera. Il raffreddamento avrà dapprima per effetto di aumentare lo schiacciamento dell'ellissoide, il quale nondimeno si conserverà di rivoluzione.

«Il punto indice descriverà il segmento AC che corrisponde agli ellissoidi di MAC LAURIN fino in C, punto nel quale essi cessano di essere stabili (fig. 1).

(16) *Leçons sur les hypothèses cosmogoniques* par H. POINCARÉ, già citate, p. 188.

« L'indice non potendo prendere il cammino CO prenderà allora, per esempio, la direzione CM, l'ellissoide diverrà a tre assi ineguali e ciò fino in M, punto nel quale gli ellissoidi di JACOBI cessano di essere stabili. A partire da questo momento la massa non può più conservare la forma ellissoidica poiché essa è diventata instabile; prenderà dunque la sola forma possibile, quella della superficie vicina all'ellissoide la quale ha una figura piriforme, presentando una specie di strozzamento nella regione segnata 3 (fig. 2), mentre le regioni 2 e 4 tendono a gonfiarsi a spese delle regioni 1 e 3, come se la massa tendesse a dividersi in due parti ineguali.

« È difficile prevedere ciò che avverrà poi. Si può pensare che si formerà un solco sempre più profondo nella regione 3 e la massa finirà per spezzarsi in due corpi distinti ».

I risultati che abbiamo ora presentati sono di massima eleganza e di immenso interesse. Sir GIORGIO H. DARWIN ha pensato che il processo che abbiamo seguito possa aver avuto parte importante nell'evoluzione del sistema cosmico e questa teoria sembra confermarsi in seguito alle osservazioni di molte nebulose. Anche certi satelliti potrebbero esser stati formati in questo modo a spese del loro pianeta. È anzi probabile che ciò sia avvenuto nel caso del sistema terra–luna date le grandezze relative delle due masse.

Termineremo l'analisi dei lavori del POINCARÉ con questi grandiosi concetti che accoppiano le teorie più sottili ed ingegnose della meccanica alle più ardite ipotesi della cosmogonia.

* * *

Non ho potuto dare in questo scritto se non una pallida idea del grande lavoro compiuto dal POINCARÉ, dei problemi ch'egli ha trattati, dell'immenso campo della scienza ch'egli ha scoperto ed esplorato e che le future generazioni dei matematici coltiveranno.

È destino dei sublimi ingegni, i quali hanno dato la chiave di tanti oscuri problemi ed hanno appagato tanta curiosità scientifica, di accrescere la curiosità stessa ed il desiderio di sapere, coll'aprire nuovi orizzonti alla scienza e coll'allontanare la meta delle aspirazioni scientifiche.

XL.

SUI FENOMENI EREDITARII

« Rend. Acc. Lincei », ser. 5ª, vol. XXII₁, 1913₁; pp. 529-539

1. Nella seconda Nota di questi Rendiconti dedicata ai fenomeni ereditarii ho stabilito il *principio del ciclo chiuso* nel caso della eredità lineare [1]. Questo però non è che un caso particolare della eredità generale. Nasce quindi spontaneo il pensiero di trasportare il principio fuori del campo della eredità lineare. Mi permetto qui di esaminare ed esporre il principio stesso nella sua forma più generale. Questa ricerca conduce allo studio delle proprietà invariantive delle funzioni di linee per speciali traslazioni delle linee stesse. Perciò dal punto di vista della teoria di queste funzioni essa costituisce un primo passo nello studio generale delle loro proprietà invariantive. Pur non approfondendo in questa Nota se non la parte di tale studio che tocca la speciale questione del ciclo chiuso, risulta manifesto che i criterii qui adoperati sono suscettibili di notevole estensione.

2. Il concetto fondamentale dei fenomeni ereditari consiste nel riguardare lo stato attuale di un sistema come dipendente da tutta la sua storia antecedente. Limitandoci al caso più semplice in cui lo stato attuale (al tempo $t = x$) di un parametro z dipenda da tutta la storia di un parametro y cioè da tutti i valori assunti da y nel periodo di tempo antecedente ad x, avremo, scrivendo $y = f(t)$, che z dipenderà da tutti i valori di $f(t)$ per $-\infty < t \leq x$. Potremo dunque scrivere

$$z = \mathrm{F} \left| \left[f(t) \right]_{-\infty}^{x} \right| . \tag{1}$$

Lo studio analitico dei fenomeni ereditarii è quindi strettamente collegato a quello delle funzioni precedenti.

Noi potremo rappresentare ancora z nel modo seguente:

Immaginiamo disegnata la curva C avente per equazione $y = f(t)$ nell'intervallo $(-\infty, x)$ (la curva punteggiata della fig. 1). Potremo valerci anziché della notazione precedente (1) dell'altra

$$z = \mathrm{F} \left| [\mathrm{C}] \right| . \tag{2}$$

(1) *Sulle equazioni della elettrodinamica*, seduta del 7 marzo 1909 [in questo vol.: XVIII, pp. 276-283]; vedi anche: *Sur les équations intégro-différentielles et leurs applications*, « Acta Math. », tom. 35, 1912 [in questo vol.: XXXV, pp. 487-538].

Noi supporremo $f(t)$ sempre inferiore, in valore assoluto, ad un valore M, inoltre noi ammetteremo il *postulato della dissipazione dell'azione ereditaria*, cioè che questa azione si attenua indefinitamente coll'andar del tempo. Esprimeremo ciò mediante la condizione che *cambiando comunque* $f(t)$ *nell'intervallo* $(-\infty, x_1)$ *ove* $x_1 < x$ *(e mantenendola sempre inferiore ad* M)

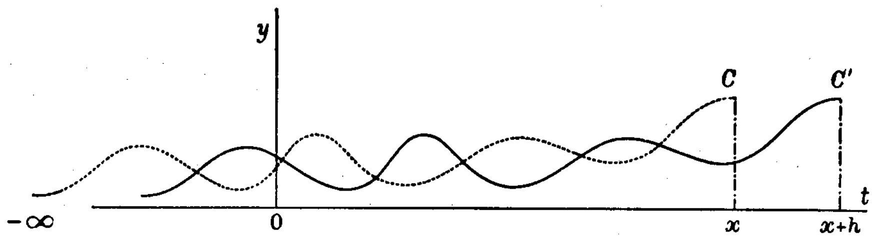


Fig. 1.

mentre si conserva $f(t)$ *inalterata nell'intervallo* (x_1, x), *il valore assoluto della variazione di* z *può rendersi inferiore ad un numero piccolo ad arbitrio, purché si prenda* $x - x_1$ *maggiore di un certo valore.*

3. È evidente che se noi cambiamo x, cioè l'estrema ascissa della curva C, o se cambiamo la funzione $f(x)$ ossia la curva C, o se alteriamo tutti e due questi elementi, z in generale cambierà.

Ma immaginiamo che il cangiamento contemporaneo di questi due elementi consista in una traslazione della curva C di ampiezza h nella direzione t. In altri termini invece della curva C consideriamo la curva C' (la curva a tratto unito della fig. 1) e poniamo

$$z' = \mathrm{F} \mid [\mathrm{C}'] \mid = \mathrm{F} \left[f(t \overset{x+h}{\underset{-\infty}{-}} h) \right] \mid ^{(2)}.$$

Varii casi potranno presentarsi:

1° Qualunque sia h e qualunque sia la funzione f, $z' = z$.

2° Per speciali valori di h, e qualunque sia f, $z' = z$.

3° Qualunque sia h e per speciali funzioni f, $z' = z$.

4° Per speciali valori di h e per speciali funzioni f, $z' = z$.

5° Qualunque sia h (eccettuato il caso $h = 0$) e qualunque sia f non si ha mai $z' = z$.

Diamo esempii di questi varii casi.

1° Sia

$$z = \int_{-\infty}^{x} \frac{f(t)}{1 + (x - t)^4} dt;$$

(2) Notiamo una volta per tutte che in questa formula come in tutte le successive t è la variabile compresa fra i limiti indicati sopra e sotto ad ogni singola formula.

sarà

$$z' = \int_{-\infty}^{x+h} \frac{f(t-h)}{1+(x+h-t)^4}\, dt = \int_{-\infty}^{x} \frac{f(t)}{1+(x-t)^4}\, dt = z .$$

2° Sia

$$z = \int_{-\infty}^{x} \frac{\operatorname{sen} x + x - t}{1+(x-t)^4}\, f(t)\, dt.$$

Se prendiamo $h = 2\pi n$ (n essendo un numero intero) avremo, qualunque sia f, $z = z'$, mentre in generale questa eguaglianza non sarà soddisfatta per altri valori di h.

3° Sia

$$z = \int_{-\infty}^{x} \frac{x(f(t-2\pi) - f(t)) + f(t)}{1+(x-t)^4}\, dt .$$

Se f sarà periodica col periodo 2π, avremo $z' = z$ qualunque sia h. In generale no.

4° Sia

$$z = \int_{-\infty}^{x} \frac{x(f(t-2\pi) - f(t)) + (\operatorname{sen} x + x - t) f(t)}{1+(x-t)^4}\, dt .$$

Se prendiamo $h = 2\pi n$ (n essendo intero) e f è periodica col periodo 2π, sarà $z' = z$. In generale no.

5° Se

$$z = \int_{-\infty}^{x} \frac{x + t + f(t)}{1+(x-t)^4}\, dt$$

si avrà $z' = z$ solo nel caso in cui sia $h = 0$.

4. Nel primo caso quando

$$\mathrm{F} \left| \left[f\overset{x}{\underset{-\infty}{(t)}} \right] \right| = \mathrm{F} \left| \left[f(t \overset{x+h}{\underset{-\infty}{-}} h) \right] \right| ,$$

ossia *z è invariante per tutte le traslazioni di* C *nella direzione t* (3), si potrà dire evidentemente che F dipende solo dai valori assunti da $f(t)$ non dal punto estremo x, cioè che F è una *funzionale pura* rispetto a $f(t)$. Dal punto di vista ereditario avremo in questo caso che lo stato in un certo istante non dipende da questo istante, ma è caratterizzato solo dal modo con cui si è svolta la storia anteriormente a questo istante, in altri termini avremo la invariabilità delle leggi ereditarie attraverso il tempo, ciò che si esprimerà dicendo che in questo caso vale la *invariabilità dell'eredità*.

Esaminiamo ora il 4° caso, e supponiamo che sia

$$\mathrm{F} \left| \left[f\overset{x}{\underset{-\infty}{(t)}} \right] \right| = \mathrm{F} \left| \left[f(t \overset{x+\mathrm{T}}{\underset{-\infty}{-}} \mathrm{T}) \right] \right| ,$$

(3) È facile stabilire delle denominazioni analoghe negli altri casi.

allorché T *ha un certo valore determinato e* $f(t)$ *è periodica collo stesso periodo* T (come nell'esempio considerato nel § precedente).

In questo caso avremo

$$F\left|\left[\overset{x}{\underset{-\infty}{f(t)}}\right]\right| = F\left|\left[\overset{x+T}{\underset{-\infty}{f(t)}}\right]\right| = F\left|\left[\overset{x+nT}{\underset{-\infty}{f(t)}}\right]\right|,$$

n essendo un numero intero qualunque.

Potremo quindi dire che z *è invariante per tutte le traslazioni di ampiezza* T *parallele a* t *che riconducono la curva* C *su se stessa*, ossia che

$$z = z(x)$$

è periodica col periodo T allorché

$$y = f(x)$$

è periodica collo stesso periodo.

Consideriamo y e z come l'ascissa e l'ordinata di un punto del piano; facendo variare x questo punto percorrerà nel caso attuale un ciclo chiuso con moto periodico di periodo T. Potremo quindi caratterizzare questo caso dicendo che in esso si verificano le *condizioni del ciclo chiuso col periodo* T.

5. Vogliamo ora dimostrare il teorema: *Se le condizioni del ciclo chiuso sono verificate per tutti i periodi, vale la invariabilità della eredità*, e reciprocamente *se vale la invariabilità delle eredità le condizioni del ciclo chiuso sono verificate per tutti i periodi* (4).

Supponiamo che

$$z = F\left|\left[\overset{x}{\underset{-\infty}{f(t)}}\right]\right|$$

soddisfi alla condizione del ciclo chiuso. La curva corrispondente a $y = f(t)$ sia C (la curva disegnata a tratto unito nella fig. 2). A partire da $x - H_1$

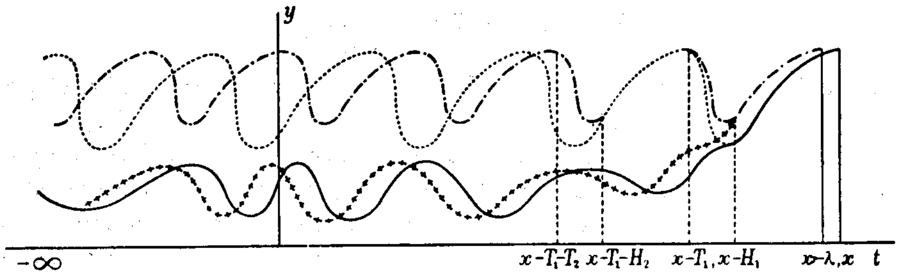


Fig. 2.

fino a $-\infty$ alteriamo $f(t)$ in modo da renderla periodica col periodo T_1, ma conservandola inalterata nell'intervallo $(x - H_1, x)$. Chiamiamo $f_1(t)$

(4) Si può enunciare lo stesso teorema facendo uso delle parole introdotte precedentemente riferentisi alle proprietà invariantive funzionali.

la funzione così cambiata, e denotiamo con C la curva corrispondente (la curva punteggiata della figura, coincidente però nell'intervallo $(x - H_1, x)$ colla linea a tratto continuo).

Poniamo

$$\left| F\Big|\big[f(t)\big]_{-\infty}^{x}\Big| - F\Big|\big[f_1(t)\big]_{-\infty}^{x}\Big| \right| = \sigma_1 .$$

Ma $F\Big|\big[f_1(t)\big]_{-\infty}^{x}\Big| = F\,|[C_1]$ è invariantiva per tutte le traslazioni di C_1 di ampiezza T_1 quindi

$$F\Big|\big[f_1(t)\big]_{-\infty}^{x-T_1}\Big| = F\Big|\big[f_1(t)\big]_{-\infty}^{x}\Big| ,$$

e per conseguenza

$$\left| F\Big|\big[f(t)\big]_{-\infty}^{x}\Big| - F\Big|\big[f_1(t)\big]_{-\infty}^{x-T_1}\Big| \right| = \sigma_1 . \tag{3}$$

Ciò premesso alteriamo la funzione $f_1(t)$ a partire da $x - T_1 - H_2$ $(H_2 < T_1)$ fino a $-\infty$ e da $x - T_1$ fino a $+\infty$ rendendola periodica col periodo $T_2 < T_1$, ma conservandola inalterata nell'intervallo $(x - T_1 - H_2, x - T_1)$. Denotiamo con $f_2(t)$ la funzione così cambiata. La curva corrispondente sarà C_2 (la curva tratto e punto della figura, coincidente però nell'intervallo $(x - T_1 - H_2, x - T_1)$ colla curva punteggiata).

Se noi scriviamo

$$\left| F\Big|\big[f_1(t)\big]_{-\infty}^{x-T_1}\Big| - F\Big|\big[f_2(t)\big]_{-\infty}^{x-T_1}\Big| \right| = \sigma_2$$

a cagione della (3) avremo

$$\left| F\Big|\big[f(t)\big]_{-\infty}^{x}\Big| - F\Big|\big[f_2(t)\big]_{-\infty}^{x-T_1}\Big| \right| \leqq \sigma_1 + \sigma_2 .$$

Ma F $[C_2]$ è invariante per traslazioni di C_2 di ampiezza T_2, per conseguenza

$$F\Big|\big[f_2(t)\big]_{-\infty}^{x-T_1+T_2}\Big| = F\Big|\big[f_2(t)\big]_{-\infty}^{x-T_1}\Big| ,$$

onde, posto $T_1 - T_2 = \lambda$,

$$\left| F\Big|\big[f(t)\big]_{-\infty}^{x}\Big| - F\Big|\big[f_2(t)\big]_{-\infty}^{x-\lambda}\Big| \right| \leqq \sigma_1 + \sigma_2 . \tag{4}$$

Supponiamo ora di dare alla curva C una traslazione $-\lambda$ nella direzione t. Essa diverrà C′ la quale coinciderà con C_2 da $x - \lambda$ fino a $x - \lambda - H_2$, poi in generale se ne distaccherà fino a $-\infty$ (sarà la curva rappresentata con stellette nella figura, coincidente però nell'intervallo $(x - \lambda - H_2, x - \lambda)$ colla curva tratto e punto). La C′ corrisponderà evidentemente alla funzione $f(x + \lambda)$.

Pongasi

(5)
$$\left| F \left| \left[f_2 \overset{x-\lambda}{\underset{-\infty}{(t)}} \right] \right| - F \left| \left[f \overset{x-\lambda}{\underset{-\infty}{(t+\lambda)}} \right] \right| \right| = \sigma_2' .$$

Combinando la (4) e la (5) risulterà

$$\left| F \left| \left[f \overset{x}{\underset{-\infty}{(t)}} \right] \right| - F \left| \left[f \overset{x-\lambda}{\underset{-\infty}{(t+\lambda)}} \right] \right| \right| \leqq \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_2' .$$

Ora è in nostro arbitrio scegliere H_1 e H_2 tanto grandi quanto ci piace e quindi, in virtù del postulato della dissipazione dell'azione ereditaria, σ_1, σ_2, σ_2' possono rendersi tanto piccoli quanto ci piace. Se ne deduce che:

$$F \left| \left[f \overset{x}{\underset{-\infty}{(t)}} \right] \right| - F \left| \left[f \overset{x-\lambda}{\underset{-\infty}{(t+\lambda)}} \right] \right| = 0 ,$$

e siccome anche λ è in nostro arbitrio, così la eguaglianza precedente sussisterà qualunque sia λ, come si doveva dimostrare.

La proposizione reciproca si dimostra immediatamente, osservando che, se una $F \,|[C]|$ è invariante per una traslazione data alla curva C, qualunque sia questa curva, sarà pure invariante, allorché C è periodica con un periodo eguale all'ampiezza della traslazione.

Possiamo dunque concludere che, *in conseguenza del postulato della dissipazione dell'azione ereditaria, la condizione del ciclo chiuso per qualsiasi periodo e la invariabilità dell'eredità sono condizioni equivalenti.*

A questo teorema fondamentale nello studio dei *fenomeni ereditarii di qualsiasi natura* daremo il nome di PRINCIPIO DEL CICLO CHIUSO.

Osserviamo che esso vale anche quando $f(t)$ o $F(x)$ sono discontinue, nel qual caso il ciclo è discontinuo.

6. Deduciamo alcune conseguenze da quanto è stato stabilito.

TEOREMA I. – *Se* $F \left| \left[f \overset{x}{\underset{-\infty}{(t)}} \right] \right|$ *soddisfa alla condizione del ciclo chiuso ed è continua e derivabile rispetto a f si avrà*

$$F' \left| \left[f \overset{x+h}{\underset{-\infty}{(t-h)}} , \xi + h \right] \right| = F' \left| \left[f \overset{x}{\underset{-\infty}{(t)}} , \xi \right] \right|$$

ove il parametro contenuto nella derivata denota il punto in cui si è eseguita la derivazione.

Prendiamo $\varphi(t)$ finita e continua a tale che

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= 0 \quad \text{per } t \text{ compreso fra } -\infty \text{ e } -k \\ m > \varphi(t) &> 0 \quad \text{per } t \text{ compreso fra } -k \text{ e } k \\ \varphi(t) &= 0 \quad \text{per } t \text{ compreso fra } k \text{ e } \infty, \end{aligned}$$

ove k — o. Sia

$$\int_{-k}^{k} \varphi(t)\, dt = \sigma .$$

Poiché F soddisfa alla condizione del ciclo chiuso, avremo

$$F\left|\left[f(t-h)+\overset{x+h}{\underset{-\infty}{\varphi}}(t-\xi-h)\right]\right|=F\left|f(t)+\overset{x}{\underset{-\infty}{\varphi}}(t-\xi)\right]\right|$$

quindi

$$\frac{F\left|\left[f(t-h)+\overset{x+h}{\underset{-\infty}{\varphi}}(t-\xi-h)\right]\right|-F\left|\left[\overset{x+h}{\underset{-\infty}{f}}(t-h)\right]\right|}{\sigma}$$

$$=\frac{F\left|\left[f(t)+\overset{x}{\underset{-\infty}{\varphi}}(t-\xi)\right]\right|-F\left|\left[\overset{x}{\underset{-\infty}{f}}(t)\right]\right|}{\sigma},$$

e passando al limite per h ed m tendenti a zero, risulterà

$$F'\left|\left[\overset{x+h}{\underset{-\infty}{f}}(t-h),\xi+h\right]\right|=F'\left|\overset{x}{\underset{-\infty}{f(t)}},\xi\right]\right|.$$

In modo analogo passando alle derivate successive si trova la relazione

$$F^{(n)}\left|\left[\overset{x+h}{\underset{-\infty}{f}}(t-h),\xi_1+h,\xi_2+h,\cdots,\xi_n+h\right]\right|=F^{(n)}\left|\left[\overset{x}{\underset{-\infty}{f}}(t),\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n\right]\right|.$$

Si dirà che una funzione Φ dipendente da $f(t)$ e da n parametri $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ soddisfa alle condizioni del ciclo chiuso, quando

$$\Phi\left[\left|\overset{x+h}{\underset{-\infty}{(t}}-h),\xi_1+h,\xi_2+h,\cdots,\xi_n+h\right]\right|=\Phi\left|\left[\overset{x}{\underset{-\infty}{f}}(t),\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n\right]\right|$$

onde il

COROLLARIO I. – *Se una funzione soddisfa alla condizione del ciclo chiuso vi soddisfano anche tutte le sue derivate.*

Abbiasi

$$\text{(I)}\qquad F\left|\left[\overset{x}{\underset{-\infty}{f}}(t)\right]\right|=\int_{-\infty}^{x}F_1(x\,|\,\xi_1)f(\xi_1)\,d\xi_1$$

$$+\frac{1}{1\cdot2}\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{x}F_2(x\,|\,\xi_1,\xi_2)f(\xi_1)f(\xi_2)\,d\xi_1\,d\xi_2$$

$$+\cdots+\frac{1}{n!}\int_{-\infty}^{x}\cdots\int_{-\infty}^{x}F_n(x\,|\,\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)f(\xi_1)\cdots f(\xi_n)\,d\xi_1\cdots d\xi_n+\cdots$$

in cui $F_n(x\,|\,\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$ è simmetrica rispetto a $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ e in valore assoluto inferiore a

$$\frac{n!\cdot M\varepsilon_1,\varepsilon_2\cdots\varepsilon_n}{R^n\cdot(1+x-\xi_1)^{1+\varepsilon_1}(1+x-\xi_2)^{1+\varepsilon_2}\cdots(1+x-\xi_n)^{1+\varepsilon_n}},$$

$M,\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$, R, essendo numeri positivi. F sarà determinata e finita allorché $|f(t)|<R$ è continua, e avremo

$$F^{(n)}\left|\left[\overset{x}{\underset{-\infty}{f}}(t),\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n\right]\right|_{f(t)=0}=F_n(x\,|\,\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n),$$

dunque, in virtù del corollario precedente, se F soddisfa alle condizioni del ciclo chiuso sarà

$$F_n(x+h\,|\,\xi_1+h\,,\xi_2+h\,,\cdots,\xi_n+h)=F_n(x\,|\,\xi_1\,,\xi_2\,,\cdots,\xi_n)$$

e quindi

$$F_n(x\,|\,\xi_1\,,\xi_2\,,\cdots,\xi_n)=F_n(x-\xi_1\,,x-\xi_2\,,\cdots,x-\xi_n)\,.$$

La proposizione reciproca è evidente onde il

COROLLARIO II. – *È necessario e sufficiente affinché la funzione* (I) *soddisfi alle condizioni del ciclo chiuso che*

$$F_n(x\,|\,\xi_1\,,\xi_2\,,\cdots,\xi_n)=F_n(x-\xi_1\,,x-\xi_2\,,\cdots,x-\xi_n)\,,\qquad (n=1\,,2\,,\cdots)\ [5].$$

7. Supponiamo ora che

$$\left|F'|[\overset{x}{\underset{-\infty}{f(t)}}\,,\xi]|\right|<\frac{M}{1+(x-\xi)^{1+\varepsilon}}$$

M ed ε essendo quantità positive e che siano soddisfatte le condizioni affinché

$$\text{(II)}\qquad \delta F|[\overset{x}{\underset{-\infty}{f(t)}}]|=\int_{-\infty}^{x}F'|[\overset{x}{\underset{-\infty}{f(t)}}\,,\xi]|\,\delta f(\xi)\,d\xi$$

allora potremo dimostrare il

TEOREMA II. – *Se la derivata prima di* $F|[\overset{x}{\underset{-\infty}{f(t)}}]|$ *soddisfa alle condizioni del ciclo chiuso e* $F|[\overset{x}{\underset{-\infty}{f(t)}}]|_{f(t)=0}$ *è costante rispetto ad x, allora* $F|[\overset{x}{\underset{-\infty}{f(t)}}]|$ *soddisfa essa pure alle condizioni del ciclo chiuso.*

Infatti, posto

$$F|[f(\overset{x+h}{\underset{-\infty}{t-}}h)]|-F|[\overset{x}{\underset{-\infty}{f(t)}}]|=\Phi|[\overset{x}{\underset{-\infty}{f(t)}}]|$$

sarà

$$\Phi'|[\overset{x}{\underset{-\infty}{f(t)}}\,,\xi]|=F'|[f(\overset{x+h}{\underset{-\infty}{t-}}h)\,,\xi+h]|-F'|[\overset{x}{\underset{-\infty}{f(t)}}\,,\xi]|=0\,,$$

quindi $\Phi\,|[\overset{x}{\underset{-\infty}{f(t)}}]|$ è indipendente da $f(t)$. Ma preso $f(t)=0\,,\Phi\,[\overset{x}{\underset{-\infty}{f(t)}}]|_{f(t)=0}$ risulta nullo, qualunque sia x, per conseguenza Φ è sempre nulla, d'onde

$$F|[f(\overset{x+h}{\underset{-\infty}{t-}}h)]|=F|[\overset{x}{\underset{-\infty}{f(t)}}]|$$

come si doveva dimostrare.

(5) Il principio del ciclo chiuso quale è enunciato nelle Memorie precedentemente citate è un caso particolare di questo corollario.

TEOREMA III. - Se $F|[\overset{x}{\underset{-\infty}{f(t)}}]|$ *soddisfa alle condizioni del ciclo chiuso e alle* (6) e (II) e $f(t)$ *e le sue derivate prime sono finite e continue, avremo*

$$\frac{dF}{dx}=\int_{-\infty}^{x}F'|[\overset{x}{\underset{-\infty}{f(t)}},\ \xi]|f'(\xi)\,d\xi .$$

Infatti

$$0=F|[\overset{x+h}{\underset{-\infty}{f(t)}}]|-F|[f(t\overset{x}{\underset{-\infty}{+}}h)]|=F|[\overset{x+h}{\underset{-\infty}{f(t)}}]|-F|[\overset{x}{\underset{-\infty}{f(t)}}]|$$

$$+F|[\overset{x}{\underset{-\infty}{f(t)}}]|-F|[f(t\overset{x}{\underset{-\infty}{+}}h)]|,$$

quindi

$$\frac{F|[\overset{x+h}{\underset{-\infty}{f(t)}}]|-F|[\overset{x}{\underset{-\infty}{f(t)}}]|}{h}=\frac{F|[f(t\overset{x}{\underset{-\infty}{+}}h)]|-F|[\overset{x}{\underset{-\infty}{f(t)}}]|}{h}$$

e passando al limite per $h=0$

$$\frac{dF}{dx}=\int_{-\infty}^{x}F'|[\overset{x}{\underset{-\infty}{f(t)}},\xi]|f'(\xi)\,d\xi .$$

8. Abbiansi le funzioni

$$F_1|[\overset{x}{\underset{-\infty}{f(t)}}]|=f_1(x),\ F_2|[\overset{x}{\underset{-\infty}{f(t)}}]|=f_2(x),\cdots,F_n|[\overset{x}{\underset{-\infty}{f(t)}}]|=f_n(x). \tag{7}$$

Noi possiamo da esse formarne infinite altre

$$F_{i,s}|[\overset{x}{\underset{-\infty}{f(t)}}]|=F_i|[\overset{x}{\underset{-\infty}{f_s(t)}}]| \tag{8}$$

e così di seguito. È facile dimostrare il seguente:

TEOREMA IV. - *Se*

$$F_i|[f(t\overset{x+h}{\underset{-\infty}{-}}h)]|=F_i|[\overset{x}{\underset{-\infty}{f(t)}}]| \quad , \quad F_s|[f(t\overset{x+h}{\underset{-\infty}{-}}h)]|=F_s|[\overset{x}{\underset{-\infty}{f(t)}}]|$$

avremo anche

$$F_{i,s}|[f(t\overset{x+h}{\underset{-\infty}{-}}h)]|=F_{i,s}|[\overset{x}{\underset{-\infty}{f(t)}}]|.$$

Infatti sarà

$$F_s|[\overset{x}{\underset{-\infty}{f(t)}}]|=f_s(x)$$

$$F_s|[f(t\overset{x}{\underset{-\infty}{-}}h)]|=f_s(x-h).$$

Ma

$$F_i \left| \left[f_s \left(\overset{x+h}{\underset{-\infty}{t - h}} \right) \right] \right| = F_i \left| \left[\overset{x}{\underset{-\infty}{f_s(t)}} \right] \right|$$

quindi

$$F_{i,s} \left| \left[f \left(\overset{x}{\underset{-\infty}{t - h}} \right) \right] \right| = F_{i,s} \left| \left[f \left(\overset{x}{\underset{-\infty}{t}} \right) \right] \right|$$

come si doveva dimostrare.

È facile riconoscere che questa proposizione vale anche senza che sia soddisfatto il postulato della dissipazione dell'azione ereditaria. D'altra parte si riconosce che se $F_1, F_2, \cdots, F_n$ sono continue rispetto a $f(t)$ ed esse soddisfano al postulato dalla dissipazione dell'azione ereditaria vi soddisferanno anche le $F_{i,s}$. Potremo quindi enunciare il

COROLLARIO. – *Il sistema delle funzioni* (7) *continue e che verificano alle condizioni del ciclo chiuso e di tutte quelle che possono ottenersene colle operazioni* (8) *formano un gruppo.*

XLI.

SOPRA EQUAZIONI INTEGRO-DIFFERENZIALI AVENTI I LIMITI COSTANTI

« Rend. Acc. Lincei », ser. 5ª, vol. XXII_2, 1913_2; pp. 43-49.

1. Ho avuto già occasione di trattare questo stesso soggetto in un'altra Nota pubblicata in questi Rendiconti, nella quale ho considerato le equazioni della forma

$$\sum_1^p {}_i \frac{\partial^2 u(x_1, x_2, \cdots, x_p \mid t)}{\partial x_i^2} + \int_0^1 \sum_1^p {}_i \frac{\partial^2 u(x_1, x_2, \cdots, x_p \mid \tau)}{\partial x_i^2} f_i(t, \tau)\, d\tau = 0$$

in cui le funzioni $f_i(t, \tau)$ sono permutabili di 2ª specie e, dopo aver stabilito in generale il teorema di reciprocità analogo a quello di GREEN, ho più specialmente esaminato il caso in cui $p > 2$ è pari, che è il più semplice (1). Nel caso di p dispari, nel quale non può applicarsi il principio del passaggio da soluzioni rapporti di funzioni intere di equazioni differenziali alle soluzioni pure rapporti di funzioni intere delle equazioni integro-differenziali correlative, si può far uso di un metodo analogo a quello impiegato nel § 5 dell'altra mia Nota avente per titolo: *Sopra le funzioni permutabili di 2ª specie* (2).

Mi permetto qui di trattare il caso di $p = 3$ (giacché gli altri casi di p dispari non offrono diversa difficoltà) cioè l'equazione

$$\text{(I)} \qquad \Delta^2 u(t) + \int_0^1 \left\{ \frac{\partial^2 u(\tau)}{\partial x^2} f(t, \tau) + \frac{\partial^2 u(\tau)}{\partial y^2} \varphi(t, \tau) + \frac{\partial^2 u(\tau)}{\partial z^2} \psi(t, \tau) \right\} d\tau = 0$$

nella quale, per semplicità, ho soppresso di scrivere esplicitamente le variabili x, y, z da cui dipende la funzione u.

2. Tutto sta nel trovare una soluzione fondamentale di quella equazione che ho chiamato aggiunta della (I), la quale non differisce da essa che per una semplice trasposizione delle variabili t e τ in $f(t, \tau)$, $\varphi(t, \tau)$, $\psi(t, \tau)$ (3).

(1) *Equazioni integro-differenziali con limiti costanti.* Seduta del 22 gennaio 1911 [in questo vol.: XXVIII, pp. 359-363]. Ho pure considerato equazioni integro-differenziali con limiti costanti nelle Note: *Questioni generali sulle equazioni integrali ed integro-differenziali*, 20 febbraio 1910 [in questo vol.: XXIII, p. 311-322]; *Sopra una proprietà generale delle equazioni integrali ed integro-differenziali*, 6 agosto 1911 [in questo vol.: XXI, pp. 380-388]. L'anno scorso nelle mie lezioni alla Sorbona ho mostrato come quelle a nuclei simmetrici possano ricavarsi da questioni di calcolo delle variazioni.

(2) Seduta del 23 aprile 1911. [In questo vol.: XXX, pp. 373-379].

(3) *Equazioni integro-differenziali con limiti costanti*, § 2.

Basterà dunque dare un metodo per trovare una soluzione fondamentale della (I).

Supponiamo f, φ, ψ permutabili di 2ª specie, e consideriamo dapprima l'equazione

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(1+z_1)+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}(1+z_2)+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}(1+z_3)=0.$$

La sua soluzione fondamentale sarà

$$\frac{c}{\sqrt{\dfrac{x^2}{1+z_1}+\dfrac{y^2}{1+z_2}+\dfrac{z^2}{1+z_3}}}$$

$$=\frac{c}{r}\sqrt{\frac{1+(z_1+z_2+z_3)+(z_2 z_3+z_3 z_1+z_1 z_2)+z_1 z_2 z_3}{1+\alpha^2(z_2+z_3)+\beta^2(z_3+z_1)+\gamma^2(z_1+z_2)+\alpha^2 z_2 z_3+\beta^2 z_3 z_1+\gamma^2 z_1 z_2}}$$

ove c è una costante e

$$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}\quad,\quad \alpha=\frac{x}{r}\quad,\quad \beta=\frac{y}{r}\quad,\quad \gamma=\frac{z}{r}\,.$$

Cominciamo dal costruire le funzioni

$$f+\varphi+\psi+\overset{**}{\varphi}\,\overset{**}{\psi}+\overset{**}{\psi}\,\overset{**}{f}+\overset{**}{f}\,\overset{**}{\varphi}+\overset{**}{f}\,\overset{**}{\varphi}\,\overset{**}{\psi}=\lambda(t,\tau)$$

$$\alpha^2(\varphi+\psi)+\beta^2(\psi+f)+\gamma^2(f+\varphi)+\alpha^2\overset{**}{\varphi}\,\overset{**}{\psi}+\beta^2\overset{**}{\psi}\,\overset{**}{f}+\gamma^2\overset{**}{f}\,\overset{**}{\varphi}=\mu(t,\tau)$$

ove i doppi asterischi segnati sulle lettere f, φ, ψ denotano che le operazioni sopra esse eseguite non sono moltiplicazioni, ma composizioni di seconda specie [4].

Determiniamo quindi la funzione $\nu(t,\tau)$ tale che

$$\frac{1+\overset{**}{\lambda}}{1+\overset{**}{\mu}}=1+\nu,$$

ossia in modo che

$$\lambda=\mu+\nu+\overset{**}{\mu}\,\overset{**}{\nu}$$

Essa si otterrà risolvendo l'equazione integrale

$$\lambda(t,\tau)-\mu(t,\tau)=\nu(t,\tau)+\int_0^1\mu(t,\xi)\,\nu(\xi,\tau)\,d\xi.$$

Basterà ora considerare l'equazione integrale di 2° grado

$$\sqrt{1+\overset{**}{\nu}}=1+\pi,$$

cioè

$$1+\nu=(1+\overset{**}{\pi})^2,$$

(4) Ho adottato qui gli asterischi, invece dei punti di cui avevo fatto uso nelle Note precedenti.

ossia

$$\nu = 2\pi + \overset{**}{\pi^2},$$

che può scriversi

$$\nu(t,\tau) = 2\pi(t,\tau) + \int_0^1 \pi(t,\xi)\,\pi(\xi,\tau)\,d\xi$$

e, se ci riesce ad ottenere $\pi(t,\tau)$ permutabile, insieme alle sue derivate rispetto a x, y, z, con f, φ, ψ, sarà

$$\text{(II)} \qquad \frac{F(t) + \int_0^1 F(\tau)\,\pi(t,\tau)\,d\tau}{r}$$

la soluzione fondamentale richiesta, ove $F(t)$ è una funzione arbitraria di t, indipendente da x, y, z.

3. Noi faremo uso adesso del metodo delle sostituzioni permutabili applicato nella Nota precedentemente citata [(5)]. Abbiasi la sostituzione

$$A = \left\{\begin{matrix} a_{11}, & a_{12}, & \cdots, & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22}, & \cdots, & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}, & a_{n2}, & \cdots, & a_{nn} \end{matrix}\right\} = T^{-1} \left\{\begin{matrix} A_1, & 0, & 0, & \cdots, & 0 \\ 0, & A_2, & 0, & \cdots, & 0 \\ 0, & 0, & A_3, & \cdots, & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0, & 0, & 0, & \cdots, & A_g \end{matrix}\right\} T \text{ [(6)]}$$

ove T è una sostituzione a determinante diverso da zero e

$$A_i = \left\{\begin{matrix} a_i, & 0, & 0, & \cdots, & 0 \\ a_i', & a_i, & 0, & \cdots, & 0 \\ a_i'', & a_i', & a_i, & \cdots, & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_i^{(h_i)}, & a_i^{(h_i-1)}, & a_i^{(h_i-2)}, & \cdots, & a_i \end{matrix}\right\}, \quad (h_1 + h_2 + \cdots + h_g = n).$$

Noi denoteremo con $B, C, L, M, \cdots$ delle sostituzioni perfettamente analoghe alla A in cui però le $a_{is}, a_i, a_i', a_i'', \cdots, A_i, \cdots$, sono rispettivamente sostituite dalle lettere $b_{is}, b_i, b_i', b_i'', \cdots, B_i, \cdots$, oppure $c_{is}, c_i, c_i', c_i'', \cdots, C_i \cdots$, ecc., rimanendo la stessa la sostituzione T e non alterandosi i numeri

(5) *Sopra le funzioni permutabili di 2ª specie.*

(6) Secondo una notazione di cui ho fatto uso in altri miei lavori questa sostituzione può scriversi ancora $T^{-1} \overline{\underline{\left\{ \prod_1^g A_i \right\}}} T$.

$h_1, h_2, h_3, \cdots, h_g$. Tutte le sostituzioni A, B, C, $\cdots$ saranno fra loro permutabili e le funzioni

$$f = \sum_1^n{}_r \sum_1^n{}_s a_{rs}\, \alpha_r(t)\, \alpha_s(\tau)$$

$$\varphi = \sum_1^n{}_r \sum_1^n{}_s b_{rs}\, \alpha_r(t)\, \alpha_s(\tau)$$

$$\psi = \sum_1^n{}_r \sum_1^n{}_s c_{rs}\, \alpha_r(t)\, \alpha_s(\tau)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

ove $\alpha_1(t), \alpha_2(t), \cdots, \alpha_n(t)$ sono funzioni normalizzate, saranno permutabili fra loro.

Noi prenderemo le funzioni f, φ, ψ della equazione (1) date dalle espressioni precedenti, supponendo le T, A_i, B_i, C_i indipendenti da x, y, z. È evidente allora che avremo

$$\lambda = \sum_1^n{}_r \sum_1^n{}_s l_{rs}\, \alpha_r(t)\, \alpha_s(\tau)$$

$$\mu = \sum_1^n{}_r \sum_1^n{}_s m_{rs}\, \alpha_r(t)\, \alpha_s(\tau)$$

$$\nu = \sum_1^n{}_r \sum_1^n{}_s n_{rs}\, \alpha_r(t)\, \alpha_s(\tau)$$

$$\pi = \sum_1^n{}_r \sum_1^n{}_s p_{rs}\, \alpha_r(t)\, \alpha_s(\tau)$$

e fra le sostituzioni corrispondenti passeranno le relazioni

$$A_i + B_i + C_i + B_i C_i + C_i A_i + A_i B_i + A_i B_i C_i = L_i$$

$$\alpha^2 (B_i + C_i) + \beta^2 (C_i + A_i) + \gamma^2 (A_i + B_i) + \alpha^2 B_i C_i + \beta^2 C_i A_i + \gamma^2 A_i B_i = M_i$$

$$(1 + L_i)(1 + M_i)^{-1} = 1 + N_i ,$$

ove con 1 si rappresenta la sostituzione identica, cioè

$$\left|\begin{matrix} 1, 0, 0, \cdots, 0 \\ 0, 1, 0, \cdots, 0 \\ 0, 0, 1, \cdots, 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ 0, 0, 0, \cdots, 1 \end{matrix}\right| .$$

In altri termini

$$1 + N_i = [\alpha^2 (1 + A_i)^{-1} + \beta^2 (1 + B_i)^{-1} + \gamma^2 (1 + C_i)^{-1}]^{-1}.$$

Finalmente sarà

$$N_i = 2\,P_i + P_i^2$$

ossia

$$(1 + P_i)^2 = 1 + N_i\,.$$

4. È facile con semplici operazioni algebriche calcolare gli elementi delle sostituzioni P_i. Infatti posto dapprima

$$\alpha^2 (1 + A_i)^{-1} + \beta^2 (1 + B_i)^{-1} + \gamma^2 (1 + C_i)^{-1} = 1 + Q_i\,,$$

si avrà

$$1 + q_i = \frac{\alpha^2}{1 + a_i} + \frac{\beta^2}{1 + b_i} + \frac{\gamma^2}{1 + c_i}$$

$$q_i' = -\frac{a_i'\,\alpha^2}{(1 + a_i)^2} - \frac{b_i'\,\beta^2}{(1 + b_i)^2} - \frac{c_i'\,\gamma^2}{(1 + c_i)^2}$$

$$q_i'' = \alpha^2\left(-\frac{a_i''}{(1 + a_i)^2} + \frac{a_i'^2}{(1 + a_i)^3}\right)$$

$$+ \beta^2\left(-\frac{b_i''}{(1 + b_i)^2} + \frac{b_i'^2}{(1 + b_i)^3}\right) + \gamma^2\left(-\frac{c_i''}{(1 + c_i)^2} + \frac{c_i'^2}{(1 + c_i)^3}\right)$$

. . . .

quindi

$$1 + n_i = \frac{1}{\dfrac{\alpha^2}{1 + a_i} + \dfrac{\beta^2}{1 + b_i} + \dfrac{\gamma^2}{1 + c_i}}$$

$$n_i' = -\frac{q_i'}{(1 + q_i)^2}$$

$$n_i'' = -\frac{q_i''}{(1 + q_i)^2} + \frac{q_i'^2}{(1 + q_i)^3}$$

. . . .

Finalmente

$$1 + p_i = \sqrt{1 + n_i} = \sqrt{\frac{1}{\dfrac{\alpha^2}{1 + a_i} + \dfrac{\beta^2}{1 + b_i} + \dfrac{\gamma^2}{1 + c_i}}}$$

$$p_i' = \frac{n_i'}{2\sqrt{1 + n_i}}$$

$$p_i'' = \frac{1}{2\sqrt{1 + n_i}}\left(n_i'' - \frac{n_i'^2}{4(1 + n_i)}\right)$$

. . . .

Basterà dunque che siano

$$1 + a_i \quad , \quad 1 + b_i \quad , \quad 1 + c_i > 0$$

perché le p_i, p_i', p_i'', $\cdots$, possano senz'altro ottenersi, ed esse saranno determinate prendendo positivi tutti i radicali che figurano nelle formule precedenti.

Da queste quantità possono ricavarsi le p_{is}, quindi π; ed è evidente che essa e le sue derivate rispetto a x, y, z saranno permutabili con f, φ, ψ.

La soluzione fondamentale (II) assumerà quindi la forma

$$\frac{F(t) + \sum_1^n{}_i \sum_1^n{}_i p_{is} k_s \alpha_i(t)}{r},$$

ove

$$k_s = \int_1^0 \alpha_s(\tau) F(\tau) d\tau,$$

onde il problema propostoci sarà risoluto.

Si può esaminare abbastanza facilmente la estensione al caso di $n = \infty$.

INDICE

FINITO DI STAMPARE NELLA
TIPOGRAFIA DELL'ACCADEMIA
NAZIONALE DEI LINCEI IN ROMA
NELL'OTTOBRE 1957