VITO VOLTERRA

OPERE MATEMATICHE

Memorie e Note

PUBBLICATE A CURA DELL'ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
COL CONCORSO
DEL CONSIGLIO NAZIONALE DELLE RICERCHE

Volume secondo
1893-1899

ROMA
ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
1956

1

OPERE MATEMATICHE
DI VITO VOLTERRA

COMITATO PER L'EDIZIONE DELLE OPERE MATEMATICHE
DI
VITO VOLTERRA

FRANCESCO GIORDANI *Presidente della Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali dell'Accademia Nazionale dei Lincei;*

UGO AMALDI
LUIGI AMOROSO
GIUSEPPE ARMELLINI
UMBERTO D'ANCONA
ELENA FREDA
JOSEPH PÉRÈS
ENRICO PERSICO
MAURO PICONE
ANTONIO SIGNORINI
CARLO SOMIGLIANA †
EDOARDO VOLTERRA

VITO VOLTERRA

OPERE MATEMATICHE

Memorie e Note

PUBBLICATE A CURA DELL'ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
COL CONCORSO
DEL CONSIGLIO NAZIONALE DELLE RICERCHE

Volume secondo

1893-1899

ROMA
ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
1956

MEMORIE E NOTE

I.

SULLE VIBRAZIONI DEI CORPI ELASTICI

« Rend. Acc. Lincei », ser. 5ª, vol. II_1, 1° sem. 1893, pp. 389–397.

1. Siano u, v, w le componenti degli spostamenti dei punti d'un corpo elastico, isotropo, secondo le direzioni degli assi coordinati x, y, z. Se u, v, w sono indipendenti da z, e si ammette che siano nulle le forze applicate ai punti della massa del corpo, le equazioni differenziali del movimento saranno

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + (b^2 - a^2)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) \tag{1}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) + (b^2 - a^2)\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) \tag{2}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial w^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) \tag{3}$$

nelle quali si sono denotate rispettivamente con a, b, le velocità con cui si propagano le vibrazioni trasversali e longitudinali.

In una Nota pubblicata l'anno scorso in questi « Rendiconti » (1) ho dato una formula relativa alla equazione (3), che comprende in sé quella ben nota di POISSON–PARSEVAL e mediante la quale mi sembra che venga posta in chiara luce la esistenza relativamente alla equazione stessa di certe superficie coniche le quali godono di quelle stesse proprietà che posseggono le linee *caratteristiche* nel caso delle equazioni differenziali a due variabili.

Mi propongo ora di estendere il metodo tenuto per la (3) al caso del sistema di equazioni differenziali simultanee (1) e (2).

2. A tal fine osserviamo che le equazioni stesse possono scriversi sotto la forma seguente:

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= b^2\frac{\partial \vartheta}{\partial x} + a^2\frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial y} \\ \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= b^2\frac{\partial \vartheta}{\partial y} - a^2\frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial x} \end{aligned}\right. \tag{4}$$

in cui si è posto per brevità

$$\vartheta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \quad , \quad \tilde{\omega} = \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} .$$

(1) Vol. I, ser. 5ª, 2° sem. 1892, p. 265. [In queste « Opere »: volume primo, XXXV, p. 568].

Di queste quantità ϑ e $\tilde{\omega}$ è ben conosciuto il significato cinematico.

Noi considereremo in tutto ciò che segue x, y, t come le coordinate cartesiane dei punti di uno spazio a tre dimensioni, ed esamineremo un campo S di esso, limitato da un contorno Σ.

Se u_1, v_1 è un sistema di integrali delle (4) regolari entro S, ed a questa stessa condizione soddisfano pure gl'integrali u, v, mediante il noto procedimento d'integrazione per parti, otterremo la formula

$$
\begin{aligned}
&\int_\Sigma \left\{ u_1 \left(\frac{\partial u}{\partial t} \cos nt - b^2 \vartheta \cos nx - a^2 \tilde{\omega} \cos ny \right) \right. \\
&\left. + v_1 \left(\frac{\partial v}{\partial t} \cos nt - b^2 \vartheta \cos ny + a^2 \tilde{\omega} \cos nx \right) \right\} d\Sigma \\
&= \int_\Sigma \left\{ u \left(\frac{\partial u_1}{\partial t} \cos nt - b^2 \vartheta_1 \cos nx - a^2 \tilde{\omega}_1 \cos ny \right) \right. \\
&\left. + v \left(\frac{\partial v_1}{\partial t} \cos nt - b^2 \vartheta_1 \cos ny + a^2 \tilde{\omega}_1 \cos nx \right) \right\} d\Sigma,
\end{aligned} \tag{5}
$$

in cui ϑ_1 e $\tilde{\omega}_1$ denotano le quantità analoghe a ϑ e $\tilde{\omega}$ rispetto al sistema di integrali u_1, v_1.

3. Consideriamo ora l'equazione

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}. \tag{6}$$

Posto

$$\theta = \frac{t}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

cerchiamo gl'integrali della (6) i quali sono della forma $t \psi(\theta)$.

La (6) si trasforma allora nell'altra

$$\theta (1 - \theta^2) \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} + (2 - \theta^2) \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = 0 \tag{6'}$$

la quale ammette l'integrale

$$\psi = \frac{\sqrt{\theta^2 - 1}}{\theta} + \log\left(\theta - \sqrt{\theta^2 - 1}\right).$$

Nel caso in cui $\theta > 1$, questo integrale si conserverà sempre reale, e dovremo prendere i radicali nel loro valore assoluto.

Ne segue che

$$\varphi(t, x, y) = t \left(\frac{\sqrt{\theta^2 - 1}}{\theta} + \log\left(\theta - \sqrt{\theta^2 - 1}\right) \right)$$

sarà un integrale della (6). Per conseguenza, essendo t_1, x_1, y_1, tre costanti, i seguenti sistemi di funzioni

$$\text{(I)} \qquad \begin{cases} u_1 = \dfrac{\partial \varphi\,(a\,(t_1 - t)\,,\, x - x_1\,,\, y - y_1)}{\partial y} \\[2ex] v_1 = -\dfrac{\partial \varphi\,(a\,(t_1 - t)\,,\, x - x_1\,,\, y - y_1)}{\partial x} \end{cases}$$

$$\text{(II)} \qquad \begin{cases} u_1 = \dfrac{\partial \varphi\,(b\,(t_1 - t)\,,\, x - x_1\,,\, y - y_1)}{\partial x} \\[2ex] v_1 = \dfrac{\partial \varphi\,(b\,(t_1 - t)\,,\, x - x_1\,,\, y - y_1)}{\partial y} \end{cases}$$

ci daranno due sistemi d'integrali delle (4).

Eseguendo le derivazioni essi possono scriversi sotto la forma

$$\text{(I)} \qquad \begin{cases} u_1 = \dfrac{\sqrt{a^2\,(t_1 - t)^2 - r^2}}{r^2}(y - y_1) = \dfrac{\sqrt{a^2\,(t_1 - t)^2 - r^2}}{r} \operatorname{sen} \omega \\[2ex] v_1 = -\dfrac{\sqrt{a^2\,(t_1 - t)^2 - r^2}}{r^2}(x - x_1) = -\dfrac{\sqrt{a^2\,(t_1 - t)^2 - r^2}}{r} \cos \omega \end{cases}$$

$$\text{(II)} \qquad \begin{cases} u_1 = \dfrac{\sqrt{b^2\,(t_1 - t)^2 - r^2}}{r^2}(x - x_1) = \dfrac{\sqrt{b^2\,(t_1 - t)^2 - r^2}}{r} \cos \omega \\[2ex] v_1 = \dfrac{\sqrt{b^2\,(t_1 - t)^2 - r^2}}{r^2}(y - y_1) = \dfrac{\sqrt{b^2\,(t_1 - t)^2 - r^2}}{r} \operatorname{sen} \omega \end{cases}$$

essendo

$$x - x_1 = r \cos \omega \quad , \quad y - y_1 = r \operatorname{sen} \omega .$$

4. Cominciamo dall'applicare il sistema d'integrali (I). Avremo allora

$$\begin{cases} \vartheta_1 = 0, \\[1ex] \tilde{\omega}_1 = \Delta^2 \varphi = -\dfrac{1}{\sqrt{a^2\,(t_1 - t)^2 - r^2}} \\[2ex] \dfrac{\partial u_1}{\partial t} = -\dfrac{a^2\,(t_1 - t)}{r\sqrt{a^2\,(t_1 - t)^2 - r^2}} \operatorname{sen} \omega \quad , \quad \dfrac{\partial v_1}{\partial t} = \dfrac{a^2\,(t_1 - t)}{r\sqrt{a^2\,(t_1 - t)^2 - r^2}} \cos \omega \end{cases}$$

onde la (5) diventerà

$$\text{(7)} \qquad \int_\Sigma \frac{\sqrt{a^2\,(t_1 - t)^2 - r^2}}{r} \Big\{ \Big[\frac{\partial u}{\partial t} \cos nt - b^2\, \vartheta \cos nx - a^2\, \tilde{\omega} \cos ny \Big] \operatorname{sen} \omega$$

$$- \Big[\frac{\partial v}{\partial t} \cos nt - b^2\, \vartheta \cos ny + a^2\, \tilde{\omega} \cos nx \Big] \cos \omega \Big\} d\Sigma$$

$$= \int_\Sigma \frac{a^2}{r\sqrt{a^2\,(t_1 - t)^2 - r^2}} \Big\{ u\,[-(t_1 - t) \cos nt \operatorname{sen} \omega + r \cos ny]$$

$$+ v\,[(t_1 - t) \cos nt \cos \omega - r \cos nx] \Big\} d\Sigma .$$

Affinché questa formula sia valida dovremo scegliere il campo S in modo tale che in esso le u_1, v_1 siano regolari. Perciò lo sceglieremo nella seguente maniera.

Per il punto x_1, y_1, t_1 come vertice si conducano due coni di rotazione M, N aventi l'asse ζ parallelo all'asse t e le aperture 2μ, 2ν, tali che

$$\operatorname{tg}\nu < \operatorname{tg}\mu < a .$$

Si limiti mediante una superficie σ una porzione interna al cono M tale che in essa si abbia sempre $t < t_1$; quindi si conduca il piano Λ avente per equazione

$$t = t_1 - \varepsilon , \qquad (\varepsilon > 0).$$

Prendiamo per campo S quello racchiuso dalle quattro superficie M, N, Λ, σ. Il suo contorno Σ sarà formato dalle porzioni di queste

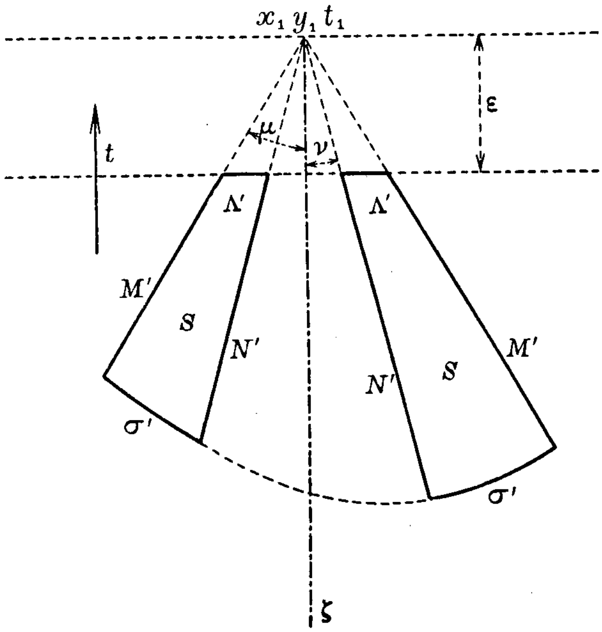


Fig. 1.

superficie che denoteremo rispettivamente con M', N', Λ', σ'. (Ved. fig. 1).

Sopra i due coni M e N abbiamo

$$(8) \qquad \begin{cases} \dfrac{\cos ny}{\cos nt} = \dfrac{t_1 - t}{r} \operatorname{sen} \omega \\[2ex] \dfrac{\cos nx}{\cos nt} = \dfrac{t_1 - t}{r} \cos \omega \end{cases}$$

quindi applicando la (7), la parte dell'integrale che comparisce nel secondo membro, la quale è estesa alle due porzioni M', N' del contorno, si annullerà, onde la integrazione nel secondo membro andrà estesa soltanto a Λ' e a σ'.

Facciamo ora crescere l'angolo μ fino a che tg μ divenga eguale ad a; allora lungo M' il radicale

$$\sqrt{a^2(t_1-t)^2-r^2}$$

sarà nullo, e perciò nel primo membro la integrazione andrà estesa a N', Λ', σ' solamente. Posto dunque

$$(9)\qquad \Omega' = \int_{\sigma'} \frac{\sqrt{a^2(t_1-t)^2-r^2}}{r} \left\{ \left[\frac{\partial u}{\partial t}\cos nt - b^2\,\vartheta \cos nx - a^2\,\tilde{\omega}\cos ny\right] \operatorname{sen}\omega \right.$$
$$\left. - \left[\frac{\partial v}{\partial t}\cos nt - b^2\,\vartheta\cos ny + a^2\,\tilde{\omega}\cos nx\right]\cos\omega \right\} d\sigma'$$
$$- \int_{\sigma'} \frac{a^2}{r\sqrt{a^2(t_1-t)^2-r^2}} \{u\,[-(t_1-t)\cos nt \operatorname{sen}\omega + r\cos ny]$$
$$+ v\,[(t_1-t)\cos nt\cos\omega - r\cos nx]\}\,d\sigma'$$

$$\Theta' = -\int_{N'} \frac{\sqrt{a^2(t_1-t)^2-r^2}}{r} \left\{ \left[\frac{\partial u}{\partial t}\cos nt - b^2\,\vartheta\cos nx - a^2\,\tilde{\omega}\cos ny\right]\operatorname{sen}\omega \right.$$
$$\left. - \left[\frac{\partial v}{\partial t}\cos nt - b^2\,\vartheta\cos ny + a^2\,\tilde{\omega}\cos nx\right]\cos\omega\right\} dN'$$

$$\chi' = -\int_{\Lambda'} \frac{\sqrt{a^2(t_1-t)^2-r^2}}{r} \left\{ \left[\frac{\partial u}{\partial t}\cos nt - b^2\,\vartheta\cos nx - a^2\,\tilde{\omega}\cos ny\right]\operatorname{sen}\omega \right.$$
$$\left. - \left[\frac{\partial v}{\partial t}\cos nt - b^2\,\vartheta\cos ny + a^2\,\tilde{\omega}\cos nx\right]\cos\omega\right\} d\Lambda'$$
$$+ \int_{\Lambda'} \frac{a^2}{r\sqrt{a^2(t_1-t)^2-r^2}} \left\{ u\,[-(t_1-t)\cos nt\operatorname{sen}\omega + r\cos ny] \right.$$
$$\left. + v\,[(t_1-t)\cos nt\cos\omega - r\cos nx] \right\} d\Lambda'$$

avremo

$$\Omega' = \Theta' + \chi'.$$

Ora tenendo presente le (8) si ricava che sul cono N' sono soddisfatte le condizioni

$$\cos nt = \operatorname{sen}\nu$$
$$\cos nx = \cos\nu\cos\omega$$
$$\cos ny = \cos\nu\operatorname{sen}\omega$$
$$dN' = \frac{r\,d\omega\,dt}{\cos\nu}$$
$$r = (t_1-t)\operatorname{tg}\nu$$

quindi

$$\Theta' = -\int_0^{2\pi} d\omega \int_{t'}^{t_1-\varepsilon} a(t_1 - t)\sqrt{1 - \frac{\mathrm{tg}^2 \nu}{a^2}} \left\{ \left[\frac{\partial u}{\partial t} \mathrm{tg}\, \nu - b^2 \vartheta \cos\omega - a^2 \tilde{\omega} \,\mathrm{sen}\, \omega \right] \mathrm{sen}\, \omega \right.$$

$$\left. - \left[\frac{\partial v}{\partial t} \mathrm{tg}\, \nu - b^2 \vartheta \,\mathrm{sen}\, \omega + a^2 \tilde{\omega} \cos\omega \right] \cos\omega \right\} dt$$

$$= a^3 \sqrt{1 - \frac{\mathrm{tg}^2 \nu}{a^2}} \int_0^{2\pi} d\omega \int_{t'}^{t_1-\varepsilon} (t_1 - t)\, \tilde{\omega}\, dt$$

$$- a\, \mathrm{tg}\, \nu \sqrt{1 - \frac{\mathrm{tg}^2 \nu}{a^2}} \int_0^{2\pi} d\omega \int_{t'}^{t_1-\varepsilon} (t_1 - t) \left(\frac{\partial u}{\partial t} \mathrm{sen}\, \omega - \frac{\partial v}{\partial t} \cos\omega \right) dt$$

chiamando t' le coordinate t dei punti di intersezione di N' con σ'.

Sul piano Λ si ha

$$d\Lambda = r dr d\omega \quad , \quad \cos nt = -1 \quad , \quad \cos nx = \cos ny = 0 \quad , \quad t_1 - t = \varepsilon \, ,$$

per conseguenza

$$\chi' = \int_0^{2\pi} d\omega \int_{\varepsilon\, \mathrm{tg}\, \nu}^{\varepsilon a} \left\{ \sqrt{a^2 \varepsilon^2 - r^2} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \mathrm{sen}\, \omega - \frac{\partial v}{\partial t} \cos\omega \right) + \frac{a^2 \varepsilon}{\sqrt{a^2 \varepsilon^2 - r^2}} (u \,\mathrm{sen}\, \omega - v \cos\omega) \right\} dr$$

Facciamo tendere ν verso zero; avremo

$$\Theta = \lim_{\nu=0} \Theta' = 2\pi a^3 \int_{t_0}^{t_1-\varepsilon} (t_1 - t)\, \tilde{\omega}\, dt$$

$$\chi = \lim_{\nu=0} \chi' = \int_0^{2\pi} d\omega \int_0^{a\varepsilon} \left\{ \sqrt{a^3 \varepsilon^2 - r^2} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \mathrm{sen}\, \omega - \frac{\partial v}{\partial t} \cos\omega \right) \right.$$

$$\left. + \frac{a^2 \varepsilon}{\sqrt{a^2 \varepsilon^2 - r^2}} (u \,\mathrm{sen}\, \omega - v \cos\omega) \right\} dr$$

essendo t_0 la coordinata t del punto ove l'asse ζ incontra σ.

Finalmente

$$\Omega = \lim_{\nu=0} \Omega'$$

sarà l'integrale stesso che comparisce nel secondo membro della (9), soltanto al limite la integrazione dovrà estendersi non più alla superficie σ', ma alla intera superficie σ_a compresa entro il cono M. Potremo dunque scrivere

$$\Omega = \Theta + \chi \, .$$

Impiccoliamo ora indefinitamente ε, si avrà

$$\lim_{\varepsilon=0} \chi = 0$$

$$\lim_{\varepsilon=0} \Theta = 2\,\pi a^3 \int_{t_0}^{t_1} (t_1 - t)\,\tilde{\omega}\,dt.$$

Si potrà dunque concludere: *Se per il punto x_1, y_1, t_1, come vertice, si conduce il cono* A *di apertura* $2\,\alpha$, (*essendo* $\operatorname{tg}\alpha = a$) *ed avente l'asse* ζ,

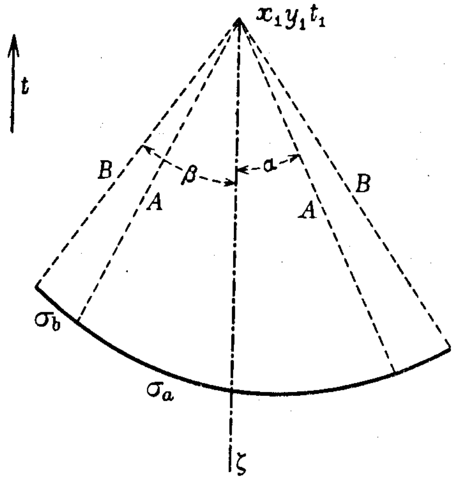


Fig. 2.

parallelo a t, *e si chiama* σ_a *la porzione della superficie* σ *inclusa entro di esso, avremo*

$$2\,\pi a^2 \int_{t_0}^{t_1} (t_1 - t)\,\tilde{\omega}\,(x_1, y_1, t)\,dt = \Omega_a, \tag{10}$$

essendo

$$\begin{aligned}
\text{(a)}\quad \Omega_a = \int_{\sigma_a} \frac{\sqrt{(t_1-t)^2 - \dfrac{r^2}{a^2}}}{r^2} \Big\{ &\left[\frac{\partial u}{\partial t}\cos nt - b^2\,\vartheta \cos nx - a^2\,\tilde{\omega}\cos ny\right](y - y_1) \\
&- \left[\frac{\partial v}{\partial t}\cos nt - b^2\,\vartheta\cos ny + a^2\,\tilde{\omega}\cos nx\right](x - x_1)\Big\}\,d\sigma \\
+ \int_{\sigma_a} \frac{1}{r^2\sqrt{(t_1-t)^2 - \dfrac{r^2}{a^2}}} \Big\{ &u\,[(t_1 - t)\,(y - y_1)\cos nt - r^2 \cos ny] \\
&- v\,[(t_1 - t)\,(x - x_1)\cos nt - r^2\cos nx]\Big\}\,d\sigma.
\end{aligned}$$

5. In modo del tutto analogo, partendo dagli integrali (II) si giunge al risultato seguente: *Conduciamo per x_1, y_1, t_1, come vertice, il cono* B *di*

apertura 2β, (*essendo* $\operatorname{tg}\beta = b$) *ed avente per asse* ζ, *e si chiami* σ_b *la porzione di* σ *inclusa entro questo cono, allora*

$$2\pi b^2 \int_{t_0}^{t_1} (t_1 - t)\, \vartheta(x_1, y_1, t)\, dt = \Omega_b$$

essendo

$$\text{(b)} \quad \Omega_b = \int_{\sigma_b} \frac{\sqrt{(t_1-t)^2 - \frac{r^2}{b^2}}}{r^2} \left\{ \left[\frac{\partial u}{\partial t}\cos nt - b^2\,\vartheta\cos nx - a^2\,\tilde{\omega}\cos ny\right](x - x_1) \right.$$

$$\left. + \left[\frac{\partial v}{\partial t}\cos nt - b^2\,\vartheta\cos ny + a^2\,\tilde{\omega}\cos nx\right](y - y_1) \right\} d\sigma$$

$$+ \int_{\sigma_b} \frac{1}{r^2\sqrt{(t_1-t)^2 - \frac{r^2}{b^2}}} \left\{ u\,[(t_1 - t)(x - x_1)\cos nt - r^2\cos nx] \right.$$

$$\left. + v\,[(t_1 - t)(y - y_1)\cos nt - r^2\cos ny] \right\} d\sigma .$$

6. Ciò premesso osserviamo che

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\int_{t_0}^{t_1}(t_1 - t)\,\vartheta\,dt = \int_{t_0}^{t_1}(t_1 - t)\frac{\partial\vartheta}{\partial x}dt + (t_1 - t_0)\,\vartheta_0\frac{\cos n_0 x}{\cos n_0 t}$$

$$\frac{\partial}{\partial y_1}\int_{t_0}^{t_1}(t_1 - t)\,\vartheta\,dt = \int_{t_0}^{t_1}(t_1 - t)\frac{\partial\vartheta}{\partial y}dt + (t_1 - t_0)\,\vartheta_0\frac{\cos n_0 y}{\cos n_0 t}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\int_{t_0}^{t_1}(t_1 - t)\,\tilde{\omega}\,dt = \int_{t_0}^{t_1}(t_1 - t)\frac{\partial\tilde{\omega}}{\partial x}dt + (t_1 - t_0)\,\tilde{\omega}_0\frac{\cos n_0 x}{\cos n_0 t}$$

$$\frac{\partial}{\partial y_1}\int_{t_0}^{t_1}(t_1 - t)\,\tilde{\omega}\,dt = \int_{t_0}^{t_1}(t_1 - t)\frac{\partial\tilde{\omega}}{\partial y}dt + (t_1 - t_0)\,\tilde{\omega}_0\frac{\cos n_0 y}{\cos n_0 t}$$

in cui si sono denotati con ϑ_0 e $\tilde{\omega}_0$, rispettivamente, i valori di ϑ e $\tilde{\omega}$ nel punto x_1, y_1, t_0, e con n_0 la normale a σ in questo stesso punto.

Perciò

$$\frac{1}{2\pi}\left[\frac{\partial\Omega_b}{\partial x_1} + \frac{\partial\Omega_a}{\partial y_1}\right] = \int_{t_0}^{t_1}(t_1 - t)\left\{b^2\frac{\partial\vartheta}{\partial x} + a^2\frac{\partial\tilde{\omega}}{\partial y}\right\}dt$$

$$+ \frac{t_1 - t_0}{\cos n_0 t}\,[b^2\,\vartheta_0\cos n_0 x + a^2\,\tilde{\omega}_0\cos n_0 y]$$

$$\frac{1}{2\pi}\left[\frac{\partial\Omega_b}{\partial y_1} - \frac{\partial\Omega_a}{\partial x_1}\right] = \int_{t_0}^{t_1}(t_1 - t)\left\{b^2\frac{\partial\vartheta}{\partial y} - a^2\frac{\partial\tilde{\omega}}{\partial x}\right\}dt$$

$$+ \frac{t_1 - t_0}{\cos u_0 t}\,[b^2\,\vartheta_0\cos n_0 y - a^2\,\tilde{\omega}_0\cos n_0 x] .$$

Ma per le (4)

$$\int_{t_0}^{t_1}(t_1-t)\left\{b^2\frac{\partial\vartheta}{\partial x}+a^2\frac{\partial\tilde{\omega}}{\partial y}\right\}dt=\int_{t_0}^{t_1}(t_1-t)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}dt$$

$$=u(x_1,y_1,t_1)-u(x_1,y_1,t_0)-(t_1-t_0)\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_0$$

$$\int_{t_0}^{t_1}(t_1-t)\left\{b^2\frac{\partial\vartheta}{\partial y}-a^2\frac{\partial\tilde{\omega}}{\partial x}\right\}dt=\int_{t_0}^{t_1}(t_1-t)\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}dt$$

$$=v(x_1,y_1,t_1)-v(x_1,y_1,t_0)-(t_1-t_0)\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)_0$$

in cui l'indice zero attribuito a $\partial u/\partial t$, $\partial v/\partial t$ denota che i valori di queste quantità vanno presi nel punto x_1, y_1, t_0.

Otterremo quindi finalmente le formule

$$\text{(11)}\quad\left\{\begin{aligned}u(x_1,y_1,t_1)&=u(x_1,y_1,t_0)+\frac{t_1-t_0}{\cos n_0 t}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_0\cos n_0 t-b^2\vartheta_0\cos n_0 x\right.\\&\qquad\left.-a^2\tilde{\omega}_0\cos n_0 y\right]+\frac{1}{2\pi}\left[\frac{\partial\Omega_b}{\partial x_1}+\frac{\partial\Omega_a}{\partial y_1}\right]\\v(x_1,y_1,t_1)&=v(x_1,y_1,t_0)+\frac{t_1-t_0}{\cos n_0 t}\left[\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)_0\cos n_0 t-b^2\vartheta_0\cos n_0 y\right.\\&\qquad\left.+a^2\tilde{\omega}_0\cos n_0 x\right]+\frac{1}{2\pi}\left[\frac{\partial\Omega_b}{\partial y_1}-\frac{\partial\Omega_a}{\partial x_1}\right]\end{aligned}\right.$$

essendo Ω_a, Ω_b, date dalle (a) (b).

Queste formule esprimono i valori di u e v nel vertice dei due coni, mediante i valori di u, v e delle loro derivate lungo le superficie σ_a, σ_b.

7. Le formule a cui siamo giunti costituiscono la naturale estensione di quelle che abbiamo date nei §§ 2, 3, 4 della Nota già citata *Sulle onde cilindriche nei mezzi isotropi*. I due coni A e B funzionano nel presente caso come il cono C considerato nella precedente comunicazione, e possono denominarsi i *coni caratteristici* del sistema di equazioni differenziali simultanee (1), (2). Nei §§ 8, 9 della detta Nota ho esaminato il caso in cui la superficie lungo la quale sono dati i valori della funzione incognita e delle sue derivate è esterna al cono C. Analogamente nel caso attuale il procedimento usato può applicarsi allorché le superficie lungo le quali sono dati i valori delle funzioni incognite e delle loro derivate limitano delle regioni adiacenti al vertice *esterne* ai due coni A e B, anziché delle regioni *interne* come abbiamo considerato nella presente Nota. Ciò formerà il soggetto di una prossima comunicazione nella quale darò ancora delle formule analoghe alle (11), nelle quali in luogo delle rotazioni degli elementi e delle dilatazioni, compariranno le componenti delle tensioni.

II.

SULLA INTEGRAZIONE DELLE EQUAZIONI DIFFERENZIALI DEL MOTO DI UN CORPO ELASTICO ISOTROPO

« Rend. Acc. Lincei », ser. 5ª, vol. II_1, 1° sem. 1893, pp. 549-558.

1. In una Nota comunicata nella precedente seduta (*), ho considerato le equazioni differenziali delle vibrazioni di un corpo elastico isotropo, allorché le componenti degli spostamenti sono indipendenti da una delle coordinate cartesiane che abbiamo chiamata z.

Allorché si teneva conto soltanto degli spostamenti normali all'asse z, le equazioni differenziali stesse si scrivevano sotto la forma

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = b^2 \frac{\partial \vartheta}{\partial x} + a^2 \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial y} \tag{1}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = b^2 \frac{\partial \vartheta}{\partial y} - a^2 \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial x}, \tag{2}$$

essendo

$$\vartheta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \quad , \quad \tilde{\omega} = \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}.$$

Nella Nota suddetta ho stabilito delle formule le quali dànno i valori di u e v al vertice comune di due *coni caratteristici*, mediante i valori degli spostamenti stessi e delle loro derivate lungo una superficie qualunque inclusa entro i due coni e che limita insieme a ciascuno di essi una regione adiacente al vertice.

Mi propongo ora di ottenere delle formule analoghe, allorché la superficie lungo la quale sono dati i valori di u e v e delle loro derivate giace esternamente ai detti coni.

2. Nel campo delle tre variabili x, y, t, conduciamo un cono R di rotazione il cui asse ζ sia parallelo a t, avente il vertice nel punto x_1, y_1, t_1 e la cui apertura sia 2ρ essendo $\operatorname{tg}\rho > a$. Quindi mediante una superficie σ si limiti una porzione di spazio esterna al cono adiacente al vertice, e finalmente si conduca un cilindro c di rotazione di raggio ε avente per asse ζ (fig. 1) [1].

(*) In questo volume: I, p. 1 [N. d. R.].

(1) In questa figura, come pure nella successiva ciascun elemento $S, \sigma, R, c \cdots$ è formato dall'insieme di quelli rappresentati colla stessa lettera aventi uno e due apici.

Esaminiamo lo spazio S racchiuso entro le tre superficie σ, R, c; in esso gl'integrali (I) della Nota precedente avranno valori immaginari. Onde ridurli reali moltiplichiamoli per i; otterremo in tal modo le funzioni

$$(\mathrm{I}')\qquad \left\{\begin{aligned} u_1 &= \sqrt{r^2 - a^2(t_1 - t)^2}\,\frac{y - y_1}{r^2} = \frac{\sqrt{r^2 - a^2(t_1 - t)^2}}{r}\,\mathrm{sen}\,\omega \\ v_1 &= -\sqrt{r^2 - a^2(t_1 - t)^2}\,\frac{x - x_1}{r^2} = -\frac{\sqrt{r^2 - a^2(t_1 - t)^2}}{r}\cos\omega \end{aligned}\right.$$

che costituiranno un sistema di integrali delle (1) e (2) e i quali entro lo spazio S si conserveranno reali e regolari. Perciò potremo applicare la for-

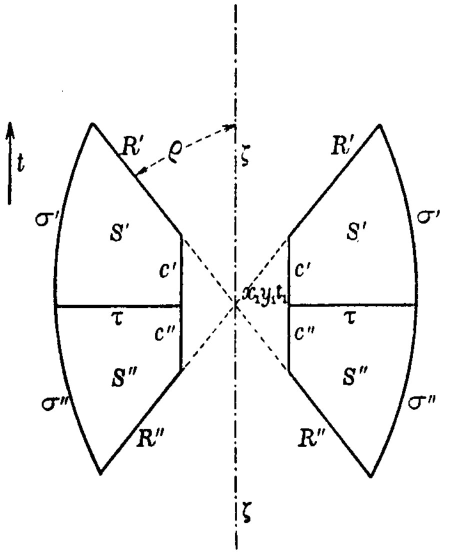


Fig. 1.

mula (7) della Nota citata, avvertendo di mutare il segno alle espressioni che compariscono entro i radicali, e nel medesimo tempo di cambiare il segno al secondo membro. Avremo allora

$$(3)\qquad \int_\Sigma \frac{\sqrt{r^2 - a^2(t_1 - t)^2}}{r}\{\mathrm{U}\,\mathrm{sen}\,\omega - \mathrm{V}\cos\omega\}\,d\Sigma$$

$$= \int_\Sigma \frac{a^2}{r\sqrt{r^2 - a^2(t_1 - t)^2}}\{[(t_1 - t)\cos nt\,\mathrm{sen}\,\omega - r\cos ny]\,u$$

$$- [(t_1 - t)\cos nt\cos\omega - r\cos nx]\,v\}\,d\Sigma$$

in cui per semplicità si è posto

$$(\mathrm{II})\qquad \left\{\begin{aligned} \mathrm{U} &= \frac{\partial u}{\partial t}\cos nt - b^2\vartheta\cos nx - a^2\tilde{\omega}\cos ny \\ \mathrm{V} &= \frac{\partial v}{\partial t}\cos nt - b^2\vartheta\cos ny + a^2\tilde{\omega}\cos nx. \end{aligned}\right.$$

Le osservazioni che abbiamo fatto nella Nota precedente dimostrano che la parte dell'integrale che comparisce nel secondo membro la quale è estesa al cono R è nulla; e facendo diminuire l'angolo ρ finché si riduca $\operatorname{tg} \rho = a$, avremo che al limite sparirà nel primo membro la parte dell'integrale pure estesa al cono R. Osserviamo poi che sul cilindro c si ha $\cos nt = 0$, $\cos nx = \cos \omega$, $\cos ny = \operatorname{sen} \omega$, $dc = \varepsilon d\omega\, dt$, per conseguenza allorché $\operatorname{tg} \rho = a$, la equazione (3) diventerà

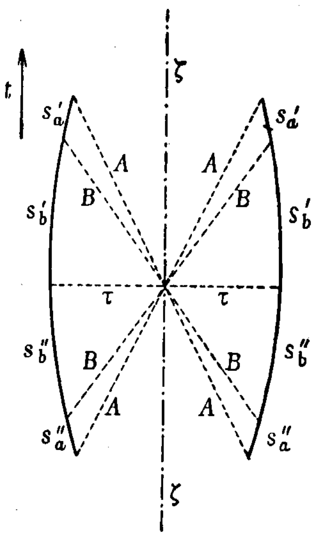


Fig. 2.

$$\int_\sigma \left[\frac{\sqrt{r^2 - a^2 (t_1 - t)^2}}{r} \{ U \operatorname{sen} \omega - V \cos \omega \} \right.$$

$$- \frac{a^2}{r \sqrt{r^2 - a^2 (t_1 - t)^2}} \{ [(t_1 - t) \cos nt \operatorname{sen} \omega - r \cos ny]\, u$$

$$\left. - [(t_1 - t) \cos nt \cos \omega - r \cos nx]\, v \} \right] d\sigma$$

$$= \int_c \left[\frac{\sqrt{r^2 - a^2 (t_1 - t)^2}}{r} \{ U \operatorname{sen} \omega - V \cos \omega \} \right.$$

$$\left. + \frac{a^2}{\sqrt{r^2 - a^2 (t_1 - t)^2}} (u \operatorname{sen} \omega - v \cos \omega) \right] dc$$

$$= - a^2 \int_0^{2\pi} d\omega \int_{t_1 - \varepsilon/a}^{t_1 + \varepsilon/a} \sqrt{\varepsilon^2 - a^2 (t_1 - t)^2}\, \tilde{\omega} dt$$

$$+ a^2 \int_0^{2\pi} d\omega \int_{t_1 - \varepsilon/a}^{t_1 + \varepsilon/a} \frac{\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon^2 - a^2 (t_1 - t)^2}} (u \operatorname{sen} \omega - v \cos \omega)\, dt .$$

Quindi facendo tendere ε verso zero, l'ultimo membro va a zero.

Si può dunque concludere:

Essendo s_a una superficie che limita una porzione di spazio esterna al cono A (considerato nella precedente Nota) *ed adiacente al vertice, abbiamo* (vedi fig. 2)

$$\text{(III)} \qquad \int_{s_a} \left[\frac{\sqrt{r^2 - a^2 (t_1 - t)^2}}{r^2} \{ U (y - y_1) - V (x - x_1) \} \right.$$

$$- \frac{a^2}{r^2 \sqrt{r^2 - a^2 (t_1 - t)^2}} \{ [(t_1 - t)(y - y_1) \cos nt - r^2 \cos ny]\, u$$

$$\left. - [(t_1 - t)(x - x_1) \cos nt - r^2 \cos nx]\, v \} \right] ds_a = 0 .$$

Analogamente partendo dagli integrali

$$\text{(IV)} \qquad \begin{cases} u_1 = \dfrac{\sqrt{r^2 - b^2 (t_1 - t)^2}}{r^2} (x - x_1) = \dfrac{\sqrt{r^2 - b^2 (t_1 - t)^2}}{r} \cos \omega \\ v_1 = \dfrac{\sqrt{r^2 - b^2 (t_1 - t)^2}}{r^2} (y - y_1) = \dfrac{\sqrt{r^2 - b^2 (t_1 - t)^2}}{r} \operatorname{sen} \omega \end{cases}$$

delle equazioni (1) e (2) si giungerebbe al seguente risultato:

Se s_b *è la porzione di* s_a *esterna al cono* B (considerato nella Nota precedente) *si avrà*:

$$\text{(III')} \qquad \int_{s_b} \left[\frac{\sqrt{r^2 - b^2 (t_1 - t)^2}}{r^2} \{ \mathrm{U}(x - x_1) + \mathrm{V}(y - y_1) \} \right.$$

$$- \frac{b^2}{r^2 \sqrt{r^2 - b^2 (t_1 - t)^2}} \{ [(t_1 - t)(x - x_1) \cos nt - r^2 \cos nx] \, u$$

$$\left. + [(t_1 - t)(y - y_1) \cos nt - r^2 \cos ny] \, v \} \right] ds_b = 0 .$$

Le due formule (III) e (III′) che abbiamo trovato stabiliscono delle relazioni a cui debbono soddisfare le funzioni u, v e le loro derivate lungo le superficie s_a, s_b, e sono le analoghe della equazione (23) della Nota *Sulle onde cilindriche nei mezzi isotropi* (2).

3. Passiamo ora a stabilire le formule risolutive della questione propostaci.

Si ponga

$$\xi = \sqrt{1 - \theta^2} (\log (1 - \theta^2) - 1 + \log r) + \theta \text{ arco sen } \theta$$

$$= \sqrt{1 - \theta^2} \log \left(\frac{1 - \theta^2}{e} r \right) + \theta \text{ arco sen } \theta ,$$

in cui per arco sen θ si prende un valore compreso fra $-\pi/2$ e $\pi/2$.

È facile verificare che, essendo c una costante arbitraria,

$$\text{(V)} \qquad \begin{cases} u_1 = (\xi + c\theta) \dfrac{y - y_1}{r} = (\xi + c\theta) \text{ sen } \omega , \\ v_1 = -(\xi + c\theta) \dfrac{x - x_1}{r} = -(\xi + c\theta) \cos \omega , \end{cases} \qquad \theta = \frac{a(t - t_1)}{r}$$

$$\text{(VI)} \qquad \begin{cases} u_1 = (\xi + c\theta) \dfrac{x - x_1}{r} = (\xi + c\theta) \cos \omega , \\ v_1 = (\xi + c\theta) \dfrac{y - y_1}{r} = (\xi + c\theta) \text{ sen } \omega , \end{cases} \qquad \theta = \frac{b(t - t_1)}{r}$$

formano due sistemi di integrali delle equazioni (1) e (2). Il primo di essi si conserva reale finché ci manteniamo nello spazio esterno al cono A, ed il secondo finché siamo esternamente a B.

Ciò premesso prendiamo a considerare il campo S rappresentato nella fig. 1, e conduciamo il piano τ avente per equazione $t = t_1$. Esso dividerà lo spazio S in due parti in una delle quali (che denoteremo con S′) i punti

(2) Ved. « Rend. Acc. Lincei », ser. 5a, vol. I, 2° sem., 1892, p. 265. [In queste Opere: volume primo, XXXV, p. 568].

hanno una coordinata t maggiore di t_1, mentre nell'altra (che indicheremo con S'') la coordinata t dei punti è inferiore a t_1.

Le parti di σ, R, c che appartengono al contorno di S' le distingueremo ponendo un apice alle lettere stesse; mentre porremo due apici per indicare le parti delle stesse superficie che limitano S''.

4. Riprendiamo ora la formola (5) della precedente Nota ed applichiamola al campo S' prendendo per funzioni u_1 e v_1 le (V).

Cominciamo dal calcolare i valori di ϑ_1, $\tilde{\omega}_1$, $\partial u_1/\partial t$, $\partial v_1/\partial t$ corrispondenti. Avremo

$$\begin{cases} \vartheta_1 = 0 \\ \tilde{\omega}_1 = \dfrac{1}{r\sqrt{1-\theta^2}} (\log(1-\theta^2) + \log r) \\ \dfrac{\partial u_1}{\partial t} = \left[-\dfrac{\theta}{\sqrt{1-\theta^2}} (\log(1-\theta^2) + \log r) + \text{arco sen}\,\theta + c\right] \dfrac{a}{r}\,\dfrac{y-y_1}{r} \\ \dfrac{\partial v_1}{\partial t} = -\left[-\dfrac{\theta}{\sqrt{1-\theta^2}} (\log(1-\theta^2) + \log r) + \text{arco sen}\,\theta + c\right] \dfrac{a}{r}\,\dfrac{x-x_1}{r}\,. \end{cases}$$

Perciò la (5) della Nota precedente in questo caso diventerà

$$\int_\Sigma \Pi d\Sigma = 0 \tag{4}$$

quando si prenda

$$\Pi = (\xi + c\theta)\{U \,\text{sen}\,\omega - V\cos\omega\}$$
$$- \frac{(\log(1-\theta^2) + \log r)\,a}{r\sqrt{1-\theta^2}} \{u\,[-\theta\,\text{sen}\,\omega\cos nt - a\cos ny]$$
$$+ v\,[\theta\cos\omega\cos nt + a\cos nx]\} - \frac{a}{r}(\text{arco sen}\,\theta + c)\{u\,\text{sen}\,\omega - v\cos\omega\}\cos nt.$$

Il contorno Σ è formato da σ', dalle parti di R' e di τ esterne al cilindro c', e finalmente da quest'ultimo cilindro c'.

Sulla falda R' del cono R abbiamo

$$\theta = \frac{a}{\text{tg}\,\rho} \quad , \quad \cos nt = -\text{sen}\,\rho\,,$$

quindi il valore di Π nei punti del cono R' risulta il seguente

$$\Pi_{R'} = \left\{\sqrt{1-\frac{a^2}{\text{tg}^2\rho}}\left(\log\left(1-\frac{a^2}{\text{tg}^2\rho}\right) - 1 + \log r\right)\right.$$
$$\left. + \frac{a}{\text{tg}\,\rho}\left(\text{arco sen}\,\frac{a}{\text{tg}\,\rho} + c\right)\right\}\{U\,\text{sen}\,\omega - V\cos\omega\}$$
$$- \frac{\left(\log\left(1-\dfrac{a^2}{\text{tg}^2\rho}\right) + \log r\right) a^2}{r\sqrt{1-\dfrac{a^2}{\text{tg}^2\rho}}} \{u\,[\text{sen}\,\omega\cos\rho - \cos ny]$$
$$+ v\,[-\cos\omega\cos\rho + \cos nx]\} + \frac{a}{r}\left(\text{arco sen}\,\frac{a}{\text{tg}\,\rho} + c\right)(u\,\text{sen}\,\omega - v\cos\omega)\,\text{sen}\,\rho.$$

Osserviamo ora che sopra R′

$$\cos ny = \operatorname{sen}\omega \cos\rho \quad , \quad \cos nx = \cos\omega\cos\rho\,,$$

quindi, togliendo i termini che si annullano, la espressione precedente diventerà

$$\Pi_{R'} = \sqrt{1-\frac{a^2}{\operatorname{tg}^2\rho}}\left[\log\left(1-\frac{a^2}{\operatorname{tg}^2\rho}\right)-1+\log r\right][U\operatorname{sen}\omega - V\cos\omega]$$

$$+\,a\left(\operatorname{arco\,sen}\frac{a}{\operatorname{tg}\rho}+c\right)\left\{\frac{1}{\operatorname{tg}\rho}[U\operatorname{sen}\omega - V\cos\omega]+\frac{1}{r}(u\operatorname{sen}\omega - v\cos\omega)\operatorname{sen}\rho\right\}.$$

Diminuiamo ora l'angolo ρ finché si abbia

$$\operatorname{tg}\rho = a\,, \tag{5}$$

allora basterà prendere la costante arbitraria $c = -\pi/2$, perché $\Pi_{R'}$ si annulli al limite.

Perciò quando si suppone soddisfatta la (5) dovremo estendere nella (4) la integrazione a σ', a c' e a τ soltanto.

Sopra c' abbiamo

$$\theta = \frac{a(t-t_1)}{\varepsilon}\,,$$

$$\cos nt = 0 \quad , \quad \cos nx = \cos\omega \quad , \quad \cos ny = \operatorname{sen}\omega\,,$$

quindi, nei punti del cilindro c', Π assumerà la forma

$$\Pi_{c'} = -\left[\sqrt{1-\frac{a^2(t_1-t)^2}{\varepsilon^2}}\left(\log\left(1-\frac{a^2(t_1-t)^2}{\varepsilon^2}\right)-1+\log\varepsilon\right)\right.$$

$$\left.+\,\frac{a(t-t_1)}{\varepsilon}\left(\operatorname{arco\,sen}\frac{a(t-t_1)}{\varepsilon}+c\right)\right]a^2\,\tilde\omega$$

$$+\,\frac{\left(\log\left(1-\frac{a^2(t-t_1)^2}{\varepsilon^2}\right)+\log\varepsilon\right)a^2}{\varepsilon\sqrt{1-\frac{a^2(t-t_1)^2}{\varepsilon^2}}}(u\operatorname{sen}\omega - v\cos\omega)\,.$$

Ma sopra c' si ha

$$dc' = d\Sigma = \varepsilon\, d\omega\, dt$$

quindi ponendo

$$\frac{a(t-t_1)}{\varepsilon} = \eta \quad , \quad dt = \frac{\varepsilon}{a}d\eta$$

avremo che la parte dell'integrale (4) estesa a c' potrà scriversi

$$\int_{c'}\Pi_{c'}\,dc' = \frac{\varepsilon}{a}\int_0^{2\pi}d\omega\int_0^1\Big\{-[\sqrt{1-\eta^2}\,(\log(1-\eta^2)-1)$$

$$+\,\eta(\operatorname{arco\,sen}\eta + c)]\,\varepsilon\, a^2\,\tilde\omega + \frac{\log(1-\eta^2)}{\sqrt{1-\eta^2}}\,a^2\,(u\operatorname{sen}\omega - v\cos\omega)\Big\}\,d\eta$$

$$+\,a\varepsilon\log\varepsilon\int_0^{2\pi}d\omega\int_0^1\Big\{-\varepsilon\sqrt{1-\eta^2}\,\tilde\omega + \frac{1}{\sqrt{1-\eta^2}}(u\operatorname{sen}\omega - v\cos\omega\Big\}\,d\eta\,.$$

Di qui si vede che facendo impiccolire indefinitamente ε, l'integrale esteso al cilindro c' tende verso zero, e per conseguenza nella (4) potremo prendere per campo d'integrazione la superficie σ' e il piano τ. Sopra questo si ha

$$\cos nx = \cos ny = 0 \quad , \quad \cos nt = 1 \quad , \quad \theta = 0$$

onde, essendo $c = -\pi/2$, avremo che il valore di Π corrispondente ai punti di τ sarà

$$\Pi_\tau = (\log r - 1)\left(\frac{\partial u}{\partial t} \operatorname{sen} \omega - \frac{\partial v}{\partial t} \cos \omega\right) + \frac{\pi}{2} \frac{a}{r} (u \operatorname{sen} \omega - v \cos \omega) .$$

Se dunque chiamiamo $\Pi'_{\sigma'}$ il valore di Π sopra la superficie σ', otterremo la formula

$$(6') \qquad \int_{\sigma'} \Pi'_{\sigma'} \, d\sigma' = \int_\tau \left[(\log r - 1)\left(\frac{\partial v}{\partial t} \cos \omega - \frac{\partial u}{\partial t} \operatorname{sen} \omega\right) + \frac{\pi}{2} \frac{a}{r} (v \cos \omega - u \operatorname{sen} \omega)\right] d\tau .$$

5. Analogamente consideriamo lo spazio S″ ed applichiamo lo stesso calcolo. Prendendo questa volta $c = \pi/2$, e chiamando $\Pi''_{\sigma''}$ il valore corrispondente di Π sopra σ'', avremo

$$(6'') \qquad \int_{\sigma''} \Pi''_{\sigma''} \, d\sigma'' = -\int_\tau \left[(\log r - 1)\left(\frac{\partial v}{\partial t} \cos \omega - \frac{\partial u}{\partial t} \operatorname{sen} \omega\right) + \frac{\pi}{2} \frac{a}{r} (v \cos \omega - u \operatorname{sen} \omega)\right] d\tau .$$

Sommando le (6′) e (6″) avremo dunque

$$(6) \qquad \int_{\sigma'} \Pi'_{\sigma'} \, d\sigma' + \int_{\sigma''} \Pi''_{\sigma''} \, d\sigma'' = \pi a \int_\tau \frac{1}{r} (v \cos \omega - u \operatorname{sen} \omega) \, d\tau .$$

Osserviamo che

$$\frac{\partial \log r}{\partial x_1} = -\frac{1}{r} \cos \omega \quad , \quad \frac{\partial \log r}{\partial y_1} = -\frac{1}{r} \operatorname{sen} \omega$$

quindi il secondo membro della equazione precedente potrà scriversi

$$\pi a \left[\frac{\partial}{\partial y_1} \int_\tau u \log r \, d\tau - \frac{\partial}{\partial x_1} \int_\tau v \log r \, d\tau\right] .$$

Per conseguenza (vedi fig. 2) *essendo* s_a *la solita superficie esterna al cono* A *che limita una porzione di spazio adiacente al vertice, e* s'_a, s''_a *le due parti di essa divise dal piano* τ, *posto*

$$\text{(a)}\qquad \Phi_a = \frac{1}{a}\int_{s_a}\left\{\sqrt{1-\frac{a^2(t-t_1)^2}{r^2}}\log\left(\frac{r^2-a^2(t-t_1)^2}{er}\right)\left(U\frac{y-y_1}{r}-V\frac{x-x_1}{r}\right)\right.$$

$$+\log\left(\frac{r^2-a^2(t-t_1)^2}{r}\right)\frac{a^2}{\sqrt{r^2-a^2(t-t_1)^2}}\left[u\left(\frac{t-t_1}{r}\frac{y-y_1}{r}\cos nt+\cos ny\right)\right.$$

$$\left.\left.-v\left(\frac{t-t_1}{r}\frac{x-x_1}{r}\cos nt+\cos nx\right)\right]\right\}ds_a$$

$$+\int_{s_a}\left\{\frac{t-t_1}{r}\,\text{arco sen}\left(\frac{a(t-t_1)}{r}\right)\left(U\frac{y-y_1}{r}-V\frac{x-x_1}{r}\right)\right.$$

$$\left.-\frac{1}{r}\,\text{arco sen}\left(\frac{a(t-t_1)}{r}\right)\left(u\frac{y-y_1}{r}-v\frac{x-x_1}{r}\right)\cos nt\right\}ds_a$$

$$-\frac{\pi}{2}\left\{\int_{s'_a}\left[\frac{t-t_1}{r}\left\{U\frac{y-y_1}{r}-V\frac{x-x_1}{r}\right\}-\frac{1}{r}\left(u\frac{y-y_1}{r}-v\frac{x-x_1}{r}\right)\cos nt\right]ds'_a,\right.$$

$$\left.-\int_{s''_a}\left[\frac{t-t_1}{r}\left\{U\frac{y-y_1}{r}-V\frac{x-x_1}{r}\right\}-\frac{1}{r}\left(u\frac{y-y_1}{r}-v\frac{x-x_1}{r}\right)\cos nt\right]ds''_a\right\},$$

avremo

$$\text{(7)}\qquad \Phi_a = \pi\left[\frac{\partial}{\partial y_1}\int_\tau u\log r\,d\tau-\frac{\partial}{\partial x_1}\int_\tau v\log r\,d\tau\right].$$

In modo analogo possiamo operare partendo dagli integrali (VI) e si giunge allora alla seguente conclusione:

Se s_b è la porzione di s_a inclusa nella parte esterna al cono B *e s'_b, s''_b sono le due parti in cui essa viene divisa dal piano τ, posto*

$$\text{(b)}\qquad \Phi_b = \frac{1}{b}\int_{s_b}\left\{\sqrt{1-\frac{b^2(t-t_1)^2}{r^2}}\log\left(\frac{r^2-b^2(t-t_1)^2}{er}\right)\left(U\frac{x-x_1}{r}+V\frac{y-y_1}{r}\right)\right.$$

$$+\log\left(\frac{r^2-b^2(t-t_1)^2}{r}\right)\frac{b^2}{\sqrt{r^2-b^2(t-t_1)^2}}\left[\left(\frac{t-t_1}{r}\frac{x-x_1}{r}\cos nt+\cos nx\right)u\right.$$

$$\left.\left.+\left(\frac{t-t_1}{r}\frac{y-y_1}{r}\cos nt+\cos ny\right)v\right]\right\}ds_b$$

$$+\int_{s_b}\left\{\frac{t-t_1}{r}\,\text{arco sen}\left(\frac{b(t-t_1)}{r}\right)\left(U\frac{x-x_1}{r}+V\frac{y-y_1}{r}\right)\right.$$

$$\left.-\frac{1}{r}\,\text{arco sen}\left(\frac{b(t-t_1)}{r}\right)\left(u\frac{x-x_1}{r}+v\frac{y-y_1}{r}\right)\cos nt\right\}ds_b$$

$$-\frac{\pi}{2}\left\{\int_{s'_b}\left\{\frac{t-t_1}{r}\left(U\frac{x-x_1}{r}+V\frac{y-y_1}{r}\right)-\frac{1}{r}\left(u\frac{x-x_1}{r}+v\frac{y-y_1}{r}\right)\cos nt\right\}ds'_b\right.$$

$$\left.-\int_{s'_b}\left\{\frac{t-t_1}{r}\left(U\frac{x-x_1}{r}+V\frac{y-y_1}{r}\right)-\frac{1}{r}\left(u\frac{x-x_1}{r}+v\frac{y-y_1}{r}\right)\cos nt\right\}ds''_b\right\},$$

si ha

$$\Phi_b = \pi\left[\frac{\partial}{\partial x_1}\int_\tau u \log r \, d\tau + \frac{\partial}{\partial y_1}\int_\tau v \log r \, d\tau\right]. \tag{8}$$

7. Dalle (7) e (8) segue immediatamente

$$\frac{\partial \Phi_b}{\partial x_1} + \frac{\partial \Phi_a}{\partial y_1} = \pi \Delta^2 \int_\tau u \log r \, d\tau$$

$$\frac{\partial \Phi_b}{\partial y_1} - \frac{\partial \Phi_a}{\partial x_1} = \pi \Delta^2 \int_\tau v \log r \, d\tau$$

in cui si è posto per brevità

$$\Delta^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} \cdot$$

Ma per un noto teorema sui potenziali logaritmici

$$\Delta^2 \int_\tau u \log r \, d\tau = 2\,\pi u\,(x_1, y_1, t_1)$$

$$\Delta^2 \int_\tau v \log r \, d\tau = 2\,\pi v\,(x_1, y_1, t_1)$$

quindi

$$\left\{ \begin{aligned} u\,(x_1, y_1, t_1) &= \frac{1}{2\,\pi^2}\left[\frac{\partial \Phi_b}{\partial x_1} + \frac{\partial \Phi_a}{\partial y_1}\right] \\ v\,(x_1, y_1, t_1) &= \frac{1}{2\,\pi^2}\left[\frac{\partial \Phi_b}{\partial y_1} + \frac{\partial \Phi_a}{\partial x_1}\right]. \end{aligned} \right. \tag{9}$$

Sono queste le formule cercate; esse sono le analoghe della formula (27) della Nota già citata *Sulle onde cilindriche nei mezzi isotropi.*

III.

SUR LES VIBRATIONS DES CORPS ÉLASTIQUES ISOTROPES

« Acta Mathematica », vol. 18, 1894, pp. 161–232.

INTRODUCTION.

1. Les lignes caractéristiques jouent un rôle très important dans la théorie des équations différentielles aux dérivées partielles à deux variables indépendantes. Leur étude a été développée dans l'ouvrage de M. DU BOIS REYMOND dont la première partie a paru en 1864 et dans un court article du même auteur qui a été publié en 1883.

Mais dès 1860 RIEMANN dans son mémoire sur la propagation du son avait montré l'avantage qu'on peut tirer de la considération des lignes caractéristiques dans l'intégration des équations différentielles. Les idées de RIEMANN ont été reprises tout récemment par M. DARBOUX qui leur a consacré un chapitre de son ouvrage sur la théorie des surfaces pour les appliquer à une équation qui offre le plus grand intérêt dans la physique mathématique et la géométrie.

Il serait intéressant de généraliser la théorie des caractéristiques aux équations à trois variables indépendantes; mais il paraît avantageux de faire précéder à cette extension l'étude approfondie de quelques équations particulières. Les résultats relatifs à la généralisation des caractéristiques qu'on obtient de la sorte, et les méthodes qu'on est porté à suivre peuvent servir de guide pour une étude générale car ils offrent le moyen de s'orienter et de trouver son chemin dans un champ tout à fait nouveau.

C'est pourquoi j'ai essayé de généraliser la théorie des caractéristiques au cas d'un système d'équations différentielles aux dérivées partielles à trois variables qui se présente dans la physique mathématique. C'est le système des équations différentielles des vibrations des corps élastiques isotropes lorsque les déplacements des points sont indépendants d'une coordonnée. Les mêmes équations paraissent dans la théorie des vibrations des membranes élastiques. Elles sont les suivantes:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + (b^2 - a^2)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) + X,$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) + (b^2 - a^2)\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) + Y,$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) + Z,$$

où les quantités constantes a, b représentent les vitesses de propagation des ondes transversales et longitudinales.

2. Si nous concevons que x, y, t soient les coordonnées cartésiennes d'un point de l'espace nous pourrons borner nos considérations à un espace à trois dimensions. Quels sont maintenant les éléments qui jouent dans ce cas le même rôle que les lignes caractéristiques dans les équations à deux variables? Prenons pour sommet un point quelconque de l'espace et conduisons deux cônes de révolution dont l'axe soit parallèle à l'axe t et dont les ouvertures soient $2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} a$, $2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} b$. Ces cônes jouent le rôle de *cônes caractéristiques*. Je donne dans ce mémoire les formules par lesquelles on peut calculer les valeurs des fonctions inconnues au sommet des cônes lorsqu'on connaît les valeurs des mêmes fonctions et de leurs dérivées sur des surfaces quelconques limitées par une nappe ou par les deux nappes de ces cônes.

3. En particularisant les formules on peut en obtenir d'autres qui ont une application directe en physique mathématique.

Il est connu que la conception du principe de HUYGHENS a présenté beaucoup de difficultés jusqu'à ce que KIRCHHOFF donna sa formule qui présente ce principe sous une forme rigoureuse et générale. Pour les ondes cylindriques on ne connaissait pas la formule correspondante, car on ne pouvait pas la trouver en employant une méthode tout à fait semblable à celle suivie par KIRCHHOFF. En effet j'ai montré dans l'Art. 11ème que dans le cas des ondes cylindriques les intégrales qui ont la forme de celles dont KIRCHHOFF a fait usage, sont polydromes, c'est à dire présentent la même particularité que j'ai observée pour les intégrales de LAMÉ relatives aux équations de la double réfraction (1). Pour employer la méthode GREEN-KIRCHHOFF il faudrait alors modifier l'espace par des coupures, et l'on trouverait des résultats fort différents de ceux qu'on voudrait obtenir.

Au contraire, en particularisant les formules générales dont j'ai parlé dans le paragraphe précédent, on peut trouver sous trois formes différentes l'expression mathématique du principe de HUYGHENS pour les ondes cylindriques. Lorsque les vibrations sont harmoniques l'une d'elle se réduit à celle qui a été trouvée par M. WEBER dans son mémoire sur l'équation $\Delta u + k^2 u = 0$ (2), de la même façon que la formule de KIRCHHOFF se réduit à une autre formule que M. HELMHOLTZ avait donné antérieurement.

Enfin on peut trouver que les surfaces caractéristiques jouent un rôle dans une question du calcul des variations et l'on peut trouver par là une application de ces surfaces à la théorie du choc dans un milieu élastique.

(1) «Acta mathematica», vol. 16, 1892, p. 153. [In queste «Opere»: vol. primo, XXXIII, p. 154].

(2) «Math. Annalen», vol. 1, 1869, p. 1.

Art. I. – Les formules fondamentales.

1. Les équations que nous allons étudier sont les suivantes

$$\text{(A)} \qquad \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) + Z,$$

$$\text{(B)} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + (b^2 - a^2)\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y}\right) + X, \\ \dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a^2\left(\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) + (b^2 - a^2)\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y}\right) + Y \end{cases}$$

où a, b sont des constantes et l'on a

$$b > a.$$

Soient a', b', a'', b'' des nouvelles constantes telles que

$$(1) \qquad b^2 - a^2 = b'^2 - a'^2 = b''^2 - a''^2;$$

on aura

$$(2) \qquad \begin{cases} a^2 - a'^2 = b^2 - b'^2 = k', \\ a^2 - a''^2 = b^2 - b''^2 = k'', \end{cases}$$

et les équations (B) pourront s'écrire

$$\text{(B}'\text{)} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - b^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} - (b'^2 - a'^2)\dfrac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = X, \\ \dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2} - a^2\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} - b^2\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2} - (b''^2 - a''^2)\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = Y. \end{cases}$$

2. Commençons par trouver la *formule fondamentale* relative à l'équation (A). Regardons x, y, t comme les coordonnées cartésiennes des points de l'espace et supposons que dans un champs S à trois dimensions l'intégrale w de l'équation (A) soit régulière.

Si nous désignons par Σ le contour du champ S, on aura, en intégrant par parties,

$$(3) \qquad \int_S w_\lambda Z dS = \int_S w_\lambda \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - a^2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)\right) dS$$

$$= -\int_\Sigma w_\lambda \left(\frac{\partial w}{\partial t}\cos nt - a^2\left(\frac{\partial w}{\partial x}\cos nx + \frac{\partial w}{\partial y}\cos ny\right)\right) d\Sigma$$

$$-\int_S \left(\frac{\partial w_\lambda}{\partial t}\frac{\partial w}{\partial t} - a^2\left(\frac{\partial w_\lambda}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w_\lambda}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial y}\right)\right) dS$$

où w_λ dénote une nouvelle fonction régulière dans le champ S, et n est la normale à la surface Σ dirigée vers l'intérieur du champ S.

De même on aura

$$-\int_S \left(\frac{\partial w_\lambda}{\partial t}\frac{\partial w}{\partial t} - a^2\left(\frac{\partial w_\lambda}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w_\lambda}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial y}\right)\right) dS$$

$$= \int_\Sigma w\left(\frac{\partial w_\lambda}{\partial t}\cos nt - a^2\left(\frac{\partial w_\lambda}{\partial x}\cos nx + \frac{\partial w_\lambda}{\partial y}\cos ny\right)\right) d\Sigma$$

$$+ \int_S w\left(\frac{\partial^2 w_\lambda}{\partial t^2} - a^2\left(\frac{\partial^2 w_\lambda}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_\lambda}{\partial y^2}\right)\right) dS.$$

Par suite en posant

$$\frac{\partial^2 w_\lambda}{\partial t^2} - a^2\left(\frac{\partial^2 w_\lambda}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_\lambda}{\partial y^2}\right) = Z_\lambda, \tag{4}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t}\cos nt - a^2\left(\frac{\partial w}{\partial x}\cos nx + \frac{\partial w}{\partial y}\cos ny\right) = W, \tag{5}$$

$$\frac{\partial w_\lambda}{\partial t}\cos nt - a^2\left(\frac{\partial w_\lambda}{\partial x}\cos nx + \frac{\partial w_\lambda}{\partial y}\cos ny\right) = W_\lambda, \tag{6}$$

l'équation (3) pourra s'écrire

$$\int_S (w_\lambda Z - wZ_\lambda)\, dS = \int_\Sigma (wW_\lambda - w_\lambda W)\, d\Sigma. \tag{C}$$

La formule qu'on vient de trouver est la formule fondamentale qu'on cherchait.

3. Nous allons maintenant procéder d'une façon analogue pour trouver une formule semblable pour le système des équations (B).

$u, v, u_\lambda, v_\lambda$ étant quatre fonctions régulières dans le champ S, et les deux premières étant des intégrales des équations (B), on aura

$$\int_S (u_\lambda X + v_\lambda Y)\, dS = \int_S \Big\{ u_\lambda\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - b^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - a^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - (b'^2 - a'^2)\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y}\right)$$

$$+ v_\lambda\left(\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - b^2\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - (b''^2 - a''^2)\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\right)\Big\} dS$$

$$= -\int_\Sigma \Big\{ u_\lambda\left[\frac{\partial u}{\partial t}\cos nt - \left(b^2\frac{\partial u}{\partial x} + b'^2\frac{\partial v}{\partial y}\right)\cos nx - \left(a^2\frac{\partial u}{\partial y} - a'^2\frac{\partial v}{\partial x}\right)\cos ny\right]$$

$$+ v_\lambda\left[\frac{\partial v}{\partial t}\cos nt - \left(a^2\frac{\partial v}{\partial x} - a''^2\frac{\partial u}{\partial y}\right)\cos nx - \left(b^2\frac{\partial v}{\partial y} + b''^2\frac{\partial u}{\partial x}\right)\cos ny\right]\Big\} d\Sigma$$

$$-\int_S \Big\{\frac{\partial u_\lambda}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial t} - \left(b^2\frac{\partial u}{\partial x} + b'^2\frac{\partial v}{\partial y}\right)\frac{\partial u_\lambda}{\partial x} - \left(a^2\frac{\partial u}{\partial y} - a'^2\frac{\partial v}{\partial x}\right)\frac{\partial u_\lambda}{\partial y} + \frac{\partial v_\lambda}{\partial t}\frac{\partial v}{\partial t}$$

$$-\left(a^2\frac{\partial v}{\partial x} - a''^2\frac{\partial u}{\partial y}\right)\frac{\partial v_\lambda}{\partial x} - \left(b^2\frac{\partial v}{\partial y} + b''^2\frac{\partial u}{\partial x}\right)\frac{\partial v_\lambda}{\partial y}\Big\} dS.$$

Mais la dernière intégrale qui paraît dans la formule précédente peut se transformer dans l'expression suivante

$$\int_{\Sigma}\Big\{ u\left[\frac{\partial u_\lambda}{\partial t}\cos nt - \left(b^2\frac{\partial u_\lambda}{\partial x} + b''^2\frac{\partial v_\lambda}{\partial y}\right)\cos nx - \left(a^2\frac{\partial u_\lambda}{\partial y} - a''^2\frac{\partial v_\lambda}{\partial x}\right)\cos ny\right]$$

$$+ v\left[\frac{\partial v_\lambda}{\partial t}\cos nt - \left(a^2\frac{\partial v_\lambda}{\partial x} - a'^2\frac{\partial u_\lambda}{\partial y}\right)\cos nx - \left(b^2\frac{\partial v_\lambda}{\partial y} + b'^2\frac{\partial u_\lambda}{\partial x}\right)\cos ny\right]\Big\} d\Sigma$$

$$+\int_{S}\Big\{ u\left(\frac{\partial^2 u_\lambda}{\partial t^2} - b^2\frac{\partial^2 u_\lambda}{\partial x^2} - a^2\frac{\partial^2 u_\lambda}{\partial y^2} - (b''^2 - a''^2)\frac{\partial^2 v_\lambda}{\partial x\,\partial y}\right)$$

$$+ v\left(\frac{\partial^2 v_\lambda}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2 v_\lambda}{\partial x^2} - b^2\frac{\partial^2 v_\lambda}{\partial y^2} - (b'^2 - a'^2)\frac{\partial^2 u_\lambda}{\partial x\,\partial y}\right)\Big\} dS\,.$$

Par suite en posant

$$(7)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u_\lambda}{\partial t^2} - b^2\dfrac{\partial^2 u_\lambda}{\partial x^2} - a^2\dfrac{\partial^2 u_\lambda}{\partial y^2} - (b''^2 - a''^2)\dfrac{\partial^2 v_\lambda}{\partial x\,\partial y} = X_\lambda\,, \\[2mm] \dfrac{\partial^2 v_\lambda}{\partial t^2} - a^2\dfrac{\partial^2 v_\lambda}{\partial x^2} - b^2\dfrac{\partial^2 v_\lambda}{\partial y^2} - (b'^2 - a'^2)\dfrac{\partial^2 u_\lambda}{\partial x\,\partial y} = Y_\lambda\,, \end{cases}$$

$$(8)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}\cos nt - \left(b^2\dfrac{\partial u}{\partial x} + b'^2\dfrac{\partial v}{\partial y}\right)\cos nx - \left(a^2\dfrac{\partial u}{\partial y} - a'^2\dfrac{\partial v}{\partial x}\right)\cos ny = U', \\[2mm] \dfrac{\partial v}{\partial t}\cos nt - \left(a^2\dfrac{\partial v}{\partial x} - a''^2\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)\cos nx - \left(b^2\dfrac{\partial v}{\partial y} + b''^2\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)\cos ny = V'', \end{cases}$$

$$(9)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial u_\lambda}{\partial t}\cos nt - \left(b^2\dfrac{\partial u_\lambda}{\partial x} + b''^2\dfrac{\partial v_\lambda}{\partial y}\right)\cos nx - \left(a^2\dfrac{\partial u_\lambda}{\partial y} - a''^2\dfrac{\partial v_\lambda}{\partial x}\right)\cos ny = U''_\lambda\,, \\[2mm] \dfrac{\partial v_\lambda}{\partial t}\cos nt - \left(a^2\dfrac{\partial v_\lambda}{\partial x} - a'^2\dfrac{\partial u_\lambda}{\partial y}\right)\cos nx - \left(b^2\dfrac{\partial v_\lambda}{\partial y} + b'^2\dfrac{\partial u_\lambda}{\partial x}\right)\cos ny = V'_\lambda\,, \end{cases}$$

on aura

$$(D)\quad \int_{S}\{u_\lambda X + v_\lambda Y - uX_\lambda - vY_\lambda\}\,dS = \int_{\Sigma}\{u\,U''_\lambda + vV'_\lambda - u_\lambda U' - v_\lambda V''\}\,d\Sigma$$

qui est la deuxième *formule fondamentale* qu'on cherchait.

Art. 2. – Les intégrales fondamentales.

1. Soit $\varphi(\tau, \xi, \eta)$ une intégrale de l'équation

$$(1)\qquad \frac{\partial^2\varphi}{\partial\tau^2} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial\eta^2}\,;$$

il est evident que

$$(2)\qquad w = \varphi(\pm\, a\,(t_1 - t)\,, x - x_1\,, y - y_1)\,,$$

t_1, x_1, y_1 étant des constantes arbitraires, sera une intégrale de l'équation (A) en supposant $Z = 0$. De même on vérifiera aisément que les deux systèmes de fonctions

$$(3)\qquad \begin{cases} u = \dfrac{\partial\varphi\,(a\,(t_1 - t)\,,\, x - x_1\,,\, y - y_1)}{\partial y}\,, \\[2ex] v = -\dfrac{\partial\varphi\,(a\,(t_1 - t)\,,\, x - x_1\,,\, y - y_1)}{\partial x}\,, \end{cases}$$

$$(4)\qquad \begin{cases} u = \dfrac{\partial\varphi\,(b\,(t_1 - t)\,,\, x - x_1\,,\, y - y_1)}{\partial x}\,, \\[2ex] v = \dfrac{\partial\varphi\,(b\,(t_1 - t)\,,\, x - x_1\,,\, y - y_1)}{\partial y}\,, \end{cases}$$

satisferont aux équations (B) si l'on suppose $X = Y = 0$.

On pourra donc trouver des intégrales particulières des équations (A), (B), X, Y, Z étant nuls, en intégrant l'équation (1).

2. Soit

$$\rho = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}:$$

on aura tout de suite deux intégrales de l'équation (1)

$$(5)\qquad \varphi_0 = \log \rho,$$

$$(6)\qquad \Phi_0 = \tau \log \rho.$$

Mais considérons les intégrales de l'équation (1) qui ont la forme

$$\varphi = \tau^n \psi(\theta)$$

où

$$\theta = \frac{\tau}{\rho}.$$

L'équation (1) alors se transforme dans la suivante

$$\theta^2 (1 - \theta^2)\,\psi'' + \theta\,(2n - \theta^2)\,\psi' + n\,(n - 1)\,\psi = 0.$$

Examinons les deux cas qui se présentent lorsque $n = 0$, $n = 1$.

Dans le premier cas on trouvera l'intégrale

$$\psi_1 = \log\left(\theta + \sqrt{\theta^2 - 1}\right)$$

qui sera réel si $\theta > 1$, ou l'autre

$$\psi_2 = \arcsin\theta + \text{const.}$$

qui sera réel si $|\theta| < 1$.

Dans l'autre cas on aura l'intégrale

$$\Psi_1 = \frac{\sqrt{\theta^2 - 1}}{\theta} + \log\left(\theta - \sqrt{\theta^2 - 1}\right)$$

si $\theta > 1$, ou

$$\Psi_2 = \frac{\sqrt{1 - \theta^2}}{\theta} + \arcsin\theta$$

si $|\theta| < 1$.

Dans tous les cas on prendra les radicaux avec leur valeur absolue.

On tire de là les intégrales suivantes de l'équation (1)

$$\left\{\begin{aligned}\varphi_1 &= \log\left(\theta + \sqrt{\theta^2 - 1}\right),\\ \Phi_1 &= \tau\left[\frac{\sqrt{\theta^2 - 1}}{\theta} + \log\left(\theta - \sqrt{\theta^2 - 1}\right)\right],\end{aligned}\right.$$

qui seront réels si $\theta > 1$, et

$$\left\{\begin{aligned}\varphi_2 &= \arcsin\theta,\\ \Phi_2 &= \tau\left(\frac{\sqrt{1 - \theta^2}}{\theta} + \arcsin\theta\right),\end{aligned}\right.$$

qui seront réels si $|\theta| < 1$.

3. Nous allons maintenant chercher les intégrales de l'équation (1) qui ont la forme

$$\varphi = \tau^n \left(f(\theta) + \chi(\theta)\log\rho\right)$$

dans le cas $|\theta| < 1$. L'équation (1) se transforme aisément dans l'autre

$$\left(\theta^2(1-\theta^2)f'' + \theta(2n-\theta^2)f' + n(n-1)f + 2\theta^3\chi'\right)$$
$$+ \log\rho\left(\theta^2(1-\theta^2)\chi'' + \theta(2n-\theta^2)\chi' + n(n-1)\chi\right) = 0,$$

d'où l'on déduit

$$(7)\qquad \left\{\begin{aligned}&\theta^2(1-\theta^2)\chi'' + \theta(2n-\theta^2)\chi' + n(n-1)\chi = 0,\\ &\theta^2(1-\theta^2)f'' + \theta(2n-\theta^2)f' + n(n-1)f + 2\theta^3\chi' = 0.\end{aligned}\right.$$

Supposons maintenant $n = 0$. En s'appuyant sur les résultats précédents on pourra prendre pour intégrale de la première équation

$$\chi_0 = \arcsin\theta$$

et par suite en intégrant l'autre on trouvera pour f,

$$f_0 = \int \log(1-\theta^2)\frac{d\theta}{\sqrt{1-\theta^2}}\,.$$

En ajoutant à $f_0 + \chi_0 \log\rho$ l'intégrale φ_0 après l'avoir multipliée par une constante, on trouvera

$$\varphi_3 = c + \int_0^\theta \log(1-\theta^2)\frac{d\theta}{\sqrt{1-\theta^2}} + \log\rho\cdot(\arcsin\theta + c')$$

qui sera une nouvelle intégrale de l'équation (1). Les quantités c, c' qui paraissent dans la formule précédente sont deux constantes arbitraires.

Faisons maintenant $n = 1$ dans les équations (7). Pour intégrale de la première équation on pourra prendre

$$\chi_1 = \frac{\sqrt{1-\theta^2}}{\theta} + \arc\sin\theta$$

et en intégrant la seconde on aura

$$f_1 = -\int \frac{\sqrt{1-\theta^2}}{\theta^2} \log(1-\theta^2)\, d\theta\,.$$

En formant l'expression

$$\tau(f_1 + \chi_1 \log\rho) + c'\Phi_0\,,$$

nous aurons

$$\Phi_3 = \tau\left[c - \int_0^\theta \frac{\sqrt{1-\theta^2}}{\theta^2}\log(1-\theta^2)\, d\theta + \log\rho\left(\frac{\sqrt{1-\theta^2}}{\theta} + \arc\sin\theta + c'\right)\right],$$

qui sera la dernière des intégrales de l'équation (1) dont nous nous servirons.

4. Employons maintenant la formule (2); en l'appliquant aux trois intégrales $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ on trouvera

$$w_1 = \log\left(\pm\frac{a(t_1-t)}{r} + \sqrt{\frac{a^2(t_1-t)^2}{r^2} - 1}\right), \tag{8}$$

$$w_2 = \arc\sin\frac{a(t-t_1)}{r} + c\,, \tag{8'}$$

$$w_3 = c + \int_0^{\theta_a} \log(1-\theta^2)\frac{d\theta}{\sqrt{1-\theta^2}} + \log r\left(\arc\sin\frac{a(t-t_1)}{r} + c'\right), \tag{8''}$$

où l'on a posé pour simplifier

$$\theta_a = \frac{a(t-t_1)}{r} \quad , \quad r = \sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2}.$$

Dans la première intégrale nous prendrons le signe supérieur lorsque $t_1 > t$, et nous prendrons le signe inférieur si $t_1 < t$.

5. Appliquons enfin les formules (3), (4) aux intégrales Φ_1, Φ_2, Φ_3; on aura:

en partant de Φ_1:

$$\left\{\begin{aligned} u_1 &= \frac{R_a}{r^2}(y-y_1) = \frac{R_a}{r}\sin\omega\,, \\ v_1 &= -\frac{R_a}{r^2}(x-x_1) = -\frac{R_a}{r}\cos\omega\,, \end{aligned}\right. \tag{9}$$

$$\left\{\begin{aligned} u_2 &= \frac{R_b}{r^2}(x-x_1) = \frac{R_b}{r}\cos\omega\,, \\ v_2 &= \frac{R_b}{r^2}(y-y_1) = \frac{R_b}{r}\sin\omega\,, \end{aligned}\right. \tag{10}$$

en partant de Φ_2:

$$(11)\qquad \begin{cases} u_3 = \dfrac{P_a}{r^2}(y-y_1) = \dfrac{P_a}{r}\sin\omega\,, \\ v_3 = -\dfrac{P_a}{r^2}(x-x_1) = -\dfrac{P_a}{r}\cos\omega\,, \end{cases}$$

$$(12)\qquad \begin{cases} u_4 = \dfrac{P_b}{r^2}(x-x_1) = \dfrac{P_b}{r}\cos\omega\,, \\ v_4 = \dfrac{P_b}{r^2}(y-y_1) = \dfrac{P_b}{r}\sin\omega\,, \end{cases}$$

en partant de Φ_3:

$$(13)\qquad \begin{cases} u_5 = \dfrac{Q_a}{r^2}(y-y_1) = \dfrac{Q_a}{r}\sin\omega\,, \\ v_5 = -\dfrac{Q_a}{r^2}(x-x_1) = -\dfrac{Q_a}{r}\cos\omega\,, \end{cases}$$

$$(14)\qquad \begin{cases} u_6 = \dfrac{Q_b}{r^2}(x-x_1) = \dfrac{Q_b}{r}\cos\omega\,, \\ v_6 = \dfrac{Q_b}{r^2}(y-y_1) = \dfrac{Q_b}{r}\sin\omega\,, \end{cases}$$

où l'on a posé pour simplifier

$$(15)\qquad \begin{cases} Q_a = P_a \log\left(\dfrac{r^2-a^2(t-t_1)^2}{er}\right) + a(t-t_1)\left(\arcsin\dfrac{a(t-t_1)}{r}+c\right), \\ R_a = \sqrt{a^2(t_1-t)^2-r^2} \quad , \quad P_a = \sqrt{r^2-a^2(t_1-t)^2}, \\ Q_b = P_b \log\left(\dfrac{r^2-b^2(t-t_1)^2}{er}\right) + b(t-t_1)\left(\arcsin\dfrac{b(t-t_1)}{r}+c\right), \\ R_b = \sqrt{b^2(t_1-t)^2-r^2} \quad , \quad P_b = \sqrt{r^2-b^2(t_1-t)^2}, \end{cases}$$

$$\cos\omega = \frac{x-x_1}{r} \quad , \quad \sin\omega = \frac{y-y_1}{r}.$$

Art. 3. – Calcul des quantités conjuguées aux intégrales fondamentales.

1. Nous appellerons *quantités conjuguées* à $w_\lambda, u_\lambda, v_\lambda$ les fonctions $W_\lambda, U''_\lambda, V'_\lambda$, que nous avons introduites dans le premier article. Il faut maintenant les calculer pour les intégrales fondamentales que nous avons trouvées dans l'article précédent.

Ce calcul ne présente pas de difficultés. Nous en donnerons ici les résultats:

$$(1)\qquad W_1 = \mp\frac{a}{R_a}\left(\cos nt - a^2\frac{t_1-t}{r}\cos nr\right),$$

$$(2)\qquad W_2 = \frac{a}{P_a}\left(\cos nt + a^2\frac{t-t_1}{r}\cos nr\right),$$

$$(3)\qquad W_3 = \frac{a}{P_a}\log\left(\frac{r^2-a^2(t-t_1)^2}{r}\right)\left(\cos nt + a^2\frac{t-t_1}{r}\cos nr\right) - a^2\frac{\cos nr}{r}\left(\arcsin\frac{a(t-t_1)}{r}+c'\right)$$

où l'on a posé

$$\cos nr = \cos nx \cos \omega + \cos ny \sin \omega.$$

2. Les expressions de U''_λ, V'_λ sont les suivantes

$$(4)\quad \begin{cases} U''_1 = \dfrac{1}{R_a}\left\{-a^2\dfrac{t_1-t}{r}\cos nt \sin\omega + \dfrac{1}{2}(a^2+a''^2)\cos ny + \dfrac{1}{2}k''\beta\right\} + R_a\dfrac{k''}{r^2}\beta \\ V'_1 = \dfrac{1}{R_a}\left\{\ \ a^2\dfrac{t_1-t}{r}\cos nt \cos\omega - \dfrac{1}{2}(a^2+a'^2)\cos nx - \dfrac{1}{2}k'\alpha\right\} - R_a\dfrac{k'}{r^2}\alpha, \end{cases}$$

$$(5)\quad \begin{cases} U''_2 = \dfrac{1}{R_b}\left\{-b^2\dfrac{t_1-t}{r}\cos nt \cos\omega + \dfrac{1}{2}(b^2+b''^2)\cos nx + \dfrac{1}{2}k''\alpha\right\} + R_b\dfrac{k''}{r^2}\alpha, \\ V'_2 = \dfrac{1}{R_b}\left\{-b^2\dfrac{t_1-t}{r}\cos nt \sin\omega + \dfrac{1}{2}(b^2+b'^2)\cos ny + \dfrac{1}{2}k'\beta\right\} + R_b\dfrac{k'}{r^2}\beta, \end{cases}$$

$$(6)\quad \begin{cases} U''_3 = -\dfrac{1}{P_a}\left\{\ \ a^2\dfrac{t-t_1}{r}\cos nt \sin\omega + \dfrac{1}{2}(a^2+a''^2)\cos ny + \dfrac{1}{2}k''\beta\right\} + P_a\dfrac{k''}{r^2}\beta, \\ V'_3 = -\dfrac{1}{P_a}\left\{-a^2\dfrac{t-t_1}{r}\cos nt \cos\omega - \dfrac{1}{2}(a^2+a'^2)\cos nx - \dfrac{1}{2}k'\alpha\right\} - P_a\dfrac{k'}{r^2}\alpha, \end{cases}$$

$$(7)\quad \begin{cases} U''_4 = -\dfrac{1}{P_b}\left\{\ \ b^2\dfrac{t-t_1}{r}\cos nt \cos\omega + \dfrac{1}{2}(b^2+b''^2)\cos nx + \dfrac{1}{2}k''\alpha\right\} + P_b\dfrac{k''}{r^2}\alpha, \\ V'_4 = -\dfrac{1}{P_b}\left\{\ \ b^2\dfrac{t-t_1}{r}\cos nt \sin\omega + \dfrac{1}{2}(b^2+b'^2)\cos ny + \dfrac{1}{2}k'\beta\right\} + P_b\dfrac{k'}{r^2}\beta, \end{cases}$$

où nous avons posé

$$(8)\quad \begin{cases} \alpha = \cos nx \cos 2\omega + \cos ny \sin 2\omega, \\ \beta = \cos nx \sin 2\omega - \cos ny \cos 2\omega. \end{cases}$$

3. Pour obtenir U''_5, V'_5, U''_6, V'_6, posons

$$(9)\quad M_a = \log\frac{r^2 - a^2(t-t_1)^2}{r}, \qquad M_b = \log\frac{r^2 - b^2(t-t_1)^2}{r}$$

$$(9')\quad N_a = \arc\sin\frac{a(t-t_1)}{r} + c, \qquad N_b = \arc\sin\frac{b(t-t_1)}{r} + c:$$

on aura (voir form. (15) art. 2)

$$(10)\quad \begin{cases} Q_a = P_a(M_a - 1) + a(t-t_1)N_a, \\ Q_b = P_b(M_b - 1) + b(t-t_1)N_b, \end{cases}$$

et par suite

$$(11)\quad \begin{cases} U''_5 = \dfrac{M_a}{P_a}\left\{-a^2\dfrac{t-t_1}{r}\sin\omega\cos nt - \dfrac{1}{2}(a^2+a''^2)\cos ny - \dfrac{1}{2}k''\beta\right\} \\ \qquad\qquad + \dfrac{a}{r}N_a\sin\omega\cos nt + Q_a\dfrac{k'}{r^2}\beta, \\ V'_5 = \dfrac{M_a}{P_a}\left\{\ a^2\dfrac{t-t_1}{r}\cos\omega\cos nt + \dfrac{1}{2}(a^2+a'^2)\cos nx + \dfrac{1}{2}k'\alpha\right\} \\ \qquad\qquad - \dfrac{a}{r}N_a\cos\omega\cos nt - Q_a\dfrac{k'}{r^2}\alpha, \end{cases}$$

$$
(12)\quad \left\{
\begin{aligned}
U''_6 &= \frac{M_b}{P_b}\left\{ -b^2\,\frac{t-t_1}{r}\cos\omega\cos nt - \frac{1}{2}(b^2+b''^2)\cos nx - \frac{1}{2}k''\alpha \right\} \\
&\qquad\qquad + \frac{b}{r}N_b\cos\omega\cos nt + Q_b\,\frac{k'}{r^2}\,\alpha, \\
V'_6 &= \frac{M_b}{P_b}\left\{ -b^2\,\frac{t-t_1}{r}\sin\omega\cos nt - \frac{1}{2}(b^2+b'^2)\cos ny - \frac{1}{2}k'\beta \right\} \\
&\qquad\qquad + \frac{b}{r}N_b\sin\omega\cos nt + Q_b\,\frac{k'}{r^2}\,\beta.
\end{aligned}
\right.
$$

Art. 4. – Valeurs des intégrales fondamentales et des quantités conjuguées sur des surfaces spéciales.

1. Conduisons (voir fig. 1) par un point quelconque x_1, y_1, t_1 un cône de révolution Λ ayant l'axe parallèle à l'axe t et dont l'ouverture soit 2λ; conduisons ensuite un cylindre de révolution C ayant le même axe que le cône et dont le rayon soit ε; et enfin un plan T passant par (x_1, y_1, t_1) et perpendiculaire à l'axe t. Nous allons calculer les valeurs des intégrales fondamentales et de leurs conjuguées sur ces surfaces.

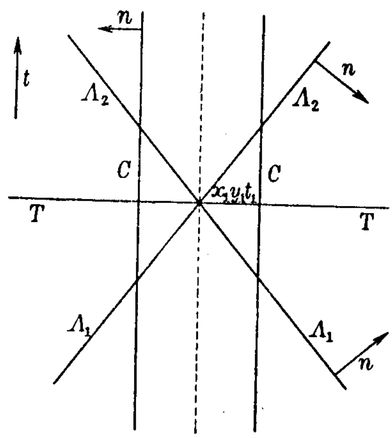


Fig. 1.

2. Désignons par Λ_1 la nappe du cône dont les points ont une coordonnée $t < t_1$, et par Λ_2 l'autre; prenons la normale n à cette surface dirigée extérieurement au cône. On aura alors

$$
(1)\quad \left\{
\begin{aligned}
\cos nt &= \pm\,\sin\lambda \\
\cos nx &= \cos\lambda\cos\omega, \\
\cos ny &= \cos\lambda\sin\omega, \\
\cos nr &= \cos\lambda, \\
\frac{t_1-t}{r} &= \pm\,\mathrm{cotg}\,\lambda,
\end{aligned}
\right.
$$

où le signe supérieur est relatif à la nappe Λ_1 et l'inférieur à la nappe Λ_2. On tire de là immédiatement les valeurs cherchées sur le cône Λ. Elles sont les suivantes:

$$(2)\quad w_{1,\Lambda} = \log\left(\frac{a}{\mathrm{tg}\,\lambda} + \sqrt{\frac{a^2}{\mathrm{tg}^2\lambda} - 1}\right), \qquad (2')\quad W_{1,\Lambda} = \frac{a\cos\lambda}{r}\sqrt{a^2 - \mathrm{tg}^2\lambda},$$

$$(3)\quad w_{2,\Lambda} = \mp\,\arcsin\frac{a}{\mathrm{tg}\,\lambda} + c\,, \qquad (3')\quad W_{2,\Lambda} = \pm\,\frac{a\cos\lambda}{r}\sqrt{\mathrm{tg}^2\lambda - a^2},$$

$$(4)\quad w_{3,\Lambda} = c + \int_0^{\pm a/\mathrm{tg}\,\lambda} \log(1-\theta^2)\frac{d\theta}{\sqrt{1-\theta^2}} + \log r\cdot\left(\mp\,\arcsin\frac{a}{\mathrm{tg}\,\lambda} + c'\right),$$

$$(4')\quad W_{3,\Lambda} = \pm\,\frac{a\sin\lambda}{r}\sqrt{1 - \frac{a^2}{\mathrm{tg}^2\lambda}}\log\left(r\left(1 - \frac{a^2}{\mathrm{tg}^2\lambda}\right)\right) -$$

$$-a^2\frac{\cos\lambda}{r}\left(\mp\arc\sin\frac{a}{\operatorname{tg}\lambda}+c'\right),$$

$$(5)\quad\left\{\begin{aligned} u_{1,\Lambda} &= \sqrt{\frac{a^2}{\operatorname{tg}^2\lambda}-1}\sin\omega,\\ v_{1,\Lambda} &= -\sqrt{\frac{a^2}{\operatorname{tg}^2\lambda}-1}\cos\omega,\end{aligned}\right.$$

$$(5')\quad\left\{\begin{aligned} U''_{1,\Lambda} &= \sqrt{\frac{a^2}{\operatorname{tg}^2\lambda}-1}\,\frac{k''}{r}\cos\lambda\sin\omega,\\ V'_{1,\Lambda} &= -\sqrt{\frac{a^2}{\operatorname{tg}^2\lambda}-1}\,\frac{k'}{r}\cos\lambda\cos\omega,\end{aligned}\right.$$

$$(6)\quad\left\{\begin{aligned} u_{2,\Lambda} &= \sqrt{\frac{b^2}{\operatorname{tg}^2\lambda}-1}\cos\omega,\\ v_{2,\Lambda} &= \sqrt{\frac{b^2}{\operatorname{tg}^2\lambda}-1}\sin\omega,\end{aligned}\right.$$

$$(6')\quad\left\{\begin{aligned} U''_{2,\lambda} &= \sqrt{\frac{b^2}{\operatorname{tg}^2\lambda}-1}\,\frac{k''}{r}\cos\lambda\cos\omega,\\ V'_{2,\lambda} &= \sqrt{\frac{b^2}{\operatorname{tg}^2\lambda}-1}\,\frac{k'}{r}\cos\lambda\sin\omega,\end{aligned}\right.$$

$$(7)\quad\left\{\begin{aligned} u_{3,\Lambda} &= \sqrt{1-\frac{a^2}{\operatorname{tg}^2\lambda}}\sin\omega,\\ v_{3,\Lambda} &= -\sqrt{1-\frac{a^2}{\operatorname{tg}^2\lambda}}\cos\omega,\end{aligned}\right.$$

$$(7')\quad\left\{\begin{aligned} U''_{3,\Lambda} &= \sqrt{1-\frac{a^2}{\operatorname{tg}^2\lambda}}\,\frac{k''}{r}\cos\lambda\sin\omega,\\ V'_{3,\Lambda} &= -\sqrt{1-\frac{a^2}{\operatorname{tg}^2\lambda}}\,\frac{k'}{r}\cos\lambda\cos\omega,\end{aligned}\right.$$

$$(8)\quad\left\{\begin{aligned} u_{4,\Lambda} &= \sqrt{1-\frac{b^2}{\operatorname{tg}^2\lambda}}\cos\omega,\\ v_{4,\Lambda} &= \sqrt{1-\frac{b^2}{\operatorname{tg}^2\lambda}}\sin\omega,\end{aligned}\right.$$

$$(8')\quad\left\{\begin{aligned} U''_{4,\Lambda} &= \sqrt{1-\frac{b^2}{\operatorname{tg}^2\lambda}}\,\frac{k''}{r}\cos\lambda\cos\omega,\\ V'_{4,\Lambda} &= \sqrt{1-\frac{b^2}{\operatorname{tg}^2\lambda}}\,\frac{k'}{r}\cos\lambda\sin\omega,\end{aligned}\right.$$

$$(9)\quad\left\{\begin{aligned} u_{5,\Lambda} &= \frac{Q_{a,\Lambda}}{r}\sin\omega,\\ v_{5,\Lambda} &= -\frac{Q_{a,\Lambda}}{r}\cos\omega,\end{aligned}\right.$$

$$(9') \quad \begin{cases} U''_{5,\Lambda} = \quad \left[\pm \dfrac{a}{r} N_{a,\Lambda} \sin\lambda + \dfrac{k''}{r^2} Q_{a,\Lambda} \cos\lambda\right] \sin\omega\,, \\ V'_{5,\Lambda} = -\left[\pm \dfrac{a}{r} N_{a,\Lambda} \sin\lambda + \dfrac{k'}{r^2} Q_{a,\Lambda} \cos\lambda\right] \cos\omega\,, \end{cases}$$

$$(10) \quad \begin{cases} u_{6,\Lambda} = \dfrac{Q_{b,\Lambda}}{r} \cos\omega\,, \\ v_{6,\Lambda} = \dfrac{Q_{b,\Lambda}}{r} \sin\omega\,, \end{cases}$$

$$(10') \quad \begin{cases} U''_{6,\Lambda} = \left[\pm \dfrac{b}{r} N_{b,\Lambda} \sin\lambda + \dfrac{k''}{r^2} Q_{b,\Lambda} \cos\lambda\right] \cos\omega\,, \\ V'_{6,\Lambda} = \left[\pm \dfrac{b}{r} N_{b,\Lambda} \sin\lambda + \dfrac{k'}{r^2} Q_{b,\Lambda} \cos\lambda\right] \sin\omega\,, \end{cases}$$

où l'on a

$$(11) \quad \begin{cases} Q_{a,\Lambda} = r\sqrt{1 - \dfrac{a^2}{\operatorname{tg}^2\lambda}} \log\left(\dfrac{r}{e}\left(1 - \dfrac{a^2}{\operatorname{tg}^2\lambda}\right)\right) + r\dfrac{a}{\operatorname{tg}\lambda}\left(\arcsin\dfrac{a}{\operatorname{tg}\lambda} \mp c\right), \\ Q_{b,\Lambda} = r\sqrt{1 - \dfrac{b^2}{\operatorname{tg}^2\lambda}} \log\left(\dfrac{r}{e}\left(1 - \dfrac{b^2}{\operatorname{tg}^2\lambda}\right)\right) + r\dfrac{b}{\operatorname{tg}\lambda}\left(\arcsin\dfrac{b}{\operatorname{tg}\lambda} \mp c\right), \end{cases}$$

$$(12) \quad \begin{cases} N_{a,\Lambda} = \mp \arcsin\dfrac{a}{\operatorname{tg}\lambda} + c\,, \\ N_{b,\Lambda} = \mp \arcsin\dfrac{b}{\operatorname{tg}\lambda} + c\,. \end{cases}$$

Il est évident que les valeurs de $w_{1,\Lambda}$, $W_{1,\Lambda}$, $u_{1,\Lambda}$, $v_{1,\Lambda}$, $U''_{1,\Lambda}$, $V'_{1,\Lambda}$, seront réelles si $\operatorname{tg}\lambda < a$, tandis que les valeurs de $w_{2,\Lambda}$, $W_{2,\Lambda}$, $w_{3,\Lambda}$, $W_{3,\Lambda}$, $u_{3,\Lambda}$, $v_{3,\Lambda}$, $U''_{3,\Lambda}$, $V'_{3,\Lambda}$, $u_{5,\Lambda}$, $v_{5,\Lambda}$, $U''_{5,\Lambda}$, $V'_{5,\Lambda}$ seront réelles si $\operatorname{tg}\lambda > a$.

De même il faut que $\operatorname{tg}\lambda < b$, afin que $u_{2,\Lambda}$, $v_{2,\Lambda}$, $U''_{2,\Lambda}$, $V'_{2,\Lambda}$ soient réelles, et il faut au contraire qu'on ait $\operatorname{tg}\lambda > b$, afin que $u_{4,\Lambda}$, $v_{4,\Lambda}$, $U''_{4,\Lambda}$, $V'_{4,\Lambda}$, $u_{6,\Lambda}$, $v_{6,\Lambda}$, $U''_{6,\Lambda}$, $V'_{6,\Lambda}$ soient réelles.

3. On tire de là que sur le plan T on aura des valeurs réelles pour $w_{2,\Lambda}$, $w_{3,\Lambda}$, $u_{5,\Lambda}$, $v_{5,\Lambda}$, $u_{6,\Lambda}$, $v_{6,\Lambda}$, et pour leurs quantités conjuguées. Pour les trouver il suffira de prendre $\lambda = \pi/2$. On aura alors

$$(13) \quad w_{2,T} = c\,, \qquad (13') \quad W_{2,T} = \pm \frac{a}{r}\,,$$

$$(14) \quad w_{3,T} = c + c' \log r\,, \qquad (14') \quad W_{3,T} = \pm \frac{a}{r} \log r\,,$$

$$(15) \quad \begin{cases} u_{5,T} = \quad \dfrac{\log r - 1}{r} \sin\omega\,, \\ v_{5,T} = -\dfrac{\log r - 1}{r} \cos\omega\,, \end{cases} \qquad (15') \quad \begin{cases} U''_{5,T} = \pm \dfrac{ac}{r} \sin\omega\,, \\ V'_{5,T} = \mp \dfrac{ac}{r} \cos\omega\,, \end{cases}$$

$$(16) \quad \begin{cases} u_{6,T} = \dfrac{\log r - 1}{r} \cos\omega\,, \\ v_{6,T} = \dfrac{\log r - 1}{r} \sin\omega\,, \end{cases} \qquad (16') \quad \begin{cases} U''_{6,T} = \pm \dfrac{bc}{r} \cos\omega\,, \\ V'_{6,T} = \pm \dfrac{bc}{r} \sin\omega\,. \end{cases}$$

Il est évident par la manière dont ces valeurs ont été trouvées qu'on devra prendre le signe supérieur si la normale au plan T a la même direction que l'axe t, et qu'on devra prendre le signe inférieur lorsque la normale au plan T aura la direction contraire.

4. Il nous faut maintenant déterminer les valeurs des intégrales fondamentales et de leurs conjuguées sur le cylindre C. Prenons la normale dirigée extérieurement au cylindre, on aura alors

$$\left\{\begin{aligned} \cos nt &= 0, \\ \cos nx &= \cos\omega, \\ \cos ny &= \sin\omega, \\ \cos nr &= 1, \\ r &= \varepsilon, \end{aligned}\right.$$

et par suite les valeurs cherchées sur le cylindre seront:

$$(17)\quad \left\{\begin{aligned} w_{1,C} &= \log\left(\pm\frac{a(t_1-t)}{\varepsilon}+\sqrt{\frac{a^2(t_1-t)^2}{\varepsilon^2}-1}\right), \\ w_{2,C} &= \arcsin\frac{a(t-t_1)}{\varepsilon}+c, \\ w_{3,C} &= c+\int_0^{a(t-t_1)/\varepsilon}\log(1-\theta^2)\frac{d\theta}{\sqrt{1-\theta^2}}+\log\varepsilon\left(\arcsin\frac{a(t-t_1)}{\varepsilon}+c'\right), \end{aligned}\right.$$

$$(17')\quad \left\{\begin{aligned} W_{1,C} &= \pm\frac{a^2}{\sqrt{(t_1-t)^2-\frac{\varepsilon^2}{a^2}}}\cdot\frac{t_1-t}{\varepsilon}, \\ W_{2,C} &= \frac{a^3}{\sqrt{\varepsilon^2-a^2(t-t_1)^2}}\cdot\frac{t-t_1}{\varepsilon}, \\ W_{3,C} &= \frac{a^3\log\left(\frac{\varepsilon^2-a^2(t-t_1)^2}{\varepsilon}\right)}{\sqrt{\varepsilon^2-a^2(t-t_1)^2}}\cdot\frac{t-t_1}{\varepsilon}-\frac{a^2}{\varepsilon}\left(\arcsin\frac{a(t-t_1)}{\varepsilon}+c'\right), \end{aligned}\right.$$

$$(18)\quad \left\{\begin{aligned} u_{1,C} &= \frac{\sqrt{a^2(t_1-t)^2-\varepsilon^2}}{\varepsilon}\sin\omega, \\ v_{1,C} &= -\frac{\sqrt{a^2(t_1-t)^2-\varepsilon^2}}{\varepsilon}\cos\omega, \end{aligned}\right.$$

$$(18')\quad \left\{\begin{aligned} U''_{1,C} &= \frac{a^2\sin\omega}{\sqrt{a^2(t_1-t)^2-\varepsilon^2}}+k''\frac{\sqrt{a^2(t_1-t)^2-\varepsilon^2}}{\varepsilon^2}\sin\omega, \\ V'_{1,C} &= \frac{-a^2\cos\omega}{\sqrt{a^2(t_1-t)^2-\varepsilon^2}}-k'\frac{\sqrt{a^2(t_1-t)^2-\varepsilon^2}}{\varepsilon^2}\cos\omega, \end{aligned}\right.$$

$$(19)\quad \left\{\begin{aligned} u_{2,C} &= \frac{\sqrt{b^2(t_1-t)^2-\varepsilon^2}}{\varepsilon}\cos\omega, \\ v_{2,G} &= \frac{\sqrt{b^2(t_1-t)^2-\varepsilon^2}}{\varepsilon^2}\sin\omega, \end{aligned}\right.$$

$$(19')\qquad \left\{ \begin{aligned} U''_{2,C} &= \frac{b^2 \cos\omega}{\sqrt{b^2 (t_1 - t)^2 - \varepsilon^2}} + k'' \frac{\sqrt{b^2 (t_1 - t)^2 - \varepsilon^2}}{\varepsilon^2} \cos\omega\,, \\ V'_{2,C} &= \frac{b^2 \sin\omega}{\sqrt{b^2 (t_1 - t)^2 - \varepsilon^2}} + k' \frac{\sqrt{b^2 (t_1 - t)^2 - \varepsilon^2}}{\varepsilon^2} \sin\omega\,, \end{aligned} \right.$$

$$(20)\qquad \left\{ \begin{aligned} u_{3,C} &= \frac{\sqrt{\varepsilon^2 - a^2 (t_1 - t)^2}}{\varepsilon} \sin\omega\,, \\ v_{3,C} &= -\frac{\sqrt{\varepsilon^2 - a^2 (t_1 - t)^2}}{\varepsilon} \cos\omega\,, \end{aligned} \right.$$

$$(20')\qquad \left\{ \begin{aligned} U''_{3,C} &= -\frac{a^2 \sin\omega}{\sqrt{\varepsilon^2 - a^2 (t - t_1)^2}} + k'' \frac{\sqrt{\varepsilon^2 - a^2 (t - t_2)^2}}{\varepsilon^2} \sin\omega\,, \\ V'_{3,C} &= \frac{a^2 \cos\omega}{\sqrt{\varepsilon^2 - a^2 (t - t_1)^2}} - k' \frac{\sqrt{\varepsilon^2 - a^2 (t - t_1)^2}}{\varepsilon^2} \cos\omega\,, \end{aligned} \right.$$

$$(21)\qquad \left\{ \begin{aligned} u_{4,C} &= \frac{\sqrt{\varepsilon^2 - b^2 (t_1 - t)^2}}{\varepsilon} \cos\omega\,, \\ v_{4,C} &= \frac{\sqrt{\varepsilon^2 - b^2 (t_1 - t)^2}}{\varepsilon} \sin\omega\,, \end{aligned} \right.$$

$$(21')\qquad \left\{ \begin{aligned} U''_{4,C} &= -\frac{b^2 \cos\omega}{\sqrt{\varepsilon^2 - b^2 (t - t_1)^2}} + k'' \frac{\sqrt{\varepsilon^2 - b^2 (t - t_1)^2}}{\varepsilon^2} \cos\omega\,, \\ V'_{4,C} &= -\frac{b^2 \sin\omega}{\sqrt{\varepsilon^2 - b^2 (t - t_1)^2}} + k' \frac{\sqrt{\varepsilon^2 - b^2 (t - t_1)^2}}{\varepsilon^2} \sin\omega\,, \end{aligned} \right.$$

$$(22)\qquad \left\{ \begin{aligned} u_{5,C} &= \frac{Q_{a,C}}{\varepsilon} \sin\omega\,, \\ v_{5,C} &= -\frac{Q_{a,C}}{\varepsilon} \cos\omega\,, \end{aligned} \right.$$

$$(22')\qquad \left\{ \begin{aligned} U''_{5,C} &= \left(-a^2 \frac{M_{a,C}}{\sqrt{\varepsilon^2 - a^2 (t - t_1)^2}} + \frac{k''}{\varepsilon^2} Q_{a,C}\right) \sin\omega\,, \\ V'_{5,C} &= \left(a^2 \frac{M_{a,C}}{\sqrt{\varepsilon^2 - a^2 (t - t_1)^2}} - \frac{k'}{\varepsilon^2} Q_{a,C}\right) \cos\omega\,, \end{aligned} \right.$$

$$(23)\qquad \left\{ \begin{aligned} u_{6,C} &= \frac{Q_{b,C}}{\varepsilon} \cos\omega\,, \\ v_{6,C} &= \frac{Q_{b,C}}{\varepsilon} \sin\omega\,, \end{aligned} \right.$$

$$(23')\qquad \left\{ \begin{aligned} U''_{6,C} &= \left(-b^2 \frac{M_{b,C}}{\sqrt{\varepsilon^2 - b^2 (t - t_1)^2}} + \frac{k''}{\varepsilon^2} Q_{b,C}\right) \cos\omega\,, \\ V'_{6,C} &= \left(-b^2 \frac{M_{b,C}}{\sqrt{\varepsilon^2 - b^2 (t - t_1)^2}} + \frac{k'}{\varepsilon^2} Q_{b,C}\right) \sin\omega\,, \end{aligned} \right.$$

où

$$(24)\quad \left\{\begin{aligned} M_{a,C} &= \log \frac{\varepsilon^2 - a^2 (t - t_1)^2}{\varepsilon}, \\ Q_{a,C} &= \sqrt{\varepsilon^2 - a^2 (t - t_1)^2} \log \left(\frac{\varepsilon^2 - a^2 (t - t_1)^2}{e\varepsilon} \right) + a (t - t_1) \left(\operatorname{arc\,sin} \frac{a (t - t_1)}{\varepsilon} + c \right), \end{aligned}\right.$$

$$(24')\quad \left\{\begin{aligned} M_{b,C} &= \log \frac{\varepsilon^2 - b^2 (t - t_1)^2}{\varepsilon}, \\ Q_{b,C} &= \sqrt{\varepsilon^2 - b^2 (t - t_1)^2} \log \left(\frac{\varepsilon^2 - b^2 (t - t_1)^2}{e\varepsilon} \right) + b (t - t_1) \left(\operatorname{arc\,sin} \frac{b (t - t_1)}{\varepsilon} + c \right). \end{aligned}\right.$$

Art. 5. – Applications des résultats précédents a l'équation (A) Premier cas.

1. Employons la formule (C) du premier article en prenant le champ S de la manière suivante. Conduisons le cône Λ tel que $\lambda < \operatorname{arc\,tg} a$, et par une surface σ limitons dans son intérieur une partie contiguë au sommet.

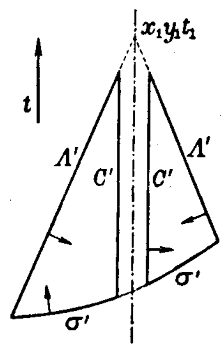


Fig. 2.

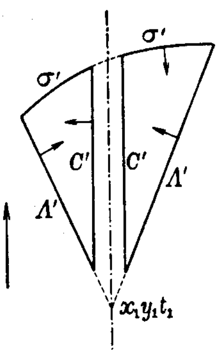


Fig. 3.

Retranchons enfin du solide ainsi formé, la partie intérieure au cylindre C. Le contour Σ du champ S qu'on vient de définir sera formé de parties du cône, du cylindre, et de la surface σ, que nous appellerons respectivement Λ', C', σ'. Deux cas pourront se présenter: ou tout point de S aura une coordonnée $t < t_1$, ou l'on aura au contraire $t > t_1$. Les figures 2, 3 représentent les sections des solides obtenues dans les deux cas par un plan parallèle à l'axe t conduit par le point $x_1 y_1 t_1$.

2. Observons maintenant que dans l'intérieur de l'espace S la fonction w_1 (voir article 2) est régulière; par suite on pourra substituer dans la formule (C) du premier article w_1 à w_λ, et en remarquant que $Z_1 = 0$, on aura

$$(1)\qquad \int_S w_1 Z dS = \int_{\Lambda' + C' + \sigma'} (w W_1 - w_1 W) \, d\Sigma.$$

Lorsqu'on fait l'intégration sur Λ', on doit prendre la normale dirigée vers l'intérieur du cône. Par suite sur Λ' on aura

$$w_1 = w_{1,\Lambda} \quad , \quad W_1 = - W_{1,\Lambda}. \qquad \text{(Voir article 4).}$$

Au contraire sur C' on devra prendre

$$w_1 = w_{1,C} \quad , \quad W_1 = W_{1,C}. \qquad \text{(Voir article 4).}$$

Observons enfin que sur Λ' on aura

$$d\Sigma = \frac{rdt\, d\omega}{\cos\lambda}$$

et sur C',

$$d\Sigma = \varepsilon dt\, d\omega;$$

la formule (1) s'écrira donc

$$\int_S w_1 Z dS = \int_{\sigma'} (wW_1 - w_1 W)\, d\sigma - \int_{\Lambda'} (wW_{1,\Lambda} + w_{1,\Lambda} W) \frac{rdt\, d\omega}{\cos\lambda}$$
$$+ \varepsilon \int_{C'} (wW_{1,C} - w_{1,C} W)\, dt\, d\omega\,.$$

Si l'on fait croître λ jusqu'à ce qu'on ait $\lambda = \operatorname{arc\,tg} a$, on trouvera $W_{1,\Lambda} = w_{1,\Lambda} = 0$ (article 4, formules (2), (2')), et par suite l'équation précédente deviendra

$$\int_S w_1 Z dS = \int_\sigma (wW_1 - w_1 W)\, d\sigma' + \varepsilon \int_{C'} (wW_{1,C} - w_{1,C} W)\, dt\, d\omega\,.$$

Diminuons indéfiniment ε, on aura (voir article 4, formule (17), (17'))

$$\lim_{\varepsilon = 0} \varepsilon w_{1,C} = 0 \quad , \quad \lim_{\varepsilon = 0} \varepsilon W_{1,C} = \pm a^2.$$

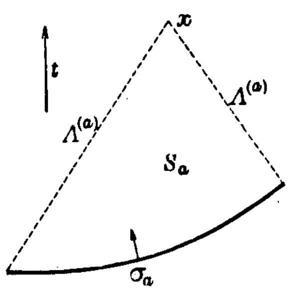


Fig. 4.

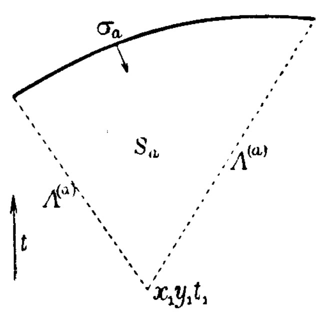


Fig. 5.

Si nous appelons donc (voir figg. 4, 5) S_a l'espace renfermé entre le cône $\Lambda^{(a)}$ dont l'ouverture est $2 \operatorname{arc\,tg} a$ et la surface σ, et que nous désignions par σ_a la partie de σ intérieure au cône, on aura

$$\int_{S_a} w_1 Z dS = \int_{\sigma_a} (wW_1 - w_1 W)\, d\sigma_a \pm a^2 \cdot 2\pi \int_{t_0}^{t_1} w dt\,,$$

t_0 étant la coordonnée t du point où la ligne $x = x_1$, $y = y_1$ rencontre la surface σ. Dérivons par rapport à t_1 l'équation précédente. Nous obtiendrons

$$(2) \qquad w(x_1, y_1, t_1) = \mp \frac{\partial}{\partial t_1} \frac{1}{2\pi a^2} \int_{\sigma_a} (w W_1 - w_1 W)\, d\sigma_a \pm \frac{\partial}{\partial t_1} \frac{1}{2\pi a^2} \int_{S_a} w_1 Z dS .$$

Mais (voir article 4, formule (2)) w_1 est nul le long du bord de la surface σ_a et du cône qui limite le solide S_a; par suite on aura (voir article 2, formule (8))

$$\frac{\partial}{\partial t_1} \int_{\sigma_a} w_1 W d\sigma = \int_{\sigma_a} \frac{\partial w_1}{\partial t_1} W d\sigma_a = \pm \int_{\sigma_a} \frac{a}{\sqrt{a^2 (t_1 - t)^2 - r^2}} W d\sigma_a ,$$

$$\frac{\partial}{\partial t_1} \int_{S_a} w_1 Z dS_a = \int_{S_a} \frac{\partial w_1}{\partial t_1} Z dS_a = \pm \int_{S_a} \frac{a}{\sqrt{a^2 (t_1 - t)^2 - r^2}} Z dS_a .$$

En substituant pour W_1 la valeur trouvée dans l'article 3, la formule (2) pourra donc s'écrire

$$(E) \qquad w(x_1, y_1, t_1) = \frac{1}{2\pi a} \frac{\partial}{\partial t_1} \int_{\sigma_a} \frac{1}{\sqrt{a^2 (t_1 - t)^2 - r^2}} \left(\cos nt - a^2 \frac{t_1 - t}{r} \cos nr\right) w d\sigma_a$$

$$+ \frac{1}{2\pi a} \int_{\sigma_a} \frac{1}{\sqrt{a^2 (t_1 - t)^2 - r^2}} W d\sigma_a + \frac{1}{2\pi a} \int_{S_a} \frac{1}{\sqrt{a^2 (t_1 - t)^2 - r^2}} Z dS_a .$$

Observons maintenant que W est connu lorsqu'on donne sur la surface σ_a les valeurs des dérivées du premier ordre de w, ou lorsqu'on connaît sur cette surface les valeurs de w et de sa dérivée normale. On peut donc énoncer le théorème suivant:

Lorsqu'on donne les valeurs de w et de sa dérivée normale le long de la surface σ_a et qu'on connaît les valeurs de Z dans l'intérieur de S_a, on peut déterminer la valeur de w au sommet du cône.

A l'aide de la formule (E) on peut effectivement calculer cette valeur par les valeurs données.

Art. 6. – Suite. Deuxième cas.

1. Supposons qu'on ait $\lambda > \operatorname{arc\,tg} a$, 2λ étant l'ouverture du cône Λ. Limitons par une surface σ un champ extérieur au cône, contigu au sommet, et retranchons de ce champ la partie intérieure au cylindre C. Partageons le solide ainsi formé en deux parties par le plan T, et appelons S' la partie dont les points ont une coordonnée $t < t_1$; S'' l'autre partie.

Le contour Σ' de S' sera formé des parties des surfaces σ, Λ, C, T qu'on désignera respectivement par σ', Λ', C', T'. De même on indiquera par σ'', Λ'', C'', T'' les parties correspondantes du contour Σ'' de S''. Evidemment les deux surfaces T', T'' coïncident, mais on devra prendre différemment la direction de la normale sur l'une et sur l'autre (voir fig. 6).

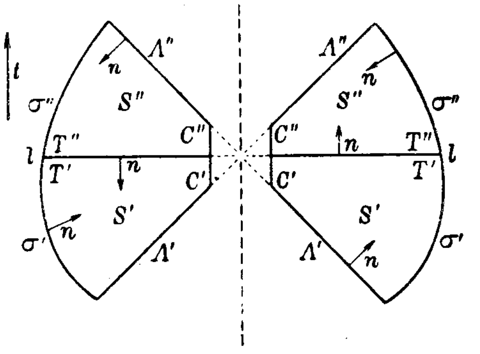


Fig. 6.

2. Appliquons maintenant la formule (C) du premier article aux deux champs S', S'' en prenant $w_\lambda = w_2$. Nous choisirons pour valeur de la constante c, $\pm \pi/2$ selon que l'on se réfère au premier ou au deuxième champ. Appelons w_2', w_2'' les valeurs de w_2 dans les deux cas; on aura

$$\int_{S'} w_2' Z dS' = \int_{\sigma'} (wW_2 - w_2' W)\, d\sigma' + \int_{\Lambda'} (wW_{2,\Lambda} - w_{2,\Lambda}' W) \frac{r\, dt\, d\omega}{\cos\lambda}$$

$$+ \varepsilon \int_{C'} (wW_{2,C} - w_{2,C}' W)\, d\omega\, dt + \int_{T'} (wW_{2,T} - w_{2,T}' W)\, r\, dr\, d\omega ,$$

$$\int_{S''} w_2'' Z dS'' = \int_{\sigma''} (wW_2 - w_2'' W)\, d\sigma'' + \int_{\Lambda''} (wW_{2,\Lambda} - w_{2,\Lambda}'' W) \frac{r\, dt\, d\omega}{\cos\lambda}$$

$$+ \varepsilon \int_{C''} (wW_{2,C} - w_{2,C}'' W)\, d\omega\, dt + \int_{T''} (wW_{2,T} - w_{2,T}'' W)\, r\, dr\, d\omega .$$

Si λ diminue jusqu'à ce qu'il devient égal à arc tg a, $w_{2,\Lambda}'$, $w_{2,\Lambda}''$, $W_{2,\Lambda}$ deviennent nuls (voir article 4, formules (3), (3')), par suite les deuxièmes termes des seconds membres disparaissent des équations précédentes. De plus les troisièmes termes tendent vers zéro si ε diminue indéfiniment (article 4, formules (17), (17')). On aura donc à la limite

$$(1) \qquad \int_{S'} w_2' Z dS' = \int_{\sigma'} (wW_2 - w_2' W)\, d\sigma' + \int_{\overline{T}'} (wW_{2,T'} - w_{2,T}' W)\, r\, dr\, d\omega ,$$

$$(2) \qquad \int_{S''} w_2'' Z dS'' = \int_{\sigma''} (wW_2 - w_2'' W)\, d\sigma'' + \int_{\overline{T}''} (wW_{2,T''} - w_{2,T}'' W)\, r\, dr\, d\omega ,$$

où $\overline{T}'$, $\overline{T}''$ dénotent T', T'' prolongés jusqu'au point $x_1 y_1 t_1$.

Prenant garde aux directions des normales à T' et à T'' et aux formules (13), (13') de l'article 4, on aura

$$\int_{\bar{T}'}(wW_{2,T'} - w'_{2,T}W)\,r\,dr\,d\omega + \int_{\bar{T}''}(wW_{2,T''} - w''_{2,T}W)\,r\,dr\,d\omega = \pi\int_{\bar{T}'}\frac{\partial w}{\partial t}\,r dr\,d\omega:$$

par suite en ajoutant membre à membre les deux équations (1), (2) on trouvera

$$\int_{S'} w'_2\,Z dS' + \int_{S''} w''_2\,Z dS'' = \int_{\sigma'}(wW_2 - w'_2 W)\,d\sigma' + \int_{\sigma''}(wW_2 - w''_2 W)\,d\sigma''$$

$$+ \pi\int_{\bar{T}'}\frac{\partial w}{\partial t}\,r\,dr\,d\omega\,.$$

Appelons $\bar{S}_a$ l'espace renfermé entre le cône $\Lambda^{(a)}$ dont l'ouverture est $2\,\mathrm{arc\,tg}\,a$ et la surface σ, et désignons par $\bar{\sigma}_a$, la partie de σ extérieure au cône.

La formule précédente pourra s'écrire

$$\int_{\bar{S}_a}\arcsin\frac{a(t-t_1)}{r}\cdot Z d\bar{S}_a + \frac{\pi}{2}\int_{S'} Z dS' - \frac{\pi}{2}\int_{S''} Z dS'' \tag{3}$$

$$= \int_{\bar{\sigma}_a}\left\{\frac{a}{P_a}\left(\cos nt + a^2\frac{t-t_1}{r}\cos nr\right)w - \arcsin\frac{a(t-t_1)}{r}\cdot W\right\}d\bar{\sigma}_a$$

$$-\frac{\pi}{2}\int_{\sigma'} W d\sigma' + \frac{\pi}{2}\int_{\sigma''} W d\sigma'' + \pi\int_{\bar{T}'}\frac{\partial w}{\partial t}\,r\,dr\,d\omega\,.$$

Il suffit pour le voir d'avoir égard aux formules (2) de l'article 3 et (8') de l'article 2. L'équation qu'on vient d'écrire est vraie pour toute valeur de t_1. On peut donc la dériver par rapport à cette variable. Remarquons que

$$\frac{\partial}{\partial t_1}\int_{\bar{T}'}\frac{\partial w}{\partial t}\,r\,dr\,d\omega = \int_{l}\frac{\partial w}{\partial t}\cos nt\cdot\frac{dl}{\sin\widehat{(tn)}} + \int_{\bar{T}'}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\,r\,dr\,d\omega\,,$$

l étant la ligne d'intersection de la surface σ avec le plan T.

D'ailleurs on a

$$\frac{\partial}{\partial t_1}\left\{\int_{\bar{S}_a}\arcsin\frac{a(t-t_1)}{r}\,Z d\bar{S}_a + \frac{\pi}{2}\int_{S'} Z dS' - \int_{S''} Z dS''\right\}$$

$$= -\int_{\bar{S}_a}\frac{a}{P_a}\,Z d\bar{S}_a + \pi\int_{\bar{T}'} Z r\,dr\,d\omega\,,$$

$$\frac{\partial}{\partial t_1}\left\{\int_{\bar{\sigma}_a}\left\{\frac{a}{P_a}\left(\cos nt + \frac{a^2(t-t_1)}{r}\cos nr\right)w - \arcsin\frac{a(t-t_1)}{r}\,W\right\}d\bar{\sigma}_a\right.$$

$$\left.-\frac{\pi}{2}\int_{\sigma'} W d\sigma' + \int_{\sigma''} W d\sigma''\right\} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial t_1} \int_{\bar{\sigma}_a} \frac{a}{P_a} \left(\cos nt + \frac{a^2 (t - t_1)}{r} \cos nr \right) w d\bar{\sigma}_a + \int_{\bar{\sigma}_a} \frac{a}{P_a} \cdot W d\bar{\sigma}_a - \pi \int_l W \frac{dl}{\sin \widehat{(nt)}} .$$

Par suite la dérivation de l'équation (3) par rapport à t_1 nous conduira à la formule suivante:

$$-\int_{\bar{S}_a} \frac{a}{P_a} Z d\bar{S}_a + \pi \int_{T'} Z r \, dr \, d\omega = \frac{\partial}{\partial t_1} \int_{\bar{\sigma}_a} \frac{a}{P_a} \left(\cos nt + \frac{a^2 (t - t_1)}{r} \cos nr \right) w d\bar{\sigma}_a$$

$$+ \int_{\bar{\sigma}_a} \frac{a}{P_a} W d\bar{\sigma}_a - \pi \int_l W \frac{dl}{\sin \widehat{(tn)}} + \pi \int_l \frac{\partial w}{\partial t} \cos nt \frac{dl}{\sin \widehat{(tn)}} + \pi \int_{T'} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} r \, dr \, d\omega .$$

Mais (voir article 1, formule (5))

$$\frac{1}{\sin \widehat{(tn)}} \left(- W + \frac{\partial w}{\partial t} \cos nt \right) = a^2 \left(\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\cos nx}{\sin nt} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\cos ny}{\sin nt} \right)$$

$$= a^2 \left(\frac{\partial w}{\partial x} \cos \nu x + \frac{\partial w}{\partial y} \cos \nu y \right) = a^2 \frac{\partial w}{\partial \nu} ,$$

ν étant la normale à la ligne l située dans le plan T et dirigée vers l'intérieur de T'; et (voir formule (A))

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - Z = a^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) .$$

Par suite

$$\frac{\partial}{\partial t_1} \int_{\bar{\sigma}_a} \frac{a}{P_a} \left(\cos nt + \frac{a^2 (t - t_1)}{r} \cos nr \right) w d\bar{\sigma}_a + \int_{\bar{\sigma}_a} \frac{a}{P_a} W d\bar{\sigma}_a + \int_{\bar{S}_a} \frac{a}{P_a} Z d\bar{S}_a$$

$$= - \pi a^2 \left\{ \int_l \frac{\partial w}{\partial \nu} dl + \int_{T'} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) dT' \right\} .$$

Le dernier membre est nul par le théorème de GREEN, on a donc

$$\text{(F)} \qquad 0 = \frac{\partial}{\partial t_1} \int_{\bar{\sigma}_a} \frac{1}{\sqrt{r^2 - a^2 (t - t_1)^2}} \left(\cos nt + \frac{a^2 (t - t_1)}{r} \cos nr \right) w d\bar{\sigma}_a$$

$$+ \int_{\bar{\sigma}_a} \frac{1}{\sqrt{r^2 - a^2 (t - t_1)^2}} W d\bar{\sigma} + \int_{\bar{S}_a} \frac{1}{\sqrt{r^2 - a^2 (t - t_1)^2}} Z d\bar{S}_a ,$$

c'est à dire:

Entre les valeurs de w et de ses dérivées du premier ordre le long de la surface $\bar{\sigma}_a$ et les valeurs de Z dans l'intérieur de S_a a lieu la relation exprimée par la formule (F) (voir fig. 7).

3. Tâchons maintenant d'exprimer la valeur de w dans le point x_1, y_1, t_1 par les valeurs de w et de W sur $\bar{\sigma}_a$ et celles de Z dans $\bar{S}_a$.

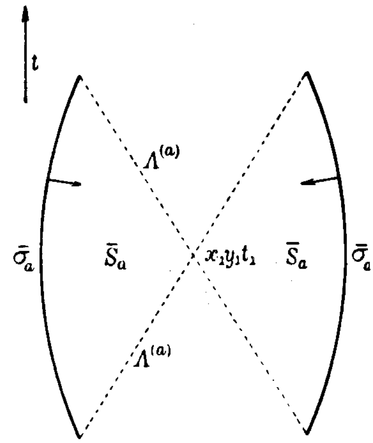


Fig. 7.

À cet effet, nous appliquerons la formule (C) du premier article en prenant $w_\lambda = w_3$ avec

$$\begin{cases} c = \pm q = \pm \displaystyle\int_0^1 \log(1-\theta^2)\frac{d\theta}{\sqrt{1-\theta^2}}, \\ c' = \pm \dfrac{\pi}{2}, \end{cases}$$

selon que l'on se réfère au premier ou au second champ. Nous appellerons w'_3, w''_3, W'_3, W''_3 les valeurs de w_3, W_3 dans les deux cas. Nous aurons donc

$$\int_{S'} w'_3\, Z dS' = \int_{\sigma'} (wW'_3 - w'_3\, W)\, d\sigma' + \int_{\Lambda'} (wW'_{3,\Lambda} - w'_{3,\Lambda}\, W)\frac{r dt\, d\omega}{\cos\lambda}$$

$$+\, \varepsilon \int_{C'} (wW'_{3,C} - w'_{3,C}\, W)\, dt\, d\omega + \int_{T'} (wW'_{3,T'} - w'_{3,T'}\, W)\, r\, dr\, d\omega,$$

$$\int_{S''} w''_3\, Z dS'' = \int_{\sigma''} (wW''_3 - w''_3\, W)\, d\sigma'' + \int_{\Lambda''} (wW''_{3,\Lambda} - w''_{3,\Lambda}\, W)\frac{r\, dt\, d\omega}{\cos\lambda}$$

$$+\, \varepsilon \int_{C''} (wW''_{3,C} - w''_{3,C}\, W)\, dt\, d\omega + \int_{T''} (wW''_{3,T''} - w''_{3,T''}\, W)\, r dr\, d\omega.$$

Si l'on fait diminuer λ jusqu'à ce que l'on ait $\lambda = \text{arc tg}\, a$, les deuxièmes termes des seconds membres des équations précédentes tendent vers zero, et même les avant-derniers termes s'annulent si ε diminue indéfiniment. À la limite on aura

$$\int_{\bar{S}'} w'_3\, Z dS' = \int_{\bar{\sigma}'} (wW'_3 - w'_3\, W)\, d\sigma' + \int_{\bar{T}'} (wW'_{3,T'} - w'_{3,T'}\, W)\, r dr\, d\omega, \tag{4}$$

$$\int_{\bar{S}''} w''_3\, Z dS'' = \int_{\bar{\sigma}''} (wW''_3 - w''_3\, W)\, d\sigma'' + \int_{\bar{T}''} (wW''_{3,T''} - w''_{3,T''}\, W)\, r\, dr\, d\omega. \tag{5}$$

Remarquons maintenant que

$$\int_{\bar{\bar{T}}'} (w W'_{3,T'} - w'_{3,T'} W)\, r\, dr\, d\omega = \int_{\bar{\bar{T}}'} \left[-w \frac{a}{r} \log r + \left(q + \frac{\pi}{2} \log r\right) \frac{\partial w}{\partial t}\right] r\, dr\, d\omega,$$

$$\int_{\bar{\bar{T}}''} (w W''_{3,T''} - w''_{3,T''} W)\, r\, dr\, d\omega = \int_{\bar{\bar{T}}''} \left[w \frac{a}{r} \log r + \left(q + \frac{\pi}{2} \log r\right) \frac{\partial w}{\partial t}\right] r\, dr\, d\omega,$$

par suite en ajoutant membre à membre les deux équations (4), (5), on trouvera

$$\int_{S'} w'_3\, Z dS' + \int_{S''} w''_3\, Z dS'' = \int_{\sigma'} (w W'_3 - w'_3 W)\, d\sigma' + \int_{\sigma''} (w W''_3 - w''_3 W)\, d\sigma''$$

$$+ 2 \int_{\bar{\bar{T}}} \left(q + \frac{\pi}{2} \log r\right) \frac{\partial w}{\partial t}\, r\, dr\, d\omega.$$

Substituons pour w'_3, w''_3, W'_3, W''_3 les valeurs qu'on tire de la formule (8″) de l'article 2 et de la formule (3) de l'article 3. En posant pour simplifier

$$f(x) = \int_0^x \log(1 - \theta^2) \frac{d\theta}{\sqrt{1 - \theta^2}},$$

nous aurons

$$\int_{\bar{\bar{S}}_a} \left\{ f\left(\frac{a(t - t_1)}{r}\right) + \log r \arcsin \frac{a(t - t_1)}{r} \right\} Z d\bar{S}_a$$

$$+ \int_{S'} \left(q + \frac{\pi}{2} \log r\right) Z dS' - \int_{S''} \left(q + \frac{\pi}{2} \log r\right) Z dS''$$

$$= \int_{\bar{\sigma}_a} \left\{ \left[\frac{a}{P_a} \log\left(\frac{r^2 - a^2 (t - t_1)^2}{r}\right)\left(\cos nt + a^2 \frac{t - t_1}{r} \cos nr\right) - a^2 \frac{\cos nr}{r} \arcsin \frac{a(t - t_1)}{r}\right] w \right.$$

$$\left. - \left[f\left(\frac{a(t - t_1)}{r}\right) + \log r \cdot \arcsin \frac{a(t - t_1)}{r}\right] W \right\} d\bar{\sigma}_a$$

$$- a^2 \frac{\pi}{2} \left\{ \int_{\sigma'} w \frac{\partial \log r}{\partial n} d\sigma' - \int_{\sigma''} w \frac{\partial \log r}{\partial n} d\sigma'' \right\}$$

$$- \left\{ \int_{\sigma'} \left(q + \frac{\pi}{2} \log r\right) W d\sigma' - \int_{\sigma''} \left(q + \frac{\pi}{2} \log r\right) W d\sigma'' \right\}$$

$$+ 2 \int_{\bar{\bar{T}}'} \left(q + \frac{\pi}{2} \log r\right) \frac{\partial w}{\partial t}\, r\, dr\, d\omega.$$

Dérivons par rapport à t. Par un calcul fort semblable à celui qu'on a fait dans l'article précédent, on trouvera

$$-\int_{S_a} \frac{a}{P_a} \log\left(\frac{r^2-a^2(t-t_1)^2}{r}\right) Z d\bar{S}_a + 2\int_{\bar{T}'}\left(q+\frac{\pi}{2}\log r\right) Zr\,dr\,d\omega$$

$$= \int_{\bar{\sigma}_a} \frac{a^3\cos nr}{rP_a} w d\bar{\sigma}_a + \frac{\partial}{\partial t_1}\int_{\bar{\sigma}_a}\frac{a}{P_a}\log\left(\frac{r^2-a^2(t-t_1)^2}{r}\right)\left(\cos nt + a^2\frac{t-t_1}{r}\cos nr\right) w d\bar{\sigma}_a$$

$$+\int_{\bar{\sigma}_a}\frac{a}{P_a}\log\left(\frac{r^2-a^2(t-t_1)^2}{r}\right) W d\sigma_a - \pi a^2\int_l w\frac{\partial \log r}{\partial n}\frac{dl}{\sin(\widehat{tn})}$$

$$-2\int_l\left(q+\frac{\pi}{2}\log r\right) W\frac{dl}{\sin(\widehat{tn})} + 2\int_{\bar{T}'}\left(q+\frac{\pi}{2}\log r\right)\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} r\,dr\,d\omega$$

$$+2\int_l\left(q+\frac{\pi}{2}\log r\right)\frac{\partial w}{\partial t}\cos nt\frac{dl}{\sin(\widehat{tn})}.$$

Examinons la somme des termes du second membre où paraissent les intégrales étendues sur la ligne l. Elle peut s'écrire

$$-\pi\int_l w\frac{\partial\log r}{\partial n}\frac{dl}{\sin(\widehat{tn})} + 2\int_l\left(q+\frac{\pi}{2}\log r\right)\left(\frac{\partial w}{\partial t}\cos nt - W\right)\frac{dl}{\sin(\widehat{tn})}$$

$$= -\pi a^2\int_l w\frac{\partial\log r}{\partial n}\frac{dl}{\sin(\widehat{tn})} + 2\,a^2\int_l\left(q+\frac{\pi}{2}\log r\right)\frac{\partial w}{\partial\nu}dl$$

$$= \pi a^2\int_l\left(\log r\cdot\frac{\partial w}{\partial \nu} - w\frac{\partial\log r}{\partial\nu}\right)dl + 2\,a^2 q\int_l\frac{\partial w}{\partial\nu}dl.$$

On trouve par suite

$$\int_{\bar{\sigma}_a}\frac{a^3\cos nr}{r\,P_a} w d\bar{\sigma}_a + \frac{\partial}{\partial t_1}\int_{\bar{\sigma}_a}\frac{a}{P_a}\log\left(\frac{r^2-a^2(t-t_1)^2}{r}\right)\left(\cos nt + a^2\frac{t-t_1}{r}\cos nr\right) w d\bar{\sigma}_a$$

$$+\int_{\bar{\sigma}_a}\frac{a}{P_a}\log\left(\frac{r^2-a^2(t-t_1)^2}{r}\right) W d\bar{\sigma}_a + \int_{\bar{S}_a}\frac{a}{P_a}\log\left(\frac{r^2-a^2(t-t_1)^2}{r}\right) Z d\bar{S}_a$$

$$= -2\int_{\bar{T}'}\left(q+\frac{\pi}{2}\log r\right)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - Z\right) r\,dr\,d\omega$$

$$-2\,a^2 q\int_l\frac{\partial w}{\partial\nu}dl - \pi a^2\int_l\left(\log r\cdot\frac{\partial w}{\partial\nu} - w\frac{\partial\log r}{\partial\nu}\right)dl$$

$$= -2\,a^2 q\left\{\int_{\bar{T}'}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) r\,dr\,d\omega + \int_l\frac{\partial w}{\partial\nu}dl\right\}$$

$$-\pi a^2\left\{\int_{\bar{T}'}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)\log r\cdot r\,dr\,d\omega + \int_l\left(\log r\cdot\frac{\partial w}{\partial\nu} - w\frac{\partial\log r}{\partial\nu}\right)dl\right\}.$$

Mais le théorème de GREEN nous dit que des deux termes du second membre le premier est nul et le second est égal à $-2\pi^2 a^2 w(x_1 y_1 t_1)$. Nous aurons donc la formule

$$(F') \qquad w(x_1, y_1, t_1) = -\frac{1}{2\pi^2}\int_{\bar{\sigma}_a} \frac{a \cos nr}{r\sqrt{r^2 - a^2(t-t_1)^2}} w d\bar{\sigma}_a$$

$$-\frac{1}{2\pi^2 a}\frac{\partial}{\partial t_1}\int_{\bar{\sigma}_a} \frac{1}{\sqrt{r^2 - a^2(t-t_1)^2}} \log\left(\frac{r^2 - a^2(t-t_1)^2}{r}\right)\left(\cos nt + a^2\frac{t-t_1}{r}\cos nr\right) w d\bar{\sigma}_a$$

$$-\frac{1}{2\pi^2 a}\int_{\bar{\sigma}_a} \frac{1}{\sqrt{r^2 - a^2(t-t_1)^2}} \log\left(\frac{r^2 - a^2(t-t_1)^2}{r}\right) W d\bar{\sigma}_a$$

$$-\frac{1}{2\pi^2 a}\int_{\bar{S}_a} \frac{1}{\sqrt{r^2 - a^2(t-t_1)^2}} \log\left(\frac{r^2 - a^2(t-t_1)^2}{r}\right) Z d\bar{S}_a .$$

Cette formule fait connaître la valeur de $w(x_1, y_1, t_1)$ *lorsque sont données les valeurs de* w *et de ses dérivées du premier ordre sur la surface* $\bar{\sigma}_a$ *et celle de* Z *dans l'espace* $\bar{S}_a$.

Art. 7. - APPLICATION DES FORMULES FONDAMENTALES AUX ÉQUATIONS (B). PREMIER CAS.

1. Faisons dans la formule (D) du premier article $u_\lambda = u_1$, $v_\lambda = v_1$ (voir article 2) et définissons la champ S de la même façon que nous avons fait dans le premier paragraphe du 5ème article.

En remarquant que $X_1 = Y_1 = 0$, on aura

$$\int_S (u_1 X + v_1 Y)\, dS = \int_{\sigma' + \Lambda' + C'} (u U_1'' + v V_1' - u_1 U' - v_1 V'')\, d\Sigma .$$

Si λ devient égal à arc tg a, $U''_{1,\Lambda}$, $V'_{1,\Lambda}$, $u_{1,\Lambda}$, $v_{1,\Lambda}$ deviennent nuls, par suite dans cette hypothèse l'équation précédente pourra s'écrire

$$(1) \qquad \int_{S'_a} (u_1 X + v_1 Y)\, dS'_a = \int_{\sigma'_a + C'_a} (u U_1'' + v V_1' - u_1 U' - v_1 V'')\, d\Sigma ,$$

S'_a, σ'_a, C'_a désignant S', σ', C' lorsque $\lambda = $ arc tg a.

En posant pour simplifier

$$(2) \qquad \Omega'_a = \int_{\sigma'_a}\left\{ \frac{1}{R_a}\left[\left(-a^2\frac{t_1 - t}{r}\cos nt \sin\omega + \frac{1}{2}(a^2 + a''^2)\cos ny + \frac{1}{2}k''\beta\right)u\right.\right.$$

$$\left. - a^2\left(\frac{t_1 - t}{r}\cos nt \cos\omega - \frac{1}{2}(a^2 + a'^2)\cos nx - \frac{1}{2}k'\alpha\right)v\right]$$

$$\left. - \frac{R_a}{r}(U' \sin\omega - V''\cos\omega)\right\} d\sigma'_a ,$$

on pourra écrire

$$\int_{\sigma'_a} (u U''_1 + v V'_1 - u_1 U' - v_1 V'') \, d\sigma'_a = \Omega'_a + \int_{\sigma'_a} \frac{R_a}{r^2} (k'' \beta u - k' \alpha v) \, d\sigma'_a .$$

En prenant garde aux formules (18), (18′) de l'article 4, on aura

$$\int_{C'_a} (u U''_1 + v V'_1 - u_1 U' - v_1 V'') \, dC'_a = \varepsilon \int_{C'_a} \frac{a^2 \sin \omega}{\sqrt{a^2 (t_1 - t)^2 - \varepsilon^2}} (u \sin \omega - v \cos \omega) \, d\omega \, dt$$

$$+ \int_{C'_a} \frac{\sqrt{a^2 (t_1 - t)^2 - \varepsilon^2}}{\varepsilon} (k'' u \sin \omega - k' v \cos \omega) \, d\omega \, dt$$

$$- \int_{C'_a} \frac{\sqrt{a^2 (t_1 - t)^2 - \varepsilon^2}}{\varepsilon} (U' \sin \omega - V'' \cos \omega) \, d\omega \, dt .$$

Mais sur le cylindre C′ on a

$$U' \sin \omega - V'' \cos \omega = \frac{a^2 + a'^2}{2} \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{a^2 + a''^2}{2} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(- k'' \frac{\partial u}{\partial x} + k' \frac{\partial v}{\partial y} \right) \sin 2 \omega$$

$$+ \frac{1}{2} \left(k'' \frac{\partial u}{\partial y} + k' \frac{\partial v}{\partial x} \right) \cos 2 \omega = \frac{a^2 + a'^2}{2} \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{a^2 + a''^2}{2} \frac{\partial u}{\partial y} + m \sin 2 \omega + n \cos 2 \omega$$

en posant

$$2 m = - k'' \frac{\partial u}{\partial x} + k' \frac{\partial v}{\partial y} \quad , \quad 2 n = k'' \frac{\partial u}{\partial y} + k' \frac{\partial v}{\partial x} ;$$

donc, si pour simplifier on appelle p_a l'intégrale

$$\int_{C'_a} \frac{a^2 \sin \omega}{\sqrt{a^2 (t_1 - t)^2 - \varepsilon^2}} (u \sin \omega - v \cos \omega) \, d\omega \, dt ,$$

la formule (1) s'écrira

$$\int_{S'_a} (u_1 X + v_1 Y) \, dS'_a = \Omega'_a + \int_{\sigma'_a} \frac{R_a}{r^2} (k'' \beta u - k' \alpha v) \, d\sigma'_a + \varepsilon p_a \tag{3}$$

$$+ \int_{C'_a} \frac{\sqrt{a^2 (t_1 - t)^2 - \varepsilon^2}}{\varepsilon} (k'' u \sin \omega - k' v \cos \omega) \, d\omega \, dt$$

$$- \int_{C'_a} \left(\frac{a^2 + a'^2}{2} \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{a^2 + a''^2}{2} \frac{\partial u}{\partial y} + m \sin 2 \omega + n \cos 2 \omega \right) \frac{\sqrt{a^2 (t_1 - t)^2 - \varepsilon^2}}{\varepsilon} \, d\omega \, dt .$$

2. Substituons maintenant dans la formule (D) du premier article u_2, v_2 (voir article 2) à u_λ, v_λ. Faisons augmenter l'ouverture du cône Λ, jusqu'à ce que l'on ait $\lambda = \operatorname{arc\,tg} b$, et désignons par S'_b et σ'_b ce que devien-

nent le champ S et la surface σ'. Par un procédé analogue à celui suivi dans le paragraphe précédent on obtiendra la formule

$$(4)\qquad \int_{S'_b}(u_2 X + v_2 Y)\, dS'_b = \Omega'_b + \int_{\sigma'_b}\frac{R_b}{r^2}(k''\alpha u + k'\beta v)\, d\sigma'_b + \varepsilon p_b$$

$$+\int_{C'_b}\frac{\sqrt{b^2(t_1-t)^2-\varepsilon^2}}{\varepsilon}(k''u\cos\omega + k'v\sin\omega)\, d\omega\, dt$$

$$+\int_{C'_b}\left(\frac{b^2+b'^2}{2}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{b^2+b''^2}{2}\frac{\partial u}{\partial x} + n\sin 2\omega - m\cos 2\omega\right)\frac{\sqrt{b^2(t_1-t)^2-\varepsilon^2}}{\varepsilon}\, d\omega\, dt,$$

où

$$(5)\qquad \Omega'_b = \int_{\sigma'_b}\left\{\frac{1}{R_b}\left(-b^2\frac{t_1-t}{r}\cos nt\cos\omega + \frac{1}{2}(b^2+b'^2)\cos nx + \frac{1}{2}k''\alpha\right)u\right.$$

$$+\frac{1}{R_b}\left(-b^2\frac{t_1-t}{r}\cos nt\sin\omega + \frac{1}{2}(b^2+b'^2)\cos ny + \frac{1}{2}k'\beta\right)v$$

$$\left.-\frac{R_b}{r}(U'\cos\omega + V''\sin\omega)\right\}d\sigma'_b,$$

$$p_b = \int_{C'_b}\frac{b^2}{\sqrt{b^2(t_1-t)^2-\varepsilon^2}}(u\cos\omega + v\sin\omega)\, d\omega\, dt.$$

3. Cela posé, il faut dériver les deux équations (3), (4) par rapport à x_1, y_1. Pour simplifier ce calcul observons que l'on peut écrire (voir article 3, formule (8))

$$\frac{\alpha}{r^2} = -\cos nx\frac{\partial^2\log r}{\partial x_1^2} - \cos ny\frac{\partial^2\log r}{\partial x_1\partial y_1},$$

$$\frac{\beta}{r^2} = -\cos nx\frac{\partial^2\log r}{\partial x_1\partial y_1} - \cos ny\frac{\partial^2\log r}{\partial y_1^2}$$

et par suite

$$\frac{\partial}{\partial y_1}\left(\frac{\alpha}{r^2}\right) = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\beta}{r^2}\right) = \cos nx\frac{\partial^3\log r}{\partial y_1^3} + \cos ny\frac{\partial^3\log r}{\partial x_1^3},$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\alpha}{r^2}\right) = -\frac{\partial}{\partial y_1}\left(\frac{\beta}{r^2}\right) = -\cos nx\frac{\partial^3\log r}{\partial x_1^3} + \cos ny\frac{\partial^3\log r}{\partial y_1^3}.$$

On tire de là

$$\frac{\partial}{\partial y_1}\int_{\sigma'_a}\frac{R_a}{r^2}(k''\beta u - k'\alpha v)\, d\sigma'_a = \int_{\sigma'_a}\frac{\sin\omega}{rR_a}(k''\beta u - k'\alpha v)\, d\sigma'_a$$

$$+\int_{\sigma'_a}R_a\left\{k''\left(\cos nx\frac{\partial^3\log r}{\partial x_1^3} - \cos ny\frac{\partial^3\log r}{\partial y_1^3}\right)u - \right.$$

$$- k'\left(\cos nx \frac{\partial^3 \log r}{\partial y_1^3} + \cos ny \frac{\partial^3 \log r}{\partial x_1^3}\right) v \Big\} d\sigma'_a$$

$$- \int_g \frac{R_a}{\varepsilon \cos nt} (k'' \beta u - k' \alpha v) \sin \omega \, d\omega ,$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \int_{\sigma'_b} \frac{R_b}{r^2} (k'' \alpha u + k' \beta v) \, d\sigma'_b = \int_{\sigma'_b} \frac{\cos \omega}{r R_b} (k'' \alpha u + k' \beta v) \, d\sigma'_b$$

$$+ \int_{\sigma'_b} R_b \Big\{ k'' \left(- \cos nx \frac{\partial^3 \log r}{\partial x_1^3} + \cos ny \frac{\partial^3 \log r}{\partial y_1^3}\right)$$

$$+ k' \left(\cos nx \frac{\partial^3 \log r}{\partial y_1^3} + \cos ny \frac{\partial^3 \log r}{\partial x_1^3}\right) v \Big\} d\sigma'_b$$

$$- \int_g \frac{R_b}{\varepsilon \cos nt} (k'' \alpha u + k' \beta v) \cos \omega \, d\omega ,$$

g étant la ligne d'intersection de la surface σ avec le cylindre C, et n la normale à la surface σ'.

D'ailleurs on a, puisque u_1, v_1 sont nuls sur la surface du cône qui limite l'espace S'_a,

$$\frac{\partial}{\partial y_1} \int_{S'_a} (u_1 X + v_1 Y) \, dS'_a = \int_{S'_a} \left(\frac{\partial u_1}{\partial y_1} X + \frac{\partial v_1}{\partial y_1} Y\right) dS'_a - \int_{C'_a} (u_1 X + v_1 Y) \, \varepsilon \sin \omega \, d\omega \, dt$$

$$= \int_{S'_a} \frac{1}{R_a} (X \sin^2 \omega - Y \sin \omega \cos \omega) \, dS'_a + \int_{S'_a} R_a \left(\frac{\partial^2 \log r}{\partial x_1^2} X + \frac{\partial \log r}{\partial x_1 \partial y_1} Y\right) dS'_a$$

$$- \int_{C'_a} (u_1 X + v_1 Y) \, \varepsilon \sin \omega \, d\omega \, dt$$

et d'une façon analogue

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \int_{S'_b} (u_2 X + v_2 Y) \, dS'_b = \int_{S'_b} \frac{1}{R_b} (X \cos^2 \omega + Y \sin \omega \cos \omega) \, dS'_b$$

$$- \int_{S'_b} R_b \left(\frac{\partial^2 \log r}{\partial x_1^2} X + \frac{\partial^2 \log r}{\partial x_1 \partial y_1} Y\right) dS'_b - \int_{C'_b} (u_2 X + v_2 Y) \, \varepsilon \cos \omega \, d\omega \, dt .$$

Observons enfin que si A est une fonction quelconque

$$\frac{\partial}{\partial y_1} \int_{C_a} A \, d\omega \, dt = \int_{C_a} \frac{\partial A}{\partial y} d\omega \, dt + \int_g A \frac{\cos ny}{\cos nt} d\omega ,$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \int_{C_b} A \, d\omega \, dt = \int_{C_b} \frac{\partial A}{\partial x} d\omega \, dt + \int_g A \frac{\cos nx}{\cos nt} d\omega ,$$

où n représente toujours la normale à la surface σ. On trouvera donc, en dérivant la formule (3) par rapport à y_1, et la formule (4) par rapport à x_1,

$$\int_{S'_a} \frac{1}{R_a} (X \sin \omega - Y \cos \omega) \sin \omega \, dS'_a \tag{6}$$

$$+ \int_{S'_a} R_a \left(\frac{\partial^2 \log r}{\partial x_1^2} X + \frac{\partial^2 \log r}{\partial x_1 \partial y_1} Y \right) dS'_a - \int_{C'_a} (u_1 X + v_1 Y) \varepsilon \sin \omega \, d\omega \, dt$$

$$= \frac{\partial \Omega'_a}{\partial y_1} + \int_{\sigma'_a} \frac{\sin \omega}{r R_a} (k'' \beta u - k' \alpha v) \, d\sigma'_a$$

$$+ \int_{\sigma'_a} R_a \left\{ k'' \left(\cos nx \frac{\partial^3 \log r}{\partial x_1^3} - \cos ny \frac{\partial^3 \log r}{\partial y_1^3} \right) u \right.$$

$$\left. - k' \left(\cos nx \frac{\partial^3 \log r}{\partial y_1^3} + \cos ny \frac{\partial^3 \log r}{\partial x_1^3} \right) v \right\} d\sigma'_a$$

$$- \int_g \frac{R_a}{\varepsilon \cos nt} (k'' \beta u - k' \alpha v) \sin \omega \, d\omega + \varepsilon \frac{\partial p_a}{\partial y_1}$$

$$+ \int_{C'_a} \frac{\sqrt{a^2 (t_1 - t)^2 - \varepsilon^2}}{\varepsilon} \left(k'' \frac{\partial u}{\partial y} \sin \omega - k' \frac{\partial v}{\partial y} \cos \omega \right) d\omega \, dt$$

$$+ \int_g \frac{\sqrt{a^2 (t_1 - t)^2 - \varepsilon^2}}{\varepsilon} (k'' u \sin \omega - k' v \cos \omega) \frac{\cos ny}{\cos nt} \, d\omega$$

$$- \int_{C'_a} \left(\frac{a^2 + a'^2}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{a^2 + a''^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial m}{\partial y} \sin 2\omega + \frac{\partial n}{\partial y} \cos 2\omega \right) \frac{\sqrt{a^2 (t_1 - t)^2 - \varepsilon^2}}{\varepsilon} \, d\omega \, dt$$

$$- \int_g \left(\frac{a^2 + a'^2}{2} \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{a^2 + a''^2}{2} \frac{\partial u}{\partial y} + m \sin 2\omega + n \cos 2\omega \right) \frac{\sqrt{a^2 (t_1 - t)^2 - \varepsilon^2}}{\varepsilon} \frac{\cos ny}{\cos nt} \, d\omega ,$$

$$\int_{S'_b} \frac{1}{R_b} (X \cos \omega + Y \sin \omega) \cos \omega \, dS'_b \tag{7}$$

$$- \int_{S'_b} R_b \left(\frac{\partial^2 \log r}{\partial x_1^2} X + \frac{\partial^2 \log r}{\partial x_1 \partial y_1} Y \right) dS'_b - \int_{C'_b} (u_2 X + v_2 Y) \varepsilon \cos \omega \, d\omega \, dt$$

$$= \frac{\partial \Omega'_b}{\partial x_1} + \int_{\sigma'_b} \frac{\cos \omega}{r R_b} (k'' \alpha u + k' \beta v) \, d\sigma'_b$$

$$+ \int_{\sigma'_b} R_b \left\{ k'' \left(- \cos nx \frac{\partial^3 \log r}{\partial x_1^3} + \cos ny \frac{\partial^3 \log r}{\partial y_1^3} \right) u + \right.$$

$$+ k'\left(\cos nx \frac{\partial^3 \log r}{\partial y_1^3} + \cos ny \frac{\partial^3 \log r}{\partial x_1^3}\right) v \Big\} d\sigma'_b$$

$$-\int_g \frac{R_b}{\varepsilon \cos nt}(k''\alpha u + k'\beta v)\cos\omega\, d\omega + \varepsilon \frac{\partial p_b}{\partial x_1}$$

$$+\int_{C'_b} \frac{\sqrt{b^2(t_1-t)^2-\varepsilon^2}}{\varepsilon}\left(k''\frac{\partial u}{\partial x}\cos\omega + k'\frac{\partial v}{\partial x}\sin\omega\right) d\omega\, dt$$

$$+\int_g \frac{\sqrt{b^2(t_1-t)^2-\varepsilon^2}}{\varepsilon}(k''u\cos\omega + k'v\sin\omega)\frac{\cos nx}{\cos nt}\, d\omega$$

$$+\int_{C'_b}\left(\frac{b^2+b'^2}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y} + \frac{b^2+b''^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial n}{\partial x}\sin 2\omega - \frac{\partial m}{\partial x}\cos 2\omega\right)\frac{\sqrt{b^2(t_1-t)^2-\varepsilon^2}}{\varepsilon}\, d\omega\, dt$$

$$+\int_g\left(\frac{b^2+b'^2}{2}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{b^2+b''^2}{2}\frac{\partial u}{\partial x} + n\sin 2\omega - m\cos 2\omega\right)\frac{\sqrt{b^2(t_1-t)^2-\varepsilon^2}}{2}\frac{\cos nx}{\cos nt}\, d\omega\,.$$

4. Ajoutons membre à membre les deux équations (6), (7) après les avoir multipliées respectivement par $1/a$, $1/b$.

Puis supposons que ε diminue indéfiniment et cherchons la limite de l'équation ainsi obtenue.

À cet effet remarquons que

$$\frac{R_a}{a} - \frac{R_b}{b} = \frac{(a^2-b^2)r^2}{ab(bR_a + aR_b)}\,.$$

Si A est une fonction qui reste finie pour $\varepsilon = 0$, on aura

$$\lim_{\varepsilon=0}\int_{C'_a} A\sin\omega\, d\omega = \lim_{\varepsilon=0}\int_{C'_b} A\sin\omega\, d\omega = \lim_{\varepsilon=0}\int_{C'_a} A\cos\omega\, d\omega = \lim_{\varepsilon=0}\int_{C'_b} A\cos\omega\, d\omega = 0,$$

$$\lim_{\varepsilon=0}\int_{C'_a}\frac{A}{\varepsilon}\sin\omega\, d\omega = \lim_{\varepsilon=0}\int_{C'_b}\frac{A}{\varepsilon}\sin\omega\, d\omega = \pm\,\pi\int_{t_0}^{t_1}\frac{\partial A}{\partial y}\,dt,$$

$$\lim_{\varepsilon=0}\int_{C'_a}\frac{A}{\varepsilon}\cos\omega\, d\omega = \lim_{\varepsilon=0}\int_{C'_b}\frac{A}{\varepsilon}\cos\omega\, d\omega = \pm\,\pi\int_{t_0}^{t_1}\frac{\partial A}{\partial x}\,dt,$$

où t_0 est la coordonnée t du point de rencontre de la ligne $x = x_1$, $y = y_1$ avec la surface σ. De même on a

$$\lim_{\varepsilon=0}\int_g A\sin\omega\, d\omega = \lim_{\varepsilon=0}\int_g A\cos\omega\, d\omega = 0\,,$$

$$\lim_{\varepsilon=0}\int_g\frac{A}{\varepsilon}\sin\omega\, d\omega = \pi\left(\frac{\partial A}{\partial y}\right)_0,$$

$$\lim_{\varepsilon=0}\int_g\frac{A}{\varepsilon}\cos\omega\, d\omega = \pi\left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)_0,$$

$(\partial A/\partial x)_0$, $(\partial A/\partial y)_0$ étant les valeurs de $\partial A/\partial x$, $\partial A/\partial y$ pour $x = x_1$, $y = y_1$, $t = t_0$. En prenant garde à ces formules on trouvera

$$\frac{1}{a}\int_{S_a} \frac{1}{R_a}(X \sin\omega - Y\cos\omega)\sin\omega\, dS_a$$

$$+\frac{1}{b}\int_{S_b}\frac{1}{R_b}(X\cos\omega + Y\sin\omega)\cos\omega\, dS_b - \frac{1}{b}\int_{S_b - S_a} R_b\left(\frac{\partial^2 \log r}{\partial x_1^2} X + \frac{\partial^2 \log r}{\partial x_1 \partial y_1} Y\right) dS$$

$$-\frac{b^2-a^2}{ab}\int_{S_a}\frac{r^2}{bR_a + aR_b}\left(\frac{\partial^2 \log r}{\partial x_1^2} X + \frac{\partial^2 \log r}{\partial x_1 \partial y_1} Y\right) dS_a - 2\pi\int_{t_0}^{t_1}(t_1 - t)\, X\, dt$$

$$= \frac{1}{a}\frac{\partial \Omega_a}{\partial y_1} + \frac{1}{b}\frac{\partial \Omega_b}{\partial x_1} + \frac{1}{a}\int_{\sigma_a}\frac{\sin\omega}{rR_a}(k''\beta u - k'\alpha v)\, d\sigma_a + \frac{1}{b}\int_{\sigma_b}\frac{\cos\omega}{rR_b}(k''\alpha u + k'\beta v)\, d\sigma_b$$

$$-\frac{1}{b}\int_{\sigma_b - \sigma_a} R_b\left\{k''\left(\cos nx\,\frac{\partial^3 \log r}{\partial x_1^3} - \cos ny\,\frac{\partial^3 \log r}{\partial y_1^3}\right) u\right.$$

$$\left. - k'\left(\cos nx\,\frac{\partial^3 \log r}{\partial y_1^3} + \cos ny\,\frac{\partial^3 \log r}{\partial x_1^3}\right) v\right\} d\sigma$$

$$-\frac{b^2-a^2}{ab}\int_{\sigma_a}\frac{r^2}{bR_a + aR_b}\left\{k''\left(\cos nx\,\frac{\partial^3 \log r}{\partial x_1^3} - \cos ny\,\frac{\partial^3 \log r}{\partial y_1^3}\right) u\right.$$

$$\left. - k'\left(\cos nx\,\frac{\partial^3 \log r}{\partial y_1^3} + \cos ny\,\frac{\partial^3 \log r}{\partial x_1^3}\right) v\right\} d\sigma_a$$

$$+ 2\pi\int_{t_0}^{t_1}(t_1 - t)\left\{a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y}\right) + b^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y}\right)\right\} dt$$

$$- 2\pi(t_1 - t_0)\left[\frac{a^2 + a'^2}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_0 - \frac{a^2 + a''^2}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_0\right]\frac{\cos n_0 y}{\cos n_0 t}$$

$$+ 2\pi(t_1 - t_0)\left[\frac{b^2 + b''^2}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0 + \frac{b^2 + b'^2}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_0\right]\frac{\cos n_0 x}{\cos n_0 t}$$

où n_0 dénote la normale à la surface σ dans le point x_1, y_1, t_0, et Ω_a, Ω_b sont égaux aux mêmes intégrales qui paraissent dans les formules (2), (5) si on les suppose étendues aux surfaces, σ_a, σ_b, au lieu qu'aux surfaces σ'_a, σ'_b.

Transportons le dernier terme du premier membre de l'équation précédente dans le second membre, et les premiers six termes du second membre dans le premier. Alors le second membre de l'équation deviendra

$$2\pi\int_{t_0}^{t_1}(t_1 - t)\left\{b^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + (b^2 - a^2)\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y} + X\right\} dt$$

$$- 2\pi(t_1 - t_0)\left[\frac{a^2 + a'^2}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_0 - \frac{a^2 + a''^2}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_0\right]\frac{\cos n_0 y}{\cos n_0 t}$$

$$+ 2\pi(t_1 - t_0)\left[\frac{b^2 + b''^2}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0 + \frac{b^2 + b'^2}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_0\right]\frac{\cos n_0 x}{\cos n_0 t}$$

c'est à dire, à cause de la première des équations (B′) du premier article,

$$2\pi\int_{t_0}^{t_1}(t_1-t)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}dt - 2\pi(t_1-t_0)\left[\frac{a^2+a'^2}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_0 - \frac{a^2+a''^2}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_0\right]\frac{\cos n_0 y}{\cos n_0 t}$$

$$+2\pi(t_1-t_0)\left[\frac{b^2+b''^2}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0+\frac{b^2+b'^2}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_0\right]\frac{\cos n_0 x}{\cos n_0 t} = 2\pi u(x_1, y_1, t_1)$$

$$-2\pi\left\{u_0+\frac{t_1-t_0}{\cos n_0 t}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_0\cos n_0 t+\left(\frac{a^2+a'^2}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_0-\frac{a^2+a''^2}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_0\right)\cos n_0 y\right.\right.$$

$$\left.\left.-\left(\frac{b^2+b''^2}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0+\frac{b^2+b'^2}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_0\right)\cos n_0 x\right]\right\}.$$

On tire de là la formule suivante

$$(\mathrm{G}_1)\qquad u(x_1, y_1, t_1)$$

$$=u_0+\frac{t_1-t_0}{\cos n_0 t}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_0\cos n_0 t+\left(\frac{a^2+a'^2}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_0-\frac{a^2+a''^2}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_0\right)\cos n_0 y\right.$$

$$\left.-\left(\frac{b^2+b''^2}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0+\frac{b^2+b'^2}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_0\right)\cos n_0 x\right]$$

$$+\frac{1}{2\pi a}\int_{S_a}\frac{1}{R_a}(X\sin\omega - Y\cos\omega)\sin\omega\, dS_a$$

$$+\frac{1}{2\pi b}\int_{S_b}\frac{1}{R_b}(X\cos\omega + Y\sin\omega)\cos\omega\, dS_b$$

$$-\frac{1}{2\pi b}\int_{S_b-S_a}R_b\left(\frac{\partial^2\log r}{\partial x^2}X+\frac{\partial^2\log r}{\partial x\,\partial y}Y\right)dS$$

$$-\frac{b^2-a^2}{2\pi ab}\int_{S_a}\frac{r^2}{bR_a+aR_b}\left(\frac{\partial^2\log r}{\partial x^2}X+\frac{\partial^2\log r}{\partial x\,\partial y}Y\right)dS_a$$

$$-\frac{1}{2\pi a}\frac{\partial\Omega_a}{\partial y_1}-\frac{1}{2\pi b}\frac{\partial\Omega_b}{\partial x_1}-\frac{1}{2\pi a}\int_{\sigma_a}\frac{\sin\omega}{rR_a}(k''\beta u - k'\alpha v)\,d\sigma_a$$

$$-\frac{1}{2\pi b}\int_{\sigma_b}\frac{\cos\omega}{rR_b}(k''\alpha u + k'\beta v)\,d\sigma_b$$

$$+\frac{1}{2\pi b}\int_{\sigma_b-\sigma_a}R_b\left\{k''\left(\cos nx\frac{\partial^3\log r}{\partial x_1^3}-\cos ny\frac{\partial^3\log r}{\partial y_1^3}\right)u\right.$$

$$\left.-k'\left(\cos nx\frac{\partial^3\log r}{\partial y_1^3}+\cos ny\frac{\partial^3\log r}{\partial x_1^3}\right)v\right\}d\sigma$$

$$-\frac{b^2-a^2}{2\pi ab}\int_{\sigma_a}\frac{r^2}{bR_a+aR_b}\left\{k''\left(\cos nx\frac{\partial^3\log r}{\partial x^3}-\cos ny\frac{\partial^3\log r}{\partial y^3}\right)u\right.$$

$$\left.-k'\left(\cos nx\frac{\partial^3\log r}{\partial y^3}+\cos ny\frac{\partial^3\log r}{\partial x^3}\right)v\right\}d\sigma_a.$$

5. Par un procédé tout à fait analogue on peut obtenir la valeur de $v(x_1, y_1, t_1)$ exprimée d'une façon semblable. Il suffit à cet effet de dériver l'équation (4) par rapport à y_1, de dériver l'équation (3) par rapport à x_1, et de les soustraire l'une de l'autre après les avoir respectivement multipliées par $1/b$ et $1/a$; enfin de faire évanouir ε. La formule qu'on trouve est la suivante

$$
\begin{aligned}
&v(x_1, y_1, t_1) \\
(\mathrm{G}_2) \qquad &= v_0 + \frac{t_1 - t_0}{\cos n_0 t} \left\{ \left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)_0 \cos n_0 t - \left(\frac{a^2 + a'^2}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_0 - \frac{a^2 + a''^2}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_0\right) \cos n_0 x \right. \\
&\qquad \left. - \left(\frac{b^2 + b''^2}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0 + \frac{b^2 + b'^2}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_0\right) \cos n_0 y \right\} \\
&\qquad + \frac{1}{2\pi b} \int_{S_b} \frac{1}{R_b} (X \cos \omega + Y \sin \omega) \sin \omega \, dS_b \\
&\qquad - \frac{1}{2\pi a} \int_{S_a} \frac{1}{R_a} (X \sin \omega - Y \cos \omega) \cos \omega \, dS_a \\
&\qquad - \frac{1}{2\pi b} \int_{S_b - S_a} R_b \left(\frac{\partial^2 \log r}{\partial x \, \partial y} X + \frac{\partial^2 \log r}{\partial y^2} Y\right) dS \\
&\qquad - \frac{b^2 - a^2}{2\pi ab} \int_{S_a} \frac{r^2}{bR_a + aR_b} \left(\frac{\partial^2 \log r}{\partial x \, \partial y} X + \frac{\partial^2 \log r}{\partial y^2} Y\right) dS_a \\
&\qquad - \frac{1}{2\pi b} \frac{\partial \Omega_b}{\partial y_1} + \frac{1}{2\pi a} \frac{\partial \Omega_a}{\partial x_1} - \frac{1}{2\pi b} \int_{\sigma_b} \frac{\sin \omega}{r R_b} (k'' \alpha u + k' \beta v) \, d\sigma_b \\
&\qquad + \frac{1}{2\pi a} \int_{\sigma_a} \frac{\cos \omega}{r R_a} (k'' \beta u - k' \alpha v) \, d\sigma_a \\
&\qquad + \frac{1}{2\pi b} \int_{\sigma_b - \sigma_a} R_b \left\{ k'' \left(\cos nx \frac{\partial^3 \log r}{\partial y^3} + \cos ny \frac{\partial^3 \log r}{\partial x^3}\right) u \right. \\
&\qquad \left. + k' \left(\cos nx \frac{\partial^3 \log r}{\partial x^3} - \cos ny \frac{\partial^3 \log r}{\partial y^3}\right) v \right\} d\sigma \\
&\qquad - \frac{(b^2 - a^2)}{2\pi ab} \int_{\sigma_a} \frac{r^2}{bR_a + aR_b} \left\{ k'' \left(\cos nx \frac{\partial^3 \log r}{\partial y^3} + \cos ny \frac{\partial^3 \log r}{\partial x^3}\right) \right. \\
&\qquad \left. + k' \left(\cos nx \frac{\partial^3 \log r}{\partial x^3} - \cos ny \frac{\partial^3 \log r}{\partial y^3}\right) v \right\} d\sigma_a .
\end{aligned}
$$

6. On a donc démontré que *si l'on connaît sur la surface* σ_b *les valeurs de* u, v, *et de leurs dérivées, on peut trouver leur valeur au sommet commun des deux cônes par les formules* (G_1), (G_2) (voir figg. 8, 9).

Nous avons dû faire un calcul fort laborieux et recourir à plusieurs artifices pour arriver à ce but.

Pour justifier l'emploi de ces artifices, observons qu'on ne pouvait pas faire évanouir tout de suite ε dans les formules (3), (4), car on aurait trouvé

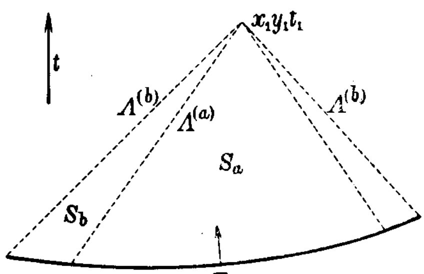


Fig. 8.

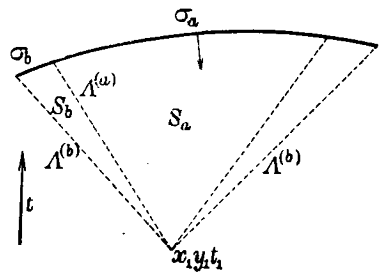


Fig. 9.

sous les signes d'intégration des fonctions qui seraient devenues infinies d'un ordre supérieur à celui qu'elles n'auraient dû dépasser afin que les intégrales aient une valeur déterminée et finie.

Art. 8. – Suite. Deuxième cas.

1. Revenons aux champs S', S'' du 6ème article et appelons S leur ensemble. Appliquons à ce champ la formule fondamentale (D) en supposant

$$u_\lambda = u_3 \quad , \quad v_\lambda = v_3.$$

Dans ce cas Σ sera formé de l'ensemble des surfaces σ', σ'' qu'on appellera σ, de la partie du cône Λ qu'on appellera (Λ) et de celle du cylindre C qu'on désignera par (C). On aura donc

$$\int_S (u_3\,X + v_3\,Y)\,dS = \int_{\sigma+(\Lambda)+(C)} (uU_3'' + vV_3' - u_3\,U' - v_3 V'')\,d\Sigma$$

et à cause des formules (7), (7'), (20), (20') de l'article 4

$$\int_S (u_3\,X + v_3\,Y)\,dS = \int_\sigma (uU_3'' + vV_3' - u_3\,U' - v_3\,V'')\,d\sigma$$

$$+ \int_{(\Lambda)} \sqrt{1 - \frac{a^2}{\mathrm{tg}^2\lambda}} \left\{ \frac{\cos\lambda}{r}(u \sin\omega - v\cos\omega) - (U' \sin\omega - V'' \cos\omega) \frac{r\,dt\,d\omega}{\cos\lambda} + \right.$$

$$+\int_{(C)}\left\{\frac{a^2}{\sqrt{1-a^2\left(\frac{t-t_1}{\varepsilon}\right)^2}}(-u\sin\omega+v\cos\omega)\right.$$

$$+\sqrt{1-a^2\left(\frac{t-t_1}{\varepsilon}\right)^2}(k''u\sin\omega-k'v\cos\omega)$$

$$\left.-\varepsilon\sqrt{1-a^2\left(\frac{t-t_1}{\varepsilon}\right)^2}(U'\sin\omega-V''\cos\omega)\right\}d\omega\,dt.$$

Si l'angle λ devient arc tg a, la deuxième intégrale s'évanouit, et par suite en posant

$$a\frac{t-t_1}{\varepsilon}=\eta,$$

on aura

$$\int_S(u_3X+v_3Y)\,dS=\int_{\bar\sigma_a}(uU_3''+vV_3'-u_3U'-v_3V'')\,d\bar\sigma_a$$

$$+\frac{\varepsilon}{a}\int_0^{2\pi}d\omega\int_{-1}^{1}\left\{\frac{a^2}{\sqrt{1-\eta^2}}(-u\sin\omega+v\cos\omega)\right.$$

$$\left.+\sqrt{1-\eta^2}\,[k''u\sin\omega-k'v\cos\omega-\varepsilon(U'\sin\omega-V''\cos\omega)]\right\}d\eta$$

où l'on a désigné par $\bar\sigma_a$ la même surface que nous avons indiquée par le même symbole dans l'article 6.

Si ε devient nul le dernier terme s'évanouit et le champ S devient $\bar S_a$. On trouve donc la formule

$$(H_1)\qquad \int_{\bar S_a}(u_3X+v_3Y)\,d\bar S_a=\int_{\bar\sigma_a}(u\,U_3''+vV_3'-u_3U'-v_3V'')\,d\bar\sigma_a.$$

De même, si l'on appelle $\bar S_b$ l'espace extérieur au cône $\Lambda^{(b)}$, dont l'ouverture est 2 arc tg b, limité par la surface du cône et la surface $\bar\sigma_b$, on aura

$$(H_2)\qquad \int_{\bar S_b}(u_4X+v_4Y)\,d\bar S_b=\int_{\bar\sigma_b}(uU_4''+vV_4'-u_4U'-v_4V'')\,d\bar\sigma_b.$$

Les deux formules (H_1), (H_2) sont analogues à la formule (F) de l'article 6. Elles donnent *des relations entre* u, v *et leurs dérivées du premier ordre sur les surfaces* $\bar\sigma_a$, $\bar\sigma_b$, *et les valeurs de* X, Y *dans les espaces* $\bar S_a$, $\bar S_b$.

2. Supposons maintenant que $\bar\sigma_b$ soit une partie de la surface $\bar\sigma_a$, et cherchons d'exprimer les valeurs de u, v au point x_1, y_1, t_1 par celles des mêmes quantités et de leurs dérivées sur $\bar\sigma_a$ et par les valeurs de X, Y dans l'intérieur de l'espace S_a.

À cet effet nous nous servirons des dernières intégrales fondamentales que nous avons trouvées dans l'article 2.

Commençons par appliquer la formule fondamentale (D) de l'article 1 aux champs S', S'' du 6ème article en supposant

$$u_\lambda = u_5 \quad , \quad v_\lambda = v_5 \qquad \text{(voir article 2).}$$

Nous prendrons la constante arbitraire c qui paraît dans ces fonctions égale à $\pm \pi/2$ selon qu'on se réfère au champ S' ou au champ S''. Nous désignerons par

$$u_{5,1}\,,\; v_{5,1}\,,\; U''_{5,1}\,,\; V'_{5,1}\,,$$
$$u_{5,2}\,,\; v_{5,2}\,,\; U''_{5,2}\,,\; V'_{5,2}\,,$$

les valeurs de u_5, v_5, U''_5, V'_5 dans les deux cas. On aura donc (cf. article 6)

$$\int_{S'} (u_{5,1} X + v_{5,1} Y)\, dS' = \int_{\sigma'+\Lambda'+C'+T'} (uU''_{5,1} + vV'_{5,1} - u_{5,1} U' - v_{5,1} V'')\, d\Sigma\,,$$

$$\int_{S''} (u_{5,2} X + v_{5,2} Y)\, dS'' = \int_{\sigma''+\Lambda''+C''+T''} (uU''_{5,2} + vV'_{5,2} - u_{5,2} U' - v_{5,2} V'')\, d\Sigma\,.$$

Ayant égard aux formules (9), (9'), (11), (12) de l'article 4 on voit aisément que les intégrales étendues à Λ', Λ'' s'évanouissent lorsqu'on fait $\lambda = \operatorname{arc\,tg} a$.

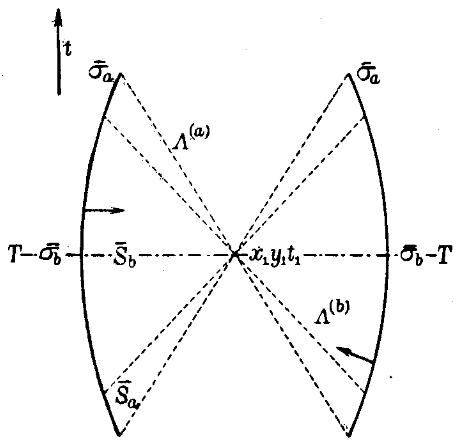


Fig. 10.

De même les intégrales étendues à C', C'' s'annulent à la limite lorsque ε diminue indéfiniment. C'est pourquoi en désignant par $\bar{S}_{a,1}$, $\bar{S}_{a,2}$; $\bar{\sigma}_{a,1}$, $\bar{\sigma}_{a,2}$ les deux parties de $\bar{S}_a$ et de $\bar{\sigma}_a$ qui se trouvent des deux côtés du plan T et si $\bar{T}', \bar{T}''$ dénotent T', T'' prolongées jusqu'au point x_1, y_1, t_1, on aura (voir article 4, formules (15), (15'))

$$\int_{\bar{S}_{a,1}} (u_{5,1} X + v_{5,1} Y)\, d\bar{S}_{a,1} = \int_{\bar{\sigma}_{a,1}} (uU''_{5,1} + vV'_{5,1} - u_{5,1} U' - v_{5,1} V'')\, d\bar{\sigma}_{a,1} -$$

$$-\frac{\pi}{2}a\int_{\overline{\overline{T}}'}\frac{1}{r}(u\sin\omega - v\cos\omega)\,r\,dr\,d\omega - \int_{\overline{\overline{T}}'}\frac{(\log r - 1)}{r}(U'\sin\omega - V''\cos\omega)\,r\,dr\,d\omega,$$

$$\int_{\overline{S}_{a,2}}(u_{5,2}X + v_{5,2}Y)\,d\overline{S}_{a,2} = \int_{\bar{\sigma}_{a,2}}(uU''_{5,2} + vV'_{5,2} - u_{5,2}U' - v_{5,2}V'')\,d\bar{\sigma}_{a,2}$$

$$-\frac{\pi}{2}a\int_{\overline{\overline{T}}'}\frac{1}{r}(u\sin\omega - v\cos\omega)\,r\,dr\,d\omega - \int_{\overline{\overline{T}}''}\frac{(\log r - 1)}{r}(U'\sin\omega - V''\cos\omega)\,r\,dr\,d\omega.$$

Si nous observons maintenant que les valeurs de U', V'' sur T', T'' sont égales et de signes contraires (cf. article 6) on aura, en ajoutant membre à membre les deux équations précédentes,

$$\int_{\overline{S}_{a,1}}(u_{5,1}X + v_{5,1}Y)\,d\overline{S}_{a,1} + \int_{\overline{S}_{a,2}}(u_{5,2}X + v_{5,2}Y)\,d\overline{S}_{a,2}$$
$$= \int_{\bar{\sigma}_{a,1}}(uU''_{5,1} + vV'_{5,1} - u_{5,1}U' - v_{5,1}V'')\,d\bar{\sigma}_{a,1}$$
$$+ \int_{\bar{\sigma}_{a,2}}(uU''_{5,2} + vV'_{5,2} - u_{5,2}U' - v_{5,2}V'')\,d\bar{\sigma}_{a,2}$$
$$-\pi a\int_{\overline{\overline{T}}'}\frac{1}{r}(u\sin\omega - v\cos\omega)\,r\,dr\,d\omega. \tag{1}$$

Posons

$$\Theta_a = \frac{1}{a}\Big\{\int_{\overline{S}_{a,1}}(u_{5,1}X + v_{5,1}Y)\,d\overline{S}_{a,1} + \int_{\overline{S}_{a,2}}(u_{5,2}X + v_{5,2}Y)\,d\overline{S}_{a,2}$$
$$-\int_{\bar{\sigma}_{a,1}}(uU''_{5,1} + vV'_{5,1} - u_{5,1}U' - v_{5,1}V'')\,d\bar{\sigma}_{a,1}$$
$$-\int_{\bar{\sigma}_{a,2}}(uU''_{5,2} + vV'_{5,2} - u_{5,2}U' - v_{5,2}V'')\,d\bar{\sigma}_{a,2}\Big\} \tag{2}$$

et remarquons que

$$\frac{\sin\omega}{r} = -\frac{\partial\log r}{\partial y_1}\quad,\qquad \frac{\cos\omega}{r} = -\frac{\partial\log r}{\partial x_1};$$

alors l'équation (1) pourra s'écrire

$$\pi\left[\frac{\partial}{\partial y_1}\int_{\overline{\overline{T}}'}u\log r\cdot r\,dr\,d\omega - \frac{\partial}{\partial x_1}\int_{\overline{\overline{T}}'}v\log r\cdot r\,dr\,d\omega\right] = \Theta_a. \tag{3}$$

3. Désignons par

$$u_{6,1}\,,\ v_{6,1}\,,\ U''_{6,1}\,,\ V'_{6,1}\,,$$
$$u_{6,2}\,,\ v_{6,2}\,,\ U''_{6,2}\,,\ V'_{6,2}\,,$$

les valeurs de u_6, v_6, U''_6, V'_6 (voir article 2, formules (14), article 3, formules (12)) selon que l'on prend $c = \pm \pi/2$.

Si $\overline{S}_{b,1}$, $\overline{S}_{b,2}$; $\overline{\sigma}_{b,1}$, $\overline{\sigma}_{b,2}$ sont les parties de $\overline{S}_b$, $\overline{\sigma}_b$ qui se trouvent des deux côtés du plan T, par le procédé employé dans le paragraphe précédent on trouvera

$$\pi \left[\frac{\partial}{\partial x_1}\int\limits_{T'} u \log r \cdot r\,dr\,d\omega + \frac{\partial}{\partial y_1}\int\limits_{T'} v \log r \cdot r\,dr\,d\omega\right] = \Theta_b, \tag{4}$$

où l'on a posé pour simplifier

$$\begin{aligned}\Theta_b = \frac{1}{b}\Big\{ &\int\limits_{S_{b,1}} (u_{6,1}X + v_{6,1}Y)\,d\overline{S}_{b,1} + \int\limits_{S_{b,2}} (u_{6,2}X + v_{6,2}Y)\,dS_{b,2} \\ &- \int\limits_{\sigma_{b,1}} (uU''_{6,1} + vV'_{6,1} - u_{6,1}U' - v_{6,1}V'')\,d\overline{\sigma}_{b,1} \\ &- \int\limits_{\sigma_{b,2}} (uU''_{6,2} + vV'_{6,2} - u_{6,2}U' - v_{6,2}V'')\,d\overline{\sigma}_{b,2}\Big\}.\end{aligned} \tag{5}$$

4. Des équations (3), (4) on tire

$$\frac{\partial\Theta_b}{\partial x_1} + \frac{\partial\Theta_a}{\partial y_1} = \pi\Delta\int\limits_{T'} u \log r \cdot r\,dr\,d\omega,$$

$$\frac{\partial\Theta_b}{\partial y_1} - \frac{\partial\Theta_a}{\partial x_1} = \pi\Delta\int\limits_{T'} v \log r \cdot r\,dr\,d\omega,$$

où le symbole Δ dénote

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_1^2}.$$

Mais, par un théorème bien connu relatif aux potentiels logarithmiques, on a

$$\Delta\int\limits_{T'} u \log r \cdot r\,dr\,d\omega = 2\pi u\,(x_1, y_1, t_1),$$

$$\Delta\int\limits_{T'} v \log r \cdot r\,dr\,d\omega = 2\pi v\,(x_1, y_1, t_1),$$

par suite

$$u\,(x_1, y_1, t_1) = \frac{1}{2\pi^2}\left[\frac{\partial\Theta_b}{\partial x_1} + \frac{\partial\Theta_a}{\partial y_1}\right], \tag{H'_1}$$

$$v\,(x_1, y_1, t_1) = \frac{1}{2\pi^2}\left[\frac{\partial\Theta_b}{\partial y_1} - \frac{\partial\Theta_a}{\partial x_1}\right]. \tag{H'_2}$$

Ces formules donnent les valeurs de u, v *au sommet* x_1, y_1, t_1 *des cônes par les valeurs des mêmes quantités et de* U', V'' *sur la surface* σ_a, *et par celles de* X, Y *dans l'intérieur de l'espace* $\overline{S}_a$ (voir fig. 10).

Art. 9. – Conséquences des résultats trouvés.

1. Les surfaces coniques Λ dont les ouvertures sont $2 \operatorname{arc\,tg} a$, $2 \operatorname{arc\,tg} b$, ont joué dans le cours de ces recherches un rôle bien important. Nous les appellerons les *surfaces caractéristiques* et nous les désignerons respectivement par $\Lambda_A^{(a)}$, $\Lambda_A^{(b)}$, A étant leur sommet.

2. Supposons pour simplifier $Z = 0$, et que l'on connaisse les valeurs de w et de W sur une surface σ quelconque. On peut se poser la question: *dans quelle partie de l'espace pourra-t-on déterminer la fonction w?*

Les formules (E), (F') que nous avons donné dans les articles 5 et 6 nous montrent qu'*on peut calculer la valeur de w dans tout point* A *par lequel on peut conduire un cône $\Lambda_A^{(a)}$ qui découpe, soit dans son intérieur, soit extérieurement, une partie de la surface σ dont le bord est formé seulement de l'intersection du cône avec la surface.*

Pour simplifier on dira que le cône $\Lambda_A^{(a)}$ *coupe intérieurement ou extérieurement, d'une manière complète la surface σ.*

On trouve par là bien aisément l'espace $S^{(\sigma)}$, lieu géométrique des points A, en conduisant les cônes $\Lambda_L^{(a)}$ par tous les points L du bord de la surface σ et en cherchant leur enveloppe.

3. De même, X et Y étant nuls, *si l'on connaît u, v et leurs dérivées du premier ordre sur la surface σ on pourra déterminer ces fonctions par les formules* (G_1), (G_2), (H_1'), (H_2') *dans un point* B *si l'on peut conduire un cône $\Lambda_B^{(b)}$ qui coupe intérieurement, d'une manière complète la surface σ, ou si l'on peut conduire un cône $\Lambda_B^{(a)}$ qui coupe extérieurement d'une manière complète la même surface.*

Par l'enveloppe des cônes $\Lambda_L^{(b)}$ et des cônes $\Lambda_L^{(a)}$ on pourra limiter l'espace qui est le lieu géométrique des points B.

4. Si la surface σ est telle qu'on peut la couper *extérieurement* d'une manière complète par des cônes $\Lambda_A^{(a)}$, alors *entre w*, W *doivent subsister les relations données par la formule* (F) *de l'article 6.*

De même si la surface σ est coupée d'une manière complète *extérieurement* par des cônes $\Lambda_B^{(a)}$, $\Lambda_B^{(b)}$, *entre u, v*, U', V'' *doivent subsister les relations données par les formules* (H_1), (H_2) *de l'article 8.*

5. Dans les expressions de U', V'' paraissent les constantes a', b', a'', b'' qui satisfont aux conditions (1) du 1[er] article. On peut se servir du caractère arbitraire des constantes k', k'' pour donner à a', b', a'', b'' des valeurs telles que U', V'' s'expriment par des quantités qui ont une signification mécanique. Par exemple posons

$$a = a' = a'' \quad , \quad b = b' = b'', \tag{1}$$

on trouvera alors

$$U' = \frac{\partial u}{\partial t}\cos nt - b^2\vartheta\cos nx + a^2\tilde{\omega}\cos ny,$$

$$V'' = \frac{\partial v}{\partial t}\cos nt - a^2\tilde{\omega}\cos nx - b^2\vartheta\cos ny,$$

où

$$\vartheta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \quad , \quad \tilde{\omega} = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Il est bien connu que ϑ représente la *dilatation superficielle de chaque élément parallèle au plan xy*, et que $\tilde{\omega}/2$ représente la *composante de la rotation de chaque élément autour de l'axe* Z.

Dans l'hypothèse (1) les quantités qui paraissent au dehors des signes d'intégration dans les formules (G_1) et (G_2) de l'article 7 deviennent

$$u_0 + \frac{t_1 - t_0}{\cos n_0 t}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_0 \cos n_0 t + a^2\tilde{\omega}_0\cos n_0 y - b^2\vartheta_0\cos n_0 x\right] = u_0 + \frac{t_1 - t_0}{\cos n_0 t}U'_0,$$

$$v_0 + \frac{t_1 - t_0}{\cos n_0 t}\left[\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)_0 \cos n_0 t - a^2\tilde{\omega}_0\cos n_0 x - b^2\vartheta_0\cos n_0 y\right] = v_0 + \frac{t_1 - t_0}{\cos n_0 t}V''_0.$$

Au lieu des équations (1), posons

$$(2) \qquad \begin{cases} a'^2 = a''^2 = -a^2, \\ b'^2 = b''^2 = \quad b^2 - 2a^2, \end{cases}$$

on aura alors

$$U' = \frac{\partial u}{\partial t}\cos nt - t_{11}\cos nx - t_{12}\cos ny,$$

$$V'' = \frac{\partial v}{\partial t}\cos nt - t_{12}\cos nx - t_{22}\cos ny,$$

où

$$\begin{cases} t_{11} = b^2\dfrac{\partial u}{\partial x} + (b^2 - 2a^2)\dfrac{\partial v}{\partial y}, \\ t_{22} = b^2\dfrac{\partial v}{\partial y} + (b^2 - 2a^2)\dfrac{\partial u}{\partial x}, \\ t_{12} = a^2\left(\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x}\right). \end{cases}$$

Les quantités précédentes sont *les composantes des tensions qui s'exercent dans l'intérieur du corps élastique*. Dans l'hypothèse (2) les quantités qui paraissent au dehors des signes d'intégration dans les formules (G_1), (G_2) de l'article 7 deviennent

$$u_0 + \frac{t_1 - t_0}{\cos n_0 t}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_0 \cos n_0 t - \frac{1}{2}(t_{11} + t_{22})\cos n_0 x\right],$$

$$v_0 + \frac{t_1 - t_0}{\cos n_0 t}\left[\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)_0 \cos n_0 t - \frac{1}{2}(t_{11} + t_{22})\cos n_0 y\right].$$

6. Si l'on a

$$\alpha \cos nx + \beta \cos ny + \gamma \cos nt = 0 ,$$

n étant la normale à la surface σ, la quantité

$$\alpha \frac{\partial w}{\partial x} + \beta \frac{\partial w}{\partial y} + \gamma \frac{\partial w}{\partial t}$$

sera connue si l'on donne seulement les valeurs de w sur la surface σ.

Par suite si la condition

$$(3) \qquad (-a^2 \cos nx) \cos nx + (-a^2 \cos ny) \cos ny + \cos nt \cdot \cos nt = 0$$

est satisfaite, W sera connu sur la surface σ, si l'on connait w sur la même surface (cf. formule (5) du premier article).

L'équation (3) peut s'écrire

$$\cos^2 nt - a^2 \sin^2 nt = 0$$

d'où

$$\operatorname{tg} nt = \pm \frac{1}{a} \cdot$$

On tire de là:

Si la surface σ est telle que $\operatorname{tg} nt = \pm 1/a$, *la fonction w sera déterminée dans tout point de l'espace* $S^{(a)}$, *même si l'on connaît sur la surface σ les valeurs de w seulement.*

Il est évident que toute surface obtenue par l'enveloppe des cônes $\Lambda_A^{(a)}$ jouit de cette propriété.

Art. 10. - Particularisation des formules.

1. Commençons par prouver que la formule de Poisson–Parseval n'est qu'un cas particulier de la formule (E) de l'article 5. En effet, sup-

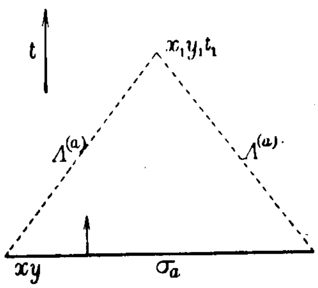


Fig. 11.

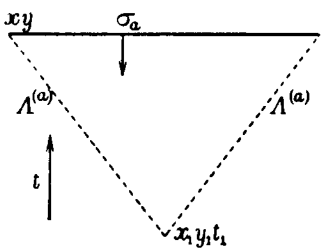


Fig. 12.

posons que la surface σ soit le plan xy (voir figg. 11, 12). Alors σ_a deviendra un cercle dont le rayon est

$$| a t_1 | .$$

D'ailleurs sur σ on aura

$$\cos nt = \pm 1 \quad , \quad \cos nx = \cos ny = 0:$$

par suite, si l'on suppose $Z = 0$, l'équation (E) du 5ème article s'écrira

$$(1) \qquad w(x_1, y_1, t_1) = \pm \frac{1}{2\pi a} \frac{\partial}{\partial t_1} \int_{\sigma_a} \frac{1}{\sqrt{a^2 (t_1 - t)^2 - r^2}} w d\sigma_a$$

$$\pm \frac{1}{2\pi a} \int_{\sigma_a} \frac{1}{\sqrt{a^2 (t_1 - t)^2 - r^2}} \frac{\partial w}{\partial t} d\sigma_a,$$

qui est l'intégrale générale de l'équation

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)$$

donnée par POISSON et PARSEVAL.

2. En nous rapportant toujours à la formule (E) de l'article 5, supposons que nous nous trouvions dans le premier cas, c'est à dire que les coordonnées t des points de la surface σ soient plus petites que t_1. Examinons ce qu'on a lorsque la surface σ_a se réduit à un cylindre γ avec les généra-

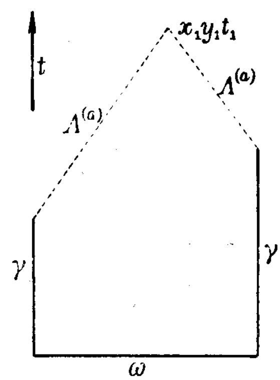


Fig. 13.

trices parallèles à l'axe t, limité par un plan ω perpendiculaire aux génératrices, comme le montre la figure 13. Supposons enfin que l'intersection de σ avec le cône $\Lambda^{(a)}$ appartienne au cylindre γ.

Sur la surface γ on aura

$$\cos nt = 0,$$

et sur ω

$$t = \text{const.} = t_0 \quad , \quad \cos nx = \cos ny = 0 \quad , \quad \cos nt = 1 .$$

C'est pourquoi, en appelant s le contour de ω, l'équation (E) de l'article 5 deviendra, Z étant nul,

$$(2)\quad w(x_1, y_1, t_1) = \frac{1}{2\pi a}\frac{\partial}{\partial t_1}\int_\omega \frac{1}{\sqrt{a^2(t_1-t_0)^2-r^2}}\,w\,d\omega + \frac{1}{2\pi a}\int_\omega \frac{1}{\sqrt{a^2(t_1-t_0)^2-r^2}}\frac{\partial w}{\partial t}\,d\omega$$

$$+\frac{1}{2\pi a}\frac{\partial}{\partial t_1}\int_\gamma \frac{a^2}{\sqrt{a^2(t_1-t_0)^2-r^2}}\,\frac{t-t_1}{r}\cos nr\cdot w\,d\gamma - \frac{1}{2\pi a}\int_\gamma \frac{a^2}{\sqrt{a^2(t_1-t_0)^2-r^2}}\,\frac{\partial w}{\partial n}\,d\gamma$$

$$= \frac{1}{2\pi a}\frac{\partial}{\partial t_1}\int_\omega \frac{1}{\sqrt{a^2(t_1-t_0)^2-r^2}}\,w\,d\omega + \frac{1}{2\pi a}\int_\omega \frac{1}{\sqrt{a^2(t_1-t_0)^2-r^2}}\frac{\partial w}{\partial t}\,d\omega$$

$$+\frac{a}{2\pi}\int_s ds\left\{\frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial n}\frac{\partial}{\partial t_1}\int_{t_0}^{t_1-r/a}\frac{t-t_1}{\sqrt{a^2(t_1-t)^2-r^2}}\,w\,dt - \int_{t_0}^{t_1-r/a}\frac{1}{\sqrt{a^2(t_1-t)^2-r^2}}\frac{\partial w}{\partial n}\,dt\right\}.$$

Posons $a(t_1-t)=u$, on aura

$$\int_{t_0}^{t_1-r/a}\frac{1}{\sqrt{a^2(t_1-t)^2-r^2}}\,\frac{\partial w}{\partial n}\,dt = \frac{1}{a}\,\frac{\partial}{\partial n}\int_r^{a(t_1-t_0)} w\left(x, y, t_1-\frac{u}{a}\right)\frac{du}{\sqrt{u^2-r^2}},$$

$$\frac{1}{r}\,\frac{\partial r}{\partial n}\,\frac{\partial}{\partial t_1}\int_{t_0}^{t_1-r/a}\frac{t-t_1}{\sqrt{a^2(t_1-t)^2-r^2}}\,w\,dt = \frac{1}{a^2}\,\frac{1}{r}\,\frac{\partial r}{\partial n}\,\frac{\partial}{\partial t_1}\int_r^{a(t_1-t_0)}\frac{-u\,du}{\sqrt{u^2-r^2}}\,w\left(x, y, t_1-\frac{u}{a}\right)$$

$$= \frac{1}{a}\,\frac{\partial r}{\partial n}\,\frac{\partial}{\partial r}\int_r^{a(t_1-t_0)} w\left(x, y, t_1-\frac{u}{a}\right)\frac{du}{\sqrt{u^2-r^2}} = \frac{1}{a}\,\frac{\delta}{\delta n}\int_r^{a(t_1-t_0)} w\left(x, y, t_1-\frac{u}{a}\right)\frac{du}{\sqrt{u^2-r^2}},$$

où les symboles $\partial/\partial n$, $\delta/\delta n$ ont la signification suivante. Si f est une fonction de x, y, r, nous supposerons que

$$\frac{\partial f}{\partial n} = \frac{\partial f}{\partial x}\,\frac{\partial x}{\partial n} + \frac{\partial f}{\partial y}\,\frac{\partial y}{\partial n},$$

$$\frac{\delta f}{\delta n} = \frac{\partial f}{\partial r}\,\frac{\partial r}{\partial n}.$$

La formule (2) s'écrira donc

$$(3)\quad w(x_1, y_1, t_1) = \frac{1}{2\pi a}\frac{\partial}{\partial t_1}\int_\omega \frac{1}{\sqrt{a^2(t_1-t_0)^2-r^2}}\,w\,d\omega + \frac{1}{2\pi a}\int_\omega \frac{1}{\sqrt{a^2(t_1-t_0)^2-r^2}}\frac{\partial w}{\partial t}\,d\omega$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_s ds\left\{\frac{\delta}{\delta n}\int_r^{a(t_1-t_0)} w\left(x, y, t_1-\frac{u}{a}\right)\frac{du}{\sqrt{u^2-r^2}} - \frac{\partial}{\partial n}\int_r^{a(t_1-t_0)} w\left(x, y, t_1-\frac{u}{a}\right)\frac{du}{\sqrt{u^2-r^2}}\right\}.$$

Supposons que la fonction $w(x, y, t)$ soit nulle pour toute valeur de t inférieure à une certaine limite $-T$, alors en faisant diminuer indéfiniment t_0 on trouvera

$$(4)\qquad w(x_1, y_1, t_1)$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_s ds \left\{ \frac{\delta}{\delta n}\int_r^\infty w\left(x, y, t_1 - \frac{u}{a}\right)\frac{du}{\sqrt{u^2 - r^2}} - \frac{\partial}{\partial n}\int_r^\infty w\left(x, y, t_1 - \frac{u}{a}\right)\frac{du}{\sqrt{u^2 - r^2}} \right\}.$$

3. Examinons maintenant le deuxième cas, c'est à dire supposons que les coordonnées t des points de σ soient supérieures à t_1, tandis que la surface σ se réduit à un cylindre γ dont les génératrices sont parallèles à t, limité par un plan ω perpendiculaire aux génératrices. Supposons enfin que l'intersection de σ avec le cône $\Lambda^{(a)}$ appartienne à γ (voir fig. 14).

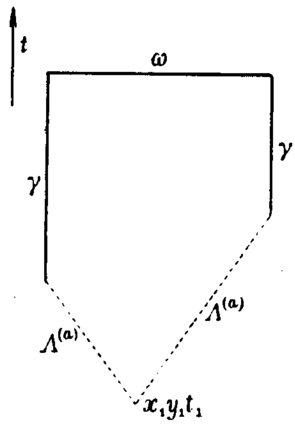


Fig. 14.

Par un calcul analogue à celui qu'on a fait dans le paragraphe précédent on trouve la formule

$$(5)\qquad w(x_1, y_1, t_1) = -\frac{1}{2\pi a}\frac{\partial}{\partial t_1}\int_\omega \frac{1}{\sqrt{a^2(t_1 - t_0)^2 - r^2}}\, w(x, y, t_0)\, d\omega$$
$$-\frac{1}{2\pi a}\int_\omega \frac{1}{\sqrt{a^2(t_1 - t_0)^2 - r^2}}\frac{\partial w}{\partial t}\, d\omega$$
$$+\frac{1}{2\pi}\int_s ds \left\{ \frac{\delta}{\delta n}\int_r^{a(t_0 - t_1)} w\left(x, y, t_1 + \frac{u}{a}\right)\frac{du}{\sqrt{u^2 - r^2}} - \frac{\partial}{\partial n}\int_r^{a(t_0 - t_1)} w\left(x_1, y_1, t_1 + \frac{u}{a}\right)\frac{du}{\sqrt{u^2 - r^2}} \right\}.$$

Si $w(x, y, t)$ s'annule pour toute valeur de t supérieure à une certaine limite T, en faisant augmenter indéfiniment t_0, la formule précédente deviendra

$$(6)\qquad w(x_1, y_1, t_1)$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_s ds \left\{ \frac{\delta}{\delta n}\int_r^\infty w\left(x_1, y_1, t_1 + \frac{u}{a}\right)\frac{du}{\sqrt{u^2 - r^2}} - \frac{\partial}{\partial n}\int_r^\infty w\left(x_1, y_1, t_1 + \frac{u}{a}\right)\frac{du}{\sqrt{u^2 - r^2}} \right\}.$$

4. Il faut maintenant chercher ce que deviennent les formules (F), (F′) de l'article 6, lorsque la surface σ_a se réduit à un cylindre dont les génératrices sont parallèles à l'axe t.

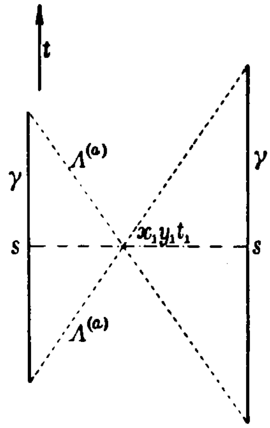


Fig. 15.

On voit tout de suite qu'en supposant toujours Z = 0, la formule (F) devient

$$
(7)\qquad
\begin{aligned}
0 = \int_s ds \Bigg\{ \frac{\partial}{\partial n} \int_{-r}^{r} w\left(x, y, t_1 - \frac{u}{a}\right) \frac{du}{\sqrt{r^2 - u^2}} \\
- \frac{\delta}{\delta n} \int_{-r}^{r} w\left(x, y, t_1 - \frac{u}{a}\right) \frac{du}{\sqrt{r^2 - u^2}} \Bigg\},
\end{aligned}
$$

s étant la ligne d'intersection du cylindre avec le plan $t = t_1$ (voir fig. 15). Examinons maintenant la formule (F′) (article 6). Elle s'écrira

$$
\begin{aligned}
w(x_1, y_1, t_1) = -\frac{1}{2\pi^2} \int_s ds \Bigg\{ \int_{t_1 - r/a}^{t_1 + r/a} \frac{a \cos nr}{r\sqrt{r^2 - a^2(t - t_1)^2}} w\, dt \\
+ \frac{\partial}{\partial t_1} \int_{t_1 - r/a}^{t_1 + r/a} \frac{a}{\sqrt{r^2 - a^2(t - t_1)^2}} \log\left(\frac{r^2 - a^2(t - t_1)^2}{r}\right) \frac{t - t_1}{r} w\, dt \\
- \int_{t_1 - r/a}^{t_1 + r/a} \frac{a}{\sqrt{r^2 - a^2(t - t_1)^2}} \log\left(\frac{r^2 - a^2(t - t_1)^2}{r}\right) \frac{\partial w}{\partial n} dt \Bigg\}
\end{aligned}
$$

et en posant

$$a(t - t_1) = u,$$

on trouvera

$$(8)\qquad \begin{aligned} w(x_1, y_1, t_1) = \frac{1}{2\pi^2}\int_s ds \Bigg\{ & \frac{\partial}{\partial n}\int_{-r}^{r} w\left(x, y, t_1 - \frac{u}{a}\right)\log\left(\frac{r^2-u^2}{r}\right)\frac{du}{\sqrt{r^2-u^2}} \\ & - \frac{\delta}{\delta n}\int_{-r}^{r} w\left(x, y, t_1 - \frac{u}{a}\right)\log\left(\frac{r^2-u^2}{r}\right)\frac{du}{\sqrt{r^2-u^2}} \Bigg\}. \end{aligned}$$

5. On pourrait tout à fait de la même façon particulariser les formules (G_1), (G_2), (H_1), (H_2), (H'_1), (H'_2) en réduisant les surfaces σ_b, $\overline{\sigma}_a$ à des cylindres ou à des plans.

Nous ne donnerons pas ici le développement de ces calculs qui d'ailleurs ne présentent de difficultés.

Art. 11. - Le principe de Huyghens.

1. Par une élégante application du théorème de Green, Kirchhoff est parvenu à établir sa célèbre formule qui étend le principe de Huyghens et peut le donner sous une forme mathématique tout à fait rigoureuse (3).

Son procédé est fondé sur l'existence de l'intégrale

$$(1)\qquad \frac{f(r \pm at)}{r}$$

de l'équation

$$(1')\qquad \frac{\partial^2 \gamma}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 \gamma}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \gamma}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \gamma}{\partial z^2}\right)$$

où $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, et f dénote une fonction arbitraire.

Dans le cas des ondes cylindriques l'équation précédente devient

$$(2)\qquad \frac{\partial^2 \gamma}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 \gamma}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \gamma}{\partial y^2}\right)$$

et l'on peut démontrer qu'il n'y a pas d'intégrale de la forme

$$(3)\qquad \lambda f(r \pm at)$$

où $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, λ étant une fonction de r seulement. D'ailleurs si l'on cherche les cas dans lesquels l'équation générale

$$(4)\qquad \frac{\partial^2 \gamma}{\partial t^2} = a^2 \sum_1^m {}_i \frac{\partial^2 \gamma}{\partial x_i^2}$$

possède des intégrales de la forme (3), où $r = \left(\sum_1^m {}_i x_i^2\right)^{1/2}$, et λ est une fonction de r seulement, on trouve qu'il n'y en a que deux, savoir lorsque $m = 1$,

(3) *Zur Theorie der Lichtstrahlen*, « Sitzungsber. d. Berliner Akademie », 1882.

ou $m = 3$ [4]. C'est pourquoi on ne donne ordinairement une formule analogue à celle de KIRCHHOFF dans le cas des ondes cylindriques, ni on étend la même formule au cas général.

2. Ayant en vue cette extension on pourrait tâcher de trouver des intégrales de l'équation (4) ayant la forme (3) sans poser la condition que λ soit fonction de r seulement, mais supposant qu'elle soit fonction de $x_1, x_2, \cdots, x_n$.

A ce propos nous allons démontrer le théorème suivant:

Les intégrales de la forme (3) *où* λ *est fonction de* $x_1, \cdots, x_m$ *existent; mais si l'on exclue les cas* $m = 1$, $m = 3$, *dans tous les autres, non seulement les intégrales deviennent infinies dans le point* $x_1 = x_2 = \cdots = x_m = 0$, *mais elles ont d'autres singularités en tout champ à m dimensions qui renferme ce point.*

Si $x_i = r\beta_i$, on aura $\sum_1^m{}_i \beta_i^2 = 1$, et par suite on pourra poser

$$\beta_1 = \cos\alpha_1\,,\ \beta_2 = \sin\alpha_1\cos\alpha_2\,, \cdots, \beta_{m-1} = \sin\alpha_1\sin\alpha_2\cdots\sin\alpha_{m-2}\cos\alpha_{m-1}\,,$$

$$\beta_m = \sin\alpha_1\sin\alpha_2\cdots\sin\alpha_{m-2}\sin\alpha_{m-1}\,,$$

et l'on pourra regarder λ comme une fonction de r et de $\alpha_1\cdots\alpha_{m-1}$.

Posons pour simplifier

$$\Delta = \sum_1^m{}_i \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \quad , \quad V = \lambda f(r + at).$$

Nous aurons

$$\Delta V = f\cdot\Delta\lambda + \lambda\cdot\Delta f + 2\sum_1^m{}_i \frac{\partial\lambda}{\partial x_i}\,\frac{\partial f}{\partial x_i}\,.$$

Mais

$$\Delta f = f'' + \frac{m-1}{r} f',$$

$$\sum_1^m{}_i \frac{\partial\lambda}{\partial x_i}\,\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial\lambda}{\partial r} f';$$

c'est pourquoi

$$\Delta V = f''\lambda + f'\left(\frac{m-1}{r}\lambda + 2\frac{\partial\lambda}{\partial r}\right) + f\Delta\lambda\,.$$

D'ailleurs nous avons

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = a^2\lambda f'',$$

(4) DUHEM, *Hydrodynamique, élasticité, acoustique.* Cours professé en 1890–91. Tome II, livre III, chap. VIII.

par suite l'équation (4) s'écrira

$$f'\left(\frac{m-1}{r}\lambda + 2\frac{\partial\lambda}{\partial r}\right) + f\Delta\lambda = 0,$$

et puisque f doit être arbitraire

$$\frac{m-1}{r}\lambda + 2\frac{\partial\lambda}{\partial r} = 0, \tag{5}$$

$$\Delta\lambda = 0. \tag{6}$$

La première équation nous donne

$$\lambda = \theta r^{-\frac{m-1}{2}},$$

θ étant fonction de $\alpha_1 \cdots \alpha_{m-1}$ seulement. Par suite l'équation (6) se transforme dans la suivante

$$-\frac{(m-1)(m-3)}{4}\theta + \frac{1}{\sin^{m-2}\alpha_1}\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\left(\sin^{m-2}\alpha_1\frac{\partial\theta}{\partial\alpha_1}\right) \tag{7}$$

$$+\frac{1}{\sin^2\alpha_1\sin^{m-3}\alpha_2}\frac{\partial}{\partial\alpha_2}\left(\sin^{m-3}\alpha_2\frac{\partial\theta}{\partial\alpha_2}\right) + \cdots + \frac{1}{\sin^2\alpha_1\cdots\sin^2\alpha_{m-2}}\frac{\partial^2\theta}{\partial\alpha_{m-1}^2} = 0.$$

Cela démontre la première partie du théorème, c'est à dire qu'il y a des intégrales de la forme (3). Dans les cas $m = 1, m = 3$, on pourra prendre évidemment $\theta =$ const. et par suite dans le dernier cas on aura une singularité pour V dans le point $r = 0$ seulement. Il faut maintenant prouver dans tous les autres cas l'existence de singularités dans les environs du point $r = 0$.

Supposons que l'intégrale V, dans un champ Σ_m à m dimensions qui renferme le point $r = 0$, n'ait d'autre singularité que dans ce point même.

Conduisons dans l'intérieur de Σ_m deux espaces sphériques S_{m-1}, Ω_{m-1} à $m - 1$ dimensions ayant le centre dans le point $r = 0$. Soit S_m l'espace à m dimensions renfermé entre S_{m-1} et Ω_{m-1}.

Désignons par W une fonction régulière dans tout l'espace renfermé dans S_{m-1} et qui satisfait à l'équation différentielle $\Delta W = 0$.

Puisque V et W sont regulières dans S_m, on aura par le théorème de Green

$$\int_{S_{m-1}}\left(V\frac{\partial W}{\partial n} - W\frac{\partial V}{\partial n}\right)dS_{m-1} + \int_{\Omega_{m-1}}\left(V\frac{\partial W}{\partial n} - W\frac{\partial V}{\partial n}\right)d\Omega_{m-1} = 0,$$

n, n' étant les normales à S_{m-1} et Ω_{m-1} dirigées vers l'intérieur de l'espace S_m. Puisque V devient infini d'ordre $(m-1)/2$ dans le point $r = 0$, si $m > 3$, l'integrale étendue à Ω_{m-1} s'évanouira lorsque son rayon diminuera indéfiniment, et par suite on aura

$$\int_{S_{m-1}}\left(V\frac{\partial W}{\partial n} - W\frac{\partial V}{\partial n}\right)dS_{m-1} = 0.$$

Remplaçons V par son expression $\theta/r^{(m-1)/2}$ et remarquons que sur S_{m-1}

$$\frac{\partial}{\partial n} = -\frac{\partial}{\partial r}\,.$$

L'équation précédente s'écrira donc

$$\int\limits_{S_{m-1}} \theta\left(\frac{1}{r^{(m-1)/2}}\,\frac{\partial W}{\partial r} + W\,\frac{m-1}{2}\,\frac{1}{r^{(m+1)/2}}\right) dS_{m-1} = 0.$$

Mais, r est constant le long de S_{m-1}, par suite

$$\int\limits_{S_{m-1}} \theta\left(r\frac{\partial W}{\partial r} + \frac{m-1}{2} W\right) d\,S_{m-1} = 0\,. \tag{8}$$

Remarquons que la fonction

$$r\frac{\partial W}{\partial r} + \frac{m-1}{2} W = W_1$$

est une fonction qui satisfait à l'équation $\Delta = 0$. On pourra donc choisir arbitrairement les valeurs de W_1 sur S_{m-1}, pourvu qu'elles forment une fonction continue [5], et construire après, par des formules bien connues, la fonction W_1 en sorte qu'elle soit régulière dans l'espace renfermé dans S_{m-1}. On aura alors que W sera donnée par la formule

$$W = \frac{1}{r^{(m-1)/2}} \int\limits_0^r r^{(m-3)/2}\, W_1\, dr$$

et par suite elle résultera régulière dans le même espace. On tire de là que la relation (8) est absurde si $m > 3$, puisque elle devrait être satisfaite pour tout système de valeurs de $r\dfrac{\partial W}{\partial r} + \dfrac{m-1}{2} W$. Par conséquent la supposition que V soit regulière dans tout point de Σ_m, excepté le point $r = 0$, est elle-même absurde.

Il nous reste à examiner le cas $m = 2$. L'équation (7) devient alors

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial \alpha_1^2} = \frac{1}{4}\theta$$

d'où

$$\theta = A \sin\frac{1}{2}\alpha_1 + B \cos\frac{1}{2}\alpha_1\,,$$

A, B étant des constantes arbitraires, et par suite

$$V = \frac{A \sin\frac{1}{2}\alpha_1 + B \cos\frac{1}{2}\alpha_1}{\sqrt{r}} f(r \pm at)\,. \tag{9}$$

(5) Cette condition ne serait pas même nécessaire.

Cette intégrale est évidemment polydrome et le point $r = 0$ est le point de diramation.

Le théorème est ainsi complètement démontré.

3. On peut calculer de là que si l'on applique la méthode de KIRCHHOFF aux intégrales (3) on ne pourra pas trouver des résultats semblables à ceux qu'il a obtenu. Considérons par exemple le cas des ondes cylindriques. Si nous prenons garde à la polydromie de la fonction (9), lorsque nous emploierons la méthode de KIRCHHOFF, il faudra faire des coupures dans la partie du plan xy où l'on étend l'intégration, en sorte que les formules seront affectées des termes relatifs aux coupures, qui ne paraissent pas dans celles de KIRCHHOFF et par suite on ne pourra pas exprimer la valeur d'une intégrale régulière V de l'équation (2), dans un point intérieur au champ, par celles de V et de ses dérivées au contour.

Au contraire on parvient à ce résultat par les formules (4), (6), (8) de l'article précédent. Elles jouent dans le cas des ondes cylindriques un rôle tout à fait semblable à celui joué par la formule de KIRCHHOFF. Elles ont aussi la même interprétation physique que celle-ci. Considérons en effet les fonctions

$$
(10)\qquad \left\{
\begin{aligned}
V_1(r,t) &= \int_0^\infty f\left(t - \frac{u}{a}\right)\frac{du}{\sqrt{u^2 - r^2}}, \\
V_2(r,t) &= \int_0^\infty f\left(t + \frac{u}{a}\right)\frac{du}{\sqrt{u^2 - r^2}}, \\
V_3(r,t) &= \int_{-r}^{r} f\left(t + \frac{u}{a}\right)\frac{du}{\sqrt{u^2 - r^2}}\log\left(\frac{r^2 - u^2}{r}\right),
\end{aligned}
\right.
$$

où f est une fonction arbitraire.

Dans la première formule nous supposerons que f s'évanouit pour toute valeur de l'argument inférieure à une certaine limite, et dans la deuxième au contraire on supposera que f s'évanouit pour les valeurs de l'argument supérieures à une certaine limite.

Les trois fonctions (10) satisfont à l'équation (2) et n'ont de singularités qu'au point $r = 0$ où elles deviennent infinies du même ordre que $\log r$.

De la même maniere qu'on fait correspondre l'intégrale (1) aux ondes sphériques on peut référer les fonctions (10) aux ondes cylindriques progressives ou régressives, relatives à une ligne lumineuse.

En comparant donc les formules (4), (6), (8) de l'article précédent avec celle de KIRCHHOFF, on voit tout de suite qu'elles représentent sous une forme mathématique le principe de HUYGHENS dans le cas des ondes cylindriques.

On pourrait montrer que les mêmes formules peuvent s'obtenir directement des intégrales (10), mais nous ne développerons pas ici ces calculs [6].

4. Enfin posons

$$w(x, y, t) = e^{it}\psi(x, y).$$

L'équation (2) deviendra

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + a^2\psi = 0$$

et les formules (7) et (8) de l'article 10 se réduiront aux suivantes

$$(11)\qquad \left\{\begin{aligned} \psi(x_1, y_1) &= \frac{1}{2\pi}\int_s \left(\frac{\partial\psi}{\partial n}\,Y_0(ar) - \psi\,\frac{\partial Y_0(ar)}{\partial n}\right)ds, \\ 0 &= \int_s \left(\frac{\partial\psi}{\partial n}\,I_0(ar) - \psi\,\frac{\partial I_0(ar)}{\partial n}\right)ds \end{aligned}\right.$$

où Y_0 et I_0 dénotent les fonctions de BESSEL de deuxième et de première espèce. Les deux formules (11) ont été données par M. WEBER [7] et dépendent des équations (7), (8) de l'article 10 de la même façon que la formule bien connue découverte par M. HELMHOLTZ [8] est liée avec celle de KIRCHHOFF dont nous avons parlé dans cet article.

Art. 12. - REMARQUE RELATIVE À UNE QUESTION DE CALCUL DES VARIATIONS.

1. Supposons qu'on propose la question suivante: *Déterminer la fonction* $U(x, y, t)$ *de telle façon que la première variation de l'intégrale triple*

$$V = \int_S F\left(U, \frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial t}, x, y, t\right)dx\,dy\,dt$$

soit nulle, S *étant une partie de l'espace à trois dimensions* x, y, t.

Par les règles bien connues du calcul des variations on aura

$$0 = \delta V = \int_S \left(\frac{\partial F}{\partial U}\,\delta U + \frac{\partial F}{\partial U_1}\,\delta U_1 + \frac{\partial F}{\partial U_2}\,\delta U_2 + \frac{\partial F}{\partial U_3}\,\delta U_3\right)dx\,dy\,dt$$

où l'on a posé

$$U_1 = \frac{\partial U}{\partial x}\quad,\quad U_2 = \frac{\partial U}{\partial y}\quad,\quad U_3 = \frac{\partial U}{\partial t}.$$

(6) Voir ma Note: *Sulle vibrazioni luminose nei mezzi isotropi.* « Rend. R. Acc. dei Lincei », ser. 5ª, vol. I, 2º Sem. 1892, p. 161. [In queste *Opere*: volume primo, XXXIV, p. 559].

(7) *Ueber die Integration der partiellen Differentialgleichung* $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + k^2 u = 0$. « Math. Annalen », vol. I, 1869, p. 1.

(8) *Theorie der Luftschwingungen in Röhren mit offenen Enden.* « Wiss. Abhandlungen », vol. I.

En supposant U_1, U_2, U_3 continues on aura par des intégrations par parties

$$o = \delta V = \int_S \left(\frac{\partial F}{\partial U} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial U_1} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial U_2} - \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial F}{\partial U_3}\right)\delta U\, dS$$

$$- \int_\sigma \left(\frac{\partial F}{\partial U_1}\cos nx + \frac{\partial F}{\partial U_2}\cos ny + \frac{\partial F}{\partial U_3}\cos nt\right)d\sigma,$$

n étant la normale au contour σ dirigée vers l'intérieur de S.

On obtiendra donc l'équation du 2ème ordre

$$\frac{\partial F}{\partial U} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial U_1} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial U_2} - \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial F}{\partial U_3} = o.$$

2. Prenons garde que pour établir l'équation précédente on a supposé la continuité des dérivées U_1, U_2, U_3. On peut maintenant se proposer les questions: U *étant toujours continue, quelles seront les surfaces où les dérivées* U_1, U_2, U_3 *pourront être discontinues en sorte que la variation de* V *soit toujours nulle? A quelles conditions devront satisfaire les valeurs des dérivées des deux côtés des surfaces de discontinuité?*

Supposons qu'il y ait une seule surface de discontinuité Λ qui partage l'espace S en deux parties S_1, S_2 et le contour en σ_1 et σ_2. Soit ν la normale à la surface Λ dirigée vers l'intérieur de S_1. On aura

$$o = \delta V = \int_{S_1} \left(\frac{\partial F}{\partial U}\delta U + \frac{\partial F}{\partial U_1}\delta U_1 + \frac{\partial F}{\partial U_2}\delta U_2 + \frac{\partial F}{\partial U_3}\delta U_3\right)dS_1$$

$$+ \int_{S_2} \left(\frac{\partial F}{\partial U}\delta U + \frac{\partial F}{\partial U_1}\delta U_1 + \frac{\partial F}{\partial U_2}\delta U_2 + \frac{\partial F}{\partial U_3}\delta U_3\right)dS_2.$$

Mais par des intégrations par parties on trouve

$$\int_{S_1} \left(\frac{\partial F}{\partial U}\delta U + \frac{\partial F}{\partial U_1}\delta U_1 + \frac{\partial F}{\partial U_2}\delta U_2 + \frac{\partial F}{\partial U_3}\delta U_3\right)dS_1$$

$$= \int_{S_1} \left(\frac{\partial F}{\partial U} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial U_1} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial U_2} - \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial F}{\partial U_3}\right)\delta U\, dS_1$$

$$- \int_{\sigma_1} \left(\frac{\partial F}{\partial U_1}\cos nx + \frac{\partial F}{\partial U_2}\cos ny + \frac{\partial F}{\partial U_3}\cos nt\right)\delta U\, d\sigma$$

$$- \int_{\Lambda} \left(\frac{\partial F}{\partial U_1}\cos \nu x + \frac{\partial F}{\partial U_2}\cos \nu y + \frac{\partial F}{\partial U_3}\cos \nu t\right)\delta U\, d\Lambda,$$

$$\int_{S_2} \left(\frac{\partial F}{\partial U}\delta U + \frac{\partial F}{\partial U_1}\delta U_1 + \frac{\partial F}{\partial U_2}\delta U_2 + \frac{\partial F}{\partial U_3}\delta U_3\right)dS_2$$

$$= \int_{S_2} \left(\frac{\partial F}{\partial U} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial U_1} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial U_2} - \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial F}{\partial U_3}\right)\delta U\, dS_2 -$$

$$-\int_{\sigma_2}\left(\frac{\partial F}{\partial U_1}\cos nx+\frac{\partial F}{\partial U_2}\cos ny+\frac{\partial F}{\partial U_3}\cos nt\right)\delta U\,d\sigma$$

$$+\int_{\Lambda}\left(\frac{\partial F}{\partial U_1}\cos \nu x+\frac{\partial F}{\partial U_2}\cos \nu y+\frac{\partial F}{\partial U_3}\cos \nu t\right)\delta U\,d\Lambda\,.$$

Désignons par

$$U_1',\,U_2',\,U_3',\,\left(\frac{\partial F}{\partial U_1}\right)',\ \left(\frac{\partial F}{\partial U_2}\right)',\ \left(\frac{\partial F}{\partial U_3}\right)'$$

les valeurs limites de U_1, U_2, U_3, $\partial F/\partial U_1$, $\partial F/\partial U_2$, $\partial F/\partial U_3$, lorsqu'on s'approche indéfiniment d'un point de la surface Λ du côté de l'espace S_1, et désignons par les mêmes symboles avec deux suffixes les valeurs limites qu'on trouve lorsqu'on s'approche indéfiniment du même point du côté de S_2. Ajoutant membre à membre les deux équations précédentes, on aura alors

$$o=\int_{S_1+S_2}\left(\frac{\partial F}{\partial U}-\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial U_1}-\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial U_2}-\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial F}{\partial U_3}\right)\delta U\,dS$$

$$-\int_{\sigma}\left(\frac{\partial F}{\partial U_1}\cos nx+\frac{\partial F}{\partial U_2}\cos ny+\frac{\partial F}{\partial U_3}\cos nt\right)\delta U\,d\sigma$$

$$-\int_{\Lambda}\left\{\left[\left(\frac{\partial F}{\partial U_1}\right)'-\left(\frac{\partial F}{\partial U_1}\right)''\right]\cos \nu x+\left[\left(\frac{\partial F}{\partial U_2}\right)'-\left(\frac{\partial F}{\partial U_2}\right)''\right]\cos \nu y\right.$$

$$\left.+\left[\left(\frac{\partial F}{\partial U_3}\right)'-\left(\frac{\partial F}{\partial U_3}\right)''\right]\cos \nu t\right\}\delta U\,d\Lambda\,.$$

Donc en tout point de S, excepté ceux qui appartiennent à Λ, il sera

$$\frac{\partial F}{\partial U}-\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial U_1}-\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial U_2}-\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial F}{\partial U_3}=o \tag{1}$$

et sur Λ on aura

$$\left[\left(\frac{\partial F}{\partial U_1}\right)'-\left(\frac{\partial F}{\partial U_1}\right)''\right]\cos \nu x+\left[\left(\frac{\partial F}{\partial U_2}\right)'-\left(\frac{\partial F}{\partial U_2}\right)''\right]\cos \nu y$$
$$+\left[\left(\frac{\partial F}{\partial U_3}\right)'-\left(\frac{\partial F}{\partial U_3}\right)''\right]\cos \nu t=o\,. \tag{2}$$

Prenons sur Λ un système de coordonnées curvilignes λ, μ. Puisque U est continue on aura

$$\left(\frac{\partial U}{\partial \lambda}\right)'=\left(\frac{\partial U}{\partial \lambda}\right)''\quad,\quad\left(\frac{\partial U}{\partial \mu}\right)'=\left(\frac{\partial U}{\partial \mu}\right)''$$

où les suffixes dénotent de quel côté de la surface Λ on prend les valeurs des dérivées. Les deux équations précédentes peuvent s'écrire

$$(U_1'-U_1'')\frac{\partial x}{\partial \lambda}+(U_2'-U_2'')\frac{\partial y}{\partial \lambda}+(U_3'-U_3'')\frac{\partial t}{\partial \lambda}=o\,,$$

$$(U_1'-U_1'')\frac{\partial x}{\partial \mu}+(U_2'-U_2'')\frac{\partial y}{\partial \mu}+(U_3'-U_3'')\frac{\partial t}{\partial \mu}=o\,,$$

d'où

$$(3) \qquad U'_1 - U''_1 : U'_2 - U''_2 : U'_3 - U''_3 = \frac{d(y,t)}{d(\lambda,\mu)} : \frac{d(t,x)}{d(\lambda,\mu)} : \frac{d(x,y)}{d(\lambda,\mu)}$$

$$= \cos \nu x : \cos \nu y : \cos \nu t .$$

L'équation (2) deviendra donc

$$(4) \qquad 0 = \left[\left(\frac{\partial F}{\partial U_1}\right)' - \left(\frac{\partial F}{\partial U_1}\right)''\right](U'_1 - U''_1) + \left[\left(\frac{\partial F}{\partial U_2}\right)' - \left(\frac{\partial F}{\partial U_2}\right)''\right](U'_2 - U''_2)$$

$$+ \left[\left(\frac{\partial F}{\partial U_3}\right)' - \left(\frac{\partial F}{\partial U_3}\right)''\right](U'_3 - U''_3).$$

L'équation (4) *nous donne une condition relative à la discontinuité, tandis que les équations* (3) *donnent les conditions auxquelles doit satisfaire la surface* Λ.

Il est évident que si, au lieu d'une seule surface, on avait plusieurs surfaces de discontinuité, sur chacune on aurait vérifiées les conditions (3), (4).

3. Appliquons les résultats qu'on vient de trouver au cas où

$$F = a^2\left[\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right] - \left[\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2 + 2wZ\right].$$

L'équation (1), dans ce cas, se réduira à l'autre

$$a^2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) + Z = \frac{\partial^2 w}{\partial t^2},$$

c'est à dire à l'équation (A) du premier article.

Les conditions (3), (4) deviendront

$$(5) \qquad U'_1 - U''_1 : U'_2 - U''_2 : U'_3 - U''_3 = \cos \nu x : \cos \nu y : \cos \nu t,$$

$$(6) \qquad a^2\{(U'_1 - U''_1)^2 + (U'_2 - U''_2)^2\} - (U'_3 - U''_3)^2 = 0$$

c'est à dire

$$\frac{1}{a^2} = \frac{(U'_1 - U''_1)^2 + (U'_2 - U''_2)^2}{(U'_3 - U''_3)^2} = \frac{\cos^2 \nu x + \cos^2 \nu y}{\cos^2 \nu t} = \operatorname{tg}^2 \nu t,$$

d'où

$$\operatorname{tg} \nu t = \pm \frac{1}{a} .$$

Donc, dans ce cas, les surfaces de discontinuité seront les enveloppes des cônes $\Lambda_A^{(a)}$ et la condition relative à la discontinuité sera donnée par l'équation (6).

Il est aisé de voir quelle relation a lieu entre ce résultat et la théorie du choc dans un milieu élastique.

TABLE DES ARTICLES

IV.

ESERCIZI DI FISICA MATEMATICA

« Rivista di Matematica », vol. IV, 1894, pp. 1-14.

Mi permetto di presentare ai lettori di questa Rivista alcune note sopra varii punti delle teorie fisico-matematiche (*). Questi articoli non hanno lo scopo di offrire sia risultati originali, sia ricerche condotte con metodi originali. Come il loro titolo lo denota essi hanno un fine molto più modesto, quale è quello di presentare alcune semplici applicazioni delle teorie che ordinariamente si svolgono in un corso di fisica matematica; ed è perciò che spero abbiano da riescire non inutili per chi cerchi delle esercitazioni sopra argomenti uditi nelle scuole.

I.

Sulle funzioni potenziali.

1. Nella teoria del potenziale si dimostra che, se in un dato campo, ove non esistono masse, le tre derivate della funzione potenziale sono nulle, esse si conservano sempre nulle finché non si attraversano delle superficie o degli spazii ove sono distribuite delle masse. Il teorema sussiste, tanto se il *campo* dato è una porzione qualunque dello spazio, quanto se esso è un pezzo di superficie così piccola come si vuole.

Questo teorema conduce alla conseguenza che, quando sopra un elemento di superficie si conosce il valore della funzione potenziale e della sua derivata rispetto alla normale alla superficie, la funzione stessa è determinata in tutta la parte dello spazio i cui punti possono collegarsi mediante una linea continua colla superficie, senza incontrare masse. Mediante una ben nota formula dovuta al Poisson si risolve il problema della costruzione effettiva della funzione potenziale quando si suppongono noti i valori di essa e della sua derivata rispetto alla normale nei punti di un pezzo di piano tanto piccolo quanto si vuole.

Questa notevole formula stabilisce un legame fra ogni funzione potenziale ed una funzione di *due* variabili complesse. Indipendentemente da

(*) Di tali note questa è la sola che sia stata pubblicata [N. d. R.].

questo risultato il MEHLER [1] ed il BELTRAMI [2] hanno mostrato che i *potenziali simmetrici* possono connettersi colle funzioni di una variabile complessa, per mezzo di una formula la quale, senza ricorrere a sviluppi in serie [3], risolve il problema di costruire una funzione potenziale simmetrica quando se ne conosce il valore lungo una porzione dell'asse di simmetria.

I due risultati hanno relazione molto intima fra loro. Il ravvicinarli e farli dipendere in modo molto semplice dalle formule sul potenziale dell'ellissoide, che di solito si espongono in ogni corso sulla teoria del potenziale, credo che sia cosa non del tutto inutile, tanto più che la formula di POISSON suole ordinariamente ricavarsi dall'integrale generale dell'equazione del suono, ed in un corso sulla teoria del potenziale può riescire comodo di ottenerla invece direttamente valendosi soltanto di risultati già stabiliti nella detta teoria.

2. Partendo dalla funzione potenziale di un'ellissoide di rivoluzione intorno all'asse maggiore, e supponendo che due degli assi tendano a zero, si trova la funzione potenziale di una retta sotto la forma

$$V = \pi a \int_{\lambda_1}^{\infty} f\left(1 - \frac{x^2 + y^2}{\lambda} - \frac{z^2}{a^2 + \lambda}\right) \frac{d\lambda}{\lambda \sqrt{a^2 + \lambda}},$$

in cui $2a$ rappresenta la lunghezza della retta, x, y, z le coordinate del *punto potenziato*, riferite alla retta presa come asse z ed a due altre x e y ortogonali, supponendo l'origine nel punto di mezzo della retta stessa. Fra la densità in un punto della retta e la funzione f passa la relazione

$$\rho(z) = \pi f\left(1 - \frac{z^2}{a^2}\right); \tag{1}$$

λ è la radice positiva dell'equazione

$$H = 1 - \frac{x^2 + y^2}{\lambda} - \frac{z^2}{a^2 + \lambda} = 0.$$

In modo analogo la funzione potenziale di un disco circolare di raggio b giacente nel piano xy col centro nell'origine può mettersi sotto la forma

$$V_1 = \pi b^2 \int_{\lambda_2}^{\infty} \varphi\left(1 - \frac{x^2 + y^2}{b^2 + \lambda} - \frac{z^2}{\lambda}\right) \frac{d\lambda}{(b^2 + \lambda)\sqrt{\lambda}},$$

(1) *Zur Theorie der Vertheilung der Elektricität in leitenden Körpern.* «Math. Ann.», Bd. XVIII.

(2) *Sulle funzioni associate e specialmente di quelle della calotta sferica.* «Mem. Acc. di Bologna», S. IV, T. IV.

(3) Vedi THOMSON und TAIT, *Handbuch der Theoretischen Phisik.* I Bd., II Th., § 546.

ove fra la densità $\rho_1(s)$ del disco in un punto distante dal centro di $z = b\sqrt{1-s}$ e la funzione φ passa la relazione

$$\rho_1(s) = \int_0^s \frac{\varphi'(\mu)}{\sqrt{s-\mu}}\,d\mu + \frac{\varphi(0)}{\sqrt{s}}, \tag{2 a}$$

la cui relazione inversa è

$$\varphi(s) = \frac{1}{\pi}\int_0^s \frac{\rho_1(\mu)\,d\mu}{\sqrt{s-\mu}}; \tag{2 b}$$

λ_2 è la radice positiva dell'equazione

$$H_2 = 1 - \frac{x^2+y^2}{b^2+\lambda} - \frac{z^2}{\lambda} = 0 \text{ [4]}.$$

Ora V diventa eguale a V_1 prendendo

$$ib = a \quad , \quad \varphi(s) = -\frac{1}{a}\,\mathrm{f}(s).$$

Infatti avremo

$$V_1 = -\pi a^2 \int_{\lambda_2}^{\infty} -\frac{1}{a}\,\mathrm{f}\left(1 - \frac{x^2+y^2}{a^2+\lambda} - \frac{z^2}{\lambda}\right)\frac{d\lambda}{(-a^2+\lambda)\sqrt{\lambda}}$$

e cambiando in questa formola λ in $a^2+\lambda$ si ottiene

$$V_1 = \pi a \int_{\lambda_1}^{\infty} \mathrm{f}\left(1 - \frac{x^2+y^2}{\lambda} - \frac{z^2}{a^2+\lambda}\right)\frac{d\lambda}{\lambda\sqrt{a^2+\lambda}} = V. \tag{3}$$

Dalle (2) segue

$$\rho_1(s) = -\frac{1}{a}\int_0^s \frac{\mathrm{f}'(\mu)\,d\mu}{\sqrt{s-\mu}} - \frac{1}{a}\,\frac{\mathrm{f}(0)}{\sqrt{s}}$$

e dalla (1)

$$\mathrm{f}(\mu) = \frac{1}{\pi}\,\rho\left(a\sqrt{1-\mu}\right)$$

$$\mathrm{f}'(\mu) = -\frac{a}{2\pi\sqrt{1-\mu}}\,\rho'\left(a\sqrt{1-\mu}\right);$$

quindi

$$\rho_1(s) = \frac{1}{2\pi}\int_0^s \frac{\rho'\left(a\sqrt{1-\mu}\right)}{\sqrt{s-\mu}\sqrt{1-\mu}}\,d\mu - \frac{1}{a\mu}\,\frac{\rho(a)}{\sqrt{s}}. \tag{4 a}$$

(4) Vedi E. BETTI, *Teoria delle Forze Newtoniane*, p. 85 e sg.

Dalla $(2\,b)$ si deduce poi la relazione inversa alla precedente

$$(4\,b) \qquad \rho(s) = -a \int_0^{1-s^2/a^2} \frac{\rho_1(\mu)\,d\mu}{\sqrt{1-\frac{s^2}{a^2}-\mu}}\,.$$

Osserviamo che, come la funzione

$$\frac{m}{\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2}}$$

rappresenta la funzione potenziale di un punto di massa m e di coordinate x_1, y_1, z_1, così potremo dire che

$$\frac{m}{\sqrt{[x-(x_1+ix_2)]^2+[y-(y_1+iy_2)]^2+[z-(z_1+iz_2)]^2}}$$

è la funzione potenziale di una massa m concentrata nel punto immaginario dello spazio avente le coordinate $x_1+ix_2, y_1+iy_2, z_1+iz_2$.

Ciò premesso le formule (3), $(4\,a)$, $(4\,b)$ conducono alla seguente proposizione:

TEOREMA I *a*. - *Abbiansi tre assi x, y, z ortogonali, ed una massa distribuita sull'asse z dal punto $-a$ al punto a colla densità $\rho(z)$ (essendo $\rho(z) = \rho(-z)$). La funzione potenziale di una tale massa è uguale a quella di una massa distribuita nei punti immaginarii del piano xy di coordinate*

$$x = ir\cos\theta \quad , \quad y = ir\,\mathrm{sen}\,\theta \quad , \quad (a \geqq r \geqq 0),$$

colla densità superficiale

$$\rho_1 = \frac{1}{2\pi}\int_0^s \frac{\rho'(a\sqrt{1-\mu})}{\sqrt{s-\mu}\,\sqrt{1-\mu}}\,d\mu - \frac{1}{a\pi}\,\frac{\rho(a)}{\sqrt{s}}\,,$$

essendo

$$s = 1 - \frac{r^2}{a^2}\,.$$

TEOREMA I *b*. - *Abbiasi una massa distribuita nei punti del cerchio di raggio b situato nel piano xy col centro nell'origine, colla densità superficiale $\rho_1(r)$. Questo disco avrà la stessa funzione potenziale di una massa distribuita nei punti immaginarii dell'asse z di coordinate*

$$iz \qquad (b \geqq z \geqq -b)$$

colla densità

$$\rho = -ib\int_0^s \frac{\rho_1(\mu)\,d\mu}{\sqrt{s-\mu}}\,,$$

essendo

$$s = 1 - \frac{z^2}{b^2}\,.$$

In particolare, prendendo successivamente le densità ρ e ρ_1 costanti ed eguali a K, i teoremi precedenti divengono:

TEOREMA 2 *a*. – *La funzione potenziale di una massa di densità costante* K *distribuita sull'asse z dal punto — a al punto a è uguale alla funzione potenziale di una massa distribuita nei punti immaginarii del piano xy di coordinate*

$$x = ir\cos\theta \quad , \quad y = ir \operatorname{sen}\theta \quad , \quad (a \geqq r \geqq 0),$$

colla densità superficiale

$$\rho_1 = -\frac{K}{\pi\sqrt{a^2 - r^2}}.$$

TEOREMA 2 *b*. – *La funzione potenziale di un disco omogeneo di densità* K *di raggio b, situato nel piano xy col centro nell'origine, è uguale alla funzione potenziale di una massa distribuita nei punti immaginarii dell'asse z di coordinate*

$$iz \qquad (b \geqq z \geqq -b),$$

colla densità lineare

$$\rho = -2iK\sqrt{b^2 - z^2}.$$

Un'altra conseguenza del teorema 1 *a* è la seguente:

TEOREMA 3 *a*. – *La funzione potenziale di due punti di masse* $+1$ *e* -1, *situati sull'asse z alle distanze rispettive* $+a$ *e* $-a$ *dall'origine, è eguale alla funzione potenziale di un doppio strato distribuito nei punti immaginari del piano xy di coordinate*

$$x = ir\cos\theta \quad , \quad y = ir \operatorname{sen}\theta \quad , \quad (a \geqq r \geqq 0),$$

col momento

$$\mu = -\frac{1}{\pi\sqrt{a^2 - r^2}}.$$

Supponiamo infatti dapprima distribuita sull'asse z dal punto $-a$ al punto a una massa omogenea M_1 di densità $-K$. Essa avrà la stessa funzione potenziale della massa M'_1 di densità superficiale

$$\rho_1 = \frac{K}{\pi\sqrt{a^2 - r^2}}$$

distribuita nei punti di coordinate

$$x = ir\cos\theta \quad , \quad y = ir \operatorname{sen}\theta \quad , \quad z = 0 \quad (a \geqq r \geqq 0).$$

Distribuiamo poi sull'asse z una massa M_2 della densità $+K$ dal punto $-a + \varepsilon$ al punto $a + \varepsilon$. Ad essa corrisponderà una massa M'_2 distribuita nei punti di coordinate

$$x = ir\cos\theta \quad , \quad y = ir \operatorname{sen}\theta \quad , \quad z = \varepsilon \quad (a \geqq r \geqq 0)$$

colla densità superficiale

$$\rho_2 = -\frac{K}{\pi\sqrt{a^2 - r^2}} \,.$$

Prendiamo l'insieme delle due masse M_1 e M_2 e facciamo tendere ε a zero, mentre $K\varepsilon$ si conserva eguale ad 1. Otterremo al limite sull'asse z due punti di masse $+1$ e -1 alle distanze $+a$ e $-a$ dall'origine. Prendendo invece l'insieme delle due masse M'_1 e M'_2 al limite si otterrà un doppio strato di momento

$$-\frac{1}{\pi\sqrt{a^2 - r^2}} \,.$$

Il teorema resta quindi dimostrato.

In modo del tutto analogo partendo dal teorema $2\,b$ relativo al disco omogeneo e passando da esso al caso di un anello circolare si trova il teorema seguente:

TEOREMA 3 *b*. – *Un anello circolare di densità eguale ad* 1, *situato nel piano xy col centro nell'origine ha la stessa funzione potenziale di una massa distribuita nei punti immaginarii dell'asse z*

$$iz \qquad (b \geqq z \geqq -b)$$

colla densità

$$-\frac{2\,ib}{\sqrt{b^2 - z^2}} \,.$$

3. Premessi questi teoremi, denotiamo per semplicità con m_1 la massa distribuita sull'asse z secondo l'ipotesi fatta nel teorema $2\,a$ e con m'_1 la massa equivalente distribuita nei punti immaginarii del piano xy e analogamente indichiamo con m_2 l'insieme dei due punti materiali considerati nel teorema $3\,a$ e con m'_2 il doppio strato equivalente distribuito nei punti immaginarii del piano xy. Abbiasi un sistema qualunque di masse che supporremo esterne al segmento dell'asse compreso fra $z = -a$ e $z + a$. Sia V la funzione potenziale delle masse m. Pel teorema di GAUSS il potenziale P_1 di m su m_1 sarà eguale al potenziale di m su m'_1. Ora il potenziale di m su m_1 si calcola immediatamente e si trova

$$P_1 = K\int_{-a}^{a} V(0\,,0\,,z)\,dz \,.$$

Per avere il potenziale su m'_1 bisognerà prendere la V nei punti del piano xy cioè $V(x\,,y\,,0)$ e prolungarla per i valori complessi di x e di y. Otterremo così la funzione di due variabili complesse

$$V(x + i\xi\,, y + i\zeta\,, 0) \tag{5}$$

tale, che

$$V(x + i\xi\,, y + i\zeta\,, 0)_{\xi=0,\,\zeta=0} = V(x\,,y\,,0) \,.$$

La (5) dà i valori della funzione potenziale delle masse m nei punti immaginarii del piano x, y; quindi otterremo immediatamente:

$$P_1 = -\frac{K}{\pi}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a V(ir\cos\theta, ir\operatorname{sen}\theta, 0)\frac{ir\cdot i\,dr}{\sqrt{a^2-r^2}}$$

$$= \frac{K}{\pi}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a V(ir\cos\theta, ir\operatorname{sen}\theta, 0)\frac{r\,dr}{\sqrt{a^2-r^2}}.$$

Eguagliando i due valori trovati per P_1 si ha

$$\int_{-a}^{a} V(0, 0, z)\,dz = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a V(ir\cos\theta, ir\operatorname{sen}\theta, 0)\frac{r\,dr}{\sqrt{a^2-r^2}},$$

e derivando i due membri rispetto ad a

$$V(0, 0, a) + V(0, 0, -a)$$

$$= \frac{1}{\pi}\frac{d}{da}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a V(ir\cos\theta, ir\operatorname{sen}\theta, 0)\frac{r\,dr}{\sqrt{a^2-r^2}}.$$

In modo analogo prendiamo successivamente il potenziale P_2 delle masse m su m_2 e m'_2; tenendo conto del modo con cui vanno calcolati i potenziali sui doppi strati, otterremo

$$(6)\quad \begin{cases} P_2 = V(0, 0, a) - V(0, 0, -a), \\ P_2 = -\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a V'_z(ir\cos\theta, ir\operatorname{sen}\theta, 0)\frac{ir\cdot i\,dr}{\sqrt{a^2-r^2}} \\ \quad = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a V'_z(ir\cos\theta, ir\operatorname{sen}\theta, 0)\frac{r\,dr}{\sqrt{a^2-r^2}}, \end{cases}$$

ove V'_z rappresenta la derivata parziale di V rapporto a z; funzione che dovremo supporre prolungata anch'essa per i valori complessi delle variabili x ed y.

Eguagliando fra loro i due valori trovati per P_2, abbiamo

$$(7)\quad V(0, 0, a) - V(0, 0, -a)$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a V'_z(ir\cos\theta, ir\operatorname{sen}\theta, 0)\frac{r\,dr}{\sqrt{a^2-r^2}}.$$

Dalle (6) e (7) segue

$$V(0,0,a)=\frac{1}{2\pi}\frac{d}{da}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^a V(ir\cos\theta\,,ir\operatorname{sen}\theta\,,0)\frac{r\,dr}{\sqrt{a^2-r^2}}$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^a V'_z(ir\cos\theta\,,ir\operatorname{sen}\theta\,,0)\frac{r\,dr}{\sqrt{a^2-r^2}}\,.$$

Cambiando l'origine nel piano $x\,,y$ e ponendo z in luogo di a, la formula precedente dà luogo all'altra

$$\text{(A)}\qquad V(x\,,y\,,z)=\frac{1}{2\pi}\frac{d}{dz}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^z V(x+ir\cos\theta\,,y+ir\operatorname{sen}\theta\,,0)\frac{r\,dr}{\sqrt{z^2-r^2}}$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^z V'_z(x+ir\cos\theta\,,y+ir\operatorname{sen}\theta\,,0)\frac{r\,dr}{\sqrt{z^2-r^2}}\,,$$

la quale è valida ammettendo che la parallela all'asse z che dal punto $x\,,y,-z$ va al punto $x\,,y\,,z$ sia esterna alle masse m.

Questa formula (5) scioglie evidentemente la questione di determinare una funzione potenziale $V(x\,,y\,,z)$ quando si conosce, sopra un pezzo di piano σ esterno allo spazio occupato dalle masse, il suo valore e quello della sua derivata rispetto alla normale al piano σ. La soluzione si otterrà prendendo gli assi $x\,,y\,,z$ in modo che il pezzo di piano σ appartenga al piano $x\,,y$. Bisognerà quindi considerare le funzioni note $V(x\,,y\,,0)$, $V'_z(x\,,y\,,0)$ e prolungarle pei valori complessi delle variabili x e y; finalmente si applicherà la formula (A). In tal modo si determineranno i valori di $V(x\,,y\,,z)$ nella porzione del cilindro S simmetrico rispetto al piano xy, avente per base σ entro il quale non capitano masse; ma una volta determinata la V entro S si potrà prendere un pezzo di piano arbitrario σ' contenuto in S. In esso conosceremo il valore di V e della derivata rispetto alla normale, quindi potremo ripetere per σ' le stesse operazioni già eseguite per σ e così procedendo di seguito potremo prolungare la funzione potenziale V finché sarà possibile.

Come abbiamo detto fin da principio la formula (A) stabilisce un legame fra le funzioni potenziali e le funzioni di *due* variabili complesse. Il teorema a cui si perviene mediante tale osservazione è il seguente.

TEOREMA 4. – *Siano* $F(\zeta_1\,,\zeta_2)$ *e* $\Phi(\zeta_1\,,\zeta_2)$ *due funzioni arbitrarie delle variabili complesse* ζ_1 *e* ζ_2, *reali per i valori reali di* ζ_1 *e* ζ_2.

(5) La formula (A) è la formula data da POISSON nel § (8) della sua Memoria *Sur les équations aux différences partielles.* «Mem. de l'Acad. des Sciences», T. III.

Sia σ un campo tale che per tutti i valori reali di x e y interni a σ le funzioni

$$F(\zeta_1, \zeta_2 \mid x, y) \quad , \quad \Phi(\zeta_1, \zeta_2 \mid x, y)$$

si comportino regolarmente ed oltre a ciò i raggi di convergenza dei detti elementi siano sempre superiori ad R. *In tale ipotesi, posto*

$$\zeta_1 = x + ir\cos\theta \quad , \quad \zeta_2 = y + ir\,\mathrm{sen}\,\theta\,,$$

la funzione

$$\text{(A}'\text{)} \qquad V(x, y, z) = \frac{1}{2\pi}\frac{d}{dz}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^z F(x + ir\cos\theta\,, y + ir\,\mathrm{sen}\,\theta)\frac{r\,dr}{\sqrt{z^2 - r^2}}$$

$$+ \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^z \Phi(x + ir\cos\theta\,, y + ir\,\mathrm{sen}\,\theta)\frac{r\,dr}{\sqrt{z^2 - r^2}}$$

gode delle seguenti proprietà:

1° *entro il cilindro* S *simmetrico rispetto al piano xy avente per base σ e per altezza* 2 R *è reale finita e continua insieme alle sue derivate;*

2° *entro* S *soddisfa l'equazione differenziale*

$$\Delta^2 V = 0$$

3° *sul pezzo di piano σ si ha*

$$V(x, y, 0) = F(x, y) \quad , \quad \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)_{z=0} = \Phi(x, y)\,.$$

Per dimostrare direttamente questo teorema, cominciamo dal considerare la funzione

$$(8) \qquad f(x, y, z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^z F(x + ir\cos\theta\,, y + ir\,\mathrm{sen}\,\theta)\frac{r\,dr}{\sqrt{z^2 - r^2}}\,.$$

Per mezzo di una integrazione per parti, avremo

$$f(x, y, z) = z\,F(x, y) + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^z \left(\frac{\partial F}{\partial \zeta_1}\,i\cos\theta + \frac{\partial F}{\partial \zeta_2}\,i\,\mathrm{sen}\,\theta\right)\sqrt{z^2 - r^2}\,dr$$

e quindi

$$(9) \qquad \frac{\partial f}{\partial z} = F(x, y) + \frac{z}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^z \left(\frac{\partial F}{\partial \zeta_1}\,i\cos\theta + \frac{\partial F}{\partial \zeta_2}\,i\,\mathrm{sen}\,\theta\right)\frac{dr}{\sqrt{z^2 - r^2}}\,.$$

Da questa formula segue

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^z \left(\frac{\partial F}{\partial \zeta_1} i \cos\theta + \frac{\partial F}{\partial \zeta_2} i \operatorname{sen}\theta\right) \frac{dr}{\sqrt{z^2 - r^2}}$$

$$+ \frac{z}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\theta \frac{d}{dz}\int_0^z \left(\frac{\partial F}{\partial \zeta_1} i \cos\theta + \frac{\partial F}{\partial \zeta_2} i \operatorname{sen}\theta\right) \frac{dr}{\sqrt{z^2 - r^2}} .$$

Mediante l'integrazione per parti rispetto a θ, si ha

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^z \left(\frac{\partial F}{\partial \zeta_1} i \cos\theta + \frac{\partial F}{\partial \zeta_2} i \operatorname{sen}\theta\right) \frac{dr}{\sqrt{z^2 - r^2}}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^z \left(-\frac{\partial^2 F}{\partial \zeta_1^2} \operatorname{sen}^2\theta + 2\frac{\partial^2 F}{\partial \zeta_1 \partial \zeta_2} \operatorname{sen}\theta\cos\theta - \frac{\partial^2 F}{\partial \zeta_2^2}\cos^2\theta\right) \frac{r\,dr}{\sqrt{z^2 - r^2}}$$

e mediante integrazione per parti rispetto ad r

$$\int_0^z \left(\frac{\partial F}{\partial \zeta_1} i \cos\theta + \frac{\partial F}{\partial \zeta_2} i \operatorname{sen}\theta\right) \frac{dr}{\sqrt{z^2 - r^2}}$$

$$= \left[\left(\frac{\partial F}{\partial \zeta_1} i \cos\theta + \frac{\partial F}{\partial \zeta_2} i \operatorname{sen}\theta\right) \operatorname{arco\,sen}\frac{r}{z}\right]_0^z$$

$$- \int_0^z \left(\frac{\partial^2 F}{\partial \zeta_1^2}\cos^2\theta - 2\frac{\partial^2 F}{\partial \zeta_1 \partial \zeta_2} \operatorname{sen}\theta\cos\theta - \frac{\partial^2 F}{\partial \zeta_2^2}\operatorname{sen}^2\theta\right) \operatorname{arco\,sen}\frac{r}{z}\, dz,$$

onde

$$\frac{z}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\theta \frac{d}{dz}\int_0^z \left(\frac{\partial F}{\partial \zeta_1} i \cos\theta + \frac{\partial F}{\partial \zeta_2} i \operatorname{sen}\theta\right) \frac{dr}{\sqrt{z^2 - r^2}}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^z \left(-\frac{\partial^2 F}{\partial \zeta_1^2} \operatorname{sen}^2\theta - 2\frac{\partial^2 F}{\partial \zeta_1 \partial \zeta_2} \operatorname{sen}\theta\cos\theta - \frac{\partial^2 F}{\partial \zeta_2^2}\cos^2\theta\right) \frac{r\,dr}{\sqrt{z^2 - r^2}} ;$$

quindi

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^z \left(-\frac{\partial^2 F}{\partial \zeta_1^2} - \frac{\partial^2 F}{\partial \zeta_2^2}\right) \frac{r\,dr}{\sqrt{z^2 - r^2}} .$$

Ora

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^z \left(\frac{\partial^2 F}{\partial \zeta_1^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial \zeta_2^2}\right) \frac{r\,dr}{\sqrt{z^2 - r^2}} , \tag{10}$$

dunque

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0. \tag{11}$$

Analogamente ponendo

$$\varphi(x, y, z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^z \Phi(x + ir\cos\theta, y + ir\,\mathrm{sen}\,\theta)\frac{r\,dr}{\sqrt{z^2 - r^2}}, \tag{8'}$$

avremo

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z} = \Phi(x, y) + \frac{z}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^z \left(\frac{\partial\Phi}{\partial\zeta_1} i\cos\theta + \frac{\partial\Phi}{\partial\zeta_2} i\,\mathrm{sen}\,\theta\right)\frac{dr}{\sqrt{z^2 - r^2}}, \tag{9'}$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0. \tag{11'}$$

Dalla (A′) segue

$$V(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial z} + \varphi$$

quindi

$$\Delta^2 V = 0$$

e a cagione delle (9) e (8′)

$$V(x, y, 0) = \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{z=0} + \varphi_{z=0} = F(x, y).$$

Dalle (10) e (9′) si ha poi

$$\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)_{z=0} = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right)_{z=0} + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)_{z=0} = \Phi(x, y).$$

È facile finalmente riconoscere che V è reale. Infatti dalla (A′) segue che mutando θ in $\theta + \pi$, V non deve mutare, e questo cambiamento equivale a mutare, nella (A′) stessa, i in $-i$.

4. Procediamo per i potenziali simmetrici in modo analogo a quello che abbiamo tenuto precedentemente nel caso dei potenziali generali. Chiamiamo m_1 la massa distribuita nell'anello secondo il teorema 3 b, ed m_1' la massa equivalente distribuita nei punti immaginarii dell'asse z. Il potenziale sopra m_1 di un sistema di masse m distribuite simmetricamente rispetto all'asse z, sarà eguale al potenziale di m sopra m_1'.

Denotiamo con $V(r, z)$ la funzione potenziale della massa m. Il potenziale di m sopra m_1 sarà

$$2\pi b\, V(b, 0)$$

ed il potenziale sopra m'_1 si otterrà prolungando i valori di $V(r, z)$ per valori immaginarii di z, ed avremo

$$-\int_{-b}^{b} V(0, iz) \frac{2ib}{\sqrt{b^2 - z^2}} i\,dz ;$$

quindi eguagliando questi due valori del potenziale risulterà

$$V(b, 0) = \frac{1}{\pi} \int_{-b}^{b} V(0, iz) \frac{dz}{\sqrt{b^2 - z^2}} ,$$

da cui si deduce immediatamente

$$V(r, z) = \frac{1}{\pi} \int_{-r}^{r} V(0, z + is) \frac{ds}{\sqrt{r^2 - s^2}} . \tag{12}$$

Separando in $V(0, z + is)$ la parte reale dalla parte immaginaria, si otterrà

$$V(0, z + is) = v(z, s) + iw(z, s) = f(z + is)$$

d'onde

$$V(r, z) = \frac{2}{\pi} \int_0^r v(z, s) \frac{ds}{\sqrt{r^2 - s^2}} . \tag{B}$$

Questa formula dà una relazione fra una funzione potenziale simmetrica $V(r, z)$ e la parte reale della funzione di variabile complessa che è reale sull'asse reale z ed assume su questo gli stessi valori di $V(r, z)$ per $r = 0$. La formula precedente si può invertire e si otterrà

$$v(z, s) = \frac{d}{dr} \int_0^r \frac{V(t, z)}{\sqrt{r^2 - t^2}} t\,dt . \tag{B$_1$}$$

Passiamo a considerare la funzione associata alla funzione $v(r, z)$ e cerchiamo di esprimerla mediante la funzione di variabile complessa $f(z + is)$. A tal fine immaginiamo due dischi omogenei di densità $-K$ e K e di raggio b normali all'asse z i cui centri sono sopra questo asse ed hanno le coordinate z e $z + h$. Il potenziale delle masse m sopra questi due dischi sarà dato da

$$2\pi \int_0^b K r V(r, z + h)\,dr + 2\pi \int_0^b -K r V(r, z)\,dr$$

$$= 2\pi \int_0^b K \{V(r, z + h) - V(r, z)\} r\,dr .$$

Ma tenendo presente il teorema 2 b, lo stesso potenziale potrà esprimersi ancora sotto la forma

$$\int_{-b}^{b} V(0, z+h+is)\left(-2\,iK\sqrt{b^2-s^2}\right) i\,ds$$

$$+\int_{-b}^{b} V(0, z+is)\left(2\,iK\sqrt{b^2-s^2}\right) i\,ds$$

$$= 2\int_{-b}^{b} K\{V(0, z+h+is) - V(0, z+is)\}\sqrt{b^2-s^2}\,ds,$$

onde avremo, posto $K = 1/h$,

$$\int_0^b \frac{V(r, z+h) - V(r, z)}{h}\, r\,dr = \frac{1}{\pi}\int_{-b}^{b} \frac{V(0, z+is+h) - V(0, z+is)}{h}\sqrt{b^2-s^2}\,ds\,.$$

Facendo tendere h verso zero, si otterrà

$$W(b, z) = \frac{1}{\pi}\int_{-b}^{b} \frac{\partial V(0, z+is)}{\partial z}\sqrt{b^2-s^2}\,ds,$$

in cui $W(r, z)$ denota la funzione associata alla $V(r, z)$. La formula precedente si potrà ancora scrivere con facili trasformazioni

$$W(r, z) = \frac{1}{\pi}\int_{-r}^{r} V(0, z+is)\frac{s\,ds}{\sqrt{r^2-s^2}} \tag{12'}$$

ovvero

$$W(r, z) = \frac{2}{\pi}\int_0^r w(z, s)\frac{s\,ds}{\sqrt{r^2-s^2}} \tag{C}$$

che è appunto la formula che cercavamo.

Le due formule (B) e (C) risolvono il problema: *Dati i valori di una funzione potenziale simmetrica lungo un segmento dell'asse di simmetria esterno alle masse attraenti, determinare la funzione stessa e la funzione associata in punti esterni all'asse appartenenti ad un cilindro circolare retto (avente per asse il segmento dato) entro il quale non si trovano masse attraenti.* Basterà perciò prolungare i valori dati della funzione potenziale simmetrica per valori complessi dell'argomento; quindi applicare le formule (B) e (C).

V.

SULLA TEORIA DEI MOVIMENTI DEL POLO TERRESTRE

«Astronomische Nachrichten», vol. 138 (1895), col. 33–52.

I.

1. Immaginiamo un corpo i cui assi principali centrali d'inerzia siano ξ, η, ζ, e supponiamo che, senza che se ne alteri la forma e la distribuzione di densità, abbia luogo nell'interno di esso o alla sua superficie, sotto l'azione di forze interne, un moto stazionario di una parte della materia che lo costituisce. Per esempio, onde fissare le idee e per maggior semplicità, supponiamo

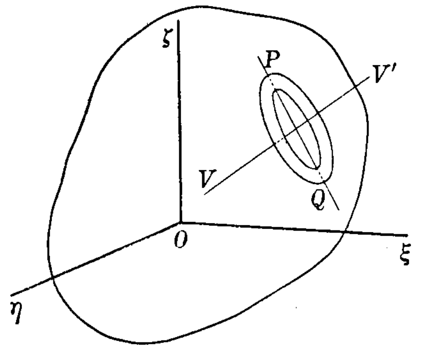


Fig. A.

che il corpo sia omogeneo e, per l'effetto di forze interne, un toro di rivoluzione PQ (fig. A) interno al corpo, abbia relativamente al corpo stesso, un moto uniforme di rotazione attorno al proprio asse V V', mentre tutto il resto del corpo conservi la propria rigidità. Né il baricentro del corpo, né i suoi assi d'inerzia né i momenti principali d'inerzia A, B, C varieranno.

Le componenti secondo gli assi ξ, η, ζ delle coppie di quantità di moto dovuta ai movimenti stazionarii saranno tre costanti M_1, M_2, M_3.

Se poi il sistema avrà un moto di rotazione attorno al proprio baricentro O e le componenti della velocità angolare nelle direzioni degli assi ξ, η, ζ saranno p, q, r, le componenti della coppia totale di quantità di moto nelle medesime direzioni risulteranno

$$Ap + M_1 \quad , \quad Bq + M_2 \quad , \quad Cr + M_3.$$

Supponiamo che il sistema sia sottratto all'azione di forze esterne: allora la coppia totale di quantità di moto dovrà esser costante in grandezza e direzione. Prendiamo come asse fisso z l'asse di questa coppia, e gli assi fissi

x, y nel piano invariabile e rappresentiamo con la seguente tabella i coseni di direzione delle due terne di assi ξ, η, ζ e x, y, z

	x, y, z
ξ	$\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$
η	$\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$
ζ	$\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$

Avremo allora i tre integrali delle aree espressi dalle equazioni seguenti:

$$(1) \qquad \begin{cases} (Ap + M_1)\,\alpha_1 + (Bq + M_2)\,\alpha_2 + (Cr + M_3)\,\alpha_3 = 0 \\ (Ap + M_1)\,\beta_1 + (Bq + M_2)\,\beta_2 + (Cr + M_3)\,\beta_3 = 0 \\ (Ap + M_1)\,\gamma_1 + (Bq + M_2)\,\gamma_2 + (Cr + M_3)\,\gamma_3 = K \end{cases}$$

denotando con K la grandezza costante della coppia di quantità di moto.

Derivando le precedenti equazioni si otterrà

$$(2) \qquad \begin{cases} A\dfrac{dp}{dt}\alpha_1 + B\dfrac{dq}{dt}\alpha_2 + C\dfrac{dr}{dt}\alpha_3 \\ \quad + (Ap + M_1)\dfrac{d\alpha_1}{dt} + (Bq + M_2)\dfrac{d\alpha_2}{dt} + (Cr + M_3)\dfrac{d\alpha_3}{dt} = 0 \\ A\dfrac{dp}{dt}\beta_1 + B\dfrac{dq}{dt}\beta_2 + C\dfrac{dr}{dt}\beta_3 \\ \quad + (Ap + M_1)\dfrac{d\beta_1}{dt} + (Bq + M_2)\dfrac{d\beta_2}{dt} + (Cr + M_3)\dfrac{d\beta_3}{dt} = 0 \\ A\dfrac{dp}{dt}\gamma_1 + B\dfrac{dq}{dt}\gamma_2 + C\dfrac{dr}{dt}\gamma_3 \\ \quad + (Ap + M_1)\dfrac{d\gamma_1}{dt} + (Bq + M_2)\dfrac{d\gamma_2}{dt} + (Cr + M_3)\dfrac{d\gamma_3}{dt} = 0. \end{cases}$$

Facciamo uso delle formule del Poisson

$$(3) \qquad \begin{cases} \dfrac{d\alpha_1}{dt} = \alpha_2 r - \alpha_3 q \;, & \dfrac{d\alpha_2}{dt} = \alpha_3 p - \alpha_1 r \;, & \dfrac{d\alpha_3}{dt} = \alpha_1 q - \alpha_2 p \;, \\ \dfrac{d\beta_1}{dt} = \beta_2 r - \beta_3 q \;, & \dfrac{d\beta_2}{dt} = \beta_3 p - \beta_1 r \;, & \dfrac{d\beta_3}{dt} = \beta_1 q - \beta_2 p \;, \\ \dfrac{d\gamma_1}{dt} = \gamma_2 r - \gamma_3 q \;, & \dfrac{d\gamma_2}{dt} = \gamma_3 p - \gamma_1 r \;, & \dfrac{d\gamma_3}{dt} = \gamma_1 q - \gamma_2 p \;, \end{cases}$$

e poniamo

$$A\frac{dp}{dt} + (Cr + M_3)\,q - (Bq + M_2)\,r = L$$

$$B\frac{dq}{dt} + (Ap + M_1)\,r - (Cr + M_3)\,p = M$$

$$C\frac{dr}{dt} + (Bq + M_2)\,p - (Ap + M_1)\,q = N;$$

allora le (2) si scriveranno

$$L\alpha_1 + M\alpha_2 + N\alpha_3 = 0$$
$$L\beta_1 + M\beta_2 + N\beta_3 = 0$$
$$L\gamma_1 + M\gamma_2 + N\gamma_3 = 0$$

da cui seguono le equazioni

$$L = M = N = 0$$

ossia

$$(4) \qquad \begin{cases} A\dfrac{dp}{dt} + (C - B)\,qr + M_3\,q - M_2\,r = 0 \\ B\dfrac{dq}{dt} + (A - C)\,rp + M_1\,r - M_3\,p = 0 \\ C\dfrac{dr}{dt} + (B - A)\,pq + M_2\,p - M_1\,q = 0 \end{cases}$$

equazioni analoghe a quelle di EULERO.

2. Queste equazioni si integrano senza difficoltà. Moltiplicandole infatti per p, q, r e sommando otteniamo l'integrale

$$(5) \qquad 1/2\,(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2) = h = \text{cost}.$$

Moltiplicandole per $Ap + M_1$, $Bq + M_2$, $Cr + M_3$, e sommando abbiamo l'altro integrale

$$(6) \qquad A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2 + 2\,ApM_1 + 2\,BqM_2 + 2\,CrM_3 = K_1 = \text{cost}.$$

Questo integrale poteva evidentemente anche dedursi dagli integrali delle aree.

Ciò premesso risolvendo le equazioni precedenti rispetto a q e r, e sostituendo i valori ottenuti nella prima delle equazioni (4) otterremo

$$(7) \qquad dt = I_1(p)\,dp\,.$$

In modo analogo possono aversi le equazioni

$$(7') \qquad dt = I_2(q)\,dq$$

$$(7'') \qquad dt = I_3(r)\,dr$$

quindi mediante quadrature si esprimerà il tempo in funzione di p, q, r e per mezzo di inversioni si esprimeranno p, q, r in funzione del tempo.

Mostriamo che può ottenersi la soluzione completa della questione. Infatti dalle (1) segue

$$\gamma_1 = \frac{1}{K}(Ap + M_1) \quad , \quad \gamma_2 = \frac{1}{K}(Bq + M_2) \quad , \quad \gamma_3 = \frac{1}{K}(Cr + M_3).$$

Ottenuti in tal modo $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$, e posto

$$\gamma_1 = \text{sen}\,\theta\,\text{sen}\,\varphi \quad , \quad \gamma_2 = \text{sen}\,\theta\cos\varphi \quad , \quad \gamma_3 = \cos\theta\,,$$

avremo subito i due angoli di EULERO θ e φ relativi alle due terne di assi x, y, z; ξ, η, ζ. Il terzo angolo di EULERO si otterrà con una quadratura mediante la formula

$$\psi = \int \frac{p\gamma_1 + q\gamma_2}{1 - \gamma_3^2} dt.$$

Quindi si potranno avere i sei rimanenti coseni $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3$.

3. Ci possiamo ora chiedere: la precedente teoria può portare qualche sussidio allo studio della variazione delle latitudini?

Ammettiamo che nell'istante iniziale il corpo ruoti attorno ad uno dei suoi assi principali d'inerzia; per esempio intorno a ζ; avremo allora nell'istante iniziale

$$p = q = 0 \qquad r \gtrless 0,$$

onde nell'istante iniziale le (4) assumeranno la forma

$$A \frac{dp}{dt} = M_2 r$$

$$B \frac{dq}{dt} = -M_1 r$$

$$C \frac{dr}{dt} = 0,$$

il che prova che le derivate di p e q non sono nulle se M_1 e M_2 sono diverse da zero e in conseguenza l'asse principale d'inerzia ζ non sarà un asse permanente di rotazione; ma l'asse stesso tenderà a variare.

Ora certamente nell'interno ed alla superficie della terra esistono dei moti stazionarii dovuti a forze interne; i quali, anche senza alterare sensibilmente i momenti d'inerzia ed il baricentro della terra, possono dar luogo a valori diversi da zero per M_1 e M_2 e quindi alterano l'asse di rotazione. Per esempio le correnti marine possono in certo modo riguardarsi come moti stazionarii del genere di quelli considerati; e così pure i moti dei fiumi e la susseguente evaporazione dell'acqua del mare; quindi il suo congelarsi in neve sulle montagne ecc.

Per quanto è a mia cognizione, non fu fin qui esaminata l'azione (che nulla esclude sia potente) che questi moti stazionarii esercitano sulle posizioni dei poli terrestri, sui loro movimenti e in conseguenza sulle variazioni delle latitudini [1]. Gli autori che hanno trattato la questione del moto della terra hanno tenuto conto principalmente delle cause che alterano la distribuzione di materia; che variano quindi i momenti d'inerzia della terra, dipendentemente dalle azioni geologiche e dalla sua elasticità e plasticità. Ci permettiamo perciò di far qui un breve studio preliminare sul problema di meccanica rappresentato dalle equazioni (4). Le quali rappresentano sempre la legge del moto

(1) Vedi TISSERAND, *Mécanique céleste*, Vol. II, Cap. XXIX, XXX.

d'insieme del sistema, comunque siano numerosi, variamente distribuiti e complessi questi moti interni, purché stazionarii. Senza occuparci della determinazione del terzo integrale che ci porta a funzioni ellittiche, possiamo per via del tutto elementare studiare l'andamento del moto valendoci dei due integrali algebrici trovati precedentemente. Potremo disegnare la forma della traiettoria che descrive il polo di rotazione, e seguire il corpo nel suo movimento nello spazio valendoci di quei metodi coi quali POINSOT delucidò così mirabilmente lo studio dei moti di rotazione. Mostreremo come i moti interni del sistema, qualora alcuni loro elementi oltrepassassero certi limiti, sarebbero capaci, anche senza alterare la distribuzione delle masse, di produrre perfino una inversione di poli. Studieremo la distribuzione degli assi permanenti di rotazione le cui proprietà sono del tutto alterate dalle esistenze dei moti interni.

In un ultimo paragrafo esamineremo infine un nuovo caso. I moti interni terrestri, anche ammesso che conservino inalterata la distribuzione di materia, possono in talune epoche rallentarsi, in altre accelerarsi; e anche, mentre alcuni si rallentano, altri possono accelerarsi. La modificazione che tale variabilità apporta alle formule consiste nel supporre fin da principio M_1, M_2, M_3 variabili anziché costanti, pur restando costanti i momenti e gli assi d'inerzia ed il baricentro del corpo. Nell'ultimo paragrafo viene appunto studiato questo caso. Il problema non può riportarsi con eguale facilità alle quadrature; ma con un processo di approssimazioni successive può ottenersi, mediante serie rapidamente convergenti, la soluzione, sia determinando p, q, r mediante M_1, M_2, M_3, sia determinando quest'ultime dalle prime. Cioè supponendo nota la legge di variazione del polo possono determinarsi gli elementi caratteristici dei moti interni.

Facciamo per ultimo osservare che in uno studio ulteriore esamineremo le perturbazioni che la plasticità, ossia l'attitudine della terra ad adattarsi al suo asse di rotazione, produce nel moto dei poli indotto da movimenti interni, seguendo in questo studio le ipotesi e le ricerche svolte dal prof. SCHIAPPARELLI nella sua classica Memoria presentata all'osservatorio di Pulkova nel 1889, in occasione della sua festa semisecolare.

II.

1. La integrazione successiva delle equazioni (4) e (3) conduce ad esprimere p, q, r ed i nove coseni come funzioni uniformi del tempo, sotto una forma che è notevolmente diversa da quella trovata da JACOBI nel caso del problema di EULERO. Noi però prescinderemo da questa soluzione analitica e studieremo l'andamento del moto con procedimenti geometrici elementari, i quali possono fornirci una nozione completa e chiara del moto stesso.

Cominceremo perciò dal proporci la risoluzione dei seguenti problemi:

1° Determinare tutte le possibili posizioni che l'asse istantaneo di rotazione può assumere relativamente al sistema mobile.

2° Determinare la velocità angolare di rotazione del sistema corrispondente ad una data posizione dell'asse istantaneo.

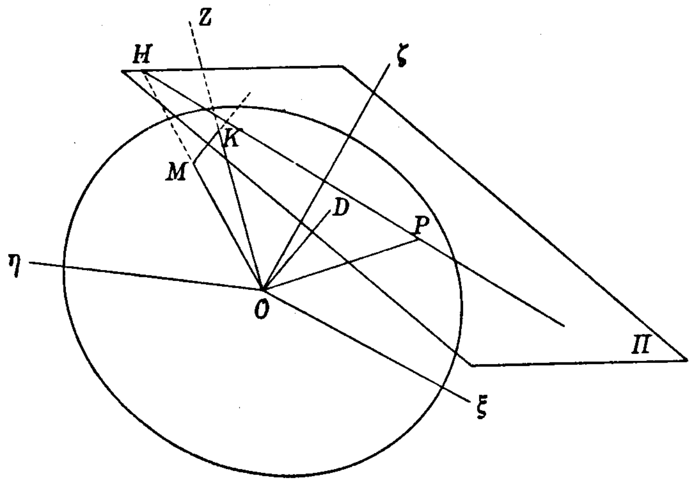


Fig. B.

A tal fine consideriamo l'ellissoide centrale d'inerzia del corpo la cui equazione sarà

$$A\xi^2 + B\eta^2 + Cz^2 = 1 \,. \tag{8}$$

Invece di seguire il moto dell'asse istantaneo di rotazione relativamente al corpo mobile, seguiamo sull'ellissoide il moto della sua intersezione col detto asse. Questa intersezione, che denoteremo con P, si dirà il polo; le sue coordinate si indicheranno con ξ, η, ζ; il luogo dei poli sull'ellissoide si chiamerà polodia. Posto

$$OP = q \;, \quad \text{e} \quad \omega = \sqrt{p^2 + q^2 + q^2} \,,$$

avremo

$$\xi = \rho \frac{p}{\omega} \quad , \quad \eta = \rho \frac{q}{\omega} \quad , \quad \zeta = \rho \frac{r}{\omega} \tag{9}$$

onde per le (5) e (8)

$$\frac{\rho^2}{\omega^2} 2\,h = 1$$

cioè

$$\omega = \rho \sqrt{2\,h} \,.$$

La velocità angolare di rotazione è quindi proporzionale al raggio vettore OP. Questa proposizione fornisce la soluzione della seconda questione propostaci.

Le (9) possono scriversi

$$p = \xi \sqrt{2\,h} \quad , \quad q = \eta \sqrt{2\,h} \quad , \quad r = \zeta \sqrt{2\,h}$$

onde, sostituendo nella (6), otterremo

$$(10)\qquad A^2\xi^2 + B^2\eta^2 + C^2\zeta^2 + \frac{2}{\sqrt{2h}}(AM_1\xi + BM_2\eta + CM_3\zeta) = \frac{K_1}{2h}\,.$$

Le equazioni (8) e (10) sono per conseguenza quelle della polodia.
L'equazione precedente può scriversi, indicando con K una costante:

$$A^2\left(\xi + \frac{M_1}{A\sqrt{2h}}\right)^2 + B^2\left(\eta + \frac{M_2}{B\sqrt{2h}}\right)^2 + C^2\left(\zeta + \frac{M_3}{C\sqrt{2h}}\right)^2 = \frac{K^2}{2h}\,.$$

Dunque la polodia è la intersezione dell'ellissoide d'inerzia coll'ellissoide

$$A^2\xi^2 + B^2\eta^2 + C^2\zeta^2 = \frac{K^2}{2h}$$

trasportato parallelamente a se stesso in modo che il centro venga nel punto di coordinate

$$-\frac{M_1}{A\sqrt{2h}}\quad,\quad -\frac{M_2}{B\sqrt{2h}}\quad,\quad -\frac{M_3}{C\sqrt{2h}}\,.$$

La prima questione propostaci resta dunque risoluta.

2. POISSON ha potuto dare una immagine semplice dei moti di EULERO, poiché in questi moti il piano tangente all'ellissoide d'inerzia lungo la polodia è parallelo a quello invariabile e si conserva fisso. Vediamo quali proprietà analoghe si presentano nel nostro caso.

Il piano polare, cioè il piano π tangente all'ellissoide d'inerzia nel polo, ha per equazione rispetto agli assi ξ, η, ζ

$$(11)\qquad Ap\,\xi + Bq\,\eta + Cr\,\zeta = \sqrt{2h}\,.$$

Conduciamo (fig. B) l'asse OK della coppia totale di quantità di moto che sarà un segmento fisso nello spazio; ed il segmento OM avente per proiezioni su ξ, η, ζ rispettivamente M_1, M_2, M_3. Chiameremo questo segmento, che è fisso nell'interno del corpo, asse dei moti interni.

Le coordinate dei punti M e K sono rispettivamente:

$$M_1, M_2, M_3$$

$$Ap + M_1\quad,\quad Bq + M_2\quad,\quad Cr + M_3\,.$$

Quindi il piano polare è sempre perpendicolare alla congiungente i punti estremi dell'asse dei moti interni e dell'asse della coppia di quantità di moto.

La distanza MK è data da

$$\sqrt{A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2}$$

mentre la distanza OD dell'origine dal piano polare è

$$\frac{\sqrt{2h}}{\sqrt{A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2}}\,;$$

per conseguenza la distanza del baricentro dal piano polare varia in ragione inversa della distanza fra gli estremi dell'asse dei moti interni e di quello della coppia di quantità di moto.

L'equazione del piano polare riferito agli assi fissi x, y, z avrà la forma

$$(Ap\,\alpha_1 + Bq\,\alpha_2 + Cr\,\alpha_3)\,x + (Ap\,\beta_1 + Bq\,\beta_2 + Cr\,\beta_3)\,y$$
$$+ (Ap\,\gamma_1 + Bq\,\gamma_2 + Cr\,\gamma_3)\,z = \sqrt{2h}$$

ovvero per le (1)

$$-(M_1\,\alpha_1 + M_2\,\alpha_2 + M_3\,\alpha_3)\,x - (M_1\,\beta_1 + M_2\,\beta_2 + M_3\,\beta_3)\,y$$
$$+ (K - M_1\,\gamma_1 - M_2\,\gamma_2 - M_3\,\gamma_3)\,z = \sqrt{2h}\,.$$

La sua equazione al tempo $t + dt$ sarà

$$\left.\begin{array}{c} -(M_1\,\alpha_1 + M_2\,\alpha_2 + M_3\,\alpha_3)\,x - (M_1\,\beta_1 + M_2\,\beta_2 + M_3\,\beta_3)\,y \\ + (K - M_1\,\gamma_1 - M_2\,\gamma_2 - M_3\,\gamma_3)\,z \\ -(M_1\,d\alpha_1 + M_2\,d\alpha_2 + M_3\,d\alpha_3)\,x - (M_1\,d\beta_1 + M_2\,d\beta_2 \\ + M_3\,d\beta_3)\,y - (M_1\,d\gamma_1 + M_2\,d\gamma_2 + M_3\,d\gamma_3)\,z \end{array}\right\} = \sqrt{2h}$$

ossia la intersezione del piano polare al tempo $t + dt$, col piano polare al tempo t, apparterrà al piano

$$(M_1\,d\alpha_1 + M_2\,d\alpha_2 + M_3\,d\alpha_3)\,x + (M_1\,d\beta_1 + M_2\,d\beta_2 + M_3\,d\beta_3)\,y$$
$$+ (M_1\,d\gamma_1 + M_2\,d\gamma_2 + M_3\,d\gamma_3)\,z = 0\,.$$

Dividendo per dt e applicando le formule (3) l'equazione di questo piano diverrà

$$\begin{vmatrix} M_1, M_2, M_3 \\ \alpha_1\;, \alpha_2\;, \alpha_3 \\ p\;\;, q\;\;, r \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} M_1, M_2, M_3 \\ \beta_1\;, \beta_2\;, \beta_3 \\ p\;\;, q\;\;, r \end{vmatrix} y + \begin{vmatrix} M_1, M_2, M_3 \\ \gamma_1\;, \gamma_2\;, \gamma_3 \\ p\;\;, q\;\;, r \end{vmatrix} z = 0$$

ovvero

$$\begin{vmatrix} \Sigma\alpha_1\,x\;, & \Sigma\alpha_2\,x\;, & \Sigma\alpha_3\,x \\ p\;, & q\;, & r \\ M_1\;, & M_2\;, & M_3 \end{vmatrix} = 0$$

in cui il simbolo sommatorio indica la somma del termine scritto con altri due che si ottengono da quello mutando α in β e in γ, e contemporaneamente x in y e in z. Dunque, riferendoci agli assi ξ, η, ζ l'equazione del piano sarà

$$\begin{vmatrix} \xi\;, & \eta\;, & \zeta \\ p\;, & q\;, & r \\ M_1, & M_2, & M_3 \end{vmatrix} = 0\,. \tag{12}$$

Esso è dunque il piano POM. Ora la retta PH secondo cui si tagliano i piani polari corrispondenti ai tempi $t + dt$ e t può interpretarsi come l'asse istantaneo intorno a cui ruota nell'istante t il piano polare. Quindi: il piano polare ruota in ogni istante attorno alla sua intersezione col piano che contiene il polo e l'asse dei moti interni.

Per ciascun punto della polodia tiriamo la retta che rappresenta l'asse istantaneo di rotazione del piano polare corrispondente. Il luogo di queste rette sarà una superficie tangente all'ellissoide d'inerzia lungo la polodia e ad essa collegata invariabilmente, che potrà chiamarsi la rigata assiale. Il moto del sistema avviene dunque in modo che l'ellissoide d'inerzia rotola sul piano polare, mentre questo ruota in ciascun istante attorno alla generatrice secondo cui incontra la rigata assiale.

Per ottenere le equazioni della rigata assiale, basterà eliminare p, q, r fra le quattro equazioni (5) (6) (11) (12).

3. Poniamo nelle equazioni (4)

$$A = \frac{1}{a} \quad , \quad B = \frac{1}{b} \quad , \quad C = \frac{1}{c};$$

esse diverranno

$$\frac{1}{a}\frac{dp}{dt} + \left(\frac{1}{c} - \frac{1}{b}\right)qr + M_3 q - M_2 r = 0$$

$$\frac{1}{b}\frac{dq}{dt} + \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{c}\right)rp + M_1 r - M_3 p = 0$$

$$\frac{1}{c}\frac{dr}{dt} + \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right)pq + M_2 p - M_1 q = 0$$

e gl'integrali (5) e (6) prenderanno la forma

$$\frac{p^2}{a} + \frac{q^2}{b} + \frac{r^2}{c} = 2h$$

$$\left(\frac{p}{a} + M_1\right)^2 + \left(\frac{q}{b} + M_2\right)^2 + \left(\frac{r}{c} + M_3\right)^2 = 1,$$

in cui si è supposto di avere scelte le unità in modo da rendere eguale ad 1 la costante K. Componiamo il moto del sistema con una rotazione uniforme ω attorno all'asse OK.

Le componenti della rotazione diverranno

$$p' = p + \omega\left(\frac{p}{a} + M_1\right) = p\,\frac{a+\omega}{a} + \omega M_1$$

$$q' = q + \omega\left(\frac{q}{b} + M_2\right) = q\,\frac{b+\omega}{b} + \omega M_2$$

$$r' = r + \omega\left(\frac{r}{c} + M_3\right) = r\,\frac{c+\omega}{c} + \omega M_3,$$

donde

$$\left\{\begin{aligned} p &= \frac{p'\,a}{a+\omega} - \frac{M_1\,\omega a}{a+\omega} \\ q &= \frac{q'\,b}{b+\omega} - \frac{M_2\,\omega b}{b+\omega} \\ r &= \frac{r'\,c}{c+\omega} - \frac{M_3\,\omega c}{c+\omega}\,. \end{aligned}\right.$$

Poniamo

$$a+\omega = a' \quad , \quad b+\omega = b' \quad , \quad c+\omega = c'\,;$$

$$M_1 \frac{a}{a+\omega} = M'_1 \quad , \quad M_2 \frac{b}{b+\omega} = M'_2 \quad , \quad M_3 \frac{c}{c+\omega} M'_3\,;$$

avremo allora

$$\left\{\begin{aligned} \frac{p'}{a'} + M'_1 &= \frac{p}{a} + M_1 \\ \frac{q'}{b'} + M'_2 &= \frac{q}{b} + M_2 \\ \frac{r'}{c'} + M'_3 &= \frac{r}{c} + M_3\,, \end{aligned}\right.$$

da cui segue

$$\left\{\begin{aligned} \frac{1}{a'}\frac{dp'}{dt} + \left(\frac{1}{c'} - \frac{1}{b'}\right) q'\,r' + M'_3\,q' - M'_2\,r' &= 0 \\ \frac{1}{b'}\frac{dq'}{dt} + \left(\frac{1}{a'} - \frac{1}{c'}\right) r'\,p' + M'_1\,r' - M'_3\,p' &= 0 \\ \frac{1}{c'}\frac{dr'}{dt} + \left(\frac{1}{b'} - \frac{1}{a'}\right) p'\,q' + M'_2\,p' - M'_1\,q' &= 0 \end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned} \left(\frac{p'}{a'} + M'_1\right)^2 + \left(\frac{q'}{b'} + M'_2\right)^2 + \left(\frac{r'}{c'} + M'_3\right)^2 &= 1 \\ \frac{p'^2}{a'} + \frac{q'^2}{b'} + \frac{r'^2}{c'} &= 2\,h' \end{aligned}\right.$$

essendo

$$h' = h + \frac{2}{\omega}\left(1 - \frac{M_1^2\,a}{a+\omega} - \frac{M_2^2\,b}{b+\omega} - \frac{M_3^2\,c}{c+\omega}\right).$$

Dunque, allorché il moto che noi studiamo si compone con una rotazione uniforme attorno all'asse della coppia di quantità di moto, la natura del moto stesso non si altera; solo si alterano le costanti che lo caratterizzano.

Questa proprietà è comune ai moti che noi studiamo ed a quelli alla POINSOT. Per questi ultimi le formule di JACOBI già la esprimevano analiticamente e ne mostravano l'importanza; ma essa venne posta in luce solo in appresso dal SYLVESTER e da questi, dal DARBOUX, dall'HALPHEN e da altri geometri venne largamente applicata.

4. Nei moti che noi studiamo è importante la ricerca di quelle rotazioni che possono essere permanenti. Siccome deve aversi $Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = \text{cost.}$, così affinché un asse sia un asse permanente di rotazione è necessario che siano costanti p, q, r ovvero siano

$$\frac{dp}{dt} = \frac{dq}{dt} = \frac{dr}{dt} = 0$$

e quindi per le (4)

$$(13) \qquad \begin{cases} (C - B)\,qr + M_3 q - M_2 r = 0 \\ (A - C)\,rp + M_1 r - M_3 p = 0 \\ (B - A)\,pq + M_2 p - M_1 q = 0 \end{cases}$$

donde

$$M_1 (C - B)\,qr + M_2 (A - C)\,rp + M_3 (B - A)\,pq = 0\,.$$

Dunque tutti gli assi permanenti di rotazione apparterranno al cono di secondo grado

$$(14) \qquad M_1 (C - B)\,\eta\zeta + M_2 (A - C)\,\zeta\xi + M_3 (B - A)\,\xi\eta = 0\,.$$

Supponiamo A, B, C diversi fra loro e M_1, M_2, M_3 diversi da zero; allora inversamente ogni generatrice di questo cono sarà un asse permanente di rotazione, purché il sistema ruoti con una certa velocità angolare attorno all'asse stesso.

Per avere la velocità angolare ω corrispondente a ciascuno dei detti assi, affinché esso si conservi un asse permanente di rotazione, chiamiamo α, β, γ i coseni di direzione dell'asse stesso.

In virtù delle (13) avremo

$$\omega = \frac{M_2\gamma - M_3\beta}{(C - B)\,\beta\gamma} = \frac{M_3\alpha - M_1\gamma}{(A - C)\,\gamma\alpha} = \frac{M_1\beta - M_2\alpha}{(B - A)\,\alpha\beta}\,.$$

L'asse dei moti interni appartiene al cono (14) e alla sua direzione corrisponde una velocità angolare $\omega = 0$. Sommando membro a membro le (13) abbiamo

$$(C - B)\,qr + (A - C)\,rp + (B - A)\,pq$$
$$+ (M_2 - M_3)\,p + (M_3 - M_1)\,q + (M_1 - M_2)\,r = 0\,.$$

Dunque gli estremi dei segmenti che rappresentano le rotazioni permanenti sono le intersezioni del cono (14) colla quadrica

$$(15) \qquad (C - B)\,\eta\zeta + (A - C)\,\zeta\xi + (B - A)\,\xi\eta$$
$$+ (M_2 - M_3)\,\xi + (M_3 - M_1)\,\eta + (M_1 - M_2)\,\zeta = 0\,.$$

Consideriamo ora dei casi particolari:

Supponiamo A, B, C diversi fra loro e,

1° $M_3 = 0$. Le rotazioni saranno permanenti quando

$$r = 0 , \qquad \frac{M_1}{p} + A = \frac{M_2}{q} + B ,$$

oppure

$$r \text{ qualunque} , \qquad p = -\frac{M_1}{A - C} , \qquad q = \frac{M_2}{C - B} ;$$

2° $M_1 = M_2 = 0$. Le rotazioni saranno permanenti quando

$$p = 0 \quad , \quad q = 0 , \qquad r \text{ qualunque,}$$

oppure

$$p = 0 \quad , \quad q \text{ qualunque} , \qquad r = \frac{M_3}{C - B} ,$$

oppure

$$p \text{ qualunque} , \qquad q = 0 \quad , \quad r = \frac{M_3}{A - C} .$$

3° $M_1 = M_2 = M_3 = 0$. Le rotazioni saranno permanenti quando l'asse di rotazione coinciderà con uno degli assi d'inerzia. (Caso di EULERO).

Supponiamo $A = B \gtrless C$, e

1° M_1 o M_2 o ambedue diversi da zero; allora le rotazioni saranno permanenti quando

$$p = \alpha M_1 \quad , \quad q = \alpha M_2 \quad , \quad r = \frac{\alpha M_3}{1 - \alpha (C - A)} ,$$

escluso il caso in cui sia $\alpha = \frac{1}{C - A}$. Gli assi permanenti di rotazione appartengono dunque tutti al piano che contiene l'asse ζ e l'asse dei moti interni. (Questo caso verrà studiato più particolarmente in seguito).

2° $M_1 = M_2 = 0$; allora le rotazioni saranno permanenti quando

$$p = 0 \quad , \quad q = 0 , \qquad r \text{ qualunque,}$$

oppure

$$p \text{ qualunque,} \qquad q \text{ qualunque,} \qquad r = \frac{M_3}{A - C} .$$

3° $M_1 = M_2 = M_3 = 0$. (Caso di EULERO).

Supponiamo $A = B = C$; allora la rotazione sarà permanente quando

$$\frac{p}{M_1} = \frac{q}{M_2} = \frac{r}{M_3} .$$

Sarebbe interessante lo studio delle stabilità o meno dei detti assi permanenti di rotazione; ma noi lo tralasciamo in queste considerazioni preliminari sul problema.

È facile ora riconoscere una notevole relazione che passa fra gli assi permanenti di rotazione e i punti multipli della polodia. Questi si avranno solo ove le due quadriche (8) e (10) saranno tangenti fra loro; ora i piani tangenti alle due quadriche nel polo, le cui coordinate sono

$$\frac{p}{\sqrt{2h}}, \frac{q}{\sqrt{2h}}, \frac{r}{\sqrt{2h}},$$

avranno per equazioni

$$\frac{Ap}{\sqrt{2h}}\xi + \frac{Bq}{\sqrt{2h}}\eta + \frac{Cr}{\sqrt{2h}}\zeta = 1$$

$$A(Ap + M_1)\left(\xi - \frac{p}{\sqrt{2h}}\right) + B(Bq + M_2)\left(\eta - \frac{q}{\sqrt{2h}}\right)$$

$$+ C(Cr + M_3)\left(\zeta - \frac{r}{\sqrt{2h}}\right) = \frac{K_1}{2h};$$

quindi questi due piani coincideranno quando sarà

$$\frac{p}{Ap + M_1} = \frac{q}{Bq + M_2} = \frac{r}{Cr + M_3}$$

cioè quando l'asse di rotazione coinciderà con l'asse della coppia totale di quantità di moto. Dalle equazioni precedenti seguono immediatamente le (13), per conseguenza avremo il teorema: gli assi permanenti di rotazione sono le congiungenti i punti multipli della polodia col baricentro; e se una polodia ha un punto multiplo, ivi la velocità angolare di rotazione ha la grandezza della rotazione permanente.

Riprendiamo le equazioni (4). Esse saranno soddisfatte sostituendo a $p(t), q(t), r(t)$, le funzioni $-p(T-t)$, $-q(T-t)$, $-r(T-t)$ in cui T è una costante arbitraria, e contemporaneamente sostituendo a M_1, M_2, M_3 le quantità $-M_1$, $-M_2$, $-M_3$. Questa proprietà potrà enunciarsi dicendo: i moti del sistema sono invertibili, purché si inverta l'asse dei moti interni.

Ciò premesso supponiamo che la polodia abbia un punto multiplo P_0. Se il polo giungesse a questo punto, dopo un tempo T da che è incominciato il moto, invertendo il moto stesso il polo tornerebbe al punto di partenza dopo il tempo T. Ma l'asse e la velocità di rotazione corrispondenti a P_0 sono permanenti, dunque il polo non potrebbe più muoversi da P_0. Abbiamo dunque il teorema: Se la polodia ha un punto multiplo, il polo si avvicinerà indefinitamente al punto stesso senza raggiungerlo mai.

Ciò costituisce una differenza essenziale fra i moti che hanno luogo quando la polodia non ha punti multipli e quando ne possiede. Nel primo caso la polodia sarà chiusa ed il polo tornerà al punto di partenza; nel secondo, il polo non tornerà al punto di partenza, ma tenderà indefinitamente verso il punto multiplo.

III.

1\. Il caso più interessante ad esaminarsi, per le applicazioni ai moti della terra, è quello in cui l'ellissoide d'inerzia abbia due semiassi eguali ed il terzo differente e minore dei due. Supponiamo $A = B$, e scegliamo gli assi ξ, η nel piano dell'equatore in modo che l'asse dei moti interni giaccia nel piano $\xi\zeta$; sarà $M_2 = 0$, e le equazioni della polodia diverranno

$$\left\{\begin{aligned} & A(\xi^2+\eta^2)+C\zeta^2 = 1 \\ & A^2(\xi^2+\eta^2)+C^2\zeta^2+\frac{2}{\sqrt{2h}}(AM_1\xi+CM_3\zeta) = \frac{K_1}{2h} \end{aligned}\right.$$

ovvero

$$\left\{\begin{aligned} & A(\xi^2+\eta^2)+C\zeta^2 = 1 \\ & C(C-A)\zeta^2+\frac{2}{\sqrt{2h}}(AM_1\xi+CM_3\zeta) = \left(\frac{K_1}{2h}-A\right). \end{aligned}\right.$$

Posto

$$\left\{\begin{aligned} & -\frac{CM_3}{C(C-A)\sqrt{2h}} = \xi_0 \\ & \frac{C^2M_3^2+(K-2Ah)C(C-A)}{2\sqrt{2h}\,AC(C-A)M_1} = \xi_0 \\ & \frac{AM_1}{C(C-A)\sqrt{2h}} = P \end{aligned}\right.$$

le due equazioni diverranno

$$\left\{\begin{aligned} & A(\xi^2+\eta^2)+C\zeta^2 = 1 \\ & (\zeta-\zeta_0)^2 = 2P(\xi_0-\xi). \end{aligned}\right.$$

Dunque se l'ellissoide d'inerzia è simmetrico, la polodia si proietta sul meridiano che contiene l'asse dei moti interni secondo una parabola il cui asse è normale a quello di simmetria.

Le coordinate del vertice della parabola saranno ξ_0 e ζ_0 e P ne sarà il semiparametro.

Dal precedente teorema può dedursi molto facilmente la costruzione della polodia, applicando notissime operazioni di geometria descrittiva. A tal fine scegliamo come piani di proiezione un piano parallelo all'equatore ed uno parallelo all'asse di simmetria ed a quello dei moti interni. Sul primo l'ellissoide d'inerzia si proietterà secondo un cerchio; sull'altro secondo una ellisse, ed in questo piano la polodia si proietterà secondo una parabola di cui l'asse sarà parallelo all'equatore. La polodia sarà dunque la intersezione dell'ellissoide col cilindro normale al 2° piano di proiezione e avente per base la detta parabola. È dunque facilissimo costruire la prima proiezione della polodia.

Impiegando questo procedimento abbiamo potuto disegnare diverse forme che può assumere la polodia, ed a tal fine abbiamo cambiato convenientemente la posizione del vertice ed il parametro della parabola. Le curve furono disegnate sia ammettendo che il polo parta dall'estremo dell'asse minore, sia supponendo che parta da posizioni prossime al detto estremo (vedi tavola).

2. La fig. 4 bis (cfr. tavola) corrisponde al caso in cui può avvenire il fatto della inversione dei poli; vale a dire che il polo può passare da un estremo all'altro dell'asse minore dell'ellissoide.

Perché ciò succeda, sono necessarie due condizioni:

1° che la parabola passi per le proiezioni delle estremità dell'asse minore;

2° che il suo vertice giaccia nell'interno della proiezione dell'ellissoide.

Queste condizioni si verificheranno quando sia

$$\zeta_0 = 0 \tag{16}$$

$$\xi_0 < \frac{1}{\sqrt{A}} \, . \tag{17}$$

La prima dà $M_3 = 0$; onde

$$\xi_0 = \frac{K_1 - 2\,Ah}{2\sqrt{2\,h}\,AM_1} \, .$$

Nell'istante iniziale, in cui il polo si trova ad una estremità dell'asse minore, avremo

$$p = 0 \quad , \quad q = 0 \quad , \quad r = r_0 ;$$

quindi

$$C r_0^2 = 2\,h \quad , \quad C^2 r_0^2 = K_1$$

da cui segue

$$\xi_0 = \frac{C_0 r_0^2 (C - A)}{2\sqrt{C r_0^2}\,AM_1} ;$$

dunque per la (17)

$$\frac{C r_2^0 (C - A)}{2\sqrt{C r_0^2}\,AM_1} < \frac{1}{\sqrt{A}} \, .$$

Ne segue che le condizioni necessarie e sufficienti affinché avvenga la inversione dei poli sono espresse da

$$M_1 > \frac{1}{2}\sqrt{\frac{C}{A}}\,(C - A)\,r_1 \quad , \quad M_3 = 0 \, .$$

3. Passiamo allo studio degli assi permanenti di rotazione nel caso dell'ellissoide di rivoluzione.

Supponendo $A = B$, $M_2 = 0$, le (13) diventano

$$\begin{cases} ((C - A)\, r + M_3)\, q = 0 \\ ((C - A)\, r + M_3)\, p - M_2\, r = 0 \\ M_1\, q = 0; \end{cases}$$

dunque supponendo $M_1 \gtrless 0$, avremo

$$q = 0$$

$$(C - A)\, rp + M_3 p - M_1 r = 0,$$

da cui segue che gli assi permanenti apparterranno al piano $\xi\zeta$ e il luogo dei loro estremi avrà per equazione

$$(C - A)\, \xi\zeta + M_3\, \xi - M_1\, \zeta = 0\, .$$

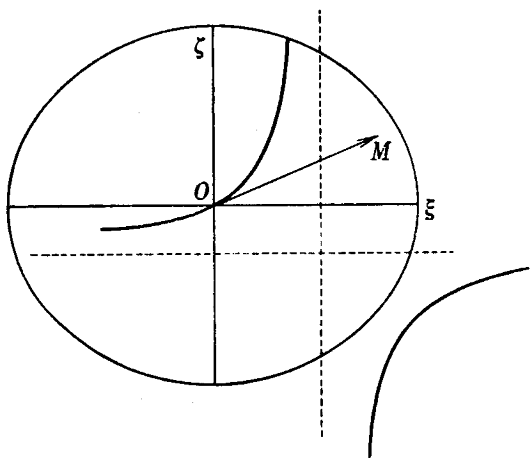


Fig. C.

Poniamo

$$\xi = \xi' - \frac{M_3}{C - A} \quad , \quad \eta = \eta' + \frac{M_1}{C - A};$$

la equazione precedente diverrà

$$\xi'\, \zeta' = - \frac{M_1\, M_3}{(C - A)^2}\, .$$

Dunque il luogo degli estremi delle rotazioni permanenti è una iperbola equilatera giacente nel piano meridiano che contiene l'asse dei moti interni, i cui asintoti sono paralleli agli assi e il cui asse transverso è $\frac{\sqrt{|M_1 M_3|}}{C - A}$. Essa passa per l'origine ed ivi è tangente (fig. C) all'asse dei moti interni.

4. Il caso più semplice che possa trattarsi è quello in cui l'ellissoide d'inerzia si riduce ad una sfera. Se $A = B = C$, le equazioni della polodia divengono

$$\begin{cases} A(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) = 1 \\ A^2(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) + \frac{2A}{\sqrt{2h}}(M_1\xi + M_2\eta + M_3\zeta) = \frac{K_1}{2h}, \end{cases}$$

ossia sarà l'intersezione della sfera d'inerzia col piano

$$\frac{2A}{\sqrt{2h}}(M_1\xi + M_2\eta + M_3\zeta) = \frac{K_1}{2h} - A.$$

Dunque la polodia sarà un circolo della sfera, il cui asse sarà quello dei moti interni.

In questo caso, le (4) divengono equazioni lineari che si integrano subito. Preso infatti come asse ξ l'asse dei moti interni, esse diverranno

$$A\frac{dp}{dt} = 0 \quad , \quad \frac{dq}{dt} + \frac{M}{A}r = 0 \quad , \quad \frac{dr}{dt} - \frac{M}{A}q = 0,$$

da cui segue

$$p = a_1 \qquad q = a_2 \cos\left(\frac{M}{A}t + a_3\right) \qquad r = a_2 \operatorname{sen}\left(\frac{M}{A}t + a_3\right),$$

in cui a_1, a_2, a_3 denotano tre costanti arbitrarie. Il polo descriverà dunque la polodia con velocità costante e il periodo di una sua rivoluzione sarà

$$\frac{2\pi A}{M}.$$

In questo caso, l'ampiezza della polodia non dipenderà dalla grandezza dell'asse dei moti interni, ma solo dalla sua direzione rispetto all'asse istantaneo iniziale di rotazione.

IV.

1. Nello stabilire le equazioni (4) analoghe a quelle di Eulero abbiamo supposto che M_1, M_2, M_3 fossero costanti; ossia che i moti interni fossero stazionarii. Nulla impedisce però di supporre che queste quantità siano variabili col tempo; allora le equazioni analoghe a quelle di EULERO (4) assumono invece la forma

$$(18) \qquad \begin{cases} A\frac{dp}{dt} + (C - B)qr + M_3 q - M_2 r + \frac{dM_1}{dt} = 0 \\ B\frac{dq}{dt} + (A - C)rp + M_1 r - M_3 p + \frac{dM_2}{dt} = 0 \\ C\frac{dr}{dt} + (B - A)pq + M_2 p - M_1 q + \frac{dM_3}{dt} = 0. \end{cases}$$

Di queste equazioni può trovarsi l'integrale

$$(Ap + M_1)^2 + (Bq + M_2)^2 + (Cr + M_3)^2 = K^2 .$$

L'altro integrale che esisteva nel caso di M_1, M_2, M_3 costanti non esiste più in questo caso; quindi il problema non può ricondursi con eguale facilità alle quadrature come nel caso in cui M_1, M_2, M_3 sono costanti.

Esaminiamo però un caso particolare che presenta interesse per l'applicazione al moto della terra. Supponiamo $A = B$; allora le (18) diventano

$$(19)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{dp}{dt} + \left[\frac{C-A}{A} r + \frac{M_3}{A}\right] q = \left(\ M_2 r - \frac{dM_1}{dt}\right)\frac{1}{A} \\ &\frac{dq}{dt} - \left[\frac{C-A}{A} r + \frac{M_3}{A}\right] p = \left(-M_1 r - \frac{dM_2}{dt}\right)\frac{1}{A} \\ &\frac{dr}{dt} = -\frac{1}{C}\frac{dM_3}{dt} + \frac{(M_1 q - M_2 p)}{C} . \end{aligned}\right.$$

2. Per integrare queste equazioni differenziali, possiamo impiegare il metodo delle approssimazioni successive. Perciò osserviamo che, se p e q fossero conosciute, in virtù della terza equazione (19) si potrebbe ottenere la r con una quadratura. Infatti si avrebbe

$$(20)\qquad r = a_1 - \frac{1}{C} M_3 + \frac{1}{C}\int (M_1 q - M_2 p)\, dt .$$

Mostriamo ora che se fosse nota la r si potrebbero senz'altro integrare le prime due equazioni (19). A tal fine si ponga

$$(21)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{C-A}{A} r + \frac{M_3}{A} = \rho \\ &\frac{1}{A}\left(\ M_2 r - \frac{dM_1}{dt}\right) = \alpha \\ &\frac{1}{A}\left(-M_1 r - \frac{dM_2}{dt}\right) = \beta ; \end{aligned}\right.$$

le (19) diverranno

$$\frac{dp}{dt} + \rho q = \alpha$$

$$\frac{dq}{dt} - \rho p = \beta .$$

Sia

$$u = \int \rho\, dt ,$$

allora

$$\frac{dp}{du} + q = \frac{\alpha}{\rho} \quad , \quad \frac{dq}{du} - p = \frac{\beta}{\rho} ;$$

quindi

$$p = C_2 \cos u - C_3 \operatorname{sen} u$$

$$q = C_2 \operatorname{sen} u + C_3 \cos u$$

$$\frac{dC_2}{dt} \cos u - \frac{dC_3}{dt} \operatorname{sen} u = \alpha$$

$$\frac{dC_2}{dt} \operatorname{sen} u + \frac{dC_3}{dt} \cos u = \beta,$$

donde

$$C_2 = \int (\alpha \cos u + \beta \operatorname{sen} u)\, dt + a_2$$

$$C_3 = -\int (\alpha \operatorname{sen} u - \beta \cos u)\, dt + a_3,$$

a_2 e a_3 denotando due costanti. Per conseguenza

$$22)\quad \left\{ \begin{aligned} p &= \left[\int (\alpha \cos u + \beta \operatorname{sen} u)\, dt + a_2\right] \cos u + \left[\int (\alpha \operatorname{sen} u - \beta \cos u)\, dt + a_3\right] \operatorname{sen} u \\ q &= \left[\int (\alpha \cos u + \beta \operatorname{sen} u)\, dt + a_2\right] \operatorname{sen} u - \left[\int (\alpha \operatorname{sen} u - \beta \cos u)\, dt + a_3\right] \cos u. \end{aligned} \right.$$

Prendiamo ora dapprima per r il valore

$$r_1 = a_1 - \frac{1}{C} M_3$$

e sostituiamo questo valore nelle (21); otterremo dalle (22) per p e q dei valori che sostituiti nella (20) ci daranno per r un nuovo valore; il quale alla sua volta sostituito nelle (21) ci darà per p e q mediante le (22) dei nuovi valori. Così di seguito procedendo potremo ottenere la soluzione con successive approssimazioni.

È facile costruire le serie che dànno la soluzione con questo mezzo. Poniamo perciò

$$r_1 = a_1 - \frac{1}{C} M_3 \quad , \quad u_1 = \int_0^t \left(r_1 \frac{C - A}{A} + \frac{M_3}{A}\right) dt\,,$$

$$\alpha_1 = \frac{1}{A}\left(M_2 r_1 - \frac{dM_1}{dt}\right) \quad , \quad \beta_1 = \frac{1}{A}\left(- M_1 r_1 - \frac{dM_2}{dt}\right)$$

$$\begin{aligned} p_1 = &\left[\int_0^t (\alpha_1 \cos u_1 + \beta_1 \operatorname{sen} u_1)\, dt + a_2\right] \cos u_1 \\ &+ \left[\int_0^t (\alpha_1 \operatorname{sen} u_1 - \beta_1 \cos u_1)\, dt + a_3\right] \operatorname{sen} u_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q_1 = &\left[\int_0^t (\alpha_1 \cos u_1 + \beta_1 \operatorname{sen} u_1)\, dt + a_2\right] \operatorname{sen} u_1 \\ &- \left[\int_0^t (\alpha_1 \operatorname{sen} u_1 - \beta_1 \cos u_1)\, dt + a_3\right] \cos u_1 . \end{aligned}$$

Poniamo quindi per $n > 1$ le formule ricorrenti seguenti

$$r_n = \frac{1}{C}\int_0^t (M_1 q_{n-1} - M_2 p_{n-1})\, dt$$

$$u_n = \frac{C-A}{A}\int_0^t r_n\, dt \quad , \quad \alpha_n = \left(\frac{1}{A}M_2 - \frac{C-A}{A}\sum_1^{n-1}{}_i\, q_{i-1}\right) r_n ,$$

$$\beta_n = \left(-\frac{1}{A}M_1 + \frac{C-A}{A}\sum_1^{n-1}{}_i\, p_{i-1}\right) r_n ,$$

$$p_n = \left\{\int_0^t \left[\alpha_n \cos\left(\sum_1^n u_i\right) + \beta_n \operatorname{sen}\left(\sum_1^n u_i\right)\right] dt\right\} \cos\left(\sum_1^n u_i\right)$$

$$+ \left\{\int_0^t \left[\alpha_n \operatorname{sen}\left(\sum_1^n u_i\right) - \beta_n \cos\left(\sum_1^n u_i\right)\right] dt\right\} \operatorname{sen}\left(\sum_1^n u_i\right)$$

$$q_n = \left\{\int_0^t \left[\alpha_n \cos\left(\sum_1^n u_i\right) + \beta_n \operatorname{sen}\left(\sum_1^n u_i\right)\right] dt\right\} \operatorname{sen}\left(\sum_1^n u_i\right)$$

$$- \left\{\int_0^t \left[\alpha_n \operatorname{sen}\left(\sum_1^n u_i\right) - \beta_n \cos\left(\sum_1^n u_i\right)\right] dt\right\} \cos\left(\sum_1^n u_i\right) ;$$

avremo che gli integrali richiesti saranno

$$p = \sum_1^\infty p_n \quad , \quad q = \sum_1^\infty q_n \quad , \quad r = \sum_1^\infty r_n .$$

È facile riconoscere che queste serie sono convergenti, almeno limitando il tempo entro un conveniente intervallo.

Se ora vogliamo limitarci all'applicazione al caso del moto della terra per un intervallo non lungo di tempo, avremo che p e q saranno piccolissimi, tanto che le serie precedenti saranno molto rapidamente convergenti, e basteranno i soli primi termini per una prima approssimazione.

3. Facciamo per ultimo osservare che, nota la legge con cui variano p, q, r (ottenuta per esempio per via empirica), le (18) ci forniscono i valori corrispondenti di M_1, M_2, M_3 in funzione del tempo. A tal fine basterà integrare le (18) supponendo p, q, r conosciute e prendendo come funzioni incognite M_1, M_2, M_3.

Le serie che ci forniscono la soluzione sono ancora più semplici di quelle precedentemente ottenute.

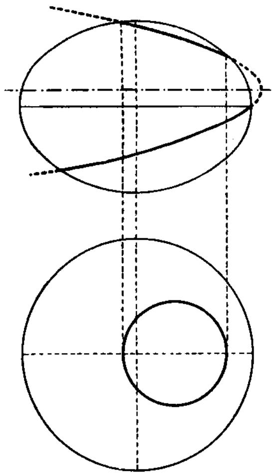


Fig. 1.

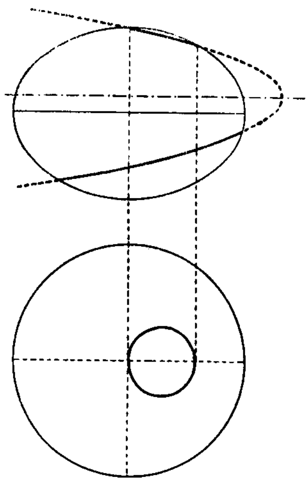


Fig. 1 bis.

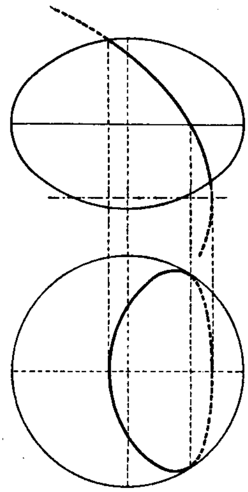


Fig. 2.

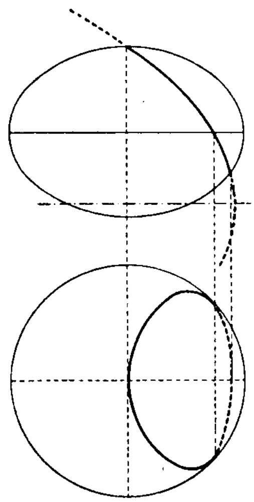


Fig. 2 bis.

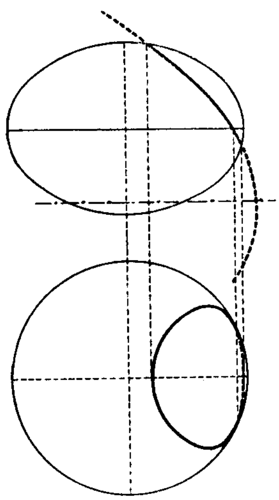


Fig. 2 ter.

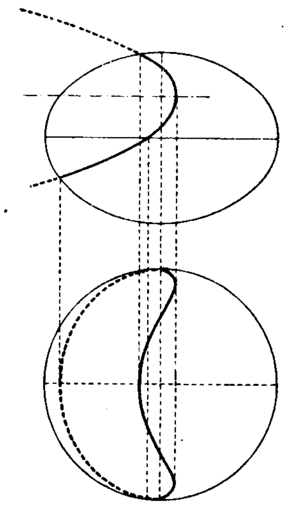


Fig. 3.

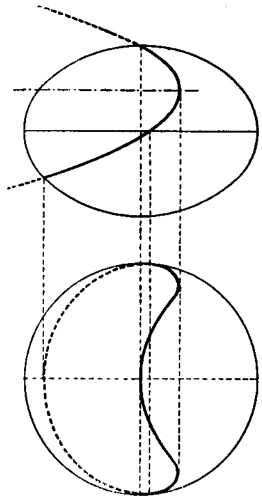


Fig. 3 bis.

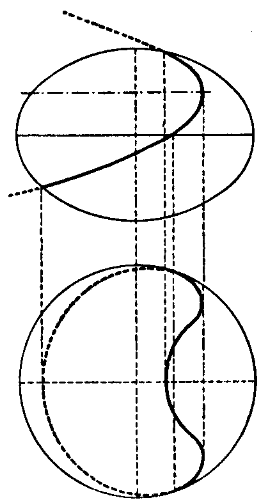


Fig. 3 ter.

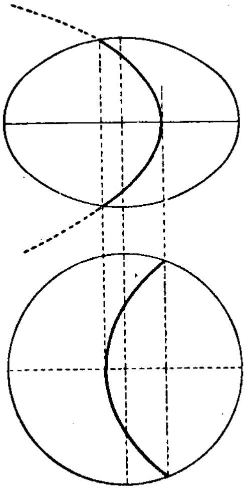


Fig. 4.

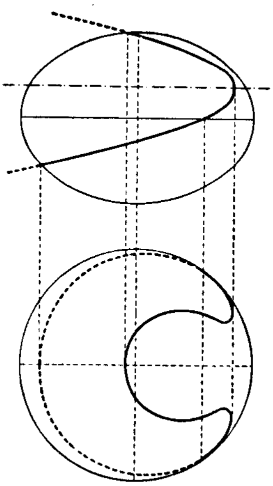


Fig. 5.

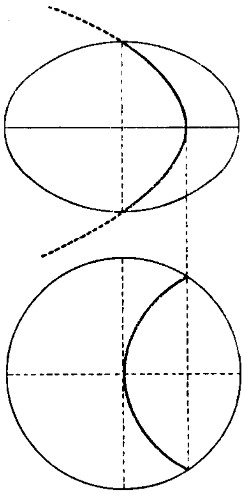


Fig. 4 bis.

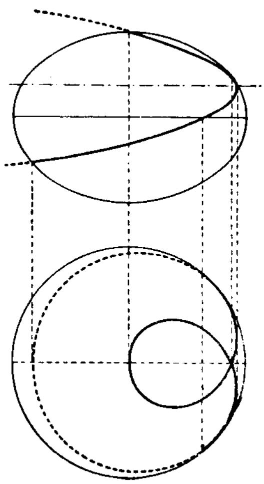


Fig. 5 bis.

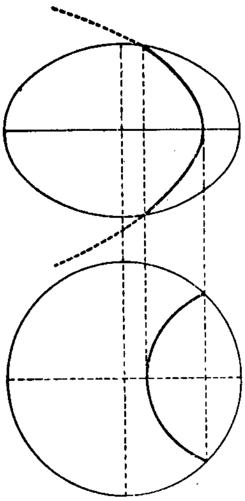


Fig. 4 ter.

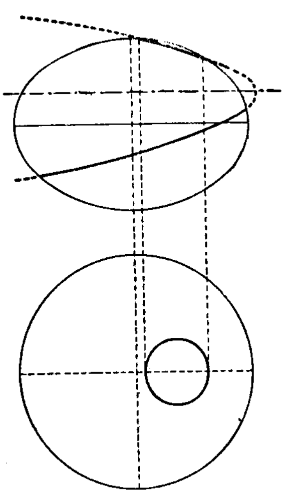


Fig. 5 ter.

Basterà infatti prendere

$$M_1^{(1)} = -\int_0^t ((C - B)\, qr + a_3 q - a_2 r)\, dt - A\,(p - p_0)$$

$$M_2^{(1)} = -\int_0^t ((A - C)\, rp + a_1 r - a_3 p)\, dt - B\,(q - q_0)$$

$$M_3^{(1)} = -\int_0^t ((B - A)\, pq + a_2 p - a_1 q)\, dt - C\,(r - r_0),$$

in cui p_0, q_0, r_0 denotano i valori iniziali di p, q, r e a_1, a_2, a_3 sono quantità costanti: quindi stabilire le formule ricorrenti

$$M_1^{(n)} = \int_0^t (M_3^{(n-1)}\, q - M_2^{(n-1)}\, r)\, dt$$

$$M_2^{(n)} = \int_0^t (M_1^{(n-1)}\, r - M_3^{(n-1)}\, p)\, dt$$

$$M_3^{(n)} = \int_0^t (M_2^{(n-1)}\, p - M_1^{(n-1)} q)\, dt$$

e prendere

$$M_1 = a_1 + \sum_1^\infty{}_n M_1^{(n)}$$

$$M_2 = a_2 + \sum_1^\infty{}_n M_2^{(n)}$$

$$M_3 = a_3 + \sum_1^\infty{}_n M_3^{(n)}.$$

Anche queste serie saranno convergenti, quando si limiti il tempo entro un intervallo conveniente.

Torino, 1 febbraio 1895.

VI.

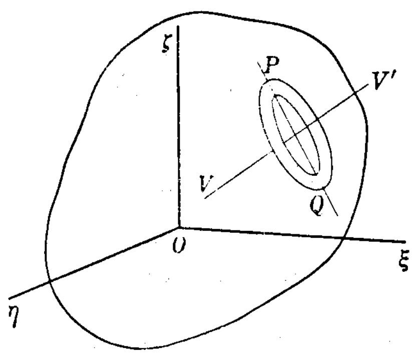
SULLA TEORIA DEI MOTI DEL POLO TERRESTRE

«Atti Acc. Sc. Torino», vol. XXX, 1894-95, pp. 301-306.

In una Nota comunicata alle «Astronomishe Nachrichten» (*) ho esposto una teoria, di cui mi permetto di presentare brevemente i principii fondamentali a codesta illustre Accademia.

Gli autori che hanno cercato la spiegazione dei cangiamenti che si osservano nelle latitudini geografiche esaminarono l'influenza che le azioni geologiche, la elasticità e la plasticità terrestre possono avere sulla rotazione della terra [1]. Mi propongo ora di considerare il problema sotto un altro punto di vista, esaminando altre cause che possono pure influire sulla rotazione stessa.

Immaginiamo un corpo i cui assi principali centrali d'inerzia siano ξ, η, ζ, e supponiamo che, senza che se ne alterino la forma e la distribuzione di densità, abbiano luogo nell'interno di esso o alla sua superficie, sotto l'azione



di forze interne, dei *moti stazionarii* di una parte della materia che lo costituisce. Per esempio, onde fissare le idee, e per semplicità, supponiamo che il corpo sia omogeneo e che per l'effetto di forze interne un toro di rivoluzione PQ interno al corpo, abbia, relativamente al corpo stesso, un moto uniforme di rotazione attorno al proprio asse VV', mentre tutto il resto del corpo conservi la propria rigidità. Né il baricentro del corpo, né i suoi assi d'inerzia, né i momenti principali d'inerzia A, B, C del corpo cangeranno.

(*) In questo volume: V, 87.

(1) Vedi TISSERAND, *Traité de Mécanique céleste*, T. II, Cap. XXIX e XXX; PORRO, *Astronomia sferica*, Cap. VII.

Le componenti secondo gli assi ξ, η, ζ della coppia di quantità di moto dovuta ai moti stazionarii (qualunque essi siano) saranno tre costanti M_1, M_2, M_3.

Se poi il sistema avrà un moto attorno al proprio baricentro O, e le componenti della velocità angolare di rotazione nelle direzioni degli assi stessi saranno p, q, r, le componenti della coppia totale di quantità di moto nelle direzioni ξ, η, ζ risulteranno $Ap + M_1$, $Bq + M_2$, $Cr + M_3$.

Supponiamo che il sistema sia sottratto all'azione di forze esterne: allora la coppia totale di quantità di moto dovrà esser costante in grandezza e direzione. Prendiamo come asse fisso z l'asse di questa coppia, e scegliamo gli assi fissi x, y nel piano invariabile. Rappresentiamo con la seguente tabella i coseni di direzione delle due terne di assi ξ, η, ζ e x, y, z:

	ξ	η	ζ
x	α_1,	α_2,	α_3
y	β_1,	β_2,	β_3
z	γ_1,	γ_2,	γ_3

Avremo allora le equazioni seguenti per gl'integrali delle aree:

$$(Ap + M_1)\alpha_1 + (Bq + M_2)\alpha_2 + (Cr + M_3)\alpha_3 = 0$$
$$(Ap + M_1)\beta_1 + (Bq + M_2)\beta_2 + (Cr + M_3)\beta_3 = 0$$
$$(Ap + M_1)\gamma_1 + (Bq + M_2)\gamma_2 + (Cr + M_3)\gamma_3 = K$$

denotando con K la grandezza costante della coppia di quantità di moto.

Derivando le precedenti equazioni rispetto al tempo ed applicando le formule del POISSON, si giunge con calcoli molto semplici alle equazioni:

$$(a) \qquad \begin{cases} A\dfrac{dp}{dt} + (C - B)qr + M_3 q - M_2 r = 0 \\ B\dfrac{dq}{dt} + (A - C)rp + M_1 r - M_3 p = 0 \\ C\dfrac{dr}{dt} + (B - A)pq + M_2 p - M_1 q = 0\,. \end{cases}$$

Queste equazioni sono analoghe a quelle di EULERO e dimostrano che le reazioni prodotte sul corpo dai moti interni equivalgono ad una coppia motrice di componenti $M_2 r - M_3 q$, $M_3 p - M_1 r$, $M_1 q - M_2 p$.

Le precedenti equazioni si integrano senza difficoltà. Moltiplicandole infatti rispettivamente per p, q, r e sommando, otteniamo:

$$\frac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2) = \text{cost.} = h.$$

Moltiplicando per $Ap + M_1$, $Bq + M_2$, $Cr + M_3$ e sommando, abbiamo:

$$A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2 + 2ApM_1 + 2BqM_2 + 2CrM_3 = \text{cost} = K_1\,.$$

Questo integrale poteva evidentemente anche dedursi dagli integrali delle aree.

Ciò premesso, se risolviamo le due equazioni precedenti rispetto a q ed r, e ne sostituiamo i valori nella prima delle (a) otteniamo una equazione della forma:

$$dt = F_1(p)\, dp\,,$$

ed in modo analogo possono aversi

$$dt = F_2(q)\, dq \quad , \quad dt = F_3(r)\, dr\,.$$

Il problema di integrare le (a) è dunque ridotto alle quadrature.

Conosciute p, q, r in funzione del tempo si avranno i coseni $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ mediante le formule:

$$\gamma_1 = (Ap + M_1)\frac{1}{K} \quad ; \quad \gamma_2 = (Bq + M_2)\frac{1}{K} \quad ; \quad \gamma_3 = (Cr + M_3)\frac{1}{K}\,,$$

quindi, applicando noti teoremi, si potranno ottenere i sei rimanenti coseni mediante una nuova quadratura.

Ci si può chiedere: la precedente teoria può essere di qualche sussidio allo studio dei moti del polo terrestre?

Ammettiamo che nell'istante iniziale il corpo ruoti attorno ad uno dei suoi assi principali d'inerzia, per esempio intorno a ζ. Avremo allora nell'istante iniziale:

$$p = q = 0\;; \quad r \gtrless 0\,,$$

onde nell'istante iniziale le equazioni (a) assumeranno la forma

$$A\frac{dp}{dt} = M_2 r \quad ; \quad B\frac{dq}{dt} = -M_1 r \quad ; \quad C\frac{dr}{dt} = 0\,,$$

il che prova che le derivate di p e q non sono nulle se M_1 e M_2 sono diverse da zero, e in conseguenza l'asse principale di inerzia ζ non sarà un asse permanente di rotazione, ma l'asse stesso tenderà a variare.

Ora certamente nell'interno e alla superficie della terra esistono dei moti stazionari (che nulla esclude possano esser potenti), i quali senza alterare sensibilmente i momenti d'inerzia ed il baricentro della terra possono dar luogo a valori diversi da zero per M_1 e M_2 e quindi alterano l'asse di rotazione terrestre.

Per esempio, le correnti marine potrebbero in certo modo riguardarsi come moti stazionarii del genere di quelli considerati, e così pure i moti dei fiumi, la susseguente evaporazione dell'acqua del mare, quindi la sua congelazione nelle navi delle montagne, ecc.

I moti interni terrestri possono però considerarsi solo approssimativamente come stazionarii. Si può ammettere che, pur conservando inalterata la distribuzione di materia, possano in talune epoche rallentarsi, in altre accelerarsi, o anche mentre alcuni si rallentano, altri si accelerino. La modificazione che ciò apporta nelle formule consiste nel dover supporre fin da principio M_1, M_2, M_3 non più costanti, ma variabili, restando però sempre costanti le posizioni degli assi d'inerzia nell'interno del corpo ed i momenti principali d'inerzia A, B, C.

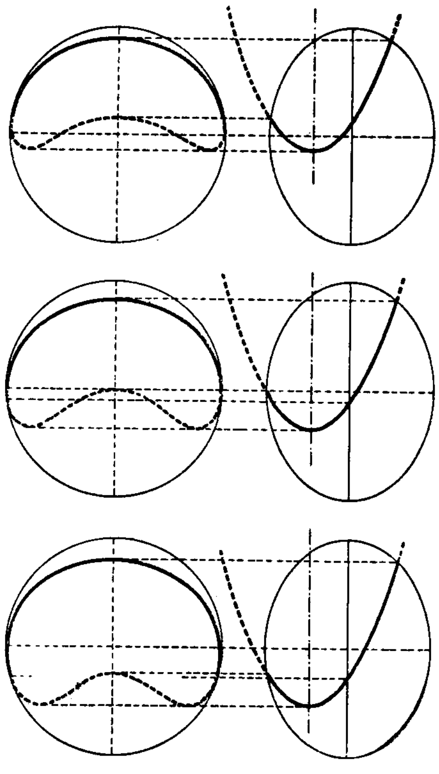
Alle equazioni (a) è necessario quindi in tale ipotesi sostituire le altre:

$$(b)\qquad \begin{cases} A\dfrac{dp}{dt} + (C - B)\,qr + M_3 q - M_2 p + \dfrac{dM_1}{dt} = 0 \\[2mm] B\dfrac{dq}{dt} + (A - C)\,rp + M_1 r - M_3 q + \dfrac{dM_2}{dt} = 0 \\[2mm] C\dfrac{dr}{dt} + (B - A)\,pq + M_2 p - M_1 r + \dfrac{dM_3}{dt} = 0. \end{cases}$$

Queste equazioni non hanno più i due integrali trovati per le (a), bensì il solo integrale

$$(Ap + M_1)^2 + (Bq + M_2)^2 + (Cr + M_3)^2 = \text{cost.} = K^2.$$

Nella ipotesi in cui sia $B = A$, esse si integrano facilmente col metodo delle approssimazioni successive mediante serie.



Valendosi dei due integrali trovati per le (a) è facile esaminare, con procedimenti del tutto elementari, l'andamento del moto nella ipotesi che M_1, M_2, M_3 siano costanti, servendosi di quei metodi coi quali POINSOT delucidò così mirabilmente lo studio dei moti di rotazione. Si possono pure studiare le leggi secondo cui sono distribuiti gli assi permanenti di rotazione, le cui proprietà sono del tutto alterate per la esistenza dei moti interni. È cosa semplice studiare le traiettorie diverse (*polodie*) che il polo di rotazione può descrivere sull'ellissoide d'inerzia del corpo in moto, e stabilire le relazioni che passano fra i loro punti singolari e le rotazioni permanenti. Nel caso in cui l'ellissoide d'inerzia ha un asse di simmetria, si dimostra che esiste un piano meridiano sul quale la polodia si proietta secondo una parabola; perciò, coi metodi della geometria descrittiva, si disegnano le proiezioni della polodia con grande facilità.

Come esempio, diamo il disegno di tre fra tali possibili polodie nel caso particolare in cui due dei momenti d'inerzia del corpo sono eguali, e minori del terzo.

VII.

SUL MOTO DI UN SISTEMA NEL QUALE SUSSISTONO MOTI INTERNI STAZIONARI

«Atti Acc. Sc. di Torino», vol. XXX, 1895, pp. 372-384.

1. Nella seduta del 3 febbraio scorso ebbi l'onore di comunicare all'Accademia una Nota [1] in cui ho stabilito le equazioni differenziali del moto attorno al baricentro di un sistema libero e non soggetto ad azioni esterne, nel quale sussistono moti interni stazionarii.

Tali equazioni sono le seguenti:

$$(1)\qquad \begin{cases} A\dfrac{dp}{dt} + (C - B)\,qr + m_3 q - m_2 r = 0 \\[2mm] B\dfrac{dq}{dt} + (A - C)\,rp + m_1 r - m_3 p = 0 \\[2mm] C\dfrac{dr}{dt} + (B - A)\,pq + m_2 p - m_1 q = 0. \end{cases}$$

Nella stessa Nota ho dimostrato che queste equazioni ammettono i due integrali

$$(2)\qquad Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = 2\,h$$

$$(3)\qquad (Ap + m_1)^2 + (Bq + m_2)^2 + (Cr + m_3)^2 = K^2$$

e che la loro integrazione può ridursi facilmente alle quadrature. Mi propongo ora di ottenere la effettiva determinazione delle relazioni in termini finiti che legano fra loro p, q, r, t. A tal fine osserviamo che se si potranno esprimere p, q, r come funzioni uniformi di un parametro ausiliario u, basterà sostituire queste espressioni in una delle equazioni differenziali (1) ed otterremo anche t espresso mediante il parametro u.

In luogo di p, q, r possiamo considerare le coordinate ξ, η, ζ dei punti della *polodia* ossia del luogo descritto dal polo sull'ellissoide d'inerzia, giacché queste ultime sono legate alle prime dalle relazioni

$$(4)\qquad \xi = \frac{p}{\sqrt{2h}} \quad , \quad \eta = \frac{q}{\sqrt{2h}} \quad , \quad \zeta = \frac{r}{\sqrt{2h}}\,.$$

(1) *Sulla teoria dei moti del polo terrestre.* [In questo volume: VI, p. 108].

Quindi la questione è ridotta ad esprimere le coordinate dei punti della polodia come funzioni uniformi di un parametro ausiliario u. Ora dalle (2), (3), (4) segue che la polodia è la intersezione di due quadriche ed in conseguenza, come è noto, le sue coordinate si potranno esprimere in funzione di un parametro u mediante funzioni ellittiche [2].

2. Per eseguire effettivamente i calcoli potremo operare sia sulle ξ, η, ζ, sia anche direttamente sulle p, q, r e noi ci riferiremo subito a queste ultime quantità.

Si ponga

$$(5) \qquad p = \frac{x_1}{x_4} \quad , \quad q = \frac{x_2}{x_4} \quad , \quad r = \frac{x_3}{x_4} ;$$

le (2), (3) diverranno

$$(2') \qquad \mathrm{A}x_1^2 + \mathrm{B}x_2^2 + \mathrm{C}x_3^2 - 2\,hx_4^2 = 0$$

$$(3') \qquad (\mathrm{A}x_1 + m_1 x_4)^2 + (\mathrm{B}x_2 + m_2 x_4)^2 + (\mathrm{C}x_3 + m_3 x_4)^2 - \mathrm{K}^2 x_4^2 = 0$$

ovvero ponendo

$$\mathrm{K}^2 - m_1^2 - m_2^2 - m_3^2 = \mathrm{K}_1$$

esse si scriveranno

$$(2'') \qquad \mathrm{A}x_1^2 + \mathrm{B}x_2^2 + \mathrm{C}x_3^2 - 2\,hx_4^2 = 0$$

$$(3'') \qquad \begin{aligned} &\mathrm{A}^2 x_1^2 + \mathrm{B}^2 x_2^2 + \mathrm{C}^2 x_3^2 - \mathrm{K}_1 x_4^2 + \\ &+ 2\,\mathrm{A}m_1 x_1 x_4 + 2\,\mathrm{B}m_2 x_2 x_4 + 2\,\mathrm{C}m_3 x_3 x_4 = 0 . \end{aligned}$$

Trasformiamo ora mediante una sostituzione lineare

$$(6) \qquad x_i = \sum_1^4{}_s c_{is}\, \xi_s \qquad (i = 1 , 2 , 3 , 4)$$

le due forme quadratiche che compariscono nei primi membri delle equazioni precedenti in modo da ridurle rispettivamente alle forme

$$(7) \qquad \begin{cases} \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 + \xi_4^2 \\ \lambda_1 \xi_1^2 + \lambda_2 \xi_2^2 + \lambda_3 \xi_3^2 + \lambda_4 \xi_4^2 . \end{cases}$$

A tal fine, come è noto, i coefficienti della sostituzione (6) dovranno soddisfare le equazioni seguenti

$$(8) \qquad \begin{cases} (\mathrm{A}^2 - \mathrm{A}\lambda_s)\, c_{1s} + \mathrm{A}m_1\, c_{4s} = 0 \\ (\mathrm{B}^2 - \mathrm{B}\lambda_s)\, c_{2s} + \mathrm{B}m_2\, c_{4s} = 0 \\ (\mathrm{C}^2 - \mathrm{C}\lambda_s)\, c_{3s} + \mathrm{C}m_3\, c_{4s} = 0 \\ \mathrm{A}m_1\, c_{1s} + \mathrm{B}m_2\, c_{2s} + \mathrm{C}m_3\, c_{3s} - (\mathrm{K}_1 - 2\,h\lambda_s)\, c_{4s} = 0 \end{cases} \qquad (s = (1 , 2 , 3 , 4)$$

(2) G.-H. HALPHEN, *Traité des fonctions elliptiques*, vol. II, p. 449.

insieme alle altre

$$A c_{1s}^2 + B c_{2s}^2 + C c_{3s}^2 - 2 h c_{4s}^2 = 1 \qquad (s = 1, 2, 3, 4). \tag{9}$$

Semplificando le equazioni precedenti esse divengono

$$\left\{ \begin{array}{l} (A - \lambda_s) c_{1s} + m_1 c_{4s} = 0 \\ (B - \lambda_s) c_{2s} + m_2 c_{4s} = 0 \\ (C - \lambda_s) c_{3s} + m_3 c_{4s} = 0 \\ A m_1 c_{1s} + B m_2 c_{2s} + C m_3 c_{3s} - (K_1 - 2 h \lambda_s) c_{4s} = 0 \end{array} \right. \tag{8'}$$

e per conseguenza le λ_s saranno le radici della equazione di quarto grado in λ

$$\begin{vmatrix} A - \lambda, & 0, & 0, & m_1 \\ 0, & B - \lambda, & 0, & m_2 \\ 0, & 0, & C - \lambda, & m_3 \\ A m_1, & B m_2, & C m_3, & 2 h \lambda - K_1 \end{vmatrix} = 0 .$$

Questa equazione sviluppata diverrà

$$(A - \lambda)(B - \lambda)(C - \lambda)(K_1 - 2 h \lambda) + A m_1^2 (B - \lambda)(C - \lambda) \\ + B m_2^2 (C - \lambda)(A - \lambda) + C m_3^2 (A - \lambda)(B - \lambda) = 0$$

ed il primo membro di essa si potrà scrivere

$$f(\lambda) = 2 h (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3)(\lambda - \lambda_4) . \tag{10}$$

Dividendo per $(A - \lambda)$ $(B - \lambda) C - \lambda)$ si avrà

$$\frac{f(\lambda)}{(A - \lambda)(B - \lambda)(C - \lambda)} = \frac{A m_1^2}{A - \lambda} + \frac{B m_2^2}{B - \lambda} + \frac{C m_3^2}{C - \lambda} - 2 h \lambda + K_1 . \tag{10'}$$

In tutto ciò che segue ammetteremo che A, B, C, siano differenti fra loro e m_1, m_2, m_3 siano diversi da zero; in tale ipotesi nessuna delle radici $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ potrà ridursi eguale ad A, B, C. Ammetteremo inoltre che le quattro radici siano semplici.

3. Dalle (8′) segue

$$\frac{c_{1s}}{\left(\dfrac{m_1}{A - \lambda_s}\right)} = \frac{c_{2s}}{\left(\dfrac{m_2}{B - \lambda_s}\right)} = \frac{c_{3s}}{\left(\dfrac{m_3}{C - \lambda_s}\right)} = \frac{c_{4s}}{-1} \tag{11}$$

onde chiamando θ_s questo rapporto, avremo

$$\theta_s = \frac{\sqrt{A c_{1s}^2 + B c_{2s}^2 + C c_{3s}^2 - 2 h c_{4s}^2}}{\sqrt{\dfrac{A m_1^2}{(A - \lambda_s)^2} + \dfrac{B m_2^2}{(B - \lambda_s)^2} + \dfrac{C m_3^2}{(C - \lambda_s)^2} - 2 h}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\dfrac{A m_1^2}{(A - \lambda_s)^2} + \dfrac{B m_2^2}{(B - \lambda_s)^2} + \dfrac{C m_3^2}{(C - \lambda_s)^2} - 2 h}}$$

a cagione della eguaglianza (9).

Ora derivando la (10') rispetto a λ si ottiene

$$\frac{Am_1^2}{(A-\lambda)^2}+\frac{Bm_2^2}{(B-\lambda)^2}+\frac{Cm_3^2}{(C-\lambda)^2}-2h=$$

$$=\frac{f'(\lambda)}{(A-\lambda)(B-\lambda)(C-\lambda)}+f(\lambda)\frac{d}{d\lambda}\frac{1}{(A-\lambda)(B-\lambda)(C-\lambda)}$$

e ponendo λ_s in luogo di λ

$$\frac{Am_1^2}{(A-\lambda_s)^2}+\frac{Bm_2^2}{(B-\lambda_s)^2}+\frac{Cm_3^2}{(C-\lambda_s)^2}-2h=\frac{2h(\lambda_s-\lambda_{s+1})(\lambda_s-\lambda_{s+2})(\lambda_s-\lambda_{s+3})}{(A-\lambda_s)(B-\lambda_s)(C-\lambda_s)}.$$

Ne segue che

$$\theta_s=\frac{1}{\sqrt{2h}}\sqrt{\frac{(A-\lambda_s)(B-\lambda_s)(C-\lambda_s)}{(\lambda_s-\lambda_{s+1})(\lambda_s-\lambda_{s+2})(\lambda_s-\lambda_{s+3})}}$$

e quindi

$$(12)\quad\left\{\begin{aligned}
c_{1s}&=\frac{m_1}{\sqrt{2h}}\sqrt{\frac{(B-\lambda_s)(C-\lambda_s)}{A-\lambda_s}}\frac{1}{\sqrt{(\lambda_s-\lambda_{s+1})(\lambda_s-\lambda_{s+2})(\lambda_s-\lambda_{s+3})}}=\frac{m_1}{A-\lambda_s}\theta_s\\
c_{2s}&=\frac{m_2}{\sqrt{2h}}\sqrt{\frac{(C-\lambda_s)(A-\lambda_s)}{B-\lambda_s}}\frac{1}{\sqrt{(\lambda_s-\lambda_{s+1})(\lambda_s-\lambda_{s+2})(\lambda_s-\lambda_{s+3})}}=\frac{m_2}{B-\lambda_s}\theta_s\\
c_{3s}&=\frac{m_3}{\sqrt{2h}}\sqrt{\frac{(A-\lambda_s)(B-\lambda_s)}{C-\lambda_s}}\frac{1}{\sqrt{(\lambda_s-\lambda_{s+1})(\lambda_s-\lambda_{s+2})(\lambda_s-\lambda_{s+3})}}=\frac{m_3}{C-\lambda_s}\theta_s\\
c_{4s}&=-\frac{1}{\sqrt{2h}}\sqrt{(A-\lambda_s)(B-\lambda_s)(C-\lambda_s)}\frac{1}{\sqrt{(\lambda_s-\lambda_{s+1})(\lambda_s-\lambda_{s+2})(\lambda_s-\lambda_{s+3})}}=-\theta_s.
\end{aligned}\right.$$

4. Ciò premesso consideriamo le due equazioni equivalenti alle (2'') (3'')

$$(13)\qquad\left\{\begin{aligned}&\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2+\xi_4^2=0\\&\lambda_1\xi_1^2+\lambda_2\xi_2^2+\lambda_3\xi_3^2+\lambda_4\xi_4^2=0;\end{aligned}\right.$$

poniamo

$$(14)\quad \xi_1^2=a_1\sigma_1^2(u)\quad,\quad\xi_2^2=a_2\sigma_2^2(u)\quad,\quad\xi_3^2=a_3\sigma_3^2(u)\quad,\quad\xi_4^2=a_4\sigma^2(u)$$

e cerchiamo di determinare le costanti a_1, a_2, a_3, a_4 e le tre radici e_1, e_2, e_3 in modo che le (13) restino verificate. La sostituzione (14) trasforma le (13) nelle due equazioni seguenti

$$a_1\sigma_1^2+a_2\sigma_2^2+a_3\sigma_3^2+a_4\sigma^2=0$$

$$\lambda_1a_1\sigma_1^2+\lambda_2a_2\sigma_2^2+\lambda_3a_3\sigma_3^2+\lambda_4a_4\sigma^2=0.$$

Teniamo conto delle due relazioni che legano fra loro i quadrati delle σ, cioè (3)

$$\sigma_2^2=\sigma_3^2-(e_2-e_3)\sigma^2$$

$$\sigma_1^2=\sigma_3^2-(e_1-e_3)\sigma^2;$$

(3) Vedi K. WEIERSTRASS, *Formeln und Lehrsätze zum Gebrauche der elliptischen Functionen*, p. 28.

le due equazioni precedenti diverranno

$$\sigma_3^2 (a_1 + a_2 + a_3) - \sigma^2 (a_1 (e_1 - e_3) + a_2 (e_2 - e_3) - a_4) = 0$$

$$\sigma_3^2 (\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3) - \sigma^2 (\lambda_1 a_1 (e_1 - e_3) + \lambda_2 a_2 (e_2 - e_3) - \lambda_4 a_4) = 0$$

e per conseguenza

$$(15) \qquad \begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 = 0 \\ a_1 (e_1 - e_3) + a_2 (e_2 - e_3) - a_4 = 0 \\ \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3 = 0 \\ \lambda_1 a_1 (e_1 - e_3) + \lambda_2 a_2 (e_2 - e_3) - \lambda_4 a_4 = 0 . \end{cases}$$

Eliminando fra queste equazioni a_1, a_2, a_3, a_4, otterremo l'equazione

$$\begin{vmatrix} 1 & , & 1 & , & 1 & , & 0 \\ e_1 - e_3 & , & e_2 - e_3 & , & 0 & , & 1 \\ \lambda_1 & , & \lambda_2 & , & \lambda_3 & , & 0 \\ \lambda_1 (e_1 - e_3) & , & \lambda_2 (e_2 - e_3) & , & 0 & , & \lambda_4 \end{vmatrix} = 0$$

che sviluppata diviene [4]

$$(16) \qquad k^2 = \frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3} = \frac{\lambda_1 - \lambda_4}{\lambda_1 - \lambda_3} : \frac{\lambda_2 - \lambda_4}{\lambda_2 - \lambda_3} .$$

Dalle (15) segue

$$a_1 : a_2 : a_3 : a_4 = \lambda_3 - \lambda_2 : \lambda_1 - \lambda_3 : \lambda_2 - \lambda_1 : (e_1 - e_3) \frac{(\lambda_3 - \lambda_2)(\lambda_2 - \lambda_1)}{\lambda_2 - \lambda_4} ;$$

quindi potremo prendere

$$(17) \qquad \begin{cases} \mu_1 = \sqrt{a_1} = \sqrt{2h(\lambda_3 - \lambda_2)} \\ \mu_2 = \sqrt{a_2} = \sqrt{2h(\lambda_1 - \lambda_3)} \\ \mu_3 = \sqrt{a_3} = \sqrt{2h(\lambda_2 - \lambda_1)} \\ \mu_4 \sqrt{a_4} = \sqrt{2h(e_1 - e_3) \frac{(\lambda_3 - \lambda_2)(\lambda_2 - \lambda_1)}{\lambda_2 - \lambda_4}} \end{cases}$$

e avremo

$$\xi_1 = \mu_1 \sigma_1 \quad , \quad \xi_2 = \mu_2 \sigma_2 \quad , \quad \xi_3 = \mu_3 \sigma_3 \quad , \quad \xi_4 = \mu_4 \sigma$$

onde le (6) ci daranno

$$(18) \qquad x_i = \sum_{1}^{4}{}_s \mu_s c_{is} \sigma_s \qquad (i = 1, 2, 3, 4)$$

in cui si è posto per uniformità $\sigma_4 = \sigma$.

(4) Vedi K. WEIERSTRASS, op. cit., p. 30.

Resulterà quindi finalmente a cagione delle (12) e delle (17)

$$
(19)\quad \left\{
\begin{aligned}
p &= m_1 \frac{\sqrt{\lambda_3-\lambda_2}\,A_{11}\sigma_1 + \sqrt{\lambda_1-\lambda_3}\,A_{12}\sigma_2 + \sqrt{\lambda_2-\lambda_1}\,A_{13}\sigma_3 + \sqrt{(e_1-e_3)\dfrac{(\lambda_3-\lambda_2)(\lambda_2-\lambda_1)}{\lambda_2-\lambda_4}}\,A_{14}\sigma}{\sqrt{\lambda_3-\lambda_2}\,A_{41}\sigma_1 + \sqrt{\lambda_1-\lambda_3}\,A_{42}\sigma_2 + \sqrt{\lambda_2-\lambda_1}\,A_{43}\sigma_3 + \sqrt{(e_1-e_3)\dfrac{(\lambda_3-\lambda_2)(\lambda_2-\lambda_1)}{\lambda_2-\lambda_4}}\,A_{44}\sigma}\\
q &= m_2 \frac{\sqrt{\lambda_3-\lambda_2}\,A_{21}\sigma_1 + \sqrt{\lambda_1-\lambda_3}\,A_{22}\sigma_2 + \sqrt{\lambda_2-\lambda_1}\,A_{23}\sigma_3 + \sqrt{(e_1-e_3)\dfrac{(\lambda_3-\lambda_2)(\lambda_2-\lambda_1)}{\lambda_2-\lambda_4}}\,A_{24}\sigma}{\sqrt{\lambda_3-\lambda_2}\,A_{41}\sigma_1 + \sqrt{\lambda_1-\lambda_3}\,A_{42}\sigma_2 + \sqrt{\lambda_2-\lambda_1}\,A_{43}\sigma_3 + \sqrt{(e_1-e_3)\dfrac{(\lambda_3-\lambda_2)(\lambda_2-\lambda_1)}{\lambda_2-\lambda_4}}\,A_{44}\sigma}\\
r &= m_3 \frac{\sqrt{\lambda_3-\lambda_2}\,A_{31}\sigma_1 + \sqrt{\lambda_1-\lambda_3}\,A_{32}\sigma_2 + \sqrt{\lambda_2-\lambda_1}\,A_{33}\sigma_3 + \sqrt{(e_1-e_3)\dfrac{(\lambda_3-\lambda_2)(\lambda_2-\lambda_1)}{\lambda_2-\lambda_4}}\,A_{34}\sigma}{\sqrt{\lambda_3-\lambda_2}\,A_{41}\sigma_1 + \sqrt{\lambda_1-\lambda_3}\,A_{42}\sigma_2 + \sqrt{\lambda_2-\lambda_1}\,A_{43}\sigma + \sqrt{(e_1-e_3)\dfrac{(\lambda_3-\lambda_2)(\lambda_2-\lambda_1)}{\lambda_2-\lambda_4}}\,A_{44}\sigma}
\end{aligned}
\right.
$$

in cui si è posto per brevità

$$
(20)\quad \left\{
\begin{aligned}
A_{is} &= \sqrt{\frac{(B-\lambda_s)(C-\lambda_s)}{A-\lambda_s}}\;\frac{1}{\sqrt{(\lambda_s-\lambda_{s+1})(\lambda_s-\lambda_{s+2})(\lambda_s-\lambda_{s+3})}}\\
A_{2s} &= \sqrt{\frac{(C-\lambda_s)(A-\lambda_s)}{B-\lambda_s}}\;\frac{1}{\sqrt{(\lambda_s-\lambda_{s+1})(\lambda_s-\lambda_{s+2})(\lambda_s-\lambda_{s+3})}}\\
A_{3s} &= \sqrt{\frac{(A-\lambda_s)(B-\lambda_s)}{C-\lambda_s}}\;\frac{1}{\sqrt{(\lambda_s-\lambda_{s+1})(\lambda_s-\lambda_{s+2})(\lambda_s-\lambda_{s+3})}}\\
A_{4s} &= -\frac{\sqrt{(A-\lambda_s)(B-\lambda_s)(C-\lambda_s)}}{\sqrt{(\lambda_s-\lambda_{s+1})(\lambda_s-\lambda_{s+2})(\lambda_s-\lambda_{s+3})}}.
\end{aligned}
\right.
$$

5. Per determinare il tempo riprendiamo le equazioni differenziali (1). Avremo:

$$
(21)\qquad dt = \frac{A\,dp}{(Bq+m_2)r-(Cr+m_3)q} = \frac{B\,dq}{(Cr+m_3)p-(Ap+m_1)r} = \frac{C\,dr}{(Ap+m_1)q-(Bq+m_2)p}
$$

ovvero a cagione delle (7)

$$
(22)\qquad \frac{dt}{du} = \frac{A\left(x_4\dfrac{dx_1}{du}-x_1\dfrac{dx_4}{du}\right)}{(Bx_2+m_2x_4)x_3-(Cx_3+m_3x_4)x_2} = \frac{B\left(x_4\dfrac{dx_2}{du}-x_2\dfrac{dx_4}{du}\right)}{(Cx_3+m_3x_4)x_1-(Ax_1+m_1x_4)x_3}
$$

$$
= \frac{C\left(x_4\dfrac{dx_3}{du}-x_3\dfrac{dx_4}{du}\right)}{(Ax_1+m_1x_4)x_2-(Bx_2+m_2x_4)x_1}.
$$

Sostituendo per x_1, x_2, x_3, x_4, i valori ricavati dalle formule (18) le equazioni precedenti divengono:

$$\frac{dt}{du} = \frac{A\, \Sigma\mu_i\, \mu_s\, (c_{1i}\, c_{4s} - c_{1s}\, c_{4i}) \left(\sigma_i \frac{d\sigma_s}{du} - \sigma_s \frac{d\sigma_i}{du}\right)}{\Sigma\mu_s\, (Cc_{3s} + m_3\, c_{4s})\, \sigma_s\, \Sigma\mu_s\, c_{2s}\, \sigma_s - \Sigma\mu_s\, (Bc_{2s} + m_2\, c_{4s})\, \sigma_s\, \Sigma\mu_s\, c_{3s}\, \sigma_s}$$

$$= \frac{B\, \Sigma\mu_i\, \mu_s\, (c_{2i}\, c_{4s} - c_{2s}\, c_{4i}) \left(\sigma_i \frac{d\sigma_s}{du} - \sigma_s \frac{d\sigma_i}{du}\right)}{\Sigma\mu_s\, (Ac_{1s} + m_1\, c_{4s})\, \sigma_s\, \Sigma\mu_s\, c_{3s}\, \sigma_s - \Sigma\mu_s\, (Cc_{3s} + m_3\, c_{4s})\, \sigma_s\, \Sigma\mu_s\, c_{1s}\, \sigma_s}$$

$$= \frac{C\, \Sigma\mu_i\, \mu_s\, (c_{3i}\, c_{4s} - c_{3s}\, c_{4i}) \left(\sigma_i \frac{d\sigma_s}{du} - \sigma_s \frac{d\sigma_i}{du}\right)}{\Sigma\mu_s\, (Bc_{2s} + m_2\, c_{4s})\, \sigma_s\, \Sigma\mu_s\, c_{1s}\, \sigma_s - \Sigma\mu_s\, (Ac_{1s} + m_1\, c_{4s})\, \sigma_s\, \Sigma\mu_s\, c_{2s}\, \sigma_s} \,.$$

Abbiamo ora (Cfr. K. WEIERSTRASS, *Formeln und Lehrsätze*, p. 28):

$$(23) \qquad \begin{cases} \sigma_i \dfrac{d\sigma_s}{du} - \sigma_s \dfrac{d\sigma_i}{du} = (e_i - e_s)\, \sigma_r\, \sigma \\[2ex] \sigma \dfrac{d\sigma_i}{du} - \sigma_i \dfrac{d\sigma}{du} = -\, \sigma_s\, \sigma_r\,; \end{cases}$$

quindi dt/du potrà porsi in tre modi eguale al rapporto di due polinomii omogenei di secondo grado nelle σ, e perciò sarà una funzione doppiamente periodica.

Riprendiamo ora le formule (22) e osserviamo che x_1, x_2, x_3, x_4 sono funzioni olomorfe in tutto il piano. Togliamo i fattori comuni alle funzioni stesse, conservandole olomorfe, ma rendendole tali che non abbiano nessuno zero a comune, e mostriamo che in tale ipotesi i tre denominatori non possono annullarsi contemporaneamente. Infatti se ciò avvenisse si avrebbe

$$(Bx_2 + m_2\, x_4)\, x_3 - (Cx_3 + m_3\, x_4)\, x_2 = 0$$

$$(Cx_3 + m_3\, x_4)\, x_1 - (Ax_1 + m_1\, x_4)\, x_3 = 0$$

$$(Ax_1 + m_1\, x_4)\, x_2 - (Bx_2 + m_2\, x_4)\, x_1 = 0$$

ovvero

$$(24) \qquad \begin{cases} (Ax_1 + m_1\, x_4) - \mu x_1 = 0 \\ (Bx_2 + m_2\, x_4) - \mu x_2 = 0 \\ (Cx_3 + m_3\, x_4) - \mu x_3 = 0\,. \end{cases}$$

Moltiplicando queste equazioni per Ax_1, Bx_2, Cx_3 e sommando, abbiamo, quando si tien conto delle (2'') (3''),

$$(25) \qquad x_4\, (-Am_1\, x_1 - Bm_2\, x_2 - Cm_3\, x_3 + K_1\, x_4 - 2\, h\, \mu x_4) = 0\,.$$

Se ora x_4 fosse nulla, siccome si è supposto che A, B, C siano diversi fra loro, dovrebbero essere nulle due fra le x_1, x_2, x_3, e in virtù della (8) tutte e quattro le quantità x_1, x_2, x_3, x_4 sarebbero zero il che è contrario alla ipotesi fatta. Ne segue che x_4 è diversa da zero, e perciò dividendo la (25) per x_4, avremmo:

$$(26) \qquad Am_1 x_1 + Bm_2 x_2 + Cm_3 x_3 - (K_1 - 2h\mu) x_4 = 0 .$$

Le (8') coincidono colle (24) e (26) quando si sostituiscano le x_i alle c_{is} e μ a λ_i; quindi i valori di x_1, x_2, x_3, x_4 che le soddisfano sarebbero tali che (vedi § 3)

$$\frac{x_1}{\left(\frac{m_1}{A-\lambda_i}\right)} = \frac{x_2}{\left(\frac{m_2}{B-\lambda_i}\right)} = \frac{x_3}{\left(\frac{m_3}{C-\lambda_i}\right)} = \frac{x_4}{-1}$$

e per conseguenza a cagione della (2'')

$$\frac{Am_1^2}{(A-\lambda_i)^2} + \frac{Bm_2^2}{(B-\lambda_i)^2} + \frac{Cm_3^2}{(C-\lambda_i)^2} - 2h = 0 ,$$

onde (vedi equaz. (10')) λ_i sarebbe una radice multipla, contrariamente alle ipotesi fatte. I tre numeratori delle (22) sono funzioni intere, ed i denominatori non possono annullarsi contemporaneamente; dt/du non può dunque mai divenire infinito, e poiché essa è funzione doppiamente periodica, così se ne deduce che è costante. Chiamando n questa costante, si avrà:

$$(27) \qquad t = n(u - u_0)$$

in cui u_0 denota una costante arbitraria.

6. Per eseguire effettivamente il calcolo di n osserviamo che il denominatore della prima espressione trovata per dt/dn può scriversi

$$D_1 = \Sigma\mu_i^2 [(C-B) c_{3i} c_{2i} + m_3 c_{2i} c_{4i} - m_2 c_{3i} c_{4i}] \sigma_i^2$$
$$+ \Sigma\mu_i \mu_s [(C-B)(c_{3i} c_{4s} + c_{3s} c_{4i}) + m_3 (c_{4i} c_{2s} + c_{4s} c_{2i})$$
$$- m_2 (c_{4i} c_{3s} + c_{4s} c_{3i})] \sigma_i \sigma_s .$$

Ora dalle (12) segue

$$(C-B)(c_{3i} c_{4s} + c_{3s} c_{4i}) + m_3 (c_{4i} c_{2s} + c_{4s} c_{2i}) - m_2 (c_{4i} c_{3s} + c_{4s} c_{3i})$$
$$= m_2 m_3 \theta_i \theta_s \left\{ (C-B)\left[\frac{1}{(C-\lambda_i)(B-\lambda_s)} + \frac{1}{(C-\lambda_s)(B-\lambda_i)}\right]\right.$$
$$\left. - \left[\frac{1}{B-\lambda_s} + \frac{1}{B-\lambda_i}\right] + \left[\frac{1}{C-\lambda_s} + \frac{1}{C-\lambda_i}\right]\right\}$$
$$= \frac{(B-C)(\lambda_s-\lambda_i)^2 m_2 m_3 \theta_i \theta_s}{(B-\lambda_i)(C-\lambda_i)(B-\lambda_s)(C-\lambda_s)} .$$

Di qui si deduce che il coefficiente di σ_i^2 nella D_1 è nullo, giacché si otterrà dalla precedente espressione ponendo $s = i$: quindi

$$D_1 = (B-C) m_2 m_3 \Sigma \frac{(\lambda_s-\lambda_i)^2 \theta_i \theta_s \mu_i \mu_s}{(B-\lambda_i)(C-\lambda_i)(B-\lambda_s)(C-\lambda_s)} \sigma_i \sigma_s .$$

Dalle (12) si ricava

$$c_{1i}\,c_{4s} - c_{1s}\,c_{4i} = \theta_i\,\theta_s\left(\frac{m_1}{A-\lambda_s}\,\frac{A-\lambda_i}{m_1}\right) = \frac{m_1\,\theta_i\,\theta_s\,(\lambda_s-\lambda_i)}{(A-\lambda_i)\,(A-\lambda_s)}$$

perciò il numeratore della prima espressione di dt/du sarà

$$N_1 = Am_1\,\Sigma\,\frac{(\lambda_s-\lambda_i)\,\theta_i\,\theta_s\,\mu_i\,\mu_s}{(A-\lambda_i)\,(A-\lambda_s)}\left(\sigma_i\,\frac{d\sigma_s}{du} - \sigma_s\,\frac{d\sigma_i}{du}\right);$$

dunque applicando le formule (23) può concludersi che N_1 sarà al pari di D_1, una espressione lineare ed omogenea dei prodotti $\sigma_i\,\sigma_s$ e poiché il rapporto N_1/D_1 deve esser costante, esso potrà prendersi eguale al rapporto dei coefficienti di $\sigma_2\,\sigma_3$ nelle espressioni di N_1 e D_1. Perciò

$$n = \frac{dt}{du} = \frac{N_1}{D_1} = \frac{Am_1\,(\lambda_4-\lambda_1)\,\theta_1\,\theta_4\,\mu_1\,\mu_4\,(B-\lambda_2)\,(C-\lambda_2)\,(B-\lambda_3)\,(C-\lambda_3)}{(B-C)\,m_2\,m_3\,(A-\lambda_1)\,(A-\lambda_4)\,(\lambda_2-\lambda_3)^2\,\theta_2\,\theta_3\,\mu_2\,\mu_3}$$

$$= \frac{Am_1}{(B-C)\,m_2\,m_3}\sqrt{\frac{\beta\gamma}{\alpha}}\sqrt{\frac{e_1-e_3}{(\lambda_1-\lambda_3)\,(\lambda_2-\lambda_4)}}$$

avendo posto per brevità

$$\alpha = (A-\lambda_1)\,(A-\lambda_2)\,(A-\lambda_3)\,(A-\lambda_4)\,,$$

$$\beta = (B-\lambda_1)\,(B-\lambda_2)\,(B-\lambda_3)\,(B-\lambda_4)\,,$$

$$\gamma = (C-\lambda_1)\,(C-\lambda_2)\,(C-\lambda_3)\,(C-\lambda_4)\,.$$

Ora, se in $f(\lambda)$ (vedi form. (10)) poniamo al posto di λ successivamente A, B, C, otteniamo

$$\alpha = \frac{f(A)}{2h} = \frac{Am_1^2\,(B-A)\,(C-A)}{2h}$$

$$\beta = \frac{f(B)}{2h} = \frac{Bm_2^2\,(C-B)\,(A-B)}{2h}$$

$$\gamma = \frac{f(C)}{2h} = \frac{Cm_3^2\,(A-C)\,(B-C)}{2h}$$

quindi

$$n = \sqrt{\frac{ABC}{2h}\,\frac{e_3-e_1}{(\lambda_1-\lambda_3)\,(\lambda_2-\lambda_4)}}\,.$$

VIII.

SOPRA UN SISTEMA DI EQUAZIONI DIFFERENZIALI

«Atti Acc. Sc. di Torino», vol. XXX, 1895, pp. 445-454.

1. Le equazioni differenziali del moto di un sistema nel quale sussistono moti interni stazionari appartengono al tipo di equazioni differenziali [1] (Cfr. § 5).

$$
(1) \qquad \left\{
\begin{aligned}
\frac{dp}{dt} &= \frac{d(f_1, f_2)}{d(q, r)} \\
\frac{dq}{dt} &= \frac{d(f_1, f_2)}{d(r, p)} \\
\frac{dr}{dt} &= \frac{d(f_1, f_2)}{d(p, q)}
\end{aligned}
\right.
$$

in cui f_1 e f_2 sono due funzioni di p, q, r ed i secondi membri rappresentano i determinanti funzionali delle funzioni stesse rispetto alle variabili $q, r; r, p; p, q$.

Esse ammettono gl'integrali

$$
(2) \qquad f_1 = \text{cost.} = h_1 \quad , \quad f_2 = \text{cost.} = h_2
$$

come si verifica con un calcolo semplicissimo.

Si ponga

$$
(3) \qquad p = \frac{x_1}{x_4} \quad , \quad q = \frac{x_2}{x_4} \quad , \quad r = \frac{x_3}{x_4}
$$

e si introducano le funzioni omogenee

$$
\varphi_1(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_4^2\left[f_1\left(\frac{x_1}{x_4}, \frac{x_2}{x_4}, \frac{x_3}{x_4}\right) - h_1\right]
$$

$$
\varphi_2(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_4^2\left[f_2\left(\frac{x_1}{x_4}, \frac{x_2}{x_4}, \frac{x_3}{x_4}\right) - h_2\right]
$$

il cui grado di omogeneità risulta eguale a due.

Avremo

$$
\frac{d(f_1, f_2)}{d(q, r)} = \frac{1}{x_4^2} \frac{d(\varphi_1, \varphi_2)}{d(x_2, x_3)}
$$

$$
\frac{dp}{dt} = \frac{1}{x_4^2} \frac{x_4\, dx_1 - x_1\, dx_4}{dt};
$$

(1) Vedi la mia Nota: *Sul moto di un sistema nel quale sussistono moti interni stazionarii*, presentata all'Acc. delle Scienze di Torino nella seduta 3 marzo 1895. [In questo volume, VII, p. 113].

quindi la prima delle (1) diverrà

(4) $$\frac{x_4\, dx_1 - x_1\, dx_4}{dt} = \frac{d(\varphi_1, \varphi_2)}{d(x_2, x_3)}$$

ed in modo analogo le altre due si trasformeranno nelle seguenti

(4′) $$\frac{x_4\, dx_2 - x_2\, dx_4}{dt} = \frac{d(\varphi_1, \varphi_2)}{d(x_3, x_1)}$$

(4″) $$\frac{x_4\, dx_3 - x_3\, dx_4}{dt} = \frac{d(\varphi_1, \varphi_2)}{d(x_1, x_2)}$$

e gl'integrali (3) saranno sostituiti da

(5) $$\varphi_1 = 0 \quad , \quad \varphi_2 = 0.$$

Prendiamo due qualunque di queste equazioni che potremo scrivere

$$\frac{x_4\, dx_{(r)} - x_{(r)} dx_4}{dt} = \frac{d(\varphi_1, \varphi_2)}{d(x_{(r+1)}, x_{(r+2)})}$$

$$\frac{x_4\, dx_{(r+1)} - x_{(r+1)}\, dx_4}{dt} = \frac{d(\varphi_1, \varphi_2)}{d(x_{(r+2)}, x_{(r)})}$$

in cui si ha

$$0 < (r) < 4 \quad , \quad (r) \equiv r \bmod. 3.$$

Da esse segue

$$x_4 \frac{x_{(r+1)}\, dx_{(r)} - x_{(r)} dx_{(r+1)}}{dt} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_{(r+2)}} \left(x_{(r+1)} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_{(r+1)}} + x_{(r)} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_{(r)}} \right)$$
$$- \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_{(r+2)}} \left(x_{(r+1)} \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_{(r+1)}} + x_{(r)} \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_{(r)}} \right).$$

Ora

$$x_{(r)} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_{(r)}} + x_{(r+1)} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_{(r+1)}} + x_{(r+2)} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_{(r+2)}} + x_4 \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_4} = 2\,\varphi_i = 0 \qquad (i = 1, 2);$$

quindi l'equazione precedente si scriverà

$$\frac{x_{(r+1)}\, dx_{(r)} - x_{(r)} dx_{(r+1)}}{dt} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_{(r+2)}} \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_4} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_4} \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_{(r+2)}}.$$

Potremo dunque concludere: *se* i_1, i_2, i_3, i_4 *è una permutazione d'ordine pari dei numeri* 1, 2, 3, 4, *sussisterà la relazione*

(6) $$\frac{x_{i_2} dx_{i_1} - x_{i_1} dx_{i_2}}{dt} = \frac{d(\varphi_1, \varphi_2)}{d(x_{i_3}, x_{i_4})}.$$

2. Eseguiamo ora sulle variabili x_i una sostituzione lineare tale che

(7) $$x_i = \Sigma_s\, c_{is}\, \xi_s \quad , \quad \xi_s = \Sigma_i\, C_{is}\, x_i$$

e chiamiamo C il determinante delle c_{is} che supporremo diverso da zero.

Avremo

$$\begin{vmatrix} dx_{i_1}, dx_{i_2} \\ x_{i_1}, \ x_{i_2} \end{vmatrix} = \Sigma \begin{vmatrix} c_{i_1 s_1}, c_{i_2 s_1} \\ c_{i_1 s_2}, c_{i_2 s_2} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} d\xi_{s_1}, d\xi_{s_2} \\ \xi_{s_1}, \ \xi_{s_2} \end{vmatrix}$$

$$\frac{d(\varphi_1, \varphi_2)}{d(x_{i_3}, x_{i_4})} = \Sigma \frac{d(\varphi_1, \varphi_2)}{d(\xi_{s_3}, \xi_{s_4})} \begin{vmatrix} C_{i_3 s_3}, C_{i_4 s_3} \\ C_{i_3 s_4}, C_{i_4 s_4} \end{vmatrix}.$$

Ma per un noto teorema sui determinanti (2)

$$\begin{vmatrix} C_{i_3 s_3}, C_{i_4 s_3} \\ C_{i_3 s_4}, C_{i_4 s_4} \end{vmatrix} = \frac{1}{C} \begin{vmatrix} c_{i_1 s_1}, c_{i_2 s_1} \\ c_{i_1 s_2}, c_{i_2 s_2} \end{vmatrix}$$

quindi l'equazione (6) si trasformerà nell'altra

$$\Sigma \begin{vmatrix} c_{i_1 s_1}, c_{i_2 s_1} \\ c_{i_1 s_2}, c_{i_2 s_2} \end{vmatrix} \frac{\xi_{s_2} d\xi_{s_1} - \xi_{s_1} d\xi_{s_2}}{dt} = \frac{1}{C} \Sigma \begin{vmatrix} c_{i_1 s_1}, c_{i_2 s_1} \\ c_{i_1 s_2}, c_{i_2 s_2} \end{vmatrix} \frac{d(\varphi_1, \varphi_2)}{d(\xi_{s_2}, \xi_{s_4})}$$

da cui segue

$$\frac{\xi_{s_2} d\xi_{s_1} - \xi_{s_1} d\xi_{s_2}}{dt} = \frac{1}{C} \frac{d(\varphi_1, \varphi_2)}{d(\xi_{s_3}, \xi_{s_4})}. \tag{8}$$

3. Si supponga che f_1 e f_2 siano due funzioni intere di secondo grado di p, q, r, cioè

$$\left\{ \begin{aligned} f_1 &= \frac{1}{2}(a_{11} p^2 + a_{22} q^2 + a_{33} r^2) + a_{23} qr + a_{31} rp \\ &\quad + a_{12} pq + a_{14} p + a_{24} q + a_{34} r + a \\ f_2 &= \frac{1}{2}(b_{11} p^2 + b_{22} q^2 + b_{33} r^2) + b_{23} qr + b_{31} rp \\ &\quad + b_{12} pq + b_{14} p + b_{24} q + b_{34} r + b. \end{aligned} \right. \tag{9}$$

Posto

$$a - h_1 = \frac{1}{2} a_{44} \quad , \quad b - h_2 = \frac{1}{2} b_{44}$$

risulterà

$$\varphi_1 = \frac{1}{2} \Sigma_i \Sigma_s a_{is} x_i x_s \quad , \quad \varphi_2 = \frac{1}{2} \Sigma_i \Sigma_s b_{is} x_i x_s. \tag{9'}$$

Eseguiamo la sostituzione (7) in modo da ottenere

$$\varphi_1 = \frac{1}{2}(\lambda_1 \xi_1^2 + \lambda_2 \xi_2^2 + \lambda_3 \xi_3^2 + \lambda_4 \xi_4^2) \quad , \quad \varphi_2 = \frac{1}{2}(\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 + \xi_4^2), \tag{10}$$

dovremo avere allora

$$\left\{ \begin{aligned} \Sigma_i \Sigma_s b_{is} c_{ih} c_{sh} &= 1 \\ \Sigma_i \Sigma_s b_{is} c_{ih} c_{sk} &= 0 \end{aligned} \right. \tag{11}$$

$$\left\{ \begin{aligned} \Sigma_i \Sigma_s a_{is} c_{ih} c_{sh} &= \lambda_h \\ \Sigma_i \Sigma_s a_{is} c_{ih} c_{sk} &= 0 \end{aligned} \right. \qquad (h \gtrless k) \tag{11'}$$

(2) R. BALTZER, *Theorie und Anwendungen der Determinanten*. III Auflage, p. 50.

e le λ_i saranno le radici dell'equazione di quarto grado in λ

$$(12) \qquad f(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda b_{11}, & a_{12} - \lambda b_{12}, & a_{13} - \lambda b_{13}, & a_{14} - \lambda b_{14} \\ a_{21} - \lambda b_{21}, & a_{22} - \lambda b_{22}, & a_{23} - \lambda b_{23}, & a_{24} - \lambda b_{24} \\ a_{31} - \lambda b_{31}, & a_{32} - \lambda b_{32}, & a_{33} - \lambda b_{33}, & a_{34} - \lambda b_{34} \\ a_{41} - \lambda b_{41}, & a_{42} - \lambda b_{42}, & a_{43} - \lambda b_{43}, & a_{44} - \lambda b_{44} \end{vmatrix} = 0$$

onde chiamando B il discriminante della forma φ_2, avremo

$$(13) \qquad f(\lambda) = \mathrm{B}\,(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3)(\lambda - \lambda_4).$$

Ammetteremo che le quattro radici siano diverse fra loro.

Siano $\alpha_{r,s}$ gli elementi aggiunti a quelli del determinante (12); e denotiamo i loro valori con $\alpha_{rs}^{(i)}$ quando sostituiamo λ_i in luogo di λ. Sarà

$$\frac{c_{1s}}{\alpha_{1r}^{(s)}} = \frac{c_{2s}}{\alpha_{2r}^{(s)}} = \frac{c_{3s}}{\alpha_{3r}^{(s)}} = \frac{c_{4s}}{\alpha_{4r}^{(s)}} \sqrt{\frac{\Sigma_h \Sigma_k b_{hk} c_{hs} c_{ks}}{\Sigma_h \Sigma_k b_{hk} \alpha_{hr}^{(s)} \alpha_{kr}^{(s)}}} = \theta_s.$$

Ma [3]

$$\alpha_{hr}^{(s)} \alpha_{kr}^{(s)} = \alpha_{rr}^{(s)} \alpha_{hk}^{(s)};$$

quindi in virtù della prima delle (11)

$$\theta_1 = \frac{1}{\sqrt{\alpha_{rr}^{(s)} \Sigma_h \Sigma_k b_{hk} \alpha_{hk}^{(s)}}}.$$

Ora dalla (12) si deduce

$$-f'(\lambda) = -\Sigma_h \Sigma_k b_{hk} \alpha_{hk}$$

quindi per la (13)

$$\Sigma_h \Sigma_k b_{hk} \alpha_{hk} = -f'(\lambda_s) = \mathrm{B}\,(\lambda_{s+1} - \lambda_s)(\lambda_{s+2} - \lambda_s)(\lambda_{s+3} - \lambda_s)$$

e per conseguenza

$$(14) \qquad c_{is} = \frac{\alpha_{ir}^{(s)}}{\sqrt{\alpha_{rr}^{(s)} \mathrm{B}\,(\lambda_{s+1} - \lambda_s)(\lambda_{s+2} - \lambda_s)(\lambda_{s+3} - \lambda_s)}}$$

$$= \sqrt{\frac{\alpha_{ii}^{(s)}}{\mathrm{B}\,(\lambda_{s+1} - \lambda_s)(\lambda_{s+2} - \lambda_s)(\lambda_{s+3} - \lambda_s)}}.$$

Abbiamo poi dalle (11) per la regola dei prodotti dei determinanti

$$\mathrm{BC}^2 = 1,$$

d'onde

$$(14') \qquad \mathrm{C} = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{B}}}.$$

(3) R. BALTZER, op. cit., p. 54.

4. In virtù delle (10), le (8) prenderanno la forma

$$\frac{\xi_{s_2} d\xi_{s_1} - \xi_{s_1} d\xi_{s_2}}{dt} = \frac{1}{C} (\lambda_{s_3} - \lambda_{s_4}) \xi_{s_3} \xi_{s_4} .$$

Pongasi

$$(15) \qquad \xi_1 = \mu_1 \sigma_1 (u) \quad , \quad \xi_2 = \mu_2 \sigma_2 (u) \quad , \quad \xi_3 = \mu_3 \sigma_3 (u) \quad , \quad \xi_4 = \mu_4 \sigma (u)$$

si otterrà

$$\mu_{(r)} \mu_{(r+1)} (\sigma'_{(r)} \sigma_{(r+1)} - \sigma_{(r)} \sigma'_{(r+1)}) \frac{du}{dt} = \frac{1}{C} (\lambda_{(r+2)} - \lambda_4) \mu_{(r+2)} \mu_4 \sigma_{(r+2)} \sigma ;$$

$$\mu_4 \mu_{(r+2)} (\sigma'_{(r+2)} \sigma - \sigma_{(r+2)} \sigma') \frac{du}{dt} = \frac{1}{C} (\lambda_{(r)} - \lambda_{(r+1)}) \mu_{(r)} \mu_{(r+1)} \sigma_{(r)} \sigma_{(r+1)}$$

onde applicando le note relazioni differenziali fra le σ (4)

$$\sigma'_{(r)} \sigma_{(r+1)} - \sigma_{(r)} \sigma'_{(r+1)} = (e_{(r+1)} - e_{(r)}) \sigma_{(r+2)} \sigma$$

$$\sigma'_{(r+1)} \sigma - \sigma_{(r+1)} \sigma' = - \sigma_{(r)} \sigma_{(r+1)}$$

le equazioni precedenti diverranno

$$\mu_{(r)} \mu_{(r+1)} (e_{(r+1)} - e_{(r)}) \frac{du}{dt} = \frac{1}{C} (\lambda_{(r+2)} - \lambda_4) \mu_{(r+2)} \mu_4$$

$$\mu_4 \mu_{(r+2)} \frac{du}{dt} = \frac{1}{C} (\lambda_{(r+1)} - \lambda_{(r)}) \mu_{(r)} \mu_{(r+1)}$$

da cui segue

$$(16) \qquad \frac{\mu_r \mu_{(r+1)}}{\mu_4 \mu_{(r+2)}} = \frac{(\lambda_{(r+2)} - \lambda_4)}{C (e_{(r+1)} - e_{(r)})} \frac{dt}{du} = \frac{C}{(\lambda_{(r+1)} - \lambda_{(r)}) \dfrac{dt}{du}}$$

quindi

$$(17) \qquad e_{(r+1)} - e_{(r)} = \frac{1}{C^2} (\lambda_{(r+2)} - \lambda_4) (\lambda_{(r+1)} - \lambda_{(r)}) \left(\frac{dt}{du}\right)^2$$

e per conseguenza

$$(18) \qquad k^2 = \frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3} = \frac{\lambda_1 - \lambda_4}{\lambda_1 - \lambda_3} : \frac{\lambda_2 - \lambda_4}{\lambda_2 - \lambda_3} .$$

Dalla (16) si deduce

$$\mu^2_{(r+2)} \frac{\mu_4}{\mu_{(r)} \mu_{(r+1)} \mu_{(r+2)}} = \frac{1}{C} (\lambda_{(r+1)} - \lambda_{(r)}) \frac{dt}{du}$$

$$\frac{\mu^2_{(r)} \mu^2_{(r+1)}}{\mu^2_4 \mu^2_{(r+2)}} = \frac{\lambda_{(r+2)} - \lambda_4}{(e_{(r+1)} - e_{(r)}) (\lambda_{(r+1)} - \lambda_{(r)})}$$

(4) K. Weierstrass, *Formeln und Lehrsätze zum Gebrauch der elliptischen Functionen*, p. 28.

perciò

$$(19)\qquad \frac{\mu_{(r)}}{\sqrt{\lambda_{(r+2)}-\lambda_{(r+1)}}}=\frac{\mu_{(r+1)}}{\sqrt{\lambda_{(r)}-\lambda_{(r+2)}}}=\frac{\mu_{(r+2)}}{\sqrt{\lambda_{(r+1)}-\lambda_{(r)}}}$$

$$=\frac{\mu_4}{\sqrt{(e_{(r+1)}-e_{(r)})\dfrac{(\lambda_{(r+2)}-\lambda_{(r+1)})(\lambda_{(r)}-\lambda_{(r+2)})}{\lambda_{(r+2)}-\lambda_4}}}\,.$$

Dalle (7) e (15) risulta

$$x_i=\Sigma_s\, c_{is}\, \mu_s\, \sigma_s$$

quindi tenendo presenti le (3), (14), (19) e togliendo i fattori comuni al numeratore e al denominatore nelle espressioni di p, q, r, otterremo

$$(20)\qquad \begin{cases} p=\dfrac{\sum_{1}^{3}{}_r\, A_{1r}\,\sigma_r+A_{14}\,\sigma}{\sum_{1}^{3}{}_r\, A_{4r}\,\sigma_r+A_{44}\,\sigma} \\[2ex] q=\dfrac{\sum_{1}^{3}{}_r\, A_{2r}\,\sigma_r+A_{24}\,\sigma}{\sum_{1}^{3}{}_r\, A_{4r}\,\sigma_r+A_{44}\,\sigma} \\[2ex] r=\dfrac{\sum_{1}^{3}{}_r\, A_{3r}\,\sigma_r+A_{34}\,\sigma}{\sum_{1}^{3}{}_r\, A_{4r}\,\sigma_r+A_{44}\,\sigma} \end{cases}$$

in cui si è posto per brevità

$$(21)\qquad \begin{cases} A_{i1}=\sqrt{\dfrac{\alpha_{ii}^{(1)}(\lambda_3-\lambda_2)}{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_4-\lambda_1)}} \\[2ex] A_{i2}=\sqrt{\dfrac{\alpha_{ii}^{(2)}(\lambda_1-\lambda_2)}{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_3-\lambda_2)(\lambda_4-\lambda_2)}} \\[2ex] A_{i3}=\sqrt{\dfrac{\alpha_{ii}^{(3)}(\lambda_2-\lambda_1)}{(\lambda_1-\lambda_3)(\lambda_2-\lambda_3)(\lambda_4-\lambda_3)}} \\[2ex] A_{i4}=\dfrac{1}{\lambda_{(r+2)}-\lambda_4}\sqrt{\alpha_{ii}^{(4)}(e_{(r+1)}-e_{(r)})\dfrac{(\lambda_{(r+2)}-\lambda_{(r+1)})(\lambda_{(r)}-\lambda_{(r+2)})}{(\lambda_4-\lambda_{(r+1)})(\lambda_4-\lambda_{(r+2)})}}\,. \end{cases}$$

Per determinare la relazione che passa fra la variabile t e l'argomento u delle σ basterà partire dalla (17): risolvendola rispetto a dt/du, integrando e tenendo conto della (14′) avremo

$$(22)\qquad t=\sqrt{\frac{e_{(r+1)}-e_{(r)}}{B\,(\lambda_{(r+2)}-\lambda_4)(\lambda_{(r+1)}-\lambda_{(r)})}}\,(u-u_0)$$

in cui u_0 denota una costante arbitraria.

5. Volendo applicare questi resultati generali al caso del moto di un sistema in cui sussistono moti interni stazionarii basterà supporre [5]

$$f_1 = \frac{1}{2\sqrt{ABC}}[(Ap + m_1)^2 + (Bq + m_2)^2 + (Cr + m_3)^2]$$

$$f_2 = \frac{1}{2\sqrt{ABC}}[Ap^2 + Bq^2 + Cr^2]$$

$$h_1 = \frac{K^2}{2\sqrt{ABC}} \quad , \quad h_2 = \frac{h}{\sqrt{ABC}} .$$

La equazione (12) si ridurrà allora a

$$\begin{vmatrix} A^2 - \lambda A \, , & 0 \, , & 0 \, , & Am_1 \\ 0 \, , & B^2 - \lambda B \, , & 0 \, , & Bm_2 \\ 0 \, , & 0 \, , & C^2 - \lambda C \, , & Cm_3 \\ Am_1 \, , & Bm_2 \, , & Cm_3 \, , & 2h\lambda - K_1 \end{vmatrix} = 0$$

in cui si è posto $K_1 = K^2 - m_1^2 - m_2^2 - m_3^2$.

Ammettendo le radici semplici; m_1, m_2, m_3 diversi da zero, e A, B, C differenti fra loro, avremo

$$\sqrt{\alpha_{11}^{(s)}} = \frac{\alpha_{14}^{(s)}}{\sqrt{\alpha_{44}^{(s)}}} = m_1 \sqrt{\frac{(\lambda_s - B)(\lambda_s - C)}{\lambda_s - A}}$$

$$\sqrt{\alpha_{22}^{(s)}} = \frac{\alpha_{24}^{(s)}}{\sqrt{\alpha_{44}^{(s)}}} = m_2 \sqrt{\frac{(\lambda_s - C)(\lambda_s - A)}{\lambda_s - B}}$$

$$\sqrt{\alpha_{33}^{(s)}} = \frac{\alpha_{34}^{(s)}}{\sqrt{\alpha_{44}^{(s)}}} = m_3 \sqrt{\frac{(\lambda_s - A)(\lambda_s - B)}{\lambda_s - C}}$$

$$\sqrt{\alpha_{44}^{(s)}} = \sqrt{(\lambda_s - A)(\lambda_s - B)(\lambda_s - C)} .$$

Questi valori dovranno sostituirsi nelle (21). Sarà poi

$$B = -\frac{2h}{ABC} ;$$

quindi la (22) diverrà

$$t = \sqrt{\frac{ABC}{2h} \frac{e_{(r)} - e_{(r+1)}}{(\lambda_{(r+2)} - \lambda_4)(\lambda_{(r+1)} - \lambda_r)}} (u - u_0).$$

In tal modo siamo giunti ai risultati ottenuti nella Nota più volte citata, deducendoli dalla soluzione di un problema più generale di quello meccanico, e seguendo un cammino più semplice e più diretto.

(5) Vedi la mia Nota precedentemente citata.

IX.

UN TEOREMA SULLA ROTAZIONE DEI CORPI E SUA APPLICAZIONE AL MOTO DI UN SISTEMA NEL QUALE SUSSISTONO MOTI INTERNI STAZIONARI

« Atti Acc. Sc. di Torino », vol. XXX, 1895, pp. 524–541.

1. Rappresentiamo colla seguente tabella i coseni di direzione che una terna di assi mobili ξ, η, ζ formano con una terna congruente di assi fissi x, y, z

	ξ	η	ζ
x	α_1 ,	α_2 ,	α_3
y	β_1 ,	β_2 ,	β_3
z	γ_1 ,	γ_2 ,	γ_3

Le equazioni di POISSON esprimono le derivate di questi coseni rispetto al tempo in funzione dei coseni medesimi e delle componenti p, q, r della rotazione secondo gli assi ξ, η, ζ, e sono le seguenti

$$\left\{\begin{aligned} \frac{d\alpha_1}{dt} &= \alpha_2 r - \alpha_3 q \\ \frac{d\alpha_2}{dt} &= \alpha_3 p - \alpha_1 r \\ \frac{d\alpha_3}{dt} &= \alpha_1 q - \alpha_2 p \end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned} \frac{d\beta_1}{dt} &= \beta_2 r - \beta_3 q \\ \frac{d\beta_2}{dt} &= \beta_3 p - \beta_1 r \\ \frac{d\beta_3}{dt} &= \beta_1 q - \beta_2 p \end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned} \frac{d\gamma_1}{dt} &= \gamma_2 r - \gamma_3 q \\ \frac{d\gamma_2}{dt} &= \gamma_3 p - \gamma_1 r \\ \frac{d\gamma_3}{dt} &= \gamma_1 q - \gamma_2 p. \end{aligned}\right.$$

Introduciamo, come fece il BRILL nel suo importante studio sul problema di EULERO [1], le quantità

$$A_1 = \alpha_1 + i\beta_1 \quad , \quad A_2 = \alpha_2 + i\beta_2 \quad , \quad A_3 = \alpha_3 + i\beta_3 ;$$

avremo [2], per le note relazioni fra i coseni di due terne di assi congruenti,

$$A_1\gamma_1 + A_2\gamma_2 + A_3\gamma_3 = 0$$

$$iA_1 - A_2\gamma_3 + A_3\gamma_2 = 0$$

(1) « Annali di Matematica », Ser. II, vol. III.

(2) Cfr. HERMITE, *Sur quelques applications des fonctions elliptiques*, p. 27.

d'onde

$$(1)\qquad \begin{cases} A_2 = \dfrac{-\gamma_1\gamma_2 + i\gamma_3}{\gamma_2^2+\gamma_3^2} A_1 \\[2ex] A_3 = \dfrac{-\gamma_1\gamma_3 - i\gamma_2}{\gamma_2^2+\gamma_3^2} A_1 \end{cases}$$

da cui segue che A_2 e A_3 possono esprimersi *razionalmente* mediante $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, A_1$.

Pongasi ora

$$B_1 = \alpha_1 - i\beta_1 \quad , \quad B_2 = \alpha_2 - i\beta_2 \quad , \quad B_3 = \alpha_3 - i\beta_3 ;$$

avremo

$$B_1 = \frac{1-\gamma_1^2}{A_1} \quad , \quad B_2 = \frac{1-\gamma_2^2}{A_2} \quad , \quad B_3 = \frac{1-\gamma_3^2}{A_3}$$

per conseguenza anche B_1, B_2, B_3 si esprimeranno *razionalmente* per mezzo di $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, A_1$ e quindi i sei coseni $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$; $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ saranno *funzioni razionali* delle stesse quantità.

Finalmente osservando che

$$\gamma_2 - i\gamma_3 = \frac{1-\gamma_1^2}{\gamma_2 + i\gamma_3}$$

si riconosce che tutti i nove coseni sono esprimibili razionalmente mediante

$$(2)\qquad 1+\gamma_1 \quad , \quad \gamma_2 + i\gamma_3 \quad , \quad \alpha_1 + i\beta_1 .$$

Il vantaggio che si ha sostituendo agli angoli di EULERO le quantità (2), per esprimere i nove coseni mediante *tre* soli elementi indipendenti, consiste in ciò: che i coseni stessi si ottengono *razionalmente* in funzione delle (2), mentre sono funzioni trascendenti degli angoli di EULERO [(3)].

Dalle equazioni di POISSON segue

$$\frac{dA_1}{dt} = A_2 r - A_3 q$$

onde applicando le (1) otterremo

$$(3)\qquad \frac{1}{A_1}\frac{dA_1}{dt} = \frac{-\gamma_1(\gamma_2 r - \gamma_3 q) + i(\gamma_3 r + \gamma_2 q)}{\gamma_2^2+\gamma_3^2} .$$

Ciò dimostra che quando siano noti p, q, r ; $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$, basta una sola quadratura per determinare i rimanenti coseni.

2. Premesse per chiarezza queste considerazioni elementari notissime, dimostriamo il teorema seguente:

Se p, q, r ; $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ sono funzioni uniformi del tempo, e non hanno altre singolarità che dei poli, e in questi punti gli ordini d'infinito delle p, q, r

(3) Cfr. G.-H. HALPHEN, *Traité des fonctions elliptiques*, vol. II, p. 11.

non superano quello di una almeno delle $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$, *anche i rimanenti coseni saranno funzioni uniformi del tempo aventi delle singolarità polari soltanto.*

Se p, q, r; $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ non hanno altre singolarità che dei poli, potremo scrivere

$$p = \frac{P}{D}, \quad q = \frac{Q}{D}, \quad r = \frac{R}{D},$$

$$\gamma_1 = \frac{\Gamma_1}{D}, \quad \gamma_2 = \frac{\Gamma_2}{D}, \quad \gamma_3 = \frac{\Gamma_3}{D}$$

ove P, Q, R; $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$; D sono funzioni intere di t, che supporremo ridotte a non avere più zeri comuni.

In tale ipotesi neppure $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$, D potranno avere zeri comuni, altrimenti una almeno delle p, q, r diverrebbe in un punto infinita di ordine superiore a tutte le $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$, il che è contrario all'ipotesi.

Ciò premesso trasformiamo la equazione (3).

Avremo

$$\frac{1}{A_1}\frac{dA_1}{dt} = \frac{(1-\gamma_1)(\gamma_2 r - \gamma_3 q) - (\gamma_2 - i\gamma_3)(r - iq)}{\gamma_2^2 + \gamma_3^2}$$

$$= \frac{-(1+\gamma_1)(\gamma_2 r - \gamma_3 q) + (\gamma_2 + i\gamma_3)(r + iq)}{\gamma_2^2 + \gamma_3^2}$$

e tenendo presente che

$$\gamma_2^2 + \gamma_3^2 = (1-\gamma_1)(1+\gamma_1) = (\gamma_2 - i\gamma_3)(\gamma_2 + i\gamma_3)$$

si otterrà

$$\frac{1}{A_1}\frac{dA_1}{dt} = \frac{\gamma_2 r - \gamma_3 q}{1+\gamma_1} - \frac{r - iq}{\gamma_2 + i\gamma_3} = -\frac{\gamma_2 r - \gamma_3 q}{1-\gamma_1} + \frac{r+iq}{\gamma_2 - i\gamma_3}.$$

Teniamo conto che

$$\gamma_2 r - \gamma_3 q = \frac{d\gamma_1}{dt};$$

la equazione precedente diverrà

$$\frac{1}{A_1}\frac{dA_1}{dt} = \frac{d}{dt}\log(1+\gamma_1) - \frac{r-iq}{\gamma_2 + i\gamma_3} = \frac{d}{dt}\log(1-\gamma_1) + \frac{r+iq}{\gamma_2 - i\gamma_3}$$

quindi

$$(4) \qquad \frac{1}{A_1}\frac{dA_1}{dt} = \frac{d}{dt}\log\left(\frac{D+\Gamma_1}{D}\right) - \frac{R - iQ}{\Gamma_2 + i\Gamma_3} = \frac{d}{dt}\log\left(\frac{D-\Gamma_1}{D}\right) + \frac{R+iQ}{\Gamma_2 - i\Gamma_3}.$$

I poli di $A_1^{-1}\, dA_1/dt$ potranno trovarsi solo ove si annullano

$$D + \Gamma_1, \; D - \Gamma_1, \; D, \; \Gamma_2 + i\Gamma_3, \; \Gamma_2 - i\Gamma_3.$$

Sia t_0 uno qualunque di questi punti. Se in esso non si annullano contemporaneamente Γ_2 e Γ_3, una almeno delle espressioni $\Gamma_2 + i\Gamma_3$ o $\Gamma_2 - i\Gamma_3$ sarà diversa da zero; quindi l'infinito di $A_1^{-1}\, dA_1/dt$ dipenderà soltanto dal *primo termine* di una delle due espressioni in cui venne posta questa quantità nell'ultima formula. Siccome questi termini sono derivate logaritmiche di funzioni aventi sole singolarità polari, così segue che $A_1^{-1} dA_1/dt$ diverrà nel punto t_0 *infinita del primo ordine con un residuo intero.*

Supponiamo ora che nel punto t_0 si annullino contemporaneamente Γ_2 e Γ_3: ivi si annulleranno $\Gamma_2 + i\Gamma_3$ e $\Gamma_2 - i\Gamma_3$; e poiché

$$(D + \Gamma_1)(D - \Gamma_1) = (\Gamma_2 + i\Gamma_3)(\Gamma_2 - i\Gamma_3),$$

così uno dei fattori $D + \Gamma_1$ o $D - \Gamma_1$ si annullerà; e se ne dovrà annullare uno solo, giacché, se ambedue si annullassero, sarebbero zero contemporaneamente $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, D$ il che è da escludersi. Si ha dunque che Γ_1 e D debbono avere nel punto t_0 nulla *o* la somma *o* la differenza soltanto, quindi in t_0 esse *non* si annullano e

$$\lim_{t=t_0} \frac{\Gamma_1}{D} = \pm 1. \tag{6}$$

Consideriamo

$$\frac{d}{dt}(\gamma_2 \pm i\gamma_3) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\Gamma_2 \pm i\Gamma_3}{D}\right) = \frac{1}{D^2}\left(D\,\frac{d(\Gamma_2 \pm i\Gamma_3)}{dt} - (\Gamma_2 \pm i\Gamma_3)\frac{dD}{dt}\right).$$

Dalle equazioni di POISSON segue

$$\begin{aligned}\frac{d(\gamma_2 \pm i\gamma_3)}{dt} &= \mp ip(\gamma_2 \pm i\gamma_3) - \gamma_1(r \mp iq)\\ &= \frac{1}{D^2}\{\mp iP(\Gamma_2 \pm i\Gamma_3) - \Gamma_1(R \mp iQ)\},\end{aligned}$$

quindi

$$\frac{d(\Gamma_2 \pm i\Gamma_3)}{dt} = \frac{1}{D}(\Gamma_2 \pm i\Gamma_3)\left(\frac{dD}{dt} \mp iP\right) - \frac{\Gamma_1}{D}(R \pm iQ) \tag{7}$$

e per conseguenza

$$\frac{R \mp iQ}{\frac{d}{dt}(\Gamma_2 \pm i\Gamma_3)} = \frac{R \mp iQ}{\frac{1}{D}(\Gamma_2 \pm i\Gamma_3)\left(\frac{dD}{dt} \mp iP\right) - \frac{\Gamma_1}{D}(R \mp iQ)}. \tag{8}$$

Supponiamo che $\Gamma_2 \pm i\Gamma_3$ abbia in t_0 uno zero di ordine n; ivi $d(\Gamma_2 \pm i\Gamma_3)/dt$ avrà uno zero di ordine $n - 1$ e per conseguenza dalla (7) risulterà che $R \mp iQ$ avrà in t_0 uno zero di ordine $n - 1$, e quindi

$$\frac{R \mp iQ}{\Gamma_2 \pm i\Gamma_3}$$

diverrà infinito del primo ordine.

Ricordiamo ora le due forme sotto cui si è posto $A_1^{-1} dA_1/dt$ (vedi (4)). Il primo termine dell'una o dell'altra espressione sarà certamente finito per $t = t_0$, quindi $A_1^{-1} dA_1/dt$ avrà in t_0 un polo del primo ordine.

Calcoliamo il residuo: a tal fine basterà determinare il residuo del rapporto

$$\frac{R \mp iQ}{\Gamma_2 \pm i\Gamma_3}$$

il quale, come è noto, sarà dato da

$$\rho = n \lim_{t=t_0} \frac{R \mp iQ}{\frac{d}{dt}(\Gamma_2 \pm i\Gamma_3)} .$$

Serviamoci perciò della formula (8): avremo

$$\rho = n \lim_{t=t_0} \frac{R \mp iQ}{\frac{1}{D}(\Gamma_2 \pm i\Gamma_3)\left(\frac{dD}{dt} \mp iP\right) - \frac{\Gamma_1}{D}(R \mp iQ)}$$

$$= n \lim_{t=t_0} \frac{-\frac{D}{\Gamma_1}}{1 - \frac{1}{\Gamma_1}\frac{(\Gamma_2 \pm i\Gamma_3)}{R \mp iQ}\left(\frac{dD}{dt} \mp iP\right)} = n \lim_{t=t_0}\left(-\frac{D}{\Gamma_1}\right).$$

Tenendo quindi presente la (6) si può concludere che il residuo è un numero intero.

Siamo dunque giunti al risultato che

$$\frac{1}{A_1}\frac{dA_1}{dt} = \frac{d}{dt}\log A_1$$

ha soltanto delle *singolarità polari del primo ordine con residui interi*. Ne segue che A_1 è una funzione uniforme con singolarità polari soltanto.

Ma tutti i nove coseni possono esprimersi razionalmente mediante $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, A_1$, dunque essi saranno funzioni uniformi del tempo aventi per singolarità soltanto dei poli, come si doveva dimostrare.

8. Il Teorema ora dimostrato equivale al seguente:

Se si possono porre p, q, r; $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ sotto la forma

$$(9) \qquad p = \frac{P}{D}, q = \frac{Q}{D}, r = \frac{R}{D} \quad ; \quad \gamma_1 = \frac{\Gamma_1}{D}, \gamma_2 = \frac{\Gamma_2}{D}, \gamma_3 = \frac{\Gamma_3}{D}$$

con P, Q, R ; $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$; D *funzioni uniformi ed intere del tempo, e se* $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, D$ *non hanno alcuno zero comune, anche i rimanenti sei coseni saranno funzioni uniformi del tempo con sole singolarità polari.*

Infatti, come abbiamo veduto nel paragrafo precedente, se nei punti di singolarità gli ordini d'infinito di p, q, r non superano quello di una almeno delle $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$, si potranno scrivere le (9) ammettendo che $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, D$ non abbiano alcuno zero a comune. Reciprocamente, se questa condizione sarà soddisfatta, D dovrà annullarsi in ogni punto di singolarità; e se n sarà l'ordine di zero della D in uno di questi punti, esisterà almeno una delle $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ il cui ordine d'infinito sarà n, mentre nello stesso punto nessuna fra le p, q, r potrà divenire infinita di ordine superiore ad n.

4. Passiamo ad applicare il teorema precedente, sotto l'ultima forma in cui fu enunciato, al caso del *moto di un sistema nel quale sussistono moti interni stazionarii* (4).

(4) Vedi le mie Note: *Sulla teoria dei moti del polo terrestre*; *Sul moto di un sistema nel quale sussistono moti interni stazionarii*; *Sopra un sistema di equazioni differenziali.* « Atti R. Acc. di Torino », 1895. [In questo vol.: VI, VII, VIII, pp. 108-128].

In una precedente Nota furono ottenute le espressioni delle componenti p, q, r della rotazione (5).

Si ponga per semplicità

$$
(10)\quad \begin{cases}
M_1 = \sqrt{\dfrac{\lambda_3 - \lambda_2}{(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_4 - \lambda_1)}}\sqrt{(\lambda_1 - A)(\lambda_1 - B)(\lambda_1 - C)} \\[2ex]
M_2 = \sqrt{\dfrac{\lambda_1 - \lambda_3}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_3 - \lambda_2)(\lambda_4 - \lambda_2)}}\sqrt{(\lambda_2 - A)(\lambda_2 - B)(\lambda_2 - C)} \\[2ex]
M_3 = \sqrt{\dfrac{\lambda_2 - \lambda_1}{(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_3)(\lambda_4 - \lambda_3)}}\sqrt{(\lambda_3 - A)(\lambda_3 - B)(\lambda_3 - C)} \\[2ex]
M_4 = \sqrt{(e_{(r+1)} - e_{(r)})\,\dfrac{(\lambda_{(r+2)} - \lambda_{(r+1)})(\lambda_{(r)} - \lambda_{(r+2)})}{(\lambda_4 - \lambda_{(r+1)})(\lambda_4 - \lambda_{(r)})}}\,\dfrac{\sqrt{(\lambda_4 - A)(\lambda_4 - B)(\lambda_4 - C)}}{\lambda_{(r+2)} - \lambda_4}
\end{cases}
$$

si avrà

$$
(11)\quad \begin{cases}
p = m_1 \dfrac{\dfrac{M_1}{\lambda_1 - A}\sigma_1 + \dfrac{M_2}{\lambda_2 - A}\sigma_2 + \dfrac{M_3}{\lambda_3 - A}\sigma_3 + \dfrac{M_4}{\lambda_4 - A}\sigma}{M_1\sigma_1 + M_2\sigma_2 + M_3\sigma_3 + M_4\sigma} \\[3ex]
q = m_2 \dfrac{\dfrac{M_1}{\lambda_1 - B}\sigma_1 + \dfrac{M_2}{\lambda_2 - B}\sigma_2 + \dfrac{M_3}{\lambda_3 - B}\sigma_3 + \dfrac{M_4}{\lambda_4 - B}\sigma}{M_1\sigma_1 + M_2\sigma_2 + M_3\sigma_3 + M_4\sigma} \\[3ex]
r = m_3 \dfrac{\dfrac{M_1}{\lambda_1 - C}\sigma_1 + \dfrac{M_2}{\lambda_2 - C}\sigma_2 + \dfrac{M_3}{\lambda_3 - C}\sigma_3 + \dfrac{M_4}{\lambda_4 - C}\sigma}{M_1\sigma_1 + M_2\sigma_2 + M_3\sigma_3 + M_4\sigma} .
\end{cases}
$$

Abbiamo ora, scegliendo per asse z l'asse fisso della coppia di quantità di moto,

$$
\gamma_1 = \frac{Ap + m_1}{K} \quad , \quad \gamma_2 = \frac{Bq + m_2}{K} \quad , \quad \gamma_3 = \frac{Cr + m_3}{K}
$$

quindi dalle formole precedenti seguirà

$$
(12)\quad \begin{cases}
\gamma_1 = \dfrac{m_1}{K} \dfrac{\dfrac{\lambda_1 M_1}{\lambda_1 - A}\sigma_1 + \dfrac{\lambda_2 M_2}{\lambda_2 - A}\sigma_2 + \dfrac{\lambda_3 M_3}{\lambda_3 - A}\sigma_3 + \dfrac{\lambda_4 M_4}{\lambda_4 - A}\sigma}{M_1\sigma_1 + M_2\sigma_2 + M_3\sigma_3 + M_4\sigma} \\[3ex]
\gamma_2 = \dfrac{m_2}{K} \dfrac{\dfrac{\lambda_1 M_1}{\lambda_1 - B}\sigma_1 + \dfrac{\lambda_2 M_2}{\lambda_2 - B}\sigma_2 + \dfrac{\lambda_3 M_3}{\lambda_3 - B}\sigma_3 + \dfrac{\lambda_4 M_4}{\lambda_4 - B}\sigma}{M_1\sigma_1 + M_2\sigma_2 + M_3\sigma_3 + M_4\sigma} \\[3ex]
\gamma_3 = \dfrac{m_3}{K} \dfrac{\dfrac{\lambda_1 M_1}{\lambda_1 - C}\sigma_1 + \dfrac{\lambda_2 M_2}{\lambda_2 - C}\sigma_2 + \dfrac{\lambda_3 M_3}{\lambda_3 - C}\sigma_3 + \dfrac{\lambda_4 M_4}{\lambda_4 - C}}{M_1\sigma_1 + M_2\sigma_2 + M_3\sigma_3 + M_4\sigma} .
\end{cases}
$$

Si sono dunque ottenuti p, q, r; $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ sotto la forma (9) in cui

$$
(13)\quad \begin{cases}
P = m_1\left(\dfrac{M_1}{\lambda_1 - A}\sigma_1 + \dfrac{M_2}{\lambda_2 - A}\sigma_2 + \dfrac{M_3}{\lambda_3 - A}\sigma_3 + \dfrac{M_4}{\lambda_4 - A}\sigma\right) \\[2ex]
Q = m_2\left(\dfrac{M_1}{\lambda_1 - B}\sigma_1 + \dfrac{M_2}{\lambda_2 - B}\sigma_2 + \dfrac{M_3}{\lambda_3 - B}\sigma_3 + \dfrac{M_4}{\lambda_4 - B}\sigma\right) \\[2ex]
R = m_3\left(\dfrac{M_1}{\lambda_1 - C}\sigma_1 + \dfrac{M_2}{\lambda_2 - C}\sigma_2 + \dfrac{M_3}{\lambda_3 - C}\sigma_3 + \dfrac{M_4}{\lambda_4 - C}\sigma\right)
\end{cases}
$$

(5) Vedi la terza delle note citate, form. (20) e seguenti.

$$
(14)\qquad \begin{cases}
\Gamma_1 = \dfrac{m_1}{K}\left(\dfrac{\lambda_1 M_1}{\lambda_1 - A}\sigma_1 + \dfrac{\lambda_2 M_2}{\lambda_2 - A}\sigma_2 + \dfrac{\lambda_3 M_3}{\lambda_3 - A}\sigma_3 + \dfrac{\lambda_4 M_4}{\lambda_4 - A}\sigma\right) \\
\Gamma_2 = \dfrac{m_2}{K}\left(\dfrac{\lambda_1 M_1}{\lambda_1 - B}\sigma_1 + \dfrac{\lambda_2 M_2}{\lambda_2 - B}\sigma_2 + \dfrac{\lambda_3 M_3}{\lambda_3 - B}\sigma_3 + \dfrac{\lambda_4 M_4}{\lambda_4 - B}\sigma\right) \\
\Gamma_3 = \dfrac{m_3}{K}\left(\dfrac{\lambda_1 M_1}{\lambda_1 - C}\sigma_1 + \dfrac{\lambda_2 M_2}{\lambda_2 - C}\sigma_2 + \dfrac{\lambda_3 M_3}{\lambda_3 - C}\sigma_3 + \dfrac{\lambda_4 M_4}{\lambda_4 - C}\sigma\right) \\
D = \qquad M_1\sigma_1 + M_2\sigma_2 + M_3\sigma_3 + M_4\sigma .
\end{cases}
$$

Per dimostrare che i rimanenti sei coseni sono funzioni uniformi del tempo, aventi sole singolarità polari, basterà provare, in virtù del teorema del § 3, che D, Γ_1, Γ_2, Γ_3 non possono annullarsi contemporaneamente. Posto

$$
M_1\sigma_1 = y_1 \quad , \quad M_2\sigma_2 = y_2 \quad , \quad M_3\sigma_3 = y_3 \quad , \quad M_4\sigma = y_4
$$

e tenendo presente che si sono supposte m_1, m_2, m_3 diverse da zero, le equazioni che si ottengono annullando D, Γ_1, Γ_2, Γ_3 prendono la forma:

$$
(15)\qquad \begin{cases}
y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 0 \\
\dfrac{\lambda_1}{\lambda_1 - A}y_1 + \dfrac{\lambda_2}{\lambda_2 - A}y_2 + \dfrac{\lambda_3}{\lambda_3 - A}y_3 + \dfrac{\lambda_4}{\lambda_4 - A}y_4 = 0 \\
\dfrac{\lambda_1}{\lambda_1 - B}y_1 + \dfrac{\lambda_2}{\lambda_2 - B}y_2 + \dfrac{\lambda_3}{\lambda_3 - B}y_3 + \dfrac{\lambda_4}{\lambda_4 - B}y_4 = 0 \\
\dfrac{\lambda_1}{\lambda_1 - C}y_1 + \dfrac{\lambda_2}{\lambda_2 - C}y_2 + \dfrac{\lambda_3}{\lambda_3 - C}y_3 + \dfrac{\lambda_4}{\lambda_4 - C}y_4 = 0 .
\end{cases}
$$

Il determinante dei coefficienti di y_1, y_2, y_3, y_4 sarà dunque

$$
\Delta = \begin{vmatrix}
1 \; , & 1 \; , & 1 \; , & 1 \\
\dfrac{\lambda_1}{\lambda_1 - A}, & \dfrac{\lambda_2}{\lambda_2 - A}, & \dfrac{\lambda_3}{\lambda_3 - A}, & \dfrac{\lambda_4}{\lambda_4 - A} \\
\dfrac{\lambda_1}{\lambda_1 - B}, & \dfrac{\lambda_2}{\lambda_2 - B}, & \dfrac{\lambda_3}{\lambda_3 - B}, & \dfrac{\lambda_4}{\lambda_4 - B} \\
\dfrac{\lambda_1}{\lambda_1 - C}, & \dfrac{\lambda_2}{\lambda_2 - C}, & \dfrac{\lambda_3}{\lambda_3 - C}, & \dfrac{\lambda_4}{\lambda_4 - C}
\end{vmatrix} .
$$

Sviluppandolo ne otteniamo il valore dato da

$$
\frac{ABC\,(B-A)\,(C-A)\,(C-B)\,(\lambda_1-\lambda_2)\,(\lambda_1-\lambda_3)\,(\lambda_1-\lambda_4)\,(\lambda_2-\lambda_3)\,(\lambda_2-\lambda_4)\,(\lambda_3-\lambda_4)}{(\lambda_1-A)(\lambda_2-A)(\lambda_3-A)(\lambda_4-A)(\lambda_1-B)(\lambda_2-B)(\lambda_3-B)(\lambda_4-B)(\lambda_1-C)(\lambda_2-C)(\lambda_3-C)(\lambda_4-C)} .
$$

Il denominatore di questa espressione non è altro che il prodotto $\alpha\beta\gamma$, adottando le notazioni usate nel § 6 della seconda delle note citate, quindi esso è eguale a

$$
\frac{ABC\, m_1^2\, m_2^2\, m_3^2\, (B-A)^2\, (C-A)^2\, (C-B)^2}{8\, h^3}
$$

e perciò

$$
\Delta = 8\, h^3\, \frac{(\lambda_1-\lambda_2)\,(\lambda_1-\lambda_3)\,(\lambda_1-\lambda_4)\,(\lambda_2-\lambda_3)\,(\lambda_2-\lambda_4)\,(\lambda_3-\lambda_4)}{m_1^2\, m_2^2\, m_3^2\, (B-A)\,(C-B)\,(A-C)} .
$$

Ne segue, poiché si sono ammesse le radici diverse fra loro, che Δ non si annulla. Le (15) dunque non potrebbero essere soddisfatte che prendendo $y_1 = y_2 = y_3 = y_4 = 0$, il che è impossibile, perché M_1, M_2, M_3, M_4 sono diverse da zero e le quattro funzioni σ non hanno zeri a comune.

Possiamo dunque concludere che *i coseni* $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$; $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ *sono al pari di* $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ *funzioni uniformi del tempo aventi solo delle singolarità polari.*

5. Per ottenere le effettive espressioni dei nove coseni basterà che determiniamo quelle di

$$1 + \gamma_1 \quad , \quad \gamma_2 + i\gamma_3 \quad , \quad \alpha_1 + i\beta_1 ,$$

giacché, come abbiamo veduto, i coseni stessi si otterranno razionalmente mediante queste tre quantità (vedi § 1).

Dalla espressione di D segue che

$$\frac{D}{\sigma} = M_1 \frac{\sigma_1}{\sigma} + M_2 \frac{\sigma_2}{\sigma} + M_3 \frac{\sigma_3}{\sigma} + M_4 = f(u) ;$$

$f(u)$ è dunque una funzione doppiamente periodica con i periodi 4ω, $4\omega'$ (6), onde posto $u = 2v$, avremo che $f(2v) = \varphi(v)$ sarà una funzione di v doppiamente periodica con i periodi 2ω e $2\omega'$. La $\varphi(v)$ diverrà infinita del primo ordine, entro il parallelogrammo dei periodi, nei punti O, ω, ω', ω''; quindi sarà una funzione ellittica del quarto grado e potrà porsi (7)

$$\varphi(v) = C_1 \frac{\sigma\left(v - \frac{u_1}{2}\right)\sigma\left(v - \frac{u_2}{2}\right)\sigma\left(v - \frac{u_3}{2}\right)\sigma\left(v - \frac{u_4}{2}\right)}{\sigma v\, \sigma(v - \omega)\, \sigma(v - \omega')\, \sigma(v - \omega'')}$$

supponendo $u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 4\omega''$ e C_1 costante.

Per conseguenza avremo

$$D = C_1\, \sigma\left(\frac{u - u_1}{2}\right)\sigma\left(\frac{u - u_2}{2}\right)\sigma\left(\frac{u - u_3}{2}\right)\sigma\left(\frac{u - u_4}{2}\right) G$$

essendo

$$G = \frac{\sigma u}{\sigma \frac{u}{2}\, \sigma\left(\frac{u}{2} - \omega\right)\sigma\left(\frac{u}{2} - \omega'\right)\sigma\left(\frac{u}{2} - \omega''\right)} .$$

In modo analogo si otterrà

$$D + \Gamma_1 = C_2\, \sigma\left(\frac{u - v_1}{2}\right)\sigma\left(\frac{u - v_2}{2}\right)\sigma\left(\frac{u - v_3}{2}\right)\sigma\left(\frac{u - v_4}{2}\right) G$$

$$\Gamma_2 + i\Gamma_3 = C_3\, \sigma\left(\frac{u - w_1}{2}\right)\sigma\left(\frac{u - w_2}{2}\right)\sigma\left(\frac{u - w_3}{2}\right)\sigma\left(\frac{u - w_4}{2}\right) G$$

in cui C_2 e C_3 sono costanti e

$$v_1 + v_2 + v_3 + v_4 = w_1 + w_2 + w_3 + w_4 = 4\omega''.$$

(6) Vedi K. WEIERSTRASS, *Formeln und Lehrsätze*, p. 28.
(7) Ibid., p. 15.

Ne segue che $1+\gamma_1$ e $\gamma_2+i\gamma_3$ hanno le espressioni seguenti

$$(16)\qquad \begin{cases} 1+\gamma_1 = L_1 \dfrac{\sigma\left(\frac{u-v_1}{2}\right)\sigma\left(\frac{u-v_2}{2}\right)\sigma\left(\frac{u-v_3}{2}\right)\sigma\left(\frac{u-v_4}{2}\right)}{\sigma\left(\frac{u-u_1}{2}\right)\sigma\left(\frac{u-u_2}{2}\right)\sigma\left(\frac{u-u_3}{2}\right)\sigma\left(\frac{u-u_4}{2}\right)} \\[2ex] \gamma_2+i\gamma_3 = L_2 \dfrac{\sigma\left(\frac{u-w_1}{2}\right)\sigma\left(\frac{u-w_2}{2}\right)\sigma\left(\frac{u-w_3}{2}\right)\sigma\left(\frac{u-w_4}{2}\right)}{\sigma\left(\frac{u-u_1}{2}\right)\sigma\left(\frac{u-u_2}{2}\right)\sigma\left(\frac{u-u_3}{2}\right)\sigma\left(\frac{u-u_4}{2}\right)} \end{cases}$$

in cui deve supporsi [(8)]

$$\frac{u_1+u_2+u_3+u_4}{2} = \frac{v_1+v_2+v_3+v_4}{2} = \frac{w_1+w_2+w_3+w_4}{2} \equiv 0$$

e L_1 e L_2 costanti.

Osserviamo ora che le funzioni

$$(17)\qquad \begin{cases} D' = \sigma\left(\frac{u-u_1}{2}\right)\sigma\left(\frac{u-u_2}{2}\right)\sigma\left(\frac{u-u_3}{2}\right)\sigma\left(\frac{u-u_4}{2}\right) \\ \quad = \sigma\left(v-\frac{u_1}{2}\right)\sigma\left(v-\frac{u_2}{2}\right)\sigma\left(v-\frac{u_3}{2}\right)\sigma\left(v-\frac{u_4}{2}\right) \\ D'+\Gamma' = L_1\,\sigma\left(\frac{u-v_1}{2}\right)\sigma\left(\frac{u-v_2}{2}\right)\sigma\left(\frac{u-v_3}{2}\right)\sigma\left(\frac{u-v_4}{2}\right) \\ \quad = L_1\,\sigma\left(v-\frac{v_1}{2}\right)\sigma\left(v-\frac{v_2}{2}\right)\sigma\left(v-\frac{v_3}{2}\right)\sigma\left(v-\frac{v_4}{2}\right) \\ \Gamma'_2+i\Gamma'_3 = L_2\,\sigma\left(\frac{u-w_1}{2}\right)\sigma\left(\frac{u-w_2}{2}\right)\sigma\left(\frac{u-w_3}{2}\right)\sigma\left(\frac{u-w_4}{2}\right) \\ \quad = L_1\,\sigma\left(v-\frac{w_1}{2}\right)\sigma\left(v-\frac{w_2}{2}\right)\sigma\left(v-\frac{w_3}{2}\right)\sigma\left(v-\frac{w_4}{2}\right) \end{cases}$$

sono funzioni intere e quindi potranno sostituirsi in tutte le formule dei paragrafi precedenti alle D, $D+\Gamma_1$, $\Gamma_2+i\Gamma_3$; in particolare potremo sostituire alla (4) l'altra

$$(4')\qquad \frac{1}{A_1}\frac{dA_1}{dt} = \frac{d}{dt}\log\left(\frac{D'+\Gamma'}{D'}\right) - \frac{R'-iQ'}{\Gamma'_2+i\Gamma'_3} = \psi(t)$$

in cui si è posto

$$R-iQ = (R'-iQ')\frac{\sigma u}{\sigma\frac{u}{2}\,\sigma\left(\frac{u}{2}-\omega\right)\sigma\left(\frac{u}{2}-\omega'\right)\sigma\left(\frac{u}{2}-\omega''\right)}.$$

Abbiamo $t=n(u-u_0)=2n(v-u_0/2)$ (form. (27) della 2ª Nota citata) con n ed u_0 costanti, quindi

$$\frac{1}{A_1}\frac{dA_1}{dv} = \frac{d}{dv}\log\left(\frac{D'+\Gamma'}{D'}\right) - \frac{1}{2n}\,\frac{R'-iQ'}{\Gamma'_2+i\Gamma'_3} = \psi_1(v)$$

(8) Scriveremo $a\equiv b$ quando i due numeri a e b differiranno per multipli interi dei periodi 2ω e $2\omega'$.

ed è evidente che $\psi_1(v)$ considerata come funzione di v avrà nei punti corrispondenti gli stessi residui di $\psi(t)$ considerata come funzione di t.

Ciò premesso supponiamo dapprima che nessuna delle u_i sia congruente ad una delle v_i; allora anche nessuna delle w_i sarà congruente ad una delle u_i, perché ove si annulla $\Gamma'_2 + i\Gamma'_3$ ivi deve annullarsi o $D' + \Gamma'$ o $D' - \Gamma'$ e se si annullasse contemporaneamente anche D', risulterebbe che D' e $D' + \Gamma'$ si annullerebbero insieme, il che è contro la ipotesi fatta. Si ha dunque che nei punti w_i non si annullano né D' né Γ', quindi potrà concludersi che:

1° nei punti $v \equiv v_i/2$, la funzione

$$\frac{d}{dv}\log\left(\frac{D' + \Gamma'}{D'}\right)$$

diviene infinita del primo ordine col residuo eguale a $+1$;

2° nei punti $v \equiv u_i/2$ la funzione

$$\frac{d}{dv}\log\left(\frac{D' + \Gamma'}{D'}\right)$$

diviene infinita del primo ordine col residuo eguale a -1;

3° nei punti $v \equiv w_i/2$ la funzione

$$-\frac{1}{2n}\frac{R' - iQ'}{\Gamma'_2 + i\Gamma'_3} \tag{18}$$

diviene infinita col residuo eguale a ± 1.

Prendiamo i punti $w_1/2$, $w_2/2$, $w_3/2$, $w_4/2$ entro il parallelogrammo dei periodi; per un noto teorema la somma dei residui della funzione (18) entro il parallelogrammo dei periodi dovrà essere nulla; quindi in due fra i quattro punti $w_i/2$ il residuo dovrà essere eguale ad 1, negli altri due sarà eguale a -1. Ricordando ora (vedi § 2) che la funzione (18) ha il residuo eguale a $+1$ ove si annulla $D' - \Gamma'$, ed il residuo eguale a -1 ove si annulla $D' + \Gamma'$, dovremo avere che in due punti, per es.: $w_3/2$, $w_4/2$, dovrà annullarsi $D' + \Gamma'$ e nei due rimanenti, $w_1/2$ e $w_2/2$, dovrà annullarsi $D' - \Gamma'$. Potremo dunque scegliere v_3 e v_4 in modo che sia $v_3 = w_3$, $v_4 = w_4$ ed allora avremo:

1° nei punti

$$v \equiv \frac{v_1}{2}, v \equiv \frac{v_2}{2}, v \equiv \frac{w_1}{2}, v \equiv \frac{w_2}{2}$$

la funzione

$$\frac{1}{A_1}\frac{dA_1}{dv} \tag{19}$$

diverrà infinita del primo ordine col residuo $+1$;

2° nei punti $v \equiv u_i/2$ la funzione stessa diverrà infinita del primo ordine col residuo -1;

3° la funzione (19) non avrà altri punti singolari che i precedenti. Per conseguenza (9) potremo scrivere

$$\frac{1}{A_1}\frac{dA_1}{dv}=\zeta\left(v-\frac{v_1}{2}\right)+\zeta\left(v-\frac{v_2}{2}\right)+\zeta\left(v-\frac{w_1}{2}\right)+\zeta\left(v-\frac{w_2}{2}\right)$$
$$-\zeta\left(v-\frac{u_1}{2}\right)-\zeta\left(v-\frac{u_2}{2}\right)-\zeta\left(v-\frac{u_3}{2}\right)-\zeta\left(v-\frac{u_4}{2}\right)+2m$$

denotando con m una quantità costante.

Integrando otterremo, essendo L_3 costante,

$$A_1=L_3\frac{\sigma\left(v-\frac{v_1}{2}\right)\sigma\left(v-\frac{v_2}{2}\right)\sigma\left(v-\frac{w_1}{2}\right)\sigma\left(v-\frac{w_2}{2}\right)}{\sigma\left(v-\frac{u_1}{2}\right)\sigma\left(v-\frac{u_2}{2}\right)\sigma\left(v-\frac{u_3}{2}\right)\sigma\left(v-\frac{u_4}{2}\right)}e^{2mv}$$

$$=L_3\frac{\sigma\left(\frac{u-v_1}{2}\right)\sigma\left(\frac{u-v_2}{2}\right)\sigma\left(\frac{u-w_1}{2}\right)\sigma\left(\frac{u-w_2}{2}\right)}{\sigma\left(\frac{u-u_1}{2}\right)\sigma\left(\frac{u-u_2}{2}\right)\sigma\left(\frac{u-u_3}{2}\right)\sigma\left(\frac{u-u_4}{2}\right)}e^{mu}.$$

Riprendendo le formule (16) e tenendo conto che $w_3=v_3\,,w_4=v_4\,,$ avremo dunque

$$(20)\quad\left\{\begin{aligned}
1+\gamma_1&=L_1\frac{\sigma\left(\frac{u-v_1}{2}\right)\sigma\left(\frac{u-v_2}{2}\right)\sigma\left(\frac{u-v_3}{2}\right)\sigma\left(\frac{u-v_4}{2}\right)}{\sigma\left(\frac{u-u_1}{2}\right)\sigma\left(\frac{u-u_2}{2}\right)\sigma\left(\frac{u-u_3}{2}\right)\sigma\left(\frac{u-u_4}{2}\right)},\\
\gamma_2+i\gamma_3&=L_2\frac{\sigma\left(\frac{u-w_1}{2}\right)\sigma\left(\frac{u-w_2}{2}\right)\sigma\left(\frac{u-v_3}{2}\right)\sigma\left(\frac{u-v_4}{2}\right)}{\sigma\left(\frac{u-u_1}{2}\right)\sigma\left(\frac{u-u_2}{2}\right)\sigma\left(\frac{u-u_3}{2}\right)\sigma\left(\frac{u-u_4}{2}\right)}\\
\alpha_1+i\beta_1&=L_3\frac{\sigma\left(\frac{u-v_1}{2}\right)\sigma\left(\frac{u-v_2}{2}\right)\sigma\left(\frac{u-w_1}{2}\right)\sigma\left(\frac{u-w_2}{2}\right)}{\sigma\left(\frac{u-u_1}{2}\right)\sigma\left(\frac{u-u_2}{2}\right)\sigma\left(\frac{u-u_3}{2}\right)\sigma\left(\frac{u-u_4}{2}\right)}e^{mu}
\end{aligned}\right.$$

nelle quali deve supporsi

$$(21)\qquad w_1+w_2=v_1+v_2\,,\ \frac{u_1+u_2+u_3+u_4}{2}=\frac{v_1+v_2+v_3+v_4}{2}\equiv 0.$$

Le (20) ci dànno la espressione generale delle tre quantità da cui dipendono razionalmente i nove coseni. Un esame facile ci prova che la forma stessa non si altera supponendo congruenti fra loro alcuni dei punti u_i e v_i.

Restano soltanto da determinare le relazioni fra le costanti $u_i\,,v_i\,,w_i$; $L_1\,,L_2\,,L_3\,,$ m e le costanti meccaniche del problema.

6. Se si tiene presente l'analisi mediante la quale JACOBI, e quelli che hanno trattato i problemi della rotazione dei corpi, sono giunti alla loro risoluzione, si riconosce che essa consta di due parti, la prima delle quali è rivolta alla determinazione delle componenti della rotazione e di tre coseni,

(9) Vedi WEIERSTRASS, *Op. cit.*, p. 20.

l'altra a quella dei rimanenti coseni. La seconda è di gran lunga più difficile e complicata della prima ed alla sua semplificazione furono rivolti quasi tutti gli sforzi dei continuatori dell'opera di JACOBI.

Il teorema del § 2 ci ha fatto superare nel nostro caso questa parte più delicata della questione, almeno per ciò che riguarda la forma che debbono assumere i coseni, senza esigere quasi nessun calcolo. La via diretta ci avrebbe reso necessario il calcolo e l'esame della espressione (3) che sarebbe risultata eguale al rapporto di due polinomii razionali e interi di terzo grado nelle σ; mentre è bastato l'assicurarsi della impossibilità che si annullino contemporaneamente i numeratori ed il denominatore delle espressioni di $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ per poter riconoscere che i rimanenti coseni sono funzioni uniformi del tempo con sole singolarità polari, e quindi poter giungere alla forma che debbono avere i coseni stessi.

Lo stesso teorema applicato al problema di EULERO ed a quello di LAGRANGE avrebbe condotto con eguale facilità alla medesima conclusione.

In uno di quei mirabili scritti di JACOBI sulla rotazione dei corpi, che alla sua morte sono restati allo stato di frammenti inediti, e che vennero pubblicati nel secondo volume delle sue opere [10], si trova posta in chiara luce l'intima ragione del successo del suo procedimento d'integrazione nel caso del problema di EULERO. Essa consiste in ciò: che l'angolo ψ di EULERO che la intersezione dei piani $\xi\eta$ e xy forma con l'asse x si esprime mediante una somma di integrali ellittici di terza specie *a cui è legato il divisore* $2i$; onde presentandosi la stessa circostanza favorevole nel problema di LAGRANGE, JACOBI poté stabilire *a priori* che il suo procedimento era suscettibile di estendersi anche a questo caso.

Esaminiamo ora quale relazione passa fra l'esistenza del divisore $2i$ di JACOBI ed il teorema del § 2.

L'espressione della derivata dell'angolo ψ di EULERO è

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{p\gamma_1 + q\gamma_2}{1-\gamma_3^2} = \frac{(p+iq)(\gamma_1 - i\gamma_2) + i(\gamma_2 p - \gamma_1 q)}{1-\gamma_3^2}$$

$$= \frac{1}{2i}\left[\frac{d}{dt}\log\frac{1-\gamma_3}{1+\gamma_3} - 2\frac{q-ip}{\gamma_1+i\gamma_2}\right] = \frac{1}{2i}\left[\frac{d}{dt}\log\frac{D-\Gamma_3}{D+\Gamma_3} - 2\frac{Q-iP}{\Gamma_1+i\Gamma_2}\right].$$

Nella ipotesi che $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, D$ non si annullino contemporaneamente, ripetendo un ragionamento analogo a quello fatto nel § 2, si può concludere che $d\psi/dt$ è una funzione uniforme le cui singolarità sono dei poli del primo ordine aventi i residui eguali a $n/2i$ con n intero. L'esistenza del divisore di JACOBI dipende quindi dal teorema del § 2; ossia è il non annullarsi contemporaneamente di $D, \Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$, che ne porta per conseguenza l'esistenza.

Noi abbiamo così il vero significato e la portata del teorema del § 2. Esso ci fa fare un passo nel senso che sostituisce al calcolo di $d\psi/dt$ ed alla ricerca del divisore di JACOBI in questa espressione, l'esame diretto di $p, q, r; \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$.

(10) JACOBI'S *Werke*, vol. II, p. 477.

X.

SUI MOTI PERIODICI DEL POLO TERRESTRE

«Atti Acc. Sc. di Torino», Vol. XXX, 1895, pp. 547-561.

1. In una Nota comunicata nella seduta del 3 febbraio scorso, ho esposto per sommi capi i fondamenti di una teoria sull'azione che i moti interni, i quali non alterano la distribuzione di masse sulla terra, hanno sul moto del polo di rotazione terrestre. La stessa teoria venne più ampiamente sviluppata in una Memoria da me presentata alcun tempo prima alle «Astronomische Nachrichten», la quale spero vedrà presto la luce (*). Nell'ultima parte di questa Memoria, come ho accennato nella Nota suddetta, ho integrato le equazioni differenziali del movimento del polo di rotazione nella ipotesi che due degli assi principali d'inerzia del sistema mobile fossero eguali ed i moti interni non fossero stazionarii; ed applicando lo stesso metodo, cioè quello delle approssimazioni successive, ho mostrato come potesse risolversi il problema inverso, di *determinare i moti interni capaci di indurre un dato moto del polo di rotazione.*

Volendo fare un'applicazione della teoria ai moti effettivi terrestri, la questione analitica può venire molto semplicizzata, giacché eliminando alcuni termini di un certo ordine di grandezza trascurabili, sotto certe ipotesi, rispetto ad altri, le equazioni differenziali assumono una forma molto più semplice, e la loro integrazione può effettuarsi senza difficoltà. È ciò che ho fatto nella presente Nota, nella quale sono pure partito dal presupposto che i moti del polo di rotazione siano decomponibili in una serie di moti armonici. Introducendo due funzioni ausiliarie le quali sono sviluppabili in una serie di funzioni armoniche del tempo, ho potuto esprimere, mediante i coefficienti di esse, tanto gli elementi relativi al moto del polo di rotazione, quanto quelli relativi ai moti interni capaci di indurli, ed ho trovato le relazioni fra i loro periodi e le relative costanti, giungendo al teorema: *che i moti interni e quelli del polo hanno eguali periodi, due eccettuati, ciascuno dei quali è proprio ad uno dei due movimenti ed è tale che l'altro non può possederlo.*

Venendo all'applicazione al caso della terra, mi sono fondato sulle belle ricerche del sig. CHANDLER, il quale ha scoperto delle leggi empiriche relative al moto del polo terrestre che sono di somma importanza. Fra le altre cose, il sig. CHANDLER ha trovato nel moto del polo terrestre un periodo di circa 430 giorni, escludendo l'esistenza del periodo Euleriano. I calcoli che

(*) In questo vol.: V, pp. 87-107. [N. d. R.].

ho eseguito mostrano che, se i moti interni terrestri avessero una coppia di quantità di moto la cui componente secondo l'asse terrestre fosse 1/1053 della coppia di quantità di moto che avrebbe la terra ruotando come un corpo rigido attorno al proprio asse, il periodo Euleriano si cambierebbe in quello di CHANDLER.

Non discuto questo risultato; passo piuttosto ad esaminare l'ipotesi che la componente secondo l'asse terrestre della coppia di quantità di moto dei moti interni sia trascurabile rispetto alla coppia di quantità di moto della terra supposta interamente rigida. Se tale ipotesi fosse vera, il moto del polo potrebbe avere il periodo Euleriano senza peraltro che ciò risultasse in maniera necessaria. Nella ipotesi stessa esamino quali sarebbero i moti interni capaci di indurre nel polo il moto armonico avente il periodo annuale i cui elementi vennero determinati dal sig. CHANDLER. I risultati ottenuti sono riassunti in alcuni teoremi posti alla fine della presente Nota. Farò osservare fin da ora che l'*asse della coppia di quantità di moto di questi moti interni deve oscillare in modo che la proiezione sul piano dell'equatore del suo estremo (situandone l'origine al centro della terra) descrive una ellisse di cui ho assegnato l'ampiezza degli assi, e il cui asse maggiore è inclinato di 45° sul meridiano di Greenwich; ossia giace nel piano meridiano avente, questa longitudine, passante quindi nel mezzo dell'Oceano atlantico.*

Finalmente risolvo come esercizio sulle mie formule il problema seguente: Se esistesse un moto interno terrestre avente un periodo di 430 giorni (il periodo di CHANDLER) quali sarebbero i suoi elementi affinché inducesse sul polo il moto periodico dello stesso periodo? Il calcolo, come si vede subito, non presenta alcuna difficoltà ed è perfettamente simile a quello eseguito pel periodo annuale.

In questa Nota, sono partito dalla ipotesi dell'assenza di plasticità nella terra, e per conseguenza tutti i risultati precedentemente riassunti valgono secondo questa supposizione. Resta ora da vedere: *quali perturbazioni produce la plasticità di un corpo nei moti del suo polo di rotazione indotti dalla azione di moti interni sussistenti nel corpo medesimo?* Ho iniziato uno studio di questa questione, prendendo a guida le ipotesi e le ricerche che l'illustre prof. SCHIAPARELLI espose nella sua classica Memoria presentata all'Osservatorio di Pulkova nell'occasione della sua festa semisecolare [1].

Le perturbazioni possono esser tali da non escludere in certi casi la possibilità di un lento moto progressivo del polo.

Il periodo di CHANDLER si presenta, secondo i calcoli della presente Nota, in due maniere diverse. Non discuto per ora nessuna delle due; il periodo stesso si presenta pure in un altro modo esaminando le perturbazioni dovute alla plasticità.

(1) *De la rotation de la terre sous l'influence des actions géologiques*, Saint-Pétersbourg, 1889. Una traduzione italiana di questa Memoria venne fatta dal dott. TEDONE ed inserita nel t. XXX, serie 3ª, del «Nuovo Cimento», Pisa, 1891. Vedi anche G. V. SCHIAPARELLI, *Variazione dell'asse di rotazione* (Club alpino, 1883).

Spero di ritornare prossimamente sulle presenti ricerche, di esaminarle nuovamente, e di discuterle.

2. Supponendo che l'ellissoide d'inerzia sia di rivoluzione, e ammettendo M_1, M_2, M_3, variabili, le equazioni del moto hanno la forma [2]

$$(a) \quad \begin{cases} A\frac{dp}{dt} + (C - A)qr + M_3 q - M_2 r + \frac{dM_1}{dt} = 0 \\ A\frac{dq}{dt} + (A - C)rp + M_1 r - M_3 p + \frac{dM_2}{dt} = 0 \\ C\frac{dr}{dt} + M_2 p - M_1 q + \frac{dM_3}{dt} = 0. \end{cases}$$

Ammettiamo ora che p e q siano piccolissime, e le variazioni di r siano pure piccolissime in modo che possa porsi $r = \omega + \varepsilon$, con ω costante ed ε piccolo di ordine non superiore a p e q.

Allora dall'ultima equazione si ricava

$$M_3 = M_3^0 - \int_0^t (M_2 p - M_1 q)\, dt - C\varepsilon = M_3^0 + u$$

denotando con M_3^0 una quantità costante. Quindi le due prime equazioni divengono

$$\frac{dp}{dt} + \left[\frac{C - A}{A}(\omega + \varepsilon) + \frac{M_3^0 + u}{A}\right] q = -\frac{1}{A}\left(\frac{dM_1}{dt} - M_2(\omega + \varepsilon)\right) = \alpha$$

$$\frac{dq}{dt} - \left[\frac{C - A}{A}(\omega + \varepsilon) + \frac{M_3^0 + u}{A}\right] p = -\frac{1}{A}\left(\frac{dM_2}{dt} + M_1(\omega + \varepsilon)\right) = \beta .$$

Facciamo ora la ipotesi che possano trascurarsi i termini

$$(1) \quad \frac{uq}{A}, \frac{up}{A}, \frac{M_2 \varepsilon}{A}, \frac{M_1 \varepsilon}{A}, \frac{C - A}{A}\varepsilon q, \frac{C - A}{A}\varepsilon p;$$

otterremo (vedi la Nota posta alla fine della Memoria)

$$(a') \quad \begin{cases} \frac{dp}{dt} + \left[\frac{C - A}{A}\omega + \frac{M_3^0}{A}\right] q = -\frac{1}{A}\left(\frac{dM_1}{dt} - M_2\omega\right) = \alpha \\ \frac{dq}{dt} - \left[\frac{C - A}{A}\omega + \frac{M_3^0}{A}\right] p = -\frac{1}{A}\left(\frac{dM_2}{dt} + M_1\omega\right) = \beta. \end{cases}$$

Poniamo

$$\frac{C - A}{A}\omega + \frac{M_3^0}{A} = \rho ,$$

moltiplichiamo la seconda equazione per $i = \sqrt{-1}$ e aggiungiamola alla prima; avremo

$$\frac{d(p + iq)}{dt} - i\rho\,(p + iq) = -\frac{1}{A}\left[\frac{d(M_1 + iM_2)}{dt} + i\omega\,(M_1 + iM_2)\right] = \alpha + i\beta$$

(2) Per il significato delle diverse quantità mi riferisco alla mia Nota già citata, nelle «Astronomische Nachrichten». [In questo vol.: V, pp. 87-107].

dalle quali si ricava

$$p + iq = e^{i\varrho t}\left[\int (\alpha + i\beta)\, e^{-i\varrho t}\, dt + \mathrm{C}\right] \tag{2}$$

$$\frac{1}{\mathrm{A}}(\mathrm{M}_1 + i\mathrm{M}_2) = e^{-i\omega t}\left[-\int (\alpha + i\beta)\, e^{-i\omega t}\, dt + \mathrm{D}\right] \tag{2'}$$

denotando con C e D due costanti arbitrarie complesse.

3. Supponiamo (*) ora che i moti del polo siano decomponibili in una serie di moti armonici. Avremo

$$\alpha = \alpha_0 + \Sigma\,(\alpha_n \cos\lambda_n t + \alpha'_n \operatorname{sen}\lambda_n t)$$

$$\beta = \beta_0 + \Sigma\,(\beta_n \cos\lambda_n t + \beta'_n \operatorname{sen}\lambda_n t)$$

in cui non si esclude che fra le λ_n, alcune (anche in numero infinito) siano multiple l'una dell'altra [3].

Avremo

$$\alpha + i\beta = \alpha_0 + i\beta_0 + \Sigma\left(\frac{\alpha_n + \beta'_n + i(\beta_n - \alpha'_n)}{2}\, e^{i\lambda_n t} + \frac{(\alpha_n - \beta'_n) + i(\alpha'_n + \beta_n)}{2}\, e^{-i\lambda_n t}\right)$$

ovvero

$$\alpha + i\beta = \mathrm{A}_0 + \Sigma\,(\mathrm{A}_n e^{i\lambda_n t} + \mathrm{A}'_n e^{-i\lambda_n t})$$

avendo posto

$$\left\{\begin{aligned} \mathrm{A}_0 &= \alpha_0 + i\beta_0 \\ \mathrm{A}_n &= \frac{\alpha_n + \beta'_n + i(\beta_n - \alpha'_n)}{2} \\ \mathrm{A}'_n &= \frac{\alpha_n - \beta'_n + i(\alpha'_n + \beta_n)}{2}. \end{aligned}\right. \tag{3}$$

Per conseguenza

$$\int (\alpha + i\beta)\, e^{-i\varrho t}\, dt = \int \{\mathrm{A}_0 e^{-i\varrho t} + \Sigma\,(\mathrm{A}_n e^{i(\lambda_n - \varrho)t} + \mathrm{A}'_n e^{-i(\lambda_n + \varrho)t})\}\, dt$$

$$= \frac{\mathrm{A}_0}{-i\rho}\, e^{-i\varrho t} + \Sigma\left(\frac{\mathrm{A}_n}{i(\lambda_n - \rho)}\, e^{i(\lambda_n - \varrho t)} + \frac{\mathrm{A}'_n}{-i(\lambda_n + \rho)}\, e^{-i(\lambda_n + \varrho)t}\right)$$

quindi per la (2)

$$p + iq = \frac{\mathrm{A}_0}{-i\rho} + \mathrm{C}e^{i\varrho t} + \Sigma\left(\frac{\mathrm{A}_n}{i(\lambda_n - \rho)}\, e^{i\lambda_n t} + \frac{\mathrm{A}'_n}{-i(\lambda_n + \rho)}\, e^{-i\lambda_n t}\right).$$

Sostituendo per $\mathrm{A}_0, \mathrm{A}_n, \mathrm{A}'_n$ i valori (3) e separando le parti reali dalle immaginarie, otterremo

(*) Per maggiori chiarimenti su quanto il VOLTERRA espone ai nn. 3 e 4 di questa Nota, cfr. la Nota seguente: *Osservazioni sulla mia Nota sui moti periodici del polo terrestre* in «Atti Acc. di Torino» vol. XXX, pp. 817–820. In questo vol.: XI, pp. 152–154 [N. d. R.].

(3) Ammetteremo implicitamente, senza dirlo volta per volta, che sulle serie che si incontreranno siano eseguibili tutte le operazioni del calcolo che dovremo effettuare.

$$
(4) \quad \left\{
\begin{aligned}
& p = -\frac{\beta_0}{\rho} + (C_1 \cos \rho t - C_2 \operatorname{sen} \rho t) \\
& + \Sigma \frac{(\beta_n \rho - \alpha'_n \lambda_n) \cos \lambda_n t + (\alpha_n \lambda_n + \beta'_n \rho) \operatorname{sen} \lambda_n t}{\lambda_n^2 - \rho^2}, \\
& q = \frac{\alpha_0}{\rho} + (C_1 \operatorname{sen} \rho t + C_2 \cos \rho t) \\
& + \Sigma \frac{-(\beta'_n \lambda_n + \alpha_n \rho) \cos \lambda_n t + (\beta_n \lambda_n - \alpha'_n \rho) \operatorname{sen} \lambda_n t}{\lambda_n^2 - \rho^2}
\end{aligned}
\right.
$$

in cui si è posto $C = C_1 + iC_2$.

In modo perfettamente analogo si ottengono le formule (*) che dànno M_1 e M_2, e si avrà, ponendo $D = D_1 + iD_2$,

$$
(5) \quad \left\{
\begin{aligned}
& \frac{M_1}{A} = -\frac{\beta_0}{\omega} + (D_1 \cos \omega t + D_2 \operatorname{sen} \omega t) \\
& + \Sigma \frac{(\beta_n \omega + \alpha'_n \lambda_n) \cos \lambda_n t - (\alpha_n \lambda_n - \beta'_n \omega) \operatorname{sen} \lambda_n t}{\lambda_n^2 - \omega^2} \\
& \frac{M_2}{A} = \frac{\alpha_0}{\omega} + (-D_1 \operatorname{sen} \omega t + D_2 \cos \omega t) \\
& + \Sigma \frac{(\beta'_n \lambda_n - \alpha_n \rho) \cos \lambda_n t - (\beta_n \lambda_n + \alpha'_n \omega) \operatorname{sen} \lambda_n t}{\lambda_n^2 - \omega^2}.
\end{aligned}
\right.
$$

Le formule precedenti perdono ogni significato quando sia $\lambda_n = \omega$, oppure $\lambda_n = \rho$; dovrà dunque di necessità essere

$$\lambda_n \gtrless \omega \quad , \quad \lambda_n \gtrless \rho ,$$

d'onde il teorema:

I periodi delle rotazioni e quelli dei moti interni sono gli stessi; salvo che i moti interni possono avere il periodo $2\pi/\omega$ *che non può possedere il moto del polo di rotazione, e il moto del polo di rotazione può possedere il periodo* $2\pi/\rho$ *che non può possedere il moto interno.*

4. Esaminiamo i valori dei due periodi $2\pi/\omega$ e $2\pi/\rho$ nel caso del moto terrestre.

Siccome ω rappresenta la velocità di rotazione della terra, così $2\pi/\omega$ rappresenta *un giorno siderale*, da cui segue: *I moti interni possono avere un periodo diurno, ma questa parte periodica dei moti interni non ha influenza sul moto del polo, il quale non può possedere il detto periodo.*

(*) Nelle (5) era incorso un errore di segno, corretto dal VOLTERRA nella citata Nota *Osservazioni sulla mia Nota ecc.* (in questo vol: XI, pp. 152–154), e che qui abbiamo rettificato. [N. d. R.].

Passiamo al periodo $2\pi/\rho$. Abbiamo [4]:

$$\rho = \frac{C-A}{A}\omega + \frac{M_3^\circ}{A} = \frac{\omega}{305} + \frac{M_3^\circ}{A}$$

d'onde, prendendo per unità il giorno siderale,

$$\frac{2\pi}{\rho} = \frac{305}{1+305\dfrac{M_3^\circ}{A\omega}} = \frac{305}{1+306\dfrac{M_3^\circ}{C\omega}}.$$

Dunque $2\pi/\rho$ è il periodo euleriano variato nel rapporto

$$\frac{1}{1+306\dfrac{M_3^\circ}{C\omega}}.$$

Se si volesse in tal modo ottenere il periodo di CHANDLER di 430 giorni, dovrebbe aversi

$$\frac{430}{305} = \frac{1}{1+306\dfrac{M_3^\circ}{C\omega}}$$

d'onde

$$\frac{M_3^\circ}{C\omega} = \frac{-1}{1053};$$

dovrebbe dunque la componente secondo l'asse terrestre della coppia di quantità di moto dovuta ai moti interni essere $1/1053$ di quella che avrebbe la terra supposta rigida pel suo moto diurno. Senza stare a discutere questo risultato, vediamo invece ciò che si otterrà supponendo trascurabile il rapporto $M_3^\circ/C\omega$. Allora $2\pi/\rho$ sarà approssimativamente eguale al periodo euleriano. Dunque nella precedente ipotesi *i moti interni non potrebbero avere una parte periodica apprezzabile con un periodo eguale a quello euleriano.*

5. Confrontando le formule (4) e (5) si riconosce che *ad ogni moto armonico del polo col periodo* $2\pi/\lambda_n \gtrless \begin{cases} \dfrac{2\pi}{\rho} \\ \dfrac{2\pi}{\omega} \end{cases}$ *corrisponde un moto interno periodico con eguale periodo e reciprocamente*; *inoltre le costanti* $\alpha_n, \alpha'_n, \beta_n, \beta'_n$ *individuano l'un moto e l'altro indipendentemente dagli altri moti aventi periodo diverso.* Decomponiamo perciò l'asse OM dei moti interni in tanti segmenti, ciascuno dei quali sia variabile con un periodo diverso e chiamiamo $OM^{(\lambda_n)}$ il segmento variabile col periodo λ_n; in modo che le sue componenti secondo

(4) Assumiamo in tutto il corso della presente Nota $(C-A)/A = 1/305$, senza discutere, per ora, se la esistenza di moti interni possa avere alcuna sensibile influenza sul valore di questo rapporto calcolato dai fenomeni di precessione e nutazione.

le direzioni ξ e η si otterranno dalle parti periodiche col detto periodo che figurano nelle espressioni di M_1 e M_2 ricavate dalle (5). L'asse dei moti interni sarà risultante dei segmenti $OM^{(\lambda_1)}, OM^{(\lambda_2)} \dots$ di un segmento che potrà avere il periodo diurno e di un segmento costante.

Proponiamoci la questione: *noto il moto armonico del polo col periodo* $\lambda_n = \lambda$ *determinare il moto dell'estremo* $M^{(\lambda)}$ *dell'asse dei moti interni avente eguale periodo.*

Evidentemente dalle formule precedenti potremo ricavare il moto della proiezione dell'estremo $M^{(\lambda)}$ sul piano dell'equatore.

Le (4) ci dicono che in ogni istante la posizione del polo di rotazione si otterrà da quella del polo d'inerzia (estremo dell'asse ζ) componendo uno spostamento costante con quelli dovuti ai moti armonici del polo stesso, attorno al polo d'inerzia. In ciascuno di questi moti *il polo di rotazione descriverà una ellisse piccolissima, col centro nell'estremo dell'asse d'inerzia* ζ, *in modo che il raggio vettore che dall'estremo di* ζ *va al polo seguirà la legge delle aree.* Prendiamo i piani $\xi\zeta$ e $\eta\zeta$ in modo che contengano gli assi dell'ellisse e contiamo i tempi dall'istante in cui il polo passa attraverso il piano $\xi\zeta$. Avremo

$$\frac{p^{(\lambda)}}{\omega} = a \cos \lambda t \, , \; \frac{q^{(\lambda)}}{\omega} = b \operatorname{sen} \lambda t$$

in cui $p^{(\lambda)}$ e $q^{(\lambda)}$ sono i termini delle (4) di periodo λ, e

$$a = \operatorname{tg} \varphi \quad , \quad b = \operatorname{tg} \psi$$

denotando con φ e ψ i semiassi dell'ellisse misurati in secondi d'arco.

Quindi, chiamando $\alpha, \alpha', \beta, \beta'$ le costanti corrispondenti al moto di periodo λ, avremo

$$\frac{\beta\rho - \alpha'\lambda}{\lambda^2 - \rho^2} = a\omega \qquad \alpha\lambda + \beta'\rho = 0$$

$$\beta'\lambda + \alpha\rho = 0 \qquad \frac{\beta\lambda - \alpha'\rho}{\lambda^2 - \rho^2} = b\omega$$

d'onde

$$\alpha = 0 \quad , \quad \beta' = 0 \quad , \quad \beta = (b\lambda - a\rho)\,\omega \quad , \quad \alpha' = (b\rho - a\lambda)\,\omega$$

da cui segue che le parti periodiche col periodo $2\pi/\lambda$ in $M_1/A\omega$, $M_2/A\omega$ saranno

$$\frac{M_1^{(\lambda)}}{A\omega} = \frac{(b\lambda - a\rho)\,\omega + (b\rho - a\lambda)\,\lambda}{\lambda^2 - \omega^2} \cos \lambda t$$

$$\frac{M_2^{(\lambda)}}{A\omega} = \frac{-(b\lambda - a\rho)\,\lambda - (b\rho - a\lambda)\,\omega}{\lambda^2 - \omega^2} \operatorname{sen} \lambda t \, .$$

I massimi valori assoluti di $M_1^{(\lambda)}/A\omega$ si avranno nei tempi $t = n\pi/\lambda$, con n intero, e saranno

$$\frac{\mu_1^{(\lambda)}}{A\omega} = \left| \frac{(b\lambda - a\rho)\,\omega + (b\rho - a\lambda)\,\lambda}{\lambda^2 - \omega^2} \right|$$

mentre i massimi valori assoluti di $M_2^{(\lambda)}/A\omega$ si avranno nei tempi $t = \frac{2n+1}{2}\frac{\pi}{\lambda}$ e saranno

$$\frac{\mu_2^{(\lambda)}}{A\omega} = \left| \frac{-(b\lambda - a\rho)\lambda - (b\rho - a\lambda)\omega}{\lambda^2 - \omega^2} \right|$$

da cui si ricava

$$(6)\qquad \begin{cases} 2\,\mu_1^{(\lambda)} = \left| \dfrac{A}{C}\, \dfrac{(2\,b\lambda - 2\,a\rho)\,\omega + (2\,b\rho - 2\,a\lambda)\,\lambda}{\lambda^2 - \omega^2} \right| C\omega \\ 2\,\mu_2^{(\lambda)} = \left| \dfrac{A}{C}\, \dfrac{-(2\,b\lambda - 2\,a\rho)\,\lambda - (2\,b\rho - 2\,a\lambda)\,\omega}{\lambda^2 - \omega^2} \right| C\omega. \end{cases}$$

Possiamo quindi enunciare i teoremi seguenti:

1° *La proiezione* m_λ *sull'equatore dell'estremo dell'asse* $M^{(\lambda)}$ *dei moti interni parziali, il cui periodo è* λ, *descrive con moto armonico una ellisse i cui semi-assi sono paralleli a quelli che descrive il polo nel moto armonico avente il corrispondente periodo.*

2° *Ogni passaggio di* m_λ *per un vertice della sua traiettoria, avviene contemporaneamente al passaggio del polo per un vertice della sua traiettoria nel moto armonico corrispondente di eguale periodo.*

3° *Le formule* (6) *esprimono le grandezze dei semi-assi dell'ellisse descritta dal punto* m_λ.

Il moto armonico del polo col periodo λ può ottenersi sovrapponendo due moti armonici paralleli agli assi ξ e η; ed analogamente quello di m_λ risulterà sovrapponendo due moti armonici paralleli alle stesse direzioni. *I due moti armonici del polo e di* m_λ *nella direzione* ξ *avranno la stessa fase oppure fase opposta secondoché*

$$(7)\qquad 2\,\frac{(b\lambda - a\rho)\,\omega + (b\rho - a\lambda)\,\lambda}{\lambda^2 - \omega^2} = (a+b)\,\frac{\rho - \lambda}{\omega + \lambda} + (a-b)\,\frac{\rho + \lambda}{\omega + \lambda}$$

sarà positivo o negativo; e similmente *i due moti armonici secondo* η *avranno la stessa fase o fase opposta secondoché sarà positivo o negativo*

$$(8)\qquad 2\,\frac{-(b\lambda - a\rho)\,\lambda - (b\rho - a\lambda)\,\omega}{\lambda^2 - \omega^2} = (a+b)\,\frac{\rho - \lambda}{\omega + \lambda} - (a-b)\,\frac{\rho + \lambda}{\omega - \lambda}.$$

6. Nel N. 329 dell'Astronomical Journal dell'anno scorso il sig. CHANDLER ha dato gli elementi relativi al moto armonico del polo avente il periodo annuale. Si può, partendo da quei dati, calcolare gli elementi corrispondenti del moto interno che, secondo le ipotesi fatte, sarebbe capace di indurlo.

A tal fine, prendendo per unità il giorno siderale, e supponendo di poter trascurare il rapporto $M_3^0/C\omega$, bisognerà porre nelle formule

$$\begin{cases} \omega = 2\pi \\ \rho = \dfrac{2\pi}{305} \\ \lambda = \dfrac{2\pi}{366} \\ 2\varphi = 0''.3 \\ 2\psi = 0''.08\,; \end{cases}$$

quindi approssimativamente avremo

$$2\,a = 2\,\mathrm{tg}\,\varphi = 2\,\pi \frac{3}{10 \times 360 \times 60 \times 60}$$

$$2\,b = 2\,\mathrm{tg}\,\psi = 2\,\pi \frac{8}{100 \times 360 \times 60 \times 60}\,.$$

Inoltre dovremo immaginare l'asse ξ inclinato di 45° sul meridiano di Greenwich.

Prendendo come abbiamo fatto precedentemente (vedi § 4)

$$\frac{A}{C} = \frac{305}{306}$$

si otterrà, applicando le (6),

$$\left\{\begin{aligned} 2\,\mu_1^{(\lambda)} &= \frac{37}{10^{10}}\,C\omega \\ 2\,\mu_2^{(\lambda)} &= \frac{27}{10^{10}}\,C\omega\,. \end{aligned}\right.$$

L'asse a dell'ellisse descritto dal polo è inclinato di 45° su quello di Greenwich, quindi l'asse maggiore dell'ellisse descritto da m_λ giacerà pure nel piano meridiano avente la stessa longitudine di 45°.

Oltre a ciò mentre la (7) è positiva, la (8) risulta negativa.

Possiamo dunque riassumere i risultati nel modo seguente:

Se si esaminano le variazioni che dovrebbe subire l'asse $OM^{(\lambda)}$ *dei moti interni terrestri i quali, nella ipotesi che la terra non fosse plastica, sarebbero capaci di indurre nel polo terrestre il moto armonico studiato da* CHANDLER *ed avente il periodo annuale, si ha:*

1° *Proiettando* $M^{(\lambda)}$ *sull'equatore nel punto* m_λ, *questo descriverebbe una ellisse il cui asse maggiore giacerebbe nel piano meridiano avente la longitudine di* 45°.

2° *Gli assi di questa ellisse sarebbero eguali a*

$$\frac{37}{10^{10}}\,C\omega \quad , \quad \frac{27}{10^{10}}\,C\omega\,.$$

3° *Decomponendo il moto del polo e di* m_λ *nelle direzioni degli assi delle ellissi, i due moti secondo gli assi maggiori avverrebbero colla stessa fase, quelli secondo gli assi minori con fase opposta.*

7. Come esercizio sulle nostre formule si può ripetere un calcolo perfettamente analogo per risolvere il problema seguente:

Supponiamo per un momento che esistano dei moti interni aventi un periodo di 430 giorni e cerchiamone gli elementi affinché essi siano capaci di indurre nel polo il moto studiato da CHANDLER *ed avente il detto periodo.*

Supponendo sempre di trascurare il rapporto $M_3^0/C\omega$, dovremo prendere

$$\left\{\begin{aligned} \omega &= 2\,\pi \\ \rho &= \frac{2\,\pi}{305} \\ \lambda &= \frac{2\,\pi}{430} \end{aligned}\right.$$

ed ammettendo che il moto corrispondente del polo sia circolare ed abbia una semi-amplitudine di o'', I, avremo

$$\varphi = \psi = 0'',1\,,$$

quindi approssimativamente

$$a = b = \operatorname{tg}\varphi = 2\,\pi\,\frac{1}{10 \times 360 \times 60 \times 60}$$

da cui risulta, applicando le (6),

$$\mu_1 = \mu_2 = \frac{4}{10^{10}}\,C\omega\,.$$

NOTA

Nel § 2 abbiamo ridotto le equazioni (a) alla forma (a') trascurando i termini (1). Riprendiamo ora le (a): dividendo le prime due per Ar, otterremo

$$\frac{dp}{rdt} + \left[\frac{C-A}{A} + \frac{M_3}{Ar}\right] q = -\frac{1}{A}\left(\frac{dM_1}{rdt} - M_2\right)$$

$$\frac{dq}{rdt} - \left[\frac{C-A}{A} + \frac{M_3}{Ar}\right] p = -\frac{1}{A}\left(\frac{dM_3}{rdt} + M_1\right).$$

Pongasi

$$\tau = \int_0^t \frac{rdt}{\omega}$$

denotando con ω il valore di r per $t = 0$. Prendiamo come variabile indipendente τ invece di t. Avremo

$$\frac{dp}{d\tau} + \left[\frac{C-A}{A}\,\omega + \frac{M_3}{A}\,\frac{\omega}{r}\right] q = -\frac{1}{A}\left(\frac{dM_1}{d\tau} - M_2\,\omega\right)$$

$$\frac{dq}{d\tau} - \left[\frac{C-A}{A}\,\omega + \frac{A_3}{M}\,\frac{\omega}{r}\right] p = -\frac{1}{A}\left(\frac{dM_2}{d\tau} + M_1\,\omega\right).$$

Chiamando poi M_3^0 il valore di M_3 per $\tau = 0$, e ponendo $r - \omega = \varepsilon$, sarà

$$M_3 = M_3^0 - \int_0^\tau (M_2\,p - M_1\,q)\,\frac{\omega}{r}\,d\tau - C\varepsilon\,.$$

Ne segue

$$\frac{dp}{d\tau} - \left[\frac{C-A}{A}\,\omega + \frac{M_3^0}{A}\right] q + vq = -\frac{1}{A}\left(\frac{dM_1}{d\tau} - M_2\,\omega\right)$$

$$\frac{dq}{d\tau} - \left[\frac{C-A}{A}\,\omega + \frac{M_3^0}{A}\right] p - vp = -\frac{1}{A}\left(\frac{dM_2}{d\tau} + M_1\,\omega\right)$$

essendo

$$v = -\frac{\omega}{r}\left\{\int_0^\tau \left(\frac{M_2}{A}\,p - \frac{M_1}{A}\,q\right)\frac{\omega}{r}\,d\tau + \left(\frac{C}{A} + \frac{M_3^0}{A\omega}\right)\varepsilon\right\}.$$

Supponiamo ora di sapere che p, q, ε sono piccolissime, tantoché rispetto a tutte le altre quantità che compariscono nelle formule *possano riguardarsi come infinitesimi del primo ordine.* Avremo allora che v *potrà considerarsi infinitesimo dello stesso ordine* e per conseguenza *i termini* qv, pv *saranno infinitesimi del secondo ordine.*

Trascurandoli otterremo le equazioni differenziali

$$(a'')\qquad \begin{cases} \dfrac{dp}{d\tau} + \left[\dfrac{C-A}{A}\omega + \dfrac{M_3^0}{A}\right] q = -\dfrac{1}{A}\left(\dfrac{dM_1}{d\tau} - M_2\,\omega\right) \\ \dfrac{dq}{d\tau} - \left[\dfrac{C-A}{A}\omega + \dfrac{M_3^0}{A}\right] p = -\dfrac{1}{A}\left(\dfrac{dM_2}{d\tau} + M_1\,\omega\right), \end{cases}$$

le quali hanno la stessa forma delle (a'); ad esse è quindi applicabile tutta l'analisi svolta nello scritto precedente. Dunque si perviene alle stesse formule, anche senza ammettere trascurabili le (1), ma soltanto supponendo che p, q, ε possano trattarsi come quantità infinitesime, e trascurare quindi quelle di ordine superiore. Dalle (a') alle (a'') vi è solo diversità nella variabile indipendente che è t nelle prime e τ nelle seconde; ma si osservi che, nell'applicazione ai moti terrestri, ponendo $\omega = 2\pi$, la variabile che effettivamente si prende come misura del tempo è τ.

XI.

OSSERVAZIONI SULLA MIA NOTA: SUI MOTI PERIODICI DEL POLO TERRESTRE

«Atti Acc. Sc. di Torino», vol, XXX, 1895, pp. 817–820.

1. Affinché non nasca alcun equivoco nella interpretazione dei teoremi dei §§ 3 e 4 della mia Nota: *Sui moti periodici del polo terrestre* [in questo vol.: X, pp. 141–151], mi permetto di fare le osservazioni seguenti. Per *moto armonico* di un punto intendo un movimento lungo una ellisse, in modo tale che le aree descritte dal raggio vettore che dal centro va al punto mobile siano proporzionali ai tempi impiegati a descriverle. *Periodo* del moto è la durata di una intera rivoluzione. Moti armonici *di un dato periodo* (non tenendo conto della loro ampiezza più o meno grande) ve ne hanno infiniti di specie diverse, che si otterranno variando il rapporto degli assi della traiettoria e la loro inclinazione rispetto ad un asse fisso. Un punto sarà suscettibile di assumere tutte le specie di possibili moti armonici di un dato periodo, quando potrà muoversi di moto armonico (con quel periodo) sopra ellissi i cui assi stanno in tutti i possibili rapporti di grandezza fra loro, e prendono tutte le possibili inclinazioni inclinazioni rispetto ad un asse fisso; diremo in questo caso che il punto può assumere un moto armonico *qualunque* di quel dato periodo, e quindi intenderemo che un periodo $2\pi/\lambda$ è *proprio* al moto di un dato punto quando questo può assumere un moto armonico *qualunque* di periodo $2\pi/\lambda$, o anche diremo per semplicità che il moto del punto *possiede* quel periodo.

2. Premesse queste *elementari* definizioni, ricorderò che dalle formule (4) e (5) della mia detta Nota [1] si conclude che il polo, mentre è suscettibile di assumere un moto armonico *qualunque* col periodo $2\pi/\lambda_n$ ($\lambda_n \lesseqgtr \omega$) non può assumere un moto armonico qualunque col periodo $2\pi/\omega$. Infatti, supposto $\lambda_n = \omega$, le formule (5) perdono significato e finché si lasciano indeterminate α_n, β_n, α'_n, β'_n, dovrà dunque di necessità essere $\lambda_n \gtrless \omega$. Perciò

(1) Nella stampa delle formule (5) è incorso un errore di segno, esse vanno scritte:

$$\frac{M_1}{A} = -\frac{\beta_0}{\omega} + \quad (D_1 \cos\omega t + D_2 \operatorname{sen}\omega t) + \cdots$$

$$\frac{M_2}{A} = \quad \frac{\alpha_0}{\omega} + (-D_1 \operatorname{sen}\omega t + D_2 \cos\omega t) + \cdots$$

[Tale errore è già stato corretto; N. d. R.].

potremo dire che il periodo $2\pi/\omega$ non è *proprio* dei moti del polo, o anche il moto del polo di rotazione *non possiede* il periodo $2\pi/\omega$.

Analogamente la possibilità della esistenza di un moto interno *qualunque* col periodo $2\pi/\lambda$ sarà caratterizzata dalla possibile esistenza nelle espressioni di M_1/A e M_2/A di termini della forma

$$m \cos \lambda t + n \operatorname{sen} \lambda t \quad , \quad m' \cos \lambda t + n' \operatorname{sen} \lambda t$$

in cui le costanti m, n, m', n' possono assumere fra loro rapporti qualunque, onde dalle (4) e (5), appunto perché per $\lambda_n = \rho$ i termini corrispondenti delle (4) perderebbero significato, si ricava che non può sussistere un moto interno *qualunque* col periodo $2\pi/\rho$, mentre è possibile la esistenza di moti interni *qualunque* periodici col periodo $2\pi/\lambda_n$ quando $\lambda_n \gtrless \rho$, e perciò, pure analogamente, potremo dire che il periodo $2\pi/\rho$ non è *proprio* dei moti interni.

In tal modo restano pienamente chiariti i teoremi dei detti paragrafi della mia Nota e quello che li riassume nel § 1 nei termini: *i moti interni e quelli del polo hanno eguali periodi due eccettuati, ciascuno dei quali è* PROPRIO *ad uno dei due movimenti* ed è tale *che l'altro non può possederlo.*

3. I due periodi $2\pi/\rho$ e $2\pi/\omega$ sono due periodi *singolari* e il loro diverso modo di comportarsi rispetto agli altri possibili periodi si manifesta non solo per ciò che abbiamo ora detto riguardo ad essere ciascuno di essi *proprio* ad uno solo dei movimenti, ma anche per altre ragioni.

Si noti che la parte periodica col periodo ω *che figura scritta in evidenza nella formula* (5) non ha influenza sopra alcun termine delle formule (4), come reciprocamente la parte periodica col periodo ρ *che figura scritta in evidenza nelle formule* (4) non ha influenza sopra alcun termine delle formule (5).

Abbiamo riconosciuto che *il moto del polo non possiede il periodo* $2\pi/\omega$, vale a dire che esso non è suscettibile di assumere un moto armonico qualunque col detto periodo; questo non esclude evidentemente che possano sussistere dei moti armonici speciali del polo aventi quel periodo.

Che questo sia possibile lo si riconosce dal fatto che in p e q possono esistere i termini

$$\begin{cases} \dfrac{\mu}{\omega-\rho} \operatorname{sen} \omega t - \dfrac{\nu}{\omega-\rho} \cos \omega t \\ -\dfrac{\mu}{\omega-\rho} \cos \omega t - \dfrac{\nu}{\omega-\rho} \operatorname{sen} \omega t \end{cases}$$

a cui corrisponderebbero nelle espressioni di M_1/A, M_2/A, i termini

$$\begin{cases} -\dfrac{\mu}{2\omega} \operatorname{sen} \omega t + \dfrac{\nu}{2\omega} \cos \omega t \\ \dfrac{\mu}{2\omega} \cos \omega t + \dfrac{\nu}{2\omega} \operatorname{sen} \omega t ; \end{cases}$$

quindi gli unici moti armonici possibili del polo aventi il periodo $2\pi/\omega$ debbono esser tali che *gli assi della traiettoria siano eguali fra loro*, ossia che essa si riduca ad un cerchio.

Collegando questa osservazione con ciò che si è detto sopra, ne risulta che il moto armonico circolare possibile del polo col periodo ω *non individua* i moti interni aventi il periodo stesso ω; mentre ogni moto del polo di periodo $\lambda_n \gtrless \omega$ *caratterizza* i moti interni aventi lo stesso periodo (vedi il § 5 della mia Nota). Anzi possono mancare assolutamente moti periodici del polo aventi il periodo ω, e non pertanto sussistere dei moti interni aventi quel periodo, ed allora questi *non hanno influenza alcuna* sul moto del polo. È appunto ciò che si verifica nel caso della terra, in cui non si è riconosciuta nessuna variazione diurna nelle latitudini e quindi si può concludere che *nulla esclude che i moti interni terrestri possano avere un periodo diurno*; *ma questa parte periodica non ha influenza sul moto del polo*, come appunto è enunciato nel § 4 della mia Nota.

Che al moto del polo terrestre *non sia proprio il periodo diurno* risulta appunto dall'osservazione che $2\pi/\omega$ rappresenta *un giorno* siderale.

XII.

SULLA TEORIA DEI MOTI DEL POLO NELLA IPOTESI DELLA PLASTICITÀ TERRESTRE

«Atti Acc. Sc. di Torino», vol. XXX, 1895, pp. 729-743.

1. In una Nota presentata nella seduta del 5 maggio scorso [1] ho accennato ad uno studio sulle perturbazioni prodotte dalla plasticità terrestre sui moti del polo di rotazione dovuti ai movimenti interni. Mi permetto ora di esporre brevemente alcune considerazioni preliminari su questo soggetto, riserbandomi di ritornarvi più diffusamente in appresso. Supporrò in questo primo studio, che i moti interni siano stazionarii, prescindendo dalle variazioni periodiche dei moti stessi che esaminerò in seguito, ed ammetterò che, quando il polo d'inerzia non coincide con quello istantaneo di rotazione, l'effetto dovuto alla plasticità consista in questo: *che il primo tende ad avvicinarsi all'altro.* Ritornerò poi sulla legge con cui può supporsi che accada questo avvicinamento.

Per le notazioni usate mi riferirò alla Nota già citata.

2. Riprendiamo in esame i risultati che si ottengono allorché si trascura la plasticità terrestre.

Ammesso che i moti interni siano stazionari, le formule (4) e (5) della Nota suddetta si riducono a

$$\begin{cases} p = -\dfrac{\beta_0}{\rho} + C_1 \cos \rho t - C_2 \operatorname{sen} \rho t \\ q = \dfrac{\alpha_0}{\rho} + C_1 \operatorname{sen} \rho t + C_2 \cos \rho t \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{M_1}{A} = -\dfrac{\beta_0}{\omega} \\ \dfrac{M_2}{A} = \dfrac{\alpha_0}{\omega} \end{cases}$$

da cui segue, posto $c_1 = C_1/\omega$, $c_2 = C_2/\omega$,

$$(1) \qquad \begin{cases} \dfrac{p}{\omega} = \dfrac{M_1}{A\rho} + c_1 \cos \rho t - c_2 \operatorname{sen} \rho t \\ \dfrac{q}{\omega} = \dfrac{M_2}{A\rho} + c_1 \operatorname{sen} \rho t + c_2 \cos \rho t. \end{cases}$$

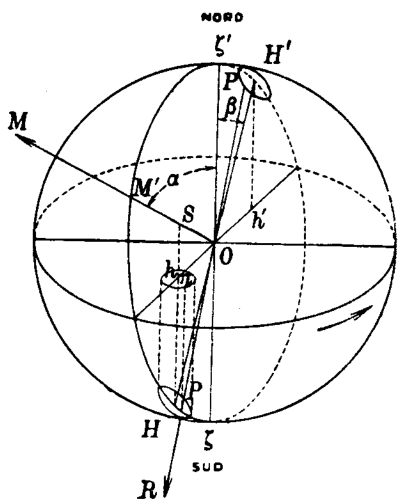
(1) *Sui moti periodici del polo terrestre*, in «Atti Acc. di Torino», vol. XXX; pp. 547-561. [In questo vol.: X, pp. 141-151].

Abbiamo poi

$$\rho = \frac{C-A}{A}\omega + \frac{M_3}{A}.$$

Supponiamo, per fissare le idee, che M_3 sia negativo, cioè che i moti interni abbiano la componente della coppia di quantità di moto nel senso dell'asse terrestre, di segno contrario alla coppia di quantità di moto della terra. Vedremo poi quali modificazioni debbono apportarsi alle formule se si verificasse il caso opposto.

In questa ipotesi, assumendo come positiva una rotazione che avviene nel verso delle lancette di un orologio, se conduciamo pel centro della terra come origine i due segmenti OR e OM che rappresentano rispettivamente la rotazione terrestre e l'asse dei moti interni e li prolunghiamo nel senso positivo, avremo che, mentre il primo incontrerà l'emisfero australe, l'altro incontrerà quello boreale.



Ciò premesso se stacchiamo nel verso positivo della direzione OR un segmento OP eguale ad 1, questo si proietterà in π sul piano dell'equatore, e le proiezioni di $O\pi$ sugli assi ξ e η saranno rispettivamente p/ω, q/ω. Analogamente, staccando sulla direzione OM un segmento OS eguale ad $OM/A\rho$, il punto S proiettato sul piano dell'equatore in h sarà tale che le proiezioni di Oh sugli assi ξ e η risulteranno eguali a $M_1/A\rho$, $M_2/A\rho$.

Allora le formule (1) potranno interpretarsi nella maniera seguente: *Il punto* π *descrive attorno al centro* h *una circonferenza ruotando colla velocità angolare uniforme* ρ.

3. Si costruisca ora una sfera di centro O e di raggio unitario. Essa incontrerà l'asse OM nel punto M' e l'asse OR nel punto P. Siccome questo punto si scosta pochissimo dal polo d'inerzia ζ, così potremo approssimativamente ritenere che esso descriva una circonferenza il cui centro sia il punto H della sfera avente per proiezione h sul piano dell'equatore.

Volendo ora considerare tutti gli elementi nell'emisfero boreale, tracciamo sulla sfera i punti diametralmente opposti a ζ, H, P che denoteremo rispettivamente con ζ', H', P'. Evidentemente i quattro punti P', H', ζ', M' apparterranno tutti all'emisfero boreale.

Chiamiamoli rispettivamente: *il polo di rotazione*, *il centro del moto polare*, *il polo d'inerzia*, *il centro dei moti interni*.

Sia h' la proiezione di H' sul piano dell'equatore; avremo

$$Oh' = Oh,$$

quindi

$$\operatorname{sen} H'\zeta' = Oh = OS \operatorname{sen} M'\zeta'$$

da cui segue

$$(2) \qquad \frac{\operatorname{sen} H'\zeta'}{\operatorname{sen} M'\zeta'} = OS = \frac{OM}{A\rho} = \frac{\sqrt{M_1^2 + M_2^2 + M_3^2}}{(C - A)\,\omega + M_3} = \varepsilon\,.$$

Ponendo

$$M = \sqrt{M_1^2 + M_2^2 + M_3^2}\,,$$

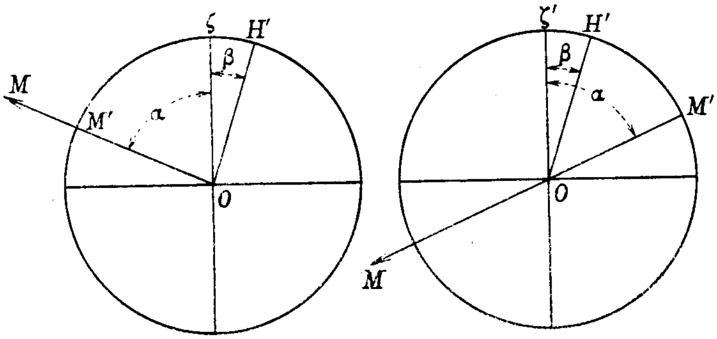
avremo

$$M_3 = -M \cos M'\zeta'$$

onde

$$(3) \qquad \left\{ \begin{aligned} \varepsilon &= \frac{M}{(C - A)\,\omega - M \cos M'\zeta'} \\ \rho &= \frac{(C - A)\,\omega - M \cos M'\zeta'}{A}\,. \end{aligned} \right.$$

Noi abbiamo fin qui supposto che M_3 fosse negativo, e perciò il punto d'intersezione di OM colla sfera è risultato nell'emisfero boreale. Se invece M_3 fosse negativo, prolunghiamo MO dalla parte del punto O finché non



incontri la superficie sferica nell'emisfero boreale nel punto che seguiterà a chiamarsi il centro dei moti interni e s'indicherà sempre con M'; mentre nel caso precedente il punto ζ' risultava intermedio fra M' e H', ora M' e H' giaceranno dalla stessa parte di ζ'. Chiamiamo rispettivamente α e β gli archi ζ'M' e ζ'H' e contiamoli a partire da ζ'; avremo allora che le (2) e (3) si scriveranno

$$\frac{\operatorname{sen} \beta}{\operatorname{sen} \alpha} = \mp \varepsilon$$

$$\varepsilon = \frac{M}{(C - A)\,\omega \mp M \cos \alpha}$$

$$\rho = \frac{(C - A)\,\omega \mp M \cos \alpha}{A}$$

in cui dovrà prendersi il segno superiore, oppure quello inferiore, secondochè siamo nel primo o secondo caso.

Potremo dunque riassumere le leggi trovate per il moto del polo, quando non si tenga conto della plasticità terrestre, e si suppongano stazionarii i moti interni, nei termini seguenti:

1° *Il centro dei moti interni, il polo d'inerzia e il centro dei moti polari appartengono ad uno stesso cerchio massimo della sfera.*

2° *Chiamando rispettivamente* α *e* β *le distanze contate sulla sfera fra il polo d'inerzia e i due centri dei moti interni e dei moti polari, si ha*

$$\frac{\operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}\alpha} = \mp\,\varepsilon = \frac{\mp M}{(C-A)\,\omega \mp M\cos\alpha}\,.$$

3° *Il polo di rotazione descrive una circonferenza attorno al centro dei moti polari colla velocità angolare*

$$\rho = \frac{(C-A)\,\omega \mp M\cos\alpha}{A}\,.$$

Queste leggi esprimono in modo manifesto quali sono gli effetti prodotti dai moti interni sul moto del polo. Infatti, se i primi non esistessero, il polo descriverebbe una circonferenza attorno al polo d'inerzia colla velocità angolare $\frac{C-A}{A}\,\omega$; quindi si riconosce una duplice azione dei moti interni, e cioè:

1° Nell'alterare il centro di rotazione dei moti polari che viene respinto o (attratto) dal centro dei moti interni lungo il cerchio massimo che congiunge questo punto col polo d'inerzia. Tale spostamento del centro dei moti polari è individuato dall'angolo β;

2° Nell'alterare la velocità angolare di rotazione del polo che viene variata della quantità $\mp M\cos\alpha/A$. Questa alterazione corrisponde evidentemente ad una mutazione del periodo Euleriano.

Facciamo per ultimo osservare che la posizione H' corrisponde ad un polo permanente di rotazione, vale a dire i moti interni fanno sì che il polo d'inerzia cessi dall'essere un polo permanente di rotazione e trasportano la proprietà di essere un polo permanente di rotazione dal punto ζ' al punto H'.

4. Dopo esserci in tal modo formato una idea dell'effetto dei moti interni, quando si trascuri la plasticità terrestre, veniamo ad esaminare le perturbazioni che questa produce nei moti del polo. A tal fine immaginiamo proiettata la superficie della terra dal centro O sulla sfera. Se ammettiamo di considerare i fenomeni durante un intervallo di tempo non lunghissimo, potremo supporre che, anche quando la terra per la sua plasticità sopporti delle deformazioni, non si alteri la configurazione dei mari e dei continenti della sfera, mentre rispetto a questi cambierà di posizione l'immagine del polo d'inerzia; così la plasticità della terra ci si manifesterà soltanto in quanto ammetteremo che l'immagine terrestre sulla sfera rimanga fissa, mentre l'immagine del polo d'inerzia sia un punto suscettibile di muoversi sulla sfera.

La ipotesi che i moti interni siano permanenti si tradurrà dicendo che il centro dei moti interni è un punto fisso della sfera e $M = \sqrt{M_1^2 + M_2^2 + M_3^2}$ si conserva costante.

Faremo anche la supposizione che i tre punti H', P', ζ' si conservino sempre vicinissimi fra loro, tantoché possano trascurarsi le potenze delle loro distanze superiori alla prima. Ricordiamo a questo proposito che tutta l'analisi della precedente Nota vale appunto in questo ordine di approssimazione.

Finalmente ammetteremo che la influenza della plasticità si faccia sentire nella maniera seguente: che il polo d'inerzia tenda costantemente ad avvicinarsi al polo di rotazione e vi tenda con tanto maggiore velocità quanto maggiore è la distanza fra questi due punti, in modo che *il polo d'inerzia si muova in ogni istante nella direzione dell'arco di cerchio massimo che lo congiunge alla posizione occupata in quell'istante dal polo di rotazione, con una velocità proporzionale alla distanza fra questi due punti.*

Chiameremo *coefficiente di plasticità* il rapporto μ fra la velocità del polo d'inerzia e la detta distanza. Esso avrà un valore positivo, che lasceremo indeterminato, avremo cioè $\infty > \mu > 0$; ma facciamo notare fin da ora il significato dei due casi limiti fra tutti quelli possibili; vale a dire se $\mu = 0$, ciò corrisponderà all'ammettere l'assenza di plasticità nella terra; se ammetteremo invece $\mu = \infty$, ciò corrisponderà alla ipotesi della adattabilità immediata dello sferoide terrestre.

Questi due casi non sono altro che i due casi limiti immaginati e sapientemente discussi dall'illustre prof. SCHIAPARELLI, nell'esame da lui fatto della influenza delle azioni geologiche sulla rotazione terrestre. Il caso intermedio non corrisponde perfettamente a quello immaginato dal prof. SCHIAPARELLI; la modificazione fatta alla sua ipotesi venne introdotta soltanto per rendere più facili i calcoli che seguiranno.

Riassumendo le diverse supposizioni fatte, avremo che il problema della rotazione terrestre si presenta nei termini seguenti:

Si hanno quattro punti situati sulla sfera: M' (centro dei moti interni) ζ' (polo d'inerzia), H' (centro dei moti polari), P' (polo di rotazione) *che seguono nel loro moto le seguenti leggi*:

1° M' *è un punto fisso della sfera*;

2° M', ζ', H' *appartengono ad uno stesso cerchio massimo e*

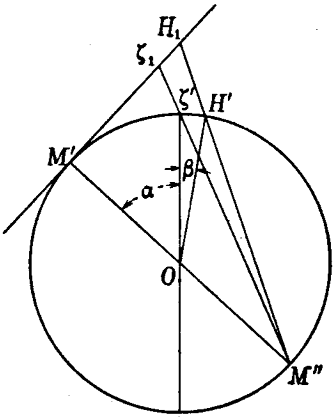
$$\frac{\operatorname{sen} \zeta' H'}{\operatorname{sen} \zeta' M'} = \mp \varepsilon = \frac{\mp M}{(C - A)\,\omega \mp M \cos \zeta' M'}\,;$$

3° P' *ruota in ciascun istante attorno ad* H' *colla velocità angolare*

$$\rho = \frac{(C - A)\,\omega \mp M \cos \zeta' M'}{A}\,;$$

4° ζ' *si muove in ogni istante nel senso* ζ'P' *con una velocità eguale al prodotto di* μ *per* ζ'P'.

5. Mediante le precedenti quattro condizioni si potrebbe porre immediatamente in equazione il problema; ma noi vogliamo trasformarlo ancora per renderlo accessibile ad un'analisi del tutto elementare.



A tale scopo passiamo dalla rappresentazione sferica della terra alla sua rappresentazione piana mediante una proiezione stereografica.

Sceglieremo come piano di proiezione il piano tangente alla sfera in M', e come centro di proiezione il punto M'' diametralmente opposto ad M'.

Se prendiamo come coordinate dei punti sulla sfera la colatitudine θ e la longitudine φ relative al polo M', il quadrato dell'elemento lineare sulla sfera sarà

$$d\sigma^2 = d\theta^2 + \operatorname{sen}^2\theta\, d\varphi^2$$

e nella rappresentazione stereografica

$$ds^2 = \frac{1}{\cos^4 \frac{1}{2}\theta}\,(d\theta^2 + \operatorname{sen}^2\theta d\varphi^2)$$

d'onde

$$\frac{ds}{d\sigma} = \frac{1}{\cos^2 \frac{1}{2}\theta}$$

vale a dire gli archi infinitesimi della sfera sono alterati colla rappresentazione stereografica nel rapporto $1/\cos^2 \frac{1}{2}\theta$.

Ora la ipotesi fatta, che siano trascurabili le potenze degli archi ζ'H', H'P', P'ζ' superiori alla prima, equivale a considerare gli archi stessi come infinitesimi; potremo dunque ritenere che nella proiezione stereografica le loro lunghezze si sono alterate nel rapporto $1/\cos^2 \frac{1}{2}\alpha$. Chiamando dunque ζ_1, H_1, P_1 le rispettive proiezioni stereografiche di ζ', H', P', avremo

$$\zeta_1 H_1 = \frac{\zeta' H'}{\cos^2 \frac{1}{2}\alpha}\,.$$

Ora sappiamo che

$$\frac{\operatorname{sen}\zeta' H'}{\operatorname{sen}\alpha} = \mp\varepsilon,$$

quindi sostituendo al sen ζ'H' l'arco ζ'H' sarà

$$\zeta' H' = \mp\varepsilon \operatorname{sen}\alpha$$

e perciò

$$\zeta_1 H_1 = \frac{\mp \varepsilon \operatorname{sen} \alpha}{\cos^2 \frac{1}{2} \alpha} = \mp 2 \varepsilon \operatorname{tg} \frac{1}{2} \alpha .$$

Ma

$$2 \operatorname{tg} \frac{1}{2} \alpha = \zeta_1 M',$$

dunque

$$\frac{\zeta_1 H_1}{\zeta_1 M'} = \mp \varepsilon .$$

Inoltre dalla similitudine nelle parti infinitesime che si ha in ogni rappresentazione stereografica potremo ricavare che il punto P_1 ruota lungo una circonferenza attorno al centro H_1 colla velocità angolare ρ, quindi le leggi del moto del polo allorché si trascura la plasticità terrestre che abbiamo enunciate nel § 3, si trasformeranno nelle seguenti:

1° *Le proiezioni stereografiche* M_1, ζ_1, H_1 *del centro dei moti interni, del polo d'inerzia e del centro dei moti polari sono allineati e*

$$\frac{\zeta_1 H_1}{\zeta_1 M'} = \mp \varepsilon ;$$

2° *La proiezione stereografica* P_1 *del polo di rotazione descrive una circonferenza attorno ad* H_1 *colla velocità angolare* ρ.

Per procedere ora a determinare le leggi del movimento, nella ipotesi della plasticità, trasformiamo le espressioni di ε e di ρ.

Posto $\zeta_1 M' = D$, avremo

$$D = 2 \operatorname{tg} \frac{1}{2} \alpha ,$$

quindi

$$\cos \alpha = \frac{1 - \frac{1}{4} D^2}{1 + \frac{1}{4} D^2} .$$

Ne segue che

$$(3') \quad \left\{ \begin{aligned} \varepsilon &= \frac{M}{(C - A)\,\omega \mp M \left(\dfrac{1 - \frac{1}{4} D^2}{1 + \frac{1}{4} D^2} \right)} \\ \rho &= \frac{(C - A)\,\omega \mp M \left(\dfrac{1 - \frac{1}{4} D^2}{1 + \frac{1}{4} D^2} \right)}{A} . \end{aligned} \right.$$

Possiamo dunque enunciare le quattro leggi del § 4, valide nella ipotesi della plasticità sotto una nuova forma, che è la seguente:

Si hanno quattro punti M', ζ_1, H_1, P_1, *in un piano:*

1° M' *è un punto fisso;*

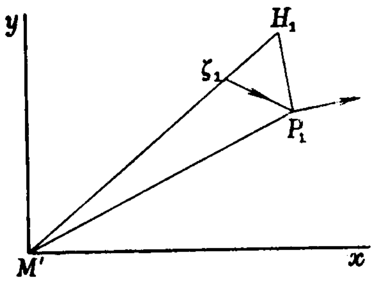
2° M', ζ_1, H_1 *sono in linea retta e, posto* $\zeta_1 M' = D$

$$\frac{\zeta_1 H_1}{D} = \frac{\mp M}{(C - A)\,\omega \mp M\left(\dfrac{1 - \frac{1}{4}D^2}{1 + \frac{1}{4}D^2}\right)} ;$$

3° P_1 *ruota in ciascun istante intorno ad* H_1 *colla velocità angolare*

$$\rho = (C - A)\,\omega \mp M\left(\frac{1 - \frac{1}{4}D^2}{1 + \frac{1}{4}D^2}\right);$$

4° ζ_1 *si muove in ogni istante nel senso* $\zeta_1 P_1$ *colla velocità* $\mu\delta$ *essendo* $\delta = \zeta_1 P_1$.



Quest'ultima legge si ottiene tenendo conto che, colla rappresentazione stereografica, le velocità dei punti restano alterate nello stesso rapporto degli archi infinitesimi adiacenti.

6. Poniamo ora in equazione il problema. Prendiamo perciò nel piano della rappresentazione stereografica due assi fissi x, y colla origine in M', e chiamiamo rispettivamente x, y; x_1, y_1; x_2, y_2 le coordinate dei punti P_1, ζ_1, H_1. La condizione seconda del paragrafo precedente si esprimerà scrivendo

$$\frac{x_2 - x_1}{-x_1} = \frac{y_2 - y_1}{-y_1} = \mp \varepsilon . \tag{4}$$

La condizione 3ª sarà

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -\rho\,(y_2 - y) \\ \dfrac{dy}{dt} = \rho\,(x_2 - x) , \end{cases} \tag{5}$$

da cui si ricava che il senso della rotazione sarà individuato dalla scelta della orientazione rispettiva degli assi x, y. Finalmente la condizione 4ª si scriverà

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = \mu\,(x - x_1) \\ \dfrac{dy_1}{dt} = \mu\,(y - y_1) . \end{cases} \tag{6}$$

Dalle (4) segue

$$x_2 = (1 \pm \varepsilon)\,x_1 \quad , \quad y_2 = (1 \pm \varepsilon)\,y_1 ;$$

quindi le (5) diverranno

$$(5') \qquad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -\rho\,[(1 \pm \varepsilon)\,y_1 - y] \\[2mm] \dfrac{dy}{dt} = \quad \rho\,[(1 \pm \varepsilon)\,x_1 - x]\,. \end{cases}$$

Da queste equazioni seguirà, ponendo $\Delta^2 = x^2 + y^2$,

$$\frac{d\Delta^2}{dt} = 2\left(x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt}\right) = 2\,\rho\,(1 + \varepsilon)\,(x_1\,y - y_1\,x)\,.$$

Si osservi che ρ è piccola e $(x_1\,y - y_1\,x)$ è il doppio dell'area del triangolo $M'\,P_1\,\zeta_1$, quindi è piccola dello stesso ordine della distanza $\zeta_1\,P_1$, perciò i cambiamenti di grandezza di Δ^2 e quindi di D^2 saranno piccoli. Oltre a ciò nelle espressioni (3′) trovate per ε e ρ, il termine

$$M\left(\frac{1 - \frac{1}{4}D^2}{1 + \frac{1}{4}D^2}\right)$$

è piccolo rispetto a $(C - A)\,\omega$; dunque esaminando il moto durante un tempo non lunghissimo, possiamo approssimativamente trascurare le variazioni di grandezza di ε e ρ ed assumerle in conseguenza costanti.

Le quattro equazioni (5′) e (6) si riducono allora ad equazioni lineari a coefficienti costanti.

7. Per integrarle si ponga

$$x = C\,e^{zt} \quad , \quad y = K e^{zt}$$
$$x_1 = C_1\,e^{zt} \quad , \quad y_1 = K_1\,e^{zt}$$

con $C\,, C_1\,, K\,, K_1$ costanti.

Sostituendo nelle (6) e (5′) i precedenti valori di $x\,, y\,, x_1\,, y_1$, otterremo

$$(7) \qquad \begin{cases} C_1\,(z + \mu) - C\mu = 0 \\ K_1\,(z + \mu) - K\mu = 0 \\ Cz + K_1\,\rho\,(1 \pm \varepsilon) - K\rho = 0 \\ -C_1\,\rho\,(1 \pm \varepsilon) + C\rho + Kz = 0\,; \end{cases}$$

perciò z sarà una radice della equazione di quarto grado

$$\begin{vmatrix} z + \mu & , & -\mu & , & 0 & , & 0 \\ 0 & , & 0 & , & z + \mu & , & -\mu \\ 0 & , & z & , & \rho\,(1 \pm \varepsilon) & , & -\rho \\ -\rho\,(1 \pm \varepsilon) & , & \rho & , & 0 & , & z \end{vmatrix} = 0$$

che sviluppata diviene

$$(8) \qquad z^4 + 2\,\mu z^3 + (\mu^2 + \rho^2)\,z^2 \mp 2\,\rho^2\,\mu\varepsilon z + \mu^2\,\rho^2\,\varepsilon^2 = 0\,.$$

Chiamando $z', z'', z''', z^{\mathrm{IV}}$ le quattro radici, e $C_1^{(i)}, C^{(i)}, K_1^{(i)}, K^{(i)}$ un sistema di valori per C_1, C, K_1, K che soddisfano le (7), avremo

$$(9) \qquad \left\{ \begin{aligned} x &= \sum_1^4 M_i C^{(i)} e^{z^{(i)}t} \\ y &= \sum_1^4 M_i K^{(i)} e^{z^{(i)}t} \end{aligned} \right.$$

$$(10) \qquad \left\{ \begin{aligned} x_1 &= \sum_1^4 M_i C_1^{(i)} e^{z^{(i)}t} \\ y_1 &= \sum_1^4 M_i K_1^{(i)} e^{z^{(i)}t} \end{aligned} \right.$$

in cui le M_i sono costanti arbitrarie.

8. L'equazione (8) si risolve facilmente. Posto infatti $\mp \varepsilon = \varepsilon'$ essa si scriverà

$$z^2 (z + \mu)^2 + \rho^2 (z + \mu\varepsilon')^2 = 0$$

d'onde

$$z (z + \mu) \pm i\rho (z + \mu\varepsilon') = 0$$

e quindi si avranno le quattro radici date da

$$z' = \frac{-\mu + u - i(\rho - v)}{2}$$

$$z'' = \frac{-\mu + u + i(\rho - v)}{2}$$

$$z''' = \frac{-\mu - u - i(\rho + v)}{2}$$

$$z^{\mathrm{IV}} = \frac{-\mu - u + i(\rho + v)}{2}$$

essendo

$$u = \sqrt{\frac{\sqrt{(\mu^2 + \rho^2)^2 - 16\mu^2\rho^2\varepsilon'(1 - \varepsilon')} + \mu^2 - \rho^2}{2}}$$

$$v = \sqrt{\frac{\sqrt{(\mu^2 + \rho^2)^2 - 16\mu^2\rho^2\varepsilon'(1 - \varepsilon')} + \rho^2 - \mu^2}{2}}$$

in cui i radicali sono presi nel loro valore assoluto.

9. Esaminiamo in particolare i due casi limiti considerati precedentemente.

Supponiamo che sia $\mu = 0$ (ossia che manchi la plasticità) allora la equazione (8) diverrà

$$z^4 + \rho^2 z^2 = 0 .$$

Due radici sono nulle, due altre divengono eguali a $\pm i\rho$. Il moto è dunque periodico col periodo $2\pi/\rho$, cioè quello euleriano variato nel rapporto esaminato nella Nota precedente.

Consideriamo invece il caso $\mu = \infty$. La equazione (8) diverrà, dividendola per μ^2, quindi facendo $1/\mu = 0$,

$$z^2 + \rho^2 \varepsilon^2 = 0,$$

ossia due delle radici diventano ∞ e le altre due $\pm i\rho\varepsilon$. Il moto è dunque periodico col periodo $2\pi/\rho\varepsilon = 2\pi A/M$. In questo caso le (6) dànno

$$x = x_1 \quad , \quad y = y_1 ,$$

vale a dire il polo d'inerzia coincide sempre con quello di rotazione, onde le (5') divengono

$$\frac{dx}{dt} = -\rho\varepsilon y = -\frac{M}{A} y \quad , \quad \frac{dy}{dt} = \rho\varepsilon x = \frac{M}{A} x$$

d'onde

$$x = N_1 \cos\left(\frac{M}{A} t + N\right) \quad , \quad y = N_1 \operatorname{sen}\left(\frac{M}{A} t + N\right)$$

N_1 ed N essendo due costanti arbitrarie. Il polo di rotazione descrive dunque una circonferenza attorno al centro dei moti interni colla velocità angolare M/A.

XIII.

SULLA ROTAZIONE DI UN CORPO IN CUI ESISTONO SISTEMI CICLICI

« Rend. Acc. Lincei », ser. 5ª, t. IV, 2° sem. 1895, pp. 93-97.

1. In una Memoria pubblicata nel volume 97 del « Giornale di Crelle » (1) HELMHOLTZ introdusse il concetto dei sistemi ciclici, il quale ha una importanza fondamentale nella teoria del calore e nella elettrodinamica, come i lavori di lui e di altri hanno dimostrato. Nell'opera postuma di HERTZ (2), in cui molte idee di HELMHOLTZ assumono forma sistematica, lo studio dei moti ciclici occupa un posto rilevante.

Le coordinate indipendenti di un sistema possono distinguersi in due categorie: quelle che non sono contenute esplicitamente nella espressione della forza viva del sistema, ma vi compariscono solo derivate rapporto al tempo, e quelle che figurano esplicitamente nella detta espressione della forza viva (3).

Le prime si chiamano le *coordinate cicliche* del sistema e le loro derivate le *intensità cicliche*, mentre le altre possono chiamarsi i *parametri* (4). Le coordinate cicliche esistono in un sistema quando sono possibili dei moti i quali non alterano la distribuzione delle sue masse, e producono solo uno scambio ciclico delle masse fra loro; ma questo, come si riconosce facilmente, non è il solo caso in cui esse si presentano.

Quando può ritenersi con sufficiente approssimazione che la forza viva del sistema dipenda solo dalle sue intensità cicliche, allora HELMHOLTZ chiama il sistema *ciclico*, e a seconda che esiste una sola, o esistono due o più coordinate cicliche lo denomina monociclico, biciclico, policiclico.

È evidente che un sistema rigorosamente ciclico non potrà aversi se non quando i parametri saranno costanti.

2. Immaginiamo ora un sistema i cui legami non impediscano la rotazione attorno ad un punto, e che abbia un dato numero di coordinate cicliche, in modo che, scelto un certo sistema di assi girevole attorno al punto fisso, le variabili corrispondenti che ne individuano la configurazione, siano, oltre

(1) *Principien der Statik monocyklischer Systeme.* « Crelle's Journal », vol. 97, 1884, I. p. 111; II, p. 317. Vedi anche: *Studien zur Statik monocyklischer Systeme.* « Sitzb. d. Ak. d. Wiss. » zu Berlin, 1884. Vedi « Helmholtz's Wissenschaftliche Abhandlungen », III Band.

(2) *Die Prinzipien der Mechanik,* II Buch, Abschnitt 5.

(3) Il caso così detto di *ignoration of coordinates* era già stato esaminato dai sigg. THOMSON e TAIT, *Treatise on natural philosophy.* Vol. I, Part. I. Art. 319. Cambridge 1879.

(4) HERTZ chiama parametri le coordinate non cicliche solo nel caso in cui il sistema è ciclico, ma può evidentemente estendersi questa denominazione nel caso generale.

quelle stesse che determinano la posizione di questi assi, un certo numero di coordinate cicliche e di parametri. Supponiamo che il moto del sistema relativamente agli assi stessi sia individuato dai detti parametri e dalle coordinate cicliche. Noi riguarderemo questo moto relativo come il *moto interno del sistema*. Dalla ipotesi che *questo moto interno sia ciclico* non ne viene come conseguenza che il moto assoluto del sistema sia pure ciclico. Infatti la espressione della forza viva sarà costituita dalla forza viva dei moti interni, da quella di trascinamento dovuta alla rotazione degli assi, e finalmente dalla somma dei prodotti delle tre componenti della velocità angolare del sistema secondo gli assi mobili moltiplicate rispettivamente per le componenti della coppia di quantità di moto dei movimenti interni nelle medesime direzioni. Ora mentre la prima parte della forza viva conterrà solo i parametri e le intensità cicliche, e la seconda i parametri e le componenti della velocità angolare di rotazione, la terza parte dipenderà anche dalle derivate prime dei parametri, giacché questi elementi compariranno in generale nelle espressioni delle componenti della coppia di quantità di moto dei movimenti interni.

Immaginiamo per un momento che gli assi di riferimento siano fissi ed i parametri costanti. Se il sistema sarà abbandonato alla propria inerzia, i *momenti ciclici* e quindi le *intensità cicliche* si manterranno costanti, e perciò in questo caso *il moto sarà ad un tempo adiabatico ed isociclico.*

Ammettiamo invece che gli assi siano girevoli liberamente attorno alla propria origine; supposti i parametri costanti e mantenendo costanti le intensità cicliche dei moti interni, questi si conserveranno stazionarî e perciò, se non esisterà alcuna coppia di rotazione, la questione della rotazione degli assi potrà ricondursi a quella classe di problemi che ho trattati in alcune precedenti Memorie (5) nelle quali venne calcolata l'alterazione che i moti interni stazionarî inducono sul moto di rotazione del sistema.

Riportandoci ai risultati ottenuti nelle dette Memorie può concludersi il teorema seguente: *Allorché un sistema girevole attorno ad un punto fisso non è sollecitato da alcuna coppia di rotazione ed ha nel suo interno dei moti isociclici (i parametri restando costanti), allora le componenti della rotazione sono funzioni ellittiche del tempo, ed i coseni, che gli assi d'inerzia del sistema formano con gli assi fissi, sono funzioni uniformi del tempo.*

3. Ci si può ora chiedere: *Supposti sempre costanti i parametri, sono necessarie delle forze affinché il moto interno si conservi isociclico?*

In altri termini: *se il sistema è abbandonato alla propria inerzia, i moti interni si alterano in intensità o si mantengono isociclici?*

Si può rispondere a questa domanda e dimostrare che, *almeno quando i momenti d'inerzia del sistema sono differenti fra loro, se il sistema è abban-*

(5) *Sulla teoria dei movimenti del polo terrestre.* « Astr. Nachr. », Bd. 138, N. 3291-2; *Sulla teoria dei moti del polo terrestre*; *Sul moto di un sistema nel quale sussistono moti interni stazionari*; *Sopra un sistema di equazioni differenziali*; *Un teorema sulla rotazione dei corpi, ecc.* « Atti della R. Acc. di Torino », Anno 1894-95. *Sulle rotazioni permanenti stabili, ecc.* « Annali di Mat. », T. 23. [In questo vol.: V-IX, pp. 87-140 e XV, pp. 173-186].

donato interamente alla propria inerzia, e si conservano costanti i parametri, i moti interni non si mantengono isociclici. Collegando questo risultato con ciò che abbiamo detto precedentemente, si conchiude: *Come i moti interni alterano la rotazione del sistema, così questa influisce sui moti interni*, giacchè se la rotazione non esistesse, il moto sarebbe isociclico.

Vi è dunque un'azione mutua fra la rotazione del corpo ed i moti ciclici interni.

Il moto del sistema, allorché esso è abbandonato interamente alla propria inerzia, può chiamarsi un *moto adiabatico*; però, almeno in generale, *il moto ciclico interno non è adiabatico*, perché si ha che i momenti ciclici dei moti interni dipendono dalle componenti della rotazione del sistema.

Trovata una risposta alle precedenti domande, ci possiamo proporre la questione generale: *Un sistema, nel cui interno esistono moti ciclici qualunque* (ammesso sempre che i parametri siano costanti) *è abbandonato alla propria inerzia, come avviene la rotazione del sistema e con quale legge variano le sue intensità cicliche in virtù della mutua azione che fra loro esercitano questi moti?*

Il problema posto in una forma così generale sembra a primo aspetto molto complicato, giacché i moti ciclici interni possono immaginarsi in una maniera affatto arbitraria; tuttavia esso è suscettibile di una completa risoluzione, giacché può ricondursi al caso precedente per mezzo del seguente teorema:

Un corpo avente costante la forma e la distribuzione di densità nell'interno del quale esiste un sistema ciclico i cui parametri possono ritenersi invariabili e sulle cui coordinate cicliche non agisce alcuna forza, ruota attorno ad un punto fisso, sotto l'azione di una coppia motrice, come un altro corpo nel quale esistono moti interni stazionarii e che è sollecitato dalla stessa coppia motrice. Le intensità cicliche dipendono in ogni istante dalla rotazione del corpo.

4. Per eseguire effettivamente la risoluzione del problema non conviene però di ricondurlo al problema precedente, e quindi applicare le formule che furono date in quel caso nelle Memorie sopra citate.

È più utile invece operare direttamente sulle equazioni differenziali del problema trasformandole in altre aventi la forma

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d(F_1, F_2)}{d(y, z)} \quad , \quad \frac{dy}{dt} = \frac{d(F_1, F_2)}{d(z, x)} \quad , \quad \frac{dz}{dt} = \frac{d(F_1, F_2)}{d(x, y)}$$

la cui integrazione ha formato il soggetto di una mia precedente Nota [(6)].

Si giunge così al risultato seguente:

Se un sistema girevole attorno ad un punto fisso e nel cui interno esistono moti ciclici (essendo costanti i parametri) è abbandonato alla propria inerzia, le componenti della rotazione e tutte le intensità cicliche sono funzioni ellittiche del tempo ed i coseni degli angoli che gli assi mobili di riferimento formano con assi fissi sono funzioni uniformi del tempo rappresentabili razionalmente mediante funzioni σ ed esponenziali nel cui argomento il tempo entra linearmente.

(6) *Sopra un sistema di equazioni differenziali.* « Atti della R. Accad. di Torino », 1895. [In questo vol.: VIII, pp. 122–128].

Le espressioni delle componenti p, q, r *della rotazione del sistema e quelle delle intensità cicliche* ω_i *assumono la forma*

$$p = \frac{M_1^{(1)}\sigma_1 + M_1^{(2)}\sigma_2 + M_1^{(3)}\sigma_3 + M_1^{(4)}\sigma}{M_0^{(1)}\sigma_1 + M_0^{(2)}\sigma_2 + M_0^{(3)}\sigma_3 + M_0^{(4)}\sigma}$$

$$q = \frac{M_2^{(1)}\sigma_1 + M_2^{(2)}\sigma_2 + M_2^{(3)}\sigma_3 + M_2^{(4)}\sigma}{M_0^{(1)}\sigma_1 + M_0^{(2)}\sigma_2 + M_0^{(3)}\sigma_3 + M_0^{(4)}\sigma}$$

$$r = \frac{M_3^{(1)}\sigma_1 + M_3^{(2)}\sigma_2 + M_3^{(3)}\sigma_3 + M_3^{(4)}\sigma}{M_0^{(1)}\sigma_1 + M_0^{(2)}\sigma_2 + M_0^{(3)}\sigma_3 + M_0^{(4)}\sigma}$$

$$\omega_i = \frac{P_i^{(1)}\sigma_1 + P_i^{(2)}\sigma_2 + P_i^{(3)}\sigma_3 + P_i^{(4)}\sigma}{M_0^{(1)}\sigma_1 + M_0^{(2)}\sigma_2 + M_0^{(3)}\sigma_3 + M_0^{(4)}\sigma}$$

in cui l'argomento u *delle funzioni* σ *si esprime mediante il tempo* t *colla formula*

$$u = n(t - t_0)$$

essendo n *e* t_0 *quantità costanti, l'ultima delle quali arbitraria.*

I coefficienti $M_i^{(s)}$, $P_i^{(s)}$ *sono quantità costanti, ed al pari di* n *e delle costanti ellittiche si esprimono mediante le radici di una equazione del quarto grado i cui coefficienti sono funzioni razionali delle costanti meccaniche del problema.*

5. Il problema è suscettibile di una ulteriore estensione in modo da comprendere in sé il caso del moto isociclico e di quello adiabatico ora esaminato. Si può supporre, cioè, che alcune delle intensità cicliche si conservino costanti in virtù di forze agenti in corrispondenza delle coordinate cicliche stesse, e che sul sistema non siano applicate altre forze che queste, mentre i parametri si mantengono costanti.

In tale ipotesi possono determinarsi le componenti della rotazione, le intensità cicliche incognite e le dette forze come altrettante funzioni ellittiche del tempo.

Il problema che in tal modo resta risoluto è assai più complesso di quello EULERO–JACOBI di un sistema rigido, pure le stesse trascendenti, cioè le funzioni ellittiche e le funzioni Jacobiane bastano per ottenerne la soluzione; soltanto queste trascendenti compariscono nelle formule finali in maniera diversa che nella soluzione di JACOBI relativa al sistema rigido.

È evidente che i risultati enunciati nel § 3 posson trovare una applicazione nel problema della rotazione terrestre. L'esame dei moti ciclici esistenti nella terra in rapporto colla sua rotazione, può essere spinto innanzi nel senso da tener conto, oltre che dell'azione che i primi esercitano sull'altra, anche della reazione prodotta dal moto di rotazione, sui movimenti ciclici in quanto essa tende per sé, all'infuori di qualsiasi altra causa, ad alterarne le intensità.

Gli sviluppi relativi alle proposizioni enunciate in questa Nota formano il soggetto di un lavoro che verrà inserito negli «Annali di Matematica».

XIV.

SUL MOTO DI UN SISTEMA NEL QUALE SUSSISTONO MOTI INTERNI VARIABILI

« Rend. Acc. Lincei », Ser. 5ª, vol. IV, 2° sem. 1895, pp. 107-110.

Il prof. PEANO in una Nota presentata all'Accademia di Torino nella seduta del 23 giugno u. s., e testé uscita alla luce, mostra che, in un sistema simmetrico attorno ad un asse che mantiene costante la forma e la distribuzione di densità, possono farsi variare i moti interni (conservandone piccolissima la coppia di quantità di moto) con una legge tale che il polo di rotazione vada continuamente allontanandosi dal polo d'inerzia.

Poiché questo risultato può ottenersi come una evidente ed immediata conseguenza di formule e di considerazioni da me esposte in alcune precedenti Memorie, che il prof. PEANO si dimentica di citare, sebbene pubblicate quest'anno negli stessi « Atti dell'Accademia di Torino », così mi permetto di mostrarlo qui evitando l'impiego, fatto dal detto autore, di metodi e di notazioni non accettati generalmente e di procedimenti poco appropriati a rendere chiara la via tenuta ed il risultato conseguito.

Le formule a cui mi riferisco sono le seguenti:

$$(a)\qquad \begin{cases} A\dfrac{dp}{dt} + (C - B)\,qr + m_3 q - m_2 r + \dfrac{dm_1}{dt} = 0 \\[2mm] B\dfrac{dq}{dt} + (A - C)\,rp + m_1 r - m_3 p + \dfrac{dm_2}{dt} = 0 \\[2mm] C\dfrac{dr}{dt} + (B - A)\,pq + m_2 p - m_1 q + \dfrac{dm_3}{dt} = 0\,, \end{cases}$$

nelle quali m_1, m_2, m_3 denotano le componenti della coppia di quantità di moto dovuta ai moti interni secondo gli assi principali centrali d'inerzia; p, q, r sono le componenti della rotazione secondo gli stessi assi e A, B, C sono i momenti principali centrali d'inerzia, che debbono supporsi costanti finché si ammette che i moti interni non alterino la forma e la distribuzione di densità del corpo [1].

In una Memoria pubblicata nelle « Astronomische Nachrichten » [2] ho mostrato che, scelto ad arbitrio il moto del polo, e quindi la relativa *polodia*

(1) *Sulla teoria dei moti del polo terrestre*. « Atti R. Acc. di Torino », 1895 [in questo vol.: VI, pp. 108-112].

(2) Bd. 138, N. 3291-92. Art. IV [in questo vol.: V, pp. 87-107]. Vedi anche la Nota citata precedentemente.

sull'ellissoide d'inerzia, si possono calcolare i moti interni che inducono il detto movimento del polo ed ho anche indicato le formule per raggiungere il risultato.

Si osservi ora che se l'ellissoide d'inerzia è di rivoluzione ed i moti interni sono nulli, le polodie sono, come è ben noto, i paralleli dell'ellissoide. Volendo dunque ottenere un moto che allontani sempre più il polo di rotazione dal polo d'inerzia mediante moti interni piccolissimi, basterà evidentemente scegliere come polodia una curva a spirale sull'ellissoide d'inerzia, le cui spire si avvicinino ai paralleli dell'ellissoide, e determinare quindi moti interni che corrispondano alla detta polodia. Quanto più strette saranno le spire e quindi quanto meno si discosteranno dai paralleli, tanto più piccola risulterà la quantità di moto dei moti interni necessaria ad indurre la deviazione del polo dai paralleli stessi, e perciò tanto più grande sarà il cammino che dovrà descrivere il polo di rotazione per raggiungere una data deviazione da quello di inerzia.

Per rendere assolutamente intuitivo il calcolo, si facciano comparire nella (a) i coseni $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ che l'asse fisso della coppia di quantità di moto forma con gli assi d'inerzia. Posta la quantità costante

$$(Ap + m_1)^2 + (Bq + m_2)^2 + (Cr + m_3)^2 = K^2$$

avremo (vedi note citate)

$$(1) \qquad \gamma_1 = \frac{Ap + m_1}{K} \quad , \quad \gamma_2 = \frac{Bq + m_2}{K} \quad , \quad \gamma_3 = \frac{Cr + m_3}{K}$$

onde se $B = A$, e si pone

$$K\left(\frac{1}{A} - \frac{1}{C}\right) = \lambda \quad , \quad a = \frac{m_1}{A} \quad , \quad b = \frac{m_2}{A} \quad , \quad c = \frac{m_3}{C} \, ,$$

le (a) diverranno

$$\frac{d\gamma_1}{dt} + \lambda\gamma_2\gamma_3 + c\gamma_2 - b\gamma_3 = 0$$

$$\frac{d\gamma_2}{dt} - \lambda\gamma_3\gamma_1 + a\gamma_3 - c\gamma_1 = 0$$

$$\frac{d\gamma_3}{dt} + b\gamma_1 - a\gamma_2 = 0$$

le quali, in ultima analisi, non rappresentano che le formule di POISSON, in cui le componenti p, q, r della rotazione siano ricavate dalle (1) espresse mediante i coseni di direzione $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$.

Posto

$$\gamma_1 = \operatorname{sen}\theta\cos\varphi \quad , \quad \gamma_2 = \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi \quad , \quad \gamma_3 = \cos\theta \, ,$$

con

$$\varphi = \lambda \int \cos\theta \, dt$$

le equazioni precedenti assumeranno la forma

$$\begin{aligned} \theta' \cos\theta \cos\varphi &+ c\gamma_2 - b\gamma_3 = 0 \\ \theta' \cos\theta \operatorname{sen}\varphi &+ a\gamma_3 - c\gamma_1 = 0 \\ -\theta' \operatorname{sen}\theta \quad &+ b\gamma_1 - a\gamma_2 = 0 , \end{aligned}$$

le quali sono soddisfatte prendendo

$$a = -\theta' \operatorname{sen}\varphi \quad , \quad b = \theta' \cos\varphi \quad , \quad c = 0 ;$$

quindi

$$M = \sqrt{m_1^2 + m_2^2 + m_3^2} = \theta' A .$$

Prendendo θ' costante e piccolissimo, la grandezza M delle coppie di quantità di moto dei movimenti interni si conserverà piccolissima, mentre avremo

$$p = \frac{K\gamma_1 - m_1}{A} = \frac{K}{A} \operatorname{sen}\theta \cos\varphi + \theta' \operatorname{sen}\varphi$$

$$q = \frac{K\gamma_2 - m_2}{A} = \frac{K}{A} \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi - \theta' \cos\varphi$$

$$r = \frac{K\gamma_3 - m_3}{C} = \frac{K}{C} \cos\theta ,$$

d'onde chiamando ψ l'angolo che l'asse d'inerzia forma con quello di rotazione

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{\sqrt{p^2 + q^2}}{r} = \frac{\sqrt{\frac{K^2}{A^2} \operatorname{sen}^2\theta + \theta'^2}}{\frac{K}{C} \cos\theta}$$

formula che prova che ψ va continuamente aumentando se θ' è positivo, e può raggiungere e sorpassare il valore $\pi/2$.

La possibilità che dopo un certo tempo l'azione dei moti interni produca uno spostamento grande del polo di rotazione rende insufficiente, allorché si vogliono studiare i piccoli moti del polo di rotazione (indotti da moti interni variabili), di porre la condizione che la grandezza della coppia di quantità di moto di questi non oltrepassi un certo limite.

È perciò che volendo seguire una trattazione rigorosa nell'esame di questa questione, ho tenuto un cammino diverso in una mia precedente Memoria [3]. In essa sono partito esplicitamente dalla ipotesi che durante tutto l'intervallo di tempo (dell'ordine delle grandezze finite) in cui si studia il moto, il polo di rotazione eseguisca dei piccoli movimenti attorno al polo d'inerzia con date leggi e ho cercato quali sono i moti interni capaci di indurre i detti movimenti. Quindi nulla infirma la legittimità della determinazione dei moti interni fatta in questa maniera.

(3) *Sui moti periodici del polo terrestre.* «Atti R. Acc. di Torino», 5 maggio 1895. *Osservazioni* sulla detta Memoria, 23 giugno 1895. – Vedi specialmente la Nota posta alla fine della prima Memoria [in questo vol.: X, XI, pp. 141–154].

XV.

SULLE ROTAZIONI PERMANENTI STABILI DI UN SISTEMA IN CUI SUSSISTONO MOTI INTERNI STAZIONARI

« Annali di Matematica », ser. 2ª, t. 23, 1895, pp. 269–285.

1. Le equazioni della rotazione di un sistema libero non soggetto a forze esterne e nel cui interno sussistono moti stazionarii hanno la forma:

$$(a)\qquad \begin{cases} A\dfrac{dp}{dt} + (C - B)\,qr + m_3\,q - m_2\,r = 0 \\[2mm] B\dfrac{dq}{dt} + (A - C)\,rp + m_1\,r - m_3\,p = 0 \\[2mm] C\dfrac{dr}{dt} + (B - A)\,pq + m_2\,p - m_1\,q = 0\,, \end{cases}$$

in cui A, B, C denotano i momenti costanti d'inerzia del sistema relativi ai suoi assi principali centrali d'inerzia ξ, η, ζ; m_1, m_2, m_3 sono le componenti della coppia di quantità di moto dei movimenti interni nelle direzioni ξ, η, ζ; e finalmente p, q, r sono le componenti della rotazione nelle medesime direzioni [1].

In una Memoria stampata nelle « Astronomische Nachrichten » [2] ho studiato la distribuzione degli assi di rotazione permanenti e delle corrispondenti rotazioni permanenti, rimandando ad altra occasione l'esame della stabilità dei detti assi. Poiché una tale questione è fondamentale nel problema che ci occupa, così ne darò qui la risoluzione.

2. Cominciamo dal trasformare le (a). Pongasi:

$$(1)\qquad \begin{cases} f_1 = \dfrac{1}{2\sqrt{ABC}}\left[(Ap + m_1)^2 + (Bq + m_2)^2 + (Cr + m_3)^2\right] \\[3mm] f_2 = \dfrac{1}{2\sqrt{ABC}}\left[Ap^2 + Bq^2 + Cr^2\right]: \end{cases}$$

le (a) potranno scriversi [3]:

$$(a')\qquad \begin{cases} \dfrac{dp}{dt} = \dfrac{d(f_1\,,f_2)}{d(q\,,r)} \\[3mm] \dfrac{dq}{dt} = \dfrac{d(f_1\,,f_2)}{d(r\,,p)} \\[3mm] \dfrac{dr}{dt} = \dfrac{d(f_1\,,f_2)}{d(p\,,q)}\,, \end{cases}$$

(1) Vedi la mia Nota: *Sulla teoria dei moti del polo terrestre.* « Atti della R. Accademia di Torino ». Adunanza del 3 febbraio 1985 [in questo vol.: VI, pp. 108–112].

(2) N. 3291–2. Bd. 138 [in questo vol.: V, pp. 87–107].

(3) Cfr. la mia Nota: *Sopra un sistema di equazioni differenziali.* « Atti della R. Accademia di Torino ». Adunanza 31 marzo 1895 (in questo vol.: VIII, pp. 122–128].

e si riconosce immediatamente che esse ammettono i due integrali:

$$(2) \qquad f_1 = \text{cost.} = h_1 \quad , \quad f_2 = \text{cost.} = h_2 \, .$$

Supponiamo ora che p, q, r rappresentino le coordinate di un punto mobile P; è evidente che lo studio della rotazione del sistema equivale a quello del moto di P; quindi il problema si riduce ad *esaminare il moto di un punto* P *di coordinate p, q, r, tale che le componenti della sua velocità nelle direzioni ξ, η, ζ sono espresse dalle equazioni* (a').

Considerando p, q, r come coordinate correnti, e variando h_1 e h_2 in tutti i modi possibili, le (2) rappresentano due sistemi di quadriche, e il sistema doppiamente infinito di quartiche che ne formano le intersezioni ci daranno tutte le traiettorie possibili del punto mobile P [4].

3. Esaminando le cose sotto questo aspetto, il determinare le rotazioni permanenti del sistema equivale a trovare tutte le posizioni in cui il punto P sta in quiete o, come diremo per semplicità, *sta in equilibrio*.

Ora queste posizioni si avranno dove:

$$(3) \qquad \frac{d(f_1, f_2)}{d(q, r)} = 0 \quad , \quad \frac{d(f_1, f_2)}{d(r, p)} = 0 \quad , \quad \frac{d(f_1, f_2)}{d(p, q)} = 0 ,$$

ossia:

$$(3') \qquad \frac{(\partial f_1)/(\partial p)}{(\partial f_2)/(\partial p)} = \frac{(\partial f_1)/(\partial q)}{(\partial f_2)/(\partial q)} = \frac{(\partial f_1)/(\partial r)}{(\partial f_2)/(\partial r)} ,$$

cioè dove sono tangenti fra loro le due superficie (2). Teniamo ora presente che questi punti di contatto corrispondono ai punti doppi delle quartiche (2), onde avremo il teorema:

Le posizioni di equilibrio del punto P *saranno i punti doppi delle quartiche $f_1 = h_1$, $f_2 = h_2$ ed il luogo di questi punti sarà la curva avente per equazioni le* (3').

Le (3) possono scriversi:

$$(3') \qquad \left\{ \begin{aligned} &(C - B)\, qr + m_3 q - m_2 r = 0 \\ &(A - C)\, rp + m_1 r - m_3 p = 0 \\ &(B - A)\, pq + m_2 p - m_1 q = 0 , \end{aligned} \right.$$

quindi *la condizione necessaria e sufficiente affinché il luogo delle posizioni di equilibrio di* P *si spezzi sarà*:

$$(4) \qquad (B - C)(C - A)(A - B)\, m_1 m_2 m_3 = 0 \, .$$

(4) Il punto P potrebbe chiamarsi l'*indice della rotazione* per distinguerlo dal *polo di rotazione*, intendendo di denotare con questo nome la intersezione dell'asse istantaneo di rotazione coll'ellissoide d'inerzia. Fra le coordinate p, q, r di P (indice della rotazione) e quelle ξ, η, ζ del polo di rotazione passano le relazioni semplicissime:

$$\frac{\xi}{p} = \frac{\eta}{q} = \frac{\zeta}{r} = \frac{1}{\sqrt{2h_2}\,\sqrt[4]{ABC}} .$$

Le (3) si mettono anche sotto la forma:

$$(5) \qquad A + \frac{m_1}{p} = B + \frac{m_2}{q} = C + \frac{m_3}{r},$$

onde, chiamando λ il valore comune dei tre membri, si avrà:

$$(5') \qquad p = \frac{m_1}{\lambda - A} \quad , \quad q = \frac{m_2}{\lambda - B} \quad , \quad r = \frac{m_3}{\lambda - C}.$$

Consideriamo il caso generale in cui il luogo delle posizioni di equilibrio di P non si spezzi e perciò ammettiamo m_1, m_2, m_3 diversi da zero e $A > B > C$. Tutti i suoi punti si otterranno facendo variare λ fra $-\infty$ e $+\infty$.

La curva possiederà evidentemente tre asintoti consistenti nelle rette L_1, L_2, L_3 parallele agli assi, aventi rispettivamente per equazioni:

$$q = \frac{m_2}{A - B} \quad , \quad r = \frac{m_3}{A - C}$$

$$r = \frac{m_3}{B - C} \quad , \quad p = \frac{m_1}{B - A}$$

$$p = \frac{m_1}{C - A} \quad , \quad q = \frac{m_2}{C - B},$$

sarà quindi costituita da tre rami g_1, g_2, g_3, il primo dei quali andrà dal punto $-\infty$ di L_1 al punto $+\infty$ di L_2 e corrisponderà ad $A > \lambda > B$; il secondo andrà dal punto $-\infty$ di L_2 al punto $+\infty$ di L_3 e corrisponderà a $B > \lambda > C$; l'ultimo ramo andrà dal punto $-\infty$ di L_3 al punto $+\infty$ di L_1, passando per l'origine, e corrisponderà ai valori $\lambda > A$ oppure $\lambda < C$. La curva è quindi una *iperbola cubica*. Nella tabella contenuta nel § 8 sono indicati i vari modi nei quali essa si spezza quando la condizione (4) è soddisfatta.

Finalmente osserviamo che quando le equazioni (3') possono ricondursi ad una sola, o sono identità, allora non si potrà più dire che esse rappresentano una curva. Questi casi si presenteranno quando saranno soddisfatte uno o più dei seguenti tre sistemi di condizioni:

$$(6) \qquad \begin{cases} C - B = m_3 = m_2 = 0 \\ A - C = m_1 = m_3 = 0 \\ B - A = m_2 = m_1 = 0. \end{cases}$$

Se uno solo dei precedenti sistemi di condizioni sarà verificato, allora il luogo delle posizioni di equilibrio di P degenererà in un piano e in una retta. Se due, e quindi tutti e tre i sistemi di condizioni precedenti si verificheranno, ossia se sarà:

$$A = B = C \quad ; \quad m_1 = m_2 = m_3 = 0,$$

allora tutti i punti dello spazio saranno posizioni di equilibrio di P.

4. Passiamo ora allo studio delle *posizioni di equilibrio stabile di* P. Principiamo dal darne la definizione che corrisponderà perfettamente a quella di *rotazione permanente stabile* del sistema. Diremo che una posizione P_0 di

equilibrio di P è stabile, quando preso un numero σ piccolo ad arbitrio, si potrà trovare un numero ε così piccolo, che portando P ad una distanza da P_0 minore di ε e lasciandolo quindi muovere colla legge rappresentata dalle (a'), esso nel suo moto non si allontanerà mai da P_0 più di σ.

Ciò premesso, seguendo un procedimento analogo a quello ben noto di DIRICHLET, possiamo dimostrare il teorema seguente:

Tutti i punti isolati delle quartiche (2) *saranno posizioni di equilibrio stabile di* P.

Sia P_0 uno dei detti punti isolati, e supponiamo che sostituendo in f_1 e f_2 al posto di p, q, r le coordinate p_0, q_0, r_0 di P, queste funzioni assumano i valori f_1^0, f_2^0. Si formi:

$$I = (f_1 - f_1^0)^2 + (f_2 - f_2^0)^2,$$

e consideriamo I come funzione delle coordinate correnti p, q, r. È evidente che essa sarà una funzione continua: dico inoltre che si potrà trovare un numero α tale che costruendo una sfera qualunque col centro in P_0 di raggio β inferiore ad α, il limite inferiore dei valori che assume I sulla superficie di questa sfera sarà sempre maggiore di zero.

Infatti se, per quanto piccolo si scegliesse α, mai potesse verificarsi la condizione precedente, ciò significherebbe che vicino a P_0 tanto quanto si vuole le due quadriche $f_1 = f_1^0, f_2 = f_2^0$ avrebbero dei punti di intersezione reali, e per conseguenza P_0 non sarebbe un punto isolato della quartica su cui esso giace.

Chiamiamo S la sfera di centro P_0 e di raggio α; scelto un numero σ piccolo ad arbitrio, costruiamo internamente ad S una superficie sferica di centro P_0 con un raggio inferiore a σ. Denotiamola con S' e chiamiamo η' il limite inferiore di I sopra S', il qual valore sarà diverso da zero e positivo. Ora in virtù della continuità di I si potrà costruire entro S' una sfera S'' di raggio ε con il centro in P_0, tale che il limite superiore dei valori di I in tutti i punti interni ad essa sia minore di η'. Allora se lasciamo muovere il punto P, a partire da una posizione P' interna ad S'', colla legge espressa dalle (a'), dovendosi conservare I costante durante tutto il moto avrà un valore eguale a quello iniziale e perciò inferiore ad η'. Per conseguenza P non potrà mai raggiungere la superficie S' e quindi si scosterà da P_0 sempre meno di σ. Il teorema resta così dimostrato.

5. Passiamo ora ad estenderlo, dimostrando la seguente proposizione:

Sia P_0 *un punto isolato di una quartica del sistema* (2) *e si scelga un numero* σ *piccolo ad arbitrio*; *si potranno sempre trovare due numeri* ε *ed* ε' *tali che*:

1° *alterando inizialmente* m_1, m_2, m_3, *di qualità costanti inferiori ad* ε';

2° *lasciando partire il punto* P *da una posizione distante da* P_0 *meno di* ε,

esso si conserverà durante il moto ad una distanza da P_0 *minore di* σ.

Infatti riprendiamo in esame le sfere S , S′ , S″ del paragrafo precedente. Sia η'' il limite superiore dei valori di I entro S″; avremo $\eta'' < \eta'$. Si ponga $\eta' - \eta'' = \rho$.

Per la continuità di I rispetto ad m_1, m_2, m_3, potremo trovare un numero ε' tale che, alterando i valori di m_1, m_2, m_3 meno di ε', ne risulti che i valori di I entro la sfera S variino tutti meno di $\rho/4$. Per conseguenza cangiando m_1, m_2, m_3 di quantità costanti inferiori a ε', ne risulterà che il limite inferiore dei valori di I sopra la superficie S′ sarà superiore a $\eta' - \rho/4$, e il limite superiore dei valori di I entro S″ non supererà $\eta'' + \rho/4$. Dunque, poiché $\eta'' + \rho/4 < \eta' - \rho/4$, così lasciando partire P da un punto interno ad S, durante il moto esso si manterrà internamente ad S″, il che dimostra il teorema.

Abbiamo dunque una *doppia stabilità* delle rotazioni permanenti nei punti isolati delle quartiche; *l'una relativa alle alterazioni nel moto di rotazione del sistema, l'altro alle alterazioni nei moti interni.*

6. Esaminiamo ora la proposizione reciproca a quella del § 4, e perciò escludiamo il caso che si verifichi uno o più dei sistemi di condizioni (6).

In tale ipotesi sopra ogni quadrica dei sistemi (2) non esisteranno che un numero finito di posizioni di equilibrio del punto P.

Sia P_0 una di esse e f_1^0, f_2^0 i valori che assumono f_1 e f_2 sostituendo per p, q, r i valori p^0, q^0, r^0 delle sue coordinate. Potremo costruire una sfera Σ col centro in P_0, tale che nel suo interno e sulle quadriche $f_1 = f_1^0$, $f_2 = f_2^0$ non si abbia che il solo punto P_0 ove P sta in equilibrio. Se ora P_0 non è un punto isolato della quartica su cui giace, dovrà esistere un ramo reale di essa che passa per il punto stesso.

Sia V P_0 una porzione di questo ramo interna a Σ e 2σ la distanza fra i punti V e P_0.

Preso un numero comunque piccolo $\varepsilon < \sigma$, chiamiamo V V′ la parte connessa di V P_0 che dista da P_0 più di $\varepsilon/2$. Poiché non esistono su V V′ punti di equilibrio, così in nessun punto di questo tratto saranno soddisfatte le (3), onde per un teorema sulle funzioni implicite potremo prendere u così piccolo che ciascun punto di V V′ disti meno di $\varepsilon/2$ da un punto d'un ramo della quartica $f_1 = f_1^0$, $f_2 = f_2^0 + u$ priva di punti doppii. Su questo ramo esisterà dunque un punto W′ che dista da P_0 meno di ε, e un punto W che dista più di σ. Lasciando partire P da W′ esso dovrà pervenire in W; ossia partendo ad una distanza da P_0 minore di ε giungerà ad una maggiore di σ, il che dimostra che P_0 non è una posizione di equilibrio stabile.

Abbiamo dunque la proposizione reciproca di quella del § 4, cioè *in ogni punto di equilibrio che non sia un punto isolato, l'equilibrio è instabile.* Questa proposizione reciproca è limitata per ora al caso in cui il luogo dei punti di equilibrio sia la curva (3′). Esamineremo in appresso ciò che avviene quando essa degeneri in una retta e in un piano, oppure in tutto lo spazio.

7. La iperbole cubica avente per equazioni le (3′) dà il luogo dei punti di equilibrio di P, ossia dei punti doppii delle quartiche (2). È ora impor-

tante distinguere sopra questa curva le parti su cui giacciono i *punti isolati* delle quartiche dalle parti su cui giacciono invece i *nodi*; i punti di passaggio dagli uni agli altri che corrisponderanno evidentemente a *cuspidi* delle quartiche ci daranno il *passaggio dalle rotazioni permanenti stabili a quelle instabili del sistema e viceversa.* Un tale studio può eseguirsi con grande facilità mediante le considerazioni seguenti.

Ammettiamo da principio che la cubica non si spezzi ossia si abbia $A > B > C$ ed m_1, m_2, m_3 diverse da zero. Differenziamo successivamente due volte le (2). Avremo:

$$(7) \qquad \begin{cases} Ap\,dp + Bq\,dq + Cr\,dr = 0 \\ A(Ap + m_1)\,dp + B(Bq + m_2)\,dq + C(Cr + m_3)\,dr = 0 \end{cases}$$

$$(8) \qquad \begin{cases} A dp^2 + B dq^2 + C dr^2 + (Ap\,d^2p + Bq\,d^2q + Cr\,d^2r) = 0 \\ A^2 dp^2 + B^2 dq^2 + C^2 dr^2 + (A(Ap + m_1)\,d^2p + B(Bq + m_1)\,d^2q \\ \qquad + C(Cr + m_3)\,d^2r) = 0 . \end{cases}$$

In virtù delle (5'), moltiplicando la prima delle (8) per λ e sottraendovi quindi la seconda, risulterà:

$$A(\lambda - A)\,dp^2 + B(\lambda - B)\,dq^2 + C(\lambda - C)\,dr^2 = 0 .$$

Siccome, in causa delle (5), le (7) sono fra loro equivalenti, così basterà esaminare le due equazioni:

$$(9) \qquad \begin{cases} A(\lambda - A)\,dp^2 + B(\lambda - B)\,dq^2 + C(\lambda - C)\,dr^2 = 0 \\ Ap\,dp + Bq\,dq + Cr\,dr = 0 . \end{cases}$$

Eliminando dr, otterremo:

$$A[Cr^2(\lambda - A) + Ap^2(\lambda - C)]\,dp^2 + B[Cr^2(\lambda - B) + Bq^2(\lambda - C)]\,dq^2 \\ + 2\,AB(\lambda - C)\,pq\,dp\,dq = 0 .$$

Sostituiamo in luogo di p, q, r i valori (5'); l'equazione precedente diverrà:

$$A\left[\frac{Cm_3^2(\lambda - A)}{(\lambda - C)^2} + \frac{Am_1^2(\lambda - C)}{(\lambda - A)^2}\right]dp^2 + B\left[\frac{Cm_3^2(\lambda - B)}{(\lambda - C)^2} + \frac{Bm_2^2(\lambda - C)}{(\lambda - B)^2}\right]dq^2 \\ + 2\,\frac{ABm_1 m_2(\lambda - C)}{(\lambda - A)(\lambda - B)}\,dp\,dq = 0 .$$

Evidentemente i valori di λ per cui il primo membro sarà una *forma definita* corrisponderanno ai *punti isolati*; mentre quelli per cui *la forma* non sarà *definita* corrisponderanno ai *nodi*. Basterà dunque esaminare il segno del discriminante della forma stessa.

Calcolando questo discriminante e dividendolo per $ABC/(\lambda - C)^2$, che è una quantità sempre positiva, otterremo:

$$(10) \qquad \Delta = (\lambda - A)(\lambda - B)(\lambda - C)\left\{\frac{Am_1^2}{(\lambda - A)^3} + \frac{Bm_2^2}{(\lambda - B)^3} + \frac{Cm_3^2}{(\lambda - C)^3}\right\}.$$

Il fattore esterno $(\lambda - A)(\lambda - B)(\lambda - C)$ cambia segno quando λ passa per A, B, C; ma evidentemente per questi valori di λ, la Δ non muta segno; dunque basterà preoccuparsi dei cambiamenti di segno del fattore:

$$\frac{Am_1^2}{(\lambda - A)^3} + \frac{Bm_2^2}{(\lambda - B)^3} + \frac{Cm_3^2}{(\lambda - C)^3}.$$

Facendo crescere λ, ciascuno dei termini è decrescente, dunque avverranno due soli cambiamenti di segno mentre λ varia da C a B in cui il trinomio precedente passa da $+\infty$ a $-\infty$, e mentre λ varia da B ad A in cui pure il trinomio passa da $+\infty$ a $-\infty$; mentre si conserva sempre negativo per $\lambda < C$, e positivo per $\lambda < A$.

Ne segue che Δ è positivo lungo il ramo g_3 e in due tratti dei rami g_1, g_2 adiacenti rispettivamente ai punti all'∞ di L_1 ed L_2; mentre è negativo nei tratti rimanenti di g_1 e g_2, adiacenti al punto all'∞ di L_2. *I punti di passaggio da un tratto all'altro, ossia dalle rotazioni stabili a quelle instabili, corrispondono alle due radici reali dell'equazione*:

$$\frac{Am_1^2}{(\lambda - A)^3} + \frac{Bm_2^2}{(\lambda - B)^3} + \frac{Cm_3^2}{(\lambda - C)^3} = 0, \tag{11}$$

comprese rispettivamente fra A *e* B *e fra* B *e* C. Osserviamo che l'equazione precedente può scriversi, tenendo presenti le (5'):

$$\frac{1}{\sqrt{ABC}}\{Ap\,dp + Bq\,dq + Cr\,dr\} = df_2 = \frac{1}{\lambda}\,df_1 = 0;$$

ciò dimostra che *nei punti di passaggio suddetto la iperbola cubica è tangente alle due quadriche dei sistemi* (2) *che si toccano fra loro nel punto stesso.*

8. Lo stesso procedimento ora seguito quando la iperbole cubica non si spezza, ossia la (4) non è soddisfatta, può applicarsi ad esaminare i diversi casi particolari che si presentano allorché si annulla qualche fattore del prodotto (4) senza che siano verificate contemporaneamente uno o più dei sistemi di condizioni (6). I calcoli relativi non presentano difficoltà e si ripetono uniformemente, così noi li sopprimiamo, riportando solo la tabella seguente che ne riassume i risultati [5],

$$\text{I. } \textit{Caso} \begin{cases} A > B > C \\ \text{oppure} \\ A < B < C \end{cases} \quad \begin{cases} m_1 = 0 \\ m_2 \gtrless 0 \\ m_3 \gtrless 0 \end{cases}$$

la cubica si spezza in:

$$\text{iperbola } p = 0,\ q = \frac{m_2}{\lambda - B},\ r = \frac{m_3}{\lambda - C} \begin{cases} \lambda \text{ compresa fra A e } \dfrac{C\sqrt[3]{Bm_2^2} + B\sqrt[3]{Cm_3^2}}{\sqrt[3]{Bm_2^2} + \sqrt[3]{Cm_3^2}} & \textit{rotazioni instabili.} \\ \lambda \text{ non compresa fra i limiti precedenti} & \textit{rot. stabili} \end{cases}$$

(5) Cfr. la Memoria delle «Astr. Nachr.» [in questo vol.: V, pp. 87-107], Art. II, § 4 e Art. III, § 3.

retta $q = \frac{m_2}{A - B}$, $r = \frac{m_3}{A - C}$ . . . . *rot. stabili.*

$$\text{II. } \textit{Caso} \quad \left\{ \begin{array}{c} A > B > C \\ \text{oppure} \\ A < B < C \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} m_1 \gtrless 0 \\ m_2 = 0 \\ m_3 \gtrless 0 \end{array} \right.$$

la cubica si spezza in:

iperbola $p = \frac{m_1}{\lambda - A}$, $q = 0$, $r = \frac{m_3}{\lambda - C}$ $\left\{ \begin{array}{l} \lambda \text{ compresa fra B e } \dfrac{A\sqrt[3]{Cm_3^2} + C\sqrt[3]{Am_1^2}}{\sqrt[3]{Cm_3^2} + \sqrt[3]{Am_1^2}} \quad \textit{rotazioni instabili} \\ \lambda \text{ non compresa fra i limiti precedenti } \textit{rot. stabili} \end{array} \right.$

retta $p = \frac{m_1}{B - A}$, $r = \frac{m_3}{B - C}$ . . . . *rot. instabili*

$$\text{III. } \textit{Caso} \quad \left\{ \begin{array}{c} A > B > C \\ \text{oppure} \\ A < B < C \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} m_1 = 0 \\ m_2 = 0 \\ m_3 \gtrless 0 \end{array} \right.$$

la cubica si spezza in:

retta $p = 0$, $q = 0$ $\left\{ \begin{array}{l} r \text{ compresa fra } \dfrac{m_3}{A - C} \text{ e } \dfrac{m_3}{B - C} \text{ . . . . } \textit{rot. instabiti} \\ r \text{ non compresa fra i limiti precedenti . . . . } \textit{rotaz. stabili} \end{array} \right.$

retta $q = 0$, $r = \frac{m_3}{A - C}$ . . . . *rotaz. stabili*

retta $p = 0$, $r = \frac{m_3}{B - C}$ . . . . *rot. instabili.*

$$\text{IV. } \textit{Caso} \quad \left\{ \begin{array}{c} A > B > C \\ \text{oppure} \\ A < B < C \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} m_1 = 0 \\ m_2 \gtrless 0 \\ m_3 = 0 \end{array} \right.$$

la cubica si spezza in:

retta $p = 0$, $r = 0$ $\left\{ \begin{array}{l} q \text{ compresa fra } \dfrac{m_2}{A - B} \text{ e } \dfrac{m_2}{C - B} \text{ . . . . . . } \textit{rotaz. stabili} \\ q \text{ non compresa fra i limiti precedenti . . . . } \textit{rot. instabili} \end{array} \right.$

retta $q = \frac{m_2}{A - B}$, $r = 0$ . . . . *rotaz. stabili*

retta $p = 0$, $q = \frac{m_2}{C - B}$ . . . . *rotaz. stabili.*

$$\text{V. } \textit{Caso} \quad \left\{ \begin{array}{l} A > B > C \\ m_1 = m_2 = m_3 = 0 \end{array} \right. \quad \text{(Caso di EULERO)}$$

la cubica si spezza in:

retta $p = 0$, $q = 0$ . . . . *rotaz. stabili* retta $q = 0$, $r = 0$ . . . . *rotaz. stabili*

retta $r = 0$, $p = 0$ . . . . *rot. instabili*

$$\text{VI. } \textit{Caso}^{(6)}\ A \gtrless B = C \qquad \begin{cases} m_1 \gtrless 0 \\ m_2 \gtrless 0 \\ m_3 = 0 \end{cases}$$

la cubica si spezza in:

iperbola $p = \dfrac{m_1}{\lambda - A}$, $q = \dfrac{m_2}{\lambda - B}$, $r = 0$ $\begin{cases} \lambda \text{ compresa fra B e } \dfrac{A\sqrt[3]{Bm_2^2} + B\sqrt[3]{Am_1^2}}{\sqrt[3]{Bm_2^2} + \sqrt[3]{Am_1^2}} & \textit{rotazioni instabili} \\ \lambda \text{ non compresa fra i limiti precedenti} & \textit{rot. stab.} \end{cases}$

retta $p = \dfrac{m_1}{B - A}$, $q = \infty$.

$$\text{VII. } \textit{Caso}\ A \gtrless B = C \qquad \begin{cases} m_1 = 0 \\ m_2 \gtrless 0^{(7)} \\ m_3 = 0 \end{cases}$$

la cubica si spezza in:

retta $p = 0$, $r = 0$ $\begin{cases} q > \dfrac{m_2}{A - B} & \text{. . . . . } \textit{rotazioni instabili} \\ q < \dfrac{m_2}{A - B} & \text{. . . . . } \textit{rotazioni stabili} \end{cases}$

retta $q = \dfrac{m_2}{A - B}$, $r = 0$ . . . . *rotazioni stabili*

retta $p = 0$, $q = \infty$.

9. Esaminiamo ora i casi in cui il luogo dei punti di equilibrio di P degeneri in un piano ed in una retta.

$$\text{I. } \textit{Caso}\ A \gtrless B = C \qquad \begin{cases} m_1 \gtrless 0 \quad \text{oppure} \quad m_1 = 0 \\ m_2 = 0 \\ m_3 = 0 \end{cases}$$

il luogo dei punti di equilibrio di P degenera in:

retta $q = 0$, $r = 0$ . . . . *rotazioni stabili*

piano $p = \dfrac{m_1}{A - B}$ (q ed r qualunque) . . . . *rotazioni instabili.*

(6) Quando sia $A \gtrless B = C$, possiamo scegliere sempre gli assi d'inerzia in modo che risulti $m_3 = 0$.

(7) In questo caso si è supposto (il che è sempre possibile) di scegliere le direzioni degli assi in modo che m_2 e $A - B$ siano dello stesso segno.

$$\text{II. } \textit{Caso } \mathrm{A} = \mathrm{B} = \mathrm{C} \quad \begin{cases} m_1 \gtrless 0 \\ m_2 = 0 \\ m_3 = 0 \end{cases}$$

il luogo dei punti di equilibrio di P degenera in:

retta $q = 0$, $r = 0$ . . . . *rotazioni stabili*
piano $p = \infty$.

Per dimostrare nel primo caso che le rotazioni corrispondenti a $p = m_1/(\mathrm{B} - \mathrm{A})$ e q ed r qualunque sono *instabili* non si può più applicare il teorema del § 6. Si osservi che in questo caso le intersezioni delle quadriche $f_2 = h_2$, $f_1 = h_1$ divengono una coppia di cerchi. I punti doppi corrispondono al caso in cui questi due cerchi coincidono, ed allora le due quadriche sono tangenti fra loro lungo il cerchio doppio. Tutti i cerchi di intersezione e di contatto delle quadriche $f_1 = h_1$, $f_2 = h_2$ hanno il centro sull'asse comune di simmetria delle due quadriche e giacciono in piani ad esso perpendicolari. Il punto P sta in equilibrio in tutti i punti di uno qualunque dei cerchi doppi, i quali appartengono tutti al piano $p = m_1/(\mathrm{B} - \mathrm{A})$; ma vicino quanto si vuole ad uno qualunque di essi esistono delle coppie di cerchi semplici, ciascuno dei quali viene percorso dal punto P con velocità costante: basta questa osservazione per rendere manifesta la instabilità dell'equilibrio di P nei punti del piano $p = m_1/(\mathrm{B} - \mathrm{A})$, e quindi la instabilità delle corrispondenti rotazioni permanenti. *Il teorema del* § 6 *è dunque estensibile anche a questo caso precedentemente escluso.*

10. Resta da considerare il caso in cui siano soddisfatti tutti e tre i sistemi di condizioni (6), cioè sia $\mathrm{A} = \mathrm{B} = \mathrm{C}$, $m_1 = m_2 = m_3 = 0$. In questo caso P sta in equilibrio in ogni punto dello spazio, e quindi possiamo concludere immediatamente che tali posizioni di equilibrio sono stabili.

Però è facile riconoscere che in questo caso non si ha la stabilità riguardo ad alterazioni dei moti interni. Infatti, supposto di scegliere gli assi tali che sia $p \gtrless 0$, $q = 0$, $r = 0$, basterà prendere $m_1 = 0$, $m_2 \gtrless 0$, $m_3 = 0$, e per quanto piccolo sia m_2 in valore assoluto, la traiettoria di P risulterà sempre un cerchio situato nel piano $q = 0$ con il centro nell'origine e di raggio p. Quindi in questo caso le rotazioni sono *stabili* riguardo ad alterazioni nelle rotazioni stesse, ed *instabili* riguardo ai moti interni.

Così resta completata la trattazione di tutti i diversi casi che possono presentarsi e distinte in ciascuno di essi le rotazioni stabili da quelle instabili.

11. Diamo una semplice applicazione del teorema del § 5. Suppongasi $\mathrm{A} > \mathrm{B} > \mathrm{C}$, $m_1 = m_2 = m_3$; siamo allora nel caso V del § 8. Possiamo quindi concludere immediatamente che quando la grandezza delle coppia di quantità di moto dei movimenti interni sarà sufficientemente piccola, prendendo la posizione iniziale del polo di rotazione abbastanza prossima all'estremità

dell'asse d'inerzia di momento massimo (o a quella dell'asse di momento minimo) la corrispondente polodia si conserverà prossima tanto quanto si vuole al polo d'inerzia.

12. La teoria svolta in questa Memoria sulla stabilità delle rotazioni permanenti ci conduce ad una osservazione, che credo non priva di interesse. *Noi possiamo vedere eseguire delle piccole oscillazioni al polo di rotazione di un sistema attorno ad una certa posizione, senza che il sistema cambi di forma, né si alteri in esso la distribuzione delle masse; ma non per questo sarà lecito concluderne che il punto intorno a cui oscilla il polo di rotazione sia un polo d'inerzia.* Basterà infatti che non possa escludersi la esistenza di moti interni stazionarii nel sistema, perché il punto intorno a cui oscilla il polo di rotazione anziché un polo d'inerzia sia la intersezione dell'ellissoide di inerzia col raggio vettore che va ad un punto isolato delle quartiche che abbiamo precedentemente esaminate. (Vedi 2ª Nota del § 2).

Procediamo ora allo studio delle piccole vibrazioni di P intorno alle sue posizioni di equilibrio stabile. A tal fine supponiamo dapprima che la cubica (3) non si spezzi, ed in questa ipotesi chiamando λ_1 e λ_2 le due radici reali dell'equazione (11) prendiamo λ non compreso in questo intervallo. Allora (vedi (5')):

$$p_0 = \frac{m_1}{\lambda - A} \quad , \quad q_0 = \frac{m_2}{\lambda - B} \quad , \quad r_0 = \frac{m_3}{\lambda - C} , \tag{12}$$

corrisponderanno ad una posizione di equilibrio stabile di P, ossia ad una rotazione permanente stabile del sistema.

Si ponga:

$$p = p_0 + \varpi \quad , \quad q = q_0 + \chi \quad , \quad r = r_0 + \rho ,$$

e consideriamo ϖ, χ, ρ come piccolissime, in modo da poter trascurare le loro potenze superiori alla prima come si suol fare nella teoria dei piccoli movimenti; allora poiché i valori costanti p_0, q_0, r_0 soddisfano le (3') otterremo che le (*a*) si trasformeranno nelle:

$$\left\{\begin{aligned} &A \frac{d\varpi}{dt} + \frac{m_3(\lambda - B)}{\lambda - C}\chi - \frac{m_2(\lambda - C)}{\lambda - B}\rho = 0 \\ &B \frac{d\chi}{dt} + \frac{m_1(\lambda - C)}{\lambda - A}\rho - \frac{m_3(\lambda - A)}{\lambda - C}\varpi = 0 \\ &C \frac{d\rho}{dt} + \frac{m_2(\lambda - A)}{\lambda - B}\varpi - \frac{m_1(\lambda - B)}{\lambda - A}\chi = 0 . \end{aligned}\right. \tag{13}$$

Per integrare queste equazioni lineari, si ponga:

$$\varpi = ae^{zt} \quad , \quad \chi = be^{zt} \quad , \quad \rho = ce^{zt} ,$$

con *a*, *b*, *c*, *z* costanti; avremo allora dalla nota teoria delle equazioni differenziali lineari che *z* sarà radice della equazione:

$$\begin{vmatrix} Az & , & \frac{m_3(\lambda - B)}{\lambda - C} & , & -\frac{m_2(\lambda - C)}{\lambda - B} \\ -\frac{m_3(\lambda - A)}{\lambda - C} & , & Bz & , & \frac{m_1(\lambda - C)}{\lambda - A} \\ \frac{m_2(\lambda - A)}{\lambda - B} & , & -\frac{m_1(\lambda - B)}{\lambda - A} & , & Cz \end{vmatrix} = 0,$$

che sviluppata diviene:

$$ABCz^3 + (\lambda - A)(\lambda - B)(\lambda - C)\left[\frac{Am_1^2}{(\lambda - A)^3} + \frac{Bm_2^2}{(\lambda - B)^3} + \frac{Cm_3^2}{(\lambda - C)^3}\right] z = 0,$$

da cui si ricava:

$$z = 0 \quad , \quad z = \pm i \sqrt{\frac{(\lambda - A)(\lambda - B)(\lambda - C)}{ABC}\left[\frac{Am_1^2}{(\lambda - A)^3} + \frac{Bm_2^2}{(\lambda - B)^3} + \frac{Cm_3^2}{(\lambda - C)^3}\right]}.$$

Le due radici di z diverse da zero sono immaginarie, per l'ipotesi fatta riguardo a λ; quindi il periodo di vibrazione di P intorno alla posizione di equilibrio stabile, sarà:

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{(\lambda - A)(\lambda - B)(\lambda - C)}{ABC}\left[\frac{Am_1^2}{(\lambda - A)^3} + \frac{mB_2^2}{(\lambda - B)^3} + \frac{Cm_3^2}{(\lambda - C)^3}\right]}}.$$

Variando λ entro i limiti stabiliti, *la formula precedente ci darà i periodi con i quali il polo di rotazione può vibrare attorno alle sue posizioni di equilibrio stabile.*

Moltiplicando rispettivamente le (13) per $\frac{m_1}{\lambda - A}, \frac{m_2}{\lambda - B}, \frac{m_3}{\lambda - C}$ sommando e integrando si ottiene:

$$(14) \qquad \frac{Am_1}{\lambda - A}\tilde{\omega} + \frac{Bm_2}{\lambda - B}\chi + \frac{Cm_3}{\lambda - C}\rho = \text{cost.},$$

e moltiplicandole per $(\lambda - A)\tilde{\omega}$, $(\lambda - B)\chi$, $(\lambda - C)\rho$, sommando e integrando abbiamo:

$$(15) \qquad A(\lambda - A)\tilde{\omega}^2 + B(\lambda - B)\chi^2 + C(\lambda - C)\rho^2 = \text{cost.}$$

Questi due integrali esprimono (cfr. form. (12) e § 7) che il moto di P ha luogo secondo una ellisse situata nel piano (14), cioè nel piano parallelo a quello comune tangente alle quadriche (2) nel punto (p_0, q_0, r_0) di equilibrio stabile.

Non staremo ad esaminare i varii casi particolari che possono presentarsi, la cui trattazione non presenta nessuna difficoltà fondandosi sopra i risultati precedentemente stabiliti.

Considereremo soltanto il caso in cui due momenti d'inerzia sono eguali, il terzo essendo differente, cioè:

$$A \gtrless B = C.$$

Allora possiamo scegliere gli assi d'inerzia in modo da rendere $m_3 = 0$, onde applicando ciò che abbiamo ottenuto nel caso VI del § 8, le rotazioni stabili risulteranno date da:

$$p_0 = \frac{m_1}{\lambda - A} \quad , \quad q_0 = \frac{m_2}{\lambda - B} \quad , \quad r_0 = 0 ,$$

in cui λ non è compreso fra:

$$B \quad e \quad \frac{A\sqrt[3]{Bm_2^2} + B\sqrt[3]{Am_1^2}}{\sqrt[3]{Bm_2^2} + \sqrt[3]{Am_1^2}} .$$

Quindi i periodi di vibrazione del polo di rotazione attorno alle sue posizioni stabili saranno dati da:

$$T = \frac{2\pi B}{(\lambda - B)\sqrt{\frac{\lambda - A}{A}\left[\frac{Am_1^2}{(\lambda - A)^3} + \frac{Bm_2^2}{(\lambda - B)^3}\right]}} = \frac{2\pi}{\frac{m_2}{Bq_0}\sqrt{\frac{m_1}{Ap_0}\left[\frac{Ap_0^3}{m_1} + \frac{Bq_0^3}{m_2}\right]}} .$$

Quando non esistono moti interni vi è una sola posizione stabile del polo di rotazione (Caso I, § 9) corrispondente a $p = p_0$, $q = r = 0$, ed il periodo di vibrazione del polo attorno ad esso è il periodo euleriano $\frac{2\pi B}{(B - A)p_0}$. I moti interni dunque, oltre a dar luogo ad infinite posizioni stabili del polo, alterano anche il periodo euleriano rendendolo suscettibile di assumere i valori dati dalla formula precedente.

Torino, 2 luglio 1895.

NOTA ALLA PRECEDENTE MEMORIA

Avendo comunicato al mio amico prof. SEGRE i risultati contenuti nella precedente Memoria, questi fece a proposito delle proposizioni contenute nel § 7, alcune eleganti considerazioni geometriche, che, dietro suo permesso, sono lieto di potere render note testualmente in ciò che segue:

« I sistemi di quadriche:

(2) $$f_1 = \text{cost.}, \quad f_2 = \text{cost.},$$

sono fasci appartenenti ad una stessa *rete* di quadriche, la quale è caratterizzata dal contenere come quadrica degenere un *piano doppio*, il piano all'infinito; cosicché le ∞^2 quadriche della rete si posson raggruppare in ∞^1 fasci (schiere) di quadriche concentriche e omotetiche, tra cui sono appunto i due fasci (2). Ne segue che il luogo dei punti di contatto delle quadriche di questi fasci, cioè il luogo dei vertici dei coni quadrici della rete, ossia la *curva Jacobiana* della rete, è pure il luogo dei poli di quel piano rispetto alle quadriche della rete, cioè dei centri di queste quadriche. Quel luogo è dunque una cubica.

« La proposizione con cui finisce il § 7 rientra in una più generale relativa alla curva Jacobiana di una rete qualunque di superficie: la tangente a questa curva in un suo punto P è polare del piano che ivi è toccato dalle superficie generiche della rete passanti per P, rispetto al cono quadrico tangente in P a quella particolare fra le dette superficie che ha ivi un punto doppio. Non so se questa proposizione sia nota: in ogni modo la si dimostra facilmente con procedimenti già adoperati per proposizioni analoghe. Da essa segue che se P è un punto di contatto *stazionario* per superficie della rete, cioè tale che la curva comune a queste abbia ivi una cuspide, la tangente in P a questa curva è anche la tangente in P alla curva Jacobiana. E come caso particolare per la rete attuale si ritrova (e si completa) la proposizione finale del § 7: la quale poi, mediante le equazioni (2) e (5'), ricondurrebbe subito all'equazione in λ che determina le cuspidi di quartiche della rete.

« La rete di quadriche ha 4 punti base, situati nel piano all'infinito, ed in essi rispettivamente 4 tangenti fisse (esterne a quel piano). Per ipotesi nella rete vi sono degli ellissoidi (2). Ne segue che quei 4 punti base sono due coppie di punti imaginari coniugati aa', bb'. Fra gli ∞^1 fasci di quadriche concentriche che compongono la rete, ognun dei quali dà sul piano all'infinito una determinata conica del fascio $aa'\ bb'$, ve ne sono tre, *reali*, che dànno sul piano all'infinito rispettivamente: la coppia di rette reali aa', bb'; la coppia di rette immaginarie coniugate ab, $a'b'$; la coppia di rette imaginarie coniugate ab', $a'b$. Il 1° fascio sarà di paraboloidi iperbolici, il 2° ed il 3° di paraboloidi ellittici. I punti doppi, tutti tre reali, di quelle tre coppie di rette saranno i punti all'infinito della nostra cubica. Il ramo infinito di questa che va dal 2° al 3° punto sarà tutto composto di centri di ellissoidi della rete, mentre sugli altri due rami infiniti della cubica si avranno centri d'iperboloidi. Se un punto P è centro di ellissoidi della rete, esso è isolato sulla quartica base del fascio di quadriche passanti per P, giacché le tangenti in esso alla quartica devono stare nel cono della rete che ha il centro in P e che sarà imaginario (ellissoide ridotto ad un sol punto reale). Per conseguenza sul primo ramo della cubica non vi sarà alcun punto reale che sia cuspide di quartiche della rete. – Volendo risolvere *geometricamente*, in modo completo, la questione di vedere quante fra le 6 cuspidi di quartiche della rete siano reali, si potranno forse adoperare gli ultimi ragionamenti, ulteriormente proseguiti. Ma un'altra via, assai naturale, consiste nel rappresentare (al modo di HESSE) le ∞^2 quadriche della rete coi punti di un piano, e quindi gli ∞^1 coni coi punti di una quartica γ^4. Si vede allora che questa curva avrà nel caso attuale un punto triplo, corrispondente al piano doppio che fa parte della rete. Le tangenti in quel punto triplo sono 3 rette reali e distinte, perché corrispondono ai 3 fasci reali testé considerati di paraboloidi della rete. Inoltre le 4 tangenti doppie di γ^4 sono tutte imaginarie, perché corrispondono ai fasci di quadriche della rete passanti rispettivamente per lé 4 tangenti fisse (imaginarie) in a, a', b, b'. Si può allora verificare che delle 6 tangenti stazionarie (flessi) di γ^4 solo 2 saranno reali: o ricorrendo ai lavori speciali relativi alle forme reali delle quartiche piane; oppure ricorrendo alla nota formola generale del KLEIN (« Math. Annalen », vol. 10, 1876, p. 199), la quale, applicata ad una curva del 4° ordine (deformata di γ^4) con tre nodi, e nessuna tangente doppia reale isolata, dà $w' = 2$ come numero dei flessi reali. Ora le tangenti stazionarie di γ^4 corrispondono a quei fasci della rete di quadriche i quali hanno contatti stazionarii: ossia a punti della cubica che sono cuspidi per quartiche della rete. Dunque si ritrova che fra quei 6 punti solo 2 sono reali ».

XVI.

SULLA ROTAZIONE DI UN CORPO IN CUI ESISTONO SISTEMI POLICICLICI

« Annali di Matematica », ser. 2ª, vol. 24, 1896, pp. 29-58.

1. In alcuni lavori precedentemente pubblicati [1] ho studiato la rotazione di un corpo nel cui interno esistono moti stazionarii e ne ho data la soluzione mediante funzioni ellittiche. Nei detti studi ho supposto, fin da principio, che i moti interni venissero conservati stazionarii mediante l'azione di *forze* interne.

Vogliamo ora approfondire l'esame dell'effetto di queste forze interne, della loro necessità onde conservare stazionarii i moti interni e di ciò che avviene quando esse non siano tali da soddisfare a questa condizione. Queste considerazioni formeranno il soggetto della presente Memoria e ci condurranno ad allargare il campo delle nostre ricerche e delle loro applicazioni al problema della rotazione terrestre.

2. Cominciamo dalla determinazione della forza viva di un sistema girevole attorno ad un punto fisso.

Sia ξ, η, ζ un sistema di assi mobili coll'origine in questo punto, e denotiamo con u, v, w le componenti secondo queste direzioni della velocità *relativa* agli assi stessi del punto del sistema di coordinate ξ, η, ζ. Siano p, q, r le componenti della velocità angolare di rotazione nelle direzioni ξ, η, ζ di questi assi. Le componenti della velocità assoluta del punto (ξ, η, ζ) risulteranno:

$$u + q\zeta - r\eta \quad , \quad v + r\xi - p\zeta \quad , \quad w + p\eta - q\xi .$$

Quindi, chiamando ρ la densità del sistema S, la sua forza viva sarà:

$$T = \frac{1}{2}\int_S \rho \left\{ (u + q\zeta - r\eta)^2 + (v + r\xi - p\zeta)^2 + (w + p\eta - q\xi)^2 \right\} dS,$$

(1) *Sulla teoria dei movimenti del polo terrestre.* « Astr. Nachr. »., vol. 138, nn. 3291-2; *Sulla teoria dei moti del polo terrestre.* « Atti della R. Acc. di Torino », 3 febbr., 1895; *Sul moto di un sistema nel quale sussistono moti interni stazionarii.* Id., 3 marzo, 1895. *Sopra un sistema di equazioni differenziali.* Id., 31 marzo, 1895; *Un teorema sulla rotazione dei corpi, ecc.* Id., 5 maggio, 1895; *Sulle rotazioni permanenti stabili di un sistema in cui sussistono moti interni stazionari.* « Annali di Matematica », vol. 23. [In questo vol., V a IX, pp. 87-140 e XV, pp. 173-186].

da cui segue, denotando con A, B, C i momenti d'inerzia del sistema rispetto agli assi ξ, η, ζ; D, E, F i momenti misti d'inerzia rispetto alle coppie di assi η, ζ; ζ, ξ; ξ, η,

$$(1) \qquad T = \frac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 - 2Dqr - 2Erp - 2Fpq) + m_1 p + m_2 q + m_3 r + T_0,$$

in cui si è posto:

$$m_1 = \int \rho (w\eta - v\zeta) dS \quad , \quad m_2 = \int \rho (u\zeta - w\xi) dS \quad , \quad m_3 = \int \rho (v\xi - u\eta) dS$$

$$T_0 = \frac{1}{2}\int_S \rho (u^2 + v^2 + w^2) dS ;$$

m_1, m_2, m_3 sono cioè le componenti della coppia di quantità di moto del moto relativo agli assi ξ, η, ζ e T_0 è la forza viva del moto relativo stesso.

Chiamiamo i detti moti relativi *moti interni del sistema* e supponiamo dapprima che essi non alterino la forma e la distribuzione di densità del sistema. In tale ipotesi dovremo avere soddisfatta la condizione:

$$\frac{\partial (\rho u)}{\partial \xi} + \frac{\partial (\rho v)}{\partial \eta} + \frac{\partial (\rho w)}{\partial \zeta} = 0,$$

e lungo una superficie di discontinuità:

$$\rho (u \cos nx + v \cos ny + w \cos nz) = \rho' (u' \cos nx + v' \cos ny + w' \cos nz),$$

donotando con n la normale alla superficie di discontinuità e ρ, u, v, w; ρ', u', v', w' i rispettivi valori della densità e delle componenti della velocità dalle due parti della superficie stessa. Nella detta ipotesi A, B, C, D, E, F saranno costanti, e scegliendo per assi ξ, η, ζ gli assi principali d'inerzia potremo supporre nulle le tre ultime di queste sei quantità.

Le quantità m_1, m_2, m_3, T_0 saranno in generale funzioni del tempo, ma se oltre al non alterare la forma e la densità del sistema i moti interni saranno *stazionarii*, ne seguirà che m_1, m_2, m_3, T_0 dovranno considerarsi costanti.

3. Nella ipotesi che i moti interni siano stazionarii ed il sistema non sia sollecitato da forze esterne, abbiamo trovato [2], scegliendo per assi quelli principali d'inerzia, che le equazioni differenziali del moto:

$$(2) \qquad \begin{cases} A\dfrac{dp}{dt} + (C - B)qr + m_3 q - m_2 r = 0 \\ B\dfrac{dq}{dt} + (A - C)rp + m_1 r - m_3 p = 0 \\ C\dfrac{dr}{dt} + (B - A)pq + m_2 p - m_1 q = 0, \end{cases}$$

(2) Vedi: *Sulla teoria dei moti del polo terrestre.* «Atti della R. Accad. di Torino», 3 febbraio, 1895. [In questo vol.: VI, pp. 108-112].

ammettono i due integrali:

$$\frac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2) = \text{cost.}, \tag{3}$$

$$(Ap + m_1)^2 + (Bq + m_2)^2 + (Cr + m_3)^2 = \text{cost.} \tag{3'}$$

Se T fosse costante, a cagione del primo dei due precedenti integrali e della condizione $T_0 = \text{cost.}$, seguirebbe:

$$m_1 p + m_2 q + m_3 r = g = \text{cost.} \tag{3''}$$

Cerchiamo ora le condizioni affinché risulti soddisfatta la equazione precedente, comunque si scelgano le condizioni iniziali del moto.

Derivandola rispetto a t otteniamo:

$$m_1 \frac{dp}{dt} + m_2 \frac{dq}{dt} + m_3 \frac{dr}{dt} = 0,$$

onde moltiplicando rispettivamente le (2) per m_1/A, m_2/B, m_3/C e sommando si avrà:

$$\frac{m_1}{A}(B - C)qr + \frac{m_2}{B}(C - A)rp + \frac{m_3}{C}(A - B)pq$$

$$- m_2 m_3\left(\frac{1}{C} - \frac{1}{B}\right)p - m_3 m_1\left(\frac{1}{A} - \frac{1}{C}\right)q - m_1 m_2\left(\frac{1}{B} - \frac{1}{A}\right)r = 0.$$

Affinché questa equazione sia soddisfatta da un sistema qualunque di valori di p, q, r, dovrà essere o:

$$A = B = C,$$

oppure:

$$B = C \quad , \quad m_2 = m_3 = 0,$$

ovvero:

$$C = A \quad , \quad m_3 = m_1 = 0,$$

o finalmente:

$$A = B \quad , \quad m_1 = m_2 = 0.$$

Reciprocamente se uno di questi sistemi di condizioni sarà soddisfatto, ne verrà come conseguenza che la forza viva si manterrà costante comunque siano le condizioni iniziali del moto. Possiamo quindi enunciare il teorema:

Affinché la forza viva del sistema si mantenga costante comunque siano le condizioni iniziali del moto, è necessario e sufficiente che l'ellissoide d'inerzia sia una sfera, oppure sia di rivoluzione attorno all'asse dei moti interni.

Però si può spingere la ricerca più innanzi e si può chiedere se specializzando le condizioni iniziali del moto possa la forza viva mantenersi costante anche in casi diversi dai precedenti. Intanto si può osservare che ciò avverrà evidentemente quando la rotazione del sistema sarà permanente; le condizioni affinché le rotazioni del sistema siano tali furono da noi esposte già in due Memorie (3) ed in esse furon trovati dei casi che non

(3) Vedi: *Sulla teoria dei movimenti del polo terrestre.* «Astr. Nachr.», Bd. 138 [in questo vol.: V, pp. 87–107]. *Sulle rotazioni permanenti stabili di un sistema in cui sussistono moti interni stazionari.* «Annali di Matem.», tomo 23 [in questo vol.: XV, pp. 173–186].

rientrano nei precedenti. Ma ci si può domandare se essi sono i soli. La questione si riduce a esaminare quando le equazioni (3), (3'), (3'') hanno infinite radici comuni. Eliminando p si trovano le due equazioni:

$$B(B-A)q^2 + C(C-A)r^2 + 2(B-A)m_2 q + 2(C-A)m_3 r = \text{cost.}$$

$$\begin{gathered}(Am_2^2 + Bm_1^2)q^2 + (Am_3^2 + Cm_1^2)r^2 \\ + 2Am_2m_3qr - 2Agm_2q - 2Agm_3r = \text{cost.}\end{gathered}$$

Affinché esistano infinite radici comuni, la resultante di queste equazioni dovrà avere nulli tutti i coefficienti. Eguagliando a zero quello del termine di quarto grado si trova la condizione:

$$\begin{gathered}\{m_1^2 BC(B-C) + m_2^2 CA(C-A) + m_3^2 AB(A-B)\}^2 \\ + 4ABC\{m_2^2 m_3^2 A(B-A)(C-A) + m_3^2 m_1^2 B(C-B)(A-B) \\ + m_1^2 m_2^2 C(A-C)(B-C)\} = 0,\end{gathered}$$

la quale non può verificarsi se non si ha $A = B = C$, oppure non si annulla qualcuna delle m_1, m_2, m_3, giacché essa può scriversi:

$$\begin{gathered}\{m_1^2 BC(B-C) - m_2^2 CA(C-A) - m_3^2 AB(A-B)\}^2 \\ + 4A^2 BC m_2^2 m_3^2 (B-A)(C-A) \\ = \{m_2^2 CA(C-A) - m_3^2 AB(A-B) - m_1^2 BC(B-C)\}^2 \\ + 4B^2 CA m_3^2 m_1^2 (C-B)(A-B) \\ = \{m_3^2 AB(A-B) - m_1^2 BC(B-C) - m_2^2 CA(C-A)\}^2 \\ + 4C^2 AB m_1^2 m_2^2 (A-C)(B-C) = 0.\end{gathered}$$

Ne verrebbe dunque che, se T fosse costante, p, q, r sarebbero pure costanti, a meno che non si avesse $A = B = C$, oppure non fosse nulla qualcheduna delle m_1, m_2, m_3.

Perciò avremo il teorema: *La condizione necessaria è sufficiente affinché sia costante la forza viva di un sistema sottratto a forze esterne e nel cui interno sussistono moti stazionarii quando* A, B, C *sono diversi fra loro e* m_1, m_2, m_3 *sono diversi da zero, è che la rotazione del sistema sia permanente.*

Supponiamo ora $m_2 = 0$; in tale ipotesi l'ultima condizione trovata diviene:

$$m_1^2 C(B-C) - m_3^2 A(A-B) = 0,$$

ovvero:

$$\frac{m_1}{m_3} = \pm\sqrt{\frac{A(A-B)}{C(B-C)}}.$$

B dovrà dunque essere compreso fra A e C. Supposto $A > B > C$ potremo porre:

$$m_1 = \varepsilon\sqrt{A(A-B)} \quad , \quad m_3 = \pm\varepsilon\sqrt{C(B-C)},$$

con ε costante reale; onde le (3) e (3′) diverranno:

$$Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = \text{cost.}$$

$$A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2 + 2\varepsilon A\sqrt{A(A-B)}\,p \pm 2\varepsilon C\sqrt{C(B-C)}\,r = \text{cost.}$$

ed eliminando q fra queste equazioni avremo:

$$A(A-B)p^2 + C(C-B)r^2 + 2\varepsilon A\sqrt{A(A-B)}\,p \pm 2\varepsilon C\sqrt{C(B-C)}\,r = \text{cost.},$$

che può anche scriversi:

$$(4)\qquad \left[\sqrt{A(A-B)}\,p \pm \sqrt{C(B-C)}\,r + \varepsilon(A-C)\right] \times \left[\sqrt{A(A-B)}\,p \mp \sqrt{C(B-C)}\,r + \varepsilon(A+C)\right] = \text{cost.}$$

Supponiamo di prendere i valori iniziali di p ed r tali che il primo fattore della precedente equazione sia nullo; ne seguirà che lo stesso fattore *si conserverà sempre nullo.* Infatti, se i valori iniziali scelti per p ed r non annullano anche il secondo fattore ciò è evidente; se lo annullassero dovremmo avere:

$$p = \frac{-\varepsilon A}{\sqrt{A(A-B)}} = \frac{m_1}{B-A}\quad,\ r = \frac{\pm\varepsilon C}{\sqrt{C(B-C)}} = \frac{\pm\varepsilon\sqrt{C(B-C)}}{B-C} = \frac{m_3}{B-C},$$

quindi il moto sarebbe permanente (vedi Mem. citata negli « Annali di Mat. », § 8, II caso) e perciò p ed r si conserverebbero costanti, onde il primo fattore si manterrebbe nullo. Ora l'annullarsi di questo fattore porta alla condizione (3‴); possiamo dunque concludere che la *forza viva si conserverà costante quando sia*

$$m_1 = \varepsilon\sqrt{A(A-B)}\quad,\quad m_2 = 0\quad,\quad m_3 = \pm\varepsilon\sqrt{C(B-C)},$$

e le condizioni iniziali del moto sono tali che:

$$\sqrt{A(A-B)}\,p \pm \sqrt{C(B-C)}\,r + \varepsilon(A-C) = 0,$$

q essendo qualunque.

Reciprocamente se la condizione (3″) deve essere soddisfatta o essa deve coincidere coll'annullarsi del primo fattore della (4), o altrimenti dovrà essere costante anche l'altro fattore e quindi p, q, r dovranno essere costanti ed il moto permanente.

Osserviamo finalmente che se si suppone, oltre m_2, anche m_1 oppure m_3 costante deve aversi $B = A$, oppure $B = C$ e si ricade nelle condizioni stabilite da principio.

Riassumendo l'analisi fatta può concludersi.

Le condizioni necessarie e sufficienti affinché la forza viva del sistema si conservi costante si riducono ad uno dei gruppi seguenti:

1° *che il moto di rotazione del sistema sia permanente;*

2° *che sia:*

$$m_1 = \varepsilon\sqrt{A(A-B)}\quad,\quad m_2 = 0\quad,\quad m_3 = \pm\varepsilon\sqrt{C(B-C)}\quad,\quad A > B > C,$$

e le condizioni iniziali del moto tali che:

$$\sqrt{A(A-B)}\,p \pm \sqrt{C(B-C)}\,r + \varepsilon(A-C) = 0;$$

3° *che l'ellissoide d'inerzia sia di rivoluzione intorno all'asse dei moti interni;*

4° *che l'ellissoide d'inerzia sia una sfera.*

Negli ultimi due casi le condizioni iniziali del moto possono essere qualunque.

Esclusi questi casi ora discussi, la forza viva del sistema varierà col tempo; e per conseguenza onde mantenere stazionarii i moti interni occorreranno delle forze interne; o in altri termini se non esistessero queste forze i moti interni cesserebbero di essere stazionarii. Dunque, come i moti interni alterano il moto d'insieme del sistema, così il moto d'insieme tende ad alterare i moti interni.

Nel caso in cui i moti interni sono stazionari è facile calcolare la forza viva T del sistema in funzione del tempo giovandosi delle formule che abbiamo dato nelle Memorie precedenti.

Abbiamo trovato (4):

$$p = m_1 \frac{\dfrac{M_1}{\lambda_1 - A}\sigma_1 + \dfrac{M_2}{\lambda_2 - A}\sigma_2 + \dfrac{M_3}{\lambda_3 - A}\sigma_3 + \dfrac{M_4}{\lambda_4 - A}\sigma}{M_1\sigma_1 + M_2\sigma_2 + M_3\sigma_3 + M_4\sigma_4}$$

$$q = m_2 \frac{\dfrac{M_1}{\lambda_1 - B}\sigma_1 + \dfrac{M_2}{\lambda_2 - B}\sigma_2 + \dfrac{M_3}{\lambda_3 - B}\sigma_3 + \dfrac{M_4}{\lambda_4 - B}\sigma}{M_1\sigma_1 + M_2\sigma_2 + M_3\sigma_3 + M_4\sigma_4}$$

$$r = m_3 \frac{\dfrac{M_1}{\lambda_1 - C}\sigma_1 + \dfrac{M_2}{\lambda_2 - C}\sigma_2 + \dfrac{M_3}{\lambda_3 - C}\sigma_3 + \dfrac{M_4}{\lambda_4 + C}\sigma}{M_1\sigma_1 + M_2\sigma_2 + M_3\sigma_3 + M_4\sigma_4},$$

quindi:

$$m_1 p + m_2 q + m_3 r = \frac{\sum_1^4{}_i M_i\left(\dfrac{m_1^2}{\lambda_i - A} + \dfrac{m_2^2}{\lambda_i - B} + \dfrac{m_3^2}{\lambda_i - C}\right)\sigma_i}{\sum_1^4 M_i\sigma_i},$$

in cui per simmetria si è sostituito σ_4 a σ. Abbiamo ora:

$$\lambda_i\left(\frac{m_1^2}{\lambda_i - A} + \frac{m_2^2}{\lambda_i - B} + \frac{m_3^2}{\lambda_i - C}\right) - (m_1^2 + m_2^2 + m_3^2)$$

$$= \frac{Am_1^2}{\lambda_i - A} + \frac{Bm_2^3}{\lambda_i - B} + \frac{Cm_3^2}{\lambda - C} = -2h\lambda_i + K_1,$$

giacché le λ_i sono le radici dell'equazione (5):

$$\frac{Am_1^2}{\lambda_i - A} + \frac{Bm_2^2}{\lambda_i - B} + \frac{Cm_3^2}{\lambda_i - C} + 2h\lambda_i - K_1 = 0,$$

(4) *Un teorema sulla rotazione dei corpi, ecc.* « Atti della R. Accad. di Torino », 5 maggio, 1895. [In questo vol.: IX, pp. 129–140].

(5) *Sul moto di un sistema nel quale sussistono moti interni stazionarii.* « Atti R. Acc. di Torino », 3 marzo, 1895 (vedi § 2). [In questo vol.: VII, pp. 113-121].

quindi [6] poiché:

$$K_1 + m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 = K^2,$$

sarà:

$$\frac{m_1^2}{\lambda_i - A} + \frac{m_2^2}{\lambda_i - B} + \frac{m_3^2}{\lambda_i - C} = \frac{K^2}{\lambda_i} - 2h,$$

e per conseguenza:

$$m_1 p + m_2 q + m_3 r = \frac{\sum_1^4 M_i\left(\frac{K^2}{\lambda_i} - 2h\right)\sigma_i}{\sum_1^4 M_i \sigma_i} = K^2 \frac{\sum_1^4 \frac{M_i}{\lambda_i}\sigma_i}{\sum_1^4 M_i \sigma_i} - 2h.$$

Dunque, poiché:

$$\frac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2) = h,$$

si avrà:

$$T = K^2 \frac{\Sigma \frac{M_i}{\lambda_i}\sigma_i}{\Sigma M_i \sigma_i} - h + T_0.$$

4. Procediamo ora alla ricerca delle alterazioni prodotte nei moti interni dal moto d'insieme del sistema quando manchino le forze interne capaci di conservarli stazionarii.

Per fissare le idee immaginiamo dapprima un caso particolare, e cioè che i moti interni consistano nel moto di rotazione di un toro di rivoluzione omogeneo attorno al proprio asse fisso nell'interno del corpo. Chiamiamo ω la velocità angolare di rotazione; α, β, γ i coseni degli angoli che l'asse del toro forma con gli assi ξ, η, ζ; μ il momento d'inerzia del toro rispetto al proprio asse. Le componenti nelle direzioni ξ, η, ζ della coppia di quantità di moto dovuta ai moti interni saranno:

$$m_1 = \mu\omega\alpha \quad , \quad m_2 = \mu\omega\beta \quad , \quad m_3 = \mu\omega\gamma,$$

mentre la forza viva dei moti interni sarà:

$$T_0 = \frac{1}{2}\mu\omega^2.$$

Quindi la forza viva totale del sistema, la cui forma e distribuzione di densità non si altererà, verrà data da [vedi (1)]:

$$T = \frac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2) + \mu\omega(p\alpha + q\beta + r\gamma) + \frac{1}{2}\mu\omega^2.$$

Se ammettiamo che nessuna forza esterna si eserciti sopra il sistema, le equazioni del moto risulteranno [7]:

(6) Ibid, § 2.

(7) *Sulla teoria dei moti del polo terrestre.* «Atti R. Acc. di Torino», 3 febbraio, 1895. [In questo vol.: VI, pp. 108–112]. Vedi le equazioni (6).

$$(2')\quad\left\{\begin{aligned}&A\frac{dp}{dt}+(C-B)qr+\mu\omega(q\gamma-r\beta)+\mu\alpha\frac{d\omega}{dt}=0\\&B\frac{dq}{dt}+(A-C)rp+\mu\omega(r\alpha-p\gamma)+\mu\beta\frac{d\omega}{dt}=0\\&C\frac{dr}{dt}+(B-A)pq+\mu\omega(p\beta-q\alpha)+\mu\gamma\frac{d\omega}{dt}=0.\end{aligned}\right.$$

Ammettiamo ora che il toro di rivoluzione nella rotazione attorno al proprio asse non sia sollecitato da alcuna forza.

Avremo allora pel principio delle forze vive:

$$(1')\quad T=\frac{1}{2}(Ap^2+Bq^2+Cr^2)+\mu\omega(p\alpha+q\beta+r\gamma)+\frac{1}{2}\mu\omega^2=\text{cost.}$$

Abbiamo dunque ottenute quattro equazioni: le $(2')$ e $(1')$, ove compariscono come funzioni incognite p, q, r, ω. Di queste quantità le prime tre individueranno il moto d'insieme del sistema, e l'ultima individuerà il moto interno.

Derivando la $(1')$ rispetto a t otterremo:

$$Ap\frac{dp}{dt}+Bq\frac{dq}{dt}+Cr\frac{dr}{dt}+\mu\omega\left(\alpha\frac{dp}{dt}+\beta\frac{dq}{dt}+\gamma\frac{dr}{dt}\right)$$
$$+\mu\frac{d\omega}{dt}(p\alpha+q\beta+r\gamma)+\mu\omega\frac{d\omega}{dt}=0.$$

Moltiplicando le $(2')$ per p, q, r rispettivamente, e sommando avremo:

$$Ap\frac{dp}{dt}+Bq\frac{dq}{dt}+Cr\frac{dr}{dt}+\mu(p\alpha+q\beta+r\gamma)\frac{d\omega}{dt}=0,$$

quindi:

$$\alpha\frac{dp}{dt}+\beta\frac{dq}{dt}+\gamma\frac{dr}{dt}+\frac{d\omega}{dt}=0,$$

e integrando:

$$(5)\quad \alpha p+\beta q+\gamma r+\omega=\text{cost.}$$

Esiste dunque una relazione lineare a coefficienti costanti fra p, q, r ed ω. Eliminando ω nelle $(2')$ mediante questa relazione, otterremo tre equazioni differenziali in p, q, r dalle quali potremo determinare queste quantità; e quindi dalla (5) ricaveremo ω. Ora è facile vedere che in questo caso il problema si riconduce alle quadrature e può risolversi mediante funzioni ellittiche. Infatti, oltre l'integrale $(1')$, le $(2')$ ammettono l'integrale delle aree dato da [8]:

$$(Ap+\mu\omega\alpha)^2+(Bq+\mu\omega\beta)^2+(Cr+\mu\omega\gamma)^2=\text{cost.}$$

Se in $(1')$ e nella equazione precedente sostituiamo ad ω il valore ricavato dalla (5) i primi membri di questi due integrali diventano funzioni di 2° grado in p, q, r, e perciò queste quantità potranno esprimersi come funzioni ellittiche di un parametro che si otterrà espresso mediante il tempo con una

(8) *Sulla teoria dei moti del polo terrestre*. «Atti R. Acc. di Torino», 3 febbraio, 1895. [In questo vol.: VI, pp. 108–112].

quadratura [9]; e dalla (5) segue che anche ω sarà suscettibile di una analoga espressione. Noi non staremo ad approfondire la soluzione di questo caso particolare seguendo questa via, giacché potremo ottenere la soluzione, anche più semplicemente, nel caso generale, per altro mezzo.

5. Il caso che abbiamo esaminato di un toro di risoluzione girevole attorno al proprio asse non è altro che il caso tipo di un *sistema monociclico* di HELMHOLTZ [10] in cui ω rappresenta l'intensità ciclica del sistema [11]. Quindi l'analisi fatta nel paragrafo precedente è evidentemente estensibile senz'altro al caso della rotazione di un corpo nel cui interno esiste un sistema monociclico i cui parametri si suppongono costanti.

Ma immaginiamo in generale di avere un corpo girevole attorno al proprio baricentro nel cui interno esista un *sistema policiclico* qualunque. Siano $p_1, p_2, \cdots, p_n$ le coordinate cicliche del sistema; $\tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_2, \tilde{\omega}_3 \cdots, \tilde{\omega}_m$ ne siano i parametri. La forza viva dei moti interni si potrà prendere allora sotto la forma:

$$T_0 = \frac{1}{2} \sum_1^n{}_i \sum_1^n{}_s a_{is} \frac{dp_i}{dt} \frac{dp_s}{dt} = \frac{1}{2} \Sigma_i \Sigma_s a_{is} \omega_i \omega_s ,$$

chiamando $\omega_i = dp_i/dt$ le intensità cicliche del sistema. Nella precedente espressione dovremo ritenere che la a_{is} siano funzioni dei soli parametri $\tilde{\omega}_h$. Le componenti della coppia di quantità di moto dei movimenti interni saranno della forma:

$$(6) \qquad \begin{cases} m_1 = \sum_1^n{}_i a_i \dfrac{dp_i}{dt} + \sum_1^m{}_h e_h \dfrac{d\tilde{\omega}_h}{dt} = \sum_1^n{}_i a_i \omega_i + \sum_1^m{}_h e_h \dfrac{d\tilde{\omega}_h}{dt} \\ m_2 = \sum_1^n{}_i b_i \dfrac{dp_i}{dt} + \sum_1^m{}_h f_h \dfrac{d\tilde{\omega}_h}{dt} = \sum_1^n{}_i b_i \omega_i + \sum_1^m{}_h f_h \dfrac{d\tilde{\omega}_h}{dt} \\ m_3 = \sum_1^n{}_i c_i \dfrac{dp_i}{dt} + \sum_1^m{}_h g_h \dfrac{d\tilde{\omega}_h}{dt} = \sum_1^n{}_i c_i \omega_i + \sum_1^m{}_h g_h \dfrac{d\tilde{\omega}_h}{dt} , \end{cases}$$

in cui a_i, b_i, c_i; e_h, f_h, g_h sono funzioni dei soli parametri $\tilde{\omega}_r$, dei quali parametri potremo ammettere anche che siano funzioni i momenti d'inerzia A, B, C ed i momenti misti D, E, F.

La forza viva del sistema risulterà dunque:

$$(7) \qquad \begin{aligned} T = {} & \frac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 - 2Dqr - 2Erp - 2Fpq) \\ & + m_1 p + m_2 q + m_3 r + \frac{1}{2} \Sigma_i \Sigma_s a_{is} \omega_i \omega_s . \end{aligned}$$

Uno spostamento virtuale sarà individuato dalle componenti $\delta\tilde{\omega}, \delta\chi, \delta\rho$ di una rotazione infinitesima e dalle δp_i e $\delta\tilde{\omega}_i$.

(9) Cfr. la Nota: *Sul moto di un sistema nel quale sussistono moti interni stazionarii.* «Atti R. Acc. di Torino», 3 marzo, 1895. [In questo vol.: VII, pp. 113-121].

(10) «Crelle's Journal», vol. 97, 1884, pp. 111 e 317.

(11) Vedi HERTZ, *Die prinzipien der Mechanik*. Vol. II, Abschnitt 5.

Poniamo il lavoro virtuale delle forze interne ed esterne agenti sul sistema sotto la forma:

$$U = M_\xi \delta\tilde{\omega} + M_\eta \delta\chi + M_\zeta \delta\rho + \sum_i^n{}_1 P_i \delta p_i + \sum_h^m{}_1 \Pi_h \delta\tilde{\omega}_h .$$

Chiameremo M_ξ, M_η, M_ζ le componenti della coppia di rotazione; P_i le forze relative alle coordinate cicliche p_i, e Π_h le forze relative ai parametri $\tilde{\omega}_h$.

Note relazioni cinematiche ci dànno:

$$\delta p = \frac{d}{dt}\delta\tilde{\omega} + q\delta\rho - r\delta\chi$$

$$\delta q = \frac{d}{dt}\delta\chi + r\delta\tilde{\omega} - p\delta\rho$$

$$\delta r = \frac{d}{dt}\delta\rho + p\delta\chi - q\delta\tilde{\omega},$$

onde l'applicazione del principio di HAMILTON ci condurrà all'equazione:

$$\begin{aligned} o = \int_{t_0}^{t}(\delta T + U)\,dt = \int_{t_0}^{t}\Big\{ & \frac{\partial T}{\partial p}\left(\frac{d}{dt}\delta\tilde{\omega} + q\delta\rho - r\delta\chi\right) + \frac{\partial T}{\partial q}\left(\frac{d}{dt}\delta\chi + r\delta\tilde{\omega} - p\delta\rho\right) \\ & + \frac{\partial T}{\partial r}\left(\frac{d}{dt}\delta\rho + p\delta\chi - q\delta\tilde{\omega}\right) + \sum_1^n (a_i p + b_i q + c_i r + \Sigma_s a_{is}\omega_s)\frac{d}{dt}\delta p_i \\ & + \sum_h^m{}_1 (e_h p + f_h q + g_h r)\frac{d}{dt}\delta\tilde{\omega}_h + \sum_h^m{}_1 \frac{\partial T}{\partial\tilde{\omega}_h}\delta\tilde{\omega}_h + M_\xi\delta\tilde{\omega} + M_\eta\delta\chi + M_\zeta\delta\rho \\ & + \sum_i^n{}_1 P_i\delta p_i + \sum_h^m{}_1 \Pi_h\delta\tilde{\omega}_h \Big\}\,dt, \end{aligned}$$

in cui dovremo supporre nulli $\delta\tilde{\omega}$, $\delta\chi$, $\delta\rho$, δp_i, $\delta\tilde{\omega}_h$ ai tempi estremi t_0 e t_1.

Mediante integrazioni per parti avremo le equazioni:

$$(a)\qquad \left\{\begin{aligned} & \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{dp} + q\frac{\partial T}{\partial r} - r\frac{\partial T}{\partial q} = M_\xi \\ & \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q} + r\frac{\partial T}{\partial p} - p\frac{\partial T}{\partial r} = M_\eta \\ & \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial r} + p\frac{\partial T}{\partial q} - q\frac{\partial T}{\partial p} = M_\zeta \\ & \frac{d}{dt}\left(a_i p + b_i q + c_i r + \sum_s^n{}_1 a_{is}\omega_s\right) = P_i \\ & \frac{d}{dt}(e_h p + f_h q + g_h r) - \frac{\partial T}{\partial\tilde{\omega}_h} = \Pi_h, \end{aligned}\right.$$

le quali ci individuano il moto del sistema.

6. Supponiamo nulla la coppia di rotazione. In tale ipotesi moltiplicando le prime tre equazioni per $\partial T/\partial p$, $\partial T/\partial q$, $\partial T/\partial r$ e sommando avremo:

$$\frac{\partial T}{\partial p}\cdot\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial p} + \frac{\partial T}{\partial q}\cdot\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q} + \frac{\partial T}{\partial r}\cdot\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial r} = o,$$

ed integrando:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial q}\right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial r}\right)^2 = K^2. \tag{8}$$

Se ora immaginiamo una terna di assi x, y, z fissi nello spazio e rappresentiamo colla seguente tabella i coseni di direzione che essi formano con gli assi x, y, z

	ξ	η	ζ
x	α_1,	α_2,	α_3
y	β_1,	β_2,	β_3
z	γ_1,	γ_2,	γ_3

dalle prime tre equazioni (a) seguirà, applicando le formule del POISSON,

$$\frac{d}{dt}\left(\alpha_1 \frac{\partial T}{\partial p} + \alpha_2 \frac{\partial T}{\partial q} + \alpha_3 \frac{\partial T}{\partial r}\right) = 0 \quad , \quad \frac{d}{dt}\left(\beta_1 \frac{\partial T}{\partial p} + \beta_2 \frac{\partial T}{\partial q} + \beta_3 \frac{\partial T}{\partial r}\right) = 0,$$

$$\frac{d}{dt}\left(\gamma_1 \frac{\partial T}{\partial p} + \gamma_2 \frac{\partial T}{\partial q} + \gamma_3 \frac{\partial T}{\partial r}\right) = 0,$$

onde integrando avremo:

$$\alpha_1 \frac{\partial T}{\partial p} + \alpha_2 \frac{\partial T}{\partial q} + \alpha_3 \frac{\partial T}{\partial r} = \text{cost.}$$

$$\beta_1 \frac{\partial T}{\partial p} + \beta_2 \frac{\partial T}{\partial q} + \beta_3 \frac{\partial T}{\partial r} = \text{cost.}$$

$$\gamma_1 \frac{\partial T}{\partial p} + \gamma_2 \frac{\partial T}{\partial q} + \gamma_3 \frac{\partial T}{\partial r} = \text{cost.},$$

i quali sono gli integrali delle aree e da cui si deduce immediatamente l'integrale (8).

Supponendo di scegliere per piano invariabile il piano x, y nelle equazioni precedenti si annulleranno le due prime costanti e la terza si ridurrà eguale a K, onde:

$$\gamma_1 = \frac{1}{K} \frac{\partial T}{\partial p} \quad , \quad \gamma_2 = \frac{1}{K} \frac{\partial T}{\partial q} \quad , \quad \gamma_3 = \frac{1}{K} \frac{\partial T}{\partial r}. \tag{9}$$

Dalle (a) segue:

$$p \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial p} + q \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial q} + r \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial r} + \sum_1^\nu {}_i\, \omega_i \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \omega_i}$$

$$+ \sum_1^m {}_h \frac{d\tilde{\omega}_h}{dt} \frac{d}{dt}(e_h p + f_h q + g_h r) - \sum_1^m {}_h \frac{\partial T}{\partial \tilde{\omega}_h} \frac{d\tilde{\omega}_h}{dt}$$

$$= M_\xi p + M_\eta q + M_\zeta r + \sum_1^\nu {}_i\, P_i \omega_i + \sum_1^m {}_h\, \Pi_h \frac{d\tilde{\omega}_h}{dt},$$

ovvero:

$$\frac{d}{dt}\left\{p \frac{\partial T}{\partial p} + q \frac{\partial T}{\partial q} + r \frac{\partial T}{\partial r} + \sum_1^\nu {}_i\, \omega_i \frac{\partial T}{d\omega_i} + p \sum_1^m {}_h e_h \frac{d\tilde{\omega}_h}{dt} + q \sum_1^m f_h \frac{d\tilde{\omega}_h}{dt} + r \sum_1^m g_h \frac{d\tilde{\omega}_h}{dt}\right\} -$$

$$-\left\{\frac{\partial T}{\partial p}\frac{dp}{dt}+\frac{\partial T}{\partial q}\frac{dq}{dt}+\frac{\partial T}{\partial r}\frac{dr}{dt}+\sum_{1}^{\nu}{}_i\frac{\partial T}{\partial\omega_i}\frac{d\omega_i}{dt}+\sum_{1}^{m}{}_h\left[\frac{\partial T}{\partial\bar\omega_h}\frac{d\bar\omega_h}{dt}+(e_hp+f_hq+g_hr)\frac{d^2\bar\omega_h}{dt^2}\right]\right\}$$

$$=M_\xi p+M_\eta q+M_\zeta r+\sum_{1}^{\nu}{}_i P_i\omega_i+\sum_{1}^{m}\Pi_h\frac{d\bar\omega_h}{dt}\cdot$$

Ora si ha:

$$\frac{dT}{dt}=\frac{\partial T}{\partial p}\frac{dp}{dt}+\frac{\partial T}{\partial q}\frac{dq}{dt}+\frac{\partial T}{\partial r}\frac{dr}{dt}+\sum_{1}^{n}\frac{\partial T}{\partial\omega_i}\frac{d\omega_i}{dt}$$

$$+\sum_{1}^{m}{}_h\left[\frac{\partial T}{\partial\bar\omega_h}\frac{d\bar\omega_h}{dt}+(e_hp+f_hq+g_hr)\frac{d^2\bar\omega_h}{dt^2}\right]$$

$$2T=p\frac{\partial T}{\partial p}+q\frac{\partial T}{\partial q}+r\frac{\partial T}{\partial r}+\sum_{1}^{n}{}_i\omega_i\frac{\partial T}{\partial\omega_i}+p\Sigma_h e_h\frac{d\bar\omega_h}{dt}+q\Sigma_h f_h\frac{d\bar\omega_h}{dt}+r\Sigma_h g_h\frac{d\bar\omega_h}{dt},$$

quindi l'equazione precedente diverrà:

$$\frac{d}{dt}\left(T-\sum_{\nu+1}^{n}{}_i\omega_i\frac{\partial T}{\partial\omega_i}\right)=M_\xi p+M_\eta q+M_\zeta r+\sum_{1}^{\nu}P_i\omega_i+\sum_{1}^{m}\Pi_h\frac{d\bar\omega_h}{dt}-\sum_{\nu+1}^{n}\frac{\partial T}{\partial\omega_i}\frac{d\omega_i}{dt}\cdot$$

Ammettiamo che le intensità cicliche $\omega_{\nu+1}, \omega_{\nu+2}, \cdots, \omega_n$ si conservino costanti, avremo allora:

$$\frac{d}{dt}\left(T-\sum_{\nu+1}^{n}\omega_i\frac{\partial T}{\partial\omega_i}\right)=M_\xi p+M_\eta q+M_\zeta r+\sum_{1}^{\nu}P_i\omega_i+\sum_{1}^{m}{}_h\Pi_h\frac{d\bar\omega_h}{dt}\cdot$$

Se esiste la *funzione delle forze* Φ del sistema ciclico [12], sarà

$$\sum_{1}^{m}{}_h\Pi_h\frac{d\bar\omega_h}{dt}=\frac{d\Phi}{dt},$$

quindi:

$$\frac{d}{dt}\left(T-\sum_{\nu+1}^{n}{}_i\omega_i\frac{\partial T}{\partial\omega_i}\right)=M_\xi p+M_\eta q+M_\zeta r+\sum_{1}^{\nu}{}_iP_i\omega_i+\frac{d\Phi}{dt}\cdot$$

Moltiplicando per dt e integrando, avremo:

$$(10)\qquad T-\sum_{\nu+1}^{n}{}_i\omega_i\frac{\partial T}{\partial\omega_i}=\int^{t}(M_\xi p+M_\eta q+M_\zeta r)\,dt+\sum_{1}^{\nu}{}_i\int^{t}P_i\omega_i dt+\Phi+h,$$

denotando con h una costante. Se i moti interni sono *isociclici*, cioè tutte le intensità cicliche sono costanti, l'integrale precedente diverrà:

$$(10')\qquad T-\sum_{1}^{n}{}_i\omega_i\frac{\partial T}{\partial\omega_i}=\int^{t}(M_\xi p+M_\eta q+M_\zeta r)\,dt+\Phi+h,$$

mentre se nessuna delle ω_i è costante sarà:

$$(10'')\qquad T=\int^{t}M_\xi p+M_\eta q+M_\zeta r)\,dt+\sum_{1}^{n}\int^{t}P_i\omega_i dt+\Phi+h.$$

(12) Vedi HERTZ, op. cit., p. 240.

7. Il caso più importante da esaminarsi è quello in cui le forze relative alle coordinate cicliche sono nulle. Supponendosi infatti $P_i = 0$, avremo:

$$\frac{d}{dt}(a_i p + b_i q + c_i r + \sum_{1}^{n}{}_s\, a_{is}\,\omega_s) = 0\,,$$

ed integrando:

$$a_i p + b_i q + c_i r + \sum_{1}^{n}{}_s\, a_{is}\,\omega_s = K_i\,, \tag{11}$$

in cui K_i denotano delle costanti.

Mediante gli integrali ora ottenuti potremo eliminare le intensità cicliche del sistema. Siano A_{is} i rapporti degli elementi aggiunti alle $a_{is} = a_{si}$ nel determinante:

$$\begin{vmatrix} a_{11}\,, & a_{12}\,, & \dots & a_{1n} \\ a_{21}\,, & a_{22}\,, & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}\,, & a_{n2}\,, & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

al determinante stesso.

Dalle equazioni precedenti seguirà:

$$\frac{\partial T_0}{\partial \omega_i} = \sum_{1}^{n} a_{is}\,\omega_s = K_i - a_i p - b_i q - c_i r \tag{12}$$

$$\omega_i = \Sigma_s A_{is} K_s - p\Sigma_s A_{is} a_s - q\Sigma_s A_{is} b_s - r\Sigma_s A_{is} c_s\,, \tag{13}$$

quindi:

$$2\,T_0 = \Sigma_i \frac{\partial T_0}{\partial \omega_i}\,\omega_i$$

$$= \Sigma_i (K_i - a_i p - b_i q - c_i r)\,(\Sigma_s A_{is} K_s - p\Sigma_s A_{is} a_s - q\Sigma_s A_{is} b_s - r\Sigma_s A_{is} c_s).$$

Si ponga:

$$a = \Sigma_i \Sigma_s A_{is} a_i a_s \quad , \quad b = \Sigma_i \Sigma_s A_{is} b_i b_s \quad , \quad c = \Sigma_i \Sigma_s A_{is} c_i c_s$$

$$d = \Sigma_i \Sigma_s A_{is} c_i b_s \quad , \quad e = \Sigma_i \Sigma_s A_{is} a_i c_s \quad , \quad f = \Sigma_i \Sigma_s A_{is} b_i a_s\,,$$

avremo allora:

$$T_0 = \frac{1}{2}(ap^2 + bq^2 + cr^2 + 2\,dqr + 2\,erp + 2\,fpq) - p\Sigma_i \Sigma_s A_{is} K_i a_s$$
$$- q\Sigma_i \Sigma_s A_{is} K_i b_s - r\Sigma_i \Sigma_s A_{is} K_i c_s + \frac{1}{2}\Sigma_i \Sigma_s A_{is} K_i K_s\,.$$

Dalle (6) segue:

$$\left\{\begin{aligned} m_1 &= \Sigma_i \Sigma_s A_{is} K_i a_s - ap - fq - er + \sum_{1}^{m}{}_h\, e_h \frac{d\tilde{\omega}_h}{dt} \\ m_2 &= \Sigma_i \Sigma_s A_{is} K_i b_s - fp - bq - dr + \sum_{1}^{m}{}_h\, f_h \frac{d\tilde{\omega}_h}{dt} \\ m_3 &= \Sigma_i \Sigma_s A_{is} K_i c_s - ep - dq - cr + \sum_{1}^{m}{}_h\, g_h \frac{d\tilde{\omega}_h}{dt} \end{aligned}\right.$$

quindi:

$$m_1 p + m_2 q + m_3 r = -(ap^2 + bq^2 + cr^2 + 2\,dqr + 2\,erp + 2fpq)$$
$$+ p\Sigma_i \Sigma_s A_{is} K_i a_s + q\Sigma_i \Sigma_s A_{is} K_i b_s + r\Sigma_i \Sigma_s A_{is} K_i c_s$$
$$+ p \sum_1^m{}_h e_h \frac{d\tilde{\omega}_h}{dt} + q \sum_1^m{}_h f_h \frac{d\tilde{\omega}_h}{dt} + r \sum_1^m{}_h g_h \frac{d\tilde{\omega}_h}{dt},$$

e finalmente:

$$(T) = \frac{1}{2}\{(A - a)\, p^2 + (B - b)\, q^2 + (C - c)\, r^2$$
$$- 2\,(D + d)\, qr - 2\,(E + e)\, rp - 2\,(F + f)\, pq\}$$
$$+ p \sum_1^m{}_h e_h \frac{d\tilde{\omega}_h}{dt} + q \sum_1^m{}_h f_h \frac{d\tilde{\omega}_h}{dt} + r \sum_1^m g_h \frac{d\tilde{\omega}_h}{dt} + \frac{1}{2} \Sigma_i \Sigma_s A_{is} K_i K_s .$$

Noi scriviamo qui (T) invece di T per denotare la espressione della forza viva in cui furono eliminate le intensità cicliche del sistema.

Cerchiamo ora come si trasformano le equazioni (a) per la eliminazione delle stesse quantità.

A tal fine osserviamo che si ha:

$$\delta T = \frac{\partial T}{\partial p} \delta p + \frac{\partial T}{\partial q} \delta q + \frac{\partial T}{\partial r} \delta r + \sum_1^n{}_i \frac{\partial T}{\partial \omega_i} \delta \omega_i + \sum_1^m{}_h \frac{\partial T}{\partial \tilde{\omega}_h} \delta \tilde{\omega}_h ,$$

supponendo nulle le $\delta\,(d\tilde{\omega}_h/dt)$. Ora a cagione delle (11) segue:

$$\frac{\partial T}{\partial \omega_i} = K_i ,$$

e per le (13):

$$\delta\omega_i = \sum_1^m{}_h \frac{\partial}{\partial \tilde{\omega}_h} [\Sigma_s A_{is} K_s - p\Sigma_s A_{is} a_s - q\Sigma_s A_{is} b_s - r\Sigma_s A_{is} c_s]\, \delta\tilde{\omega}_h$$
$$- \Sigma_s A_{is} a_s \cdot \delta p - \Sigma_s A_{is} b_s \cdot \delta q - \Sigma_s A_{is} c_s \cdot \delta r .$$

Quindi, posto:

$$\Sigma_i \Sigma_s A_{is} K_i a_s = l_1 \quad , \quad \Sigma_i \Sigma_s A_{is} K_i b_s = l_2 \quad , \quad \Sigma_i \Sigma_s A_{is} K_i c_s = l_3 ,$$

avremo:

$$\Sigma_i \frac{\partial T}{\partial \omega_i} \delta\omega_i = \Sigma_h \frac{\partial}{\partial \tilde{\omega}_h} [\Sigma_i \Sigma_s A_{is} K_i K_s - l_1 p - l_2 q - l_3 r]\, \delta\tilde{\omega}_h$$
$$- l_1 \delta p - l_2 \delta q - l_3 \delta r ,$$

e perciò:

$$\delta T = \left(\frac{\partial T}{\partial p} - l_1\right) \delta p + \left(\frac{\partial T}{\partial q} - l_2\right) \delta q + \left(\frac{\partial T}{\partial r} - l_3\right) \delta r$$
$$+ \sum_1^m{}_h \left\{ \frac{\partial T}{\partial \tilde{\omega}_h} + \frac{\partial}{\partial \tilde{\omega}_h} [\Sigma_i \Sigma_s A_{is} K_i K_s - l_1 p - l_2 q - l_3 r] \right\} \delta\tilde{\omega}_h .$$

Abbiamo ora:

$$\delta\,(T) = \frac{\partial\,(T)}{\partial p} \delta p + \frac{\partial\,(T)}{\partial q} \delta q + \frac{\partial\,(T)}{\partial r} \delta r + \sum_1^m{}_h \frac{\partial\,(T)}{\partial \tilde{\omega}_h} \delta\tilde{\omega}_h ,$$

quindi confrontando le due precedenti espressioni differenziali troveremo:

$$
(14) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial T}{\partial p} = \dfrac{\partial (T)}{\partial p} + l_1 \quad , \quad \dfrac{\partial T}{\partial q} = \dfrac{\partial (T)}{\partial q} + l_2 \quad , \quad \dfrac{\partial T}{\partial r} = \dfrac{\partial (T)}{\partial r} + l_3 \\ \dfrac{\partial T}{\partial \tilde{\omega}_h} = \dfrac{\partial \{(T) + l_1 p + l_2 q + l_3 r - \Sigma_i \Sigma_s A_{is} K_i K_s\}}{\partial \tilde{\omega}_h} . \end{cases}
$$

Le (*a*) dunque divengono, mediante la eliminazione delle intensità cicliche del sistema,

$$
(b) \quad \begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial (T)}{\partial p} + l_1\right) + q\left(\dfrac{\partial (T)}{\partial r} + l_3\right) - r\left(\dfrac{\partial (T)}{\partial q} + l_2\right) = M_\xi \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial (T)}{\partial q} + l_2\right) + r\left(\dfrac{\partial (T)}{\partial p} + l_1\right) - p\left(\dfrac{\partial (T)}{\partial r} + l_3\right) = M_\eta \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial (T)}{\partial r} + l_3\right) + p\left(\dfrac{\partial (T)}{\partial q} + l_2\right) - q\left(\dfrac{\partial (T)}{\partial p} + l_1\right) = M_\zeta \\ \qquad \dfrac{d}{dt}(e_h p + f_h q + g_h r) \\ - \dfrac{\partial}{\partial \tilde{\omega}_h}\{(T) + l_1 p + l_3 q + l_2 r - \Sigma_i \Sigma_s A_{is} K_i K_s\} = \Pi_h . \end{cases}
$$

Queste equazioni possono mettersi ancora sotto una forma più simmetrica. Si ponga perciò:

$$
(15) \qquad \Theta = (T) + l_1 p + l_2 q + l_3 r - \Sigma_i \Sigma_s A_{is} K_i K_s
$$

$$
\frac{1}{2}\{(A - a)p^2 + (B - b)q^2 + (C - c)r^2 - 2(D + d)qr - 2(E + e)rp - 2(F + f)pq\}
$$

$$
+ p\left(l_1 + \sum_1^m {}_h e_h \frac{d\tilde{\omega}_h}{dt}\right) + q\left(l_2 + \sum_1^m {}_h f_h \frac{d\tilde{\omega}_h}{dt}\right) + r\left(l_3 + \sum_1^m {}_h g_h \frac{d\tilde{\omega}_h}{dt}\right)
$$

$$
- \frac{1}{2} \Sigma_i \Sigma_s A_{is} K_i K_s \cdot
$$

Le (14) potranno scriversi:

$$
\frac{\partial T}{\partial p} = \frac{\partial \Theta}{\partial p} \quad , \quad \frac{\partial T}{\partial q} = \frac{\partial \Theta}{\partial q} \quad , \quad \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{\partial \Theta}{\partial r}
$$

$$
\frac{\partial T}{\partial \tilde{\omega}_h} = \frac{\partial \Theta}{\partial \tilde{\omega}_h} ,
$$

quindi le (*b*) assumeranno la forma:

$$
(c) \quad \begin{cases} \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial \Theta}{\partial p} + q\dfrac{\partial \Theta}{\partial r} - r\dfrac{\partial \Theta}{\partial q} = M_\xi \\ \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial \Theta}{\partial q} + r\dfrac{\partial \Theta}{\partial p} - p\dfrac{\partial \Theta}{\partial r} = M_\eta \\ \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial \Theta}{\partial r} + p\dfrac{\partial \Theta}{\partial q} - q\dfrac{\partial \Theta}{\partial p} = M_\zeta \\ \dfrac{d}{dt}(e_h p + f_h q + g_h r) - \dfrac{\partial \Theta}{\partial \tilde{\omega}_h} = \Pi_h . \end{cases}
$$

8. Supponiamo ora che i parametri del sistema ciclico possano ritenersi costanti, allora spariscono le ultime fra le equazioni precedenti e potrà prendersi:

$$\Theta = \frac{1}{2}\{(A - a)p^2 + (B - b)q^2 + (C - c)r^2 - 2(D + d)qr \\ - 2(E + e)rp - 2(F + f)pq\} + l_1 p + l_2 q + l_3 r, \tag{16}$$

in cui i coefficienti dei termini di 1° e 2° grado in p, q, r saranno costanti. Le equazioni (c) corrispondono quindi in questo caso al moto di un sistema in cui sussistono moti interni stazionarii, ammettendo che il sistema abbia per momenti d'inerzia rispetto agli assi ξ, η, ζ

$$A - a \quad , \quad B - b \quad , \quad C - c,$$

per momenti d'inerzia rispetto alle coppie di assi η, ζ; ζ, ξ; ξ, η

$$D + d \quad , \quad E + e \quad , \quad F + f,$$

e le componenti della coppia di quantità di moto dei movimenti interni siano:

$$l_1 \quad , \quad l_2 \quad , \quad l_3 .$$

Avremo dunque il teorema:

Un corpo, di cui è costante la forma e la distribuzione di densità, nell'interno del quale esiste un sistema policiclico i cui parametri possono ritenersi invariabili e sulle cui coordinate cicliche non agisce alcuna forza, ruota, sotto l'azione di una coppia motrice, attorno ad un punto fisso, come un altro corpo in cui esistono moti interni stazionarii e che è sollecitato dalla stessa coppia motrice. Le intensità cicliche dipendono in ogni istante dalla rotazione del corpo.

Da questo teorema segue che, *se la coppia motrice è nulla, potremo esprimere le componenti della rotazione e le intensità cicliche del sistema come funzioni ellittiche del tempo e potremo esprimere i nove coseni degli angoli che gli assi mobili formano con gli assi fissi mediante funzioni uniformi del tempo* (13).

Quando la coppia motrice è nulla la soluzione del problema può dunque ottenersi riconducendola a quella già eseguita del moto di un sistema in cui esistono moti stazionarii. Senonché, volendo operare in questo modo, dovremmo prima ricondurre le equazioni differenziali alla forma (a) della mia Nota: *Sulla teoria dei moti del polo terrestre* (14) e poi dovremmo eseguirne direttamente la integrazione. È facile però vedere che la soluzione può ottenersi con maggiore facilità.

Le (c) infatti prendono la forma:

(13) Vedi la Nota: *Un teorema sulla rotazione dei corpi, ecc.* « Atti R. Acc. di Torino », 5 maggio, 1895. [In questo vol.: IX, pp. 129–140].

(14) « Atti R. Acc. di Torino », 3 febbraio, 1895. [In questo vol.: VI, pp. 108–112].

$$
(17)\qquad\left\{\begin{aligned}
&(A-a)\frac{dp}{dt}-(F+f)\frac{dq}{dt}-(E+e)\frac{dr}{dt}=\begin{vmatrix}\varphi_2\,, & \varphi_3\\ q\,, & r\end{vmatrix}\\
&-(F+f)\frac{dp}{dt}+(B-b)\frac{dq}{dt}-(D+d)\frac{dr}{dt}=\begin{vmatrix}\varphi_3\,, & \varphi_1\\ r\,, & p\end{vmatrix}\\
&-(E+e)\frac{dp}{dt}-(D+d)\frac{dq}{dt}+(C-c)\frac{dr}{dt}=\begin{vmatrix}\varphi_1\,, & \varphi_2\\ p\,, & q\end{vmatrix},
\end{aligned}\right.
$$

avendo posto:

$$
\begin{aligned}
\varphi_1 &= \quad (A-a)\,p-(F+f)\,q-(E+e)\,r+l_1\\
\varphi_2 &= -(F+f)\,p+(B-b)\,q-(D+d)\,r+l_2\\
\varphi_3 &= -(E+e)\,p-(D+d)\,q+(C-c)\,r+l_3\,.
\end{aligned}
$$

Risolvendo le (17) rispetto a $dp/dt\,, dq/dt\,, dr/dt$ otteniamo:

$$
\begin{aligned}
\frac{dp}{dt}=\frac{1}{\Delta}\Bigg\{&\begin{vmatrix}\varphi_2\,, & \varphi_3\\ q\,, & r\end{vmatrix}\begin{vmatrix}B-b\,, & -(D+d)\\ -(D+d)\,, & C-c\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\varphi_3\,, & \varphi_1\\ r\,, & p\end{vmatrix}\begin{vmatrix}-(D+d)\,, & C-c\\ -(F+f)\,, & -(E+e)\end{vmatrix}\\
&+\begin{vmatrix}\varphi_1\,, & \varphi_2\\ p\,, & q\end{vmatrix}\begin{vmatrix}-(F+f)\,, & -(E+e)\\ B-b\,, & -(D+d)\end{vmatrix}\Bigg\}
\end{aligned}
$$

$$
=\frac{1}{\Delta}\left\{\left\|\begin{matrix}\varphi_1\,, & \varphi_2\,, & \varphi_3\\ p\,, & q\,, & r\end{matrix}\right\|\cdot\left\|\begin{matrix}-(F+f)\,, & B-b\,, & -(D+d)\\ -(E+e)\,, & -(D+d)\,, & C-c\end{matrix}\right\|\right\}
$$

$$
=\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix}-(F+f)\,\varphi_1+(B-b)\,\varphi_2-(D+d)\,\varphi_3\,, & -(E+e)\,\varphi_1-(D+d)\,\varphi_2+(C-c)\,\varphi_3\\ -(F+f)\,p+(B-b)\,q-(D+d)\,r\,, & -(E+e)\,p-(D+d)\,q+(C-c)\,r\end{vmatrix}
$$

$$
=\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix}\varphi_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial q}+\varphi_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial q}+\varphi_3\frac{\partial\varphi_3}{\partial q}\,, & \varphi_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial r}+\varphi_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial r}+\varphi_3\frac{\partial\varphi_3}{\partial r}\\ -(F+f)\,p+(B-b)\,q-(D+d)\,r\,, & -(E+e)\,p-(D+d)\,q+(C-c)\,r\end{vmatrix},
$$

in cui si è preso:

$$
\Delta=\begin{vmatrix}A-a\,, & -(F+f)\,, & -(E+e)\\ -(F+f)\,, & B-b\,, & -(D+d)\\ -(E+e)\,, & -(D+d)\,, & C-c\end{vmatrix}.
$$

In modo analogo si ottengono $dq/dt\,, dr/dt$, per cui ponendo:

$$
(18)\qquad\left\{\begin{aligned}
F_1=\frac{1}{2\sqrt{\Delta}}\{&[(A-a)\,p-(F+f)\,q-(E+e)\,r+l_1]^2\\
&+[-(F+f)\,p+(B-b)\,q-(D+d)\,r+l_2]^2\\
&+[-(E+e)\,p-(D+d)\,q+(C-c)\,r+l_3]^2\}\\
F_2=\frac{1}{2\sqrt{\Delta}}\{&(A-a)\,p^2+(B-b)\,q^2+(C-c)\,r^2\\
&-2\,(D+d)\,qr-2\,(E+e)\,rp-2\,(F+f)\,pq\},
\end{aligned}\right.
$$

le (17) si trasformeranno nelle equazioni seguenti:

$$(19) \qquad \frac{dp}{dt} = \frac{d(F_1, F_2)}{d(q, r)}, \qquad \frac{dq}{dt} = \frac{d(F_1, F_2)}{d(r, p)}, \qquad \frac{dr}{dt} = \frac{d(F_1, F_2)}{d(p, q)},$$

la cui integrazione ha formato il soggetto di una precedente Memoria nella quale essa fu ricondotta a dipendere dalla risoluzione di una equazione del quarto grado (15).

Questa equazione nel nostro caso si costruisce immediatamente partendo dalla (12) della Memoria ora citata. In tal modo otterremo le componenti della rotazione del sistema e tutte le intensità cicliche espresse mediante funzioni ellittiche dalle formule seguenti:

$$(20) \qquad \left\{ \begin{aligned} p &= \frac{N_1^{(1)} \sigma_1 u + N_1^{(2)} \sigma_2 u + N_1^{(3)} \sigma_3 u + N_1^{(4)} \sigma u}{M^{(1)} \sigma_1 u + M^{(2)} \sigma_2 u + M^{(3)} \sigma_3 u + M^{(4)} \sigma u} \\ q &= \frac{N_2^{(1)} \sigma_1 u + N_2^{(2)} \sigma_2 u + N_2^{(3)} \sigma_3 u + N_2^{(4)} \sigma u}{M^{(1)} \sigma_1 u + M^{(2)} \sigma_2 u + M^{(3)} \sigma_3 u + M^{(4)} \sigma u} \\ r &= \frac{N_3^{(1)} \sigma_1 u + N_3^{(2)} \sigma_2 u + N_3^{(3)} \sigma_3 u + N_3^{(4)} \sigma u}{M^{(1)} \sigma_1 u + M^{(2)} \sigma_2 u + M^{(3)} \sigma_3 u + M^{(4)} \sigma u} \\ \omega_i &= \frac{L_i^{(1)} \sigma_1 u + L_i^{(2)} \sigma_2 u + L_i^{(3)} \sigma_3 u + L_i^{(4)} \sigma u}{M^{(1)} \sigma_1 u + M^{(2)} \sigma_2 u + M^{(3)} \sigma_3 u + M^{(4)} \sigma u}, \end{aligned} \right.$$

in cui le $L_i^{(h)}$, $M_i^{(h)}$, $N_i^{(h)}$ sono quantità costanti. Introducendo le quantità $\alpha_{ir}^{(h)}$ usate nella Memoria ora citata, avremo:

$$(21) \qquad \left\{ \begin{aligned} N_i^{(h)} &= M^{(h)} \cdot \frac{\alpha_{i4}^{(h)}}{\alpha_{44}^{(h)}} \\ L_i^{(h)} &= M^{(h)} \cdot \frac{\Sigma_s \left(- a_s \alpha_{14}^{(h)} - b_s \alpha_{24}^{(h)} - c_s \alpha_{34}^{(h)} + K_s \alpha_{44}^{(h)}\right) A_{is}}{\alpha_{44}^{(h)}}. \end{aligned} \right.$$

La u sarà legata al tempo t dalla relazione lineare:

$$(22) \qquad u = \sqrt{\frac{(\lambda_2 - \lambda_4)(\lambda_1 - \lambda_3)}{(e_1 - e_3) D}} (t - t_0),$$

essendo t_0 una costante arbitraria e $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ le radici della equazione di quarto grado.

Per ottenere i coseni di direzione che gli assi fissi formano con quelli mobili, basterà cominciare dal determinare $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ mediante le (9) le quali nel nostro caso si riducono a

(15) Vedi: *Sopra un sistema di equazioni differenziali*. «Atti R. Accadem. di Torino», 31 marzo, 1895. [In questo vol.: VIII, pp. 122-128].

$$(23)\qquad \begin{cases} \gamma_1 = \frac{1}{K}[(A-a)p-(F+f)q-(E+e)r+l_1] \\ \gamma_2 = \frac{1}{K}[-(F+f)p+(B-b)q-(D+d)r+l_2] \\ \gamma_3 = \frac{1}{K}[-(E+e)p-(D+d)q+(C-c)r+l_3], \end{cases}$$

e quindi, applicando il metodo indicato nella mia Nota: *Un teorema sulla rotazione, ecc.* (16), otterremo le espressioni dei rimanenti sei coseni.

9. Il caso che abbiamo trattato nelle Memorie precedenti corrisponde a quello in cui i parametri del sistema ciclico e le intensità cicliche sono costanti. Infatti quando ambedue queste condizioni sono soddisfatte i moti interni sono evidentemente stazionarii. Il detto caso corrisponde quindi a quello in cui il moto interno è *isociclico*.

Nel caso trattato nel paragrafo precedente le intensità cicliche sono variabili, ma sono nulle tutte le forze, tanto la coppia di rotazione, quanto le forze relative alle coordinate cicliche. Questo moto possiamo chiamarlo un moto *adiabatico* dell'intero sistema; non però un moto adiabatico pel sistema ciclico. Infatti esaminando il moto ciclico relativo agli assi ξ, η, ζ abbiamo che i momenti ciclici sono dati da:

$$q_i = \frac{\partial T_0}{\partial \omega_i} = \sum_1^n {}_s\, a_{is}\,\omega_s = K_i - a_i p - b_i q - c_i r,$$

e quindi non sono costanti ma variano linearmente rispetto alle componenti della rotazione del sistema (17).

In ambedue i casi in cui, essendo costanti i parametri, il moto dell'intero sistema è isociclico o adiabatico, abbiamo ottenuto la soluzione per mezzo di funzioni ellittiche.

Noi vogliamo ora trattare un caso che li comprende ambedue e in cui pure la soluzione può ottenersi nella stessa maniera.

Ritorniamo perciò alle equazioni generali (a) e supponiamo che non tutte le forze relative alle coordinate cicliche, ma solo le prime ν siano nulle.

Allora avremo soltanto ν integrali della forma (11), cioè quelli che corrispondono agli indici $i = 1, 2, \cdots, \nu$. Se poniamo:

$$v_i = \sum_{\nu+1}^n {}_r\, a_{ir}\,\omega_r,$$

essi potranno scriversi:

$$a_i p + b_i q + c_i r + \sum_1^\nu {}_s\, a_{is}\,\omega_s = K_i - v_i.$$

(16) «Atti R. Acc. di Torino», 5 maggio, 1895. [In questo vol.: IX, pp. 129–140].
(17) Cfr. HERTZ, op. cit., sopra, p. 239.

Denotiamo con A'_{is} gli elementi aggiunti a quelli del determinante:

$$\begin{vmatrix} a_{11} , & a_{12} , & \dots & a_{1\nu} \\ a_{21} , & a_{22} , & \dots & a_{2\nu} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{\nu 1} , & a_{\nu 2} , & \dots & a_{\nu\nu} \end{vmatrix} ,$$

avremo:

$$\omega_i = -p \sum_1^\nu {}_s A'_{is} a_s - q \sum_1^\nu {}_s A'_{is} b_s - r \sum_1^\nu {}_s A'_{is} c_s + \sum_1^\nu {}_s A_{is} (K_i - v_i)$$
$$(i = 1 , 2, \dots \nu) ,$$

e mediante queste formule potremo eliminare dalle equazioni del moto le $\omega_1 , \omega_2 , \cdots , \omega_\nu$. A tal fine basterà ripetere un calcolo analogo a quello fatto precedentemente.

Se poniamo:

$$\tau = \frac{1}{2} \sum_{\nu+1}^n {}_r \sum_{\nu+1}^n {}_s a_{rs} \omega_r \omega_s ,$$

avremo:

$$T_0 = \frac{1}{2} \sum_1^\nu {}_i \sum_1^\nu {}_s a_{is} \omega_i \omega_s + \sum_1^\nu v_i \omega_i + \tau ,$$

quindi eliminando le $\omega_1 , \omega_2 , \cdots , \omega_\nu$ otterremo:

$$T_0 = \frac{1}{2} (a' p^2 + b' q^2 + c' r^2 + 2 d' qr + 2 e' rp + 2f' pq) - p \sum_1^\nu {}_i \sum_1^\nu {}_s A'_{is} a_i K_s$$
$$- q \sum_1^\nu {}_i \sum_1^\nu {}_s A'_{is} b_i K_s - r \sum_1^\nu {}_i \sum_1^\nu {}_s A'_{is} c_i K_s + \frac{1}{2} \Sigma_i \Sigma_s A'_{is} K_i K_s - \Sigma_i \Sigma_s A'_{is} v_i v_s + \tau ,$$

in cui:

$$a' = \sum_1^\nu {}_i \sum_1^\nu {}_s A'_{is} a_i a_s \quad , \quad b' = \sum_1^\nu {}_i \sum_1^\nu {}_s A'_{is} b_i b_s \quad , \quad c' = \sum_1^\nu {}_i \sum_1^\nu {}_s A'_{is} c_i c_s$$
$$d' = \sum_1^\nu {}_i \sum_1^\nu {}_s A'_{is} b_i c_s \quad , \quad e' = \sum_1^\nu {}_i \sum_1^\nu {}_s A'_{is} c_i a_s \quad , \quad f' = \sum_1^\nu {}_i \sum_1^\nu {}_s A'_{is} a_i b_s .$$

Facciamo:

$$\sum_{\nu+1}^n {}_r a_r \omega_r = m'_1 \quad , \quad \sum_{\nu+1}^n {}_r b_r \omega_r = m'_2 \quad , \quad \sum_{\nu+1}^n {}_r c_r \omega_r = m'_3 ,$$

resulterà:

$$m_1 = m'_1 + \sum_1^\nu {}_i a_i \omega_i + \sum_1^m {}_h e_h \frac{d\tilde{\omega}_h}{dt} \quad , \quad m_2 = m'_2 + \sum_1^\nu b_i \omega_i + \sum_1^m {}_h f_h \frac{d\tilde{\omega}_h}{dt} ,$$
$$m_3 = m'_3 + \sum_1^\nu {}_i c_i \omega_i + \sum_1^m {}_h g_h \frac{d\tilde{\omega}_h}{dt} .$$

Quindi dalla espressione (7) della forza viva, otterremo questa quantità in cui sono eliminate le ω_i $(i = 1, 2, \cdots, \nu)$ data dalla formula:

$$(T') = \frac{1}{2}\{(A - a')p^2 + (B - b')q^2 + (C - c')r^2$$

$$- 2(D + d')qr - 2(E + e')rp - 2(F + f')pq\}$$

$$+ p\left[m'_1 - \sum_1^\nu{}_i \sum_1^\nu{}_s A'_{is}\, a_i\, v_r + \sum_1^m{}_h e_h \frac{d\tilde{\omega}_h}{dt}\right] + q\left[m'_2 - \sum_1^\nu{}_i \sum_1^\nu{}_s A'_{is}\, b_i\, v_s + \sum_1^m f_h \frac{d\tilde{\omega}_h}{dt}\right]$$

$$+ r\left[m'_3 - \sum_1^\nu{}_i \sum_1^\nu{}_s A'_{is}\, c_i\, v_s + \sum_1^m g_h \frac{d\tilde{\omega}_h}{dt}\right] + \frac{1}{2}\Sigma_i \Sigma_s A_{is}(K_i K_s - v_i v_s) + \tau .$$

Calcolando ora il δT, eliminandovi le $\delta\omega_i$ ricavate dalle espressioni precedenti di ω_i, e confrontando la espressione che si ottiene con $\delta(T')$, abbiamo:

$$\frac{\partial T}{\partial p} = \frac{\partial (T')}{\partial p} + \sum_1^\nu{}_i \sum_1^\nu{}_s A'_{is}\, a_s K_i \quad , \quad \frac{\partial T}{q} = \frac{\partial (T')}{\partial q} + \sum_1^\nu{}_i \sum_1^\nu{}_s A'_{is} K_i\, b_s ,$$

$$\frac{\partial T}{\partial r} = \frac{\partial (T')}{\partial r} + \sum_1^\nu{}_i \sum_1^\nu{}_s A'_{is} K_i\, c_s$$

$$\frac{\partial T}{\partial \omega_r} = \frac{\partial (T')}{\partial \omega_r} + \sum_1^\nu{}_i \sum_1^\nu{}_s A'_{is} K_i\, a_{sr} \qquad (r = \nu + 1, \nu + 2, \ldots n)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \tilde{\omega}_h} = \frac{\partial}{\partial \tilde{\omega}_h}\Bigg[(T') + p\sum_1^\nu{}_i \sum_1^\nu{}_s A'_{is} K_i\, a_s + q\sum_1^\nu{}_i \sum_1^\nu{}_s A'_{is} K_i\, b_s + r\sum_1^\nu{}_i \sum_1^\nu{}_s A'_{is} K_i\, c_s$$

$$- \sum_1^\nu{}_i \sum_1^\nu{}_s A'_{is} K_i (K_s - v_s)\Bigg],$$

onde ponendo:

$$\Omega = (T') + p\sum_1^\nu{}_i \sum_1^\nu{}_s A'_{is} K_i\, a_s + q\sum_1^\nu{}_i \sum_1^\nu{}_s A'_{is} K_i\, b_s + r\sum_1^\nu{}_i \sum_1^\nu{}_s A'_{is} K_i\, c_s$$

$$- \sum_1^\nu{}_i \sum_1^\nu{}_s A'_{is} K_i (K_s - v_s),$$

avremo:

$$\frac{\partial T}{\partial p} = \frac{\partial \Omega}{\partial p} \quad , \quad \frac{\partial T}{\partial q} = \frac{\partial \Omega}{\partial q} \quad , \quad \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{\partial \Omega}{\partial r}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \omega_r} = \frac{\partial \Omega}{\partial \tilde{\omega}_r} \qquad (r = \nu + 1, \ldots n)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \tilde{\omega}_h} = \frac{\partial \Omega}{\partial \tilde{\omega}_h},$$

e le equazioni (a) del moto diverranno:

$$(d)\quad \begin{cases} \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial\Omega}{\partial p} + q\dfrac{\partial\Omega}{\partial r} - r\dfrac{\partial\Omega}{\partial q} = M_\xi \\ \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial\Omega}{\partial q} + r\dfrac{\partial\Omega}{\partial p} - p\dfrac{\partial\Omega}{\partial r} = M_\eta \\ \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial\Omega}{\partial r} + p\dfrac{\partial\Omega}{\partial q} - q\dfrac{\partial\Omega}{\partial p} = M_\zeta \\ \dfrac{d}{dt}\left(a_r p + b_r q + c_r r + \sum_1^n{}_s\, a_{rs}\,\omega_s\right) = P_r \qquad (r = \nu + 1\ ,\ \nu + 2 , \ldots n) \\ \dfrac{d}{dt}(e_h p + f_h q + g_h r) - \dfrac{\partial T}{\partial \tilde{\omega}_h} = \Pi_h , \end{cases}$$

in cui si ha:

$$\Omega = \frac{1}{2}\{(A - a')p^2 + (B - b')q^2 + (C - c')r^2 - 2(D + d')qr - 2(E + e')rp - 2(F + f')pq\}$$

$$+ p\left[m'_1 + \sum_1^\nu{}_i \sum_1^\nu{}_s A'_{is}\, a_i (K_s - v_s) + \sum_1^m{}_h e_h \frac{d\tilde{\omega}_h}{dt}\right]$$

$$+ q\left[m'_2 + \sum_1^\nu{}_i \sum_1^\nu{}_s A'_{is}\, b_i (K_s - v_s) + \sum_1^m{}_h f_h \frac{d\tilde{\omega}_h}{dt}\right]$$

$$+ q\left[m'_3 + \sum_1^\nu{}_i \sum_1^\nu{}_s A'_{is}\, a_i (K_s - v_s) + \sum_1^m{}_h g_h \frac{d\tilde{\omega}_h}{dt}\right] - \frac{1}{2}\sum_1^\nu{}_i \sum_1^\nu{}_s A'_{is}(K_i - v_i)(K_s - v_s) + \tau$$

e

$$m'_1 = \sum_{\nu+1}^n{}_r\, a_r\,\omega_r \qquad v_i = \sum_{\nu+1}^n{}_r\, a_r\,\omega_r$$

$$m'_2 = \sum_{\nu+1}^n b_r\,\omega_r \qquad \tau = \frac{1}{2}\sum_{\nu+1}^n{}_r \sum_{\nu+1}^n{}_s\, a_{rs}\,\omega_r\,\omega_s$$

$$m'_3 = \sum_{\nu+1}^n c_r\,\omega_r .$$

Se i parametri del sistema sono costanti e le intensità cicliche $\omega_{\nu+1}$, $\omega_{\nu+2}, \cdots, \omega_n$ sono pure costanti, allora spariscono le equazioni (d) e in Ω i coefficienti di $p, q, r, p^2, q^2, r^2, qr, rp, pq$ divengono costanti, onde *il teorema del* § 8 *si estende immediatamente al caso in cui sopra alcune coordinate cicliche non agisce alcuna forza e le intensità cicliche corrispondenti alle rimanenti coordinate cicliche sono costanti.*

Supponendo poi che la coppia di rotazione sia sulla rotazione si otterrà per mezzo di funzioni ellittiche; infatti le prime tre equazioni (d) si ridurranno alla forma (19):

$$\frac{dp}{dt} = \frac{d(F'_1, F'_2)}{d(q, r)} \quad , \quad \frac{dq}{dt} = \frac{d(F'_1, F'_2)}{d(r, p)} \quad , \quad \frac{dr}{dt} = \frac{d(F'_1, F'_2)}{d(p, q)} ,$$

in cui:

$$\left\{\begin{aligned} F'_1 &= \frac{1}{2\sqrt{\Delta'}}\{[(A-a')p-(F+f')q-(E+e')r+l'_1]^2 \\ &+[-(F+f')p+(B-b')q-(D+d')r+l'_2]^2 \\ &+[-(E+e')p-(D+d')q-(C-c')r+l'_3]^2\} \\ F'_2 &= \frac{1}{2\sqrt{\Delta'}}\{(A-a')p^2+(B-b')q^2+(C-c')r^2 \\ &-2(D+d')qr-2(E+e')rp-2(F+f')pq\}, \end{aligned}\right.$$

essendo:

$$l'_1 = m'_1 + \sum_1^\nu{}_i \sum_1^\nu{}_s A'_{is}\, a_i\,(K_s - v_s)$$

$$l'_2 = m'_2 + \sum_1^\nu{}_i \sum_1^\nu{}_s A'_{is}\, b_i\,(K_s - v_s)$$

$$l'_3 = m'_3 + \sum_1^\nu{}_i \sum_1^\nu{}_s A'_{is}\, c_i\,(K_s - v_s)$$

$$\Delta' = \begin{vmatrix} A-a' & , -(F+f') & , -(E+e') \\ -(F+f') & , B-b' & , -(D+d') \\ -(E+e') & , -(D+d') & , C-c' \end{vmatrix},$$

quindi p, q, r; $\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_\nu$ assumeranno la forma (20). Per ottenere le forze $P_{\nu+1}, \cdots, P_n$ che conservano costanti le intensità cicliche $\omega_{\nu+1}, \cdots, \omega_n$, basterà ricorrere alla formula:

$$\begin{aligned} P_r &= \frac{d}{dt}\left(a_r p + b_r q + c_r r + \sum_1^n{}_s a_{rs}\omega_s\right) = \frac{d}{dt}\left(a_r p + b_r q + c_r r + \sum_1^\nu{}_i a_{ri}\omega_i\right) \\ &= \frac{d}{dt}\left\{a_r p + b_r q + c_r r + \sum_1^\nu{}_i a_{ri}\left(-p\sum_1^\nu{}_s A'_{is}a_s - q\sum_1^\nu{}_s A'_{is}b_s - r\sum_1^\nu{}_s A'_{is}c_s\right)\right\} \\ &= \left(a_r - \sum_1^\nu{}_i\sum_1^\nu{}_s A'_{is}a_{ri}a_s\right)\frac{dp}{dt} + \left(b_r - \sum_1^\nu{}_i\sum_1^\nu{}_s A'_{is}a_{ri}b_s\right)\frac{dq}{dt} + \left(c_r - \sum_1^\nu A'_{is}c_{ri}c_s\right)\frac{dr}{dt} \\ &= \left(a_r - \sum_1^\nu{}_i\sum_1^\nu{}_s A'_{is}a_{ri}a_s\right)\frac{d(F'_1, F'_2)}{d(q, r)} + \left(b_r - \sum_1^\nu{}_i\sum_1^\nu{}_s A'_{is}a_{ri}b_s\right)\frac{d(F'_1, F'_2)}{d(r, p)} \\ &\quad + \left(c_r - \sum_1^\nu{}_i\sum_1^\nu{}_s A'_{is}a_{ri}c_s\right)\frac{d(F'_1, F'_2)}{d(p, q)}. \end{aligned}$$

Poniamo perciò:

$$\begin{aligned} F_0^{(r)} &= \left(a_r - \sum_1^\nu{}_i\sum_1^\nu{}_s A'_{is}a_{ri}a_s\right)p + \left(b_r - \sum_1^\nu{}_i\sum_1^\nu{}_s A'_{is}a_{ri}b_s\right)q \\ &\quad + \left(c_r - \sum_1^\nu{}_i\sum_1^\nu{}_s A'_{is}a_{ri}c_s\right)r, \end{aligned}$$

e avremo:

$$P_r = \frac{d(F_0^{(r)}, F_1', F_2')}{d(p, q, r)} \qquad (r = \nu + 1, \nu + 2, \cdots n),$$

quindi anche le forze P_r si esprimeranno mediante funzioni ellittiche del tempo.

Lugano, 8 agosto 1895.

NOTA

Dopo ultimato il precedente lavoro nell'agosto scorso, ebbi conoscenza di una Memoria del prof. BELTRAMI presentata al Reale Istituto Lombardo nell'adunanza del 20 giugno, la quale contiene delle osservazioni altrettanto importanti e profonde quanto ne è elegante e limpida la esposizione. Il prof. BELTRAMI si propone in essa lo scopo di porre in luce la importanza che ha nella dinamica l'impiego diretto di quella espressione del principio fondamentale di LAGRANGE che ordinariamente si chiama la equazione simbolica del moto. Questa equazione è suscettibile di trasformarsi in modo da potersi mettere in riscontro colle varie forme sotto cui vennero poste le equazioni della dinamica, quali la lagrangiana e la hamiltoniana, ed anche con un tipo intermedio fra i due che il prof. BELTRAMI pone in evidenza. Una applicazione di ciò dà l'illustre Autore ottenendo quella che potrebbe chiamarsi la equazione simbolica corrispondente alle equazioni di THOMSON e TAIT. Mi permetto qui di ricavare dalla equazione simbolica $(5)_c$ del BELTRAMI il teorema che riconduce ad un moto isociclico il moto adiabatico di un sistema in cui sussistono moti ciclici. Perciò ammetterò che il lettore abbia presenti le notazioni ed i simboli usati dal prof. BELTRAMI.

Si supponga che il sistema sia girevole attorno ad un punto fisso e che si scelgano, come prime fra le coordinate che individuano la configurazione del sistema, tre variabili q_1, q_2, q_3 che determinino la posizione degli assi mobili rispetto ad assi fissi (per esempio i tre angoli di EULERO), mentre le successive coordinate indipendenti del sistema siano cicliche e tali da individuare il moto del sistema relativamente ai detti assi mobili. Le forze corrispondenti alle coordinate cicliche siano nulle. Quindi nel nostro caso le tre prime variabili indipendenti sarebbero le q del BELTRAMI, mentre le r' sarebbero le nostre ω_i. Nelle dette ipotesi l'equazione simbolica del BELTRAMI assume la forma:

$$\delta L = \delta U - \left(\sum_1^3{}_i \frac{\partial U}{\partial q_i'} \partial q_i\right)',$$

in cui si ha:

$$-U = T_q - \mathbf{T}_\lambda - \mathbf{T}_\varrho - \Sigma \frac{\partial \mathbf{T}_\lambda}{\partial \lambda} \rho .$$

In questa equazione per T_q deve prendersi la forza viva dovuta al moto di trascinamento degli assi mobili, cioè:

$$T_q = \frac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 - 2Dqr - 2Erp - 2Fpq),$$

le λ debbono essere sostituite da:

$$a_i p + b_i q + c_i r,$$

e $\mathbf{T}$ deve essere la forma reciproca della

$$T_r = \frac{1}{2}\Sigma_i \Sigma_s a_{is}\, \omega_i \omega_s ,$$

vale a dire la forma:

$$\frac{1}{2}\Sigma_i\Sigma_s A_{is}\Omega_i\Omega_s,$$

onde:

$$\mathbf{T}_\lambda = \frac{1}{2}\Sigma_i\Sigma_s A_{is}(a_i p + b_i q + c_i r)(a_s p + b_s q + c_s r)$$
$$= \frac{1}{2}(ap^2 + bq^2 + cr^2 + 2dqr + 2erp + 2fpq).$$

Quindi, sempre adottando le nozioni del prof. BETRAMI,

$$\mathbf{U} = \frac{1}{2}[(A-a)p^2 + (B-b)q^2 + (C-c)r^2 - 2(D+d)qr - 2(E+e)rp - 2(F+f)pq]$$
$$-\frac{1}{2}\Sigma_i\Sigma_s A_{is} K_i K_s,$$

giacché le costanti K_i sostituiscono nel nostro caso le costanti ρ del BELTRAMI.

Quanto a $\mathbf{V}$ avremo:

$$\mathbf{V} = \Sigma\frac{\partial \mathbf{T}_\lambda}{\partial\lambda}\rho = \Sigma_i\Sigma_s A_{si}(a_i p + b_i q + c_i r) K_s$$
$$= p\Sigma_i\Sigma_s A_{is} a_i K_s + q\Sigma_i\Sigma_s A_{is} b_i K_s + r\Sigma_i\Sigma_s A_{is} c_i K_s$$
$$= l_1 p + l_2 q + l_3 r,$$

onde:

$$-U = \frac{1}{2}[(A-a)p^2 + (B-b)q^2 + (C-c)r^2 - 2(D+d)qr - 2(E+e)rp - 2(F+f)pq]$$
$$+ l_1 p + l_2 q + l_3 r - \frac{1}{2}\Sigma_i\Sigma_s A_{is} K_i K_s.$$

All'infuori dunque del termine costante $(1/2)\Sigma_i\Sigma_s A_{si} K_i K_s$, la U del BELTRAMI coincide colla Θ della precedente Memoria. Noi potremo dunque dire che:

$$\delta L = \left(\sum_1^3 \frac{\partial\Theta}{\partial q_i'}\delta q_i\right)' - \delta\Theta, \tag{1}$$

è la equazione simbolica del moto di un sistema nel cui interno esistono moti ciclici, quando son nulle le forze relative alle coordinate cicliche e i parametri sono costanti.

La precedente equazione ci conduce facilmente al teorema della Memoria precedente che abbiamo sopra ricordato, osservando che essa può interpretarsi come la equazione simbolica del moto di un sistema nel cui interno esistono moti isociclici. Il teorema risulta così dimostrato in un altro modo: le operazioni fatte nella precedente Memoria per giungervi furono eseguite sopra equazioni aventi il tipo che può chiamarsi di LAGRANGE–LIOUVILLE, mentre invece le trasformazioni ora eseguite valendosi del metodo del prof. BELTRAMI furono direttamente applicate sopra la equazione del moto nella così detta forma simbolica.

Mostriamo ora come dall'ultima equazione scritta possano ricavarsi direttamente le equazioni del moto aventi il tipo di LAGRANGE–LIOUVILLE, anche senza ricorrere all'impiego del principio di HAMILTON. Si osservi perciò che:

$$\sum_1^3\frac{\partial\Theta}{\partial q_i'}\delta q_i = \frac{\partial\Theta}{\partial p}\sum_1^3\frac{\partial p}{\partial q_i'}\delta q_i + \frac{\partial\Theta}{\partial q}\sum_1^3\frac{\partial q}{\partial q_i'}\delta q_i + \frac{\partial\Theta}{\partial r}\sum_1^3\frac{\partial r}{\partial q_i'}\delta q_i.$$

Tenendo conto che p, q, r debbono essere lineari nelle q_i', cioè deve aversi:

$$p = \sum_1^3 P_i q_i' \quad , \quad q = \sum_1^3 Q_i q_i' \quad , \quad r = \sum_1^3 R_i q_i',$$

in cui P_i, Q_i, R_i sono indipendenti dalle q'_i, e (vedi § 5):

$$\delta\tilde{\omega} = \sum_1^3 P_i\,\delta q_i \quad , \quad \delta\chi = \sum_1^3 Q_i\,\delta q_i \quad , \quad \delta\rho = \sum_1^3 R_i\,\delta q_i ,$$

si otterrà che:

$$\delta\tilde{\omega} = \sum_1^3 \frac{\partial p}{\partial q'_i}\delta q_i \quad , \quad \delta\chi = \sum_1^3 \frac{\partial q}{\partial q'_i}\delta q_i \quad , \quad \delta\rho = \sum_1^3 \frac{\partial r}{\partial q'_i}\delta q_i ,$$

e perciò la (1) diverrà:

$$\delta L = \left(\frac{\partial\Theta}{\partial p}\delta\tilde{\omega} + \frac{\partial\Theta}{\partial q}\delta\chi + \frac{\partial\Theta}{\partial r}\delta\rho\right)' - \delta\Theta ,$$

ossia, poiché:

$$\delta\Theta = \frac{\partial\Theta}{\partial p}\delta p + \frac{\partial\Theta}{\partial q}\delta q + \frac{\partial\Theta}{\partial r}\delta r ,$$

potrà scriversi:

$$\delta L = \frac{d}{dt}\frac{\partial\Theta}{\partial p}\delta\tilde{\omega} + \frac{d}{dt}\frac{\partial\Theta}{\partial q}\delta\chi + \frac{d}{dt}\frac{\partial\Theta}{\partial r}\delta\rho + \frac{\partial\Theta}{\partial p}(\delta\tilde{\omega}' - \delta p) + \frac{\partial\Theta}{\partial q}(\delta\chi' - \delta q) + \frac{\partial\Theta}{\partial r}(\delta\rho' - \delta r).$$

Ma (vedi § 5):

$$\delta\tilde{\omega}' - \delta p = r\delta\chi - q\delta\rho \quad , \quad \delta\chi' - \delta q = p\delta\rho - r\delta\tilde{\omega} \quad , \quad \delta\rho' - \delta r = q\delta\tilde{\omega} - p\delta\chi ,$$

quindi:

$$\delta L = \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial\Theta}{\partial p} + q\frac{\partial\Theta}{\partial r} - r\frac{\partial\Theta}{\partial q}\right)\delta\tilde{\omega} + \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial\Theta}{\partial q} + r\frac{\partial\Theta}{\partial p} - p\frac{\partial\Theta}{\partial r}\right)\delta\chi$$
$$+ \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial\Theta}{\partial r} + p\frac{\partial\Theta}{\partial q} - q\frac{\partial\Theta}{\partial p}\right)\delta\rho ,$$

e poiché:

$$\delta L = M_\xi\,\delta\tilde{\omega} + M_\eta\,\delta\chi + M_\zeta\,\delta\rho ,$$

otterremo le equazioni:

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\frac{\partial\Theta}{\partial p} + q\frac{\partial\Theta}{\partial r} - r\frac{\partial\Theta}{\partial q} = M_\xi \\ &\frac{d}{dt}\frac{\partial\Theta}{\partial q} + r\frac{\partial\Theta}{\partial p} - p\frac{\partial\Theta}{\partial r} = M_\eta \\ &\frac{d}{dt}\frac{\partial\Theta}{\partial r} + p\frac{\partial\Theta}{\partial q} - q\frac{\partial\Theta}{\partial p} = M_\zeta , \end{aligned}\right.$$

che sono appunto del tipo LAGRANGE-LIOUVILLE.

Analogamente potrebbe operarsi nel caso trattato nel § 9.

XVII.

REPLICA AD UNA NOTA DEL PROF. PEANO (*)

« Rend. Acc. Lincei », ser. 5ª, vol. V, 1896$_1$, pp. 4-7.

Illustre signor Presidente,

Torino, 1° gennaio 1895.

Mi permetta di comunicare alla S. V. una breve replica alla Nota del prof. PEANO inserita nel fascicolo 11° (2° sem. 1895) dei Rendiconti dell'Accademia.

Relativamente a quanto trovasi detto in principio di quella Nota, mi sembra che non valga la pena di spendere alcuna parola, giacché nessuno può mettere in dubbio la priorità mia tanto rispetto al trattare la questione, quanto riguardo alla idea fondamentale che ne forma il punto di partenza; né alcun dubbio può nascere circa la originalità di quella idea che a me nacque, come esposi nelle mie lezioni dell'anno scorso, cercando un esempio atto ad illustrare il concetto emesso da HERTZ di sostituire, nell'esame di un fenomeno naturale, alla considerazione delle forze, quella dei moti nascosti; e non occorse valermi della questione del gatto, cui accenna il PEANO, questione del resto sulla quale egli si limitò a scrivere pel suo giornale una semplice e modesta recensione di lavori altrui. Non è corretto trovare, come dice il PEANO, identità fra due problemi di meccanica essenzialmente diversi, e trattati con metodi diversi per la sola ragione che è comune ad ambedue l'impiego di principî fondamentali di questa scienza; se ciò potesse pensarsi, si potrebbe sempre ricondurre due problemi meccanici qualunque ad un solo, perché ambedue debbono necessariamente farsi dipendere dagli stessi principî. Non vale la pena di spendervi alcuna parola anche perché l'articolo del PEANO è quasi totalmente la riproduzione di quanto egli aveva già esposto in una Nota presentata all'Accademia di Torino nella seduta del 19 maggio u. s. e che il prof. PEANO ritirò, dopo avermi comunicato per iscritto che egli stesso riconosceva il proprio errore. Ed infatti basta una elementare conoscenza delle funzioni ellittiche per accorgersi che, avendo io ottenuta la soluzione del problema mediante queste trascendenti, era impossibile che il PEANO pervenisse alla soluzione della stessa questione senza ricorrere ad integrazioni. Il calcolo del PEANO presentato a Torino il 5 maggio è applicabile solo ad un caso particolare della questione (quello in cui gli assi d'inerzia siano eguali) che io avevo già trattato nella Memoria presentata il 1° febbraio

(*) Lettera al Presidente L. BRIOSCHI.

alle «Astronomische Nachrichten» di Kiel(*). Ma è da osservare precipuamente che qualsiasi calcolo applicato alla terra e fondato su questo caso particolare, come ha fatto il PEANO, deve condurre di necessità a risultati del tutto inattendibili, come vedrà chi legge le conclusioni della detta Nota del PEANO, giacché la eccentricità terrestre che viene trascurata, è il fattore principale nell'andamento del fenomeno, tantoché non si può giustificare in alcun modo il procedimento del PEANO, nemmeno ritenendolo limitato alle deduzioni più sommarie. È inutile pure, mi sembra, il rispondere agli appunti mossi dal PEANO riguardo all'avere io introdotto nei miei calcoli delle derivazioni, secondo lui non necessarie, ed infatti esse sono indispensabili per eliminare mediante le formole del POISSON i coseni degli angoli che gli assi d'inerzia formano con quelli fissi; e i cultori della meccanica analitica ravviseranno immediatamente nel procedimento che ho tenuto, il classico metodo usato da LAGRANGE e da tutti i suoi continuatori, il quale porta di necessità le derivazioni che ho eseguite.

Osserverò che io non ho mai detto che i moti interni terrestri non possono produrre nella ipotesi della rigidità altro che piccole oscillazioni del polo. Anzi, nella Memoria delle «Astr. Nachr.» ho mostrato che in un sistema simmetrico, scelto ad arbitrio il moto del polo, si possono sempre trovare i moti interni capaci di produrlo. Di qui discende evidentemente per continuità che, scelta una conveniente traiettoria del polo la quale si avvicini abbastanza a quelle circolari che il polo descrive quando i moti interni sono nulli, essa potrà corrispondere a moti interni tanto piccoli quanto si vuole, ed è pure evidente che una simile traiettoria potrà in infiniti modi condursi a passare per un punto qualunque. L'avere enunciato questa conclusione immediata ed evidente delle mie considerazioni senza citarmi, solo vestendola del linguaggio dei vettori, valse al PEANO la censura contenuta nella Nota che presentai all'Accademia nello scorso settembre. Io non debbo quindi convenire in alcuno dei risultati del PEANO.

Nella mia Nota sui moti periodici del polo terrestre io non avevo bisogno di trattare il caso generale, avendolo già svolto completamente nella Parte III della mia Memoria dello scorso febbraio inserita nelle «Astr. Nachr.» in cui, fra le altre cose, integrai l'equazioni differenziali mediante successive approssimazioni, ottenendo serie convergenti. Per ben comprendere quella Nota, conviene tener presenti i risultati stabiliti nella suddetta Memoria, cioè che nel caso di un corpo in cui sussistono moti interni si può sempre scegliere ad arbitrio il moto del polo e quindi determinare i corrispondenti moti interni. Ora nella Nota sui moti periodici (come dissi in maniera esplicita) ho voluto trattare espressamente il caso del moto di un corpo simmetrico, in cui i moti del polo fossero *per dato* decomponibili in piccoli moti armonici, vale a dire partendo dalla ipotesi che, durante il tempo in cui si studia il moto, fossero avvertibili solo piccoli moti armonici del polo. Né il partire da esso dato può ingenerare il dubbio, nemmeno in chi si limiti

(*) In questo vol.: V, pp. 87-107. [N. d. R.].

a leggere quella sola Nota, che io abbia voluto escludere la possibilità che per certi moti interni, anche piccolissimi, il polo avrebbe potuto avere moti progressivi; dirò anzi che esso, oltre tutte le altre [1], è una nuova conferma che io ammettevo il contrario, perché se io avessi ritenuto che piccoli moti interni, qualunque essi fossero, non potessero produrre altro che piccoli moti periodici del polo, non avrei avuto bisogno di stabilire a priori *come dato* che i moti del polo che io volevo considerare fossero piccoli moti armonici, ma mi sarebbe bastato di porre la sola ipotesi di piccoli moti interni, e i piccoli moti armonici del polo avrebbero dovuto venire come conseguenza. È evidente ora che, una volta partito *come dato* dalla ipotesi di un solido simmetrico il cui polo ha un moto decomponibile in piccoli moti armonici, nessun artificio di calcolo poteva condurre a vedere fra quei moti armonici un moto progressivo, cioè un risultato in contradizione coi dati. Cadono dunque in maniera evidente tutti gli appunti fatti dal PEANO riguardo all'annullarsi della quantità $\lambda_n - \omega$. Oltre a ciò, in una Nota avente il titolo, *Osservazioni sulla mia Nota*: *Sui moti periodici del polo terrestre* [*] stampata fin dallo scorso giugno, tornai ancora una volta sulla stessa questione.

Il modo di operare nella detta Nota è dunque perfettamente legittimo; esso anzi era necessario volendo applicare i risultati al moto terrestre, onde confrontare (come era mio esplicito scopo) i calcoli colle conclusioni a cui era giunto CHANDLER. Tutto ciò mi sembra che fosse spiegato chiaramente; sebbene l'articolo sui moti periodici io lo abbia presentato all'Accademia di Torino, seduta stante, nell'adunanza del 5 maggio u. s. allorché il PEANO lesse la sua prima Nota, e ciò io feci per mostrare che già da tempo io avevo eseguito i calcoli numerici sulla questione, oltre all'avere ottenuto già i risultati teorici contenuti nelle mie prime quattro Note sull'argomento e nella Memoria del febbraio delle «Astr. Nachr.», tutto questo assai prima che il PEANO pensasse nemmeno a simile questione (Ved. Proc. Verb. delle sedute dell'Accademia di Torino)

Dimostrato così esser vano ed insussistente qualsiai appunto o critica fattami dal prof. PEANO, e non originali né esatte le sue asserzioni, avendole egli stesso già riconosciute tali, ritengo, per parte mia, definitivamente chiusa questa polemica.

(1) Fra le altre cose dico che la possibilità di lenti moti progressivi non è esclusa nemmeno ammettendo delle perturbazioni prodotte dalla plasticità, sebbene la natura e le condizioni dei moti progressivi verrebbero essenzialmente cambiate.

(*) In questo vol.: XI, pp. 152-154. [N. d. R.].

XVIII.

SULLA INVERSIONE DEGLI INTEGRALI DEFINITI

Nota I.

«Atti Acc. Sc. di Torino», vol. XXXI, 1896, pp. 311–323.

1. Sebbene spesso accada nelle applicazioni di esser condotti a delle inversioni di integrali definiti nel campo reale, pure, che io sappia, non si ha alcun mezzo sistematico per effettuare tali inversioni (che si sanno eseguire solo in casi particolari) e nemmeno si ha un indizio per riconoscere in generale quando questioni di tale natura sono suscettibili di soluzione, e, allorché questo avviene, se ve ne è una sola o se ve ne sono più. Sotto questo aspetto la questione appare molto meno avanzata di altre di analisi in cui esistono criteri ben definiti per giudicare sulla esistenza e sulla univocità delle soluzioni [1].

In ciò che segue mi propongo di portare un piccolo contributo allo studio suddetto, comunicando alcuni risultati di cui sono in possesso già da qualche tempo, e limitandomi a considerare per ora il caso più semplice in cui può rispondersi in modo completo a tutte le parti sopra ricordate della questione.

Sulla *forma* delle funzioni che compariscono nel problema non pongo alcuna restrizione: alcune condizioni pongo relative all'esser esse finite ed alla loro continuità e derivabilità. Una condizione però si aggiunge relativa al non annullarsi di certi valori, che è essenziale, e sulla discussione della

(1) Il dott. LEVI-CIVITA in una Nota letta in questa Accademia nella seduta del 17 novembre u. s., prendendo occasione dalla risoluzione di alcuni casi interessanti, lamenta egli pure la mancanza di uno studio sistematico sulla questione. I lavori a mia cognizione sull'argomento, oltre questo ora citato, sono i seguenti:

ABEL, *Solution de quelques problèmes à l'aide d'intégrales définies.* (Œuvres, p. 11);
ABEL, *Résolution d'un problème de mécanique.* (Œuvres, p. 97);
BELTRAMI, *Intorno ad un teorema d'Abel.* («Rend. Ist. Lombardo», ser. II, vol. XIII).
BELTRAMI, *Sulla teoria dell'attrazione degli ellissoidi.* («Mem. Acc. di Bologna», ser. IV, T. I). — *Sulle funzioni associate e specialmente su quelle della calotta sferica* (Ibid., ser. IV, T. IV).
DINI, *Sulla rappresentazione analitica delle funzioni di una variabile reale date arbitrariamente in certi intervalli* (Cap. VII. «Annali delle Università Toscane», T. XVII).
SONINE, *Sur la généralisation d'une formule d'Abel.* («Acta Mathematica», T. IV).
SONINE, *Recherches sur les fonctions cylindriques.* («Math. Ann.,» Bd., XVI).
VOLTERRA, *Sopra un problema di elettrostatica.* («Transunti Acc. Lincei», ser. III, vol. VIII). [In queste «Opere»: vol. primo, XI, pp. 188–195].
Nel campo complesso cito fra gli altri i lavori del prof. PINCHERLE.

quale mi trattengo alquanto mostrandone la ragione d'essere e l'intima sua connessione con notissime teorie elementari.

2. Per maggior chiarezza riassumo i risultati nel seguente:

TEOREMA. - *Se si ha (nel campo reale) la equazione funzionale*

$$f(y) - f(\alpha) = \int_\alpha^y \varphi(x)\, \mathrm{H}(x, y)\, dx \tag{1}$$

in cui $f(y)$ *e* $f'(y)$ *si mantengono finite e continue per* y *compreso fra* α *e* $\alpha + \mathrm{A}$; *e* $\mathrm{H}(x, y)$ *e* $\partial\mathrm{H}/\partial y = \mathrm{H}_2(x, y)$, *sono pure finite e continue per tutti i valori di* x *e* y *compresi entro i limiti* α *e* $\alpha + \mathrm{A}$, *mentre è maggiore di zero il limite inferiore dei valori assoluti di* $h(y) = \mathrm{H}(y, y)$ *per* y *compreso nello stesso intervallo, esisterà una ed una sola funzione finita e continua* φ *che soddisfa l'equazione funzionale per* y *compreso fra* α *e* $\alpha + \mathrm{A}$, *la quale sarà data da*

$$\varphi(y) = \frac{f'(y)}{h(y)} - \frac{1}{h(y)} \int_\alpha^y f'(x) \sum_0^\infty {}_i\, \mathrm{S}_i(x, y)\, dx \tag{2}$$

in cui

$$\left\{ \begin{aligned} \mathrm{S}_i(x, y) &= \int_y^x \mathrm{S}_0(\xi, y)\, \mathrm{S}_{i-1}(x, \xi)\, d\xi \\ \mathrm{S}_0(x, y) &= \frac{\mathrm{H}_2(x, y)}{h(x)}\,. \end{aligned} \right. \tag{3}$$

DIMOSTRAZIONE. - 1° Cominciamo dal dimostrare che la serie

$$\sum_0^\infty {}_i\, \mathrm{S}_i(x, y) \tag{4}$$

è convergente in egual grado per tutti i valori di x, y compresi fra α e $\alpha + \mathrm{A}$.

Se M_2 è il limite superiore dei valori assoluti di $\mathrm{H}_2(x, y)$ per x, y compresi fra α e $\alpha + \mathrm{A}$, e m il limite inferiore dei valori assoluti di $h(y)$, dico che

$$|\mathrm{S}_i| \leq \left(\frac{\mathrm{M}_2}{m}\right)^{i+1} \frac{1}{i!} (|y - x|)^i \leq \left(\frac{\mathrm{M}_2}{m}\right)^{i+1} \frac{1}{i!} |\mathrm{A}|^i. \tag{5}$$

Abbiamo infatti

$$\mathrm{S}_0 \leq \frac{\mathrm{M}_2}{m}$$

e se la (5) è soddisfatta per un valore i, lo sarà anche per $i + 1$. La serie è dunque convergente in egual grado.

2° Proviamo che $\varphi(y)$ data dalla (2) verifica l'equazione funzionale (1). Infatti dalla (2) segue

$$\int_\alpha^y \varphi(x)\, \mathrm{H}(x, y)\, dx = \int_\alpha^y \frac{f'(x)}{h(x)} \mathrm{H}(x, y)\, dx - \int_\alpha^y \frac{\mathrm{H}(\xi, y)}{h(\xi)} d\xi \int_\alpha^\xi f'(x) \sum_0^\infty {}_i\, \mathrm{S}_i(x, \xi)\, dx$$

e, applicando il principio di DIRICHLET, avremo

$$(1') \qquad \int_\alpha^y \varphi(x)\,\mathrm{H}(x,y)\,dx = \int_\alpha^y f'(x)\left\{\frac{\mathrm{H}(x,y)}{h(x)} - \int_\alpha^y \frac{\mathrm{H}(\xi,y)}{h(\xi)}\sum_0^\infty{}_i\,\mathrm{S}_i(x,\xi)\,d\xi\right\}dx.$$

Si consideri ora la funzione

$$\frac{\mathrm{H}(x,y)}{h(x)} - \int_x^y \frac{\mathrm{H}(\xi,y)}{h(\xi)}\sum_0^\infty{}_i\,\mathrm{S}_i(x,\xi)\,d\xi = \mathrm{G}(x,y);$$

avremo

$$\frac{\partial \mathrm{G}}{\partial y} = \frac{\mathrm{H}_2(x,y)}{h(x)} - \sum_0^\infty{}_i\,\mathrm{S}_i(x,y) - \int_x^y \frac{\mathrm{H}_2(\xi,y)}{h(\xi)}\sum_0^\infty{}_i\,\mathrm{S}_i(x,\xi)\,d\xi$$

$$= \mathrm{S}_0(x,y) - \sum_0^\infty{}_i\,\mathrm{S}_i(x,y) + \int_y^x \mathrm{S}_0(\xi,y)\sum_0^\infty{}_i\,\mathrm{S}_i(x,\xi)\,d\xi$$

e a cagione della convergenza in egual grado della serie (4)

$$\frac{\partial \mathrm{G}}{\partial y} = \mathrm{S}_0(x,y) - \sum_0^\infty{}_i\,\mathrm{S}_i(x,y) + \sum_0^\infty{}_i\int_y^x \mathrm{S}_0(\xi,y)\,\mathrm{S}_i(x,\xi)\,d\xi = 0.$$

Ma se in G noi facciamo $y = x$, otteniamo l'unità, quindi possiamo concludere che si avrà sempre

$$\mathrm{G} = 1$$

e perciò, ritornando alla equazione (1'), otterremo

$$(1'') \qquad \int_\alpha^y \varphi(x)\,\mathrm{H}(x,y)\,dx = \int_\alpha^y f'(x) = f(y) - f(\alpha).$$

La $\varphi(y)$ ricavata dalla (2) soddisfa dunque la (1).

3° Dimostriamo finalmente che non vi può essere che una sola funzione finita e continua φ che soddisfi l'equazione funzionale.

Ammettiamo che ne esistano due φ_1 e φ_2, ciascuna delle quali sia in valore assoluto inferiore a P.

Posto

$$\psi(x) = \varphi_1(x) - \varphi_2(x)$$

avremo

$$0 = \int_\alpha^y \psi(x)\,\mathrm{H}(x,y)\,dx$$

e derivando rapporto a y

$$0 = \psi(y)\,h(y) + \int_\alpha^y \psi(x)\,\mathrm{H}_2(x,y)\,dx,$$

onde

$$\psi(y) = -\frac{1}{h(y)}\int_\alpha^y \psi(x)\,H_2(x, y)\,dx \tag{6}$$

e per conseguenza

$$\psi(y) = \frac{1}{h(y)}\int_\alpha^y \frac{H_2(x, y)}{h(x)}\,dx \cdot \int_\alpha^x \psi(x_1)\,H_2(x_1, x)\,dx_1$$

$$= -\frac{1}{h(y)}\int_\alpha^y \frac{H_2(x, y)}{h(x)}\,dx \int_\alpha^x \frac{H_2(x_1, x)}{h(x_1)}\,dx_1 \int_\alpha^{x_1} \psi(x_2)\,H_2(x_2, x_1)\,dx_2 = \cdots$$

e così di seguito si potrà procedere indefinitamente sostituendo successivamente per ψ la espressione che risulta dalla (6). Ora

$$|\psi(x)| < 2\,P,$$

quindi dalle equazioni precedenti si deduce

$$|\psi(y)| < 2\,P\left(\frac{M_2}{m}\right)^n \int_\alpha^{x+|A|} dx \int_\alpha^x dx_1 \cdots \int_\alpha^{x_{n-2}} dx_{n-1} = 2\,P\left(\frac{M_2}{m}\right)^n \frac{1}{n!}(|A|)^n$$

in cui n può prendersi tanto grande quanto si vuole. Ne segue che $|\psi(y)|$ è inferiore ad ogni valore assegnabile, perciò deve essere

$$\psi(x) = 0$$

e quindi

$$\varphi_1(x) = \varphi_2(x)$$

il che dimostra la univocità della soluzione.

Il teorema resta così dimostrato.

3. Il risultato a cui siamo giunti è molto semplice ed ottenuto senza artifici di calcolo. Possiamo facilmente comprenderne la ragione. Se si prescinde infatti dalle condizioni di continuità e derivabilità poste per le funzioni e da quella di esser finite, si trova come condizione essenziale che $H(y, y) = h(y)$ non si annulli per y compreso nell'intervallo α, $\alpha + A$. Ora questa condizione può paragonarsi facilmente a quella che un determinante, i cui elementi a destra della diagonale sono nulli, è diverso da zero, allorché i termini in diagonale sono tutti diversi da zero. Infatti si consideri il sistema di equazioni

$$\begin{aligned}
b_1 &= a_{11}\,x_1 \\
b_2 &= a_{12}\,x_1 + a_{22}\,x_2 \\
b_3 &= a_{13}\,x_1 + a_{23}\,x_2 + a_{33}\,x_3 \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
b_n &= a_{1n}\,x_1 + a_{2n}\,x_2 + a_{3n}\,x_3 + \cdots + a_{nn}\,x_n\,;
\end{aligned}$$

il concetto di integrale ci porta facilmente a riguardare la questione di analisi funzionale rappresentata dalla (1) come un caso limite della risoluzione di un sistema d'equazioni analogo al precedente. In esso le a_{is} e le a_{ii} sarebbero le analoghe delle $H(x, y)$ e delle $H(y, y) = h(y)$.

Ora il determinante dei coefficienti nelle precedenti equazioni ha nulli tutti gli elementi situati alla destra della diagonale ed è quindi diverso da zero quando nessuna delle a_{ii} si annulla, e quando ciò si verifica la soluzione del sistema è possibile ed univoca.

L'analogia però si arresta qui, perché mentre la condizione che le a_{ii} siano tutte diverse da zero non solo è sufficiente, ma è anche necessaria per la risolubilità e la univocità delle soluzioni, lo stesso non può dirsi del non annullarsi di $h(y)$. Si osservi infatti, per esempio, che, ammesso $h(y) = 0$ per tutti i valori di y compresi fra α e $\alpha + A$, la equazione funzionale (1) può scriversi mediante una integrazione per parti

$$f(y) - f(\alpha) = \int_\alpha^y \Phi(x)\, H_1(x, y)\, dx$$

in cui

$$\Phi(x) = -\int_\alpha^x \varphi(x)\, dx \quad , \quad H_1 = \frac{\partial H}{\partial x} .$$

Quindi se $H_1(x, y)$ avrà le stesse proprietà che prima avevamo posto per $H(x, y)$, e sarà $f'(\alpha) = 0$, si potrà determinare univocamente la $\Phi(x)$ e quindi con una derivazione successiva $\varphi(x)$ quando questa derivazione può effettuarsi.

4. I termini della serie (4) godono di una notevole proprietà che può esprimersi col teorema seguente:

Comunque si scelga j compreso fra 1 *e i, avremo:*

$$S_i = \int_y^x S_{i-j}(x, \xi)\, S_{j-1}(\xi, y)\, d\xi. \tag{7}$$

Questa proprietà è evidente per $i = 1$. Mostriamo che se è vera per i vale anche per $i + 1$. Infatti

$$S_{i+1} = \int_y^x S_0(\xi, y)\, S_i(x, \xi)\, d\xi = \int_y^x S_0(\xi, y)\, d\xi \int_\xi^x S_{i-j}(x, \xi_1)\, S_{j-1}(\xi_1, \xi)\, d\xi_1$$

$$= \int_y^x S_{i-j}(x, \xi_1)\, d\xi_1 \int_y^{\xi_1} S_0(\xi, y)\, S_{j-1}(\xi_1, \xi)\, d\xi = \int_y^x S_{i-j}(x, \xi_1)\, S_j(\xi_1, y)\, d\xi_1 ;$$

il teorema è quindi dimostrato.

Ne possiamo concludere:

La formula di inversione della

$$f(y)-f(\alpha)=\int_{\alpha}^{y}\varphi(x)\,\mathrm{H}(x,y)\,dx$$

è

$$\varphi(y)=\frac{f'(y)}{h(y)}-\frac{1}{h(y)}\int_{\alpha}^{y}f'(x)\,\mathrm{K}(x,y)\,dx$$

in cui

$$(8)\qquad\left\{\begin{aligned}
&h(y)=\mathrm{H}(y,y)\\
&\mathrm{K}(x,y)=\sum_{0}^{\infty}{}_{i}\,\mathrm{S}_i(x,y)\\
&\mathrm{S}_0(x,y)=\frac{1}{h(x)}\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial y}\\
&\mathrm{S}_i(x,y)=\int_{y}^{x}\mathrm{S}_{i-j}(x,\xi)\,\mathrm{S}_{j-1}(\xi,y)\,d\xi\,.
\end{aligned}\right.$$

5. Come esempio consideriamo il caso in cui si abbia

$$\mathrm{H}(x,y)=\mathrm{F}(\lambda(x)-\lambda(y))$$

e supponiamo $\mathrm{F}(0)=1$, al qual caso si ridurrà sempre quello in cui $\mathrm{F}(0)$ ha un valore finito diverso da zero.

Poniamo

$$\left\{\begin{aligned}
&s_0(z)=\mathrm{F}'(z)\\
&s_i(z)=\int_{0}^{z}s_{i-j}(z-u)\,s_{j-i}(u)\,du\,;
\end{aligned}\right.$$

avremo

$$\mathrm{S}_i(x,y)=(-1)^{i-1}s_i(\lambda(x)-\lambda(y))\cdot\lambda'(y).$$

Infatti questa relazione è vera per $i=0$; se è vera per i, sarà

$$\mathrm{S}_{i+1}(x,y)=(-1)^i\int_{y}^{x}s_0(\lambda(\xi)-\lambda(y))\,\lambda'(y)\,s_i(\lambda(x)-\lambda(\xi))\,\lambda'(\xi)\,d\xi.$$

Pongasi

$$\lambda(x)-\lambda(\xi)=u,$$

avremo

$$\begin{aligned}
\mathrm{S}_{i+1}(x,y)&=(-1)^i\lambda'(y)\int_{0}^{\lambda(x)-\lambda(y)}s_0(\lambda(x)-\lambda(y)-u)\,s_i(u)\,du\\
&=(-1)^i s_{i+1}(\lambda(x)-\lambda(y))\,\lambda'(y).
\end{aligned}$$

Perciò se

$$\Theta(z) = \sum_0^\infty {}_i (-1)^i s_i(z)$$

otterremo

$$K(x, y) = -\Theta(\lambda(x) - \lambda(y))\lambda'(y)$$

da cui segue:

La formula di inversione della

$$f(y) - f(\alpha) = \int_\alpha^y \varphi(x) F(\lambda(x) - \lambda(y))\, dx \quad , \quad (F(0) = 1) \tag{9}$$

è

$$\varphi(y) = f'(y) + \lambda'(y) \int_\alpha^y f'(x)\Theta(\lambda(x) - \lambda(y))\, dx \tag{10}$$

in cui

$$\begin{cases} \Theta(z) = \sum_0^\infty {}_i (-1)^i s_i(z) \\ s_0(z) = F'(z) \\ s_i(z) = \int_0^z s_{i-j}(z-u)\, s_{j-1}(u)\, du. \end{cases}$$

6. Le (7) ci forniscono una espressione notevole del resto della serie $K(x, y)$. Abbiamo infatti

$$K(x, y) = \sum_0^n {}_i S_i(x, y) + \sum_0^\infty {}_i \int_y^x S_n(x, \xi) S_i(\xi, y)\, d\xi$$

$$= \sum_0^n {}_i S_i(x, y) + \sum_0^\infty {}_i \int_y^x S_n(\xi, y) S_i(x, \xi)\, d\xi,$$

onde a cagione della convergenza in egual grado

$$K(x, y) = \sum_0^n {}_i S_i(x, y) + \int_y^x S_n(x, \xi) K(\xi, y)\, d\xi \tag{11}$$

$$= \sum_0^n {}_i S_i(x, y) + \int_y^x S_n(\xi, y) K(x, \xi)\, d\xi.$$

Perciò il resto della serie sarà

$$R_n = \int_y^x S_n(x, \xi) K(\xi, y)\, d\xi = \int_y^x S_n(\xi, y) K(x, \xi)\, d\xi. \tag{12}$$

7. La formula di inversione della (1) può mettersi anche sotto un'altra forma diversa dalla (2), e precisamente può scriversi

$$\varphi(y) = \frac{d\Phi(y)}{dy}$$

in cui

$$\Phi(y) = \frac{f(y) - f(\alpha)}{h(y)} + \int_\alpha^y \{f(x) - f(\alpha)\} \sum_0^\infty {}_i S'_i(x, y)\, dx \tag{14}$$

$$S'_i = \int_x^y S'_0(\xi, y)\, S'_{i-1}(x, \xi)\, d\xi$$

$$S'_0 = \frac{H_1(x, y)}{h(x)}$$

essendo $H_1 = \partial H / \partial x$.

Si dimostra facilmente che se $H_1(x, y)$ si conserva finita e continua per x, y comprese fra α e $\alpha + A$, la serie

$$\sum_0^\infty {}_i S'_i(x, y) \tag{15}$$

è al pari della serie (4) convergente in egual grado per tutti i valori di x, y compresi fra gli stessi limiti, e perciò $\Phi(y)$ ha un significato. Se ammettiamo poi che anche $H_{12} = \partial^2 H / \partial x\, \partial y$ sia finita e continua per x, y compresi fra gli stessi limiti, anche la serie delle derivate

$$\sum_0^\infty {}_i \frac{\partial S'_i}{\partial y}$$

sarà pure convergente in egual grado, e perciò, supposto $f'(x)$ finita e continua per x compresa fra α e $\alpha + A$, tale risulterà $\varphi(y)$ data dalla (13). Dimostriamo ora che questa funzione verifica la (1). Infatti dalle (13) e (14) segue, mediante una integrazione per parti

$$\int_\alpha^y \varphi(x)\, H(x, y)\, dx = f(y) - f(\alpha) + \int_\alpha^y \{f(x) - f(\alpha)\} \sum_0^\infty {}_i S'_i(x, y)\, dx$$

$$- \int_\alpha^y \frac{f(x) - f(\alpha)}{h(x)} H_1(x, y)\, dx - \int_\alpha^y \frac{H_1(\xi, y)}{h(\xi)}\, d\xi \int_\alpha^\xi \{f(x) - f(\alpha)\} \sum_0^\infty {}_i S'_i(x, \xi)\, dx$$

e, applicando il principio di DIRICHLET, avremo

$$\int_\alpha^y \varphi(x)\, H(x, y)\, dx = f(y) - f(\alpha) + \int_\alpha^y \{f(x) - f(\alpha)\} \sum_0^\infty {}_i S'_i(x, y)\, dx$$

$$- \int_\alpha^y \{f(x) - f(\alpha)\} \left[\frac{H_1(x, y)}{h(x)} + \int_x^y \sum_0^\infty {}_i \frac{H_1(\xi, y)\, S'_i(x, \xi)}{h(\xi)}\, d\xi \right] dx.$$

Ora per la convergenza in egual grado della serie (15) abbiamo

$$\int_x^y \sum_0^\infty {}_i \frac{H_1(\xi, y)\, S'_i(x, \xi)}{h(\xi)}\, d\xi = \sum_0^\infty {}_i \int_x^y \frac{H_1(\xi, y)\, S'_i(x, \xi)}{h(\xi)}\, d\xi = \sum_1^\infty {}_i S'_i(x, y)$$

quindi

$$\int_\alpha^y \varphi(x)\, H(x, y)\, dx = f(y) - f(\alpha) + \int_\alpha^y \{f(x) - f(\alpha)\} \sum_0^\infty {}_i S'_i(x, y)\, dx$$

$$- \int_\alpha^y \{f(x) - f(\alpha)\} \left[\frac{H_1(x, y)}{h(x)} + \sum_1^\infty {}_i S'_i(x, y)\right] dx = f(y) - f(\alpha).$$

Come dovevasi dimostrare.

Anche i termini S'_i della serie (15) godono di una proprietà analoga alla (7) per le S_i, cioè, qualunque sia j, compreso fra 1 e i, si ha

$$S'_i = \int_x^y S'_{i-j}(x, \xi)\, S'_{j-1}(\xi, y)\, d\xi$$

e perciò: *La formula di inversione della*

$$f(y) - f(\alpha) = \int_x^y \varphi(x)\, H(x, y)\, dx$$

può scriversi

$$(14') \qquad \varphi(x) = \frac{d}{dy}\left[\frac{f(y) - f(\alpha)}{h(y)} + \frac{1}{h(y)} \int_\alpha^y \{f(x) - f(\alpha)\}\, K'(x, y)\, dx\right]$$

in cui

$$(16) \qquad \begin{cases} h(y) = H(y, y) \\ K'(x, y) = \sum_0^\infty {}_i S'_i(x, y) \\ S'_0(x, y) = \dfrac{1}{h(x)} \dfrac{\partial H}{\partial x} \\ S'_i(x, y) = \displaystyle\int_x^y S'_{i-j}(x, \xi)\, S'_{j-1}(\xi, y)\, d\xi . \end{cases}$$

Anche il resto della serie $K'(x, y)$ può mettersi sotto una forma analoga a quello della (4) e cioè

$$R'_n = \int_x^y S'_n(x, \xi)\, K'(\xi, y) = \int_x^y S'_n(\xi, y)\, K'(x, \xi)\, d\xi .$$

8. Applicando le formule (14') e (16) alla inversione della (9) si ottiene

$$\varphi(y) = \frac{d}{dy}\left[f(y) + \int_\alpha^y \{f(x) - f(\alpha)\}\, \Theta(\lambda(x) - \lambda(y))\, \lambda'(x)\, dx\right]$$

ed è facile riconoscere che essa coincide colla (10).

9. Per la esistenza della funzione Φ da cui poi dipende la φ, basta che f sia finita e continua e sia finita e continua la $H_1(x, y)$, mentre il limite inferiore dei valori assoluti di $h(y)$ sia maggiore di zero.

Proviamo che queste condizioni sono pure sufficienti per riconoscere la univocità di φ. Infatti se esistono due funzioni finite e continue φ_1 e φ_2 che verificano la (1), posto

$$\psi(x) = \varphi_1(x) - \varphi_2(x) \quad , \quad \theta(x) = \int_\alpha^x \psi(x)\, dx$$

con una integrazione per parti si ha

$$0 = \int_\alpha^y \psi(x)\, H(x, y)\, dx = \int_\alpha^y \frac{d\theta}{dx} H(x, y)\, dx = \theta(y)\, h(y) - \int_\alpha^y \theta(x)\, H_1(x, x)\, dy$$

onde

$$\theta(y) = \frac{1}{h(y)} \int_\alpha^y \theta(x)\, H_1(x, y)\, dx .$$

Con un ragionamento analogo a quello contenuto nella 3ª parte del § 2 si ricava da questa formula che $\theta(y)$ è inferiore a qualsiasi quantità assegnabile, quindi è nulla e per conseguenza $\varphi_1 = \varphi_2$.

10. Passando dal campo reale a quello complesso facciamo per ultimo osservare che *se $f(x)$ è una funzione olomorfa per tutti i valori della variabile complessa x tali che $|x - \alpha| < A$, e $H(x, y)$ è pure olomorfa per tutti i valori delle variabili complesse x, y per cui $|x - \alpha| < A$, $|y - \alpha| < A$, mentre $h(y) = H(y, y)$ non ha nessuno zero per valori di y tali che $|y - \alpha| < A$, le formule di inversione trovate* (2) *e* (14') *continuano a sussistere e definiscono una funzione olomorfa $\varphi(y)$ per tutti i valori di y per cui $|y - \alpha| < A$.* I diversi integrali che vengono a comparire nelle formule non dipendono che dagli estremi, sono cioè indipendenti dai cammini d'integrazione, purché li supponiamo tali che lungo essi le variabili di integrazione differiscano da α di valori il cui modulo è inferiore ad A.

In una prossima Nota svolgerò il caso in cui $H(x, y)$ possa divenire infinita.

Nota II.

Ibidem, vol. XXXI, 1896, pp. 400-408.

1. In una Nota presentata nella scorsa seduta esposi un teorema sulla inversione degli integrali definiti per la cui validità basta soltanto che le funzioni che compariscono nel problema siano continue, derivabili e finite. È da osservare ora che in alcuni casi importanti che si presentano effettivamente in pratica quest'ultima condizione non è soddisfatta.

Si ricordi l'importanza che riconoscemmo avere quella funzione che nella Nota precedente chiamammo $h(y)$ e che fu supposta finita e diversa da zero. È appunto questa quantità che nei casi a cui ora abbiamo accennato diviene infinita.

Mi propongo quindi di svolgerli (come già annunziai nella Nota citata) togliendo così una limitazione alle funzioni date nel problema.

2. Supponiamo perciò che nella formula da invertire

$$(1) \qquad f(y) - f(\alpha) = \int_\alpha^y \varphi(x)\, \mathrm{H}(x, y)\, dx$$

$\mathrm{H}(x, y)$ divenga infinita per $x = y$ di ordine inferiore all'unità, in modo che si possa porre

$$(2) \qquad \mathrm{H}(x, y) = \frac{\mathrm{G}(x, y)}{(y - x)^\lambda}$$

in cui $\lambda < 1$. Questa ipotesi corrisponde evidentemente a quella in cui si abbia

$$h(x) = \infty .$$

Ammettiamo $f(y)$ e $f'(y)$ finite e continue per y compreso fra α e $\alpha + \mathrm{A}$ $(\mathrm{A} > 0)$; $\mathrm{G}(x, y)$, $\mathrm{G}_2(x, y) = \partial \mathrm{G}/\partial y$ pure finite e continue per tutti i valori di x, y compresi fra α e $\alpha + \mathrm{A}$, e si supponga maggiore di zero il limite inferiore dei valori assoluti di $\mathrm{G}(x, x)$.

Cerchiamo di ricondurre questo caso a quello trattato nella Nota precedente.

3. A tal fine supponiamo che la funzione finita e continua $\varphi(x)$ soddisfi la (1).

Moltiplicando ambo i membri di questa equazione per $dy/(z - y)^{1-\lambda}$ in cui $\alpha + \mathrm{A} > z > \alpha$ e integrando fra i limiti α e z, si otterrà

$$\int_\alpha^z \{f(y) - f(\alpha)\} \frac{dy}{(z - y)^{1-\lambda}} = \int_\alpha^z \frac{dy}{(z - y)^{1-\lambda}} \int_\alpha^y \varphi(x) \frac{\mathrm{G}(x, y)}{(y - x)^\lambda}\, dx$$

onde applicando il principio di DIRICHLET

$$(3) \qquad \int_\alpha^z \{f(y) - f(\alpha)\} \frac{dy}{(z-y)^{1-\lambda}} = \int_\alpha^z \varphi(x)\, dx \int_x^z \frac{G(x, y)}{(z-y)^{1-\lambda}(y-x)^\lambda}\, dy .$$

Poniamo

$$(4) \qquad \int_\alpha^z \{f(y) - f(\alpha)\} \frac{dy}{(z-y)^{1-\lambda}} = \psi(z)$$

$$(5) \qquad \int_x^z \frac{G(x, y)}{(z-y)^{1-\lambda}(y-x)^\lambda}\, dy = L(x, z);$$

allora l'equazione precedente diverrà

$$(6) \qquad \psi(z) = \int_\alpha^z \varphi(x)\, L(x, z)\, dx.$$

Possiamo dunque concludere che, *se la funzione finita e continua* $\varphi(x)$ *soddisfa la* (1), *verificherà la* (6).

4. Dalla (4) segue, mediante una integrazione per parti,

$$\psi(z) = \frac{1}{\lambda} \int_\alpha^z f'(y)\,(z-y)^\lambda\, dy$$

quindi derivando

$$(7) \qquad \psi'(z) = \int_\alpha^z f'(y) \frac{dy}{(z-x)^{1-\lambda}} \cdot$$

Ne segue che $\psi'(z)$ si mantiene finita e continua per i valori di z compresi fra α e $\alpha + A$. Inoltre dalla (4) si deduce

$$\psi(\alpha) = 0 .$$

Si ponga nella (5)

$$y = (z-x)\, u + x$$

allora si avrà

$$(5') \qquad L(x, z) = \int_0^1 G(x, (z-x)\, u + x) \frac{du}{u^\lambda (1-u)^{1-\lambda}} ,$$

perciò indicando con z_1 un valore compreso fra x e z risulterà

$$(5'') \qquad L(x, z) = G(x, z_1) \int_0^1 \frac{du}{u^\lambda (1-u)^{1-\lambda}} = G(x, z_1) \frac{\pi}{\operatorname{sen} \lambda\pi} \cdot$$

Se ne conchiude che $L(x, z)$ è una funzione sempre finita pei valori di x, z compresi fra α e $\alpha + A$. Avremo poi

$$L(z, z) = l(z) = G(z, z)\frac{\pi}{\operatorname{sen}\lambda\pi}$$

onde, posto

$$G(z, z) = g(z)$$

si otterrà

$$l(z) = \frac{\pi}{\operatorname{sen}\lambda\pi} g(z). \tag{5'''}$$

Dalla (5) risulta pure la continuità di $L(x, z)$. Derivando la (5') rapporto a z si ha

$$L_2(x, z) = \frac{\partial L(x, z)}{\partial z} = \int_0^1 G_2(x, (z-x)u + x)\left(\frac{u}{1-u}\right)^{1-\lambda} du \tag{8}$$

$$= \int_x^z G_2(x, y)\left(\frac{y-x}{z-y}\right)^{1-\lambda} \frac{dy}{z-x}.$$

Ne segue che

$$L_2(x, z) = G_2(x, z_2)\int_0^1 \left(\frac{u}{1-u}\right)^{1-\lambda} du = G_2(x, z_2)\frac{\pi(1-\lambda)}{\operatorname{sen}\lambda\pi} \tag{8'}$$

in cui z_2 è un valore compreso fra x e z.

Possiamo dunque concludere che $L_2(x, z)$ è finita per x e z compresi fra α e $\alpha + A$; oltre a ciò essa è anche continua.

5. La questione dunque di invertire la formula (6) rientra nella classe di problemi esaminati nella precedente Nota e si potrà concludere che *vi è una ed una sola funzione finita e continua* $\varphi(x)$ *che soddisfa la* (6) la quale sarà data da

$$\varphi(y) = \frac{\psi'(y)}{l(y)} - \frac{1}{l(y)}\int_\alpha^y \psi'(x)\sum_0^\infty {}_i S_i(x, y)\, dx$$

in cui

$$S_0 = \frac{L_2(x, y)}{l(x)}$$

$$S_i = \int_y^x S_{i-j}(x, \xi) S_{j-1}(\xi, y)\, d\xi.$$

Applicando dunque le (5'''), (7), otterremo

$$\varphi(z) = \frac{\operatorname{sen}\lambda\pi}{\pi g(z)}\int_\alpha^z f'(x)\frac{dx}{(z-x)^{1-\lambda}} - \frac{\operatorname{sen}\lambda\pi}{\pi g(z)}\int_\alpha^z \left\{\int_\alpha^y f'(x)\frac{dx}{(y-x)^{1-\lambda}}\right\}\sum_0^\infty {}_i S_i(y, z)\, dy$$

ovvero, mediante il principio di DIRICHLET,

$$\varphi(z) = \frac{\operatorname{sen}\lambda\pi}{\pi g(z)} \int_\alpha^z f'(x) \left\{ \frac{1}{(z-x)^{1-\lambda}} - \int_x^z \sum_0^\infty {}_i \frac{S_i(y,z)}{(y-x)^{1-\lambda}}\, dy \right\} dx$$

e finalmente, a cagione della convergenza in egual grado della serie,

$$\varphi(z) = \frac{\operatorname{sen}\lambda\pi}{\pi g(z)} \int_\alpha^z f'(x) \left\{ \frac{1}{(z-x)^{1-\lambda}} - \sum_0^\infty {}_i \int_z^x \frac{S_i(y,z)}{(y-x)^{1-\lambda}}\, dy \right\} dx\,. \tag{9}$$

6. Bisognerà ora provare che questa funzione verifica l'equazione data (1).

A tal fine basterà dimostrare inversamente a quanto si è fatto nel § 3 che, *se la funzione finita e continua* $\varphi(z)$ *soddisfa la* (6), *essa verificherà la* (1).

Infatti osserviamo che se è verificata la (6), ossia la (3), derivando rapporto a z ambo i membri avremo (tenendo presente la (7))

$$\int_\alpha^z f'(y) \frac{dy}{(z-y)^{1-\lambda}} = \frac{d}{dz} \int_\alpha^z \varphi(x)\, dx \int_x^z \frac{G(x,y)}{(z-y)^{1-\lambda}(y-x)^\lambda}\, dy$$

e moltiplicando ambo i membri per $dz/(v-z)^\lambda$ in cui $\alpha + A > v > \alpha$ e integrando fra a e v, si otterrà

$$\int_\alpha^v \frac{dz}{(v-z)^\lambda} \int_\alpha^z f'(y) \frac{dy}{(z-y)^{1-\lambda}} = \int_\alpha^v \frac{dz}{(v-z)^\lambda} \frac{d}{dz} \int_\alpha^z \varphi(x)\, dx \int_x^z \frac{G(x,y)}{(z-y)^{1-\lambda}(y-x)^\lambda}\, dy \tag{10}$$

$$= \frac{d}{dv} \int_\alpha^v \frac{dz}{(v-z)^\lambda} \int_\alpha^z \varphi(x)\, dz \int_x^z \frac{G(x,y)}{(z-y)^{1-\lambda}(y-x)^\lambda}\, dy\,.$$

Ora per il principio di DIRICHLET

$$\int_\alpha^v \frac{dz}{(v-z)^\lambda} \int_\alpha^z f'(y) \frac{dy}{(z-y)^{1-\lambda}} = \int_\alpha^v f'(y)\, dy \int_y^v \frac{dz}{(v-z)^\lambda (z-y)^{1-\lambda}}$$

$$= \frac{\pi}{\operatorname{sen}\lambda\pi} \{f(v) - f(\alpha)\}\,;$$

$$\int_\alpha^v \frac{dz}{(v-z)^\lambda} \int_\alpha^z \varphi(x)\, dx \int_x^z \frac{G(x,y)}{(z-y)^{1-\lambda}(y-x)^\lambda}\, dy$$

$$= \int_\alpha^v \varphi(x)\, dx \int_x^v \frac{dz}{(v-z)^\lambda} \int_x^z \frac{G(x,y)}{(z-y)^{1-\lambda}(y-x)^\lambda}\, dy$$

$$= \int_\alpha^v \varphi(x)\, dx \int_x^v \frac{G(x,y)\, dy}{(y-x)^\lambda} \int_y^v \frac{dz}{(v-z)^\lambda (z-y)^{1-\lambda}} = \frac{\pi}{\operatorname{sen}\lambda\pi} \int_\alpha^v \varphi(x)\, dx \int_x^v \frac{G(x,y)}{(y-x)^\lambda}\, dy\,.$$

Quindi la (10) diventerà

$$\frac{\pi}{\operatorname{sen}\lambda\pi}\{f(v)-f(\alpha)\}=\frac{d}{dv}\left\{\frac{\pi}{\operatorname{sen}\lambda\pi}\int_\alpha^v\varphi(x)\,dx\int_x^v\frac{G(x,y)\,dy}{(y-x)^\lambda}\right\}$$

$$=\frac{\pi}{\operatorname{sen}\lambda\pi}\int_\alpha^v\varphi(x)\frac{G(x,v)}{(v-x)^\lambda}\,dx$$

e per la (2)

$$f(v)-f(\alpha)=\int_\alpha^v\varphi(x)\,H(x,v)\,dx$$

come volevasi dimostrare.

7. Avremo dunque il teorema seguente:

Se si ha la equazione funzionale

$$\text{(A)}\qquad f(y)-f(\alpha)=\int_\alpha^y\varphi(x)\frac{G(x,y)}{(y-x)^\lambda}\,dx\qquad(\lambda<1)$$

in cui $f(y)$ *e* $f'(y)$ *si mantengono finite e continue per* y *compreso fra* α *e* $\alpha+(A>0)$; *e* $G(x,y)$ *e* $\partial G/\partial y=G_2(x,y)$ *sono pure finite e continue per tutti i valori di* x, y *compresi entro i limiti* α e $\alpha+A$ *mentre è maggiore di zero il limite inferiore dei valori assoluti di* $g(y)=G(y,y)$ *per* y *compreso nello stesso intervallo, esisterà una ed una sola funzione finita e continua* φ *che soddisfa l'equazione funzionale per* y *compreso fra* α *e* $\alpha+A$, *la quale sarà data da*

$$\text{(B)}\qquad \varphi(z)=\frac{\operatorname{sen}\lambda\pi}{\pi}\frac{1}{g(z)}\int_\alpha^z f'(x)\sum_0^\infty{}_i\,T_i(x,z)\,dx$$

in cui

$$\text{(C)}\qquad\left\{\begin{aligned}S_0(y,z)&=\frac{\operatorname{sen}\lambda\pi}{\pi}\frac{1}{g(z)}\int_y^z G_2(y,\xi)\left(\frac{\xi-y}{z-\xi}\right)^{1-\lambda}\frac{d\xi}{z-y}\\T_0(x,z)&=\frac{1}{(z-x)^{1-\lambda}}\\T_i(x,z)&=\int_z^x S_0(\xi,z)\,T_{i-1}(x,\xi)\,d\xi.\end{aligned}\right.$$

Infatti dalla (9) segue

$$T_i(x,z)=\int_z^x\frac{S_{i-1}(y,z)}{(y-x)^{1-\lambda}}\,dy=\int_z^x S_{i-1}(y,z)\,T_0(x,y)\,dy,$$

quindi

$$\mathrm{T}_i(x\,,z) = \int_z^x \mathrm{T}_0(x\,,y)\,dy \int_z^y \mathrm{S}_{i-j-1}(y\,,\xi)\,\mathrm{S}_{j-1}(\xi\,,z)\,d\xi$$

$$= \int_z^x \mathrm{S}_{j-1}(\xi\,,z)\,d\xi \int_\xi^x \mathrm{T}_0(x\,,y)\,\mathrm{S}_{i-j-1}(y\,,\xi)\,dy$$

e per conseguenza

$$\mathrm{T}_i(x\,,z) = \int_z^x \mathrm{S}_{j-i}(\xi\,,z)\,\mathrm{T}_{i-j}(x\,,\xi)\,d\xi$$

onde facendo $j = 1$

$$\mathrm{T}_i(x\,,z) = \int_x^x \mathrm{S}_0(\xi\,,z)\,\mathrm{T}_{i-1}(x\,,\xi)\,d\xi.$$

8. Possiamo facilmente vedere in quale relazione sta questo risultato con la nota formula di ABEL.

Questa formula risolve il caso in cui si supponga costante ed eguale ad 1 la funzione $\mathrm{G}(x\,,y)$. Allora le $\mathrm{T}_i\,(i > 0)$ della (B) divengono zero e la quantità sotto il segno d'integrazione si riduce al suo primo termine. Dunque la formula data da ABEL corrisponde al primo termine dello sviluppo col quale abbiamo dato la soluzione del problema nel caso generale.

9. Esaminiamo il caso particolare in cui sia $\mathrm{G}(x\,,y) = \mathrm{F}(y-x)$, e $\mathrm{F}(0) = 1$. Avremo allora

$$\mathrm{S}_0(y\,,z) = \frac{\operatorname{sen}\lambda\pi}{\pi}\int_y^z \mathrm{F}'(\xi-y)\left(\frac{\xi-y}{z-\xi}\right)^{1-\lambda}\frac{d\xi}{z-y} = \frac{\operatorname{sen}\lambda\pi}{\pi(z-y)}\int_0^{z-y}\mathrm{F}'(u)\left(\frac{u}{z-y-u}\right)^{1-\lambda}du,$$

onde, posto

$$s_0(v) = \frac{\operatorname{sen}\lambda\pi}{\pi v}\int_0^v \mathrm{F}'(u)\left(\frac{u}{v-u}\right)^{1-\lambda}du\,.$$

sarà

$$\mathrm{S}_0(y\,,z) = s_0(z-y).$$

Si ponga

$$t_0(v) = \frac{1}{v^{1-\lambda}}$$

$$t_i(v) = \int_0^v s_0(v-u)\,t_{i-1}(u)\,du\,;$$

avremo

$$\mathrm{T}_i(x\,,z) = (-1)^i\,t_i(z-x).$$

Infatti per $i = 0$ questa formula è vera. Supponiamola vera per i, allora

$$T_{i+1}(x, z) = (-1)^i \int_z^x s_0(z-\xi)\, t_i(\xi - x)\, d\xi = (-1)^i \int_{z-x}^0 s_0(z-x-u)\, t_i(u)\, du$$

$$= (-1)^{i+1} \int_0^{z-x} s_0(z-x-u)\, t_i(u)\, du = (-1)^{i+1}\, t_{i+1}(z-x)\,.$$

Si ponga

$$\Omega(v) = \sum_0^\infty{}_i (-1)^i\, t_i(v)\,;$$

ne seguirà

$$\sum_0^\infty{}_i\, T_i(x, z) = \Omega(z-x)$$

e per conseguenza:

La formula di inversione della relazione funzionale

$$f(y) - f(\alpha) = \int_\alpha^y \varphi(x)\, \frac{F(y-x)}{(y-x)^\lambda}\, dx \qquad (\lambda < 1\ ,\ F(0) = 1)$$

è

$$\varphi(z) = \frac{\operatorname{sen} \lambda\pi}{\pi} \int_\alpha^z f'(x)\, \Omega(z-x)\, dx$$

in cui

$$\left\{\begin{aligned} s_0(v) &= \frac{\operatorname{sen}\lambda\pi}{\pi v} \int_0^v F'(u) \left(\frac{u}{v-u}\right)^{1-\lambda} du \\ t_0(v) &= \frac{1}{v^{1-\lambda}} \\ t_i(v) &= \int_0^v s_0(v-u)\, t_{i-1}(u)\, du \\ \Omega(v) &= \sum_0^\infty{}_i (-1)^i\, t_i(v)\,. \end{aligned}\right.$$

Questo risultato è evidentemente più generale di quello di SONINE (1), giacché lo si ottiene senza ricorrere allo sviluppo di F in serie del TAYLOR.

(1) «Acta Mathematica», T. 4, page 171.

Nota III.

Ibidem, vol. XXXI, 1896, pp. 557-567.

1 In due Note precedenti (1) ebbi l'onore di comunicare all'Accademia alcune ricerche sulla inversione degli integrali definiti nelle quali supponevo che una funzione denotata con $h(y)$ non si annullasse entro i limiti dell'intervallo di integrazione $(\alpha, \alpha + A)$. La discussione dei casi nei quali la detta condizione non sia verificata costituisce una parte molto delicata della ricerca, giacché quando $h(y)$ si annulla il problema dell'inversione può in taluni casi riescire determinato, in altri no. La discriminazione di essi può in genere farsi dipendere dall'esame di una certa equazione algebrica. Nella presente Nota però mi limito a trattare il caso più semplice nel quale la distinzione dei casi si eseguisce in maniera diretta. In questo studio mi riferirò ad alcuni risultati che ho presentati recentemente all'Accademia dei Lincei (2) che possono prendersi anche a fondamento delle due Note precedentemente citate.

2. La questione da risolversi sia quella di determinare $\varphi(x)$ dalla relazione funzionale

$$f(y) - f(\alpha) = \int_{\alpha}^{y} \varphi(x) \, H(x, y) \, dx \qquad \beta > y > \alpha$$

e supponiamo che nell'intervallo (α, β) l'equazione

$$h(y) = H(y, y) = 0$$

abbia un numero finito di radici $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$.

La determinazione di $\varphi(x)$ per $\alpha_1 > x \geq \alpha$ rientra nella classe di problemi che ho precedentemente risoluti. La difficoltà incomincia dal determinare $\varphi(x)$ per valori a partire dalla prima radice α_1. Possiamo quindi procedere ad esaminare la questione seguente:

Invertire l'integrale

$$f(y) = \int_{0}^{y} \varphi(x) \, H(x, y) \, dx \qquad a > y > 0$$

in cui $h(y) = H(y, y)$ si annulla per $y = 0$ e non per altri valori di y compresi fra 0 ed a. Noi tratteremo qui il caso semplice in cui $H(x, y)$ possa svilupparsi secondo la formula del TAYLOR abbreviata, in modo che possa scriversi

$$H(x, y) = \alpha x + \beta y + \frac{1}{2}(x^2 H_{11}(x, y) + 2xy H_{12}(x, y) + y^2 H_{22}(x, y))$$

(1) Sedute del 12 e del 26 gennaio 1896. [In questo vol.: pp. 216-232].

(2) Seduta del 1° marzo 1896. [In questo vol.: XIX, pp 255-262].

in cui le H_{is} sono funzioni finite e continue per x, y compresi fra 0 e a, e α e β non sono ambedue nulli. In tale ipotesi $f(y)$ dovrà essere infinitesima del 2° ordine per $y = 0$.

3. I risultati che in questo caso si hanno possono riassumersi nel seguente teorema:

Abbiasi la equazione funzionale

$$f(y) = \int_0^y \varphi(x) \, H(x, y) \, dx, \qquad a > y > 0 \tag{A}$$

in cui $f(y) = y^2 f_1(y)$, *e*

$$\begin{aligned} H(x, y) &= \alpha x + \beta y + \frac{1}{2}(x^2 H_{11}(x, y) + 2\, yx H_{12}(x, y) + y^2 H_{22}(x, y)) \\ &= \alpha x + \beta y + H'(x, y). \end{aligned}$$

Se $f_1(y)$, H_{is} *e le loro derivate rapporto ad* y *sono finite e continue per* x, y *comprese fra* 0 *ed* a, *mentre* $h(y) = H(y, y)$ *si annulla solo per* $y = 0$, *esisterà una ed una sola funzione finita e continua* φ *che soddisfa l'equazione funzionale* (A) *quando*

$$(1) \quad \frac{\alpha}{\beta} > -1 \quad \text{oppure} \quad (2) \quad \frac{\alpha}{\beta} < -2$$

la quale si otterrà risolvendo la equazione funzionale

$$\frac{f'(y)}{y} - \frac{\beta}{\alpha+\beta} y^{-\frac{\alpha+2\beta}{\alpha+\beta}} \int_0^y f'(x) \, x^{-\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} dx = \frac{h(y)}{y} \varphi(y) \tag{B}$$

$$+ \int_0^y \varphi(x) \left\{ \frac{1}{y} \frac{\partial H'}{\partial y} - \frac{\beta}{\alpha+\beta} \frac{1}{y^2} H' - \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2} y^{-\frac{\alpha+2\beta}{\alpha+\beta}} \int_x^y H'(x, \xi) \, \xi^{-\frac{2\alpha+\beta}{\alpha+\beta}} d\xi \right\} dx$$

mentre se $-1 > \alpha/\beta > -2$ *il problema funzionale* (A) *non sarà determinato.*

1° Cominciamo dal provare che allorquando è soddisfatta la (1) o la (2) la questione funzionale (A) rientra nella classe di questioni esaminate nella mia Nota dell'Accademia dei Lincei precedentemente citata. A tal fine basterà osservare che, per y compreso fra 0 ed a, il primo membro della (B) è finito e continuo, mentre $h(y)/y$ si conserva finita, continua e diversa da zero e finalmente

$$\begin{aligned} G(x, y) = {} & \frac{1}{y} \frac{\partial H'}{\partial y} - \frac{\beta}{\alpha+\beta} \frac{H'(x, y)}{y^2} \\ & - \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2} y^{-\frac{\alpha+2\beta}{\alpha+\beta}} \int_x^y H'(x, \xi) \, \xi^{-\frac{2\alpha+\beta}{\alpha+\beta}} d\xi \end{aligned} \tag{3}$$

è una funzione continua avente il limite superiore dei suoi valori assoluti finito per tutti i valori di x, y che verificano le condizioni

$$a > y > x > 0.$$

Se ne conclude che vi è una ed una sola funzione finita e continua $\varphi(x)$ che verifica la (B) per $a > x \geq 0$.

2° Dimostriamo che se la funzione finita e continua $\varphi(z)$ soddisfa la (A), essa verifica la (B).

Infatti derivando la (A) e scrivendo $H_2(x, y) = \frac{\partial H(x, y)}{\partial y}$, otterremo

$$(A') \qquad f'(y) = \varphi(y)\, h(y) + \int_0^y \varphi(x)\, H_2(x, y)\, dx$$

e perciò

$$(4) \qquad \frac{h(y)}{y}\varphi(y) + \int_0^y \varphi(x)\, G(x, y)\, dx = \frac{f'(y)}{y} + \int_0^y \varphi(x)\left\{G(x, y) - \frac{H_2(x, y)}{y}\right\} dx.$$

Ora, ponendo

$$H_2' = \frac{\partial H'}{\partial y}$$

si ha

$$(5) \qquad H_2(x, y) = \beta + H_2'(x, y)$$

quindi

$$(6) \qquad G(x, y) - \frac{H_2(x, y)}{y} = -\frac{\beta}{y} - \frac{\beta}{\alpha+\beta}\frac{H'(x, y)}{y^2}$$

$$-\frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2} y^{-\frac{\alpha+2\beta}{\alpha+\beta}} \int_x^y H'(x, \xi)\, \xi^{-\frac{2\alpha+\beta}{\alpha+\beta}}\, d\xi = -\frac{\beta}{y}$$

$$-\frac{\beta}{\alpha+\beta} H'(x, x)\, y^{-\frac{\alpha+2\beta}{\alpha+\beta}} x^{-\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} - \frac{\beta}{\alpha+\beta} y^{-\frac{\alpha+2\beta}{\alpha+\beta}} \int_x^y H_2'(x, \xi)\, \xi^{-\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}\, d\xi$$

$$= -\beta x^{-\frac{\beta}{\alpha+\beta}} y^{-\frac{\alpha+2\beta}{\alpha+\beta}} - \frac{\beta}{\alpha+\beta} H'(x, x)\, y^{-\frac{\alpha+2\beta}{\alpha+\beta}} x^{-\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}$$

$$-\frac{\beta}{\alpha+\beta} y^{-\frac{\alpha+2\beta}{\alpha+\beta}} \int_x^y (\beta + H_2'(x, \xi))\, \xi^{-\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}\, d\xi$$

$$= -\frac{\beta}{\alpha+\beta} y^{-\frac{\alpha+2\beta}{\alpha+\beta}} x^{-\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} h(x) - \frac{\beta}{\alpha+\beta} y^{-\frac{\alpha+2\beta}{\alpha+\beta}} \int_x^y H_2(x, \xi)\, \xi^{-\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}\, d\xi.$$

Per conseguenza tenendo presente la (A')

$$\varphi(x)\left\{G(x, y) - \frac{H_2(x, y)}{y}\right\} = -\frac{\beta}{\alpha+\beta} y^{-\frac{\alpha+2\beta}{\alpha+\beta}} x^{-\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} f'(x)$$

$$+\frac{\beta}{\alpha+\beta} y^{-\frac{\alpha+2\beta}{\alpha+\beta}} \left[x^{-\frac{\alpha}{\alpha-\beta}} \int_0^x \varphi(\xi)\, H_2(\xi, x)\, d\xi - \varphi(x) \int_x^y H_2(x, \xi)\, \xi^{-\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}\, d\xi\right].$$

Ma pel principio di DIRICHLET, osservando che $\alpha/(\alpha+\beta)<2$,

$$(7)\qquad \int_0^y \left\{ x^{-\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} \int_0^x \varphi(\xi)\, H_2(\xi, x)\, d\xi - \varphi(x) \int_x^y H_2(x, \xi)\, \xi^{-\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} d\xi \right\} dx = 0,$$

onde

$$\int_0^y \varphi(x) \left\{ G(x, y) - \frac{H_2(x, y)}{y} \right\} dx = -\frac{\beta}{\alpha+\beta}\, y^{-\frac{\alpha+2\beta}{\alpha+\beta}} \int_0^y f'(x)\, x^{-\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} dx,$$

da cui finalmente segue, in virtù della (4),

$$\frac{h(y)}{y}\varphi(y) + \int_0^y \varphi(x)\, G(x, y)\, dx = \frac{f'(y)}{y} - \frac{\beta}{\alpha+\beta}\, y^{-\frac{\alpha+2\beta}{\alpha+\beta}} \int_0^y f'(x)\, x^{-\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} dx$$

come volevasi dimostrare.

3° Proviamo ora inversamente che, se la funzione finita e continua $\varphi(x)$ soddisfa la (B), essa verifica la (A), o ciò che è lo stesso la (A').

Infatti dalla (B) segue, a cagione della (3),

$$\varphi(y)\, h(y) + \int_0^y \varphi(x)\, H_2(x, y)\, dx = f'(y)$$

$$-\int_0^y \left\{ \frac{\beta}{\alpha+\beta}\, y^{-\frac{\beta}{\alpha+\beta}} x^{-\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} f'(x) + \varphi(x) \left[y G(x, y) - H_2(x, y) \right] \right\} dx.$$

Perciò valendosi delle identità (6)

$$\Phi(y) = \varphi(y)\, h(y) + \int_0^y \varphi(x)\, H_2(x, y)\, dx - f'(y)$$

$$= \frac{\beta}{\alpha+\beta}\, y^{-\frac{\beta}{\alpha+\beta}} \int_0^y \left\{ x^{-\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} h(x)\, \varphi(x) \right.$$

$$\left. + \varphi(x) \int_x^y H_2(x, \xi)\, \xi^{-\frac{\alpha}{\alpha-\beta}} d\xi - x^{-\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} f'(x) \right\} dx$$

e applicando la (7)

$$\Phi(y) = \frac{\beta}{\alpha+\beta}\, y^{-\frac{\beta}{\alpha+\beta}} \int_0^y x^{-\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} \left\{ h(x)\, \varphi(x) \right.$$

$$\left. + \int_0^x \varphi(\xi)\, H_2(\xi, x)\, d\xi - f'(x) \right\} dx = \frac{\beta}{\alpha+\beta}\, y^{-\frac{\beta}{\alpha+\beta}} \int_0^y \Phi(x)\, x^{-\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} dx,$$

vale a dire

$$\Phi(y)\, y^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} - \frac{\beta}{\alpha+\beta}\int_0^y \Phi(x)\, x^{-\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}\, dx = 0\,;$$

e derivando rapporto ad y

$$\Phi'(y) = 0.$$

Ma per $y = 0$ Φ si annulla, dunque si avrà sempre $\Phi(y) = 0$ e per conseguenza

$$\varphi(y)\, h(y) + \int_0^y \varphi(x)\, H_2(x, y)\, dx = f'(y)$$

come volevasi dimostrare.

4° Per provare finalmente che se $-1 > \alpha/\beta > -2$ il problema funzionale è indeterminato, osserviamo dapprima che in questo caso si ha $-(\alpha + 2\beta)/(\alpha + \beta) > 0$, onde la equazione funzionale

$$(8) \qquad 1 = \frac{h(y)}{y}\theta(y) + \int_0^y \theta(x) \left\{ \frac{H_2'(x, y)}{y}\left(\frac{x}{y}\right)^{-\frac{\alpha+2\beta}{\alpha+\beta}} - \frac{\beta}{\alpha+\beta}\frac{H'(x, x)}{x^2} \right.$$

$$\left. - \frac{\beta}{\alpha+\beta}\, x^{-\frac{\alpha+2\beta}{\alpha+\beta}} \int_x^y H_2'(x, \xi)\, \xi^{-\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}\, d\xi \right\} dx,$$

in cui $\theta(x)$ è la funzione incognita, si risolve applicando i metodi dati nella mia citata Nota dell'Accademia dei Lincei.

Si verifica poi che, presa

$$(9) \qquad \varphi_1(y) = \theta(y)\, y^{-\frac{\alpha+2\beta}{\alpha+\beta}},$$

questa soddisfa la relazione funzionale

$$0 = \int_0^y \varphi_1(x)\, H(x, y)\, dx$$

ovvero l'altra equivalente

$$(10) \qquad 0 = \varphi_1(y)\, h(y) + \int_0^y \varphi_1(x)\, H_2(x, y)\, dx.$$

Infatti posto

$$(11) \qquad L(x, y) = \frac{H_2'(x, y)}{y}\left(\frac{x}{y}\right)^{-\frac{\alpha+2\beta}{\alpha+\beta}} - \frac{\beta}{\alpha+\beta}\, x^{-\frac{\alpha+2\beta}{\alpha+\beta}} \int_x^y H_2'(x, \xi)\, \xi^{-\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}\, d\xi,$$

dalle (8) e (9) si ricava

$$(\alpha+\beta)\,\varphi_1(y) = y^{-\frac{\alpha+2\beta}{\alpha+\beta}} - \frac{H'(y,y)}{y}\,\varphi_1(y)$$

$$- y^{-\frac{\alpha+2\beta}{\alpha+\beta}} \int_0^y \left\{ -\frac{\beta}{\alpha+\beta}\,\frac{H'(x,x)}{x^2} + L(x,y) \right\} \theta(x)\,dx$$

e quindi

$$(\alpha+\beta)\,y\varphi_1(y) + \int_0^y \beta\varphi_1(x)\,dx = -H'(y,y)\,\varphi_1(y)$$

$$- y^{-\frac{\beta}{\alpha+\beta}} \int_0^y \left\{ -\frac{\beta}{\alpha+\beta}\,\frac{H'(x,x)}{x^2} + L(x,y) \right\} \theta(x)\,dx$$

$$-\frac{\beta}{\alpha+\beta}\int_0^y \left[\frac{H'(x,x)}{x}\,\varphi_1(x) + x^{-\frac{\alpha+2\beta}{\alpha+\beta}} \int_0^x \left\{ -\frac{\beta}{\alpha+\beta}\,\frac{H'(\xi,\xi)}{\xi^2} + L(\xi,x) \right\} \theta(\xi)\,d\xi \right] dx .$$

Ma, applicando il principio di DIRICHLET, abbiamo

$$0 = -y^{-\frac{\beta}{\alpha+\beta}} \int_0^y -\frac{\beta}{\alpha+\beta}\,\frac{H'(x,x)}{x^2}\,\theta(x)\,dx - \frac{\beta}{\alpha+\beta}\int_0^y \frac{H'(x,x)}{x}\,\varphi_1(x)\,dx$$

$$+ \left(\frac{\beta}{\alpha+\beta}\right)^2 \int_0^y x^{-\frac{\alpha+2\beta}{\alpha+\beta}}\,dx \int_0^x \frac{H'(\xi,\xi)}{\xi^2}\,d\xi ,$$

perciò il secondo membro della formula precedente si semplicizza e diventa

$$= -H'(y,y)\,\varphi_1(y) - y^{-\frac{\beta}{\alpha+\beta}} \int_0^y L(x,y)\,\theta(x)\,dx$$

$$-\frac{\beta}{\alpha+\beta}\int_0^y x^{-\frac{\alpha+2\beta}{\alpha+\beta}}\,dx \int_0^x L(\xi,x)\,\theta(\xi)\,d\xi ,$$

ovvero, sostituendo per $L(x,y)$ la espressione (11),

$$= -H'(y,y)\,\varphi_1(y) - \int_0^y \varphi_1(x)\,H_2'(x,y)\,dx$$

$$+\frac{\beta}{\alpha+\beta}\left[y^{-\frac{\beta}{\alpha+\beta}} \int_0^y \varphi_1(x)\,dx \int_x^y H_2'(x,\xi)\,\xi^{-\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}\,d\xi - \int_0^y dx \int_0^x \frac{H_2'(\xi,x)}{x}\,\varphi_1(\xi)\,d\xi \right.$$

$$\left. + \frac{\beta}{\alpha+\beta}\int_0^y x^{-\frac{\alpha+2\beta}{\alpha+\beta}}\,dx \int_0^x \varphi_1(\xi)\,d\xi \int_\xi^x H_2'(\xi,\eta)\,\eta^{-\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}\,d\eta \right] .$$

Ma pel principio di DIRICHLET

$$\frac{\beta}{\alpha+\beta}\int_0^y x^{-\frac{\alpha+2\beta}{\alpha+\beta}}dx\int_0^x \varphi_1(\xi)\,d\xi\int_\xi^x H'_2(\xi,\eta)\,\eta^{-\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}d\eta$$

$$=\int_0^y \eta^{-\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}d\eta\int_0^\eta \varphi_1(\xi)\,H'_2(\xi,\eta)\,d\xi\,\frac{\beta}{\alpha+\beta}\int_\eta^y x^{-\frac{\alpha+2\beta}{\alpha+\beta}}dx$$

$$=-y^{-\frac{\beta}{\alpha+\beta}}\int_0^y \eta^{-\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}d\eta\int_0^\eta \varphi_1(\xi)\,H'_2(\xi,\eta)\,d\xi+\int_0^y d\eta\int_0^\eta \frac{\varphi_1(\xi)\,H'_2(\xi,\eta)}{\eta}\,d\xi\,.$$

Perciò nella formula precedente tutti i termini che seguono i primi due si annullano e quindi avremo

$$(\alpha+\beta)\,y\varphi_1(y)+\int_0^y \beta\varphi_1(x)\,dx=-H'(y,y)\,\varphi_1(x)-\int_0^y \varphi_1(x)\,H'_2(x,y)\,dx\,,$$

cioè

$$h(y)\,\varphi_1(y)+\int_0^y \varphi_1(x)\,H_2(x,y)\,dx=0$$

che è appunto la (10) che si trattava di dimostrare.

Si avrà dunque, quando $1 -> \alpha/\beta > -2$, che se la funzione $\varphi(x)$ soddisfa la (A), anche la funzione

$$\varphi(x)+C\varphi_1(x)$$

in cui C è una costante arbitraria, la verificherà pure, il che prova che la questione è indeterminata.

4. Per dimostrare la equivalenza delle due equazioni funzionali (A) e (B), allorché è soddisfatta la (1) oppure la (2), si può procedere nel seguente modo, anziché ricorrere alla verifica diretta come abbiamo fatto nel paragrafo precedente.

Moltiplichiamo ambo i membri della (A′) per $y^{-\alpha/(\alpha+\beta)}\,dy$. Osservando che così la (1) come la (2) provano che

$$\frac{\alpha}{\alpha+\beta}<2\,,$$

potremo integrare fra 0 e z, e avremo, applicando il principio di DIRICHLET,

$$\int_0^z f'(y)\,y^{-\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}dy=\int_0^z \varphi(y)\left\{h(y)\,y^{-\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}+\int_y^z H_2(y,\xi)\,\xi^{-\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}d\xi\right\}dy\,.$$

Moltiplicando ambo i membri per $z^{-\beta/(\alpha+\beta)}$ si trova

$$\int_0^z f'(y)\, y^{-\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} z^{-\frac{\beta}{\alpha+\beta}} dy = \int_0^z \varphi(y) \left\{ h(y)\, y^{-\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} z^{-\frac{\beta}{\alpha+\beta}} \right.$$

$$\left. + \int_y^z \mathrm{H}_2(y,\xi)\, \xi^{-\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} z^{-\frac{\beta}{\alpha+\beta}} d\xi \right\} dy,$$

ovvero, ponendo

$$\mathrm{M}(x,y) = h(x)\, x^{-\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} y^{-\frac{\beta}{\alpha+\beta}} + \int_x^y \mathrm{H}_2(x,\xi)\, \xi^{-\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} y^{-\frac{\beta}{\alpha+\beta}} d\xi,$$

si ha

$$\int_0^y f'(x)\, x^{-\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} y^{-\frac{\beta}{\alpha+\beta}} dx = \int_0^y \varphi(x)\, \mathrm{M}(x,y)\, dx. \tag{12}$$

Questa equazione risulta così equivalente alla (A).

Abbiamo ora

$$\mathrm{M}(y,y) = \frac{h(y)}{y}, \tag{13}$$

e poiché

$$h(x) = (\alpha+\beta)\, x + \mathrm{H}'(x,x) \quad , \quad \mathrm{H}_2(x,\xi) = \beta + \mathrm{H}'_2(x,\xi),$$

sarà

$$\mathrm{M}(x,y) = \alpha + \beta + \mathrm{H}'(x,x)\, x^{-\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} y^{-\frac{\beta}{\alpha+\beta}} + \int_x^y \mathrm{H}'_2(x,\xi)\, \xi^{-\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} y^{-\frac{\beta}{\alpha+\beta}} d\xi,$$

onde, con una integrazione per parti,

$$\mathrm{M}(x,y) = \alpha + \beta + \frac{\mathrm{H}'(x,y)}{y} + \frac{\alpha}{\alpha+\beta} y^{-\frac{\beta}{\alpha+\beta}} \int_x^y \mathrm{H}'(x,y)\, \xi^{-\frac{2\alpha+\beta}{\alpha+\beta}} d\xi,$$

da cui segue

$$\mathrm{M}_2(x,y = \frac{\partial \mathrm{M}(x,y)}{\partial y} = \mathrm{G}(x,y). \tag{14}$$

Si derivi la (12) rispetto ad y tenendo presenti le (13) e (14); si troverà

$$\frac{f'(y)}{y} - \frac{\beta}{\alpha+\beta} y^{-\frac{\alpha+2\beta}{\alpha+\beta}} \int_0^y f'(x)\, x^{-\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} dx = \frac{h(y)}{y} \varphi(y) + \int_0^y \varphi(x)\, \mathrm{G}(x,y)\, dx,$$

cioè si otterrà la (B). Resta così dimostrata la equivalenza delle equazioni (A) e (B).

Potremo anche enunciare, in virtù delle precedenti considerazioni, il teorema seguente:

Se $\alpha/\beta < -1$, *oppure* $\alpha/\beta < -1$, *la equazione funzionale*

$$(A) \qquad f(y) = \int_0^y \varphi(x)\, \mathrm{H}(x, y)\, dx$$

è equivalente all'altra

$$(C) \qquad \int_0^y f'(x)\, x^{-\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} y^{-\frac{\beta}{\alpha+\beta}} dx = \int_0^y \varphi(x) \Big\{ h(x)\, x^{-\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} y^{-\frac{\beta}{\alpha+\beta}}$$

$$+ \int_x^y \mathrm{H}_2(x, \xi)\, \xi^{-\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} y^{-\frac{\beta}{\alpha+\beta}} d\xi \Big\} dx,$$

la quale può risolversi con i metodi esposti nella Nota I.

L'analisi svolta vale, come abbiamo veduto, quando sia soddisfatta una delle condizioni

$$\frac{\alpha}{\beta} > 1 \quad , \quad -1 > \frac{\alpha}{\beta} > -2 \quad , \quad -2 > \frac{\alpha}{\beta},$$

ma se si ha

$$\frac{\alpha}{\beta} = -1 \, , \qquad \text{oppure} \quad \frac{\alpha}{\beta} = -2,$$

allora essa non è più applicabile, e si riconosce facilmente che non bastano più le condizioni che abbiamo supposto conosciute per esaminare la questione in questi casi.

Nota IV.

Ibidem, vol. XXXI, 1896, pp. 693-708

1. Mi permetto di presentare la continuazione di alcuni studi sulla inversione degli integrali definiti recentemente comunicati all'Accademia. Nell'ultima Nota [1] ho esaminato il caso in cui, avendosi l'equazione funzionale

$$f(y) = \int_0^y \varphi(x)\, \mathrm{H}(x, y)\, dx,$$

la espressione di $\mathrm{H}(x, y)$ sviluppata secondo la formula di MACLAURIN cominciasse dai termini di primo grado nelle variabili; darò ora alcuni teoremi fondamentali relativi al caso in cui la detta espressione cominci dai termini di grado n.

Il primo di essi stabilisce una condizione sufficiente perché il problema dell'inversione sia determinato, la quale si verifica allorché le parti reali delle radici di una equazione algebrica di grado n a coefficienti reali sono tutte positive.

Ora la questione di riconoscere se le parti reali delle radici di una equazione algebrica a coefficienti reali hanno tutte lo stesso segno è stata recentemente trattata e risoluta in maniera completa ed elegante dal prof. HURWITZ [2]. Applicando il criterio di HURWITZ al nostro caso si può giudicare *a priori* che la questione d'inversione è determinata, eseguendo solo operazioni razionali sui coefficienti dei termini di grado n dello sviluppo di $\mathrm{H}(x, y)$.

I teoremi II e III dànno la effettiva risoluzione del problema dell'inversione allorché è soddisfatta la condizione di cui ora si è parlato. Essi stabiliscono che l'equazione funzionale primitiva è equivalente ad un'altra avente la stessa forma, ma tale che la corrispondente funzione $\mathrm{H}(y, y)$ non si annulla più nell'intervallo d'integrazione, e che perciò è suscettibile di risolversi col metodo che ho dato fino dal principio delle attuali ricerche.

Finalmente i teoremi IV e V provano che la questione funzionale non è determinata se le radici della equazione algebrica a cui si riferisce la detta condizione, anziché avere le parti reali positive, sono tali che una o più di esse hanno le parti reali negative, giacché allora se esiste una soluzione ve ne sono infinite.

2. TEOREMA I. - *Abbiasi la equazione funzionale*

$$f(y) = \int_0^y \varphi(x)\, \mathrm{H}(x, y)\, dx \quad , \quad a > y > 0 \tag{A}$$

(1) Seduta dell'8 marzo 1896. [In questo vol.: pp. 233-241].

(2) *Ueber die Bedingungen, unter welchen eine Gleichung nur Wurzeln mit negativen reellen Theilen besitzt* von A. HURWITZ, «Math. Annalen», Bd. 46, S. 273.

in cui

$$f(y) = y^{n+1} f_1(y)$$

$$H(x, y) = \sum_0^n {}_i a_i x^i y^{n-1} + H'(x, y)$$

$$H'(x, y) = \sum_0^{n+1} {}_i x^i y^{n+1-i} L_i(x, y)$$

essendo le a_i quantità costanti.

Se $f_1(y)$ e $L_i(x, y)$ e le loro derivate rapporto ad y sono finite e continue per y compreso fra o ed a, mentre in questo intervallo

$$h(y) = H(y, y)$$

non si annulla che per $y = 0$, esisterà una ed una sola funzione finita e continua φ che soddisfa la (A) quando tutte le radici dell'equazione algebrica di grado n

$$\text{(B)} \qquad \frac{a_0}{\lambda - 1} + \frac{a_1}{\lambda - 2} + \cdots + \frac{a_n}{\lambda - n - 1} = 0$$

essendo finite e differenti fra loro, avranno le parti reali positive.

Divideremo la dimostrazione di questo teorema in due parti.

3. Supponiamo dapprima che la funzione $\varphi(x)$ soddisfi la (A).

Derivando questa equazione rapporto ad y otterremo

$$\text{(A')} \qquad f'(y) = \varphi(y)\, h(y) + \int_0^y \varphi(x)\, H_2(x, y)\, dx$$

in cui

$$\text{(1)} \qquad h(y) = \sum_0^n {}_i a_i y^n + h'(y)$$

$$\text{(2)} \qquad H_2(x, y) = \frac{\partial H(x, y)}{\partial y} = \sum_0^n {}_i (n - i)\, a_i x^i y^{n-i-1} + H'_2(x, y)$$

essendo

$$h'(y) = H'(y, y) \quad , \quad H'_2(x, y) = \frac{\partial H'(x, y)}{\partial y}.$$

Sia ora y_s una radice dell'equazione (B).

Moltiplicando ambo i membri della (A') per $y^{\lambda_s - n - 1}$ avremo

$$f'(y)\, y^{\lambda_s - n - 1} = \varphi(y)\, h(y)\, y^{\lambda_s - n - 1} + y^{\lambda_s - n - 1} \int_0^y \varphi(x)\, H_2(x, y)\, dx.$$

Poiché la parte reale di λ_s deve essere positiva, così ambo i membri della precedente equazione saranno finiti o al più, per $y = 0$, diverranno infiniti d'ordine inferiore ad un numero minore dell'unità. Quindi sarà lecito integrare fra o e z e si otterrà:

$$\text{(3)} \quad \int_0^z f'(y)\, y^{\lambda_s - n - 1} dy = \int_0^z \left\{ \varphi(y)\, h(y)\, y^{\lambda_s - n - 1} + y^{\lambda_s - n - 1} \int_0^y \varphi(x)\, H_2(x, y)\, dx \right\} dy$$

e applicando il principio di DIRICHLET

$$\int_0^z f'(y)\, y^{\lambda_s-n-1}\, dy = \int_0^z \left\{ h(y)\, y^{\lambda_s-n-1} + \int_y^z \mathrm{H}_2(y\,,x)\, x^{\lambda_s-n-1}\, dx \right\} \varphi(y)\, dx\,.$$

Abbiamo ora, in virtù della (2),

$$\int_y^z \mathrm{H}_2(y\,,x)\, x^{\lambda_s-n-1}\, dx = \sum_0^n {}_i \frac{n-i}{\lambda_s-i-1}\, a_i\, y^i\, z^{\lambda_s-i-1}$$

$$-\sum_0^n {}_i \frac{n-i}{\lambda_s-i-1}\, a_i\, y^{\lambda_s-1} + \int_y^z \mathrm{H}'_2(y\,,x)\, x^{\lambda_s-n-1}\, dx$$

e, mediante una integrazione per parti applicata all'ultimo integrale,

$$\int_y^z \mathrm{H}_2(y\,,x)\, x^{\lambda_s-n-1}\, dx = \sum_0^n {}_i \frac{n-i}{\lambda_s-i-1}\, a_i\, y^i\, z^{\lambda_s-i-1}$$

$$-\sum_0^n {}_i \frac{n-i}{\lambda_s-i-1}\, a_i\, y^{\lambda_s-1} + \mathrm{H}'(y\,,z)\, z^{\lambda_s-n-1} - h'(y)\, y^{\lambda_s-n-1}$$

$$-(\lambda_s-n-1)\int_y^z \mathrm{H}'(y\,,x)\, x^{\lambda_s-n-2}\, dx\,.$$

Ne segue, tenendo conto della (1),

$$h(y)\, y^{\lambda_s-n-1} + \int_y^z \mathrm{H}_2(y\,,x)\, x^{\lambda_s-n-1}\, dx$$

$$= y^{\lambda_s-1}\sum_0^n {}_i\, a_i\left(1-\frac{n-i}{\lambda_s-i-1}\right) + h'(y)\, y^{\lambda_s-n-1} + \sum_0^n {}_i \frac{n-i}{\lambda_s-i-1}\, a_i\, y^i\, z^{\lambda_s-i-1}$$

$$+\mathrm{H}'(y\,,z)\, z^{\lambda_s-n-1} - h'(y)\, y^{\lambda_s-n-1} - (\lambda_s-n-1)\int_y^z \mathrm{H}'(y\,,x)\, x^{\lambda_s-n-2}\, dx\,.$$

Ma siccome λ_s è radice della (B), così

$$\sum_0^n {}_i\, a_i\left(1-\frac{n-i}{\lambda_s-i-1}\right) = \sum_0^n {}_i\, a_i\,\frac{\lambda_s-n-1}{\lambda_s-i-1} = 0\,,$$

onde il secondo membro della precedente equazione diverrà

$$= \sum_0^n {}_i \frac{n-i}{\lambda_s-i-1}\, a_i\, y^i\, z^{\lambda_s-i-1} + \mathrm{H}'(y\,,z)\, z^{\lambda_s-n-1}$$

$$-(\lambda_s-n-1)\int_y^z \mathrm{H}'(y\,,x)\, x^{\lambda_s-n-2}\, dx\,.$$

In conseguenza la (3) si scriverà

$$\int_0^z f'(y)\, y^{\lambda_s - n - 1}\, dy = \int_0^z \Big\{ \sum_0^n {}_i \frac{n-i}{\lambda_s - i - 1}\, a_i\, y^i\, z^{\lambda_s - i - 1}$$

$$+ H'(y, z)\, z^{\lambda_s - n - 1} - (\lambda_s - n - 1) \int_y^z H'(y, x)\, x^{\lambda_s - n - 2}\, dx \Big\} \varphi(y)\, dy$$

e, moltiplicando ambo i membri per $z^{-\lambda_s + 1}$,

$$(4) \qquad z^{-\lambda_s + 1} \int_0^z f'(y)\, y^{\lambda_s - n - 1}\, dy = \int_0^z \Big\{ \sum_0^n {}_i \frac{n-i}{\lambda_s - i - 1}\, a_i\, y^i\, z^{-i}$$

$$+ \frac{H'(y, z)}{z^n} - (\lambda_s - n - 1)\, z^{-\lambda_s + 1} \int_y^z H'(y, x)\, x^{\lambda_s - n - 2}\, dx \Big\} \varphi(y)\, dy.$$

Si ponga ora

$$K_s = \frac{(\lambda_s - n)(\lambda_s - n + 1) \cdots (\lambda_s - 2)}{(\lambda_s - \lambda_1)(\lambda_s - \lambda_2) \cdots (\lambda_s - \lambda_n)}, \qquad (s = 1, 2, \cdots, n)$$

in cui il denominatore contiene tutte le differenze $\lambda_s - \lambda_h$ per $h \gtrless s$.

Per noti teoremi algebrici (3) avremo

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} & \sum_1^n {}_s K_s = 1 \\ & \sum_1^n {}_s \frac{K_s}{\lambda_s} = \frac{n!}{\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n} = \frac{n \sum_0^n {}_i a_i}{\sum_0^n {}_i \dfrac{a_i}{i+1}} \\ & \sum_1^n {}_s \frac{K_s}{\lambda_s - 1} = \frac{(n-1)!}{(\lambda_1 - 1)(\lambda_2 - 1) \cdots (\lambda_n - 1)} = \frac{\sum_0^n {}_i a_i}{n a_0} \\ & \sum_1^n {}_s \frac{K_s}{\lambda_s - q} = 0, \qquad\qquad (q = 2, 3, \cdots, n). \\ & \sum_1^n {}_s \frac{K_s}{n + 1 - \lambda_s} = \frac{(n-1)!}{(n + 1 - \lambda_1) \cdots (n + 1 - \lambda_n)} = \frac{\sum_0^n {}_i a_i}{n a_n}. \end{aligned} \right.$$

(3) Vedi JACOBI, *Disquisitiones analyticae de fractionibus simplicibus*. Dissertatio inauguralis. Berolini 1825 («Ges. Werke», Bd. III).

Moltiplichiamo ambo i membri della (4) per K_s e sommiamo per tutti i valori dell'indice s da 1 ad n. Si avrà

$$\sum_1^n {}_s K_s z^{-\lambda_s+1} \int_0^z f'(y) y^{\lambda_s - n - 1} dy$$

$$= \int_0^z \Big\{ \sum_0^{n-1} {}_i (n-1) a_i y^i z^{-i} \sum_1^n {}_s \frac{K_s}{\lambda_s - i - 1} + \frac{H'(y, x)}{z^n} \sum_1^n {}_s K_s$$

$$- \sum_1^n {}_s K_s (\lambda_s - n - 1) z^{-\lambda_s+1} \int_y^z H'(y, x) x^{\lambda_s - n - 2} dx \Big\} \varphi(y) dy$$

ossia, in virtù delle (5),

$$\text{(6)} \qquad \sum_1^n {}_s K_s z^{-\lambda_s+1} \int_0^z f'(y) y^{\lambda_s - n - 1} dy$$

$$= \int_0^z \Big\{ \sum_0^n {}_i a_i + \frac{H'(y, x)}{z^n} - \sum_1^n {}_s K'_s z^{-\lambda_s+1} \int_y^z H'(y, x) x^{\lambda_s - n - 2} dx \Big\} \varphi(y) dy$$

in cui si è posto

$$K'_s = \frac{(\lambda_s - n - 1)(\lambda_s - n) \cdots (\lambda_s - 2)}{(\lambda_s - \lambda_1)(\lambda_s - \lambda_2) \cdots (\lambda_s - \lambda_n)} .$$

Si scriva per semplicità

$$\text{(7)} \qquad \sum_1^n {}_s K_s z^{-\lambda_s+1} \int_0^z f'(y) y^{\lambda_s - n - 1} dy = \psi(z)$$

$$\text{(8)} \qquad \sum_0^n {}_i a_i + \frac{H'(y, z)}{z^n} - \sum_1^n {}_s K'_s z^{-\lambda_s+1} \int_v^z H'(y, x) x^{\lambda_s - n - 2} dx = G(y, z),$$

la (6) allora assumerà la forma

$$\text{(C)} \qquad \psi(z) = \int_0^z G(y, z) \varphi(y) dy ;$$

ossia potremo concludere che se $\varphi(y)$ soddisfa la (A) dovrà verificare la equazione precedente.

Abbiamo ora:

1° $\psi(z)$ è una funzione finita e continua in tutto l'intervallo $(0\, a)$, e per $z = 0$ si annulla.

$\psi'(z)$ è una funzione finita e continua nello stesso intervallo, e

$$\lim_{x=0} \psi'(z) = (n+1) f_1(0) \sum_1^n {}_s \frac{K_s}{\lambda_s} = \frac{n(n+1)\sum_0^n {}_i a_i}{\sum_1^n {}_i \frac{a_i}{i+1}} f_1(0).$$

2° $G(y, z)$ e $G_2(y, z) = \partial G(y, z)/\partial z$ sono funzioni continue ed i limiti superiori dei loro valori assoluti sono finiti per tutti i valori di x, y che verificano le condizioni

$$a > z > y > 0.$$

3° La funzione

$$G(z, z) = \sum_0^n {}_i a_i + \frac{h'(z)}{z^n}$$

è finita continua e diversa da zero per tutti i valori di z compresi fra 0 ed a.

La questione funzionale (C) rientra dunque in quella classe, che ho esaminata in Note precedenti, la quale non ammette che una sola soluzione $\varphi(x)$.

Dunque non può esservi più di una funzione che soddisfi la (A).

4. Mostriamo ora che ogni funzione finita e continua $\varphi(y)$ che verifica la (C) deve soddisfare la (A') e per conseguenza la (A).

Supponiamo infatti che $\varphi(y)$ soddisfi la (C); in tal caso, posto

$$\Phi(y) = f'(y) - \varphi(y) h(y) - \int_0^y \varphi(x) H_2(x, y) dx,$$

questa funzione risulterà finita e continua per $a > y \geq 0$ e diverrà infinitesima d'ordine n per $y = 0$.

Seguendo l'analisi che ci ha condotti alla (C), si riconosce facilmente che questa equazione potrà scriversi

$$\text{(C')} \qquad \sum_1^n {}_s K_s z^{-\lambda_s+1} \int_0^z \Phi(y) y^{\lambda_s-n-1} dy = 0.$$

Moltiplichiamo ambo i membri della precedente equazione per $z^{q-2} dz$; avremo

$$\sum_1^n {}_s K_s z^{q-\lambda_s-1} dz \cdot \int_0^z \Phi(y) y^{\lambda_s-n-1} dy = 0.$$

Ammettendo di dare a q uno dei valori $2, \cdots, n$, potremo integrare fra 0 ed u $(a > u > 0)$, e applicando il principio di DIRICHLET si otterrà:

$$0 = \sum_1^n {}_s K_s \int_0^u \Phi(y) y^{\lambda_s-n-1} dy \cdot \int_y^u z^{q-\lambda_s-1} dy =$$

$$= \sum_{n}^{n} {}_s \mathrm{K}_s \int_0^u \Phi(y)\, y^{\lambda_s - n - 1}\, dy \cdot \left[\frac{u^{q-\lambda_s}}{q-\lambda_s} - \frac{y^{q-\lambda_s}}{q-\lambda_s}\right]$$

$$= \sum_{1}^{n} {}_s \frac{\mathrm{K}_s}{q-\lambda_s} u^{q-\lambda_s} \int_0^u \Phi(y)\, y^{\lambda_s - n - 1}\, dy - \int_0^u \Phi(y)\, y^{q-n-1} \sum_{1}^{n} {}_s \frac{\mathrm{K}_s}{q-\lambda_s}\, dy .$$

A cagione della penultima delle (5), l'ultimo termine della espressione precedente si annullerà, onde avremo

$$\sum_{1}^{n} {}_s \frac{\mathrm{K}_s}{q-\lambda_s} u^{q-\lambda_s} \int_0^u \Phi(y)\, y^{\lambda_s - n - 1}\, dy = 0$$

o anche

$$\sum_{1}^{n} {}_s \frac{\mathrm{K}_s}{q-\lambda_s} z^{-\lambda_s+1} \int_0^z \Phi(y)\, y^{\lambda_s - n - 1}\, dy = 0 \qquad (q = 2, 3, \cdots, n).$$

Poniamo

$$\mathrm{K}_s z^{-\lambda_s+1} \int_0^z \Phi(y)\, y^{\lambda_s - n - 1}\, dy = v_s ;$$

le equazioni precedenti unitamente alla (C′) potranno scriversi

$$v_1 + v_2 + \cdots + v_n = 0$$

$$\frac{1}{2-\lambda_1} v_1 + \frac{1}{2-\lambda_2} v_2 + \cdots + \frac{1}{2-\lambda_n} v_n = 0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{1}{n-\lambda_1} v_1 + \frac{1}{n-\lambda_2} v_2 + \cdots + \frac{1}{n-\lambda_n} v_n = 0$$

e poiché il determinante

$$\begin{vmatrix} 1, & 1, & \cdots, & 1 \\ \frac{1}{2-\lambda_1}, & \frac{1}{2-\lambda_2}, & \cdots, & \frac{1}{2-\lambda_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{1}{n-\lambda_1}, & \frac{1}{n-\lambda_2}, & \cdots, & \frac{1}{n-\lambda_n} \end{vmatrix} \gtrless 0$$

così avremo

$$v_s = 0$$

da cui segue

$$\Phi(y) = 0$$

che non è altro che la (A′). Abbiamo quindi provato che dalla (C) segue la (A′) e perciò la (A).

Osserviamo ora che la questione funzionale (C) ammette sempre una soluzione, quindi se saranno verificate le condizioni poste nell'enunciato del teorema I esisterà sempre una funzione $\varphi(x)$ che verifica l'equazione (A) e perciò il teorema stesso risulterà dimostrato.

5. La identità riscontrata nel corso della precedente dimostrazione fra i due problemi funzionali (A) e (C) conduce al

TEOREMA II. – *Quando sono verificate le condizioni poste nel teorema I, per risolvere la questione funzionale*

$$\text{(A)} \qquad f(y) = \int_0^y \varphi(x)\,\mathrm{H}(x, y)\,dx \qquad (a > y > 0)$$

basterà trovare la funzione $\varphi(x)$ *che soddisfa l'equazione*

$$\text{(C)} \qquad \sum_1^n {}_s \mathrm{K}_s z^{-\lambda_s+1} \int_0^z f'(y)\, y^{\lambda_s - n - 1}\, dy$$

$$= \int_0^z \left\{ \sum_0^n {}_i a_i + \frac{\mathrm{H}'(y, z)}{z^n} - \sum_1^n {}_s \mathrm{K}'_s z^{-\lambda_s+1} \int_y^z \mathrm{H}'(y, x)\, x^{\lambda_s - n - 2}\, dx \right\} \varphi(y)\, dy$$

la quale potrà ottenersi coi metodi esposti nella Nota I.

Infatti le proprietà trovate per il primo membro della (C) e per la funzione che moltiplica $\varphi(y)$ nel secondo membro di essa (cfr. le proprietà 1ª, 2ª, 3ª trovate nel § 3) lo provano, quando si tenga conto dei risultati che ho stabiliti nei §§ 3, 4 della mia Nota dell'Accademia dei Lincei, *Sulla inversione degli integrali definiti* (4).

6. Il teorema del paragrafo precedente mostra che la (A) si potrà risolvere determinando le radici dell'equazione algebrica (B), quindi ricorrendo ai procedimenti della suddetta Nota.

Ma possiamo trasformare la (C) in modo che non vi compariscano più esplicitamente le radici λ_s. Essa potrà scriversi infatti

$$(\mathrm{C}_1) \qquad \int_0^z f'(y)\, \frac{z}{y^{n+1}} \sum_1^n {}_s \mathrm{K}_s \left(\frac{y}{z}\right)^{\lambda_s} dy$$

$$= \int_0^z \left\{ \sum_0^n {}_i a_i + \frac{\mathrm{H}'(y, z)}{z^n} - \int_y^z \mathrm{H}'(y, x)\, \frac{z}{x^{n+2}} \sum_1^n {}_s \mathrm{K}'_s \left(\frac{x}{z}\right)^{\lambda_s} dx \right\} \varphi(y)\, dy.$$

Avremo ora se $1 \geq u > 0$

$$\sum_1^n {}_s \mathrm{K}_s u^{\lambda_s} = \sum_1^n {}_s \mathrm{K}_s (1 + u - 1)^{\lambda_s} = \sum_0^\infty {}_m \frac{(u-1)^m}{m!} \sum_1^n {}_s \mathrm{K}_s \lambda_s (\lambda_s - 1) \cdots (\lambda_s - m + 1)$$

$$\sum_1^n {}_s \mathrm{K}'_s u^{\lambda_s} = \sum_1^n \mathrm{K}'_s (1 + u - 1)^{\lambda_s} = \sum_0^\infty {}_m \frac{(u-1)^m}{m!} \sum_1^n {}_s \mathrm{K}' \lambda_s (\lambda_s - 1) \cdots (\lambda_s - m + 1).$$

(4) Seduta del 15 marzo 1896. [In questo vol.: XIX, pp. 255-262].

Tenendo conto che

$$\sum_{1}^{n}{}_s K_s \lambda_s (\lambda_s - 1) \cdots (\lambda_s - m + 1)\,, \sum_{1}^{n}{}_s K'_s \lambda_s (\lambda_s - 1) \cdots (\lambda_s - m + 1)$$

sono funzioni razionali simmetriche delle radici della (B), esse potranno esprimersi razionalmente mediante $a_0, a_1, \cdots, a_m$, e quindi

$$\sum_{1}^{n}{}_s K_s u^{\lambda_s} = \sum_{0}^{\infty}{}_m \frac{(u-1)^m}{m!} A_m (a_0, a_1, \cdots, a_n) = \Psi (a_0, a_1, \cdots, a_n \,|\, u)$$

$$\sum_{1}^{n}{}_s K'_s u^{\lambda_s} = \sum_{0}^{\infty}{}_m \frac{(u-1)^m}{m!} A'_m (a_0, a_1, \cdots, a_n) = \Psi' (a_0, a_1, \cdots, a_n \,|\, u)$$

in cui A_m e A'_m denotano funzioni razionali di $a_0, a_1 \cdots a_n$.

Mediante queste formule la (C_1) si trasformerà in modo che le λ_s risulteranno eliminate, ed avremo:

TEOREMA III. – *Quando sono soddisfatte le condizioni poste nel teorema I la equazione funzionale*

$$\text{(A)} \qquad f(y) = \int_0^y \varphi(x)\, H(x, y)\, dx \qquad (a > y > 0)$$

è equivalente all'altra

$$(C'_1) \qquad \int_0^z f'(y) \frac{z}{y^{n+1}} \Psi\left(a_0, a_1, \cdots, a_n \,\middle|\, \frac{y}{z}\right) dy$$

$$= \int_0^z \left\{ \sum_{1}^{n}{}_i a_i + \frac{H'(y, z)}{z^n} - \int_y^z H'(y, x) \frac{z}{x^{n+2}} \Psi'\left(a_0, a_1, \cdots, a_n \,\middle|\, \frac{x}{z}\right) dx \right\} \varphi(y)\, dy.$$

7. Esaminiamo ora il caso in cui alcune radici dell'equazione (B) abbiano la parte reale negativa. Sia λ quella o una di quelle per cui la detta parte reale è minima e poniamo $\lambda = -\mu$; quindi si consideri l'equazione funzionale

$$\text{(D)} \qquad 1 = \frac{h(y)}{y^n} \theta(y) + \int_0^y \theta(x) \frac{\partial G(x, y)}{\partial y} \left(\frac{x}{y}\right)^{\mu} dx \qquad (a > y > 0)$$

in cui $G(x, y)$ è data dalla espressione (8).

È facile riconoscere che, applicando il procedimento esposto nella mia Nota dell'Accademia dei Lincei, *Sulla inversione degli integrali definiti*, precedentemente citata, si può trovare la funzione finita e continua θ che soddisfa la precedente equazione. Perciò basta verificare che $h(y)/y^n$ è finita e non si annulla nell'intervallo $(0, a)$, e il limite superiore del modulo di

$$(9) \qquad \frac{\partial G(x, y)}{\partial y} \left(\frac{x}{y}\right)^{\mu}$$

è finito per

$$a > y > x > 0 .$$

Si osservi che se μ è un numero complesso, la (9) risulta una funzione complessa degli argomenti reali x , y; ma il procedimento a cui ci siamo riferiti è evidentemente estensibile senz'altro al caso in cui si tratti di funzioni complesse di variabili reali, purché le condizioni relative ai valori assoluti si trasportino ai moduli.

Ciò premesso si ponga

$$\text{(E)} \qquad \varphi(x) = \theta(x)\, x^{\mu} ,$$

avremo

$$y^{\mu} = \frac{h(y)}{y^n}\, \varphi(y) + \int_0^y \varphi(x) \frac{\partial G(x , y)}{\partial y}\, dx$$

e osservando che

$$G(y , y) = \frac{h(y)}{y^n} ,$$

sarà

$$y^{\mu} = \frac{\partial}{\partial y} \int_0^y \varphi(x)\, G(x , y)\, dx ;$$

onde integrando

$$\frac{1}{\mu + 1} y^{\mu+1} = \frac{1}{-\lambda + 1} y^{-\lambda+1} = \int_0^y \varphi(x)\, G(x , y)\, dx ,$$

da cui segue

$$z^n \sum_0^n {}_i\, a_i \frac{z^{-\lambda+1}}{-\lambda + 1} - \sum_0^n {}_i\, i a_i z^{n-i} \int_0^z \frac{y^{i-\lambda}}{-\lambda + 1}\, dy$$

$$= z^n \sum_0^n {}_i\, a_i \int_0^z \varphi(x) G(x , z)\, dx - \sum_0^n {}_i\, i a_i z^{n-i} \int_0^z y^{i-1}\, dy \int_0^y \varphi(x)\, G(x , y)\, dx .$$

Ora, eseguendo le integrazioni, il primo membro diviene

$$(10) \qquad \frac{1}{-\lambda + 1} \sum_0^n {}_i \left(a_i z^{n-\lambda+1} - \frac{i a_i}{i - \lambda + 1} z^{n-\lambda+1} \right) = z^{n-\lambda+1} \sum_0^n {}_i \frac{a_i}{-\lambda + i + 1} = 0$$

e, applicando al secondo membro il principio di Dirichlet, esso si trasforma in

$$\int_0^z \varphi(x) \left\{ z^n \sum_0^n {}_i\, a_i G(x , z) - \sum_0^n {}_i\, i a_i z^{n-i} \int_x^z G(x , y)\, y^{i-1}\, dy \right\} dx$$

quindi, ponendo

$$L(x , z) = z^n \sum_0^n {}_i\, a_i G(x , z) - \sum_0^n {}_i\, i a_i z^{n-i} \int_x^z G(x , y)\, y^{i-1}\, dy ,$$

otterremo l'equazione

$$\int_0^z \varphi(x)\, L(x, z)\, dx = 0. \tag{11}$$

Con facili calcoli si ha dalla (8)

$$G(x, y) = \sum_1^n {}_s K_s\, y^{-\lambda_s+1} \left\{ \int_x^y H_2(x, \xi)\, \xi^{\lambda_s-n-1}\, d\xi + H(x, x)\, x^{\lambda_s-n-1} \right\};$$

quindi $L(x, z)$ si potrà decomporre in due parti, e scrivere

$$L(x, z) = M + N$$

ove

$$M = H(x, x) \sum_1^n {}_s K_s\, x^{\lambda_s-n-1} \sum_0^n {}_i \left(a_i z^{n-\lambda_s+1} - i a_i z^{n-i} \int_x^z y^{i-\lambda_s} \right)$$

$$N = \sum_1^n {}_s K_s \sum_0^n {}_i \left(a_i z^{n-\lambda_s+1} \int_x^z H_2(x, \xi)\, \xi^{\lambda_s-n-1}\, d\xi \right.$$

$$\left. - i a_i z^{n-i} \int_x^z y^{-\lambda_s+i}\, dy \int_x^y H_2(x, \xi)\, \xi^{\lambda_s-n-1}\, d\xi \right).$$

Semplicizzando come nella formula (10) si trova, tenendo conto delle (5),

$$M = H(x, x) \sum_1^n {}_s K_s \sum_0^n {}_i \frac{i a_i z^{n-i} x^{-n+i}}{i - \lambda_s + 1} = H(x, x) \sum_0^n {}_i\, i a_i z^{n-i} x^{-n+i} \sum_1^n {}_s \frac{K_s}{i - \lambda_s + 1}$$

$$= H(x, x)\, n a_n \sum_1^n {}_s \frac{K_s}{n - \lambda_s + 1} = \sum_0^n {}_i\, a_i H(x, x)$$

e mediante il principio di DIRICHLET

$$N = \sum_1^n {}_s K_s \int_x^z H_2(x, \xi)\, \xi^{\lambda_s-n-1}\, d\xi \sum_0^n {}_i \left(a_i z^{n-\lambda_s+1} - i a_i z^{n-i} \int_\xi^z y^{-\lambda_s+i}\, dy \right)$$

$$= \sum_1^n {}_s K_s \int_x^z H_2(x, \xi) \sum_0^n {}_i \frac{i a_i z^{n-i} \xi^{-n-i}}{i - \lambda_s + 1}$$

$$= \int_x^z H_2(x, \xi) \sum_0^n {}_i\, i a_i z^{n-i} \xi^{-n+i} \sum_1^n {}_s \frac{K_s}{i - \lambda_s + 1}\, d\xi$$

$$= n a_n \sum_1^n {}_s \frac{K_s}{n - \lambda_s + 1} \int_x^z H_2(x, \xi)\, d\xi = \sum_0^n {}_i\, a_i \left(H(x, z) - H(x, x) \right)$$

onde

$$\mathrm{L}(x, z) = \mathrm{M} + \mathrm{N} = \sum_{0}^{n}{}_i\, a_i\, \mathrm{H}(x, z).$$

Perciò l'equazione (11) diverrà

$$\int_0^z \varphi(x)\, \mathrm{H}(x, z)\, dx = 0 \tag{12}$$

quando si ammetta che tutte le radici della equazione (B) di grado n siano finite, e per conseguenza sia $\sum_0^n a_i \gtreqless 0$.

8. Se μ fosse un numero complesso e $\varphi(x)$ ottenuto dalla (E) risultasse complesso ed eguale a $\varphi_1 + i\varphi_2$, allora separando la parte reale φ_1 dalla immaginaria si otterrebbero *due funzioni reali diverse da zero* φ_1 e φ_2 che ambedue verificherebbero la (12).

Si avrà dunque:

TEOREMA IV. – *Se l'equazione*

$$\frac{a_0}{\lambda - 1} + \frac{a_1}{\lambda - 2} + \cdots + \frac{a_n}{\lambda - n - 1} = 0 \tag{B}$$

di grado n ha le radici finite e diverse fra loro, e una o più di esse hanno la parte reale negativa, allora l'equazione funzionale

$$\int_0^y \varphi(x)\, \mathrm{H}(x, y)\, dx = 0$$

sarà soddisfatta da funzioni reali e diverse da zero.

Se le condizioni di questo teorema sono soddisfatte, si avrà dunque che l'equazione (A), allorché ammette una soluzione ne ammetterà infinite che si otterranno dalla prima aggiungendovi una soluzione della (12) moltiplicata per una costante arbitraria. Quindi

TEOREMA V. – *Il problema di dedurre* $\varphi(x)$ *dalla equazione funzionale*

$$f(x) = \int_0^y \varphi(x)\, \mathrm{H}(x, y)\, dx \tag{A}$$

non è determinato quando la equazione

$$\frac{a_0}{\lambda - 1} + \frac{a_1}{\lambda - 2} + \cdots + \frac{a_n}{\lambda - n - 1} = 0 \tag{B}$$

di grado n ha le radici finite diverse fra loro e una o più di esse hanno la parte reale negativa.

9. Se supponiamo $n = 1$, e chiamiamo

$$a_0 = \beta \quad , \quad a_1 = \alpha$$

allora l'equazione (B) diverrà

$$\frac{\beta}{\lambda - 1} + \frac{\alpha}{\lambda - 2} = 0,$$

d'onde

$$\lambda = \frac{\alpha + 2\beta}{\alpha + \beta}$$

quindi λ sarà finito e positivo se

$$\frac{\alpha}{\beta} > -1 \quad \text{oppure} \quad \frac{\alpha}{\beta} < -2$$

e sarà finito e negativo se

$$-1 > \frac{\alpha}{\beta} > -2;$$

quindi i teoremi della Nota precedente si potranno ottenere subito come casi particolari di quelli ora stabiliti.

XIX.

SULLA INVERSIONE DEGLI INTEGRALI DEFINITI

« Rend. Acc. Lincei », ser. 5ª, vol. V°, 1896₁, pp. 177–185.

1. Sia $S_0(x, y)$ una funzione finita e continua qualunque definita per i valori di x, y compresi fra α e β $(\alpha < \beta)$. Partendo da essa costruiamo successivamente le espressioni

$$S_i(x, y) = \int_y^x S_{i-j}(x, \xi)\, S_{j-1}(\xi, y)\, d\xi$$

dando ad i i valori $1, 2, 3 \cdots$ e scegliendo j compreso fra 1 e i. Si dimostra facilmente che l'integrale precedente non dipende dalla scelta del numero j. Inoltre chiamando M il limite superiore dei valori assoluti di $S_0(x, y)$ si ha

$$|S_i(x, y)| \leq \frac{M^{i+1}(|y - x|)^i}{i!}.$$

Se ne può concludere che la serie

$$F_0(x, y) = \sum_0^\infty {}_i S_i(x, y)$$

è uniformemente convergente e per conseguenza rappresenta una funzione finita e continua di x, y.

Noi possiamo dare una forma notevole al resto di questa serie. Chiamandolo infatti $R_n(x, y)$ si otterrà

$$R_n(x, y) = F_0(x, y) - \sum_0^n {}_i S_i(x, y) = \int_y^x S_n(x, \xi)\, F_0(\xi, y)\, d\xi = \int_y^x S_n(\xi, y)\, F_0(x, \xi)\, d\xi.$$

Ponendo $n = 0$ questa formula diviene:

$$F_0(x, y) - S_0(x, y) = \int_y^x S_0(x, \xi)\, F_0(\xi, y)\, d\xi = \int_y^x S_0(\xi, y)\, F_0(x, \xi)\, d\xi. \tag{1}$$

2. Applichiamo ora alla funzione $F_0(x, y)$ delle operazioni analoghe a quelle che si sono eseguite sopra $S_0(x, y)$; calcoliamo cioè successivamente

$$F_i(x, y) = \int_x^y F_{i-j}(x, \xi)\, F_{j-1}(\xi, y)\, d\xi$$

e formiamo la serie, che risulterà convergente,

$$\mathrm{T}_0(x\,,y) = \sum_0^\infty {}_i\, \mathrm{F}_i(x\,,y)\,.$$

Possiamo provare che *la somma di questa serie è la funzione* $\mathrm{S}_0(x\,,y)$ *da cui primitivamente siamo partiti*. Infatti per questa serie sussisterà una formula analoga alla (1), vale a dire

$$(2)\qquad \mathrm{T}_0(x\,,y) - \mathrm{F}_0(x\,,y) = \int_x^y \mathrm{F}_0(x\,,\xi)\,\mathrm{T}_0(\xi\,,y)\,d\xi = \int_x^y \mathrm{F}_0(\xi\,,y)\,\mathrm{T}_0(x\,,\xi)\,d\xi$$

onde sommando le (1) e (2) si otterrà

$$\mathrm{T}_0(x\,,y) - \mathrm{S}_0(x\,,y) = \int_x^y \mathrm{F}_0(\xi\,,y)\,\{\mathrm{T}_0(x\,,\xi) - \mathrm{S}_0(x\,,\xi)\}\,d\xi\,.$$

Poniamo

$$\sigma(x\,,y) = \mathrm{T}_0(x\,,y) - \mathrm{S}_0(x\,,y)\,,$$

avremo che la equazione precedente si scriverà

$$(3)\qquad \sigma(x\,,y) = \int_x^y \mathrm{F}_0(\xi\,,y)\,\sigma(x\,,\xi)\,d\xi$$

da cui segue

$$\sigma(x\,,y) = \int_x^y \mathrm{F}_0(\xi\,,y)\,d\xi \int_x^\xi \mathrm{F}_0(\xi_1\,,\xi)\,\sigma(x\,,\xi_1)\,d\xi_1$$

$$= \int_x^y \mathrm{F}_0(\xi\,,y)\,d\xi \int_x^\xi \mathrm{F}_0(\xi_1\,,\xi)\,d\xi_1 \int_x^{\xi_1} \mathrm{F}_0(\xi_2\,,\xi_1)\,\sigma(x\,,\xi_2)\,d\xi_2 = \cdots$$

Si può in tal modo procedere indefinitamente sostituendo sempre a $\sigma(x\,,\xi_i)$ il valore che se ne ricava dalla formula (3). Chiamando dunque M' il limite superiore dei valori assoluti di $\mathrm{F}_0(x\,,y)$ ed m quello dei valori assoluti di $\sigma(x\,,y)$, si avrà

$$|\,\sigma(x\,,y)\,| \leq \mathrm{M}'^n m \int_\alpha^\beta d\xi \int_\alpha^\xi d\xi_1 \cdots \int_\sigma^{\xi_{n-2}} d\xi_{n-1} = \frac{\mathrm{M}'^n m\,(\beta-\alpha)^n}{n!}\,.$$

Siccome n è un numero che può scegliersi tanto grande quanto si vuole, così $|\,\sigma(x\,,y)\,|$ dovrà essere inferiore ad ogni quantità assegnabile, e perciò sarà

$$\sigma(x\,,y) = \mathrm{T}_0(x\,,y) - \mathrm{S}_0(x\,,y) = 0$$

e in conseguenza

$$\mathrm{S}_0(x\,,y) = \mathrm{T}_0(x\,,y) = \sum_0^\infty {}_i\, \mathrm{F}_i(x\,,y)\,.$$

Possiamo enunciare dunque il teorema:
Si hanno le due formule reciproche

$$(4) \qquad S_0(x, y) = \sum_0^\infty {}_i F_i(x, y) \quad , \qquad (4') \qquad F_0(x, y) = \sum_0^\infty {}_i S_i(x, y)$$

in cui

$$F_i(x, y) = \int_x^y F_{i-j}(x, \xi) F_{j-1}(\xi, y) d\xi \ , \ S_i(x, y) = \int_y^x S_{i-j}(x, \xi) S_{j-1}(\xi, y) d\xi.$$

Prendendo arbitrariamente una delle due funzioni finite e continue $S_0(x, y)$, $F_0(x, y)$ *si può calcolare l'altra mediante operazioni di quadratura. Inoltre si avrà*

$$F_0(x, y) - S_0(x, y) = \int_y^x F_0(x, \xi) S_0(\xi, y) d\xi = \int_y^x F_0(\xi, y) S_0(x, \xi) d\xi.$$

3. La risoluzione del problema della inversione degl'integrali definiti si può raggiungere in virtù del precedente teorema in maniera molto semplice.

Denotiamo infatti con $\varphi(x)$ una funzione finita e continua, e poniamo

$$\int_\alpha^y \varphi(x) F_0(x, y) dx = \varphi(y) - f(y).$$

Moltiplichiamo ambo i membri di questa equazione per $S_0(y, z)\, dy$ e integriamo fra α e z; si otterrà

$$\int_\alpha^z [\varphi(y) - f(y)] S_0(y, z) dy = \int_\alpha^z S_0(y, z) dy \int_\alpha^y \varphi(x) F_0(x, y) dx$$

e pel principio di DIRICHLET, ed il precedente teorema,

$$\int_\alpha^z [\varphi(y) - f(y)] S_0(y, z) dy = \int_\alpha^z \varphi(x) dx \int_x^z S_0(y, z) F_0(x, y) dy$$

$$= \int_\alpha^z \varphi(x) [S_0(x, z) - F_0(x, z)] dx$$

quindi

$$\int_\alpha^z f(y) S_0(y, z) dy = \int_\alpha^z \varphi(x) F_0(x, z) dx = \varphi(z) - f(z).$$

Dunque *la formula*

$$(5) \qquad \varphi(z) = f(z) + \int_\alpha^z f(y) S_0(y, z) dy$$

si può invertire e si ha l'altra

$$(5') \qquad f(z) = \varphi(z) - \int_\alpha^z \varphi(x) F_0(x, z) dx.$$

Prendendo arbitrariamente una delle due funzioni finite e continue $S_0(y, z)$ o $F_0(x, z)$ si può calcolare l'altra mediante le formule (4) e (4') date precedentemente. Quindi, scelta ad arbitrio una delle due funzioni finite e continue $\varphi(z)$ o $f(z)$, si ottiene l'altra funzione mediante una delle due formule (5) e (5'), e si vede che non vi è che la funzione $f(z)$ data dalla (5') che verifica la relazione funzionale (5) e reciprocamente non vi è che la $\varphi(z)$ data dalla (5) che soddisfa la (5').

Del resto è facile riconoscere che l'operazione di passaggio dalla prima alla seconda formula è la stessa che quella di inversione della seconda nella prima. Si denoti infatti la $-F_0(x, y)$ con Φ, cioè scriviamo (1)

$$\Phi[S_0(x, y)] = -F_0(x, y);$$

allora tenendo conto delle operazioni di quadratura con cui partendo dalla F_0 si calcola la S_0, si avrà

$$\Phi[-F_0(x, y)] = S_0(x, y).$$

Possiamo dunque riassumere i risultati trovati nel seguente teorema: *Posto*

$$\Phi[S(x, y)] = -\sum_0^\infty {}_i S_i(x, y)$$

in cui

$$S_0(x, y) = S(x, y) \quad , \quad S_i(x, y) = \int_y^x S_{i-j}(x, \xi) S_{j-1}(\xi, y) d\xi$$

si ha:

1° *se* $S(x, y)$ *è una funzione finita e continua per i valori delle variabili compresi fra* α *e* β, *anche* $\Phi[S(x, y)]$ *è una funzione finita e continua entro gli stessi limiti;*

2° *la funzione* Φ *gode della proprietà*

$$\Phi[\Phi[S(x, y)]] = S(x, y);$$

3° *se* $\varphi(x)$ *è una funzione finita e continua e*

$$\text{(A)} \qquad \varphi(y) = f(y) + \int_\alpha^y f(x) S(x, y) dx \qquad (\beta > y > \alpha)$$

risulta

$$\text{(A')} \qquad f(y) = \varphi(y) + \int_\alpha^y \varphi(x) \Phi[S(x, y)] dx.$$

Nelle formule (A) e (A') si ha $x < y$, quindi sarà sufficiente determinare $\Phi[S(x, y)]$ per valori di $x < y$, e perciò conoscere la funzione $S(x, y)$ solo

(1) È superfluo l'osservare che non deve confondersi la $\Phi[S_0(x, y)]$ con una funzione di funzione. Vedi: *Sopra le funzioni che dipendono da altre funzioni*, nel vol. III di questi «Rendiconti» [in queste «Opere»: vol. primo, XVII, pp. 294-314].

corrispondentemente ai valori di x, y compresi fra α e β tali che $x < y$, onde basterà assicurarsi che $S(x, y)$ sia continua ed i suoi valori assoluti abbiano un limite superiore finito, per tutti i valori di x, y che soddisfano le condizioni

$$\beta > y > x > \alpha .$$

4. I varî problemi che si presentano di inversione di integrali definiti con limiti variabili, possono in generale risolversi facilmente ricorrendo alle formule ora stabilite. Esaminiamo infatti il problema di invertire l'integrale

$$\theta(y) - \theta(\alpha) = \int_\alpha^y \psi(x)\, H(x, y)\, dx, \tag{6}$$

cioè determinare $\psi(x)$ conoscendo $\theta(y)$ e $H(x, y)$. Derivando si avrà

$$\theta'(y) = \psi(y)\, H(y, y) + \int_\alpha^y \psi(x) \frac{\partial H(x, y)}{\partial y}\, dx$$

e dividendo per $H(y, y)$

$$\frac{\theta'(y)}{H(y, y)} = \psi(y) + \int_\alpha^y \psi(x) \left\{ \frac{1}{H(y, y)} \frac{\partial H(x, y)}{\partial y} \right\} dx .$$

Quindi se $\theta'(y)/H(y, y)$ è finita e continua e così pure

$$\frac{1}{H(y, y)} \frac{\partial H(x, y)}{\partial y},$$

la (A') ci fornirà subito la soluzione del problema mediante operazioni di quadratura.

La questione può risolversi in un altro modo, sempre impiegando le formule precedenti. Infatti, mediante una integrazione per parti, la (6) può scriversi

$$\theta(y) - \theta(\alpha) = H(y, y)\, \Psi(y) - \int_\alpha^y \Psi(x) \frac{\partial H(x, y)}{\partial x}\, dx$$

in cui

$$\Psi(y) = \int_\alpha^y \psi(x)\, dx$$

quindi

$$\frac{\theta(y) - \theta(\alpha)}{H(y, y)} = \Psi(y) - \int_\alpha^y \Psi(x) \left\{ \frac{1}{H(y, y)} \frac{\partial H(x, y)}{\partial x} \right\} dx .$$

Il procedimento precedentemente indicato ci darà la $\Psi(y)$ e perciò con una derivazione otterremo la $\psi(y)$.

Il caso in cui $H(x, y)$ per $x = y$ diviene infinito, in modo che si possa porre $H(x, y) = G(x, y)/(x - y)^\lambda$ con $G(x, y)$ finita e $\lambda < 1$, sfugge alla analisi precedente, ma vi si riconduce facilmente moltiplicando ambo i membri per $dy/(z-y)^{1-\lambda}$ quindi integrando fra α a z.

Se H (y, y) si annulla, il problema della inversione può in taluni casi risolversi univocamente, in altri risultare indeterminato.

Non mi dilungo nello svolgimento dei varî problemi di inversione, giacché le formule che risultano applicando il procedimento indicato furono direttamente discusse e verificate in alcune Note da me recentemente lette all'Accademia di Torino (2); osserverò solo che il caso in cui si abbia

$$\theta(y) - \theta(\alpha) = \int_{\alpha}^{\chi(y)} \psi(x)\, \mathrm{H}(x, y)\, dx$$

può in generale ricondursi al precedente, quando si ponga $\chi(y) = z$; donde se si può ricavare inversamente $y = \rho(z)$, si otterrà

$$\theta(\rho(z)) - \theta(\alpha) = \int_{\alpha}^{z} \psi(x)\, \mathrm{H}(x, \rho(z))\, dx.$$

5. Mostriamo ora come la questione trattata sia suscettibile di una generalizzazione, la quale rende possibile di risolvere in maniera semplice una classe molto estesa di problemi funzionali, che, per quanto io so, non vennero fin qui considerati.

Supponiamo che gl'indici r, s possano prendere i valori $1, 2, \cdots, n$ e consideriamo le n^2 funzioni finite e continue $\mathrm{S}_{r,s}^{(0)}(x, y)$ per i valori delle variabili compresi fra α e β.

Formiamo

$$(7) \qquad \mathrm{S}_{r,s}^{(i)}(x, y) = \int_{y}^{x} \sum_{1}^{n}{}_{h}\, \mathrm{S}_{h,s}^{(i-j)}(x, \xi)\, \mathrm{S}_{r,h}^{(j-1)}(\xi, y)\, d\xi$$

dando ad i successivamente i valori $1, 2, 3, \cdots$ e prendendo $i \geq j \geq 1$. Si ha che $\mathrm{S}_{r,s}^{(i)}$ non dipende da j e

$$\mathrm{S}_{r,s}^{(i)}(x, y) \leq \frac{n^i \mathrm{M}^{i+1}}{i!} (|y-x|)^i$$

chiamando M il massimo dei limiti superiori dei valori assoluti delle $\mathrm{S}_{r,s}^{(0)}$; quindi le serie

$$(8) \qquad \mathrm{F}_{r,s}^{(0)}(x, y) = \sum_{0}^{\infty}{}_{i}\, \mathrm{S}_{r,s}^{(i)}(x, y)$$

sono uniformemente convergenti e rappresentano funzioni finite e continue, e calcolando i resti di queste serie si giunge alle formule

(2) Sedute del 12 e del 26 gennaio 1896 [in questo vol.: pp. 216–232]. Una terza Nota sullo stesso soggetto sarà letta nella seduta dell'8 marzo [in questo vol.: pp. 233–241].

$$F^{(0)}_{r,s}(x\,,y)-S^{(0)}_{r,s}(x\,,y)=\int_y^x\sum_1^n{}_h\,S^{0}_{h,s}(x\,,\xi)\,F^{(0)}_{r,h}(\xi\,,y)\,d\xi$$

$$=\int_y^x\sum_1^n{}_h\,S^{(0)}_{r,h}(\xi\,,y)\,F^{(0)}_{h,s}(x\,,\xi)\,d\xi$$

dalle quali si deduce che, *prese*

$$F^{(i)}_{r,s}(x\,,y)=\int_x^y\sum_1^n{}_h\,F^{(i-j)}_{h,s}(x\,,\xi)\,F^{(j-1)}_{r,h}(\xi\,,y)\,d\xi$$

si ha

$$S^{(0)}_{r,s}=\sum_0^\infty{}_i\,F^{(i)}_{r,s}(x\,,y)\,.$$

Ciò premesso, siano $\varphi_r(x)\,,(r=1\,,2\,,\cdots,n)\,n$ funzioni finite e continue e poniamo

$$\int_\alpha^y\sum_1^n{}_r\,\varphi_r(x)\,F^{(0)}_{s,r}(x\,,y)\,dx=\varphi_s(y)-f_s(y)\,,$$

si avrà con semplici calcoli

$$\int_\alpha^z\sum_1^n{}_s\,(\varphi_s(y)-f_s(y))\,S^{(0)}_{h,s}(y\,,z)\,dy=\int_\alpha^z\sum_1^n{}_r\,\varphi_r(x)\left(S^{(0)}_{h,r}(x\,,z)-F^{(0)}_{h,r}(x\,,z)\right)dx$$

e quindi

$$\int_\alpha^z\sum_1^n{}_s\,f_s(y)\,S^{(0)}_{h,s}(y\,,z)\,dy=\int_\alpha^z\sum_1^n{}_r\,\varphi_r(x)\,F^{(0)}_{h,r}(x\,,z)\,dx=\varphi_h(z)-f_h(z)$$

il che prova che *le equazioni funzionali*

$$\varphi_h(z)=f_h(z)+\int_\alpha^z\sum_1^n{}_s\,f_s(y)\,S^{(0)}_{h,s}(y\,,z)\,dy\qquad(h=1\,,2\,,\cdots,n)\tag{9}$$

si invertono mediante le formule

$$f_h(z)=\varphi_h(z)-\int_\alpha^z\sum_1^n{}_r\,\varphi_r(x)\,F^{(0)}_{h,r}(x\,,z)\,dx\qquad(h=1\,,2\,,\cdots,n)\tag{9'}$$

in cui le $F^{(0)}_{h,s}$ *si calcolano dalle* $S^{(0)}_{h,s}$ *per mezzo delle formule* (7) e (8).

Si supponga ora di dover risolvere il problema di determinare le funzioni finite e continue $f_1(x)\,,f_2(x)\,,\cdots,f_n(x)$ che soddisfano le equazioni funzionali

$$(10)\quad \begin{cases} \theta_1(y)-\theta_1(\alpha)=\int_\alpha^y [f_1(x)\,H_{11}(x,y)+f_2(x)\,H_{12}(x,y)+\cdots+f_n(x)\,H_{1n}(x,y)]\,dx \\ \theta_2(y)-\theta_2(\alpha)=\int_\alpha^y [f_1(x)\,H_{21}(x,y)+f_2(x)\,H_{22}(x,y)+\cdots+f_n(x)\,H_{2n}(x,y)]\,dx \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \theta_n(y)-\theta_n(\alpha)=\int_\alpha^y [f_1(x)\,H_{n1}(x,y)+f_2(x)+H_{n2}(x,y)+\cdots+f_n(x)\,H_{nn}(x,y)]\,dx \end{cases}$$

quando si suppongano note le funzioni finite continue e derivabili $\theta_i(y)$ e $H_{r,s}(x,y)$. Derivando le equazioni precedenti rapporto ad y, abbiamo

$$(11)\qquad \theta'_i(y)=\sum_1^n{}_s f_s(y)\,H_{i,s}(y,y)+\int_\alpha^z \sum_1^n{}_s f_s(x)\,K_{i,s}(x,y)\,dx$$

supponendo

$$K_{i,s}(x,y)=\frac{\partial H_{i,s}(x,y)}{\partial y}\,.$$

Denotiamo con $D(x,y)$ il determinante

$$\begin{vmatrix} H_{11}\,, H_{12}\,,\cdots, H_{1n} \\ H_{21}\,, H_{22}\,,\cdots, H_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ H_{n1}\,, H_{n2}\,,\cdots, H_{nn} \end{vmatrix}$$

e si ammetta $D(y,y)$ diverso da zero, e chiamiamo $h_{i,s}\ (y,y)$ gli elementi reciproci delle $H_{i,s}\ (y,y)$ divisi per $D(y,y)$. Dalle (11) segue

$$\sum_1^n{}_i h_{i,r}(y,y)\,\theta'_i(y)=f_r(y)+\int_\alpha^y \sum_1^n{}_s f_s(x)\sum_1^n{}_i h_{i,r}(y,y)\,K_{i,s}(x,y)\,dx$$

onde, posto

$$\sum_1^n{}_i h_{i,r}(y,y)\,\theta'_i(y)=\varphi_r(y)$$

$$\sum_1^n{}_i h_{i,r}(y,y)\,K_{i,s}(x,y)=S^{(0)}_{r,s}(x,y)$$

le equazioni precedenti diverranno

$$\varphi_r(y)=f_r(y)+\int_\alpha^y \sum_1^n{}_s f_s(x)\,S^{(0)}_{r,s}(x,y)\,dx$$

e perciò si otterranno le $f_s(x)$ applicando le (9').

XX.

SULLA INVERSIONE DEGLI INTEGRALI MULTIPLI

«Atti Acc. Lincei», ser. 5^a, vol. V_1, 1896_1, pp. 289-300.

1. Il metodo da me dato [1] per risolvere i problemi di inversione degli integrali definiti semplici è suscettibile di estendersi agli integrali multipli. Una tale generalizzazione forma il soggetto della presente Nota, nella quale il problema dell'inversione viene sciolto qualunque siano il numero delle funzioni incognite e quello delle variabili indipendenti da cui esse dipendono. La risoluzione si ottiene in virtù di un procedimento con cui partendo da una funzione qualsiasi finita e continua di più variabili e mediante operazioni di quadratura, si giunge a costruire una nuova funzione pure finita e continua, la quale alla sua volta riproduce la funzione primitiva, allorché si ripetono su essa quelle stesse operazioni che si sono eseguite sulla prima.

Mi permetto di comunicare all'Accademia il detto procedimento ed il teorema fondamentale da cui esso discende, giacché non è a mia cognizione che siano state risolute fin qui le questioni funzionali che in tal modo vengono trattate.

2. Sia

$$S_0(x_1, x_2, \cdots, x_n \mid y_1, y_2, \cdots, y_n)$$

una funzione finita e continua di $2n$ variabili e si ammetta che ciascuna coppia di variabili x_i, y_i si mantenga compresa entro i limiti α_i, β_i, essendo $\beta_i > \alpha_i$.

Si calcolino, partendo da S_0, le funzioni

$$\text{(1)} \qquad S_i(x_1, \cdots, x_n \mid y_1, \cdots, y_n)$$

$$= \int_{x_1}^{y_1} d\xi_1 \int_{x_2}^{y_2} d\xi_2 \cdots \int_{x_n}^{y_n} d\xi_n \cdot S_{i-j}(x_1, \cdots, x_n \mid \xi_1, \cdots, \xi_n)\, S_{j-1}(\xi_1, \cdots, \xi_n \mid y_1, \cdots, y_n)$$

in cui $i \geq j \geq 1$. Cominciamo dal dimostrare che S_i è indipendente da j. A tal fine osserviamo che questa proposizione risulta ovviamente per $i = 1$ Supponiamola verificata per tutti i valori dell'indice inferiori ad i, e mostriamo che è vera per i.

(1) Seduta del 1° marzo della R. Accademia dei Lincei [in questo vol.: pp. 255-262]. Vedi anche gli «Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino», sedute del 12 gennaio, 26 gennaio e 8 marzo 1896 [in questo vol.: pp. 216-241]; una Nota successiva sarà presentata nella seduta del 26 aprile [in questo vol.: pp. 242-254].

Infatti avremo

$$\int_{x_1}^{y_1} d\xi_1 \int_{x_2}^{y_2} d\xi_2 \cdots \int_{x_n}^{y_n} d\xi_n \, S_{i-j}(x_1, \cdots, x_n \mid \xi_1, \cdots, \xi_n) \, S_{j-1}(\xi_1, \cdots, \xi_n \mid y_1, \cdots, y_n)$$

$$= \int_{x_1}^{y_1} d\xi_1 \cdots \int_{x_n}^{y_n} d\xi_n \, S_{i-j}(x_1, \cdots, x_n \mid \xi_1, \cdots, \xi_n) \int_{\xi_1}^{y_1} d\eta_1 \cdots$$

$$\cdots \int_{\xi_n}^{y_n} d\eta_n \, S_{j-h-1}(\xi_1, \cdots, \xi_n \mid \eta_1, \cdots, \eta_n) \, S_{h-1}(\eta_1, \cdots, \eta_n \mid y_1, \cdots, y_n)$$

ed applicando il principio di DIRICHLET il secondo membro diverrà

$$\int_{x_1}^{y_1} d\eta_1 \cdots \int_{x_n}^{y_n} d\eta_n \, S_{h-1}(\eta_1, \cdots, \eta_n \mid y_1, \cdots, y_n) \int_{x_1}^{\eta_1} d\xi_1 \cdots$$

$$\cdots \int_{x_n}^{\eta_n} d\xi_n \, S_{i-j}(x_1, \cdots, x_n \mid \xi_1, \cdots, \xi_n) \, S_{j-h-1}(\xi_1, \cdots, \xi_n \mid \eta_1, \cdots, \eta_n).$$

$$= \int_{x_1}^{y_1} d\eta_1 \cdots \int_{x_n}^{y_n} d\eta_n \, S_{h-1}(\eta_1, \cdots, \eta_n \mid y_1, \cdots, y_n) \, S_{i-h}(x_1, \cdots, x_n \mid \eta_1, \cdots, \eta_n)$$

il che dimostra il teorema.

Denotiamo ora con M il limite superiore dei valori assoluti di S_0; ne risulta come conseguenza che

$$(2) \qquad |S_i| \leq M^{i+1} \frac{(|y_1 - x_1|)^i}{i!} \frac{(|y_2 - x_2|)^i}{i!} \cdots \frac{(|y_n - x_n|)^i}{i!}.$$

Infatti se ammettiamo soddisfatta la precedente relazione per il valore i, avremo, ponendo nella (1) $i + 1$ in luogo di i, e prendendo $j = 1$,

$$|S_{i+1}| \leq M^{i+2} \left| \int_{x_1}^{y_1} \frac{(y_1 - \xi_1)^i}{i!} d\xi_1 \int_{x_2}^{y_2} \frac{(y_2 - \xi_2)^i}{i!} d\xi_2 \cdots \int_{x_n}^{y_n} \frac{(y_n - \xi_n)^i}{i!} d\xi_n \right|$$

$$= M^{i+2} \frac{(|y_1 - x_1|)^{i+1}}{(i+1)!} \frac{(|y_2 - x_2|)^{i+1}}{(i+1)!} \cdots \frac{(|y_n - x_n|)^{i+1}}{(i+1)!}$$

il che prova la proposizione.

Dalla (2) segue

$$|S_i| \leq M^{i+1} \frac{(\beta_1 - \alpha_1)^i}{i!} \frac{(\beta_2 - \alpha_2)^i}{i!} \cdots \frac{(\beta_n - \alpha_n)^i}{i!}$$

e perciò la serie

$$(3) \qquad F_0(x_1, \cdots, x_n \mid y_1, \cdots, y_n) = -\sum_0^\infty S_i(x_1, \cdots, x_n \mid y_1, \cdots, y_n)$$

sarà uniformemente convergente e rappresenterà una funzione finita e continua delle variabili $x_1, x_2, \cdots, x_n; y_1, y_2, \cdots, y_n$.

3. Operiamo ora sulla F_0 nello stesso modo tenuto colla S_0; costruiamo cioè le funzioni

$$F_i(x_1, \cdots, x_n \mid y_1, \cdots, y_n)$$

$$= \int_{x_1}^{y_1} d\xi_1 \cdots \int_{x_n}^{y_n} d\xi_n\, F_{i-j}(x_1, \cdots, x_n \mid \xi_1, \cdots, \xi_n)\, F_{j-1}(\xi_1, \cdots, \xi_n \mid y_1, \cdots, y_n)$$

e formiamo la serie uniformemente convergente

$$-\sum_0^\infty F_i(x_1, \cdots, x_n \mid y_1, \cdots, y_n).$$

Dico che la sua somma sarà S_0.

Per provarlo si può seguire lo stesso metodo tenuto nella Nota citata [2] per dimostrare il teorema medesimo nel caso in cui S_0 è una funzione di due sole variabili; ma si può anche far uso di un altro procedimento come ora mostreremo.

Si ponga il coefficiente binomiale

$$\frac{m(m-1)\cdots(m-i+1)}{i!} = m_i \quad , \quad (i > 0) \quad ; \quad m_0 = 1$$

e cominciamo dal dimostrare che

$$\text{(4)} \qquad F_i = (-1)^{i+1} \sum_i^\infty {}_m\, m_i\, S_m = (-1)^{i+1} \sum_0^\infty {}_m\, m_i\, S_m .$$

Infatti questa formula è vera per $i = 0$.

Supponiamola verificata per valori dell'indice inferiori ad i e mostriamo che è vera per l'indice i. A tal fine poniamo un apice ad una qualsiasi funzione F o S, quando alle y_h si sostituiscono le ξ_h, e poniamo due apici quando le ξ_h si sostituiscono invece alle x_h. Avremo allora, applicando le note regole pel prodotto delle serie,

$$F'_{i-j}\, F''_{j-1} = (-1)^{i+1} \sum_0^\infty {}_m \sum_0^m {}_h\, (m-h)_{i-j}\, h_{j-1}\, S'_{m-h}\, S''_h ,$$

e per la convergenza uniforme della serie

$$F_i = \int_{x_1}^{y_1} d\xi_1 \cdots \int_{x_n}^{y_n} d\xi_n\, F'_{i-j}\, F''_{j-1} = (-1)^{i+1} \sum_0^\infty {}_m \sum_0^m {}_h\, (m-h)_{i-j}\, h_{j-1} \int_{x_1}^{y_1} d\xi_1 \cdots \int_{x_n}^{y_n} d\xi_n\, S'_{m-h}\, S''_h$$

$$= (-1)^{i+1} \sum_0^\infty {}_m\, S_{m+1} \sum_0^m {}_h\, (m-h)_{i-j}\, h_{j-1} = (-1)^{i+1} \sum_0^\infty {}_m\, (m+1)_i\, S_{m+1} = (-1)^{i+1} \sum_i^\infty {}_m\, m_i S_m .$$

(2) *Sulla inversione degli integrali definiti.* «Rendiconti R. Accad. dei Lincei» fascicolo del 15 marzo 1896, § 2 [in questo vol.: XIX, pp. 255-262].

La (4) resta dunque provata. Ne segue

$$-\sum_{0}^{\infty}{}_i F_i = S_0 + \sum_{1}^{\infty} S_m (m_0 - m_1 + m_2 - \cdots \pm m_m).$$

Ma per una nota proprietà dei coefficienti binominali

$$m_0 - m_1 + m_2 - \cdots = m_m = 0,$$

onde

$$-\sum_{0}^{\infty}{}_i F_i = S_0$$

come volevasi dimostrare.

4. Riprendiamo la (3); da essa segue

$$F'_0 S''_0 = -\sum_{0}^{\infty}{}_i S'_i S''_0,$$

$$F''_0 S'_0 = -\sum_{0}^{\infty}{}_i S''_i S'_0,$$

quindi per la convergenza uniforme delle serie

$$\int_{x_1}^{y_1} d\xi_1 \cdots \int_{x_n}^{y_n} d\xi_n F'_0 S''_0 = -\sum_{0}^{\infty} \int_{x_1}^{y_1} d\xi_1 \cdots \int_{x_n}^{y_n} d\xi_n S'_i S''_0 = -\sum_{1}^{\infty} S_i = F_0 + S_0,$$

$$\int_{x_1}^{y_1} d\xi_1 \cdots \int_{x_n}^{y_n} d\xi_n F''_0 S'_0 = -\sum_{0}^{\infty} \int_{x_1}^{y_1} d\xi_1 \cdots \int_{x_n}^{y_n} d\xi_n S''_i S'_0 = -\sum_{1}^{\infty} S_i = F_0 + S_0,$$

e per conseguenza

$$F_0 + S_0 = \int_{x_1}^{y_1} d\xi_1 \cdots \int_{x_n}^{y_n} d\xi_n F'_0 S''_0 = \int_{x_1}^{y_1} d\xi_1 \cdots \int_{x_n}^{y_n} d\xi_n F''_0 S'_0.$$

5. Riassumendo i diversi risultati ottenuti potremo enunciare il teorema seguente:

Posto

$$\text{(A)} \qquad F_0(x_1, \cdots, x_n \mid y_1, \cdots, y_n) = -\sum_{0}^{\infty} S_i(x_1, \cdots, x_n \mid y_1, \cdots, y_n)$$

in cui

$$S_i(x_1, \cdots, x_n \mid y_1, \cdots, y_n)$$

$$= \int_{y_1}^{y_1} d\xi_1 \cdots \int_{x_n}^{y_n} d\xi_n S_{i-j}(x_1, \cdots, x_n \mid \xi_1, \cdots, \xi_n) S_{j-1}(\xi_1, \cdots, \xi_n \mid y_1, \cdots, y_n);$$

se la funzione $S_0(x_1, \cdots, x_n \mid y_1, \cdots, y_n)$ *da cui si parte è finita e continua per valori di* x_i, y_i *compresi fra* α_i e β_i, *anche* $F_0(x_1, \cdots, x_n \mid y_1, \cdots, y_n)$ *sarà una funzione finita e continua per i valori delle variabili compresi entro gli stessi limiti: e avremo la formula reciproca della* (A), *cioè*

$$(\mathrm{A}') \qquad S_0(x_1, \cdots, x_n \mid y_1, \cdots, y_n) = -\sum_0^\infty F_i(x_1, \cdots, x_n \mid y_1, \cdots, y_n)$$

in cui

$$F_i(x_1, \cdots, x_n \mid y_1, \cdots, y_n)$$

$$= \int_{x_1}^{y_1} d\xi_1 \cdots \int_{x_n}^{y_n} d\xi_n\, F_{i-j}(x_1, \cdots, x_n \mid \xi_1, \cdots, \xi_n)\, F_{j-1}(\xi_1, \cdots, \xi_n \mid y_1, \cdots, y_n).$$

Inoltre sussisterà la relazione

$$(\mathrm{B}) \qquad F_0(x_1, \cdots, x_n \mid y_1, \cdots, y_n) + S_0(x_1, \cdots, x_n \mid y_1, \cdots, y_n)$$

$$= \int_{x_1}^{y_1} d\xi_1 \cdots \int_{x_n}^{y_n} d\xi_n\, F_0(x_1, \cdots, x_n \mid \xi_1, \cdots, \xi_n)\, S_0(\xi_1, \cdots, \xi_n \mid y_1, \cdots, y_n)$$

$$= \int_{x_1}^{y_1} d\xi_1 \cdots \int_{x_n}^{y_n} d\xi_n\, F_0(\xi_1, \cdots, \xi_n \mid y_1, \cdots, y_n)\, S_0(x_1, \cdots, x_n \mid \xi_1, \cdots, \xi_n).$$

6. Consideriamo una funzione finita e continua qualunque delle $2n$ variabili $x_1, \cdots, x_n; y_1, \cdots, y_n$ il cui simbolo sia una lettera maiuscola, per esempio H. Posto $S_0 = -H$, si calcoli la corrispondente F_0. Denoteremo nel seguito, per uniformità di notazione, la $-F_0$ colla lettera minuscola cioè porremo

$$h = -F_0.$$

Se H oltre essere funzione delle $2n$ variabili $x_1, \cdots, x_n$; $y_1, \cdots, y_n$ è funzione continua di altri m parametri $z_1, z_2, \cdots, z_m$, dalla precedente costruzione risulterà che anche h sarà funzione continua degli stessi parametri. Noi scriveremo

$$H = H(x_1, \cdots, x_n \mid y_1, \cdots, y_n; z_1, \cdots, z_m),$$

$$h = h(x_1, \cdots, x_n \mid y_1, \cdots, y_n; z_1, \cdots, z_m);$$

o anche più semplicemente

$$H = H(x_1, \cdots, x_n \mid y_1, \cdots, y_n),$$

$$h = h(x_1, \cdots, x_n \mid y_1, \cdots, y_n)$$

se vorremo porre in evidenza le sole variabili di cui si tien conto nel calcolo pel passaggio dall'una all'altra funzione.

La relazione (B), mediante le H, h, si scriverà

$$(5)\qquad -\mathrm{H}(x_1,\cdots,x_n\,|\,y_1,\cdots,y_n)-h(x_1,\cdots,x_n\,|\,y_1,\cdots,y_n)$$

$$=\int_{x_1}^{y_1}d\xi_1\cdots\int_{x_n}^{y_n}d\xi_n\,\mathrm{H}(x_1,\cdots,x_n\,|\,\xi_1,\cdots,\xi_n)\,h(\xi_1,\cdots,\xi_n\,|\,y_1,\cdots,y_n)$$

$$=\int_{x_1}^{y_1}d\xi_1\cdots\int_{x_n}^{y_n}d\xi_n\,\mathrm{H}(\xi_1,\cdots,\xi_n\,|\,y_1,\cdots,y_n)\,h(x_1,\cdots,x_n\,|\,\xi_1,\cdots,\xi_n).$$

7. Abbiasi ora la relazione funzionale

$$f(y_1,\cdots,y_n)=\varphi(y_1,\cdots,y_n)$$

$$+\int_{\alpha_1}^{y_1}dx_1\cdots\int_{\alpha_n}^{y_n}dx_n\,\varphi(x_1,\cdots,x_n)\,\mathrm{H}(x_1,\cdots,x_n\,|\,y_1,\cdots,y_n)$$

in cui φ denota una funzione finita e continua.

Moltiplicando per $h(y_1,\cdots,y_n\,|\,z_1,\cdots,z_n)\,dy_1,\cdots,dy_n$ e integrando rispettivamente fra i limiti $\alpha_1, z_1; \alpha_2, z_2;\ldots,\alpha_n, z_n$, in cui $\beta_i > z_i > \alpha_i$, si otterrà

$$\int_{\alpha_1}^{z_1}dy_1\cdots\int_{\alpha_n}^{z_n}dy_n f(y_1,\cdots,y_n)\,h(y_1,\cdots,y_n\,|\,z_1,\cdots,z_n)$$

$$=\int_{\alpha_1}^{z_1}dy_1\cdots\int_{\alpha_n}^{z_n}dy_n\,\varphi(y_1,\cdots,y_n)\,h(y_1,\cdots,y_n\,|\,z_1,\cdots,z_n)$$

$$+\int_{\alpha_1}^{z_1}dx_1\cdots\int_{\alpha_n}^{z_n}dx_n\,\varphi(x_1,\cdots,x_n)\int_{x_1}^{z_1}dy_1\cdots\int_{x_n}^{z_n}dy_n\,\mathrm{H}(x_1,\cdots,x_n|y_1,\cdots,y_n)\,h(y_1,\cdots,y_n|z_1,\cdots,z_n)$$

e a cagione della (5) il secondo membro diverrà

$$=-\int_{\alpha_1}^{z_1}dx_1\cdots\int_{\alpha_n}^{z_n}dx_n\,\varphi(x_1,\cdots,x_n)\,\mathrm{H}(x_1,\cdots,x_n\,|\,z_1,\cdots,z_n)$$

$$=\varphi(z_1,\cdots,z_n)-f(z_1,\cdots,z_n).$$

Avremo quindi

$$\varphi(z_1,\cdots,z_n)=f(z_1,\cdots,z_n)$$

$$+\int_{\alpha_1}^{z_1}dy_1\cdots\int_{\alpha_n}^{z_n}dy_n f(y_1,\cdots,y_n)\,h(y_1,\cdots,y_n\,|\,z_1,\cdots,z_n).$$

Potremo dunque enunciare il teorema:

La relazione funzionale

$$f(y_1, \cdots, y_n) = \varphi(y_1, \cdots, y_n) \tag{C}$$

$$+ \int_{\alpha_1}^{y_1} dx_1 \cdots \int_{\alpha_n}^{y_n} dx_n \, \varphi(x_1, \cdots, x_n) \, \mathrm{H}(x_1, \cdots, x_n \mid y_1, \cdots, y_n)$$

si inverte mediante la formola

$$\varphi(z_1, \cdots, z_n) = f(z_1, \cdots, z_n) \tag{C'}$$

$$+ \int_{\alpha_1}^{z_1} dy_1 \cdots \int_{\alpha_n}^{z_n} dy_n \, f(y_1, \cdots, y_n) \, h(y_1, \cdots, y_n \mid z_1, \cdots, z_n)$$

in cui h si calcola dalla H *mediante le formole precedenti.*

8. Non sempre i problemi d'inversione si riducono immediatamente alla forma precedente in modo da risolverli applicando subito il procedimento indicato. Per gl'integrali semplici (3) la detta riduzione è immediata, invece la questione si presenta in modo molto complicato nel caso di integrali multipli. Per chiarire questo fatto si consideri, per esempio, il problema di determinare $\varphi(x_1, x_2)$ dalla relazione funzionale

$$\theta(y_1, y_2) = \int_{\alpha_1}^{y_1} dx_1 \int_{\alpha_2}^{y_2} dx_2 \, \varphi(x_1, x_2) \, \mathrm{H}(x_1, x_2 \mid y_1, y_2). \tag{6}$$

Derivando la precedente espressione rapporto ad y_1 e ad y_2 otterremo

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial y_1 \partial y_2} = \varphi(y_1, y_2) \, \mathrm{H}(y_1, y_2 \mid y_1, y_2) + \int_{\alpha_1}^{y_1} \varphi(x_1, y_2) \frac{\partial \mathrm{H}(x_1, y_2 \mid y_1, y_2)}{\partial y_1} dx_1$$

$$+ \int_{\alpha_2}^{y_2} \varphi(y_1, x_2) \frac{\partial \mathrm{H}(y_1, x_2 \mid y_1, y_2)}{\partial y_2} dx_2 + \int_{\alpha_1}^{y_1} dx_1 \int_{\alpha_2}^{y_2} dx_2 \, \varphi(x_1, x_2) \frac{\partial^2 \mathrm{H}(x_1, x_2 \mid y_1, y_2)}{\partial y_1 \partial y_2}.$$

Supposto $\mathrm{H}(y_1, y_2 \mid y_1, y_2) \lesseqgtr 0$, dividendo per questa funzione la relazione precedente, essa potrà scriversi sotto la forma

$$f(y_1, y_2) = \varphi(y_1, y_2) + \int_{\alpha_1}^{y_1} \varphi(x_1, y_2) \, \mathrm{T}(x_1 \mid y_1 ; y_2) \, dx_1 \tag{7}$$

$$+ \int_{\alpha_2}^{y_2} \varphi(y_1, x_2) \, \mathrm{V}(x_2 \mid y_2 ; y_1) \, dx_2 + \int_{\alpha_1}^{y_1} dx_1 \int_{\alpha_2}^{y_2} dx_2 \, \varphi(x_1, x_2) \, \mathrm{S}(x_1, x_2) \mid y_1, y_2)$$

che è evidentemente ben diversa dalla (C).

(3) Cfr. Nota citata § 4.

9. In generale, allorché $H(y_1, \cdots, y_n \mid y_1, \cdots, y_n) \gtrless 0$ la equazione funzionale

$$(8) \qquad \theta(y_1, \cdots, y_n) = \int_{\alpha_1}^{y_1} dx_1 \cdots \int_{\alpha_n}^{y_n} dx_n \, \varphi(x_1, \cdots, x_n) \, H(x_1, \cdots, x_n \mid y_1, \cdots, y_n)$$

condurrà, derivandola rapporto ad $y_1, y_2, \cdots, y_n$, e quindi dividendo per $H(y_1, \cdots, y_n \mid y_1, \cdots, y_n)$, ad una relazione in cui il primo membro è noto ed il secondo contiene la somma della funzione incognita e di integrali i cui ordini vanno da 1 ad n e sotto ai quali comparisce la funzione incognita stessa. Essa avrà quindi la forma

$$(9) \qquad f(y_1, \cdots, y_n) = \varphi(y_1, \cdots, y_n) + \sum_1^n{}_h \Sigma_{i_1 \ldots i_h} \int_{\alpha_{i_1}}^{y_{i_1}} dx_{i_1} \cdots$$

$$\cdots \int_{\alpha_{i_h}}^{y_{i_h}} dx_{i_h} \varphi(x_{i_1}, \cdots, x_{i_h}, y_{i_{h+1}}, \cdots, y_{i_n}) \, T_{i_1 \ldots i_h}(x_{i_1}, \cdots, x_{i_h} \mid y_{i_1}, \cdots, y_{i_h}; y_{i_{h+1}}, \cdots, y_{i_n})$$

nella quale $i_1, \cdots, i_n$ denota una permutazione dei numeri $1, 2, \cdots, n$; con $\varphi(x_{i_1}, \cdots, x_{i_h}, y_{i_{h+1}}, \cdots, y_{i_n})$ si intende la funzione $\varphi(x_1, \cdots, x_n)$ in cui si sono sostituite $y_{i_{h+1}}, \cdots, y_n$ al posto di $x_{i_{h+1}}, \cdots, x_{i_n}$; e $\Sigma_{i_1 \ldots i_h}$ indica una somma ottenuta facendo tutte le combinazioni h ad h degl'indici $1, 2, \cdots, n$. La f e le $T_{i_1 \ldots i_h}$ che compariscono nella formola precedente sono funzioni note.

Per ricondurre la equazione funzionale (9) alla forma (C) bisognerà trasformarla in modo da far comparire nel secondo membro due soli termini, cioè il primo termine $\varphi(y_1, \cdots y_n)$ ed un solo integrale multiplo.

Supponiamo per un momento che si sia riesciti a trasformare la relazione funzionale (9) in modo da eliminare nel secondo membro tutti gli integrali semplici, doppii ecc., fino a quelli d'ordine $r - 1$, e quindi che la Σ_h anziché da 1 ad n sia estesa da r ad n. Essa allora sarà ridotta al tipo

$$(10) \qquad f(y_1, \cdots, y_n) - \varphi(y_1, \cdots, y_n) = \sum_r^n{}_h \Sigma_{i_1 \ldots i_h} \int_{\alpha_{i_1}}^{y_{i_1}} dx_{i_1} \cdots$$

$$\cdots \int_{\alpha_{i_h}}^{y_{i_h}} dx_{i_h} \varphi(x_{i_1}, \cdots, x_{i_h}, y_{i_{h+1}}, \cdots, y_{i_n}) \, T_{i_1 \ldots i_h}(x_{i_1}, \cdots, x_{i_h} \mid y_{i_1}, \cdots, y_{i_h}; y_{i_{h+1}}, \cdots, y_{i_n}).$$

Mostriamo come, giunti a questo punto, sia possibile trasformare l'equazione funzionale in modo da eliminare gl'integrali d'ordine r.

Sia $s_1, \cdots, s_r$ una delle combinazioni d'ordine r degl'indici $1, 2, \cdots, n$, a cui nel secondo membro della equazione precedente corrisponda un integrale d'ordine r.

Si sostituisca in ambo i membri della equazione (10) $z_{s_{r+1}}, \cdots, z_{s_n}$ in luogo di $y_{s_{r+1}}, \cdots, y_{s_n}$; quindi si moltiplichino ambo i membri per

$$(11) \qquad t_{s_1 \dots s_r}(y_{s_1}, \cdots, y_{s_r} \mid z_{s_1}, \cdots, z_{s_r}; z_{s_{r+1}}, \cdots, z_{s_n})\, dy_{s_1} \cdots dy_{s_r}$$

e si integri rispettivamente rapporto ad ogni y_{s_q} da a_{s_q} a z_{s_q}. Denotiamo con (D) la equazione che così si ottiene; il suo primo membro sarà

$$\int_{a_{s_1}}^{z_{s_1}} dy_{s_1} \cdots \int_{a_{s_r}}^{z_{s_r}} dy_{s_r} [f(y_{s_1}, \cdots, y_{s_r}, z_{s_{r+1}}, \cdots, z_{s_n})$$

$$- \varphi(y_{s_1}, \cdots, y_{s_r}, z_{s_{r+1}}, \cdots, z_{s_n})]\, t_{s_1 \dots s_r}(y_{s_1}, \cdots, y_{s_r} \mid z_{s_1}, \cdots, z_{s_r}; z_{s_{r+1}}, \cdots, z_{s_n}).$$

Per trovare l'espressione del secondo membro, consideriamo il termine generico del secondo membro della (10) corrispondente alla combinazione $i_1, \cdots, i_h$ di indici e supponiamo che g di essi, $i_1, \cdots, i_g$, siano rispettivamente eguali a $s_1, \cdots, s_g$, mentre i rimanenti $i_{g+1}, \cdots, i_h$ siano diversi dalle $s_{g+1}, \cdots, s_r$. Allora, dopo la moltiplicazione pel fattore (11) e le successive integrazioni, il termine stesso assumerà la forma

$$(12) \qquad \int_{a_{s_1}}^{z_{s_1}} dy_{s_1} \cdots \int_{a_{s_g}}^{z_{s_g}} dy_{s_g} \int_{a_{s_{g+1}}}^{z_{s_{g+1}}} dy_{s_{g+1}} \cdots \int_{a_{s_r}}^{z_{s_r}} dy_{s_r} \int_{a_{s_1}}^{y_{s_1}} dx_{s_1} \cdots \int_{a_{s_g}}^{y_{s_g}} dx_{s_g} \int_{a_{i_{g+1}}}^{z_{i_{g+1}}} dx_{i_{g+1}} \cdots$$

$$\cdots \int_{a_{i_h}}^{z_{i_h}} dx_{i_h}\, \varphi(x_{s_1}, \cdots, x_{s_g}, x_{i_{g+1}}, \cdots, x_{i_h}, y_{s_r}, z_{s_{r+u}}, \cdots, z_{s_{r+v}})$$

$$\cdot T_{i_1 \dots i_h}(x_{s_1}, \cdots, x_{s_g}, x_{i_{g+1}}, \cdots, x_{i_h} \mid y_{s_1}, \cdots, y_{s_g}, z_{i_{g+1}}, \cdots, z_{i_h}; y_{s_{g+1}},$$

$$\cdots, y_{s_r}, z_{s_{r+u}}, \cdots, z_{s_{r+v}}) \cdot t_{s_1 \dots s_r}(y_{s_1}, \cdots, y_{s_r} \mid z_{s_1}, \cdots, z_{s_r}; z_{s_{r+1}}, \cdots, z_{s_n}).$$

Se noi applichiamo il principio di DIRICHLET ad ogni integrale eseguito rapporto a $y_{s_1}, \cdots, y_{s_g}$ ed al corrispondente integrale rapporto ad $x_{s_1}, \cdots, x_{s_g}$, la espressione precedente potrà scriversi:

$$(12') \qquad \int_{a_{s_1}}^{z_{s_1}} dx_{s_1} \cdots \int_{a_{s_g}}^{z_{s_g}} dx_{s_g} \int_{a_{s_{g+1}}}^{z_{s_{g+1}}} dy_{s_{g+1}} \cdots \int_{a_{s_r}}^{z_{s_r}} dy_{s_r} \int_{a_{i_{g+1}}}^{z_{i_{g+1}}} dx_{i_{g+1}} \cdots$$

$$\cdots \int_{a_{i_h}}^{z_{i_h}} dx_{i_h}\, \varphi(x_{s_1}, \cdots, x_{s_g}, x_{i_{g+1}}, \cdots, x_{i_h}, y_{s_{g+1}}, \cdots, y_{s_r}, z_{s_{r+u}}, \cdots, z_{s_{r+v}})\, L,$$

avendo posto

$$(13) \quad L = \int_{x_{s_1}}^{z_{s_1}} dy_{s_1} \cdots \int_{x_{s_g}}^{z_s} dy_{s_g}\, T_{i_1 \dots i_h}(x_{s_1}, \cdots, x_{s_g}, x_{i_{g+1}}, \cdots, x_{i_h} \mid y_{s_1}, \cdots, y_{s_g},$$

$${}_{+1}, \cdots, z_{i_h}; y_{s_{g+1}}, \cdots, y_{s_r}, z_{s_{r+u}}, \cdots, z_{s_{r+v}}) \cdot t_{s_1 \dots s_r}(y_{s_1}, \cdots, y_{s_r} \mid z_{s_1}, \cdots, z_{s_r}; z_{s_{r+1}}, \cdots, z_{s_n}).$$

Scriviamo nella (12') $x_{s_{g+1}}, \cdots, x_{s_r}$, invece di $y_{s_{g+1}}, \cdots, y_{s_r}$, e chiamiamo L' il risultato di questa sostituzione eseguita su L; la (12') acquisterà la espressione

$$\int_{\alpha_{s_1}}^{z_{s_1}} dx_{s_1} \cdots \int_{\alpha_{s_r}}^{z_{s_r}} dx_{s_r} \int_{\alpha_{i_{g+1}}}^{z_{i_{g+1}}} dx_{i_{g+1}} \cdots$$

$$\cdots \int_{\alpha_{i_h}}^{z_{i_h}} dx_{i_h}\, \varphi(x_{s_1}, \cdots, x_{s_g}, x_{i_{g+1}}, \cdots, x_{i_h}, x_{s_{g+1}}, \cdots, x_{s_r}, z_{s_{r+u}}, \cdots, z_{s_{r+v}})\, \mathrm{L}'$$

nella quale la funzione incognita φ è moltiplicata per una funzione nota L' e comparisce sotto ad un integrale multiplo d'ordine $r + h - g$ e quindi d'ordine inferiore o eguale ad n.

Dai precedenti risultati segue che il secondo membro dell'equazione (D) assumerà la forma

$$\int_{\alpha_{s_1}}^{z_{s_1}} dx_{s_1} \cdots \int_{\alpha_{s_r}}^{z_{s_r}} dx_{s_r}\, \varphi(x_{s_1}, \cdots, x_{s_r}, z_{s_{r+1}}, \cdots, z_{s_n}) \int_{x_{s_1}}^{z_{s_1}} dy_{s_1} \cdots$$

$$\cdots \int_{x_{s_r}}^{z_{s_r}} dy_{s_r}\, \mathrm{T}_{s_1 \ldots s_r}(x_{s_1}, \cdots, x_{s_r} | y_{s_1}, \cdots, y_{s_r}; z_{s_{r+1}}, \cdots, z_{s_n}) \cdot$$

$$\cdot\, t_{s_1 \ldots s_r}(y_{s_1}, \cdots, y_{s_r} | z_{s_1}, \cdots, z_{s_r}; z_{s_{r+1}}, \cdots, z_{s_n}) + \sum_{r+1}^{n}{}_h \sum{}_{i_1 \ldots i_h} \int_{\alpha_{i_1}}^{z_{i_1}} dx_{i_1} \cdots$$

$$\cdots \int_{\alpha_{i_h}}^{z_{i_h}} dx_{i_h}\, \varphi(x_{i_1}, \cdots, x_{i_h}, z_{i_{h+1}}, \cdots, z_{i_n})\, \mathrm{T}^{(1)}_{i_1 \ldots i_h}(x_{i_1}, \cdots, x_{i_h} | z_{i_1}, \cdots, z_{i_h}; z_{i_{h+1}}, \cdots, z_{i_n})$$

in cui si è scritto separatamente dapprima il solo termine nel quale φ figura sotto ad un integrale d'ordine r, mentre gli altri che vengono successivamente contengono la funzione incognita sotto ad integrali multipli i cui ordini vanno da $r + 1$ ad n. Le $\mathrm{T}^{(1)}_{i_1 \ldots i_h}$ saranno funzioni note che si dedurranno facilmente dalle precedenti L.

Tenendo ora conto della relazione (vedi form. (5))

$$\int_{x_{s_1}}^{z_{s_1}} dy_{s_1} \cdots \int_{x_{s_r}}^{z_{s_r}} dy_{s_r}\, \mathrm{T}_{s_1 \ldots s_r}(x_{s_1}, \cdots, x_{s_r} | y_{s_1}, \cdots, y_{s_r}; z_{s_{r+1}}, \cdots, z_{s_n}) \cdot$$

$$\cdot\, t_{s_1 \ldots s_r}(y_{s_1}, \cdots, y_{s_r} | z_{s_1}, \cdots, z_{s_r}; z_{s_{r+1}}, \cdots, z_{s_n})$$

$$= - \mathrm{T}_{s_1 \ldots s_r}(x_{s_1}, \cdots, x_{s_r} | z_{s_1}, \cdots, z_{s_r}; z_{s_{r+1}}, \cdots, z_{s_n})$$

$$- \; t_{s_1 \ldots s_r}(x_{s_1}, \cdots, x_{s_r} | z_{s_1}, \cdots, z_{s_r}; z_{s_{r+1}}, \cdots, z_{s_n})$$

la equazione (D) si scriverà

$$(14)\qquad \int_{\alpha_{s_1}}^{z_{s_1}} dx_{i_1} \cdots \int_{\alpha_{s_r}}^{z_{s_r}} dx_{s_r}\, \varphi(x_{s_1}, \cdots, x_{s_r}, z_{s_{r+1}}, \cdots, z_{s_n}) \cdot$$

$$\cdot\, T_{s_1 \ldots s_r}(x_{s_1}, \cdots, x_{s_r} \,|\, z_{s_1}, \cdots, z_{s_r}; z_{s_{r+1}}, \cdots, z_{s_n}) = -\, F_{s_1 \ldots s_r}(z_1, \cdots, z_n)$$

$$+ \sum_{r+1}^{n}{}_h \sum{}_{i_1 \ldots i_h} \int_{\alpha_{i_1}}^{z_{i_1}} dx_{i_1} \cdots \int_{\alpha_{i_h}}^{z_{i_h}} dx_{i_h}\, \varphi(x_{i_1}, \cdots, x_{i_h}, z_{i_{h+1}}, \cdots, z_{i_n}) \cdot$$

$$\cdot\, T^{(1)}_{i_1 \ldots i_h}(x_{i_1}, \cdots, x_{i_h} \,|\, z_{i_1}, \cdots, z_{i_h}; z_{i_{h+1}}, \cdots, z_{i_n})$$

in cui $F_{s_1 \ldots s}(z_1, \cdots, z_n)$ è una funzione nota e precisamente

$$F_{s_1 \ldots s_r}(z_1, \cdots, z_n) = \int_{\alpha_{s_1}}^{z_{s_1}} dy_{s_1} \cdots$$

$$\cdots \int_{\alpha_{s_r}}^{z_{s_r}} dy_{s_r} f(y_{s_1}, \cdots, y_{s_r}, z_{s_{r+1}}, \cdots, z_{s_n})\, t_{s_1 \ldots s_r}(y_{s_1}, \cdots, y_{s_r} \,|\, z_{s_1}, \cdots, z_{s_r}; z_{s_{r+1}}, \cdots, z_{s_n}).$$

Formiamo le equazioni analoghe alla (14) che si ottengono prendendo tutte le combinazioni $s_1, \cdots, s_r$ degli n indici r ad r. Sommandole, il primo membro risulterà tale che il suo valore ricavato dalla (10) assumerà la forma

$$f(z_1, \cdots, z_n) - \varphi(z_1, \cdots, z_n) - \sum_{r+1}^{n}{}_h \int_{\alpha_{i_1}}^{z_{i_1}} dx_{i_1} \cdots$$

$$\cdots \int_{\alpha_{i_h}}^{z_{i_h}} dx_{i_h}\, \varphi(x_{i_1}, \cdots, x_{i_h}, z_{i_{h+1}}, \cdots, z_{i_n})\, T_{i_1 \ldots i_h}(x_{i_1}, \cdots, x_{i_h} \,|\, z_{i_1}, \cdots, z_{i_h}; z_{i_{h+1}}, \cdots, z_{i_n})$$

e perciò, denotando con $T^{(2)}_{i_1 \ldots i_h}$ delle quantità note, otterremo l'equazione

$$f(z_1, \cdots, z_n) + \Sigma_{i_1 \ldots i_r} F_{i_1 \ldots i_r}(z_1, \cdots, z_n) = \varphi(z_1, \cdots, z_n) - \sum_{r+1}^{n}{}_h \sum{}_{i_1 \ldots i_h} \int_{\alpha_{i_1}}^{z_{i_1}} dx_{i_1} \cdots$$

$$\cdots \int_{\alpha_{i_h}}^{z_{i_h}} dx_{i_h}\, \varphi(x_{i_1}, \cdots, x_{i_h}, z_{i_{h+1}}, \cdots, z_{i_n})\, T'^{(2)}_{i_1 \ldots i_h}(x_{i_1}, \cdots, x_{i_h} \,|\, z_{i_1}, \cdots, z_{i_h}; z_{i_{h+1}}, \cdots, z_{i_n}).$$

L'equazione funzionale è stata dunque trasformata in modo da eliminare gl'integrali d'ordine r. Così procedendo noi potremo perciò dalla (9) eliminare successivamente gl'integrali di 1°, 2°, 3°,$\cdots$ ordine finché essa non si riduca alla forma (C).

Ogni qual volta una equazione della forma (8) sarà tale che θ e H saranno finite continue e derivabili, e $H(y_1, y_2, \cdots y_n \mid y_1, y_2, \cdots, y_n)$ sarà diversa da zero, noi potremo, col metodo indicato, ricavare la φ, supponendo naturalmente che sia $\theta = 0$ per $y_i = \alpha_i$.

10. Come esempio consideriamo il caso della equazione (6) che abbiamo ricondotto al tipo (7).

Una prima trasformazione, ottenuta eliminando gl'integrali del primo ordine, ridurrà questa equazione alla forma

$$f(z_1, z_2) + \int_{\alpha_1}^{z_1} t(x_1 \mid z_1 ; z_2) f(x_1, z_2)\, dx_1 + \int_{\alpha_2}^{z_2} v(x_2 \mid z_2 ; z_1) f(z_1, x_2)\, dx_2 \tag{15}$$

$$= \varphi(z_1, z_2) + \int_{\alpha_1}^{z_1} dx_1 \int_{\alpha_2}^{z_2} dx_2\, M(x_1, x_2 \mid z_1, z_2)\, \varphi(x_1, x_2)$$

in cui

$$M(x_1, x_2 \mid z_1, z_2) = S(x_1, x_2 \mid z_1, z_2) + t(x_1 \mid z_1 ; z_2)\, V(x_2 \mid z_2, x_1)$$

$$+ v(x_2 \mid z_2 ; z_1)\, T(x_1 \mid z_1 ; x_2) + \int_{x_1}^{z_1} t(\xi_1 \mid z_1 ; z_2)\, S(x_1, x_2 \mid \xi_1, z_2)\, d\xi_1$$

$$+ \int_{x_2}^{z_2} v(\xi_2 \mid z_2 ; z_1)\, S(x_1, x_2 \mid z_1, \xi_2)\, d\xi_2 .$$

Chiamando $g(z_1, z_2)$ il primo membro della (15), dalla (C′) si ricaverà finalmente

$$\varphi(z_1, z_2) = g(z_1, z_2) + \int_{\alpha_1}^{z_1} dx_1 \int_{\alpha_2}^{z_2} dx_2\, m(x_1, x_2 \mid z_1, z_2)\, g(x_1, x_2) .$$

11. Accenniamo ora brevemente al caso in cui si abbiano ν equazioni del tipo

$$\theta_s(y_1, \cdots, y_n) \tag{16}$$

$$= \int_{\alpha_1}^{y_1} dx_1 \cdots \int_{\alpha_n}^{y_n} dx_n \sum_{1}^{\nu}{}_i\, \varphi_i(x_1, \cdots, x_n)\, H_{is}(x_1, \cdots, x_n \mid y_1, \cdots, y_n), \qquad (s = 1, 2, \cdots, \nu)$$

colle ν funzioni incognite $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_\nu$. Per risolverle cominciamo dal derivarle rispetto ad $y_1, y_2, \cdots, y_n$. Se il determinante

$$\begin{vmatrix} H_{11}, \cdots, H_{1\nu} \\ \cdots\cdots\cdots \\ H_{\nu 1}, \cdots, H_{\nu\nu} \end{vmatrix},$$

in cui si sono fatte le $x_i = y_i$, è diverso da zero, potremo facilmente porre (4) la (16) sotto la forma

$$f_s(y_1, \cdots, y_n) = \varphi_s(y_1, \cdots, y_n) + K_s, \qquad (s = 1, 2, \cdots, \nu) \tag{17}$$

in cui f_s è una funzione nota e K_s è una somma d'integrali i cui ordini vanno da 1 ad n e che contengono linearmente le funzioni incognite. Supponendo note $\varphi_2 \ldots \varphi_\nu$, dalla prima delle (17) potremo ricavare φ_1 mediante il procedimento esposto superiormente. Sostituendone la espressione nelle successive $\nu - 1$ equazioni, avremo un sistema di $\nu - 1$ equazioni che conservano il tipo (17) dalle quali φ_1 è eliminata. Così procedendo per successive eliminazioni si ricondurrà la questione a risolvere una sola equazione funzionale del tipo esaminato con una sola funzione incognita.

(4) Cfr. Nota citata § 5.

XXI.

OSSERVAZIONI SULLA NOTA DEL PROF. LAURICELLA RELATIVA ALLA INTEGRAZIONE DELLA EQUAZIONE $\Delta^2 \Delta^2 = 0$ E SOPRA UNA NOTA DI ANALOGO ARGOMENTO DELL'ING. ALMANSI

«Acc. Sc. di Torino», vol. XXXI, 1896, pp. 1018–1021.

Nella precedente seduta ho presentato una Nota dell'ing. ALMANSI, nella quale è trattato lo stesso problema che il prof. LAURICELLA ora risolve. Questa soluzione è stata ottenuta dal LAURICELLA indipendentemente dall'altra, che a lui era ignota, ed egli vi giunse applicando il procedimento da lui esposto nella prima parte della sua Memoria: *Sulle vibrazioni delle placche elastiche incastrate.* La formula definitiva che egli trova è più simmetrica di quella corrispondente a cui pervenne l'ALMANSI e non contiene, come questa, le derivate della funzione G data al contorno. Però si può trasformare quest'ultima formola riducendola a quella del LAURICELLA. A tal fine, valendosi di una doppia integrazione per parti, si può, ridurre l'espressione:

$$\int_0^{2\pi} \frac{G - G_\alpha - G'_\alpha \operatorname{sen}(\omega - \alpha)}{1 - \cos(\omega - \alpha)}\, d\omega$$

all'altra

$$-2\int_\alpha^{2\pi+\alpha} \frac{\partial^2 G}{\partial \omega^2} \log \operatorname{sen} \frac{1}{2}(\omega - \alpha)\, d\omega,$$

quindi invertire la doppia integrazione che comparisce nella formula definitiva in modo da sostituire a

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\alpha}{R^2 + r^2 - 2Rr\cos\alpha} \int_0^{2\pi} \frac{G - G_\alpha - G'_\alpha \operatorname{sen}(\omega - \alpha)}{1 - \cos(\omega - \alpha)}\, d\omega$$

la espressione

$$-2\int_0^{2\pi} \frac{\partial^2 G}{\partial \omega^2}\, d\omega \int_{\omega - 2\pi}^{\omega} \frac{\log \operatorname{sen} \frac{1}{2}(\omega - \alpha)\, d\alpha}{R^2 + r^2 - 2Rr\cos\alpha}$$

e trasformarla finalmente con una nuova doppia integrazione per parti.

Ma si può evitare questo calcolo, e le relative derivazioni applicate alla funzione G, partendo direttamente dalla formula (4) dell'ing. ALMANSI.

Essa infatti può scriversi:

$$(\psi_1)_{r=R} = -\frac{H}{2R} - \frac{1}{2R}\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial r}\right)_{r=R}$$

o anche

$$\left(\psi_1 + \frac{r}{2R^2}\frac{\partial\varphi_1}{\partial r}\right)_{r=R} = -\frac{H}{2R}.$$

Posto

$$(a) \qquad \psi_1 + \frac{r}{2R^2}\frac{\partial\varphi_1}{\partial r} = \theta_1,$$

questa funzione, per un noto teorema, soddisferà la equazione $\Delta^2 = 0$, e poiché

$$(\theta_1)_{r=R} = -\frac{H}{2R},$$

avremo

$$\theta_1 = -\frac{1}{4\pi R}\int_0^{2\pi}\frac{(R^2-r^2)H}{R^2+r^2-2Rr\cos\omega}d\omega,$$

onde, a cagione della (a) e della (5) della Nota dell'ing. ALMANSI,

$$\psi_1 = -\frac{1}{4\pi R}\int_0^{2\pi}\frac{(R^2-r^2)H}{R^2+r^2-2Rr\cos\omega}d\omega$$

$$-\frac{r}{R^2}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left\{\frac{-r}{R^2+r^2-2Rr\cos\omega} - \frac{(R^2-r^2)(r-R\cos\omega)}{(R^2+r^2-2Rr\cos\omega)^2}\right\}Gd\omega$$

e per conseguenza

$$\Pi_2 = -(R^2-r^2)\psi_1 + \varphi_1 = \frac{1}{4\pi R}\int_0^{2\pi}\frac{(R^2-r^2)^2 H}{R^2+r^2-2Rr\cos\omega}d\omega$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left\{\frac{R^2-r^2}{R^2+r^2-2Rr\cos\omega} - \frac{r^2(R^2-r^2)}{R^2(R^2+r^2-2Rr\cos\omega)}\right.$$

$$\left. - \frac{(R^2-r^2)^2 r(r-R\cos\omega)}{R^2(R^2+r^2-2Rr\cos\omega)^2}\right\}Gd\omega$$

$$= \frac{1}{4\pi R}\int_0^{2\pi}\frac{(R^2-r^2)^2}{R^2+r^2-2Rr\cos\omega}Hd\omega + \frac{1}{2\pi R}\int_0^{2\pi}\frac{(R^2-r^2)^2(R-r\cos\omega)}{(R^2+r^2-2Rr\cos\omega)^2}Gd\omega,$$

che è la elegante formola stabilita dal prof. LAURICELLA.

Essa può quindi ottenersi direttamente anche senza ricorrere alla *seconda* funzione di GREEN. Il ricavarla dallo sviluppo dato da O. VENSKE, giovandosi delle note formule della serie di FOURIER, avrebbe condotto a calcoli complicati [1].

(1) Vedi «Nachrichten von der K. Ges. der Wiss. zu Göttingen aus dem Jahre 1891», S. 27.

In modo analogo, valendosi del metodo dato dall'ing. ALMANSI nel § 4 della sua Nota, si può risolvere il problema simile nel caso dello spazio limitato da una sfera σ di raggio R.

Preso un sistema di coordinate polari coll'origine nel centro della sfera in modo che sia

$$x = r \operatorname{sen} \omega \cos \rho \quad , \quad y = r \operatorname{sen} \omega \operatorname{sen} \rho \quad , \quad z = r \cos \omega$$

e posto

$$\psi_1 + \frac{r}{2R^2} \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} = \theta_1$$

avremo

$$(\varphi_1)_{r=R} = G \quad , \quad (\theta_1)_{r=R} = -\frac{1}{2R} H ,$$

quindi nel punto A di coordinate r, ω_0, ρ_0, i valori di φ_1 e θ_1 saranno

$$\varphi_1 = \frac{1}{4\pi R} \int_\sigma \frac{(R^2 - r^2)\, G d\sigma}{(R^2 + r^2 - 2Rr\cos\gamma)^{3/2}}$$

$$\theta_1 = -\frac{1}{8\pi R^2} \int_\sigma \frac{(R^2 - r^2)\, H d\sigma}{(R^2 + r^2 - 2Rr\cos\gamma)^{3/2}}$$

essendo

$$\cos\gamma = \cos\omega \cos\omega_0 + \operatorname{sen}\omega \operatorname{sen}\omega_0 \cos(\rho - \rho_0) ,$$

da cui segue

$$\Pi_2 = \frac{1}{8\pi R^2} \int_\sigma \frac{(R^2 - r^2)^2}{(R^2 + r^2 - 2Rr\cos\gamma)^{3/2}} H d\sigma$$

$$+ \frac{1}{8\pi R^3} \int_\sigma \frac{(R^2 - r^2)^2 (2R^2 - r^2 - Rr\cos\gamma)}{(R^2 + r^2 - 2Rr\cos\gamma)^{5/2}} G d\sigma ,$$

che può prestarsi ad una verifica diretta, come ha fatto il prof. LAURICELLA nella sua Nota.

XXII.

SOPRA ALCUNE QUESTIONI DI INVERSIONE DI INTEGRALI DEFINITI

«Annali di Matematica Pura ed Applicata», ser. 2ª, vol. XXV, 1897, pp. 139–178.

In una serie di Note [1] che ho presentato quest'anno alle Accademie di Torino e dei Lincei, ho esposto un metodo con cui può risolversi il problema della inversione degli integrali definiti.

Mi permetto ora di portare un contributo alle dette ricerche con questa Memoria la quale consta di tre parti. Nella prima dò un brevissimo cenno di studi fatti in passato sulla questione ed esamino i principii sui quali è fondato il mio metodo. Nella seconda applico il metodo stesso al caso della inversione quando ambedue i limiti sono variabili. Nella terza infine considero alcune questioni particolari, mostrando i risultati che si ottengono allorché si eseguiscono quelle quadrature mediante le quali il detto procedimento risolve i problemi di inversione.

ART. I.

1. Il seguire le vicende del problema della inversione degli integrali definiti potrebbe dar luogo ad una pagina istruttiva ed interessante di storia dell'analisi, giacché una tale ricerca, intimamente legata alla integrazione delle equazioni differenziali, agli sviluppi in serie e ad una classe estesa di questioni fisico-matematiche, si è imposta di frequente all'attenzione dei geometri. Senza accingerci, per la sua difficoltà, a tale impresa, accenneremo solo ad alcuni dei principali lavori a nostra conoscenza sull'argomento, chiedendo fin da principio venia delle involontarie omissioni.

2. Il maraviglioso risultato stabilito da ABEL nel 1823 [(*)] colle sue due formule reciproche:

$$\psi(a) = \int_0^a \frac{ds}{(a-x)^n} \quad , \quad s = \frac{\operatorname{sen} n\pi}{\pi} x^n \int_0^1 \frac{\psi(xt)\,dt}{(1-t)^{1-n}} \quad , \qquad (n < 1),$$

è così noto che ci basta solo di ricordarlo.

(1) *Sulla inversione degli integrali definiti.* Note I, II, III, IV «Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino», 12 gennaio, 26 gennaio, 8 marzo, 26 aprile 1896 [in questo vol.: XVIII, pp. 216–254]. *Sulla inversione degli integrali definiti.* «Rend. della R. Accademia dei Lincei», 1º marzo 1896 [ibidem: XIX, pp. 255–262]. *Sulla inversione degli integrali multipli*, 26 aprile 1896 [ibidem: XX, pp. 263–278].

(*) *Solution de quelques problèmes etc.* «Oeuvres», nouv. ed., t. I, pp. 11–27. [N. d. R.].

Osserviamo soltanto che l'A. conclude il § 1 della detta Memoria colle seguenti parole:

« Je remarquerai enfin que de la même manière qu'en partant de l'équation:

$$\psi(a) = \int_{x=0}^{x=a} \frac{ds}{(a-x)^n}, \tag{1}$$

j'ai trouvé s, de même en partant de l'équation:

$$\psi(a) = \int \varphi(xa) f(x)\, dx, \tag{2}$$

j'ai trouvé la fonction φ, ψ et f étant des fonctions données et l'intégrale étant prise entre des limites quelconques; mais la solution de ce problème est trop longue pour être donnée ici ».

Questo scriveva ABEL nel 1823: tre anni dopo ripubblicava nel « Giornale di Crelle » sotto il titolo: *Résolution d'un problème de mécanique* (*) la stessa formula di inversione della equazione (1), ma non dava alcun cenno di aver risolto la questione generale di invertire la (2). Né il problema stesso riappare in alcuna altra Memoria di ABEL. Ci mancano quindi i dati necessari per decidere la questione se ABEL fosse effettivamente giunto a sciogliere questo problema o invece non avesse creduto per un momento alla possibilità di risolverlo seguendo una certa via, senza che le sue ulteriori ricerche abbiano confermato questa credenza.

Quest'ultima ipotesi è resa più probabile dal fatto che HOLMBOE, che doveva conoscere le idee definitive di ABEL su questo soggetto, ha creduto di sopprimere il paragrafo della Memoria che contiene il solo passo delle opere in cui ABEL afferma di aver risoluto questo problema.

Certo è che nessuno dei molti matematici che in appresso si occuparono della questione, giunse, che io sappia, ad ottenerne la soluzione.

Nell'Art. II mostreremo come essa possa ricavarsi col metodo ivi esposto che è fondato sopra principii che non hanno alcun rapporto col metodo che seguiva ABEL.

3. Non erano ancora trascorsi tre anni dalla morte di ABEL che, nel 1832, LIOUVILLE stabiliva alcune formule d'inversione che in ultima analisi possono ricavarsi da quella d'ABEL e le applicava a numerose ed importanti questioni di varia natura, le quali rendono sommariamente interessante la lettura della sua Memoria. Il LIOUVILLE era ignaro delle ricerche d'ABEL, giacché applicando la sua formula alla estensione del problema della tautocrona dice, dopo enunciato il problema: « Les recherches des divers géomètres sur la tautochrone ne s'étendraient nullement à la question plus difficile qui vient d'être énoncée », mentre il problema stesso era stato risolto da ABEL nove anni prima.

(*) « Crelle », Bd. I (1826); « Oeuvres » nouv. ed., t. I, pp. 97-101. [N. d. R.].

LIOUVILLE però, più che alla questione funzionale mirava alla creazione di un nuovo calcolo: quello delle derivate d'indice fratto. Ma se questo suo concepimento contribuisce a dare forma elegantissima ai risultati, esso per altro lo costringe rispetto alla questione funzionale nei limiti della formula d'ABEL.

LIOUVILLE era conscio di tutta la importanza delle questioni funzionali nell'analisi delle equazioni a derivate parziali e specialmente nella fisica matematica. Dopo avere esaminato una estesa classe di questioni fisico meccaniche, egli dice: « tous ces problèmes sur les forces attractives se rapportent à une branche nouvelle des théories mécaniques dans laquelle on a pour but d'obtenir les forces élémentaires connaissant la loi que suivent dans une série régulière de cas donnés les résultantes de ces forces élémentaires. L'objet qu'on se propose dans cette partie de la science est de remonter des effets aux causes ».

Ora LIOUVILLE riteneva necessario di dover ricorrere ad « un nuovo calcolo » per risolvere le questioni suddette; ma esse posson farsi rientrare in quello ordinario con altrettanta facilità.

Nondimeno la eleganza delle formule di LIOUVILLE ha invogliato vari autori a valersi delle sue derivate d'ordine fratto, e i loro risultati sono facilmente traducibili nell'ordinario linguaggio colle notazioni ordinarie.

4. Tanto ABEL quanto LIOUVILLE per stabilire le loro formule adoperavano il metodo degli sviluppi in serie. Esso però non è necessario, e, quel che è più importante di notare, non è rigoroso. Nel 1848 SCHLÖMILCH nei suoi *analytische Studien* riconobbe che la dimostrazione di ABEL giace sopra un fondamento inesatto e particolarizzando una formula generale relativa alla riduzione degli integrali multipli ottenne la formula di ABEL in maniera rigorosa.

Le dimostrazioni che più comunemente si dànno di essa sono però di natura diversa della precedente. Esse si basano sopra una formola di DIRICHLET. Questi fino dal 1835 nella sua Memoria: *Sur les séries dont le terme général dépend de deux angles et qui servent à exprimer des fonctions arbitraires entre des limites données* (*), aveva stabilito quel principio sulla inversione dell'ordine d'integrazione degli integrali doppii che è di tanta utilità e così frequentemente adoperato.

Esso si esprime mediante la formula:

$$\int_a^b dx \int_a^x \varphi(x, y)\, dx = \int_a^b dy \int_y^b \varphi(x, y)\, dx,$$

la quale, come dice il suo scopritore, « est très-facile de démontrer et qui devient tout à fait évidente, lorsqu'on l'envisage sous un point de vue géométrique », ma che può ottenersi pur facilmente per via analitica, come ha mostrato WINCKLER nel 1869 (2).

(*) « Crelle », Bd. 17 (1826); « Werke », Bd. I, pp. 283-306. [N. d. R.].

(2) La precedente formula di DIRICHLET può estendersi, sotto certe condizioni, al caso in cui x, y siano variabili complesse. [Cfr. il § 10 della prima nota precedentemente citata].

Fu JOACHIMSTHAL nel 1860 che per primo riconobbe, nel risolvere un problema meccanico proposto da JULLIEN, come il suddetto principio di DIRICHLET possa impiegarsi utilmente per ottenere la formola d'inversione di ABEL.

Non starò ad esporre in qual modo il principio di DIRICHLET renda quasi intuitiva questa formula, giacché tale procedimento è ormai famigliare a tutti i cultori dell'analisi. Accennerò soltanto che il BELTRAMI, il DINI, il BETTI si valsero di esso nelle loro belle ricerche sulla teoria del potenziale. LETNIKOFF nel suo studio sulle derivate con indice fratto ne fa pure uso e così molti altri che non starò a citare.

Tuttavia i metodi escogitati per dimostrare la formula d'ABEL non si limitano ai precedenti. Ricorderò fra le altre dimostrazioni una molto elegante del SOMOFF che la espose nel 1868 nella sua Nota: *Sur un problème de mécanique*, nella quale egli estese anche il problema della tautocrona, proponendosi di trovare la curva descritta sopra una superficie qualunque da un punto sollecitato da una forza che ha un dato potenziale conoscendo il tempo in funzione del potenziale. L'Autore risolve questo problema più generale facendo sempre uso della stessa formula d'ABEL.

5. Le applicazioni di questa non sono ristrette alle sole ricerche fisico-meccaniche di cui abbiamo parlato, né a quelle solo analitiche di LIOUVILLE. Una geniale idea emessa da SCHLÖMILCH fu la fonte da cui scaturirono le applicazioni di essa agli sviluppi in serie, alle quali sono legate le profonde ricerche di BELTRAMI e di DINI di cui fra poco daremo un cenno.

Nel § 7 della sua Memoria: *Ueber die Bessel'sche Funktion*, SCHLÖMILCH si propone di sviluppare una funzione arbitraria di una variabile in una serie di funzioni di BESSEL: Egli parte dallo sviluppo di FOURIER:

$$F(\lambda x) = \frac{1}{2} A_0 + A_1 \cos 2\lambda x + A_2 \cos 4\lambda x + \cdots,$$

in cui:

$$A_n = \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} F(u) \cos 2nu\,du\,; \tag{3}$$

quindi moltiplicando per:

$$\frac{2}{\pi} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

ed integrando fra 0 ed 1, giunge alla formula [3]:

(3) Si osservi che SCHLÖMILCH fa uso della notazione di HANSEN anziché di quella di BESSEL, per cui si ha:

$$J_0(\lambda) = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{\cos 2\lambda x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx,$$

ossia $J_0(\lambda) = I_0(2\lambda)$.

$$\frac{2}{\pi}\int_0^1 \frac{F(\lambda x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \frac{1}{2}A_0 + A_1 J_0(\lambda) + A_2 J_0(2\lambda) + A_3 J_0(3\lambda) + \cdots,$$

che è valida per λ compresa fra o e $\frac{1}{2}\pi$.

Ponendo:

$$f(\lambda) = \frac{2}{\pi}\int_0^1 \frac{F(\lambda x)\,dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

SCHLÖMILCH ha in tal modo lo sviluppo richiesto di $f(\lambda)$ per funzioni di BESSEL, onde in virtù delle (3) si potranno determinare i coefficienti dello sviluppo, purché dalla equazione precedente possa ricavarsi F in funzione di f. È appunto questo problema d'inversione che SCHLÖMILCH risolve mediante la formula d'ABEL. In seguito l'Autore ottiene lo sviluppo analogo di una funzione per funzioni cilindriche d'ordine uno.

6. Nel 1880 il prof. BELTRAMI (*) ha preso nuovamente in esame la formula d'ABEL e la ha presentata sotto una forma atta a risolvere simultaneamente due questioni reciproche, l'una delle quali è quella precedentemente citata di SCHLÖMILCH, e l'altra una nuova questione.

Il BELTRAMI osserva che il carattere essenziale della scoperta d'ABEL si può far consistere nella equivalenza delle due relazioni:

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned} &\int_0^\pi \varphi(r \operatorname{sen}\theta)\,d\theta = \psi(r) \\ &\int_0^r \varphi(r)\,dr = \frac{r}{\pi}\int_0^{\pi/2} \psi(r\operatorname{sen}\theta)\operatorname{sen}\theta\,d\theta. \end{aligned}\right.$$

Tenendo ora conto delle due formule:

$$(5)\qquad \left\{\begin{aligned} &\int_0^\pi \cos(x\operatorname{sen}\theta)\,d\theta = \pi I_0(x) \\ &\int_0^\pi \operatorname{sen}(x\operatorname{sen}\theta)\operatorname{sen}\theta\,d\theta = \pi I_1(x), \end{aligned}\right.$$

dalle (4) si deduce:

$$(6)\qquad \left\{\begin{aligned} &\int_0^{\pi/2} I_0(x\operatorname{sen}\theta)\operatorname{sen}\theta\,d\theta = \frac{\operatorname{sen} x}{x} \\ &\int_0^{\pi/2} I_1(x\operatorname{sen}\theta)\,d\theta = \frac{1-\cos x}{x}. \end{aligned}\right.$$

(*) *Intorno ad un teorema di* ABEL *e ad alcune sue applicazioni.* « Rend. Ist. Lomb. », s. 2ª, vol. XII (1880); « Opere mat. », t. III, pp. 248-257. [N. d. R.].

Come SCHLÖMILCH valendosi delle (5) e del teorema d'ABEL ottiene lo sviluppo d'una funzione per funzioni cilindriche d'ordine zero ed uno, cogli argomenti x, $2x$, $3x, \cdots$, così il BELTRAMI valendosi delle (6) e del teorema d'ABEL perviene allo sviluppo di una funzione per serie trigonometrica di seni e coseni cogli argomenti $v_1 x$, $v_2 x$, $v_3 x, \cdots$, in cui le v_i sono le radici positive di una delle equazioni trascendenti $I_0(x) = 0$, $I_0'(x) = 0$.

Infatti, se la funzione $f(x)$ ammette nell'intervallo $(0, 1)$ lo sviluppo:

$$f(x) = A_1 I_0(a_1 x) + A_2 I_0(a_2 x) + \cdots, \tag{7}$$

in cui $a_1, a_2, \cdots$, sono radici di una o dell'altra equazione $I_0(x) = 0$, $I_0'(x) = 0$, e se al detto sviluppo è applicabile l'integrazione per serie, in virtù di ben note proprietà delle funzioni di BESSEL, si avrà:

$$A_n = \frac{2}{I_0(a_n)^2 + I_1(a_n)^2} \int_0^1 x f(x) I_0(a_n x)\, dx. \tag{8}$$

Ora sostituiscasi nella (7) x sen θ al posto di x, si moltiplichi per sen $\theta d\theta$ e s'integri fra 0 e $\pi/2$. A cagione della prima delle (6) si otterrà:

$$x \int_0^{\pi/2} f(x \operatorname{sen} \theta) \operatorname{sen} \theta d\theta = \Sigma \frac{A_n}{a_n} \operatorname{sen} a_n x = F(x). \tag{9}$$

Ma il teorema di ABEL ci dà:

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} F'(x \operatorname{sen} \theta)\, d\theta;$$

abbiamo dunque il modo di calcolare i coefficienti dello sviluppo (9) per mezzo di $F(x)$ valendosi della formula precedente insieme alla (8); si trova così:

$$A_n = \frac{2}{\pi [I_0(a_n)^2 + I_1(a_n)^2]} \int_0^1 x I_0(a_n x)\, dx \int_0^{\pi} F'(x \operatorname{sen} \theta)\, d\theta.$$

Analogamente se $f_1(x)$ ammette lo sviluppo integrabile termine a termine:

$$f_1(x) = B_1 I_1(b_1 x) + B_2 I_1(b_2 x) + B_3 I_1(b_3 x) + \cdots,$$

essendo le $b_1, b_2, b_3, \cdots$, le radici positive di una delle equazioni $I_1(x) = 0$, $I_1'(x) = 0$, ossia di una delle due equazioni $I_0'(x) = 0$, $I_0''(x) = 0$, operando su questa serie in modo analogo a quello tenuto colla (7) e giovandosi della seconda delle (6) avremo:

$$x \int_0^{\pi/2} f_1(x \operatorname{sen} \theta)\, d\theta = \Sigma \frac{B_n}{b_n} (1 - \cos b_n x) = F_1(x), \tag{10}$$

da cui si ricava pel teorema d'ABEL, mediante un calcolo facile:

$$f_1(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} F_1'(x \operatorname{sen} \theta) \operatorname{sen} \theta d\theta.$$

Ma i coefficienti B_n si ottengono da $f_1(x)$ colla formula:

$$B_n = \frac{2}{I_1(b_n)^2 + I_2(b_n)^2} \int_0^1 x f_1(x)\, I_1(b_n x)\, dx ,$$

quindi essi si ricaveranno, in virtù della (10) dalla $F_1(x)$, e avremo:

$$B_n = \frac{2}{\pi [I_1(b_n)^2 + I_2(b_n)^2]} \int_0^1 x I_1(b_n x)\, dx \int_0^\pi F_1'(x \operatorname{sen} \theta) \operatorname{sen} \theta d\theta .$$

7. Lo stesso concetto che mosse il BELTRAMI nell'estendere le ricerche dello SCHLÖMILCH, guidò pure il DINI nell'ampliarle a casi più generali.

Nel Cap. VII della sua opera *Sulla rappresentazione delle funzioni di una variabile reale*, che è stato stampato negli «Annali» delle Università toscane [vol. 17, parte 2ª, pp. 1–204], il prof. DINI, dopo avere ottenuto sotto una forma generale lo sviluppo in serie di funzioni reali, passa ad integrare termine a termine le dette serie, dopo averle moltiplicate per una funzione arbitraria. Ottiene in tal modo nuovi sviluppi. Se quello primitivo è

$$f(x) = \sum_0^\infty A_n H_n(x) ,$$

i cui coefficienti A_n possono determinarsi dipendentemente dalla $f(x)$, e se $\psi(x, \xi)$ è la funzione moltiplicatrice, si ottiene in tal modo lo sviluppo in serie della funzione:

$$(11) \qquad \int_c^\xi f(x)\, \psi(x, \xi)\, d\xi = F(\xi) ,$$

il quale sarà della forma:

$$(12) \qquad \sum_0^\infty A_n K_n(\xi) ,$$

avendo posto:

$$K_n(\xi) = \int_c^\xi H_n(x)\, \psi(x, \xi)\, dx .$$

Se si potrà ricavare la $f(x)$, quando sia scelta la $F(\xi)$, avremo il modo di calcolare i coefficienti dello sviluppo in serie (12) mediante la funzione da svilupparsi $F(\xi)$.

La possibilità dunque della inversione di una equazione funzionale della forma (11) rende in generale possibile il passaggio da certi sviluppi i cui coefficienti sanno ricavarsi dalla funzione da svolgersi in serie, a nuovi sviluppi i cui coefficienti godono della stessa proprietà.

Ora ogni qualvolta si sappia trovare, come avviene nel caso di ABEL, una coppia di funzioni $\psi(x, \xi)$, $\theta(y, x)$ tali che

$$\int_y^\xi \psi(x, \xi)\, \theta(y, x)\, dx = 1, \tag{13}$$

sarà possibile di ottenere una delle dette inversioni mediante una espressione della forma:

$$f(x) = \int_c^x F(\xi)\, \theta(\xi, x)\, d\xi.$$

Il prof. DINI fa alcune importanti applicazioni, esaminando in particolare la coppia di funzioni:

$$\psi(x, \xi) = \frac{2}{\pi} \frac{(m + nx^2)^p}{(m + nx^2)^q (\pm \xi^2 \mp x^2)^p},$$

$$\theta(y, x) = \frac{\operatorname{sen} p\pi}{2} x \frac{(m + ny^2)^{1-p}}{(m + nx^2)^{1-q} (\pm x^2 \mp y^2)^{1-p}},$$

la quale può farsi rientrare nel caso di ABEL, ponendo:

$$m + nx^2 = \frac{1}{u} \quad , \quad m + ny^2 = \frac{1}{v} \quad , \quad m + n\xi^2 = \frac{1}{w},$$

in virtù della formula:

$$\int_y^\xi \psi(x, \xi)\, \theta(y, x)\, dx = \frac{\operatorname{sen} p\pi}{2\pi} \int_v^w \frac{du}{(w - u)^p (u - v)^{1-p}}.$$

8. Nessuno degli autori fin qui citato aveva mai oltrepassato il limite segnato dalla formula d'ABEL, tantoché essa ha rappresentato l'unico esempio di inversioni di integrali definiti con limiti variabili fino al 1884 in cui il SONINE pubblicò negli «Acta Mathematica» [t. 4] la sua Memoria: *Sur la généralisation d'une formule d'*ABEL. Il SONINE stesso in un precedente lavoro del 1879: *Recherches sur les fonctions cylindriques et le développement des fonctions continues en série* (*) si era limitato a ricavare la consueta formula d'ABEL desumendola da alcune interessanti proprietà delle funzioni di BESSEL.

Ma il teorema che il SONINE ha reso noto nel 1884 e che era stato da lui trovato due anni prima segna un vero e proprio passo nella questione dell'inversione.

Ecco in che cosa consiste il teorema di SONINE. Se p e q sono due numeri positivi la cui somma è eguale all'unità, prendiamo una serie qualunque di potenze:

$$1 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots = \varphi(x), \tag{14}$$

(*) «Math. Ann.», Bd. XVI (1880). [N. d. R.].

e formiamo lo sviluppo:

(15) $$\frac{1}{\varphi(x)} = 1 + d_1 x + d_2 x^2 + \cdots;$$

si avrà allora:

$$\sigma(x) = x^{-p}\left(\frac{1}{\Gamma(1-p)} + \frac{c_1 x}{\Gamma(2-p)} + \frac{c_2 x^2}{\Gamma(3-p)} + \cdots\right),$$

$$\psi(x) = x^{-q}\left(\frac{1}{\Gamma(1-q)} + \frac{d_1 x}{\Gamma(2-q)} + \frac{d_2 x^2}{\Gamma(3-q)} + \cdots\right),$$

$$\int_a^x f(\xi)\, d\xi = \int_a^x \psi(x-\lambda)\, d\lambda \int_a^\lambda f(\xi)\, \sigma(\lambda-\xi)\, d\xi$$

vale a dire la equazione funzionale:

(16) $$F(y) = \int_a^y \varphi(x)\, \psi(y-x)\, dx,$$

si inverte mediante la formula:

(17) $$\varphi(y) = \int_a^y F'(x)\, \sigma(y-x)\, dx.$$

La formula di SONINE, che diviene quella di ABEL quando la serie $\varphi(x)$ si riduce al suo primo termine, offre quindi infiniti nuovi casi di inversione ottenuti per la prima volta dopo quello di ABEL.

La proprietà caratteristica delle funzioni σ e ψ da cui dipende la possibilità della inversione consiste in ciò che:

$$1 = \int_x^y \psi(y-\xi)\, \sigma(\xi-x)\, d\xi.$$

Il teorema di SONINE dà quindi infinite soluzioni della equazione funzionale che si era proposta il DINI, ossia dà infinite coppie di funzioni che soddisfano la (13) distinte dalla soluzione di ABEL, e perciò essa offre campo di applicazioni agli sviluppi in serie.

Il SONINE in una Nota del 1889 ne ha fatto anche una applicazione alla riduzione di un integrale multiplo.

Analizzando il processo ideato dal SONINE appare evidente che egli si è proposto di invertire la equazione funzionale (16) mediante una funzione avente la espressione prestabilita (17), e ciò per analogia colla formula di ABEL. Anche il DINI era stato condotto a proporsi il problema in maniera analoga. Ma il prestabilire la forma della soluzione ha di necessità ristretto il campo in cui ha potuto applicarsi la inversione stessa, giacché come il SONINE osserva subito nella sua Memoria del 1884, egli deve di necessità limitarsi a funzioni ψ e σ che divengono infinite allorché il loro argomento si annulla.

Nella mia Nota II dell'Accademia di Torino risulta il perché in questo caso la forma della soluzione diviene tale, mentre è diversa quando le funzioni sono finite. Nell'Art. III vedremo poi come il teorema di SONINE si deduce dalle formule generali ivi stabilite con principii del tutto differenti. Per la validità del teorema stesso non si richiede poi la convergenza delle serie (14) e (15).

9. I problemi di inversione della equazione funzionale:

$$f(y) = \int \varphi(x)\, \mathrm{H}(x, y)\, dx, \tag{18}$$

con $\varphi(x)$ funzione incognita, allorché i limiti dell'integrale anziché esser variabili sono costanti, hanno dato luogo a studii di una natura totalmente diversa da quelli fino ad ora esaminati, fra cui citeremo quelli del prof. PINCHERLE. Noi non staremo a parlarne giacché le due questioni hanno seguìto cammini differenti tanto che l'una non ha, che io sappia, contribuito fino ad ora all'avanzamento dell'altra.

Di ricerche che legano in certo modo fra loro le due specie di questioni è a mia conoscenza, oltre ad una mia breve Nota del 1884: *Sopra un problema di elettrostatica* (*), una Nota del prof. LEVI-CIVITA, dei cui risultati lo stesso autore si è valso in una questione di fisica matematica.

10. Nelle quattro Note che ho presentate all'Accademia di Torino, e nelle due che ho comunicate a quella dei Lincei citate precedentemente, ho cercato una esposizione sistematica della teoria dell'inversione degl'integrali definiti ottenendo le condizioni in cui il problema, allorché i limiti sono a ed x, è possibile e determinato e risolvendolo effettivamente in generale senza porre restrizioni alla forma delle funzioni date ed estendendolo poscia al caso di più funzioni incognite e di funzioni di più variabili.

Il metodo che ho seguìto è fondato sopra tre principii fondamentali.

PRINCIPIO DI CONVERGENZA. – *Se* $S_0(x, y)$, $a < x < y$, $a < y < b$ è *una funzione finita integrabile* (4) *e a partire da essa si calcolano successivamente le:*

$$\mathrm{S}_i(x, y) = \int_x^y \mathrm{S}_{i-j}(x, \xi)\, \mathrm{S}_{j-1}(\xi, y)\, d\xi,$$

S_i *sarà indipendente da* j *e la serie*:

$$s_0(x, y) = -\sum_0^\infty {}_i \mathrm{S}_i(x, y),$$

sarà uniformemente convergente e rappresenterà una funzione integrabile.

(*) In queste «Opere»: vol. primo, XI, pp. 188–195.

(4) Nella condizione di integrabilità includiamo quella della possibilità della inversione dell'ordine d'integrazione rispetto alle variabili x, y.

PRINCIPIO DI RECIPROCITÀ. – *Se si opera sulla* $s_0(x, y)$ *come si è operato sulla* $S_0(x, y)$, *cioè se si forma*:

$$s_i(x, y) = \int_x^y s_{i-j}(x, \xi)\, s_{j-1}(\xi, y)\, d\xi,$$

si ritrova la funzione primitiva, vale a dire si ha:

$$S_0(x, y) = -\sum_0^\infty s_i(x, y),$$

e le due funzioni $S_0(x, y)$ e $s_0(x, y)$ *sono legate dalla relazione*:

$$S_0(x, y) + s_0(x, y) = \int_x^y S_0(x, \xi)\, s_0(\xi, y)\, d\xi = \int_x^y s_0(x, \xi)\, S_0(\xi, y)\, d\xi.$$

PRINCIPIO DELLA INVERSIONE. – *L'equazione funzionale:*

$$f(y) = \varphi(y) - \int_a^y \varphi(x)\, S_0(x, y)\, dx,$$

si inverte in una maniera unica mediante la formula:

$$\varphi(y) = f(y) - \int_a^y f(x)\, s_0(x, y)\, dx.$$

Questi tre principii sono estensibili al caso di un sistema di funzioni, vale a dire *se*, invece della sola funzione $S_0(x, y)$, *si hanno le* n^2 *funzioni* $S_{r,t}^{(0)}(x, y)$, *in cui gl'indici* r, t *prendono i valori* $1, 2, \cdots, n$, *e a partire da esse si calcolano successivamente le:*

$$S_{r,t}^{(i)}(x, y) = \int_x^y \sum_1^n {}_h\, S_{r,h}^{(i-j)}(x, \xi)\, S_{h,t}^{(j-1)}(\xi, y)\, d\xi,$$

queste non dipendono dall'indice j, *e le serie*:

$$s_{r,t}^{(0)}(x, y) = -\sum_0^\infty {}_i\, S_{r,t}^{(i)}(x, y),$$

sono uniformemente convergenti. Inoltre ripetendo sulle $s_{r,t}^{(0)}(x, y)$ *le operazioni eseguite sulle* $S_{r,t}^{(0)}(x, y)$ *si ritrovano le funzioni primitive* $S_{r,t}^{(0)}(x, y)$, *cioè:*

$$S_{r,t}^{(0)}(x, y) = -\sum_1^\infty {}_i\, s_{r,t}^{(i)}(x, y),$$

essendo:

$$s_{r,t}^{(i)}(x, y) = \int_x^y \sum_1^n {}_h\, s_{r,h}^{(i-j)}(x, \xi)\, s_{h,t}^{(j-1)}(\xi, y)\, d\xi,$$

e si ha:

$$S_{r,t}^{(o)}(x\,,y) + s_{r,t}^{(o)}(x\,,y) = \int_x^y \sum_1^n{}_h S_{r,h}^{(o)}(x\,,\xi)\, s_{h,t}^{(o)}(\xi\,,y)\,d\xi$$

$$= \int_x^y \sum_1^n{}_h s_{r,h}^{(o)}(x\,,\xi)\, S_{h,t}^{(o)}(\xi\,,y)\,d\xi, \qquad \text{(principio di reciprocità).}$$

Finalmente vale il principio dell'inversione; ossia: *il sistema di equazioni funzionali:*

$$(19) \qquad f_i(y) = \varphi_i(y) - \sum_1^n{}_h \int_x^y S_{i,h}^{(o)}(x\,,y)\,\varphi_h(x)\,dx, \qquad (i = 1\,,2\,,\cdots,n)$$

si inverte in una maniera unica mediante le formule:

$$(20) \qquad \varphi_i(y) = f_i(y) - \sum_1^n{}_h \int_a^y s_{i,h}^{(o)}(x\,,y) f_h(x)\,dx, \qquad (i = 1\,,2\,,\cdots,n)\,.$$

Una ulteriore estensione può poi ottenersi considerando, invece che una funzione o un sistema di funzioni di una coppia di variabili, una funzione o un sistema di funzioni di m coppie di variabili:

Se

$$S_o(x_1\,,x_2\,,\cdots,x_n) \mid y_1\,,y_2\,,\cdots,y_n) \quad , \quad a_i < x_i < y_i \quad , \quad a_i < y_i < b_i,$$

è una funzione integrabile, le:

$$S_i(x_1\,,\cdots,x_n \mid y_1\,,\cdots,y_n)$$

$$= \int_{x_1}^{y_1} d\xi_1 \cdots \int_{x_n}^{y_n} d\xi_n\, S_{i-j}(x_1\,,\cdots,x_n \mid \xi_1\,,\cdots,\xi_n)\, S_{j-1}(\xi_1\,,\cdots,\xi_n \mid y_1\,,\cdots,y_n)$$

saranno indipendenti dall'indice j; la serie;

$$s_o(x_1\,,\cdots,x_n \mid y_1\,,\cdots,y_n) = -\sum_0^\infty{}_i S_i(x_1\,,\cdots,x_n \mid y_1\,,\cdots,y_n),$$

sarà uniformemente convergente, e, posto:

$$s_i(x_1\,,\cdots,x_n \mid y_1\,,\cdots,y_n)$$

$$= \int_{x_1}^{y_1} d\xi_1 \cdots \int_{x_n}^{y_n} d\xi_n\, s_{i-j}(x_1\,,\cdots,x_n \mid \xi_1\,,\cdots,\xi_n)\, s_{j-1}(\xi_1\,,\cdots,\xi_n \mid y_1\,,\cdots,y_n),$$

risulterà (principio di reciprocità):

$$S_o(x_1\,,\cdots,x_n \mid y_1\,,\cdots,y_n) = -\sum_0^\infty s_i(x_1\,,\cdots,x_n \mid y_1\,,\cdots,y_n),$$

mentre:

$$\mathrm{S}_0(x_1,\cdots,x_n\,|\,y_1,\cdots,y_n)+s_0(x_1,\cdots,x_n\,|\,y_1,\cdots,y_n)$$

$$=\int\limits_{x_1}^{y_1}d\xi_1\cdots\int\limits_{x_n}^{y_n}d\xi_n\,\mathrm{S}_0(x_1,\cdots,x_n\,|\,\xi_1,\cdots,\xi_n)\,s_0(\xi_1,\cdots,\xi_n\,|\,y_1,\cdots,y_n)$$

$$=\int\limits_{x_1}^{y_1}d\xi_1\cdots\int\limits_{x_n}^{y_n}d\xi_n\,s_0(x_1,\cdots,x_n\,|\,\xi_1,\cdots,\xi_n)\,\mathrm{S}_0(\xi_1,\cdots,\xi_n\,|\,y_1,\cdots,y_n);$$

e l'equazione (principio della inversione):

$$f(y_1,\cdots,y_n)=\varphi(y_1,\cdots,y_n)$$

$$-\int\limits_{a_1}^{y_1}dx_1\cdots\int\limits_{a_n}^{y_n}dx_n\,\varphi(x_1,\cdots,x_n)\,\mathrm{S}_0(x_1,\cdots,x_n\,|\,y_1,\cdots,y_n),$$

si invertirà in maniera unica mediante l'altra:

$$\varphi(y_1,\cdots,y_n)=f(y_1,\cdots,y_n)$$

$$-\int\limits_{a_1}^{y_1}dx_1\cdots\int\limits_{a_n}^{y_n}dx_n\,f(x_1,\cdots,x_n)\,s_0(x_1,\cdots,x_n\,|\,y_1,\cdots,y_n)\,.$$

11. Con questi principii si riconduce la risoluzione dei vari problemi di inversione, qualunque sia il numero delle funzioni incognite e qualunque sia il numero delle variabili da cui esse dipendono, ad operazioni successive di quadratura.

Nel caso più semplice che possa presentarsi si ottiene il teorema:

Se si ha la equazione funzionale:

$$f(y)-f(\alpha)=\int\limits_{\alpha}^{y}\varphi(x)\,\mathrm{H}(x\,,y)\,dx\,,$$

in cui $f(y)$ *e* $f'(y)$ *si mantengono finite e continue per* y *compreso fra* α *e* $\alpha+\mathrm{A}$ *e* $\mathrm{H}(x\,,y)$ *e* $\partial\mathrm{H}/\partial y=\mathrm{H}_2(x\,,y)$ *sono pure finite per* $y>x>\alpha\,,\ \alpha+\mathrm{A}>y>\alpha$, *e quest'ultima è integrabile, mentre è maggiore di zero il limite inferiore dei valori assoluti di* $h(y)=\mathrm{H}(y\,,y)$, *esisterà una ed una sola funzione finita e continua* φ *che soddisfa l'equazione funzionale per* y *compreso fra* α *e* $\alpha+\mathrm{A}$, *la quale sarà data da:*

$$\varphi(y)=\frac{f'(y)}{h(y)}-\frac{1}{h(y)}\int\limits_{\alpha}^{y}f'(x)\sum_{0}^{\infty}\mathrm{S}_i(x\,,y)\,dx\,,$$

in cui:

$$\mathrm{S}_i(x\,,y)=\int\limits_{y}^{x}\mathrm{S}_{i-j}(x\,,\xi)\,\mathrm{S}_{j-1}(\xi\,,y)\,d\xi\,,$$

$$\mathrm{S}_0(x\,,y)=\frac{\mathrm{H}_2(x\,,y)}{h(x)}\,.$$

Nel caso particolare in cui $H(x, y)$ assume la forma $F[\lambda(x) - \lambda(y)]$ questo teorema si specializza e diviene:

La formula di inversione della

$$f(y) - f(\alpha) = \int_\alpha^y \varphi(x)\, F[\lambda(x) - \lambda(y)]\, dx \quad , \quad [F(0) = 1],$$

è

$$\varphi(y) = f'(y) + \lambda'(y) \int_\alpha^y f'(x)\, \Theta[\lambda(x) - \lambda(y)]\, dx, \tag{21}$$

in cui:

$$\left\{ \begin{aligned} &\Theta(z) = \sum_0^\infty (-1)^i s_i(z) \\ &s_0(z) = F(z) \\ &s_i(z) = \int_0^z s_{i-j}(z-u)\, s_{j-1}(u)\, du\,. \end{aligned} \right. \tag{22}$$

Il caso in cui $H(x, y)$ diviene infinito per $x = y$, in modo che si possa porre $H(x, y) = G(x, y)/(x - y)^\lambda$ con $G(x, y)$ finita e $\lambda < 1$, e che comprende in sè evidentemente il caso di SONINE e quindi quello d'ABEL, si può ricondurre, con uno speciale artificio all'analisi precedente, ed in tal modo si ottiene il teorema:

Se si ha l'equazione funzionale:

$$f(y) - f(\alpha) = \int_\alpha^y \varphi(x) \frac{G(x, y)}{(y - x)^\lambda}\, dx \quad , \quad (\lambda < 1),$$

in cui $f(y)$ e $f'(y)$ si mantengono finite e continue per y compreso fra α e $\alpha + A$ $(A > 0)$, e $G(x, y)$ e $\partial G/\partial y = G_2(x, y)$ sono pure finite e continue per tutti i valori di x, y, compresi entro i limiti α e $\alpha + A$, mentre è maggiore di zero il limite inferiore dei valori assoluti di $g(y) = G(y, y)$ per y compreso nello stesso intervallo, esisterà una ed una sola funzione finita e continua φ che soddisfa l'equazione funzionale per y compreso fra α e $\alpha + A$, la quale sarà data da:

$$\varphi(z) = \frac{\operatorname{sen} \lambda\pi}{\pi} \frac{1}{g(z)} \int_\alpha^z f'(x) \sum_0^\infty {}_i T_i(x, y)\, dx,$$

in cui:

$$S_0(y, z) = \frac{\operatorname{sen} \lambda\pi}{\pi} \frac{1}{g(z)} \int_y^z G_2(y, \xi) \left(\frac{\xi - y}{z - \xi}\right)^{1-\lambda} \frac{d\xi}{z - y},$$

$$T_0(x, z) = \frac{1}{(z - x)^{1-\lambda}},$$

$$T_i(x, z) = \int_z^x S_0(\xi, z)\, T_{i-1}(x, \xi)\, d\xi\,.$$

Questa proposizione, allorché $G(x, y)$ ha la forma $F(y - x)$, si specializza e si riduce all'altra:

La formula di inversione della relazione funzionale:

$$f(y) - f(\alpha) = \int_{\alpha}^{y} \varphi(x) \frac{F(y-x)}{(y-x)^{\lambda}} dx \quad , \quad [0 < \lambda < 1, F(0) = 1],$$

è

$$\varphi(z) = \frac{\operatorname{sen} \lambda\pi}{\pi} \int_{\alpha}^{z} f'(x) \, \Omega(z - x) \, dx, \tag{23}$$

in cui:

$$\left\{ \begin{aligned} s_0(v) &= \frac{\operatorname{sen} \lambda\pi}{\pi v} \int_0^v F'(u) \left(\frac{u}{v-u} \right)^{1-\lambda} du \\ t_0(v) &= \frac{1}{v^{1-\lambda}} \\ t_i(v) &= \int_0^v s_0(v-u) t_{i-1}(u) \, du \\ \Omega(v) &= \sum_{0}^{\infty}{}_i (-1)^i t_i(v). \end{aligned} \right. \tag{24}$$

In questo teorema non è necessario, come in quello di SONINE, partire dallo sviluppo in serie di potenze della funzione F.

Finalmente se $H(x, y)$ si annulla per $x = y$, il problema dell'inversione può in taluni casi riescire determinato, in altri no, e la discriminazione di essi può ricondursi ad operazioni algebriche. Il teorema fondamentale che si ha a questo proposito è il seguente.

Abbiasi la equazione funzionale:

$$f(y) = \int_0^y \varphi(x) \, H(x, y) \, dx \quad , \quad a > y > 0, \tag{25}$$

in cui:

$$f(y) = y^{n+1} f_1(y)$$

$$H(x, y) = \sum_{0}^{n}{}_i a_i x^i y^{n-i} + \sum_{0}^{n+1}{}_i x^i y^{n+1-i} L_i(x, y),$$

essendo le a_i quantità costanti.

Se $f_1(y)$ e $L_i(x, y)$ e le loro derivate rapporto ad y sono finite e continue per x compreso fra 0 e y e y compreso fra 0 ed a, mentre in questo intervallo $h(y) = H(y, y)$ non si annulla che per $y = 0$, esisterà una ed una sola funzione finita e continua che soddisfa la (25) quando tutte le radici dell'equazione algebrica di grado n:

$$\frac{a_0}{\lambda - 1} + \frac{a_1}{\lambda - 2} + \cdots + \frac{a_n}{\lambda - n - 1} = 0,$$

essendo finite e differenti fra loro, avranno le parti reali positive. Invece, se le radici della equazione precedente saranno finite e diverse fra loro, ma una o più di esse avranno la parte reale negativa, allora il problema di dedurre $\varphi(x)$ *dalla* (25) *sarà indeterminato.*

L'effettiva risoluzione della equazione funzionale (25), quando le condizioni stabilite dal precedente teorema, affinché il problema sia determinato, sono soddisfatte può eseguirsi riconducendo la questione ad un'altra analoga per la quale sia verificata la condizione $H(y, y) \gtrless 0$. [Vedi perciò la 3ª e la 4ª delle mie Note dell'Accademia di Torino].

ART. II.

1. Il metodo precedentemente esposto può estendersi in modo da renderlo applicabile al caso della inversione, quando ambedue i limiti sono variabili. È ciò che mostreremo in questo articolo.

Cominciamo dal ricordare alcune formule ben semplici del calcolo delle differenze finite (5).

Se $\lambda(x)$ e $\varphi(x)$ *sono funzioni finite e continue nell'intervallo* $(0, a)$ *e* $|\lambda(0)| \leqq 1$ *e* $0 < \alpha < 1$, *la serie:*

$$\theta(x) = \varphi(x) + \alpha\lambda(x)\varphi(\alpha x) + \alpha^2\lambda(\alpha x)\lambda(x)\varphi(\alpha^2 x) + \alpha^3\lambda(\alpha^2 x)\lambda(\alpha x)\lambda(x)\varphi(\alpha^3 x) + \cdots, \tag{1}$$

sarà convergente uniformemente nell'intervallo $(0, a)$ *e la somma* $\theta(x)$ *sarà una funzione finita e continua.*

Infatti sia M_n il limite superiore dei valori assoluti di $\lambda(x)$ nell'intervallo $(0, a\alpha^n)$, ed M il limite superiore dei valori assoluti di $\varphi(x)$; il termine n^{esimo} della serie (1) sarà inferiore in valore assoluto a:

$$\alpha^n M_0 M_1 \cdots M_{n-1} M.$$

Ora la serie:

$$M + \alpha M_0 M + \alpha^2 M_0 M_1 M + \alpha^3 M_0 M_1 M_2 M + \cdots,$$

è convergente, giacché il rapporto fra l'$(n+1)^{\text{esimo}}$ termine e il termine n^{esimo} è:

$$\alpha M_n,$$

il quale per $n = \infty$ avrà un limite inferiore all'unità.

La serie (1) converge dunque uniformemente, e siccome ogni termine è una funzione finita e continua di x, così $\theta(x)$ sarà una funzione pure finita e continua.

(5) Cfr. BOOLE, *A Treatise on the calculus of finite differences*. Ch. IX, Art. 6 e seguenti.

Questo teorema può estendersi al caso in cui α sia negativo ma sempre tale che $|\alpha| < 1$, in modo che si ha il teorema:

Se $\lambda(x)$ *e* $\varphi(x)$ *sono funzioni finite e continue nell'intervallo* $(\alpha a, a)$ *e* $|\lambda(0)| \leqq 1$, $0 > \alpha > -1$, *la serie* (1) *sarà convergente uniformemente nell'intervallo* $(\alpha a, a)$ *e rappresenterà una funzione finita e continua.*

Ci si può ora proporre il problema di trovare la funzione $\varphi(x)$ quando sia data la funzione $\theta(x)$.

Abbiamo:

$$\theta(\alpha x) = \varphi(\alpha x) + \alpha\lambda(\alpha x)\varphi(\alpha^2 x) + \alpha^2\lambda(\alpha^2 x)\lambda(\alpha x)\varphi(\alpha^3 x) + \cdots,$$

quindi:

$$\theta(x) - \alpha\lambda(x)\theta(\alpha x) = \varphi(x), \tag{2}$$

e questa formula risolve la questione proposta.

Reciprocamente la (1) risolve il problema di determinare $\theta(x)$ quando si conosce $\varphi(x)$, onde possiamo considerare le due formole (1) e (2) come inverse o reciproche l'una dell'altra, per modo che *se* $\lambda(x)$ *è finita e continua e* $|\lambda(0)| \leq 1$, $|\alpha| < 1$, *scelta arbitrariamente la funzione finita e continua* $\theta(x)$ *la* (2) *ci darà* $\varphi(x)$, *mentre scelta arbitrariamente la funzione finita e continua* $\varphi(x)$, *la* (1) *ci darà* $\theta(x)$. *Se* $\alpha > 0$ *basterà considerare* $\lambda(x)$, $\theta(x)$ *e* $\varphi(x)$ *in un intervallo* $(0, a)$, *mentre se* $\alpha < 0$ *dovremo considerarle in un intervallo* $(\alpha a, a)$.

2. Ciò premesso, abbiasi la equazione funzionale:

$$f(y) - f(0) = \int_{\alpha y}^{y} \theta(x)\,H(x, y)\,dx \quad , \quad (a > y > 0), \tag{3}$$

in cui $1 > \alpha > 0$ e $f(y)$, $f'(y)$, $H(x, y)$, $H_2(x, y) = \partial H/\partial y$ sono funzioni finite e continue per x, y variabili rispettivamente negl'intervalli $(\alpha y, y)$ $(0, a)$ e $\theta(x)$ è una *funzione incognita* nell'intervallo $(0, a)$.

Derivando la precedente equazione, avremo:

$$f'(y) = \theta(y)\,H(y, y) - \alpha\theta(\alpha y)\,H(\alpha y, y) + \int_{\alpha y}^{y} \theta(x)\,H_2(x, y)\,dx,$$

e se il limite inferiore dei valori assoluti di $H(y, y)$ è diverso da zero:

$$\frac{f'(y)}{H(y, y)} = \theta(y) - \alpha\theta(\alpha y)\frac{H(\alpha y, y)}{H(y, y)} + \int_{\alpha y}^{y} \theta(x)\frac{H_2(x, y)}{H(y, y)}\,dx.$$

Posto:

$$\frac{f'(y)}{H(y, y)} = \psi(y) \quad , \quad \frac{H(\alpha y, y)}{H(y, y)} = \lambda(y) \quad , \quad \frac{H_2(x, y)}{H(y, y)} = L(x, y), \tag{4}$$

avremo:

$$\psi(y) = \theta(y) - \alpha\lambda(y)\,\theta(\alpha y) + \int_{\alpha y}^{y} \theta(x)\,L(x, y)\,dx, \tag{5}$$

onde, ponendo $\varphi(y) = \theta(y) - \alpha\lambda(y)\,\theta(\alpha y)$, e quindi, ricorrendo alla (1), si otterrà:

$$\psi(y) = \varphi(y) + \int_{\alpha y}^{y} \{\varphi(x) + \alpha\lambda(x)\,\varphi(\alpha x) + \alpha^2\lambda(x)\,\lambda(\alpha x)\,\varphi(\alpha^2 x) + \cdots\}\, L(x, y)\, dx,$$

ove, a cagione della convergenza in egual grado della serie contenuta sotto il segno d'integrazione:

$$\psi(y) = \varphi(y) + \int_{\alpha y}^{y} \varphi(x)\, L(x, y)\, dx + \int_{\alpha y}^{y} \varphi(\alpha x)\, \alpha\lambda(x)\, L(x, y)\, dx$$

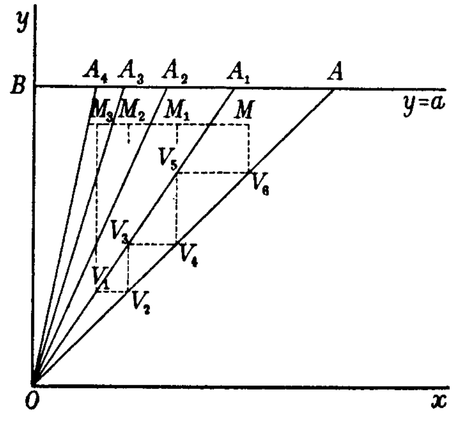
$$+ \int_{\alpha y}^{y} \varphi(\alpha^2 x)\, \alpha^2\lambda(x)\,\lambda(\alpha x)\, L(x, y)\, dx + \cdots$$

Se ora nel secondo integrale del secondo membro sostituiamo x ad αx, nel terzo sostituiamo x ad $\alpha^2 x$ e così di seguito, la precedente equazione si scriverà:

$$(6) \qquad \psi(y) = \varphi(y) + \int_{\alpha y}^{y} \varphi(x)\, L(x, y)\, dx + \int_{\alpha^2 y}^{\alpha y} \varphi(x)\, \lambda\left(\frac{x}{\alpha}\right) L\left(\frac{x}{\alpha}, y\right) dx$$

$$+ \int_{\alpha^3 y}^{\alpha y} \varphi(x)\, \lambda\left(\frac{x}{\alpha^2}\right) \lambda\left(\frac{x}{\alpha}\right) L\left(\frac{x}{\alpha^2}, y\right) dx + \cdots$$

3. Si immagini il triangolo OAB compreso fra l'asse y, la bisettrice dell'angolo degli assi, x, y e la retta $y = a$, quindi si tirino le rette



(Nella figura si è supposto $n = 3$).

$OA_1, OA_2, OA_3, \cdots$, tali che formino con y angoli le cui tangenti trigonometriche siano successivamente $\alpha, \alpha^2, \alpha^3, \cdots$ Verrà così diviso il triangolo OAB in un numero infinito di triangoli OAA_1, OA_1A_2, $OA_2A_3, \cdots$ Ammetteremo che i punti di ciascun lato OA_n appartengano al triangolo $OA_{n-1}A_n$

e non al triangolo successivo $OA_n A_{n+1}$; soltanto il lato OA lo supporremo appartenere al triangolo OAA_1. In tal modo scelto un punto qualsiasi del triangolo OAB (escluso il lato OB) esso apparterrà ad uno e ad uno solo dei triangoli precedentemente costrutti. Appartenga il punto scelto al triangolo $OA_n A_{n+1}$, denotiamolo con M_n e chiamiamo x, y le sue coordinate. I punti $M_{n-1}, M_{n-2}, \cdots, M_2, M_1, M$ aventi rispettivamente le coordinate:

$$\left(\frac{x}{\alpha}, y\right), \left(\frac{x}{\alpha^2}, y\right), \cdots \left(\frac{x}{\alpha^{n-2}}, y\right), \left(\frac{x}{\alpha^{n-1}}, y\right), \left(\frac{x}{\alpha^n}, y\right),$$

apparterranno ordinatamente ai triangoli:

$$OA_{n-1} A_n, OA_{n-2} A_{n-1}, \cdots, OA_2 A_3, OA_1 A_2, OAA_1,$$

e si potranno chiamare *corrispondenti* di M_n.

Scelto M_n sarà facile ottenere M mediante una costruzione geometrica. Basterà tirare da M_n la parallela all'asse y finché non si incontra il lato OA_1 e a partire da questo punto d'intersezione V_1 costruire una spezzata:

$$V_1 V_2 V_3 \cdots V_{2n-1} V_{2n} M,$$

internamente al triangolo OAA_1, avente i vertici $V_1, V_3, \cdots, V_{2n-1}$ sul lato OA_1 e i vertici $V_2, V_4, \cdots, V_{2n}$ sul lato OA ed i lati successivamente paralleli agli assi x, y finché non si incontra in M la parallela ad x condotta dal punto M_n.

4. Per ciò che è stato detto nel § 2, $H(x, y)$ e quindi $L(x, y)$ sono funzioni definite nei punti del triangolo OAA_1, mentre $\lambda(y)$ è definita nell'intervallo $(0, a)$. Si prolunghi ora la funzione $L(x, y)$ in tutto lo spazio OAB (escluso il lato OB), prendendone il valore in un punto qualsiasi M_n dato da:

$$\lambda\left(\frac{x}{\alpha}\right)\lambda\left(\frac{x}{\alpha^2}\right) \cdots \lambda\left(\frac{x}{\alpha^n}\right) L\left(\frac{x}{\alpha^n}, y\right),$$

e denotiamo con $K(x, y)$ la funzione così ottenuta. Si riconosce subito che essa sarà in generale discontinua lungo le linee $OA_1, OA_2, \cdots, OA_n, \cdots$

Il suo valore potrà essere scritto, in virtù delle (4), sotto la forma:

$$K(x, y) = \frac{H\left(x, \frac{x}{\alpha}\right)}{H\left(\frac{x}{\alpha}, \frac{x}{\alpha}\right)} \cdot \frac{H\left(\frac{x}{\alpha}, \frac{x}{\alpha^2}\right)}{H\left(\frac{x}{\alpha^2}, \frac{x}{\alpha^2}\right)} \cdots \frac{H\left(\frac{x}{\alpha^{n-1}}, \frac{x}{\alpha^n}\right)}{H\left(\frac{x}{\alpha^n}, \frac{x}{\alpha^n}\right)} L\left(\frac{x}{\alpha^n}, y\right), \tag{7}$$

ossia:

$$K(M_n) = \frac{H(V_1) H(V_3) \cdots H(V_{2n-1})}{H(V_2) H(V_4) \cdots H(V_{2n})} L(M),$$

denotando con $F(V)$ il valore di una funzione di x, y nel punto V.

Riferendoci quindi alla costruzione geometrica precedentemente indicata, potremo dire che il *valore della funzione* K *in un punto qualunque del triangolo* OAB (*escluso* OB) *è eguale al valore della funzione* L *nel punto corrispondente del triangolo* OAA_1 *moltiplicato per il prodotto dei valori di* H *nei* *vertici d'ordine dispari della poligonale costruita e diviso per il prodotto dei valori di* H *nei vertici d'ordine pari.* È facile dimostrare che $|K(x, y)|$ sarà sempre inferiore ad un numero finito.

Infatti la (7) potrà scriversi:

$$K(x, y) = \frac{H\left(x, \frac{x}{\alpha}\right)}{H\left(\frac{x}{\alpha^n}, \frac{x}{\alpha^n}\right)} \left[1 + \frac{H_2\left(\frac{x}{\alpha}, \xi_1\right)}{H\left(\frac{x}{\alpha}, \frac{x}{\alpha}\right)} \left(\frac{x}{\alpha^2} - \frac{x}{\alpha}\right)\right] \left[1 + \frac{H_2\left(\frac{x}{\alpha^2}, \xi_2\right)}{H\left(\frac{x}{\alpha^2}, \frac{x}{\alpha^2}\right)} \left(\frac{x}{\alpha^3} - \frac{x}{\alpha^2}\right)\right] \cdots$$

$$\cdots \left[1 + \frac{H_2\left(\frac{x}{\alpha^{n-1}}, \xi_{n-1}\right)}{H\left(\frac{x}{\alpha^{n-1}}, \frac{x}{\alpha^{n-1}}\right)} \left(\frac{x}{\alpha^n} - \frac{x}{\alpha^{n-1}}\right)\right] L\left(\frac{x}{\alpha^n}, y\right),$$

in cui le ξ_i sono numeri compresi fra x/α^i e x/α^{i+1}. Sia ora m il limite superiore dei valori assoluti di $H(x, y)$, m' il limite inferiore dei valori assoluti di $H(x, x)$ e m'' il limite superiore dei valori assoluti di $H_2(x, y)$, riferendosi alle (4) avremo:

$$|K(x, y)| \leq \frac{mm''}{m'^2}\left[1 + \frac{m''}{m'}\left(\frac{x}{\alpha^2} - \frac{x}{\alpha}\right)\right]\left[1 + \frac{m''}{m'}\left(\frac{x}{\alpha^3} - \frac{x}{\alpha^2}\right)\right] \cdots$$

$$\cdots \left[1 + \frac{m''}{m'}\left(\frac{x}{\alpha^n} - \frac{x}{\alpha^{n-1}}\right)\right],$$

e siccome $x/\alpha^n < a$:

$$|K(x, y)| < \frac{mm''}{m'^2}\left[1 + \frac{m''}{m'} a\right]\left[1 + \frac{m''}{m'} a\alpha\right] \cdots \left[1 + \frac{m''}{m'} a\alpha^{n-2}\right]$$

$$< \frac{mm''}{m'^2} \prod_{0}^{\infty}{}_i \left[1 + \rho\alpha^i\right],$$

in cui $\rho = \frac{m''}{m'} a$. Il che dimostra la proposizione.

5. Riprendiamo ora la formula (6) del § 2, ed osserviamo che:

per $y \geqq x \geq \alpha y$ si ha $L(x, y) = K(x, y)$,

» $\alpha y > x \geq \alpha^2 y$ » $\lambda\left(\frac{x}{\alpha}\right) L\left(\frac{x}{\alpha}, y\right) = K(x, y)$,

» $\alpha^2 y > x \geq \alpha^3 y$ » $\lambda\left(\frac{x}{\alpha^2}\right) \lambda\left(\frac{x}{\alpha}\right) L\left(\frac{x}{\alpha^2}, y\right) = K(x, y)$,

. . . .

e così di seguito indefinitamente; perciò la formula (6) potrà scriversi:

$$\psi(y)\,\varphi(y) + \int_0^y \varphi(x)\, K(x, y)\, dx,$$

ovvero, ponendo $K(x, y) = -S_0(x, y)$,

$$\psi(y) = \varphi(y) - \int_0^y \varphi(x)\, S_0(x, y)\, dx,$$

dalla quale si ricaverà, col processo di inversione esposto nell'Art. I, § 10,

$$\varphi(y) = \psi(y) - \int_0^y \psi(x)\, s_0(x, y)\, dx, \tag{8}$$

in cui $s_0(x, y)$ potrà calcolarsi con quadrature successive mediante $K(x, y)$.

Ottenuta in tal maniera $\varphi(x)$, la (1) ci darà la funzione incognita $\theta(x)$.

6. La soluzione del problema propostoci può ottenersi anche in un altro modo come accenneremo ora.

Dalla (5) segue:

$$\theta(y) - \alpha\lambda(y)\,\theta(\alpha y) = \psi(y) - \int_{\alpha y}^{y} \theta(x)\, L(x, y)\, dx,$$

onde applicando la (1) avremo:

$$\theta(y) = \psi(y) + \alpha\lambda(y)\,\psi(\alpha y) + \alpha^2\lambda(\alpha y)\,\lambda(y)\,\psi(\alpha^2 y) + \cdots - \int_{\alpha y}^{y} \theta(x)\, L(x, y)\, dx$$

$$- \int_{\alpha^2 y}^{\alpha y} \theta(x)\, \alpha\lambda(y)\, L(x, \alpha y)\, dx - \int_{\alpha^3 y}^{\alpha^2 y} \theta(x)\, \alpha^2\lambda(\alpha y)\,\lambda(y)\, L(x, \alpha^2 y)\, dx + \cdots$$

e ponendo:

$$\psi(y) + \alpha\lambda(y)\,\psi(\alpha y) + \alpha^2\lambda(\alpha y)\,\lambda(y)\,\psi(\alpha^2 y) + \cdots = \chi(y),$$

dalla equazione precedente risulterà:

$$\chi(y) = \theta(y) + \int_{\alpha y}^{y} \theta(x)\, L(x, y)\, dx + \int_{\alpha^2 y}^{\alpha y} \theta(x)\, \alpha\lambda(y)\, L(x, \alpha y)\, dx \tag{9}$$

$$+ \int_{\alpha^3 y}^{\alpha^2 y} \theta(x)\, \alpha^2\lambda(\alpha y)\,\lambda(y)\, L(x, \alpha^2 y)\, dx + \cdots$$

Questa formula è analoga alla (6) e da essa potrebbe ricavarsi $\theta(y)$ con un procedimento analogo a quello tenuto nei due paragrafi precedenti per ottenere $\varphi(y)$ dalla (6). Noi non staremo però a svilupparlo, ci varremo piuttosto della formula ora trovata per risolvere la equazione funzionale (3) nel caso di α negativo e minore dell'unità.

7. Prima di procedere alla trattazione di questo caso premettiamo le considerazioni seguenti.

Abbiasi la equazione funzionale:

$$f(y) = \varphi(y) + \int_{-y}^{y} \varphi(x)\, K(x, y)\, dx \quad , \quad (a > y > -a), \tag{10}$$

in cui $f(y)$ sia definita nell'intervallo $(-a, a)$ e la funzione finita ed integrabile $K(x, y)$ per $y > x > -y$ e $a > y > -a$. L'equazione precedente potrà scriversi:

$$f(y) = \varphi(y) + \int_0^y \varphi(x) K(x, y) dx + \int_0^y \varphi(-x) K(-x, y) dx,$$

e cambiando y in $-y$:

$$f(-y) = \varphi(-y) - \int_0^y \varphi(x) K(x, -y) dx - \int_0^y \varphi(-x) K(-x, -y) dx.$$

Poniamo:

$$\begin{aligned} f(y) &= f_1(y) \quad , \quad f(-y) = f_2(y), \\ \varphi(y) &= \varphi_1(y) \quad , \quad \varphi(-y) = \varphi_2(y), \\ K(x, y) &= -S_{11}^{(0)}(x, y) \quad , \quad K(-x, y) = -S_{12}^{(0)}(x, y), \\ K(x, -y) &= S_{21}^{(0)}(x, y) \quad , \quad K(-x, -y) = S_{22}^{(0)}(x, y), \end{aligned}$$

allora le due equazioni precedenti si scriveranno:

$$\left.\begin{aligned} f_1(y) &= \varphi_1(y) - \int_0^y \varphi_1(x) S_{11}^{(0)}(x, y) dx - \int_0^y \varphi_2(x) S_{12}^{(0)}(x, y) dx \\ f_2(y) &= \varphi_2(y) - \int_0^y \varphi_1(x) S_{21}^{(0)}(x, y) dx - \int_0^y \varphi_2(x) S_{22}^{(0)}(x, y) dx \end{aligned}\right\} \quad (a > y > 0),$$

e quindi da queste equazioni potremo ricavare $\varphi_1(x)$ e $\varphi_2(x)$ definite ambedue nell'intervallo $(0, a)$ mediante le formule [cfr. Art. I, § 10, formule (19) (20]):

$$\left.\begin{aligned} \varphi_1(y) &= f_1(y) - \int_0^y f_1(x) s_{11}^{(0)}(x, y) dx - \int_0^y f_2(x) s_{12}^{(0)}(x, y) dx \\ \varphi_2(y) &= f_2(y) - \int_0^y f_2(x) s_{21}^{(0)}(x, y) dx - \int_0^y f_2(x) s_{22}^{(0)}(x, y) dx \end{aligned}\right\} \quad (a > y > 0).$$

Definendo la funzione $R(x, y)$ per $y > x > -y$, $a > y > -a$, mediante le seguenti relazioni:

$$s_{11}^{(0)}(x, y) = -R(x, y), \; s_{12}^{(0)}(x, y) = -R(-x, y), \; s_{21}^{(0)}(x, y) = R(x, -y),$$

$$s_{22}^{(0)}(x, y) = R(-x, -y) \qquad \begin{pmatrix} y > x > 0 \\ a > y > 0 \end{pmatrix},$$

potremo sostituire alle precedenti equazioni l'unica formula:

$$(11) \qquad \varphi(y) = f(y) + \int_{-y}^y f(x) R(x, y) dx \quad , \quad (a > y > -a),$$

la quale risolve la equazione funzionale (10).

Supponiamo ora di avere la equazione funzionale:

$$(12)\qquad f(y) = \varphi(y) + \int_{\alpha y}^{y} \varphi(x)\,\mathrm{K}(x, y)\,dx \qquad \begin{pmatrix} 0 > \alpha > -1 \\ a > y > \alpha a \end{pmatrix},$$

con $\varphi(x)$ funzione incognita.

Essa potrà ridursi alla (10), basterà perciò supporre:

$$\mathrm{K}(x, y) = 0 \quad \text{per} \begin{cases} \alpha y > x > -y \\ a > y > \alpha a \end{cases} \quad \text{e per} \begin{cases} \alpha a > y > -a \\ y > x > -y, \end{cases}$$

e prolungare la funzione $f(y)$ per y compreso fra αa e $-a$ in maniera arbitraria pur di conservarla atta alla integrazione e finita.

Ne risulteranno:

$$\mathrm{S}_{12}^{(0)} = 0 \qquad \text{per} \begin{cases} y > x > -\alpha y \\ a > y > 0 \end{cases}$$

$$\mathrm{S}_{22}^{(0)} = 0 \qquad \text{per} \begin{cases} a > y > -\alpha a \\ y > x > 0 \end{cases}$$

$$\mathrm{S}_{21}^{(0)}(x, y) = 0 \begin{cases} \text{per} \begin{cases} y > x > -\alpha y \\ -\alpha a > y > 0 \end{cases} \\ \text{e per} \begin{cases} a > y > -\alpha a \\ y > x > 0, \end{cases} \end{cases}$$

e per conseguenza $\mathrm{S}_{12}^{(i)}, \mathrm{S}_{21}^{(i)}, \mathrm{S}_{22}^{(i)}$ saranno nulle per quei valori delle variabili x, y pei quali rispettivamente abbiamo indicato esser nulle $\mathrm{S}_{12}^{(0)}, \mathrm{S}_{21}^{(0)}, \mathrm{S}_{22}^{(0)}$ e quindi per gli stessi valori delle variabili x, y saranno pure nulle $s_{12}^{(0)}, s_{21}^{(0)}, s_{22}^{(0)}$ (6) e perciò finalmente la (11) si ridurrà a:

$$(13)\qquad \varphi(y) = f(y) + \int_{\alpha y}^{y} f(x)\,\mathrm{R}(x, y)\,dx,$$

giacché $\mathrm{R}(x, y)$ al pari di $\mathrm{K}(x, y)$ sarà tale che:

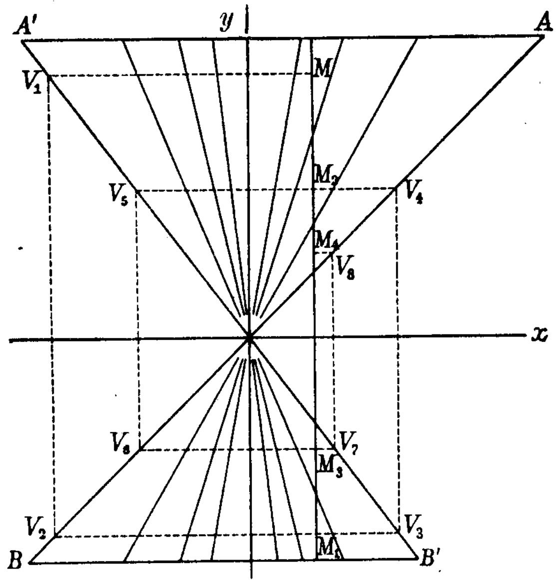
$$\mathrm{R}(x, y) = 0 \quad \text{per} \begin{cases} \alpha y > x > -y \\ a > y > \alpha a \end{cases} \quad \text{e per} \begin{cases} \alpha a > y > -a \\ y > x > -y. \end{cases}$$

8. Ciò premesso passiamo alla risoluzione della equazione funzionale:

$$(3')\qquad f(y) - f(0) = \int_{\alpha y}^{y} \theta(x)\,\mathrm{H}(x, y)\,dx \quad , \quad (a > y > \alpha a),$$

(6) Questi risultati divengono pressoché intuitivi esaminando la questione da un punto di vista geometrico, ossia costruendo nel piano x, y i campi nei quali sono individuate le diverse funzioni che si considerano, marcando le porzioni di essi ove le funzioni stesse si annullano, ed i cammini delle integrazioni mediante le quali si passa dalle $\mathrm{S}_{r,t}^{(i)}$ alle $\mathrm{S}_{r,t}^{i+1}$. Noi ci risparmiamo di riportare qui tali figure che il lettore può da sè facilmente disegnare.

nella ipotesi $0 > \alpha > -1$. Supponendo che $f(y)$, $f'(y)$, $H(x, y)$, $H_2(x, y)$ siano funzioni finite e continue per x, y variabili rispettivamente negl'intervalli $(\alpha y, y)$, $(\alpha a, a)$ e $\theta(x)$ sia la funzione incognita nell'intervallo $(\alpha a, a)$ avremo che le equazioni (4), (5) e (9) seguiteranno a sussistere; e il campo entro il quale si dovranno considerare le funzioni $H(x, y)$, $H_2(x, y)$, $L(x, y)$ sarà costituito dalla figura compresa fra le linee $y = a$ (AA'), $y = \alpha a$ (BB'), $y = x$ (AB), $y = \alpha x$ (B'A'). Si tirino le rette aventi per equazioni $y = \alpha x$, $y = \alpha^2 x$, $y = \alpha^3 x$, $\cdots$ Preso quindi un punto M entro la figura si tracci a



(Nellla figura si è supposto $n = 5$).

partire da esso una poligonale $MV_1\, V_2, V_3 \cdots$ con i lati paralleli agli assi x, y ed avente successivamente i vertici situati sulle rette AB e A'B' e si determinino i punti $M_0 = M$, M_1, M_2, $\cdots$, interni alla figura che la poligonale ha a comune colla parallela all'asse y condotta per M. È facile riconoscere che se M è compreso fra le rette $y = \alpha^{n-1} x$ e $y = \alpha^{n+1} x$, i detti punti saranno n, e le coordinate del punto M_i saranno x, $\alpha^i y$.

Definiamo ora la funzione $K(x, y)$ prendendone il valore nel punto M dato da:

$$L(x, y) - \alpha\lambda(y) L(x, \alpha y) + \alpha^2 \lambda(\alpha y)\lambda(y) L(x, \alpha^2 y) + \cdots$$

$$\cdots + (-1)^n \alpha^n \lambda(\alpha^{n-1} y)\lambda(\alpha^{n-2} y)\cdots\lambda(y) L(x, \alpha^n y)$$

$$= \frac{1}{H(y, y)} \Big\{ H_2(x, y) - \alpha \frac{H(\alpha y, y)}{H(\alpha y, \alpha y)} H_2(x, \alpha y)$$

$$+ \alpha_2 \frac{H(\alpha y, y)}{H(\alpha y, \alpha y)} \frac{H(\alpha^2 y, \alpha y)}{H(\alpha^2 y, \alpha^2 y)} H_2(x, \alpha^2 y) - \cdots$$

$$\cdots + (-1)^n \alpha^n \frac{H(\alpha y, y)}{H(\alpha y, \alpha y)} \frac{H(\alpha^2 y, \alpha y)}{H(\alpha^2 y, \alpha^2 y)} \cdots \frac{H(\alpha^n y, \alpha^{n-1} y)}{H(\alpha^n y, \alpha^n y)} H_2(x, \alpha^n y) \Big\},$$

vale a dire:

$$K(M) = \frac{1}{H(y,y)} \left\{ H_2(M_0) - \alpha \frac{H(V_1)}{H(V_2)} H_2(M_1) + \alpha^2 \frac{H(V_1)}{H(V_2)} \frac{H(V_3)}{H(V_4)} H_2(M_2) - \cdots \right.$$

$$\left. \cdots + (-1)^n \alpha^n \frac{H(V_1)}{H(V_2)} \frac{H(V_3)}{H(V_4)} \cdots \frac{H(V_{2n-1})}{H(V_{2n})} H_2(M_n) \right\}.$$

La funzione $K(x, y)$ sarà in generale discontinua lungo le linee $y = \alpha x$, $y = \alpha^2 x$, $y = \alpha^3 x, \cdots$, e i suoi valori assoluti saranno inferiori ad un numero finito.

Infatti abbiamo:

$$\frac{H(V_{2s-1})}{H(V_{2s})} = 1 + \frac{H(V_{2s-1}) - H(V_{2s})}{H(V_{2s})}.$$

Ora la distanza fra i punti V_{2s-1} e V_{2s} è inferiore o al più eguale a $|a(1-\alpha)\alpha^{s-1}|$, quindi se ε_s denota il limite superiore dei valori assoluti delle differenze fra i valori di $H(x, y)$ in tutte le possibili coppie di punti le cui distanze non superano $|a(1-\alpha)\alpha^{s-1}|$, avremo:

$$|H(V_{2s-1}) - H(V_{2s})| \leq \varepsilon_s,$$

e, chiamando m' il limite inferiore dei valori assoluti di $H(x, x)$, sarà:

$$\left| \frac{H(V_{2s-1})}{H(V_{2s})} \right| \leq 1 + \frac{\varepsilon_s}{m'},$$

d'onde:

$$|K(M)| \leq \frac{m''}{m'} \left\{ 1 - \alpha\left(1 + \frac{\varepsilon_1}{m'}\right) + \alpha^2\left(1 + \frac{\varepsilon_1}{m'}\right)\left(1 + \frac{\varepsilon_2}{m'}\right) - \cdots \right.$$

$$\left. \cdots + (-1)^n \alpha^n \left(1 + \frac{\varepsilon_1}{m'}\right)\left(1 + \frac{\varepsilon_2}{m'}\right) \cdots \left(1 + \frac{\varepsilon_n}{m'}\right) \right\},$$

in cui m'' denota il massimo valore assoluto di $H_2(x, y)$. Ora per la proprietà che hanno le funzioni di esser continue uniformemente abbiamo che:

$$\lim_{s=0} \varepsilon_s = 0,$$

quindi la serie indefinita a termini positivi:

$$T = 1 - \alpha\left(1 + \frac{\varepsilon_1}{m'}\right) + \alpha^2\left(1 + \frac{\varepsilon_1}{m'}\right)\left(1 + \frac{\varepsilon_2}{m'}\right) - \cdots$$

$$\cdots + (-1)^n \alpha^n \left(1 + \frac{\varepsilon_1}{m'}\right)\left(1 + \frac{\varepsilon_2}{m'}\right) \cdots \left(1 + \frac{\varepsilon_n}{m'}\right) + \cdots$$

sarà convergente e per conseguenza:

$$|K(M)| < \frac{m'' T}{m'},$$

il che prova la proposizione enunciata.

In virtù di quanto abbiamo dimostrato la (9) potrà scriversi dunque:

$$\psi(y) = \theta(y) + \int_{\alpha y}^{y} \theta(x) K(x, y)\, dx, \tag{14}$$

e perciò il procedimento esposto nel § 7 [cfr. formule (12) e (13)] ci darà il modo di ricavare la funzione incognita $\theta(x)$ dalla (14).

9. Noi abbiamo fin qui trattato il caso in cui nella equazione funzionale (3) o (3') $|\alpha|$ fosse minore di 1. È evidente che il caso nel quale $|\alpha| > 1$ non presenta difficoltà nuove, giacché si può ricondurre subito al precedente. Basterà perciò cambiare la variabile y, prendendo $z = \alpha y$ e avremo:

$$\int_{\alpha y}^{y} \theta(x)\, H(x, y)\, dx = \int_{z}^{z/\alpha} \theta(x)\, H\left(x, \frac{z}{\alpha}\right) dx,$$

onde, posto $\beta = 1/\alpha$, la equazione funzionale diverrà:

$$f\left(\frac{z}{\alpha}\right) - f(0) = -\int_{\beta z}^{z} \theta(x)\, H\left(x, \frac{z}{\alpha}\right) dx,$$

in cui $|\beta| < 1$.

Resta il caso in cui $\alpha_1 = -1$, nel quale l'equazione funzionale diviene:

$$(15) \qquad f(y) - f(0) = \int_{-y}^{y} \theta(x)\, H(x, y)\, dx \quad , \quad (a > y > -a).$$

Esso è un caso eccezionale che sfugge alle precedenti considerazioni ed in cui la questione assume un carattere diverso. Intanto è da osservare che in questo caso la $f(y)$ non può più scegliersi arbitrariamente, se si vuole che $\varphi(x)$ risulti finita continua e derivabile, giacché derivando due volte l'equazione precedente si trova:

$$f'(0)\, H_2(0, 0) - f''(0)\, H(0, 0) = 0.$$

Ma in casi particolari la $f(y)$ può andar soggetta a limitazioni di una natura ancora più restrittiva. Dalla (15) infatti segue, cambiando y in $-y$:

$$(16) \qquad f(-y) - f(0) = -\int_{-y}^{y} \theta(x)\, H(x, -y)\, dx,$$

quindi se, per esempio, $H(x, -y) = -H(x, y)$ dovrà essere $f(y) = f(-y)$, mentre dovrà essere $f(y) = -f(-y)$ se $H(x, y) = H(x, -y)$ ed il problema funzionale risulterà indeterminato. Noi non staremo ad approfondire qui la questione di risolvere la (15), ma ci limiteremo a mostrare a quale classe di questioni essa appartenga.

Si prenda nelle (15) e (16):

$$f(y) = f_1(y) \quad , \quad f(-y) = f_2(y) \quad , \quad \theta(x) = \theta_1(x) \quad , \quad \theta(-x) = \theta_2(x),$$

$$H(x, y) = H_{11}(x, y) \quad , \quad H(-x, y) = H_{12}(x, y),$$

$$-H(x, -y) = H_{21}(x, y) \quad , \quad -H(-x, -y) = H_{22}(x, y),$$

allora esse diverranno [cfr. § 7]:

$$f_1(x) - f_1(0) = \int_0^y [H_{11}(x, y)\,\theta_1(x) + H_{12}(x, y)\,\theta_2(x)]\,dx,$$

$$f_2(y) - f_2(0) = \int_0^y [H_{21}(x, y)\,\theta_1(x) + H_{22}(x, y)\,\theta_2(x)]\,dx.$$

L'analisi di queste equazioni funzionali è stata fatta nel § 5 della mia prima Nota dell'Accademia dei Lincei, precedentemente citata, quando il determinante:

$$\begin{vmatrix} H_{11}(y, y), H_{12}(y, y) \\ H_{21}(y, y), H_{22}(y, y) \end{vmatrix} \gtrless 0.$$

Nel nostro caso esso si annulla per $y = 0$. Poiché questo determinante compie lo stesso ufficio della funzione $H(y, y)$ nei problemi considerati nel § 11 dell'Art. I, così si riconosce che la questione si presenta come dello stesso tipo di quella che si incontra allorché $H(y, y)$ si annulla per $y = 0$. [Cfr. l'ultimo teorema del § 11 dell'Art. I].

10. Supponiamo che l'equazione funzionale abbia la forma:

$$f(y) = \int_{py}^{qy} \varphi(x)\,H(x, y)\,dx, \tag{17}$$

in cui $|p/q| \lesseqgtr 1$.

Senza alterare la generalità delle nostre considerazioni potremo supporre senz'altro:

$$\left|\frac{p}{q}\right| < 1.$$

Pongasi:

$$qy = z,$$

avremo:

$$f\left(\frac{z}{q}\right) = \int_{\alpha z}^{z} \varphi(x)\,H\left(x, \frac{z}{q}\right) dx,$$

essendo $\alpha = p/q$. L'equazione rientra quindi nella classe di equazioni funzionali precedentemente studiate.

Abbiasi ora l'equazione:

$$f(y) = \int_p^q \varphi(x, y)\,K(x, y)\,dx,$$

in cui p, q sono due limiti costanti arbitrarii, escluso il caso $p/q = 1$.

Posto $xy = \xi$, la relazione precedente diverrà:

$$f(y) = \int_{py}^{qy} \varphi(\xi)\,K\left(\frac{\xi}{y}, y\right) y\,d\xi,$$

e posto:

$$K\left(\frac{\xi}{y}, y\right) y = H(\xi, y),$$

l'ultima equazione diverrà:

$$f(y) = \int_{py}^{qy} \varphi(\xi)\, H(\xi, y)\, d\xi,$$

ossia si ridurrà alla (17). Il problema dunque propostosi da ABEL e di cui fu parlato nel § 1 dell'Art. I potrà risolversi mediante le fatte considerazioni, supposta $K(\xi/y, y)\, y$ finita ed escluso il caso in cui per i limiti si abbia $|p/q| = 1$.

ART. III.

1. Dedicheremo questo articolo ad alcune applicazioni delle formule generali esposte nell'Art. I. Il procedimento ivi indicato nei §§ 10, 11 dà la soluzione dei vari problemi d'inversione mediante delle operazioni di quadratura; in molti casi esse si eseguiscono con facilità ed in particolare quando le funzioni date sono serie di potenze.

2. Cominciamo dal provare come, eseguendo le dette quadrature, le formule (23) e (24) dell'Art. I conducano subito alla formula di SONINE allorché si suppone che $F(u)$ sia una serie di potenze.

Prendiamo:

$$F(u) = \sum_0^\infty{}_h\, a_h u^h \quad , \quad a_0 = 1, \tag{1}$$

tenendo presenti le (24) dell'Art. I, avremo:

$$s_0(v) = \frac{1}{\Gamma(1-\lambda)} \sum_0^\infty{}_h\, a_{h+1} \frac{\Gamma(h-\lambda+2)}{\Gamma(h+1)} v^h,$$

ovvero, ponendo:

$$a_{h+1} \frac{\Gamma(h-\lambda+2)}{\Gamma(1-\lambda)} = c_{h+1},$$

$$s_0(v) = \sum_0^\infty{}_h \frac{c_{h+1}}{\Gamma(h+1)} v^h \quad , \quad c_0 = 1.$$

Abbiamo ora:

$$t_0(v) = \frac{1}{v^{1-\lambda}},$$

e perciò:

$$t_i(v) = \frac{v^i}{v^{1-\lambda}} \sum_0^\infty{}_s\, b_{i,s} v^s \quad , \quad (b_{0,0} = 1\,,\, b_{0,s} = 0),$$

onde:

$$t_{i+1}(v) = \frac{v^{i+1}}{v^{1-\lambda}} \sum_0^\infty {}_r v^r \sum_0^r c_{h+1} b_{i,r-h} \frac{\Gamma(i+r-h+\lambda)}{\Gamma(i+r+\lambda+1)},$$

ossia, ponendo:

$$b_{i,s} = \frac{\beta_{i,s}}{\Gamma(i+s+\lambda)},$$

si ha la formula ricorrente:

$$\beta_{i+1,r} = \sum_0^r {}_h c_{h+1} \beta_{i,r-h} \quad , \quad [\beta_{0,0} = \Gamma(\lambda)]. \tag{2}$$

Abbiamo dunque il modo di calcolare tutte le $t_i(v)$ e per conseguenza $\Omega(v)$.

3. Osserviamo che supponendo la variabile v complessa e $|v|$ minore del raggio di convergenza della serie (1), la funzione:

$$\Theta(v) = v^{1-\lambda}\,\Omega(v) = \sum_0^\infty {}_i (-1)^i v^{1-\lambda} t_i(v),$$

in virtù delle legge con cui decrescono i limiti superiori dei moduli di $t_i(v)$ è una funzione uniforme ed olomorfa. Essa è dunque una serie di potenze di a convergente entro il cerchio di convergenza della (1), quindi risulterà:

$$\Theta(v) = \sum_0^\infty {}_k e_k v^k = \sum_0^\infty {}_k v^k \sum_0^k {}_s (-1)^s b_{s,k-s},$$

da cui segue:

$$e_k = \sum_0^k {}_s (-1)^s b_{s,k-s} = \frac{1}{\Gamma(k+\lambda)} \sum_0^k (-1)^s \beta_{s,k-s}.$$

Si ponga:

$$\varepsilon_k = \sum_0^k {}_s (-1)^s \beta_{s,k-s} \quad , \quad \varepsilon_0 = \Gamma(\lambda),$$

sarà per la (2):

$$\varepsilon_k = \sum_1^k {}_s (-1)^s \sum_0^{k-s} {}_h c_{h+1} \beta_{s-1,k-s-h} = -\sum_0^{k-1} {}_h c_{h+1} \sum_0^{k-h-1} {}_\sigma (-1)^\sigma \beta_{\sigma,k-h-\sigma-1}$$

$$= -\sum_0^{k-1} {}_h c_{h+1} \varepsilon_{k-h-1} = -\sum_1^k c_h \varepsilon_{k-h}.$$

Riassumendo si hanno le formule:

$$F(u) = \sum_0^\infty {}_h a_h u^h \quad , \quad a_0 = 1,$$

$$c_h = \frac{a_h \Gamma(h-\lambda+1)}{\Gamma(1-\lambda)},$$

$$\varepsilon_k = -\sum_1^k {}_h c_h \varepsilon_{k-h},$$

$$e_k = \frac{1}{\Gamma(k+\lambda)} \varepsilon_k,$$

$$\frac{\operatorname{sen} \lambda\pi}{\pi} \Theta(u) = \frac{\operatorname{sen} \lambda\pi}{\pi} \sum_0^\infty {}_k e_k v^k,$$

$$\Omega(v) = \frac{\Theta(v)}{v^{1-\lambda}},$$

le quali ci permettono di calcolare Θ e quindi Ω conoscendo F.

Osserviamo ora che dalla terza delle precedenti equazioni segue:

$$\sum_0^k {}_h c_h \varepsilon_{k-h} = 0, \qquad (k = 1, 2, \cdots),$$

mentre:

$$c_0 \varepsilon_0 = \Gamma(\lambda),$$

perciò se poniamo:

$$1 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots = \rho(x), \tag{3}$$

$$\frac{1}{\Gamma(\lambda)} (\varepsilon_0 + \varepsilon_1 x + \varepsilon_2 x^2 + \cdots) = 1 + \partial_1 x + \partial_2 x^2 + \cdots = \psi(x), \tag{4}$$

si avrà:

$$\rho(x)\, \psi(x) = 1, \tag{5}$$

e quindi:

$$\left\{ \begin{aligned} & F(u) = \Gamma(1-\lambda) \sum_0^\infty {}_h \frac{c_h}{\Gamma(h+1-\lambda)} u^h \\ & \frac{\operatorname{sen} \lambda\pi}{\pi} \Theta(u) = \frac{1}{\Gamma(1-\lambda)} \sum_0^\infty {}_k \frac{\partial_k}{\Gamma(k+\lambda)} v^k, \end{aligned} \right. \tag{6}$$

le quali appunto conducono alla formula di SONINE (cfr. Art. I, § 8).

Il risultato varrebbe anche se la (3) non fosse convergente o si annullasse, ma allora dovremmo attribuire alla (3), (4) e (5) un significato simbolico. La reciprocità delle due serie (6) prova che esse hanno lo stesso cerchio di convergenza.

4. Il precedente risultato può ottenersi anche molto semplicemente dalla equazione (2) colle considerazioni seguenti.

La (2) prova che se poniamo:

$$\rho(v) = \sum_0^\infty c_i v^i,$$

sarà, almeno simbolicamente:

$$\sum_0^\infty{}_r\, \beta_{i+1,r}\, v^{i+1+r} = \left(\sum_0^\infty{}_r\, \beta_{i,r}\, v^{i+r}\right)\left(\sum_1^\infty{}_h\, c_h\, v^h\right) = \left(\sum_0^\infty{}_r\, \beta_{i,r}\, v^{i+r}\right)[\rho(v) - 1],$$

e perciò:

$$\beta_{0,0}\,[-1+\rho(v)]^i = \sum_0^\infty{}_s\, \beta_{i,s}\, v^{i+s},$$

quindi per avere $v^{1-\lambda}\, t_i(v)$ basterà dividere per $\Gamma(h+\lambda)$ il coefficiente del termine di grado h $(h = 1, 2, 3, \cdots, \infty)$ nella serie:

$$\beta_{0,0}[-1 + \rho(v)]^i.$$

Se dunque scriviamo:

$$\Omega(v) = \frac{\Theta(v)}{v^{1-\lambda}},$$

$\Theta(v)$ si otterrà calcolando:

$$\beta_{0,0}\left[\sum_0^\infty (-1)^i\,(-1 + \rho(v))^i\right] = \theta(v),$$

e dividendo quindi il coefficiente del termine di grado h $(h = 1, 2, \cdots, \infty)$ per $\Gamma(h+\lambda)$.

Ora dalla equazione precedente si deduce, almeno simbolicamente:

$$\theta(v) = \frac{\beta_{0,0}}{\rho(v)},$$

per conseguenza:

$$\frac{\operatorname{sen}\lambda\pi}{\pi}\,\theta(v) = \frac{1}{\Gamma(1-\lambda)}\,\frac{1}{\rho(v)},$$

da cui seguono immediatamente le formule (6).

5. Esaminiamo ora le formule (21) e (22) dell'Art. I, supponendo che $F(z)$ sia una serie di potenze.

Poniamo:

$$F(z) = 1 + \sum_1^\infty{}_i\, a_i\, z^i, \tag{7}$$

e scriviamo:

$$s_i(z) = z^i \sum_0^\infty c_{i,h}\, z^h.$$

Avremo intanto:

$$s_0(z) = F'(z) = \sum_1^\infty{}_h\, h a_h\, z^{h-1},$$

quindi:

$$c_{0,h} = (h + 1)\, a_{h+1}. \tag{8}$$

Ma:

$$s_{i+1}(z) = \int_0^z s_0(z-u)\, s_i(u)\, du = \int_0^z u^i \sum_0^\infty {}_r \sum_0^r {}_h\, c_{0,h}\, c_{i,r-h}\, u^{r-h}(z-u)^h\, du$$

$$= \sum_0^\infty {}_r \sum_0^r {}_h\, c_{0,h}\, c_{i,r-h}\, z^{i+r+1} \int_0^1 \xi^{i+r-h}(1-\xi)^h\, d\xi$$

$$= \sum_0^\infty {}_r\, z^{i+r+1} \sum_0^r {}_h\, c_{0,h}\, c_{i,r-h}\, \frac{\Gamma(h+1)\,\Gamma(i+r-h+1)}{\Gamma(i+r+2)},$$

e per conseguenza:

$$c_{i+1,r} = \sum_0^r {}_h\, \frac{c_{0,h}\,\Gamma(h+1)\, c_{i,r-h}\,\Gamma(i+r-h+1)}{\Gamma(i+r+2)}.$$

Posto:

$$e_{i,r} = c_{i,r}\,\Gamma(i+r+1),$$

avremo dunque:

$$e_{i+1,r} = \sum_0^r {}_h\, e_{i,r-h}\, e_{0,h},$$

da cui segue:

$$\sum_0^\infty {}_r\, e_{i+1,r}\, u^r = \left(\sum_0^\infty {}_r\, e_{i,r}\, u^r\right)\left(\sum_0^\infty {}_r\, e_{0,r}\, u^r\right), \tag{10}$$

e perciò:

$$\sum_0^\infty {}_r\, e_{i,r}\, u^r = \left(\sum_0^\infty {}_r\, e_{0,r}\, u^r\right)^{i+1}. \tag{11}$$

Osserviamo che se anche la serie $\sum_0^r {}_r\, e_{0,r}\, u^r$ non fosse convergente, le due formule precedenti conserverebbero il loro significato simbolico e lo stesso può dirsi delle formule seguenti.

Per ottenere dunque $s_i(z)$ basterà fare la potenza $(i+1)^{esima}$ della serie $\sum_0^\infty {}_r\, e_{0,r}\, z^r$, quindi moltiplicarla per z^i e dividere per $\Gamma(i+r+1)$ il coefficiente del termine di grado $i+r$ ($r = 0, 1, 2, \cdots, \infty$).

Si noti ora, come già facemmo nel caso precedentemente studiato, che supponendo z complessa, finché $|z|$ è minore del raggio del circolo di convergenza della serie (7) la funzione:

$$\Theta(z) = \sum_0^\infty {}_i\, (-1)^i\, s_i(z),$$

sarà olomorfa; essa sarà dunque esprimibile con una serie di potenze di z convergente entro il cerchio di convergenza della (7).

Per ottenerla si formi:

$$\sum_0^\infty{}_i (-1)^i z^i \left(\sum_0^\infty{}_r e_{0,r} z^r\right)^{i+1} = \frac{\sum_0^\infty{}_r e_{0,r} z^r}{1 + z \sum_0^\infty{}_r e_{0,r} z^r} = \sum_0^\infty{}_h b_h z^h ,$$

avremo allora:

$$\Theta (z) = \sum_0^\infty{}_h \frac{b_h}{\Gamma (h+1)} z^h .$$

Dalle (7), (8) e (9) si deduce, scrivendo per semplicità e_h invece di $e_{0,h}$:

$$F (z) = 1 + \sum_0^\infty{}_h \frac{e_h}{\Gamma (h+2)} z^{h+1} ,$$

onde potremo enunciare la proposizione seguente:

Posto:

(12) $$\sigma (z) = \sum_0^\infty{}_h e_h z^h ,$$

(13) $$\rho (z) = \frac{\sigma (z)}{1 + z\sigma (z)} = \sum_0^\infty b_h z^h ,$$

e quindi:

(14) $$F (z) = 1 + \sum_0^\infty{}_h \frac{e_h}{\Gamma (h+2)} z^{h+1} ,$$

(15) $$\Theta (z) = \sum_0^\infty{}_h \frac{b_h}{\Gamma (h+1)} z^h,$$

si avrà che l'integrale:

$$f (y) - f (\alpha) = \int_\alpha^y \varphi (x) \, F [\lambda (x) - \lambda (y)] \, dx ,$$

si invertirà mediante la formula:

$$\varphi (y) = f' (y) + \lambda'(y) \int_\alpha^y f (x) \, \Theta [\lambda (x) - \lambda (y)] \, dx ,$$

e per la validità delle formule precedenti basterà mantenersi entro il cerchio di convergenza della serie (14), *anche se le* (12) *e* (13) *non fossero convergenti, attribuendo in questo caso a queste ultime un significato simbolico.*

6. Le formule precedenti possono verificarsi anche direttamente col procedimento seguente.

Affinché:

$$\varphi (y) = f' (y) + \lambda' (y) \int_\alpha^y f' (x) \, \Theta [\lambda (x) - \lambda (y)] \, dx ,$$

Verifichi l'equazione funzionale:

$$f(y) - f(\alpha) = \int_\alpha^y \varphi(x)\, \mathrm{F}[\lambda(x) - \lambda(y)]\, dx \quad , \quad \mathrm{F}(0) = 1,$$

dovremo avere:

$$f(y) - f(\alpha) = \int_\alpha^y f'(x)\, \mathrm{F}[\lambda(x) - \lambda(y)]\, dx$$

$$+ \int_\alpha^y \lambda'(x)\, \mathrm{F}[\lambda(x) - \lambda(y)] \int_\alpha^x f'(\xi)\, \Theta[\lambda(\xi) - \lambda(x)]\, d\xi$$

$$= \int_\alpha^y f'(x)\, \mathrm{F}[\lambda(x) - \lambda(y)]\, dx$$

$$+ \int_\alpha^y f'(\xi)\, d\xi \int_\xi^y \mathrm{F}[\lambda(x) - \lambda(y)]\, \Theta[\lambda(\xi) - \lambda(x)]\, \lambda'(x)\, dx,$$

quindi:

$$\int_\xi^y \mathrm{F}[\lambda(x) - \lambda(y)]\, \Theta[\lambda(\xi) - \lambda(x)]\, \lambda'(x)\, dx = 1 - \mathrm{F}[\lambda(\xi) - \lambda(y)],$$

ovvero:

$$-\int_0^z \mathrm{F}(u)\, \Theta(z - u)\, du = 1 - \mathrm{F}(z),$$

che può anche scriversi:

$$\mathrm{F}(z) - \mathrm{F}(0) = \int_0^z \mathrm{F}(u)\, \Theta(z - u)\, du.$$

Posto:

$$\mathrm{F}(u) = \sum_{0}^{\infty}{}_h\, a_h u^h, \qquad (a_0 = 1),$$

$$\Theta(u) = \sum_{0}^{\infty}{}_h\, \partial_h u^h,$$

dall'equazione precedente risulterà:

$$\sum_{0}^{\infty}{}_r\, z^{r+1} \sum_{0}^{r}{}_h\, a_h \partial_{r-h} \int_0^1 v^h (1 - v)^{r-h}\, dv = \sum_{0}^{\infty}{}_r\, a_{r+1} z^{r+1},$$

onde:

$$a_{r+1} = \sum_{0}^{r}{}_h\, a_h \partial_{r-h} \int_0^1 v^h (1 - v)^{r-h}\, dv = \sum_{0}^{r}{}_h \frac{a_h \Gamma(h+1)\, \partial_{r-h}\, \Gamma(r-h+1)}{\Gamma(r+2)}.$$

Scriviamo:

$$a_{h+1}\,\Gamma(h+2) = e_h = g_{h+1}\,,$$
$$\partial_h\,\Gamma(h+1) = b_h\,,$$

otterremo:

$$e_r = \sum_0^r {}_h\, g_h\, b_{r-h}\,, \qquad (r = 0\,,\,1\,,\,2\,,\cdots)\,,$$

equazione che equivale, almeno simbolicamente, all'altra:

$$\sum_0^\infty {}_r\, e_r\, z^r = \left(\sum_0^\infty {}_r\, b_r\, z^r\right)\left(\sum_0^\infty {}_r\, g_r\, z^r\right).$$

Ma:

$$\sum_0^\infty {}_r\, g_r\, z^r = 1 + z\sum_0^\infty {}_r\, e_r\, z^r\,,$$

quindi:

$$\sum_0^\infty {}_r\, e_r\, z^r = \left(\sum_0^\infty {}_r\, b_r\, z^r\right)\left(1 + z\sum_0^\infty {}_r\, e_r\, z^r\right),$$

onde si avranno immediatamente le (13), (14) e (15).

Gli esempi della stessa specie di quelli ora considerati potrebbero moltiplicarsi all'infinito, noi non staremo a trattarne altri, non presentando essi che difficoltà puramente di calcolo [7].

(7) A complemento delle notizie contenute nell'Art. I, debbo aggiungere che durante la stampa del presente scritto il sig. LE ROUX ha pubblicato nel fascicolo del 18 gennaio dei «Comptes rendus de l'Académie des Sciences» una Nota: *Sur l'équation des télégraphistes*, nella quale accenna ad un teorema sulle funzioni ricavate mediante integrali definiti, rimandando alla sua tesi di laurea, lavoro però che non ho potuto ancora procurarmi.

XXIII.

SUL PRINCIPIO DI DIRICHLET

«Circolo Mat. di Palermo», vol. XI, 1897, pp. 83-86 (*).

1. In quasi tutti i corsi sulla teoria del potenziale newtoniano o logaritmico si suole esporre la dimostrazione di NEUMANN sul principio di DIRICHLET [1].

Ma nella trattazione del detto metodo si incontra ordinariamente una difficoltà, la quale, senza infirmare il metodo stesso, può dar luogo a qualche oscurità.

In un corso di lezioni del 1888 [2] tentai superarla, ed alcuni miei colleghi avendo sperimentato favorevolmente la osservazione che feci in proposito desiderarono che venisse pubblicata, il che mi permetto di far qui brevemente.

Noterò ancora che ci si può valere della stessa osservazione nell'esporre il metodo di ROBIN per la determinazione della densità d'uno strato di livello [3] e così in alcune altre questioni analoghe.

2. Non starò a spiegare in che cosa consista la dimostrazione di NEUMANN e mi varrò senz'altro della denominazione di *funzione aggiunta* ormai generalmente adottata.

Col metodo di NEUMANN si giunge a provare che se U è una funzione finita e continua data sul contorno convesso e P è la sua aggiunta, si ha

$$\frac{\text{oscillazione P}}{\text{oscillazione U}} < \lambda < 1,$$

in cui λ è un numero indipendente dalla funzione U, ma che dipende solo dalla forma del contorno.

Tale dimostrazione è pienamente rigorosa quando è possibile dividere il contorno in un numero finito di pezzi in alcuni dei quali U è superiore al suo valore medio [4], mentre negli altri è inferiore o eguale al valore medio stesso.

(*) Presentata nell'adunanza del 28 febbraio 1897.

(1) *Über die Methode des aritmetischen Mittels.* «Abhand. d. math.-phys. Classe d. Königl. Sächs. Gesell. d. Wissenschaften», Bd. XIII, p. 705, 1887, Bd. XIV, p. 563, 1888.

(2) In quell'anno mi limitai al potenziale logaritmico. Il dott. BIGIAVI in un corso successivo applicò lo stesso procedimento al potenziale newtoniano.

(3) «Comptes Rendus des séances de l'Académie des Sciences», t. CIV, p. 1834, 1887.

(4) Per valore medio intendo qui la media fra il massimo ed il minimo valore della funzione.

Ma nel caso del potenziale logaritmico in cui il contorno è una linea si vede facilmente che questo fatto potrà non presentarsi quando la funzione U fa un numero infinito di oscillazioni pur essendo continua, e nel caso del potenziale newtoniano si comprende facilmente che la detta divisione in due parti del contorno darà luogo a difficoltà ancora maggiori.

Per togliere nelle dimostrazioni ogni dubbio, che perciò potrebbe presentarsi, basterà provare che ogni funzione finita e continua U può mettersi sotto la forma di una serie convergente in egual grado

$$U = \sum_1^\infty U_i \,, \tag{1}$$

in cui per ciascuna $\sum_1^n U_i$ può eseguirsi la divisione del contorno in un numero finito di parti, in alcune delle quali $\sum_1^n U_i$ sia maggiore del suo valor medio, mentre nelle rimanenti è minore o eguale al detto valore; giacché, una volta dimostrato questo, avremo che la serie delle funzioni aggiunte $P = \sum_1^\infty P$ sarà pure uniformemente convergente, e

$$\frac{\text{oscillazione} \sum_1^n P_i}{\text{oscillazione} \sum_1^n U_i} < \lambda \,;$$

quindi il rapporto

$$\frac{\text{oscillazione } P}{\text{oscillazione } U} = \frac{\text{oscillazione} \sum_1^n P_i}{\text{oscillazione} \sum_1^n U_i}$$

non potrà superare λ.

3. Ora il detto teorema, nel caso in cui il contorno in cui è definito U è lineare, si dimostra così.

La U può ritenersi come una funzione di una variabile x definita in un intervallo (ab); onde, considerando x, y come un sistema di coordinate cartesiane, $y = U(x)$ rappresenterà una linea L nel piano x, y.

Dividiamo (ab) in n_i parti in modo che entro ciascuna di esse U faccia una oscillazione minore di σ/i. Prendiamo i punti di L che hanno per proiezione sull'asse x i punti di divisione, consideriamo la spezzata che ha per vertici i detti punti di L, e chiamiamo $y = f_i(x)$ la sua equazione. Allora la serie (1) sarà subito costruita prendendo

$$U_i = f_i - f_{i-1} \quad , \quad f_0 = 0 \,.$$

Nel caso in cui il contorno sia una superficie convessa proiettiamola da un punto interno sopra una superficie sferica avente il centro in quel punto.

Potremo evidentemente considerare U come una funzione dei punti della superficie sferica e, determinando questi punti mediante la latitudine θ e la longitudine φ, potremo considerare U come una funzione di θ e φ. Supponendo poi che θ, φ, z siano un sistema di coordinate cartesiane, avremo che $z = U(\theta, \varphi)$ rappresenterà una superficie che si proietterà sul piano θ, φ secondo un rettangolo di lati rispettivamente eguali a π e a 2π.

Si divida questo rettangolo colle parallele agli assi in n_i rettangoli in modo che corrispondentemente a ciascuno di essi la oscillazione della funzione $z = U(\theta, \varphi)$ sia minore di σ/i [5] e si inscriva entro la superficie una superficie poliedrica a facce triangolari i cui vertici si proiettino nei punti di divisione. Se $z = f_i(\theta, \varphi)$ è l'equazione di questa superficie poliedrica, si otterrà la serie (1) prendendo $U_i = f_i - f_{i-1}, f_0 = 0$.

4. La dimostrazione fatta nel paragrafo precedente nel caso del contorno lineare consiste nel dedurre dal principio della continuità uniforme la proprietà che ha qualsiasi funzione finita e continua di potersi considerare come limite di una funzione finita e continua *avente un numero limitato di massimi e di minimi*, la quale tende uniformemente alla prima.

Questa proprietà giova in vari casi, oltre che nella dimostrazione del principio di DIRICHLET. Così, per esempio, tenendo conto che una funzione finita e continua che ha un numero limitato di massimi e di minimi è sviluppabile in serie di FOURIER uniformemente convergente, potremo concludere senz'altro che ogni funzione finita e continua ammette una rappresentazione mediante un polinomio finito di FOURIER con una approssimazione data qualsiasi.

Questo bel teorema che il PICARD [6] deduce dall'integrale di POISSON e dal quale egli fa dipendere una celebre proposizione di WEIERSTRASS risulta così provato in via immediata e diretta.

Torino, 15 febbraio 1897.

(5) Ciò potrà farsi giacchè le funzioni continue di più variabili sono, al pari di quelle ad una variabile, uniformemente continue.

(6) Traité d'Analyse, Tome I, page 257.

XXIV.

SULLA SCARICA ELETTRICA NEI GAS E SOPRA ALCUNI FENOMENI DI ELETTROLISI

« Rend. Acc. Lincei », Serie 5ª, vol. VI, 1897, p. 389 (*).

I.

1. In due Note presentate a quest'Accademia nelle sedute del 26 aprile e del 17 maggio dell'anno scorso, i signori SELLA e MAIORANA esposero i risultati di una loro notevole osservazione sopra l'azione dei raggi ultravioletti e dei raggi RÖNTGEN sulla scarica esplosiva nell'aria.

Essi trovarono che non sempre l'azione dei detti raggi facilita la scarica; ma talvolta il fenomeno si inverte, per modo che l'azione dei raggi stessi talora impedisce anziché facilitare il prodursi delle scintille esplosive.

Un esame accurato dell'andamento del fenomeno fece loro conoscere che, allorquando la distanza fra le palline di uno spinterometro è inferiore ad un dato limite, l'azione della luce ultravioletta o dei raggi RÖNTGEN tende a facilitare la scarica, e ciò quando la detta azione si esercita nella regione adiacente a quella pallina che funge da catodo, mentre, allorché la distanza esplosiva è superiore al limite stesso, il fenomeno si inverte e la produzione delle scintille viene impedita: purché l'azione dei raggi ultravioletti o di quelli RÖNTGEN si eserciti all'anodo. Quel limite che separa le distanze in cui il fenomeno si manifesta nella prima maniera (*diretta*) da quello in cui esso si inverte, i signori SELLA e MAIORANA chiamarono *distanza neutra*, e riconobbero che, sebbene difficile a determinarsi praticamente, pure essa è dell'ordine stesso di grandezza del raggio di curvatura degli elettrodi fra cui avviene la scarica.

Gli stessi autori trovarono pure che il fenomeno diretto si manifesta più intensamente allorché si ingrandiscono i detti raggi di curvatura, mentre il fenomeno inverso si presenta più spiccatamente, coll'impiccolire dei raggi di curvatura stessi.

Accennerò ancora che il prof. GARBASSO nel luglio dell'anno scorso ha ottenuto un risultato analogo al precedente, alterando l'aria adiacente alle palline dello spinterometro, anziché coll'azione dei raggi ultravioletti o di RÖNTGEN, mediante i prodotti della combustione.

(*) Presentata nella seduta del 5 giugno 1897.

2. È ben noto, ora, che da varii autori si ammette che il passaggio della elettricità attraverso gli aeriformi sia un fenomeno della stessa natura della elettrolisi. Nel 2º Capitolo, avente per titolo: *The passage of electricity through gases*, dell'opera: *Notes on recent researches in electricity and magnetism*, del prof. J. J. THOMSON, può trovarsi la enumerazione ed una sottile discussione degli argomenti che stanno in favore di questa importante analogia (1).

Si presenta quindi spontanea la questione di cercare se esiste nessun fenomeno elettrolitico il cui andamento si presenti in maniera analoga a quello, secondo cui i sigg. SELLA e MAIORANA riconobbero avvenire il fenomeno della scarica sotto l'influenza dei raggi ultravioletti o dei raggi RÖNTGEN. Onde procedere a questa ricerca bisognerà evidentemente immaginare di avere, anziché uno spinterometro, un voltametro, ed all'azione perturbatrice che i signori SELLA e MAIORANA esercitavano mediante i raggi ultravioletti o i raggi RÖNTGEN sul gas che circondava le palline dello spinterometro, basterà immaginare sostituita una perturbazione dell'elettrolita adiacentemente al catodo od all'anodo, la quale ne alteri la conducibilità alterando la dissociazione, o la concentrazione, o la natura dell'elettrolita stesso.

Ora gli effetti di una simile perturbazione nel voltametro si calcolano facilmente, giacché essa, oltre ad alterare la conducibilità, fa nascere una forza elettromotrice la cui sede è lungo la superficie di separazione o di contatto, della parte perturbata con quella non perturbata, ed altera inoltre la forza elettromotrice di contatto fra elettrodo e soluzione (2).

Riesce quindi facile vedere quale perturbazione si ha nella corrente che circola nel voltametro in virtù di quella esercitata nell'elettrolita e discuterne gli effetti, sia che essa avvenga adiacentemente al catodo che all'anodo. Si riconosce così che l'*alterazione della corrente avviene con leggi il cui carattere è analogo a quello che* SELLA *e* MAIORANA *trovarono nel fenomeno da essi studiato.*

3. Il calcolo è del tutto elementare quando si ammette che gli elettrodi siano due lastre parallele e la corrente che circola nel voltametro sia ad esse normale, ma in tal modo non si può tener conto delle dimensioni degli elettrodi e del loro effetto sulla intensità del fenomeno. Nessuna difficoltà di analisi però si presenta, quando si prendono come elettrodi due cilindri paralleli e si immagina che nell'elettrolita indefinito che li circonda, la corrente circoli parallelamente ad un piano normale agli assi dei due cilindri, purché si ammetta di limitare la perturbazione dell'elettrolita entro una superficie equipotenziale che circonda l'uno o l'altro elettrodo. In tal modo si può calcolare l'influenza del raggio dei due cilindri.

(1) Vedi anche A. RIGHI, *Sulla propagazione dell'elettricità nei gas attraversati dai raggi di Röntgen*. «Mem. della R. Acc. di Bologna», ser. V, t. VI.

(2) È inutile che ricordi le ricerche sulle forze elettromotrici nelle pile a concentrazione, quelle dovute al contatto di soluzioni di uno stesso sale sciolto in due solventi diversi ecc., le quali mostrano che ogni perturbazione dell'elettrolita deve essere in generale accompagnata dalla produzione delle forze elettromotrici accennate.

Scopo della presente Nota è appunto di esporre i detti calcoli relativi al passaggio dell'elettricità in un elettrolita discutendo l'alterazione prodotta da una perturbazione di questo adiacentemente al catodo ed all'anodo. Non intendo con ciò di aver data una spiegazione di un fenomeno così complesso quale è quello dell'azione della luce sulla scarica esplosiva, ma solo di aver mostrato una analogia dell'andamento di esso rispetto a quelli elettrolitici.

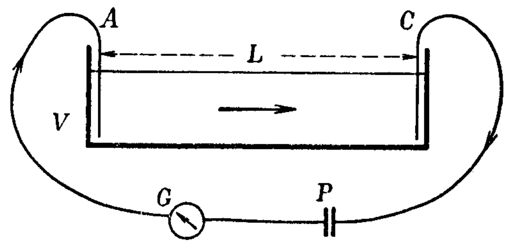


Fig. 1.

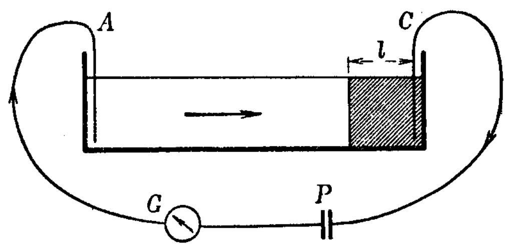


Fig. 2.

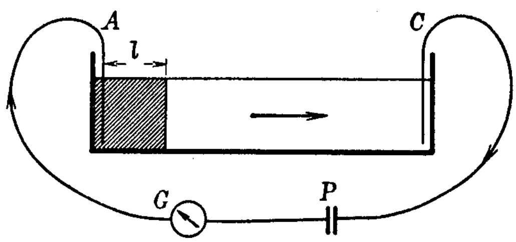


Fig. 3.

[La parte tratteggiata denota la porzione perturbata dell'elettrolita].

II.

1. Supponiamo di lasciar passare la corrente di una pila P in una soluzione contenuta in un voltametro V i cui elettrodi A e C siano rispettivamente l'anodo e il catodo. Misuriamo la intensità della corrente mediante un galvanometro G inserito nel circuito.

Per semplicità ammetteremo che il voltametro sia una vaschetta a base rettangolare e gli elettrodi siano due lastrine disposte verticalmente lungo due pareti opposte alla distanza L, in modo che si possa ritenere che la corrente circoli normalmente ad esse, come indica la fig. 1 in cui è rappresentata una sezione verticale del voltametro.

2. Si supponga ora che lungo un tratto l del voltametro si induca una perturbazione nell'elettrolita (se ne cambi per esempio la concentrazione, o si alteri il solvente, o in una maniera qualsiasi si alteri il grado di dissociazione dell'elettrolita, ecc.). Noi possiamo immaginare che la perturbazione sia avvenuta successivamente nella regione adiacente al catodo e all'anodo. Chiamiamo I_1, I_2, I_3 le intensità della corrente misurata dal galvanometro G nei tre casi rappresentati dalle figure 1, 2, 3; per ottenerne i rapporti denotiamo rispettivamente con

R la resistenza dell'elettrolita non perturbato;

R' la resistenza dell'elettrolita perturbato;

E la forza elettromotrice della pila P.

Consideriamo finalmente la coppia così formata:

Soluz. non perturbata	Soluzione perturbata
————	————→

gli elettrodi essendo costituiti della stessa sostanza di quelli del voltametro V, e diciamo ε la forza elettromotrice di questa coppia, colla convenzione di prendere ε positivo quando chiudendo il circuito la corrente circola nel liquido nel verso della freccia, mentre ε sia negativo se chiudendo il circuito il verso della corrente è opposto. Per intenderci diremo, se ε è positivo, che *la perturbazione rende la soluzione elettropositiva rispetto a quella non perturbata*, e nel caso opposto diremo che *la rende elettronegativa.*

Ciò posto avremo, denotando con s l'area della sezione del voltametro normale alla direzione della corrente, e trascurando la resistenza del circuito metallico, che le tre intensità I_1, I_2, I_3, saranno,

$$I_1 = \frac{Es}{LR} \quad , \quad I_2 = \frac{(E+\varepsilon)\, s}{lR' + (L-l)\, R} \quad , \quad I_3 = \frac{(E-\varepsilon)\, s}{lR' + (L-l)\, R}$$

da cui segue:

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{1 + \dfrac{\varepsilon}{E}}{1 - \dfrac{l}{L}\,\dfrac{R-R'}{R}} \quad , \quad \frac{I_3}{I_1} = \frac{1 - \dfrac{\varepsilon}{E}}{1 - \dfrac{l}{L}\,\dfrac{R-R'}{R}} .$$

3. Immaginiamo ε positiva e $R > R'$; avremo allora:

1° la intensità I_2 è sempre maggiore della intensità I_1; ma il rapporto I_2/I_1 andrà diminuendo coll'aumentare della lunghezza L, mantenendo fissa la lunghezza l;

2° il rapporto I_3/I_1 potrà avere valori più grandi e più piccoli di 1, a seconda del rapporto l/L, ma sarà sempre minore del rapporto I_2/I_1.

Passiamo ora a determinare quando I_3/I_1 sarà più grande e quando minore dell'unità. Poniamo perciò

$$\frac{I_3}{I_1} = \frac{1 - \dfrac{\varepsilon}{E}}{1 - \dfrac{l}{L}\,\dfrac{R-R'}{R}} \gtreqless 1 ;$$

ne dedurremo:

$$\frac{L}{l} \lesseqgtr \frac{E}{\varepsilon} \cdot \frac{R - R'}{R} = h,$$

cioè se la lunghezza totale L del voltametro supererà h volte la lunghezza l, la intensità I_3 sarà inferiore ad I_1; mentre se la lunghezza L sarà inferiore a h volte la lunghezza l, la intensità I_3 sarà superiore ad I_1. Finalmente se $L = hl$, I_3 sarà eguale ad I_1.

Supponiamo che L sia così grande rispetto ad l da poter trascurare il rapporto l/L, avremo allora

$$\frac{I_3}{I_1} = 1 - \frac{\varepsilon}{E} \quad , \quad \frac{I_1}{I_2} = \frac{1}{1 + \frac{\varepsilon}{E}} = \frac{1 - \frac{\varepsilon}{E}}{1 - \frac{\varepsilon^2}{E^2}}$$

cioè il rapporto I_3/I_1 sarà più piccolo del rapporto I_1/I_2.

Riassumendo, possiamo enunciare il fatto seguente:

Se una corrente elettrica circola in un voltametro, e perturbiamo l'elettrolita lungo un tratto di lunghezza costante, in modo da aumentarne la conducibilità e da rendere la soluzione elettropositiva rispetto alla parte non perturbata:

1° *finché la distanza degli elettrodi sarà inferiore ad un certo valore il passaggio dell'elettricità verrà facilitato tanto se la perturbazione avviene adiacentemente al catodo che all'anodo; però sarà più efficace l'azione se essa avverrà verso il catodo;*

2° *per una certa distanza degli elettrodi (distanza neutra) l'azione perturbatrice esercitata all'anodo sarà senza influenza sul passaggio dell'elettricità;*

3° *superata la distanza neutra, l'azione perturbatrice esercitata all'anodo si invertirà, cioè anziché facilitare renderà più difficile il passaggio dell'elettricità;*

4° *l'azione perturbatrice esercitata al catodo faciliterà sempre il passaggio dell'elettricità, però la sua efficacia diminuirà coll'aumentare della distanza degli elettrodi e finirà col divenire inferiore all'azione inversa che si può esercitare all'anodo, allorché è oltrepassata la distanza neutra.*

La *distanza neutra* dedotta dalle formule precedenti risulta

$$\text{(1)} \qquad L = l \frac{E}{\varepsilon} \cdot \frac{R - R'}{R} = l \cdot \frac{\left(\frac{R - R'}{R}\right)}{\left(\frac{\varepsilon}{E}\right)}$$

ed evidentemente L ed l risulteranno dello stesso ordine di grandezza, se i rapporti ε/E, $(R - R')/R$ saranno pure dello stesso ordine di grandezza.

Noi abbiamo supposto $\varepsilon > 0$, $R > R'$, sarebbe facile vedere ciò che si avrebbe se invece di queste condizioni ne fossero verificate altre; così per esempio se si avesse $\varepsilon < 0$, $R > R'$, la precedente proposizione varrebbe, purché si permutassero fra loro le parole *anodo* e *catodo*.

4. È ovvio che le leggi enunciate precedentemente nell'ipotesi $\varepsilon > 0$, $R > R'$, presentano una notevole analogia con quelle che i sigg. SELLA e MAIORANA stabilirono per la scarica esplosiva nell'aria alla pressione ordinaria, quando si ammetta che la facilitazione nella produzione della scarica esplosiva corrisponda alla facilitazione del passaggio della elettricità attraverso il voltametro.

Si osservi inoltre che la scoperta di RIGHI e di HALLWACHS della tendenza che ha una superficie metallica esposta alla luce ultravioletta di caricarsi positivamente (3), fa avvicinare il caso di SELLA e MAIORANA a quello in cui sia $\varepsilon > 0$, mentre tutto fa ritenere che debba anche aversi nel caso stesso $R > R'$.

Osserverò finalmente che la formula (1) prova che la distanza neutra può conservarsi sufficientemente piccola anche se ε è piccolissimo rispetto ad E, purché anche la corrispondente variazione di resistenza $R - R'$ sia piccola comparativamente a quella iniziale.

5. Chiuderemo quest'articolo con due esempii pratici.

1° Supponiamo che il voltametro V contenga una soluzione di solfato di rame con elettrodi di rame e la perturbazione dell'elettrolita consista in una maggior concentrazione della soluzione. Sia la densità della soluzione iniziale 1,020, e quella della soluzione perturbata 1,175. Potremo prendere approssimativamente (4)

$$\varepsilon = 0,^{\text{volta}}16 \qquad (\varepsilon > 0)$$

$$R = \frac{10^8}{76} \quad , \quad R' = \frac{10^8}{399} \qquad (R > R')$$

se supponiamo $E = 1$ volta, avremo che la distanza neutra risulterà circa

$$L = 5l,$$

e l'inversione nel fenomeno avverrà eseguendo la perturbazione adiacentemente all'anodo.

2° Supponiamo che il voltametro contenga una soluzione alcoolica diluita di cloruro di calcio con elettrodi di platino, e la perturbazione consista nel cambiare il solvente sostituendo l'acqua all'alcool e non variando la concentrazione. Prenderemo approssimativamente (5)

$$\varepsilon = -0,^{\text{volta}}3 \quad , \quad \frac{R}{R'} = \frac{750}{47}$$

e avremo che, se $E = 1$, la distanza neutra sarà circa

$$L = 3,1\,l$$

(3) Sembra probabile, sebbene non ancora definitivamente provato, che i raggi RÖNTGEN si comportino, anche sotto questo rapporto, analogamente ai raggi ultravioletti, come per primo ha osservato il prof. RIGHI.

(4) G. WIEDEMANN, *Die Lehre von der Electr.*, II Auflage. Bd. I., s. 777.

(5) Cfr. CAMPETTI, *Sulla differenza di potenziale fra le soluzioni alcooliche ed acquose di un medesimo sale.* «Atti della R. Accademia di Torino», vol. XXIX.

e, siccome $\varepsilon < 0$, l'inversione del fenomeno avverrà eseguendo la perturbazione adiacentemente al catodo.

III.

1. Supponiamo che un elettrolita indefinito sia attraversato da una corrente elettrica stazionaria, e gli elettrodi siano costituiti da due cilindri indefiniti, paralleli, di raggio eguale, immersi in esso. Potremo esaminare la corrente in un piano σ, normale agli assi dei due cilindri, parallelamente al quale la corrente stessa passerà.

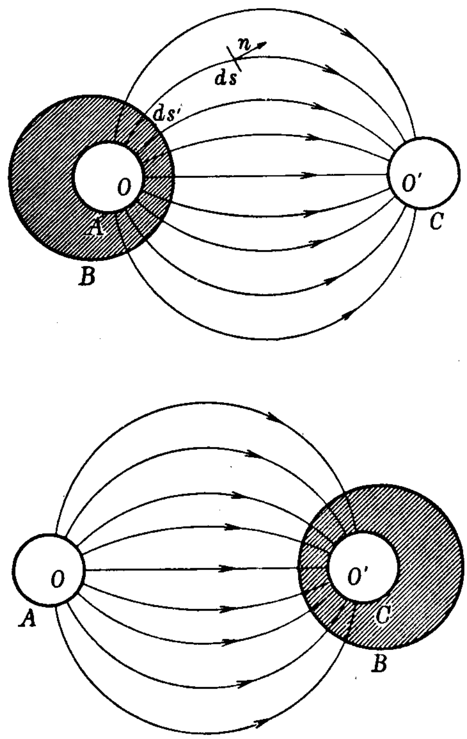


Fig. 4.

[La parte tratteggiata denota la porzione perturbata dall'ettrolita].

Consideriamo le intersezioni dei due cilindri col detto piano, e immaginiamo che i due cerchi A e C così ottenuti facciano parte di un sistema di linee coordinate *dipolari* [(6)].

Se ammettiamo che il potenziale abbia un valore costante sopra ciascuna superficie dei due elettrodi, allora tutte le circonferenze passanti per i due *poli* O , O′ costituiranno le linee di corrente e tutte le circonferenze normali ad esse saranno le linee equipotenziali.

(6) E. Betti, *Teoria delle forze newtoniane*, Cap. II, § VI.

Indichiamo con r, r' le distanze di un punto generico dai due poli O, O'; il potenziale sarà dato da

$$\Phi = a \log \frac{r}{r'}$$

in cui a denota una costante. Sia ora m la minima distanza del polo O dalla circonferenza A e l la distanza fra i due poli. I valori di Φ sopra A e sopra C saranno rispettivamente

$$\Phi_A = a \log\left(\frac{m}{l-m}\right) \quad , \quad \Phi_C = a \log\left(\frac{l-m}{m}\right)$$

da cui segue che la forza elettromotrice risulterà

$$E = -2\, a \log\left(\frac{l-m}{m}\right)$$

e quindi, essendo A l'anodo e C il catodo.

$$\Phi = \frac{E}{2\, R \log\left(\frac{l-m}{m}\right)} \log \frac{r'}{r}\,.$$

Se chiamiamo $i ds$ la quantità di elettricità che fluisce normalmente all'elemento ds nell'unità di tempo, avremo (7)

$$i = \frac{E}{2\, R \log\left(\frac{l-m}{m}\right)} \frac{d}{dn} \log \frac{r}{r'} \tag{2}$$

essendo n la normale a ds ed R la resistenza dell'elettrolita.

2. Supponiamo ora di perturbare l'elettrolita adiacentemente all'anodo A in modo che questa perturbazione avvenga internamente ad un cilindro che lo avvolge, parallelo ad esso. Per semplicità ammetteremo che l'intersezione di questo cilindro col piano σ sia una circonferenza B ortogonale alle precedenti linee di corrente: in tale ipotesi le linee stesse non verranno alterate.

Denotiamo con R' la resistenza perturbata e con ε la forza elettromotrice della coppia:

Soluz. non perturbata	Soluzione perturbata
$\longrightarrow$	$\longrightarrow$

supponendo gli elettrodi costituiti della stessa sostanza della quale sono formati i cilindri A e C.

Chiamiamo p la minima distanza del polo O dalla circonferenza B. Il potenziale nello spazio incluso fra A e B sarà dato da

$$\Phi_1 = a_1 \log \frac{r}{r'} + b,$$

(7) KIRCHHOFF, *Vorlesungen über Electricität und Magnetismus*, neunte Vorlesung.

e nello spazio compreso fra B e C, da

$$\Phi_2 = a_2 \log \frac{r}{r'},$$

in cui a_1, a_2, b sono quantità costanti.

Sopra B avremo che i valori di Φ_1 e Φ_2 saranno rispettivamente

$$\Phi_{1,B} = a_1 \log \frac{p}{l-p} + b \quad , \quad \Phi_{2,B} = a_2 \log \frac{p}{l-p} ,$$

donde

$$\varepsilon' = \Phi_{1,B} - \Phi_{2,B} = (a_1 - a_2) \log \frac{p}{l-p} + b. \tag{3}$$

Sopra A e C i valori di Φ_1 e Φ_2 diverranno

$$\Phi_{1,A} = a_1 \log \frac{m}{l-m} + b \quad , \quad \Phi_{2,C} = a_2 \log \frac{l-m}{m}$$

e perciò

$$E - \varepsilon'' = \Phi_{1,A} - \Phi_{2,C} = (a_1 + a_2) \log \frac{m}{l-m} + b. \tag{4}$$

Se la forza elettromotrice della corrente primaria è rimasta inalterata dovremo avere

$$\varepsilon' + \varepsilon'' = \varepsilon,$$

e quindi, sottraendo membro a membro la (3) dalla (4),

$$E - \varepsilon'' - \varepsilon' = E - \varepsilon = a_1 \log \frac{m(l-p)}{p(l-m)} + a_2 \log \frac{mp}{(l-m)(l-p)} .$$

La quantità di elettricità che arriva normalmente all'elemento ds' del cerchio B dall'interno di esso sarà

$$\frac{a_1}{R'} \frac{d}{dn} \log \frac{r}{r'} ds'$$

e quella che esce dall'elemento stesso diretta verso lo spazio esterno

$$\frac{a_2}{R} \frac{d}{dn} \log \frac{r}{r'} ds'.$$

Dovendo la corrente esser stazionaria, avremo

$$\frac{a_1}{R'} = \frac{a_2}{R} = \frac{a_1 \log \dfrac{m(l-p)}{p(l-m)} + a_2 \log \dfrac{mp}{(l-m)(l-p)}}{R' \log \dfrac{m(l-p)}{p(l-m)} + R \log \dfrac{mp}{(l-m)(l-p)}}$$

$$= \frac{E - \varepsilon}{R' \log \dfrac{m(l-p)}{p(l-m)} + R \log \dfrac{mp}{(l-m)(l-p)}} .$$

Se dunque la quantità di elettricità che fluisce attraverso l'elemento generico ds dell'elettrolita nell'unità di tempo è $i'ds$, otterremo

$$i' = \frac{E - \varepsilon}{R' \log \dfrac{p(l-m)}{m(l-p)} + R \log \dfrac{(l-m)(l-p)}{mp}} \frac{d}{dn} \log \frac{r}{r'} ,$$

e quindi (vedi (2))

$$(5)\qquad k' = \frac{i'}{i} = \frac{1-\dfrac{\varepsilon}{E}}{1-\left(\dfrac{R-R'}{2R}\right)(1-x)},$$

avendo posto

$$(6)\qquad x = \frac{\log\left(\dfrac{l-p}{p}\right)}{\log\left(\dfrac{l-m}{m}\right)}.$$

Ciò dimostra che *la densità della corrente è cambiata in ogni punto dell'elettrolita nello stesso rapporto k'.*

3. Supponiamo ora che quella stessa perturbazione che abbiamo prodotta nella regione adiacente all'anodo abbia invece luogo nella regione simmetrica adiacente al catodo; l'effetto di essa potrà calcolarsi sostituendo nella formula precedente – E in luogo di E. Quindi se $i''\,ds$ denota la quantità di elettricità che fluisce nell'unità di tempo attraverso all'elemento generico ds in seguito a questa perturbazione, avremo

$$(7)\qquad k'' = \frac{i''}{i} = \frac{1+\dfrac{\varepsilon}{E}}{1-\dfrac{R-R'}{2R}(1-x)}$$

ossia *la densità della corrente sarà cambiata in ogni punto dell'elettrolita nello stesso rapporto k''.*

4. Per discutere i valori di k' e k'', converrà studiare la funzione x. Osserviamo intanto che essendo

$$l > 2p > 2m$$

risulterà

$$1 > x > 0.$$

Poniamo $l = 2L$ e chiamiamo r il raggio dei cerchi A e C, ed r' quello di B; si avrà

$$\frac{l-p}{p} = \frac{L+\sqrt{L^2+r'^2}}{r'}\quad,\quad \frac{l-m}{m} = \frac{L+\sqrt{L^2+r^2}}{r}$$

e se chiamiamo D la distanza degli assi degli elettrodi sarà

$$L = \sqrt{D^2-r^2}.$$

Scriviamo [8]

$$(8)\qquad \operatorname{senh} u' = \frac{L}{r'}\,,\qquad\qquad (8')\qquad \operatorname{senh} u = \frac{L}{r}\,;$$

(8) Cfr. BETTI, op. cit., p. 189 e sgg.

otterremo

$$\frac{l-p}{p}=e^{u'} \quad , \quad \frac{l-m}{m}=e^{u}$$

onde

(9) $$x=\frac{u'}{u}\,.$$

Si riconosce subito che x è una *funzione crescente di* L. Avremo infatti in virtù delle (9), (8) e (8')

(10) $$\frac{dx}{dL}=\frac{\operatorname{tgh} u \operatorname{tgh} u'}{Lu^2}\left(\frac{u}{\operatorname{tgh} u}-\frac{u'}{\operatorname{tgh} u'}\right).$$

Ma $u/\operatorname{tgh} u$ è una funzione crescente, e siccome $u > u'$, giacché $r' > r$, così $u/\operatorname{tgh} u > u'/\operatorname{tgh} u'$ e perciò

$$\frac{dx}{dL}>0\,.$$

Facendo crescere in uno stesso rapporto L , r , r', la x non cambia; dunque *mantenendo fisso* L *e facendo crescere* r *ed* r', *nello stesso rapporto,* x varierà come se la sola L decrescesse, e per ciò x *diminuirà.*

Diminuiamo r , r', L in uno stesso rapporto, in modo che u , u', x non cambino. Dalla (10) segue che dx/dL *crescerà nel rapporto inverso a quello in cui diminuiscono* r , r', L.

5. Ciò premesso possiamo esaminare come variano k' e k'' col mutare di r , r', L. Limitiamoci a supporre $\varepsilon > 0$, $R > R'$, giacché sarebbe facile vedere quali modificazioni subirebbero i risultati se invece di queste fossero soddisfatte altre condizioni (cfr. art. II, § 3).

Dalla (7) potremo ricavare $k'' > 1$, onde:

Una perturbazione nella regione adiacente al catodo che aumenta la conducibilità e rende la soluzione perturbata elettropositiva, facilita il passaggio dell'elettricità nell'elettrolita.

Siccome x cresce con L e decresce con r e r', avremo che *il fenomeno sarà tanto più sensibile quanto più vicini saranno gli elettrodi e quanto più grandi ne saranno i raggi e la corrispondente regione perturbata dell'elettrolita.*

Quanto a k', esso potrà essere maggiore o minore dell'unità a seconda della distanza degli elettrodi.

Per ottenere la distanza in cui $k' = 1$, basterà prendere

$$x=1-2\,\frac{\left(\dfrac{\varepsilon}{E}\right)}{\left(\dfrac{R-R'}{R}\right)}\,,$$

onde *se* $2\,\varepsilon/E < (R-R')/R$, *mentre queste quantità sono dello stesso ordine di grandezza,* l *sarà dello stesso ordine di grandezza dei raggi degli elettrodi* (9).

(9) Se fosse $2\,\varepsilon/E > (R-R')/R$, x risulterebbe negativo e quindi $l < 2p$. Sarebbe facile interpretare questo risultato.

Siccome x è crescente con L, così avremo:

Se la perturbazione ha luogo nella regione adiacente all'anodo, allora esiste una distanza (distanza neutra) *per cui il passaggio dell'elettricità non subisce alterazione; per distanze più piccole il passaggio stesso viene facilitato, e per distanze più grandi il fenomeno si inverte.*

La distanza neutra corrisponde sempre ad uno stesso valore di x, quindi *impiccolendo il raggio degli elettrodi e proporzionalmente la regione perturbata, la distanza neutra diminuirà, e siccome* $dx/d\mathrm{L}$ cresce nel rapporto inverso a quello secondo cui decrescono i raggi, così *la intensità del fenomeno aumenterà.*

XXV.

UN TEOREMA SUGLI INTEGRALI MULTIPLI

«Atti Acc. Scienze Torino», vol. XXXII, 1897, pp. 859–868.

1. Mi permetto di intrattenere brevemente l'Accademia sopra la estensione di un ben noto teorema di addizione relativo agli integrali semplici, in un senso che si scosta da quello secondo cui da lungo tempo il teorema stesso è stato generalizzato [1].

Il cenno che qui dò può ritenersi come un passo in una via che spero poter seguire in seguito e che ha un intimo rapporto con alcuni studii da me fatti in passato sulle *funzioni di linee.*

2. Il teorema a cui mi riferisco è quello dell'addizione delle funzioni trigonometriche considerato come una proposizione di calcolo integrale. Esso allora può esprimersi nei termini seguenti:

Abbiasi

$$J = \int^{x} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \int^{y} \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}$$

e si prenda nel piano xy la curva algebrica avente per equazione

$$x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2} = \text{cost.} \tag{1}$$

Se i limiti superiori dei precedenti integrali sono le coordinate di un punto della curva, J *non cambierà spostando il punto stesso sulla curva.*

Possiamo anche dire in maniera equivalente che *l'equazione differenziale*

$$\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = 0$$

ammette un integrale algebrico e precisamente l'integrale (1).

È superfluo, perché ormai troppo noto, l'accennare che la estensione di questo teorema ha dato luogo alle prime scoperte nel campo delle funzioni ellittiche. Il teorema di EULERO che dà il principio di addizione delle funzioni ellittiche consiste nella equivalenza fra la relazione

$$\int^{x} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} + \int^{y} \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}} = \text{cost.}$$

ed una relazione *algebrica* fra i limiti superiori x, y dei due integrali.

(1) Vedi NOETHER, *Zur Theorie des eindeutigen Entsprechens algebraische Gebilde von beliebig vielen Dimensionen,* «Math. Ann.», II Bd., pp. 304, 305.

Analogamente il principio della trasformazione delle funzioni ellittiche consiste nel collegare un integrale

$$\int^{x} \frac{dx}{\sqrt{Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E}}$$

con un altro della stessa natura

$$\int^{y} \frac{dy}{\sqrt{A'y^4 + B'y^3 + C'y^2 + D'y + E'}}$$

in modo che la relazione fra gli integrali

$$\int^{x} \frac{dx}{\sqrt{Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E}} + \int^{y} \frac{dy}{\sqrt{A'y^4 + B'y^3 + C'y^2 + D'y + E'}} = \text{cost.}$$

conduca ad una *relazione algebrica* fra i limiti superiori x, y.

3. La generalizzazione di cui abbiamo parlato è stata ottenuta dal teorema primitivo, rendendo meno semplici le funzioni algebriche che compariscono sotto ai segni di integrazione.

Ma ci si può proporre di estendere il teorema in un'altra direzione.

Consideriamo l'integrale doppio

$$\iint_{\alpha_1} \varphi_1(x_1, y_1)\, dx_1\, dy_1$$

in cui φ_1 è una funzione algebrica di x_1, y_1, e l'area α_1 lungo la quale è estesa la integrazione è una parte del piano $x_1 y_1$.

Come si può collegare quest'integrale a due altri integrali analoghi di funzioni algebriche

$$\iint_{\alpha_2} \varphi_2(x_2, y_2)\, dx_2\, dy_2 \quad , \quad \iint_{\alpha_3} \varphi_3(x_3, y_3)\, dx_3\, dy_3 ,$$

in modo che la somma dei tre integrali risulti costante, allorché fra i contorni dei campi α_1, α_2, α_3 sussiste un legame algebrico della stessa natura di quelli che figurano nei casi precedentemente citati degl'integrali semplici?

Il teorema più semplice che si può dare a questo proposito è il seguente, in cui le funzioni che figurano sotto ai segni di integrazione contengono dei radicali quadratici di funzioni di secondo grado, come appunto nel primitivo caso esaminato per gl'integrali semplici.

Abbiasi

$$(2) \qquad J = \iint_{\alpha_1} \frac{dy\,dz}{\sqrt{\frac{b_2}{\lambda} z^2 - \frac{b_3}{\lambda} y^2 + \beta_1}} + \iint_{\alpha_2} \frac{dz\,dx}{\sqrt{\frac{b_3}{\mu} x^2 - \frac{b_1}{\mu} z^2 + \beta_2}} + \iint_{\alpha_3} \frac{dx\,dy}{\sqrt{\frac{b_1}{\nu} y^2 - \frac{b_2}{\nu} x^2 + \beta_3}}$$

in cui $b_1, b_2, b_3;\ \beta_1, \beta_2, \beta_3;\ \lambda, \mu, \nu$ *sono quantità costanti e* $\lambda + \mu + \nu = 0$.

Prendasi la superficie algebrica

$$(3) \qquad \lambda x \sqrt{\frac{b_2}{\lambda} z^2 - \frac{b_3}{\lambda} y^2 + \beta_1} + \mu y \sqrt{\frac{b_3}{\mu} x^2 - \frac{b_1}{\mu} z^2 + \beta_2} + \nu z \sqrt{\frac{b_1}{\nu} y^2 - \frac{b_2}{\nu} x^2 + \beta_3} = C\,.$$

Se i tre precedenti integrali sono estesi a parti dei piani coordinati limitati dalle proiezioni di una curva qualunque tracciata sopra questa superficie, J *non cambierà spostando e deformando la linea stessa sulla superficie.*

4. Per dimostrare il teorema consideriamo in generale la somma dei tre integrali

$$J' = \iint\limits_{\alpha_1} \varphi_1(y\,,z)\,dy\,dz + \iint\limits_{\alpha_2} \varphi_2(z\,,x)\,dz\,dx + \iint\limits_{\alpha_3} \varphi_3(x\,,y)\,dx\,dy$$

insieme coll'equazione differenziale a derivate parziali

$$(4) \qquad \varphi_1 \frac{\partial f}{\partial x} + \varphi_2 \frac{\partial f}{\partial y} + \varphi_3 \frac{\partial f}{\partial z} = 0\,.$$

Se f ne è un integrale, σ una porzione della superficie

$$f = \text{cost.}$$

e $\alpha_1\,,\alpha_2\,,\alpha_3$ sono le proiezioni di σ sui piani coordinati, avremo

$$J' = \iint\limits_{\sigma} \left[\varphi_1 \frac{d(y\,,z)}{d(u\,,v)} + \varphi_2 \frac{d(z\,,x)}{d(u\,,v)} + \varphi_3 \frac{d(x\,,y)}{d(u\,,v)}\right] du\,dv\,,$$

in cui l'integrale è esteso alla porzione σ della superficie, e $u\,,v$ ne rappresentano un sistema di coordinate curvilinee.

Ma se n è la normale alla superficie, si avrà

$$\frac{d(y\,,z)}{d(u\,,v)} : \frac{d(z\,,x)}{d(u\,,v)} : \frac{d(x\,,y)}{d(u\,,v)} = \cos nx : \cos ny : \cos nz = \frac{\partial f}{\partial x} : \frac{\partial f}{\partial y} : \frac{\partial f}{\partial z}\,;$$

perciò, in virtù della (4), avremo

$$\varphi_1 \frac{d(y\,,z)}{d(u\,,v)} + \varphi_2 \frac{d(z\,,x)}{d(u\,,v)} + \varphi_3 \frac{d(x\,,y)}{d(u\,,v)} = 0\,,$$

d'onde

$$J' = 0\,.$$

Il teorema precedentemente enunciato sarà dunque dimostrato provando che l'equazione differenziale (4) ammette per integrale il primo membro della (3) allorché si ha

$$\varphi_1 = \frac{1}{\sqrt{\frac{b_2}{\lambda} z^2 - \frac{b_3}{\lambda} y^2 + \beta_1}} = \frac{1}{\Delta_1}\,,$$

$$\varphi_2 = \frac{1}{\sqrt{\frac{b_3}{\mu} x^2 - \frac{b_1}{\mu} z^2 + \beta_2}} = \frac{1}{\Delta_2}\,,$$

$$\varphi_3 = \frac{1}{\sqrt{\frac{b_1}{\nu} y^2 - \frac{b_2}{\nu} x^2 + \beta_3}} = \frac{1}{\Delta_3}\,.$$

Infatti in questa ipotesi il primo membro della (3) diviene

$$f = \lambda x \Delta_1 + \mu y \Delta_2 + \nu z \Delta_3,$$

onde

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lambda \Delta_1 + \frac{b_3 xy}{\Delta_2} - \frac{b_2 xz}{\Delta_3},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \mu \Delta_2 + \frac{b_1 yz}{\Delta_3} - \frac{b_3 yx}{\Delta_1},$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \nu \Delta_3 + \frac{b_2 zx}{\Delta_1} - \frac{b_1 zy}{\Delta_2},$$

e quindi

$$\varphi_1 \frac{\partial f}{\partial x} + \varphi_2 \frac{\partial f}{\partial y} + \varphi_3 \frac{\partial f}{\partial z} = \lambda + \mu + \nu = 0.$$

5. Il teorema enunciato nel § 3 è facilmente estensibile al caso di integrali multipli di un ordine qualsiasi.

Onde ottenere questa generalizzazione basta sostituire alla somma di integrali (2) l'altra

$$\sum_1^n{}_i \int\!\!\int \cdots \int \frac{dx_1 \cdots dx_{i-1}\, dx_{i+1} \cdots dx_n}{\sqrt{\sum_1^n{}_s \frac{a_s^{(i)}}{\lambda_i} x_s^2 + b^{(i)}}} = 1,$$

e alla superficie algebrica (3), la varietà algebrica

$$\sum_1^n{}_i \lambda_i x_i \sqrt{\sum_1^n{}_s \frac{a_s^{(i)}}{\lambda_i} x_s^2 + b^{(i)}} = \text{cost.},$$

in cui $a_s^{(i)} = -a_i^{(s)}$, $a_i^{(i)} = 0$, $\sum_1^n{}_i \lambda_i = 0$.

Questa proprietà è legata al fatto che *l'equazione differenziale a derivate parziali*

$$\sum_1^n{}_i \varphi_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0,$$

in cui

$$\varphi_i = \frac{1}{\sqrt{\sum_1^n{}_s \frac{a_s^{(i)}}{\lambda_i} x_s^2 + b^{(i)}}} = \frac{1}{\Delta_i},$$

ammette l'integrale algebrico

$$f = \sum_1^n{}_i \lambda_i x_i \Delta_i$$

come si verifica direttamente con grande facilità.

6. L'intima ragione del sussistere dei teoremi precedentemente enunciati risulta manifesta da ciò che è posto in rilievo dalla dimostrazione del § 4, vale a dire che l'*equazione differenziale a derivate parziali*

$$\varphi_1 \frac{\partial f}{\partial x} + \varphi_2 \frac{\partial f}{\partial y} + \varphi_3 \frac{\partial f}{\partial z} = 0$$

ci fornisce con i suoi integrali le superficie che collegano fra loro i contorni dei campi d'integrazione degl'integrali multipli la cui somma è costante.

Ricorrendo a questo mezzo si possono trovare infiniti altri casi, oltre quello che è stato dato, in cui il legame risulta *algebrico.*

Ciò pone in evidenza il fatto che le questioni relative agli integrali multipli del genere di quelle esaminate si possono ricondurre immediatamente ad una ricerca sugli integrali delle equazioni a derivate parziali.

7. A questo riguardo sono ben lieto di poter presentare all'Accademia l'estratto di due lettere che il nostro illustre Socio corrispondente signor PICARD mi ha dirette in seguito alla comunicazione fattagli delle precedenti proposizioni e che egli mi autorizza a pubblicare:

« ... je crois reconnaître dans la question que vous m'indiquez quelque chose qui doit avoir du rapport avec une étude que j'avais commencée mais que je n'ai pas approfondie et que je n'ai pas non plus publiée. Voilà au surplus le point essentiel de ce que j'avais en tête:

« Soient P, Q, R trois fonctions de x, y, z et soit μ une fonction de x, y, z telle que

$$\frac{\partial(\mu P)}{\partial x}+\frac{\partial(\mu Q)}{\partial y}+\frac{\partial(\mu R)}{\partial z}=0\,.$$

« Alors l'intégrale double

$$\text{(I)}\qquad \iint \mu P\cdot dydz+\mu Q\cdot dzdx+\mu R\cdot dxdy$$

prise sur une surface ne dépendra que du contour (sauf certaines conditions de continuité bien entendu).

« On sait (formule de STOKES) que cette intégrale double peut s'écrire

$$\int_L \alpha dx+\beta dy+\gamma dz$$

L étant le contour, où on a

$$\text{(1)}\qquad \left\{\begin{aligned} \mu P&=\frac{\partial\beta}{\partial z}-\frac{\partial\gamma}{\partial y}\,,\\ \mu Q&=\frac{\partial\gamma}{\partial x}-\frac{\partial\alpha}{\partial z}\,,\\ \mu R&=\frac{\partial\alpha}{\partial y}-\frac{\partial\beta}{\partial x}\,.\end{aligned}\right.$$

« Or considérons une certaine surface

$$\text{(F)}\qquad z=F(x,y)\,.$$

Prenons comme contour L une ligne C_0 fermée et une ligne C fermée quel conque de la surface F. Pour la portion C, on a l'intégrale

$$\int(\alpha+p\gamma)\,dx+(\beta+q\gamma)\,dy\qquad \left(p=\frac{\partial z}{\partial x}\,,\,q=\frac{\partial z}{\partial y}\right).$$

« Si donc on a

$$(2) \qquad \frac{\partial(\alpha + p\gamma)}{\partial y} = \frac{\partial(\beta + q\gamma)}{\partial x}$$

l'intégrale sera nulle ou du moins invariable quand C se déformera; en dérivant, on doit bien entendu regarder dans α, β, γ, la lettre z comme la fonction de x et y définie par (F). En développant (2) et tenant compte de (1), on a de suite

$$Pp + Qq = R$$

et on a par suite ce théorème: *L'intégrale* (I) *prise suivant une surface limitée par une courbe fermée* C_0 *fixe de l'espace et par une courbe fermée variable* C *tracée sur une surface intégrale de l'équation*

$$Pp + Qq = R$$

ne dépend pas de la courbe C, *c'est-à-dire reste invariable quand on déforme d'une manière continue la courbe* C *sur la surface intégrale considérée.*

« Vouz voyez que ceci peut s'étendre à un nombre quelconque de dimensions, et on a ainsi une propriété assez curieuse des surfaces intégrales des équations linéaires (par rapport aux dérivées) aux dérivées partielles... ».

« Si l'on voulait avoir un problème plus déterminé on pourrait prendre *deux* expressions

$$P dy\, dz + Q dz\, dx + R dx\, dy$$

$$P_1 dy\, dz + Q_1 dz\, dx + R_1 dx\, fy\,.$$

« Si les deux équations

$$Pp + Qq = R \quad , \quad P_1 p + Q_1 q = R_1$$

ont une famille de solutions communes

$$(3) \qquad f(x, y, z) = \text{constante}\,,$$

les deux intégrales

$$\iint \mu\,(P\, dy dz + Q\, dz dx + R\, dx dy) \quad \text{et} \quad \iint \mu_1 (P_1 dy dz + \cdots),$$

où μ et μ_1 satisfont à $\frac{\partial(\mu P)}{\partial x} + \frac{\partial(\mu Q)}{\partial y} + \frac{\partial(\mu R)}{\partial z} = 0$ et *id* pour μ_1, resteront constantes quand le contour terminant la surface d'intégration se déplacera sur la surface (3)... ».

8. Mi permetto di far seguire alla precedente comunicazione una osservazione atta a collegare il risultato ivi contenuto colle funzioni di linee da me in passato formate soggetto di studio [2].

(2) « Rend. Reale Accademia dei Lincei », vol. III, 1887, 2° sem. [in queste « Opere »: vol. primo, XVII, pp. 294-314; XVIII, pp. 315-328].

La equazione

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = 0 \tag{4}$$

esprime la condizione affinché esista una funzione di linee F [(L)] di primo grado, tale che

$$\frac{dF}{d(y,z)} = X \quad , \quad \frac{dF}{d(z,x)} = Y \quad , \quad \frac{dF}{d(x,y)} = Z\,.$$

Sia f una funzione che soddisfa l'equazione differenziale a derivate parziali

$$X\frac{\partial f}{\partial x} + Y\frac{\partial f}{\partial y} + Z\frac{\partial f}{\partial z} = 0 \tag{5}$$

e prendiamo la superficie Σ avente per equazione $f =$ cost. Se spostiamo la curva L comunque sopra la superficie Σ, la funzione F [(L)] non cambierà, giacché $dF/d\Sigma = 0$ [3]. Reciprocamente dall'equazione $dF/d\Sigma = 0$ segue l'equazione (5). *Possiamo dunque interpretare l'equazione*

$$F\,[(L)] = \text{costante}$$

come quella che definisce tutte le superficie

$$f = \text{costante}$$

in cui f denota un integrale qualsiasi della equazione a derivate parziali

$$X\frac{\partial f}{\partial x} + Y\frac{\partial f}{\partial y} + Z\frac{\partial f}{\partial z} = 0\,.$$

(3) « Rend. Reale Accademia dei Lincei », vol. III, 2° sem., p. 277 [in queste « Opere »: vol. primo, p. 324].

XXVI.

SOPRA UNA CLASSE DI EQUAZIONI DINAMICHE

«Atti Acc. Scienze Torino», vol. XXXIII, 1898, pp. 451–475 (*).

Nella dinamica dei sistemi rigidi liberi non soggetti a forze le tre componenti della velocità traslatoria e le tre componenti della velocità rotatoria soddisfano ad un sistema di equazioni differenziali del primo ordine in cui questi sei elementi compariscono da soli.

La questione si presenta in modo analogo allorché si studia il moto di un corpo rigido immerso in un fluido indefinito.

In uno studio fatto qualche tempo fa (1) sulla rotazione spontanea dei corpi in cui esistono sistemi ciclici, ho mostrato come le tre componenti della rotazione del corpo e tutte le velocità cicliche possono determinarsi partendo da un sistema di equazioni differenziali del primo ordine in cui figurano queste sole quantità.

Possono immaginarsi infiniti altri casi nei quali caratterizzando il moto istantaneo di un sistema mediante dei parametri indipendenti, allorché il sistema è abbandonato alla propria inerzia, le equazioni del moto possono separarsi in due gruppi, il primo dei quali è un sistema di equazioni differenziali del primo ordine rapporto ai detti parametri, che soli compariscono in esse come elementi variabili. Il problema della determinazione dei parametri stessi in funzione del tempo, costituisce quindi una questione a sé che può discutersi indipendentemente dalla completa questione dinamica.

Colle presenti ricerche mi sono proposto di iniziare uno studio sistematico di tutti questi casi e delle corrispondenti equazioni differenziali. Il tipo di esse si riconnette direttamente a quello delle equazioni di EULERO dei sistemi rigidi e a quello delle equazioni di KIRCHHOFF del moto di un corpo immerso in un fluido.

Questo studio non si limita ai soli sistemi *olonomi* (2), ma comprende il caso generale di tutti quei sistemi soggetti al principio fondamentale della dinamica di LAGRANGE, i cui vincoli si rappresentano mediante equazioni fra

(*) Presentata nell'adunanza del 27 febbraio 1898.

(1) *Sulla rotazione di un corpo in cui esistono sistemi ciclici*. «Rend. Acc. dei Lincei», ser. 5ª, vol. IV, 2º sem., 1895, pp. 93–97 [in questo vol.: XIII, pp. 166–172]. – *Sulla rotazione di un corpo in cui esistono sistemi policiclici*. «Annali di Matematica», ser. 2ª, vol. XXIV, 1896, pp. 29–58 [in questo vol.: XVI, pp. 187–212].

(2) La distinzione dei sistemi dando loro il nome di sistemi *olonomi* e *non olonomi* è dovuta ad HERTZ (*Die Prinzipien der Mechanik*, I Buch, Abschnitt 4). I sistemi non olonomi però erano già stati soggetti di studio. (Vedi A. VOSS, *Über die Differentialgleichungen der Mechanik*. «Mathem. Annalen», XXV Band, 1885, p. 258). Confronta pure O. HÖLDER, *Über die Principien von Hamilton und Maupertuis* («Nachr. von der K. Gesell. der Wissensch. zu Göttingen», 1896).

le coordinate ed i loro differenziali. Coll'abbracciare il caso dei sistemi *non olonomi* il campo di applicazione delle ricerche stesse viene notevolmente allargato.

I parametri indipendenti che individuano il moto istantaneo di un sistema possono chiamarsi le *caratteristiche del moto*, onde può darsi il nome di *moti spontanei a caratteristiche indipendenti* a quelli che formano il soggetto delle presenti ricerche.

In questa prima Nota mi sono limitato allo studio degli integrali di 1° e 2° grado ed alla corrispondente riduzione delle equazioni.

Esaminerò in una prossima Nota alcuni casi notevoli, approfondendo lo studio della integrazione delle equazioni differenziali; ed in una successiva studierò i moti permanenti ricercando le condizioni della loro stabilità ed instabilità.

§ 1. – Caratteristiche del moto e calcolo delle loro variazioni.

1. Consideriamo un sistema materiale costituito da n punti le cui coordinate siano $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{3n}$, e supponiamo che le componenti delle velocità dei punti siano funzioni lineari di ν parametri arbitrarii $p_1, p_2, \cdots, p_\nu$; per modo che si abbia

$$\frac{d\xi_i}{dt} = \xi'_i = \sum_1^\nu {}_s\, \xi_{is}\, p_s \tag{1}$$

ove le ξ_{is} sono funzioni delle coordinate $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{3n}$.

Ad ogni configurazione che assume il sistema corrispondono infiniti moti istantanei che saranno caratterizzati dai valori che si possono dare arbitrariamente ai ν parametri $p_1, p_2, \cdots, p_\nu$. Essi perciò si chiameranno *le caratteristiche del moto del sistema.*

Ogni sostituzione lineare invertibile eseguita sulle $p_1, p_2, \cdots, p_\nu$ trasforma queste caratteristiche in altre caratteristiche.

Evidentemente ogni qualvolta i legami del sistema si esprimeranno mediante relazioni fra le coordinate e le componenti delle velocità dei punti e, rispetto a queste ultime, le relazioni stesse saranno lineari ed omogenee, potremo scrivere le (1). In tal modo viene a trattarsi tanto il caso di sistemi *olonomi*, quanto quello di sistemi *non olonomi*.

2. Per avere un sistema di spostamenti virtuali basterà prendere le

$$\delta\xi_i = \sum_1^\nu {}_s\, \xi_{is}\, \delta\omega_s \tag{2}$$

ove le $\delta\omega_s$ sono quantità infinitesime indipendenti. Esse si chiameranno le *caratteristiche dello spostamento virtuale del sistema.* Dalle formule (1) e (2) segue immediatamente

$$\delta\xi_i = \sum_1^\nu {}_s\, \frac{\partial \xi'_i}{\partial p_s}\, \delta\omega_s\,. \tag{3}$$

3. Denotiamo con m_i la massa del punto materiale di cui una delle coordinate è ξ_i. Allora la forza viva del sistema sarà data da

$$(4) \qquad T = \frac{1}{2}\sum_1^{3n}{}_i\, m_i\, \xi_i'^2 = \frac{1}{2}\sum_1^{\nu}{}_r \sum_1^{\nu}{}_s\, E_{rs}\, p_r\, p_s\,,$$

avendo posto

$$(5) \qquad E_{rs} = E_{sr} = \sum_1^{3n}{}_i\, m_i\, \xi_{is}\, \xi_{ir}\,.$$

Le quantità E_{rs} risultano quindi delle funzioni di $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{3n}$.

In virtù d'un teorema ben noto sulle forme quadratiche sarà possibile cambiare in infiniti modi le caratteristiche p_s in altre q_s, per mezzo di una sostituzione lineare invertibile, in modo da porre la forza viva sotto la forma

$$T = \frac{1}{2}\sum_1^{\nu}{}_s\, q_s^2\,.$$

Potremo anche in infiniti modi, mediante sostituzioni reali invertibili, ridurre la espressione della forza viva ad una forma definita positiva arbitraria (*).

4. Intenderemo con $\delta p_1, \delta p_2, \cdots, \delta p_\nu$ le ν quantità definite dalle ν relazioni

$$\sum_1^{3n}{}_i\, m_i\, \xi_{ig}\, \delta\xi_i' = \sum_1^{3n}{}_i\, m_i\, \xi_{ig}\, \frac{d}{dt}\,\delta\xi_i \qquad (g = 1, 2, \cdots, \nu)$$

che in virtù delle (1) e (2) si scriveranno

$$\sum_1^{3n}{}_i\, m_i\, \xi_{ig}\left(\sum_1^{\nu}{}_s\, \xi_{is}\, \delta p_s + \sum_1^{\nu}{}_s\, p_s\, \delta\xi_{is}\right) = \sum_1^{3n}{}_i\, m_i\, \xi_{ig}\left(\sum_1^{\nu}{}_s\, \xi_{is}\, \frac{d\delta\omega_s}{dt} + \sum_1^{\nu}{}_s\, \delta\omega_s\, \frac{d\xi_{is}}{dt}\right).$$

Restando così giustificata la formula (B) che assumeremo nel § 3 per rappresentare il principio di LAGRANGE. Ma

$$\delta\xi_{is} = \sum_1^{3n}{}_h\, \frac{\partial\xi_{is}}{\partial\xi_h} \sum_1^{\nu}{}_r\, \xi_{hr}\, \delta\omega_r \quad , \quad \frac{d\xi_{is}}{dt} = \sum_1^{3n}{}_h\, \frac{\partial\xi_{is}}{\partial\xi_h} \sum_1^{\nu}{}_r\, \xi_{hr}\, p_r$$

quindi la equazione precedente diverrà

$$\sum_1^{3n}{}_i\, m_i\, \xi_{ig} \sum_1^{\nu}{}_s\, \xi_{is}\left(\delta p_s - \frac{d\delta\omega_s}{dt}\right) = \sum_1^{3n}{}_i\, m_i\, \xi_{ig} \sum_1^{3n}{}_h \sum_1^{\nu}{}_s \sum_1^{\nu}{}_r\, \xi_{hr}\, \frac{\partial\xi_{is}}{\partial\xi_h}\,(p_r\, \delta\omega_s - p_s\, \delta\omega_r)\,.$$

Tenendo presente la (5) otterremo:

$$(6) \qquad \sum_1^{\nu}{}_s\, E_{sg}\left(\delta p_s - \frac{d\delta\omega_s}{dt}\right) = \sum_1^{\nu}{}_s \sum_1^{\nu}{}_r\, b_{sr}^{(g)}\,(p_r\, \delta\omega_s - p_s\, \delta\omega_r)$$

(*) Il principio del seguente n. 4 (fino alle parole: Tenendo presente la (5) otterremo) è stato modificato secondo l'errata-corrige pubblicata dall'A. negli «Atti Acc. Sc. Torino», vol. XXXV, 1899-900, p. 118 [N. d. R.].

avendo posto

$$(7) \qquad b_{sr}^{(g)} = \sum_1^{3n}{}_h \xi_{hr} \sum_1^{3n}{}_i m_i \frac{\partial \xi_{is}}{\partial \xi_h} \xi_{ig}.$$

5. Sia

$$\Delta = \begin{vmatrix} E_{11}, E_{12}, \cdots, E_{1\nu} \\ E_{21}, E_{22}, \cdots, E_{2\nu} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ E_{\nu 1}, E_{\nu 2}, \cdots, E_{\nu\nu} \end{vmatrix}$$

$$e_{rs} = \frac{\partial \log \Delta}{\partial E_{rs}};$$

le quantità e_{rs} saranno i coefficienti della forma reciproca della (4) e avremo che dalle (6) seguiranno le altre

$$\delta p_u - \frac{d\delta\omega_u}{dt} = \sum_1^{\nu}{}_s \sum_1^{\nu}{}_r \sum_1^{\nu}{}_g e_{gu} b_{sr}^{(g)} (p_r \delta\omega_s - p_s \delta\omega_r)$$

$$= \sum_1^{\nu}{}_s \sum_1^{\nu}{}_r \left[\sum_1^{\nu}{}_g e_{gu} (b_{sr}^{(g)} - b_{rs}^{(g)})\right] p_r \delta\omega_s.$$

Ponendo dunque

$$(8) \qquad a_{sr}^{(u)} = \sum_1^{\nu}{}_g e_{gu} (b_{sr}^{(g)} - b_{rs}^{(g)})$$

l'equazione precedente si scriverà

$$(A) \qquad \delta p_u = \frac{d\delta\omega_u}{dt} + \sum_1^{\nu}{}_s \sum_1^{\nu}{}_r a_{sr}^{(u)} p_r \delta\omega_s.$$

§ 2. – Proprietà dei coefficienti $a_{sr}^{(u)}$, $b_{sr}^{(u)}$.

1. Dalla equazione (8) segue

$$a_{sr}^{(u)} = - a_{rs}^{(u)}$$

e per conseguenza

$$a_{ss}^{(u)} = 0.$$

Se ne conclude che i *coefficienti $a_{sr}^{(u)}$ cambiano segno invertendo i due indici.*
Dalla (8) si deduce poi

$$(9) \qquad b_{sr}^{(h)} - b_{rs}^{(h)} = \sum_1^{\nu}{}_u E_{hu} a_{sr}^{(u)}.$$

2. Riprendiamo le (7) e invertiamo l'indice s e l'apice g.
Si otterrà

$$b_{gr}^{(s)} = \sum_1^{3n}{}_h \xi_{hr} \sum_1^{3n}{}_i m_i \frac{\partial \xi_{ig}}{\partial \xi_h} \xi_{is}$$

onde

$$(10) \qquad b_{sr}^{(g)} + b_{gr}^{(s)} = \sum_{1}^{3n}{}_h \xi_{hr} \frac{\partial E_{gs}}{\partial \xi_h}$$

e per conseguenza, allorché le E_{gs} sono costanti,

$$b_{sr}^{(g)} = - b_{gr}^{(s)}.$$

Dunque: *allorché i coefficienti della forza viva sono costanti, i coefficienti $b_{sr}^{(g)}$ cambiano segno permutando l'apice col primo indice.*

3. Supponiamo di aver ricondotto la forza viva alla forma

$$T = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2 + \cdots + p_\nu^2),$$

allora la (9) ci darà

$$b_{sr}^{(u)} - b_{rs}^{(u)} = a_{sr}^{(u)}$$

e la (10)

$$b_{sr}^{(u)} + b_{ur}^{(s)} = 0 ;$$

quindi

$$b_{sr}^{(u)} + b_{us}^{(r)} = a_{sr}^{(u)}$$

$$b_{us}^{(r)} + b_{ru}^{(s)} = a_{us}^{(r)}$$

$$b_{ru}^{(s)} + b_{sr}^{(u)} = a_{ru}^{(s)}$$

da cui si deduce

$$2\, b_{sr}^{(u)} = a_{sr}^{(u)} + a_{ru}^{(s)} - a_{us}^{(r)} = a_{sr}^{(u)} + a_{ru}^{(s)} + a_{su}^{(r)}$$

e finalmente

$$b_{sr}^{(u)} = \frac{a_{sr}^{(u)} + a_{ru}^{(s)} + a_{su}^{(r)}}{2}.$$

4. Vediamo ora come cambiano i coefficienti $a_{sr}^{(u)}$, allorché si eseguisce una sostituzione lineare a coefficienti costanti sulle caratteristiche p_s.

Si abbia

$$(11) \qquad q_i = \Sigma_s \lambda_{is} p_s \quad , \quad \delta\chi_i = \Sigma_s \lambda_{is} \delta\omega_s , \qquad (11') \qquad p_s = \Sigma_i \Lambda_{is} q_i$$

le λ_{is} essendo delle quantità costanti.

Dalle

$$\delta p_s = \frac{d\delta\omega_s}{dt} + \sum_{1}^{\nu}{}_h \sum_{1}^{\nu}{}_k a_{hk}^{(s)} p_k \delta\omega_h$$

segue

$$\delta q_i = \sum_{1}^{\nu}{}_s \lambda_{is} \delta p_s = \frac{d\delta\chi_i}{dt} + \sum_{1}^{\nu}{}_h \sum_{1}^{\nu}{}_k \sum_{1}^{\nu}{}_s a_{hk}^{(s)} \lambda_{is} p_k \delta\omega_h$$

$$= \frac{d\delta\chi_i}{dt} + \sum_{1}^{\nu}{}_h \sum_{1}^{\nu}{}_k \sum_{1}^{\nu}{}_s \sum_{1}^{\nu}{}_g \sum_{1}^{\nu}{}_l a_{hk}^{(s)} \lambda_{is} \Lambda_{gh} \Lambda_{lk} q_l \delta\chi_g =$$

$$= \frac{d\delta\chi_i}{dt} + \sum_{1}^{\nu}{}_g \sum_{1}^{\nu}{}_l c_{gl}^{(i)} q_l \, \delta\chi_g ,$$

avendo posto

$$c_{gl}^{(i)} = \sum_{1}^{\nu}{}_h \sum_{1}^{\nu}{}_k \sum_{1}^{\nu}{}_s a_{hk}^{(s)} \lambda_{is} \Lambda_{gh} \Lambda_{lk} . \tag{12}$$

Dunque: *se si eseguisce sulle caratteristiche la sostituzione* (11) *a coefficienti costanti, i coefficienti* $a_{rs}^{(u)}$ *si cambiano nelle* $c_{rs}^{(u)}$ *legate alle prime dalle relazioni* (12).

§ 3. - LE EQUAZIONI DIFFERENZIALI DEL MOVIMENTO.

1. Avendo chiamato T la forza viva del sistema, si avrà

$$\delta T = \sum_{1}^{\nu}{}_s \frac{\partial T}{\partial p_s} \delta p_s + \sum_{1}^{3n}{}_i \frac{\partial T}{\partial \xi_i} \delta \xi_i$$

ed applicando la (A) e la (2),

$$\delta T = \sum_{1}^{\nu}{}_s \frac{\partial T}{\partial p_s} \left(\frac{d\delta\omega_s}{dt} + \sum_{1}^{\nu}{}_h \sum_{1}^{\nu}{}_k a_{hk}^{(s)} p_k \, \delta\omega_h \right) + \sum_{1}^{\nu}{}_s T_s \, \delta\omega_s \tag{13}$$

scrivendo

$$T_s = \sum_{1}^{3n}{}_i \frac{\partial T}{\partial \xi_i} \xi_{is} . \tag{14}$$

Se Ξ_i denota la componente della forza corrispondente alla coordinata ξ_i, il lavoro eseguito dalle forze per uno spostamento virtuale, risulterà dato da

$$\delta L = \sum_{1}^{3n}{}_i \Xi_i \, \delta\xi_i = \sum_{1}^{3n}{}_i \Xi_i \sum_{1}^{\nu}{}_s \xi_{is} \, \delta\omega_s = \sum_{1}^{\nu}{}_s P_s \, \delta\omega_s \tag{15}$$

ponendo

$$P_s = \sum_{1}^{3n}{}_i \Xi_i \, \xi_{is} . \tag{14'}$$

2. Per stabilire le equazioni differenziali del movimento partiamo dal principio di LAGRANGE rappresentato dall'equazione [3]

$$\delta L = \frac{d}{dt} \left(\sum_{1}^{3n}{}_i \frac{\partial T}{\partial \xi_i'} \delta \xi_i \right) - \delta T . \tag{B}$$

Applicando la (3) avremo

$$\sum_{1}^{3n}{}_i \frac{\partial T}{\partial \xi_i'} \delta\xi_i = \sum_{1}^{3n}{}_i \frac{\partial T}{\partial \xi_i'} \sum_{1}^{\nu}{}_s \frac{\partial \xi_i'}{\partial p_s} \delta\omega_s = \sum_{1}^{\nu}{}_s \frac{\partial T}{\partial p_s} \delta\omega_s .$$

(3) Vedi BELTRAMI, *Sulle equazioni dinamiche di Lagrange*. « Rendiconti dell'Istituto Lombardo », ser. II, vol. XXVIII, 1895, p. 745 [« Opere mat. », t. IV, pp. 535-542].

Perciò in virtù delle (13) e (15), la (B) diverrà

$$\sum_1^\nu {}_s \mathrm{P}_s\,\delta\omega_s = \frac{d}{dt}\left(\sum_1^\nu {}_s \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial p_s}\delta\omega_s\right) - \sum_1^\nu {}_s \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial p_s}\left(\frac{d\delta\omega_s}{dt} + \sum_1^\nu {}_h \sum_1^\nu {}_k a_{hk}^{(s)} p_k\,\delta\omega_h\right) - \sum_1^\nu {}_s \mathrm{T}_s\,\delta\omega_s$$

$$= \sum_1^\nu {}_s \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial p_s}\delta\omega_s - \sum_1^\nu {}_s \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial p_s}\sum_1^\nu {}_h \sum_1^\nu {}_k a_{hk}^{(s)} p_k\,\delta\omega_h - \sum_1^\nu {}_s \mathrm{T}_s\,\delta\omega_s$$

o anche

$$\sum_1^\nu {}_s \delta\omega_s\left[\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial p_s} - \sum_1^\nu {}_r \sum_1^\nu {}_k a_{sk}^{(r)} \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial p_r} p_k - \mathrm{T}_s - \mathrm{P}_s\right] = 0,$$

da cui segue

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial p_s} = \sum_1^\nu {}_r \sum_1^\nu {}_k a_{sk}^{(r)} \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial p_r} p_k + \mathrm{T}_s + \mathrm{P}_s \qquad (s = 1, 2, \cdots, \nu). \tag{C}$$

Come equazioni differenziali del movimento del sistema potremo dunque prendere le equazioni precedenti insieme alle

$$\xi_i' = \sum_1^\nu {}_s \xi_{is}\, p_s\,.$$

§ 4. - L'INTEGRALE DELLE FORZE VIVE.

1. Moltiplichiamo la (C) per p_s, quindi sommiamo per tutti i valori $1, 2, \cdots, \nu$ di s. Otterremo

$$\sum_1^\nu {}_s p_s \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial p_s} = \sum_1^\nu {}_s \sum_1^\nu {}_r \sum_1^\nu {}_k a_{sk}^{(r)} \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial p_r} p_k p_s + \sum_1^\nu {}_s \mathrm{T}_s p_s + \sum_1^\nu {}_s \mathrm{P}_s p_s\,.$$

Ma in virtù delle eguaglianze

$$a_{sk}^{(r)} = -a_{ks}^{(r)},$$

si ha

$$\sum_1^\nu {}_s \sum_1^\nu {}_r \sum_1^\nu {}_k a_{sk}^{(r)} \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial p_r} p_k p_s = \sum_1^\nu {}_r \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial p_r} \sum_1^\nu {}_s \sum_1^\nu {}_k a_{sk}^{(r)} p_k p_s = 0$$

onde

$$\sum_1^\nu {}_s p_s \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial p_s} = \sum_1^\nu {}_s \mathrm{T}_s p_s + \sum_1^\nu {}_s \mathrm{P}_s p_s$$

o anche

$$\sum_1^\nu {}_s \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial p_s} p_s\right) = \sum_1^\nu {}_s \mathrm{T}_s p_s + \sum_1^\nu {}_s \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial p_s}\frac{dp_s}{dt} + \sum_1^\nu {}_s \mathrm{P}_s p_s\,,$$

da cui si deduce, poiché T è una funzione omogenea di 2° grado nelle p_s,

$$2\,\frac{d\mathrm{T}}{dt} = \sum_1^\nu {}_s \mathrm{T}_s p_s + \sum_1^\nu {}_s \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial p_s}\frac{dp_s}{dt} + \sum_1^\nu {}_s \mathrm{P}_s p_s\,. \tag{16}$$

Ora (vedi (14))

$$\sum_1^\nu {}_s \mathrm{T}_s p_s = \sum_1^{3n} {}_i \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \xi_i} \sum_1^\nu {}_s \xi_{is} p_s = \sum_1^{3n} {}_i \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \xi_i} \xi'_i$$

quindi

$$\sum_1^\nu {}_s \mathrm{T}_s p_s + \sum_1^\nu {}_s \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial p_s} \frac{dp_s}{dt} = \frac{d\mathrm{T}}{dt},$$

e l'equazione (16) diventa

$$\frac{d\mathrm{T}}{dt} = \sum_1^\nu {}_s \mathrm{P}_s p_s. \tag{17}$$

2. Se esiste il potenziale P delle forze ed è una funzione delle sole coordinate ξ_i, avremo (vedi (14'))

$$\mathrm{P}_s = \sum_1^{3n} {}_i \Xi_i \xi_{is} = \sum_1^{3n} {}_i \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial \xi_i} \xi_{is},$$

quindi

$$\sum_1^\nu {}_s \mathrm{P}_s p_s = \sum_1^{3n} {}_i \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial \xi_i} \sum_1^\nu {}_s \xi_{is} p_s = \sum_1^{3n} {}_i \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial \xi_i} \xi'_i = \frac{d\mathrm{P}}{dt}$$

onde la (17) si scriverà

$$\frac{d\mathrm{T}}{dt} = \frac{d\mathrm{P}}{dt}$$

e integrando

$$\mathrm{T} - \mathrm{P} = \mathrm{cost}.$$

§ 5. – CASO IN CUI LE EQUAZIONI (C) DIVENTANO LE EQUAZIONI DI LAGRANGE.

1. Allorché le p_s sono le derivate rapporto a t di un sistema di variabili indipendenti q_s, cioè

$$p_s = \frac{dq_s}{dt},$$

avremo

$$\xi_{is} = \frac{\partial \xi_i}{\partial q_s},$$

quindi

$$\sum_1^{3n} {}_h \frac{\partial \xi_{is}}{\partial \xi_h} \xi_{hr} = \sum_1^{3n} {}_h \frac{\partial \xi_{is}}{\partial \xi_h} \frac{\partial \xi_h}{\partial q_r} = \frac{\partial \xi_{is}}{\partial q_r} = \frac{\partial^2 \xi_i}{\partial q_s \partial q_r}.$$

Applicando la (7) si trova

$$b_{sr}^{(g)} = \sum_1^{3n} {}_i m_i \frac{\partial^2 \xi_i}{\partial q_s \partial q_r} \xi_{ig} = \sum_1^{3n} {}_i m_i \frac{\partial^2 \xi_i}{\partial q_s \partial q_r} \frac{\partial \xi_i}{\partial q_g}$$

onde mutando s con r

$$b_{sr}^{(g)} = b_{rs}^{(g)}$$

e a cagione della (8)

$$a_{sr}^{(u)} = 0; \tag{18}$$

quindi la (A) si riduce a

$$\delta p_u = \frac{d\delta\omega_u}{dt}.$$

2. In virtù delle (18) le equazioni (C) diventano

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial p_s} = T_s + P_s \tag{C'}$$

e (vedi (14))

$$T_s = \sum_1^{3n}{}_i \frac{\partial T}{\partial \xi_i} \xi_{is} = \frac{\partial T}{\partial q_s};$$

per conseguenza le (C') si scriveranno sotto la forma

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q'_s} = \frac{\partial T}{\partial q_s} + P_s$$

che è la forma di LAGRANGE delle equazioni del movimento.

§ 6. – VARIE FORME DELLE EQUAZIONI DEL MOTO.

1. Supponiamo che le caratteristiche del sistema siano prese in modo da rendere costanti i coefficienti E_{sr} della forza viva; allora le (C) diverranno

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial p_s} = \sum_1^{\nu}{}_r \sum_1^{\nu}{}_k a_{sk}^{(r)} p_k \frac{\partial T}{\partial p_r} + P_s \tag{D}$$

e se la forza viva sarà ridotta alla forma

$$T = \frac{1}{2}\sum_1^{\nu}{}_s p_s^2$$

le equazioni precedenti si scriveranno

$$p'_s = \sum_1^{\nu}{}_r \sum_1^{\nu}{}_k a_{sk}^{(r)} p_k p_r + P_s. \tag{E}$$

Ricordiamo che la riduzione della forza viva alla forma precedente è sempre possibile in infiniti modi, quindi potremo dire:

Ogni problema di dinamica, relativo ad un sistema olonomo o non olonomo avente legami indipendenti dal tempo, può farsi dipendere da un sistema di equazioni differenziali della forma

$$\left\{\begin{aligned} p'_s &= \sum_1^{\nu}{}_r \sum_1^{\nu}{}_k a_{sk}^{(r)} p_k p_r + P_s \qquad && (s = 1, \cdots, \nu) \\ \xi'_i &= \sum_1^{\nu}{}_s \xi_{is} p_s && (i = 1, 2, \cdots, 3n) \end{aligned}\right. \tag{E$_1$}$$

in cui

$$a_{sk}^{(r)} = - a_{ks}^{(r)}.$$

2. Tenendo conto che

$$\frac{\partial T}{\partial p_r} = \sum_1^\nu {}_h E_{rh} p_h$$

le (D) si scriveranno

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial p_s} = \sum_1^\nu {}_k \sum_1^\nu {}_h p_k\, p_h \sum_1^\nu {}_r E_{rh}\, a_{sk}^{(r)} + P_s$$

ed applicando la (9)

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial p_s} = \sum_1^\nu {}_h \sum_1^\nu {}_k (b_{sk}^{(h)} - b_{ks}^{(h)})\, p_h\, p_k + P_s$$

e ponendo

$$b_{sk}^{(h)} - b_{ks}^{(h)} = c_{sk}^{(h)}$$

avremo

$$\text{(F)} \qquad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial p_s} = \sum_1^\nu {}_h \sum_1^\nu {}_k c_{sk}^{(h)} p_h\, p_k + P_s$$

in cui

$$c_{sk}^{(h)} = - c_{ks}^{(h)}.$$

Osservando che

$$p_r = \sum_1^\nu {}_s e_{rs} \frac{\partial T}{\partial p_s}$$

le (F) si trasformeranno facilmente nelle

$$p'_r = \sum_1^\nu {}_g \sum_1^\nu {}_h p_h \frac{\partial T}{\partial p_g} \sum_1^\nu {}_s \sum_1^\nu {}_k c_{sk}^{(h)} e_{rs}\, e_{gk} + \sum_1^\nu {}_s e_{rs} P_s$$

quindi ponendo

$$f_{rg}^{(h)} = \sum_1^\nu {}_s \sum_1^\nu {}_k c_{sk}^{(h)} e_{rs}\, e_{gk}$$

$$Q_r = \sum_1^\nu {}_s e_{rs} P_s$$

avremo

$$\text{(G)} \qquad p'_r = \sum_1^\nu {}_g \sum_1^\nu {}_h f_{rg}^{(h)} p_h \frac{\partial T}{\partial p_g} + Q_r$$

in cui

$$f_{rg}^{(h)} = - f_{gr}^{(h)}.$$

3. Le due forme (F) (G) sotto cui vennero poste le equazioni della dinamica possono subire una comune trasformazione.

Sia F una forma quadratica delle $p_1, p_2, \cdots, p_\nu$ a discriminante diverso da zero.

Potremo scrivere

$$p_h = \Sigma_l \lambda_{hl} \frac{\partial F}{\partial p_l}$$

in cui le λ_{hl} sono indipendenti dalle $p_1, p_2, \cdots, p_\nu$.

Ponendo dunque

$$\sum_{1}^{\nu}{}_h c_{sk}^{(h)} \lambda_{hl} = \gamma_{sk}^{(l)}$$

$$\sum_{1}^{\nu}{}_h f_{rg}^{(h)} \lambda_{hl} = \varphi_{rg}^{(l)}$$

le (F) e (G) diverranno

$$(F_1) \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial p_s} = \sum_{1}^{\nu}{}_l \sum_{1}^{\nu}{}_k \gamma_{sk}^{(l)} \frac{\partial F}{\partial p_l} p_k + P_s, \qquad (\gamma_{sk}^{(l)} = -\gamma_{ks}^{(l)})$$

$$(G_1) \qquad p_r' = \sum_{1}^{\nu}{}_g \sum_{1}^{\nu}{}_l \varphi_{rg}^{(l)} \frac{\partial F}{\partial p_l}\frac{\partial T}{\partial p_g} + Q_r, \qquad (\varphi_{rg}^{(l)} = -\varphi_{gr}^{(l)}).$$

§ 7. - Moti spontanei a caratteristiche indipendenti.

1. Allorché, oltre essere costanti i coefficienti della forza viva, sono costanti anche le $a_{rs}^{(u)}$, allora il sistema si dirà *a caratteristiche indipendenti*.

Evidentemente un sistema rigorosamente *ciclico* secondo la denominazione di HELMHOLTZ corrisponde ad un sistema a caratteristiche indipendenti in cui i coefficienti $a_{rs}^{(u)}$ sono tutti eguali a zero, allorché si prendono come caratteristiche le velocità cicliche.

Si vedrebbe facilmente come i sistemi rigidi, liberi o immersi nei fluidi, con o senza moti ciclici interni, si riducano a sistemi a caratteristiche indipendenti.

Supponiamo che il sistema non sia soggetto ad alcuna forza, sia cioè abbandonato alla propria inerzia, allora le quantità P_s, saranno tutte nulle e le equazioni del moto diverranno

$$(D') \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial p_s} = \sum_{1}^{\nu}{}_r \sum_{1}^{\nu}{}_k a_{sk}^{(r)} p_k \frac{\partial T}{\partial p_r},$$

$$(1') \qquad \xi_i' = \sum_{1}^{\nu}{}_s \xi_{is} p_s .$$

Osserviamo che nel sistema (D') non compariscono che le $p_1, \cdots, p_\nu$ e le loro derivate prime; esso quindi determina le caratteristiche del moto indipendentemente dalle coordinate. Possiamo quindi stabilire che *in un sistema a caratteristiche indipendenti abbandonato alla propria inerzia, le caratteristiche del moto soddisfano ad un sistema di equazioni differenziali del primo ordine* *in cui compariscono da sole.* Il problema della integrazione delle equazioni del moto può essere dunque decomposto in due parti. Nella prima si determinano le caratteristiche mediante le (D'); nella seconda, note queste, si determinano le coordinate applicando le (1').

In tal caso chiameremo il moto un *moto spontaneo a caratteristiche indipendenti.*

2. Ogni sostituzione a coefficienti costanti nelle caratteristiche non altera il tipo del sistema; quindi come equazioni differenziali del moto potremo prendere indifferentemente uno dei sistemi

$$\text{(D')} \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial p_s} = \sum_1^\nu{}_r \sum_1^\nu{}_k a_{sk}^{(r)} p_k \frac{\partial T}{\partial p_r},$$

$$\text{(F')} \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial p_s} = \sum_1^\nu{}_r \sum_1^\nu{}_k c_{sk}^{(r)} p_k p_r$$

$$\text{(G')} \qquad p'_s = \sum_1^\nu{}_r \sum_1^\nu{}_k f_{sk}^{(r)} p_r \frac{\partial T}{\partial p_k}$$

o anche il sistema

$$\text{(E')} \qquad p'_s = \sum_1^\nu{}_r \sum_1^\nu{}_k g_{sk}^{(r)} p_r p_k$$

a cui si riducono contemporaneamente tutti i precedenti, quando si riduca T alla semisomma dei quadrati delle caratteristiche.

In tutte le equazioni precedenti dovremo ritenere *costanti tutti i coefficienti e tali che cambino segno per una trasposizione degli indici.*

Se denotiamo con F una forma quadratica delle $p_1, \cdots, p_\nu$ a discriminante diverso da zero, e a coefficienti costanti, potremo ancora scrivere le equazioni differenziali sotto la forma

$$\text{(F}'_1\text{)} \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial p_s} = \sum_1^\nu{}_r \sum_1^\nu{}_k \gamma_{sk}^{(r)} p_k \frac{\partial F}{\partial p_r}$$

$$\text{(G}'_1\text{)} \qquad p'_s = \sum_1^\nu{}_r \sum_1^\nu{}_k \varphi_{sk}^{(r)} \frac{\partial F}{\partial p_r} \frac{\partial T}{\partial p_k}$$

in cui al pari che nelle equazioni precedenti i coefficienti $\gamma_{sk}^{(r)}$ e $\varphi_{sk}^{(r)}$ sono costanti e cambiano segno per una inversione degl'indici.

3. Quando le caratteristiche sono costanti diremo che il moto è *permanente.* Quindi *come equazioni corrispondenti ai moti permanenti prenderemo uno qualsiasi dei sistemi* (D'), (F'), (G'), (E'), (F'₁), (G'₁) *in cui assumeremo nullo il primo membro.*

Ne segue che la determinazione delle caratteristiche corrispondenti ai moti permanenti può eseguirsi senza alcuna operazione di integrazione.

§ 8. – INTEGRALI DI PRIMO GRADO DELLE EQUAZIONI DEI MOTI SPONTANEI A CARATTERISTICHE INDIPENDENTI.

1. Se esiste un integrale di primo grado delle equazioni (G′), cioè se si ha

$$\alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \cdots + \alpha_\nu p_\nu = \text{cost.},$$

essendo $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_\nu$ delle quantità costanti, eseguiamo una sostituzione lineare a coefficienti costanti sulle caratteristiche in modo che la prima di esse risulti eguale al primo membro della equazione precedente. Si vede in tal modo che il caso in cui esista un integrale di primo grado si riduce sempre a quello in cui le equazioni ammettono l'integrale

$$p_1 = \text{cost.},$$

ossia si abbia

$$p'_1 = 0 .$$

2. Ciò premesso eseguiamo sulle $p_2, \cdots, p_\nu$ una sostituzione lineare in modo da far sparire nella espressione della forza viva i termini contenenti i rettangoli delle $p_2, \cdots, p_\nu$, cioè che si abbia

$$T = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2 + \cdots + p_\nu^2) + p_1 (E_{12} p_2 + \cdots + E_{1\nu} p_\nu),$$

allora le equazioni (G′) diverranno

$$0 = p'_1 = \sum_1^\nu {}_r \sum_2^\nu {}_k f_{1k}^{(r)} p_r (p_k + E_{1k} p_1)$$

$$p'_s = \sum_2^\nu {}_r \sum_2^\nu {}_k f_{sk}^{(r)} p_r (p_k + E_{1k} p_1) + \sum_2^\nu {}_k f_{sk}^{(1)} p_1 (p_k + E_{1k} p_1)$$

$$+ \sum_2^\nu {}_r f_{s1}^{(r)} p_r \left(p_1 + \sum_2^\nu {}_g E_{1g} p_g\right) + f_{s1}^{(1)} p_1 \left(p_1 + \sum_2^\nu {}_g E_{1g} p_g\right) \cdot$$

In virtù della prima otterremo

$$f_{1k}^{(r)} + f_{1r}^{(k)} = 0 \tag{19}$$

$$f_{1g}^{(1)} + \sum_2^\nu {}_k f_{1k}^{(g)} E_{1k} = 0,$$

quindi, con un calcolo facile, si avrà

$$p'_s = \sum_2^\nu {}_r \sum_2^\nu {}_k (f_{sk}^{(r)} + f_{s1}^{(k)} E_{1r}) p_r (p_k + E_{1k} p_1) + \sum_2^\nu {}_k (f_{s1}^{(k)} + f_{sk}^{(1)}) p_1 (p_k + E_{1k} p_1) \tag{20}$$

$$= \sum_2^\nu {}_r \sum_2^\nu {}_k g_{sk}^{(r)} p_r q_k + \sum_2^\nu {}_k \gamma_{sk} q_k$$

ponendo

$$g_{sk}^{(r)} = f_{sk}^{(r)} + f_{s1}^{(k)} \quad , \quad \gamma_{sk} = (f_{s1}^{(k)} + f_{sk}^{(1)})\, p_1$$

$$q_k = p_k + E_{1k}\, p_1 . \tag{21}$$

Tenendo presente la relazione (19) si vede che le $g_{sk}^{(r)}$ e le $\gamma_{sk}^{(r)}$ saranno delle quantità costanti che cambiano segno per una trasposizione degl'indici.

Le (20) potranno scriversi ancora

$$p'_s = \sum_2^\nu {}_k q_k \left(\sum_2^\nu {}_r g_{sk}^{(r)} p_r + \gamma_{sk} \right) = \sum_2^\nu {}_k q_k \left[\sum_2^\nu {}_r g_{sk}^{(r)} q_r + \gamma_{sk} - \sum_2^\nu {}_r g_{sk}^{(r)} E_{1r}\, p_1 \right] . \tag{20'}$$

Poniamo

$$\gamma_{sk} - \sum_2^\nu {}_r g_{sk}^{(r)} E_{1r}\, p_1 = p_1 \left[f_{s1}^{(k)} + f_{sk}^{(1)} - \sum_2^\nu {}_r g_{sk}^{(r)} E_{1r} \right] = l_{sk} ;$$

anche l_{sk} cambierà segno per una inversione degli indici, e le (20′) diverranno

$$q'_s = \sum_2^\nu {}_k \sum_2^\nu {}_r g_{sk}^{(r)} q_r q_k + \sum_2^\nu {}_k l_{sk} q_k . \tag{20''}$$

Dalle (21) segue

$$T = \frac{1}{2} (q_2^2 + q_3^2 + \cdots + q_\nu^2) + \text{cost.},$$

onde le (20″) assumeranno la forma

$$q'_s = \sum_2^\nu {}_k \sum_2^\nu {}_r g_{sk}^{(r)} q_r \frac{\partial T}{\partial q_k} + \sum_2^\nu {}_k l_{sk} \frac{\partial T}{\partial q_k} .$$

Eseguendo sulle $q_2, q_3, \cdots, q_\nu$ una sostituzione lineare qualunque che trasformi le caratteristiche nelle $u_2, \cdots, u_\nu$, le equazioni precedenti si trasformeranno nelle

$$u'_s = \sum_2^\nu {}_k \sum_2^\nu {}_r m_{sk}^{(r)} u_r \frac{\partial T}{\partial u_k} + \sum_2^\nu {}_k n_{sk} \frac{\partial T}{\partial u_k} \qquad (s = 2, 3, \cdots, n) \tag{H}$$

in cui le $m_{sk}^{(r)}$ e le n_{sk} cambiano segno per una trasposizione degl'indici e si calcolano immediatamente dalle $g_{sk}^{(r)}$, l_{sk}.

3. Supponiamo ora che esista un secondo integrale di primo grado delle equazioni (G') indipendente da quello precedentemente considerato.

Potremo prendere sempre le cose in modo che esso si riduca ad

$$u_2 = \text{cost.}$$

ed allora, ripetendo un calcolo analogo a quello fatto precedentemente, le equazioni (H) si ridurranno ad un sistema di equazioni della forma

$$v'_s = \sum_3^\nu {}_k \sum_3^\nu {}_r \mu_{sk}^{(r)} v_r \frac{\partial T}{\partial v_k} + \sum_3^\nu {}_k \nu_{sk} \frac{\partial T}{\partial v_k} \qquad (s = 3, 4, \cdots, \nu)$$

ove le v sono legate linearmente alle u, e T risulta, a meno di una costante, una forma omogenea di secondo grado delle v.

In generale quando esistano g integrali indipendenti di primo grado delle equazioni del moto, esse potranno ridursi alla forma

$$(H') \qquad z'_s = \sum_1^\lambda{}_k \sum_1^\lambda{}_r M_{sk}^{(r)} z_r \frac{\partial T}{\partial z_k} + \sum_1^\lambda{}_k N_{sk} \frac{\partial T}{\partial z_k}, \qquad \begin{array}{l} s = 1, 2, \cdots, \lambda \\ \lambda = \nu - g \end{array}$$

in cui $M_{sk}^{(r)}$ e N_{sk} sono dei coefficienti costanti che cambiano segno per una trasposizione degl'indici, e T, a meno di un termine costante, è una forma omogenea di 2° grado delle z, le quali sono legate linearmente alle variabili primitive p.

§ 9. – Integrali di secondo grado delle equazioni dei moti spontanei a caratteristiche indipendenti.

1. Una delle forme sotto le quali vennero poste le equazioni dei moti spontanei a caratteristiche indipendenti è stata la seguente (cfr. § 7)

$$(G'_1) \qquad p'_s = \sum_1^\nu{}_r \sum_1^\nu{}_k \varphi_{sk}^{(r)} \frac{\partial F}{\partial p_r} \frac{\partial T}{\partial p_k}$$

ove F è una forma omogenea qualunque di secondo grado delle p a discriminante diverso da zero e a coefficienti costanti.

Supponiamo che si abbia, comunque siano gli indici e l'apice,

$$\varphi_{sk}^{(r)} = - \varphi_{rk}^{(s)}.$$

Risulterà allora

$$\varphi_{sk}^{(r)} = - \varphi_{ks}^{(r)} = \varphi_{rs}^{(k)} = - \varphi_{sr}^{(k)} = \varphi_{kr}^{(s)} = - \varphi_{rk}^{(s)},$$

onde ponendo

$$\varphi_{sk}^{(r)} = \varphi_{skr}$$

la quantità φ_{skr} cambierà segno per ogni trasposizione degli indici.

Le (G'_1) diverranno

$$p'_s = \sum_1^\nu{}_r \sum_1^\nu{}_k \varphi_{skr} \frac{\partial F}{\partial p_r} \frac{\partial T}{\partial p_k}$$

e quindi

$$\sum_1^\nu{}_s \frac{\partial F}{\partial p_s} p'_s = 0$$

onde

$$F = \text{cost.}$$

Abbiamo dunque che F = cost. sarà un integrale delle equazioni (G'_1).

2. Supponiamo ora inversamente che il sistema di equazioni (G'_1) ammetta per integrale

$$F = \text{cost.}$$

Mediante una sostituzione lineare nelle p

$$(22) \qquad q_i = \sum_1^\nu {}_s\, \alpha_{is}\, p_s$$

riduciamo contemporaneamente le due funzioni T ed F ad essere rispettivamente della forma

$$T = \frac{1}{2} \sum_1^\nu {}_i\, q_i^2$$

$$F = \frac{1}{2} \sum_1^\nu {}_i\, \lambda_i\, q_i^2$$

e supponiamo che le λ_i risultino tutte diverse fra loro. Allora le (G'_1) diverranno

$$(23) \qquad q'_s = \sum_1^\nu {}_r \sum_1^\nu {}_k\, \beta_{sk}^{(r)} \frac{\partial F}{\partial q_r} \frac{\partial T}{\partial q_k} = \sum_1^\nu {}_r \sum_1^\nu {}_k\, \beta_{sk}^{(r)} \lambda_r\, q_r\, q_k$$

avendo posto

$$\beta_{sk}^{(r)} = \sum_1^\nu {}_x \sum_1^\nu {}_y \sum_1^\nu {}_z\, \varphi_{xy}^{(z)}\, \alpha_{sx}\, \alpha_{ky}\, \alpha_{rz}\,.$$

Ora dalle (23) segue

$$\sum_1^\nu {}_s\, \lambda_s\, q_s\, q'_s = \sum_1^\nu {}_r \sum_1^\nu {}_k \sum_1^\nu {}_s\, \beta_{sk}^{(r)} \lambda_r\, \lambda_s\, q_r\, q_k\, q_s\,,$$

quindi se F = cost., ossia se

$$\sum_1^\nu {}_s\, \lambda_s\, q_s\, q'_s = 0,$$

dovremò avere

$$\sum_1^\nu {}_r \sum_1^\nu {}_k \sum_1^\nu {}_s\, \beta_{sk}^{(r)} \lambda_s\, \lambda_r\, q_r\, q_k\, q_s = 0$$

per ogni sistema di valori delle q.

Calcolando il coefficiente di $q_r\, q_k\, q_s$ si trova

$$(\lambda_s \lambda_r - \lambda_k \lambda_r)\, \beta_{sk}^{(r)} + (\lambda_r \lambda_k - \lambda_s \lambda_k)\, \beta_{rs}^{(k)} + (\lambda_k \lambda_s - \lambda_r \lambda_s)\, \beta_{kr}^{(s)};$$

otterremo dunque le equazioni

$$(24) \qquad \lambda_r\, \beta_{sk}^{(r)} (\lambda_s - \lambda_k) + \lambda_k\, \beta_{rs}^{(k)} (\lambda_r - \lambda_s) + \lambda_s\, \beta_{kr}^{(s)} (\lambda_k - \lambda_r) = 0.$$

3. - Abbiamo supposto le λ_i tutte diverse fra loro; dalla (24) può dunque dedursi

$$\lambda_r\, \beta_{sk}^{(r)} = C_{skr} + \lambda_r\, D_{skr}$$

in cui le costanti C_{skr} e D_{skr} sono quantità che cambiano segno per una trasposizione degli indici.

Sostituendo nelle (23) per $\lambda_r \beta_{sk}^{(r)}$ i valori trovati e riducendo i termini simili esse si scriveranno

$$q_s' = \sum_1^\nu {}_r \sum_1^\nu {}_k D_{skr} \lambda_r q_r q_k = \sum_1^\nu {}_r \sum_1^\nu {}_k D_{skr} \frac{\partial F}{\partial q_r} \frac{\partial T}{\partial q_k} . \tag{23'}$$

4. Siano ora

$$p_s = \sum_1^\nu {}_i A_{is} q_i$$

le inverse delle (22); posto

$$e_{skr} = \sum_1^\nu {}_x \sum_1^\nu {}_y \sum_1^\nu {}_z D_{xyz} A_{xs} A_{yk} A_{zr} ,$$

le (23') diverranno

$$p_s' = \Sigma_r \Sigma_k e_{skr} \frac{\partial T}{\partial p_k} \frac{\partial F}{\partial p_r}$$

o anche

$$p_s' = \Sigma_{rk} e_{skr} \frac{d(T, F)}{d(p_k, p_r)}$$

denotando con Σ_{rk} la somma estesa a tutte le combinazioni a due a due degli indici r e k.

La dimostrazione fatta per ottenere queste equazioni presuppone che F sia una forma a discriminante diverso da zero. Ora tale restrizione evidentemente può togliersi, tenendo presente che all'integrale $F = \text{cost.}$, può sostituirsi l'altro $F + KT = \text{cost.}$, ove K è una costante arbitraria, ed osservando pure che le equazioni precedenti non si alterano mutando F in $F + KT$.

5. Scriviamo ora le due forme

$$T = \frac{1}{2} \Sigma_r \Sigma_s E_{rs} p_r p_s$$

$$F = \frac{1}{2} \Sigma_r \Sigma_s \Lambda_{rs} p_r p_s .$$

Le $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_\nu$ saranno le radici dell'equazione di grado ν in λ

$$\begin{vmatrix} \Lambda_{11} - \lambda E_{11}, & \Lambda_{12} - \lambda E_{12}, & \cdots, & \Lambda_{1\nu} - \lambda E_{1\nu} \\ \Lambda_{21} - \lambda E_{21}, & \Lambda_{22} - \lambda E_{22}, & \cdots, & \Lambda_{2\nu} - \lambda E_{2\nu} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \Lambda_{\nu 1} - \lambda E_{\nu 1}, & \Lambda_{\nu 2} - \lambda E_{\nu 2}, & \cdots, & \Lambda_{\nu\nu} - \lambda E_{\nu\nu} \end{vmatrix} = 0; \tag{K}$$

potremo dunque enunciare il teorema:

Posto

$$T = \frac{1}{2} \Sigma_r \Sigma_s E_{rs} p_r p_s$$

$$F = \frac{1}{2} \Sigma_r \Sigma_s \Lambda_{rs} p_r p_s ,$$

se l'equazione algebrica (K) *non ammette radici eguali, la condizione necessaria e sufficiente affinché un moto spontaneo a caratteristiche indipendenti avente* T *per forza viva, ammetta l'integrale* F = cost. *è che le equazioni del moto siano della forma*

$$p'_s = \Sigma_{rk} e_{skr} \frac{d(T, F)}{d(p_k, p_r)} \tag{I}$$

in cui le e_{skr} *sono costanti che cambiano segno per una trasposizione degl'indici.*

Chiameremo la equazione (K) la *equazione determinante.*

6. Allorché le equazioni differenziali assumono la forma (I), ogni nuovo integrale Φ = cost., dovendo verificare l'equazione

$$\sum_{1}^{\nu}{}_s \frac{\partial \Phi}{\partial p_s} p'_s = 0 ,$$

dovrà esser tale che

$$\Sigma_{skr} e_{skr} \frac{d(T, F, \Phi)}{d(p_s, p_k, p_r)} = 0$$

in cui Σ_{skr} denota una somma ottenuta facendo tutte le combinazioni tre a tre degl'indici s, k, r.

§ 10. – Integrali di primo e di secondo grado delle equazioni dei moti spontanei a caratteristiche indipendenti.

1. Se le equazioni del moto ammettono un integrale di secondo grado non omogeneo, si vede immediatamente che debbono essere separatamente integrali dell'equazione la parte di primo e quella di secondo grado.

Supponiamo di valerci di tutti gl'integrali di primo grado che si possono conoscere per ridurre le equazioni differenziali del moto alla forma (cfr. § 8)

$$q'_s = \Sigma_k \Sigma_r a_{sk}^{(r)} q_k q_r + \Sigma_k b_{sk} q_k . \tag{H''}$$

L'integrale delle forze vive avrà allora la forma

$$T + \text{cost.} = \frac{1}{2} \Sigma_s q_s^2 = \text{cost.} \tag{25}$$

Supponiamo che esista un integrale di secondo grado

$$F(q_1, q_2, q_3, \cdots) = \text{cost.} \tag{26}$$

Per mezzo di una sostituzione ortogonale nelle q, potrà sempre ridursi questo integrale a mancare dei termini contenenti i rettangoli delle variabili senza che perciò si alteri la forma delle equazioni (H''), né quella dell'integrale (25). Potremo dunque supporre senz'altro che l'integrale (26) abbia la forma

$$(26') \qquad F = \frac{1}{2}(\lambda_1 q_1^2 + \lambda_2 q_2^2 + \cdots) + \mu_1 q_1 + \mu_2 q_2 + \cdots = \text{cost.}$$

Ammettiamo che le $\lambda_1, \lambda_2, \cdots$ siano tutte diverse fra loro; moltiplicando rispettivamente le (H'') per $\lambda_s q_s + \mu_s$ e sommando si avrà, in virtù della (26'),

$$(27) \qquad \Sigma_s \Sigma_k \Sigma_r \lambda_s a_{sk}^{(r)} q_s q_k q_r = 0$$

$$(27') \qquad \Sigma_s \Sigma_k \Sigma_r a_{sk}^{(r)} \mu_s q_k q_r + \Sigma_s \Sigma_k b_{sk} \lambda_s q_s q_k = 0$$

$$(27'') \qquad \Sigma_s \Sigma_k b_{sk} \mu_s q_k = 0 .$$

Dalle (27) segue

$$(\lambda_s - \lambda_k) a_{sk}^{(r)} + (\lambda_r - \lambda_s) a_{rs}^{(k)} + (\lambda_k - \lambda_r) a_{kr}^{(s)} = 0$$

e quindi

$$a_{sk}^{(r)} = C_{skr} + \lambda_r D_{skr}$$

ove le C_{skr} e D_{skr} cambiano segno per ogni trasposizione degli indici.

La (27') dunque si scriverà

$$\Sigma_s \Sigma_k q_s q_k [b_{sk} - \Sigma_r \mu_r D_{skr}] \lambda_s = 0$$

e quindi

$$(\lambda_s - \lambda_k) [b_{sk} - \Sigma_r \mu_r D_{skr}] = 0$$

da cui segue

$$b_{sk} = \Sigma_r D_{skr} \mu_r .$$

Questi valori delle b_{sk} verificano evidentemente le (27'').

Le (H'') potranno dunque scriversi

$$q'_s = \Sigma_k \Sigma_r D_{skr} \lambda_r q_k q_r + \Sigma_k \Sigma_r D_{skr} q_k \mu_r$$

$$= \Sigma_k \Sigma_r D_{skr} q_k (\lambda_r q_r + \mu_r) = \Sigma_k \Sigma_r D_{skr} \frac{\partial T}{\partial q_k} \frac{\partial F}{\partial q_r} .$$

Eseguendo sopra le q una sostituzione lineare qualsiasi che conduca alle p, avremo che la forma delle equazioni non cambierà e si otterrà

$$(L) \qquad p'_s = \Sigma_k \Sigma_r e_{skr} \frac{\partial T}{\partial p_k} \frac{\partial F}{\partial p_r} = \Sigma_{kr} e_{skr} \frac{d(T, F)}{d(p_k, p_r)}$$

ove le e_{skr} saranno quantità che cambieranno segno per una trasposizione degli indici.

§ 11. – Teorema generale sulla integrazione delle equazioni dei moti spontanei a caratteristiche indipendenti.

1. – Prendiamo le equazioni sotto la forma (vedi § 9)

$$(I) \qquad p'_s = \Sigma_{kr} e_{skr} \frac{d(T, F)}{d(p_k, p_r)} .$$

Si verifica facilmente che

$$\Sigma_s \frac{\partial}{\partial p_s} \Sigma_{kr}\, e_{skr} \frac{d(\mathrm{T},\mathrm{F})}{d(p_k, p_r)}$$

$$= \Sigma_{skr}\, e_{skr} \left\{ \frac{\partial}{\partial p_s} \frac{d(\mathrm{T},\mathrm{F})}{d(p_k, p_r)} + \frac{\partial}{\partial p_k} \frac{d(\mathrm{T},\mathrm{F})}{d(p_r, p_s)} + \frac{\partial}{\partial p_r} \frac{d(\mathrm{T},\mathrm{F})}{d(p_s, p_k)} \right\} = 0 .$$

Dunque il sistema di equazioni differenziali

$$(\mathrm{I}') \qquad \frac{dp_1}{\Sigma_{kr}\, e_{1kr} \dfrac{d(\mathrm{T},\mathrm{F})}{d(p_k, p_r)}} = \frac{dp_2}{\Sigma_{kr}\, e_{2kr} \dfrac{d(\mathrm{T},\mathrm{F})}{d(p_k, p_r)}} = \frac{dp_3}{\Sigma_{kr}\, e_{3kr} \dfrac{d(\mathrm{T},\mathrm{F})}{d(p_k, p_r)}} = \cdots$$

ammette il moltiplicatore 1.

2. Il numero dei parametri $p_1\, p_2, \cdots$ di un sistema *a caratteristiche indipendenti* se ne dirà l'*ordine*. Supponiamo che il sistema che si considera sia di ordine ν e che si conoscano $\nu - 4$ integrali delle (I) indipendenti dal tempo e dai due integrali quadratici $\mathrm{T} = \text{cost.}$, $\mathrm{F} = \text{cost.}$ Tenendo conto di questi due integrali, avremo che si conosceranno $\nu - 2$ integrali del sistema (I'), e siccome se ne conosce un moltiplicatore, così con una quadratura potremo ottenere l'ultimo integrale. Determinati così $\nu - 1$ integrali delle (I) indipendenti dal tempo con una ulteriore quadratura avremo l'equazione del tempo.

Possiamo dunque enunciare il teorema: *Se, oltre l'integrale delle forze vive, si conoscono $\nu - 3$ integrali indipendenti dal tempo delle equazioni d'un moto spontaneo a caratteristiche indipendenti d'ordine ν, ed uno di essi è un integrale di secondo grado (la cui equazione determinante abbia radici diseguali) la determinazione delle caratteristiche si riduce alle quadrature.*

XXVII.

SULLA INTEGRAZIONE DI UNA CLASSE DI EQUAZIONI DINAMICHE

«Atti Acc. Scienze Torino», vol. XXXIII, 1898, pp. 542–558 (*)

In una Nota precedente avente il titolo: *Sopra una classe di equazioni dinamiche* (1), ho stabilito le equazioni differenziali dei *moti spontanei a caratteristiche indipendenti*.

Ci varremo ora dei risultati ivi trovati per approfondire l'esame dei moti stessi. Studieremo dapprima il caso dei moti del secondo ordine, cioè di quei moti che dipendono da due sole caratteristiche e mostreremo come queste si ottengono in funzione del tempo mediante funzioni esponenziali. Prenderemo poi ad esaminare un sistema *non olonomo* che può assumersi come il sistema tipico del secondo ordine e per questo sistema studieremo completamente l'andamento del moto, rilevando le particolarità che si osservano nel caso dei moti permanenti, e distinguendo il caso della stabilità da quello della instabilità.

In due paragrafi successivi tratteremo dei moti d'ordine ν, quando esistono $\nu - 2$ integrali lineari o $\nu - 3$ integrali lineari ed uno quadratico. In questo caso giovandoci di un risultato che abbiamo stabilito alcuni anni fa (2), mostreremo che allorquando la equazione determinante ha radici disuguali, le caratteristiche sono funzioni ellittiche del tempo.

Finalmente nell'ultimo paragrafo, applicando una geniale osservazione del POINCARÉ, già impiegata con successo dal PICARD (3) e dal PAINLEVÉ (4) in alcune questioni meccaniche, otterremo nel caso il più generale, le caratteristiche espresse mediante serie di funzioni del tempo, valide per tutti i valori del tempo, i cui coefficienti si ricavano mediante operazioni razionali dalle costanti note delle equazioni differenziali e dai valori iniziali delle caratteristiche.

Il problema della determinazione analitica delle caratteristiche in funzione del tempo, viene così completamente risoluto.

(*) Presentata nell'adunanza del 27 marzo 1898.

(1) «Atti Acc. Scienze Torino», vol. XXXIII, 1898, pp. 451–475 [in questo vol.: XXVI, pp. 336–355].

(2) *Sopra un sistema di equazioni differenziali.* «Atti Acc. Sc. Torino», vol. XXX, Vol. 1894–95, p. 445 [in questo vol.: VIII, pp. 122–128].

(3) PICARD, *Traité d'analyse*, T. III, chapitre X.

(4) P. PAINLEVÉ, *Leçons sur la théorie analytique des équations différentielles professées à Stockholm*, p. 577.

§ 1. - MOTI SPONTANEI A CARATTERISTICHE INDIPENDENTI DEL SECONDO ORDINE.

1. Nel caso dei sistemi del secondo ordine le equazioni generali (Nota citata, § 7, form. (E')) divengono

$$p_1' = g_{12}^{(1)} p_2 p_1 + g_{12}^{(2)} p_2^2$$

$$p_2' = g_{21}^{(2)} p_1 p_2 + g_{21}^{(1)} p_1^2$$

ovvero, ponendo

$$g_{12}^{(1)} = -\alpha \quad , \quad g_{12}^{(2)} = -\beta ,$$

avremo

$$(1) \qquad \begin{cases} p_1' = -p_2(\alpha p_1 + \beta p_2) \\ p_2' = p_1(\alpha p_1 + \beta p_2). \end{cases}$$

2. Mostriamo la effettiva esistenza di sistemi a caratteristiche indipendenti del secondo ordine, a cui corrispondono valori arbitrarii per le costanti α e β. Per ogni sistema di valori di queste quantità ne esistono infiniti. Noi in particolare ne esamineremo uno speciale che considereremo come tipico e che ci darà un'idea materiale dell'andamento del moto corrispondente.

Prendiamo un sistema di assi x_1, x_2, x_3 tali che i coseni degli angoli che essi formano originariamente con gli assi coordinati ξ_1, ξ_2, ξ_3 siano rappresentati dalla seguente tabella:

(2)

	ξ_1,	ξ_2,	ξ_3
x_1	α_1,	α_2,	α_3
x_2	β_1,	β_2,	β_3
x_3	γ_1,	γ_2,	γ_3

Se ruotiamo gli assi x_1, x_2, x_3 di un angolo θ intorno alla parallela a ξ_1 condotta per la loro origine, i coseni stessi diverranno

	ξ_1,	ξ_2,	ξ_3
x_1	ξ_{11},	ξ_{21},	ξ_{31}
x_2	ξ_{12},	ξ_{22},	ξ_{32}
x_3	ξ_{13},	ξ_{23},	ξ_{33}

in cui

$$\begin{aligned} &\xi_{11} = \alpha_1 \quad , \quad \xi_{21} = \alpha_2 \cos\theta - \alpha_3 \operatorname{sen}\theta \quad , \quad \xi_{31} = \alpha_3 \cos\theta + \alpha_2 \operatorname{sen}\theta \\ &\xi_{12} = \beta_1 \quad , \quad \xi_{22} = \beta_2 \cos\theta - \beta_3 \operatorname{sen}\theta \quad , \quad \xi_{32} = \beta_3 \cos\theta + \beta_2 \operatorname{sen}\theta \\ &\xi_{13} = \gamma_1 \quad , \quad \xi_{23} = \gamma_2 \cos\theta - \gamma_3 \operatorname{sen}\theta \quad , \quad \xi_{33} = \gamma_3 \cos\theta + \gamma_2 \operatorname{sen}\theta . \end{aligned}$$

Denotiamo con ξ_1, ξ_2, ξ_3 le coordinate dell'origine degli assi x_1, x_2, x_3 e poniamo

$$\theta = D\xi_1 , \tag{3}$$

in cui D denota una costante. Avremo allora che ad ogni punto dello spazio, preso come origine degli assi x_1, x_2, x_3, corrisponderà una orientazione degli assi stessi.

Per ottenere queste diverse orientazioni osserviamo che gli assi x_1, x_2, x_3 le cui origini appartengono ad uno stesso piano parallelo a $\xi_2\,\xi_3$ sono paralleli fra loro e se le origini sono scelte sul piano coordinato $\xi_2\,\xi_3$ la loro comune orientazione corrisponde a quella primitiva rappresentata dalla tabella (2). Immaginiamo dunque condotto per ogni punto di questo piano coordinato gli assi x_1, x_2, x_3 nella orientazione primitiva, quindi facciamo muovere il piano stesso di un movimento a vite attorno all'asse ξ_1 in modo che il passo della vite sia $2\pi/D$. Se il piano trascinerà nel suo moto gli assi x_1, x_2, x_3 supposti condotti per ogni punto di esso e ammettendoli rigidamente collegati al piano stesso, questi prenderanno le orientazioni corrispondenti alle varie posizioni che assumono le loro origini.

3. Per ciò che abbiamo ora veduto, ad ogni punto A dello spazio corrisponde un piano $x_1\,x_2$ passante per A che denoteremo con σ_A. Supponiamo che si abbia un punto mobile, tale che in ogni posizione che occupa nello spazio, esso non possa muoversi che tangenzialmente al piano σ_A corrispondente al punto stesso. Il sistema sarà *non olonomo* [5] e l'equazione del vincolo sarà

$$\xi_{13}\,d\xi_1 + \xi_{23}\,d\xi_2 + \xi_{33}\,d\xi_3 = 0 .$$

Potremo dunque porre

$$\left\{\begin{aligned} \xi_1' &= \xi_{11}\,p_1 + \xi_{12}\,p_2 \\ \xi_2' &= \xi_{21}\,p_1 + \xi_{22}\,p_2 \\ \xi_3' &= \xi_{31}\,p_1 + \xi_{32}\,p_2 \end{aligned}\right. \tag{4}$$

ove p_1 e p_2 sono le caratteristiche del moto.

Supponendo la massa del punto eguale ad 1, la sua forza viva sarà

$$T = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) .$$

Per calcolare i coefficienti $g_{12}^{(1)}$, $g_{12}^{(2)}$ faremo uso delle formule (vedi Nota citata, § 1):

$$g_{12}^{(1)} = \xi_{11}\left(\xi_{11}\frac{\partial\xi_{12}}{\partial\xi_1} + \xi_{21}\frac{\partial\xi_{22}}{\partial\xi_1} + \xi_{31}\frac{\partial\xi_{32}}{\partial\xi_1}\right) + \xi_{21}\left(\xi_{11}\frac{\partial\xi_{12}}{\partial\xi_2} + \xi_{21}\frac{\partial\xi_{22}}{\partial\xi_2} + \xi_{31}\frac{\partial\xi_{32}}{\partial\xi_2}\right)$$
$$+ \xi_{31}\left(\xi_{11}\frac{\partial\xi_{12}}{\partial\xi_3} + \xi_{21}\frac{\partial\xi_{22}}{\partial\xi_3} + \xi_{31}\frac{\partial\xi_{32}}{\partial\xi_3}\right),$$

(5) Infatti

$$\xi_{13}\left(\frac{\partial\xi_{23}}{\partial\xi_3} - \frac{\partial\xi_{33}}{\partial\xi_2}\right) + \xi_{23}\left(\frac{\partial\xi_{33}}{\partial\xi_1} - \frac{\partial\xi_{13}}{\partial\xi_3}\right) + \xi_{33}\left(\frac{\partial\xi_{13}}{\partial\xi_2} - \frac{\partial\xi_{23}}{\partial\xi_1}\right) = (1 - \gamma_1^2)\,D \gtrless 0 .$$

$$g_{12}^{(2)} = \xi_{12}\left(\xi_{11}\frac{\partial \xi_{12}}{\partial \xi_1} + \xi_{21}\frac{\partial \xi_{22}}{\partial \xi_1} + \xi_{31}\frac{\partial \xi_{32}}{\partial \xi_1}\right) + \xi_{22}\left(\xi_{11}\frac{\partial \xi_{12}}{\partial \xi_2} + \xi_{21}\frac{\partial \xi_{22}}{\partial \xi_2} + \xi_{31}\frac{\partial \xi_{32}}{\partial \xi_2}\right)$$
$$+ \xi_{32}\left(\xi_{11}\frac{\partial \xi_{12}}{\partial \xi_3} + \xi_{21}\frac{\partial \xi_{22}}{\partial \xi_3} + \xi_{32}\frac{\partial \xi_{32}}{\partial \xi_3}\right)$$

e otterremo

$$g_{12}^{(1)} = \alpha_1\left(\xi_{21}\frac{\partial \xi_{22}}{\partial \theta} + \xi_{31}\frac{\partial \xi_{32}}{\partial \theta}\right)\frac{d\theta}{d\xi_1} = \alpha_1(\xi_{31}\xi_{22} - \xi_{21}\xi_{32})\,\mathrm{D} = -\mathrm{D}\alpha_1\gamma_1$$

$$g_{12}^{(2)} = \beta_1\left(\xi_{21}\frac{\partial \xi_{22}}{\partial \theta} + \xi_{31}\frac{\partial \xi_{32}}{\partial \theta}\right)\frac{d\theta}{d\xi_1} = \beta_1(\xi_{31}\xi_{22} - \xi_{21}\xi_{32})\,\mathrm{D} = -\mathrm{D}\beta_1\gamma_1,$$

quindi

$$\alpha = \mathrm{D}\alpha_1\sqrt{1 - \alpha_1^2 - \beta_1^2} \quad , \quad \beta = \mathrm{D}\beta_1\sqrt{1 - \alpha_1^2 - \beta_1^2}.$$

Poiché D , α_1 , β_1 sono arbitrarie (purché queste due ultime quantità abbiano la somma dei quadrati minore di 1), così potremo far sì che α e β abbiano valori arbitrarii.

In tutto ciò che segue noi supporremo di prendere D , γ_1 , e il radicale $\sqrt{1-\gamma_1^2}$ sempre *positivi*.

Riassumendo ciò che abbiamo fin qui trovato, possiamo dire che *il moto di un punto di coordinate ξ_1, ξ_2, ξ_3 non soggetto ad alcuna forza e i cui vincoli sono rappresentabili mediante la equazione*

$$\xi_{13}d\xi_1 + \xi_{23}d\xi_2 + \xi_{33}d\xi_3 = 0$$

costituisce il tipo dei moti spontanei a caratteristiche indipendenti del 2° ordine i più generali.

4. Per un punto qualunque A dello spazio conduciamo il piano σ_A corrispondente ed il piano parallelo al piano coordinato $\xi_2\xi_3$. La loro intersezione l_A formerà cogli assi ξ_1, ξ_2, ξ_3 angoli i cui coseni saranno rispettivamente

(A) $$0 \ , \quad \frac{\pm\,\xi_{33}}{\sqrt{1-\gamma_1^2}} \quad , \quad \frac{\mp\,\xi_{23}}{\sqrt{1-\gamma_1^2}} .$$

Prenderemo come direzione positiva di l_A quella i cui coseni corrispondono ai segni superiori.

Ad ogni punto A dello spazio corrisponde una retta l_A, ed evidentemente tutte le l_A relative a punti equidistanti dal piano $\xi_2\,\xi_3$ sono parallele ed hanno lo stesso verso.

Se prendiamo due punti A , B le cui distanze dal piano $\xi_2\,\xi_3$ differiscono per ε, avremo che l'angolo

$$\widehat{l_A l_B} = \mathrm{D}\varepsilon,$$

quindi se $\varepsilon = (2h + 1)\pi/\mathrm{D}$, ($h$ essendo intero) le rette l_A e l_B saranno parallele e avranno verso opposto, mentre se $\varepsilon = 2h\pi/\mathrm{D}$, esse saranno parallele e dello stesso verso.

Le rette l_A, al pari dei piani σ_A, hanno una notevole importanza in tutta la questione del moto.

§ 2. - Integrazione delle equazioni dei moti spontanei a caratteristiche indipendenti del secondo ordine.

1. Riprendiamo le equazioni generali (1).

Esse ammettono l'integrale delle forze vive

$$p_1^2 + p_2^2 = \text{cost.} = C^2.$$

Posto

$$p_1 = C\cos\varphi \quad , \quad p_2 = C\,\mathrm{sen}\,\varphi \quad , \quad C > 0 ,$$

$$\alpha = -A\,\mathrm{sen}\,\varphi_0 \quad , \quad \beta = A\cos\varphi_0 \quad , \quad A = \left|\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\right| = D\gamma_1\sqrt{1-\gamma_1^2}$$

le (1) si ridurranno alla sola equazione

$$\varphi' = AC\,\mathrm{sen}\,(\varphi - \varphi_0)$$

e integrando

$$AC(t - t_0) = \log\ \mathrm{tg}\,\frac{1}{2}(\varphi - \varphi_0)$$

t_0 essendo una costante arbitraria. Quindi

$$\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}(\varphi - \varphi_0) = e^{AC(t-t_0)}$$

$$\cos\varphi = -\frac{\cos\varphi_0\,\mathrm{senh}\,AC(t-t_0) + \mathrm{sen}\,\varphi_0}{\cosh AC(t-t_0)}$$

$$\mathrm{sen}\,\varphi = \frac{-\mathrm{sen}\,\varphi_0\,\mathrm{senh}\,AC(t-t_0) + \cos\varphi_0}{\cosh AC(t-t_0)}$$

e finalmente

$$\text{(5)} \qquad \left\{ \begin{aligned} p_1 &= -\frac{C}{A}\,\frac{\beta\,\mathrm{senh}\,AC(t-t_0) - \alpha}{\cosh AC(t-t_0)} \\ p_2 &= \frac{C}{A}\,\frac{\alpha\,\mathrm{senh}\,AC(t-t_0) + \beta}{\cosh AC(t-t_0)} . \end{aligned} \right.$$

Abbiamo così le formule risolutive per tutti i moti del secondo ordine.

2. Passiamo ai moti del secondo ordine *permanenti*.

Otterremo le equazioni (cfr. Nota citata, § 7)

$$p_2(\alpha p_1 + \beta p_2) = 0$$

$$p_1(\alpha p_1 + \beta p_2) = 0$$

quindi

$$\alpha p_1 + \beta p_2 = 0$$

ovvero denotando con λ una quantità costante

$$\text{(6)} \qquad p_1 = -\lambda\beta \quad , \quad p_2 = \lambda\alpha .$$

Si hanno così tutti i moti permanenti del secondo ordine.

Per ricavare queste formule dalle formule generali (5) basterà in queste fare $t_0 = \pm\infty$.

Se facciamo $t_0 = +\infty$, avremo

$$\lim_{t_0=\infty} \frac{C}{A} \frac{\operatorname{senh} AC(t-t_0)}{\cosh AC(t-t_0)} = -\frac{C}{A};$$

invece facendo $t_0 = -\infty$ si avrà

$$\lim_{t_0=-\infty} \frac{C}{A} \frac{\operatorname{senh} AC(t-t_0)}{\cosh AC(t-t_0)} = \frac{C}{A}.$$

Quindi nel primo caso si trova

$$p_1 = -\lambda\beta \quad , \quad p_2 = \lambda\alpha \quad , \quad \lambda = -\frac{C}{A} < 0,$$

e nel secondo caso

$$p_1 = -\lambda\beta \quad , \quad p_2 = \lambda\alpha \quad , \quad \lambda = \frac{C}{A} > 0.$$

Mostreremo ora che le formule (6) corrispondono ai moti permanenti stabili quando si abbia $\lambda > 0$, e a moti permanenti instabili quando sia $\lambda < 0$.

3. A tal fine dimostreremo il teorema seguente:

Ogni moto spontaneo a caratteristiche indipendenti del secondo ordine tende indefinitamente a divenire un moto permanente individuato dalle formole

$$p_1 = -\frac{C}{A}\beta \quad , \quad p_2 = \frac{C}{A}\alpha.$$

Infatti dalle (5) segue

$$\lim_{t=\infty} p_1 = -\frac{C}{A}\beta \quad , \quad \lim_{t=\infty} p_2 = \frac{C}{A}\alpha.$$

È facile di qui dedurre che, dato un moto stazionario corrispondente a λ positivo, sarà sempre possibile peturbarlo in modo che p_1 e p_2 differiscano durante tutto il moto, dai valori costanti che queste quantità hanno nel moto stazionario, meno di numeri tanto piccoli quanto si vuole; e perciò basterà che le alterazioni fatte subire inizialmente ai valori di p_1 e p_2 siano inferiori ad un dato limite. Al contrario se consideriamo un moto stazionario corrispondente a λ negativo, la detta proprietà non si verificherà, perché per quanto poco si alterino in un istante qualunque i valori di p_1 e di p_2, purché non si mantengano proporzionali a $-\beta$ e ad α, il moto cesserà di essere stazionario ed i valori di p_1 e p_2 tenderanno indefinitamente verso $-C\beta/A$ e $C\alpha/A$.

Questa diversa proprietà che si verifica per i moti stazionarii secondoché λ è positivo o negativo, costituisce appunto ciò che assumeremo come *proprietà caratteristica delle loro stabilità ed instabilità* (6).

(6) Nella Nota che seguirà la presente daremo la definizione di stabilità ed instabilità dei moti stazionarii nel caso generale ed essa sarà informata allo stesso concetto (cfr. intanto *Sulle rotazioni permanenti stabili di un sistema in cui sussistono moti interni stazionarii.* «Annali di Mat.», ser. 2, vol. XXIII, 1895, pp. 269–285; [in questo vol.: XV, pp. 173–186]).

4. Possiamo facilmente studiare l'andamento di un moto in prossimità di ridursi ad un moto stabile.

Perciò poniamo nelle (1)

$$p_1 = -\lambda\beta + \omega_1 \quad , \quad p_2 = \lambda\alpha + \omega_2 \qquad (\lambda > 0)$$

e consideriamo ω_1 e ω_2 come piccolissimi, in modo da poterne trascurare le potenze superiori alla prima per rapporto a queste quantità.

Le (1) diverranno allora

$$\omega_1' = -\lambda\alpha\,(\alpha\omega_1 + \beta\omega_2)$$
$$\omega_2' = -\lambda\beta\,(\alpha\omega_1 + \beta\omega_2)$$

e ponendo

$$\omega_1 = \psi_1 e^{\rho t} \quad , \quad \omega_2 = \psi_2 e^{\rho t} ,$$

avremo

$$\psi_1\,(\lambda\alpha^2 + \rho) + \psi_2\,(\lambda\alpha\beta) = 0$$
$$\psi_1\,(\lambda\alpha\beta) + \psi_2\,(\lambda\beta^2 + \rho) = 0$$

d'onde

$$\begin{vmatrix} \lambda\alpha^2 + \rho \,, & \lambda\alpha\beta \\ \lambda\alpha\beta \,, & \lambda\beta^2 + \rho \end{vmatrix} = 0$$

ossia

$$\rho^2 + \lambda\rho\,(\alpha^2 + \beta^2) = 0 ,$$

da cui segue

$$\rho = \begin{cases} 0 \\ -\lambda\,(\alpha^2 + \beta^2) = -\lambda A^2 \end{cases}$$

quindi trascurando la radice nulla

$$\omega_1 = K\alpha e^{-\lambda A^2 t} \quad , \quad \omega_2 = K\beta e^{-\lambda A^2 t}$$

essendo K una costante arbitraria.

§ 3. – Caso tipico dei moti spontanei a caratteristiche indipendenti del secondo ordine.

1. Riprendiamo in esame quel sistema il cui moto nel § 1 abbiamo assunto come il tipo dei moti spontanei del secondo ordine a caratteristiche indipendenti, e mostriamo come si possa compiere la integrazione ed ottenere un'immagine dell'andamento del moto stesso.

2. Dalle (3) e (4) segue

$$\theta' = D\xi_1' = D\,(\alpha_1 p_1 + \beta_1 p_2) . \tag{7}$$

Cominciamo dapprima a supporre che il moto sia permanente. Dalle (6) si dedurrà

$$\theta' = 0$$

onde $\theta = \text{cost}$. E le (4) diverranno

$$\xi_1' = 0$$
$$\xi_2' = \lambda D \gamma_1 \xi_{33}$$
$$\xi_3' = -\lambda D \gamma_1 \xi_{23}$$

e integrando

$$\xi_1 - \xi_1^0 = 0 \quad , \quad \xi_2 - \xi_2^0 = \lambda D \gamma_1 \xi_{33} t \quad , \quad \xi_3 - \xi_3^0 = -\lambda D \gamma_1 \xi_{23} t$$

ove $\xi_1^0, \xi_2^0, \xi_3^0$ rappresentano le coordinate della posizione A occupata dal mobile al tempo $t = 0$. Il moto è dunque uniforme ed avviene sopra una retta l_A.

Esso avrà luogo nel verso positivo o in quello negativo, secondoché λ è positivo o negativo.

Possiamo dunque concludere:

I moti permanenti stabili sono moti uniformi nel verso positivo delle l_A e i moti permanenti instabili sono quelli nel verso negativo delle rette stesse.

3. Supponiamo che il moto non sia permanente, allora tenendo conto delle (5) si deduce dalla (7)

$$\theta' = \frac{AC}{\gamma_1 \cosh AC (t - t_0)} .$$

Con una quadratura avremo dunque θ in funzione del tempo; quindi mediante tre nuove quadrature otterremo per mezzo delle (4) ξ_1, ξ_2, ξ_3 espresse pure in funzione del tempo.

4. Risparmiamoci però queste operazioni e riconosciamo l'andamento del moto nella maniera seguente:

Denotiamo con g l'angolo che in ogni istante la direzione del moto del punto forma colla direzione positiva della retta l_A che passa pel punto A occupato nell'istante stesso dal mobile. Avremo (vedi (A))

$$\cos g = \frac{\xi_2'}{\sqrt{\xi_1'^2 + \xi_2'^2 + \xi_3'^2}} \frac{\xi_{33}}{\sqrt{1 - \gamma_1^2}} - \frac{\xi_3'}{\sqrt{\xi_1'^2 + \xi_2'^2 + \xi_3'^2}} \frac{\xi_{23}}{\sqrt{1 - \gamma_1^2}}$$

$$= \frac{(\xi_{21} \xi_{33} - \xi_{31} \xi_{23}) p_1 + (\xi_{22} \xi_{23} - \xi_{32} \xi_{33}) p_2}{\sqrt{p_1^2 + p_2^2} \sqrt{1 - \gamma_1^2}} = \frac{\alpha_1 p_2 - \beta_1 p_1}{\sqrt{p_1^2 + p_2^2} \sqrt{1 - \gamma_1^2}}$$

e applicando le (5)

$$\cos g = \frac{\operatorname{senh} AC (t - t_0)}{\cosh AC (t - t_0)}$$

e quindi

$$\text{(8)} \qquad \operatorname{sen} g = \frac{1}{\cosh AC (t - t_0)} .$$

Da queste formole si deduce

$$dg = - \frac{AC \, dt}{\cosh AC (t - t_0)} = - \gamma_1 \, d\theta$$

onde integrando

$$\theta - \theta_0 = -\frac{1}{\gamma_1}(g - g_0)$$

chiamando θ_0 e g_0 i valori di θ e g al tempo $t = 0$.

Ne segue

$$\xi_1 - \xi_1^0 = \frac{1}{D\gamma_1}(g_0 - g). \tag{9}$$

5. Serviamoci ora delle due formule trovate (8) e (9). La prima mostra che *l'angolo g va indefinitamente decrescendo,* la seconda dà la proiezione sull'asse ξ_1 del cammino percorso dal punto mobile. *Il limite verso cui tenderà questa proiezione col crescere indefinito del tempo sarà*

$$\frac{g_0}{D\gamma_1}.$$

6. La minima distanza fra l'asse z e la retta l_A su cui si trova il punto mobile al tempo t, sarà (vedi (A))

$$r = \frac{\xi_{23}\,\xi_2 + \xi_{33}\,\xi_3}{\sqrt{1-\gamma_1^2}}$$

quindi

$$r' = \frac{\xi_{23}\,\xi_2' + \xi_{33}\,\xi_3' + \xi_2\,\xi_{23}' + \xi_3\,\xi_{33}'}{\sqrt{1-\gamma_1^2}}$$

e con facili calcoli

$$r' = -\frac{\gamma_1^2}{A}\frac{d\theta}{dt} + \frac{1}{\sqrt{1-\gamma_1^2}}(\xi_{23}\,\xi_3 - \xi_{33}\,\xi_2)\frac{d\theta}{dt}$$

onde integrando

$$r - r_0 = -\frac{\gamma_1^2}{A}(\theta - \theta_0) + \int_0^t \frac{\xi_{23}\,\xi_3 - \xi_{33}\,\xi_2}{\sqrt{1-\gamma_1^2}} \cdot \frac{AC}{\gamma_1}\,\frac{1}{\cosh AC\,(t - t_0)}\,dt$$

essendo r_0 il valore di r per $t = 0$.

Osserviamo ora che ξ_{23} e ξ_{33} sono minori di 1 e $|\xi_2'|$ e $|\xi_3'|$ sono quantità sempre inferiori ad un valore finito. Potremo dunque porre

$$\frac{\xi_{23}\,\xi_3 - \xi_{33}\,\xi_2}{\sqrt{1-\gamma_1^2}}\,\frac{AC}{\gamma_1} = Mt$$

essendo M una quantità inferiore ad un numero finito.

Ne segue che

$$\int_0^t Mt\,\frac{1}{\cosh AC\,(t - t_0)}\,dt \tag{10}$$

sarà sempre inferiore ad un numero finito qualunque sia il valore di t.

Potremo dunque concludere che *il punto mobile non potrà mai raggiungere delle rette l_λ che distano dall'asse z al di là di un certo limite.* Evidentemente col crescere indefinito di t_0 l'integrale (10) e quindi $r - r_0$ decresceranno indefinitamente.

7. Dalle fatte considerazioni si possono dedurre facilmente altre proprietà, oltre quelle già stabilite (§ 2), relative alle perturbazioni dei moti permanenti stabili ed instabili. Così nel caso dei moti stabili, purché la perturbazione iniziale sia inferiore ad un limite convenientemente scelto, il moto perturbato subirà durante tutto il tempo una deviazione dalla direzione del moto permanente, inferiore ad un numero tanto piccolo quanto si vuole, e il moto avrà luogo secondo una traiettoria che si avvicina indefinitamente ad una retta l_λ la cui distanza dalla traiettoria del moto non perturbato sarà inferiore ad un numero piccolo ad arbitrio.

Infine nel caso di un moto instabile le dette particolarità pel moto perturbato non si verificheranno.

§ 4. - Moti spontanei a caratteristiche indipendenti d'ordine ν con $\nu - 2$ integrali lineari.

1. Se il moto è di ordine ν e si conoscono $\nu - 2$ integrali lineari indipendenti, le equazioni differenziali si riconducono alla forma (vedi Nota citata, § 8, equaz. (H'))

$$(11) \qquad \begin{cases} z_1' = z_2(M_{12}^{(1)} z_1 + M_{12}^{(2)} z_2 + N_{12}) \\ z_2' = z_1(M_{21}^{(1)} z_1 + M_{21}^{(2)} z_2 + N_{21}) \end{cases}$$

quindi ponendo

$$M_{12}^{(1)} = -\alpha \quad , \quad M_{12}^{(2)} = -\beta \quad , \quad N_{12} = -\gamma$$

avremo

$$z_1' = -z_2(\alpha z_1 + \beta z_2 + \gamma)$$
$$z_2' = z_1(\alpha z_1 + \beta z_2 + \gamma).$$

2. Ci limiteremo a mostrare come il sistema si riconduca alle quadrature, giacché l'effettivo calcolo non presenta alcuna difficoltà analitica.

Dall'integrale delle forze vive segue

$$z_1^2 + z_2^2 = \text{cost.} = C^2,$$

onde potremo porre

$$z_1 = C\cos\varphi \quad , \quad z_2 = C \operatorname{sen}\varphi$$

onde le (11) si ridurranno alla sola equazione

$$\varphi' = C(\alpha\cos\varphi + \beta\operatorname{sen}\varphi) + \gamma$$

e ponendo

$$\alpha = -A\operatorname{sen}\varphi_0 \quad , \quad \beta = A\cos\varphi_0 \quad , \quad A = \left|\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\right|$$

avremo

$$\varphi' = \mathrm{CA}\,\mathrm{sen}\,(\varphi - \varphi_0) + \gamma$$

d'onde

$$t - t_0 = \int \frac{d\varphi}{\mathrm{CA}\,\mathrm{sen}\,(\varphi - \varphi_0) + \gamma}$$

denotando con t_0 una costante arbitraria.

Possiamo quindi concludere: *Se si conoscono* $\nu - 2$ *integrali lineari, le* ν *caratteristiche si esprimeranno mediante funzioni trigonometriche o esponenziali del tempo.*

È notevole osservare che il presentarsi delle une o delle altre funzioni dipenderà dall'essere $\mathrm{C}^2\mathrm{A}^2 - \gamma^2$ minore o maggiore di zero; *l'andamento del moto risulterà quindi di natura del tutto diversa secondo il segno del binomio* $\mathrm{C}^2\mathrm{A}^2 - \gamma^2$.

§ 5. – Moti spontanei a caratteristiche indipendenti d'ordine ν con $\nu - 3$ integrali lineari ed un integrale quadratico.

1. Se per un sistema d'ordine ν si conoscono $\nu - 3$ integrali indipendenti di primo grado ed uno di secondo grado e se questo ha l'equazione caratteristica con radici semplici, potremo scrivere le equazioni del moto sotto la forma (vedi Nota citata, § 10)

$$p'_1 = e_{123} \frac{d(\mathrm{T}, \mathrm{F})}{d(p_2, p_3)}$$

$$p'_2 = e_{231} \frac{d(\mathrm{T}, \mathrm{F})}{d(p_3, p_1)}$$

$$p'_3 = e_{312} \frac{d(\mathrm{T}, \mathrm{F})}{d(p_1, p_2)},$$

in cui

$$\mathrm{T} = \frac{1}{2} \sum_1^3{}_r \sum_1^3{}_s \mathrm{E}_{rs}\, p_r\, p_s + \text{cost.}$$

$$\mathrm{F} = \frac{1}{2} \sum_1^3{}_r \sum_1^3{}_s \Lambda_{rs}\, p_r\, p_s + \Sigma_h \Lambda_h\, p_h$$

o anche scrivendo

$$f_1 = \frac{1}{2} \sum_1^3{}_r \sum_1^3{}_s \mathrm{E}_{rs}\, p_r\, p_s \quad , \quad f_2 = e_{123}\, \mathrm{F},$$

$$\frac{dp_1}{dt} = \frac{d(f_1, f_2)}{d(p_2, p_3)}$$

$$\frac{dp_2}{dt} = \frac{d(f_1, f_2)}{d(p_3, p_1)}$$

$$\frac{dp_3}{dt} = \frac{d(f_1, f_2)}{d(p_1, p_2)}.$$

2. Tenendo presente un risultato che abbiamo stabilito nella Nota: *Sopra un sistema di equazioni differenziali* [7], possiamo concludere che gl'integrali delle equazioni precedenti sono funzioni ellittiche di t, quindi poiché le ν caratteristiche sono funzioni lineari delle p_1, p_2, p_3, così avremo il teorema: *Allorché si conoscono $\nu - 3$ integrali lineari ed un integrale quadratico la cui equazione caratteristica ha radici diseguali, le ν caratteristiche si potranno esprimere come funzioni ellittiche del tempo.*

Per la effettiva determinazione delle funzioni incognite rimandiamo alla Nota che abbiamo ora citata.

§ 6. – Teorema generale sulla integrazione per serie delle equazioni del moto spontaneo di un sistema a caratteristiche indipendenti.

1. Cominciamo dallo stabilire il seguente

Lemma I. – *Se*

$$|a_{sk}^{(r)}| < A$$

e i valori p_i^0 delle p_i per $t = t_0$ sono tali che

$$|p_i^0| \leq P$$

gl'integrali delle equazioni differenziali

$$p'_s = \sum_{1}^{\nu}{}_r \sum_{1}^{\nu}{}_k a_{sk}^{(r)} p_r p_k \qquad (s = 1, 2, \cdots, \nu) \tag{12}$$

sono funzioni analitiche olomorfe nel piano della variabile complessa t entro il cerchio di raggio

$$r = \frac{1}{4\nu^2 AP}$$

avente per centro il punto $t = t_0$.

Infatti osserviamo che i secondi membri delle (12) sono funzioni olomorfe per tutti i valori delle p_i tali che

$$|p_i - p_i^0| < b$$

essendo b un numero qualsiasi. I valori che assumono i moduli dei secondi membri, mentre le p_i soddisfano alle diseguaglianze precedenti saranno evidentemente inferiori a

$$M = \nu^2 A (P + b)^2.$$

(7) «Atti della R. Accademia di Torino», vol. XXX, 1895, pp. 445–454 [in questo vol.: VIII, pp. 122–128].

Teniamo ora conto che i secondi membri delle (12) sono indipendenti da t, quindi per un ben noto teorema [8] avremo che gl'integrali p_i saranno funzioni olomorfe della variabile complessa t entro un cerchio di raggio

$$\frac{b}{M} = \frac{b}{\nu^2 A (P + b)^2} .$$

Il valore massimo di questo rapporto si avrà per $b = P$, onde potremo assumere come raggio del cerchio entro cui le p_i sono olomorfe

$$r = \frac{1}{4\nu^2 AP} .$$

2. Lemma II. - *Se i numeri reali* $p_1^0, p_2^0, \cdots, p_\nu^0$, *sono i valori di* $p_1, p_2, \cdots, p_\nu$ *per il valore reale* $t = t_0$, *gl'integrali delle* (12) *saranno funzioni olomorfe in tutta la striscia indefinita del piano complesso t compresa fra le due parallele all'asse reale distanti da questo di*

$$\frac{1}{4\nu^2 A\sqrt{p_1^{0^2} + p_2^{0^2} + \cdots + p_\nu^{0^2}}} .$$

Infatti siccome le (12) ammettono l'integrale

$$p_1^2 + p_2^2 + \cdots + p_\nu^2 = \text{cost.},$$

così per ogni valore reale di t, avremo

$$|p_i| \leq \sqrt{p_1^{0^2} + p_2^{0^2} + \cdots + p_\nu^{0^2}}$$

onde applicando il lemma precedente, si avrà, facendo percorrere a t tutto l'asse reale, che le p_i si manterranno olomorfe entro tutti i cerchi aventi il centro sull'asse reale e aventi il raggio eguale a

$$r = \frac{1}{4\nu^2 A\sqrt{p_1^{0^2} + p_2^{0^2} + \cdots + p_\nu^{0^2}}}$$

il che dimostra la proposizione.

3. Dai due lemmi stabiliti si deduce mediante una osservazione del POINCARÉ che le p_i saranno sviluppabili in serie ordinate per le potenze di

$$z = \frac{e^{\pi t/2r} - 1}{e^{\pi t/2r} + 1}$$

e lo sviluppo sarà valido per tutti i valori di t fra $-\infty$ e $+\infty$; da cui segue il teorema:

(8) E. PICARD, *Traité d'analyse*, T. II, p. 312.

Se la forza viva iniziale, nel moto spontaneo di un sistema a caratteristiche indipendenti d'ordine ν *è* $T_0/2$ *le caratteristiche potranno esprimersi in funzione del tempo mediante serie di potenze di*

$$z = \frac{e^{2\pi\nu^2 A \sqrt{T_0}\, t} - 1}{e^{2\pi\nu^2 A \sqrt{T_0}\, t} + 1},$$

essendo A *una quantità più grande delle* $|a_{sk}^{(r)}|$.

I coefficienti si calcoleranno con operazioni razionali da eseguirsi sui valori iniziali delle p_i *e sui coefficienti* $a_{sk}^{(r)}$.

Questo teorema mostra che la questione della determinazione effettiva delle caratteristiche per ogni valore del tempo è completamente risoluta.

XXVIII.

SUL FENOMENO DELLE «SEICHES»

Conferenza tenuta al Congresso della Società italiana di Fisica in Torino il 23 settembre 1898 (*).

Sono incaricato di rivolgere ai cultori della fisica in Italia un invito ed una preghiera da parte del prof. FOREL dell'Università di Losanna e non saprei trovare per ciò una occasione più propizia di questa riunione della nostra Società.

Sono ormai classiche le ricerche compiute da questo chiaro professore sul lago Lemano, che egli studiò sotto tutti gli aspetti con rara perseveranza e con larga dottrina (**).

Fra i fatti più curiosi e nello stesso tempo più oscuri che si presentarono nel corso dei suoi studii è da annoverare il fenomeno delle *seiches.* Gli abitanti delle rive del lago di Ginevra conoscono e chiamano da varii secoli con tale nome certe singolari variazioni di livello dell'acqua del lago. Senza una causa apparente essi vedono spesso elevarsi l'acqua sulla riva di vari centimetri, alcune volte di più decimetri con un moto lento che a secondo dei casi può durare cinque minuti, un quarto d'ora, una mezzora... Poi la vedono abbassarsi colla stessa lentezza al disotto del livello primitivo, poi nuovamente alzarsi e così di seguito. L'aspetto di questi movimenti è analogo a quello di una marea di debole ampiezza e di breve durata.

Essi fissarono l'attenzione dei fisici e diedero luogo a numerosi, varii e dirò anche ai più strani tentativi di spiegazione. Non ne starò ad esporre la storia, che è pure interessante, ma che mi condurrebbe troppo in lungo. Dirò soltanto che a questo studio, oltre il nome del FOREL sono legati quelli di altri fisici di grande valore, come DE SAUSSURE, VAUCHER, PLANTAMOUR, SARASIN, DUFOUR, ecc.

La spiegazione che fino dal 1873 il FOREL ha dato e che ha confortato con numerose e pazienti osservazioni consiste in ciò: nell'ammettere che le

(*) Di questa conferenza fu pubblicato soltanto un sunto, redatto o, quanto meno, corretto dallo stesso VOLTERRA, nel «Nuovo Cimento» (ser. IV, vol. VIII, 1898, pp. 270-272). Il testo completo fu trovato, dopo la scomparsa dell'Autore, fra i Suoi manoscritti, insieme con una Nota (redatta in francese, forse perché destinata al prof. FOREL) sulla trattazione matematica del problema. Poiché la conferenza del VOLTERRA ebbe al suo tempo larga risonanza e diede occasione a interessanti ricerche di altri matematici e fisici, si è ritenuto opportuno pubblicare tali manoscritti inediti. [N. d. R.]

(**) Nel sunto suaccennato del «Nuovo Cimento» si trova citato del FOREL il libro: *Le Léman. Monographie limnologique.* Losanna, vol. I, 1892; vol. II, 1895. [N. d. R.]

seiches siano dovute ad una oscillazione dell'acqua da una estremità all'altra del lago con un moto ritmico isocrono e di ampiezza decrescente paragonabile in tutto ad un moto pendolare o ad un moto dovuto alla sovrapposizione di più movimenti pendolari. La chiave di questa spiegazione è stata fornita dal suo scopritore dall'esame dei periodi di vibrazione dell'acqua, dalla loro costanza ed indipendenza dalla ampiezza delle vibrazioni, ossia dalla maggiore o minore grandezza delle *seiches*.

A questo proposito dirò che esse a Ginevra producono in media un dislivello di circa 40 cm, ma ve ne sono anche di molto più grandi come quella celebre del 3 ottobre 1841, in cui il dislivello ha raggiunto quasi i due metri.

Chi di voi ricorda una di quelle incantevoli gite sul Lemano o abbia semplicemente dinanzi la carta di esso, ricorderà che il senso longitudinale del lago va da Ginevra a Chillon, mentre quello trasversale va dalla costa Svizzera a quella Savoiarda, cioè da Morges ad Evian. Orbene le *seiches* si distinguono in due categorie: in quelle longitudinali ed in quelle trasversali. Le prime oscillano da Chillon a Ginevra; le seconde da Morges ad Evian.

In ciascuna di queste categorie il prof. FOREL ha poi distinto:

1° Le *seiches* uninodali che possiedono un sol nodo, e due ventri alle estremità. In esse l'acqua si eleva ad una estremità del lago, mentre si abbassa all'altra. Nel mezzo vi è un punto morto o un modo in cui l'acqua non cambia di livello.

2° Le *seiches* binodali con due nodi e tre ventri. In esse l'acqua si eleva contemporaneamente alle due estremità, mentre si abbassa nel mezzo o viceversa. Sono questi i tre ventri. Fra essi stanno in posizioni intermedie i due nodi.

3° Le *seiches* miste o *dicrote* nelle quali si ha la sovrapposizione dei due moti dovuti a quelli uninodali e binodali.

È indubitato che altre, anzi infiniti altri tipi di moti debbono sussistere, ma essi sfuggono in generale alla osservazione.

Per ricordare i successi ottenuti in proposito, dirò che il periodo di vibrazione di una *seiche* longitudinale uninodale è di 73 minuti, di una *seiche* longitudinale binodale è di 35 minuti, di una *seiche* trasversale uninodale è di 10 minuti.

Quali sono ora le cause di tali vibrazioni? In altri termini, donde proviene il primitivo impulso che produce le vibrazioni che per l'inerzia poi si conservano e solo si smorzano lentamente in virtù dell'attrito?

Esso si ha nei moti dell'atmosfera. Il principiare di una *seiche* coincide col rompersi dell'equilibrio dell'aria sovrastante il lago. Un uragano cagiona il primitivo dislivello locale dell'acqua susseguito dalle oscillazioni di essa che posson durare fin tre, quattro o cinque giorni.

È in generale una nuova *seiche* che nasconde le ultime oscillazioni di quella che l'ha preceduta.

Ma il fenomeno non è proprio del solo lago di Ginevra.

Un esame attento fece riconoscere al FOREL e ad altri fisici e geografi dei moti perfettamente analoghi in tutti i laghi, in tutti gli stagni, qualunque ne fossero le dimensioni. Dei moti analoghi a quelli delle *seiches* si poterono anche riscontrare nelle acque del mare e si poterono sceverare dai moti dovuti alle maree.

Uno studio sistematico delle *seiches* dei laghi svizzeri è stato compiuto dal FOREL coll'aiuto di altri scienziati. Ogni lago ha i propri periodi di vibrazione ben definiti e determinati; dai grandi laghi di Costanza e di Zurigo al piccolo lago di Joux nascosto fra le foreste del Giura. La grandezza dei periodi è intimamente legata alla forma delle rive dei laghi, alla loro profondità, alle singolarità del fondo.

È ora uno studio sistematico dei laghi italiani o di uno o di alcuni di essi che il FOREL invita e prega i fisici italiani di fare. Quali sono le particolarità delle vibrazioni che si hanno nel lago di Como la cui forma presenta la singolarità di dividersi in due rami? quali le vibrazioni dei piccoli laghi dell'Italia centrale? Come restano verificati o preveduti dai dati del calcolo quelli dell'osservazione? In che relazione stanno questi coi risultati sperimentali che possono ottenersi con opportune ricerche di laboratorio?

Le difficoltà di un tale studio per le cui particolarità è da rimandare alla grande opera del FOREL sul Lemano non sono molte. Gli apparecchi necessari sono semplicemente dei limnografi, analoghi a quelli di WEBER e di GUTHRIE.

Vuole ora la nostra Società promuovere questo studio od incoraggiare qualcheduno ad intraprenderli? Se la Società credesse di emettere un voto in questo senso potrebbe colla sua autorità e col suo aiuto, riunendo pure l'Ufficio centrale di Metereologia e Geodinamica di cui fa parte il nostro illustre presidente, sia agevolare il compito di quelli che se ne occuperebbero, sia coordinarne i risultati.

E giacché poco fa ho parlato del confronto del calcolo colla osservazione mi si permettano poche parole a questo proposito.

La questione dal punto di vista dell'idrodinamica teorica presenta molto interesse.

È facile porre in equazione il problema, sia partendo dalle equazioni dell'idrodinamica del tipo di LAGRANGE, sia di quello di EULERO. Il problema delle vibrazioni di un liquido pesante ha formato l'oggetto di una antica ricerca di RODOLFO MERIAN pubblicata a Basilea nel 1828. Questa ricerca à stata riprodotta nel 1886 nei «Math. Annalen» dal VON DER MÜHL di Lipsia, nipote del MERIAN, ed esposta in forma moderna e facilmente accessibile. Il caso però a cui il metodo del MERIAN si presta è quello in cui le pareti del recipiente contenente il liquido sono verticali, mentre il fondo ne è orizzontale; anzi il caso che più particolarmente svolge il VON DER MÜHL è quello in cui il fondo oltre a ciò sia rettangolare.

È delle formule relative a questo caso che il FOREL si è valso principalmente più che delle altre soluzioni, fra le quali è da ricordare quella del KIRCHHOFF.

Però è evidente che le forme dei laghi non sono mai tali che le loro sezioni verticali siano dei rettangoli. Esse si scostano sempre più o meno da questo tipo, ed è quindi interessante di ricercare una soluzione per quanto è possibile generale.

Quali sono le difficoltà analitiche che si incontrano ed i mezzi atti a superarli? È possibile spiegarsi con un piccolo numero di formule che mettano del resto in evidenza le relazioni fra il fenomeno delle *seiches* e quello di vibrazione dei corpi elastici. Si rappresenti con S lo spazio occupato dall'acqua nello stato di equilibrio, il quale è limitato dal fondo σ e dalla superficie libera orizzontale ω. Il problema si riduce a trovare una funzione $\mathfrak{U}$, la quale soddisfi in S alla equazione differenziale

$$\Delta^2 \mathfrak{U} = 0,$$

sopra σ alla condizione

$$\frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial n} = 0$$

essendo n la normale; e sopra σ alla relazione

$$\frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial z} = k \mathfrak{U},$$

in cui z rappresenta la verticale. Dando a k un valore arbitrario, in generale queste condizioni non ammettono altra soluzione che $\mathfrak{U} = 0$; ma per certi valori particolari di k, che possono chiamarsi i *valori eccezionali*, esistono delle soluzioni diverse da zero. Sono questi valori eccezionali di k che forniscono i periodi di vibrazione dell'acqua, giacché essi si ottengono mediante la formula

$$T = \pi \sqrt{\frac{k}{g}}.$$

Chiunque abbia presente la teoria delle vibrazioni delle membrane elastiche ne riconosce immediatamente l'analogia con questo problema.

Nella teoria delle membrane elastiche infatti si tratta di trovare una funzione che soddisfi l'equazione.

$$\Delta_2 \varphi + k^2 \varphi = 0$$

e che si annulli al contorno. I valori di k, per cui esistono delle soluzioni non nulle, sono i valori eccezionali da cui si ricavano i periodi di vibrazione della membrana. Ora la ricerca, lo studio e la dimostrazione dell'esistenza di questi valori eccezionali per la membrana ha costituito fino a pochi anni fa una delle questioni più oscure, più intricate e più ardue della fisica matematica, in cui si sono esercitati molti dei più abili geometri viventi. Esisteva un così detto principio di RAYLEIGH per la esistenza dei valori eccezionali, ma era ben lungi dall'esser rigoroso. La dimostrazione esatta dell'esistenza del periodo più lungo si deve a SCHWARZ con un metodo ingegnosissimo che ha creato un nuovo ramo di ricerche analitiche. Ma la trattazione completa si deve al POINCARÉ, che la ottenne dopo vari tentativi in più direzioni.

La ragione del successo del suo metodo consiste in ciò: nel considerare k come una variabile complessa e studiare φ come una funzione della variabile complessa k. La funzione è uniforme; i poli di essa sono reali e corrispondono ai valori eccezionali. Ora è in via analoga che, nel caso generale, può studiarsi il problema corrispondente delle vibrazioni del liquido pesante. Così ho dimostrato, e lo si vede del resto facilmente, che se $\mathfrak{U}$ si considera come funzione della variabile complessa k, i poli di $\mathfrak{U}$ sono valori eccezionali.

NOTE

Le problème qu'il faut chercher de résoudre est de déterminer toutes les possibles périodes de vibration de l'eau du lac en connaissant la forme du bassin. On peut résoudre cette question d'une manière tout à fait rigoureuse et simple, comme on peut déterminer toutes les périodes de vibration d'une membrane élastique. Voici de quelle manière.

I.

Commençons par écrire les équations différentielles de l'hydrodynamique de LAGRANGE

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{d^2x}{dt^2}\dfrac{\partial x}{\partial x_0}+\dfrac{d^2y}{dt^2}\dfrac{\partial y}{\partial x_0}+\dfrac{d^2z}{dt^2}\dfrac{\partial z}{\partial x_0}=\dfrac{\partial\left(V-\dfrac{P}{\rho}\right)}{\partial x_0} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array}\right.$$

Supposons que les déplacements des molécules de l'eau soient très petites et désignons ces déplacements par ξ, η, ζ. On aura

$$x = x_0 + \xi \quad , \quad y = y_0 + \eta \quad , \quad z = z_0 + \zeta\,;$$

et si on suppose de négliger les termes de 2^d ordre, les équations de LAGRANGE déviendront

$$\frac{d^2\xi}{dt^2}=\frac{\partial\left(V-\dfrac{P}{\rho}\right)}{\partial x},$$

$$\frac{d^2\eta}{dt^2}=\frac{\partial\left(V-\dfrac{P}{\rho}\right)}{\partial y},$$

$$\frac{d^2\zeta}{dt^2}=\frac{\partial\left(V-\dfrac{P}{\rho}\right)}{\partial z}.$$

Posons $V - P/\rho = \varphi$, on aura

$$(1) \qquad \frac{d^2\xi}{dt^2}=\frac{\partial\varphi}{\partial x} \quad , \quad \frac{d^2\eta}{dt^2}=\frac{\partial\varphi}{\partial y} \quad , \quad \frac{d^2\zeta}{dt^2}=\frac{\partial\varphi}{\partial z}$$

et, à cause de l'incompressibilité du liquide,

$$(2) \qquad \frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial\eta}{\partial y}+\frac{\partial\zeta}{\partial z}=0\,.$$

Sur la surface où le liquide est en contact avec la paroi fixe on aura

$$(3) \qquad \xi\cos\nu x+\eta\cos\nu y+\zeta\cos\nu z=0\,,$$

ν étant la normale à la paroi.

Sur la surface libre, en y supposant la pression constante on aura

(4) $$V - \frac{P}{\rho} = -g\zeta,$$

z étant l'axe vertical et g étant la constante de la gravité.

II.

Considérons maintenant les vibrations harmoniques du fluide. Il faudra poser

$$\xi = X \cos nt \quad , \quad \eta = Y \cos nt \quad , \quad \zeta = Z \cos nt \quad , \quad \varphi = \psi \cos nt$$

où X, Y, Z, ψ sont des fonctions indépendantes du temps.

Les équations (1), (2), (3), (4) deviendront

(1 a) $$-n^2 X = \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad , \quad -n^2 Y = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad , \quad -n^2 Z = \frac{\partial \psi}{\partial z},$$

(2 a) $$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = 0,$$

(3 a) $$X \cos \nu x + Y \cos \nu y + Z \cos \nu z = 0,$$

(4 a) $$\psi = -gZ;$$

d'où l'on tire, en posant $k = g/n^2$,

(2 b) $$\Delta^2 \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 0,$$

(3 b) $$\frac{\partial \psi}{\partial x} \cos \nu x + \frac{\partial \psi}{\partial y} \cos \nu y + \frac{\partial \psi}{\partial z} \cos \nu z = 0,$$

(4 b) $$\psi = a \frac{\partial \psi}{\partial z}.$$

La fonction ψ doit donc satisfaire aux trois équations précédentes.

Soit S le domaine occupé par l'eau, σ la paroi fixe, ω la surface libre. En négligeant les perturbations de la surface dues aux vibrations du liquide, il faudra la supposer horizontale, c'est pourquoi il faudra chercher une fonction ψ qui satisfait en δ à l'équation (2 b), sur σ à l'équation (3 b), sur le plan ω à l'équation (4 b).

Le nombre k ne peut pas être quelconque; mais il y aura un ensemble infini de valeurs

$$k_0, k_1, k_2, \cdots$$

pour lesquels les équations (2 b), (3 b), (4 b) pourront être vérifiées.

Ce sont les *valeurs exceptionnelles de k*. Soit k_i une de ces valeurs; alors à cause de l'équation (5) on aura la période correspondante de la vibration de la masse fluide donnée par la formule

$$T_i = \pi \sqrt{\frac{k_i}{g}}.$$

III.

Le théorème que nous venons de démontrer est le suivant:

Toutes les périodes de vibration de la masse fluide pourront s'obtenir en cherchant toutes les valeurs de k (valeurs exceptionnelles) pour lesquelles on a simultanément les trois équations suivantes

$$(6)\qquad \begin{cases} \Delta^2\psi = 0 & \text{sur } S \\ \dfrac{\partial\psi}{\partial\nu} = 0 & \text{sur } \sigma \\ \psi = k\dfrac{\partial\psi}{\partial z} & \text{sur } \omega\,, \end{cases}$$

et en écrivant après la période T *par la formule*

$$(7)\qquad T = \pi\sqrt{\frac{k}{g}}\,.$$

Nous allons démontrer là-dessus quelques théorèmes:

1) *Les valeurs exceptionnelles ne péuvent pas être des nombres négatifs.*

En effet des équations (6)

$$0 = \int_S \psi\Delta^2\psi dS = \int_\sigma \psi\frac{\partial\psi}{\partial n}d\sigma + \int_\omega \psi\frac{\partial\psi}{\partial z}d\omega - \int_S \left\{\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)^2\right\}dS$$

$$= k\int\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)^2 d\omega - \int_S \left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)^2\right]dS$$

et cette équation serait absurde si k était négatif.

2) *Si* ψ_1 *et* ψ_2 *sont deux fonctions correspondantes aux valeurs exceptionnelles* k_1 *et* k_2, *on aura*

$$\int_\omega \psi_1\psi_2 d\omega = 0\,.$$

En effet on aura

$$\Delta_2\psi_1 = 0 \quad , \quad \frac{\partial\psi_1}{\partial\nu} = 0 \quad , \quad \psi_1 = k_1\frac{\partial\psi_1}{\partial z}$$

et relations analogues pour ψ_2, d'où, par le théorème de GREEN,

$$\int_\sigma\left(\psi_2\frac{\partial\psi_1}{\partial\nu} - \psi_1\frac{\partial\psi_2}{\partial\nu}\right)d\sigma + \int_\omega\left(\psi_2\frac{\partial\psi_1}{\partial z} - \psi_1\frac{\partial\psi_2}{\partial z}\right)d\sigma = 0$$

c'est à dire

$$0 = \int_\omega\left(\psi_2\frac{\partial\psi_1}{\partial z} - \psi_1\frac{\partial\psi_2}{\partial z}\right)d\omega = \left(\frac{1}{k_1} - \frac{1}{k_2}\right)\int_\omega \psi_1\psi_2 d\omega\,,$$

d'où l'on tire, k_1 n'étant pas égale à k_2,

$$\int_\omega \psi_1\psi_2 d\omega = 0.$$

3) *Les valeurs exceptionnelles ne péuvent pas être des nombres imaginaires ni complexes.*

En effet si $k_1 = k' + ik''$ était une valeur exceptionnelle complexe il y aurait aussi la valeur exceptionnelle conjugueé $k_2 = k' - ik''$ et si $\psi_1 = \psi' + i\psi''$ était la fonction correspondante à k_1, alors $\psi_2 = \psi' - i\psi''$ serait la fonction correspondante à k_2. On aurait donc à cause du théorème précédent

$$0 = \int(\psi' + i\psi'')(\psi' - i\psi'')d\omega = \int(\psi'^2 + \psi''^2)\,\omega\,,$$

équation qui est absurde.

On peut donc conclure

Toutes les valeurs exceptionnelles sont des nombres réels et positifs.

IV.

Par le premier théorème du paragraphe précédent on a reduit la question de la vibration de la masse fluide à une question tout à fait analogue à celle de la vibration d'une membrane. Rappelons la théorie de la membrane élastique. Il faut chercher les nombres k tels que l'on ait sur la surface de la membrane

$$\Delta^2 \psi + k^2 \psi = 0$$

et au contour $\psi = 0$.

Les périodes de vibration se déduisent du nombre k.

La méthode de POINCARÉ por obtenir les nombres k consiste à intégrer l'équation différentielle

$$\Delta^2 \psi + k\psi + \mathfrak{F} = 0,$$

ψ étant nul au contour et $\mathfrak{F}$ étant une fonction arbitraire.

Si on appelle l'intégrale $[k, \mathfrak{F}]$ et on la regarde comme une fonction de la variable complexe k, les pôles de cette fonction sont les valeurs de k qu'on cherche.

Nous pouvons chercher d'employer la méthode de POINCARÉ dans le cas de la vibration de la masse fluide.

Intégrons l'équation

$$\Delta^2 \theta = 0 \qquad \text{sur } S,$$

avec les conditions au contour

$$\frac{\partial \theta}{\partial \nu} = 0 \qquad \text{sur } \sigma,$$

$$\theta - k\frac{\partial \theta}{\partial z} + \mathfrak{F} = 0 \qquad \text{sur } \omega,$$

$\mathfrak{F}$ étant une fonction arbitraire, et envisageons l'intégrale comme une fonction de la variable complexe k.

Nous allons démontrer le théoréme: *Si l'intégrale a un pôle k', ce pôle est une valeur exceptionnelle de k.*

En effet si k' est pôle on pourra écrire

$$\theta = \frac{\Theta(k, x, y, z)}{(k - k')^h}$$

h étant un nombre entier. On aura donc

$$\Delta^2 \Theta = 0,$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \nu} = 0,$$

$$\Theta - k\frac{\partial \Theta}{\partial z} + (k - k')^h \mathfrak{F} = 0.$$

Or on pourra toujours s'arranger de manière que Θ ne s'annulle pas pour $k = k'$. En faisant $k = k'$ il viendra

$$\Delta^2 \Theta = 0,$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \nu} = 0,$$

$$\Theta - k'\frac{\partial \Theta}{\partial z} = 0,$$

ce qui prouve que k' est une valeur exceptionnelle.

On voit par là la *liaison entre la recherche des pôles de la fonction θ et les périodes de vibration de la masse fluide.*

On pourra chercher les pôles par la méthode des approximations successives SCHWARZ–PICARD–POINCARÉ.

V.

Comme vérification des formules (6) on peut retrouver la formula (3) de la page 75 du second volume du livre de M. FOREL. Supposons le bassin rectangulaire et cherchons les vibrations perpendiculaires au côté y du bassin.

Posons

$$\psi = \cos \lambda x e^{\mu z}.$$

La première des équations (6) nous donne $\lambda^2 = \mu^2$; c'est pourquoi

$$\psi = \cos \lambda x e^{\lambda z}$$

et la seconde équation (6), si la largeur du bassin est l, donne

$$\sin \lambda l = 0,$$

d'où pour les vibrations les plus lentes

$$\lambda = \frac{\pi}{l}.$$

La troisième des équations (6) nous donne alors

$$1 = k\lambda,$$

d'où

$$k = \frac{1}{\lambda} = \frac{l}{\pi}$$

et la formule (7)

$$T = \pi \sqrt{\frac{l}{\pi g}} = \sqrt{\frac{\pi l}{g}}.$$

Morges, 12 Août 1898.

XXIX.

SUR LA THÉORIE DES VARIATIONS DES LATITUDES

« Vierteljahrschrift der Astr. Gesell. », Jahrgang 33, 1898, pp. 275-279.

J'ai l'honneur de présenter une Note préliminaire à un mémoire qui est sous presse dans le journal de Stockholm « *Acta Mathematica* »(*) et qui renferme le développement de quelques articles que j'ai publiés dans plusieurs revues sur là théorie des variations des latitudes.

Je ne ferai pas l'histoire de cette question qui est si importante dans l'astronomie et la mécanique céleste et qui est si connue. Dans le second volume de son traité de mécanique céleste TISSERAND a consacré deux chapitres à l'exposition particularisée des travaux déshormais classiques sur ce sujet. Ce sont les grands travaux de M. DARWIN, de M. SCHIAPARELLI, de M. HELMERT, de GYLDÉN, etc. En général les auteurs cherchent les causes des variations des latitudes géographiques dans les actions géologiques, l'élasticité, la plasticité terrestre, dans les explosions volcaniques, les troubles météorologiques, la production des glaces etc., c'est à dire en général ils attribuent le phénomène à des causes qui altèrent la distribution des masses sur la surface de la terre.

Mais outre les mouvements dont on vient de parler il y en a d'autres qui ont lieu à la surface terrestre, et d'autres aussi peuvent subsister à l'intérieur (dont la grandeur nous est inconnue) qui sans changer, à cause de leur nature cyclique, les axes d'inertie de la terre, ni la grandeur des moments d'inertie, ni la distribution des masses non plus, peuvent exercer une action puissante sur le déplacement des pôles de la terre.

Parmi ces mouvements on peut citer les courants marins constants, les courants atmosphériques, le mouvement continu des eaux des fleuves jusqu'à la mer, leur évaporation et la condensation successive de la vapeur sur les montagnes. Ces mouvements ne changent sensiblement la distribution des masses, ni la forme de la terre et l'on peut même dans une première approximation les regarder comme des mouvements stationnaires. Par rapport aux mouvements de la même nature qui peuvent exister à l'intérieur de la terre on ne saurait rien affirmer sur leur grandeur. On peut montrer d'une manière tout à fait élémentaire leur influence sur la rotation.

Le plan des recherches que je me suis proposées est justement d'étudier d'abord *l'action toute seule des mouvements cycliques qui ne changent ni la*

(*) In questo vol.: XXXI, pp. 452-573.

forme ni la distribution des masses sur la terre, et d'étudier après *les perturbations* produites par la plasticité et en général par les mouvements qui changent la forme et la constitution de la terre.

Je crois de cette manière d'avoir envisagé la question d'un point de vue nouveau.

Les mouvements cycliques dont nous avons parlé sont appréciables, du moins en partie, pour les habitants de la terre, mais un observateur qui aurait égard *seulement* à la variation de la forme de la terre et aux variations de sa constitution, c'est à dire la distribution des masses, ne s'en apercevrait pas.

C'est pourquoi par rapport à ses observations il pourrait les appeler, en suivant une locution très-heureuse introduite par HERTZ, des *mouvements cachés*.

Nous arrivons par là à une liaison entre les recherches dont nous parlons et les idées imaginées par HERTZ en systématisant celles de HELMHOLTZ et de MAXWELL, et dont la base est la théorie des mouvements cycliques.

Rappelons à ce propos la pensée fondamentale développée par HERTZ dans son dernier ouvrage. Il dit que la seule loi qui gouverne tous les phénomènes naturels est la loi d'inertie, entendue dans un sens plus général que celui attaché à cette loi par NEWTON. C'est la loi d'inertie généralisée à tout système matériel soumis à des liaisons quelconques. Cette loi subsiste pour l'ensemble complet constitué des masses que nous envisageons et d'autres qui nous sont cachées. En examinant les premières il peut paraître que leurs mouvements ne suivent pas la loi d'inertie, mais la loi ressort lorsqu'on envisage les unes et les autres.

Tandis que dans la mécanique classique si la loi d'inertie n'est pas vérifiée il faut chercher les causes externes ou les forces qui produisent les altérations de l'état du corps, en suivant l'idée de HERTZ il faut chercher des mouvements cachés.

Voyons maintenant comment on peut présenter la question de la variation des latitudes: Un corps (la terre) ne suit pas les loi d'EULER de la rotation libre d'un corps rigide; comment on peut expliquer cet éloignement de la loi d'inertie? car au fond les lois d'EULER ne représentent que la loi d'inertie.

Il est évident qu'une solution fondée sur l'existence des mouvements cycliques dont nous avons parlé repond très-bien aux idées de HERTZ que nous avons indiquées. Nous dirons à ce propos qu'on peut démontrer que *toute anomalie qu'on remarque dans la rotation libre d'un corps peut être expliquée par des mouvements internes cycliques qui ne changent ni la forme ni la distribution des masses du corps.*

En suivant les idées qu'on vient d'exposer j'ai commencé l'étude en partant de l'hypothèse plus simple que les mouvements internes soient stationnaires. En remarquant que par la seule inertie ils ne pourraient pas se conserver en général de cette nature, on peut chercher les actions mutuelles que les mouvements cycliques et le mouvement de rotation exercent entre eux.

On arrive par la à une question très-générale et on voit bien aisément qu'il est avantageux de se poser à ce point de vue dans la question du mouvement terrestre, car on peut pousser la recherche jusqu'aux réactions exercées par la rotation sur le mouvement interne.

Je vais donner en peu de mots une idée des résultats. Je ferai usage de la terminologie de HELMHOLTZ. Les coordonnées indépendentes d'un système peuvent être classées en deux catégories: les coordonnées cycliques et les paramètres. Les premières existent dans un système lorsqu'il y a des mouvements possibles qui n'altèrent pas la distribution des densités et qui produisent un échange cyclique des masses. Un mouvement est dit cyclique lorsqu'on peut se borner à considérer dans l'expression de la force vive les termes qui dépendent seulement des intensités cycliques. Il est évident qu'un mouvement rigoureusement cyclique n'existera que si tous les paramètres seront constants.

Cela posé envisageons un système dont les liaisons n'empêchent pas la rotation autour d'un point. Les variables qui déterminent sa configuration seront, outre celles qui définissent la position variable d'un système d'axes ayant l'origine dans le point fixe, un certain nombre de coordonnées cycliques et de paramètres. Nous supposerons que les coordonnées cycliques et les paramètres suffisent pour définir le mouvement relatif par rapport aux axes. Nous regarderons ce mouvement comme le mouvement interne du système et nous supposerons qu'il soit cyclique.

Faisons d'abord l'hypothèse que les axes soient fixes et que les paramètres soient constants. Si on abandonne le système à son inertie les moments cycliques et par conséquent les intensités cycliques seront des quantités constantes. C'est pourquoi dans ce cas le *mouvement sera dans le même temps adiabatique et isocyclique.*

Supposons maintenant que les axes puissent tourner librement et le mouvement interne soit maintenu isocyclique, les paramètres étant constants. C'est le cas d'un système dans lequel existe un mouvement interne stationnaire. Alors si le système n'est soumis à aucun couple de rotation *les composantes* de la rotation sont des fonctions elliptiques du temps et *les cosinus des angles que les axes d'inertie du système forment avec des axes fixes sont des fonctions uniformes du temps représentables par des fonctions Jacobiennes.*

On peut demander dans ce cas s'*il est nécessaire des forces pour maintenir stationnaire le mouvement interne.* On trouve qu'en général elles sont nécessaires et *qu'on peut en déterminer les expressions par des fonctions elliptiques du temps.*

La nécessité des forces dont nous venons de parler prouve que *de la même manière que le mouvement interne altère la rotation, celle ci a en général une influence sur les mouvements internes.* C'est pourquoi on peut se poser la question suivante: *A l'intérieur d'un système qui peut tourner autour d'un point fixe et qui est abandonné à son inertie existent des mouvements cycliques quelconques (les paramètres étant constants). Comment a lieu la rotation et quel-*

les lois suivent les intensités cycliques, à cause des actions mutuelles que ces mouvements exercent entre eux?

Cette question, qu'on peut appeler le problème général du *mouvement adiabatique*, paraît au premier abord très-compliquée, car on peut imaginer les mouvements cycliques internes d'une manière tout à fait arbitraire. Cependant on peut la résoudre complètement en employant un théorème par lequel on ramène ce cas à celui d'un mouvement isocyclique, de manière que même dans ce cas *les composantes de la rotation sont des fonctions elliptiques du temps et les cosinus des angles que les axes meubles forment avec les axes fixes s'expriment par des fonctions Jacobiennes. En outre les intensités cycliques sont des fonctions elliptiques du temps.* Le problème peut être aussi généralisé en regardant comme isocyclique une partie seulement des mouvements internes et en supposant que les forces correspondantes aux autres coordonnées cycliques soient nulles, et la solution s'obtient toujours de la même manière.

On voit par là que le champ des problèmes sur la mécanique des systèmes d'où ressortent les fonctions elliptiques et Jacobiennes est beaucoup plus large que celui compris dans les recherches classiques de JACOBI, car il embrasse le problème général du mouvement adiabatique et isocyclique d'un système quelconque.

Pour les applications au mouvement de la terre il faut commencer par déduire de la théorie générale des propriétés des rotations permanentes, de leur stabilité, des oscillations du pôle autour de ses positions stables et des perturbations correspondantes de la période Eulerienne, dues à l'existence des mouvements internes. Il faut aussi résoudre le problème de déterminer les mouvements internes étant donné d'une manière arbitraire le mouvement du pôle.

On peut après aborder par des calculs approximatifs la question de déterminer les mouvements internes cycliques qui correspondent aux mouvements harmoniques découverts par M. CHANDLER dont les périodes sont d'environ 430 jours et d'un an. On tire de là quelques théorèmes généraux qui donnent les propriétés fondamentales de ces mouvements. Je remarquerai seulement que par rapport à la période annuelle, l'axe de couple de quantité de mouvement correspondant oscille de manière que la projection sur l'équateur de son extrémité (l'origine étant au centre de la terre) décrit une ellipse dont j'ai calculé la grandeur des axes et dont le grand axe est situé dans le méridien ayant la longitude de 45° (par rapport au méridien de Greenwich), c'est à dire dans le méridien qui passe au milieu de l'Océan Atlantique.

Enfin j'ai cherché de donner un aperçu des perturbations qu'on a dans les lois dont je viens de parler lorsqu'on introduit l'hypothèse de la plasticité terrestre. Cette étude dans mon mémoire est à peine ébauchée, c'est pourquoi j'espère de pouvoir continuer dans ces recherches et de pouvoir exposer dans un autre mémoire des nouvelles études dans cette direction ainsi que dans l'hypothèse générale des mouvements cycliques lorsque les paramètres ne sont pas constants et de pouvoir approfondir les applications de ces recherches.

XXX.

SUI FONDAMENTI DELLA TEORIA DELLE EQUAZIONI DIFFERENZIALI LINEARI, II

« Memorie della Società Italiana delle Scienze (detta dei XL) », ser. III, Tomo XII (1899).

PARTE SECONDA.

INTRODUZIONE

Questa seconda parte [1] è dedicata allo studio delle sostituzioni funzioni di variabili complesse.

Non tutte le questioni di cui si fa cenno in questa parte, vengono svolte completamente; alcune per esempio sono enunciate soltanto (vedi il § 5).

Ciò valga a ritenere questo studio come un saggio del genere di ricerche che vi sono iniziate.

Nei primi paragrafi vengono estese le operazioni di derivazione e di integrazione già considerate per le sostituzioni funzioni di variabili reali. Nel § 3 si trova una estensione del noto teorema di CAUCHY ai residui delle sostituzioni, e nel § 4 vi è uno studio sulle singolarità delle sostituzioni.

Un semplice confronto dei risultati trovati a questo riguardo con quelli ben noti sulle equazioni differenziali lineari dovuti al FUCHS, ne mostrano l'analogia e rivelano il nuovo significato che acquistano i teoremi già conosciuti sulle equazioni differenziali lineari.

Fanno seguito alcuni paragrafi ove viene principiato lo studio delle sostituzioni che ho chiamate *abeliane* per la loro analogia colle funzioni abeliane. In questa parte sono considerate più specialmente le proprietà relative alle costanti delle sostituzioni abeliane ed i casi in cui le sostituzioni stesse sono esprimibili per integrali abeliani.

Nella parte che farà seguito alla presente verranno continuate le ricerche sulle sostituzioni algebriche ed abeliane partendo da un altro punto di vista, e verranno inoltre considerate alcune classi particolari di esse [*].

(1) La prima parte di questa Memoria (1886) è inserita nel tomo VI (serie 3ª) della Società Italiana delle Scienze [in queste « Opere »: vol. primo, XV, pp. 209-290]. Questa seconda parte era ultimata nella primavera del 1887 e gran parte dei risultati, senza dimostrazioni, furono pubblicati nei « Rendiconti del Circolo matematico di Palermo » (marzo 1888) [in queste « Opere »: vol. primo, XX, pp. 351-355].

(*) Questa ulteriore parte non è mai stata pubblicata. [N. d. R.].

PRELIMINARI

SOPRA LE SOSTITUZIONI PERMUTABILI CON UNA DATA SOSTITUZIONE.

1. Avremo spesso bisogno in questa parte del nostro lavoro di dover determinare le sostituzioni permutabili con una data sostituzione. Incominceremo perciò da tale ricerca.

2. Premetteremo alcune notazioni oltre quelle di cui abbiamo già fatto uso nel corso della prima parte del presente lavoro.

Si rappresenti con A_{is} la sostituzione

$$(1)\qquad A_{is}=\begin{Bmatrix} a_{11}^{(i,s)}, \cdots, a_{1n}^{(i,s)} \\ \cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}^{(i,s)}, \cdots, a_{nn}^{(i,s)} \end{Bmatrix} \qquad (i, s = 1, 2, \cdots, m).$$

Denoteremo con

$$S=\begin{Bmatrix} A_{11}, A_{12}, \cdots, A_{1m} \\ A_{21}, A_{22}, \cdots, A_{2m} \\ \cdots\cdots\cdots \\ A_{m1}, A_{m2}, \cdots, A_{mm} \end{Bmatrix}$$

la sostituzione di ordine mn la quale si ottiene sostituendo in luogo delle A_{is} i gruppi di lettere ad esse corrispondenti. In altri termini se $N = m \cdot n$, avremo

$$S=\begin{Bmatrix} b_{11}, b_{12}, \cdots, b_{1N} \\ b_{21}, b_{22}, \cdots, b_{2N} \\ \cdots\cdots\cdots \\ b_{N1}, b_{N2}, \cdots, b_{NN} \end{Bmatrix},$$

ove, se

$$n(k-1) < j < nk \quad , \quad n(h-1) < \sigma < nh$$

$$j - n(k-1) = i \quad , \quad \sigma - n(h-1) = s,$$

avremo

$$b_{j\sigma} = a_{is}^{(k,h)}.$$

Rappresenteremo inoltre rispettivamente col simbolo 0 la sostituzione di cui tutti gli elementi sono nulli, e col simbolo 1 la sostituzione identica. Analogamente se con M_{is} denoteremo un insieme di lettere disposte in h_i colonne e in h_s linee, indicheremo con

$$\begin{Bmatrix} M_{11}, M_{12}, \cdots, M_{1n} \\ M_{21}, M_{22}, \cdots, M_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots \\ M_{n1}, M_{n2}, \cdots, M_{nn} \end{Bmatrix}$$

la sostituzione di ordine $h_1 + h_2 + \cdots + h_n$, la quale si ottiene scrivendo in luogo di ciascuna M_{is} nella espressione precedente il gruppo che essa rappresenta.

Se a tutte le lettere che entrano in M_{is} daremo il valore zero, rappresenteremo M_{is} col simbolo o.

Ciò posto risulta immediatamente la seguente proprietà:

Lemma 1°. – *Se le* A_{is} *e le* B_{is} *sono tutte sostituzioni dello stesso ordine, avremo*:

$$\left\{\begin{matrix} A_{11}, A_{12}, \cdots, A_{1m} \\ A_{21}, A_{22}, \cdots, A_{2m} \\ \cdots\cdots\cdots \\ A_{m1}, A_{m2}, \cdots, A_{mm} \end{matrix}\right\} \left\{\begin{matrix} B_{11}, B_{12}, \cdots, B_{1m} \\ B_{21}, B_{22}, \cdots, B_{2m} \\ \cdots\cdots\cdots \\ B_{m1}, B_{m2}, \cdots, B_{mm} \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} C_{11}, C_{12}, \cdots, C_{1m} \\ C_{21}, C_{22}, \cdots, C_{2m} \\ \cdots\cdots\cdots \\ C_{m1}, C_{m2}, \cdots, C_{mm} \end{matrix}\right\},$$

ove

$$C_{is} = \sum_1^m {}_k A_{ik} B_{ks}.$$

3. Si consideri una sostituzione di ordine n

$$S = \left\{\begin{matrix} a_{11}, a_{12}, \cdots, a_{1n} \\ a_{21}, a_{22}, \cdots, a_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}, a_{n2}, \cdots, a_{nn} \end{matrix}\right\},$$

la quale sia permutabile colla sostituzione

$$T = \left\{\begin{matrix} b_{11} & , \cdots, & b_{1,i-1} & , 0 & , b_{1,i+1} & , \cdots, & b_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{i-1,1} & , \cdots, & b_{i-1,i-1} & , 0 & , b_{i-1,i+1} & , \cdots, & b_{i-1,n} \\ 0 & , \cdots, & 0 & , b_{i,i} & , 0 & , \cdots, & 0 \\ b_{i+1,1} & , \cdots, & b_{i+1,i-1} & , 0 & , b_{i+1,i+1} & , \cdots, & b_{i+1,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n,1} & , \cdots, & b_{n,i-1} & , 0 & , b_{n,i+1} & , \cdots, & b_{nn} \end{matrix}\right\},$$

di cui la linea i^{esima} e la colonna i^{esima} hanno tutti gli elementi nulli, al più eccettuato quello situato sulla diagonale. Dovremo avere

$$\sum_1^{i-1} {}_s a_{hs} b_{sk} + \sum_{i+1}^m {}_s a_{hs} b_{sk} = \sum_1^{i-1} {}_s b_{hs} a_{sk} + \sum_{i+1}^m {}_s b_{hs} a_{sk}$$

se

$$h \neq i \quad , \quad k \neq i.$$

Ne segue:

Lemma 2°. – *Le due sostituzioni che si ottengono da* S *e da* T *togliendo la linea* i^{esima} *e la colonna* i^{esima} *sono fra loro permutabili*. La proprietà reciproca alla precedente vale evidentemente, vale a dire, *se due sostituzioni sono permutabili sarà sempre possibile aggiungere all'una e all'altra una linea* *ed una colonna aventi tutti gli elementi nulli, meno quelli sulla diagonale, in modo che le due sostituzioni che si ottengono siano fra loro permutabili.*

4. Oltre ai precedenti stabiliremo ancora altri lemmi.

Lemma 3°. - *Se*:

$$\begin{matrix} S = TS_1T^{-1} \\ R = TR_1T^{-1} \end{matrix} \quad (\det T = 1),$$

la condizione necessaria e sufficiente affinché S *e* R *siano fra loro permutabili è che siano fra loro permutabili* S_1 *e* R_1.

Lemma 4°. - *Tutte le sostituzioni permutabili con*

$$S = \begin{vmatrix} a_1, 0, \cdots, 0 \\ a_2, a_1, \cdots, 0 \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_n, a_{n-1}, \cdots, a_1 \end{vmatrix}$$

se $a_2 \neq 0$ *hanno la forma*

$$T = \begin{vmatrix} b_1, 0, \cdots, 0 \\ b_2, b_1, \cdots, 0 \\ \cdots\cdots\cdots \\ b_n, b_{n-1}, \cdots, b_1 \end{vmatrix}. \tag{2}$$

Infatti se R è permutabile con S, posto

$$R = \begin{vmatrix} b_{11}, b_{12}, \cdots, b_{1n} \\ \cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots \\ b_{n1}, b_{n2}, \cdots, b_{nn} \end{vmatrix},$$

dovremo avere

$$\begin{cases} a_1 b_{1,n-1} + a_2 b_{1n} = a_1 b_{1,n-1} \\ a_1 b_{1,n-2} + a_2 b_{1,n-1} + a_3 b_{1,n} = a_1 b_{1,n-2} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_1 b_{11} \quad + a_2 b_{12} + \cdots + a_n b_{1n} = a_1 b_{11}, \end{cases}$$

da cui si deduce, supponendo $a_2 \neq 0$,

$$b_{1n} = b_{1,n-1} = \cdots = b_{12} = 0.$$

Analogamente si trova

$$b_{i+1,s+1} = b_{is},$$

onde R dovrà assumere la forma (2) della T.

Lemma 5°. - *Se si ha*:

$$TS = UT \tag{3}$$

e se le equazioni caratteristiche relative a S *e a* U *non hanno nessuna radice a comune, è necessario che sia*

$$T = 0.$$

Posti infatti S e U sotto la *forma normale*, avremo

$$S = R^{-1} S_1 R = R^{-1} \begin{Bmatrix} a_1, 0, 0, \cdots, 0, 0 \\ \varepsilon_1, a_2, 0, \cdots, 0, 0 \\ 0, \varepsilon_2, a_3, \cdots, 0, 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ 0, 0, 0, \cdots, \varepsilon_{n-1}, a_n \end{Bmatrix} R \quad (\det R = 1),$$

$$U = V^{-1} U_1 V = V^{-1} \begin{Bmatrix} b_1, 0, 0, \cdots, 0, 0 \\ \eta_2, b_2, 0, \cdots, 0, 0 \\ 0, \eta_3, b_3, \cdots, 0, 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ 0, 0, 0, \cdots, \eta_n, b_n \end{Bmatrix} V \quad (\det V = 1),$$

ove alcune delle a_i potranno essere eguali fra loro, come pure alcune delle b_i, ma nessuna b_i sarà eguale ad una a_s; le ε_i e le η_i saranno eguali a 0 o a 1.

La (3) diviene

$$TR^{-1} S_1 R = V^{-1} U_1 VT$$

ovvero

$$VTR^{-1} \cdot S_1 = U_1 \cdot VTR^{-1}.$$

Posto

$$VTR^{-1} = T_1 = \begin{Bmatrix} c_{11}, c_{12}, \cdots, c_{1n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ c_{n1}, c_{n2}, \cdots, c_{nn} \end{Bmatrix},$$

avremo

$$T_1 S_1 = U_1 T_1,$$

e quindi

$$c_{ir}(a_r - b_i) = c_{i-1,r}\,\eta_i - c_{i,r+1}\,\varepsilon_r$$

da cui risulta che le c_{is} sono tutte nulle; perciò saranno tutti nulli anche gli elementi della sostituzione T.

Lemma 6°. - *Se*

$$S = \begin{pmatrix} a_1, 0, \cdots, 0, 0 \\ 1, a_1, \cdots, 0, 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ 0, 0, \cdots, 1, a_1 \end{pmatrix} \quad (\text{di ordine } n),$$

$$U = \begin{pmatrix} a_1, 0, \cdots, 0 \\ 1, a_1, \cdots, 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ 0, 0, \cdots, a_1 \end{pmatrix} \quad (\text{di ordine } m < n),$$

$$V = \begin{pmatrix} b_1, 0, \cdots, 0 \\ 0, b_2, \cdots, 0 \\ \dots\dots\dots\dots \\ 0, 0, \cdots, b_{n-m} \end{pmatrix} \qquad (b_i \neq a_1),$$

$$W = \begin{pmatrix} U, 0 \\ 0, V \end{pmatrix},$$

e

$$TS = WT,$$

avremo

$$T = \begin{pmatrix} M, 0 \\ 0, 0 \end{pmatrix}$$

con M *permutabile con* U; *mentre se*

$$ST = TW,$$

avremo

$$T = \begin{pmatrix} 0, 0 \\ M, 0 \end{pmatrix}.$$

La dimostrazione di questo lemma si ottiene con un processo simile a quello seguìto per dimostrare il lemma precedente.

Lemma 7°. – *Abbiasi una sostituzione*

$$S = \begin{pmatrix} A_1, 0, \cdots, 0 \\ 0, A_2, \cdots, 0 \\ \dots\dots\dots\dots \\ 0, 0, \cdots, A_n \end{pmatrix}$$

in cui le $A_1, A_2, \cdots, A_n$ *sono sostituzioni* (di ordini eguali o differenti) *le cui equazioni caratteristiche non hanno nessuna radice a comune. Se* R *è permutabile con* S, *è necessario e sufficiente che si abbia*

$$R = \begin{pmatrix} M_1, 0, 0, \cdots, 0 \\ 0, M_2, 0, \cdots, 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ 0, 0, 0, \cdots, M_n \end{pmatrix}$$

e M_i *dovrà essere una sostituzione dello stesso ordine di* A_i *e permutabile con essa.*

Si formino infatti le sostituzioni

$$A'_i = \begin{pmatrix} A_i, 0 \\ 0, B_i \end{pmatrix},$$

ove

$$B_i = \begin{pmatrix} b_1^{(i)}, 0, \cdots, 0 \\ 0, b_2^{(i)}, \cdots, 0 \\ \dots\dots\dots\dots \\ 0, 0, \cdots, b_{k_i}^{(i)} \end{pmatrix},$$

in modo che due qualunque $b_r^{(i)}$, $b_s^{(i)}$ siano fra loro differenti e siano differenti dalle radici delle equazioni caratteristiche delle A_i. Oltre a ciò gli ordini delle sostituzioni A'_i risultino tutti eguali fra loro.

Posto

$$S' = \begin{pmatrix} A'_1, 0 & ,\cdots, 0 \\ 0 & , A'_2, \cdots, 0 \\ \cdots & \cdots \\ 0 & , 0 & ,\cdots, A'_n \end{pmatrix}$$

ed

$$R' = \begin{pmatrix} M'_{11} & , M'_{12} & ,\cdots, M'_{1n} \\ M'_{21} & , M'_{22} & ,\cdots, M'_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ M'_{n1} & , M'_{n2} & ,\cdots, M'_{nn} \end{pmatrix},$$

ove le M'_{is} sono sostituzioni dello stesso ordine delle A'_i, e supponendo R' permutabile con S' avremo, applicando il lemma 1°

$$M'_{ii} A'_i = A'_i M'_{ii},$$

$$M'_{is} A'_s = A'_i M'_{is}.$$

Ne segue che M'_{ii} sarà permutabile con A'_i, e poiché le equazioni caratteristiche di A'_s e A'_i non possono avere nessuna radice a comune, per il lemma 5° avremo

$$M'_{is} = 0 \quad , \quad i \neq s.$$

Applicando il lemma 2° enunciato nel § 3 ed il suo reciproco, si ottiene quindi immediatamente quanto si voleva dimostrare.

Lemma 8°. – *Sia*

$$A_i = \begin{pmatrix} a, 0, 0, \cdots, 0 \\ 1, a, 0, \cdots, 0 \\ 0, 1, a, \cdots, 0 \\ \cdots\cdots \\ 0, 0, 0, \cdots, a \end{pmatrix} \text{(di ordine } m_i)$$

e i numeri m_i decrescano coll'aumentare dell'indice i.

Tutte le sostituzioni permutabili con

$$S = \begin{pmatrix} A_1, 0 & ,\cdots, 0 \\ 0 & , A_2, \cdots, 0 \\ \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots \\ 0 & , 0 & ,\cdots, A_n \end{pmatrix}$$

saranno date da

$$R = \begin{pmatrix} M_{11} & , M_{12} & ,\cdots, M_{1n} \\ M_{21} & , M_{22} & ,\cdots, M_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ M_{n1} & , M_{n2} & ,\cdots, M_{nn} \end{pmatrix},$$

ove il gruppo di lettere M_{is} *ha* m_s *linee e* m_i *colonne, date se* $i < s$, $(m_i > m_s)$ *da*

$$M_{is} = \underbrace{\left.\begin{matrix} 0 & ,0 & ,0 & ,\cdots,0 \\ 0 & ,0 & ,0 & ,\cdots,0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & ,0 & ,0 & ,\cdots,0 \\ b_1^{(is)} & ,0 & ,0 & ,\cdots,0 \\ b_2^{(is)} & ,b_1^{(is)} & ,0 & ,\cdots,0 \\ b_3^{(is)} & ,b_2^{(is)} & ,b_1^{(is)} & ,\cdots,0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{m_s}^{(is)} & ,b_{m_s-1}^{(is)} & ,b_{m_s-2}^{(is)} & ,\cdots,b_1^{(is)} \end{matrix}\right\}}_{(m_s)}(m_i),$$

mentre se $i > s$, $(m_i < m_s) M_{is}$ *è dato da*

$$M_{is} = \underbrace{\left.\begin{matrix} b_1^{(is)} & ,0 & ,0 & ,\cdots,0 & ,0,\cdots,0 \\ b_2^{(is)} & ,b_1^{(is)} & ,0 & ,\cdots,0 & ,0,\cdots,0 \\ b_3^{(is)} & ,b_2^{(is)} & ,b_1^{(is)} & ,\cdots,0 & ,0,\cdots,0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{m_i}^{(is)} & ,b_{m_i-1}^{(is)} & ,b_{m_i-2}^{(is)} & ,\cdots,b_1^{(is)} & ,0,\cdots,0 \end{matrix}\right\}}_{(m_s)}(m_i).$$

Questo lemma si dimostra facilmente. Pongasi

$$A'_i = \begin{pmatrix} A_i, & 0 \\ 0, & B_i \end{pmatrix},$$

ove

$$B_i = \begin{pmatrix} b_1^{(i)}, & 0, & \cdots, & 0 \\ 0, & b_2^{(i)}, & \cdots, & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0, & 0, & \cdots, & b_{k_i}^{(i)} \end{pmatrix},$$

in modo che due qualunque $b_r^{(i)}$, $b_s^{(t)}$ siano fra loro diverse e differenti anche da a; si abbia inoltre che le A'_i siano tutte dello stesso ordine.

Si formi

$$S' = \begin{pmatrix} A'_1, & 0, & 0, & \cdots, & 0 \\ 0, & A'_2, & 0, & \cdots, & 0 \\ 0, & 0, & A'_3, & \cdots, & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0, & 0, & 0, & \cdots, & A'_n \end{pmatrix},$$

$$R' = \begin{pmatrix} M'_{11}, & M'_{12}, & \cdots, & M'_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ M'_{n1}, & M'_{n2}, & \cdots, & M'_{nn} \end{pmatrix},$$

ove le M'_{is} sono sostituzioni dello stesso ordine delle A'_i. Volendo che R' e S' siano fra loro permutabili basterà scrivere

$$M'_{ii} A'_i = A'_i M'_{ii},$$
$$M'_{is} A'_s = A'_i M'_{is},$$

da cui, applicando i lemmi 6° e 2°, segue immediatamente il risultato enunciato.

5. I precedenti lemmi ci forniscono la *regola generale* per trovare tutte le sostituzioni permutabili con una sostituzione data. *Si riduca la sostituzione alla forma normale* (vedi § 2 dei Preliminari, Parte 1ª)

$$T^{-1} \left\{ \overline{\underline{\prod_1^p {}_i \prod_1^{r_i} {}_\varkappa S_i^{(\varkappa)}}} \right\} T$$

e si prendano le sostituzioni R_i *permutabili con*

$$\left\{ \overline{\underline{\prod_1^{r_i} {}_\varkappa S_i^{(\varkappa)}}} \right\}$$

per mezzo della regola data nel lemma 8°. Le sostituzioni

$$T^{-1} \left\{ \overline{\underline{\prod_1^p {}_i R_i}} \right\} T$$

saranno permutabili con la sostituzione data e in tal modo si otterranno tutte le sostituzioni permutabili richieste.

6. Dalla regola precedente si deduce la seguente proposizione:

TEOREMA. – *La condizione necessaria e sufficiente affinchè le sostituzioni permutabili con una sostituzione data siano permutabili fra loro, è che i divisori elementari della sostituzione data siano potenze di basi tutte differenti fra loro.*

1° la condizione è sufficiente.

Infatti, se essa è soddisfatta, la sostituzione data S, posta sotto la forma normale, diverrà

$$S = T^{-1} \left\{ \overline{\underline{\prod_1^p {}_i S_i}} \right\} T,$$

ove

$$S_i = \left\{ \begin{matrix} a_i, 0, \cdots, 0, 0 \\ 1, a_i, \cdots, 0, 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ 0, 0, \cdots, 1, a_i \end{matrix} \right\} \text{(di ordine } \chi_i\text{)}$$

e due qualunque a_i saranno diverse fra loro. Tutte le sostituzioni permutabili con S avranno quindi la forma

$$R = T^{-1} \left\{ \overline{\prod_1^p {}_i R_i} \right\} T,$$

ove

$$R_i = \begin{Bmatrix} b_1^{(i)}, 0 & , \dots, 0 \\ b_2^{(i)}, b_1^{(i)} & , \dots, 0 \\ \dots\dots & \dots\dots \\ b_{\chi_i}^{(i)}, b_{\chi_i - 1}^{(i)}, & \dots, b_1^{(i)} \end{Bmatrix} \quad \text{(di ordine } \chi_i),$$

quindi per i lemmi 6° e 7°, avremo che tutte le sostituzioni R saranno permutabili fra loro.

2° la condizione è necessaria.

Infatti se la sostituzione data S non soddisfa alla condizione, posta sotto la forma normale diverrà

$$S = T^{-1} \left\{ \overline{\prod_1^p {}_i \prod_1^{r_i} {}_\chi S_i^{(\chi)}} \right\} T$$

dove alcune delle r_i dovranno esser diverse dall'unità. Basterà quindi per i lemmi 3° e 7° dimostrare che fra le sostituzioni permutabili con una sostituzione della forma

$$\left\{ \overline{\prod_1^{r_i} {}_\chi S_i^{(\chi)}} \right\}$$

ve ne sono due non permutabili fra loro. Questo risulta immediatamente ponendo mente al risultato trovato nel lemma 8°.

Una sostituzione i cui divisori elementari saranno potenze di basi tutte diverse fra loro si dirà *elementare*.

7. Consideriamo in particolare le sostituzioni del secondo ordine.

Distinguiamo tre casi: la sostituzione ha cioè una delle forme seguenti quando è posta sotto la forma canonica

1ª $$S^{-1} \begin{pmatrix} a, 0 \\ 0, b \end{pmatrix} S \quad , \quad a \neq b,$$

2ª $$S^{-1} \begin{pmatrix} a, 0 \\ b, a \end{pmatrix} S \quad , \quad b \neq 0,$$

3ª $$S^{-1} \begin{pmatrix} 1, 0 \\ 0, 1 \end{pmatrix} S = \begin{pmatrix} 1, 0 \\ 0, 1 \end{pmatrix}.$$

Tutte le sostituzioni permutabili colla 1ª avranno la forma

$$S^{-1}\begin{pmatrix} c, & 0 \\ 0, & d \end{pmatrix} S;$$

quelle permutabili colla 2ª,

$$S^{-1}\begin{pmatrix} c, & 0 \\ d, & c \end{pmatrix} S;$$

tutte le possibili sostituzioni saranno permutabili colla 3ª.

SOSTITUZIONI FUNZIONI DI VARIABILI COMPLESSE

§. 1. – Sostituzioni complesse funzioni di variabili reali.

1. Se una sostituzione S, *i cui elementi sono numeri complessi*, può porsi sotto la forma

$$\begin{pmatrix} 1+\alpha_{11}, & \alpha_{12} & ,\cdots, & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & , 1+\alpha_{22}, & \cdots, & \alpha_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{n1} & , \alpha_{n2} & ,\cdots, & 1+\alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

e il modulo di tutte le α_{ir} *è minore di* ε, diremo che la *sostituzione è inferiore ad* ε.

Se due sostituzioni S_1 e S_2 dello stesso ordine hanno gli elementi corrispondenti tali che i moduli delle loro differenze sono inferiori ad ε, diremo che le sostituzioni differiscono fra loro meno di ε.

Se, presa una sostituzione variabile S in un dato intervallo, si trova che tutti i valori che la sostituzione ha nell'intervallo differiscono fra loro meno di ε, diremo che *la oscillazione della sostituzione è minore di* ε.

Consideriamo tutti i valori di ε, ai quali la oscillazione della sostituzione S è inferiore. Il limite inferiore dei valori di ε si dirà la *oscillazione* della sostituzione S.

2. È evidente che la derivazione di una sostituzione potrà estendersi al caso di una sostituzione variabile, i cui elementi sono *numeri complessi*, purché si supponga che la variabile indipendente si conservi reale.

La integrazione pure potrà estendersi al caso in cui gli elementi della sostituzione siano quantità complesse e la variabile indipendente sia reale; solamente, a differenza di quanto fu inteso nella prima parte, dovremo ritenere per oscillazione di una sostituzione ciò che si è ora definito nell'art. 1 di questo paragrafo.

Fatta questa osservazione, potremo senz'altro *estendere alle sostituzioni complesse, ma funzioni di variabili reali, tutti i risultati che abbiamo ottenuto nella prima parte di questo studio.*

§ 2. – SOSTITUZIONI FUNZIONI DI VARIABILI COMPLESSE.

1. Abbiasi una sostituzione S i cui elementi siano funzioni di una variabile complessa z (funzioni *monogene*); diremo S una sostituzione funzione della variabile complessa z, o anche una *sostituzione monogena*.

Posto $z = x + iy$, potremo considerare la S come una sostituzione funzione delle due variabili x ed y e i cui elementi sono numeri complessi. Se supponiamo $\det S = 1$, e costruiamo le due sostituzioni derivate

$$\frac{\partial}{\partial x} S \, , \quad \frac{\partial}{\partial y} S \, ,$$

avremo che gli elementi della seconda sostituzione si otterranno dai corrispondenti della prima moltiplicandoli per i, il che potremo rappresentare simbolicamente, scrivendo

$$\frac{\partial S}{\partial x} = \frac{\partial}{i \partial y} S \, . \tag{1}$$

Analogamente si otterrebbe

$$S \frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{i} \cdot S \frac{\partial}{\partial y} \, . \tag{2}$$

Reciprocamente risulta subito che, se sarà soddisfatta una delle due relazioni (1) o (2), la sostituzione S avrà tutti gli elementi funzioni *monogene* della variabile complessa z. Infatti, posto

$$\frac{\partial S}{\partial x} = T_1 S^{-1} \quad , \quad \frac{\partial S}{\partial y} = T_2 S^{-1} ,$$

avremo per le (1)

$$T_1 = \frac{1}{i} T_2 \, .$$

Ma gli elementi di T_1 si ottengono derivando quelli di S rispetto ad x, e quelli di T_2 derivando gli stessi elementi rispetto ad y. Dunque la relazione precedente dimostra che gli elementi di S sono *funzioni monogene*.

Chiameremo ciascuna delle due sostituzioni eguali (2) la *derivata destra* di S rispetto a z e ciascuna delle due sostituzioni eguali (1) la *derivata sinistra* di S e scriveremo

$$\frac{\partial S}{\partial z} = \frac{\partial S}{\partial x} = \frac{1}{i} \frac{\partial S}{\partial y} ,$$

$$S \frac{\partial}{\partial z} = S \frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{i} S \frac{\partial}{\partial y} \, .$$

Posto

$$\frac{\partial S}{\partial z} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} , & \alpha_{12} , & \cdots , & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} , & \alpha_{22} , & \cdots , & \alpha_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{n1} , & \alpha_{n2} , & \cdots , & \alpha_{nn} \end{pmatrix} ,$$

avremo immediatamente

$$\sum_1^n {}_r\, \alpha_{rr} = 0 .$$

La sostituzione infinitesima

$$dS = \begin{pmatrix} 1 + \alpha_{11} dz , & \alpha_{12} dz & , \cdots, & \alpha_{1n} dz \\ \alpha_{21} dz & , 1 + \alpha_{22} dz , & \cdots, & \alpha_{2n} dz \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{n1} dz & , \alpha_{n2} dz & , \cdots, & 1 + \alpha_{nn} dz \end{pmatrix} = \frac{dS}{dz} \cdot dz$$

si chiamerà il *differenziale sinistro* di S, e la sostituzione

$$Sd = S \frac{d}{dz} \cdot dz$$

si chiamerà il *differenziale destro*.

Avremo poi immediatamente, se

$$S = \begin{pmatrix} a_{11} , & a_{12} , & \cdots, & a_{1n} \\ a_{21} , & a_{22} , & \cdots, & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} , & a_{n2} , & \cdots, & a_{nn} \end{pmatrix} ,$$

$$\frac{dS}{dz} = \begin{pmatrix} \frac{da_{11}}{dz} , & \frac{da_{12}}{dz} , & \cdots, & \frac{da_{1n}}{dz} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{da_{n1}}{dz} , & \frac{da_{n2}}{dz} , & \cdots, & \frac{da_{nn}}{dz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} , & a_{12} , & \cdots, & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} , & a_{n2} , & \cdots, & a_{nn} \end{pmatrix}^{-1} ,$$

$$S \frac{d}{dz} = \begin{pmatrix} a_{11} , & a_{12} , & \cdots, & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} , & a_{n2} , & \cdots, & a_{nn} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{da_{11}}{dz} , & \frac{da_{12}}{dz} , & \cdots, & \frac{da_{1n}}{dz} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{da_{n1}}{dz} , & \frac{da_{n2}}{dz} , & \cdots, & \frac{da_{nn}}{dz} \end{pmatrix} .$$

Le regole della derivazione dei prodotti di sostituzioni date nella prima parte di questo studio, come pure gli altri teoremi di § 1 (parte prima) sono immediatamente applicabili alle sostituzioni funzioni di variabili complesse.

2. Abbiasi ora una sostituzione

$$T = \begin{pmatrix} \alpha_{11} , & \alpha_{12} , & \cdots, & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} , & \alpha_{22} , & \cdots, & \alpha_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{n1} , & \alpha_{n2} , & \cdots, & \alpha_{nn} \end{pmatrix} \quad , \quad \sum_1^n {}_i\, \alpha_{ii} = 0,$$

i cui elementi α_{ir} sono funzioni di una variabile complessa $z = x + iy$.

Si formi

$$\mathrm{T}dz = \begin{pmatrix} 1+\alpha_{11}dz, & \alpha_{12}dz & ,\cdots, & \alpha_{1n}dz \\ \alpha_{21}dz & ,1+\alpha_{22}dz & ,\cdots, & \alpha_{2n}dz \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{n1}dz & ,\ \alpha_{n2}dz & ,\cdots, & 1+\alpha_{nn}dz \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha_{11}, \alpha_{12}, \cdots, \alpha_{1n} \\ \alpha_{21}, \alpha_{22}, \cdots, \alpha_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots \\ \alpha_{n1}, \alpha_{n2}, \cdots, \alpha_{nn} \end{pmatrix} dx \cdot \begin{pmatrix} i\alpha_{11}, i\alpha_{12}, \cdots, i\alpha_{1n} \\ \cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots \\ i\alpha_{n1}, i\alpha_{n2}, \cdots, i\alpha_{nn} \end{pmatrix} dy = \mathrm{T}_1 dx \cdot \mathrm{T}_2 dy .$$

Se prendiamo a considerare le condizioni date nei §§ 3, 7 della prima parte, affinché una espressione differenziale di due variabili sia un differenziale esatto tanto sinistro, quanto destro, si vede che per la espressione differenziale precedentemente scritta esse sono verificate; si ha cioè

$$\sum_1^n {}_s\, \alpha_{ss} = 0 \quad , \quad \sum_1^n {}_s\, i\alpha_{ss} = 0,$$

$$\Delta' (\mathrm{T}_1, \mathrm{T}_2)_{y,x} = 0 \quad , \quad \Delta'' (\mathrm{T}_1, \mathrm{T}_2)_{y,x} = 0 .$$

Preso nel campo di variabilità della z una linea s aperta o chiusa qualunque, lungo la quale la sostituzione T si conserva finita e generalmente continua, chiameremo

$$\int_s \mathrm{T}dz$$

l'integrale del differenziale esatto $\mathrm{T}_1 dx \cdot \mathrm{T}_2 dy$ esteso lungo la linea s, cioè

$$\int_s \mathrm{T}_1 dx \cdot \mathrm{T}_2 dy .$$

In tal modo potremo intendere per

$$\mathrm{S} = \int_s \mathrm{T}dz$$

ciò che segue. *Divisa la linea s in n parti $h_1, h_2, \cdots, h_n$ a partire da un estremo di s e chiamato Δz_t la differenza degli indici degli estremi dell'intervallo h_t, si costruisca il prodotto di sostituzioni*

$$\mathrm{U} = \prod_1^n {}_t \begin{pmatrix} 1+\alpha_{11}\Delta z_t, \alpha_{12}\Delta z_t, \cdots, & \alpha_{1n}\Delta z_t \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots \\ \alpha_{n1}\Delta z_t \ , \alpha_{n2}\Delta z_t, \cdots, & 1+\alpha_{nn}\Delta z_t \end{pmatrix}.$$

Si facciano impiccolire indefinitamente gli intervalli $h_1, h_2, \ldots, h_n$; S *sarà il limite verso cui tende* U.

Poiché abbiamo osservato che tutto ciò che trovammo relativamente alle sostituzioni reali di variabili reali poteva estendersi alle sostituzioni complesse e funzioni di variabili reali, salvo a modificare le definizioni di cui parlammo nel § 1, art. 1, così potremo enunciare relativamente agli integrali curvilinei di variabile complessa varî teoremi che si otterranno immediatamente.

3. TEOREMA I. - *L'integrale di una sostituzione* (som 0) *sarà sempre a* (det 1).

TEOREMA II. - *Se la linea s lungo la quale si eseguisce la integrazione si divide in due parti s_1 e s_2, avremo*

$$\int_s \mathrm{T}dz = \int_{s_2} \mathrm{T}dz \cdot \int_{s_1} \mathrm{T}dz .$$

TEOREMA III. - *Se gli estremi della linea s sono i punti* A *e* B, *avremo*

$$\int_{\mathrm{A}s\mathrm{B}} \mathrm{T}dz = \Big(\int_{\mathrm{B}s\mathrm{A}} \mathrm{T}dz\Big)^{-1} .$$

TEOREMA IV. - *Se s è una linea chiusa e si ha la relazione*

$$\int_s \mathrm{T}dz = 1 ,$$

supponendo di principiare la integrazione da un punto della linea s (ritornando poi al punto stesso), *la stessa relazione sussisterà cominciando la integrazione da un altro punto di s.*

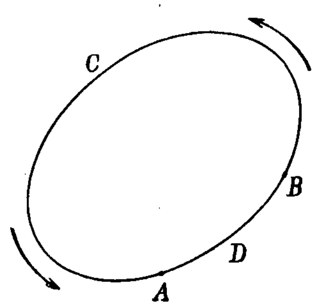


Fig. 1.

Sia infatti A il punto da cui si comincia la integrazione la prima volta, e supponiamo di eseguire una seconda volta la integrazione lungo la stessa linea cominciando da un altro punto B e percorrendo la s nello stesso senso in cui si è percorsa la prima volta (che è quello indicato colla freccia nella figura). Avremo che i due integrali che dovremo considerare saranno

$$\int_{\mathrm{ABCA}} \mathrm{T}dz \quad , \quad \int_{\mathrm{BCAB}} \mathrm{T}dz$$

e per il teorema primo

$$\int_{\mathrm{BCAB}} = \int_{\mathrm{ADB}} \cdot \int_{\mathrm{BCA}} ,$$

$$\int_{\mathrm{ABCA}} = \int_{\mathrm{BCA}} \cdot \int_{\mathrm{ADB}} ;$$

quindi

$$(1) \qquad \int_{\mathrm{BCAB}} = \Big(\int_{\mathrm{ADB}}\Big) \int_{\mathrm{ABCA}} \Big(\int_{\mathrm{ADB}}\Big)^{-1} .$$

Ora se

$$\int_{\mathrm{ABCA}} \mathrm{T}dz = 1$$

dalle (1) risulta immediatamente

$$\int_{BCAB} T dz = 1 .$$

TEOREMA V. - *Se si considera l'integrale di una sostituzione* (som o) *funzione di una variabile complessa esteso lungo una linea chiusa quando si comincia la integrazione da un certo punto della curva, e l'integrale della stessa sostituzione esteso lungo la medesima linea nello stesso senso, ma cominciando la integrazione da un'altro punto della curva, avremo che il secondo integrale sarà una trasformata del primo.*

Questo teorema risulta immediatamente dalla formula (1) che abbiamo stabilita per dimostrare il teorema precedente.

Data una linea chiusa s nel campo di variabilità della z e una sostituzione T (som o) e fissato il senso in cui deve percorrersi la s, esisteranno infiniti valori S per l'integrale di T lungo s e ciò dipendentemente dal punto di s da cui si principia la integrazione. Prese due qualunque

$$S_1 = \begin{pmatrix} a_{11}, a_{12}, \cdots, a_{1n} \\ a_{21}, a_{22}, \cdots, a_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}, a_{n2}, \cdots, a_{nn} \end{pmatrix} \quad , \quad S_2 = \begin{pmatrix} b_{11}, b_{12}, \cdots, b_{1n} \\ b_{21}, b_{22}, \cdots, b_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ b_{n1}, b_{n2}, \cdots, b_{nn} \end{pmatrix}$$

di queste sostituzioni integrali, esse saranno a det 1, e per il teorema 5°, avremo che esse potranno porsi sempre sotto la forma

$$S_1 = U_1 S_2 U_1^{-1},$$

vale a dire

$$\mathrm{Det}\begin{pmatrix} a_{11} - \omega, & a_{12} & , \cdots, & a_{1n} \\ a_{21} & , a_{22} - \omega, & \cdots, & a_{2n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ a_{n1} & , \quad a_{n2} & , \cdots, & a_{nn} - \omega \end{pmatrix} \text{ e } \mathrm{Det}\begin{pmatrix} b_{11} - \omega, & b_{12} & , \cdots, & b_{1n} \\ b_{21} & , b_{22} - \omega, & \cdots, & b_{2n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ b_{n1} & , \quad b_{n2} & , \cdots, & b_{nn} - \omega \end{pmatrix}$$

avranno i medesimi divisori elementari (vedi Preliminari premessi alla Parte prima, § 2), onde, posti S_1 e S_2 sotto la forma canonica, avremo

$$S_1 = V_1 \left\{ \boxed{\prod_1^p{}_i \prod_1^{r_i}{}_\chi S_i^{(\chi)}} \right\} V_1^{-1},$$

$$S_2 = V_2 \left\{ \boxed{\prod_1^p{}_i \prod_1^{r_i}{}_\chi S_i^{(\chi)}} \right\} V_2^{-1},$$

e in generale

$$S = V \left\{ \boxed{\prod_1^p{}_i \prod_1^{r_i}{}_\chi S_i^{(\chi)}} \right\} V^{-1},$$

e le $S_i^{(\chi)}$ saranno le stesse per tutte le sostituzioni S. La sostituzione

$$W = \overline{\left\{ \prod_1^p {}_i \prod_1^{r_i} {}_\chi S_i^{(\chi)} \right\}}$$

si chiamerà la *sostituzione caratteristica* sinistra della linea s relativamente alla sostituzione T e alla direzione scelta per la linea s. In particolare se le radici $\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n$ della equazione

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \omega, & a_{12} & , \cdots, & a_{1n} \\ a_{21} & , a_{22} - \omega, & \cdots, & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & , a_{n2} & , \cdots, & a_{nn} - \omega \end{vmatrix} = 0$$

saranno tutte diverse fra loro, avremo

$$W = \begin{pmatrix} \omega_1, 0, \cdots, 0 \\ 0, \omega_2, \cdots, 0 \\ \cdots\cdots\cdots \\ 0, 0, \cdots, \omega_n \end{pmatrix} \quad , \quad \prod_1^n {}_i \omega_i = 1 .$$

4. È inutile osservare che possono enunciarsi immediatamente i teoremi correlativi dei precedenti rispetto agli integrali destri. Cerchiamo piuttosto il valore della *sostituzione caratteristica* destra mediante quello della sostituzione caratteristica sinistra, relativa alla stessa direzione.

Se eseguiamo la integrazione a destra lungo la linea s, avremo intanto per risultato

$$S' = T \overline{\left\{ \prod_1^p {}_i \prod_1^{r_i} {}_\chi S_i^{(\chi)} \right\}}^{-1} T^{-1},$$

essendo T a det $= 1$. Ora, se si ha

$$S_i^{(\chi)} = \begin{pmatrix} \omega_i, 0, \cdots, 0, 0 \\ 1, \omega_i, \cdots, 0, 0 \\ 0, 1, \cdots, 0, 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ 0, 0, \cdots, 1, \omega_i \end{pmatrix},$$

posto

$$\Sigma_i^{(\chi)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\omega_i} & , 0 & , 0 & , \cdots, 0 \\ -\frac{1}{\omega_i^2} & , \frac{1}{\omega_i} & , 0 & , \cdots, 0 \\ \frac{1}{\omega_i^3} & , -\frac{1}{\omega_i^2} & , \frac{1}{\omega_i} & , \cdots, 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{(-1)\chi^{-1}}{\omega_i^\chi} & , \frac{(-1)\chi^{-2}}{\omega_i^{\chi-1}} & , \frac{(-1)\chi^{-3}}{\omega_i^{\chi-2}} & , \cdots, \frac{1}{\omega_i} \end{pmatrix},$$

avremo

$$\left\{ \prod_{1}^{p}{}_{i} \prod_{1}^{r_i}{}_{\chi} \Sigma_i^{(\chi)} \right\} = \left\{ \prod_{1}^{p}{}_{i} \prod_{1}^{r_i}{}_{\chi} S_i^{(\chi)} \right\}^{-1}$$

onde

$$S' = T \left\{ \prod_{1}^{p}{}_{i} \prod_{1}^{r_i}{}_{\chi} \Sigma_i^{(\chi)} \right\} T^{-1}.$$

Poniamo ora

$$\Lambda = \left\{ \prod_{1}^{p}{}_{i} \prod_{1}^{r_i}{}_{\chi} \Sigma_i^{(\chi)} \right\}$$

sotto la forma canonica; otterremo

$$\Lambda = \left\{ \prod_{1}^{p}{}_{i} \prod_{1}^{r_i}{}_{\chi} \Sigma_i^{(\chi)} \right\} = M \left\{ \prod_{1}^{p}{}_{i} \prod_{1}^{r_i}{}_{\chi} S_i'^{(\chi)} \right\} M^{-1},$$

ove

$$S_i'^{(\chi)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\omega_i}, & 0, & 0, & \cdots, & 0 \\ 1, & \frac{1}{\omega_i}, & 0, & \cdots, & 0 \\ 0, & 1, & \frac{1}{\omega_i}, & \cdots, & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0, & 0, & 0, & \cdots, & \frac{1}{\omega_i} \end{pmatrix} \text{(di ordine } \chi);$$

avremo quindi

$$S' = V' \left\{ \prod_{1}^{p}{}_{i} \prod_{1}^{r_i}{}_{\chi} S_i'^{(\chi)} \right\} V'^{-1},$$

ove V è a det $= 1$. Onde la *caratteristica destra sarà*

$$\left\{ \prod_{1}^{p}{}_{i} \prod_{1}^{r_i}{}_{\chi} S_i'^{(\chi)} \right\}.$$

Possiamo quindi dire che *la caratteristica destra si ottiene da quella sinistra scambiando dappertutto le* ω_i *nelle* $1/\omega_i$.

Se si inverte la direzione nella s è evidente che le *caratteristiche destra e sinistra si scambiano fra loro.*

§ 3. – Il teorema di Cauchy relativo alle sostituzioni.

1. Sia T una sostituzione della variabile complessa z i cui elementi siano funzioni olomorfe di z entro un campo σ limitato da una o più linee contorno l; diremo che T è una *sostituzione olomorfa* della variabile complessa z entro il campo σ.

Si supponga il campo σ semplicemente connesso e che la somma dei termini in diagonale nella T sia nulla.

Posto

$$\mathrm{T}\,dz = \mathrm{T}_1\,dx \cdot \mathrm{T}_2\,dy,$$

avremo che

$$\Delta'(\mathrm{T}_1, \mathrm{T}_2)_{x,y} = 0.$$

Inoltre si avrà che gli elementi delle sostituzioni T_1, T_2 saranno finiti insieme alle loro derivate; quindi applicando un teorema dell'art. 4, § 6, della prima parte, avremo che, presa entro σ una linea s chiusa qualunque, $\int_s \mathrm{T}\,dz$ sarà eguale alla identità, onde il teorema:

Teorema I. – *Se* T (som 0) *è una sostituzione olomorfa di z entro un campo semplicemente connesso σ, e s è una linea chiusa entro σ, avremo*

$$\int_\sigma \mathrm{T}\,dz = 1\,.$$

2. Da questo teorema si deduce immediatamente come conseguenza che, prese entro σ due linee qualunque s_1, s_2 che partano da uno stesso punto A e terminino in uno stesso punto B, i due integrali

$$\int_{s_1} \mathrm{T}\,dz \quad , \quad \int_{s_2} \mathrm{T}\,dz$$

saranno eguali fra loro, onde il teorema:

Teorema II. – *Se* T (som 0) *è olomorfa entro l'area σ semplicemente connessa,*

$$\int_s \mathrm{T}\,dz\,,$$

finché s è interno a σ, non dipenderà che dagli estremi di s.

3. Ammesse sempre verificate le condizioni poste nel teorema precedente, vediamo quali proprietà ha la sostituzione

$$\mathrm{S} = \int_s \mathrm{T}\,dz$$

in cui la linea s senza escire da σ va da un punto fisso A ad un punto variabile di indice z. Posto

$$\mathrm{T}\,dz = \mathrm{T}_1\,dx \cdot \mathrm{T}_2\,dy\,,$$

avremo che T_2 si otterrà da T_1 moltiplicandone tutti gli elementi per i, quindi impiegando il noto simbolo, avremo

$$\frac{\partial S}{\partial x} = \frac{1}{i}\frac{\partial S}{\partial y} = T_1 = \frac{1}{i} T_2 .$$

Questo dimostra (vedi § 2, art. 1) che S è una *sostituzione monogena.*

Dal teorema II risulta immediatamente che essa è anche *monodroma* (ad un sol valore) e finalmente essa dovrà essere sempre finita. Potremo quindi enunciare il teorema seguente:

TEOREMA III. - *Se la sostituzione* T (som o) *è una sostituzione olomorfa di z in un campo semplicemente connesso σ,*

$$S = \int_A^z T\, dz$$

sarà una sostituzione pure olomorfa di z (det 1) *e sarà*

$$\frac{dS}{dz} = T .$$

Con $\int_A^z$ *si intende un integrale esteso ad una linea qualunque entro σ, che dal punto* A *va al punto z.*

4. Consideriamo ora un campo *doppiamente connesso* σ limitato da due linee s_1 e s_2. Entro σ sia T (som o) olomorfa. Si uniscano le due linee s_1 e s_2 mediante una linea l, lungo la quale si eseguisca un taglio: la σ così sezionata si chiami σ_1; i due orli del taglio si denotino con l_1 e l_2 [(2)]. Questo campo sarà semplicemente connesso; quindi pel teorema I, avremo

$$\int_{l_1} T\, dz \cdot \int_{s_2} T\, dz \cdot \int_{l_2} T\, dz \cdot \int_{s_1} T\, dz = 1 ,$$

onde

$$\int_{l_1} T\, dz \int_{s_2} T\, dz \int_{l_2} T\, dz = \left(\int_{s_1} T\, dz\right)^{-1} ,$$

in cui gli integrali sono eseguiti lungo le diverse linee nel senso indicato dalle frecce nella fig. 2.

Si ponga ora

$$\int_{l_2} T\, dz = U ,$$

avremo

$$\int_{l_1} T\, dz = (U)^{-1} .$$

(2) Nella figura per maggior chiarezza si sono disegnati i due orli del taglio alquanto staccati fra loro; ma essi si debbono immaginare coincidenti. Questa osservazione valga per le figure successive.

Supponendo di eseguire lungo le linee s_1 e s_2 le integrazioni nel senso indicato dalle frecce nella fig. 2, avremo quindi

$$U^{-1} \cdot \int_{s_2} T\, dz \cdot U = \int_{s_1} T\, dz$$

ove i due integrali $\int_{s_1}$ e $\int_{s_2}$ vanno rispettivamente eseguiti a cominciare dai punti A e B.

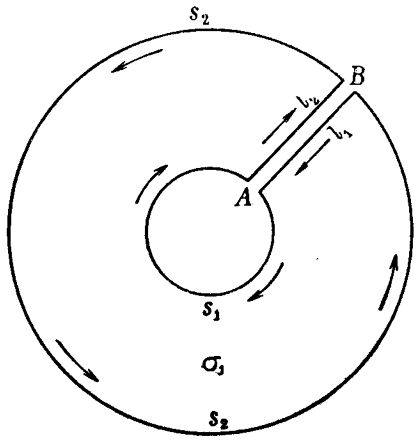


Fig. 2.

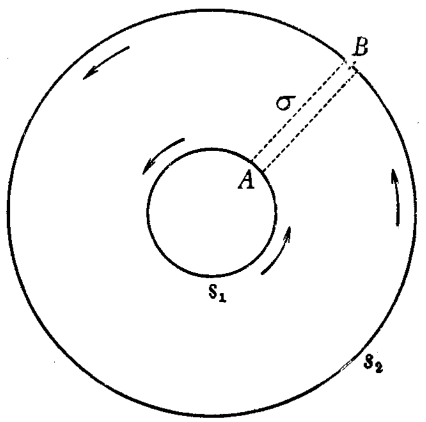


Fig. 3.

Ricordando quindi il teorema V del § 2 e quanto fu detto alla fine dell'art. 3 nello stesso paragrafo, si giungerà al teorema:

TEOREMA IV. – *Se due linee chiuse s_1 e s_2 limitano un campo finito due volte connesso, entro il quale una sostituzione* T (som o) *è olomorfa, avremo che le caratteristiche delle due linee s_1 e s_2 relativamente alla sostituzione* T *saranno eguali fra loro, vale a dire che eseguendo nello stesso senso la integrazione di* T *lungo le due linee si otterranno sostituzioni, ciascuna delle quali è la trasformata dell'altra.*

5. Consideriamo ora un campo n volte connesso σ con n linee contorni e si eseguiscano $n - 1$ tagli normali che lo trasformino in un campo semplicemente connesso σ'. Sia T (som o) una sostituzione olomorfa entro σ, avremo che

$$s = \int_A^z T dz$$

sarà pure olomorfa entro σ' e applicando il teorema V del § 6 della prima parte avremo che *dei valori dalle due parti di uno stesso taglio l'uno si otterrà dall'altro moltiplicandolo per una sostituzione costante lungo il taglio.*

Abbiamo quindi il modo di comportarsi delle *sostituzioni polidrome ottenute come integrali di sostituzioni olomorfe entro campi più volte connessi.*

Questa proprietà ci sarà utile in seguito per stabilire il legame che passa fra la integrazione delle sostituzioni e la integrazione delle equazioni differenziali lineari.

6. Abbiasi ora una sostituzione T olomorfa in un dato campo, esclusi un certo numero di punti. Se si conducono due linee qualunque, fra le quali non si trova alcun punto singolare, le caratteristiche delle due linee saranno eguali, e se si conduce una linea qualunque entro la quale non si trova nessun punto singolare, la sua caratteristica sarà l'identità.

Tutte le linee le quali racchiudono nel loro interno uno ed un solo punto singolare, hanno eguali caratteristiche; questa caratteristica comune si chiamerà il *residuo* della sostituzione T in quel punto.

7. Cominciamo dal determinare il residuo di sostituzioni del secondo ordine per considerare da principio il caso più semplice.

Ammettiamo da prima che gli elementi della sostituzione divengano infiniti del primo ordine in un punto $z = z_0$. Sia

$$\begin{pmatrix}\alpha, \beta \\ \gamma, \delta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{A}{z - z_0} + \tilde{\omega}_1(z), & \frac{B}{z - z_0} + \tilde{\omega}_2(z) \\ \frac{C}{z - z_0} + \tilde{\omega}_3(z), & \frac{D}{z - z_0} + \tilde{\omega}_4(z)\end{pmatrix}$$

con A, B, C, D costanti e

$$A + D = 0 \qquad \tilde{\omega}_1(z) + \tilde{\omega}_4(z) = 0.$$

Supporremo $\tilde{\omega}_1(z)$, $\tilde{\omega}_2(z)$ e $\tilde{\omega}_3(z)$ olomorfe nel punto z_0.

Avremo:

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0}\begin{pmatrix}\alpha, \beta \\ \gamma, \delta\end{pmatrix} = \text{Trasformata di} \int_s \begin{pmatrix}\frac{A}{z - z_0} + \tilde{\omega}_1(z), & \frac{B}{z - z_0} + \tilde{\omega}_2(z) \\ \frac{C}{z - z_0} + \tilde{\omega}_3(z), & \frac{D}{z - z_0} + \tilde{\omega}_4(z)\end{pmatrix} dz,$$

essendo s una curva chiusa che racchiude nel suo interno il punto z_0 e nessun altro punto di singolarità. Prendiamo per s un cerchio col centro in z_0 e col raggio r; avremo

$$z - z_0 = re^{i\theta} \qquad dz = ire^{i\theta}\, d\theta,$$

quindi

$$\int_s \begin{pmatrix}\alpha, \beta \\ \gamma, \delta\end{pmatrix} ds = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix}Ai + \tilde{\omega}_1\, ire^{i\theta}, & Bi + \tilde{\omega}_2\, ire^{i\theta} \\ Ci + \tilde{\omega}_3\, ire^{i\theta}, & Di + \tilde{\omega}_4\, ire^{i\theta}\end{pmatrix} d\theta.$$

Ora sia M un numero superiore al massimo modulo delle funzioni $\tilde{\omega}_1$, $\tilde{\omega}_2$, $\tilde{\omega}_3$, $\tilde{\omega}_4$ negli intorni di z_0, avremo che le due sostituzioni

$$\begin{pmatrix}Ai, Bi \\ Ci, Di\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}Ai + \tilde{\omega}_1\, ire^{i\theta}, & Bi + \tilde{\omega}_2\, ire^{i\theta} \\ Ci + \tilde{\omega}_3\, ire^{i\theta}, & Di + \tilde{\omega}_4\, ire^{i\theta}\end{pmatrix}$$

differiranno fra loro meno di Mr, onde

$$\int_0^{2\pi}\begin{pmatrix}Ai, Bi\\ Ci, Di\end{pmatrix}d\theta \quad , \quad \int_0^{2\pi}\begin{pmatrix}Ai+\tilde{\omega}_1 ire^{i\theta}, Bi+\tilde{\omega}_2 ire^{i\theta}\\ Ci+\tilde{\omega}_3 ire^{i\theta}, Di+\tilde{\omega}_4 ire^{i\theta}\end{pmatrix}d\theta$$

differiranno fra loro tanto poco quanto si vuole coll'impiccolire convenientemente r (vedi § 2, Teorema XII, Parte 1ª).

Avremo quindi

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0}\begin{pmatrix}\alpha, \beta\\ \gamma, \delta\end{pmatrix} = \text{Trasformata di} \int_0^{2\pi}\begin{pmatrix}Ai, Bi\\ Ci, Di\end{pmatrix}d\theta .$$

Ora si ha (Parte 1ª, § 1, Art. 9), supponendo $AD - BC \neq 0$,

$$\begin{pmatrix}Ai, Bi\\ Ci, Di\end{pmatrix} = \frac{d}{d\theta}\left\{ S\begin{pmatrix}e^{\lambda\theta}, 0\\ 0, e^{-\lambda\theta}\end{pmatrix}S_1\right\},$$

$$\lambda = \sqrt{AD - BC}$$

essendo S e S_1 due sostituzioni costanti a det $= 1$, l'ultima delle quali arbitraria, quindi (Parte 1ª, § 2, Teorema VI)

$$\int_0^{2\pi}\begin{pmatrix}Ai, Bi\\ Ci, Di\end{pmatrix}d\theta = \left\{ S\begin{pmatrix}e^{2\lambda\pi}, 0\\ 0, e^{-2\lambda\pi}\end{pmatrix}S_1\right\}\left\{ S\begin{pmatrix}1, 0\\ 0, 1\end{pmatrix}S_1\right\}^{-1} = S\begin{pmatrix}e^{2\lambda\pi}, 0\\ 0, e^{-2\lambda\pi}\end{pmatrix}S^{-1},$$

onde finalmente

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0}\begin{pmatrix}\alpha, \beta\\ \gamma, \delta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}e^{2\lambda\pi}, 0\\ 0, e^{-2\lambda\pi}\end{pmatrix},$$

$$\lambda = \sqrt{AD - BC}.$$

Se si avesse invece $AD - BC = 0$, si potrebbe porre (Parte 1ª, § 1, Art. 9)

$$\begin{pmatrix}Ai, Bi\\ Ci, Di\end{pmatrix} = \frac{d}{d\theta}\left\{ S\begin{pmatrix}1, 0\\ \theta, 1\end{pmatrix}S_1\right\},$$

essendo S e S_1 due sostituzioni costanti a determinante 1. Quindi

$$\int_0^{2\pi}\begin{pmatrix}Ai, Bi\\ Ci, Di\end{pmatrix}d\theta = S\begin{pmatrix}1, 0\\ 2\pi, 1\end{pmatrix}S^{-1},$$

onde

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} = \begin{pmatrix}1, 0\\ 2\pi, 1\end{pmatrix},$$

$$\lambda = \sqrt{AD - BC} = 0.$$

Si ha dunque che i residui dipendono soltanto dai coefficienti dei termini d'infinito.

6. Passiamo ora a considerare il caso generale in cui la sostituzione sia di ordine n e gli elementi divengano tutti infiniti del primo ordine in un punto $z = z_0$.

Sia la sostituzione (som = o)

$$T = \begin{pmatrix} a_{11}, a_{12}, \cdots, a_{1n} \\ a_{21}, a_{22}, \cdots, a_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}, a_{n2}, \cdots, a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{z-z_0} + \tilde{\omega}_{11}(z), \frac{A_{12}}{z-z_0} + \tilde{\omega}_{12}(z), \cdots, \frac{A_{1n}}{z-z_0} + \tilde{\omega}_{1n}(z) \\ \frac{A_{21}}{z-z_0} + \tilde{\omega}_{21}(z), \frac{A_{22}}{z-z_0} + \tilde{\omega}_{22}(z), \cdots, \frac{A_{2n}}{z-z_0} + \tilde{\omega}_{2n}(z) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{A_{n1}}{z-z_0} + \tilde{\omega}_{n1}(z), \frac{A_{n2}}{z-z_0} + \tilde{\omega}_{n2}(z), \cdots, \frac{A_{nn}}{z-z_0} + \tilde{\omega}_{nn}(z) \end{pmatrix},$$

ove le A_{is} sono costanti e le $\tilde{\omega}_{is}(z)$ sono funzioni olomorfe negli intorni di z_0, e si ha

$$\sum_{1}^{n}{}_h A_{hh} = 0 \quad , \quad \sum_{1}^{n}{}_h \tilde{\omega}_{hh} = 0 .$$

Per determinare il residuo di T nel punto z_0, costruiamo col centro in questo punto un cerchio s di raggio r; avremo

$$\int_s T dz = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} iA_{11} + ir\tilde{\omega}_{11}, \cdots, iA_{1n} + ir\tilde{\omega}_{1n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ iA_{n1} + ir\tilde{\omega}_{n1}, \cdots, iA_{nn} + ir\tilde{\omega}_{nn} \end{pmatrix} d\theta ,$$

e con un ragionamento analogo a quello fatto precedentemente

$$\int_s T dz = \text{Trasformata di} \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} iA_{11}, iA_{12}, \cdots, iA_{1n} \\ \cdots\cdots\cdots \\ iA_{n1}, iA_{n2}, \cdots, iA_{nn} \end{pmatrix} d\theta .$$

Per eseguire la integrazione, basterà porre la sostituzione costante

$$\begin{pmatrix} iA_{11}, iA_{12}, \cdots, iA_{1n} \\ \cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots \\ iA_{n1}, iA_{n2}, \cdots, iA_{nn} \end{pmatrix}$$

sotto la forma canonica. Si otterrà in tal modo

$$\begin{pmatrix} iA_{11}, \cdots, iA_{1n} \\ \cdots\cdots\cdots \\ iA_{n1}, \cdots, iA_{nn} \end{pmatrix} = \text{Trasformata di} \left\{ \boxed{\prod_{1}^{p}{}_i \prod_{1}^{r_i}{}_\chi T_i^{(\chi)}} \right\},$$

ove

$$T_i^{(\chi)} = \begin{pmatrix} \omega_i, 0, \cdots, 0 \\ 1, \omega_i, \cdots, 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ 0, 0, \cdots, \omega_i \end{pmatrix},$$

e mediante le integrazioni (ved. § 8, Parte 1ª)

$$\int_s T dz = \text{Trasformata di} \left\{ \overline{\underline{\prod_1^p{}_i \prod_1^{r_i}{}_\chi S_i^{(\chi)}}} \right\},$$

ove

$$S_i^{(\chi)} = \begin{pmatrix} e^{2\pi\omega_i} & ,0 & ,0 & ,\cdots, 0 \\ \frac{2\pi}{\pi(1)} e^{2\pi\omega_i} & , e^{2\pi\omega_i} & ,0 & ,\cdots, 0 \\ \frac{(2\pi)^2}{\pi(2)} e^{2\pi\omega_i} & , \frac{2\pi}{\pi(1)} e^{2\pi\omega_i} & , e^{2\pi\omega_i} & ,\cdots, 0 \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \frac{(2\pi)^{\chi-1}}{\pi(\chi-1)} e^{2\pi\omega_i}, & \frac{(2\pi)^{\chi-2}}{\pi(\chi-2)} e^{2\pi\omega_i}, & \frac{(2\pi)^{\chi-3}}{\pi(\chi-3)} e^{2\pi\omega_i}, & \cdots, e^{2\pi\omega_i} \end{pmatrix}.$$

Ora è facile dimostrare che, posto

$$W = \left\{ \overline{\underline{\prod_1^p{}_i \prod_1^{r_i}{}_\chi S_i^{(\chi)}}} \right\}$$

sotto la forma canonica, si trova

$$W = U \left\{ \overline{\underline{\prod_1^p{}_i \prod_1^{r_i}{}_\chi V_i^{(\chi)}}} \right\} U^{-1},$$

ove

$$V_i^{(\chi)} = \begin{pmatrix} e^{2\pi\omega_i}, 0 & ,0 & ,\cdots, 0, 0 \\ 1 & , e^{2\pi\omega_i}, 0 & ,\cdots, 0, 0 \\ 0 & ,1 & , e^{2\pi\omega_i}, \cdots, 0, 0 \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ 0 & ,0 & ,0 \quad ,\cdots, 1, e^{2\pi\omega_i} \end{pmatrix},$$

avremo quindi

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} T = \left\{ \overline{\underline{\prod_1^p{}_i \prod_1^{r_i}{}_\chi V_i^{(\chi)}}} \right\}.$$

La determinazione del residuo si ottiene quindi dalla risoluzione di una equazione di grado n i cui coefficienti sono dipendenti soltanto dai termini d'infinito degli elementi della sostituzione T.

9. Si consideri ora una sostituzione olomorfa entro un certo campo σ semplicemente connesso limitato da un contorno s e sia

$$T = \begin{pmatrix} \tilde{\omega}_{11}(z), \cdots, \tilde{\omega}_{1n}(z) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \tilde{\omega}_{n1}(z), \cdots, \tilde{\omega}_{nn}(z) \end{pmatrix} \quad , \quad \sum_1^n{}_h \tilde{\omega}_{hh} = 0 .$$

Si prenda un punto z_0 qualunque entro σ e si denoti con $\tilde{\omega}^0_{hk}$ il valore di $\tilde{\omega}_{hk}$ per $z = z_0$. Si formi poi la sostituzione

$$T_1 = \begin{pmatrix} \tilde{\omega}_{11} \dfrac{c_{11}}{z - z_0}, \ \tilde{\omega}_{12} \dfrac{c_{12}}{z - z_0}, \cdots, \ \tilde{\omega}_{1n} \dfrac{c_{1n}}{z - z_0} \\ \tilde{\omega}_{21} \dfrac{c_{21}}{z - z_0}, \ \tilde{\omega}_{22} \dfrac{c_{22}}{z - z_0}, \cdots, \ \tilde{\omega}_{2n} \dfrac{c_{2n}}{z - z_0} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \tilde{\omega}_{n1} \dfrac{c_{n1}}{z - z_0}, \ \tilde{\omega}_{n2} \dfrac{c_{n2}}{z - z_0}, \cdots, \ \tilde{\omega}_{nn} \dfrac{c_{nn}}{z - z_0} \end{pmatrix},$$

ove le c_{hk} sono costanti e $c_{11} = c_{22} = \cdots = c_{nn}$.

TEOREMA V. – *Se poniamo*

$$\int_s T_1 \, dz = W_1 ,$$

questo integrale a meno di sostituzioni trasformatrici non dipenderà che dai valori delle costanti c_{hk} *e delle* $\tilde{\omega}_{hk}$ *nel punto* $z = z_0$.

Questo teorema perfettamente analogo al noto teorema di CAUCHY ci permetterà di estendere il teorema stesso di CAUCHY alle equazioni differenziali lineari.

§ 4. – PUNTI SINGOLARI DELLE SOSTITUZIONI.

1. Una sostituzione venne chiamata *olomorfa* in un punto se le funzioni che ne costituivano gli elementi erano olomorfe in quel punto (vedi paragrafo precedente). Se una sostituzione in un punto non è olomorfa, chiameremo il punto un *punto singolare*.

Distingueremo i punti singolari in due categorie secondoché essi sono di *diramazione* della sostituzione oppure non sono tali.

2. Se un punto singolare è di diramazione per una certa sostituzione (det = 1), ma non è di diramazione per la derivata sinistra (o destra) della sostituzione, lo si chiamerà un punto di *diramazione abeliano sinistro* (o destro). In questo caso la proprietà del punto di diramazione consiste in questo: che girando intorno ad esso, la sostituzione data viene moltiplicata a destra (o a

sinistra) per una sostituzione costante (det $=$ 1) che chiameremo il *modulo* del punto di diramazione e che non è altro che una trasformata del residuo della derivata in quel punto.

Sia C la sostituzione costante corrispondente ad un punto di diramazione abeliano sinistro z_0 di una sostituzione S. È facile dimostrare che *può sempre porsi*

$$S = S_1 S_2 ,$$

ove S_1 *non ha diramazione in* z_0 *ed* S_2 *non dipende che da* C *e può determinarsi senza difficoltà.*

Infatti C potrà porsi sotto la forma canonica

$$C = M^{-1} \left\{ \overline{\prod_1^p{}_s \prod_1^{r_s}{}_\chi T_s^{(\chi)}} \right\} M,$$

ove

$$T_s^{(\chi)} = \begin{pmatrix} \alpha_s , 0 , \cdots , 0 \\ 1 , \alpha_s , \cdots , 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ 0 , 0 , \cdots , \alpha_s \end{pmatrix} , \qquad \prod_1^p{}_s \alpha_s = 1 .$$

Posto

$$\alpha_s = e^{2\pi i \omega_s} ,$$

avremo che la sostituzione (vedi paragr. prec.)

$$U = \prod_1^p{}_s \prod_1^{r_s}{}_\chi \tau_s^{(\chi)} ,$$

ove

$$\tau_s^{(\chi)} = \begin{pmatrix} \frac{\omega_s}{z - z_0} , 0 & , 0 & , \cdots , 0 \\ \frac{1}{z - z_0} , \frac{\omega_s}{z - z_0} & , 0 & , \cdots , 0 \\ 0 \quad , \frac{1}{z - z_0} & , \frac{\omega_s}{z - z_0} & , \cdots , 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ 0 \quad , 0 & , 0 & , \cdots , \frac{\omega_s}{z - z_0} \end{pmatrix} ,$$

ha appunto per residuo nel punto z_0

$$\left\{ \overline{\prod_1^p{}_s \prod_1^{r_s}{}_\chi T_s^{(\chi)}} \right\} .$$

Abbiamo ora

$$V = \int U dz = \int U_1 \frac{dz}{z - z_0} = \int U_1 \, d \log (z - z_0)$$

ove

$$\mathrm{U} = \left\{ \prod_{1}^{p}{}_{s} \prod_{1}^{r_s}{}_{\chi} \begin{pmatrix} \omega_s, & 0, & 0, & \cdots, & 0 \\ 1, & \omega_s, & 0, & \cdots, & 0 \\ 0, & 1, & \omega_s, & \cdots, & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0, & 0, & 0, & \cdots, & \omega_s \end{pmatrix} \right\}.$$

Poniamo

$$\log (z - z_0) = \zeta ,$$

avremo

$$\mathrm{V} = \left\{ \prod_{1}^{p}{}_{s} \prod_{1}^{r_s}{}_{\chi} \begin{pmatrix} e^{\omega_s \zeta} & , 0 & , \cdots, 0 \\ \frac{\zeta}{\pi(1)} e^{\omega_s \zeta} & , e^{\omega_s \zeta} & , \cdots, 0 \\ \frac{\zeta^2}{\pi(2)} e^{\omega_s \zeta} & , \frac{\zeta}{\pi(1)} e^{\omega_s \zeta} & , \cdots, 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\zeta^{\chi-1}}{\pi(\chi-1)} e^{\omega_s \zeta}, & \frac{\zeta^{\chi-2}}{\pi(\chi-2)} e^{\omega_s \zeta}, & \cdots, e^{\omega_s \zeta} \end{pmatrix} \right\} = \prod_{1}^{p}{}_{s} \prod_{1}^{r_s}{}_{\chi} \mathrm{K}_s^{(\chi)} .$$

Ora

$$\mathrm{K}_s^{(\chi)} = \begin{pmatrix} (z-z_0)^{\omega_s} & , & 0 & , 0 & , \cdots, & 0 \\ (z-z_0)^{\omega_s} \log (z-z_0) & , & (z-z_0)^{\omega_s} & , 0 & , \cdots, & 0 \\ \frac{1}{\pi(2)} (z-z_0)^{\omega_s} [\log (z-z_0)]^2 & , & (z-z)^{\omega_s} \log (z-z_0) & , (z-z_0)^{\omega_s}, & \cdots, & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{1}{\pi(\chi-1)} (z-z_0)^{\omega_s} [\log (z-z_0)]^{\chi-1} & , & \frac{1}{\pi(\chi-2)} (z-z_0)^{\omega_s} [\log (z-z_0)]^{\chi-2}, & \cdots & , \cdots, & (z-z_0)^{\omega_s} \end{pmatrix}$$

Potrà quindi trovarsi una sostituzione costante N, tale che

$$\mathrm{S}_2 = \mathrm{N}^{-1} \left\{ \prod_{1}^{p}{}_{s} \prod_{1}^{r_s}{}_{\chi} \mathrm{K}_s^{(\chi)} \right\} \mathrm{N}$$

abbia per modulo nel punto di diramazione z_0 la sostituzione C. Ne segue che

$$\mathrm{S}\mathrm{S}_2^{-1} = \mathrm{S}_1$$

non avrà più diramazione in $z = z_0$ e quindi

$$\mathrm{S} = \mathrm{S}_1 \mathrm{S}_2 .$$

Si ottiene quindi il risultato enunciato precedentemente.

Analogamente si avrebbe nel caso di un punto di diramazione abeliano destro.

3. I punti di singolarità di una sostituzione, che non sono punti di diramazione, si diranno ***poli di prima specie*** o semplicemente ***poli***, se in essi tutti gli elementi hanno soltanto dei poli nel senso ordinario che si dà a questa denominazione nella teoria delle funzioni.

Se una sostituzione (det $=1$) ha un punto di singolarità non di diramazione, che non è un polo di prima specie, ma che è però un polo di prima specie per la sua derivata sinistra (o destra), il punto singolare si chiamerà un *polo di seconda specie sinistro* (o *destro*).

Così pure un punto di diramazione di una sostituzione (det $=1$) tale che in esso la derivata sinistra (o destra) ha semplicemente un polo di prima specie si dirà un *punto di diramazione polare sinistro* (o *destro*).

È facile riconoscere la esistenza di poli di seconda specie. Così la sostituzione

$$S = \begin{pmatrix} e^{1/z} & , 0 \\ z e^{1/z} & , e^{-1/z} \end{pmatrix}$$

ha per $z = 0$ un polo di seconda specie che non è un polo di seconda specie destro. Infatti

$$\frac{dS}{dz} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{z^2} & , 0 \\ 1 - \frac{2}{z} & , \frac{1}{z^2} \end{pmatrix},$$

$$S\frac{d}{dz} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{z^2} & , 0 \\ e^{2/z} & , \frac{1}{z^2} \end{pmatrix}.$$

4. È facile dimostrare i teoremi seguenti:

TEOREMA I. – *Le derivate* (destra e sinistra) *di una sostituzione* (det $=1$) *in un punto ove questa ha un polo di prima specie hanno pure dei poli di prima specie.*

TEOREMA II. – *Se si moltiplica a destra una sostituzione che ha in un dato punto un polo di seconda specie sinistro, per una sostituzione che in quel punto è olomorfa o ha al più un polo di prima specie, il prodotto avrà in quel punto un polo di seconda specie sinistro* (vedi anche il teorema correlativo).

TEOREMA III. – *Se si moltiplica a destra una sostituzione che ha in un dato punto una diramazione polare sinistra, per una sostituzione che in quel punto è olomorfa, o ha al più un polo di prima specie, il prodotto avrà pure in quel punto una diramazione polare sinistra.*

TEOREMA IV. – *Se si moltiplica a destra o a sinistra o da ambo le parti una sostituzione* S *che ha in un dato punto un polo di seconda specie* (destro o sinistro) *o una diramazione polare, per una sostituzione costante, il prodotto avrà sempre in quel punto una singolarità avente lo stesso nome di quella posseduta da* S.

TEOREMA V. – *Se una sostituzione ha in un punto un polo di seconda specie sinistra o una diramazione polare (o in generale abeliana) sinistra, la sua inversa avrà invece una singolarità dello stesso nome destra.*

I teoremi precedenti si dimostrano senza difficoltà applicando i teoremi dati nella prima parte per le derivate dei prodotti di sostituzioni.

§ 5. – SOSTITUZIONI ALGEBRICHE E SOSTITUZIONI ABELIANE.

1. Abbiasi una sostituzione i cui elementi siano funzioni monodrome definite sopra una superficie di RIEMANN; diremo la *sostituzione monodroma* sulla superficie di RIEMANN (3). Se oltre ad essere monodromi, gli elementi della sostituzione sono *regolari* (4) sopra la superficie di RIEMANN, diremo che la sostituzione è una *sostituzone regolare su quella superficie di* RIEMANN o anche che è una *sostituzione algebrica*.

Ogni polo di un elemento della sostituzione sarà un *polo della sostituzione*.

Se la sostituzione algebrica *non ammette nessun polo* essa deve essere una *costante*.

Se il genere della superficie di RIEMANN è p, eseguendo successivamente $3p-1$ sistemi di tagli (i tagli normali), la superficie di RIEMANN potrà ridursi ad essere semplicemente connessa (cfr. NEUMANN, op. cit., p. 182).

2. Distinguiamo i poli di una sostituzione (som $= 0$) in due categorie: quelli per i quali il residuo della sostituzione è diverso dalla identità (*poli aventi residuo*) e quelli per i quali il residuo è l'identità (*poli senza residuo*).

Escludiamo ciascun *polo avente residuo* mediante un piccolo contorno chiuso ed eseguiamo sulla superficie di RIEMANN tanti tagli che da questi punti vadano ad uno stesso punto situato lungo una riva di uno dei tagli normali precedentemente considerati. La superficie di RIEMANN R dopo eseguiti i tagli normali e questi ultimi tagli, si chiami R'; essa sarà semplicemente connessa.

Prendiamo sopra R' un punto qualunque z_0 e denotiamo con T (som 0) la sostituzione algebrica: avremo che

$$S = \int_{z_0}^{z} T\,dz$$

(3) Una funzione monodroma sopra una superficie di RIEMANN che possiede dei poli e dei punti di singolarità essenziali venne chiamata da APPELL (« Acta Math. », T. 1) una *funzione di un punto analitico*, quindi si potrebbe anche chiamare per analogia *sostituzione funzione di un punto analitico* una sostituzione monodroma sopra una superficie di RIEMANN.

(4) Una funzione regolare sopra una superficie di RIEMANN non ammette altre singolarità che dei poli. Vedi C. NEUMANN, *Vorlesungén über Riemann's Theorie der Abel'schen Integrale*, p. 117.

sarà monodroma sulla superficie sezionata. Essa si chiamerà una *sostituzione abeliana sinistra.* Invece

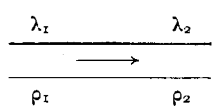
$$S_1 = \mathrm{T}dz \int_{z_0}^{z}$$

si dirà una *sostituzione abeliana destra.*

Per distinguerle da altre classi che considereremo in seguito chiameremo queste due classi di sostituzioni, *sostituzioni abeliane semplici.* Intenderemo dunque rispettivamente per *sostituzione abeliana destra* o *sinistra,* una sostituzione la cui derivata destra o sinistra è algebrica.

Le sostituzioni abeliane semplici che si conserveranno sempre finite le chiameremo di *prima specie;* se saranno infinite in qualche punto senza che la T possegga *poli aventi residuo,* si diranno di *seconda specie;* se la T possiede *poli aventi residuo* si diranno di *terza specie.* In altri termini *una sostituzione abeliana di seconda specie non potrà avere che dei poli di prima o di seconda specie,* mentre *una sostituzione abeliana di terza specie possiederà dei punti di diramazione polari.*

3. Teorema I. – *Se si considera un taglio della superficie di Riemann o una porzione di taglio compresa fra due nodi consecutivi, i valori di una sostituzione abeliana sinistra sopra una delle rive del taglio saranno eguali ai valori sull'altra riva moltiplicati a destra per una sostituzione costante.*



Prendiamo infatti le due coppie di punti opposti lungo una stessa riva λ_1, ρ_1; λ_2, ρ_2. Avremo se T è algebrica (som o)

$$S = \int \mathrm{T}dz\,,$$

$$S_{\lambda_2} = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \mathrm{T}dz \cdot S_{\lambda_1}\,,$$

$$S_{\varrho_2} = \int_{\varrho_1}^{\varrho_2} \mathrm{T}dz \cdot S_{\varrho_1}\,.$$

Ma

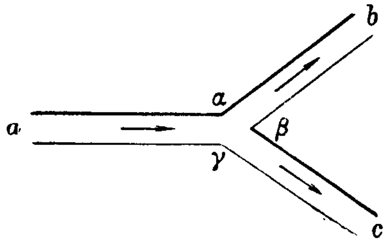
$$\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \mathrm{T}dz = \int_{\varrho_1}^{\varrho_2} \mathrm{T}dz\,,$$

quindi

$$S_{\lambda_2}^{-1} S_{\varrho_2} = S_{\lambda_1}^{-1} S_{\varrho_1}$$

come si voleva dimostrare.

TEOREMA II. – *Se un taglio a si dirama in due tagli b e c, la sostituzione costante relativa al taglio a è uguale al prodotto delle sostituzioni relative ai due tagli b e c.*



Considerando infatti il nodo $\alpha\beta\gamma$ e denotando con A, B, C rispettivamente le tre sostituzioni costanti relative ai tagli a, b, c di una sostituzione abeliana sinistra S, avremo

$$S_\alpha^{-1} S_\gamma = (S_\alpha^{-1} S_\beta)(S_\beta^{-1} S_\gamma)$$

vale a dire

$$A = B \cdot C$$

come volevasi dimostrare.

TEOREMA III. – *Se si ha una superficie di* RIEMANN *e una sostituzione a* det = 0 *tale, che sulla superficie di* RIEMANN (*dopo averla convenientemente sezionata*) *si conserva monodroma e i valori lungo una riva di un taglio sono eguali ai valori lungo la riva opposta, moltiplicati a destra per una sostituzione costante lungo tutto il taglio o la porzione di taglio compresa fra due nodi consecutivi, ed oltre a ciò non possiede che dei poli di prima specie o di seconda specie sinistri ed i punti di diramazione sono tutti polari sinistri, la sostituzione sarà abeliana sinistra.*

Infatti pel teorema I, § 1, Parte prima, avremo che la derivata sinistra della sostituzione sarà monodroma su tutta la superficie di RIEMANN non sezionata; oltre a ciò (vedi paragr. prec.) non avrà che dei punti di singolarità polari, e quindi sarà algebrica.

Come conseguenza di questo teorema si ottiene subito l'altro:

TEOREMA IV. – *Se si moltiplica a sinistra una sostituzione abeliana sinistra per una sostituzione algebrica* (det 1), *il prodotto sarà una nuova sostituzione abeliana sinistra avente le medesime costanti lungo gli stessi tagli* (vedi paragrafo prec., teorema II).

Si ha poi il

TEOREMA V. – *Se due sostituzioni abeliane sinistre, definite sopra una medesima superficie di* RIEMAMN, *hanno lungo gli stessi tagli le medesime sostituzioni costanti, una di esse sarà eguale all'altra moltiplicata a sinistra per una sostituzione monodroma sulla superficie di* RIEMANN.

Infatti se le due sostituzioni considerate saranno S e S_1, avremo che $S_1 S^{-1}$ dovrà risultare monodroma sulla superficie di RIEMANN non sezionata.

In particolare se le due sostituzioni abeliane saranno di prima specie, la sostituzione $S_1 S^{-1}$ dovrà conservarsi sempre finita, quindi dovrà risultare costante. Ne segue il

TEOREMA V$^{\text{bis}}$. – *Due sostituzioni abeliane sinistre di prima specie, definite sulla stessa superficie di* RIEMANN *e aventi lungo gli stessi tagli le medesime costanti, si otterranno l'una dall'altra mediante la moltiplicazione a sinistra per una sostituzione costante.*

In altri termini:

Una sostituzione abeliana sinistra di prima specie, sarà definita a meno di una sostituzione moltiplicativa costante a sinistra, quando se ne conosceranno tutte le sostituzioni costanti dei tagli.

TEOREMA VI. – *Se due sostituzioni abeliane sinistre corrispondono ad una stessa sostituzione algebrica, le sostituzioni costanti lungo i tagli dell'una sono le trasformate delle sostituzioni costanti dell'altra.*

Infatti siano S e S' due sostituzioni abeliane sinistre corrispondenti alla stessa sostituzione algebrica T. Avremo

$$\frac{d}{dz} S = \frac{d}{dz} S' = T .$$

Quindi

$$S = S' C ,$$

essendo C una sostituzione costante. Abbiasi ora alle due rive λ e ρ di un taglio qualunque

$$S_\lambda = S_\varrho A ,$$

essendo A costante. Avremo

$$S'_\lambda C = S'_\varrho CA ,$$

quindi

$$S'_\lambda = S'_\varrho (CAC^{-1}) ,$$

il che dimostra il teorema.

Presa una certa sostituzione algebrica T (som o) definita sopra una superficie di RIEMANN R ed eseguiti i tagli nel modo indicato nell'art. 2, si costruiscano tutte le possibili sostituzioni abeliane semplici che si possono ottenere integrando a sinistra la T. Esse avranno lungo gli stessi tagli delle sostituzioni costanti che saranno le une le trasformate delle altre. Quando esse si ridurranno alla forma canonica (Preliminari, § 2, Parte prima) potranno considerarsi tutte come le trasformate delle medesime sostituzioni canoniche. Queste potranno chiamarsi le *sostituzioni caratteristiche sinistre* di ciascun taglio.

4. Relativamente alle sostituzioni abeliane destre potremo enunciare i teoremi correlativi di quelli dimostrati precedentemente. Avremo poi il

TEOREMA VII. – *La sostituzione inversa di un integrale abeliano sinistro è un integrale abeliano destro e reciprocamente.*

Questo teorema si dimostra, sia osservando che la sostituzione inversa ha la proprietà che i valori che essa prende su di una riva di un taglio si ottengono da quelli sull'altra riva moltiplicandoli *a sinistra* per una sostituzione costante e tenendo conto del teorema V del paragrafo precedente; sia applicando quanto fu dimostrato nel § 1 (Parte prima), teorema VII.

Sarebbe facile estendere le stesse considerazioni fatte ora relativamente alle sostituzioni abeliane, alle sostituzioni ottenute integrando sostituzioni che avessero delle singolarità essenziali. Così per esempio, se nel teorema III non si pone nessuna condizione relativamente alle singolarità della funzione che si considera, si potrà modificare il teorema dicendo che la sostituzione stessa deve avere una derivata sinistra monodroma sopra la superficie di RIEMANN.

5. È evidente l'analogia che presentano le sostituzioni abeliane semplici cogli integrali abeliani; però le sostituzioni abeliane dànno luogo ad altre classi di sostituzioni di cui le corrispondenti non esistono per gli integrali abeliani; o almeno si confondono colle funzioni algebriche o cogli integrali abeliani stessi. Dimostreremo perciò i seguenti teoremi:

TEOREMA VIII. – *Se si trasforma una sostituzione monodroma sopra una superficie di* RIEMANN *per mezzo di una sostituzione abeliana sinistra, si ottiene una sostituzione i cui valori alle due rive di ciascun taglio sono gli uni le trasformate degli altri, mediante la sostituzione costante (della sostituzione abeliana) relativa a quel taglio.*

Infatti se S è una sostituzione abeliana sinistra e T è monodroma, si ponga

$$\sigma = S^{-1}TS\,.$$

Se λ e ρ sono due punti situati alle due rive di uno dei tagli, avremo

$$\frac{\lambda}{\rho}$$

$$S_\lambda = S_\varrho A\,,$$

$$S_\lambda^{-1} = A^{-1} S_\varrho^{-1}\,,$$

essendo A la sostituzione costante relativa a quel taglio o a quella porzione che si considera. Quindi

$$S_\lambda^{-1} T_\lambda S_\lambda = A^{-1}(S_\varrho^{-1} T_\varrho S_\varrho) A,$$

vale a dire

$$\tau_\lambda = A^{-1}\tau_\varrho A\,.$$

il che dimostra il teorema.

TEOREMA IX. – *Se si moltiplica a sinistra una sostituzione abeliana sinistra per una sostituzione abeliana destra, avente costanti diverse, ma definita sulla stessa superficie di* RIEMANN *cogli stessi tagli, il prodotto avrà la proprietà che i suoi valori da una parte di ciascun taglio si otterranno da quelli* *dall'altra parte moltiplicandoli a destra e a sinistra per delle sostituzioni costanti lungo ciascun taglio o ciascuna porzione di taglio compresa fra due nodi consecutivi.*

Questo teorema si dimostra immediatamente. I due teoremi VIII e IX ci mostrano la esistenza di altre classi di sostituzioni abeliane oltre alle sostituzioni abeliane semplici considerate precedentemente.

Chiameremo *sostituzioni abeliane doppie* quelle i cui valori alle rive di ciascun taglio si ottengono gli uni dagli altri mediante la moltiplicazione a destra e a sinistra per sostituzioni costanti (a det $= 1$) lungo tutto il taglio o la porzione di taglio compresa fra due nodi consecutivi. Nel caso in cui i valori lungo una riva si otterranno da quelli sull'altra riva eseguendo una trasformazione mediante una sostituzione costante (a det $= 1$) lungo tutto il taglio (o la porzione di taglio compresa fra due nodi consecutivi) la sostituzione si dirà una *sostituzione abeliana trasformante.*

6. TEOREMA X. – *La derivata di una sostituzione abeliana doppia* (det$=1$) *è una sostituzione trasformante.*

Sia S una sostituzione abeliana doppia (det $= 1$); alle due rive λ e ρ di uno stesso taglio, avremo

$$S_\lambda = A S_\varrho B \,,$$

essendo A e B due sostituzioni costanti lungo tutto il taglio o la porzione di taglio compresa fra due nodi consecutivi.

Derivando a sinistra avremo (vedi Parte 1ª, § 1)

$$\frac{dS_\lambda}{dz} = A S_\varrho A^{-1}.$$

Posto quindi

$$\frac{dS}{dz} = T,$$

avremo

$$T_\lambda = A T_\varrho A^{-1},$$

il che dimostra che la sostituzione T è trasformante.

TEOREMA XI. – *Gli integrali sinistro e destro di una sostituzione trasformante* (som $= 0$) *sono sostituzioni abeliane doppie.*

Denotiamo con T la sostituzione trasformante (som $= 0$). Si prendano

$$\begin{array}{cc} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \hline \hline \rho_1 & \rho_2 \end{array}$$

due coppie di punti (λ_1, ρ_1), (λ_2, ρ_2) alle due rive di uno stesso taglio (o di una stessa porzione di tagli compresa fra due nodi consecutivi). Avremo

$$T_\lambda = A^{-1} T_\varrho A,$$

essendo A una sostituzione costante lungo il taglio (o la porzione di taglio). Si ponga

$$S = \int_{z_0}^{z} T dz,$$

essendo z_0 un punto arbitrario, e supponendo che il cammino d'integrazione non esca dalla superficie di RIEMANN. Avremo

$$S_{\lambda_2} = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} T_\lambda \, dz \cdot S_{\lambda_1},$$

$$S_{\varrho_2} = \int_{\varrho_1}^{\varrho_2} T_\varrho \, dz \cdot S_{\varrho_1}.$$

Ora

$$\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} T_\lambda \, dz = \int_{\varrho_1}^{\varrho_2} (A^{-1} T_\varrho A) \, dz$$

e per il teorema VII della Parte 1ª, § 2,

$$\int_{\varrho_1}^{\varrho_2} (A^{-1} T_\varrho A) \, dz = A^{-1} \left(\int_{\varrho_1}^{\varrho_2} T_\varrho \, dz \right) A.$$

Quindi

$$S_{\lambda_2} = A^{-1} \left(\int_{\varrho_1}^{\varrho_2} T_\varrho \, dz \right) A \cdot S_{\lambda_1}.$$

Ma

$$\int_{\varrho_1}^{\varrho_2} T_\varrho \, dz = S_{\varrho_2} \cdot S_{\varrho_1}^{-1},$$

quindi

$$S_{\lambda_2} = A^{-1} S_{\varrho_2} S_{\varrho_1}^{-1} A S_{\lambda_1}.$$

Supponiamo λ_2 variabile e λ_1 fisso; posto

$$S_{\varrho_1}^{-1} A S_{\lambda_1} = B,$$

avremo che B sarà costante, quindi

$$S_{\lambda_2} = A^{-1} S_{\varrho_2} B,$$

il che dimostra che S è una sostituzione abeliana doppia.

La stessa dimostrazione varrebbe anche per provare che l'integrale destro di T è pure un integrale abeliano doppio.

TEOREMA XII. - *Se* T *è una sostituzione trasformante e se le sostituzioni costanti dei tagli sono eguali a quelle di una sostituzione abeliana sinistra* S, *si* *dovrà avere che* T *è la trasformata di una sostituzione monodroma mediante la sostituzione trasformatrice* S.

TEOREMA XIII. - *Se* S *è una sostituzione abeliana doppia e le sue costanti di sinistra sono eguali alle inverse delle costanti di una certa sostituzione abeliana sinistra* Σ *o in generale di una sostituzione* Σ *ottenuta integrando una sostituzione monodroma, avremo*

$$S = \Sigma^{-1} \Sigma_1,$$

essendo Σ_1 *una sostituzione la cui derivata è monodroma sulla superficie di* RIEMANN.

TEOREMA XIV. - *La sostituzione inversa di una sostituzione trasformante è una nuova sostituzione trasformante avente le medesime costanti dei tagli.*

TEOREMA XV. - *Il prodotto di più sostituzioni trasformanti aventi le medesime costanti dei tagli è una nuova sostituzione trasformante colle stesse costanti dei tagli.*

TEOREMA XVI. - *Tutte le sostituzioni abeliane doppie ottenute integrando a sinistra una stessa sostituzione trasformante* (som = 0) *hanno le sostituzioni costanti di sinistra eguali fra loro ed eguali alle inverse delle sostituzioni costanti della sostituzione trasformante; le sostituzioni costanti di destra si otterranno le une dalle altre mediante trasformazione.*

Questi ultimi teoremi si dimostrano immediatamente.

7. Restano ora da risolvere le seguenti questioni, che sono evidentemente importanti nella presente teoria:

1ª *Data una sostituzione abeliana doppia, sarà sempre possibile decomporla nel prodotto di due sostituzioni ottenute integrando rispettivamente a destra e a sinistra due sostituzioni monodrome sopra la superficie di* RIEMANN? *Quando è che sarà possibile decomporla nel prodotto di una sostituzione abeliana sinistra moltiplicata a sinistra per una sostituzione abeliana destra?*

2ª *Se questo è possibile, eseguire la decomposizione della sostituzione abeliana doppia nella maniera indicata.*

Supporremo sempre la sostituzione abeliana doppia col determinante eguale all'unità. Mediante i teoremi X, XI, XIII, XV le precedenti questioni si possono ridurre alle seguenti:

1ª *Data una sostituzione trasformante* (som = 0) *sarà sempre possibile ottenerla mediante la trasformazione di una sostituzione monodroma per mezzo di una sostituzione formata integrando a sinistra una sostituzione monodroma?*

2ª *Se ciò è possibile, eseguire la decomposizione della sostituzione trasformante nella maniera indicata.*

Oltre a ciò il seguente teorema ci indica una via per risolvere le altre questioni proposteci.

TEOREMA XVII. - *Se un integrale abeliano doppio è ottenuto moltiplicando a sinistra un integrale abeliano sinistro per un integrale abeliano destro, le derivate saranno sostituzioni trasformanti ottenute trasformando sostituzioni alge-*

briche mediante sostituzioni abeliane sinistre; e reciprocamente *se una sostituzione abeliana trasformante è ottenuta trasformando una sostituzione algebrica* (som o) *mediante una sostituzione abeliana sinistra, i suoi integrali saranno prodotti di sostituzioni abeliane semplici.*

Infatti se S è abeliana destra e S_1 è abeliana sinistra, avremo (Parte 1ª, § 1)

$$\frac{d(SS_1)}{dz} = S\left(\frac{Sd}{dz} + \frac{dS_1}{dz}\right)S^{-1}.$$

Ma $S\frac{d}{dz} + \frac{d}{dz}S$ è una sostituzione algebrica e S^{-1} può considerarsi come una sostituzione abeliana sinistra; la prima parte del teorema risulta quindi dimostrata.

Sia S_1 una sostituzione abeliana sinistra e T (som o) sia algebrica. Si ponga

$$R = S_1^{-1}TS_1,$$

avremo

$$\int_{z_0}^{z} Rdz = \int_{z_0}^{z} S_1^{-1}TS_1\,dz.$$

Onde, posto

$$\int_{z_0}^{z}\left(T - \frac{dS_1}{dz}\right)dz = S_2,$$

avremo (Parte 1ª, § 2)

$$\int_{z_0}^{z} Rdz = S_1^{-1}\cdot S_2\cdot(S_1)_{z=z_0}.$$

La derivata sinistra di

$$S_2\,(S_1)_{z=z_0} = S_3$$

è algebrica, quindi

$$\int_{z_0}^{z} Rdz = S_1^{-1}\,S_3,$$

come volevasi dimostrare.

Le due questioni di vedere *quando una sostituzione abeliana doppia può porsi sotto la forma del prodotto di due sostituzioni abeliane semplici* e di verificare *quando una sostituzione trasformante è la trasformata di una sostituzione algebrica mediante una sostituzione abeliana sinistra,* rientrano quindi una nell'altra.

Senza cercare di risolvere le varie questioni enunciate alla fine di questo paragrafo, pure nel paragrafo seguente accenneremo ad alcune ricerche a cui hanno dato origine i precedenti problemi.

§ 6. - Sostituzioni algebriche e sostituzioni abeliane.

(Seguito).

1. Ricordiamo che, se si ha una sostituzione

$$T = \begin{pmatrix} a_{11}, a_{12}, \cdots, a_{1n} \\ a_{21}, a_{22}, \cdots, a_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}, a_{n2}, \cdots, a_{nn} \end{pmatrix},$$

il primo membro della equazione

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \omega, & a_{12} & , \cdots, & a_{1n} \\ a_{21} & , a_{22} - \omega, & \cdots, & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & , a_{n2} & , \cdots, & a_{nn} - \omega \end{vmatrix} = 0$$

fu chiamato il *determinante caratteristico della sostituzione*; perciò chiameremo l'equazione precedente la *equazione caratteristica della sostituzione.*

Teorema I. - *Se* T *è una sostituzione algebrica o trasformante rispetto ad una certa superficie* R *di* Riemann, *la equazione relativa alla sostituzione avrà i coefficienti monodromi sopra la superficie di* Riemann. *Nel primo caso questi coefficienti saranno algebrici.*

Il teorema è evidente nel caso in cui T sia algebrica; per dimostrarlo nel caso in cui la sostituzione sia trasformante, osserviamo che, se si parte da un punto qualunque della superficie di Riemann e, dopo aver percorso un cammino qualunque, si torna al punto iniziale, la sostituzione T riprenderà il valore iniziale, o tornerà trasformata. Ne segue (ved. Parte 1ª, Preliminari, § 2) che la equazione *caratteristica* della sostituzione (quando si tornerà al punto iniziale) tornerà ad avere le stesse radici che aveva inizialmente. Ciò dimostra il teorema.

2. Presa una sostituzione algebrica o trasformante nel caso in cui i coefficienti della equazione caratteristica siano *algebrici*, si considerino le radici dell'equazione stessa che indicheremo con $\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n$. Siccome i coefficienti dell'equazione sono regolari sulla superficie di Riemann, così considerando le $\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n$ come funzioni dei punti della superficie di Riemann, avremo che percorrendo un cammino chiuso qualsiasi sulla superficie di Riemann, le $\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n$ torneranno in loro stesse o subiranno fra loro una permutazione. È evidente che le permutazioni non avranno luogo altro che quando il cammino chiuso avrà nel suo interno uno o più punti in cui il discriminante della sostituzione si annulla (*punti di diramazione*).

Se la equazione sarà irriduttibile, le $\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n$ potranno riguardarsi come gli n rami di una funzione ad n valori sulla superficie di RIEMANN. Immaginando distesa sulla superficie di RIEMANN finora considerata una nuova superficie di RIEMANN ad n fogli relativamente alla prima e la cui diramazione (sempre relativamente alla prima) sia quella della funzione di cui le $\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n$ sono i rami, avremo che una tale funzione potrà riguardarsi come monodroma sopra la nuova superficie di RIEMANN costruita (5).

Se la equazione caratteristica della sostituzione non sarà irriduttibile, le sue n radici potranno distinguersi in ν gruppi

$$\omega_{1,1}, \omega_{1,2}, \cdots, \omega_{1,k_1}; \omega_{2,1}, \omega_{2,2}, \cdots, \omega_{2,k_2}; \cdots;$$

$$\omega_{h,1}, \omega_{h,2}, \cdots, \omega_{h,k_h}; \cdots; \omega_{\nu,1}, \cdots, \omega_{\nu,k_\nu},$$

$$\sum_1^\nu k_h = n,$$

tali che le radici appartenenti ad uno stesso gruppo potranno considerarsi come rami di una funzione a più valori sulla superficie di RIEMANN. In questo caso potranno distendersi sopra la superficie di RIEMANN ν nuove superficie di RIEMANN $R_1, R_2, \cdots, R_\nu$ (le quali avranno rispetto alla prima $k_1, k_2, \cdots, k_\nu$ fogli) sopra le quali le funzioni i cui rami sono i diversi gruppi considerati di radici risulteranno monodrome.

3. Per semplicità supporremo *sempre* in tutto ciò che segue che *i discriminanti delle equazioni relative alle sostituzioni che si considerano non siano identicamente nulli*. In tale ipotesi il numero dei punti in cui il discriminante si annullerà sarà finito, e quindi sarà pure finito il numero dei punti in cui le radici della equazione diverranno eguali fra loro.

4. Si consideri la sostituzione algebrica

$$T = \begin{pmatrix} a_{1,1}, a_{1,2}, \cdots, a_{1,n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n,1}, a_{n,2}, \cdots, a_{n,n} \end{pmatrix}$$

e le radici della equazione *caratteristica* ad essa relativa,

$$\text{(1)} \qquad \begin{vmatrix} a_{1,1} - \omega, & a_{1,2} & , \cdots, & a_{1,n} \\ a_{2,1} & , a_{2,2} - \omega & , \cdots, & a_{2,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n,1} & , a_{n,2} & , \cdots, & a_{n,n} - \omega \end{vmatrix} = 0.$$

(5) Il genere di questa 2ª superficie di RIEMANN non dipende altro che dal genere della prima e dalla diramazione della seconda relativamente alla prima superficie. Vedi nota a questo paragrafo alla fine.

In un punto non di diramazione siano le radici

$$\omega_1 , \omega_2 , \cdots , \omega_n$$

distinte nei ν gruppi considerati precedentemente.

Potremo porre

$$T = M^{-1} \begin{pmatrix} \omega_1 , 0 & , \cdots , 0 \\ 0 & , \omega_2 , \cdots , 0 \\ \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots \\ 0 & , 0 , \cdots , \omega_n \end{pmatrix} M ,$$

ove

$$M = \begin{pmatrix} m_{1,1} , m_{1,2} , \cdots , m_{1,n} \\ m_{2,1} , m_{2,2} , \cdots , m_{2,n} \\ \cdots \\ \cdots \\ m_{n,1} , m_{n,2} , \cdots , m_{n,n} \end{pmatrix} , \quad (\det 1).$$

Avremo (ved. Parte 1ª, Preliminari, § 1)

$$a_{i,s} = \sum_{1}^{n}{}_t \, m_{t,s} M_{t,i} \, \omega_t ,$$

essendo $M_{t,i}$ l'elemento reciproco a $m_{t,i}$.

Moltiplicando per $m_{r,i}$ e sommando rispetto ad i, si otterrà

$$\sum_{1}^{n}{}_i \, a_{i,s} m_{r,i} = m_{r,s} \, \omega_r .$$

Si ha quindi per ogni valore di r il sistema di n equazioni lineari omogenee

$$\begin{cases} (a_{1,1} - \omega_r) m_{r,1} + a_{1,2} m_{r,2} + \cdots + a_{1,n} m_{r,n} = 0 \\ a_{2,1} m_{r,1} + (a_{2,2} - \omega_r) m_{r,2} + \cdots + a_{2,n} m_{r,n} = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n,1} m_{r,1} + a_{n,2} m_{r,2} + \cdots + (a_{n,n} - \omega_r) m_{r,n} = 0 . \end{cases}$$

Le $m_{r,1} , m_{r,2} , \cdots , m_{r,n}$ sono determinate a meno di un fattore comune per tutte.

Sia ω_r appartenente al gruppo di radici

$$\omega_{h,1} , \omega_{h,2} , \cdots , \omega_{h,k_h}$$

fra loro permutabili, alle quali corrisponde la superficie di RIEMANN R_h distesa sulla superficie data R e convenientemente diramata; i rapporti $m_{r,1}/m_{r,i} , m_{r,2}/m_{r,i} , \cdots , m_{r,n}/m_{r,i}$ saranno monodromi sopra R_h e ad ogni punto di R corrisponderanno k_h serie di valori per i rapporti precedenti che potremo denotare con

$$\left(\frac{m_{r,1}}{m_{r,i}}\right)_{h,s} , \left(\frac{m_{r,2}}{m_{r,i}}\right)_{h,s} , \cdots , \left(\frac{m_{r,n}}{m_{r,i}}\right)_{h,s} \qquad (s = 1 , 2 , \cdots , k_h),$$

le quali saranno fra loro permutabili e saranno diramate come le $\omega_{h,s}$. Se scriviamo quindi la tabella

$$
(\mathrm{I})\qquad \left\{\begin{array}{l}
\omega_{h,1}\,,\left(\dfrac{m_{r,1}}{m_{r,i}}\right)_{h,1},\left(\dfrac{m_{r,2}}{m_{r,i}}\right)_{h,1},\cdots,\left(\dfrac{m_{r,n}}{m_{r,i}}\right)_{h,1},\\
\omega_{h,2}\,,\left(\dfrac{m_{r,1}}{m_{r,i}}\right)_{h,2},\left(\dfrac{m_{r,2}}{m_{r,i}}\right)_{h,2},\cdots,\left(\dfrac{m_{r,n}}{m_{r,i}}\right)_{h,2},\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\omega_{h,k_h},\left(\dfrac{m_{r,1}}{m_{r,i}}\right)_{h,k_h},\left(\dfrac{m_{r,2}}{m_{r,i}}\right)_{h,k_h},\cdots,\left(\dfrac{m_{r,n}}{m_{r,i}}\right)_{h,k_h},
\end{array}\right.
$$

avremo che muovendoci sopra la superficie di RIEMANN R e partendo da un punto per ritornare al punto iniziale, ciascuna delle linee della tabella precedente tornerà in sé stessa o si scambierà con un'altra linea.

Lo stesso vale per ogni altro gruppo di radici appartenenti alla equazione (1).

Consideriamo ora gli elementi reciproci $M_{r,i}$ delle $m_{r,i}$ nel determinante della sostituzione M; è evidente che anche la tabella seguente

$$
(\mathrm{II})\qquad \left\{\begin{array}{l}
\omega_{h,1}\,,\left(\dfrac{M_{r,1}}{M_{r,i}}\right)_{h,1},\left(\dfrac{M_{r,2}}{M_{r,i}}\right)_{h,1},\cdots,\left(\dfrac{M_{r,n}}{M_{r,i}}\right)_{h,1},\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\omega_{h,k_h},\left(\dfrac{M_{r,1}}{M_{r,i}}\right)_{h,k_h},\left(\dfrac{M_{r,2}}{M_{r,i}}\right)_{h,k_h},\cdots,\left(\dfrac{M_{r,n}}{M_{r,i}}\right)_{h,k_h}
\end{array}\right.
$$

godrà della identica proprietà della tabella (I). Se quindi osserviamo che

$$\sum_{1}^{n}{}_r\, m_{r,i} M_{r,i} = 1 \qquad (i = 1, 2, \cdots, n),$$

avremo che anche la tabella

$$
(\mathrm{III})\qquad \left\{\begin{array}{l}
\omega_{h,1}\,,(m_{r,1}M_{r,1})_{h,1},\cdots,(m_{r,n}M_{r,n})_{h,1},\cdots,(m_{r,g}M_{r,l})_{h,1},\cdots,\\
\omega_{h,2}\,,(m_{r,1}M_{r,1})_{h,2},\cdots,(m_{r,n}M_{r,n})_{h,2},\cdots,(m_{r,g}M_{r,l})_{h,2},\cdots,\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\omega_{h,k_h},(m_{r,1}M_{r,1})_{h,k_h},\cdots,(m_{r,n}M_{r,n})_{h,k_h},\cdots,(m_{r,g}M_{r,l})_{h,k_h},\cdots
\end{array}\right.
$$

godrà, per tutti i possibili valori di g ed l, della stessa proprietà delle due tabelle precedenti.

5. Ciò premesso si può passare alla questione: *Data una sostituzione algebrica trovare le sostituzioni algebriche (o più in generale monodrome sulla stessa superficie di* RIEMANN*) le quali sono permutabili con essa.*

Sia T la sostituzione algebrica data; se S sarà permutabile con T dovrà essere

$$(2)\qquad ST = TS.$$

Si ponga ora T (la cui equazione si suppone avere il discriminante non identicamente nullo) sotto la forma canonica. Avremo

$$T = M^{-1}\begin{pmatrix} \omega_1, 0, 0, \cdots, 0 \\ 0, \omega_2, 0, \cdots, 0 \\ 0, 0, \omega_3, \cdots, 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ 0, 0, 0, \cdots, \omega_n \end{pmatrix} M \qquad (\det M = 1),$$

e le $\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n$ potranno distinguersi nei ν gruppi considerati precedentemente. Ora la (2) può scriversi

$$SM^{-1}\begin{pmatrix} \omega_1, 0, \cdots, 0 \\ 0, \omega_2, \cdots, 0 \\ \cdots\cdots\cdots \\ 0, 0, \cdots, \omega_n \end{pmatrix} M = M^{-1}\begin{pmatrix} \omega_1, 0, \cdots, 0 \\ 0, \omega_2, \cdots, 0 \\ \cdots\cdots\cdots \\ 0, 0, \cdots, \omega_n \end{pmatrix} MS,$$

da cui si deduce

$$MSM^{-1}\begin{pmatrix} \omega_1, \cdots, 0 \\ \cdots\cdots \\ \cdots\cdots \\ 0, \cdots, \omega_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_1, \cdots, 0 \\ \cdots\cdots \\ \cdots\cdots \\ 0, \cdots, \omega_n \end{pmatrix} MSM^{-1}.$$

Perciò (ved. Preliminari)

$$MSM^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha_1, \cdots, 0 \\ \cdots\cdots \\ 0, \cdots, \alpha_n \end{pmatrix}$$

$$S = M^{-1}\begin{pmatrix} \alpha_1, \cdots, 0 \\ \cdots\cdots \\ 0, \cdots, \alpha_n \end{pmatrix} M.$$

Se poniamo

$$S = \begin{pmatrix} a_{1,1}, \cdots, a_{1,n} \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{n,1}, \cdots, a_{n,n} \end{pmatrix} \quad , \quad M = \begin{pmatrix} m_{1,1}, \cdots, m_{1,n} \\ \cdots\cdots\cdots \\ m_{n,1}, \cdots, m_{n,n} \end{pmatrix},$$

avremo

$$a_{i,s} = \sum_1^n {}_t\, m_{t,s}\, M_{t,i}\, \alpha_t .$$

Se le a_{is} debbono essere monodrome sopra la stessa superficie di RIEMANN R sulla quale è monodroma la T, sarà *necessario* e *sufficiente* che le

$$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$$

siano funzioni definite sopra le R in modo che abbiano la stessa diramazione delle $\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n$. Abbiamo quindi che la questione propostaci può ritenersi risoluta.

Basterà prendere tutte le possibili funzioni

$$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$$

che si permutano fra loro come le

$$\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n,$$

e costruendo

$$S = M^{-1}\begin{pmatrix} \alpha_1, \cdots, 0 \\ \cdots\cdots\cdots \\ 0, \cdots, \alpha_n \end{pmatrix} M$$

avremo tutte le sostituzioni monodrome su R *permutabili con la sostituzione data* T. *Se le* $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ *saranno regolari, tale risulterà anche* S.

6. Passiamo ora alla questione: *Date due sostituzioni regolari sulla stessa superficie di* RIEMANN, *riconoscere se esse possono trasformarsi l'una nell'altra mediante una sostituzione pure regolare sulla stessa superficie e avente il determinante eguale ad* 1.

Accenneremo soltanto il caso in cui si tratti di sostituzioni del secondo ordine.

Siano le due sostituzioni date

$$S = \begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix} \quad , \quad S_1 = \begin{pmatrix} a_1, b_1 \\ c_1, d_1 \end{pmatrix},$$

dovremo avere, come è noto (ved. Introd. Parte 1ª),

$$a + d = a_1 + d_1 \quad , \quad D = ad - bc = D_1 = a_1 d_1 - b_1 c_1 . \tag{3}$$

Allora esisterà una sostituzione

$$T = \begin{pmatrix} \alpha, \beta \\ \gamma, \delta \end{pmatrix} \qquad (\det = 1)$$

tale che

$$T^{-1} S T = S_1,$$

vale a dire

$$\begin{aligned} \alpha\delta a - \alpha\beta c + \gamma\delta b - \beta\gamma d &= a_1, \\ -\alpha\gamma a + \alpha^2 c - \gamma^2 b + \alpha\gamma d &= c_1, \\ \beta\delta a - \beta^2 c + \delta^2 b - \beta\delta d &= b_1, \\ -\gamma\beta a + \alpha\beta c - \gamma\delta b + \alpha\delta d &= d_1, \end{aligned}$$

donde

$$\left\{ \begin{aligned} \alpha a + \gamma b &= \alpha a_1 + \beta c_1 = X, \\ \beta a + \delta b &= \alpha b_1 + \beta d_1 = Y, \\ \alpha c + \gamma d &= \gamma a_1 + \delta c_1 = Z, \\ \beta c + \delta d &= \gamma b_1 + \delta d_1 = U. \end{aligned} \right. \tag{4}$$

Quando sono soddisfatte due di queste equazioni insieme alle condizioni (3), le altre due risultano come conseguenza. Potremo prendere quindi a considerare le due prime o le due ultime equazioni.

Supponiamo $b \neq 0$. Dalle due prime si deduce:

$$\alpha = \frac{Xd_1 - Yc_1}{D_1} \quad , \quad \beta = \frac{Ya_1 - Xb_1}{D_1} ,$$

$$\gamma = \frac{X}{b} - \alpha \frac{a}{b} \quad , \quad \delta = \frac{Y}{b} - \beta \frac{a}{b} .$$

Supponendo c diverso da zero, dalle due ultime delle (4) si dedurrà

$$\alpha = \frac{Z}{c} - \gamma \frac{d}{c} \quad , \quad \beta = \frac{U}{c} - \delta \frac{d}{c} ,$$

$$\gamma = \frac{Zd_1 - Uc_1}{D_1} \quad , \quad \delta = \frac{Ua_1 - Zb_1}{D_1} ,$$

e poiché

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1 ,$$

così dovremo avere

$$b_1 X^2 - XY(a_1 - d_1) - c_1 Y^2 = D_1 b , \tag{5}$$

$$b_1 Z^2 - UZ(a_1 - d_1) - c_1 U^2 = - D_1 c . \tag{6}$$

Affinché dunque le due sostituzioni S e S_1 si possano trasformare l'una nell'altra nel modo voluto sarà necessario e sufficiente che si possano determinare due funzioni X , Y, regolari sulla superficie di RIEMANN sulla quale sono definite le S e S_1, le quali soddisfino alla condizione (5). È evidente che basterà trovare le due funzioni X , Y perché possano dedursi immediatamente le due funzioni Z e U pure regolari le quali soddisfano alla (6).

Il problema è quindi ridotto ad una questione algebrica di analisi indeterminata. Vedremo (§ 9) come un'altra questione possa ricondursi a questo stesso problema algebrico.

Se uno degli elementi b o c fosse nullo, allora le radici dell'equazione

$$\begin{vmatrix} a_1 - \omega , & b_1 \\ c_1 & , d_1 - \omega \end{vmatrix} = 0$$

dovrebbero essere rispettivamente eguali ad a e d. Ora, mediante due sostituzioni aventi il determinante eguale ad 1 e regolari sulla superficie di RIEMANN in cui sono definite le sostituzioni date, potrebbero respettivamente trasformarsi S e S_1 in $\begin{pmatrix} a , 0 \\ 0 , d \end{pmatrix}$ e quindi l'una nell'altra nella maniera voluta.

7. Consideriamo ora le sostituzioni abeliane trasformanti.

È facile dimostrare per primo il teorema: *Se una sostituzione trasformante è definita sopra una superficie di* RIEMANN, *esisteranno sempre infinite sostituzioni monodrome sulla superficie di* RIEMANN, *da cui la sostituzione data si ottiene mediante trasformazione.* (Ammetteremo sempre che il discriminante della equazione relativa alla sostituzione non sia identicamente nullo).

Sia la sostituzione data

$$T = \begin{pmatrix} a_{11}, a_{12}, \cdots, a_{1n} \\ a_{21}, a_{22}, \cdots, n_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}, a_{n2}, \cdots, a_{nn} \end{pmatrix},$$

l'equazione caratteristica ad essa relativa sarà

$$(7) \qquad \begin{vmatrix} a_{11} - \omega, & a_{12} & , a_{13}, \cdots, & a_{1n} \\ a_{21} & , a_{22} - \omega, & a_{23}, \cdots, & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & , a_{n2} & , a_{n3}, \cdots, & a_{nn} - \omega \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^n (\omega^n + A_1 \omega^{n-1} + A_2 \omega^{n-2} + \cdots + A_n) = 0,$$

e le A_i saranno tutte monodrome sulla superficie di RIEMANN ove è definita la T.

Si formi ora la sostituzione monodroma

$$\tau = \begin{pmatrix} -A_1, & -A_2, & -A_3, \cdots, & -A_{n-1}, & -A_n \\ 1, & 0, & 0, \cdots, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0, \cdots, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 1, \cdots, & 0, & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0, & 0, & 0, \cdots, & 1, & 0 \end{pmatrix},$$

la equazione caratteristica ad essa relativa sarà

$$\begin{vmatrix} -A_1 - \omega, & -A_2, & -A_3, \cdots, & -A_{n-1}, & -A_n \\ 1 & , -\omega, & 0, \cdots, & 0, & 0 \\ 0 & , 1, & -\omega, \cdots, & 0, & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & , 0, & 0, \cdots, & 1, & -\omega \end{vmatrix} = 0,$$

e sviluppandola avremo

$$(-1)^n (\omega^n + A_1 \omega^{n-1} + A_2 \omega^{n-2} + \cdots + A_n) = 0.$$

Ne segue che le due sostituzioni T e τ sono l'una la trasformata dell'altra. Esiste dunque una sostituzione monodroma di cui una trasformante è la trasformata. Infatti entro ogni campo preso sulla superficie di RIEMANN dovranno trovarsi dei punti ove la equazione (7) non possiede radici eguali. Dalla esistenza di una sostituzione monodroma che gode della voluta proprietà segue la esistenza di altre infinite aventi la proprietà stessa.

8. Relativamente alla questione di *determinare tutte le sostituzioni trasformanti permutabili con una data sostituzione trasformante*, si vede facilmente come essa può risolversi in modo perfettamente analogo alla questione

trattata nell'art. 5 di questo paragrafo. E si giunge pure ad un analogo risultato, cioè, se $\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n$ sono le radici della equazione relativa alla sostituzione trasformante data ed essa può porsi sotto la forma

$$M^{-1}\begin{pmatrix} \omega_1, \cdots, 0 \\ \cdots\cdots\cdots \\ 0, \cdots, \omega_n \end{pmatrix} M,$$

tutte le sostituzioni permutabili potranno porsi sotto la forma

$$M^{-1}\begin{pmatrix} \alpha_1, \cdots, 0 \\ \cdots\cdots\cdots \\ 0, \cdots, \alpha_n \end{pmatrix} M,$$

ove le $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ sono funzioni diramate come le $\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n$.

9. Passiamo finalmente alla questione (ved. paragrafo prec.) di determinare le condizioni affinché una sostituzione trasformante possa considerarsi come la trasformata di una sostituzione algebrica per mezzo di una sostituzione abeliana semplice.

Accenneremo soltanto al caso in cui si tratti di una sostituzione del 2° ordine.

Sia la sostituzione trasformante data

$$T_1 = \begin{pmatrix} a_1, b_1 \\ c_1, d_1 \end{pmatrix},$$

e supponiamo che si possa porre

$$T_1 = \begin{pmatrix} m, n \\ p, q \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m, n \\ p, q \end{pmatrix},$$

con

$$S = \begin{pmatrix} m, n \\ p, q \end{pmatrix} \quad (\det = 1)$$

abeliana sinistra. Avremo

$$\begin{cases} ma_1 + nc_1 = am + bp, \\ mb_1 + nd_1 = an + bq, \\ pa_1 + qc_1 = cm + dp, \\ pb_1 + qd_1 = cn + dq, \end{cases}$$

donde si vede che si può prendere, supposto $b \neq 0$,

$$\begin{cases} m = b\alpha, \\ n = b\beta, \\ p = \alpha(a_1 - a) + \beta c_1, \\ q = \alpha b_1 + \beta(d_1 - a). \end{cases} \tag{8}$$

Se S deve essere abeliana sinistra, dovremo avere che

$$\frac{d}{dx} S = \begin{pmatrix} \varphi_1, & \varphi_2 \\ \varphi_3, & -\varphi_1 \end{pmatrix}$$

dovrà essere regolare. Ora

$$\frac{d}{dx} S = \begin{pmatrix} m', & n' \\ p', & q' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m, & n \\ p, & q \end{pmatrix}^{-1},$$

quindi

$$\begin{pmatrix} m', & n' \\ p', & q' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_1, & \varphi_2 \\ \varphi_3, & -\varphi_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m, & n \\ p, & q \end{pmatrix},$$

ovvero per le (8)

$$b\alpha' + b'\alpha = \alpha\,[b\varphi_1 + (a_1 - a)\,\varphi_2] + \beta\,[c_1\,\varphi_2],$$

$$b\beta' + b'\beta = \alpha\,[b_1\,\varphi_2] + \beta\,[b\varphi_1 + (d_1 - a)\,\varphi_2],$$

$$(a_1 - a)\,\alpha' + c_1\,\beta' + \alpha\,(a'_1 - a') + c'_1\,\beta = \alpha\,[b\varphi_3 - (a_1 - a)\,\varphi_1] + \beta\,[-\varphi_1\,c_1],$$

$$b_1\,\alpha' + (d_1 - a)\,\beta' + \alpha b'_1 + (d'_1 - a')\,\beta = \alpha\,[-b_1\,\varphi_1] + \beta\,[b\varphi_3 - (d_1 - a)\,\varphi_1].$$

Eliminando α', β' si ottiene, se $D = ad - bc$,

$$\alpha\,\{a_1\,[2\,b\varphi_1 + (d - a)\,\varphi_2 - b'] + a'_1\,b + [-2\,ab\varphi_1 + (a^2 - D)\,\varphi_2 - b^2\,\varphi_3 + (ab' - a'\,b)]\}$$
$$+ \beta\,\{c_1\,[2\,b\varphi_1 - (d - a)\,\varphi_2 - b'] + c'_1\,b\} = 0,$$

$$\alpha\,\{b_1\,[2\,b\varphi_1 + (d - a)\,\varphi_2 - b'] + b'_1\,b\}$$
$$+ \beta\,\{d_1[2\,b\varphi_1 + (d - a)\,\varphi_2 - b'] + d'_1\,b + [-2\,ab\varphi_1 + (a^2 - D)\,\varphi_2 - b^2\,\varphi_3 + (ab' - a'\,b)]\} = 0,$$

e finalmente eliminando α *e* β, e ponendo

$$\frac{2\,b\varphi_1 + (d - a)\,\varphi_2 - b'}{b} = X,$$

$$\frac{-2\,ab\varphi_1 + (a^2 - D)\,\varphi_2 - b^2\,\varphi_3 + ab' - a'\,b}{b} = Y,$$

si trova

$$\frac{a_1\,X + a'_1 + Y}{b_1\,X + b'_1} = \frac{c_1\,X + c'_1}{d_1\,X + d'_1 + Y}.$$

Scriviamo

$$a'_1\,d'_1 - b'_1\,c'_1 = P_1 \quad , \quad a_1 + d_1 = S_1;$$

osservando che $a_1\,d_1 - b_1\,c_1 = D$, la equazione precedente diverrà

$$DX^2 + Y^2 + S_1\,XY + D'_1\,X + S'_1\,Y + P_1 = 0.$$

Ora i coefficienti sono tutti *noti* e *algebrici*, come pure debbono risultare algebrici X ed Y. La questione propostaci è quindi ridotta ad una questione analoga a quella a cui siamo pervenuti nell'art. 6.

10. Enunceremo finalmente un teorema che avrà applicazione in seguito (§ 7).

Se le radici della equazione caratteristica relativa ad una sostituzione monodroma sopra una superficie di RIEMANN *sono costanti, la sostituzione stessa potrà porsi sotto la forma della trasformata di una sostituzione costante per mezzo di una sostituzione monodroma sopra la superficie di* RIEMANN.

Sia infatti S una sostituzione qualunque funzione di z, la cui equazione caratteristica abbia radici costanti; avremo che i divisori elementari di S saranno indipendenti da z, quindi S potrà porsi sotto la forma normale

$$S = T^{-1} S_1 T$$

in cui S_1 è una sostituzione costante. Ora gli elementi di T potranno dedursi da quelli di S e di S_1 mediante operazioni razionali, e perciò T potrà prendersi come una sostituzione monodroma sulla superficie di RIEMANN sulla quale S è monodroma.

Se la sostituzione monodroma data sarà algebrica, la sostituzione trasformatrice potrà pure prendersi algebrica.

§ 7. - SOSTITUZIONI ABELIANE ESSENZIALI E SOSTITUZIONI ABELIANE APPARENTI.

1. Come vedremo in seguito, è utile fare una distinzione fra le sostituzioni abeliane semplici in *essenziali* ed *apparenti*.

Se una sostituzione i cui elementi sono funzioni di k variabili $y_1, y_2, \cdots, y_k$, è tale che, se si prendono per $y_1, y_2, \cdots, y_k$ degli integrali abeliani *qualunque* corrispondenti ad una stessa superficie di RIEMANN, la sostituzione risulta *sempre* una sostituzione abeliana semplice destra o sinistra su quella superficie di RIEMANN, diremo che la sostituzione abeliana è *apparente*; ogni sostituzione abeliana semplice definita sopra una superficie di RIEMANN, che non può farsi rientrare in una classe di sostituzioni abeliane apparenti, la diremo una sostituzione abeliana *essenziale*.

Così le sostituzioni del secondo ordine

$$T_1 = \begin{pmatrix} y+1 , & 1 \\ y & , 1 \end{pmatrix} \quad , \quad T_2 = \begin{pmatrix} e^y , & 0 \\ 0 & , e^{-y} \end{pmatrix}$$

sono sostituzioni abeliane apparenti, perché se si prende per y un integrale abeliano *qualunque* le sostituzioni risultano *sempre* abeliane sinistre.

Dimostreremo in seguito che tutte le sostituzioni abeliane sinistre del secondo ordine hanno una delle due forme.

$$S_1 T_1 S_2 \, , \; S_1 T_2 S_2 ,$$

essendo S_1 e S_2 delle sostituzioni costanti. Ne segue che, se, per esempio, fra le tre funzioni monodrome φ_1, φ_2, φ_3 definite sopra una stessa superficie di RIEMANN non passa nessuna relazione lineare

$$A_1 \varphi_1 + A_2 \varphi_2 + A_3 \varphi_3 = 0$$

con A_1, A_2, A_3 costanti, avremo che

$$\int \begin{pmatrix} \varphi_1 , & \varphi_2 \\ \varphi_3 , & -\varphi_1 \end{pmatrix} dx$$

sarà una sostituzione *abeliana essenziale*.

2. Il problema di *determinare tutte le sostituzioni abeliane apparenti di un certo ordine* si può evidentemente far dipendere dall'altro: *determinare tutte le sostituzioni di un certo ordine funzioni di k variabili $y_1, y_2, \cdots, y_k$, tali che, se si aumentano in un modo qualunque queste variabili di $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k$, la sostituzione viene moltiplicata a destra o a sinistra per una sostituzione che non dipende altro che da queste ultime quantità $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k$.*

La risoluzione di questo problema non presenta difficoltà.

Sia infatti S (det $= 1$) la sostituzione funzione di $y_1, y_2, \cdots, y_k$ che gode della voluta proprietà. Cioè si abbia

$$S(y_1 + \alpha_1, y_2 + \alpha_2, \cdots, y_k + \alpha_k) = S(y_1, y_2, \cdots, y_k)\, C(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k).$$

Si ponga

$$\frac{dS}{dy_i} = T_i;$$

avremo:

$$T_i(y_1 + \alpha_1, y_2 + \alpha_2, \cdots, y_k + \alpha_k) = T_i(y_1, y_2, \cdots, y_k).$$

Ora questa relazione non è possibile, qualunque siano $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k$, a meno che non si abbia T_i indipendente da $y_1, y_2, \cdots, y_k$.

Potremo dunque enunciare il

TEOREMA I. – *Tutte le sostituzioni abeliane sinistre apparenti* (det $= 1$) *saranno date da*

$$S = \int \prod_1^k {}_i\, T_i\, dy_i,$$

ove le T_i *sono sostituzioni costanti* (som $= 0$).

Analogamente si vedrebbe che *le sostituzioni abeliane apparenti destre saranno date da*

$$S = \left(\prod_1^k {}_i\, T_i\, dy_i\right) \int.$$

3. Le sostituzioni T_i non possono essere fra loro indipendenti giacché

$$\prod_1^k {}_i\, T_i\, dy_i$$

deve risultare un differenziale esatto. Le condizioni a cui dovranno soddisfare si dedurranno dalle regole date nel § 3 e nel § 8, Art. 4 della prima parte, come pure potremo ricavare dalle regole ivi esposte il modo di eseguire la integrazione e di determinare quindi la forma generale delle sostituzioni abeliane apparenti.

Valgono a tale fine i lemmi seguenti:

Lemma I. – *La condizione necessaria e sufficiente affinché*

$$\prod_1^k {}_i\, T_i\, dy_i$$

sia un differenziale esatto, se le sostituzioni T_i *sono costanti, è che esse siano fra loro permutabili.*

Infatti scrivendo le condizioni generali di integrabilità sotto la forma nelle quali furono poste nella Nota al § 3, Art. 7 e al § 8, Art. 4 della prima parte, avremo

$$(T_r)'_{y_s} - (T_s)'_{y_r} + T_r T_s - T_s T_r = \Delta'(T_s, T_r)_{y_s y_r} = 0 .$$

Ora nel nostro caso, siccome le sostituzioni T_i sono costanti, queste equazioni divengono

$$T_s T_r = T_r T_s ,$$

come si doveva dimostrare.

Lemma II. – *Se le* T_i *sono costanti e fra loro permutabili, avremo*

$$\int \prod_1^k {}_i T_i \, dy_i = \prod_1^k {}_i S_i(y_i) \cdot C ,$$

ove

$$S_i = \int_{y_i^0}^{y_i} T_i \, dy_i$$

e C *è una sostituzione costante.*

Infatti posto

$$\prod_1^k {}_i S_i \cdot C = V ,$$

avremo, poiché le y_i sono fra loro indipendenti (ved. § 1, Parte 1ª)

$$\frac{dV}{dy_p} = \left(\prod_1^{p-1} {}_i S_i\right) T_p \left(\prod_1^{p-1} {}_i S_i\right)^{-1} . \tag{1}$$

Ora, per essere le T_i fra loro permutabili,

$$T_i = T_p^{-1} T_i T_p ,$$

e, per essere le y_i fra loro indipendenti (ved. § 2, Parte 1ª),

$$\int_{y_i^0}^{y_i} T_i \, dy_i = T_p^{-1} \left(\int_{y_i^0}^{y_i} T_i \, dy_i \right) T_p ,$$

cioè

$$S_i = T_p^{-1} S_i T_p ,$$

$$T_p = S_i T_p S_i^{-1} ,$$

onde

$$T_p = \left(\prod_1^{p-1} {}_i S_i\right) T_p \left(\prod_1^{p-1} {}_i S_i\right)^{-1}$$

e per la (1)

$$\frac{dV}{dy_p} = T_p,$$

il che dimostra il teorema.

La costruzione di sostituzioni abeliane apparenti non presenta difficoltà, la questione riducendosi a determinare delle sostituzioni costanti fra loro permutabili, questione che è stata già trattata nei Preliminari preposti a questa seconda parte.

4. Dimostriamo ora il seguente teorema.

TEOREMA II. – *Se si ha*

$$\frac{dS}{dx} = M^{-1} \Big\} \overline{\underline{\prod_{1}^{r}{}_{\chi}\, T^{(\chi)}}} \Big\{ M,$$

ove M *è costante e*

$$T^{(\chi)} = \begin{pmatrix} \varphi_1^{(\chi)}, 0 & , 0 & , \cdots, 0 \\ \varphi_2^{(\chi)}, \varphi_1^{(\chi)} & , 0 & , \cdots, 0 \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \varphi_{n_\chi}^{(\chi)}, \varphi_{n_\chi - 1}^{(\chi)} & , \varphi_{n_\chi - 2}^{(\chi)} & , \cdots, \varphi_1^{(\chi)} \end{pmatrix},$$

$$\sum_{1}^{r}{}_{\chi}\, n_\chi\, \varphi_1^{(\chi)} = 0,$$

e le $\varphi_i^{(\chi)}$ *sono funzioni algebriche, avremo che* S *sarà una sostituzione abeliana apparente.*

Infatti potremo porre

$$S = M^{-1} S_1 M,$$

in cui

$$\frac{dS_1}{dx} = \Big\} \overline{\underline{\prod_{1}^{r}{}_{\chi}\, T^{(\chi)}}} \Big\{,$$

e potremo soddisfare alla precedente equazione prendendo

$$S_1 = \Big\} \overline{\underline{\prod_{1}^{r}{}_{\chi}\, S_2^{(\chi)}}} \Big\{,$$

ove

$$S_2^{(\chi)} = \begin{pmatrix} \lambda_1^{(\chi)}, 0 & , \cdots, 0 \\ \lambda_2^{(\chi)}, \lambda_1^{(\chi)} & , \cdots, 0 \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \lambda_{n_\chi}^{(\chi)}, \lambda_{n_\chi - 1}^{(\chi)} & , \cdots, \lambda_1^{(\chi)} \end{pmatrix}.$$

Ora

$$S_1^{-1} = \left\{ \overline{\underline{\prod_1^r{}_\chi S_3^{(\chi)}}} \right\},$$

ove

$$S_3^{(\chi)} = \begin{pmatrix} \Lambda_1^{(\chi)}, 0 & , \cdots, 0 \\ \Lambda_2^{(\chi)}, \Lambda_1^{(\chi)} & , \cdots, 0 \\ \cdots\cdots\cdots & \\ \Lambda_{n_\chi}^{(\chi)}, \Lambda_{n_\chi - 1}^{(\chi)} & , \cdots, \Lambda_1^{(\chi)} \end{pmatrix}$$

con

(2) $$\sum_0^{p-1}{}_i \lambda_{p-i}^{(\chi)} \Lambda_{i+1}^{(\chi)} = 0 \quad , \quad \lambda_1^{(\chi)} \Lambda_1^{(\chi)} = 1.$$

Abbiamo inoltre

$$\frac{dS_1}{dx} = S_4 S_1^{-1},$$

ove

$$S_4 = \left\{ \overline{\underline{\prod_1^r{}_i S_5^{(\chi)}}} \right\} \quad , \quad S_5^{(\chi)} = \begin{pmatrix} \lambda_1'^{(\chi)}, 0 & , \cdots, 0 \\ \lambda_2'^{(\chi)}, \lambda_1'^{(\chi)} & , \cdots, 0 \\ \cdots\cdots\cdots & \\ \lambda_{n_\chi}'^{(\chi)}, \lambda_{n_\chi - 1}'^{(\chi)} & , \cdots, \lambda_1'^{(\chi)} \end{pmatrix}.$$

Quindi si dovrà avere

(3) $$\sum_0^{p-1}{}_i \lambda_{p-i}'^{(\chi)} \Lambda_{i+1}^{(\chi)} = \varphi_p^{(\chi)}.$$

Derivando le (2) rispetto alle λ_s si ottiene facilmente

$$\frac{\partial \Lambda_{i+1}^{(\chi)}}{\partial \lambda_{p-r}^{(\chi)}} = \frac{\partial \Lambda_{r+1}^{(\chi)}}{\partial \lambda_{p-i}^{(\chi)}},$$

quindi

$$\sum_0^{p-1}{}_i \Lambda_{i+1}^{(\chi)} d\lambda_{p-i}^{(\chi)}$$

sarà un differenziale esatto.

Dalle (2) si deduce pure

$$\Lambda_{i+1}^{(\chi)} = \frac{1}{\lambda_1^{(\chi)^{i+1}}} \begin{vmatrix} \lambda_1^{(\chi)} & , 0 & , \cdots, 0 \\ \lambda_2^{(\chi)} & , \lambda_1^{(\chi)} & , \cdots, 0 \\ \cdots\cdots & & \\ \lambda_{i+1}^{(\chi)} & , \lambda_i^{(\chi)} & , \cdots, 0 \end{vmatrix}$$

e quindi

$$\sum_{0}^{p-1}{}_i \Lambda^{(x)}_{i+1}\, d\lambda^{(x)}_{p-i} = \sum_{0}^{p-1}{}_i \frac{d\lambda^{(x)}_{p-i}}{\lambda^{(x)}_1} \begin{vmatrix} 1 & , 0 & , \dots, 1 \\ \frac{\lambda^{(x)}_2}{\lambda^{(x)}_1} & , 1 & , \dots, 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\lambda^{(x)}_{i+1}}{\lambda^{(x)}_1} & , \frac{\lambda^{(x)}_{i}}{\lambda^{(x)}_1} & , \dots, 0 \end{vmatrix},$$

da cui segue facilmente

$$\sum_{0}^{p-1}{}_i \Lambda^{(x)}_{i+1}\, d\lambda^{(x)}_{p-i} = \sum_{0}^{p-2}{}_i \begin{vmatrix} 1 & , 0 & , \dots, 1 \\ \frac{\lambda^{(x)}_2}{\lambda^{(x)}_1} & , 1 & , \dots, 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\lambda^{(x)}_{i+1}}{\lambda^{(x)}_1} & , \frac{\lambda^{(x)}_{i}}{\lambda^{(x)}_1} & , \dots, 0 \end{vmatrix} d\left(\frac{\lambda^{(x)}_{p-i}}{\lambda^{(x)}_1}\right)$$

$$= d\left(\frac{\lambda^{(x)}_{p}}{\lambda^{(x)}_1}\right) + \sum_{1}^{p-2}{}_i \begin{vmatrix} 1 & , 0 & , \dots, 1 \\ \frac{\lambda^{(x)}_2}{\lambda^{(x)}_1} & , 1 & , \dots, 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\lambda^{(x)}_{i+1}}{\lambda^{(x)}_1} & , \frac{\lambda^{(x)}_{i}}{\lambda^{(x)}_1} & , \dots, 0 \end{vmatrix} d\left(\frac{\lambda^{(x)}_{p-i}}{\lambda^{(x)}_1}\right).$$

Per quello che fu detto precedentemente, il secondo membro dovrà essere un differenziale esatto: ma esso è razionale ed intero rispetto alle $(\lambda^{(x)}_s/\lambda^{(x)}_1)$, quindi integrando otterremo un polinomio rispetto a questi rapporti, e perciò

$$d\left[\frac{\lambda^{(x)}_{p}}{\lambda^{(x)}_1} + P\left(\frac{\lambda^{(x)}_2}{\lambda^{(x)}_1}, \frac{\lambda^{(x)}_3}{\lambda^{(x)}_1}, \dots, \frac{\lambda^{(x)}_{p-1}}{\lambda^{(x)}_1}\right)\right] = \sum_{0}^{p-1}{}_i \Lambda^{(x)}_{i+1}\, d\lambda^{(x)}_{p-1}$$

ove P è il simbolo di un polinomio. Ne segue per la (3)

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{\lambda^{(x)}_{p}}{\lambda^{(x)}_1} + P\left(\frac{\lambda^{(x)}_2}{\lambda^{(x)}_1}, \frac{\lambda^{(x)}_3}{\lambda^{(x)}_1}, \dots, \frac{\lambda^{(x)}_{p-1}}{\lambda^{(x)}_1}\right)\right] = \sum_{0}^{p-1}{}_i \Lambda^{(x)}_{i+1}\, d\lambda^{(x)}_{p-1} = \varphi^{(x)}_p,$$

e integrando

$$\frac{\lambda^{(x)}_{p}}{\lambda^{(x)}_1} = \int \varphi^{(x)}_p\, dx - P\left(\frac{\lambda^{(x)}_2}{\lambda^{(x)}_1}, \frac{\lambda^{(x)}_3}{\lambda^{(x)}_1}, \dots, \frac{\lambda^{(x)}_{p-1}}{\lambda^{(x)}_1}\right).$$

Ora si ha:

$$\frac{(\lambda^{(x)}_1)'}{\lambda^{(x)}_1} = \varphi^{(x)}_1,$$

quindi

$$\lambda^{(x)}_1 = e^{\int \varphi^{(x)}_1 dx}.$$

Ponendo

$$\int \varphi_s^{(\chi)} dx = y_s^{(\chi)},$$

avremo

$$\lambda_p^{(\chi)} = \left[y_p^{(\chi)} - \mathrm{P}\left(\lambda_2^{(\chi)} e^{-y_1^{(\chi)}}, \lambda_3^{(\chi)} e^{-y_1^{(\chi)}}, \ldots, \lambda_{p-1}^{(\chi)} e^{-y_1^{(\chi)}}\right)\right] e^{y_1^{(\chi)}}.$$

Si ottengono quindi tutte le $\lambda_p^{(\chi)}$ espresse mediante le $y_s^{(\chi)}$ le quali non sono altro che integrali abeliani.

5. Diamo finalmente un teorema di cui avremo varie volte occasione di fare applicazioni:

TEOREMA III. – *Se la derivata sinistra (o destra) di una sostituzione abeliana sinistra (o destra) è permutabile con una sostituzione elementare* (vedi Preliminari art. 6) *costante, la sostituzione sarà abeliana apparente.*

Sia infatti S una sostituzione abeliana sinistra la cui derivata sinistra è permutabile con una sostituzione costante C. Posto

$$\frac{d\mathrm{S}}{dx} = \mathrm{T},$$

dovremo avere

$$\mathrm{TC} = \mathrm{CT}.$$

Scrivendo C sotto la forma canonica avremo

$$\mathrm{C} = \mathrm{M}^{-1} \left\{ \overline{\underline{\prod_1^r{}_\chi \mathrm{C}^{(\chi)}}} \right\} \mathrm{M},$$

ove

$$\mathrm{C}^{(\chi)} = \begin{pmatrix} \omega^{(\chi)}, 0, \ldots, 0, 0 \\ 1, \omega^{(\chi)}, \ldots, 0, 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0, 0, \ldots, 1, \omega^{(\chi)} \end{pmatrix} \qquad (\omega^{(\chi)} \neq \omega^{(\chi')}),$$

quindi (vedi Lemmi 4° e 7° dei Preliminari)

$$\mathrm{T} = \mathrm{M}^{-1} \left\{ \overline{\underline{\prod_1^r{}_\chi \mathrm{T}^{(\chi)}}} \right\} \mathrm{M},$$

essendo

$$\mathrm{T}^{(\chi)} = \begin{pmatrix} a_1^{(\chi)}, 0, \ldots, 0 \\ a_2^{(\chi)}, a_1^{(\chi)}, \ldots, 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n_\chi}^{(\chi)}, a_{n_\chi - 1}^{(\chi)}, \ldots, a_1^{(\chi)} \end{pmatrix}$$

e le $a_i^{(\chi)}$ sono funzioni algebriche. A cagione del Teorema II sarà dunque S abeliana apparente.

Dal teorema precedente si deduce facilmente l'altro:

TEOREMA IV. – *Fra le sostituzioni abeliane non vi sono che quelle apparenti le quali trasformano un gruppo di sostituzioni costanti* (det 1), *fra le quali si trova una sostituzione elementare, in un gruppo isomorfo formato da sostituzioni pure costanti.*

Infatti sia S abeliana sinistra e permutabile con un gruppo di sostituzioni costanti. Se C e C_1 sono due sostituzioni dei gruppi e C è elementare, dovremo avere

$$S^{-1}CS = C_1 \tag{3}$$

ovvero

$$CS = SC_1,$$

e derivando rispetto alla variabile indipendente z

$$\frac{dS}{dz} = C\frac{dS}{dz}C^{-1}.$$

Ora per la (3) C e C_1 debbono avere gli stessi divisori elementari, quindi C_1 sarà una sostituzione elementare, onde pel teorema precedente S è abeliana apparente.

Reciprocamente abbiamo il

TEOREMA V. – *Presa una sostituzione abeliana apparente, si potranno sempre trovare due gruppi isomorfi di sostituzioni costanti trasformabili mediante essa l'uno nell'altro.*

Sia infatti una sostituzione abeliana apparente (sinistra) S, potremo sempre porre

$$dS = \prod_1^k{}_i T_i\, dy_i,$$

ove le T_i sono sostituzioni permutabili fra loro.

Se la sostituzione costante P è permutabile con tutte le sostituzioni T_i, avremo evidentemente

$$P\frac{dS}{dx} = \frac{dS}{dx}P$$

ovvero, se il det $P = 1$,

$$\frac{d}{dx}(PS) = \frac{dS}{dx}.$$

Integrando otterremo

$$PS = SQ,$$

essendo Q costante. Quindi

$$S^{-1}PS = Q,$$

il che dimostra il teorema.

6. LEMMA V. - *Se due sostituzioni* T_1 *e* T_2 (som $= 0$) *funzioni di* x *sono fra loro permutabili qualunque siano i valori* (anche fra loro diversi) *che si attribuiscono ad* x *in* T_1 *e* T_2, *avremo che*

$$S_1 = \int_{x_0}^{x} T_1\, dx \quad , \quad S_2 = \int_{x_1}^{x} T_2\, dx$$

saranno fra loro permutabili, come pure queste sostituzioni saranno permutabili rispettivamente con T_2 *e* T_1.

Infatti da

$$T_1 T_2 = T_2 T_1$$

si deduce, supponendo (det $T_1 \neq 0$)

$$T_2 = T_1^{-1} T_2 T_1 .$$

Poniamo in T_2 in luogo di x la y, e in T_1 in luogo di x, z, e consideriamo y e z come variabili indipendenti. Avremo integrando

$$\int_{y_1}^{y} T_2\, dy = T_1^{-1} \int_{y_1}^{y} T_2\, dy \cdot T_1 ,$$

onde

$$S_2(y) = T_1^{-1} S_2(y) \cdot T_1 ,$$

cioè

$$T_1 = S_2(y)\, T_1\, S_2^{-1}(y) ,$$

e integrando

$$\int_{z_0}^{z} T_1\, dz = S_2(y) \int_{z_0}^{z} T_1\, dz \cdot S_2^{-1}(y) ,$$

ovvero

$$S_1(z) = S_2(y)\, S_1(z)\, S_2^{-1}(y) ,$$

$$S_1(z)\, S_2(y) = S_2(y)\, S_1(z) ,$$

il che dimostra il lemma.

Ciò premesso dimostriamo il

TEOREMA VI. - *Se si ha una sostituzione abeliana apparente qualunque*

$$W(y_1, y_2, \cdots, y_k) ,$$

avremo

$$W(y_1, y_2, \cdots, y_k)\, W^{-1}(0, 0, \ldots, 0)\, W(z_1, z_2, \cdots, z_k) = W(y_1 + z_1, y_2 + z_2, \cdots, y_k + z_k) . \tag{4}$$

Consideriamo infatti $y_1, y_2, \cdots, y_k$ come funzioni di x e $z_1, z_2, \cdots, z_k$ come funzioni di ξ. Supponiamo inoltre che per $x = x_0$ e $\xi = \xi_0$ le $y_1, y_2, \cdots, y_k$ divengano rispettivamente eguali alle $z_1, z_2, \cdots, z_k$. Posto

$W(y_1, y_2, \cdots, y_k) = W_1$, $W(z_1, z_2, \cdots, z_k) = W_2$, avremo (supponendo per fissare le idee la sostituzione abeliana sinistra)

$$\frac{dW_1}{dx} = T' \quad , \quad \frac{dW_2}{d\xi} = T'',$$

$$W_1 = \int_{x_0}^{x} T'\, dx \cdot C \quad , \quad W_2 = \int_{\xi_0}^{\xi} T''\, dx \cdot C,$$

essendo C costante, ovvero, se

$$\int_{x_0}^{x} T'\, dx = S_1 \quad , \quad \int_{\xi_0}^{\xi} T''\, dx = S_2,$$

si avrà

$$W_1 W_2^{-1} = S_1 S_2^{-1}.$$

Ora T' e T'' sono fra loro permutabili, quindi, per il lemma precedente, saranno pure permutabili S_1 e S_2; e per conseguenza

$$W_1 W_2^{-1} = S_2^{-1} S_1.$$

Differenziando si otterrà

$$d(W_1 W_2^{-1}) = S_2^{-1} (dS_1 \cdot (dS_2)^{-1})\, S_2,$$

e per la permutabilità

$$d(W_1 W_2^{-1}) = dS_1 (dS_2)^{-1}.$$

Ora

$$dS_1 = \prod_{1}^{k}{}_i \, T_i\, dy_i,$$

$$dS_2 = \prod_{1}^{k}{}_i \, T_i\, dz_i,$$

ove le T_i sono costanti, quindi

$$d(W_1 W_2^{-1}) = \prod_{1}^{k} T_i\, d(y_i - z_i) = dW_3,$$

ove

$$W_3 = W(y_1 - z_1, y_2 - z_2, \cdots, y_k - z_k).$$

Integrando otterremo

$$W_1 W_2^{-1} = W_3 \cdot C_1$$

essendo C_1 costante. E facendo $y_i = z_i$

$$W(0, 0, \cdots, 0) \cdot C_1 = 1,$$

onde

$$C_1 = W^{-1}(0\,, 0\,, \cdots, 0)\,,$$

$$W(y_1, \cdots, y_k)\, W^{-1}(z_1, \cdots, z_k) = W(y_1 - z_1, \cdots, y_k - z_k)\, W^{-1}(0, \cdots, 0)\,.$$

Ponendo in luogo di $y_1, \cdots, y_k$, le $y_1 + z_1, \cdots, y_k + z_k$, avremo

$$W(y_1 + z_1, \cdots, y_k + z_k) = W(y_1, \cdots, y_k)\, W^{-1}(0, \cdots, 0)\, W(z_1, \cdots, z_k)\,. \tag{5}$$

Dalla formula (5) si deducono le seguenti:

$$W(y_1, y_2, \cdots, y_k)\, W^{-1}(z_1, \cdots, z_k) = W(y_1 - z_1, \cdots, y_k - z_k)\, W^{-1}(0, \cdots, 0)\,, \tag{6}$$

$$W(-y_1, -y_2, \cdots, -y_k) = W(0, \cdots, 0)\, W^{-1}(y_1, \cdots, y_k)\, W(0, \cdots, 0)\,. \tag{7}$$

La formula (6) dà luogo al

TEOREMA VII. – *Se y_i e z_i sono integrali abeliani aventi le stesse costanti dei tagli, la sostituzione*

$$W(y_1\,, y_2\,, \cdots, y_k)\; W^{-1}(z_1\,, z_2\,, \cdots, z_k)$$

sarà monodroma.

7. Possiamo dare un'altra dimostrazione più semplice del teorema VI deducendola direttamente dalla proprietà stabilita al principio dell'Art. 2. Abbiamo cioè, se S è una sostituzione abeliana apparente,

$$S(y_1 + \alpha_1\,, y_2 + \alpha_2\,, \cdots, y_k + \alpha_k) = S(y_1\,, y_2\,, \cdots, y_k)\; C(\alpha_1\,, \alpha_2\,, \cdots, \alpha_k)\,,$$

e facendo $y_1 = y_2 = \cdots = y_k = 0$

$$S(\alpha_1\,, \alpha_2\,, \cdots, \alpha_k) = S(0\,, 0\,, \cdots, 0)\; C(\alpha_1\,, \alpha_2\,, \cdots, \alpha_k)\,,$$

d'onde

$$C(\alpha_1\,, \alpha_2\,, \cdots, \alpha_k) = S^{-1}(0\,, 0\,, \cdots, 0)\; S(\alpha_1\,, \alpha_2\,, \cdots, \alpha_k)\,, \tag{8}$$

da cui segue

$$\begin{aligned} &S(y_1 + \alpha_1\,, y_2 + \alpha_2\,, \cdots, y_k + \alpha_k) \\ &\quad = S(y_1\,, y_2\,, \cdots, y_k)\; S^{-1}(0\,, 0\,, \cdots, 0)\; S(\alpha_1\,, \alpha_2\,, \cdots, \alpha_k) \end{aligned} \tag{4'}$$

che non è altro che la formola (4).

Se noi poniamo

$$S(\alpha_1\,, \alpha_2\,, \cdots, \alpha_k)\; S^{-1}(0\,, 0\,, \cdots, 0) = C_1(\alpha_1\,, \alpha_2\,, \cdots, \alpha_k) \tag{9}$$

avremo, scambiando nella (4') le y_i colle α_i,

$$S(y_1 + \alpha_1\,, y_2 + \alpha_2\,, \cdots, y_k + \alpha_k) = C_1(\alpha_1\,, \alpha_2\,, \cdots, \alpha_k)\; S(y_1\,, y_2\,, \cdots, y_k) \tag{10}$$

che può assumersi come la proprietà caratteristica delle sostituzioni abeliane apparenti destre (cfr. Art. 2). Possiamo quindi enunciare il

TEOREMA VIII. – *Ogni integrale abeliano apparente destro è anche un integrale abeliano apparente sinistro e viceversa.*

Questo teorema rende dunque inutile la distinzione fra integrale abeliano apparente destro o sinistro. Se consideriamo però uno stesso integrale abeliano apparente come destro o sinistro, le costanti dei tagli non risultano le stesse. Supponiamo infatti che lungo un taglio le $y_1, y_2, \cdots, y_k$ si accrescano delle quantità costanti $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k$; allora la costante del taglio, considerando S come una sostituzione abeliana sinistra, sarà $C(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k)$; mentre se la consideriamo come una sostituzione abeliana destra, la costante del taglio sarà $C_1(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k)$. Dalle (8) e (9) segue

$$C_1 = S(0, 0, \cdots, 0)\, C S^{-1}(0, 0, \cdots, 0)$$

d'onde

TEOREMA IX. – *Le costanti relative ad uno stesso taglio di un integrale apparente, secondoché lo riguardiamo come abeliano destro o sinistro, si ottengono l'una dall'altra mediante trasformazione per mezzo di una stessa sostituzione costante.*

Se nella (10), in luogo di $y_1, y_2, \cdots, y_k$, sostituiamo $y_1 + \beta_1, y_2 + \beta_2, \cdots, y_k + \beta_k$; e poniamo $\alpha_1 + \beta_1 = \gamma_1$, $\alpha_2 + \beta_2 = \gamma_2, \cdots, \alpha_k + \beta_k = \gamma_k$, avremo

$$\begin{aligned} &S(y_1 + \gamma_1, y_2 + \gamma_2, \cdots, y_k + \gamma_k) \\ &= C_1(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k)\, S(y_1, y_2, \cdots, y_k)\, C(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_k), \end{aligned}$$

il che ci dimostra che *ogni integrale abeliano apparente può considerarsi anche come un integrale abeliano doppio.*

È facile ottenere la relazione che passa fra la derivata destra e la derivata sinistra di un integrale abeliano apparente.

Considerando $y_1, y_2, \cdots, y_k$ come funzioni di z, dalle formule precedenti risulta subito

$$S(0, 0, \cdots, 0)\frac{Sd}{dz} = \frac{dS}{dz} S(0, 0, \cdots, 0).$$

8. Prendiamo una sostituzione abeliana apparente $W(y_1, y_2, \cdots, y_k)$. Noi potremo chiamare le $y_1, y_2, \cdots, y_k$ gli *elementi fondamentali* della sostituzione apparente. In conseguenza del teorema I avremo che, se si porrà in luogo delle variabili $y_1, y_2, \cdots, y_k$ degli integrali di funzioni *monodrome* sopra una stessa superficie di RIEMANN, otterremo per W una sostituzione la cui derivata è monodroma sopra la superficie stessa di RIEMANN.

Potremo partendo da questa osservazione estendere facilmente il teorema III ottenendo la seguente proposizione:

TEOREMA X. – *Se una sostituzione monodroma sopra una superficie di* RIEMANN (som 0) *è permutabile con una sostituzione elementare costante, gli integrali destro e sinistro della sostituzione si otterramno sostituendo agli elementi fondamentali di una sostituzione apparente degli integrali di funzioni monodrome sulla superficie di* RIEMANN.

9. Consideriamo in particolare le sostituzioni del secondo ordine.

Un gruppo di sostituzioni fra loro permutabili (som o) avrà una delle due forme:

$$1^a)\qquad S^{-1}\begin{pmatrix} a_1 , & 0 \\ 0 , & -a_1 \end{pmatrix} S , S^{-1}\begin{pmatrix} a_2 , & 0 \\ 0 , & -a_2 \end{pmatrix} S , \cdots , S^{-1}\begin{pmatrix} a_k , & 0 \\ 0 , & -a_k \end{pmatrix} S ,$$

$$2^a)\qquad S^{-1}\begin{pmatrix} 0 , & 0 \\ b_1 , & 0 \end{pmatrix} S , S^{-1}\begin{pmatrix} 0 , & 0 \\ b_2 , & 0 \end{pmatrix} S , \cdots , S^{-1}\begin{pmatrix} 0 , & 0 \\ b_k , & 0 \end{pmatrix} S .$$

Quindi i differenziali di tutte le sostituzioni abeliane apparenti avranno una delle due forme seguenti:

$$1^a)\qquad S^{-1}\left\{ \prod_1^k{}_i \begin{pmatrix} a_i , & 0 \\ 0 , & -a_i \end{pmatrix} dy_i \right\} S = dW ,$$

$$2^a)\qquad S^{-1}\left\{ \prod_1^k{}_i \begin{pmatrix} 0 , & 0 \\ b_i , & 0 \end{pmatrix} dy_i \right\} S = dW ,$$

ove le y_i sono integrali abeliani.

Per conseguenza

$$1^a)\qquad \frac{dW}{dx} = S^{-1}\begin{pmatrix} \varphi , & 0 \\ 0 , & -\varphi \end{pmatrix} S ,$$

$$2^a)\qquad \frac{dW}{dx} = S^{-1}\begin{pmatrix} 0 , & 0 \\ \varphi , & 0 \end{pmatrix} S ,$$

denotando con φ una funzione algebrica, e perciò

$$1^a)\qquad W = S^{-1}\begin{pmatrix} e^y , & 0 \\ 0 , & e^{-y} \end{pmatrix} S_1 ,$$

$$2^a)\qquad W = S^{-1}\begin{pmatrix} 1 , & 0 \\ y , & 1 \end{pmatrix} S_1 ,$$

ove y è un integrale abeliano e le sostituzioni S e S_1 sono costanti.

§ 8. – Relazioni fra le costanti dei tagli di una sostituzione abeliana.

1. Si consideri una sostituzione abeliana semplice definita su una superficie R di Riemann di genere p.

Eseguiamo sulla superficie i tagli normali. Riguardo al modo di eseguire questi tagli ci riferiremo all'opera già citata di C. Neumann (6).

Eseguiremo tre sistemi di tagli; i tagli a_i, b_i e c_i. Questi ultimi, a differenza di quanto fa il Neumann, li faremo partire da un punto O della superficie di Riemann fino a giungere ai tagli a_i. Finalmente eseguiremo un taglio l il quale partendo da O attraversi tutti i punti singolari della sostituzione abeliana e non tolga la connessione alla superficie di Riemann

(6) Vedi Neumann, op. cit., p. 175 sgg.

già sezionata mediante i tagli a_i, b_i, c_i. Se la sostituzione abeliana sarà di prima specie potremo fare a meno di eseguire il taglio l (vedi § 5).

Ciascun taglio b_i, avrà un nodo; ciascun taglio a_i avrà due nodi; questi due nodi divideranno il taglio in due parti distinte. Seguiteremo a chiamare l'una a_i, denoteremo l'altra con a'_i.

La fig. 5 ci dà la disposizione dei tagli. Le rive destre dei tagli sono disegnate con linee più sottili delle rive sinistre.

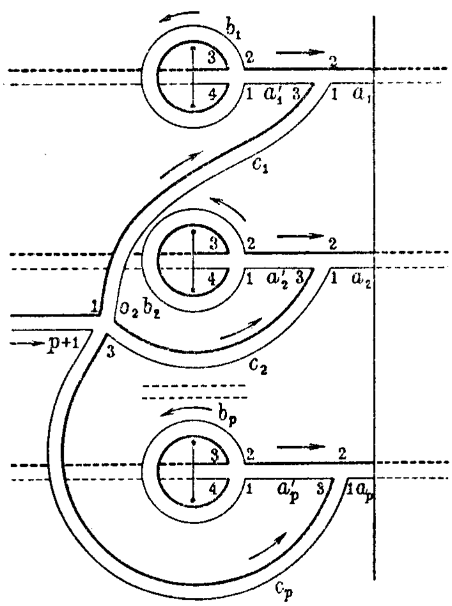


Fig. 5.

La sostituzione costante per cui devesi moltiplicare i valori della sostituzione abeliana lungo la riva sinistra di un taglio (o porzione di taglio) per ottenere i valori alla riva opposta (destra), denotiamola colla stessa lettera (maiuscola) con cui venne indicato il taglio (o porzione di taglio) e con gli stessi apici ed indici.

Ciò premesso esaminiamo uno dei nodi formato dall'incontro di un taglio a_i con un taglio b_i e consideriamo i quattro punti (vedi fig. 5) 1, 2, 3, 4 corrispondenti al nodo. Chiamiamo W la sostituzione abeliana, che ammetteremo essere abeliana sinistra, ed indichiamo con $W_1^{(i)}$, $W_2^{(i)}$, $W_3^{(i)}$, $W_4^{(i)}$ i valori di W nei quattro punti considerati del nodo (a_i, b_i). Avremo

$$W_1^{(i)} = W_2^{(i)} A'_i,$$

$$W_2^{(i)} = W_3^{(i)} B_i,$$

$$W_4^{(i)} = W_3^{(i)} A_i,$$

$$W_1^{(i)} = W_4^{(i)} B_i.$$

Ne segue che

$$W_1^{(i)} = W_3^{(i)} B_i A'_i,$$

$$W_1^{(i)} = W_3^{(i)} A_i B_i,$$

cioè

$$B_i A'_i = A_i B_i,$$

(I) $$A'_i = B_i^{-1} A_i B_i.$$

Consideriamo ora il nodo formato da un taglio a_i con un taglio c_i e chiamiamo $W_1^{(i')}, W_2^{(i')}, W_3^{(i')}$ i valori di W nei tre punti 1, 2, 3 corrispondenti al nodo (a_i, c_i).

Avremo

$$W_1^{(i')} = W_2^{(i')} A_i,$$

$$W_3^{(i)} = W_2^{(i')} A'_i,$$

$$W_1^{(i')} = W_3^{(i')} C_i,$$

onde

$$W_1^{(i')} = W_2^{(i')} A'_i C_i,$$

e per conseguenza

$$A_i = A'_i C_i,$$

vale a dire

(II) $$C_i = A_i'^{-1} A_i = B_i^{-1} A_i^{-1} B_i A_i.$$

Nel punto O, che è il nodo ove si incontrano tutti i p tagli c_i ed il taglio l, denotando con $W_1, W_2, W_3, \cdots, W_{p+1}$ i valori di W nei punti $1, 2, \cdots, p+1$ corrispondenti al nodo, avremo

$$\begin{aligned} W_2 &= W_1 C_1, \\ W_3 &= W_2 C_2, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ W_{p+1} &= W_p C_p, \\ W_{p+1} &= W_1 L. \end{aligned}$$

Quindi

$$W_{p+1} = W_1 C_1 C_2 \cdots C_p,$$

e

(III) $$L = C_1 C_2 \cdots C_p.$$

È facile vedere che se W invece di essere abeliana sinistra fosse abeliana destra, si sarebbero avute invece delle relazioni (I), (II) e (III), le altre

(I') $$A_i = B_i^{-1} A'_i B_i,$$

(II') $$C_i = A_i A_i'^{-1} = B_i^{-1} A'_i B_i A_i'^{-1},$$

(III') $$L = C_p C_{p-1} \cdots C_2 C_1.$$

Se ne deducono i teoremi:

TEOREMA I. – *Fra le costanti dei tagli e porzioni di tagli di una sostituzione abeliana semplice passano le relazioni seguenti:*

1° *Delle due sostituzioni costanti corrispondenti ad uno stesso taglio* a_i, *l'una è la trasformata dell'altra mediante la sostituzione costante del taglio* b_i.

2° *La sostituzione costante corrispondente ad un taglio* c_i *è il prodotto della sostituzione costante corrispondente ad una porzione del taglio* a_i, *moltiplicata per la inversa della sostituzione costante corrispondente all'altra porzione dello stesso taglio* a_i.

3° *La sostituzione costante corrispondente al taglio* l *adiacente ad* O *è il prodotto delle sostituzioni costanti dei tagli* c_i.

TEOREMA II. – *Se la sostituzione abeliana è di prima specie, il prodotto delle sostituzioni costanti dei tagli* c_i *è l'identità.*

TEOREMA III. – *Se le sostituzioni dei tagli* a_i, b_i *sono fra loro permutabili, le sostituzioni dei tagli* c_i *sono identità.*

2. Veniamo ora ad una proprietà relativa alle sostituzioni costanti dei tagli di una sostituzione abeliana, che ha molta importanza per ciò che seguirà.

TEOREMA IV. – *Se una sostituzione costante* ($det = 1$) *è permutabile colle costanti dei tagli di una sostituzione abeliana di prima specie, esisterà una sostituzione costante che sarà permutabile colla sostituzione algebrica derivata della sostituzione abeliana.*

Sia W la sostituzione abeliana (che supporremo essere abeliana sinistra) e denotiamo con S una sostituzione costante permutabile colle costanti dei tagli di W. Sia t un taglio qualunque della superficie di RIEMANN e T la sostituzione costante ad esso relativa. Se indichiamo con ρ e λ rispettivamente le rive destra e sinistra di t, avremo

$$W_\varrho = W_\lambda \cdot T,$$

e per la permutabilità di S e T

$$ST = TS,$$

ossia

$$T = S^{-1} TS.$$

Consideriamo ora la sostituzione

$$W' = WS .$$

Lungo le due rive del taglio t avremo

$$W'_\varrho = W_\varrho S \quad , \quad W'_\lambda = W_\lambda S,$$

onde

$$W'_\varrho = W_\lambda TS = W'_\lambda S^{-1} TS = W'_\lambda T.$$

Avremo dunque che anche W' sarà abeliana e avrà le costanti dei tagli eguali a quelle corrispondenti di W.

Per il teorema V^{bis} del § 5 segue quindi

$$W' = PW,$$

essendo P costante, ovvero

$$WS = PW.$$

Derivando avremo

$$\frac{dW}{dz} = P \frac{dW}{dz} P^{-1},$$

Il che dimostra il teorema.

Dal teorema III del paragrafo precedente e osservando che S e P debbono avere gli stessi divisori elementari, risulta quindi

TEOREMA V. – *Se una sostituzione costante elementare* (*det* = 1) *è permutabile colle costanti dei tagli di una sostituzione abeliana semplice, di prima specie, questa dovrà essere una sostituzione abeliana apparente.*

3. Passiamo ora ad estendere le considerazioni precedenti al caso di sostituzioni abeliane di seconda e di terza specie.

TEOREMA VI. – *Se le costanti dei tagli di una sostituzione abeliana di seconda e di terza specie saranno permutabili con una stessa sostituzione elementare, la sostituzione abeliana si otterrà moltiplicando una sostituzione monodroma per una ottenuta sostituendo agli elementi fondamentali di una sostituzione apparente degli integrali di funzioni monodrome sulla superficie di* RIEMANN.

Infatti sia W la sostituzione abeliana (sinistra) e S la sostituzione elementare. Lungo le due rive λ, ρ di uno stesso taglio, avremo

$$W_\rho = W_\lambda T,$$

essendo T costante lungo il taglio.

Posto

$$W' = WS,$$

avremo facilmente

$$W'_\rho = W'_\lambda T.$$

Ne segue che W e W' avranno le stesse costanti dei tagli, e quindi

$$W' W^{-1} = P,$$

essendo P monodroma (vedi teorema V, § 5°).

La equazione precedente può scriversi

$$WSW^{-1} = P;$$

quindi (§ 5°, art. 10) avremo

$$P = R^{-1} CR,$$

ove C è costante ed R è monodroma, onde

$$WSW^{-1} = R^{-1} CR,$$

$$RWS = CRW,$$

e C avrà gli stessi divisori elementari di S, quindi sarà una sostituzione elementare. Derivando si otterrà

$$\frac{d(\mathrm{RW})}{dz} = \mathrm{C}\,\frac{d(\mathrm{RW})}{dz}\,\mathrm{C}^{-1}.$$

Ora è facile riconoscere che $d\mathrm{RW}/dz$ sarà monodroma e poiché è permutabile con una sostituzione elementare C, avremo pel teorema VIII del paragrafo precedente che $\mathrm{V} = \mathrm{RW}$ si otterrà sostituendo agli elementi fondamentali di una sostituzione apparente gli integrali di funzioni monodrome, onde essendo

$$\mathrm{W} = \mathrm{VR}^{-1},$$

il teorema resta dimostrato.

Nota al § 6, Art. 2.

1. Supponiamo di avere una superficie chiusa R di genere p, cioè (secondo Klein) una superficie riducibile ad una sfera con p manichi. Supponiamo distesa sopra R una nuova superficie R′ connessa avente ν fogli. È evidente che potrà darsi che non esista nessun punto

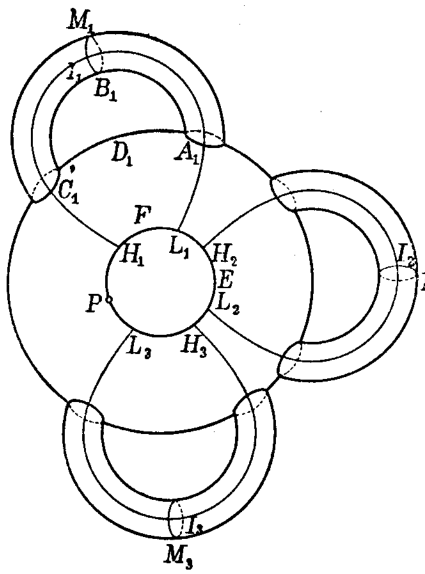


Fig. 6.

di diramazione fra i fogli, come potrà darsi invece che vi siano più punti di diramazione. Cominciamo dal primo caso. È facile capire come sia possibile la connessione fra i diversi fogli, benché manchino i punti di diramazione. Sia infatti M_1 un manico, sarà evidentemente possibile che due fogli si attraversino lungo l'intera linea $A_1\ B_1\ C_1\ D_1$; così un foglio è connesso con l'altro senza la esistenza di punti di diramazione. Questo stabilisce una differenza essenziale fra le superficie distese sopra una sfera e quelle distese invece sopra una superficie chiusa più volte connessa. Cerchiamo ora di determinare il genere p' della superficie R′ distesa sopra la superficie R.

Perciò supponiamo disposti tutti i manichi sopra un piano meridiano K della sfera. Tracciamo sulla sfera il punto P e poi eseguiamo due tagli in tutti i ν fogli: uno PEF ed un secondo simmetrico rispetto al piano meridiano K. Avremo così eseguito 1 *taglio* (Querschnitt) e $2\nu - 1$ *tagli rientranti* (Rückerschnitte) (7).

Eseguiamo ora un taglio in ogni manico che attraversi tutti i fogli. Avremo così eseguito $p\nu$ *tagli rientranti*. In ogni manico M_i facciamo i tagli $I_i H_i$, $I_i L_i$ e i simmetrici rispetto al piano K in tutti i fogli. Faremo così $4p\nu$ tagli. In tutto, non tenendo conto dei tagli rientranti, avremo eseguito $x = 4p\nu + 1$ tagli non rientranti. La superficie R′ risulta spezzata in

$$y = (2p + 2)\nu$$

pezzi semplicemente connessi. Quindi il genere cercato di R′ sarà

$$\text{(I)} \qquad p' = \frac{x - y + 1}{2} = \frac{(4p\nu + 1) - (2p + 2)\nu + 1}{2} = (p - 1)\nu + 1 .$$

Se dunque la superficie R è di genere 1, anche la superficie R′ sarà pure di genere 1 qualunque sia il valore di ν. Ciò risulta anche immediatamente osservando che se si ha una curva rientrante qualunque C, la quale taglia più volte sè stessa, come nella fig. 7, e si prende come la direttrice di un certo cilindro CD si ottiene una superficie connessa. Questa superficie si può piegare in modo da far coincidere fra loro le due curve C e D.

Si ottiene allora una superficie chiusa connessa R′ la quale può disporsi sopra un toro R in modo che risultino sovrapposti ν strati se $\nu - 1$ è il numero dei nodi della curva C ($\nu = 3$ nella figura). Inoltre mancano i punti di diramazione. È evidente ora che con due tagli si riduce subito la superficie ad essere formata da un pezzo solo semplicemente connesso. Infatti con un primo taglio la superficie R′ si può ridurre al cilindro CD e con un secondo taglio lungo una generatrice AB e dopo aver svolto il cilindro si può ridurre ad un rettangolo.

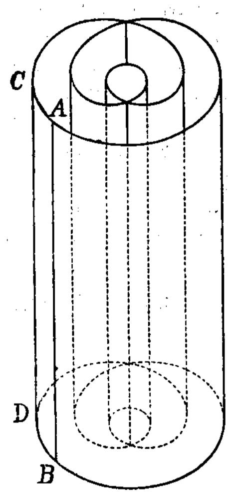


Fig. 7.

2. Consideriamo ora il secondo caso; cioè supponiamo che vi siano dei punti di diramazione. Siano essi in numero di l e supponiamo che in essi si scambino rispettivamente $m_1, m_2, \cdots, m_l$ fogli. Potremo sempre supporre che non si trovino mai due punti di diramazione l'uno sull'altro. Ammettiamo già eseguiti i tagli fatti nel caso precedente (vedi fig. 6). Sarà sempre possibile mediante altri *l tagli a forma di σ* (sigmaförmige Querschnitte), eseguiti in tutti i ν fogli e che non si incontrino fra loro, separare dal resto della superficie i punti di diramazione. In tal modo la superficie viene spezzata in

$$y' = y + \sum_1^l (\nu - m_i + 1)$$

parti semplicemente connesse. Mentre il numero totale dei tagli eseguiti (esclusi i tagli rientranti) sarà

$$x' = x + l\nu.$$

Il genere cercato della superficie sarà quindi

$$\text{(II)} \qquad p' = \frac{x' - y' + 1}{2} = (p - 1)\nu + 1 + w ,$$

(7) Cfr. NEUMANN, op. cit., p. 148, 168.

ove

$$2w = \sum_{1}^{l} (m_i - 1).$$

La formola (II) comprende la (I). Essa ci dà il genere di una superficie di RIEMANN distesa sopra un'altra superficie di RIEMANN in funzione del genere di questa, del numero dei fogli e dei punti di diramazione. Nel caso in cui si faccia $p = 0$ essa si riduce alla formula nota relativa al genere di una superficie di RIEMANN distesa sopra una sfera [8].

NOTA AI §§ 5, 6, 7, 8.

La Memoria precedente è la riproduzione integrale di quanto avevo scritto nel 1887. Nel pubblicare un breve estratto di essa senza dimostrazioni nel 1888 nei « Rendiconti del Circolo matematico di Palermo » [*], ho fatto per brevità una modificazione alla definizione di sostituzione abeliana semplice, chiamando sostituzione abeliana semplice l'integrale (destro o sinistro) di una sostituzione monodroma sopra una superficie di RIEMANN, anziché di una sostituzione algebrica.

Ho preferito nello stampare ora la Memoria completa di conservare la primitiva definizione di sostituzione abeliana, e ogni volta che ho parlato di sostituzione integrale di una sostituzione monodroma sopra una superficie di RIEMANN l'ho detto esplicitamente.

È certo che colla definizione adoperata nella Nota del Circolo di Palermo molte proposizioni acquistano una forma più semplice e si abbracciano in molti casi con un solo enunciato delle proprietà comuni alle due classi di sostituzioni; ma, per molte altre ragioni di cui il lettore si convincerà facilmente, è da preferirsi la definizione che ho conservata.

(8) Cfr. ZEUTHEN, Math. Annalen », Bd. III.

(*) In queste « Opere »: vol. primo, XX, pp. 351–355. [N. d. R.].

INDICE

XXXI.

SUR LA THÉORIE DES VARIATIONS DES LATITUDES

« Acta mathematica », t. 22, 1898, pp. 201-357.

INTRODUCTION.

1. Je présente dans ce Mémoire l'ensemble de quelques articles que j'ai publiés en 1895 sur la théorie des variations des latitudes (1). Je ne ferai pas ici l'histoire de cette question, qui est si importante dans l'astronomie et la mécanique céleste. Dans le second volume de son traité de mécanique céleste TISSERAND a consacré deux chapitres à l'exposition particularisée des travaux désormais classiques sur ce sujet. Je renvoie donc à cet ouvrage pour citer les grands travaux de M. DARWIN, de M. SCHIAPARELLI, de M. HELMERT, de GYLDÉN etc. En général les auteurs cherchent les causes des variations des latitudes géographiques dans les actions géologiques, l'élasticite, la plasticité terrestre, dans les explosions volcaniques, les troubles

(1) *Sulla teoria dei moti del polo terrestre* (« Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino », vol. 30, 3 février 1895); [in questo vol.: VI, pp. 108-112].

— *Sul moto di un sistema nel quale sussistono moti interni stazionarii* (id., 3 mars 1895); [in questo vol.: VII, pp. 113-121].

— *Sopra un sistema di equazioni differenziali* (id., 31 marzs 1895); [in questo vol.: VIII, pp. 122-128].

— *Un teorema sulla rotazione dei corpi e sua applicazione al moto di un sistema nel quale sussistono moti interni stazionarii* (id., 5 mai 1895); [in questo vol.: IX, pp. 129-140].

— *Sui moti periodici del polo terrestre* (id., 5 mai 1895); [in questo vol.: X, pp. 141-151].

— *Osservazioni sulla mia Nota: Sui moti periodici del polo terrestre* (id., 23 juin 1895); [in questo vol.: XI, pp. 152-154].

— *Sulla teoria dei moti del polo nella ipotesi della plasticità terrestre* (id., 9 juin 1895); [in questo vol.: XII, pp. 155-165].

— *Sulle rotazioni permanenti stabili di un sistema in cui sussistono moti interni stazionarii* (« Annali di Matematica pura ed applicata », t. 23); [in questo vol.: XV, pp. 173-186].

— *Sulla rotazione di un corpo in cui esistono sistemi ciclici* (« Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, » 1er septembre 1895); [in questo vol.: XIII, pp. 166-169].

— *Sulla rotazione di un corpo in cui esistono sistemi policiclici* (« Annali di Matematica pura ed applicata », t. 24); [in questo vol.; XVI, pp. 187-212].

— *Sulla teoria dei movimenti del polo terrestre* (1er février 1895, « Astronomische Nachrichten, » n° 3291-92); [in questo vol.: V, pp. 87-107].

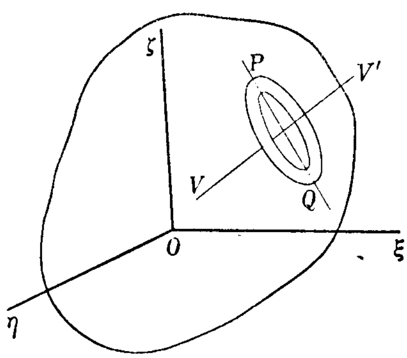
météorologiques, la production des glaces etc., c'est à dire en général ils attribuent le phénomène à des causes qui altèrent la distribution des masses sur la surface de la terre.

2. Mais outre les mouvements dont on vient de parler il y en a d'autres qui ont lieu à la surface terrestre, et d'autres aussi peuvent subsister à l'intérieur (dont la grandeur nous est inconnue) qui, sans changer à cause de leur nature cyclique les axes d'inertie de la terre ni la grandeur des moments d'inertie, ni la distribution des masses non plus, peuvent exercer une action puissante sur le déplacement des pôles de la terre.

Parmi ces mouvements on peut citer les courants marins constants, les courants atmosphériques, le mouvement continu des eaux des fleuves jusqu'à la mer, leur évaporation et la condensation successive de la vapeur sur les montagnes. Ces mouvements ne changent sensiblement la distribution des masses, ni la forme de la terre et l'on peut même dans une première approximation les regarder comme des mouvements stationnaires. Par rapport aux mouvements de la même nature qui peuvent exister à l'intérieur de la terre on ne peut rien affirmer sur leur grandeur.

Montrons d'une manière tout à fait élémentaire leur influence sur la rotation.

3. À cet effet, envisageons un corps dont les axes d'inertie soient ξ, η, ζ et supposons qu'à son intérieur ou à sa surface il y ait un mouvement stationnaire d'une partie de la matière dont il est constitué. Ce mouvement qui aura lieu sous l'action de forces internes ne changera ni la forme ni la distribution des densités. Pour fixer les idées, supposons que le corps



soit homogène et, par l'effet de forces internes, un tore de révolution PQ tourne relativement au corps autour de son axe VV' avec une vitesse angulaire constante, tandis que la partie résidue du corps soit rigide; ou plus en général le long d'un tube quelconque PQ ait lieu une circulation constante d'un fluide homogène. Le centre de gravité du corps, lex axes d'inertie et les moments d'inertie A, B, C ne changeront pas.

Soient m_1, m_2, m_3 les moments, par rapports aux axes ξ, η, ζ, des quantités de mouvement dues aux mouvements stationnaires internes *quels qu'ils soient*. Si le système a un mouvement de rotation autour du centre de gravité O, et si les composantes de la vitesse angulaire sont p, q, r, les moments des quantités de mouvement dûs au mouvement absolu de tout le système, par rapport aux axes ξ, η, ζ, seront

$$Ap + m_1, \; Bq + m_2, \; Cr + m_3.$$

Supposons que le système ne soit pas soumis à des forces externes, alors le couple de quantité de mouvement sera constant et son axe aura une direction constante. Soit z un axe fixe parallèle à cette direction; x, y soient des axes fixes situés dans le plan invariable et représentons par la table suivante les cosinus des angles que les axes ξ, η, ζ forment avec les axes x, y, z:

	x	y	z
ξ	α_1,	β_1,	γ_1
η	α_2,	β_2,	γ_2
ζ	α_3,	β_3,	γ_3

Les trois intégrales des aires seront exprimées par les équations suivantes

$$(1) \qquad \begin{cases} (Ap + m_1)\alpha_1 + (Bq + m_2)\alpha_2 + (Cr + m_3)\alpha_3 = 0, \\ (Ap + m_1)\beta_1 + (Bq + m_2)\beta_2 + (Cr + m_3)\beta_3 = 0, \\ (Ap + m_1)\gamma_1 + (Bq + m_2)\gamma_2 + (Cr + m_3)\gamma_3 = K, \end{cases}$$

K étant la grandeur constante du couple de quantité de mouvement. Dérivons ces équations, et ayons égard aux formules de POISSON

$$(2) \qquad \begin{cases} \dfrac{d\alpha_1}{dt} = \alpha_2 r - \alpha_3 q \;, & \dfrac{d\alpha_2}{dt} = \alpha_3 p - \alpha_1 r \;, & \dfrac{d\alpha_3}{dt} = \alpha_1 q - \alpha_2 p, \\ \dfrac{d\beta_1}{dt} = \beta_2 r - \beta_3 q \;, & \dfrac{d\beta_2}{dt} = \beta_3 p - \beta_1 r \;, & \dfrac{d\beta_3}{dt} = \beta_1 q - \beta_2 p, \\ \dfrac{d\gamma_1}{dt} = \gamma_2 r - \gamma_3 q \;, & \dfrac{d\gamma_2}{dt} = \gamma_3 p - \gamma_1 r \;, & \dfrac{d\gamma_3}{dt} = \gamma_1 q - \gamma_2 p, \end{cases}$$

on trouvera

$$L\alpha_1 + M\alpha_2 + N\alpha_3 = 0 \;, \quad L\beta_1 + M\beta_2 + N\beta_3 = 0 \;, \quad L\gamma_1 + M\gamma_2 + N\gamma_3 = 0$$

ayant posé

$$A\frac{dp}{dt} + (C - B)qr + m_3 q - m_2 r = L,$$

$$B\frac{dq}{dt} + (A - C)rp + m_1 r - m_3 p = M,$$

$$C\frac{dr}{dt} + (B - A)pq + m_2 p - m_1 q = N.$$

On aura donc les équations

$$
(3) \quad \left\{
\begin{aligned}
& A\frac{dp}{dt} + (C - B)\,qr + m_3 q - m_2 r = 0, \\
& B\frac{dq}{dt} + (A - C)\,rp + m_1 r - m_3 p = 0, \\
& C\frac{dr}{dt} + (B - A)\,pq + m_2 p - m_1 q = 0.
\end{aligned}
\right.
$$

On a bien aisément deux intégrales algébriques de ces équations. En effet en les ajoutant après les avoir multipliées par p , q , r, on trouve par une intégration

$$
(4) \qquad \frac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2) = h = \text{const.}
$$

Si on intégre après les avoir multipliées par $Ap + m_1$, $Bq + m_2$, $Cr + m_3$ et les avoir ajoutées, on a

$$
(5) \qquad A^2 p^2 + B^2 q^2 + C^2 r^2 + 2Am_1 p + 2Bm_2 q + 2Cm_3 r = K_1 = \text{const.}
$$

Cette intégrale peut s'obtenir aussi des intégrales des aires. En effet en écrivant que la grandeur du couple de quantité de mouvement est constant on a

$$
(6) \qquad (Ap + m_1)^2 + (Bq + m_2)^2 + (Cr + m_3)^2 = K^2;
$$

c'est pourquoi

$$
K^2 = K_1 + m_1^2 + m_2^2 + m_3^2.
$$

Supposons maintenant qu'à l'instant initial le corps tourne autour de l'axe d'inertie ζ, on aura alors

$$
p = q = 0 \quad , \quad r \gtrless 0
$$

et les équations (3) deviendront

$$
\begin{aligned}
A\frac{dp}{dt} &= \quad m_2 r, \\
B\frac{dq}{dt} &= -m_1 r, \\
C\frac{dr}{dt} &= 0.
\end{aligned}
$$

Cela prouve que si m_1 et m_2 ne sont pas nuls, les dérivées de p et q ne seront pas nulles; d'où l'on tire que l'axe d'inertie ζ ne sera pas un axe permanent de rotation, mais que cet axe changera.

En ayant égard aux mouvements internes terrestres de nature cyclique dont nous avons parlé (voir § 2) et en les regardant comme stationnaires, on voit qu'ils n'altéreront ni la forme ni la distribution des masses de la terre, et cependant ils pourront donner lieu à des valeurs de m_1 et m_2 qui ne sont pas nuls; c'est pourquoi ils pourront changer l'axe de rotation de la terre. Pour employer les équations (3) nous avons supposé que les mouvements internes terrestres soient stationnaires, mais même en supposant qu'ils ne changent pas la distribution de la matière on pourra admettre que dans certaines époques ils se ralentissent, en d'autres époques ils deviennent plus rapides. On voit tout de suite qu'on pourra abandonner l'hypothèse des mouvements stationnaires et pour cela il suffira de supposer m_1, m_2, m_3 des fonctions du temps au lieu que des quantités constantes, et alors il faudra remplacer les équations (3) par les équations

$$(7)\qquad \left\{\begin{aligned} &A\frac{dp}{dt}+(C-B)\,qr+m_3\,q-m_2 r+\frac{dm_1}{dt}=0,\\ &B\frac{dq}{dt}+(A-C)\,rp+m_1\,r-m_3\,p+\frac{dm_2}{dt}=0,\\ &C\frac{dr}{dt}+(B-A)\,pq+m_2\,p-m_1\,q+\frac{dm_3}{dt}=0\end{aligned}\right.$$

qu'on trouvera de la même manière qu'on a employée précedemment. Dans ce cas il restera la seule intégrale (6); l'intégrale (4) ne se vérifiera pas.

4. Le plan des recherches que je me suis proposées est justement d'étudier d'abord l'action toute seule des mouvements cycliques qui ne changent ni la forme ni la distribution des masses sur la terre, et d'étudier après les perturbations produites par la plasticité et en général par les mouvements qui changent la forme et la constitution de la terre. La première partie a été traitée avec détail dans ce mémoire; de la seconde il n'y a qu'un aperçu au dernier chapitre.

Je crois de cette manière d'avoir envisagé la question d'un point de vue nouveau.

Les mouvements cycliques dont nous avons parlé sont appréciables, du moins en partie, pour les habitants de la terre, mais un observateur qui aurait égard *seulement* à la variation de la forme de la terre et aux variations de sa constitution, c'est à dire à la distribution des masses, ne s'en apercevrait pas. C'est pourquoi par rapport à ses observations il pourrait les appeler, en suivant une locution très-heureuse introduite par HERTZ, des *mouvements cachés*.

Nous arrivons par là à une liaison entre le sujet de ce mémoire et les idées imaginées par HERTZ en systématisant celles de HELMHOLTZ et de MAXWELL, et dont la base est la théorie des mouvements cycliques.

Rappelons à ce propos la pensée fondamentale développée par HERTZ dans son dernier ouvrage. Il dit que la seule loi qui gouverne tous les phénomènes naturels est la loi d'inertie, entendue dans un sens plus général que celui attaché à cette loi par NEWTON. C'est la loi d'inertie généralisée à tout système matériel soumis à des liaisons quelconques. Cette loi subsiste pour l'ensemble complet constitué des masses que nous envisageons et d'autres qui nous sont cachées. En examinant les premières il peut paraître que leurs mouvements ne suivent pas la loi d'inertie, mais la loi ressort lorsqu'on envisage les unes et les autres.

Tandis que dans la mécanique classique si la loi d'inertie n'est pas vérifiée il faut chercher les causes externes ou les forces qui produisent les altérations de l'état du corps, en suivant l'idée de HERTZ il faut chercher des mouvements cachés.

Voyons maintenant comment on peut présenter la question de la variation des latitudes: Un corps (la terre) ne suit pas les lois d'EULER de la rotation libre d'un corps rigide, comment peut-on expliquer cet éloignement de la loi d'inertie? car au fond les lois d'EULER ne représentent que la loi d'inertie.

Il est évident qu'une solution fondée sur l'existence des mouvements cycliques dont nous avons parlé, répond très-bien aux idées de HERTZ que nous avons indiquées. Nous dirons à ce propos dès à présent qu'on peut démontrer que toute anomalie qu'on remarque dans la rotation libre d'un corps peut être expliquée par des mouvements internes cycliques, qui ne changent ni la forme ni la distribution des masses du corps. (Voir Chap. IV, Art. II).

5. En suivant les idées qu'on vient d'exposer, j'ai commencé l'étude en partant de l'hypothèse plus simple que les mouvements internes soient stationnaires. En remarquant que par la seule inertie ils ne pourraient pas se conserver en général de cette nature, on peut chercher les actions mutuelles que les mouvements cycliques et le mouvement de rotation exercent entre eux.

On arrive par là à une question très-générale et on voit bien aisément qu'il est avantageux de se poser à ce point de vue dans la question du mouvement terrestre, car on peut pousser la recherche jusqu'aux réactions exercées par la rotation sur le mouvement interne.

Mais en envisageant de cette manière la question, j'ai reconnu qu'il y a encore un autre intérêt, dont je vais parler: un intérêt qu'on pourrait appeler analytique et fonctionnel.

On connaît très-bien la relation qui subsiste entre les transcendantes elliptiques et la théorie de la rotation libre d'un corps rigide. D'après les mémoires classiques de JACOBI, cette théorie constitue une des plus belles applications des fonctions Jacobiennes. Or la recherche des rapports entre les mouvements cycliques et la rotation est (comme on le voit tout d'abord) un problème beaucoup plus compliqué que celui de JACOBI de la rotation d'un corps rigide; cependant je montrerai que ce sont toujours les fonctions elliptiques et Jacobiennes qui suffisent pour la résolution complète de la question, même dans le cas le plus général. Je donnerai en effet dans ce mémoire la solution complète. On verra que ces transcendantes paraissent toujours sous des expressions rationnelles ou sous des exponentielles, mais d'une manière différente que dans la solution de JACOBI.

Nous allons donner en peu de mots une idée de ces résultats et pour cela nous faisons usage dès à présent de la terminologie d'HELMHOLTZ [2], qu'on va rappeler. Les coordonnées indépendantes d'un système peuvent

(2) *Principien der Statik monocyklischer Systeme*, «Crelle's Journal», Bd. 97.

être classées en deux catégories: les coordonnées cycliques et les paramètres. Les premières existent dans un système lorsqu'il y a des mouvements possibles qui n'altèrent pas la distribution des masses et qui produisent un échange cyclique des masses. Un mouvement est dit cyclique lorsqu'on peut se borner à considérer dans l'expression de la force vive les termes qui dépendent seulement des intensités cycliques (3). Il est évident qu'un mouvement rigoureusement cyclique n'existera que si tous les paramètres seront constants.

Cela posé, envisageons un système dont les liaisons n'empêchent pas la rotation autour d'un point. Les variables qui déterminent sa configuration seront, outre celles qui définissent la position variable d'un système d'axes ayant l'origine dans le point fixe, un certain nombre de coordonnées cycliques et de paramètres. Nous supposerons que les coordonnées cycliques et les paramètres suffisent pour définir le mouvement relatif par rapport aux axes. Nous regarderons ce mouvement comme le mouvement interne du système et nous supposerons qu'il soit cyclique.

Faisons d'abord l'hypothèse que les axes soient fixes et que les paramètres soient constants. Si on abandonne le système à son inertie, les moments cycliques et par conséquent les intensités cycliques seront des quantités constantes. C'est pourquoi dans ce cas *le mouvement sera dans le même temps adiabatique et isocyclique.*

Supposons maintenant que les axes puissent tourner librement et le mouvement interne soit maintenu isocyclique, les paramètres étant constants. C'est le cas d'un système dans lequel existe un mouvement interne stationnaire.

Alors, si le système n'est soumis à aucun couple de rotation, nous démontrerons au chapitre II que, *les composantes de la rotation seront des fonctions elliptiques du temps et les cosinus des angles que les axes d'inertie du système forment avec des axes fixes seront des fonctions uniformes du temps, représentables par des fonctions Jacobiennes.*

On peut demander dans ce cas *s'il faut des forces pour maintenir stationnaire le mouvement interne.* On trouve qu'en général elles sont nécessaires et *qu'on peut en déterminer les expressions par des fonctions elliptiques du temps.*

La nécessité des forces dont nous venons de parler prouve que *de la même manière que le mouvement interne altère la rotation, celle-ci a en général une influence sur les mouvements internes.* C'est pourquoi on peut se poser la question suivante: *A l'intérieur d'un système qui peut tourner autour d'un point fixe et qui est abandonné à son inertie existent des mouvements cycliques quelconques (les paramètres étant constants). Comment a lieu la rotation et quelles lois suivent les intensités cycliques, à cause des actions mutuelles que ces mouvements exercent entre eux?*

Cette question, qu'on peut appeler le problème général du *mouvement adiabatique*, paraît au premier abord très-compliquée car on peut imaginer

(3) Le cas appelé d'*ignoration of coordinates* avait été examiné par THOMSON et TAIT, *Treatise on natural philosophy*. Vol. I, Part. I, Art. 319.

les mouvements cycliques internes d'une manière tout à fait arbitraire. Cependant nous montrerons au chapitre IV qu'on peut la résoudre complètement en employant un théorème par lequel on ramène ce cas à celui d'un mouvement isocyclique, de manière que même dans ce cas *les composantes de la rotation sont des fonctions elliptiques du temps et les cosinus des angles que les axes mobiles forment avec les axes fixes s'expriment par des fonctions Jacobiennes. En outre, les intensités cycliques sont des fonctions elliptiques du temps.* Le problème peut être aussi généralisé en regardant comme isocyclique une partie seulement des mouvement internes et en supposant que les forces correspondantes aux autres coordonnées cycliques soient nulles, et la solution s'obtient toujours de la même manière. On voit par là que le champ des problèmes sur la mécanique des systèmes d'où ressortent les fonctions elliptiques et Jacobiennes est beaucoup plus large que celui compris dans les recherches classiques de JACOBI, car il embrasse le problème général du mouvement adiabatique et isocyclique d'un système quelconque.

6. Il nous reste à indiquer de quelle manière a été faite la division en chapitres du mémoire.

Les premiers trois chapitres traitent du mouvement d'un système à l'intérieur duquel existent des mouvements stationnaires. Dans le premier chapitre il y a une étude géométrique faite avec les vues de POINSOT; le second chapitre renferme la solution analytique complète, et le troisième est consacré à la recherche des rotations permanentes, de leur stabilité, des oscillations du pôle autour de ses positions stables et des perturbations correspondantes de la période eulérienne.

Le quatrième chapitre traite en général des mouvements cycliques et renferme les résultats dont nous venons de donner un aperçu.

Dans le cinquième chapitre, après l'étude du cas général des mouvements internes qui n'altèrent ni la forme ni la distribution des masses, et la résolution du problème de déterminer les mouvements internes, étant donné d'une manière arbitraire le mouvement du pôle, on trouvera quelques applications au mouvement de la terre. J'ai cherché, par des calculs approximatifs, de déterminer les mouvements internes cycliques qui correspondent aux mouvements harmoniques du pôle découverts par M. CHANDLER (*). Cet éminent astronome a trouvé dans le mouvement du pôle une

(*) La determinazione della polodia viene oggi effettuata dagli astronomi con accurate determinazioni di latitudine, eseguite *sistematicamente* in vari Osservatorî astronomici come pure in alcune stazioni geodetiche espressamente dedicate a tali misure. E dall'insieme delle osservazioni eseguite nella prima metà del secolo presente, è risultato che:

1° Il polo di rotazione si mantiene sempre molto vicino al polo d'inerzia; onde la polodia si svolge tutta dentro un'area quadrata di dieci o dodici metri di lato.

2° La polodia ha una forma *estremamente irregolare*, nella quale però si possono grossolanamente individuare due termini periodici. E cioè un termine principale del periodo di 433 giorni, che è il termine di CHANDLER; ed un termine secondario di periodo annuo che sembra dovuto a variazioni annue dei momenti d'inerzia terrestre per influenze meteorologiche [N.d.R.].

période d'environ 430 jours. Si le couple de quantité de mouvement des mouvements internes avait une composante dans la direction de l'axe terrestre égale à 1/1053 du couple de quantité de mouvement de la terre supposée rigide, la période eulérienne deviendrait celle de M. CHANDLER.

Sans discuter ce résultat, je cherche quels seraient les mouvements internes cycliques capables de déterminer dans le pôle mouvement harmonique ayant la période annuelle dont M. CHANDLER a déterminé les éléments. Les résultats obtenus sont renfermés dans quelques théorèmes qui sont énoncés au § 3 de l'Art. V.

Je remarquerai ici seulement que *l'axe du couple de quantité de mouvement correspondant oscille de manière que la projection sur l'équateur de son extrémité (l'origine étant au centre de la terre) décrit une ellipse dont j'ai calculé la grandeur des axes, et dont le grand axe est situé dans le méridien ayant la longitude de* 45° W (par rapport au méridien de Greenwich) *c'est à dire dans le méridien qui passe au milieu de l'océan atlantique.*

Enfin le dernier chapitre renferme un aperçu des perturbations qu'on a dans les lois précédemment trouvées par l'hypothèse de la plasticité terrestre. Cette étude est à peine ébauchée; c'est pourquoi j'espère de pouvoir exposer dans un autre mémoire des nouvelles études dans cette direction, ainsi que dans l'hypothèse générale des mouvements cycliques lorsque les paramètres ne sont pas constants et de pouvoir enfin approfondir les applications de ces recherches.

CHAPITRE I.

L'étude géométrique de la rotation d'un corps dans lequel existe un mouvement interne stationnaire.

Article I.

1. Il est possible de se faire une idée claire du mouvement sans recourir à l'intégration complète des équations différentielles (3). Il suffit pour cela d'envisager les intégrales algébriques de ces équations, qu'on a trouvées (Introduction § 3) de la même manière que POINSOT a fait dans ses recherches sur la rotation libre d'un corps.

Nous commencerons par nous proposer la solution des deux problèmes suivants:

1° Déterminer toutes les positions de l'axe instantané de rotation par rapport au corps en mouvement.

2° Déterminer la vitesse angulaire de rotation du corps pour chaque position de l'axe.

Soit

$$A\xi^2 + B\eta^2 + C\zeta^2 = 1 \tag{1 a}$$

l'équation de l'ellipsoïde d'inertie par rapport au centre de gravité O et soit P son intersection avec l'axe de rotation. On peut appeler P le *pôle* et la courbe qu'il décrit sur l'ellipsoïde la *polodie*.

Si l'on pose

$$OP = \rho \quad , \quad \omega = \sqrt{p^2 + q^2 + r^2}$$

on aura que les coordonnèes du pôle seront

$$(2_a) \qquad \xi = \rho \frac{p}{\omega} \quad , \quad \eta = \rho \frac{q}{\omega} \quad , \quad \zeta = \rho \frac{r}{\omega}$$

d'où (voir (4) et (1_a))

$$\frac{\rho^2}{\omega^2} 2h = 1$$

c'est à dire

$$\omega = \rho \sqrt{2h}.$$

Par suite *la vitesse de rotation sera proportionnelle au rayon vecteur* OP. On a ainsi la solution de la deuxième question que nous nous sommes proposée.

On dèduit des équations (2_a)

$$p = \xi \sqrt{2h} \quad , \quad q = \eta \sqrt{2h} \quad , \quad r = \zeta \sqrt{2h}$$

et en substituant dans l'équation (5)

$$(3_a) \qquad A^2 \xi^2 + B^2 \eta^2 + C^2 \zeta^2 + \frac{2}{\sqrt{2h}} (Am_1 \xi + Bm_2 \eta + Cm_3 \zeta) = \frac{K_1}{2h} \cdot$$

Les équations de la polodie seront donc les deux équations (1_a) et (3_a). La dernière équation peut s'écrire encore

$$A^2 \left(\xi + \frac{m_1}{A\sqrt{2h}}\right)^2 + B^2 \left(\eta + \frac{m_2}{B\sqrt{2h}}\right)^2 + C^2 \left(\zeta + \frac{m_3}{C\sqrt{2h}}\right)^2 = \frac{K^2}{2h} \cdot$$

On peut donc envisager la polodie comme l'intersection de l'ellipsoïde d'inertie avec l'ellipsoïde ayant pour équation

$$A^2 \xi^2 + B^2 \eta^2 + C^2 \zeta^2 = \frac{K^2}{2h}$$

transporté par une translation de manière que son centre ait pour coordonnées

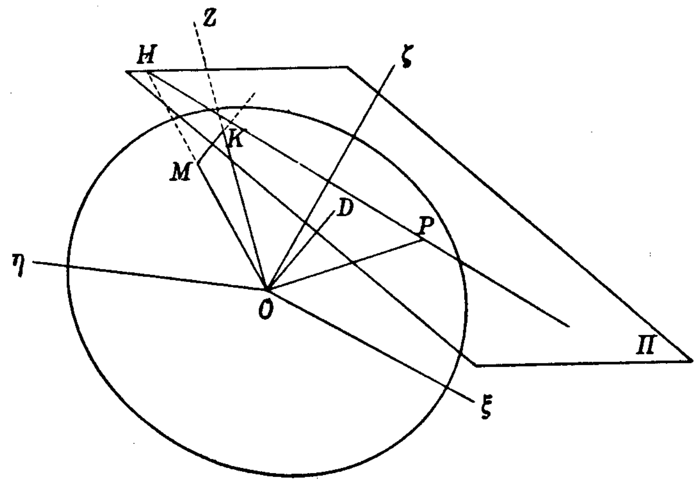
$$-\frac{m_1}{A\sqrt{2h}} \quad , \quad -\frac{m_2}{B\sqrt{2h}} \quad , \quad -\frac{m_3}{C\sqrt{2h}} \cdot$$

La première question est donc aussi résolue.

2. Dans le cas étudié par POINSOT, le plan tangent à l'ellipsoïde d'inertie au pôle est parallèle au plan invariable et il est un plan fixe. Cette propriété ne se vérifie pas dans le cas que nous étudions. Cependant on a des propriétés analogues qu'il est intéressant d'examiner.

Le plan polaire, c'est à dire le plan π qui est tangent à l'ellipsoïde d'inertie au pôle, a par rapport aux axes coordonnées ξ, η, ζ l'équation

$$A p\xi + B q\eta + C r\zeta = \sqrt{2h}. \tag{4 a}$$



Conduisons les deux droites OK, OM. La première soit l'axe du couple de quantité de mouvement; l'autre ait pour projection sur ξ, η, ζ les trois quantités m_1, m_2, m_3. On pourra appeler ce dernier vecteur *l'axe des mouvements internes*.

Les coordonnées des points M et K seront respectivement

$$m_1\,,\ m_2\,,\ m_3\,,$$
$$Ap + m_1\,,\ Bq + m_2\,,\ Cr + m_3\,.$$

On tire de là que le *plan polaire est toujours perpendiculaire à la droite qui va de l'extrémité de l'axe des mouvements internes à celle de l'axe du couple de quantité de mouvement*. La droite MK est donnée par

$$MK = \sqrt{A^2 p^2 + B^2 q^2 + C^2 r^2}$$

et la distance OD entre O et le plan polaire est

$$OD = \frac{\sqrt{2h}}{\sqrt{A^2 p^2 + B^2 q^2 + C^2 r^2}}$$

par suite: *la distance entre le centre de gravité et le plan polaire est en raison inverse de la distance entre les extrémités de l'axe des mouvements internes et de l'axe du couple de quantité de mouvement.*

Par rapport aux axes fixes x, y, z, l'équation du plan polaire sera

$$(Ap\alpha_1 + Bq\alpha_2 + Cr\alpha_3)\,x + (Ap\beta_1 + Bq\beta_2 + Cr\beta_3)\,y$$
$$+ (Ap\gamma_1 + Bq\gamma_2 + Cr\gamma_3)\,z = \sqrt{2h}$$

c'est à dire, à cause des équations (1),

$$-(m_1\alpha_1+m_2\alpha_2+m_3\alpha_3)\,x-(m_1\beta_1+m_2\beta_2+m_3\beta_3)\,y$$
$$-(m_1\gamma_1+m_2\gamma_2+m_3\gamma_3)\,z=\sqrt{2h}\,.$$

L'équation du plan polaire au temps $t+dt$, sera

$$-(m_1\alpha_1+m_2\alpha_2+m_3\alpha_3)\,x-(m_1\beta_1+m_2\beta_2+m_3\beta_3)\,y$$
$$-(m_1\gamma_1+m_2\gamma_2+m_3\gamma_3)\,z-(m_1d\alpha_1+m_2d\alpha_2+m_3d\alpha_3)\,x$$
$$-(m_1d\beta_1+m_2d\beta_2+m_3d\beta_3)\,y-(m_1d\gamma_1+m_2d\gamma_2+m_3d\gamma_3)\,z=\sqrt{2h}\,,$$

c'est pourquoi l'intersection du plan polaire au temps t et du plan polaire au temps $t+dt$ sera une droite du plan

$$(m_1d\alpha_1+m_2d\alpha_2+m_3d\alpha_3)\,x+(m_1d\beta_1+m_2d\beta_2+m_3d\beta_3)\,y$$
$$+(m_1d\gamma_1+m_2d\gamma_2+m_3d\gamma_3)\,z=0\,.$$

Divisant par dt, et ayant égard aux formules (2) cette équation peut s'écrire

$$\begin{vmatrix} m_1, & m_2, & m_3 \\ \alpha_1, & \alpha_2, & \alpha_3 \\ p, & q, & r \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} m_1, & m_2, & m_3 \\ \beta_1, & \beta_2, & \beta_3 \\ p, & q, & r \end{vmatrix} y + \begin{vmatrix} m_1, & m_2, & m_3 \\ \gamma_1, & \gamma_2, & \gamma_3 \\ p, & q, & r \end{vmatrix} z = 0$$

d'où l'on tire

$$(5_a)\qquad \begin{vmatrix} m_1, & m_2, & m_3 \\ \xi, & \eta, & \zeta \\ p, & q, & r \end{vmatrix} = 0\,.$$

Cette équation est celle du plan POM.

La droite PH où se rencontrent les deux plans polaires correspondants aux temps t, et $t+dt$ peut être regardée comme l'axe instantané autour duquel tourne le plan polaire au temps t. On aura donc: *Le plan polaire tourne à chaque instant autour de la droite où il rencontre le plan conduit par le pôle et par l'axe des mouvements internes.*

3. On peut mener par chaque point de la polodie la droite autour de laquelle le plan polaire doit tourner. Le lieu de ces droites sera une surface tangente à l'ellipsoïde d'inertie le long de la polodie et qui sera liée invariablement au corps en mouvement. Appelons cette surface la *surface axiale*, alors *le mouvement du corps aura lieu de sort que l'ellipsoïde d'inertie roulera sur le plan polaire, tandis que celui-ci tournera à chaque instant autour de la génératrice où il rencontre la surface axiale.* L'équation de la surface axiale s'obtiendra par l'élimination de p, q, r, entre les équations (4), (5), (4_a), (5_a).

Article II.

1. Nous allons généraliser aux mouvements que nous étudions un théorème bien connu, donné par SYLVESTER pour les mouvements à la POINSOT.

Posons dans les équations (3)

$$A = \frac{1}{a} \quad , \quad B = \frac{1}{b} \quad , \quad C = \frac{1}{c} ;$$

on aura

$$\frac{1}{a}\frac{dp}{dt} + \left(\frac{1}{c} - \frac{1}{b}\right) qr + m_3 q - m_2 r = 0 ,$$

$$\frac{1}{b}\frac{dq}{dt} + \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{c}\right) rp + m_1 r - m_3 p = 0 ,$$

$$\frac{1}{c}\frac{dr}{dt} + \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right) pq + m_2 p - m_1 q = 0 ,$$

et les intégrales (4) et (6) deviendront

$$\frac{p^2}{a} + \frac{q^2}{b} + \frac{r^2}{c} = 2h ,$$

$$\left(\frac{p}{a} + m_1\right)^2 + \left(\frac{q}{b} + m_2\right)^2 + \left(\frac{r}{c} + m_3\right)^2 = 1 ,$$

en supposant qu'on change les unités de manière que la constante K soit égale à 1.

2. Supposons maintenant que l'on compose le mouvement avec une rotation uniforme ω autour de l'axe du couple de quantité de mouvement. Alors les trois composantes de la rotation deviendront

$$p' = p + \omega\left(\frac{p}{a} + m_1\right) = p\left(\frac{a+\omega}{a}\right) + \omega m_1 ,$$

$$q' = q + \omega\left(\frac{q}{b} + m_2\right) = q\left(\frac{b+\omega}{b}\right) + \omega m_2 ,$$

$$r' = r + \omega\left(\frac{r}{c} + m_3\right) = r\left(\frac{c+\omega}{c}\right) + \omega m_3 ,$$

d'où

$$p = \frac{p' a}{a+\omega} - \frac{m_1 \omega a}{a+\omega} ,$$

$$q = \frac{q' b}{b+\omega} - \frac{m_2 \omega b}{b+\omega} ,$$

$$r = \frac{r' c}{c+\omega} - \frac{m_3 \omega c}{c+\omega} .$$

Posons

$$a + \omega = a' \quad , \quad b + \omega = b' \quad , \quad c + \omega = c' ,$$

$$m_1 \frac{a}{a+\omega} = m'_1 \quad , \quad m_2 \frac{b}{b+\omega} = m'_2 \quad , \quad m_3 \frac{c}{c+\omega} = m'_3 ,$$

alors les équations précédentes pourront s'écrire

$$\frac{p'}{a'} + m'_1 = \frac{p}{a} + m_1,$$

$$\frac{q'}{b'} + m'_2 = \frac{q}{b} + m_2,$$

$$\frac{r'}{c'} + m'_3 = \frac{r}{c} + m_3,$$

et par suite on aura

$$\frac{1}{a'}\frac{dp'}{dt} + \left(\frac{1}{c'} - \frac{1}{b'}\right)q'r' + m'_3 q' - m'_2 r' = 0,$$

$$\frac{1}{b'}\frac{dq'}{dt} + \left(\frac{1}{a'} - \frac{1}{c'}\right)r'p' + m'_1 r' - m'_3 p' = 0,$$

$$\frac{1}{c'}\frac{dr'}{dt} + \left(\frac{1}{b'} - \frac{1}{a'}\right)p'q' + m'_2 p' - m'_1 q' = 0,$$

$$\left(\frac{p'}{a'} + m'_1\right)^2 + \left(\frac{q'}{b'} + m'_2\right)^2 + \left(\frac{r'}{c'} + m'_3\right)^2 = 0,$$

$$\frac{p'^2}{a'} + \frac{q'^2}{b'} + \frac{r'^2}{c'} = 2h'.$$

Entre les deux quantités constantes h et h' subsistera la relation

$$h' = h + \frac{\omega}{2}\left(1 - \frac{m_1^2 a}{a+\omega} - \frac{m_2^2 b}{b+\omega} - \frac{m_3^2 c}{c+\omega}\right).$$

Donc *si on compose le mouvement que nous étudions avec une rotation uniforme autour de l'axe du couple de quantité de mouvement, la nature du mouvement ne changera pas; il n'y aura qu'un changement des constantes.*

Cette propriété est tout à fait analogue à celle qui a été découverte par SYLVESTER dans le cas des mouvements à la POINSOT et dont on trouve des nombreuses et intéressantes applications dans les travaux de M. DARBOUX et de HALPHEN.

Article III.

1. Nous consacrerons un chapitre (chapitre III) à l'étude des mouvements permanents et à leur stabilité, mais dès à présent nous voulons examiner quelques propriétés des mouvements permanents.

Puisqu'on doit avoir

$$Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = \text{const.},$$

un axe de rotation sera permanent lorsque p, q, r seront constants, c'est à dire si l'on aura

$$\frac{dp}{dt} = \frac{dq}{dt} = \frac{dr}{dt} = 0$$

et par suite (voir équations (3))

$$(6_a)\qquad \begin{cases} (C-B)\,qr + m_3 q - m_2 r = 0\,, \\ (A-C)\,rp + m_1 r - m_3 p = 0\,, \\ (B-A)\,pq = m_2 p - m_1 q = 0\,, \end{cases}$$

d'où l'on tire

$$(6'_a)\qquad \frac{p}{Ap+m_1} = \frac{q}{Bq+m_2} = \frac{r}{Cr+m_3}\,.$$

2. Les points multiples de la polodie se trouvent où les deux surfaces (1_a), (3_a) sont tangentes. Les coordonnées du pôle sont

$$\frac{p}{\sqrt{2h}}\,,\quad \frac{q}{\sqrt{2h}}\,,\quad \frac{r}{\sqrt{2h}}\,;$$

par conséquent les plans tangents aux deux surfaces au pôle auront pour équations

$$\frac{Ap}{\sqrt{2h}}\,\xi + \frac{Bq}{\sqrt{2h}}\,\eta + \frac{Cr}{\sqrt{2h}}\,\zeta = 1\,,$$

$$A\,(Ap+m_1)\left(\xi - \frac{p}{\sqrt{2h}}\right) + B\,(Bq+m_2)\left(\eta - \frac{q}{\sqrt{2h}}\right) + C\,(Cr+m_3)\left(\zeta - \frac{r}{\sqrt{2h}}\right) = \frac{K_1}{2h}$$

et ils coïncideront lorsque

$$\frac{p}{Ap+m_1} = \frac{q}{Bq+m_2} = \frac{r}{Cr+m_3}\,.$$

Donc: *les axes permanentes de rotation passent par le centre de gravité et par les points multiples de la polodie, et si la polodie a un point multiple la vitesse de rotation correspondante sera celle de la rotation permanente.*

3. Revenons maintenant aux équations (3). Elles seront satisfaites si l'on substitue aux fonctions $p(t)$, $q(t)$, $r(t)$ les autres fonctions

$$-p\,(T-t)\quad,\quad -q\,(T-t)\quad,\quad -r\,(T-t),$$

T étant une constante arbitraire; et en remplaçant dans le même temps m_1, m_2, m_3 par $-m_1$, $-m_2$, $-m_3$. On pourra énoncer cette propriété en disant: *le mouvement du système peut s'invertir si l'on invertit l'axe des mouvements internes.*

Cela posé, supposons que, la polodie ayant un point multiple P_0, le pôle puisse rejoindre ce point après un temps T. Si l'on invertit le mouvement le pôle reviendra au point de départ après le même temps. Mais l'axe de rotation et la vitesse qui correspondent à P_0 sont permanents, donc le pôle ne pourrait plus bouger de P_0. On a donc: *Si la polodie a un point multiple, le pôle s'approchera indéfiniment à ce point sans jamais le rejoindre.*

Cela constitue une différence essentielle entre les mouvements qui ont lieu lorsque la polodie a des points multiples, et ceux qui ont lieu lorsque elle n'en a pas. Dans le premier cas la polodie sera une courbe fermée et le pôle reviendra au point de départ; dans le deuxième cas le pôle ne reviendra au point de départ, mais il s'approchera indéfiniment au point multiple.

Article IV.

1. Dans cet article nous particulariserons les formules dans le cas où l'ellipsoïde d'inertie a deux axes égaux, et le troisième est plus petit que les autres.

Supposons $A = B$, et prenons les axes ξ, η dans le plan de l'équateur de manière que l'axe des mouvements internes soit dans le plan $\xi\zeta$. Alors on aura $m_2 = 0$, et les équations de la polodie deviendront

$$A(\xi^2 + \eta^2) + C\zeta^2 = 1,$$

$$A^2(\xi^2 + \eta^2) + C^2\zeta^2 + \frac{2}{\sqrt{2h}}(Am_1\xi + Cm_3\zeta) = \frac{K_1}{2h}$$

ou bien

$$A(\xi^2 + \eta^2) + C\zeta^2 = 1,$$

$$C(C - A)\zeta^2 + \frac{2}{\sqrt{2h}}(Am_1\xi + Cm_3\zeta) = \frac{K_1}{2h} - A.$$

Posons pour simplifier

$$-\frac{Cm_3}{C(C-A)\sqrt{2h}} = \zeta_0,$$

$$\frac{C^2 m_3^2 + (K - 2Ah)C(C-A)}{2\sqrt{2h}\,AC(C-A)m_1} = \xi_0,$$

$$\frac{Am_1}{C(C-A)\sqrt{2h}} = P.$$

Les deux équations précédentes s'écriront

$$A(\xi^2 + \eta^2) + C\zeta^2 = 1,$$

$$(\zeta - \zeta_0)^2 = 2P(\xi_0 - \xi).$$

On déduit de là que *la projection de la polodie sur le méridien qui passe par l'axe des mouvements internes, est une parabole dont l'axe est perpendiculaire à l'axe de symétrie de l'ellipsoïde.*

Les coordonnées du sommet de la parabole seront ξ_0 et ζ_0 et le semi-paramètre sera P.

2. Le théorème précédent conduit à une construction très simple de la polodie, par l'emploi des méthodes bien connues de la géométrie descriptive.

Il suffit de choisir pour 1er plan de projection un plan parallèle à l'équateur et de prendre le 2d plan de projection parallèle à l'axe de symétrie et à l'axe des mouvements internes. L'ellipsoïde d'inertie sera projecté sur le premier plan dans un cercle, et sur le second dans une ellipse. La projection de la polodie dans ce plan sera une parabole ayant l'axe parallèle à l'équateur. On obtiendra donc la polodie en la regardant comme l'intersection de l'ellipsoïde avec un cylindre dont la directrice est une parabole et qui est perpendiculaire au second plan de projection. C'est pourquoi il n'y a pas du difficulté pour construire la première projection de la polodie.

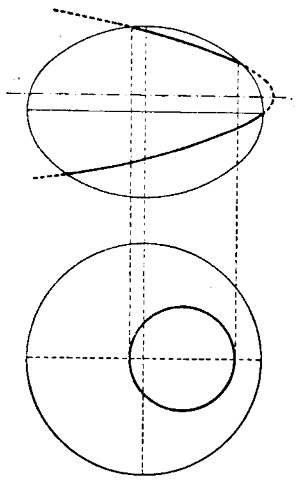


Fig. 1.

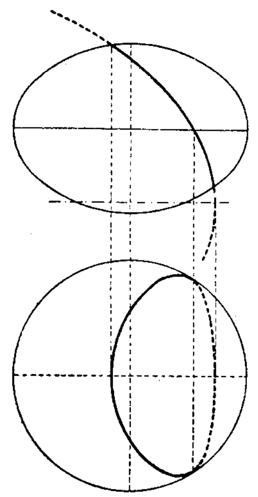


Fig. 2.

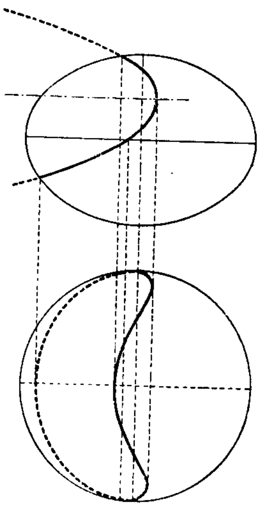


Fig. 3.

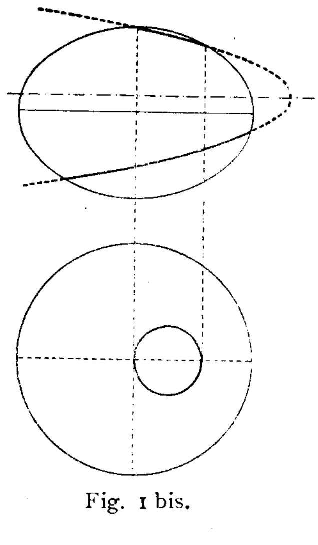


Fig. 1 bis.

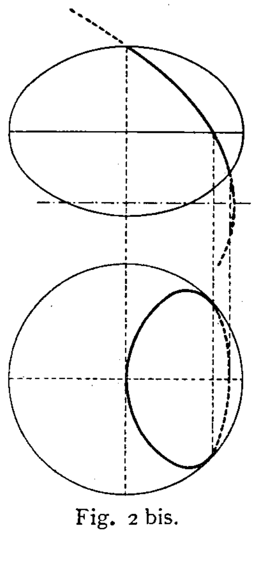


Fig. 2 bis.

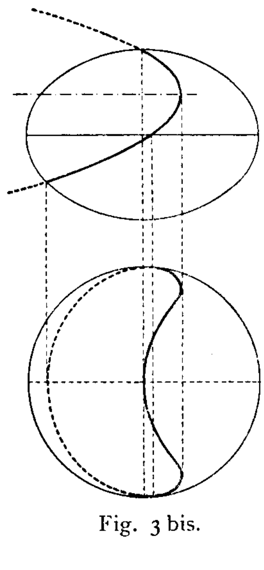


Fig. 3 bis.

Par ce procédé nous avons dessiné les projections de plusieurs polodies, qu'on a obtenues en changeant la position du sommet et la grandeur du daramètre de la parabole.

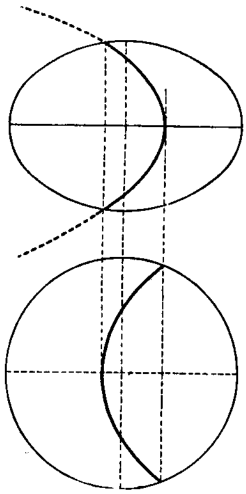


Fig. 4.

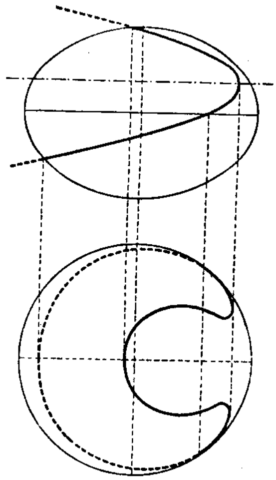


Fig. 5.

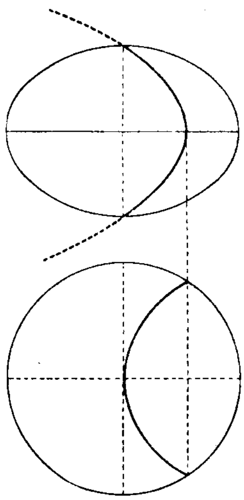


Fig. 4 bis.

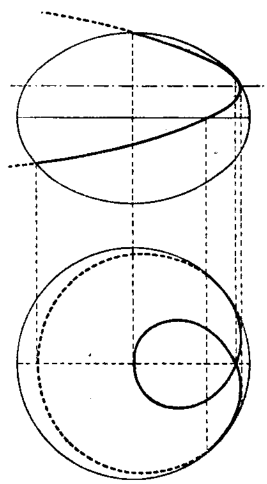


Fig. 5 bis.

3. L'avant–dernière figure correspond au cas où il peut arriver une inversion des pôles, c'est à dire que le pôle peut passer d'un bout à l'autre du petit axe de l'ellipsoïde.

Pour cela sont nécessaires et suffisantes deux conditions, savoir:

1° la parabole doit passer par les projections des extrémités du petit axe.

2° le sommet de la parabole doit se trouver à l'intérieur de la projection de l'ellipsoïde.

Ces conditions seront verifiées lorsqu'on aura

$$(7_a) \qquad \zeta_0 = 0,$$

$$(8_a) \qquad \xi_0 < \frac{1}{\sqrt{A}} \cdot$$

De la première on tire

$$m_3 = 0,$$

et par suite

$$\xi_0 = \frac{K_1 - 2Ah}{2\sqrt{2h}\,Am_1} \cdot$$

Lorsque le pôle sera à un bout du petit axe on aura

$$p = 0 \quad , \quad q = 0 \quad , \quad r = r_0$$

d'où

$$Cr_0^2 = 2h \quad , \quad C^2 r_0^2 = K_1$$

et par suite

$$\xi_0 = \frac{C_0 r_0^2 (C - A)}{2\sqrt{Cr_0^2}\,Am_1} \cdot$$

Ayant égard à l'équation (8_a) on aura

$$\frac{Cr_0^2 (C - A)}{2\sqrt{Cr_0^2}\,Am_1} < \frac{1}{\sqrt{A}} \cdot$$

Les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'il arrive l'inversion des pôles seront donc

$$m_1 > \frac{1}{2}\sqrt{\frac{C}{A}}(C - A)\,r_0 \quad , \quad m_3 = 0 \, .$$

4. On peut examiner aussi le cas où l'ellipsoïde d'inertie se réduit à une sphère.

Si $A = B = C$, les équations de la polodie deviennent

$$A(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) = 1 \, ,$$

$$A^2(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) + \frac{2A}{\sqrt{2h}}(m_1\xi + m_2\eta + m_3\zeta) = \frac{K_1}{2h} \cdot$$

La polodie sera donc l'intersection de la sphère d'inertie avec le plan

$$\frac{2A}{\sqrt{2h}}(m_1\xi + m_2\eta + m_3\zeta) = \frac{K_1}{2h} - A$$

et par conséquent elle sera un cercle de la sphère ayant pour axe l'axe des mouvements internes.

Dans ce cas, les équations (3) sont des équations linéaires qui peuvent s'intégrer immédiatement. En effet si on fait coïncider l'axe ξ avec l'axe des mouvements internes, elles deviendront

$$A\frac{dp}{dt} = 0 \quad , \quad \frac{dq}{dt} + \frac{m}{A}r = 0 \quad , \quad \frac{dr}{dt} - \frac{m}{A}q = 0$$

d'où

$$p = a_1 \quad , \quad q = a_2 \cos\left(\frac{m}{A} t + a_3\right) \quad , \quad r = a_2 \sin\left(\frac{m}{A} t + a_3\right),$$

a_1, a_2, a_3 étant des constantes arbitraires.

Le pôle se mouvra sur la polodie avec une vitesse constante et la période d'une révolution sera $2\pi A/m$.

Dans ce cas l'amplitude de la polodie ne dépendra nullement de la grandeur de l'axe des mouvements internes, mais seulement de sa direction par rapport à l'axe initial de rotation.

Article V.

1. Les mouvements des systèmes que nous venons d'étudier géométriquement et que nous allons étudier analytiquement dans le chapitre suivant sont une généralisation des mouvements à la POINSOT.

Nous consacrerons cet article à réduire les équations différentielles des mouvements à la POINSOT, celles que nous étudions et d'autres plus générales à un même type. Cette transformation appartient à la partie cinématique de la recherche, c'est pourquoi nous la plaçons dans ce chapitre.

Un mouvement à la POINSOT est le mouvement d'un système d'axes qui tourne autour de l'origine fixe de sorte que les composantes de la rotation ont des rapports constants avec les cosinus des angles que les axes forment avec une direction fixe.

Si γ_1, γ_2, γ_3 sont les cosinus, p, q, r les composantes de la rotation et a, b, c les rapports constants, on aura

$$p = a\gamma_1 \quad , \quad q = b\gamma_2 \quad , \quad r = c\gamma_3$$

d'où l'on tire, à cause des équations de POISSON, (Introduction § 3)

$$\frac{dp}{dt} = a\frac{d\gamma_1}{dt} = a(r\gamma_2 - q\gamma_3) \quad , \quad \frac{dq}{dt} = b\frac{d\gamma_2}{dt} = b(p\gamma_3 - r\gamma_1),$$

$$\frac{dr}{dt} = c\frac{d\gamma_3}{dt} = c(q\gamma_1 - p\gamma_2)$$

ou bien

$$\frac{1}{a}\frac{dp}{dt} = \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{c}\right)qr \quad , \quad \frac{1}{b}\frac{dq}{dt} = \left(\frac{1}{c} - \frac{1}{a}\right)rp \quad , \quad \frac{1}{c}\frac{dr}{dt} = \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)pq.$$

Si nous posons

$$f_1 = \frac{abc}{2}\left(\frac{p^2}{a^2} + \frac{q^2}{b^2} + \frac{r^2}{c^2}\right),$$

$$f_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{p^2}{a} + \frac{q^2}{b} + \frac{r^2}{c}\right),$$

les équations précédentes pourront s'écrire

$$\frac{dp}{dt} = \frac{d(f_1, f_2)}{d(q, r)} \quad , \quad \frac{dq}{dt} = \frac{d(f_1, f_2)}{d(r, p)} \quad , \quad \frac{dr}{dt} = \frac{d(f_1, f_2)}{d(p, q)}$$

et on aura

$$\gamma_1 = \frac{\partial f_2}{\partial p} \quad , \quad \gamma_2 = \frac{\partial f_2}{\partial q} \quad , \quad \gamma_3 = \frac{\partial f_2}{\partial r}.$$

2. Au même type d'équations appartiennent les équations différentielles du mouvement d'un corps dans lequel existent des mouvements internes stationnaires. En effet posons

$$\mathfrak{f}_1 = \frac{1}{2\sqrt{ABC}}((Ap + m_1)^2 + (Bq + m_2)^2 + (Cr + m_3)^2),$$

$$\mathfrak{f}_2 = \frac{1}{2\sqrt{ABC}}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2).$$

Alors on pourra écrire les équations (3) de la manière suivante

$$\frac{dp}{dt} = \frac{d(\mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2)}{d(q, r)} \quad , \quad \frac{dq}{dt} = \frac{d(\mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2)}{d(r, p)} \quad , \quad \frac{dr}{dt} = \frac{d(\mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2)}{d(p, q)}.$$

Pour avoir les cosinus $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$, il suffit de construire la fonction

$$F = \frac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 + 2m_1 p + 2m_2 q + 2m_3 r)$$

et l'on aura

$$\gamma_1 = \frac{1}{K}\frac{\partial F}{\partial p} \quad , \quad \gamma_2 = \frac{1}{K}\frac{\partial F}{\partial q} \quad , \quad \gamma_3 = \frac{1}{K}\frac{\partial F}{\partial r}.$$

Entre les fonctions $\mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2$, F subsisteront les relations

$$\mathfrak{f}_1 = \frac{1}{2\sqrt{ABC}}\left[\left(\frac{\partial F}{\partial p}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial q}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial r}\right)^2\right],$$

$$\mathfrak{f}_2 = \frac{1}{2\sqrt{ABC}}\left(p\frac{\partial F}{\partial p} + q\frac{\partial F}{\partial q} + r\frac{\partial F}{\partial r} - F\right).$$

3. En général si on a un système d'axes en mouvement autour de l'origine fixe et les cosinus des angles qu'ils forment avec une direction fixe sont donnés par les formules

$$\gamma_1 = \frac{1}{K}\frac{\partial F}{\partial p} \quad , \quad \gamma_2 = \frac{1}{K}\frac{\partial F}{\partial q} \quad , \quad \gamma_3 = \frac{1}{K}\frac{\partial F}{\partial r},$$

K étant une constante et F une fonction quelconque de p, q, r, on aura à cause des équations de Poisson

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial p} = r\frac{\partial F}{\partial q} - q\frac{\partial F}{\partial r} \quad , \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial q} = p\frac{\partial F}{\partial r} - r\frac{\partial F}{\partial p} \quad , \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial r} = q\frac{\partial F}{\partial p} - p\frac{\partial F}{\partial q}.$$

Calculons les premiers membres de ces équations, on aura

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial p} = \frac{\partial^2 F}{\partial p^2}\frac{dp}{dt} + \frac{\partial^2 F}{\partial p\,\partial q}\frac{dq}{dt} + \frac{\partial^2 F}{\partial p\,\partial r}\frac{dr}{dt},$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial q} = \frac{\partial^2 F}{\partial q\,\partial p}\frac{dp}{dt} + \frac{\partial^2 F}{\partial q^2}\frac{dq}{dt} + \frac{\partial^2 F}{\partial q\,\partial r}\frac{dr}{dt},$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial r} = \frac{\partial^2 F}{\partial r\,\partial p}\frac{dp}{dt} + \frac{\partial^2 F}{\partial r\,\partial q}\frac{dq}{dt} + \frac{\partial^2 F}{\partial r^2}\frac{dr}{dt}.$$

On tire de là

$$\frac{dp}{dt}=\frac{1}{H}\begin{vmatrix}\frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial p}, & \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial q}, & \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial r}\\ \frac{\partial^2 F}{\partial q\,\partial p}, & \frac{\partial^2 F}{\partial q^2}, & \frac{\partial^2 F}{\partial q\,\partial r}\\ \frac{\partial^2 F}{\partial r\,\partial p}, & \frac{\partial^2 F}{\partial r\,\partial q}, & \frac{\partial^2 F}{\partial r^2}\end{vmatrix}=\frac{1}{H}\left\|\begin{matrix}\frac{\partial F}{\partial p}, & \frac{\partial F}{\partial q}, & \frac{\partial F}{\partial r}\\ p\;, & q\;, & r\end{matrix}\right\|\cdot\left\|\begin{matrix}\frac{\partial^2 F}{\partial q\,\partial p}, & \frac{\partial^2 F}{\partial q^2}, & \frac{\partial^2 F}{\partial q\,\partial r}\\ \frac{\partial^2 F}{\partial r\,\partial p}, & \frac{\partial^2 F}{\partial r\,\partial q}, & \frac{\partial^2 F}{\partial r^2}\end{matrix}\right\|$$

$$=\frac{1}{H}\begin{vmatrix}\frac{\partial}{\partial q}\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial F}{\partial p}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial q}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial r}\right)^2\right], & \frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial F}{\partial p}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial q}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial r}\right)^2\right]\\ \frac{\partial}{\partial q}\left[p\frac{\partial F}{\partial p}+q\frac{\partial F}{\partial q}+r\frac{\partial F}{\partial r}-F\right], & \frac{\partial}{\partial r}\left[p\frac{\partial F}{\partial p}+q\frac{\partial F}{\partial q}+r\frac{\partial F}{\partial r}-F\right]\end{vmatrix}$$

H étant le Hessien de la fonction F.

Posons

$$\varphi_1=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial F}{\partial p}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial q}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial r}\right)^2\right],$$

$$\varphi_2=p\frac{\partial F}{\partial p}+q\frac{\partial F}{\partial q}+r\frac{\partial F}{\partial r}-F,$$

on aura

$$\frac{dp}{dt}=\frac{1}{H}\frac{d(\varphi_1,\varphi_2)}{d(q,r)}.$$

D'une manière tout à fait analogue on trouvera

$$\frac{dq}{dt}=\frac{1}{H}\frac{d(\varphi_1,\varphi_2)}{d(r,p)}\quad,\quad\frac{dr}{dt}=\frac{1}{H}\frac{d(\varphi_1,\varphi_2)}{d(p,q)}.$$

Si nous introduisons une variable auxiliare τ, telle que

$$\frac{dt}{d\tau}=H$$

les équations précédentes pourront s'écrire

$$(9_a)\qquad\frac{dp}{d\tau}=\frac{d(\varphi_1,\varphi_2)}{d(q,r)}\quad,\quad\frac{dq}{d\tau}=\frac{d(\varphi_1,\varphi_2)}{d(r,p)}\quad,\quad\frac{dr}{d\tau}=\frac{d(\varphi_1,\varphi_2)}{d(p,q)},$$

$$(10_a)\qquad\frac{dt}{d\tau}=H.$$

Ces équations ont les intégrales $\varphi_1=$ const., $\varphi_2=$ const. et s'intègrent par une quadrature.

Les trois premières équations appartiennent au même type d'équations qu'on a trouvé auparavant.

4. Lorsque F est de 2^d degré, φ_1 et φ_2 seront aussi des fonctions de 2^d degré et H sera une quantité constante.

Alors si on intègre l'équation (10_a) on trouve

$$t=H(\tau-\tau_0),$$

τ_0 étant un constante arbitraire.

Dans ce cas, en posant

$$(11_a)\quad \begin{cases} f_1 = \dfrac{1}{2\sqrt{H}}\left[\left(\dfrac{\partial F}{\partial p}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial F}{\partial q}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial F}{\partial r}\right)^2\right], \\ f_2 = \dfrac{1}{\sqrt{H}}\left[p\dfrac{\partial F}{\partial p} + q\dfrac{\partial F}{\partial q} + r\dfrac{\partial F}{\partial r} - F\right] \end{cases}$$

les équations $(9)_a$ deviennent

$$\frac{dp}{dt} = \frac{d(f_1, f_2)}{d(q, r)} \quad , \quad \frac{dq}{dt} = \frac{d(f_1, f_2)}{d(r, p)} \quad , \quad \frac{dr}{dt} = \frac{d(f_1, f_2)}{d(p, q)}.$$

Dans la fonction F on peut négliger le terme constant, alors il est aisé de remarquer que pour obtenir la fonction

$$p\frac{\partial F}{\partial p} + q\frac{\partial F}{\partial q} + r\frac{\partial F}{\partial r} - F$$

il suffit de négliger dans la fonction F les termes de premier degré.

Chapitre II.

L'étude analytique de la rotation d'un corps dans lequel existe un mouvement interne stationnaire.

Article I.

1. Dans le dernier article du chapitre précédent nous avons ramené les équations différentielles (3) au type suivant

$$(1_b)\quad \begin{cases} \dfrac{dp}{dt} = \dfrac{d(f_1, f_2)}{d(q, r)} \\ \dfrac{dq}{dt} = \dfrac{d(f_1, f_2)}{d(r, p)} \\ \dfrac{dr}{dt} = \dfrac{d(f_1, f_2)}{d(p, q)} \end{cases}$$

où f_1, f_2 sont des fonctions de p, q, r.

Nous allons par suite commencer par l'étude général des équations différentielles de ce type.

2. On peut trouver deux intégrales des équations (1_b), c'est à dire

$$(2_b)\qquad f_1 = \text{const.} = h_1 \quad , \quad f_2 = \text{const.} = h_2,$$

ce qu'on vérifie tout de suite par un calcul élémentaire.

Posons

$$(3_b)\qquad p = \frac{x_1}{x_4} \quad , \quad q = \frac{x_2}{x_4} \quad , \quad r = \frac{x_3}{x_4},$$

$$\varphi_1(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_4^2 \left[f_1\left(\frac{x_1}{x_4}, \frac{x_2}{x_4}, \frac{x_3}{x_4}\right) - h_1 \right],$$

$$\varphi_2(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_4^2 \left[f_2\left(\frac{x_1}{x_4}, \frac{x_2}{x_4}, \frac{x_3}{x_4}\right) - h_2 \right].$$

Les fonctions φ_1, φ_2 auront un degré d'homogénéité égal à 2. On a maintenant

$$\frac{d(f_1, f_2)}{d(q, r)} = \frac{1}{x_4^2} \frac{d(\varphi_1, \varphi_2)}{d(x_2, x_3)},$$

$$\frac{dp}{dt} = \frac{1}{x_4^2} \frac{x_4 \, dx_1 - x_1 \, dx_4}{dt};$$

par suite, la première des équations (1_b) s'écrira

$$(4\,b) \qquad \frac{x_4 \, dx_1 - x_1 \, dx_4}{dt} = \frac{d(\varphi_1, \varphi_2)}{d(x_2, x_3)}$$

et de même les deux autres pourront s'écrire

$$(4'b) \qquad \frac{x_4 \, dx_2 - x_2 \, dx_4}{dt} = \frac{d(\varphi_1, \varphi_2)}{d(x_3, x_1)},$$

$$(4''b) \qquad \frac{x_4 \, dx_3 - x_3 \, dx_4}{dt} = \frac{d(\varphi_1, \varphi_2)}{d(x_1, x_2)}.$$

Enfin on pourra substituer aux deux intégrales (2_b) les équations

$$(5\,b) \qquad \varphi_1 = 0 \quad , \quad \varphi_2 = 0.$$

Deux quelconques des équations (4_b), $(4'_b)$, $(4'_c)$ auront la forme

$$\frac{x_4 \, dx_{(r)} - x_{(r)} \, dx_4}{dt} = \frac{d(\varphi_1, \varphi_2)}{d(x_{(r+1)}, x_{(r+2)})}.$$

$$\frac{x_4 \, dx_{(r+1)} - x_{(r+1)} \, dx_4}{dt} = \frac{d(\varphi_1, \varphi_2)}{d(x_{(r+2)}, x_{(r)})}$$

étant

$$0 < (r) < 4 \quad , \quad (r) \equiv r \mod. 3.$$

On en tire

$$x_4 \frac{x_{(r+1)} \, dx_{(r)} - x_{(r)} \, dx_{(r+1)}}{dt} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_{(r+2)}} \left(x_{(r+1)} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_{(r+1)}} + x_{(r)} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_{(r)}} \right)$$
$$- \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_{(r+2)}} \left(x_{(r+1)} \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_{(r+1)}} + x_{(r)} \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_{(r)}} \right).$$

Mais

$$x_{(r)} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_{(r)}} + x_{(r+1)} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_{(r+1)}} + x_{(r+2)} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_{(r+2)}} + x_4 \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_4} = 2\varphi_i = 0, \qquad (i = 1, 2)$$

par suite l'équation précédente s'écrira

$$\frac{x_{(r+1)} \, dx_{(r)} - x_{(r)} \, dx_{(r+1)}}{dt} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_{(r+2)}} \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_4} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_4} \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_{(r+2)}}.$$

On pourra donc conclure: *si* i_1, i_2, i_3, i_4 *est une permutation quelconque d'ordre pair des nombre* 1, 2, 3, 4 *on aura*

$$\frac{x_{i_2}\,dx_{i_1} - x_{i_1}\,dx_{i_2}}{dt} = \frac{d(\varphi_1, \varphi_2)}{d(x_{i_3}, x_{i_4})}. \tag{6 b}$$

3. Appliquons aux variables x_i une substitution linéaire

$$x_i = \Sigma_s\, c_{i,s}\, \xi_s \quad , \quad \xi_s = \Sigma_i\, C_{i,s}\, x_i \tag{7 b}$$

et soit C le déterminant des coefficients $c_{i,s}$. Nous supposons que C ne s'annulle pas.

Nous aurons

$$\begin{vmatrix} dx_{i_1}, & dx_{i_2} \\ x_{i_1}, & x_{i_2} \end{vmatrix} = \Sigma \begin{vmatrix} c_{i_1,s_1}, & c_{i_2,i_1} \\ c_{i_1,i_2}, & c_{i_2,i_2} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} d\xi_{s_1}, & d\xi_{s_2} \\ \xi_{s_1}, & \xi_{s_2} \end{vmatrix},$$

$$\frac{d(\varphi_1, \varphi_2)}{d(x_{i_3}, x_{i_4})} = \Sigma \frac{d(\varphi_1, \varphi_2)}{d(\xi_{s_3}, \xi_{s_4})} \begin{vmatrix} C_{i_3,s_3}, & C_{i_4,s_3} \\ C_{i_3,s_4}, & C_{i_4,s_4} \end{vmatrix}.$$

Mais, par un théorème sur les déterminants, on a (4)

$$\begin{vmatrix} C_{i_3,s_3}, & C_{i_4,s_3} \\ C_{i_3,s_4}, & C_{i_4,s_4} \end{vmatrix} = \frac{1}{C} \begin{vmatrix} c_{i_1,s_1}, & c_{i_2,s_1} \\ c_{i_1,s_2}, & c_{i_2,s_2} \end{vmatrix}$$

par suite l'équation (6_b) pourra s'écrire

$$\Sigma \begin{vmatrix} c_{i_1,s_1}, & c_{i_2,s_1} \\ c_{i_1,s_2}, & c_{i_2,s_2} \end{vmatrix} \frac{\xi_{s_2}\,d\xi_{s_1} - \xi_{s_1}\,d\xi_{s_2}}{dt} = \Sigma \begin{vmatrix} c_{i_1,s_1}, & c_{i_2,s_1} \\ c_{i_1,s_2}, & c_{i_2,s_2} \end{vmatrix} \frac{d(\varphi_1, \varphi_2)}{d(\xi_{s_3}, \xi_{s_4})}$$

d'où l'on déduit

$$\frac{\xi_{s_2}\,d\xi_{s_1} - \xi_{s_1}\,d\xi_{s_2}}{dt} = \frac{1}{C}\,\frac{d(\varphi_1, \varphi_2)}{d(\xi_{s_3}, \xi_{s_4})}. \tag{8 b}$$

On tire de là qu'*une substitution linéaire ne change pas la forme des équations différentielles.*

Article II.

1. Nous voulons maintenant appliquer les résultats de l'article précédent au cas où f_1 et f_2 sont des fonctions entières de 2e degré par rapport à p, q, r.

On aura alors

$$\left\{\begin{aligned} f_1 &= \frac{1}{2}(a_{11}\,p^2 + a_{22}\,q^2 + a_{33}\,r^2) + a_{23}\,qr + a_{31}\,rp + a_{12}\,pq \\ &\qquad + a_{14}\,p + a_{24}\,q + a_{34}\,r + a\,, \\ f_2 &= \frac{1}{2}(b_{11}\,p^2 + b_{22}\,q^2 + b_{33}\,r^2) + b_{23}\,rq + b_{31}\,rp + b_{12}\,pq \\ &\qquad + b_{14}\,p + b_{24}\,q + b_{34}\,r + b\,. \end{aligned}\right. \tag{9 b}$$

(4) BALTZER, *Theorie und Anwendungen der Determinanten,* III Auflage, page 50.

En posant

$$a - h_1 = \frac{1}{2} a_{44} \quad , \quad b - h_2 = \frac{1}{2} b_{44}$$

on trouvera

$$(9'_b) \qquad \varphi_1 = \frac{1}{2} \Sigma_i \Sigma_s a_{i,s} x_i x_s \quad , \quad \varphi_2 = \frac{1}{2} \Sigma_i \Sigma_s b_{i,s} x_i x_s$$

et par la substitution (7_b) on pourra reduire φ_1 et φ_2 aux formes suivantes

$$(10_b) \qquad \begin{cases} \varphi_1 = \frac{1}{2} (\lambda_1 \xi_1^2 + \lambda_2 \xi_2^2 + \lambda_3 \lambda_3^2 + \lambda_4 \xi_4^2), \\ \varphi_2 = \frac{1}{2} (\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 + \xi_4^2). \end{cases}$$

Il suffit pour cela que l'on ait

$$(11_b) \qquad \begin{cases} \Sigma_i \Sigma_s b_{i,s} c_{i,h} c_{s,h} = 1 , \\ \Sigma_i \Sigma_s b_{i,s} c_{i,h} c_{s,k} = 0 , \end{cases} \qquad (h \gtrless k)$$

$$(11'_b) \qquad \begin{cases} \Sigma_i \Sigma_s a_{i,s} c_{i,h} c_{s,h} = \lambda_h , \\ \Sigma_i \Sigma_s a_{i,s} c_{i,h} c_{s,k} = 0 . \end{cases} \qquad (h \gtrless k)$$

Les quantités λ_i seront les racines de l'équation de quatrième degré par rapport à λ

$$(12_b) \qquad \mathfrak{f}(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda b_{11} , a_{12} - \lambda b_{12} , a_{13} - \lambda b_{13} , a_{14} - \lambda b_{14} \\ a_{21} - \lambda b_{21} , a_{22} - \lambda b_{22} , a_{23} - \lambda b_{23} , a_{24} - \lambda b_{24} \\ a_{31} - \lambda b_{31} , a_{32} - \lambda b_{32} , a_{33} - \lambda b_{33} , a_{34} - \lambda b_{34} \\ a_{41} - \lambda b_{41} , a_{42} - \lambda b_{42} , a_{43} - \lambda b_{43} , a_{44} - \lambda b_{44} \end{vmatrix} = 0 .$$

Par suite, si B est le discriminant de la forme φ_2, on aura

$$\mathfrak{f}(\lambda) = B (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3)(\lambda - \lambda_4) .$$

2. Supposons que les racines soient différentes entre elles.

Soient $\alpha_{r,s}$ les éléments adjoints aux éléments du déterminant (12_b). Nous les désignerons par un suffixe $\alpha_{r,s}^{(i)}$ lorsqu'on remplacera λ par λ_i.

On trouve alors les égalités

$$\frac{c_{1,s}}{\alpha_{1,r}^{(s)}} = \frac{c_{2,s}}{\alpha_{2,r}^{(s)}} = \frac{c_{3,s}}{\alpha_{3,r}^{(s)}} = \frac{c_{4,s}}{\alpha_{4,r}^{(s)}} = \sqrt{\frac{\Sigma_h \Sigma_k b_{h,k} c_{h,s} c_{k,s}}{\Sigma_h \Sigma_k b_{h,k} \alpha_{h,r}^{(s)} \alpha_{k,r}^{(s)}}} = \theta_s .$$

Mais par un théorème sur les déterminants on a [5]

$$\alpha_{h,r}^{(s)} \alpha_{k,r}^{(s)} = \alpha_{r,r}^{(s)} \alpha_{h,k}^{(s)}$$

(5) BALTZER, *Theorie und Anwendungen dér Determinanten*, III Auflage, page 54.

par suite, à cause de la première des équations (11 *b*)

$$\theta = \frac{1}{\sqrt{\alpha^{(s)}_{r,r} \Sigma_h \Sigma_k b_{h,k} \alpha^{(s)}_{h,k}}} .$$

Dérivons l'équation (12 *b*). Nous trouverons

$$\mathfrak{r}'(\lambda) = -\Sigma_h \Sigma_k b_{h,k} \alpha_{h,k} ,$$

et, ayant égard à l'égalité (13 *b*).

$$\Sigma_h \Sigma_k b_{hk} \alpha^{(s)}_{hk} = -\mathfrak{r}'(\lambda_s) = \mathrm{B}(\lambda_{s+1} - \lambda_s)(\lambda_{s+2} - \lambda_s)(\lambda_{s+3} - \lambda_s) .$$

Par suite

$$(14\,b) \qquad c_{i,s} = \frac{\alpha^{(s)}_{i,r}}{\sqrt{\alpha^{(s)}_{r,r} \mathrm{B}(\lambda_{s+1} - \lambda_s)(\lambda_{s+2} - \lambda_s)(\lambda_{s+3} - \lambda_s)}}$$

$$= \sqrt{\frac{\alpha^{(s)}_{i,i}}{\mathrm{B}(\lambda_{s+1} - \lambda_s)(\lambda_{s+2} - \lambda_s)(\lambda_{s+3} - \lambda_s)}} .$$

Enfin, si l'on fait usage de la règle pour calculer le produit des déterminants on trouve

$$\mathrm{BC}^2 = 1$$

d'où

$$(15\,b) \qquad \mathrm{C} = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{B}}} .$$

3. Les équations (8 *b*), à cause des formules (10 *b*), deviendront

$$\frac{\xi_{s_2} d\xi_{s_1} - \xi_{s_1} d\xi_{s_2}}{dt} = \frac{1}{\mathrm{C}} (\lambda_{s_3} - \lambda_{s_4}) \xi_{s_3} \xi_{s_4} .$$

Posons

$$(16\,b) \qquad \xi_1 = \mu_1 \sigma_1(u) \quad , \quad \xi_2 = \mu_2 \sigma_2(u) \quad , \quad \xi_3 = \mu_3 \sigma_3(u) \quad , \quad \xi_4 = \mu_4 \sigma(u)$$

$\sigma, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ étant les quatre fonctions de WEIERSTRASS. Alors les équations précédentes deviendront

$$\mu_{(r)} \mu_{(r+1)} (\sigma'_{(r)} \sigma_{(r+1)} - \sigma_{(r)} \sigma'_{(r+1)}) \frac{du}{dt} = \frac{1}{\mathrm{C}} (\lambda_{(r+2)} - \lambda_4) \mu_{(r+2)} \mu_4 \sigma_{(r+2)} \sigma ,$$

$$\mu_4 \mu_{(r+2)} (\sigma'_{(r+2)} \sigma - \sigma_{(r+2)} \sigma') \frac{du}{dt} = \frac{1}{\mathrm{C}} (\lambda_{(r)} - \lambda_{(r+1)}) \mu_{(r)} \mu_{(r+1)} \sigma_{(r)} \sigma_{(r+1)} .$$

Mais entre les fonctions σ subsistent les relations différentielles (6)

$$\sigma'_{(r)} \sigma_{(r+1)} - \sigma_{(r)} \sigma'_{(r+1)} = (e_{(r+1)} - e_{(r)}) \sigma_{(r+2)} \sigma ,$$

$$\sigma'_{(r+1)} \sigma - \sigma_{(r+1)} \sigma' = -\sigma_{(r)} \sigma_{(r+1)} ,$$

par suite les équations précédentes pourront s'écrire

$$\mu_{(r)} \mu_{(r+1)} (e_{(r+1)} - e_{(r)}) \frac{du}{dt} = \frac{1}{\mathrm{C}} (\lambda_{(r+2)} - \lambda_4) \mu_{(r+2)} \mu_4 ,$$

(6) WEIERSTRASS, *Formeln und Lehrsätze zum Gebrauch der elliptischen Functionen*, page 28.

$$\mu_4\,\mu_{(r+2)}\,\frac{du}{dt}=\frac{1}{C}\left(\lambda_{(r+1)}-\lambda_{(r)}\right)\mu_{(r)}\,\mu_{(r+1)}$$

d'où l'on tire

$$\frac{\mu_{(r)}\mu_{(r+1)}}{\mu_4\,\mu_{(r+2)}}=\frac{(\lambda_{(r+2)}-\lambda_4)}{C\,(e_{(r+1)}-e_{(r)})}\,\frac{dt}{du}=\frac{C}{(\lambda_{(r+1)}-\lambda_{(r)})\,\dfrac{dt}{du}}\;; \tag{17 b}$$

par conséquent on aura

$$e_{(r+1)}-e_{(r)}=\frac{1}{C^2}\,\lambda_{(r+2)}-\lambda_{(r)})\,(\lambda_{(r+1)}-\lambda_{(r)})\left(\frac{dt}{du}\right)^2 \tag{18 b}$$

et enfin

$$k^2=\frac{e_2-e_3}{e_1-e_3}=\frac{\lambda_1-\lambda_4}{\lambda_1-\lambda_3}\;:\;\frac{\lambda_2-\lambda_4}{\lambda_2-\lambda_3}\,. \tag{19 b}$$

4. Des équations (17 *b*) on déduit

$$\mu_{(r+2)}^2\,\frac{\mu_4}{\mu_{(r)}\mu_{(r+1)}\mu_{(r+2)}}=\frac{1}{C}\left(\lambda_{(r+1)}-\lambda_{(r)}\right)\frac{dt}{du}\,,$$

$$\frac{\mu_{(r)}^2\,\mu_{(r+1)}^2}{\mu_4^2\,\mu_{(r+2)}^2}=\frac{\lambda_{(r+2)}-\lambda_4}{(e_{(r+1)}-e_{(r)})\,(\lambda_{(r+1)}-\lambda_{(r)})}\;;$$

c'est pourquoi on aura

$$\frac{\mu_{(r)}}{\sqrt{\lambda_{(r+2)}-\lambda_{(r+1)}}}=\frac{\mu_{(r+1)}}{\sqrt{\lambda_{(r)}-\lambda_{(r+2)}}}=\frac{\mu_{(r+2)}}{\sqrt{\lambda_{(r+1)}-\lambda_{(r)}}} \tag{20 b}$$

$$=\frac{\mu_4}{\sqrt{(e_{(r+1)}-e_{(r)})\,\dfrac{(\lambda_{(r+2)}-\lambda_{(r+1)})\,(\lambda_{(r)}-\lambda_{(r+2)})}{\lambda_{(r+2)}-\lambda_4}}}\,.$$

Or (voir (7 *b*) et (16 *b*))

$$x_i=\Sigma_s\,c_{i,s}\,\mu_s\,\sigma_s$$

donc, en calculant par les formules (3 *b*), (14 *b*) et (20 *b*) les expressions de p, q, r et en retranchant les facteurs communs aux numérateurs et aux dénominateurs on trouvera

$$\left\{\begin{aligned}
p&=\frac{\sum_{1}^{3}{}_r\,A_{1,r}\,\sigma_r+A_{1,4}\,\sigma}{\sum_{1}^{3}{}_r\,A_{4,r}\,\sigma_r+A_{4,4}\,\sigma}\,,\\
q&=\frac{\sum_{1}^{3}{}_r\,A_{2,r}\,\sigma_r+A_{2,4}\,\sigma}{\sum_{2}^{3}{}_r\,A_{4,r}\,\sigma_r+A_{4,4}\,\sigma}\,,\\
r&=\frac{\sum_{1}^{3}{}_r\,A_{3,r}\,\sigma_r+A_{3,4}\,\sigma}{\sum_{1}^{3}{}_r\,A_{4,r}\,\sigma_r+A_{4,4}\,\sigma}\,.
\end{aligned}\right. \tag{21 b}$$

où l'on a posé pour simplifier

$$(22\,b)\quad \left\{\begin{aligned}
A_{i,1} &= \sqrt{\frac{\alpha^{(1)}_{i,i}(\lambda_3-\lambda_2)}{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_4-\lambda_1)}}\,,\\
A_{i,2} &= \sqrt{\frac{\alpha^{(2)}_{i,i}(\lambda_1-\lambda_3)}{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_3-\lambda_2)(\lambda_4-\lambda_2)}}\,,\\
A_{i,3} &= \sqrt{\frac{\alpha^{(3)}_{i,i}(\lambda_2-\lambda_1)}{(\lambda_1-\lambda_3)(\lambda_2-\lambda_3)(\lambda_4-\lambda_3)}}\,,\\
A_{i,4} &= \frac{1}{\lambda_{(r+2)}-\lambda_4}\sqrt{\alpha^{(4)}_{i,i}\,(e_{(r+1)}-e_{(r)})\,\frac{(\lambda_{(r+2)}-\lambda_{(r+1)})\,(\lambda_{(r)}-\lambda_{(r+2)})}{(\lambda_4-\lambda_{(r+1)})\,(\lambda_4-\lambda_{(r+2)})}}\,.
\end{aligned}\right.$$

Pour trouver la relation qui subsiste entre la variable t et l'argument u des fonctions σ, il suffit de résoudre l'équation (18 *b*) par rapport à dt/du. Si on intègre après, ayant égard à l'équation (15 *b*), on trouve

$$(23\,b)\qquad t = \sqrt{\frac{e_{(r+1)}-e_{(r)}}{B\,(\lambda_{(r+2)}-\lambda_4)\,(\lambda_{(r+1)}-\lambda_{(r)})}}\,(u-u_0)\,,$$

u_0 étant une constante arbitraire.

On a donc pu intégrer les équations (1 *b*) lorsque f_1 et f_2 sont des fonctions de 2e degré. Les intégrales trouvées sont des fonctions doublement périodiques de la variable t.

Article III.

1. On peut appliquer l'intégration générale de l'article précédent au cas des équations différentielles (3). Il suffit de prendre (voir chap. I, art. V, § 2):

$$f_1 = \frac{1}{2\sqrt{ABC}}\,[(Ap+m_1)^2+(Bq+m_2)^2+(Cr+m_3)^2],$$

$$f_2 = \frac{1}{2\sqrt{ABC}}\,[Ap^2+Bq^2+Cr^2],$$

$$h_1 = \frac{K^2}{2\sqrt{ABC}}\quad,\quad h_2 = \frac{h}{\sqrt{ABC}}$$

pour réduire les équations différentielles (3) aux (1 *b*) et les intégrales (4) et (5) aux intégrales (2 *b*).

2. L'équation de quatrième degré (12 *b*) devient

$$\mathfrak{r}(\lambda) = \begin{vmatrix} A^2-\lambda A\,, & 0 & , & 0 & , & Am_1\\ 0 & , B^2-\lambda B\,, & & 0 & , & Bm_2\\ 0 & , & 0 & , C^2-\lambda C\,, & & Cm_3\\ Am_1 & , & Bm_2 & , & Cm_3 & , 2h\lambda-K_1 \end{vmatrix} = 0,$$

où nous avons posé

$$K_1 = K^2 - m_1^2 - m_2^2 - m_3^2. \tag{24 b}$$

En développant le détérminant on trouve, aprés avoir divisé par ABC,

$$\frac{f(\lambda)}{ABC} = (A-\lambda)(B-\lambda)(C-\lambda)(K_1 - 2h\lambda) + Am_1^2(B-\lambda)(C-\lambda) + Bm_2^2(C-\lambda)(A-\lambda) + Cm_3^2(A-\lambda)(B-\lambda) = 0 \tag{25 b}$$

et si l'on divise par $(A-\lambda)(B-\lambda)(C-\lambda)$

$$\frac{Am_1^2}{A-\lambda} + \frac{Bm_2^2}{B-\lambda} + \frac{Cm_3^2}{C-\lambda} - 2\lambda h + K_1 = 0. \tag{25' b}$$

A cause de l'égalité (24 b) cette équation pourra s'écrire encore

$$\frac{m_1^2}{A-\lambda} + \frac{m_2^2}{B-\lambda} + \frac{m_3^2}{C-\lambda} + \frac{K^2}{\lambda} = 2h. \tag{25'' b}$$

Nous supposerons que les racines soient simples, que m_1, m_2, m_3 ne soient pas nuls et que les trois quantités A, B, C soient différentes entre elles. Dans ces hypothèses, aucune des racines ne sera égale à A, ni à B, ni à C.

3. Nous aurons, par des calculs sans difficulté,

$$\sqrt{\alpha_{1,1}^{(s)}} = \frac{\alpha_{1,4}^{(s)}}{\sqrt{\alpha_{4,4}^{(s)}}} = m_1 \sqrt{\frac{(\lambda_s - B)(\lambda_s - C)}{\lambda_s - A}},$$

$$\sqrt{\alpha_{2,2}^{(s)}} = \frac{\alpha_{2,4}^{(s)}}{\sqrt{\alpha_{4,4}^{(s)}}} = m_2 \sqrt{\frac{(\lambda_s - C)(\lambda_s - A)}{\lambda_s - B}},$$

$$\sqrt{\alpha_{3,3}^{(s)}} = \frac{\alpha_{3,4}^{(s)}}{\sqrt{\alpha_{4,4}^{(s)}}} = m_3 \sqrt{\frac{(\lambda_s - A)(\lambda_s - B)}{\lambda_s - C}},$$

$$\sqrt{\alpha_{4,4}^{(s)}} = \sqrt{(\lambda_s - A)(\lambda_s - B)(\lambda_s - C)}.$$

Si l'on substitue ces valeurs de $\sqrt{\alpha_{i,i}^{(s)}}$ dans les formules (22 b) les équations (21 b) deviennent

$$\left\{\begin{aligned}
p &= m_1 \frac{\dfrac{M_1}{\lambda_1 - A}\sigma_1 + \dfrac{M_2}{\lambda_2 - A}\sigma_2 + \dfrac{M_3}{\lambda_3 - A}\sigma_3 + \dfrac{M_4}{\lambda_4 - A}\sigma}{M_1\sigma_1 + M_2\sigma_2 + M_3\sigma_3 + M_4\sigma},\\
q &= m_2 \frac{\dfrac{M_1}{\lambda_1 - B}\sigma_1 + \dfrac{M_2}{\lambda_2 - B}\sigma_2 + \dfrac{M_3}{\lambda_3 - B}\sigma_3 + \dfrac{M_4}{\lambda_4 - B}\sigma}{M_1\sigma_1 + M_2\sigma_2 + M_3 + \sigma_3 + M_4\sigma},\\
r &= m_3 \frac{\dfrac{M_1}{\lambda_1 - C}\sigma_1 + \dfrac{M_2}{\lambda_2 - C}\sigma_2 + \dfrac{M_3}{\lambda_3 - C}\sigma_3 + \dfrac{M_4}{\lambda_4 - C}\sigma}{M_1\sigma_1 + M_2\sigma_2 + M_3\sigma_3 + M_4\sigma},
\end{aligned}\right. \tag{26 b}$$

ayant posé

$$(27\,b)\quad\left\{\begin{aligned}
M_1 &= \sqrt{\frac{\lambda_3-\lambda_2}{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_4-\lambda_1)}}\sqrt{(\lambda_1-A)(\lambda_1-B)(\lambda_1-C)}\,,\\
M_2 &= \sqrt{\frac{\lambda_1-\lambda_3}{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_3-\lambda_2)(\lambda_4-\lambda_2)}}\sqrt{(\lambda_2-A)(\lambda_2-B)(\lambda_2-C)}\,,\\
M_3 &= \sqrt{\frac{\lambda_2-\lambda_1}{(\lambda_1-\lambda_3)(\lambda_2-\lambda_3)(\lambda_4-\lambda_3)}}\sqrt{(\lambda_3-A)(\lambda_3-B)(\lambda_3-C)}\,,\\
M_4 &= \sqrt{(e_{(r+1)}-e_{(r)})\frac{(\lambda_{(r+2)}-\lambda_{(r+1)})(\lambda_{(r)}-\lambda_{(r+2)})}{(\lambda_4-\lambda_{(r+1)})(\lambda_4-\lambda_{(r)})}}\,\frac{\sqrt{(\lambda_4-A)(\lambda_4-B)(\lambda_4-C)}}{\lambda_{(r+2)}-\lambda_4}\,.
\end{aligned}\right.$$

Pour trouver l'équation du temps il suffit d'observer que le discriminant B de la forme φ_2 dans notre cas se réduit à

$$B = -\frac{2h}{ABC}\,.$$

En substituant cette valeur dans l'équation $(23\,b)$ on trouve

$$(27'\,b)\qquad t = \sqrt{\frac{ABC}{2h}\,\frac{e_{(r)}-e_{(r+1)}}{(\lambda_{(r+2)}-\lambda_4)(\lambda_{(r+1)}-\lambda_{(r)})}}\,(u-u_0)\,.$$

On peut donc énoncer la proposition: *Si l'on a un corps, à l'intérieur duquel existent des mouvements stationnaires et qui n'est soumis à aucun couple de rotation, les trois composantes de la rotation par rapport au centre de gravité sont des fonctions elliptiques du temps.*

Le problème de la rotation est donc résolu par les formules de cet article, pour ce qui a rapport aux trois composantes de la rotation.

Article IV.

1. Afin que la solution analytique du problème soit complète, il faut déterminer les neuf cosinus des angles que font les axes principaux avec le système d'axes fixes. On les a appelés dès le commencement (voir Introduction) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$; $\beta_1, \beta_2, \beta_3$; $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$.

Nous avons déjà déterminé p, q, r; il suffit donc d'intégrer les équations de POISSON (voir Introduction (2))

$$\begin{aligned}
\frac{d\alpha_1}{dt} &= \alpha_2 r - \alpha_2 q\,, & \frac{d\beta_1}{dt} &= \beta_2 r - \beta_3 q\,, & \frac{d\gamma_1}{dt} &= \gamma_2 r - \gamma_3 q\,,\\
\frac{d\alpha_2}{dt} &= \alpha_3 p - \alpha_1 r\,, & \frac{d\beta_2}{dt} &= \beta_3 p - \beta_1 r\,, & \frac{d\gamma_2}{dt} &= \gamma_3 p - \gamma_1 r\,,\\
\frac{d\alpha_3}{dt} &= \alpha_1 q - \alpha_2 p\,, & \frac{d\beta_3}{dt} &= \beta_1 q - \beta_2 p\,, & \frac{d\gamma_3}{dt} &= \gamma_1 q - \gamma_2 p\,.
\end{aligned}$$

2. Avant d'aborder cette question dans le cas particulier du problème que nous occupe, nous envisagerons le cas tout à fait général et nous don-

neros dans cet article un *théorème sur la rotation des corps* qui simplifiera beaucoup tous les calculs que nous allons faire. Posons [7]

$$A_1 = \alpha_1 + i\beta_1 \quad , \quad A_2 = \alpha_2 + i\beta_2 \quad , \quad A_3 = \alpha_3 + i\beta_3$$

on aura les relations bien connues [8]

$$A_1\gamma_1 + A_2\gamma_2 + A_3\gamma_3 = 0 ,$$
$$iA_1 - A_2\gamma_3 + A_3\gamma_2 = 0$$

d'où l'on tire

$$(28\,b) \qquad \left\{ \begin{aligned} A_2 &= \frac{-\gamma_1\gamma_2 + i\gamma_3}{\gamma_2^2+\gamma_3^2} A_1 , \\ A_3 &= \frac{-\gamma_1\gamma_3 - i\gamma_2}{\gamma_2^2+\gamma_3^2} A_1 \end{aligned} \right.$$

et par suite on a que A_2, A_3 peuvent s'exprimer rationnellement par γ_1, γ_2, γ_3, A_1.

Soit

$$B_1 = \alpha_1 - i\beta_1 \quad , \quad B_2 = \alpha_2 - i\beta_2 \quad , \quad B_3 = \alpha_3 - i\beta_3 ;$$

nous pourrons écrire aussi

$$B_1 = \frac{1-\gamma_1^2}{A_1} \quad , \quad B_2 = \frac{1-\gamma_2^2}{A_2} \quad , \quad B_3 = \frac{1-\gamma_3^2}{A_3} .$$

Par conséquent B_1, B_2, B_3 pourront de même être représentés rationnellement par γ_1, γ_2, γ_3, A_1, et de là on déduit que les six cosinus α_1, α_2, α_3; β_1, β_2, β_3 seront des fonctions rationnelles des mêmes quantités.

Observons enfin que

$$\gamma_2 - i\gamma_3 = \frac{1-\gamma_1^2}{\gamma_2 + i\gamma_3} ,$$

donc [9] *les neuf cosinus sont des fonctions rationnelles des trois quantités*

$$(29\,b) \qquad 1+\gamma_1 \quad , \quad \gamma_2 + i\gamma_3 \quad , \quad \alpha_1 + i\beta_1 .$$

On déduit des équations de POISSON

$$\frac{dA_1}{dt} = A_2 r - A_2 q ;$$

par suite, ayant égard aux équations (28 *b*), nous obtiendrons

$$(30\,b) \qquad \frac{1}{A_1}\frac{dA_1}{dt} = \frac{-\gamma_1(\gamma_2 r - \gamma_3 q) + i(\gamma_3 r + \gamma_2 q)}{\gamma_2^2+\gamma_3^2} ,$$

ce qui démontre que lorsqu'on connaît p, q, r; γ_1, γ_2, γ_3, il suffit d'une seule quadrature pour obtenir tous les cosinus.

(7) Voir BRILL, *Sul problema della rotazione dei corpi.* « Annali di Mat. », T. III, S. II.
(8) Voir HERMITE, *Sur quelques applications des foctions elliptiques.* XII, page 27.
(9) VOIR HALPHEN, *Traité des fonctions elliptiques.* T, II, page 11.

3. Les propriétés précédentes rappelées, nous allons démontrer le théorème suivant:

Si $p, q, r; \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ *sont des fonctions uniformes du temps dont les points singuliers sont des pôles, et si dans tout point singulier l'ordre d'infini d'une des fonctions* $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ *n'est pas dépassé par l'ordre d'infini des fonctions* p, q, r, *alors les neuf cosinus seront des fonctions uniformes du temps et tous leurs points singuliers seront des pôles.*

En effet, si $p, q, r; \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ n'ont que des pôles pour points singuliers, on pourra écrire

$$p = \frac{P}{D} \quad , \quad q = \frac{Q}{D} \quad , \quad r = \frac{R}{D} ,$$

$$\gamma_1 = \frac{\Gamma_1}{D} \quad , \quad \gamma_2 = \frac{\Gamma_2}{D} \quad , \quad \gamma_3 = \frac{\Gamma_3}{D} ,$$

$P, Q, R; \Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$; D étant des fonctions entières. Supposons qu'on ait retranché toutes les racines communes à ces fonctions, alors on pourra dire que $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, D$ n'auront pas des racines communes. Pour le voir il suffit d'observer que si $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, D$ avaient une racine qui ne fût pas une racine de P, Q, R, une au moins des fonctions p, q, r deviendrait infinie d'ordre supérieur aux trois fonctions $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ pour t égal à cette racine, ce qui est contraire aux hypothèses qu'on a faites.

Cela posé, on peut transformer l'équation (30 *b*) en écrivant

$$\frac{1}{A_1}\frac{dA_1}{dt} = \frac{(1-\gamma_1)(\gamma_2 r - \gamma_3 q) - (\gamma_2 - i\gamma_3)(r - iq)}{\gamma_2^2 + \gamma_3^2}$$

$$= \frac{-(1+\gamma_1)(\gamma_2 r - \gamma_3 q) + (\gamma_2 + i\gamma_3)(r + iq)}{\gamma_2^2 + \gamma_3^2} .$$

Mais

$$\gamma_2^2 + \gamma_3^2 = (1-\gamma_1)(1+\gamma_1) = (\gamma_2 - i\gamma_3)(\gamma_2 + i\gamma_3)$$

par suite

$$\frac{1}{A_1}\frac{dA_1}{dt} = \frac{\gamma_2 r - \gamma_3 q}{1+\gamma_1} - \frac{r - iq}{\gamma_2 + i\gamma_3} = -\frac{\gamma_2 r - \gamma_3 q}{1-\gamma_1} + \frac{r+iq}{\gamma_2 - i\gamma_3} .$$

Si on a égard à l'égalité

$$\gamma_2 r - \gamma_3 q = \frac{d\gamma_1}{dt} ,$$

l'équation précédente deviendra

$$\frac{1}{A_1}\frac{dA_1}{dt} = \frac{d}{dt}\log(1+\gamma_1) - \frac{r-iq}{\gamma_2 + i\gamma_3} = \frac{d}{dt}\log(1-\gamma_1) + \frac{r+iq}{\gamma_2 - i\gamma_3} ,$$

c'est à dire

$$(31\ b) \qquad \frac{1}{A_1}\frac{dA_1}{dt} = \frac{d}{dt}\log\left(\frac{D+\Gamma_1}{D}\right) - \frac{R - iQ}{\Gamma_2 + i\Gamma_3} = \frac{d}{dt}\log\left(\frac{D-\Gamma_1}{D}\right) + \frac{R+iQ}{\Gamma_2 - i\Gamma_3} .$$

Les pôles de la fonction $(1/A_1)(dA_1/dt)$ seront les valeurs de t qui annullent une ou plusieurs des quantités

$$D + \Gamma_1 \quad , \quad D - \Gamma_1 \quad , \quad D \quad , \quad \Gamma_2 + i\Gamma_3 \quad , \quad \Gamma_2 - i\Gamma_3 .$$

Soit t_0 une de ces valeurs. Nous pouvons distinguer deux cas.

Si t_0 n'est pas en même temps une racine de Γ_2 et Γ_3, alors $\Gamma_2 + i\Gamma_3$ et $\Gamma_2 - i\Gamma_3$ ne seront pas nuls à la fois. Il en suit que l'infini de $(1/A_1)\,(dA_1/dt)$ dépendra du terme $\frac{d}{dt}\log\left(\frac{D+\Gamma_1}{D}\right)$ ou du terme $\frac{d}{dt}\log\left(\frac{D-\Gamma_1}{D}\right)$. Mais chacune de ces fonctions est la dérivée logarithmique du rapport de deux fonctions entières, donc dans ce cas $(1/A_1)\,(dA_1/dt)$ *sera infini de premier ordre et le résidu sera un nombre entier.*

Examinons maintenant le cas où t_0 est une racine de Γ_2 et de Γ_3. Alors $\Gamma_2 + i\Gamma_3$ et $\Gamma_2 - i\Gamma_3$ seront nuls à la fois, et puisque

$$(D+\Gamma_1)\,(D-\Gamma_1) = (\Gamma_2 + i\Gamma_3)\,(\Gamma_2 - i\Gamma_3)$$

il faudra qu'un des facteurs du premier membre soit nul. Mais les deux facteurs ne sauraient pas être nuls simultanément, parce que D, Γ_1, Γ_2, Γ_3 n'ont aucune racine commune.

On tire de là que

$$\lim_{t=t_0}\frac{\Gamma_1}{D} = \pm 1. \tag{32 b}$$

Calculons la dérivée de $\gamma_2 \pm i\gamma_3$. On aura

$$\frac{d}{dt}(\gamma_2 \pm i\gamma_3) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\Gamma_2 \pm i\Gamma_3}{D}\right) = \frac{1}{D^2}\left(D\,\frac{d(\Gamma_2 \pm i\Gamma_3)}{dt} - (\Gamma_2 \pm i\Gamma_3)\,\frac{dD}{dt}\right).$$

Mais des équations de Poisson on déduit

$$\frac{d}{dt}(\gamma_2 \pm i\gamma_3) = \mp\, ip\,(\gamma_2 \pm i\gamma_3) - \gamma_1\,(r \pm iq)$$

$$= \frac{1}{D_2}\{\mp\, iP\,(\Gamma_2 \pm i\Gamma_3) - \Gamma_1\,(R \mp iQ)\},$$

par suite

$$\frac{d(\Gamma_2 \pm i\Gamma_3)}{dt} = \frac{1}{D}(\Gamma_2 \pm i\Gamma_3)\left(\frac{dD}{dt} \mp iP\right) - \frac{\Gamma_1}{D}(R \mp iQ)$$

et enfin

$$\frac{R \mp iQ}{\frac{d}{dt}(\Gamma_2 \pm i\Gamma_3)} = \frac{R \mp iQ}{\frac{1}{D}(\Gamma_2 \mp i\Gamma_3)\left(\frac{dD}{dt} \mp iP\right) - \frac{\Gamma_1}{D}(R \mp iQ)}. \tag{34 b}$$

Soit t_0 une racine de $\Gamma_2 \pm i\Gamma_3$ d'ordre n, alors elle sera une racine d'ordre $n-1$ de $d/dt\,(\Gamma_2 \pm i\Gamma_3)$. L'équation (33 *b*) nous montre qu'elle sera aussi une racine d'ordre $n-1$ de $R \mp iQ$, et par conséquent le rapport

$$\frac{R \mp iQ}{\Gamma_2 \pm i\Gamma_3} \tag{35 b}$$

deviendra pour $t = t_0$ infini de premier ordre. Ayons égard maintenant aux deux expressions (31 *b*) que nous avons trouvé pour $(1/A_1)\,(dA_1/dt)$. Le premier terme de l'une ou de l'autre sera fini pour $t = t_0$, donc $(1/A_1)\,(dA_1/dt)$

sera infini de premier ordre. Pour calculer le résidu, il suffira de déterminer le résidu du rapport (35 *b*) qui sera égal à

$$\rho = n \lim_{t=t_0} \frac{R \mp iQ}{\frac{d}{dt}(\Gamma_2 \pm i\Gamma_3)}.$$

On peut faire usage de la formule (34 *b*), et on a alors

$$\rho = n \lim_{t=t_0} \frac{R \mp iQ}{\frac{1}{D}(\Gamma_2 \pm i\Gamma_3)\left(\frac{dD}{dt} \mp iP\right) - \frac{\Gamma_1}{D}(R \mp iQ)}$$

$$= n \lim_{t=t_0} \frac{-\frac{D}{\Gamma_1}}{1 - \frac{1}{\Gamma_1}\frac{\Gamma_2 \pm i\Gamma_3}{R \mp iQ}\left(\frac{dD}{dt} \mp iP\right)} = n \lim_{t=t_0}\left(-\frac{D}{\Gamma_1}\right),$$

ce qui montre (voir (32 *b*)) que le résidu est un nombre entier; à savoir $\pm n$.

Nous pouvons donc conclure que *dans tous les cas les singularités de la fonction*

$$\frac{1}{A_1}\frac{dA_1}{dt} = \frac{d}{dt}\log A_1$$

sont des pôles de premier ordre, les résidus étant des nombres entiers. Par conséquent, A_1 sera une fonction uniforme ayant pour singularités des pôles, et les neuf cosinus qui sont des fonctions rationnelles de $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, A_1$ seront aussi des fonctions de la même nature.

C. Q. F. D.

4. On peut énoncer le théorème du paragraphe précédent d'une autre manière.

Si on a

$$(36\,b)\qquad p = \frac{P}{D}\ ,\quad q = \frac{Q}{D}\ ,\quad r = \frac{R}{D}\ ;\quad \gamma_1 = \frac{\Gamma_1}{D}\ ,\quad \gamma_2 = \frac{\Gamma_2}{D}\ ,\quad \gamma_3 = \frac{\Gamma_3}{D}$$

P, Q, R; $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$; D *étant des fonctions uniformes et entières du temps*; *et si* $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, D$ *n'ont aucune racine commune*; *les neuf cosinus seront des fonctions uniformes et leurs singularités seront des pôles*.

En effet nous avons déjà vu que si dans chaque point singulier l'ordre d'infini d'une des fonctions $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ n'est pas dépassé par les ordres d'infini de p, q, r *il faut* que $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, D$ n'aient aucune racine commune. Démontrons maintenant la proposition reciproque. Soit n l'ordre de multiplicité d'une racine de D dans un point singulier. Il y aura une des fonctions $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ qui deviendra infinie d'ordre n et aucune des fonctions p, q, r deviendra infinie d'ordre supérieur.

Article V.

1. Pour vérifier si les conditions nécessaires et suffisantes pour l'application du théorème fondamental de l'article précédent sont satisfaites dans

le problème de rotation que nous étudions, il faut calculer $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$, ayant déjà calculé dans l'article III les quantités p, q, r.

Faisons coïncider l'axe z avec l'axe du couple de quantité de mouvement. On aura alors

$$\gamma_1 = \frac{Ap + m_1}{K} \quad , \quad \gamma_2 = \frac{Bq + m_2}{K} \quad , \quad \gamma_3 = \frac{Cr + m_3}{K}$$

et en substituant à p, q, r les valeurs qu'on a trouvées (voir article III (26 *b*))

$$(37\,b)\qquad \left\{\begin{aligned}
\gamma_1 &= \frac{m_1}{K}\,\frac{\dfrac{\lambda_1 M_1}{\lambda_1 - A}\sigma_1 + \dfrac{\lambda_2 M_2}{\lambda_2 - A}\sigma_2 + \dfrac{\lambda_3 M_3}{\lambda_3 - A}\sigma_3 + \dfrac{\lambda_4 M_4}{\lambda_4 - A}\sigma}{M_1\sigma_1 + M_2\sigma_2 + M_3\sigma_3 + M_4\sigma},\\
\gamma_2 &= \frac{m_2}{K}\,\frac{\dfrac{\lambda_1 M_1}{\lambda_1 - B}\sigma_1 + \dfrac{\lambda_2 M_2}{\lambda_2 - B}\sigma_2 + \dfrac{\lambda_3 M_3}{\lambda_3 - B}\sigma_3 + \dfrac{\lambda_4 M_4}{\lambda_4 - B}\sigma}{M_1\sigma_1 + M_2\sigma_2 + M_3\sigma_3 + M_4\sigma},\\
\gamma_3 &= \frac{m_3}{K}\,\frac{\dfrac{\lambda_1 M_1}{\lambda_1 - C}\sigma_1 + \dfrac{\lambda_2 M_2}{\lambda_2 - C}\sigma_2 + \dfrac{\lambda_3 M_3}{\lambda_3 - C}\sigma_3 + \dfrac{\lambda_4 M_4}{\lambda_4 - C}\sigma}{M_1\sigma_1 + M_2\sigma_2 + M_3\sigma_3 + M_4\sigma},
\end{aligned}\right.$$

Si donc on fait usage des notations de l'article précédent on trouve (voir article III (26 *b*))

$$(38\,b)\qquad \left\{\begin{aligned}
P &= m_1\left(\frac{M_1}{\lambda_1 - A}\sigma_1 + \frac{M_2}{\lambda_2 - A}\sigma_2 + \frac{M_3}{\lambda_3 - A}\sigma_3 + \frac{M_4}{\lambda_4 - A}\sigma\right),\\
Q &= m_2\left(\frac{M_1}{\lambda_1 - B}\sigma_1 + \frac{M_2}{\lambda_2 - B}\sigma_2 + \frac{M_3}{\lambda_3 - B}\sigma_3 + \frac{M_4}{\lambda_4 - B}\sigma\right),\\
R &= m_3\left(\frac{M_1}{\lambda_1 - C}\sigma_1 + \frac{M_2}{\lambda_2 - C}\sigma_2 + \frac{M_3}{\lambda_3 - C}\sigma_3 + \frac{M_4}{\lambda_4 - C}\sigma\right),
\end{aligned}\right.$$

$$(39\,b)\qquad \left\{\begin{aligned}
\Gamma_1 &= \frac{m_1}{K}\left(\frac{\lambda_1 M_1}{\lambda_1 - A}\sigma_1 + \frac{\lambda_2 M_2}{\lambda_2 - A}\sigma_2 + \frac{\lambda_3 M_3}{\lambda_3 - A}\sigma_3 + \frac{\lambda_4 M_4}{\lambda_4 - A}\sigma\right),\\
\Gamma_2 &= \frac{m_2}{K}\left(\frac{\lambda_1 M_1}{\lambda_1 - B}\sigma_1 + \frac{\lambda_2 M_2}{\lambda_2 - B}\sigma_2 + \frac{\lambda_3 M_3}{\lambda_3 - B}\sigma_3 + \frac{\lambda_4 M_4}{\lambda_4 - B}\sigma\right),\\
\Gamma_3 &= \frac{m_3}{K}\left(\frac{\lambda_1 M_1}{\lambda_1 - C}\sigma_1 + \frac{\lambda_2 M_2}{\lambda_2 - C}\sigma_2 + \frac{\lambda_3 M_3}{\lambda_3 - C}\sigma_3 + \frac{\lambda_4 M_4}{\lambda_4 - C}\sigma\right),\\
D &= M_1\sigma_1 + M_2\sigma_2 + M_3\sigma_3 + M_4\sigma.
\end{aligned}\right.$$

2. Démontrons maintenant que les quatre fonctions $\Gamma_1, \Gamma_2, , \Gamma_3$, D n'ont aucune racine commune. Cela suffira pour prouver que tous les neuf cosinus sont des fonctions uniformes ayant pour singularités de pôles.

Posons

$$M_1\sigma_1 = y_1 \quad , \quad M_2\sigma_2 = y_2 \quad , \quad M_3\sigma_3 = y_3 \quad , \quad M_4\sigma = y_4$$

et ayons égard à l'hypothèse qu'on a faite que m_1, m_2, m_3 ne sont pas nuls. Alors les équations

$$(40\,b)\qquad D = \Gamma_1 = \Gamma_2 = \Gamma_3 = 0$$

pourront s'écrire

$$(41\,b)\quad \begin{cases} y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 0, \\ \dfrac{\lambda_1}{\lambda_1 - A} y_1 + \dfrac{\lambda_2}{\lambda_2 - A} y_2 + \dfrac{\lambda_3}{\lambda_3 - A} y_3 + \dfrac{\lambda_4}{\lambda_4 - A} y_4 = 0, \\ \dfrac{\lambda_1}{\lambda_1 - B} y_1 + \dfrac{\lambda_2}{\lambda_2 - B} y_2 + \dfrac{\lambda_3}{\lambda_3 - B} y_3 + \dfrac{\lambda_4}{\lambda_4 - B} y_4 = 0, \\ \dfrac{\lambda_1}{\lambda_1 - C} y_1 + \dfrac{\lambda_2}{\lambda_2 - C} y_2 + \dfrac{\lambda_3}{\lambda_3 - C} y_3 + \dfrac{\lambda_4}{\lambda_4 - C} y_4 = 0. \end{cases}$$

Le déterminant des coefficients sera

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1, & 1, & 1, & 1 \\ \dfrac{\lambda_1}{\lambda_1 - A}, & \dfrac{\lambda_2}{\lambda_2 - A}, & \dfrac{\lambda_3}{\lambda_3 - A}, & \dfrac{\lambda_4}{\lambda_4 - A} \\ \dfrac{\lambda_1}{\lambda_1 - B}, & \dfrac{\lambda_2}{\lambda_2 - B}, & \dfrac{\lambda_3}{\lambda_3 - B}, & \dfrac{\lambda_4}{\lambda_4 - B} \\ \dfrac{\lambda_1}{\lambda_1 - C}, & \dfrac{\lambda_2}{\lambda_2 - C}, & \dfrac{\lambda_3}{\lambda_3 - C}, & \dfrac{\lambda_4}{\lambda_4 - C} \end{vmatrix}$$

et en le développant on trouvera

$$\Delta = \frac{ABC\,(B-A)\,(C-A)\,(C-B)\,(\lambda_1-\lambda_2)\,(\lambda_1-\lambda_3)\,(\lambda_1-\lambda_4)\,(\lambda_2-\lambda_3)\,(\lambda_2-\lambda_4)\,(\lambda_3-\lambda_4)}{(\lambda_1-A)\,(\lambda_2-A)\,(\lambda_3-A)\,(\lambda_4-A)\,(\lambda_1-B)\,(\lambda_2-B)\,(\lambda_3-B)\,(\lambda_4-B)\,(\lambda_1-C)\,(\lambda_2-C)\,(\lambda_3-C)\,(\lambda_4-C)}$$

Le premier membre de l'équation (25 *b*) peut s'écrire

$$\frac{\mathfrak{k}(\lambda)}{ABC} = 2h\,(\lambda-\lambda_1)\,(\lambda-\lambda_2)\,(\lambda-\lambda_3)\,(\lambda-\lambda_4) = (A-\lambda)\,(B-\lambda)\,(C-\lambda)\,(K_1-2h\lambda)$$
$$+ Am_1^2\,(B-\lambda)\,(C-\lambda) + Bm_2^2\,(C-\lambda)\,(A-\lambda) + Cm_3^2\,(A-\lambda)\,(B-\lambda).$$

En faisant successivement $\lambda = A, B, C$ on aura

$$(A-\lambda_1)\,(A-\lambda_2)\,(A-\lambda_3)\,(A-\lambda_4) = \frac{Am_1^2\,(B-A)\,(C-A)}{2h},$$

$$(B-\lambda_1)\,(B-\lambda_2)\,(B-\lambda_3)\,(B-\lambda_4) = \frac{Bm_2^2\,(C-B)\,(A-B)}{2h},$$

$$(C-\lambda_1)\,(C-\lambda_2)\,(C-\lambda_3)\,(C-\lambda_4) = \frac{Cm_3^2\,(A-C)\,(B-C)}{2h}.$$

Par suite le dénominateur de Δ sera égal à

$$-\frac{ABCm_1^2 m_2^2 m_3^2\,(B-A)^2\,(C-A)^2\,(C-B)^2}{8h^3}$$

et par conséquent

$$\Delta = 8h_3\,\frac{(\lambda_1-\lambda_2)\,(\lambda_1-\lambda_3)\,(\lambda_1-\lambda_4)\,(\lambda_2-\lambda_3)\,(\lambda_2-\lambda_4)\,(\lambda_3-\lambda_4)}{m_1^2 m_2^2 m_3^2\,(B-A)\,(C-B)\,(A-C)}.$$

Mais on a supposé que les racines $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ soient différentes entre elles. Il en suit que Δ n'est pas nul, d'où l'on tire la conséquence que les équations (41 *b*), c'est à dire les équations (40 *b*), sont incompatibles. Cela signifie que les quatre fonctions D, Γ_1, Γ_2, Γ_3 n'ont aucune racine commune. Il ressort donc du théorème de l'article précédent que les neuf cosinus seront des fonctions uniformes et leur singularités seront des pôles. Ils seront des rapports de fonctions uniformes et entières, et nous en calculerons les expressions dans l'article suivant.

Article VI.

1. Pour obtenir les expressions des neuf cosinus il suffit de calculer

$$1+\gamma_1 \quad , \quad \gamma_2+i\gamma_3 \quad , \quad \alpha_1+i\beta_1$$

puisque les cosinus sont des fonctions rationnelles connues de ces quantités. (Voir article IV, § 2).

Si on prend l'expression de D trouvée dans l'article précédent on a

$$\frac{D}{\sigma}=M_1\frac{\sigma_1}{\sigma}+M_2\frac{\sigma_2}{\sigma}+M_3\frac{\sigma_3}{\sigma}+M_4=\chi(u).$$

Donc $\chi(u)$ est une fonction doublement périodique dont les périodes sont 4ω et $4\omega'$ (10).

Posons $u=2v$, il viendra

$$\chi(2v)=\varphi(v)$$

et φ aura pour périodes 2ω et $2\omega'$. Elle deviendra infinie à l'intérieur du parallelogramme des périodes dans les points $0, \omega, \omega', \omega''$, par suite elle sera une fonction elliptique de quatrième degré et l'on aura (11)

$$\varphi(v)=C_1\frac{\sigma\left(v-\frac{u_1}{2}\right)\sigma\left(v-\frac{u_2}{2}\right)\sigma\left(v-\frac{u_3}{2}\right)\sigma\left(v-\frac{u_4}{2}\right)}{\sigma v\sigma(v-\omega)\sigma(v-\omega')\sigma(v-\omega'')},$$

C_1 étant une constante et

$$u_1+u_2+u_3+u_4=4\omega''.$$

Par conséquent

$$D=C_1\sigma\left(\frac{u-u_1}{2}\right)\sigma\left(\frac{u-u_2}{2}\right)\sigma\left(\frac{u-u_3}{2}\right)\sigma\left(\frac{u-u_4}{2}\right)G$$

et l'on a

$$G=\frac{\sigma u}{\sigma\frac{u}{2}\sigma\left(\frac{u}{2}-\omega\right)\sigma\left(\frac{u}{2}-\omega'\right)\sigma\left(\frac{u}{2}-\omega''\right)}.$$

De même on peut écrire

$$D+\Gamma_1=C_2\sigma\left(\frac{u-v_1}{2}\right)\sigma\left(\frac{u-v_2}{2}\right)\sigma\left(\frac{u-v_3}{2}\right)\sigma\left(\frac{u-v_4}{2}\right)G,$$

$$\Gamma_2+i\Gamma_3=C_3\sigma\left(\frac{u-w_1}{2}\right)\sigma\left(\frac{u-w_2}{2}\right)\sigma\left(\frac{u-w_3}{2}\right)\sigma\left(\frac{u-w_4}{2}\right)G,$$

(10) WEIERSTRASS, *Formeln und Lehrsätze*, page 28.

(11) Ibid. page 15.

C_2, C_3 étant des quantités constantes, et

$$v_1 + v_2 + v_3 + v_4 = w_1 + w_2 + w_3 + w_4 = 4\,\omega''.$$

On déduit de là les expressions suivantes pour $1 + \gamma_1$ et $\gamma_2 + i\gamma_3$

$$(42\,b)\quad \left\{\begin{aligned} 1 + \gamma_1 &= L_1 \frac{\sigma\left(\frac{u-v_1}{2}\right)\sigma\left(\frac{u-v_2}{2}\right)\sigma\left(\frac{u-v_3}{2}\right)\sigma\left(\frac{u-v_4}{2}\right)}{\sigma\left(\frac{u-u_1}{2}\right)\sigma\left(\frac{u-u_2}{2}\right)\sigma\left(\frac{u-u_3}{2}\right)\sigma\left(\frac{u-u_4}{2}\right)},\\ \gamma_2 + i\gamma_3 &= L_2 \frac{\sigma\left(\frac{u-w_1}{2}\right)\sigma\left(\frac{u-w_2}{2}\right)\sigma\left(\frac{u-w_3}{2}\right)\sigma\left(\frac{u-w_4}{2}\right)}{\sigma\left(\frac{u-u_1}{2}\right)\sigma\left(\frac{u-u_2}{2}\right)\sigma\left(\frac{u-u_3}{2}\right)\sigma\left(\frac{u-u_4}{2}\right)},\end{aligned}\right.$$

et il faudra supposer [12]

$$\frac{u_1+u_2+u_3+u_4}{2} = \frac{v_1+v_2+v_3+v_4}{2} = \frac{w_1+w_2+w_3+w_4}{2} \equiv 0,$$

L_1 et L_2 étant des constantes.

2. Posons

$$(43\,b)\quad \left\{\begin{aligned} D' &= \sigma\left(\frac{u-u_1}{2}\right)\sigma\left(\frac{u-u_2}{2}\right)\sigma\left(\frac{u-u_3}{2}\right)\sigma\left(\frac{u-u_4}{2}\right)\\ &= \sigma\left(v-\frac{u_1}{2}\right)\sigma\left(v-\frac{u_2}{2}\right)\sigma\left(v-\frac{u_3}{2}\right)\sigma\left(v-\frac{u_4}{2}\right),\\ D'+\Gamma' &= L_1\,\sigma\left(\frac{u-v_1}{2}\right)\sigma\left(\frac{u-v_2}{2}\right)\sigma\left(\frac{u-v_3}{2}\right)\sigma\left(\frac{u-v_4}{2}\right)\\ &= L_1\,\sigma\left(v-\frac{v_1}{2}\right)\sigma\left(v-\frac{v_2}{2}\right)\sigma\left(v-\frac{v_3}{2}\right)\sigma\left(v-\frac{v_4}{2}\right),\\ \Gamma'_2 + i\Gamma'_3 &= L_2\,\sigma\left(\frac{u-w_1}{2}\right)\sigma\left(\frac{u-w_2}{2}\right)\sigma\left(\frac{u-w_3}{2}\right)\sigma\left(\frac{u-w_4}{2}\right)\\ &= L_2\,\sigma\left(v-\frac{w_1}{2}\right)\sigma\left(v-\frac{w_2}{2}\right)\sigma\left(v-\frac{w_3}{2}\right)\sigma\left(v-\frac{w_4}{2}\right).\end{aligned}\right.$$

Les trois fonctions $D', D'+\Gamma', \Gamma'_2 + i\Gamma'_3$ seront des fonctions entières et on pourra les substituer à $D, D+\Gamma_1, \Gamma_2 + i\Gamma_3$ dans les formules de l'article précédent. En faisant cette substitution dans la formule $(31\,b)$ on aura

$$(31'\,b)\qquad \frac{1}{A_1}\frac{dA_1}{dt} = \frac{d}{dt}\log\frac{D'+\Gamma'}{D'} - \frac{R'-iQ'}{\Gamma'_2+i\Gamma'_3} = \psi(t)$$

où l'on a posé

$$R - iQ = (R'-iQ')\,\frac{\sigma u}{\sigma\frac{u}{2}\,\sigma\left(\frac{u}{2}-\omega\right)\sigma\left(\frac{u}{2}-\omega'\right)\sigma\left(\frac{u}{2}-\omega''\right)}.$$

(12) Nous écrirons $a \equiv b$ lorsque les nombres a et b seront tels que

$$a - b = 2m\omega + 2n\omega',$$

m et n étant des nombres entiers.

Dans l'article III nous avons établi la relation qui subsiste entre les variables t et u. Elle peut s'écrire (voir ($27'_b$))

$$t = n(u - u_0) = 2n\left(v - \frac{u_0}{2}\right)$$

où n et u_0 sont des quantités constantes. Par suite

$$\frac{1}{A_1}\frac{dA_1}{dv} = \frac{d}{dv}\log\left(\frac{D'+\Gamma'}{D'}\right) - \frac{1}{2n}\frac{R'-iQ'}{\Gamma'_2+i\Gamma'_3} = \psi_1(v).$$

D'après des propriétés bien connues, on pourra dire que les résidus de la fonction $\psi_1(v)$ seront égaux à ceux de la fonction $\psi(t)$.

3. Cela posé supposons qu'aucune des valeurs u_i ne soit congruente à une valeur v_i. On pourra en déduire qu'aucune des w_i ne sera congruente à une valeur u_i. En effet chaque racine de $\Gamma'_2 + i\Gamma'_3$ est une racine de $D' + \Gamma'$ ou de $D' - \Gamma'$, mais elle ne peut pas être une racine de D', parce que dans ce cas D' et $D' + \Gamma'$ auraient une racine commune, ce qui est contraire aux hypothèses qu'on a faites. Donc les valeurs w_i ne sont pas de racines ni de D' ni de Γ', et par suite on pourra énoncer les propriétés suivantes:

1° pour les valeurs $v \equiv v_i/2$ la fonction

$$\frac{d}{dv}\log\left(\frac{D'+\Gamma'}{D'}\right)$$

est infinie de premier ordre, son résidu étant $+1$;

2° pour les valeurs $v \equiv u_i/2$ la fonction

$$\frac{d}{dv}\log\left(\frac{D'+\Gamma'}{D'}\right)$$

est infinie de premier ordre, le résidu étant -1;

3° pour les valeurs $v \equiv w_i/2$ la fonction

$$-\frac{1}{2n}\frac{R'-iQ'}{\Gamma'_2+i\Gamma'_3} \tag{44_b}$$

est infinie de premier ordre, le résidu étant ± 1.

Prenons les points $w_1/2$, $w_2/2$, $w_3/2$, $w_4/2$ à l'intérieur du parallélogramme des périodes. La somme des résidus de la fonction dans les points d'infini qui sont à l'intérieur du parallélogramme des périodes devant être nulle, il faudra que le résidu de la fonction (44_b) soit égal à $+1$ en deux des quatre points $w_i/2$ et soit égal à -1 dans les autres.

Rappelons maintenant (voir article I, § 3) que la fonction (44_b) doit avoir le résidu égal $+1$ où s'annule $D' - \Gamma'$, et doit avoir le résidu égal -1 où $D' + \Gamma'$ s'annule. Il faudra donc que pour deux des valeurs de la variable v, par ex. $w_3/2$, $w_4/2$, soit nulle la somme $D' + \Gamma'$ et pour les autres $w_1/2$, $w_2/2$ soit nulle la différence $D' - \Gamma'$. Si nous choisissons v_3 et v_4 de manière que l'on ait $v_3 = w_3$, $v_4 = w_4$, on pourra dire:

1° pour

$$v \equiv \frac{v_1}{2} \quad , \quad v \equiv \frac{v_2}{2} \quad , \quad v \equiv \frac{w_1}{2} \quad , \quad v \equiv \frac{w_2}{2}$$

la fonction

$$(45\,b) \qquad \frac{1}{A_1}\,\frac{dA_1}{dv}$$

sera infinie de premier ordre et le résidu sera $+\,1$.

2° pour

$$v \equiv \frac{u_2}{2}$$

la même fonction sera infinie du premier ordre et le résidu sera $-\,1$.

3° la fonction (45 *b*) n'aura d'autres infinis que les précédents.

Par suite il viendra [13]

$$\frac{1}{A_1}\,\frac{dA_1}{dt} = \zeta\left(v-\frac{v_1}{2}\right)+\zeta\left(v-\frac{v_2}{2}\right)+\zeta\left(v-\frac{w_1}{2}\right)+\zeta\left(v-\frac{w_2}{2}\right)$$

$$-\zeta\left(v-\frac{u_1}{2}\right)-\zeta\left(v-\frac{u_2}{2}\right)-\zeta\left(v-\frac{u_3}{2}\right)-\zeta\left(v-\frac{u_4}{2}\right)+2m\,,$$

m étant une costante.

Si on intègre et qu'on désigne par L_3 une nouvelle constante, on trouvera (puisque nous avons posè $u = 2v$):

$$A_1 = L_3\,\frac{\sigma\left(v-\frac{v_1}{2}\right)\sigma\left(v-\frac{v_2}{2}\right)\sigma\left(v-\frac{w_1}{2}\right)\sigma\left(v-\frac{w_2}{2}\right)}{\sigma\left(v-\frac{u_1}{2}\right)\sigma\left(v-\frac{u_2}{2}\right)\sigma\left(v-\frac{u_3}{2}\right)\sigma\left(v-\frac{u_4}{2}\right)}\,e^{2mv}$$

$$= L_3\,\frac{\sigma\left(\frac{u-v_1}{2}\right)\sigma\left(\frac{u-v_2}{2}\right)\sigma\left(\frac{u-w_1}{2}\right)\sigma\left(\frac{u-w_2}{2}\right)}{\sigma\left(\frac{u-u_1}{2}\right)\sigma\left(\frac{u-u_2}{2}\right)\sigma\left(\frac{u-u_3}{2}\right)\sigma\left(\frac{u-u_4}{2}\right)}\,e^{mu}.$$

Rappelons les formules (42 *b*) et ayons égard aux égalités $w_3 = v_3\,, w_4 = v_4$. Nous pourrons écrire

$$(46\,b)\qquad \left\{\begin{aligned}
1+\gamma_1 &= L_1\,\frac{\sigma\left(\frac{u-v_1}{2}\right)\sigma\left(\frac{u-v_2}{2}\right)\sigma\left(\frac{u-v_3}{2}\right)\sigma\left(\frac{u-v_4}{2}\right)}{\sigma\left(\frac{u-u_1}{2}\right)\sigma\left(\frac{u-u_2}{2}\right)\sigma\left(\frac{u-u_3}{2}\right)\sigma\left(\frac{u-u_4}{2}\right)}\,,\\
\gamma_2+i\gamma_3 &= L_2\,\frac{\sigma\left(\frac{u-w_1}{2}\right)\sigma\left(\frac{u-w_2}{2}\right)\sigma\left(\frac{u-v_3}{2}\right)\sigma\left(\frac{u-v_4}{2}\right)}{\sigma\left(\frac{u-u_1}{2}\right)\sigma\left(\frac{u-u_2}{2}\right)\sigma\left(\frac{u-u_3}{2}\right)\sigma\left(\frac{u-u_4}{2}\right)}\,,\\
\alpha_1+i\beta_1 &= L_3\,\frac{\sigma\left(\frac{u-v_1}{2}\right)\sigma\left(\frac{u-v_2}{2}\right)\sigma\left(\frac{u-w_1}{2}\right)\sigma\left(\frac{u-w_2}{2}\right)}{\sigma\left(\frac{u-u_1}{2}\right)\sigma\left(\frac{u-u_2}{2}\right)\sigma\left(\frac{u-u_3}{2}\right)\sigma\left(\frac{u-u_4}{2}\right)}\,e^{mu}
\end{aligned}\right.$$

(13) Voir WEIERSTRASS, *Formeln und Lehrsätze*, page 20.

où il faut supposer

$$(47\,b) \qquad w_1 + w_2 = v_1 + v_2 \quad , \quad \frac{u_1 + u_2 + u_3 + u_4}{2} = \frac{v_1 + v_2 + v_3 + v_4}{2} \equiv 0\,.$$

On a ainsi l'expression générale des trois fonctions dont les cosinus dépendent rationnellement d'une manière connue. Il est aisé de voir que les formules gardent la même forme si l'on suppose que quelques–unes des valeurs u_i soient congruentes aux valeurs v_i. Il ne reste à trouver que les relations entre les constantes u_i, v_i, w_i, L_1, L_2, L_3 et m et les costantes mécaniques du problème.

Note au chapitre II.

1. La résolution analytique de la question est composée de deux parties. Dans la première on détermine les composantes de la rotation; dans l'autre on calcule les cosinus des angles que les axes d'inertie font avec les axes fixes.

C'est la même décomposition de la question qu'ont fait JACOBI et la plupart de ceux qui ont traité de la rotation des corps. Il va sans dire que la première question est beaucoup plus simple et plus facile que l'autre.

2. Par rapport à la première question on peut remarquer que pour reconnaître *à priori* que les composantes de la rotation s'expriment par des fonctions elliptiques du temps, il suffit d'avoir égard à la polodie qui est l'intersection de deux quadriques. Les coordonnées de cette courbe sont des fonctions elliptiques d'un paramètre et puisqu'elles sont proportionnelles aux trois composantes de la rotation, celles–ci pourront de même s'exprimer comme des fonctions elliptiques de ce paramètre u. Or on peut démontrer que u est une fonction linéaire du temps. En effet si l'on calcule dt/du on voit tout de suite, à cause des équations (3), que ce rapport est une fonction doublement périodique. Il est facile de démontrer que, si l'équations $(25'\,b)$ n'a pas de racines multiples, dt/du n'a pas d'infinis, ce qui prouve que ce rapport est constant.

2. Relativement à la seconde question on peut dire qu'elle a été résolue aisément dans le chapitre précédent en vertu du théorème de l'article IV. La difficulté très–grave de la détermination des cosinus a été surmontée presque sans calculs. Si on aurait voulu suivre la voie directe il aurait fallu calculer et discuter l'expression $(30'\,b)$ qui peut se mettre sous forme de rapport de deux polynomes rationnels et entiers de 3ème degré par rapport aux fonctions σ. Mais en employant le théorème qu'on vient de citer, il a été suffisant de s'assurer que les numérateurs et les dénominateurs des expressions de γ_1, $\gamma_2\,\gamma_3$ ne s'annulent pas ensemble, pour reconnaître que tous les cosinus sont des fonctions uniformes du temps et pour pouvoir après les calculer.

Si on emploie la même méthode dans le cas des problèmes d'EULER et de LAGRANGE on est conduit tout aisément aux mêmes conclusions.

3. Dans un de ces admirables fragments sur la rotation d'un corps que M. LÖTTNER a tirés des manuscrits de JACOBI, on trouve l'explication du succès de la méthode d'intégration de JACOBI dans le cas du problème d'EULER. La voici: l'angle ψ d'EULER formé par l'intersection des plans $\xi\eta$ et xy avec l'axe x s'exprime par une somme d'intégrales elliptiques de troisième espèce auxquelles *est attaché le diviseur* $2i$. Puisque la même circonstance favorable se présente dans le problème de LAGRANGE, JACOBI a pu reconnaître *a priori* que son procédé pouvait s'étendre á ce cas.

Allons voir quelle relation subsiste entre l'existence du diviseur $2i$ de JACOBI et le théorème de l'article IV.

La dérivée de l'angle ψ d'EULER est donnée par la formule

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{p\gamma_1 + q\gamma_2}{1-\gamma_3^2} = \frac{(p+iq)(\gamma_1 - i\gamma_2) + i(\gamma_2 p - \gamma_1 q)}{1-\gamma_3^2}$$

$$= \frac{1}{2i}\left[\frac{d}{dt}\log\frac{1-\gamma_3}{1+\gamma_3} - 2\frac{q-ip}{\gamma_1 + i\gamma_2}\right] = \frac{1}{2i}\left[\frac{d}{dt}\log\frac{D-\Gamma_3}{D+\Gamma_3} - 2\frac{Q-iP}{\Gamma_1 + i\Gamma_2}\right].$$

Si $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$, D ne s'annulent pas ensemble, par un raisonnement semblable à celui qu'on a fait dans l'article IV, on a que $d\psi/dt$ est une fonction uniforme dont les singularités sont des pôles du premier ordre et ses résidus sont égaux à $n/2i$, n étant un nombre entier. On tire de là que l'existence du diviseur de JACOBI dépend du théorème de l'article IV, c'est à dire qu'il existe parce que D , $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ ne s'annulent pas ensemble.

On a donc que le théorème de l'article IV peut remplacer la recherche du diviseur de JACOBI par l'étude directe de $p, q, r; \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$.

4. M. JAHNSKE tout récemment dans quelques Notes exprime l'intention de revenir sur la question que j'ai traitée.

C'est par ces notes que j'ai appris, après la rédaction du présent mémoire, que M. WANGERIN avait traité dans un savant travail un cas particulier en dehors de la question de mécanique céleste. Le cas de M. WANGERIN n'est pas celui des mouvements internes stationnaires qui a été traité dans les chapitres précédents, mais c'est un cas particulier de mouvement adiabatique. Seulement par un théorème que j'ai donné dans le 4ème chapitre les mouvements stationnaires et les mouvements adiabatiques en général restent liés ensembles, c'est à dire il y a un moyen de passer des uns aux autres et même à ceux qui tiennent en même temps des deux types de mouvement.

M. WANGERIN s'est limité à la détermination des composantes de la rotation, parce qu'il ne prend pas en considération les cosinus des angles; c'est pourquoi il s'occupe seulement de la première partie du problème dont on a parlé au premier paragraphe.

CHAPITRE III.

Les axes permanents de rotation et leur stabilité.

Article I.

1. Déjà dans l'article III du I chapitre nous avons envisagé les axes permanents de rotation et démontré un théorème à leur égard. Nous voulons maintenant étudier la question des axes permanents, de leur distribution, de leur stabilité, et tirer les conséquences qui découlent de ces recherches.

Ecrivons les équations différentielles de la rotation comme nous avons fait dans le 1er chapitre, article V, § 2 (voir aussi le chapitre II). En posant

$$(1_c)\qquad \begin{cases} \mathfrak{f}_1 = \dfrac{1}{2\sqrt{ABC}}\left[(Ap+m_1)^2+(Bq+m_2)^2+(Cr+m_3)^2\right], \\ \mathfrak{f}_2 = \dfrac{1}{2\sqrt{ABC}}\left[(Ap^2+Bq^2+Cr^2\right], \end{cases}$$

on aura

$$(2_c)\qquad \begin{cases} \dfrac{dp}{dt} = \dfrac{d(\mathfrak{f}_1,\mathfrak{f}_2)}{d(q,r)}, \\ \dfrac{dq}{dt} = \dfrac{d(\mathfrak{f}_1,\mathfrak{f}_2)}{d(r,p)}, \\ \dfrac{dr}{dt} = \dfrac{d(\mathfrak{f}_1,\mathfrak{f}_2)}{d(p,q)}. \end{cases}$$

2. Supposons maintenant que p, q, r soient les coordonnées d'un point en mouvement P' (14).

Puisque les équations précédentes admettent les intégrales

$$(3_c)\qquad \mathfrak{f}_1 = \text{const.} = h_1 \quad , \quad \mathfrak{f}_2 = \text{const.} = h_2 ,$$

et qu'on peut envisager ces équations comme les équations de deux surfaces du 2d degré, on aura que les intersections de ces surfaces seront toutes les trajectoires possibles du point P'. Ces trajectoires seront donc des lignes du 4e ordre (*quartiques*). Pour trouver les rotations permanentes il suffira de trouver les positions dans lesquelles P' est en repos. Pour semplifier on pourra les appeler *les positions d'équilibre du point* P'.

(14) On pourrait appeler le point P' *l'indice de la rotation* pour le distinguer du *pôle de la rotation* (voir le 1er chapitre, article I, § 1) qu'on a désigné par P. Entre les coordonnées p, q, r de P' et les coordonnées ξ, η, ζ de P subsistent les relations

$$\frac{\xi}{p} = \frac{\eta}{q} = \frac{\zeta}{r} = \frac{1}{\sqrt{2h_2}\,\sqrt[4]{ABC}}.$$

Ces positions d'équilibre seront telles que

$$(4_c)\qquad \frac{d(\mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2)}{d(q, r)} = 0 \quad , \quad \frac{d(\mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2)}{d(r, p)} = 0 \quad , \quad \frac{d(\mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2)}{d(p, q)} = 0$$

c'est à dire

$$(4'_c)\qquad \frac{\dfrac{\partial \mathfrak{f}_1}{dp}}{\dfrac{\partial \mathfrak{f}_2}{dp}} = \frac{\dfrac{\partial \mathfrak{f}_1}{dq}}{\dfrac{\partial \mathfrak{f}_2}{dq}} = \frac{\dfrac{\partial \mathfrak{f}_1}{dr}}{\dfrac{\partial \mathfrak{f}_2}{dr}} .$$

Les équations précédentes représentent les conditions pour que dans le point p, q, r les deux surfaces du 2^e^ degré soient tangentes de sorte que ce point soit un point double d'une des quartiques.

C'est pourquoi on a le théorème (voir chapitre I, article III, § 1):

Les points doubles des quartiques $\mathfrak{f}_1 = h_1$, $\mathfrak{f}_2 = h_2$ sont les positions d'équilibre du point P′, et le lieu de ces points est la courbe ayant pour équations les équations $(4'_c)$.

Les équations (4_c) peuvent s'écrire (voir (6_a))

$$(4''_c)\qquad \begin{cases} (C - B)\, qr + m_3 q - m_2 r = 0 , \\ (A - C)\, rp + m_1 r - m_3 p = 0 , \\ (B - A)\, pq + m_2 p - m_1 q = 0 , \end{cases}$$

c'est pourquoi *la condition nécessaire et suffisante pour que le lieu des positions d'équilibre de* P′ *se décompose en courbes d'ordre inférieur sera*

$$(5_c)\qquad (B - C)(C - A)(A - B)\, m_1 m_2 m_3 = 0 .$$

3. Une nouvelle manière d'écrire les équations (4_c) est la suivante (voir $(6'_a)$)

$$(6_c)\qquad A + \frac{m_1}{p} = B + \frac{m_2}{q} = C + \frac{m_3}{r} .$$

Si l'on appelle λ la valeur commune aux trois membres, on trouvera

$$(6'_c)\qquad p = \frac{m_1}{\lambda - A} \quad , \quad q = \frac{m_2}{\lambda - B} \quad , \quad r = \frac{m_3}{\lambda - C} .$$

Envisageons maintenant le cas général en supposant que m_1, m_2, m_3 ne s'annullent pas et qu'on ait $A > B > C$.

Tous les points de la courbe, lieu des positions d'équilibre de P′, s'obtiendront des équations précédentes en donnant à λ toutes les valeurs comprises entre $-\infty$ et $+\infty$.

La courbe aura trois asymptotes qui seront les droites L_1, L_2, L_3 parallèles aux axes coordonnées ξ, η, ζ ayant respectivement pour équations

$$q = \frac{m_2}{A - B} \quad , \quad r = \frac{m_3}{A - C} ,$$

$$r = \frac{m_3}{B - C} \quad , \quad p = \frac{m_1}{B - A},$$

$$p = \frac{m_1}{C - A} \quad , \quad q = \frac{m_2}{C - B}.$$

Elle sera formée de trois branches g_1, g_2, g_3. La première branche partira du point $-\infty$ de L_1 et aboutira au point $+\infty$ de L_2. Elle correspondra aux valeurs de λ comprises entre A et B. La seconde branche partira du point $-\infty$ de L_2 et aboutira au point $+\infty$ de L_3. Elle correspondra aux valeurs de λ comprises entre B et C. Enfin la dernière branche ira du point $-\infty$ de L_3 au point $+\infty$ de L_1 en passant par l'origine et correspondra à toutes les valeurs de λ plus grandes que A et à toutes celles plus petites que C.

La courbe lieu des positions d'équilibre de P′ *est donc une hyperbole cubique* (15).

4. Lorsque les équations ($4'_\epsilon$) sont équivalentes à une seule équation, ou qu'elles se réduisent à trois identités, alors le lieu des positions d'équilibre de P′ n'est plus une courbe. Afin que ces cas se présentent il faut qu'un ou plusieurs des systèmes suivants de conditions soit vérifié

$$(7_\epsilon) \qquad \begin{cases} C - B = m_3 = m_2 = 0, \\ A - C = m_1 = m_3 = 0, \\ B - A = m_2 = m_1 = 0. \end{cases}$$

Si un seul est vérifié, alors la dégénération du lieu conduira à une droite et à un plan. Si deux sont vérifiés, et par suite les trois sont vérifiés, c'est à dire si l'on a

$$A = B = C \quad ; \quad m_1 = m_2 = m_3 = 0$$

alors chaque point de l'espace sera une position d'équilibre du point P′. Par l'étude que nous venons de faire on a résolu complètement la question des axes permanentes de rotation. Nous consacrerons les articles suivants à la classification des axes permanents selon leur stabilité.

Article II.

1. Commençons par donner la définition de *stabilité de l'équilibre du point* P′. Elle correspondra parfaitement à celle de *rotation stable* du système.

On dira que la position P'_0 de P′ est stable, si, σ étant un nombre aussi petit que l'on veut, on peut trouver un nombre ε tel qu'en plaçant P′ à une distance de P'_0 plus petite que ε, et en le faisant mouvoir d'après la loi représentée par les équations (2_ϵ), il ne s'éloignera jamais de P'_0 au delà de σ.

(15) A l'article IV de ce chapitre on a exposé de quelle manière cette courbe peut se décomposer en courbes d'ordre inférieur.

Cela posé, en suivant un raisonnement semblable à celui bien connu employé par DIRICHLET, on peut démontrer le théorème suivant:

Tous les points isolés des quartiques (3_c) *seront des positions d'équilibre stable du point* P'.

Soit P'_0 un point isolé. Désignons par f_1^0, f_2^0 les valeurs des fonctions f_1, f_2 au point P'_0, et formons l'expression

$$I = (f_1 - f_1^0)^2 + (f_2 - f_2^0)^2.$$

I sera une fonction continue des coordonnées p, q, r.

Je dis qu'on peut trouver un nombre α tel que la limite inférieure des valeurs de I sur chaque sphère ayant P'_0 pour centre et dont le rayon est plus petit que α, est un nombre positif.

En effet, s'il n'était possible de satisfaire la condition précédente quelque petit qu'on prenait α, les deux surfaces

$$f_1 = f_1^0 \quad , \quad f_2 = f_2^0$$

auraient des points d'intersection réels aussi voisins que l'on voudrait à P'_0 et par suite ce point ne serait pas un point isolé de la quartique à laquelle il appartient.

Désignons par S la sphère ayant pour centre P'_0 et pour rayon α. A l'intérieur de cette surface construisons une autre sphère avec le même centre et avec un rayon plus petit que σ. On l'appelera S'. Soit η' la limite inférieure de I sur la surface S'. Ce nombre sera positif. Or I est une fonction continue, donc, à l'intérieur de S', on pourra construire une troisième sphère S'', avec le centre P'_0, telle que la limite supérieure des valeurs de I à son intérieur soit plus petite que η'.

Soit ε le rayon de la dernière sphère.

Faisons maintenant mouvoir le point P' d'après la loi représentée par les équations (2_c) à partir d'une position interne à S''. Puisque I doit garder une valeur constante pendant le mouvement, sa valeur sera égale à la valeur initiale, c'est à dire sera plus petite que η'. Par suite P' ne rejoindra jamais la surface S', d'où l'on déduit que sa distance du point P'_0 restera toujours plus petite que σ.

C. Q. F. D.

2. On peut généraliser la proposition précédente en démontrant le théorème:

Soit P'_0 *un point isolé d'une quartique appartenant au système* (3_c), *et soit* σ *un nombre aussi petit que l'on veut.*

On pourra trouver deux nombres ε *et* ε' *tels que*

1° *si l'on change* m_1, m_2, m_3 *de quantités constantes plus petites que* ε;

2° *si dans sa position initiale on place* P' *à une distance de* P'_0 *plus petite que* ε,

le point P' *en se déplaçant ne s'éloignera de* P'_0 *au delà de* σ.

En effet envisageons de nouveau les trois sphères S, S', S'' du paragraphe précédent. Soit η'' la limite supérieure des valeurs de I à l'intérieur de S''. Nous aurons $\eta'' < \eta'$. Posons $\eta' - \eta'' = \rho$.

Puisque I est une fonction continue de m_1, m_2, m_3, nous pourrons trouver un nombre ε' tel qu'en changeant m_1, m_2, m_3 de quantités plus petites que ε', les valeurs de I à l'intérieur de la sphère S changent moins que $\rho/4$. Par suite de ce changement la limite inférieure de I sur S' sera plus grande que $\eta' - \rho/4$ et la limite supérieure de I à l'intérieur de S'' sera plus petite que $\eta'' + \rho/4$. Mais $\eta'' + \rho/4 < \eta' - \rho/4$, donc en plaçant P' dans un point initial interne à S'' il se déplacera sans jamais rejoindre la surface S'.

C. Q. F. D.

On peut énoncer le théorème que nous venons de démontrer en disant qu'*il y a une double stabilité des rotations permanentes qui correspondent aux points isolés: l'une par rapport aux changements du mouvement de rotation, et l'autre par rapport aux changements des mouvements internes.*

3. Passons maintenant à démontrer le théorème inverse de celui de l'article I, c'est à dire que *les points de l'hyperbole cubique qui ne sont des points isolés des quartiques correspondent à des rotations instables.*

Nous nous bornerons dans cet article au cas où aucune des conditions (7_c) n'est satisfaite, en renvoyant à l'article IV pour la démonstration lorsque ces conditions sont vérifiées.

Cela posé on peut être sûr que sur chacune des surfaces (3_c) n'existe qu'un nombre fini de position d'équilibre du point P'. Désignons par P'_0 une de ces positions, et par $\mathfrak{f}_1^0, \mathfrak{f}_2^0$ les valeurs de $\mathfrak{f}_1$ et $\mathfrak{f}_2$ au point P'_0. On pourra construire une sphère Σ ayant P'_0 pour centre, et telle qu'aucun point des surfaces $\mathfrak{f}_1 = \mathfrak{f}_1^0$, $\mathfrak{f}_2 = \mathfrak{f}_2^0$, qui est à son intérieur, soit une position d'équilibre de P_0. Or si P'_0 n'est pas un point isolé de la quartique à laquelle il appartient, il y aura une branche réelle de cette courbe qui passe par P'_0.

Soit VP'_0 une partie de cette branche interne à Σ et désignons par 2σ la distance entre les points V et P_0. Enfin soit VV' la partie connexe de VP'_0 qui est située externement à une sphère ayant P'_0 pour centre et dont le rayon est égal à $\varepsilon/2$; ε étant un nombre plus petit que σ et qu'on peut choisir d'ailleurs aussi petit que l'on veut. On voit bien aisément, en rappelant des théorèmes connus sur les fonctions implicites, qu'on pourra prendre le nombre u de manière que chaque point de VV' soit à une distance moindre que $\varepsilon/2$, d'un point de la quartique $\mathfrak{f}_1 = \mathfrak{f}_1^0$, $\mathfrak{f}_2 = \mathfrak{f}_2^0 + u$, et en outre que celle-ci n'ait aucun point double. Il suffit pour cela de remarquer que sur la courbe VV' on n'a aucun point d'équilibre et par suite il n'y a aucun point où les conditions (4_c) soient satisfaites. On tire de là que sur la ligne $\mathfrak{f}_1 = \mathfrak{f}_1^0$, $\mathfrak{f}_2 = \mathfrak{f}_2^0 + u$ existent deux points W' et W, dont l'un est à une distance de P'_0 plus petite que ε, et l'autre à une distance plus grande que σ. Si l'on place P' dans le point W', il doit parcourir la ligne $\mathfrak{f}_1 = \mathfrak{f}_1^0$, $\mathfrak{f}_2 = \mathfrak{f}_2^0 + u$ et rejoindre le point W, c'est à dire en partant d'un point initial qui est éloigné de P'_0 moins que ε, il doit s'éloigner au delà de σ. Cela prouve que P'_0 est une position d'équilibre instable.

Article III.

1. Tous les points d'équilibre du point P', c'est à dire tous les points doubles des quartiques, se trouvent sur l'hyperbole cubique ayant pour équations les équations ($4'_c$).

Les théorèmes de l'article précédent montrent combien il est important de séparer sur cette courbe les parties où sont les points isolés de celles où sont les noeuds. Les points de passage entre les unes et les autres doivent correspondre aux cuspides des quadriques et nous donneront les points de passage entre les rotations permanentes stables et instables. Nous consacrerons cet article à cette séparation dans le cas général où la cubique ne se décompose pas, c'est à dire lorsqu'on $A > B > C$, m_1, m_2, m_3 n'étant pas nulles. Nous renvoyons à l'article suivant pour le cas où ces conditions ne sont pas vérifiées.

2. En différentiant deux fois les équations (3_c) on a

$$(8_c) \qquad \left\{ \begin{aligned} & A p dp + B q dq + C r dr = 0, \\ & A(Ap + m_1)\, dp + B(Bq + m_2)\, dq + C(Cr + m_3)\, dr = 0, \end{aligned} \right.$$

$$(9_c) \qquad \left\{ \begin{aligned} & A dp^2 + B dq^2 + C dr^2 + (A p d^2 p + B q d^2 q + C r d^2 r) = 0, \\ & A^2 dp^2 + B^2 dq^2 + C^2 dr^2 + (A(Ap + m_1)\, d^2 p + B(Bq + m^2)\, d^2 q \\ & \qquad + C(Cr + m_3)\, d^2 r) = 0. \end{aligned} \right.$$

Ajoutons les équations (9_c), après avoir multiplié la première par $-\lambda$. On trouvera, ayant égard aux équations ($6'_c$),

$$A(A - \lambda)\, dp^2 + B(B - \lambda)\, dq^2 + C(C - \lambda)\, dr^2 = 0.$$

À cause des équations (6_c), les deux équations (8_c) sont équivalentes, par suite il suffira d'examiner les deux équations

$$(10_c) \qquad \left\{ \begin{aligned} & A(\lambda - A)\, dp^2 + B(\lambda - B)\, dq^2 + C(\lambda - C)\, dr^2 = 0, \\ & A p dp + B q dq + C r dr = 0. \end{aligned} \right.$$

Par l'élimination de dr on trouve

$$A\,[Cr^2(\lambda - A) + Ap^2(\lambda - C)]\, dp^2 + B\,[Cr^2(\lambda - B) + Bq^2(\lambda - C)]\, dq^2 \\ + 2AB(\lambda - C)\, pq\, dp\, dq = 0.$$

À la place de p, q, r substituons les valeurs ($6'_c$). Alors l'équation précédente deviendra

$$A\left[\frac{Cm_3^2(\lambda-A)}{(\lambda-C)^2}+\frac{Am_1^2(\lambda-C)}{(\lambda-A)^2}\right]dp^2+B\left[\frac{Cm_3^2(\lambda-B)}{(\lambda-C)^2}+\frac{Bm^2(\lambda-C)}{(\lambda-B)^2}\right]dq^2$$
$$+2\frac{ABm_1m_2(\lambda-C)}{(\lambda-A)(\lambda-B)}dp\,dq=0.$$

Pour séparer les valeurs de λ qui correspondent aux points isolés de celles qui correspondent aux noeuds, il suffira d'examiner pour quelles valeurs de λ la forme différentielle précédente est définie et pour quelles valeurs elle ne l'est pas; et pour cela, il faudra calculer le discriminant de la forme différentielle et examiner son signe. Le rapport entre ce déterminant et la quantité positive $ABC/(\lambda-C)^2$ sera

$$(11_c)\qquad \Delta=(\lambda-A)(\lambda-B)(\lambda-C)\left\{\frac{Am_1^2}{(\lambda-A)^3}+\frac{Bm_2^2}{(\lambda-B)^3}+\frac{Cm_3^2}{(\lambda-C)^3}\right\}.$$

Le signe du facteur $(\lambda-A)(\lambda-B)(\lambda-C)$ change lorsque λ passe par les valeurs A, B, C; mais évidemment le signe de l'autre facteur aussi change pour les mêmes valeurs de λ, et par suite le signe de Δ ne changera pas.

Il suffit donc d'examiner les changements de signe du facteur

$$\frac{Am_1^2}{(\lambda-A)^3}+\frac{Am_2^2}{(\lambda-B)^3}+\frac{Cm_3^2}{(\lambda-C)^3}.$$

Si λ croît, chaque terme du trinome décroît, par suite le trinome changera de signe deux fois seulement, les valeurs A, B, C exceptées: la première fois pour une valeur de λ comprise entre C et B, et une seconde fois pour une valeur comprise entre B et A. Le trinome sera toujours négatif pour $\lambda<C$ et sera positif pour $\lambda>A$.

Il en suit que Δ sera positif le long de la branche g_3 (voir article I, § 3) de l'hyperbole cubique et en deux parties des branches g_1, g_2 adjacentes respectivement aux points à l'infini de L_1 et L_2; tandis qu'il sera négatif dans les deux parties résidues des branches g_1, g_2 qui sont adjacentes au point à l'infini de L_2.

Les points de passage d'une partie à l'autre, c'est à dire des rotations stables aux rotations instables, correspondent aux racines réelles de l'équation

$$(12_c)\qquad \frac{Am_1^2}{(\lambda-A)^3}+\frac{Bm_2^2}{(\lambda-B)^3}+\frac{Cm_3^2}{(\lambda-C)^3}=0$$

qui sont deux et sont comprises entre A *et* B, *et entre* B *et* C.

3. L'équation précédente peut être écrite

$$\frac{1}{\sqrt{ABC}}\{Ap\,dp+Bq\,dq+Cr\,dr\}=d\mathfrak{f}_2=\frac{1}{\lambda}d\mathfrak{f}_1=0.$$

Il suffit pour voir cela de faire usage des équations $(6'_c)$.

Les égalités précédentes démontrent le théorème:

Dans les points de passage entre les points isolés et les noeuds, l'hyperbole cubique est tangente aux quadriques appartenant aux systèmes (3_c) *qui se touchent dans ces points.*

Article IV.

1. Nous avons jusqu'à présent envisagé le cas où le produit (5_c) ne s'annule pas. Nous allons maintenant traiter tous les cas qu'on a laissés de côté.

On peut suivre pour cela le même procédé qu'on vient d'employer. Puisque tous les calculs se répètent de la même manière, nous les supprimerons et nous nous bornerons à énoncer les résultats.

$$\text{1}^{\text{er}}\text{ Cas}\ \left\{\begin{matrix} A > B > C \\ \text{ou} \\ A < B < C \end{matrix}\right\}\ \left\{\begin{matrix} m_1 = 0, \\ m_2 \gtrless 0, \\ m_3 \gtrless 0, \end{matrix}\right.$$

la cubique se décompose en

hyperbole
$p=0,\ q=\dfrac{m_2}{\lambda-B},\ r=\dfrac{m_3}{\lambda-C}$ $\left\{\begin{array}{l} \lambda \text{ comprise entre A et } \dfrac{C\sqrt[3]{Bm_2^2}+B\sqrt[3]{Cm_3^2}}{\sqrt[3]{Bm_2^2}+\sqrt[3]{Cm_3^2}} \\ \lambda \text{ n'est pas comprise entre les limites précédentes} \end{array}\right.$ . . *rotations instables* / *rotations stables*

droite $q = \dfrac{m_1}{B-A},\ r = \dfrac{m_3}{B-C}$ . . . . *rotations stables.*

$$\text{2}^{\text{ème}}\text{ Cas}\ \left\{\begin{matrix} A > B > C \\ \text{ou} \\ A < B < C \end{matrix}\right\}\ \left\{\begin{matrix} m_1 \gtrless 0, \\ m_2 = 0, \\ m_3 \gtrless 0, \end{matrix}\right.$$

la cubique se décompose en

hyperbole
$p=\dfrac{m_1}{\lambda-A},\ q=0,\ r=\dfrac{m_3}{\lambda-C}$ $\left\{\begin{array}{l} \lambda \text{ comprise entre B et } \dfrac{A\sqrt[3]{Cm_3^2}+C\sqrt[3]{Am_1^2}}{\sqrt[3]{Cm_3^2}+\sqrt[3]{Am_1^2}} \\ \lambda \text{ n'est pas comprise entre les limites précédentes} \end{array}\right.$ . . *rotations instables* / *rotations stables*

droite $p = \dfrac{m_1}{B-A},\ r = \dfrac{m_3}{B-C}$ . . . . *rotations instables.*

$$\text{3}^{\text{ème}}\text{ Cas}\ \left\{\begin{matrix} A > B > C \\ \text{ou} \\ A < B < C \end{matrix}\right\}\ \left\{\begin{matrix} m_1 = 0, \\ m_2 = 0, \\ m_3 \gtrless 0, \end{matrix}\right.$$

la cubique se décompose en

droite $p = 0,\ q = 0$ $\left\{\begin{array}{l} r \text{ comprise entre } \dfrac{m_3}{A-C} \text{ et } \dfrac{m_3}{B-C} \text{ . . . . . . } \textit{rotations instables} \\ r \text{ n'est pas compris entre les limites précédentes } \textit{rotations stables} \end{array}\right.$

droite $q = 0$, $r = \dfrac{m_3}{A - C}$ . . . . *rotations stables*

droite $p = 0$, $r = \dfrac{m_3}{B - C}$ . . . . *rotations instables*

$$4^{\text{ème}}\ \text{Cas}\ \left\{ \begin{array}{c} A > B > C \\ \text{ou} \\ A < B < C \end{array} \right\} \begin{array}{l} m_1 = 0\,, \\ m_2 \gtrless 0\,, \\ m_3 = 0\,, \end{array}$$

la cubique se décompose en

droite $p = 0$, $r = 0$ $\left\{ \begin{array}{l} q \text{ comprise entre } \dfrac{m_2}{A - B} \text{ et } \dfrac{m_2}{C - B} \text{ . . . . . } \textit{rotations stables} \\ q \text{ n'est pas comprise entre les limites précédentes } \textit{rotations instables} \end{array} \right.$

droite $q = \dfrac{m_2}{A - B}$, $r = 0$ . . . . *rotations stables*

droite $p = 0$, $q = \dfrac{m_2}{C - B}$ . . . . *rotations stables*

$$5^{\text{ème}}\ \text{Cas}\ \left\{ \begin{array}{c} A > B > C\,, \\ m_1 = m_2 = m_3 = 0\,, \end{array} \right. \qquad \text{(Cas d'EULER)}$$

la cubique se décompose en

droite $p = 0$, $q = 0$ . . . . *rotations stables*

droite $q = 0$, $r = 0$ . . . . *rotations stables*

droite $r = 0$, $p = 0$ . . . . *rotations instables*

$$6^{\text{ème}}\ \text{Cas}^{(16)}\ A \gtrless B = C \left\{ \begin{array}{l} m_1 \gtrless 0\,, \\ m_2 \gtrless 0\,, \\ m_3 = 0\,, \end{array} \right.$$

la cubique se décompose en

hyperbole
$p = \dfrac{m_1}{\lambda - A}, q = \dfrac{m_2}{\lambda - B}, r = 0$ $\left\{ \begin{array}{l} \lambda \text{ comprise entre B et } \dfrac{A\sqrt[3]{Bm_2^2} + B\sqrt[3]{Am_1^2}}{\sqrt[3]{Bm_2^2} + \sqrt[3]{Am_1^2}} \text{ . . . } \textit{rotations instables} \\ \lambda \text{ n'est pas comprise entre les limites précédentes } \textit{rotations stables} \end{array} \right.$

droite $p = \dfrac{m_1}{B - A}$, $q = \infty$.

$$7^{\text{ème}}\ \text{Cas}\ A \gtrless B = C \left\{ \begin{array}{l} m_1 = 0\,, \\ m_2 \gtrless 0^{(17)}, \\ m_3 = 0\,, \end{array} \right.$$

(16) Lorsque $A \gtrless B = C$ on peut choisir les axes d'inertie de manière qu'on ait $m_3 = 0$.

(17) Dans ce cas nous supposons qu'on ait choisi les directions des axes de sorte que m_2 et $A = B$ aient le même signe; ce qui est toujours possible.

la cubique se décompose en

droite $p = 0$, $r = 0$ $\begin{cases} q > \dfrac{m_2}{A - B} & \dots\dots\dots\dots\dots \textit{rotations instables} \\ q < \dfrac{m_2}{A - B} & \dots\dots\dots\dots\dots \textit{rotations stables} \end{cases}$

droite $q = \dfrac{m_2}{A - B}$, $r = 0$ . . . . *rotations stables*

droite $p = 0$, $q = \infty$.

2. Il faut maintenant discuter les cas où le lieu des points d'équilibre de P' devient un plan et une droite

$$1^{\text{er}} \text{ Cas } A \gtrless B = C \begin{cases} m_1 \gtrless 0 \quad \text{ou } m_1 = 0 \,, \\ m_2 = 0 \,, \\ m_3 = 0 \,, \end{cases}$$

le lieu des points d'équilibre de P devient

droite $q = 0$, $r = 0$ . . . . *rotations stables*

plan $p = \dfrac{m_1}{B - A}$ (q et r quelconques) . . . . *rotations instables*

$$2^{\text{ème}} \text{ Cas } A = B = C \begin{cases} m_1 \gtrless 0 \,, \\ m_2 = 0 \,, \\ m_3 = 0 \,, \end{cases}$$

le lieu des points d'équilibre de P devient

droite $q = 0$, $r = 0$ . . . . *rotations stables*

plan $p = \infty$.

Pour démontrer dans le premier cas que les rotations correspondantes à $p = m_1/(B - A)$ et q et r quelconques sont *instables* on ne peut pas appliquer le théorème qu'on a démontré au § 3 de l'article II.

Remarquons que dans ce cas les intersections des quadriques $\mathfrak{f}_1 = h_1$, $\mathfrak{f}_2 = h_2$ sont un couple de cercles. Les points doubles correspondent au cas où les deux cercles coïncident. Alors les deux quadriques sont tangentes le long du cercle double. Tous les cercles d'intersection ou de contact des quadriques $\mathfrak{f}_1 = h_1$, $\mathfrak{f}_2 = h_2$ sont placés dans des plans perpendiculaires à l'axe de symétrie des deux quadriques et leurs centres sont situés sur cette droite. Le point P est en équilibre dans un point quelconque appartenant aux cercles doubles qui sont placés dans le plan $p = m_2/(B - A)$; mais aussi près de ces cercles que l'on veut existent des couples de cercles simples qui sont parcourus par le point P' avec une vitesse constante.

Cette remarque suffit pour montrer que l'équilibre du point P' dans les points du plan $p = m_1/(B - A)$ est instable, et par suite que les rotations permanentes qui correspondent à ces positions son instables. On tire de là que *le théorème donné dans l'article deuxième du* § 3 *peut s'étendre au cas qu'on avait exclu.*

3. Il reste encore à examiner un cas particulier, savoir lorsque les trois systèmes d'équations (7_c) sont vérifiés. On aura alors

$$A = B = C \quad ; \quad m_1 = m_2 = m_3 = 0.$$

Dans ce cas P′ est en équilibre dans tout point de l'espace; par suite tout point de l'espace est une position d'équilibre stable.

Mais on voit aisément que dans ce cas il n'y a pas de stabilité par rapport à des changements des mouvements internes.

En effet choisissons les axes de manière que l'on ait

$$p \gtrless 0 \quad , \quad q = 0 \quad , \quad r = 0.$$

Si nous prenons

$$m_1 = 0 \quad , \quad m_2 \gtrless 0 \quad , \quad m_3 = 0$$

on aura que, quelque petite que soit la valeur absolue de m_2, la trajectoire de P′ sera un cercle situé dans le plan $q = 0$, ayant le rayon égal à p, et dont le centre est l'origine des axes coordonnées.

Donc les rotations sont *stables* par rapport à des changements des rotations mêmes, mais elles sont instables par rapport au mouvement interne.

De cette manière tous les cas qui peuvent se présenter ont été discutés et dans chacun on a distingué les rotations stables et instables.

Article V.

1. Nous allons développer quelques conséquences des théorèmes des articles précédents.

Commençons par supposer $A > B > C$, $m_1 = m_2 = m_3 = 0$. Nous envisageons le V^e^ cas de l'article IV. On peut alors dire que si le couple de quantité de mouvement est suffisamment petit, en prenant la position initiale du pôle de rotation assez proche d'une extrémité de l'axe d'inertie dont le moment est maximum, ou de celui dont le moment est minimum, la polodie sera aussi proche que l'on veut au pôle d'inertie.

2. Une remarque, qui paraît digne d'intérêt, peut être déduite tout de suite des considérations précédentes.

Si l'on voit le pôle de rotation faire des petites oscillations autour d'un certain point, même si le système ne change de forme, ni la distribution des masses ne change non plus, on ne pourra pas conclure que le point autour duquel le pôle oscille soit un pôle d'inertie.

En effet si à l'intérieur du système existent des mouvements stationnaires, le point autour duquel oscille le pôle de rotation au lieu d'être le pôle d'inertie sera l'intersection de l'ellipsoïde d'inertie avec le rayon vecteur d'un des points isolés des quartiques que nous avons précédemment envisagées.

3. Passons maintenant à l'étude des petites vibrations de P' autour des positions d'équilibre stable.

Supposons d'abord que la cubique ($4'_c$) ne se décompose pas et désignons par λ_1 et λ_2 les racines réelles de l'équation (12_c). Prenons λ de manière qu'elle ne soit pas comprise entre ces valeur. Alors

$$(13_c) \qquad p_0 = \frac{m_1}{\lambda - A} \quad , \quad q_0 = \frac{m_2}{\lambda - B} \quad , \quad r_0 = \frac{m_3}{\lambda - C}$$

seront des valeurs correspondant à une position d'équilibré stable de P', c'est à dire à une rotation permanente stable du système.

Posons

$$p = p_0 + \varpi \quad , \quad q = q_0 + \chi \quad , \quad r = r_0 + \rho$$

et supposons que ϖ, χ, ρ soient des quantités très-petites, de manière qu'on puisse négliger les expressions du second ordre formées avec elles par rapport aux mêmes quantités. Alors, puisque les valeurs constantes p_0, q_0, r_0 satisfont aux équations ($4'_c$), les équations (2_c) pourront s'écrire

$$(14_c) \qquad \begin{cases} A\dfrac{d\varpi}{dt} + \dfrac{m_3(\lambda - B)}{\lambda - C}\chi - \dfrac{m_2(\lambda - C)}{\lambda - B}\rho = 0, \\ B\dfrac{d\chi}{dt} + \dfrac{m_1(\lambda - C)}{\lambda - A}\rho - \dfrac{m_3(\lambda - A)}{\lambda - C}\varpi = 0, \\ C\dfrac{d\rho}{dt} + \dfrac{m_2(\lambda - A)}{\lambda - B}\varpi - \dfrac{m_1(\lambda - B)}{\lambda - A}\chi = 0. \end{cases}$$

Pour intégrer ces équations posons

$$\varpi = ae^{zt} \quad , \quad \chi = be^{zt} \quad , \quad \rho = ce^{zt},$$

a, b, c, z étant des quantités constantes; z sera une racine de l'équation

$$\begin{vmatrix} Az \;, & \dfrac{m_3(\lambda - B)}{\lambda - C} \;, & -\dfrac{m_2(\lambda - C)}{\lambda - B} \\ -\dfrac{m_3(\lambda - A)}{\lambda - C} \;, & Bz \;, & \dfrac{m_1(\lambda - C)}{\lambda - A} \\ \dfrac{m_2(\lambda - A)}{\lambda - B} \;, & -\dfrac{m_1(\lambda - B)}{\lambda - A} \;, & Cz \end{vmatrix} = 0.$$

En développant le déterminant on trouve

$$ABCz^3 + (\lambda - A)(\lambda - B)(\lambda - C)\left|\frac{Am_1^2}{(\lambda - A)^3} + \frac{Bm_2^2}{(\lambda - B)^3} + \frac{Cm_3^2}{(\lambda - C)^3}\right| z = 0$$

d'où l'on tire

$$z = 0 \quad , \quad z = \pm i \sqrt{\frac{(\lambda - A)(\lambda - B)(\lambda - C)}{ABC}\left[\frac{Am_1^2}{(\lambda - A)^3} + \frac{Bm_2^2}{(\lambda - B)^3} + \frac{Cm_3^2}{(\lambda - C)^3}\right]}.$$

De l'hypothèse que nous avons faite par rapport aux valeurs de λ, on peut déduire que les racines z qui ne sont pas nulles, sont imaginaires. Par suite la période de vibration du point P′ autour de la position d'équilibre stable sera

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{(\lambda-A)(\lambda-B)(\lambda-C)}{ABC}\left[\frac{Am_1^2}{(\lambda-A)^3}+\frac{Bm_2^2}{(\lambda-B)^3}+\frac{Cm_3^2}{(\lambda-C)^3}\right]}}.$$

Si l'on change λ entre les limites établies au commencement de ce paragraphe, *la formule précédente donnera toutes les périodes avec lesquelles le pôle de rotation peut osciller autour des positions d'équilibre stable.* Ajoutons les équations (14_ϵ), après les avoir multipliées par $m_1/(\lambda - A)$, $m_2/(\lambda - B)$, $m_3/(\lambda - C)$. On aura

$$\frac{Am_1}{\lambda-A}\frac{d\tilde{\omega}}{dt}+\frac{Bm_2}{\lambda-B}\frac{d\chi}{dt}+\frac{Cm_3}{\lambda-C}\frac{d\rho}{dt}=0$$

et en intégrant

$$(15_\epsilon)\qquad \frac{Am_1}{\lambda-A}\tilde{\omega}+\frac{Bm_2}{\lambda-B}\chi+\frac{Cm_3}{\lambda-C}\rho=\text{const}.$$

De même ajoutons les équations (14_ϵ) après les avoir multipliées par $(\lambda - A)\tilde{\omega}$, $(\lambda - B)\chi$, $(\lambda - C)\rho$. Nous trouverons en intégrant

$$(16_\epsilon)\qquad A(\lambda-A)\tilde{\omega}^2+B(\lambda-B)\chi^2+C(\lambda-C)\rho^2=\text{const}.$$

Ces intégrales montrent que le mouvement du point P′ a lieu sur une ellipse appartenent au plan $(14'_\epsilon)$, c'est à dire à un plan parallèle au plan tangent aux surfaces (3_ϵ) au point p_0, q_0, r_0.

4. Il n'y a pas de difficulté à discuter les cas particuliers qui peuvent se présenter. Il suffit pour cela d'avoir égard aux résultats qu'on a établi dans l'article précédent.

Nous examinerons seulement le cas où deux des moments d'inertie sont égaux, le troisième étant différent. C'est à dire quand on a

$$A \gtrless B = C.$$

Alors en choisissant les axes d'inertie de manière qu'on ait $m_3 = 0$, et en employant les résultats qu'on a trouvé dans le cas VI de l'article IV du Chap. III on aura que les rotations stables seront données par

$$p_0=\frac{m_1}{\lambda-A}\quad,\quad q_0=\frac{m_2}{\lambda-B}\quad,\quad r_0=0,$$

λ étant compris entre

$$B \quad\text{et}\quad \frac{A\sqrt[3]{Bm_2^2}+B\sqrt[3]{Am_1^2}}{\sqrt[3]{Bm_2^2}+\sqrt[3]{Am_1^2}}$$

Par suite, les périodes des vibrations du pôle de rotation autour des positions d'équilibre stable seront données par la formule

$$T=\frac{2\pi B}{(\lambda-B)\sqrt{\frac{\lambda-A}{A}\left[\frac{Am_1^2}{(\lambda-A)^3}+\frac{Bm_2^2}{(\lambda-B)^3}\right]}}=\frac{2\pi}{\frac{m_2}{Bq_0}\sqrt{\frac{m_1}{Ap_0}\left[\frac{Ap_0^3}{m_1}+\frac{Bq_0^3}{m_2}\right]}}.$$

Lorsqu'il n'y a pas de mouvements internes il y a une seule position d'équilibre stable du pôle de rotation (I cas, article IV) qui correspond à $p = p_0$, $q = r = 0$ et la période de vibration du pôle autour de cette position est donnée par la période eulerienne $2\pi B/(B - A)p_0$. On tire de là que les mouvements internes donnent naissance à un nombre infini de positions d'équilibre stable du pôle et changent les valeurs de la période eulerienne, de manière qu'elle peut prendre toutes les valeurs données par la formule précédente.

CHAPITRE IV

Rotation d'un corps à l'intérieur duquel existe un mouvement polycyclique quelconque.

Article I.

1. Dans les chapitres précédents nous avons étudié la rotation d'un corps dans lequel existent des mouvements stationnaires.

Il faut en général l'intervention de forces à l'intérieur pour maintenir stationnaires ces mouvements. On peut maintenant approfondir l'étude de ces forces et voir pourquoi et quand elles sont nécessaires (article VI, § 3) et l'on peut étudier après ce qu'il arrive lorsqu'elles n'existent pas (article VII, VIII), ou lorsqu'elles ne sont pas capables de maintenir tous les mouvements stationnaires (article IX).

L'étude de ces questions sera le but de ce chapitre dans lequel nous introduirons les idées et la terminologie que HELMHOLTZ a employées dans ses travaux sur les systèmes cycliques [18].

2. Commençons par déterminer la force vive de tout système qui tourne autour d'un point fixe.

Soit ξ, η, ζ un système d'axes en mouvement dont l'origine est fixe. Désignons par p, q, r les composantes de la vitesse angulaire de rotation dans la direction des axes.

Supposons que u, v, w soiet les composantes de la vitesse relative aux axes ξ, η, ζ d'un point du système ayant pour coordonnées ξ, η, ζ. Alors les composantes de la vitesse absolue seront

$$u + q\zeta - r\eta \quad , \quad v + r\xi - p\zeta \quad , \quad w + p\eta - q\xi .$$

Si la densité du système est ρ, la force vive sera

$$T = \frac{1}{2}\int_S \rho \left\{ (u + q\zeta - r\eta)^2 + (v + r\xi - p\zeta)^2 + (w + p\eta - q\xi)^2 \right\} dS ,$$

(18) Crelle's Journal. Bd. 97.

S étant l'espace occupé par le système en mouvement. On tire de la

$$(1\,d)\qquad T = \frac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 - 2\,Dqr - 2\,Erp - 2\,Fpq) + m_1 p + m_2 q + m_3 r + T_0$$

où l'on a désigné par A, B, C les moments d'inertie du système par rapport aux axes ξ, η, ζ; par D, E, F les moments mixtes d'inertie par rapport aux couples d'axes η, ζ; ζ, ξ; ξ, η, et l'on a posé

$$m_1 = \int_S \rho\,(w\eta - v\zeta)\,dS\ ,\quad m_2 = \int_S \rho\,(u\zeta - w\xi)\,dS\ ,\quad m_3 = \int_S \rho\,(v\xi - u\eta)\,dS\ ,$$

$$T_0 = \frac{1}{2}\int_S \rho\,(u^2 + v^2 + w^2)\,dS\,.$$

On a donc désigné pa m_1, m_2, m_3 les composantes du couple de quantité de mouvement relatif aux axes ξ, η, ζ et par T_0 la force vive du même mouvement relatif.

3. On peut appeler ces mouvements relatifs les *mouvements internes du système*. S'ils ne changent la forme ni la distribution de la densité à l'intérieur du système ils vérifieront la condition

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial\xi} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial\eta} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial\zeta} = 0$$

et le long de toute surface de discontinuité on aura

$$\rho\,(u\cos nx + v\cos ny + w\cos nz) = \rho'\,(u'\cos nx + v'\cos ny + w'\cos nz)$$

en désignant par n la normale à la surface de discontinuité, par ρ, u, v, w la densité et les composantes de la vitesse d'un côté de cette surface, et par ρ', u', v', w' les valeurs des mêmes quantités de l'autre côté.

En général m_1, m_2, m_3, T_0 seront des fonctions du temps, mais si les mouvements internes seront *stationnaires* on devra les regarder comme des constantes.

Article II.

1. – Lorsque les mouvements internes sont stationnaires et le système n'est pas soumis à des forces externes on a les relations (en prenant ξ, η, ζ pour axes d'inertie: voir Introduction)

$$(2\,d)\qquad \frac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2) = \text{const.},$$

$$(3\,d)\qquad (Ap + m_1)^2 + (Bq + m_2)^2 + (Cr + m_3)^2 = \text{const.}$$

Si la force vive T est constante (voir article précédent § 2) on doit avoir

$$(4\,d)\qquad m_1 p + m_2 q + m_3 r = \text{const.}$$

puisque T_0 est constante (et $D = E = F = 0$).

Nous allons déterminer les conditions pour que la relation précédente soit satisfaite, quelles que soient les conditions initiales du mouvement.

2. En dérivant l'équation (4_d) par rapport à t, on trouve

$$(4'_d) \qquad m_1 \frac{dp}{dt} + m_2 \frac{dq}{dt} + m_3 \frac{dr}{dt} = 0 .$$

Multiplions les équations différentielles du mouvement (voir Introduction)

$$A \frac{dp}{dt} + (C - B) qr + m_3 q - m_2 r = 0 ,$$

$$B \frac{dq}{dt} + (A - C) rp + m_1 r - m_3 p = 0 ,$$

$$C \frac{dr}{dt} + (B - A) pq + m_2 p - m_1 q = 0 ,$$

par m_1/A, m_2/B, m_3/C. En les ajoutant on aura, à cause de l'équation $(4'_d)$,

$$\frac{m_1}{A}(B - C) qr + \frac{m_2}{B}(C - A) rp + \frac{m_3}{C}(A - B) pq$$
$$- m_2 m_3 \left(\frac{1}{C} - \frac{1}{B}\right) p - m_3 m_1 \left(\frac{1}{A} - \frac{1}{C}\right) q - m_1 m_2 \left(\frac{1}{B} - \frac{1}{A}\right) r = 0 .$$

Il est aisé de trouver les conditions *nécessaires* et *suffisantes* pour que cette équation soit satisfaite quelles que soient les valeurs de p, q, r.

Elles sont ou

$$A = B = C ,$$

ou

$$B = C \quad , \quad m_2 = m_3 = 0$$

ou

$$C = A \quad , \quad m_3 = m_1 = 0$$

ou enfin

$$A = B \quad , \quad m_1 = m_2 = 0 .$$

On tire de là le théorème suivant: *Il est nécessaire et suffisant pour que la force vive du système soit constante, quel que soit le mouvement initial, que l'ellipsoïde d'inertie soit une sphère, ou qu'il soit un ellipsoïde de révolution par rapport à l'axe du mouvement interne* [19].

3. On peut maintenant se poser la question suivante:

En prenant d'une façon particulière les conditions initiales du mouvement, est-ce qu'on peut trouver d'autres cas dans lesquels la force vive reste constante?

On peut répondre tout de suite affermativement à cette question; à cet effet il suffit de remarquer que la force vive sera constante toutes les fois

(19) Il est évident que le dernier cas comprend le premier.

que le mouvement de rotation du système sera permanent (voir le chapitre III). Mais ce cas n'est pas le seul; il y en a aussi d'autres.

Pour les trouver il suffit de chercher les conditions qui doivent être remplies pour que les équations $(2\,d)$, $(3\,d)$, $(4\,d)$ aient un nombre infini de racines communes. Par l'élimination de p entre ces équations on trouve

$$\mathrm{B}(\mathrm{B}-\mathrm{A})q^2+\mathrm{C}(\mathrm{C}-\mathrm{A})r^2+2(\mathrm{B}-\mathrm{A})m_2 q+2(\mathrm{C}-\mathrm{A})m_3 r=\text{const.},$$

$$\begin{gathered}(\mathrm{A}m_2^2+\mathrm{B}m_1^2)q^2+(\mathrm{A}m_3^2+\mathrm{C}m_1^2)r^2\\ +2\,\mathrm{A}m_2 m_3 qr-2\,\mathrm{A}gm_2 q-2\,\mathrm{A}gm_3 r=\text{const.},\end{gathered}$$

ayant posé

$$(4\,d)\qquad g=m_1 p+m_2 q+m_3 r=\text{const.}$$

Les équations précédentes auront un nombre infini de racines communes lorsque leur résultante aura tous ses coefficients nuls.

Si l'on écrit que le coefficient du terme de 4ème degré est nul, il vient

$$\begin{gathered}\{m_1^2\,\mathrm{BC}(\mathrm{B}-\mathrm{C})+m_2^2\,\mathrm{CA}(\mathrm{C}-\mathrm{A})+m_3^2\,\mathrm{AB}(\mathrm{A}-\mathrm{B})\}^2\\ +4\,\mathrm{ABC}\{m_2^2 m_3^2\,\mathrm{A}(\mathrm{B}-\mathrm{A})(\mathrm{C}-\mathrm{A})+m_3^2 m_1^2\,\mathrm{B}(\mathrm{C}-\mathrm{B})(\mathrm{A}-\mathrm{B})\\ +m_1^2 m_2^2\,\mathrm{C}(\mathrm{A}-\mathrm{C})(\mathrm{B}-\mathrm{C})\}=0.\end{gathered}$$

Cette équation sera satisfaite seulement si l'on a

$$\mathrm{A}=\mathrm{B}=\mathrm{C},$$

ou si m_1, ou m_2, ou m_3 s'annule. En effet on peut l'écrire

$$\begin{aligned}&\{m_1^2\,\mathrm{BC}(\mathrm{B}-\mathrm{C})-m_2^2\,\mathrm{CA}(\mathrm{C}-\mathrm{A})-m_3^2\,\mathrm{AB}(\mathrm{A}-\mathrm{B})\}^2\\ &\qquad+4\,\mathrm{A}^2\,\mathrm{BC}m_2^2 m_3^2(\mathrm{B}-\mathrm{A})(\mathrm{C}-\mathrm{A})\\ =&\{m_2^2\,\mathrm{CA}(\mathrm{C}-\mathrm{A})-m_3^2\,\mathrm{AB}(\mathrm{A}-\mathrm{B})-m_1^2\,\mathrm{BC}(\mathrm{B}=\mathrm{C})\}^2\\ &\qquad+4\,\mathrm{B}^2\,\mathrm{CA}m_3^2 m_1^2(\mathrm{C}-\mathrm{B})(\mathrm{A}-\mathrm{B})\\ =&\{m_3^2\,\mathrm{AB}(\mathrm{A}-\mathrm{B})-m_1^2\,\mathrm{BC}(\mathrm{B}-\mathrm{C})-m_2^2\,\mathrm{CA}(\mathrm{C}-\mathrm{A})\}^2\\ &\qquad+4\,\mathrm{C}^2\,\mathrm{AB}m_1^2 m_2^2(\mathrm{A}-\mathrm{C})(\mathrm{B}-\mathrm{C})=0.\end{aligned}$$

On tire de là que, si la condition $\mathrm{A}=\mathrm{B}=\mathrm{C}$ n'est pas satisfaite et si les quantités m_1, m_2, m_3 ne sont pas nulles, T sera constante seulement lorsque p, q, r seront constantes. D'où l'on déduit le théorème:

Si l'on a un système qui n'est pas soumis à des forces externes et dans lequel subsistent des mouvement stationnaires, la condition nécessaire et suffisante pour que la force vive soit constante, lorsque A, B, C *ne sont pas égaux, et* m_1, m_2, m_3 *ne sont pas nuls, est que la rotation du système soit permanente.*

4. Supposons maintemant qu'on ait $m_2=0$. Alors la dernière équation s'écrira

$$m_1^2\,\mathrm{C}(\mathrm{B}-\mathrm{C})-m_3^2\,\mathrm{A}(\mathrm{A}-\mathrm{B})=0$$

d'où

$$\frac{m_1}{m_3} = \pm \sqrt{\frac{A(A-B)}{C(B-C)}}.$$

Donc il faut que B soit comprise entre A et C. En supposant $A > B > C$ on pourra poser

$$m_1 = \varepsilon\sqrt{A(A-B)} \quad , \quad m_3 = \pm\,\varepsilon\sqrt{C(B-C)}$$

ε désignant une quantité constante réelle. Les équations (2_d) et (3_d) deviendront

$$Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = \text{const.},$$

$$A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2 + 2\varepsilon A\sqrt{A(A-B)}\,p \pm 2\varepsilon C\sqrt{C(B-C)}\,r = \text{const.}$$

Par l'élimination de q entre ces équations on trouve

$$A(A-B)p^2 + C(C-B)r^2 + 2\varepsilon A\sqrt{A(A-B)}\,p \pm 2\varepsilon C\sqrt{C(B-C)}\,r = \text{const.}$$

Cette égalité peut s'écrire de la manière suivante

$$(5_d) \qquad \left[\sqrt{A(A-B)}\,p \pm \sqrt{C(B-C)}\,r + \varepsilon(A-C)\right] \times \left[\sqrt{A(A-B)}\,p \mp \sqrt{C(B-C)}\,r + \varepsilon(A+C)\right] = \text{const.}$$

Supposons que les valeurs initiales de p et de r soient telles que le premier facteur du premier membre de l'équation précédente soit nul; on peut démontrer alors que ce facteur sera toujours nul. Cette proposition est évidente lorsque les valeurs initiales de p et de r n'annulent pas le deuxième facteur. Mais s'ils l'annulent, alors on a

$$p = \frac{-\varepsilon A}{\sqrt{A(A-B)}} = \frac{m_1}{B-A} \quad , \quad r = \frac{\pm\,\varepsilon C}{\sqrt{C(B-C)}} = \frac{\pm\,\varepsilon\sqrt{C(B-C)}}{B-C} = \frac{m_3}{B-C}$$

et par suite le mouvement de rotation est permanent (voir chapitre III, article IV, § 1, 3ème cas); p et r garderont alors une valeur constante et par conséquent le premier facteur sera toujours nul.

Observons maintenant que si le premier facteur est nul, la condition (4_d) peut être déduite comme une conséquence. On peut donc conclure: *la force vive sera constante lorsqu'on a*

$$m_1 = \varepsilon\sqrt{A(A-B)} \quad , \quad m_2 = 0 \quad , \quad m_3 = \pm\,\varepsilon\sqrt{C(B-C)}$$

et que les conditions initiales du mouvement sont telles que l'égalité

$$\sqrt{A(A-B)}\,p \pm \sqrt{C(B-C)}\,r + \varepsilon(A-C) = 0$$

soit vérifiée, q ayant une valeur quelconque.

Réciproquement si la condition (4_d) doit être remplie, ou elle doit coïncider avec l'équation qu'on obtient en annulant le premier facteur de l'équation (5_d), ou les deux facteurs du premier membre de cette équation devront être constants et par suite p, q, r seront constants, c'est à dire le mouvement de rotation sera permanent.

Remarquons enfin que si l'on suppose que non seulement m_2, mais m_1 ou m_3 soit nul, alors il faut qu'on ait $B = A$ ou $B = C$, c'est pourquoi on revient aux cas envisagés auparavant (§ 2).

5. On peut résumer l'analyse qu'on vient de faire dans cette proposition:

Tous les cas particuliers dans lesquel la force vive du système est constante se réduisent aux suivants:

1° *Le mouvement de rotation du système est permanent;*

2° *On a, ε étant une constante,*

$$m_1 = \varepsilon \sqrt{A\,(A - B)} \quad , \quad m_2 = 0 \quad , \quad m_3 = \pm\, \varepsilon \sqrt{C\,(B - C)} \quad , \quad A > B > C$$

et les conditions initiales sont telles que

$$p \sqrt{A\,(A - B)} \pm \sqrt{C\,(B - C)} + \varepsilon\,(A - C) = 0\,;$$

3° *L'ellipsoïde d'inertie est de révolution autour de l'axe du mouvement interne.*

Dans le 3ème *cas les conditions initiales du mouvement peuvent être quelconques.*

Les cas précédents exceptés, la force vive du système doit changer; par suite il faut des forces pour maintenir stationnaire le mouvement interne. C'est pourquoi si ces forces n'existent pas le mouvement interne doit cesser d'être stationnaire.

Donc *de la même manière que les mouvements internes changent le mouvement de rotation du système, celui-ci tend à changer les mouvements internes.*

6. Nous venons de trouver les conditions nécessaires et suffisantes pour que la force vive du système soit constante. Or ces conditions sont nécessaires pour que le mouvement interne se maintienne stationnaire sans qu'il intervienne aucune force, mais évidemment elles ne sont pas suffisantes. En effet la somme des travaux des forces qui servent à maintenir stationnaire le mouvement peut être nulle, sans que chaque force soit nulle.

Nous verrons dans l'article VI les conditions nécessaires et suffisantes pour que le mouvement soit stationnaire lorsqu'aucune force n'agit.

Article III.

1. Nous avons vu dans l'article précédent que la force vive d'un système où subsistent des mouvements stationnaires change en général avec le temps. Nous consacrerons cet article pour en calculer l'expression.

Il suffit pour cela d'employer les formules que nous avons trouvées dans le chapitre II, article III, § 3. On a

$$p = m_1 \frac{\frac{M_1}{\lambda_1 - A}\sigma_1 + \frac{M_2}{\lambda_2 - A}\sigma_2 + \frac{M_3}{\lambda_3 - A}\sigma_3 + \frac{M_4}{\lambda_4 - A}\sigma}{M_1\sigma_1 + M_2\sigma_2 + M_3\sigma_3 + M_4\sigma} = m_1 \frac{\sum_1^4{}_i \frac{M_i}{\lambda_i - A}\sigma_i}{\sum_1^4 M_i\sigma_i},$$

$$q = m_2 \frac{\frac{M_1}{\lambda_1 - B}\sigma_1 + \frac{M_2}{\lambda_2 - B}\sigma_2 + \frac{M_3}{\lambda_3 - B}\sigma_3 + \frac{M_4}{\lambda_4 - B}\sigma}{M_1\sigma_1 + M_2\sigma_2 + M_3\sigma_3 + M_4\sigma} = m_2 \frac{\sum_1^4{}_i \frac{M_i}{\lambda_i - B}\sigma_i}{\sum_1^4 M_i\sigma_i},$$

$$r = m_3 \frac{\frac{M_1}{\lambda_1 - C}\sigma_1 + \frac{M_2}{\lambda_2 - C}\sigma_2 + \frac{M_3}{\lambda_3 - C}\sigma_3 + \frac{M_4}{\lambda_4 - C}\sigma}{M_1\sigma_1 + M_2\sigma_2 + M_3\sigma_3 + M_4\sigma} = m_3 \frac{\sum_1^4{}_i \frac{M_i}{\lambda_i - C}\sigma_i}{\sum_1^4 M_i\sigma_i}$$

où pour symétrie on a remplacé σ par σ_4.

On tire de la

$$(6_d) \qquad m_1 p + m_2 q + m_3 r = \frac{\sum_1^4{}_i M_i\left(\frac{m_1^2}{\lambda_i - A} + \frac{m_2^2}{\lambda_i - B} + \frac{m_3^2}{\lambda_i - C}\right)\sigma_i}{\sum_1^4 M_i\sigma_i}.$$

Mais les quantités λ_i sont les racines de l'équation (voir $(25'_b)$)

$$\frac{Am_1^2}{\lambda - A} + \frac{Bm_2^2}{\lambda - B} + \frac{Cm_3^2}{\lambda - C} + 2h\lambda - K_1 = 0$$

par suite on aura

$$\lambda_i\left(\frac{m_1^2}{\lambda_i - A} + \frac{m_2^2}{\lambda_i - B} + \frac{m_3^2}{\lambda_i - C}\right) - (m_1^2 + m_2^2 + m_3^2)$$

$$= \frac{Am_1^2}{\lambda_i - A} + \frac{Bm_2^2}{\lambda_i - B} + \frac{Cm_3^2}{\lambda_i - C} = -2h\lambda_i + K_1.$$

Ayant égard à l'équation (24_b) on peut écrire

$$K_1 + m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 = K^2$$

donc (comparer $(25''_b)$)

$$\frac{m_1^2}{\lambda_i - A} + \frac{m_2^2}{\lambda_i - B} + \frac{m_3^2}{\lambda_i - C} = \frac{K^2}{\lambda_i} - 2h.$$

et enfin

$$(6'_d) \qquad m_1 p + m_2 q + m_3 r = \frac{\sum_1^4{}_i M_i\left(\frac{K^2}{\lambda_i} - 2h\right)\sigma_i}{\sum_1^4 M_i\sigma_i} = K^2 \frac{\sum_1^4 \frac{M_i}{\lambda_i}\sigma_i}{\sum_1^4 M_i\sigma_i} - 2h.$$

2. Il n'y a plus maintenant de difficulté pour calculer la force vive. Il suffit d'employer la formule (1_d) de l'article I dans laquelle on prendra $D = E = F = 0$. On aura

$$T = \frac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2) + m_1 p + m_2 q + m_3 r + T_0.$$

Mais (voir (2_d))

$$\frac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2) = h = \text{const.}$$

Donc, à cause de l'égalité ($6'_d$), on trouvera

$$T = K^2 \frac{\sum_1^4{}_i \frac{M_i}{\lambda_i}\sigma_i}{\sum_1^4 M_i \sigma_i} - h + T_0.$$

Article IV.

1. Examinons maintenant les variations produites par le mouvement de rotation du système sur le mouvement interne, lorsqu'il n'y a pas de forces capables de le maintenir stationnaire.

Pour simplifier nous envisagerons d'abord un cas particulier, et dans les articles suivants nous discuterons le cas le plus général.

2. Supposons que le mouvement interne soit la rotation d'un tore de révolution homogène autour de son axe de symétrie, et que celui-ci soit fixe dans l'intérieur du corps.

Désignons par ω la vitesse angulaire de rotation du tore, par α, β, γ les cosinus de direction de l'axe du tore avec les axes d'inertie du système ξ, η, ζ; par μ le moment d'inertie du tore par rapport à l'axe de symétrie.

Les composantes du couple de quantité de mouvement due au mouvement interne dans les directions ξ, η, ζ seront

$$m_1 = \mu\omega\alpha \quad , \quad m_2 = \mu\omega\beta \quad , \quad m_3 = \mu\omega\gamma$$

et la force vive du mouvement interne sera

$$T_0 = \frac{1}{2}\mu\omega^2.$$

Par suite la force vive du système, dont la forme et la distribution des masses ne changera pas, sera (voir (1_d))

$$T = \frac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2) + \mu\omega(p\alpha + q\beta + r\gamma) + \frac{1}{2}\mu\omega^2.$$

Si le système n'est soumis à aucune force externe nous pouvons écrire les équations du mouvement de la manière suivante (voir Introduction, eq. (7))

$$(7_d) \qquad \left\{ \begin{aligned} &A\frac{dp}{dt} + (C - B)qr + \mu\omega(q\gamma - r\beta) + \mu\alpha\frac{d\omega}{dt} = 0, \\ &B\frac{dq}{dt} + (A - C)rp + \mu\omega(r\alpha - p\gamma) + \mu\beta\frac{d\omega}{dt} = 0, \\ &C\frac{dr}{dt} + (B - A)pq + \mu\omega(p\beta - q\alpha) + \mu\gamma\frac{d\omega}{dt} = 0. \end{aligned} \right.$$

Si le tore aussi, en tournant autour de son axe, n'est soumis à aucune force, on aura, à cause du principe des forces vives

$$(1'_d) \qquad T = \frac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2) + \mu\omega(p\alpha + q\beta + r\gamma) + \frac{1}{2}\mu\omega^2 = \text{const.}$$

3. Nous avons trouvé quatre équations (7_d) et $(1'_d)$ où paraissent quatre fonctions inconnues, c'est à dire p, q, r, ω. Les quantités p, q, r déterminent la rotation du système, et ω détermine le mouvement interne.

En dérivant l'équation $(1'_d)$ par rapport à t on trouve

$$Ap\frac{dp}{dt} + Bq\frac{dq}{dt} + Cr\frac{dr}{dt} + \mu\omega\left(\alpha\frac{dp}{dt} + \beta\frac{dq}{dt} + \gamma\frac{dr}{dt}\right)$$
$$+ \mu\frac{d\omega}{dt}(p\alpha + q\beta + r\gamma) + \mu\omega\frac{d\omega}{dt} = 0 .$$

Ajoutons les équations (7_d) après les avoir multipliées par p, q, r. Il viendra

$$Ap\frac{dp}{dt} + Bq\frac{dq}{dt} + Cr\frac{dr}{dt} + \mu(p\alpha + q\beta + r\gamma)\frac{d\omega}{dt} = 0 .$$

D'où

$$\alpha\frac{dp}{dt} + \beta\frac{dq}{dt} + \gamma\frac{dr}{dt} + \frac{d\omega}{dt} = 0$$

et en intégrant

$$(8_d) \qquad \omega + \alpha p + \beta q + \gamma r = \text{const.}$$

Entre ω, p, q, r subsiste donc une relation linéaire à coefficients constants. A l'aide de cette relation on peut éliminer ω dans les équations (7_d). En intégrant ces équations on aura p, q, r et par suite, à cause de l'équation (8_d), on aura ω.

Il est aisé de voir sans même faire des calculs que le problème de l'intégration peut se reconduire aux quadratures et qu'on obtient des fonctions elliptiques. Il suffit pour cela de remarquer que par le principe de la conservation des aires on a l'intégrale suivante des équations (7_d)

$$(Ap + \mu\omega\alpha)^2 + (Bq + \mu\omega\beta)^2 + (Cr + \mu\omega\gamma)^2 = \text{const.}$$

Remplaçons dans cette équation et dans l'équation $(1'_d)$ ω par la valeur qu'on tire de l'équation (8_d). On trouvera deux relations de 2ème degré entre p, q, r. On déduit de là que p, q, r peuvent s'exprimer comme des fonctions elliptiques d'un paramètre, et par une quadrature on peut trouver une relation entre ce paramètre et le temps. L'équation (8_d) montre que même ω peut s'obtenir d'une manière analogue. Nous en resterons là dans la solution de ce cas particulier, parce que nous considérerons le cas général dans les articles suivants.

Article V.

1. Nous allons discuter la question tout à fait générale de la rotation autour du centre de gravité d'un corps dans lequel existe un système polycyclique quelconque [20]. Le cas que nous avons étudié dans l'article précédent n'est qu'un cas très-particulier de mouvement monocyclique. Nous pouvons supposer des mouvements polycicliques de plusieurs sortes. Comme type nous pouvons par exemple envisager approximativement des réseaux de canaux dont les sections soient très-petites par rapport à leurs longueurs, et dans lesquels circulent des fluides homogènes [21].

2. Soient $p_1, p_2, p_3, \cdots, p_n$ les coordonnées cycliques du système et $\tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_2, \cdots, \tilde{\omega}_m$ soient les paramètres.

L'expression de la force vive du mouvement interne sera en général

$$\begin{aligned} T_0 &= \frac{1}{2}\sum_1^n{}_i \sum_1^n{}_s a_{is} \frac{dp_i}{dt}\frac{dp_s}{dt} + \frac{1}{2}\sum_1^m{}_h \sum_1^m{}_k b_{hk} \frac{d\tilde{\omega}_h}{dt}\frac{d\tilde{\omega}_k}{dt} + \sum_1^n{}_i \sum_1^m{}_h c_{ih} \frac{dp_i}{dt}\frac{d\tilde{\omega}_h}{dt} \\ &= \frac{1}{2}\sum_1^n{}_i \sum_1^n{}_s a_{is}\, \omega_i\, \omega_s + \frac{1}{2}\sum_1^m{}_h \sum_1^m{}_k b_{hk} \frac{d\tilde{\omega}_h}{dt}\frac{d\tilde{\omega}_k}{dt} + \sum_1^n{}_i \sum_1^m{}_h c_{ih}\, \omega_i \frac{d\tilde{\omega}_h}{dt} \end{aligned}$$

en désignant par $\omega_i = dp_i/dt$ les intensités cycliques du système.

Nous verrons après les termes qu'on doit négliger dans cette expression. Les coefficients a_{is}, b_{hk}, c_{ih} seront des fonctions des paramètres.

Les composantes du couple de quantité de mouvement seront

$$(9\,d)\qquad \left\{ \begin{aligned} m_1 &= \sum_1^n{}_i a_i \frac{dp_i}{dt} + \sum_1^m{}_h e_h \frac{d\tilde{\omega}_h}{dt} = \sum_1^n{}_i a_i\, \omega_i + \sum_1^m{}_h e_h \frac{d\tilde{\omega}_h}{dt}, \\ m_2 &= \sum_1^n{}_i b_i \frac{dp_i}{dt} + \sum_1^m{}_h f_h \frac{d\tilde{\omega}_h}{dt} = \sum_1^n{}_i b_i\, \omega_i + \sum_1^m{}_h f_h \frac{d\tilde{\omega}_h}{dt}, \\ m_3 &= \sum_1^n{}_i c_i \frac{dp_i}{dt} + \sum_1^m{}_h g_h \frac{d\tilde{\omega}_h}{dt} = \sum_1^n{}_i c_i\, \omega_i + \sum_1^m{}_h g_h \frac{d\tilde{\omega}_h}{dt} \end{aligned} \right.$$

où $a_i, b_i, c_i, e_h, f_h, g_h$ seront des fonctions des paramètres. On pourra aussi supposer que les moments d'inertie A, B, C et les moments mixtes soient des fonctions des paramètres.

La force vive du système sera (voir article I, eq. (1 *d*))

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 - 2\,Dqr - 2\,Erp - 2\,Fpq) \\ &\quad + m_1 p + m_2 q + m_3 r + T_0 . \end{aligned}$$

(20) Voir HERTZ, *Die Prinzipien der Mechanik.* Zweites Buch. Abschitt 5.

(21) Dans l'art. IX nous envisagerons un cas de rotation d'un solide qui renferme un fluide dans un récipient tubulaire dont la section est quelconque.

3. Un déplacement virtuel du système sera déterminé par les composantes d'une rotation infiniment petite qu'on désignera par $\delta\tilde{\omega}$, $\delta\chi$, $\delta\rho$ et par les differentielles δp_i et $\delta\tilde{\omega}_h$. Ecrivons le travail virtuel sous la forme

$$U = M_\xi \delta\tilde{\omega} + M_\eta \delta\chi + M_\zeta \delta\rho + \sum_1^n {}_i P_i \delta p_i + \sum_1^m {}_h \Pi_h \delta\tilde{\omega}_h .$$

M_ξ, M_η, M_ζ seront les composantes du couple de rotation; P_i seront les forces correspondant aux coordonnées cycliques p_i et Π_h celles correspondant aux paramètres $\tilde{\omega}_h$.

Par des formules connues on aura

$$\begin{aligned}
\delta p &= \frac{d}{dt}\delta\tilde{\omega} + q\delta\rho - r\delta\chi ,\\
\delta q &= \frac{d}{dt}\delta\chi + r\delta\tilde{\omega} - p\delta\rho ,\\
\delta r &= \frac{d}{dt}\delta\rho + p\delta\chi - q\delta\tilde{\omega} .
\end{aligned}$$

En employant le principe de HAMILTON on trouve donc l'équation suivante

$$\begin{aligned}
0 = \int_{t_0}^{t_1} (\delta T + U)\, dt = \int_{t_0}^{t_1} \Big\{ & \frac{\partial T}{\partial p}\left(\frac{d}{dt}\delta\tilde{\omega} + q\delta\rho - r\delta\chi\right) + \frac{\partial T}{\partial q}\left(\frac{d}{dt}\delta\chi + r\delta\tilde{\omega} - p\delta\rho\right) \\
& + \frac{\partial T}{\partial r}\left(\frac{d}{dt}\delta\rho + p\delta\chi - q\delta\tilde{\omega}\right) \\
& + \sum_1^n {}_i \left(a_i p + b_i q + c_i r + \sum_1^n {}_s a_{is}\omega_s + \sum_1^m {}_h c_{ih}\frac{d\tilde{\omega}_h}{dt}\right)\frac{d}{dt}\delta p_i \\
& + \sum_1^m {}_h \left(e_h p + f_h q + g_h r + \sum_1^n {}_i c_{ih}\omega_i + \sum_1^m {}_k b_{hk}\frac{d\tilde{\omega}_k}{dt}\right)\frac{d}{dt}\delta\tilde{\omega}_h + \sum_1^m {}_h \frac{\partial T}{\partial\tilde{\omega}_h}\delta\tilde{\omega}_h \\
& + M_\xi\delta\tilde{\omega} + M_\eta\delta\chi + M_\zeta\delta\rho + \sum_1^n {}_i P_i\delta p_i + \sum_1^m {}_h \Pi_h\delta\tilde{\omega}_h \Big\} dt
\end{aligned}$$

où l'on doit supposer que $\delta\tilde{\omega}$, $\delta\chi$, $\delta\rho$, δp_i, $\delta\tilde{\omega}_h$ soient nuls aux temps t_0, t_1.

Par des intégrations par parties on trouve les équations différentielles du mouvement

$$(10\,d)\quad \left\{\begin{aligned}
& \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial p} + q\frac{\partial T}{\partial r} - r\frac{\partial T}{\partial q} = M_\xi ,\\
& \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q} + r\frac{\partial T}{\partial p} - p\frac{\partial T}{\partial r} = M_\eta ,\\
& \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial r} + p\frac{\partial T}{\partial q} - q\frac{\partial T}{\partial p} = M_\zeta ,\\
& \frac{d}{dt}\left(a_i p + b_i q + c_i r + \sum_1^n {}_i a_{is}\omega_s + \sum_1^m {}_h c_{ih}\frac{d\tilde{\omega}_h}{dt}\right) = P_i ,\\
& \frac{d}{dt}\left(e_h p + f_h q + g_h r + \sum_1^n {}_i c_{ih}\omega_i + \sum_1^m {}_k b_{hk}\frac{d\tilde{\omega}_k}{dt}\right) - \frac{\partial T}{\partial\tilde{\omega}_h} = \Pi_h .
\end{aligned}\right.$$

4. Supposons maintenant que les paramétres changent si lentement que leurs dérivées par rapport à t soient infiniment petites.

En les négligeant, on trouvera que la force vive du mouvement interne sera

$$T'_0 = \frac{1}{2} \sum_{1}^{n}{}_i \sum_{1}^{n}{}_s a_{is}\, \omega_i\, \omega_s .$$

La force vive totale sera

$$\begin{aligned} T' &= \frac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 - 2\,Dqr - 2\,Erp - 2\,Fpq) \\ &+ \sum_{1}^{n}{}_i (a_i p + b_i q + c_i r)\,\omega_i + \frac{1}{2}\sum_{1}^{n}{}_i \sum_{1}^{n}{}_s a_{is}\,\omega_i\,\omega_s \end{aligned}$$

et les équations différentielles du mouvement deviendront

$$(10'_d) \quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{d}{dt}\frac{\partial T'}{\partial p} + q\frac{\partial T'}{\partial r} - r\frac{\partial T'}{\partial q} = M_\xi , \\ &\frac{d}{dt}\frac{\partial T'}{\partial q} + r\frac{\partial T'}{\partial p} - p\frac{\partial T'}{\partial r} = M_\eta , \\ &\frac{d}{dt}\frac{\partial T'}{\partial r} + p\frac{\partial T'}{\partial q} - q\frac{\partial T'}{\partial p} = M_\zeta , \\ &\frac{d}{dt}\left(a_i p + b_i q + c_i r + \sum_{1}^{n}{}_s a_{is}\,\omega_s\right) = P_i , \\ &\frac{d}{dt}\left(e_h p + f_h q + g_h r + \sum_{1}^{n}{}_i c_{ih}\,\omega_i\right) - \frac{\partial T'}{\partial \varpi_h} = \Pi_h . \end{aligned} \right.$$

Pour que le mouvement interne soit cyclique, même si les dérivées des intensités cycliques ne sont pas négligeables, il faut supposer que les coefficients c_{ih} soient des quantités négligeables [22].

Alors les équations précédentes deviennent

$$(10''_d) \quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{d}{dt}\frac{\partial T'}{\partial p} + q\frac{\partial T'}{\partial r} - r\frac{\partial T'}{\partial q} = M_\xi , \\ &\frac{d}{dt}\frac{\partial T'}{\partial q} + r\frac{\partial T'}{\partial p} - p\frac{\partial T'}{\partial r} = M_\eta , \\ &\frac{d}{dt}\frac{\partial T'}{\partial r} + p\frac{\partial T'}{\partial q} - q\frac{\partial T'}{\partial p} = M_\zeta , \\ &\frac{d}{dt}\left(a_i p + b_i q + c_i r + \sum_{1}^{n}{}_s a_{is}\,\omega_s\right) = P_i , \\ &\frac{d}{dt}(e_h p + f_h q + g_h r) - \frac{\partial T}{\partial \varpi_h} = \Pi_h . \end{aligned} \right.$$

Il est inutile d'ajouter que le système ne sera *rigoureusement cyclique* que si les paramètres seront constants.

(22) Voir VOIGT, *Kompendium der theoretischen Physik.* 1er Bd., page 86.

5. En supposant que le couple de rotation soit nul, ajoutons les trois premières équations (10_d) aprés les avoir multipliées par $\partial T/\partial p$, $\partial T/\partial q$, $\partial T/\partial r$. On trouvera

$$\frac{\partial T}{\partial p}\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial p}+\frac{\partial T}{\partial q}\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q}+\frac{\partial T}{\partial r}\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial r}=0$$

et en intégrant

$$(11_d)\qquad \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)^2+\left(\frac{\partial T}{\partial q}\right)^2+\left(\frac{\partial T}{\partial r}\right)^2=K^2.$$

Désignons par x, y, z un système d'axes fixes et représentons dans la table suivante les cosinus des angles qu'ils forment avec les axes ξ, η, ζ

	ξ, η, ζ
x	$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$
y	$\beta_1, \beta_2, \beta_3$
z	$\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$.

En employant les formules de POISSON (Introd., eq. 2), on tire des équations (10_d), si l'on suppose toujours $M_\xi=M_\eta=M_\zeta=0$,

$$\frac{d}{dt}\left(\alpha_1\frac{\partial T}{\partial p}+\alpha_2\frac{\partial T}{\partial q}+\alpha_3\frac{\partial T}{\partial r}\right)=0,$$

$$\frac{d}{dt}\left(\beta_1\frac{\partial T}{\partial p}+\beta_2\frac{\partial T}{\partial q}+\beta_3\frac{\partial T}{\partial r}\right)=0,$$

$$\frac{d}{dt}\left(\gamma_1\frac{\partial T}{\partial p}+\gamma_2\frac{\partial T}{\partial q}+\gamma_3\frac{\partial T}{\partial r}\right)=0$$

d'où par intégration

$$\alpha_1\frac{\partial T}{\partial p}+\alpha_2\frac{\partial T}{\partial q}+\alpha_3\frac{\partial T}{\partial r}=\text{const.}$$

$$\beta_1\frac{\partial T}{\partial p}+\beta_2\frac{\partial T}{\partial q}+\beta_3\frac{\partial T}{\partial r}=\text{const.}$$

$$\gamma_1\frac{\partial T}{\partial p}+\gamma_2\frac{\partial T}{\partial q}+\gamma_3\frac{\partial T}{\partial r}=\text{const.}$$

Ces intégrales sont les intégrales des aires et l'équation (11_d) peut être déduite comme une conséquence d'elles.

Si le plan xy est le plan invariable, alors les deux premières constantes sont nulles et la troisième est K; par suite il vient

$$(12_d)\qquad \gamma_1=\frac{1}{K}\frac{\partial T}{\partial p}\quad,\quad \gamma_2=\frac{1}{K}\frac{\partial T}{\partial q}\quad,\quad \gamma_3=\frac{1}{K}\frac{\partial T}{\partial r}.$$

6. On tire très-facilement des équations (10_d), étant $\nu \leqq n$,

$$p \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial p} + q \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial q} + r \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial r} + \sum_{1}^{\nu}{}_i\, \omega_i \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \omega_i}$$

$$+ \sum_{1}^{m}{}_h \frac{d\tilde{\omega}_h}{dt} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial\left(\frac{d\tilde{\omega}_h}{dt}\right)} - \sum_{1}^{m}{}_h \frac{\partial T}{\partial \tilde{\omega}_h} \frac{d\tilde{\omega}_h}{dt}$$

$$= M_\xi\, p + M_\eta\, q + M_\zeta\, r + \sum_{1}^{\nu}{}_i\, P_i\, \omega_i + \sum_{1}^{m}{}_h\, \Pi_h \frac{d\tilde{\omega}_h}{dt}\,.$$

Cette équation peut s'écrire de la manière suivante

$$\frac{d}{dt}\left(p \frac{\partial T}{\partial p} + q \frac{\partial T}{\partial q} + r \frac{\partial T}{\partial r} + \sum_{1}^{\nu}{}_i\, \omega_i \frac{\partial T}{\partial \tilde{\omega}_i} + \sum_{1}^{m} \frac{d\tilde{\omega}_h}{dt} \frac{\partial T}{\partial\left(\frac{\partial \tilde{\omega}_h}{\partial t}\right)}\right)$$

$$- \left\{ \frac{\partial T}{\partial p} \frac{dp}{dt} + \frac{\partial T}{\partial q} \frac{dq}{dt} + \frac{\partial T}{\partial r} \frac{dr}{dt} + \sum_{1}^{\nu}{}_i \frac{\partial T}{\partial \omega_i} \frac{d\omega_t}{dt} + \sum_{1}^{m}{}_h \left[\frac{\partial T}{\partial \tilde{\omega}_h} \frac{\partial \tilde{\omega}_h}{dt} + \frac{\partial T}{\partial\left(\frac{d\tilde{\omega}_h}{dt}\right)} \frac{d^2\tilde{\omega}_h}{dt^2} \right] \right\}$$

$$= M_\xi\, p + M_\eta\, q + M_\zeta\, r + \sum_{1}^{\nu}{}_i\, P_i\, \omega_i + \sum_{1}^{m}{}_h\, \Pi_h \frac{d\tilde{\omega}_h}{dt}\,.$$

Mais on a

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial p} \frac{dp}{dt} + \frac{\partial T}{\partial q} \frac{dq}{dt} + \frac{\partial T}{\partial r} \frac{dr}{dt} + \sum_{1}^{n}{}_i \frac{\partial T}{\partial \omega_i} \frac{d\omega_i}{dt} + \sum_{1}^{m}{}_h \left[\frac{\partial T}{\partial \tilde{\omega}_h} \frac{d\tilde{\omega}_h}{dt} + \frac{\partial T}{\partial\left(\frac{d\tilde{\omega}_h}{dt}\right)} \frac{d^2\tilde{\omega}_h}{dt^2} \right],$$

$$2\,T = p \frac{\partial T}{\partial p} + q \frac{\partial T}{\partial q} + r \frac{\partial T}{\partial r} + \sum_{1}^{n}{}_i\, \omega^i \frac{\partial T}{\partial \omega_i} + \sum_{1}^{m}{}_h \frac{\partial T}{\partial\left(\frac{d\tilde{\omega}_h}{dt}\right)} \frac{d\tilde{\omega}_h}{dt}\,;$$

donc l'équation précédente deviendra

$$\frac{d}{dt}\left(T - \sum_{\nu+1}^{n} \omega_i \frac{\partial T}{\partial \tilde{\omega}_i}\right)$$

$$= M_\xi\, p + M_\eta\, q + M_\zeta\, r + \sum_{1}^{\nu}{}_i\, P_i\, \omega_i + \sum_{1}^{m}{}_h\, \Pi_h \frac{d\tilde{\omega}_h}{dt} - \sum_{\nu+1}^{n} \frac{\partial T}{\partial \omega_i} \frac{d\omega_i}{dt}$$

Supposons que les intensités cycliques $\omega_{\nu+1}, \omega_{\nu+2}, \cdots, \omega_n$ soient constantes, alors il viendra

$$(13\,d)\quad \frac{d}{dt}\left(T - \sum_{\nu+1}^{n} \omega_i \frac{\partial T}{d\omega_i}\right) = M_\xi\, p + M_\eta\, q + M_\zeta\, r + \sum_{1}^{\nu}{}_i\, P_i\, \omega_i + \sum_{1}^{m}{}_h\, \Pi_h \frac{d\tilde{\omega}_h}{dt}\,.$$

S'il existe une fonction des forces relatives aux paramètres [23] et qu'on la désigne par Φ, on aura

$$\sum_{1}^{m} \Pi_h \frac{d\tilde{\omega}_h}{dt} = \frac{d\Phi}{dt}$$

(23) HERTZ, *Die Prizipien der Mechanik*, page 240.

et par suite l'equation (13_d) s'ecrira

$$\frac{d}{dt}\left(T - \sum_{\nu+1}^{n}{}_i\, \omega_i \frac{\partial T}{d\omega_i}\right) = M_\xi p + M_\eta q + M_\zeta r + \sum_{1}^{\nu}{}_i\, P_i \omega_i + \frac{d\Phi}{dt}\cdot$$

Multiplions par dt et intégrons, nous trouverons

$$(14_d)\quad T - \sum_{\nu+1}^{n}{}_i\, \omega_i \frac{\partial T}{\partial \omega_i} = \int^t (M_\xi p + M_\eta q + M_\zeta r)\, dt + \sum_{1}^{\nu}{}_i \int^t P_i\, \omega_i\, dt + \Phi + h\,,$$

h étant un constante.

Si les mouvements internes sont *isocycliques*, c'est à dire si les intensités cycliques sont constantes, l'intégrale précédente deviendra

$$(14'_d)\qquad T - \sum_{1}^{n}{}_i\, \omega_i \frac{\partial T}{\partial \omega_i} = \int^t (M_\xi p + M_\eta q + M_\zeta r)\, dt + \Phi + h\,.$$

Si aucune des quantités ω_i n'est constante, alors

$$(14''_d)\qquad T = \int^t (M_\xi p + M_\eta q + M_\zeta r)\, dt + \sum_{1}^{n}{}_i \int^t P_i\, \omega_i\, dt + \Phi + h\,.$$

Article VI.

1. Supposons d'abord que le système soit rigoureusement cyclique, c'est à dire que les paramètres soient constants. Supposons en outre que les intensités cycliques soient constantes.

Le mouvement sera *isocyclique*, c'est pourquoi nous revenons au cas où *les mouvements internes seront stationnaires et le corps ne change pas de forme, ni la distribution des densités change non plus.*

Alors les équations $(10''_d)$ se reduiront aux équations suivantes

$$(10'''_d)\qquad \begin{cases} \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial T}{\partial p} + q\dfrac{\partial T}{\partial r} - r\dfrac{\partial T}{\partial q} = M_\xi\,, \\[2ex] \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial T}{\partial q} + r\dfrac{\partial T}{\partial p} - p\dfrac{\partial T}{\partial r} = M_\eta\,, \\[2ex] \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial T}{\partial r} + p\dfrac{\partial T}{\partial q} - q\dfrac{\partial T}{\partial p} = M_\zeta\,, \\[2ex] a_i\dfrac{dp}{dt} + b_i\dfrac{dq}{dt} + c_i\dfrac{dr}{dt} = P_i \end{cases}$$

et si le couple de rotation est nul les trois premières équations deviendront

$$(10^{IV}{}_d)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial p}+q\frac{\partial T}{\partial r}-r\frac{\partial T}{\partial q}=0,\\ &\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q}+r\frac{\partial T}{\partial p}-p\frac{\partial T}{\partial r}=0,\\ &\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial r}+p\frac{\partial T}{\partial q}-q\frac{\partial T}{\partial p}=0.\end{aligned}\right.$$

Pour les réduire à la forme qu'on a donné auparavant il suffit de prendre pour axes ξ, η, ζ les axes d'inertie, et alors les équations précédentes se reduisent aux équations (3).

On peut donc énoncer les résultats qu'on a obtenus dans le chapitre 2ème de la manière suivante: *Si à l'intérieur d'un corps qui n'est soumis à aucun couple de rotation existent des mouvements isocycliques (les paramètres étant constants) alors les composantes de la rotation sont des fonctions elliptiques du temps, et les cosinus des angles que les axes d'inertie du système forment avec des axes fixes sont des fonctions uniformes du temps.*

2. Remarquons que T est une fonction de 2ème degré, par suite si nous posons

$$f_1=\frac{1}{2\sqrt{H}}\left[\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)^2+\left(\frac{\partial T}{\partial q}\right)^2+\left(\frac{\partial T}{\partial r}\right)^2\right]$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{H}\,[(Ap-Fq-Er+m_1)^2\,(-Fp+Bq-Dr+m_2)^2\,(-Ep-Dq+Cr+m_3)^2],$$

$$f_2=\frac{1}{2\sqrt{H}}\left[p\frac{\partial T}{\partial p}+q\frac{\partial T}{\partial q}+r\frac{\partial T}{\partial r}-T\right]$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{H}}(Ap^2+Bq^2+Cr^2-2\,Dqr-2\,Erp-2\,Fpq),$$

H étant donné par la formule

$$H=\begin{vmatrix} A, & -F, & -E\\ -F, & B, & -D\\ -E, & -D, & C\end{vmatrix}$$

les équations $(10^{IV}{}_d)$ deviennent (voir article V du chapitre I)

$$\frac{dp}{dt}=\frac{d(f_1,f_2)}{d(q,r)}\quad,\quad\frac{dq}{dt}=\frac{d(f_1,f_2)}{d(r,p)}\quad,\quad\frac{dr}{dt}=\frac{d(f_1,f_2)}{d(p,q)}$$

et l'on peut obtenir l'intégration (voir chapitre II, article II) sans déterminer d'avance les axes d'inertie du corps. L'équation de 4ème degré dont dépend la solution sera

$$=\begin{vmatrix} E^2+F^2+A(A-\lambda), & ED-FA-F(B-\lambda), & FD-EA-E(C-\lambda), & Am_1-Fm_2-Em_3\\ ED-FB-F(A-\lambda), & F^2+D^2+B(B-\lambda), & FE-DB-D(C-\lambda), & -Fm_1-Bm_2-Dm_3\\ FD-EC-E(A-\lambda), & FE-DC-D(B-\lambda), & E^2+D^2+C(C-\lambda), & -Em_1-Dm_2+Cm_3\\ Am_1-Fm_2-Em_3, & -Fm_1+Bm_2-Dm_3, & -Em_1-Dm_2+Cm_3, & 2\lambda h-K_1\end{vmatrix}$$

où l'on a (voir $(14'_d)$)

$$h = \text{const.} = \frac{1}{2}(\mathrm{A}p^2 + \mathrm{B}q^2 + \mathrm{C}r^2 - 2\,\mathrm{D}qr - 2\,\mathrm{E}rp - 2\,\mathrm{F}pq) = \mathrm{T} - \sum_1^n {}_i\, \omega_i \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \omega_i}\,,$$

$$\mathrm{K}_1 = \mathrm{K}^2 - m_1^2 - m_2^2 - m_3^2\,,$$

étant (voir (11_d))

$$\mathrm{K}^2 = \text{const.} + (\mathrm{A}p - \mathrm{F}q - \mathrm{E}r + m_1)^2 + (\mathrm{B}q - \mathrm{F}p - \mathrm{D}r + m_2)^2$$
$$+ (-\mathrm{E}p - \mathrm{D}q + \mathrm{C}r + m_3)^2 = \left(\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial p}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial r}\right)^2.$$

3. Les formules $(10'''_d)$ font connaître un autre élément très-important dans la question. En effet, la dernière de ces formules nous donne l'expression des forces qui sont capables de maintenir stationnaire le mouvement. On tire de ces formules la propriété suivante qui complète la proposition que nous avons énoncée à la fin du premier paragraphe:

Les forces nécessaires pour maintenir stationnaire le mouvement sont des fonctions elliptiques du temps.

Pour le calcul de ces forces nous renvoyons au § 4 de l'article IX (voir (23_d)). En attendant, nous pouvons nous servir du résultat que nous venons de trouver pour chercher dans quels cas les mouvements internes pourront se maintenir stationnaires sans que l'intervention d'aucune force ne soit nécessaire. Nous emploierons les résultats que nous avons trouvés à l'article II et nous les complèterons. Rappelons en effet que les conditions que nous avons données dans cet article, par rapport à la question que nous nous posons, sont des conditions nécessaires et ne sont pas suffisantes (voir § 6, article II).

On tire de la dernière des formules $(10'''_d)$ que les forces internes seront nulles lorsque

$$(14^{\mathrm{v}}_d) \qquad a_i\, p + b_i\, q + c_i\, r = \text{const.} \qquad (i = 1\,, 2\,, \cdots, n).$$

Remarquons d'abord que ces conditions sont vérifiées lorsque le mouvement de rotation est permanent. On peut donc dire:

Si le mouvement de rotation est permanent, il ne faut pas de forces pour maintenir isocycliques les mouvements internes.

Lorsque le mouvement de rotation n'est pas permanent, rapportons nous aux axes d'inertie.

Si les forces ne doivent pas exister il faudra que la force vive soit constante, c'est pourquoi on aura (voir article II, § 1)

$$m_1\, p + m_2\, q + m_3\, r = \text{const.}$$
$$\mathrm{A}p^2 + \mathrm{B}q^2 + \mathrm{C}r^2 = \text{const.}$$

sans que $p\,, q\,, r$ soient des quantités constantes.

Donc pour que les conditions ($14^{v}{}_{d}$) soient vérifiées il faut que

$$\frac{a_i}{m_1} = \frac{b_i}{m_2} = \frac{c_i}{m_3} = \text{const.}$$

Nous avons donné (article II, § 5) les conditions que m_1, m_2, m_3 doivent vérifier pour que la force vive soit constante lorsque la rotation n'est pas permanente, on aura donc tout de suite les conditions nécessaires et suffisantes que nous cherchons.

En rappelant la proposition que nous avons donnée au § V, article II, et le théorème que nous avons énoncé tout à l'heure on aura:

Les forces étant nulles, le mouvement interne sera isocyclique dans les cas suivants:

1° *lorsque le mouvement de rotation est permanent;*

2° *lorsque*

$$a_i = \theta_i \sqrt{A(A-B)} \quad , \quad b_i = 0 \quad , \quad c_i = \pm\, \theta_i \sqrt{C(B-C)}\,,$$

les quantités θ_i étant des constantes et les conditions initiales du mouvement étant telles que

$$\sqrt{A(A-B)}\, p \pm \sqrt{C(B-C)}\, r + (A-C) \sum_1^n {}_i\, \theta_i\, \omega_i = 0\,;$$

3° *lorsqu'on aura*

$$A = B \quad , \quad a_i = b_i = 0,$$

le mouvement initial de rotation étant arbitraire.

Article VII.

1. Nous allons examiner dans cet article un cas important qui peut se présenter. C'est le cas où les forces correspondant aux coordonnées cycliques sont nulles.

Si $P_1 = P_2 = \cdots = P_n = 0$, on aura

$$\frac{d}{dt}\left(a_i\, p + b_i\, q + c_i\, r + \sum_1^n {}_s\, a_{is}\, \omega_s + \sum_1^m {}_h\, c_{ih} \frac{d\tilde{\omega}_h}{dt}\right) = 0$$

et en intégrant

$$a_i\, p + b_i\, q + c_i\, r + \sum_1^n {}_s\, a_{is}\, \omega_s + \sum_1^m {}_h\, c_{ih} \frac{d\tilde{\omega}_h}{dt} = K_i\,,$$

K_i étant une quantité constante.

2. En employant les intégrales qu'on vient de trouver, on peut éliminer les intensités cycliques. En effet, en ayant égard à l'égalité $a_{is} = a_{si}$, cal-

culons le déterminant

$$\begin{vmatrix} a_{11}\,, a_{12}\,, \cdots, a_{1n} \\ a_{21}\,, a_{22}\,, \cdots, a_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}\,, a_{n2}\,, \cdots, a_{nn} \end{vmatrix}$$

et désignons par A_{is} le rapport entre l'élément réciproque de a_{is} et le déterminant.

On aura, en posant $\sum_1^m {}_h\, c_{ih} \frac{d\tilde{\omega}_h}{dt} = v_i$,

$$(16_d) \qquad \sum_1^n {}_s\, a_{is}\, \omega_s = K_i - v_i - a_i\, p - b_i\, q - c_i\, r$$

d'où

$$(17_d) \qquad \omega_i = \sum_1^n {}_s\, A_{is}(K_s - v_s) - p\Sigma_s A_{is}\, a_s - q\Sigma_s A_{is}\, b_s - r\Sigma_s A_{is}\, c_s\,.$$

Ou si

$$\tau = \frac{1}{2} \sum_1^m {}_h \sum_1^m {}_k\, b_{hk} \frac{d\tilde{\omega}_h}{dt} \frac{d\tilde{\omega}_k}{dt}$$

on a (voir article V, § 2)

$$T_0 = \frac{1}{2} \sum_1^n {}_i \sum_1^n {}_s\, a_{is}\, \omega_i\, \omega_s + \sum_1^n {}_i\, v_i\, \omega_i + \tau = \frac{1}{2} \sum_1^n {}_i\, \omega_i \left(\sum_1^n {}_1\, a_{is}\, \omega_s + 2\, v_i \right) + \tau$$

$$= \frac{1}{2} \sum_1^n {}_i\, \omega_i\, (K_i + v_i - a_i\, p - b_i\, q - c_i\, r) + \tau\,.$$

Et en remplaçant ω_i par l'expression (17_d) on trouve

$$T_0 = \frac{1}{2} (ap^2 + bq^2 + cr^2 + 2\,dqr + 2\,erp + 2\,fpq) - p \sum_1^n {}_i \sum_1^n {}_s\, A_{is}\, a_i\, K_s$$

$$- q \sum_1^n {}_i \sum_1^n {}_s\, A_{is}\, b_i\, K_s - r \sum_1^n {}_i \sum_1^n {}_s\, A_{is}\, c_i\, K_s + \frac{1}{2} \Sigma_i \Sigma_s A_{is}\, K_i\, K_s - \Sigma_i \Sigma_s A_{is}\, v_i\, v_s + \tau,$$

ayant posé pour simplifier

$$a = \sum_1^n {}_i \sum_1^n {}_s\, A_{is}\, a_i\, a_s \quad , \quad b = \sum_1^n {}_i \sum_1^n {}_s\, A_{is}\, b_i\, b_s \quad , \quad c = \sum_1^n {}_i \sum_1^n {}_s\, A_{is}\, c_i\, c_s\,,$$

$$d = \sum_1^n {}_i \sum_1^n {}_s\, A_{is}\, b_i\, c_s \quad , \quad e = \sum_1^n {}_i \sum_1^n {}_s\, A_{is}\, c_i\, a_s \quad , \quad f = \sum_1^n {}_i \sum_1^n {}_s\, A_{is}\, a_i\, b_s\,.$$

Si dans les formules (9_d) on remplace $\omega_1 \cdots \omega_n$ par les expressions (17_d) on a

$$m_1 = \sum_1^n{}_i \sum_1^n{}_s \mathrm{A}_{is}(\mathrm{K}_i - v_i)\, a_s - ap - fq - er + \sum_1^m{}_h e_h \frac{d\tilde{\omega}_h}{dt},$$

$$m_2 = \sum_1^n{}_i \sum_1^n{}_s \mathrm{A}_{is}(\mathrm{K}_i - v_i)\, b_s - fp - bq - dr + \sum_1^m{}_h f_h \frac{d\tilde{\omega}_h}{dt},$$

$$m_3 = \sum_1^n{}_i \sum_1^n{}_s \mathrm{A}_{is}(\mathrm{K}_i - v_i)\, c_s - ep - dq - cr + \sum_1^m{}_h g_h \frac{d\tilde{\omega}_h}{dt},$$

d'où l'on tire

$$\begin{aligned} m_1 p + m_2 q + m_3 r = &- (ap^2 + bq^2 + cr^2 + 2\,dqr + 2\,erp + 2\,fpq) \\ &+ p\left[\sum_1^n{}_i \sum_1^n{}_s \mathrm{A}_{is}(\mathrm{K}_i - v_i)\, a_s + \sum_1^m{}_h e_h \frac{d\tilde{\omega}_h}{dt}\right] \\ &+ q\left[\sum_1^n{}_i \sum_1^n{}_s \mathrm{A}_{is}(\mathrm{K}_i - v_i)\, b_s + \sum_1^m{}_h f_h \frac{d\tilde{\omega}_h}{dt}\right] \\ &+ r\left[\sum_1^n{}_i \sum_1^n{}_s \mathrm{A}_{is}(\mathrm{K}_i - v_i)\, c_s + \sum_1^m{}_h g_h \frac{d\tilde{\omega}_h}{dt}\right]. \end{aligned}$$

On peut donc calculer l'expression de la force vive du système qu'on obtient par l'élimination des intensités cycliques, savoir

$$(1''_d) \qquad \begin{aligned} (\mathrm{T}) = \frac{1}{2}\{&(\mathrm{A} - a)\, p^2 + (\mathrm{B} - b)\, q^2 + (\mathrm{C} - c)\, r^2 \\ &- 2\,(\mathrm{D} + d)\, qr - 2\,(\mathrm{E} + e)\, rp - 2\,(\mathrm{F} + f)\, pq\} \\ &+ p \sum_1^m{}_h e'_h \frac{d\tilde{\omega}_h}{dt} + q \sum_1^m{}_h f'_h \frac{d\tilde{\omega}_h}{dt} + r \sum_1^m{}_h g'_h \frac{d\tilde{\omega}_h}{dt} \\ &+ \frac{1}{2} \sum_1^n{}_i \sum_1^n{}_s \mathrm{A}_{is} \mathrm{K}_i \mathrm{K}_s + \frac{1}{2} \sum_1^m{}_h \sum_1^m{}_k b'_{kh} \frac{d\tilde{\omega}_h}{dt} \frac{d\tilde{\omega}_k}{dt}, \end{aligned}$$

ayant posé

$$e'_h = e_h - \sum_1^n{}_i \sum_1^n{}_s \mathrm{A}_{is}\, a_s\, c_{ih} \quad , \quad f'_h = f_h - \sum_1^n{}_i \sum_1^n{}_s \mathrm{A}_{is}\, b_s\, c_{ih},$$

$$g'_h = g_h - \sum_1^n{}_i \sum_1^n{}_s \mathrm{A}_{is}\, c_s\, c_{ih} \quad , \quad b'_{hk} = b_{hk} - \sum_1^n{}_i \sum_1^n{}_s \mathrm{A}_{is}\, c_{ih}\, c_{sk}.$$

Nous avons écrit (T) au lieu de T pour désigner l'élimination qu'on vient de faire.

3. Pour transformer les équations (10_d) par l'élimination des quantités ω_i, remarquons que l'on a

$$(18_d) \qquad \begin{aligned} \delta\mathrm{T} = \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial p}\delta p + \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q}\delta q + \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial r}\delta r + \sum_1^n{}_i \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \omega_i}\delta\omega_i + \sum_1^m{}_h \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \tilde{\omega}_h}\delta\tilde{\omega}_h \\ + \sum_1^m{}_h \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial\left(\dfrac{d\tilde{\omega}_h}{dt}\right)}\,\delta\,\frac{d\tilde{\omega}_h}{dt}. \end{aligned}$$

A cause des équations (15_d) on peut écrire

$$\frac{\partial T}{d\omega_i} = K_i$$

et des équations (17_d) on déduit

$$\delta\omega_i = \sum_1^m{}_h \frac{\partial\left(\sum_1^n{}_s A_{is}(K_s - v_s) - p\,\Sigma_s A_{is} a_s - q\,\Sigma_s A_{is} b_s - r\,\Sigma_s A_{is} c_s\right)}{\partial\tilde{\omega}_h}\,\delta\tilde{\omega}_h$$

$$-\sum_1^m{}_h \delta\frac{d\tilde{\omega}_h}{dt}\sum_1^n{}_s A_{is} c_{ih} - \Sigma_s A_{is} a_s\,\delta p - \Sigma_s A_{is} b_s\,\delta q - \Sigma_s A_{is} c_s\,\delta r.$$

Par suite en posant

$$\Sigma_i \Sigma_s A_{is} K_i a_s = l_1 \quad , \quad \Sigma_i \Sigma_s A_{is} K_i b_s = l_2 \quad , \quad \Sigma_i \Sigma_s A_{is} K_i c_s = l_3,$$

$$\sum_1^n{}_i \sum_1^n{}_s A_{is} c_{ih} K_s = s_h$$

la formule (18_d) s'écrira

$$\delta T = \left(\frac{\partial T}{\partial p} - l_1\right)\delta p + \left(\frac{\partial T}{\partial q} - l_2\right)\delta q + \left(\frac{\partial T}{\partial r} - l_3\right)\delta r + \sum_1^m{}_h \left(\frac{\partial T}{\partial\left(\frac{d\tilde{\omega}_h}{dt}\right)} - s_h\right)\delta\frac{d\tilde{\omega}_h}{dt}$$

$$+\sum_1^m{}_h \frac{\partial}{\partial\tilde{\omega}_h}\left[T + \Sigma_i \Sigma_s A_{is} K_i K_s - \sum_1^m{}_h s_h \frac{d\tilde{\omega}_h}{dt} - l_1 p - l_2 q - l_3 r\right]\delta\tilde{\omega}_h.$$

Mais

$$\delta(T) = \frac{\partial(T)}{\partial p}\delta p + \frac{\partial(T)}{\partial q}\delta q + \frac{\partial(T)}{\partial r}\delta r + \sum_1^m{}_h \frac{\partial(T)}{\partial\tilde{\omega}_h}\delta\tilde{\omega}_h + \sum_1^m{}_h \frac{\partial(T)}{\partial\left(\frac{d\tilde{\omega}_h}{dt}\right)}\delta\frac{d\tilde{\omega}_h}{dt};$$

en conséquence, si nous comparons les dernières formules nous aurons

$$(19_d)\quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial T}{\partial p} = \dfrac{\partial(T)}{\partial p} + l_1 \quad , \quad \dfrac{\partial T}{\partial q} = \dfrac{\partial(T)}{\partial q} + l_2 \quad , \quad \dfrac{\partial T}{\partial r} = \dfrac{\partial(T)}{\partial r} + l_3, \\ \qquad\qquad \dfrac{\partial T}{\partial\left(\frac{d\tilde{\omega}_h}{dt}\right)} = \dfrac{\partial(T)}{\partial\left(\frac{d\tilde{\omega}_h}{dt}\right)} + s_h, \\ \dfrac{\partial T}{d\tilde{\omega}_h} = \dfrac{\partial\left[(T) + l_1 p + l_2 q + l_3 r + \sum_1^m{}_h s_h \frac{d\tilde{\omega}_h}{dt} - \Sigma_i \Sigma_s A_{is} K_i K_s\right]}{\partial\tilde{\omega}_h}. \end{array}\right.$$

On peut donner à ces équations une expression plus simple. A cet effet posons

$$\Theta = (T) + l_1 p + l_2 q + l_3 r + \sum_1^m{}_h s_h \frac{d\tilde{\omega}_h}{dt} - \sum_1^n{}_i \sum_1^n{}_s A_{is} K_i K_s$$

ou bien

$$(20_d)\qquad \Theta = \frac{1}{2}\{(A-a)p^2 + (B-b)q^2 + (C-c)r^2 - 2(D+d)qr - 2(E+e)rp - 2(F+f)pq\}$$
$$+ p\left(\sum_1^m {}_h e'_h \frac{d\tilde{\omega}_h}{dt} + l_1\right) + q\left(\sum_1^m {}_h f'_h \frac{d\tilde{\omega}_h}{dt} + l_2\right) + r\left(\sum_1^m {}_h g'_h \frac{d\tilde{\omega}_h}{dt} + l_3\right)$$
$$+ \frac{1}{2}\sum_1^m {}_h \sum_1^m {}_k b'_{hk} \frac{d\tilde{\omega}_h}{dt}\frac{d\tilde{\omega}_k}{dt} + \sum_1^m {}_h s_h \frac{d\tilde{\omega}_h}{dt} - \frac{1}{2}\sum_1^n {}_i \sum_1^n {}_s A_{is} K_i K_s .$$

On aura alors

$$\frac{\partial T}{\partial p} = \frac{\partial \Theta}{\partial p} \quad , \quad \frac{\partial T}{\partial q} = \frac{\partial \Theta}{\partial q} \quad , \quad \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{\partial \Theta}{\partial r} \quad , \quad \frac{\partial T}{\partial \tilde{\omega}_h} = \frac{\partial \Theta}{\partial \tilde{\omega}_k},$$
$$\frac{\partial T}{\partial\left(\frac{d\tilde{\omega}_h}{dt}\right)} = \frac{\partial T}{\partial\left(\frac{d\tilde{\omega}_h}{dt}\right)} = e'_h p + f'_h q + g'_h r + \sum_1^m {}_k b'_{hk}\frac{d\tilde{\omega}_k}{dt} + s_h$$

et par suite les équations (10_d) peuvent s'écrire

$$(21_d)\qquad \begin{cases} \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial\Theta}{\partial p} + q\dfrac{\partial\Theta}{\partial r} - r\dfrac{\partial\Theta}{\partial q} = M_\xi , \\ \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial\Theta}{\partial q} + r\dfrac{\partial\Theta}{\partial p} - p\dfrac{\partial\Theta}{\partial r} = M_\eta , \\ \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial\Theta}{\partial r} + p\dfrac{\partial\Theta}{\partial q} - q\dfrac{\partial\Theta}{\partial p} = M_\zeta , \\ \dfrac{d}{dt}\left(e'_h p + f'_h q + g'_h r + \sum_1^m {}_k b'_{hk}\dfrac{d\tilde{\omega}_h}{dt} + s_h\right) - \dfrac{\partial\Theta}{\partial\tilde{\omega}_h} = \Pi_h . \end{cases}$$

Article VIII.

1. Supposons que les paramètres du système cyclique soient constants. Alors les équations (21_d) qu'on vient de trouver se réduisent aux trois équations

$$(21'_d)\qquad \begin{cases} \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial\Theta}{\partial p} + q\dfrac{\partial\Theta}{\partial r} - r\dfrac{\partial\Theta}{\partial q} = M_\xi , \\ \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial\Theta}{\partial q} + r\dfrac{\partial\Theta}{\partial p} - p\dfrac{\partial\Theta}{\partial r} = M_\eta , \\ \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial\Theta}{\partial r} + p\dfrac{\partial\Theta}{\partial q} - q\dfrac{\partial\Theta}{\partial p} = M_\zeta \end{cases}$$

dans lesquelles on aura

$$(20'_d)\qquad \Theta = \frac{1}{2}\{(A-a)p^2 + (B-b)q^2 + (C-c)r^2 - 2(D+d)qr - 2(E+e)rp - 2(F+f)pq\} + l_1 p + l_2 q + l_3 r .$$

Les coefficients de tous les termes de cette expression sont constants, par suite les équantions $(21'_d)$ correspondent à la rotation d'un système dans lequel existent des mouvements stationnaires, en supposant que les moments d'inertie par rapport aux axes ξ, η, ζ soient

$$A - a, B - b, C - c,$$

que les moments mixtes d'inertie par rapport aux couples d'axes η, ζ; ζ, ξ; ξ, η soient

$$D + d, E + e, F + f,$$

et enfin que les composantes du couple de quantité de mouvement du mouvement interne soient

$$l_1, l_2, l_3 \qquad \text{(voir article VI).}$$

On tire de là le théorème suivent:

Soit un corps dont la figure reste invariable, dans lequel la distribution des densités n'est pas alterée, à l'intérieur duquel existe un mouvement polycyclique laissant les paramètres constants et sur les coordonnés cycliques duquel n'agit aucune force; sous l'action d'un couple donné, il tournera autour du centre de gravité comme un autre corps dans lequel existe un mouvement stationnaire, qui est sollicité par le même couple moteur; les intensités cycliques dépendront à chaque instant de la rotation du corps.

2. Remarquons que la forme quadratique

$$(20''_d) \qquad \frac{1}{2}\{(A-a)p^2 + (B-b)q^2 + (C-c)r^2 - 2(D+d)qr - 2(E+e)rp - 2(F+f)pq\}$$

est une forme définie positive. Cela dépend de l'expression $(1''_d)$ trouvée pour (T) qui étant celle de la force vive doit être toujours positive. Mais on ne peut pas démontrer que $A - a$, $B - b$, $V - c$, vérifient les conditions

$$(B-b) + (C-c) > A - a,$$
$$(C-c) + (A-a) > B - b,$$
$$(A-a) + (B-b) > C - c,$$

auxquelles doivent satisfaire les moments d'inertie d'un corps réél dont la densité est toujours positive. C'est pourquoi dans le théorème précédent lorsqu'on parle du corps qui tourne de la même manière que le corps donné, il faut envisager un corps idéal dont la densité peut devenir aussi négative. Du point de vue analytique et cinématique il n'y a aucune différence entre le mouvement de ce corps et celui d'un corps réel, puisque la forme quadratique $(20''_d)$ est une forme quadratique définie.

3. Le théorème qu'on a donné à la fin du § 1 ramène la recherche du mouvement d'un corps dans lequel existent des systèmes polycycliques, et

qui n'est soumis à aucun couple extérieur, au problème qui a été traité auparavant, et l'intégration, dans ce cas plus général, s'effectuera encore à l'aide des fonctions elliptiques. (Voir le chapitre II).

On pourra énoncer la proposition suivante:

Les composantes de la rotation et les intensités cycliques d'un système, dans lequel existent des systèmes polycycliques, dont la figure et la distribution des densités n'est pas altérée, et qui n'est soumis à aucune force extérieure, sont des fonctions elliptiques du temps; les cosinus des angles que les axes d'inertie forment avec des axes fixes sont des fonctions uniformes du temps.

4. Si l'on voulait effectuer la solution de la question en la ramenant à celle du mouvement d'un corps dans lequel existent des mouvements stationnaires, on pourrait d'abord réduire les équations à la forme (3) et après faire l'intégration par les méthodes qu'on a données auparavant. Mais il est évident qu'on peut atteindre le but d'une manière directe beaucoup plus simple. Il suffit pour cela d'appliquer les propositions de l'article V du 1er chapitre, §§ 3, 4, comme nous avons déjà montré dans l'article VI. En effet, lorsque $M_\xi = M_\eta = M_\zeta = 0$ on peut ramener les équations différentielles (21_d) au type (12_a), puisque Θ est une fonction de 2d degré. Le HESSIEN de la fonction Θ sera

$$H = \begin{vmatrix} A - a\;, & -(F+f)\;, & -(E+e) \\ -(F+f)\;, & B - b\;, & -(D+d) \\ -(E+e)\;, & -(D+d)\;, & C - c \end{vmatrix}$$

et on calculera tout de suite les fonctions f_1 et f_2 par les formules

$$\begin{aligned} f'_1 = \frac{1}{2\sqrt{H}} \{ & [(A-a)\,p - (F+f)\,q - (E+e)\,r + l_1]^2 \\ & + [-(F+f)\,p + (B-b)\,q - (D+d)\,r + l_2]^2 \\ & + [-(E+e)\,p - (D+d)\,q + (C-c)\,r + l_3]^2 \}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'_2 = \frac{1}{2\sqrt{H}} \{ & (A-a)\,p^2 + (B-b)\,q^2 + (C-c)\,r^2 - 2\,(D+d)\,qr \\ & - 2\,(E+e)\,rp - 2\,(F+f)\,pq \}, \end{aligned}$$

de sorte qu'on aura

$$\frac{dp}{dt} = \frac{d(f'_1, f'_2)}{d(q, r)} \quad , \quad \frac{dq}{dt} = \frac{d(f'_1, f'_2)}{d(r, p)} \quad , \quad \frac{dr}{dt} = \frac{d(f'_1, f'_2)}{d(p, q)}.$$

5. On peut intégrer directement ces équations par la méthode qu'on a donnée dans le 2ème chapitre à l'article II. Cette intégration dépendra de la résolution d'une équation de 4ème degré qu'on écrira tres aisément en partant de l'équation (12_b) du même article. (Comparez article VI, § 2).

Les expressions des composantes de la rotation et celles des intensités cycliques seront les suivantes

$$(22_d)\quad \left\{\begin{aligned} p &= \frac{N_1^{(1)}\sigma_1 u + N_1^{(2)}\sigma_2 u + N_1^{(3)}\sigma_3 u + N_1^{(4)}\sigma u}{M^{(1)}\sigma_1 u + M^{(2)}\sigma_2 u + M^{(3)}\sigma_3 u + M^{(4)}\sigma u}, \\ q &= \frac{N_2^{(1)}\sigma_1 u + N_2^{(2)}\sigma_2 u + N_2^{(3)}\sigma_3 u + N_2^{(4)}\sigma u}{M^{(1)}\sigma_1 u + M^{(2)}\sigma_2 u + M^{(3)}\sigma_3 u + M^{(4)}\sigma u}, \\ r &= \frac{N_3^{(1)}\sigma_1 u + N_3^{(2)}\sigma_2 u + N_3^{(3)}\sigma_3 u + N_3^{(4)}\sigma u}{M^{(1)}\sigma_1 u + M^{(2)}\sigma_2 u + M^{(3)}\sigma_3 u + M^{(4)}\sigma u}, \\ \omega_i &= \frac{L_i^{(1)}\sigma_1 u + L_i^{(2)}\sigma_2 u + L_i^{(3)}\sigma_3 u + L_i^{(4)}\sigma u}{M^{(1)}\sigma_1 u + M^{(2)}\sigma_2 u + M^{(3)}\sigma_3 u + M^{(4)}\sigma u}, \end{aligned}\right.$$

où $L_i^{(h)}$, $M_i^{(h)}$, $N_i^{(h)}$ sont des quantités constantes.

Si nous employons les quantités $\alpha_{ir}^{(h)}$ du 2$^{\text{me}}$ chapitre, article II, on aura

$$(23_d)\quad \left\{\begin{aligned} N_i^{(h)} &= M^{(h)}\frac{\alpha_{i3}^{(h)}}{\alpha_{44}^{(h)}}, \\ L_i^{(h)} &= M^{(h)}\frac{\Sigma_s\left(-a_s\alpha_{14}^{(h)} - b_s\alpha_{24}^{(h)} - c_s\alpha_{34}^{(h)} + K_s\alpha_{44}^{(h)}\right)A_{is}}{\alpha_{44}^{(h)}}. \end{aligned}\right.$$

La relation qui subsiste entre t et u sera l'équation linéaire (voir (23_b))

$$(24_d)\qquad u = \sqrt{\frac{(\lambda_2-\lambda_4)(\lambda_1-\lambda_3)}{(e_1-e_3)H}}\,(t-t_0),$$

t_0 étant une constante arbitraire et $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ les racines de l'équation du 4$^{\text{ème}}$ degré.

Pour calculer les cosinus des angles que les axes ξ, η, ζ forment avec les axes fixes, il faudra d'abord déterminer $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$. En employant les formules (12_d) on aura

$$(25_d)\quad \left\{\begin{aligned} \gamma_1 &= \frac{1}{K}[\ \ (A-a)p - (F+f)q - (E+e)r + l_1], \\ \gamma_2 &= \frac{1}{K}[-(F+f)p + (B-b)q - (D+d)r + l_2], \\ \gamma_3 &= \frac{1}{K}[-(E+e)p - (D+d)q + (C-c)r + l_3]. \end{aligned}\right.$$

Par la méthode qu'on a donnée aux articles IV, V, VI du 2$^{\text{ème}}$ chapitre on pourra obtenir l'expression des autres cosinus.

6. Dans le cas que nous venons de discuter le système est abandonné à son inertie, car on a supposé toutes les forces nulles, soit le couple de rotation, soient les forces relatives aux coordonnées cycliques. On peut désigner ce cas en disant qu'il correspond à un mouvement *adiabatique* du systeme. Donc *dans un mouvement adiabatique* (*les paramètres étant constants*), *les composantes de la rotation et les intensités cycliques sont des fonctions elliptiques du temps*.

Il faut remarquer cependant que *le mouvement interne n'est pas adiabatique*. En effet calculons les *moments cycliques*. On aura

$$q_i = \frac{\partial T_0}{\partial \omega_i} = \sum_1^n{}_s\, a_{is}\, \omega_s = K_i - a_i\, p - b_i\, q - c_i\, r.$$

On voit qu'ils ne sont pas constants, mais qu'il sont des fonctions linéaires des composantes de la rotation du système [24].

Article IX.

1. Les résultats qu'on a trouvés aux articles VI, VIII prouvent que les paramètres étant constants, et le mouvement du système étant isocyclique ou adiabatique, la solution peut être obtenue par les fonctions elliptiques.

Nous allons maintenant discuter un cas plus général, dont ceux qu'on a envisagés sont des cas particuliers, et dans lequel la solution peut s'obtenir de la même manière.

2. Supposons que quelques–unes seulement des forces relatives aux coordonnées cycliques soient nulles. Alors on voit bien aisément qu'on pourra éliminer dans les équations du mouvement autant d'intensités cycliques, qu'on a de forces nulles.

Pour obtenir ce résultat il n'est pas nécessaire de faire de nouveaux calculs. On peut se servir des formules que nous avons trouvées à l'article VII. Il suffit pour cela de supposer que quelques–unes des coordonnées $\tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_2, \cdots, \tilde{\omega}_m$ ne paraissent pas explicitement dans les formules (10_d). Alors elles deviennent des coordonnées cycliques et les paramétres sont les coordonnées résidues.

Donc les formules qu'on trouve par l'élimination sont les équations des (21_d) dans lesquelles on devra retrancher les termes $\partial\Theta/\partial\tilde{\omega}_h$ relatifs à celles des coordonnées $\tilde{\omega}_h$ qu'on a supposées être des coordonnées cycliques.

(24) Voir HERTZ, *Die Prinzipien der Mechanik*, page 239.

3. Appliquons ce résultat au cas où le système est rigoureusement cyclique. Alors on pourra supposer que toutes les coordonnées $\tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_2, \cdots, \tilde{\omega}_m$, soient des coordonnées cycliques. Désignons leurs dérivées $d\tilde{\omega}_1/dt$, $d\tilde{\omega}_2/dt, \cdots$, $d\tilde{\omega}_m/dt$ qui sont des intensités cycliques, par $\omega'_1, \omega'_2, \cdots, \omega'_m$, et posons $\Pi_k = P'_k$. Les équations (21_d) pourront s'écrire

$$(21''d)\qquad \begin{cases} \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial\Theta'}{\partial p} + q\dfrac{\partial\Theta'}{\partial r} - r\dfrac{\partial\Theta'}{\partial q} = M_\xi, \\ \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial\Theta'}{\partial q} + r\dfrac{\partial\Theta'}{\partial p} - p\dfrac{\partial\Theta'}{\partial r} = M_\eta, \\ \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial\Theta'}{\partial r} + p\dfrac{\partial\Theta'}{\partial q} - q\dfrac{\partial\Theta'}{\partial p} = M_\zeta, \\ \dfrac{d}{dt}\left(e'_h p + f'_h q + g'_h r + \sum_1^m{}_k b'_{hk}\omega'_k\right) = P'_h, \end{cases}$$

où

$$(20''_d)\qquad \Theta' = \frac{1}{2}\{(A-a)p^2 + (B-b)q^2 + (C-c)r^2$$
$$-2(D+d)qr - 2(E+e)rp - 2(F+f)pq\}$$
$$+p\left(\sum_1^m{}_h e'_h\omega'_h + l_1\right) + q\left(\sum_1^m{}_h f'_h\omega'_h + l_2\right) + r\left(\sum_1^m{}_h g'_h\omega'_h + l_3\right) + \frac{1}{2}\sum_1^m{}_h\sum_1^m{}_k b'_{hk}\omega'_h\omega'_k.$$

On a supprimé dans l'expression de Θ' les termes $\sum_1^m{}_h s_h \dfrac{d\tilde{\omega}_h}{dt}$ et les termes $-\dfrac{1}{2}\sum_1^m{}_i\sum_1^m{}_s A_{is}K_iK_s$ qui paraissent dans l'expression de Θ, mais qui disparaissent dans les calculs des dérivées.

4. Soient maintenant les intensités cycliques $\omega'_1, \omega'_2, \cdots, \omega'_m$ des quantités constantes. Dans ce cas les coefficients de p, q, r dans tous les termes de Θ' sont des quantités constantes. Par suite *le théorème énoncé au* 1$^{\text{er}}$ § *de l'article VIII s'étend au cas où quelques coordonnées cycliques ne sont pas soumises à des forces et les intensités cycliques correspondantes aux autres coordonnées cycliques sont constantes.*

Si le couple de rotation est nul, alors l'intégration des équations ($21''_d$) pourra s'effectuer par les fonctions elliptiques.

En effet, en rappelant les résultats obtenus à l'article V du 1$^{\text{er}}$ chapitre, on pourra écrire les équations (21'') sous la forme (comparez le § 4 de l'article VII)

$$(22_d)\qquad \frac{dp}{dt} = \frac{d(f''_1, f'_1)}{d(q,r)}, \quad \frac{dq}{dt} = \frac{d(f''_1, f'_2)}{d(r,p)}, \quad \frac{dr}{dt} = \frac{d(f''_1, f'_2)}{d(p,q)},$$

f''_1 et f'_2 étant donnés par les formules

$$f_1'' = \frac{1}{2\sqrt{H}} \left\{ \left[(A-a)p - (F+f)q - (E+e)r + \sum_1^m e_h' \omega_h' + l_1 \right]^2 \right.$$

$$+ \left[-(F+f)p + (B-b)q - (D+d)r + \sum_1^m f_h' \omega_h' + l_2 \right]^2$$

$$\left. + \left[-(E+e)p - (D+d)q + (C-c)r + \sum_1^m g_h' \omega_h' + l_3 \right]^2 \right\},$$

$$f_2' = \frac{1}{2\sqrt{H}} \{ (A-a)p^2 + (B-b)q^2 + (C-c)r^2$$

$$-2(D+d)qr - 2(E+e)rp - 2(F+f)pq \},$$

$$H = \begin{vmatrix} A-a & ,-(F+f) & ,-(E+e) \\ -(F+f), & B-b & ,-(D+d) \\ -(E+e), & -(D+d), & C-c \end{vmatrix}.$$

Les expressions des fonctions inconnues $p, q, r; \omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n$ sont les mêmes que celles données dans l'article VIII au § 5.

Pour obtenir les expressions des forces P_h' c'est à dire des forces qui sont capables de maintenir constantes les intensités cycliques $\omega_1', \omega_2', \cdots, \omega_m'$, il suffira de remarquer que la dernière des équations $(21''_d)$ s'écrit

$$P_h' = e_h' \frac{dp}{dt} + f_h' \frac{dq}{dt} + g_h' \frac{dr}{dt}$$

et à cause des équation (22_d)

$$P_h' = e_h' \frac{d(f_1, f_2)}{d(q, r)} + f_h' \frac{d(f_1, f_2)}{d(r, p)} + g_h' \frac{d(f_1, f_2)}{d(p, q)}.$$

Par suite en posant

$$f_0^{(h)} = e_h' p + f_h' q + g_h' r$$

on aura

$$(23_d) \qquad P_h' = \frac{d(f_0^{(h)}, f_1, f_2)}{d(p, q, r)}.$$

On tire de là que les forces P_h' seront représentées par des fonctions elliptiques du temps.

Article X.

1. Nous avons donné à l'article V les formules (10_d) dans lesquelles on a introduit les coordonnées cycliques et les paramètres.

Les paramètres que nous avons considérés sont des quantités indépendantes, mais on pourrait très–bien envisager des paramètres liés par des relations correspondant à des liaisons. Si les paramètres étaient liés par les relations indépendantes

$$f_1(\tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_2, \cdots, \tilde{\omega}_m) = 0 \;,\; f_2(\tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_2, \cdots, \tilde{\omega}_m) = 0, \cdots, f_g(\tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_2, \cdots, \tilde{\omega}_m) = 0,$$

il faudrait modifier les équations (10_d) en ajoutant au second membre de la dernière d'elles les termes

$$\sum_1^g {}_r \lambda_r \frac{\partial f_r}{\partial \tilde{\omega}_h}.$$

2. Nous n'allons pas approfondir le résultat qu'on trouverait de cette manière. Plutôt comme complément des formules que nous avons données, nous voulons envisager le cas du mouvement d'un corps solide et d'un corps liquide homogène qu'on peut supposer remplir une cavité du premier corps.

S étant l'espace occupé par le liquide, la force vive du système sera, en se rapportant à des axes liés invariablement au corps solide (voir article V)

$$\begin{aligned} T = \frac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 - 2\,Dqr - 2\,Erp - 2\,Fpq) \\ + \frac{1}{2}\int_S \left[\left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\eta}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\zeta}{dt}\right)^2\right] \rho dS + p\int_S \left(\eta\frac{d\zeta}{dt} - \zeta\frac{d\eta}{dt}\right)\rho dS \\ + q\int_S \left(\zeta\frac{d\xi}{dt} - \xi\frac{d\zeta}{dt}\right)\rho dS + r\int_S \left(\xi\frac{d\eta}{dt} - \eta\frac{d\xi}{dt}\right)\rho dS, \end{aligned}$$

où ξ, η, ζ sont les coordonnées des points du fluide et ρ sa densité.

Pour vérifier l'équation de continuité il faudra prendre

$$\frac{\partial\delta\xi}{\partial\xi} + \frac{\partial\delta\eta}{\partial\eta} + \frac{\partial\delta\zeta}{\partial\zeta} = 0.$$

Par suite, en employant le principe de HAMILTON, en trouvera les équations

$$(24_d) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{d^2\xi}{dt^2} + 2\left(q\frac{d\zeta}{dt} - r\frac{d\eta}{dt}\right) + \zeta\frac{dq}{dt} - \eta\frac{dr}{dt} + \frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{P}{\rho} - V\right) = 0, \\ \frac{d^2\eta}{dt^2} + 2\left(r\frac{d\xi}{dt} - p\frac{d\zeta}{dt}\right) + \xi\frac{dr}{dt} - \zeta\frac{dp}{dt} + \frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{P}{\rho} - V\right) = 0, \\ \frac{d^2\zeta}{dt^2} + 2\left(p\frac{d\eta}{dt} - q\frac{d\xi}{dt}\right) + \eta\frac{dp}{dt} - \xi\frac{dq}{dt} + \frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\frac{P}{\rho} - V\right) = 0, \end{aligned} \right.$$

$$(24'_d) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial p} + q\frac{\partial T}{\partial r} - r\frac{\partial T}{\partial q} = M_\xi, \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q} + r\frac{\partial T}{\partial p} - p\frac{\partial T}{\partial r} = M_\eta, \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial r} + p\frac{\partial T}{\partial q} - q\frac{\partial T}{\partial p} = M_\zeta, \end{aligned} \right.$$

V étant la fonction potentielle des forces agissant sur le fluide et M_ξ, M_η, M_ζ les composantes du couple de rotation. Si nous posons

$$u = \frac{d\xi}{dt} \quad , \quad v = \frac{d\eta}{dt} \quad , \quad w = \frac{d\zeta}{dt}$$

et si nous désignons par le symbole $\partial/\partial t$ la dérivée partielle par rapport à t d'une quantité en la regardant comme une fonction de ξ, η, ζ, t, les équations précédentes deviendront

$$(25_d) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial \xi} + v\frac{\partial u}{\partial \eta} + w\frac{\partial u}{\partial \zeta} + 2(qw - rv) \\ & \qquad + \zeta\frac{dq}{dt} - \eta\frac{dr}{dt} + \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{P}{\rho} - V\right) = 0, \\ & \frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial \xi} + v\frac{\partial v}{\partial \eta} + w\frac{\partial v}{\partial \zeta} + 2(ru - pw) \\ & \qquad + \xi\frac{dr}{dt} - \zeta\frac{dp}{dt} + \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{P}{\rho} - V\right) = 0, \\ & \frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial \xi} + v\frac{\partial w}{\partial \eta} + w\frac{\partial w}{\partial \zeta} + 2(pv - qu) \\ & \qquad + \eta\frac{dp}{dt} - \xi\frac{dq}{dt} + \frac{\partial}{\partial \zeta}\left(\frac{P}{\rho} - V\right) = 0, \end{aligned} \right.$$

$$(25'_d) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{d}{dt}\frac{\partial \Theta}{\partial p} + q\frac{\partial \Theta}{\partial r} - r\frac{\partial \Theta}{\partial q} = M_\xi, \\ & \frac{d}{dt}\frac{\partial \Theta}{\partial q} + r\frac{\partial \Theta}{\partial p} - p\frac{\partial \Theta}{\partial r} = M_\eta, \\ & \frac{d}{dt}\frac{\partial \Theta}{\partial r} + p\frac{\partial \Theta}{\partial q} - q\frac{\partial \Theta}{\partial p} = M_\zeta, \end{aligned} \right.$$

où

$$\Theta = \frac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 - 2Dqr - 2Erp - 2Fpq)$$
$$+ p\int_S (\eta w - \zeta v)\rho dS + q\int_S (\zeta u - \xi w)\rho dS + r\int_S (\xi v - \eta u)\rho dS.$$

A ces équations il faut ajouter l'équation de continuité

$$(26_d) \qquad \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial v}{\partial \eta} + \frac{\partial w}{\partial \zeta} = 0$$

et l'équation au contour

$$(27_d) \qquad u\cos n\xi + v\cos n\eta + w\cos n\zeta = 0,$$

n étant la normale à la paroi qui limite l'espace occupé par le fluide.

3. Envisagerons le cas où le fluide n'ait pas de tourbillons, c'est à dire où l'on ait

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad , \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y} \quad , \quad w = \frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

Les équations (15_d) s'écriront

$$(28_d)\quad \left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial\xi}\left[\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\zeta}\right)^2\right\}+\frac{P}{\rho}-V\right]\\
&\qquad\qquad+2\left(q\frac{\partial\varphi}{\partial\zeta}-r\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\right)+\zeta\frac{dq}{dt}-\eta\frac{dr}{dt}=0,\\
&\frac{\partial}{\partial\eta}\left[\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\zeta}\right)^2\right\}+\frac{P}{\rho}-V\right]\\
&\qquad\qquad+2\left(r\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}-p\frac{\partial\varphi}{\partial\zeta}\right)+\xi\frac{dr}{dt}-\zeta\frac{dp}{dt}=0,\\
&\frac{\partial}{\partial\zeta}\left[\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\zeta}\right)^2\right\}+\frac{P}{\rho}-V\right]\\
&\qquad\qquad+2\left(p\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}-q\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\right)+\eta\frac{dp}{dt}-\xi\frac{dp}{dt}=0.
\end{aligned}\right.$$

C'est pourquoi

$$\frac{\partial}{\partial\zeta}\left[2\left(r\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}-p\frac{\partial\varphi}{\partial\zeta}\right)+\xi\frac{dr}{dt}-\zeta\frac{dp}{dt}\right]=\frac{\partial}{\partial\eta}\left[2\left(p\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}-q\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\right)+\eta\frac{dp}{dt}-\xi\frac{dq}{dt}\right].$$

On tire de là et de l'équation de continuité

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\left(p\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}+q\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}+r\frac{\partial\varphi}{\partial\zeta}\right)=\frac{dp}{dt},$$

et d'une manière analogue on a

$$\frac{\partial}{\partial\eta}\left(p\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}+q\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}+r\frac{\partial\varphi}{\partial\zeta}\right)=\frac{dq}{dt},$$

$$\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(p\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}+q\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}+r\frac{\partial\varphi}{\partial\zeta}\right)=\frac{dr}{dt}.$$

Par une intégration on trouve

$$p\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}+q\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}+r\frac{\partial\varphi}{\partial\zeta}=\frac{dp}{dt}\xi+\frac{dq}{dt}\eta+\frac{dr}{dt}\zeta+C,$$

C étant une quantité constante.

Si le mouvement de rotation du corps solide est permanent, cette équation devient

$$(29_d)\qquad p\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}+q\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}+r\frac{\partial\varphi}{\partial\zeta}=C.$$

La constante C doit être nulle, parceque si nous conduisons un plan tangent à la surface qui limite le fluide, et qui soit normal à l'axe de rotation, au point de contact on aura (*)

$$(29_e)\qquad p\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}+q\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}+r\frac{\partial\varphi}{\partial\zeta}=0.$$

(*) Basta infatti osservare che p, q, r, sono proporzionali ai coseni direttivi della normale al piano e che la componente della velocità del liquido secondo la normale stessa, nel punto di contatto, è evidentemente eguale a zero. [N. d. R.].

Prenons pour axe ζ l'axe de rotation, alors l'équation (29_d) deviendra

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \zeta} = 0$$

et les équations (28_d) s'écriront

$$(28'_d) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi}\left[\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \eta}\right)^2\right\} + \frac{P}{\rho} - V\right] &= \quad 2r\frac{\partial \varphi}{\partial \eta}, \\ \frac{\partial}{\partial \eta}\left[\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \eta}\right)^2\right\} + \frac{P}{\rho} - V\right] &= -2r\frac{\partial \varphi}{\partial \xi}, \end{aligned} \right.$$

en supposant que le mouvement du fluide soit stationnaire.

L'équation de continuité (26_d) et celle (27_d) qui doit être vérifiée au contour seront

$$(26'_d) \qquad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta^2} = 0, \qquad\qquad (27'_d) \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0.$$

Donc si ψ est la fonction conjuguée de φ, c'est à dire si

$$\varphi + i\psi = F(\xi + i\eta)$$

on aura (*)

$$P = \rho V - \frac{\rho}{2}\left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \eta}\right)^2\right] - 2r\rho\psi + K,$$

K étant une constante.

Pour que les conditions $(26'_d)$, $(27'_d)$ soient vérifiées, il faut que φ soit polydrome et que l'espace occupé par le fluide n'ait pas la connexion linéaire simple.

Calculons maintenant les composantes du couple de quantité de mouvement du fluide par rapport aux axes. La composante dans la direction ξ sera

$$m_1 = -\int_S \zeta v \rho dS = -\int_S \zeta \frac{\partial \varphi}{\partial \eta}\rho dS = \rho \int_S \zeta \frac{\partial \psi}{\partial \xi} dS,$$

et puisque ψ est constant le long des intersections du contour avec des plans parallèles au plan $\xi\eta$, on trouvera $m_1 = 0$. De même on aura $m_2 = 0$.

On tire de là que l'axe du couple du mouvement interne est parallèle à l'axe de rotation, c'est pourquoi celui-ci (voir $(6'_c)$) doit être un axe de inertie.

Nous avons donc une infinité de mouvements possibles permanents du solide et du fluide renfermé dans un recipient tubulaire sans que le fluide ait des tourbillons. (Voir la note à l'article V de ce chapitre).

(*) Basta infatti osservare che si hanno le due equazioni $\partial\varphi/\partial\eta = \partial\psi/\partial\xi$; $\partial\varphi/\partial\xi = -\partial\psi/\partial\eta$ e sostituire in $(28'_d)$, tenendo presente che per la (29_e) la z è costante. [N.d.R.].

Note au chapitre IV.

1. Nous avons fait usage dans le chapitre précédent du principe de HAMILTON et des équations du type LAGRANGE–LIOUVILLE; mais on peut très–bien s'en passer et démontrer directement la relation qui subsiste entre le mouvement adiabatique et le mouvement isocyclique en employant seulement l'équation symbolique du mouvement, c'est à dire l'expression analytique du principe de LAGRANGE. Il faut pour cela se servir d'une transformation très–élégante de cette équation donnée par M. BELTRAMI [25].

2. Lorsqu'on a un système qui peut tourner autour d'un point fixe, soient q_1, q_2, q_3 des paramètres qui déterminent sa position. Supposons que dans ce système existent des mouvements cycliques et que les forces relatives aux coordonnées cycliques soient nulles.

L'équation symbolique de M. BELTRAMI peut s'écrire dans ce cas

$$\delta L = \delta U - \left(\sum_1^3 \frac{\partial U}{\partial q_i'} \delta q_i \right)',$$

où L est le travail du couple des forces appliquées au système et U est donné, par des calculs que nous supprimons, par

$$-U = \frac{1}{2} [(A-a)p^2 + (B-b)q^2 + (C-c)r^2 - 2(D+d)qr - 2(E+e)rp$$
$$- 2(F+f)pq] + l_1 p + l_2 q + l_3 r - \frac{1}{2} \Sigma_i \Sigma_s A_{is} K_i K_s ,$$

les notations étant les mêmes que celles que nous avons adoptées dans le chapitre précédent.

On peut tirer de là aisément le théorème auquel nous avons fait allusion et de même les équations du type LAGRANGE–LIOUVILLE.

CHAPITRE V.

Quelques applications au mouvement du pôle terrestre.

Article I.

1. Lorsque les mouvements internes ne sont pas stationnaires nous avons vu que les équations différentielles du mouvement sont les suivantes (voir Introduction (7))

(25) BELTRAMI, *Sulle equazioni dinamiche di Lagrange.* « Rendiconti dell'Istituto Lombardo », ser. II, vol. 28, fasc. 14.

$$(1_e)\qquad \begin{cases} A\dfrac{dp}{dt}+(C-B)\,qr+m_3\,q-m_2\,r+\dfrac{dm_1}{dt}=0, \\ B\dfrac{dq}{dt}+(A-C)\,rp+m_1\,r-m_3\,p+\dfrac{dm_2}{dt}=0, \\ C\dfrac{dr}{dt}+(B-A)\,pq+m_2\,p-m_1\,q+\dfrac{dm_3}{dt}=0 \end{cases}$$

et on a l'intégrale (voir Introduction (6))

$$(2_e)\qquad (Ap+m_1)^2+(B\,q+m_2)^2+(Cr+m_3)^2=K^2.$$

En général on ne peut pas donner d'autres intégrales et par suite on ne peut obtenir l'intégration par des quadratures.

Supposons $A=B$; alors les équations précédentes deviennent

$$(3_e)\qquad \begin{cases} \dfrac{dp}{dt}+\left[\dfrac{C-A}{A}r+\dfrac{m_3}{A}\right]q=\left(m_2\,r-\dfrac{dm_1}{dt}\right)\dfrac{1}{A}, \\ \dfrac{dq}{dt}-\left[\dfrac{C-A}{A}r+\dfrac{m_3}{A}\right]p=\left(-m_1\,r-\dfrac{dm_2}{dt}\right)\dfrac{1}{A}, \\ \dfrac{dr}{dt}=-\dfrac{1}{C}\,\dfrac{dm_3}{dt}+\dfrac{(m_1\,q-m_2\,p)}{C}. \end{cases}$$

2. Pour intégrer ces équations différentielles, nous pouvons employer une méthode d'approximations successives.

A cet effet remarquons que si l'on connaissait p et q, on pourrait calculer r par la troisième équation. On trouverait

$$(5_e)\qquad r=a_1-\frac{1}{C}m_3+\frac{1}{C}\int(m_1\,q-m_2\,p)\,dt,$$

a_1 étant une constante arbitraire.

De même si l'on connaissait r, on pourrait intégrer les premières équations. En effet posons

$$(5_e)\qquad \frac{C-A}{A}r+\frac{m_3}{A}=\rho,$$

$$(6_e)\qquad \begin{cases} \dfrac{1}{A}\left(m_2\,r-\dfrac{dm_1}{dt}\right)=\alpha, \\ \dfrac{1}{A}\left(-m_1\,r-\dfrac{dm_2}{dt}\right)=\beta, \end{cases}$$

on aura alors

$$\frac{dp}{dt}+\rho q=\alpha,$$

$$\frac{dq}{dt}-\rho p=\beta.$$

En posant

$$u=\int\rho dt$$

ces équations peuvent s'écrire

$$\frac{dp}{du} + q = \frac{\alpha}{\rho} \quad , \quad \frac{dq}{du} - p = \frac{\beta}{\rho}$$

d'où

$$p = C_2 \cos u - C_3 \sin u \quad , \quad q = C_2 \sin u + C_3 \cos u \, ,$$

$$\frac{dC_2}{dt} \cos u - \frac{dC_3}{dt} \sin u = \alpha \quad , \quad \frac{dC_2}{dt} \sin u + \frac{dC_3}{dt} \cos u = \beta \, .$$

Par l'intégration des dernières équations il vient

$$C_2 = \int (\alpha \cos u + \beta \sin u)\, dt + a_2 \, ,$$

$$C_3 = -\int (\alpha \sin u - \beta \cos u)\, dt + a_3 \, ,$$

a_2 et a_3 étant des constantes arbitraires. Par suite

$$(7_e) \quad \left\{ \begin{aligned} p &= \left[\int (\alpha \cos u + \beta \sin u)\, dt + a_2\right] \cos u \\ &\qquad + \left[\int (\alpha \sin u - \beta \cos u)\, dt + a_3\right] \sin u \, , \\ q &= \left[\int (\alpha \cos u + \beta \sin u)\, dt + a_2\right] \sin u \\ &\qquad - \left[\int (\alpha \sin u - \beta \cos u)\, dt + a_3\right] \cos u \, . \end{aligned} \right.$$

Prenons d'abord r donné par la formule

$$r_1 = a_1 - \frac{1}{C} m_3$$

et substituons cette valeur dans les équations (6_e). D'après les équations (7_e) on déterminera p et q et en substituant les expressions qu'on trouvera dans l'équation (4_e) on aura une nouvelle valeur pour r. On pourra de même employer cette expression de r pour obtenir une nouvelle détermination de p et q. Ainsi de suite on aura la solution par des approximations successives.

3. Il est aisé de calculer les séries qui donnent la solution par cette méthode.

En effet posons

$$r_1 = a_1 - \frac{1}{C} m_3 \quad , \quad u_1 = \int_0^t \left(r_1 \frac{C - A}{A} + \frac{m_3}{A} \right) dt \, ,$$

$$\alpha_1 = \frac{1}{A} \left(m_2 r_1 - \frac{dm_1}{dt} \right) \quad , \quad \beta_1 = \left(- m_1 r_1 - \frac{dm_2}{dt} \right),$$

$$p_1 = \left[\int_0^t (\alpha_1 \cos u_1 + \beta_1 \sin u_1)\, dt + a_2\right] \cos u_1$$
$$+ \left[\int_0^t (\alpha_1 \sin u_1 - \beta_1 \cos u_1)\, dt + a_3\right] \sin u_1 ,$$

$$q_1 = \left[\int_0^t (\alpha_1 \cos u_1 + \beta_1 \sin u_1)\, dt + a_2\right] \sin u_1$$
$$- \left[\int_0^t (\alpha_1 \sin u_1 - \beta_1 \cos u_1)\, dt + a_3\right] \cos u_1$$

et écrivons pour $n > 1$ les formules récurrentes

$$r_n = \frac{1}{C}\int_0^t (m_1 q_{n-1} - m_2 p_{n-1})\, dt ,$$

$$u_n = \frac{C-A}{A}\int_0^t r_n\, dt ,$$

$$\alpha_n = \left(\frac{1}{A} m_2 - \frac{C-A}{A} \sum_1^{n-1}{}_i\, q_{i-1}\right) r_n \quad , \quad \beta_n = \left(\frac{1}{A} + \frac{C-A}{A} \sum_1^{n-1}{}_i\, p_{i-1}\right) r_n ,$$

$$p_n = \left\{\int_0^t \left[\alpha_n \cos\left(\sum_1^n u_i\right) + \beta_n \sin\left(\sum_1^n u_i\right)\right] dt\right\} \cos\left(\sum_1^n u_i\right)$$
$$+ \left\{\int_0^t \left[\alpha_n \sin\left(\sum_1^n u_i\right) - \beta_n \cos\left(\sum_1^n u_i\right)\right] dt\right\} \sin\left(\sum_1^n u_i\right),$$

$$q_n = \left\{\int_0^t \left[\alpha_n \cos\left(\sum_1^n u_i\right) + \beta_n \sin\left(\sum_1^n u_i\right)\right] dt\right\} \sin\left(\sum_1^n u_i\right)$$
$$- \left\{\int_0^t \left[\alpha_n \sin\left(\sum_1^n u_i\right) - \beta_n \cos\left(\sum_1^n u_i\right)\right] dt\right\} \cos\left(\sum_1^n u_i\right).$$

Les intégrales des équations proposées seront

$$p = \sum_1^\infty p_n \quad , \quad q = \sum_1^\infty q_n \quad , \quad r = \sum_1^\infty r_n .$$

On peut démontrer que ces séries sont convergentes pour les valeurs de t comprises entre certaines limites, si l'on suppose que m_1 , m_2 , m_3 , dm_1/dt , dm_2/dt soient des quantités finies.

Article II.

1. Dans les équations différentielles (1_e) on peut regarder m_1, m_2, m_3 comme les fonctions inconnues et p, q, r comme des quantités données.

Le problème mécanique qui correspond à cette question analytique est le suivant:

On connait le mouvement de rotation du système, déterminer les mouvements internes qui correspondent au mouvement de rotation donné.

Dans le cas où m_1, m_2, m_3 sont les fonctions inconnues, l'application de la méthode des approximations successives conduit à des résultats beaucoup plus simples que dans le cas traité dans l'article précédent.

En effet, prenons d'abord

$$m_1^{(1)} = -\int_0^t [(C - B)\, qr + a_3 q - a_2 r]\, dt - A\,(p - p_0),$$

$$m_2^{(1)} = -\int_0^t [(A - C)\, rp + a_1 r - a_3 p]\, dt - B\,(q - q_0),$$

$$m_3^{(1)} = -\int_0^t [(B - A)\, pq + a_2 p - a_1 q]\, dt - C\,(r - r_0),$$

a_1, a_2, a_3 étant des costantes arbitraires.

Ecrivons après les formules récurrentes

$$(8_e)\qquad \begin{cases} m_1^{(n)} = -\displaystyle\int_0^t [m_3^{(n-1)} q - m^{(n-1)} r]\, dt, \\[2ex] m_2^{(n)} = -\displaystyle\int_0^t [m_1^{(n-1)} r - m_3^{(n-1)} p]\, dt, \\[2ex] m_3^{(n)} = -\displaystyle\int_0^t [m_2^{(n-1)} p - m_1^{(n-1)} q]\, dt, \end{cases}$$

et calculons les séries

$$m_1 = a_1 + \sum_1^\infty {}_n m_1^{(n)},$$

$$m_2 = a_2 + \sum_1^\infty {}_n m_2^{(n)},$$

$$m_3 = a_3 + \sum_1^\infty {}_n m_3^{(n)}.$$

Elles donneront les intégrales des équations différentielles (1_e).

Le théorème géneral de M. PICARD [26] sur la méthode des approximations successives, avec la modification apportée par M. LINDELÖF, prouve que les séries précédentes sont convergentes pour toute valeur du temps qui soit limitée dans un intervalle où p, q, r sont des fonctions continues et finies. Il est intéressant de particulariser le raisonnement général à ce cas particulier pour avoir un résultat que nous allons énconcer. Soit P la limite supérieure des valeurs de p, q, r pour t comprise entre $-$T et T.

Les formules (8_e) montrent que si l'on suppose

$$|m_i^{(n)}| < \frac{M}{|\underline{n}} t^n + \frac{N}{|\underline{(n-1)}} t^{n-1} \qquad (i = 1, 2, 3)$$

on aura

$$|m_i^{(n+1)}| < \frac{2\,MP\,t^{n+1}}{|\underline{(n+1)}} + \frac{2\,NP\,t^n}{|\underline{n}}.$$

Supposons maintenant que l'on ait

$$A \geqq B \geqq C$$

et soit Δ la limite supérieure des valeurs de $|p - p_0|, |q - q_0|, |r - r_0|$ et a la plus grande des quantités $|a_1|, |a_2|, |a_3|$. Allors on aura

$$|m_i^{(1)}| < \left[\frac{A-C}{2} P + a\right] 2\,Pt + A\Delta$$

et par suite

$$|m_i^{(n)}| < \left[\frac{A-C}{2} P + a\right] \frac{(2\,Pt)^n}{|\underline{n}} + A\Delta \frac{(2\,Pt)^{n-1}}{|\underline{(n-1)}},$$

ce qui prouve que les séries (9_e) sont convergentes.

On aura aussi si $|t| < T$

$$(10_e) \qquad |m_i| < \left[\frac{A-C}{2} P + a\right](e^{2\,Pt} - 1) + A\Delta e^{2Pt}.$$

Par les raisonnements ordinaires on prouve que les séries (9_e) satisfont aux équations différentielles (1_e) lorsque les dérivées de p, q, r sont finies. Prenons dans les formules précédentes $t = t_1$, puis faisons évanouir t_1 et changeons en même temps les fonctions $p(t), q(t), r(t)$ de manière que $p(t_1)$, $q(t_1), r(t_1)$ gardent toujours les mêmes valeurs, qu'on désignera par p, q, r. On aura à la limite pour $t_1 = 0$

$$m_1 - a_1 = A(p - p_0) \quad , \quad m_2 - a_2 = B(q - q_0) \quad , \quad m_3 - a_3 = C(r - r_0).$$

On a ainsi *les relations qui doivent subsister entre* $p, q, r; m_1, m_2, m_3$ *dans leurs points de discontinuité*. Il est facile d'interpréter ces formules comme celles qui donnent les discontinuités de la rotation dues à un choc qui change brusquement les valeurs de m_1, m_2, m_3.

(26) PICARD, *Traité d'analyse*, T. III, page 88; E. LINDELÖF, « Comptes rendus », 26 février 1894).

2. Les résultats du paragraphe précédent nous conduisent à la proposition: *Soit donnée une loi arbitraire de rotation. On pourra toujours engendrer dans un corps quelconque des mouvements internes qui ne changent ni la forme ni la distribution des masses du corps, tels que le corps sans être soumis à aucune force externe, tourne autour du centre de gravité d'après la loi donnée.*

Si le corps était rigide il suivrait les lois bien connues de la rotation libre d'un corps rigide, par suite le théorème précédent peut être énoncé de la manière suivante:

Toute anomalie qu'on remarque dans la rotation libre d'un corps peut être expliquée par des mouvements internes qui ne changent ni la forme ni la distribution des masses du corps.

La formule (10_e), montre que $|m_1|, |m_2|, |m_3|$ sont aussi petits que l'on veut, pourvu que Δ et T soient suffisamment petits.

Donc *toute altération de la rotation d'un corps, pourvu qu'elle soit suffisamment petite, peut être produite par des mouvements internes qui ne changent ni la forme ni la distribution des masses du corps et qui sont aussi petits que l'on veut.*

3. Les propositions précédentes conduisent à des conséquences immédiates dont nous allons donner quelques exemples dans ce paragraphe et dans le paragraphe suivant. *On connaît la rotation d'un corps dans lequel existent des mouvements internes qui ne changent ni la forme ni la distribution des masses du corps. Comment peut-on changer les mouvements internes de manière qu'ils produisent toujours le même effet, c'est à dire que la rotation du corps ne change pas?*

Si m'_1, m'_2, m'_3 sont les nouvelles valeurs de m_1, m_2, m_3 il faut qu'on ait

$$A\frac{dp}{dt} + (C - B)\,qr + m'_3\,q - m'_2\,r + \frac{dm'_1}{dt} = 0,$$

$$B\frac{dq}{dt} + (A - C)\,rp + m'_1\,r - m'_3\,p + \frac{dm'_2}{dt} = 0,$$

$$C\frac{dr}{dt} + (B - A)\,pq + m'_2\,p - m'_1\,q + \frac{dm'_3}{dt} = 0.$$

Retranchons les équations (1_e) et posons

$$m'_1 - m_1 = m''_1 \quad , \quad m'_2 - m_2 = m''_2 \quad , \quad m'_3 - m_3 = m''_3,$$

on trouve

$$\frac{dm''_1}{dt} + m''_3\,q - m''_2\,r = 0,$$

$$\frac{dm''_2}{dt} + m''_1\,r - m''_3\,p = 0,$$

$$\frac{dm''_3}{dt} + m''_2\,p - m''_1\,q = 0$$

les équations étant du même type que les équations de POISSON (voir Introduction). Si nous appelons $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$; $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$; $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$ les cosinus des angles que les angles ξ, η, ζ forment avec les axes fixes x, y, z, les intégrales générales seront

$$m_1'' = C_1 \alpha_1 + C_2 \beta_1 + C_3 \gamma_1,$$
$$m_2'' = C_1 \alpha_2 + C_2 \beta_2 + C_3 \gamma_2,$$
$$m_3'' = C_1 \alpha_3 + C_2 \beta_3 + C_3 \gamma_3,$$

C_1, C_2, C_3 étant des constantes arbitraires; d'où l'on tire

$$m_1' = m_1 + C_1 \alpha_1 + C_2 \beta_1 + C_3 \gamma_1,$$
$$m_2' = m_2 + C_1 \alpha_2 + C_2 \beta_2 + C_3 \gamma_2,$$
$$m_3' = m_3 + C_1 \alpha_3 + C_2 \beta_3 + C_3 \gamma_3,$$

Ces formules résolvent complètement la question proposée.

En prenant $m_1 = m_2 = m_3 = 0$ et en remplaçant $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$; $\beta_1, \beta_2, \beta_3$; $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ par les expressions données par JACOBI pour ces cosinus dans le cas d'un système rigide qui n'est soumis à aucune force, on aura *tous les mouvements internes qui ne produisent aucun effet dans la rotation libre d'un corps*.

De même si nous prenons m_1, m_2, m_3 constants et que nous mettions à la place de $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$; $\beta_1, \beta_2, \beta_3$; $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ les expressions que nous avons trouvées à l'article VI du chapitre II pour ces cosinus lorsque les mouvements internes sont stationnaires, on trouvera *tous les mouvements internes variables qui produisent le même effet que les mouvements stationnaires*.

On tire de là qu'un corps peut avoir un mouvement de rotation, comme s'il était rigide ou très rapproché à celui qu'il aurait s'il était rigide, et cependant il peut s'engendrer à son intérieur un mouvement tel que le moment du couple de quantité de mouvement soit aussi grand que l'on veut.

4. Un résultat qu'on peut concevoir beaucoup plus facilement est le suivant.

Supposons qu'on ait tracé les polodies correspondant au mouvement rigide sur l'ellipsoïde central du corps ayant pour équation

$$A\xi^2 + B\eta^2 + C\zeta^2 = 1 .$$

Si en supposant B compris entre A et C, on conduit les plans

$$\frac{\zeta}{\xi} = \sqrt{\frac{A(A-B)}{C(B-C)}} \quad , \quad \frac{\zeta}{\xi} = -\sqrt{\frac{A(A-B)}{C(B-C)}} ,$$

la surface de l'ellipsoide sera découpée en quatre régions.

En prenant deux polodies situées dans la même région on peut déformer l'une d'elles avec continuité en passant par toutes celles intermédiaires jusqu'à la faire coincider avec l'autre.

Cela ne peut pas être fait pour les polodies situées dans des régions différentes de l'ellipsoïde.

Remarquons que chacune de ces courbes peut être parcourue par le pôle lorsque les mouvements internes sont nuls. On peut donc prévoir qu'engendrant des mouvements internes aussi petits que l'on veut, le pôle puisse parcourir une courbe dont les spires soient rapprochées aux polodies et que cette trajectoire soit telle qu'en partant d'un point d'une polodie on aboutisse à un point d'une autre polodie quelconque appartenant à la même région de l'ellïpsoide. Les formules qu'on a données le montrent d'une manière fort simple. En effet ayant égard à l'intégrale (2_e) des équations (1_e), posons

$$(11_e) \qquad \gamma_1 = \frac{Ap + m_1}{K} \quad , \quad \gamma_2 = \frac{Bq + m_2}{K} \quad , \quad \gamma_3 = \frac{Cr + m_3}{K} \;;$$

ces quantités seront les cosinus des angles que les axes ξ, η, ζ forment avec l'axe du couple de quantité de mouvement qui est fixe. (Voir Introduction).

Résolvons les équations précédentes par rapport à p, q, r et substituons les valeurs qu'on trouve dans les équations (1_e); on aura

$$(1'_e) \qquad \frac{d\gamma_1}{dt} = (c-b)\gamma_2\gamma_3 + \frac{m_2}{B}\gamma_3 - \frac{m_3}{C}\gamma_2,$$

$$\frac{d\gamma_2}{dt} = (a-c)\gamma_3\gamma_1 + \frac{m_3}{C}\gamma_1 - \frac{m_1}{A}\gamma_3 \quad , \quad \frac{d\gamma_3}{dt} = (b-a)\gamma_1\gamma_2 + \frac{m_1}{A}\gamma_2 - \frac{m_2}{B}\gamma_1$$

où l'on a posé $a = K/A$, $b = K/B$, $c = K/C$.

Lorsqu'on suppose $m_1 = m_2 = m_3 = 0$, ces équations deviennent

$$(1''_e) \qquad \frac{d\gamma_1}{dt} = (c-b)\gamma_2\gamma_3 \quad , \quad \frac{d\gamma_2}{dt} = (a-c)\gamma_3\gamma_1 \quad , \quad \frac{d\gamma_3}{dt} = (b-a)\gamma_1\gamma_2,$$

c'est à dire elles se réduisent aux équations différentielles du mouvement rigide.

Les équations ($1''_e$) ont les deux intégrales

$$\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1 \quad , \quad a\gamma_1^2 + b\gamma_2^2 + c\gamma_3^2 = e$$

et la quantité constante e doit être comprise entre a et c, si nous supposons que la valeur B soit comprise entre A et C.

Si nous nous rapportons à la distinction des polodies qu'on a faite tout à l'heure, on aura que le passage des polodies d'une région à celles d'une autre a lieu lorsque e franchit la valeur b.

Si nous prenons avec JACOBI [27]

$$a > b > e > c \quad \text{ou} \quad a < b < e < c$$

(27) Voir HERMITE: *Sur quelques applications des fonctions elliptiques*, §§ X, XI.

les intégrales des équations $(1''_e)$ seront

$$\gamma_1 = \sqrt{\frac{c-e}{c-a}}\,\mathrm{sn}\,[n(t-t_0)\,,k] \quad , \quad \gamma_2 = \sqrt{\frac{c-e}{c-b}}\,\mathrm{cn}\,[n(t-t_0)\,,k],$$

$$\gamma_3 = \sqrt{\frac{e-a}{c-a}}\,\mathrm{dn}\,[n(t-t_0)\,,k],$$

où t_0 est une constante et

$$n = \sqrt{(e-a)(c-b)} \quad , \quad k = \sqrt{\frac{(b-a)(c-e)}{(e-a)(c-b)}}\,.$$

Calculons les dérivées de $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ par rapport aux constantes t_0 et e. On aura d'abord

$$\frac{\partial\gamma_1}{\partial t_0} = -\gamma_2\gamma_3(c-b) \quad , \quad \frac{\partial\gamma_2}{\partial t_0} = -\gamma_3\gamma_1(a-c) \quad , \quad \frac{\partial\gamma_3}{\partial t_0} = -\gamma_1\gamma_2(b-a)$$

par suite ces dérivées seront des quantités finies. Les dérivées des fonctions sn, cn, dn par rapport au module deviennent infinies lorsque $k = 1$. On tire de là que les dérivées de $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ seront finies si e ne prend par les valeurs limites b et c.

Cela posé, employons la méthode des variations des constantes arbitraires, et tâchons de vérifier les équations différentielles (1_e) en prenant t_0 et e fonctions du temps.

Ces équations déviennent alors

$$(1'''_e) \qquad \left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial\gamma_1}{\partial t_0}\frac{dt_0}{dt} + \frac{\partial\gamma_1}{\partial e}\frac{de}{dt} + \frac{m_2}{B}\gamma_3 - \frac{m_3}{C}\gamma_2 = 0\,,\\
&\frac{\partial\gamma_2}{\partial t_0}\frac{dt_0}{dt} + \frac{\partial\gamma_2}{\partial e}\frac{de}{dt} + \frac{m_3}{C}\gamma_1 - \frac{m_1}{A}\gamma_3 = 0\,,\\
&\frac{\partial\gamma_3}{\partial t_0}\frac{\partial t_0}{dt} + \frac{\partial\gamma_3}{\partial e}\frac{de}{dt} + \frac{m_1}{A}\gamma_2 - \frac{m_2}{B}\gamma_1 = 0\,.
\end{aligned}\right.$$

Soient $\gamma'_1, \gamma'_2, \gamma'_3$, et $\gamma''_1, \gamma''_2, \gamma''_3$ deux systèmes de valeurs de $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ qui correspondent à deux valeurs quelconques τ' e τ'' de $t - t_0$ et à deux valeurs e' et e'' de e comprises entre les limites b et c. On pourra prendre t_0 et e fonctions du temps de manière qu'en posant $\tau(t) = t - t_0(t)$ on ait

$$\tau(t_1) = \tau' \quad , \quad \tau(t_2) = \tau'' + 2n\omega \quad , \quad \left(\frac{dt_0}{dt}\right)_{t=t_1} = 0 \quad , \quad \left(\frac{dt_0}{dt}\right)_{t=t_2} = 0\,,$$

$$e(t_1) = e' \quad , \quad e(t_2) = e'' \quad , \quad (e' - e(t))(e'' - e(t)) < 0\,,$$

$$\left(\frac{de}{dt}\right)_{t=t_1} = 0 \quad , \quad \left(\frac{de}{dt}\right)_{t=t_2} = 0\,,$$

$2\,\omega$ étant la période réelle des fonctions elliptiques correspondant au module

$$k = \sqrt{\frac{(b-a)(c-e'')}{(e''-a)(c-b)}}\,.$$

Alors les fonctions

$$\gamma_1 = \gamma_1(t - t_0(t)\,, e(t)) \quad , \quad \gamma_2 = \gamma_2(t - t_0(t)\,, e(t)) \quad , \quad \gamma_3 = \gamma_3(t - t_0(t)\,, e(t)),$$

pour $t = t_1$ prendront les valeurs $\gamma'_1, \gamma'_2, \gamma'_3$ et pour $t = t_2$ prendront les valeurs $\gamma''_1, \gamma''_2, \gamma''_3$ et leurs dérivées par rapport à t_0 et à e seront finies.

Nous pouvons calculer d'après les formules $(1'''_e)$ un système de valeurs $m_1(t), m_2(t), m_3(t)$ de m_1, m_2, m_3 qui les vérifient de sorte que ces valeurs soient nulles pour $t = t_1$, et pour $t = t_2$.

Ayant égard aux formules (11_e) on tire de là que si pendant le temps $t_1 \cdots t_2$ les mouvements internes sont caractérisés par $m_1(t), m_2(t), m_3(t)$ et si les composantes de la rotation du corps au temps t_1 ont les valeurs

$$\frac{A\gamma'_1}{K}, \frac{B\gamma'_2}{K}, \frac{C\gamma'_3}{K}$$

au temps t_2 elles deviendront

$$\frac{A\gamma''_1}{K}, \frac{B\gamma''_2}{K}, \frac{C\gamma''_3}{K},$$

ce qui prouve que le pôle peut passer d'un point d'une polodie à un point d'une autre polodie appartenant à la même région de l'ellipsoïde.

Mais on peut choisir les fonctions $t_0(t)$ et $e(t)$ de sorte que les dérivées $dt_0/dt, de/dt$ soient aussi petites que l'on veut de manière que même m_1, m_2, m_3 aient des valeurs absolues plus petites qu'une quantité donnée arbitrairement; donc le passage du pôle peut arriver par des mouvements internes aussi petits que l'on veut.

Nous avons jusqu'ici exclu la valeur $e = c$ qui correspond à un sommet de l'ellipsoïde, parce que pour cette valeur $\partial\gamma_1/\partial e, \partial\gamma_2/\partial e, \partial\gamma_3/\partial e$ deviennent infinies, mais on reconnaît facilement que cette exclusion n'est pas nécessaire. En effet il suffit de changer de variable et de prendre $\sqrt{|c - e|} = \delta$ au lieu de e et l'on voit tout de suite que si l'on regarde $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ comme des fonctions de t, t_0 et δ, leurs dérivées par rapport à δ ne sont pas infinies lorsque $\delta = 0$. On peut donc généraliser la proposition précédente en disant que par des mouvements internes aussi petits que l'on veut le pôle peut être conduit d'un point à un autre situés intérieurement à la même région de l'ellipsoïde.

Le même résultat peut être obtenu d'une autre manière en suivant laquelle il n'est pas nécessaire d'exclure les points situés sur les frontières des régions dans lesquelles la surface de l'ellipsoïde a été partagée. Il suffit pour cela de remarquer que les polodies se rapprochent autant que l'on veut aux sommets de l'ellipsoïde et aux frontières qui séparent les régions qu'on a envisagées, et en outre d'avoir égard au dernier théorème du 2^me^ §.

Si $A = B$, c'est à dire $a = b$, alors $k = 0$, les polodies sont les parallèles de l'ellipsoïde et les propositions précédentes, valables pour chaque région, peut s'étendre à toute la surface de l'ellipsoïde par les mêmes raisonnements qu'on vient de faire.

5. Nous avons calculé dans cet article les composantes du couple de quantité de mouvement relatif au mouvement interne, qui correspond à un mouvement donné du pôle.

Or on peut imaginer d'une infinité de manières des mouvements cycliques internes qui correspondent aux valeurs trouvées en général pour m_1, m_2, m_3. Il suffit pour cela de rappeler, que lorsque les paramètres sont constants les équations $(10''_d)$ sont équivalentes aux équations (1_e).

Prenons maintenant les formules (9_d) qui deviennent

$$m_1 = \sum_1^n {}_i\, a_i\, \omega_i\,,$$

$$m_2 = \sum_1^n {}_i\, b_i\, \omega_i\,,$$

$$m_3 = \sum_1^n {}_i\, c_i\, \omega_i\,.$$

Les fonctions m_1, m_2, m_3 étant connues, on pourra d'une infinité de manières trouver des fonctions $\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n$ qui satisfont aux équations précédentes.

Article III.

1. Dans les articles précédents nous avons montré que par la méthode des approximations successives on peut résoudre la question de déterminer le mouvement de rotation du système lorsqu'on connaît le mouvement interne, et réciproquement on peut déterminer les mouvements internes, la rotation du système étant donnée.

Dans les applications pratiques au mouvement de la terre, la question analytique se simplifie, en négligeant des termes très-petits qui paraissent dans les formules générales.

En effet dans ce cas nous pouvons regarder les moments d'inertie A et B égaux et p et q très-petits.

On pourra supposer que les variations de r soient aussi très-petites, de sorte qu'en posant $r = \omega + \varepsilon$ on puisse regarder ω comme constant et ε comme une quantité du même ordre que p et q. Alors de la dernière des équations (3_e) on tire

$$m_3 = m_3^0 - \int_0^t (m_2\, p - m_1\, q)\, dt - C\varepsilon = m_3^0 + u\,,$$

où m_3^0 désigne une quantité constante.

Les premières équations (3_e) peuvent s'écrire

$$\frac{dp}{dt} + \left[\frac{C - A}{A}(\omega + \varepsilon) + \frac{m_3^0 + u}{A}\right] q = -\frac{1}{A}\left(\frac{dm_1}{dt} - m_2(\omega + \varepsilon)\right) = \alpha\,,$$

$$\frac{dq}{dt} - \left[\frac{C - A}{A}(\omega + \varepsilon) + \frac{m_3^0 + u}{A}\right] p = -\frac{1}{A}\left(\frac{dm_2}{dt} + m_1(\omega + \varepsilon)\right) = \beta\,.$$

Si l'on suppose que les termes

$$(12_e)\qquad \frac{uq}{A},\ \frac{up}{A},\ \frac{m_2\varepsilon}{A},\ \frac{m_1\varepsilon}{A},\ \frac{C-A}{A}\varepsilon q,\ \frac{C-A}{A}\varepsilon p$$

soient négligeables, alors les équations précédentes deviendront

$$(13_e)\qquad \begin{cases} \dfrac{dp}{dt}+\left[\dfrac{C-A}{A}\omega+\dfrac{m_3^0}{A}\right]q=-\dfrac{1}{A}\left(\dfrac{dm_1}{dt}-m_2\,\omega\right)=\alpha, \\ \dfrac{dq}{dt}-\left[\dfrac{C-A}{A}\omega+\dfrac{m_3^0}{A}\right]p=-\dfrac{1}{A}\left(\dfrac{dm_2}{dt}+m_1\,\omega\right)=\beta. \end{cases}$$

2. Pour réduire les équations différentielles à la forme précédente il n'est pas nécessaire de supposer que toutes les quantités (12_e) soient négligeables, pourvu qu'on change la variable indépendante.

Divisons les premières équations (3_e) par r, on aura

$$\frac{dp}{rdt}+\left[\frac{C-A}{A}+\frac{m_3}{Ar}\right]q=-\frac{1}{A}\left(\frac{dm_1}{rdt}-m_2\right),$$

$$\frac{dq}{rdt}+\left[\frac{C-A}{A}+\frac{m_3}{Ar}\right]p=-\frac{1}{A}\left(\frac{dm_2}{rdt}+m_1\right),$$

Posons

$$\tau=\int_0^t\frac{rdt}{\omega}$$

ω étant la valeur de r pour $t=0$. Si nous prenons τ pour variable indépendante, on trouvera

$$\frac{dp}{d\tau}+\left[\frac{C-A}{A}\omega+\frac{m_3}{A}\frac{\omega}{r}\right]q=-\frac{1}{A}\left(\frac{dm_1}{d\tau}-m_2\,\omega\right),$$

$$\frac{dq}{d\tau}-\left[\frac{C-A}{A}\omega+\frac{m_3}{A}\frac{\omega}{r}\right]p=-\frac{1}{A}\left(\frac{dm_2}{d\tau}+m_1\,\omega\right)\cdot$$

Désignons par m_3^0 la valeur de m_3 pour $\tau=0$, et écrivons $r-\omega=\varepsilon$, il viendra

$$m_3=m_3^0-\int_0^\tau(m_2\,p-m_1\,q)\,\frac{\omega}{r}-d\tau-C\varepsilon$$

d'où

$$(14_e)\qquad \begin{cases} \dfrac{dp}{d\tau}+\left[\dfrac{C-A}{A}\omega+\dfrac{m_3^0}{A}\right]q+vq=-\dfrac{1}{A}\left(\dfrac{dm_1}{d\tau}-m_2\,\omega\right), \\ \dfrac{dq}{d\tau}-\left[\dfrac{C-A}{A}\omega+\dfrac{m_3^0}{A}\right]p-vp=-\dfrac{1}{A}\left(\dfrac{dm_2}{d\tau}+m_1\,\omega\right), \end{cases}$$

v étant donné par la formule

$$v=-\frac{\omega}{r}\left\{\int_0^\tau\left(\frac{m_2}{A}p-\frac{m_1}{A}q\right)\frac{\omega}{r}d\tau+\left(\frac{C}{A}+\frac{m_3^0}{A\omega}\right)\varepsilon\right\}\cdot$$

Supposons maintenant p, q, très-petits de sorte que par rapport aux autres quantités qui paraissent dans les formules *on puisse les regarder comme des quantités infiniment petites du premier ordre.* La formule précédente démontre que *v est infiniment petit du même ordre.* Par suite *les termes qv, pv seront des quantités infiniment petites du second ordre.*

En les négligeant, les équations différentielles (14_ϵ) deviendront

$$(13'_\epsilon) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{dp}{d\tau} + \left[\frac{C-A}{A}\omega + \frac{m_3^0}{A}\right] q &= -\frac{1}{A}\left(\frac{dm_1}{d\tau} - m_2\,\omega\right), \\ \frac{dq}{d\tau} - \left[\frac{C-A}{A}\omega + \frac{m_3^0}{A}\right] p &= -\frac{1}{A}\left(\frac{dm_2}{d\tau} + m_1\,\omega\right). \end{aligned} \right.$$

On a donc réduit les équations différentielles à la forme (13_ϵ) en supposant seulement qu'on puisse regarder q, p, ε comme des quantités infiniment petites du premier ordre et en négligeant les infiniment petits du second ordre.

Entre les équations (13_ϵ) et ($13'_\epsilon$) il n'y a que la variable indépendante qui soit différente. Dans les premières équations on a t, dans les autres on a r. Mais remarquons que si l'on pose $\omega = 2\pi$ et si l'on se rapporte au mouvement de la terre *la variable qui mesure effectivement le temps* est τ.

Il est évident que la discussion que nous allons faire des équations (13_ϵ) est applicable sans aucune modification aux équations ($13'_\epsilon$).

3. Dans les équations (13_ϵ) on peut supposer que m_1 et m_2 soient données et qu'on les intègre par rapport à p et q. Au contraire on peut donner p et q et déterminer m_1 et m_2. Comme nous avons déjà vu dans les articles précédents le premier problème correspond *à déterminer le mouvement du pôle lorsqu'on connaît le mouvement interne* et le second problème se rapporte *à la détermination des mouvements internes lorsqu'on connaît le mouvement du pôle.*

Il est évident que si nous voulons appliquer les résultats de M. CHANDLER (voir l'article V) il faudra avoir égard au second problème. Nous allons cependant traiter les deux problèmes ensemble.

Posons pour simplifier

$$\frac{C-A}{A}\omega + \frac{m_3^0}{A} = \rho$$

et ajoutons les équations (13_ϵ) après avoir multiplié la deuxième équation par i. On aura

$$\frac{d(p+iq)}{dt} - i\rho(p+iq) = -\frac{1}{A}\left[\frac{d(m_1+im_2)}{dt} + i\omega(m_1+im_2)\right] = \alpha + i\beta$$

d'où l'on tire

$$(15_\epsilon) \qquad p + iq = e^{i\rho t}\left[\int(\alpha+i\beta)\,e^{-i\rho t}\,dt + C\right],$$

$$(15'_\epsilon) \qquad \frac{1}{A}(m_1+im_2) = e^{-i\omega t}\left[-\int(\alpha+i\beta)\,e^{i\omega t}\,dt + D\right],$$

C e D étant des constantes arbitraires.

4. Dans le cas que nous discutons le pôle est très-peu éloigné de l'extrémité de l'axe d'inertie ζ et dans l'ordre d'approximation dans lequel nous envisageons la question nous pouvons supposer que le mouvement ait lieu dans le plan tangent à l'ellipsoïde d'inertie conduit par l'extrémité de l'axe ζ. Alors on peut regarder les coordonnées ξ, η du pôle dans ce plan comme proportionnelles à p er q.

Supposons maintenant que le mouvement du pôle soit décomposable dans une série de *mouvements harmoniques.*

Avant de développer les conséquences qui découlent de cette hypothèse nous allons donner quelques définitions.

Nous concevons un mouvement harmonique comme un mouvement d'un point sur une ellipse de manière que le rayon vecteur conduit par le centre décrit des aires proportionnelles au temps. La *période* est la durée d'une révolution.

Si nous envisageons tous les mouvements harmoniques d'une période donnée, sans avoir égard à leur amplitude, nous trouverons une infinité de mouvements possibles en changeant le rapport de la longueur des axes de la trajectoire et leur inclination par rapport à un axe fixe.

Un point qui pourra se mouvoir dans un plan avec un mouvement harmonique d'une période donnée sur des ellipses dont les axes sont dans un rapport quelconque et ont une direction quelconque aura toutes les sortes de mouvements harmoniques qu'on a considérés précédemment, et pour simplifier nous dirons qu'il peut prendre un *mouvement harmonique quelconque de la période donnée.*

5. Cela posé écrivons les formules qu'on trouve dans l'hypothèse que nous venons de faire sur le mouvement du pôle.

On aura

$$\alpha = \alpha_0 + \Sigma\,(\alpha_n \cos\lambda_n t + \alpha'_n \sin\lambda_n t),$$

$$\beta = \beta_0 + \Sigma\,(\beta_n \cos\lambda_n t + \beta'_n \sin\lambda_n t)$$

d'où

$$\alpha + i\beta = \alpha_0 + i\beta_0 + \Sigma\left(\frac{\alpha_n + \beta'_n + i\,(\beta_n - \alpha'_n)}{2}\,e^{i\lambda_n t} + \frac{\alpha'_n - \beta_n + i\,(\alpha'_n + \beta_n)}{2}\,e^{-i\lambda_n t}\right)$$

$$= A_0 + \Sigma\left(A_n\, e^{i\lambda_n t} + A'_n\, e^{-i\lambda_n t}\right)$$

ayant supposé

$$(16_e)\qquad A_0 = \alpha_0 + i\beta_0\ ,\quad A_n = \frac{\alpha_n + \beta'_n + i\,(\beta_n - \alpha'_n)}{2}\ ,\quad A'_n = \frac{\alpha_n - \beta'_n + i\,(\alpha'_n + \beta_n)}{2}\,.$$

Par conséquent

$$\int (\alpha + i\beta)\, e^{-i\varrho t}\, dt = \int \{A_0\, e^{-i\varrho t} + \Sigma\,(A_n\, e^{i(\lambda_n - \varrho)t} + A'_n\, e^{-i(\lambda_n + \varrho)t})\}\, dt$$

$$= \frac{A_0}{-i\rho}\, e^{-i\varrho t} + \Sigma\left(\frac{A_n}{i\,(\lambda_n - \rho)}\, e^{i(\lambda_n - \varrho)} + \frac{A'_n}{-i\,(\lambda_n + \rho)}\, e^{-i(\lambda_n + \varrho)t}\right).$$

Employons maintenant la formule (15_e). Nous trouverons

$$p + iq = \frac{A_0}{-i\rho} + Ce^{i\rho t} + \Sigma\left(\frac{A_n}{i(\lambda_n - \rho)}e^{i\lambda_n t} + \frac{A'_n}{-i(\lambda_n + \rho)}e^{-i\lambda_n t}\right)$$

et en séparant la partie réelle de la partie imaginaire on aura

$$(17_e)\quad \left\{\begin{aligned} p &= -\frac{\beta_0}{\rho} + (C_1 \cos \rho t - C_2 \sin \rho t) \\ &\qquad + \Sigma\frac{(\beta_n \rho - \alpha'_n \lambda_n)\cos \lambda_n t + (\alpha_n \lambda_n + \beta'_n \rho)\sin \lambda_n t}{\lambda_n^2 - \rho^2}, \\ q &= \quad \frac{\alpha_0}{\rho} + (C_1 \sin \rho t + C_2 \cos \rho t) \\ &\qquad + \Sigma\frac{-(\beta'_n \lambda_n + \alpha_n \rho)\cos \lambda_n t + (\beta_n \lambda_n - \alpha'_n \rho)\sin \lambda_n t}{\lambda_n^2 - \rho^2}, \end{aligned}\right.$$

ayant posé $C = C_1 + iC_2$.

De même si nous écrivons $D = D_1 + iD_2$, on pourra calculer les valeurs de m_1/A et m_2/A, et on trouvera les formules suivantes

$$(18_e)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{m_1}{A} &= -\frac{\beta_0}{\omega} + (D_1 \cos \omega t - D_2 \sin \omega t) \\ &\qquad + \Sigma\frac{(\beta_n \omega + \alpha'_n \lambda_n)\cos \lambda_n t - (\alpha_n \lambda_n - (\beta'_n \omega)\sin \lambda_n t}{\lambda_n^2 - \omega^2}, \\ \frac{m_2}{A} &= \quad \frac{\alpha_0}{\omega} + (D_1 \sin \omega t + D_2 \cos \omega t) \\ &\qquad + \Sigma\frac{(\beta'_n \lambda_n - \alpha_n \omega)\cos \lambda_n t - (\beta_n \lambda_n + \alpha'_n \omega)\sin \lambda_n t}{\lambda_n^2 - \omega^2}. \end{aligned}\right.$$

6. Les dénominateurs des formules (17_e) et (18_e) s'annulent lorsqu'on a $\lambda_n = \rho$, $\lambda_n = \omega$. On tire de là que *le pôle peut avoir un mouvement harmonique quelconque avec une période* $2\pi/\lambda_n$ $(\lambda_n \gtrless \omega)$ *tandis qu'il ne peut avoir qu'un mouvement harmonique circulaire avec la période* $2\pi/\omega$.

En effet si $\lambda_n = \omega$ il faut que l'on ait

$$\beta_n = -\alpha'_n \quad , \quad \alpha_n = \beta'_n .$$

Donc les termes relatifs à la période $2\pi/\omega$ qui paraissent dans les expressions de p et de q sont de la forme

$$\frac{\mu}{\omega - \rho}\sin \omega t - \frac{\nu}{\omega - \rho}\cos \omega t ,$$

$$-\frac{\mu}{\omega - \rho}\cos \omega t - \frac{\nu}{\omega - \rho}\sin \omega t$$

et ils correspondent évidemment à un mouvement harmonique circulaire.

Si $\lambda_n = \rho$ on doit avoir

$$\beta_n = \alpha'_n \quad , \quad \alpha_n = -\beta'_n ;$$

par suite les termes de p et q qui sont relatifs à la période $2\pi/\rho$ auront la forme

$$(C_1 + h_1)\cos\rho t - (C_2 + h_2)\sin\rho t,$$

$$(C_1 - h_1)\sin\rho t + (C_2 - h_2)\cos\rho t,$$

h_1 et h_2 étant des quantités arbitraires; et par suite ils correspondent à un mouvement harmonique quelconque.

Si λ_n a une valeur qui n'est égale ni à ρ ni à ω, on pourra prendre arbitrairement les coefficients α_n, β_n, α'_n, β'_n et en conséquence le mouvement harmonique correspondant sera quelconque.

C. Q. F. D.

7. D'une manière tout à fait analogue à ce que nous avons établi précédemment on pourra dire maintenant qu'il est possible qu'il existe un mouvement interne *quelconque* de la période λ si dans les expressions de m_1/A et m_2/A paraissent des termes de la forme

$$m\cos\lambda t + n\sin\lambda t \quad , \quad m'\cos\lambda t + n'\sin\lambda t$$

où les coefficients constants m, n, m', n' peuvent avoir des rapports quelconques entre eux.

En répétant le raisonnement qu'on vient de faire dans le paragraphe précédent on arrive à la conclusion que *si le mouvement du pôle est décomposable dans une série de mouvements harmoniques, il peut exister des mouvements internes quelconques ayant une période différente de* $2\pi/\rho$, *mais il ne peut exister qu'un mouvement interne particulier ayant la période* $2\pi/\rho$.

8. Nous venons de reconnaître que les périodes $2\pi/\omega$, $2\pi/\rho$ sont des périodes singulières pour les mouvements du pôle et pour les mouvements internes.

Une autre propriété qui se rattache à ces périodes est la suivante, et elle découle immédiatement des formules (17_e) et (18_e).

À tout mouvement harmonique du pôle ayant la période $\frac{2\pi}{\lambda_n} \gtrless \begin{cases} \frac{2\pi}{\rho} \\ \frac{2\pi}{\omega} \end{cases}$ *correspond un mouvement interne périodique ayant une période égale et réciproquement. Les constantes* α_n, α'_n, β_n, β'_n *définissent les deux mouvements indépendamment des mouvements ayant une période différente.*

Au contraire les mouvements internes ne peuvent pas caractériser le mouvement du pôle ayant la période $2\pi/\rho$, *et le mouvement du pôle ne peut pas caractériser les mouvements internes ayant la période* $2\pi/\omega$. *Il peut exister des mouvements internes ayant la période* $2\pi/\omega$ *qui n'ont aucune influence sur le mouvement du pôle.*

Article IV.

1. Regardons l'axe OM du mouvement interne comme résultant d'un vecteur constant, d'un vecteur variable avec la période $2\pi/\omega$, d'un vecteur variable avec la période $2\pi/\rho$ et enfin des vecteurs $OM^{(\lambda_1)}$, $OM^{(\lambda_2)}, \cdots$ variables avec les périodes $2\pi/\lambda_1$, $2\pi/\lambda_2, \cdots$ en supposant

$$\lambda_n \gtrless \begin{cases} \omega \\ \rho \end{cases}.$$

Les projections de $OM^{(\lambda_n)}$ dans les directions ξ, η soient les termes ayant la période $2\pi/\lambda_n$ dans les expressions de m_1/A, m_2/A que nous avons trouvées dans l'article précédent (voir (18_e)).

Nous allons résoudre la question suivante: *déterminer le mouvement de l'extremité* $M^{(\lambda)}$ *du vecteur* $OM^{(\lambda)}$ *étant connu le mouvement du pôle ayant la période* $2\pi/\lambda_n = 2\pi/\lambda$.

Il est évident que les formules de l'article précédent nous donneront le mouvement de la projection du point $M^{(\lambda)}$ dans le plan de l'équateur.

Prenons les plans coordonnés $\xi\zeta$ et $\eta\zeta$ de manière que les axes de l'ellipse décrite par le pôle dans le mouvement harmonique ayant la période $2\pi/\lambda$ soient situés dans ces plans.

Nous aurons

$$\frac{p^{(\lambda)}}{\omega} = a \cos \lambda t \quad , \quad \frac{q^{(\lambda)}}{\omega} = b \sin \lambda t$$

ayant désigné par $p^{(\lambda)}$ et $q^{(\lambda)}$ les termes des expressions (17_e) qui ont la période $2\pi/\lambda$.

Si φ et ψ sont les sémiaxes de l'ellipse décrite par le pôle et si on les mesure en secondes d'arcs on aura

$$a = \operatorname{tg} \varphi \quad , \quad b = \operatorname{tg} \psi .$$

Soient α, α', β, β' les constantes des formules (17_e) qui correspondent à la période $2\pi/\lambda$. On aura

$$\frac{\beta\rho - \alpha'\lambda}{\lambda^2 - \rho^2} = a\omega \quad , \quad \alpha\lambda + \beta'\rho = 0 ,$$

$$\beta\lambda + \alpha\rho = 0 \quad , \quad \frac{\beta\lambda - \alpha'\rho}{\lambda^2 - \rho^2} = b\omega$$

d'où l'on déduit

$$\alpha = 0 \quad , \quad \beta' = 0 \quad , \quad \beta = (b\lambda - a\rho)\,\omega \quad , \quad \alpha' = (b\rho - a\lambda)\,\omega .$$

Par suite les termes de $m_1/A\omega$, $m_2/A\omega$ qui ont la période $2\pi/\lambda$ seront

$$\frac{m_1^{(\lambda)}}{A\omega} = \frac{(b\lambda - a\rho)\,\omega + (b\rho - a\lambda)\,\lambda}{\lambda^2 - \omega^2} \cos \lambda t ,$$

$$\frac{m_2^{(\lambda)}}{A\omega} = \frac{-(b\lambda - a\rho)\,\lambda - (b\rho - a\lambda)\,\omega}{\lambda^2 - \omega^2} \sin \lambda t .$$

2. Les maxima des valeurs absolues de $m_1^{(\lambda)}/A\omega$ correspondent aux valeurs $t = n\pi/\lambda$, n étant un nombre entier, et sont donnés par

$$\frac{M_1^{(\lambda)}}{A\omega} = \left| \frac{(b\lambda - a\rho)\,\omega + (b\rho - a\lambda)\,\lambda}{\lambda^2 - \omega^2} \right| .$$

Les maxima des valeurs absolues de $m_2^{(\lambda)}/A\omega$ correspondent à $t = \frac{(2n+1)}{2}\frac{\pi}{\lambda}$. Ils sont

$$\frac{m_2^{(\lambda)}}{A\omega} = \left| \frac{-(b\lambda - a\rho)\,\lambda - (b\rho - a\lambda)\,\omega}{\lambda^2 - \omega^2} \right| ,$$

d'où l'on tire

$$(19_e)\qquad \left\{ \begin{aligned} 2\,M_1^{(\lambda)} &= \left| \frac{A}{C}\,\frac{(2\,b\lambda - 2\,a\rho)\,\omega + (2\,b\rho - 2\,a\lambda)\,\lambda}{\lambda^2 - \omega^2} \right| C\omega , \\ 2\,M_2^{(\lambda)} &= \left| \frac{A}{C}\,\frac{-(2\,b\lambda - 2\,a\rho)\,\lambda - (2\,b\rho - 2\,a\lambda)\,\omega}{\lambda^2 - \omega^2} \right| C\omega . \end{aligned} \right.$$

On pourra donc énoncer les propositions suivantes:

1° *Si nous projectons sur le plan de l'équateur l'extrémité* $M^{(\lambda)}$ *de l'axe des mouvements internes partiels dont la période est* $2\,\pi/\lambda$, *la projection* m_λ *a un mouvement harmonique sur une ellipse dont les axes sont parallèles aux axes de l'ellipse décrite par le pôle dans le mouvement harmonique de la même période.*

2° *Lorsque* m_λ *rejoint un sommet de sa trajectoire, le pôle aussi dans le mouvement harmonique de la même période rejoint un sommet.*

3° *Les longueurs des axes de l'ellipse décrite par le point* m_λ *sont données par les formules* (19_e).

3. Le mouvement harmonique du pôle ayant la période $2\,\pi/\lambda$ est le mouvement résultant de deux mouvements harmoniques de la même période qui ont lieu sur les axes ξ, η.

De même le mouvement du point m_λ peut être obtenu en composant deux mouvements harmoniques dont les trajectoires sont les axes coordonnées ξ, η.

Le mouvement harmonique du pôle et celui de m_λ *dans la direction* ξ *auront la même phase si la quantité*

$$(20_e)\qquad 2\,\frac{(b\lambda - a\rho)\,\omega + (b\rho - a\lambda)\,\lambda}{\lambda^2 - \omega^2} = (a+b)\,\frac{\rho - \lambda}{\omega + \lambda} + (a-b)\,\frac{\rho + \lambda}{\omega - \lambda}$$

est positive, et ils seront en opposition de phase si la même quantité est négative.

Le mouvement harmonique du pôle et celui de m_λ *dans la direction* η *auront la même phase si la quantité*

$$(20'_e)\qquad 2\,\frac{-(b\lambda - a\rho)\,\lambda - (b\rho - a\lambda)\,\omega}{\lambda^2 - \omega^2} = (a+b)\,\frac{\rho - \lambda}{\omega + \lambda} - (a-b)\,\frac{\rho + \lambda}{\omega - \lambda}$$

est positive; et si elle est négative les deux mouvements seront en opposition de phase.

Nous supprimons la démonstration de ces propositions qu'on déduit aisément des formules précédentes.

Article V.

1. Si nous voulons appliquer les résultats précédents au mouvement de la terre il faut supposer que $2\pi/\omega$ représente le jour sidéral.

On n'a observé aucune variation diurne des latitudes; cela ne signifie pas qu'ils n'y ait pas de mouvements internes avec la période diurne, car on a vu qu'il peut exister des mouvements internes avec la période $2\pi/\omega$ qui n'ont pas d'influence sur le mouvement du pôle. (Article IV, § 8).

2. Examinons la période $2\pi/\rho$. Nous avons [28]

$$\rho = \frac{C - A}{A}\omega + \frac{m_3^0}{A} = \frac{\omega}{305} + \frac{m_3^0}{A}$$

d'où, en prenant pour unité de temps le jour sidéral,

$$\frac{2\pi}{\rho} = \frac{305}{1 + 305\dfrac{m_3^0}{A\omega}} = \frac{305}{1 + 306\dfrac{m_3^0}{C\omega}}.$$

Donc $2\pi/\rho$ est la période eulérienne changée dans le rapport

$$\frac{1}{1 + 306\dfrac{m_3^0}{C\omega}}.$$

Si de telle manière on voulait trouver la période de 430 jours découverte par M. CHANDLER (*) on devrait avoir

$$\frac{430}{305} = \frac{1}{1 + 306\dfrac{m_3^0}{C\omega}}$$

d'où

$$\frac{m_3^0}{C\omega} = -\frac{1}{1053}.$$

3. Sans discuter ce résultat, appliquons les résultats établis par M. CHANDLER dans le N. 329 de l'« Astronomical Journal » de l'année 1894, relativement au mouvement du pôle ayant le période annuelle.

(28) Nous supposons $(C - A)/A = 1/305$ sans discuter ici si ce rapport qu'on calcule d'après les phénomènes de précession et de nutation ne peut être changé à cause du mouvement interne.

(*) Cfr. la N.d.R. posta nell'Introduzione sopra i risultati delle osservazioni moderne, che hanno mostrato come la polodia sia in realtà una curva assai irregolare, nella quale grossolanamente può riscontrarsi il termine periodico di CHANDLER (oggi portato a 433 giorni), sovrapposto ad un secondo termine meno importante di periodo annuo. [N.d.R.].

On peut tirer de là les éléments correspondant au mouvement interne capable de l'engendrer.

A cet effet il suffit de substituer dans les formules que nous avons trouvées les valeurs suivantes:

$$\left\{\begin{aligned} \omega &= 2\pi: \\ \lambda &= \frac{2\pi}{366}, \\ 2\varphi &= 0'',3, \\ 2\psi &= 0'',08, \end{aligned}\right.$$

le jour sidéral étant l'unité de temps.

En effectuant les calculs, on a approximativement

$$2a = 2\,\mathrm{tg}\,\varphi = 2\pi\frac{3}{10\times 360\times 60\times 60},$$

$$2b = 2\,\mathrm{tg}\,\psi = 2\pi\frac{8}{100\times 360\times 60\times 60}.$$

Il faudra supposer que l'axe ξ forme avec le méridien de Greenwich un angle de 45°.

Prenons comme au paragraphe précédent

$$\frac{A}{C} = \frac{305}{306},$$

on trouvera à cause des équations (19_e)

$$2\,M_1^{(\lambda)} = \frac{37}{10^{10}}C\omega,$$

$$2\,M_2^{(\lambda)} = \frac{27}{10^{10}}C\omega$$

si l'on suppose $\rho = 2\pi/305$; et

$$2\,M_1^{(\lambda)} = \frac{23}{10^{10}}C\omega,$$

$$2\,M_2^{(\lambda)} = \frac{31}{10^{10}}C\omega$$

en supposant $\rho = 2\pi/430$.

L'axe a de l'ellipse décrite par le pôle forme un angle de 45° avec le méridien de Greenwich, par conséquent le grand axe de l'ellipse parcourue par le point $m^{(\lambda)}$ sera située dans le plan méridien qui a la longitude de 45°.

Remarquons encore que la quantité (20_e) est positive et la quantité ($20'_e$) est négative.

En résumant tous ces résultats on peut énoncer les propositions suivantes:

Si l'on cherche la variation que doit subir l'axe $OM^{(\lambda)}$ *du mouvement interne terrestre (dans l'hypothèse de la non-plasticité de la terre) pour donner au pôle le mouvement harmonique étudié par M. Chandler, ayant la période annuelle, on trouve que*:

1° *projetant* $M^{(\lambda)}$ *sur l'équateur en* $m^{(\lambda)}$, *ce point décrira une ellipse dont le grand axe fait un angle de* $45°$ *avec le méridien de Greenwich;*

2° *les axes de cette ellipse seront égaux à* $\frac{37}{10^{10}}C\omega$, $\frac{27}{10^{10}}C\omega$, *ou à* $\frac{23}{10^{10}}C\omega$, $\frac{31}{10^{10}}C\omega$ *suivant que l'on suppose* $\rho = 2\pi/305$ *ou* $\rho = 2\pi/430$;

3° *décomposant le muovement du pôle et celui de* m_λ *suivant les directions des axes de l'ellipse décrite par le pôle, les deux mouvements dans la direction du grand axe auront la même phase et les mouvements dans la direction du petit axe auront des phases opposées.*

4. Pour exercice des formules qu'on a données dans l'article précédent on peut répéter un calcul analogue à celui qu'on vient de faire pour résoudre le problème suivant:

Supposons qu'il existe un mouvement interne ayant la période de 430 jours. Quels sont les éléments de ce muovement pour qu'il soit capable de produire le mouvement du pôle étudié par M. Chandler ayant la même période?

Si nous prenons $\rho = 2\pi/305$ il faudra substituer dans les formules les valeurs suivantes

$$\left\{\begin{aligned} \omega &= 2\pi, \\ \lambda &= \frac{2\pi}{430}. \end{aligned}\right.$$

Le mouvement du pôle est circulaire et sa demi-amplitude est 0'',1, par suite

$$\varphi = \psi = 0'',1$$

d'où approximativement

$$a = b = \operatorname{tg}\varphi = 2\pi\frac{1}{10\times 360\times 60\times 60}$$

et à cause des équations (19_e) on aura

$$M_1 = M_2 = \frac{4}{10^{10}}C\omega.$$

CHAPITRE VI.

Aperçu sur les perturbations dues à la plasticité de la terre.

Article I.

1. Supposons que le mouvement interne soit stationnaire et cherchons les perturbations produites par la plasticité sur le mouvement de rotation, que nous connaissons par les études que nous avons faites dans le chapitre précédent.

Nous partirons de l'hypothèse que l'effet dû à la plasticité consiste dans la tendance du pôle d'inertie à se rapprocher du pôle de rotation, lorsque les deux points ne coïncident pas. Nous discuterons après la loi de ce rapprochement.

2. Envisageons les résultats de l'article III du chapitre précédent lorsque le mouvement interne est stationnaire. On pourra les rapprocher à ceux qu'on a trouvés dans le chapitre III sur les petites vibrations du pôle autour des positions d'équilibre stable dans l'hypothèse que l'ellipsoïde d'inertie soit un solide de révolution.

Si le mouvement interne est stationnaire les formules (17_e) et (18_e) de l'article III du chapitre V deviennent

$$\left\{\begin{aligned} p &= -\frac{\beta_0}{\rho} + C_1 \cos \rho t - C_2 \sin \rho t , \\ q &= \frac{\alpha_0}{\rho} + C_1 \sin \rho t + C_2 \cos \rho t , \end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned} \frac{m_1}{A} &= -\frac{\beta_0}{\omega}, \\ \frac{m_2}{A} &= \frac{\alpha_0}{\omega} \end{aligned}\right.$$

et en posant pour simplifier

$$c_1 = \frac{C_1}{\omega} \quad , \quad c_2 = \frac{C_2}{\omega},$$

on aura

$$(1_f) \qquad \left\{\begin{aligned} \frac{p}{\omega} &= \frac{m_1}{A\rho} + c_1 \cos \rho t - c_2 \sin \rho t, \\ \frac{q}{\omega} &= \frac{m_2}{A\rho} + c_1 \sin \rho t + c_2 \cos \rho t. \end{aligned}\right.$$

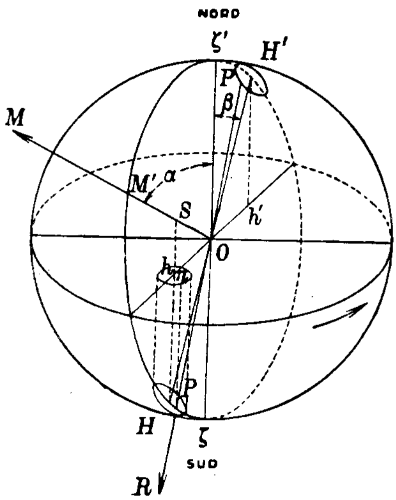
La quantité ρ sera donnée par la formule

$$\rho = \frac{C-A}{A}\,\omega + \frac{m_3}{A}\cdot$$

3. Pour fixer les idées, supposons que m_3 soit une quantité négative, c'est à dire supposons que les projections de l'axe du mouvement interne et de l'axe du couple de quantité de mouvement dû à la rotation de la terre, sur l'axe terrestre n'aient pas la même direction. Nous discuterons après comment on doit modifier les formules lorsqu'on suppose que cette hypothèse ne soit pas vérifiée.

Ayant égard qu'une rotation positive a lieu dans le même sens que la rotation des aiguilles d'une montre, nous pouvons conduire les deux segments OR et OM qui représentent la rotation de la terre et l'axe du mouvement interne en prenant pour origine le centre de la terre. En prolongeant les deux segments dans leurs directions positives ils rencontreront respectivement l'hémisphère sud et l'hémisphère nord.

Cela posé, soit $OP = 1$ un segment ayant la même direction de OR. En projetant ce point sur l'équateur en π, on aura que les projections de $O\pi$ sur les axes ξ et η seront p/ω, q/ω. De même soit $OS = OM/A\rho$ un segment ayant la même direction que OM, et soit h la projection de S sur l'équateur.



Les projections de Oh sur les axes ξ et η seront $m_1/A\rho$, $m_2/A\rho$.

Nous pouvons maintenant énoncer d'une manière géométrique la loi représentée par les formules (1_f) en disant: *Le point π tourne avec la vitesse angulaire ρ sur une circonférence ayant h pour centre.*

4. Conduisons une sphère ayant O pour centre et dont le rayon soit égal à 1. Elle rencontrera l'axe OM dans le point M' et l'axe OR dans le point P. Puisque ce point est très-proche du pôle d'inertie ζ, nous pouvons par approximation regarder la trajectoire qu'il décrit sur la sphère comme une circonférence ayant pour centre le point H de la sphère qui se projette en h sur l'équateur. Si nous voulons envisager tous les éléments dans l'émisphère nord, il suffit de construire les points ζ', H', P' situés dans une position diamétralement opposée aux points ζ, H, P. Il est évident que les quatre points P', H', ζ', M' appartiennent à l'hémisphère nord.

Nous les désignerons par les mots: *pôle de rotation, centre du mouvement polaire, pôle d'inertie, centre du mouvement interne.*

Soit h' la projection de H' sur l'équateur. On aura

$$Oh' = Oh,$$

par suite

$$\sin H'\zeta' = Oh = OS \sin M'\zeta',$$

d'où

$$(2_f) \qquad \frac{\sin H'\zeta'}{\sin M'\zeta'} = OS = \frac{OM}{A\rho} = \frac{\sqrt{m_1^2 + m_2^2 + m_3^2}}{(C - A)\,\omega + m_3} = \varepsilon\,.$$

Posons

$$M = \sqrt{m_1^2 + m_2^2 + m_3^2},$$

nous aurons

$$m_3 = -M \cos M'\zeta',$$

et par conséquent

$$(3_f) \qquad \left\{ \begin{aligned} \varepsilon &= \frac{M}{(C - A)\,\omega - M \cos M'\zeta'}\,, \\ \rho &= \frac{(C - A)\,\omega - M \cos M'\zeta'}{A}\,. \end{aligned} \right.$$

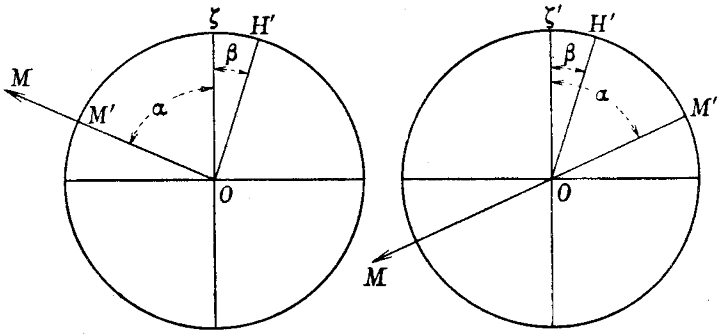
5. Nous avons supposé jusqu'ici que m_3 soit une quantité négative; c'est pourquoi on a pris l'intersection de OM avec la sphère sur l'hémisphère nord. Si m_3 est positif, prolongeons MO du côté du point O jusqu'à rencontrer l'hémisphère nord en M'. On appellera toujours ce point le *centre du mouvement interne*. Lorsque m_3 ètait négatif le point ζ' était situé entre M' et H', tandis que dans l'hypothèse actuelle M' et H' seront situés du même côté par rapport à ζ'.

Désignons par α et β les arcs ζ'M' et ζ'H' et prenons leur origine dans le point ζ'. Les équations (2_f) et (3_f) pourront s'écrire

$$(2_f)\qquad \frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = \mp\,\varepsilon,$$

$$(3'_f)\qquad \left\{\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{M}{(C-A)\,\omega \mp M\cos\alpha},\\ \rho &= \frac{(C-A)\,\omega \mp M\cos\alpha}{A},\end{aligned}\right.$$

et l'on prendra le signe supérieur dans le premier cas ($m_3 < 0$) et le signe inférieur dans le second cas ($m_3 > 0$).



6. En résumant les lois du mouvement du pôle, si l'on suppose les mouvements internes stationnaires, et que l'on néglige la plasticité de la terre, on trouve:

1° *Le centre du mouvement interne, le pôle d'inertie et le centre du mouvement polaire sont situés sur un grand cercle de la sphère.*

2° α *et* β *étant les arcs de grand cercle conduits par le pôle d'inertie et les centres du mouvement interne et du mouvement polaire, on a*

$$\frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = \mp\,\varepsilon = \frac{\mp M}{(C-A)\,\omega \mp M\cos\alpha}.$$

3° *Le pôle de rotation parcourt une circonférence autour du centre du mouvement polaire avec la vitesse angulaire*

$$\rho = \frac{(C-A)\,\omega \mp M\cos\alpha}{A}.$$

Ces lois représentent d'une manière fort claire l'effet produit par les mouvements internes sur le mouvement du pôle.

En effet s'ils n'existaient pas, le pôle décrirait une circonférence autour du pôle d'inertie avec la vitesse angulaire

$$\frac{C-A}{A}\,\omega\,;$$

par suite les mouvements internes ont une double action, savoir:

1° Ils changent le centre de rotation du mouvement polaire qui est repoussé (ou attiré) du centre des mouvements internes le long du grand cercle qui passe par ce point et le pôle d'inertie.

Le déplacement du centre du mouvement polaire est déterminé par l'angle β.

2° Ils changent la vitesse angulaire de rotation du pôle de

$$\mp\,\frac{M\cos\alpha}{A}$$

et ce changement correspond à une variation de la période Eulerienne. Nous remarquons enfin que le point H' correspond à un pôle de rotation permanent. Nous renvoyons pour cela au chapitre III où l'on a discuté et approfondi cette question.

Article III.

1. Nous allons maintenant déterminer les perturbations auxquelles seront soumises les lois que nous avons énoncées dans l'article précédent, par effet de la plasticité qu'on avait négligée auparavant.

Prenant le point O pour centre de projection, projetons la surface de la terre sur la sphère. Si nous envisageons les phénomènes pendant un intervalle de temps qui ne soit pas trop long, nous pourrons supposer que, même si la terre se déforme à cause de sa plasticité, la configuration des mers et des continents sur la sphère ne change pas sensiblement, mais il faudra supposer que le pôle d'inertie se déplace sur la sphère.

Ce sont donc ces déplacements du pôle d'inertie sur la sphère, la projection de la terre sur la sphère étant fixe, qui décèlent sa plasticité.

On pourra énoncer la propriété que le mouvement interne est stationnaire en disant que le centre du mouvement interne est un point fixe de la sphère et que $M = \sqrt{m_1^2 + m_2^2 + m_3^2}$ est constant.

Nous faisons aussi l'hypothèse que les points H', P', ζ' se maintiennent toujours très–proches, de manière qu'on puisse négliger les puissances de leurs distances supérieures à la première puissance. Rappelons à ce propos que l'analyse de l'article III du chapitre précédent, dont nous employons à présent les résultats, est appuyée sur cette hypothése.

Enfin nous supposerons que l'influence de la plasticité se manifeste de manière que le pôle d'inertie tend toujours à s'approcher du pôle de rotation avec une intensité proportionnelle à la distance entre ces points.

D'une façon plus précise nous énoncerons cette loi dans les termes suivants:

Le pôle d'inertie se déplace à chaque instant dans la direction de l'axe (de rotation) sur le grand cercle qui passe par ce point et par la position occupée dans le même temps par le pôle de rotation, avec une vitesse proportionnelle à la distance entre ces points (29).

Le rapport entre la vitesse du pôle d'inertie dans son mouvement relatif à la sphère et cette distance sera désigné par μ et nous l'appellerons *coefficient de plasticité* (30).

Sa valeur sera positive et nous la laisserons indéterminée.

Nous aurons donc $\infty > \mu > 0$. On peut établir dés à présent la signification des cas limites: la valeur $\mu = 0$ correspond au cas de la rigidité complète; et $\mu = \infty$ au cas de l'adaptation immédiate du sphéroide terrestre.

2. Par les hypothèses qu'on vient de faire le problème de la rotation de la terre se présente de la manière suivante:

On a quatre points situés sur la sphère: M' (centre du mouvement interne), ζ' (pôle d'inertie), H' (centre du mouvement polaire), P' (pôle de rotation) *qui suivent dans leurs mouvements sur la sphère les lois suivantes*:

1° M' *est un point fixe de la sphère.*

2° M', ζ', H' *appartiennent à un grand cercle et*

$$\frac{\sin \zeta' H'}{\sin \zeta' M'} = \mp \varepsilon = \frac{\mp M}{(C - A)\,\omega \mp M \cos \zeta' M'}.$$

3° P' *tourne à chaque instant autour du point* H' *avec la vitesse angulaire*

$$\rho = \frac{(C - A)\,\omega \mp M \cos \zeta' M'}{A}.$$

4° ζ' *se déplace à chaque instant dans la direction tangente à* ζ' P' *avec une vitesse égale à* $\mu \cdot \zeta'$ P'.

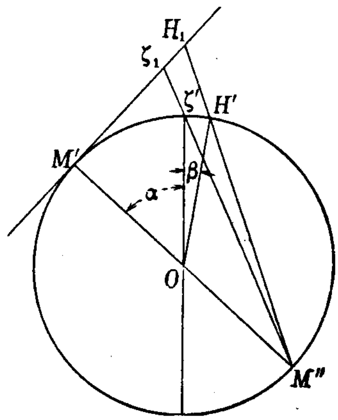
Par ces conditions on pourrait établir tout de suite les équations différentielles du problème. Cependant dans l'article suivant nous le transformerons de manière qu'on pourra l'aborder par une analyse tout à fait élémentaire.

(29) Voir DARWIN, *On the influence of the Geological Changes on the Earth's Axis of Rotation.* « Phil. Trans. Roy. Soc. », Vol. 167.

(30) Voir SCHIAPARELLI, *De la rotation de la terre sous l'influence des actions géologiques*, Saint-Pétersbourg 1889; « Nuovo Cimento », T. 30. S. 3e. Le cas intermédiaire ne correspond pas complèment à celui que M. SCHIAPARELLI a discuté. Mais en employant la méthode géométrique dont il a fait usage on pourrait l'envisager d'une manière analogue, en ayant égard aux résultats du chapitre précédent. On a adopté l'hypothèse qu'on vient d'énoncer pour simplifier les calculs des articles suivants.

Article III.

1. Pour simplifier la question dont nous avons parlé à la fin de l'article précédent, nous envisagerons une représentation de la terre sur un plan au lieu de la représentation sphérique que nous avons considéré. Pour passer de l'une à l'autre de ces représentations nous employerons la projection stéréographique.



Le plan de projection sera le plan tangent à la sphère dans le point M′ et nous prendrons pour centre de projection le point diamétralement opposé de M′ que nous désignerons par M″.

Le pôle étant en M′, soient θ la colatitude et φ la longitude des points de la sphère. Alors le carré de l'élément linéaire de la sphère sera

$$d\sigma^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2$$

et le carré de l'élément linéaire dans la projection stéréographique sera

$$ds^2 = \frac{1}{\cos^2\frac{1}{2}\theta}(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)$$

d'où l'on tire

$$\frac{ds^2}{d\sigma^2} = \frac{1}{\cos^2\frac{1}{2}\theta}.$$

On a supposé qu'on puisse négliger les puissances des arcs $\zeta' H'$, $H' P'$, $P' \zeta'$, supérieures à la première puissance.

Cela revient à regarder ces arcs comme des quantités infiniment petites. C'est pourquoi on pourra dire que par la projection stéréographique leurs longueurs ont changé dans le rapport $1/\cos^2\frac{1}{2}\alpha$.

Soient ζ_1, H_1, P_1 les projections stéréographiques des points ζ', H', P'; nous aurons

$$\zeta_1 H_1 = \frac{\zeta' H'}{\cos^2\frac{1}{2}\alpha}.$$

Mais

$$\frac{\sin \zeta' H'}{\sin\alpha} = \mp\varepsilon,$$

par suite, en remplaçant $\sin \zeta' H'$ par l'arc $\zeta' H'$, il viendra

$$\zeta' H' = \mp\varepsilon \sin\alpha$$

d'où

$$\zeta_1 H_1 = \frac{\mp \varepsilon \sin \alpha}{\cos^2 \frac{1}{2} \alpha} = \mp 2 \varepsilon \operatorname{tg} \frac{1}{2} \alpha .$$

D'ailleurs on a

$$2 \operatorname{tg} \frac{1}{2} \alpha = \zeta_1 M',$$

donc

$$\frac{\zeta_1 H_1}{\zeta_1 M_1} = \mp \varepsilon .$$

En outre, à cause des propriétés bien connues des projections stéréographiques, on pourra remarquer que P_1 tourne autour de H_1 avec la vitesse angulaire ρ. Par suite les lois que nous avons énoncées dans le 1[er] article, 6[ème] paragraphe, lorsqu'on néglige la plasticité, pourront être remplacées par les lois suivantes:

1° *Les projections stéréographiques* M', ζ_1, H_1 *du centre du mouvement interne, du pôle, d'inertie, et du centre du mouvement polaire sont situées en ligne droite et*

$$\frac{\zeta_1 H_1}{\zeta_1 M'} = \mp \varepsilon .$$

2° *La projection stéréographique* P_1 *du pôle de rotation décrit une circonférence autour du point* H_1 *avec la vitesse angulaire* ρ.

2. Passons maintenant à déterminer des lois analogues en ayant égard à la plasticité.

A cet effet nous allons transformer les expressions de ε et de ρ.

En posant $\zeta_1 M' = D$, on aura

$$D = 2 \operatorname{tg} \frac{1}{2} \alpha$$

d'où

$$\cos \alpha = \frac{1 - \frac{1}{4} D^2}{1 + \frac{1}{4} D^2} .$$

Par conséquent nous pourrons écrire

$$(3''_f) \quad \left\{ \begin{aligned} \varepsilon &= \frac{M}{(C - A)\,\omega \mp M \left(\dfrac{1 - \frac{1}{4} D^2}{1 + \frac{1}{4} D^2} \right)}, \\ \rho &= \frac{(C - A)\,\omega \mp M \left(\dfrac{1 - \frac{1}{4} D^2}{1 + \frac{1}{4} D^2} \right)}{A} . \end{aligned} \right.$$

On tire de là les quatre lois suivantes qu'on pourra substituer aux lois énoncées au § 3 de l'article précédent.

On a dans un plan quatre points M', ζ_1, H_1, P_1

1° M' *est un pont fixe.*

2° M', ζ_1, H_1 *sont situés en ligne droite et*

$$\frac{\zeta_1 H_1}{D} = \frac{\pm M}{(C-A)\,\omega \mp M\left(\dfrac{1-\frac{1}{4}D^2}{1+\frac{1}{4}D^2}\right)}$$

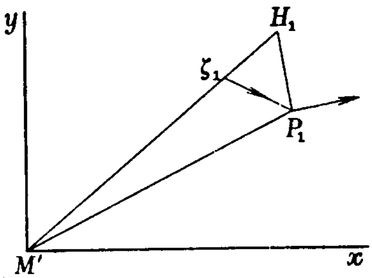
ayant désigné $\zeta_1 M'$ *par* D.

3° P_1 *tourne à chaque instant autour du point* H_1 *avec la vitesse angulaire*

$$\rho = (C-A)\,\omega \mp M\left(\frac{1-\frac{1}{4}D^2}{1+\frac{1}{4}D^2}\right).$$

4° ζ_1 *se déplace à chaque instant dans la direction* $\zeta_1 P_1$ *avec la vitesse* $\mu\delta$, *où* δ *signifie* $\zeta_1 P_1$.

La dernière loi a été obtenue en remarquant que dans la projection stéréographique les vitesses sont changées dans le même rapport que les arcs infiniments petits.



3. Cela posé, on peut écrire bien aisément les équations différentielles du problème.

Soient x, y des axes orthogonaux fixes par rapport au plan où l'on a fait la représentation stéréographique, situés dans ce plan et ayant pour origine le point M'. Désignons par x, y ; x_1, y_1 ; x_2, y_2 les coordonnées des points P_1, ζ_1, H_1. La deuxième condition énoncée au paragraphe précédent s'écrira

$$\frac{x_2 - x_1}{-x_1} = \frac{y_2 - y_1}{-y_1} = \mp\varepsilon \tag{4 f}$$

et la troisième condition

$$\left\{\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -\rho\,(y_2 - y)\,, \\ \frac{dy}{dt} &= \quad\rho\,(x_1 - x)\,. \end{aligned}\right. \tag{5 f}$$

Le sens de la rotation sera déterminé par l'orientation des axes x, y. Enfin de la quatrième condition on déduira

$$\left\{\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= \mu\,(x - x_1)\,, \\ \frac{dy_1}{dt} &= \mu\,(y - y_1)\,. \end{aligned}\right. \tag{6 f}$$

4. A cause des équations ($4_{/}$) on aura

$$x_2 = (1 \pm \varepsilon)\, x_1 \quad , \quad y_2 = (1 \pm \varepsilon)\, y_1 \, ;$$

par suite les équations ($5_{/}$) deviendront

$$(5'_{/}) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -\rho \left[(1 \pm \varepsilon)\, y_1 - y\right], \\ \frac{dy}{dt} &= \rho \left[(1 \pm \varepsilon)\, x_1 - x\right]. \end{aligned} \right.$$

On tire de là, en posant $\Delta^2 = x^2 + y^2$,

$$\frac{d\Delta^2}{dt} = 2\left(x \frac{dx}{dt} + y \frac{dy}{dt}\right) = 2\rho\,(1 + \varepsilon)\,(x_1 y - y_1 x)$$

ou bien

$$\frac{d\Delta}{dt} = \rho\,(1 + \varepsilon)\, \frac{x_1 y - y_1 x}{\Delta} \, .$$

Remarquons que ρ est une quantité petite et $(x_1 y - y_1 x)$ est le double de l'aire du triangle $M'\, P_1\, \zeta_1$, c'est pourquoi le rapport

$$\frac{x_1 y - y_1 x}{\Delta}$$

sera petit du même ordre que $\zeta_1 P_1$, d'où l'on tire que les variations de grandeur de Δ et par suite de D seront petites. En outre dans les expressions que nous avons trouvées pour ε et ρ (voir équations ($3''_{/}$)) le terme

$$M \left(\frac{1 - \frac{1}{4} D^2}{1 + \frac{1}{4} D^2} \right)$$

est petit par rapport à $(C - A)\, \omega$. Si donc on envisage le mouvement pendant un intervalle de temps qui ne soit trop long on pourra négliger les variations de ε et de ρ et par suite on pourra les supposer constantes.

Nous avons été conduits aux quatre équations différentielles ($6_{/}$), ($5'_{/}$) qu'on pourra regarder comme des équations différentielles à coefficients constants. Nous consacrerons l'article suivant à leur intégration.

Article IV.

1. Nous avons réduit dans l'article précédent les équations différentielles du mouvement au système

$$(6_{/}) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= \mu\,(x - x_1), \\ \frac{dy_1}{dt} &= \mu\,(y - y_1), \end{aligned} \right.$$

$$(5'_f) \qquad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -\rho\,[(1 \pm \varepsilon)\,y_1 - y]\,, \\[2ex] \dfrac{dy}{dt} = \quad \rho\,[(1 \pm \varepsilon)\,x_1 - x]\,, \end{cases}$$

dans lequel ρ et ε peuvent être regardés comme des quantités constantes.

Pour l'intégrer posons

$$x = Ce^{zt} \quad , \quad y = Ke^{zt} \; ,$$
$$x_1 = C_1\,e^{zt} \quad , \quad y_1 = K_1\,e^{zt}\,,$$

C, C_1, K, K_1, z étant des constantes.

Par la substitution des valeurs précédentes on aura

$$(7_f) \qquad \begin{cases} C_1\,(z + \mu) - C\mu = 0\,, \\ K_1\,(z + \mu) - K\mu = 0\,, \\ Cz + K_1\,\rho\,(1 \pm \varepsilon) - K\rho = 0\,, \\ -C_1\,\rho\,(1 \pm \varepsilon) + C\rho + Kz = 0\,. \end{cases}$$

z sera donc une racine de l'équation de quatrième degré

$$\begin{vmatrix} z + \mu \;, & -\mu\;, & 0 \;, & 0 \\ 0 \;, & 0\;, & z + \mu\;, & -\mu \\ 0 \;, & z\;, & \rho\,(1 \pm \varepsilon)\;, & -\rho \\ -\rho\,(1 \pm \varepsilon)\;, & \rho\;, & 0\;, & z \end{vmatrix} = 0\,.$$

Cette équation peut s'ecrire aussi de la manière suivante

$$(8_f) \qquad z^4 + 2\,\mu z^3 + (\mu^2 + \rho^2)\,z^2 \mp 2\,\rho^2\,\mu\varepsilon z + \mu^2\rho^2\varepsilon^2 = 0\,.$$

Soient $z', z'', z''' z^{IV}$ les racines et $C^{(i)}, C_1^{(i)}, K^{(i)}, K_1^{(i)}$ un système de valeurs de C, C_1, K, K_1 qui vérifient les équations (7_f) lorsqu'on prend $z = z^{(i)}$. Nous aurons

$$(9_f) \qquad \begin{cases} x = \displaystyle\sum_1^4 M_i\,C^{(i)}\,e^{z^{(i)}t}\,, \\[2ex] y = \displaystyle\sum_1^4 M_i\,K^{(i)}\,e^{z^{(i)}t}\,, \end{cases}$$

$$(10_f) \qquad \begin{cases} x_1 = \displaystyle\sum_1^4 M_i\,C_1^{(i)}\,e^{z^{(i)}t}\,, \\[2ex] y_1 = \displaystyle\sum_1^4 M_i\,K_1^{(i)}\,e^{z^{(i)}t}\,, \end{cases}$$

les quantités M_i étant des constantes arbitraires.

2. Pour résoudre l'équation (8_f) posons $\mp \varepsilon = \varepsilon'$. Elle s'écrira alors

$$z^2 (z + \mu)^2 + \rho^2 (z + \mu\varepsilon')^2 = 0$$

d'où

$$z (z + \mu) \pm i\rho (z + \mu\varepsilon') = 0 .$$

Par suite, les racines seront

$$z' = \frac{-\mu + u - i(\rho - v)}{2},$$

$$z'' = \frac{-\mu + u + i(\rho - v)}{2},$$

$$z''' = \frac{-\mu - u - i(\rho + v)}{2},$$

$$z^{\mathrm{IV}} = \frac{-\mu - u + i(\rho + v)}{2}$$

ou u et v sont donnès par les formules

$$u = \sqrt{\frac{\sqrt{(\mu^2 + \rho^2)^2 - 16\mu^2\rho^2\varepsilon'(1 - \varepsilon')} + \mu^2 - \rho^2}{2}},$$

$$v = \sqrt{\frac{\sqrt{(\mu^2 + \rho^2)^2 - 16\mu^2\rho^2\varepsilon'(1 - \varepsilon')} + \rho^2 - \mu^2}{2}},$$

les radicaux étant pris dans leurs valeurs absolues.

3. Examinons plus particulièrement les cas limites envisagés dans l'article II, § 2.

Si $\mu = 0$ (c'est à dire dans le cas de la rigidité compléte) l'équation (8_f) devient

$$z^4 + \rho^2 z^2 = 0.$$

Deux des racines deviennent égales à $\pm i\rho$ et deux racines s'annulent. Donc le mouvement est périodique et la periodé est $2\pi/\rho$, c'est à dire on trouve la période eulerienne modifiée de la manière que nous avons vu dans le chapitre précédent.

Soit $\mu = \infty$. En divisant l'équation (8_f), par μ^2 et en faisant après $\frac{1}{\mu} = 0$ on trouve

$$z^2 + \rho^2\varepsilon^2 = 0 .$$

Cela signifie que deux des racines sont infinies et les autres sont $\pm i\rho\varepsilon$. Donc le mouvement est périodique et la période est $2\pi/\rho\varepsilon = 2\pi A/M$. Dans ce cas les équations (6_f) deviennent

$$x = x_1 \quad , \quad y = y_1 ,$$

c'est à dire le pôle d'inertie coïncide avec celui de rotation.

Il viendra à cause des équations (5′$_f$)

$$\frac{dx}{dt} = -\rho\varepsilon y = -\frac{M}{A} y \quad , \quad \frac{dy}{dt} = \rho\varepsilon x = \frac{M}{A} x$$

d'où

$$x = N_1 \cos\left(\frac{M}{A} t + N\right) \quad , \quad y = N_1 \sin\left(\frac{M}{A} t + N\right),$$

N_1 et N étant des constantes arbitraires. Le pôle de rotation décrit donc une circonférence autour du centre du mouvement interne avec la vitesse angulaire M/A.

Turin, le 18 octobre 1897.

TABLE DES MATIÈRES

XXXII.

SULLE FUNZIONI POLIARMONICHE (*).

«Atti Ist. Ven.», t. LVII, 1898-99, pp. 233-235.

...L'interessante principio della inversione per raggi vettori reciproci, che Ella ha trovato per le funzioni biarmoniche (funzioni, che soddisfano la equazione $\Delta^2 \Delta^2 = 0$) a due variabili (1), mi sembra estensibile a qualunque funzione poliarmonica (cioè, che verifica la equazione $\Delta^2 \Delta^2 \cdots \Delta^2 = 0$) con un numero qualsiasi di variabili.

La dimostrazione semplicissima è fondata sapra il teorema del dott. ALMANSI (2), il quale dice che *ogni funzione n-armonica* φ_n *delle variabili* $x, y, z \cdots$ *può esprimersi entro un campo conveniente mediante due funzioni* $n-1$*-armoniche* φ_{n-1}, φ_{n-1} *colla formula*:

$$\varphi_n = x\varphi_{n-1} + \psi_{n-1};$$

e, se φ_{n-1} *è* $n-1$*-armonica,* $x\varphi_{n-1}$, $r^2 \varphi_{n-1}$ *sono n-armoniche* ($r^2 = x^2 + y^2 + z^2 + \cdots$).

Se eseguiamo una inversione di modulo 1, passando dalle variabili $x, y, z, \cdots$ alle variabili $\xi, \eta, \zeta, \cdots$, avremo:

$$\varphi_n = \frac{\xi}{\rho^2} \varphi_{n-1} + \psi_{n-1}, \quad (\rho^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 + \cdots),$$

donde:

$$\rho^{m+2} \varphi_n = \xi (\rho^m \varphi_{n-1}) + \rho^2 (\rho^m \psi_{n-1}).$$

Se ora $\rho^m \varphi_{n-1}$ e $\rho^m \psi_{n-1}$ sono $n-1$-armoniche per rapporto a $\xi, \eta, \zeta, \cdots$, ne viene che $\rho^{m+2} \varphi_n$ è n-armonica rispetto alle stesse variabili.

Di qui possiamo concludere nel caso di due variabili (siccome φ_1 e ψ_1 sono armoniche rispetto a ξ, η) che $\rho^2 \varphi_2, \rho^4 \varphi_3, \cdots, \rho^{2(n-1)} \varphi_n, \cdots$ sono rispettivamente poliarmoniche rispetto a ξ, η di ordini $2, 3, \cdots, n, \cdots$; mentre nel caso di tre variabili (siccome φ_1/ρ, ψ_1/ρ sono armoniche rispetto a ξ, η, ζ) che $\rho\varphi_2, \rho^3 \varphi_3, \cdots, \rho^{2n-3} \varphi_n, \cdots$, sono poliarmoniche rispetto alle stesse variabili degli ordini $2, 3, \cdots, n, \cdots$; e così di seguito.

Ciò prova il principio della inversione.

(*) Estratto da una lettera al prof. TULLIO LEVI-CIVITA.

(1) *Sopra una trasformazione in sè stessa della equazione* $\Delta_2 \Delta_2 = 0$, «Atti del R. Istituto Veneto di scienze, lettere ed arti». Tomo IX, serie VII, 1897-98.

(2) *Sull'integrazione dell'equazione differenziale* $\Delta^{2n} = 0$. «Annali di Matematica», ser. III, t. 2.

La dimostrazione può farsi anche ricorrendo all'altra rappresentazione del dott. ALMANSI

$$\varphi_n = r^2 \varphi_{n-1} + \psi_{n-1},$$

il che è sempre possibile scegliendo convenientemente il campo in cui si considera la φ_n.

Mi permetto anche di accennare un'altra applicazione, oltre quella da Lei data, del principio dell'inversione.

Per risolvere il problema di costruire una funzione armonica, dati i valori sul contorno di un cerchio, mi sono servito spesso in lezione di questo metodo. Ho stabilito direttamente il teorema che il valore nel centro è la media dei valori al contorno, quindi con una inversione ho trasportato un punto qualunque al centro e ho perciò potuto determinare il valore della funzione in quel punto.

Nel caso delle funzioni biarmoniche, il valore nel centro di un cerchio di raggio 1 è la metà della media dei valori al contorno della derivata normale più la media dei valori al contorno della funzione, come può dimostrarsi direttamente in maniera molto semplice. Trasportando un punto qualunque nel centro con una inversione, può ottenersi la formula nota del LAURICELLA (3).

In modo analogo può operarsi per ogni funzione poliarmonica anche nel caso della sfera . . . .

. . . .

Torino, 18 dicembre 1898.

(3) *Integrazione dell'equazione* $\Delta^2 (\Delta^2 u) = 0$ *in un campo di forma circolare.* «Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino», vol. XXXI, 1896.

XXXIII.

SOPRA UNA CLASSE DI MOTI PERMANENTI STABILI

« Atti Acc. Scienze Torino », vol. XXXIV, 1898-99, pp. 247-255 (*)

1. Mi propongo di estendere in questa breve Nota alcune proprietà che ho dimostrato riguardo alla stabilità delle rotazioni di sistemi che hanno moti interni stazionari (1) ad un caso generale di quei *moti a caratteristiche indipendenti* che ho esaminati in alcune comunicazioni che ebbi l'onore di fare l'anno scorso (2).

2. Riferendomi alle notazioni stesse che ho usato nelle comunicazioni suddette, si può dire che un moto qualsiasi a caratteristiche indipendenti darà luogo alle equazioni

$$\text{(A)} \qquad p_s' = \Sigma_{kr}\, e_{skr} \frac{d\,(\mathrm{T}\,,\mathrm{F})}{d\,(p_k\,,p_r)}$$

ogniqualvolta esisteranno degli integrali di primo ed uno di secondo grado $\mathrm{F} = \text{cost.}$, la cui equazione determinante sia diversa da zero (vedi il § 10 della prima delle due comunicazioni citate). Il moto si dirà permanente allorché le caratteristiche $p_1\,,p_2\,,\cdots,p_\nu$ saranno costanti, quindi i moti permanenti verranno individuati dalle equazioni

$$\Sigma_{kr}\, e_{skr} \frac{d\,(\mathrm{T}\,,\mathrm{F})}{d\,(p_k\,,p_r)} = 0$$

le quali saranno evidentemente verificate quando avremo

$$\frac{d\,(\mathrm{T}\,,\mathrm{F})}{d\,(p_k\,,p_r)} = 0\,,$$

vale a dire

$$\text{(1)} \qquad \frac{\dfrac{\partial \mathrm{F}}{\partial p_1}}{\dfrac{\partial \mathrm{T}}{\partial p_1}} = \frac{\dfrac{\partial \mathrm{F}}{\partial p_2}}{\dfrac{\partial \mathrm{T}}{\partial p_2}} = \cdots = \frac{\dfrac{\partial \mathrm{F}}{\partial p_\nu}}{\dfrac{\partial \mathrm{T}}{\partial p_\nu}}\,.$$

(*) Presentata nell'adunanza del 15 gennaio 1899.

(1) « Annali di Matematica », ser. 2ª, vol. XXIII, 1895, pp. 269-285. [In questo vol.: XV, pp. 173-186].

(2) *Sopra una classe di equazioni dinamiche. Sulla integrazione di una classe di equazioni dinamiche.* « Atti. Acc. Sc. Torino », vol. XXXIII, 1897-98, pp. 451-475 e pp. 542-558. [In questo vol.: XXVI, pp. 336-355 e XXVII, pp. 350-369].

Noi otteniamo dunque infiniti moti permanenti determinando le p_1, $p_2, \cdots, p_\nu$ *in modo da soddisfare le precedenti equazioni* [3].

3. Supponiamo ora di aver scelto le caratteristiche in modo che la forza viva sia ridotta alla semisomma dei loro quadrati e la funzione F non contenga i rettangoli delle variabili. Si otterrà allora

$$(2) \qquad \left\{ \begin{aligned} T &= \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2 + \cdots + p_\nu^2), \\ F &= \frac{1}{2}(\lambda_1 p_1^2 + \lambda_2 p_2^2 + \cdots + \lambda_\nu p_\nu^2) + \mu_1 p_1 + \cdots + \mu_\nu p_\nu \end{aligned} \right.$$

in cui $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_\nu$ si supporranno diverse fra loro.

Quindi le (1) diverranno

$$\frac{\lambda_1 p_1 + \mu_1}{p_1} = \frac{\lambda_2 p_2 + \mu_2}{p_2} = \cdots = \frac{\lambda_\nu p_\nu + \mu_\nu}{p_\nu}$$

e chiamando ρ questo rapporto, avremo

$$(3) \qquad p_1 = \frac{\mu_1}{\rho - \lambda_1} \quad , \quad p_2 = \frac{\mu_2}{\rho - \lambda_2}, \cdots, p_\nu = \frac{\mu_\nu}{\rho - \lambda_\nu}$$

e perciò tutti gli infiniti moti permanenti considerati si avranno dalle formole precedenti dando a ρ tutti i possibili valori.

Nel caso in cui tutte le $\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_\nu$ siano nulle, allora le condizioni dei moti permanenti si verificheranno scegliendo nulle tutte le caratteristiche, una eccettuata, per esempio p_i il che corrisponderà nelle formule precedenti a prendere ρ eguale a λ_i.

4. Se noi cerchiamo i massimi e minimi di F compatibilmente colla condizione $T = \text{cost.}$ dovremo annullare le derivate parziali della differenza

$$F - \rho T$$

in cui ρ denota una costante. Si troveranno dunque le condizioni (3) ossia quelle sufficienti alla permanenza del movimento.

5. Un moto permanente si dirà *stabile*, quando preso un numero σ piccolo a piacere, si potrà trovare un numero ε tale che perturbando il moto in modo da alterare le caratteristiche $p_1, p_2, \cdots, p_\nu$, meno di ε, nel moto perturbato le caratteristiche differiscano in ogni istante dai valori corrispondenti che esse hanno nel moto permanente meno di σ.

Possiamo ora dimostrare il teorema:

Ai massimi e ai minimi effettivi di F, *compatibilmente colla condizione* $T = \text{cost.}$, *corrispondono dei moti permanenti stabili del sistema* [4].

(3) Le condizioni (1) sono evidentemente condizioni *sufficienti*, non necessarie affinché il moto sia permanente.

(4) Secondo la definizione che molti autori dànno di massimo di F compatibilmente colla condizione $T = \text{cost.}$ dovremo intendere che F avrà un massimo corrispondente a $p_1 = p_1^0, p_2 = p_2^0, \cdots, p_\nu = p_\nu^0$ quando per tutti i valori di $p_1, p_2, \cdots, p_\nu$ compresi rispetti-

Per dimostrare questo teorema denotiamo con $p_1^0, p_2^0, \cdots, p_\nu^0$ uno di questi massimi o minimi, e poniamo

$$T(p_1^0, p_2^0, \cdots, p_\nu^0) = T_0,$$

$$F(p_1^0, p_2^0, \cdots, p_\nu^0) = F_0,$$

$$\Phi = (T - T_0)^2 + (F - F_0)^2.$$

Per la definizione di massimo e di minimo effettivo, avremo che, allorquando

$$T(p_1, p_2, \cdots, p_\nu) = T_0,$$

sarà

$$|F(p_1, p_2, \cdots, p_\nu) - F_0| > 0$$

purché siano le

$$(4) \qquad |p_i - p_i^0| \leq \delta,$$

senza che tutte queste differenze siano nulle.

Ciò premesso, prendiamo un numero positivo σ qualsiasi minore di δ, e consideriamo Φ per tutti i valori di $p_1, p_2, \cdots, p_\nu$ che soddisfano le diseguaglianze (4), ma tali che una almeno delle differenze

$$|p_i - p_i^0| = \sigma.$$

Nessuno dei valori corrispondenti di Φ sarà nullo, perché per quei valori pei quali si annullerà il termine $(T - T_0)^2$, non potrà annullarsi l'altro termine $(F - F_0)^2$, onde per la continuità di Φ, potremo concludere che il limite inferiore di questi valori sarà un numero m diverso da zero e positivo.

Ora potremo prendere $\varepsilon < \sigma$ tale che, se sono tutte le

$$(5) \qquad |p_i - p_i^0| < \varepsilon,$$

si abbia

$$\Phi < m.$$

vamente fra $p_1^0 - \delta, p_1^0 + \delta$; $p_2^0 - \delta, p_2^0 + \delta$; $\cdots, p_\nu^0 - \delta, p_\nu^0 + \delta$, i quali verificano la condizione $T = \text{cost.}$, si abbia:

$$F(p_1, p_2, \cdots, p_\nu) \leqq F(p_1^0, p_2^0, \cdots, p_\nu^0).$$

A noi preme invece di considerare il caso che si presenta quando (purché $p_1, p_2, \cdots, p_\nu$ non siano tutti eguali a $p_1^0, p_2^0, \cdots, p_\nu^0$) vale la diseguaglianza

$$F(p_1, p_2, \cdots, p_\nu) < F(p_1^0, p_2^0, \cdots, p_\nu^0),$$

essendo sempre le $p_1, p_2, \cdots, p_\nu$ comprese entro i limiti suddetti e tali che sia $T = \text{cost.}$

A scanso di equivoci per distinguere questo caso speciale di massimo noi lo designeremo col nome di *massimo effettivo*. In modo perfettamente analogo noi intenderemo il significato di *minimo effettivo*. Senza la specificazione fatta il teorema enunciato non sarebbe esatto. A questo proposito notiamo che allorquando DIRICHLET dimostra il teorema che le configurazioni in cui il potenziale è massimo sono configurazioni di equilibrio stabile egli sottintende che si tratta di un *massimo effettivo* come il contesto della dimostrazione lo prova (vedi Nota II, al 1° vol. delle *Mecan. Anal.* di LAGRANGE, IV ediz.), altrimenti il teorema fondamentale della stabilità dell'equilibrio non sarebbe rigoroso.

Si prenda uno stato iniziale di moto in cui le $p_1, p_2, \cdots, p_\nu$ verificano le diseguaglianze (5), allora poiché durante tutto il movimento T ed F si conservano costanti, anche Φ sarà costante e quindi sempre inferiore ad m. Ne segue che nessuna delle differenze $p_i - p_i^0$ potrà in valore assoluto raggiungere il valore σ, e perciò tutte si conserveranno inferiori a questo limite. Le condizioni per la stabilità del moto saranno dunque verificate.

È evidente che nella dimostrazione precedente si possono invertire le due funzioni F e T, e perciò potremo anche enunciare il teorema:

Ai massimi e minimi effettivi della forza viva compatibilmente colla condizione F = cost. *corrispondono dei moti permanenti stabili del sistema.*

6. Facciamo subito un'applicazione delle precedenti proposizioni al caso in cui F sia omogenea e di secondo grado. Supponiamo che il massimo dei coefficienti $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_\nu$ (che supponiamo diversi fra loro) sia λ_i ed il minimo λ_s. Allora

$$\lambda_i \mathrm{T} - \mathrm{F} = \sum_1^\nu {}_h (\lambda_i - \lambda_h)\, p_h^2, \tag{6}$$

$$\lambda_s \mathrm{T} - \mathrm{F} = \sum_1^\nu {}_h (\lambda_s - \lambda_h)\, p_h^2. \tag{7}$$

Il secondo membro della (6) è sempre positivo e si annulla solo quando tutte le p_h sono nulle, eccettuata p_i, mentre il secondo membro della (7) è sempre negativo e si annulla quando le p_h sono nulle, eccettuata p_s.

Possiamo dunque concludere.

I moti del sistema corrispondenti all'annullarsi di tutte le caratteristiche, eccettuata la p_i oppure la p_s, sono moti permanenti stabili.

7. Mostriamo ora come nel caso più generale esistano sempre dei moti stabili del sistema. Differenziando le (2) avremo

$$d\mathrm{T} = \sum_1^\nu {}_i\, p_i\, dp_i \quad , \quad d\mathrm{F} = \sum_1^\nu (\lambda_i p_i + \mu_i)\, dp_i$$

donde

$$\rho\, d\mathrm{T} - d\mathrm{F} = \sum_1^\nu {}_i ((\rho - \lambda_i)\, p_i - \mu_i)\, dp_i$$

e prendendo le p_i in modo che siano verificate le (3) otterremo

$$\rho\, d\mathrm{T} - d\mathrm{F} = 0.$$

Differenziando le (2) una seconda volta si avrà

$$d^2\mathrm{T} = \sum_1^\nu {}_i\, dp_i^2 + \sum_1^\nu {}_i\, p_i\, d^2 p_i$$

$$d^2\mathrm{F} = \sum_1^\nu \lambda_i\, dp_i^2 + \sum_1^\nu {}_i (\lambda_i p_i + \mu_i)\, d^2 p_i.$$

Da cui segue

$$\rho\, d^2\mathrm{T} - d^2\mathrm{F} = \sum_1^{\nu}{}_i (\rho - \lambda_i)\, dp_i^2 + \sum_1^{\nu}{}_i ((\rho - \lambda_i)\, p_i - \mu_i)\, d^2 p_i$$

e per le (3)

$$\rho\, d^2\mathrm{T} - d^2\mathrm{F} = \sum_1^{\nu}{}_i (\rho - \lambda_i)\, dp_i^2.$$

Applicando le proposizioni del § 5 potremo dunque dire che *i moti stabili si avranno allorché la forma quadratica precedente sarà una forma definita, essendo*

$$\sum_1^{\nu}{}_i\, p_i\, dp_i = 0.$$

Di qui risulta facilmente che si avranno sempre dei moti stabili quando ρ sarà maggiore della più grande delle λ_i, oppure sarà più piccola della minore delle λ_i, il che prova la esistenza dei moti stabili in ogni caso. Evidentemente però non saranno in generale questi soli i valori di p corrispondenti a moti stabili.

8. Dimostrata così la esistenza dei moti permanenti stabili, si possono studiare le piccole perturbazioni dei moti stessi. A tal fine poniamo nelle equazioni (A) in luogo delle p_i, $p_i^0 + \omega_i$, in cui le p_i^0 corrispondono ad un moto stabile della specie sopra esaminata e le ω_i vengono considerate come quantità infinitesime del primo ordine.

Nell'ipotesi che T ed F abbiano la forma (2), e trascurando infinitesimi del 2° ordine, le (A) divengono:

$$\omega_s' = \Sigma_{kr}\, e_{skr} \begin{vmatrix} \omega_k & , & \omega_r \\ \dfrac{\mu_k(\rho - \lambda_r)}{\rho - \lambda_k} & , & \dfrac{\mu_r(\rho - \lambda_k)}{\rho - \lambda_r} \end{vmatrix}.$$

E ponendo

$$\sum_1^{\nu}{}_r \frac{\mu_r(\rho - \lambda_s)(\rho - \lambda_k)}{(\rho - \lambda_r)}\, e_{skr} = \mathrm{G}_{sk},$$

si trova

$$(8) \qquad (\rho - \lambda_s)\, \omega_s' = \sum_1^{\nu}{}_k \mathrm{G}_{sk}\, \omega_k.$$

Si riconosce immediatamente per le proprietà dei coefficienti e_{skr} che

$$\mathrm{G}_{sk} + \mathrm{G}_{ks} = 0,$$

$$\Sigma_s\, \mathrm{G}_{sk} \frac{\mu_s}{(\rho - \lambda_s)^2} = 0;$$

quindi le equazioni precedenti ammettono gl'integrali

$$\sum_1^{\nu}{}_s (\rho - \lambda_s)\, \omega_s^2 = \text{cost.},$$

$$\sum_{1}^{\nu}{}_s \frac{\mu_s}{\rho - \lambda_s} \omega_s = \text{cost.}$$

Per integrare le (8), osservando che esse sono lineari, basterà porre

$$\omega_s = P_s e^{zt}$$

e determinare le P_s e z in modo da verificare le equazioni

$$(\rho - \lambda_s) P_s z = \sum_{1}^{\nu}{}_k G_{sk} P_k . \tag{9}$$

Eliminando le P_s troviamo per z l'equazione:

$$\begin{vmatrix} (\lambda_1 - \rho) z , & G_{12} , & G_{13} , \cdots , & G_{1\nu} \\ G_{21} , & (\lambda_2 - \rho) z , & G_{23} , \cdots , & G_{2\nu} \\ G_{31} , & G_{32} , & (\lambda_3 - \rho) z , \cdots , & G_{3\nu} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ G_{\nu 1} , & G_{\nu 2} , & G_{\nu 3} , \cdots , & (\lambda_\nu - \rho) z \end{vmatrix} = 0 . \tag{10}$$

Questa equazione ammette la radice $z = 0$. Per riconoscerlo basta osservare che le (9) sono soddisfatte prendendo $z = 0$ e $P_k = \mu_k/(\rho - \lambda_k)^2$. Mostriamo ora che tutte le altre radici della (10) sono puramente immaginarie. Infatti se esistesse una radice reale z si potrebbero trovare dei valori reali delle P_k tali da verificare le (9). Moltiplicando queste equazioni per P_s e sommando, e poi moltiplicandole per $\mu_s/(\rho - \lambda_s)^2$ e pure sommando si otterrebbe contemporaneamente

$$\Sigma_s (\rho - \lambda_s) P_s^2 = 0 \tag{11}$$

$$\Sigma_s \frac{\mu_s}{\rho - \lambda_s} P_s = 0 \tag{12}$$

il che è in contradizione col fatto che la forma (11) è definita allorché è soddisfatta la (12) (vedi il § 7).

Proviamo che non esistono nemmeno radici complesse. Infatti se si avesse una radice complessa $\alpha + i\beta$, si avrebbe anche una radice coniugata $\alpha - i\beta$, e se corrispondentemente alla prima si avessero per le P_s che soddisfano le (9) i valori $Q_s + iR_s$, alla seconda corrisponderebbero i valori $Q_s - iR_s$, onde

$$(\rho - \lambda_s)(Q_s + iR_s)(\alpha + i\beta) = \sum_{1}^{\nu}{}_k G_{sk} (Q_k + iR_k)$$

$$(\rho - \lambda_s)(Q_s - iR_s)(\alpha - i\beta) = \sum_{1}^{\nu}{}_k G_{sk} (Q_k - iR_k) .$$

Moltiplicando la prima di queste equazioni per $Q_s - iR_s$ e la seconda per $Q_s + iR_s$, sommando membro a membro, e poi per tutti i valori dell'indice s, si otterrebbe

$$\sum_{1}^{\nu}{}_k (\rho - \lambda_s)(Q_s^2 + R_s^2) = 0$$

mentre d'altra parte dovrebbe aversi

$$\sum_{1}^{\nu}{}_{s} \frac{\mu_s}{\rho - \lambda_s} Q_s = \sum_{1}^{\nu}{}_{s} \frac{\mu_s}{\rho - \lambda_s} R_s = 0$$

risultato che offrirebbe la stessa contradizione precedentemente esaminata.

Essendo le radici della (10) puramente immaginarie, scriviamole sotto la forma

$$\frac{2\pi}{T_1} i \quad , \quad \frac{2\pi}{T_2} i \quad , \quad \frac{2\pi}{T_3} i , \cdots$$

avremo allora che i periodi delle perturbazioni saranno dati dalle quantità reali $T_1, T_2, T_3, \cdots$, e le ω_s saranno date dalle formule

$$\omega_s = \Sigma A_h \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi t}{T_h} + \alpha_h\right),$$

ove le A_h e α_h sono costanti, giacché con un semplice ragionamento può riconoscersi che termini non periodici non possono sussistere nelle ω_s.

Le perturbazioni essendo periodiche e non smorzandosi, sono quindi di natura essenzialmente diversa da quelle perturbazioni che abbiamo esaminate pei moti a caratteristiche indipendenti del 2° ordine nella seconda Nota sopra citata.

XXXIV.

SUL FLUSSO DI ENERGIA MECCANICA

«Atti Acc. Scienze Torino», vol. XXXIV, 1898-1899, pp. 366-375.

1. È noto come il POYNTING in una sua celebre Memoria [1] ha determinato la legge con cui fluisce l'energia in un campo elettromagnetico, giungendo ad un risultato altrettanto semplice quanto importante, sia dal punto di vista teorico che da quello delle applicazioni. Varii studii furono fatti in seguito per ricercare, non nei soli fenomeni elettromagnetici, ma anche negli altri fenomeni naturali le leggi che esprimono come procede con continuità la energia da punto a punto nello spazio.

Noi ci limiteremo in questa Nota allo studio del flusso di energia meccanica in un caso che crediamo non ancora contemplato.

2. Consideriamo, per fissare le idee, il sistema solare come sottratto ad azioni esterne. Si ha in questo caso un moto di materia consistente nel movimento degli astri che lo costituiscono, i quali subiscono nel tempo stesso delle alterazioni nella loro costituzione, mentre le forze attrattive che agiscono su di essi variano pure in ogni istante.

È possibile stabilire in questo caso delle leggi atte a rappresentare come fluisce l'energia meccanica corrispondente in tutto lo spazio, ammesso che essa non si trasformi in altre energie e per conseguenza si conservi costante?

Il sistema dunque che noi immaginiamo è discontinuo, e le diverse parti hanno stato di aggregazione diverso. Alcuni corpi o parti dei corpi costituenti il sistema sono solidi, altri liquidi ed altri aeriformi. Alcuni di questi si trovano a contatto fra loro, altri possono concepirsi separati da porzioni di spazio non riempito da materia. La densità della distribuzione di materia è per conseguenza discontinua, come le velocità dei punti possono essere discontinue lungo le superficie che costituiscono i limiti di separazione delle varie parti fra loro eterogenee del sistema. Le forze agenti sono le forze newtoniane di attrazione fra i varii elementi di materia, e le forze elastiche interne.

Onde esaminare la questione propostaci è necessario localizzare in ogni punto dello spazio ed in ogni istante l'energia.

Per riguardo alla energia cinetica la cosa non presenta evidentemente alcuna difficoltà; così pure per riguardo alla energia elastica delle varie parti; ma è necessario anche localizzare l'energia potenziale delle forze newtoniane

(1) «Philosophical Transactions», vol. 175.

che agiscono fra i varii punti del sistema. Ora all'energia potenziale di un sistema materiale le cui particelle si attraggono colla legge di NEWTON si sa dare varie espressioni, una delle quali consiste nell'integrale esteso a tutto lo spazio del quadrato della forza unitaria agente in ogni punto divisa per -8π. Mediante questa espressione noi abbiamo un modo di localizzare in ogni elemento dello spazio la energia newtoniana, stabilendo che ogni elemento contribuisca nella energia newtoniana per una quantità eguale al volume dell'elemento diviso per -8π e moltiplicato pel quadrato della forza unitaria agente in quel punto.

Non deve recare meraviglia se colla ipotesi fatta la quantità, con cui contribuisce ogni elemento di spazio nella energia potenziale, è negativa.

Siccome noi studiamo il flusso di energia, così ciò che preme di considerare, anziché il valore effettivo della quantità di energia è la sua variazione. La energia potenziale è d'altra parte individuata a meno di una costante addittiva arbitraria; noi potremmo dunque supporre, per esempio, aggiunta in ogni elemento una quantità *costante* di energia senza che perciò il flusso di essa venisse alterato. Con una conveniente aggiunta potrebbe concepirsi concentrata in ogni elemento una quantità positiva di energia (2).

A questo modo di distribuire nello spazio la energia potenziale newtoniana si potrebbe far corrispondere un meccanismo speciale sostituibile alle azioni a distanza, atto cioè a spiegarci le attrazioni newtoniane; ma noi possiamo anche prescindere da qualsiasi ipotesi a questo proposito; come del resto si fa ordinariamente allorché si definisce l'energia in un campo elettromagnetico.

Osserviamo infine che stabilita una legge del flusso di energia, altre infinite *equivalenti* possono, come è ben noto, trovarsene.

3. Mostriamo ora quale è il risultato che si ottiene per il flusso di energia. In ogni punto dello spazio si possono considerare tre vettori; il primo dei quali $\mathfrak{F}$ rappresenta la forza newtoniana unitaria in quel punto, il secondo $\mathfrak{W}$ la velocità del moto della materia, il terzo $\mathfrak{T}$ la tensione elastica unitaria che viene esercitata sull'elemento normale alla direzione del moto dalla parte opposta a quella secondo cui la materia stessa si sposta. Del primo $\mathfrak{F}$ si potrà fare la derivata rapporto al tempo e si otterrà così un vettore $\mathfrak{J}$ che esprimerà la legge con cui varia col tempo la forza unitaria. Consideriamo poi la funzione potenziale newtoniana U, la densità ρ e la grandezza V della velocità della materia.

Il flusso di energia sarà risultante di tre vettori, e cioè del vettore $\mathfrak{J}$ *moltiplicato per* $U/4\pi$, *del vettore* $\mathfrak{W}$ *moltiplicato per* $\rho\,(V^2/2 - U)$ *e del vettore* $\mathfrak{T}$ *mol-*

(2) WILLY WIEN nella sua bella ed importante Memoria sopra il concetto della localizzazione dell'energia del Tomo XLV degli « Annali di Wiedemann », esclude *a priori*, come non suscettibile di essere trattato, il caso dei corpi discontinui e della gravitazione universale; ma noi riteniamo che le precedenti considerazioni che abbiamo esposto ed i calcoli che seguono, giustifichino l'aver preso in esame e svolto questo caso che ci sembra di precipuo interesse.

tiplicato per V. Questa legge vale per tutti i punti dello spazio. Nei punti dove non vi è materia $\mathfrak{W}$ e $\mathfrak{T}$ si annullano e resta il flusso di energia rappresentato dal solo vettore $\mathfrak{J}$ moltiplicato per $U/4\pi$.

La via seguita per ottenere questo risultato è la seguente. Una volta che sia localizzata l'energia in ogni elemento dello spazio, consideriamo una porzione fissa qualsiasi di esso e calcoliamo la energia ivi contenuta. La derivata rapporto al tempo di questa quantità si potrà esprimere mediante un integrale esteso a tutto lo spazio ed una somma di integrali estesi a tutte le superficie ove la materia e il moto sono discontinui. Ma l'insieme di tutti questi integrali può trasformarsi in un solo integrale esteso al contorno dell'intero spazio considerato, e questa espressione ci rivela immediatamente la legge del flusso di energia.

Consacreremo i paragrafi seguenti allo sviluppo del calcolo che abbiamo ora accennato.

In una Nota successiva particolarizzeremo le formule generali per lo studio del flusso di energia corrispondente al così detto moto non perturbato dei corpi celesti.

4. Denotiamo con U la funzione potenziale, con ρ la densità della materia, con u, v, w le componenti della velocità di questa nelle direzioni degli assi coordinati. I punti ove non vi è materia saranno caratterizzati dal valore $\rho = 0$.

La energia cinetica contenuta in uno spazio S sarà

$$E_c = \frac{1}{2}\int_S \rho\,(u^2 + v^2 + w^2)\,dS\,.$$

La energia potenziale newtoniana contenuta in S sarà

$$E_p = -\frac{1}{8\pi}\int_S \left\{\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2\right\} dS\,.$$

Chiamiamo con E_e la energia elastica entro S.

Allora la energia meccanica totale contenuta entro S sarà

$$E = E_c + E_p + E_e\,.$$

Bisognerà calcolare la variazione della energia contenuta in S, che ha luogo nel tempo dt.

Noi supporremo che il contorno σ di S non coincida, lungo nessun tratto di area finita, con una superficie ove il moto o la materia siano discontinui.

5. Cominciamo dal calcolare la variazione di E_c.

A tal fine seguiamo la materia contenuta in S nel suo moto. Nel tempo $t + dt$ essa verrà in generale ad occupare un nuovo spazio S′ e la variazione di forza viva da essa subìta sarà eguale al lavoro eseguito dalle forze applicate ai suoi elementi. Ora il lavoro eseguito dalle attrazioni newtoniane verrà dato da

$$\int_S \left(\rho \frac{\partial U}{\partial x} udt + \rho \frac{\partial U}{\partial y} vdt + \rho \frac{\partial U}{\partial z} wdt\right) dS$$

ed il lavoro delle forze elastiche sarà eguale alla diminuzione della energia elastica E_e cioè $-dE_e$ aggiuntovi il lavoro delle tensioni agenti in superficie. Se le componenti della tensione unitaria agente dall'esterno verso l'interno sopra un elemento qualunque del contorno sono t_x, t_y, t_z, il lavoro delle tensioni al contorno sarà

$$\int_\sigma (t_x udt + t_y vdt + t_z wdt) d\sigma .$$

Il lavoro totale sarà dunque:

$$L = \int_S \rho\left(\frac{\partial U}{\partial x} u + \frac{\partial U}{\partial y} v + \frac{\partial U}{\partial z} w\right) dS \cdot dt - dE_e + \int_\sigma (t_x u + t_y v + t_z w) d\sigma \cdot dt .$$

6. Se ora noi vogliamo la variazione che ha subìto nel tempo dt la energia cinetica contenuta nella regione fissa S dello spazio, dovremo aggiungere ad L la forza viva della materia penetrata in S attraverso il contorno σ durante questo intervallo di tempo, e togliere quella della materia uscita, il cui insieme contribuisce colla quantità di energia

$$e_c = \frac{1}{2} \int_\sigma \rho (u^2 + v^2 + w^2)(udt \cdot \cos nx + vdt \cdot \cos ny + wdt \cdot \cos nz) d\sigma$$

denotando con n la normale a σ diretta verso l'interno di S. Avremo dunque che la variazione di E_c richiesta si esprimerà con

$$dE_c = L + e_c$$

onde ponendo

$$I = \int_S \rho\left(\frac{\partial U}{\partial x} u + \frac{\partial U}{\partial y} v + \frac{\partial U}{\partial z} w\right) dS$$

risulterà

$$\frac{\partial (E_c + E_e)}{\partial t} = I + \int_\sigma (t_x u + t_y v + t_z w) d\sigma \tag{1}$$

$$+ \frac{1}{2} \int_\sigma \rho (u^2 + v^2 + w^2)(u \cos nx + v \cos ny + w \cos nz) d\sigma .$$

7. Calcoliamo ora la variazione di E_p. Questa sarà

$$dE_p = -\frac{1}{4\pi} \int_S \left(\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial dU}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial dU}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial z}\frac{\partial dU}{\partial z}\right) dS \tag{2}$$

denotando con dU la variazione subìta dalla funzione potenziale nel tempo dt. Ma dU si può considerare come la funzione potenziale di una massa a tre dimensioni che abbia in ogni punto la densità $d\rho$ e di una massa a due dimensioni distribuita lungo la superficie σ_h ove la materia o il moto sono discontinui, colla densità $\rho_1 V_{\nu,1} - \rho_2 V_{\nu,2}$, essendo ν la normale alla superficie di discontinuità, e ρ_2 la densità della materia dalla parte positiva di ν e ρ_1 la densità della parte negativa; mentre $V_{\nu,2}, V_{\nu,1}$ sono le componenti della velocità della materia nel verso ν dalle due parti della superficie (3).

Avremo dunque lungo queste superficie σ_h

$$\left(\frac{\partial dU}{\partial \nu}\right)_2 - \left(\frac{\partial dU}{\partial \nu}\right)_1 = -4\pi(\rho_1 V_{\nu,1} - \rho_2 V_{\nu,2})$$

ove $(\partial dU/d\nu)_2, (\partial dU/d\nu)_1$ significano i valori della derivata normale dalle due parti, positiva e negativa, della superficie σ_h.

In tutti gli altri punti avremo

$$\Delta^2(dU) = -4\pi d\rho\,.$$

Trasformiamo ora la espressione (2) con delle integrazioni per parti. Otterremo (4)

$$dE_p = \frac{1}{4\pi}\int_S U\Delta^2(dU)\,dS + \frac{1}{4\pi}\int_\sigma U\frac{\partial dU}{\partial n}\,d\sigma - \Sigma_h\int_{\sigma_h}(\rho_1 V_{\nu,1} - \rho_2 V_{\nu,2})\,d\sigma_h\,dt$$

quindi

$$\frac{\partial E_p}{\partial t} = -\int_S U\frac{\partial\rho}{\partial t}dS + \frac{1}{4\pi}\int_\sigma U\,\frac{\partial\dfrac{\partial U}{\partial t}}{\partial n}\,d\sigma - \Sigma_h\int_{\sigma_h}(\rho_1 V_{\nu,1} - \rho_2 V_{\nu,2})\,d\sigma_h\,.$$

8. In modo analogo possiamo trasformare l'integrale I.

Se teniamo conto delle discontinuità del moto e della materia si avrà

$$I = -\int_S U\left(\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z}\right)dS$$

$$-\int_\sigma \rho U(u\cos nx + v\cos ny + w\cos nz)\,d\sigma + \Sigma_h\int_{\sigma_h} U(\rho_1 V_{\nu,1} - \rho_2 V_{\nu,2})\,d\sigma_h$$

(3) Se lungo la superficie di discontinuità i due corpi che si trovano a contatto si conservano a contatto, sarà $V_{\nu,1} = V_{\nu,2}$; ma se i due corpi si staccassero, sarebbero $V_{\nu,1}$ e $V_{\nu,2}$ diversi fra loro.

(4) Quando noi scriviamo $\int_S U\Delta^2(dU)\,dS$ intendiamo diviso tutto lo spazio in tante parti $S_1, S_2, \cdots, S_i, \cdots, S_l$, quante se ne ottengono prendendo le σ_h come superficie di separazione. Per ognuna di queste parti ha un significato $\int_{S_i} U\Delta^2(dU)\,dS_i$, e allora noi abbiamo

$$\int_S U\Delta^2(dU)\,dS = \sum_1^l{}_i \int_{S_i} U\Delta^2(dU)\,dS_i\,.$$

La cosa analoga deve intendersi allorché nel paragrafo seguente trasformando I si trova l'integrale $\int_S U\left(\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z}\right)dS$.

quindi

$$I + \frac{\partial E_p}{\partial t} = -\int_S U \left\{ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial (\rho w)}{\partial z} \right\}$$

$$+ \frac{1}{4\pi} \int_\sigma U \frac{\partial \frac{\partial U}{\partial t}}{\partial n} d\sigma - \int_\sigma \rho U (u \cos nx + v \cos ny + w \cos nz) d\sigma .$$

Ma teniamo conto che pel principio della conservazione della quantità di materia si ha

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial (\rho w)}{\partial z} = 0;$$

si avrà dunque

$$I + \frac{\partial E_p}{\partial t} = \frac{1}{4\pi} \int_\sigma U \frac{\partial \frac{\partial U}{\partial t}}{\partial n} d\sigma - \int_\sigma \rho U (u \cos nx + v \cos ny + w \cos nz) d\sigma$$

e per conseguenza in virtù delle (1), posto $V^2 = u^2 + v^2 + w^2$,

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \frac{\partial (E_c + E_e + E_p)}{\partial t} = \int_\sigma \left\{ \frac{U}{4\pi} \frac{\partial \frac{\partial U}{\partial t}}{\partial n} \right. \tag{3}$$

$$\left. + \rho \left(\frac{V^2}{2} - U \right) (u \cos nx + v \cos ny + w \cos nz) + t_x u + t_y v + t_z w \right\} d\sigma .$$

9. Cerchiamo ora di trasformare il trinomio

$$t_x u + t_y v + t_z w$$

che potremo anche scrivere VT_v, ove T_v è la proiezione sulla direzione della velocità della tensione unitaria che viene esercitata, dall'esterno verso l'interno, sull'elemento del contorno $d\sigma$.

Ma, per un noto teorema di reciprocità relativo alle tensioni elastiche in un mezzo continuo qualsiasi, T_v è eguale alla proiezione sulla normale n della tensione unitaria che viene ad esercitarsi sull'elemento normale alla direzione della velocità dalla parte opposta a quella secondo cui la materia si sposta (5). Se chiamiamo dunque τ_x, τ_y, τ_z le componenti di quest'ultima tensione, avremo

$$VT_v = V (\tau_x \cos nx + \tau_y \cos ny + \tau_z \cos nz) .$$

Siano X, Y, Z le componenti della forza unitaria newtoniana; si avrà

$$\frac{\partial}{\partial n} \frac{\partial U}{\partial t} = X' \cos nx + Y' \cos ny + Z' \cos nz ,$$

(5) Questo teorema pel caso dei solidi elastici si trova enunciato in LAMÉ, *Leçons sur la théorie mathématique de l'elasticité des corps solides* (Paris, 1852), p. 21.

in cui l'apice denota la derivazione fatta rapporto al tempo. La (3) diventa perciò

$$\begin{aligned}\frac{\partial E}{\partial t} = \int_\sigma \Big\{ &\left(\frac{U}{4\pi} X' + \rho\left(\frac{V^2}{2} - U\right) u + V\tau_x\right)\cos nx \\ &+ \left(\frac{U}{4\pi} Y' + \rho\left(\frac{V^2}{2} - U\right) v + V\tau_y\right)\cos ny \\ &+ \left(\frac{U}{4\pi} Z' + \rho\left(\frac{V^2}{2} - U\right) w + V\tau_z\right)\cos nz \Big\} d\sigma .\end{aligned}$$

Dunque le componenti del flusso unitario di energia saranno

$$\left\{\begin{aligned} E_z &= \frac{U}{4\pi} X' + \rho\left(\frac{V^2}{2} - U\right) u + \tau_x V \\ E_y &= \frac{U}{4\pi} Y' + \rho\left(\frac{V^2}{2} - U\right) v + \tau_y V \\ E_z &= \frac{U}{4\pi} Z' + \rho\left(\frac{V^2}{2} - U\right) w + \tau_z V \end{aligned}\right.$$

le quali provano la legge sul flusso di energia enunciata nel § 3.

10. In una regione in cui manchi la materia, u, v, w sono nulli, quindi le componenti del flusso di energia divengono

$$E_x = \frac{U}{4\pi} X'$$

$$E_y = \frac{U}{4\pi} Y'$$

$$E_z = \frac{U}{4\pi} Z'.$$

Consideriamo una superficie di livello ω esterna alle masse la cui normale diretta verso l'interno di essa sia n. La quantità di energia penetrata nel tempo dt sarà

$$dE = \frac{dt}{4\pi} \int_\omega U (X' \cos nx + Y' \cos ny + Z' \cos nz)\, d\omega$$

e, poiché U è costante, avremo

$$\begin{aligned} dE &= \frac{U dt}{4\pi} \int_\omega (X' \cos nx + Y' \cos ny + Z' \cos nz)\, d\omega = \frac{U dt}{4\pi} \int_\omega \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial U}{\partial n} d\omega \\ &= \frac{U dt}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \int_\omega \frac{\partial U}{\partial n} d\omega . \end{aligned}$$

Ora $\int_\omega \frac{\partial U}{\partial n} d\omega$ è eguale al prodotto di 4π per la massa M_ω contenuta internamente ad ω. Siccome ω è esterna alle masse, così M_ω nel tempo dt non cambia e perciò $\frac{\partial}{\partial t} \int_\omega \frac{\partial U}{\partial n} d\omega$ è eguale a zero, onde si avrà

$$dE = 0 .$$

Dunque *la quantità totale di energia che penetra in ogni istante attraverso una superficie di livello esterna alle masse è nulla*, ossia, *la quantità di energia che entra in ogni istante è eguale a quella che nello stesso istante esce attraverso la superficie di livello.*

(*) Per rapporto alle superficie di livello può farsi ancora un'altra osservazione. Tracciamo tutte le superficie stesse, e supponiamo che ciascuna si muova insieme al sistema in modo da conservarsi superficie di livello e da conservare costante il valore che su di esse ha la funzione potenziale. Consideriamo una superficie σ di livello che racchiuda tutte le masse. La energia potenziale che è localizzata esternamente ad essa sarà

$$+\frac{1}{4\pi}\int_{\omega} U \frac{\partial U}{\partial n} d\sigma ,$$

essendo n la normale diretta verso l'esterno di σ. Ossia essa sarà $= -U_\sigma M$, essendo U_σ il valore costante che ha la funzione potenziale sopra σ ed M la massa totale.

(*) Le righe seguenti riproducono una postilla autografa dell'Autore, che si è trovata su di una copia del lavoro, da lui conservata nella Sua biblioteca personale. [N. d. R.].

XXXV.

SOPRA ALCUNE APPLICAZIONI DELLA RAPPRESENTAZIONE ANALITICA DELLE FUNZIONI DEL PROF. MITTAG-LEFFLER

«Atti Acc. Sc. di Torino», vol. XXXIV, 1898–99, pp. 492–494.

1. Consideriamo in una questione dinamica qualsiasi gli elementi incogniti come funzioni analitiche del tempo, riguardando questo come una variabile complessa. Se costruiamo per queste funzioni, prendendo il valore iniziale del tempo come centro, quelle figure che il prof. Mittag-Leffler chiama le stelle, ogniqualvolta potremo dimostrare che l'asse reale giace nell'interno di esse, avremo il modo di ottenere senz'altro gli elementi incogniti sviluppati per tutti i possibili valori reali del tempo. Ciò potrà ottenersi secondo l'importante metodo del Mittag-Leffler in infiniti modi, e potremo perciò convenientemente regolare la convergenza delle serie. Oltre a ciò, e questo è il più importante, ci sarà sufficiente conoscere le condizioni iniziali del moto per potere ottenere gli sviluppi stessi. In altri termini, una questione dinamica si potrà dire completamente risoluta dal punto di vista analitico, quando potremo dimostrare che l'asse reale dei tempi giace completamente nell'interno delle stelle degli elementi incogniti. Mi permetto, come Nota alla bella Memoria del prof. Mittag-Leffler, di accennare l'esempio di varie classi di problemi pei quali la detta circostanza favorevole, che ne permette la completa risoluzione, si presenta effettivamente.

2. L'anno scorso in due Note e quest'anno in una Nota ho esaminato una estesa classe di questioni dinamiche che conducono alle equazioni differenziali del tipo [1]

$$p_s' = \sum_1^\nu{}_r \sum_1^\nu{}_k a_{sk}^{(r)} p_k p_r ,$$

essendo $a_{sk}^{(r)} + a_{sk}^{(r)} = 0$.

Il teorema enunciato nel § 5 della 2ª Nota può enunciarsi dicendo che una striscia di larghezza finita contenente l'asse reale dei tempi è inclusa entro le stelle delle funzioni p_s considerate come funzioni analitiche del tempo, essendo l'origine dei tempi il centro delle stelle. Abbiamo dunque,

(1) «Atti della R. Accad. di Torino» 27 febbraio e 27 marzo 1898 e 15 gennaio 1899. [In questo vol.: XXVI, pp. 336–355; XXVII, pp. 356–369: XXXIII, pp. 576–586]. Queste ricerche sono suscettibili di una ulteriore estensione, come spero di poter mostrare in un prossimo lavoro.

ricorrendo ai nuovi sviluppi del prof. MITTAG-LEFFLER, infiniti altri modi di risolvere completamente dal punto di vista analitico questi problemi dinamici, oltre il metodo sviluppato nella suddetta Nota, e quello che il prof. PICARD ha esposto nella sua comunicazione del novembre scorso (2).

3. Oltre alla classe ora ricordata di questioni esaminiamo alcuni casi che si riferiscono a problemi di attrazione. La questione di un punto attratto colla legge di NEWTON da due centri fissi costituisce un caso classico largamente trattato colle funzioni ellittiche da molti autori. Ma se i centri di attrazione, essendo sempre in linea retta, anziché due sono in numero maggiore, la questione non è stata risoluta.

Supponiamo che il momento della velocità iniziale del punto attratto m per rapporto all'asse x dei punti attraenti sia diverso da zero. Denotando con r la distanza del punto attratto dall'asse x, con ϑ l'angolo che il piano mx fa con un piano fisso passante per x, si potrà scrivere l'integrale delle aree $r^2\vartheta' = \mathrm{C}$, in cui la costante C è diversa da zero. Avremo poi l'integrale delle forze vive $\mathrm{T} - \mathrm{P} = h$, in cui h è costante; T è la forza viva data da

$$\frac{1}{2} m\,(r'^2 + r^2\vartheta'^2 + x'^2);$$

e P è il potenziale eguale a

$$\sum_1^u{}_i \frac{\mathrm{M}_i m}{r_i},$$

denotando con M_i le masse dei punti attraenti e con r_i le loro distanze da m. Si vede facilmente che r non può divenir zero, perché se per $t = t_0$ questa quantità fosse infinitesima, assumendola come infinitesimo principale, il ϑ', per l'integrale delle aree, sarebbe infinito del 2° ordine, onde $r^2\vartheta'^2 = \mathrm{C}\vartheta'$ e quindi T sarebbero infiniti del 2° ordine, mentre P non potrebbe essere infinito di ordine superiore al primo, giacché le r_i sono maggiori di r.

Si deduce da ciò facilmente che l'asse reale dei tempi deve essere incluso entro le stelle degli elementi incogniti e quindi il problema può ritenersi risoluto cogli sviluppi del MITTAG-LEFFLER.

4. Quando si hanno n punti che si respingono, anziché attrarsi colla legge di NEWTON, l'integrale delle forze vive assume la forma

$$\frac{1}{2}\Sigma_i\, m_i\,(x_i'^2 + y_i'^2 + z_i'^2) + \Sigma_{is}\frac{m_i m_s}{r_{is}} = h,$$

ove m_i denotano le masse dei punti, $x_i\, y_i\, z_i$ le loro coordinate, r_{is} le loro mutue distanze, ed h una costante.

Osservando che nella formula precedente tutti i termini sono positivi, riesce facile concludere che i punti mobili non si incontrano e che le loro velocità si conservano finite, quindi anche in questo caso l'asse reale dei tempi appartiene alle stelle delle funzioni incognite.

(2) Ibid., 13 novembre 1898.

Ma osserviamo che si passerà dalle equazioni del moto, nell'ipotesi delle forze repulsive, a quelle corrispondenti alle forze attrattive trasformando il tempo t in $t\sqrt{-1}$. Con tale trasformazione le componenti delle velocità divengono immaginarie se erano reali e viceversa; però, se in un dato istante erano nulle, tali si conservano dopo la trasformazione. Di qui segue il seguente singolare teorema: Consideriamo il problema degli n corpi nel caso più generale; supponiamo soltanto che i mobili partano con velocità nulla; allora prendendo come centro l'istante iniziale, l'asse reale dei tempi potrà non essere incluso nelle stelle delle coordinate, ma l'asse immaginario vi sarà sempre incluso. In altri termini, gli sviluppi del MITTAG-LEFFLER, anche se non saranno validi per tutti i valori reali del tempo varranno per tutti i valori immaginarii.

5. Per ultimo possiamo notare che gli sviluppi del MITTAG-LEFFLER potranno applicarsi al movimento dei filetti vorticosi rettilinei e paralleli, per le cui equazioni del movimento e i relativi integrali rinviamo alla lezione XX del corso di Meccanica del KIRCHHOFF.

XXXVI.

SOPRA ALCUNE APPLICAZIONI DELLE LEGGI DEL FLUSSO DI ENERGIA MECCANICA NEL MOTO DI CORPI CHE SI ATTRAGGONO COLLA LEGGE DI NEWTON

«Atti Acc. Scienze Torino», vol. XXXIV, 1898–1899, pp. 805–817.

1. In una Nota precedente (*) ho esposto le leggi secondo cui può ammettersi che fluisca la energia meccanica nel caso di un sistema di corpi qualsiasi che si attraggono colla legge di NEWTON.

Le leggi trovate assumono una forma più semplice allorché si considera il flusso di energia in quella regione dello spazio ove non si trova la materia attraente, anziché nella regione da essa occupata.

Ed infatti si comprende che nella prima regione il flusso di energia non è perturbato dal variare della energia cinetica e di quella elastica, le quali forme di energia sono localizzate negli elementi di spazio ove trovasi la materia attraente.

Nel dare alcune applicazioni delle leggi trovate noi ci occuperemo in questa Nota del flusso di energia nello spazio ove non si trova la materia attraente ed esamineremo alcuni casi particolari molto semplici. Ci siamo a bella posta limitati ai casi più elementari onde dare un'idea il più possibile chiara dei risultati a cui si giunge; ed a tal fine abbiamo aggiunto alcuni disegni i quali servono a rendere intuitivo e facilmente visibile quanto trovasi racchiuso nelle formule.

Abbiamo dapprima dati alcuni teoremi sul flusso di energia nel caso di n sfere che si attraggono colla legge di NEWTON (§§ 2, 3, 4). Abbiamo poi considerato il caso di due sole sfere che cadono l'una verso l'altra (§§ 5, 6) e il caso del moto non perturbato quando sia trascurabile l'eccentricità dell'orbita (§ 7). Finalmente (§ 8) abbiamo studiato l'ordine di infinitesimo del flusso a distanza infinita.

2. Supponiamo che i corpi mobili siano n sfere simmetricamente costituite rispetto ai loro centri e che si conservino tali molto approssimativamente durante tutto il movimento.

Denotando con $m_1, m_2, \cdots, m_n$ le loro masse e con $r_1, r_2, \cdots, r_n$ le distanze dei loro centri da un punto qualsiasi esterno ad esse, la funzione

(*) Adunanza del 26 febbraio 1899. [In questo vol.: XXXIV, pp. 583–590].

potenziale newtoniana di queste sfere sarà

$$U = \sum_{1}^{n}{}_i \frac{m_i}{r_i} + C$$

essendo C una costante arbitraria. Noi supporremo in tutto ciò che segue questa costante nulla, ossia prenderemo

$$U = \sum_{1}^{n}{}_i \frac{m_i}{r_i}$$

il che equivale a supporre U infinitesima a distanza infinita. È quindi da notare che i risultati seguenti sono relativi a questa ipotesi.

Siano ξ_i, η_i, ζ_i. le coordinate del centro della sfera m_i; x, y, z le coordinate del punto potenziato.

Se supponiamo le sfere mobili ed il punto potenziato fisso, avremo

$$\frac{dU}{dt} = \sum_{1}^{\nu}{}_i \frac{m_i \frac{d\xi_i}{dt}(x-\xi_i) + m_i \frac{d\eta_i}{dt}(y-\eta_i) + m_i \frac{d\zeta_i}{dt}(z-\zeta_i)}{r_i^3}.$$

Ponendo:

$$m_i \frac{d\xi_i}{dt} = -A_i \quad , \quad m_i \frac{d\eta_i}{dt} = -B_i \quad , \quad m_i \frac{d\zeta_i}{dt} = -C_i$$

$$\frac{x-\xi_i}{r_i} = \alpha_i \quad , \quad \frac{y-\eta_i}{r_i} = \beta_i \quad , \quad \frac{z-\zeta_i}{r_i} = \gamma_i ,$$

risulterà

$$\frac{dU}{dt} = -\sum_{1}^{n}{}_i \frac{A_i \alpha_i + B_i \beta_i + C_i \gamma_i}{r_i^2} \tag{1}$$

cioè [1] dU/dt sarà la funzione potenziale di tanti elementi magnetici concentrati nei centri delle sfere ed aventi le componenti dei momenti magnetici rispettivamente eguali ad A_i, B_i, C_i.

3. Teniamo ora presente che nello spazio esterno alle sfere, allorché esse sono libere e si muovono sotto l'azione delle loro attrazioni newtoniane, le componenti del flusso di energia sono date da [2]

$$\text{(A)} \qquad \begin{cases} E_x = \dfrac{U}{4\pi} \dfrac{\partial}{\partial x} \dfrac{dU}{dt} \\[2mm] E_y = \dfrac{U}{4\pi} \dfrac{\partial}{\partial y} \dfrac{dU}{dt} \\[2mm] E_z = \dfrac{U}{4\pi} \dfrac{\partial}{\partial z} \dfrac{dU}{dt} \text{ [3]}. \end{cases}$$

(1) BETTI, *Teorica delle forze newtoniane*, p. 293.

(2) Ved. Nota citata, § 10.

(3) Se si attribuisse alla costante C un valore diverso da zero, le E_x, E_y, E_z verrebbero alterate di quantità e_x, e_y, e_z, le quali verificherebbero tanto nello spazio esterno

Potremo dunque enunciare il teorema seguente: *Se più corpi sferici liberi si muovono sotto l'azione delle loro mutue attrazioni newtoniane, le linee di flusso della energia meccanica nello spazio esterno alle masse attraenti coincideranno colle linee di forza magnetiche che si otterrebbero situando al centro di ogni sfera un elemento magnetico il cui momento fosse eguale e contrario alla quantità di moto di ogni sfera.*

4. Il precedente teorema ci dà una prima immagine del flusso di energia; ma possiamo anche ottenerne una migliore ricorrendo ad alcune leggi della idrodinamica.

È noto infatti che se si hanno più sfere mobili immerse in un fluido indefinito senza vortici ed in quiete a distanza infinita, e se i raggi delle sfere sono infinitamente piccoli rispetto alle loro distanze, il potenziale di velocità del fluido sarà eguale (trascurando infinitesimi d'ordine superiore) al potenziale di tanti elementi magnetici supposti situati nei centri delle sfere moltiplicati per la metà dei cubi dei loro raggi (4).

Tenendo dunque presente le formule (1) e (A) avremo che *per ottenere il flusso di energia nel caso considerato basterà supporre sostituita ad ogni corpo mobile una sfera infinitamente piccola e concentrica avente un volume proporzionale alla massa del corpo ed immaginare che in ogni istante tutto lo spazio sia riempito da un fluido incompressibile, senza vortici ed in quiete a distanza infinita, avente per densità* U. *Il flusso di energia sarà proporzionale ed opposto al flusso del fluido indotto dal moto delle sfere infinitesime.*

In particolare se ci vogliamo limitare solo alle direzioni e al verso delle linee di flusso della energia, potremo prescindere dalla densità del fluido e supporlo per esempio omogeneo.

5. Veniamo a specializzare i risultati ottenuti al caso di due sole sfere ed immaginiamo dapprima che esse cadano l'una verso l'altra in virtù della loro mutua attrazione newtoniana.

Pel principio della conservazione del baricentro le quantità di moto delle due sfere saranno eguali ed opposte, quindi, a cagione del teorema del § 3, i momenti degli elementi magnetici che si debbono immaginare situati nei centri delle due sfere, onde ottenere le linee di flusso della energia, saranno eguali ed opposti ed i loro assi coincideranno colla retta dei centri delle sfere. Ne viene dunque che *le linee di flusso dell'energia saranno situate*

che in quello interno alle masse alla equazione solenoidale

$$\frac{\partial e_x}{\partial x} + \frac{\partial e_y}{\partial y} + \frac{\partial e_z}{\partial z} = 0,$$

ossia al flusso se ne sovrapporrebbe un nuovo che non altererebbe la distribuzione della energia. Nello spazio esterno *le linee di flusso* non si altererebbero dando alla costante C un valore diverso da zero; ma il *verso* del flusso verrebbe in tutto o in parte alterato, dando a C un valore negativo.

(4) Cfr. colla mia Nota: *Sopra alcuni problemi di idrodinamica* inserita nel T. XII della ser. 3ª del «Nuovo Cimento». [In queste «Opere»: vol. primo, VI, pp. 100-123].

in piani passanti per la linea dei centri, saranno simmetriche rispetto a questa retta e saranno pure simmetriche rispetto al piano normale alla retta dei centri che divide per metà la loro distanza.

Per calcolare le equazioni delle linee di flusso dell'energia e procedere quindi alla loro effettiva costruzione geometrica, prendiamo per asse z la linea dei centri e poniamo l'origine nel baricentro delle due sfere. Chiamiamo m_1 e m_2 le due masse, a_1 e a_2 le distanze dei due centri dall'origine.

La funzione potenziale newtoniana nel punto potenziato x, y, z, sarà

$$U = \frac{m_1}{((z-a_1)^2+u^2)^{1/2}} + \frac{m_2}{((z-a_2)^2+u^2)^{1/2}}$$

essendo $u = \sqrt{x^2+y^2}$.

Quindi

$$\frac{dU}{dt} = \frac{m_1(z-a_1)\frac{da_1}{dt}}{((z-a_1)^2+u^2)^{3/2}} + \frac{m_2(z-a_2)\frac{da_2}{dt}}{((z-a_2)^2+u^2)^{3/2}}.$$

Ma per la conservazione del baricentro

$$m_1\frac{da_1}{dt} + m_2\frac{da_2}{dt} = 0$$

onde, posto

$$m_1\frac{da_1}{dt} = \mu,$$

avremo

$$\frac{dU}{dt} = \mu\left(\frac{z-a_1}{((z-a_1)^2+u^2)^{3/2}} - \frac{z-a_2}{((z-a_2)^2+u^2)^{3/2}}\right)$$

$$= \mu\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{-1}{((z-a_1)^2+u^2)^{1/2}} + \frac{1}{((z-a_2)^2+u^2)^{1/2}}\right).$$

Noi possiamo considerare dU/dt come un potenziale simmetrico. Ne segue che la funzione associata sarà (5)

$$W = \mu u\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{((z-a_1)^2+u^2)^{1/2}} - \frac{1}{((z-a_2)^2+u^2)^{1/2}}\right)$$

$$= \mu\left(\frac{-u^2}{((z-a_1)^2+u^2)^{3/2}} + \frac{u^2}{((z-a_2)^2+u^2)^{3/2}}\right)$$

onde *le equazioni delle linee di flusso dell'energia saranno*

$$(2)\qquad \frac{u^2}{((z-a_1)^2+u^2)^{3/3}} - \frac{u^2}{((z-a_2)^2+u^2)^{3/2}} = \text{cost.},$$

il che prova ancora una volta la simmetria che sopra abbiamo riconosciuto.

(5) Vedi BELTRAMI, *Sulle funzioni associate e più specialmente su quelle della calotta sferica*, § 2. Ser. IV, t. IV, delle «Memorie dell'Accad. delle Scienze dell'Ist. di Bologna».

6. Volendo effettivamente tracciare queste linee di flusso basterà che noi consideriamo quelle giacenti in un piano passante per l'asse z, nel quale possiamo considerare u e z come coordinate cartesiane.

Ponendo

$$r_1 = ((z - a_1)^2 + u^2)^{1/2} \quad , \quad r_2 = ((z - a_2)^2 + u^2)^{1/2}$$

potremo scrivere la (2)

$$\frac{u^2}{r_1^3} - \frac{u^2}{r_2^3} = \text{cost.}$$

Siano A_1 e A_2 (fig. 1) i due centri ed M un punto qualunque. Posto $MA_1 = r_1$, $MA_2 = r_2$, $M\widehat{A_1}A_2 = \theta_1$, $M\widehat{A_2}A_1 = \theta_2$, avremo

$$\frac{u^2}{r_1^3} - \frac{u^2}{r_2^3} = \frac{\operatorname{sen}^2\theta_1}{r_1} - \frac{\operatorname{sen}^2\theta_2}{r_2}.$$

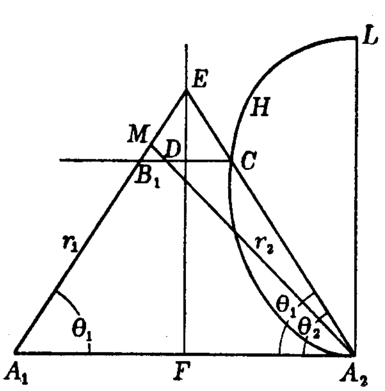


Fig. 1.

Immaginiamo tracciata la curva A_2 HL tale che ogni raggio vettore r che esce da A_2 incontri la curva ad una distanza eguale al quadrato del seno dell'angolo θ che il raggio vettore forma con $A_2 A_1$, la curva cioè che ha per equazione

$$r = \operatorname{sen}^2\theta.$$

Prolunghiamo A_1M finché non incontri in E la FE perpendicolare nel mezzo di A_1A_2. Tiriamo EA_2 ed immaginiamo che A_2M e A_2E incontrino rispettivamente la curva in B_2 e C. Per questo punto conduciamo CB_1 parallelo a A_2A_1 che incontra A_1M e A_2M rispettivamente in B_1 e D. Avremo

$$\frac{B_2D}{A_2M} = \frac{A_2D - A_2B_2}{A_2M} = \frac{A_2D}{A_2M} - \frac{A_2B_2}{A_2M} = \frac{A_1B_1}{A_1M} - \frac{A_2B_2}{A_2M} = \frac{A_2C}{A_1M} - \frac{A_2B_2}{A_2M}.$$

Ma

$$A_2C = \operatorname{sen}^2\theta_1 \quad , \quad A_2B_2 = \operatorname{sen}^2\theta_2$$

quindi

$$\frac{B_2D}{A_2M} = \frac{\operatorname{sen}^2\theta_1}{r_1} - \frac{\operatorname{sen}^2\theta_2}{r_2}.$$

Una linea qualunque di flusso dell'energia sarà dunque il luogo dei punti M *pei quali il rapporto* B_2D/A_2M *è costante.*

La costruzione di questo luogo si ottiene molto facilmente cambiando la direzione del raggio vettore A_1M, mentre con un compasso di proporzione in cui si conserva costante la riduzione e con una squadra che si fa girare attorno ad A_2 si cerca con tentativi successivi di mantenere costante il rapporto B_2D/A_2M.

È in questo modo che nella fig. 2 sono state costruite effettivamente alcune linee di flusso dell'energia nelle quali ricorrendo al teorema del § 4 è stato anche indicato con delle freccie il verso secondo cui il flusso stesso ha luogo.

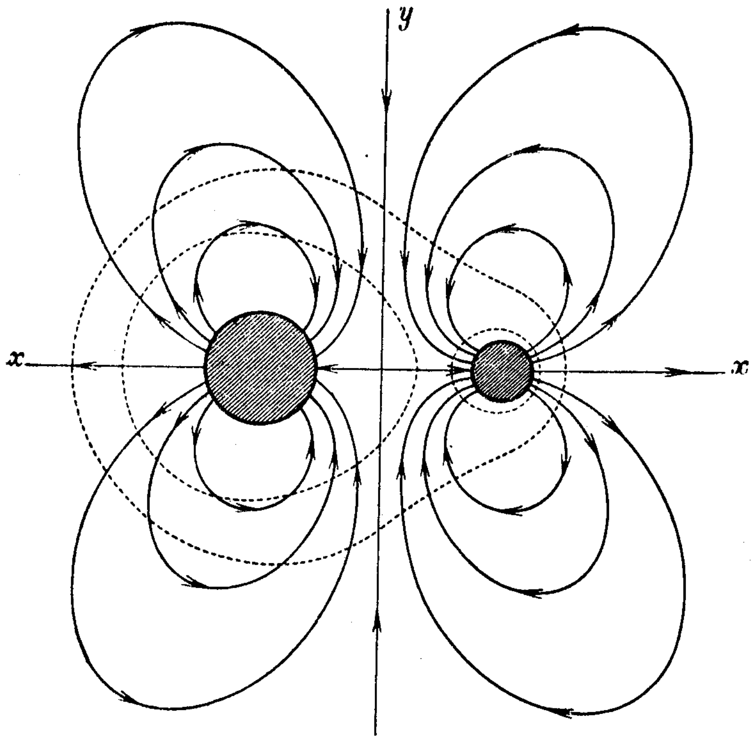


Fig. 2. - Linee di flusso dell'energia nel caso di due sfere che cadono l'una sull'altra per la gravitazione universale.

La figura rappresenta le sezioni delle due sfere di masse 1 e 8 con un piano passante pei centri. Le linee continue munite di frecce rappresentano le linee ed il verso secondo cui fluisce la energia. - Le linee tratteggiate rappresentano profili di superficie di livello, attraverso le quali la quantità di energia che entra è eguale a quella che esce.

7. Consideriamo ora il caso di due sfere che si attraggano colla legge di NEWTON e si muovano in modo tale che siano trascurabili le eccentricità delle orbite.

Poniamo l'origine O nel baricentro e prendiamo per piano xy il piano invariabile. Denotiamo con m_1 e m_2 le due masse, con ρ_1 e ρ_2 le distanze costanti dei centri P ed S delle due sfere dall'origine, con θ l'angolo che il raggio vettore SP forma coll'asse x. Chiamiamo R, ψ, φ le coordinate polari del punto potenziato M, cioè poniamo

$$x = \mathrm{R} \cos \psi \cos \varphi$$

$$y = \mathrm{R} \cos \psi \operatorname{sen} \varphi$$

$$z = \mathrm{R} \operatorname{sen} \psi.$$

La funzione potenziale sarà

$$U = \frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2}$$

ove

$$r_1 = \sqrt{\rho_1^2 + R^2 - 2\,R\rho_1 \cos\psi \cos(\varphi - \theta)}$$

$$r_2 = \sqrt{\rho_2^2 + R^2 + 2\,R\rho_2 \cos\psi \cos(\varphi - \theta)}$$

onde

$$\frac{dU}{dt} = \left(\frac{m_1\rho_1}{r_1^3} - \frac{m_2\rho_2}{r_2^3}\right) R \cos\psi \,\mathrm{sen}\,(\varphi - \theta)\,\frac{d\theta}{dt}\,.$$

Ma pel principio della conservazione del baricentro

$$m_1\rho_1 = m_2\rho_2\,,$$

quindi

$$\frac{dU}{dt} = \left(\frac{1}{r_1^3} - \frac{1}{r_2^3}\right) R\cos\psi\,\mathrm{sen}\,(\varphi - \theta)\cdot m_1\rho_1\,\frac{d\theta}{dt}\,.$$

Se supponiamo R molto grande rispetto a ρ_1 e ρ_2, e ψ discosto da $\pi/2$ potremo prendere approssimativamente

$$\frac{1}{r_1^3} - \frac{1}{r_2^3} = (\rho_1 + \rho_2)\,\frac{3\,R\cos(\varphi - \theta)\cos\psi}{R^5}\,,$$

e per conseguenza

$$\frac{dU}{dt} = \frac{3\,R^2\cos(\varphi-\theta)\,\mathrm{sen}\,(\varphi-\theta)\cos^2\psi}{R^5}\,m_1\rho_1(\rho_1+\rho_2)\,\frac{d\theta}{dt}\,.$$

Ora pel principio della conservazione delle aree

$$m_1\rho_1(\rho_1+\rho_2)\frac{d\theta}{dt} = (m_1\rho_1^2 + m_2\rho_2^2)\frac{d\theta}{dt} = 2\,C,$$

denotando con C la costante delle aree. Avremo dunque

$$\frac{dU}{dt} = 6\,C\,\frac{R^2\cos(\varphi-\theta)\,\mathrm{sen}\,(\varphi-\theta)\cos^2\psi}{R^5} = 6\,C\,\frac{(x\cos\theta + y\,\mathrm{sen}\,\theta)(y\cos\theta - x\,\mathrm{sen}\,\theta)}{R^5}\,.$$

Da cui segue

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{dU}{dt} = 6\,C\,\frac{\mathrm{sen}\,(\varphi - 2\,\theta)\cos\psi}{R^4} - 15\,C\,\frac{\mathrm{sen}\,(2\,\varphi - 2\,\theta)\cos^2\psi}{R^4}\,\frac{x}{R}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{dU}{dt} = 6\,C\,\frac{\cos(\varphi - 2\,\theta)\cos\psi}{R^4} - 15\,C\,\frac{\mathrm{sen}\,(2\,\varphi - 2\,\theta)\cos^2\psi}{R^4}\,\frac{y}{R}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\frac{dU}{dt} = \qquad - 15\,C\,\frac{\mathrm{sen}\,(2\,\varphi - 2\,\theta)\cos^2\psi}{R^4}\,\frac{z}{R}\,.$$

Prendendo dunque approssimativamente

$$U = \frac{m_1 + m_2}{R}\,,$$

le componenti del flusso di energia saranno

$$
(\mathrm{B}) \qquad \begin{cases}
\mathrm{E}_x = \dfrac{3\,\mathrm{C}\,(m_1 + m_2)\cos\psi}{2\,\pi\mathrm{R}^5}\left(\operatorname{sen}(\varphi - 2\,\theta) - \dfrac{5}{2}\cos\psi\,\operatorname{sen}(2\,\varphi - 2\,\theta)\dfrac{x}{\mathrm{R}}\right) \\
\mathrm{E}_y = \dfrac{3\,\mathrm{C}\,(m_1 + m_2)\cos\psi}{2\,\pi\mathrm{R}^5}\left(\cos(\varphi - 2\,\theta) - \dfrac{5}{2}\cos\psi\,\operatorname{sen}(2\,\varphi - 2\,\theta)\dfrac{y}{\mathrm{R}}\right) \\
\mathrm{E}_z = \dfrac{3\,\mathrm{C}\,(m_1 + m_2)\cos\psi}{2\,\pi\mathrm{R}^5}\left(-\dfrac{5}{2}\cos\psi\,\operatorname{sen}(2\,\varphi - 2\,\theta)\dfrac{z}{\mathrm{R}}\right).
\end{cases}
$$

Posto:

$$
\frac{3\,\mathrm{C}\,(m_1 + m_2)\cos\psi}{2\,\pi\mathrm{R}^5} = \mathrm{H}' \quad , \quad \frac{5}{2}\mathrm{H}'\cos\psi = \mathrm{H}'',
$$

potremo decomporre il vettore avente per componenti E_x, E_y, E_z in due vettori E′, E″ aventi rispettivamente per componenti:

$$
\mathrm{E}'_x = \mathrm{H}'\operatorname{sen}(\varphi - 2\,\theta) \quad , \quad \mathrm{E}'_y = \mathrm{H}'\cos(\varphi - 2\,\theta) \quad , \quad \mathrm{E}'_z = 0
$$

$$
\mathrm{E}''_x = \mathrm{H}''\operatorname{sen}(2\,\theta - 2\,\varphi)\frac{x}{\mathrm{R}} \quad , \quad \mathrm{E}''_y = \mathrm{H}''\operatorname{sen}(2\,\theta - 2\,\varphi)\frac{y}{\mathrm{R}},
$$

$$
\mathrm{E}''_z = \mathrm{H}''\operatorname{sen}(2\,\theta - 2\,\varphi)\frac{z}{\mathrm{R}}.
$$

Prendiamo l'origine dei vettori E′ ed E″ in M. Il primo di essi giacerà costantemente in un piano parallelo ad xy, avrà la grandezza costante H′ e ruoterà intorno ad M colla velocità angolare $2\,d\theta/dt$, cioè con velocità doppia di quella con cui ruota il vettore SP, e nello stesso verso di questo.

Inoltre quando $\theta = \varphi$, oppure $\theta = \pi + \varphi$ i due vettori E′ ed SP saranno fra loro ortogonali.

Il secondo vettore E″ avrà costantemente la direzione OM e cambierà armonicamente di grandezza e di verso con il periodo stesso con cui avviene la rotazione di E′. Esso sarà nullo quando $\theta = \varphi$, oppure $\theta = \pi + \varphi$.

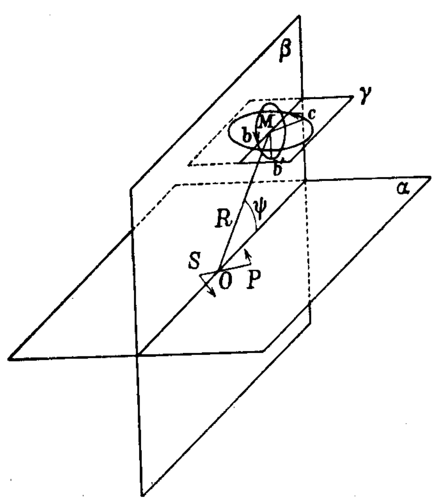


Fig. 3.

Come è facile riconoscere, potremo quindi riguardare E″ come risultante di due vettori di grandezza costante eguali ad H″/2 ruotanti in verso opposto in un piano passante per OM. Questo piano potrà prendersi il piano normale ad xy condotto per OM.

Dalle formule (B) può dunque dedursi la legge seguente del flusso di energia in un punto M qualunque dello spazio tale che R sia grande rispetto a ρ_1 e ρ_2, mentre ψ sia sufficientemente discosto da $\pi/2$ (ved. fig. 3).

Conduciamo un piano β *per* MO *normale al piano invariabile* α, *ed un piano* γ *parallelo al piano invariabile. Il flusso di energia in* M *potrà considerarsi come risultante di tre vettori di grandezza costante di cui due eguali*

Mb, Mb', *ruotano in senso inverso nel piano* β *con velocità angolare doppia di quella con cui* P *ed* S *ruotano intorno ad* O, *mantenendosi simmetrici rispetto ad* OM, *mentre uno* Mc *ruota colla stessa velocità angolare degli altri due vettori nel piano* γ *nel verso secondo cui ruota la retta* PS.

I tre vettori sono normali ad OM *ogniqualvolta i punti* P *ed* S *attraversano il piano* β.

La grandezza del vettore Mc *è in ragione inversa della quinta potenza della distanza* OM *ed in ragione diretta del coseno dell'angolo* ψ *che* OM *forma col piano invariabile, mentre il rapporto dei vettori* Mb *e* Mb' *a* Mc *è* $\frac{5}{4}\cos\psi$.

8. La legge che il flusso di energia è a distanza infinita infinitesimo del 5° ordine rispetto alla distanza dalla origine fissa, vale in tutti i casi ed è facile ottenere, nello sviluppo delle componenti del flusso di energia per le potenze dell'inversa della distanza dall'origine, le parti del 5° ordine.

Riprendiamo a tal fine le notazioni dell'Art. 2, e sviluppiamo $\partial U/\partial x$ per le potenze di $1/R$, denotando con R la distanza del punto potenziato dall'origine, che supporremo essere il baricentro del sistema. Se tralasciamo i termini di grado superiore al 2° in ξ_i, η_i, ζ_i, e osserviamo che i termini di 1° grado si annullano, perché $\Sigma m_i \xi_i = \Sigma m_i \eta_i = \Sigma m_i \zeta_i = 0$, otterremo l'espressione:

$$(3) \qquad -\frac{M\alpha}{R^2} + \frac{3}{R^4}\sum_1^n{}_i\, m_i \{\xi_i(\alpha\xi_i + \beta\eta_i + \gamma\zeta_i) + \frac{\alpha}{2}[(\xi_i^2 + \eta_i^2 + \zeta_i^2) - 5(\alpha\xi_i + \beta\eta_i + \gamma\zeta_i)^2]\}$$

ove:

$$\alpha = \frac{x}{R} \quad , \quad \beta = \frac{y}{R} \quad , \quad \gamma = \frac{z}{R} \quad \text{e} \quad M = \sum_1^n{}_i\, m_i .$$

Quanto ad U la sua parte di primo ordine sarà M/R, quindi derivando la (3) rispetto a t, e moltiplicandola per $M/4\pi R$, avremo subito la parte del 5° ordine di E_x (vedi form. (A)) ed in modo analogo si otterranno le parti del 5° ordine di E_y, E_z, onde esse saranno espresse dalle formule seguenti:

$$(C) \quad \begin{cases} \dfrac{3M}{4\pi R^5}\dfrac{d}{dt}\sum_1^n{}_i\, m_i\{\xi_i(\alpha\xi_i + \beta\eta_i + \gamma\zeta_i) + \dfrac{\alpha}{2}[(\xi_i^2 + \eta_i^2 + \zeta_i^2) - 5(\alpha\zeta_i + \beta\eta_i + \gamma\zeta_i)^2]\} \\ \dfrac{3M}{4\pi R^5}\dfrac{d}{dt}\sum_1^n{}_i\, m_i\{\eta_i(\alpha\xi_i + \beta\eta_i + \gamma\zeta_i) + \dfrac{\beta}{2}[(\xi_i^2 + \eta_i^2 + \zeta_i^2) - 5(\alpha\xi_i + \beta\eta_i + \gamma\zeta_i)^2]\} \\ \dfrac{3M}{4\pi R^5}\dfrac{d}{dt}\sum_1^n{}_i\, m_i\{\zeta_i(\alpha\xi_i + \beta\eta_i + \gamma\zeta_i) + \dfrac{\gamma}{2}[(\xi_i^2 + \eta_i^2 + \zeta_i^2) - 5(\alpha\xi_i + \beta\eta_i + \gamma\zeta_i)^2]\}. \end{cases}$$

Da queste formule potrebbero anche facilmente ricavarsi le (B).

XXXVII.

SUL FLUSSO DI ENERGIA MECCANICA (*)

«Nuovo Cimento», ser. 4, vol. X, 1899, pp. 337-359.

Mi permetto di tener parola in questa riunione della nostra Società di uno studio che ha formato il soggetto di alcune mie ricerche in questo anno, cioè della propagazione e del flusso della energia meccanica.

Io prendo la libertà di intrattenere sopra esso i miei Colleghi non tanto per render loro conto del lieve contributo che ho apportato alla questione, quanto per far conoscere e divulgare la questione stessa, la quale, sebbene abbia formato l'oggetto di vari studi di più autori, pure è ben lungi dall'essere esaurita; e per le sue applicazioni, come per la sua importanza filosofica, è degna di formar l'oggetto di svariate ricerche e di profonde meditazioni: onde m'auguro che le poche parole che dirò possano eccitare altri ad occuparsi di questo argomento.

È evidentemente inutile che io ricordi qui che cosa sia il principio della conservazione dell'energia, quale il suo significato, o che io rilevi la sua enorme importanza in ogni ramo delle scienze fisiche e naturali. È pure inutile che io ricordi le difficoltà e le opposizioni che ha incontrato dapprima, e la critica sagace a cui fu sottomesso anche recentemente. Critica utile che ha rivelato la portata ed il vero significato di questo principio, il quale ha preso nella scienza il suo posto accanto a quello della conservazione della materia.

Così la materia come la energia si conservano nelle loro varie trasformazioni.

Ma al principio della conservazione dell'energia enunciato nella sua forma primitiva è venuto recentemente a sovrapporsene un altro, o per meglio dire il principio stesso è stato completato e la sua analogia col principio della conservazione della materia è divenuta in tal modo più stretta.

Tutti noi sentiamo continuamente dire che l'energia è qualche cosa che si acquista e che si distribuisce al pari delle varie sostanze. È naturale quindi che sia sorto il concetto che la energia debba essere, come la materia, localizzata in certe parti piuttostoché in certe altre dello spazio. Questo nuovo principio di cui parlo è quello che prende il nome di *principio della localiz-*

(*) Conferenza letta in Como nella Seduta del 21 settembre 1899 della Società Fisica Italiana.

zazione dell'energia e ad esso si associa lo studio della maniera di cambiar luogo dell'energia, ossia del muoversi di essa, o, come si dice ordinariamente, del *flusso dell'energia*, giacché si ammette, al pari che per la materia, che la energia non possa sparire da una data regione dello spazio per apparire in un'altra, senza avere attraversato delle regioni intermedie. Precisamente il trasporto della energia avviene con continuità come il moto della materia.

Così, quando la energia calorifica solare passa dal sole alla terra, essa deve attraversare le regioni intermedie e quindi deve in questo passaggio localizzarsi successivamente nello spazio interposto fra l'astro del giorno ed il nostro pianeta.

Fu nel 1884 che il fisico inglese POYNTING pubblicò nelle *Phylosophical Transactions* di Londra la sua Memoria sul moto dell'energia nel campo elettromagnetico. Essa segna una data memorabile, giacché sotto una forma estremamente semplice egli espresse la legge con cui può ammettersi che l'energia elettromagnetica fluisca.

Le idee di FARADAY e di MAXWELL rovesciavano i vecchi concepimenti che facevano avvenire i fenomeni elettrici nei conduttori e ne trasportavano la sede nel dielettrico. Ora è nel dielettrico che, secondo la legge di POYNTING, la energia fluisce in ogni punto in senso normale alla forza elettrica ed a quella magnetica.

Non starò ad approfondire questo concetto ormai ben noto ad ogni fisico; non posso però tralasciare di ricordare a questo proposito la lucida e profonda esposizione di esso e di tutte le questioni affini che formò l'oggetto di uno splendido discorso inaugurale all'Accademia dei Lincei dell'illustre e compianto nostro collega FERRARIS.

Ma lo studio del flusso di energia non poteva mantenersi ristretto ai soli fenomeni elettromagnetici. Il WIEN in un lavoro del maggiore interesse che venne inserito negli « Annali » di WIEDEMANN ha trattato la questione in maniera sistematica, seguendo il localizzarsi ed il muoversi della energia non solo nel caso di POYNTING, ma in quelli della elasticità, della idrodinamica e del calore.

Un caso però era lasciato fuori; anzi ritenuto come non suscettibile di esser trattato: quello delle forze newtoniane e dei sistemi discontinui. Consideriamo, per fissare le idee, il sistema solare come sottratto ad azioni esterne. Si ha in questo caso un moto di materia consistente nel movimento degli astri che lo costituiscono i quali subiscono nel tempo stesso delle alterazioni nella loro costituzione, mentre le forze attrattive che agiscono su di essi variano in ogni istante.

Il sistema quindi considerato è discontinuo e le diverse parti hanno stato d'aggregazione diverso.

Alcuni corpi, o parti dei corpi costituenti il sistema, sono solidi, altri liquidi ed altri aeriformi. Alcuni di questi si trovano a contatto fra loro, altri possono concepirsi separati da porzioni di spazio non riempito di materia. La densità della distribuzione di materia è per conseguenza discontinua, come le velocità dei punti possono essere discontinue lungo le superficie che formano i limiti di separazione delle varie parti fra loro eterogenee del sistema. Le forze agenti sono le forze newtoniane di attrazione fra i vari elementi di materia e le forze elastiche interne.

È possibile stabilire in questo caso delle leggi atte a rappresentare come fluisce l'energia meccanica corrispondente in tutto lo spazio, ammesso che essa non si trasformi in altre energie e per conseguenza si conservi costante?

È fuor di dubbio che il caso esaminato è così fondamentale che il sapere se è possibile dare o no una risposta alla precedente domanda è una questione che è necessario affrontare. Se alla domanda che ci siamo fatta fosse impossibile dare una risposta, ciò costituirebbe non solo una enorme lacuna, ma noi saremmo costretti a cambiare totalmente il modo di concepire l'andamento di tutti i fenomeni della natura, ossia l'intero sistema di filosofia naturale che si basa sul concetto di trasporto dell'energia dovrebbe essere abbandonato.

Ci proponiamo ora di provare come la domanda fatta sia suscettibile di una risposta affermativa e nello stesso tempo indicheremo quali sono le difficoltà che si incontrano. Mostreremo come sia possibile esprimere il flusso di energia in ogni punto mediante il potenziale, la variazione della forza newtoniana col tempo, la velocità del moto della materia e le tensioni che si esercitano in quel punto, con *elementi* cioè *relativi tutti al solo punto considerato.*

Prima ancora di attaccare il problema è necessario peraltro fare una osservazione preliminare sopra un punto che abbiamo lasciato finora da parte, sebbene si riferisca alla questione del flusso di energia esaminata in tutta la sua generalità.

È la questione di trovare il flusso di energia corrispondente ad un fenomeno naturale qualsiasi una questione determinata?

È facile riconoscere che, anche dopo ammessa una legge che localizzi l'energia, il problema è di per sé indeterminato. Infatti immaginiamo, per esempio, un flusso qualsiasi il quale non alteri in ogni luogo la quantità della materia fluente (come sarebbe il flusso di un fluido incompressibile) e riguardiamolo come un flusso di energia. Ciò premesso supponiamo di aver determinato il flusso di energia corrispondente ad un certo fenomeno.

Se lo componiamo con quello precedente, evidentemente il nuovo flusso potrà sempre farsi corrispondere allo stesso fenomeno. Vediamo dunque che, se il problema è suscettibile di esser risoluto, si avranno infinite soluzioni.

Una tale indeterminazione non deve portarci però a ritenere che la soluzione della questione sia illusoria. Una analoga indeterminazione è la sorte di tutte le interpretazioni meccaniche dei fenomeni naturali.

Un'acuta e geniale osservazione del POINCARÉ mostra per esempio che ogni qual volta esiste una spiegazione meccanica di una questione fisica ne sussistono pure infinite altre. Ricordiamo ancora che la soluzione giustamente famosa data dal MAXWELL del problema di determinare le tensioni di un mezzo elastico capaci di spiegare le azioni elettrostatiche non è che una delle infinite soluzioni che la questione stessa comporta. Eppure la indeterminazione di quest'ultima questione, come di quelle di dare dei modelli meccanici dei fenomeni elettrici o calorifici non ha trattenuto dal cercare di risolverle, dal discuterne le soluzioni e, quello che preme di più, non impedì di ottenere delle preziose ed utili conseguenze dalle soluzioni stesse.

D'altra parte per il problema che a noi preme di esaminare possiamo osservare che esso è indeterminato, ma che è sufficiente trovare una soluzione, perché tutte le altre possano immediatamente dedursene; riguardata sotto questo aspetto la questione assume un carattere del tutto positivo.

Sgombrata così la via da questa difficoltà di indole generale, veniamo a discutere più davvicino il nostro problema; quello cioè del flusso di energia in un sistema meccanico analogo al sistema planetario.

La energia meccanica che noi dobbiamo seguire nelle sue varie trasformazioni consta della *energia cinetica*, di quella *elastica* e della *energia potenziale* delle forze newtoniane che agiscono fra le varie parti del sistema. Il localizzare le due prime specie di energia è cosa che non presenta alcuna difficoltà, giacché la forza viva e la energia elastica avranno sede nelle particelle mobili o deformate; ma la difficoltà nasce allorché si deve localizzare la energia potenziale newtoniana.

Sarà sufficiente lo spazio ove si trova la materia attraente, oppure dovremo localizzarla anche esteriormente ad essa?

Possiamo senz'altro rispondere che dovremo attenerci a quest'ultima ipotesi.

È vero che in alcuni casi particolari, come per esempio in quello di due sfere invariabili che cadono l'una sull'altra in virtù della loro attrazione, si potrebbe immaginare distribuita l'energia di posizione entro le due sfere in modo che quella contenuta entro ognuna venisse man mano a trasformarsi in energia cinetica relativa alla sfera stessa. Ma si ingannerebbe chi credesse che ciò fosse suscettibile di essere esteso al caso generale.

Basterebbe esaminare tre anziché due sfere, per convincersi della impossibilità di distribuire la energia potenziale entro di esse dipendentemente dalle loro masse e posizioni in modo che avvenisse entro ogni sfera la trasformazione della energia potenziale in cinetica o viceversa. Infatti, se ciò fosse possibile, dovrebbe esistere una relazione generale fra la velocità di ogni sfera e la sua posizione, relazione che toglierebbe al così detto problema dei tre corpi le sue ben note difficoltà. Ora questa relazione di fatto non esiste.

Volendo dunque abbracciare il sistema più generale è necessario immaginare in tutti i casi distribuita la energia potenziale in tutto lo spazio; anche nelle parti di esso ove non si trova la materia attraente.

Una tal cosa non deve maravigliarci, e tanto meno riescirci nuova; ed infatti che la energia possa trovarsi anche ove si ritiene che la materia non esiste deve pure ammettersi nello studio della energia calorifica e di quella luminosa od elettrica.

Mi sforzerò ora di mostrare in una maniera del tutto elementare come la detta distribuzione di energia possa ottenersi.

La energia potenziale newtoniana si misura sommando tutti gli elementi di massa moltiplicati per la metà del potenziale a cui ciascuno di essi si trova, e attribuendo quindi alla somma il segno negativo.

Supponiamo ora di percorrere un tubo sottilissimo di forza nel verso di questa. Il prodotto della sua sezione per la intensità della forza unitaria (cioè agente sull'unità di massa) si mantiene costante finché il tubo attraversa una regione esterna alle masse; ma se si attraversa una regione ove si trova materia, il detto prodotto decresce proporzionalmente alla massa attraversata, per modo che prese due sezioni vicinissime (fig. 1) ω_1 e ω_2, ove la forza è rispettivamente F_1 e F_2, la differenza $F_2\omega_2 - F_1\omega_1$ è eguale a $-4\pi m$, essendo m la massa contenuta fra ω_1 e ω_2. Dunque se U è il potenziale nel punto medio O, converrà fare la somma dei termini

$$\frac{F_2\omega_2 - F_1\omega_1}{4\pi}\,\frac{U}{2},$$

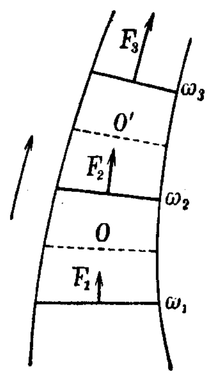


Fig. 1.

estendendola a tutti gli elementi dello spazio.

Prendiamo una sezione ω_3 che disti da ω_2 quanto questa dista da ω_1, ed in essa la forza sia F_3; avremo un nuovo termine

$$\frac{F_3\omega_3 - F_2\omega_2}{4\pi}\,\frac{U'}{2},$$

essendo U' il valore del potenziale nel punto medio O' situato fra ω_2 e ω_3.

Riunendo le due parti contenenti ω_2, otterremo il termine

$$\frac{F_2\omega_2}{8\pi}(U - U').$$

Ora se la distanza piccolissima OO' si chiama δ, avremo che

$$\frac{U' - U}{\delta} = F_2$$

e perciò l'espressione precedente diverrà

$$-\frac{F_2^2}{8\pi}\,\omega_2\,\delta.$$

Se conduciamo per O ed O' le sezioni normali al tubo di forza, $\omega_2\delta$ ci rappresenterà il volume S compreso fra esse, e quindi il termine precedente si scriverà

$$(1) \qquad -\frac{F_2^2}{8\pi} S .$$

La somma di tutti i termini analoghi a questo ci misurerà l'energia potenziale newtoniana.

Vediamo dunque che si ha un modo di localizzare in ogni elemento dello spazio la energia newtoniana dipendentemente soltanto dalla forza che agisce in quel punto, stabilendo che ogni elemento contribuisca per una quantità eguale al proprio volume diviso per -8π e moltiplicato pel quadrato della forza stessa.

Non deve recarci sorpresa se otteniamo il risultato che la quantità con cui ogni elemento di spazio contribuisce nella energia potenziale è negativa.

Siccome noi studiamo il flusso di energia, così ciò che preme di considerare, anziché il valore effettivo della quantità di energia, è la sua variazione. La energia potenziale è d'altra parte individuata a meno di una costante addittiva arbitraria; noi potremmo dunque supporre, per esempio, aggiunta in ogni elemento una quantità costante di energia senza che perciò il flusso di essa venisse alterato. Con una conveniente aggiunta potrebbe concepirsi concentrata in ogni elemento una quantità positiva di energia.

Ci si potrebbe a questo punto proporre una questione: di vedere se a questo modo di distribuzione nello spazio della energia potenziale newtoniana fosse possibile far corrispondere un meccanismo speciale, sostituibile alle azioni a distanza, atto quindi a spiegarci le attrazioni newtoniane. Ma noi possiamo anche prescindere da qualsiasi ipotesi a questo proposito, come del resto si fa ordinariamente allorché si studia la energia distribuita in un campo elettromagnetico. Non già che la questione non presenti un altissimo interesse, ma la sua discussione ci porterebbe troppo lontani. D'altra parte essa offre una grande difficoltà non ancora, a mia conoscenza, completamente superata.

Ciò premesso, per ottenere la legge del flusso di energia sarà necessario considerare un nuovo vettore, oltre la forza unitaria.

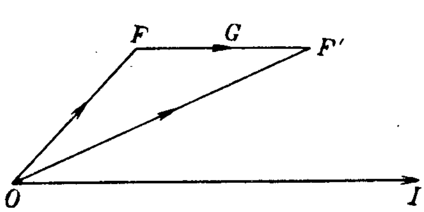


Fig. 2.

Sia F la detta forza agente in O (fig. 2) in un dato istante; dopo decorso un tempo piccolissimo t la forza stessa sarà cambiata in virtù del moto che hanno le varie parti del sistema e sarà divenuta F′. Il vettore FF′ = G ci misurerà il mutamento in grandezza e direzione, ossia l'incremento subìto dalla forza durante il tempo t, e se dividiamo F F′ per t avremo un nuovo vettore che esprimerà *l'incremento unitario della forza* per rapporto al tempo e che potremo tirare a partire dal punto O. Noi lo indicheremo con

$$I = \frac{G}{t}. \tag{2}$$

Possiamo dunque immaginare condotto per ogni punto dello spazio questo vettore I, che sarà diverso da punto a punto, e considerando delle linee aventi per tangente in ogni punto questo vettore otterremo un sistema di linee passanti per tutti i punti dello spazio analoghe alle linee di forza, che potremo chiamare le *linee di incremento di forza*, e mediante le quali potremo costruire, anziché dei tubi di forza, dei *tubi di incremento di forza*. Evidentemente anche per questi tubi il prodotto della sezione per l'incremento unitario di forza sarà costante nelle regioni esterne alle masse, mentre in una parte dello spazio riempita di materia (vedi la fig. 4), prese due sezioni ω', ω'' di un tubo sottilissimo d'incremento di forza, la differenza dei prodotti delle due sezioni per i relativi valori dell'incremento di forza sarà eguale alla quantità di materia μ che penetra nella regione intermedia fra ω' e ω'' per unità di tempo moltiplicata per -4π, cioè

$$I_2\,\omega'' - I_1\,\omega' = -4\,\pi\mu. \tag{3}$$

Stabilito ciò, misuriamo l'incremento subìto in un tempuscolo t dalla quantità di energia potenziale contenuta in un dato elemento di spazio. Basterà perciò che riferendoci alla formula (1) noi calcoliamo l'incremento subìto dal quadrato della forza unitaria nel tempo t. Dal triangolo OFF' (fig. 3) segue che

$$F'^2 - F^2 = 2\,FG\cos(\widehat{FG}) + G^2$$

e, trascurando il secondo termine, che è infinitamente piccolo rispetto al primo, avremo

$$F'^2 - F^2 = 2\,FG\cos(FG) = 2fG,$$

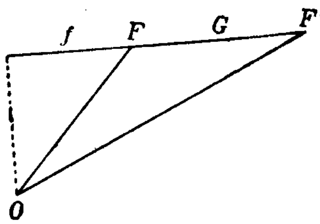


Fig. 3.

chiamando f la proiezione della forza F sopra la direzione G.

Dunque l'incremento subìto nel tempo t dalla quantità di energia potenziale contenuta in un elemento S di volume dello spazio sarà

$$-\frac{1}{4\pi} fG\cdot S$$

e l'incremento unitario e_p per rapporto al tempo si otterrà dividendo per t, e quindi siccome [vedi (2)] $G/t = I$, risulterà

$$e_p = -\frac{1}{4\pi} fI\cdot S.$$

Prendiamo per elemento S una porzione di tubo d'incremento di forza compresa fra due sezioni ortogonali ω' e ω'' situate a una distanza δ piccolissima fra loro. Il volume S sarà il prodotto della sezione media ω per δ, quindi la espressione precedente si scriverà

$$e_p = -\frac{1}{4\pi} f I \omega \delta .$$

Ma $f\delta$ è eguale alla differenza del potenziale U_2 in ω'', e del potenziale U_1 in ω', perciò avremo

$$(4) \qquad e_p = \frac{1}{4\pi}(U_1 - U_2)\, I\omega.$$

Supponiamo ora di trovarci in una regione dello spazio esterna alle masse attraenti. Il prodotto $I\omega$ sarà costante lungo il tubo e in conseguenza potremo sostituirlo con $I_1 \omega'$ o con $I_2 \omega''$ essendo I_1 e I_2 i valori corrispondenti alle due sezioni e otterremo

$$(5) \qquad e_p = \frac{1}{4\pi} U_1 I_1 \omega' - \frac{1}{4\pi} U_2 I_2 \omega''.$$

Potremo dunque immaginare che attraverso ω' entri la quantità di energia $U_1 I_1 \omega'/4\pi$, e attraverso ω'' esca la quantità $U_2 I_2 \omega''/4\pi$, ossia che l'energia fluisca lungo i tubi di incremento di forza con una intensità per unità di area eguale al prodotto dell'incremento unitario di forza pel potenziale diviso per 4π.

Ora, nella regione esterna alle masse, che abbiamo esaminata, non esiste altro che la energia newtoniana. La legge dunque del flusso di energia nella regione stessa è trovata.

Evidentemente il ragionamento fatto non è più valido per una porzione dello spazio ove si trova materia. Ivi esiste, oltre l'energia potenziale, anche quella cinetica e quella elastica; ma come vedremo ora, ripetendo un ragionamento analogo a quello che abbiamo fatto, colle necessarie modificazioni, si trova che il flusso totale di energia è risultante di tre flussi uno dei quali è quello precedentemente trovato e che chiameremo il *primo flusso* e gli altri due (*secondo* e *terzo flusso*) avvengono rispettivamente lungo le linee di moto della materia e lungo altre linee dipendenti dalle tensioni elastiche.

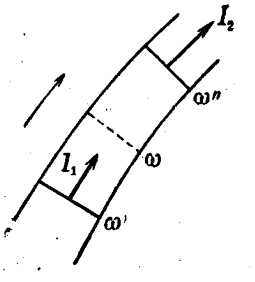


Fig. 4.

Riprendiamo perciò la formula (4); se noi consideriamo una regione ove si trova materia il prodotto $I\omega$ non si conserva più costante lungo il tubo di incremento di forza (ved. fig. 4) onde la espressione (4) non potrà più assumere la forma (5); però sarà facile trovare i termini che si dovranno aggiungere al secondo membro di questa equazione affinché essa possa sussistere. Potremo infatti scrivere

$$e_p = \frac{1}{4\pi} U_1 I_1 \omega' - \frac{1}{4\pi} U_2 I_2 \omega'' - \frac{1}{4\pi} U_1 (I_1 \omega' - I\omega) - \frac{1}{4\pi} U_2 (I\omega - I_2 \omega''),$$

come si può verificare subito osservando che, dopo sviluppate le parentesi, il primo termine si elimina col terzo ed il secondo coll'ultimo.

Se nei due ultimi termini ad U_1 e U_2, sostituiamo il valore medio U del potenziale nello spazio compreso fra ω' e ω'' altereremo l'espressione precedente di quantità trascurabili, giacché U_1 e U_2 sono moltiplicati per quantità infinitamente piccole; per conseguenza si potrà scrivere

$$e_p = \frac{1}{4\pi} U_1 I_1 \omega' - \frac{1}{4\pi} U_2 I_2 \omega'' - \frac{1}{4\pi} U [I_1 \omega' - I\omega + I\omega - I_2 \omega'']$$

ed, eliminando i termini simili entro l'ultime parentesi, avremo

$$e_p = \frac{1}{4\pi} U_1 I_1 \omega' - \frac{1}{4\pi} U_2 I_2 \omega'' - \frac{1}{4\pi} U (I_1 \omega' - I_2 \omega'') .$$

Ma [vedi (3)] $\dfrac{I_1 \omega' - I_2 \omega''}{4\pi} = \mu$, quindi

$$e_p = \frac{1}{4\pi} U_1 I_1 \omega' - \frac{1}{4\pi} U_2 I_2 \omega'' - U\mu .$$

Vale a dire

$$\frac{1}{4\pi} U_1 I_1 \omega' - \frac{1}{4\pi} U_2 I_2 \omega'' = e_p + U\mu .$$

Questa formula prova che quel flusso di energia che abbiamo chiamato il *primo flusso di energia*, allorché attraversa una regione ove si trova la materia, non determina solo la variazione della energia potenziale in ogni elemento, ma lascia ancora un residuo che è misurato dalla quantità $U\mu$, cioè dal valore del potenziale in ogni elemento moltiplicato per l'incremento, di massa relativo all'unità di tempo. Vedremo fra poco come questo residuo venga eliminato dagli altri flussi di energia.

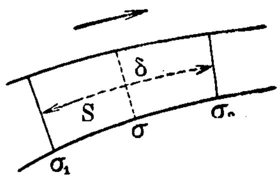


Fig. 5.

Consideriamo ora le *linee di moto* della materia, quelle cioè che hanno in ogni punto per tangente la velocità della particella che attraversa quel punto ed immaginiamo tracciata una porzione S di un tubo sottilissimo formato con queste linee (*tubo di movimento*) compresa fra due sezioni ortogonali vicinissime σ_1 e σ_2 (fig. 5).

L'incremento E_c che subisce in un tempuscolo t la energia cinetica della materia contenuta in S verrà data dalla forza viva della materia che penetra attraverso la sezione σ_1, diminuita di quella che esce attraverso la sezione σ_2, e finalmente dal lavoro eseguito dalle forze che agiscono sugli elementi di materia contenuti in S.

Se chiamiamo ρ_1 e V_1 la densità e la velocità della materia in σ_1, e ρ_2 e V_2 le analoghe quantità in σ_2, la quantità di materia, che penetra nel tempo t attraverso σ_1, sarà $\rho_1 V_1 t \sigma_1$. Quindi la quantità di energia cinetica che entra attraverso quest'area sarà

$$\frac{1}{2} (\rho_1 V_1 t \sigma_1) V_1^2$$

e analogamente quella che esce attraverso σ_2 sarà

$$\frac{1}{2}(\rho_2 V_2 t \sigma_2) V_2^2 .$$

Per calcolare il lavoro L_n eseguito dalle forze newtoniane agenti sull'elemento S basterà moltiplicare la massa dell'elemento ρS, indicando con ρ la densità media, per la componente φ della forza unitaria presa nel verso del movimento (ossia nel verso del tubo) e pel cammino percorso nel tempo t cioè Vt, essendo V la velocità media.

Ma φ si misurerà col rapporto $(U_2 - U_1)/\delta$, chiamando U_2 e U_1 i valori del potenziale in σ_2 e σ_1 e δ la loro distanza; perciò il detto lavoro si scriverà

$$L_n = \rho S \cdot \frac{U_2 - U_1}{\delta} V t .$$

Ora, se con σ denotiamo la sezione media, S sarà eguale a $\sigma\delta$ e la espressione precedente diverrà

$$L_n = \rho\sigma (U_2 - U_1) V t .$$

A questo lavoro dovremo aggiungere quello delle forze elastiche, il quale sarà misurato dalla diminuzione $-E_e$ della energia elastica nell'elemento S e dal lavoro L_e eseguito dalle tensioni che agiscono sulla superficie che limita l'elemento stesso. Dunque il lavoro totale eseguito da tutte le forze che agiscono sugli elementi di materia contenuti in S sarà

$$L_n - E_e + L_e$$

e quindi, per ciò che abbiamo detto precedentemente l'incremento che subisce nel tempo t la energia cinetica della materia contenuta nello spazio S si esprimerà colla formula

$$E_c = \frac{1}{2}(\rho_1 V_1 t \sigma_1) V_1^2 - \frac{1}{2}(\rho_2 V_2 t \sigma_2) V_2^2 + [L_n - E_e + L_e] . \tag{6}$$

Ora la espressione $L_n = \rho\sigma (U_2 - U_1) V t$ è suscettibile di una trasformazione analoga ad una fatta precedentemente. Possiamo infatti scriverla

$$\rho_2 \sigma_2 U_2 V_2 t - \rho_1 \sigma_1 U_1 V_1 t + (\rho_1 \sigma_1 V_1 t - \rho\sigma V t) U_1 + (\rho\sigma V t - \rho_2 \sigma_2 V_2 t) U_2$$

e se negli ultimi due termini poniamo il valore medio U del potenziale in luogo di U_1 e U_2, alterando così l'espressione di quantità trascurabili, essa diverrà

$$\rho_1 \sigma_2 U_2 V_2 t - \rho_1 \sigma_1 U_1 V_1 t + U (\rho_1 \sigma_1 V_1 t - \rho_2 \sigma_2 V_2 t). \tag{7}$$

Ma poco fa abbiamo detto che $\rho_1 \sigma_1 V_1 t$ e $\rho_2 \sigma_2 V_2 t$ rappresentano le quantità di materia che rispettivamente entrano in S ed escono da questo spazio nel tempo t, attraverso σ_1 e σ_2, dunque la differenza $\rho_1 \sigma_1 V_1 t -$ $- \rho_2 \sigma_2 V_2 t$ misura l'incremento di massa nel tempo stesso. Se quindi μ denota l'incremento di massa relativo all'unità di tempo, la precedente differenza sarà eguale a μt, e l'espressione (7) cioè L_n potrà scriversi

$$\rho_2 \sigma_2 U_2 V_2 t - \rho_1 \sigma_1 V_1 t + U \mu t$$

e, sostituendo nella formula (6) ad L_n questo valore, quindi raccogliendo nel secondo membro i termini che contengono σ_1 e σ_2, avremo

$$E_c + E_e - U\mu t - L_c = \sigma_1 t\left(\frac{1}{2}V_1^2 - U_1\right)V_1\rho_1 - \sigma_2 t\left(\frac{1}{2}V_2^2 - U_2\right)V_2\rho_2 .$$

Dividendo per t e chiamando rispettivamente e_c, e_e gli incrementi unitari (relativamente al tempo) della energia cinetica ed elastica, ossia i rapporti E_c/t, E_e/t la formula precedente diverrà

$$e_c + e_e - U\mu - \frac{L_e}{t} = \sigma_1\left(\frac{1}{2}V_1^2 - U_1\right)V_1\rho_1 - \sigma_2\left(\frac{1}{2}V_2^2 - U_2\right)V_2\rho_2 .$$

Consideriamo ora il *secondo flusso di energia.* Ammetteremo che esso percorra i *tubi di moto* con una intensità (per unità di area) data da

$$\left(\frac{1}{2}V^2 - U\right)V\rho .$$

Evidentemente questo flusso sussisterà solo nelle regioni occupate da materia.

Il secondo membro della equazione precedente misurerà la quantità di energia che, in virtù di questo secondo flusso, entra nell'unità di tempo attraverso σ_1, diminuita di quella che esce da σ_2, onde esaminando il primo membro potremo concludere che il secondo flusso di energia attraversando una regione dello spazio determinerà non solo la somma della variazione e_c della energia cinetica e di quella e_e della energia elastica, ma oltre a ciò darà anche un residuo costituito dai due termini $-U\mu - L_e/t$.

Quindi se componiamo il secondo flusso di energia col primo flusso di energia e teniamo presente che questo ci lascia un residuo $U\mu$, otterremo un flusso che fornirà ad ogni elemento di spazio l'incremento della energia potenziale di quella elastica e di quella cinetica, oltre ad un residuo $-L_e/t$, giacché gli altri due residui $U\mu$ e $-U\mu$ dei due flussi si elimineranno fra loro.

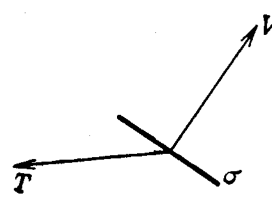


Fig. 6.

Resta ora a provare che anche l'ultimo residuo può eliminarsi considerando un terzo flusso di energia.

In altri termini basterà provare che il lavoro L_e/t delle tensioni (ridotte all'unità di tempo) può considerarsi come equivalente ad un flusso di energia.

A tal fine immaginiamo condotto per ogni punto dello spazio occupato da materia un elemento di piano σ normale alla direzione della velocità V (fig. 6) e consideriamo la tensione unitaria T (ridotta cioè all'unità d'area) che si esercita sopra σ dalla parte opposta a quella secondo la quale la materia si sposta.

Supposto condotto il vettore T per ogni punto e le linee che hanno in ogni punto per tangente T, avremo un sistema di linee analoghe alle linee di forza e di moto che si potranno chiamare le *linee di tensione*, ed in corrispondenza ad esse potremo considerare i *tubi di tensione*.

Esaminiamo una porzione infinitesima S di uno di questi tubi sottilissimi compresa fra le sezioni σ e σ' rispettivamente normali alle direzioni del movimento V e V' (fig. 7).

Le tensioni T e T_1 unitarie esercitantisi sopra σ e σ' dalla parte esterna ad S avranno la direzione del tubo, quindi lateralmente le tensioni τ e τ' dovranno esercitarsi parallelamente a σ e σ' (a meno di inclinazioni trascu-

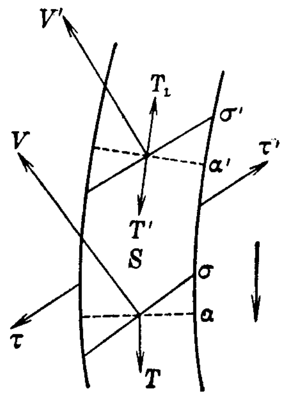


Fig. 7.

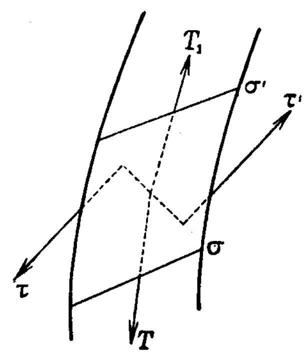


Fig. 8.

rabili), come è indicato nella fig. 7; altrimenti se ciò non fosse (come viene rappresentato nella fig. 8), componendo le tensioni laterali si avrebbe una coppia risultante e quindi le tensioni stesse non potrebbero equilibrare la forza interna che è applicata all'elemento in virtù delle attrazioni a cui esso è soggetto.

Ciò premesso, tenendo conto che la velocità del moto ha luogo normalmente alle sezioni σ e σ', si avrà che le tensioni laterali eseguiranno un lavoro trascurabile, essendo esse sensibilmente normali alla direzione del moto. Il lavoro delle tensioni si ridurrà dunque soltanto a quello eseguito dalle tensioni che si esercitano sopra σ e σ'. Queste sono rispettivamente $T\sigma$ e $T_1\sigma'$; i cammini percorsi dai loro punti d'applicazione in un tempuscolo t, sono Vt e $V't$, essendo V e V' le velocità del moto in σ e σ'; onde il lavoro stesso nel tempo t sarà (vedi fig. 7)

$$(T\sigma)\,(Vt)\cos(\widehat{TV}) + (T_1\sigma')\,(V't)\cos(\widehat{T_1V'}).$$

Prendiamo il vettore T' eguale ed opposto a T_1. Esso rappresenterà la tensione che si esercita dalla parte opposta su σ', cioè dalla parte opposta a quella secondo cui avviene il moto. La espressione precedente diverrà dunque

$$T\sigma\,Vt\cos(\widehat{TV}) - T'\sigma'\,V't\cos(\widehat{T'V'});$$

ma le sezioni α, α' normali al filetto di tensione sono rispettivamente eguali a $-\sigma\cos(TV)$ e a $-\sigma'\cos(T'V')$, quindi essa si scriverà anche

$$T'\alpha'\,V't - T\alpha\,Vt$$

e, riducendo questo lavoro delle tensioni all'unità di tempo otterremo

$$T'\alpha' V' - T\alpha V.$$

Immaginiamo ora un flusso di energia percorrente i tubi di tensione nel loro verso colla intensità TV per unità d'area. Sarà il *terzo flusso di energia* ed esso pure, al pari del secondo, risulterà limitato alle regioni ove si trova la materia.

In virtù di questo terzo flusso, attraverso α' entrerà per unità di tempo la quantità di energia $T'V'\alpha'$, e attraverso α ne escirà $TV\alpha$, onde, a cagione dell'ultima formula trovata, il lavoro unitario (rapporto al tempo) delle tensioni che abbiamo precedentemente rappresentato con L_e/t equivarrà a questo terzo flusso di energia.

Se quindi lo componiamo col *primo* e col *secondo flusso di energia*, il flusso risultante produrrà la variazione della *energia newtoniana*, di quella *cinetica* e di quella *elastica*, ossia della *energia meccanica totale* in ogni elemento.

Riassumendo diremo dunque che il flusso di energia meccanica potrà considerarsi dovuto a tre flussi di energia rispettivamente scorrenti lungo i tubi d'incremento di forza, i tubi di moto ed i tubi di tensione. Il primo percorre l'intero spazio, gli altri due sono ristretti alle regioni occupate da materia.

In queste regioni i tre flussi non ci dànno separatamente le variazioni delle tre specie di energia, newtoniana, cinetica ed elastica; i primi due, oltre a fornirci le variazioni di queste specie di energia, lasciano dei residui, ma questi si eliminano fra loro e col terzo flusso. È in questa eliminazione che si rivela l'intima relazione fra i tre flussi, la funzione che ciascuno di essi compie e la loro ragion d'essere simultanea nelle regioni occupate da materia. Solo nella regione libera di materia, il primo flusso ci dà la variazione di energia newtoniana in ogni elemento.

I risultati ottenuti possono enunciarsi ancora nei termini seguenti.

Il vettore che rappresenta il flusso di energia meccanica in ogni punto è risultante di tre vettori:

1° del vettore I, cioè dell'incremento unitario di forza, moltiplicato per $U/4\pi$, essendo U il potenziale newtoniano;

2° del vettore V che rappresenta la velocità del moto moltiplicato per $\rho(V^2/2 - U)$, essendo ρ la densità della materia;

3° del prodotto della grandezza della velocità V pel vettore T che rappresenta la tensione unitaria elastica, la quale viene esercitata sull'elemento normale alla direzione del moto dalla parte opposta a quella secondo cui la materia si sposta.

Sono queste le leggi fondamentali del flusso di energia nel caso dei sistemi soggetti a forze newtoniane.

L'applicazione delle leggi precedenti conduce a vari risultati che presentano una singolare curiosità ed in certi casi hanno un carattere suggestivo evidente.

Così, se ci poniamo a calcolare la quantità totale di energia che in un dato istante penetra attraverso una superficie di livello esterna alle masse, si trova che essa è nulla, ossia che la quantità di energia che vi entra in ogni istante è eguale a quella che ne esce.

Per dimostrare questa proposizione, basterà osservare che, essendo costante il potenziale sopra una superficie di livello, la quantità di energia che vi penetra durante un tempo brevissimo t si otterrà, in virtù delle precedenti leggi, moltiplicando il valore costante del potenziale per $t/4\pi$ e pel flusso totale di incremento di forza esteso a tutta la superficie di livello. Ma il prodotto di $t/4\pi$ per questo flusso di incremento di forza equivale alla variazione subìta durante il tempo t dal rapporto che si ottiene dividendo il flusso totale di forza esteso a tutta la superficie per 4π. Ora questo rapporto non cambia nel tempo t, perché esso misura la quantità di materia contenuta nell'interno della superficie di livello, e questa quantità di materia si mantiene invariata durante l'intervallo di tempo considerato, essendo per ipotesi la superficie di livello esterna alle masse. Resta dunque provato che la quantità totale di energia penetrata entro la superficie in un tempo brevissimo è nulla.

Possiamo esaminare il caso che i corpi attraentisi siano sferici e si conservino approssimativamente invariati durante tutto il movimento.

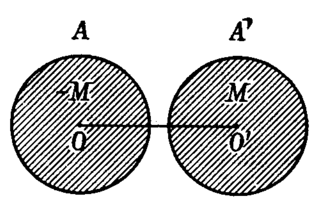


Fig. 9.

È un caso importante, perché si approssima molto a quello dei corpi celesti.

Per avere il flusso di energia bisogna calcolare l'incremento della forza in ogni punto dello spazio. Sia A (fig. 9) una sfera che durante l'intervallo brevissimo di tempo t è giunta in A'. L'attrazione di A equivarrà a quella dell'intera massa M della sfera concentrata nel centro O e quella di A' all'attrazione della stessa massa concentrata in O', onde l'incremento di forza, ossia la differenza fra le due attrazioni, equivarrà alla forza d'attrazione che eserciterebbe la massa M in O' e la massa $-M$ in O.

Ora l'azione di queste due masse M e $-M$ equivale evidentemente a quella di un elemento magnetico avente la direzione O'O e di momento proporzionale ad M ed allo spostamento (e quindi alla velocità della sfera) sopra l'unità di magnetismo. Perciò possiamo concludere che, se più corpi sferici liberi si muovono sotto l'azione delle loro mutue attrazioni newtoniane, le linee di flusso dell'energia meccanica nello spazio esterno alle masse attraenti coincideranno colle linee di forza magnetiche che si otterrebbero situando al centro d'ogni sfera un elemento magnetico il cui momento fosse eguale e contrario alla quantità di moto d'ogni sfera.

Nel caso di due sfere che cadono l'una sull'altra in virtù della loro mutua attrazione riesce molto facile il farsi un'idea di queste linee di flusso dell'energia. Infatti sia S la prima sfera ed S' l'altra; se immaginiamo nel centro O di S un elemento magnetico il cui asse abbia la direzione O'O, potremo facilmente disegnare le corrispondenti linee di forza situate in un

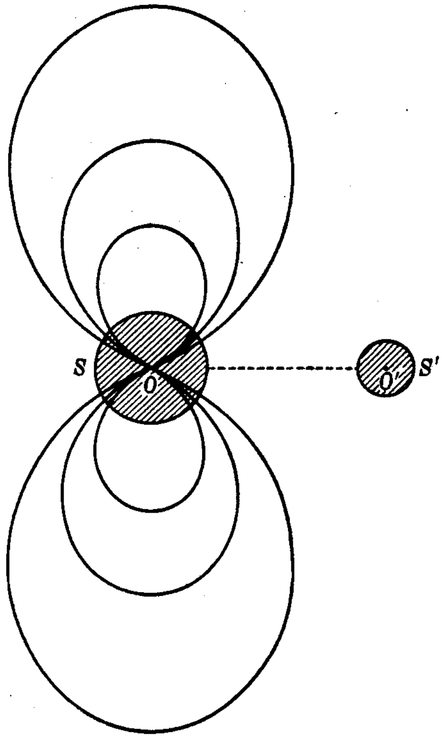


Fig. 10.

piano passante per OO' (fig. 10). Ora noi dobbiamo supporre che anche nel centro O' dell'altra sfera esista un elemento magnetico simmetricamente disposto ed eguale, giacché le quantità di moto delle due sfere debbono essere eguali fra loro.

I sistemi di linee di forza, che si avrebbero se ciascun elemento magnetico esistesse da solo, si perturberanno vicendevomente in virtù della loro coesistenza, nel senso che le linee saranno deformate come se venissero spinte verso il difuori da azioni esercitantisi nella regione intermedia alle due sfere, onde la forma delle linee stesse risulterà come è indicato nella seguente figura 11.

La simmetria sarà mantenuta rapporto ai due assi x e y anche se le masse delle due sfere saranno disuguali fra loro.

Queste linee corrispondono, come abbiamo veduto, alle linee d'incremento delle forze newtoniane, e perciò rappresentano le linee di flusso dell'energia.

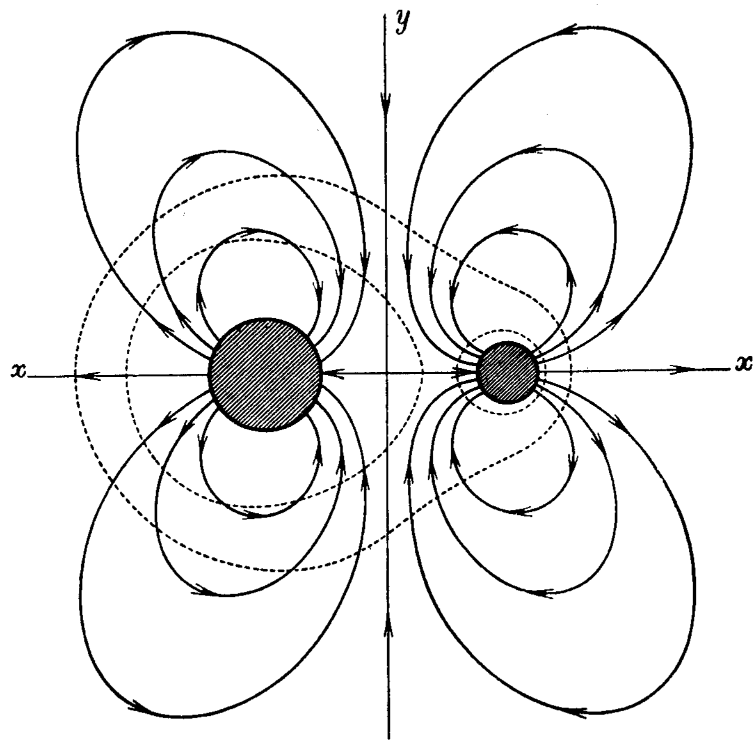


Fig. 11.

La figura rappresenta le sezioni delle due sfere di massa 1 e 8 con un piano passante pei centri. Le linee continue munite di frecce rappresentano le linee ed il verso secondo cui fluisce la energia. – Le linee tratteggiate rappresentano profili di superficie di livello, attraverso le quali la quantità di energia che entra è eguale a quella che esce.

Il caso del moto così detto non perturbato, allorché l'eccentricità delle orbite è trascurabile, ossia il caso di due corpi che si attirano colla legge di NEWTON, girando l'uno attorno all'altro secondo traiettorie circolari, conduce pure a dei risultati semplici, giacché approssimativamente il flusso di energia può ottenersi in ogni punto, sufficientemente lontano dai due corpi, componendo un vettore ruotante in un piano parallelo al piano invariabile con due vettori ruotanti in senso inverso in un piano normale, essendo la velocità di rotazione di ciascuno doppia di quella con cui l'un corpo gira attorno all'altro (vedi la fig. 12).

Ma è inutile il moltiplicare gli esempii: bastano quelli che vennero esposti per dare un'idea delle applicazioni delle leggi trovate.

Dirò solo che molte e molte questioni si affollano ed aspettano una risposta. Ed esse si presentano tanto spontaneamente che è quasi superfluo l'indicarle. I risultati ottenuti non costituiscono, io credo, che un primo passo in una lunga via da percorrere.

Non l'esame dei soli fenomeni meccanici o degli elettrici o calorifici, ciascuno dei quali considerato distintamente, deve costituire lo studio definitivo del problema del flusso di energia; bensì un esame complessivo dei varii fenomeni che in natura non avvengono separatamente, ma in un me-

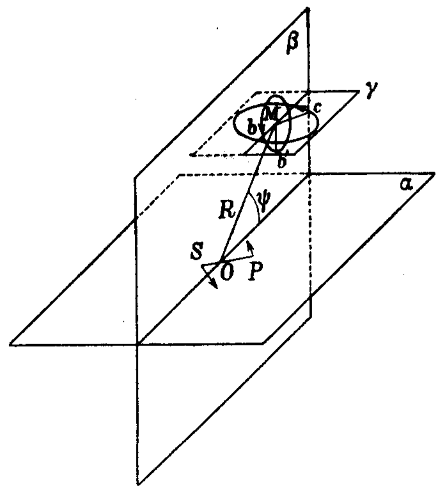


Fig. 12.

P ed S sono i due corpi che ruotano l'uno attorno all'altro nel piano invariabile α; O il loro baricentro. Il flusso di energia in M è risultante dei tre vettori M*c*, M*b*, M*b'*; il primo dei quali ruota nel piano γ parallelo al piano invariabile e gli altri due ruotano in senso inverso nel piano β condotto per MO normalmente al piano invariabile. $Mb = Mb' = 5\, Mc \cos\psi/4$ e M*c* è in ragione inversa della quinta potenza di MO e proporzionale al cos ψ.

desimo tempo, onde risulti, come concetto che tutti li domina ed abbraccia, quello di un flusso di energia percorrente lo spazio infinito e penetrante ogni più intima molecola il quale ne colleghi l'andamento, e togliendo le apparenti discontinuità, stabilisca un nesso nella infinita molteplicità delle apparenze loro.

XXXVIII.

SUGLI INTEGRALI LINEARI DEI MOTI SPONTANEI A CARATTERISTICHE INDIPENDENTI

«Atti Acc. Scienze Torino», vol. XXXV, 1899–900, pp. 186–192 (*).

1. Nella mia Nota: *Sopra una classe di equazioni dinamiche* [1] ho esposto (§ 8) la riduzione che si può operare nelle equazioni dei moti spontanei a caratteristiche indipendenti di ordine ν allorché esiste un certo numero di integrali lineari. Ora mi permetto di esporre un criterio onde riconoscere, *a priori* dai valori dei coefficienti che compariscono nelle equazioni, la esistenza di $\nu - 3$ integrali lineari.

Mi varrò di questo risultato per completare un teorema che ho dato nell'altra mia Nota: *Sulla integrazione di una classe di equazioni dinamiche* [2]. Ivi dimostro (§ 5) che *se esiste un integrale quadratico la cui equazione caratteristica ha radici disuguali le* ν *caratteristiche si esprimono come funzioni ellittiche del tempo quando si possono trovare* $\nu - 3$ *integrali lineari indipendenti dal tempo.*

D'altra parte in virtù del teorema del § 11 della prima delle due Note citate basterebbe conoscere $\nu - 4$ integrali lineari indipendenti dal tempo, perché il problema si potesse ridurre alle quadrature.

Questi due risultati si possono fondere insieme, osservando che se esistono $\nu - 4$ integrali lineari deve sempre esistere un nuovo integrale lineare, e perciò basta provare l'esistenza di $\nu - 4$ integrali lineari, perché si sappia che la soluzione può ottenersi mediante funzioni ellittiche.

2. Le equazioni dei moti spontanei a caratteristiche indipendenti p_1, $p_2, \cdots, p_\nu$, allorché T è la forza viva e F = cost. rappresenta un integrale quadratico la cui equazione caratteristica ha radici disuguali possono scriversi (vedi 1ª Nota citata, § 9)

$$p'_s = \Sigma_{r,k}\, e_{s,r,k} \frac{d(\mathrm{T}, \mathrm{F})}{d(p_r, p_k)} \tag{1}$$

in cui le $e_{s,r,k}$ sono coefficienti costanti che cambiano segno per una inversione degli indici.

(*) Presentata nell'adunanza del 17 dicembre 1899.

(1) «Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino», vol. XXXIII, 1897–98, pp. 451–475. [In questo vol.: XXVI, pp. 336–355].

(2) Ibid., pp. 542–558. [In questo vol.: XXVII, pp. 356–369].

Supponiamo ora che esistano $\nu - 3$ integrali lineari indipendenti

$$G_i = \sum_1^\nu {}_s\, a_{is}\, p_s = \text{cost.} \qquad (i = 1, 2, \cdots, \nu - 3).$$

Dovremo avere

$$\sum_1^\nu {}_s\, a_{is}\, p'_s = 0$$

$$\sum_1^\nu {}_s \frac{\partial T}{\partial p_s}\, p'_s = 0$$

$$\sum_1^\nu {}_s \frac{\partial F}{\partial p_s}\, p'_s = 0,$$

quindi

$$p'_s = (-1)^{s-1}\, C\, \frac{d(G_1, G_2, \cdots, G_{\nu-3}, T, F)}{d(p_1, p_2, \cdots, p_{s-1}, p_{s+1} \cdots p_\nu)}$$

in cui C rappresenta un coefficiente di proporzionalità indipendente dall'indice s.

Potremo dunque scrivere le equazioni

$$(-1)^{s-1}\, C\, \frac{d(G_1, G_2, \cdots, G_{\nu-3}, T, F)}{d(p_1, p_2, \cdots, p_{s-1}, p_{s+1} \cdots p_\nu)} = \Sigma_{r,k}\, e_{s,r,k} \frac{d(T, F)}{d(p_r, p_k)}.$$

Poniamo ora

$$E_{i_1, i_2, i_3} = \frac{d(G_1, G_2, \cdots, G_{\nu-3})}{d(p_{i_4}, p_{i_5}, \cdots, p_{i_\nu})} = \begin{vmatrix} a_{1,i_4}, & a_{1,i_5}, & \cdots, & a_{1,i_\nu} \\ a_{2,i_4}, & a_{2,i_5}, & \cdots, & a_{2,i_\nu} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{\nu-3,i_4}, & a_{\nu-3,i_5}, & \cdots, & a_{\nu-3,i_\nu} \end{vmatrix};$$

ove $i_1, i_2, \cdots, i_\nu$ rappresenta una permutazione pari dei numeri $1, 2, \cdots, \nu$.

L'equazione precedente si scriverà

$$C\Sigma_{r,k}\, E_{s,r,k} \frac{d(T, F)}{d(p_r, p_k)} = \Sigma_{r,k}\, e_{s,r,k} \frac{d(T, F)}{d(p_r, p_k)}.$$

3. Se le caratteristiche sono tali che si abbia

$$T = \frac{1}{2} \sum_1^\nu {}_i\, p_i^2 \qquad , \qquad F = \frac{1}{2} \sum_1^\nu {}_i\, \lambda_i\, p_i^2$$

in cui le λ_i sono diverse fra loro, le equazioni precedenti si scriveranno

$$(2) \qquad C\Sigma_{rk}\, E_{s,r,k}\, (\lambda_k - \lambda_r)\, p_r\, p_k = \Sigma_{rk}\, e_{s,r,k}\, (\lambda_k - \lambda_r)\, p_r\, p_k.$$

Riguardo al coefficiente di proporzionalità C noi sappiamo solo che esso è indipendente dall'indice s.

Dimostriamo ora che esso è costante ed indipendente dai valori iniziali delle $p_1, p_2, \cdots, p_\nu$.

A tal fine osserviamo che, se per $t = 0$ prendiamo tutte le caratteristiche nulle eccettuate p_r e p_k, avremo dalla (2)

$$\mathrm{CE}_{s,r,k} = e_{s,r,k}$$

ossia

$$\mathrm{C} = \frac{e_{s,r,k}}{\mathrm{E}_{s,r,k}};$$

e, siccome C è indipendente da s, sarà

$$\frac{e_{s,r,k}}{\mathrm{E}_{s,r,k}} = \frac{e_{s',r,k}}{\mathrm{E}_{s',r,k}}, \qquad (s' \gtrless s).$$

Ma, invertendo gl'indici, tanto la $e_{s',r,k}$ quanto la $\mathrm{E}_{s',r,k}$ cambiano segno, quindi

$$\frac{e_{s,r,k}}{\mathrm{E}_{s,r,k}} = \frac{e_{s',r,k}}{\mathrm{E}_{s',r,k}} = \frac{e_{r,s',k}}{\mathrm{E}_{r,s',k}}$$

e, poiché mutando il primo indice r nell'ultimo rapporto, esso non cambia, così sarà

$$\frac{e_{s,r,k}}{\mathrm{E}_{s,r,k}} = \frac{e_{r',s',k}}{\mathrm{E}_{r',s',k}}, \qquad (r' \gtrless r).$$

In modo analogo si trova

$$\frac{e_{s,r,k}}{\mathrm{E}_{s,r,k}} = \frac{e_{k',r',s'}}{\mathrm{E}_{k',r',s'}} = \frac{e_{s',r',k'}}{\mathrm{E}_{s',r',k'}}, \qquad (k' \gtrless k),$$

il che mostra che le e e le E aventi gli stessi indici sono fra loro proporzionali, e siccome queste quantità sono costanti, così dalla (2) segue che anche C è una costante ed è indipendente dai valori iniziali delle caratteristiche.

4. Osserviamo ora che moltiplicando una delle funzioni G_i per C si potrà sempre fare in modo che il rapporto di proporzionalità delle E e delle e si riduca eguale ad 1, onde potremo dire che queste sono eguali ai minori di ordine $\nu - 3$ di una matrice di ν linee e di $\nu - 3$ colonne, tali essendo le E. Ma (vedi 1ª Nota citata, § 9) eseguendo una sostituzione lineare a coefficienti costanti sulle caratteristiche

$$q_i = \sum_{1}^{\nu}{}_s \mathrm{A}_{s,i} p_s,$$

in modo da passare dalle caratteristiche p_s alle q_i, le $e_{s,r,k}$ si trasformano nelle

$$\sum_{1}^{\nu}{}_x \sum_{1}^{\nu}{}_y \sum_{1}^{\nu}{}_z e_{x,y,z} \mathrm{A}_{x,s} \mathrm{A}_{y,r} \mathrm{A}_{z,k},$$

onde la proprietà di essere i minori d'ordine $\nu - 3$ di una matrice di ν linee e di $\nu - 3$ colonne si conserva nei coefficienti delle equazioni differenziali a cui soddisfano le caratteristiche, allorché si eseguisce una sostituzione lineare a coefficienti costanti sulle caratteristiche stesse.

Potremo dunque concludere che, quando esistono i $\nu - 3$ integrali lineari indipendenti, i coefficienti $e_{s,r,k}$ saranno i minori di ordine $\nu - 3$ di una matrice con ν linee e $\nu - 3$ colonne, qualunque sia la forma che hanno le funzioni quadratiche T ed F, purché la equazione determinante abbia radici disuguali.

5. Da un noto teorema sui minori delle matrici (3) possiamo dedurre che quando le $e_{s,r,k}$ sono i suddetti minori dovrà aversi

$$\sum_{1}^{\nu}{}_{k}\, e_{s,r,k}\, e_{s',r',k} = 0\,. \tag{3}$$

Le condizioni precedenti sono quindi necessarie per la esistenza dei $\nu - 3$ integrali lineari.

Dimostriamo che esse sono anche sufficienti.

Infatti se le (3) sono verificate, potremo sempre porre

$$e_{i_1,i_2,i_3} = \begin{vmatrix} a_{1,i_4} & , a_{1,i_5} & ,\cdots, a_{1,i_\nu} \\ a_{2,i_4} & , a_{2,i_5} & ,\cdots, a_{2,i_\nu} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{\nu-3,i_4} & , a_{\nu-3,i_5} & ,\cdots, a_{\nu-3,i_\nu} \end{vmatrix}$$

essendo $i_1, i_2, i_3, \cdots, i_\nu$ una permutazione pari dei numeri $1, 2, \cdots, \nu$, e le $a_{h,k}$ $(h = 1, 2, \cdots, \nu - 3\ ;\ k = 1, 2, \cdots, \nu)$ quantità costanti.

Le (1) diverranno dunque

$$p'_s = (-1)^{s-1} \frac{d\,(G_1, G_2, \cdots, G_{\nu-3}\, T, F)}{d\,(p_1 \cdots p_{s-1}, p_{s+1} \cdots p_\nu)}$$

avendo posto

$$G_i = \sum_{1}^{\nu}{}_{s}\, a_{i,s}\, p_s \qquad (i = 1, 2, \cdots, \nu - 3),$$

ciò che prova che

$$G_1 = \text{cost.}\ , \ G_2 = \text{cost.}\ ,\cdots, G_{\nu-3} = \text{cost.}$$

sono integrali delle (1).

Possiamo per conseguenza enunciare il teorema seguente:

La condizione necessaria e sufficiente affinché le equazioni differenziali

$$p'_s = \Sigma_{r,k}\, e_{s,r,k} \frac{d\,(T, F)}{d\,(p_r, p_k)}$$

(3) E. D'Ovidio, *Ricerche sui sistemi indeterminati di equazioni lineari.* « Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino », vol. XII. – *Le funzioni metriche fondamentali negli spazi di quante si vogliano dimensioni e di curvatura costante.* « Mem. della R. Acc. dei Lincei » (Classe Sc. fis. mat. nat.), ser. 3, vol. I, 1877, p. 929.

ammettano $\nu - 3$ *integrali lineari è che i coefficienti soddisfino alle equazioni*

$$\Sigma_k \, e_{s,r,k} \, e_{s',r',k} = 0 .$$

Se queste condizioni sono soddisfatte, le equazioni s'integrano con funzioni ellittiche.

6. Mediante la conoscenza di h integrali lineari delle (1), con un conveniente cambiamento di caratteristiche esse possono trasformarsi in $\nu' = \nu - h$ equazioni differenziali dello stesso tipo

$$q_i' = \Sigma_{r,k} \, e_{i,r,k} \frac{d(\mathrm{T}, \mathrm{F})}{d(q_r, q_k)}, \qquad (i, r, k = 1, 2, \cdots, \nu'), \tag{4}$$

in cui F è sempre un polinomio di secondo grado nelle $q_1, q_2, \cdots, q_{\nu'}$, ma non più omogeneo.

Ripetendo un analogo ragionamento a quello fatto precedentemente si prova che *la condizione necessaria e sufficiente affinché le* (4) *ammettano* $\nu' - 3$ *nuovi integrali lineari indipendenti è che le* $e_{i,r,k}$ *soddisfino le condizioni*

$$\sum_1^{\nu'} e_{i,r,k} \, e_{i',r',k} = 0 .$$

7. Supponiamo ora che le (1) abbiano $\nu - 4$ integrali lineari, allora esse si ridurranno alle quattro equazioni differenziali

$$q_i' = \Sigma_{rk} \, e_{i,r,k} \frac{d(\mathrm{T}, \mathrm{F})}{d(q_r, q_k)} \qquad (i, r, k = 1, 2, 3, 4).$$

Ma in questo caso saranno sempre soddisfatte le equazioni

$$\sum_1^4{}_k \, e_{i,r,k} \, e_{i',r',k} = 0$$

come si verifica facilmente. Ne segue che esisterà sempre un altro integrale lineare.

Questo integrale si trova immediatamente: esso sarà

$$e_{2,3,4} \, q_1 + e_{3,4,1} \, q_2 + e_{4,1,2} \, q_3 + e_{1,2,3} \, q_4 = \text{cost.},$$

onde avremo il teorema:

Allorché, in un problema di moto spontaneo a caratteristiche indipendenti d'ordine ν, *esistono* $\nu - 4$ *integrali lineari indipendenti dal tempo ed un integrale quadratico, la cui equazione caratteristica ha radici disuguali ed è pure indipendente dal tempo, le* ν *caratteristiche si potranno esprimere come funzioni ellittiche del tempo.*

INDICE

FINITO DI STAMPARE NELLA
TIPOGRAFIA DELL'ACCADEMIA
NAZIONALE DEI LINCEI IN ROMA
NELL'APRILE 1956